



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA DE MINAS

“COSIMULACIÓN DE LEYES DE COBRE Y ARSÉNICO”

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN MINERÍA

ESTEBAN AGUSTÍN PRADO FLORES

PROFESOR GUÍA:
XAVIER EMERY

MIEMBROS DE LA COMISION:
EMMANUEL HENRY
EDUARDO MAGRI VARELA
JULIAN ORTIZ CABRERA

SANTIAGO DE CHILE
MAYO 2009

RESUMEN.

La construcción de simulaciones condicionales de leyes minerales requiere determinar cómo se distribuyen en el espacio los valores de estas leyes. En la práctica los modelos convencionales de simulación, como el modelo multigaussiano, pueden resultar inadecuados, en particular cuando las leyes presentan patrones como asimetrías en la correlación espacial de los variogramas de indicadores con respecto al umbral mediano.

El presente trabajo propone un modelo de función aleatoria alternativo al modelo multigaussiano, el cual permite reproducir comportamientos de leyes como los antes descritos. El modelo se define como el máximo de una serie de funciones aleatorias multigaussianas independientes.

A modo de evaluar cómo inciden las propiedades de cada modelo en las realizaciones, se construye simulaciones condicionales de leyes de cobre y arsénico con cada uno de ellos. Se obtiene que las realizaciones generadas con uno u otro modelo difieren de manera importante, particularmente en lo que se refiere a la continuidad y forma de la mineralización. Más aun las diferencias se reflejan en los valores estimados (promedio de las realizaciones) y en la cuantificación de la incertidumbre asociada a las leyes reales.

Luego para evaluar la calidad de las simulaciones, se realiza una etapa de validación mediante jack-knife. Ésta indica que el modelo alternativo entrega una estimación más precisa para leyes de cobre y arsénico. Sin embargo, al analizar los modelos de incertidumbre, se tiene que el modelo alternativo sólo mejora la reproducción de la incertidumbre para la ley de cobre, mientras que en el caso de la ley de arsénico el modelo multigaussiano tiene mejor desempeño.

Al analizar las curvas tonelaje-ley de un banco con tamaño de soporte de $10 \times 20 \times 5$ [m³], se obtienen diferencias de aproximadamente 1,000 toneladas de cobre fino para distintas leyes de corte, aunque para arsénico las diferencias son menores.

Luego, la decisión del modelo a utilizar es crucial dado que impacta directamente en la cantidad de recursos recuperables, los que además se distribuyen de distinta manera de acuerdo a la forma de las estructuras mineralizadas que generan. Tales diferencias no son irrelevantes, puesto que la cantidad de recursos calculada incide directamente en la evaluación económica y planificación minera del proyecto.

ABSTRACT

The construction of conditional simulations of mineral grades requires determining how the values of these grades are distributed in space. In practice conventional simulation models, such as the multigaussian model, may prove inadequate, particularly when the grades have patterns of asymmetry in the spatial correlation of indicator variograms around the medium threshold.

This thesis proposes a random function model, alternative to the multigaussian model, which reproduces grades behaviors as those described above. The model is defined as the maximum of a set of independent Gaussian random functions.

To assess how the properties of each model impact the realizations, conditional simulations of copper and arsenic grades are built with each of them. It is obtained that the realizations generated with either model differ significantly, particularly in terms of continuity and form of mineralization. Further differences are reflected in the estimated values (average of the realizations) and the quantification of the uncertainty associated with real grades.

In order to assess the quality of the simulated values, a validation by jack-knife is done. This indicates that the alternative model provides a more accurate estimation for copper and arsenic grades. However, when analyzing uncertainty models, the alternative model only improves the reproduction of uncertainty in copper grades, while in the case of arsenic grades the multigaussian model has a better performance.

When analyzing the grade-tonnage curves of a bench with a support size of $10 \times 20 \times 5 \text{ [m}^3\text{]}$, differences of approximately 1000 tons of fine copper are obtained at several cutoff grades, although for arsenic differences are minor.

Then, the decision of the model to use is crucial, given direct impact on the amount of recoverable resources, which also are differently distributed according to the form of mineralized structures so generated. Such differences are not irrelevant, since the calculated amount of resources has a direct impact on the economic evaluation and planning of the mining project.

AGRADECIMIENTOS

A mi familia, gracias por su constante apoyo y los numerosos sacrificios que han hecho durante tanto tiempo para darme esta oportunidad.

A mis compañeros y amigos a quienes tuve la fortuna de conocer a lo largo de estos años, gracias por los innumerables gratos momentos compartidos.

A los profesores Xavier Emery y Julián Ortiz, quienes me brindaron esta oportunidad de continuar mis estudios. Gracias por su tiempo y buena disposición para con los alumnos.

A Juanita Vergara, pilar fundamental del Departamento de Ingeniería de Minas.

A Conicyt por financiar este trabajo a través del proyecto Fondecyt 1061103 y a Codelco por patrocinar la Cátedra de Evaluación de Yacimientos del Departamento de Ingeniería de Minas de la Universidad de Chile, en la cual tuve la oportunidad de realizar esta memoria.

ÍNDICE.

1.- INTRODUCCIÓN.	1
1.1. Introducción.	1
1.2. Motivación.	2
1.3. Objetivos.	2
1.3.1.- General.	2
1.3.2.- Específicos.	2
1.4. Alcances.	3
1.5. Resumen por Capítulos.	3
2.- ANÁLISIS DE ANTECEDENTES BIBLIOGRÁFICOS.	5
2.1.- Conceptos Básicos de Geoestadística.	5
2.1.1.- Variable Regionalizada.	5
2.1.2.- Función Aleatoria.	5
2.1.3.- La Hipótesis de Estacionaridad.	6
2.2.- Metodologías de Estimación y Simulación.	7
2.2.1.- Kriging.	7
2.2.2.- Propiedades del Kriging.	8
2.2.3.- Simulación.	9
2.3.- Modelos de Distribución Espacial.	10
2.3.1.- El Modelo Multigaussiano.	11
2.3.2.- Otros Modelos Paramétricos.	13
2.4.- Algoritmos de Simulación.	14
2.4.1.- Algoritmos Tradicionales.	14
2.4.2.- Otros Algoritmos.	15
2.5.- Geoestadística Multivariable.	15
2.5.1.- Definiciones Específicas al Caso Multivariable.	15
2.5.2.- Las Hipótesis de Estacionaridad.	16
2.5.3.- Herramientas Variográficas.	16
2.5.4.- Modelo Lineal de Corregionalización.	17
2.6.- Métodos de Estimación o Simulación Multivariable.	17
2.6.1.- Co-kriging.	17
2.6.2.- Propiedades del Co-kriging.	18
2.6.3.- La Alternativa entre Kriging o Co-kriging.	18
2.6.4.- Cosimulación.	19
3.- METODOLOGÍA.	21

4.- CASO DE ESTUDIO.	23
4.1. Estudio Exploratorio de Datos.	28
4.2. Estadísticas Básicas.	29
4.3. Tendencias Espaciales.	31
4.4. Modelos de Cosimulación Gaussianos.	33
4.4.1.- Modelo Multigaussiano.	33
4.4.2.- Modelo Alternativo.	36
4.5. Aplicación de los Modelos.	40
4.5.1.- Cosimulaciones Condicionales.	40
4.5.2.- Validación de la Cosimulación.	52
4.5.3.- Validación por Jack Knife.	56
5.- CONCLUSIONES.	64
6.- BIBLIOGRAFÍA.	67
7.- ANEXOS.	68
7.1. Método de Inferencia de Parámetros.	68
7.2. Algoritmo de Co-simulación del Modelo Alternativo.	69
7.3. Validación de la Distribución Multigaussiana.	72
7.3.1.- Nubes de Correlación Diferida.	72
7.3.2.- Variograma vs. Madograma.	73
7.3.3.- Variogramas de Indicadores.	74
7.3.4.- Correlación entre Variables.	75
7.4. Análisis Variográfico Modelo Multigaussiano.	75
7.4.1.- Variogramas de Transformadas Gaussianas.	75
7.4.2.- Variogramas de Indicadores.	78
7.4.3.- Ajuste de Variogramas del Modelo Multigaussiano.	79

1.- INTRODUCCIÓN.

1.1. Introducción.

La evaluación de recursos minerales se realiza a partir de información obtenida de muestras de sondajes, y la aplicación de técnicas geoestadísticas de interpolación, como es el caso del kriging, o de simulación, que permiten crear escenarios verosímiles consistentes con la información disponible del yacimiento.

Si bien ambos métodos permiten obtener estimaciones, utilizar simulaciones presenta como ventaja que al generar numerosas realizaciones se puede cuantificar la incertidumbre y analizar el riesgo asociado, por ejemplo, comparando el escenario más optimista con el más pesimista, evaluando intervalos de confianza o estudiando la probabilidad que tiene la variable (ley de mineral) de superar un cierto umbral o ley de corte.

La construcción de simulaciones requiere determinar cómo se distribuyen en el espacio los valores de la función aleatoria que representa la variable en estudio, es decir, se debe modelar la distribución espacial de la función aleatoria a partir de los datos disponibles sobre la variable. Un modelo ampliamente utilizado para simular variables continuas como las leyes corresponde al modelo multigaussiano, el cual caracteriza la distribución espacial completa de la función aleatoria por una distribución multigaussiana. Sin embargo, la aplicación del modelo requiere que los datos sean compatibles con dicha distribución, lo cual no necesariamente ocurre en la realidad.

En particular el modelo no puede describir adecuadamente el comportamiento de las leyes en los yacimientos, cuando éstas presentan patrones de conectividad, agrupamiento espacial de valores extremos, anisotropías locales, o asimetrías en la correlación espacial de los variogramas de indicadores para umbrales simétricos con respecto a la mediana.

El presente trabajo propone un modelo de función aleatoria alternativo al modelo multigaussiano, definido como el máximo de dos funciones aleatorias (multi)gaussianas independientes, el cual permite reproducir comportamientos de leyes como los antes descritos. A modo de evaluar cómo inciden las distintas propiedades de cada modelo en las realizaciones, se buscará construir simulaciones condicionales con cada uno de ellos.

1.2. Motivación.

Existen situaciones en las cuales los modelos geoestadísticos convencionales no son capaces de describir adecuadamente el comportamiento de las leyes en los yacimientos mineros, particularmente en los casos que éstas presentan patrones de conectividad, agrupamiento espacial de valores extremos, anisotropías locales, o asimetrías en la correlación espacial de los variogramas de indicadores para umbrales simétricos con respecto a la mediana.

Es por esto que surge la motivación de aplicar modelos alternativos, que logren reproducir estas cualidades, y que en definitiva, puedan tener un mejor desempeño que los modelos convencionales.

1.3. Objetivos.

1.3.1.- General.

El principal objetivo de este trabajo consiste en aplicar una metodología de cosimulación de leyes alternativa al modelo multigaussiano y evaluar cómo incide en el modelo de recursos resultante. Para ello se plantea cosimular leyes de cobre y arsénico aplicando ambos modelos.

1.3.2.- Específicos.

- Aplicar el modelo multigaussiano a una base de datos real, y construir cosimulaciones condicionales de leyes de cobre y arsénico.
- Plantear el modelo alternativo y encontrar una metodología para encontrar los parámetros de éste.
- Estudiar el impacto del modelo en las curvas tonelaje ley a distintos tamaños de soporte.
- Validar las cosimulaciones para estudiar la calidad de la estimación y la reproducción de la incertidumbre.

1.4. Alcances.

Se efectúa una estimación de recursos a partir de una base de datos real, correspondiente a muestras de sondajes de un yacimiento de tipo pórfido cuprífero, ubicado en la zona norte de Chile. La evaluación se hace utilizando cosimulaciones condicionales, para lo cual se emplean dos modelos de función aleatoria diferentes.

Los modelos utilizados se enmarcan dentro de los denominados modelos paramétricos, correspondientes a modelos de función aleatoria definidos completamente por un número pequeño de parámetros.

El cálculo de las cosimulaciones se realiza en base a algoritmos de simulación gaussianos, más específicamente usando el algoritmo de bandas rotantes, utilizando herramientas de cálculo desarrolladas para su uso en MATLAB.

Se utiliza en primer lugar un modelo convencional, en este caso el modelo multigaussiano, y posteriormente un modelo alternativo definido como el máximo de dos funciones aleatorias multigaussianas. Con respecto a este último, se plantean los criterios para determinar el tipo de modelo a utilizar, así como una metodología para inferir los parámetros que lo caracterizan. Se evalúa también su impacto en lo que se refiere a la cantidad de recursos recuperables y curvas tonelaje-ley.

1.5. Resumen por Capítulos.

Esta sección describe brevemente las materias presentadas en cada uno de los capítulos de este trabajo.

El capítulo 2 contiene los antecedentes bibliográficos en los que se apoya el desarrollo de este trabajo. En él, se presenta los conceptos básicos de la geoestadística y las hipótesis sobre las cuales ésta se basa. Además se muestra las metodologías de estimación actuales, así como sus ventajas e insuficiencias.

Dado que se utiliza el modelo multigaussiano en las simulaciones, se explica cómo éste se construye y se menciona los algoritmos que permiten generar las realizaciones. De particular importancia resulta el algoritmo de bandas rotantes, el cual es aplicado en las simulaciones realizadas en este trabajo.

Luego, el capítulo 3 presenta la metodología utilizada para el desarrollo de este trabajo.

El capítulo 4 corresponde al caso de estudio. Este consiste en la construcción de cosimulaciones de ley de cobre y arsénico utilizando dos modelos de función aleatoria diferentes. Se mencionan las diferencias entre los resultados que se obtienen a partir de la aplicación de cada uno de los modelos planteados, así como con respecto a la calidad de las simulaciones. Algunos elementos asociados al estudio se presentan en el capítulo 7, correspondiente a los anexos.

El capítulo 5 presenta las conclusiones y discusiones del trabajo realizado, en tanto que el capítulo 6 corresponde a la bibliografía consultada por el autor.

2.- ANÁLISIS DE ANTECEDENTES BIBLIOGRÁFICOS.

2.1.- Conceptos Básicos de Geoestadística.

La geoestadística comprende el estudio de los fenómenos regionalizados, es decir, de fenómenos distribuidos en el espacio. En el caso de la evaluación de recursos minerales, se entiende como espacio una región geográfica determinada, y como fenómeno, la mineralización de éste. [3]

2.1.1.- Variable Regionalizada.

La geoestadística se basa en el estudio de una o varias variables regionalizadas. Esta corresponde a una función numérica denominada comúnmente $z(x)$, donde x representa un vector de coordenadas espaciales, y se caracteriza por presentar una estructura u organización a nivel global, pero varía muy irregularmente a nivel local, lo que hace imposible que sea definida en forma determinística.

2.1.2.- Función Aleatoria.

En cada posición x del espacio el valor de la variable regionalizada $z(x)$ es considerada una realización de una variable aleatoria $Z(x)$. Al recorrer cada punto, se obtiene una familia de variables aleatorias que constituyen una *función aleatoria*.

Así, la geoestadística interpreta la variable regionalizada como una realización de una función aleatoria, lo cual permite tomar en cuenta tanto el aspecto errático como el aspecto estructurado de la variable regionalizada, pues las variables aleatorias definidas estarán correlacionadas entre sí.

Una función aleatoria se caracteriza por su *distribución espacial*. Dado un grupo de posiciones o sitios $\{x_1, \dots, x_k\}$, el grupo de variables aleatorias $\{Z(x_1), \dots, Z(x_k)\}$ está caracterizado por su función de distribución que depende de k argumentos:

$$F_{x_1 \dots x_k}(z_1, \dots, z_k) = \text{Prob}[Z(x_1) < z_1, \dots, Z(x_k) < z_k]$$

El conjunto de funciones de distribuciones para todos los enteros k y todos los sitios $\{x_1, \dots, x_k\}$, constituye la *distribución espacial* de la función aleatoria.

Sin embargo, resulta ilusorio inferir la distribución espacial entera de una función aleatoria, dado el número finito de observaciones disponibles sobre la variable regionalizada. Por esta razón, en general sólo se utiliza los dos primeros momentos de la función aleatoria, con lo que se obtiene una caracterización elemental de ésta.

El *momento de primer orden* o esperanza matemática, puede depender del punto del espacio considerado y representa la media alrededor de la que se distribuyen los valores en distintas realizaciones independientes de la función aleatoria.

Por otro lado, se considera los siguientes *momentos de segundo orden*:

- La varianza a priori de $Z(x)$, que corresponde a una medida de la dispersión en torno al valor medio.
- La covarianza (centrada), que mide la relación entre dos variables aleatorias $Z(x_1)$ y $Z(x_2)$.
- El variograma, que se define como la mitad de la varianza del crecimiento $Z(x_1) - Z(x_2)$, lo que entrega una medida de la disimilitud entre datos separados por una cierta distancia.
- Covarianzas cruzadas / varianzas cruzadas en el ámbito multivariable.

2.1.3.- La Hipótesis de Estacionaridad.

Determinar la distribución espacial de la función aleatoria resulta imposible debido a dos razones: sólo se cuenta con una realización de la función aleatoria (a saber, la variable regionalizada), y ésta sólo se conoce de manera parcial en algunos puntos de muestreo.

Por lo tanto, establecer al menos parcialmente la distribución espacial requiere de algunas restricciones. Se hace uso entonces de la noción de *estacionaridad*. La idea es reemplazar la repetición de las realizaciones de la función aleatoria, por una repetición en el espacio, considerando que la distribución espacial es invariante por una traslación en el espacio. De este modo, los valores en distintas regiones del campo presentan las mismas características y pueden considerarse distintas realizaciones de la misma función aleatoria.

Existen diversas variantes de esta hipótesis:

- Estacionaridad estricta: se aplica a la distribución espacial completa.
- Estacionaridad de orden dos: sólo se aplica a los dos primeros momentos (esperanza y covarianza / variograma).
- Estacionaridad intrínseca: se aplica a los crecimientos de la función aleatoria.
- Estacionaridad local o casi estacionaria: Se aplica solamente a escala local.

2.2.- Metodologías de Estimación y Simulación.

La evaluación de recursos minerales se realiza a partir de información puntual proveniente de toma de muestras. Con ello se busca estimar el valor de la variable regionalizada en un sitio no muestreado a partir de los datos circundantes. Las dos principales metodologías utilizadas corresponden a la estimación local por kriging y la simulación condicional.

2.2.1.- Kriging.

Este método permite estimar el valor de un punto o de un bloque, a partir de los valores observados en los puntos circundantes, tomando en cuenta su configuración geométrica y la continuidad espacial de la variable regionalizada representada por su variograma.

La estimación se hace como una combinación lineal ponderada de los datos. Por lo tanto, el problema se reduce a calcular el valor de los ponderadores que presenten un estimador con las mejores propiedades. En este caso, es deseable que éste no presente sesgo (o sea, que el error cometido tenga un valor esperado igual a cero) y que minimice la varianza del error.

Existen distintos tipos de kriging, los que dependerán de las hipótesis bajo las cuales se construyó la función aleatoria. Dentro de los más importantes se destacan el kriging simple (de media conocida) y el kriging ordinario (de media desconocida). [1, 2, 3, 8]

2.2.2.- Propiedades del Kriging.

El estimador de kriging verifica las siguientes propiedades:

- Interpolación exacta: en cada sitio con dato, el valor estimado coincide con el valor medido.
- Suavizamiento, es decir, la dispersión de los valores estimados es menor que la dispersión de los valores verdaderos.
- Ortogonalidad: el error de kriging simple no está correlacionado con los datos ni con el estimador mismo. Esta propiedad no se cumple para el kriging ordinario, donde existe una correlación espacial entre éste y el error de kriging.

Dentro de estas propiedades, la más crítica es la de suavizamiento, pues tiene diversas consecuencias:

- El variograma de los valores estimados no presenta efecto pepita, pese a que esto puede ocurrir con los valores reales.
- La variabilidad de la estimación es mayor en zonas densamente muestreadas, en tanto que tiende a ser más suave en zonas con escasos datos, donde el estimador tiende a acercarse a la media global.
- El rango de los valores estimados suele ser menor que el rango real y, por lo tanto, no predice la ocurrencia de valores extremos. De esta forma, se tiende a subestimar las zonas de altas leyes y a sobrestimar las zonas de bajas leyes.

Por otro lado, el kriging entrega una medida de la precisión de la estimación (varianza del error) que sólo depende de la configuración geométrica de los datos y del variograma. De este modo, al no considerar el valor de los datos, provoca que en zonas donde existe una alta variabilidad la precisión de la estimación no sea bien reflejada.

Luego, considerando que el kriging entrega una imagen suavizada de la realidad y no modela realmente la cantidad de *recursos recuperables sobre una determinada ley de corte*, se recurre a técnicas de simulación que permiten crear escenarios verosímiles consistentes con las observaciones disponibles.

La principal ventaja de las simulaciones respecto al Kriging corresponde a que éstas generan numerosos escenarios que reproducen la variabilidad real de la variable en estudio, evitando el suavizamiento característico del kriging. De este modo, las simulaciones no sólo entregan una estimación, sino que dado

que se cuenta con una serie de "realidades", permiten cuantificar la incertidumbre asociada al calcular intervalos de confianza o la probabilidad de superar un determinado valor de ley en el yacimiento.

2.2.3.- Simulación.

El principio de una simulación consiste en construir una variable ficticia que reproduzca la variabilidad espacial de la variable regionalizada. Basándose en la interpretación de la variable regionalizada como una realización particular de una función aleatoria, la idea es generar otras realizaciones, para lo cual es necesario conocer no solamente la esperanza y el variograma, sino que la distribución espacial completa de la función aleatoria. De esta forma, se genera distintos escenarios que permiten modelar la incertidumbre asociada a cada valor desconocido.

La simulación se puede hacer de dos formas. Una de ellas corresponde a simulaciones no condicionales, que sólo buscan construir realizaciones que tienen la misma variabilidad que la variable en estudio, pero sin tomar en cuenta los datos muestreados. Sin embargo, en general esto no es suficiente y se desea que la simulación además restituya los valores medidos en los sitios de muestreo. A estas realizaciones más realistas se les conoce como *simulaciones condicionales*. Así, una elección adecuada de la información condicionante, permite reproducir las características locales (tendencias, efecto proporcional, etc.) reflejadas por los datos.

La incertidumbre en los valores desconocidos de la variable se puede caracterizar por la probabilidad de sobrepasar un umbral, por intervalos de confianza o por el conocimiento de la dispersión y los valores extremos que puede tomar la variable. [7, 8, 9]

Finalmente, la construcción de simulaciones condicionales requiere lo siguiente:

- Definir un modelo de distribución espacial que caracteriza la función aleatoria.
- Tener herramientas para inferir este modelo y validarlo.
- Construir realizaciones de la función aleatoria definida.
- Condicionar las realizaciones a los datos disponibles.

2.3.- Modelos de Distribución Espacial.

Una decisión crucial en la construcción de simulaciones es la elección del modelo de distribución espacial, pues éste determina cómo se distribuyen en el espacio los valores de la función aleatoria que representa la variable en estudio. Aunque varios enfoques se han desarrollado, básicamente se puede distinguir dos grandes tipos: los modelos paramétricos (definidos por un cierto número de parámetros) y los modelos no-paramétricos.

Los *modelos paramétricos* consisten en construir realizaciones de la función aleatoria, cuya distribución espacial está completamente definida un número limitado de parámetros. El modelo más conocido y mayormente aplicado en la práctica debido a su sencillez, es el *modelo multigaussiano* donde la distribución espacial queda completamente caracterizada por la esperanza y la función de covarianza o el variograma (momentos de primer y segundo orden de la función aleatoria). [1, 6, 9]

En casos no multigaussianos la construcción de modelos paramétricos es mucho más complicada por lo que su desarrollo en la práctica ha sido escaso y más bien enfocado a la descripción de variables categóricas o discretas. Una de las principales dificultades de estos modelos, es el condicionamiento de las realizaciones a un conjunto de datos, lo que se puede realizar mediante algoritmos iterativos como el muestreador de Gibbs (o Gibbs sampler). A modo de ejemplo, se puede señalar los modelos booleano, plurigaussiano, gaussiano truncado y el modelo de hojas muertas, entre otros.

En cuanto a los *modelos no paramétricos*, éstos no especifican completamente la función aleatoria y buscan crear imágenes cuyas propiedades se asemejan a aquellas observadas en los datos disponibles, tal como el histograma, el variograma y los variogramas de indicadores asociados a ciertos umbrales de corte. Dentro de estos métodos el más conocido es el algoritmo secuencial de indicadores, el cual se basa en una codificación de los valores de la variable regionalizada en una sucesión de variables binarias llamadas indicadores, y luego en un kriging de estos indicadores para estimar la distribución de probabilidad del valor de la variable de interés en un sitio donde ésta no ha sido muestreada. Para construir realizaciones de una función aleatoria, se combina este procedimiento con un algoritmo secuencial, el cual consiste en simular el valor de la variable en un sitio a la vez y considerar el valor simulado como dato para la simulación de los sitios siguientes.

2.3.1.- El Modelo Multigaussiano.

Se dice que una función aleatoria tiene una distribución espacial multigaussiana, si toda combinación lineal ponderada de sus valores sigue una distribución normal o gaussiana. Afortunadamente, para este caso la distribución espacial se caracteriza completamente por sus dos primeros momentos (media y variograma). Además este modelo es particularmente sencillo pues el teorema del límite central facilita la búsqueda de algoritmos de simulación. [1, 9]

En la práctica, la variable $Z(x)$ a simular (ley de mineral) no necesariamente presenta este tipo de distribución y, por lo tanto, no se trabaja directamente sobre ella, sino que sobre su transformada gaussiana, que se denotará como $Y(x)$. La transformada se obtiene al aplicar una función de "anamorfosis", que convierte los datos originales en valores gaussianos, cuya distribución tiene media igual a cero y varianza uno.

Tras obtener el modelo variográfico de los datos gaussianos, es posible realizar simulaciones condicionales aplicando uno de los diversos algoritmos disponibles. En caso de que el condicionamiento no sea realizado directamente por dicho algoritmo, éste se deberá realizar mediante una etapa de kriging (co-kriging en el caso multivariable). Finalmente, una transformación inversa es necesaria para convertir los valores gaussianos al espacio original de la variable (ley).

Desde un punto de vista teórico, el carácter multigaussiano es muy exigente y difícil de verificar a partir de los datos, principalmente debido a que se requiere tener una gran cantidad de ellos en configuraciones que se repitan en el espacio. En la práctica, se considera suficiente verificar sólo el carácter bigaussiano, lo que se logra aplicando algunos tests como son: nubes de correlación diferida, variogramas de indicadores y la comparación entre variograma y madograma. Si el resultado indica que los datos gaussianos son aceptablemente bigaussianos, entonces se asume que la hipótesis de multigaussianidad se cumple y por lo tanto, el modelo es aplicable. [2]

- *Nubes de correlación diferida*

Corresponde a la nube de puntos formada por todos los pares de valores separados espacialmente por un vector h . Bajo la hipótesis de bigaussianidad, se tiene que las curvas de isodensidad de la distribución bivariable del par $\{Y(x), Y(x+h)\}$ son elipses concéntricas. Si $|h|$ tiende a infinito, las curvas de isodensidad se vuelven circulares, reflejando escasa o nula correlación entre pares de puntos distantes.

En tanto que si $|h|$ tiende a cero, las curvas se ubican en torno a la primera bisectriz, reflejando que existe un alto grado de correlación entre puntos cercanos.

El test consiste entonces en verificar que para un vector de separación h , la nube de correlación diferida tiene forma elíptica y cumple con las características geométricas señaladas en función de $|h|$.

- Variogramas de indicadores

La variable indicador se define como una codificación binaria asociada a un valor umbral:

$$I_Y(x; \gamma) = \begin{cases} 1 & \text{si } Y(x) \leq \gamma \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

La simetría de la distribución bigaussiana implica que los indicadores tienen una correlación espacial que es simétrica con respecto al umbral mediano ($\gamma=0$). Es decir, las características estructurales que se observan para los valores altos también ocurren para valores bajos. Se espera entonces que los variogramas de indicadores asociados a cuantiles simétricos con respecto a la mediana sean iguales.

El test consiste en comparar los variogramas experimentales de indicadores para distintos umbrales con los variogramas teóricamente esperados para estos mismos indicadores, los cuales se pueden expresar en función del variograma de la función aleatoria multigaussiana $Y(x)$. [2, 3, 9]

- Variograma versus madograma.

El madograma (o variograma de orden 1) se define como:

$$\gamma_1(h) = \frac{1}{2} E\{|Y(x+h) - Y(x)|\}$$

Mientras que el variograma es:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E\{[Y(x+h) - Y(x)]^2\}$$

Bajo el supuesto bigaussiano el madograma es proporcional a la raíz cuadrada del variograma, independiente de h . La relación siguiente debe cumplirse sobre los variogramas experimentales de los datos transformados.

$$\frac{\sqrt{\gamma(h)}}{\gamma_1(h)} = \sqrt{\pi} \cong 1,77$$

2.3.2.- Otros Modelos Paramétricos.

Si bien el modelo multigaussiano es utilizado con frecuencia dada su sencillez, este presenta como limitación que no reproduce patrones como conectividad, anisotropías locales, ni agrupamiento espacial de valores extremos, los cuales se observan a menudo en la distribución de leyes de mineral en los yacimientos.

Se puede definir modelos complejos de funciones aleatorias a partir de operaciones simples sobre funciones aleatorias multigaussianas. Algunos ejemplos corresponden a los modelos de sustitución (en donde se componen dos funciones aleatorias independientes), o a operaciones como el máximo (o mínimo) de dos funciones multigaussianas, o el cuadrado de una función multigaussiana, entre otros. A diferencia del modelo multigaussiano, estos modelos pueden resultar más adecuados para describir variables regionalizadas con agrupamiento espacial de valores extremos, patrones de conectividad, o asimetría en la correlación espacial de los variogramas de indicadores con respecto al umbral mediano. [4, 6]

El detalle de la construcción de co-simulaciones utilizando un modelo dado por el máximo de dos funciones aleatorias gaussianas independientes se presenta en el capítulo de anexos, donde se entrega el algoritmo utilizado para el cálculo de co-simulaciones condicionales utilizando un modelo alternativo de distribución espacial.

2.4.- Algoritmos de Simulación.

Para realizar las simulaciones, es necesario definir un algoritmo que permita construir realizaciones del modelo definido y condicionarlas a los datos disponibles. De acuerdo a esto, existe una amplia gama de algoritmos que permiten incorporar los distintos tipos de información condicionante en las realizaciones.

2.4.1.- Algoritmos Tradicionales.

Estos se aplican a simulaciones donde la información condicionante consiste en *datos duros*, es decir, de los cuales se conocen los valores exactos. En el caso del modelo multigaussiano, existen numerosos algoritmos para responder al problema, [1, 4, 9] dentro de los que se puede mencionar:

- Algoritmo secuencial gaussiano
- Método de descomposición matricial
- Método espectral continuo y espectral discreto
- Método de bandas rotantes

Entre estos, los dos primeros permiten realizar simulaciones condicionales directamente, es decir, no requieren de una etapa posterior para restituir los valores de los datos en los sitios de muestreo. En tanto que los algoritmos restantes generan simulaciones no condicionales, y por lo tanto, el condicionamiento se realiza en una etapa adicional, basada en un kriging simple. Una ventaja de estos últimos por sobre el algoritmo secuencial, tiene que ver con el tiempo de cálculo, dado que el sistema de kriging utilizado sólo involucra los datos originales y, a partir de éste, se puede condicionar todas las realizaciones con un solo kriging.

De particular interés resulta el método de las bandas rotantes, el cual simplifica el problema de la simulación en espacios tridimensionales usando simulaciones unidimensionales, para luego esparcirlas al espacio de tres dimensiones. [5, 8, 9]

2.4.2.- Otros Algoritmos.

Estos se utilizan para incorporar otros tipos de información, como por ejemplo restricciones dadas bajo la forma de intervalos. En este caso, se utilizan métodos iterativos para condicionar las simulaciones, a partir de valores iniciales que no cumplen con los requerimientos de variabilidad espacial y que se actualizan hasta cumplir con ello. [1, 9]

Un caso particular de estos métodos, corresponde al llamado "muestreador de Gibbs", el cual forma parte de los métodos iterativos basados en cadenas de Markov desarrollados para encontrar solución a problemas complejos de optimización. Ejemplos de aplicación incluyen la simulación de variables categóricas mediante los modelos gaussiano truncado o plurigaussiano, o la simulación de variables continuas definidas con operaciones no biyectivas sobre funciones aleatorias mutigaussianas. [4]

2.5.- Geoestadística Multivariable.

Existen casos en que un mismo fenómeno está relacionado con varias variables regionalizadas, de modo que es de interés estudiarlas en conjunto. Así se tiene la ventaja de tomar en cuenta los vínculos entre ellas y la información aportada por variables auxiliares sobre la variable de interés principal. A modo de ejemplo, esto ocurre en la evaluación de yacimientos polimetálicos, en análisis de concentraciones de elementos contaminantes en suelos y en evaluación de reservorios petrolíferos (integrando distintos tipos de información), etc.

2.5.1.- Definiciones Específicas al Caso Multivariable.

Desde el punto de vista teórico, la complejidad del análisis multivariable no radica en los conceptos, sino que más bien en las notaciones, más complejas que el caso univariable. Por esta razón, a veces las variables y funciones que describen el fenómeno regionalizado se trabajan de forma vectorial o matricial según corresponda.

En el caso multivariable el conjunto de variables regionalizadas a estudiar se conoce con el nombre de *corregionalización* y se denota como $z_{1...z_N}$, mientras que el conjunto de funciones aleatorias asociadas a ellas se denota como $Z_{1...Z_N}$.

En cuanto a la información de muestreo, se habla de *homotopía* o *isotopía*, cuando todas las variables son medidas en todos los sitios de muestreo, de *heterotopía total* cuando son medidas sobre conjuntos de sitios disjuntos, y de *heterotopía parcial*, cuando sólo parte de los sitios de medición son comunes a todas las variables. [1, 3]

2.5.2.- Las Hipótesis de Estacionaridad.

Tal como en el caso univariable, se requiere de hipótesis de estacionaridad que permitan determinar, al menos parcialmente, la distribución espacial conjunta de todas las funciones aleatorias involucradas en el estudio, a partir de información parcial en algunos puntos de muestreo. Para ello, se supone que esta distribución espacial es invariante por traslación.

También se puede considerar variantes como: la estacionaridad de segundo orden, la estacionaridad intrínseca o la estacionaridad local.

2.5.3.- Herramientas Variográficas.

La continuidad espacial de las variables se analiza al definir herramientas variográficas análogas al caso univariable, que son funciones de la distancia de separación de las muestras y no de su posición absoluta. Para un conjunto de funciones aleatorias, se define los siguientes momentos de segundo orden:

- Covarianzas simples y cruzadas, que miden la relación o similitud entre los valores de las funciones aleatorias.
- Variogramas simples y cruzados, que entregan una medida de la disimilitud entre pares de valores.

Una dificultad de modelar la correlación espacial de múltiples variables, es que se requiere de funciones de *covarianza cruzada* o *variogramas cruzados* para modelar la relación entre las diferentes variables. Las covarianzas o variogramas simples y cruzados del conjunto de funciones aleatorias no pueden modelarse independientemente, pues existen restricciones matemáticas entre ellos.

Existen varios enfoques para el modelamiento variográfico multivariable, dentro de los que podemos mencionar: el modelo de correlación intrínseca, modelos de Markov, modelo lineal de correogionalización, modelos inducidos por relaciones entre variables (ecuaciones diferenciales parciales), etc.

El *modelo de correlación intrínseca* destaca por su simplicidad, pues considera que todos los variogramas simples y cruzados (o equivalentemente, todas las funciones de covarianzas simples y cruzadas) son proporcionales entre sí. En tanto que el modelo de Markov, presenta como ventaja que requiere de menor inferencia, pero a la vez su aplicación requiere de hipótesis adicionales. En éste, se asume que conociendo el valor de una variable Z_i en un sitio x , los valores de otras variables en el mismo sitio no dependen de los valores de Z_i en otras posiciones del espacio. [1, 3, 9]

2.5.4.- Modelo Lineal de Correogionalización.

Este modelo asume que todos los variogramas (simples y cruzados) corresponden a un modelo anidado compuesto de las mismas funciones variográficas elementales pero asociados a distintos coeficientes (mesetas). Existen tres aspectos principales a considerar en la construcción del modelo, uno de ellos relacionado a la forma del modelo matemático (estructuras anidadas a usar), otro involucra los parámetros de éstos (alcances y mesetas) y finalmente, se señala la restricción de simetría y positividad de cada matriz de coeficientes.

El modelo es bastante flexible, pero se torna complejo si el número de variables regionalizadas es importante. [2, 3]

2.6.- Métodos de Estimación o Simulación Multivariable.

Considerando un problema que involucra varias variables regionalizadas, puede resultar de interés predecir los valores de la correogionalización en un determinado dominio, o evaluar la incertidumbre asociada a estos valores. En el primer caso, los métodos de cokriging aparecen como una alternativa, en tanto que para evaluar la incertidumbre espacial se puede recurrir a cosimulaciones, las que apuntan a construir numerosas realizaciones que reproducen la variabilidad de cada variable, así como las relaciones entre éstas.

2.6.1.- Co-kriging.

Tiene por objetivo estimar el valor de una variable en un sitio, a partir de mediciones de ésta u otras variables observadas en sitios circundantes, con las que tenga correlación. La estimación considera la configuración geométrica de las muestras respecto al sitio a estimar, además de la estructura espacial conjunta de las variables regionalizadas, dada por los modelos de variogramas simples y cruzados.

Tal como en el caso univariable, la estimación es una combinación lineal ponderada de los datos, sin sesgo y con varianza mínima del error, aunque en el caso de co-kriging la información aportada por las variables auxiliares mejora la estimación de la variable de interés.

Existen distintas variaciones del método, dependiendo de las hipótesis bajo las cuales se construya las funciones aleatorias. Destacan el co-kriging simple (de medias conocidas), el co-kriging ordinario (de medias desconocidas), co-kriging co-localizado (donde se conoce una variable auxiliar con abundantes mediciones, de modo que sólo considera el dato auxiliar más cercano), co-kriging con tendencia (medias variables en el espacio), co-kriging de indicadores (utiliza variables binarias), etc. [3]

2.6.2.- Propiedades del Co-kriging.

El co-kriging posee las mismas propiedades que el kriging, en particular:

- Interpolación exacta: en cada sitio con dato, el valor estimado coincide con el valor medido.
- Suavizamiento: las estimaciones presentan menor variabilidad que los valores verdaderos.

Tal como en el caso de kriging, los ponderadores y la varianza de estimación sólo dependen de la configuración geométrica de los sitios con dato respecto al sitio a estimar y no de los valores de los datos. De este modo, al no considerar el valor de los datos, provoca que en zonas donde existe una alta variabilidad la precisión de la estimación no sea bien reflejada. Es decir, al estimar un sitio no muestreado usando datos en una determinada posición, la varianza de estimación será la misma independiente de si los valores de las muestras son de alta o de baja ley. Lo que no es consecuente con el *efecto proporcional*, el cual (cuando existe) indica que zonas de alta ley tienen mayor variabilidad que zonas de baja ley.

2.6.3.- La Alternativa entre Kriging o Co-kriging.

Teóricamente, las razones que justifican realizar la estimación de varias variables por co-kriging en lugar de un kriging independiente de cada una de ellas son:

- Se estima una variable incorporando la información aportada por las restantes.
- La estimación es más coherente pues toma en cuenta las relaciones lineales entre las variables.

Sin embargo, existen casos en que la estimación por co-kriging coincide con el kriging por separado de cada variable:

- Si las variables son independientes entre sí, no existe correlación entre las variables, (sus variogramas cruzados son nulos).
- Si los variogramas simples y cruzados son proporcionales entre sí y todas las variables han sido medidas en todos los sitios con dato (muestreo homotópico). De ser así, todas las variables poseen igual continuidad espacial e igual nivel de reconocimiento, por lo que se tornan redundantes entre sí.

Un caso en que la estimación por co-kriging resulta ventajosa se tiene cuando, en presencia de muestreo heterotópico, las variables presentan una buena correlación espacial. Esto tiene particular interés si la variable secundaria es más accesible, luego muestreada más densamente que la variable principal. [3]

2.6.4.- Cosimulación.

Se habla de cosimulación al extender los métodos de simulación al caso de múltiples variables. Tal como en el caso univariable, se requiere definir un modelo de funciones aleatorias y un algoritmo que permita construir realizaciones de éstas, siendo mayormente utilizado el modelo multigaussiano debido a su simplicidad y variedad de algoritmos que son disponibles (secuencial, descomposición matricial, espectral continuo, espectral discreto, bandas rotantes, etc.).

Este enfoque se puede resumir en las siguientes etapas:

- Definir un modelo de distribución espacial que caracteriza las funciones aleatorias.
- Estudio exploratorio de los datos.
- Transformación de variables al espacio gaussiano.
- Inferencia del modelo variográfico que describe la correogionalización.
- Construcción de realizaciones aplicando algún algoritmo de cosimulación.
- Si el algoritmo no lo hace directamente, condicionar las realizaciones a los datos (vía co-kriging).
- Transformación inversa al espacio original de las variables.
- Post-procesamiento de las realizaciones.

De este modo se puede incorporar en las simulaciones las relaciones que puedan existir entre las variables, de modo que estas son concordantes con la realidad del depósito. Por ejemplo, reproducir la correlación entre leyes de cobre (variable de interés) y de arsénico (contaminante). [3]

3.- METODOLOGÍA.

El desarrollo del caso de estudio consiste en una aplicación práctica de los modelos de cosimulación descritos, donde se simula leyes de cobre y arsénico a partir de una base de datos real. Luego se analiza los resultados de cada modelo a fin de establecer si existen diferencias entre éstos, y como varían al modificar el tamaño de soporte de los bloques.

La primera etapa corresponde al análisis de la base de datos, donde se define las variables a estimar, la zona de estudio, y características relevantes a considerar como las unidades geológicas y los contactos entre éstas.

Luego se realiza un análisis exploratorio de los datos, donde se busca descartar datos aberrantes y duplicados, es decir, que se encuentran fuera del rango habitual de valores o que están ubicados a una distancia muy pequeña para ser considerados como datos distintos. Y estudiar características como tendencias espaciales, distorsión de las estadísticas por muestreo irregular, tamaño de las muestras, y en general, para anticipar cualquier dificultad que pudiese presentarse en etapas posteriores.

A continuación se aplica el modelo multigaussiano, el cual considera las siguientes etapas: transformación de las variables originales en variables con distribución gaussiana estándar. Para ello se aplica una función de transformación conocida como anamorfosis gaussiana.

Luego se infiere los parámetros del modelo, estudiando el comportamiento espacial de las variables a partir de mapas variográficos. Con ello es posible definir las direcciones principales de anisotropía, para luego, en base a los variogramas experimentales de tales direcciones, obtener un modelo. Dado que se pretende construir cosimulaciones, es necesario ajustar un modelo variografico para los variogramas experimentales simples y cruzados de cobre y arsénico.

Una etapa intermedia consiste en verificar si el modelo se ajusta a los datos en estudio. Para ello se analiza si los datos transformados son compatibles con las hipótesis del modelo multigaussiano, lo que se logra tras una serie de pruebas como son: nubes de correlación diferida, la comparación entre variograma y madograma, y el comportamiento de variogramas de indicadores.

Posteriormente se aplica un modelo alternativo que intenta representar los datos de forma más fidedigna. Para definir el modelo se analizan los variogramas de indicadores de leyes cobre y arsénico. Con ello se busca discriminar entre los modelos que presentan diferentes comportamientos frente a la correlación espacial de dichos variogramas respecto al umbral mediano. Una vez elegido el modelo, los parámetros son inferidos a partir del ajuste de los variogramas de indicadores teóricos con respecto a los variogramas de indicadores experimentales obtenidos para distintos cuartiles. Luego será posible cosimular leyes de cobre y arsénico.

Se propone utilizar un modelo definido por el máximo de una serie de funciones aleatorias multigaussianas independientes. De modo que los parámetros del modelo son el número de funciones aleatorias, y la media y función de covarianza de cada una de ellas. Dado que el caso de estudio considera cosimular leyes de cobre y arsénico, se debe definir funciones aleatorias para cada variable, sin olvidar las relaciones cruzadas entre ellas. Así el modelo debe considerar, por ejemplo, la covarianza cruzada entre variables.

Luego se construye cosimulaciones condicionales en una grilla densa previamente definida, utilizando ambos modelos con sus respectivos parámetros. Los resultados se presentan de forma gráfica en mapas de ley de cobre y arsénico, en tanto que se entrega las estadísticas básicas para cada caso. Se construye además mapas de probabilidad y de ley media para determinadas leyes de corte, a modo de apreciar las diferencias generadas por cada método. Esto también se evalúa para tamaños de soporte mayores al tamaño inicial de la grilla.

Finalmente se analiza la calidad de las simulaciones en una etapa de validación. En ella se estudia si las realizaciones reproducen los histogramas y variogramas de los datos. En tanto que para evaluar la calidad de la estimación y la reproducción de la incertidumbre, se realiza una validación por jack knife.

4.- CASO DE ESTUDIO.

Se trabaja con una base de datos, perteneciente al proyecto "Mansa Mina" de Codelco Chile, localizado entre la mina Chuquicamata y la ciudad de Calama. Corresponde a un yacimiento de tipo pórfido cuprífero y argentífero, con una importante presencia de arsénico en la mineralización (enargita).

La base de datos consta de 53499 muestras de sondajes con un tamaño de soporte de 1.5 metros y posee información de concentración de cobre, plata, molibdeno y arsénico, entre otros. El objetivo principal es estudiar cómo cambia el modelo de leyes de bloques, al utilizar un modelo de simulación alternativo al modelo multigaussiano. Para ello, se construye realizaciones condicionales de las variables regionalizadas (ley de cobre y ley de arsénico) aplicando ambos modelos.

El depósito presenta cinco litologías definidas como pórfido Mansa Mina, brecha Myriam, brecha central, C1 y C5, siendo éstas tres últimas las de mayor relevancia económica. La brecha central presenta una mineralización masiva de sulfuros y corresponde a cuerpos de alta ley de cobre y arsénico, con valores que en general superan 2.5% y 2000 ppm respectivamente. La unidad C5 o "envolvente 0.5" corresponde a un halo en torno a la unidad de brechas y está representada por el desarrollo de un enrejado de minerales diseminados (stockwork) de alta sulfidización, con ley de cobre usualmente mayor a 0.5% y ley media en torno a 1%, la mineralización está representada por un núcleo de bornita-calcopirita, bordeada por una zona de calcopirita>pirita y un halo más externo en que la pirita es mayor que la calcopirita. La litología que aloja a este tipo de mineralización corresponde a la granodiorita Mansa Mina, y presenta contenidos altos de arsénico debido a la presencia de enargita. Finalmente, C1 o "envolvente 0.1" conforma un halo más externo a la envolvente 0.5%Cu, y representa el límite de la mineralización diseminada (en menor intensidad) con valores mayores a 0.1% de cobre y ley media en torno a 0.3%. La figura 1 corresponde a un esquema de la disposición de las unidades.

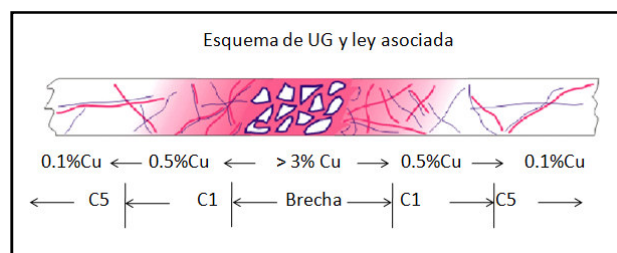


Figura 1: Esquema de unidades geológicas.

Las estadísticas básicas por tipo de roca para cobre y arsénico se presentan en las siguientes tablas. En estas, se excluyen 77 muestras que no poseen ley de cobre, y 1867 muestras sin ley de arsénico.

Tipo de Roca	Codigo	Muestras	Mínimo	Máximo	Media	Desv. Est.
		#	%	%	%	%
Brecha Central	1	4,756	0.011	32.980	4.031	3.123
C1	2	21,831	0.003	9.640	0.293	0.346
C5	3	20,382	0.003	23.100	1.048	0.871
Brecha Myriam	4	1,416	0.006	29.900	4.648	4.301
Porfido MM	5	4,384	0.010	9.560	1.482	0.724
Esteril	0	653	0.010	5.320	0.483	0.553
Total		53,422	0.003	32.980	1.129	1.766

Tabla 1: Estadísticas por tipo de roca para ley de cobre (%).

Tipo de Roca	Codigo	Muestras	Mínimo	Máximo	Media	Desv. Est.
		#	ppm	ppm	ppm	ppm
Brecha Central	1	4,744	13	126,100	4,347	5,706
C1	2	21,076	5	31,647	355	817
C5	3	19,806	5	29,167	806	1,340
Brecha Myriam	4	1,413	10	92,209	9,273	11,535
Porfido MM	5	4,005	5	3,150	109	196
Esteril	0	588	30	14,690	409	957
Total		51,632	5	126,100	1,120	862

Tabla 2: Estadísticas por tipo de roca para ley de arsénico (ppm).

De acuerdo a las estadísticas por litología todas las unidades, salvo C1 y estéril, tienen ley media mayor a 1% de cobre y pueden tener importancia económica. Por otro lado, casi un 80% del total de las muestras pertenecen a las unidades C1 y C5.

Dada la extensión espacial del dominio se define como sector de interés la zona comprendida entre las coordenadas 8600 y 9200 metros en dirección este y entre 25200 y 26000 metros en dirección norte, donde se concentran altas leyes de cobre y arsénico. Ambas variables son importantes de considerar en la evaluación económica del proyecto, pues cobre corresponde al mineral de interés, en tanto que la presencia de arsénico dificulta los procesos productivos (incide en el diseño y plan minero) y afecta la calidad del producto.

Se trabaja entonces con las muestras ubicadas dentro de la zona de interés, sin descartar ningún sector en la vertical. La posición espacial de éstas se visualiza en la figura 2, donde la escala de color corresponde al tipo de roca.

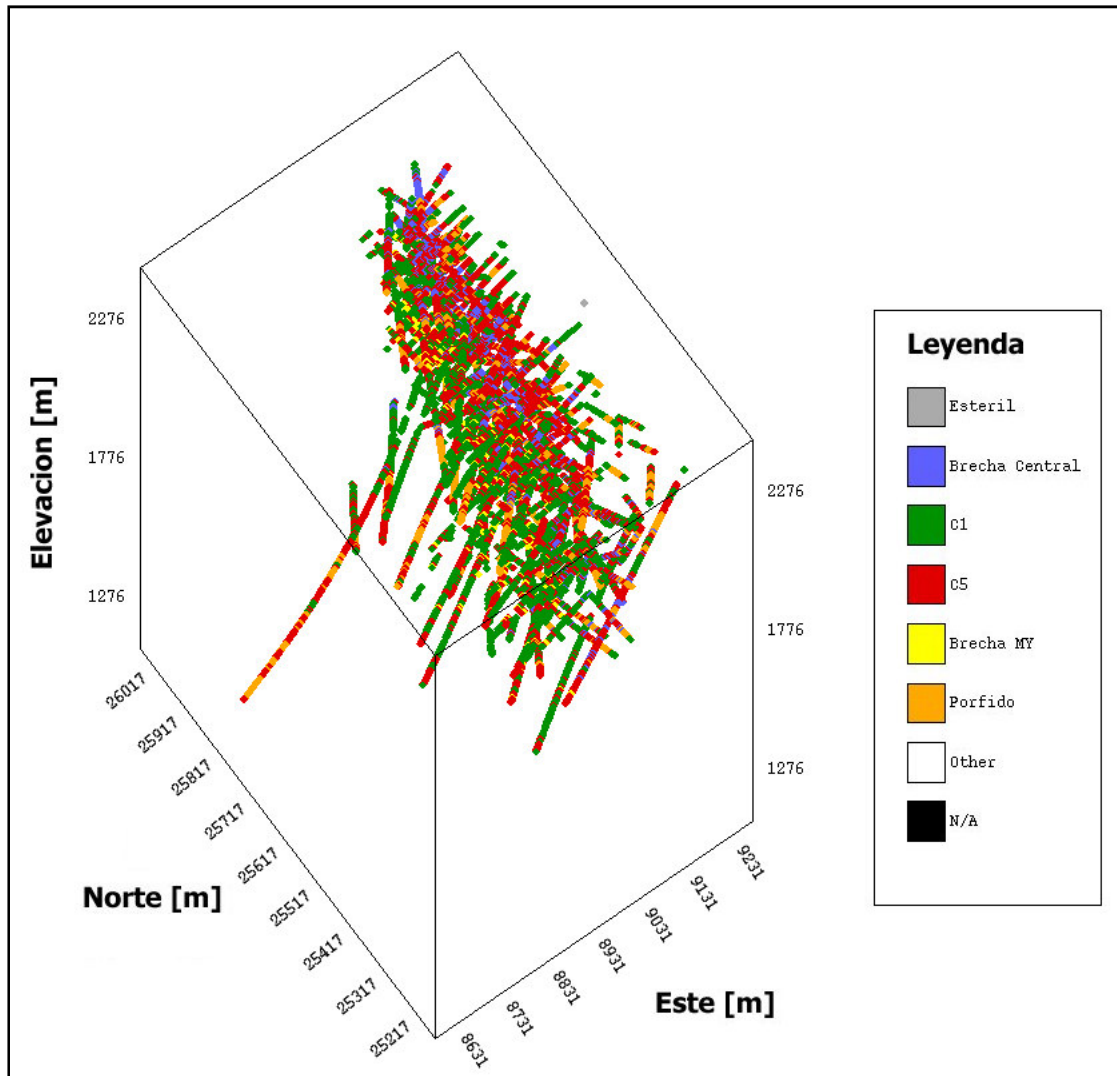


Figura 2: Ubicación espacial de las muestras y tipo de roca.

Globalmente se observan límites de geometría compleja entre las unidades y que todas las litologías se encuentran presentes a lo largo de gran parte del dominio.

La figura 3 permite apreciar la variación litológica a menor escala, en ella se despliega el tipo de roca correspondiente a cada muestra, para los sondajes número 122, 241 y 367 respectivamente. La escala de color indica el tipo de roca de acuerdo a la figura anterior. Se observa que todas las unidades aparecen intermitentemente a lo largo de los sondajes (400 a 500 metros aprox.).

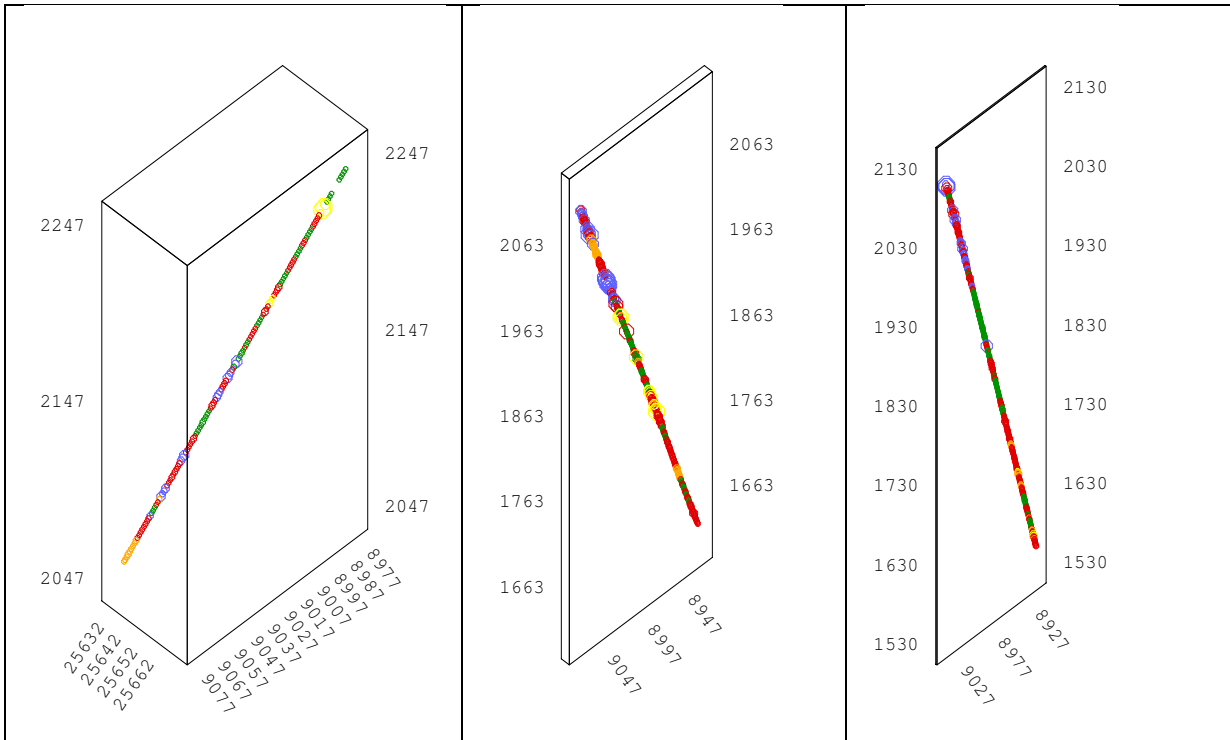


Figura 3: Tipo de roca a lo largo de sondajes 122, 241 y 367.

La variación de la ley de cobre a lo largo de los sondajes anteriores se muestra en la figura 4, donde se observa que los valores de ley más altos se encuentran en las brechas (en amarillo y azul), en tanto que C1 y C5 son las muestras más abundantes (en verde y rojo). Sin embargo, dada la compleja geometría entre tipos de roca, no es fácil encontrar un límite o contacto que las separe claramente.

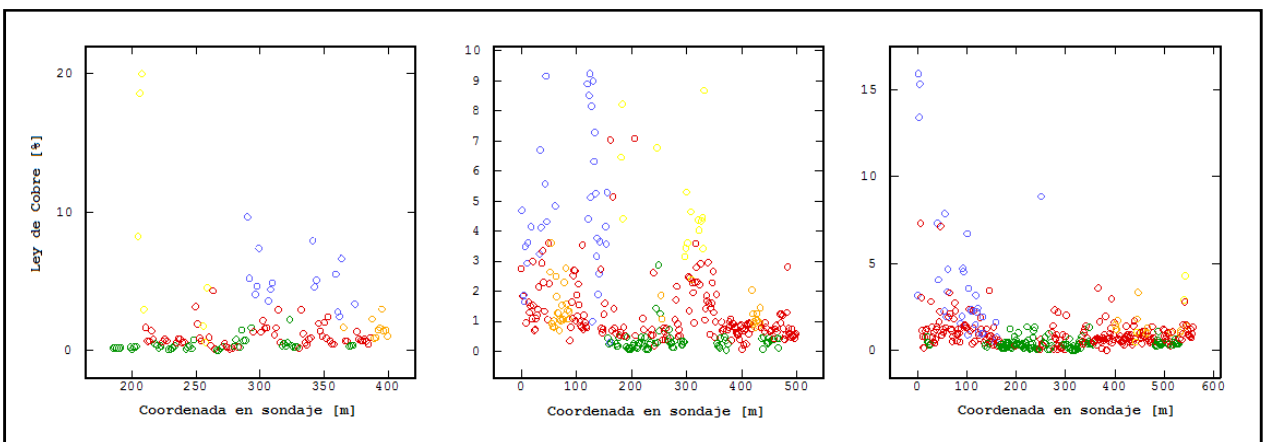


Figura 4: Variación de ley de cobre (ordenada) según ubicación de la muestra en el sondaje (abscisa).

Luego, a modo de estudiar la correlación de las leyes de cobre entre unidades litológicas se calcula las covarianzas cruzadas entre leyes pertenecientes a C1, C5 y brecha central. Se observa que en todos los casos la covarianza decrece al aumentar la distancia, y para el par brecha central – C1 (figura central) es cercana a cero para un alcance pequeño (7 m), por lo que las leyes presentan una baja correlación a distancias mayores. En cambio, la correlación de leyes entre brecha central y C5 y entre C1 y C5 decrece más lentamente, y podemos intuir la existencia de una frontera “blanda” entre estos tipos de roca.

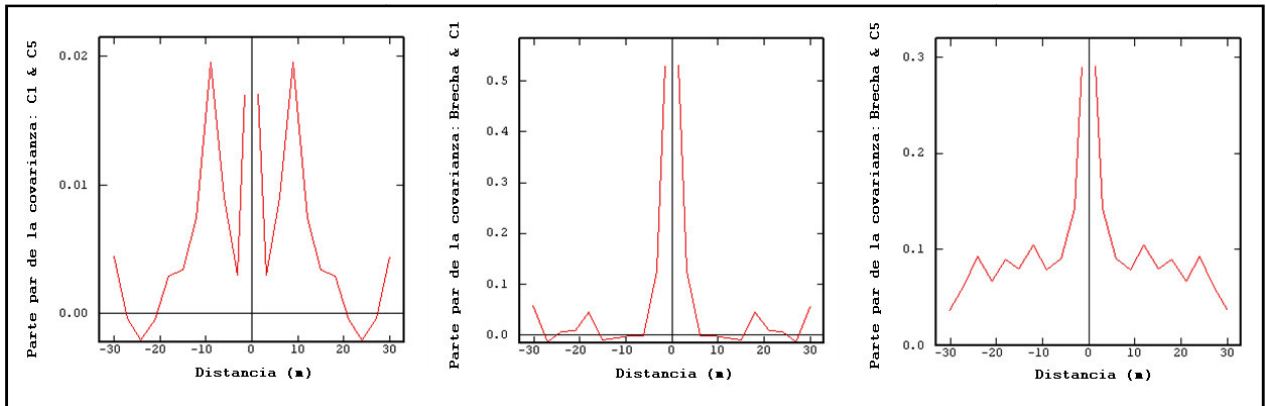


Figura 5: Covarianzas cruzadas de los pares: C1 - C5, brecha central – C1, brecha central – C5.

A modo de confirmar el tipo de frontera existente entre tales litologías, se construye los perfiles de contacto de la figura 6, donde podemos ver que los pares C1 – C5 y C1 – brecha central experimentan cambios bruscos en ley media y por lo tanto corresponden a fronteras más bien duras, aunque para C1 – C5 las covarianzas cruzadas indican una correlación espacial de unos 15 metros. Sólo en el caso de C5 y brecha central podemos señalar que existe una frontera blanda.

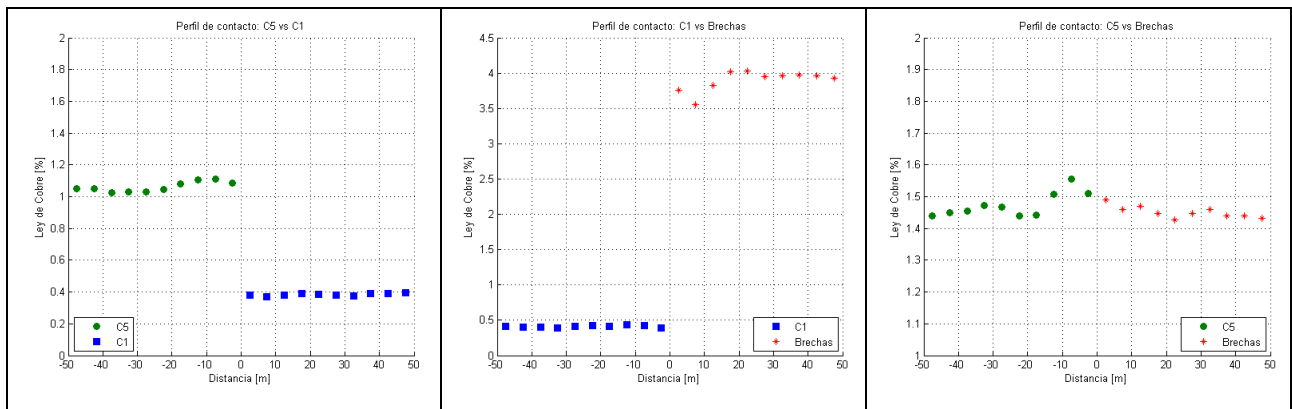


Figura 6: Perfil de contacto de los pares: C1 - C5, brecha central – C1, brecha central – C5.

Finalmente considerando que los límites o contactos entre unidades litológicas son de geometría compleja, el caso de estudio se construye usando todas las muestras de la zona de interés, sin realizar diferenciación según litología, pese a que los contactos no son del todo "blandos" para todas las unidades.

4.1. Estudio Exploratorio de Datos.

En las etapas posteriores del caso de estudio se trabajará con las muestras ubicadas dentro del sector de interés, comprendido entre las cotas 8600 y 9200 metros en dirección este y entre 25200 y 26000 metros en dirección norte. No se ha definido límites en la vertical. La distribución espacial de las leyes de cobre y arsénico se despliega en las siguientes figuras, donde se aprecia que la zona que concentra altas leyes es la misma para ambas variables (sector noreste del dominio).

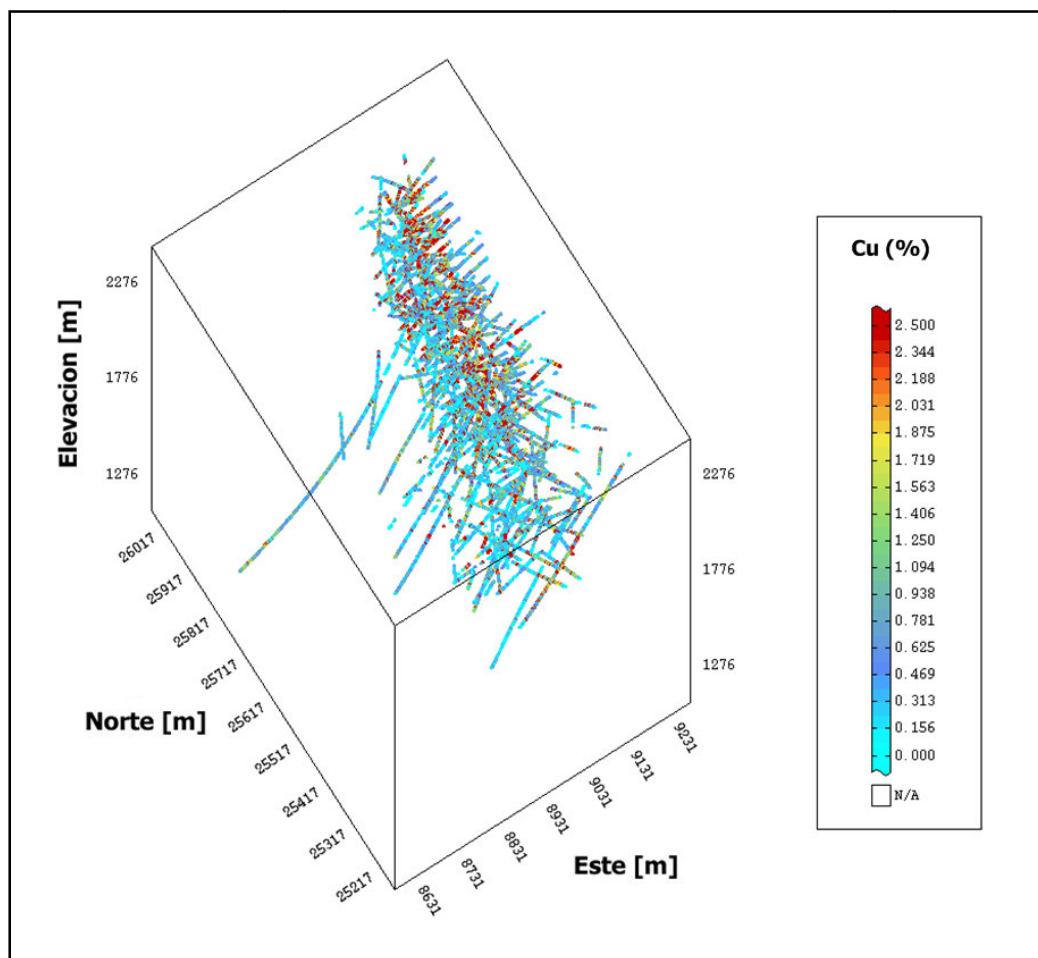


Figura 7 : Ubicación de Muestras de Sondajes y Ley de Cobre (%).

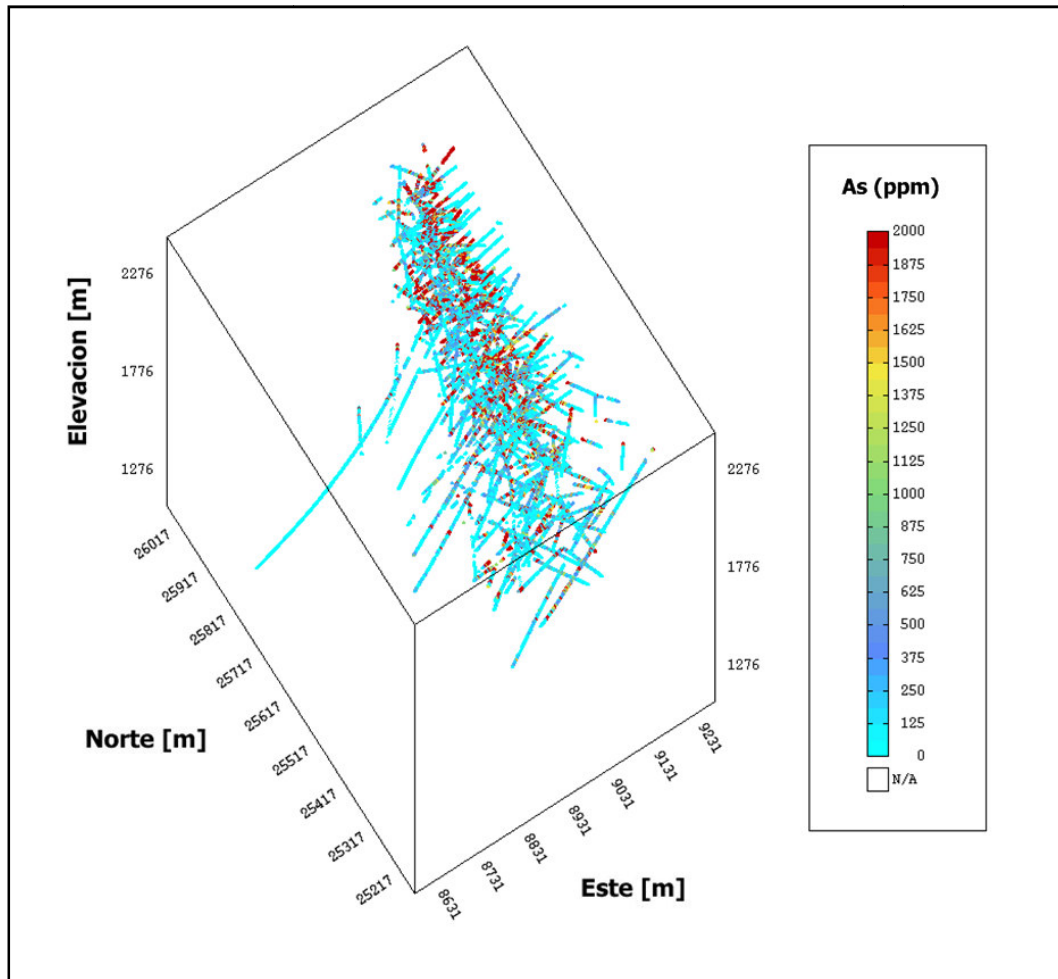


Figura 8: Ubicación de Muestras de Sondajes y Ley de Arsénico (ppm).

Las muestras se compositan a un tamaño de soporte de 4.5 metros, con lo que el número de datos se reduce a 9951 muestras. Esta corresponde a la base de datos a utilizar en la etapa de inferencia de parámetros de los modelos propuestos.

4.2. Estadísticas Básicas.

Se realiza un estudio preliminar con la finalidad de detectar valores aberrantes o duplicados que pudiesen distorsionar los resultados de los modelos. En éste, se descarta las muestras sin información (20 muestras sin dato de cobre y 382 de arsénico). No se detecta la presencia de datos duplicados. La selección final se desagrupa utilizando el método de las celdas, para un tamaño de celda de 40 x 40 x 4.5 metros.

Dado que se plantea trabajar con modelos de cosimulación multigaussianos, es necesario transformar las variables en dos variables con distribución gaussiana estándar. Esta transformación es indispensable, pues el cálculo de simulaciones se basa en algoritmos gaussianos.

Las estadísticas básicas de leyes de cobre (en %) y arsénico (en ppm) se presentan en las tablas 3 y 4 respectivamente, para el tamaño de soporte original (1.5 [m]) y el soporte de trabajo (4.5 [m]). Se muestra además las estadísticas de las variables gaussianas.

Ley de Cobre	Muestras	Mínimo	Máximo	Media	Desv. Est.
	#	%	%	%	%
Soporte 1.5 [m]	30114	0.000	32.980	1.290	1.916
Soporte 4.5 [m]	9931	0.010	24.000	1.293	1.179
Desagrupados	9931	0.010	24.000	1.179	1.400
Transformados	9931	-3.770	3.770	0.000	1.000

Tabla 3: Estadísticas básicas ley de cobre.

Ley de Arsénico	Muestras	Mínimo	Máximo	Media	Desv. Est.
	#	ppm	ppm	ppm	ppm
Soporte 1.5 [m]	29264	5	126,100	1,209	3,454
Soporte 4.5 [m]	9569	0.33	70,272	1,220	2,741
Desagrupados	9569	0.33	70,272	1,024	2,605
Transformados	9569	-3.76	3.76	0.00	1.00

Tabla 4: Estadísticas básicas ley de arsénico.

La figura 8 muestra los histogramas desagrupados de ambas variables. Para leyes de arsénico se observa que poco más de 40% de las muestras tienen valores menores a 200 ppm.

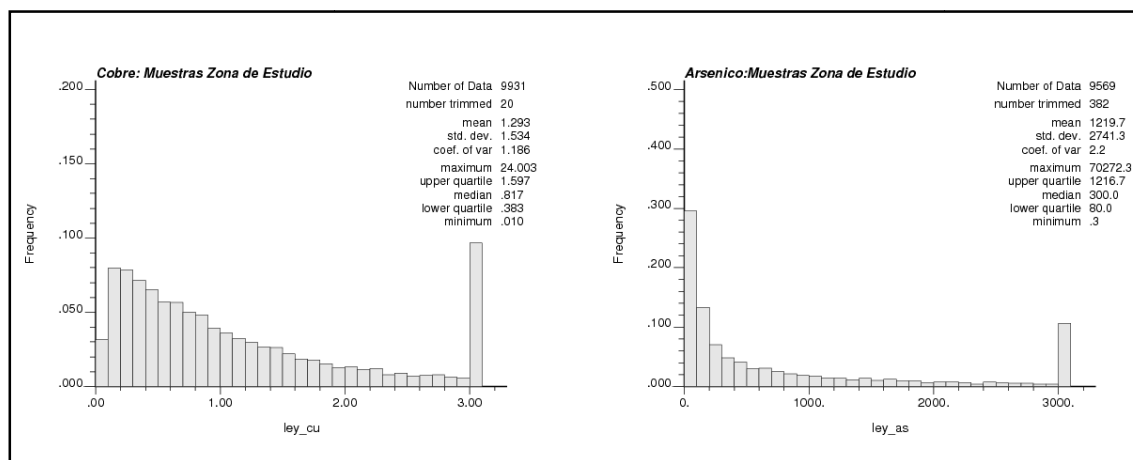


Figura 9: Histogramas desagrupados de leyes de cobre (izq.) y arsénico (der.).

Por otro lado, se tiene que la correlación entre las dos variables es de 0.68. La figura 9 (izq.) muestra la relación entre ellas con una nube de dispersión donde se aprecia que la relación no es lineal. Por otro lado, se muestra la relación entre las variables transformadas (figura 9 der.), en cuyo caso la correlación se reduce a 0.55. En esta última imagen se puede agregar que para una distribución bigaussiana, se espera que la nube de puntos forme un círculo centrado en el origen, lo cual en este caso, no ocurre.

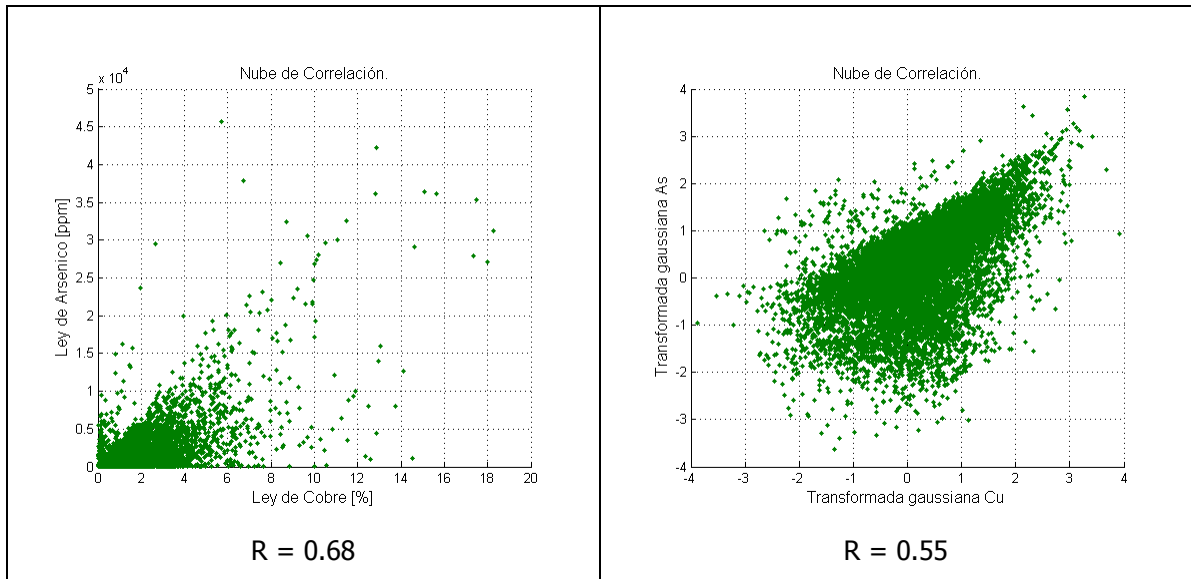


Figura 10: Nubes de correlación para leyes de cobre y arsénico, y para sus transformadas gaussianas.

4.3. Tendencias Espaciales.

A continuación, se estudia si existen tendencias en alguna de las direcciones principales. Para ello se construye nubes de dispersión, las que se entregan en la figura 10, donde se gráfica la ley de cobre (izq.) y arsénico (der.) en función de las coordenadas en dirección este, norte y cota. La curva en negro corresponde a la ley media por coordenada.

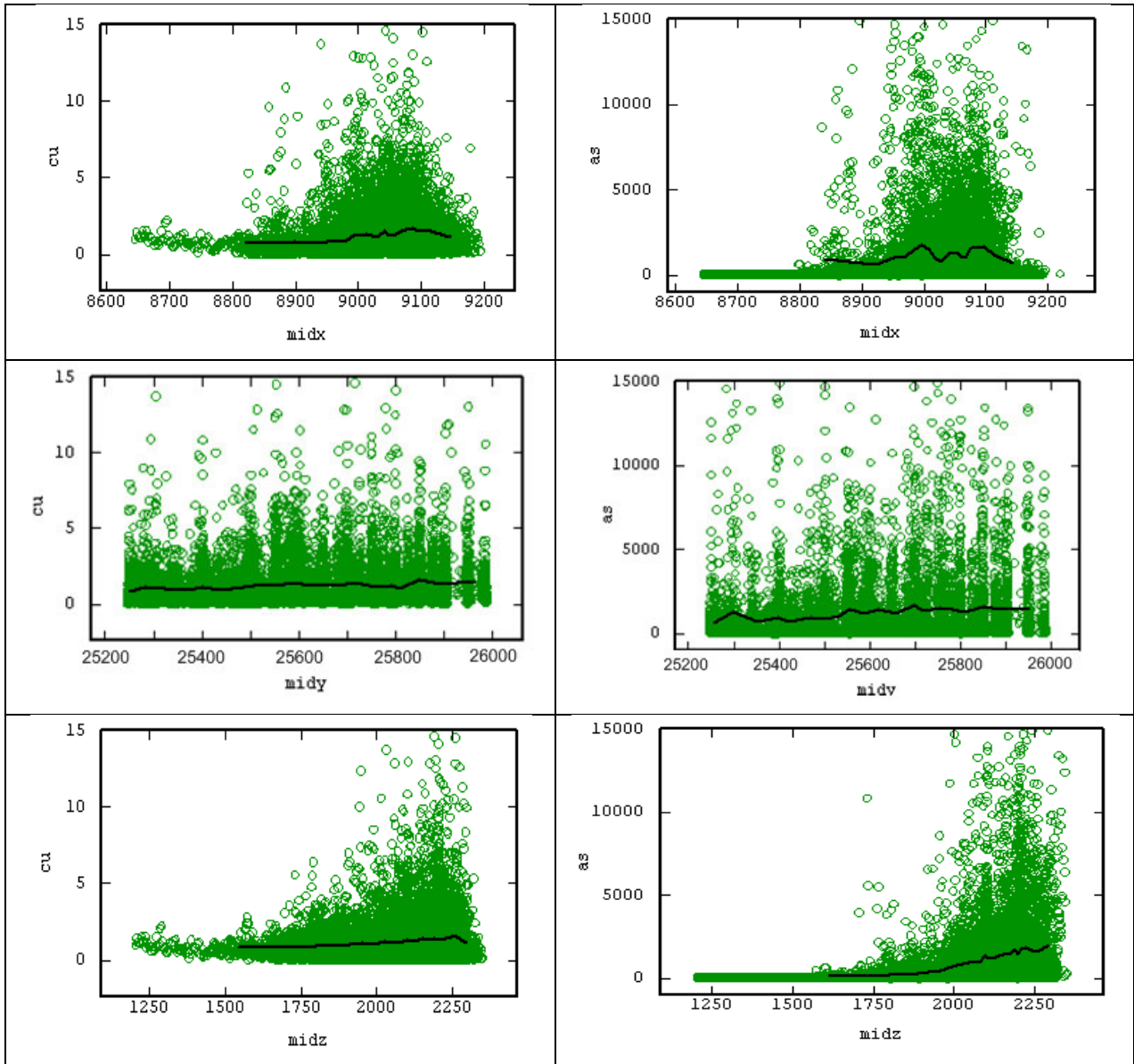


Figura 11: Tendencias de leyes de cobre (izq.) y arsénico (der.) en direcciones este (arriba), norte (centro) y elevación (abajo).

Se tiene que en la dirección este, la ley de cobre se mantiene constante en un valor cercano a 0.8% y que aumenta aprox. a partir de la coordenada 9000 metros, alcanzando valores de ley en torno a 1.5%. Algo similar ocurre para la ley de arsénico, donde en torno a las coordenadas 9000 y 9100 metros alcanza valores de aprox. 2000 ppm, y tiende a decrecer hacia los bordes del dominio.

Hacia el norte, se observa que para ambas variables las variaciones de ley son más paulatinas, aumentando de sur a norte desde 0.9 a 1.5 % para cobre y desde 900 hasta 1600 ppm para arsénico.

Finalmente se observa en la vertical que las mayores concentraciones se encuentran sobre los 2000 metros, decreciendo en profundidad. Esto ocurre para ambas variables, aunque para el caso de arsénico el cambio de ley es más importante, con valores desde 2000 ppm, llegando a 200 ppm en profundidad. En el caso del cobre la ley decrece de 1.6 a 0.8%.

Se concluye que el sector que concentra mayores leyes de cobre y arsénico corresponde al sector noreste de la zona de interés, principalmente en la zona más superficial.

A modo de reproducir tales tendencias en las simulaciones, se asume a priori que las variables son estacionarias, y que las tendencias se consiguen mediante una elección adecuada de los datos condicionantes. Para ello, en la construcción de las cosimulaciones se usa kriging ordinario (con vecindad móvil), y por lo tanto una media local en la estimación.

4.4. Modelos de Cosimulación Gaussianos.

Se plantea aplicar dos métodos de cosimulación como son: el modelo multigaussiano y un modelo alternativo, definido por el máximo de dos distribuciones gaussianas. La etapa de inferencia de parámetros para cada método se presenta a continuación:

4.4.1.- Modelo Multigaussiano.

La primera etapa de inferencia de parámetros corresponde a la transformación gaussiana de los valores reales de las muestras, las estadísticas de las transformadas se muestran en las tablas 3 y 4.

Luego se comprueba si la hipótesis multigaussiana se cumple y se ajusta a los datos. Esto se verifica mediante tests de nubes de correlación diferida, variograma contra madograma y variogramas de indicadores. Los tests indican que la hipótesis bigaussiana no se cumple a cabalidad y, por lo tanto, el modelo multigaussiano no es adecuado para los datos del estudio, sin embargo, el modelo aún es aplicable asumiendo que algunas características de los datos (como la asimetría de variogramas de indicadores de cuartiles simétricos respecto a la mediana) no son posibles de reproducir y por lo tanto el

modelo generado no caracteriza adecuadamente las variables en estudio. Tales pruebas se muestran en el capítulo de anexos (sección 7.3).

Para la construcción de cosimulaciones se requiere definir un modelo variográfico que permita reproducir la distribución de leyes en las simulaciones. Dado que se trabaja con dos variables, se requiere de variogramas de leyes de cobre, arsénico y el variograma cruzado de estas. En este caso se utiliza el modelo lineal de correogionalización, el cual considera que las covarianzas simples y cruzadas están dadas por una combinación lineal de un mismo conjunto de estructuras base o modelos anidados.

La búsqueda de direcciones de anisotropía se realiza construyendo mapas variográficos para las dos variables en estudio. Dichos mapas se encuentran en el capítulo de anexos, donde se presenta además variogramas experimentales calculados en distintas direcciones.

Se determina que las direcciones principales de anisotropía, definidas de acuerdo a su azimuth (ángulo respecto al norte) y dip (ángulo respecto al plano horizontal), son:

Dirección	Azimuth [°]	Dip [°]
Norte	0	0
Este	90	-20
Vertical	90	-110

Tabla 4: Direcciones de anisotropía.

En la figura siguiente, las imágenes de la izquierda corresponden a los variogramas experimentales gaussianos de las leyes de cobre y arsénico. Se observa que hacia el este (curva verde) todas las variables presentan una alta variabilidad lo que se refleja en un corto alcance (aprox. 50 metros), en tanto que las direcciones norte (en rojo) y vertical (en negro) presentan mayor continuidad. A partir de esto, se genera el modelo lineal de correogionalización que será utilizado en las simulaciones gaussianas, el cual se muestra en las imágenes derechas de la figura 12.

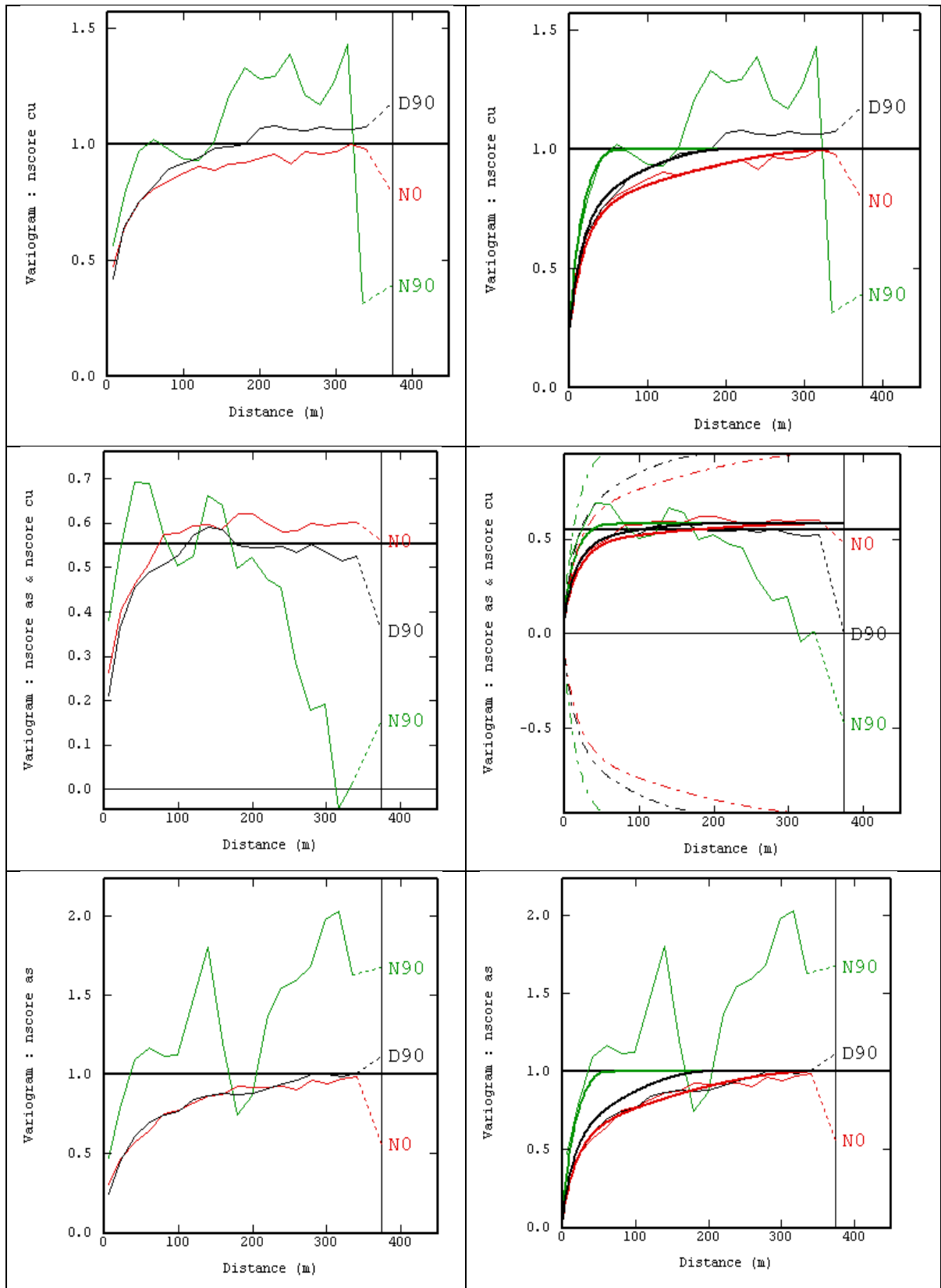


Figura 12: Variogramas experimentales (simples y cruzados) y modelo de correogionalización.

El modelo a utilizar en las simulaciones consta de un efecto pepita, un modelo exponencial y otro esférico:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{cu} & \gamma_{cu/as} \\ \gamma_{cu/as} & \gamma_{as} \end{pmatrix}(\mathbf{h}) = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.08 \\ 0.08 & 0.05 \end{pmatrix} \text{pepa} + \begin{pmatrix} 0.50 & 0.40 \\ 0.40 & 0.55 \end{pmatrix} \exp(35, 60, 50 \text{ m}) + \begin{pmatrix} 0.25 & 0.10 \\ 0.10 & 0.40 \end{pmatrix} \text{esf}(55, 350, 200 \text{ m})$$

donde las matrices 2x2 representan las contribuciones de cada estructura anidada a la meseta total de los variogramas simples y cruzados, mientras que las distancias entre paréntesis indican los alcances en las direcciones este, norte y cota.

4.4.2.- Modelo Alternativo.

El método alternativo busca reproducir características estructurales de los datos, que el modelo multigaussiano no es capaz de generar en las simulaciones. Luego a modo de definir el modelo, se estudia los variogramas de indicadores de las muestras. Esto nos permite discriminar entre los modelos que presentan diferentes comportamientos frente a la correlación espacial de estos variogramas respecto al umbral mediano.

Los variogramas de indicadores de los cuartiles (cuantiles a 25, 50 y 75 %), para la ley de cobre se presentan en la figura 13. Las imágenes izquierdas corresponden a variogramas omnidireccionales. A la derecha se muestra los variogramas en las direcciones principales de anisotropía. Los variogramas para cobre-arsénico y arsénico se muestran en el capítulo de anexos.

Se puede observar que, para ambos casos, existe una clara asimetría entre los variogramas de indicadores del primer y tercer cuartil. Donde el indicador del primer cuartil, asociado a baja ley, tiene un mayor alcance y por lo tanto mayor continuidad espacial que el indicador del tercer cuartil, asociado a alta ley.

Esta propiedad se contrapone con el modelo multigaussiano, el cual presenta simetría para cuartiles equivalentes respecto a la mediana, y por lo tanto no resulta adecuado para este caso. Dicha propiedad se presenta en el capítulo de anexos, donde se muestra el ajuste de los variogramas de indicadores del modelo multigaussiano a los variogramas de indicadores experimentales de las muestras (sección 7.4.3).

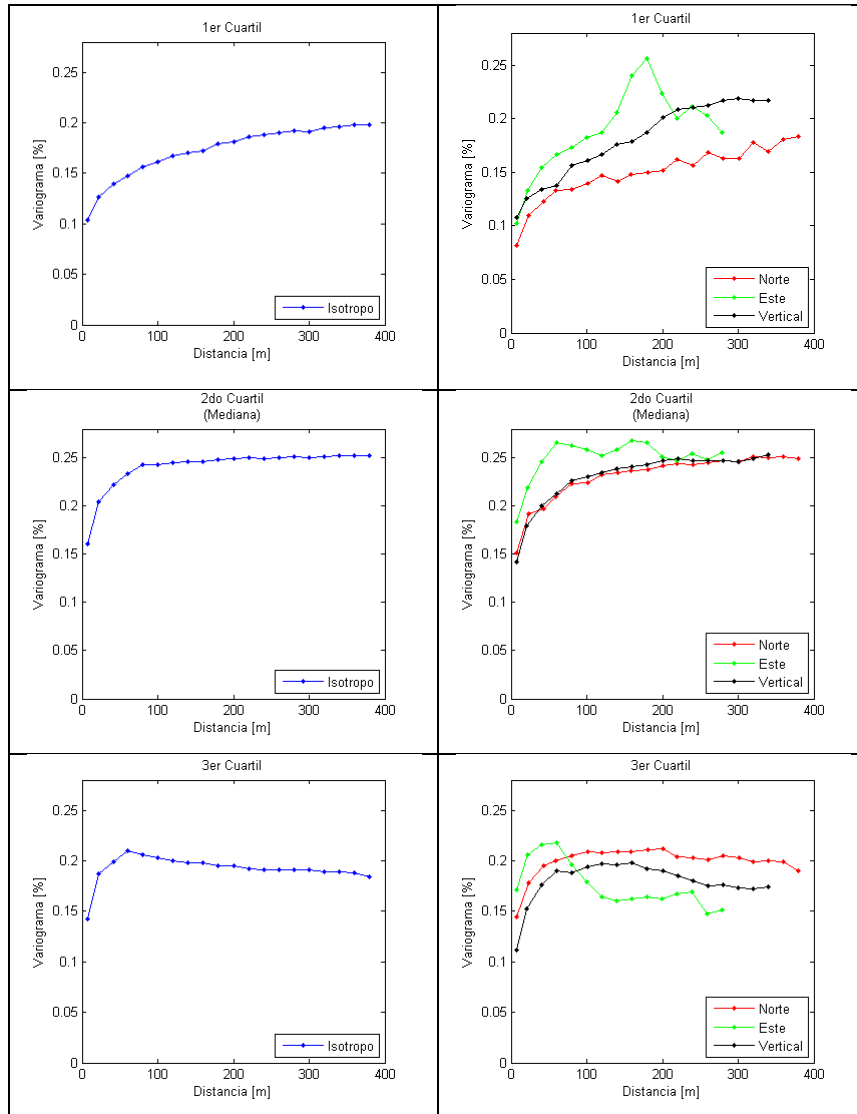


Figura 13: Variogramas de indicadores experimentales para ley de cobre.

Se propone utilizar un modelo definido por el máximo de una serie de funciones aleatorias multigaussianas. Los parámetros del modelo son el número de funciones aleatorias, y la media y función de covarianza de cada una de ellas. Dado que el caso de estudio considera cosimular leyes de cobre y arsénico, se debe definir funciones aleatorias para cada variable, sin olvidar las relaciones cruzadas entre ellas.

$$\begin{aligned} \text{Cobre} & : & Y_1(\mathbf{x}) &= \max\{T_1(\mathbf{x}), T_1'(\mathbf{x}), T_1''(\mathbf{x}), \dots\} \\ \text{Arsénico} & : & Y_2(\mathbf{x}) &= \max\{T_2(\mathbf{x}), T_2'(\mathbf{x}), T_2''(\mathbf{x}), \dots\} \end{aligned}$$

Donde $\{T_1, T_2\}$, $\{T_1', T_2'\}$, $\{T_1'', T_2''\}$ son pares independientes de funciones aleatorias multigaussianas.

Se intenta construir el modelo con 2 pares de funciones aleatorias, por lo que se debe especificar sus medias y covarianzas (variogramas) simples y cruzadas. Luego se busca que los variogramas de indicadores teóricos ajusten de manera aceptable los variogramas de indicadores de las muestras, para cada uno de los cuartiles.

Puesto que cada función de covarianza se define por un efecto pepa, y por las mesetas y alcances de cada estructura anidada, se tiene que el número de parámetros a determinar es considerable. Por esta razón la etapa de inferencia consiste en un proceso de prueba y error, donde los distintos parámetros son modificados numerosas veces en función de un mejor ajuste. En el capítulo de anexos se describe la forma en que se ajustó el modelo, de acuerdo a la relación entre parámetros y su influencia en el modelo (sección 7.1).

La figura 14 muestra el ajuste entre variogramas de indicadores teóricos y experimentales, para el modelo propuesto. La primera fila corresponde a los variogramas de indicadores de cobre, la fila central a los indicadores cobre-arsénico y la tercera fila muestra los indicadores de arsénico.

Se puede observar que el modelo logra reproducir las características de los variogramas experimentales para ambas variables, en lo referente a la asimetría de los cuantiles 25 y 75%. Se espera que este modelo logre mejorar las simulaciones respecto al desempeño del modelo multigaussiano.

Con la finalidad de lograr dicha asimetría, el modelo considera en las primeras gaussianas de cobre (T_1) y arsénico (T_2) una función de variograma de corto alcance, en tanto que para la segunda gaussiana (T'_1 y T'_2) utiliza una función de variograma de largo alcance.

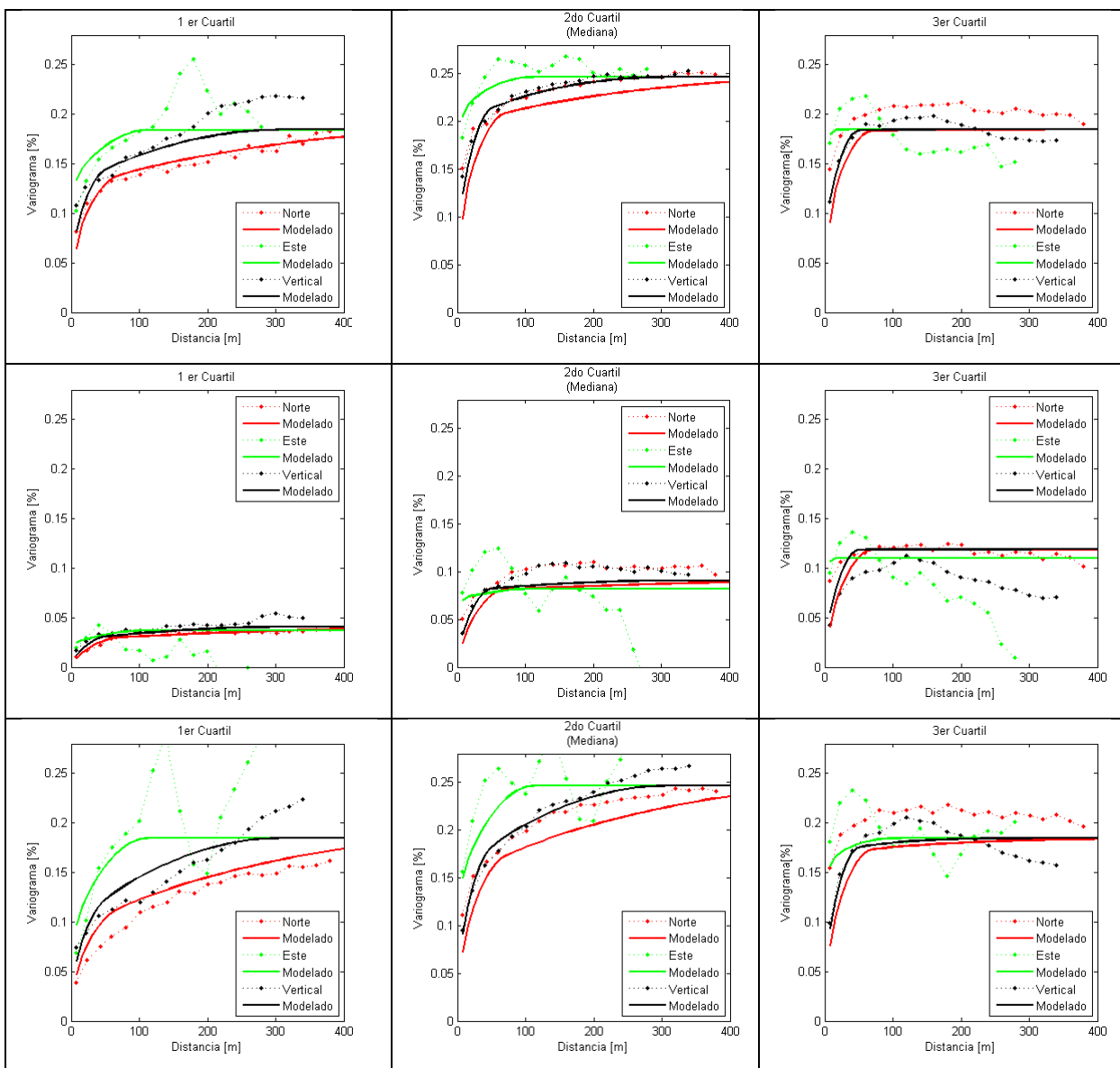


Figura 14: Variogramas de indicadores experimentales y modelados, a lo largo de las direcciones principales de anisotropía.

La siguiente tabla muestra las medias utilizadas en el modelo:

	Cobre	Arsénico
Primera Gaussiana	0	0
Segunda Gaussiana	2	6

Tabla 5: Medias de funciones aleatorias gaussianas del modelo alternativo.

En tanto que las funciones de variograma de la primera y segunda gaussiana tienen la siguiente forma, respectivamente:

- Modelo para $\{T_1, T_2\}$:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{cu1} & \gamma_{cuas1} \\ \gamma_{cuas1} & \gamma_{as1} \end{pmatrix}(\mathbf{h}) = \begin{pmatrix} 50 & 20 \\ 20 & 10 \end{pmatrix} \text{esf}(20, 5, 10 \text{ m}) + \begin{pmatrix} 150 & 108 \\ 108 & 90 \end{pmatrix} \text{esf}(75, 10, 50 \text{ m})$$

- Modelo para $\{T'_1, T'_2\}$:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{cu2} & \gamma_{cuas2} \\ \gamma_{cuas2} & \gamma_{as2} \end{pmatrix}(\mathbf{h}) = \begin{pmatrix} 10 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{pmatrix} \text{esf}(500, 110, 300 \text{ m})$$

Donde las matrices 2x2 representan las contribuciones de cada estructura anidada a la meseta total de los variogramas simples y cruzados, mientras que las distancias entre paréntesis indican los alcances en las direcciones norte, este y cota.

Del modelo se observa que los variogramas conservan la anisotropía de los datos, donde la mayor continuidad se presenta en las direcciones norte y vertical, en tanto que hacia el este se tiene estructuras de corto alcance. Se cuenta entonces con una función de distribución que no es simétrica respecto a la mediana y que busca reproducir los variogramas de indicadores de los datos. Luego, es posible construir simulaciones condicionales utilizando algoritmos gaussianos para el cálculo de ellas.

4.5. Aplicación de los Modelos.

4.5.1.- Cosimulaciones Condicionales.

Para comparar los métodos se calcula 100 realizaciones condicionales de un banco ubicado en la cota 2150 metros y que se extiende por un área de 200 x 400 [m²]. El origen de la grilla se encuentra en las coordenadas 8960 metros este y 25500 metros norte, y tiene un tamaño de soporte de 1 x 5 x 5 [m³]. Como información condicionante se utiliza 305 muestras ubicadas entre las cotas 2140 y 2160 metros, y cuya posición espacial se ilustra en la siguiente figura.

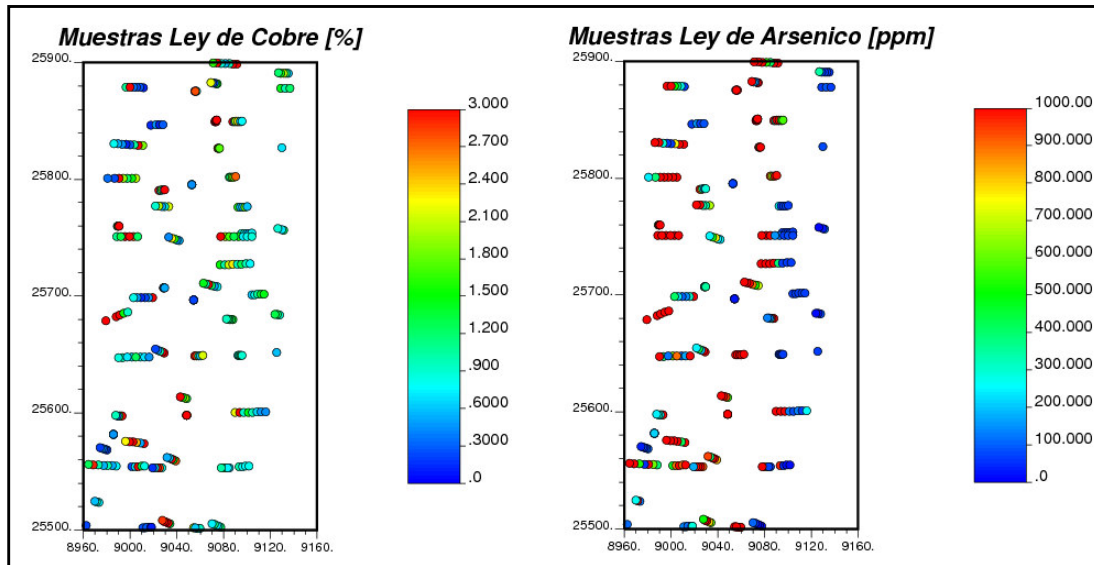


Figura 15: Ubicación de datos condicionantes.

- Estimación de leyes.

Se ha señalado que una de las ventajas de las simulaciones respecto al kriging, corresponde a que entregan una serie de escenarios factibles que reproducen la variabilidad real de las variables, en lugar de una única estimación como es el caso del Kriging. Las siguientes figuras corresponden a algunas realizaciones de leyes de cobre y arsénico para cada método empleado. Se despliega además el promedio de las 100 simulaciones.

Se observa que existen diferencias importantes en la forma de la mineralización obtenida con cada método. Al ver las realizaciones 50 y 83, podemos apreciar que existen diferencias en cuanto al agrupamiento y continuidad de leyes, la que se hace más notoria para leyes mayores a 2.4% de cobre y 800ppm en arsénico (zonas en rojo). El modelo alternativo genera estructuras norte sur de baja potencia, con cambios abruptos de ley en la dirección este oeste. En tanto que el modelo multigaussiano si bien genera una estructuración norte sur, tiene una menor variabilidad en la dirección este-oeste, con estructuras más anchas y ovaladas y por lo tanto, con mayor dispersión (diseminación) de ley.

Esto se aprecia de manera clara en el mapa promedio de las realizaciones de ley de cobre, donde ambos modelos generan zonas de similar ley, pero con distintas características de forma, siendo las estructuras del modelo alternativo las de menor potencia.

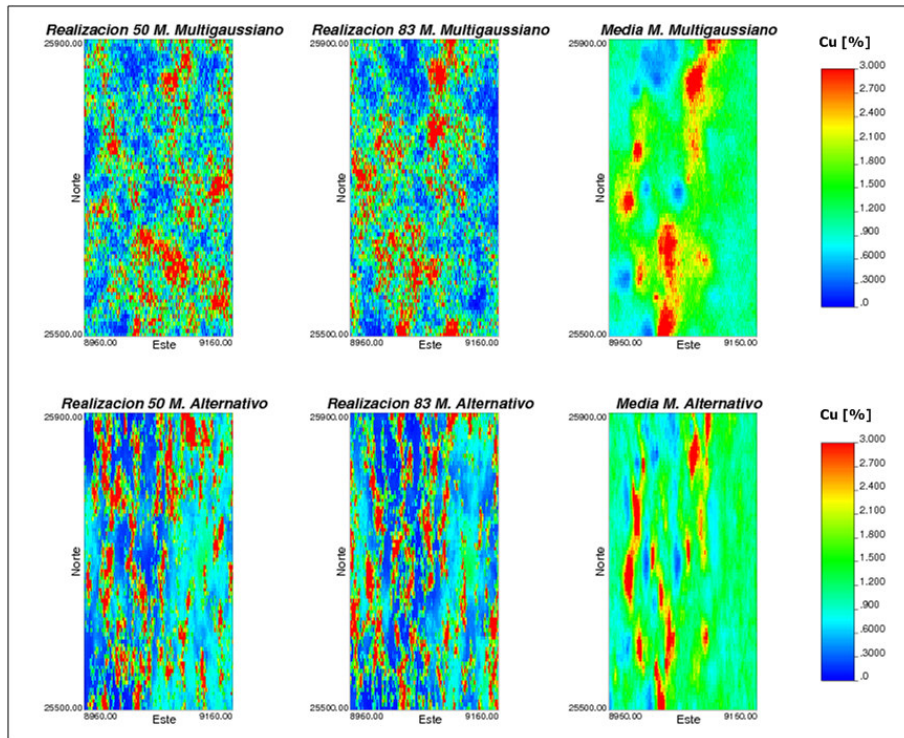


Figura 16: Realizaciones de ley de cobre (izquierda y centro) y promedio de 100 realizaciones (derecha).

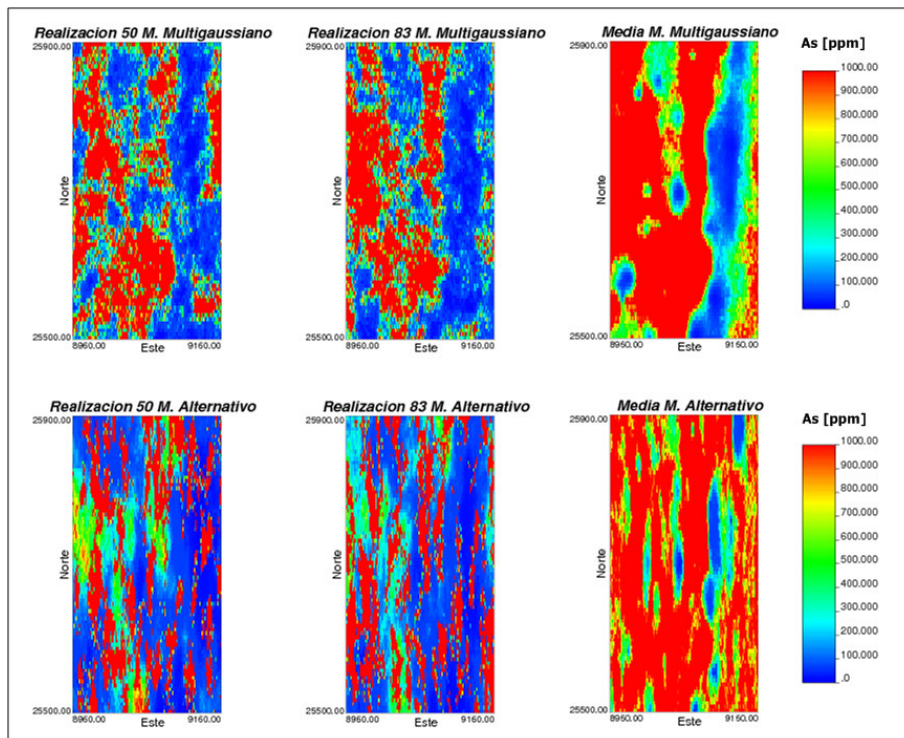


Figura 17: Realizaciones de ley de arsénico (izquierda y centro) y promedio de 100 realizaciones (derecha).

Las estadísticas básicas de cobre y arsénico resultantes de la cosimulación se muestran en las siguientes tablas:

Cobre	Media	Desviacion Estandar	Minimo	Maximo	N° de Muestras
	%	%	%	%	#
Zona Estudio	1.123	1.427	0.010	24.003	9931
Muestras Banco	1.484	1.605	0.043	11.530	305
Alternativo	1.329	1.636	0.010	24.588	1600000
Multigaussiano	1.426	1.604	0.010	24.530	1600000

Tabla 6: Estadísticas básicas de ley de cobre (en %).

Arsénico	Media	Desviacion Estandar	Minimo	Maximo	N° de Muestras
	ppm	ppm	ppm	ppm	#
Zona Estudio	1095.3	2869.5	0.3	70272.3	9569
Muestras Banco	1569.7	2811.7	5.3	21573.3	305
Alternativo	1409.0	3400.7	0.3	71459.7	1600000
Multigaussiano	1386.0	3012.9	0.3	71233.1	1600000

Tabla 7: Estadísticas básicas de ley de arsénico (en ppm).

Se obtiene que ambos modelos de cosimulación subestiman la ley media del banco, en relación a la ley de las muestras de cobre y arsénico de éste, aunque se puede señalar que la estimación de ley media de cobre es más adecuada en el caso del modelo multigaussiano. Lo contrario ocurre en el caso de arsénico donde la ley media estimada es mejor para el modelo alternativo, aunque la diferencia entre estimaciones es de sólo 20 ppm aproximadamente. En cuanto a la variabilidad de la estimación de arsénico, se tiene que ambos modelos sobrepasan la variabilidad observada en las muestras.

- Incertidumbre.

La principal ventaja de las simulaciones respecto al kriging corresponde a que éstas generan numerosos escenarios que reproducen la variabilidad real de la variable en estudio, evitando el efecto de suavizamiento característico del kriging. De este modo, las simulaciones no sólo entregan una estimación (promedio de las realizaciones), sino que dado que se cuenta con una serie de "realidades", permiten cuantificar la incertidumbre asociada al calcular intervalos de confianza o la probabilidad de superar un determinado valor de ley en el yacimiento.

En este caso particular donde se cuenta con leyes de cobre y arsénico, resulta interesante estudiar en qué zonas es posible encontrar una concentración importante de mineral con cantidades menores de contaminante. Para ello es posible calcular la probabilidad conjunta de superar un umbral de ley de cobre con la restricción de que la ley de arsénico sea menor a un cierto valor.

La figura 17 corresponde a la probabilidad obtenida con cada metodología de simulación, utilizando como valores de corte 0.5% de cobre y 200 ppm de arsénico. En ésta, las zonas en rojo representan una alta probabilidad de cumplir con las condiciones impuestas, en tanto que las zonas en azul corresponden a lugares donde seguramente no se cumple una de las dos restricciones.

En ambos casos se tiene que la zona este del depósito tiene altas probabilidades de cumplir las condiciones impuestas, aunque existen diferencias considerables respecto a la certeza con que éstas se cumplen. Así, el modelo alternativo arroja zonas de mayor tamaño con probabilidad cercana a 1, lo que indica que existe una menor dispersión de valores de ley en las realizaciones para tales posiciones respecto al modelo multigaussiano.

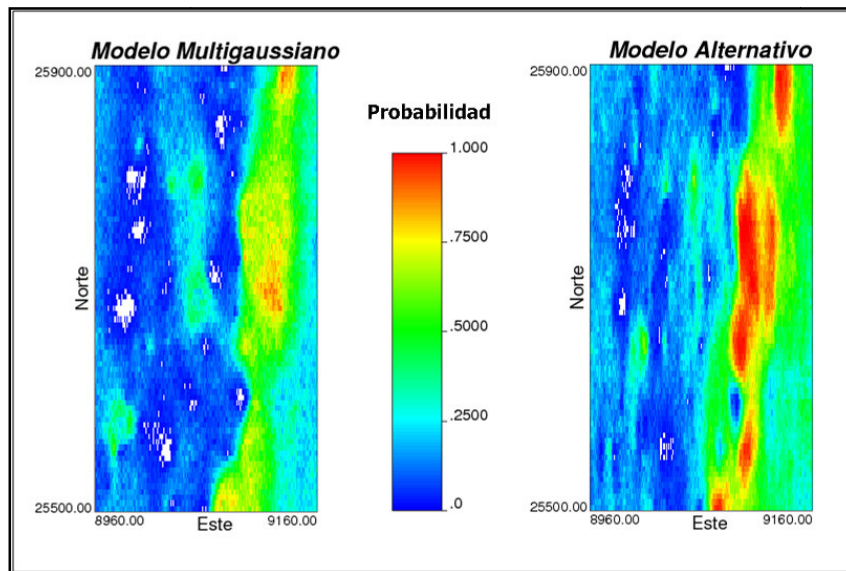


Figura 18: Mapa de probabilidades para cobre mayor a 0.5% y arsénico menor a 200ppm.

Llama la atención la similitud en la forma de las zonas de alta probabilidad con las zonas de baja concentración de arsénico (figura 16). Lo que indica que esta condición es más relevante que la restricción sobre la ley de cobre, pues ésta última es cierta en la gran mayoría de los casos.

Por otro lado, es posible calcular la ley media de cobre y arsénico de los bloques que cumplen con tales restricciones. La figura 18 corresponde a la ley media de cobre obtenida en cada caso, donde se aprecia que las diferencias en ley media obtenida son importantes, principalmente en la zona este donde se cumplen las restricciones impuestas. El modelo multigaussiano arroja valores en torno a 1.2% de cobre en tanto que el modelo alternativo presenta leyes menores entre 0.6 y 0.9% de cobre.

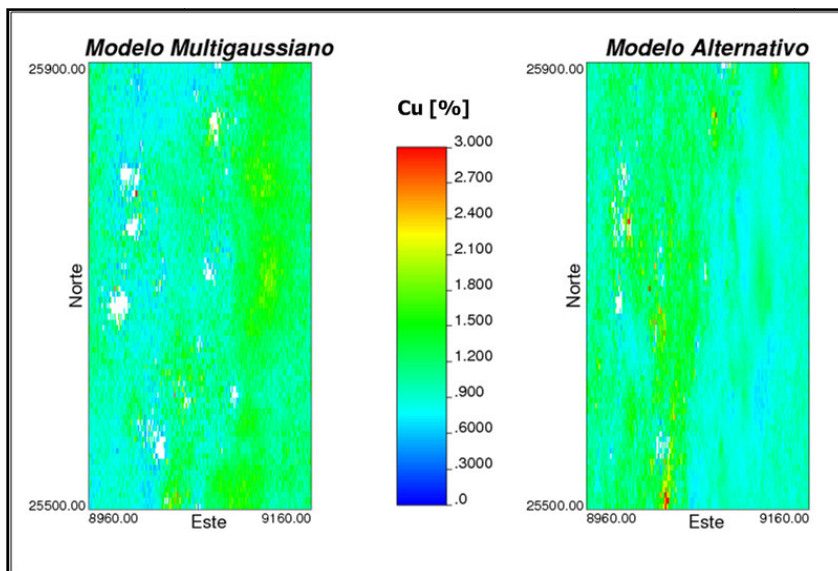


Figura 19: Ley media de cobre de bloques que cumplen con las condiciones.

- Postproceso: rebloqueo

Las realizaciones se rebloquean a tamaños de soporte mayores. Las estadísticas de tales tamaños se muestran en las siguientes tablas para cobre y arsénico.

Cobre		Multigaussiano				Alternativo			
		1 x 5 x 5	5 x 10 x 5	10 x 10 x 5	10 x 20 x 5	1 x 5 x 5	5 x 10 x 5	10 x 10 x 5	10 x 20 x 5
N° de Muestras	#	1600000	160000	80000	40000	1600000	160000	80000	40000
Media	%	1.426	1.426	1.426	1.426	1.329	1.329	1.329	1.329
Desv. Estandar	%	1.604	1.170	1.079	1.005	1.636	1.269	1.045	0.984
Minimo	%	0.010	0.013	0.023	0.026	0.010	0.010	0.020	0.026
Maximo	%	24.530	19.327	14.412	11.965	24.588	20.507	15.740	12.544

Tabla 8: Estadísticas básicas de ley de cobre según tamaño de soporte y modelo elegido.

Arsénico		Multigaussiano				Alternativo			
		1 x 5 x 5	5 x 10 x 5	10 x 10 x 5	10 x 20 x 5	1 x 5 x 5	5 x 10 x 5	10 x 10 x 5	10 x 20 x 5
N° de Muestras	#	1600000	160000	80000	40000	1600000	160000	80000	40000
Media	ppm	1386.0	1386.0	1386.0	1386.0	1409.0	1409.0	1409.0	1409.0
Desv. Estandar	ppm	3012.9	2485.3	2292.3	2137.8	3400.7	2619.6	2172.2	2058.0
Minimo	ppm	0.3	2.0	3.0	3.5	0.3	0.7	1.1	1.3
Maximo	ppm	71233.1	45065.1	35000.7	30033.2	71459.7	55369.6	48087.6	36286.2

Tabla 9: Estadísticas básicas de ley de arsénico según tamaño de soporte por y modelo elegido.

Las imágenes siguientes corresponden a algunas realizaciones rebloqueadas a $10 \times 20 \times 5$ [m³]. Se observa que el modelo alternativo no genera estructuras de alta ley de potencia mayor a 10 metros, al contrario de lo que pasa con el modelo multigaussiano. En ambos casos se conservan las zonas de alta ley presentadas en la figura 15.

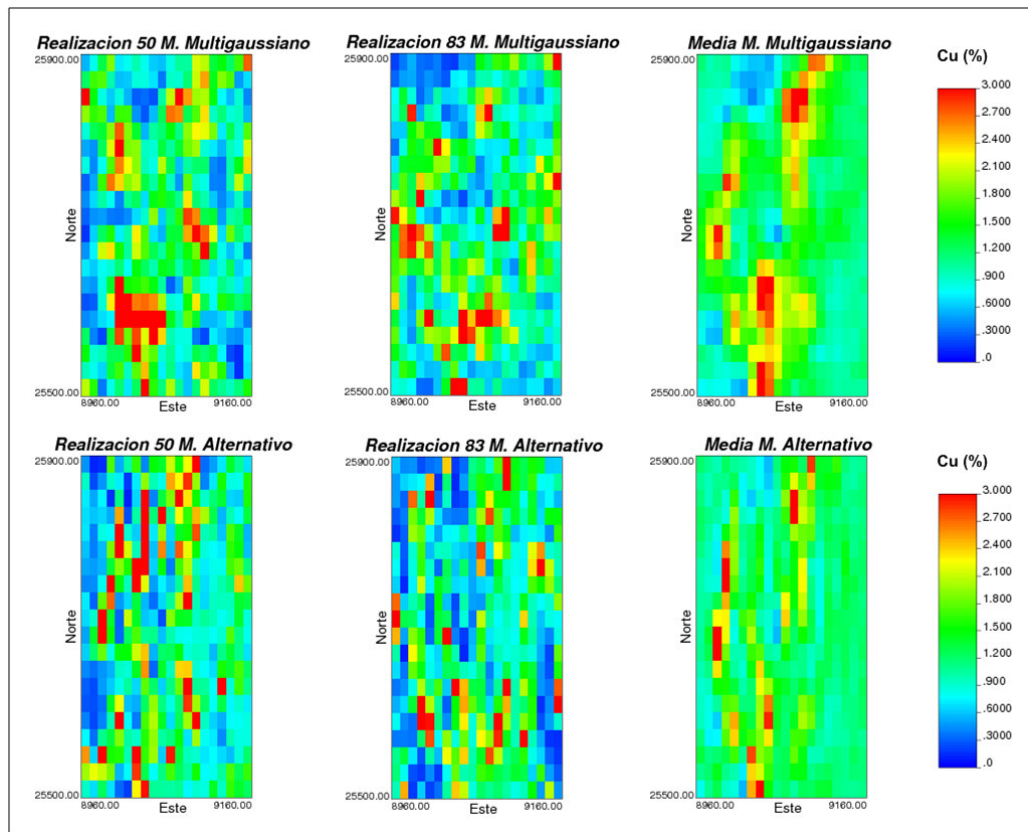


Figura 20: Realizaciones de ley de cobre para tamaño de bloques de $10 \times 20 \times 5$ m.

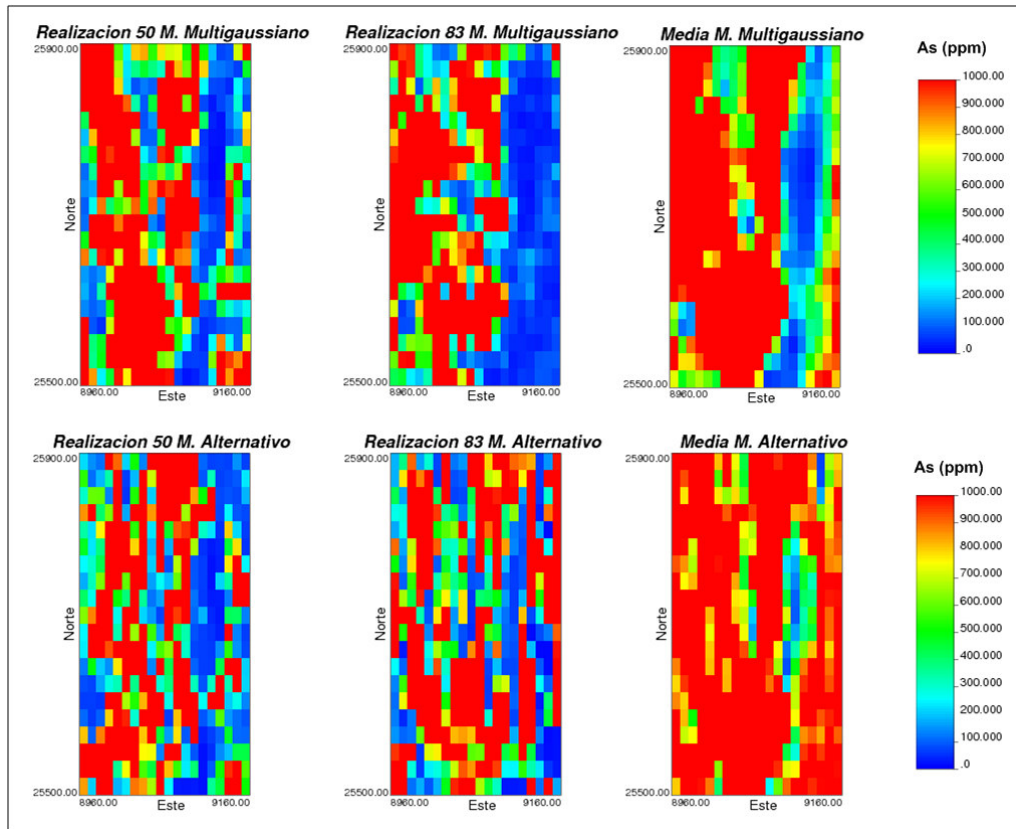


Figura 21: Realizaciones de ley de arsénico para tamaño de bloques de 10 x 20 x 5 m.

Luego es posible recalcular la probabilidad conjunta de superar 0.5% de ley de cobre con la restricción de que la ley de arsénico sea menor a 200 ppm. La imagen siguiente corresponde a las probabilidades obtenidas con cada metodología de simulación.

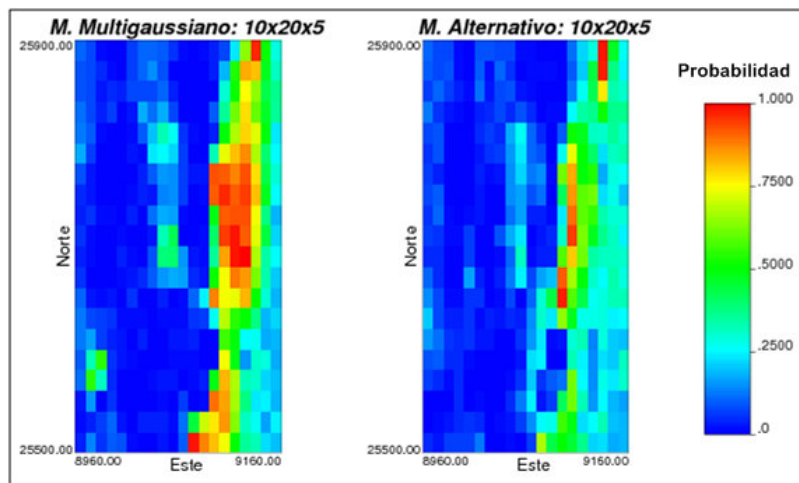


Figura 22: Mapa de probabilidades para cobre mayor a 0.5% y arsénico menor a 200ppm.

Se repite lo antes observado: la zona este posee mayor probabilidad de cumplir con las condiciones impuestas y se mantiene la similitud entre la forma de esta zona con el sector de baja ley de arsénico. Sin embargo, en este caso se obtiene que el modelo multigaussiano arroja una zona de mayor tamaño que cumple con las restricciones. Esto está directamente relacionado con la dispersión o continuidad de ley. El modelo alternativo posee mayor variabilidad en la dirección este, y en general no genera estructuras con potencia mayor a 10 metros.

Nuevamente al calcular la ley media de cobre de los bloques que cumplen con las restricciones impuestas, se obtiene que la zona este del modelo multigaussiano posee mayor ley media que el modelo alternativo.

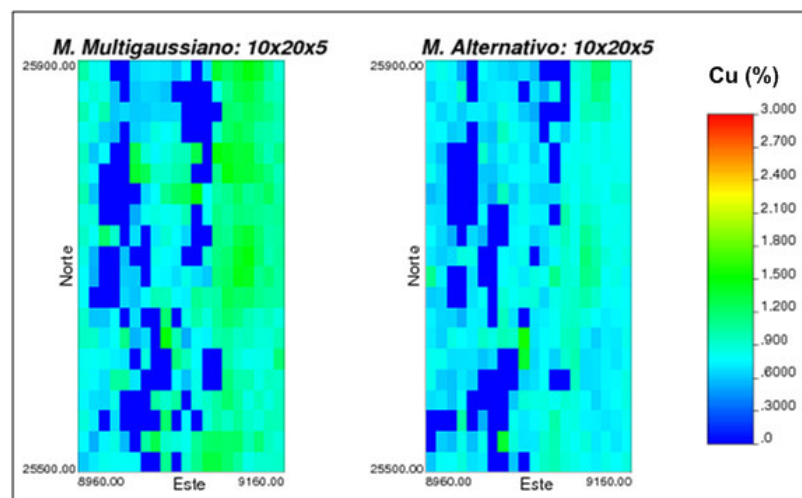


Figura 23: Ley media de cobre (%).

- Curvas Tonelaje Ley.

Otra característica importante de estudiar corresponde a las curvas tonelaje ley, obtenidas al aplicar cada modelo de cosimulación. Dichas curvas se calculan para dos realizaciones de similar ley media de cobre, usando la grilla densa a soporte puntual, y se muestran en la figura 23.

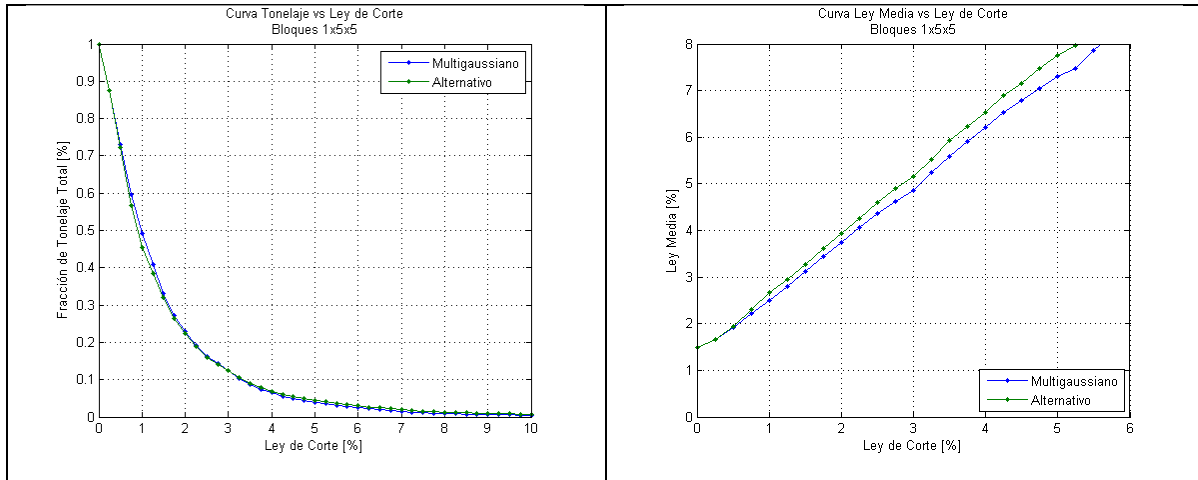


Figura 24: Curvas tonelaje ley para cobre a soporte puntual.

Se desprende que a soporte puntual no existen diferencias importantes en tonelaje, en tanto que el modelo alternativo entrega una mayor ley media para todo el rango de leyes de corte. Luego se reconstruye las curvas para el caso de bloques de tamaño 10 x 20 x 5 [m³].

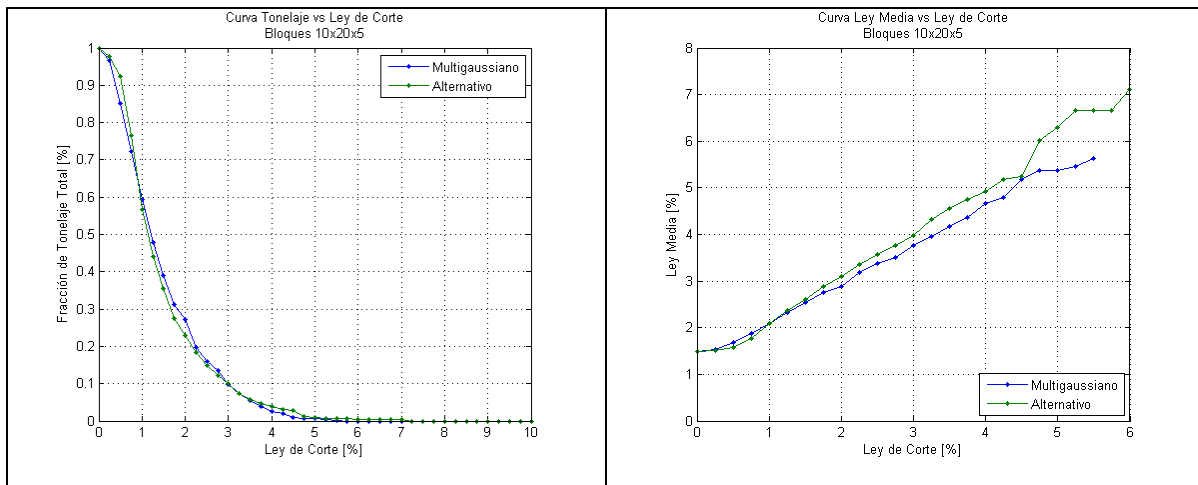


Figura 25: Curvas tonelaje ley para cobre a soporte 10 x 20 x 5 m.

Se observa que si bien el modelo alternativo posee una curva de mayor ley media que el modelo multigaussiano (para ley de corte mayor a 1%), al rebloquear se obtiene valores de ley menores al caso de soporte puntual, en tanto que para la curva de tonelaje, se tiene que el modelo alternativo entrega una mayor proporción de bloques que superan leyes de corte en el rango 0 a 1% y en el rango de leyes mayores a 3%. Esto se debe a la diferencia existente en la forma de la mineralización, pues el modelo multigaussiano entrega una distribución diseminada de leyes, por lo que al rebloquear se produce una

dilución entre leyes altas y bajas, mientras que el modelo alternativo entrega estructuras de alta ley bien definidas, por lo que la dilución sólo se produce para leyes bajas e intermedias.

En el caso de arsénico, se obtiene las siguientes curvas tonelaje ley para soporte puntual (figura 25) y para bloques de tamaño 10 x 20 x 5 [m³] (figura 26).

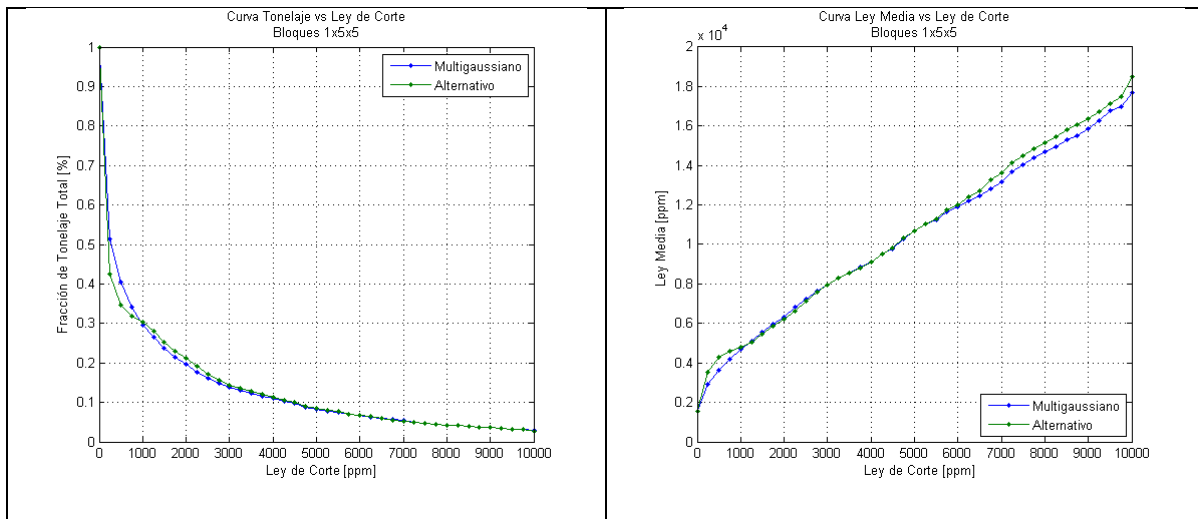


Figura 26: Curvas tonelaje ley para arsénico a soporte puntual.

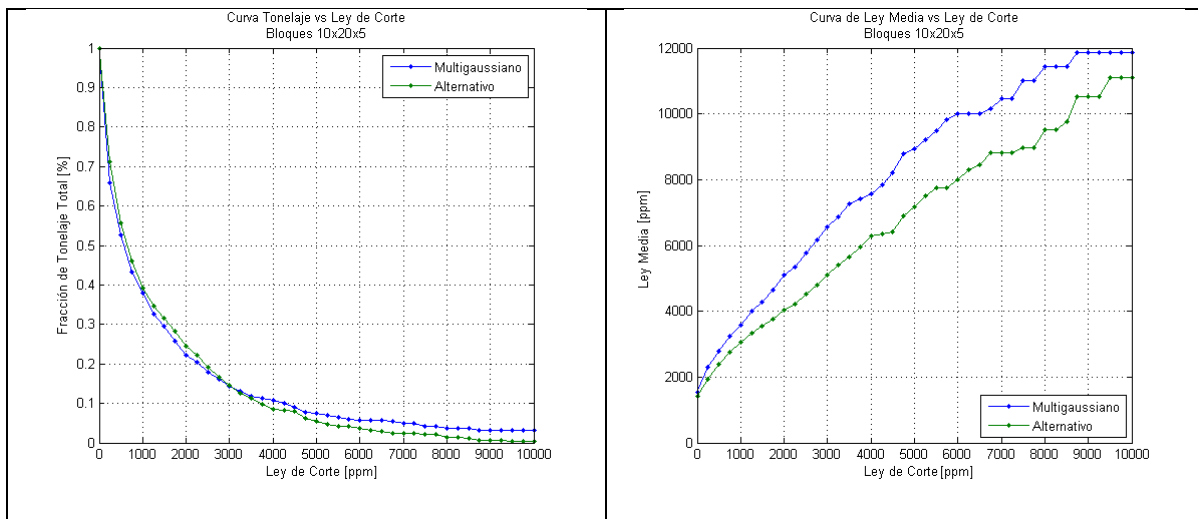


Figura 27: Curvas tonelaje ley para arsénico a soporte 10 x 20 x 5 m.

Nuevamente existen diferencias importantes entre las curvas de ley media a soporte puntual y a soportes mayores. Sin embargo, en este caso se obtiene que el modelo multigaussiano entrega una mayor ley media que el modelo alternativo, generando diferencias importantes que alcanzan hasta 2000ppm para una ley de corte de 6000ppm.

A modo de estudiar las diferencias en la cantidad de recursos que se obtiene de uno u otro modelo, se construye la siguiente tabla, donde se entrega la cantidad de finos considerando todas las realizaciones a tamaño de soporte de 10 x 20 x 5 [m³]. Para el cálculo del tonelaje total se usa una densidad de 2.7[ton/m³], con lo que se obtiene 1,080,000 toneladas para el banco en estudio.

Ley de Corte	Multigaussiano			Alternativo			Diferencia Finos	Diferencia Relativa
	Tonelaje	Ley Media	Finos	Tonelaje	Ley Media	Finos		
%	%	%	ton	%	%	ton	ton	%
0.0	100.0%	1.426	15,398	100.0%	1.329	14,358	1,040	6.8
0.5	88.5%	1.564	14,955	87.2%	1.474	13,879	1,076	7.2
1.0	59.7%	1.957	12,613	53.0%	1.934	11,073	1,540	12.2
1.5	35.6%	2.446	9,416	29.9%	2.484	8,032	1,384	14.7
2.0	20.6%	2.970	6,608	17.7%	3.009	5,748	859	13.0
3.0	7.1%	4.039	3,096	6.5%	4.044	2,840	256	8.3

Tabla 10: Tonelaje ley para cobre.

Ley de Corte	Multigaussiano			Alternativo			Diferencia Finos	Diferencia Relativa
	Tonelaje	Ley Media	Finos	Tonelaje	Ley Media	Finos		
ppm	%	ppm	ton	%	ppm	ton	ton	%
0	100.0%	1386.0	1,497	100.0%	1409.0	1,522	- 25	- 1.7
500	53.7%	2427.1	1,408	56.8%	2327.8	1,428	- 20	- 1.4
1000	38.5%	3099.4	1,289	39.4%	3037.4	1,292	- 2	- 0.2
2000	21.7%	4386.3	1,028	22.1%	4289.5	1,023	5	0.5
3000	13.2%	5638.5	803	13.5%	5469.5	795	7	0.9
5000	5.5%	8144.3	486	5.5%	7875.5	468	18	3.6

Tabla 11: Tonelaje ley para arsénico.

En el caso del cobre las diferencias en tonelaje son importantes considerando que el estudio involucra sólo un banco. En tanto que para arsénico si bien existen diferencias, éstas son menores. Luego, la decisión del modelo a utilizar es crucial dado que entregan distintas cantidades de recursos recuperables, los que además se distribuyen de distinta forma de acuerdo a las estructuras mineralizadas que generan.

4.5.2.- Validación de la Cosimulación.

Con el fin de analizar la calidad de las realizaciones obtenidas se hace las siguientes comparaciones: se estudia la forma del histograma para cada variable, donde se espera que el histograma de las 100 realizaciones sea similar al histograma de los datos, y se calcula los variogramas en las direcciones norte y este para las 100 realizaciones, donde se espera que el variograma promedio reproduzca el variograma de los datos en tales direcciones.

Las siguientes imágenes corresponden a los histogramas antes mencionados para leyes de cobre y arsénico.

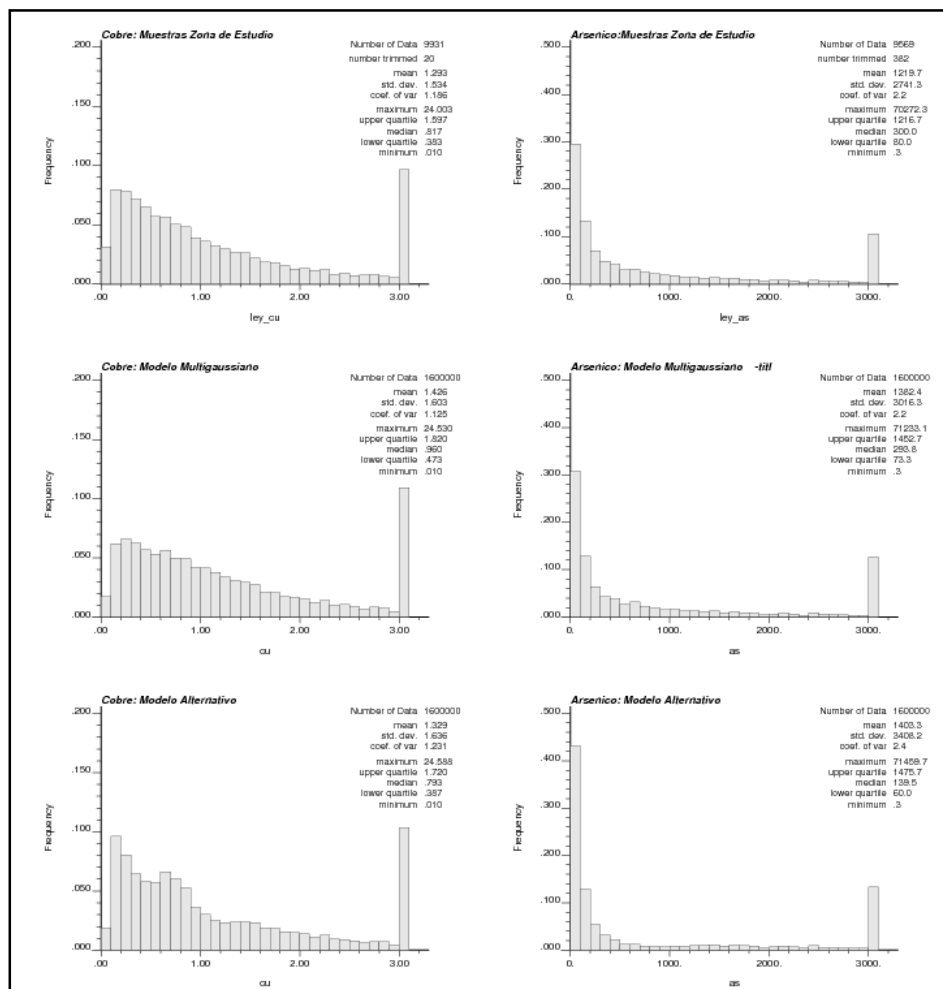


Figura 28: Histogramas de leyes de cobre y arsénico. Arriba datos condicionantes, al centro realizaciones del modelo multigaussiano y abajo realizaciones del modelo alternativo.

Para facilitar la comparación de las distribuciones se utiliza gráficos cuantil a cuantil, los que se muestran en la siguiente figura.

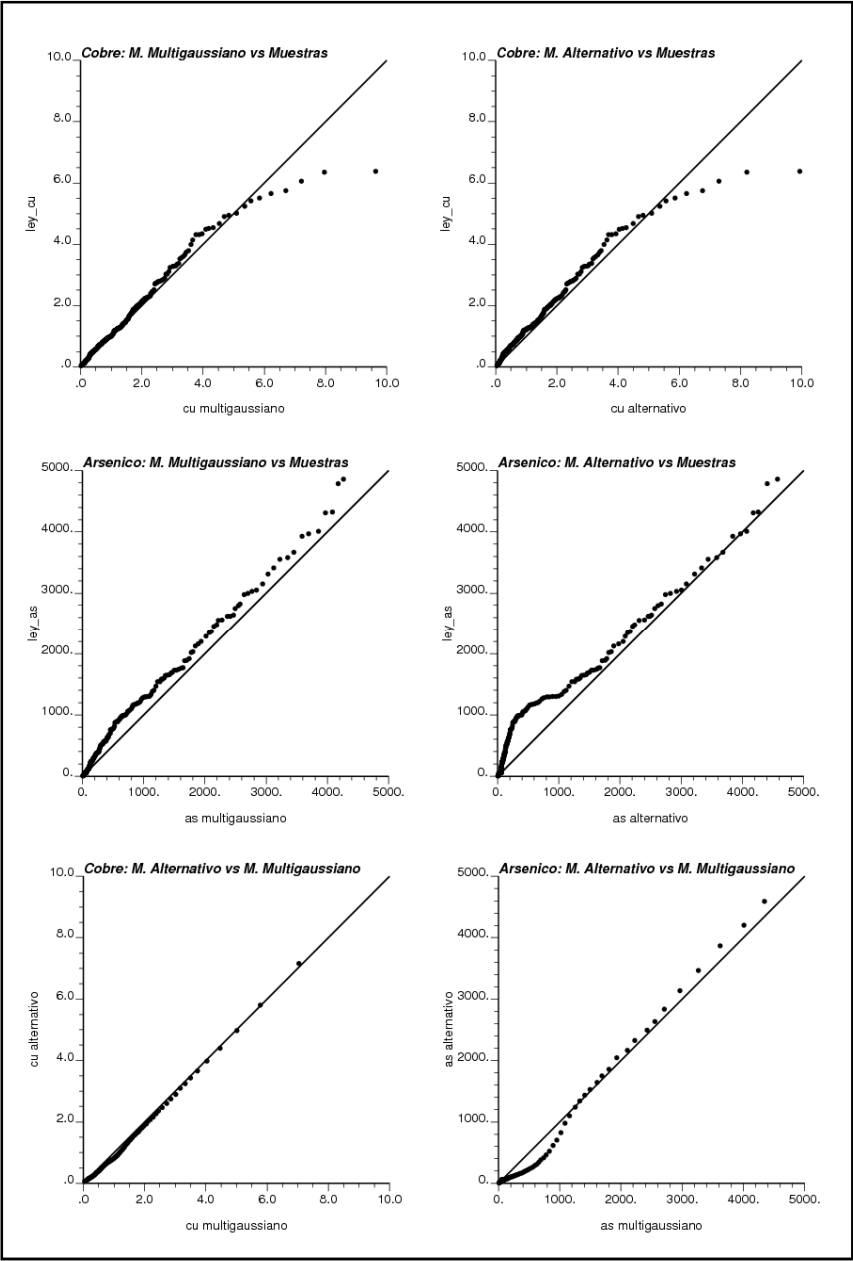


Figura 29: gráficos cuantil a cuantil de simulaciones versus muestras en la zona de estudio.

En el caso del cobre se obtiene que las distribuciones son semejantes para ambos modelos, salvo para leyes mayores a 4%, donde se aprecian ciertas discrepancias. En tanto que en el caso de arsénico, ambos modelos generan distribuciones un tanto disímiles, siendo el modelo alternativo aquel que arroja mayores

discrepancias, principalmente en el rango de ley menor a 1500 ppm. Luego podemos señalar que las simulaciones reproducen de manera aceptable los histogramas de los datos, salvo en el caso del modelo alternativo para arsénico.

En cuanto a los variogramas de las simulaciones, se obtuvo los siguientes resultados para la ley de cobre:

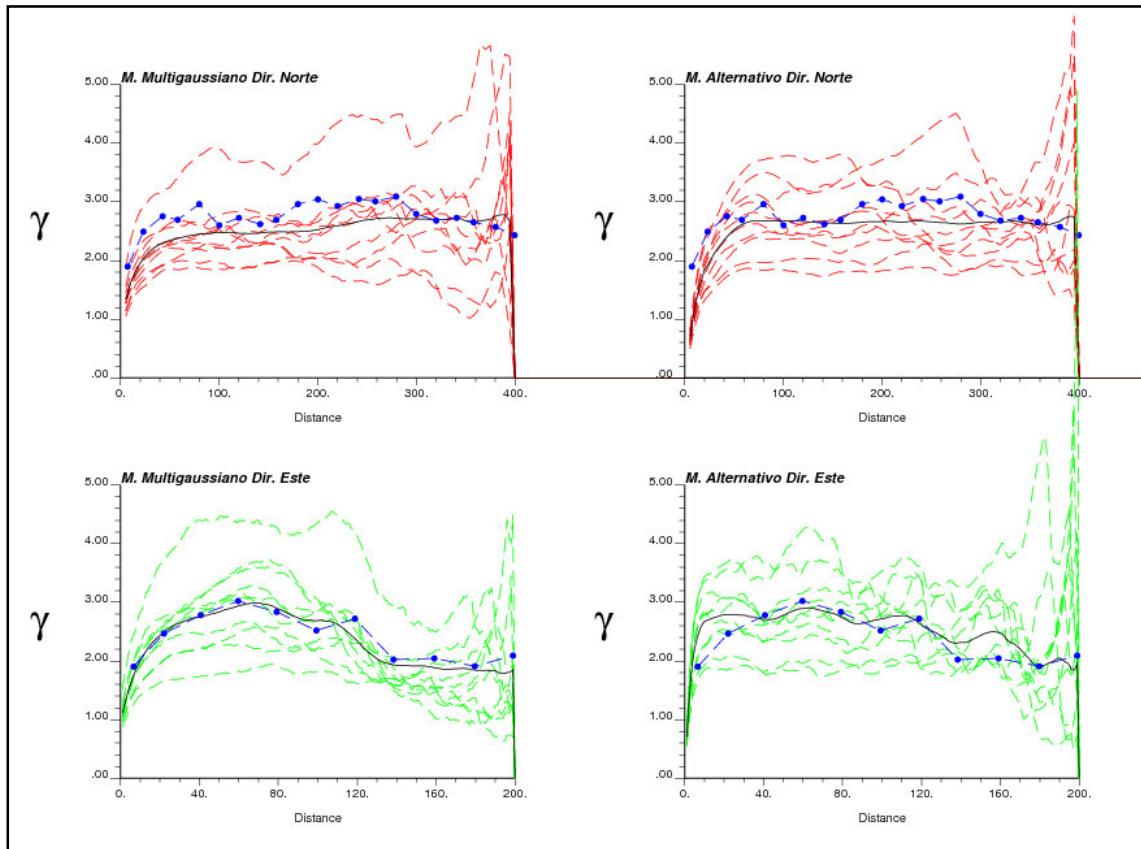


Figura 30: Variogramas de simulaciones vs variogramas experimentales (ley de cobre).

En la imagen se despliega en azul los variogramas experimentales y en negro el variograma promedio de las simulaciones en la dirección correspondiente. Los variogramas de algunas realizaciones se muestran en rojo para la dirección norte y en verde para la dirección este.

Se desprende que en la dirección norte ambos modelos generan un alcance mayor que el experimental, aunque en el caso multigaussiano la diferencia es más importante. Lo contrario ocurre en la dirección este, donde el modelo multigaussiano reproduce fielmente el variograma experimental, en tanto que el

modelo alternativo tiene un alcance demasiado corto. Esto explica la escasa continuidad observada en las simulaciones con dicho modelo y que se traduce en estructuras norte sur de potencia menor a 20 metros.

Finalmente a modo de completar la validación de las cosimulaciones, se construye nubes de correlación entre leyes de cobre y arsénico para la primera realización de cada modelo. Además se construye las nubes de correlación para los valores gaussianos de las realizaciones. Las nubes resultantes se muestran en la siguiente figura:

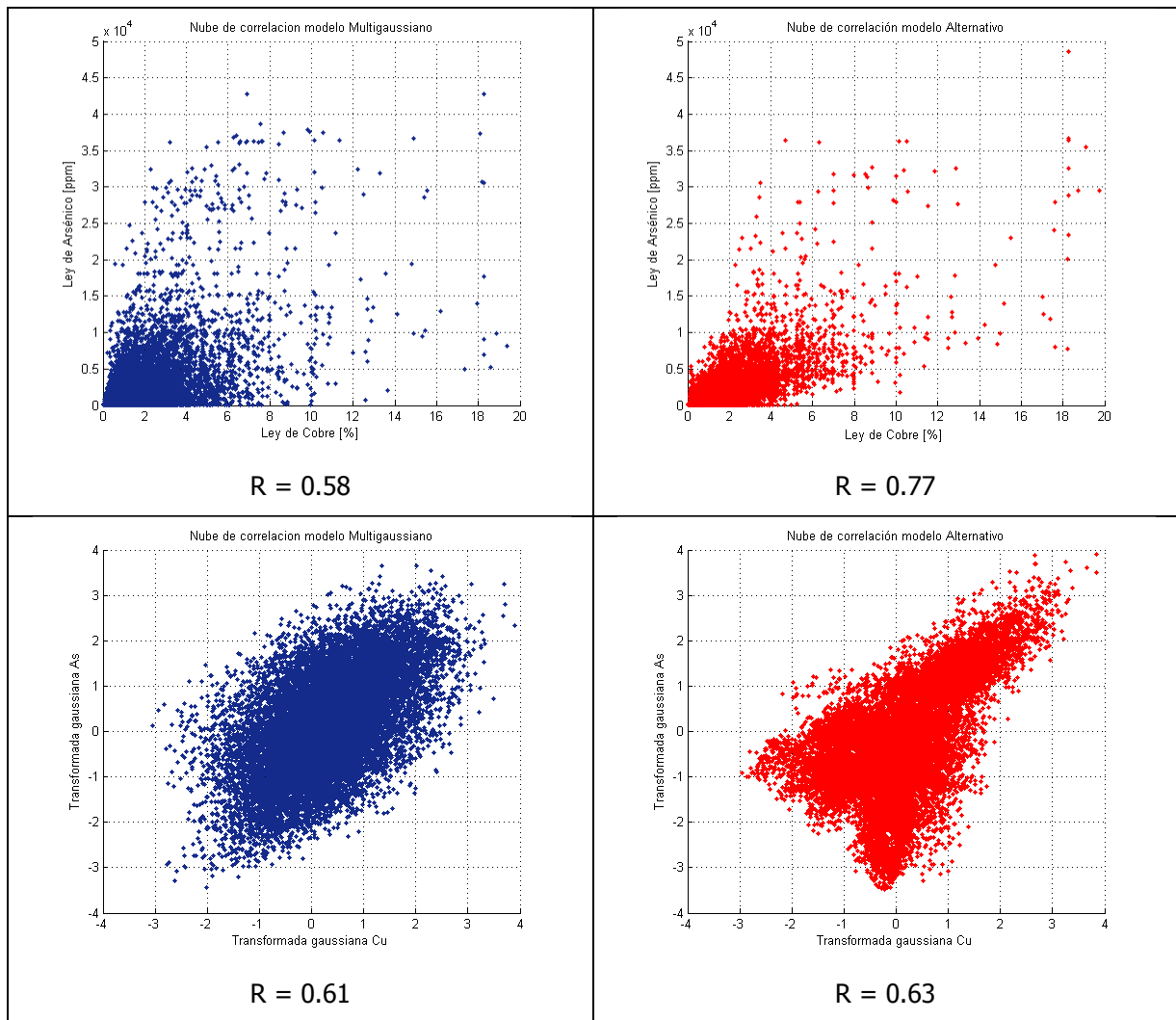


Figura 31: Nubes de correlación para leyes de cobre y arsénico (arriba), y para sus transformadas gaussianas (abajo) resultantes de las simulaciones.

Se obtiene que ninguno de los modelos reproduce exactamente la correlación entre leyes de cobre y arsénico (de acuerdo a la figura 9). Sin embargo, podemos ver que los valores gaussianos obtenidos con el modelo alternativo reproducen las características de las transformadas de los datos, a diferencia del modelo multigaussiano el cual genera una nube elipsoidal en torno a la primera bisectriz.

4.5.3.- Validación por Jack Knife.

Para estudiar la calidad de las realizaciones generadas con cada metodología se realiza una prueba conocida como Jack Knife, la que consiste en eliminar algunos sondajes (de un determinado conjunto de datos) para luego simularlos condicionalmente a las muestras restantes.

En este caso se utiliza 1050 muestras ubicadas entre las cotas 2125 y 2175 metros, donde se selecciona aleatoriamente de acuerdo al número de sondaje, 551 muestras a utilizar como dato y las restantes 499 como incógnitas. Se aplica entonces cada modelo para simular el valor de ley de las muestras consideradas incógnitas.

La posición del conjunto de datos se aprecia en la figura 32, donde se muestra en rojo y azul la ubicación de los datos e incógnitas respectivamente.

Se genera 100 realizaciones con cada modelo, para luego estudiar la calidad de la estimación (media de las realizaciones en cada ubicación) y de la incertidumbre (estudiando intervalos de probabilidad) respecto de los valores reales de las incógnitas.

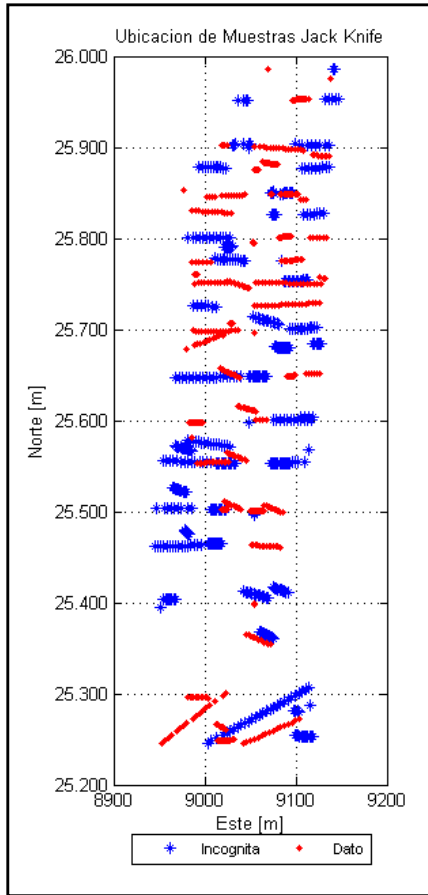


Figura 32: Ubicación de datos (rojo) e incógnitas (azul) para Jack Knife.

- Estimación.

Para estudiar la calidad de las estimaciones realizadas, se construye nubes de correlación entre valor simulado promedio y valor real. Se espera que los valores estimados se agrupen formando una elipse en torno a la diagonal, de modo que el coeficiente de correlación sea cercano a uno. Además se calcula estadísticas sobre el error y el error estandarizado cometido en cada caso. Para éste último se construye histogramas, donde se espera obtener una distribución estándar, es decir, con media cero y varianza unitaria.

Las siguientes tablas corresponden a los resultados de 100 realizaciones utilizando cada modelo. Se muestra además las estadísticas básicas de los valores reales de las incógnitas y de los datos condicionantes.

Jack Knife Cobre	Coef de Correlación	Media	Desviacion Estandar	Minimo	Maximo	N° de Muestras
		%	%	%	%	#
Datos	-	1.459	1.633	0.033	12.877	551
Incognita	1.000	1.246	1.450	0.010	9.893	499
Alternativo	0.422	1.263	0.667	0.212	8.919	499
Multigaussiano	0.420	1.271	0.650	0.226	8.807	499
Zona	-	1.120	1.430	0.010	24.000	9930

Tabla 12: Estadísticas para validación de cobre.

Jack Knife Arsénico	Coef de Correlación	Media	Desviacion Estandar	Minimo	Maximo	N° de Muestras
		ppm	ppm	ppm	ppm	#
Datos	-	1421	2834	5.3	42,267	551
Incognita	1.000	1224	2721	5.7	22,147	499
Alternativo	0.353	1223	900	23.2	6,542	499
Multigaussiano	0.401	1241	900	63.6	6,399	499
Zona	-	1220	2741	0.3	70,272	9569

Tabla 13: Estadísticas para validación de arsénico.

Podemos decir que la media de los valores reales es mejor estimada por el modelo alternativo para ambas variables. En tanto que los dos métodos tienen menor variabilidad que la real de las incógnitas, debido a que se genera valores extremos menores a los esperados.

Por otro lado, se desprende que ambos modelos generan estimaciones poco precisas dado el bajo grado de correlación entre los valores reales y estimados. Sin embargo, este es un efecto esperable dado que existe una alta variabilidad en el depósito, con variogramas de bajo alcance y efecto pepa importante (aprox. 30% de la varianza total). Las nubes de correlación para cada variable y para cada modelo se muestran en la siguiente figura.

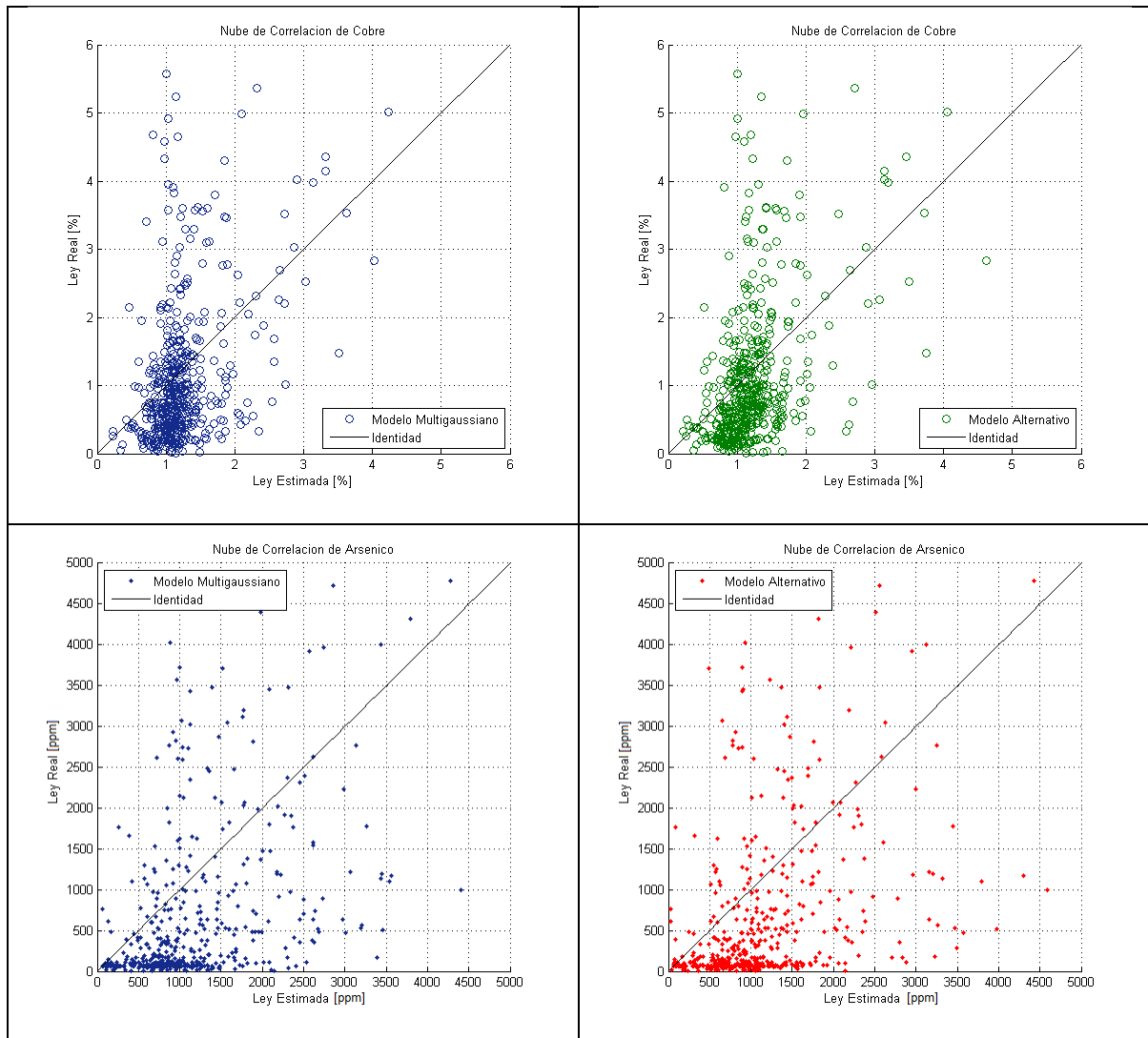


Figura 33: Nubes de correlación entre valores reales y estimados.

El error cometido en la estimación se analiza calculando el error (valor real menos estimado) y el error estandarizado (valor real menos estimado dividido por la desv. estándar) para cada muestra. Las estadísticas se muestran en las siguientes tablas para leyes de cobre y arsénico.

Cobre	Error Absoluto		Error Estándar	
	Alternativo	Multigaussiano	Alternativo	Multigaussiano
Media	-0.025	-0.033	-0.030	-0.054
Desv. Estandar	1.274	1.274	0.890	2.008
Minimo	-7.949	-7.837	-3.025	-5.729
Maximo	8.145	8.434	6.324	21.367

Tabla 14: error de estimación para ley de cobre.

Arsénico	Error Absoluto		Error Estándar	
	Alternativo	Multigaussiano	Alternativo	Multigaussiano
Media	0.962	-16.910	-0.041	-0.383
Desv. Estandar	2546.3	2499.6	0.989	2.461
Minimo	-5248.5	-4051.1	-2.312	-14.280
Maximo	18949.8	19307.4	7.930	17.669

Tabla 15: error de estimación para ley de arsénico.

Se desprende que de acuerdo al error estandarizado la mejor estimación está dada por el modelo alternativo, pues tiene media cercana a cero y desviación estándar más cercana a uno, que el modelo multigaussiano en ambas variables. En tanto que el error no permite concluir a favor de uno u otro modelo.

La figura 34 corresponde a los histogramas del error estándar para cada caso. Se observa que el modelo alternativo tiene una menor dispersión de este error para ambas variables, lo que coincide con lo esperado de acuerdo a las estadísticas.

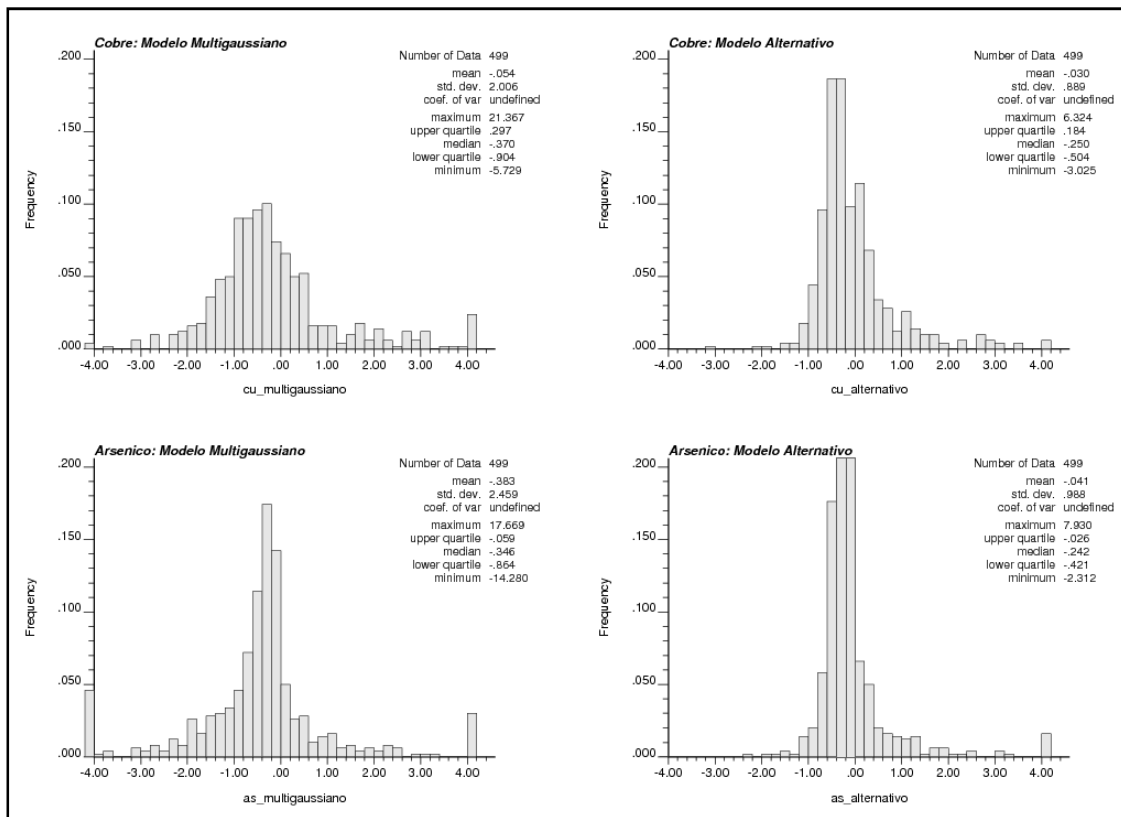


Figura 34: Histogramas de error estandarizado para leyes de cobre y arsénico, para cada modelo.

Se despliega además la dispersión de los errores estandarizados en función del valor estimado. Típicamente un dato se considera bien estimado si tiene un error estándar menor a 2.5 y se espera que la cantidad de datos fuera de este rango sea menor a un 5% del total. Las siguientes imágenes muestran la dispersión de cada caso.

Aunque con los dos modelos se obtiene que la cantidad de datos mal estimados es pequeña, para ambas variables se observa que existe una menor dispersión del error en torno a cero, en las estimaciones obtenidas con el modelo alternativo. En tanto que no se aprecia una relación clara entre el error relativo y la ley estimada.

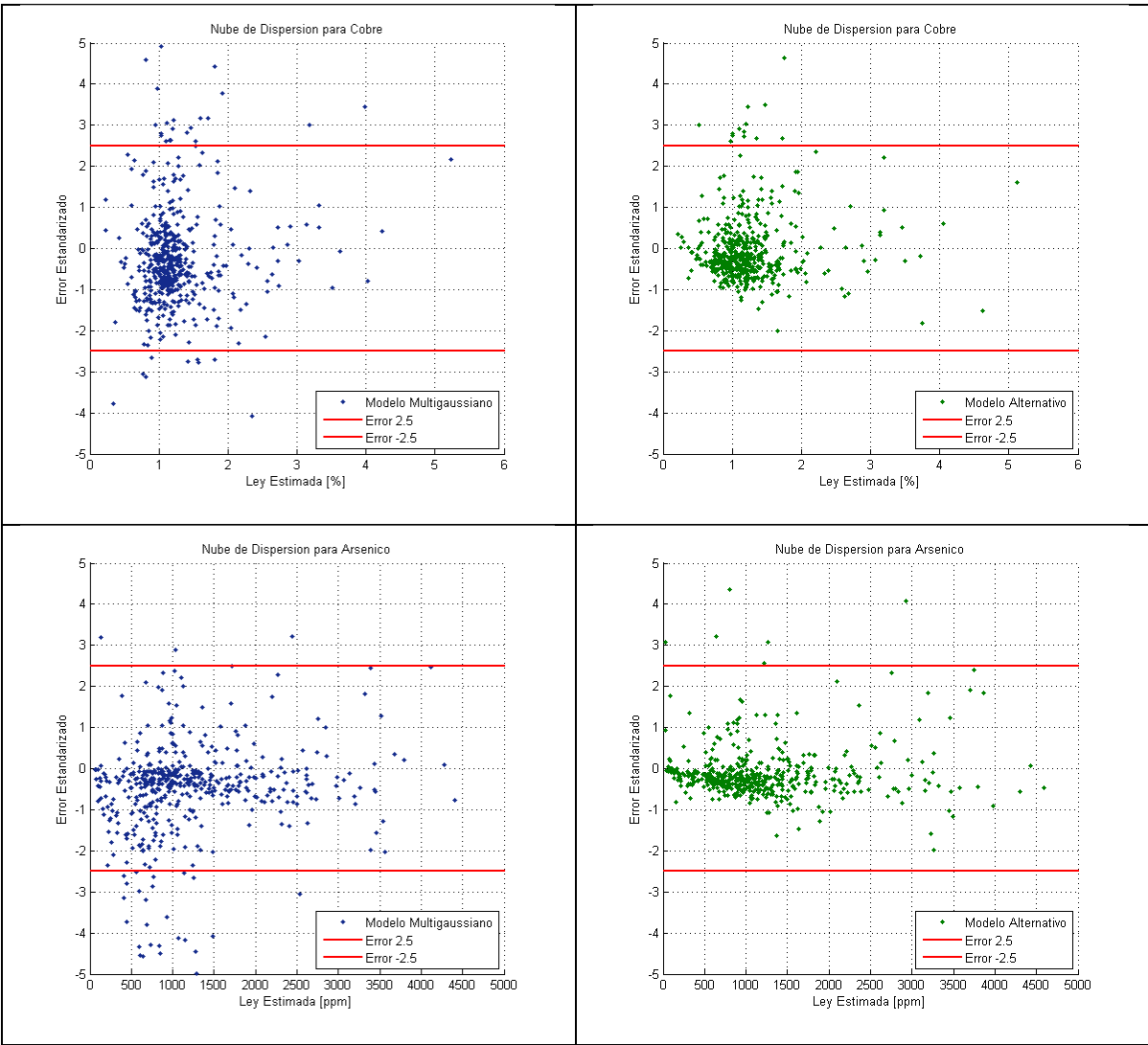


Figura 35: Nube de dispersión del error estándar respecto a la ley estimada.

- Incertidumbre.

Para estudiar la incertidumbre de las simulaciones, se calcula distribuciones locales de probabilidad, las que se espera sean consistentes con los valores reales de las incógnitas.

Para ello se calcula la distribución de probabilidad en cada punto simulado a partir de los valores obtenidos en las 100 realizaciones, y luego se obtiene intervalos de ley con un determinado nivel de confianza. Por ejemplo, se espera que el 10% de los valores reales de las incógnitas pertenezcan al intervalo definido con un nivel de confianza de 10%. Se repite el procedimiento para distintos intervalos de confianza, para luego comparar la proporción obtenida respecto a la proporción esperada.

La incertidumbre del modelo se reproducirá de mejor manera en la medida en que la curva de la proporción obtenida versus la proporción esperada, se ubique en torno a la diagonal. Si la curva se encuentra sobre la diagonal, entonces la incertidumbre es sobreestimada, es decir, los intervalos de confianza son demasiado pequeños. Lo contrario se tiene cuando la curva obtenida se encuentra bajo la diagonal, donde la incertidumbre local es subestimada.

En este caso se obtiene los siguientes gráficos de incertidumbre para intervalos de confianza cada 10%.

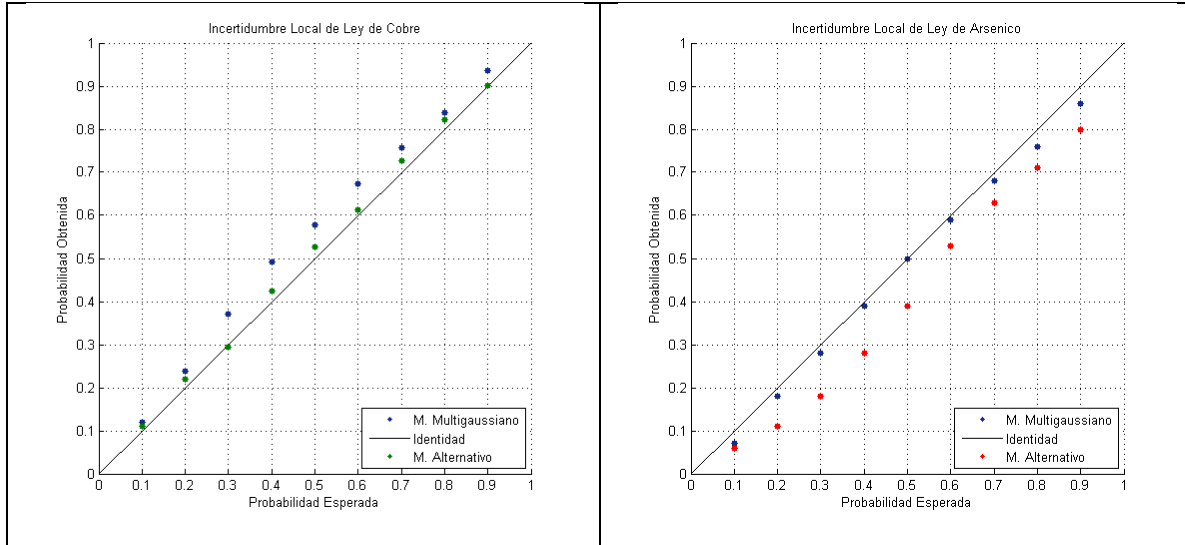


Figura 36: Gráficos de incertidumbre local. Leyes de cobre (izq.) y arsénico (der.)

Se aprecia que el modelo alternativo logra mejorar la reproducción de la incertidumbre para ley de cobre respecto al modelo multigaussiano, aunque tiene el efecto contrario para ley de arsénico, donde el modelo multigaussiano logra mejores resultados. La siguiente tabla muestra la diferencia entre proporciones obtenidas y esperadas, presentadas en la imagen anterior.

Proporción Esperada	Obtenida (ley de cobre)		Obtenida (ley de arsénico)	
	Multigaussiano	Alternativo	Multigaussiano	Alternativo
0.90	0.036	0.002	-0.04	-0.10
0.80	0.038	0.022	-0.04	-0.09
0.70	0.058	0.027	-0.02	-0.07
0.60	0.073	0.013	-0.01	-0.07
0.50	0.077	0.027	0.00	-0.11
0.40	0.091	0.025	-0.01	-0.12
0.30	0.071	-0.005	-0.02	-0.12
0.20	0.038	0.020	-0.02	-0.09
0.10	0.020	0.010	-0.03	-0.04

Tabla 16: Diferencia entre proporción obtenida y esperada.

5.- CONCLUSIONES.

La distribución de leyes minerales de un yacimiento, estimada utilizando modelos convencionales de simulación, puede resultar inadecuada en particular cuando las leyes presentan patrones como asimetrías en la correlación espacial de los variogramas de indicadores con respecto al umbral mediano.

En el caso particular del yacimiento en estudio, se tiene que los datos no cumplen cabalmente con las hipótesis del modelo multigaussiano, por lo que su aplicación genera un modelo que no necesariamente refleja el real comportamiento de leyes en el depósito, ni la correlación espacial entre leyes de cobre y arsénico.

El modelo alternativo propuesto, definido por el máximo de dos funciones aleatorias multigaussianas independientes, permite reproducir tales características estructurales de los datos, generando modelos que difieren de manera importante con el modelo convencional, particularmente en lo que se refiere a la estructura y forma de la mineralización.

El modelo alternativo genera estructuras norte-sur de baja potencia (menor a 15 metros), con cambios abruptos de ley en la dirección este-oeste. En tanto que el modelo multigaussiano, si bien genera una estructuración norte-sur, tiene mayor continuidad en dirección este-oeste, con estructuras ovaladas de mayor potencia (de hasta 30 metros) y dispersión o diseminación de ley; tales diferencias estructurales implican variaciones en el cálculo de recursos recuperables, que se acentúan al aumentar el tamaño de soporte.

Más aún, las diferencias no se limitan sólo a la forma de la mineralización, sino que también en los valores estimados y la incertidumbre en los valores reales. La etapa de validación mediante jack-knife, indica que el modelo alternativo realiza una mejor estimación para leyes de cobre y arsénico, pues entrega leyes medias simuladas y errores estandarizados concordantes con los valores reales de las muestras consideradas como incógnitas.

Sin embargo, al evaluar la incertidumbre local de las realizaciones, se tiene que el modelo alternativo sólo logra mejorar la reproducción de la incertidumbre para la ley de cobre, pues en el caso de la ley de arsénico es el modelo multigaussiano el que tiene un mejor desempeño. Esto último se explica con la comparación de las distribuciones de ley reales y simuladas, donde el modelo alternativo genera un histograma que difiere de manera importante respecto al histograma de los datos de arsénico, lo que nos

hace pensar que el modelo alternativo es útil para el caso de las leyes de cobre, pero podría no ser adecuado para las leyes de arsénico.

Por otro lado, al estudiar la incertidumbre de los modelos (calculando la probabilidad conjunta de superar 0.5% de ley de cobre con la restricción de que la ley de arsénico sea menor a 200ppm), se obtiene globalmente las mismas zonas de alta probabilidad de ocurrencia, aunque existen diferencias considerables respecto al grado de certeza de cada uno. Así, el modelo alternativo arroja zonas de mayor tamaño con probabilidad cercana a 1. Sin embargo, el efecto contrario se observa al aumentar el tamaño de soporte de bloques, donde las zonas con alta probabilidad de cumplir las restricciones es más amplia para el modelo multigaussiano.

Al analizar las curvas tonelaje ley, se tiene que para dos realizaciones de similar ley media a soporte puntual, se producen diferencias no menores al rebloquear a un mayor tamaño de bloques, ya sea para la curva de tonelaje o de ley media, principalmente en el caso de cobre. En tanto que en el caso de la curva tonelaje ley promedio de todas las realizaciones, con tamaño de bloques de $10 \times 20 \times 5$ [m³], se obtienen diferencias de aproximadamente 1,000 toneladas de cobre fino para distintas leyes de corte, aunque para arsénico las diferencias son menores.

Esto se debe a que el modelo multigaussiano entrega una distribución diseminada de leyes, por lo que el rebloqueo produce "dilución" entre altas y bajas leyes, en tanto que el modelo alternativo entrega estructuras bien definidas en las altas leyes (mayores a 3%) evitando el efecto de diseminación.

Luego, la decisión del modelo a utilizar es crucial dado que entregan distintas cantidades de recursos recuperables, los que además se distribuyen de distinta manera de acuerdo a la forma de las estructuras mineralizadas que generan. Tales diferencias no son irrelevantes, dado que la cantidad de recursos calculados inciden en etapas posteriores del proyecto, como la planificación.

Finalmente, podemos señalar que la inferencia de parámetros del modelo alternativo, consiste básicamente en un proceso de prueba y error, por lo que se trata de una tarea compleja, principalmente debido al gran número de grados de libertad que posee el modelo, los que aumentan al incrementar en número de funciones aleatorias gaussianas o variables en estudio. Entre éstos se encuentran las medias, mesetas, efecto pepa, y estructuras anidadas de cada una de ellas.

Por otro lado, una desventaja del modelo alternativo, está dada por el tiempo de cálculo que requiere para generar simulaciones condicionales, pues la etapa de inicialización de datos condicionantes corresponde a un proceso iterativo, que necesita de un gran número iteraciones por cada dato (al menos 100). Luego, si el número de datos condicionantes es grande, el tiempo necesario para el cálculo de las realizaciones es relevante.

Finalmente, podemos señalar que el modelo alternativo es útil pues ha probado reproducir la correlación espacial entre leyes de cobre y arsénico, además de generar estimaciones más precisas que el modelo multigaussiano. Sin embargo, los puntos anteriores corresponden a focos de trabajo futuro.

La etapa de inferencia resulta engorrosa y la influencia de los distintos parámetros en el ajuste de los variogramas de indicadores no es del todo clara. Incorporar un mayor número de funciones gaussianas podría mejorar el ajuste, pero requiere de mayor trabajo al aumentar el número de parámetros del modelo. Un procedimiento claro sería de gran ayuda para abordar esta etapa. Del mismo modo, el tiempo de cálculo es considerable si los datos condicionantes son numerosos, por lo que mejoras en el algoritmo serían de gran ayuda para disminuir dichos tiempos.

6.- BIBLIOGRAFÍA.

- [1] Chilès JP, Delfiner P (1999) Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty. Wiley, New York, 695 p.
- [2] Deutsch CV, Journel AG (1998) GSLIB: Geostatistical Software Library and User's Guide, 2° edn. Oxford University Press, New York, 369 p.
- [3] Emery X. (2000). Geoestadística lineal. Departamento de Ingeniería de Minas, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, 411 p.
- [4] Emery X (2007) Using the Gibbs sampler for conditional simulation of Gaussian-based random fields. Computers & Geosciences, 33(4):522-537.
- [5] Emery X, Lantuéjoul C (2006) TBSIM: A computer program for conditional simulation of three-dimensional Gaussian random fields via the turning bands method. Computers & Geosciences, 32(10):1615-1628.
- [6] Emery X, Kremer F (2008) A Survey of Random Field Models for Simulating Mineral Grades. VIIIth International Geostatistics Congress GEOSTATS 2008, Santiago.
- [7] Goovaerts P (1997) Geostatistics for Natural Resources Evaluation. Oxford University Press, New York, 480 p.
- [8] Journel AG, Huijbregts CJ (1978) Mining Geostatistics. Academic Press, London, 600p.
- [9] Lantuéjoul C (2002) Geostatistical Simulation: Models and Algorithms. Springer, Berlin, 256 p.

7.- ANEXOS.

7.1. Método de Inferencia de Parámetros.

Considerando el modelo alternativo definido como el máximo (o mínimo) de una serie de funciones aleatorias multigaussianas, la principal dificultad del modelo radica en la selección adecuada de los numerosos parámetros de ajuste del método, como son: el número de funciones aleatorias, sus medias y funciones de covarianza (definida por el efecto pepa, mesetas, alcances y estructuras anidadas por función) simples y cruzadas.

De acuerdo a lo anterior, se propone como etapa inicial calcular los variogramas de indicadores isótropos, simples y cruzados de las muestras, y seleccionar un modelo que, a priori, permitiría ajustar las curvas experimentales.

Si se observa que el tercer cuartil posee mayor continuidad que el primero, se recomienda usar un modelo dado por el máximo de un conjunto de funciones aleatorias gaussianas. En caso contrario, se puede utilizar el modelo dual, dado por el mínimo de las funciones gaussianas.

A partir de los variogramas isótropos es posible definir un modelo alternativo que utilizaremos como base para luego ajustar los variogramas de indicadores en las direcciones principales de anisotropía.

En el caso particular de este estudio, la mayor continuidad se presenta en el primer cuartil, por lo que en primera instancia se utilizó el modelo dual, sin embargo, la dificultad para lograr un buen ajuste se tradujo en un cambio al modelo dado por el máximo de las funciones gaussianas (acorde a la ecuación 1).

Como primeros parámetros a definir, es posible establecer las medias y el efecto pepa de cada función. Respecto a las medias de las funciones, se tiene que el grado de influencia de éstas sobre los variogramas teóricos tiene relación con la diferencia relativa entre ellas, más que con el valor de ellas en sí. Se decide entonces utilizar una media de cero para la primera gaussiana de ambas variables (T_1 para cobre y T_2 para arsénico) y luego se modifica las medias de T'_1 y T'_2 .

Posteriormente se trabaja con el tipo y número de estructuras anidadas, así como con la meseta y alcance asociado a cada una de ellas. En este caso el parámetro más relevante es el alcance de las estructuras, ya que permite controlar la asimetría entre variogramas de indicadores de cuartiles. Por esta razón, se

decide utilizar el conjunto (T_1, T_2) con alcance corto y el otro conjunto el conjunto (T'_1, T'_2) con un alcance grande.

Por último y una vez que se tienen los alcances para cada una de las direcciones, y cada una de las estructuras, se corrigen aquellos parámetros que se hayan modificado en el camino, priorizando el ajuste global por sobre los ajustes parciales.

7.2. Algoritmo de Co-simulación del Modelo Alternativo.

El modelo propuesto se define del siguiente modo. Consideremos dos conjuntos independientes $\{T_1, T_2\}$ y $\{T'_1, T'_2\}$ de funciones aleatorias gaussianas estacionarias, y definamos Y_1 e Y_2 como sigue:

$$\begin{aligned} Y_1(x) &= \max\{T_1(x), T'_1(x)\} \\ Y_2(x) &= \max\{T_2(x), T'_2(x)\} \end{aligned} \quad (1)$$

Donde Y_1 e Y_2 corresponden a funciones aleatorias que representan (previo una anamorfosis) a las leyes de cobre y arsénico respectivamente. Las funciones de distribución acumulada univariable y bivariable de Y_1 e Y_2 son los productos de aquellas de T_1, T_2, T'_1, T'_2 , es decir:

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{y} \in \mathbf{R}, \text{Prob}\{Y_1(\mathbf{x}) < \mathbf{y}\} &= \text{Prob}\{T_1(\mathbf{x}) < \mathbf{y}\} \text{Prob}\{T'_1(\mathbf{x}) < \mathbf{y}\} \\ \forall \mathbf{y} \in \mathbf{R}, \text{Prob}\{Y_2(\mathbf{x}) < \mathbf{y}\} &= \text{Prob}\{T_2(\mathbf{x}) < \mathbf{y}\} \text{Prob}\{T'_2(\mathbf{x}) < \mathbf{y}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{y}, \mathbf{y}' \in \mathbf{R}, \text{Prob}\{Y_1(\mathbf{x} + \mathbf{h}) < \mathbf{y}, Y_1(\mathbf{x}) < \mathbf{y}'\} \\ = \text{Prob}\{T_1(\mathbf{x} + \mathbf{h}) < \mathbf{y}, T_1(\mathbf{x}) < \mathbf{y}'\} \text{Prob}\{T'_1(\mathbf{x} + \mathbf{h}) < \mathbf{y}, T'_1(\mathbf{x}) < \mathbf{y}'\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{y}, \mathbf{y}' \in \mathbf{R}, \text{Prob}\{Y_2(\mathbf{x} + \mathbf{h}) < \mathbf{y}, Y_2(\mathbf{x}) < \mathbf{y}'\} \\ = \text{Prob}\{T_2(\mathbf{x} + \mathbf{h}) < \mathbf{y}, T_2(\mathbf{x}) < \mathbf{y}'\} \text{Prob}\{T'_2(\mathbf{x} + \mathbf{h}) < \mathbf{y}, T'_2(\mathbf{x}) < \mathbf{y}'\} \end{aligned}$$

Estas identidades son útiles para inferir los parámetros del modelo, es decir, media, varianza y covarianza de cada función aleatoria gaussiana, pues permiten determinar las covarianzas (variogramas) de indicadores de Y_1 e Y_2 como función de las covarianzas (variogramas) de T_1, T_2, T'_1, T'_2 . En este caso, no hay razón para que la correlación espacial de indicadores de Y_1 e Y_2 sea simétrica respecto a la mediana.

Luego, se puede construir simulaciones condicionales de las funciones aleatorias Y_1 e Y_2 , de acuerdo a los siguientes pasos:

Sea $x_A = \{x_\alpha, \alpha = 1 \dots n\}$ el conjunto de posiciones de las muestras, $\mathbf{y}_{1A} = \{y_{1\alpha}, \alpha = 1 \dots n\}$ y $\mathbf{y}_{2A} = \{y_{2\alpha}, \alpha = 1 \dots n\}$ los valores de las variables Y_1 e Y_2 en tales ubicaciones y $x'_i = \{x'_i, i = 1 \dots m\}$ las posiciones donde se desea estimar las variables. El algoritmo consiste en:

1. Co-simular T_1, T_2, T'_1, T'_2 en las ubicaciones de los datos x_A , condicionalmente a $Y_1(x_A) = y_{1A}$ y $Y_2(x_A) = y_{2A}$.
2. Co-simular T_1, T_2, T'_1, T'_2 en las posiciones x'_i , condicionalmente a los valores obtenidos en el paso anterior. Se trata de una cosimulación de funciones aleatorias gaussianas, por lo que se puede realizar mediante algoritmos como: simulación secuencial, bandas rotantes, etc.
3. Entregar el valor de Y_1 e Y_2 , de acuerdo a la ecuación 1.

De las etapas anteriores el primer paso es el más complejo, donde se utiliza un algoritmo iterativo basado en el muestreador de Gibbs. En este, se inicializa el muestreador en las posiciones de las muestras (x_A) con valores arbitrarios ($\{t_{1A}, t_{2A}, t'_{1A}, t'_{2A}\}$) que respetan la ecuación 1. Luego, cada iteración considera los siguientes pasos:

- a) Seleccionar aleatoriamente un índice α en A, y definir el subconjunto $B = A - \{\alpha\}$.
- b) Condicionalmente a $\{T_1(x_B), T_2(x_B), T'_1(x_B), T'_2(x_B)\}$, $\{T_1(x_\alpha), T_2(x_\alpha)\}$ es un vector Gaussiano de esperanza igual su estimador de co-kriging simple a partir de $\{T_1(x_B), T_2(x_B)\}$ y matriz de varianza-covarianza igual a la matriz de varianza-covarianza de los errores de co-kriging simple. Del mismo modo, $\{T'_1(x_\alpha), T'_2(x_\alpha)\}$ es un vector Gaussiano de esperanza igual a su estimador de co-kriging simple a partir de $\{T'_1(x_B), T'_2(x_B)\}$ y matriz de varianza-covarianza igual a la matriz de varianza-covarianza de los errores de co-kriging simple.
- c) Calcular las verosimilitudes asociadas a las cuatro situaciones posibles en el sitio x_α :

$$\begin{aligned}
p_{12} &= \text{Prob}\{T_1(\mathbf{x}_\alpha) \equiv y_1^\alpha, T_2(\mathbf{x}_\alpha) \equiv y_2^\alpha, T_1'(\mathbf{x}_\alpha) < y_1^\alpha, T_2'(\mathbf{x}_\alpha) < y_2^\alpha\} \\
p_{12'} &= \text{Prob}\{T_1(\mathbf{x}_\alpha) \equiv y_1^\alpha, T_2(\mathbf{x}_\alpha) < y_2^\alpha, T_1'(\mathbf{x}_\alpha) < y_1^\alpha, T_2'(\mathbf{x}_\alpha) \equiv y_2^\alpha\} \\
p_{1'2} &= \text{Prob}\{T_1(\mathbf{x}_\alpha) < y_1^\alpha, T_2(\mathbf{x}_\alpha) \equiv y_2^\alpha, T_1'(\mathbf{x}_\alpha) \equiv y_1^\alpha, T_2'(\mathbf{x}_\alpha) < y_2^\alpha\} \\
p_{1'2'} &= \text{Prob}\{T_1(\mathbf{x}_\alpha) < y_1^\alpha, T_2(\mathbf{x}_\alpha) < y_2^\alpha, T_1'(\mathbf{x}_\alpha) \equiv y_1^\alpha, T_2'(\mathbf{x}_\alpha) \equiv y_2^\alpha\}
\end{aligned}$$

d) Simular una de las cuatro alternativas anteriores con una distribución de probabilidad proporcional a $\{p_{12}, p_{12'}, p_{1'2}, p_{1'2'}\}$. De donde se obtendrá dos de los cuatro valores definidos por igualdades del tipo $T_k(\mathbf{x}_\alpha) = y_k^\alpha$ o $T_k'(\mathbf{x}_\alpha) = y_k^\alpha$, en tanto que los dos valores restantes se simularán según la distribución condicional definida en el paso b y condicionada además (por aceptación y rechazo) a desigualdades del tipo $T_j(\mathbf{x}_\alpha) < y_j^\alpha$ o $T_j'(\mathbf{x}_\alpha) < y_j^\alpha$.

e) Volver al paso (a) e iterar numerosas veces.

Para la simulación de la etapa (c), el cálculo de las verosimilitudes se logra como sigue.

Sea G_{T_1, T_2} la función de distribución bivariable de T_1 y T_2 (distribución bigaussiana de esperanza igual al estimador de co-kriging simple $\{T_1^*, T_2^*\}$ y matriz de varianza-covarianza igual a la matriz de varianza-covarianza de los errores de co-kriging simple). De igual forma se define $G_{T_1', T_2'}$ la función de distribución bivariable de T_1' y T_2' . Las probabilidades se calculan como:

$$\begin{aligned}
p_{12} &\equiv \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} G_{T_1 T_2}(y_{1\alpha}, y_{2\alpha}) \cdot G_{T_1' T_2'}(y_{1\alpha}, y_{2\alpha}) \\
p_{12'} &\equiv \frac{\partial}{\partial y_1} G_{T_1 T_2}(y_{1\alpha}, y_{2\alpha}) \cdot \frac{\partial}{\partial y_2} G_{T_1' T_2'}(y_{1\alpha}, y_{2\alpha}) \\
p_{1'2} &\equiv \frac{\partial}{\partial y_2} G_{T_1 T_2}(y_{1\alpha}, y_{2\alpha}) \cdot \frac{\partial}{\partial y_1} G_{T_1' T_2'}(y_{1\alpha}, y_{2\alpha}) \\
p_{1'2'} &\equiv G_{T_1 T_2}(y_{1\alpha}, y_{2\alpha}) \cdot \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} G_{T_1' T_2'}(y_{1\alpha}, y_{2\alpha})
\end{aligned}$$

Los valores numéricos se pueden obtener mediante desarrollos de las funciones de distribución bivariable en polinomios de Hermite, truncados a un orden alto. [1]

7.3. Validación de la Distribución Multigaussiana.

Para verificar si el modelo multigaussiano se ajusta a los datos de la zona de estudio, se realiza los siguientes tests de bigaussianidad.

7.3.1.- Nubes de Correlación Diferida.

Una nube de correlación diferida muestra el valor gaussiano de pares de puntos separados por una distancia h definida por el usuario. Se espera que para distancias pequeñas, la nube de puntos agrupe en torno a la diagonal formando una elipse "delgada". En tanto que al aumentar la distancia la nube de puntos debiera formar un círculo. En este caso, la nube se graficó para distancias de 15 y 50 metros, en las transformadas gaussianas de ambas variables.

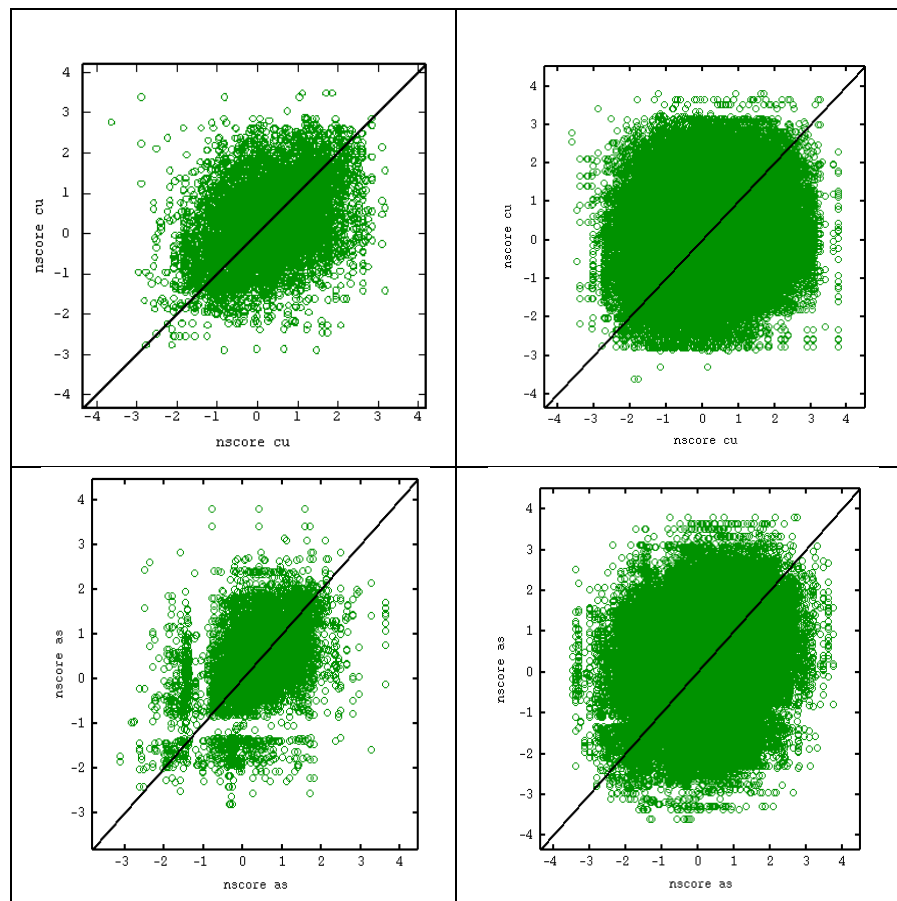


Figura 37: Nubes de correlación diferida para transformadas de leyes de cobre (arriba) y arsénico (abajo), para distancias de 15 (izq.) y 50 (der.) metros.

Se observa que ninguno de los casos cumple satisfactoriamente con lo esperado. Pues si bien para distancias pequeñas la nube de puntos se agrupa en torno a la diagonal, su forma difiere de una elipse. En tanto que para distancias mayores la nube parece más cuadrada que circular. En el caso de arsénico a distancias cortas, llama la atención el despoblamiento de pares de puntos con valor aprox. -1, lo que se debe probablemente a la ausencia de pares de puntos con tales valores a dicha distancia.

7.3.2.- Variograma vs. Madograma.

Otro test consiste en calcular el cociente entre la raíz del variograma y el madograma. Se espera que, independientemente de la distancia de cálculo, este cociente sea constante e igual a raíz de Pi (aprox. 1.77). La figura siguiente muestra este cálculo para los variogramas en las direcciones este (en rojo), norte (en verde) y vertical (en negro), de las transformadas gaussianas de leyes de cobre y arsénico.

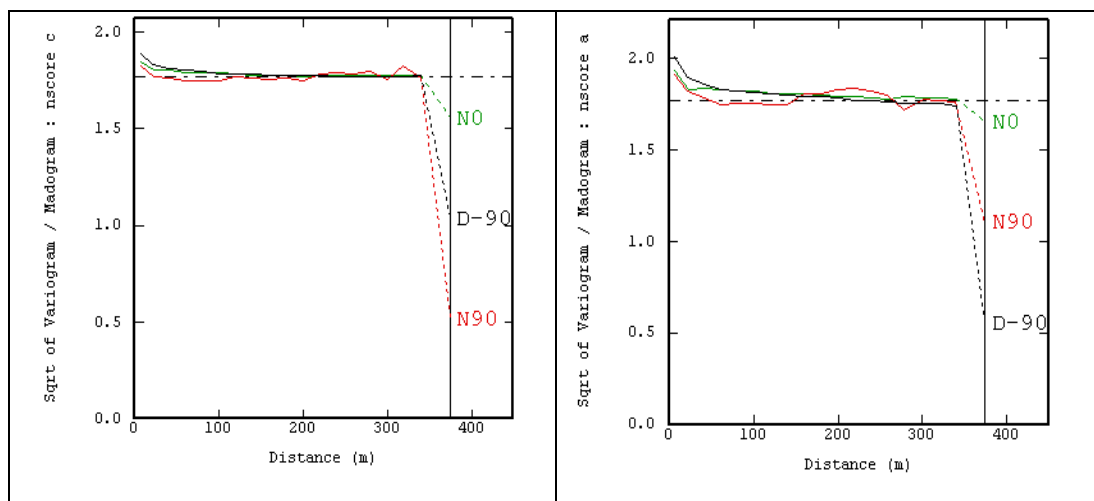


Figura 38: Raíz de variograma sobre madograma para datos gaussianos de cobre y arsénico.

Se observa que la transformada de ley de cobre cumple con la condición requerida para todos los variogramas, salvo para distancias pequeñas, en tanto que la transformada de ley de arsénico lo hace en menor medida, para distancias mayores a 150 metros.

7.3.3.- Variogramas de Indicadores.

Otro test consiste en estudiar los variogramas de indicadores de las transformadas gaussianas. La variable indicador es una variable binaria definida por un valor umbral o ley de corte, que es impuesta por el usuario.

Considerando la simetría de la distribución bigaussiana, se espera, por ejemplo, que los variogramas del 1er y 3er cuartil sean similares. La figura siguiente corresponde a los variogramas de indicadores de las leyes de cobre y arsénico, para el 1er y 3er cuartil. Se observa que en ninguno de los casos la simetría se cumple, lo que refleja que la estructura de los datos es distinta para bajas y altas leyes. Esta característica de los datos no es menor, ya que indica que la hipótesis de multigaussianidad no se cumple a cabalidad y, por lo tanto, el modelo multigaussiano puede no ser adecuado.

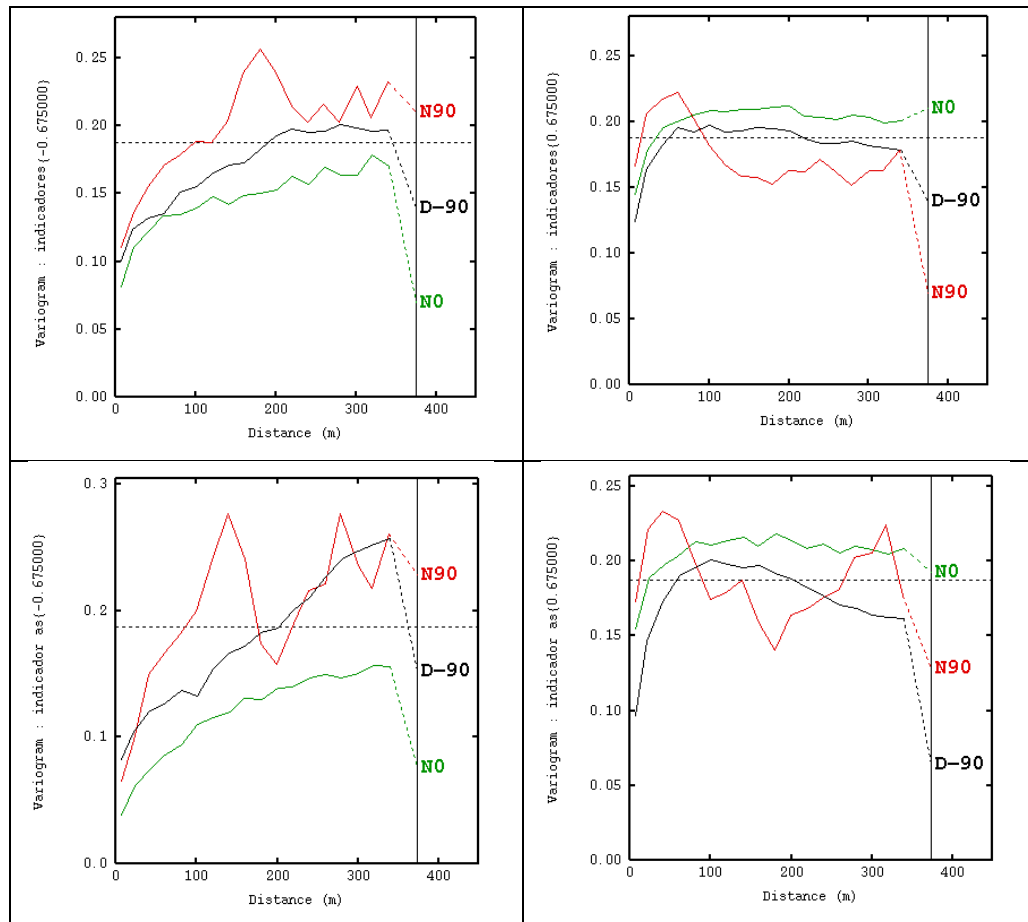


Figura 38: Variogramas de indicadores para el 1er (izq.) y 3er cuartil (der.) para leyes de cobre (arriba) y arsénico (abajo).

7.3.4.- Correlación entre Variables.

Al representar la distribución bivariable de las transformadas gaussianas de leyes de cobre y arsénico se espera que la nube de puntos se agrupe en torno a la primera bisectriz, tomando la forma de una elipse. Se observa en la figura 39 que esta condición no se cumple (la nube tiene más bien una forma triangular), por lo que el modelo multigaussiano también falla en representar la dependencia cruzada entre variables.

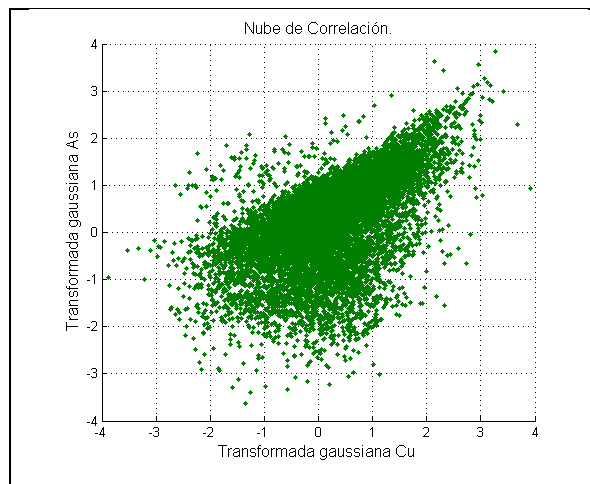


Figura 39: Nube de correlación entre transformadas gaussianas de cobre y arsénico.

Se puede concluir que el modelo multigaussiano no es plenamente satisfactorio para ninguna de las dos variables.

7.4. Análisis Variográfico Modelo Multigaussiano.

7.4.1.- Variogramas de Transformadas Gaussianas.

La búsqueda de anisotropías se realiza a partir de mapas variográficos, los que se calcularon para leyes de cobre y arsénico considerando 18 direcciones con 10 pasos de 30 metros, y una tolerancia de un paso en distancia y 10° en ángulo. Los mapas resultantes se presentan en la siguiente figura, donde el eje norte se muestra en verde, el eje este en rojo y la vertical en azul.

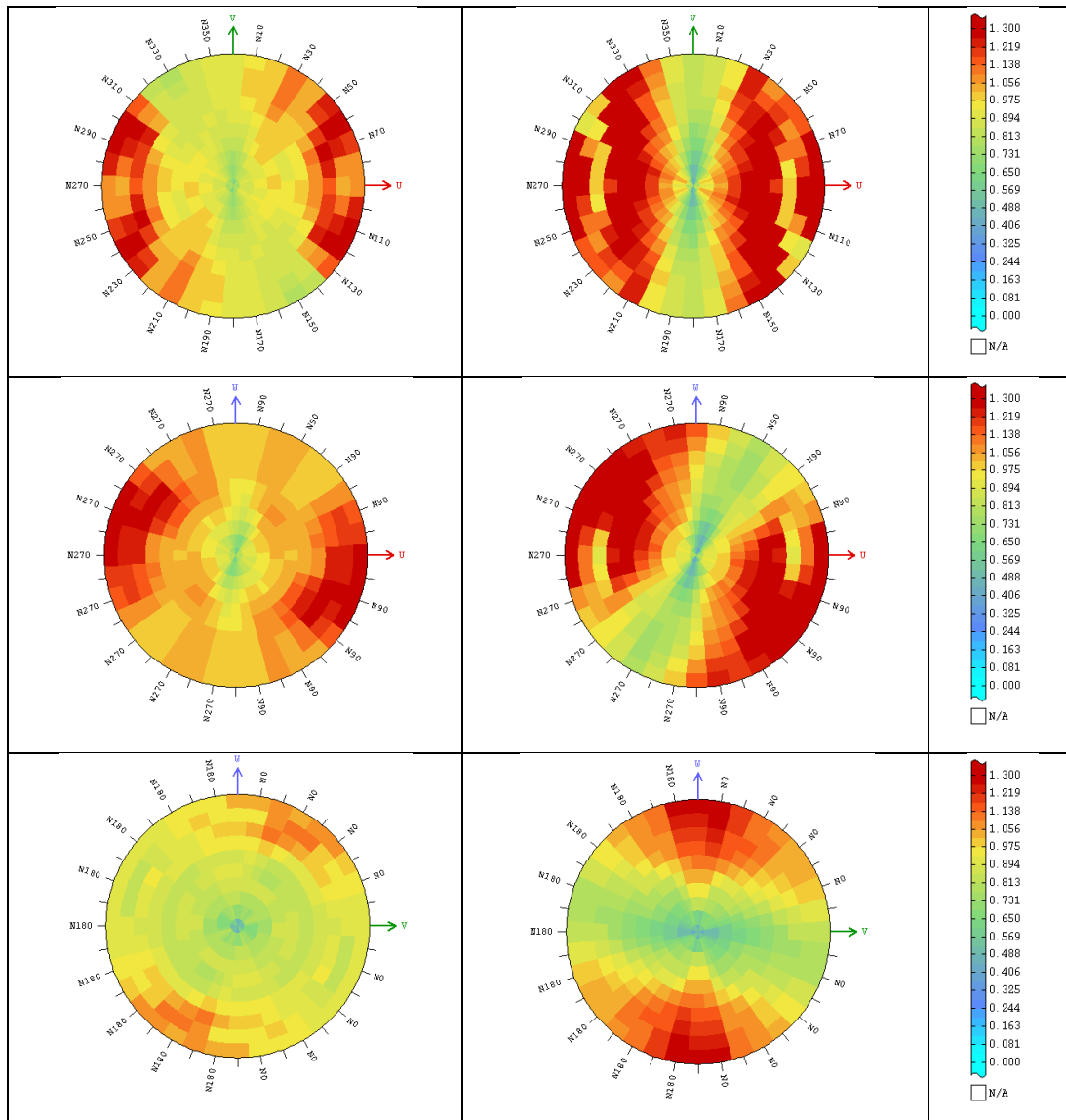


Figura 40: Mapas variográficos para datos gaussianos de leyes de cobre y arsénico, se muestra: arriba el plano norte-este, al centro el plano vertical-este y abajo el plano vertical-norte.

La imagen superior corresponde al plano horizontal: se aprecia que para ambas variables la dirección norte presenta una mayor continuidad, y que ésta se pierde en dirección este. Las imágenes al centro muestran el plano formado por las direcciones este y vertical. En estas se observa que la dirección de mayor continuidad no es la vertical sino que se encuentra rotada aproximadamente 20° hacia el este. Finalmente las imágenes inferiores muestran el plano de las direcciones norte y elevación: en este caso se coincide con que existen mayores alcances hacia el norte y no se requiere una rotación de ejes. La figura 41 muestra el plano de referencia, de acuerdo a la rotación antes mencionada. Las direcciones de anisotropía entonces son: norte (Y), este (proyección de X sobre el plano) y vertical (normal al plano).

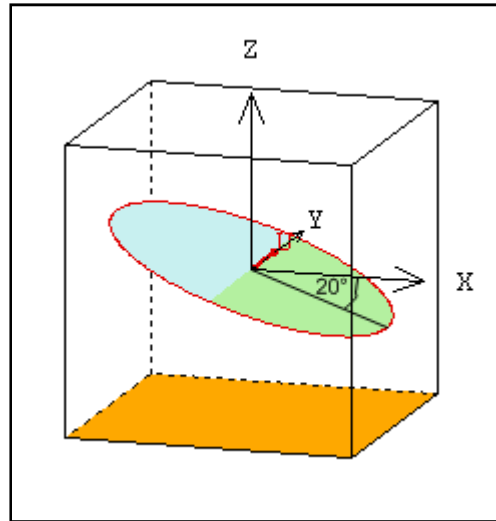


Figura 41: Plano de referencia para direcciones de anisotropía.

Para mayor claridad, la figura 42 despliega variogramas horizontales calculados en distintas direcciones (N90, N120, N150, N210, N240) orientadas cada 30° con respecto al norte (N180). Se observa que la variabilidad aumenta a medida que la dirección se acerca al este, lo que se refleja en variogramas con corto alcance, siendo la dirección norte la que posee menor variabilidad.

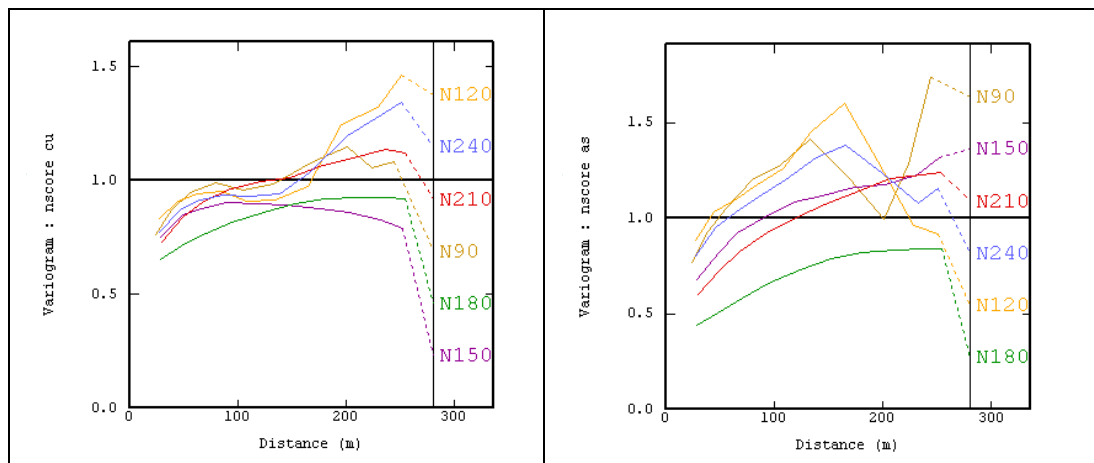


Figura 42: Variogramas experimentales de transformadas gaussianas de cobre (der.) y arsénico (izq.) en direcciones: N90, N120, N150, N210, N240

En ambos casos se observa que la varianza crece al aumentar la dirección respecto al norte (N180, en verde), lo que indica una pérdida de continuidad en dirección este (N90, en café) lo cual es concordante con lo observado en los mapas. Luego, las direcciones principales de anisotropía corresponden a este, norte y vertical, de acuerdo al plano de referencia de la figura 41.

7.4.2.- Variogramas de Indicadores.

Las siguientes figuras corresponden a los variogramas isotrópicos de indicadores de las leyes de cobre, cobre-arsénico y arsénico. En ellas podemos ver la asimetría existente entre los indicadores de los cuartiles 25 y 75%. Dicha asimetría no es posible de representar con el modelo multigaussiano.

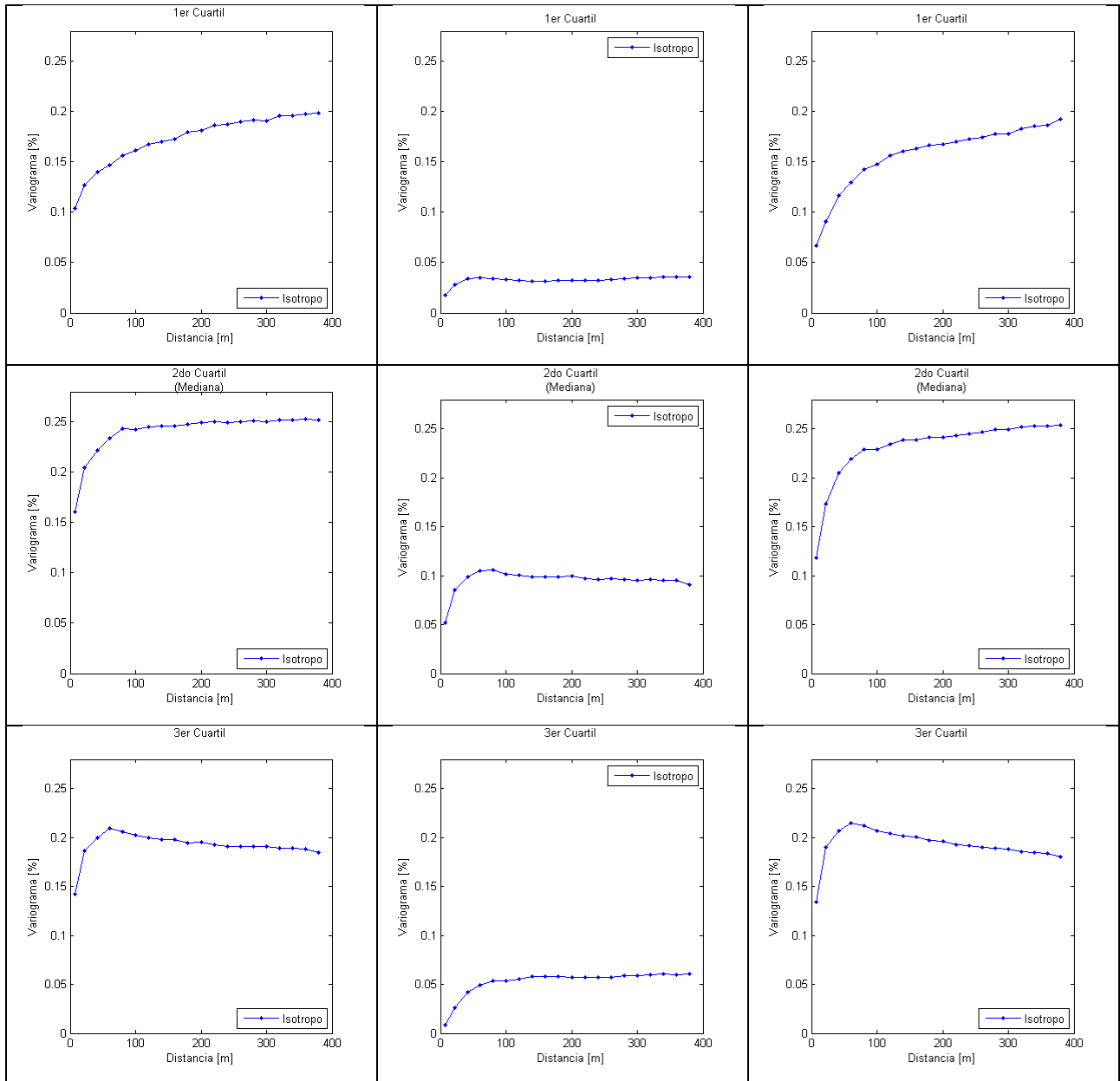


Figura 43: Variogramas isotrópicos de indicadores de leyes de cobre, cobre arsénico y arsénico.

7.4.3.- Ajuste de Variogramas del Modelo Multigaussiano.

Las siguientes figuras muestran el ajuste de los variogramas de indicadores teóricos del modelo multigaussiano, propuesto en la etapa de cosimulación convencional, a los variogramas de indicadores experimentales calculados en las direcciones principales de anisotropía. Podemos destacar la similitud entre los variogramas teóricos de los cuartiles primero y tercero, en tanto que el ajuste no necesariamente concuerda con los variogramas de indicadores experimentales.

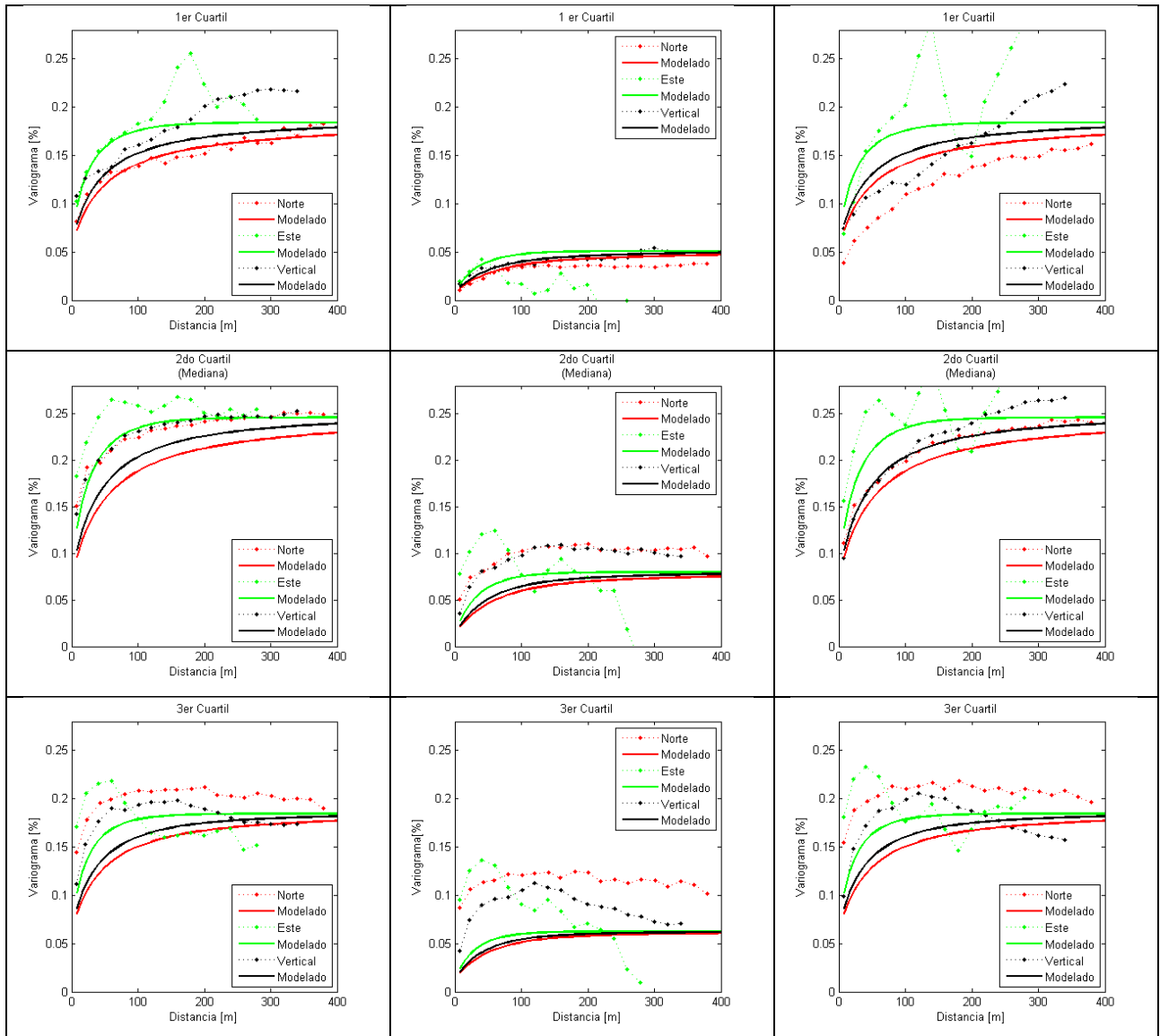


Figura 44: Variogramas direccionales de indicadores de leyes de cobre, cobre-arsénico y arsénico.

Entonces podemos afirmar que el modelo multigaussiano no se ajusta a los variogramas de indicadores experimentales, y por lo tanto no permite reproducir tales características en las realizaciones.