

Universidad de Chile
Facultad De Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Civil.

“VARIACIÓN DEBIDO A CAMBIOS DE MASA Y RIGIDEZ DE LAS PROPIEDADES DINÁMICAS DE UNA ESTRUCTURA EN PROCESO CONSTRUCTIVO”

**Tesis para optar al Grado de Magíster en Ciencias, Mención Ingeniería Sísmica
Memoria para optar al Título de Ingeniero Civil.**

Tomás Renato Núñez Acuña

Profesor Guía
Rubén Boroschek Krauskopf

Miembros de la Comisión
Carlos Ventura Zamora
Tomás Guendelman Bedrack
Alfonso Larraín Vial

Santiago de Chile
Agosto 2009



*“El sueño de la Razón, produce monstruos”
Francisco de Goya.*

“Variación debido a cambios de masa y rigidez de las propiedades dinámicas de una estructura en proceso constructivo”

Identificar y evaluar variaciones en las propiedades dinámicas de una estructura frente a excitaciones externas permite establecer el estado de salud y su posible daño. Adicionalmente, las propiedades identificadas pueden ser utilizadas para calibrar modelos teóricos con los cuales se realiza el diseño estructural.

Las técnicas más utilizadas para determinar las propiedades dinámicas de un sistema estructural son el método de Espectro de Densidad de Potencia (PSD), la Descomposición en el Dominio de la Frecuencia (FDD) y el Método del Sub-Espacio Estocástico (SSI).

En la presente investigación se estudian desde un punto de vista teórico y con ejemplos analíticos las técnicas antes mencionadas. Posteriormente éstas se aplican a los registros obtenidos de una red de monitoreo continuo instalado en un edificio durante proceso constructivo (Edificio Titanium La Portada, de 192.5 metros de altura) por un periodo de 5 meses. A partir de estos resultados se evalúan los efectos de corto y mediano plazo que genera el proceso constructivo y parámetros ambientales en las propiedades dinámicas de una estructura.

Adicionalmente se evalúa las dificultades de un monitoreo de salud en una estructura en proceso constructivo. En general los procedimientos de identificación permitieron establecer los parámetros de variación de la frecuencia en forma robusta, independientes de la severidad de las vibraciones producto de las actividades constructivas.

El amortiguamiento no fue posible identificarlo con la misma calidad dado su alta sensibilidad a variaciones de las vibraciones ambientales y forzadas. A pesar de esto se establecieron procedimientos para mejorar su estimación.

Los resultados obtenidos del proceso de identificación se correlacionaron con las propiedades modales de diferentes sub-modelos de elementos finitos creados a partir de diferentes etapas constructivas. Estos resultados entregan un indicador de las diferencias en frecuencias obtenidas en ambos casos. La comparación permitió establecer diferencias de hasta un 14% en las frecuencias naturales, y definir rangos de amortiguamiento entre 0.5 % y 1.5% para los primeros modos de la estructura.

Finalmente se analizaron los procedimientos de actualización de modelos matemáticos de estructuras, a través del análisis de sensibilidad. Para esto se realizó el ajuste de propiedades dinámicas de forma automatizada de un modelo de elementos finitos correspondiente a una estructura de laboratorio de 6 niveles (2 mts. de altura). La actualización del modelo permitió reducir las diferencias entre frecuencias naturales asociadas al modelo de EF y la estructura real, llegándose a una diferencia máxima de 2.7%.

Este procedimiento entrega un importante indicador respecto a la calibración de modelos matemáticos, para representar la respuesta frente a diferentes tipos de solicitaciones externas. Sin embargo, en la actualidad no es posible su aplicación a problemas complejos que presentan no-linealidades.

Índice general

1. Introducción.	1
1.1 Introducción y Motivación.	1
1.2 Objetivos.	3
1.2.1 Objetivo General.	3
1.2.2 Objetivos Específicos.	4
1.3 Metodología.	4
1.3.1 Recolección bibliográfica. Estudios analíticos y teóricos.	4
Instalación de red de monitoreo continuo y medición	
1.3.2 experimental de propiedades dinámicas de una estructura en	5
proceso constructivo.	
1.3.3 Verificación y validación del modelo analítico adaptativo.	5
1.4 Alcances.	6
2. Modelos Teóricos de Estructuras. Marco Teórico.	8
2.1 Introducción.	8
2.2 Equilibrio Dinámico.	9
2.3 Problema de Valores y Vectores Propios.	10
2.3.1 Problema de valores propios. Caso no amortiguado.	10
2.3.2 Problema de valores propios. Amortiguamiento proporcional.	12
2.3.3 Problema de valores propios. Amortiguamiento generalizado.	15
2.3.3.1 Ortogonalidad de las matrices [P] y [Q].	18
2.4 Modelo Espacio-Estado.	22
2.4.1 Modelo Espacio-Estado. Caso Continuo.	23
2.4.1.1 La Ecuación de estado.	23

2.4.1.2	Ecuación de Datos Observados.	27
2.4.1.3	Modelo Espacio-Estado Continuo.	29
2.4.1.4	Parámetros Modales y reducción del modelo. Caso Continuo.	30
2.4.1.4.1	Relación con el análisis modal clásico.	30
2.4.1.4.2	Descomposición Modal en el modelo Espacio-Estado Continuo.	35
2.4.1.4.3	Reducción del modelo en tiempo continuo.	38
2.4.2	Espacio-Estado. Modelo Discreto.	39
2.4.2.1	Input constante entre dos puntos de muestreo.	40
2.4.2.2	Input como Delta Dirac.	42
2.4.2.3	Parámetros modales y reducción modal. Caso Discreto.	44
2.5	Comentarios y conclusiones.	46
3.	Método del Sub-Espacio. Análisis en el Dominio del Tiempo.	47
3.1	Introducción.	47
3.2	Modelos Espacio-Estado Generalizados: Descripción Cualitativa	48
3.3	Herramientas Geométricas para Modelos de Sub-Espacio.	51
3.3.1	Proyección Ortogonal.	52
3.3.2	Proyección Oblicua.	54
3.3.3	Direcciones y ángulos principales.	56
3.3.4	Herramientas estadísticas.	59
3.3.5	Herramientas geométricas en contexto estadístico.	61
3.4	Identificación de Sistemas Determinísticos.	63
3.4.1	Notación y Matrices en sistemas Determinísticos.	64
3.4.1.1	Matrices de Bloque tipo Hankel y secuencia de estados.	64
3.4.1.2	Matriz de Observación.	68
3.4.1.3	Matriz de control inverso.	69

3.4.1.4	Matriz de Toeplitz.	69
3.4.2	Propiedades Geométricas de los Sistemas Determinísticos.	70
3.4.2.1	Ecuaciones matriciales de <i>inputs</i> y <i>output.s</i> .	70
3.4.3	Teorema Principal: Identificación de Sistemas Determinísticos.	71
3.4.4	Obtencion de las matrices del sistema.	78
3.4.4.1	Algoritmo 1: A partir de los estados.	78
3.4.4.2	Algoritmo 2: Usando la matriz de observación extendida	81
3.4.4.2.1	Determinación de las matrices $[A]$ y $[C]$.	81
3.4.4.2.2	Determinación de las matrices $[B]$ y $[D]$.	83
3.5	Identificación de Sistemas Estocástico.	85
3.5.1	Descripción del problema.	85
3.5.2	Propiedades de los sistemas estocásticos.	88
3.5.2.1	Modelo FM.	89
3.5.2.2	Modelo FIM.	92
3.5.3	Notación y Matrices en sistemas Estocásticos.	94
3.5.3.1	Matrices de Hankel.	94
3.5.3.2	Matriz de Observación.	95
3.5.3.3	Matriz estocástica de control inverso	95
3.5.3.4	Matriz de bloque Toeplitz	96
3.5.4	Filtros de Kalman	97
3.5.5	Secuencias de covarianza reales positivas.	101
3.5.6	Teorema Principal: Identificación Estocástica.	102
3.5.7	Elección de las matrices de peso $[W_1]$ y $[W_2]$	108
3.5.8	Obtención de las matrices del sistema	109
3.5.8.1	Algoritmo 1: A partir de los estados.	109
3.5.8.2	Algoritmo 2: A partir de las matrices de observación y control.	111

3.6	Identificación de sistemas determinísticos-estocástico.	113
3.6.1	Descripción del problema.	113
3.6.2	Sistema Combinado: Subsistemas Determinístico y Estocástico.	114
3.6.3	Notación y matrices en sistemas Determinístico-Estocásticos.	115
3.6.4	Teorema Principal: Identificación de sistemas combinados.	118
3.6.5	Elección de las matrices de peso $[W_1]$ y $[W_2]$	120
3.7	Obtención de parámetros dinámicos.	122
3.7.1	Relación entre matrices de estado y parámetros dinámicos.	122
3.7.2	Diagrama de Estabilización	126
3.8	Comentarios y conclusiones.	134
4.	Método de Espectro de Potencia. Análisis en el Dominio de la Frecuencia.	136
4.1	Introducción.	136
4.2	Herramientas en el dominio de la frecuencia.	137
4.2.1	Sistemas de un grado de libertad.	137
4.2.2	Sistemas de múltiples grados de libertad.	153
4.3	Razón de amortiguamiento (β).	158
4.3.1.	Efecto del incremento de la razón de amortiguamiento producto del fenómeno de <i>leakage</i> .	160
4.4	Errores asociados al método de Espectro de Potencia.	164
4.4.1	Errores en el dominio de la frecuencia.	164
4.4.1.1	Efecto <i>Aliasing</i> .	164
4.4.1.2	Efecto <i>Leakage</i> .	165
4.5	Formas Modales.	165
4.6	Método de Espectro de Potencia.	167
4.7	Descomposición en el dominio de la frecuencia mejorado (<i>E.F.D.D.</i>)	168

5.	Análisis de Variación de Propiedades Dinámicas, mediante monitoreo continuo de una estructura en proceso constructivo.	175
5.1	Introducción.	175
5.2	Estructura monitoreada: Edificio Titanium La Portada.	177
5.2.1	Características Generales.	177
5.2.2	Descripción de proceso constructivo.	193
5.2.3	Modelo de elementos finitos edificio Titanium La Portada.	204
5.2.3.1	Modelo de elementos finitos edificio completo. Descripción y variables utilizadas.	204
5.2.3.2	Frecuencias y formas modales modelo de elementos finitos edificio completo.	210
5.2.3.3	Resultados obtenidos a partir de los sub-modelos de elementos finitos.	214
5.2.4	Equipos y sistema de monitoreo.	229
5.3	Análisis de las series de tiempo y espectros de densidad de potencia del monitoreo continuo de la estructura.	234
5.4	Análisis de resultados de las propiedades dinámicas de la estructura.	251
5.5	Análisis de la variación de las propiedades dinámicas del Edificio Titanium La Portada.	252
5.6	Análisis comparativo entre modelo de elementos finitos y estructura real.	344
5.7	Comentarios y Conclusiones.	353
6.	Monitoreo de Salud Estructural (SHM) y actualización de Modelos Matemáticos.	357
6.1	Introducción.	357
6.2	Actualización de modelos de elementos finitos.	358
6.2.1	Actualización de modelos basados en micro-vibraciones.	359
6.2.2	Análisis de Sensibilidad como herramienta para actualización	361
6.2.2.1	Selección de parámetros para análisis de sensibilidad.	363
6.2.2.2	Selección de respuesta para análisis de sensibilidad.	364
6.2.2.3	Tipos de Sensibilidad.	364

6.2.2.4	Procedimiento de actualización de modelos de elementos finitos	369
6.3	Ejemplo de actualización de modelos.	370
6.3.1	Descripción de la estructura.	371
6.3.2	Sistema de sensores y monitoreo.	373
6.3.3	Modelo de elementos finitos: determinación de propiedades dinámicas.	374
6.3.4	Estructura real: obtención de propiedades dinámicas.	376
6.3.5	Correlación entre modelo y estructura real.	378
6.3.6	Análisis de Sensibilidad.	387
6.3.7	Actualización de modelo.	390
7.	Conclusiones, Comentarios y Recomendaciones Finales para investigaciones futuras.	395
7.1	Introducción.	395
7.2	Comentarios y Conclusiones.	396
7.2.1	Comentarios y Conclusiones. Métodos de Identificación de Parámetros Dinámicos.	396
7.2.1.1	Método del Sub-Espacio Estocástico (SSI)	396
7.2.1.2	Método de la Frecuencia No Paramétrica (FNP).	398
7.2.2	Comentarios y Conclusiones. Monitoreo Continuo Edificio Titanium La Portada.	399
7.2.3	Comentarios y Conclusiones. Actualización de Modelos.	408
7.3	Recomendaciones y Propuestas para Futuras Investigaciones.	410

Bibliografía	416
Apéndice A. Demostraciones Capítulo 3.	427
Apéndice B. Filtros de Kalman.	436
Apéndice C. Transformada Z.	449
Apéndice D. Series de Tiempo y PSD: Monitoreo Continuo Torre Titanium.	477
Apéndice E. Diagramas de estabilización y evolución de parámetros dinámicos en función del orden del modelo espacio estado.	508
Apéndice F. Masas Modales Traslacionales y Rotacionales. Modelo de Elementos Finitos Edificio Titanium La Portada.	539

Índice de Figuras.

3. Método del Sub-Espacio. Análisis en el Dominio del Tiempo.	
Figura 3.1. Representación gráfica del modelo espacio-estado generalizado. El símbolo Δ representa un retraso. Notar la retroalimentación del estado producido por la matriz de estado $[A]$, la que representa la dinámica del modelo.	51
Figura 3.2. Interpretación grafica de la proyección ortogonal de espacios, para el caso particular en que $j = 2$.	53
Figura 3. 3. Interpretación grafica de la proyección oblicua de espacios, para el caso particular en que $j = 2$.	55
Figura 3.4. Representación esquemática de la obtención de ángulos y direcciones principales.	57
Figura 3.5. Representación gráfica del modelo espacio-estado. Sistema determinístico.	64
Figura 3.6. Representación grafica modelo espacio estado matricial. Observar la descomposición de la respuesta por medio de proyecciones oblicuas sobre dos "Subespacios".	70
Figura 3. 7. Teorema 2 presentado de forma gráfica.	78
Figura 3. 8. Representación esquemática de un sistema estocástico.	87
Figura 3. 9. Generación de "banco" de filtros de Kalman (estimador de estados) a partir de los datos de salida u <i>outputs</i> .	101

Figura 3.10. Representación gráfica del Teorema 4.	107
Figura 3. 11. Modelo estructural de 6 niveles.	130
Figura 3. 12. Diagrama de Estabilidad. Modelo 6 niveles. Método del Subespacio Estocástico con algoritmo UPC.	131
Figura 3. 13. Formas Modales. Método SSI. Primer a tercer modo. Modelo 6 niveles.	131
Figura 3. 14. Formas Modales. Método SSI. Cuarto a sexto modo. Modelo 6 niveles.	132
Figura 3. 15. Estabilidad Global para cada parámetro dinámico (frecuencia, amortiguamiento y forma modal (MAC)). Modelo Experimental de 6 niveles. Método del Subespacio Estocástico.	133
Figura 3. 16. Diagrama de Flujo del método del Sub espacio. Modelo Estocástico.	135
4. Método de Espectro de Potencia. Análisis en el Dominio de la Frecuencia.	
Figura 4. 1. Amortiguamiento aparente en función del número de ciclos, para diferentes razones de amortiguamiento corregido. Ventana Hanning, procedimiento empírico.	161
Figura 4. 2. Amortiguamiento aparente en función del amortiguamiento corregido, para diferentes números de ciclos. Ventana Hanning, procedimiento empírico.	162
Figura 4. 3. Superficie de corrección por <i>leakage</i> . Amortiguamiento aparente, amortiguamiento corregido y número de ciclos. Ventana Hanning, procedimiento empírico.	163

	Figura 4. 4. Función de auto-correlación para un valor singular. Como se aprecia, se toma un tramo de registro a partir de la definición de un máximo y un mínimo en el valor de la correlación (sección gris). Fuente: <i>Artemis. University of British Columbia License.</i>	171
	Figura 4. 5. Obtención de amortiguamiento mediante método del decremento logarítmico. La línea roja indica el ajuste de mínimos cuadrados realizados, para la obtención de la pendiente que corresponde a la razón de amortiguamiento. Fuente: <i>Artemis. University of British Columbia License.</i>	173
5.	Análisis de Variación de Propiedades Dinámicas, mediante monitoreo continuo de una estructura en proceso constructivo.	
	Figura 5. 1. Comparativo de Edificios más altos construidos al 2009 en Sudamérica. Fuente: <i>http://www.skycrappertpage.com</i>	176
	Figura 5. 2. Comparativo de Edificios más altos construidos al 2009 en Chile. Fuente: <i>http://www.skycrappertpage.com</i>	176
	Figura 5. 3. Render Edificio Terminado. Fuente: <i>ASL Sencorp.</i>	178
	Figura 5. 4. Planta Primer Piso. Planos Arquitectura. Fuente: <i>ASL Sencorp.</i>	178
	Figura 5. 5. Planta Pisos 7 al 11. Fuente: <i>ASL Sencorp.</i>	179
	Figura 5. 6. Planta Pisos 12 al 23. Las medidas son aproximadas y se repiten hasta el piso 52. Fuente: <i>ASL Sencorp.</i>	179
	Figura 5. 7. Planta Pisos 24 al 38. Fuente: <i>ASL Sencorp.</i>	180
	Figura 5. 8. Planta Pisos 39 al 52. Fuente: <i>ASL Sencorp.</i>	180

Figura 5. 9. Planta Subterráneo -2 al -6. Fuente: <i>ASL Sencorp</i> .	181
Figura 5. 10. Elevación Oriente. Edificio Titanium La Portada. Fuente: <i>ASL Sencorp</i>	181
Figura 5. 11. Elevación Sur. Edificio Titanium La Portada. Fuente: <i>ASL Sencorp</i>	182
Figura 5. 12. Corte. Edificio Titanium La Portada. Fuente: <i>ASL Sencorp</i>	182
Figura 5.13. Armadura de sección octogonal, para columnas perimetrales, edificio Titanium La Portada.	183
Figura 5.14. Diferentes etapas constructivas en faenas de fundaciones. Edificio Titanium La Portada. Fuente: http://www.titaniumlaportada.cl .	184
Figura 5.15. Armaduras y excavación en faenas de fundaciones. Edificio Titanium La Portada. Fuente: http://www.titaniumlaportada.cl .	185
Figura 5.16. Losetas alveolares prefabricadas pretensadas. Armado de losas. Edificio Titanium La Portada.	188
Figura 5.17. Disipadores de energía mediante mecanismos de fluencia dispuestos en dirección transversal (norte-sur). Edificio Titanium La Portada.	189
Figura 5.18. Disipadores de energía mediante mecanismos de fluencia dispuestos en dirección transversal (norte-sur). Edificio Titanium La Portada.	190
Figura 5.19. Disipadores de energía mediante mecanismos de fluencia dispuestos en dirección longitudinal (oriente-poniente). Edificio Titanium La Portada.	190
Figura 5. 20. Disipadores de energía mediante mecanismos de fluencia dispuestos en dirección longitudinal (oriente-poniente). Edificio Titanium La Portada.	191

Figura 5.21. Disipadores de energía mediante mecanismos de fluencia dispuestos en dirección longitudinal (oriente-poniente). Edificio Titanium La Portada.	191
Figura 5.22. Detalles y vistas generales colocación de Muros Cortina. Edificio Titanium La Portada.	192
Figura 5.23. Anexo del edificio Titanium en proceso constructivo, de izquierda a derecha, de arriba abajo.	193
Figura 5.24. Secuencia Constructiva del Edificio Titanium La Portada. De izquierda a derecha, secuencia del 06 de marzo al 23 de abril de 2008.	195
Figura 5.25. Secuencia Constructiva del Edificio Titanium La Portada. De izquierda a derecha, secuencia del 12 de mayo al 05 de junio de 2008.	196
Figura 5. 26. Secuencia Constructiva del Edificio Titanium La Portada. De izquierda a derecha, secuencia del 21 de julio al 14 de agosto de 2008.	197
Figura 5. 27. Secuencia Constructiva del Edificio Titanium La Portada. De izquierda a derecha, secuencia del 27 de agosto al 29 de septiembre de 2008.	198
Figura 5. 28. Secuencia Constructiva del Edificio Titanium La Portada. De izquierda a derecha, secuencia del 13 de octubre al 01 de diciembre de 2008.	199
Figura 5. 29. Secuencia Constructiva del Edificio Titanium La Portada. De izquierda a derecha, secuencia del 09 de diciembre al 30 de diciembre de 2008.	200
Figura 5. 30. Secuencia Constructiva del Edificio Titanium La Portada. De izquierda a derecha, secuencia del 19 de febrero al 23 de marzo de 2009.	201
Figura 5.31. De izquierda a derecha y de arriba abajo: Animación esquemática del proceso constructivo del edificio Titanium La Portada. Fuente: <i>Tek-Value</i> .	202

Figura 5.32. De izquierda a derecha y de arriba abajo: Animación esquemática del proceso constructivo del edificio Titanium La Portada. Fuente: <i>Tek-Value</i> .	203
Figura 5. 33. Comparativo Espectros Elásticos NCh. 433 Of. 96 y sintético diseñado por S&S Ingeniería	210
Figura 5. 34. Formas Modales Edificio Titanium La Portada. De izquierda a derecha: modo 1 ($f = 0.18[Hz]$), modo 2 ($f = 0.24[Hz]$)	212
Figura 5. 35. Formas Modales Edificio Titanium La Portada. De izquierda a derecha: modo 3 ($f = 0.27[Hz]$), modo 4 ($f = 0.65[Hz]$)	212
Figura 5. 36. Formas Modales Edificio Titanium La Portada. De izquierda a derecha: modo 5 ($f = 0.75[Hz]$), modo 6 ($f = 0.96[Hz]$)	213
Figura 5. 37. Formas Modales Edificio Titanium La Portada. De izquierda a derecha: modo 7 ($f = 1.41[Hz]$), modo 8 ($f = 1.56[Hz]$)	213
Figura 5.38. Cronograma avance obra gruesa, planta piso 25 (cielo piso 24). Edificio Titanium La Portada. Fuente: ASL Sencorp.	215
Figura 5.39. Cronograma avance obra gruesa, planta piso 28 (cielo piso 27). Edificio Titanium La Portada. Fuente: ASL Sencorp.	215
Figura 5.40. Cronograma avance obra gruesa, planta piso 31 (cielo piso 30). Edificio Titanium La Portada. Fuente: ASL Sencorp.	216
Figura 5.41. Cronograma avance obra gruesa, planta piso 34 (cielo piso 33). Edificio Titanium La Portada. Fuente: ASL Sencorp.	216
Figura 5.42. Cronograma avance obra gruesa, planta piso 37 (cielo piso 36). Edificio Titanium La Portada. Fuente: ASL Sencorp.	217
Figura 5.43. Modelo Elementos Finitos Torre Titanium. De izquierda a derecha: hasta Piso 25, hasta piso 28.	218

Figura 5.44. Modelo Elementos Finitos Torre Titanium. De izquierda a derecha: hasta Piso 31, hasta piso 34.	218
Figura 5.45. Modelo Elementos Finitos Torre Titanium. De izquierda a derecha: hasta Piso 37, hasta piso 39.	219
Figura 5.46. Formas modales de submodelos Edificio Titanium. Modo 1, De izquierda a derecha, de arriba abajo: Piso 25, Piso 27, Piso 30, Piso 33, Piso 36 y Piso 39.	220
Figura 5.47. Formas modales de submodelos Edificio Titanium. Modo 2, De izquierda a derecha, de arriba abajo: Piso 25, Piso 27, Piso 30, Piso 33, Piso 36 y Piso 39.	221
Figura 5.48. Formas modales de submodelos Edificio Titanium. Modo 3, De izquierda a derecha, de arriba abajo: Piso 25, Piso 27, Piso 30, Piso 33, Piso 36 y Piso 39.	222
Figura 5.49. Formas modales de submodelos Edificio Titanium. Modo 4, De izquierda a derecha, de arriba abajo: Piso 25, Piso 27, Piso 30, Piso 33, Piso 36 y Piso 39.	223
Figura 5.50. Formas modales de submodelos Edificio Titanium. Modo 5, De izquierda a derecha, de arriba abajo: Piso 25, Piso 27, Piso 30, Piso 33, Piso 36 y Piso 39.	224
Figura 5.51. Formas modales de submodelos Edificio Titanium. Modo 6, De izquierda a derecha, de arriba abajo: Piso 25, Piso 27, Piso 30, Piso 33, Piso 36 y Piso 39.	225
Figura 5.52. Formas modales de submodelos Edificio Titanium. Modo 7, De izquierda a derecha, de arriba abajo: Piso 25, Piso 27, Piso 30, Piso 33, Piso 36 y Piso 39.	226
Figura 5.53. Formas modales de submodelos Edificio Titanium. Modo 8, De izquierda a derecha, de arriba abajo: Piso 25, Piso 27, Piso 30, Piso 33, Piso 36 y Piso 39.	227

Figura 5.54. Instalaciones de la Red de Monitoreo de micro vibraciones al interior del edificio Titanium La Portada. Piso 20. Fecha: 13 de Agosto 2008.	231
Figura 5. 55. Sistema de adquisición de datos. Edificio Titanium La Portada. Piso 20 Fecha: 13 de Agosto 2008.	232
Figura 5.56. Esquema ubicación de la red de monitoreo continuo, con respecto al edificio terminado.	233
Figura 5. 57. Ubicación y orientación de sensores (EPI) y sistema de adquisición de datos (<i>Logbook</i>) en piso 20 del edificio Titanium La Portada.	234
Figura 5.58. Verificación de saturación en red de monitoreo y Serie de tiempo. Duración: 6 horas. Amplificación: x10. Fecha: del 15-08-2008 23:53 al 16-08-2008 05:13. Piso 20, Edificio Titanium La Portada.	236
Figura 5.59. Espectro de potencia de la serie de tiempo del registro del 15-08-2008 23:53 al 16-08-2008 05:13. Duración 6 horas. Amplificación: x10. Piso 20, Edificio Titanium La Portada.	236
Figura 5. 60. Espectro de potencia de la serie de tiempo del registro del 15-09-2008 03:56 al 15-08-2008 09:56. Duración 6 horas. Amplificación: x100. Piso 20, Edificio Titanium La Portada.	237
Figura 5. 61. Serie de Tiempo y Espectro de Densidad de Potencia. Monitoreo Continuo. Inicio Registro: 20081230 16:46 hrs. Término Registro: 20081230 16:56 hrs. Edificio Titanium La Portada.	239
Figura 5. 62. Diagrama de estabilización para identificación de parámetros dinámicos mediante método del Sub-Espacio Estocástico. Monitoreo Continuo. Inicio Registro: 20081230 16:46 hrs. Término Registro: 20081230 16:56 hrs. Edificio Titanium La Portada.	240
Figura 5. 63. Diagrama de evolución de parámetros dinámicos según orden del sistema Espacio-Estado. Método del Sub-Espacio Estocástico. Monitoreo Continuo. Inicio Registro: 20081230 16:46 hrs. Término Registro: 20081230 16:56 hrs. Edificio Titanium La Portada.	241

Figura 5. 64. Registro Sísmico. Fecha: 18-12-2008. Hora Local: 18:19:28. ML: 5.9. Piso 20, Edificio Titanium La Portada.	244
Figura 5. 65. Registros Sísmicos. De arriba a abajo Fecha: 18-12-2008. Hora Local: 18:25:02. ML: 4.6. Fecha: 18-12-2008. Hora Local: 18:50:28. ML: 5.5. Piso 20. Titanium.	245
Figura 5. 66. Registros Sísmicos. De arriba a abajo Fecha: 19-12-2008. Hora Local: 00:04:16. ML: 4.5. Fecha: 19-12-2008. Hora Local: 04:30:06. ML: 5.1. Piso 20 Titanium	246
Figura 5. 67. Registros Sísmicos. De arriba a abajo Fecha: 19-12-2008. Hora Local: 06:36:04. ML: 5.8. Fecha: 19-12-2008. Hora Local: 10:57:30. ML: 5.1. Piso 20 Titanium	247
Figura 5. 68. Registros Sísmicos. De arriba a abajo Fecha: 19-12-2008. Hora Local: 13:48:49. ML: 4.9. Fecha: 19-12-2008. Hora Local: 14:43:26. ML: 4.2. Piso 20 Titanium	248
Figura 5. 69. Registros Sísmicos. De arriba a abajo Fecha: 19-12-2008. Hora Local: 16:25:54. ML: 4.9. Fecha: 19-12-2008. Hora Local: 18:33:10. ML: 4.4. Piso 20 Titanium.	249
Figura 5.70. Variación temporal de frecuencia natural. Modo 1. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.	254
Figura 5.71. Variación temporal de frecuencia natural. Modo 2. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.	255
Figura 5.72. Variación temporal de frecuencia natural. Modo 3. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.	256
Figura 5.73. Variación temporal de frecuencia natural. Modo 4. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.	257
Figura 5.74. Variación temporal de frecuencia natural. Modo 5. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.	258

Figura 5.75. Variación temporal de frecuencia natural. Modo 6. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.	259
Figura 5.76. Variación temporal de frecuencia natural. Modo 7. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.	260
Figura 5.77. Variación temporal de frecuencia natural. Modo 8. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.	261
Figura 5.78. Variación temporal de frecuencia natural. Modo 9. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.	262
Figura 5.79. Variación temporal de frecuencia natural. Modo 10. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.	263
Figura 5.80. Variación temporal de frecuencia natural. Modo 11. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.	264
Figura 5.81. Variación temporal de frecuencia natural. Modo 12. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.	265
Figura 5.82. Variación temporal de frecuencia natural. Modo 13. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.	266
Figura 5.83. Variación temporal de frecuencia natural. Modos 1 a 13. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.	267
Figura 5. 84. Variación temporal de frecuencia natural. Modos 1 a 13. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada. Gráfico con tendencia lineal entre tramos en los que no se tienen resultado debido a que no existen registros en estos tramos.	268
Figura 5.85. Variación temporal de razón de amortiguamiento. Modo 1. Método SSI-CVA Edificio Titanium La Portada.	269
Figura 5. 86. Variación temporal de razón de amortiguamiento. Modo 2. Método SSI-CVA Edificio Titanium La Portada.	270

Figura 5. 87. Variación temporal de razón de amortiguamiento. Modo 3. Método SSI-CVA Edificio Titanium La Portada.	271
Figura 5. 88. Variación temporal de razón de amortiguamiento. Modo4. Método SSI-CVA Edificio Titanium La Portada.	272
Figura 5. 89. Variación temporal de razón de amortiguamiento. Modo 5. Método SSI-CVA Edificio Titanium La Portada.	273
Figura 5. 90. Variación temporal de razón de amortiguamiento. Modo 6. Método SSI-CVA Edificio Titanium La Portada.	274
Figura 5. 91. Variación temporal de razón de amortiguamiento. Modo 7. Método SSI-CVA Edificio Titanium La Portada.	275
Figura 5. 92. Variación temporal de razón de amortiguamiento. Modo 8. Método SSI-CVA Edificio Titanium La Portada.	276
Figura 5. 93. Variación temporal de razón de amortiguamiento. Modo 9. Método SSI-CVA Edificio Titanium La Portada.	277
Figura 5. 94. Variación temporal de razón de amortiguamiento. Modo 10. Método SSI-CVA Edificio Titanium La Portada.	278
Figura 5. 95. Variación temporal de razón de amortiguamiento. Modo 11. Método SSI-CVA Edificio Titanium La Portada.	279
Figura 5. 96. Variación temporal de razón de amortiguamiento. Modo 12. Método SSI-CVA Edificio Titanium La Portada.	280
Figura 5. 97. Variación temporal de razón de amortiguamiento. Modo 13. Método SSI-CVA Edificio Titanium La Portada.	281
Figura 5. 98. Variación temporal de razón de amortiguamiento. Modos 1 a 13. Método SSI-CVA Edificio Titanium La Portada.	282

Figura 5. 99. Variación temporal de frecuencia natural. Promedio Horario. Modo 1. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.	283
Figura 5. 100. Variación temporal de frecuencia natural. Promedio Horario. Modo 2. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.	284
Figura 5. 101. Variación temporal de frecuencia natural. Promedio Horario. Modo 3. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.	284
Figura 5. 102. Variación temporal de frecuencia natural. Promedio Horario. Modo 4. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.	285
Figura 5. 103. Variación temporal de frecuencia natural. Promedio Horario. Modo 5. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.	285
Figura 5. 104. Variación temporal de frecuencia natural. Promedio Horario. Modo 6. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.	286
Figura 5. 105. Variación temporal de frecuencia natural. Promedio Horario. Modo 7. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.	286
Figura 5. 106. Variación temporal de frecuencia natural. Promedio Horario. Modo 8. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.	287
Figura 5. 107. Variación temporal de amortiguamiento. Promedio Horario. Modo 1. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.	288
Figura 5. 108. Variación temporal de amortiguamiento. Promedio Horario. Modo 2. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.	288
Figura 5. 109. Variación temporal de amortiguamiento. Promedio Horario. Modo 3. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.	289
Figura 5. 110. Variación temporal de amortiguamiento. Promedio Horario. Modo 4. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.	289

Figura 5. 111. Variación temporal de amortiguamiento. Promedio Horario. Modo 5. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.	290
Figura 5. 112. Variación temporal de amortiguamiento. Promedio Horario. Modo 6. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.	290
Figura 5. 113. Variación temporal de amortiguamiento. Promedio Horario. Modo 7. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.	291
Figura 5. 114. Variación temporal de amortiguamiento. Promedio Horario. Modo 8. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.	291
Figura 5.115. Espectro de Potencia de la Variación de las Frecuencias Naturales. Modos 1 a 3. Edificio Titanium.	293
Figura 5.116. Espectro de Potencia de la Variación de las Frecuencias Naturales. Modos 4 a 8. Edificio Titanium.	294
Figura 5.117. Variación de frecuencias naturales por ciclo diario (Día- Noche). Modo 1. Edificio Titanium La Portada	297
Figura 5. 118. Variación de frecuencias naturales por ciclo diario (Día- Noche). Modo 2. Edificio Titanium La Portada	297
Figura 5.119. Variación de frecuencias naturales por ciclo diario (Día- Noche). Modo 3. Edificio Titanium La Portada.	298
Figura 5.120. Variación de frecuencias naturales por ciclo diario (Día- Noche). Modo 4. Edificio Titanium La Portada.	298
Figura 5.121. Variación de frecuencias naturales por ciclo diario (Día- Noche). Modo 5. Edificio Titanium La Portada.	299
Figura 5.122. Variación de frecuencias naturales por ciclo diario (Día- Noche). Modo 6. Edificio Titanium La Portada.	299

Figura 5.123. Variación de frecuencias naturales por ciclo diario (Día-Noche). Modo 7. Edificio Titanium La Portada.	300
Figura 5.124. Variación de frecuencias naturales por ciclo diario (Día-Noche). Modo 8. Edificio Titanium La Portada.	300
Figura 5.125. Variación de frecuencias naturales por ciclo diario (Día-Noche). Modo 9. Edificio Titanium La Portada.	301
Figura 5.126. Variación de frecuencias naturales por ciclo diario (Día-Noche). Modo 10. Edificio Titanium La Portada.	301
Figura 5.127. Variación de frecuencias naturales por ciclo diario (Día-Noche). Modo 11. Edificio Titanium La Portada.	302
Figura 5.128. Variación de frecuencias naturales por ciclo diario (Día-Noche). Modo 12. Edificio Titanium La Portada.	302
Figura 5.129. Variación de frecuencias naturales por ciclo diario (Día-Noche). Modo 13. Edificio Titanium La Portada.	303
Figura 5.130. Variación de frecuencias naturales por ciclo diario (Día-Noche). Modos 1 a 13. Edificio Titanium La Portada.	304
Figura 5.131. Variación de frecuencias naturales por ciclo semanal (6 a 8 días). Modos 1 a 13. Edificio Titanium La Portada.	305
Figura 5. 132. Variación de frecuencias naturales por ciclo diario (Día-Noche). Zoom. Modo 1. Edificio Titanium La Portada.	306
Figura 5. 133. Variación de frecuencias naturales por ciclo diario (Día-Noche). Zoom. Modo 2. Edificio Titanium La Portada.	307
Figura 5. 134. Variación de frecuencias naturales por ciclo diario (Día-Noche). Zoom. Modo 3. Edificio Titanium La Portada.	307

Figura 5.135. Espectro de Potencia de la Variación de la Razón de Amortiguamiento. Modos 1 a 3. Edificio Titanium.	309
Figura 5.136. Espectro de Potencia de la Variación de la Razón de Amortiguamiento. Modos 4 a 8. Edificio Titanium.	310
Figura 5.137. Variación de la razón de amortiguamiento. Filtrado ciclo 18,7 días. Modo 1. Edificio Titanium La Portada.	312
Figura 5.138. Variación de la razón de amortiguamiento. Filtrado ciclo 18,7 días. Modo 2. Edificio Titanium La Portada.	312
Figura 5.139. Variación de la razón de amortiguamiento. Filtrado ciclo 18,7 días. Modo 3. Edificio Titanium La Portada.	313
Figura 5.140. Variación de la razón de amortiguamiento. Filtrado ciclo 18,7 días. Modo 4. Edificio Titanium La Portada.	313
Figura 5.141. Variación de la razón de amortiguamiento. Filtrado ciclo 18,7 días. Modo 5. Edificio Titanium La Portada.	314
Figura 5.142. Variación de la razón de amortiguamiento. Filtrado ciclo 18,7 días. Modo 6. Edificio Titanium La Portada.	314
Figura 5.143. Variación de la razón de amortiguamiento. Filtrado ciclo 18,7 días. Modo 7. Edificio Titanium La Portada.	315
Figura 5.144. Variación de la razón de amortiguamiento. Filtrado ciclo 18,7 días. Modo 8. Edificio Titanium La Portada.	315
Figura 5.145. Variación de la razón de amortiguamiento. Filtrado ciclo 18,7 días. Modo 9. Edificio Titanium La Portada.	316
Figura 5.146. Variación de la razón de amortiguamiento. Filtrado ciclo 18,7 días. Modo 10. Edificio Titanium La Portada.	316

Figura 5.147. Variación de la razón de amortiguamiento. Filtrado ciclo 18,7 días. Modo 11. Edificio Titanium La Portada.	317
Figura 5.148. Variación de la razón de amortiguamiento. Filtrado ciclo 18,7 días. Modo 12. Edificio Titanium La Portada.	317
Figura 5.149. Variación de la razón de amortiguamiento. Filtrado ciclo 18,7 días. Modo 13. Edificio Titanium La Portada.	318
Figura 5.150. Variación de la razón de amortiguamiento. Filtrado ciclo 18,7 días. Modos 1 a 13. Edificio Titanium La Portada.	319
Figura 5. 151. Variación de amortiguamiento en función de la altura. Análisis de sistemas continuos.	323
Figura 5. 152. Amortiguamiento concatenado para 4 domingos. Fechas: 28/09, 05/10, 12/10 y 14/12. Valores promedio Horario. Modo 1. Edificio Titanium La Portada.	324
Figura 5. 153. Amortiguamiento concatenado para 4 domingos. Fechas: 28/09, 05/10, 12/10 y 14/12. Valores promedio Horario. Modo 2. Edificio Titanium La Portada.	325
Figura 5. 154. Amortiguamiento concatenado para 4 domingos. Fechas: 28/09, 05/10, 12/10 y 14/12. Valores promedio Horario. Modo 3. Edificio Titanium La Portada.	325
Figura 5. 155. Amortiguamiento concatenado para 4 domingos. Fechas: 28/09, 05/10, 12/10 y 14/12. Valores promedio Horario. Modo 4. Edificio Titanium La Portada.	326
Figura 5. 156. Variación porcentual de frecuencias monitoreadas, con respecto a frecuencia monitoreada durante proceso constructivo. De arriba abajo: Modo 1 y Modo 2. Edificio Titanium La Portada.	329
Figura 5. 157. Variación porcentual de frecuencias monitoreadas, con respecto a frecuencia monitoreada durante proceso constructivo. De arriba abajo: Modo 3 y Modo 4. Edificio Titanium La Portada.	330

Figura 5. 158. Variación porcentual de frecuencias monitoreadas, con respecto a frecuencia monitoreada durante proceso constructivo. De arriba abajo: Modo 5 y Modo 6. Edificio Titanium La Portada.	331
Figura 5. 159. Variación porcentual de frecuencias monitoreadas, con respecto a frecuencia monitoreada durante proceso constructivo. De arriba abajo: Modo 7 y Modo 8. Edificio Titanium La Portada.	332
Figura 5. 160. Variación de Frecuencias monitoreadas en función del número de pisos. Modo 1. Edificio Titanium La Portada.	333
Figura 5. 161. Variación de Frecuencias monitoreadas en función del número de pisos. De arriba a abajo: Modo 2 y Modo 3. Edificio Titanium La Portada.	334
Figura 5. 162. Variación de Frecuencias monitoreadas en función del número de pisos. De arriba a abajo: Modo 4 y Modo 5. Edificio Titanium La Portada.	335
Figura 5. 163. Variación de Frecuencias monitoreadas en función del número de pisos. De arriba a abajo: Modo 6 y Modo 7. Edificio Titanium La Portada.	336
Figura 5. 164. Variación de Frecuencias monitoreadas en función del número de pisos. Modo 8. Edificio Titanium La Portada.	337
Figura 5. 165. Espectrograma. Del 29-09-08 al 13-10-2008. Canal 1 N/S. Piso 20. Edificio Titanium La Portada.	338
Figura 5. 166. Espectrograma. Del 29-09-08 al 13-10-2008. Canal 2 E/W. Piso 20. Edificio Titanium La Portada.	339
Figura 5. 167. Espectrograma. Del 29-09-08 al 13-10-2008. Canal 3 N/S. Piso 20. Edificio Titanium La Portada.	340
Figura 5. 168. Espectrograma. Del 13-10-08 al 02-11-2008. Canal 1 N/S. Piso 20. Edificio Titanium La Portada.	341

Figura 5. 169. Espectrograma. Del 13-10-08 al 02-11-2008. Canal 2 E/W. Piso 20. Edificio Titanium La Portada.	342
Figura 5. 170. Espectrograma. Del 13-10-08 al 02-11-2008. Canal 3 N/S. Piso 20. Edificio Titanium La Portada.	343
Figura 5.171. Comparación de la Variación de frecuencias naturales entre modelo EF y Estructura real. Ciclo Aumento de 1 piso (semanal). Modo 1. Edificio Titanium.	345
Figura 5.172. Comparación de la Variación de frecuencias naturales entre modelo EF y Estructura real. Ciclo Aumento de 1 piso (semanal). Modo 2. Edificio Titanium.	346
Figura 5.173. Comparación de la Variación de frecuencias naturales entre modelo EF y Estructura real. Ciclo Aumento de 1 piso (semanal). Modo 3. Edificio Titanium.	347
Figura 5.174. Comparación de la Variación de frecuencias naturales entre modelo EF y Estructura real. Ciclo Aumento de 1 piso (semanal). Modo 4. Edificio Titanium.	348
Figura 5.175. Comparación de la Variación de frecuencias naturales entre modelo EF y Estructura real. Ciclo Aumento de 1 piso (semanal). Modo 5. Edificio Titanium.	349
Figura 5.176. Comparación de la Variación de frecuencias naturales entre modelo EF y Estructura real. Ciclo Aumento de 1 piso (semanal). Modo 6. Edificio Titanium.	350
Figura 5.177. Comparación de la Variación de frecuencias naturales entre modelo EF y Estructura real. Ciclo Aumento de 1 piso (semanal). Modo 7. Edificio Titanium.	351
Figura 5.178. Comparación de la Variación de frecuencias naturales entre modelo EF y Estructura real. Ciclo Aumento de 1 piso (semanal). Modo 8. Edificio Titanium.	352

6. Monitoreo de Salud Estructural (SHM) y actualización de Modelos Matemáticos.

Figura 6. 1. Esquema Actualización de Modelos Basados en vibraciones.	361
Figura 6. 2. Estructura de 6 niveles a la cual se realizará el procedimiento de actualización. Modelo Realizado en el Laboratorio de Estructuras de la Universidad de Chile. A la derecha un esquema dimensionado.	372
Figura 6. 3. Configuración de red de acelerómetros sobre la estructura. A la izquierda: esquema con elevaciones y plantas. A la derecha: disposición de sensores sobre modelo realizado en ARTemis.	374
Figura 6. 4. Formas Modales Modelo Elementos Finitos.	375
Figura 6. 5. Excitación basal de la estructura, con características asociada a un ruido blanco. La excitación tuvo una duración de 6 minutos aproximadamente con una frecuencia de muestreo de 100 [Hz].	376
Figura 6. 6. Formas modales estructura real. Modelo generado en FEMTools.	378
Figura 6. 7. Correlación de Formas Modales, FEM y EM. Modo 1.	380
Figura 6. 8. Correlación de Formas Modales, FEM y EM. Modo 2.	381
Figura 6. 9. Correlación de Formas Modales, FEM y EM. Modo 3.	382
Figura 6. 10. Correlación de Formas Modales, FEM y EM. Modo 4.	383
Figura 6. 11. Correlación de Formas Modales, FEM y EM. Modo 5.	384
Figura 6. 12. Correlación de Formas Modales, FEM y EM. Modo 6.	385

	Figura 6. 13. Matriz de Correlación Modal MAC. Arriba se presentan los valores asociados. Abajo un esquema de barras tridimensional correspondiente a la matriz MAC.	386
	Figura 6. 14 Matriz de Sensibilidad Normalizada obtenida del análisis en el programa FEMTools.	389
	Figura 6. 15. Variación porcentual, con respecto al valor inicial, de cada parámetro. Actualización de Modelo de Elementos Finitos mediante FEMTools.	391
	Figura 6. 16. Diferencia porcentual entre los valores de frecuencia (respuesta) del modelo de elementos finitos y la estructura real. Actualización realizada mediante FEMTools.	392
7.	Conclusiones, Comentarios y Recomendaciones Finales para investigaciones futuras.	
	Figura 7. 1. Esquema, patrón de variación semanal de la frecuencia natural. Edificio Titanium La Portada.	401
	Figura 7. 2. Variación de frecuencias naturales según patrón de 7 ½ días. Edificio Titanium la Portada.	402
	Figura 7. 3. Variación de frecuencias naturales según patrón de 24 horas (diario). Edificio Titanium la Portada.	404
	Figura 7. 4. Variación de la razón de amortiguamiento durante proceso constructivo. Filtrado. Edificio Titanium La Portada.	405

Índice de Tablas.

3. Método del Sub-Espacio. Análisis en el Dominio del Tiempo.

Tabla 3. 1. Parámetros dinámicos identificados. Modelo experimental de 6 niveles.	133
---	-----

5. Análisis de Variación de Propiedades Dinámicas, mediante monitoreo continuo de una estructura en proceso constructivo.

Tabla 5.1. Distribución de espesores en muros de núcleo. Edificio Titanium.	186
---	-----

Tabla 5.2. Secciones columnas perimetrales, Edificio Titanium La Portada	187
--	-----

Tabla 5. 3. Propiedades Hormigones Torre Titanium La Portada	204
--	-----

Tabla 5. 4. Propiedades Acero Estructural A52-34ES. Torre Titanium La Portada	204
---	-----

Tabla 5. 5. Sobrecargas de uso consideradas para diseño. Torre Titanium La Portada.	205
---	-----

Tabla 5. 6. Sobrecargas de uso por niveles consideradas para diseño. Torre Titanium La Portada.	205
---	-----

Tabla 5. 7. Pesos Propios por piso (<i>Dead Load</i>). Edificio Titanium La Portada.	207
--	-----

Tabla 5. 8. Pesos Propios por piso (<i>Dead Load</i>). Edificio Titanium La Portada.	208
Tabla 5. 9. Parámetros del Espectro de Respuesta. Método Modal-Espectral. Torre Titanium La Portada.	209
Tabla 5. 10. Frecuencias y Periodos Naturales Edificio Titanium La Portada (modelo completo). Fuente: ALV & Asociados Ingenieros Civiles.	211
Tabla 5. 11. Fecha de Término obra gruesa por piso. Fuente: ASL Sencorp.	217
Tabla 5.12. Frecuencias Naturales de Submodelos de Elementos Finitos. Edificio Titanium La Portada.	228
Tabla 5. 13. Períodos Naturales de Submodelos de Elementos Finitos. Edificio Titanium La Portada.	228
Tabla 5.14. Especificaciones técnicas Epi-Sensor ES-U.	230
Tabla 5.15. Propiedades dinámicas y ubicación sensores, red de monitoreo.	233
Tabla 5. 16. Eventos sísmicos. Periodo: 18 al 20 de diciembre de 2008. Fuente: Servicio Sismológico. Departamento de Geofísica Universidad de Chile	243
Tabla 5.17. Ciclo semanal de Variación de Frecuencias Naturales Edificio Titanium debido a procesos constructivos. Modos 1 a 8.	295
Tabla 5. 18. Ciclo diario de variación de frecuencias naturales edificio Titanium debido a procesos constructivos. Modos 1 a 8.	295
Tabla 5.19. Ciclo de variación de razón de amortiguamiento edificio Titanium debido a procesos constructivos. Modos 1 a 8.	311
Tabla 5. 20. Intervalos de variación de la razón de amortiguamiento modal, durante periodo de monitoreo 13/08/2008 al 06/01/2009. Filtrado. Edificio	327

Titanium La Portada.

Tabla 5. 21. Variaciones máximas porcentuales con respecto a la frecuencia medida en el periodo de monitoreo. **328**

6. Monitoreo de Salud Estructural (SHM) y actualización de Modelos Matemáticos.

Tabla 6. 1. Pesos por niveles **372**

Tabla 6. 2. Propiedades mecánicas Aluminio Estructural. **373**

Tabla 6. 3. Propiedades Acero Estructural. **373**

Tabla 6. 4. Frecuencias Obtenidas del Modelo de Elementos Finitos (E.F.) **375**

Tabla 6. 5. Frecuencias de la Estructura Real obtenidas a partir del método SSI. **377**

Tabla 6. 6. Diferencias entre modelo EF y Modelo Real. Parámetros dinámicos. **379**

Tabla 6. 7. Numeración Parámetros. Análisis de Sensibilidad. **388**

Tabla 6. 8. Actualización de Parámetros y diferencias con los valores iniciales. **393**

Tabla 6. 9. Valores actualizados de la respuesta en términos de frecuencias para el modelo de Elementos Finitos (FEM). Actualización mediante el programa FEMTools. **393**

7. Conclusiones, Comentarios y Recomendaciones Finales para investigaciones futuras.

Tabla 7. 1. Diferencia porcentual máxima entre modelo de elementos finitos y estructura real, con respecto a la estructura real. Edificio Titanium la Portada. 407

Capítulo 1.

Introducción.

1.1 Introducción y Motivación.

Actualmente existe una necesidad de evaluar cambios en las propiedades dinámicas de las estructuras y utilizarlas como herramientas de actualización de modelos matemáticos, entre muchas otras aplicaciones.

Estas propiedades fundamentales están directamente relacionadas con la respuesta global de la estructura y corresponden principalmente a la frecuencia natural, capacidad de disipación de energía y formas modales.

Identificarlas y conocer sus rangos de variación permite entender y establecer el comportamiento dinámico de una estructura y la posible ocurrencia de daño, así como chequear y calibrar modelos teóricos con los cuales se diseña [VENTURA, 1996].

Dentro de la dinámica experimental el concepto de Monitoreo de Salud Estructural denominado *SHM* (del inglés *Structural Health Monitoring*), [JOHNSON, 2004], [CAICEDO, 2004], corresponde a determinar los rangos de variación de las propiedades dinámicas, estableciéndose límites que permiten verificar si la estructura ha sufrido daño, o bien ha experimentado cambios debido a condiciones ambientales o de uso, no necesariamente reportando daño.

Muchos ejemplos de monitoreo de salud estructural se han estudiado. Una buena referencia que incluye estructuras monitoreadas alrededor del mundo puede encontrarse en Internet en la página *web* de ISHMII (*International Society for Structural Health Monitoring of Intelligent Infrastructure*).

Los sistemas de monitoreo de salud estructural tienen como objetivo principal determinar ciertas propiedades de la estructura, con el fin de validar un modelo analítico o bien medir las variaciones de ciertos parámetros de interés.

En este sentido, existen dos corrientes principales ligadas a la identificación de parámetros dinámicos estructurales: la primera dedicada a estudiar daño dentro de las estructuras, lo que se traduce en una variación permanente de las propiedades dinámicas con las cuales se realiza el diseño y posterior construcción [*DURRANI, 1993*], [*TUREK, 2007*].

La segunda corriente esta enfocada a determinar las variaciones de las propiedades dinámicas de un sistema estructural sin que exista necesariamente daño dentro de la estructura. [*CLINTON, 2006*], [*YAÑEZ, 2009*], [*BROWNJOHN, 2002*], [*LUCO, 1987*].

Lo anterior tiene diversas aplicaciones, entre las que cuentan:

1. Identificar la fuente generadora de la variación de propiedades dinámicas.
2. Monitorear la respuesta de una estructura en proceso constructivo (uno de los objetivos principales de esta Tesis).
3. Diagnosticar el comportamiento de una estructura frente a diversas fuentes de vibración.
4. Obtener las propiedades dinámicas para actualizar modelos matemáticos.

Las técnicas más utilizadas para determinar las propiedades dinámicas estacionarias y no-estacionarias de un sistema estructural son el método de Frecuencia No Paramétrica o Espectro de Densidad de Potencia (FNP), [TANAKA, 1969], [CASTILLO 2005], y el método del Sub-Espacio Estocástico (SSI) [VAN OVERSCHEE, 1996], [PEETERS, 1998], [VALDES, 2004], [CASTILLO 2005], [REN, 2003].

En la presente tesis se estudian las técnicas antes mencionadas y se aplican a los resultados obtenidos de una red de monitoreo en una estructura en proceso constructivo, correspondiente al edificio Titanium La Portada, en el cual se evalúan los efectos de corto y mediano plazo en las propiedades dinámicas de una estructura, así como su correlación con el modelo matemático empleado para su diseño estructural.

Finalmente se presenta el concepto de actualización de modelos basados en el análisis de sensibilidad, a través de un modelo experimental, el cual es actualizado por medio de un programa computacional denominado *FEMTools*, [DDS, 2007], [DDS, 2007b].

Se debe destacar que esta tesis cuenta con el apoyo de FONDECYT, a través del Proyecto N° 1070319 “Structural Modal Parameter Identification Under Varying Soil Foundation Conditions”, año 2007 a cargo del Profesor Rubén Boroschek K.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo General.

Estimar mediante una red de monitoreo continuo la variabilidad de las propiedades dinámicas de una estructura debido al proceso constructivo y cambios ambientales por medio de los métodos de identificación de sistemas y presentar a partir de los resultados obtenidos, el concepto de actualización de modelos matemáticos.

1.2.2 Objetivos Específicos.

- Estudiar, aplicar y validar los métodos de identificación de sistemas mediante los resultados del monitoreo continuo de la estructura en estudio.
- Observar las variaciones en las propiedades dinámicas de la estructura debido al proceso constructivo de un edificio alto a partir de registros ambientales y establecer patrones de variación debido a estos procesos.
- Validar y calibrar un modelo de elementos finitos utilizando un sistema de optimización con base en los parámetros experimentales obtenidos.

1.3. Metodología.

La realización de esta investigación comprenderá la recolección bibliográfica y de estudios teóricos, la medición experimental de las propiedades dinámicas de una estructura en proceso de construcción y su verificación y validación a través de un modelo analítico adaptativo.

1.3.1 Recolección bibliográfica. Estudios analíticos y teóricos:

Se realizó una revisión bibliográfica de artículos, libros y memorias con información relevante para esta Tesis, específicamente sobre temas de identificación de sistemas y de variación de propiedades dinámicas en edificios altos.

El estudio teórico abarca la comprensión de los métodos de identificación de parámetros dinámicos y métodos de actualización de modelos matemáticos.

1.3.2 Instalación de red de monitoreo continuo y medición experimental de propiedades dinámicas de una estructura en proceso constructivo.

Esta etapa incluyó la instalación y puesta en marcha de una red de monitoreo continuo en uno de los pisos del edificio en proceso constructivo Titanium La Portada.

La red de monitoreo consistió en acelerómetros conectados a una central de registro continuo los que permanecieron fijos durante un periodo de 5 meses.

El monitoreo incluirá la observación de la respuesta de la estructura frente a fuentes de excitación propias del proceso constructivo tales como colocación de losetas prefabricadas, pilares, disipadores de energía, entre otros y fuentes de tipo ambiental-operacional tales como cambios de temperatura y ocupación-desocupación del edificio debido a las jornadas laborales propias de la faena constructiva

1.3.3 Verificación y validación del modelo analítico adaptativo.

Conforme se realizó el monitoreo continuo en la estructura y se obtuvo las propiedades dinámicas de ésta, se realizó el contraste con un modelo adaptativo de elementos finitos, según la fase constructiva en la que se encontraba

A partir de estos resultados se introdujo el concepto de actualización de modelos mediante el análisis de sensibilidad.

1.4 Alcances

Capítulo 2.

Desarrollo teórico y métodos de resolución de la ecuación de equilibrio dinámico de un sistema estructural.

Capítulo 3.

En este capítulo, se presenta la teoría y resolución de sistemas que pueden ser representados mediante un modelo espacio-estado: determinístico, estocástico y una combinación de ambos.

A partir de estos modelos se presenta el modelo del Sub-Espacio Estocástico (SSI) y su relación con la obtención de parámetros dinámicos en estructuras.

Capítulo 4.

Este capítulo pretende dar cuenta de dos métodos en el dominio de la frecuencia: Método de la Frecuencia No Paramétrica (FNP) y Descomposición en el Dominio de la Frecuencia (FDD). El objetivo es presentar herramientas asociadas a estos métodos y su utilidad dentro de la identificación de propiedades dinámicas de estructuras.

Capítulo 5.

Estudio y análisis de la variación de las propiedades modales del edificio en proceso constructivo Titanium La Portada.

Adicionalmente, se presentan patrones característicos de variación de las propiedades modales de la estructura, así como un análisis comparativo entre los resultados de la medición continua de la estructura real, con diferentes modelos de elementos finitos creados para el diseño de la estructura.

Capítulo 6.

En este capítulo se presentan los principales conceptos relacionados con el monitoreo de salud estructural, así como la relación que existe entre la obtención de parámetros dinámicos, con la posibilidad de actualizar y calibrar modelos matemáticos, como los de elementos finitos, comúnmente usados en el diseño estructural.

Se presenta un modelo estructural con el que se trabajarán dichas técnicas, y que es posible extrapolar a la estructura principal correspondiente a este estudio, el edificio Titanium La Portada.

Capítulo 7.

Conclusiones, Comentarios y Recomendaciones Finales para investigaciones futuras.

Capítulo 2.

Modelos Teóricos de Estructuras. Marco Teórico.

2.1 Introducción.

En el presente capítulo se desarrolla la teoría y métodos de resolución de la ecuación de equilibrio dinámico de un sistema estructural.

Inicialmente se planteará el problema de equilibrio dinámico, el cual será resuelto por medio de valores y vectores propios para tres casos: no amortiguado, amortiguamiento proporcional y amortiguamiento generalizado.

A continuación, se introducirá el concepto de modelo espacio-estado, el cual tiene como objetivos principales generar la respuesta dinámica de la estructura (aceleración, velocidad y desplazamientos) en todo instante de tiempo t , para una excitación dada, reduciendo de grado la ecuación de equilibrio dinámico original, por medio del estado interno del sistema, denominado vector de estado.

Por otro lado, este modelo constituye la base para uno de los métodos de identificación de parámetros dinámicos en el dominio del tiempo, denominado método del Sub-Espacio Estocástico, el que será utilizado en capítulos posteriores para el procesamiento de datos y obtención de propiedades modales de una estructura.

Este modelo, que representa un sistema lineal (estructura) e invariante en el tiempo se presentará de tres formas: continuo, discreto y estocástico.

Nota: en adelante, la notación $[\]$ indicará matriz, mientras que $\{ \}$ indicará vector columna.

2.2 Equilibrio Dinámico

El comportamiento dinámico de un sistema visco-elástico, lineal y discreto compuesto por n_2 masas puede ser modelado a través de la siguiente ecuación de equilibrio dinámico:

$$[M] \cdot \{\ddot{q}(t)\} + [C_2] \cdot \{\dot{q}(t)\} + [K] \cdot \{q(t)\} = \{f(t)\} = [B_2] \cdot \{u(t)\} \quad (2.1)$$

Donde las matrices $[M], [C_2], [K] \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ corresponden a las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez respectivamente, siendo n_2 el número de grados de libertad del sistema; $\{q(t)\} \in \mathbb{R}^{n_2}$ corresponde al vector (columna) de desplazamiento del sistema en un tiempo t .

Asimismo $\{\dot{q}(t)\}$ y $\{\ddot{q}(t)\} \in \mathbb{R}^{n_2}$ denotan vectores de velocidad y aceleración respectivamente.

El vector de excitación del sistema se encuentra representado por $\{f(t)\} \in \mathbb{R}^n$, el cual es factorizado en las matrices $[B_2] \in \mathbb{R}^{n_2 \times m}$ que especifica la posición de los *inputs* (matriz

binaria) y $\{u(t)\} \in \mathbb{R}^m$ que corresponde al desplazamiento, velocidad o aceleración de éstos y donde m corresponde a la cantidad de *inputs* aplicados (en el caso particular que se discretiza una excitación en términos de una serie de tiempo, m corresponde a la duración de la excitación).

Una observación importante es que el vector $\{u(t)\}$ también podría representar un vector de fuerzas.

2.3 Problema de Valores y Vectores Propios.

2.3.1 Problema de Valores propios. Caso no amortiguado

Asumiendo un sistema con amortiguamiento igual a cero, la ecuación (2.1) queda de la forma:

$$[M] \cdot \{\ddot{q}(t)\} + [K] \cdot \{q(t)\} = \{f(t)\} \quad (2.2)$$

Ecuación diferencial cuya solución es del tipo $\{q(t)\} = \{\varphi_i\} \cdot e^{(\lambda_i t)}$. Insertando esta solución en (2.2), para el caso homogéneo, se tiene:

$$[K] \cdot \{\varphi_i\} = [M] \cdot \{\varphi_i\} \cdot (-\lambda_i^2) \quad (2.3)$$

Donde $\{\varphi_i\} \in \mathbb{R}^{n_2}$ ($i=1, \dots, n_2$) son todos los vectores propios del sistema y $(-\lambda_i^2)$ es un valor propio real.

En este caso, el valor propio se denota por el cuadrado de la frecuencia propia ω_i^2 ,

Luego:

$$\lambda_i = j \cdot \omega_i \quad (2.4)$$

Donde $j = \sqrt{-1}$. Para el caso general de n_2 grados de libertad la ecuación (2.3) puede reescribirse como:

$$[K] \cdot [\Phi] = [M] \cdot [\Phi] \cdot [\Omega^2] \quad (2.5)$$

O bien:

$$([K] - [\Omega^2] \cdot [M]) \cdot [\Phi] = [0] \quad (2.6)$$

Que corresponde al problema clásico de valores y vectores propios.

La matriz $[\Phi] \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ contiene los vectores propios como columna y $[\Omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ es la matriz diagonal que contiene las frecuencias naturales al cuadrado (valores propios).

Es fácil demostrar que las siguientes propiedades se cumplen (ortogonalidad):

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_n \end{bmatrix}, \quad [\Phi]^T [K] [\Phi] = \begin{bmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_n \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Donde m_i corresponde a la masa modal y k_i la rigidez modal. Reemplazando (2.7) en (2.5) se tiene:

$$\omega_i = \frac{k_i}{m_i} \quad (2.8)$$

Normalizando los vectores propios con respecto a la masa se tiene:

$$[\Phi]^T \cdot [M] \cdot [\Phi] = [I_{n_2}] \quad , \quad [\Phi]^T \cdot [K] \cdot [\Phi] = [\Omega^2] \quad (2.9)$$

Siendo $[I_{n_2}]$ la matriz identidad de dimensiones $n_2 \times n_2$

2.3.2 Problema de Valores propios. Amortiguamiento proporcional.

Premultiplicando la ecuación (2.1) por $[\Phi]^T$ e introduciendo la transformación de coordenadas (modal) $\{q(t)\} = [\Phi] \cdot \{q_m(t)\}$ se tiene:

$$[\Phi]^T [M][\Phi]\{\ddot{q}_m(t)\} + [\Phi]^T [C_2][\Phi]\{\dot{q}_m(t)\} + [\Phi]^T [K][\Phi]\{q_m(t)\} = [\Phi]^T [B_2]\{u(t)\} \quad (2.10)$$

Donde $\{q_m(t)\}$ corresponde al desplazamiento modal. Para simplificar el primer y tercer término del lado izquierdo de la ecuación (2.10) se utilizan las propiedades de ortogonalidad (2.7).

Suponiendo amortiguamiento de tipo proporcional se cumple que:

$$[\Phi]^T \cdot [C_2] \cdot [\Phi] = [\ddots c_{2_i} \ddots] = [\ddots 2 \cdot \xi_i \cdot \omega_i \cdot m_i \ddots] = [\Gamma] \cdot [\ddots m_i \ddots] \quad (2.11)$$

La segunda igualdad esta definida por el coeficiente de amortiguamiento $\xi_i = c_i / (2 \cdot m_i \cdot \omega_i)$ y la tercera define $[\Gamma] = \begin{bmatrix} \dots & 2 \cdot \xi_i \cdot \omega_i & \dots \end{bmatrix}$.

Reemplazando las ecuaciones (2.7) y (2.11) en la ecuación (2.10) es posible desacoplar esta última:

$$[I] \cdot \{\ddot{q}_m(t)\} + [\Gamma] \cdot \{\dot{q}_m(t)\} + [\Omega^2] \cdot \{q_m(t)\} = \begin{bmatrix} \dots & 1/m_i & \dots \end{bmatrix} \cdot [\Phi]^T \cdot [B_2] \cdot \{u(t)\} \quad (2.12)$$

Al igual que la ecuación (2.1), la solución homogénea de la ecuación diferencial anterior es de la forma $\{q(t)\} = \{\varphi_i\} \cdot e^{(\lambda_i t)}$.

Es fácil demostrar que los vectores propios de este caso son los mismos que el caso no amortiguado. De la ecuación (2.12) se puede deducir que sus valores propios satisfacen:

$$\lambda_i^2 + 2 \cdot \xi_i \cdot \omega_i \cdot \lambda_i + \omega_i^2 = 0 \quad (2.13)$$

Cuyas raíces son:

$$\lambda_i, \lambda_i^* = -\xi_i \cdot \omega_i \pm j \cdot \omega_i \cdot \sqrt{1 - \xi_i^2} \quad (2.14)$$

Donde el superíndice (*) denota el complejo conjugado. Despejando de la ecuación (2.11) la matriz $[C_2]$ se tiene:

$$\begin{aligned} [\Phi]^T \cdot [C_2] \cdot [\Phi] &= \begin{bmatrix} \dots & 2 \cdot \xi_i \cdot \omega_i \cdot m_i & \dots \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \left([\Phi]^T\right)^{-1} \cdot [\Phi]^T \cdot [C_2] \cdot [\Phi] \cdot [\Phi]^{-1} &= \left([\Phi]^T\right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \dots & 2 \cdot \xi_i \cdot \omega_i \cdot m_i & \dots \end{bmatrix} \cdot [\Phi]^{-1} \\ \Rightarrow [C_2] &= \left([\Phi]^T\right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \dots & 2 \cdot \xi_i \cdot \omega_i \cdot m_i & \dots \end{bmatrix} \cdot [\Phi]^{-1} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Además, de (2.7):

$$[\Phi]^T \cdot [M] \cdot [\Phi] = [\ddot{\cdot} m_{i\ddot{\cdot}}]$$

$$\Rightarrow \left([\Phi]^T\right)^{-1} \cdot [\Phi]^T \cdot [M] \cdot [\Phi] = \left([\Phi]^T\right)^{-1} \cdot [\ddot{\cdot} m_{i\ddot{\cdot}}]$$

$$\Rightarrow [M] \cdot [\Phi] = \left([\Phi]^T\right)^{-1} \cdot [\ddot{\cdot} m_{i\ddot{\cdot}}]$$

Post multiplicando por la inversa de la matriz $[\ddot{\cdot} m_{i\ddot{\cdot}}]$ (que corresponde a $[\ddot{\cdot} 1/m_{i\ddot{\cdot}}]$) se tiene:

$$\begin{aligned} [M] \cdot [\Phi] \cdot [\ddot{\cdot} 1/m_{i\ddot{\cdot}}] &= \left([\Phi]^T\right)^{-1} \cdot [\ddot{\cdot} m_{i\ddot{\cdot}}] \cdot [\ddot{\cdot} 1/m_{i\ddot{\cdot}}] \\ \Rightarrow [M] \cdot [\Phi] \cdot [\ddot{\cdot} 1/m_{i\ddot{\cdot}}] &= \left([\Phi]^T\right)^{-1} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Por otra parte:

$$[\Phi]^T \cdot [M] \cdot [\Phi] = [\ddot{\cdot} m_{i\ddot{\cdot}}]$$

$$\Rightarrow [\Phi]^T \cdot [M] \cdot [\Phi] \cdot [\Phi]^{-1} = [\ddot{\cdot} m_{i\ddot{\cdot}}] \cdot [\Phi]^{-1}$$

$$\Rightarrow [\Phi]^T \cdot [M] = [\ddot{\cdot} m_{i\ddot{\cdot}}] \cdot [\Phi]^{-1} \quad (2.17)$$

Finalmente, de las ecuaciones (2.15), (2.16) y (2.17) se puede concluir que la matriz de amortiguamiento se puede escribir como:

$$\begin{aligned} [C_2] &= \left([\Phi]^T\right)^{-1} \cdot \left([\ddot{\cdot} 2\xi_i \omega_i m_{i\ddot{\cdot}}\right] \cdot \left([\Phi]\right)^{-1} = \left([M] \cdot [\Phi] \cdot [\ddot{\cdot} 1/m_{i\ddot{\cdot}}]\right) \cdot \left([\ddot{\cdot} 2\xi_i \omega_i m_{i\ddot{\cdot}}\right] \cdot [\Phi]^T \cdot [M]) \\ & \quad (2.18) \end{aligned}$$

Un caso particular de amortiguamiento proporcional corresponde al denominado amortiguamiento tipo Rayleigh, en donde la matriz de amortiguamiento es una combinación lineal de la masa y la rigidez de la estructura. Puede expresarse matemáticamente como:

$$[C_2] = \alpha \cdot [M] + \beta \cdot [K] \quad (2.19)$$

Donde α , β son dos constantes escalares.

2.3.3 Problema de Valores propios. Amortiguamiento Generalizado.

Para el caso de una matriz de amortiguamiento $[C_2]$ no clásica se plantea la siguiente solución:

Adhiriendo a la ecuación (2.1) la identidad $[M] \cdot \{\dot{q}(t)\} = [M] \cdot \{\dot{q}(t)\}$ y definiendo:

$$\{x(t)\} = \begin{pmatrix} \{q(t)\} \\ \{\dot{q}(t)\} \end{pmatrix}, \quad [P] = \begin{pmatrix} [C_2] & [M] \\ [M] & [0] \end{pmatrix}, \quad [Q] = \begin{pmatrix} [K] & [0] \\ [0] & -[M] \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Se puede definir la siguiente ecuación diferencial de primer orden:

$$[P] \cdot \{\dot{x}(t)\} + [Q] \cdot \{x(t)\} = \begin{pmatrix} [B_2] \\ [0] \end{pmatrix} \cdot \{u(t)\} \quad (2.21)$$

Donde $\{x(t)\} \in \mathbb{R}^n$ se denomina vector de estado (notar que $n = 2 \cdot n_2$).

Si se supone una solución al problema original (ecuación (2.1)) del tipo

$$\{q(t)\} = \sum_i \left(\{\Theta_i\} \cdot G \cdot e^{\lambda_i t} \right), \text{ y para cada } i: \{q(t)\}_i = \{\Theta_i\} \cdot G \cdot e^{\lambda_i t} \text{ se tendrá:}$$

$$\begin{aligned} \{\dot{q}(t)\}_i &= \lambda_i \cdot \{\Theta_i\} \cdot G \cdot e^{\lambda_i t} = \lambda_i \cdot \{q(t)\}_i \\ \{\ddot{q}(t)\}_i &= \lambda_i^2 \cdot \{\Theta_i\} \cdot G \cdot e^{\lambda_i t} = \lambda_i \cdot \{\dot{q}(t)\}_i \end{aligned} \quad (2.22)$$

Donde $\{\Theta_i\}$ corresponde al i -ésimo vector propio del sistema original de segundo orden y G un factor de ponderación (peso) de $\{q(t)\}$.

Definiendo $[\Lambda_c] = \begin{bmatrix} \dots & \lambda_i & \dots \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ que contiene los $n = 2n_2$ valores propios complejos del sistema se tiene de la ecuación (2.22), para todo i :

$$\{\dot{x}(t)\} = \begin{pmatrix} \dot{q}(t) \\ \ddot{q}(t) \end{pmatrix} = [\Lambda_c] \cdot \{x(t)\} \quad (2.23)$$

Definiendo:

$$\{\Psi_i\} = \begin{bmatrix} \{\Theta_i\} \\ \lambda_i \cdot \{\Theta_i\} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Luego:

$$\{x_i(t)\} = \{\Psi_i\} \cdot G \cdot e^{\lambda_i t} \quad (2.25)$$

Reemplazando en la homogénea de (2.21) se tiene para cada i :

$$[P] \cdot \lambda_i \cdot \{\Psi_i\} \cdot G \cdot e^{\lambda_i t} + [Q] \cdot \{\Psi_i\} \cdot G \cdot e^{\lambda_i t} = \{0\} \quad (2.26)$$

Luego, para todo i se tendrá que:

$$[P] \cdot [\Psi] \cdot [\Lambda_c] + [Q] \cdot [\Psi] = [0] \quad (2.27)$$

Donde $[\Psi] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ contiene los $n = 2n_2$ vectores propios complejos como columna. La ecuación anterior demuestra que $\{\Psi_i\}$ es el vector propio asociado a λ_i .

Como $[P]$ y $[Q]$ son matrices simétricas, pero no definidas positivas, sus valores y vectores propios serán complejos y ocurrirán en pares conjugados, por lo que la forma modal correspondiente es no-estacionaria. Los valores y vectores propios tendrán la siguiente estructura:

$$[\Lambda_c] = \begin{pmatrix} [\Lambda] & [0] \\ [0] & [\Lambda^*] \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

$$[\Psi] = \begin{pmatrix} [\Theta] & [\Theta^*] \\ [\Theta] \cdot [\Lambda] & [\Theta^*] \cdot [\Lambda^*] \end{pmatrix}$$

Donde $[\Theta^*]$ representa la matriz conjugada de $[\Theta]$ y $[\Lambda^*]$ la matriz conjugada de $[\Lambda]$.

De las ecuaciones (2.27) y (2.28) se tiene:

$$[M] \cdot [\Theta] \cdot [\Lambda]^2 + [C_2] \cdot [\Theta] \cdot [\Lambda] + [K] \cdot [\Theta] = [0] \quad (2.29)$$

Notar que $[\Theta]$ no corresponde necesariamente a $[\Phi]$ (del problema de amortiguamiento proporcional) debido a que $[\Theta]$, a diferencia de $[\Phi]$, no necesariamente es ortogonal respecto a las matrices $[M]$, $[K]$, $[C_2]$.

Análogo al problema de amortiguamiento proporcional, los valores propios complejos del sistema son:

$$\lambda_i, \lambda_i^* = -\xi_i \omega_i \pm j \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} \quad (2.30)$$

De la ecuación anterior se puede demostrar que la frecuencia angular y el cociente de amortiguamiento tienen la siguiente forma:

$$\omega_i = \sqrt{\lambda_i \lambda_i^*} \quad (2.31)$$

$$\xi_i = \frac{-(\lambda_i + \lambda_i^*)}{\omega_i} \quad (2.32)$$

2.3.3.1 Ortogonalidad de las matrices $[P]$ y $[Q]$.

Es posible demostrar propiedades de ortogonalidad para las matrices $[P]$ y $[Q]$ partiendo de la ecuación (2.27). Para los i -ésimos valores y vectores propios se tendrá:

$$[P] \cdot \{\Psi_i\} \cdot \lambda_i + [Q] \cdot \{\Psi_i\} = \{0\} \quad (2.33)$$

$$\Rightarrow -[P] \cdot \{\Psi_i\} \cdot \lambda_i = [Q] \cdot \{\Psi_i\} \quad / \{\Psi_j\}^T \cdot$$

$$\Rightarrow -\{\Psi_j\}^T \cdot [P] \cdot \{\Psi_i\} \cdot \lambda_i = \{\Psi_j\}^T [Q] \cdot \{\Psi_i\}$$

Pero como $[Q]$ es simétrica se tendrá que:

$$\{\Psi_j\}^T \cdot [Q] = \{\Psi_j\}^T \cdot [Q]^T \Rightarrow \{\Psi_j\}^T \cdot [Q] = ([Q] \cdot \{\Psi_j\})^T \quad (2.34)$$

$$\Rightarrow -\{\Psi_j\}^T \cdot [P] \cdot \{\Psi_i\} \cdot \lambda_i = ([Q] \cdot \{\Psi_j\})^T \cdot \{\Psi_i\}$$

Pero:

$$[Q] \cdot \{\Psi_j\} = -[P] \cdot \{\Psi_j\} \cdot \lambda_j$$

Luego:

$$\Rightarrow -\{\Psi_j\}^T \cdot [P] \cdot \{\Psi_i\} \cdot \lambda_i = (-[P] \cdot \{\Psi_j\} \cdot \lambda_j)^T \cdot \{\Psi_i\}$$

$$\Rightarrow \{\Psi_j\}^T \cdot [P] \cdot \{\Psi_i\} \cdot \lambda_i = \lambda_j \cdot \{\Psi_j\}^T \cdot [P]^T \cdot \{\Psi_i\}$$

Como $[P]$ es simétrica se tendrá que:

$$\Rightarrow \{\Psi_j\}^T \cdot [P] \cdot \{\Psi_i\} \cdot \lambda_i = \lambda_j \cdot \{\Psi_j\}^T \cdot [P] \cdot \{\Psi_i\}$$

$$\Rightarrow (\lambda_i - \lambda_j) \left(\{\Psi_j\}^T \cdot [P] \cdot \{\Psi_i\} \right) = \{0\}$$

Luego, para $i \neq j$ se tendrá que:

$$\left(\{\Psi_j\}^T \cdot [P] \cdot \{\Psi_i\} \right) = 0 \quad (2.35)$$

Lo que demuestra la propiedad de ortogonalidad para $[P]$. De forma matricial es posible escribir:

$$[\Psi]^T \cdot [P] \cdot [\Psi] = [\dots a_i \dots] \quad (2.36)$$

Siendo $a_i = (\{\Psi_i\}^T \cdot [P] \cdot \{\Psi_i\})$.

De forma similar se puede demostrar la ortogonalidad de la matriz $[Q]$. Se tiene:

$$\begin{aligned} -[P] \cdot \{\Psi_i\} \cdot \lambda_i &= [Q] \cdot \{\Psi_i\} \quad / \{\Psi_j\}^T \cdot \\ \Rightarrow -\{\Psi_j\}^T \cdot [P] \cdot \{\Psi_i\} \cdot \lambda_i &= \{\Psi_j\}^T [Q] \cdot \{\Psi_i\} \end{aligned}$$

Pero la matriz $[P]$ es simétrica, luego se cumple que:

$$\{\Psi_j\}^T \cdot [P] = \{\Psi_j\}^T \cdot [P]^T = ([P] \cdot \{\Psi_j\})^T \quad (2.37)$$

Luego:

$$\Rightarrow -([P] \cdot \{\Psi_j\})^T \cdot \{\Psi_i\} \cdot \lambda_i = \{\Psi_j\}^T [Q] \cdot \{\Psi_i\}$$

Pero:

$$([P] \cdot \{\Psi_j\}) = -\frac{1}{\lambda_j} [Q] \cdot \{\Psi_j\}$$

Reemplazando en la ecuación anterior se tiene:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow -\left(-\frac{1}{\lambda_j}[\mathcal{Q}] \cdot \{\Psi_j\}\right)^T \cdot \{\Psi_i\} \cdot \lambda_i = \{\Psi_j\}^T [\mathcal{Q}] \cdot \{\Psi_i\} \\
&\Rightarrow \frac{1}{\lambda_j} \{\Psi_j\}^T [\mathcal{Q}]^T \cdot \{\Psi_i\} \cdot \lambda_i = \{\Psi_j\}^T [\mathcal{Q}] \cdot \{\Psi_i\} \\
&\Rightarrow \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \{\Psi_j\}^T [\mathcal{Q}] \cdot \{\Psi_i\} = \{\Psi_j\}^T [\mathcal{Q}] \cdot \{\Psi_i\} \\
&\Rightarrow \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j} - 1\right) \{\Psi_j\}^T [\mathcal{Q}] \cdot \{\Psi_i\} = 0 \\
&\Rightarrow \left(\frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_j}\right) \{\Psi_j\}^T [\mathcal{Q}] \cdot \{\Psi_i\} = 0
\end{aligned}$$

Luego, para $i \neq j$ se tendrá que:

$$\left(\{\Psi_j\}^T \cdot [\mathcal{Q}] \cdot \{\Psi_i\}\right) = 0 \quad (2.38)$$

Lo que demuestra la propiedad de ortogonalidad para $[\mathcal{Q}]$. De forma matricial es posible escribir:

$$\Psi^T [\mathcal{Q}] \Psi = [\dots b_{i\dots}] \quad (2.39)$$

Siendo $b_i = \left(\{\Psi_i\}^T \cdot [\mathcal{Q}] \cdot \{\Psi_i\}\right)$.

Donde $[\dots a_{i\dots}]$, $[\dots b_{i\dots}]$ se denominan matriz modal a y b respectivamente.

Reemplazando las ecuaciones (2.36) y (2.39) en (2.27) se tiene:

$$\Lambda_c = [\dots \lambda_{i\dots}] = - \left[\dots \frac{1}{a_{i\dots}} \right] [\dots b_{i\dots}] = - \left[\dots \frac{b_i}{a_{i\dots}} \right] \quad (2.40)$$

2.4 Modelo Espacio-Estado.

Este tipo de modelos permite obtener la respuesta de un sistema considerado lineal e invariante en el tiempo.

Como todo modelo, requiere de una parametrización, lo que se traduce en la obtención de los parámetros dinámicos del sistema: frecuencias naturales, amortiguamientos y formas modales u operacionales.

Si bien los modelos espacio-estado tienen su origen en campos como la ingeniería eléctrica, ingeniería mecánica e ingeniería aeroespacial, este tipo de modelos ha sido extrapolado al campo de la dinámica y monitoreo estructural, considerando que las estructuras corresponden de igual forma a un sistema que puede ser modelado matemáticamente a través de este tipo de planteamientos e hipótesis, así como lo hace por ejemplo, el método de elementos finitos.

Básicamente, su formulación en el caso particular de estructuras que se pueden modelar mediante la ecuación de equilibrio dinámico, consiste en reducir la ecuación de equilibrio dinámico a una expresión de primer orden a través de un proceso algebraico, formulando una nueva solución para ésta.

En la presente sección se pretende dar una visión de los diferentes tipos de modelo espacio- estado, y su inter-relación, lo que permitirá luego dar paso a los métodos de

identificación de parámetros dinámicos de tipo paramétrico, en el dominio del tiempo, como el método del Sub-Espacio Estocástico (SSI) y con el cual se estudió la variación de parámetros dinámicos de una estructura real en proceso constructivo.

Dependiendo del modelo a considerar, es posible definir dos clases de modelo en términos de modelación: continuo y discreto.

El modelo discreto a su vez se divide en dos tipos: modelo determinístico y modelo estocástico.

Adicionalmente se podría definir un tercer caso que combina ambos modelos anteriores, denominado modelo determinístico-estocástico, pero se encuentra fuera del alcance de esta tesis.

A continuación se presentan los modelos continuo y discreto. En el próximo capítulo se analizarán los dos tipos de modelos discretos: determinísticos y estocásticos, como parte del método de identificación de parámetros dinámicos en el dominio del tiempo denominado método del Sub Espacio Estocástico.

2.4.1 Modelo Espacio-Estado. Caso Continuo.

2.4.1.1 La Ecuación de Estado.

Reduciendo la ecuación de equilibrio dinámico (2.1) a una ecuación diferencial de primer orden como en el caso de amortiguamiento generalizado (ecuación (2.21)) se tiene:

$$[P] \cdot \{\dot{x}(t)\} + [Q] \cdot \{x(t)\} = \begin{pmatrix} [B_2] \\ [0] \end{pmatrix} \cdot \{u(t)\} \quad (2.41)$$

Despejando $\dot{x}(t)$ de la ecuación anterior se tiene:

$$\{\dot{x}(t)\} = [A_c] \cdot \{x(t)\} + [B_c] \cdot \{u(t)\} \quad (2.42)$$

La ecuación anterior describe el estado interno del sistema en el tiempo. La matriz $[A_c]$ se denomina matriz de sistema o matriz de estado, y describe toda la dinámica del sistema, y se encuentra completamente caracterizada por sus valores propios.

La matriz $[B_c]$ corresponde a la Matriz de valores de entrada o *inputs* y representa el efecto, por medio de una transformación lineal, que tienen los valores de entrada sobre el estado del sistema $\{x(t)\}$ en un tiempo t .

Estas matrices, $[A_c]$ y $[B_c]$, pueden deducirse de:

$$[A_c] = -[P]^{-1} \cdot [Q] = \begin{pmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1} \cdot [K] & -[M]^{-1} \cdot [C_2] \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

$$[P]^{-1} = \begin{pmatrix} [0] & [M]^{-1} \\ [M]^{-1} & -[M]^{-1} \cdot [C_2] \cdot [M]^{-1} \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

$$[B_c] = [P]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} [B_2] \\ [0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0] \\ [M]^{-1} \cdot [B_2] \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

Como se mencionó anteriormente, la matriz $[A_c]$ se encuentra caracterizada por sus valores y vectores propios.

El objetivo que se persigue entonces es generar un problema de valores y vectores propios para la matriz $[A_c]$.

De la ecuación (2.43) se definió la matriz $[A_c] = -[P]^{-1} \cdot [Q]$. Manipulando las expresiones (2.36) y (2.39) se tiene que:

$$\begin{aligned} [\Psi]^T \cdot [P] \cdot [\Psi] &= [\dots a_{i\dots}] \\ \Rightarrow [P] &= \left([\Psi]^T\right)^{-1} \cdot [\dots a_{i\dots}] \cdot [\Psi]^{-1} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Ahora, es necesario encontrar la inversa de $[P]$. Para esto debe cumplirse que:

$$\left(\left([\Psi]^T\right)^{-1} \cdot [\dots a_{i\dots}] \cdot [\Psi]^{-1}\right) \cdot [P]^{-1} = [I] \quad (2.47)$$

Despejando $[P]^{-1}$ se tiene:

$$\begin{aligned} \left(\left([\Psi]^T\right)^{-1} \cdot [\dots a_{i\dots}] \cdot [\Psi]^{-1}\right) \cdot [P]^{-1} &= [I] \quad / [\Psi]^T \cdot \\ \Rightarrow [\Psi]^T \cdot \left([\Psi]^T\right)^{-1} \cdot [\dots a_{i\dots}] \cdot [\Psi]^{-1} \cdot [P]^{-1} &= [\Psi]^T \cdot [I] \\ \Rightarrow [\dots a_{i\dots}] \cdot [\Psi]^{-1} \cdot [P]^{-1} &= [\Psi]^T \cdot [I] \quad / [\dots a_{i\dots}]^{-1} \cdot \\ \Rightarrow [\dots a_{i\dots}]^{-1} \cdot [\dots a_{i\dots}] \cdot [\Psi]^{-1} \cdot [P]^{-1} &= [\dots a_{i\dots}]^{-1} \cdot [\Psi]^T \cdot [I] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow [\Psi]^{-1} \cdot [P]^{-1} &= \begin{bmatrix} \ddots & a_{i..} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}^{-1} \cdot [\Psi]^T \cdot [I] && /[\Psi] \cdot \\
\Rightarrow [\Psi][\Psi]^{-1} \cdot [P]^{-1} &= [\Psi] \begin{bmatrix} \ddots & a_{i..} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}^{-1} \cdot [\Psi]^T \cdot [I] \\
\Rightarrow [P]^{-1} &= [\Psi] \begin{bmatrix} \ddots & a_{i..} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}^{-1} \cdot [\Psi]^T \cdot [I] \\
\Rightarrow [P]^{-1} &= [\Psi] \begin{bmatrix} \ddots & 1 \\ \vdots & a_{i..} \end{bmatrix} \cdot [\Psi]^T && (2.48)
\end{aligned}$$

Por otra parte se tiene, de la ecuación (2.39), despejando $[Q]$:

$$[Q] = \left([\Psi]^T\right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \ddots & b_{i..} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \cdot [\Psi]^{-1} \quad (2.49)$$

Finalmente, usando las ecuaciones (2.40), (2.48) y (2.49) es posible reescribir A_c como:

$$\begin{aligned}
[A_c] &= -[P]^{-1} \cdot [Q] = -[\Psi] \cdot \begin{bmatrix} \ddots & 1 \\ \vdots & a_{i..} \end{bmatrix} \cdot [\Psi]^T \cdot \left([\Psi]^T\right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \ddots & b_{i..} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \cdot [\Psi]^{-1} = [\Psi] \cdot [\Lambda_c] \cdot [\Psi]^{-1} \\
&&& (2.50)
\end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned}
[A_c] \cdot [\Psi] &= [\Psi] \cdot [\Lambda_c] \\
[A_c] &= [\Psi] \cdot [\Lambda_c] \cdot [\Psi]^{-1} && (2.51)
\end{aligned}$$

Lo que constituye un problema de valores y vectores propios. Con esto se aprecia que la matrices $[\Lambda_c]$ y $[\Psi]$ contienen los valores y vectores propios de $[A_c]$, respectivamente y por lo tanto es posible conocer el estado interno del sistema para un *input* dado.

2.4.1.2 Ecuación de Datos Observados.

En la práctica, no todos los grados de libertad (n_2) de un sistema son medidos. Asumiendo que estas mediciones se hacen sobre l grados de libertad (las mediciones pueden ser de aceleración y/o velocidad y/o desplazamiento), la ecuación de observación puede escribirse como:

$$\{y(t)\} = [C_a]\{\ddot{q}(t)\} + [C_v]\{\dot{q}(t)\} + [C_d]\{q(t)\} \quad (2.52)$$

Donde $\{y(t)\} \in \mathbb{R}^l$ son los *outputs* en un tiempo t . $[C_a], [C_v], [C_d]$ son matrices binarias que contienen la ubicación de los *outputs*. Utilizando la ecuación de equilibrio dinámico (2.1) y pre-multiplicándola por $[C_a][M]^{-1}$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} & [C_a] \cdot [M]^{-1} \cdot [M] \cdot \{\ddot{q}(t)\} + [C_a] \cdot [M]^{-1} \cdot [C_2] \cdot \{\dot{q}(t)\} + [C_a] \cdot [M]^{-1} \cdot [K] \cdot \{q(t)\} \\ & = [C_a] \cdot [M]^{-1} \cdot [B_2] \cdot \{u(t)\} \end{aligned}$$

Reordenando términos se tiene:

$$-[C_a] \cdot [M]^{-1} \cdot [K] \{q(t)\} - [C_a] \cdot [M]^{-1} [C_2] \{\dot{q}(t)\} + [C_a] \cdot [M]^{-1} \cdot [B_2] \cdot \{u(t)\} = [C_a] \cdot \{\ddot{q}(t)\}$$

Agregando a ambos lados de la ecuación anterior el término $[C_v]\{\dot{q}(t)\} + [C_d]\{q(t)\}$ se tiene:

$$\begin{aligned}
& [C_d]\{q(t)\} - [C_a][M]^{-1}[K]\{q(t)\} + [C_v]\{\dot{q}(t)\} - [C_a][M]^{-1}[C_2]\{\dot{q}(t)\} + [C_a][M]^{-1}[B_2]\{u(t)\} \\
& = [C_a]\{\ddot{q}(t)\} + [C_v]\{\dot{q}(t)\} + [C_d]\{q(t)\}
\end{aligned}$$

Agrupando términos y aplicando la definición de la ecuación (2.52) se tiene

$$\begin{aligned}
& \left([C_d] - [C_a][M]^{-1}[K] \right) \cdot \{q(t)\} + \left([C_v] - [C_a][M]^{-1}[C_2] \right) \cdot \{\dot{q}(t)\} + \left([C_a][M]^{-1}[B_2] \right) \{u(t)\} = \{y(t)\} \\
& \quad (2.53)
\end{aligned}$$

Luego aplicando la definición de vector de estado (2.20) es posible reescribir la ecuación anterior como:

$$\begin{aligned}
& \left[[C_d] - [C_a][M]^{-1}[K] \quad \vdots \quad [C_v] - [C_a][M]^{-1}[C_2] \right] \begin{pmatrix} \{q(t)\} \\ \dots \\ \{\dot{q}(t)\} \end{pmatrix} + [C_a][M]^{-1}[B_2]\{u(t)\} = \{y(t)\} \\
& \quad (2.54)
\end{aligned}$$

Luego:

$$\{y(t)\} = [C_c] \cdot \{x(t)\} + [D_c] \cdot \{u(t)\} \quad (2.55)$$

Que corresponde a la ecuación de datos observados, con:

$$[C_c] = \left[[C_d] - [C_a] \cdot [M]^{-1} \cdot [K] \quad \vdots \quad [C_v] - [C_a] \cdot [M]^{-1} \cdot [C_2] \right] \quad (2.56)$$

$$[D_c] = \left([C_a] \cdot [M]^{-1} \cdot [B_2] \right) \quad (2.57)$$

Las matriz $[C_c] \in \mathbb{R}^{l \times n}$ se denomina Matriz de salidas o *outputs* (del inglés *Output Matrix*), la que describe de que forma el estado interno del sistema es transferido al

exterior por medio de los *outputs* $\{y(t)\}$, y la matriz $[D_c] \in \mathbb{R}^{l \times m}$ se denomina Matriz de Retroalimentación, respectivamente.

Notar que en el caso que sólo se midan desplazamientos y/o velocidades, la matriz de transmisión directa será nula y por ende se tendrá una relación proporcional entre el estado interno y el *output* del sistema.

En el caso particular de estructuras en las que se tenga vibración en la base, como por ejemplo sismos, es posible reconocer que:

$$\{u(t)\} = \{\ddot{v}_g(t)\} \quad (2.58)$$

Donde $\{\ddot{v}_g(t)\}$ corresponde a la aceleración del suelo. En el caso de que sea posible medir ésta, el *input* será un valor conocido.

2.4.1.3 Modelo Espacio-Estado Continuo.

La combinación de las ecuaciones (2.42) y (2.55) dan origen al modelo continuo de espacio estado:

$$\begin{aligned} \{\dot{x}(t)\} &= [A_c] \cdot \{x(t)\} + [B_c] \cdot \{u(t)\} \\ \{y(t)\} &= [C_c] \cdot \{x(t)\} + [D_c] \cdot \{u(t)\} \end{aligned} \quad (2.59)$$

El orden n del modelo esta definido por la dimensión del vector de estado. De esta forma, las ecuaciones de movimiento se encuentran descritas a partir de la respuesta

$\{y(t)\}$ de la estructura (*output*), dado un *input* $\{u(t)\}$. En este caso el vector de estado $\{x(t)\}$ contiene los desplazamientos y velocidades de todos los grados de libertad de la estructura.

2.4.1.4 Parámetros Modales y reducción del modelo. Caso continuo.

2.4.1.4.1 Relación con el análisis modal clásico.

Considerando el análisis clásico, se tiene que la respuesta de un sistema estructural puede ser descompuesta de forma modal (compleja) como:

$$\{x(t)\} = [\Psi] \cdot \{x_m(t)\} \quad (2.60)$$

Con $\{x_m(t)\} \in \mathbb{C}^n$. Luego el modelo denominado espacio-estado modal se obtiene sustituyendo la ecuación (2.60) en (2.59) como:

$$\begin{aligned} \{\dot{x}(t)\} &= [A_c] \cdot \{x(t)\} + [B_c] \cdot \{u(t)\} \\ \Rightarrow [\Psi] \cdot \{\dot{x}_m(t)\} &= [A_c] \cdot [\Psi] \cdot \{x_m(t)\} + [B_c] \cdot \{u(t)\} \quad / [\Psi]^{-1} \cdot \\ \Rightarrow [\Psi]^{-1} \cdot [\Psi] \cdot \{\dot{x}_m(t)\} &= [\Psi]^{-1} \cdot [A_c] \cdot [\Psi] \cdot \{x_m(t)\} + [\Psi]^{-1} \cdot [B_c] \cdot \{u(t)\} \\ \Rightarrow \{\dot{x}_m(t)\} &= [\Psi]^{-1} \cdot [A_c] \cdot [\Psi] \cdot \{x_m(t)\} + [\Psi]^{-1} \cdot [B_c] \cdot \{u(t)\} \end{aligned}$$

Pero de la ecuación (2.51) se tiene que $[\Psi]^{-1} \cdot [A_c] \cdot [\Psi] = [\Lambda_c]$, luego reemplazando en la ecuación anterior se tiene:

$$\{\dot{x}_m(t)\} = [\Lambda_c] \cdot \{x_m(t)\} + [\Psi]^{-1} \cdot [B_c] \cdot \{u(t)\} \quad (2.61)$$

Se define:

$$[L_c]^T = [\Psi]^{-1} \cdot [B_c] \quad (2.62)$$

Luego reemplazando (2.62) en (2.61) se tiene:

$$\{\dot{x}_m(t)\} = [\Lambda_c] \cdot \{x_m(t)\} + [L_c]^T \cdot \{u(t)\} \quad (2.63)$$

Por otra parte, reemplazando la respuesta modal en la ecuación de datos observados:

$$\{y(t)\} = [C_c] \cdot [\Psi] \cdot \{x_m(t)\} + [D_c] \cdot \{u(t)\} \quad (2.64)$$

Sea:

$$[V_c] = [C_c] \cdot [\Psi] \quad (2.65)$$

Luego:

$$\{y(t)\} = [V_c] \cdot \{x_m(t)\} + [D_c] \cdot \{u(t)\} \quad (2.66)$$

Finalmente el modelo espacio estado continuo, en términos modales queda como:

$$\begin{aligned}\{\dot{x}_m(t)\} &= [\Lambda_c] \cdot \{x_m(t)\} + [L_c]^T \cdot \{u(t)\} \\ \{y(t)\} &= [V_c] \cdot \{x_m(t)\} + [D_c] \cdot \{u(t)\}\end{aligned}\tag{2.67}$$

Como se vio anteriormente, la matriz de valores propios tenia la forma (2.28):

$$[\Lambda_c] = \begin{pmatrix} [\Lambda] & [0] \\ [0] & [\Lambda^*] \end{pmatrix}, \quad [\Lambda] = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & -\xi_i \omega_i \pm j \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

Y la de vectores propios como (2.28):

$$[\Psi] = \begin{pmatrix} [\Theta] & [\Theta^*] \\ [\Theta] \cdot [\Lambda] & [\Theta^*] \cdot [\Lambda^*] \end{pmatrix}$$

De la condición de ortogonalidad y definición de $[P]$ (2.20), $[B_c]$ (2.45) y $[\Psi]$ (2.28), se puede deducir lo siguiente:

Si:

$$[\Psi]^T \cdot [P] \cdot [\Psi] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & a_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \Rightarrow [\Psi]^{-1} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \frac{1}{a_i} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \cdot [\Psi] \cdot [P]$$

Que resulta de despejar $[\Psi]$ y luego encontrar su inversa, haciendo cumplir la condición de que $[\Psi] \cdot [\Psi]^{-1} = [I]$, y además:

$$[B_c] = [P]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} B_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [\Psi] = \begin{pmatrix} [\Theta] & [\Theta^*] \\ [\Theta] \cdot [\Lambda] & [\Theta^*] \cdot [\Lambda^*] \end{pmatrix}$$

Se puede establecer las siguientes igualdades:

$$[L_c]^T = [\Psi]^{-1} \cdot [B_c] = \begin{bmatrix} \dots & 1 \\ & a_{i \dots} \end{bmatrix} \cdot [\Psi]^T \cdot [P] \cdot [B_c] = \begin{bmatrix} \dots & 1 \\ & a_{i \dots} \end{bmatrix} \cdot [\Psi]^T \cdot \begin{pmatrix} [B_2] \\ [0] \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & 1 \\ & a_{i \dots} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [\Theta]^T \\ [\Theta^*]^T \end{pmatrix} \cdot [B_2] \quad (2.68)$$

Generalmente $[L_c]^T$ se denomina matriz de participación modal y sus filas factores de participación modal.

De forma similar, de la definición de $[C_c]$ (2.56) y $[\Psi]$ (2.28), la matriz $[V_c]$ puede reescribirse como:

$$[V_c] = [C_c] \cdot [\Psi] = \left([C_d] - [C_a] \cdot [M]^{-1} \cdot [K] \quad ; \quad [C_v] - [C_a] \cdot [M]^{-1} \cdot [C_2] \right) \cdot \begin{pmatrix} [\Theta] & [\Theta^*] \\ [\Theta] \cdot [\Lambda] & [\Theta^*] \cdot [\Lambda^*] \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

En el caso particular en que se esté midiendo sólo aceleraciones, y utilizando la expresión (2.29), la ecuación anterior se reduce a:

$$[V_c] = [C_a] \cdot \left([\Theta] \cdot [\Lambda]^2 \quad ; \quad [\Theta^*] \cdot [\Lambda^*]^2 \right) \quad (2.70)$$

De forma análoga, en el caso en que se mida solo velocidades:

$$[V_c] = [C_v] \cdot ([\Theta][\Lambda] \quad ; \quad [\Theta^*][\Lambda^*]) \quad (2.71)$$

Y finalmente en caso de medir solo desplazamientos:

$$[V_c] = [C_d] \cdot ([\Theta] \quad ; \quad [\Theta^*]) \quad (2.72)$$

De la definición (2.52), se sabe que las matrices $[C_a]$, $[C_v]$, $[C_d]$ seleccionan las componentes de las formas modales (grados de libertad), que a su vez corresponden a la ubicación de los *outputs*.

La post-multiplicación de los modos de la estructura por $[\Lambda]$ o $[\Lambda^*]$, siendo éstas matrices diagonales, escala dichos modos.

Luego, cualquier valor que sea medido de la estructura (aceleración y/o velocidad y/o desplazamiento), la matriz $[V_c]$ denotará qué parte de los modos del sistema pueden ser observados a partir de los *outputs*.

Con esto se llega a que los parámetros que se buscan son $([\Lambda_c], [L_c]^T, [V_c])$ denominados “parámetros modales”.

De forma más común se utilizan los parámetros ω_i y ξ_i en vez de la matriz de valores propios $[\Lambda_c]$, pero su relación es directa de la ecuación (2.30).

2.4.1.4.2 Descomposición Modal en modelo Espacio-Estado Continuo.

La ventaja del modelo espacio estado continuo en términos modales, es que a partir de la matriz diagonal $[\Lambda_c]$, la contribución de los diferentes modos a la respuesta total $\{y(t)\}$ de la estructura puede ser desacoplada.

Como se verá a continuación, la contribución del modo i a la respuesta estará dada por λ_i , que corresponde al i -ésimo elemento diagonal de la matriz $[\Lambda_c]$; la i -ésima fila de la matriz de participación modal $[L_c]^T$, denotada por $\langle l_{c_i}^T \rangle$; y la i -ésima columna de $[V_c]$, denotada como $\{v_{c_i}\}$.

Como se vio anteriormente (2.67), el modelo espacio estado continuo en términos modales puede ser escrito como:

$$\{\dot{x}_m(t)\} = [\Lambda_c] \cdot \{x_m(t)\} + [L_c]^T \cdot \{u(t)\}$$

$$\{y(t)\} = [V_c] \cdot \{x_m(t)\} + [D_c] \cdot \{u(t)\}$$

Lo que se busca es obtener una descomposición modal para $[D_c]$ de forma de distinguir los modos que constituyen la respuesta total de la estructura.

En el caso de mediciones de desplazamientos y/o velocidades (*input*) solamente, no existirá la matriz de transmisión directa.

Luego, el desarrollo estará acotado solamente a casos en que existan al menos mediciones de aceleración.

Para este desarrollo se considerará que $[C_d]=[0]$, lo que servirá para realizar la descomposición de la matriz $[D_c]$.

Partiendo de una combinación de matrices de estado, es posible obtener su relación con la matriz de transmisión directa como sigue:

$$[C_c] \cdot [A_c]^{-1} \cdot [B_c] = \left([C_d] - [C_a] \cdot [M]^{-1} \cdot [K] \quad \vdots \quad [C_v] - [C_a] \cdot [M]^{-1} \cdot [C_2] \right) \cdot \left(-[Q]^{-1} \cdot [P] \right) \cdot [P]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} [B_2] \\ [0] \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

Pero:

$$[Q]^{-1} = \begin{pmatrix} [K]^{-1} & 0 \\ 0 & -[M]^{-1} \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

Reemplazando (2.74) en (2.73) se tiene:

$$\begin{aligned} [C_c] \cdot [A_c]^{-1} \cdot [B_c] &= \left([C_d] - [C_a] \cdot [M]^{-1} \cdot [K] \quad \vdots \quad [C_v] - [C_a] \cdot [M]^{-1} \cdot [C_2] \right) \cdot \begin{pmatrix} -[K]^{-1} & 0 \\ 0 & [M]^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [B_2] \\ [0] \end{pmatrix} \\ \Rightarrow [C_c] \cdot [A_c]^{-1} \cdot [B_c] &= \left([C_d] - [C_a] \cdot [M]^{-1} \cdot [K] \quad \vdots \quad [C_v] - [C_a] \cdot [M]^{-1} \cdot [C_2] \right) \cdot \begin{pmatrix} -[K]^{-1} \cdot [B_2] \\ [0] \end{pmatrix} \\ \Rightarrow [C_c] \cdot [A_c]^{-1} \cdot [B_c] &= -[C_d] \cdot [K]^{-1} \cdot [B_2] + [C_a] \cdot [M]^{-1} \cdot [K] \cdot [K]^{-1} [B_2] \\ \Rightarrow [C_c] \cdot [A_c]^{-1} \cdot [B_c] &= -[C_d] \cdot [K]^{-1} \cdot [B_2] + [C_a] \cdot [M]^{-1} \cdot [B_2] \end{aligned}$$

Considerando que $[C_d]=[0]$ se concluye:

$$[C_c] \cdot [A_c]^{-1} \cdot [B_c] = [C_a] \cdot [M]^{-1} \cdot [B_2] = [D_c] \quad (2.75)$$

De la ecuación anterior se desprende que es posible escribir la matriz de transmisión directa en términos de las matrices de estado.

Del modelo espacio estado continuo, en términos modales (2.67) es posible apreciar la siguiente igualdad:

$$[D_c] = [C_c] \cdot [A_c]^{-1} \cdot [B_c] = [V_c] \cdot [\Lambda_c]^{-1} \cdot [L_c]^T = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\lambda_i} \cdot \{v_{c_i}\} \cdot \langle l_{c_i}^T \rangle \right) \quad (2.76)$$

La ecuación anterior representa la descomposición modal de la matriz $[D_c]$.

Finalmente, se concluye que el vector de *output* corresponde a la suma las n contribuciones modales $\{y_i(t)\}$:

$$\{y(t)\} = \sum_{i=1}^n \{y_i(t)\} \quad (2.77)$$

Donde cada vector $\{y_i(t)\}$ corresponde a la respuesta (*output*) de un modelo Espacio-Estado continuo de primer orden:

$$\dot{x}_m^{(i)}(t) = \lambda_i \cdot x_m^{(i)}(t) + \langle l_{c_i}^T \rangle \cdot \{u(t)\} \quad (2.78)$$

$$\{y_i(t)\} = \{v_{c_i}\} \cdot x_m^{(i)}(t) + \frac{1}{\lambda_i} \cdot \{v_{c_i}\} \cdot \langle l_{c_i}^T \rangle \cdot \{u(t)\}$$

El escalar complejo $x_m^{(i)}(t)$ corresponde a la componente i -ésima del vector de estado.

2.4.1.4.3 Reducción del modelo en tiempo continuo.

El modelo Espacio-Estado modal ofrece una buena interpretación de lo que es la reducción del modelo, en base a la eliminación de ciertos modos.

Para graficar esto, se considera la ecuación (2.67), que corresponde al denominado modelo Espacio-Estado Modal:

$$\begin{aligned}\{\dot{x}_m(t)\} &= [\Lambda_c] \cdot \{x_m(t)\} + [L_c]^T \cdot \{u(t)\} \\ \{y(t)\} &= [V_c] \cdot \{x_m(t)\} + [D_c] \cdot \{u(t)\}\end{aligned}\tag{2.79}$$

Si se reordenan los n estados de la ecuación de estado, separando los r estados que se conservan del modelo de los $n-r$ estados a eliminar se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}n \updownarrow \left\{ \begin{array}{l} \{\dot{x}_r(t)\} \\ \{\dot{x}_e(t)\} \end{array} \right\} &= \begin{bmatrix} [\Lambda_{c_r}] & [0] \\ [0] & [\Lambda_{c_e}] \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \{x_r(t)\} \\ \{x_e(t)\} \end{array} \right\} + \begin{bmatrix} [L_{c_r}^T] \\ [L_{c_e}^T] \end{bmatrix} \cdot \{u(t)\} \\ \{y(t)\} &= \left(\begin{bmatrix} [V_{c_r}] & [V_{c_e}] \end{bmatrix} \right) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \{x_r(t)\} \\ \{x_e(t)\} \end{array} \right\} + [D_c] \cdot \{u(t)\}\end{aligned}\tag{2.80}$$

Donde $\{x_r(t)\} \in \mathbb{C}^r$ representa los estados del sistema reducido y $\{x_e(t)\} \in \mathbb{C}^{n-r}$ corresponden a los estados a eliminar.

Realizando esta reducción, de la ecuación (2.80) puede obtenerse un modelo Espacio-Estado modal reducido como:

$$\begin{aligned}\{\dot{x}_r(t)\} &= [\Lambda_{c_r}] \cdot \{x_r(t)\} + [L_{c_r}^T] \cdot \{u(t)\} \\ \{y(t)\} &= [V_{c_r}] \cdot \{x_r(t)\} + [D_{c_r}] \cdot \{u(t)\}\end{aligned}\tag{2.81}$$

Donde la matriz $[D_{c_r}]$ corresponde a:

$$[D_{c_r}] = [D_c] - [V_{c_e}] \cdot [\Lambda_{c_e}]^{-1} [L_{c_e}^T] = [V_{c_r}] \cdot [\Lambda_{c_r}]^{-1} [L_{c_r}^T]\tag{2.82}$$

La primera igualdad resulta de hacer nulo $\{\dot{x}_e(t)\}$ de la ecuación (2.80), debido a que corresponden a la derivada de los estados a eliminar, y la segunda igualdad resulta de la descomposición modal de la matriz $[D_{c_r}]$, concepto que se introdujo por medio de la ecuación (2.76).

2.4.2 Espacio-Estado. Modelo Discreto.

Debido a que en la realidad, las mediciones se realizan en instantes de tiempo discreto, se hace necesario estudiar el problema de Espacio-Estado desde esta perspectiva.

Se sabe que la solución de la ecuación de estado del modelo espacio-estado continuo (2.59) es de la forma [FARIAS, 2002]:

$$\{x(t)\} = e^{[A_c](t-t_0)} \cdot \{x(t_0)\} + e^{[A_c]t} \cdot \int_{t_0}^t e^{[A_c]s} \cdot [B_c] \cdot \{u(s)\} ds\tag{2.83}$$

Para discretizar el problema, primero es necesario tomar un tiempo fijo de muestreo, digamos $\Delta t[s]$, para luego resolver el modelo espacio-estado continuo para cada instante k de tiempo, donde $t = k\Delta t$, $k \in \mathbb{N}$.

Evaluando entre dos instantes de tiempo consecutivos, t_k y t_{k+1} se tiene:

$$\{x_{k+1}\} = e^{[A_c](t_{k+1}-t_k)} \cdot \{x_k\} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{[A_c](t_{k+1}-s)} \cdot [B_c] \cdot \{u(s)\} \cdot ds \quad (2.84)$$

Este problema puede ser resuelto de varias formas; en este caso se estudiarán dos de ellas: suponiendo que el *input* es constante entre dos tiempos de muestreo consecutivos o bien suponiendo que el *input* entre dos puntos puede ser definido por medio de un delta de Dirac.

Sea:

$$\{F(s)\} = [B_c] \cdot \{u(s)\} \quad (2.85)$$

2.4.2.1 Input constante entre dos puntos de muestreo

Definiendo la excitación entre dos puntos como:

$$\{F_k\} = [B_c] \cdot \{u_k\} = cte \quad (2.86)$$

Luego,

$$\{x_{k+1}\} = e^{([A_c](\Delta t))} \{x_k\} + e^{([A_c]t_{k+1})} \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{(-[A_c]s)} \cdot \{F_k\} ds \quad (2.87)$$

$$\{x_{k+1}\} = e^{([A_c] \cdot \Delta t)} \cdot \{x_k\} + e^{([A_c] \cdot t_{k+1})} \cdot \{F_k\} \cdot -[A_c]^{-1} \cdot \left[e^{(-[A_c] \cdot t_{k+1})} - e^{(-[A_c] \cdot t_k)} \right] \quad (2.88)$$

$$\{x_{k+1}\} = e^{([A_c] \cdot \Delta t)} \cdot \{x_k\} + [A_c]^{-1} \cdot \left[e^{([A_c] \cdot \Delta t)} - [I] \right] \cdot \{F_k\} \quad (2.89)$$

$$\{x_{k+1}\} = e^{([A_c] \cdot \Delta t)} \cdot \{x_k\} + [A_c]^{-1} \cdot \left[e^{([A_c] \cdot \Delta t)} - [I] \right] \cdot [B_c] \cdot \{u_k\} \quad (2.90)$$

Si se definen las matrices:

$$[A] = e^{([A_c] \cdot \Delta t)} \quad (2.91)$$

$$[B] = [A_c]^{-1} \cdot \left(e^{([A_c] \cdot \Delta t)} - [I] \right) \cdot [B_c] = ([A] - [I]) \cdot [A_c]^{-1} \cdot [B_c] \quad (2.92)$$

Se tendrá que existe una relación entre estas matrices y las matrices del modelo espacio-estado continuo. La matriz $[A]$ se denomina Matriz de Estado Discreta, mientras que la matriz $[B]$ se denomina Matriz de Entrada (*inputs*) Discreta.

La relación para $[B]$ de la ecuación (2.92) se cumple solo si $[A_c]$ es invertible.

Al igual que el modelo Espacio-Estado continuo, se tendrá una ecuación complementaria que corresponde a la ecuación de datos observados discreta.

En este caso, si se evalúa la ecuación de datos observados de la ecuación (2.59) en un instante de tiempo k se tendrá que las matrices $[C_c]$ y $[D_c]$ son invariantes al pasar de un modelo continuo a uno discreto, debido a que dichas matrices se definen en función de la ubicación de las salidas o *outputs* y de las matrices de masa y rigidez, ecuación (2.54), que para un sistema lineal, son invariantes en el tiempo.

Por lo tanto, y a modo de diferenciación del modelo Espacio-Estado continuo es posible definir las matrices $[C]$ y $[D]$, denominadas de forma análoga matriz de salida discreta y matriz de retroalimentación discreta, respectivamente como:

$$[C] = [C_c] \quad (2.93)$$

$$[D] = [D_c] \quad (2.94)$$

2.4.2.2 Input como delta de Dirac.

Definiendo:

$$\{F(s)\} = \{F_k\} \cdot \delta(s - t_k) \cdot \Delta t \quad (2.95)$$

$$\text{Con } t_k < s < t_{k+1} \text{ y } \delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

El delta de Dirac tiene las siguientes propiedades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-0}^{+0} \delta(t) dt = 1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \delta(s - t) ds = f(t)$$

Luego, reemplazando la ecuación (2.95) en (2.84) se tiene:

$$\{x_{k+1}\} = e^{([A_c] \Delta t)} \cdot \{x_k\} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{([A_c](t_{k+1}-t_k))} \cdot \{F_k\} \cdot \delta(s-t_k) \cdot \Delta t \cdot ds \quad (2.96)$$

$$\{x_{k+1}\} = e^{([A_c] \Delta t)} \{x_k\} + e^{([A_c] t_{k+1})} \cdot \Delta t \cdot \{F_k\} e^{-([A_c] t_k)} \quad (2.97)$$

$$\{x_{k+1}\} = e^{([A_c] \Delta t)} \cdot \{x_k\} + \{F_k\} \cdot e^{([A_c] \Delta t)} \cdot \Delta t \quad (2.98)$$

$$\{x_{k+1}\} = e^{([A_c] \Delta t)} \cdot \{x_k\} + e^{([A_c] \Delta t)} \cdot \Delta t \cdot [B_c] \cdot \{u(t)\} \quad (2.99)$$

Luego, las matrices discretas se relacionarán con las continuas como:

$$[A] = e^{([A_c] \Delta t)} \quad (2.100)$$

$$[B] = \Delta t \cdot e^{([A_c] \Delta t)} \cdot [B_c] \quad (2.101)$$

Las matrices $[C]$ y $[D]$ son iguales a las continuas como en el caso anterior.

Luego, es posible establecer, para ambos casos presentados, el modelo Espacio-Estado discreto como:

$$\{x_{k+1}\} = [A] \cdot \{x_k\} + [B] \cdot \{u_k\} \quad (2.102)$$

$$\{y_k\} = [C] \cdot \{x_k\} + [D] \cdot \{u_k\}$$

Donde $\{x_k\} = x(k\Delta t) = (q_k^T \quad \dot{q}_k^T)^T$ corresponde al vector de estado que contiene los desplazamientos y velocidades; $\{u_k\}$ y $\{y_k\}$ son los vectores discretos de *input* y *output* respectivamente; $[A]$ corresponde a la matriz de estado discreta; $[B]$ corresponde a la matriz de *inputs* discreta; $[C]$ corresponde a la matriz de *outputs* discreta; $[D]$ es la denominada *matriz de retroalimentación* discreta.

2.4.2.3 Parámetros modales y reducción modal. Caso discreto.

Agregando a las definiciones de $[A]$ (2.100) y $[A_c]$ (2.51) la definición de serie de expansión de Mc Laurin:

$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} M^k \quad (2.103)$$

Aplicando estas definiciones se tiene lo siguiente:

$$[A] = [\Psi] \cdot [\Lambda_c] \cdot [\Psi]^{-1} \quad (2.104)$$

$$e^{([A_c] \cdot \Delta t)} = [I] + [A_c] \cdot \Delta t + \frac{1}{2!} ([A_c] \cdot \Delta t)^2 + \dots + \frac{1}{k!} ([A_c] \cdot \Delta t)^k \quad (2.105)$$

$$e^{([A_c] \cdot \Delta t)} = [I] + [\Psi] \cdot [\Lambda_c] \cdot [\Psi]^{-1} \cdot \Delta t + \frac{1}{2!} \cdot [\Psi] \cdot [\Lambda_c] \cdot [\Psi]^{-1} \cdot [\Psi] \cdot [\Lambda_c] \cdot [\Psi]^{-1} \cdot \Delta t^2 + \dots \quad (2.106)$$

$$e^{([A_c] \cdot \Delta t)} = [I] + [\Psi] \cdot [\Lambda_c] \cdot [\Psi]^{-1} \cdot \Delta t + \frac{1}{2!} \cdot [\Psi] \cdot [\Lambda_c]^2 \cdot [\Psi]^{-1} \cdot \Delta t^2 + \frac{1}{3!} \cdot [\Psi] \cdot [\Lambda_c]^3 \cdot [\Psi]^{-1} \cdot \Delta t^3 + \dots \quad (2.107)$$

Luego,

$$e^{([A_c] \cdot \Delta t)} = [\Psi] \cdot e^{([\Lambda_c] \cdot \Delta t)} \cdot [\Psi]^{-1} \quad (2.108)$$

Con esto es posible establecer las siguientes relaciones:

$$[A] = e^{([A_c] \cdot \Delta t)} = e^{([\Psi][\Lambda_c][\Psi]^{-1}] \cdot \Delta t)} = [\Psi] \cdot e^{([\Lambda_c] \cdot \Delta t)} \cdot [\Psi]^{-1} = [\Psi] \cdot [\Lambda_d] \cdot [\Psi]^{-1} = [\Psi] \cdot [\dots \mu_i \dots] \cdot [\Psi]^{-1} \quad (2.109)$$

Donde las dos últimas igualdades definen la matriz de valores propios discretos. Luego, los vectores propios continuos serán iguales a los discretos y los valores propios discretos, denominados μ_i , se relacionan con los continuos como:

$$\mu_i = e^{\lambda_i \Delta t} \Leftrightarrow \lambda_i = \frac{\ln(\mu_i)}{\Delta t} \quad (2.110)$$

De forma similar a las ecuaciones (2.62) y (2.65) , la matriz de participación modal discreta y los modos de vibrar se escriben como:

$$[L]^T = [\Psi]^{-1} \cdot [B] \quad (2.111)$$

$$[V] = [C] \cdot [\Psi]$$

A partir de las ecuaciones anteriores se desprende que la matriz de factores de participación modal difiere del caso continuo debido a la matriz $[B]$. Por otra parte se tiene que los modos de vibrar en el caso continuo son los mismos que en el caso discreto.

2.5 Comentarios y conclusiones

Como se vio en este capítulo, es posible resolver el problema de equilibrio dinámico para un sistema lineal, de diversas formas, dependiendo del tipo de modelación que se realice.

Para los casos en que no se considera la matriz de disipación de energía, o bien en la que se considera de tipo proporcional, el problema se resuelve mediante el problema de valores y vectores propios clásico, desacoplando el sistema y modelándolo como n_2 sistemas de 1 grado de libertad.

Por otra parte, en el caso de tener amortiguamiento no clásico (o no proporcional), se introdujo de forma intuitiva el concepto de modelo Espacio-Estado, con el cual se reduce de orden la ecuación de equilibrio dinámico. De esta forma es posible replantear el problema mediante un problema análogo de valores y vectores propios.

Dependiendo del sistema que se quiera obtener respuesta, se definieron 2 clases de modelos espacio-estado: continuo y discreto, definiendo para el caso discreto dos formas de modelar la respuesta que corresponden a establecer la respuesta como una serie de Delta Dirac, o bien como una constante entre dos instantes de tiempo.

Finalmente cabe señalar que este tipo de desarrollo se realizó debido a que constituye parte importante en el desarrollo de métodos de identificación de parámetros dinámicos, especialmente en el método del Sub-Espacio Estocástico, con el que se analizó una estructura real en proceso constructivo.

Capítulo 3.

Método del Sub-Espacio. Análisis en el Dominio del Tiempo.

3.1 Introducción.

Un modelo dinámico describe el comportamiento de un sistema en función del tiempo. Las aplicaciones para este tipo de modelo en el campo de la dinámica de estructuras es variado: monitoreo de salud (Health Monitoring) [CLINTON, 2006], control de vibraciones, identificación de parámetros dinámicos [VALDES, 2004], [CASTILLO 2005], [HERNANDEZ, 2009], herramienta de detección de daño [TUREK, 2007], correlación con otros modelos matemáticos (elementos finitos), actualización de modelos [DDS, 2007], entre otros.

Básicamente, existen dos formas de generar un modelo matemático de un sistema dinámico: un desarrollo analítico riguroso que explique los fenómenos observados de forma precisa, objetivo que se desarrolla por medio de ecuaciones diferenciales parciales no-lineales, o bien un desarrollo más práctico, ligado a la ingeniería, donde el interés no se centra en la exactitud con la que el modelo reproduce el fenómeno, sino que en su aplicación.

Desde esta perspectiva, el modelo matemático es sólo un paso dentro del diseño global del sistema, permitiendo incertezas en el modelo, en la medida que el modelo generado sea robusto, y teniendo en cuenta que se debe equilibrar complejidad versus precisión.

En este capítulo, se presenta la teoría y resolución de sistemas que pueden ser representados mediante un modelo espacio-estado. Inicialmente se presentará un modelo generalizado, del cual se derivarán dos casos particulares: modelo espacio estado determinístico y estocástico

El primer modelo, si bien no es aplicable a identificación de parámetros mediante vibraciones ambientales, permite conocer la base teórica de este tipo de modelos y entrega conceptos que luego son aplicables a los modelos de tipo estocástico.

Del modelo espacio-estado estocástico se derivarán los algoritmos que permiten una parametrización del sistema y por ende la obtención de parámetros dinámicos, que corresponde a un caso particular de los diversos problemas que se pueden representar por medio de este tipo de modelos.

3.2 Modelos Espacio-Estado Generalizados: Descripción Cualitativa.

Uno de los supuestos más importantes dentro de los modelos espacio-estado, es el mismo que aplica a la ecuación de equilibrio dinámico: se considera un modelo discreto, lineal e invariante en el tiempo.

Un modelo espacio-estado generalizado puede representarse matemáticamente mediante las siguientes ecuaciones de diferencias finitas (tiempo discreto):

$$\{x_{k+1}\} = [A] \cdot \{x_k\} + [B] \cdot \{u_k\} + \{w_k\} \quad (3.1)$$

$$\{y_k\} = [C] \cdot \{x_k\} + [D] \cdot \{u_k\} + \{v_k\} \quad (3.2)$$

Con:

$$E \left[\begin{pmatrix} \{w_p\} \\ \{v_p\} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} \{w_q\} \\ \{v_q\} \end{pmatrix} \right) \right] = \begin{pmatrix} [Q] & [S] \\ [S]^T & [R] \end{pmatrix} \cdot \delta_{pq} \quad (3.3)$$

A partir de este tipo de modelo se puede observar que:

- ✓ Los vectores $\{u_k\} \in \mathbb{R}^m$ e $\{y_k\} \in \mathbb{R}^l$ corresponden a las mediciones en el tiempo k-ésimo para los m *inputs* y l *outputs* del sistema respectivamente.
- ✓ El vector $\{x_k\} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado en el tiempo k-ésimo y contiene los valores numéricos de los n estados. Estos estados no necesariamente tienen una interpretación física, pero son relevantes conceptualmente. En el caso que los estados tuvieran algún significado físico, siempre es posible encontrar una matriz de transformación del modelo espacio estado con el fin de darles un significado físico.
- ✓ Los vectores $\{v_k\} \in \mathbb{R}^l$ y $\{w_k\} \in \mathbb{R}^m$ corresponden a señales no medibles de tipo blanco gaussiano (es decir, de media cero y de espectro de potencia teóricamente plano). El primero se denomina ruido medido. El segundo corresponde a una perturbación debido al proceso.
- ✓ La matriz $[A] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se denomina Matriz de Sistema. Esta matriz cumple un rol fundamental dentro del modelo, ya que describe la dinámica del sistema, por medio de su caracterización a través de sus valores y vectores propios.

- ✓ La matriz $[B] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ corresponde a la Matriz de *Input* y representa la transformación lineal que influye en un estado posterior del sistema.
- ✓ La matriz $[C] \in \mathbb{R}^{l \times n}$ corresponde a la Matriz de *Output* y representa la forma en que el estado interno $\{x_k\}$ es transferido hacia fuera del sistema por medio de la respuesta u *output* $\{y_k\}$.
- ✓ La matriz $[D] \in \mathbb{R}^{l \times m}$ se denomina Término de Retroalimentación.
- ✓ Las matrices $[Q] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $[S] \in \mathbb{R}^{n \times l}$, $[R] \in \mathbb{R}^{l \times l}$ corresponden a las matrices de covarianza de los términos de ruido $\{w_k\}$ y $\{v_k\}$.
- ✓ Dentro de los términos utilizados en este tipo de modelos, se dice que el par de matrices $\{[A],[C]\}$ es observable, lo que implica que todos los modos del sistema pueden ser “observados” en el *output* $\{y_k\}$, es decir, es posible identificarlos.
- ✓ Por otro lado, se dice que el par de matrices $\{[A], \left[[B] : [Q]^{1/2} \right]\}$ es controlable, lo que significa que todos los modos del sistema son excitados por un *input* de tipo determinístico $\{u_k\}$ y/o de tipo estocástico $\{w_k\}$.

Este tipo de modelos puede graficarse como en la Figura 3.1.

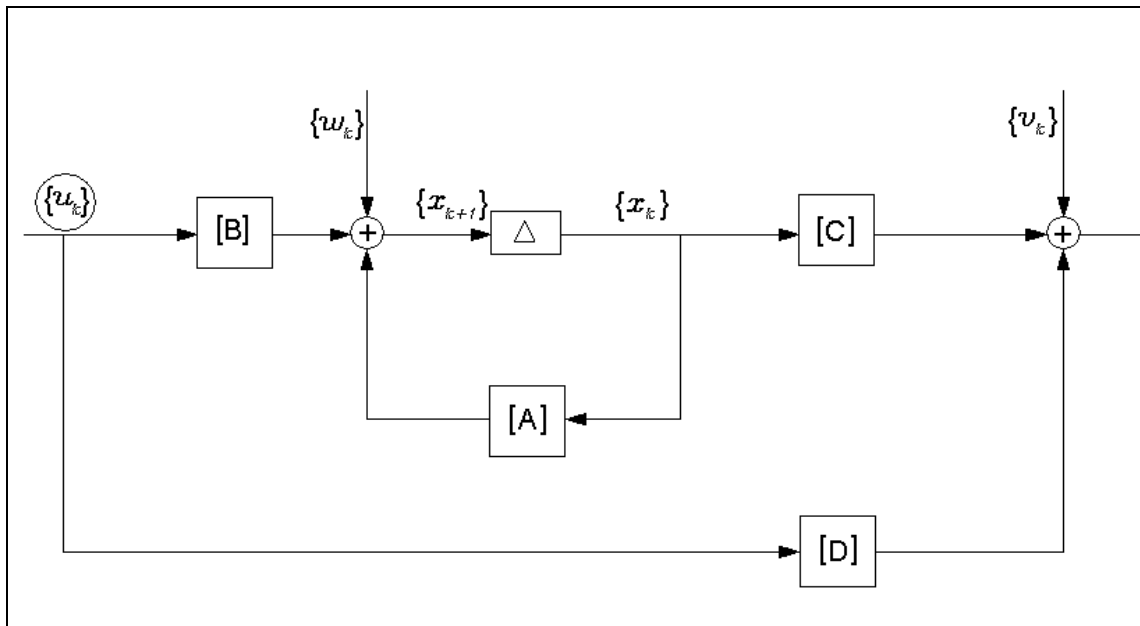


Figura 3.1. Representación gráfica del modelo espacio-estado generalizado. El símbolo Δ representa un retraso. Notar la retroalimentación del estado producido por la matriz de estado $[A]$, la que representa la dinámica del modelo.

En términos simples, el problema del Sub-Espacio Generalizado puede plantearse de la siguiente forma: Dados *outputs*, $y_k, k = 1 \dots s$, y/o *inputs* $u_k, k = 1 \dots s$, encontrar el orden n apropiado del sistema y las matrices A, B, C, D, Q, R, S .

3.3 Herramientas Geométricas para Modelos de Sub Espacio.

Los algoritmos de identificación de sistemas basados en técnicas de sub-espacio están basados principalmente en conceptos geométricos.

En lo que sigue de este acápite, se asumirá que las matrices $[A] \in \mathbb{R}^{m \times j}$, $[B] \in \mathbb{R}^{q \times j}$ y $[C] \in \mathbb{R}^{r \times j}$ son dadas. Los elementos de las filas de cada matriz pueden considerarse como coordenadas de un vector j -dimensional. Por ende, las filas de cada matriz definirán una base para un espacio vectorial de dimensión j .

3.3.1 Proyección Ortogonal

El operador Π_B proyecta las filas de una matriz sobre las filas de la matriz $[B] \in \mathbb{R}^{q \times j}$ como:

$$\Pi_B = [B]^T \cdot ([B] \cdot [B]^T)^\dagger \cdot [B] \quad (3.4)$$

Donde la notación $(\bullet)^\dagger$ corresponde a la matriz pseudo inversa de Moore Penrose. La notación $[A]/[B]$ indica la proyección de las filas de la matriz $[A]$ en las filas de la matriz $[B]$:

$$[A]/[B] \triangleq [A] \cdot [B]^T \cdot ([B] \cdot [B]^T)^\dagger \cdot [B] \quad (3.5)$$

Este operador puede interpretarse de forma gráfica en un espacio bidimensional ($j = 2$) como:

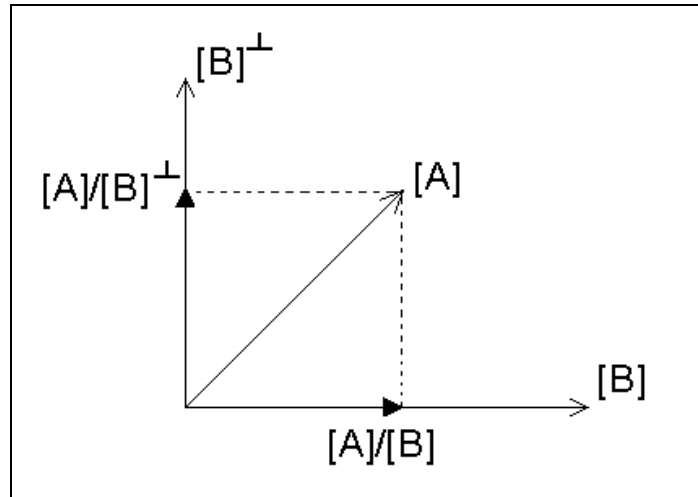


Figura 3.2. Interpretación gráfica de la proyección ortogonal de espacios, para el caso particular en que $j = 2$.

De forma análoga se tiene que:

$$[A]/[B]^\perp \triangleq [A] \cdot \Pi_{B^\perp} \quad (3.6)$$

Donde $\Pi_{B^\perp} = I_j - \Pi_B$.

La combinación de las proyecciones descomponen la matriz $[A]$ en dos matrices cuyas filas (coordenadas j -dimensionales) son perpendiculares:

$$[A] = [A] \cdot \Pi_B + [A] \cdot \Pi_{B^\perp} \quad (3.7)$$

Si se define:

$$L_B \cdot [B] \triangleq [A]/[B] \quad (3.8)$$

$$L_{B^\perp} \cdot [B]^\perp \triangleq [A]/[B]^\perp$$

Lo que implica:

$$[A] = L_B \cdot [B] + L_{B^\perp} \cdot [B]^\perp \quad (3.9)$$

Por lo tanto, la matriz $[A]$ puede descomponerse como una combinación lineal de las filas de $[B]$ y $[B]^\perp$.

3.3.2 Proyección Oblicua

En este caso, en vez de descomponer la matriz $[A]$ como una combinación lineal de dos matrices ortogonales, es posible descomponerla en dos matrices no ortogonales $[B]$ y $[C]$ y sus complementos. De esta forma, la matriz $[A]$ se puede descomponer como una combinación lineal de $[B]$ y $[C]$ y una tercera matriz ortogonal a estas dos:

$$[A] = L_B \cdot [B] + L_C \cdot [C] + L_{B^\perp, C^\perp} \cdot \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}^\perp \quad (3.10)$$

La matriz $L_C \cdot [C]$ se define como la proyección oblicua de las filas de la matriz $[A]$ a lo largo de las filas de la matriz $[B]$ sobre las filas de $[C]$:

$$[A] /_B [C] = L_C \cdot [C] \quad (3.11)$$

La Figura 3. 3 muestra una interpretación grafica de la proyección oblicua de matrices:

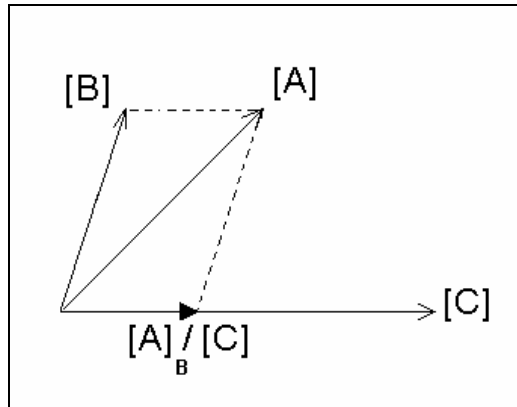


Figura 3. 3. Interpretación grafica de la proyección oblicua de espacios, para el caso particular en que $j = 2$.

La proyección oblicua también puede expresarse como:

$$[A]_B \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} = [A] \cdot \begin{pmatrix} [C]^T & [B]^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [C] \cdot [C]^T & [C] \cdot [B]^T \\ [B]^T \cdot [C] & [B] \cdot [B]^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [C] \\ [B] \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

La descomposición de esta expresión a lo largo de las matrices $[B]$ y $[C]$ permite la siguiente definición de proyección oblicua.

Definición: La proyección oblicua de $[A] \in \mathbb{R}^{pxj}$ a lo largo de $[B] \in \mathbb{R}^{qxj}$ sobre $[C] \in \mathbb{R}^{rxj}$ se define como:

$$[A]_B [C] \triangleq [A] \cdot \begin{pmatrix} [C]^T & [B]^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [C] \cdot [C]^T & [C] \cdot [B]^T \\ [B]^T \cdot [C] & [B] \cdot [B]^T \end{pmatrix}^{\dagger} \cdot [C] \quad (3.13)$$

r primeras columnas

Algunas propiedades de este tipo de proyecciones:

$$\begin{aligned}
[B] /_B [C] &= 0 \\
[C] /_B [C] &= [C]
\end{aligned}
\tag{3.14}$$

Como se demuestra en [BAKSALARY, 1979] estas dos propiedades pueden ser usadas para definir una proyección oblicua, es decir, cualquier operación que satisfaga las dos relaciones anteriores es una proyección oblicua.

A partir de estas definiciones se puede tener una definición equivalente:

$$[A] /_B [C] = ([A] / [B]^\perp) \cdot ([C] / [B]^\perp)^\dagger \cdot [C]
\tag{3.15}$$

Notar que cuando $[B] = [0]$ o cuando $[B]$ es perpendicular a $[C]$ ($[B] \cdot [C]^T = [0]$) la proyección oblicua se transforma en proyección ortogonal.

3.3.3 Direcciones y ángulos principales.

Los ángulos principales entre dos sub-espacios son la generalización del ángulo entre 2 vectores. Supongamos que tenemos dos matrices $[A]$ y $[B]$. El primer ángulo principal θ_1 (el más pequeño) se obtiene de la siguiente forma:

- Se escogen vectores unitarios $\{a_1\}$ perteneciente al espacio de las filas de $[A]$ y $\{b_1\}$ perteneciente al espacio de las filas de $[B]$ y se minimiza el ángulo entre

ellos. Éste corresponde al primer ángulo principal, con sus respectivas direcciones principales.

- A continuación se eligen $\{a_2\} \perp \{a_1\}$ y $\{b_2\} \perp \{b_1\}$ y se minimiza el ángulo entre ellos, lo que constituye el segundo ángulo principal θ_2 con sus respectivas direcciones.
- Se continúa sucesivamente hasta que se encuentran los $\min(p, q)$ ángulos principales. La Figura 3.4 muestra esta idea en una espacio tridimensional:

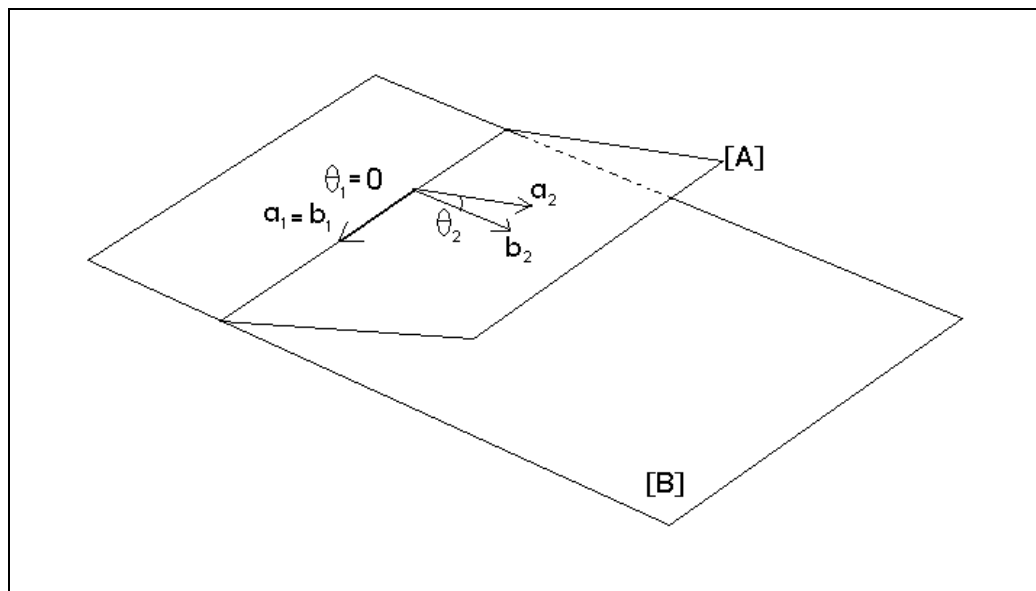


Figura 3.4. Representación esquemática de la obtención de ángulos y direcciones principales.

La descripción anteriormente descrita puede formalizarse como:

Definición: Los ángulos principales $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \pi/2$ entre los espacios de las filas de $[A]$ y $[B]$ y sus correspondientes direcciones principales $\{a_i\} \in [A]$ y $\{b_i\} \in [B]$ se definen de forma recursiva como:

$$\cos(\theta_k) = \max(\{a\}^T \cdot \{b\}) = \{a_k\}^T \cdot \{b_k\} \quad (3.16)$$

Sujeto a $\|\{a\}\| = \|\{b\}\| = 1$ y para $k > 1$, $\{a\}^T \cdot \{a_i\} = 0$ para $i = 1, \dots, k-1$ y $\{b\}^T \cdot \{b_i\} = 0$ para $i = 1, \dots, k-1$.

A continuación se presentan otras dos definiciones alternativas:

Definición 1: dados $[A], [B]$ y la descomposición de valores singulares:

$$\left[[A]^T \cdot ([A] \cdot [A]^T)^\dagger \cdot [A] \right] \cdot \left[[B]^T \cdot ([B] \cdot [B]^T)^\dagger \cdot [B] \right] = [U][S][V]^T \quad (3.17)$$

Luego, las direcciones principales entre el espacio de las filas de $[A], [B]$ son iguales al espacio de las filas de $[U]^T$ y $[V]^T$, y los cosenos de los ángulos principales entre los espacios de las filas de $[A], [B]$ se definen como los valores singulares, que corresponde a la diagonal de $[S]$.

Lo anterior se denota como:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \angle \mathbf{B}] &= [U]^T \\ [A \angle \mathbf{B}] &= [V]^T \\ [A \angle B] &= [S] \end{aligned} \quad (3.18)$$

Definición 2: las direcciones y ángulos principales de $[A], [B]$ pueden obtenerse a través de la descomposición de valores singulares siguiente:

$$\left([A] \cdot [A]^T \right)^{-1/2} \cdot ([A] \cdot [B]^T) \cdot \left([B] \cdot [B]^T \right)^{-1/2} = [U][S][V]^T \quad (3.19)$$

Donde

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{A} \triangleleft B] &= [U]^T \cdot ([A][A]^T)^{-1/2} \cdot [A] \\
 [A \triangleleft \mathbf{B}] &= [V]^T \cdot ([B][B]^T)^{-1/2} \cdot [B] \\
 [A \triangleleft B] &= [S]
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

3.3.4 Herramientas estadísticas.

En esta sección se relacionan supuestos estadísticos con propiedades geométricas matriciales.

Estas propiedades serán usadas para probar algunas propiedades establecidas en forma de Teoremas.

Si se consideran dos secuencias dadas $\{a_k\} \in \mathbb{R}^{n_a}$ y $\{e_k\} \in \mathbb{R}^{n_e}$, $k = 0, 1, \dots, j$ bajo los supuestos de que la secuencia $\{e_k\}$ tiene media nula, y que es independiente de $\{a_k\}$ es posible plantear lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 E[\{e_k\}] &= \{0\} \\
 E[\{a_k\} \cdot \{e_k\}^T] &= [0]
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

En identificación de sub-espacios se asume generalmente series de tiempo suficientemente largas ($j \rightarrow \infty$) y de tipo ergódicas. Debido a estos dos supuestos es posible reemplazar el operador valor esperado $E[\bullet]$ (promedio de un número infinito

de experimentos) por un operador diferente $E_j[\bullet]$ aplicado a la suma de variables (promedio de un experimento infinitamente largo), luego:

$$E\left[\{a_k\} \cdot \{e_k\}^T\right] = \lim_{j \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{j} \sum_{i=0}^j \{a_i\} \cdot \{e_i\}^T \right] = E_j \left[\sum_{i=0}^j \{a_i\} \cdot \{e_i\}^T \right] \quad (3.22)$$

Como aproximación al problema real consideremos que $\{a_k\}$ corresponde a una secuencia de *inputs* $\{u_k\}$ y $\{e_k\}$ una perturbación en el sistema. Si asumimos que tenemos un número infinito de datos disponibles y de tipo ergódico, y que ambas secuencias son independientes entre si encontramos que:

$$E_j \left[\sum_{i=0}^j \{u_i\} \cdot \{e_i\}^T \right] = 0 \quad (3.23)$$

Colocando los datos como matrices fila:

$$[u] = (u_0 \quad u_1 \quad \dots \quad u_j)$$

$$[e] = (e_0 \quad e_1 \quad \dots \quad e_j)$$

Se tiene que:

$$E_j \left[[u] \cdot [e]^T \right] = [0] \quad (3.24)$$

Lo que implica que el vector de *inputs* es perpendicular al vector de perturbación. Luego, es posible establecer geoméricamente que las perturbaciones son perpendiculares a los *inputs* y a otras variables no correlacionadas.

Esta propiedad es usada en los algoritmos de identificación para deshacerse de los efectos de ruido. De esta forma, proyectando el ruido sobre el *input*, el ruido es anulado:

$$E_j \left[\frac{[e]}{[u]} \right] = [0] \quad (3.25)$$

3.3.5 Herramientas Geométricas en contexto estadístico.

En un contexto estadístico, se define la covarianza $\Phi_{[A,B]}$ entre dos matrices $[A], [B]$ como:

$$\Phi_{[A,B]} \triangleq E_j \left[[A] \cdot [B]^T \right] \quad (3.26)$$

De esta forma es posible extender los conceptos geométricos introducidos en un marco determinístico hacia un marco estocástico. Para facilitar la notación y las derivaciones teóricas, se redefinen las operaciones geométricas en un contexto estocástico.

Esta redefinición consiste en una sustitución en todas las definiciones:

$$[A][B]^T = \Phi_{[A,B]} \quad (3.27)$$

Luego, dentro de un marco estocástico podemos escribir las proyecciones como:

$$\begin{aligned}
[A]/[B] &= \Phi_{[A,B]} \cdot \Phi_{[B,B]}^\dagger \cdot [B] \\
[A]/[B]^\perp &= [A] - \Phi_{[A,B]} \cdot \Phi_{[B,B]}^\dagger \cdot [B] \\
[A]_B/[C] &= \left(\Phi_{[A,C]} \quad \Phi_{[A,B]} \right) \cdot \left[\begin{array}{cc} \Phi_{[C,C]} & \Phi_{[C,B]} \\ \Phi_{[B,C]} & \Phi_{[B,B]} \end{array} \right]^\dagger \cdot [C]
\end{aligned} \tag{3.28}$$

primeras
r columnas

Y los ángulos y direcciones principales de la descomposición de valores singulares:

$$\left(\Phi_{[A,A]} \right)^{-1/2} \cdot \left(\Phi_{[A,B]} \right) \cdot \left(\Phi_{[B,B]} \right)^{-1/2} = [U][S][V]^T \tag{3.29}$$

Como:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A} \triangleleft B] &= [U]^T \cdot \left(\Phi_{[A,A]} \right)^{-1/2} \cdot [A] \\
[A \triangleleft \mathbf{B}] &= [V]^T \cdot \left(\Phi_{[B,B]} \right)^{-1/2} \cdot [B] \\
[A \triangleleft B] &= [S]
\end{aligned} \tag{3.30}$$

En lo que sigue se utilizará la misma notación para operaciones geométricas dentro de algoritmos para sistemas determinísticos y estocásticos, ya que al implementar los algoritmos, el número de mediciones será siempre finito, y con esto es posible aproximar $\Phi_{[A,B]}$ como:

$$\Phi_{[A,B]} \simeq \frac{1}{j} \cdot [A] \cdot [B]^T \tag{3.31}$$

De todas formas, para muchas derivaciones teóricas en sistemas estocásticos, se utilizará $j \rightarrow \infty, j \in \mathbb{N}$.

3.4 Identificación de Sistemas Determinísticos.

En este acápite se tratarán sistemas puramente Determinísticos, es decir, sin presencia de perturbaciones ($\{v_k\} = \{w_k\} = \{0\}$).

Este tipo de sistema es tratado en este capítulo debido a que entrega conceptos teóricos importantes para entender problemas de tipo estocástico.

El problema de identificación de sistemas determinístico puede resumirse como:

Dados: s mediciones de un *input* $\{u_k\} \in \mathbb{R}^m$ y *outputs* $\{y_k\} \in \mathbb{R}^l$ generados por un sistema determinístico de orden n de tipo:

$$\{x_{k+1}\}^d = [A] \cdot \{x_k\}^d + [B] \cdot \{u_k\} \tag{3.32}$$

$$\{y_k\}^d = [C] \cdot \{x_k\}^d + [D] \cdot \{u_k\}$$

Determinar:

- ✓ El orden n desconocido del sistema
- ✓ Las matrices $[A], [B], [C], [D]$

Nota: el superíndice “ d ” denota “determinístico”.

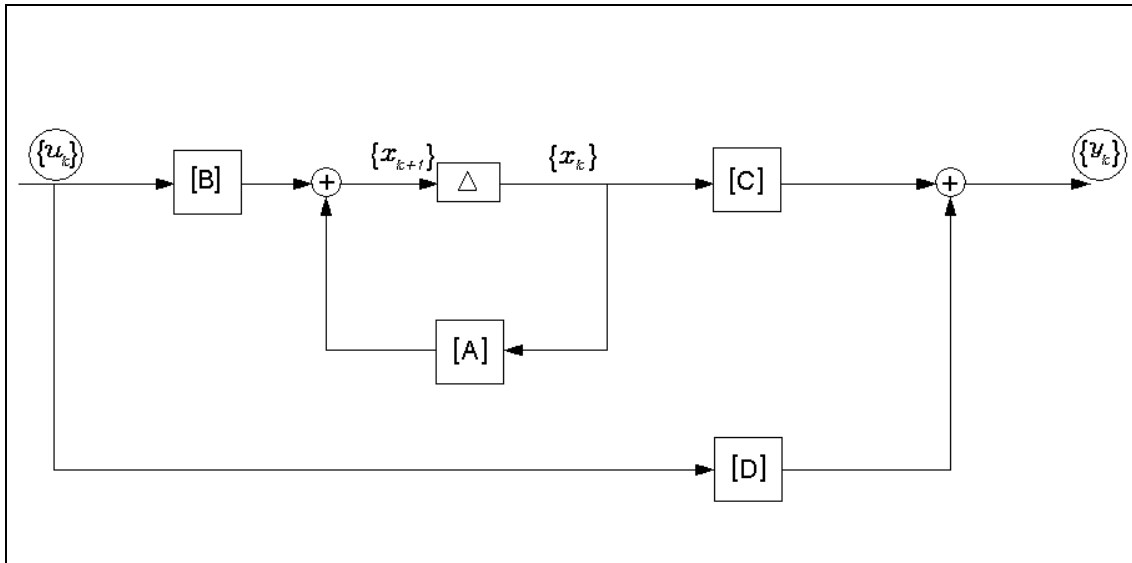


Figura 3.5. Representación gráfica del modelo espacio-estado. Sistema determinístico.

3.4.1 Notación y Matrices en sistemas Determinísticos.

3.4.1.1 Matrices de Bloque tipo Hankel y secuencia de estados.

Las matrices de bloque tipo Hankel juegan un rol importante dentro de los algoritmos de identificación de sub-espacios.

Estas matrices pueden ser construidas a partir de los *inputs* y *outputs* dados.

La matriz Hankel de *inputs* se define como:

$$\begin{aligned}
[U_{0|2i-1}] &\triangleq \begin{bmatrix} \{u_0\} & \{u_1\} & \{u_2\} & \dots & \{u_{j-1}\} \\ \{u_1\} & \{u_2\} & \{u_3\} & \dots & \{u_j\} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \{u_{i-1}\} & \{u_i\} & \{u_{i+1}\} & \dots & \{u_{i+j-2}\} \\ \{u_i\} & \{u_{i+1}\} & \{u_{i+2}\} & \dots & \{u_{i+j-1}\} \\ \{u_{i+1}\} & \{u_{i+2}\} & \{u_{i+3}\} & \dots & \{u_{i+j}\} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \{u_{2i-1}\} & \{u_{2i}\} & \{u_{2i+1}\} & \dots & \{u_{2i+j-2}\} \end{bmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} U_{0|i-1} \\ \dots \\ U_{i-1|2i-1} \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} U_p \\ \dots \\ U_f \end{pmatrix} \quad (3.33)
\end{aligned}$$

O bien, trasladando el primer bloque de filas de $[U_f]$ a $[U_p]$ se tiene lo siguiente:

$$[U_{0|2i-1}] = \begin{pmatrix} U_{0|i} \\ \dots \\ U_{i+1|2i-1} \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} U_p^+ \\ \dots \\ U_f^- \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Las siguientes observaciones son deducibles de las definiciones previas:

- ✓ La matriz de bloques de Hankel tiene dimensiones $2i \times j$.
- ✓ Los subíndices p y f denotan “pasado” y “futuro” respectivamente.
- ✓ El numero de bloques fila i es un número definido por el usuario y es tan largo como se quiera, es decir, debe ser al menos más largo que el orden máximo del sistema que se quiere identificar: $i > n$. Al numero de filas también se le denomina horizonte de proyección, debido a la operación que se realiza a realizar la proyección de esta matriz, la que se divide en dos: una parte denominada *pasada* y otra parte denominada *futura*.

- ✓ Notar que, debido a que cada input contiene m valores, la matriz de Hankel tiene $2 \cdot m \cdot i$ filas.
- ✓ Para asegurar el uso completo de los datos contenidos en las series de tiempo de los grados de libertad medidos, es posible establecer una relación entre el número de bloques fila y el número de columnas de la matriz Hankel.
- ✓ Suponiendo que cada serie de tiempo posee s datos (en la practica esto se traduce en la duración del registro en segundos multiplicado por la frecuencia de muestreo), el numero de columnas j será igual a:

$$j = s - 2i + 1$$

Sin embargo, es posible escoger el valor de j , no necesariamente en función de los bloques filas de la Matriz Hankel. Esto implica que no necesariamente todos los datos disponibles serán utilizados. Dentro del alcance de esta tesis se asumirá que existe una relación entre bloques filas y columnas dentro de la matriz Hankel.

- ✓ Una descripción más intuitiva de la matriz de Hankel viene del hecho que esta representa un conjunto de estimadores que relacionan la respuesta actual del sistema en función de respuestas anteriores. Este estimador corresponde a la matriz de auto correlación que se define, para el caso de *outputs* o salidas como:

$$\hat{R}_k = \frac{1}{s-k} \cdot [Y]_{1|s-k} \cdot [Y]_{k|s}^T \quad (3.35)$$

Donde $[Y]_{1|s-k}$ corresponde de forma análoga a (3.33) la matriz de Hankel de *outputs* entre 1 y $s-k$, asumiendo k como un retardo definido por el usuario y $[Y]_{k|s}$ la matriz de Hankel de *outputs* entre k y s .

- ✓ En el caso más simple, este estimador puede construirse a partir de sólo 1 serie de tiempo (1 grado de libertad), particionando la serie en dos partes: la primera desde el primer dato al dato $s-k$ denominada parte *pasada* y los restantes puntos desde k a s denominados parte *futura*. La correlación resultante (si se grafica) puede interpelarse como el decaimiento libre del sistema, que contiene todas las características dinámicas del sistema.
- ✓ De los dos puntos anteriores puede deducirse que la matriz Hankel corresponde a una colección de estimadores de correlación multidimensional entre los diferentes grados de libertad medidos. Para la obtención de estas correlaciones se utilizan herramientas matemáticas anteriormente presentadas como la proyección ortogonal u oblicua.
- ✓ De forma análoga a la matriz de Hankel de *inputs* se define la matriz de Hankel de *outputs* y sus definiciones derivadas como: $[Y_{0|2i-1}], [Y_p], [Y_f], [Y_p^+], [Y_f^-]$.

De estas definiciones surge una nueva matriz Hankel de *inputs* y *outputs* pasados:

$$[W_{0|i-1}] \triangleq \begin{pmatrix} [U_{0|i-1}] \\ [Y_{0|i-1}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [U_p] \\ [Y_p] \end{pmatrix} = [W_p] \quad (3.36)$$

Y de forma similar se define:

$$[W_p^+] = \begin{pmatrix} [U_p^+] \\ [Y_p^+] \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

Otra definición importante dentro de la derivación e interpretación de algoritmos de sub-espacio son las secuencias de estado que se definen como:

$$[\mathbf{X}_i^d] = \left(\{x_i^d\} \quad \{x_{i+1}^d\} \quad \dots \quad \{x_{i+j-2}^d\} \quad \{x_{i+j-1}^d\} \right) \in \mathbb{R}^{nxj} \quad (3.38)$$

Donde i denota el primer elemento de la secuencia de estado.

Análogo a las denominaciones de *inputs* y *outputs* pasados y futuros, se define la secuencia de estado pasado y futuro como:

$$[\mathbf{X}_p^d] = [\mathbf{X}_0^d] \quad (3.39)$$

$$[\mathbf{X}_f^d] = [\mathbf{X}_i^d]$$

Finalmente se definen tres matrices importantes que dependen de las matrices del sistema espacio-estado: matriz de observación extendida, matriz inversa de control extendido y matriz de Toeplitz. Su desarrollo e importancia puede consultarse en [JUANG, 1994].

3.4.1.2 Matriz de Observación.

Se define, para $i > n$ la matriz de observación $[\Gamma_i]$ como:

$$[\Gamma_i] = \begin{pmatrix} [C] \\ [C][A] \\ [C][A]^2 \\ \dots \\ [C][A]^{i-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{lixn} \quad (3.40)$$

A partir de esta definición se asume que el par $\{[A] \ [C]\}$ es observable, lo que implica que el rango de la matriz de observación es n .

3.4.1.3 Matriz de control inverso.

Se define la matriz de control inverso $[\Delta_i^d]$ como:

$$[\Delta_i^d] = \left([A]^{i-1} \cdot [B] \ [A]^{i-2} \cdot [B] \ \dots \ [A] \cdot [B] \ [B] \right) \in \mathbb{R}^{n \times mi} \quad (3.41)$$

A partir de esta definición se asume que el par $\{[A] \ [B]\}$ es controlable, lo que implica que el rango de la matriz de control inverso es n .

3.4.1.4 Matriz de Toeplitz

Corresponde a una matriz triangular inferior y se define como:

$$[H_i^d] \triangleq \begin{pmatrix} [D] & 0 & 0 & \dots & 0 \\ [C][B] & [D] & 0 & \dots & 0 \\ [C][A][B] & [C][B] & [D] & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ [C][A]^{i-2}[B] & [C][A]^{i-3}[B] & [C][A]^{i-4}[B] & \dots & [D] \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{lixmi} \quad (3.42)$$

3.4.2 Propiedades Geométricas de los Sistemas Determinísticos

3.4.2.1 Ecuaciones matriciales de *inputs* y *outputs*

El presente Teorema presenta las relaciones espacio-estado reformuladas matricialmente [VAN OVERSCHEE, 1996].

Teorema 1: Ecuaciones Matriciales de Inputs y Outputs.

$$[Y_p] = [\Gamma_i] \cdot [X_p^d] + [H_i^d] \cdot [U_p] \quad (3.43)$$

$$[Y_f] = [\Gamma_i] \cdot [X_f^d] + [H_i^d] \cdot [U_f] \quad (3.44)$$

$$[X_f^d] = [A]^i \cdot [X_p^d] + [\Delta_i^d] \cdot [U_p] \quad (3.45)$$

La prueba de este teorema resulta de las definiciones de cada término y de la ecuación (3.32). Una representación grafica de la ecuación (3.44) puede verse en la Figura 3.6.

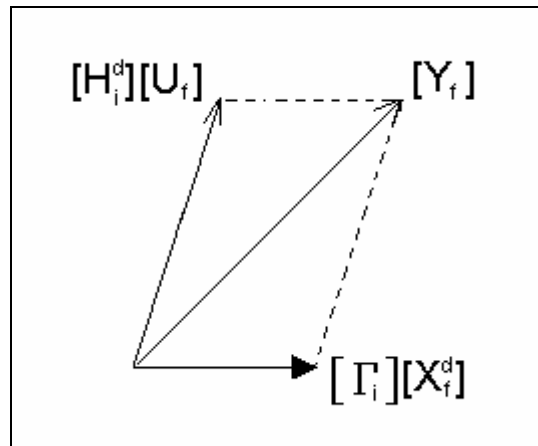


Figura 3.6. Representación grafica modelo espacio estado matricial. Observar la descomposición de la respuesta por medio de proyecciones oblicuas sobre dos "Subespacios".

3.4.3 Teorema Principal: Identificación de Sistemas Determinísticos.

El presente teorema tiene las siguientes consecuencias:

- ✓ La secuencia de estados $[X_f^d]$ puede ser determinada directamente a partir de los *inputs* y *outputs* dados, sin conocer necesariamente las matrices $[A],[B],[C],[D]$.
- ✓ La matriz de observación puede ser determinada directamente de los *inputs* y *outputs* dados.

En el teorema principal de identificación de sistemas Determinísticos se introducen dos matrices denominadas $[W_1]$ y $[W_2]$. La interpretación de estas matrices se verá más adelante. Por ahora, sólo es necesario saber que la elección específica de estas matrices permite diferentes algoritmos de identificación y su tamaño determina la base del modelo espacio estado.

En este teorema principal se utiliza además un nuevo concepto:

Definición: Persistencia de la excitación [VAN OVERSCHEE, 1996]..

Se dice que la secuencia $\{u_k\} \in \mathbb{R}^m$ es persistente de orden $2i$ si y solo si la matriz de covarianza de *inputs*:

$$[R^{uu}] \triangleq \Phi_{[U_{0|2i-1}, U_{0|2i-1}]} = [U_{0|2i-1}] \cdot [U_{0|2i-1}]^T \quad (3.46)$$

Es de rango completo, es decir $2mi$.

Teorema 2: Identificación de sistemas determinísticos.

Bajo los supuestos siguientes:

- ✓ El *input* es persistente de orden $2i$.
- ✓ La intersección del espacio $[U_f]$ y el espacio $[X_p^d]$ es vacío.
- ✓ Las matrices $[W_1] \in \mathbb{R}^{i \times i}$ y $[W_2] \in \mathbb{R}^{j \times j}$ son tales que la primera es de rango completo y la segunda cumple: $\text{rang}([W_p]) = \text{rang}([W_p] \cdot [W_p])$.

Definiendo:

$$[\mathcal{G}_i] \triangleq [Y_f]_{U_f} [W_p] \quad (3.47)$$

Y la descomposición de valores singulares (SVD) siguiente:

$$[W_1][\mathcal{G}_i][W_2] = ([U_1] \ [U_2]) \cdot \begin{pmatrix} [S_1] & [0] \\ [0] & [0] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [V_1]^T \\ [V_2]^T \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

$$[W_1][\mathcal{G}_i][W_2] = [U_1][S_1][V_1^T]$$

Se tiene lo siguiente:

1. La matriz $[\mathcal{G}_i]$ es igual a:

$$[\mathcal{G}_i] = [\Gamma_i][X_f^d] \quad (3.49)$$

2. El orden del sistema espacio estado definido por las ecuaciones (3.32) es igual al número de valores singulares $[S_1]$ diferentes de $[0]$.

3. La matriz de observación $[\Gamma_i]$ es igual a:

$$[\Gamma_i] = [W_1]^{-1} \cdot [U_1] \cdot [S_1]^{1/2} \quad (3.50)$$

4. La parte de la secuencia de estado $[X_f^d]$ que se encuentra en el espacio de las columnas de $[W_2]$ puede obtenerse de:

$$[X_f^d][W_2] = [S_1]^{1/2} [V_1]^T \quad (3.51)$$

5. La secuencia de estado $[X_f^d]$ es igual a:

$$[X_f^d] = [\Gamma_i]^\dagger \cdot [g_i] \quad (3.52)$$

Demostración:

1) De las ecuaciones (3.43) y (3.45) se tiene que:

De (3.43):

$$[\Gamma_i] \cdot [X_p^d] = [Y_p] - [H_i^d] \cdot [U_p] \quad / \cdot [\Gamma_i]^\dagger$$

$$[X_p^d] = [\Gamma_i]^\dagger \cdot [Y_p] - [\Gamma_i]^\dagger \cdot [H_i^d] \cdot [U_p] \quad (3.53)$$

(3.53) en (3.45):

$$\begin{aligned}
[X_f^d] &= [A]^i \cdot \left([\Gamma_i]^\dagger \cdot [Y_p] - [\Gamma_i]^\dagger \cdot [H_i^d] \cdot [U_p] \right) + [\Delta_i^d] [U_p] \\
[X_f^d] &= [A]^i [\Gamma_i]^\dagger \cdot [Y_p] - [A]^i [\Gamma_i]^\dagger \cdot [H_i^d] \cdot [U_p] + [\Delta_i^d] [U_p] \\
[X_f^d] &= \left([\Delta_i^d] - [A]^i [\Gamma_i]^\dagger \cdot [H_i^d] \right) \cdot [U_p] + \left([A]^i [\Gamma_i]^\dagger \right) \cdot [Y_p] \quad (3.54)
\end{aligned}$$

Pero $[W_p] = \begin{pmatrix} U_p \\ Y_p \end{pmatrix}$. Denominando $[L_p] = \left(\left([\Delta_i^d] - [A]^i [\Gamma_i]^\dagger \cdot [H_i^d] \right) \quad \left([A]^i [\Gamma_i]^\dagger \right) \right)$ se tiene que:

$$[X_f^d] = [L_p] \cdot [W_p] \quad (3.55)$$

Luego, de (3.55) la ecuación (3.44) del Teorema 1 puede escribirse como:

$$[Y_f] = [\Gamma_i] \cdot [L_p] \cdot [W_p] + [H_i^d] \cdot [U_f] \quad (3.56)$$

De (3.56) y usando la definición (3.15), la prueba de la primera hipótesis del Teorema 2 puede hacerse como sigue:

$$\begin{aligned}
[Y_f] &= [\Gamma_i] \cdot [L_p] \cdot [W_p] + [H_i^d] \cdot [U_f] \quad / \quad \cdot \Pi_{U_f^\perp} \\
[Y_f] \cdot \Pi_{U_f^\perp} &= [\Gamma_i] \cdot [L_p] \cdot [W_p] \cdot \Pi_{U_f^\perp} + [H_i^d] \cdot [U_f] \cdot \Pi_{U_f^\perp} \\
[Y_f] \cdot \Pi_{U_f^\perp} &= [\Gamma_i] \cdot [L_p] \cdot [W_p] \cdot \Pi_{U_f^\perp}
\end{aligned}$$

$$[Y_f] / \Pi_{U_f^\perp} = [\Gamma_i] \cdot [L_p] \cdot [W_p] / \Pi_{U_f^\perp} \quad (3.57)$$

Definiendo la proyección oblicua siguiente y usando (3.57) se tiene lo siguiente:

$$[Y_f] /_{U_f} [W_p] = \left([Y_f] / [U_f]^T \right) \cdot \left([W_p] / [U_f]^\perp \right)^\dagger \cdot [W_p] \quad (3.58)$$

$$[Y_f] /_{U_f} [W_p] = \left([\Gamma_i] \cdot [L_p] \cdot [W_p] / [U_f]^T \right) \left([W_p] / [U_f]^\perp \right)^\dagger [W_p]$$

$$[Y_f] /_{U_f} [W_p] = \underbrace{\left([\Gamma_i] \cdot [L_p] \right) \cdot \left([W_p] / [U_f]^T \cdot [W_p] / [U_f]^\perp \right)^\dagger [W_p]}_{[W_p]} \quad (3.59)$$

$$[Y_f] /_{U_f} [W_p] = \left([\Gamma_i] \cdot [L_p] \right) \cdot [W_p] = [\Gamma_i] \cdot \underbrace{[L_p] \cdot [W_p]}_{[X_f^d]}$$

Luego:

$$[Y_f] /_{U_f} [W_p] = [\Gamma_i] \cdot [X_f^d] \quad (3.60)$$

Finalmente, usando la definición (3.49) se llega a:

$$[\mathcal{G}_i] = [\Gamma_i] \cdot [X_f^d] \quad (3.61)$$

Lo que demuestra la primera hipótesis del Teorema 2.

Nota: se ha usado que $\left[\left([W_p] / [U_f]^T \cdot [W_p] / [U_f]^\perp \right)^\dagger [W_p] \right] = [W_p]$. La demostración

de esto no es trivial y puede encontrarse en [VAN OVERSCHEE, 1996].

2) Debido a la demostración de la primera hipótesis se tiene lo siguiente:

$$[W_1][\mathcal{G}_i][W_2] = \underbrace{([W_1] \cdot [\Gamma_i])}_{n \text{ columnas}} \cdot \underbrace{([X_f^d] \cdot [W_2])}_{n \text{ filas}} \quad (3.62)$$

Debido a que ambas matrices agrupadas en la ecuación (3.62) son de rango n , su producto también lo será.

Se concluye que la descomposición de valores singulares tendrá n valores propios no nulos asociados al orden del sistema (3.32).

3, 4) Ecuación (3.48) puede descomponerse en dos partes como:

$$[W_1] \cdot [\mathcal{G}_i] \cdot [W_2] = ([W_1] \cdot [\Gamma_i]) \cdot ([X_f^d] \cdot [W_2]) = [U_1] \cdot [S_1] \cdot [V_1^T]$$

Finalmente si $[S]^{1/2} \cdot [S]^{1/2} = [S]$ se llega a:

$$[\Gamma_i] = [W_1]^{-1} \cdot [U_1] \cdot [S_1]^{1/2} \quad (3.63)$$

$$[X_f^d] \cdot [W_2] = [S_1]^{1/2} \cdot [V_1^T]$$

5) De la primera demostración se deriva fácilmente:

$$[\mathcal{G}_i] = [\Gamma_i] \cdot [X_f^d] / [\Gamma_i]^\dagger \quad (3.64)$$

$$\Rightarrow [X_f^d] = [\Gamma_i]^\dagger \cdot [\mathcal{G}_i]$$

Comentarios:

- ✓ La formula (3.55) es de gran relevancia, debido a que muestra que los estados $[X_f^d]$ se encuentran en el espacio de las filas de los *inputs* y *outputs* pasados $[W_p]$.

- ✓ El Teorema 2 puede resumirse algebraicamente como:

$$rango([G_i]) = rango\left(\begin{bmatrix} Y_f \\ U_f \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} W_p \end{bmatrix}\right) = n \quad (3.65)$$

$$espacio - filas\left(\begin{bmatrix} Y_f \\ U_f \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} W_p \end{bmatrix}\right) = espacio - filas([X_f^d]) \quad (3.66)$$

$$espacio - columnas\left(\begin{bmatrix} Y_f \\ U_f \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} W_p \end{bmatrix}\right) = espacio - columnas([\Gamma_i]) \quad (3.67)$$

- ✓ Este resumen es la esencia de por qué estos algoritmos se llaman algoritmos de sub-espacios: éstos recuperan las matrices del sistema como sub-espacios de las matrices de datos proyectados.
- ✓ La Figura 3.7 muestra una interpretación grafica del Teorema 2. De la figura se ve que la proyección oblicua descompone los *outputs* futuros en dos componentes: una parte debida a los *inputs* futuros y la otra parte debido a *inputs* y *outputs* pasados. Esta ultima parte es de rango deficiente, debido a la dimensión finita del sistema generada por los datos: solo es necesario un sub-espacio de orden n en el espacio de las filas de $[W_p]$ para reconstruir el futuro.

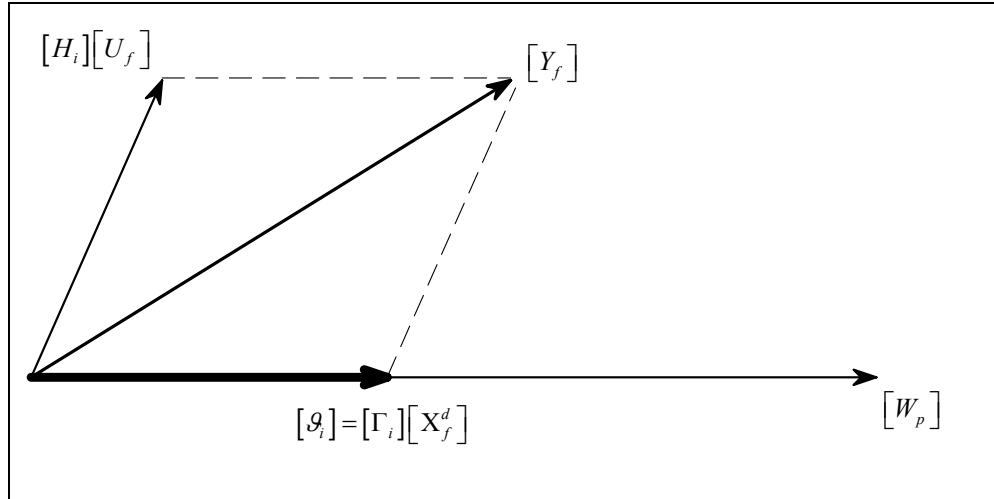


Figura 3. 7. Teorema 2 presentado de forma gráfica.

3.4.4 Obtención de las matrices del sistema

A continuación se muestran dos algoritmos para la obtención de las matrices del sistema: $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[D]$ a partir del desarrollo del Teorema 2.

3.4.4.1 Algoritmo 1: A partir de los estados.

A partir de las demostraciones y ecuaciones del Teorema 2 se puede obtener lo siguiente:

$$[\mathcal{G}_{i-1}] = [Y_f^-] /_{U_f^-} [W_p^+] = [\Gamma_{i-1}] \cdot [X_{i+1}^d] \quad (3.68)$$

También es fácil chequear que si se extrae las últimas l filas de $[\Gamma_i]$ se obtiene $[\Gamma_{i-1}]$:

$$[\Gamma_i] = \begin{pmatrix} [C] \\ [C] \cdot [A] \\ [C] \cdot [A]^2 \\ \vdots \\ [C] \cdot [A]^{i-1} \end{pmatrix} \Rightarrow [\Gamma_{i-1}] = \begin{pmatrix} [C] \\ [C] \cdot [A] \\ [C] \cdot [A]^2 \\ \vdots \\ [C] \cdot [A]^{i-2} \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

Luego, se puede definir:

$$[\Gamma_{i-1}] = [\Gamma_i] \quad (3.70)$$

De la ecuación (3.68) es posible calcular $[X_{i+1}^d]$ como:

$$[X_{i+1}^d] = [\Gamma_{i-1}]^\dagger \cdot [\mathcal{G}_{i-1}] \quad (3.71)$$

Hasta el momento se ha calculado $[X_i^d]$ y $[X_{i+1}^d]$ solo a partir de datos de *inputs* y *outputs*. Finalmente las matrices del sistema pueden obtenerse como:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} [X_{i+1}^d] \\ [Y_{ii}] \end{pmatrix}}_{\text{conocido}} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [C] & [D] \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} [X_i^d] \\ [U_{ii}] \end{pmatrix}}_{\text{conocido}} \quad (3.72)$$

A partir de lo anteriormente descrito, es posible establecer un procedimiento esquemático para el cálculo de matrices de sistemas determinísticos:

a) Calcular las proyecciones oblicuas siguientes a partir de las definiciones (3.15):

$$i. [\mathcal{G}_i] = [Y_f]_{U_f} / [W_p]$$

$$\text{ii. } [\mathcal{G}_{i-1}] = [Y_f^-] /_{U_f^-} [W_p^+]$$

- b) Asumiendo que $[W_1]$ y $[W_2]$ son conocidas, calcular la descomposición de valores singulares siguiente:

$$[W_1] \cdot [\mathcal{G}_i] \cdot [W_2] = [U] \cdot [S] \cdot [V]^T$$

- c) Determinar el orden n del sistema a partir de la inspección de la matriz de valores singulares no nulos de la matriz $[S]$ para formar las matrices $[U_1]$ y $[S_1]$.

- d) Determinar $[\Gamma_i]$ y $[\Gamma_{i-1}]$ como:

$$\text{i. } [\Gamma_i] = [W_1]^{-1} \cdot [U_1] \cdot [S_1]^{1/2}$$

$$\text{ii. } [\Gamma_{i-1}] = [\Gamma_i]$$

- e) Determinar $[X_i^d]$ y $[X_{i+1}^d]$ como:

$$\text{i. } [X_i^d] = [\Gamma_i]^\dagger \cdot [\mathcal{G}_i]$$

$$\text{ii. } [X_{i+1}^d] = [\Gamma_{i-1}]^\dagger \cdot [\mathcal{G}_{i-1}]$$

- f) Resolver el sistema de ecuaciones lineales para las matrices del sistema:

$$\begin{pmatrix} [X_{i+1}^d] \\ [Y_{ji}] \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [C] & [D] \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [X_i^d] \\ [U_{ji}] \end{pmatrix}$$

3.4.4.2 Algoritmo 2: Usando la matriz de observación extendida.

En este caso las matrices del sistema se obtienen en dos pasos separados:

- ✓ las matrices $[A], [C]$ se obtienen de $[\Gamma_i]$.
- ✓ Las matrices $[B], [D]$ se calculan aparte.

3.4.4.2.1 Determinación de las matrices $[A]$ y $[C]$.

Es posible obtener estas matrices a partir de diversos métodos. En este capítulo se presentan tres.

Todos los métodos presentados hacen uso de la matriz de observación, lo que implica la siguiente relación:

$$[\underline{\Gamma}_i][A] = [\bar{\Gamma}_i] \quad (3.73)$$

Donde $[\bar{\Gamma}_i]$ denota la matriz $[\Gamma_i]$ sin las primeras l filas (número de *outputs*).

a) Mínimos Cuadrados:

$$[A] = [\underline{\Gamma}_i]^\dagger \cdot [\bar{\Gamma}_i] \quad (3.74)$$

b) Mínimos Cuadrados Totales: haciendo uso de la descomposición de valores singulares de la siguiente matriz [DE MOOR, 1988]:

$$([\bar{\Gamma}_i] - [\Gamma_i]) = [U] \cdot [S] \cdot [V]^T \quad (3.75)$$

Y particionando la matriz $[V] \in \mathbb{R}^{2nx2n}$ en cuatro matrices de $n \times n$ como:

$$[V] = \begin{pmatrix} [V_{11}] & [V_{12}] \\ [V_{21}] & [V_{22}] \end{pmatrix} \quad (3.76)$$

Se encuentra la solución al problema de mínimos cuadrados totales como:

$$[A] = [V_{22}] \cdot [V_{12}]^{-1} \quad (3.77)$$

- c) Matriz $[A]$ estable: en muchas aplicaciones, se requiere que la matriz $[A]$ sea estable. Un procedimiento para calcular una matriz incondicionalmente estable puede verse en [MACIEJOWSKI, 1994], de donde se calcula dicha matriz como:

$$[A]_{estable} = [\Gamma_i]^\dagger \cdot \begin{pmatrix} [\bar{\Gamma}_i] \\ [0] \end{pmatrix} \quad (3.78)$$

Donde $[0]$ corresponde a una matriz nula de l filas.

En todos los métodos presentados, el valor de la matriz $[C]$ corresponde a las primeras l filas de $[\Gamma_i]$.

3.4.4.2.2 Determinación de las matrices $[B]$ y $[D]$.

Si se pre-multiplica la ecuación (3.44) por una matriz $[\Gamma_i]^\perp \in \mathbb{R}^{(li-n) \times li}$ cuyo rango es $(li-n)$ y que satisface $[\Gamma_i]^\perp \cdot [\Gamma_i] = [0]$ se tiene:

$$[Y_f] = [\Gamma_i] \cdot [X_f^d] + [H_i^d] \cdot [U_f] \quad / [\Gamma_i]^\perp \cdot$$

$$[\Gamma_i]^\perp \cdot [Y_f] = [\Gamma_i]^\perp \cdot [\Gamma_i] \cdot [X_f^d] + [\Gamma_i]^\perp \cdot [H_i^d] \cdot [U_f] \quad (3.79)$$

$$[\Gamma_i]^\perp \cdot [Y_f] = \underbrace{[\Gamma_i]^\perp \cdot [\Gamma_i]}_{[0]} \cdot [X_f^d] + [\Gamma_i]^\perp \cdot [H_i^d] \cdot [U_f]$$

$$[\Gamma_i]^\perp \cdot [Y_f] = [\Gamma_i]^\perp \cdot [H_i^d] \cdot [U_f] \quad (3.80)$$

Post multiplicando (3.80) por $[U_f]^\dagger$ se tiene:

$$[\Gamma_i]^\perp \cdot [Y_f] \cdot [U_f]^\dagger = [\Gamma_i]^\perp \cdot [H_i^d] \cdot \underbrace{[U_f] \cdot [U_f]^\dagger}_{[I_{mi}]}$$

$$\underbrace{[\Gamma_i]^\perp \cdot [Y_f] \cdot [U_f]^\dagger}_{\in \mathbb{R}^{(li-n) \times mi}} = \underbrace{[\Gamma_i]^\perp}_{\in \mathbb{R}^{(li-n) \times li}} \cdot \underbrace{[H_i^d]}_{\in \mathbb{R}^{li \times mi}} \quad (3.81)$$

Por simplicidad en la notación, sea $[\mathfrak{M}]$ el lado izquierdo de la ecuación anterior y

$[\mathfrak{Z}] = [\Gamma_i]^\perp$, con lo que se tiene lo siguiente:

$$([\mathfrak{M}_1] \quad [\mathfrak{M}_2] \quad \dots \quad [\mathfrak{M}_i]) = ([\mathfrak{T}_1] \quad [\mathfrak{T}_2] \quad \dots \quad [\mathfrak{T}_i]) \cdot \quad (3.82)$$

$$\begin{pmatrix} [D] & [0] & [0] & \dots & [0] \\ [C][B] & [D] & [0] & \dots & [0] \\ [C][A][B] & [C][B] & [D] & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [C][A]^{i-2}[B] & [C][A]^{i-3}[B] & [C][A]^{i-4}[B] & \dots & [D] \end{pmatrix}$$

Donde $[\mathfrak{M}_k] \in \mathbb{R}^{(li-n) \times m}$ y $[\mathfrak{T}_k] \in \mathbb{R}^{(li-n) \times l}$. Luego de algunos pasos algebraicos, es posible escribir la ecuación (3.82) como:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} [\mathfrak{M}_1] \\ [\mathfrak{M}_2] \\ \dots \\ [\mathfrak{M}_i] \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{i(li-n) \times m}} = \underbrace{\begin{pmatrix} [\mathfrak{T}_1] & [\mathfrak{T}_2] & \dots & [\mathfrak{T}_{i-1}] & [\mathfrak{T}_i] \\ [\mathfrak{T}_2] & [\mathfrak{T}_3] & \dots & [\mathfrak{T}_i] & [0] \\ [\mathfrak{T}_3] & [\mathfrak{T}_4] & \dots & [0] & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\mathfrak{T}_i] & [0] & \dots & [0] & [D] \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{i(li-n) \times li}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} [I_l] & [0] \\ [0] & [\Gamma_i] \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{li \times (l+n)}} \cdot \begin{pmatrix} D \\ B \end{pmatrix} \quad (3.83)$$

La ecuación anterior corresponde a un set de ecuaciones lineales donde $[B]$ y $[D]$ son las incógnitas, el cual se encuentra por lo general sobredeterminado cuando $i(li-n) \geq l+n$.

El algoritmo anteriormente puede resumirse en los siguientes pasos:

a) Calcular $[\mathcal{G}_i] = [Y_f] /_{U_f} [W_p]$.

b) Calcular la descomposición de valores singulares: $[W_1][\mathcal{G}_i][W_2] = [U][S][V]^T$.

- c) Determinar el orden del sistema inspeccionando la matriz $[S]$ y particionando para obtener $[U_1], [U_2], [S_1]$.
- d) Determinar $[\Gamma_i], [\Gamma_i]^\perp$ como:

$$[\Gamma_i] = [W_1]^{-1} \cdot [U_1] \cdot [S_1]^{1/2} \quad (3.84)$$

$$[\Gamma_i]^\perp = [U_2]^T \cdot [W_1] \quad (3.85)$$

- e) Determinar $[A]$ a partir de cualquiera de los tres métodos vistos anteriormente. Determinar $[C]$ a partir de las primeras l filas de $[\Gamma_i]$.
- f) Determinar $[B], [D]$ de la ecuación (3.83) correspondiente a un sistema lineal de ecuaciones.

3.5 Identificación de Sistemas Estocásticos.

3.5.1 Descripción del problema.

Los algoritmos de sub-espacio estocástico obtienen modelos espacio-estado sólo a partir de los datos de salida u *outputs*.

Este tipo de modelos es el que más se asemeja a la identificación de parámetros dinámicos a partir de vibraciones ambientales en estructuras, siendo este desarrollo el

de mayor relevancia para comprender los algoritmos de identificación de parámetros en el dominio del tiempo, o método SSI.

Sin embargo, el modelo anteriormente presentado (determinístico) entrega importantes herramientas teóricas para la comprensión del desarrollo de este tipo de modelos.

De forma esquemática, el problema de sub-espacios estocástico puede resumirse como:

Dadas s mediciones de *output* $\{y_k\} \in \mathbb{R}^l$ generados por el sistema estocástico de orden n siguiente:

$$\begin{aligned} \{x_{k+1}^s\} &= [A] \cdot \{x_k^s\} + [B] \cdot \{w_k\} \\ \{y_k\} &= [C] \cdot \{x_k^s\} + [D] \cdot \{v_k\} \end{aligned} \tag{3.86}$$

Con $\{w_k\}, \{v_k\}$ señales de tipo ruido blanco Gaussiano, es decir, con un espectro de potencia constante (teórico), con una media nula y las siguientes matrices de covarianza:

$$E \left[\begin{pmatrix} \{w_p\} \\ \{v_p\} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \{w_q\}^T & \{v_q\}^T \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} [Q] & [S] \\ [S]^T & [R] \end{bmatrix} \cdot \delta_{pq} \tag{3.87}$$

Determinar:

- ✓ El orden n del sistema

- ✓ Las matrices $[A] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $[C] \in \mathbb{R}^{l \times n}$ del sistema y las matrices $[Q] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $[S] \in \mathbb{R}^{n \times l}$ y $[R] \in \mathbb{R}^{l \times l}$ de tal forma de minimizar el error del modelo con respecto al sistema real. Sin embargo, la determinación de estas matrices es de menor importancia en el campo de identificación de parámetros dinámicos debido a que las matrices $[A]$ y $[C]$ son suficientes para obtener frecuencias, amortiguamientos y formas modales.

A continuación se muestra, de forma esquemática, un sistema estocástico, lineal e invariante en el tiempo:

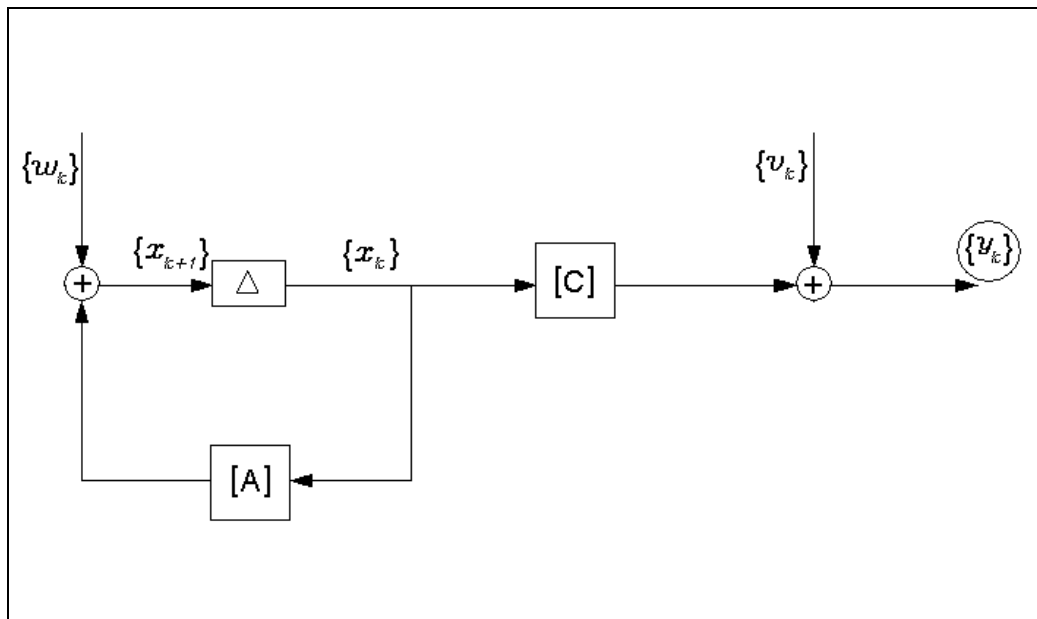


Figura 3. 8. Representación esquemática de un sistema estocástico.

3.5.2 Propiedades de los sistemas estocásticos.

En esta sección, se presentan las principales propiedades de los sistemas lineales invariantes estocásticos, además de diferentes representaciones para los modelos espacio estado.

Se asumirá, como primera propiedad, que el proceso estocástico es estacionario, es decir:

$$\begin{aligned} E\left[\{x_k^s\}\right] &= \{0\} \\ E\left[\{x_k^s\} \cdot \{x_k^s\}^T\right] &= [\Sigma^s] \end{aligned} \tag{3.88}$$

Donde la matriz $[\Sigma^s]$ se denomina matriz de covarianza de estado y es independiente del tiempo k . Esto implica que la matriz $[A]$ es estable.

Existen muchas representaciones de modelos espacio estado estocástico, siendo todas ellas equivalentes en el sentido de que la secuencia de covarianza generada por cada uno de estos modelos es idéntica.

A continuación se introducen dos tipos de modelos espacio estado estocástico:

- ✓ FM (del inglés *Forward model*)

- ✓ FIM (del inglés *Forward Innovation Model*)

3.5.2.1 Modelo FM.

Al igual que en la ecuación (3.21), se sabe que los vectores $\{w_k\}, \{v_k\}$ corresponden a secuencias de perturbaciones en el sistema que se asumen como ruido blanco Gaussiano, independientes del estado $\{x_k^s\}$, es decir:

$$E\left[\{x_k^s\} \cdot \{w_k\}^T\right] = [0]$$

$$E\left[\{x_k^s\} \cdot \{v_k\}^T\right] = [0]$$
(3.89)

A partir de la ecuación (3.88) y sabiendo que la matriz de covarianza de estados es constante, es posible deducir la siguiente expresión

$$[\Sigma^s] = E\left[\{x_{k+1}^s\} \cdot \{x_{k+1}^s\}^T\right]$$

$$[\Sigma^s] = E\left[\left([A]\{x_k^s\} + \{w_k\}\right) \cdot \left([A]\{x_k^s\} + \{w_k\}\right)^T\right]$$

$$[\Sigma^s] = [A] \cdot E\left[\{x_k^s\} \{x_k^s\}^T\right] \cdot [A] + E\left[\{w_k\} \{w_k\}^T\right]$$

$$[\Sigma^s] = [A] \cdot [\Sigma^s] \cdot [A]^T + [Q]$$
(3.90)

La expresión (3.90) se denomina ecuación de *Lyapunov*, y su deducción completa puede verse en el **Apéndice A**.

Definiendo la matriz de covarianza de *outputs* como:

$$[\Lambda_i] \triangleq E \left[\{y_{k+i}\} \cdot \{y_k\}^T \right] \quad (3.91)$$

Se tendrá lo siguiente:

$$[\Lambda_0] = E \left[\{y_k\} \cdot \{y_k\}^T \right]$$

$$[\Lambda_0] = E \left[\left([C] \{x_k^s\} + \{v_k\} \right) \cdot \left([C] \{x_k^s\} + \{v_k\} \right)^T \right]$$

$$[\Lambda_0] = [C] \cdot E \left[\{x_k^s\} \{x_k^s\}^T \right] \cdot [C]^T + E \left[\{v_k\} \{v_k\}^T \right]$$

$$[\Lambda_0] = [C] [\Sigma^s] [C]^T + [R] \quad (3.92)$$

La deducción de la ecuación (3.92) puede verse en el **Apéndice A**.

Definiendo:

$$[G] \triangleq E \left[\{x_{k+1}^s\} \{y_k\}^T \right] \quad (3.93)$$

Desarrollando esta definición se tiene:

$$[G] = E \left[\{x_{k+1}^s\} \{y_k\} \right]$$

$$[G] = E \left[\left([A] \{x_k^s\} + \{w_k\} \right) \cdot \left(\{x_k^s\}^T [C]^T + \{v_k\}^T \right) \right]$$

$$[G] = [A] \cdot E \left[\{x_k^s\} \cdot \{x_k^s\}^T \right] \cdot [C]^T + E \left[\{w_k\} \cdot \{v_k\}^T \right]$$

$$[G]=[A][\Sigma^s][C]^T+[S] \quad (3.94)$$

El desarrollo completo de esta expresión puede verse en el **Apéndice A**.

Luego a partir de las expresiones anteriores se tiene que la matriz de *outputs* puede reescribirse (para $i = 1, 2, \dots$) como:

$$[\Lambda_i]=[C] \cdot [A]^{i-1} \cdot [G] \quad (3.95)$$

$$[\Lambda_{-i}]=[G]^T \cdot ([A]^{i-1})^T \cdot [C]^T \quad (3.96)$$

La demostración de estas expresiones puede verse en el **Apéndice A**.

Las ecuaciones (3.95) y (3.96), muestran que la matriz de covarianza de *outputs* puede ser expresada como una secuencia de parámetros de Markov [JUANG, 1994] para un sistema lineal constituido por las matrices $[A],[G],[C],[\Lambda_0]$. Esta observación es relevante para el desarrollo de algoritmos de resolución de sistemas estocásticos.

De forma esquemática, el modelo FM puede resumirse como:

$$\{x_{k+1}^s\} = [A]\{x_k^s\} + \{w_k\},$$

$$\{y_k\} = [C]\{x_k^s\} + \{v_k\},$$

$$E \left[\begin{pmatrix} \{w_p\} \\ \{v_p\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{w_q\}^T & \{v_q\}^T \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} [Q] & [S] \\ [S]^T & [R] \end{bmatrix} \cdot \delta_{pq}$$

(3.97)

$$E \left[\{x_k^s\} \cdot \{x_k^s\}^T \right] = [\Sigma^s] = [A][\Sigma^s][A]^T + [Q]$$

$$E \left[\{y_k\} \cdot \{y_k\}^T \right] = [\Lambda_0] = [C][\Sigma^s][C]^T + [R]$$

$$E \left[\{x_{k+1}^s\} \cdot \{y_k\}^T \right] = [G] = [A][\Sigma^s][C]^T + [S]$$

3.5.2.2 Modelo FIM.

El modelo estocástico inicialmente descrito en (3.86) puede modificarse bajo la aplicación de un término denominado Filtro de Kalman en estado permanente (*steady-state*), el cual se describirá con más detalle en una etapa posterior, de la siguiente forma:

$$\{x_{k+1}^f\} = [A]\{x_k^f\} + [K^f]\{e_k^f\}$$

$$\{y_k\} = [C]\{x_k^f\} + \{e_k^f\} \quad (3.98)$$

$$E \left[\{e_k^f\} \cdot \{e_k^f\}^T \right] = ([\Lambda_0] - [C][P][C]^T)$$

Donde $[K^f]$ se denomina matriz de ganancia siguiente de Kalman y se define como:

$$[K^f] = ([G] - [A][P][C]^T) \cdot ([\Lambda_0] - [C][P][C]^T)^{-1} \quad (3.99)$$

Y $[P]$ se denomina matriz de covarianza de estados siguientes, y puede determinarse como la solución estable de la siguiente ecuación denominada ecuación de Riccati:

$$[P] = [A][P][A]^T + ([G] - [A][P][C]^T) \cdot ([\Lambda_0] - [C][P][C]^T)^{-1} \cdot ([G] - [A][P][C]^T)^T \quad (3.100)$$

Existen diversas formas de resolver la ecuación de Riccati, entre las que destacan el Teorema 3 de [VANOVERSCHEE, 1996], la descomposición de Schur [LAUB 1979].

Finalmente, el modelo denominado *Forward Innovation Model* puede resumirse a partir de las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \{x_{k+1}^f\} &= [A]\{x_k^f\} + [K^f]\{e_k^f\}, \\ \{y_k\} &= [C]\{x_k^f\} + \{e_k^f\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[\{e_k^f\} \cdot \{e_k^f\}^T] &= ([\Lambda_0] - [C][P][C]^T) \\ E[\{x_k^f\} \cdot \{x_k^f\}^T] &= [P] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [P] &= [A][P][A]^T + ([G] - [A][P][C]^T) \cdot ([\Lambda_0] - [C][P][C]^T)^{-1} \cdot ([G] - [A][P][C]^T)^T \\ [K^f] &= ([G] - [A][P][C]^T) \cdot ([\Lambda_0] - [C][P][C]^T)^{-1} \end{aligned} \quad (3.101)$$

3.5.3 Notación y Matrices en sistemas Estocásticos.

La mayoría de la notación utilizada fue introducida en la sección de sistemas determinísticos. En esta sección sólo se introduce los términos relacionados para sistemas estocásticos.

3.5.3.1 Matrices de Hankel.

Debido a que en este tipo de sistema se desconocen los *inputs*, solo se define la matriz de bloques Hankel para los *outputs*. Debido a que los sistemas estocásticos requieren de cierto análisis estadístico, se asumirá, para las derivaciones teóricas que $j \rightarrow \infty$, $j \in \mathbb{R}$.

$$\left[Y_{0|2i-1} \right] \triangleq \begin{bmatrix} \{y_0\} & \{y_1\} & \{y_2\} & \dots & \{y_{j-1}\} \\ \{y_1\} & \{y_2\} & \{y_3\} & \dots & \{y_j\} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \{y_{i-1}\} & \{y_i\} & \{y_{i+1}\} & \dots & \{y_{i+j-2}\} \\ \{y_i\} & \{y_{i+1}\} & \{y_{i+2}\} & \dots & \{y_{i+j-1}\} \\ \{y_{i+1}\} & \{y_{i+2}\} & \{y_{i+3}\} & \dots & \{y_{i+j}\} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \{u_{2i-1}\} & \{u_{2i}\} & \{u_{2i+1}\} & \dots & \{u_{2i+j-2}\} \end{bmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} Y_{0|i-1} \\ \dots \\ Y_{i-1|2i-1} \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} Y_p \\ \dots \\ Y_f \end{pmatrix} \quad (3.102)$$

O bien, trasladando el primer bloque de filas de $\left[Y_f \right]$ a $\left[Y_p \right]$ se tiene lo siguiente:

$$\left[Y_{0|2i-1} \right] = \begin{pmatrix} Y_{0|i} \\ \dots \\ Y_{i+1|2i-1} \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} Y_p^+ \\ \dots \\ Y_f^- \end{pmatrix} \quad (3.103)$$

3.5.3.2 Matriz de Observación.

Se define de la misma forma que para sistemas determinísticos, ecuación (3.40).

3.5.3.3 Matriz estocástica de control inverso.

Se define como:

$$\left[\Delta_i^c \right] \triangleq \left(\left[A \right]^{i-1} \left[G \right] \quad \left[A \right]^{i-2} \left[G \right] \quad \dots \quad \left[A \right] \left[G \right] \quad \left[G \right] \right) \in \mathbb{R}^{n \times li} \quad (3.104)$$

Los subíndices i y c denotan el número de bloques-columna y covarianza, respectivamente.

De forma análoga a la matriz de control para sistemas determinístico, se asume que el par $\left\{ \left[A \right] \quad \left[Q \right]^{1/2} \right\}$ es controlable, lo que implica que todos los modos del sistema son excitados debido al *input* desconocido (ruido debido al proceso).

En términos matemáticos, implica que la matriz $\left[\Delta_i^c \right]$ es de rango completo n .

Una suposición importante para este tipo de sistemas, es considerar que la matriz $\left[A \right]$ es estable.

3.5.3.4 Matrices de bloque Toeplitz.

Se definen dos matrices Toeplitz, construidas a partir de las matrices de covarianza de *output* como:

$$[C_i] \triangleq \begin{pmatrix} [\Lambda_i] & [\Lambda_{i-1}] & \dots & [\Lambda_2] & [\Lambda_1] \\ [\Lambda_{i+1}] & [\Lambda_i] & \dots & [\Lambda_3] & [\Lambda_2] \\ [\Lambda_{i+2}] & [\Lambda_{i+1}] & \dots & [\Lambda_4] & [\Lambda_3] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\Lambda_{2i-1}] & [\Lambda_{2i-2}] & \dots & [\Lambda_{i+1}] & [\Lambda_i] \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{lixli} \quad (3.105)$$

$$[L_i] \triangleq \begin{pmatrix} [\Lambda_0] & [\Lambda_{-1}] & [\Lambda_{-2}] & \dots & [\Lambda_{1-i}] \\ [\Lambda_1] & [\Lambda_0] & [\Lambda_{-1}] & \dots & [\Lambda_{2-i}] \\ [\Lambda_2] & [\Lambda_1] & [\Lambda_0] & \dots & [\Lambda_{3-i}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\Lambda_{i-1}] & [\Lambda_{i-2}] & [\Lambda_{i-3}] & \dots & [\Lambda_0] \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{lixli} \quad (3.106)$$

A partir de las ecuaciones (3.22) y (3.26) es posible definir las matrices de covarianza de los *outputs* como:

$$[\Lambda_i] = E_j \left[\sum_{k=0}^{j-1} \left(\{y_{k+i}\} \cdot \{y_k\}^T \right) \right] \quad (3.107)$$

$$[\Lambda_i] = \Phi_{[Y_{it}, Y_{00}]}$$

De las expresiones anteriores es posible deducir que [VANOVERSCHEE, 1994]:

$$[C_i] = \Phi_{[Y_f, Y_p]} \quad (3.108)$$

$$[L_i] = \Phi_{[Y_p, Y_p]} = \Phi_{[Y_f, Y_f]} \quad (3.109)$$

3.5.4 Filtros de Kalman.

Los filtros de Kalman cumplen un rol fundamental en la construcción de algoritmos de identificación de sub-espacios. Estos permiten, entre otras cosas estimar secuencias de estado para un modelo espacio estado estocástico (también denominados estimadores de Kalman), como los anteriormente vistos.

A continuación se presenta un teorema, que permite obtener este tipo de estimador, en función de los datos de salida u *outputs* [VAN OVERSCHEE, 1996].

Teorema 3. Filtros de Kalman en estado no permanente.

Dados:

- ✓ El estado inicial estimado: $\{\hat{x}_0\} = \{0\}$.
- ✓ La matriz de covarianza del estado inicial estimado:

$$[P_0] = E\left[\{\hat{x}_0\} \cdot \{\hat{x}_0\}^T\right] = [0].$$
- ✓ Las mediciones de output $\{y_0\}, \{y_1\}, \dots, \{y_{k-1}\}$

Se tiene que el estimador Kalman del estado $\{\hat{x}_k\}$ definido a partir de la siguiente recursión:

$$\{\hat{x}_k\} = [A] \cdot \{\hat{x}_{k-1}\} + [K_{k-1}] \cdot (\{y_{k-1}\} - [C] \cdot \{\hat{x}_{k-1}\}) \quad (3.110)$$

$$[K_{k-1}] = \left([G] - [A][P_{k-1}][C]^T \right) \cdot \left([\Lambda_0] - [C][P_{k-1}][C]^T \right)^{-1} \quad (3.111)$$

$$\begin{aligned} [P_k] &= [A][P_{k-1}][A]^T + \left([G] - [A][P_{k-1}][C]^T \right) \\ &\quad \times \left([\Lambda_0] - [C][P_{k-1}][C]^T \right)^{-1} \cdot \left([G] - [A][P_{k-1}][C]^T \right)^T \end{aligned} \quad (3.112)$$

Puede escribirse de forma explicita como:

$$\{\hat{x}_k\} = [\Delta_k^c] \cdot [L_k]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{k-1} \end{pmatrix} \quad (3.113)$$

Y también de forma explicita, la matriz de covarianza $[P_k]$ como:

$$[P_k] = [\Delta_k^c] \cdot [L_k]^{-1} \cdot [\Delta_k^c]^T \quad (3.114)$$

La prueba de este teorema puede verse en el **Apéndice A**.

De este mismo apéndice, se puede definir la matriz de error de covarianza de estados

$$[\tilde{P}_k] = E\left[\left(\{x_k^s\} - \{\hat{x}_k\}\right) \cdot \left(\{x_k^s\} - \{\hat{x}_k\}\right)^T\right] \quad (3.115)$$

$$[\tilde{P}_k] = [\Sigma^s] - [P_k]$$

Comentarios:

- ✓ Suponer $[P_0] = [0]$ es idéntico a suponer $[\tilde{P}_0] = [\Sigma^s]$. Esto significa que en el tiempo 0, la covarianza del error del estado es igual a la covarianza del estado $\{x_k^s\}$.
- ✓ Cuando el tiempo tiende a infinito ($k \rightarrow \infty$) se encuentra que $[P_k] = [P]$, donde $[P]$ es la solución de la ecuación de Riccati. Esto implica que la matriz de covarianza de error de estado es, en el tiempo infinito, igual a $[\tilde{P}_\infty] = [\Sigma^s] - [P]$, siendo este el error más pequeño que es posible obtener.
- ✓ Esto también implica que en el caso de modelos estocásticos de tipo FM o FIM se tendrá que $[\Sigma^s] = [P]$, luego $[\tilde{P}_\infty] = [0]$. Esto significa que teóricamente se necesitan series de tiempo infinito (*outputs*) para estimar el estado del sistema de forma exacta.
- ✓ La importancia del Teorema 3 muestra de forma explícita como los estimadores de estado de Kalman pueden escribirse como una combinación lineal de los *outputs*, permitiendo utilizar los datos disponibles para encontrar el mejor estimador de estado posible.

- ✓ Esta última observación permite la definición de una secuencia de estimadores de estado (filtros de Kalman), los cuales se obtendrán a partir de los algoritmos de sub-espacios estocástico. Estos se definen como:

$$\left[\hat{X}_i \right] = \left(\left\{ \hat{x}_i \right\} \quad \left\{ \hat{x}_{i+1} \right\} \quad \dots \quad \left\{ \hat{x}_{i+j+1} \right\} \right) \quad (3.116)$$

$$\left[\hat{X}_i \right] = \left[\Delta_i^c \right] \cdot \left[L_i \right]^{-1} \cdot \left[Y_p \right]$$

- ✓ Esta secuencia de estados estimados es generada a partir de un “banco” de filtros de Kalman trabajando de forma paralela en cada una de los bloques columnas de la matriz Hankel de *outputs* pasados $\left[Y_p \right]$. La Figura 3. 9 ilustra este concepto.
- ✓ Notar que los filtros de Kalman solo usan una parte de los *outputs*. Por ejemplo, la $(q+1)$ -ésima columna de $\left[\hat{X}_i \right]$ puede escribirse como:

$$\left\{ \hat{x}_{i+q} \right\} = \left[\Delta_i^c \right] \cdot \left[L_i \right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \left\{ y_q \right\} \\ \vdots \\ \left\{ y_{i+q-1} \right\} \end{pmatrix} \quad (3.117)$$

Lo que indica que el filtro de Kalman genera estimadores de estado sólo usando i mediciones de *output* $\left\{ y_q \right\}, \dots, \left\{ y_{i+q-1} \right\}$, en vez de todas las mediciones hasta el tiempo $i+q-1$: $\left\{ y_0 \right\}, \dots, \left\{ y_{i+q-1} \right\}$.

$$\begin{aligned}
[\hat{X}_0] &= [0 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad] \\
[P_0] &= [0] \\
[Y_p] &= \left[\begin{array}{cccc|c} \{y_0\} & | & \{y_q\} & | & \{y_{j-1}\} & | \\ \vdots & | & \vdots & | & \vdots & | \\ \{y_{i-1}\} & \downarrow & \{y_{i+q-1}\} & \downarrow & \{y_{i+j-2}\} & \downarrow \end{array} \right] \quad \downarrow \text{Filtro de Kalman} \\
[\hat{X}_i] &= [\{ \hat{x}_i \} \quad \dots \quad \{ \hat{x}_{i+q} \} \quad \dots \quad \{ \hat{x}_{i+j-1} \} \quad]
\end{aligned}$$

Figura 3. 9. Generación de “banco” de filtros de Kalman (estimador de estados) a partir de los datos de salida u *outputs*.

3.5.5 Secuencias de covarianza reales positivas.

Una propiedad de relevancia en sistemas estocásticos es que una determinada secuencia, $[\Lambda_i]$ no siempre puede ser considerada como válida, ya que para serlo debe cumplir con la condición de ser real y positiva.

Una secuencia $[\Lambda_i]$ es real positiva si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

1. Una secuencia $[\Lambda_i]$ generada por las matrices $[A],[G],[C],[\Lambda_0]$ es una secuencia real positiva.
2. La ecuación de Riccati tiene una solución definida positiva.
3. La matriz de covarianza para las perturbaciones del modelo espacio estado estocástico es definida positiva:

$$\begin{pmatrix} [Q] & [S] \\ [S]^T & [R] \end{pmatrix} > [0]$$

Esta condición es de gran importancia dentro de los modelos espacio-estado estocástico, ya que la matriz de secuencia de covarianza guarda directa relación con la identificación de frecuencias naturales del sistema que son mayores a cero, en un sentido físico.

La segunda implicancia de esta propiedad es que permite generar de forma correcta modelos tipo FIM, encontrándose una solución a la ecuación de Riccati.

3.5.6 Teorema Principal: Identificación Estocástica.

Análogo al problema determinístico, se presenta un Teorema principal para el problema de identificación estocástica.

De forma resumida, este teorema permite calcular la matriz de secuencia de estados estimada $[\hat{X}_i]$ y la matriz de observación $[\Gamma_i]$ directamente de los datos de salida u *outputs*, sin tener que conocer las matrices del sistema, las que se conocerán luego a partir de estas dos matrices.

Si bien existen diversos algoritmos para resolver el problema de sistemas estocásticos, el presente teorema abarca todos ellos.

Teorema 4. Identificación estocástica.

Bajo los siguientes supuestos:

- ✓ La perturbación (ruido) debido al proceso $\{w_k\}$ y a la medición, $\{v_k\}$ son distintos a cero para todo k
- ✓ El tiempo de medición se considera infinito, es decir, $j \rightarrow \infty, j \in \mathbb{N}$.
- ✓ Las matrices $[W_1] \in \mathbb{R}^{l \times l}$ y $[W_2] \in \mathbb{R}^{j \times j}$ son tales que $[W_1]$ es de rango completo y $[W_2]$ cumple que: $\text{rango}([Y_p]) = \text{rango}([Y_p] \cdot [W_2])$

Definiendo $[\mathcal{G}_i]$ como:

$$[\mathcal{G}_i] \triangleq [Y_f] / [Y_p] \quad (3.118)$$

Y la descomposición de valores singulares como:

$$[W_1][\mathcal{G}_i][W_2] = ([U_1] \quad [U_2]) \cdot \begin{pmatrix} [S_1] & [0] \\ [0] & [0] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [V_1]^T \\ [V_2]^T \end{pmatrix} = [U_1][S_1][V_1^T] \quad (3.119)$$

Se tiene que:

1. La matriz $[\mathcal{G}_i]$ es igual al producto de la matriz de observación y la secuencia de estados estimada a partir de los filtros de Kalman.

$$[\mathcal{G}_i] = [\Gamma_i] \cdot [\hat{X}_i] \quad (3.120)$$

2. El orden del sistema espacio estado estocástico, ecuaciones (3.86) es igual al numero de valores singulares de la ecuación (3.119) diferentes de cero.

3. La matriz de observación y control pueden obtenerse de:

$$[\Gamma_i] = [W_1]^{-1} \cdot [U_1] \cdot [S_1]^{1/2} \quad (3.121)$$

$$[\Delta_i^c] = [\Gamma_i]^\dagger \cdot \Phi_{[Y_f, Y_p]} \quad (3.122)$$

4. La parte de la secuencia de estado $[\hat{X}_i]$ que se encuentra en el espacio de las columnas de $[W_2]$ puede obtenerse como:

$$[\hat{X}_i] \cdot [W_2] = [S_1]^{1/2} \cdot [V_1]^T \quad (3.123)$$

5. La secuencia de estados, para los modelos FM y FMI es igual a:

$$[\hat{X}_i] = [\Gamma_i]^\dagger \cdot [\mathcal{G}_i] \quad (3.124)$$

Demostración:

La demostración de este teorema es muy similar a la demostración para sistemas determinísticos.

1) De las ecuaciones (3.28), (3.108) y (3.109) se tiene lo siguiente, asumiendo que $j \rightarrow \infty$:

$$[\mathcal{G}_i] = [Y_f] / [Y_p]$$

$$[\mathcal{G}_i] = \Phi_{[Y_f, Y_p]} \cdot \Phi_{[Y_p, Y_p]}^\dagger \cdot [Y_p] \quad (3.125)$$

$$[\mathcal{G}_i] = [C_i] \cdot [L_i]^{-1} \cdot [Y_p]$$

Luego, a partir de (3.95) y (3.105) se tiene:

$$\begin{aligned}
[C_i] &= \begin{pmatrix} [\Lambda_i] & [\Lambda_{i-1}] & \dots & [\Lambda_2] & [\Lambda_1] \\ [\Lambda_{i+1}] & [\Lambda_i] & \dots & [\Lambda_3] & [\Lambda_2] \\ [\Lambda_{i+2}] & [\Lambda_{i+1}] & \dots & [\Lambda_4] & [\Lambda_3] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\Lambda_{2i-1}] & [\Lambda_{2i-2}] & \dots & [\Lambda_{i+1}] & [\Lambda_i] \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} [C][A]^{i-1}[G] & [C][A]^{i-2}[G] & \dots & [C][A][G] & [C][G] \\ [C][A]^i[G] & [C][A]^{i-1}[G] & \dots & [C][A]^2[G] & [C][A][G] \\ [C][A]^{i+1}[G] & [C][A]^i[G] & \dots & [C][A]^3[G] & [C][A]^2[G] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [C][A]^{2i-2}[G] & [C][A]^{2i-3}[G] & \dots & [C][A]^i[G] & [C][A]^{i-1}[G] \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} [C] \\ [C][A] \\ [C][A]^2 \\ \vdots \\ [C][A]^{i-1} \end{pmatrix} \cdot \left([A]^{i-1}[G] \quad [A]^{i-2}[G] \quad \dots \quad [A][G] \quad [G] \right) \\
&= [\Gamma_i] \cdot [\Delta_i^c] \\
[C_i] &= [\Gamma_i] \cdot [\Delta_i^c] \tag{3.126}
\end{aligned}$$

De (3.126) y (3.125) se tiene:

$$[\mathcal{G}_i] = [\Gamma_i] \cdot [\Delta_i^c] \cdot [L_i]^{-1} \cdot [Y_p] \tag{3.127}$$

Finalmente usando la ecuación (3.116) se concluye:

$$[\mathcal{G}_i] = [\Gamma_i] \cdot [\hat{X}_i] \quad (3.128)$$

Lo que demuestra la aseveración 1.

2) Se demuestra de forma idéntica que para el caso de sistemas determinísticos

3) Usando las ecuaciones (3.119) y (3.128) se tiene que:

$$\begin{aligned} [W_1][\mathcal{G}_i][W_2] &= ([W_1] \cdot [\Gamma_i]) \cdot ([\hat{X}_i] \cdot [W_2]) = [U_1][S_1][V_1^T] \\ \Rightarrow ([W_1] \cdot [\Gamma_i]) \cdot ([\hat{X}_i] \cdot [W_2]) &= ([U_1] \cdot [S_1]^{1/2}) \cdot ([S_1]^{1/2} \cdot [V_1^T]) \end{aligned} \quad (3.129)$$

De donde se concluye que:

$$\begin{aligned} [W_1] \cdot [\Gamma_i] &= [U_1] \cdot [S_1]^{1/2} \\ \Rightarrow [\Gamma_i] &= [W_1]^{-1} \cdot [U_1] \cdot [S_1]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.130)$$

Lo que demuestra la ecuación (3.121).

De (3.108) y (3.126) se tiene la demostración de la ecuación (3.122) como:

$$[C_i] = [\Gamma_i] \cdot [\Delta_i^c] = \Phi_{[Y_f, Y_p]} \quad (3.131)$$

Premultiplicando la segunda igualdad por la pseudo inversa de $[\Gamma_i]$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 [\Gamma_i]^\dagger \cdot [\Gamma_i] \cdot [\Delta_i^c] &= [\Gamma_i]^\dagger \cdot \Phi_{[Y_f, Y_p]} \\
 \Rightarrow [\Delta_i^c] &= [\Gamma_i]^\dagger \cdot \Phi_{[Y_f, Y_p]}
 \end{aligned}
 \tag{3.132}$$

Lo que demuestra la ecuación (3.122)

4) Se demuestra de la expresión (3.129).

5) Se demuestra pre-multiplicando la expresión (3.128) por la pseudo inversa de $[\Gamma_i]$.

El presente teorema puede resumirse de la siguiente forma:

$$\text{rango}([\mathcal{G}_i]) = \text{rango}\left(\begin{bmatrix} Y_f \\ Y_p \end{bmatrix}\right) = n
 \tag{3.133}$$

$$\text{espacio - filas}\left(\begin{bmatrix} Y_f \\ Y_p \end{bmatrix}\right) = \text{espacio - filas}\left(\begin{bmatrix} \hat{X}_i \end{bmatrix}\right)
 \tag{3.134}$$

$$\text{espacio - columnas}\left(\begin{bmatrix} Y_f \\ Y_p \end{bmatrix}\right) = \text{espacio - columnas}\left([\Gamma_i]\right)
 \tag{3.135}$$

Y representarse gráficamente como:

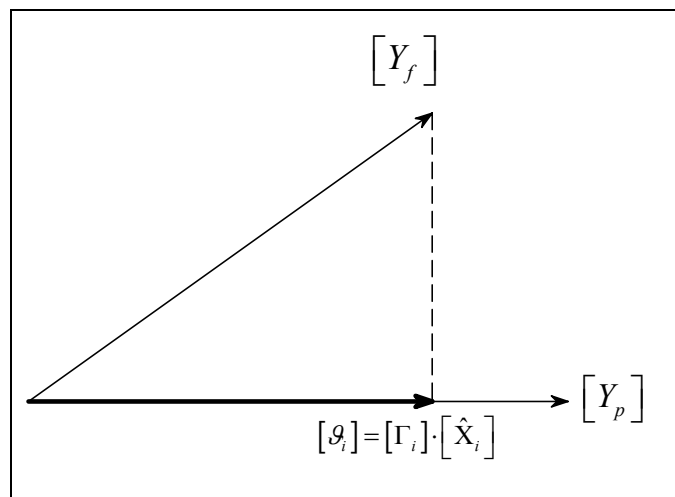


Figura 3.10. Representación gráfica del Teorema 4.

3.5.7 Elección de las matrices de peso $[W_1]$ y $[W_2]$.

A continuación se muestran 3 casos especiales del teorema 4, los cuales difieren en la elección de las matrices de peso $[W_1]$ y $[W_2]$. Estos métodos fueron introducidos inicialmente por M. Aoki [AOKI, 1987] y años más tarde por K. Arun. y S. Kung [ARUN 1990].

Estos métodos son:

- Método PC (del inglés Principal Component)
- Método UPC (del inglés Unweighted Component)
- Método CVA (del inglés Canonical Variate Algorithm)

La diferencia entre estos métodos consiste solamente en la elección de las matrices de peso $[W_1]$ y $[W_2]$.

A continuación se muestra la elección de estas matrices para cada método:

Método PC:

$$[W_1] = [I_{li}] \quad (3.136)$$

$$[W_2] = [Y_p]^T \cdot \Phi_{[Y_p, Y_p]}^{-1/2} \cdot [Y_p] \quad (3.137)$$

Método UPC:

$$[W_1] = [I_{li}] \quad (3.138)$$

$$[W_2] = [I_j] \quad (3.139)$$

Método CVA:

$$[W_1] = \Phi_{[Y_f, Y_f]}^{-1/2} \quad (3.140)$$

$$[W_2] = [I_j] \quad (3.141)$$

3.5.8 Obtención de las matrices del sistema.

A continuación se muestran tres formas diferentes de obtener las matrices $[A]$, $[C]$ y $[Q]$, $[S]$, $[R]$ (o $[G]$, $[\Lambda_0]$) a partir de las deducciones del Teorema 4.

3.5.8.1 Algoritmo 1: A partir de los estados.

A partir del teorema 4 se encontró lo siguiente:

- ✓ El orden del sistema, inspeccionando la descomposición de valores singulares a partir de algún criterio de importancia respecto al mayor valor singular.
- ✓ Las matrices de observación y control.
- ✓ La secuencia de estados estimados, a través de los filtros de Kalman.

A partir de las deducciones del teorema 4 se puede demostrar lo siguiente:

$$[\mathcal{G}_{i-1}] \triangleq [Y_f^-] / [Y_p^+] \quad (3.142)$$

$$\Rightarrow [\mathcal{G}_{i-1}] = [\Gamma_{i-1}] \cdot [\hat{X}_{i+1}]$$

De la ecuación (3.142) se ve que es posible obtener la matriz $[\mathcal{G}_{i-1}]$ solamente a partir de los *outputs*.

De la misma forma, es posible obtener la matriz $[\Gamma_i]$, y por ende $[\Gamma_{i-1}]$ que corresponde a la misma matriz de observación sin las últimas l filas, lo que se denota como:

$$[\Gamma_{i-1}] = [\Gamma_i] \quad (3.143)$$

Luego, es posible calcular la secuencia de estados estimados por medio de los filtros de Kalman, para $i+1$ a partir, nuevamente, de la ecuación (3.142):

$$[\hat{X}_{i+1}] = [\Gamma_{i-1}]^\dagger \cdot [\mathcal{G}_{i-1}] \quad (3.144)$$

Del teorema 4 se conoce también el estado actual $[\hat{X}_i]$, luego es posible establecer el siguiente sistema lineal, asociado al modelo espacio-estado:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} [\hat{X}_{i+1}] \\ [Y_{ii}] \end{pmatrix}}_{\text{conocido}} = \begin{pmatrix} [A] \\ [C] \end{pmatrix} \cdot \underbrace{[\hat{X}_i]}_{\text{conocido}} + \underbrace{\begin{pmatrix} [\rho_w] \\ [\rho_v] \end{pmatrix}}_{\text{residuales}} \quad (3.145)$$

Como se aprecia en la ecuación (3.145), es posible obtener las matrices $[A], [C]$. Asumiendo que los residuales obtenidos a partir de la estimación de estados mediante filtros de Kalman son ortogonales a dichos estados estimados, es decir no están correlacionados, es posible resolver la ecuación (3.145) por medio del método de mínimos cuadrados [VAN OVERSCHEE, 1993] como:

$$\begin{pmatrix} [A] \\ [C] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\hat{X}_{i+1}] \\ [Y_{ii}] \end{pmatrix} \cdot [\hat{X}_i]^\dagger \quad (3.146)$$

Finalmente, la matriz $[G]$ puede determinarse a partir de las últimas l columnas de la matriz $[\Delta_i^c]$. La matriz $[\Lambda_0]$ se determina como:

$$[\Lambda_0] = \Phi_{[Y_{ii}, Y_{ii}]} \quad (3.147)$$

La desventaja de este algoritmo, es que no garantiza que la matriz de covarianza de *outputs* $[\Lambda_i]$ sea real-positiva, a pesar de tener una gran cantidad de datos para el análisis.

3.5.8.2 Algoritmo 2: A partir de las matrices de observación y control.

De forma similar al segundo algoritmo de identificación determinística, las matrices $[A]$, $[C]$ y $[G]$ pueden obtenerse a partir de las matrices de observación y control, las cuales pueden obtenerse a partir de las ecuaciones (3.121) y (3.122) del teorema 4.

Aplicando la misma deducción que el algoritmo 2 para sistemas determinísticos, la matriz $[A]$ puede obtenerse de (3.74) y la matriz $[C]$ como las primeras l filas de $[\Gamma_i]$.

La matriz $[G]$ se determina de las últimas l columnas de $[\Delta_i^c]$:

$$[\Delta_i^c] = [\Gamma_i]^\dagger \cdot \Phi_{[Y_f, Y_p]} \quad (3.148)$$

Y la matriz $[\Lambda_0]$ de la ecuación (3.147).

Al igual que el algoritmo 1, este algoritmo no garantiza una matriz de covarianza de *outputs* real positiva.

Existen algoritmos que resuelven el problema de obtener una matriz de covarianza real positiva. Para profundizar en este tema se puede consultar [VANOVERSCHEE, 1996].

Sin embargo, para el caso particular en estudio, la importancia se encuentra en encontrar las matrices de estado para el caso estocástico, lo que se logra por medio de los dos algoritmos presentados anteriormente.

Finalmente se hace necesario señalar que existen algoritmos que obtienen las matrices de estado para un modelo espacio estado generalizado (3.1), (3.2) y (3.3). Si bien dichos métodos abarcan ambos métodos, el interés de este capítulo está focalizado en la obtención de parámetros dinámicos a partir de vibraciones ambientales, por lo que el Método del Sub-Espacio Estocástico es suficiente.

Una aplicación práctica para este tipo de modelos correspondería a obtener las propiedades dinámicas de una estructura, cuando se cuenta con el registro sísmico (*input*) en la base y sensores que midan la respuesta estructural. Uno de los algoritmos más conocidos que resuelve este tipo de modelos se denomina N4SID. Para profundizar, se recomienda consultar [VAN OVERSCHEE, 1996].

3.6 Identificación de sistemas determinístico-estocásticos.

3.6.1 Descripción del problema.

Los algoritmos de sub-espacio determinístico-estocástico obtienen modelos espacio-estado a partir de los datos de entrada o *inputs* y salida u *outputs*.

Este tipo de modelos es la combinación de los modelos previamente estudiados, por lo tanto corresponde al caso más general de identificación de sistemas en el dominio del tiempo.

De forma esquemática, el problema de sub-espacios determinístico-estocástico puede resumirse como:

Dadas s mediciones *inputs* $\{u_k\} \in \mathbb{R}^m$ y de *output* $\{y_k\} \in \mathbb{R}^l$ generados por el sistema estocástico de orden n siguiente:

$$\begin{aligned}\{x_{k+1}\} &= [A] \cdot \{x_k\} + [B] \cdot \{u_k\} + \{w_k\} \\ \{y_k\} &= [C] \cdot \{x_k\} + [D] \cdot \{u_k\} + \{v_k\}\end{aligned}\tag{3.149}$$

Con $\{w_k\}, \{v_k\}$ señales de tipo ruido blanco Gaussiano, es decir, con un espectro de potencia constante (teórico), con una media nula y las siguientes matrices de covarianza:

$$E \left[\begin{pmatrix} \{w_p\} \\ \{v_p\} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \{w_q\}^T & \{v_q\}^T \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} [Q] & [S] \\ [S]^T & [R] \end{bmatrix} \cdot \delta_{pq} \quad (3.150)$$

Determinar:

- ✓ El orden n del sistema.
- ✓ Las matrices $[A] \in \mathbb{R}^{nxn}$, $[B] \in \mathbb{R}^{nxm}$, $[C] \in \mathbb{R}^{lxn}$ y $[D] \in \mathbb{R}^{lxm}$ del sistema y las matrices $[Q] \in \mathbb{R}^{nxn}$, $[S] \in \mathbb{R}^{n \times l}$ y $[R] \in \mathbb{R}^{l \times l}$ de tal forma que los valores estadísticos de segundo orden entre el *output* del modelo y el *output* dado sean prácticamente iguales.

3.6.2 Sistema Combinado: Subsistemas Determinístico y Estocástico.

Es posible separar el sistema (3.149) en dos subsistemas: uno determinístico y otro estocástico. Al igual que la notación introducida anteriormente, el superíndice $(\bullet)^d$ representa el subsistema determinístico, mientras que $(\bullet)^s$ representa el subsistema estocástico:

$$\{x_k\} = \{x_k\}^d + \{x_k\}^s \quad (3.151)$$

$$\{y_k\} = \{y_k\}^d + \{y_k\}^s$$

Cada subsistema puede ser modelado tal como se vio en las secciones anteriores como:

Determinístico:

$$\{x_{k+1}^d\} = [A] \cdot \{x_k^d\} + [B] \cdot \{u_k\} \quad (3.152)$$

$$\{y_k^d\} = [C] \cdot \{x_k^d\} + [B] \cdot \{u_k\}$$

Estocástico:

$$\{x_{k+1}^s\} = [A] \cdot \{x_k^s\} + \{w_k\} \quad (3.153)$$

$$\{y_k^s\} = [C] \cdot \{x_k^s\} + \{v_k\}$$

3.6.3 Notación y matrices en sistemas Determinístico-Estocásticos.

Al igual que en las secciones precedentes, las matrices de Hankel se definen de la misma forma para sistemas determinísticos y estocásticos.

La secuencia de estados se define como:

$$[X_i] = \left(\{x_i\} \quad \{x_{i+1}\} \quad \dots \quad \{x_{i+j-2}\} \quad \{x_{i+j-1}\} \right) \in \mathbb{R}^{nj} \quad (3.154)$$

La cual puede separarse en una secuencia de estado determinística y otra estocástica como:

$$[X_i^d] = \left(\{x_i^d\} \quad \{x_{i+1}^d\} \quad \dots \quad \{x_{i+j-2}^d\} \quad \{x_{i+j-1}^d\} \right) \in \mathbb{R}^{nj} \quad (3.155)$$

$$[X_i^s] = \left(\{x_i^s\} \quad \{x_{i+1}^s\} \quad \dots \quad \{x_{i+j-2}^s\} \quad \{x_{i+j-1}^s\} \right) \in \mathbb{R}^{nj}$$

Las secuencias pasadas y futuras de los subsistemas determinístico y estocástico se definen como:

$$\begin{aligned} [X_p^d] &= [X_0^d] \end{aligned} \tag{3.156}$$

$$[X_f^d] = [X_i^d]$$

$$[X_p^s] = [X_0^s]$$

$$[X_f^s] = [X_i^s]$$

(3.157)

Para este tipo de sistemas, se definen, aparte de las matrices definidas para los sistemas determinísticos y estocásticos, las matrices de covarianza y covarianza cruzada (asumiendo que $\{u_k\}, \{x_k^d\}$ son cuasi-estacionarios):

$$[R^{uu}] = \Phi_{[U_{02i-1}, U_{02i-1}]} = \begin{bmatrix} \Phi_{[U_p, U_p]} & \Phi_{[U_p, U_f]} \\ \Phi_{[U_f, U_p]} & \Phi_{[U_f, U_f]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_p^{uu}] & [R_{pf}^{uu}] \\ [R_{pf}^{uu}]^T & [R_f^{uu}] \end{bmatrix} \tag{3.158}$$

$$[S^{xu}] = \Phi_{[X_p^d, U_{02i-1}]} = \begin{pmatrix} \Phi_{[X_p^d, U_p]} & \Phi_{[X_p^d, U_f]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [S_p^{xu}] & [S_p^{xu}] \end{pmatrix} \tag{3.159}$$

$$[\Sigma^d] = \Phi_{[X_p^d, X_p^d]} \tag{3.160}$$

Al igual que el Teorema 1, es posible escribir el modelo espacio estado de forma matricial, para un sistema determinístico-estocástico como:

$$[Y_p] = [\Gamma_i] \cdot [X_p^d] + [H_i^d] \cdot [U_p] + [Y_p^s] \tag{3.161}$$

$$[Y_f] = [\Gamma_i] \cdot [X_f^d] + [H_i^d] \cdot [U_f] + [Y_f^s] \tag{3.162}$$

$$[X_f] = [A]^i \cdot [X_p^d] + [\Delta_i^d] \cdot [U_p] \quad (3.163)$$

Las ecuaciones anteriormente descritas se forman mediante una sustitución recursiva dentro de las ecuaciones espacio-estado (sistema generalizado).

Una relación importante, cuya demostración se establece en [VAN OVERSCHEE, 1996] es la que se establece entre la estimación de estados mediante los Filtros de Kalman para sistemas combinados y los datos de entrada y salida.

Esta relación se establece como:

$$[Z_i] \stackrel{def}{=} [Y_f] / \begin{pmatrix} [W_p] \\ [U_f] \end{pmatrix} = [\Gamma_i] [\hat{X}_i] + [H_i^d] [U_f] \quad (3.164)$$

Con:

$$[\hat{X}_i] \stackrel{def}{=} [\hat{X}_i]_{[\hat{x}_0, P_0]}$$

$$[\hat{X}_0] = [S^{xu}] \cdot [R^{uu}]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} [U_p] \\ [U_f] \end{pmatrix} \quad (3.165)$$

$$[P_0] = - \left([\Sigma^d] - [S^{xu}] \cdot [R^{uu}]^{-1} \cdot [S^{xu}]^T \right)$$

Donde la primera ecuación de la expresión (3.165) la secuencia de estados estimados por medio de filtros de Kalman, con un estado inicial $[\hat{X}_0]$ y una matriz inicial $[P_0]$.

3.6.4 Teorema Principal: Identificación de sistemas combinados.

Bajo las mismas suposiciones y definiciones de los teoremas utilizados para sistemas determinísticos y estocásticos, y definiendo:

$$[\mathcal{G}_i] = [Y_f]_{U_f} [W_p] \quad (3.166)$$

$$[W_1][\mathcal{G}_i][W_2] = \left([U_1] \quad [U_2] \right) \cdot \begin{pmatrix} [S_1] & [0] \\ [0] & [S_2] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [V_1]^T \\ [V_2]^T \end{pmatrix} \quad (3.167)$$

Se puede establecer lo siguiente:

1.-

$$[\mathcal{G}_i] = [\Gamma_i] \cdot [\tilde{X}_i] \quad (3.168)$$

Con

$$[\tilde{X}_i] = [\hat{X}_i]_{[\hat{x}_0, R_0]} \quad (3.169)$$

2.- El orden del sistema es igual al número de valores singulares no nulos de la ecuación (3.167).

3.- La matriz de observación $[\Gamma_i]$ es igual a (3.121).

4.- La parte de la secuencia de estados $[\tilde{X}_i]$ que se encuentra en el espacio de las columnas de $[W_2]$ puede obtenerse como:

$$[\tilde{X}_i] \cdot [W_2] = [S_1]^{1/2} \cdot [V_1]^T \quad (3.170)$$

5.- La secuencia de estados $[\tilde{X}_i]$ es igual a:

$$[\tilde{X}_i] = [\Gamma_i]^\dagger \cdot [\mathcal{G}_i] \quad (3.171)$$

La demostración de este teorema se encuentra en [VAN OVERSCHEE, 1996].

Si bien existen diversos métodos para obtener las matrices del modelo espacio estado determinístico estocástico, aquí se describe uno de ellos que corresponde a uno de los más robustos. Debido a que las matrices de interés para la identificación de parámetros dinámicos son $[A]$ y $[C]$, se describirá este algoritmo solo hasta este punto:

Al igual que en sistemas estocásticos, se calcula la proyección oblicua de la matriz $[\mathcal{G}_i]$ según (3.166) y luego se calcula la descomposición de valores singulares como en (3.167), de donde se determina el orden del sistema mediante inspección.

A continuación se calcula $[\Gamma_i]$ y $[\Gamma_{i-1}]$ como:

$$[\Gamma_i] = [W_1]^{-1} [U_1] [S_1]^{1/2} \quad (3.172)$$

$$[\Gamma_{i-1}] = [\Gamma_i]$$

Finalmente, se resuelve el set de ecuaciones lineales, de donde se obtiene $[A]$, $[C]$ y $[K]$ como:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} [\Gamma_{i-1}]^\dagger \cdot [Z_{i+1}] \\ Y_{i|i} \end{pmatrix}}_{\text{conocido}} = \begin{pmatrix} [A] \\ [C] \end{pmatrix} \cdot \underbrace{[\Gamma_i]^\dagger \cdot [Z_i]}_{\text{conocido}} + [K] \underbrace{[U_f]}_{\text{conocido}} + \underbrace{\begin{pmatrix} [\rho_w] \\ [\rho_u] \end{pmatrix}}_{\text{residuales}} \quad (3.173)$$

Donde:

$$[K] = \begin{pmatrix} ([B] \quad [\Gamma_{i-1}]^\dagger \cdot [H_{i-1}^d]) - [A] \cdot [\Gamma_i]^\dagger \cdot [H_i^d] \\ ([D] \quad [0]) - [C] \cdot [\Gamma_i]^\dagger \cdot [H_i^d] \end{pmatrix} \quad (3.174)$$

3.6.5 Elección de las matrices de peso $[W_1]$ y $[W_2]$.

Al igual que en sistemas estocásticos, es posible definir 3 casos especiales para el algoritmo anteriormente descrito, los cuales difieren en la elección de las matrices de peso $[W_1]$ y $[W_2]$.

Estos métodos son:

- Método N4SID (cuyo acrónimo en inglés “*Numerical algorithms for Subspace State Space System Identification*”)
- Método MOESP (del inglés *Multivariate Output-Error State Space*)
- Método CVA (del inglés *Canonical Variate Algorithm*)

La diferencia entre estos métodos consiste en la elección de las matrices de peso $[W_1]$ y $[W_2]$.

A continuación se muestra la elección de estas matrices para cada método

Método N4SID:

$$[W_1] = [I_{li}] \quad (3.175)$$

$$[W_2] = [I_j] \quad (3.176)$$

Método MOESP:

$$[W_1] = [I_{li}] \quad (3.177)$$

$$[W_2] = \Pi_{U_j^\perp} \quad (3.178)$$

Método CVA:

$$[W_1] = \Phi_{[Y_f/U_j^\perp, Y_f/U_j^\perp]}^{-1/2} \quad (3.179)$$

$$[W_2] = \Pi_{U_j^\perp} \quad (3.180)$$

Una observación importante es que las matrices de peso, en los tres sistemas estudiados cumplen la función de reducir el orden del sistema identificado. Éstas ponderan de forma directa a la matriz de observación, generando una rotación o transformación, influyendo en la determinación de las matrices de estado $[A]$ y $[C]$.

La concepción y relevancia de estas matrices de peso se estudian en el dominio de la frecuencia. Para ahondar más en su función y propiedades, ver *[VAN OVERSCHEE, 1996]*.

3.7 Obtención de parámetros dinámicos.

Hasta ahora se ha mostrado de qué forma es posible obtener, a partir de un modelo espacio-estado, determinístico, estocástico o combinado, las matrices de estado.

Sin embargo, es necesario relacionar dichas matrices con la obtención de los parámetros dinámicos de un sistema estructural.

3.7.1 Relación entre matrices de estado y parámetros dinámicos.

A partir de lo desarrollado en el Capítulo 2 se dedujo inicialmente que es posible descomponer la matriz de sistema de un modelo espacio estado continuo en sus valores propios como:

$$[A_c] = [\Psi] \cdot [\Lambda_c] \cdot [\Psi]^{-1} \quad (3.181)$$

Y por otro lado:

$$e^{([A_c] \cdot \Delta t)} = [\Psi] \cdot e^{([\Lambda_c] \cdot \Delta t)} \cdot [\Psi]^{-1} \quad (3.182)$$

Además, se estableció (considerando que la excitación es de tipo constante entre dos instantes de tiempo o bien un delta de Dirac), la relación entre las matrices de sistema continuo y discreto como:

$$[A] = e^{([A_c] \cdot \Delta t)} \quad (3.183)$$

De las expresiones anteriores se concluyó que del mismo modo, la matriz de sistema de un modelo espacio-estado discreto puede ser descompuesta en sus valores y vectores propios como:

$$[A] = e^{([A_c] \cdot \Delta t)} = e^{([\Psi][\Lambda_c][\Psi]^{-1} \cdot \Delta t)} = [\Psi] \cdot e^{([\Lambda_c] \cdot \Delta t)} \cdot [\Psi]^{-1} = [\Psi] \cdot [\Lambda_d] \cdot [\Psi]^{-1} = [\Psi] \cdot [\mu_i] \cdot [\Psi]^{-1} \quad (3.184)$$

Debido a que la ecuación de estado para el modelo espacio estado continuo fue deducida a partir de la ecuación de equilibrio dinámico, se tiene una relación directa entre ambos por medio de la matriz de sistema $[A_c]$ como sigue:

$$[A_c] = \begin{bmatrix} [0] & [I_n] \\ -[M]^{-1} \cdot [K] & -[M]^{-1} \cdot [C] \end{bmatrix} \quad (3.185)$$

Donde $[M]$ es la matriz de masa, $[C_2]$ la matriz de amortiguamiento (clásica o no clásica) y $[K]$ la matriz de rigidez. La matriz $[I_n]$ corresponde a la identidad de dimensión $n \times n$.

De la ecuación (3.181) se sabe que es posible descomponer la matriz $[A_c]$. Luego para cada uno de sus valores y vectores propios se tendrá:

$$[A_c] \cdot \{\Psi_i\} = \lambda_i \cdot \{\Psi_i\} \quad (3.186)$$

Luego, si se define:

$$\{\Psi_i\} = \begin{pmatrix} \{\phi_i^1\} \\ \{\phi_i^2\} \end{pmatrix} \quad (3.187)$$

Se tendrá:

$$\begin{bmatrix} [0] & [I_n] \\ -[M]^{-1} \cdot [K] & -[M]^{-1} \cdot [C] \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \{\phi_i^1\} \\ \{\phi_i^2\} \end{pmatrix} = \lambda_i \cdot \begin{pmatrix} \{\phi_i^1\} \\ \{\phi_i^2\} \end{pmatrix} \quad (3.188)$$

La primera ecuación de la expresión (3.188) entrega la siguiente información:

$$\{\phi_i^2\} = \lambda_i \cdot \{\phi_i^1\} \quad (3.189)$$

Luego:

$$\{\Psi_i\} = \begin{pmatrix} \{\phi_i\} \\ \lambda_i \cdot \{\phi_i\} \end{pmatrix} \quad (3.190)$$

De la segunda ecuación de la expresión (3.188) se tiene que:

$$\left(-[M]^{-1} \cdot [K] \cdot \{\phi_i\}\right) - \left([M]^{-1} \cdot [C] \cdot \lambda_i \cdot \{\phi_i\}\right) = \left(\lambda_i^2 \cdot \{\phi_i\}\right) \quad (3.191)$$

Pre-multiplicando a ambos lados por $[M]$ se tiene:

$$\begin{aligned} \left(\lambda_i^2 \cdot [M] \cdot \{\phi_i\}\right) + \left(\lambda_i \cdot [C] \cdot \{\phi_i\}\right) + \left([K] \cdot \{\phi_i\}\right) &= \{0\} \\ \Rightarrow \left(\lambda_i^2 \cdot [M] + \lambda_i \cdot [C] + [K]\right) \cdot \{\phi_i\} &= \{0\} \end{aligned} \quad (3.192)$$

De donde se deduce la ecuación característica, para cada uno de los valores propios:

$$\lambda_i^2 + 2 \cdot \xi_i \cdot \lambda_i + \omega_i^2 = 0 \quad (3.193)$$

Cuya solución es:

$$\lambda_i, \lambda_i^* = -\xi_i \cdot \omega_i \pm j \cdot \omega_i \cdot \sqrt{1 - \xi_i^2} \quad (3.194)$$

Esta última ecuación es muy importante, ya que relaciona los valores propios de la matriz de sistema de un modelo espacio estado continuo con los valores de frecuencia angular ω_i y porcentaje de amortiguamiento crítico ξ_i .

Sin embargo, lo que se obtiene de los algoritmos de sub-espacio corresponden a la matriz de sistema para un modelo espacio estado discreto. Pero debido a que ambas matrices se relacionan, el problema se encuentra resuelto:

Los valores propios del sistema discreto μ_i se relacionan con los valores propios continuos λ_i directamente de la ecuación (3.184) como:

$$\mu_i = e^{\lambda_i \cdot \Delta t} \Rightarrow \lambda_i = \frac{\ln(\mu_i)}{\Delta t} \quad (3.195)$$

Luego:

$$\omega_i = |\lambda_i| = \sqrt{\lambda_i \lambda_i^*} \quad (3.196)$$

$$\xi_i = -\frac{\text{real}(\lambda_i)}{|\lambda_i|} = \frac{-(\lambda_i + \lambda_i^*)}{|\lambda_i|} \quad (3.197)$$

Para la deducción de los modos de vibrar de la estructura, se puede consultar el Capítulo 2 de esta Tesis.

De dicho análisis es posible obtener los modos de una forma genérica como:

$$[\Phi] = [C] \cdot [\Psi] \quad (3.198)$$

Con $[\Phi]$ los valores propios originales del sistema, $[C]$ la matriz de *outputs* del modelo espacio estado discreto y $[\Psi]$ la matriz de vectores propios de la matriz $[A]$.

3.7.2 Diagrama de Estabilización

Como se ha visto a través de este capítulo, los modelos espacio-estado discreto tienen asociado un orden o tamaño, para el cual la respuesta de este modelo parametrizado es muy parecida a la respuesta medida (*outputs*).

A raíz de esto, existe un procedimiento, el cual obtiene las matrices de estado $[A], [C]$ para modelos espacio-estado de diferentes órdenes (o retardos), digamos de 1 a k , lo que implica que también almacena los parámetros dinámicos para cada orden de modelo, como una forma de ver la estabilidad en función del orden del sistema.

A partir de este tratamiento, es posible establecer condiciones de estabilidad para cada uno de los parámetros dinámicos obtenidos, en función de los valores obtenidos entre un modelo y el siguiente. Los valores usualmente utilizados son:

Para frecuencias naturales:

$$100\% \cdot \frac{f^{(p)} - f^{(p-1)}}{f^{(p)}} \leq 1\% \quad (3.199)$$

Para amortiguamiento:

$$100\% \cdot \frac{\xi^{(p)} - \xi^{(p-1)}}{\xi^{(p)}} \leq 5\% \quad (3.200)$$

Formas Modales:

$$100\% \cdot (1 - MAC(p, p+1)) \leq 2\% \quad (3.201)$$

Donde:

$$MAC(\{\phi_p\}, \{\phi_{p+1}\}) = \frac{\left| \{\phi_p\}^T \cdot \{\phi_{p+1}\} \right|^2}{\left(\{\phi_p\}^T \cdot \{\phi_p\} \right) \left(\{\phi_{p+1}\}^T \cdot \{\phi_{p+1}\} \right)} \quad (3.202)$$

A partir de estos límites de estabilidad, se define un gráfico denominado Diagrama de Estabilidad, en donde muestran las coincidencias, en caso que se cumplan las condiciones establecidas anteriormente, entre un modelo de orden p y uno de orden $p+1$, donde p es un valor definido por el usuario.

Dentro de este gráfico se definen cuatro tipos de coincidencia:

- ✓ Coincide sólo frecuencia (\bullet)
- ✓ Coincide frecuencia y amortiguamiento (∇)
- ✓ Coinciden frecuencia y forma modal (MAC) (Δ)
- ✓ Coincide frecuencia, amortiguamiento y forma modal (\oplus)

En la medida que se repita sucesivamente la triple coincidencia, mientras aumenta el orden del modelo, se sume que se han identificado parámetros dinámicos estables.

Otros elementos importantes dentro del diagrama de estabilidad corresponden al Histograma y el Espectro de potencia: el primero indica la cantidad de coincidencias en torno a una cierta frecuencia, mientras que el segundo se utiliza como contraste en el dominio de las frecuencias.

Un punto importante a destacar dentro de este método, es que las variables controlables por el usuario son principalmente 4:

- El orden del sistema
- Las matrices de peso, que intervienen en los diferentes algoritmos para la obtención del modelo espacio estado
- Las filas de las matrices *Hankel*, denominado por i que establece el retardo utilizado para construir.
- Cantidad de muestras (registros) y duración de éstas utilizadas para el análisis

Cada una de estas variables influirá en la obtención de parámetros dinámicos. Sin embargo, el orden del sistema se relaciona de forma directa con el parámetro i .

Esta relación se debe a que teóricamente no se puede obtener un orden mayor al número de bloques fila, por lo tanto, el número de bloques filas debe ser al menos igual al orden del sistema, menos uno.

Un valor alto de i implicará a su vez un orden alto, generando estabilidad en las propiedades dinámicas, pero un error estadístico asociado a las matrices de correlación, ya que al aumentar i necesariamente disminuye j y por lo tanto se tienen menos valores pasados para estimar los valores futuros.

Notar que el diagrama de estabilización da cuenta de la estabilidad de las estimaciones de la variación de orden realizable del modelo que es equivalente a variar el orden

efectivo del sistema. Es decir, el diagrama de estabilidad es equivalente a observar la estabilidad de las estimaciones a partir de diferentes tamaños de bloques filas ($i = 2n + 1$).

El diagrama de estabilización refleja solamente la variabilidad local de la estimación de los parámetros dinámicos entre un orden y otro y no entrega información acerca de una estabilidad global, en donde sea posible comparar la estabilidad entre un modelo y cualquier otro dentro del análisis, no solamente del siguiente o anterior.

Para esto se propone el estudio de la estabilidad de propiedades dinámicas por separado, en función de diferentes retardos u ordenes de modelo.

Con esto se puede realizar un análisis de sensibilidad global de cada propiedad dinámica, y viendo su evolución comparativa, no solo entre un orden y el contiguo, sino que entre todos los órdenes o retardos considerados.

Otro punto importante a comentar corresponde al error asociado a la aleatoriedad de las series de tiempo, la que esta dada por la cantidad de muestras o series de tiempo que se tengan y su duración, para el análisis.

Una forma de aminorar este efecto es tomar, a partir de una serie de tiempo, diversas muestras y realizando un análisis estadístico de los valores obtenidos, como por ejemplo calcular el valor promedio y su desviación estándar.

A continuación se muestra un ejemplo de diagrama de estabilización, para un modelo estructural de 6 niveles, el cual fue excitado mediante un ruido blanco durante 4 minutos aproximadamente, a 200 muestras por segundos, en la mesa vibradora del laboratorio de Dinámica Estructural de la Universidad de Chile.

Para el ensayo, se dispuso un sensor unidireccional por piso, midiéndose la respuesta en aceleraciones, para luego realizar la identificación de parámetros dinámicos mediante el método del Sub-Espacio estocástico.

Los resultados que se muestran a continuación corresponden al diagrama de estabilidad, donde se indican los parámetros estables de la estructura, según el orden del modelo considerado.

Luego, se muestran de forma grafica los 6 primeros modos de vibrar de la estructura.



Figura 3. 11. Modelo estructural de 6 niveles.

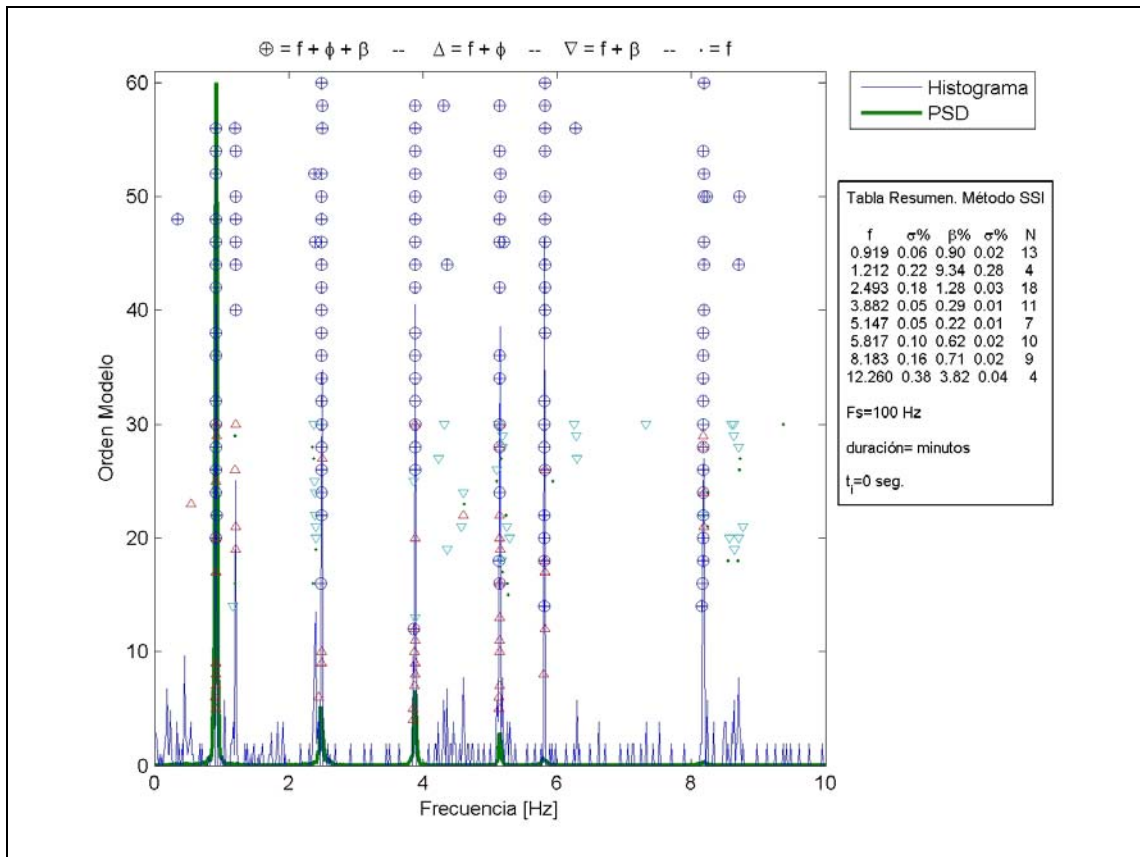


Figura 3. 12. Diagrama de Estabilidad. Modelo 6 niveles. Método del Subespacio Estocástico con algoritmo UPC.

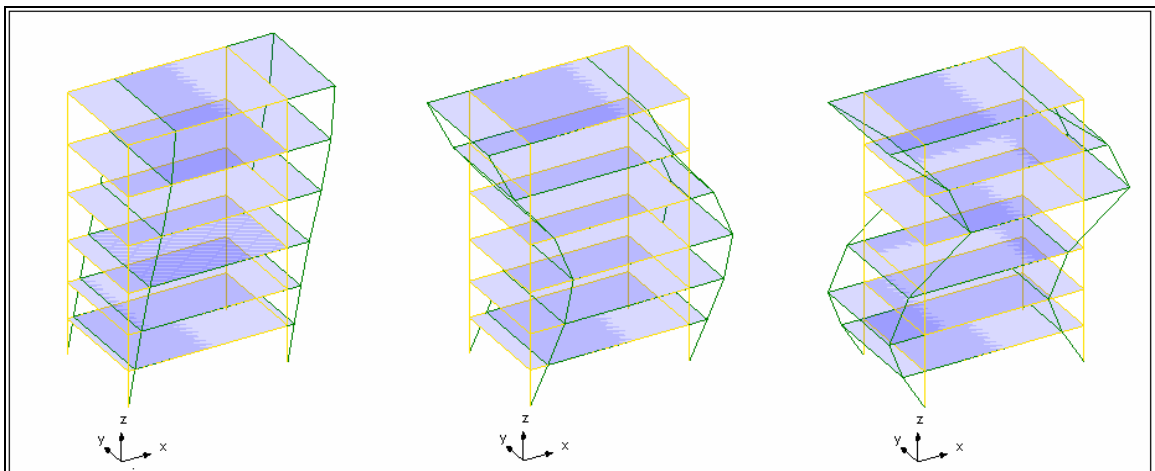


Figura 3. 13. Formas Modales. Método SSI. Primer a tercer modo. Modelo 6 niveles.

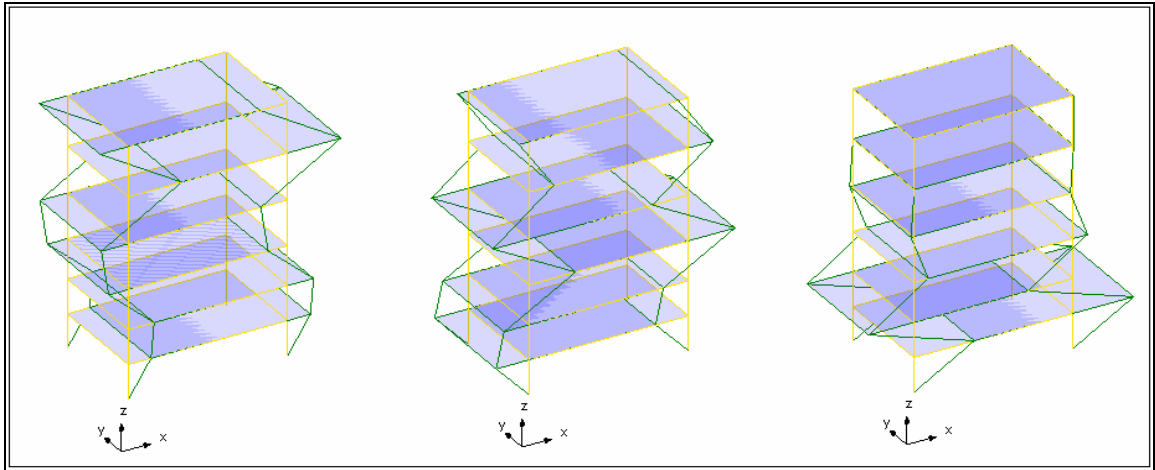


Figura 3. 14. Formas Modales. Método SSI. Cuarto a sexto modo. Modelo 6 niveles.

Una observación importante de este ejemplo corresponde a la duración del registro de salida u *output*, comprobándose la robustez del método.

Otro punto importante es que a partir del diagrama de estabilidad, es posible generar una tabla resumen con las frecuencias y amortiguamientos estables identificados, como se aprecia en la Figura 3. 12.

Si se realiza el mismo análisis, pero de forma global, para cada parámetro por separado, es posible obtener los siguientes gráficos:

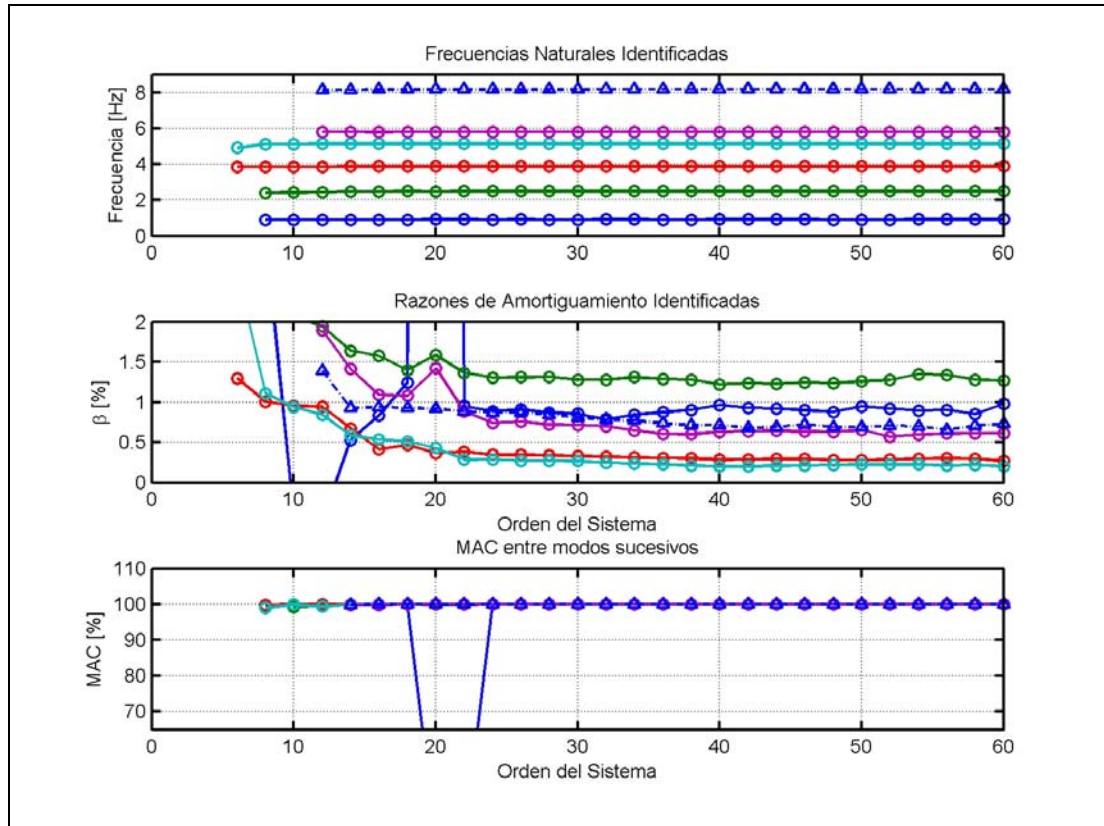


Figura 3. 15. Estabilidad Global para cada parámetro dinámico (frecuencia, amortiguamiento y forma modal (MAC)). Modelo Experimental de 6 niveles. Método del Subespacio Estocástico.

De este gráfico se puede confirmar la estabilidad en frecuencia, amortiguamiento y forma modal, para los primeros 6 modos de la estructura, de donde se puede establecer la siguiente tabla resumen:

Tabla 3. 1. Parámetros dinámicos identificados. Modelo experimental de 6 niveles.

Modo	Frecuencia	Amortiguamiento
	f [Hz]	β [%]
1	0.92	0.90
2	2.49	1.28
3	3.88	0.29
4	5.15	0.22
5	5.82	0.62
6	8.18	0.71

3.8 Comentarios y conclusiones.

A lo largo de este capítulo se han presentado diversos algoritmos que resuelven el problema del Sub-Espacio con el objetivo de obtener los parámetros dinámicos de una estructura.

Sin embargo, el desarrollo, tanto para modelos espacio estado determinístico, estocástico o combinado fue realizado de forma genérica, para poner énfasis en el hecho que este tipo de algoritmos puede ser utilizado para cualquier sistema que pueda ser parametrizado en la forma de un modelo espacio estado de tipo lineal e invariante en el tiempo.

El caso de una estructura es sólo una de las tantas aplicaciones de este tipo de algoritmos.

Una de las desventajas comparativas que presenta este método es el tiempo que toma en realizar la identificación, respecto a métodos en el dominio de la frecuencia, como el método del Espectro de Potencia o EFDD.

Una de las ventajas más importantes de este tipo de modelación es la posibilidad de identificar frecuencias cercanas en una estructura, siendo el diagrama de estabilidad su herramienta más significativa, la que se ve complementada con un análisis de sensibilidad para cada una de las propiedades dinámicas por separado. Por otro lado posee un respaldo matemático importante, haciendo de este método uno de los más robustos usados en la actualidad.

Finalmente, y a modo de resumen se muestra un esquema explicativo del método, para sistemas estocásticos:

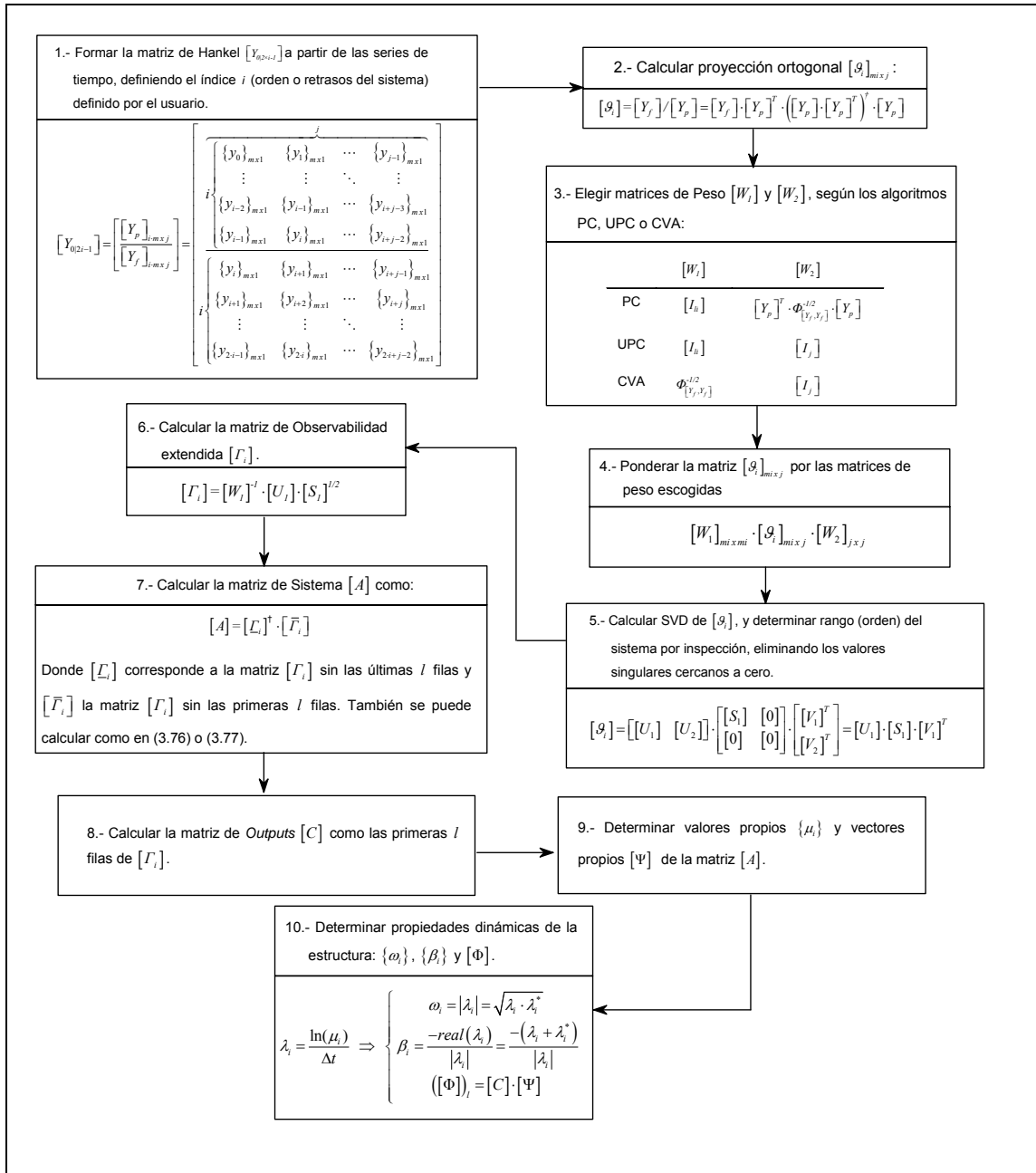


Figura 3. 16. Diagrama de Flujo del método del Sub espacio. Modelo Estocástico.

Capítulo 4.

Método de Espectro de Potencia. Análisis en el dominio de la Frecuencia.

4.1 Introducción

Así como en el capítulo precedente se estudiaron diferentes algoritmos para la obtención de parámetros dinámicos en el dominio del tiempo, este capítulo pretende dar cuenta de dos métodos en el dominio de la frecuencia.

En este caso, los métodos utilizados son de tipo no paramétrico, lo que implica que para la obtención de propiedades dinámicas de una determinada estructura, no es necesario generar un modelo de donde extraer dichas propiedades. En este caso, la respuesta en el tiempo de la estructura se trabaja en el dominio de la frecuencia, obteniéndose las propiedades del sistema de forma directa.

La identificación en el espacio de la frecuencia utiliza diversas herramientas, tales como la transformada de Fourier, el Espectro de Densidad de Potencia (PSD, del inglés *Power Spectrum Density*), Función de Transferencia y Coherencia, Función de Auto-correlación, entre otros.

El objetivo es presentar estas herramientas y su utilidad dentro de la identificación de propiedades dinámicas de estructuras.

Cabe señalar que los métodos presentados en este capítulo asumen que la estructura es excitada por un ruido blanco *Gaussiano*, utilizándose todas sus propiedades para las derivaciones que aquí se presentan. Esta modelación corresponde a sollicitaciones sobre la estructura debido a viento y tráfico vehicular.

Se presentarán dos métodos de identificación, que actualmente son los más utilizados:

- ✓ Método de Frecuencia no Paramétrica o Método del Espectro de Potencia.
- ✓ Descomposición en el dominio de la Frecuencia Mejorado, EFDD (del inglés *Enhanced Frequency Domain Decomposition*).

4.2 Herramientas en el dominio de la frecuencia.

4.2.1 Sistemas de un grado de libertad

Como en todo análisis dentro de la dinámica estructural, la ecuación clásica de equilibrio dinámico para un sistema lineal de 1 grado de libertad corresponde a:

$$m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = f(t) \quad (4.1)$$

Donde:

m = masa del sistema

c = porcentaje de amortiguamiento crítico del sistema

k = rigidez del sistema

$f(t)$ = carga de excitación

$x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ = desplazamiento, velocidad y aceleración del sistema

Si se aplica la transformada de Laplace (que corresponde al caso continuo de la Transformada Z) a la ecuación (4.1) se tiene:

$$(m \cdot p^2 + c \cdot p + k) \cdot X(p) = F(p) \quad (4.2)$$

En este caso $X(p)$ corresponde a la Transformada de Laplace del desplazamiento y $F(p)$ la Transformada de Laplace de la excitación. Redefiniendo la ecuación (4.2) se tiene:

$$X(p) = H(p) \cdot F(p) \quad (4.3)$$

Con

$$H(p) = \frac{\frac{1}{m}}{p^2 + \left(\frac{c}{m}\right) \cdot p + \left(\frac{k}{m}\right)} \quad (4.4)$$

Denominada Función de Transferencia. Al denominador de la expresión (4.4) se le denomina polinomio característico, cuyas raíces son:

$$\lambda, \lambda^* = -\frac{c}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2 \cdot m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (4.5)$$

De esta expresión nace el concepto de amortiguamiento crítico, el que hace nula la raíz de la ecuación (4.5):

$$\frac{c_c}{2 \cdot m} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.6)$$

$$\Rightarrow c_c = 2 \cdot m \cdot \omega_n$$

De donde se define a su vez la razón de amortiguamiento como el cociente entre el amortiguamiento y el amortiguamiento crítico:

$$\beta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2 \cdot m \cdot \omega_n} \quad (4.7)$$

A partir de esta definición es posible definir tres tipos de sistemas: sub-amortiguados ($\beta < 1$, decaimiento y oscilación), de amortiguamiento crítico ($\beta = 1$) o sobre-amortiguados ($\beta > 1$, no tiende a oscilar, decaimiento único), los que generaran diferentes respuestas.

El análisis se realizará para sistemas sub-amortiguados, ya que de la mayoría de las estructuras presentan este tipo de comportamiento.

Las raíces del polinomio característico (para un sistema sub-amortiguado) pueden reescribirse como:

$$\lambda, \lambda^* = -\beta \cdot \omega_n \pm j \cdot \omega_d \quad (4.8)$$

Con $\omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \beta^2}$.

De la ecuación (4.4) y (4.5) es posible reescribir la función de transferencia en función de sus raíces como:

$$H(p) = \frac{1}{m} \frac{1}{(p - \lambda)(p - \lambda^*)} \quad (4.9)$$

A partir de un desarrollo en fracciones parciales, la ecuación (4.9) puede plantearse como:

$$H(p) = \frac{1}{j \cdot 2 \cdot m \cdot \omega_d} \cdot \left[\frac{1}{(p - \lambda)} - \frac{1}{(p - \lambda^*)} \right] \quad (4.10)$$

Reemplazando el parámetro p por $j\omega$ se pasa del dominio de Laplace al dominio de las frecuencias.

Aplicando este concepto y la solución del polinomio característico se tiene:

$$H(j \cdot \omega) = \frac{1}{k \cdot [(1 - \gamma^2) + j \cdot 2 \cdot \beta \cdot \gamma]} \quad (4.11)$$

Con $\gamma = \frac{\omega}{\omega_n}$.

Y para la ecuación (4.3)

$$X(j \cdot \omega) = H(j \cdot \omega) \cdot F(j \cdot \omega) \quad (4.12)$$

$$H(j \cdot \omega) = \frac{F(j \cdot \omega)}{X(j \cdot \omega)} \quad (4.13)$$

Que corresponde a la función de transferencia (fuerza-desplazamiento) para un sistema de un grado de libertad. En el caso de tener como excitación un impulso unitario del tipo:

$$f(t) = f_0 \cdot \delta(t - t_0) \quad (4.14)$$

La transformada de Fourier del impulso se define como:

$$F(j \cdot \omega) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (f_0 \cdot \delta(t - t_0) \cdot e^{-j\omega t}) dt = \frac{f_0 \cdot e^{-j\omega t_0}}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \quad (4.15)$$

Si se considera $t_0 = 0$ se tiene que:

$$F(j \cdot \omega) = \frac{f_0}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \quad (4.16)$$

De la ecuación (4.16) se desprende que la Transformada de Fourier de un impulso corresponde a una constante en el dominio de la frecuencia.

Luego, la respuesta en frecuencia, para una excitación impulsiva puede expresarse como:

$$X(j \cdot \omega) = H(j \cdot \omega) \cdot \frac{f_0 \cdot e^{-j\omega t_0}}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \quad (4.17)$$

Aplicando la transformada inversa, y algunos pasos algebraicos, es posible recuperar la respuesta del sistema para este tipo de excitación como:

$$x(t) = \frac{f_0}{m \cdot \omega_d} \cdot \text{sen}(\omega_d \cdot (t - t_0)) \cdot U(t - t_0) \cdot e^{-\beta \cdot \omega_n \cdot (t - t_0)} \quad (4.18)$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{f_0}{m \cdot \omega_d} \cdot \text{sen}(\omega_d \cdot (t - t_0)) \cdot e^{-\beta \cdot \omega_n \cdot (t - t_0)} & \text{si } t > t_0 \\ 0 & t \leq t_0 \end{cases} \quad (4.19)$$

El en caso particular de un impulso unitario y que $t_0 = 0$ se tiene la respuesta como

$$x(t) = h(t) = \begin{cases} \frac{1}{m \cdot \omega_d} \cdot \text{sen}(\omega_d \cdot t) \cdot e^{-\beta \cdot \omega_n \cdot t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

Luego es posible escribir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-j \cdot \omega t} dt = H(j \cdot \omega) \quad (4.21)$$

Según el Teorema de la Convención, la multiplicación en Frecuencia es convolución en el Tiempo.

De esta forma se concluye que la respuesta debido a una excitación de cualquier tipo sobre un sistema de 1 grado de libertad puede ser expresada como la convolución entre la excitación y la función de impulso unitario. Esto se resume a través de la integral de Duhamel como:

$$x(t) = \left(\frac{1}{m \cdot \omega_d} \right) \cdot \int_{-\infty}^t \left(f(\tau) \cdot e^{-\beta \cdot \omega_n \cdot (t-\tau)} \cdot \text{sen}(\omega_d \cdot (t-\tau)) \right) d\tau \quad (4.22)$$

$$x(t) = \int f(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau \quad (4.23)$$

Hasta ahora se ha realizado un tratamiento analítico en el dominio de las frecuencias para obtener la respuesta de un sistema de 1 grado de libertad.

Sin embargo, es necesario señalar que existen cierto tipo de excitaciones que deben tratarse, más que desde un punto de vista analítico, desde un punto de vista estadístico.

Un ejemplo de este tipo de sollicitaciones corresponde a las cargas ambientales, de viento o sismo, las que no son exactamente iguales si se realizan diferentes mediciones. Sin embargo, poseen propiedades similares que pueden tratarse de forma estadística.

En general, un registro (muestra) de la excitación no representa la totalidad de los casos posibles o la variabilidad estadística de la excitación.

De esta forma es posible definir las excitaciones de tipo aleatorio como una función de densidad de probabilidad. Un registro corresponderá entonces a una muestra que representa uno de los infinitos casos posibles.

Esto confirma el hecho de que no es posible determinar de forma explícita la respuesta bajo este tipo de sollicitaciones.

Sin embargo, es posible obtener la respuesta en términos estadísticos. Para esto, se asumirá un sistema de 1 grado de libertad, lineal, excitado por una sollicitación aleatoria estacionaria. La idea es poder establecer la relación entre el *input* y el *output* de forma estadística.

Suponiendo que una muestra caracterizada por una excitación $f_k(t)$, la respuesta se obtiene de (4.23) como:

$$x_k(t) = \left(\int f_k(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \right) \quad (4.24)$$

Uno de las herramientas importantes en el desarrollo de los métodos en el espacio de las frecuencias corresponde a la Función de Auto-correlación $R_x(\tau)$ y se define como la esperanza de la multiplicación de la respuesta en un tiempo t y la respuesta en un desfase $t + \tau$.

Asumiendo que el sistema es lineal, la respuesta es de tipo ergódica y la excitación es de tipo estacionaria, la Función de Auto-correlación de la respuesta de una muestra k se obtiene como:

$$R_x(\tau) = E[x_k(t) \cdot x_k(t + \tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \cdot \int_0^T (x_k(t) \cdot x_k(t + \tau)) dt \right) \quad (4.25)$$

Otra herramienta importante dentro de este desarrollo corresponde a la función de Densidad de Potencia (o espectro de densidad de potencia), que corresponde a la transformada de Fourier de la función de auto correlación y se define como:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (R_x(\tau) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \tau} d\tau) \quad (4.26)$$

Esta herramienta matemática permite entre otras cosas la identificación de frecuencias y amortiguamientos del sistema, lo que se verá más adelante.

Luego de un desarrollo matemático y estadístico entre las definiciones (4.25) y (4.26) es posible llegar a la siguiente expresión, que relaciona los espectros de potencia de la excitación y de respuesta, mediante la función de transferencia como:

$$S_x(\omega) = |H(j \cdot \omega)|^2 \cdot S_f(\omega) \quad (4.27)$$

Del mismo modo, es posible definir una función de correlación cruzada, entre excitación y respuesta (o bien entre dos respuestas diferentes) como:

$$R_{xf}(\tau) = E[x_k(t) \cdot f_k(t + \tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x_k(t) \cdot f_k(t + \tau) dt \quad (4.28)$$

Y la transformada de Fourier de la función de correlación cruzada se define como:

$$S_{xf}(j \cdot \omega) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (R_{xf}(\tau) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \tau} d\tau) \quad (4.29)$$

Que corresponde al espectro de potencia cruzado.

La relación que se establece entre los espectros de potencia por medio de la función de transferencia, análogo a (4.27):

$$S_{xf}(j \cdot \omega) = H^*(j \cdot \omega) \cdot S_f(\omega) \quad (4.30)$$

Debido a que la serie de tiempo es real, el espectro de potencia será par y por ende se cumplirá la propiedad de simetría siguiente:

$$S_{xf}(j \cdot \omega) = S_{xf}^*(j \cdot \omega) \quad (4.31)$$

Utilizando (4.31) se tendrá entonces:

$$S_{xf}(j \cdot \omega) = H(j \cdot \omega) \cdot S_f(\omega) \quad (4.32)$$

De esta forma, el espectro de potencia cruzado se relaciona con el espectro de potencia de la excitación por medio de la función de transferencia.

Luego que se ha deducido estas herramientas para una sollicitación de tipo estadístico, es posible deducir estas mismas expresiones, para una sollicitación de tipo ruido blanco.

Esta derivación es útil, ya que, como se mencionó anteriormente, este tipo de modelación, para la excitación de tipo ambiental es necesaria para obtener las propiedades dinámicas de un sistema.

Un ruido blanco puede definirse como una excitación de tipo estocástica, es decir, que la señal no se encuentra correlacionada en el tiempo (entre cualquier par de puntos componentes de la serie de tiempo) o bien que su función de auto correlación es una delta Dirac centrado en cero.

Por definición, las componentes de ruido blanco sólo se correlacionan consigo mismas, siendo el valor de energía de la función de auto-correlación igual al valor cuadrático esperado. En este caso se tiene:

$$R_f(\tau) = f_0 \cdot \delta(\tau) \quad (4.33)$$

Según la definición de ruido blanco, el espectro de densidad de potencia de este tipo de excitación se definirá como la transformada de Fourier de la función de auto-correlación

De las ecuaciones (4.27) y (4.32) se tendrá para el caso de ruido blanco:

$$S_x(\omega) = |H(j \cdot \omega)|^2 \cdot \frac{f_0}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned}
S_f(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int R_f(\tau) \cdot e^{-j \cdot \omega \tau} d\tau \\
S_f(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int f_0 \cdot \delta(\tau) \cdot e^{-j \cdot \omega \tau} d\tau \\
\Rightarrow S_f(\omega) &= \frac{f_0}{\sqrt{2 \cdot \pi}}
\end{aligned} \tag{4.35}$$

$$S_{xf}(\omega) = H(j \cdot \omega) \cdot \frac{f_0}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \tag{4.36}$$

De la definición de función de transferencia (4.11) es posible obtener de forma más explícita la expresión (4.34) como:

$$S_x(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot k^2} \cdot \frac{1}{\left((1 - \gamma^2)^2 + (2\beta\gamma)^2 \right)} = \frac{f_0}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot m^2} \cdot \frac{1}{\left((\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2 \cdot \beta \cdot \omega_n \cdot \omega)^2 \right)}$$

(4.37)

La ecuación (4.34) dice que el espectro de densidad de potencia corresponde al valor absoluto cuadrático de la función de transferencia, de un sistema de 1 grado de libertad, ponderado por un factor $f_0 / \sqrt{2 \cdot \pi}$.

Como se aprecia de la ecuación (4.35), el espectro de densidad de potencia de un ruido blanco corresponde a una constante en frecuencia. Esto se puede interpretar diciendo que el ruido blanco es una señal que posee la misma energía en todas sus frecuencias.

Cabe señalar que en términos prácticos es poco probable tener una señal con un espectro de densidad de potencia constante, pero existen muchos fenómenos que poseen baja correlación, y por tanto se asumen con características de ruido blanco.

Como se sabe, la función de transferencia entrega información relevante acerca de las frecuencias de resonancia de la estructura, por lo que su valor cuadrático y ponderado por un factor también lo hará. Este concepto es muy importante, ya que permite, entre otras cosas, la identificación de frecuencias naturales.

Dentro del análisis estadístico, la promediación es una herramienta importante en la obtención de la función de transferencia, y por ende, del espectro de densidad de potencia.

Esto debido a que, como se esta modelando una constante infinita en términos de frecuencia a partir de algo finito, representado a partir de la transformada de Fourier de una serie de tiempo con características de ruido blanco, pero acotada en términos de frecuencia, se genera una variabilidad, que en caso de tenerse sólo una muestra corresponderá al 100%.

Un punto importante a analizar dentro de este tipo de herramientas matemáticas, corresponde a la estimación de la función de transferencia de forma correcta.

Como primera aproximación, se tendría la ecuación (4.13) o bien si se utilizan diversos tramos de registro es posible escribir:

$$H(j \cdot \omega) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{p=1}^n \left(\frac{F(j \cdot \omega)}{X(j \cdot \omega)} \right)_p \quad (4.38)$$

Donde n corresponde al total de segmentos utilizados para calcular la función de transferencia. Este tipo de estimación no es el correcto ya que no se toma en cuenta el error asociado al ruido no correlacionado de la respuesta del sistema.

Sin embargo, es posible deducir un estimador más correcto, mediante la minimización del error estadístico de la forma siguiente:

Asumiendo que sólo la respuesta en frecuencia $\hat{X}(j\omega)$ de la estructura tiene asociada una perturbación $\eta(j\omega)$ asociada (y no la excitación $\hat{F}(j\omega)$), es posible escribir:

$$\hat{F}(j\omega) = F(j\omega) \quad (4.39)$$

$$X(j\omega) = \hat{X}(j\omega) + \eta(j\omega) \quad (4.40)$$

Donde $\eta(j\omega)$ representa la perturbación o ruido no correlacionado del sistema en el espacio de las frecuencias. $\hat{X}(j\omega)$ representa el valor estimado de la respuesta en frecuencia, mientras que $X(j\omega)$ corresponde a la respuesta real del sistema.

En términos de función de transferencia es posible expresar:

$$\begin{aligned} X(j\omega) - \eta(j\omega) &= H(j\omega) \cdot F(j\omega) \\ \Rightarrow \eta(j\omega) &= X(j\omega) - H(j\omega) \cdot F(j\omega) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Luego, es posible calcular:

$$\sum_{k=1}^N \left[(\eta(j\omega))_k^* \cdot (\eta(j\omega))_k \right] = \sum_{k=1}^N (X(j\omega) - H(j\omega) \cdot F(j\omega))_k^* \cdot (X(j\omega) - H(j\omega) \cdot F(j\omega))_k \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^N \left[(\eta(j\omega))_k^* \cdot (\eta(j\omega))_k \right] &= \left[\sum_{k=1}^N \left((X(j\omega))^* \cdot X(j\omega) \right)_k \right] - \left[H(j\omega) \cdot \sum_{k=1}^N \left((X(j\omega))^* \cdot F(j\omega) \right)_k \right] - \\
&\left[(H(j\omega))^* \cdot \sum_{k=1}^N \left((F(j\omega))^* \cdot X(j\omega) \right)_k \right] + \left[(H(j\omega))^* \cdot H(j\omega) \cdot \sum_{k=1}^N \left((F(j\omega))^* \cdot F(j\omega) \right)_k \right]
\end{aligned}
\tag{4.43}$$

Derivándola (4.43) con respecto a $H(j\omega)$ para minimizar el error, es posible encontrar el mejor estimador para la función de transferencia como:

$$\frac{\partial \sum_{k=1}^N \left[(\eta(j\omega))_k^* \cdot (\eta(j\omega))_k \right]}{\partial H(j\omega)} = 0
\tag{4.44}$$

$$\Rightarrow \hat{H}(j\omega) = \frac{\sum_{k=1}^N \left[(F(j\omega))^* \cdot X(j\omega) \right]}{\sum_{k=1}^N \left[(F(j\omega))^* \cdot F(j\omega) \right]} = \frac{\sum_{k=1}^N [S_{xf}(j\omega)]}{\sum_{k=1}^N [S_f(\omega)]} = \frac{\hat{S}_{xf}(j\omega)}{\hat{S}_f(\omega)}
\tag{4.45}$$

$$\hat{H}(j\omega) = \frac{\hat{S}_{xf}(j\omega)}{\hat{S}_f(\omega)}
\tag{4.46}$$

Como se vio anteriormente, la ventaja del estimador (4.46) es que minimiza el error no correlacionado del sistema, lo que no ocurre por una estimación directa, como la ecuación (4.13).

Reescribiendo la ecuación (4.43) en términos de espectros de densidad de potencia se tiene:

$$S_{\eta}(j\omega) = S_x(\omega) - H(j\omega) \cdot S_{f_x}(j\omega) - H(j\omega)^* \cdot S_{f_x}(j\omega) + H(j\omega)^* \cdot H(j\omega) \cdot S_f(\omega) \quad (4.47)$$

Reagrupando términos y ordenando es posible reescribir (4.47) como:

$$S_{\eta}(j\omega) = S_x(\omega) \cdot \left(1 - \frac{(S_{f_x}(j\omega))^2}{S_f(\omega) \cdot S_x(\omega)} \right) \quad (4.48)$$

El desarrollo de la ecuación (4.47) para obtener la ecuación (4.48) puede consultarse en *[HERNÁNDEZ, 2009]*.

Se define la coherencia, a partir de (4.48) como:

$$\gamma^2 = \frac{(S_{f_x}(j\omega))^2}{S_f(\omega) \cdot S_x(\omega)} \quad (4.49)$$

Luego:

$$S_{\eta}(j\omega) = S_x(\omega) \cdot (1 - \gamma^2) \quad (4.50)$$

La Coherencia corresponde a un coeficiente de correlación, el que varía entre 0 y 1.

De la expresión (4.50) es posible deducir que cuando $\gamma^2 = 1$, implica que no existe dentro de la respuesta del sistema perturbaciones no correlacionadas.

En caso que $\gamma^2 = 0$, lo que implica $S_{\eta}(j\omega) = S_x(\omega)$ y por ende toda la respuesta corresponde a una señal no correlacionada en el tiempo.

Hasta ahora se han visto funciones de transferencia y de correlación solo para una entrada de tipo fuerza de excitación y una salida de tipo desplazamiento. Sin embargo, en la práctica lo más común es obtener salidas de tipo velocidad o aceleración.

Para este caso, es posible obtener la primera y segunda derivada de la respuesta en frecuencia de un sistema de un grado de libertad, ecuación (4.12), como:

$$\dot{X}(j\omega) = H_v(j\omega) \cdot F(j\omega) \quad (4.51)$$

$$\ddot{X}(j\omega) = H_a(j\omega) \cdot F(j\omega) \quad (4.52)$$

Donde:

$$H_v(j\omega) = j\omega \cdot H(j\omega) \quad (4.53)$$

$$H_a(j\omega) = -\omega^2 \cdot H(j\omega) \quad (4.54)$$

De esta forma es posible obtener las siguientes relaciones para los espectros de potencia como:

$$\begin{aligned} S_v(\omega) &= |H_v(j\omega)|^2 \cdot S_f(\omega) = \omega^2 |H(j\omega)|^2 \cdot S_f(\omega) \\ S_a(\omega) &= |H_a(j\omega)|^2 \cdot S_f(\omega) = \omega^4 |H(j\omega)|^2 \cdot S_f(\omega) \end{aligned} \quad (4.55)$$

Y para los espectros de potencia cruzados como:

$$\begin{aligned} S_{vf}(\omega) &= H_v^*(j\omega) \cdot S_f(\omega) = -j\omega \cdot H^*(j\omega) \cdot S_f(\omega) \\ S_{af}(\omega) &= H_a^*(j\omega) \cdot S_f(\omega) = -\omega^2 \cdot H^*(j\omega) \cdot S_f(\omega) \end{aligned} \quad (4.56)$$

Si bien es posible deducir expresiones para las funciones de transferencia de distintos tipos de pares entrada-salida (desplazamiento, velocidad, aceleración o fuerza), se debe tener en cuenta que en la práctica, las fuentes de excitación corresponden a una

combinación de diversos tipos de cargas de tipo aleatorio, las cuales se transmiten hacia la estructura por medio de diferentes tipos de funciones de transferencia, lo que indica que no es posible caracterizar la respuesta de la estructura frente a cargas de tipo ambiental con solo un tipo de función de transferencia.

4.2.2 Sistemas de múltiples grados de libertad.

Las herramientas en el dominio de las frecuencias para un sistema lineal de múltiples grados de libertad (n) tienen la misma base teórica que el desarrollo de sistemas de 1 grado de libertad.

La diferencia más notable es la construcción de dichas herramientas en un contexto matricial.

Consideremos un sistema de n grados de libertad, cada uno de los cuales con un vector de respuesta (dimensión $k \times 1$), excitación (dimensión $k \times 1$) y función de transferencia (dimensión $k \times k$) en el espacio de la frecuencia.

Desde esta perspectiva es posible definir en términos matriciales la ecuación (4.12) como:

$$\{X(j \cdot \omega)\}_{k \cdot n \times 1} = [H(j \cdot \omega)]_{k \cdot n \times k \cdot n} \cdot \{F(j \cdot \omega)\}_{k \cdot n \times 1} \quad (4.57)$$

Con:

$$\{X(j \cdot \omega)\}_{kn \times 1} = \begin{Bmatrix} \{X_1(j \cdot \omega)\}_{kx1} \\ \{X_2(j \cdot \omega)\}_{kx1} \\ \vdots \\ \{X_n(j \cdot \omega)\}_{kx1} \end{Bmatrix}$$

$$\{F(j \cdot \omega)\}_{kn \times 1} = \begin{Bmatrix} \{F_1(j \cdot \omega)\}_{kx1} \\ \{F_2(j \cdot \omega)\}_{kx1} \\ \vdots \\ \{F_n(j \cdot \omega)\}_{kx1} \end{Bmatrix}$$

$$[H(j \cdot \omega)]_{kn \times kn} = \begin{bmatrix} \{H_{11}(j \cdot \omega)\}_{kxk} & \{H_{12}(j \cdot \omega)\}_{kxk} & \cdots & \{H_{1n}(j \cdot \omega)\}_{kxk} \\ \{H_{21}(j \cdot \omega)\}_{kxk} & \{H_{22}(j \cdot \omega)\}_{kxk} & \cdots & \{H_{2n}(j \cdot \omega)\}_{kxk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{H_{n1}(j \cdot \omega)\}_{kxk} & \{H_{n2}(j \cdot \omega)\}_{kxk} & \cdots & \{H_{nn}(j \cdot \omega)\}_{kxk} \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

De esta forma, la expresión (4.57) puede reescribirse como:

$$\{X_l(j\omega)\}_{kx1} = \sum_{i=1}^n (\{H_{li}(j\omega)\}_{kxk} \cdot \{F_i(j\omega)\}_{kx1}) \quad \forall l=1\dots n \quad (4.59)$$

La función de transferencia para múltiples grados de libertad se expresará de forma similar a lo desarrollado en la ecuación (4.45), minimizando el error de la respuesta como:

$$[\hat{H}(j\omega)] = [\hat{S}_{xf}(j\omega)] \cdot [\hat{S}_f(\omega)]^{-1} \quad (4.60)$$

Con:

$$\begin{aligned}
\left[\hat{S}_{xf}(j\omega) \right] &= \begin{bmatrix} \left\{ \hat{S}_{x_1 f_1}(j\omega) \right\} & \left\{ \hat{S}_{x_1 f_2}(j\omega) \right\} & \left\{ \hat{S}_{x_1 f_3}(j\omega) \right\} & \dots & \left\{ \hat{S}_{x_1 f_n}(j\omega) \right\} \\ \left\{ \hat{S}_{x_2 f_1}(j\omega) \right\} & \left\{ \hat{S}_{x_2 f_2}(j\omega) \right\} & \left\{ \hat{S}_{x_2 f_3}(j\omega) \right\} & \dots & \left\{ \hat{S}_{x_2 f_n}(j\omega) \right\} \\ \left\{ \hat{S}_{x_3 f_1}(j\omega) \right\} & \left\{ \hat{S}_{x_3 f_2}(j\omega) \right\} & \left\{ \hat{S}_{x_3 f_3}(j\omega) \right\} & \dots & \left\{ \hat{S}_{x_3 f_n}(j\omega) \right\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \left\{ \hat{S}_{x_n f_1}(j\omega) \right\} & \left\{ \hat{S}_{x_n f_2}(j\omega) \right\} & \left\{ \hat{S}_{x_n f_3}(j\omega) \right\} & \dots & \left\{ \hat{S}_{x_n f_n}(j\omega) \right\} \end{bmatrix} \\
&\quad (4.61)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[\hat{S}_f(j\omega) \right] &= \begin{bmatrix} \left\{ \hat{S}_{f_1 f_1}(j\omega) \right\} & \left\{ \hat{S}_{f_1 f_2}(j\omega) \right\} & \left\{ \hat{S}_{f_1 f_3}(j\omega) \right\} & \dots & \left\{ \hat{S}_{f_1 f_n}(j\omega) \right\} \\ \left\{ \hat{S}_{f_2 f_1}(j\omega) \right\} & \left\{ \hat{S}_{f_2 f_2}(j\omega) \right\} & \left\{ \hat{S}_{f_2 f_3}(j\omega) \right\} & \dots & \left\{ \hat{S}_{f_2 f_n}(j\omega) \right\} \\ \left\{ \hat{S}_{f_3 f_1}(j\omega) \right\} & \left\{ \hat{S}_{f_3 f_2}(j\omega) \right\} & \left\{ \hat{S}_{f_3 f_3}(j\omega) \right\} & \dots & \left\{ \hat{S}_{f_3 f_n}(j\omega) \right\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \left\{ \hat{S}_{f_n f_1}(j\omega) \right\} & \left\{ \hat{S}_{f_n f_2}(j\omega) \right\} & \left\{ \hat{S}_{f_n f_3}(j\omega) \right\} & \dots & \left\{ \hat{S}_{f_n f_n}(j\omega) \right\} \end{bmatrix} \\
&\quad (4.62)
\end{aligned}$$

Donde:

$\left\{ \hat{S}_{f_k f_l}(j\omega) \right\}$ = espectro de densidad de potencia cruzado entre *input* k e *input* l .

$\left\{ \hat{S}_{x_k f_l}(j\omega) \right\}$ = espectro de densidad de potencia cruzado entre *output* k e *input* l .

La expresión anterior estará condicionada por el hecho que la matriz $\left[\hat{S}_f(\omega) \right]$ sea no-singular.

En términos prácticos la matriz de transferencia se construye excitando uno a uno los grados de libertad y observando la respuesta en los restantes. Luego la relación espectral entregará cada término de la matriz de transferencia.

Esta matriz, al igual que la ecuación (4.10) es posible descomponerla en fracciones parciales, en función de sus formas modales y polos, lo que indica que es posible obtener la respuesta modal de la estructura en función de estas propiedades [HEYLEN, 1998].

De esta forma, la estimación de la matriz de transferencia implica la identificación directa de las propiedades dinámicas de la estructura, que se encuentran asociadas a los polos (frecuencia y amortiguamiento) y formas modales (modos de vibrar de la estructura).

A partir del desarrollo en [HERNANDEZ, 2009] es posible deducir la expresión para espectro de potencia y espectro de potencia cruzado entre respuestas como:

$$\begin{aligned} \{S_{x_n x_m}(j\omega)\} &= \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^n \{H_{ni}^*(j\omega)\} \cdot \{H_{ml}(j\omega)\} \cdot \{S_{f_i f_i}(j\omega)\} \\ \{S_{x_n}(j\omega)\} &= \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \{H_{ni}^*(j\omega)\} \cdot \{H_{nl}(j\omega)\} \cdot \{S_{f_i f_i}(j\omega)\} \end{aligned} \quad (4.63)$$

En caso de tener frecuencias bien separadas, las expresiones (4.63) pueden simplificarse como:

$$\begin{aligned} \{S_{x_n x_m}(j\omega)\} &= \sum_{i=1}^n \{H_{ni}^*(j\omega)\} \cdot \{H_{mi}(j\omega)\} \cdot \{S_{f_i}(j\omega)\} \\ \{S_{x_n}(j\omega)\} &= \sum_{i=1}^n |\{H_{ni}(j\omega)\}|^2 \cdot \{S_{f_i f_i}(j\omega)\} \end{aligned} \quad (4.64)$$

Para el caso de una excitación $(f_i(t))$ y la respuesta del grado de libertad n $(x_n(t))$, e; espectro de potencia se obtiene como:

$$\{S_{f_i x_n}(j\omega)\} = \sum_{k=1}^n \{H_{nk}(j\omega)\} \cdot \{S_{f_i f_k}(j\omega)\} \quad (4.65)$$

Y para frecuencias bien separadas (entradas mutuamente no correlacionadas):

$$\{S_{f_i x_n}(j\omega)\} = \{H_{ni}(j\omega)\} \cdot \{S_{f_i}(j\omega)\} \quad (4.66)$$

Otro indicador importante corresponde a la coherencia, al igual que en el caso de un grado de libertad. La principal diferencia radica en que para el caso de 1 GDL sólo se contempla una entrada y una salida.

Esta diferencia es sustancial en caso de tener múltiples entradas y múltiples salidas, ya que la respuesta de un grado de libertad se encuentra afectada por todas las entradas.

Por lo tanto, la respuesta asociada a las entradas no contempladas en el cálculo de la coherencia para una entrada y una salida, se interpretaría como ruido.

Por esta razón se define la coherencia múltiple como:

$$\gamma_{x_n, f}^2(\omega) = \frac{\sum_{k=1}^n \{H_{nk}(j\omega)\} \cdot \{S_{x_n p_k}(j\omega)\}}{\{S_{x_n}(\omega)\}} \quad (4.67)$$

4.3 Razón de amortiguamiento (β).

La razón porcentaje de amortiguamiento crítico más utilizado se deriva del artículo de [KAWASUMI, 1965], que se dedujo a partir de la función de transferencia fuerza-desplazamiento.

Sin embargo, es posible demostrar que esta relación se cumple de igual forma, en el caso de velocidad y aceleración [HERNANDEZ, 2009].

En el caso de una función de transferencia fuerza-desplazamiento se tiene la ecuación (4.37), la cual se deriva para obtener el valor máximo, de donde se deduce que este valor es:

$$\omega_r = \sqrt{1 - 2\beta^2} \cdot \omega_n \quad (4.68)$$

Evaluando esta expresión en la ecuación (4.37) se obtiene el valor del espectro de potencia máximo. Por otra parte se define λ como:

$$\lambda = \frac{S_x(\omega_r)}{S_x(\omega)} \quad (4.69)$$

Que de forma explícita tiene la siguiente forma:

$$\lambda = \frac{\left[(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2 \cdot \beta \cdot \omega_n \cdot \omega)^2 \right]}{4 \cdot \omega_n^4 \cdot \beta^2 \cdot (1 - \beta^2)} \quad (4.70)$$

De (4.70) se obtienen las soluciones para ω^2 (ω_1^2 , ω_2^2) en función de λ , de donde se puede obtener la siguiente relación:

$$\frac{(\omega_2^2 - \omega_1^2)}{(\omega_2^2 + \omega_1^2)} = \frac{2 \cdot \beta \cdot \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - 2 \cdot \beta^2} \cdot \sqrt{\lambda - 1} \quad (4.71)$$

Se define el parámetro χ como:

$$\chi = \frac{2 \cdot \beta \cdot \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - 2 \cdot \beta^2} = \frac{(\omega_2^2 - \omega_1^2)}{(\omega_2^2 + \omega_1^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda - 1}} \quad (4.72)$$

De donde se despeja la razón de amortiguamiento en función del parámetro χ :

$$\beta^2 = 0.5 \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\chi^2 - 1}} \right] \quad (4.73)$$

Expandiendo en serie de Taylor la expresión (4.73) se tendrá una expresión simplificada, la cual es válida para amortiguamientos de hasta un 25% aproximadamente:

$$\beta \approx \frac{\chi}{2} \cdot \left[1 - \frac{3}{8} \cdot \chi^2 \right] \quad (4.74)$$

Un punto importante es que esta expresión se derivó para un valor arbitrario de λ mayor a 1. Sin embargo, en la práctica se utiliza en ancho de banda de media potencia ($\lambda = 2$).

4.3.1 Efecto del incremento de la razón de amortiguamiento producto del fenómeno de *leakage*.

En la práctica, el método más utilizado para la estimación del espectro de potencia corresponde al método de Welch, el que utiliza pequeñas ventanas de tiempo^{4.1}, a las cuales se les calcula la función de auto-correlación, luego de lo cual se calcula la Transformada de Fourier y finalmente el espectro de potencia.

Este proceso se repite a lo largo de toda la serie de tiempo, haciendo que la ventana de multiplicación sea móvil, obteniéndose múltiples espectros de potencia, los que finalmente son promediados de forma aritmética para la obtención del espectro de potencia total del sistema.

El efecto de *leakage* se produce al tomar ventanas finitas de tiempo, lo que produce que la energía espectral se disperse hacia otras frecuencias debido a que la Transformada de Fourier de la señal es convolucionada con la ventana de muestreo.

Para disminuir este efecto se utilizan las ventanas de muestreo que cumplen la función de minimizar la dispersión en los lóbulos laterales, lo que tiene como contra una mayor dispersión local sobre el lóbulo central de la transformada de Fourier de la ventana.

Esta dispersión genera un aumento aparente sobre el ancho de banda que se relaciona directamente con un aumento en el amortiguamiento, calculado a partir de las expresiones (4.73) o (4.74).

^{4.1} Correspondientes a la multiplicación de todo el registro por ventanas muestreo (Hanning, Hamming, Chebyshev, Flat Top, entre otras) que disminuyen el efecto de *leakage*.

En [HERNANDEZ, 2009] puede encontrarse un procedimiento empírico, mientras que en [TANAKA, 1969] se muestra un procedimiento analítico que corrigen el efecto de *leakage*.

A partir de este procedimiento es posible obtener curvas que relacionan el amortiguamiento aparente, amortiguamiento real y el número de ciclos (multiplicación del tamaño de la ventana utilizada por la frecuencia de resonancia de la estructura).

A continuación se muestran estas relaciones, que mejoran la estimación del amortiguamiento.

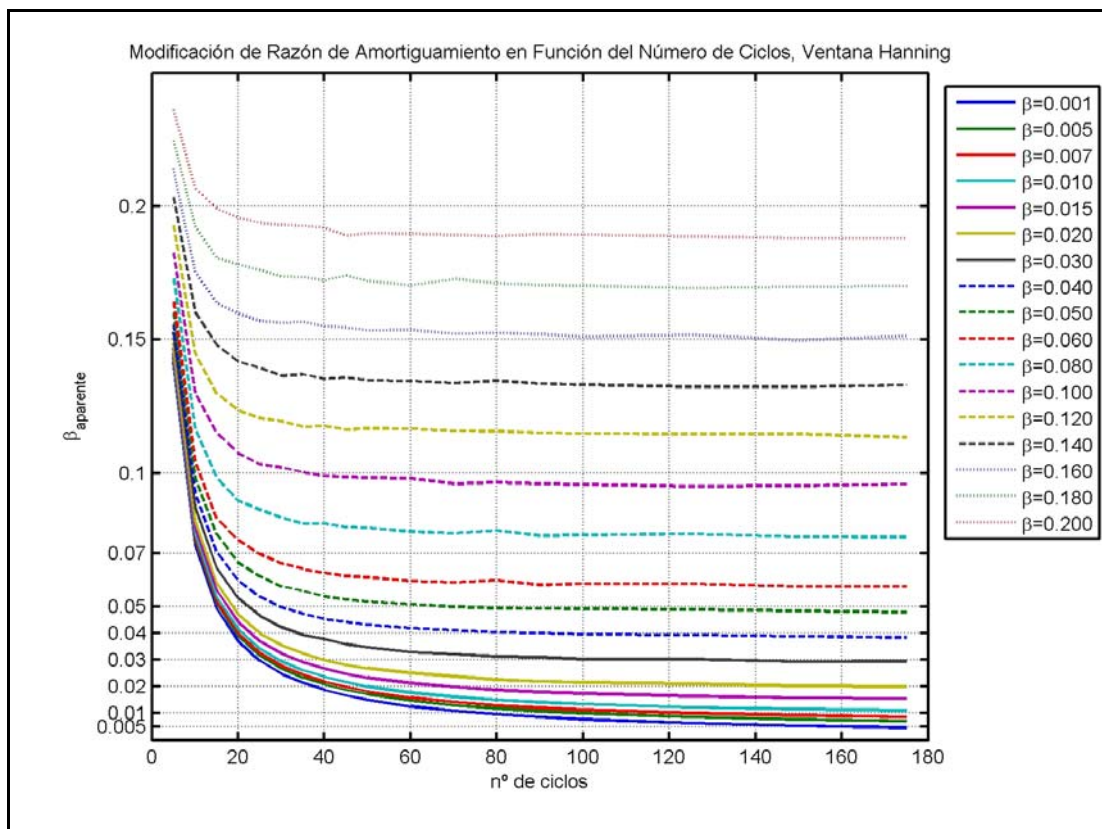


Figura 4. 1. Amortiguamiento aparente en función del número de ciclos, para diferentes razones de amortiguamiento corregido. Ventana Hanning, procedimiento empírico.

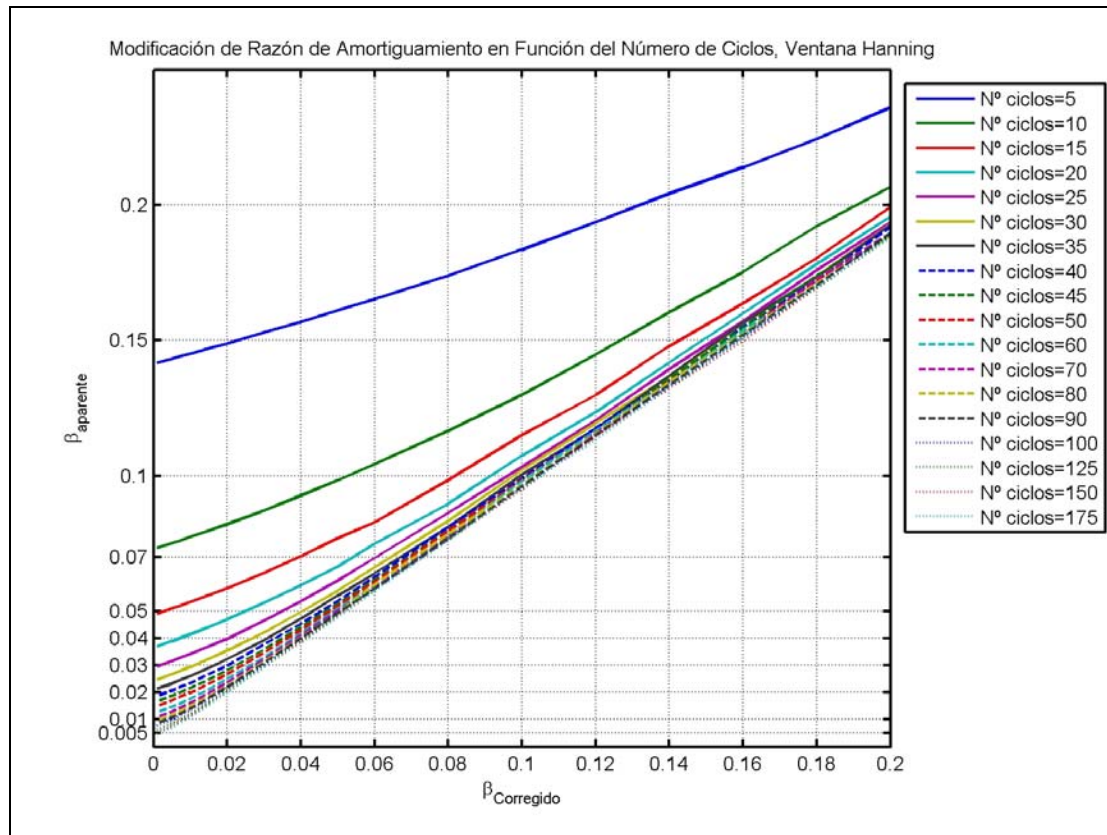


Figura 4. 2. Amortiguamiento aparente en función del amortiguamiento corregido, para diferentes números de ciclos. Ventana Hanning, procedimiento empírico.

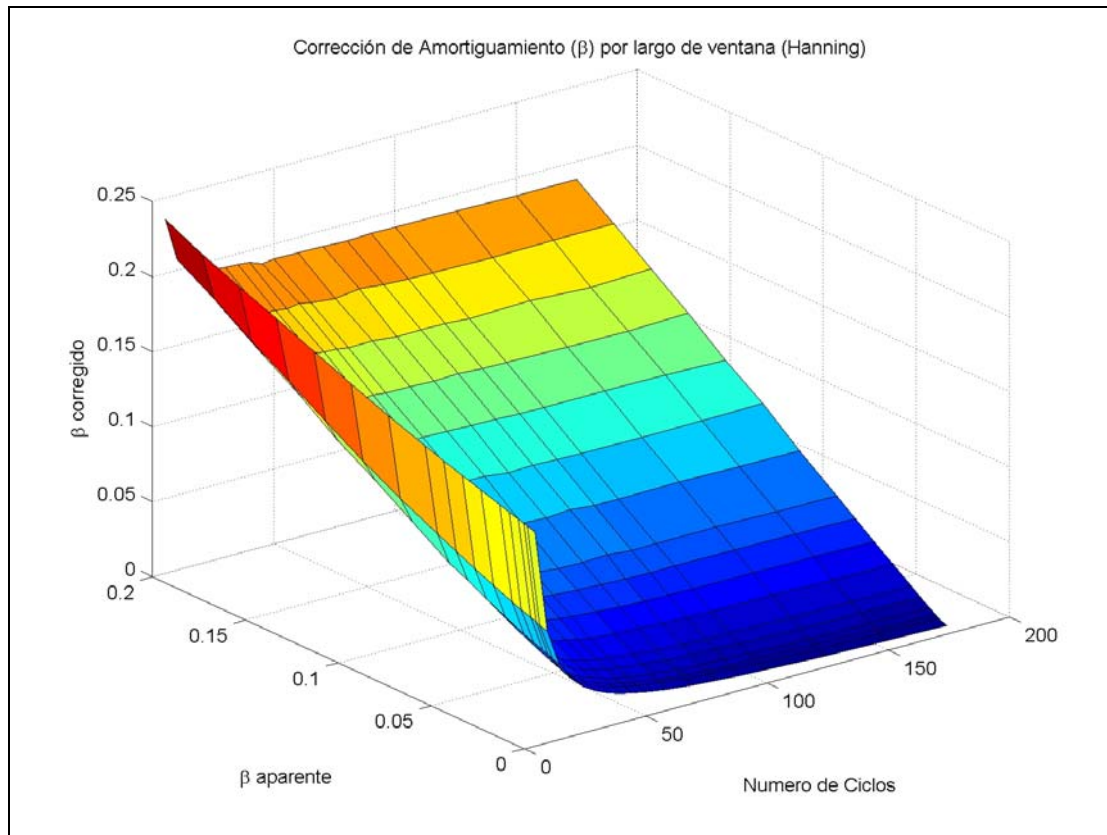


Figura 4. 3. Superficie de corrección por *leakage*. Amortiguamiento aparente, amortiguamiento corregido y número de ciclos. Ventana Hanning, procedimiento empírico.

De las Figura 4. 1, Figura 4. 2 y Figura 4. 3 se puede apreciar que a mayor tamaño de la ventana, respecto del periodo de la estructura (numero de ciclos) se logran amortiguamientos con menor efecto *leakage*, tendiendo al amortiguamiento corregido.

El problema del aumento de ventana es que induce un error estadístico, ya que para la estimación de espectro de potencia la promediación es un factor importante y por lo tanto se hace necesario series de tiempo de mayor duración.

De esta forma, es recomendable verificar la estabilidad del amortiguamiento para diferentes ventanas y realizar la corrección por *leakage* correspondiente.

4.4 Errores asociados al método de Espectro de Potencia.

4.4.1 Errores en el dominio de la frecuencia.

Dentro del análisis en el dominio de la frecuencia, es posible encontrar varios tipos de errores, siendo el *Aliasing* (desdoblamiento) y *Leakage* (fuga) los más importantes.

4.4.1.1 Efecto *Aliasing*.

Este error se origina debido a que las señales que se miden son discretas y por ende deben tener asociado un muestreo (sampleo).

Otro factor que genera este tipo de error corresponde a las señales que cuentan con componentes de frecuencia altas, produciéndose errores en la estimación de las frecuencias características del sistema.

Si se denomina como f_{\max} la frecuencia máxima que posee la señal a analizar, la frecuencia de muestreo deberá ser al menos el doble que dicha frecuencia:

$$F_s \geq 2 \cdot f_{\max} \quad (4.75)$$

Al tener un muestreo menor se genera el fenómeno de *Aliasing* o desdoblamiento que consiste básicamente en que al asumir la periodicidad de la señal, en frecuencia se verá como un traslapo.

Para solucionar este problema, se recomienda usar frecuencias de muestreo altas, además de filtros que permitan atenuar frecuencias mayores a la frecuencia de *Nyquist*.

4.4.1.2 Efecto *Leakage*.

Tal como se explicó en la sección 4.3.1, el efecto de *leakage* se produce al tomar ventanas de tiempo con una duración finita, lo que hace que la energía en términos espectrales sea diseminada hacia los lóbulos laterales.

La solución a este problema es la utilización de ventanas de muestro, que permiten disminuir este efecto. Las mas utilizadas son: Hanning, Hamming, Tap-Coseno, entre otras.

4.5 Formas Modales

De análisis modal, la respuesta del i -ésimo grado de libertad puede suponerse como la suma de n sistemas de un grado de libertad, ponderados por un factor $\{\phi\}_j$ y puede expresarse como:

$$x_j(t) = \{\phi\}_j \cdot \{y^m(t)\} \quad (4.76)$$

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^n \phi_{ji} \cdot y_i^m(t) \quad (4.77)$$

Con:

$$\{\phi\}_j = \begin{Bmatrix} \phi_{j1} \\ \phi_{j2} \\ \vdots \\ \phi_{jn} \end{Bmatrix} \quad (4.78)$$

$$\{y^m(t)\} = \begin{Bmatrix} \{y_1^m(t)\} \\ \{y_2^m(t)\} \\ \vdots \\ \{y_n^m(t)\} \end{Bmatrix} \quad (4.79)$$

En términos modales, es posible obtener los espectros de potencia y espectros de potencia cruzados, para el modo i -ésimo, en una frecuencia característica de la estructura (resonancia) $\omega = \omega_r$, como:

$$S_{x_m x_n}(j\omega_r) \approx \phi_{ni} \cdot \phi_{mi} \cdot |H_i^m(j\omega_r)|^2 \cdot S_{p_i^m p_i^m}(\omega_r) \quad (4.80)$$

$$S_{x_n}(\omega_r) \approx \phi_{ni}^2 \cdot |H_i^m(j\omega_r)|^2 \cdot S_{p_i^m p_i^m}(\omega_r)$$

Cabe señalar que las relaciones descritas en (4.80) corresponden para el caso en que se tengan amortiguamientos bajos y de frecuencias con baja interferencia espectral.

Dividiendo ambas expresiones de (4.80) o bien dividiendo la segunda expresión para dos grados de libertad m, n y para una determinada frecuencia $\omega = \omega_r$ se tendrá:

$$\left(\frac{\phi_{mi}}{\phi_{ni}} \right) \approx \frac{S_{x_m x_n}(j\omega_r)}{S_{x_n}(\omega_r)} \quad (4.81)$$

$$\left(\frac{\phi_{mi}}{\phi_{ni}} \right)^2 \approx \frac{S_{x_m}(\omega_r)}{S_{x_n}(\omega_r)}$$

Teóricamente estas expresiones deberían ser reales, sin embargo en la práctica estos valores suelen ser complejos. Esto se debe principalmente a que las señales contienen ruido o falta de coherencia entre respuestas.

De esta forma, lo más conveniente es eliminar la parte imaginaria, asociada a un error numérico, y tomar sólo la parte real para la estimación de (4.81). De esta forma, la relación modal entrega información del modo, en términos de amplitud y signo (fase).

4.6 Método de Espectro de Potencia.

En la práctica, este método es el más utilizado, debido a que entrega resultados de forma rápida y su implementación es simple.

El método del Espectro de Potencia (PSD) o Frecuencia No Paramétrica (FNP) tiene algunas limitaciones, entre las que se cuentan:

- No permite identificar frecuencias cercanas.
- Es dependiente del tamaño de la ventana para la estimación del amortiguamiento, lo que produce leakage. Sin embargo y como se vio en el punto 4.3.1 es posible corregir este error por medio de gráficos que relacionan el amortiguamiento aparente y el amortiguamiento corregido.

Este método utiliza todas las herramientas vistas en los puntos anteriores. De forma descriptiva, el método identifica las frecuencias naturales del gráfico de espectro de potencia versus frecuencia a partir de los máximos que se observan.

Estos resultados son contrastados con el gráfico de coherencia versus frecuencia, que indica la relación entre canales de medición.

Una vez obtenidas las frecuencias naturales, se calcula el amortiguamiento mediante el método de ancho de banda, descrito en el punto 4.3 y luego corregido a través de los gráficos mostrados en este mismo punto.

Finalmente, y por medio de la función de transferencia, se obtienen las formas modales para las frecuencias identificadas, tal como se vio en el punto 4.5.

4.7 Descomposición en el dominio de la frecuencia mejorado (E.F.D.D.).

Este método se basa en la evaluación de la matriz espectral, que corresponde a un arreglo en donde los espectros de potencia van en la diagonal y espectros de potencia cruzados fuera de ella.

Asumiendo que se tienen n registros (grados de libertad), la matriz espectral corresponde a un arreglo tridimensional en la que se tienen como variables los espectros de potencia, espectro de potencia cruzado y la frecuencia. Evaluando en una frecuencia ω_r , se tendrá que la matriz espectral en esta frecuencia es

$$G(\omega_r) = E[X(\omega_r) \cdot X^H(\omega_r)] = \begin{bmatrix} S_{x_1}(\omega_r) & S_{x_1x_2}(j\omega_r) & \dots & S_{x_1x_n}(j\omega_r) \\ S_{x_2x_1}(j\omega_r) & S_{x_2}(\omega_r) & \dots & S_{x_2x_n}(j\omega_r) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{x_nx_1}(j\omega_r) & S_{x_nx_2}(j\omega_r) & \dots & S_{x_nx_n}(\omega_r) \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

El superíndice $(\bullet)^H$ denota el complejo conjugado de la matriz traspuesta. Como se vio anteriormente, los espectros de potencia y espectro de potencia cruzados se pueden obtener mediante el método de Welch u otro similar, a partir de las series de tiempo.

Por medio de inspección, también denominado *Peak Picking* es posible obtener las frecuencias características de la estructura (resonancia), observando los máximos en los espectros de potencia y espectro de potencia cruzado [BENDAT, 1980].

Asumiendo que las formas modales de la estructura tienen asociadas frecuencias bien separadas, se puede demostrar que la matriz espectral, para una vecindad de la frecuencia característica ω_r , puede aproximarse como [PEETERS, 1998]:

$$G(\omega_r) \approx \alpha_r \cdot \phi_r \cdot \phi_r^H \quad (4.83)$$

Donde α_r depende de la razón de amortiguamiento, la frecuencia natural, el factor de participación modal y la función de autocorrelación.

De la ecuación (4.83) se desprende que:

- Cada fila o columna de la matriz espectral, para una frecuencia ω_r característica de la estructura, puede ser considerada como un estimador de la forma modal ϕ_r para dicha frecuencia.
- La raíz cuadrada de los términos de la diagonal de la matriz espectral, para una frecuencia ω_r característica de la estructura, puede ser considerada como un estimador de la forma modal ϕ_r para dicha frecuencia.

El método de la descomposición en el dominio de la frecuencia requiere de la descomposición de valores singulares (SVD, del inglés *Singular Value Decomposition*) de la matriz espectral y de la inspección de los valores singulares de esta descomposición para identificar las frecuencias características de la estructura y estimar las correspondientes formas modales usando la información asociada a los vectores singulares de la descomposición.

La descomposición de valores singulares de la matriz espectral puede plantearse como:

$$G(\omega) = U(\omega) \cdot \Sigma(\omega) \cdot U(\omega)^H \quad (4.84)$$

Donde la matriz diagonal $\Sigma(\omega)$ contiene los valores singulares (reales y positivos) de forma descendente y la matriz $U(\omega)$ es una matriz compleja que contiene los vectores singulares como columna.

La descomposición de valores singulares es usada para estimar el rango de la matriz espectral que corresponde al número de valores singulares no nulos de la matriz $\Sigma(\omega)$.

Suponiendo que sólo un modo predomina en la respuesta de la estructura, es posible obtener una matriz espectral de rango 1 como:

$$G(\omega) \approx \sigma_1(\omega) \cdot u_1(\omega) \cdot u_1^H(\omega) \quad (4.85)$$

Donde $\sigma_1(\omega)$ corresponde al primer valor singular de la descomposición y $u_1(\omega)$ el primer vector singular.

Comparando las ecuaciones (4.83) y (4.85) resulta evidente que el primer vector singular corresponde a un estimador de la forma modal. Por otro lado, el valor singular corresponde al espectro de potencia del modo predominante (sistema de 1 GDL, desacoplado).

Debido a que este método desacopla el sistema de varios grados de libertad, es posible estimar las frecuencias a partir de los máximos locales del gráfico valores singulares versus frecuencia.

La característica más notable de este método, a diferencia del método FDD (*Frequency Domain Decomposition*) o del *Peak Picking* es que se puede obtener la razón de amortiguamiento.

Ésta se obtiene luego de haber desacoplado el sistema para las frecuencias predominantes y formas modales asociadas.

Desde esta perspectiva, es posible obtener la función de auto-correlación por medio de la transformada inversa de Fourier de los espectros de potencia calculados (valores singulares). En términos teóricos, esta respuesta en el tiempo debiera tener la forma de un decaimiento libre.

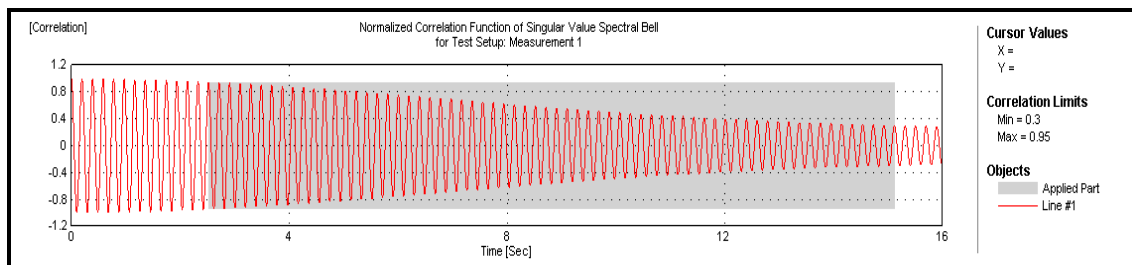


Figura 4. 4. Función de auto-correlación para un valor singular. Como se aprecia, se toma un tramo de registro a partir de la definición de un máximo y un mínimo en el valor de la correlación (sección gris). Fuente: Artemis. University of British Columbia License.

A partir de este gráfico es posible estimar las frecuencias naturales calculadas y la razón de amortiguamiento mediante el siguiente procedimiento:

1. Se calcula la función de auto-correlación mediante la transformada inversa de Fourier.

2. Asumiendo que la función de auto-correlación tiene un comportamiento decayente, se encuentran los primeros máximos y valles, denominados r_k , luego se calcula el decremento logarítmico como:

$$\delta = \frac{2}{k} \cdot \ln \left(\frac{r_0}{|r_k|} \right) \quad (4.86)$$

Donde r_0 corresponde al valor inicial de la función de auto-correlación y r_k es el k -ésimo extremo.

Luego, el decremento logarítmico y el valor inicial de la función de correlación pueden obtenerse de una regresión lineal entre $k\delta$ y $2 \ln(|r_k|)$.

3. El coeficiente de amortiguamiento puede obtenerse como:

$$\beta = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4\pi^2}} \quad (4.87)$$

O bien puede estimarse como la pendiente de la regresión lineal, como se muestra esquemáticamente en la figura siguiente:

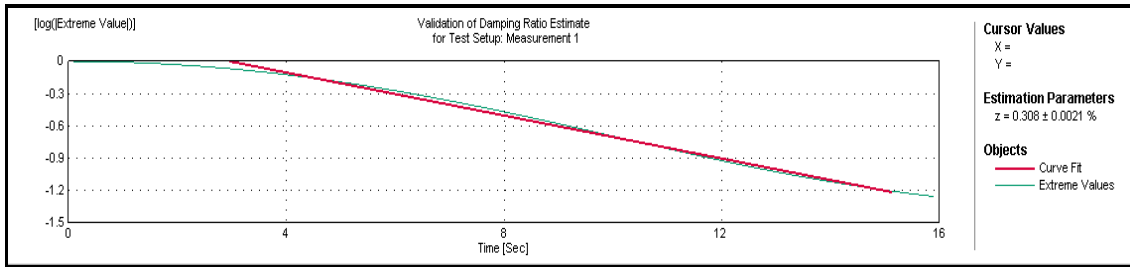


Figura 4. 5. Obtención de amortiguamiento mediante método del decremento logarítmico. La línea roja indica el ajuste de mínimos cuadrados realizados, para la obtención de la pendiente que corresponde a la razón de amortiguamiento. Fuente: *Artemis. University of British Columbia License.*

4. La frecuencia puede estimarse a partir de la curva de cruces por cero en función de tiempo, ajustando la curva linealmente, de donde se obtiene la frecuencia como la pendiente de dicha curva.

Esta frecuencia corresponderá a la frecuencia amortiguada, la que se encuentra relacionada con la frecuencia característica de la estructura como:

$$\omega = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (4.88)$$

La diferencia comparativa con el método FNP es que el método EFDD (al igual que FDD) permite la identificación de frecuencias cercanas, al realizar la descomposición de valores singulares, lo que supone un desacoplamiento del sistema.

Una forma alternativa de obtener frecuencia y amortiguamiento a partir de la descomposición de valores singulares y función de autocorrelación es a partir de la denominada señal analítica (Transforma de de Hilbert).

La señal analítica se define como:

$$z(t) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (S(\omega) \cdot e^{j\omega t}) \partial\omega \quad (4.89)$$

Donde $S(\omega)$ corresponde a la transformada de Fourier de la señal. La señal analítica puede definirse como el doble de la transformada inversa de Fourier de las frecuencias positivas del espectro de la señal real [HERNANDEZ, 2009].

La transformada de Hilbert se define como la parte compleja de la señal analítica y se define como:

$$H(s(t)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{s(t')}{t-t'} \right) \cdot \partial t' \quad (4.90)$$

Esta herramienta posee múltiples propiedades y un desarrollo completo puede verse en [HERNANDEZ, 2009].

Al aplicar la transformada de Hilbert a la función de autocorrelación, es posible obtener la envolvente de dicha función, luego de lo cual se grafica la fase de esta envolvente en función del tiempo, lo que entrega la frecuencia instantánea, para la forma modal en estudio. La frecuencia corresponderá a la pendiente de la regresión lineal de dicha curva.

Por otra parte el amortiguamiento se obtiene como la pendiente de una regresión lineal sobre el logaritmo del valor absoluto de la amplitud de la transformada de Hilbert en función del tiempo.

Capítulo 5.

Análisis de Variación de Propiedades Dinámicas, mediante monitoreo continuo de una estructura en proceso constructivo.

5.1 Introducción

Este capítulo utiliza los métodos de identificación de parámetros dinámicos presentados anteriormente, como herramientas para el estudio y análisis del comportamiento, por medio de la variación en los parámetros dinámicos (frecuencia, razón de amortiguamiento y formas operacionales), de una estructura en proceso constructivo.

Esta estructura corresponde al edificio, actualmente en etapa final de obra gruesa, Titanium La Portada, que corresponde a una de las estructuras más importantes de Sudamérica debido a su altura (192.5 metros).

Actualmente es la estructura más alta de Chile, y el cuarto edificio construido más alto de Sudamérica^{5.1}.

^{5.1} Los edificios construidos más altos que la torre Titanium son: Parque Central Torre Oeste y Este (225 metros cada uno, Caracas. Venezuela) y Torre Colpatria (196 metros, Bogotá. Colombia). Fuente: <http://www.skycrappage.com>

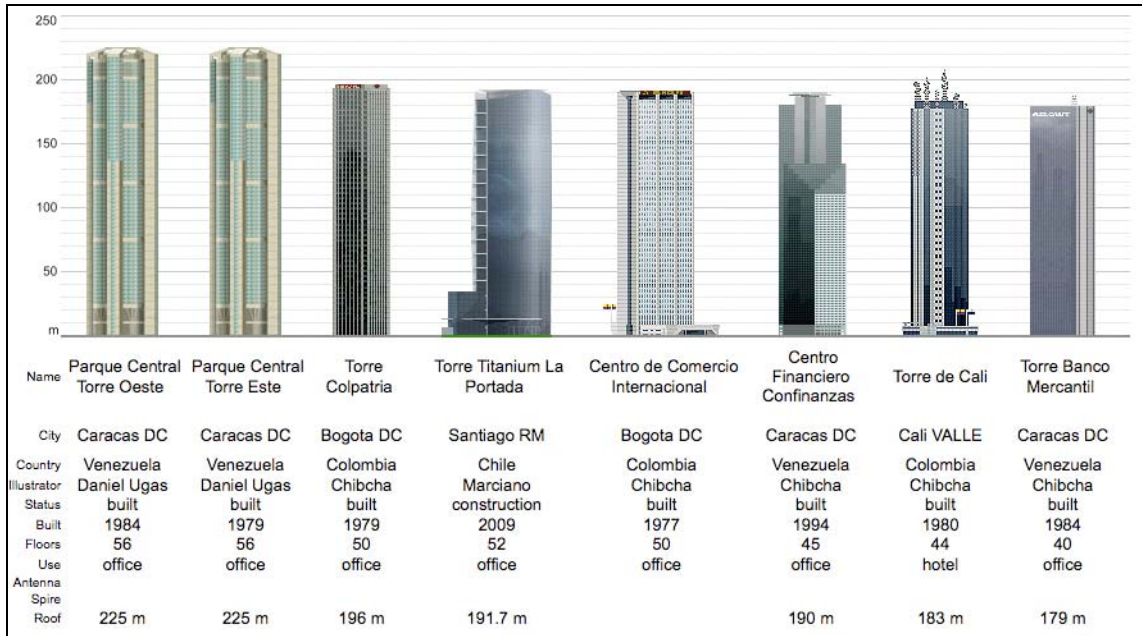


Figura 5. 1. Comparativo de Edificios más altos construidos al 2009 en Sudamérica.

Fuente: <http://www.skycrapperepage.com>

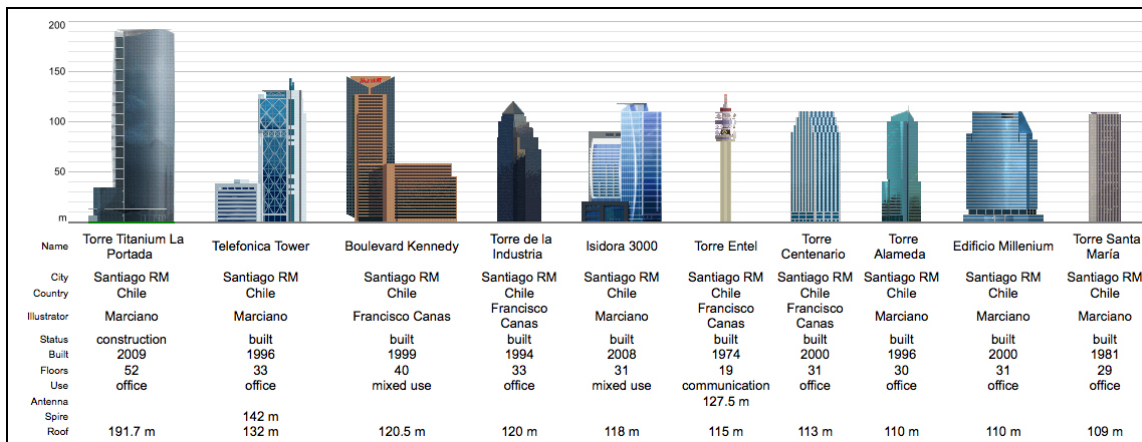


Figura 5. 2. Comparativo de Edificios más altos construidos al 2009 en Chile.

Fuente: <http://www.skycrapperepage.com>

El objetivo principal de este capítulo es estudiar y analizar la variación de las propiedades modales debido al aumento de masa y rigidez causado por el proceso constructivo y otros factores como las cargas operacionales que varían según ciclos de ocupación diaria del edificio a través de los métodos de identificación revisados en los capítulos precedentes.

Adicionalmente, se pretende encontrar patrones de variación durante el proceso constructivo, tanto para frecuencias naturales, como para razones de amortiguamiento.

Finalmente, se realizará un análisis comparativo entre los resultados de la medición continua de la estructura real, con diferentes modelos de elementos finitos creados para el diseño de la estructura.

Para realizar la comparación, se crearán sub-modelos diferenciados por el aumento de 1 piso en cada etapa, emulando el proceso constructivo, ya que se cuenta con un diagrama de avance por planta de la estructura, permitiendo de esta forma una comparación temporal coherente de cada etapa de la construcción de la torre.

5.2 Estructura monitoreada: Edificio Titanium La Portada.

5.2.1 Características Generales.

El Edificio Titanium La Portada, actualmente en proceso constructivo, se encuentra ubicado en Avenida Isidora Goyenechea 2800, Las Condes, Santiago de Chile.

Tendrá una altura total de 192,5 [m] sobre el nivel del suelo y 21,78 [m] de subterráneos, repartidos en 62 niveles, 7 de los cuales son subterráneos. La altura entre piso tipo es 3,6 [m], exceptuando el atrio de 14 [m] de altura y pisos mecánicos.

La superficie total a construir será de 125.926 [m²], repartidos en un helipuerto de 2 niveles con una superficie de 1.230 [m²], 40 pisos de 1.325 [m²], 12 pisos de 1.727 [m²], 6 subterráneos de 5.500 [m²] y el primer subterráneo de 5.486 [m²].

A continuación se muestran algunas plantas típicas, elevaciones generales y *renders* del edificio terminado^{5.2}:



Figura 5. 3. Render Edificio Terminado. Fuente: ASL Sencorp.

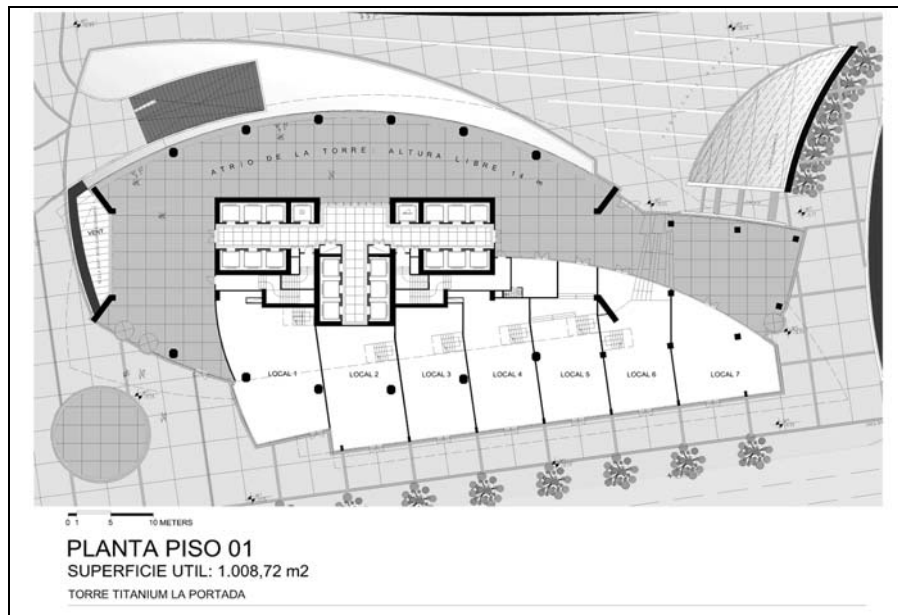


Figura 5. 4. Planta Primer Piso. Planos Arquitectura. Fuente: ASL Sencorp.

^{5.2}. Estos planos corresponden a los preliminares de arquitecturas con fecha 03 de mayo de 2009 y pueden existir ciertas diferencias con la estructura real debido a modificaciones arquitectónicas o estructurales. Fuente: ASL SENCORP.

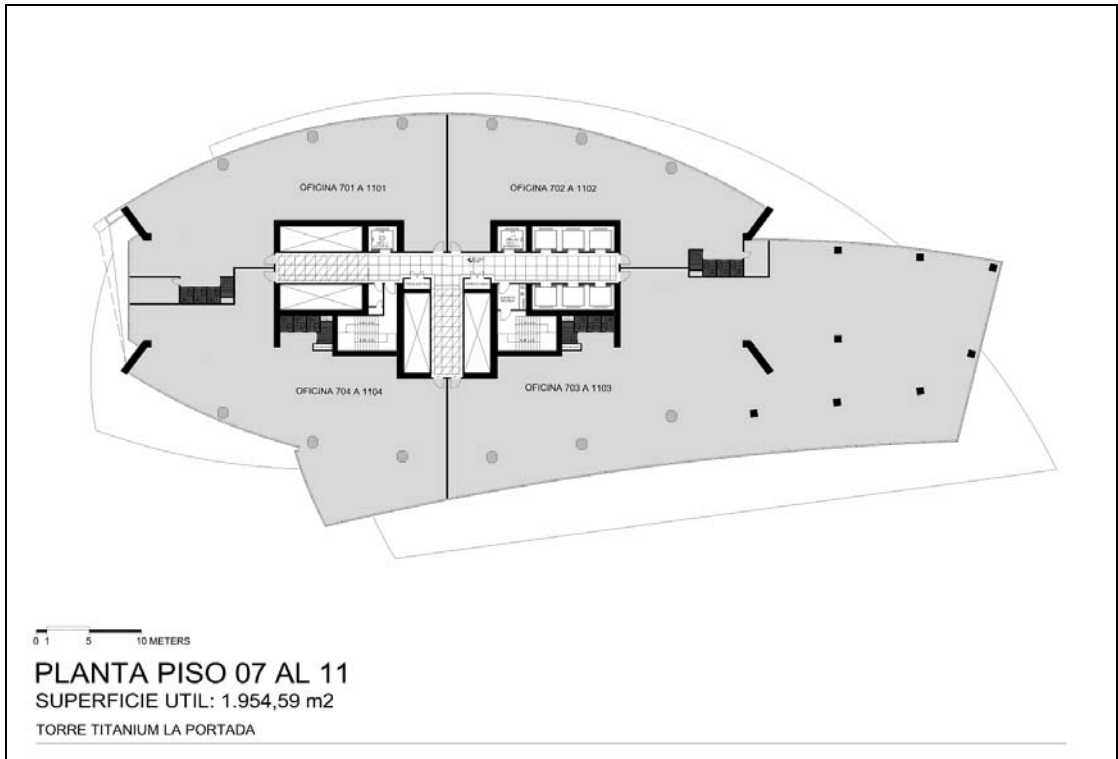


Figura 5. 5. Planta Pisos 7 al 11. Fuente: *ASL Sencorp.*

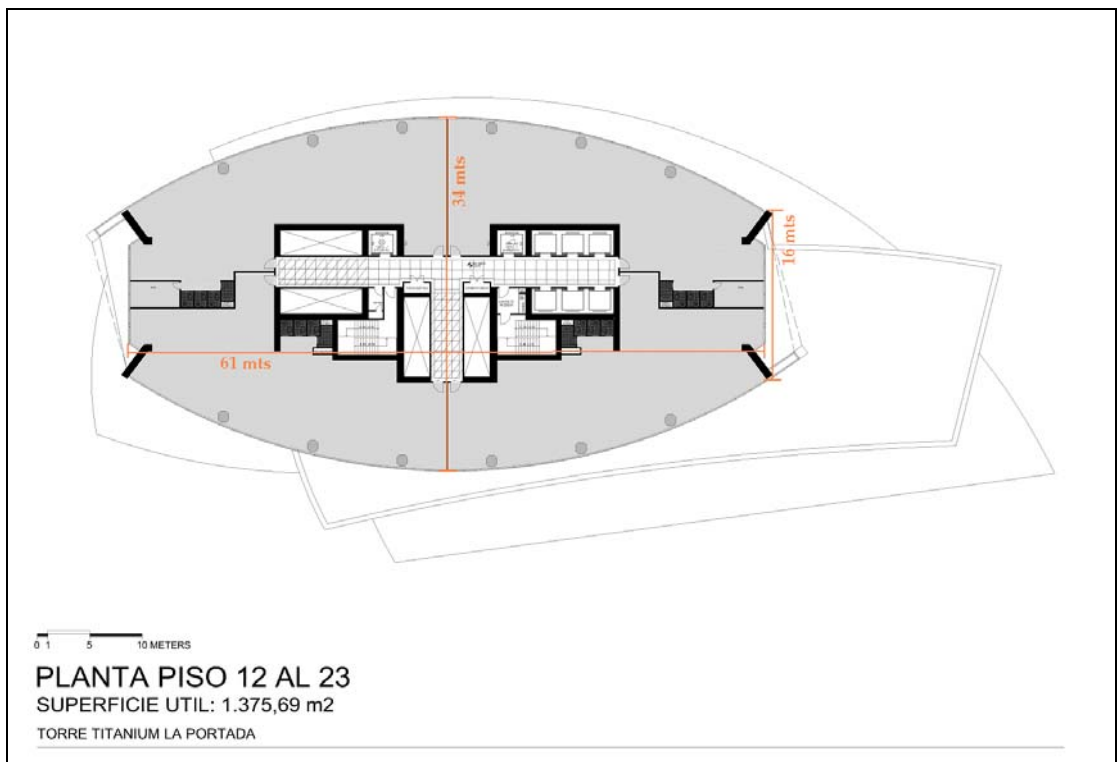


Figura 5. 6. Planta Pisos 12 al 23. Las medidas son aproximadas y se repiten hasta el piso 52. Fuente: *ASL Sencorp.*

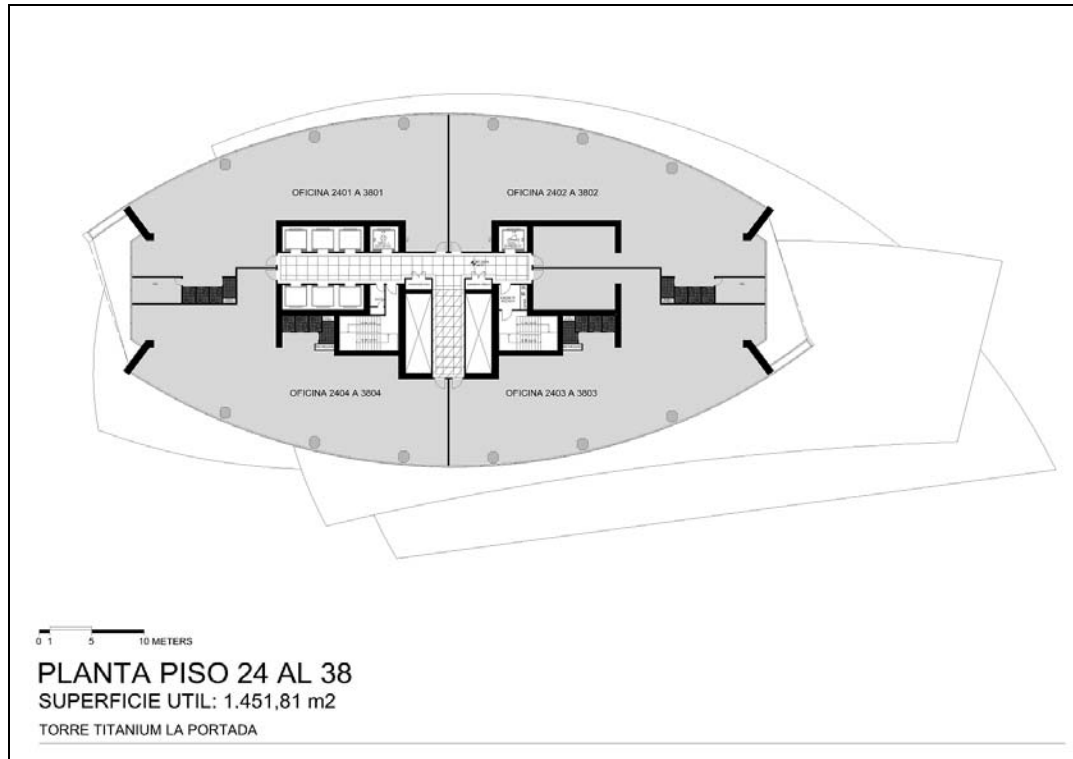


Figura 5. 7. Planta Pisos 24 al 38. Fuente: ASL Sencorp.

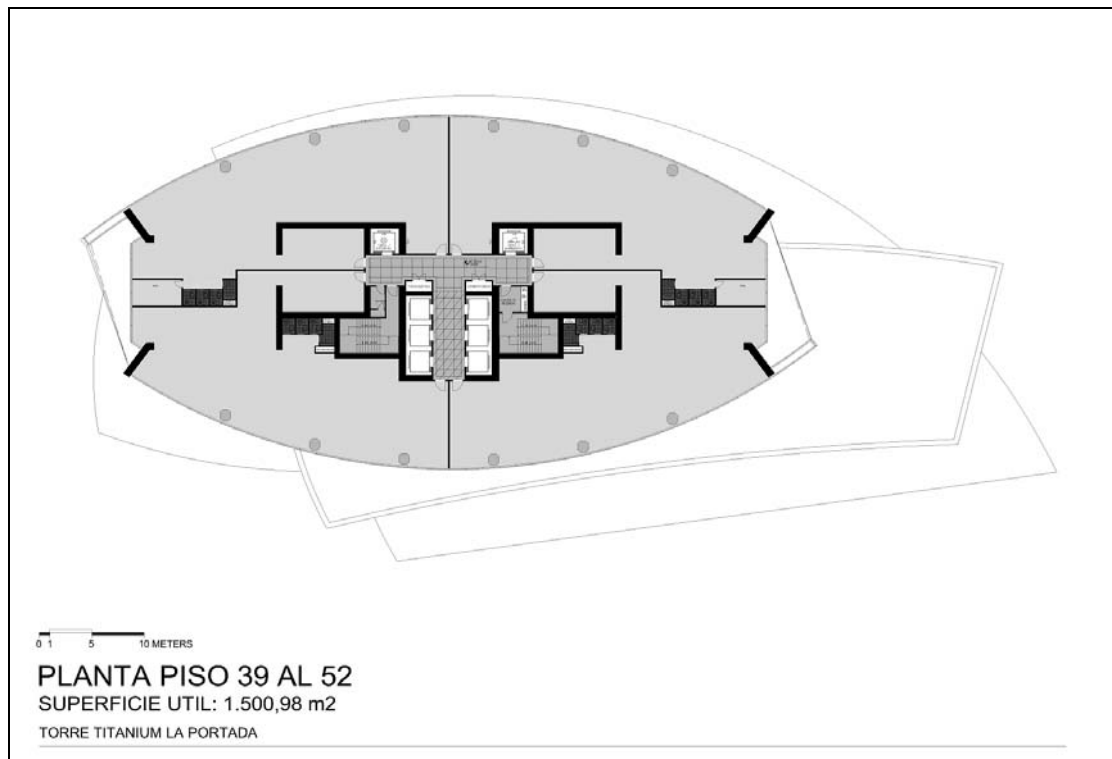


Figura 5. 8. Planta Pisos 39 al 52. Fuente: ASL Sencorp.

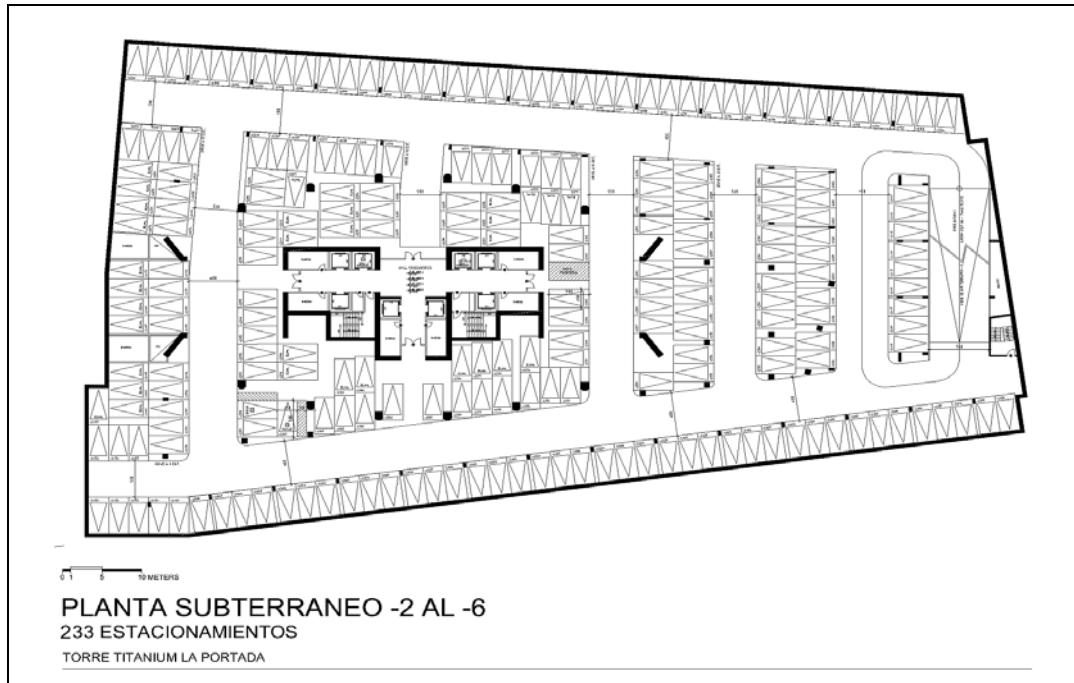


Figura 5. 9. Planta Subterráneo -2 al -6. Fuente: *ASL Sencorp*.



Figura 5. 10. Elevación Oriente. Edificio Titanium La Portada. Fuente: *ASL Sencorp*



Figura 5. 11. Elevación Sur. Edificio Titanium La Portada. Fuente: *ASL Sencorp*

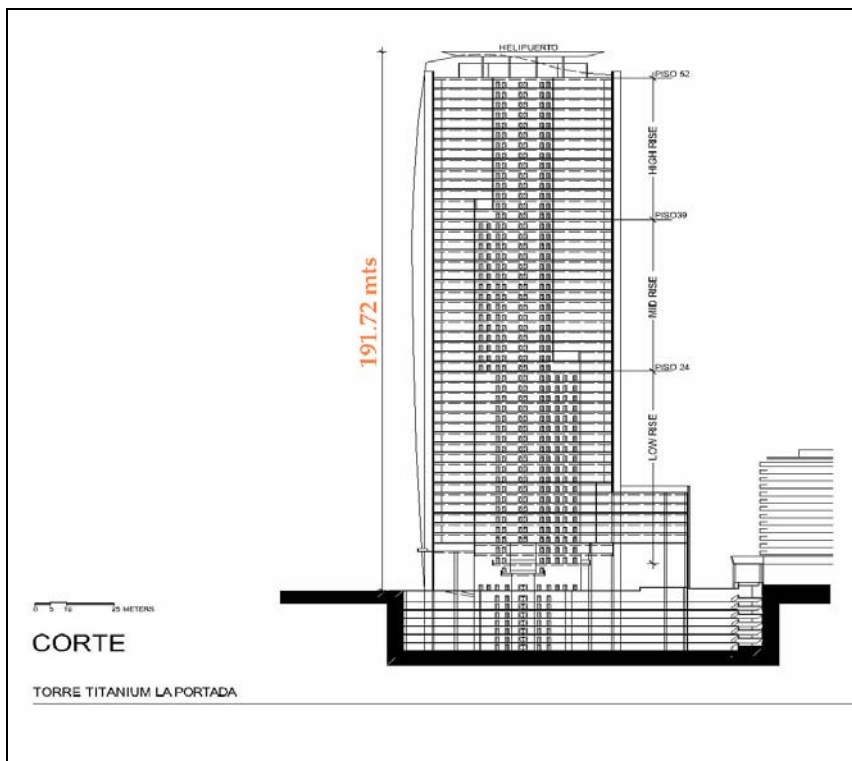


Figura 5. 12. Corte. Edificio Titanium La Portada. Fuente: *ASL Sencorp*

Estructuralmente el edificio se encuentra constituido por un núcleo de muros de hormigón armado y marcos rígidos perimetrales conformados por columnas de sección octogonal, Figura 5.13 y vigas de hormigón armado.

En los subterráneos, los muros y pilares traspasan el corte sísmico a muros perimetrales mediante una combinación de losas pretensadas y tradicionales que tienen comportamiento de diafragma rígido con un espesor de 40 centímetros en el primer subterráneo y 20 centímetros en el segundo subterráneo.



Figura 5.13. Armadura de sección octogonal, para columnas perimetrales, edificio Titanium La Portada.

Las fundaciones corresponden a zapatas aisladas en las columnas de subterráneo y zapatas corridas bajo los muros. Para la torre se utilizó losa de fundación.

Para garantizar el monolitismo entre los pilares del marco y los muros centrales se utilizaros vigas de fundación.

Según los datos geotécnicos^{5.3}, el suelo de fundación es una grava con capacidad de soporte de 12 [kgf/cm²] para cargas normales y 16 [kgf/cm²] para cargas eventuales. Para losas de fundación los valores bajan a 9 [kgf/cm²] para cargas normales y 12 [kgf/cm²] para cargas eventuales.

^{5.3} Proporcionados por el Mecánico de Suelos, Sr. Héctor Ventura.

En las Figura 5.14 y Figura 5.15 se muestran diferentes etapas de construcción de las fundaciones.

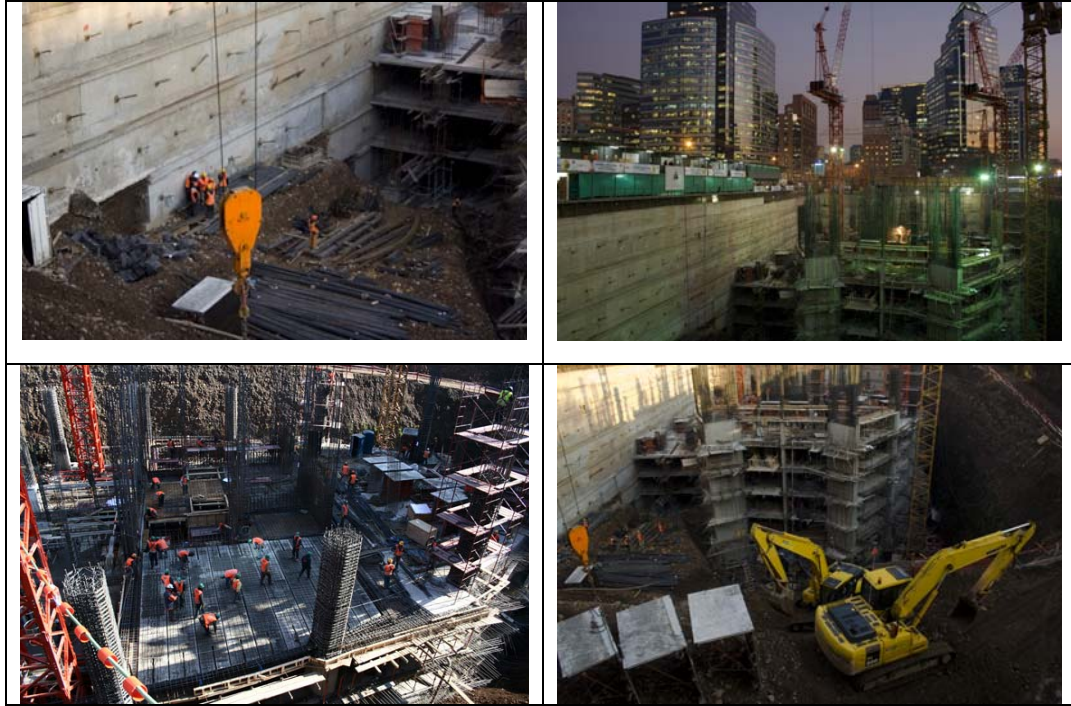


Figura 5.14. Diferentes etapas constructivas en faenas de fundaciones. Edificio Titanium La Portada. Fuente: <http://www.titaniumlaportada.cl>.



Figura 5.15. Armaduras y excavación en faenas de fundaciones. Edificio Titanium La Portada. Fuente: <http://www.titaniumlaportada.cl>.

Según los requerimientos de la estructura, se utilizan dos tipos de hormigón: para los elementos estructurales verticales, desde el nivel -7 al piso 15 se utiliza hormigón tipo H60-90C, mientras que desde el piso 16 hasta el helipuerto son de hormigón tipo H40-90C. Los muros perimetrales de subterráneo y las losas son de hormigón tipo H40-90C.

Los muros de núcleo poseen espesores variables con la altura del edificio y con la dirección en que se encuentren (longitudinal / transversal).

Los muros de espesor constante son los que limitan los ascensores y escaleras. La Tabla 5.1 muestra estos espesores.

Tabla 5.1. Distribución de espesores en muros de núcleo. Edificio Titanium.

Pisos	Dirección		Tipo Hormigón
	Longitudinal	Transversal	
S-7 a 5	60	70	H60-90C
6 a 15	55	65	H60-90C
16 a 20	55	65	H40-90C
21 a 25	50	60	H40-90C
26 a 30	45	55	H40-90C
31 a 35	40	50	H40-90C
36 a 46	35	40	H40-90C
47 a 52	30	35	H40-90C

Las columnas perimetrales poseen dos tipos de sección: rectangular y octogonales. Las primeras se encuentran en los subterráneos, mientras que las segundas se encuentran desde el piso 1 al 52.

Para las columnas octogonales existe una diferenciación según la posición en planta, teniéndose columnas mas anchas en los marcos del centro, debido a que la carga axial que soportan es mayor.

En la Tabla 5.2 se muestra la distribución en altura para las columnas de centrales y perimetrales de borde:

Tabla 5.2. Secciones columnas perimetrales, Edificio Titanium La Portada

No	Rango pisos	Dimensión [cm] Colum. Centrales	Dimensión [cm] Colum. Perim. Borde	Forma	Tipo Hormigón
1	S-7 a S-4	100/140	100/140	Rectangular	H60-90C
2	S-3 a S-1	100/120	100/120	Rectangular	H60-90C
3	1 a 5	115/115	110/110	Octogonal	H60-90C
4	6 a 15	110/110	110/110	Octogonal	H60-90C
5	16 a 20	110/110	105/105	Octogonal	H40-90C
6	21 a 25	105/105	100/100	Octogonal	H40-90C
7	26 a 30	100/100	95/95	Octogonal	H40-90C
8	31 a 35	95/95	90/90	Octogonal	H40-90C
9	36 a 46	90/90	85/85	Octogonal	H40-90C
10	47 a 52	85/85	80/80	Octogonal	H40-90C

Las losas utilizadas son de dos tipos: desde el primer piso al helipuerto se usa losa tradicional de 14 [cm] de espesor dentro de la zona del núcleo.

Fuera del núcleo, es decir en el sector de oficinas, se utiliza losa alveolar pretensada de 16 [cms], que junto con la sobrelosa de 7 [cm] a 11 [cms] suma un espesor de 23 [cm] a 27 [cm], dependiendo de los trasпасos de esfuerzos sísmicos, Figura 5.16.

Las sobrelosas del subterráneo tienen un espesor total de 40 [cm], en el primer subterráneo (nivel -7) y 20 [cms] para el segundo subterráneo (nivel -6). Para el resto de los subterráneos se tiene una sobrelosa de 7 [cms], Figura 5.16.



Figura 5.16. Losetas alveolares prefabricadas pretensadas. Armado de losas. Edificio Titanium La Portada.

La utilización de acero estructural dentro del edificio comprende las diagonales de arriostramiento, las que soportan disipadores de energía en la dirección transversal de la estructura (Figura 5.17 y Figura 5.18), enrejados de pasarelas, y camisas para las columnas de ferro concreto en los primeros niveles. El tipo de acero utilizado es del tipo A52-34ES.

Respecto a los disipadores de energía, estos se encuentran colocados tanto en la dirección transversal (Figura 5.17 y Figura 5.18) como longitudinal (Figura 5.19 y Figura 5.21) y trabajan por medio de fluencia.

Los disipadores transversales se distribuyen desde el piso 14 hacia arriba en el sector poniente y desde el piso 17 hacia arriba en el sector oriente, ambos cada tres pisos. Los disipadores longitudinales se encuentran en el sector del núcleo, soportados por muros dilatados, a partir del piso 23 y distribuidos cada tres pisos.

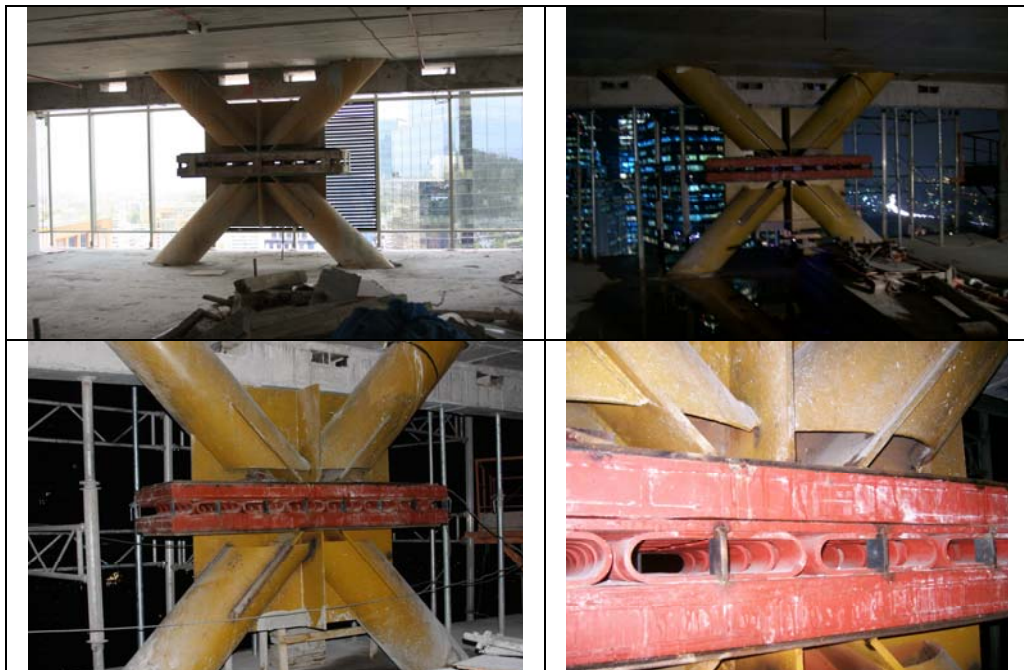


Figura 5.17. Disipadores de energía mediante mecanismos de fluencia dispuestos en dirección transversal (norte-sur). Edificio Titanium La Portada.



Figura 5.18. Disipadores de energía mediante mecanismos de fluencia dispuestos en dirección transversal (norte-sur). Edificio Titanium La Portada.



Figura 5.19. Disipadores de energía mediante mecanismos de fluencia dispuestos en dirección longitudinal (oriente-poniente). Edificio Titanium La Portada.



Figura 5. 20. Disipadores de energía mediante mecanismos de fluencia dispuestos en dirección longitudinal (oriente-poniente). Edificio Titanium La Portada.



Figura 5.21. Disipadores de energía mediante mecanismos de fluencia dispuestos en dirección longitudinal (oriente-poniente). Edificio Titanium La Portada.

Como elementos no estructurales importantes se encuentra la fachada que se compone de muros cortina de vidrio en todos los pisos sobre la cota cero, exceptuando los helipuertos, Figura 5.22.



Figura 5.22. Detalles y vistas generales colocación de Muros Cortina. Edificio Titanium La Portada.

Adicionalmente, el edificio posee un anexo en construcción en el sector sur que posee 14 pisos, Figura 5.23.



Figura 5.23. Anexo del edificio Titanium en proceso constructivo, de izquierda a derecha, de arriba abajo.

5.2.2 Descripción del proceso constructivo.

Una de las variables más importantes dentro de la determinación del proceso constructivo del edificio fue la reducción de tiempos de construcción a un costo razonable, debido a la envergadura de éste.

Lo anterior llevó a utilizar procesos constructivos innovadores, tales como la elección del tipo de losas utilizadas en esta estructura, que correspondieron a losetas alveolares prefabricadas pretensadas, las que conforman los campos de losas en todos los niveles del edificio, salvo al interior del núcleo de hormigón, donde se utiliza el proceso de hormigonado de losa tradicional.

La secuencia constructiva se inicia la faena de cierre perimetral, excavación y fundaciones.

La etapa de fundaciones contempló la utilización de aproximadamente 5000 m³ de hormigón de alta resistencia (H60-90C), superior al que habitualmente se emplea en este tipo de faenas en Chile.

En acero, se empleó más del triple de lo que se usa tradicionalmente en las fundaciones locales, superando las 1.600 toneladas (320 Kg. de fierro por m³ de hormigón).

Posterior a esta faena se inicia la construcción del núcleo de muros y columnas perimetrales hasta un nivel determinado. Sobre esta estructura se apoyan las losetas que son transportadas mediante grúas y acomodadas mediante cuñas en terreno.

Los campos de losas formados se cubren luego con una sobrelosa armada y hormigonada solidaria a las vigas que conectan las columnas perimetrales y el núcleo de muros entre sí. A continuación, se arman y concretan los muros y columnas del siguiente nivel, repitiéndose este proceso sucesivamente.

Las faenas de terminaciones se desarrollan con dos meses de desfase respecto al avance de la obra, tales como la colocación de escaleras de emergencia (prefabricadas), instalaciones eléctricas, sanitarias, de aire acondicionado y muros cortina.

En las Figura 5.24 a Figura 5. 30 se muestra una secuencia con diferentes etapas constructivas del edificio. Las Figura 5.31 a Figura 5.32 muestran de forma esquemática el proceso constructivo del edificio mediante una renderización de la torre.

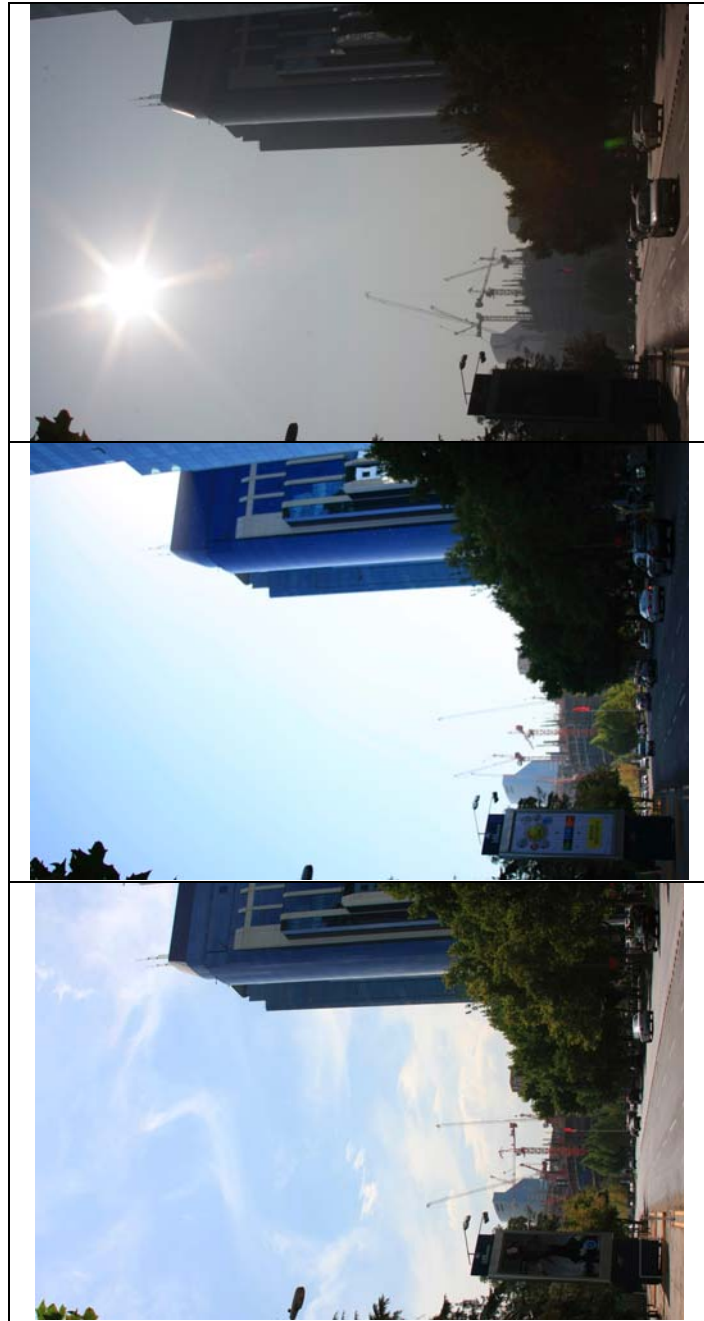


Figura 5.24. Secuencia Constructiva del Edificio Titanium La Portada. De izquierda a derecha, secuencia del 06 de marzo al 23 de abril de 2008.

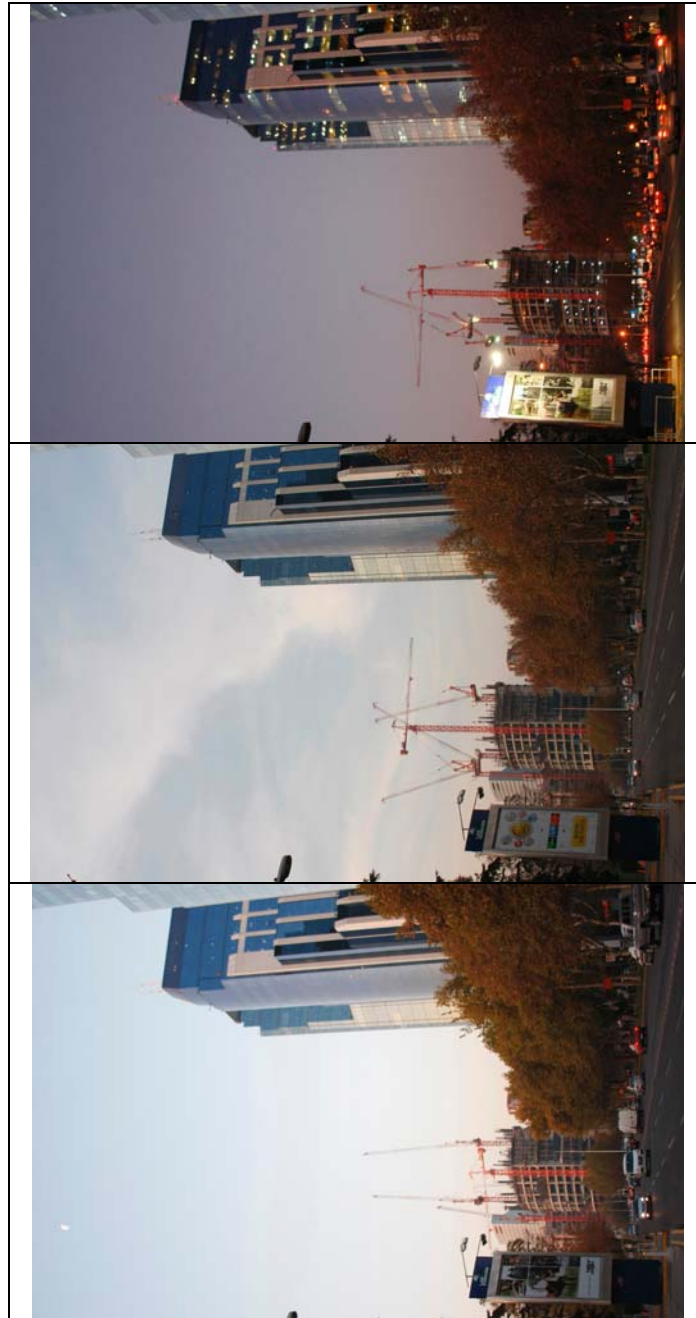


Figura 5.25. Secuencia Constructiva del Edificio Titanium La Portada. De izquierda a derecha, secuencia del 12 de mayo al 05 de junio de 2008.



Figura 5. 26. Secuencia Constructiva del Edificio Titanium La Portada. De izquierda a derecha, secuencia del 21 de julio al 14 de agosto de 2008.



Figura 5. 27. Secuencia Constructiva del Edificio Titanium La Portada. De izquierda a derecha, secuencia del 27 de agosto al 29 de septiembre de 2008.



Figura 5. 28. Secuencia Constructiva del Edificio Titanium La Portada. De izquierda a derecha, secuencia del 13 de octubre al 01 de diciembre de 2008.



Figura 5. 29. Secuencia Constructiva del Edificio Titanium La Portada. De izquierda a derecha, secuencia del 09 de diciembre al 30 de diciembre de 2008.



Figura 5. 30. Secuencia Constructiva del Edificio Titanium La Portada. De izquierda a derecha, secuencia del 19 de febrero al 23 de marzo de 2009.

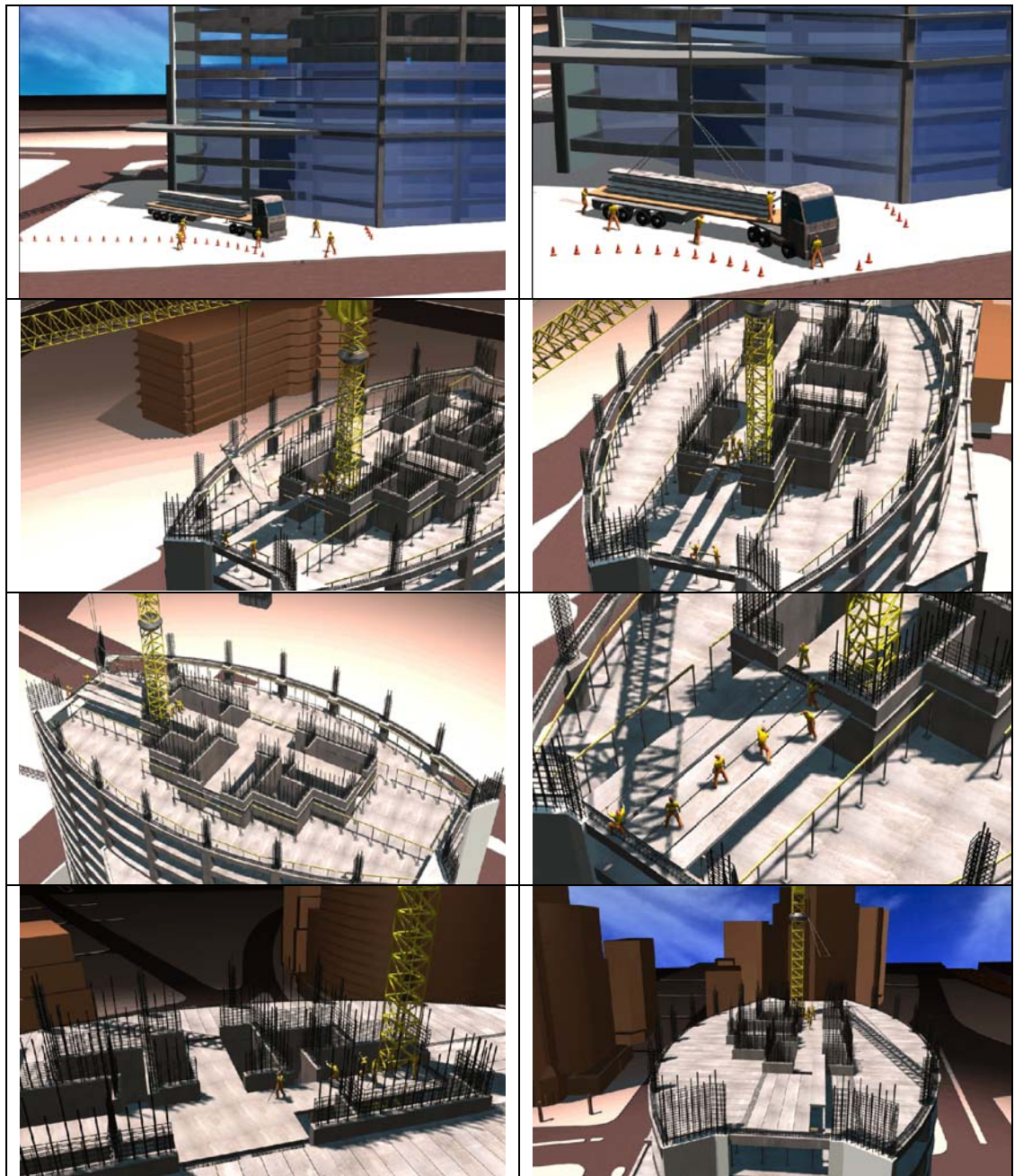


Figura 5.31. De izquierda a derecha y de arriba abajo: Animación esquemática del proceso constructivo del edificio Titanium La Portada. Fuente: *Tek-Value*.

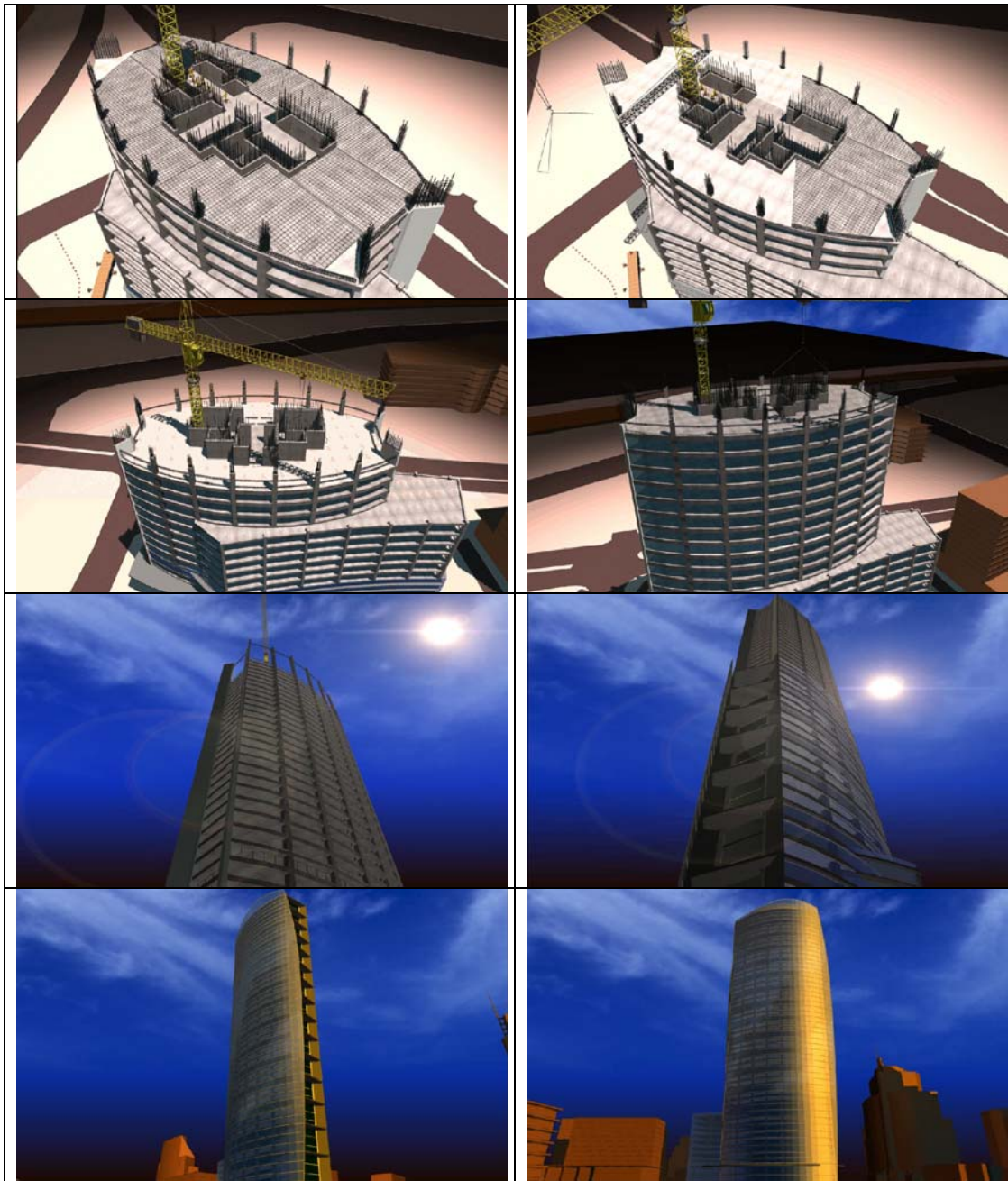


Figura 5.32. De izquierda a derecha y de arriba abajo: Animación esquemática del proceso constructivo del edificio Titanium La Portada. Fuente: *Tek-Value*.

5.2.3 Modelo de elementos finitos edificio Titanium La Portada

5.2.3.1 Modelo de elementos finitos edificio completo. Descripción y variables utilizadas.

La modelación del edificio Titanium La Portada fue realizada mediante el programa computacional ETABS V 8.4.7 por ALV & Asociados Ingenieros Civiles.

El material más utilizado en este edificio corresponde al hormigón que es de dos tipos: H-4090C y H6090C, con las siguientes propiedades [ARRIAGADA, 2006]

Tabla 5. 3. Propiedades Hormigones Torre Titanium La Portada

Hormigón Tipo	Resistencia Prismática $f'_c \left[\frac{\text{Ton}}{\text{m}^2} \right]$	Resistencia a 28 días $R_{28} \left[\frac{\text{Ton}}{\text{m}^2} \right]$	Módulo de Elasticidad $E \left[\frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \right]$	Pisos donde se utiliza
H4090C	3500	4000	331248	-7 al 15
H6090C	5500	6000	409765	16 a Helipuerto

Otro material utilizado corresponde al acero utilizado como refuerzo para los elementos de hormigón armado. En este caso se utilizó acero tipo A63-42H.

En menor proporción se utilizó acero estructural (diagonales, pasarelas y otros) de tipo A52-34ES, cuyas propiedades son:

Tabla 5. 4. Propiedades Acero Estructural A52-34ES. Torre Titanium La Portada

Tensión de Rotura, $f_u \left[\frac{\text{Tonf}}{\text{m}^2} \right]$	Tensión de Fluencia, $f_y \left[\frac{\text{Tonf}}{\text{m}^2} \right]$	Modulo de Elasticidad $E \left[\frac{\text{Tonf}}{\text{m}^2} \right]$
52000	34000	2.1×10^7

Las sobrecargas de uso para el diseño de la torre son las siguientes:

Tabla 5. 5. Sobrecargas de uso consideradas para diseño. Torre Titanium La Portada.

Sobrecarga (SC)	Valor $\left[\frac{Tonf}{m^2} \right]$
Zona Estacionamientos	0.5
Corredores, escaleras y lugares de uso publico	0.4
Zonas privadas sin equipos	0.4
Zona de acceso para carros de bomberos	1.25

Tabla 5. 6. Sobrecargas de uso por niveles consideradas para diseño. Torre Titanium La Portada.

Pisos	Carga Permanente DL $[kgf / m^2]$	Sobre Carga LL $[kgf / m^2]$	Zona de aplicación
Subt. -7 al -1	100	500	Uniforme en todo el piso
1	250	1250	Zona de acceso carro bomberos
	250	500	Zona de estacionamientos
2 al 5	150	400	Zonas de uso público
	250	500	Zona de edificio anexo
6	250	400	Uniforme en todo el piso
7 al 15	150	400	Zonas de uso público
	250	500	Zona de edificio anexo
16 al 53	150	400	Uniforme en todo el piso
54	50	400	Uniforme en todo el piso
55 a 56	50	250	Uniforme en todo el piso

Para las consideración de de masas sísmicas, el modelo computacional completo consideró las cargas permanentes, más un 25% de las cargas vivas, de acuerdo a lo establecido en la Norma NCh. 433 Of. 96 para el diseño estructural del edificio.

Sin embargo, esta consideración fue modificada para los submodelos creados a partir del modelo completo, debido a que el modelo de elementos finitos se contrastará con la

estructura real en obra gruesa, por lo tanto se tomó en consideración este factor, considerando que la masa sísmica proviene solo de las cargas permanentes (*Dead Load*).

Lo anterior se justifica debido a que las cargas permanentes de terminaciones y cargas vivas no están presentes durante el periodo de monitoreo.

Respecto a la modelación computacional del edificio, todos los elementos consideraron sus secciones e inercias no agrietadas.

Las losas fueron modeladas mediante elementos tipo *shell* considerando comportamiento de diafragma rígido para los campos de losa por piso, mientras que los muros fueron definidos como elementos tipo *pier-shell*. Las vigas y columnas fueron definidas como elementos uniaxiales tipo *frames*.

Respecto a la definición de secciones rígidas (denominados comúnmente "*cachos rígidos*"), éstas no fueron consideradas para la modelación, considerándose unión simple de nodo a nodo en uniones viga-columna o viga-muro.

Respecto a consideraciones de modelación, la unión viga-losa se realizó de acuerdo a la geometría de la estructura real, es decir, la unión se realizó entre la parte inferior de la losa y la parte superior de la viga (losa se apoya en vigas).

Del análisis del modelo computacional completo, se obtuvieron los pesos por piso para cargas permanentes, Tabla 5. 7 y Tabla 5. 8:

Tabla 5. 7. Pesos Propios por piso (*Dead Load*). Edificio Titanium La Portada.

Piso	Carga	Ubicación	Peso Acumulado Por Piso [Tonf]
HELIP1 ^o -2	DEAD	Bottom	674.15
HELIP1 ^o	DEAD	Bottom	1213.38
CP52	DEAD	Bottom	3138.42
CP51	DEAD	Bottom	4897.52
CP50	DEAD	Bottom	6738.96
CP49	DEAD	Bottom	8584.19
CP48	DEAD	Bottom	10425.64
CP47	DEAD	Bottom	12184.74
CP46	DEAD	Bottom	14144.37
CP45	DEAD	Bottom	15934.8
CP44	DEAD	Bottom	17807.58
CP43	DEAD	Bottom	19684.83
CP42	DEAD	Bottom	21557.6
CP41	DEAD	Bottom	23348.03
CP40	DEAD	Bottom	25378.81
CP39	DEAD	Bottom	27143.13
CP38	DEAD	Bottom	28989.8
CP37	DEAD	Bottom	30841.05
CP36	DEAD	Bottom	32687.71
CP35	DEAD	Bottom	34481.04
CP34	DEAD	Bottom	36443.84
CP33	DEAD	Bottom	38237.17
CP32	DEAD	Bottom	40112.84
CP31	DEAD	Bottom	41993.44
CP30	DEAD	Bottom	43902.82
CP29	DEAD	Bottom	45729.84
CP28	DEAD	Bottom	47726.58
CP27	DEAD	Bottom	49553.6
CP26	DEAD	Bottom	51462.98
CP25	DEAD	Bottom	53408.37
CP24	DEAD	Bottom	55348.79
CP23	DEAD	Bottom	57206.87
CP22	DEAD	Bottom	59234.59
CP21	DEAD	Bottom	61066.55
CP20	DEAD	Bottom	63013.84
CP19	DEAD	Bottom	64966.49
CP18	DEAD	Bottom	66913.78
CP17	DEAD	Bottom	68778.72

Tabla 5. 8. Pesos Propios por piso (*Dead Load*). Edificio Titanium La Portada.

Piso	Carga	Ubicación	Peso Acumulado Por Piso [Tonf]
CP16	DEAD	Bottom	70969.07
CP15	DEAD	Bottom	72845.25
CP14	DEAD	Bottom	75326.38
CP13	DEAD	Bottom	77897.77
CP12	DEAD	Bottom	80378.9
CP11	DEAD	Bottom	82777.72
CP10	DEAD	Bottom	85301.3
CP9	DEAD	Bottom	87700.12
CP8	DEAD	Bottom	90181.29
CP7	DEAD	Bottom	92695.56
CP6	DEAD	Bottom	95019.29
CP5	DEAD	Bottom	96135.57
CP4	DEAD	Bottom	97918.86
CP3	DEAD	Bottom	100398.78
CP2	DEAD	Bottom	102188.6
CP1	DEAD	Bottom	103767.89
CSUB1	DEAD	Bottom	116187.91
CSUB2	DEAD	Bottom	124301.48
CSUB3	DEAD	Bottom	130719.14
CSUB4	DEAD	Bottom	136657.67
CSUB5	DEAD	Bottom	142598.37
CSUB6	DEAD	Bottom	148539.08
CSUB7	DEAD	Bottom	154999.2

Respecto al análisis sísmico, este se realizó mediante el método Modal-Espectral, según la Norma Chilena NCh. 433 Of. 96 y a partir de registros sintéticos locales creados específicamente para el edificio con el fin de obtener un espectro de diseño específico para la estructura^{5.4}.

Los parámetros considerados para el análisis modal-espectral son los siguientes:

^{5.4} Registros generados por la oficina de ingeniería S&S.

Tabla 5. 9. Parámetros del Espectro de Respuesta. Método Modal-Espectral. Torre Titanium La Portada.

Parámetro	Valor
Factor de Importancia, I	1.2
Factor de modificación de la respuesta, R_o (análisis modal espectral)	11
Tipo de suelo	II
Aceleración Máxima efectiva del suelo, A_o [g]	0.3
Parámetro dependiente del tipo de suelo, S	1
Parámetro dependiente del tipo de suelo, T_o [seg]	0.3
Parámetro dependiente del tipo de suelo, p	1.5

El espectro de diseño básico elástico generado por *S&S Ingeniería* viene dado por la siguiente fórmula:

$$S_a(T) = \begin{cases} 0.85g & : 0.00 \leq T \leq 0.35 [s] \\ \frac{0.2975}{T} g & : 0.35 < T \leq 2.00 [s] \\ \frac{0.4207}{T^{1.5}} g & : 2.00 < T \leq 3.00 [s] \\ \frac{0.7287}{T^2} g & : 3.00 < T \leq 7.00 [s] \end{cases} \quad (5.1)$$

En la Figura 5. 33 se muestra un comparativo entre los espectros de diseño elásticos generados por la Norma Chilena NCh. 433 Of. 96 y por la oficina de Ingeniería Estructural *S&S*, [ARRIAGADA, 2006].

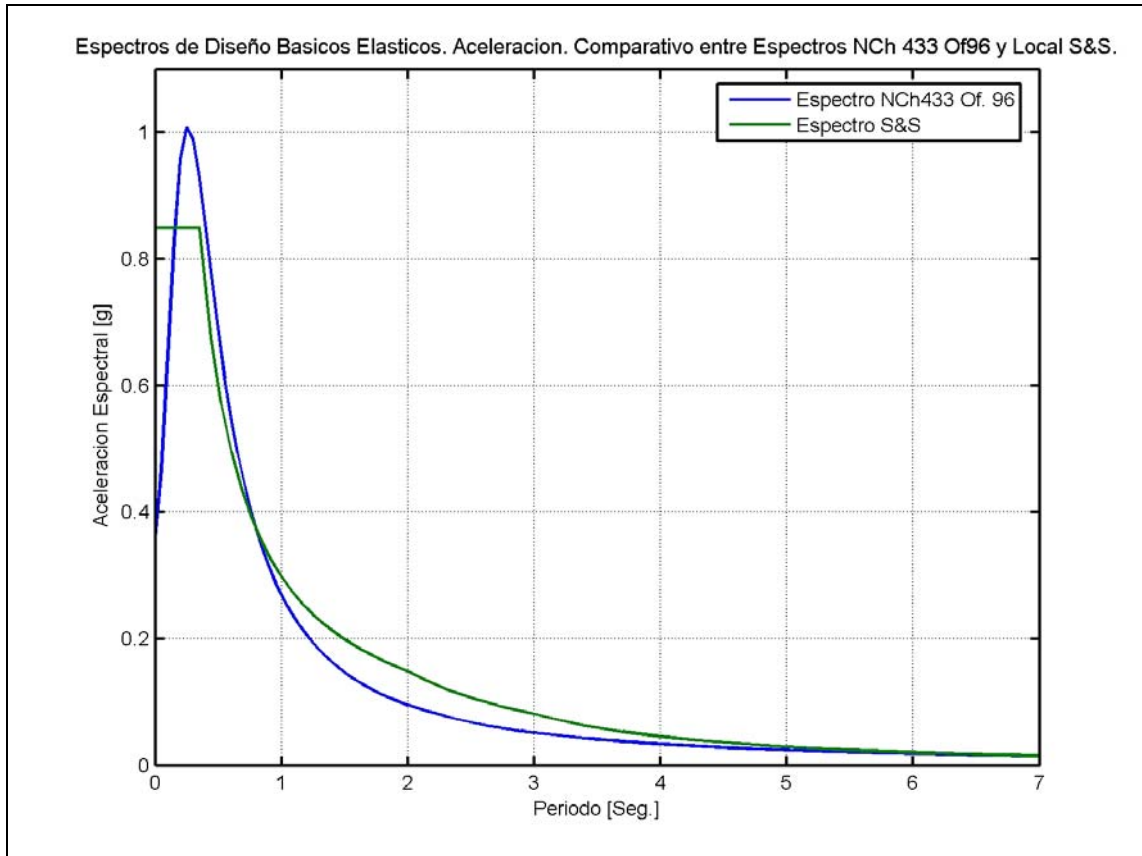


Figura 5. 33. Comparativo Espectros Elásticos NCh. 433 Of. 96 y sintético diseñado por S&S Ingeniería

Se utilizó una razón de amortiguamiento uniforme para todos los modos del 5%.

5.2.3.2 Frecuencias y formas modales modelo de elementos finitos edificio completo.

A partir de este modelo se obtuvieron las primeras frecuencias, Tabla 5. 10 y formas modales, Figura 5. 34 a Figura 5. 37.

Cabe señalar que el modelo realizado para esta investigación sólo incluye cargas permanentes, debido a que la información relevante en este caso corresponde a la

respuesta de la estructura en vibraciones libres para su comparación con los resultados del sistema de monitoreo continuo.

Tabla 5. 10. Frecuencias y Periodos Naturales Edificio Titanium La Portada (modelo completo). Fuente: ALV & Asociados Ingenieros Civiles.

Modo	Frecuencia [Hz]	Periodo [Seg.]
1	0.178	5.627
2	0.235	4.248
3	0.267	3.748
4	0.649	1.541
5	0.752	1.330
6	0.964	1.037
7	1.406	0.711
8	1.563	0.640
9	2.121	0.472
10	2.371	0.422
11	2.601	0.385
12	3.363	0.297
13	3.623	0.276
14	3.766	0.266
15	3.965	0.252
16	4.427	0.226
17	4.944	0.202
18	5.364	0.186
19	5.593	0.179
20	6.097	0.164
21	6.860	0.146
22	6.897	0.145
23	7.047	0.142
24	7.114	0.141
25	8.097	0.123
26	8.415	0.119
27	8.506	0.118
28	8.717	0.115
29	8.720	0.115
30	8.724	0.115

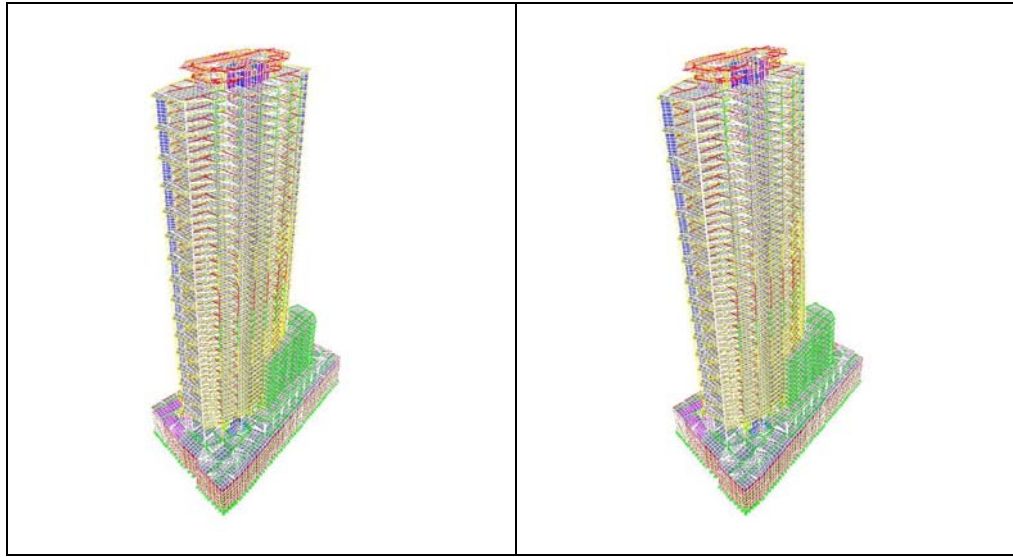


Figura 5. 34. Formas Modales Edificio Titanium La Portada. De izquierda a derecha:
modo 1 ($f = 0.18[Hz]$), modo 2 ($f = 0.24[Hz]$)

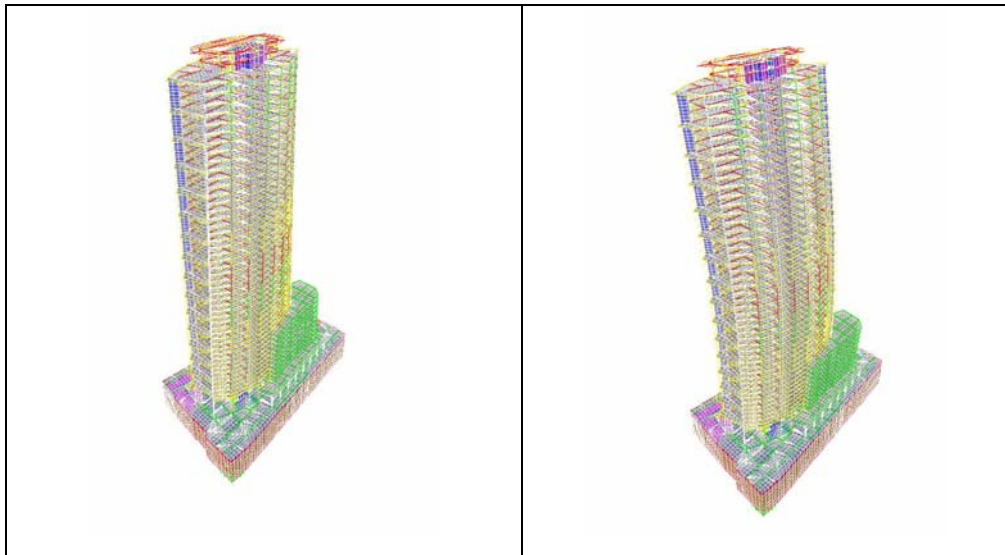
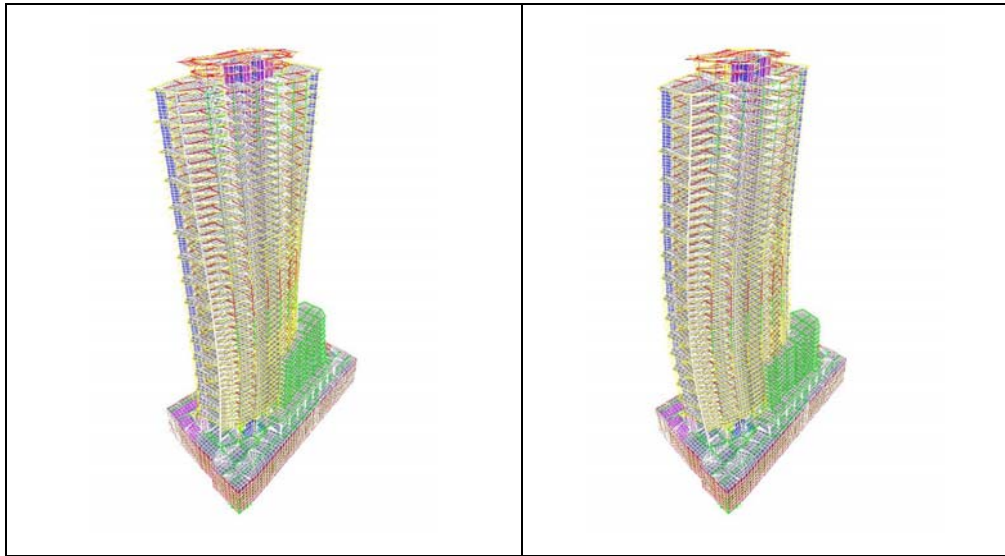
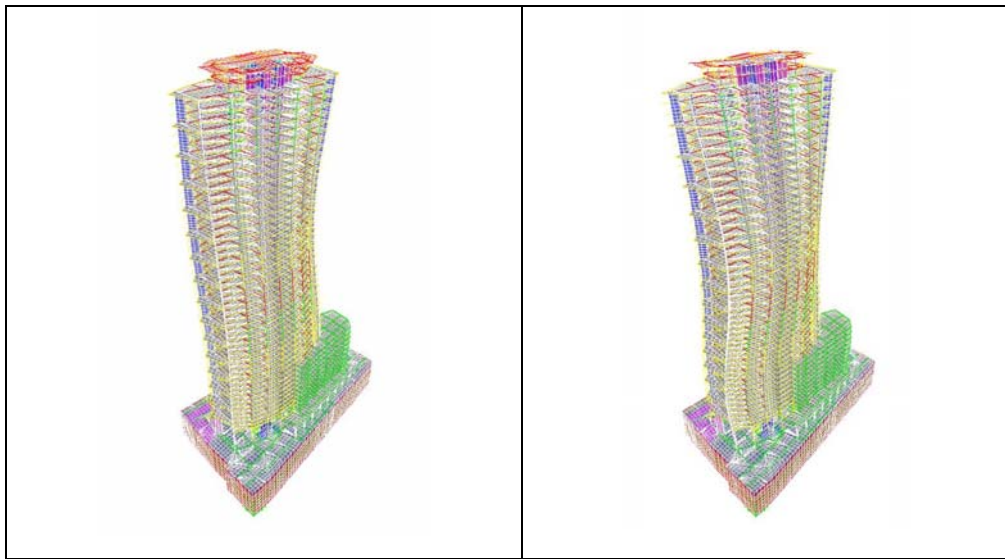


Figura 5. 35. Formas Modales Edificio Titanium La Portada. De izquierda a derecha:
modo 3 ($f = 0.27[Hz]$), modo 4 ($f = 0.65[Hz]$)



**Figura 5. 36. Formas Modales Edificio Titanium La Portada. De izquierda a derecha:
modo 5 ($f = 0.75[Hz]$), modo 6 ($f = 0.96[Hz]$)**



**Figura 5. 37. Formas Modales Edificio Titanium La Portada. De izquierda a derecha:
modo 7 ($f = 1.41[Hz]$), modo 8 ($f = 1.56[Hz]$)**

5.2.3.3 Resultados obtenidos a partir de los sub-modelos de elementos finitos.

A partir de la modelación del edificio se obtuvieron las primeras frecuencias y formas modales, considerando una razón de amortiguamiento igual para todos los modos del 5%.

Este modelo fue utilizado con el objetivo de crear submodelos según el avance constructivo, lo que permitirá establecer una correlación entre los parámetros dinámicos de éstos y los que se obtienen a partir de las mediciones de micro vibración durante el proceso de construcción del edificio, simulando el proceso constructivo.

Para la creación de estos submodelos, se establecieron puntos de referencia dados por fechas de término de obra gruesa de cada planta^{5.5}. Algunos de éstos se muestran en las Figura 5.38 a Figura 5.42, con lo cual se generaban modelos hasta el piso correspondiente, mientras que en la Tabla 5. 11 se presenta la fecha de término por cada piso en el periodo de análisis de la estructura.

En las Figura 5.43 a Figura 5.45 se muestran los diferentes submodelos de elementos finitos analizados, de los cuales se extrajeron frecuencias naturales y formas modales asociadas.

Estos sub-modelos, creados a partir del modelo del edificio completo, difieren en el número de pisos y en la consideración de la fuente de masa, que fue considerada sólo a partir del peso propio de los sub-modelos. Esto debido a que no corresponde a un modelo para diseño sino que para representar la respuesta del edificio, en obra gruesa, frente a excitaciones de tipo ambiental.

^{5.5} Estos datos fueron entregados por el Arquitecto Sr. Diego Bustamante de ASL Sencorp.

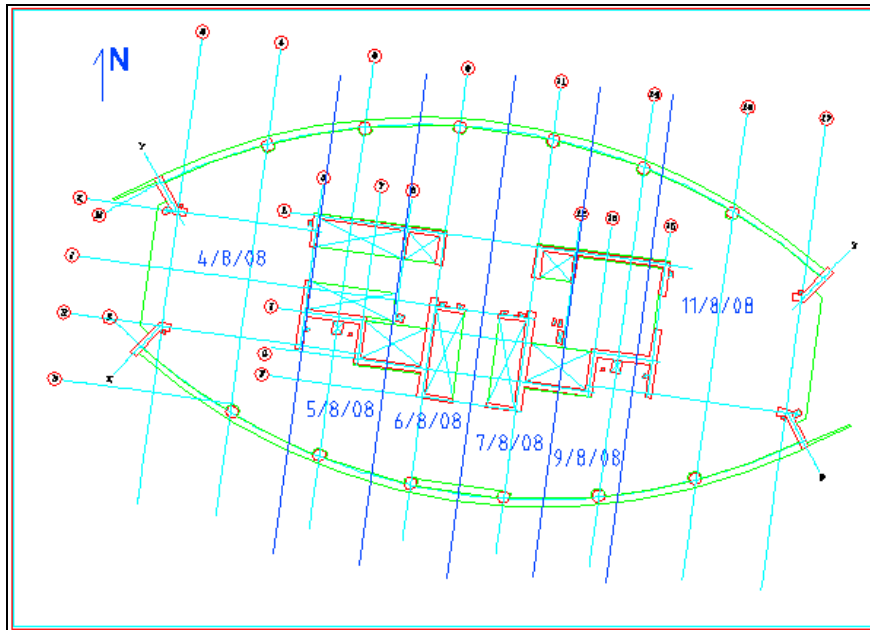


Figura 5.38. Cronograma avance obra gruesa, planta piso 25 (cielo piso 24). Edificio Titanium La Portada. Fuente: ASL Sencorp.

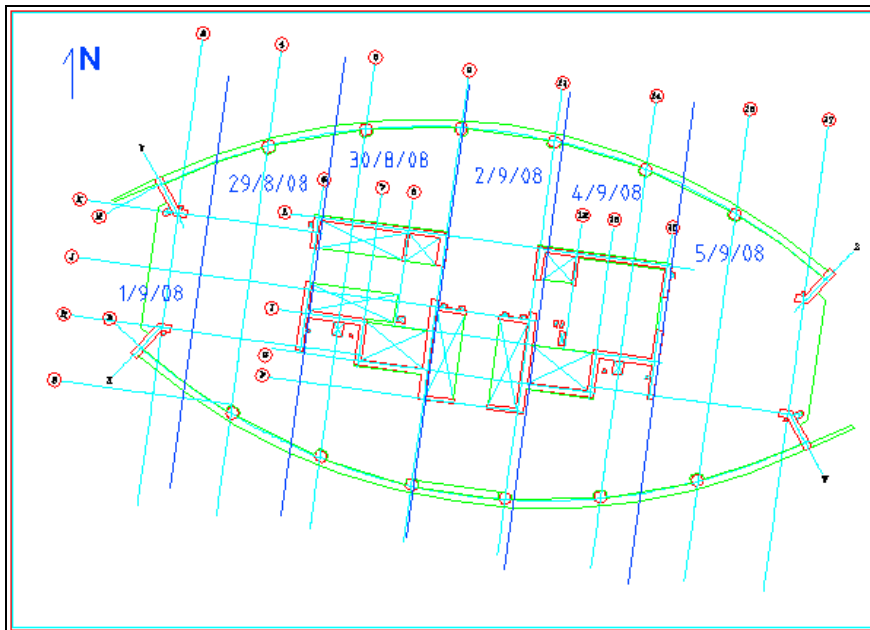


Figura 5.39. Cronograma avance obra gruesa, planta piso 28 (cielo piso 27). Edificio Titanium La Portada. Fuente: ASL Sencorp.

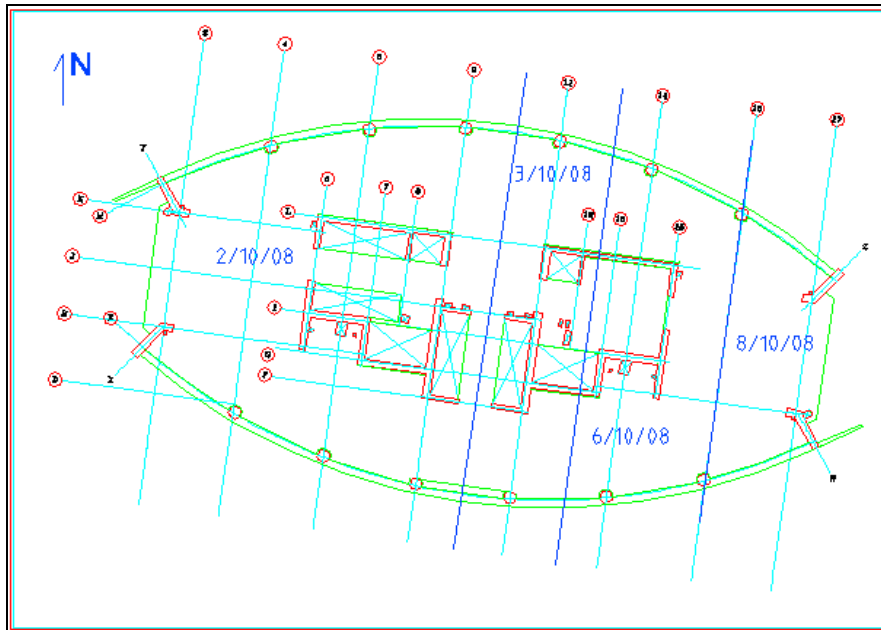


Figura 5.40. Cronograma avance obra gruesa, planta piso 31 (cielo piso 30). Edificio Titanium La Portada. Fuente: ASL Sencorp.

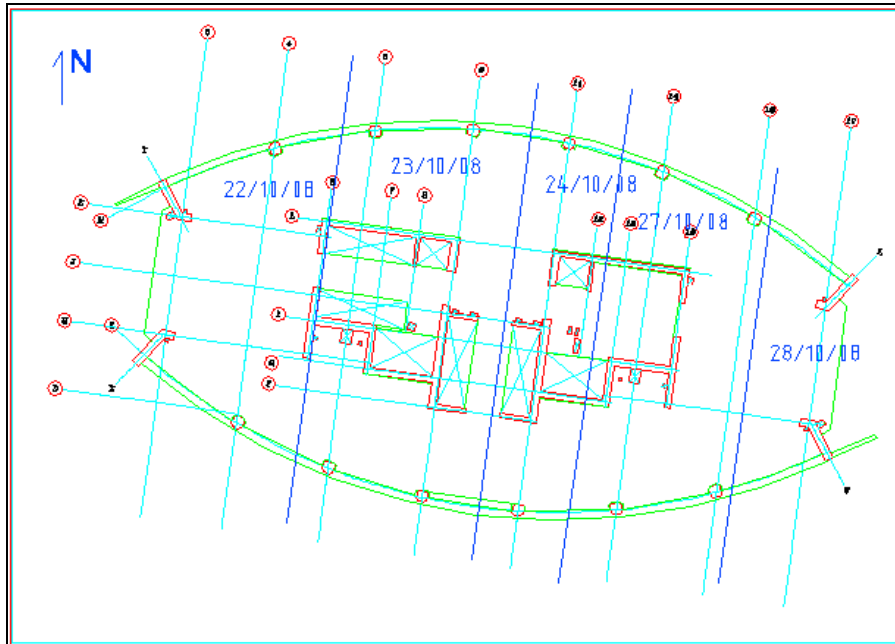


Figura 5.41. Cronograma avance obra gruesa, planta piso 34 (cielo piso 33). Edificio Titanium La Portada. Fuente: ASL Sencorp.

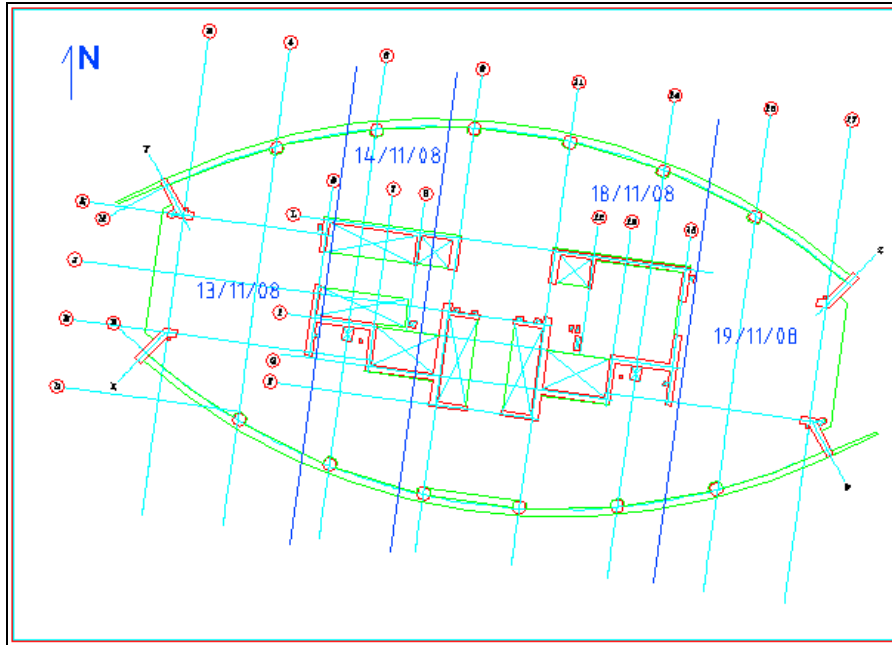


Figura 5.42. Cronograma avance obra gruesa, planta piso 37 (cielo piso 36). Edificio Titanium La Portada. Fuente: ASL Sencorp.

Tabla 5. 11. Fecha de Término obra gruesa por piso. Fuente: ASL Sencorp.

Piso	Fecha término obra gruesa [dd-mm-yyyy]
24	04-08-2008
25	11-08-2008
26	20-08-2008
27	27-08-2008
28	05-09-2008
29	16-09-2008
30	29-09-2008
31	08-10-2008
32	14-10-2008
33	21-10-2008
34	28-10-2008
35	06-11-2008
36	13-11-2008
37	19-11-2008
38	26-11-2008
39	03-12-2008
40	10-12-2008
41	17-12-2008
42	29-12-2008

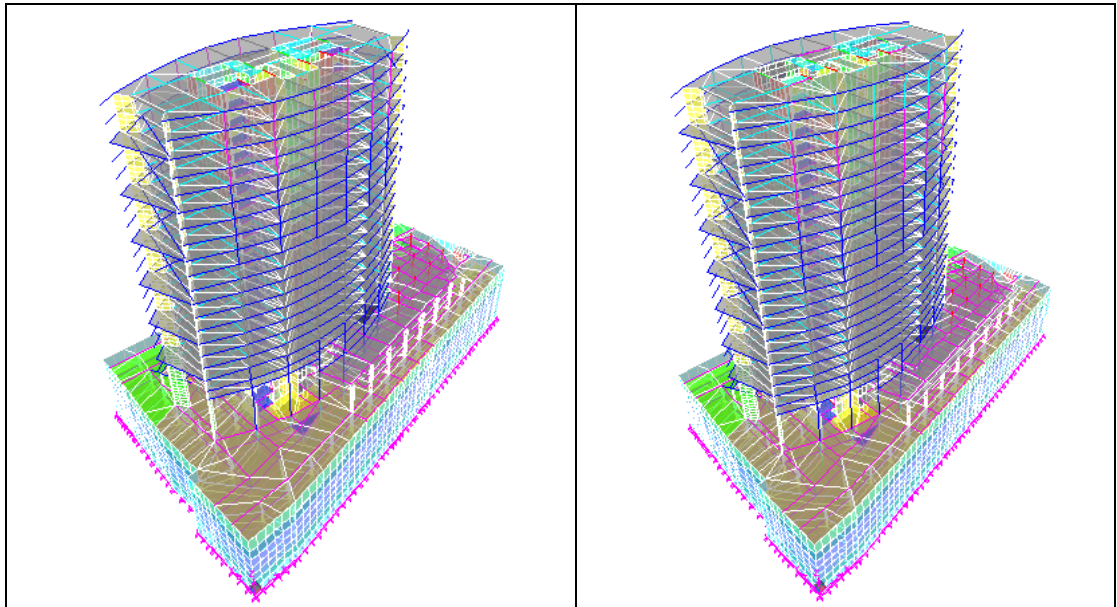


Figura 5.43. Modelo Elementos Finitos Torre Titanium. De izquierda a derecha: hasta Piso 25, hasta piso 28.

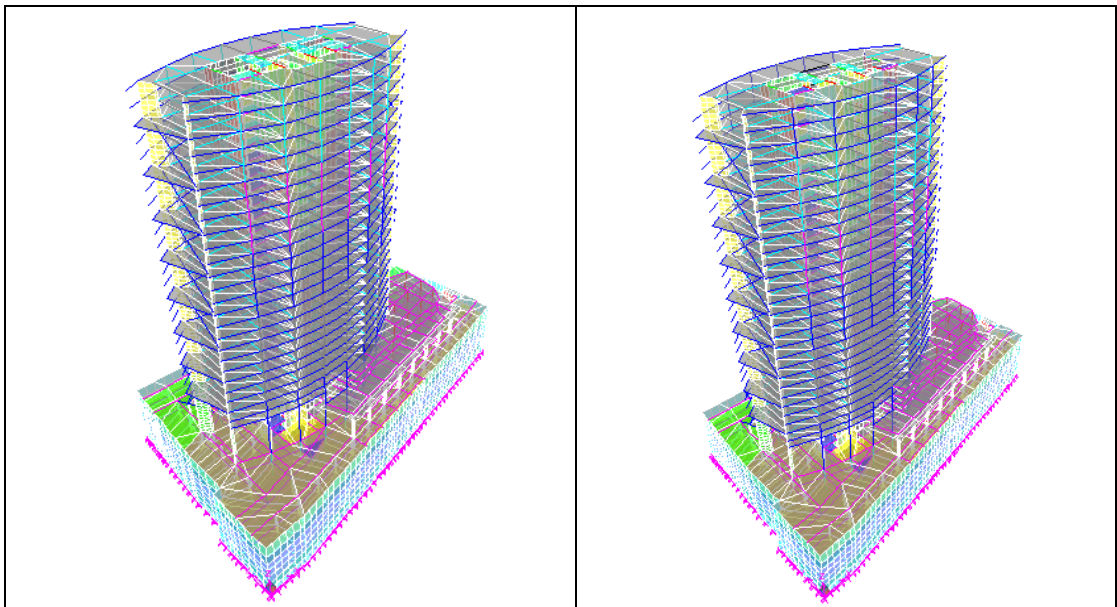


Figura 5.44. Modelo Elementos Finitos Torre Titanium. De izquierda a derecha: hasta Piso 31, hasta piso 34.

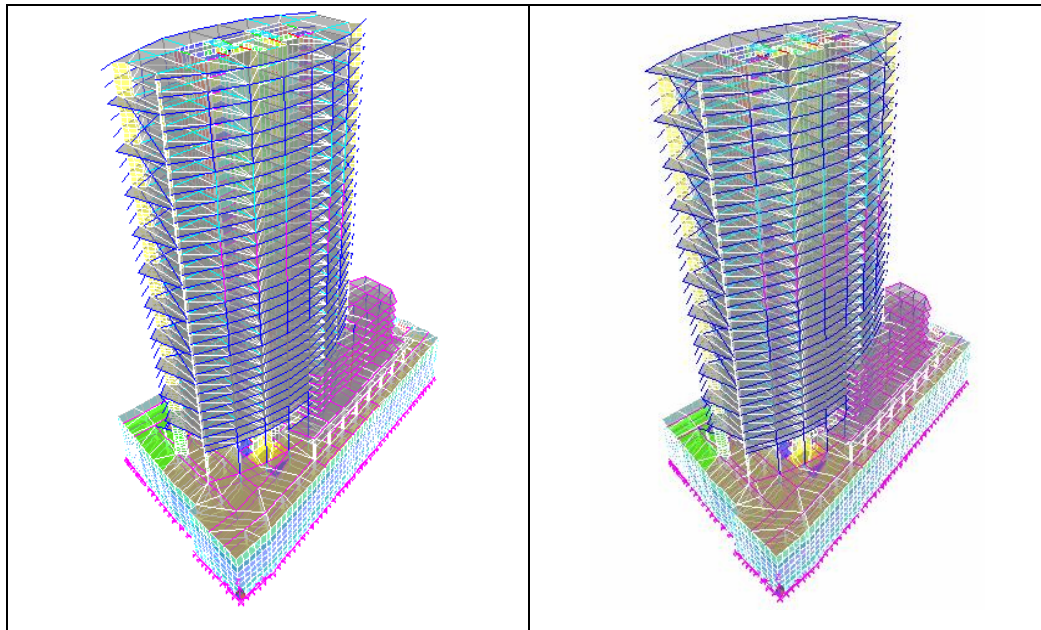


Figura 5.45. Modelo Elementos Finitos Torre Titanium. De izquierda a derecha: hasta Piso 37, hasta piso 39.

A partir de la creación de estos submodelos de elementos finitos, diferenciados por el aumento de un piso, se obtuvieron las frecuencias naturales y formas modales asociadas.

En las Figura 5.46 a Figura 5.53 se muestran las formas modales asociadas a cada submodelo.

La Tabla 5.12 entrega los valores de frecuencias asociadas a cada submodelo. La Tabla 5.13 entrega estos valores en términos de períodos naturales.

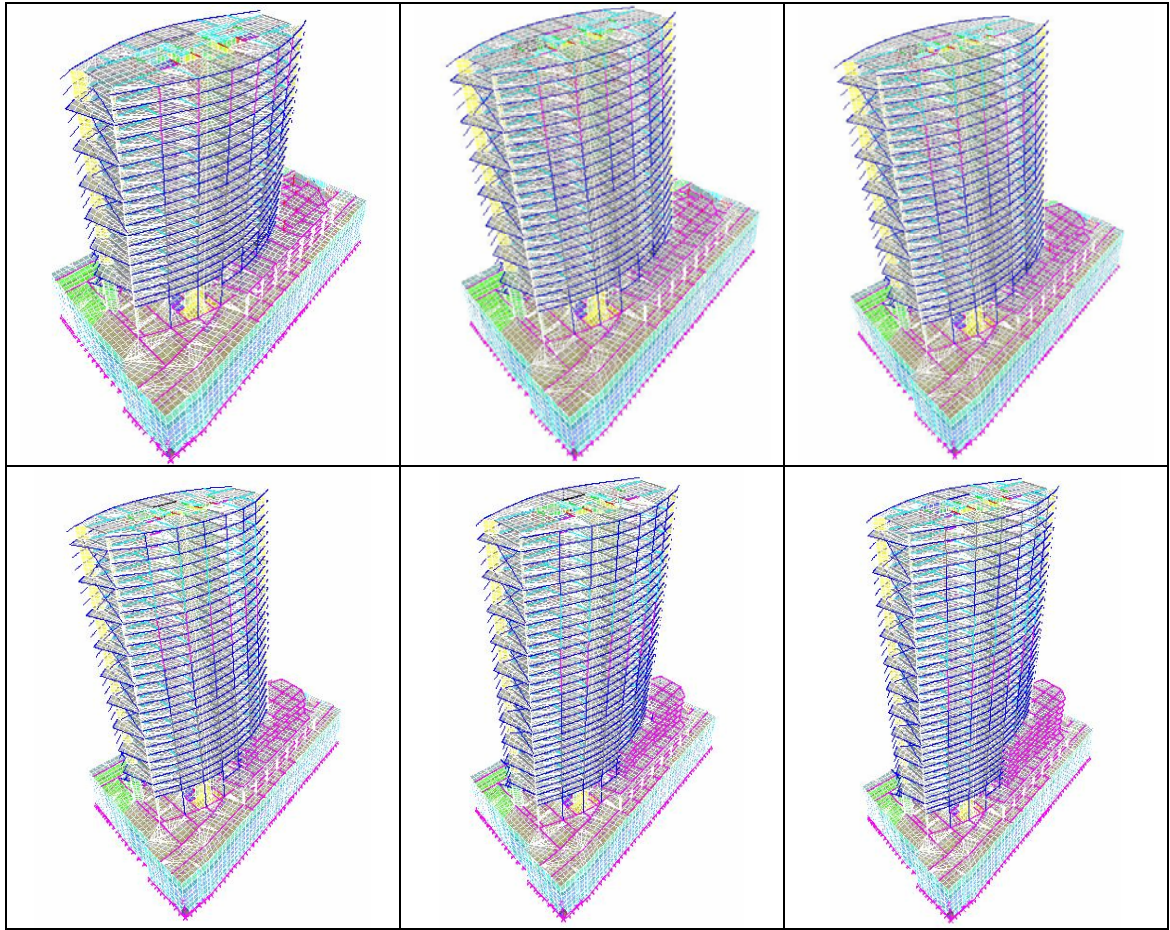


Figura 5.46. Formas modales de submodelos Edificio Titanium. Modo 1, De izquierda a derecha, de arriba abajo: Piso 25, Piso 27, Piso 30, Piso 33, Piso 36 y Piso 39.

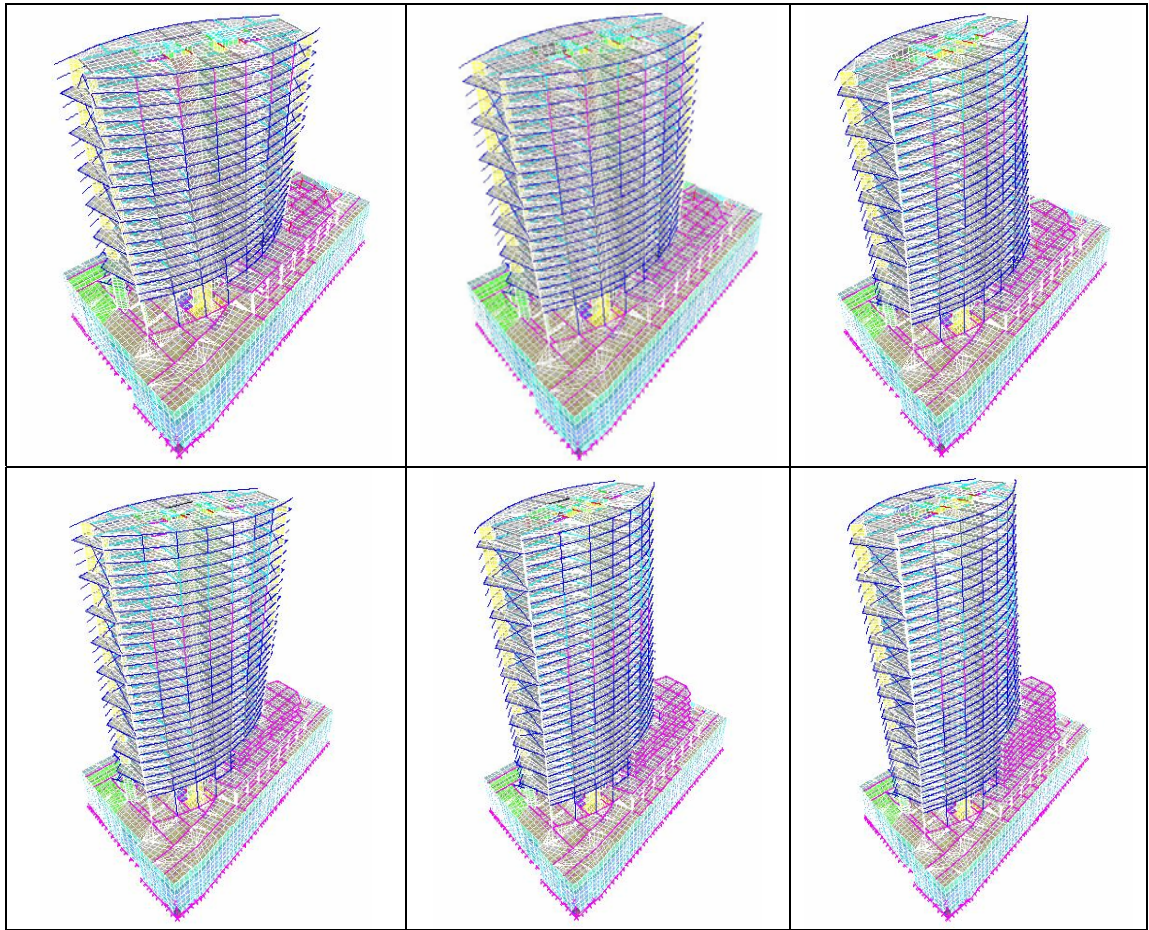


Figura 5.47. Formas modales de submodelos Edificio Titanium. Modo 2, De izquierda a derecha, de arriba abajo: Piso 25, Piso 27, Piso 30, Piso 33, Piso 36 y Piso 39.

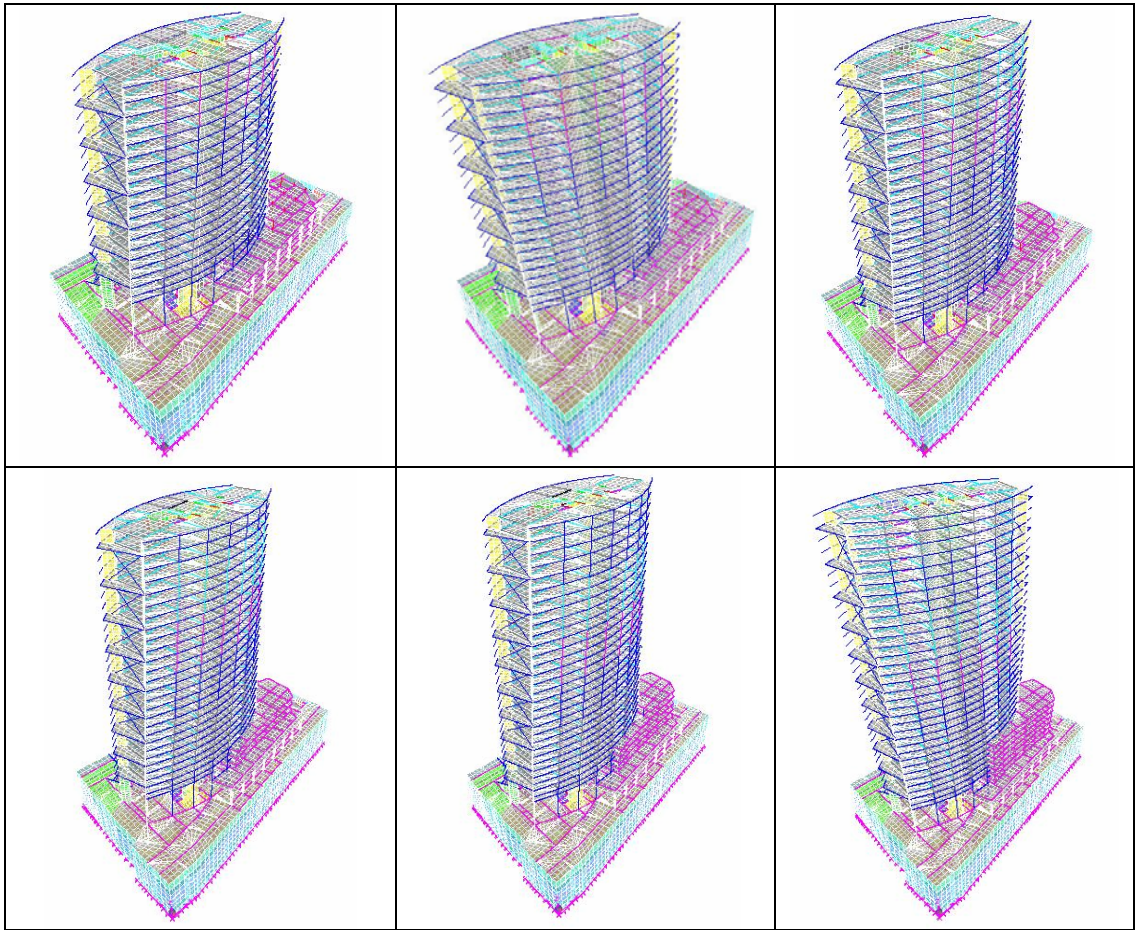


Figura 5.48. Formas modales de submodelos Edificio Titanium. Modo 3, De izquierda a derecha, de arriba abajo: Piso 25, Piso 27, Piso 30, Piso 33, Piso 36 y Piso 39.

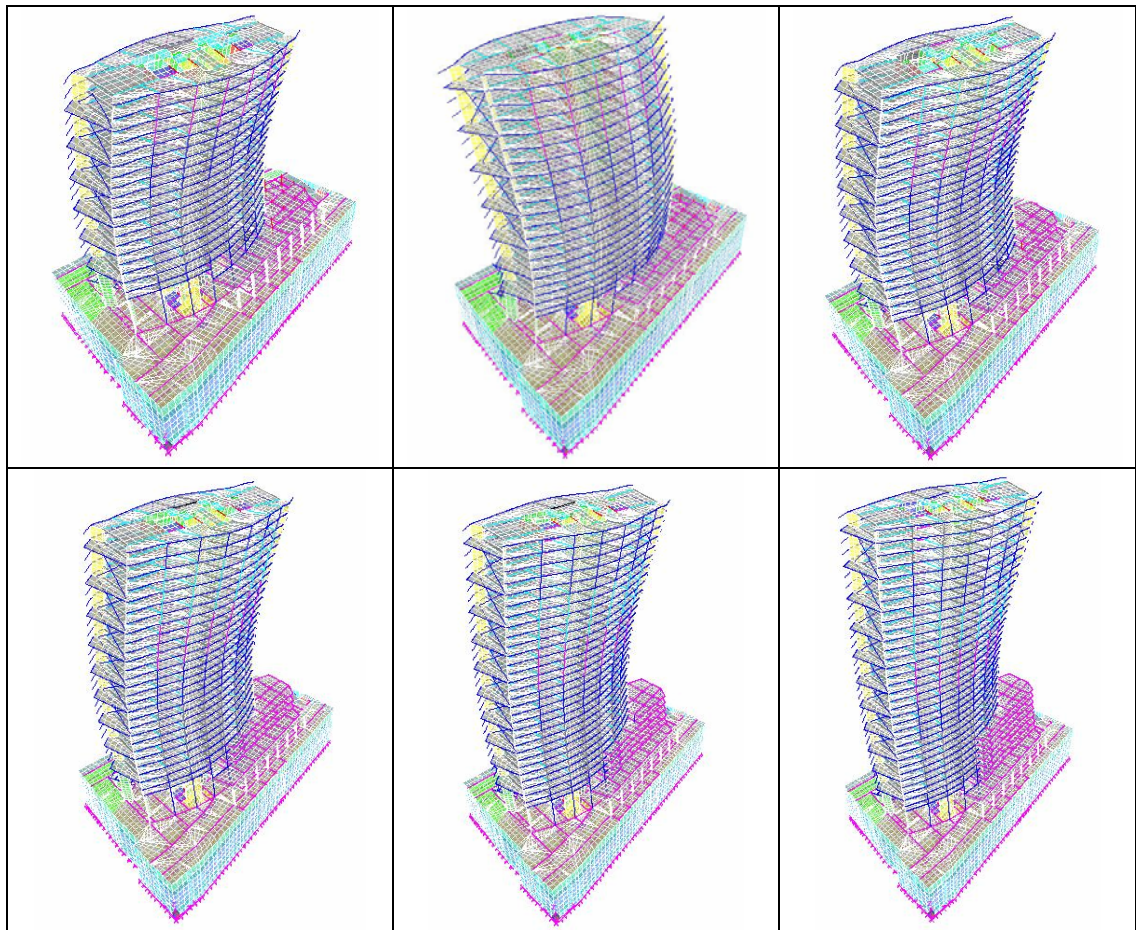


Figura 5.49. Formas modales de submodelos Edificio Titanium. Modo 4, De izquierda a derecha, de arriba abajo: Piso 25, Piso 27, Piso 30, Piso 33, Piso 36 y Piso 39.

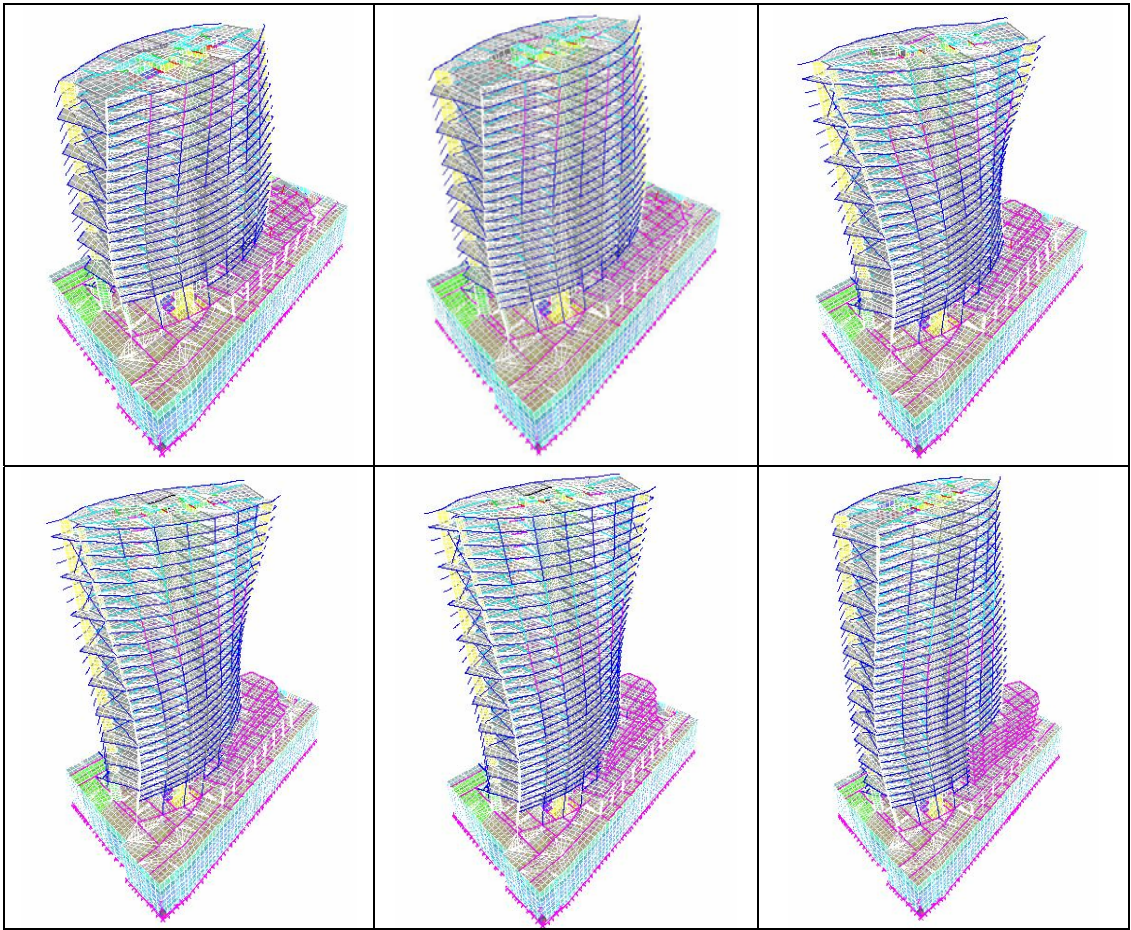


Figura 5.50. Formas modales de submodelos Edificio Titanium. Modo 5, De izquierda a derecha, de arriba abajo: Piso 25, Piso 27, Piso 30, Piso 33, Piso 36 y Piso 39.

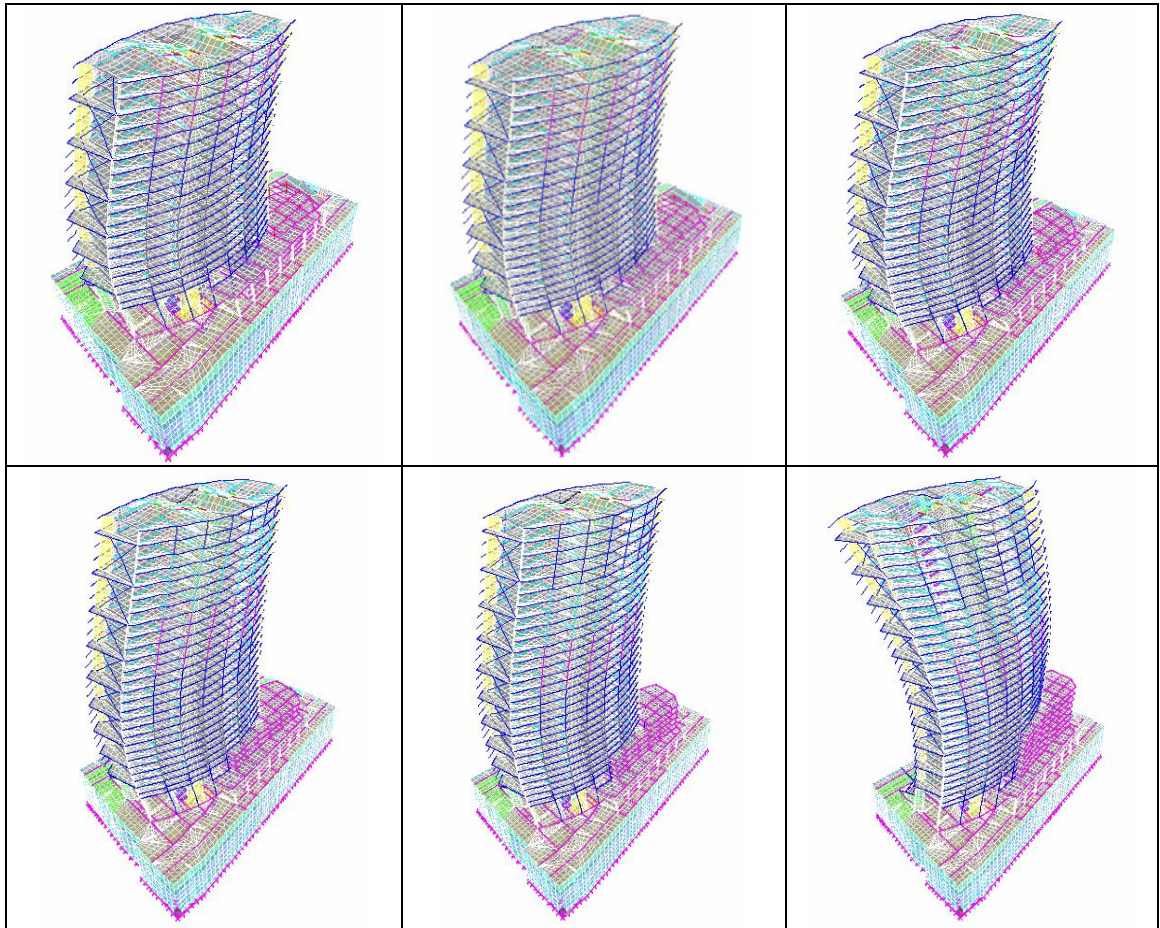


Figura 5.51. Formas modales de submodelos Edificio Titanium. Modo 6, De izquierda a derecha, de arriba abajo: Piso 25, Piso 27, Piso 30, Piso 33, Piso 36 y Piso 39.

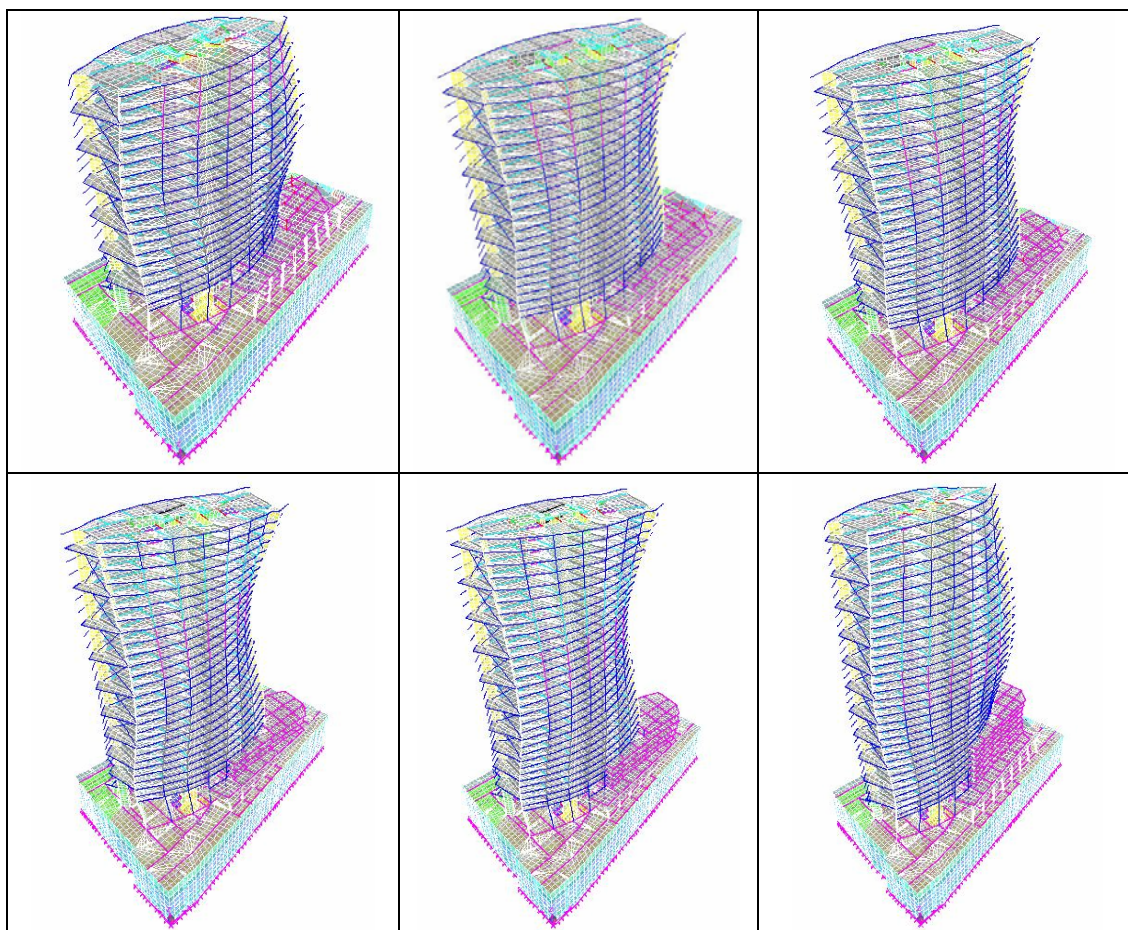


Figura 5.52. Formas modales de submodelos Edificio Titanium. Modo 7, De izquierda a derecha, de arriba abajo: Piso 25, Piso 27, Piso 30, Piso 33, Piso 36 y Piso 39.

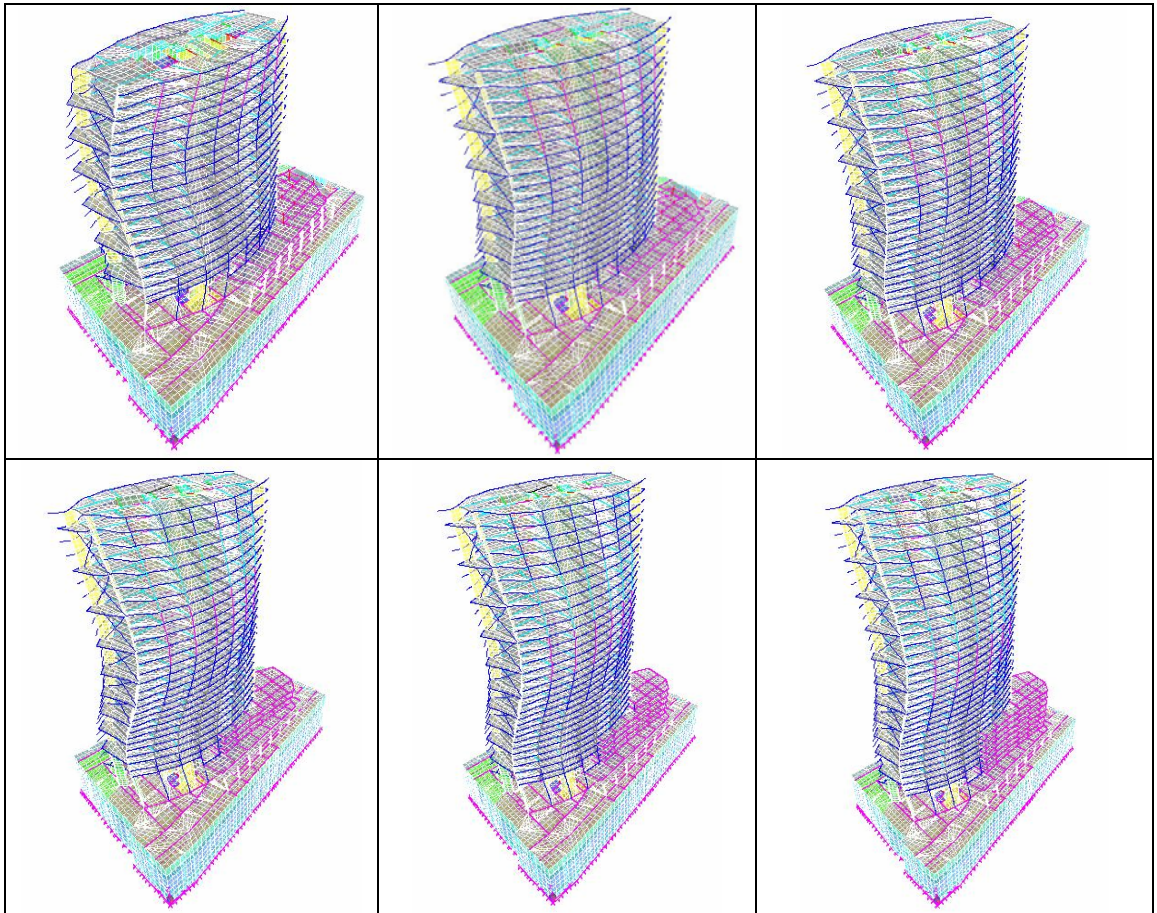


Figura 5.53. Formas modales de submodelos Edificio Titanium. Modo 8, De izquierda a derecha, de arriba abajo: Piso 25, Piso 27, Piso 30, Piso 33, Piso 36 y Piso 39.

Tabla 5.12. Frecuencias Naturales de Submodelos de Elementos Finitos. Edificio Titanium La Portada.

Modo	Frecuencia [Hz]									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Submodelo										
PISO 25	0.59	0.66	0.84	2.40	2.55	3.71	4.70	5.18	5.69	5.72
PISO 26	0.56	0.63	0.79	2.26	2.41	3.48	4.50	4.95	5.69	6.76
PISO 27	0.53	0.60	0.75	2.12	2.27	3.27	4.24	4.69	6.48	6.84
PISO 28	0.50	0.58	0.71	2.00	2.16	3.09	4.05	4.44	6.21	6.56
PISO 29	0.48	0.55	0.67	1.89	2.05	2.92	4.03	4.32	5.70	6.12
PISO 30	0.45	0.53	0.64	1.78	1.92	2.74	3.62	4.05	5.73	6.01
PISO 31	0.43	0.51	0.61	1.69	1.83	2.60	3.47	3.84	5.44	5.75
PISO 32	0.41	0.48	0.58	1.60	1.74	2.46	3.36	3.70	5.26	5.53
PISO 33	0.39	0.47	0.56	1.52	1.65	2.33	3.13	3.52	4.99	5.27
PISO 34	0.38	0.45	0.53	1.45	1.58	2.22	3.02	3.36	4.76	5.04
PISO 35	0.36	0.43	0.51	1.38	1.49	2.10	2.85	3.23	4.56	4.83
PISO 36	0.35	0.42	0.49	1.31	1.42	2.00	2.69	3.09	4.35	4.62
PISO 37	0.33	0.41	0.47	1.25	1.35	1.90	2.56	2.95	4.15	4.40
PISO 38	0.32	0.39	0.46	1.20	1.30	1.82	2.48	2.84	3.99	4.25
PISO 39	0.31	0.38	0.44	1.14	1.24	1.74	2.38	2.73	3.82	4.07

Tabla 5.13. Períodos Naturales de Submodelos de Elementos Finitos. Edificio Titanium La Portada.

Modo	Periodo [Seg.]									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Submodelo										
PISO 25	1.70	1.50	1.19	0.42	0.39	0.27	0.21	0.19	0.18	0.17
PISO 26	1.80	1.59	1.27	0.44	0.42	0.29	0.22	0.20	0.18	0.15
PISO 27	1.90	1.66	1.34	0.47	0.44	0.31	0.24	0.21	0.15	0.15
PISO 28	2.00	1.74	1.41	0.50	0.46	0.32	0.25	0.23	0.16	0.15
PISO 29	2.10	1.80	1.49	0.53	0.49	0.34	0.25	0.23	0.18	0.16
PISO 30	2.21	1.89	1.57	0.56	0.52	0.36	0.28	0.25	0.17	0.17
PISO 31	2.32	1.97	1.64	0.59	0.55	0.39	0.29	0.26	0.18	0.17
PISO 32	2.44	2.06	1.72	0.62	0.57	0.41	0.30	0.27	0.19	0.18
PISO 33	2.55	2.13	1.80	0.66	0.61	0.43	0.32	0.28	0.20	0.19
PISO 34	2.66	2.21	1.87	0.69	0.63	0.45	0.33	0.30	0.21	0.20
PISO 35	2.78	2.30	1.96	0.73	0.67	0.48	0.35	0.31	0.22	0.21
PISO 36	2.89	2.37	2.03	0.76	0.70	0.50	0.37	0.32	0.23	0.22
PISO 37	3.01	2.45	2.11	0.80	0.74	0.53	0.39	0.34	0.24	0.23
PISO 38	3.13	2.55	2.20	0.83	0.77	0.55	0.40	0.35	0.25	0.24
PISO 39	3.25	2.63	2.28	0.88	0.81	0.58	0.42	0.37	0.26	0.25

Los datos presentados anteriormente serán de utilizados para establecer una correlación entre estos modelos analíticos y los resultados obtenidos del monitoreo continuo de la estructura en estudio.

5.2.4 Equipos y sistema de monitoreo.

Dentro de los objetivos planteados en esta tesis, se encuentra la de monitorear de forma continua el edificio Titanium en proceso constructivo.

Para esto fue necesario la instalación de una red de monitoreo continuo dentro del edificio.

Esta red se compone de tres partes fundamentales:

- a) Sensores de aceleración (acelerómetros).
- b) Sistema de adquisición de datos (*Logbook*).
- c) Alimentación (Batería y mantenedor de carga)

El acelerómetro utilizado en la red de monitoreo continuo es de tipo masa-resorte usando capacitancia transductora y regeneración electromagnética. Los acelerómetros son de marca *Kinematics*, modelo Episensor ES-U.

Este tipo de sensor es un acelerómetro de registro uniaxial, que puede ser utilizado de forma horizontal o vertical.

Si bien trabaja en un rango de amplificación de 0,25 [g] a 4,00 [g], para la red de monitoreo todos los sensores fueron configurados para una amplificación de 0,25 [g], con el fin de realizar el análisis para una excitación de tipo ambiental.

El inconveniente en este caso es que en caso de haber un movimiento sísmico o golpe cercano al sensor que supere el valor máximo medible por el acelerómetro (0,25 [g]), se generará saturación en los valores que reporte el sensor y por ende no podrán ser considerados en el análisis.

Sin embargo, la mayoría del período de monitoreo no se registró saturación considerable en los acelerómetros.

En la Tabla 5.14 se describen algunas especificaciones técnicas del sensor.

Tabla 5.14. Especificaciones técnicas Epi-Sensor ES-U.

Parámetro	Valor	Unidades
Rango de Medición	0,25-0,5-1-2-4	[g]
Dimensiones	55 x 65 x 97	[mm]
Peso	0,35	[kg]

El sistema de adquisición de datos almacena los datos obtenidos por los acelerómetros en unidades de voltaje en función del tiempo.

Estas series de tiempo son procesadas luego para obtener las aceleraciones en unidades de [g] por medio de una constante generadora, dependiente de cada sensor.

Este sistema utiliza una tarjeta de almacenamiento tipo Compact Flash de 2GB, que permite almacenar hasta 3 semanas de registros, a una tasa de 100 muestras por segundo ($F_s = 100$).

La red de monitoreo es mantenida por una batería de ciclo profundo de 12[V] y 55[A], la que a su vez es recargada mediante un mantenedor.

Todo este sistema se encuentra instalado físicamente en el Piso 20 del edificio Titanium La Portada, Figura 5.54 y Figura 5. 55.

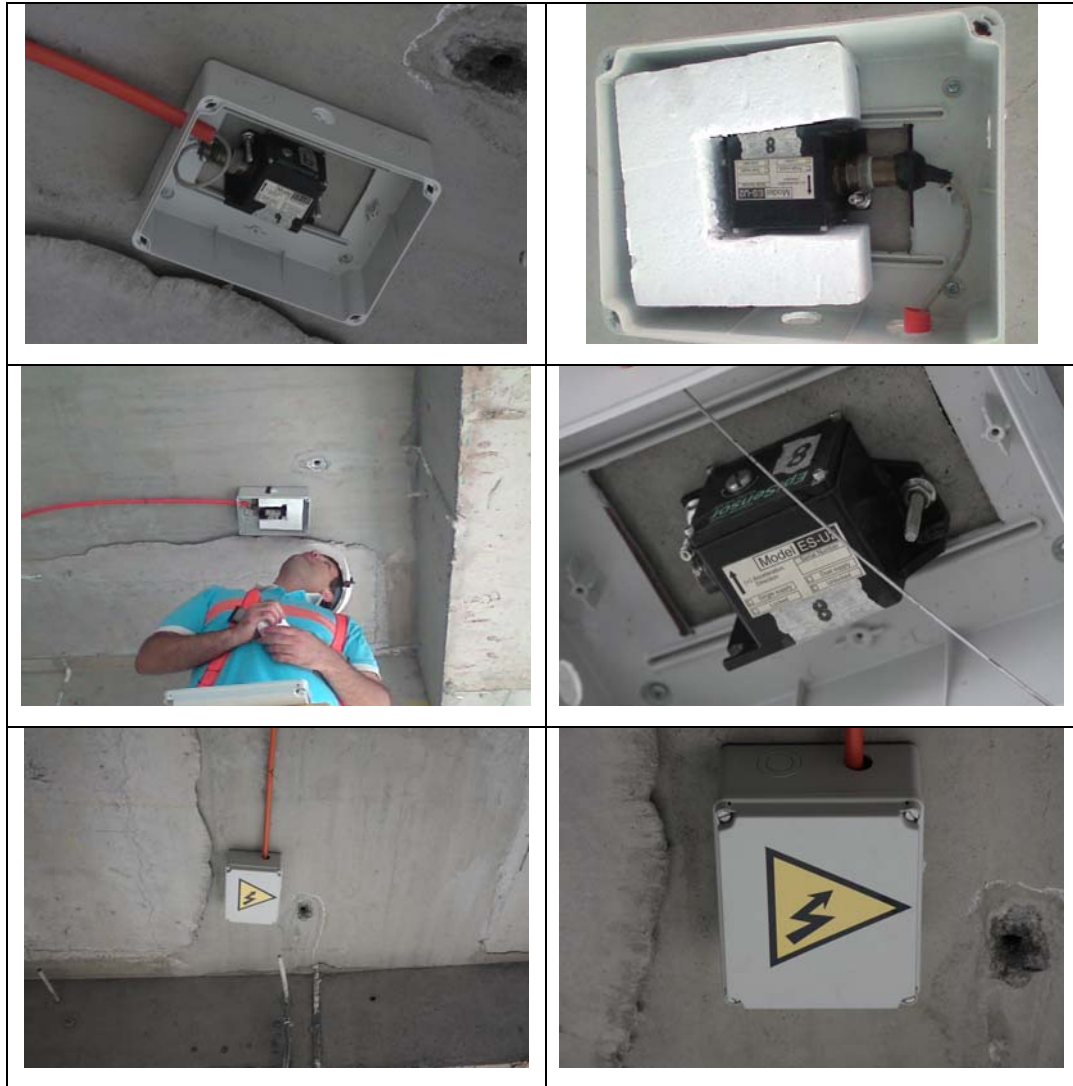


Figura 5.54. Instalaciones de la Red de Monitoreo de micro vibraciones al interior del edificio Titanium La Portada. Piso 20. Fecha: 13 de Agosto 2008.



**Figura 5. 55. Sistema de adquisición de datos. Edificio Titanium La Portada. Piso 20
Fecha: 13 de Agosto 2008.**

Para la red de monitoreo se utilizó un arreglo de 3 sensores en planta sobre el cielo del piso 20, configurándose dos sensores transversales, dirección norte-sur y uno longitudinal en dirección oriente poniente, como se muestra esquemáticamente en las Figura 5.56 y Figura 5. 57.

Esta disposición permite obtener la dirección predominante de la forma modal en planta para este piso, ya sea longitudinal, transversal, torsional o una combinación de éstas.

En la Tabla 5.15 se muestran las propiedades dinámicas de los sensores utilizados

Tabla 5.15. Propiedades dinámicas y ubicación sensores, red de monitoreo.

Sensor	Constante generadora [volts/g]	Frecuencia [Hz]	Amortig. β [%]	Ubicación	Orientacion
EPI-1	9.9824	198	70	Oriente	N-S
EPI-2	9.9774	206	70	Norte	E-W
EPI-3	9.9697	206	70	Poniente	N-S

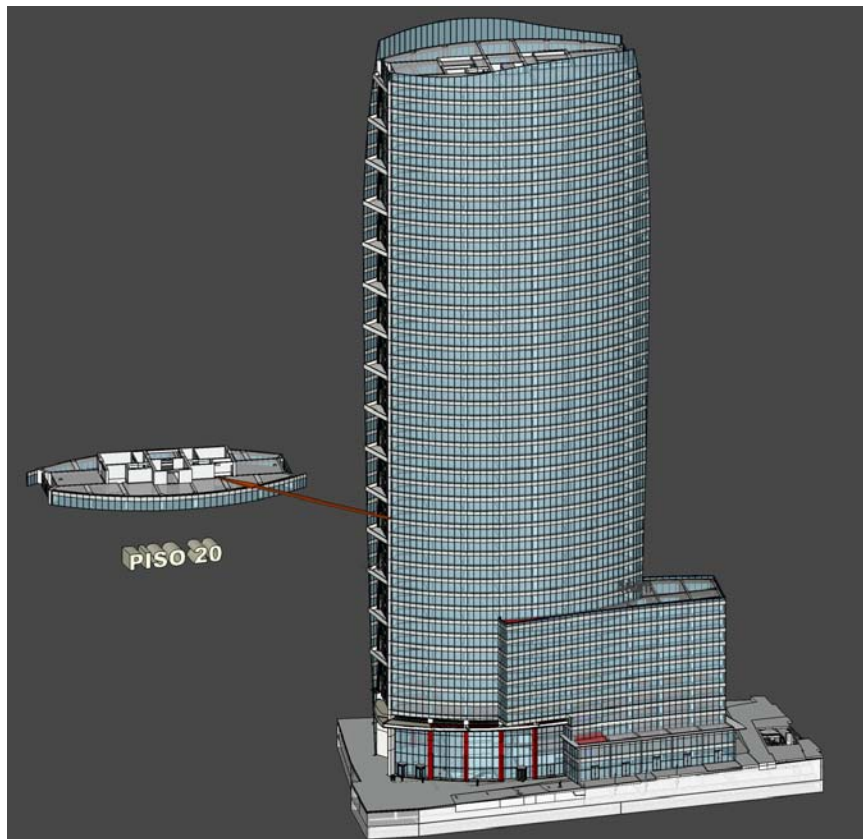


Figura 5.56. Esquema ubicación de la red de monitoreo continuo, con respecto al edificio terminado.



Figura 5. 57. Ubicación y orientación de sensores (EPI) y sistema de adquisición de datos (*Logbook*) en piso 20 del edificio Titanium La Portada.

5.3 Análisis de las series de tiempo y espectros de densidad de potencia del monitoreo continuo de la estructura.

La obtención de series de tiempo continua^{5.6} permitió definir la banda que se utilizó para realizar el análisis.

De esta forma, previa experiencia anterior con el análisis de otras estructuras [LAZCANO, 2008], se asumió que la estructura no sufría cambios importantes en la variación de sus propiedades dinámicas en tramos de 10 minutos, es decir, que la estructura se comportaba lineal-elástica en este lapso de tiempo, y por lo tanto era

^{5.6} El sistema de adquisición de datos almacenaba registros continuos de 6 horas de duración, con una frecuencia de muestreo de 100, teniéndose una perdida despreciable entre el término de un registro y el comienzo del siguiente.

posible utilizar el método del Sub-Espacio Estocástico (SSI) como método de identificación de propiedades modales, asumiendo la hipótesis anterior.

De igual forma, se analizaron las series de tiempo y espectros de potencia de cada registro de 6 horas, con varios objetivos, entre los que destacan:

- Identificar posibles fuentes de saturación.
- Identificar algún problema con el nivel de amplificación.
- Observar variaciones diarias de los valores máximos de aceleración.
- Detectar pequeños movimientos sísmicos.
- Observar la importancia de las frecuencias naturales en cada etapa del proceso constructivo
- Identificar ciclos diarios de excitación, dados por las cargas operacionales de construcción y ocupación de la obra.

A continuación se muestran algunos gráficos relevantes de comentar, correspondientes a series de tiempo y sus respectivos espectros de potencia en la etapa inicial del monitoreo.

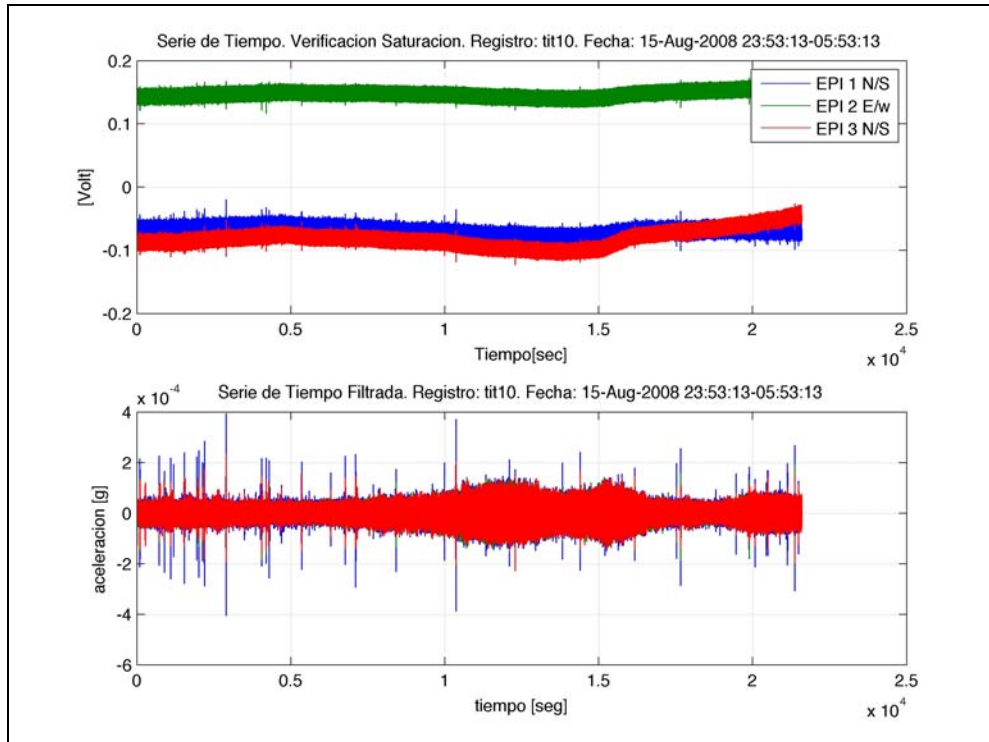


Figura 5.58. Verificación de saturación en red de monitoreo y Serie de tiempo. Duración: 6 horas. Amplificación: x10. Fecha: del 15-08-2008 23:53 al 16-08-2008 05:13. Piso 20, Edificio Titanium La Portada.

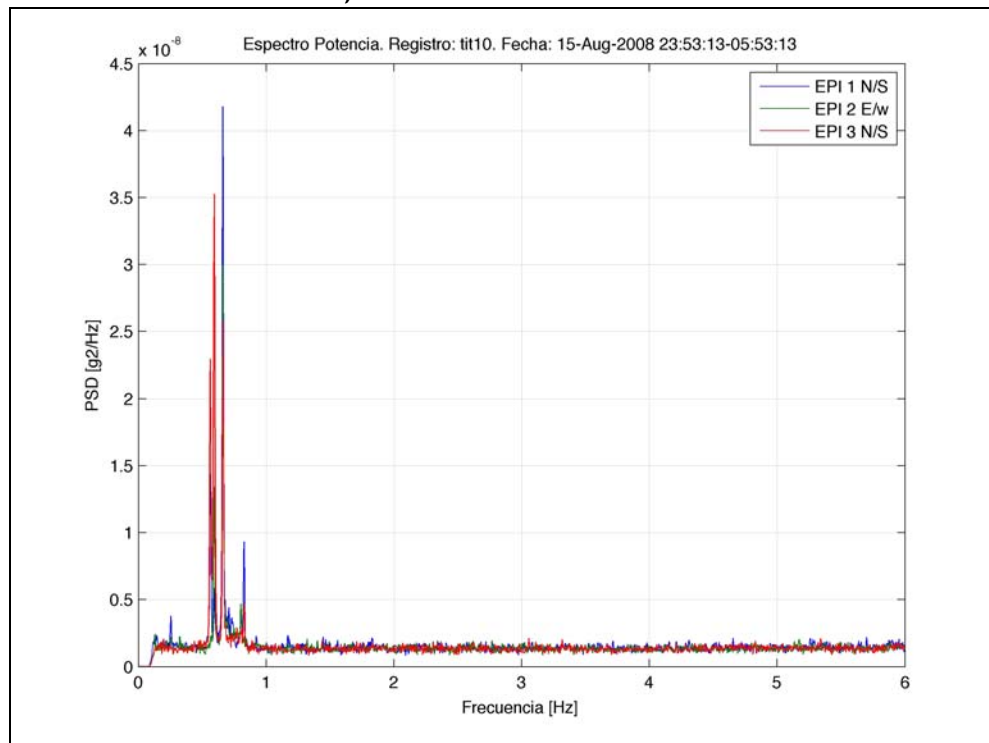


Figura 5.59. Espectro de potencia de la serie de tiempo del registro del 15-08-2008 23:53 al 16-08-2008 05:13. Duración 6 horas. Amplificación: x10. Piso 20, Edificio Titanium La Portada.

Debido a que el nivel de excitación durante la noche, tal como se puede apreciar en las Figura 5.58 y Figura 5.59 era muy baja, se generaba un levantamiento en el espectro de potencia debido a que el ruido eléctrico del sistema comenzaba a generar una energía comparativa con el nivel de excitación.

Para mitigar este efecto, se resolvió aumentar, luego de los primeros 6 días de medición, el nivel de amplificación, de 10 a 100 veces, obteniéndose mejores resultados para los registros de noche, como se aprecia en uno de los resultados obtenidos del monitoreo, Figura 5.60.

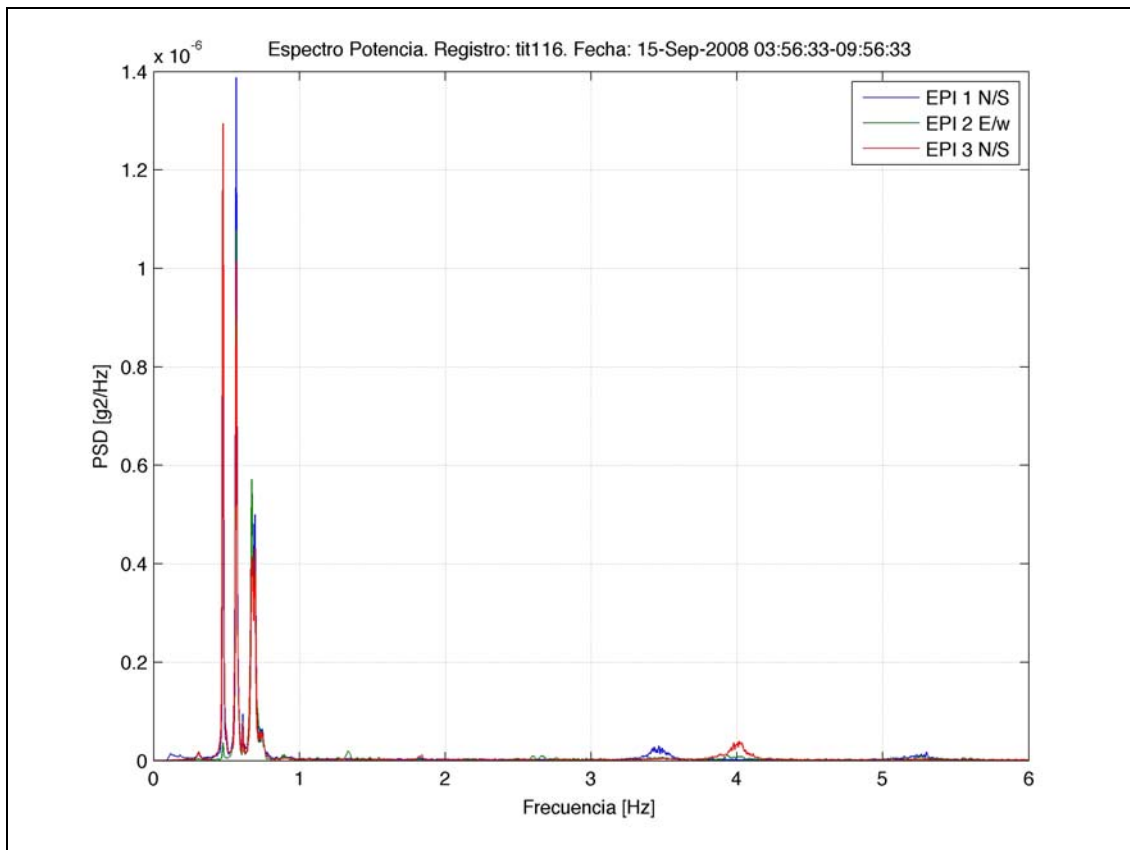


Figura 5.60. Espectro de potencia de la serie de tiempo del registro del 15-09-2008 03:56 al 15-08-2008 09:56. Duración 6 horas. Amplificación: x100. Piso 20, Edificio Titanium La Portada.

Sin embargo, se tenía la incerteza que durante el día se generaran vibraciones forzadas o registros sísmicos, produciéndose saturación en los acelerómetros.

Como se verá mas adelante, estos efectos tienen solución mediante la introducción de filtros en el procesamiento de datos.

Para el análisis de los datos obtenidos, se programaron rutinas en el *software* computacional *MatLab* (V.2007a), las que analizaban los registros cada 10 minutos (asumiendo comportamiento lineal de la estructura global en este intervalo de tiempo) a 100 muestras por segundo, reportando la siguiente información:

- i. Serie de tiempo en unidades de [g].
- ii. Espectro de Densidad de Potencia.
- iii. Diagrama de estabilización global (Método SSI).
- iv. Evolución de Parámetros Dinámicos según orden del modelo (Método SSI).

A continuación se muestra un ejemplo de cada uno de los gráficos enumerados anteriormente.

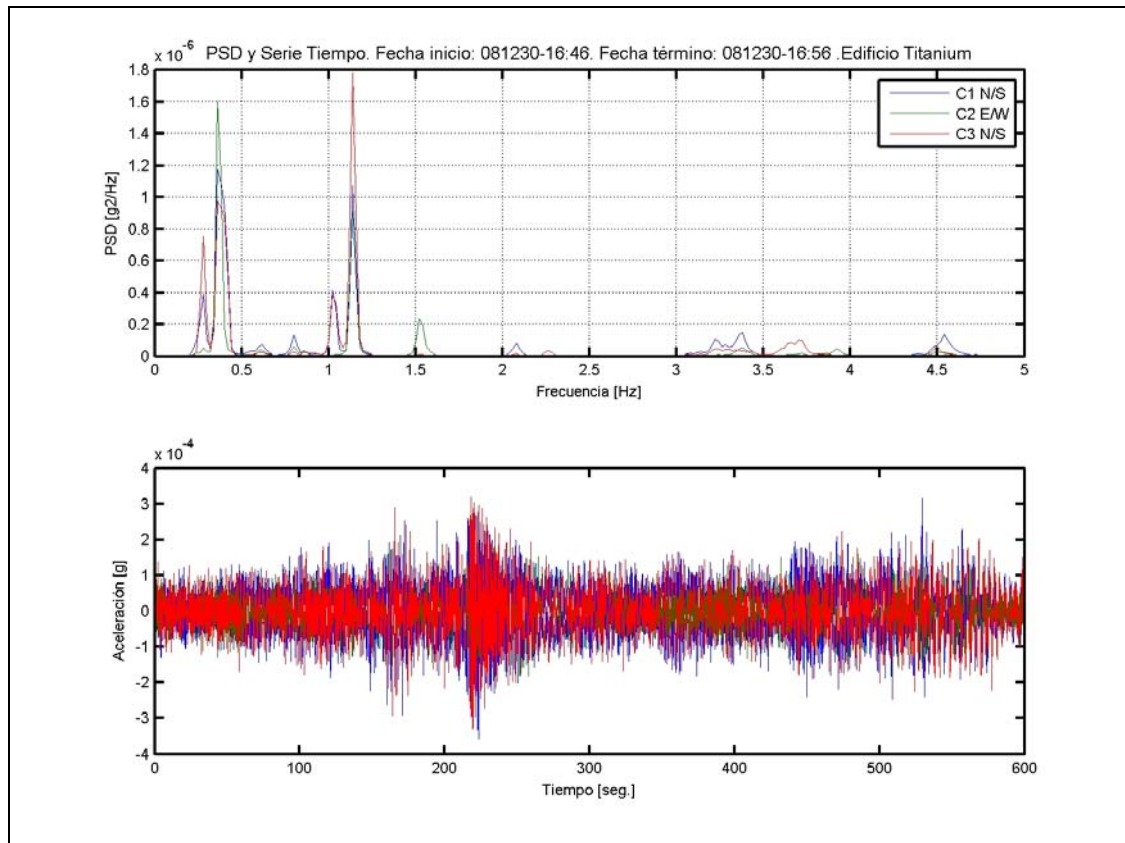


Figura 5. 61. Serie de Tiempo y Espectro de Densidad de Potencia. Monitoreo Continuo. Inicio Registro: 20081230 16:46 hrs. Término Registro: 20081230 16:56 hrs. Edificio Titanium La Portada.

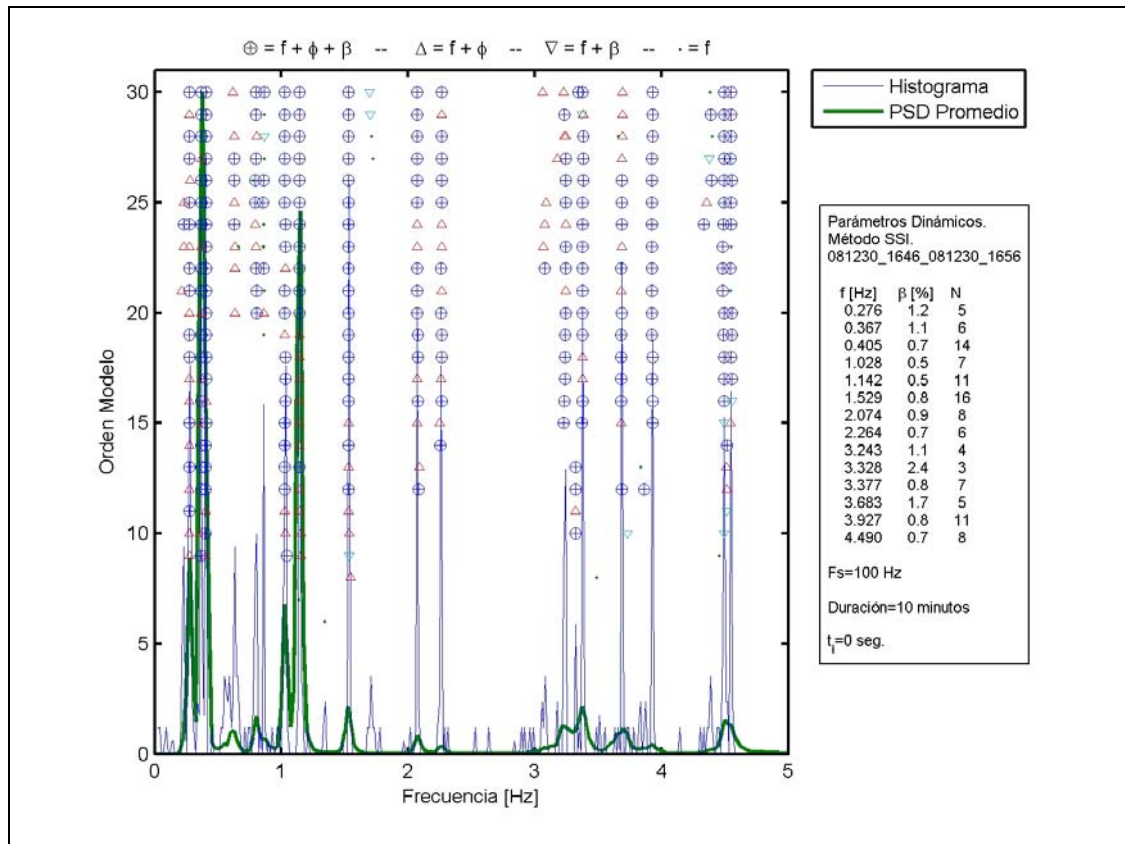


Figura 5. 62. Diagrama de estabilización para identificación de parámetros dinámicos mediante método del Sub-Espacio Estocástico. Monitoreo Continuo. Inicio Registro: 20081230 16:46 hrs. Término Registro: 20081230 16:56 hrs. Edificio Titanium La Portada.

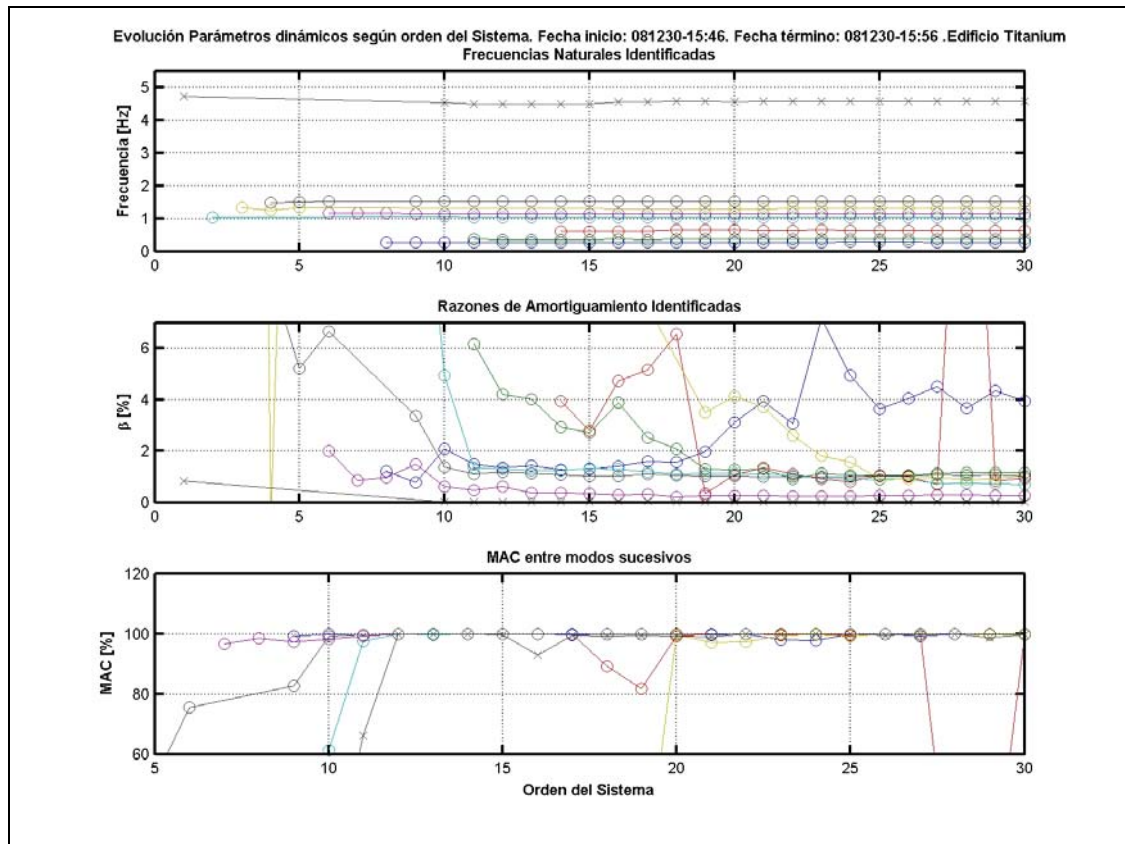


Figura 5. 63. Diagrama de evolución de parámetros dinámicos según orden del sistema Espacio-Estado. Método del Sub-Espacio Estocástico. Monitoreo Continuo. Inicio Registro: 20081230 16:46 hrs. Término Registro: 20081230 16:56 hrs. Edificio Titanium La Portada.

Debido a que la cantidad de información es muy amplia en términos de la cantidad de gráficos generados en el periodo de monitoreo (5 meses aproximadamente, separados en registros continuos de 10 minutos equivalentes a 200.000 gráficos) se presentan solamente algunos resultados correspondientes a series de tiempo y espectros de densidad de potencia en el **APENDICE D**.

Sin embargo los resultados serán utilizados posteriormente para establecer la variación en el tiempo de las propiedades dinámicas, así como el análisis de patrones característicos que generan variaciones importantes dentro de la estructura.

De las figuras correspondientes al **APENDICE D**, se aprecia la diferencia en los niveles de excitación nocturnos y diurnos, siendo estos últimos mayores debido a que es durante el día donde se realizan la mayoría de las faenas de construcción, dejando faenas como el transporte de losetas y escaleras prefabricadas en el periodo nocturno.

Si bien el análisis de registros sísmicos se encuentran fuera de los alcances de esta investigación, es interesante mencionar que durante el monitoreo de la estructura se produjeron una secuencia importante de sismos en la zona central, entre el periodo comprendido entre el 18 y 20 de diciembre del 2008, contándose 13 eventos sísmicos en este período.

La información obtenida por el Servicio Sismológico del Departamento de Geofísica de la Universidad de Chile fue cotejada con los registros obtenidos a partir del monitoreo del edificio Titanium La Portada.

Cabe señalar que debido al nivel de amplificación con el que contaba el registro (100 veces) sumado al valor máximo medible del sensor, la mayoría de los registros presenta saturación para el reporte de máxima aceleración (P.A.).

Sin embargo es de interés en el comportamiento de la estructura, observar el tramo final del sismo (cola), ya que corresponde a la respuesta en vibraciones libres de esta, luego de una excitación de tipo impulsiva.

Entre la información importante que se puede extraer de este registro se encuentra el porcentaje de amortiguamiento (β) y las frecuencias naturales (f).

Existen métodos, como el denominado *Ibrahim Time Domain* (ITD, similar al SSI en su conceptualización teórica) para obtener los parámetros dinámicos a partir del

decaimiento libre de una estructura, pero se encuentran fuera del alcance de esta investigación.

Para profundizar en este tipo de métodos se puede consultar en [HERNANDEZ, 2009].

En la Tabla 5. 16 se muestra información relevante de los sismos producidos en este periodo de tiempo.

Tabla 5. 16. Eventos sísmicos. Periodo: 18 al 20 de diciembre de 2008. Fuente: Servicio Sismológico. Departamento de Geofísica Universidad de Chile

N	Fecha	Hora Local	Latitud	Longitud	Profundidad [km]	Magnitud (ML)
1	18-12-2008	18:19:28	-32 28' 33"	-71 54' 00"	24.0	5.9
2	18-12-2008	18:25:02	-32 29' 24"	-71 52' 37"	37.7	4.6
3	18-12-2008	18:50:28	-32 28' 44"	-72 04' 15"	25.1	5.5
4	19-12-2008	0:04:16	-32 29' 27"	-71 54' 50"	26.7	4.5
5	19-12-2008	4:30:06	-32 32' 20"	-72 01' 19"	12.0	5.1
6	19-12-2008	6:36:04	-32 27' 28"	-71 56' 56"	32.2	5.8
7	19-12-2008	10:57:30	-32 35' 02"	-71 51' 07"	13.8	5.1
8	19-12-2008	13:48:49	-32 35' 41"	-72 00' 21"	6.0	4.9
9	19-12-2008	14:43:26	-32 36' 43"	-71 49' 47"	29.5	4.2
10	19-12-2008	16:25:54	-32 34' 30"	-71 48' 21"	14.1	4.9
11	19-12-2008	18:33:10	-32 33' 07"	-71 57' 25"	32.0	4.4

A continuación se muestran las series de tiempo correspondientes a cada uno de los registros obtenidos a partir del monitoreo continuo del edificio.

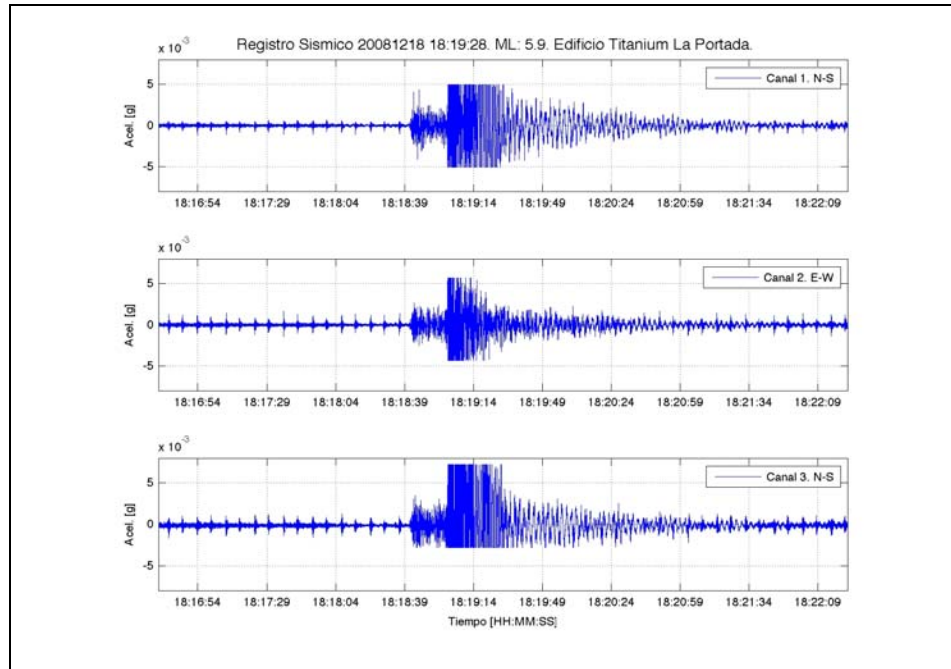


Figura 5. 64. Registro Sísmico. Fecha: 18-12-2008. Hora Local: 18:19:28. ML: 5.9. Piso 20, Edificio Titanium La Portada.

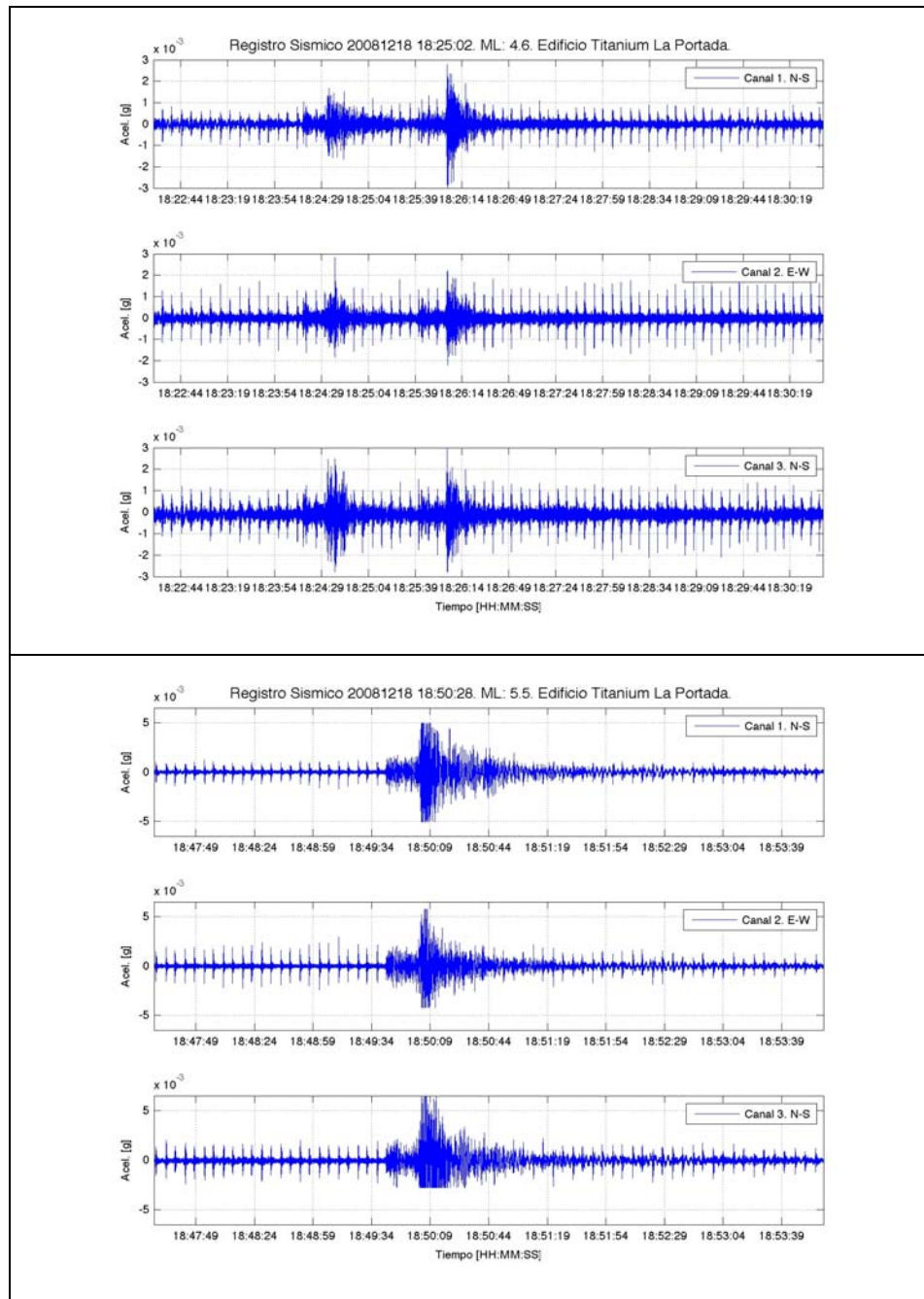


Figura 5. 65. Registros Sísmicos. De arriba a abajo Fecha: 18-12-2008. Hora Local: 18:25:02. ML: 4.6. Fecha: 18-12-2008. Hora Local: 18:50:28. ML: 5.5. Piso 20. Titanium.

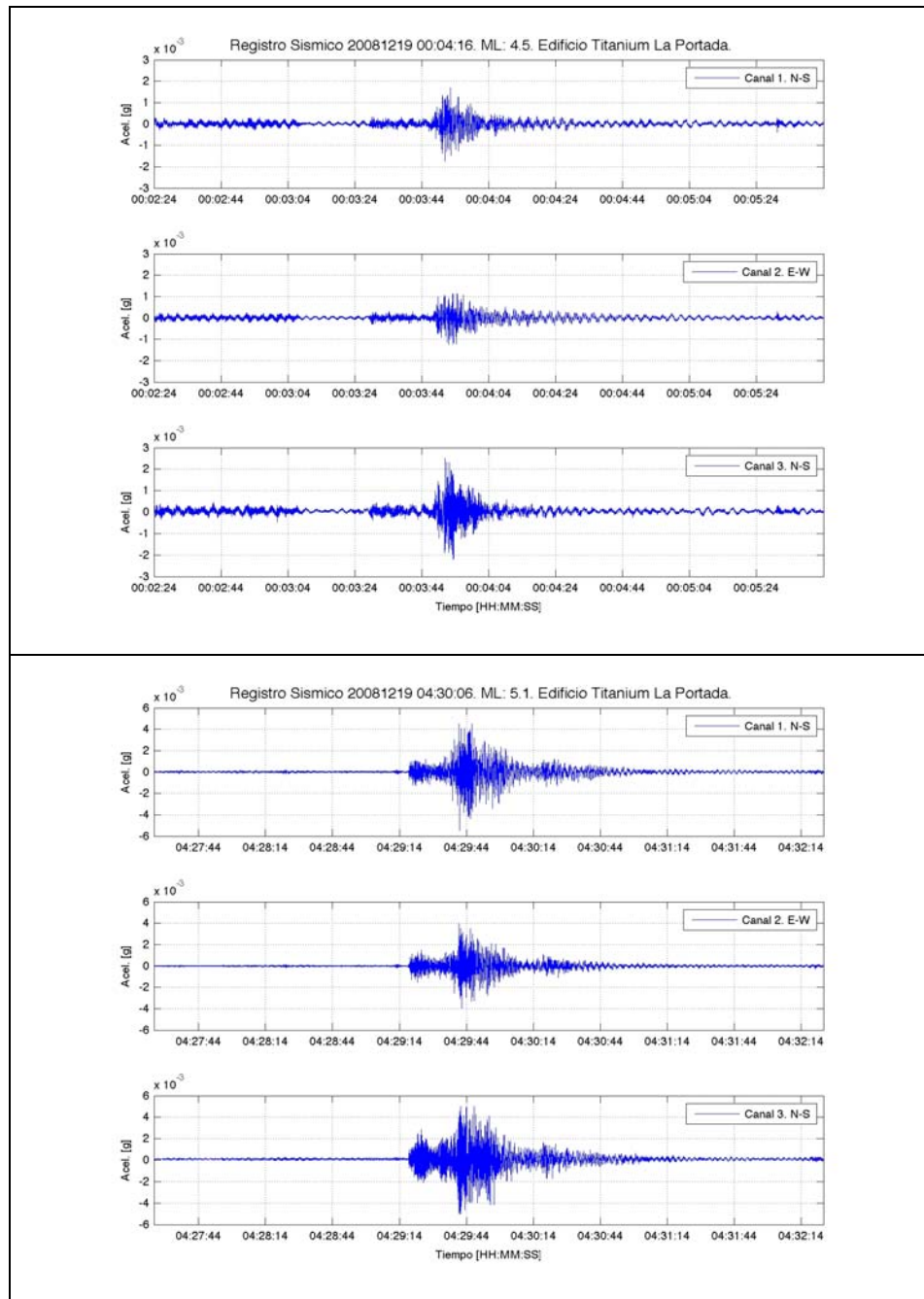


Figura 5. 66. Registros Sísmicos. De arriba a abajo Fecha: 19-12-2008. Hora Local: 00:04:16. ML: 4.5. Fecha: 19-12-2008. Hora Local: 04:30:06. ML: 5.1. Piso 20 Titanium

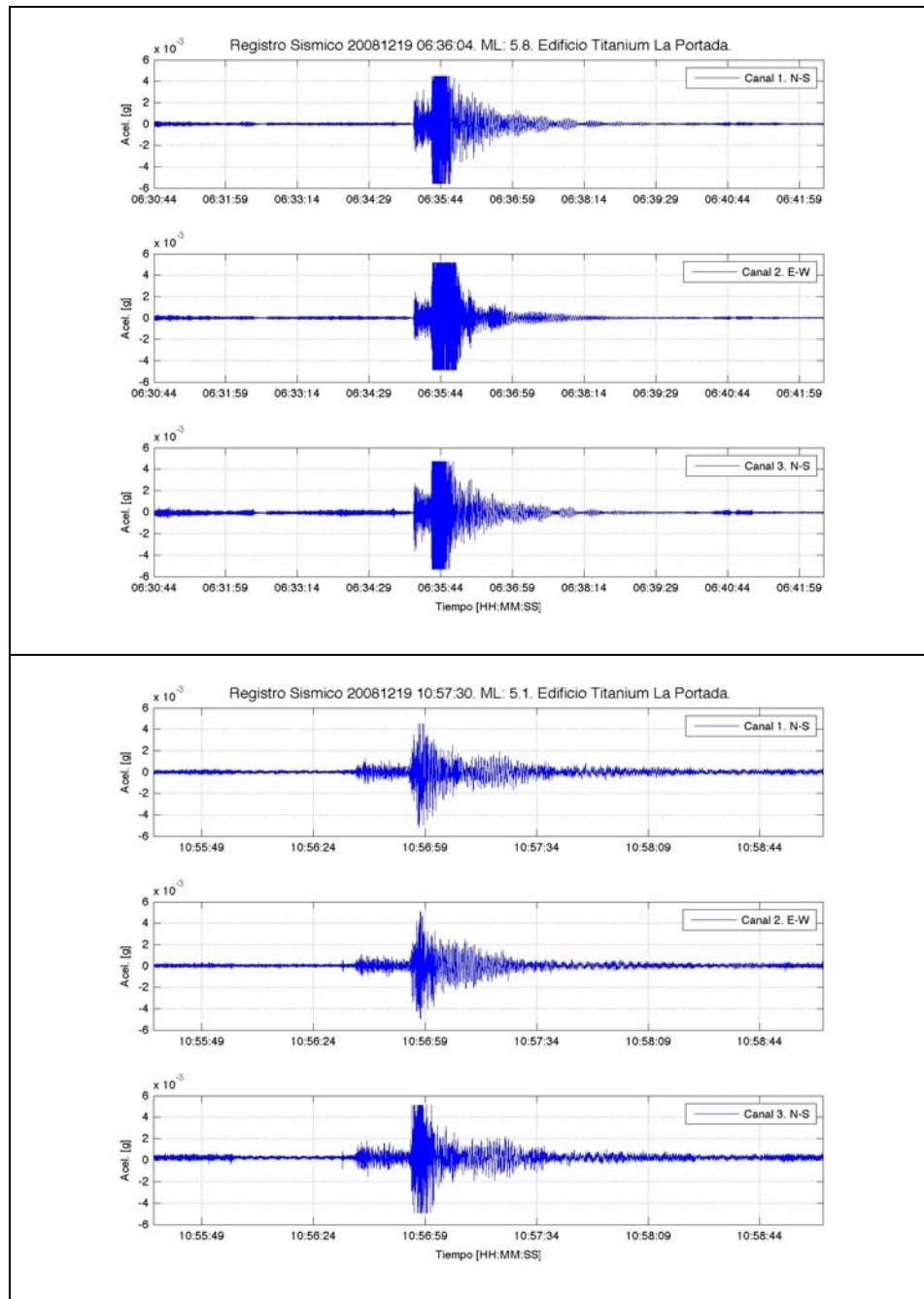


Figura 5. 67. Registros Sísmicos. De arriba a abajo Fecha: 19-12-2008. Hora Local: 06:36:04. ML: 5.8. Fecha: 19-12-2008. Hora Local: 10:57:30. ML: 5.1. Piso 20 Titanium

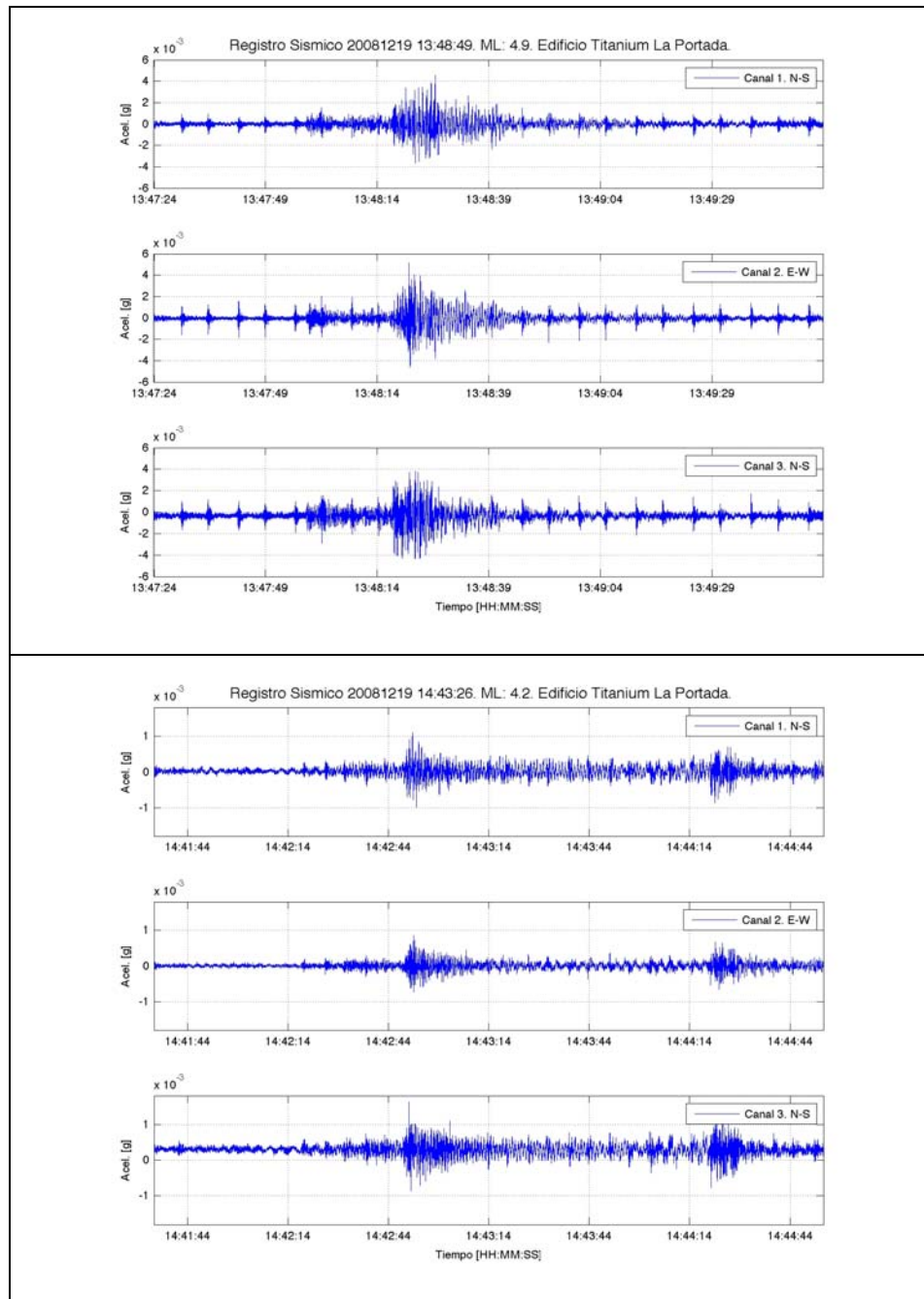


Figura 5. 68. Registros Sísmicos. De arriba a abajo Fecha: 19-12-2008. Hora Local: 13:48:49. ML: 4.9. Fecha: 19-12-2008. Hora Local: 14:43:26. ML: 4.2. Piso 20 Titanium

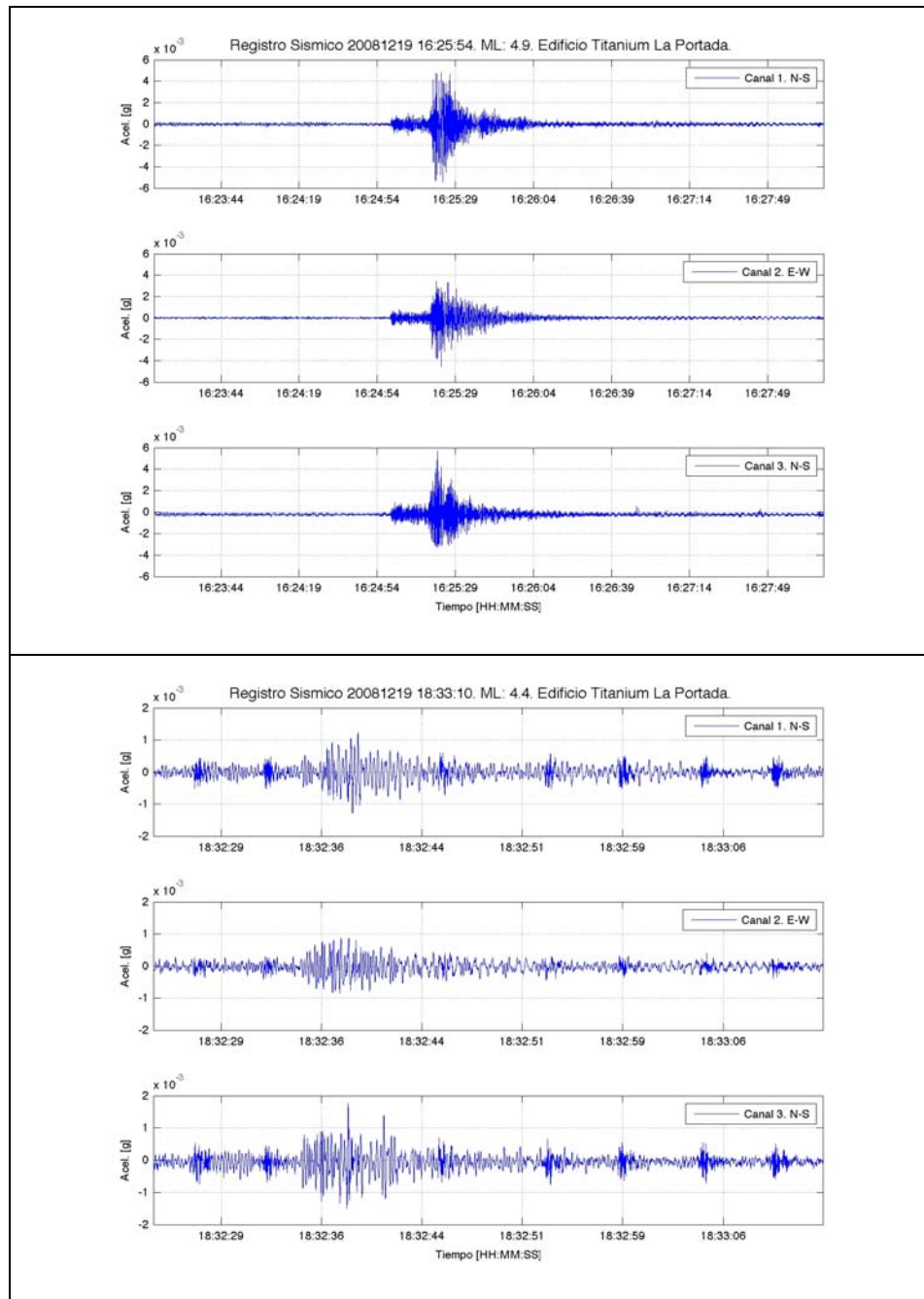


Figura 5. 69. Registros Sísmicos. De arriba a abajo Fecha: 19-12-2008. Hora Local: 16:25:54. ML: 4.9. Fecha: 19-12-2008. Hora Local: 18:33:10. ML: 4.4. Piso 20 Titanium.

Algunas observaciones importantes pueden hacerse a partir de la respuesta sísmica observada en el piso 20 del edificio Titanium La Portada:

- Dentro de algunos registros (registros 1, 2, 3, 8, 9 y 11 de la Tabla 5. 16) pueden observarse pulsos de excitación anexos a la respuesta sísmica. Estos pulsos corresponden a faenas de hormigonado, ya que estas se realizaban mediante bombeo, lo que producía una respuesta forzada de la estructura la que se encuentra bien caracterizada con un periodo que varía entre 4 y 6 segundos (0.16 a 0.25 [Hz]). Sin embargo esta respuesta es solo local de la estructura (especialmente de la losa), ya que la tubería de bombeo se encontraba cerca de la losa donde estaban instalados los sensores.
- A partir del decaimiento de la respuesta sísmica se puede observar la participación de más de un modo en la respuesta de la estructura.
- En la mayoría de los registros se observa claramente la diferenciación de la respuesta de la estructura frente al tramo de excitación de ondas P y ondas S, siendo estas últimas de mayor amplitud.
- En la mayoría de los registros se observa que la respuesta de la estructura, medida en el piso 20, es mayor en términos de aceleraciones en la dirección transversal (N-S) que corresponde a la dirección de la primera forma modal.

5.4 Análisis de resultados de las propiedades dinámicas de la estructura.

La obtención de parámetros dinámicos para las series de tiempo obtenidas de la red de monitoreo en el edificio Titanium, se realizó utilizando el método del Sub-Espacio Estocástico.

Como se explicó en el Capítulo 4, este método posee variantes, dependiendo de las matrices de peso utilizadas para la ponderación de la matriz de proyección ortogonal.

Investigaciones previas desarrolladas en este mismo campo, [*LAZCANO, 2008*], [*CASTILLO, 2005*], [*VALDES, 2004*], entre otros, utilizaban el algoritmo N4SID para sistemas determinísticos-estocásticos.

Si bien este método es robusto, ya que discrimina en la elección de las matrices de peso, el tiempo de procesamiento es considerablemente mayor que los algoritmos *UPC*, *PC* o *CVA* (estudiados en el Capítulo 4), los cuales entregan de igual forma resultados muy confiables [*VAN OVERSCHEE, 1996*].

Debido a la gran cantidad de datos con los que se contaba, se decidió realizar el procesamiento realizando un análisis comparativo entre los diferentes algoritmos, poniendo como referencia de los datos entregados al algoritmo N4SID, y como variable el tiempo de procesamiento.

Se llegó a la conclusión que el mejor algoritmo, en términos de resultados y tiempo de procesamiento corresponde al *CVA*, con el que se realizó el procesamiento de datos.

Los registros analizados se segmentaron en sub-registros de 10 minutos cada uno, almacenando para éstos frecuencias naturales, razones de amortiguamiento y formas modales en una matriz.

Se presentan algunos gráficos del periodo de monitoreo, correspondientes diagramas de estabilización y evolución de parámetros dinámicos en función del orden del modelo en el **APENDICE E**.

Cabe señalar que si bien es posible obtener las formas modales, estas no se entregan de forma explícita, debido a que el arreglo de los sensores se encontraba sólo en una planta del edificio, con lo que no es posible tener la forma modal de forma espacial. Para la obtención de dicho parámetro se hace necesario un arreglo mayor de sensores que permita una visualización gráfica de la forma operacional de la estructura.

5.5 Análisis de la variación de las propiedades dinámicas del Edificio Titanium La Portada

En esta sección se presentan los resultados obtenidos del monitoreo continuo del edificio en proceso constructivo Titanium La Portada.

Estos resultados corresponden a la variación de las frecuencias naturales y razón de amortiguamiento.

Este monitoreo identificó 13 frecuencias naturales con sus respectivas razones de amortiguamiento. De estas frecuencias, los modos superiores (modo 10 a 13) sólo pudieron ser identificados al final del periodo de monitoreo donde presentaban mayor energía.

Las frecuencias y razones de amortiguamiento fueron obtenidas cada 10 minutos para todo el periodo de monitoreo.

A continuación se presenta la variación de frecuencias, Figura 5.70 a Figura 5. 84 y razones de amortiguamientos, Figura 5.85 a Figura 5. 98, para todos el periodo de monitoreo con muestras de 10 minutos, correspondientes a las series de tiempo, para los diferentes modos identificados mediante el método *SSI-CVA*.

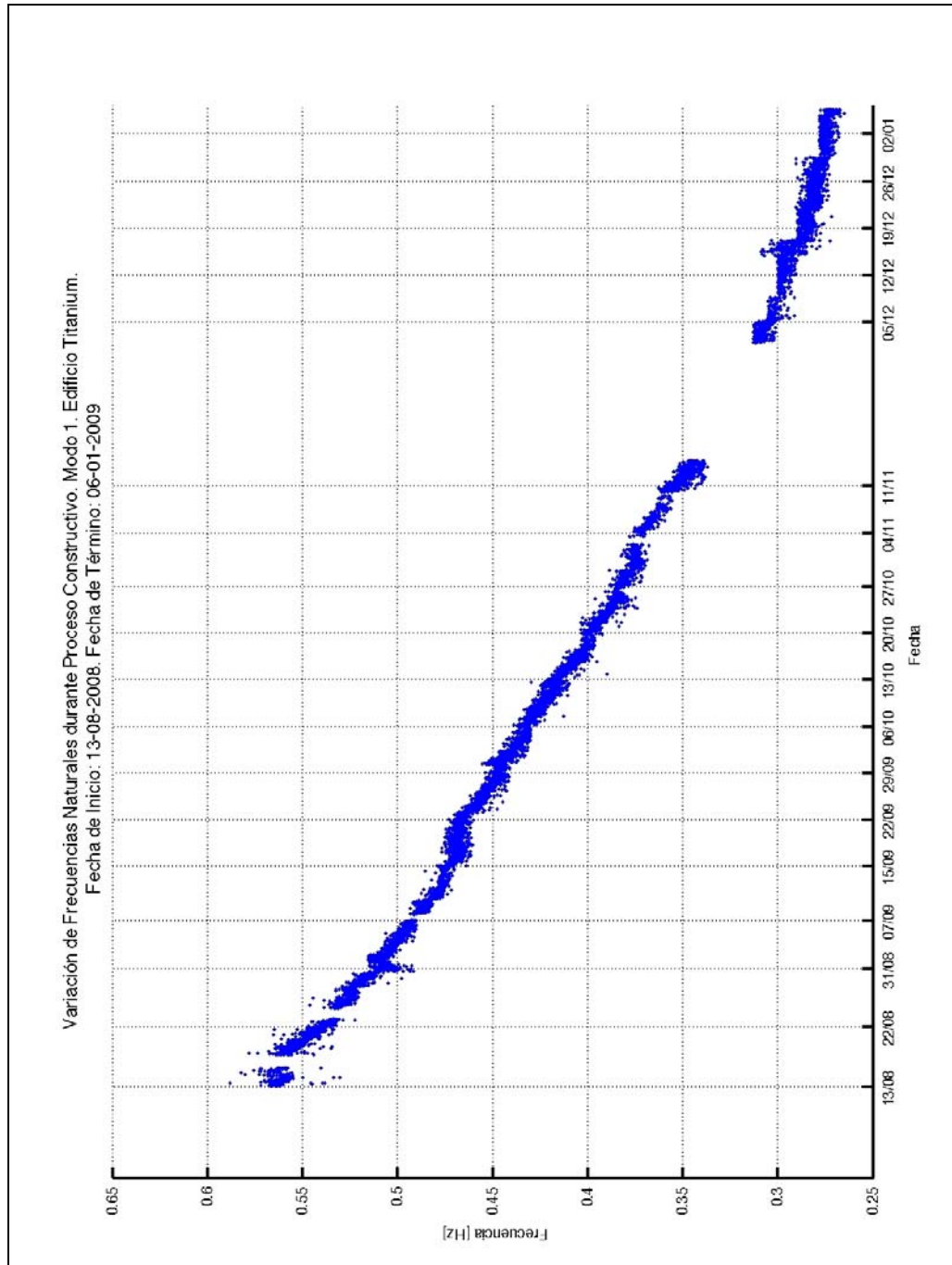


Figura 5.70. Variación temporal de frecuencia natural. Modo 1. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.

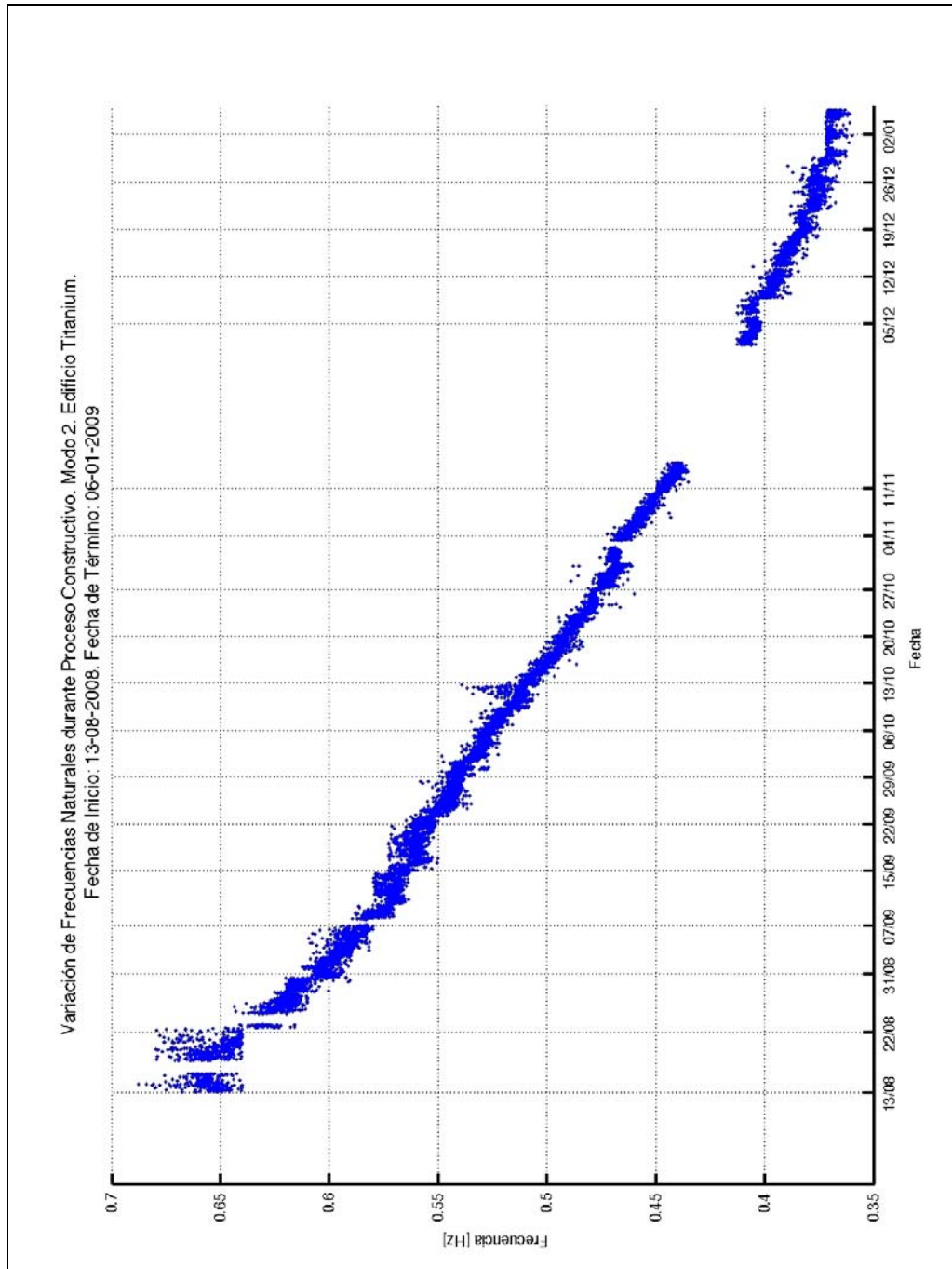


Figura 5.71. Variación temporal de frecuencia natural. Modo 2. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.

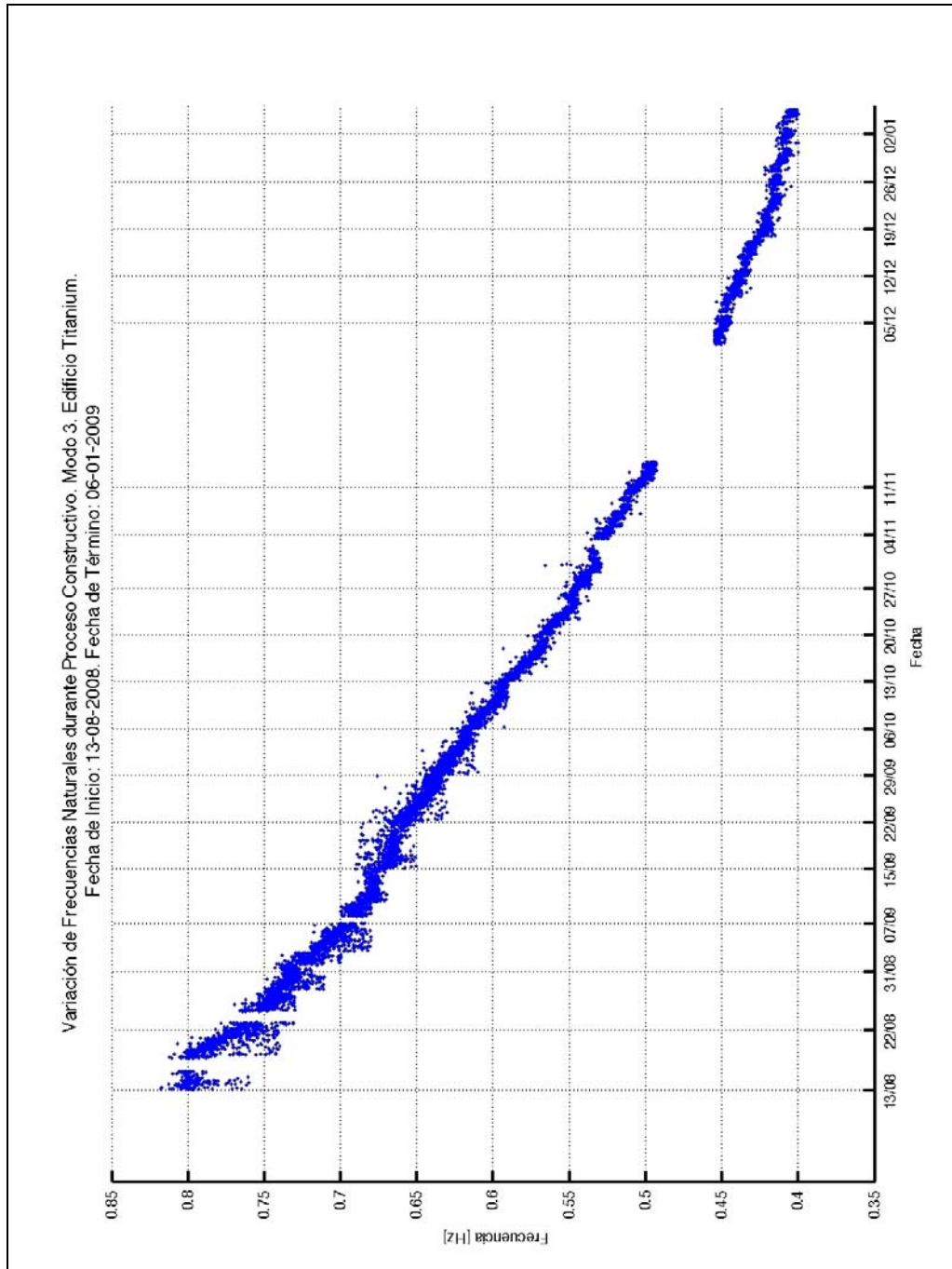


Figura 5.72. Variación temporal de frecuencia natural. Modo 3. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.

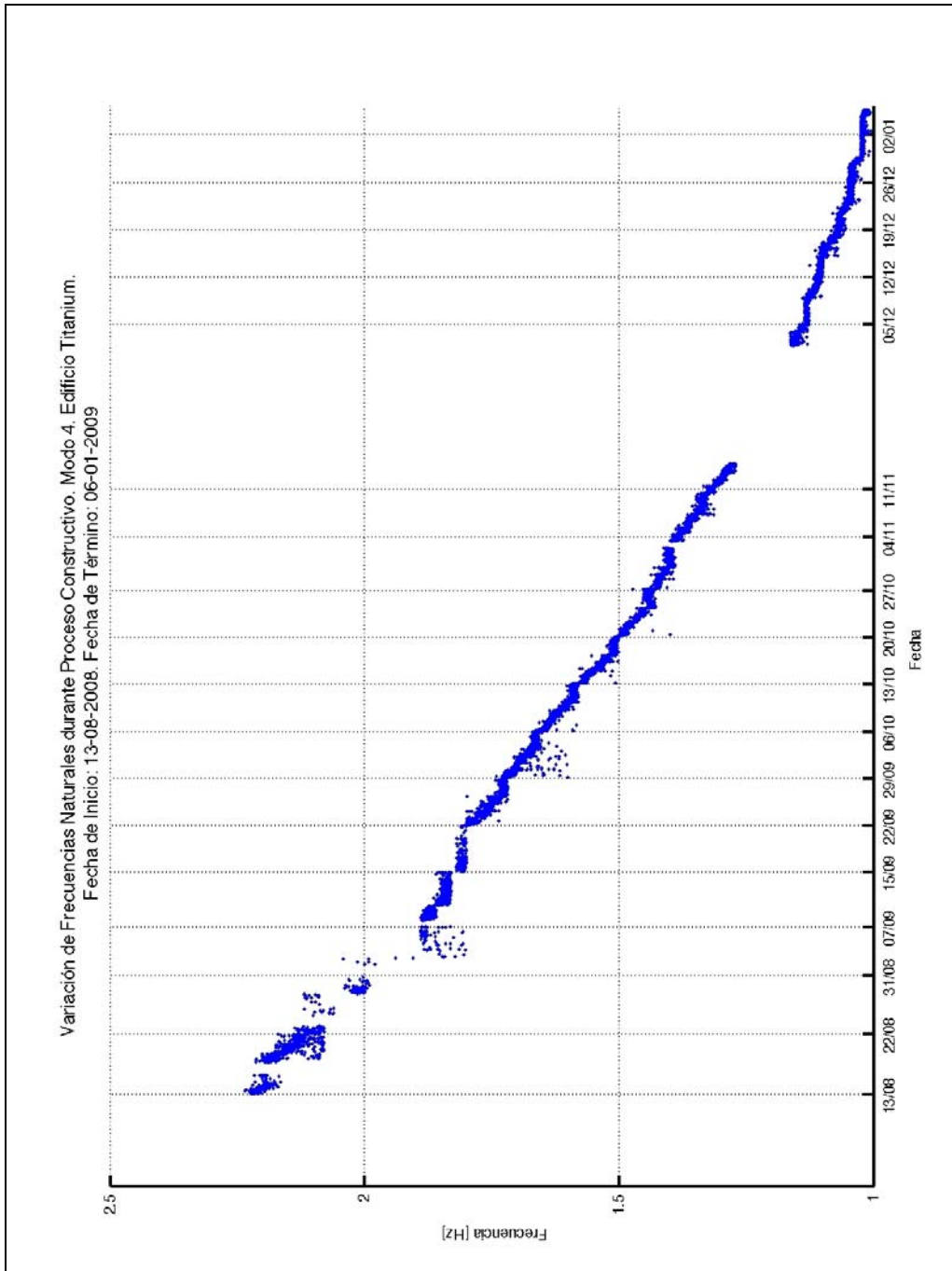


Figura 5.73. Variación temporal de frecuencia natural. Modo 4. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.

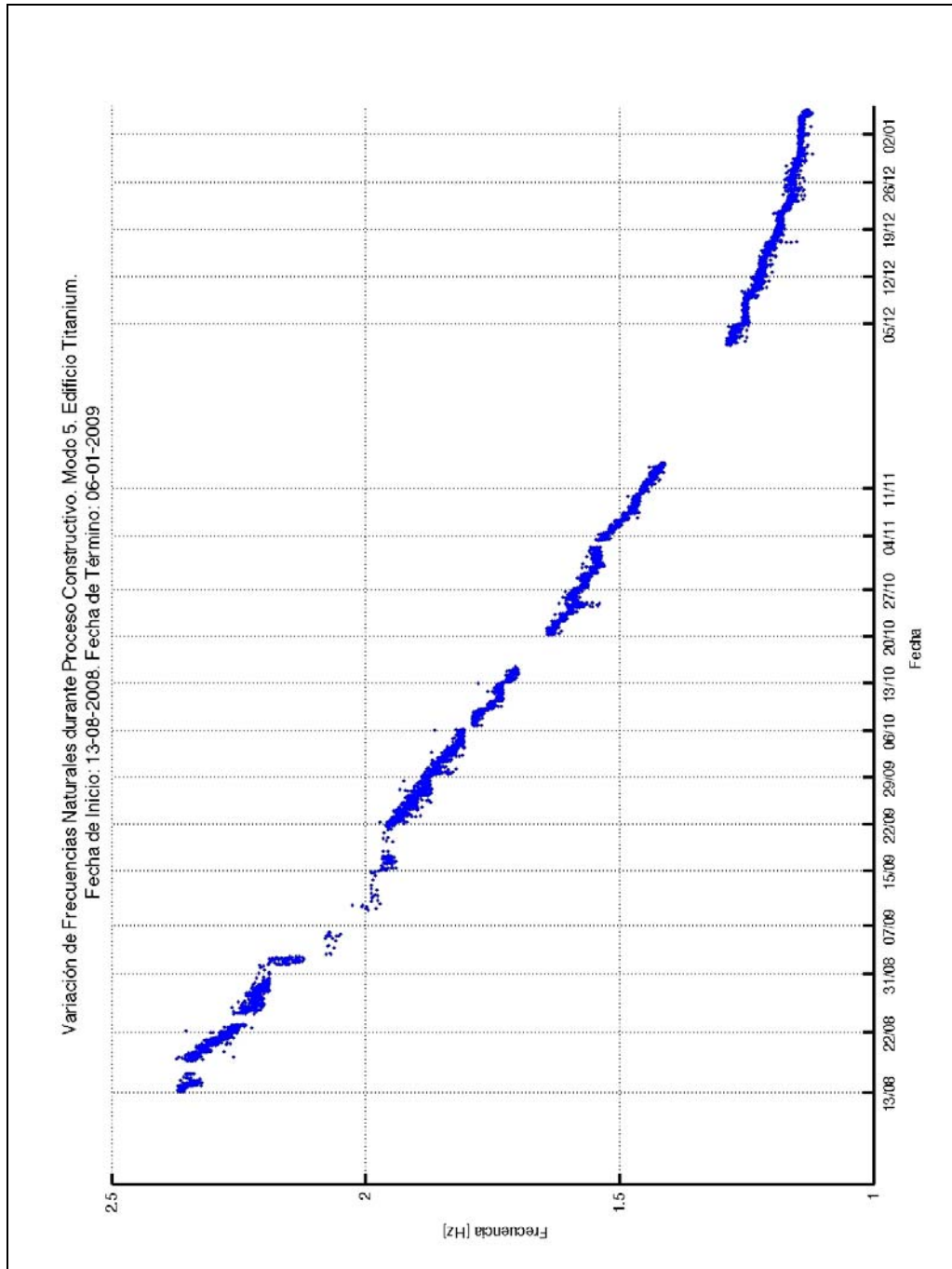


Figura 5.74. Variación temporal de frecuencia natural. Modo 5. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.

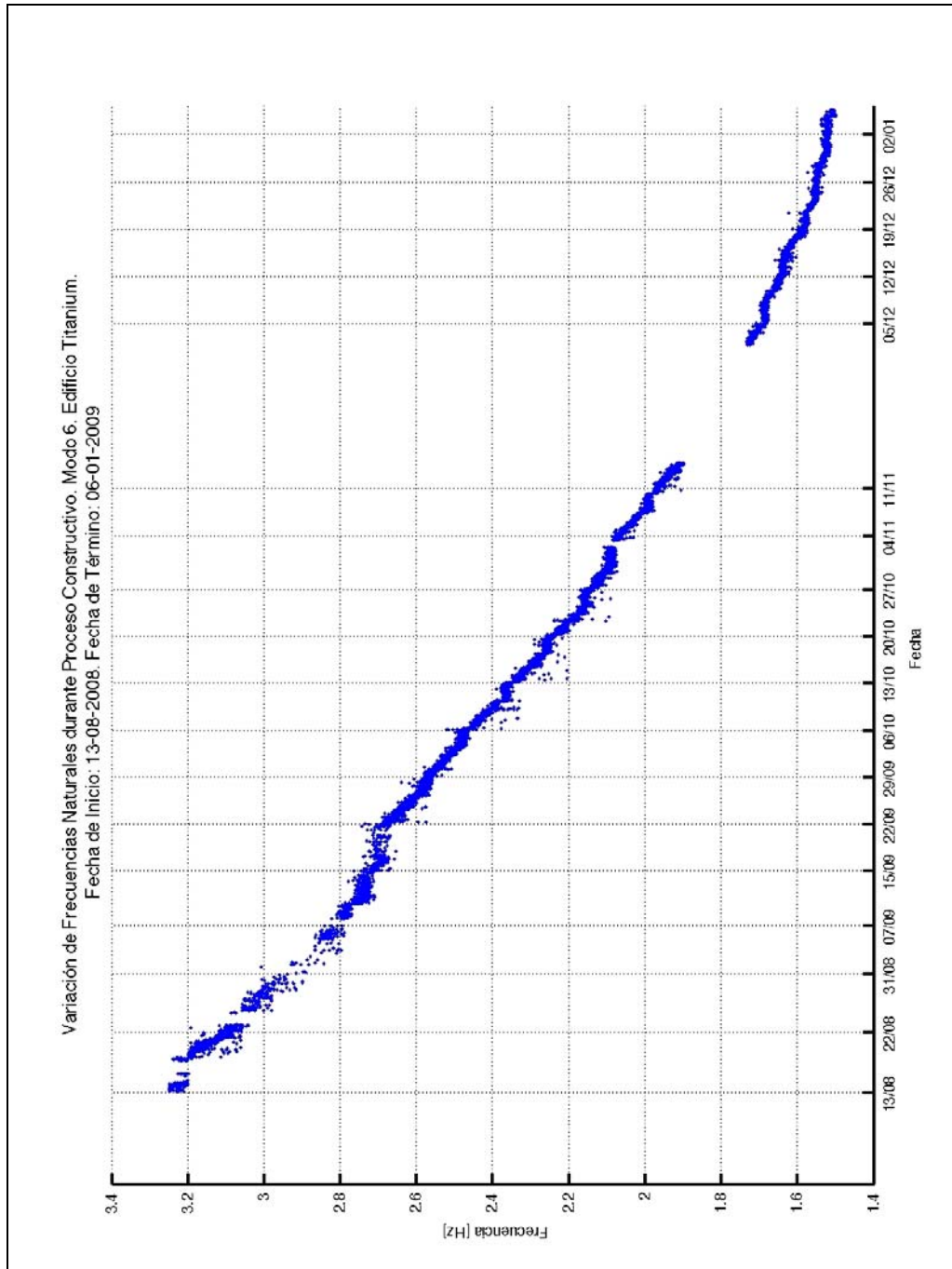


Figura 5.75. Variación temporal de frecuencia natural. Modo 6. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.

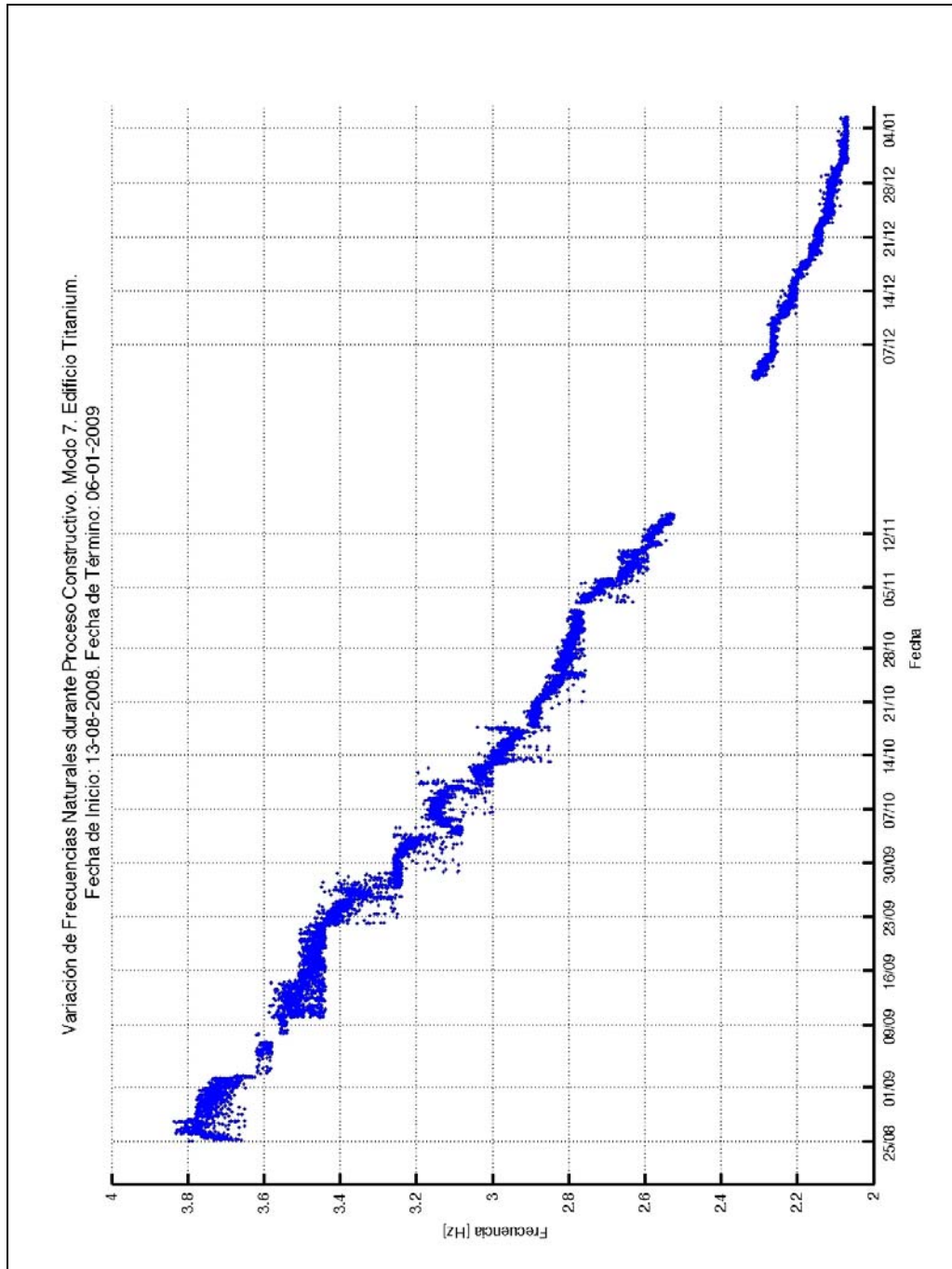


Figura 5.76. Variación temporal de frecuencia natural. Modo 7. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.

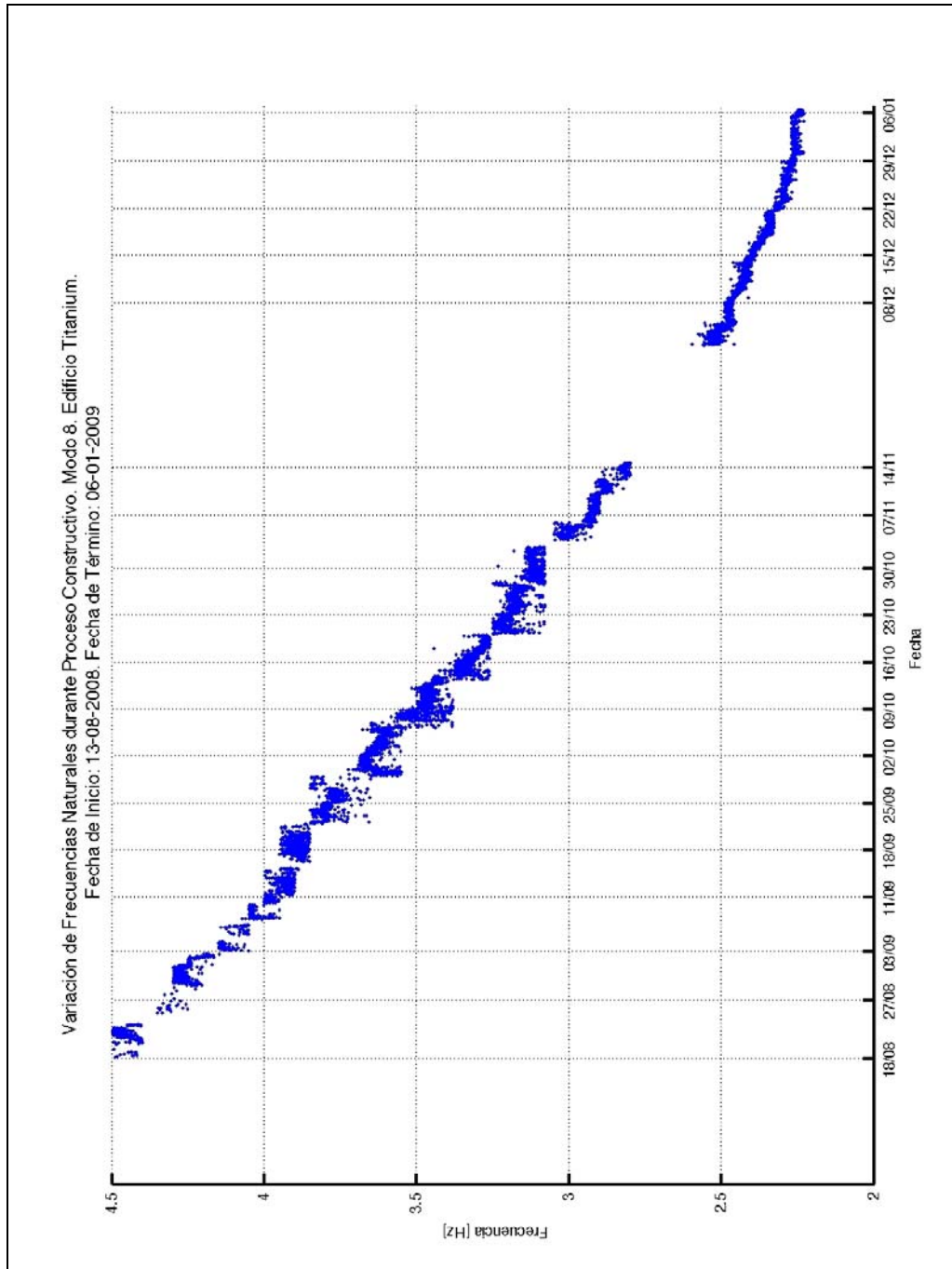


Figura 5.77. Variación temporal de frecuencia natural. Modo 8. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.

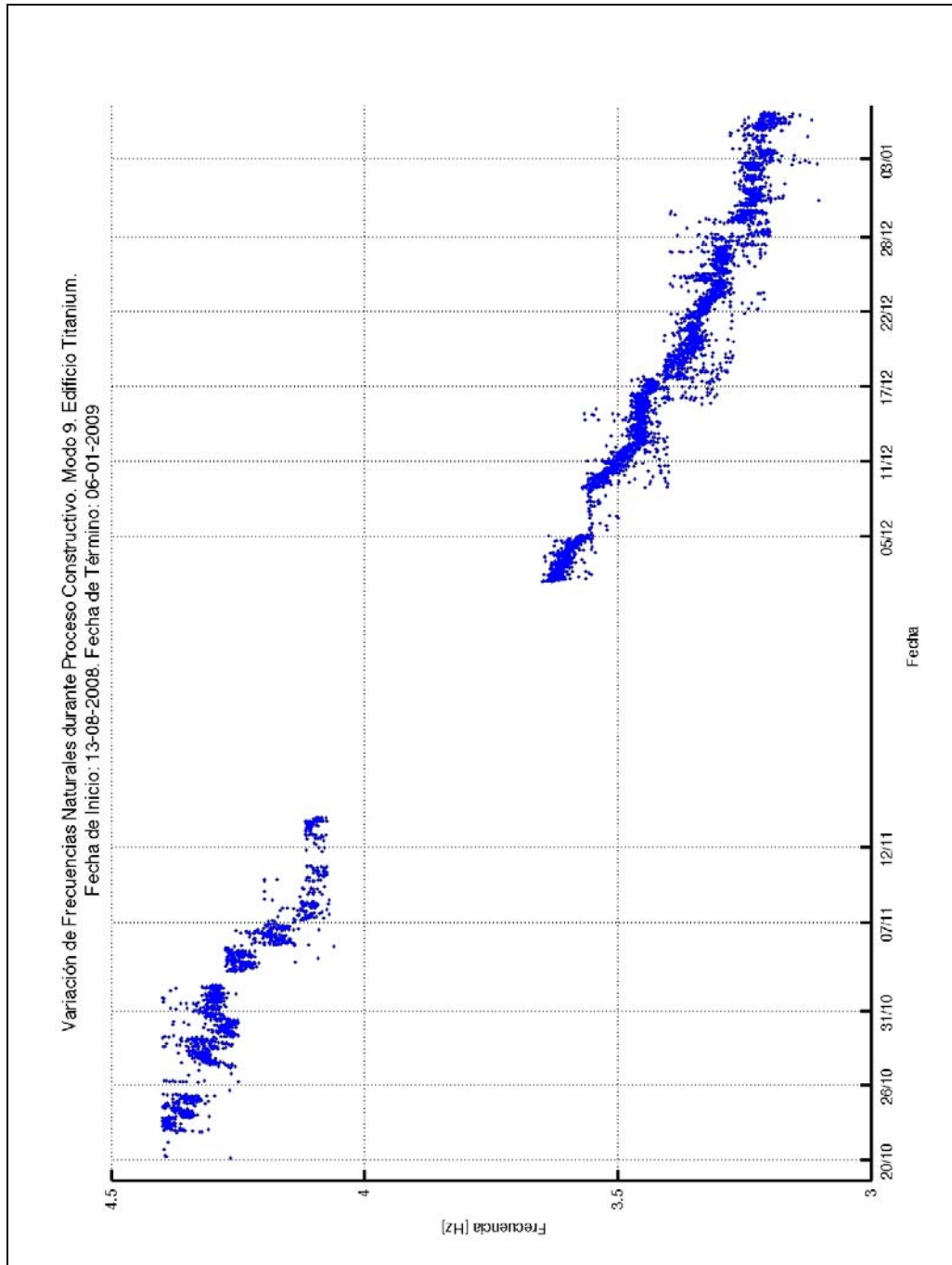


Figura 5.78. Variación temporal de frecuencia natural. Modo 9. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.

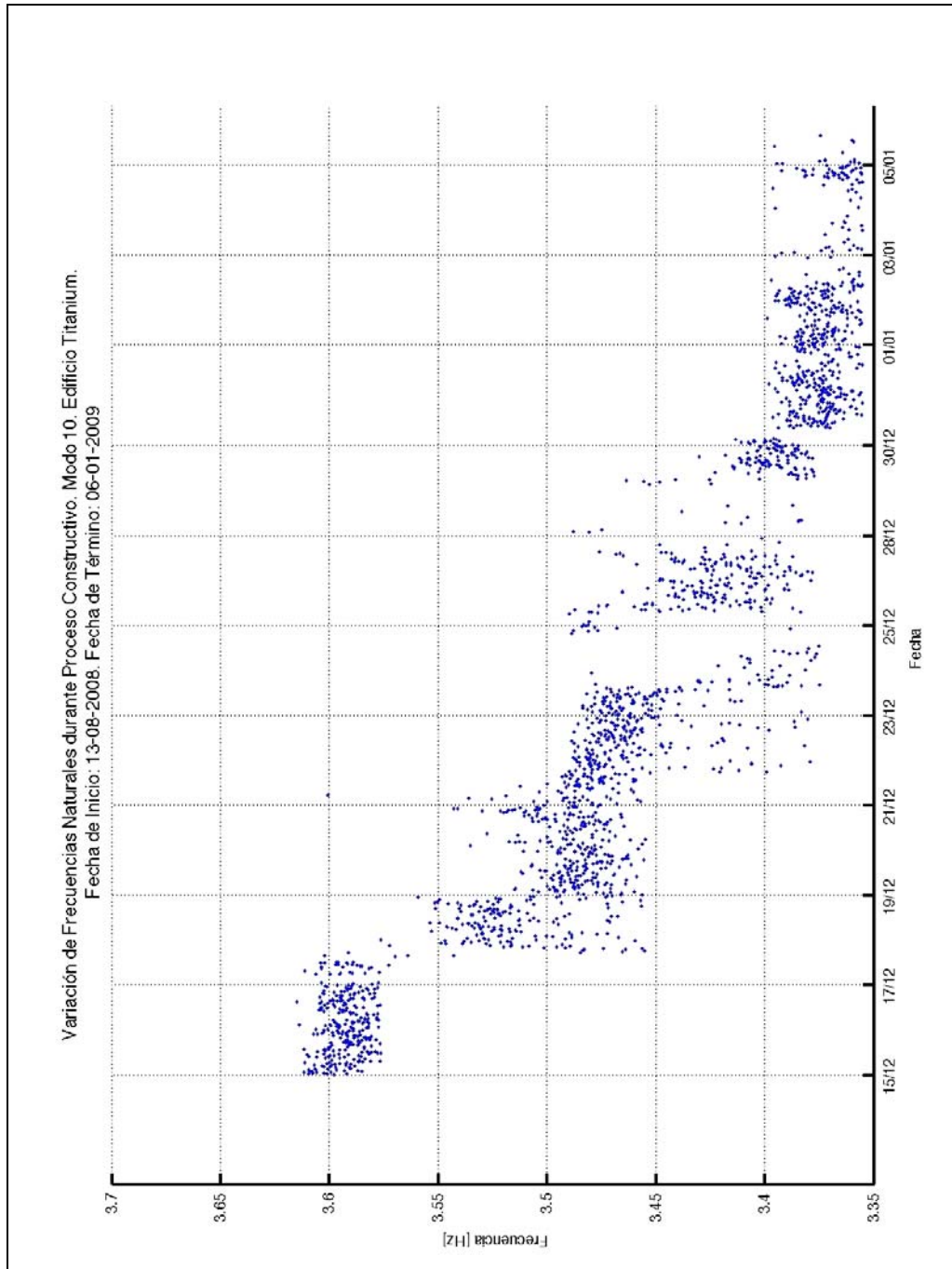


Figura 5.79. Variación temporal de frecuencia natural. Modo 10. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.

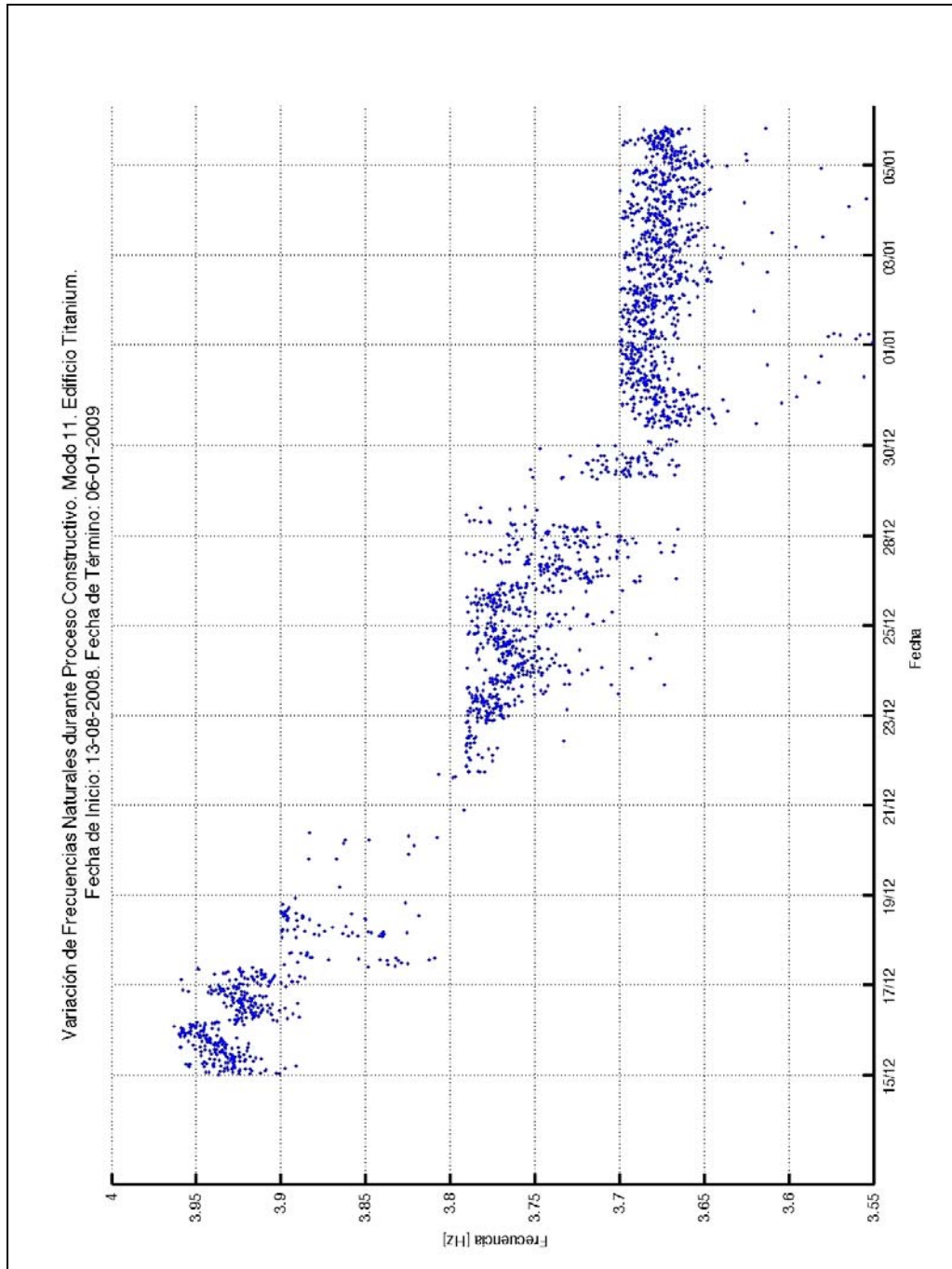


Figura 5.80. Variación temporal de frecuencia natural. Modo 11. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.

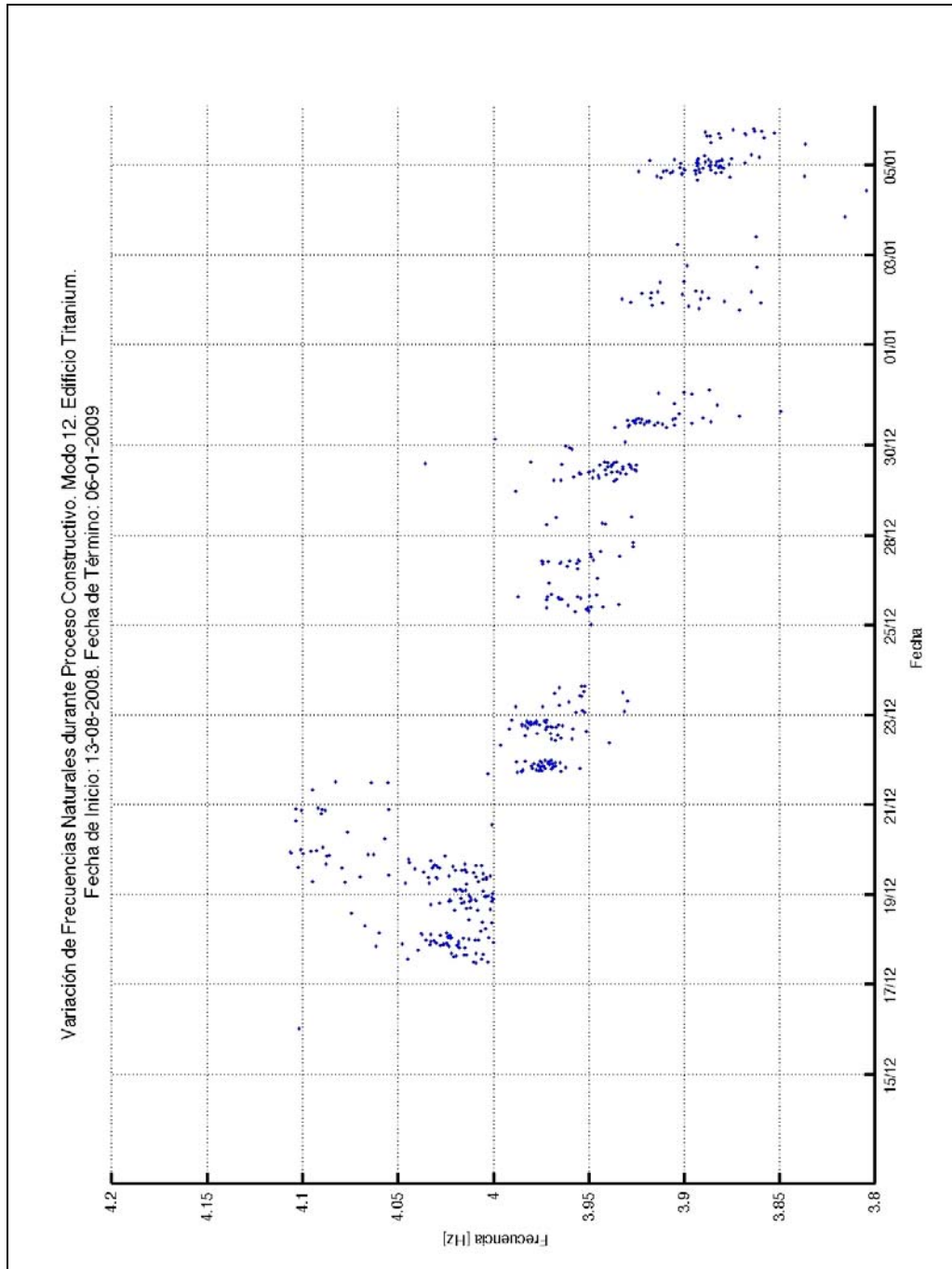


Figura 5.81. Variación temporal de frecuencia natural. Modo 12. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.

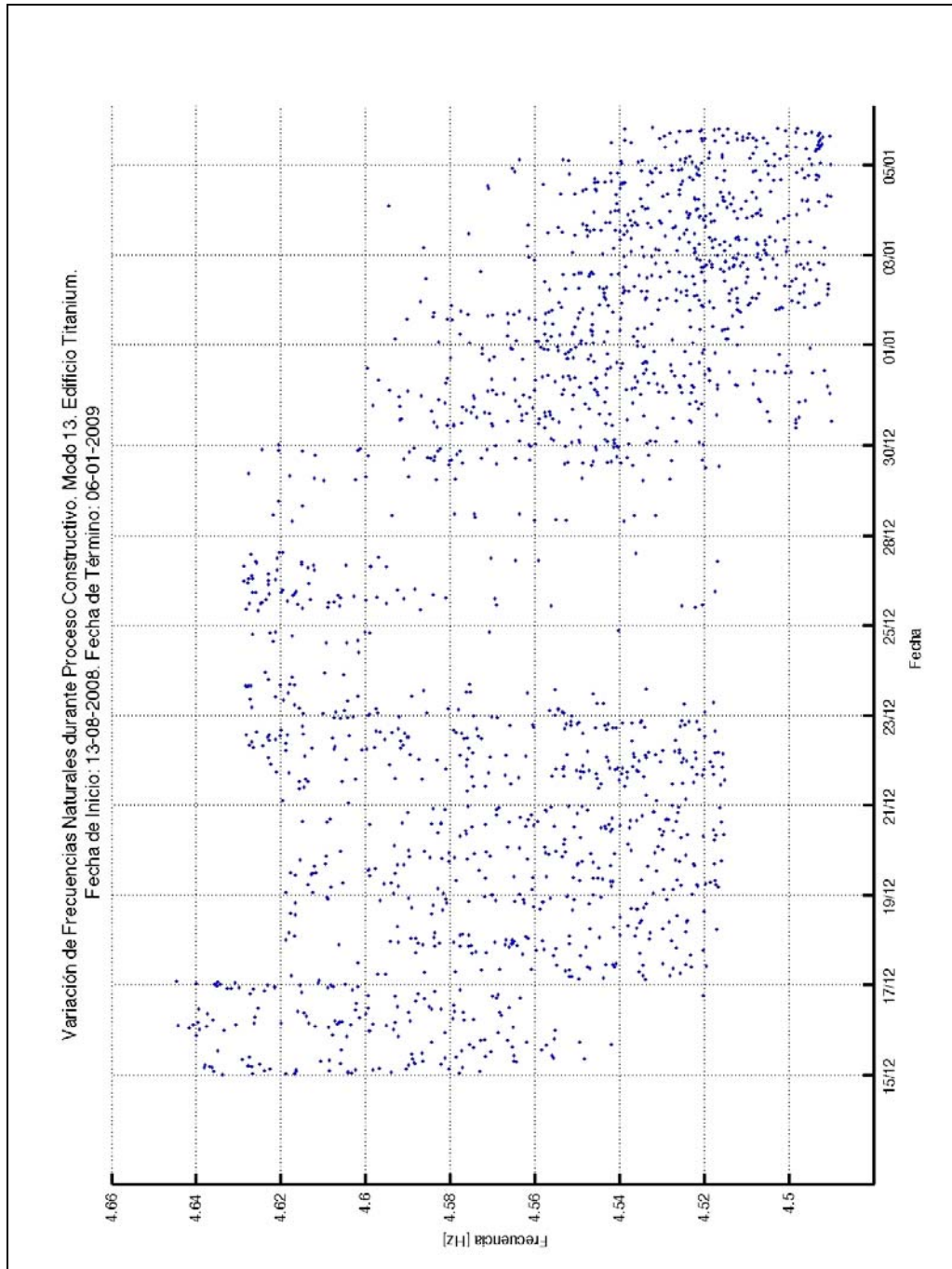


Figura 5.82. Variación temporal de frecuencia natural. Modo 13. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.

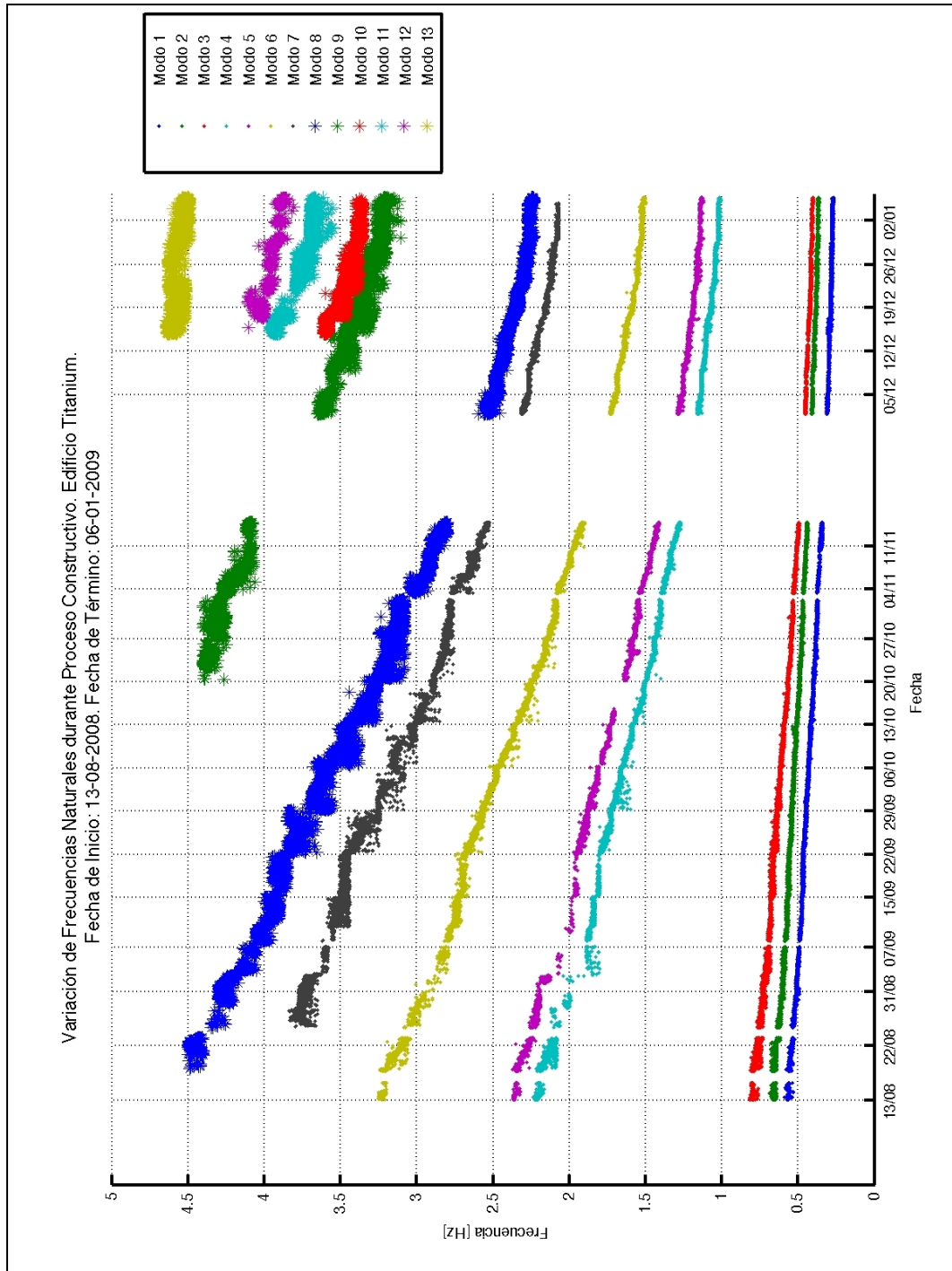


Figura 5.83. Variación temporal de frecuencia natural. Modos 1 a 13. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.

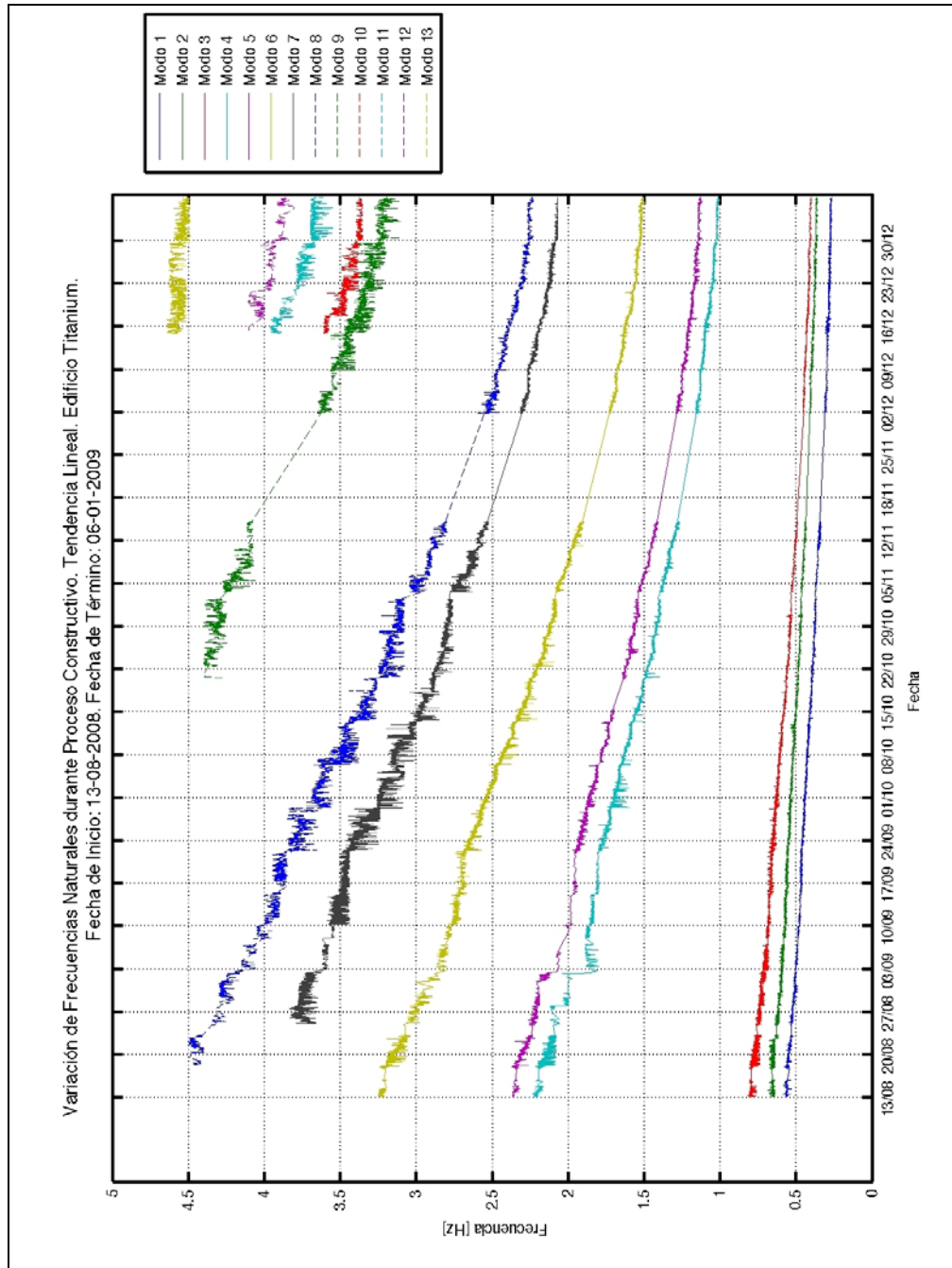


Figura 5. 84. Variación temporal de frecuencia natural. Modos 1 a 13. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada. Gráfico con tendencia lineal entre tramos en los que no se tienen resultado debido a que no existen registros en estos tramos.

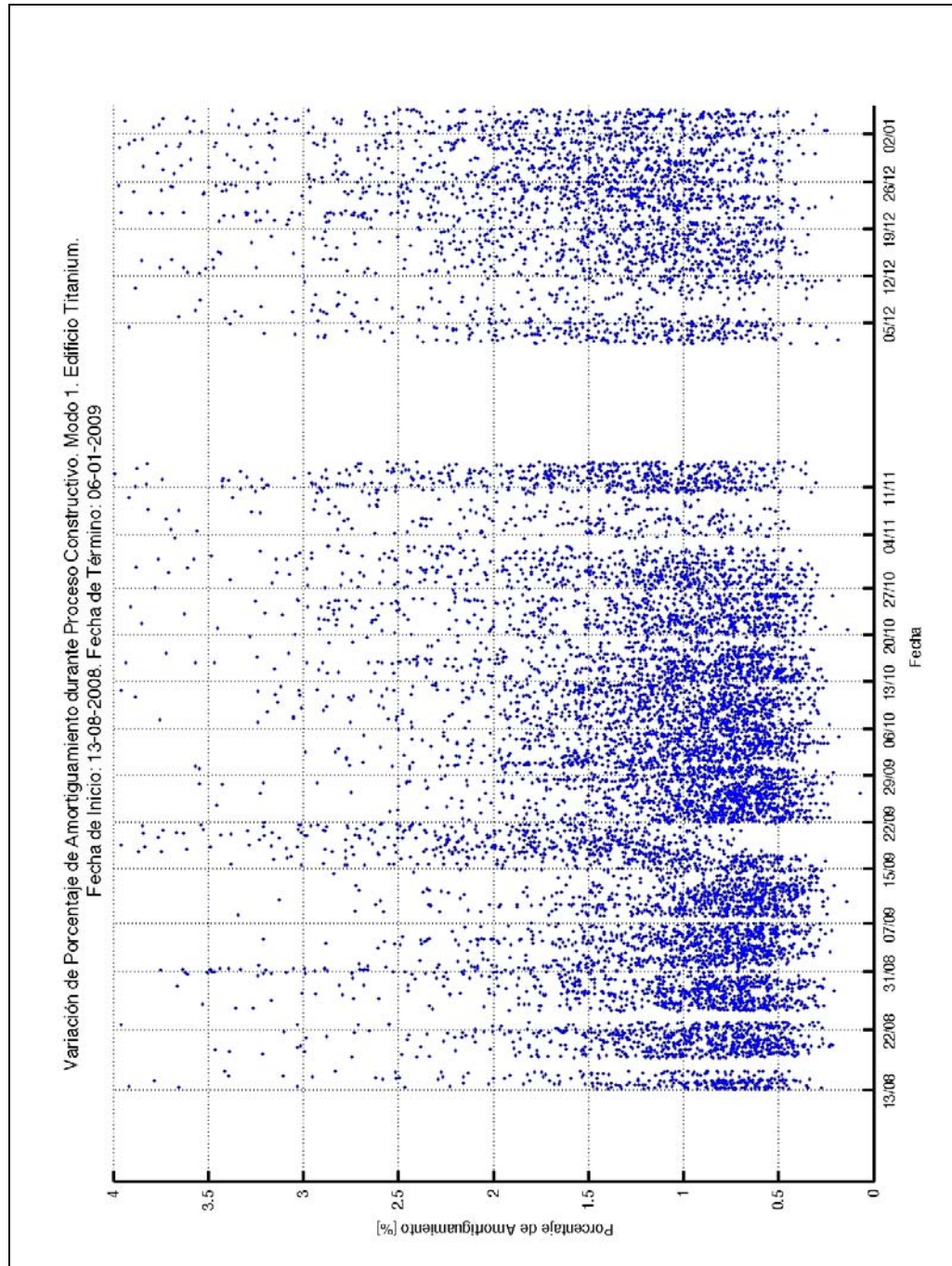


Figura 5.85. Variación temporal de razón de amortiguamiento. Modo 1. Método SSI-CVA Edificio Titanium La Portada.

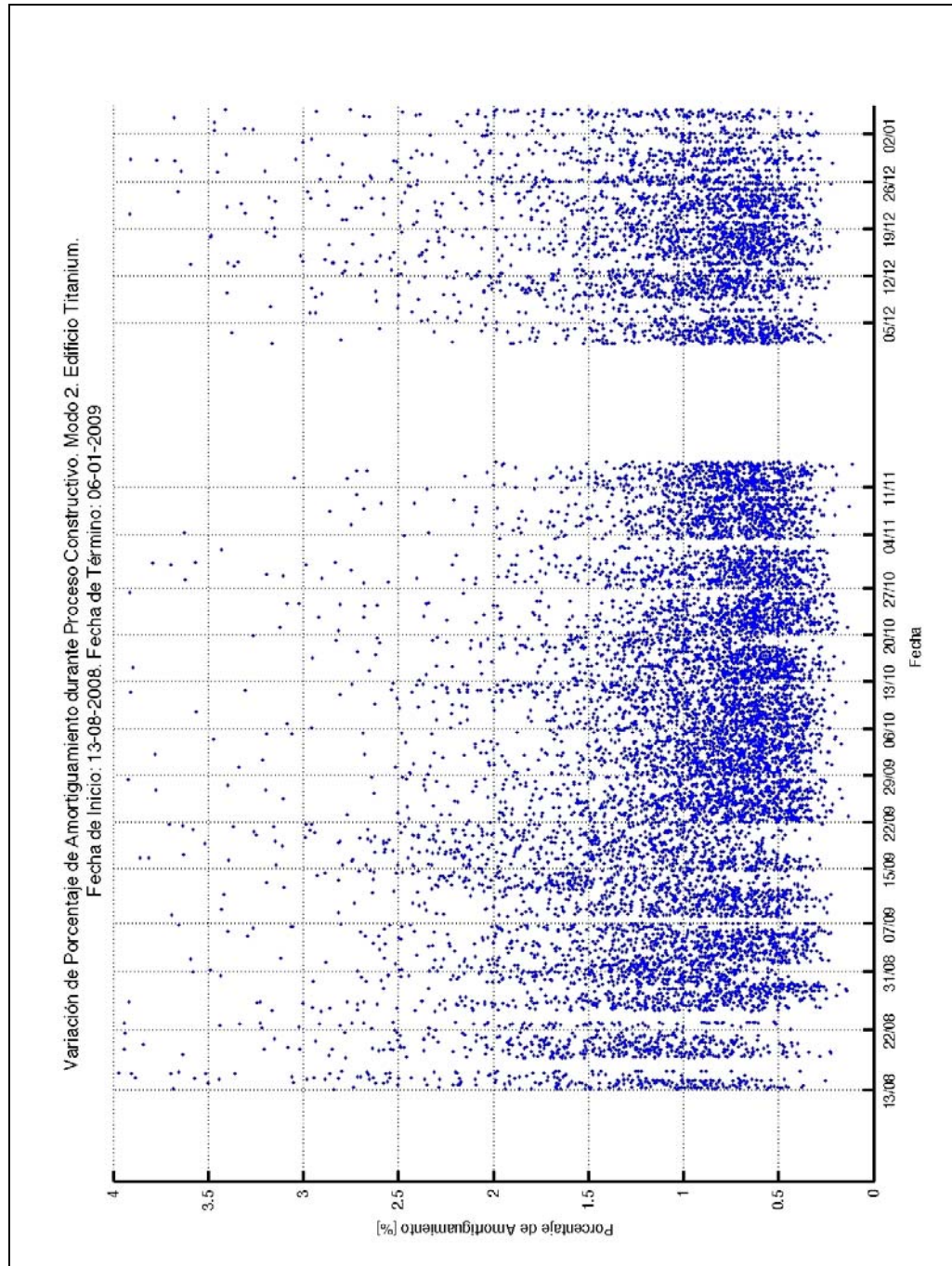


Figura 5. 86. Variación temporal de razón de amortiguamiento. Modo 2. Método SSI-CVA Edificio Titanium La Portada.

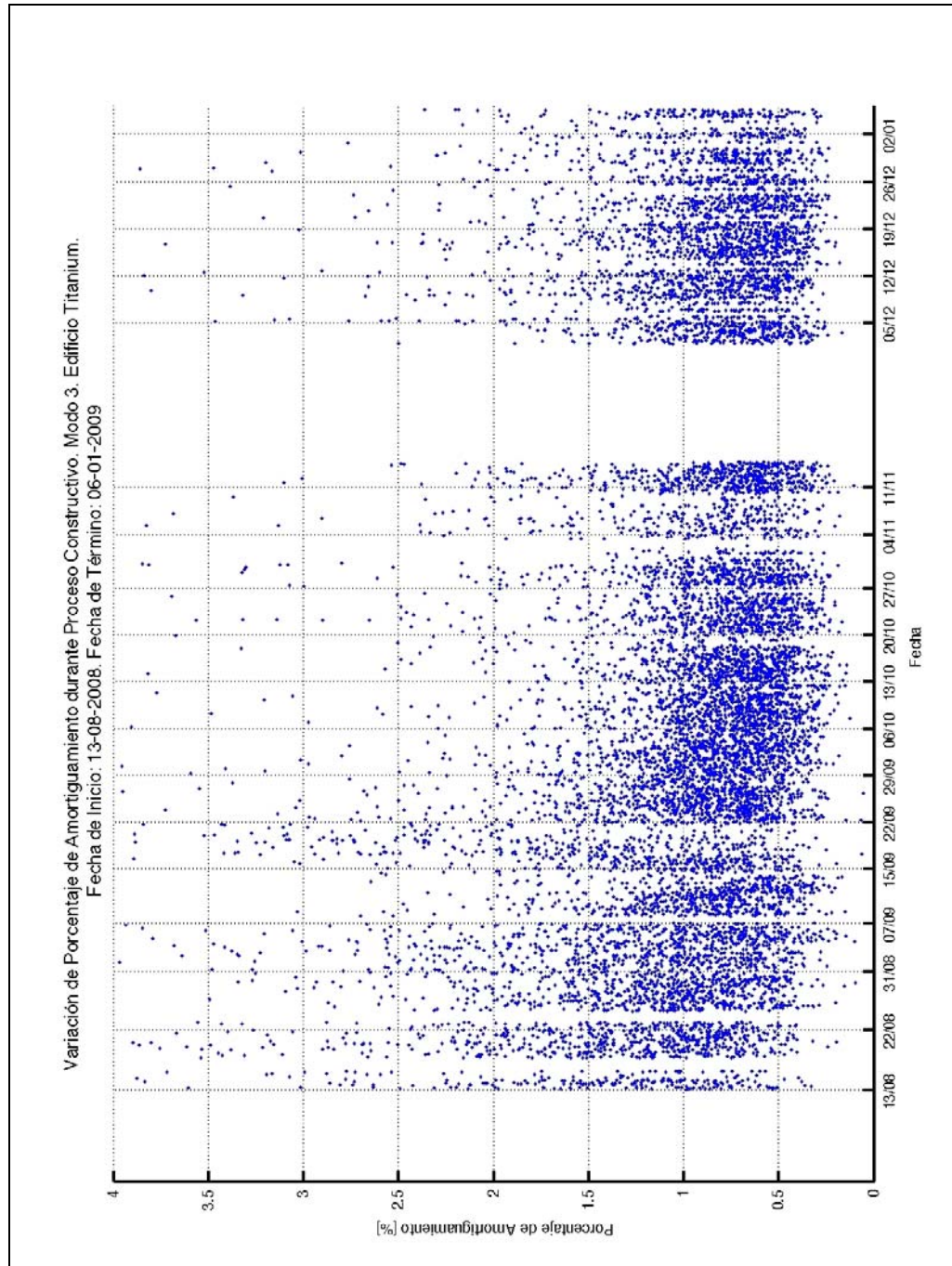


Figura 5. 87. Variación temporal de razón de amortiguamiento. Modo 3. Método SSI-CVA Edificio Titanium La Portada.

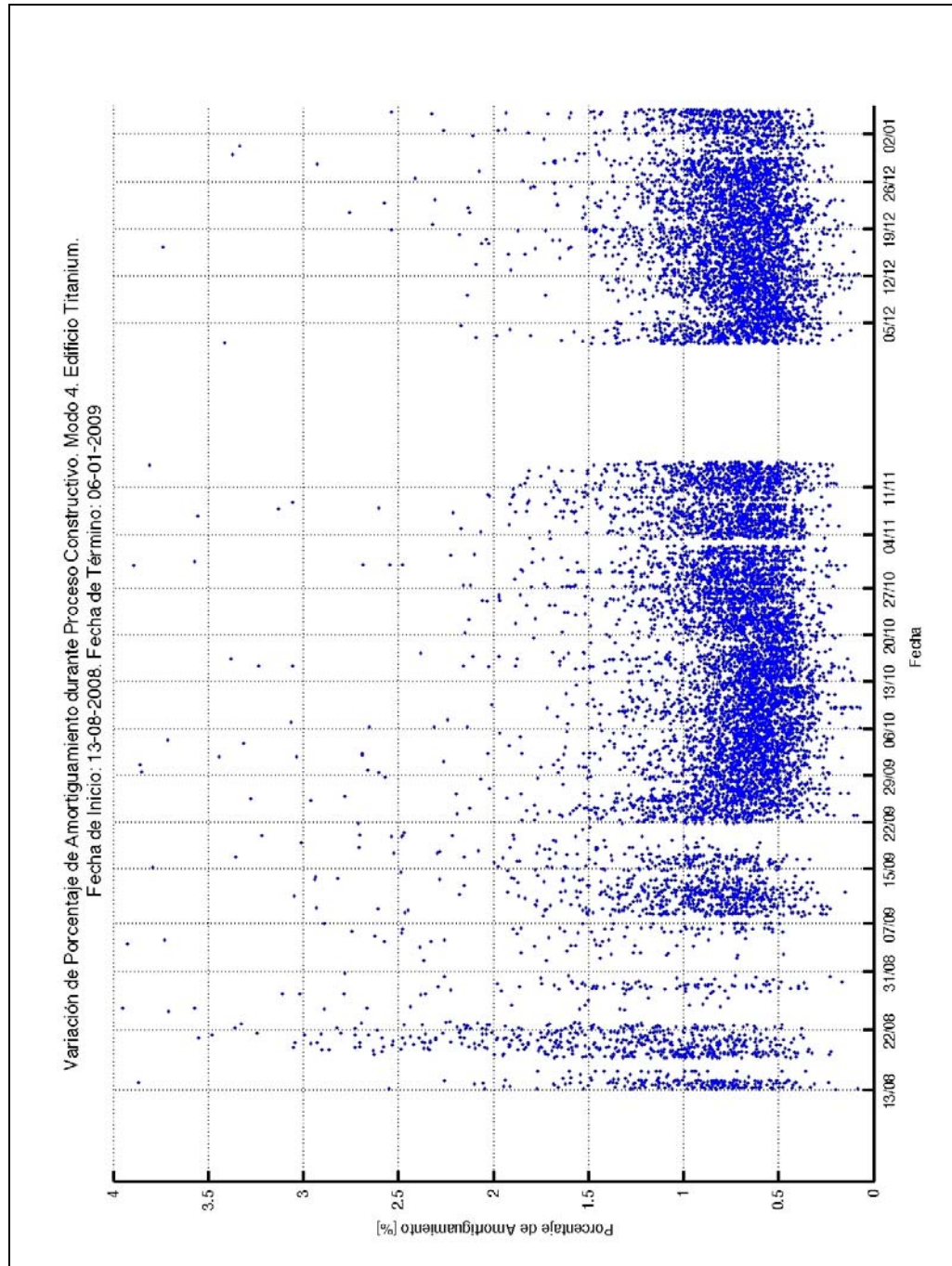


Figura 5. 88. Variación temporal de razón de amortiguamiento. Modo4. Método SSI-CVA Edificio Titanium La Portada.

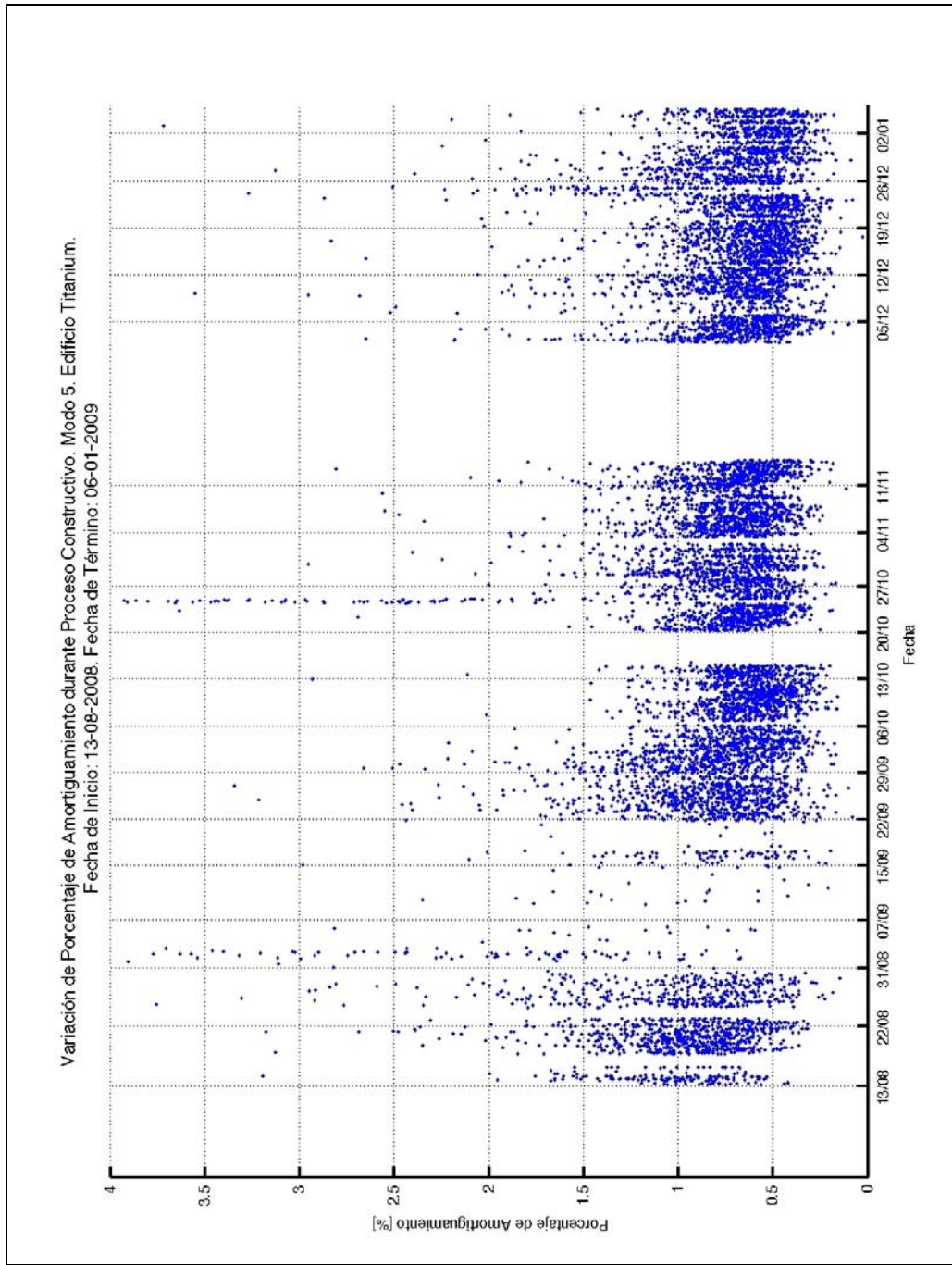


Figura 5. 89. Variación temporal de razón de amortiguamiento. Modo 5. Método SSI-CVA Edificio Titanium La Portada.

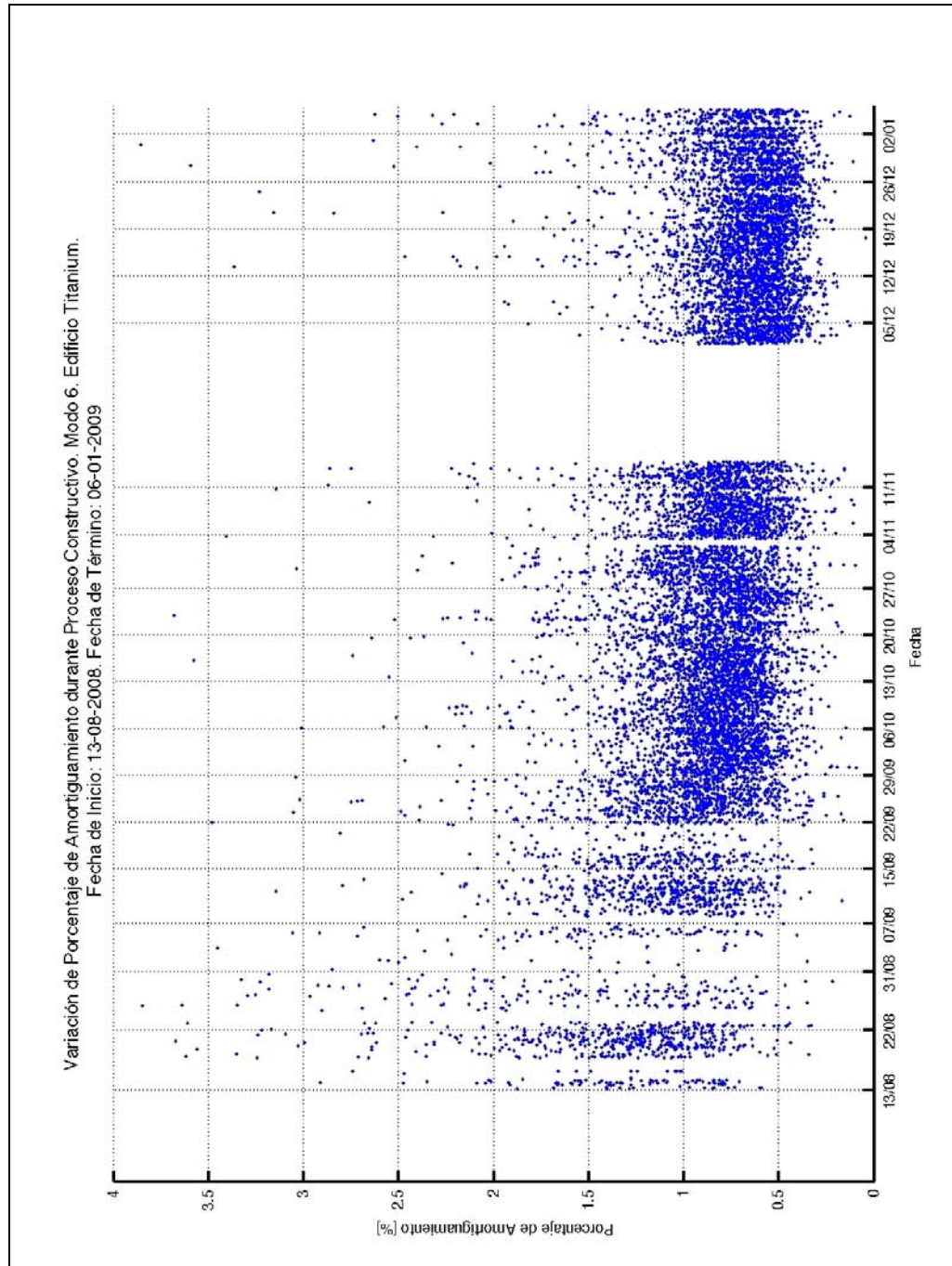


Figura 5. 90. Variación temporal de razón de amortiguamiento. Modo 6. Método SSI-CVA Edificio Titanium La Portada.

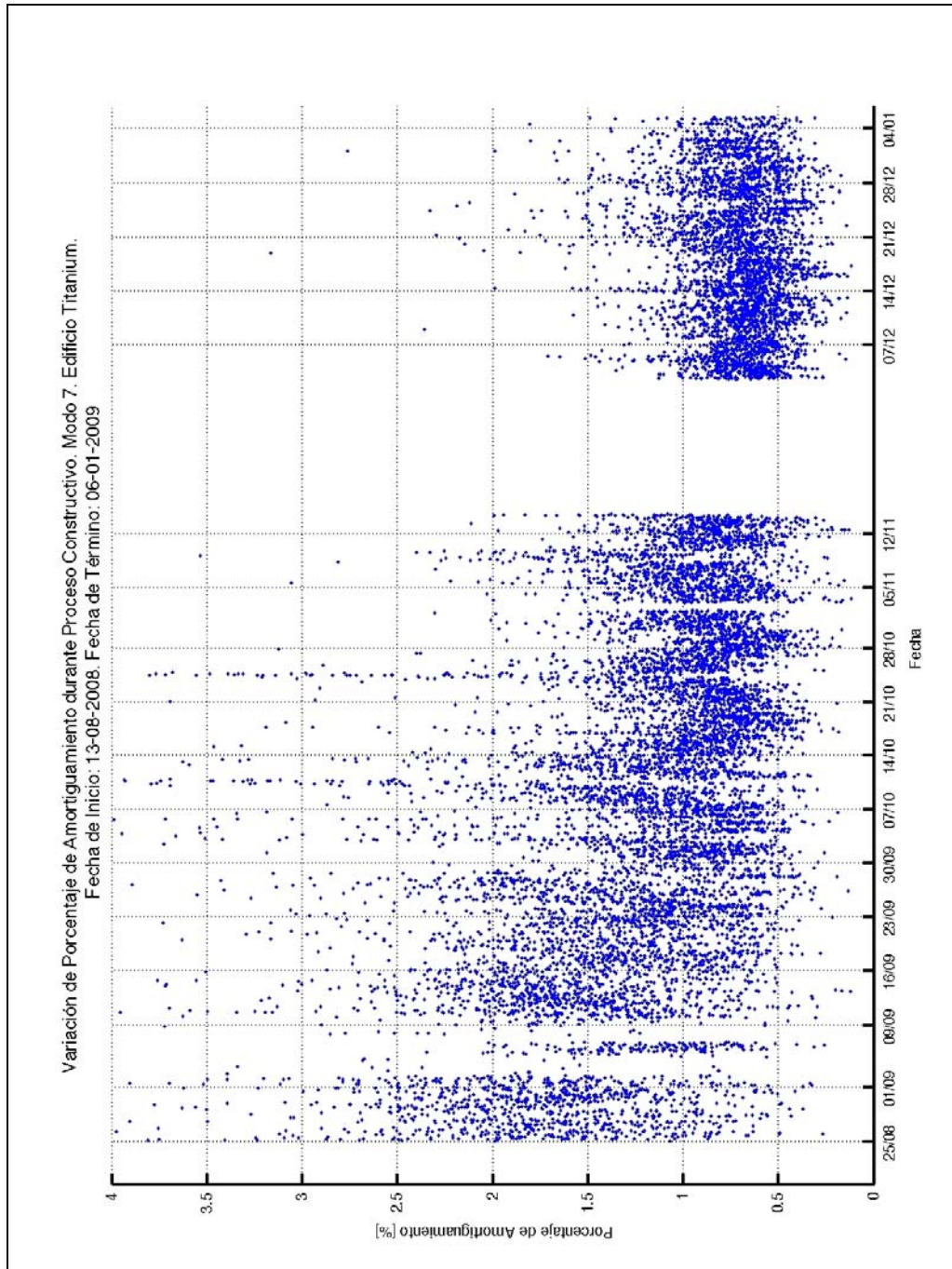


Figura 5. 91. Variación temporal de razón de amortiguamiento. Modo 7. Método SSI-CVA Edificio Titanium La Portada.

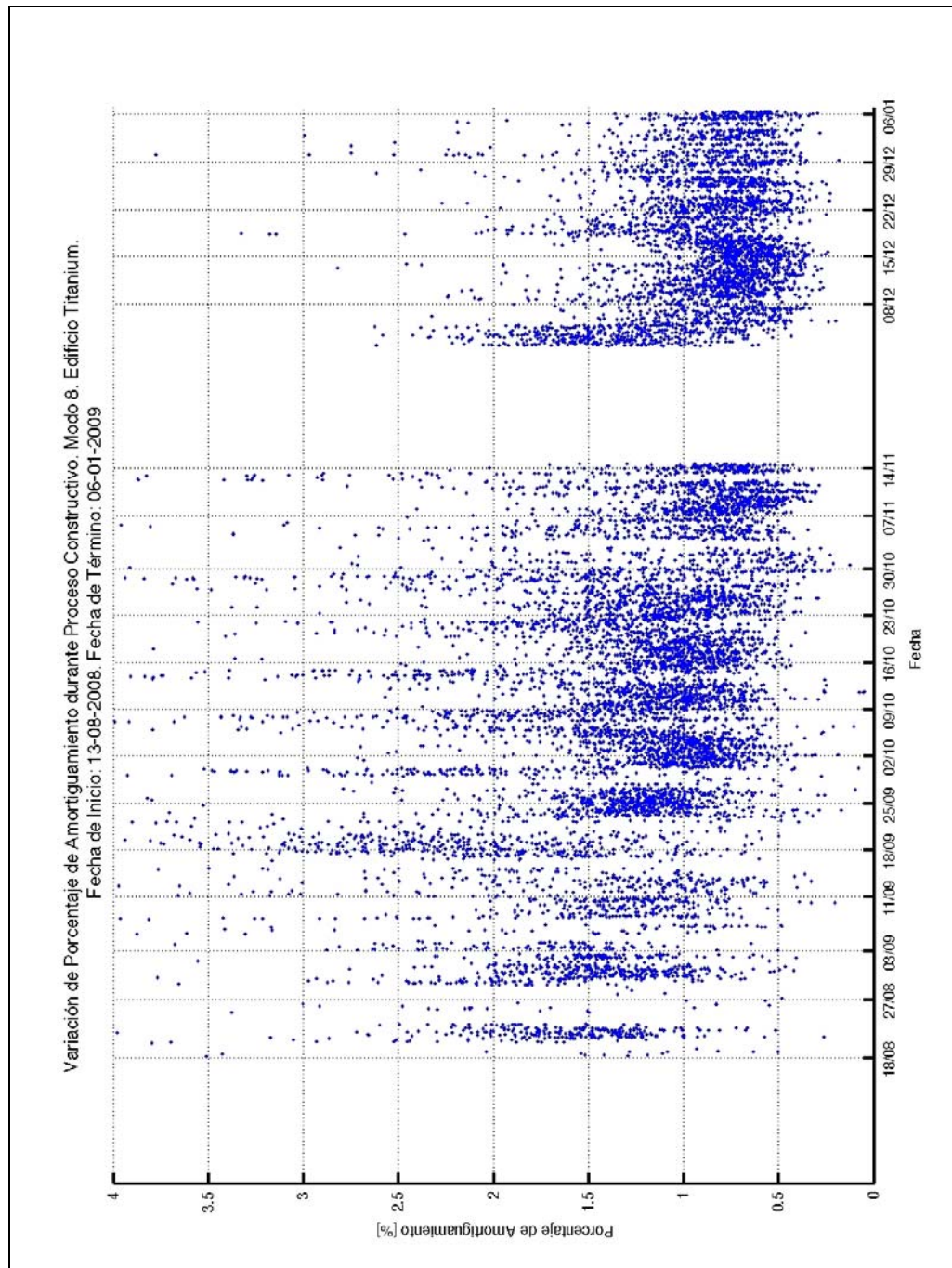


Figura 5. 92. Variación temporal de razón de amortiguamiento. Modo 8. Método SSI-CVA Edificio Titanium La Portada.

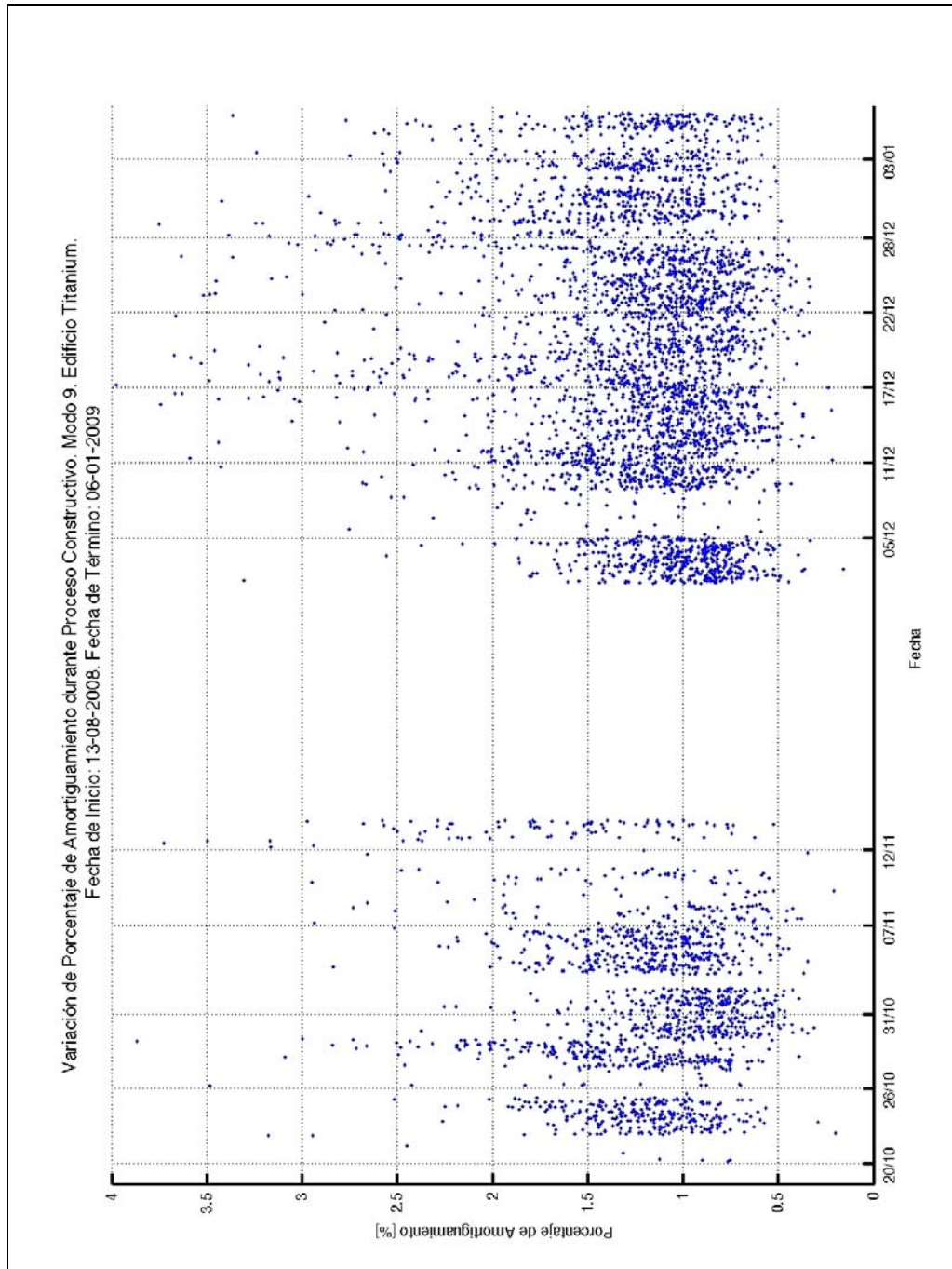


Figura 5. 93. Variación temporal de razón de amortiguamiento. Modo 9. Método SSI-CVA Edificio Titanium La Portada.

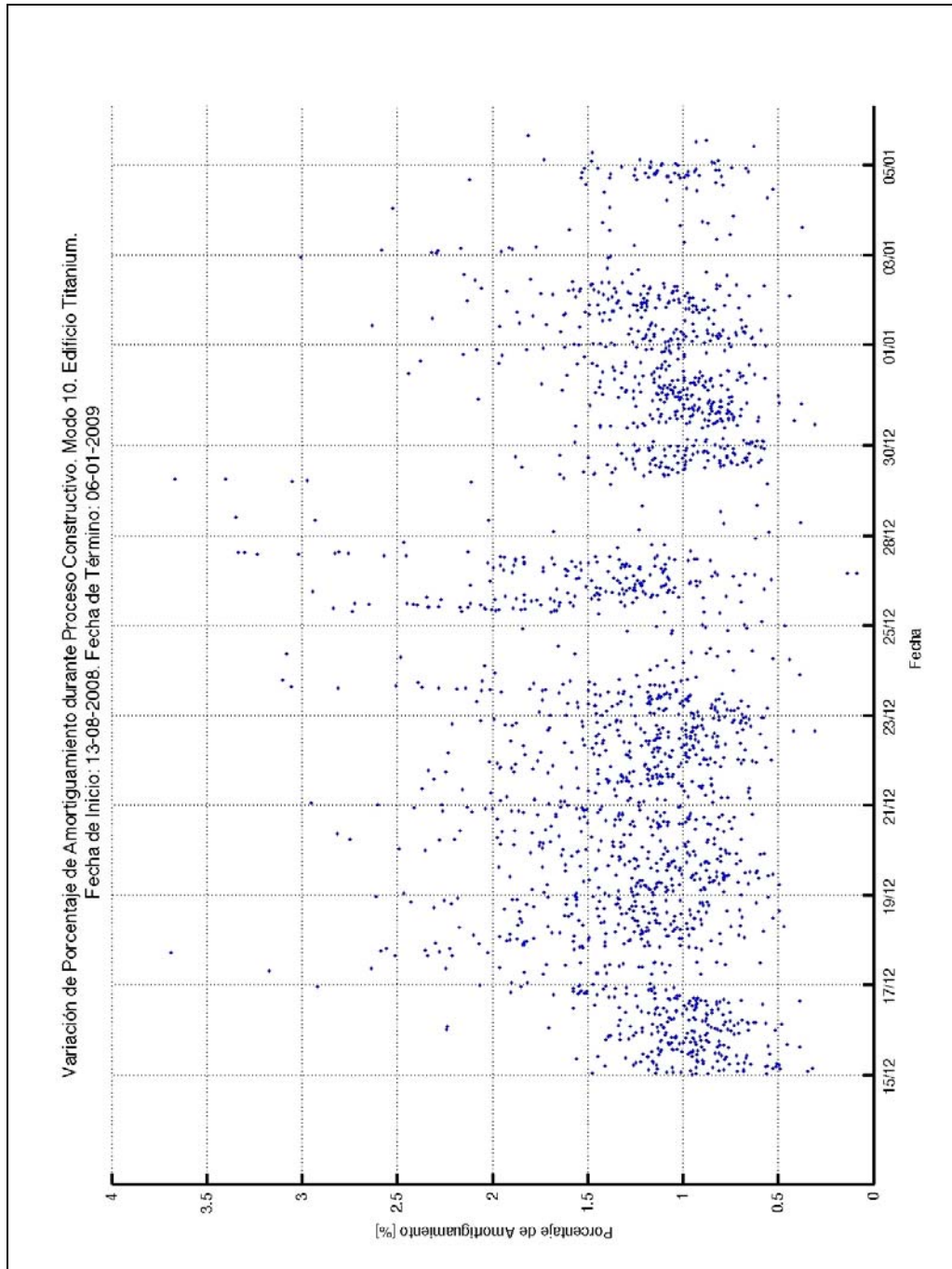


Figura 5. 94. Variación temporal de razón de amortiguamiento. Modo 10. Método SSI-CVA Edificio Titanium La Portada.

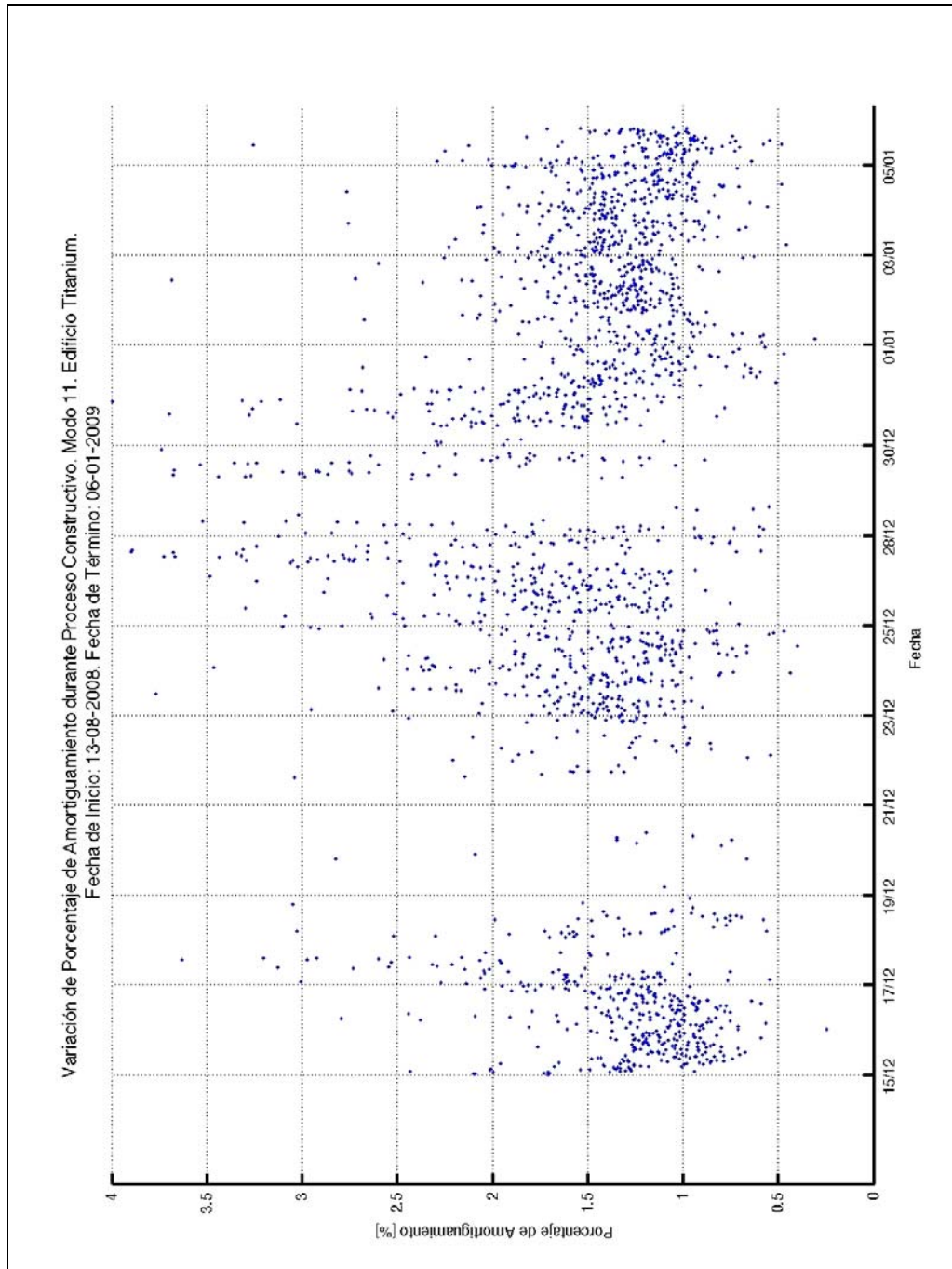


Figura 5. 95. Variación temporal de razón de amortiguamiento. Modo 11. Método SSI-CVA Edificio Titanium La Portada.

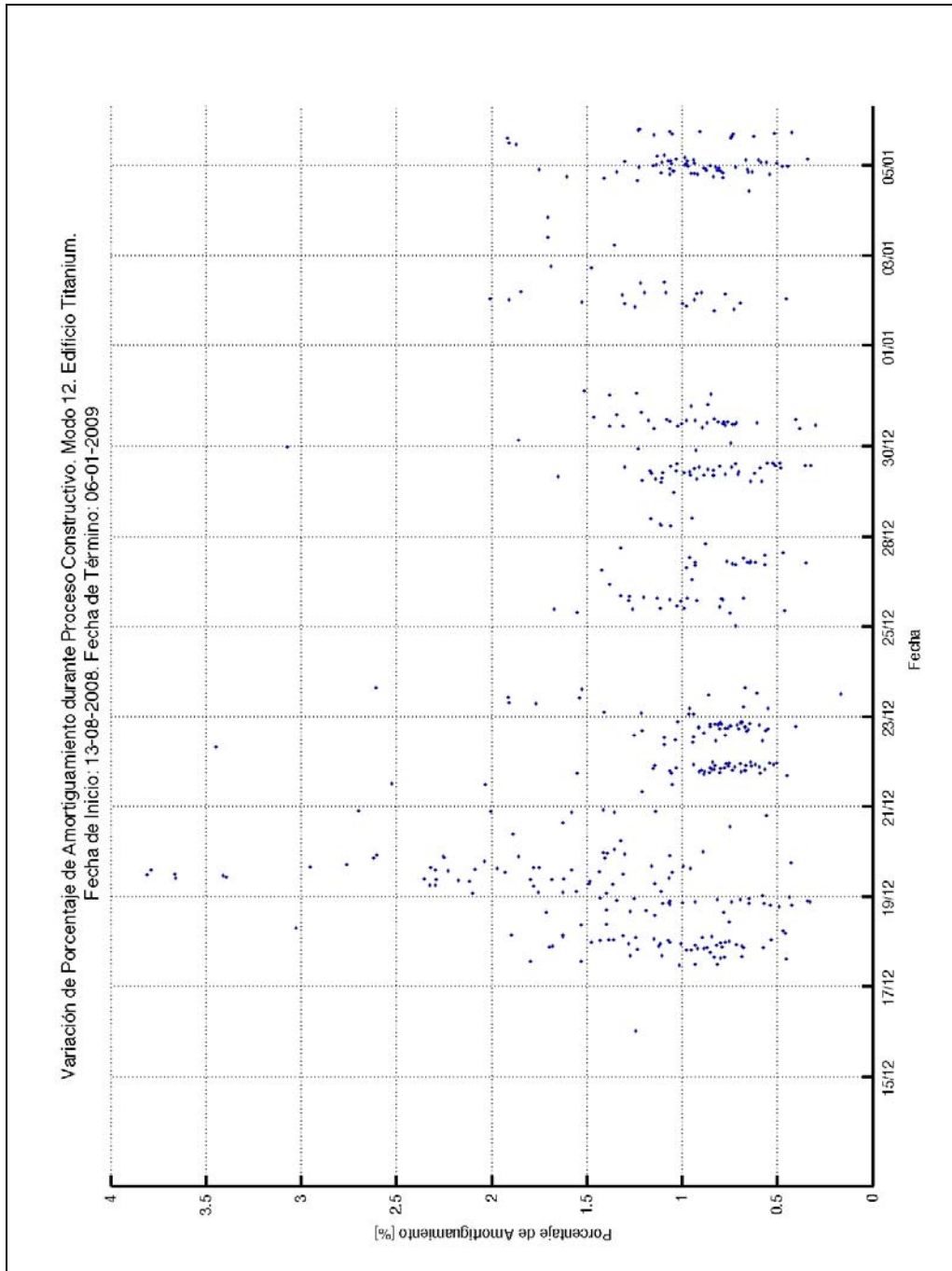


Figura 5. 96. Variación temporal de razón de amortiguamiento. Modo 12. Método SSI-CVA Edificio Titanium La Portada.

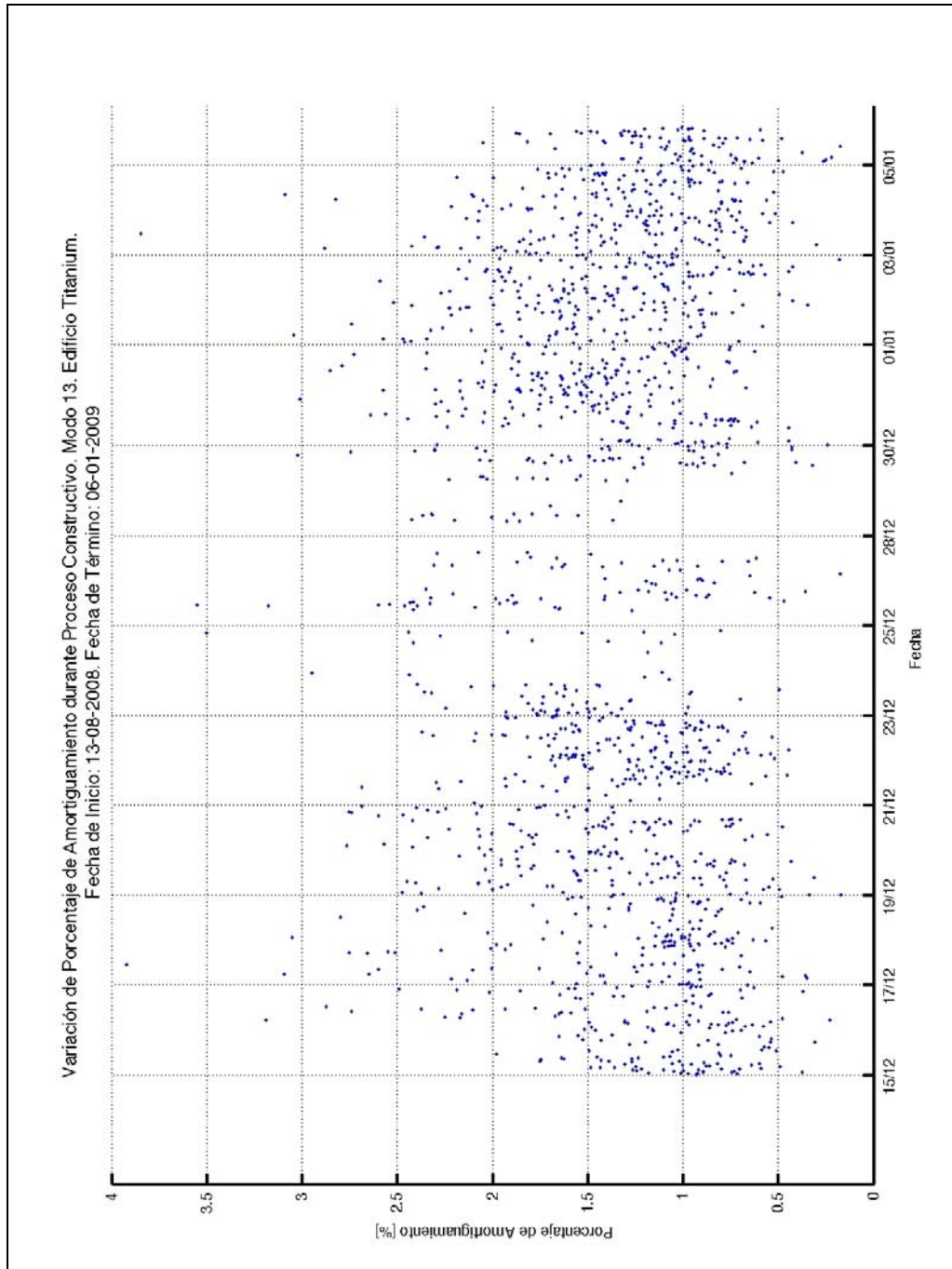


Figura 5. 97. Variación temporal de razón de amortiguamiento. Modo 13. Método SSI-CVA Edificio Titanium La Portada.

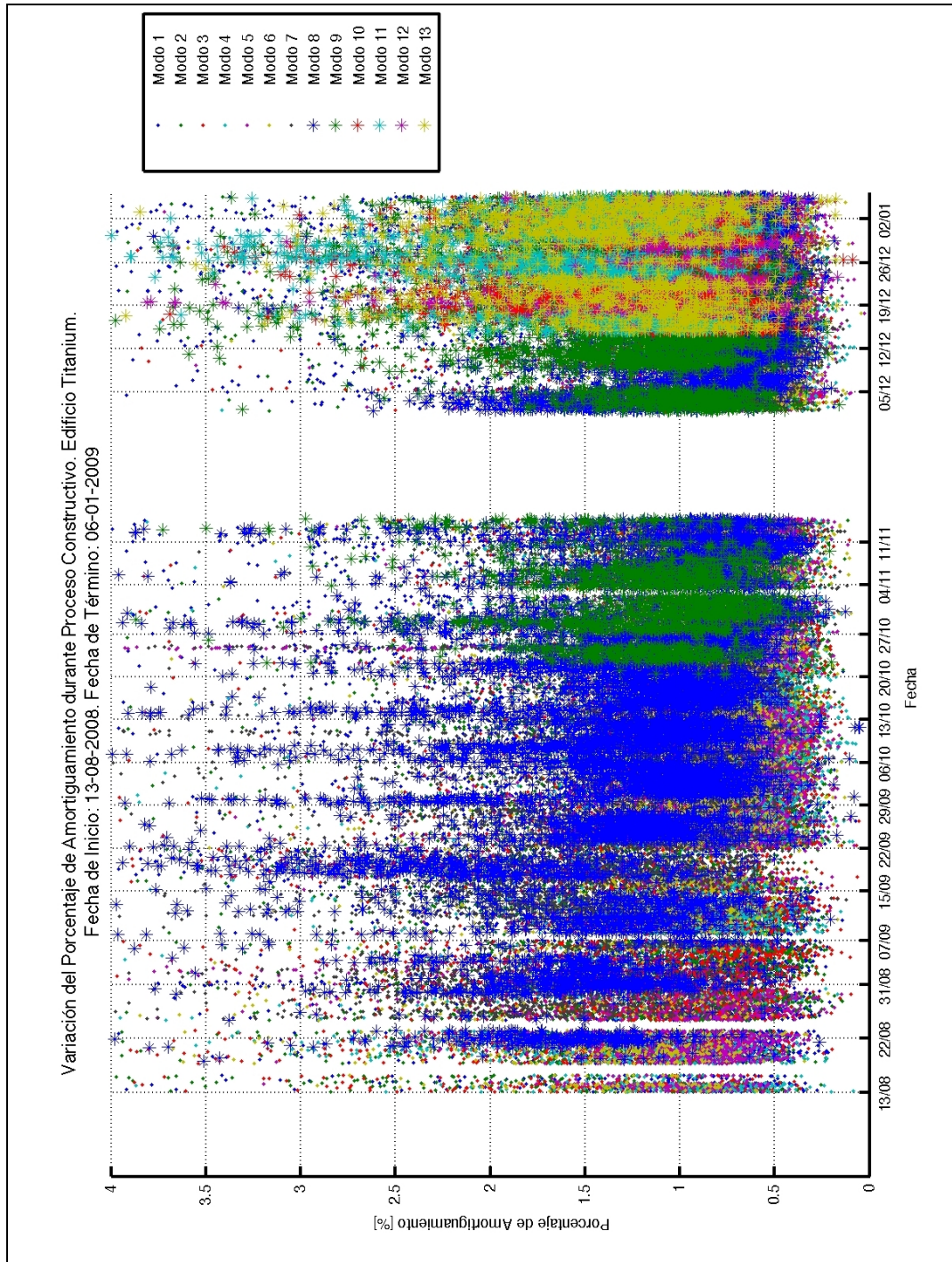


Figura 5. 98. Variación temporal de razón de amortiguamiento. Modos 1 a 13. Método SSI-CVA Edificio Titanium La Portada.

Como una forma de reducir la dispersión de los resultados anteriores, se presenta a continuación la variación de frecuencias y razones de amortiguamiento considerando valores promedios horarios durante el periodo de monitoreo, considerando los primeros 8 modos. Esto permitirá caracterizar de mejor forma los patrones de variación de los parámetros modales de la estructura durante el periodo de monitoreo.

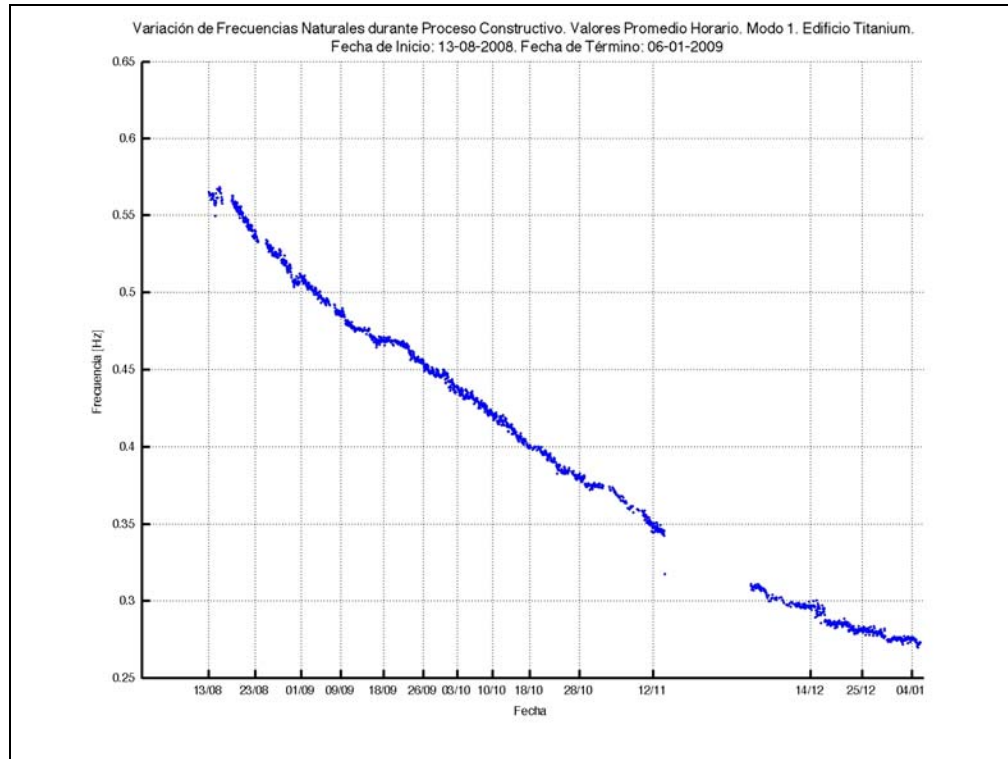


Figura 5. 99. Variación temporal de frecuencia natural. Promedio Horario. Modo 1. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.

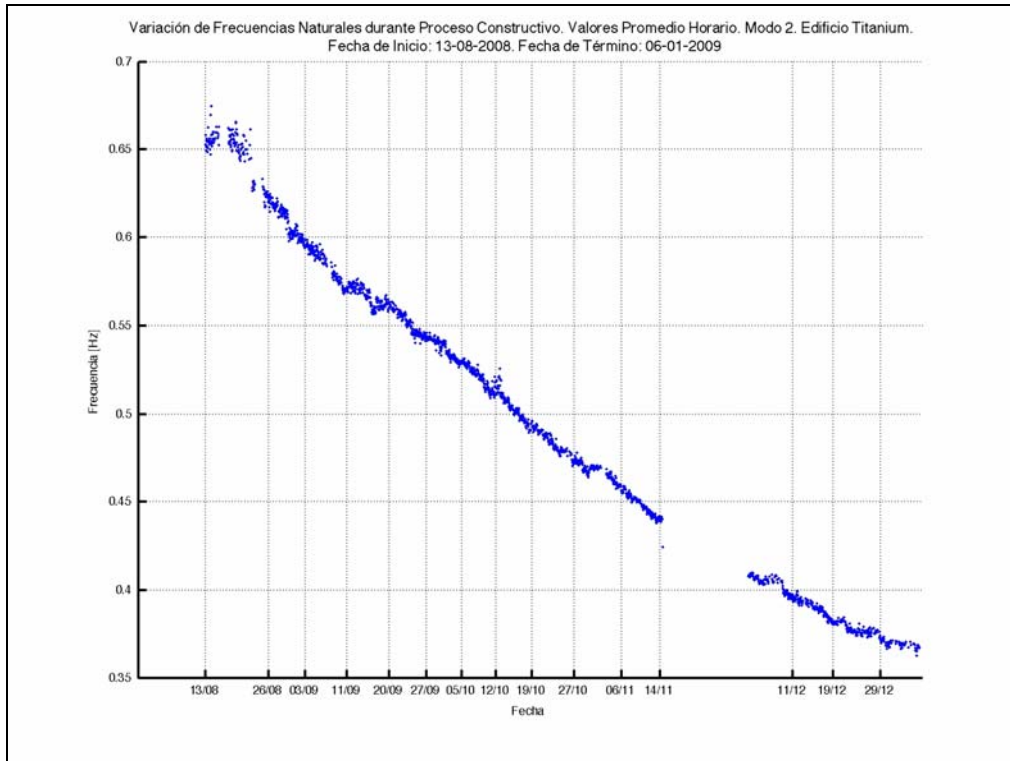


Figura 5. 100. Variación temporal de frecuencia natural. Promedio Horario. Modo 2. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.

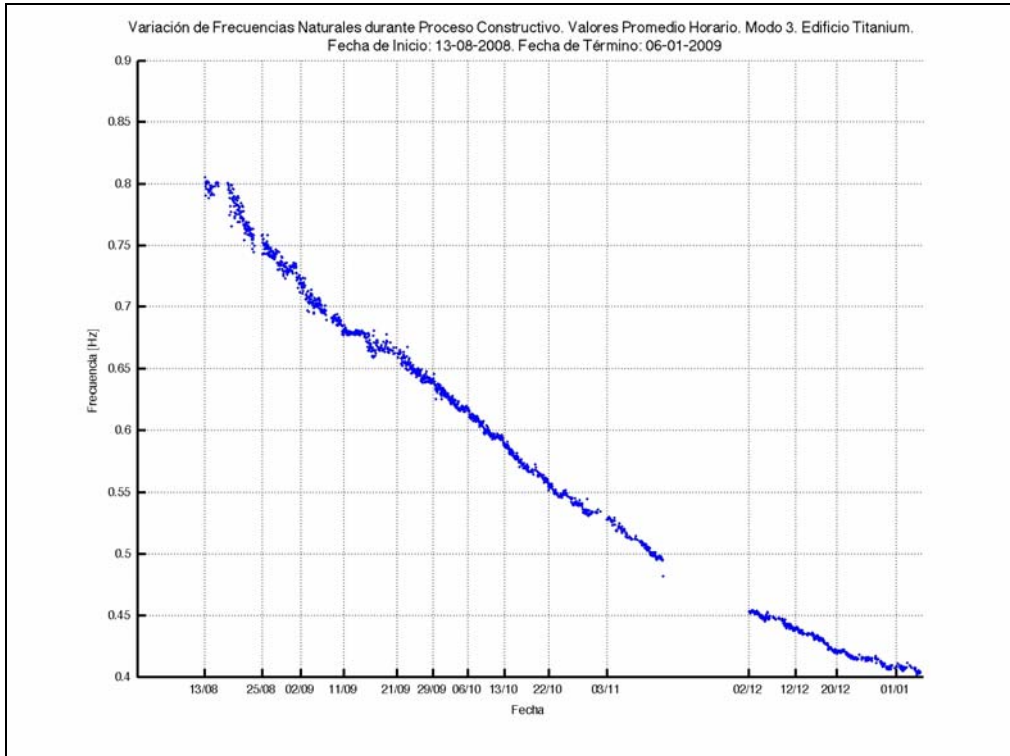


Figura 5. 101. Variación temporal de frecuencia natural. Promedio Horario. Modo 3. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.

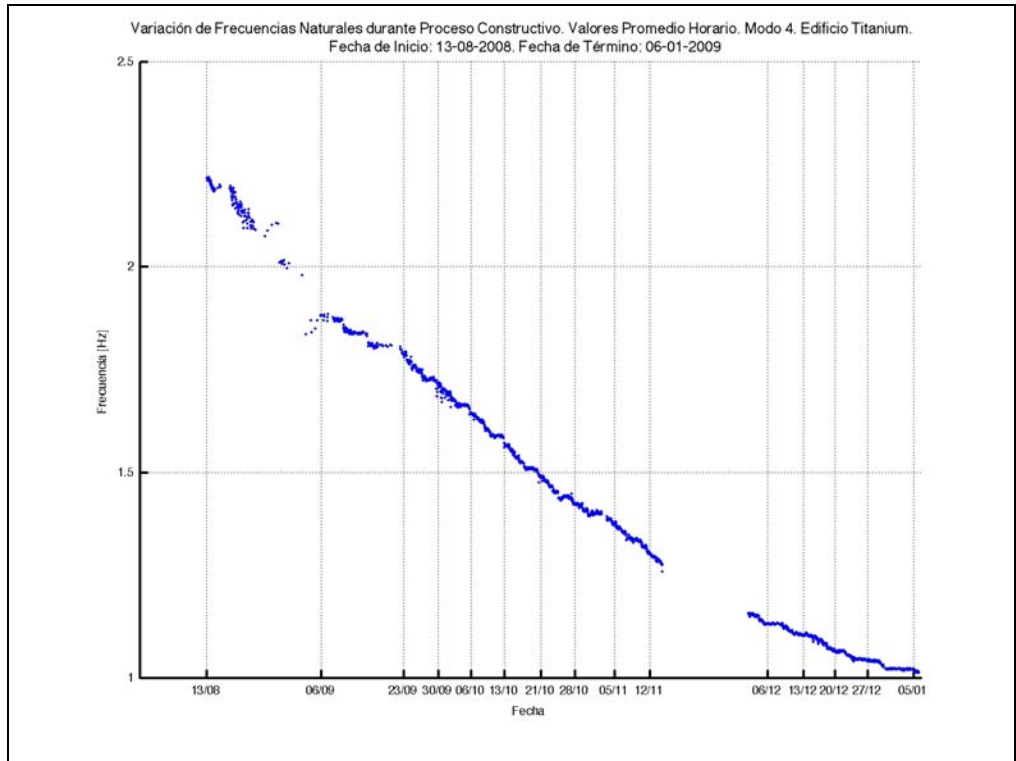


Figura 5. 102. Variación temporal de frecuencia natural. Promedio Horario. Modo 4. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.

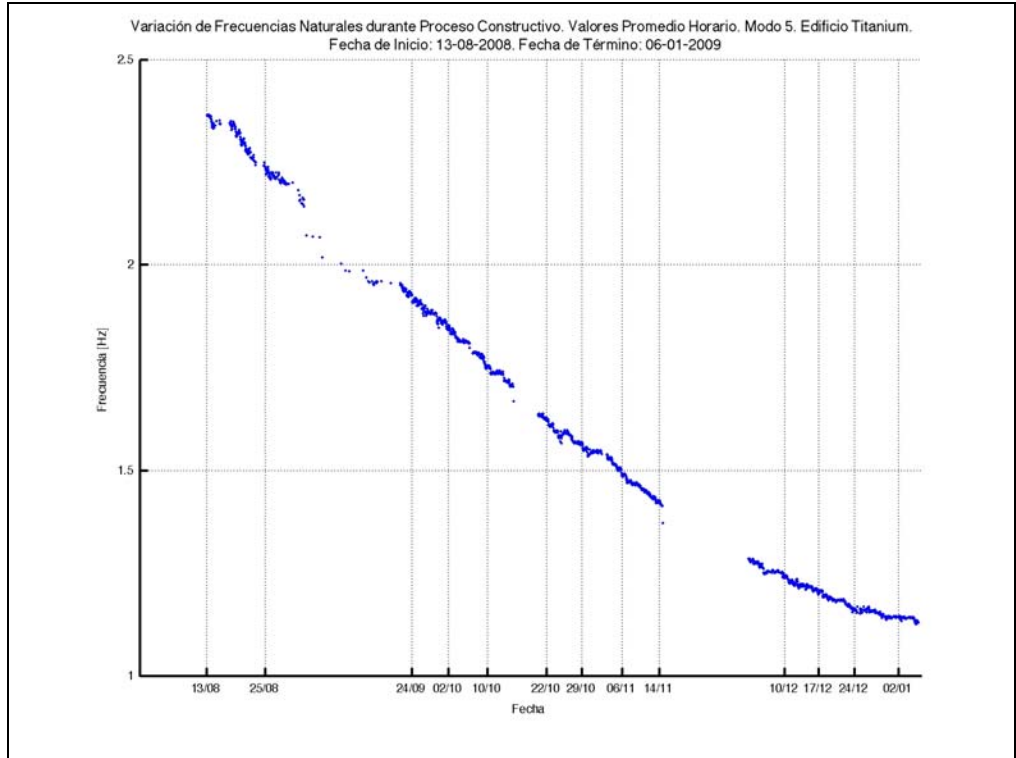


Figura 5. 103. Variación temporal de frecuencia natural. Promedio Horario. Modo 5. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.

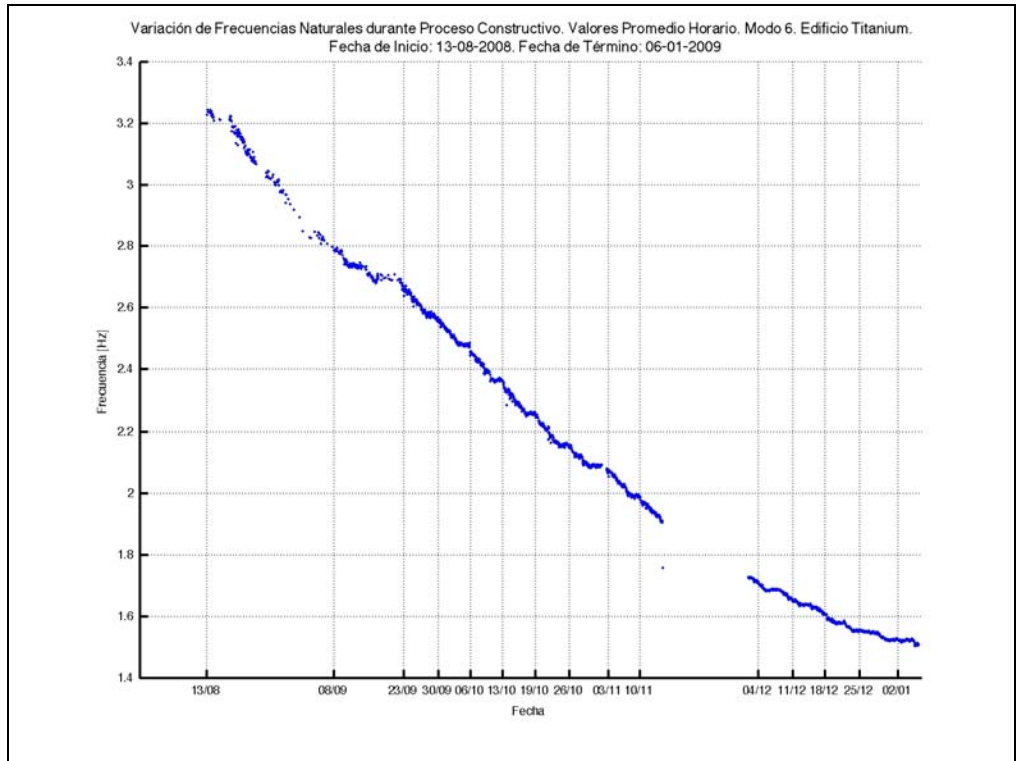


Figura 5. 104. Variación temporal de frecuencia natural. Promedio Horario. Modo 6. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.

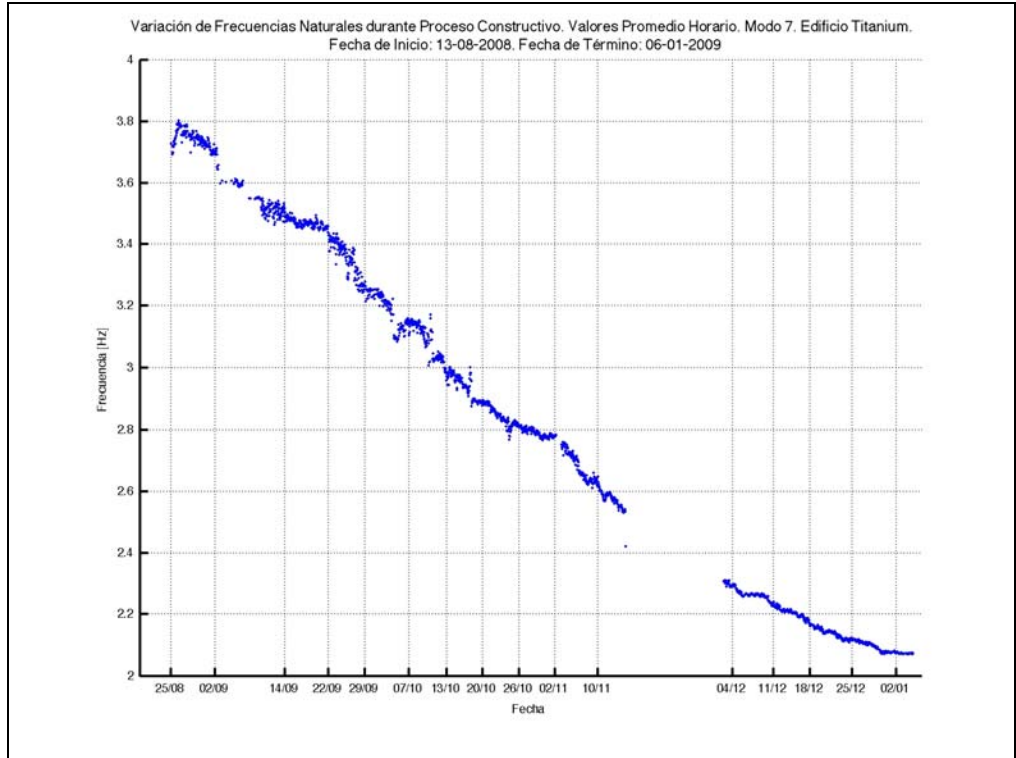


Figura 5. 105. Variación temporal de frecuencia natural. Promedio Horario. Modo 7. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.

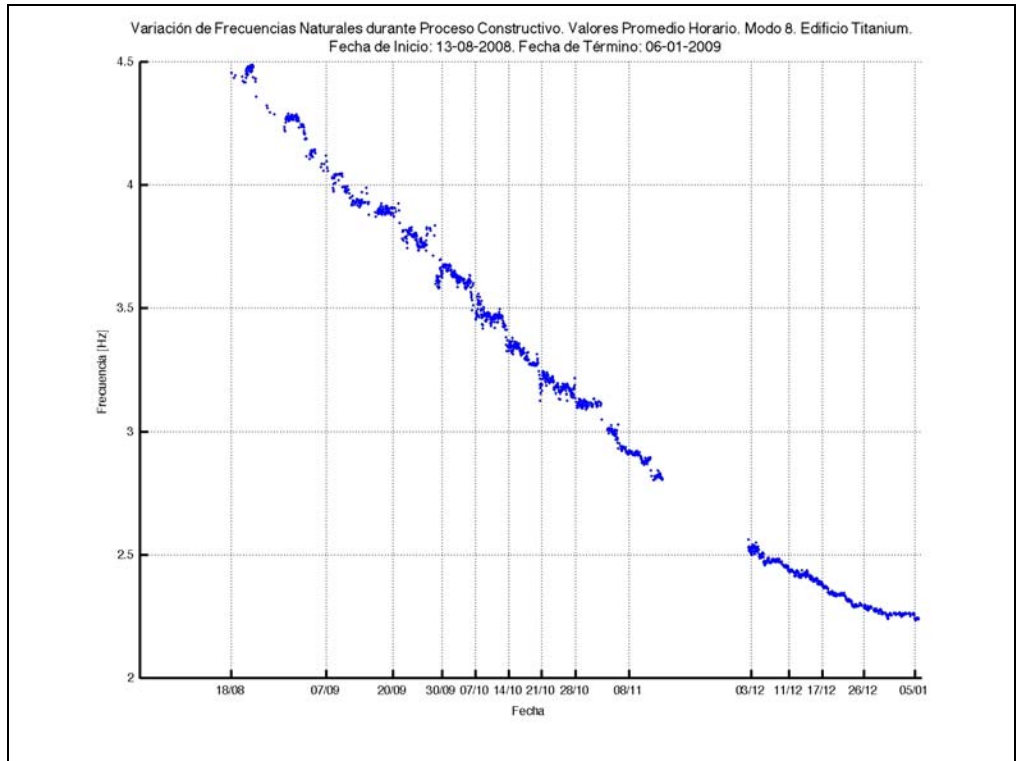


Figura 5. 106. Variación temporal de frecuencia natural. Promedio Horario. Modo 8. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.

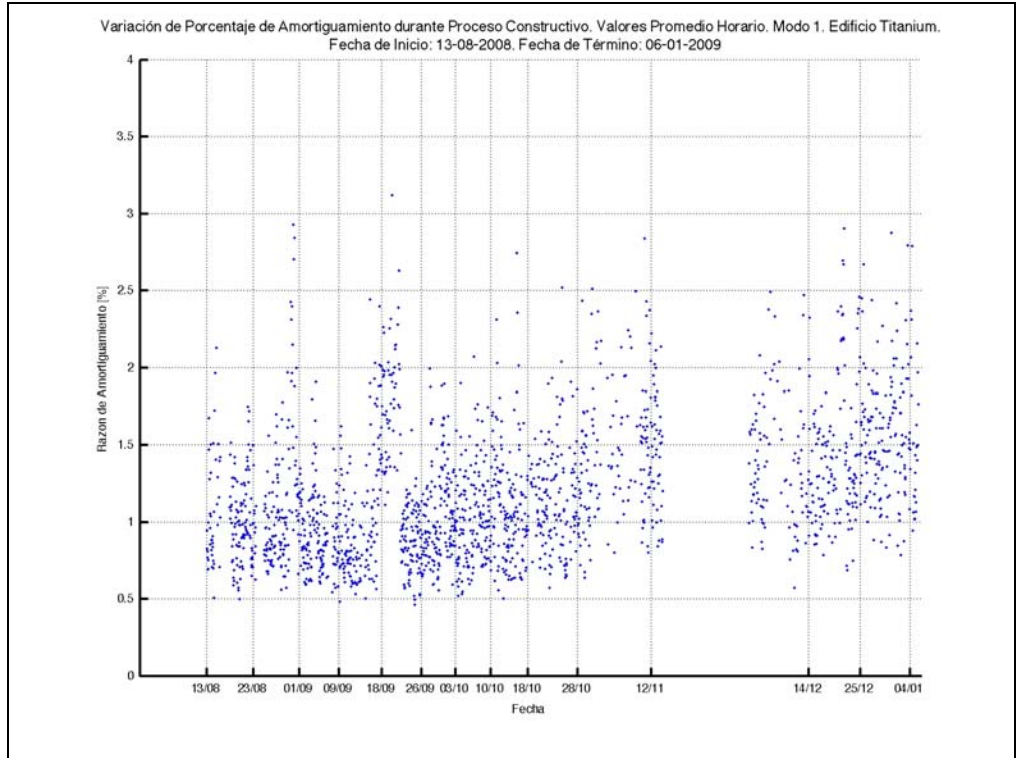


Figura 5. 107. Variación temporal de amortiguamiento. Promedio Horario. Modo 1. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.

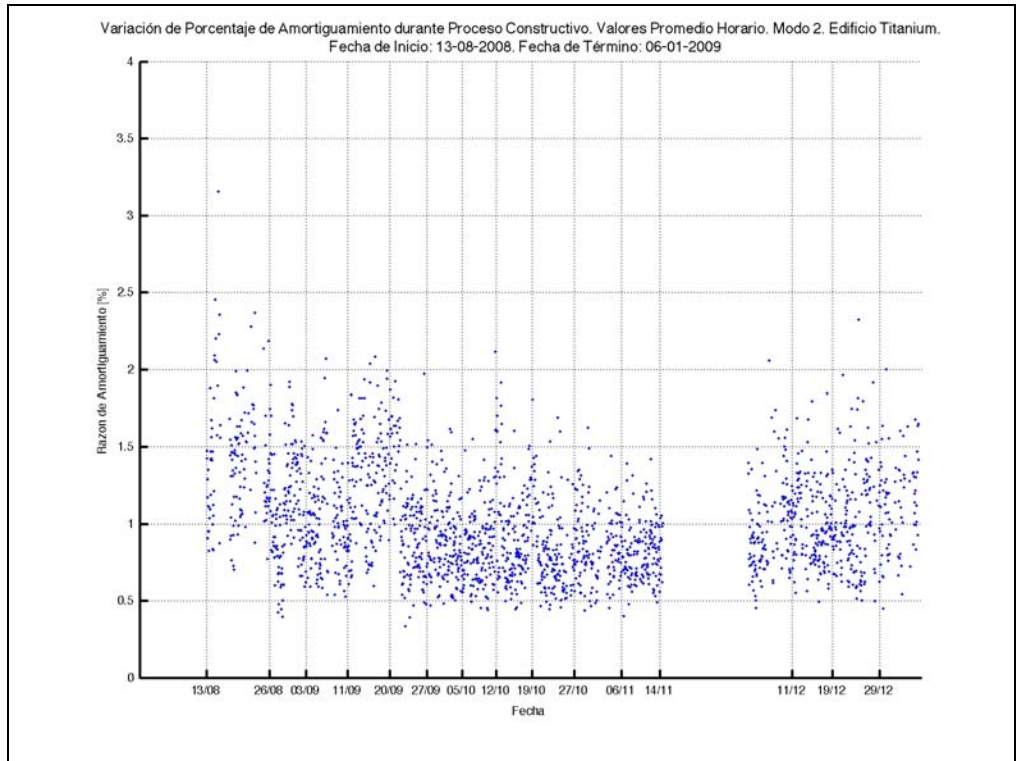


Figura 5. 108. Variación temporal de amortiguamiento. Promedio Horario. Modo 2. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.

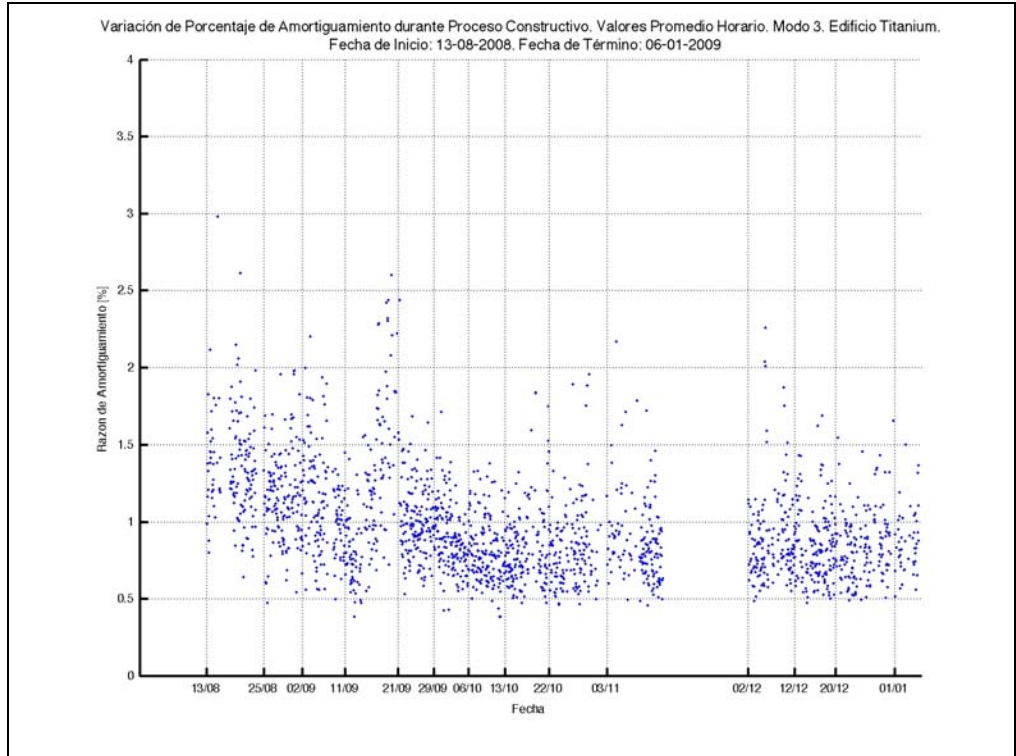


Figura 5. 109. Variación temporal de amortiguamiento. Promedio Horario. Modo 3. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.

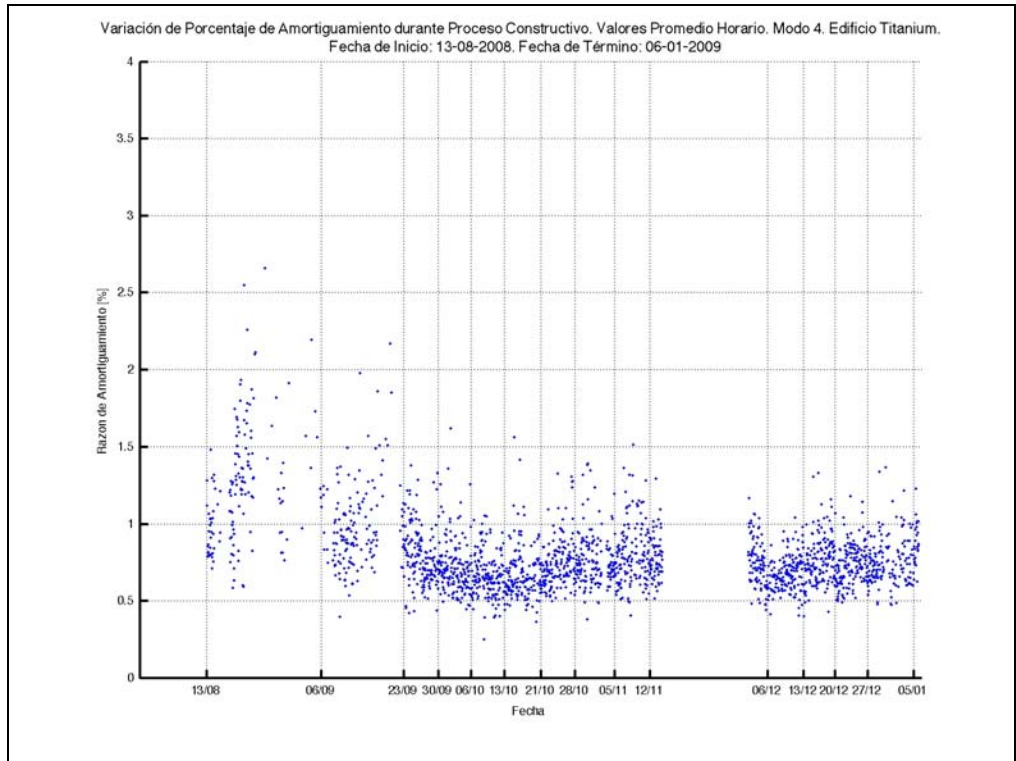


Figura 5. 110. Variación temporal de amortiguamiento. Promedio Horario. Modo 4. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.

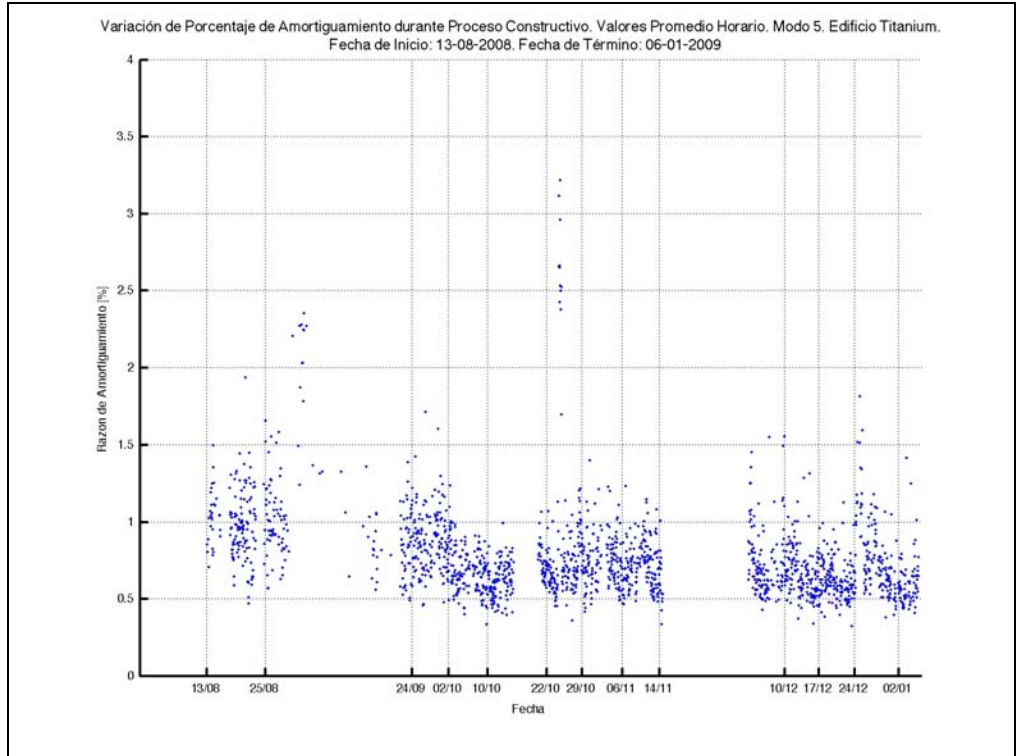


Figura 5. 111. Variación temporal de amortiguamiento. Promedio Horario. Modo 5. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.

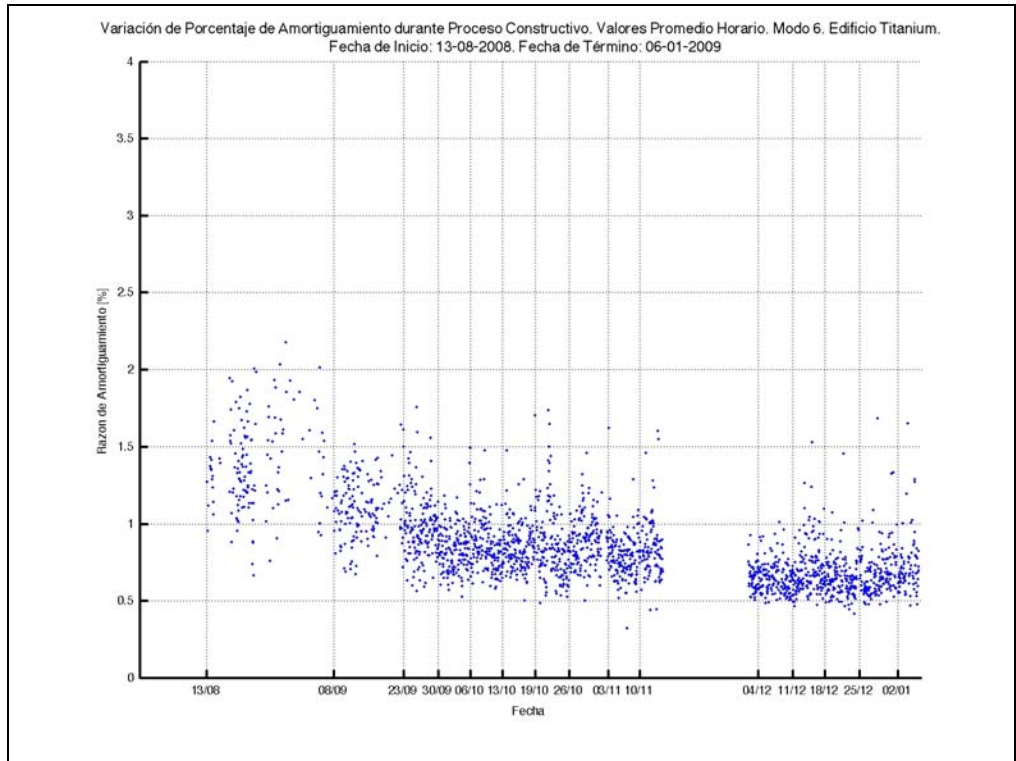


Figura 5. 112. Variación temporal de amortiguamiento. Promedio Horario. Modo 6. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.

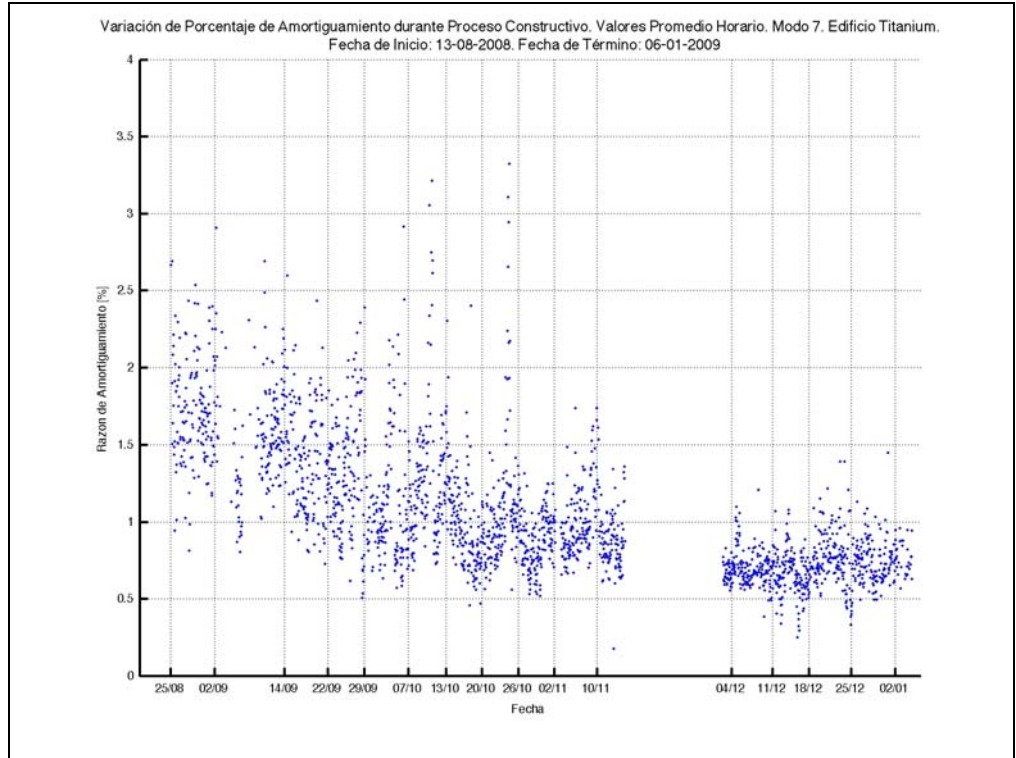


Figura 5. 113. Variación temporal de amortiguamiento. Promedio Horario. Modo 7. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.

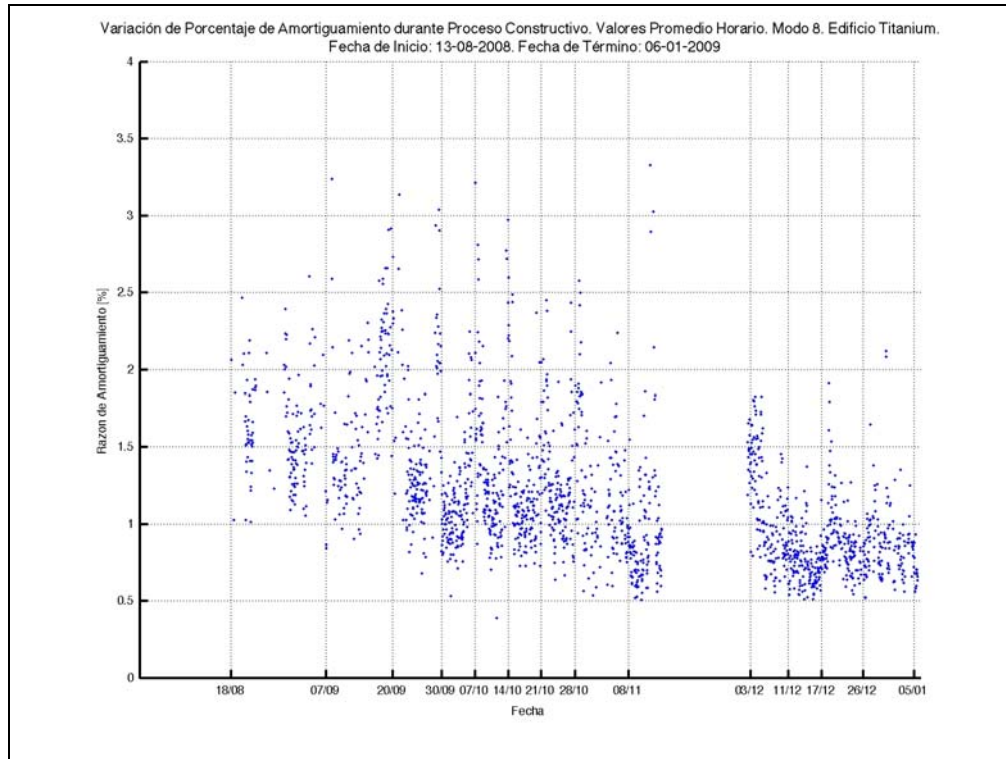


Figura 5. 114. Variación temporal de amortiguamiento. Promedio Horario. Modo 8. Método SSI-CVA. Edificio Titanium La Portada.

De las Figura 5. 84 y Figura 5. 99 a Figura 5. 106 se observa un patrón de variación global de las frecuencias naturales de la estructura, que se encuentra asociado al aumento de masa y rigidez producto del aumento de pisos que experimenta el edificio en función del tiempo. Este tipo de variación es de tipo no-lineal.

Sin embargo, es posible definir más claramente la forma en que varían los parámetros dinámicos, que como se verá a continuación, no es única, sino que una combinación de patrones de variación.

Para esto, se propone la aplicación de un Espectro de Densidad de Potencia a la variación de frecuencias naturales en función del tiempo, lo que entregará como resultado los patrones más relevantes de variación de este parámetro. Por otra parte

este procedimiento permitirá desacoplar la variación de frecuencia en caso de existir más de un patrón de variación.

El mismo procedimiento se puede hacer para la variación de amortiguamiento, siendo una herramienta importante para caracterizar su variación, ya que no es clara a primera vista, debido al proceso constructivo en el que se encuentra la estructura.

Este análisis se realizó para los primeros ocho modos, separados en los primeros tres modos que se encuentran bajo 1 [Hz] y el resto que se encuentra por sobre este valor.

Esto debido a las diferentes escalas en los valores del espectro de potencia de la variación de las frecuencias naturales, lo que permite una mejor visualización de los resultados.

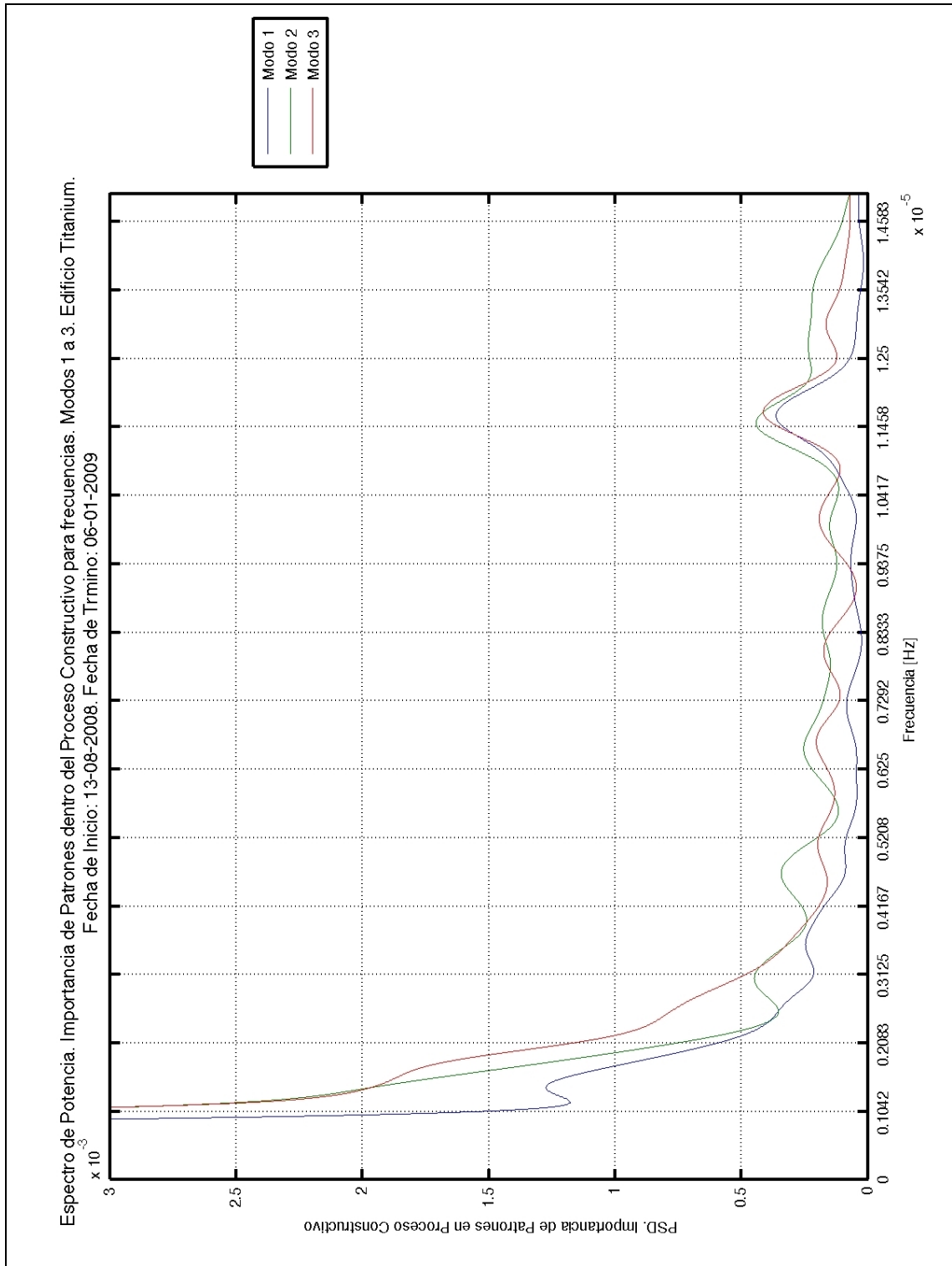


Figura 5.115. Espectro de Potencia de la Variación de las Frecuencias Naturales. Modos 1 a 3. Edificio Titanium.

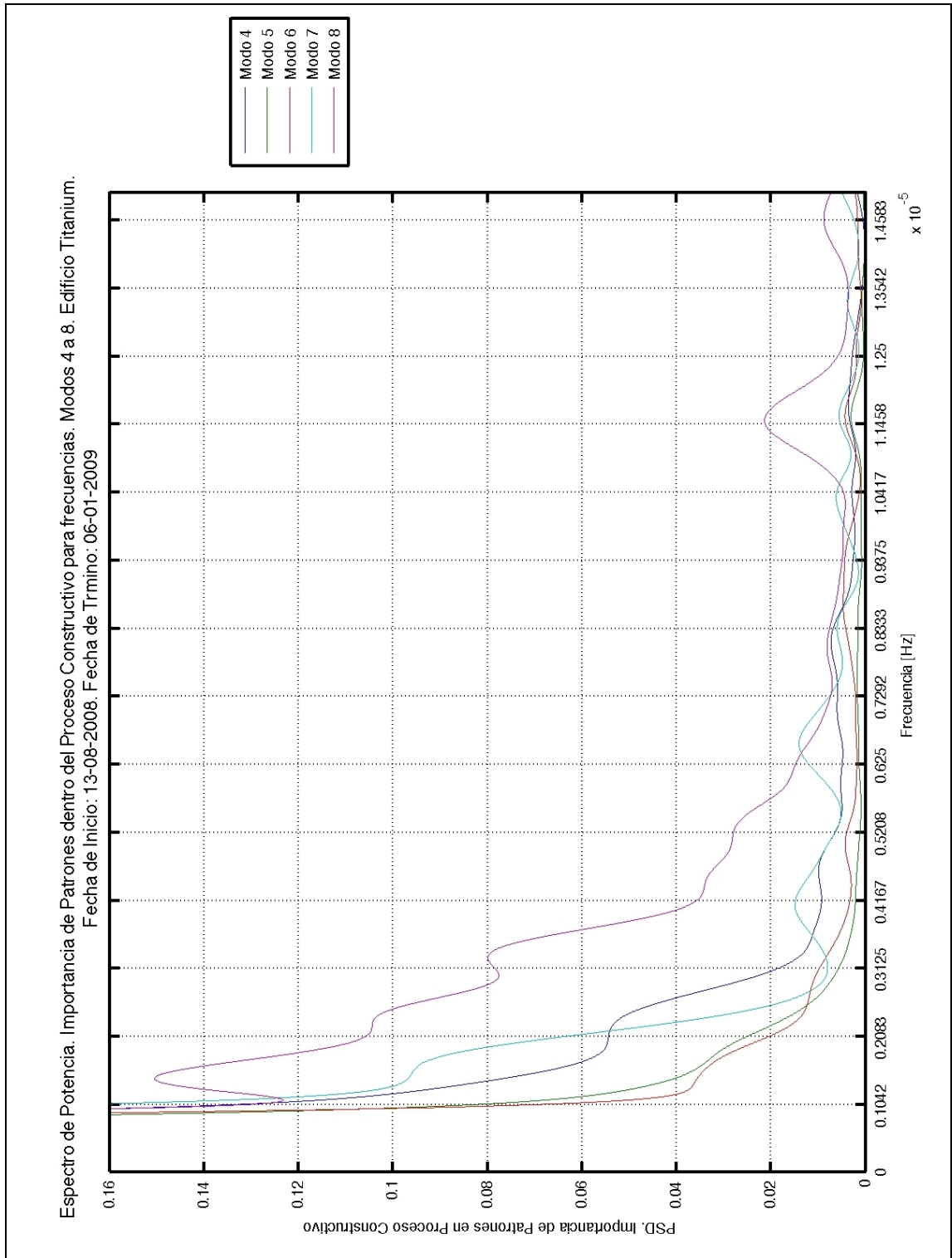


Figura 5.116. Espectro de Potencia de la Variación de las Frecuencias Naturales. Modos 4 a 8. Edificio Titanium.

De las Figura 5.115 y Figura 5.116 se pueden establecer los siguientes ciclos predominantes en la variación de las frecuencias:

Tabla 5.17. Ciclo semanal de Variación de Frecuencias Naturales Edificio Titanium debido a procesos constructivos. Modos 1 a 8.

Modo	Frecuencia [$\times 10^{-6} \text{ Hz}$]	Período [<i>días</i>]
1	1.43	8.1
2	-	-
3	1.65	7.0
4	-	-
5	1.80	6.4
6	1.56	7.4
7	1.61	7.2
8	1.42	8.1
	Promedio	7.4

Tabla 5. 18. Ciclo diario de variación de frecuencias naturales edificio Titanium debido a procesos constructivos. Modos 1 a 8.

Modo	Frecuencia [$\times 10^{-5} \text{ Hz}$]	Periodo [<i>horas</i>]
1	1.16	23.9
2	1.15	24.1
3	1.17	23.8
4	1.18	23.6
5	1.16	24.0
6	1.16	24.0
7	1.16	24.0
8	1.15	24.1
	Promedio	23.9

De las Tabla 5.17 y Tabla 5. 18 se deduce que la variación predominante no sólo obedece a los cambios de masa y rigidez producto del aumento de pisos en función del tiempo (ciclo semanal), sino que existe un patrón diario de variación de frecuencias, cuya importancia se observa en los espectros de potencia, Figura 5.115 y Figura 5.116 y que se debe principalmente a factores como temperatura, ocupación y desocupación del edificio producto del transito de personas que trabajan en faenas constructivas, entre otros.

Al identificar los ciclos predominantes dentro de la variación de frecuencias, es posible separar cada patrón de variación, mediante un filtro que solo incluya la banda asociada por un lado al las variaciones diarias y por otro lado a las variaciones semanales.

Para el caso de filtrado del patrón diario, se aplicó un filtro pasa-banda de intervalo $[0.90 \times 10^{-5}, 1,25 \times 10^{-5}] [Hz]$, mientras que para el patrón semanal, se aplico un filtro pasa-bajos de $0.3125 \times 10^{-5} [Hz]$.

Al realizar este “filtrado” es posible separar ambos patrones de variación.

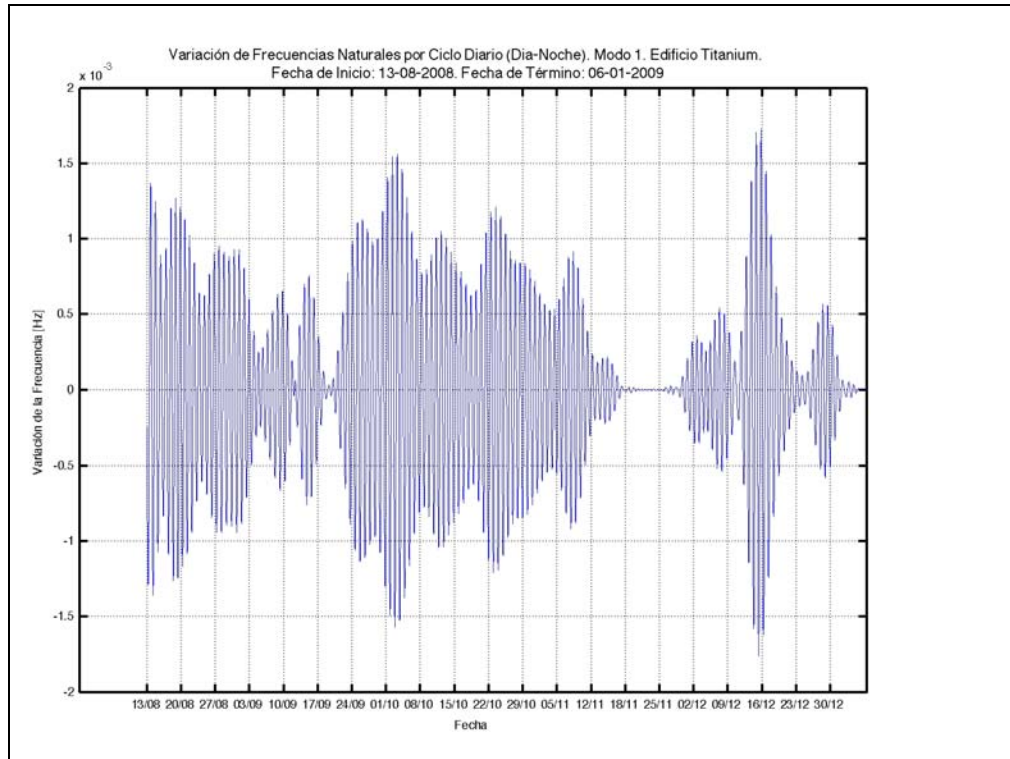


Figura 5.117. Variación de frecuencias naturales por ciclo diario (Día-Noche). Modo 1. Edificio Titanium La Portada

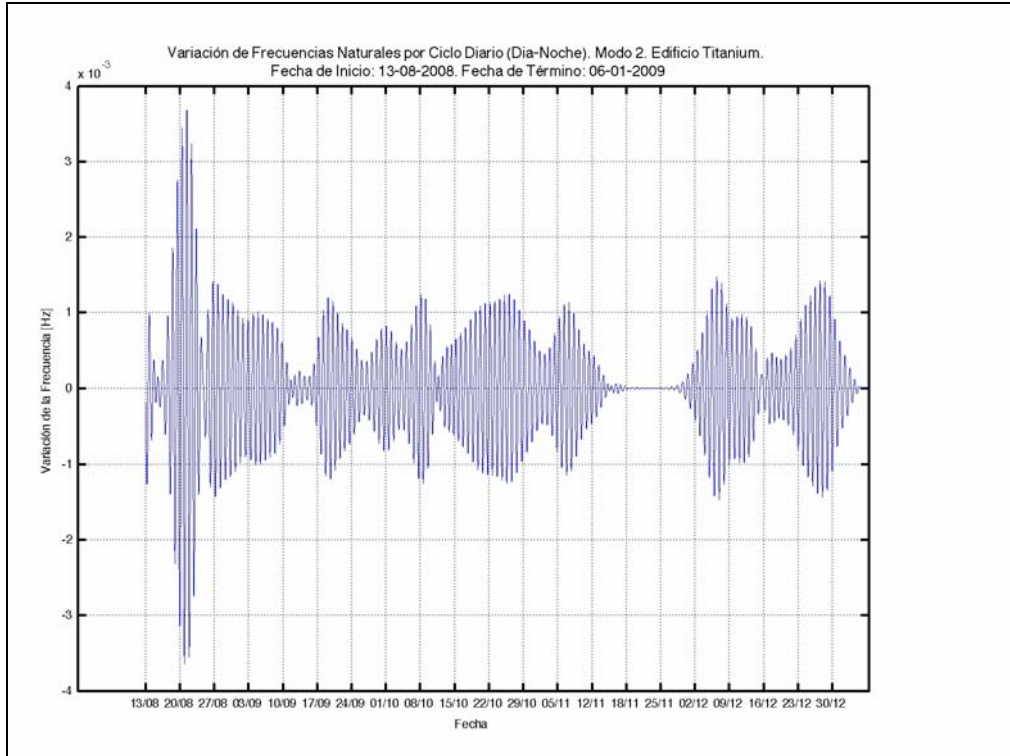


Figura 5. 118. Variación de frecuencias naturales por ciclo diario (Día-Noche). Modo 2. Edificio Titanium La Portada

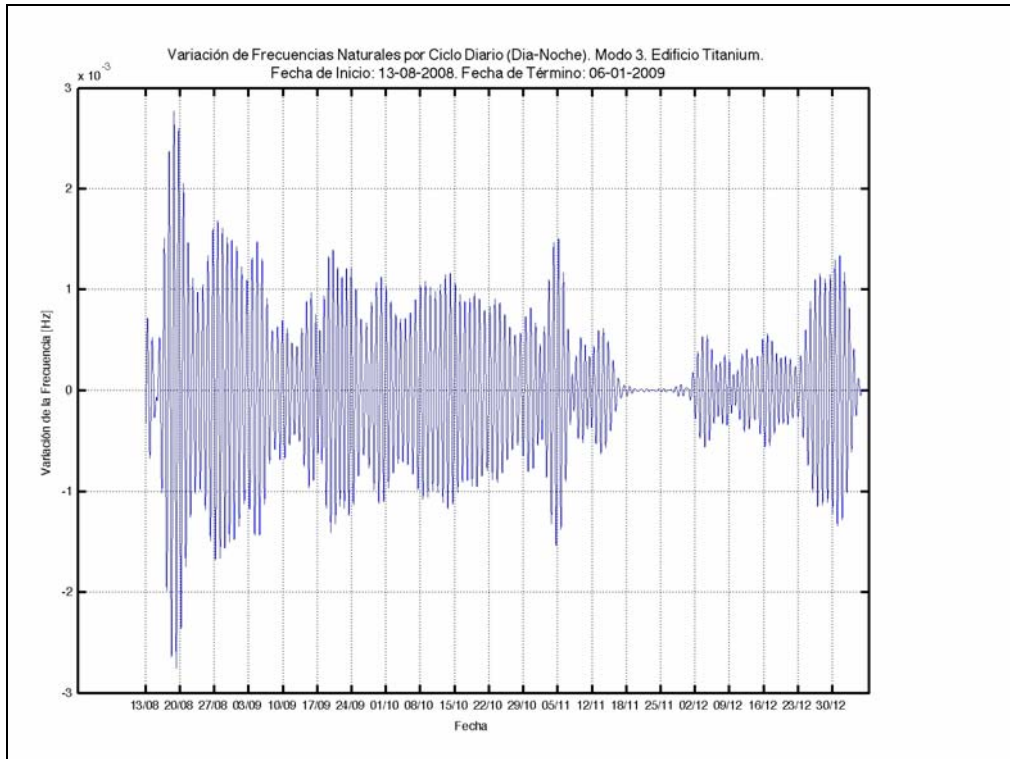


Figura 5.119. Variación de frecuencias naturales por ciclo diario (Día-Noche). Modo 3. Edificio Titanium La Portada.

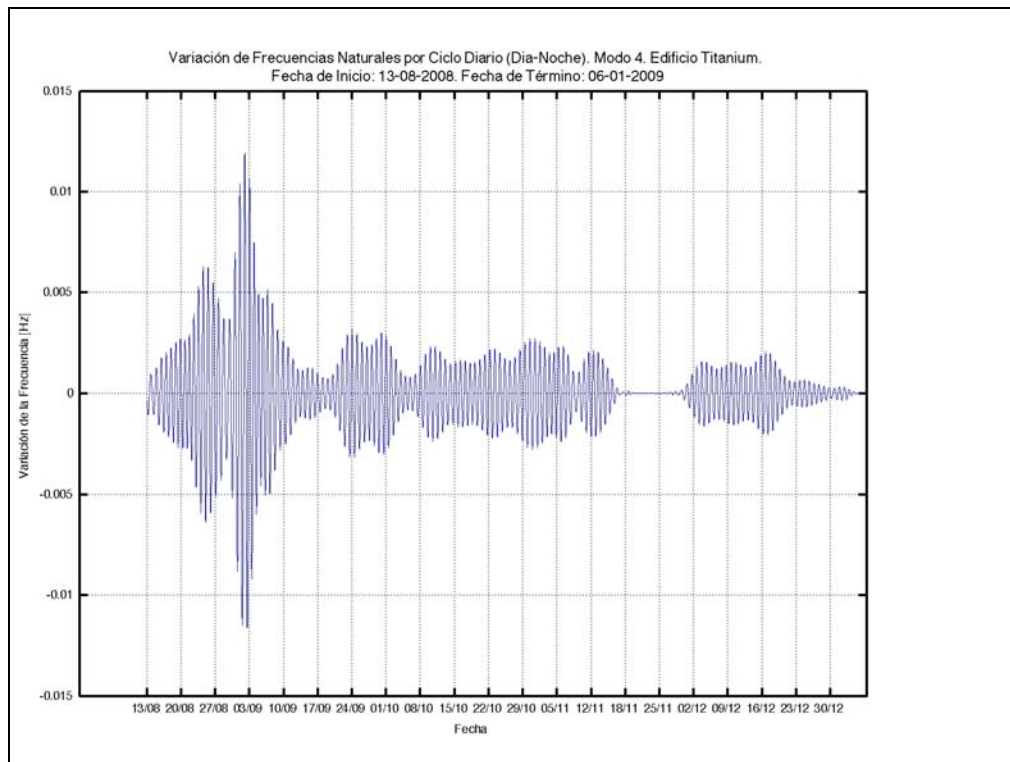


Figura 5.120. Variación de frecuencias naturales por ciclo diario (Día-Noche). Modo 4. Edificio Titanium La Portada.

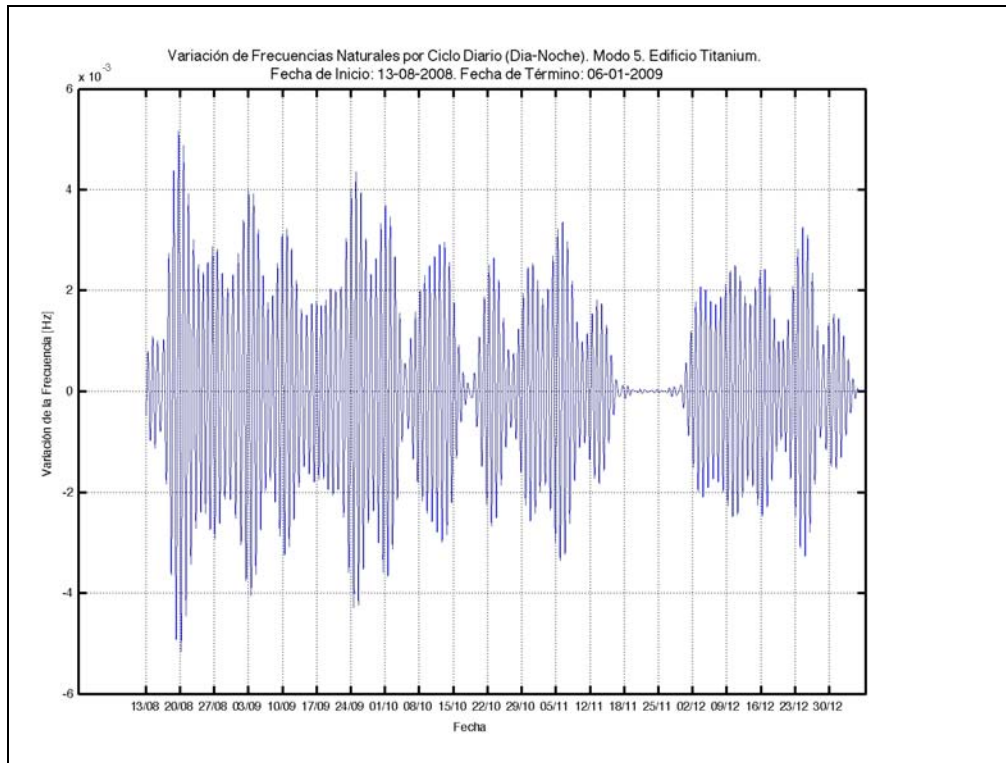


Figura 5.121. Variación de frecuencias naturales por ciclo diario (Día-Noche). Modo 5. Edificio Titanium La Portada.

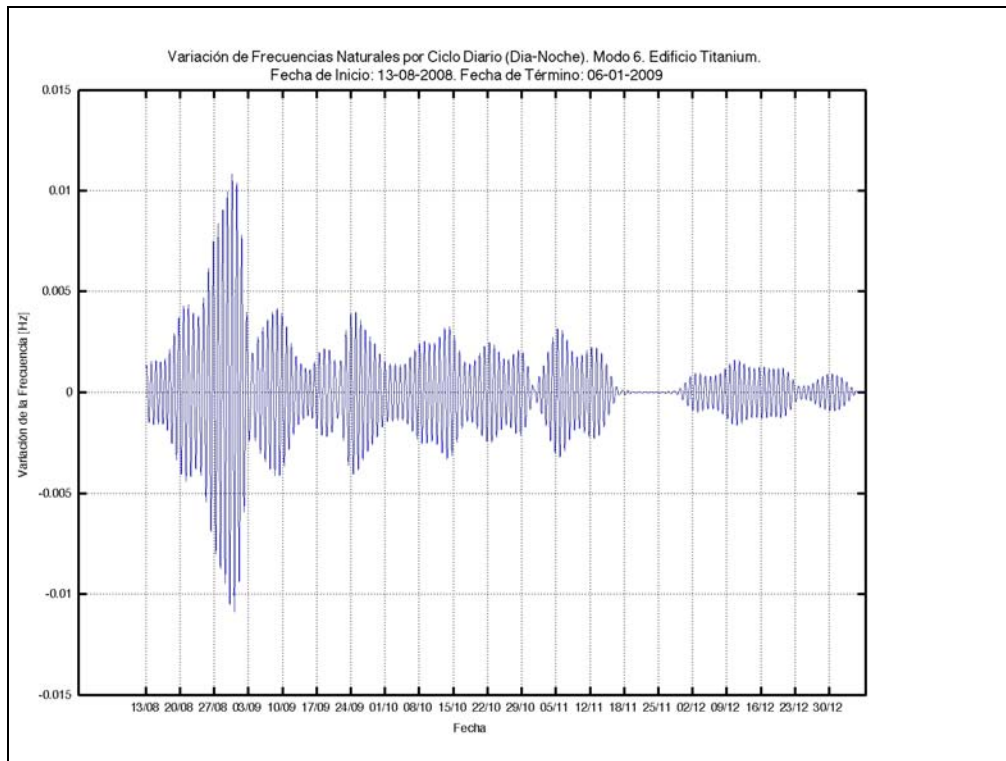


Figura 5.122. Variación de frecuencias naturales por ciclo diario (Día-Noche). Modo 6. Edificio Titanium La Portada.

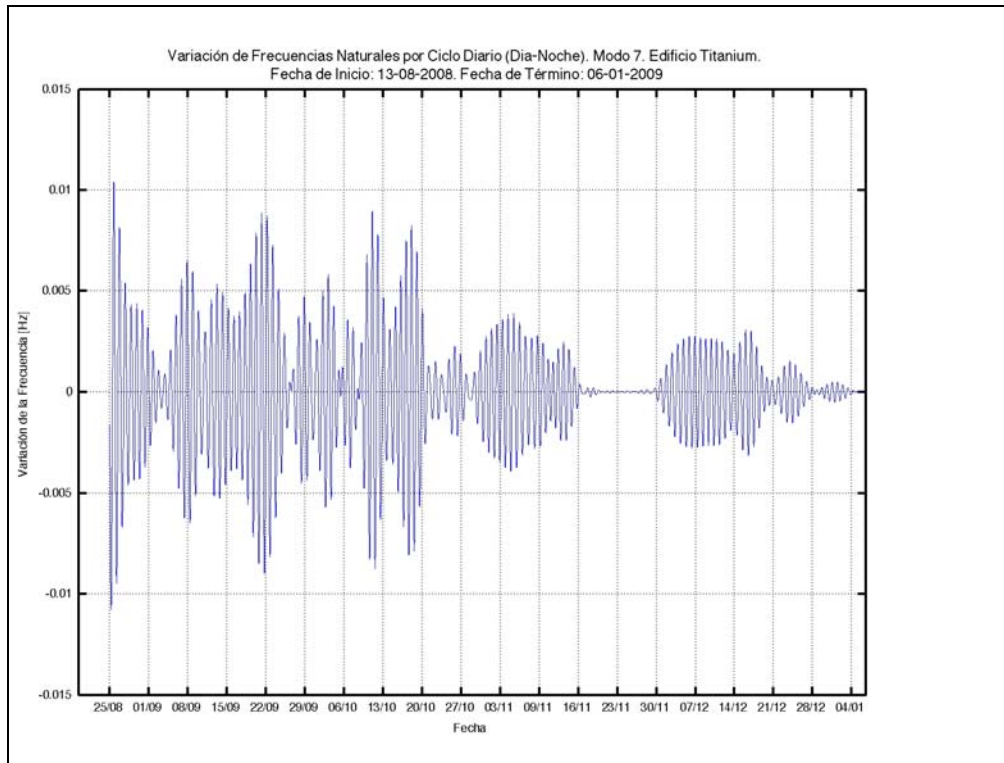


Figura 5.123. Variación de frecuencias naturales por ciclo diario (Día-Noche). Modo 7. Edificio Titanium La Portada.

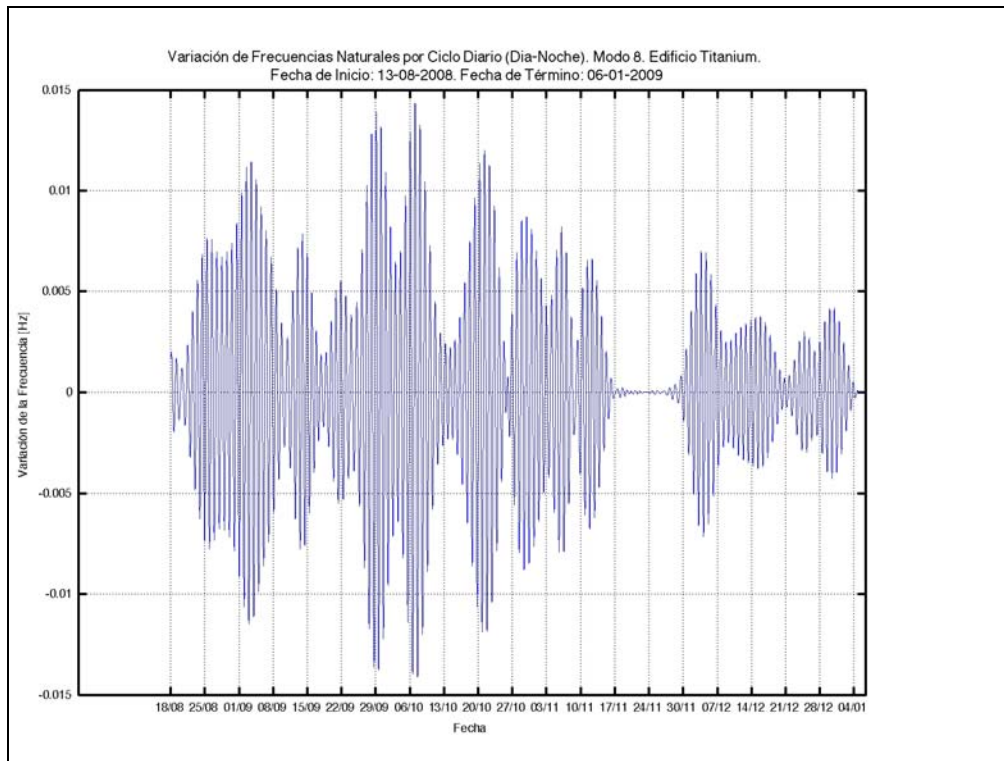


Figura 5.124. Variación de frecuencias naturales por ciclo diario (Día-Noche). Modo 8. Edificio Titanium La Portada.

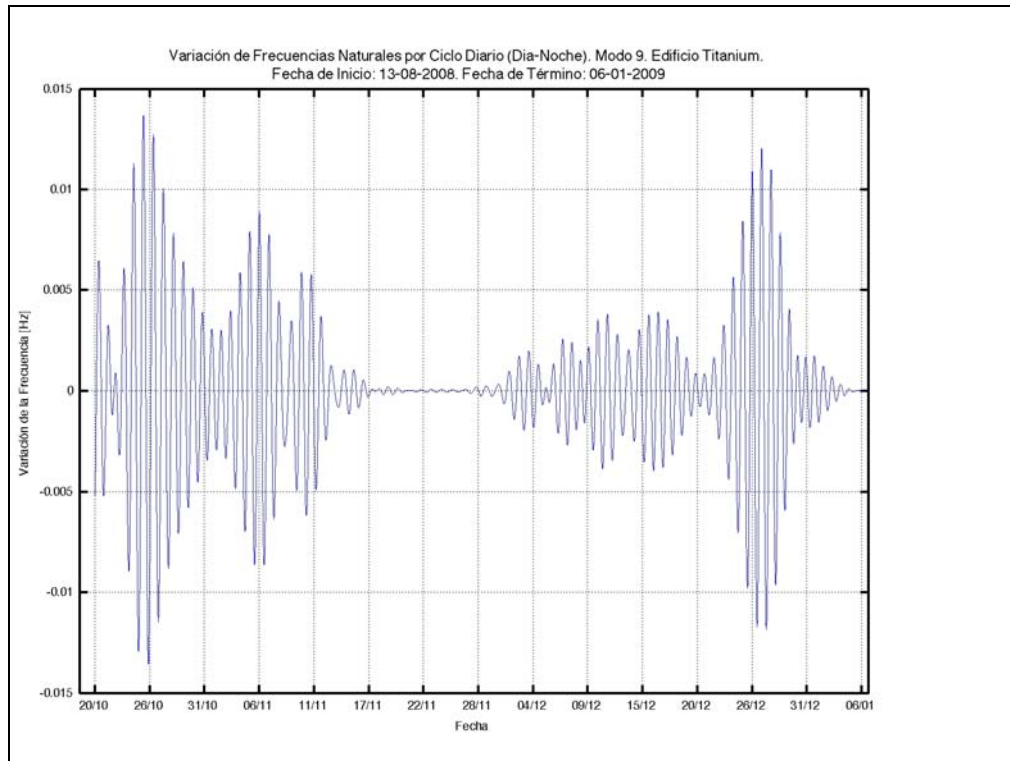


Figura 5.125. Variación de frecuencias naturales por ciclo diario (Día-Noche). Modo 9. Edificio Titanium La Portada.

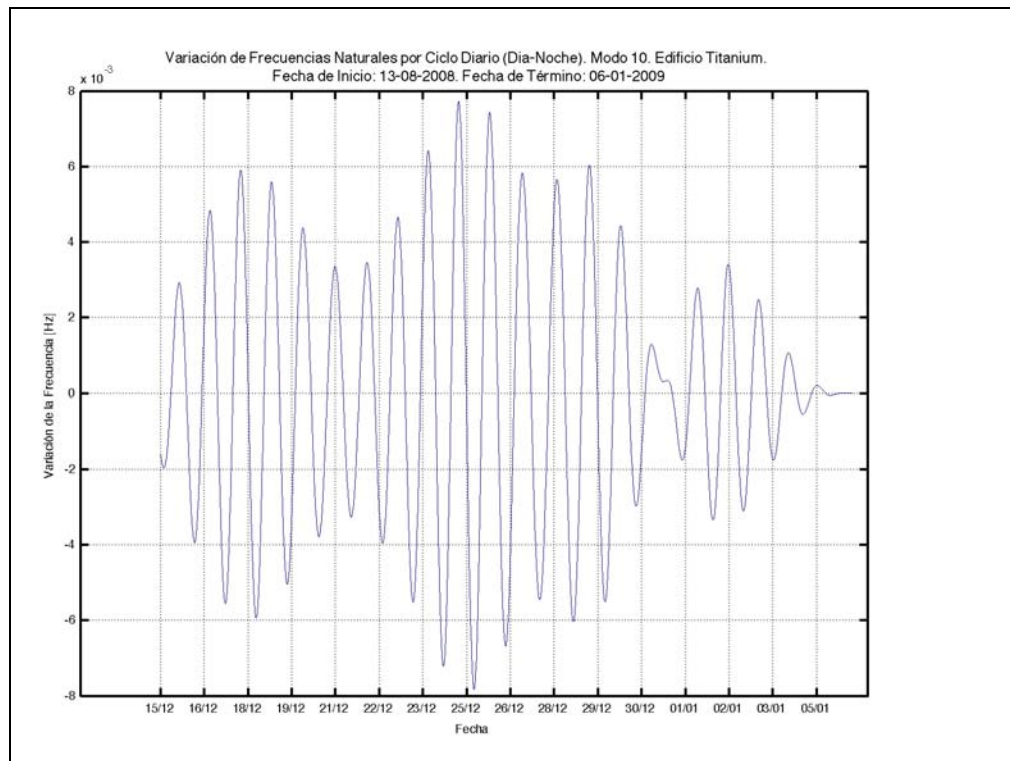


Figura 5.126. Variación de frecuencias naturales por ciclo diario (Día-Noche). Modo 10. Edificio Titanium La Portada.

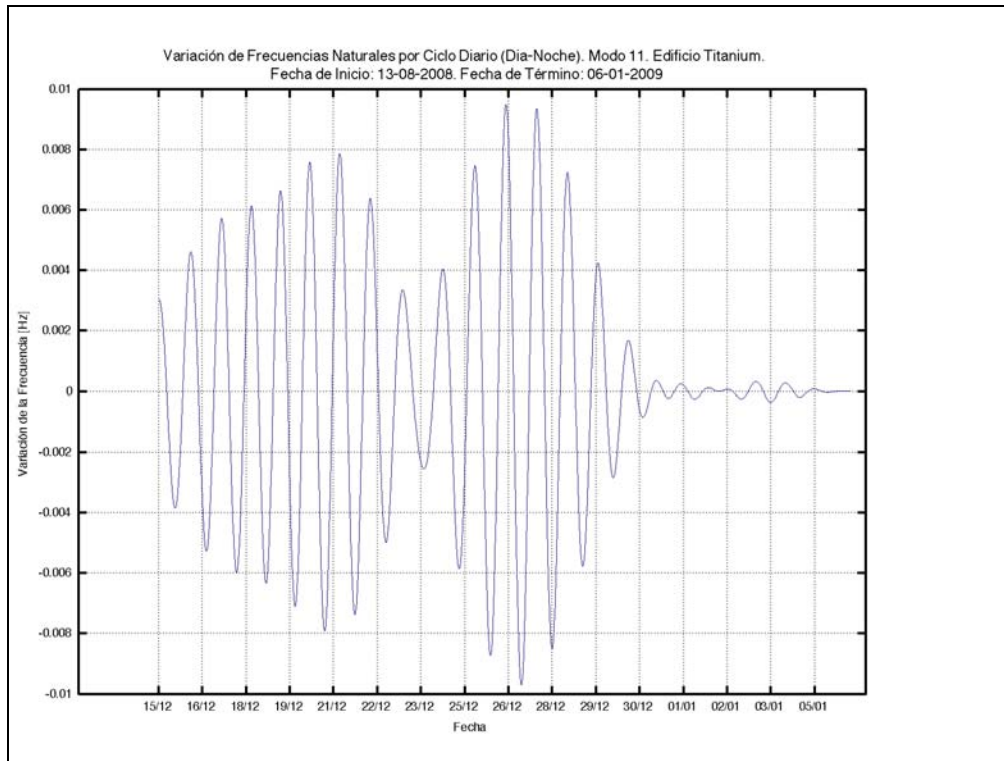


Figura 5.127. Variación de frecuencias naturales por ciclo diario (Día-Noche). Modo 11. Edificio Titanium La Portada.

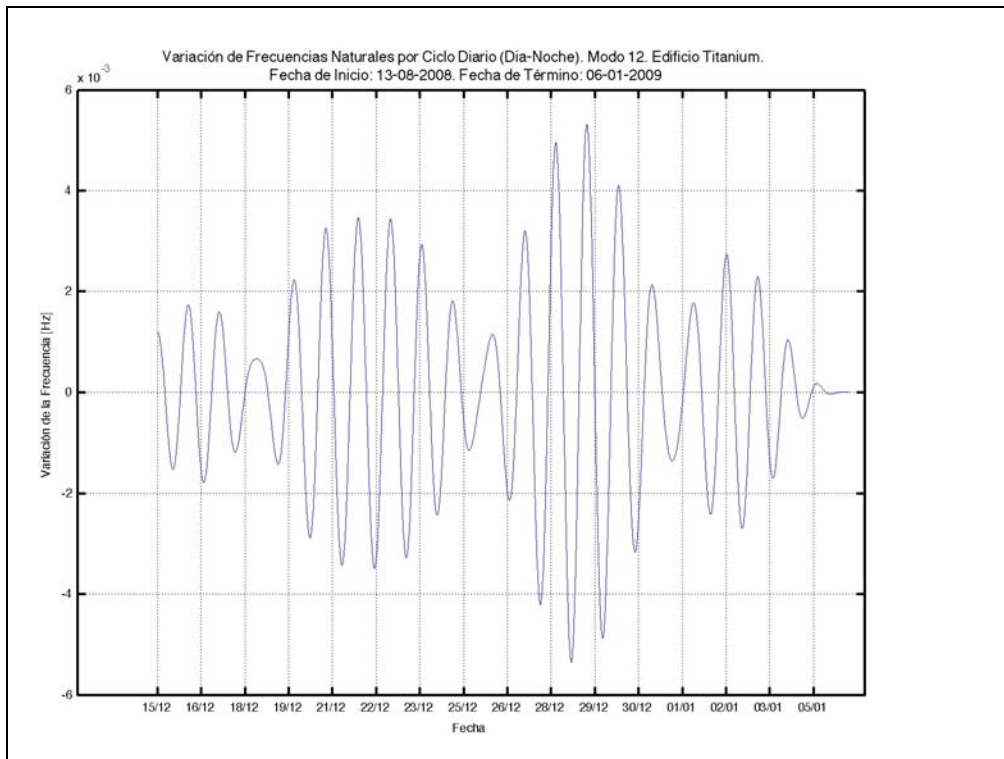


Figura 5.128. Variación de frecuencias naturales por ciclo diario (Día-Noche). Modo 12. Edificio Titanium La Portada.

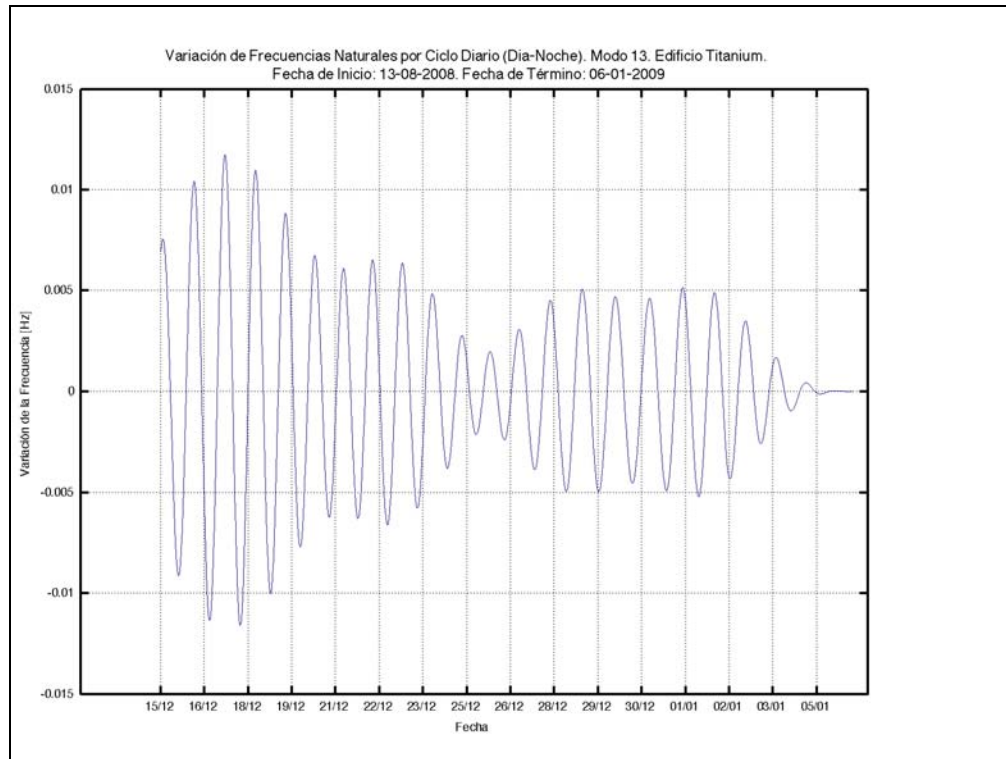


Figura 5.129. Variación de frecuencias naturales por ciclo diario (Día-Noche). Modo 13. Edificio Titanium La Portada.

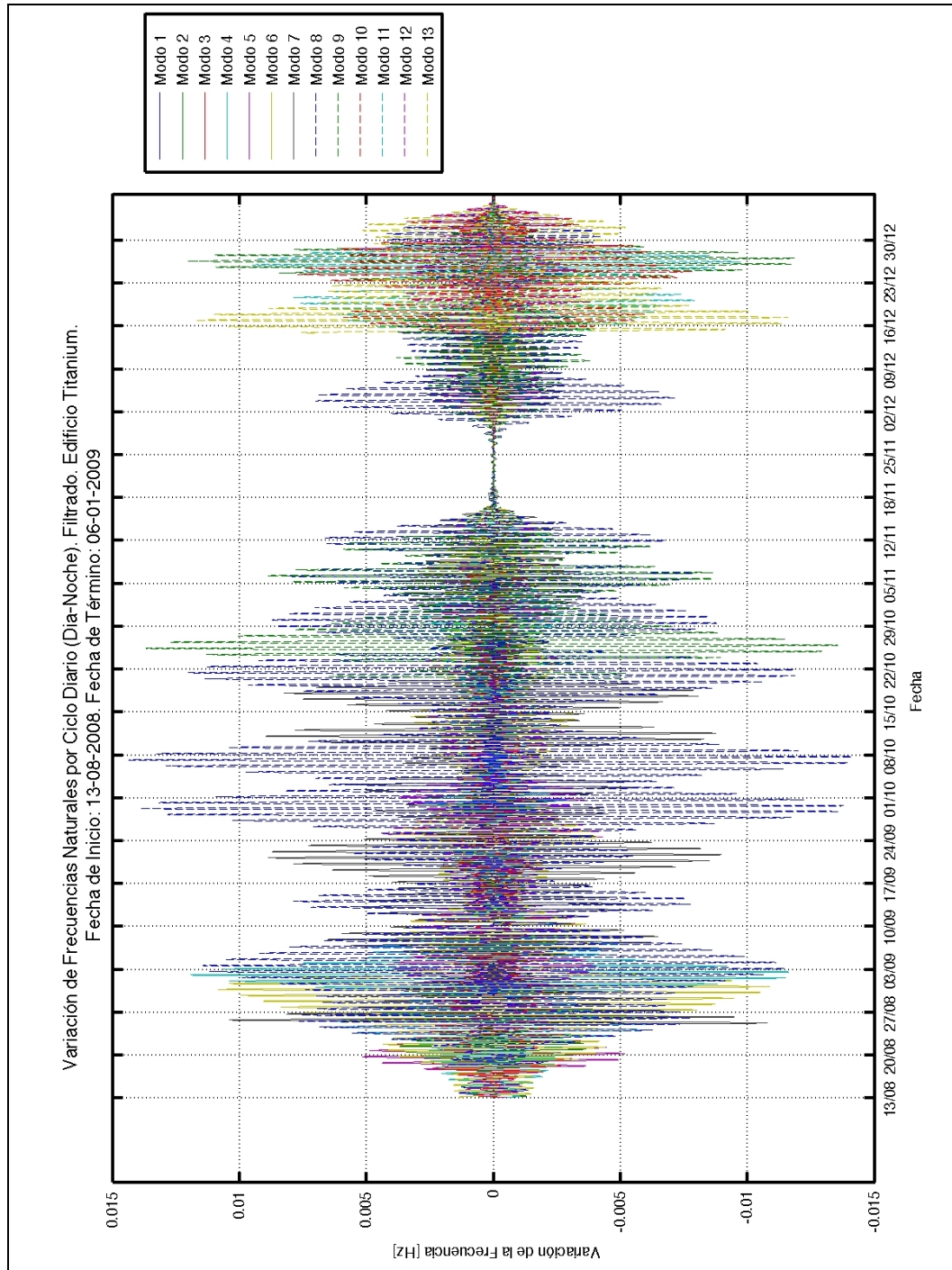


Figura 5.130. Variación de frecuencias naturales por ciclo diario (Día-Noche). Modos 1 a 13. Edificio Titanium La Portada.

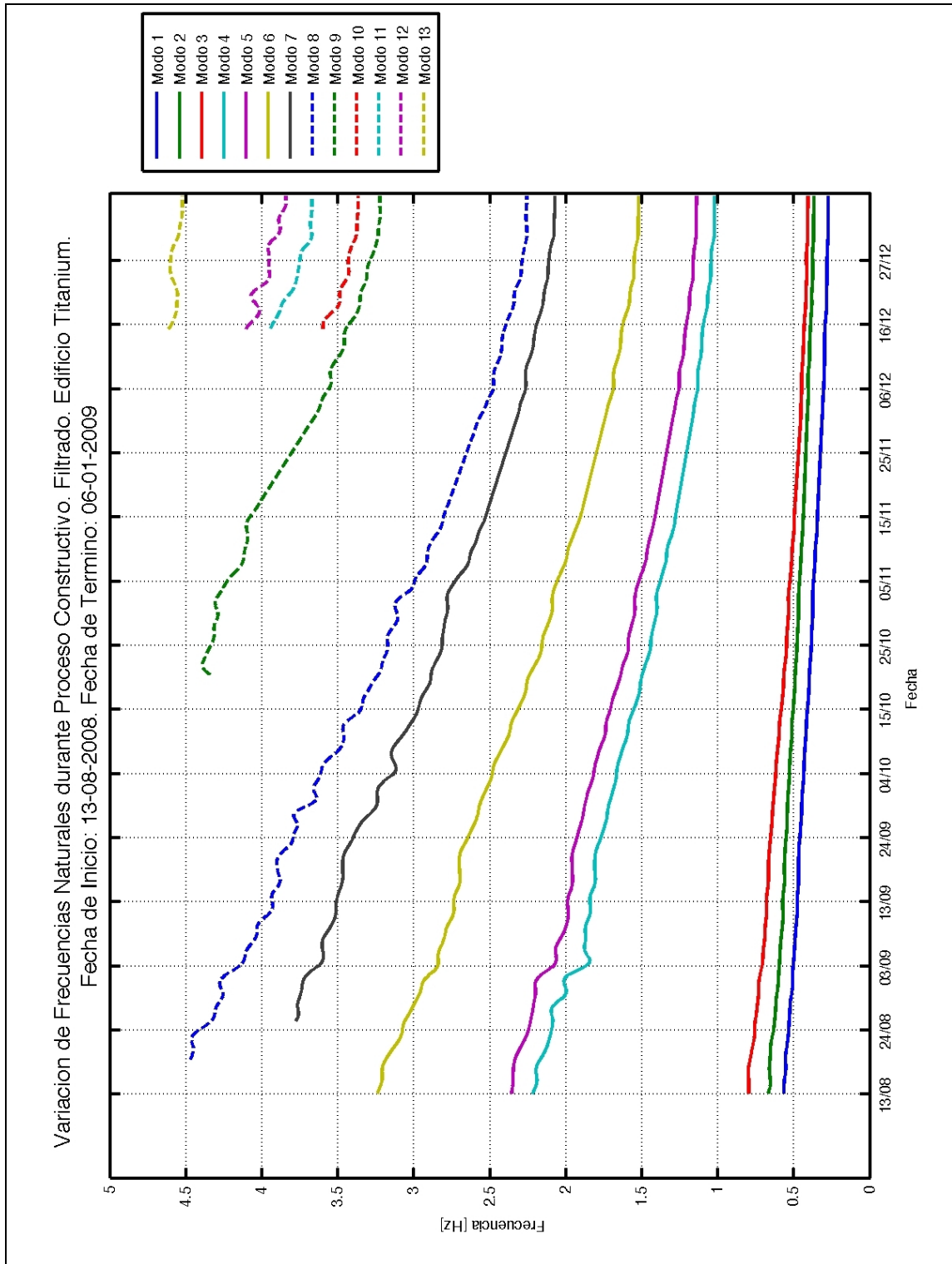


Figura 5.131. Variación de frecuencias naturales por ciclo semanal (6 a 8 días). Modos 1 a 13. Edificio Titanium La Portada.

Al realizar un zoom a la variación de frecuencias según el patrón diario, puede observarse un decrecimiento de la variación en los días que no hubo faenas constructivas, correspondiente a los fines de semana (domingos principalmente) y feriados.

A continuación se muestran algunos ejemplos de lo anteriormente señalado, donde se observa la influencia de la ocupación y desocupación del edificio, debido a las faenas constructivas del edificio. Notar la baja en la amplitud de variación de las frecuencias para los días sábado (en la tarde) y domingo, Figura 5. 132 a Figura 5. 134.

De forma secundaria debe señalarse que los ciclos de temperatura podrían tener incidencia dentro de esta variación [LAZCANO, 2008], pero no resulta claro realizar una separación entre ambos factores, debido a la no linealidad del problema que se está analizando en el que se combinan dos o más patrones de variación en la respuesta de la estructura.

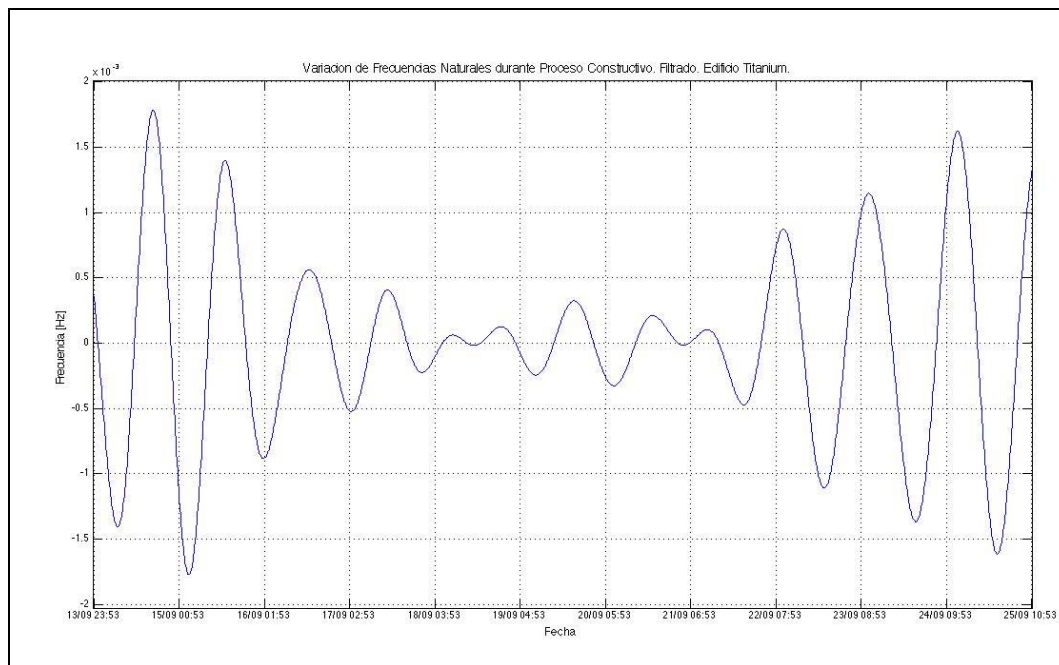


Figura 5. 132. Variación de frecuencias naturales por ciclo diario (Día-Noche). Zoom. Modo 1. Edificio Titanium La Portada.

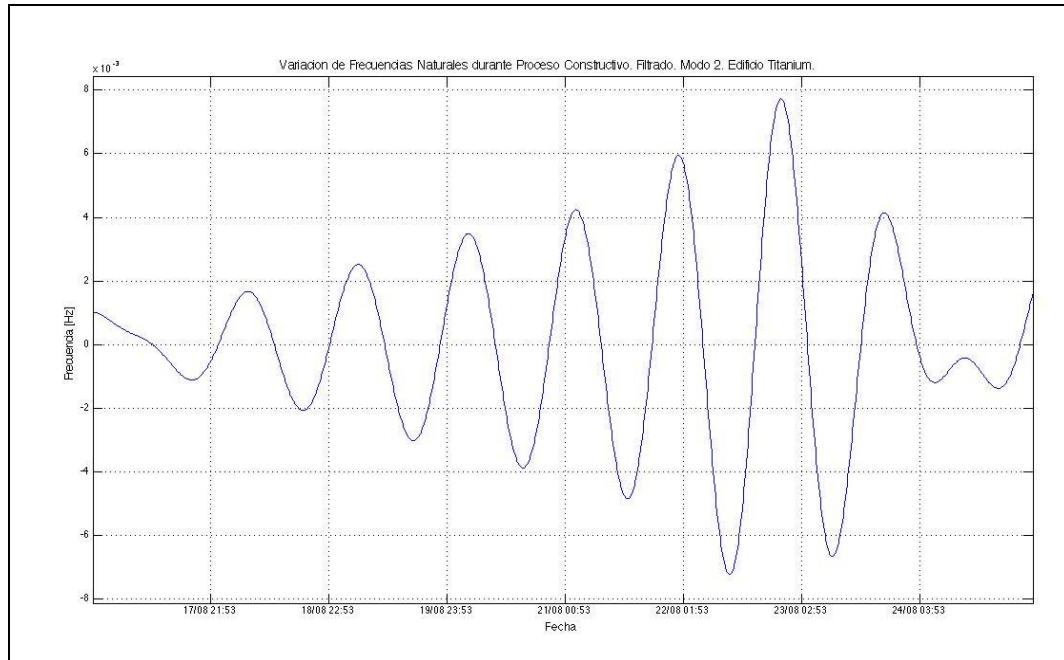


Figura 5. 133. Variación de frecuencias naturales por ciclo diario (Día-Noche). Zoom. Modo 2. Edificio Titanium La Portada.

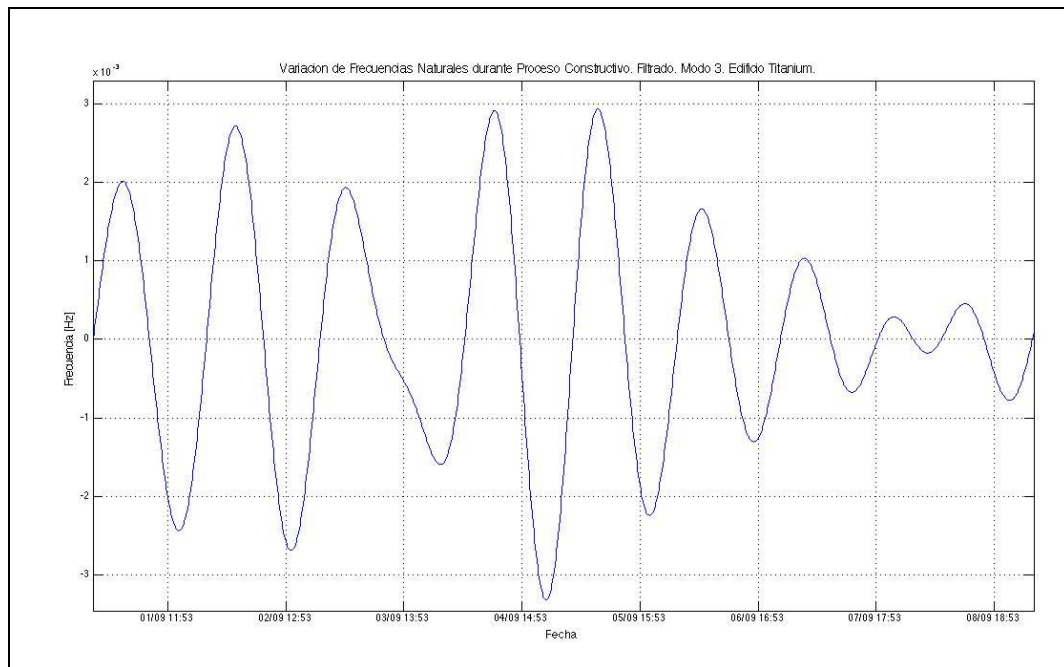


Figura 5. 134. Variación de frecuencias naturales por ciclo diario (Día-Noche). Zoom. Modo 3. Edificio Titanium La Portada.

Es posible realizar, para la razón de amortiguamiento, el mismo análisis que para la variación de frecuencia, en el sentido de aplicar un espectro de potencia a la variación de amortiguamiento con el objetivo de identificar posibles patrones de variación de este parámetro.

La aplicación del espectro de potencia a la variación de razones de amortiguamiento se presenta a continuación, Figura 5.135 y Figura 5.136:

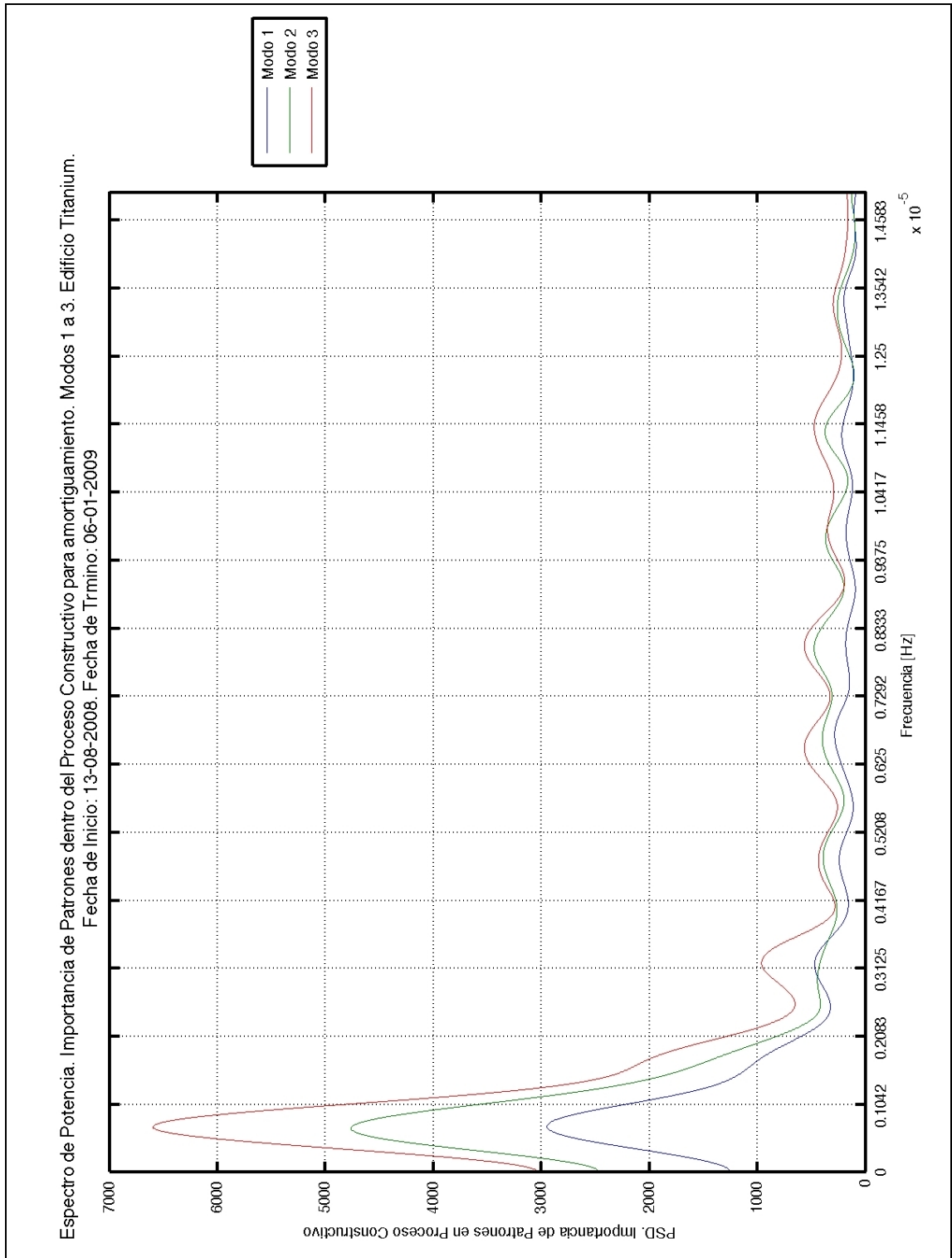


Figura 5.135. Espectro de Potencia de la Variación de la Razón de Amortiguamiento. Modos 1 a 3. Edificio Titanium.

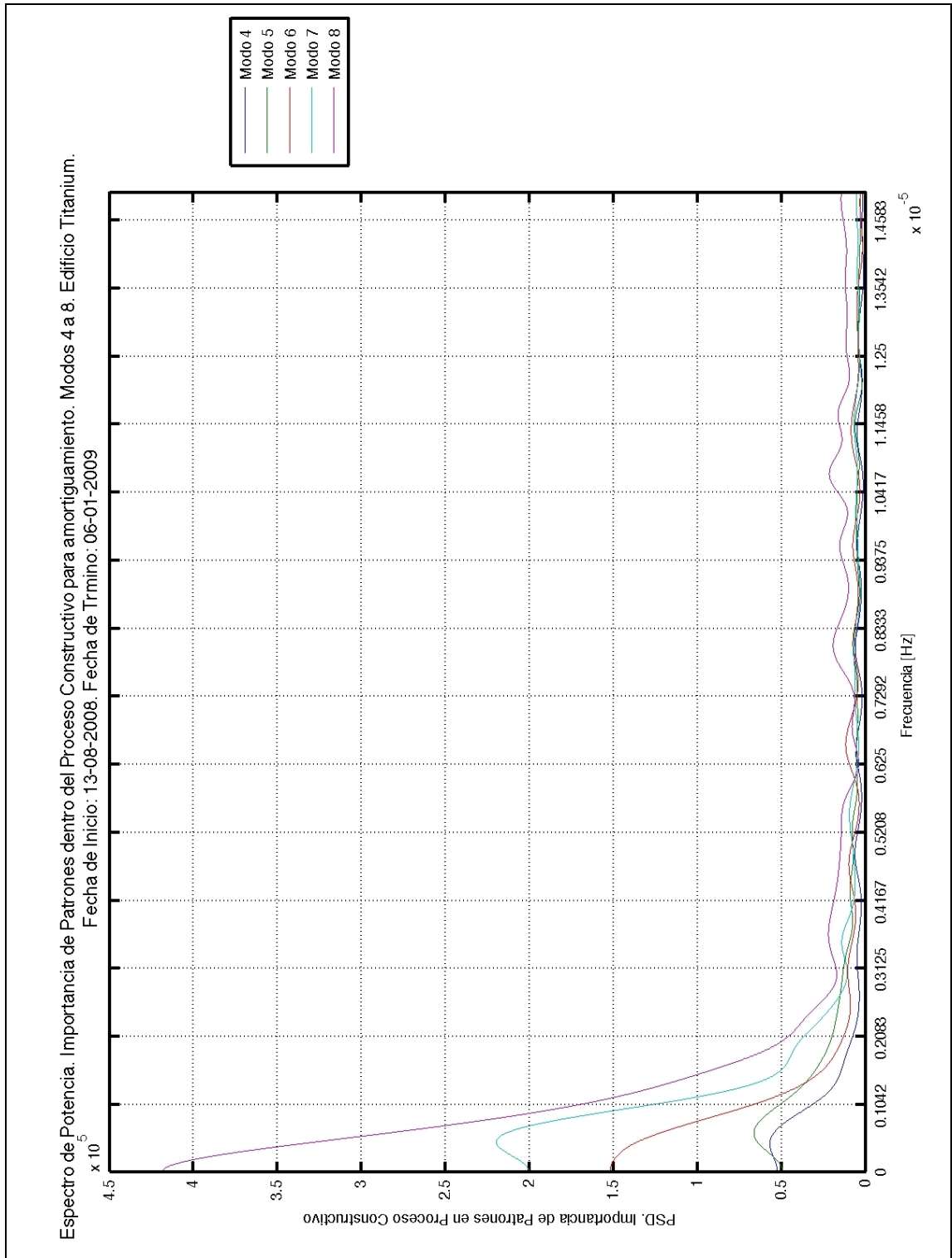


Figura 5.136. Espectro de Potencia de la Variación de la Razón de Amortiguamiento. Modos 4 a 8. Edificio Titanium.

Tabla 5.19. Ciclo de variación de razón de amortiguamiento edificio Titanium debido a procesos constructivos. Modos 1 a 8.

Modo	Frecuencia [$\times 10^{-7} Hz$]	Periodo [<i>días</i>]
1	6.85	16.9
2	6.66	17.4
3	6.89	16.8
4	5.04	23.0
5	5.94	19.5
6	-	
7	-	
8	-	
	Promedio	18.7

A partir de los resultados anteriores, se aplicó un filtro pasa-bajos a la variación de la razón de amortiguamiento de $0.1 \times 10^{-5} [Hz]$, obteniéndose de forma mas clara la tendencia global de este parámetro durante el periodo de monitoreo de la estructura.

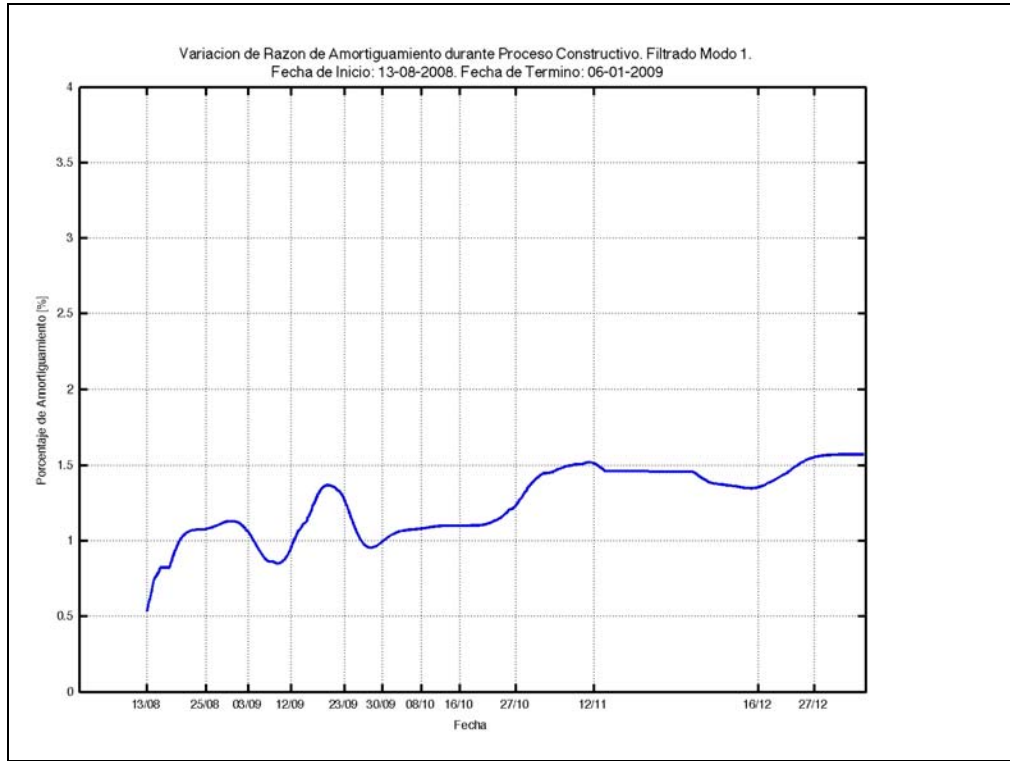


Figura 5.137. Variación de la razón de amortiguamiento. Filtrado ciclo 18,7 días. Modo 1. Edificio Titanium La Portada.

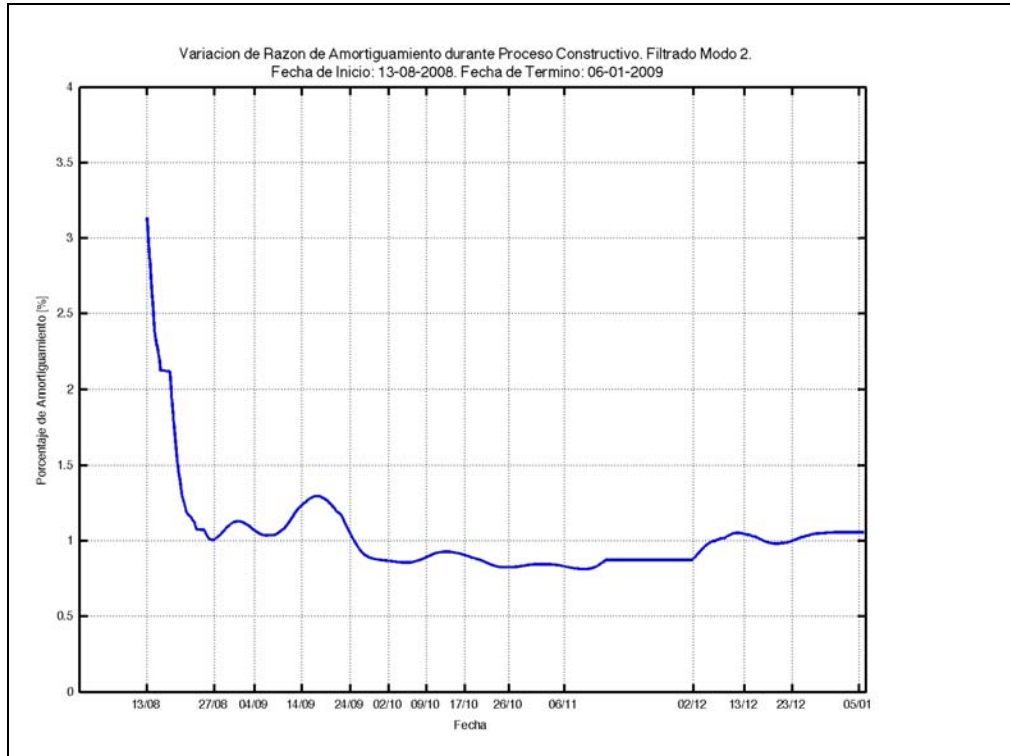
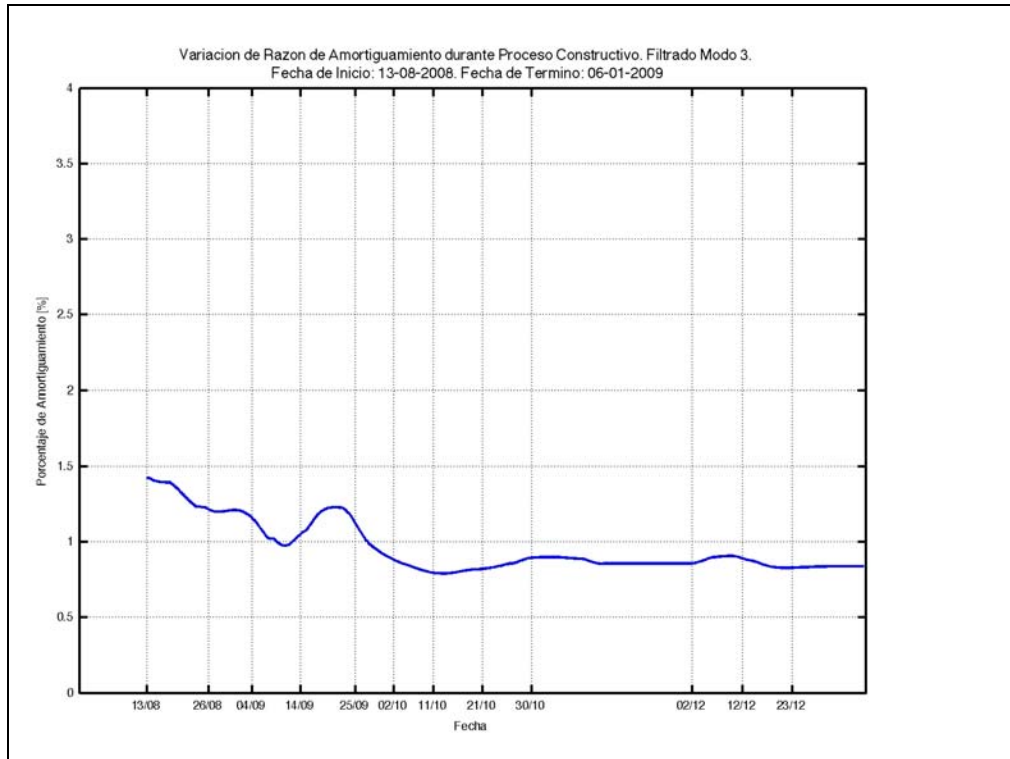
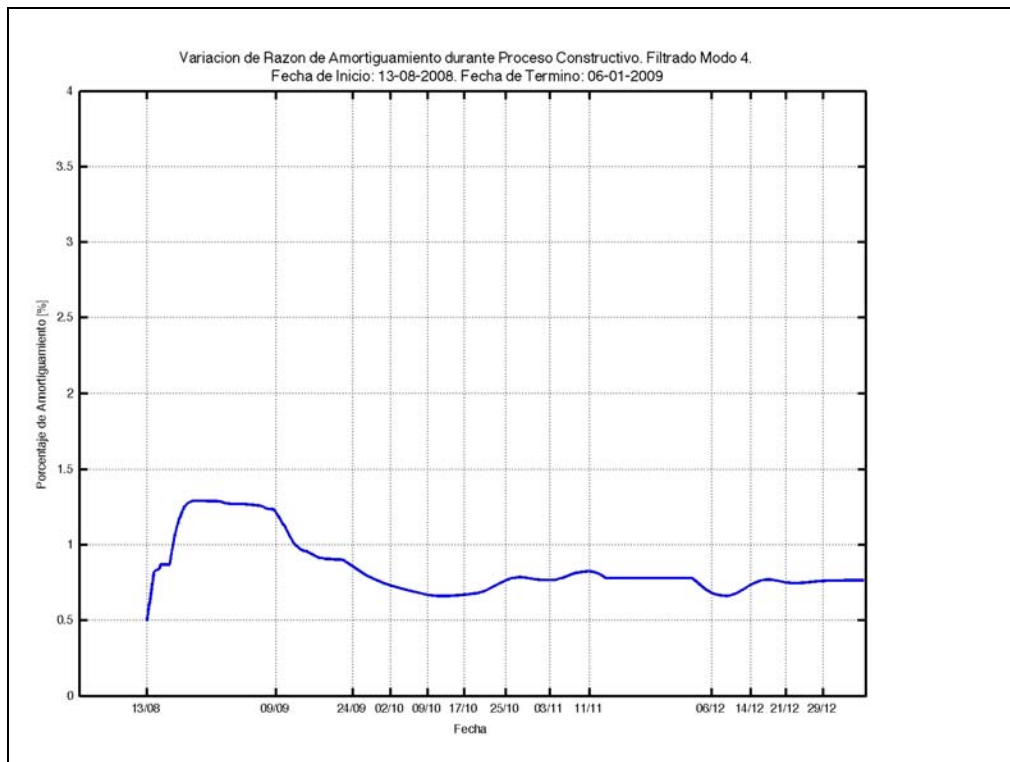


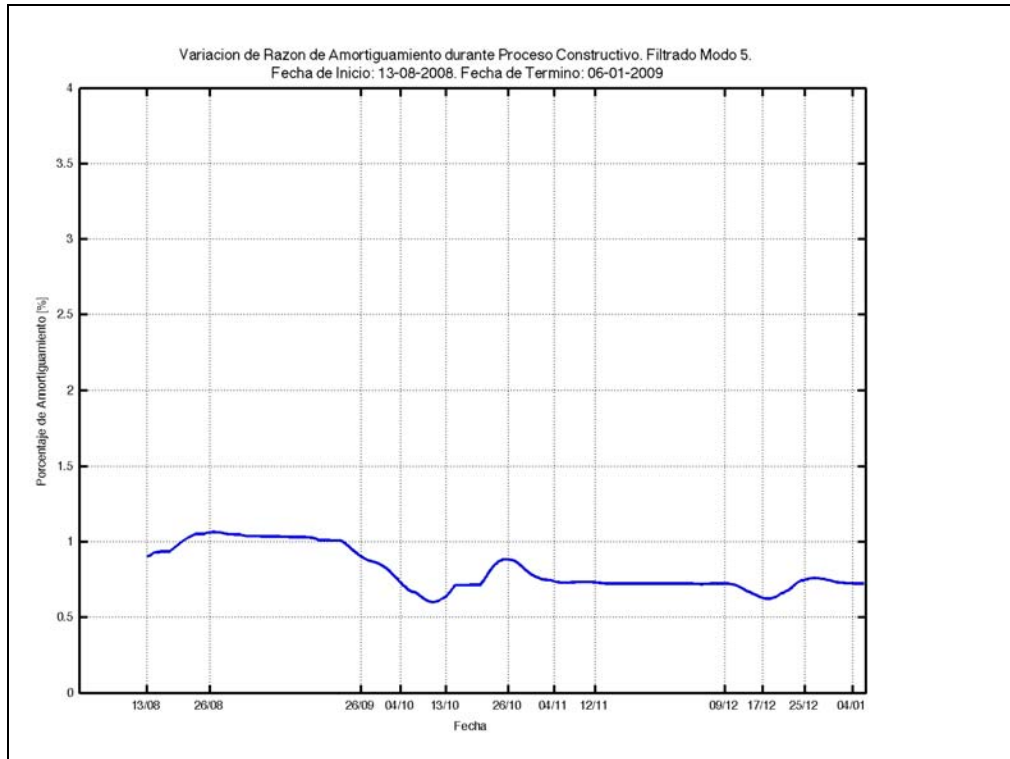
Figura 5.138. Variación de la razón de amortiguamiento. Filtrado ciclo 18,7 días. Modo 2. Edificio Titanium La Portada.



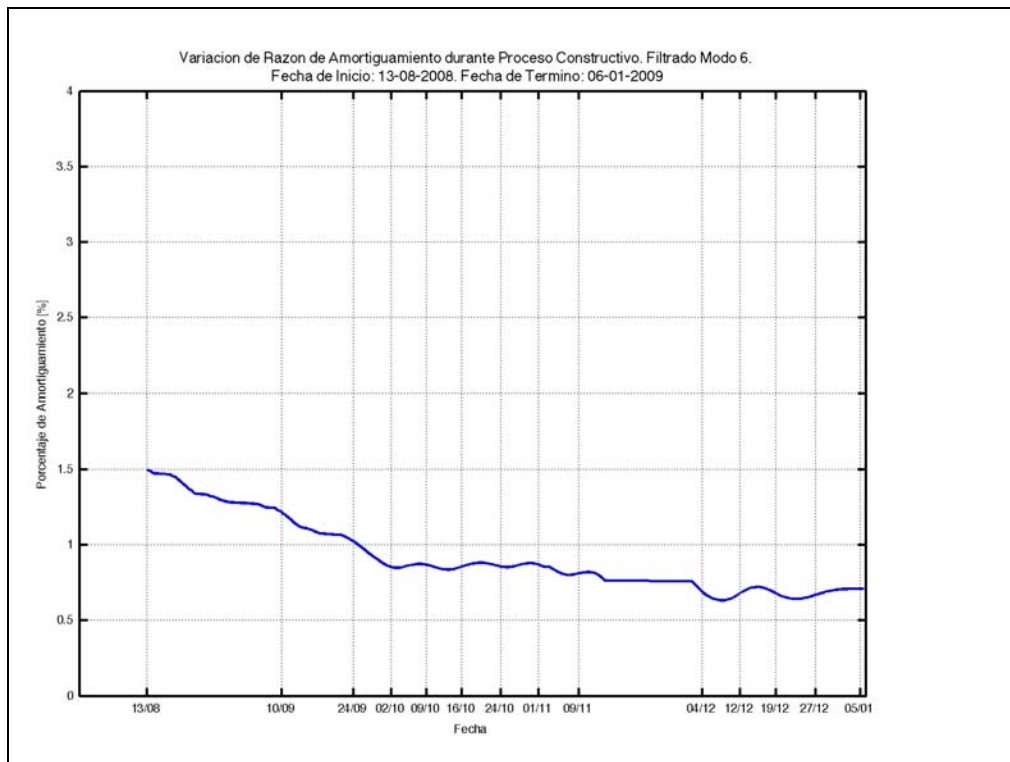
**Figura 5.139. Variación de la razón de amortiguamiento. Filtrado ciclo 18,7 días.
Modo 3. Edificio Titanium La Portada.**



**Figura 5.140. Variación de la razón de amortiguamiento. Filtrado ciclo 18,7 días.
Modo 4. Edificio Titanium La Portada.**



**Figura 5.141. Variación de la razón de amortiguamiento. Filtrado ciclo 18,7 días.
Modo 5. Edificio Titanium La Portada.**



**Figura 5.142. Variación de la razón de amortiguamiento. Filtrado ciclo 18,7 días.
Modo 6. Edificio Titanium La Portada.**

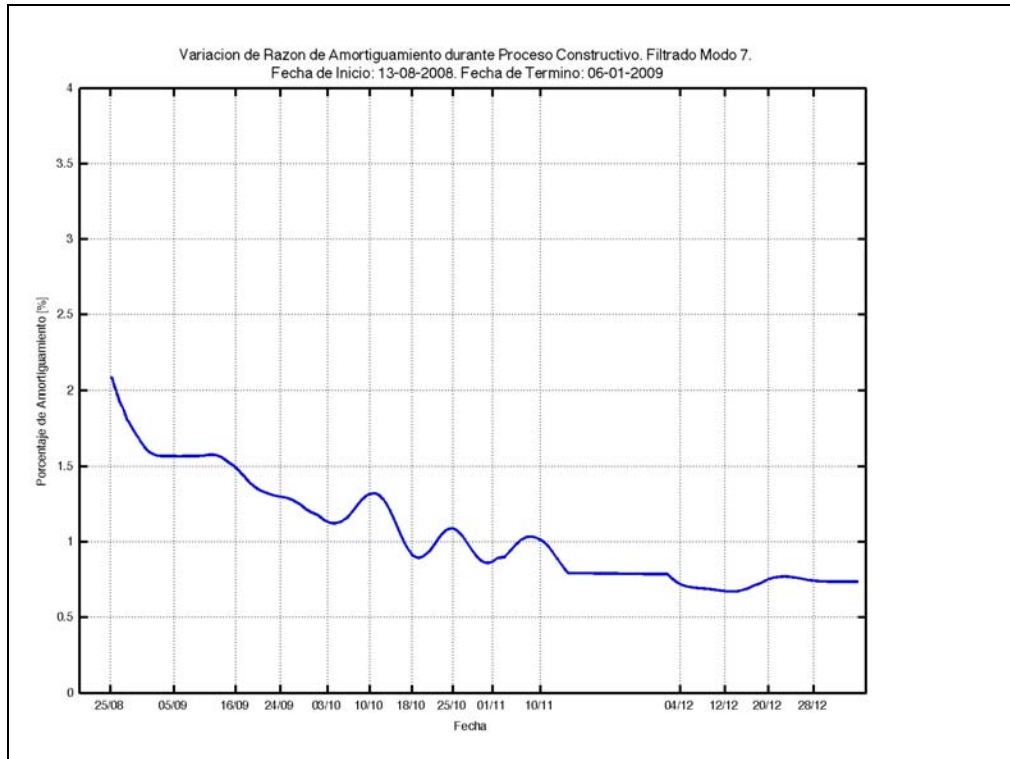


Figura 5.143. Variación de la razón de amortiguamiento. Filtrado ciclo 18,7 días. Modo 7. Edificio Titanium La Portada.

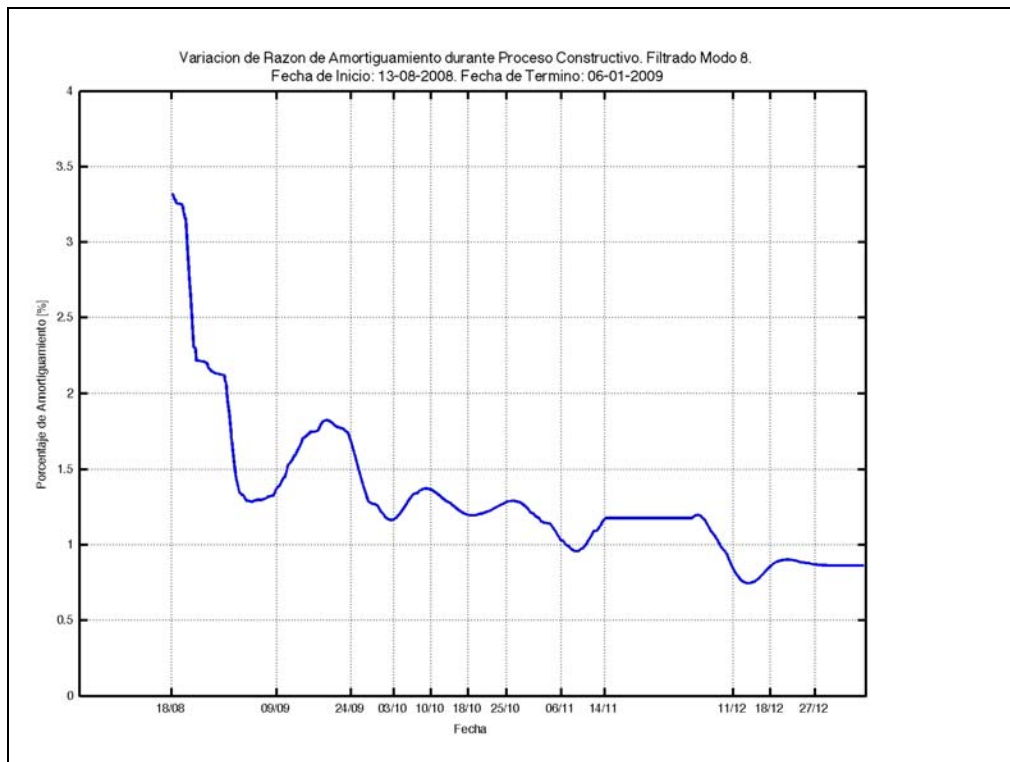


Figura 5.144. Variación de la razón de amortiguamiento. Filtrado ciclo 18,7 días. Modo 8. Edificio Titanium La Portada.

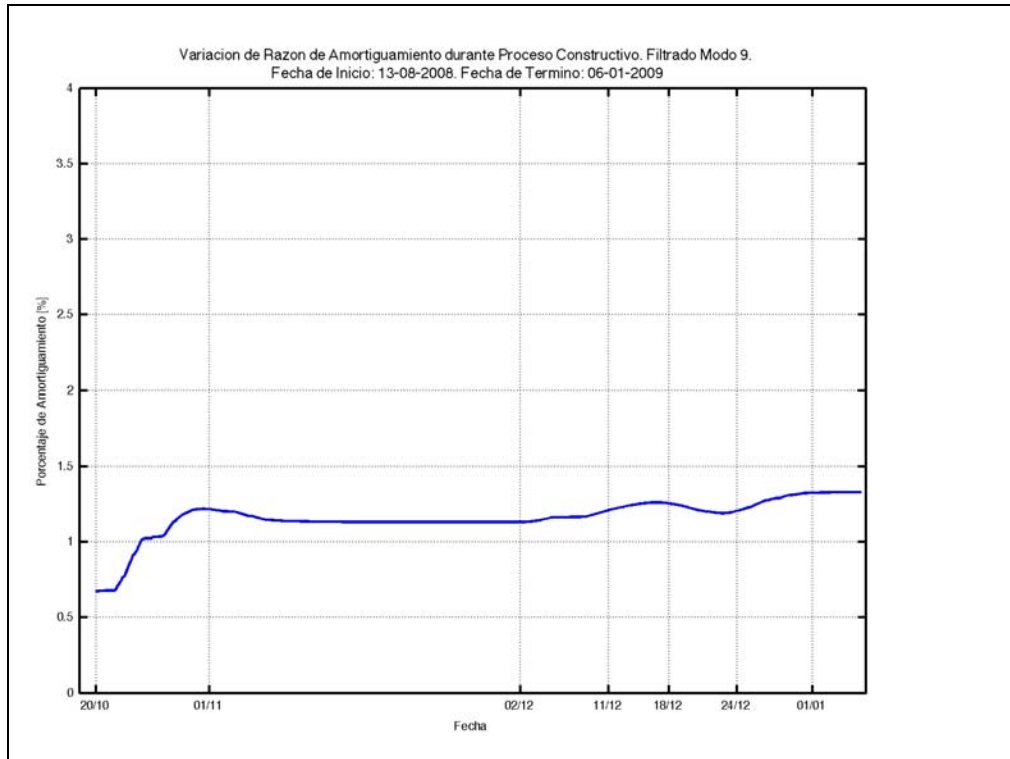


Figura 5.145. Variación de la razón de amortiguamiento. Filtrado ciclo 18,7 días. Modo 9. Edificio Titanium La Portada.

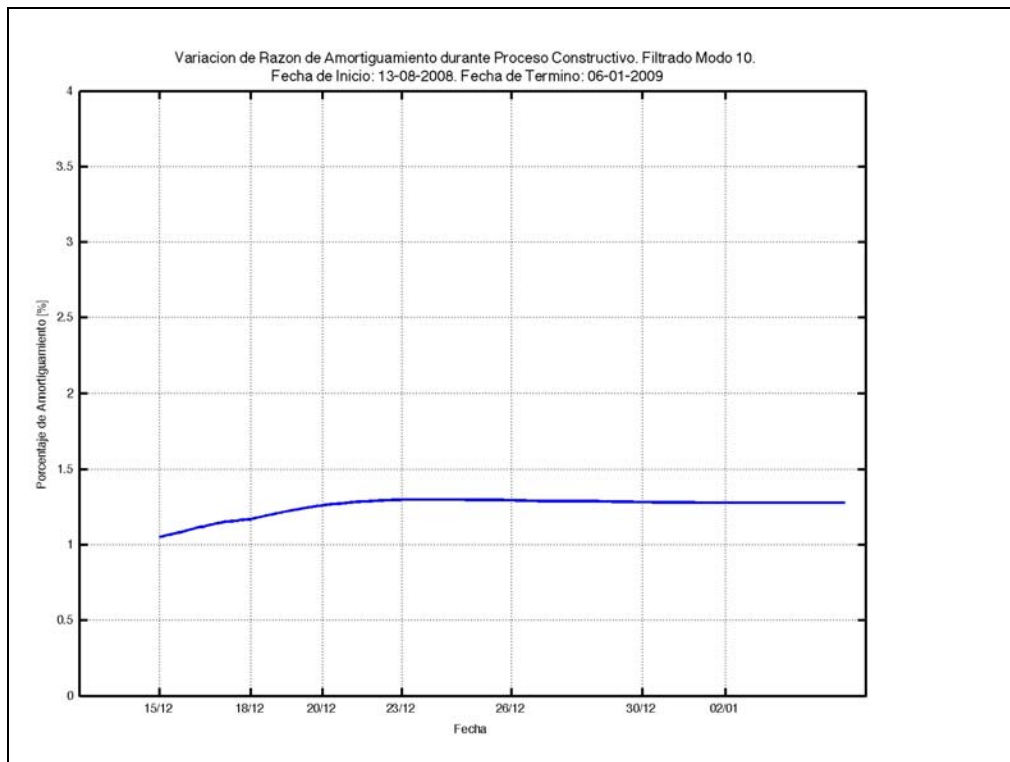
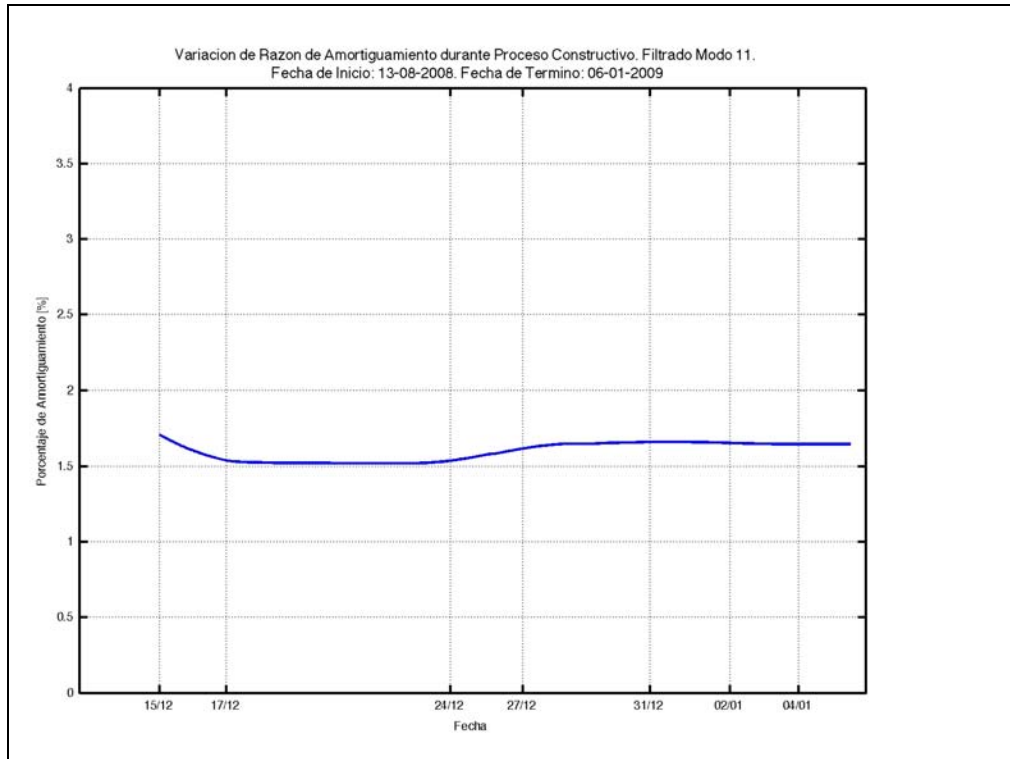
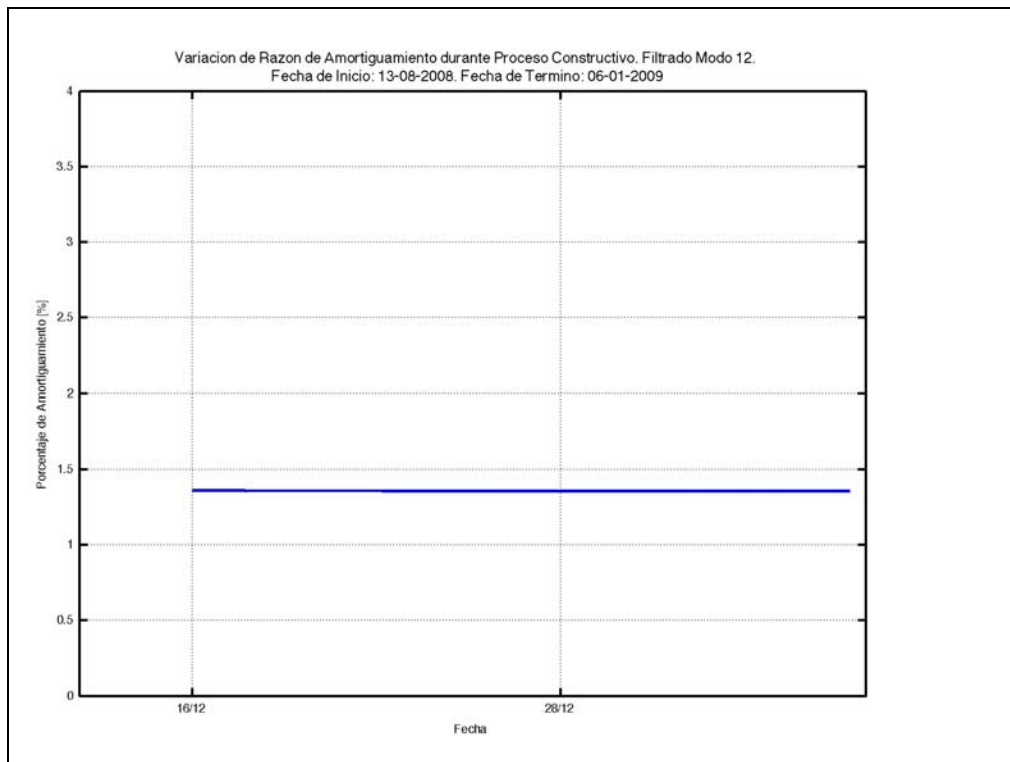


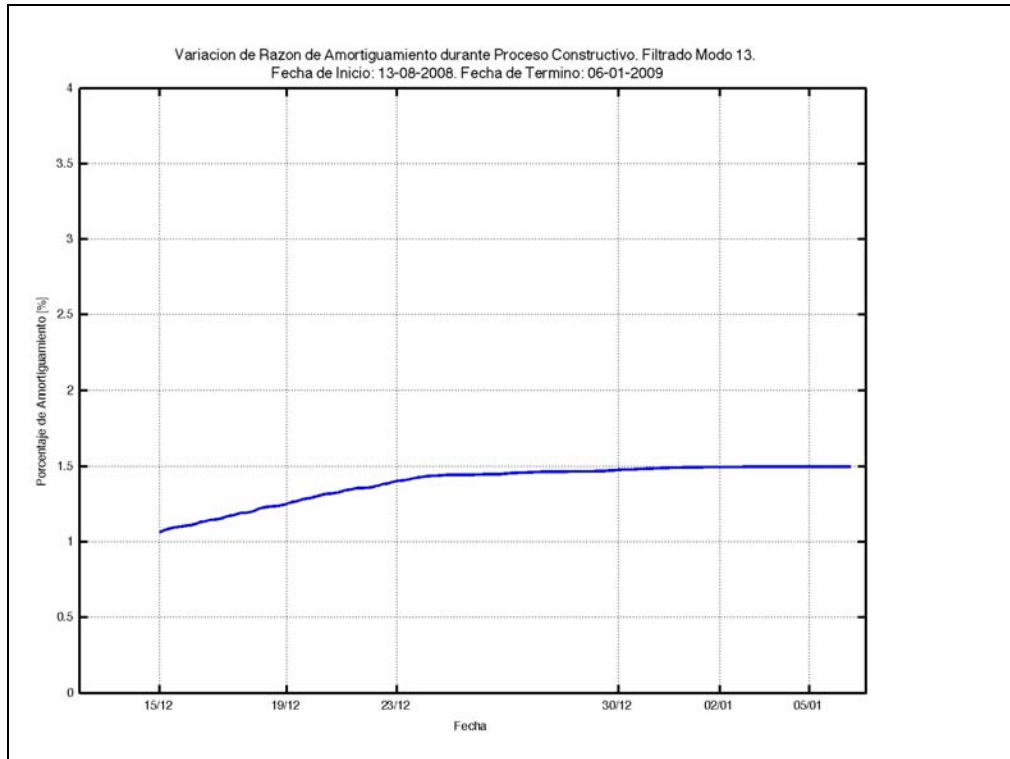
Figura 5.146. Variación de la razón de amortiguamiento. Filtrado ciclo 18,7 días. Modo 10. Edificio Titanium La Portada.



**Figura 5.147. Variación de la razón de amortiguamiento. Filtrado ciclo 18,7 días.
Modo 11. Edificio Titanium La Portada.**



**Figura 5.148. Variación de la razón de amortiguamiento. Filtrado ciclo 18,7 días.
Modo 12. Edificio Titanium La Portada.**



**Figura 5.149. Variación de la razón de amortiguamiento. Filtrado ciclo 18,7 días.
Modo 13. Edificio Titanium La Portada.**

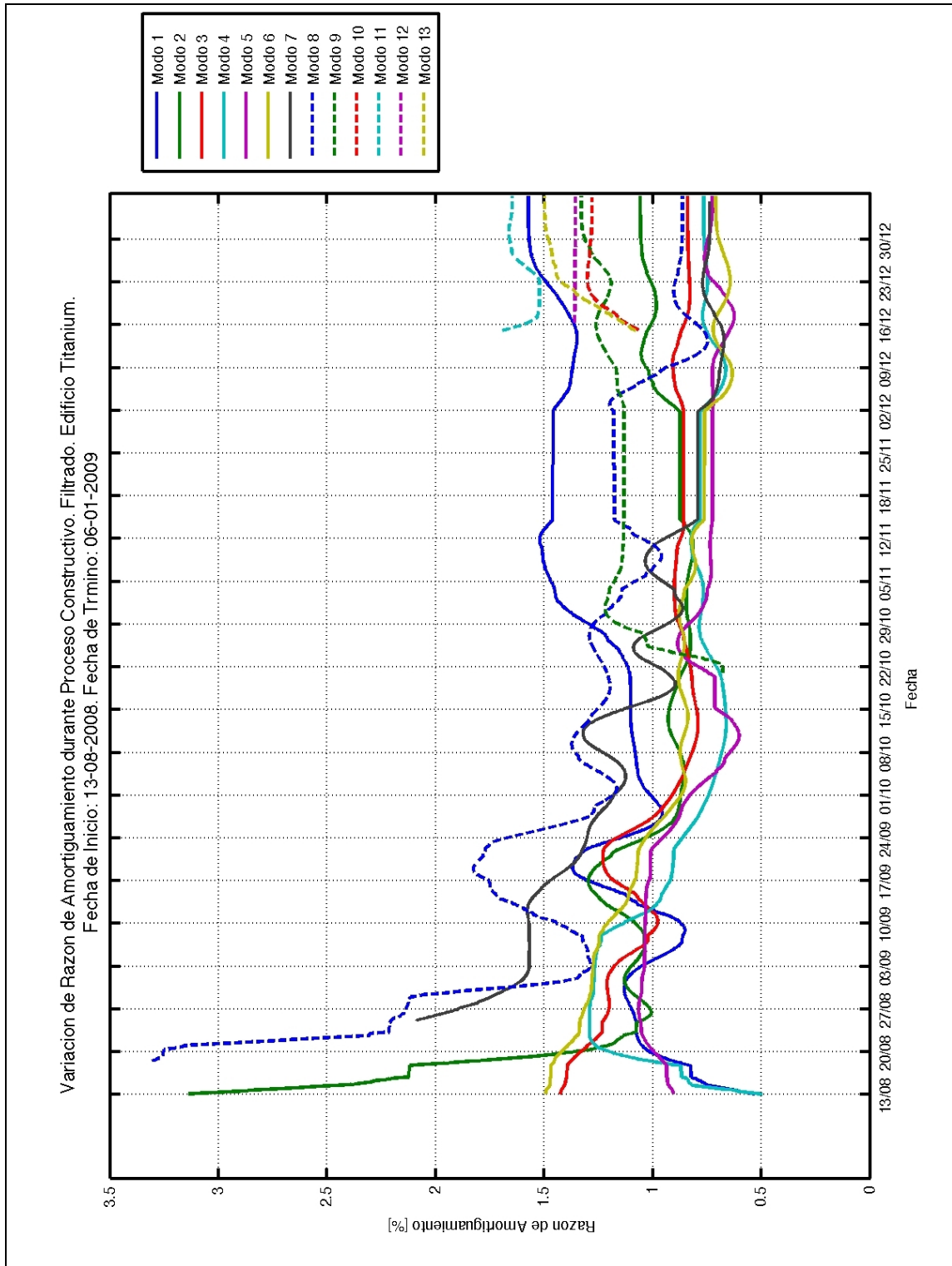


Figura 5.150. Variación de la razón de amortiguamiento. Filtrado ciclo 18,7 días. Modos 1 a 13. Edificio Titanium La Portada.

De las Figura 5.135 y Figura 5.136 puede observarse un patrón característico importante en torno a los 19 días (avance aproximado entre 2 a 3 pisos).

A partir de la Figura 5.150 se observa que la aplicación de un filtro en torno al único patrón de variación importante, permite una mejor apreciación de la evolución de la razón de amortiguamiento durante el periodo del monitoreo.

En este sentido se aprecia que la razón de amortiguamiento tiene un claro patrón decreciente, que tiende a ser constante hacia el fin del periodo de monitoreo.

Este patrón puede validarse de forma analítica, considerando la teoría de sistemas continuos, modelando la estructura como una viga de flexión en voladizo.

La razón de amortiguamiento de un sistema continuo desacoplado se define como:

$$\beta_n = \frac{c}{2 \cdot \omega_n \cdot m_n} \quad (5.2)$$

Donde:

β_n : Razón de amortiguamiento modal n -ésimo.

c : Coeficiente de amortiguamiento.

ω_n : Frecuencia angular del modo n -ésimo.

m_n : Masa modal generalizada.

Sin embargo, a partir de la solución modal en coordenadas generalizadas de un sistema continuo es posible definir la frecuencia natural angular modal y la masa modal generalizada en función de la altura del edificio (h):

$$m_n = \bar{m} \cdot \int_0^h [\psi^2(x)] \cdot dx \quad (5.3)$$

Considerando \bar{m} la masa por unidad de longitud que se asume constante en este caso y h una altura cualquiera de la estructura, que varia entre 0 y la altura total de la viga, L .

La forma modal para una viga de flexión empotrada en su base se define como [CLOUGH PENZIEN, 1993]:

$$\psi(x) = C_1 \cdot [\cosh(a_n x) - \cos(a_n x) - C_2 \cdot (\sinh(a_n x) - \sin(a_n x))] \quad (5.4)$$

En [CLOUGH PENZIEN, 1993] se define la constante C_2 como:

$$C_2 = \frac{\cosh(a_n \cdot L) + \cos(a_n \cdot L)}{\sinh(a_n \cdot L) + \sin(a_n \cdot L)} \quad (5.5)$$

Y la constante C_1 se considera igual a 1. El parámetro a_n se define como:

$$a_n^4 = \omega_n^2 \cdot \frac{\bar{m}}{EI} \quad (5.6)$$

Para obtener el valor $(a_n L)$ se debe resolver la siguiente ecuación [CHOPRA, 1995]:

$$1 + \cos(a_n L) \cosh(a_n L) = 0 \quad (5.7)$$

Cuyas 4 primeras raíces son:

$$a_n L = 1.8751, 4.6941, 7.8548, 10.996 \quad n = 1, 2, 3, 4. \quad (5.8)$$

Luego, el valor de la constante $C_2 = 0.734$.

Por otra parte, las frecuencias naturales angulares para los primeros 3 modos corresponden a las siguientes expresiones [MEIROVITCH, 1967]:

$$\omega_1 = \frac{3.516}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}} \quad (5.9)$$

$$\omega_2 = \frac{22.030}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}} \quad (5.10)$$

$$\omega_3 = \frac{61.700}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}} \quad (5.11)$$

El factor de rigidez EI se considera constante.

Luego, usando las definiciones anteriores, se puede expresar el porcentaje de amortiguamiento en función de la altura h como:

$$\beta_n = \alpha_n \cdot h^2 \cdot \left(\int_0^h ([\psi(x)]^2) dx \right)^{-1} \quad (5.12)$$

Donde α_n constante, que varia dependiendo del modo analizado.

De la ecuación (5.12) se observan dos funciones características: la primera corresponde a una función cuadrática (creciente), mientras que la segunda corresponde a una función decreciente, asociada a la integral y al exponente negativo.

Para observar la dependencia y tendencia del amortiguamiento en función de la altura, se muestra a continuación el gráfico asociado, Figura 5. 151. Los valores son referenciales, debido a que dependerán del valor de la constante asociada. En este sentido, se graficaron amortiguamientos para los 3 primeros modos.

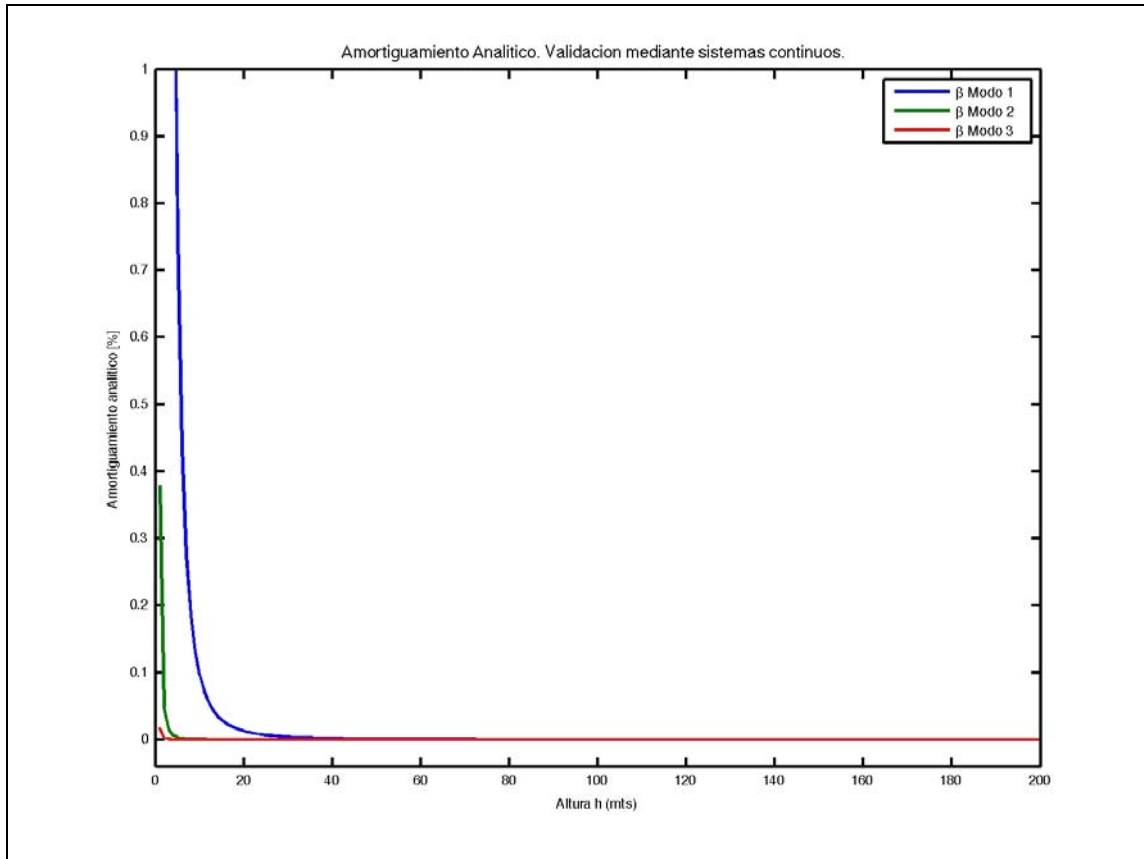


Figura 5. 151. Variación de amortiguamiento en función de la altura. Análisis de sistemas continuos.

A partir del gráfico anterior es posible validar los resultados experimentales que indican que el amortiguamiento tiene un comportamiento decreciente en función de la altura del edificio, tendiendo a estabilizarse en torno a un valor constante.

Las variaciones producidas durante el monitoreo de la estructura real se deben principalmente a la fuerte dependencia de la razón de amortiguamiento con la calidad

del registro y la desviación del método utilizado que son propios de un sistema no lineal y en proceso constructivo.

Sin embargo, la tendencia obtenida por medio del filtrado de los resultados permite establecer un comportamiento similar al obtenido de forma analítica.

Finalmente, y para reafirmar la hipótesis planteada anteriormente, y demostrada de forma analítica, es posible graficar la variación de la razón de amortiguamiento tomando registros de tipo ambiental sin impacto. Para esto, se consideraron 4 días domingo, entre las 07:00 y 19:00 horas dentro del periodo de monitoreo tomando el promedio horario para el tramo analizado. A continuación se concatenaron estos resultados para apreciar de mejor forma el tipo de variación asociada al amortiguamiento. Este análisis se realizó para los primeros 4 modos.

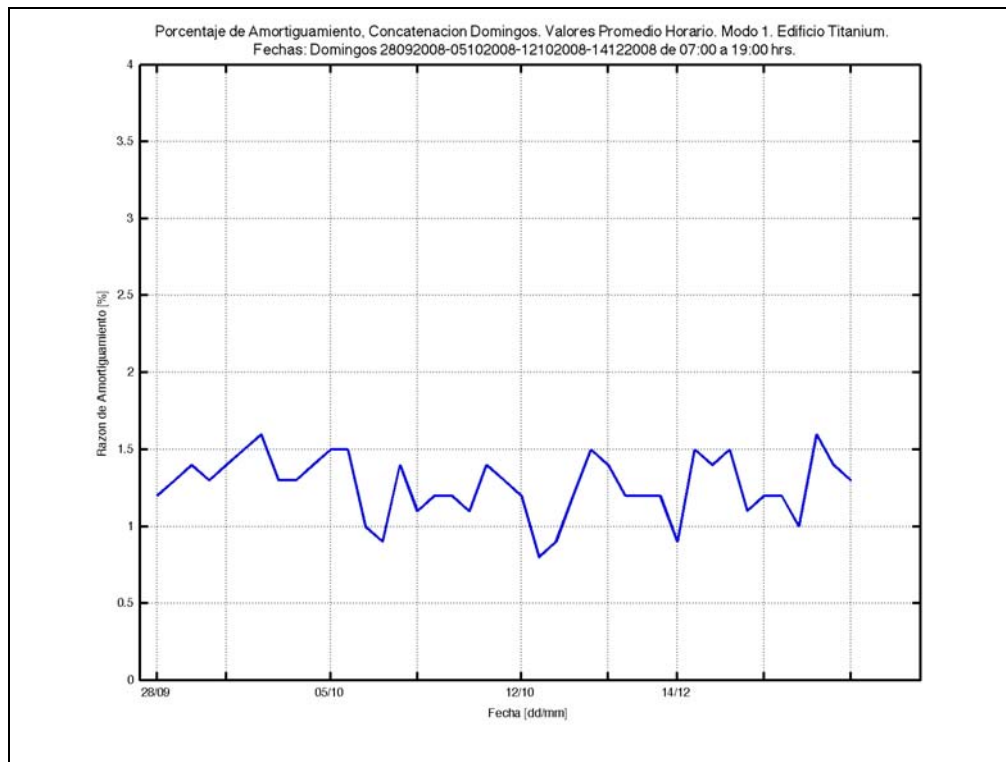


Figura 5. 152. Amortiguamiento concatenado para 4 domingos. Fechas: 28/09, 05/10, 12/10 y 14/12. Valores promedio Horario. Modo 1. Edificio Titanium La Portada.

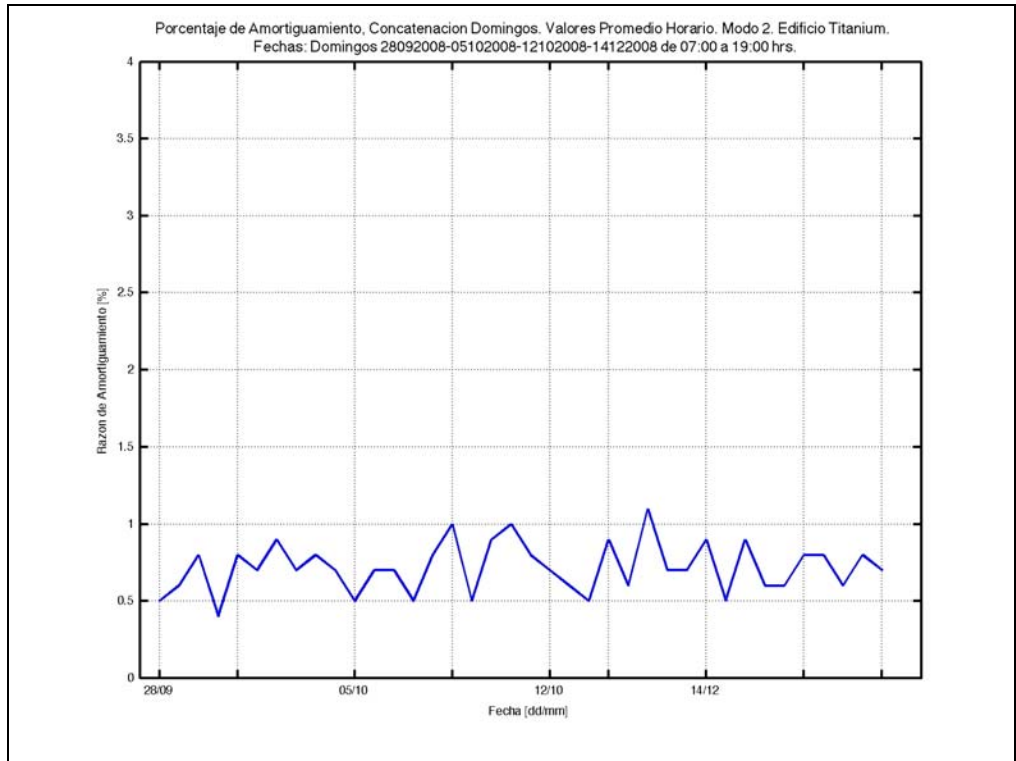


Figura 5. 153. Amortiguamiento concatenado para 4 domingos. Fechas: 28/09, 05/10, 12/10 y 14/12. Valores promedio Horario. Modo 2. Edificio Titanium La Portada.

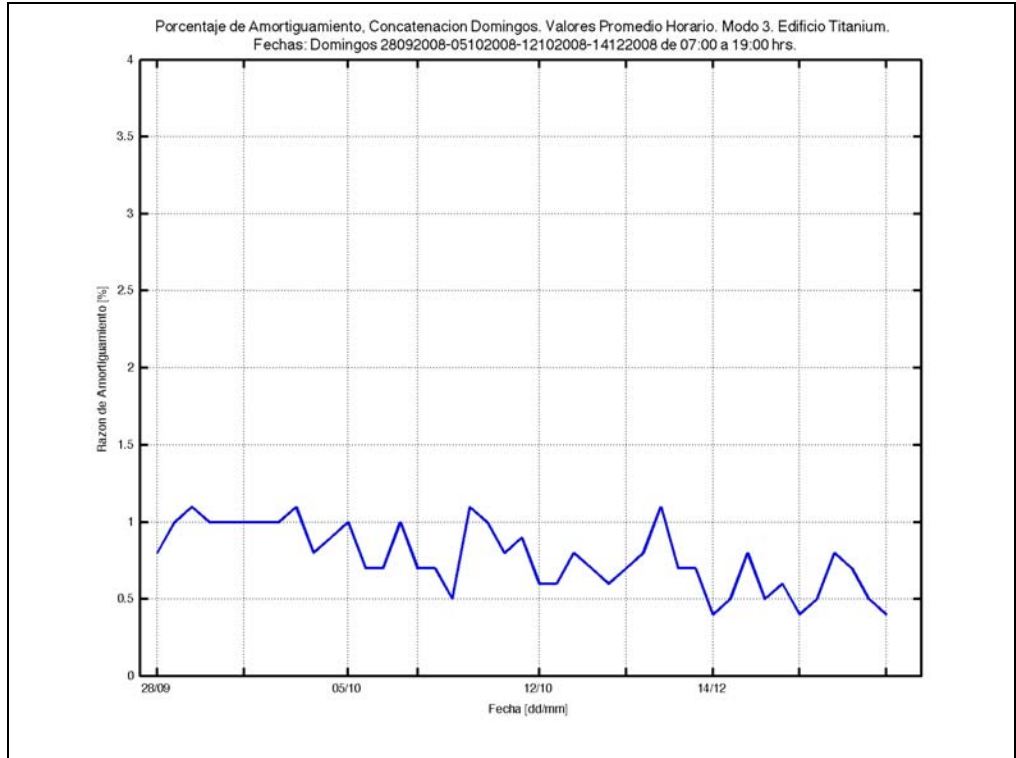


Figura 5. 154. Amortiguamiento concatenado para 4 domingos. Fechas: 28/09, 05/10, 12/10 y 14/12. Valores promedio Horario. Modo 3. Edificio Titanium La Portada.

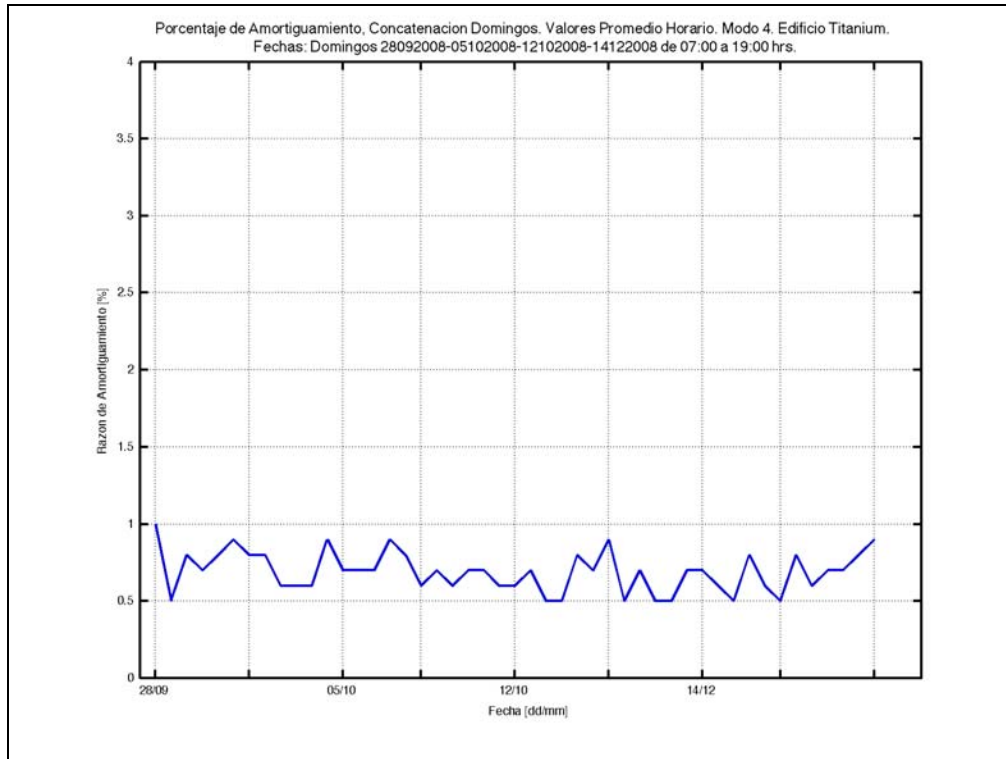


Figura 5. 155. Amortiguamiento concatenado para 4 domingos. Fechas: 28/09, 05/10, 12/10 y 14/12. Valores promedio Horario. Modo 4. Edificio Titanium La Portada.

Como se observa en las figuras precedentes, la razón de amortiguamiento durante el periodo analizado permanece aproximadamente constante con una muy leve tendencia decreciente, la cual solo es posible apreciar en el tercer modo.

Del análisis de variación del porcentaje de amortiguamiento anteriormente estudiado, puede establecerse, para cada modo, el siguiente rango de variación para el periodo de monitoreo analizado en esta investigación (13/08/2008 al 06/01/2009):

Tabla 5. 20. Intervalos de variación de la razón de amortiguamiento modal, durante periodo de monitoreo 13/08/2008 al 06/01/2009. Filtrado. Edificio Titanium La Portada.

Modo	Intervalo de Variación Amortiguamiento [%]
1	[0.5 – 1.6]
2	[0.8 – 3.0]
3	[0.8 – 1.4]
4	[0.5 – 1.3]
5	[0.6 – 1.1]
6	[0.6 – 1.5]
7	[0.7 – 2.0]
8	[0.9 – 3.0]
9	[1.0 – 1.4]
10	[1.1 – 1.3]
11	[1.5 – 1.7]
12	[1.3 – 1.4]
13	[1.0 – 1.5]

Respecto a los resultados obtenidos para frecuencias, en donde se identificó y desacopló dos patrones de variación, es posible obtener dos resultados importantes adicionales a los presentados anteriormente.

El primero corresponde a obtener la razón entre el valor absoluto de la variación diaria y la variación semanal en términos porcentuales, obteniéndose así la variación porcentual diaria con respecto a la frecuencia medida, filtrada con respecto al patrón semanal. Este resultado fue obtenido para los primeros ocho modos, obteniéndose las siguientes variaciones máximas por modo:

Tabla 5. 21. Variaciones máximas porcentuales con respecto a la frecuencia medida en el periodo de monitoreo.

Modo	Variación porcentual máxima diaria [%]
1	0.95
2	1.20
3	0.73
4	1.56
5	0.51
6	1.09
7	0.98
8	1.04
Promedio	1.01

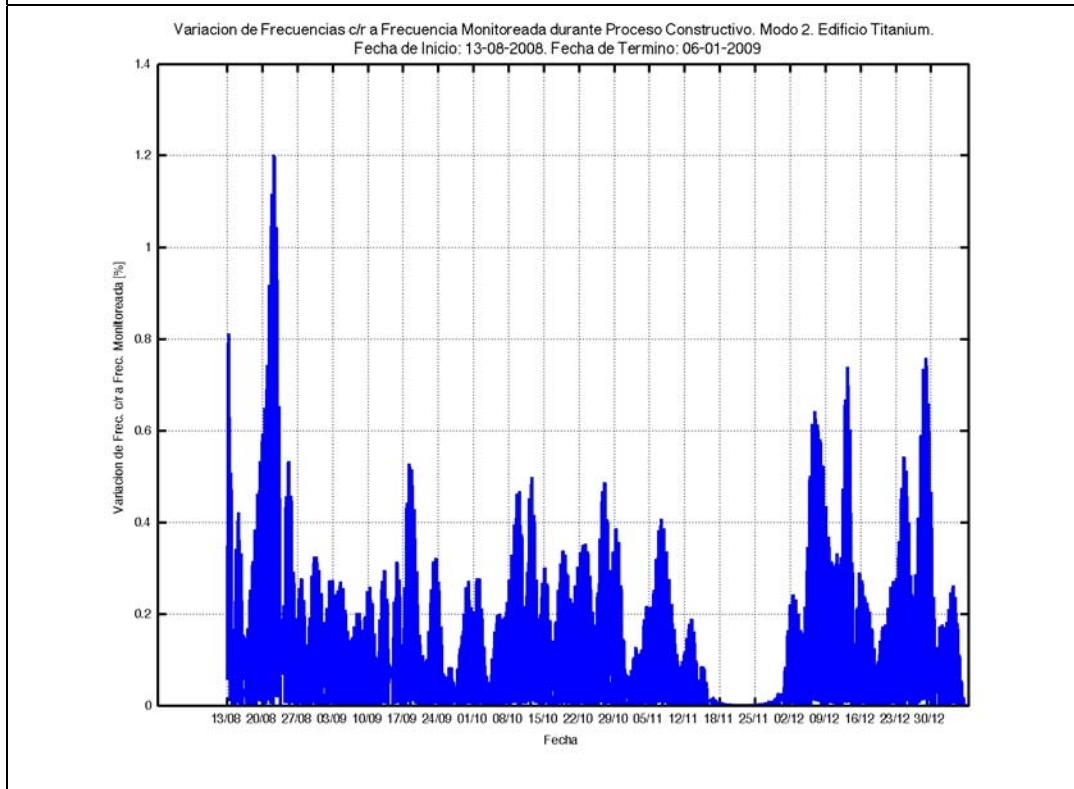
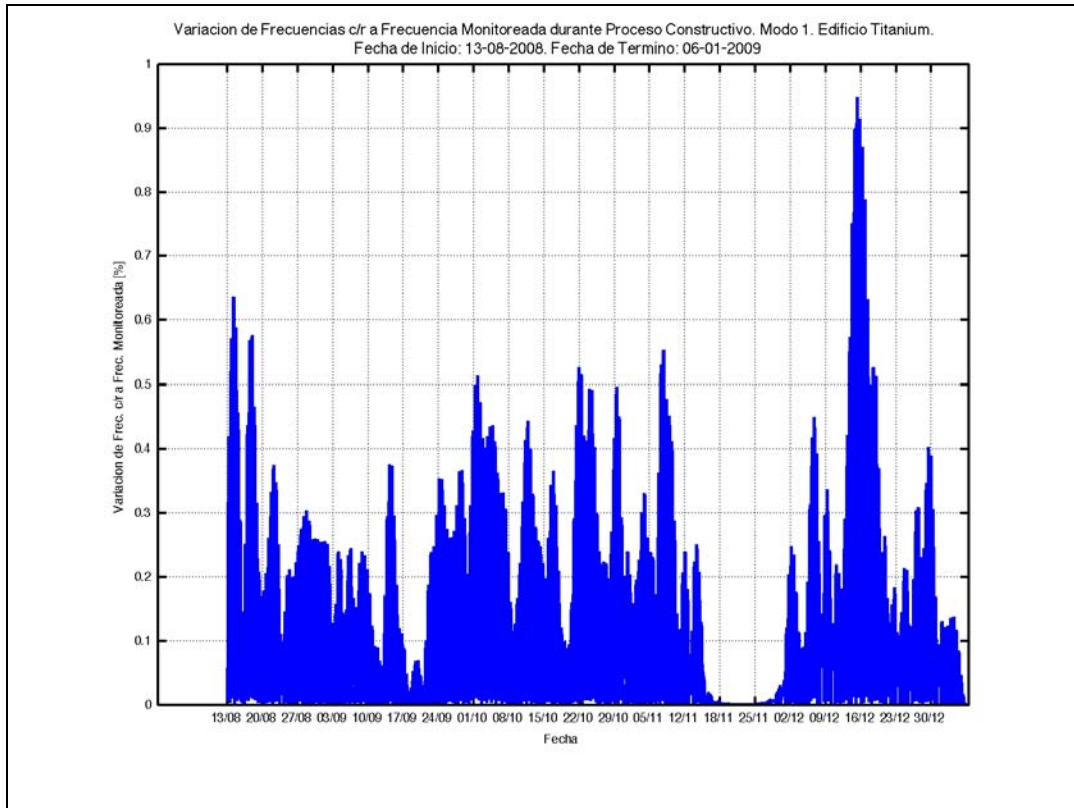


Figura 5. 156. Variación porcentual de frecuencias monitoreadas, con respecto a frecuencia monitoreada durante proceso constructivo. De arriba abajo: Modo 1 y Modo 2. Edificio Titanium La Portada.

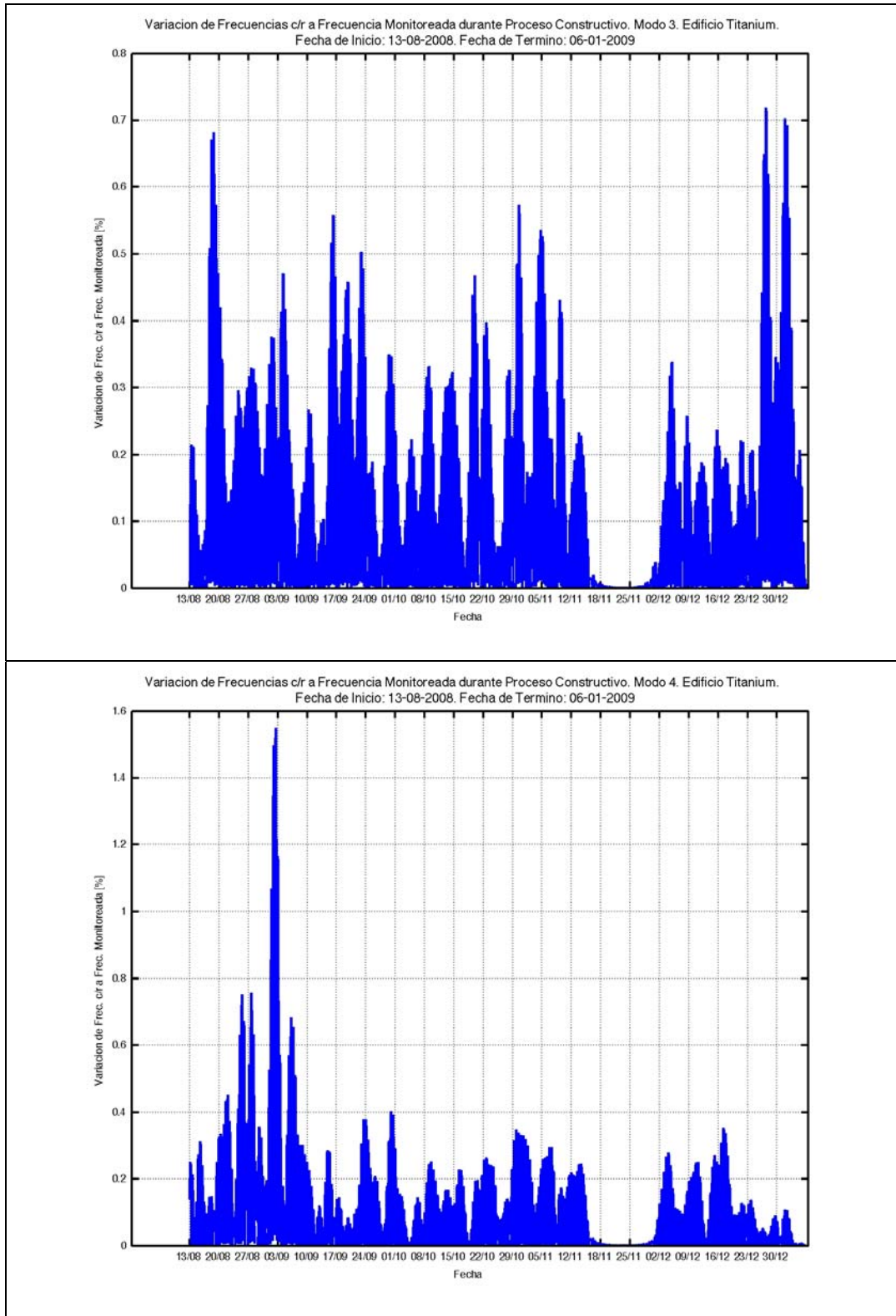


Figura 5. 157. Variación porcentual de frecuencias monitoreadas, con respecto a frecuencia monitoreada durante proceso constructivo. De arriba abajo: Modo 3 y Modo 4. Edificio Titanium La Portada.

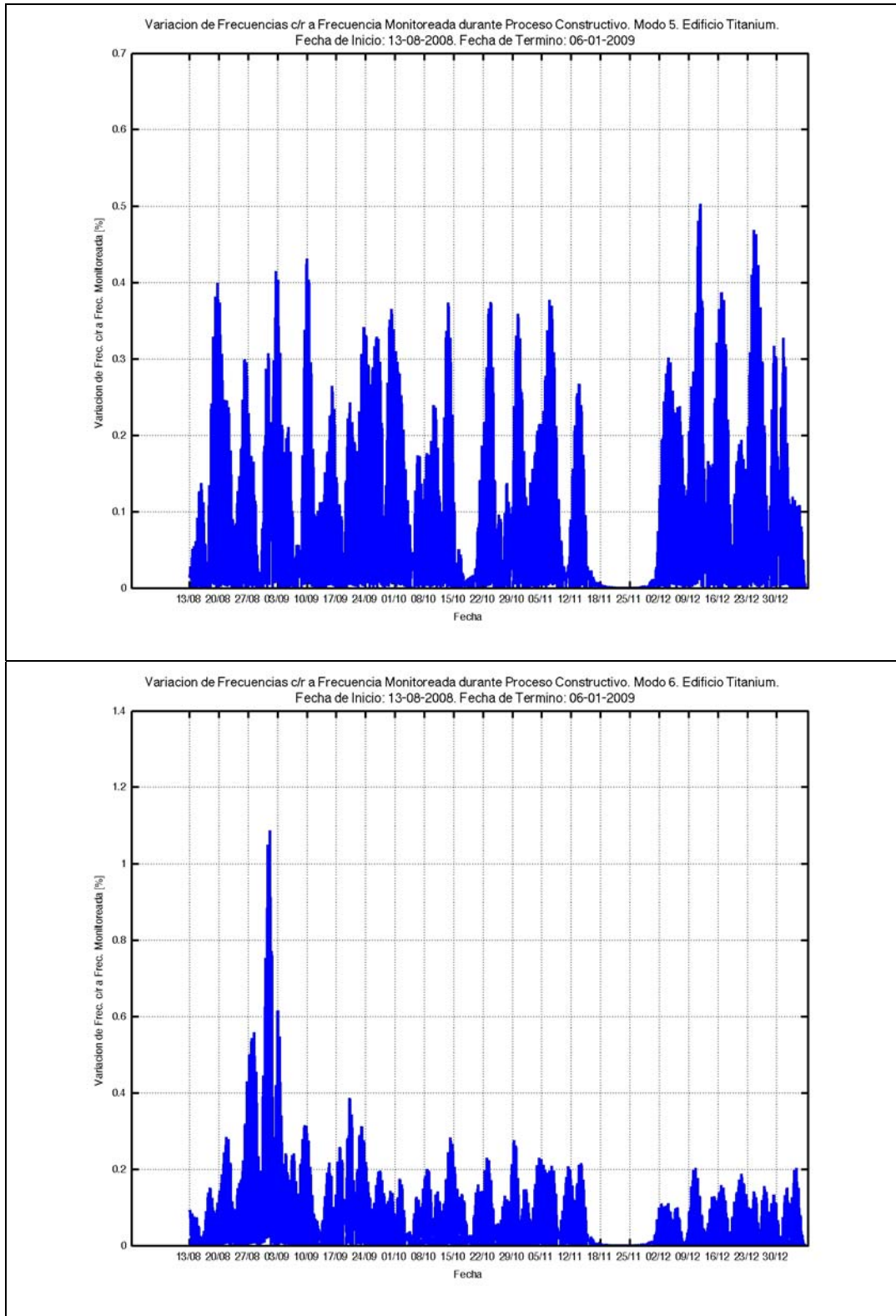


Figura 5. 158. Variación porcentual de frecuencias monitoreadas, con respecto a frecuencia monitoreada durante proceso constructivo. De arriba abajo: Modo 5 y Modo 6. Edificio Titanium La Portada.

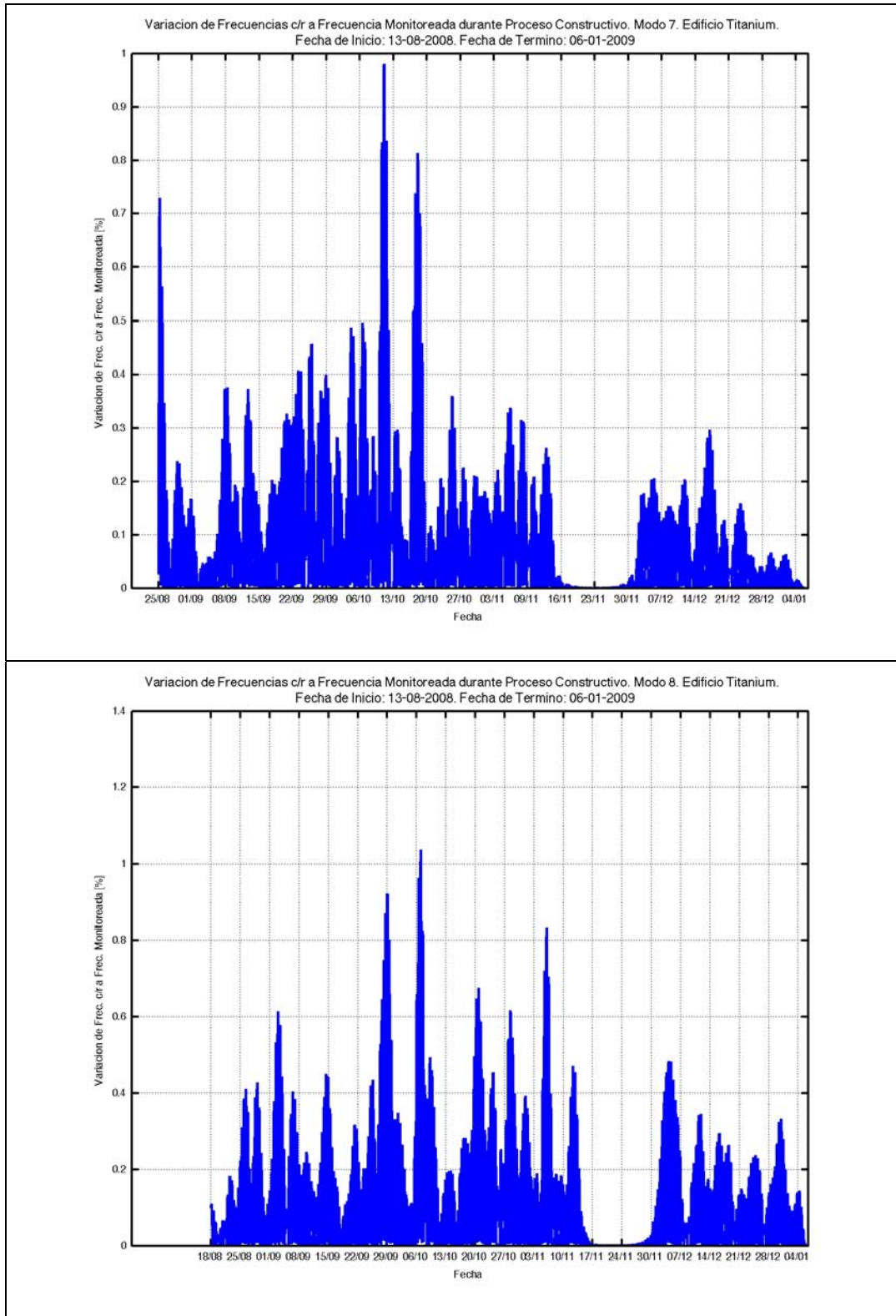


Figura 5. 159. Variación porcentual de frecuencias monitoreadas, con respecto a frecuencia monitoreada durante proceso constructivo. De arriba abajo: Modo 7 y Modo 8. Edificio Titanium La Portada.

El segundo resultado corresponde a graficar la variación de frecuencias en función del la altura del edificio, traducido en el numero de pisos asociado.

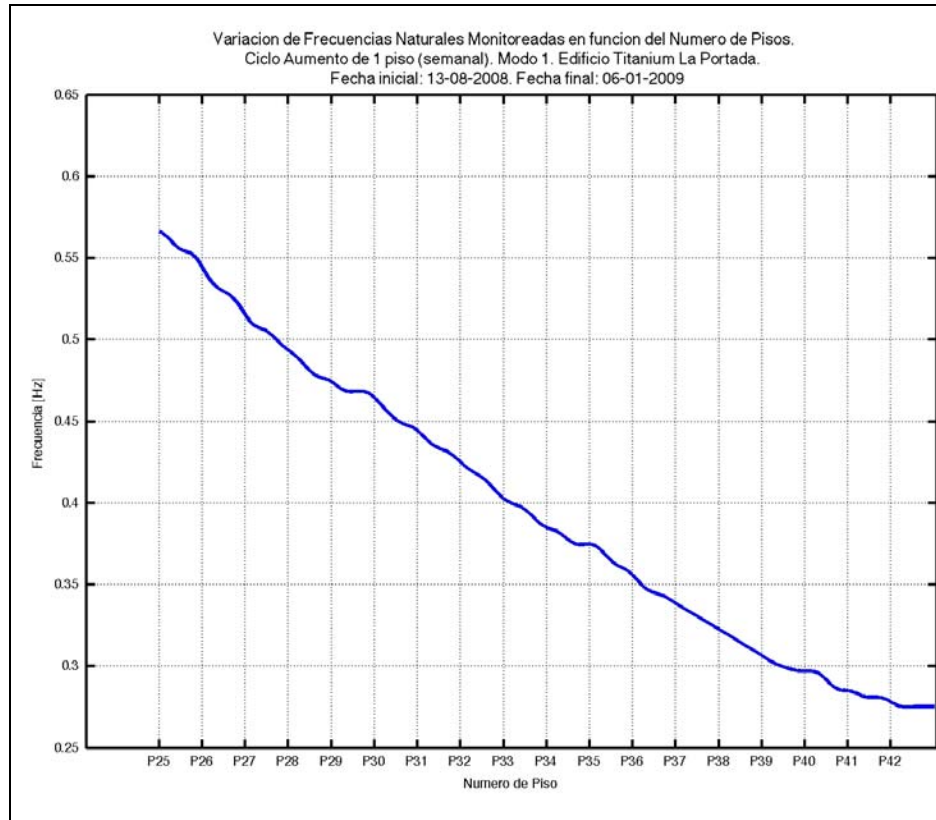


Figura 5. 160. Variación de Frecuencias monitoreadas en función del número de pisos. Modo 1. Edificio Titanium La Portada.

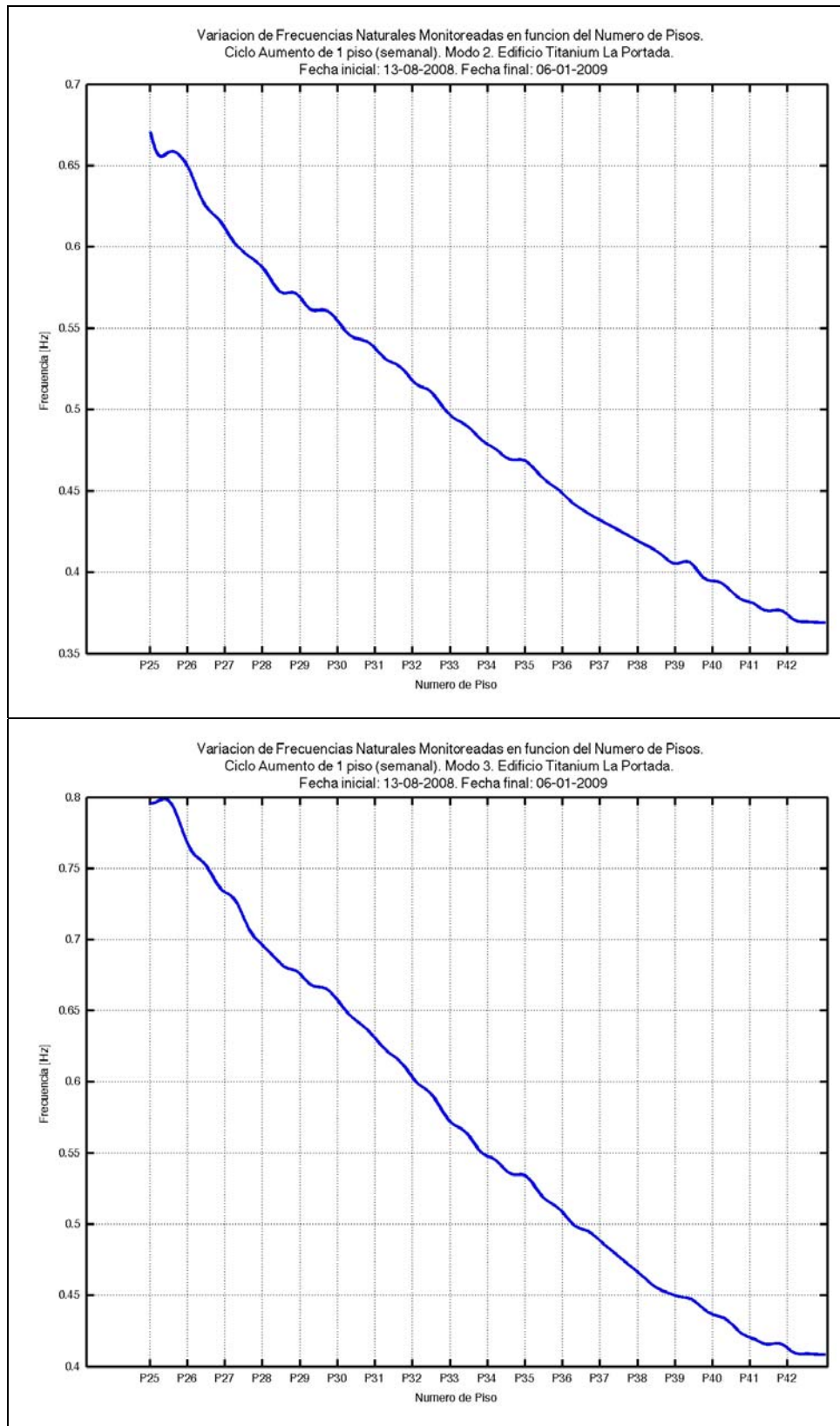


Figura 5. 161. Variación de Frecuencias monitoreadas en función del número de pisos. De arriba a abajo: Modo 2 y Modo 3. Edificio Titanium La Portada.

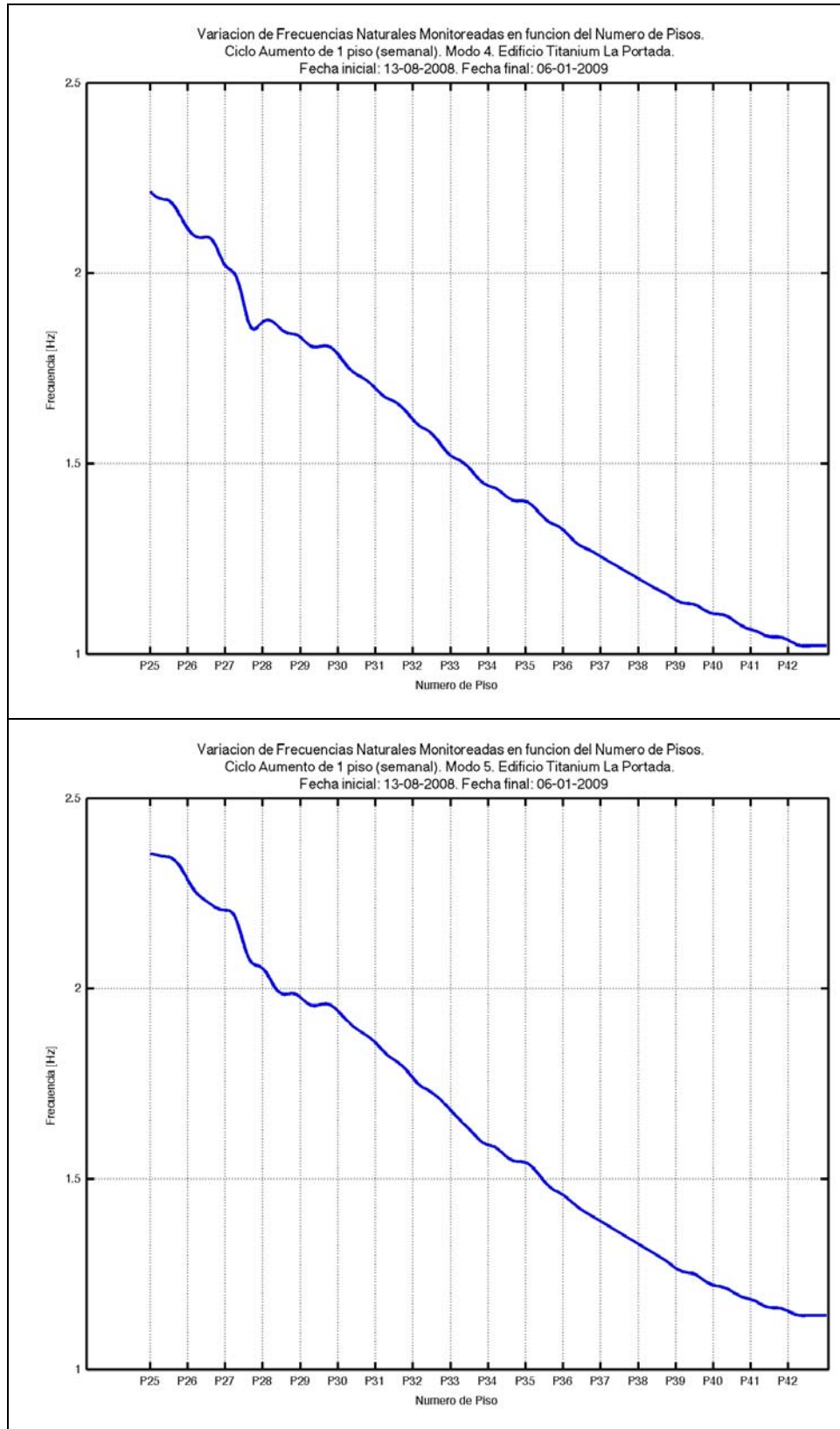


Figura 5. 162. Variación de Frecuencias monitoreadas en función del número de pisos. De arriba a abajo: Modo 4 y Modo 5. Edificio Titanium La Portada.

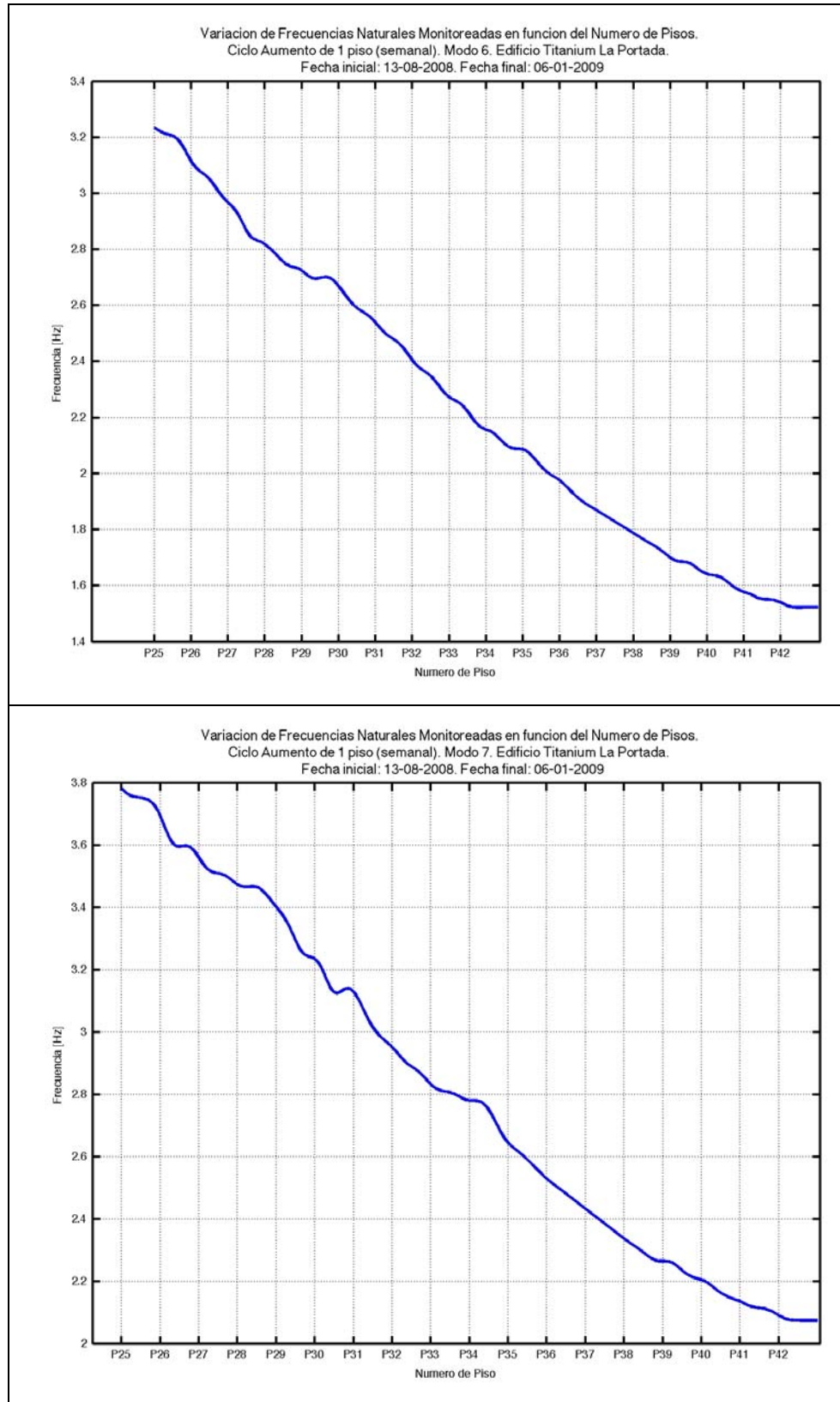


Figura 5. 163. Variación de Frecuencias monitoreadas en función del número de pisos. De arriba a abajo: Modo 6 y Modo 7. Edificio Titanium La Portada.

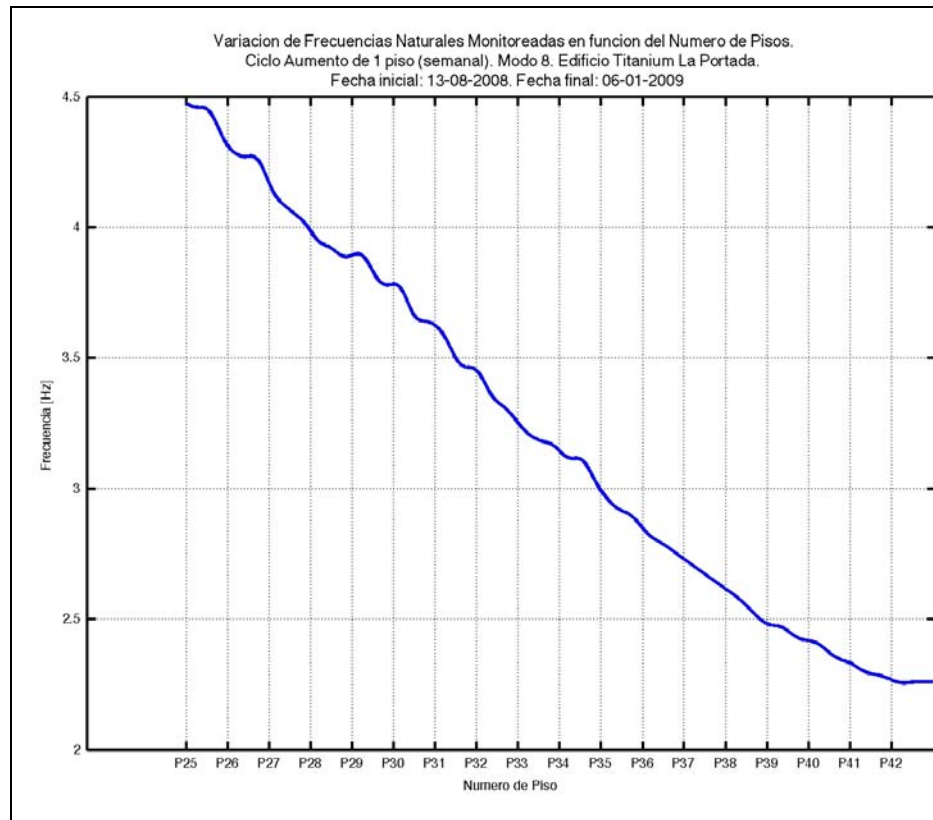


Figura 5. 164. Variación de Frecuencias monitoreadas en función del número de pisos. Modo8. Edificio Titanium La Portada.

Respecto a los registros obtenidos durante el periodo de monitoreo, las amplitudes máximas registradas en vibraciones ambientales fueron del orden de $5 \times 10^{-3} [g]$ para los días de faena constructiva, mientras que para las noches y días festivos (domingos y feriados) las amplitudes máximas fueron del orden de $6 \times 10^{-4} [g]$.

Finalmente y como complemento a esta investigación, es posible realizar el análisis de la variación de parámetros dinámicos mediante el método de Espectro de Potencia en el tiempo, denominado Espectrograma. Para profundizar en el tema, consultar [HERNANDEZ, 2009].

A continuación se presentan espectrogramas para dos tramos analizados, observándose la variación de las tres primeras frecuencias naturales.

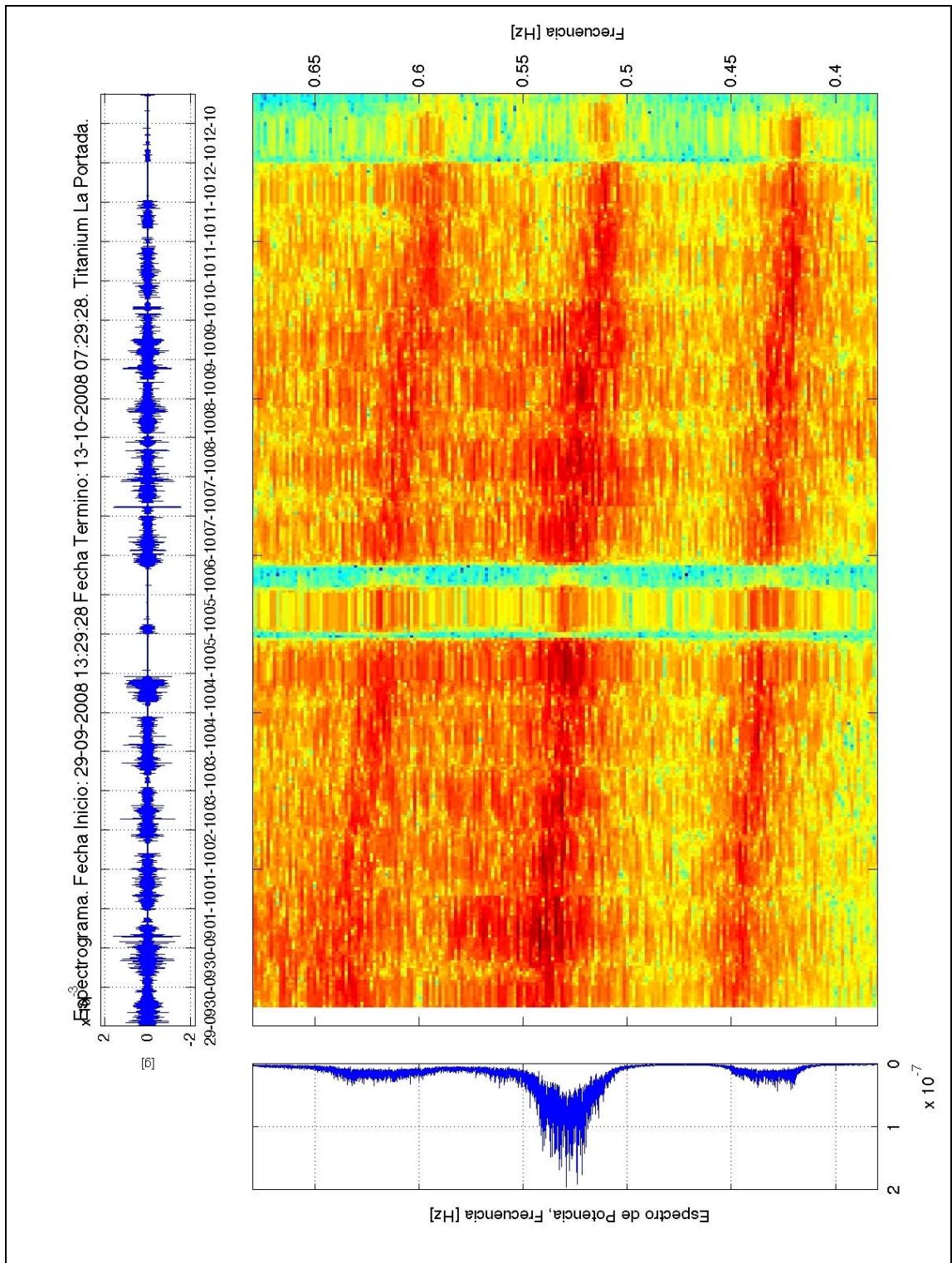


Figura 5. 165. Espectrograma. Del 29-09-08 al 13-10-2008. Canal 1 N/S. Piso 20. Edificio Titanium La Portada.

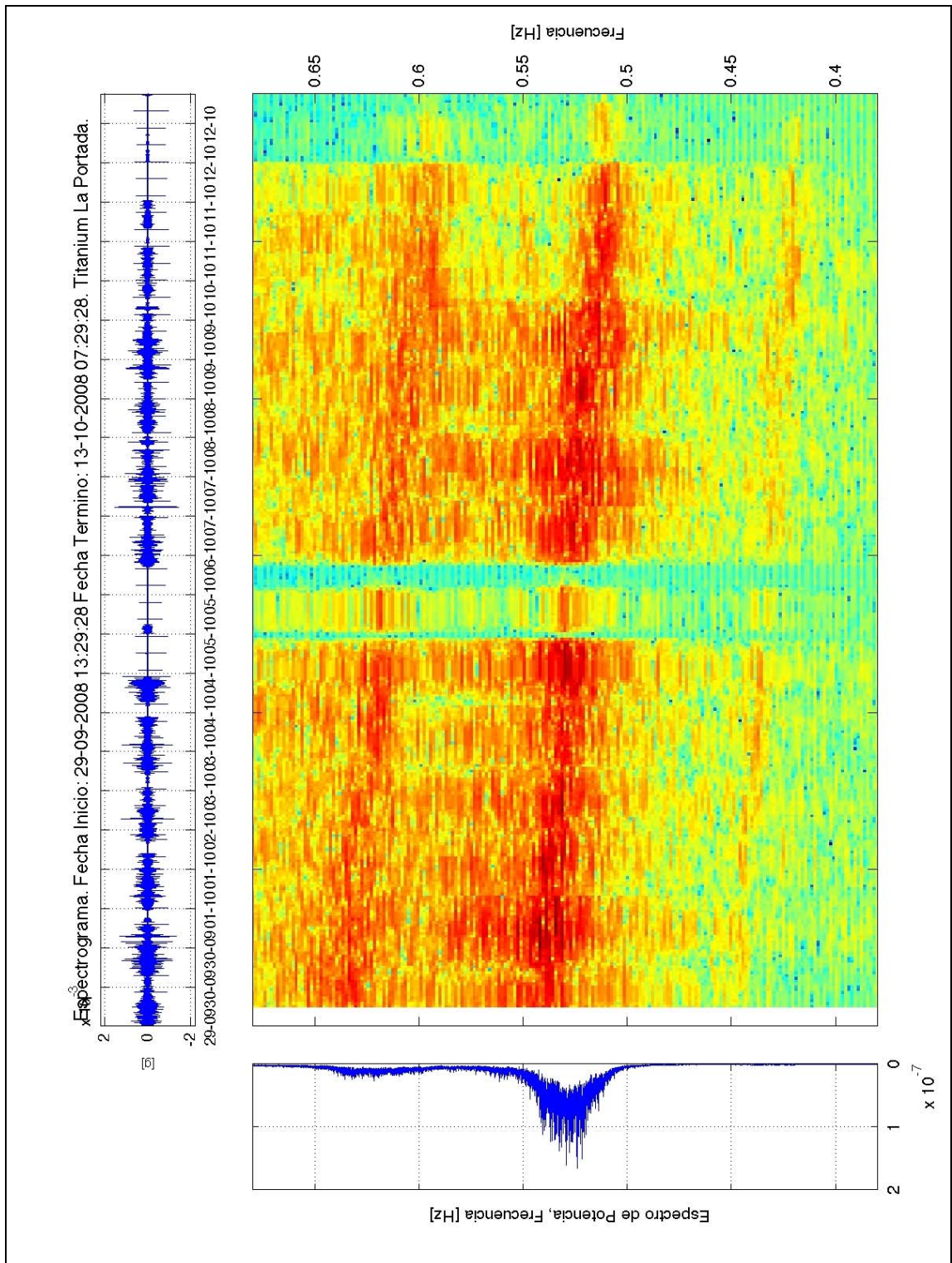


Figura 5. 166. Espectrograma. Del 29-09-08 al 13-10-2008. Canal 2 E/W. Piso 20. Edificio Titanium La Portada.

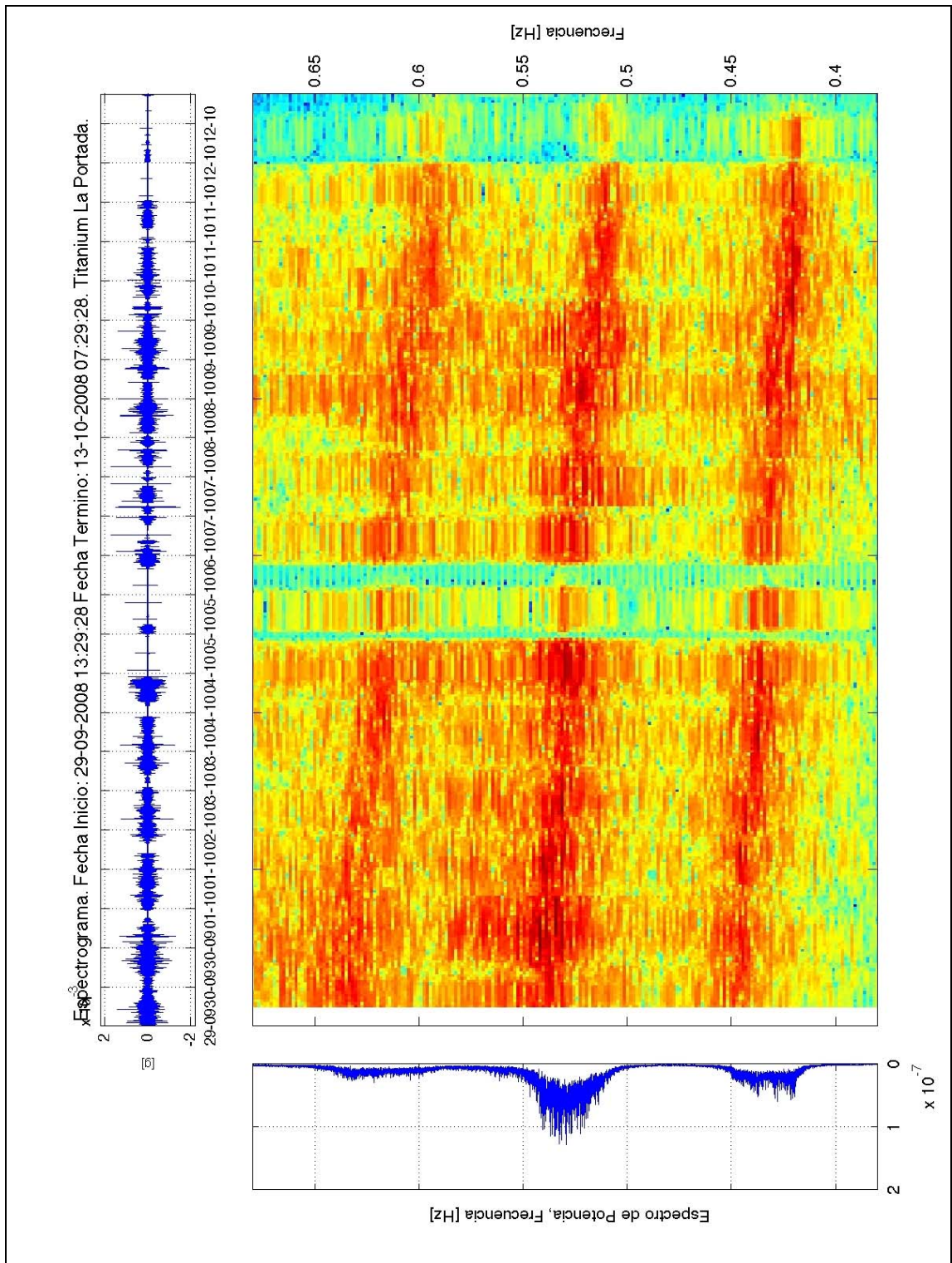


Figura 5. 167. Espectrograma. Del 29-09-08 al 13-10-2008. Canal 3 N/S. Piso 20. Edificio Titanium La Portada.

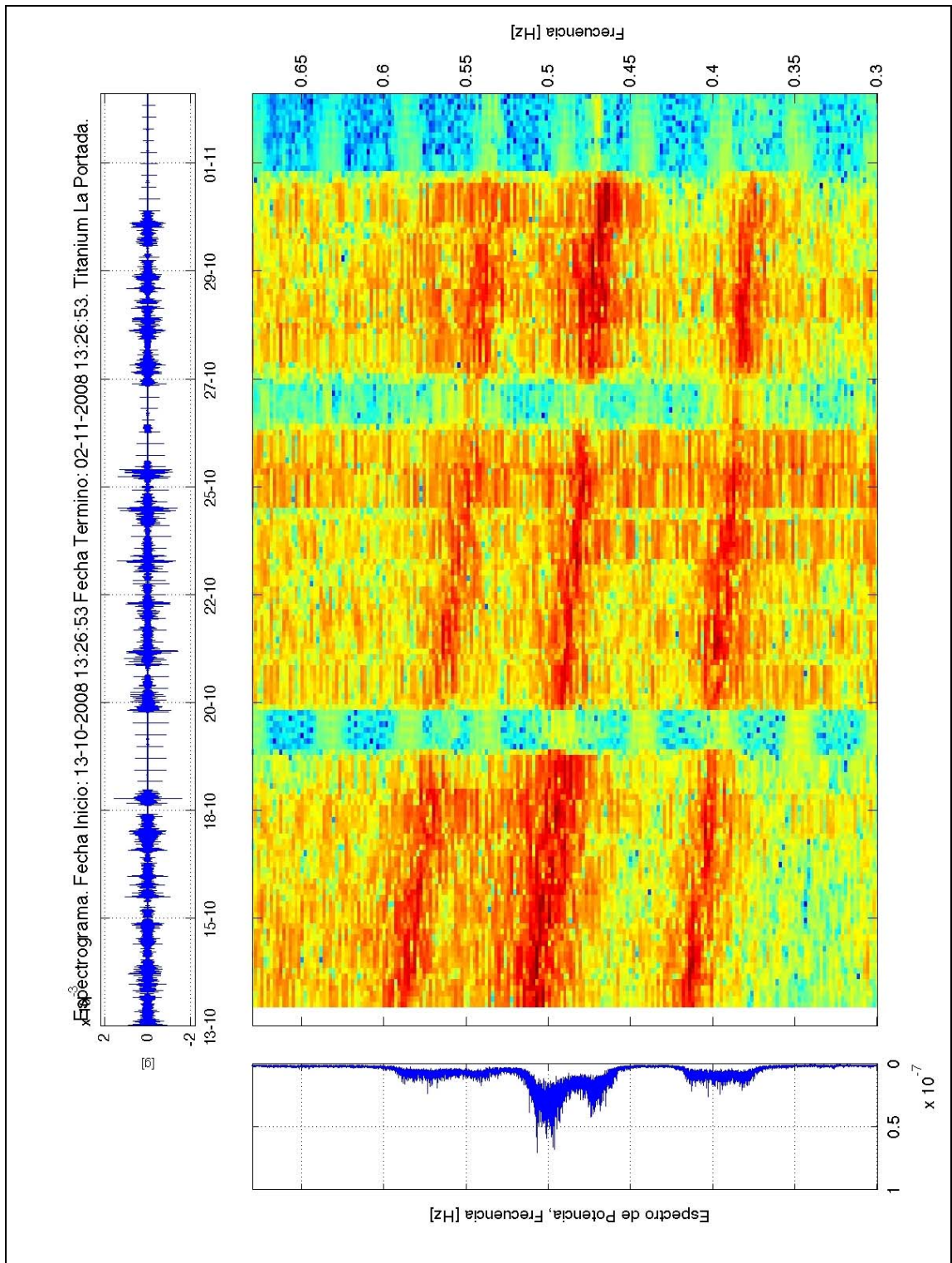


Figura 5. 168. Espectrograma. Del 13-10-08 al 02-11-2008. Canal 1 N/S. Piso 20. Edificio Titanium La Portada.

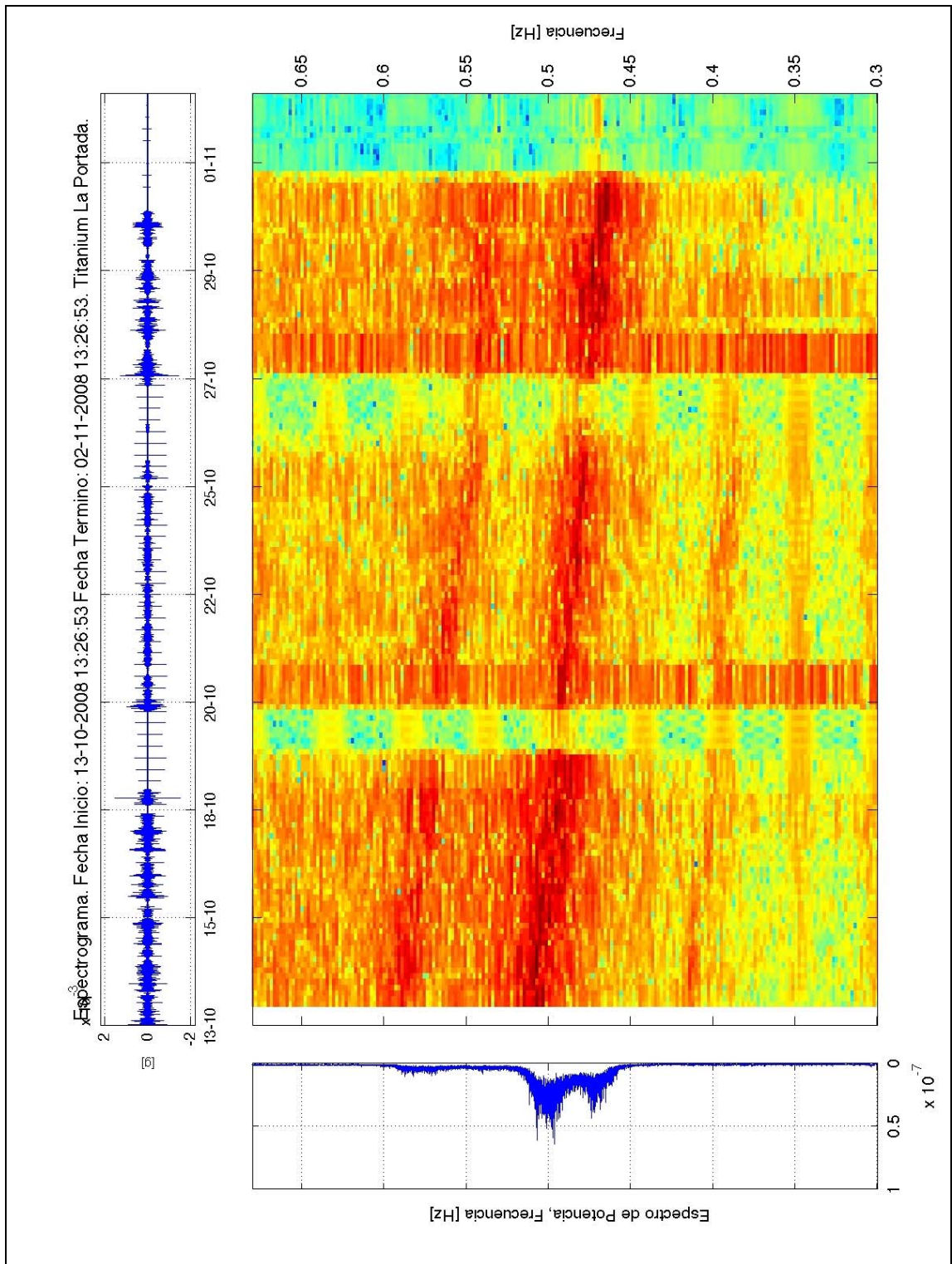


Figura 5. 169. Espectrograma. Del 13-10-08 al 02-11-2008. Canal 2 E/W. Piso 20. Edificio Titanium La Portada.

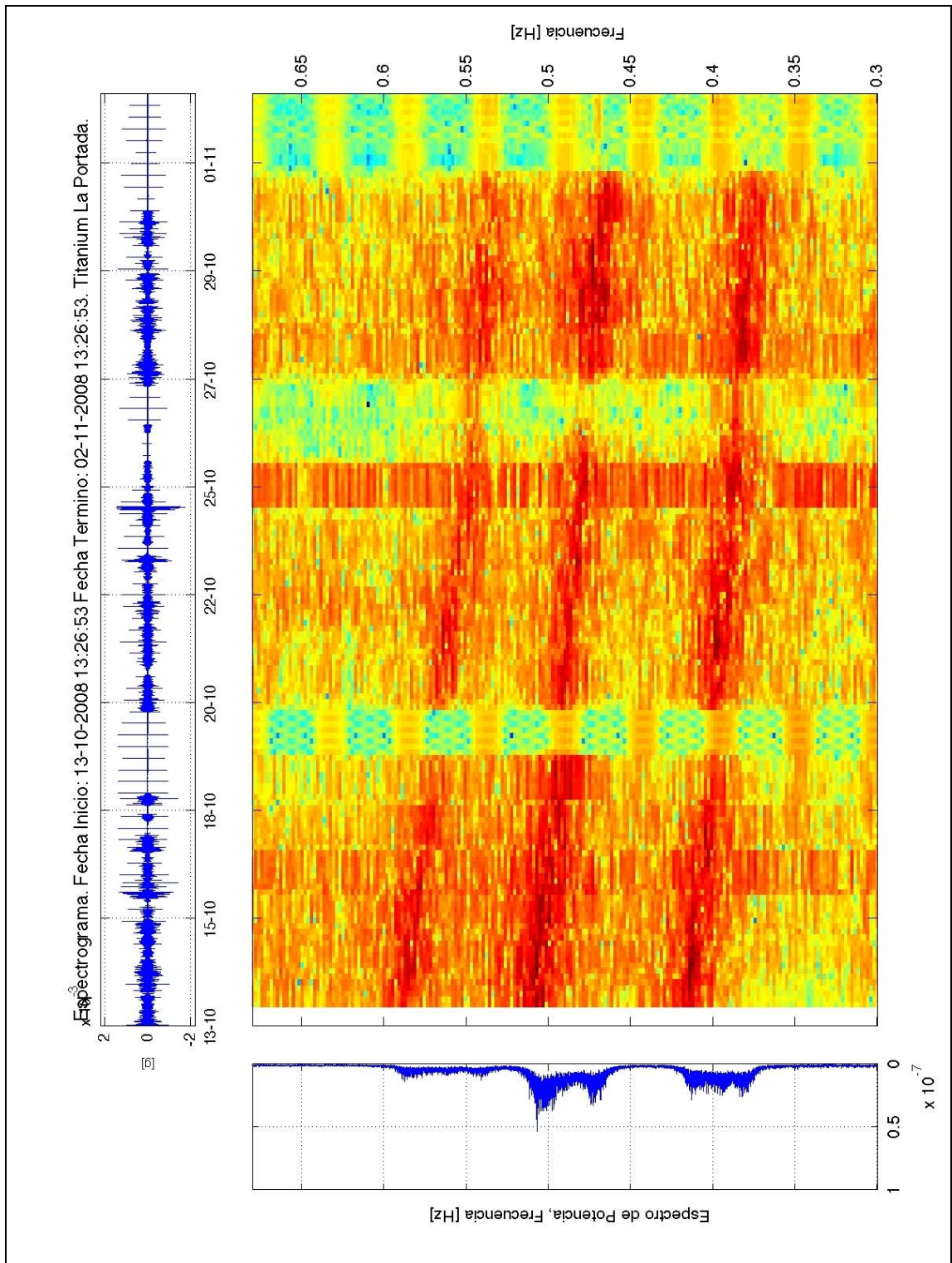


Figura 5. 170. Espectrograma. Del 13-10-08 al 02-11-2008. Canal 3 N/S. Piso 20. Edificio Titanium La Portada.

De las Figura 5. 165 a Figura 5. 170 se observa, al igual que para el método del Sub Espacio Estocástico, la variación, en un tramo del monitoreo continuo, de las frecuencias naturales a través del tiempo.

5.6 Análisis comparativo entre modelo de elementos finitos y estructura real.

A partir del análisis de la variación de frecuencias naturales y la modelación mediante elementos finitos de la estructura en estudio, es posible realizar un análisis comparativo entre el modelo y los resultados reales.

Con esto se pretende introducir el concepto de *“Modal Updating”* (Capítulo 6) y corroborar que el modelo matemático tenga una buena correlación con el monitoreo realizado.

Para esto, y como se vio anteriormente, se crearon submodelos de elementos finitos, diferenciados por el aumento de un piso, y junto a los planos de planta de avance por piso, se pudo establecer una curva de variación de frecuencias naturales en función del tiempo.

El análisis se realizó para los primeros 8 modos encontrados.

A continuación se presentan los gráficos comparativos de variación de frecuencias naturales por modo entre el modelo matemático y la estructura real:

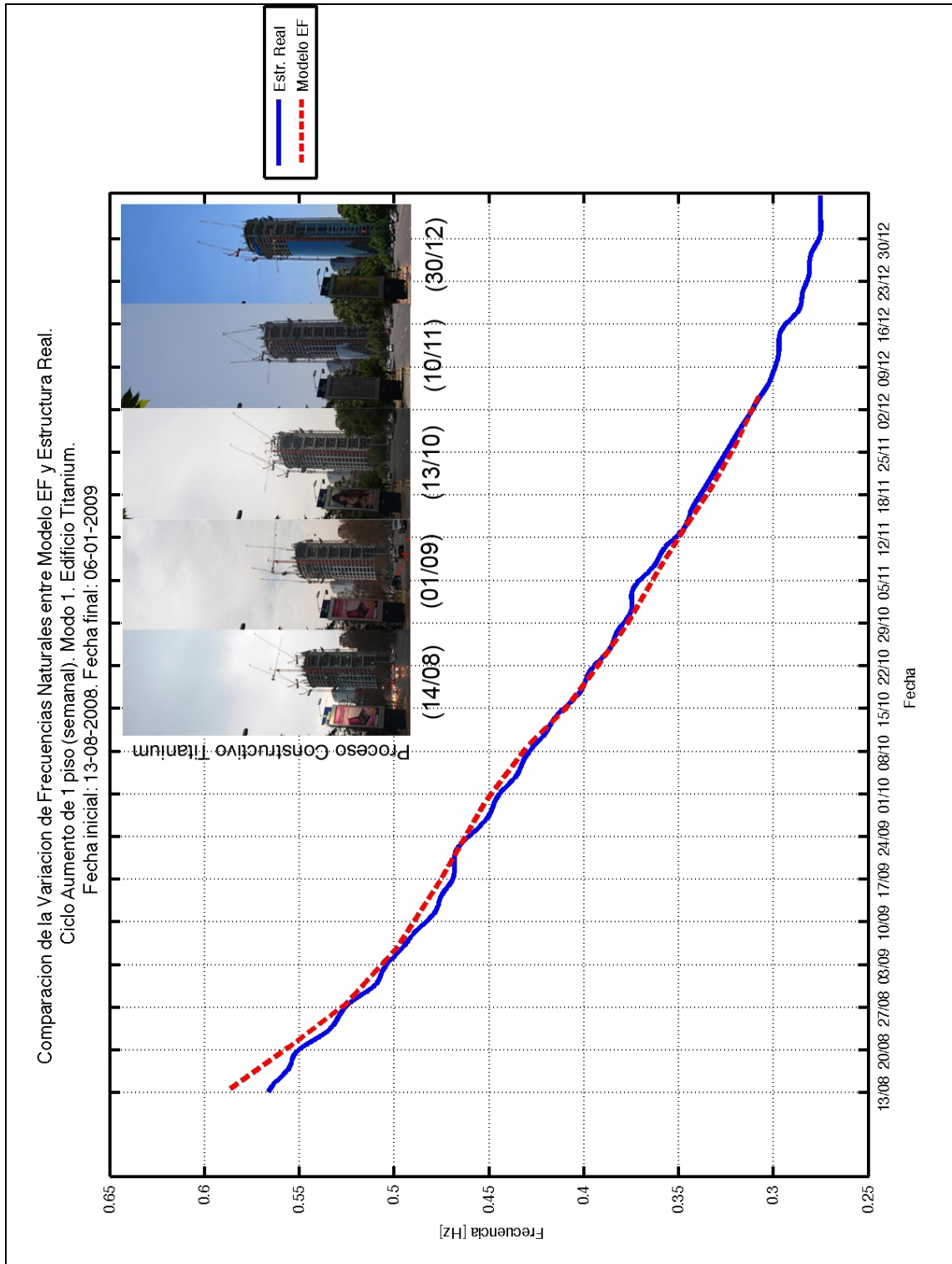


Figura 5.171. Comparación de la Variación de frecuencias naturales entre modelo EF y Estructura real. Ciclo Aumento de 1 piso (semanal). Modo 1. Edificio Titanium.

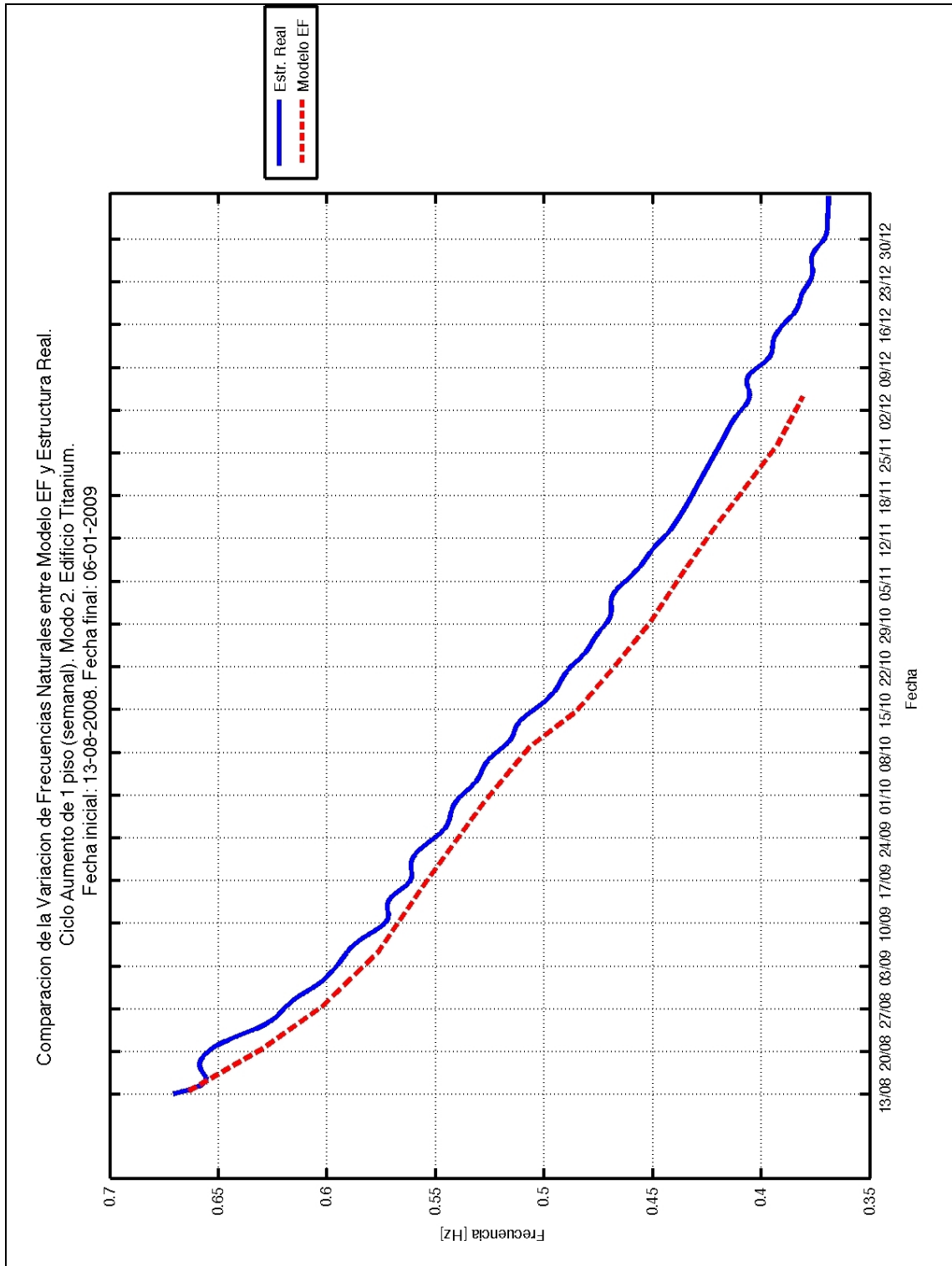


Figura 5.172. Comparación de la Variación de frecuencias naturales entre modelo EF y Estructura real. Ciclo Aumento de 1 piso (semanal). Modo 2. Edificio Titanium.

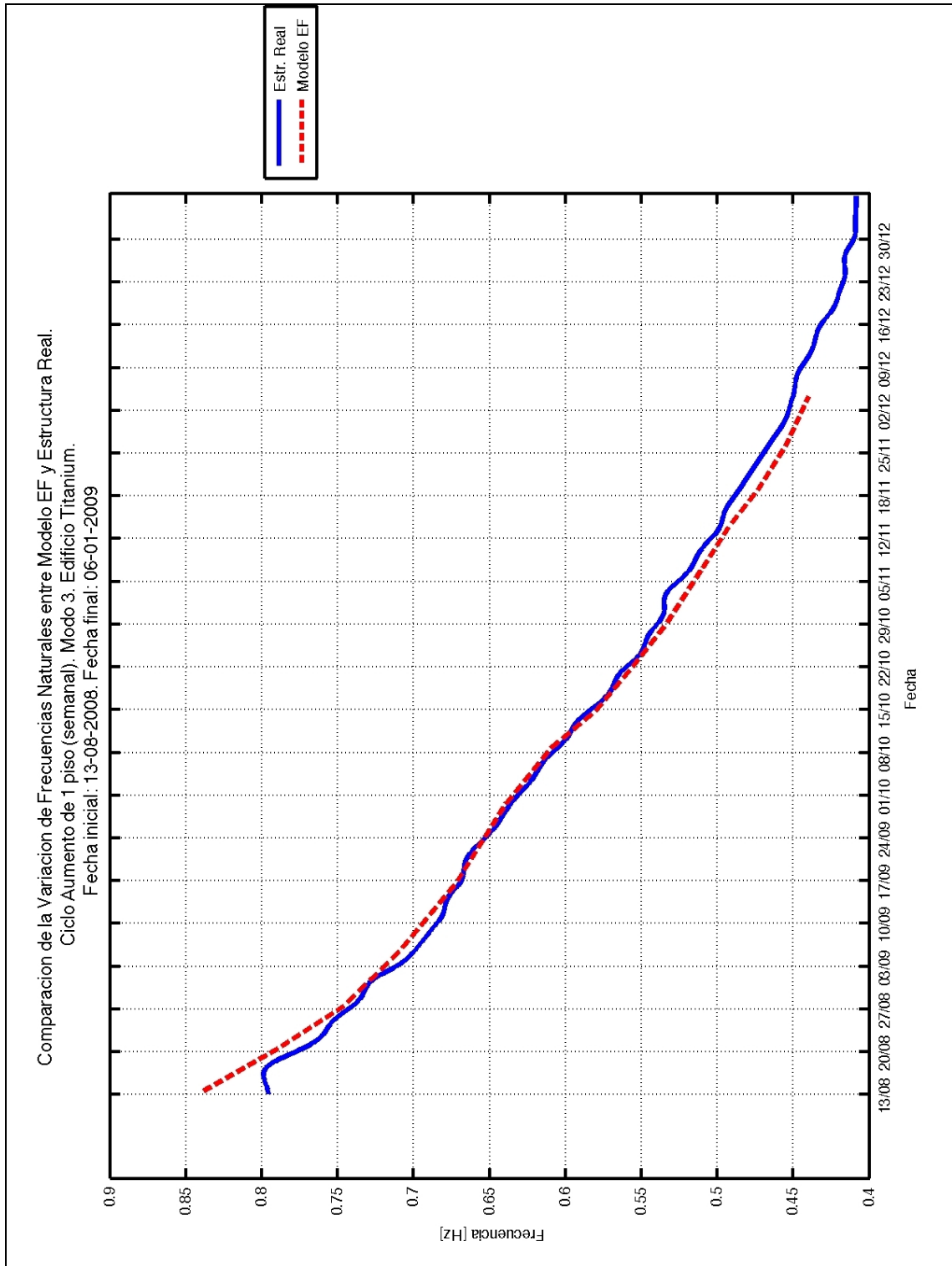


Figura 5.173. Comparación de la Variación de frecuencias naturales entre modelo EF y Estructura real. Ciclo Aumento de 1 piso (semanal). Modo 3. Edificio Titanium.

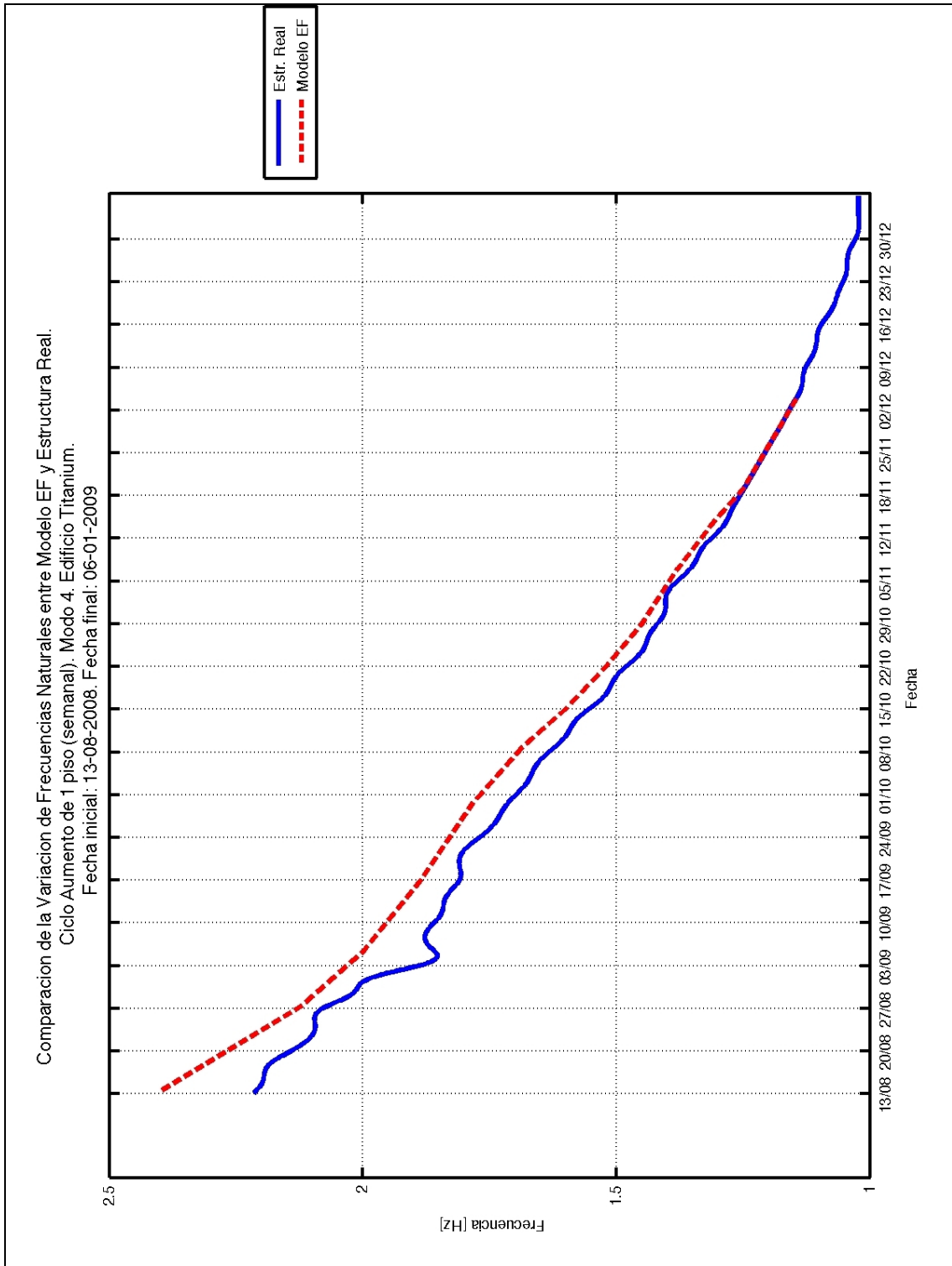


Figura 5.174. Comparación de la Variación de frecuencias naturales entre modelo EF y Estructura real. Ciclo Aumento de 1 piso (semanal). Modo 4. Edificio Titanium.

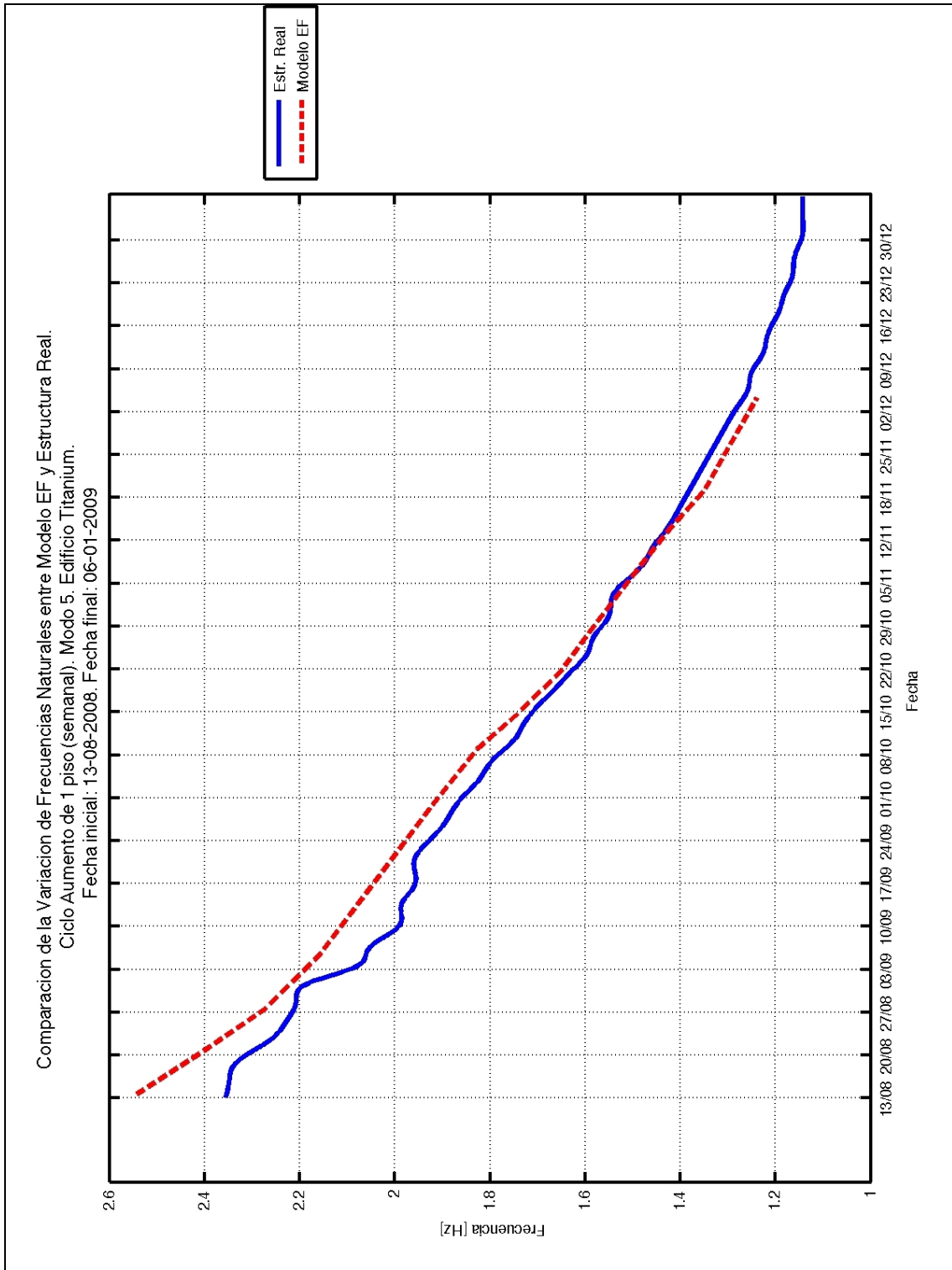


Figura 5.175. Comparación de la Variación de frecuencias naturales entre modelo EF y Estructura real. Ciclo Aumento de 1 piso (semanal). Modo 5. Edificio Titanium.

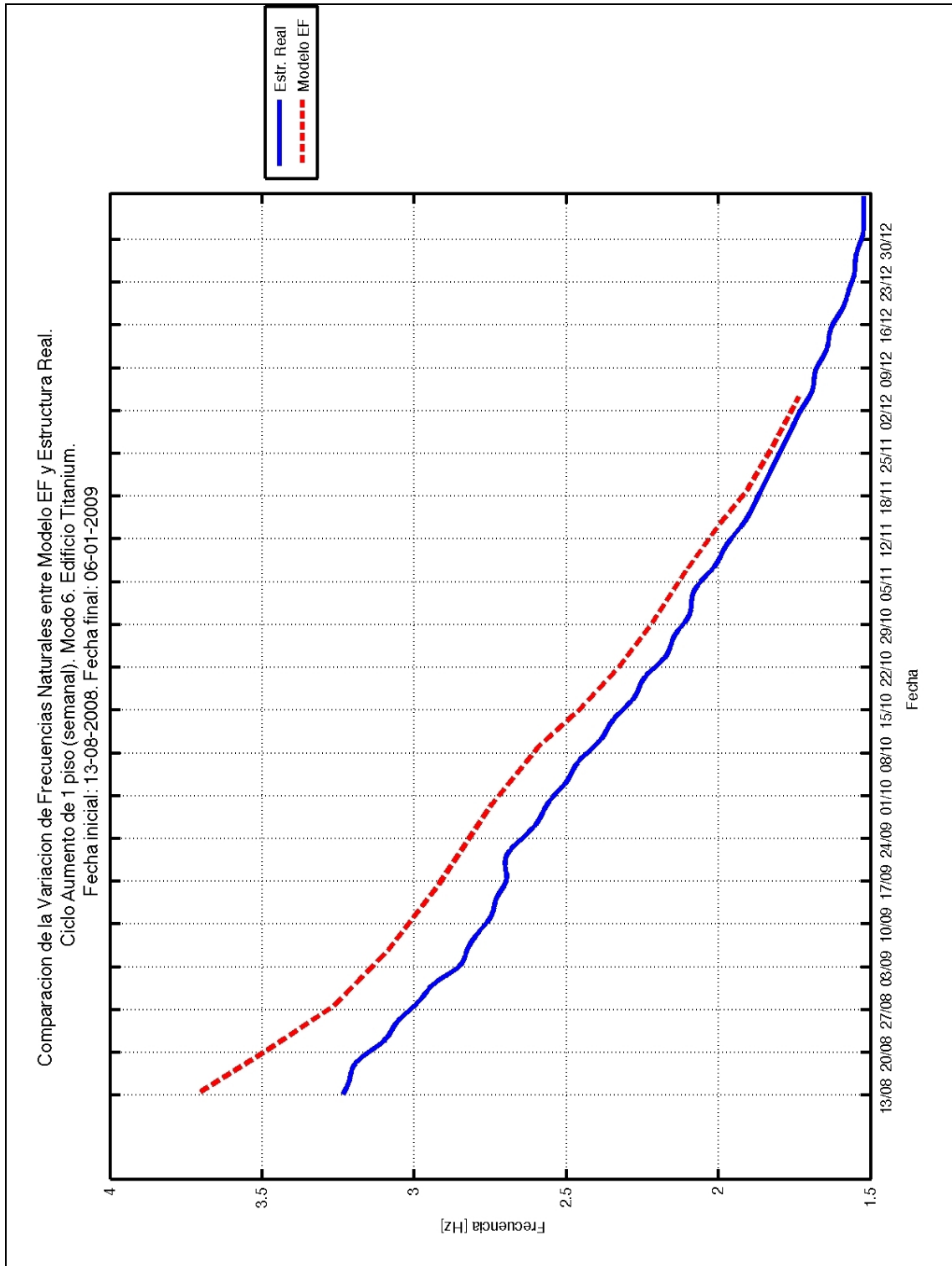


Figura 5.176. Comparación de la Variación de frecuencias naturales entre modelo EF y Estructura real. Ciclo Aumento de 1 piso (semanal). Modo 6. Edificio Titanium.

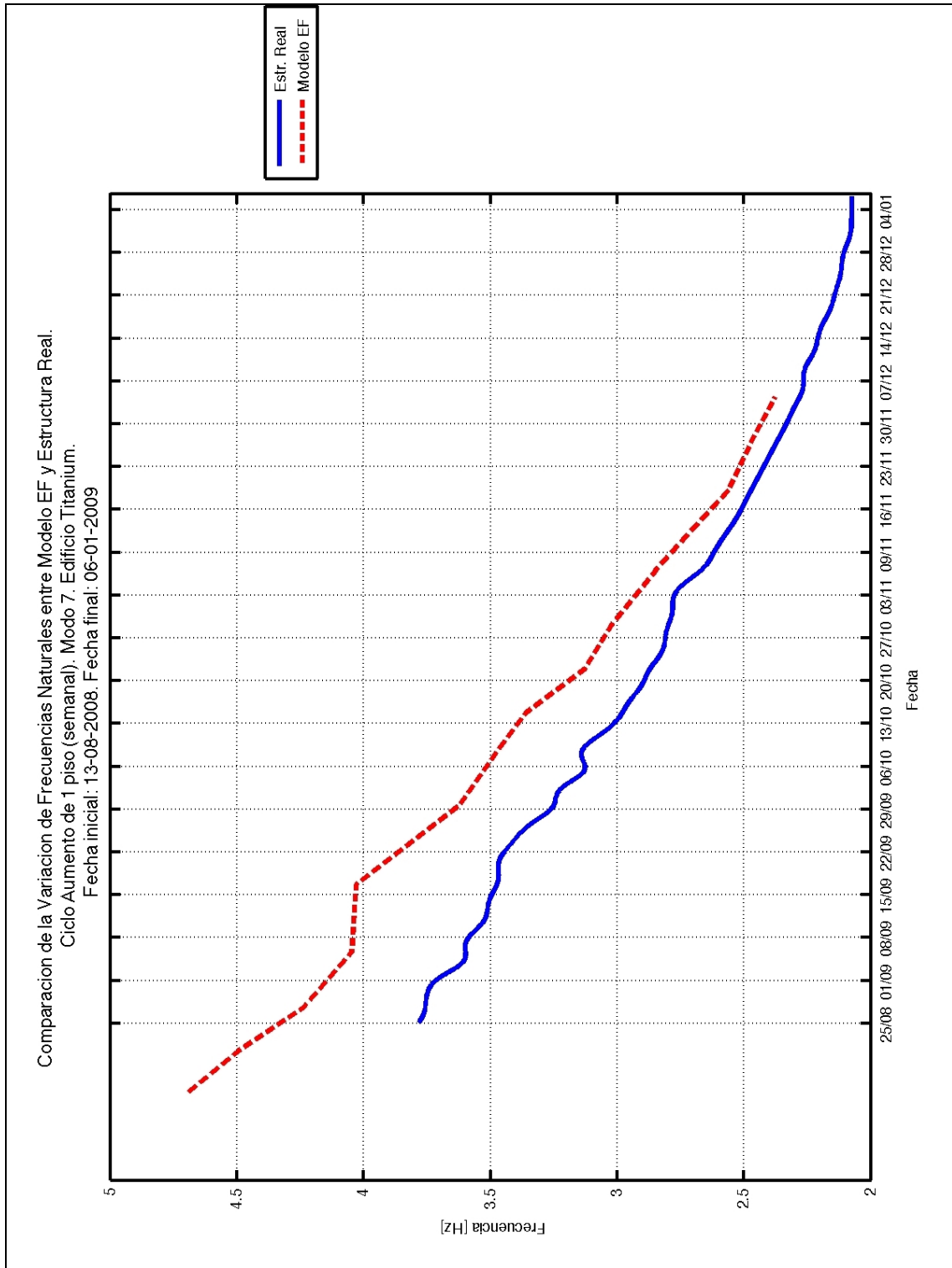


Figura 5.177. Comparación de la Variación de frecuencias naturales entre modelo EF y Estructura real. Ciclo Aumento de 1 piso (semanal). Modo 7. Edificio Titanium.

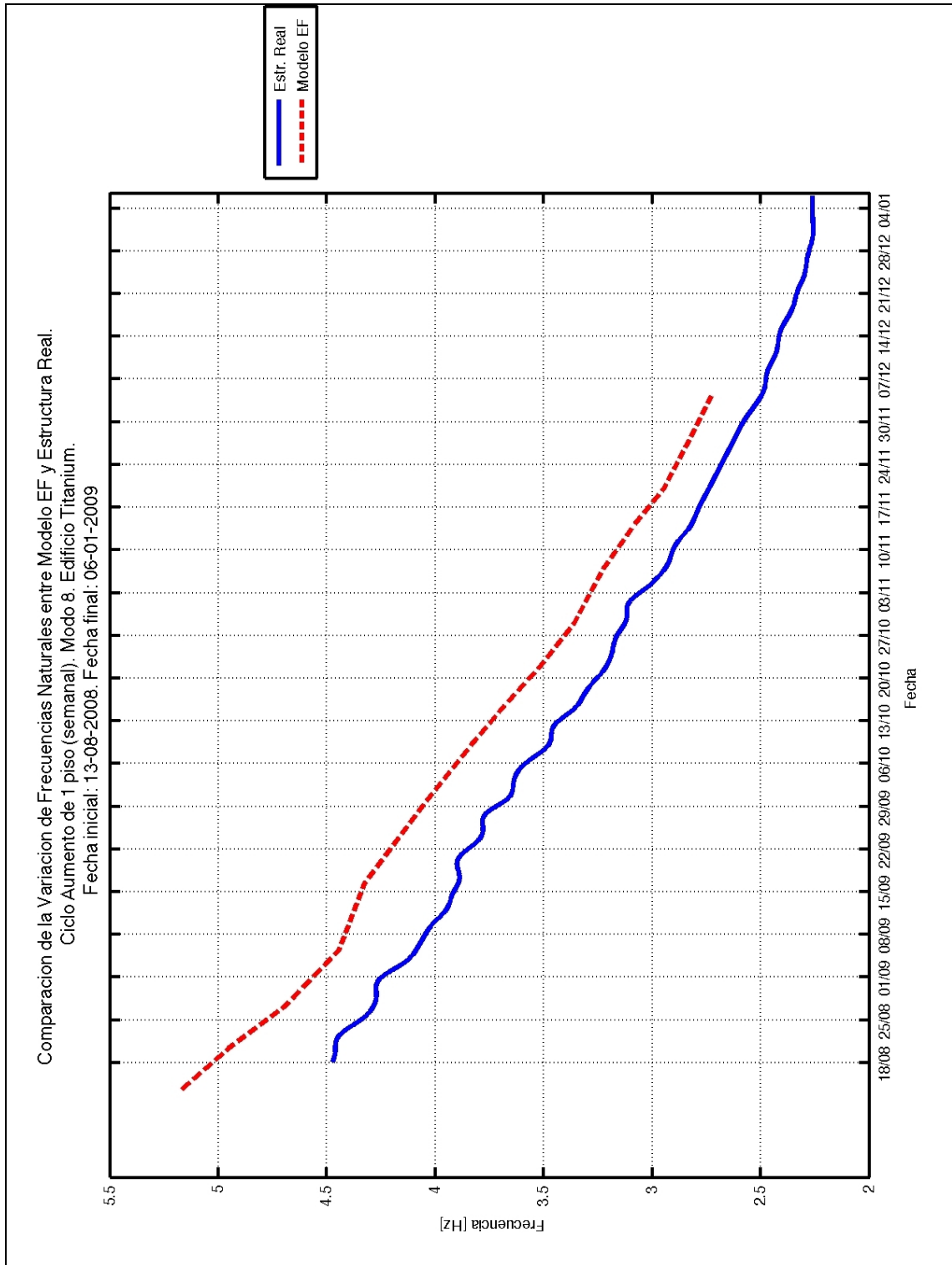


Figura 5.178. Comparación de la Variación de frecuencias naturales entre modelo EF y Estructura real. Ciclo Aumento de 1 piso (semanal). Modo 8. Edificio Titanium.

De los gráficos anteriores se observa una buena correlación existente entre ambas curvas, teniéndose una mayor diferencia para los modos superiores.

La diferencia que se produce para los modos superiores (modos 6 a 8) entre las frecuencias obtenidas del modelo de elementos finitos y los resultados del monitoreo continuo se explica debido a que la masa modal efectiva o factor de participación modal es mucho menor para estos modos, por lo que pequeñas diferencias de masas modales entre ambos resultados generan diferencias importantes en las frecuencias.

Esto se explica debido a que existen masas asociadas a la estructura real que no son consideradas dentro del modelo tales como: grúas, montacargas, maquinaria, sistema de bombeo de hormigón, entre otros.

Esto es coherente con los resultados mostrados anteriormente, donde para los modos superiores (modos 6 a 8), la estructura real resulta más flexible que el modelo de elementos finitos (menor frecuencia en la estructura real).

5.7 Comentarios y Conclusiones.

A partir de la red de monitoreo instalada en el edificio Titanium La Portada, fue posible la realización de un Monitoreo de Salud Estructural, a medida que el edificio crecía en altura.

Esto permitió comprender la respuesta de la estructura a medida que aumentaba su masa y rigidez, por medio de la identificación de sus propiedades dinámicas: frecuencias naturales, razones de amortiguamiento y formas modales.

Respecto del análisis de las series de tiempo, se logro establecer que el nivel de amplificación más adecuado era de 100 (ganancia $\times 100$), debido a que en los registros nocturnos, al tener un bajo nivel de excitación, el ruido eléctrico se confundía con la respuesta de la estructura.

Sin embargo en algunos registros, principalmente coincidentes con días feriados y nocturnos, este fenómeno también se hacia presente, a pesar de haber aumentado la ganancia. Se sugiere que en futuras investigaciones, donde se incluya una red de monitoreo, se tengan dos arreglos, con diferentes niveles de amplificación, para mitigar este efecto y para obtener información de excitaciones forzadas como registros sísmicos.

Del análisis en el dominio de la frecuencia, a partir de los espectros de potencia, es importante destacar que la participación de los modos superiores en la respuesta de la estructura fue considerable sólo en las últimas etapas de medición, **APENDICE D**.

Esto corrobora el hecho de que en estructuras de periodo alto, tal como este edificio, los modos superiores son de relevancia para parametrizar la respuesta y tienen directa relación con el análisis de sistemas continuos (viga de flexión) [MEIROVITCH, 1967].

Los resultados procesados entregaron una clara tendencia no-lineal de variación de las frecuencias naturales, disminuyendo de forma considerable.

Estas variaciones están regidas por dos patrones de ciclos constructivos:

- Patrón de variación diaria: Entrega las variaciones producto de las cargas operacionales del edificio, lo que se traduce en la entrada y salida del personal que trabaja en obra, existiendo un mayor movimiento y avance de las faenas constructivas durante el día, comparado con la noche. Otra variable que puede

tomarse en cuenta son los ciclos diarios de temperatura, lluvia y humedad, lo que podría influir de cierta forma en esta variación [LAZCANO, 2008].

- Patrón de Variación Semanal: Este ciclo de variación debe entenderse como un patrón repetitivo y no como una variación de frecuencias en torno a algún valor de referencia. Esto debido a que el ciclo constructivo semanal tiene 2 etapas de importancia, las que incluyen un aumento importante de masa dentro de la estructura: el primero corresponde a la colocación de pilares y muros de núcleo, mientras que la segunda etapa corresponde a la colocación de losetas pretensadas y sobrelosa, siendo esta última etapa de mayor importancia debido a que aporta mayor peso (masa) a la estructura, teniéndose una variación más importante en esta última etapa. Esta repetición genera un patrón caracterizado por dos etapas que se extrapola durante todo el periodo de monitoreo y que fue posible identificar por medio de la aplicación de un espectro de potencia a la variación de frecuencias. Es importante tener en cuenta que las faenas constructivas no corresponden a un proceso continuo, ya que si así fuera, no se observarían este tipo de patrones de variación, separados en dos etapas como se señaló anteriormente y que se repiten de forma aproximadamente uniforme a lo largo del periodo de monitoreo.

Es posible corroborar a través de la Figura 5.131, que en ciertos puntos del monitoreo, se generaban tramos constantes en la variación de las frecuencias.

Esto obedece a que en ciertas fechas no había un avance considerable en la obra y por ende un estancamiento en el valor de la frecuencia. Este fenómeno puede apreciarse en época de Fiestas Patrias (16 a 23 de septiembre 2008), feriados largos y Navidad (24 al 28 de diciembre de 2008), entre otros.

Respecto al análisis de la variación de la razón de amortiguamiento, pudo establecerse que este parámetro tenía una tendencia a decrecer muy lentamente, aproximándose a un resultado constante. Además, pudo validarse mediante un análisis teórico y corroborarse mediante una concatenación de resultados asociados a registros sin impacto correspondiente a días domingo, donde las faenas constructivas decrecían considerablemente con respecto al resto de la semana.

Finalmente, puede establecerse que existe una buena correlación entre las variación de frecuencias teórica y real, teniéndose diferencias solamente para los modos superiores, en donde se aprecia que la estructura es mas flexible (menor frecuencia) que el submodelo de elementos finitos.

Sin embargo, es posible mejorar esta correlación por medio de un proceso de refinamiento del modelo. Para esto existen técnicas, que serán presentadas en el capítulo siguiente de forma teórica.

Capítulo 6

Monitoreo de Salud Estructural (SHM) y Actualización de Modelos Matemáticos.

6.1 Introducción.

El Monitoreo de Salud Estructural (SHM) (del inglés *Structural Health Monitoring*) corresponde a un campo de la dinámica estructural que tiene entre sus objetivos generar un diagnóstico en el comportamiento de las estructuras, para condiciones ambientales, operacionales y forzadas de excitación.

Una herramienta utilizada por este tipo de monitoreo corresponde a establecer rangos de variación de las propiedades dinámicas, estableciéndose límites que permiten verificar si la estructura ha sufrido daño, o bien ha experimentado cambios debido a condiciones ambientales o de uso.

La actualización de modelos matemáticos corresponde a una técnica que se vale del monitoreo estructural y de sus resultados para correlacionar dicho modelo y sus propiedades, con las propiedades obtenidas de la estructura real, previo monitoreo y análisis.

La técnica de actualización de modelos tiene dos partes fundamentales: análisis de sensibilidad y actualización.

En el presente capítulo se presentan los principales conceptos relacionados con el monitoreo de salud estructural, así como la relación que existe entre la obtención de parámetros dinámicos, con la posibilidad de actualizar y calibrar modelos matemáticos, como los de elementos finitos, comúnmente usados en el diseño estructural.

Finalmente se presentará un modelo estructural con el que se trabajarán dichas técnicas, y que es posible extrapolar a la estructura principal correspondiente a este estudio, el edificio Titanium La Portada.

6.2 Actualización de modelos de elementos finitos.

Entre los resultados que se obtienen a partir de un sistema de monitoreo de salud, se cuentan sus propiedades modales: estas corresponden a sus frecuencias naturales, porcentaje de amortiguamiento y formas modales.

La información entregada por este monitoreo puede ser utilizada luego para validar y calibrar modelos de elementos finitos de la estructura que está siendo estudiada.

Un intento por correlacionar propiedades modales analíticas y experimentales de un edificio usando un procedimiento de actualización manual se describe en [VENTURA, 2000].

A pesar de que este estudio obtuvo buena correlación entre la respuesta^{6.1} dinámica analítica y experimental, esta técnica muestra bastantes limitaciones, principalmente por el número de parámetros que es posible modificar con el fin de hacer coincidir frecuencias naturales y formas modales.

^{6.1} El término “respuesta” se refiere a sus propiedades modales ya que éstas parametrizan el comportamiento de la estructura frente a distintos niveles de excitación.

Los avances recientes en el campo de la Ingeniería Mecánica y Modelamiento Matemático han sido extrapolados al campo de la Dinámica Estructural.

Uno de los ejemplos de este avance corresponde al *software* desarrollado por *Dynamic Design Solutions (DDS)* en 2004 a través del programa computacional *FEMTools*, que permiten realizar actualizaciones de estructuras complejas de forma automatizada usando múltiples parámetros (modulo de elasticidad, momento de inercia, espesor, densidad de masa, etc) que influyen en las propiedades dinámicas y múltiples parámetros de respuesta (frecuencias naturales, formas modales, MAC).

En [VENTURA, 2005] se aplica esta técnica. Este estudio muestra las ventajas de usar una herramienta de actualización automatizada, usando una gran cantidad de información de forma simultánea.

Sin embargo, se hace necesaria la experiencia del analista en este tipo de actualizaciones, ya que algunos resultados puede que no reflejen el estado real de la estructura.

6.2.1 Actualización de modelos basados en micro-vibraciones.

La actualización de modelos basados en análisis de micro-vibraciones compara los parámetros dinámicos del modelo de elementos finitos con los obtenidos a partir del procesamiento de datos correspondientes a la estructura real.

En muchos casos, ciertos detalles de las estructuras reales no son considerados en el modelo de elementos finitos, por lo que la validez de este modelo no se encuentra bien definida.

Debido a lo anterior, la obtención de información de la estructura real permitirá, entre otras cosas, un modelamiento que represente el comportamiento de la estructura.

En términos esquemáticos el proceso de actualización de modelos basados en análisis de vibraciones puede resumirse como:

1. Generación del modelo de elementos finitos
2. Obtención de parámetros dinámicos del modelo de elementos finitos
3. Medición de vibraciones de la estructura real
4. Obtención de parámetros dinámicos a partir de los datos obtenidos de la medición de vibraciones de la estructura real.
5. Correlación de los parámetros modales del modelo de elementos finitos con los de la estructura real.
6. Decidir qué parámetros estructurales pueden afectar de mayor forma la respuesta de la estructura y el número de parámetros dinámicos a correlacionar.
7. Actualización del modelo, cambiando los parámetros en el modelo de elementos finitos, para hacer coincidir los parámetros modales.
8. Generar una nueva correlación para corroborar el estado de la actualización.
Iterar si es necesario.

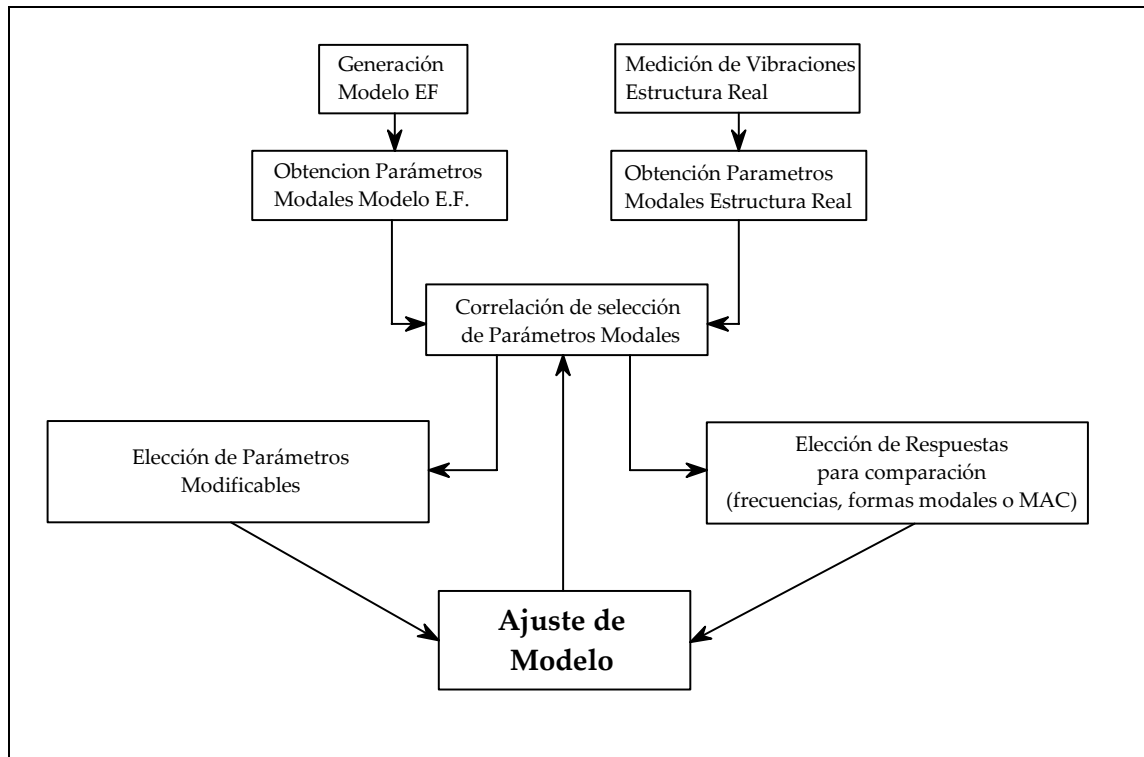


Figura 6. 1. Esquema Actualización de Modelos Basados en vibraciones.

6.2.2 Análisis de Sensibilidad como herramienta para actualización de modelos.

En la Sección 6.2.1 se explicó en términos generales el proceso de actualización de modelos, basándose en la obtención de parámetros modales de la estructura real y contrastándolos con los que se obtienen a partir del modelo de elementos finitos.

El contraste que se realiza entre ambos requiere de herramientas matemáticas que permitan obtener información acerca de cuales son los parámetros que afectan la respuesta de la estructura, lo que se traduce en sus parámetros dinámicos.

En este sentido, el análisis de sensibilidad corresponde a la primera etapa en la actualización de modelos.

El análisis de Sensibilidad corresponde a una técnica con la que es posible obtener una primera aproximación de cómo la respuesta de la estructura se ve influenciada debido a la modificación de ciertas propiedades de la estructura, tales como condiciones de borde, rigidez de los materiales componentes de la estructura, geometría, etc. [DASCOTTE, 1995].

En términos generales, la herramienta matemática que engloba este concepto corresponde a la Matriz de Sensibilidad, $[S]$ que se obtiene a partir de los parámetros $\{P_i\}$ y respuestas $\{R_j\}$ escogidas para el análisis como^{6.2}:

$$[S] = S_{ij} = \left(\frac{\delta R_i}{\delta P_j} \right) \quad (6.1)$$

O en términos de diferencias finitas:

$$[S] = S_{ij} = \left(\frac{\Delta R_i}{\Delta P_j} \right) \quad (6.2)$$

La matriz $[S]$ contiene todos los coeficientes de sensibilidad. ΔR_i representa el cambio en la respuesta i -ésima (de un total de N). ΔP_j representa el cambio en el j -ésimo parámetro (de un total de M).

La ecuación (6.2) representa la forma más general de obtener los coeficientes de la matriz de sensibilidad.

^{6.2} En términos generales, la “respuesta” se refiere a las frecuencias naturales y formas modales o MAC, mientras que el término “parámetros” se refiere a las variables que son modificables en el modelo matemático (módulo de elasticidad, inercia, masa, rigidez, etc.) para lograr una mejor correlación entre el modelo y la estructura real.

Una vez obtenida la matriz $[S]$ los cambios de parámetros para una variación en la respuesta (traducido en diferencias entre modelo y estructura real) puede ser determinado como:

$$[\Delta P] = [S]^{-1} \cdot [\Delta R] \quad (6.3)$$

Finalmente estos nuevos parámetros son aplicados al modelo original, generando una actualización de éste.

Cabe señalar que el programa computacional *FEMTools* integra todos estos conceptos y se basa principalmente en ellos. Por lo tanto, en adelante los conceptos presentados en este capítulo hacen referencia a *FEMTools*.

6.2.2.1 Selección de parámetros para análisis de sensibilidad.

En *FEMTools*, Un “Parámetro” puede definirse en este caso como una cantidad física y/o geométrica utilizada para modelar la estructura real.

Los parámetros seleccionados para la actualización de modelos dependerán de la aplicación.

Por lo general debe escogerse el máximo posible de parámetros, y luego eliminar los parámetros menos sensibles en las zonas más relevantes de la estructura.

Alguno de los parámetros que pueden incluirse dentro del análisis de sensibilidad en *FEMTools* son:

- Módulo de Young (E)
- Densidad de Masa (ρ)
- Área de la Sección (A_x)
- Masa (M_x, M_y, M_z)
- Coeficiente de Poisson (ν)
- Modulo de Corte (G)
- Momentos de Inercia (I_x, I_y, I_z)
- Espesor de Elementos de Área (H)
- Rigidez de conexiones (K_x, K_y, K_θ)

6.2.2.2 Selección de respuesta para análisis de sensibilidad.

En *FEMTools*, se denomina “Respuesta” a la información obtenida de las mediciones de vibración: frecuencias naturales, formas modales y MAC.

6.2.2.3 Tipos de Sensibilidad.

En *FEMTools* se definen cuatro tipos diferentes de sensibilidades:

- Sensibilidad absoluta
- Sensibilidad relativa
- Sensibilidad normalizada

La sensibilidad absoluta (S_a) toma en cuenta las unidades usadas tanto en los parámetros como las respuestas y se define como:

$$dR = S_a \cdot dP \quad (6.4)$$

Donde:

dR = variación de la respuesta.

S_a = sensibilidad absoluta

dP = variación del parámetro.

La sensibilidad relativa (S_r) tiene las mismas unidades que las respuestas utilizadas para la actualización (por ejemplo, para el caso de frecuencias será en [Hz]). Este tipo de sensibilidad es útil para comparar sensibilidades de diferentes parámetros para una misma respuesta. Se define como:

$$dR = S_r \left(\frac{dP}{P} \cdot 100 \right) \quad (6.5)$$

La sensibilidad normalizada (S_n) corresponde a la más utilizada, ya que es independiente de las unidades de los parámetros y respuestas (adimensional). Ésta muestra el porcentaje de cambio en la respuesta para una modificación del 1% en el valor del parámetro.

$$\left(\frac{dR}{R} \right) = S_n \cdot \left(\frac{dP}{P} \right) \quad (6.6)$$

Para comprender mejor este concepto se presenta un ejemplo [DDS, 2007b]: Consideremos un sistema estructural de 1 grado de libertad con una frecuencia natural

inicial de $f_{ini} = 51.79 [Hz]$ (correspondiente a la respuesta R , definido en *FEMTools*) y un módulo de elasticidad inicial $E_{ini} = 210000 [N/m^2]$ (correspondiente al parámetro P).

Si variamos el parámetro E_{ini} en un 1% se obtiene que:

$$E_{fin} = 1.01 \cdot E_{ini} = 212100 [N/m^2]$$

Debido a la relación del Módulo de Elasticidad con la rigidez, y por ende con la respuesta de la estructura, se tendrá que para este nuevo valor de modulo de elasticidad la frecuencia asociada será:

$$f_{fin} = 52.04 [Hz]$$

De esta forma, es posible calcular las Sensibilidades Normalizadas (S_n) y Relativas (S_r) como sigue::

Variación del parámetro correspondiente al modulo de elasticidad:

$$\frac{dP}{P} = \frac{dE}{E} = 1\% = 0.01$$

Sensibilidad Relativa:

$$S_r = \frac{dR}{\left(\frac{dP}{P} \cdot 100\right)} = \frac{dR}{0.01 \cdot 100} = dR = f_{fin} - f_{ini} = (52.04 - 51.79) [Hz] = 0.25 [Hz]$$

Sensibilidad Normalizada:

$$S_n = \frac{\frac{dR}{dP}}{\frac{R}{P}} = \frac{\frac{df}{dE}}{\frac{f_{ini}}{E_{ini}}} = \frac{\left(\frac{0.25}{51.79} \right)}{\left(\frac{2100}{210000} \right)} = 0.0048 \cdot 100\% = 0.48\%$$

De los cálculos anteriormente desarrollados se concluye que la variación de 1% en el módulo de elasticidad genera un +0.48% (Sensibilidad Normalizada) de variación de la frecuencia o equivalentemente a un incremento de $0.25[Hz]$ con respecto a la frecuencia inicial (Sensibilidad Relativa).

Siguiendo esta idea, es posible construir una matriz de sensibilidad de $M \times N$, con M la cantidad de respuestas y N el número de parámetros.

Tres formas de generar los coeficientes de sensibilidad en función de la respuesta, son los más importantes dentro de este estudio.

La primera corresponde a los coeficientes de sensibilidad basados en la frecuencia natural del sistema, que se obtienen a partir de derivar con respecto al parámetro P_j la ecuación de equilibrio dinámico para un sistema sin amortiguamiento, y pre-multiplicarlo por $\{\psi_i\}^T$, [DDS, 2007]:

$$\frac{\delta f_i}{\delta P_j} = \frac{\{\psi_i\}^T \cdot \left(\frac{\delta[K]}{\delta P_j} - 4\pi^2 \cdot f_i^2 \cdot \frac{\delta[M]}{\delta P_j} \right) \cdot \{\psi_i\}}{8\pi^2 \cdot f_i \cdot \left(\{\psi_i\}^T \cdot [M] \cdot \{\psi_i\} \right)} \quad (6.7)$$

Donde:

f_i = i-ésima frecuencia natural del sistema.

P_j = j-ésimo parámetro.

$\{\psi_i\}$ = Vector propio de la ecuación homogénea del sistema no amortiguado.

$[M]$ = Matriz de Masa.

$[K]$ = Matriz de Rigidez.

De (6.7) se observa la dependencia del coeficiente de sensibilidad con la matriz de masa y rigidez.

El segundo coeficientes corresponde a los coeficientes de sensibilidad basados en las formas modales (vector). Este coeficiente se considera como una combinación de N modos [DDS, 2007]:

$$\frac{\delta\{\psi_i\}}{\delta P_j} = \sum_{p=1}^N a_p^i \cdot \{\psi_p\} \quad (6.8)$$

Con

$$a_p^i = -\frac{1}{2} \cdot \{\psi_i\}^T \cdot \frac{\delta[M]}{\delta P} \cdot \{\psi_i\} \quad , \text{ si } p = i \quad (6.9)$$

El tercer coeficiente de sensibilidad esta basado en los valores de correlación de formas modales MAC, [DDS, 2007]:

$$\frac{\delta MAC}{\delta P} = 2 \cdot \left(\frac{\left[\{\psi_e\}^T \cdot \{\psi_a\} \cdot \frac{\delta \{\psi_a\}}{\delta P} \right]}{\{\psi_e\}^T \cdot \{\psi_e\} \cdot \{\psi_a\}^T \cdot \{\psi_a\}} - \frac{\left[\left(\{\psi_e\}^T \cdot \{\psi_a\} \right)^2 \cdot \{\psi_a\}^T \cdot \frac{\delta \{\psi_a\}}{\delta P} \right]}{\{\psi_e\}^T \cdot \{\psi_e\} \cdot \left(\{\psi_a\}^T \cdot \{\psi_a\} \right)^2} \right) \quad (6.10)$$

En términos de diferencias finitas, los coeficientes de sensibilidad pueden expresarse de forma más general como:

$$\frac{\Delta R_i}{\Delta P_j} = \frac{R_i(P_j + \Delta P_j) - R_i(P_j)}{\Delta P_j} \quad (6.11)$$

De esta forma, las ecuaciones (6.7), (6.8) y (6.10) pueden escribirse en términos de diferencias finitas, reemplazando las derivadas parciales.

6.2.2.4 Procedimiento de actualización de modelos de elementos finitos.

La ecuación (6.3) puede ser expresada como una expansión de Taylor limitada a los términos lineales como:

$$\{R_e\} = \{R_a\} + [S] \cdot (\{P_u\} - \{P_o\}) \quad (6.12)$$

O bien:

$$\{\Delta R\} = [S] \cdot \{\Delta P\} \quad (6.13)$$

Donde:

$\{R_e\}$ = Vector que contiene las respuestas del sistema de referencia, en este caso los parámetros dinámicos correspondientes a la estructura real.

$\{R_a\}$ = Vector que contiene la predicción de la respuesta del sistema para un estado de parámetros $\{P_o\}$ dado

$\{P_u\}$ = Vector que contiene los valores de los parámetros actualizados.

$[S]$ = Matriz de Sensibilidad.

Tres formas son las que usa el programa FEMTools para encontrar los valores de los parámetros actualizados para refinar el modelo:

- i. Pseudo-Inversa de la matriz de Sensibilidad
- ii. Estimación mediante parámetro Bayesiano.
- iii. Estimación mediante mínimos cuadrados y matrices de peso

Estos métodos y su desarrollo pueden consultarse en [DDS, 2007].

6.3 Ejemplo de actualización de modelos.

Como aplicación de la teoría desarrollada anteriormente y automatizada por medio del programa computacional *FEMTools*, se pretende mostrar un ejemplo con el fin de mostrar el proceso de actualización de modelos de elementos finitos a partir de una estructura real.

[TUREK, 2007], desarrolló la compatibilidad entre *FEMTools* y el programa de análisis de modelos de elementos finitos *SAP2000*, comúnmente utilizado para el diseño estructural.

Este módulo permite importar modelos de elementos finitos hacia *FEMTools*, contrastándolo con modelos creados a partir de las mediciones reales.

Los modelos generados a partir de mediciones reales pueden ser ingresados como archivos de texto, definiendo nodos, líneas o superficies, ubicación de sensores y tipos de medición, con lo cual se obtienen los parámetros dinámicos de la estructura real.

Existen programas que automatizan el procedimiento de creación de modelos a partir de mediciones reales, tales como *MACEC* y *ARTemis*, con los cuales se trabajó en la presente investigación.

6.3.1 Descripción de la estructura.

La estructura corresponde al modelo de laboratorio desarrollado en [*ROZAS, 2009*], que corresponde a una estructura de 6 niveles.

La estructura esta compuesta en sus niveles por perfiles rectangulares de acero ($50 \times 50 \times 3$ [mm]) los cuales se encuentran soportados por columnas de aluminio estructural (50×3 [mm]). Cada nivel cuenta con dos planchas de acero ($425 \times 250 \times 3$ [mm]).



Figura 6. 2. Estructura de 6 niveles a la cual se realizará el procedimiento de actualización. Modelo Realizado en el Laboratorio de Estructuras de la Universidad de Chile. A la derecha un esquema dimensionado.

Los pesos de cada uno de los niveles se presentan en la Tabla 6. 1. Asimismo en la Tabla 6. 2 se presentan las propiedades del aluminio utilizado. La Tabla 6.3 presenta las propiedades consideradas para el acero.

Tabla 6. 1. Pesos por niveles

Nivel	Peso [kgf]
1	26.05
2	26.22
3	26.94
4	26.11
5	26.06
6	26.40
Total	157.78

Nota: Nivel 1 corresponde al que se encuentra a menor altura con respecto al suelo.

Tabla 6. 2. Propiedades mecánicas Aluminio Estructural.

Propiedad	Valor	Unidad
Densidad (ρ)	2715	$[kg / m^3]$
Módulo de Elasticidad (E)	70000	$[MPa]$
Tensión de Rotura (σ_u)	2680	$[kgf / cm^2]$
Tensión de Fluencia (σ_y)	2460	$[kgf / cm^2]$

Tabla 6. 3. Propiedades Acero Estructural.

Propiedad	Valor	Unidad
Densidad (ρ)	7849	$[kg / m^3]$
Módulo de Elasticidad (E)	199950	$[MPa]$
Tensión de Rotura (σ_u)	4078	$[kgf / cm^2]$
Tensión de Fluencia (σ_y)	3796	$[kgf / cm^2]$

6.3.2 Sistema de sensores y monitoreo.

Para el análisis de la respuesta y obtención de los parámetros dinámicos de la estructura real se dispuso una red de acelerómetros, como se muestra en la Figura 6.3.

Esta configuración se realizó debido a que la estructura tenía una rigidez considerablemente mayor en la dirección perpendicular a la dirección de medición de los sensores (longitudinal). Esto permite entre otras cosas una simplificación del problema en términos de condensación de grados de libertad.

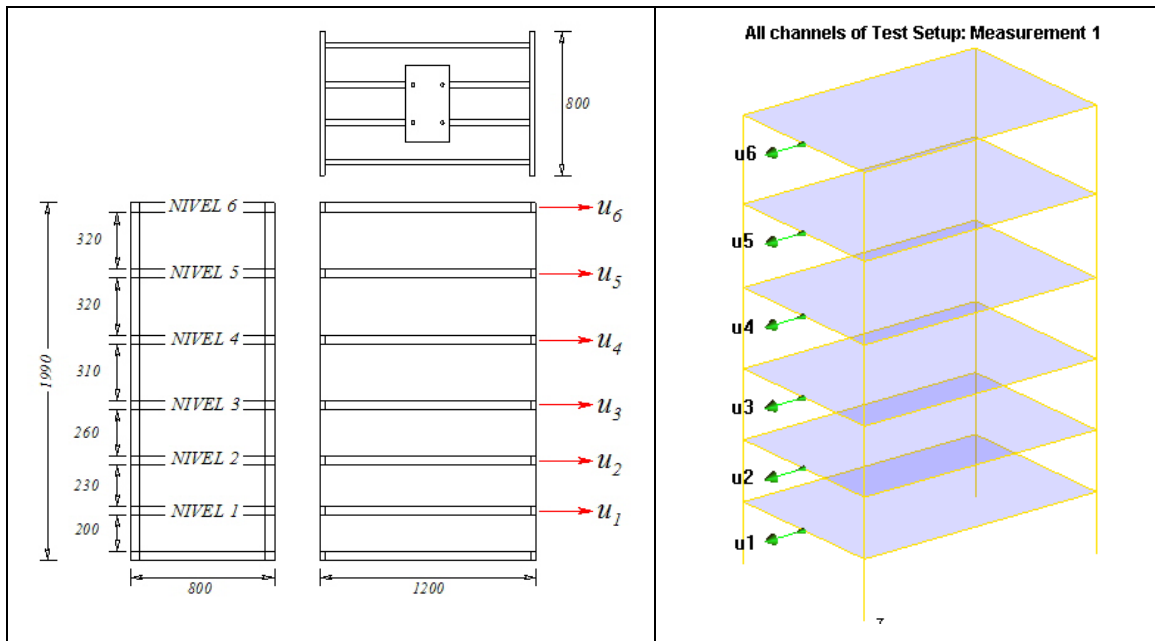


Figura 6. 3. Configuración de red de acelerómetros sobre la estructura. A la izquierda: esquema con elevaciones y plantas. A la derecha: disposición de sensores sobre modelo realizado en ARTemis^{6.3}.

6.3.3 Modelo de elementos finitos: determinación de propiedades dinámicas.

Para la determinación de las propiedades dinámicas de la estructura, se realizó un modelo de elementos finitos en el programa computacional SAP2000 (V.11.0.4) con las dimensiones y propiedades indicadas en el acápite 6.4.1.

A partir del desarrollo del modelo se obtuvieron los siguientes valores de frecuencias, Tabla 6. 4 y formas modales, Figura 6. 4.

^{6.3} Modelo desarrollado mediante el programa ARTemis (SVS), en la Universidad de British Columbia, Vancouver, Canadá, gracias a la beca de Postgrado otorgada por la Universidad de Chile, 2007.

Tabla 6. 4. Frecuencias Obtenidas del Modelo de Elementos Finitos (E.F.)

Modo	Frecuencia [Hz]
1	0.861
2	2.317
3	3.582
4	4.652
5	5.488
6	7.414

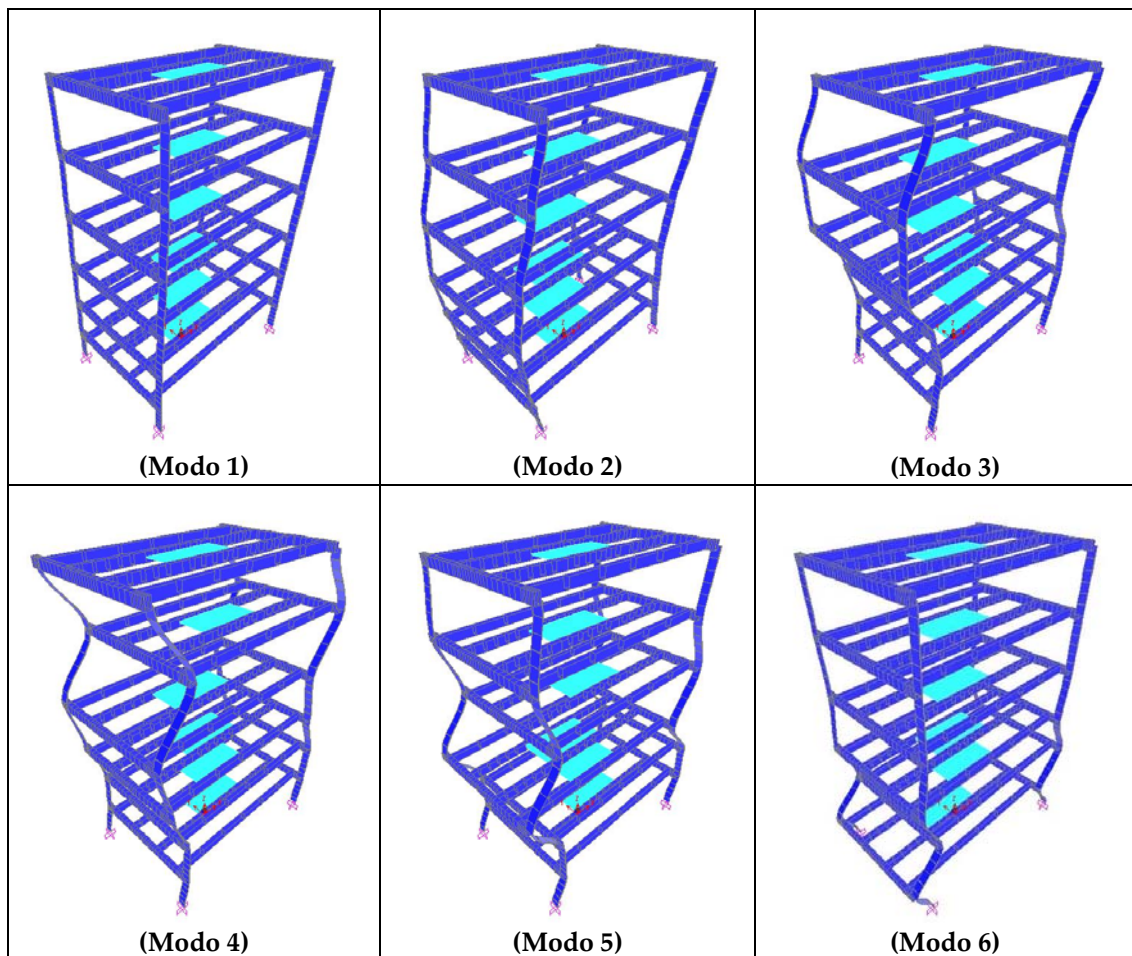


Figura 6. 4. Formas Modales Modelo Elementos Finitos.

6.3.4 Estructura real: obtención de propiedades dinámicas.

Las propiedades dinámicas de la estructura real fueron obtenidas a partir del método del Sub-Espacio Estocástico (SSI).

Como se vio en el Capítulo 3, este método requiere la respuesta de la estructura frente a vibraciones de tipo ambiental. Para esto, la estructura fue excitada en su base mediante un registro artificial correspondiente a un ruido blanco^{6.1} generado en *MatLab*, Figura 6. 5 con el fin de excitar la mayor cantidad de modos presentes en la estructura.

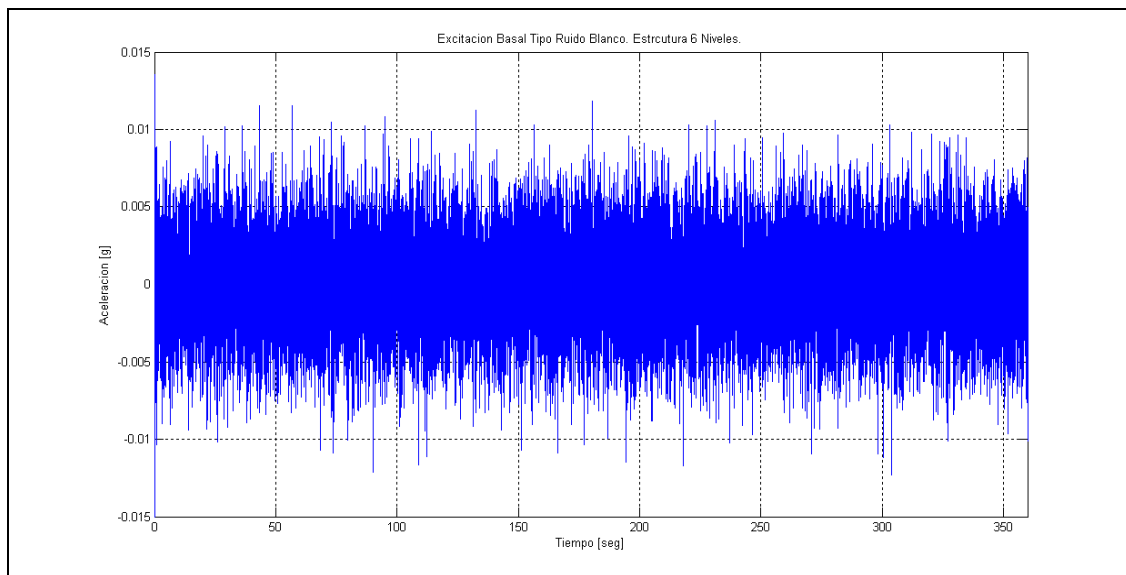


Figura 6. 5. Excitación basal de la estructura, con características asociada a un ruido blanco. La excitación tuvo una duración de 6 minutos aproximadamente con una frecuencia de muestreo de 100 [Hz].

^{6.1} El ruido blanco en términos de series de tiempo no existe. Lo que existe son las características teóricas que lo definen: la no correlación entre sus valores (la correlación corresponde a un Delta Dirac, ya que un valor de la serie de tiempo sólo se correlaciona consigo misma) lo que genera un espectro de potencia constante en un intervalo $[-\infty, \infty]$.

La respuesta de la estructura a la excitación fue utilizada para aplicar el método SSI y obtener las propiedades dinámicas de la estructura.

La obtención de las propiedades dinámicas fue obtenida por el programa *ARTEMIS* y corroboradas por las rutinas generadas en MatLab para el método SSI. Posteriormente, los resultados y el modelo creado a partir de los resultados del ensayo fueron exportados a *FEMTools*.

En la Tabla 6. 5 se muestran las frecuencias obtenidas del análisis. En la Figura 6.6 se muestran las formas modales asociadas.

Tabla 6. 5. Frecuencias de la Estructura Real obtenidas a partir del método SSI.

Modo	Frecuencia [Hz]
1	0.922
2	2.478
3	3.876
4	5.151
5	5.78
6	8.173

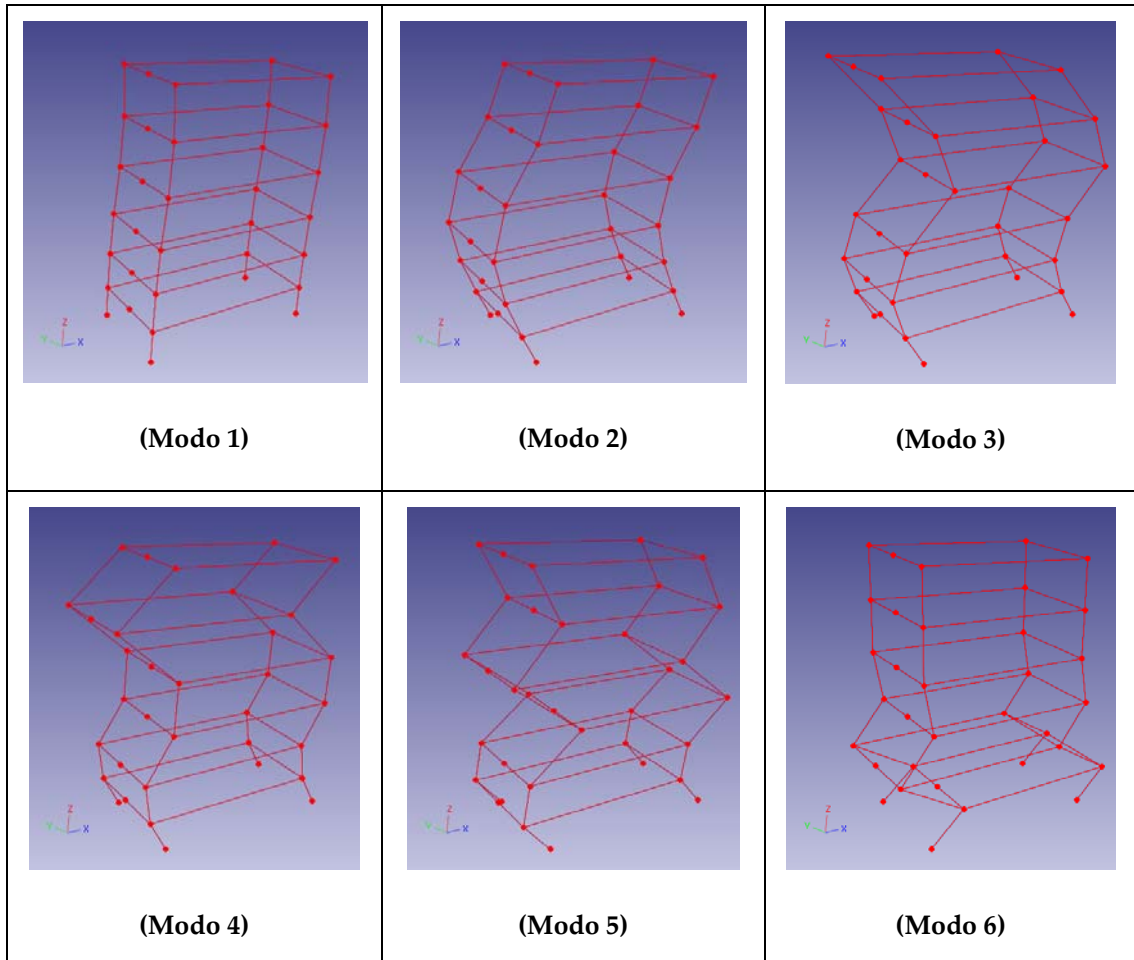


Figura 6. 6. Formas modales estructura real. Modelo generado en FEMTools.

6.3.5 Correlación entre modelo y estructura real.

A partir de la obtención de los parámetros dinámicos del modelo y la estructura real es posible obtener la correlación entre ellos, estableciendo diferencias porcentuales principalmente en torno a sus frecuencias naturales.

Por otro lado, es posible observar de forma esquemática la correlación entre formas modales, y cuantitativamente a través de la matriz MAC.

En la Tabla 6. 6 se muestran las diferencias obtenidas para el modelo y la estructura real.

En las Figura 6.7 a Figura 6. 12 se muestra la correlación entre formas modales de ambos modelos (EF y real), mientras que en la Figura 6. 13 se muestra la matriz MAC y sus valores asociados.

Tabla 6. 6. Diferencias entre modelo EF y Modelo Real. Parámetros dinámicos.

Modo	$f_{FEM} [Hz]$	$f_{EM} [Hz]$	Diferencia entre frecuencias [%]	$MAC_{ii} [%]$
1	0.861	0.922	-6.616	100.0
2	2.317	2.478	-6.497	99.3
3	3.582	3.876	-7.585	97.9
4	4.652	5.151	-9.687	97.4
5	5.488	5.78	-5.052	96.0
6	7.414	8.173	-9.287	99.3

Notas:

- El subíndice "*FEM*" se refiere al modelo de elementos finitos
- El subíndice "*EM*" se refiere al modelo experimental (estructura real)
- El subíndice "*ii*" en los valores MAC hace relación a que los valores indicados corresponden a la diagonal de la matriz.
- Las diferencias porcentuales de frecuencias son con respecto a los valores de la estructura real.

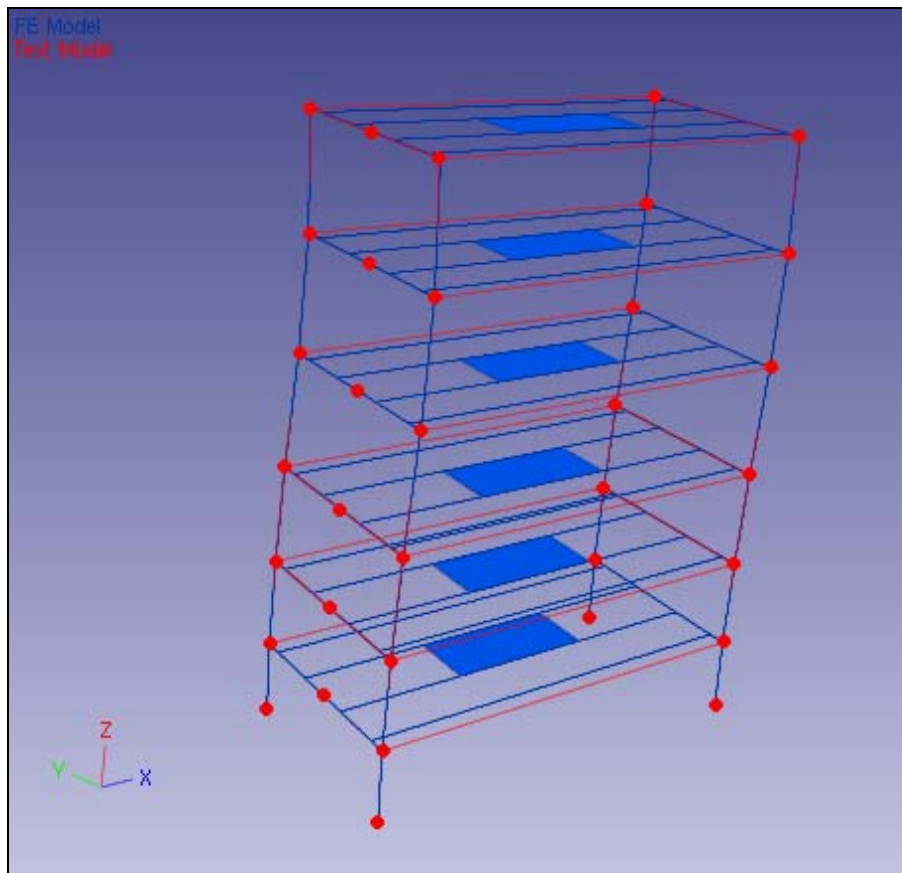


Figura 6. 7. Correlación de Formas Modales, FEM y EM. Modo 1.

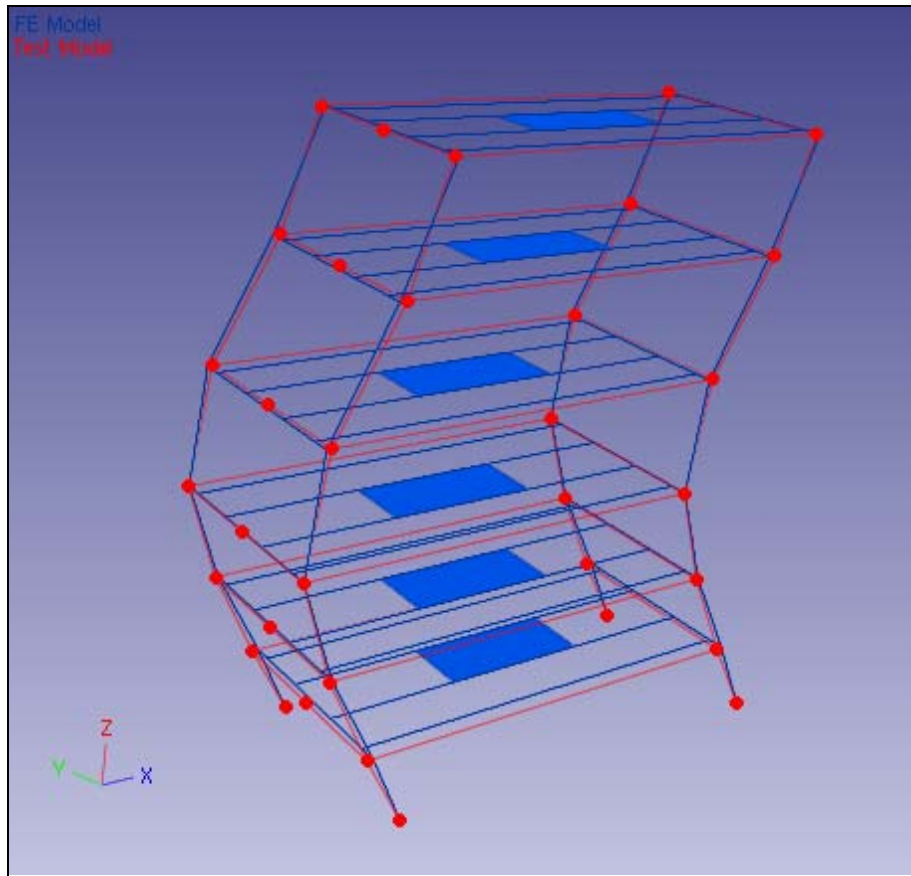


Figura 6. 8. Correlación de Formas Modales, FEM y EM. Modo 2.

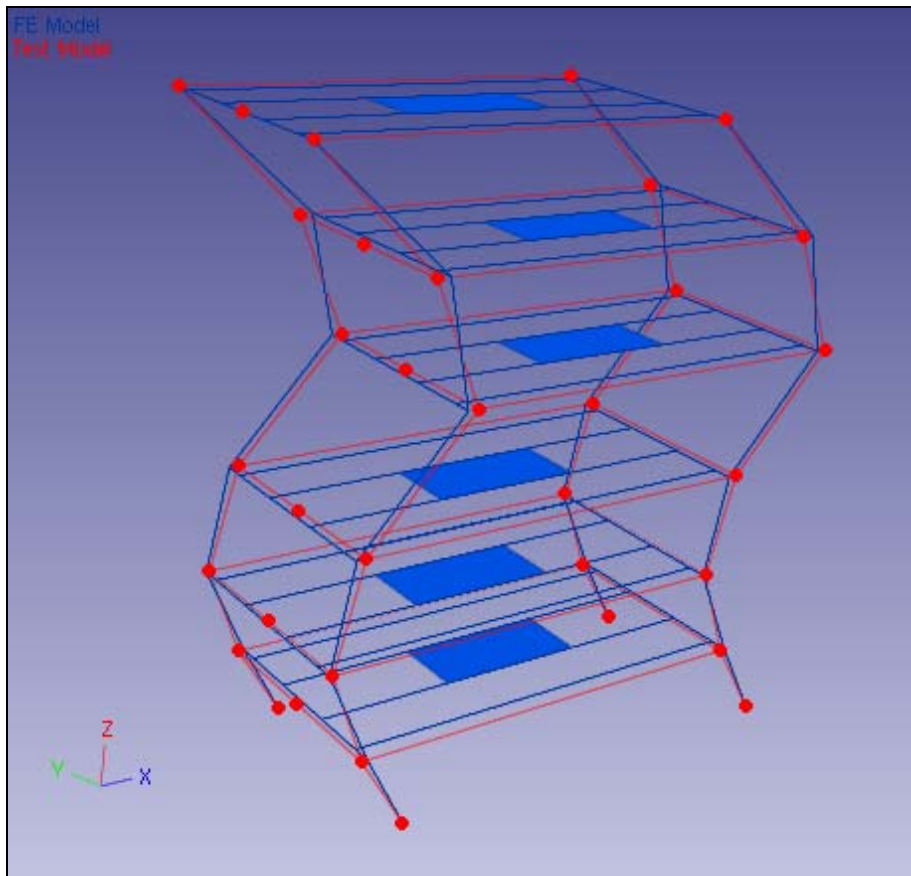


Figura 6. 9. Correlación de Formas Modales, FEM y EM. Modo 3.

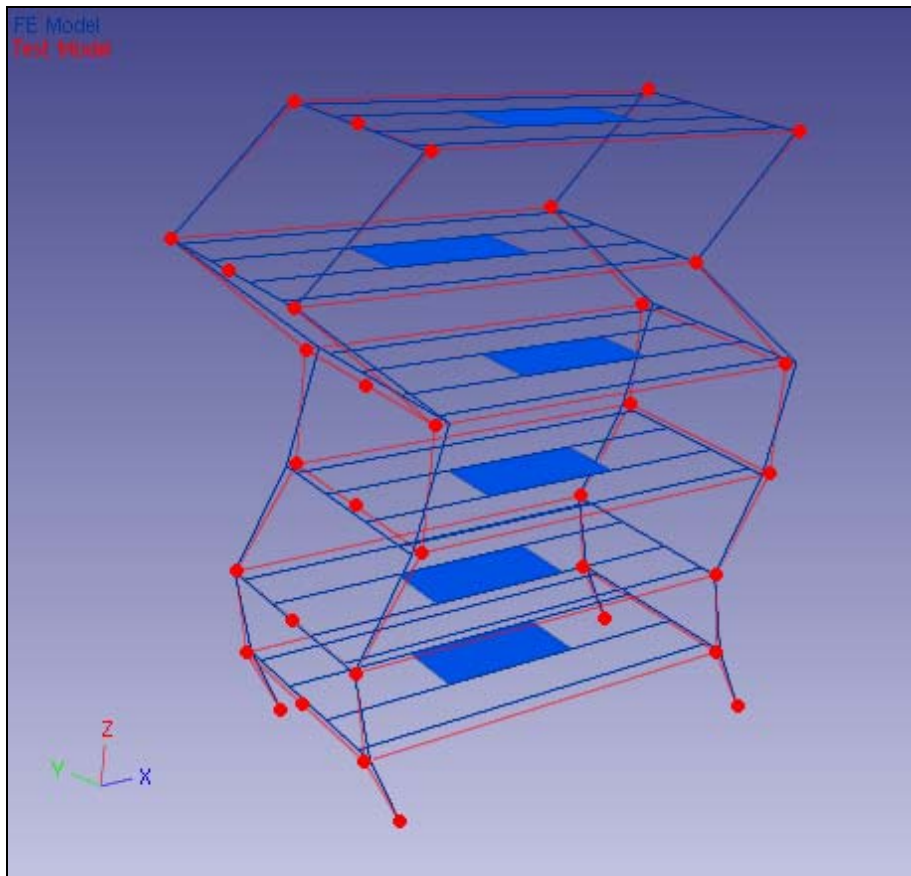


Figura 6. 10. Correlación de Formas Modales, FEM y EM. Modo 4.

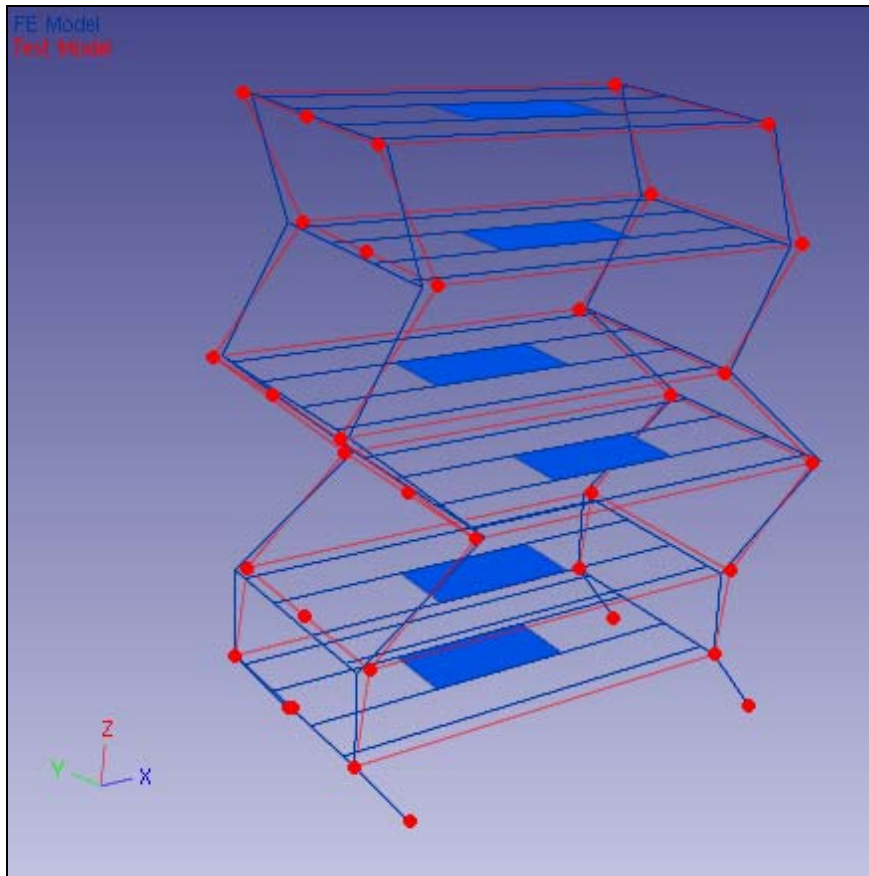


Figura 6. 11. Correlación de Formas Modales, FEM y EM. Modo 5.

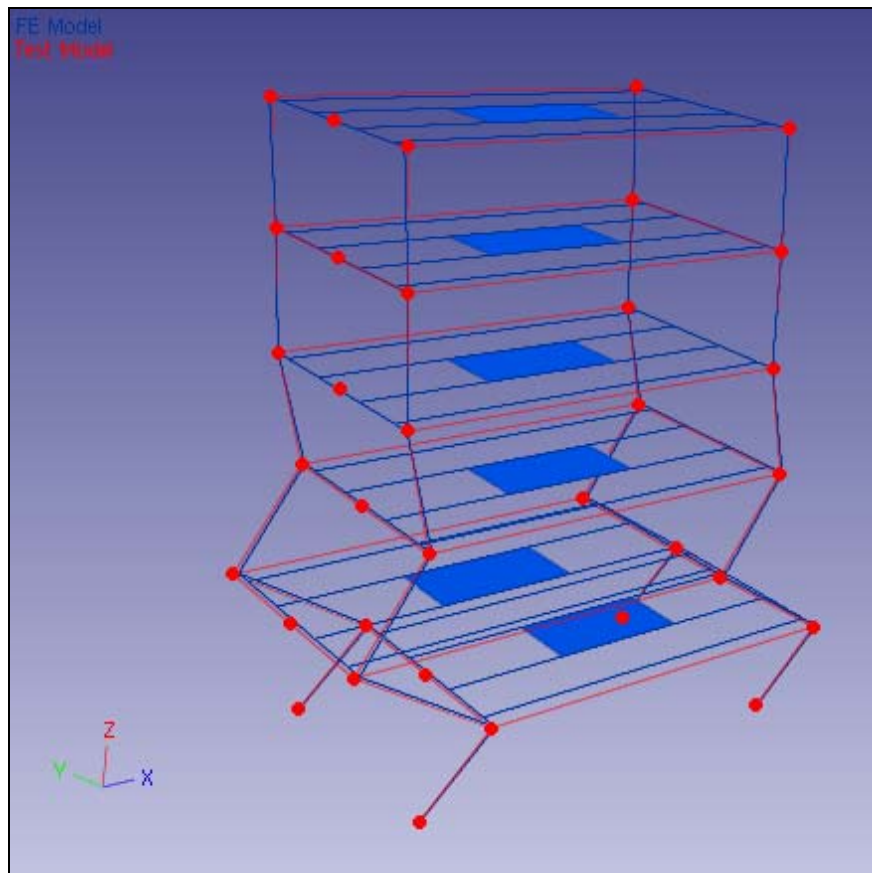


Figura 6. 12. Correlación de Formas Modales, FEM y EM. Modo 6.

Nota:

- La estructura de color azul corresponde al modelo de elementos finitos (FEM) y la de color rojo corresponde a la estructura real (EM).

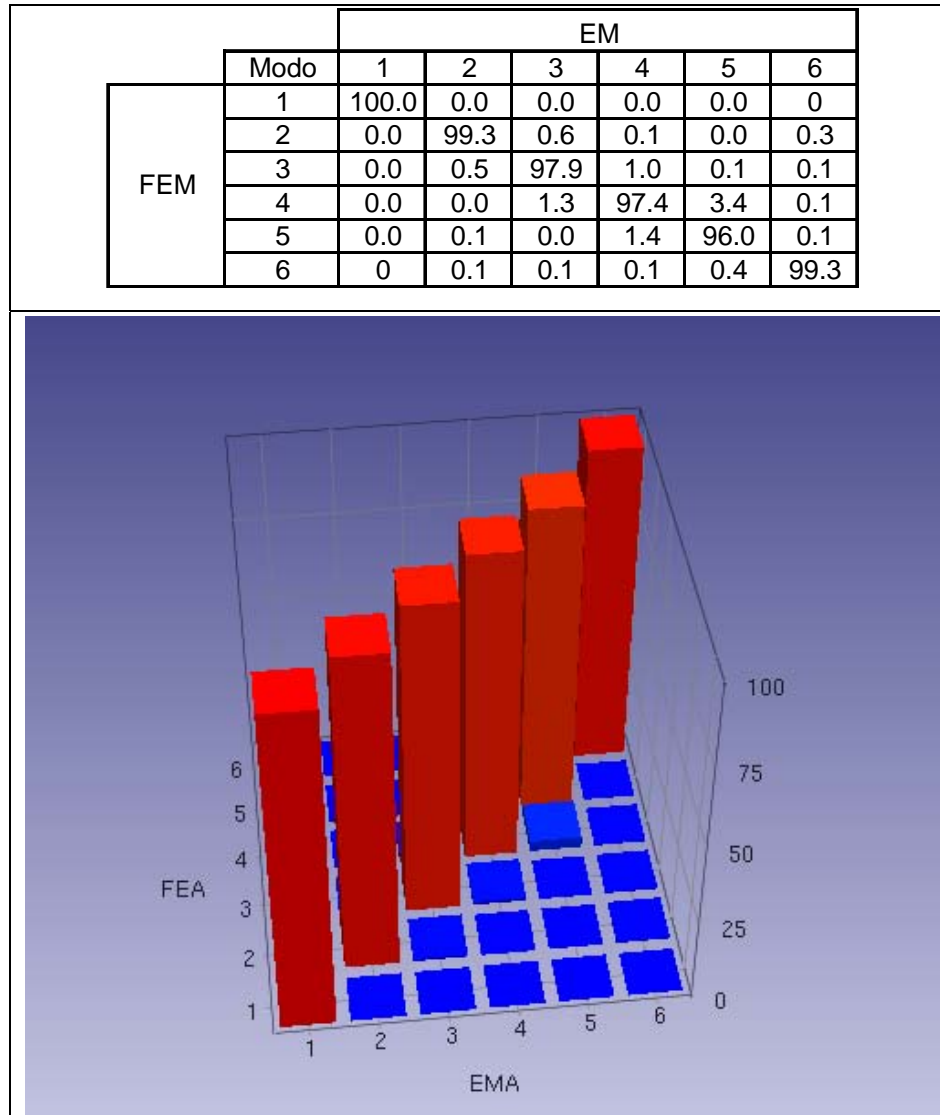


Figura 6. 13. Matriz de Correlación Modal MAC. Arriba se presentan los valores asociados. Abajo un esquema de barras tridimensional correspondiente a la matriz MAC.

De la Tabla 6. 6 se observa que los valores de frecuencias para el modelo FEM y los valores para la estructura real, EM, difieren entre un 5% y 10% aproximadamente.

Por otra parte, de la Figura 6. 13 se observa que la correlación entre ambos modelos es muy cercana al 100% en su diagonal, no teniendo interferencia de modos, lo que se asocia con valores pequeños en la anti-diagonal de la matriz MAC.

Por lo tanto, para mejorar la correlación entre ambos modelos mediante el proceso de actualización, la respuesta de la estructura estará controlada principalmente por sus frecuencias naturales, debido a la buena correlación de sus formas modales.

6.3.6 Análisis de Sensibilidad.

El Análisis de Sensibilidad será la herramienta que servirá para determinar qué variaciones de parámetros son los que más influyen en la respuesta de la estructura (en este caso en sus frecuencias naturales).

En este caso se tendrá como respuesta las 6 frecuencias obtenidas tanto del modelo de elementos finitos como de la estructura real (a partir del método SSI).

Si bien el programa *FEMTools* cuenta con múltiples parámetros con los cuales es posible generar variaciones en la respuesta, es importante saber de antemano cuales propiedades son las que presentan mayor incertidumbre al momento de conocer su valor exacto, el cual es luego tomado como dato para su representación dentro del modelo de elementos finitos.

Parámetros como el área transversal o la inercia de los elementos del modelo son valores conocidos y que vienen dados por la geometría de los perfiles en este caso.

Sin embargo, parámetros como el módulo de elasticidad (E), la densidad de los materiales (ρ) o en este caso particular el espesor de las planchas (H) son parámetros que pueden variar considerablemente con respecto a sus valores nominales.

De esta forma, la variación de este tipo de parámetros servirá para mejorar la correlación de frecuencias y por ende tener una mejor representación de la respuesta (frecuencias) por parte del modelo de elementos finitos.

Particularmente, el análisis de sensibilidad tomó dos parámetros del modelo:

1. Modulo de Elasticidad: incluye los módulos de elasticidad de los perfiles de acero de cada nivel, el de las planchas y el de las columnas de aluminio.
2. Densidad del material: incluye la densidad de los perfiles de acero de cada nivel, la de las planchas y la de las columnas de aluminio.

La Tabla 6. 7 presenta la numeración de cada parámetro:

Tabla 6. 7. Numeración Parámetros. Análisis de Sensibilidad.

Número Parámetro	Parámetro	Descripción
1	E	Módulo Elasticidad Acero perfiles de niveles
2	E	Módulo Elasticidad Aluminio columnas
3	E	Módulo Elasticidad Acero placas
4	ρ	Densidad Acero perfiles de niveles
5	ρ	Densidad Aluminio columnas
6	ρ	Densidad Acero placas

La Figura 6. 14 muestra la matriz de sensibilidad, en términos normalizados.

De ésta puede observarse que los parámetros más influyentes en la respuesta de la estructura corresponden a:

- Módulo de Elasticidad de las columnas de aluminio
- Densidad del acero de los perfiles de cada nivel.

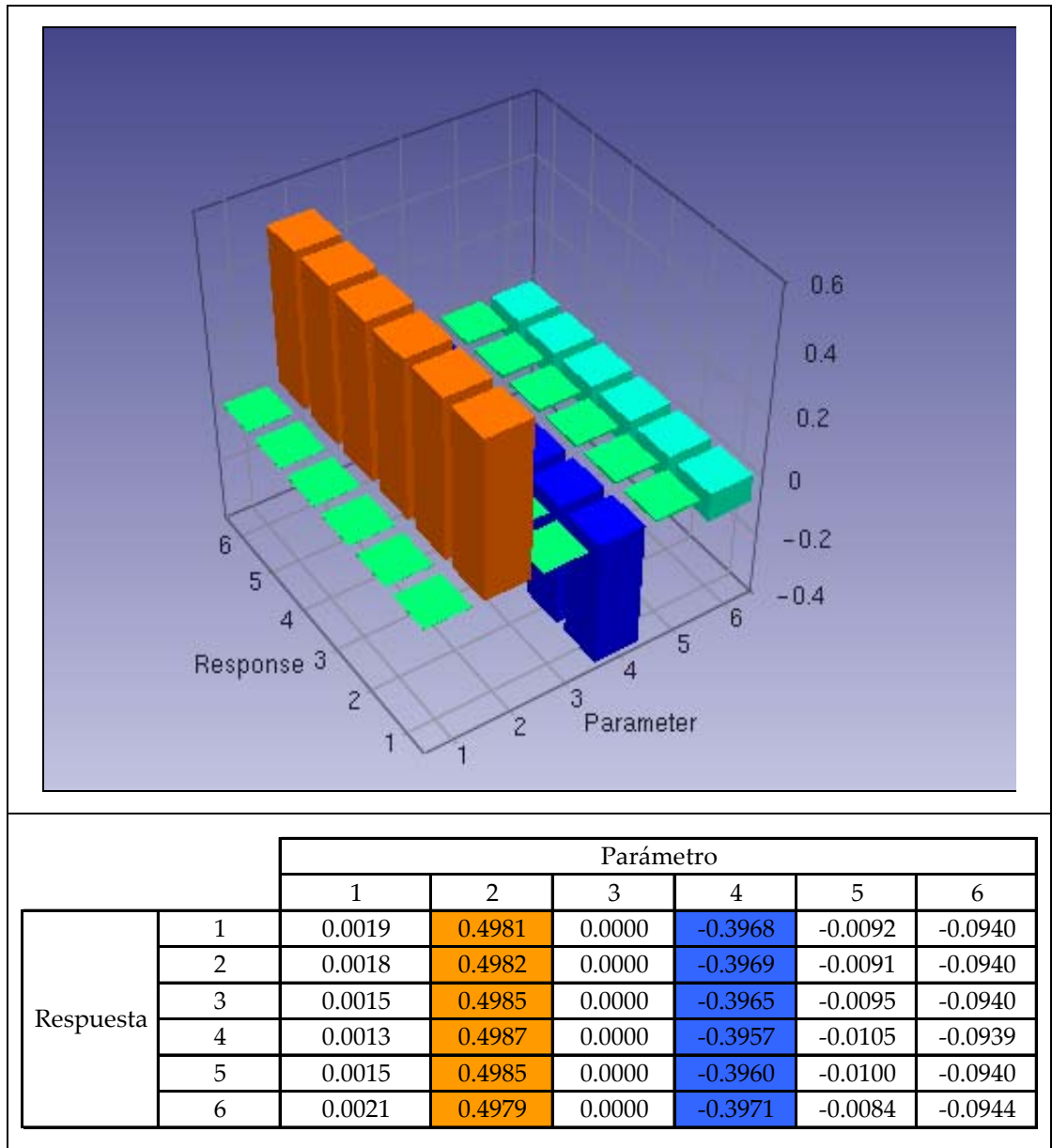


Figura 6. 14 Matriz de Sensibilidad Normalizada obtenida del análisis en el programa *FEMTools*.

6.3.7 Actualización de modelo.

Una vez identificados los parámetros que más influyen en la respuesta de la estructura, se realiza el proceso de actualización que se encuentra automatizado en *FEMTools*, definiendo para esto criterios de convergencia.

Las Figura 6. 15 muestra, para cada iteración, la variación porcentual, con respecto al valor inicial, de cada parámetro.

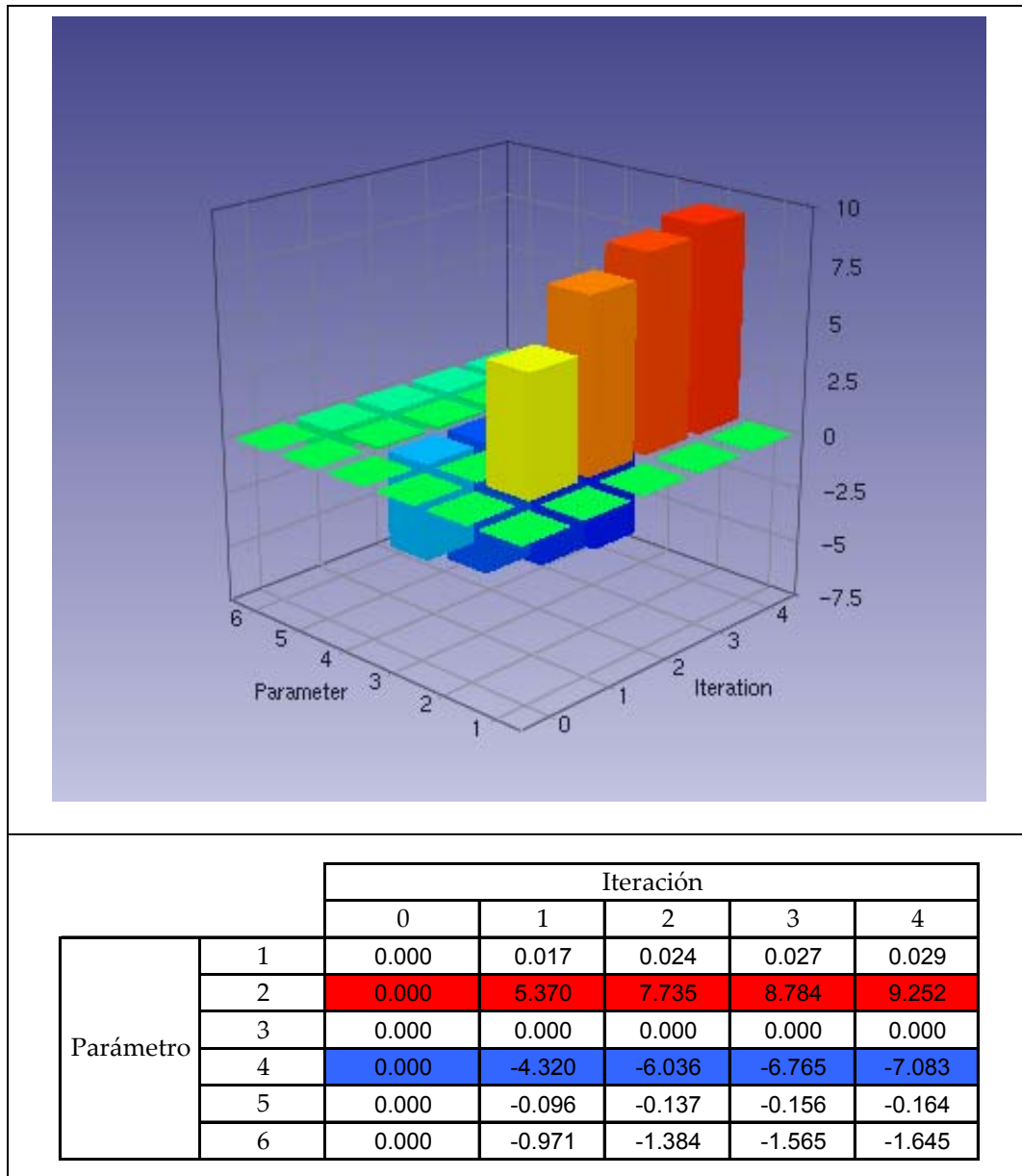


Figura 6. 15. Variación porcentual, con respecto al valor inicial, de cada parámetro. Actualización de Modelo de Elementos Finitos mediante *FEMTools*.

La Figura 6. 16 muestra, para cada iteración, la diferencia porcentual entre los valores de frecuencia (respuesta) del modelo de elementos finitos y la estructura real.

Se observa, a partir de este esquema, la disminución considerable en esta diferencia.

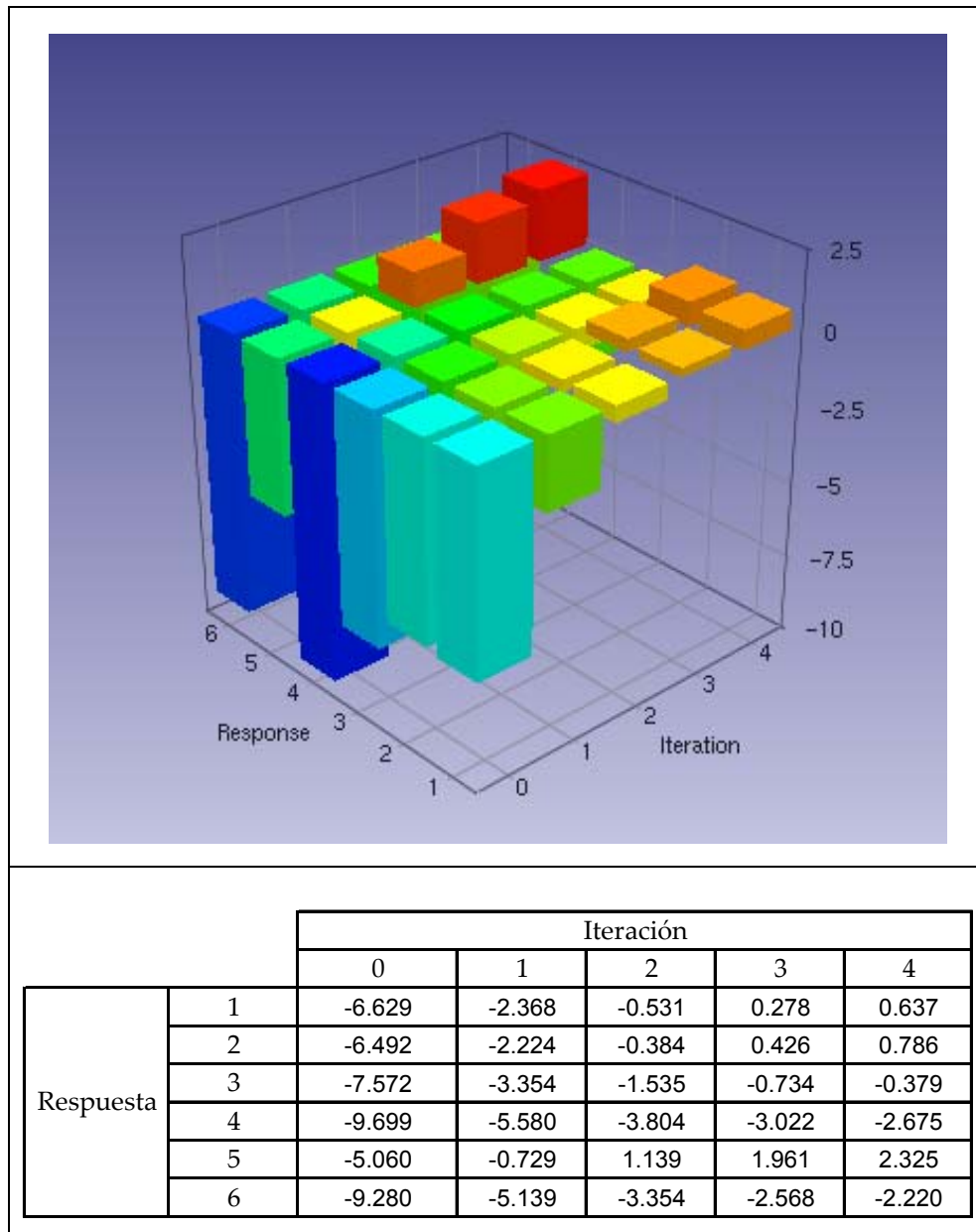


Figura 6. 16. Diferencia porcentual entre los valores de frecuencia (respuesta) del modelo de elementos finitos y la estructura real. Actualización realizada mediante *FEMTools*.

La Tabla 6. 8 muestra los cambios en los parámetros luego de la actualización.

Tabla 6. 8. Actualización de Parámetros y diferencias con los valores iniciales.

N	Parámetro	Descripción	Unidades	Valor Inicial	Valor Actualizado	Diferencia [%]
1	E	Módulo Elasticidad Acero perfiles de niveles	[Mpa]	199950	200010	0.03
2	E	Módulo Elasticidad Aluminio columnas	[Mpa]	69637	76080	9.25
3	E	Módulo Elasticidad Acero placas	[Mpa]	199950	199950	0.00
4	RHO	Densidad Acero perfiles de niveles	[kg/m3]	7849	7293	-7.08
5	RHO	Densidad Aluminio columnas	[kg/m3]	2715	2710	-0.17
6	RHO	Densidad Acero placas	[kg/m3]	7849	7720	-1.64

De la Tabla 6. 8 se observa que los valores marcados en rojo presentan los mayores cambios, correspondientes al módulo de elasticidad de las columnas de aluminio y la densidad de masa de los perfiles de acero de cada nivel.

La Tabla 6. 9 muestra las nuevas frecuencias asociadas al modelo de elementos finitos, para los parámetros modificados y su diferencia con las frecuencias de la estructura real.

Tabla 6. 9. Valores actualizados de la respuesta en términos de frecuencias para el modelo de Elementos Finitos (FEM). Actualización mediante el programa FEMTools.

Modo	$f_{FEM} [Hz]$ (actualizado)	$f_{EM} [Hz]$	Diferencia (%)
1	0.928	0.922	0.64
2	2.498	2.478	0.79
3	3.861	3.876	-0.38
4	5.014	5.151	-2.68
5	5.914	5.780	2.33
6	7.991	8.173	-2.22

La Tabla 6. 9 muestra una clara mejoría en la respuesta del modelo de elementos finitos con respecto a las frecuencias obtenidas de la estructura real.

Esto se logró a partir del cambio de los parámetros obtenidos mediante el proceso de actualización de modelos mediante las técnicas desarrolladas en el programa *FEMTools*.

Finalmente, puede concluirse que la actualización de modelos es una herramienta importante dentro del campo de la salud estructural, y que se encuentra directamente relacionada con el monitoreo de estructuras y sus resultados provenientes de los diferentes métodos de actualización de parámetros.

Capítulo 7.

Conclusiones, Comentarios y Recomendaciones Finales para investigaciones futuras.

7.1 Introducción.

Los principales objetivos desarrollados en esta Tesis pueden resumirse en 3 puntos:

- i. Comprensión, desarrollo teórico y optimización de métodos de identificación de parámetros dinámicos, específicamente del método del Sub-Espacio Estocástico y sus variantes.
- ii. Implementación de una red de monitoreo continuo en una estructura real en proceso constructivo, correspondiente al edificio Titanium. A partir de los resultados del monitoreo obtener variaciones y patrones de modificación de las propiedades dinámicas de esta estructura, por medio de los métodos de identificación desarrollados.
- iii. Presentar, a través de un programa computacional (*FEMTools*), el concepto de actualización de modelos, por medio del cual se correlaciona el modelo matemático (elementos finitos, por ejemplo) con la estructura real (modelo experimental), permitiendo una mejor descripción de la respuesta de la estructura por medio de la modelación.

El desarrollo de estas tres directrices permitió un considerable avance en la comprensión de los métodos de identificación de parámetros dinámicos.

Como ejemplo se presentó una estructura de seis niveles, en conjunto con un modelo de elementos finitos. Su correlación por medio de las frecuencias y formas modales permitió actualizar el modelo matemático, obteniéndose mejoras en la respuesta del modelo de elementos finitos con respecto a la estructura real.

7.2 Comentarios y Conclusiones.

7.2.1 Comentarios y Conclusiones. Métodos de Identificación de Parámetros Dinámicos.

Los principales comentarios, conclusiones y resultados que se desprenden a partir del desarrollo teórico-matemático de dos de los principales métodos de identificación de parámetros, correspondientes al de Frecuencia No Paramétrica (FNP) y el Método del Sub-Espacio Estocástico (SSI) pueden resumirse en los siguientes puntos.

7.2.1.1 Método del Sub-Espacio Estocástico (SSI).

- i. A través de esta Tesis fue posible desarrollar teórica y matemáticamente este método, permitiendo una mejor comprensión y desarrollo de mejoras principalmente en la parte computacional, relacionada con tiempos de procesamiento de datos y obtención de parámetros dinámicos.

- ii. En términos computacionales, las rutinas desarrolladas anteriormente a esta investigación [VALDES 2004], [CASTILLO, 2005], [LAZCANO, 2008] se realizaron con el algoritmo N4SID para sistemas Determinísticos-Estocásticos. Sin embargo, a través del desarrollo de esta investigación, se mostró que para la determinación de parámetros dinámicos sólo a partir de *outputs*, el algoritmo N4SID si bien es robusto, puede ser contrastado con algoritmos de sistemas Estocásticos (mediciones ambientales), siendo éstos de mucho menor requerimiento computacional y menor duración de procesamiento, sin desmedro de la calidad de los resultados. Estos algoritmos son los desarrollados en [VAN OVERSCHEE, 1996]: PC, UPC y CVA, siendo este último el utilizado para procesar los datos correspondientes al monitoreo continuo de la torre Titanium La Portada, debido a que reportaba la mejor relación entre calidad de los resultados y tiempo de procesamiento computacional.
- iii. Dentro de los algoritmos de Modelos Estocásticos fue posible establecer que los procesos que requieren mayor tiempo corresponden al cálculo de la proyección ortogonal de la matriz de Hankel $[Q_i]$ y a la obtención de la matriz de estado $[A]$, que finalmente es la que contiene los parámetros dinámicos de interés en esta investigación: frecuencias naturales y razones de amortiguamiento.
- iv. Comparativamente con el método FNP, el método SSI es mucho más robusto tanto en su formulación matemática como en la obtención de parámetros dinámicos, ya que es posible obtener entre otras cosas, frecuencias naturales muy cercanas correspondientes a una estructura. Por otra parte, es independiente del problema de *leakage* (que generan un amortiguamiento aparente, dependiendo del tamaño de ventana utilizado) en la determinación de la razón de amortiguamiento, por lo que es posible determinar dicho parámetro con mayor precisión, en la medida que se tenga una buena calidad de registros y

se defina un orden suficiente como para parametrizar la estructura. Se recomienda entre 30 y 40 órdenes de sistema.

- v. Como aporte dentro de la investigación se desarrolló un diagrama de estabilización local para cada orden del modelo, lo que entrega información precisa sobre la estabilidad de los parámetros dinámicos que se obtuvieron mediante los algoritmos del método SSI, **APENDICE E**. Este diagrama entrega información complementaria al diagrama de estabilización clásico, observándose la estabilización de los parámetros dinámicos por separado, pudiéndose establecer de mejor forma la calidad de los resultados entregados.

7.2.1.2 Método de la Frecuencia No Paramétrica (FNP).

- i. Este método posee ventajas debido a su rapidez en la obtención de resultados, ya que no necesita una parametrización previa. Esto es de utilidad cuando se requiere evaluar resultados preliminares en mediciones de terreno. Sin embargo, posee desventajas en términos de precisión, sobre todo cuando existen frecuencias cercanas.
- ii. Uno de los aportes desarrollados en [*HERNANDEZ, 2009*] y presentado en esta Tesis corresponde a discutir la obtención del amortiguamiento mediante el método de Tanaka o Ancho de Banda, el cual está condicionado por el problema de *leakage* o dispersión de energía espectral. Esto permite corregir de forma eficiente el amortiguamiento obtenido del método a partir de las curvas presentadas en el Capítulo 4 de esta Tesis.

- iii. Dentro de los métodos no paramétricos se describió también el método de Descomposición en el Dominio de la Frecuencia, con el cual es posible la obtención de frecuencias cercanas gracias a la descomposición de valores singulares de la matriz espectral. Programas computacionales comerciales utilizan este método, el cual ofrece una rápida obtención de los parámetros dinámicos. Sin embargo, estos programas no incluye la corrección de amortiguamiento por *leakage*, pudiéndose mejorar en versiones posteriores a esta investigación.

7.2.2 Comentarios y Conclusiones. Monitoreo Continuo Edificio Titanium La Portada.

- i. La instalación de una red de monitoreo continuo en el edificio en proceso constructivo Titanium La Portada, actualmente el de mayor altura en Chile (192.5 mts.), permitió dar cuenta de una de las múltiples aplicaciones que tiene el campo de la identificación de parámetros dinámicos y el monitoreo de salud en la ingeniería estructural.
- ii. El monitoreo continuo permitió observar las variaciones en frecuencia y amortiguamiento de la estructura, a medida que el edificio crecía en altura debido a los procesos y faenas constructivas. Estas variaciones fueron presentadas en curvas de frecuencia-tiempo y amortiguamiento-tiempo. Éstas permitieron establecer patrones repetitivos respecto a la variación de las propiedades dinámicas durante el periodo de monitoreo de la estructura.

- iii. Respecto al tiempo de análisis de los datos, se debe tener como dato de referencia que el procesamiento de un registro de 10 minutos, utilizando el algoritmo SSI-CVA, para 3 sensores, demora 2 minutos de proceso, aproximadamente (equivalente a la obtención del diagrama de estabilización global, local, series de tiempo y espectro de potencia), comparativamente inferior con los 8 minutos que demora el algoritmo N4SID, obteniéndose resultados prácticamente idénticos.

- iv. Robustez del sistema de monitoreo continuo: Es posible tener la respuesta de la estructura, a través de sus parámetros dinámicos, incluso en una estructura en proceso constructivo con una resolución de 10 minutos, incluso en medio de faenas y procesos altamente no-lineales como plastificación y endurecimiento del hormigón colocación de losetas, pilares y moldajes, traslado de equipos como grúas y sistemas de bombeo de hormigón, entre otros.

- v. Respecto a la frecuencia natural, se aplicó un espectro de potencia a la curva de frecuencia-tiempo, con el fin de desacoplar la variación de este parámetro. A partir de esto se concluyó la existencia de dos patrones de variación característicos: semanal y diario.

- vi. Respecto al patrón de variación semanal se estableció que en promedio cada 7 ½ días existe un patrón de variación que se repite durante el periodo de monitoreo. Este patrón debe entenderse como una variación en torno a un valor móvil descendente de frecuencia y no como una variación de frecuencias en torno a un valor constante, como es el caso de variaciones producidas por cambios climáticos [LAZCANO, 2008].
El patrón de variación semanal se genera debido a que dentro de la faena constructiva de cada piso tipo existen 2 etapas relevantes, las que incluyen un

aumento considerable de masa dentro de la estructura. La primera etapa corresponde a la colocación de pilares y muros de núcleo. La segunda etapa corresponde a la colocación de losetas pretensadas y sobrelosa, siendo ésta la que aporta mayor peso (masa) al sistema y por ende la que genera una mayor pendiente de variación de frecuencia. La repetición alternada de estas etapas genera este patrón semanal.

Para explicar de forma esquemática este patrón, se muestra la Figura 7. 1.

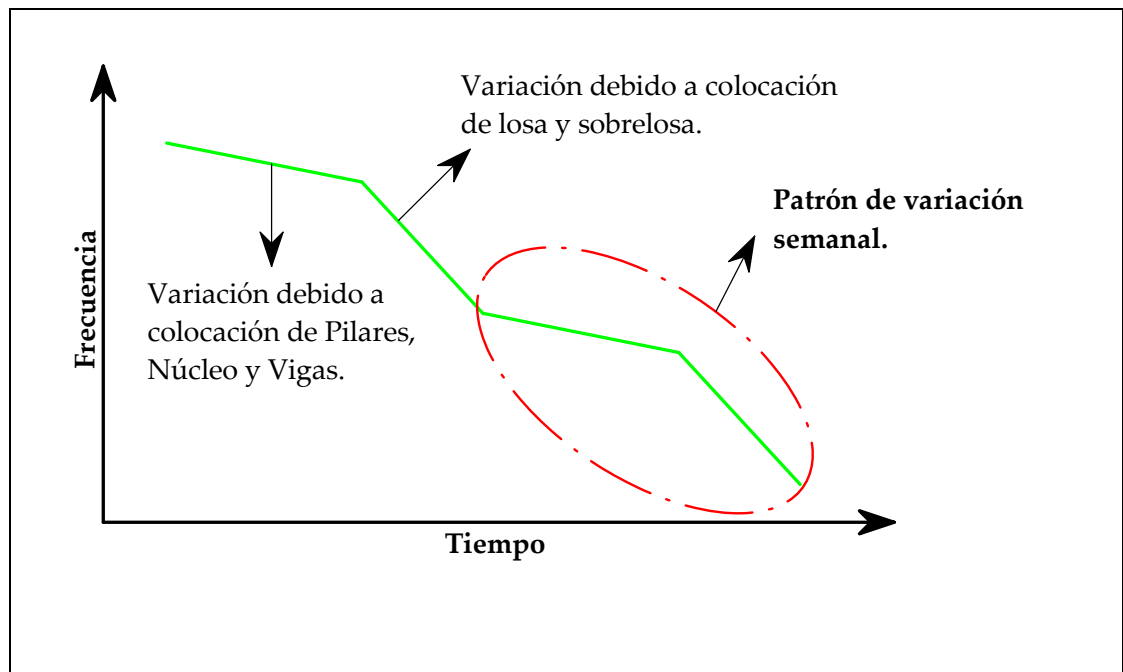


Figura 7. 1. Esquema, patrón de variación semanal de la frecuencia natural. Edificio Titanium La Portada.

Es importante tener en cuenta que las faenas constructivas no corresponden a un proceso ni continuo ni lineal, ya que si así fuera, no se observarían este tipo de patrones de variación.

vii. El patrón de variación semanal se relaciona directamente con el rendimiento de avance de la obra que corresponde a 3.75 pisos mensuales promedio, es decir, aproximadamente 1 piso por semana, validando de esta forma los resultados obtenidos.

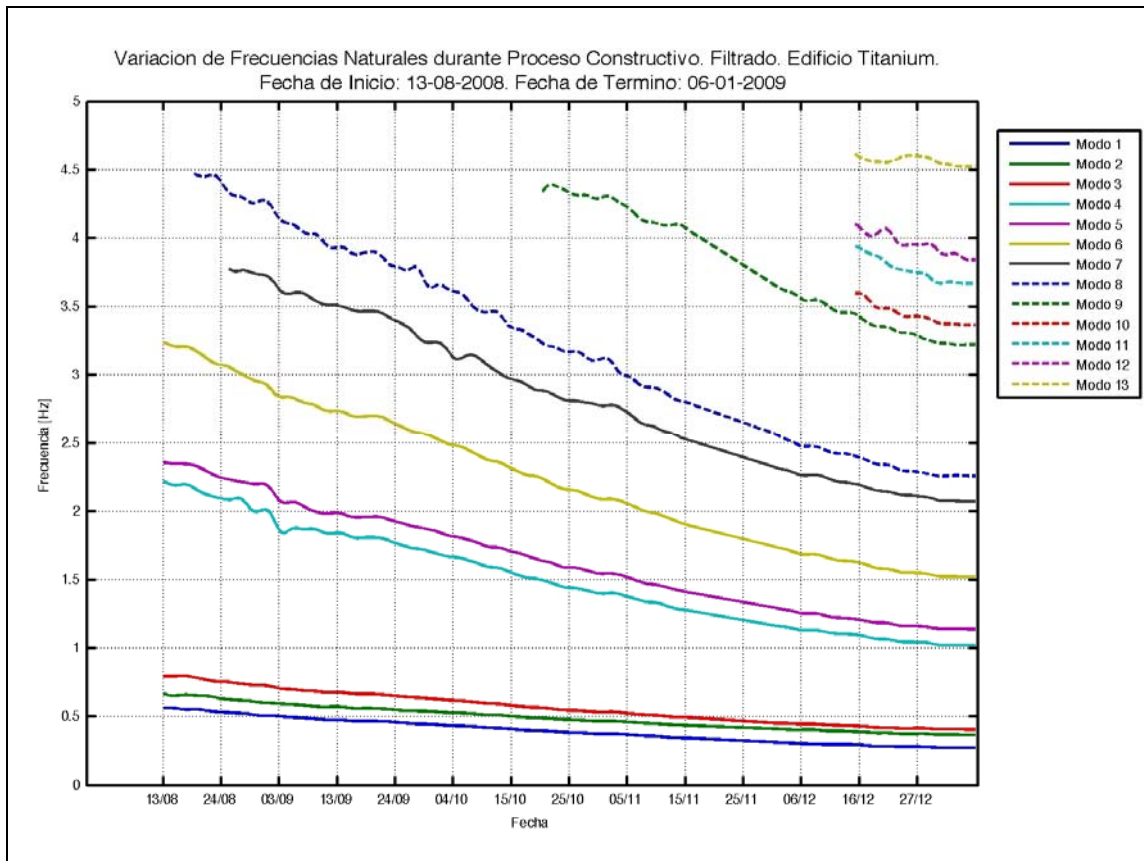


Figura 7. 2. Variación de frecuencias naturales según patrón de 7 ½ días. Edificio Titanium la Portada.

viii. De la Figura 7. 2 puede observarse que la variación semanal es de tipo no-lineal, lo que se encuentra asociado a la discontinuidad en las faenas constructivas.

ix. Una de las observaciones importantes que puede realizarse a partir del análisis de la Figura 7. 2 es que en ciertas etapas de monitoreo se observó una clara disminución de la variación de la frecuencia. Esto coincidió con fechas

correspondientes a días en que no hubo avance en el edificio producto de fechas festivas, como se aprecia entre el 17 de Septiembre y el 21 de Septiembre (Fiestas Patrias).

- x. Otra conclusión basada en la Figura 7. 2 corresponde a observar la determinación de modos superiores. En este sentido se observa que los modos 9 al 13 solo pudieron ser identificados a partir de cierta altura del edificio. Esto se relaciona con el hecho de que a menor altura del edificio, los modos superiores no se alcanzaban a excitar de forma importante, por lo que era difícil obtenerlos. Sin embargo, en la medida que el edificio tuvo una altura considerable, la participación de modos superiores fue relevante para representar la respuesta de la estructura. Se sabe que a mayor altura, la estructura se comportaba más como un sistema continuo (infinitos modos de vibrar) que como un sistema discreto acotado.

- xi. Respecto al origen del patrón de variación diaria, éste se relaciona con variables asociadas a los ciclos de temperatura, viento, ocupación y desocupación del edificio por parte de los trabajadores. Esto generó variaciones de frecuencia de hasta **1.01%** en promedio con respecto a la frecuencia medida en el tiempo, Figura 7. 3.

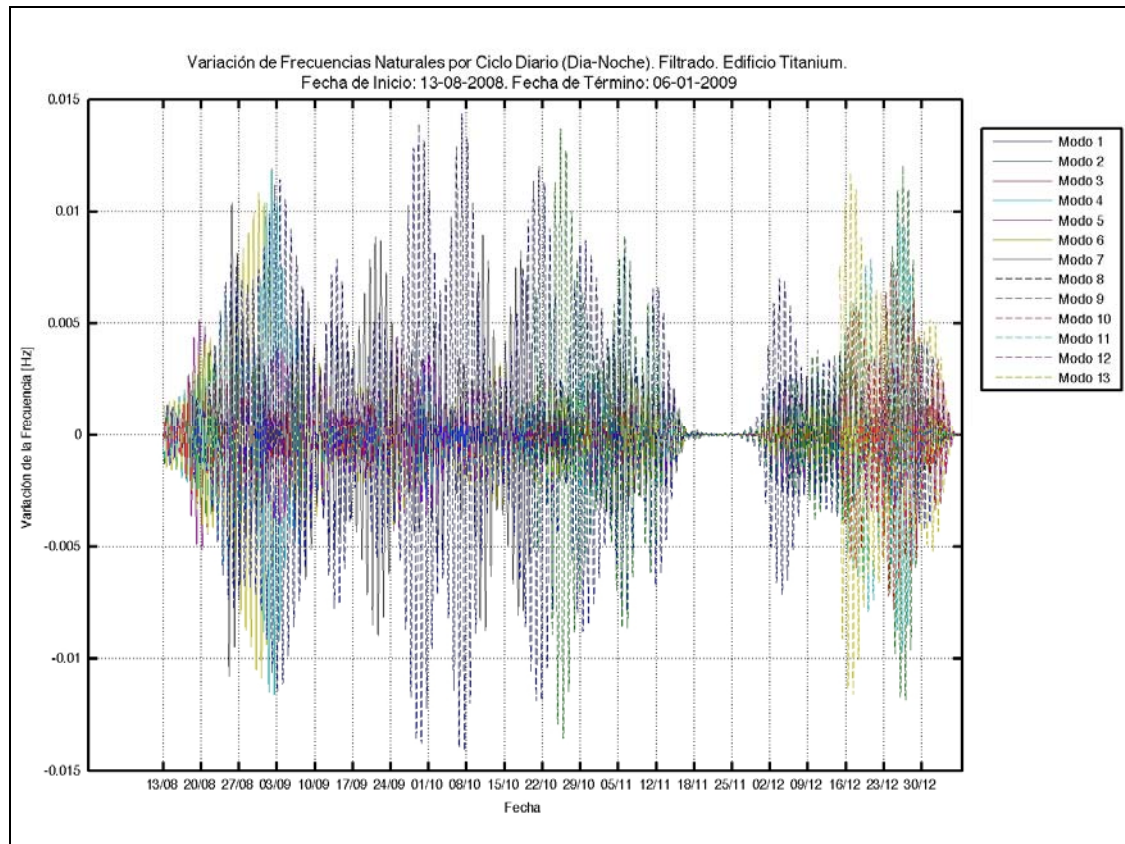


Figura 7. 3. Variación de frecuencias naturales según patrón de 24 horas (diario). Edificio Titanium la Portada.

- xii. De la Figura 7.3 se aprecia una disminución en la variación de la frecuencia según el patrón diario que ocurren los días sábado y domingo, donde la afluencia de personal trabajando disminuye considerablemente.
- xiii. Respecto a la obtención de amortiguamiento durante el periodo de monitoreo, resultó complejo caracterizar su forma de variación, debido a la dependencia de este parámetro con la calidad del registro y la desviación propia del método de identificación, lo que produjo una amplia dispersión en los resultados.
Para poder establecer un patrón de variación con mayor precisión, se realizaron promedios horarios, y a continuación se aplicó un espectro de potencia,

concluyéndose que los cambios importantes de amortiguamiento se producían con el aumento de 2 a 3 pisos de la estructura (cada 18,7 días).

Al filtrar la variación de amortiguamiento respecto al patrón indicado anteriormente, se logro observar un comportamiento decreciente que tiende a estabilizarse en torno a un valor constante, hacia el final del periodo de monitoreo.

Esto permitió establecer con mayor precisión los rangos de variación del porcentaje de amortiguamiento, tal como se estableció en el Capítulo 5.

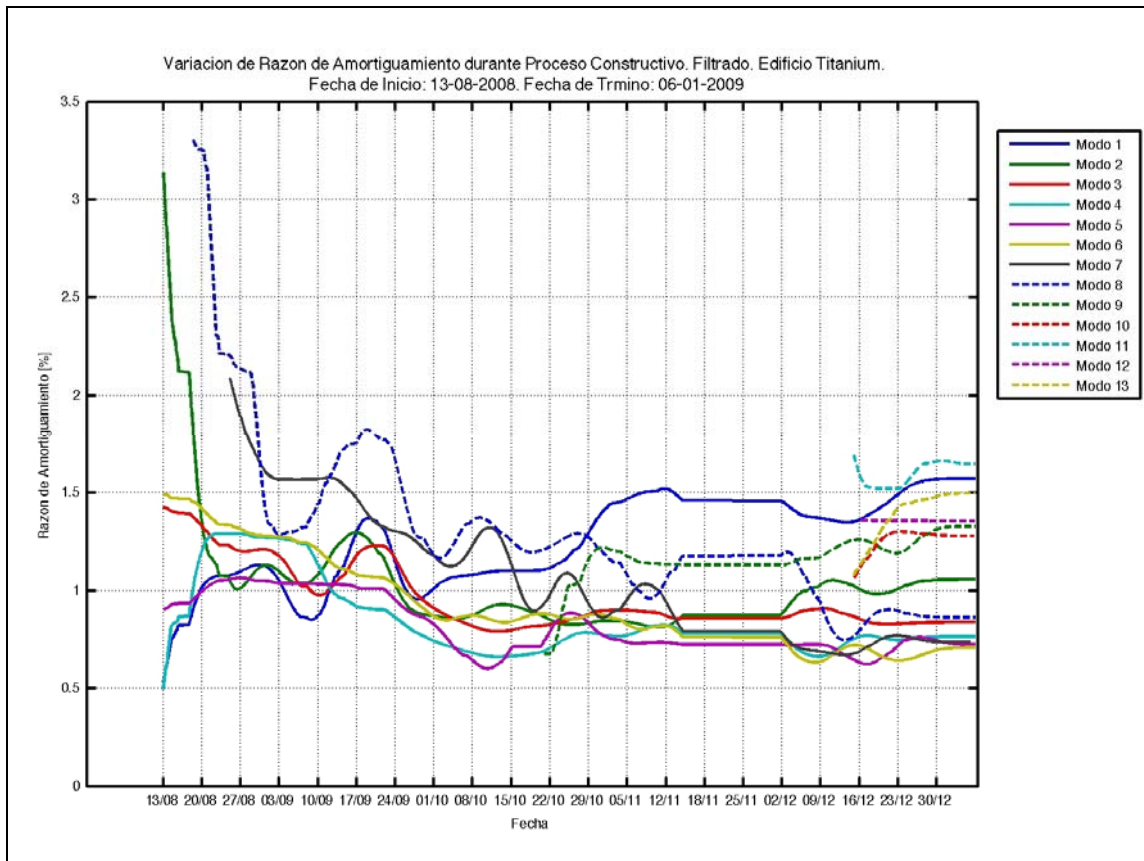


Figura 7. 4. Variación de la razón de amortiguamiento durante proceso constructivo. Filtrado. Edificio Titanium La Portada.

- xiv. El patrón de variación de amortiguamiento fue validado mediante un análisis de sistemas continuos y mediante la concatenación de registros sin faenas constructivas, correspondiente a 4 días domingo, durante el periodo de monitoreo.
- xv. El desarrollo analítico permitió establecer una ecuación que relaciona el amortiguamiento con la altura de la estructura. Con este resultado se graficó la variación de amortiguamiento, estableciéndose una clara similitud con los resultados obtenidos de la estructura real.
- xvi. Respecto del análisis de la variación de frecuencias mediante el espectrograma puede observarse una gran predominancia (en términos energéticos) de la segunda frecuencia natural (de menor a mayor) de la estructura. Según las mediciones realizadas con anterioridad y posterioridad al monitoreo continuo, este modo posee una fuerte componente torsional. Esto se explica debido a la configuración espacial de la estructura, la cual posee desde el piso 14 hacia abajo un anexo asimétrico que controla la respuesta de esta forma modal.
- xvii. Sin embargo, esta energía, concentrada en la segunda forma modal tiende a disminuir a medida que el edificio crece en altura, debido a que a mayor altura, la energía es repartida en una mayor cantidad de formas modales que controlan la respuesta de la estructura.
- xviii. Respecto al análisis comparativo entre modelo de elementos finitos y la estructura real puede concluirse que existe una buena correlación entre estos, a través de las curvas de variación de frecuencias en el tiempo para ambos sistemas. Las diferencias máximas para cada modo se muestran en la Tabla 7.1:

Tabla 7. 1. Diferencia porcentual máxima entre modelo de elementos finitos y estructura real, con respecto a la estructura real. Edificio Titanium la Portada.

Modo	Diferencia porcentual máxima con respecto a la estructura real entre modelo de EF y monitoreo continuo [%]
1	3.6
2	5.0
3	2.2
4	4.6
5	7.6
6	12.7
7	14.1
8	11.1

- xix. Respecto a la conclusión anterior, se debe notar que para los modos analizados, desde el modo 5 al 8 se ve una mayor diferencia entre modelo de elementos finitos y la estructura real, resultando más flexible esta última.
- xx. Una de las explicaciones que se postula para comprender este fenómeno corresponde a que existen algunas variables no consideradas en el modelo de elementos finitos, tales como la masa de los montacargas, ascensores, terminaciones, grúas, etc. que influyen en mayor proporción a los modos superiores, asociados al concepto de masa modal efectiva traslacional.
- xxi. Finalmente, se debe hacer notar la necesidad de mantener una red de monitoreo continuo en este tipo de edificios, los cuales incluyen sistemas de disipación de energía. El objetivo principal de esta red de monitoreo sería la de obtener la respuesta de la estructura en caso de un sismo, con lo cual se contrastaría la respuesta real con la respuesta calculada teóricamente. De esta forma se lograría establecer el grado de correlación entre ambas y validar resultados teóricos importantes como:

- Desplazamiento máximo.
- Tiempo de disipación energética.
- Establecer si existe daño en la estructura.
- Establecer variaciones permanentes en los parámetros dinámicos.
- Tiempo de reducción de la respuesta en desplazamientos.

7.2.3 Comentarios y Conclusiones. Actualización de Modelos.

- i. A partir de la presentación de este capítulo, se definieron conceptos relacionados con el proceso de actualización tales como el análisis de sensibilidad, interacción entre parámetros y respuesta, análisis de correlación modal (MAC), entre otros.
- ii. Por medio del análisis de una estructura de laboratorio fue posible aplicar el método automatizado (mediante el programa *FEMTools*) de actualización del modelo de elementos finitos creado para la estructura.
- iii. La correlación establecida entre el modelo de elementos finitos y el modelo experimental en términos de sus frecuencias naturales (que en conjunto con las formas modales generan la respuesta dinámica en vibraciones libres de la estructura) arrojó una diferencia máxima de 9.69% (cuarto modo).
- iv. Para la actualización se escogieron los parámetros con mayor incertidumbre en su valor real dentro del modelo de elementos finitos. Éstos correspondieron al módulo de elasticidad y la densidad de masa. Como respuesta a actualizar se escogieron sólo las frecuencias, debido a que las formas modales presentaban una muy buena correlación.

- v. A partir del análisis de sensibilidad se concluyó que los parámetros que más influyen en la respuesta de la estructura son el módulo de elasticidad de las columnas de aluminio y a la densidad de masa de los perfiles de acero constituyentes de los niveles de la estructura. De este análisis es esperable que sean estos parámetros los que muestren un mayor cambio en sus valores luego de la actualización.
- vi. A partir del proceso automatizado de actualización se determinó que para obtener la mínima diferencia porcentual entre frecuencias entre el modelo de elementos finitos y el modelo experimental, el módulo de elasticidad del aluminio debía aumentar su valor en un 9,25%, mientras que la densidad del acero debía disminuir su valor en un 7.08%
- vii. El proceso de actualización mejoró considerablemente la correlación de frecuencia entre el modelo real (experimental) y el modelo de elementos finitos, teniendo una diferencia máxima entre frecuencias de 2.68% (cuarto modo) y una diferencia mínima de 0.38% (tercer modo).
- viii. Es importante señalar que el proceso de actualización de modelos corresponde a un proceso que posee limitaciones y es de gran complejidad.
- ix. Las limitaciones se encuentran en la cantidad de grados de libertad medibles en la estructura real, dados por la cantidad de sensores con los que se cuenta para la medición. Si bien esto puede suplirse teniendo sensores de referencia y sensores móviles (procedimiento realizado para medir formas modales en el edificio completo), el tiempo que implica la medición propiamente tal en términos de instalación, monitoreo y reubicación de dichos sensores dentro de

una estructura compleja o de gran envergadura, como la presentada en esta investigación es bastante largo.

- x. Otra limitación importante corresponde a la calidad del modelo de elementos finitos con el que se cuenta. En la medida que éste sea capaz de representar de forma aproximada la respuesta de la estructura real, y la respuesta frente a pequeñas variaciones dentro de ella, permitirá tener una buena actualización del modelo, en término de sus parámetros dinámicos.
- xi. En termino de las complejidades del método de actualización de modelos matemáticos se encuentra principalmente definir cuales son las variables que tienen más relevancia dentro de un modelo. Se piensa que esto se logra con la experiencia tanto en modelación como en la observación del comportamiento de estructuras reales por medio del monitoreo de éstas.
- xii. Finalmente, el procedimiento de actualización de modelos entrega un importante indicador respecto a la calibración de modelos matemáticos, para representar la respuesta frente a diferentes tipos de solicitudes externas. Sin embargo, en la actualidad no es posible su aplicación a problemas complejos que presentan no-linealidades.

7.3 Recomendaciones y Propuestas para Futuras Investigaciones.

Se cree que esta tesis contiene una contribución útil e importante dentro del campo de la Salud Estructural (SHM) basada en el análisis dinámico o de vibraciones y el monitoreo continuo de una estructura en proceso constructivo

Sin embargo, es ciertamente necesario continuar en esta línea de investigación.

Para esto se proponen las siguientes recomendaciones y comentarios finales como directrices a seguir en posteriores aportes dentro de este campo.

- i. La necesidad de unificación de los distintos métodos de identificación de parámetros dinámicos, por medio de la creación de un software propio con el cual sea posible abarcar métodos paramétricos (SSI, ITD, AR) y no paramétricos (PSD, FDD, EFDD), lineales y no lineales (WIGNER-VILLE, HILBERT HUANG, ESPECTROGRAMA). Ejemplos de estos avances son los programas computacionales *MACEC* y *ARTEMIS*. Sin embargo, estos *softwares* no ofrecen la totalidad de métodos utilizados cuyo uso dependerá del problema planteado.
- ii. Específicamente en las curvas empíricas desarrolladas en [*HERNANDEZ, 2009*], para la corrección de amortiguamiento por *leakage*, se hace necesaria una parametrización de dichas curvas, o bien una parametrización del plano definido por el amortiguamiento no corregido, amortiguamiento corregido y número de ciclos. Ésto con el fin de integrarlo dentro del método de espectro de potencia y a partir de la identificación de frecuencias por medio de los máximos asociados al gráfico espectral de potencia, determinar automáticamente el amortiguamiento corregido, independiente del tamaño de la ventana utilizada.

- iii. Respecto al método SSI, se hace necesaria la creación de una interfaz que sea capaz de limpiar los modos inestables o que generan ruido dentro del diagrama de estabilización, debido a que mejores resultados no se obtienen con un mayor tamaño del orden del modelo. Por el contrario, a mayor orden de modelo, mayor cantidad de “ruido” dentro del sistema, debido a la redundancia de órdenes de modelo espacio estado. Sin embargo el orden del modelo no puede ser un valor pequeño debido a que una menor cantidad de parámetros serán identificados. Por lo mismo este parámetro definido por el usuario dependerá de la experiencia del analista.

- iv. Respecto al método SSI, se hace necesaria la identificación y cuantificación de respuestas forzadas de la estructura y que no corresponden a los parámetros dinámicos propios de la estructura.

- v. Dentro de la línea de investigación de salud estructural, el paso siguiente y directo a esta investigación es la identificación de daño en estructuras. Para esto, en la literatura ([DOEBLING, 1996], [PEETERS, 2000] , [RYTTER, 1993]) se definen 4 tipos de niveles de daño:
 - Nivel 1: Detección: ¿La estructura esta dañada o no?
 - Nivel 2: Localización: ¿Dónde esta localizado el daño?
 - Nivel 3: Cuantificación: ¿Cuál es el grado del daño localizado?
 - Nivel 4: Predicción: ¿Cuál es el tiempo de servicio restante que le queda a la estructura?

En este sentido, se hace necesario seguir avanzando dentro de esta línea de investigación, con el fin de integrar el sistema de monitoreo, los métodos de identificación de parámetros dinámicos, la actualización de modelos y la

identificación de daño como un todo enmarcado dentro del campo de Salud Estructural.

- vi. Creación de la interfaz entre *FEMTools* y *ETABS*, para la actualización enfocada a estructuras de edificios, siguiendo la línea desarrollada en [TUREK, 2007], quien desarrolló la interfaz con *SAP2000*. Esto permitiría, con los datos disponibles del edificio Titanium La Portada, realizar el proceso de actualización del modelo de elementos finitos que fue realizado mediante *ETABS*, teniendo clara las limitaciones y complejidades asociadas a este tipo de procesos.
- vii. Como propuesta alternativa a la anterior, se propone la creación de un modelo simplificado en *SAP2000*, para contrastarlo con el modelo obtenido de los resultados de las mediciones de microvibraciones realizadas del edificio Titanium La Portada, con el fin de obtener, a través de un análisis de sensibilidad, los parámetros más influyentes dentro de la respuesta de la estructura y finalmente realizar la actualización para que el modelo represente de la mejor forma la respuesta de la estructura real y por ende los esfuerzos inducidos sobre ésta.
- viii. A partir del monitoreo continuo del edificio Titanium, tanto en terreno como en el procesamiento y análisis de datos, se constató la necesidad de redes de monitoreo dentro de los edificios, con el fin de establecer su comportamiento e identificar eventuales anomalías: temas recurrentes dentro de la salud estructural de edificios.
- ix. En este sentido, se hace necesaria una red de monitoreo remoto vía Internet en las estructuras. Esta línea de investigación que se encuentra en desarrollo en [YAÑEZ, 2009] es de gran importancia porque permitiría determinar en tiempo

real la respuesta de la estructura o la identificación de daño en nivel 1, referida a contestar la pregunta ¿La estructura esta dañada o no?, basados en el análisis de variación de las frecuencias naturales de la estructura. Sin embargo, seria interesante extender la capacidad de monitoreo mediante el uso de la información proporcionada por las formas modales, lo que permitiría identificación de daño en nivel 2 y 3, es decir, localización y cuantificación de daño estructural.

- x. Respecto a la instalación de la red de monitoreo, y gracias a la experiencia desarrollada en el edificio Titanium la Portada, se recomienda para futuras redes de monitoreo, la utilización de sensores con diferentes niveles de amplificación, ya que si bien los resultados utilizados para obtener los parámetros dinámicos, la actividad sísmica es también un parámetro muy importante en la determinación de la respuesta de la estructura frente a este tipo de excitación eventual, [CARREÑO, 2009]. Como se observó en el monitoreo continuo, la amplificación de la salida de los sensores generó una mejor señal para la identificación de parámetros dinámicos, pero fue saturada por una serie de sismos dentro del periodo de monitoreo.

- xi. La necesidad de un nuevo sistema de monitoreo alternativo al uso de cables se hace necesario debido al gran trabajo de despliegue que requiere. Para esto existen diversas formas de mejoras , cada una con sus limitaciones:
 - Sistema Inalámbrico (*wireless*): este sistema se encuentra actualmente en desarrollo ya que tiene ciertas limitaciones ligadas a la transmisión de señal. El caso más desfavorable corresponde a edificios de hormigón, donde la señal se ve interferida. Estructuras como puentes tienen buenos resultados por tratarse de estructuras al aire libre, donde la señal puede viajar sin problemas.

- Sistema GPS: este sistema no requiere que los sensores estén conectados a un sistema de adquisición mediante cables, sin embargo, a través del GPS es posible sincronizar una red de sensores en espacio y tiempo. El inconveniente de este sistema es su alto costo, ya que para cada sensor se debe tener un GPS asociado.

Bibliografía.

1. [AKAIKE, 1974]. AKAIKE H. 1974. "Stochastic theory of minimal realization". IEEE Transactions on Automatic Control, 19, 667-674.
2. [AOKI, 1987]. AOKI M. 1987. "State space modeling of time series". Springer Verlag, Berlin.
3. [ARUN, 1990]. ARUN K. S. and S. Y. KUNG. 1990. "Balanced Approximation of stochastic system". SIAM J. Matrix Analysis and Applications, 11. pp. 42-68.
4. [BAKSALARY, 1979]. BAKSALARY J. and R. KALA. 1979. "Two Relations Between Oblique and \mathcal{A} -Orthogonal Projections. Linear Algebra and its Applications, Vol. 24, pp. 99-103".
5. [BENDAT, 1971]. BENDAT J. and A. PIERSOL. 1971. "Random Data: Analisis and Measurement Procedures". John Wiley & Sons, Inc.
6. [BENDAT, 1980]. BENDAT J. and A. PIERSOL. 1980. "Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis". John Wiley & Sons, Inc.
7. [BENVENISTE, 1985]. BENVENISTE A. and J.-J. FUCHS. 1985. "Single sample modal identification of a nonstationary stochastic process". IEEE Transactions on Automatic Control, AC-30(1), 66-74.

8. **[BOROSCHEK, 2004]**. BOROSCHEK R, H. BAESLER, C. VEGA. 2004. "Experimental Determination of Damping Ratio of a Transparent Pier with Steel Piles and Reinforced Concrete Board". 13th World Conference on Earthquake Engineering (WCEE). Paper No 1652. August 1-6. Vancouver Canadá.
9. **[BOROSCHEK, 2005]**. BOROSCHEK R, A. CASTILLO. 2005. "Uso del método de frecuencia no paramétrica y SSI para la identificación de propiedades modales de edificios". Congreso Chileno de Sismología e Ingeniería Antisísmica. IX Jornadas. Concepcion Chile.
10. **[BRIGHAM, 1974]**. BRIGHAM O. 1974. "The Fast Fourier Transform". Prentice Hall.
11. **[BRINCKER, 2001]**. BRINCKER R., L. ZHANG, P. ANDERSEN. 2001. "Modal Identification of output-only system using frequency domain decomposition". Institute of Physics Publishing. Smart Materials and Structures. 10 (2001) 441-445.
12. **[BRINCKER, 2001b]**. BRINCKER R., C. E. and P. ANDERSEN. "Damping Estimation by Frequency Domain Decomposition". Procs. of the XIX Intl. Modal Analysis Conference, Kissimmee, Florida, pp. 698-703, 2001.
13. **[BROWNJOHN, 2002]**. BROWNJOHN J. 2002. "Ambient vibration studies for system identification of tall buildings". Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 2003; 32: 71-95.

14. **[CAICEDO, 2004]**. CAICEDO J., S. DYKE and E. JOHNSON. 2004. "Natural Excitation Technique and Eigensystem Realization algorithm for phase I of the IASC-ASCE Benchmark Problem: simulated data". Journal of Engineering Mechanics, vol. 130, N° 1, January 2004, pp. 49-60.
15. **[CANTIENI, 2008]**. CANTIEN R., M BREHM, V ZABEL T RAUERT and B. HOFFMEISTER. 2008. "Ambient Testing and Modelo Updating of a Filier Beam Bridge for High-Speed Trains". In Proc. of 7th European Conference on Structural Dynamics (EURODYN), Southhampton, UK, 7-9 July, 2008.
16. **[CARREÑO, 2009]**. "Variación de propiedades dinámicas del edificio de la cámara chilena de la construcción: caso sísmico". Memoria Para Optar al Título de Ingeniero Civil. Universidad de Chile. Santiago. Chile.
17. **[CASTILLO, 2005]**. CASTILLO A. 2005. "Identificación de las propiedades modales de edificios altos utilizando el método del Subespacio Estocástico". Memoria para optar al título de Ingeniero Civil. Universidad de Chile. Santiago. Chile.
18. **[CHOPRA, 1995]**. CHOPRA A. K. 1995. "Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering". University of California at Berkeley. Prentice Hall. Englewood Cliffs, New Jersey 07632.
19. **[CLINTON, 2006]**. CLINTON J., S. BRADFORD, T. HEATON, and J. FAVELA .2006. "The Observed Wander of the Natural Frequencies in a Structure". Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 96, No. 1, pp. 237-257.

20. **[CLOUGH PENZIEN, 1993]**. CLOUGH J.W., J. PENZIEN. 1993. "Dynamic of Structures". Editorial Mc Graw-Hill.
21. **[COHEN, 1995]**. COHEN L. 1995. "Time-Frequency Analysis". Prentice Hall.
22. **[DASCOTTE, 1995]**. DASCOTTE E, J. STROBBE, H. HUA. 1995. "Sensitivity-Based Modal Updating using Multiple Types of Simultaneous State Variables", Proc. of the 13th International Modal Analysis Conference, Nashville, TN, February 1995, pp 1035-1040.
23. **[DE MOOR, 1988]**. DE MOOR B. 1988. "Mathematical concepts and techniques for modeling of static and dynamic systems". PhD thesis, Department of Electrical Engineering, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium.
24. **[DDS, 2007]**. DINAMIC DESIGN SOLUTIONS, "FEMTools Theoretical Manual. Version 3.2", Copyright 1994-2007.
25. **[DDS, 2007b]**. DINAMIC DESIGN SOLUTIONS, "FEMTools Model Updating User's Guide- Version 3.2", Copyright 1994-2007.
26. **[DIAZ, 2004]**. DIAZ A. 2004. "Análisis de microvibraciones del viaducto Margamarga II". Tesis para optar al título de Ingeniero Civil. Universidad de Chile. Santiago. Chile.

27. **[DOEBLING, 1996]**. DOEBLING S., C. FARRAR, M. PRIME and D. SHEVITZ. 1996. "Damage Identification and Health Monitoring of Structural and Mechanical Systems From Changes in their Vibration Characteristics: a Literature Review". Research Report LA-13070-MS, ESA-EA Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, NM, USA [<http://www.lanl.gov/projects/ncsd/>].
28. **[DURRANI, 1993]**. DURRANI A., S. MAU, A. ABOUHASHISH and Y. LI. 1993. "Earthquake response of flat-slab buildings". Journal of Structural Engineering, Vol. 120, No. 3, March, 1994.
29. **[FARIAS, 2002]**. FARIAS J. 2002. "Uso de Aisladores Sísmicos y de operación en Chancadores". Memoria para optar al título de Ingeniero Civil. Universidad de Chile. Santiago. Chile.
30. **[GENTILE, 2007]**. GENTILE C and N. GALLINO. 2007. "Ambient Vibration testing and structural evaluation of an historic suspension footbridge ". Advances in Engineering Software 39 (2008) 356-366. www.sciencedirect.com. Elsevier.
31. **[HERNANDEZ, 2009]**. HERNANDEZ F. 2009. "Análisis de Métodos de Identificación de Variación de Propiedades Dinámicas". Memoria para optar al título de Ingeniero Civil y Magíster en Ingeniería Sísmica. Universidad de Chile. Santiago. Chile.
32. **[HEYLEN, 1998]**. HEYLEN W., S. LAMMENS and P. SAS. 1998. "Modal Analysis Theory and Testing". Katholieke Universiteit Leuven, Belgium. Faculty of Engineering.

33. **[HUANG, 1998]**. HUANG N., Z. SHEN, S. LONG, M. WU, H. SHIH, Q. ZHENG, N. YEN, CH. TUNG and H. LIU. 1998. "The empirical mode decomposition and the Hilbert Spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis". Proceedings of the Royal Society London; A, Vol. 454, pp. 903-995.
34. **[JOHNSON, 2004]**. JOHNSON E., H. LAM, L. KATAFYGIOTIS and J. BECK. 2004. "Phase I IASC-ASCE structural health monitoring benchmark problem using simulated data". Journal of Engineering Mechanics, vol. 130, N° 1, January 2004, pp. 3-15.
35. **[JUANG, 1985]**. JUANG J.-N and R.S. PAPPA. 1985. "An eigensystem realization algorithm or modal parameter identification and model reduction. Journal of Guidance, Control, and Dynamics.
36. **[JUANG, 1994]**. JUANG J.-N. "Applied System Identification". Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1994.
37. **[KAWASUMI, 1965]**. KAWASUMI H. and E. SHIMA. 1965. "Some Applications of a Correlator to Engineering Problems". 3rd World Conference Earthquake Engineering.
38. **[LAUB, 1979]**. LAUB A. 1979. "A Schur method for solving algebraic Riccati equation". IEEE Transactions on Automatic Control, AC-24, pp. 913-921.

39. **[LAZCANO, 2008]**. LAZCANO P. 2008. "Variación de los Parámetros Modales del Edificio de la Cámara Chilena de la Construcción a partir de registros ambientales y sísmicos". Memoria para optar al título de Ingeniero Civil. Universidad de Chile. Santiago. Chile.
40. **[LI, 1991]**. LI Y. and S. MAU. 1991. "A case study of MIMO system identification applied to building seismic records". Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 20, 1045-1064.
41. **[LI, 1997]**. LI Y. and S. MAU. 1997. "Learning from recorded earthquake motions of buildings". Journal of Structural Engineering. January 1997.
42. **[LJUNG, 1999]**. LJUNG L. 1999. "System Identification: Theory for the User". Segunda Edicion, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA.
43. **[LORCA, 2004]**. LORCA, N. 2004. "Desarrollo de un modelo analítico para la identificación de las propiedades dinámicas de las estructuras, mediante pruebas de impacto controladas.". Tesis para optar al título de Ingeniero Civil. Universidad de Chile. Santiago. Chile.
44. **[LORD, 2004]**. LORD J.F., C. VENTURA and E. DASCOTTE. 2004. "Automated Modal Updating using ambient vibration data from a 48-storey Building in Vancouver". Proc. Of the 22th International Modal Analysis Conference (IMAC). January 2004, Detroit, Michigan. USA.

45. **[LUCO, 1987]**. LUCO J., M. TRIFUNAC, and H. WONG. 1987. "On the apparent change in dynamic behavior of a nine-story reinforced concrete building". Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 77, No. 6, pp. 1961-1983, December 1987.
46. **[MACIEJOWSKI, 1994]**. MACIEJOWSKI J. M. 1994. "Guaranteed Stability with Subspace Methods". Submitted for publication.
47. **[MEIROVITCH, 1967]**. MEIROVITCH L 1967. "Analytical Methods in Vibrations". Macmillan Publishing CO., Inc.
48. **[NI, 2009]**. NI Y., CHIA Y., W. LIAO and J. KO. 2009. "Technology Innovation in developing the structural health monitoring system for Guangzhou New TV Tower". Structural Control and Health Monitoring. 2009; 16: 73-98. Published online 5 january 2009 in Wiley Interscience (www. Interscience.wiley.com).
49. **[PANDIT, 1983]**. PANDIT S., M. SUDHAKAR, M. WU. 1983. "Time Series and System Analysis with Applications". Editorial John Wiley and Sons c. Nueva York, Estados Unidos.
50. **[PEETERS, 1998]**. PEETERS B. and G. DE ROECK. 1998. "System Identification and Damage Detection in Civil Engineering". Tesis de Doctorado. Katholieke Universiteit Leuven, Faculteit Toegepaste Wetenschappen. Bélgica.
51. **[REN, 2003]**. REN W. and Z. ZONG. 2003. "Output-only modal parameter identification of civil engineering structures". Structural Engineering and Mechanics, Vol. 17, No 3-4 (2004) 000-000.

52. **[REN, 2004]**. REN W., T. ZHAO and I. HARIK, M. ASCE. 2004. "Experimental and Analytical Modal Analysis of Steel Arch Bridge". Journal of Structural Engineering, ASCE, July 2004.
53. **[RYTTER, 1993]**. RYTTER, A. 1993. "Vibration Based Inspection of Civil Engineering Structures". PhD. Thesis, Department of Building Technology and Structural Engineering. Aalborg University. Dinamarca.
54. **[ROZAS, 2009]**. ROZAS L. 2009. "Reducción de la respuesta estructural por medio del uso de disipadores de masa sintonizada y disipadores de columna líquida sintonizada: Análisis Teórico y Experimental". Memoria para optar al grado de Magíster en Ingeniería Sísmica. Universidad de Chile. Santiago. Chile
55. **[TANAKA, 1969]**. TANAKA T., S. YOSHIKAWA and Y. OSAWA. 1969. "Period and Damping of Vibration in Actual Buildings Turing Earthquake". Bulletin of the Earthquake Research Institute. Vol. 47, pp. 1073-1092.
56. **[TUREK, 2007]**. TUREK M. 2007. "A Method for Implementation of Damage Detection Algorithms for Civil Structural Health Monitoring Systems". Phd Thesis. The Faculty of Graduate Studies (Civil Engineering). University of British Columbia.
57. **[VALDES, 2004]**. VALDES P. 2004. "Identificación paramétrica en sistemas estructurales utilizando el método del Subespacio estocástico". Memoria para optar al título de Ingeniero Civil. Universidad de Chile. Santiago. Chile.

58. **[VAN OVERSCHEE, 1993]**. VAN OVERSCHEE P. and B. DE MOOR. 1993. "Subspace algorithms for the stochastic identification problem". *Automatica*, Vol. 29, no. 3, pp. 649-660.
59. **[VAN OVERSCHEE, 1994]**. VAN OVERSCHEE P. and B. DE MOOR. 1994. "N4SID: Subspace Algorithms for the identification of Combined Deterministic-Stochastic Systems. *Automatica, Special Issue on Statistical Signal Processing and Control*". Vol 30, no. 1, pp. 75-93
60. **[VAN OVERSCHEE, 1996]**. VAN OVERSCHEE P. and B. DE MOOR. 1996. "Subspace Identification for Linear Systems: Theory-Implementation-Applications". Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
61. **[VENTURA, 1996]**. VENTURA C., N. SCHUSTER. 1996. "Structural dynamic properties of a reinforced concrete high-rise building during construction". *Canadian Journal of Civil Engineering*. Vol. 23, N° 4, pp. 950-972..
62. **[VENTURA, 2000]**. VENTURA C., T. HORYNA. 2000. "Measured and Calculated Characteristics of HCT Building". *Proc. Of the 18th International Modal Analysis Conference, San Antonio, Texas, 2000*, pp. 1070-1074.
63. **[VENTURA, 2002]**. VENTURA C., J. F. LORD and R. SIMPSON. 2002. "Effective use of Ambient Vibration Measurements for Modal Updating of a 48 Storey Building in Vancouver". *Proc. Of the 3rd International Conference on Structural Dynamics Modeling-Test, Analysis, Correlation and Validation. Madeira Island. Portugal*.

64. **[VENTURA, 2005]**. VENTURA C., F-J JORD, M. TUREK, R. BRINCKER, P. ANDERSEN, E. DASCOTE. 2005. "FEM Updating of Tall Buildings Using Ambient Vibration Data". EUROODYN. Septiembre 2005, Paris. Francia.
65. **[VILLE, 1948]**. VILLE J. 1948. "Theorie et applications de la notion de signal analytique, Cables et Transmissions, vol. 2-A, pp. 61-74. Traducido por I. Selin, "Theory and applications of the notion of complex signal", Rand Corporation Technical Report T-92, Santa Monica, CA, 1958.
66. **[WECKENDORF, 2008]**. J. WECKENDORF, B. ZHANG, A. KERMANI, D. REID, P. ANDERSEN. 2008. "Damping Characteristics of Timber Flooring System with Respect to low-frequency vibration modes ". Proc. of the 10th World Conference on Timber Engineering, June 2-5. Miyazaki, Japan.
67. **[WENG, 2008]**. J. H. WENG, C.H. LOH, J. LYNCH, K. LU, P-Y LIN, Y WANG. 2008. "Output-only modal identification of a cable-stayed bridge using wireless monitoring systems". Engineering Structures 30 (2008) 1820-1830. www.sciencedirect.com.
68. **[YAÑEZ, 2009]**. YAÑEZ T. 2009. "Implementación de un sistema de monitoreo continuo de parámetros dinámicos de un edificio de muros". Memoria para optar al título de Ingeniero Civil (en curso). Universidad de Chile. Santiago. Chile.
69. **[ZHANG, 2003]**. ZHANG L and Y TAMURA. 2003. "Damping Estimation of Engineering Structures with ambient response measurements". Proc. of the 21st International Modal Analysis Conference (IMAC). Kissimmee, Florida, USA.

Apéndice A

Demostraciones Capítulo 3.

A.1 Demostración de ecuaciones de la sección (3.5), Sistemas Estocásticos.

A.1.1. Demostración de ecuación (3.90).

$$[\Sigma^s] = [A] \cdot [\Sigma^s] \cdot [A]^T + [Q]$$

$$\text{Si } E\left[\left\{x_k^s\right\} \cdot \left\{x_k^s\right\}^T\right] = [\Sigma^s] \Rightarrow E\left[\left\{x_{k+1}^s\right\} \cdot \left\{x_{k+1}^s\right\}^T\right] = [\Sigma^s]$$

$$\text{Pero } \left\{x_{k+1}^s\right\} = [A] \cdot \left\{x_k^s\right\} + \left\{w_k\right\}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
[\Sigma^s] &= E\left[\left([A] \cdot \{x_k^s\} + \{w_k\}\right) \cdot \left([A] \cdot \{x_k^s\} + \{w_k\}\right)^T\right] \\
&= E\left[\left([A] \cdot \{x_k^s\} + \{w_k\}\right) \left(\{x_k^s\}^T \cdot [A]^T + [w_k]^T\right)\right] \\
[\Sigma^s] &= E\left[[A] \cdot \{x_k^s\} \cdot \{x_k^s\}^T \cdot [A]^T + [A] \cdot \{x_k^s\} \cdot \{w_k\}^T + \{w_k\} \cdot \{x_k^s\}^T \cdot [A]^T + \{w_k\} \cdot \{w_k\}^T\right] \\
[\Sigma^s] &= E\left[[A] \cdot \{x_k^s\} \cdot \{x_k^s\}^T \cdot [A]^T\right] + E\left[[A] \cdot \{x_k^s\} \cdot \{w_k\}^T\right] + E\left[\{w_k\} \cdot \{x_k^s\}^T \cdot [A]^T\right] \\
&\quad + E\left[\{w_k\} \cdot \{w_k\}^T\right] \\
[\Sigma^s] &= [A] \cdot E\left[\{x_k^s\} \cdot \{x_k^s\}^T\right] \cdot [A]^T + [A] \cdot \underbrace{E\left[\{x_k^s\} \cdot \{w_k\}^T\right]}_{[0]} + [A]^T \cdot \underbrace{E\left[\{w_k\} \cdot \{x_k^s\}^T\right]}_{[0]} \\
&\quad + E\left[\{w_k\} \cdot \{w_k\}^T\right] \\
[\Sigma^s] &= [A] \cdot E\left[\{x_k^s\} \cdot \{x_k^s\}^T\right] \cdot [A]^T + E\left[\{w_k\} \cdot \{w_k\}^T\right] \\
[\Sigma^s] &= [A] \cdot [\Sigma^s] \cdot [A]^T + [Q]
\end{aligned}$$

A.1.2 Demostración ecuación (3.92)

$$[\Lambda_0] = [C] \cdot [\Sigma^s] \cdot [C]^T + [R]$$

$$\text{Si } [\Lambda_i] = E\left[\{y_{k+i}\} \cdot \{y_k\}^T\right] \Rightarrow [\Lambda_0] = E\left[\{y_k\} \cdot \{y_k\}^T\right]$$

$$\text{Pero } \{y_k\} = [C] \cdot \{x_k^s\} + \{w_k\}$$

Luego,

$$[\Lambda_0] = E \left[\left([C] \{x_k^s\} + \{v_k\} \right) \cdot \left([C] \{x_k^s\} + \{v_k\} \right)^T \right] = E \left[\left([C] \{x_k^s\} + \{v_k\} \right) \cdot \left(\{x_k^s\}^T [C]^T + \{v_k\}^T \right) \right]$$

$$[\Lambda_0] = E \left[[C] \cdot \{x_k^s\} \cdot \{x_k^s\}^T \cdot [C]^T + [C] \cdot \{x_k^s\} \cdot \{v_k\}^T + \{v_k\} \cdot \{x_k^s\}^T \cdot [C]^T + \{v_k\} \cdot \{v_k\}^T \right]$$

$$[\Lambda_0] = E \left[[C] \cdot \{x_k^s\} \cdot \{x_k^s\}^T \cdot [C]^T \right] + E \left[[C] \cdot \{x_k^s\} \cdot \{v_k\}^T \right] + E \left[\{v_k\} \cdot \{x_k^s\}^T \cdot [C]^T \right] + E \left[\{v_k\} \cdot \{v_k\}^T \right]$$

$$[\Lambda_0] = [C] \cdot E \left[\{x_k^s\} \cdot \{x_k^s\}^T \right] \cdot [C]^T + [C] \cdot \underbrace{E \left[\{x_k^s\} \cdot \{v_k\}^T \right]}_{[0]} + [C]^T \cdot \underbrace{E \left[\{v_k\} \cdot \{x_k^s\}^T \right]}_{[0]} + E \left[\{v_k\} \cdot \{v_k\}^T \right]$$

$$[\Lambda_0] = [C] \cdot E \left[\{x_k^s\} \cdot \{x_k^s\}^T \right] \cdot [C]^T + E \left[\{v_k\} \cdot \{v_k\}^T \right]$$

$$[\Lambda_0] = [C] \cdot [\Sigma^s] \cdot [C]^T + [R]$$

A.1.3 Demostración ecuación (3.94)

$$[G] = [A] \cdot [\Sigma^s] \cdot [C]^T + [S]$$

Utilizando las definiciones anteriores y la definición de la matriz $[G]$ se tiene:

$$[G] = E\left[\{x_{k+1}^s\} \cdot \{y_k\}\right] = E\left[\left([A] \cdot \{x_k^s\} + \{w_k\}\right) \cdot \left(\{x_k^s\}^T \cdot [C]^T + \{v_k\}^T\right)\right]$$

$$[G] = E\left[[A] \cdot \{x_k^s\} \cdot \{x_k^s\}^T \cdot [C]^T + [A] \cdot \{x_k^s\} \cdot \{v_k\}^T + \{w_k\} \cdot \{x_k^s\}^T \cdot [C]^T + \{w_k\} \cdot \{v_k\}^T\right]$$

$$[G] = E\left[[A] \cdot \{x_k^s\} \cdot \{x_k^s\}^T \cdot [C]^T\right] + E\left[[A] \cdot \{x_k^s\} \cdot \{v_k\}^T\right] + E\left[\{w_k\} \cdot \{x_k^s\}^T \cdot [C]^T\right] + E\left[\{w_k\} \cdot \{v_k\}^T\right]$$

$$[G] = [A] \cdot E\left[\{x_k^s\} \cdot \{x_k^s\}^T\right] \cdot [C]^T + [A] \cdot \underbrace{E\left[\{x_k^s\} \cdot \{v_k\}^T\right]}_{[0]} + [C]^T \underbrace{E\left[\{w_k\} \cdot \{x_k^s\}^T\right]}_{[0]} + E\left[\{w_k\} \cdot \{v_k\}^T\right]$$

$$[G] = [A] \cdot E\left[\{x_k^s\} \cdot \{x_k^s\}^T\right] \cdot [C]^T + E\left[\{w_k\} \cdot \{v_k\}^T\right]$$

$$[G] = [A][\Sigma^s][C]^T + [S]$$

A.1.4 Demostración de las ecuaciones (3.95) y (3.96).

$$[\Lambda_i] = [C] \cdot [A]^{i-1} \cdot [G]$$

Se sabe que $[\Lambda_i] = E\left[\{y_{k+i}\} \cdot \{y_k\}^T\right]$

Para $i = 1$:

$$[\Lambda_1] = E \left[\{y_{k+1}\} \cdot \{y_k\}^T \right]$$

$$[\Lambda_1] = E \left[\left([C] \{x_{k+1}^s\} + \{v_{k+1}\} \right) \cdot \left([C] \{x_k^s\} + \{v_k\} \right)^T \right]$$

$$[\Lambda_1] = E \left[\left([C] \cdot \left([A] \cdot \{x_k^s\} + \{w_k\} \right) + \{v_{k+1}\} \right) \cdot \left([C] \{x_k^s\} + \{v_k\} \right)^T \right]$$

$$[\Lambda_1] = [C] \cdot [A] \cdot E \left[x_k x_k^T \right] \cdot C^T + [C] \cdot [S]$$

$$[\Lambda_1] = [C] \cdot [A] \cdot [\Sigma^s] \cdot [C]^T + [C] \cdot [S]$$

$$[\Lambda_1] = [C] \cdot \left([A] \cdot [\Sigma^s] \cdot [C]^T + [S] \right) = [C] \cdot [G] = [C][A]^0 [G]$$

Para $i = 2$:

$$[\Lambda_2] = E \left[\{y_{k+2}\} \cdot \{y_k\}^T \right]$$

$$[\Lambda_2] = E \left[\left([C] \{x_{k+2}^s\} + \{v_{k+2}\} \right) \cdot \left([C] \{x_k^s\} + \{v_k\} \right)^T \right]$$

$$[\Lambda_2] = E \left[\left([C] \cdot \left([A] \cdot \{x_{k+1}^s\} + \{w_{k+1}\} \right) + \{v_{k+2}\} \right) \cdot \left([C] \{x_k^s\} + \{v_k\} \right)^T \right]$$

$$[\Lambda_2] = E \left[\left([C] \cdot \left([A] \cdot \left([A] \cdot \{x_k^s\} + \{w_k\} \right) + \{w_{k+1}\} \right) + \{v_{k+2}\} \right) \cdot \left([C] \cdot \{x_k^s\} + \{v_k\} \right)^T \right]$$

$$[\Lambda_2] = E \left[\left([C] \cdot [A] \cdot [A] \cdot \{x_k^s\} + [C] \cdot [A] \cdot \{w_k\} + [C] \cdot \{w_{k+1}\} + \{v_{k+2}\} \right) \cdot \left(\{x_k^s\}^T \cdot [C]^T + \{v_k\}^T \right) \right]$$

Desarrollando el producto dentro de la esperanza y eliminando los elementos no correlacionados se tiene:

$$[\Lambda_2] = [C] \cdot [A] \cdot [A] \cdot [\Sigma^s] \cdot [C]^T + [C] \cdot [A] \cdot [S]$$

$$[\Lambda_2] = [C] \cdot ([A] \cdot [A] \cdot [\Sigma^s] \cdot [C]^T + [A] \cdot [S])$$

$$[\Lambda_2] = [C] \cdot [A] \cdot ([A] \cdot [\Sigma^s] \cdot [C]^T + [S])$$

$$[\Lambda_2] = [C] \cdot [A] \cdot [G]$$

Finalmente, de forma intuitiva se tendrá para i

$$[\Lambda_i] = [C] \cdot [A]^{i-1} \cdot [G].$$

Análogamente se tendrá:

$$[\Lambda_{-i}] = [G]^T \cdot ([A]^{i-1})^T \cdot [C]^T$$

A.2 Demostración Teorema 3. Sección 3.5.4: Filtros de Kalman.

Este teorema se probará por inducción. Primero se probará para $k = 1$, luego se probará que si el teorema es cierto para $k = p$ luego es cierto para $k = p + 1$.

Para $k = 1$:

De la ecuación (3.110) se tiene:

$$\{\hat{x}_1\} = [A] \cdot \underbrace{\{\hat{x}_0\}}_{\{0\}} + [K_0] \cdot \left(\{y_0\} - [C] \cdot \underbrace{\{\hat{x}_0\}}_{\{0\}} \right)$$

$$\Rightarrow \{\hat{x}_1\} = [K_0] \cdot \{y_0\}$$

De la ecuación (3.111) se tiene:

$$[K_0] = \left([G] - [A] \underbrace{[P_0]}_{[0]} [C]^T \right) \cdot \left([\Lambda_0] - [C] \underbrace{[P_0]}_{[0]} [C]^T \right)^{-1}$$

$$\Rightarrow [K_0] = [G] \cdot [\Lambda_0]^{-1} = [\Delta_1^c] \cdot [L_1]^{-1}$$

Lo que implica:

$$\{\hat{x}_1\} = [\Delta_1^c] \cdot [L_1]^{-1} \cdot \{y_0\}$$

Que corresponde exactamente a la expresión (3.113) cuando $k = 1$.

Ahora, suponemos que la expresión para el estado es cierta para $k = p$, luego se debe demostrar que es cierta para $k = p + 1$:

$$\{\hat{x}_{p+1}\} = [\Lambda_{p+1}^c] \cdot [L_{p+1}]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \{y_0\} \\ \vdots \\ \{y_p\} \end{pmatrix}$$

$$\{\hat{x}_{p+1}\} = [\Lambda_{p+1}^c] \cdot [L_{p+1}]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \{y_0\} \\ \vdots \\ \{y_p\} \end{pmatrix}$$

$$\{\hat{x}_{p+1}\} = ([A][\Delta_p^c] \quad [G]) \cdot \begin{bmatrix} [L_p] & [\Delta_p^c]^T \cdot [C]^T \\ [C] \cdot [\Delta_p^c] & [\Lambda_0] \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \{y_0\} \\ \vdots \\ \{y_p\} \end{pmatrix}$$

$$\{\hat{x}_{p+1}\} = ([A][\Delta_p^c] \quad [G]) \cdot$$

$$\begin{bmatrix} [L_p]^{-1} + [L_p]^{-1} \cdot [\Delta_p^c]^T \cdot [C]^T \cdot [\Delta]^{-1} \cdot [C] \cdot [\Delta_p^c] \cdot [L_p]^{-1} & -[L_p]^{-1} \cdot [\Delta_p^c]^T \cdot [C]^T \cdot [\Delta]^{-1} \\ -[\Delta]^{-1} \cdot [C] \cdot [\Delta_p^c] \cdot [L_p]^{-1} & [\Delta]^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \{y_0\} \\ \vdots \\ \{y_p\} \end{pmatrix}$$

Con:

$$[\Delta] = [\Lambda_0] - [C] \cdot \underbrace{[\Delta_p^c] \cdot [L_p]^{-1} \cdot [\Delta_p^c]^T}_{[P_p]} \cdot [C]^T = [\Lambda_0] - [C] \cdot [P_p] \cdot [C]^T$$

Luego, desarrollando esta expresión se llega a que:

$$\{\hat{x}_{p+1}\} = \left([A] - \left([G] - [A] \cdot \underbrace{[\Delta_p^c] \cdot [L_p]^{-1} \cdot [\Delta_p^c]^T}_{[P_p]} \cdot [C]^T \right) \cdot [\Delta]^{-1} \cdot [C] \right) \underbrace{[\Delta_p^c] \cdot [L_p]^{-1}}_{\{\hat{x}_p\}} \begin{pmatrix} \{y_0\} \\ \vdots \\ \{y_{p-1}\} \end{pmatrix} + \left([G] - [A] \cdot \underbrace{[\Delta_p^c] \cdot [L_p]^{-1} \cdot [\Delta_p^c]^T}_{[P_p]} \cdot [C]^T \right) \cdot [\Delta]^{-1} \cdot \{y_p\}$$

$$\{\hat{x}_{p+1}\} = [A]\{\hat{x}_p\} + \underbrace{([G] - [A][P_p][C]^T)([\Lambda_0] - [C][P_p][C]^T)^{-1}}_{[K_p]} \cdot (\{y_p\} - [C]\{\hat{x}_p\})$$

$$\{\hat{x}_{p+1}\} = [A]\{\hat{x}_p\} + [K_p] \cdot (\{y_p\} - [C]\{\hat{x}_p\})$$

Lo que demuestra que el estado $\{\hat{x}_p\}$ puede escribirse en función de los *outputs*.

Apéndice B

Filtros de Kalman.

B.1 Filtros de Kalman.

Un sistema espacio estado discreto de tipo estocástico puede ser representado como:

$$\{x_{k+1}\} = [A] \cdot \{x_k\} + [B] \cdot \{u_k\} + \{w_k\} \quad (\text{B.1})$$

$$\{y_{k+1}\} = [C] \cdot \{x_k\} + [D] \cdot \{u_k\} + \{v_k\} \quad (\text{B.2})$$

Donde $\{w_k\} \in \mathbb{R}^n$ es el ruido debido a perturbaciones e imprecisiones del modelo; $\{v_k\} \in \mathbb{R}^l$ es el ruido debido a la imprecisión del sistema de registros.

Ambos son vectores de señales no medibles, los cuales se asumen con media igual a cero, de tipo blanco (barre todas las frecuencias), y con las siguientes matrices de covarianza:

$$\left[E \left[\begin{array}{c} \left(\{w_p\} \right) \\ \left(\{v_p\} \right) \end{array} \cdot \left(\{w_q\} \quad \{v_q\} \right) \right] \right] = \begin{pmatrix} [Q] & [S] \\ [S]^T & [R] \end{pmatrix} \cdot \delta_{pq} \quad (\text{B.3})$$

Se asume que ambas componentes de ruido son independientes una de otra, es decir que la esperanza del producto de las dos componentes de ruido es cero, para cualquier estado del sistema.

Generalmente, la condición inicial en la práctica es más bien desconocida, pero de alguna forma es posible tener alguna información acerca de la condición inicial $\{x_0\}$ a través de su valor medio $\{\bar{x}_0\}$ y su covarianza $[P_{x_0}]$.

Se asume que $\{x_0\}$, $\{w_j\}$ y $\{v_k\}$ no se encuentran correlacionadas mutuamente para todo j, k . Luego, la determinación de $\{\bar{x}_0\}$ y $[P_{x_0}]$ son independientes de $\{w_k\}$ y $\{v_k\}$.

Además, se asume que los valores de *inputs* futuros no están correlacionados las mediciones (observaciones) pasadas para todo $k-1 > j > 0$, es decir:

$$\left[E \left[\{u_k\} \cdot \{y_j\}^T \right] \right] = [0] \quad (\text{B.4})$$

Dado el sistema dinámico presentado en (B.1) y (B.2) (pero sin las condiciones iniciales $\{x_0\}$), lo que se quiere encontrar es un estimador $\{\hat{x}_k\}$ óptimo del estado $\{x_k\}$, en el sentido que el error de estimación $\{x_k\} - \{\hat{x}_k\}$ sea lo más pequeño posible.

A partir del desarrollo de este acápite se verá que lo necesario para determinar el estimador en el k -ésimo estado corresponde a la media de la condición inicial, $\{\bar{x}_0\}$, los *inputs* y *outputs* previos, es decir, $\{u_j\}$ y y_j , $j < k$ y las covarianzas $[P_{x_0}]$, $[Q]$ y $[R]$.

B.1.1 Formulación Básica.

Supongamos que el estado estimado puede ser escrito de forma recursiva como:

$$\{\hat{x}_{k+1}\} = [F_k] \cdot \{\hat{x}_k\} + [K_k] \cdot \{y_k\} + [H_k] \cdot \{u_k\} \quad (\text{B.5})$$

Donde $[F_k]$ es una matriz de nxn , $[K_k]$ una matriz de nxl y $[H_k]$ una matriz de nxm .

La idea es encontrar estas matrices por medio de algún criterio óptimo que será mostrado mas adelante.

Hay que notar que el estimador optimo de $\{x_k\}$, dados $\{y_k\}$, $\{u_k\}$ no puede ser determinado de forma lineal. La ecuación anterior fue elegida para una mejor implementación.

Se define el error de estimación como:

$$\{e_k\} = \{x_k\} - \{\hat{x}_k\} \quad (\text{B.6})$$

De las ecuaciones (B.1), (B.2) y (B.5), el error de estimación $\{e_{k+1}\}$ puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \{e_{k+1}\} &= \{x_{k+1}\} - \{\hat{x}_{k+1}\} \\ \{e_{k+1}\} &= [A] \cdot \{x_k\} + [B] \cdot \{u_k\} + \{w_k\} - [F_k] \cdot \{\hat{x}_k\} - \dots \\ &\quad \dots [K_k] \cdot \{y_k\} - [H_k] \cdot \{u_k\} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Insertando (B.2) en (B.7) se tiene:

$$\begin{aligned} \{e_{k+1}\} &= [[A] - [K_k] \cdot [C]] \cdot \{e_k\} + [[A] - [F_k] - [K_k] \cdot [C]] \cdot \{\hat{x}_k\} + \dots \\ &\quad \dots [[B] - [K_k] \cdot [D] - [H_k]] \cdot \{u_k\} - [K_k] \cdot \{v_k\} + \{w_k\} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

El objetivo principal en este caso será determinar las matrices $[F_k]$, $[K_k]$ y $[H_k]$ tal que el error de la estimación del estado se estabilice en torno a una media cero y sea minimizado.

Tomando el valor esperado de la ecuación (B.8) se tiene:

$$\begin{aligned} [E[e_{k+1}]] = & [[A] - [K_k] \cdot [C]] \cdot [E[e_k]] + [[A] - [F_k] - [K_k] \cdot [C]] \cdot [E[\{\hat{x}_k\}]] \dots \\ & + [[B] - [K_k] \cdot [D] - [H_k]] \cdot [E[\{u_k\}]] \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

La ecuación anterior es valida asumiendo que las componentes de ruido tienen esperanzas nulas, es decir:

$$\{E[\{v_k\}]\} = \{E[\{w_k\}]\} = \{0\} \quad (\text{B.10})$$

Para cualquier vector de estado estimado $\{\hat{x}_k\}$ y un vector de *input* $\{u_k\}$, el error de estimación tendrá media nula si y solo si:

$$[F_k] = [A] - [K_k] \cdot [C] \quad (\text{B.11})$$

$$[H_k] = [B] - [K_k] \cdot [D] \quad (\text{B.12})$$

$$\{\hat{x}_0\} = \{E[\{x_0\}]\} = \{\bar{x}_0\} \quad (\text{B.13})$$

Tomando en cuenta las ecuaciones anteriores, (B.11), (B.12) y (B.13), la ecuación (B.10) queda como:

$$[E[\{e_{k+1}\}]] = [[A] - [K_k] \cdot [C]] \cdot [E[\{e_k\}]] \quad (\text{B.14})$$

Utilizando la recursividad de la ecuación (B.14) se tiene:

$$\begin{aligned} E[\{e_{k+1}\}] &= [[A]-[K_k]\cdot[C]]\cdot[[A]-[K_{k-1}]\cdot[C]]\cdots \\ &\quad \cdot [[A]-[K_0]\cdot[C]]\cdot E[\{e_0\}] \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

$$\Rightarrow E[\{e_{k+1}\}] = [0]$$

Donde $E[\{e_0\}] = E[\{x_0\} - \{\hat{x}_0\}] = \{0\}$

La ecuación (B.15) muestra que el error de estimación $\{e_k\}$ tiene media nula en todos los pasos de tiempo. Esto no implica que $\{e_k\}$ tenga la propiedad de ser blanco, a diferencia de las componentes de ruido $\{w_k\}$ y $\{v_k\}$.

Usando las ecuaciones (B.11) y (B.12), la ecuación (B.8) se reduce a:

$$\{e_{k+1}\} = [[A]-[K_k]\cdot[C]]\cdot\{e_k\} - [K_k]\cdot\{v_k\} + \{w_k\} \quad (\text{B.16})$$

La ecuación anterior muestra que el error $\{e_{k+1}\}$ depende del error en el estado previo $\{e_k\}$, y de los vectores asociados al ruido, $\{v_k\}$ y $\{w_k\}$.

Esto implica que el error $\{e_{k+1}\}$ se encuentra mutuamente correlacionado con los vectores $\{e_k\}$, $\{v_k\}$ y $\{w_k\}$. No así el error en el estado actual, $\{e_k\}$, que no depende de los vectores de ruido en el mismo estado, $\{v_k\}$ y $\{w_k\}$, es decir:

$$E[\{e_k\}\cdot\{w_k\}^T] = [0] \quad (\text{B.17})$$

$$E[\{e_k\}\cdot\{v_k\}^T] = [0] \quad (\text{B.18})$$

Asumiendo que no existe correlación entre los vectores de ruido del sistema, es decir:

$$E\left[\{w_k\} \cdot \{v_k\}^T\right] = [0] \quad (\text{B.19})$$

Luego, la covarianza del error de estimación puede obtenerse como:

$$[P_{k+1}] = E\left[\{e_{k+1}\} \cdot \{e_{k+1}\}^T\right] \quad (\text{B.20})$$

Desarrollando inicialmente el producto entre errores de estimación $\{e_{k+1}\} \cdot \{e_{k+1}\}^T$ se tiene:

$$\begin{aligned} \{e_{k+1}\} \cdot \{e_{k+1}\}^T &= \left(([A] - [K_k] \cdot [C]) \cdot \{e_k\} - [K_k] \cdot \{v_k\} + \{w_k\} \right) \cdot \dots \\ &\quad \dots \left(([A] - [K_k] \cdot [C]) \cdot \{e_k\} - [K_k] \cdot \{v_k\} + \{w_k\} \right)^T \\ \{e_{k+1}\} \cdot \{e_{k+1}\}^T &= \left(([A] - [K_k] \cdot [C]) \cdot \{e_k\} - [K_k] \cdot \{v_k\} + \{w_k\} \right) \cdot \dots \\ &\quad \dots \left(\{e_k\}^T \cdot [A] - [K_k] \cdot [C]^T - \{v_k\}^T \cdot [K_k]^T + \{w_k\}^T \right) \\ \{e_{k+1}\} \cdot \{e_{k+1}\}^T &= [A] - [K_k] \cdot [C] \cdot \{e_k\} \cdot \{e_k\}^T \cdot [A] - [K_k] \cdot [C]^T \\ &\quad - [A] - [K_k] \cdot [C] \cdot \{e_k\} \cdot \{v_k\}^T \cdot [K_k]^T \\ &\quad + [A] - [K_k] \cdot [C] \cdot \{e_k\} \cdot \{w_k\}^T \\ &\quad - [K_k] \cdot \{v_k\} \cdot \{e_k\}^T \cdot [A] - [K_k] \cdot [C]^T \\ &\quad + [K_k] \cdot \{v_k\} \cdot \{v_k\}^T \cdot [K_k]^T - [K_k] \cdot \{v_k\} \cdot \{w_k\}^T \\ &\quad + \{w_k\}^T \cdot \{e_k\}^T \cdot [A] - [K_k] \cdot [C]^T - \{w_k\} \cdot \{v_k\}^T \cdot [K_k]^T \\ &\quad + \{w_k\} \cdot \{w_k\}^T \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Ahora, tomando el valor esperado de (B.21) y utilizando las ecuaciones (B.17), (B.18) y (B.19) se llega a:

$$\begin{aligned}
[P_{k+1}] &= [[A] - [K_k] \cdot [C]] \cdot \left[E \left[\{e_k\} \cdot \{e_k\}^T \right] \right] \cdot [[A] - [K_k] \cdot [C]]^T \\
&+ [K_k] \cdot \left[E \left[\{v_k\} \cdot \{v_k\}^T \right] \right] \cdot [K_k]^T + \left[E \left[\{w_k\} \cdot \{w_k\}^T \right] \right]
\end{aligned} \tag{B.22}$$

Definiendo:

$$[R] = \left[E \left[\{v_k\} \cdot \{v_k\}^T \right] \right] \tag{B.23}$$

$$[Q] = \left[E \left[\{w_k\} \cdot \{w_k\}^T \right] \right] \tag{B.24}$$

Utilizando (B.23) y (B.24) en (B.22) se tiene:

$$[P_{k+1}] = [[A] - [K_k] \cdot [C]] \cdot [P_k] \cdot [[A] - [K_k] \cdot [C]]^T + [K_k] \cdot [R] \cdot [K_k]^T + [Q] \tag{B.25}$$

Cabe señalar que las matrices $[P_{k+1}]$ y $[P_k]$ son matrices simétricas. La covarianza $[P_k]$ entrega información acerca de que tan cerca se encuentra la variable aleatoria de su valor medio, en este caso, el error de estimación. Una alta covarianza indica gran incerteza en el valor encontrado.

El criterio para escoger la matriz $[K_k]$ corresponde a minimizar el valor esperado del cuadrado de la norma de $\{e_k\}$, que corresponde a una matriz. Esto se logra haciendo mínimo el valor de la traza de la matriz de covarianza $[P_k]$.

$$\begin{aligned}
J_k &= E \left[\{e_k\}^T \cdot \{e_k\} \right] = E \left[\text{traza} \left(\{e_k\}^T \cdot \{e_k\} \right) \right] \\
&= \text{traza} \left(E \left[\{e_k\}^T \cdot \{e_k\} \right] \right) = \text{traza} ([P_k])
\end{aligned} \tag{B.26}$$

La ecuación anterior resulta debido a que de las propiedades de las matrices se sabe que el cuadrado de la norma de $\{e_k\}$ es equivalente a la suma de los elementos de la diagonal de la matriz de covarianza del error de estimación $[P_k]$.

Para encontrar el valor de $[K_k]$ que haga mínimo el valor de la traza de la matriz de covarianza $[P_k]$, es necesario realizar la derivada parcial de J_{k+1} (o J_k) respecto de $[K_k]$ (o $[K_{k-1}]$) e igualando a cero.

Antes de realizar esta operación se debe recordar que la derivada parcial de la traza del producto de dos matrices, $[X]$, $[Y]$, relativa a $[X]$ es:

$$\frac{\partial [\text{traza}([X] \cdot [Y])]}{\partial [X]} = [Y]^T \quad (\text{B.27})$$

Y para el producto $([X][Y][X]^T)$ respecto de $[X]$ es:

$$\frac{\partial [\text{traza}([X] \cdot [Y] \cdot [X]^T)]}{\partial [X]} = 2 \cdot [X] \cdot [Y] \quad (\text{B.28})$$

Asumiendo que $[Y]$ es una matriz simétrica.

Utilizando las expresiones (B.27) y (B.28) para realizar la derivada parcial de J_{k+1} respecto de $[K_k]$ se tiene:

$$\frac{\partial J_{k+1}}{\partial [K_k]} = -2 \cdot [[A] - [K_k] \cdot [C]] \cdot [P_k] \cdot [C]^T + 2 \cdot [K_k] \cdot [R] = [0] \quad (\text{B.29})$$

De la ecuación (B.29) se obtiene el valor para $[K_k]$:

$$[K_k] = [A] \cdot [P_k] \cdot [C]^T \cdot \left[[R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \right]^{-1} \quad (\text{B.30})$$

La que se denomina Matriz de Ganancia de Kalman [JUANG 1994].

Sustituyendo la ecuación (B.30) en (B.25) y notando las siguientes simetrías:

$$[P_k] = [P_k]^T \quad (\text{B.31})$$

$$\left([R] + [C] \cdot [P] \cdot [C]^T \right) = \left([R] + [C] \cdot [P] \cdot [C]^T \right)^T \quad (\text{B.32})$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} [P_{k+1}] &= \left[[A] - [K_k] \cdot [C] \right] \cdot [P_k] \cdot \left[[A] - [K_k] \cdot [C] \right]^T \\ &\quad + [K_k] \cdot [R] \cdot [K_k]^T + [Q] \\ &= \left[[A] - [A] \cdot [P_k] \cdot [C]^T \cdot \left[[R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \right]^{-1} \cdot [C] \right] \\ &\quad \cdot [P_k] \cdot \left([A] - [A] \cdot [P_k] \cdot [C]^T \cdot \left[[R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \right]^{-1} \cdot [C] \right)^T \\ &\quad + [A] \cdot [P_k] \cdot [C]^T \cdot \left[[R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \right]^{-1} \cdot [R] \\ &\quad \cdot \left([A] \cdot [P_k] \cdot [C]^T \cdot \left[[R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \right]^{-1} \right)^T + [Q] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[P_{k+1}] = & \left[[A] - [A] \cdot [P_k] \cdot [C]^T \cdot \left[[R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \right]^{-1} \cdot [C] \right] \\
& \cdot [P_k] \cdot \left([A]^T - [C]^T \cdot \left(\left[[R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \right]^{-1} \right)^T \cdot [C] \cdot [P_k]^T \cdot [A]^T \right) \\
& + [A] \cdot [P_k] \cdot [C]^T \cdot \left[[R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \right]^{-1} \cdot [R] \\
& \cdot \left(\left[[R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \right]^{-1} \right)^T [C] \cdot [P_k]^T [A]^T + [Q]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[P_{k+1}] = & \left[[A] \cdot [P_k] - [A] \cdot [P_k] \cdot [C]^T \cdot \left[[R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \right]^{-1} \cdot [C] \cdot [P_k] \right] \\
& \cdot \left([A]^T - [C]^T \cdot \left(\left[[R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \right]^{-1} \right)^T \cdot [C] \cdot [P_k]^T \cdot [A]^T \right) \\
& + [A] \cdot [P_k] \cdot [C]^T \cdot \left[[R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \right]^{-1} \cdot [R] \\
& \cdot \left(\left[[R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \right]^{-1} \right)^T [C] \cdot [P_k]^T [A]^T + [Q]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[P_{k+1}] &= [A] \cdot [P_k] \cdot [A]^T - [A] \cdot [P_k] [C]^T \cdot \left([R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \right)^{-1} \\
&\quad \cdot [C] \cdot [P_k] \cdot [A]^T - [A] \cdot [P_k] \cdot [C]^T \cdot [R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \\
&\quad \cdot [C] \cdot [P_k] \cdot [A]^T + [A] \cdot [P_k] \cdot [C]^T \cdot [R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \\
&\quad \cdot [C] \cdot [P_k] \cdot [C]^T \cdot \left([R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \right)^{-1} \cdot [C] \cdot [P_k] \\
&\quad \cdot [A]^T + [A] \cdot [P_k] \cdot [C]^T \cdot [R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \cdot [R] \\
&\quad \cdot \left([R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \right)^{-1} [C] \cdot [P_k] [A]^T + [Q]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[P_{k+1}] &= [A] \cdot [P_k] \cdot [A]^T + [Q] - [A] \cdot [P_k] [C]^T \cdot \left([R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \right)^{-1} \\
&\quad \cdot [C] \cdot [P_k] \cdot [A]^T \\
&\quad + [A] \cdot [P_k] \cdot [C]^T \cdot \left(\begin{array}{l} -[R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T + [R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \\ \cdot [C] \cdot [P_k] \cdot [C]^T \cdot \left([R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \right)^{-1} + [A] \\ \cdot [P_k] \cdot [C]^T \cdot [R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \cdot [R] \\ \cdot \left([R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \right)^{-1} \end{array} \right) \\
&\quad \cdot [C] \cdot [P_k] \cdot [A]^T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[P_{k+1}] &= [A] \cdot [P_k] \cdot [A]^T + [Q] - [A] \cdot [P_k] [C]^T \cdot \left([R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \right)^{-1} \\
&\quad \cdot [C] \cdot [P_k] \cdot [A]^T \\
&\quad + [A] \cdot [P_k] \cdot [C]^T \cdot \left(\begin{array}{l} -[R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T + [R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \\ \cdot [C] \cdot [P_k] \cdot [C]^T \cdot \left([R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \right)^{-1} + \\ \left[[R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \right]^{-1} \cdot [R] \cdot \left([R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \right)^{-1} \end{array} \right) \\
&\quad \cdot [C] \cdot [P_k] \cdot [A]^T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[P_{k+1}] &= [A] \cdot [P_k] \cdot [A]^T + [Q] - [A] \cdot [P_k] [C]^T \cdot \left(\left[[R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \right]^{-1} \right)^T \\
&\quad \cdot [C] \cdot [P_k] \cdot [A]^T \\
&\quad + [A] \cdot [P_k] \cdot [C]^T \left(- \left[[R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \right]^{-1} + \left[[R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \right]^{-1} \right) \\
&\quad \cdot \left(\left[[R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \right] \cdot \left(\left[[R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \right]^{-1} \right)^T \right) \\
&\quad \cdot [C] \cdot [P_k] \cdot [A]^T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[P_{k+1}] &= [A] \cdot [P_k] \cdot [A]^T + [Q] - [A] \cdot [P_k] [C]^T \cdot \left(\left[[R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \right]^{-1} \right)^T \\
&\quad \cdot [C] \cdot [P_k] \cdot [A]^T \\
&\quad + [A] \cdot [P_k] \cdot [C]^T \left(- \left[[R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \right]^{-1} + \left(\left[[R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \right]^{-1} \right)^T \right) \\
&\quad \cdot [C] \cdot [P_k] \cdot [A]^T
\end{aligned}$$

Pero por las de simetría (B.32) se tiene:

$$\left(- \left[[R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \right]^{-1} + \left(\left[[R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \right]^{-1} \right)^T \right) = [0]$$

Luego, reemplazando en el desarrollo anterior se obtiene:

$$\begin{aligned}
[P_{k+1}] &= [A] \cdot [P_k] \cdot [A]^T + [Q] - [A] \cdot [P_k] [C]^T \\
&\quad \cdot \left(\left[[R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \right]^{-1} \right)^T \cdot [C] \cdot [P_k] \cdot [A]^T
\end{aligned}$$

Reordenando términos se llega a que:

$$\begin{aligned}
[P_{k+1}] &= [A] \cdot [P_k] \cdot [A]^T - [A] \cdot [P(k)] [C]^T \cdot \left(\left[[R] - [C] \cdot [K_k] \cdot [C]^T \right]^{-1} \right)^T \\
&\quad \cdot [C] \cdot [P_k] \cdot [A]^T + [Q]
\end{aligned} \tag{B.33}$$

O bien:

$$[P_{k+1}] = ([A] - [K_k] \cdot [C]) \cdot [P_k] \cdot [A]^T + [Q] \quad (\text{B.34})$$

La ecuación anterior se denomina Ecuación Algebraica Discreta de Ricatti [JUANG, 1994].

Finalmente se tiene el estimador óptimo $[K_k]$ que hace mínimo el error de estimación, por medio de la relación con la matriz de covarianza.

Apéndice C

Transformada Z.

C.1 Introducción

Así como la transformada de Fourier permite pasar del espacio del tiempo al espacio de las frecuencias, la Transformada Z (denominada en adelante como TZ) opera de forma análoga, pasando del espacio del tiempo a un espacio, digamos "Z", por medio de una transformación.

Su utilidad esta basada en que los datos medidos (series de tiempo) son discretos, y por lo tanto su definición esta basada en este concepto.

Es análoga a la transformada S (también llamada transformada de Laplace) pero para una serie de tiempo discreta.

C.2 Definiciones.

C.2.1 Transformada Z

La TZ se define para una función discreta $y(k\Delta t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ como:

$$Z(y(k\Delta t)) = y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k\Delta t) z^{-k} \quad (\text{B.1})$$

Observaciones:

- La TZ solo depende de los valores que toma y , es decir, todas las funciones discretas que toman los mismos valores, para un muestreo definido, tendrán la misma TZ. Por lo tanto, existen infinitas funciones con la misma TZ.

C.2.2 Pulso.

Se define matemáticamente como:

$$\delta\Delta(t-t_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_k \\ \frac{1}{\Delta t} & \text{si } t_k \leq t \leq t_k + \Delta t \\ 0 & \text{si } t_k \geq t_k + \Delta t \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

C.2.3 .Impulso.

Se define matemáticamente como:

$$\delta(t-t_k) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \delta\Delta(t-t_k) \quad (\text{B.3})$$

Y posee las siguientes propiedades:

$$\int_0^{\infty} \delta(t - t_k) dt = 1 \quad (\text{B.4})$$

$$\int_0^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - t_k) dt = f(t_k) \quad (\text{B.5})$$

A partir de la definición (B.5), cualquier función discreta puede definirse como:

$$\{y(k\Delta t), k = 0, 1, 2, \dots\} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} y(t) \cdot \delta(t - k\Delta t) \right\} \quad (\text{B.6})$$

Se tendrá que $\delta = 1$ cuando $t = k\Delta t$

C.3 Relación de la TZ con la Transformada de Laplace.

Tomando la transformada de Laplace de la ecuación (B.6) se tiene:

$$L \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} y(t) \cdot \delta(t - k\Delta t) \right\} = y(s) = \int_0^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} y(t) \cdot \delta(t - k\Delta t) \right) e^{-st} dt \quad (\text{B.7})$$

De la propiedad (B.5) se deduce que:

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} y(t) \cdot \delta(t - k\Delta t) \right) \cdot e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{\infty} y(k\Delta t) e^{-s \cdot k\Delta t} = \sum_{k=0}^{\infty} y(k\Delta t) \left(e^{s \cdot \Delta t} \right)^{-K} = y(z) \quad (\text{B.8})$$

Con $z = e^{s \cdot \Delta t}$

Conclusión: la transformada de Laplace de una señal discreta puede obtenerse a través de la TZ haciendo $z = e^{s \cdot \Delta t}$.

C.4 Algunas TZ.

Tabla C.1. Ejemplos de Transformada Z

$y(t)$	$Z(y(k \cdot \Delta t))$
t	$\frac{z \cdot \Delta t}{(z-1)^2}$
$e^{-a \cdot t}$	$\frac{z}{(z - e^{-a \cdot \Delta t})}$
$sen(\omega \cdot t)$	$\frac{z \cdot sen(\omega \cdot \Delta t)}{(z^2 - 2 \cdot z \cdot cos(\omega \cdot \Delta t) + 1)}$
$cos(\omega \cdot t)$	$\frac{z \cdot (z - cos(\omega \cdot \Delta t))}{(z^2 - 2 \cdot z \cdot cos(\omega \cdot \Delta t) + 1)}$

C.5 Transformada Z del modelo Espacio-Estado Discreto.

El modelo Espacio-Estado Discreto se describe como:

$$\{x_{k+1}\} = [A] \cdot \{x_k\} + [B] \cdot \{u_k\} \quad (\text{B.9})$$

$$\{y_k\} = [C] \cdot \{x_k\} + [D] \cdot \{u_k\} \quad (\text{B.10})$$

Tomando la TZ de (B.9) se tiene:

$$Z(\{x_{k+1}\}) = \sum_{k=0}^{\infty} \{x_{k+1}\} \cdot z^{-k} = z \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \{x_{k+1}\} \cdot z^{-(k+1)} = z \cdot \left(\sum_{k=-1}^{\infty} \{x_{k+1}\} \cdot z^{-(k+1)} - \{x_0\} \right) \quad (\text{B.11})$$

De donde la ultima igualdad resulta de agregar y sustraer el término x_0 . Ahora, haciendo el cambio de variables $k' = k + 1$ se tiene lo siguiente:

$$z \cdot \left(\sum_{k=-1}^{\infty} \{x_{k+1}\} \cdot z^{-(k+1)} - \{x_0\} \right) = z \cdot \left(\sum_{k'=0}^{\infty} \{x_{k'}\} \cdot z^{-k'} - \{x_0\} \right) = z \cdot \left(Z(\{x_k\}) - \{x_0\} \right) \quad (\text{B.12})$$

Si se toma la TZ de la definición de (B.9) se tendrá lo siguiente:

$$\begin{aligned} Z(\{x_{k+1}\}) &= Z([A]\{x_{k+1}\} + [B]\{u_k\}) \\ &= z \cdot Z(\{x_k\}) - z \cdot \{x_0\} = [A] \cdot Z(\{x_k\}) + [B] \cdot Z(\{u_k\}) \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Asumiendo condiciones iniciales nulas, es decir $x(0) = 0$ y dado que:

$$Z(\{x_k\}) \triangleq \{x_k^z\}$$

$$Z(\{u_k\}) \triangleq \{u_k^z\}$$

De la ecuación (B.13) se tendrá:

$$\begin{aligned} z \cdot \{x_k^z\} &= [A] \cdot \{x_k^z\} + [B] \cdot \{u_k^z\} \Rightarrow z \cdot \{x_k^z\} - [A] \cdot \{x_k^z\} = [B] \cdot \{u_k^z\} \\ \Rightarrow (z \cdot [I] - [A]) \cdot \{x_k^z\} &= [B] \cdot \{u_k^z\} \\ \Rightarrow \{x_k^z\} &= (z \cdot [I] - [A])^{-1} \cdot [B] \cdot \{u_k^z\} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Luego, reemplazando (B.14) en (B.10) se deduce que:

$$\begin{aligned}
\{y_k^z\} &= [C] \cdot \left[(z \cdot [I] - [A])^{-1} \cdot [B] \cdot \{u_k^z\} \right] + [D] \cdot \{u_k^z\} \\
&= \left[[C] \cdot (z \cdot [I] - [A])^{-1} \cdot [B] + [D] \right] \cdot \{u_k^z\}
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Teniendo en cuenta el modelo espacio estado discreto con condiciones iniciales nulas y desarrollándolo se tendrá la siguiente recursividad:

$$\begin{aligned}
\{x_0\} &= \{0\} \\
\{y_0\} &= \{0\} \\
\{x_1\} &= [B] \cdot \{u_0\} \\
\{y_1\} &= [C] \cdot [B] \cdot \{u_0\} + [D] \cdot \{u_1\} \\
\{x_2\} &= [A] \cdot [B] \cdot \{u_0\} + [B] \cdot \{u_1\} \\
\{y_2\} &= [C] \cdot [A] \cdot [B] \cdot \{u_0\} + [C] \cdot [B] \cdot \{u_1\} + [D] \cdot \{u_2\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\{x_k\} = \sum_{i=1}^k [A]^{i-1} \cdot [B] \cdot \{u_{k-i}\} \tag{B.16}$$

$$\{y_k\} = \sum_{i=1}^k [C] \cdot [A]^{i-1} \cdot [B] \cdot \{u_{k-i}\} + [D] \cdot \{u_k\} \tag{B.17}$$

Además si,

$$\begin{aligned}
Z(\{x_{k+1}\}) &= z \cdot Z(\{x_k\}) \Rightarrow Z(\{x_k\}) = z \cdot Z(\{x_{k-1}\}) \\
&\Rightarrow Z(\{x_{k-1}\}) = z^{-1} \cdot Z(\{x_k\})
\end{aligned} \tag{B.18}$$

Asumiendo que $\{u_{-1}\} = \{u_{-2}\} = \{u_{-k}\} = \{0\}$, suponiendo que el tiempo partido es en 0, y haciendo la transformación $i = i'+1$ se tendrá lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\{y_k\} &= \sum_{i=1}^k \left[[C] \cdot [A]^{i-1} \cdot [B] \cdot \{u_{k-i}\} \right] + [D] \cdot \{u_k\} = \sum_{i'=0}^{k-1} \left[[C] \cdot [A]^{i'} \cdot [B] \cdot \{u_{k-(i'+1)}\} \right] + [D] \cdot \{u_k\} \\
&= \sum_{i'=0}^{\infty} \left[[C] \cdot [A]^{i'} \cdot [B] \cdot \{u_{k-(i'+1)}\} \right] + [D] \cdot \{u_k\}
\end{aligned} \tag{B.19}$$

Luego, tomando la TZ de la ecuación (B.19) se tendrá:

$$\{y_k^z\} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i'=0}^{\infty} \left[[C][A]^{i'} [B] \{u_{k-(i'+1)}\} \right] + [D] \{u_k\} \right) \cdot z^{-k} \tag{B.20}$$

Intercambiando sumatorias se tiene:

$$\{y_k^z\} = \sum_{i'=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left[\{u_{k-(i'+1)}\} \cdot z^{-k} \right] \cdot [C] \cdot [A]^{i'} \cdot [B] \right) + \sum_{k=0}^{\infty} [D] \cdot \{u_k\} \cdot z^{-k} \tag{B.21}$$

Pero por la propiedad (B.18) se tiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\{u_{k-(i'+1)}\} \cdot z^{-k} \right] = Z \left(\{u_{k-(i'+1)}\} \right) = z^{-(i'+1)} \cdot \{u_k\} \tag{B.22}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} [D] \cdot \{u_k\} \cdot z^{-k} = [D] \cdot \{u_k\}$$

Reemplazando (B.22) en (B.21) se tiene:

$$\begin{aligned}
\{y_k^z\} &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} [\{u_{k-(i+1)}\} \cdot z^{-k}] \cdot [C] \cdot [A]^{i'} \cdot [B] \right) + \sum_{k=0}^{\infty} [D] \cdot \{u_k\} \cdot z^{-k} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \left[z^{-(i'+1)} \cdot \{u_k^z\} \cdot [C] \cdot [A]^{i'} \cdot [B] \right] + [D] \cdot \{u_k^z\}
\end{aligned} \tag{B.23}$$

$$\{y_k^z\} = \sum_{i=0}^{\infty} \left[[C] \cdot [A]^{i'} \cdot [B] \cdot \{u_k^z\} \cdot z^{-(i'+1)} \right] + [D] \cdot \{u_k^z\}$$

Finalmente, de las ecuaciones (B.23) y (B.15) se tiene la siguiente igualdad:

$$C \left[(z \cdot I - A)^{-1} \cdot B \cdot u(z) \right] = \sum_{i=0}^{\infty} \left[CA^{i'} B \cdot u(z) \cdot z^{-(i'+1)} \right] \tag{B.24}$$

Con lo que se concluye que:

$$y(z) = C \left[(z \cdot I - A)^{-1} \cdot B \cdot u(z) \right] + D \cdot u(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \left[CA^{i'} B \cdot u(z) \cdot z^{-(i'+1)} \right] + Du(z) \tag{B.25}$$

La característica de este modelo es observar la respuesta de un pulso en función de la entrada o *input*.

Observación:

De la ecuación (B.24) puede deducirse la siguiente igualdad:

$$\left[(z \cdot I - A)^{-1} \right] = \sum_{i=0}^{\infty} \left[A^{i'} \cdot z^{-(i'+1)} \right] \tag{B.26}$$

La cual será utilizada más adelante.

C.6 Transformada Z de la secuencia de ponderación (Parámetros de Markov)

De la ecuación (B.17) que correspondía al modelo espacio estado discreto se tenía que:

$$y(k) = \sum_{i=1}^k CA^{i-1}Bu(k-i) + Du(k) \quad (\text{B.27})$$

Si desarrollamos esta expresión para $k = 0, 1, 2, \dots$ se puede observar lo siguiente:

$$\begin{aligned} y(0) &= D \cdot u(0) \\ y(1) &= C \cdot B \cdot u(k-1) + D \cdot u(1) \\ y(2) &= C \cdot B \cdot u(k-1) + C \cdot A \cdot B \cdot u(k-2) + D \cdot u(2) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Dado lo anterior, se define:

$$\begin{aligned} Y_0 &= D \\ Y_1 &= C \cdot B \\ Y_2 &= C \cdot A \cdot B \\ &\vdots \\ Y_k &= C \cdot A^{k-1} \cdot B \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Estas matrices se denominan Parámetros de Markov.

Observación:

¿Cuál es la $\dim[Y_k]$ (Parámetros de Markov)?

Del modelo espacio estado discreto se sabe que:

$$\begin{aligned}
[C] &\in \mathbb{R}^{l \times n} \\
[A] &\in \mathbb{R}^{n \times n} \\
[B] &\in \mathbb{R}^{n \times m}
\end{aligned}$$

Donde:

l = número de outputs

n = orden del modelo espacio estado (= $2n_2$, con n_2 numero de grados de libertad del sistema)

m = número de inputs

Luego $\dim[Y_k] = \dim[CA^{k-1}B] = (l \times n) \times (n \times n) \times (n \times m) = l \times m = \text{output} \times \text{input}$

A partir de la definición de los Parámetros de Markov (B.29), es posible reescribir la ecuación (B.27) como:

$$\begin{aligned}
y(k) &= \sum_{i=1}^k CA^{i-1}Bu(k-i) + Du(k) = Du(k) + \sum_{i=1}^k CA^{i-1}Bu(k-i) \\
&= Y_0u(k) + Y_1u(k-1) + Y_2u(k-2) + \dots + Y_ku(0)
\end{aligned} \tag{B.30}$$

Finalmente se deduce que:

$$y(k) = \sum_{i=0}^k Y_k \cdot u(k-i) \tag{B.31}$$

De esta ultima ecuación puede observarse que la contribución al *output* ($y(k)$) en el k -ésimo paso debido al *input* aplicado en el paso k y en los pasos previos, $k-1, k-2$, etc. están ponderados por los parámetros de Markov. Esta secuencia se denomina “secuencia de ponderación”.

Notar que la secuencia de ponderación no es otra cosa que una colección de respuestas de pulsos que modela una serie continua de tiempo.

Dado que $Y_k = f(A, B, C, D)$, éstos deben ser únicos para cada sistema. Esto se puede demostrar haciendo cualquier transformación de coordenadas. Digamos $g(k) = Tx(k)$, luego:

$$Y_k = C \cdot T^{-1} \cdot (T \cdot A \cdot T^{-1})^{k-1} \cdot T \cdot B = C \cdot A^{k-1} \cdot B$$

Luego, existen infinitas transformaciones de coordenadas que producen los mismos Parámetros de Markov.

Esta secuencia utiliza la respuesta a un pulso para describir la relación *input-output* en vez de usar la relación de estado.

Este modelo (secuencia de ponderación) no requiere una ecuación de estado como paso intermedio para procesar los *outputs* a partir de los *inputs*.

Veamos ahora la TZ de este modelo:

$$Z(y(k)) = y(z) = Z \left[\sum_{i=0}^k Y_i u(k-i) \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\sum_{i=0}^k Y_i u(k-i) \right) \cdot z^{-k} \right] \quad (\text{B.32})$$

Asumiendo que no hay fuerzas aplicadas antes del tiempo de partida de las mediciones ($k = 0$), es decir $u(-1) = u(-2) = u(-k) = 0$, se tendrá que:

$$\sum_{i=0}^k Y_i \cdot u(k-i) = \sum_{i=0}^{\infty} Y_i \cdot u(k-i) \quad (\text{B.33})$$

Sustituyendo (B.33) en (B.32) e intercambiando sumatorias:

$$\begin{aligned}
 y(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\sum_{i=0}^k Y_i u(k-i) \right) \cdot z^{-k} \right] = \sum_{i=0}^{\infty} \left[Y_i \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} u(k-i) \cdot z^{-k} \right) \right] \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \left[Y_i \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} u(k-i) \cdot z^{-k} \right) \right] = \sum_{i=0}^{\infty} \left[Y_i \cdot z^{-i} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} u(k-i) \cdot z^{-(k-i)} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{B.34}$$

Haciendo el cambio de variables $k' = k - i$ se tiene:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{\infty} \left[Y_i \cdot z^{-i} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} u(k-i) \cdot z^{-(k-i)} \right) \right] &= \sum_{i=0}^{\infty} \left[Y_i \cdot z^{-i} \cdot \left(\sum_{k'=-i}^{\infty} u(k') \cdot z^{-(k')} \right) \right] \\
 = \sum_{i=0}^{\infty} \left[Y_i \cdot z^{-i} \cdot \left(\sum_{k'=0}^{\infty} u(k') \cdot z^{-(k')} \right) \right] &= \sum_{i=0}^{\infty} \left[Y_i \cdot z^{-i} \cdot \left(\sum_{k'=0}^{\infty} u(k') \cdot z^{-(k')} \right) \right] \\
 \sum_{i=0}^{\infty} \left[Y_i \cdot z^{-i} \cdot (u(z)) \right] &= \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left[Y_i \cdot z^{-i} \right] \right] \cdot u(z)
 \end{aligned} \tag{B.35}$$

Finalmente:

$$y(z) = \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left[Y_i \cdot z^{-i} \right] \right] \cdot u(z) \tag{B.36}$$

Con esto se deduce una expresión para la TZ de $y(k)$ en función de los Parámetros de Markov y la TZ del *input*.

C.7 Transformada Z del modelo espacio estado observado.

El modelo espacio estado de un sistema lineal describe la relación *input-output* a través del vector de estado $x(k)$.

Por lo general, el vector de estado no es obtenible de forma directa a partir de las mediciones.

Un estimador de estado, también denominado observador, puede ser usado para entregar una estimación del estado del sistema a partir de las mediciones de *input* y *output*.

Si reescribimos la ecuación de estado (B.9), agregando y sustrayendo el término $G \cdot y(k)$, siendo $G \in \mathbb{R}^{n \times l}$ (con l número de outputs y n orden del modelo espacio estado) una matriz arbitraria se tiene:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) = Ax(k) + Bu(k) + Gy(k) - Gy(k) \quad (\text{B.37})$$

Pero

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \Rightarrow Gy(k) = GCx(k) + GDu(k) \quad (\text{B.38})$$

Reemplazando (B.38) en (B.37):

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + GCx(k) + GDu(k) - Gy(k) \\ &= (A + GC)x(k) + (B + GD)u(k) - Gy(k) \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

Definiendo:

$$\bar{A} = A + GC$$

$$\bar{B} = [B + GD \quad \vdots \quad -G] \quad (\text{B.40})$$

$$v = \begin{bmatrix} u(k) \\ y(k) \end{bmatrix}$$

Se tendrá:

$$x(k+1) = \bar{A}x(k) + \bar{B}v(k) \quad (\text{B.41})$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (\text{B.42})$$

Las ecuaciones (B.41) y (B.42) constituyen el modelo espacio estado observado.

Debido a que G puede ser arbitraria, la matriz \bar{A} puede ser tan asintóticamente estable como se quiera. Esto se traduce en que al elevar esta matriz a una potencia, tienda a cero rápidamente.

EJEMPLO 1

En este ejemplo se verá la rápida convergencia de la matriz A debido a una correcta (y óptima) elección de la matriz G .

Suponiendo que se tiene un sistema de 1 grado de libertad, en donde se tiene una fuerza como *input*, denominada $u(t)$, y donde se medirá como *output* aceleraciones relativas al apoyo, denominadas por $\ddot{v}(t)$, con un muestreo constante en tiempo Δt .

A continuación se muestra un esquema del sistema:

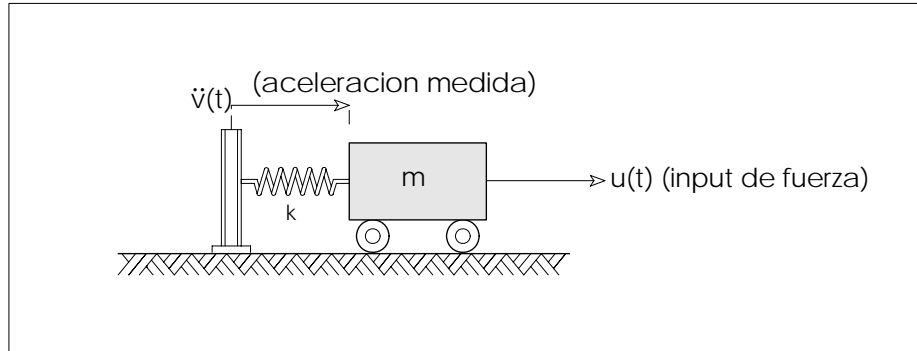


Figura C.1: Sistema de 1 GDL. Ejemplo.

Asumiendo que el sistema tiene masa y rigidez unitaria, es decir, $m = k = 1$, la ecuación diferencial de equilibrio dinámico para este sistema es:

$$\ddot{v}(t) + v(t) = u(t)$$

Esta ecuación, escrita en términos de un sistema espacio estado continuo queda:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \ddot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v \\ \dot{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t) = A_c \cdot x(t) + B_c \cdot u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v \\ \dot{v} \end{bmatrix} + u(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t)$$

De donde:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_c = C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_c = D = 1$$

Para obtener las matrices del modelo espacio estado discreto notar que:

$$A_c^2 = A_c A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_c^3 = A_c A_c^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_c^4 = A_c A_c^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A partir de la deducción de la relación entre modelo espacio estado continuo y discreto se sabe que (asumiendo que la serie de tiempo es constante entre dos instantes de tiempo consecutivos, según el sampleo que tenga la serie):

$$A = e^{A_c \cdot \Delta t}$$

$$B = \left[\int_0^{\Delta t} e^{A_c \cdot \tau} d\tau \right] \cdot B_c$$

Cuyas series de expansión pueden escribirse como:

$$A = I + A_c \cdot \Delta t + \frac{1}{2!}(A_c \cdot \Delta t)^2 + \frac{1}{3!}(A_c \cdot \Delta t)^3 + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2!}\Delta t^2 + \frac{1}{4!}\Delta t^4 + \dots & \Delta t - \frac{1}{3!}\Delta t^3 + \frac{1}{5!}\Delta t^5 + \dots \\ -\left(\Delta t - \frac{1}{3!}\Delta t^3 + \frac{1}{5!}\Delta t^5 + \dots\right) & 1 - \frac{1}{2!}\Delta t^2 + \frac{1}{4!}\Delta t^4 + \dots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\Delta t) & \sin(\Delta t) \\ -\sin(\Delta t) & \cos(\Delta t) \end{bmatrix}$$

$$B = I \left[\Delta t + \frac{1}{2!}A_c \cdot (\Delta t)^2 + \frac{1}{3!}A_c^2 \cdot (\Delta t)^3 + \dots \right] \cdot B_c$$

$$= \begin{bmatrix} \Delta t - \frac{1}{3!}\Delta t^3 + \frac{1}{5!}\Delta t^5 + \dots & 1 - \left(1 - \frac{1}{2!}\Delta t^2 + \frac{1}{4!}\Delta t^4 + \dots\right) \\ -1 + \left(1 - \frac{1}{2!}\Delta t^2 + \frac{1}{4!}\Delta t^4 + \dots\right) & \Delta t - \frac{1}{3!}\Delta t^3 + \frac{1}{5!}\Delta t^5 + \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sin(\Delta t) & 1 - \cos(\Delta t) \\ -1 + \cos(\Delta t) & \sin(\Delta t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \cos(\Delta t) \\ \sin(\Delta t) \end{bmatrix}$$

Finalmente se concluye que:

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\Delta t) & \sin(\Delta t) \\ -\sin(\Delta t) & \cos(\Delta t) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 - \cos(\Delta t) \\ \sin(\Delta t) \end{bmatrix}$$

$$C = [-1 \ 0]$$

$$D = 1$$

Sea:

$$G = \begin{bmatrix} 2 \cos(\Delta t) \\ -\sin(\Delta t) + \frac{\cos^2(\Delta t)}{\sin(\Delta t)} \end{bmatrix}$$

Luego:

$$\bar{A} = A + GC = \begin{bmatrix} -\cos(\Delta t) & \sin(\Delta t) \\ \frac{-\cos^2(\Delta t)}{\sin(\Delta t)} & \cos(\Delta t) \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = [B + GD \quad \vdots \quad -G] = \begin{bmatrix} 1 + \cos(\Delta t) & -2 \cos(\Delta t) \\ \frac{\cos^2(\Delta t)}{\sin(\Delta t)} & \sin(\Delta t) - \frac{\cos^2(\Delta t)}{\sin(\Delta t)} \end{bmatrix}$$

¿Cuál es la diferencia entre A y \bar{A} ?

En primera instancia, todos los valores propios de \bar{A} son nulos. Por otro lado, la propiedad más importante es que se cumple:

$$\bar{A}^2 = \bar{A}^3 = \bar{A}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A partir de esta propiedad se puede deducir que la matriz \bar{A} es asintóticamente estable, en el sentido que sólo necesita elevarse a una potencia de 2 para decaer completamente a una matriz nula.

La utilidad de esta propiedad se ve reflejada en la serie infinita de Parámetros de Markov, en el modelo de secuencia de ponderación descrito anteriormente, ya que dichos parámetros están definidos en función de la matriz A (o \bar{A} como se verá a continuación) y sus respectivas potencias.

Por otra parte, se puede observar que la matriz A no es asintóticamente estable. Basta ver que:

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos(n\Delta t) & \sin(n\Delta t) \\ -\sin(n\Delta t) & \cos(n\Delta t) \end{bmatrix}$$

Valores que no tienden a una matriz nula, por mas grande que sea n .

El rol de G se denomina “observador”. En este sentido, el sistema (B.37) tiene la siguiente forma, en términos de una estimación del modelo espacio estado observado:

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) = Ax(k) + Bu(k) + G\hat{y}(k) - Gy(k) \quad (\text{B.43})$$

$$\hat{y}(k) = C\hat{x}(k) + Du(k) \quad (\text{B.44})$$

Donde $\hat{x}(k)$ es un estado estimado de $x(k)$ e $\hat{y}(k)$ es el *output* estimado. Cabe notar que la condición inicial para el vector de estado observado es arbitraria. De esta forma las ecuaciones anteriormente descritas constituyen una estimación del modelo espacio estado observado.

Usando la ecuación (B.44) en (B.43) se tiene:

$$\begin{aligned}
\hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) + Bu(k) - G[y(k) - C\hat{x}(k) - Du(k)] \\
&= A\hat{x}(k) + Bu(k) - Gy(k) + GC\hat{x}(k) + GDu(k) \\
&= (A + GC)\hat{x}(k) + (B + GD)u(k) - Gy(k) \\
&= \bar{A}\hat{x}(k) + \bar{B}v(k)
\end{aligned} \tag{B.45}$$

Definiendo el error de la estimación del estado en k como:

$$e(k) = x(k) - \hat{x}(k) \tag{B.46}$$

Se tendrá:

$$\begin{aligned}
e(k+1) &= x(k+1) - \hat{x}(k+1) \\
&= Ax(k) + Bu(k) - [(A + GC)\hat{x}(k) + (B + GD)u(k) - Gy(k)] \\
&= Ax(k) + Bu(k) - [(A + GC)\hat{x}(k) + (B + GD)u(k) - (GCx(k) + GDu(k))] \\
&= Ax(k) + Bu(k) - A\hat{x}(k) - GC\hat{x}(k) - Bu(k) - GDu(k) + GCx(k) + GDu(k) \\
&= Ax(k) - A\hat{x}(k) - GC\hat{x}(k) + GCx(k) \\
&= (A + GC)(x(k) - \hat{x}(k)) \\
&= (A + GC)e(k) \\
&= \bar{A}e(k)
\end{aligned}$$

Finalmente:

$$e(k+1) = \bar{A}e(k) \quad (\text{B.47})$$

Luego, para un cierto k , si la matriz \bar{A} es asintóticamente estable, el estado estimado $\hat{x}(k)$ tenderá al valor $x(k)$.

Teóricamente es posible escoger la matriz G para hacer que el error del estado estimado disminuya de forma rápida.

En la presencia de procesos y ruidos ambientales medidos, bajo condiciones iniciales definidas, el observador de más rápida convergencia corresponde a los FILTROS DE KALMAN.

Siguiendo con la TZ del modelo espacio estado observado:

De forma análoga a las ecuaciones (B.14) y (B.15) del modelo espacio estado discreto, en las que se tenía:

$$\begin{aligned} x(z) &= (z \cdot I - A)^{-1} \cdot B \cdot u(z) \\ y(z) &= C \left[(z \cdot I - A)^{-1} \cdot B \cdot u(z) \right] + D \cdot u(z) \end{aligned}$$

Se puede demostrar, que la aplicación del a TZ al modelo espacio estado observado (B.41) y (B.42), bajo condiciones iniciales nulas (es decir, $x(0) = 0$) corresponde a:

$$x(z) = (z \cdot I - \bar{A})^{-1} \cdot \bar{B} \cdot v(z) \quad (\text{B.48})$$

$$y(z) = C \left[(z \cdot I - \bar{A})^{-1} \cdot \bar{B} \cdot v(z) \right] + D \cdot u(z) \quad (\text{B.49})$$

Usando las definiciones de la matriz \bar{B} y del vector v se tendrá:

$$\begin{aligned}
 y(z) &= C \left[(z \cdot I - \bar{A})^{-1} \cdot \bar{B} \cdot v(z) \right] + D \cdot u(z) \\
 &= C \left[(z \cdot I - \bar{A})^{-1} \right] \cdot \begin{bmatrix} B + GD & \vdots & -G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(z) \\ y(z) \end{bmatrix} + D \cdot u(z)
 \end{aligned}
 \tag{B.50}$$

Desarrollando la ecuación anterior se llega a:

$$\left[I + C \left[z \cdot I - \bar{A} \right]^{-1} G \right] y(z) = \left[C \left[z \cdot I - \bar{A} \right]^{-1} [B + GD] + D \right] \cdot u(z)
 \tag{B.51}$$

Finalmente:

$$y(z) = \left\{ \left[I + C \left[z \cdot I - \bar{A} \right]^{-1} G \right]^{-1} \cdot \left[C \left[z \cdot I - \bar{A} \right]^{-1} [B + GD] + D \right] \right\} \cdot u(z)
 \tag{B.52}$$

Si comparamos la ecuación anterior con la ecuación (B.15) ($y(z) = \left[C \left[(z \cdot I - A)^{-1} \cdot B \right] + D \right] \cdot u(z)$), es posible observar que, si bien son diferentes, representan el mismo problema *input-output*.

La pregunta que surge es si realmente corresponden a la misma TZ. La respuesta es afirmativa y su demostración es simple pero requiere de bastantes pasos algebraicos^{c.1}.

^{c.1} Ver Jer-Nan Juang, "Applied System Identification". 1994. Prentice Hall. Capítulo 3, pp. 72-73

C.8 Transformada Z del modelo de diferencia lineal.

De la ecuación (B.31) se sabe que es posible deducir del modelo espacio estado discreto un modelo denominado secuencia de ponderación, basado en los Parámetros de Markov como:

$$y(k) = \sum_{i=0}^k Y_k \cdot u(k-i)$$

Por otra parte, se puede ver que el modelo espacio estado discreto es similar al modelo espacio estado observado. Basta ver las ecuaciones que rigen ambos modelos:

Modelo espacio estado discreto:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

Modelo espacio estado observado:

$$x(k+1) = \bar{A}x(k) + \bar{B}v(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

Por lo tanto, al igual que para el modelo espacio estado discreto es posible deducir una secuencia de ponderación en base a Parámetros de Markov, denominados Y_k , del mismo modo es posible deducir una secuencia equivalente de ponderación para el modelo espacio estado observado como:

$$\begin{aligned}
\bar{Y}_0 &= D \\
\bar{Y}_1 &= C\bar{B} \\
\bar{Y}_2 &= C\bar{A}\bar{B} \\
\bar{Y}_k &= C\bar{A}^{k-1}\bar{B}
\end{aligned}
\tag{B.53}$$

Sustituyendo las definiciones de \bar{A} y \bar{B} en los parámetros anteriormente definidos se tiene:

$$\begin{aligned}
\bar{Y}_0 &= D \\
\bar{Y}_1 &= C \cdot [B + GD \quad \vdots \quad -G] \\
\bar{Y}_2 &= C \cdot (A + GC) \cdot [B + GD \quad \vdots \quad -G] \\
&\vdots \\
\bar{Y}_k &= C \cdot (A + GC)^{k-1} \cdot [B + GD \quad \vdots \quad -G] \\
&= \left[C \cdot (A + GC)^{k-1} (B + GD) \quad \vdots \quad -C \cdot (A + GC)^{k-1} \cdot G \right] \\
&\triangleq \left[\bar{Y}_k^{(1)} \quad \vdots \quad -\bar{Y}_k^{(2)} \right]
\end{aligned}
\tag{B.54}$$

Estos parámetros se denominan **Parámetros de Markov observados**. Notar que $\bar{Y}_0 \in \mathbb{R}^{l \times m}$, pero $\bar{Y}_k \in \mathbb{R}^{l \times (m+l)}$. Estos parámetros constituyen la base para algoritmos computacionales que permiten la identificación de sistemas.

Si desarrollamos la estimación del modelo espacio estado observado-estimado para $k = 0, 1, 2, \dots$, ecuaciones (B.43) y (B.44), con condiciones iniciales nulas se tendrá la siguiente recursividad:

$$\hat{x}(0) = 0$$

$$\hat{y}(0) = Du(0)$$

$$\hat{x}(1) = (B + GD)u(0) - Gy(0)$$

$$\hat{y}(1) = C(B + GD)u(0) + Du(1) - CGy(0)$$

$$\hat{x}(2) = (A + GC)(B + GD)u(0) - (B + GD)u(1) - (A + GC)Gy(0) - Gy(1)$$

$$\hat{y}(2) = C(A + GC)(B + GD)u(0) + C(B + GD)u(1) + Du(2) - C(A + GC)Gy(0) - CGy(1)$$

⋮

$$\hat{x}(k) = \sum_{i=1}^k (A + GC)^{i-1} \cdot (B + GD) \cdot u(k-i) - \sum_{i=1}^k (A + GC)^{i-1} \cdot G \cdot y(k-i)$$

$$\hat{y}(k) = \sum_{i=1}^k C \cdot (A + GC)^{i-1} \cdot (B + GD) \cdot u(k-i) + Du(k) - \sum_{i=1}^k C \cdot (A + GC)^{i-1} \cdot G \cdot y(k-i)$$

(B.55)

Usando la definición de los parámetros de Markov observados, (B.54) en (B.55) se tiene:

$$\hat{y}(k) = \sum_{i=1}^k \bar{Y}_i^{(1)} \cdot u(k-i) + Du(k) - \sum_{i=1}^k \bar{Y}_i^{(2)} \cdot y(k-i)$$

(B.56)

$$\hat{y}(k) + \sum_{i=1}^k \bar{Y}_i^{(2)} \cdot y(k-i) = \sum_{i=1}^k \bar{Y}_i^{(1)} \cdot u(k-i) + Du(k)$$

O bien:

$$\hat{y}(k) + \sum_{i=1}^p \bar{Y}_i^{(2)} \cdot y(k-i) \cong \sum_{i=1}^p \bar{Y}_i^{(1)} \cdot u(k-i) + Du(k) \quad (\text{B.57})$$

La última ecuación es válida suponiendo que $\bar{Y}_\tau^{(1)}, \bar{Y}_\tau^{(2)}$ pueden ser despreciados para $\tau = p+1, p+2, \dots, \infty$.

Esto es equivalente a suponer que la matriz \bar{A} es suficientemente estable dada una correcta elección de la matriz G (filtros de Kalman) tal que \bar{A}^p pueda ser despreciable en la secuencia de parámetros de Markov observados, similar a como se mostró en el ejemplo 1.

En este caso, el *output* estimado $\hat{y}(k)$ será muy similar a $y(k)$ para $k > p$, ya que el error de estimación será cercano a cero.

Luego para un k grande se cumplirá:

$$\begin{aligned} \hat{y}(k) + \sum_{i=1}^p \bar{Y}_i^{(2)} \cdot y(k-i) &= \sum_{i=1}^p \bar{Y}_i^{(1)} \cdot u(k-i) + Du(k) \\ \Rightarrow y(k) &= \sum_{i=1}^p \bar{Y}_i^{(1)} \cdot u(k-i) - \sum_{i=1}^p \bar{Y}_i^{(2)} \cdot y(k-i) + Du(k) \end{aligned} \quad (\text{B.58})$$

$$= \sum_{i=1}^p \bar{Y}_i \cdot v(k-i) + Du(k)$$

$$y(k) = \sum_{i=1}^p \bar{Y}_i \cdot v(k-i) + Du(k) \quad (\text{B.59})$$

Donde:

$$v(k) = \begin{bmatrix} u(k) \\ y(k) \end{bmatrix}$$

$$\bar{Y}_k = \begin{bmatrix} \bar{Y}_k^{(1)} & \vdots & -\bar{Y}_k^{(2)} \end{bmatrix}$$

La ecuación (B.59) se denomina modelo de diferencia lineal, para sistemas lineales tipo MIMO (*multiple input-multiple output*).

Luego, resulta fácil deducir la TZ para este modelo, ya que es idéntica a la TZ deducida para el modelo espacio estado observado, pero truncando la secuencia de parámetros de Markov. De forma análoga a la deducción de la ecuación (B.26) es posible deducir lo siguiente:

$$\left[(z \cdot I - \bar{A})^{-1} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\bar{A}^k \cdot z^{-(k+1)} \right] \quad (\text{B.60})$$

Utilizando esta última igualdad y la ecuación (B.51), que corresponde a la TZ del modelo espacio estado observado, como relación *input-output*, se tendrá:

$$\begin{aligned} \left[I + C \left[z \cdot I - \bar{A} \right]^{-1} G \right] y(z) &= \left[C \left[z \cdot I - \bar{A} \right]^{-1} [B + GD] + D \right] \cdot u(z) \\ \Rightarrow \left[I + C \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left[\bar{A}^k \cdot z^{-(k+1)} \right] \cdot G \right] y(z) &= \left[C \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left[\bar{A}^k \cdot z^{-(k+1)} \right] \cdot [B + GD] + D \right] \cdot u(z) \quad (\text{B.61}) \\ \Rightarrow \left[I + \sum_{k=0}^{\infty} \left[z^{-(k+1)} \cdot C \cdot \bar{A}^k \cdot G \right] \right] y(z) &= \left[D + \sum_{k=0}^{\infty} \left[z^{-(k+1)} \cdot C \cdot \bar{A}^k \cdot (B + GD) \right] \right] \cdot u(z) \end{aligned}$$

Utilizando las definiciones de $\bar{Y}_k^{(1)}$, $\bar{Y}_k^{(2)}$ y desarrollando las sumatorias de forma equivalente se puede escribir la ecuación anterior como:

$$\left[I + \bar{Y}_1^{(2)} z^{-1} + \bar{Y}_2^{(2)} z^{-2} + \dots + \bar{Y}_n^{(2)} z^{-n} + \dots \right] y(z) = \left[Y_0^{(1)} + \bar{Y}_1^{(1)} z^{-1} + \bar{Y}_2^{(1)} z^{-2} + \dots + \bar{Y}_n^{(1)} z^{-n} + \dots \right] u(z) \quad (\text{B.62})$$

Luego, para diferenciar este modelo del modelo espacio estado observado, escogemos G tal que la matriz $\bar{A} = A + GC$ sea suficientemente estable para que a partir de un cierto $\tau > p$, los parámetros de Markov observados $\bar{Y}_\tau^{(1)}$, $\bar{Y}_\tau^{(2)}$ sean nulos. Con esta suposición, la ecuación (B.62) puede reescribirse como:

$$\left[I + \bar{Y}_1^{(2)} z^{-1} + \bar{Y}_2^{(2)} z^{-2} + \dots + \bar{Y}_p^{(2)} z^{-p} \right] y(z) = \left[Y_0^{(1)} + \bar{Y}_1^{(1)} z^{-1} + \bar{Y}_2^{(1)} z^{-2} + \dots + \bar{Y}_p^{(1)} z^{-p} \right] u(z) \quad (\text{B.63})$$

Esta última ecuación corresponde a la TZ del modelo de diferencia lineal para sistemas lineales e invariantes de tipo MIMO.

Por otra parte esta misma ecuación puede haberse derivado tomando la TZ de la ecuación (B.59), que corresponde explícitamente al modelo de diferencia lineal, pero su desarrollo es más complejo que el deducido anteriormente para este modelo.

Finalmente, la relación *input-output* en términos de la TZ para el modelo de diferencia lineal puede expresarse como:

$$y(z) = \left[I + \bar{Y}_1^{(2)} z^{-1} + \bar{Y}_2^{(2)} z^{-2} + \dots + \bar{Y}_p^{(2)} z^{-p} \right]^{-1} \left[Y_0^{(1)} + \bar{Y}_1^{(1)} z^{-1} + \bar{Y}_2^{(1)} z^{-2} + \dots + \bar{Y}_p^{(1)} z^{-p} \right] u(z) \quad (\text{B.64})$$

Apéndice D

**Series de Tiempo y PSD: Monitoreo Continuo
Torre Titanium.**

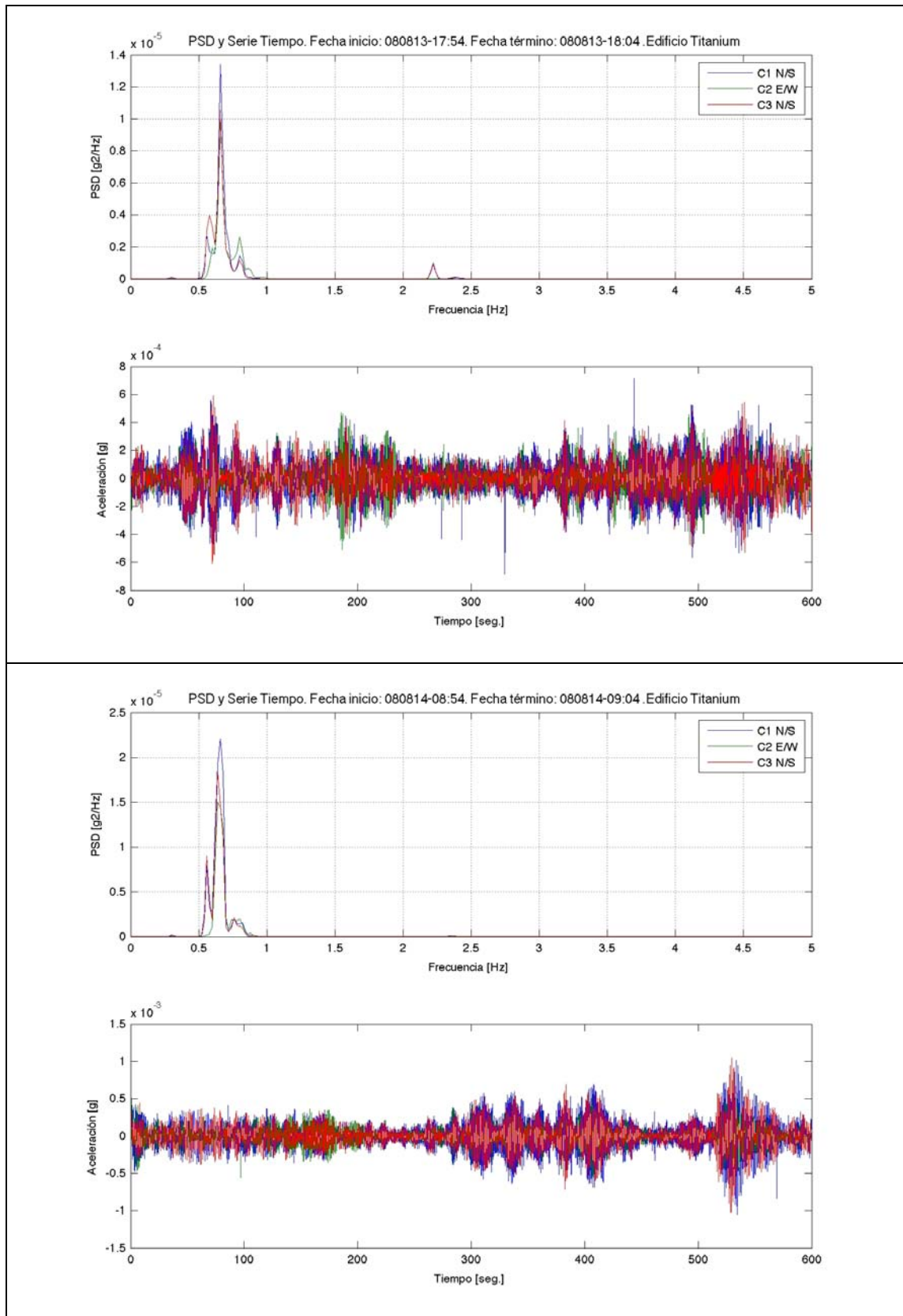


Figura D. 1. Serie de Tiempo y Espectro de Potencia. Torre Titanium La Portada.

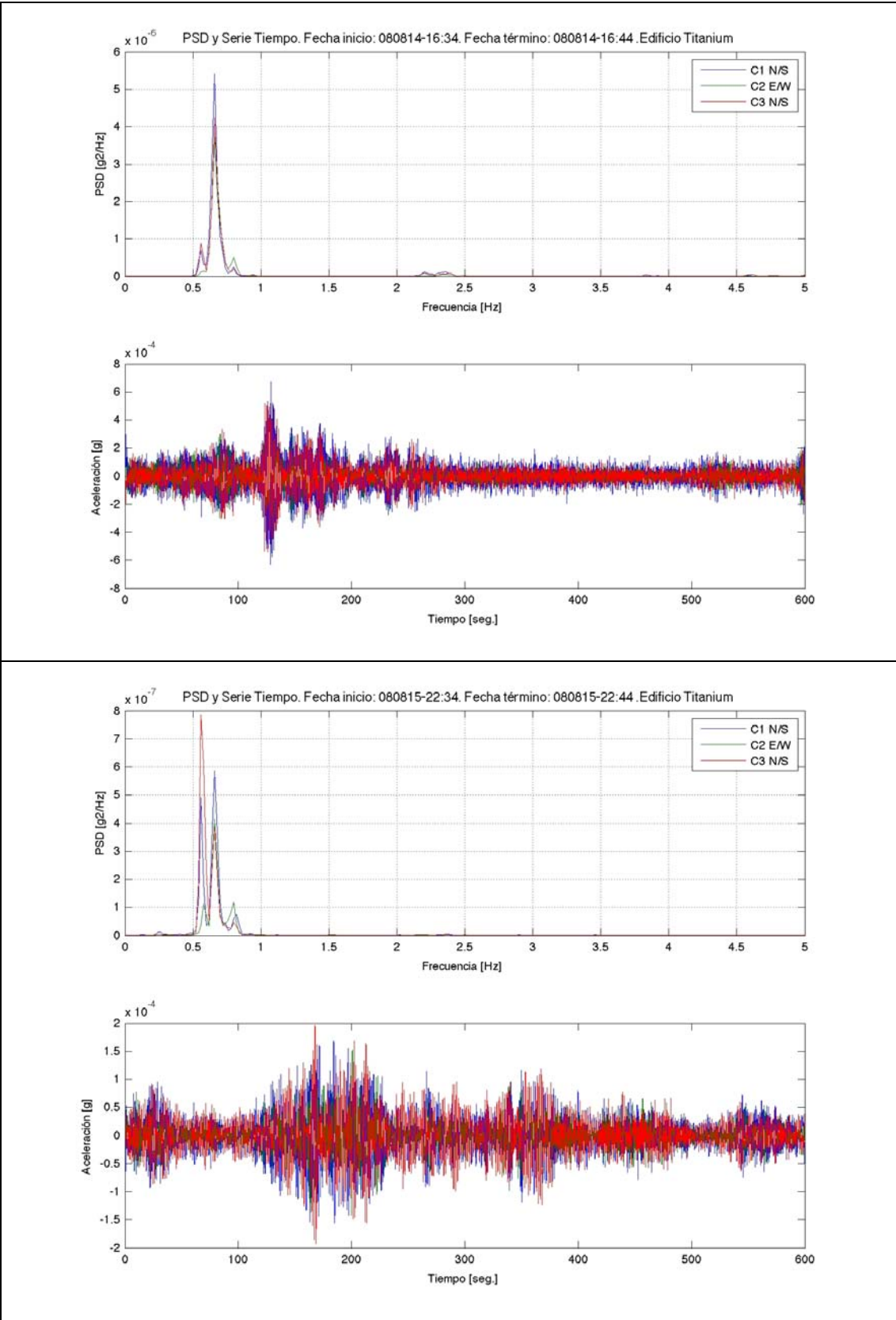


Figura D. 2. Serie de Tiempo y Espectro de Potencia. Torre Titanium La Portada.

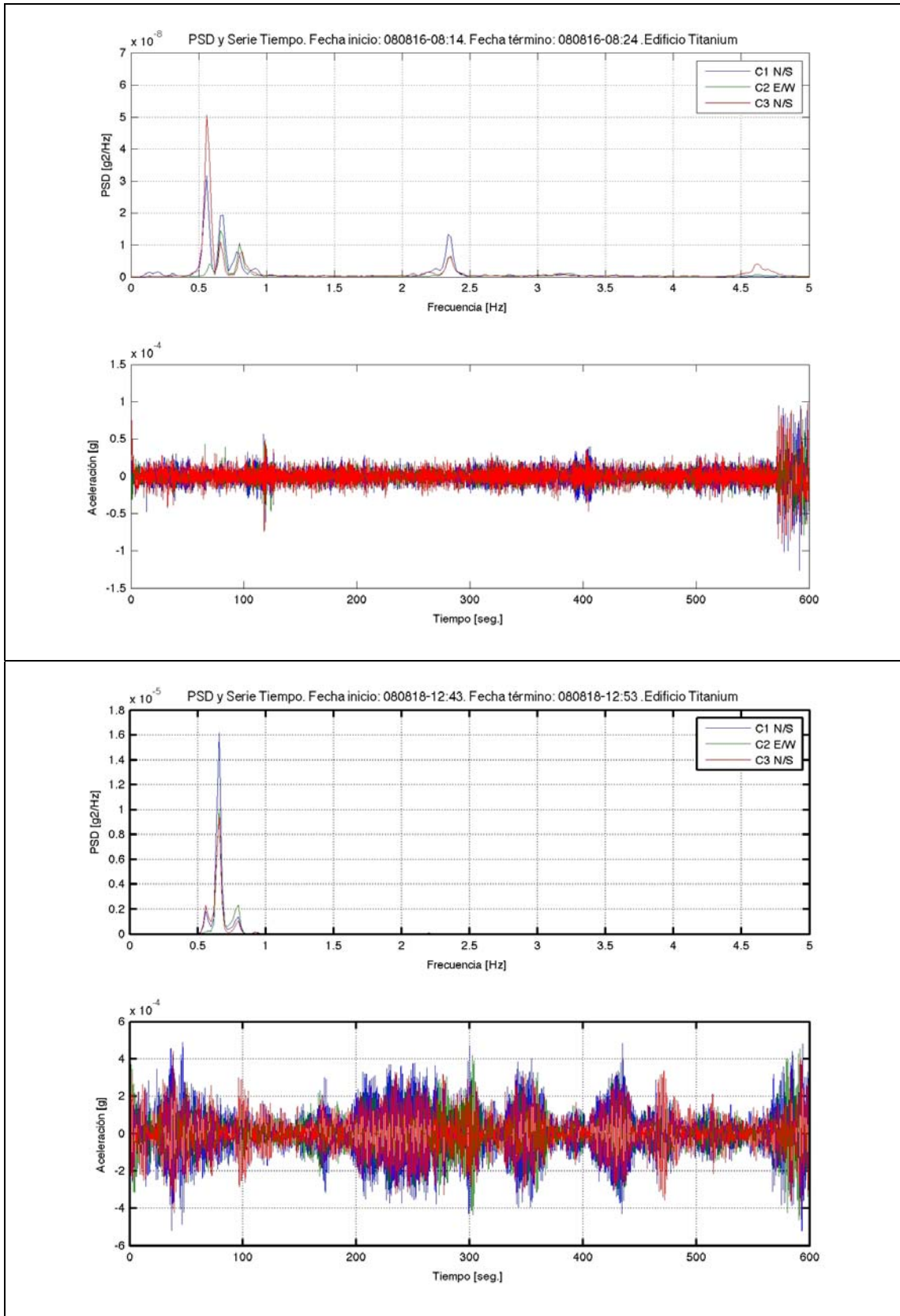


Figura D. 3. Serie de Tiempo y Espectro de Potencia. Torre Titanium La Portada.

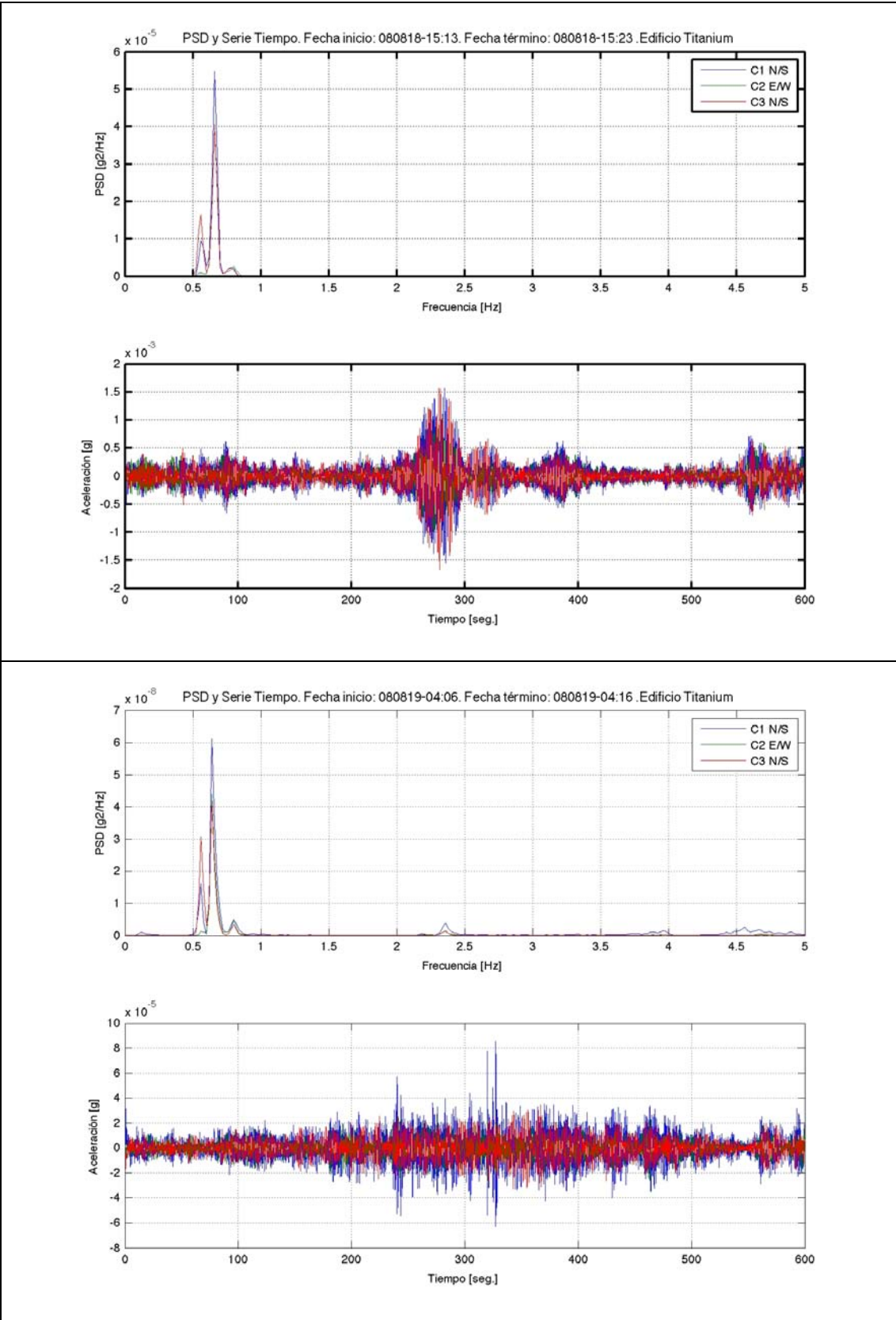


Figura D. 4. Serie de Tiempo y Espectro de Potencia. Torre Titanium La Portada.

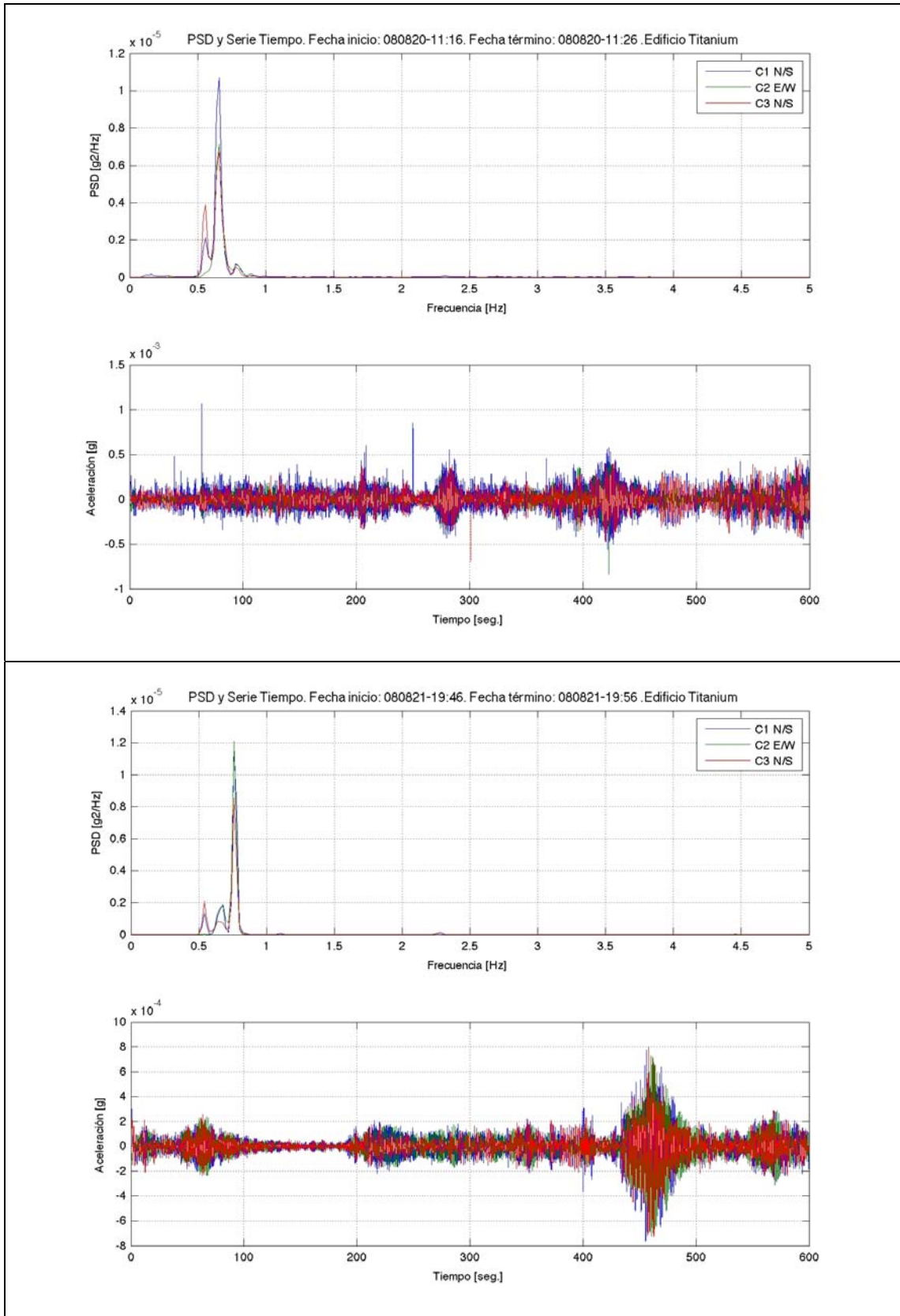


Figura D. 5. Serie de Tiempo y Espectro de Potencia. Torre Titanium La Portada.

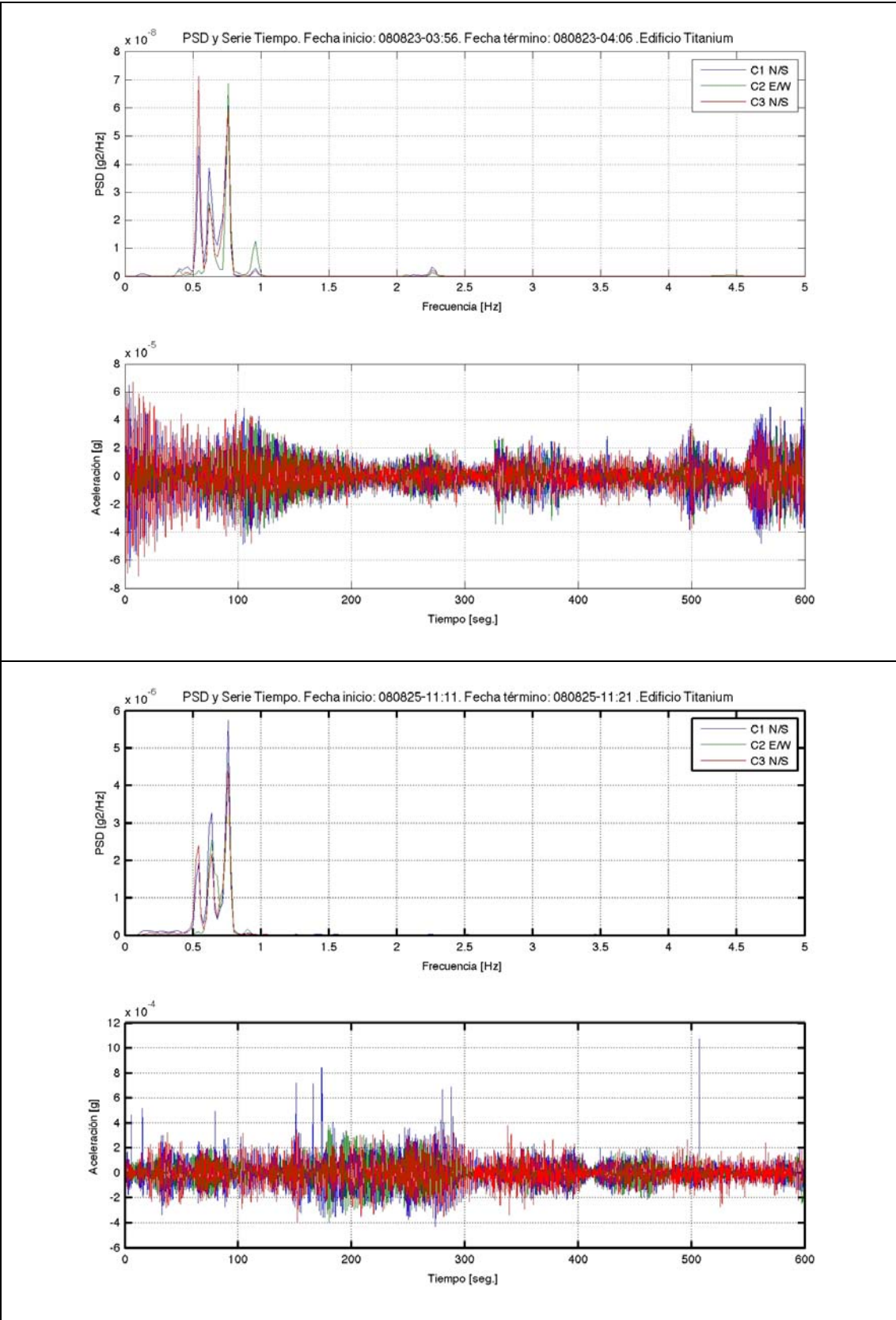


Figura D. 6. Serie de Tiempo y Espectro de Potencia. Torre Titanium La Portada.

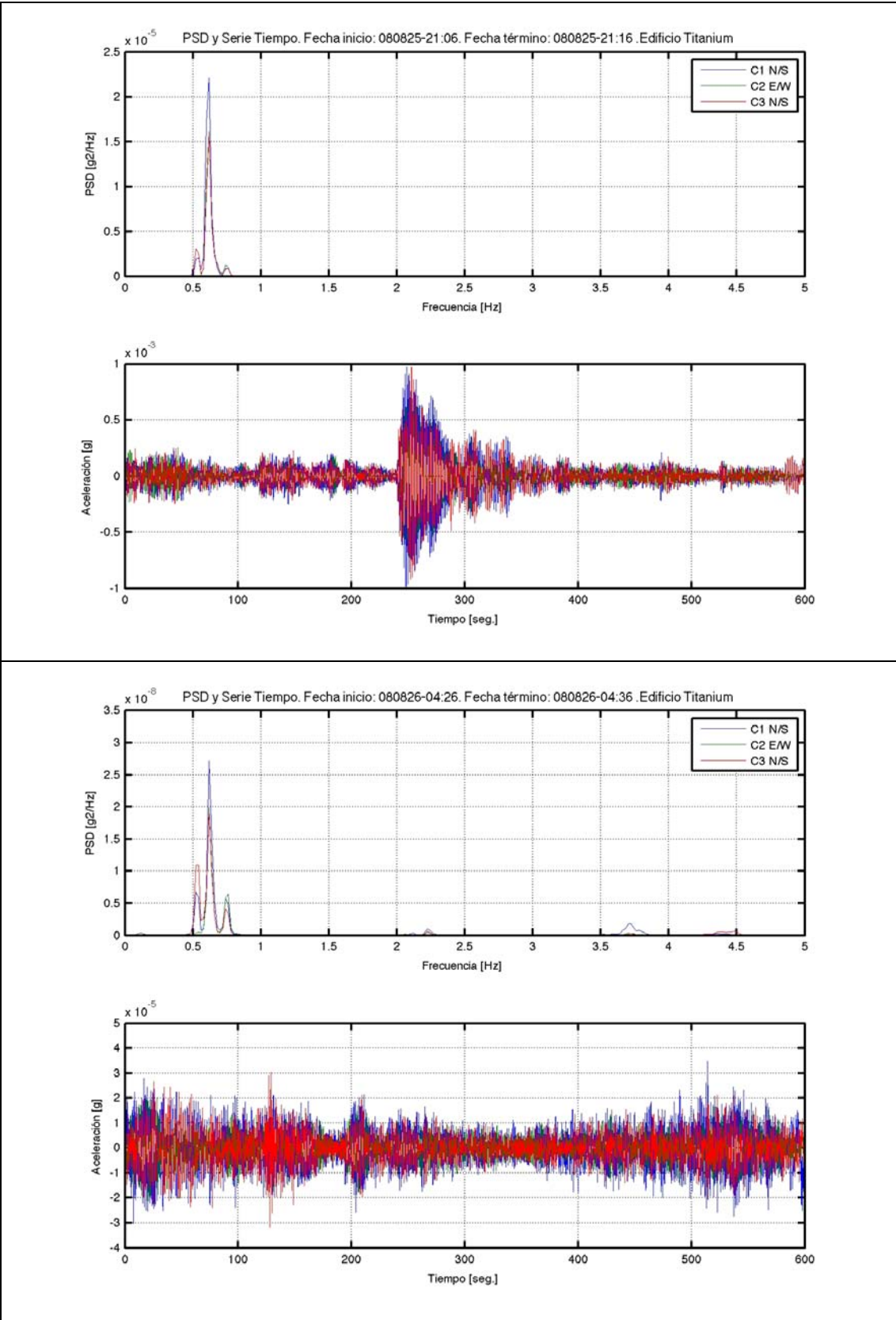


Figura D. 7. Serie de Tiempo y Espectro de Potencia. Torre Titanium La Portada.

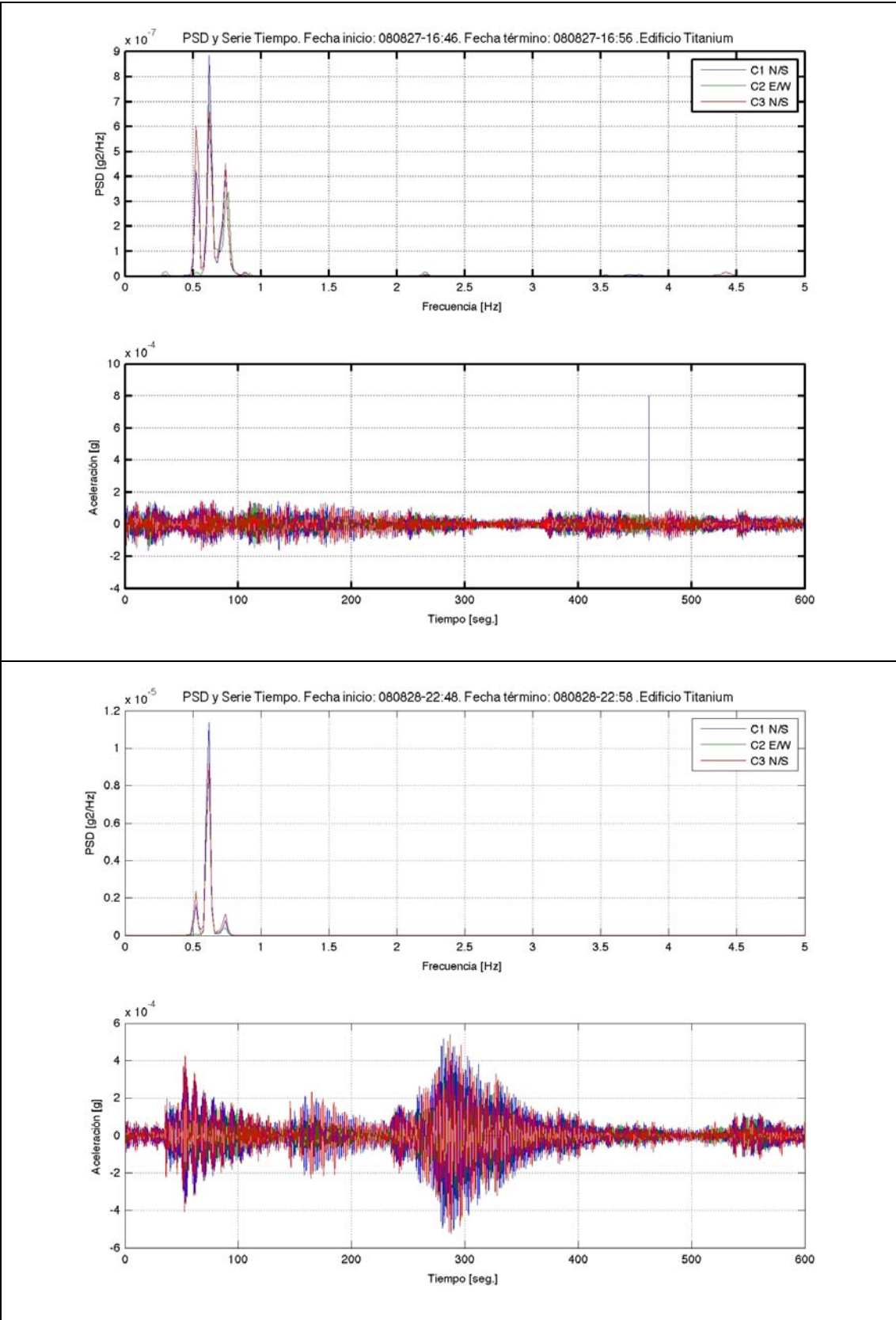


Figura D. 8. Serie de Tiempo y Espectro de Potencia. Torre Titanium La Portada.

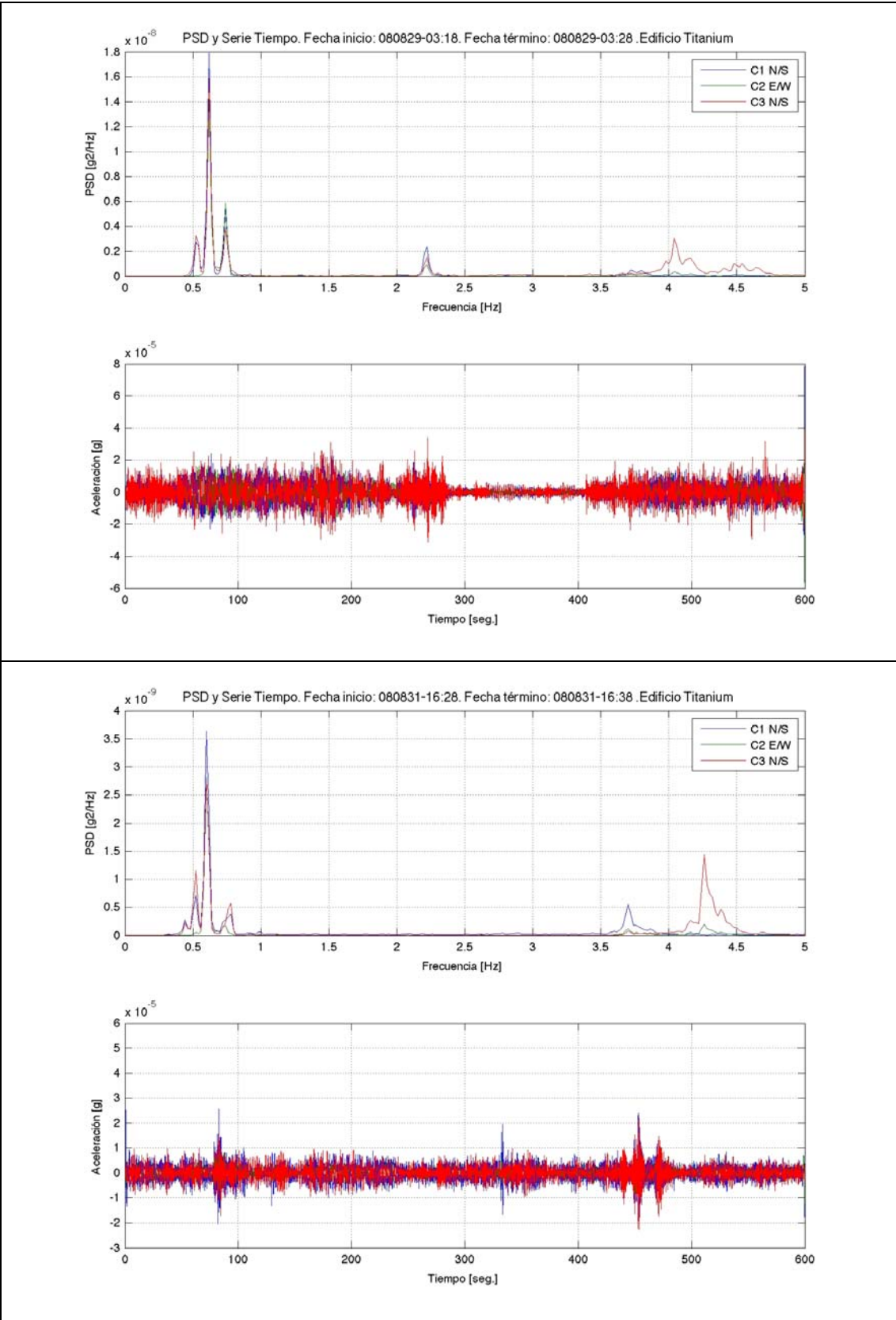


Figura D. 9. Serie de Tiempo y Espectro de Potencia. Torre Titanium La Portada.

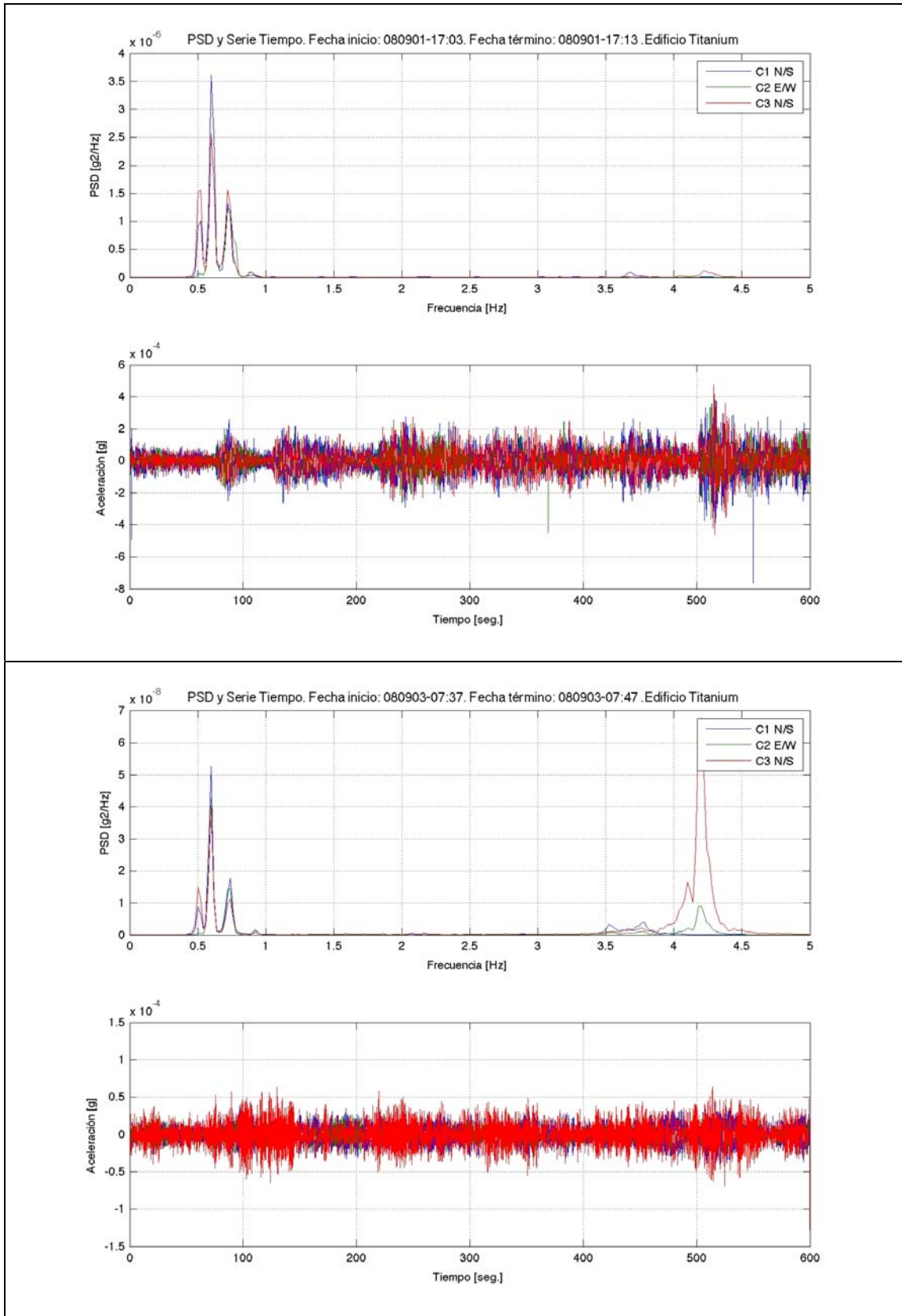


Figura D. 10. Serie de Tiempo y Espectro de Potencia. Torre Titanium La Portada.

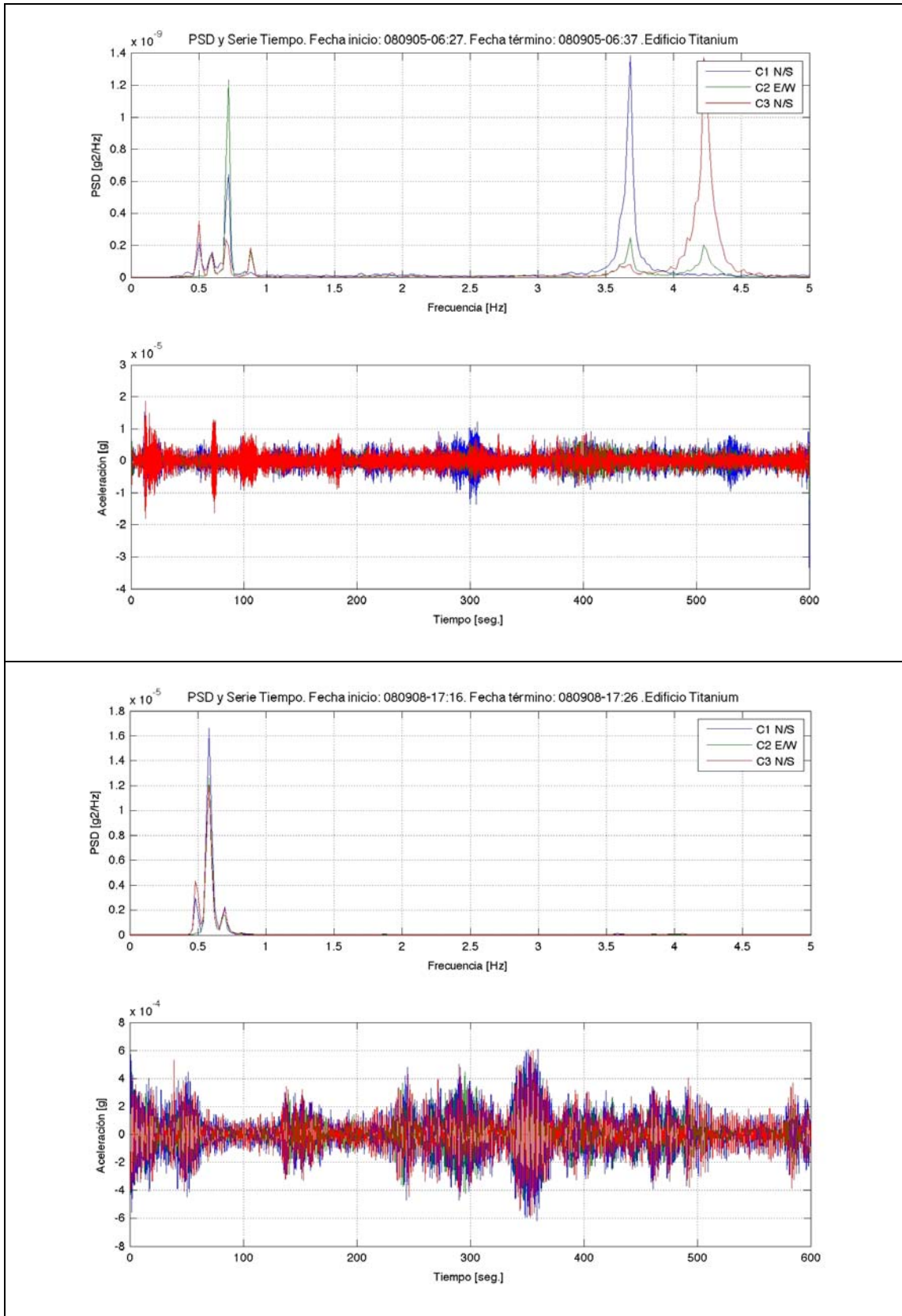


Figura D. 11. Serie de Tiempo y Espectro de Potencia. Torre Titanium La Portada.

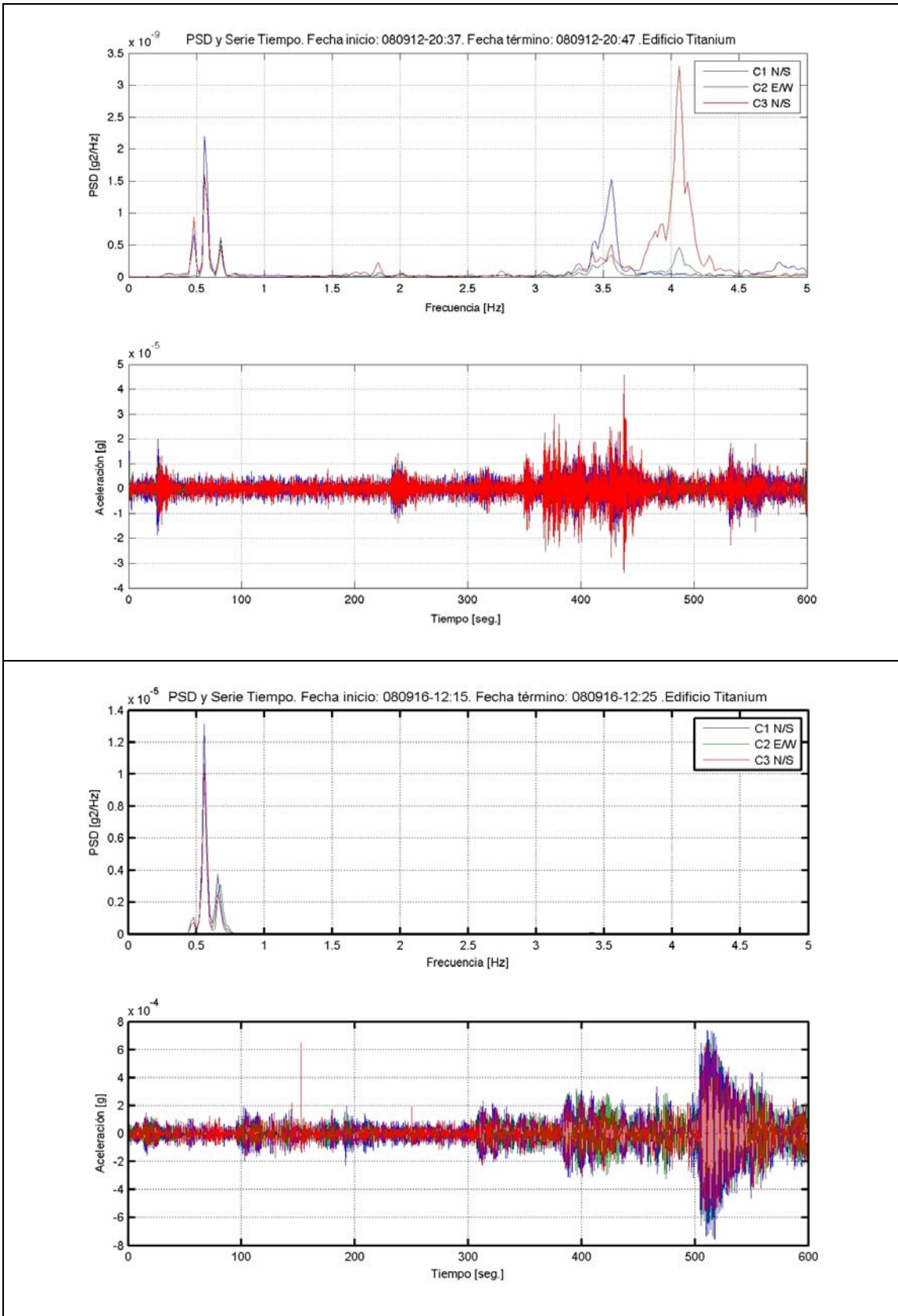


Figura D. 12. Serie de Tiempo y Espectro de Potencia. Torre Titanium La Portada.

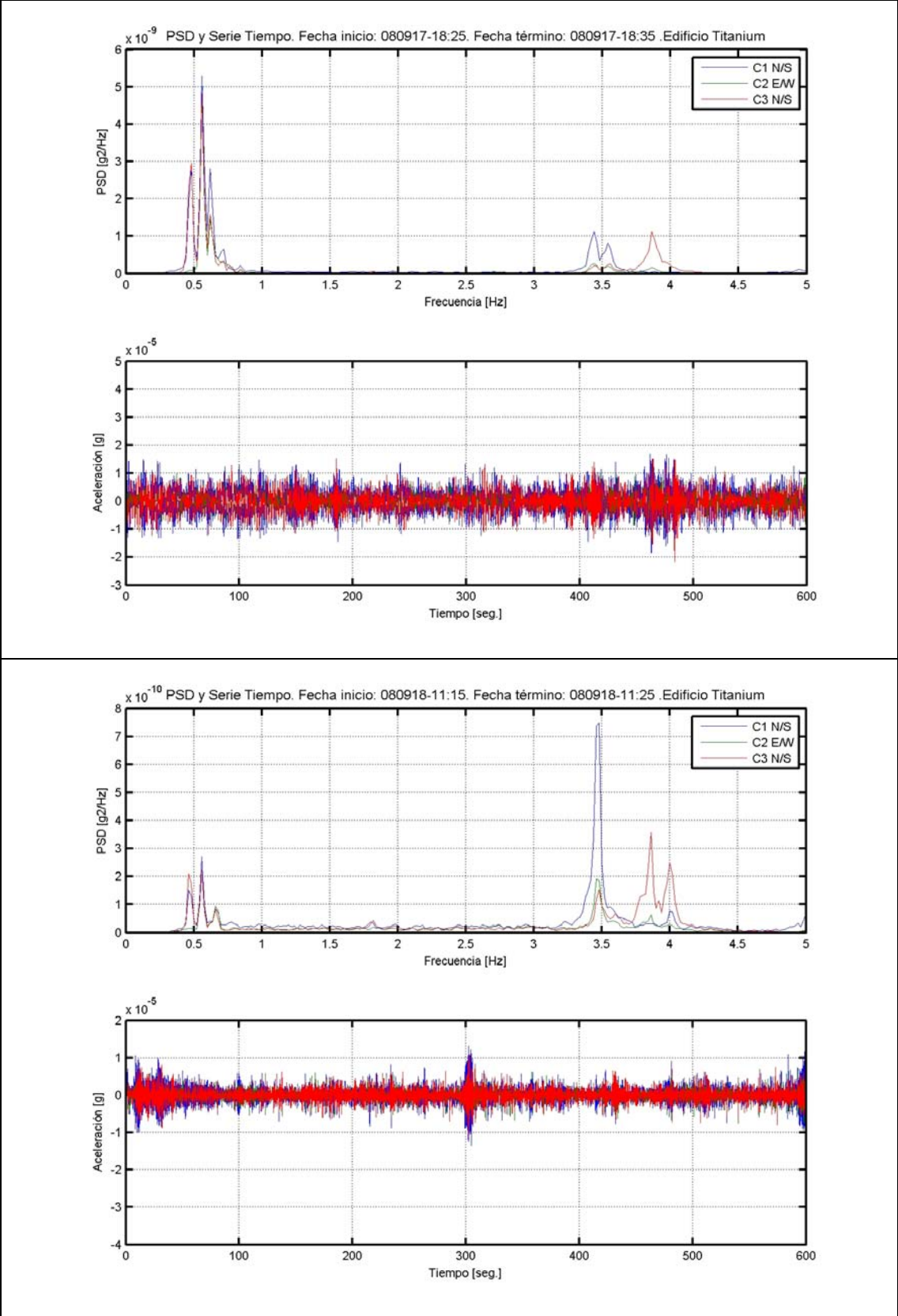


Figura D. 13. Serie de Tiempo y Espectro de Potencia. Torre Titanium La Portada.

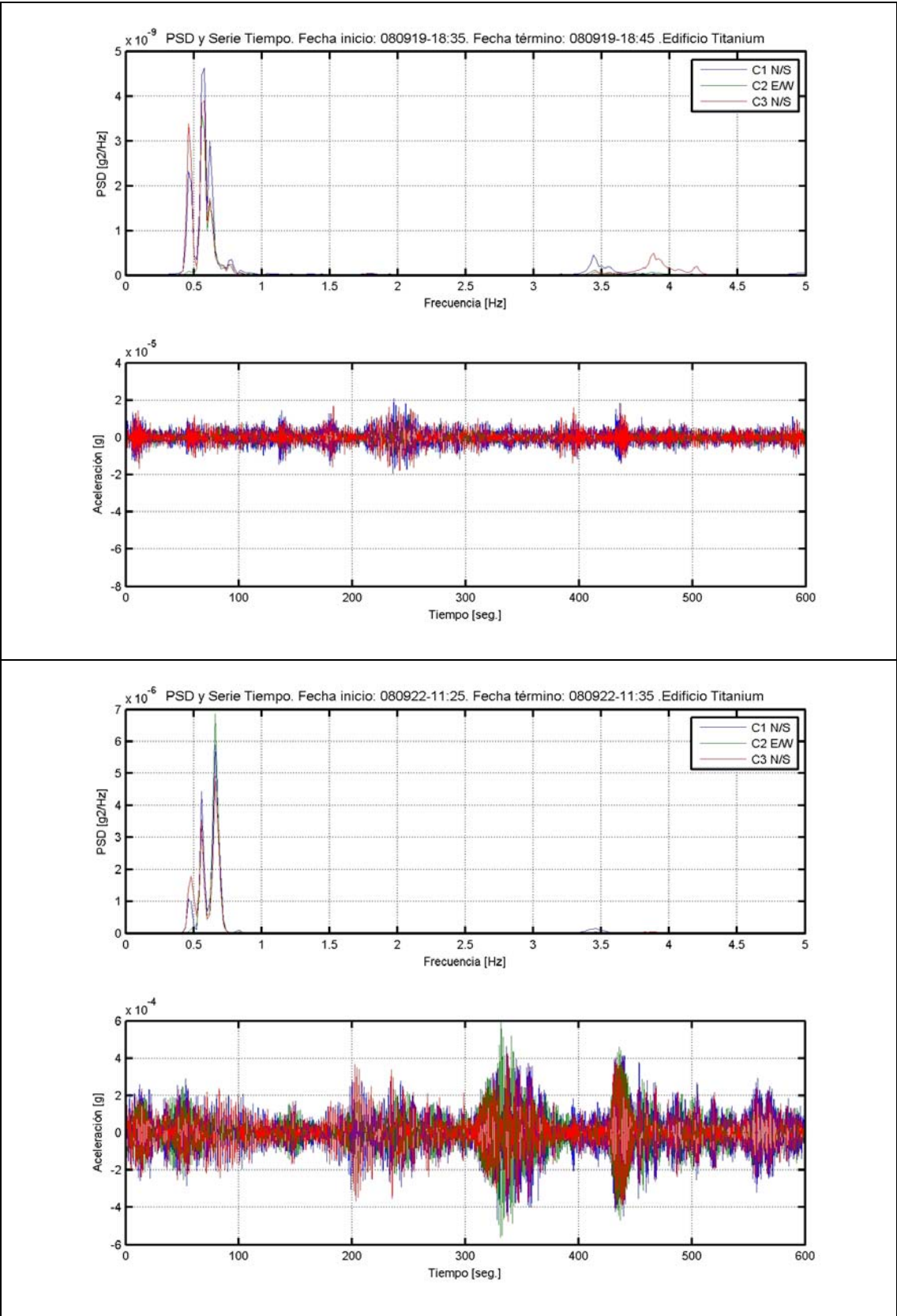


Figura D. 14. Serie de Tiempo y Espectro de Potencia. Torre Titanium La Portada.

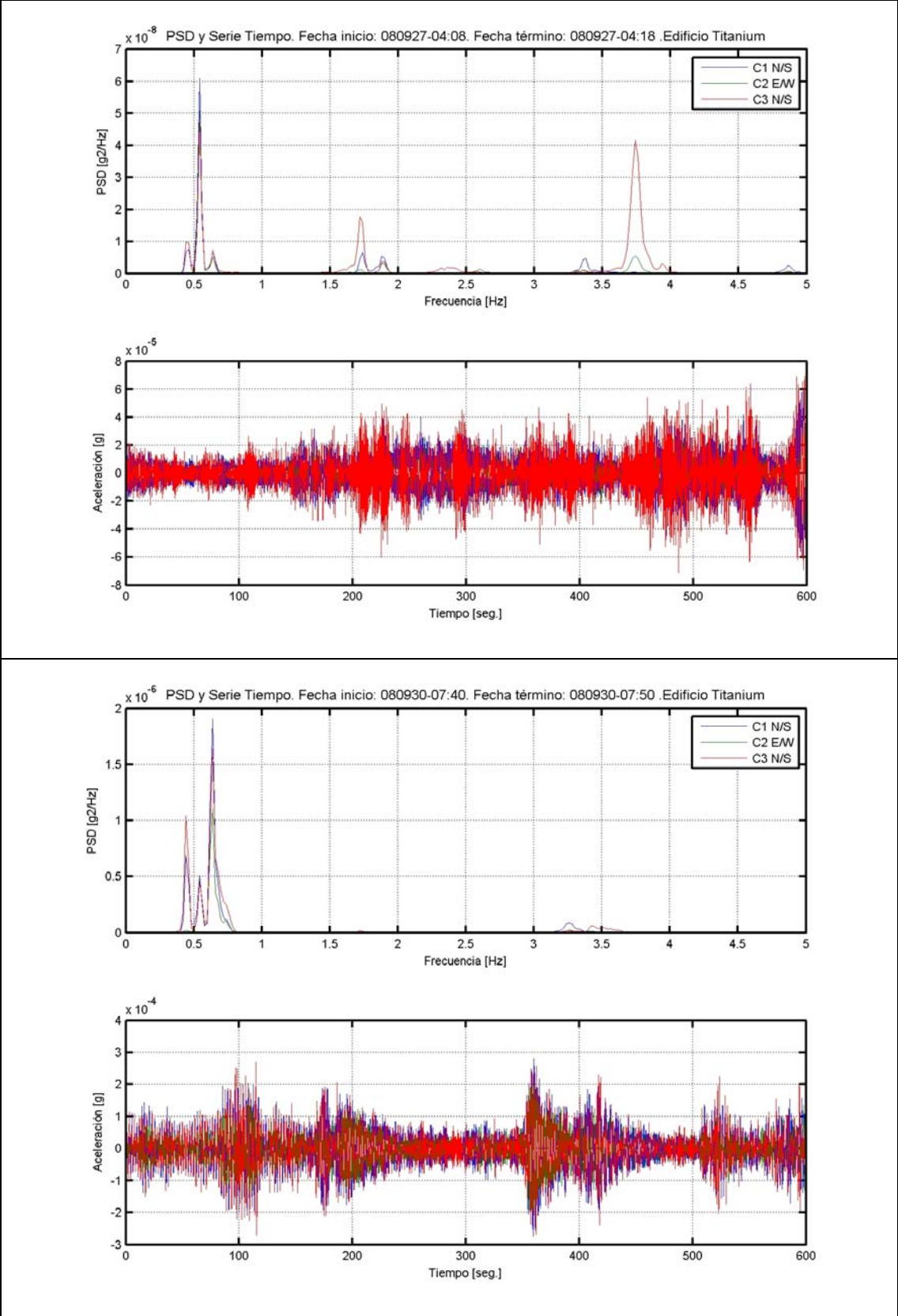


Figura D. 15. Serie de Tiempo y Espectro de Potencia. Torre Titanium La Portada.

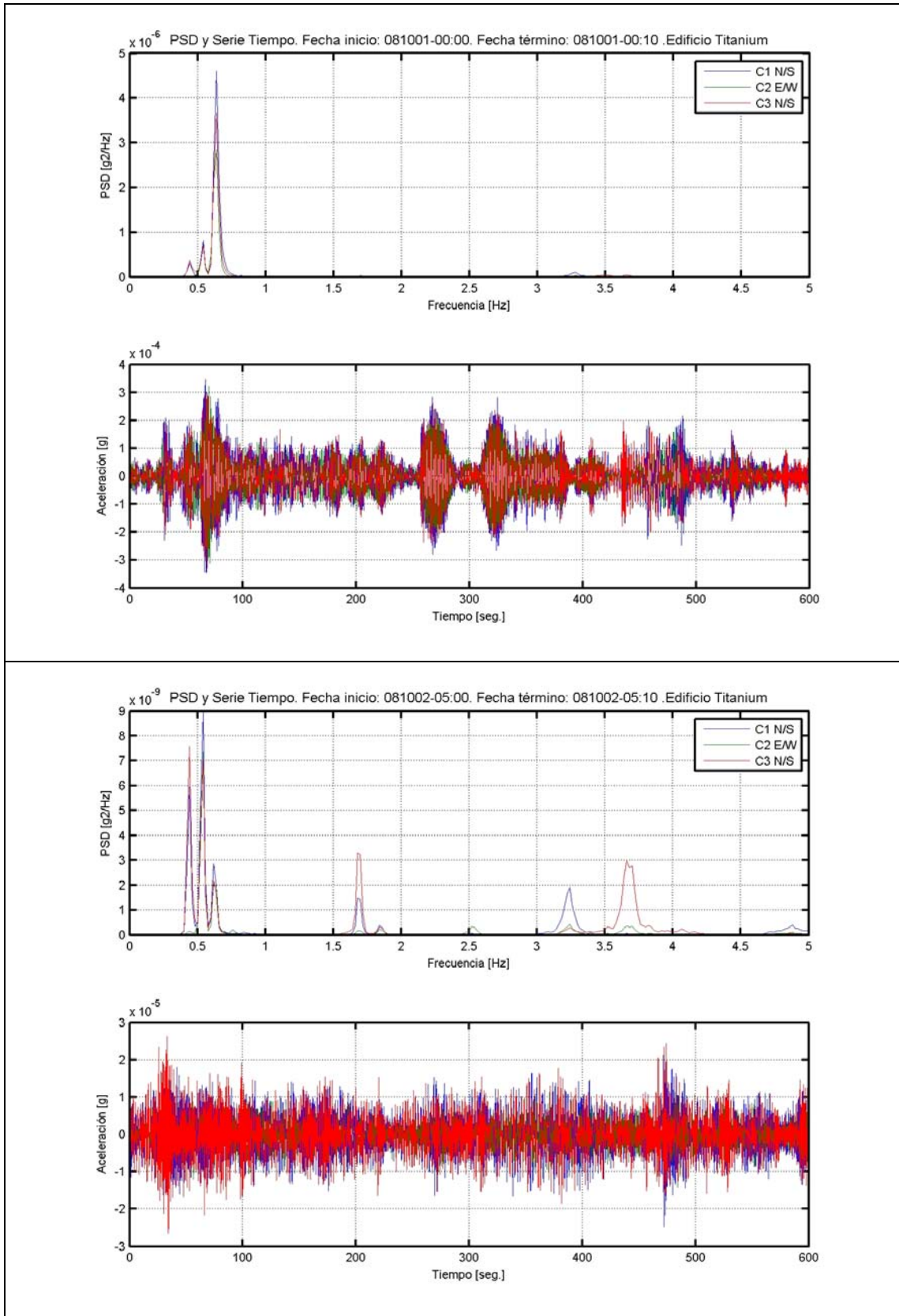


Figura D. 16. Serie de Tiempo y Espectro de Potencia. Torre Titanium La Portada.

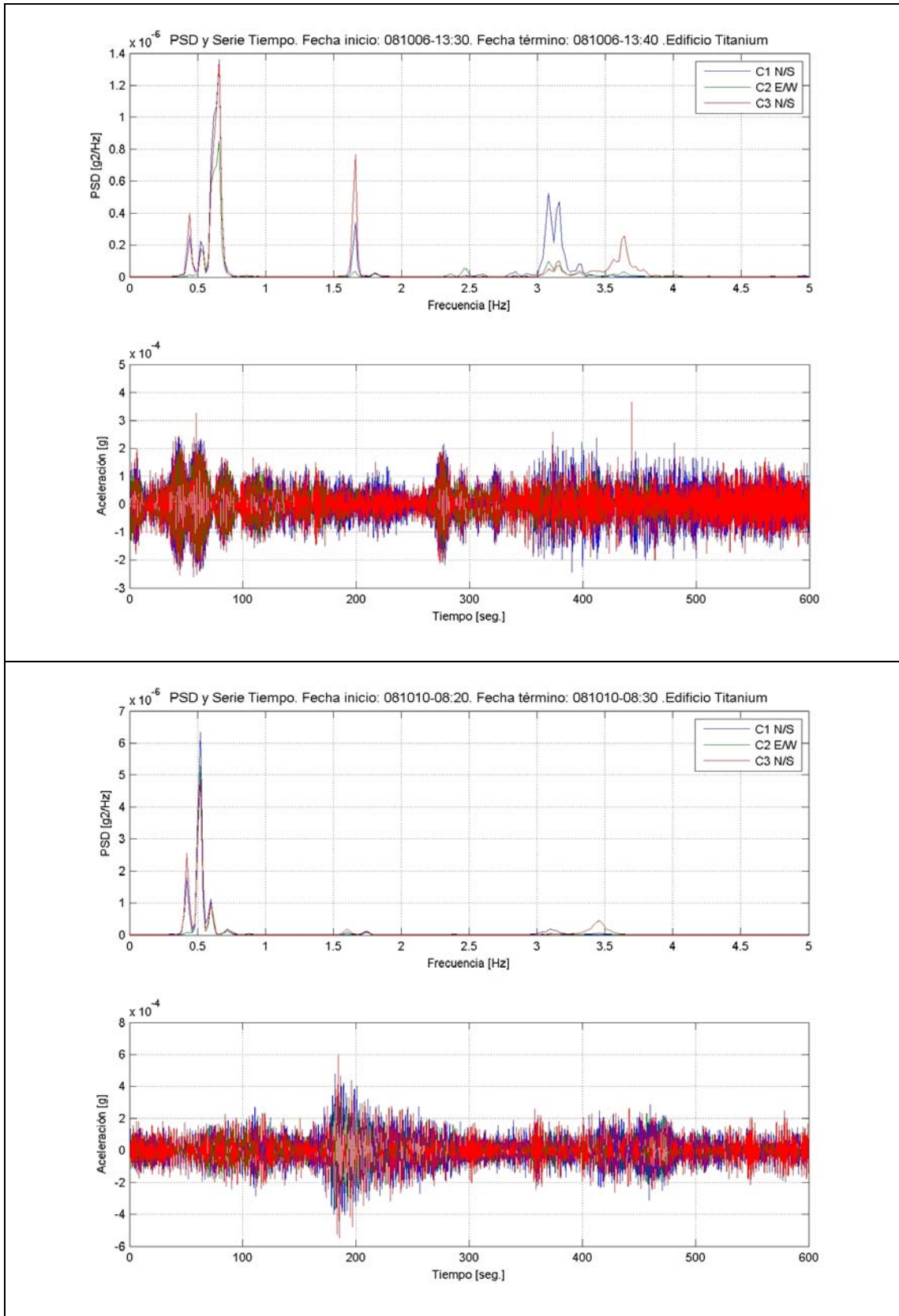


Figura D. 17. Serie de Tiempo y Espectro de Potencia. Torre Titanium La Portada.

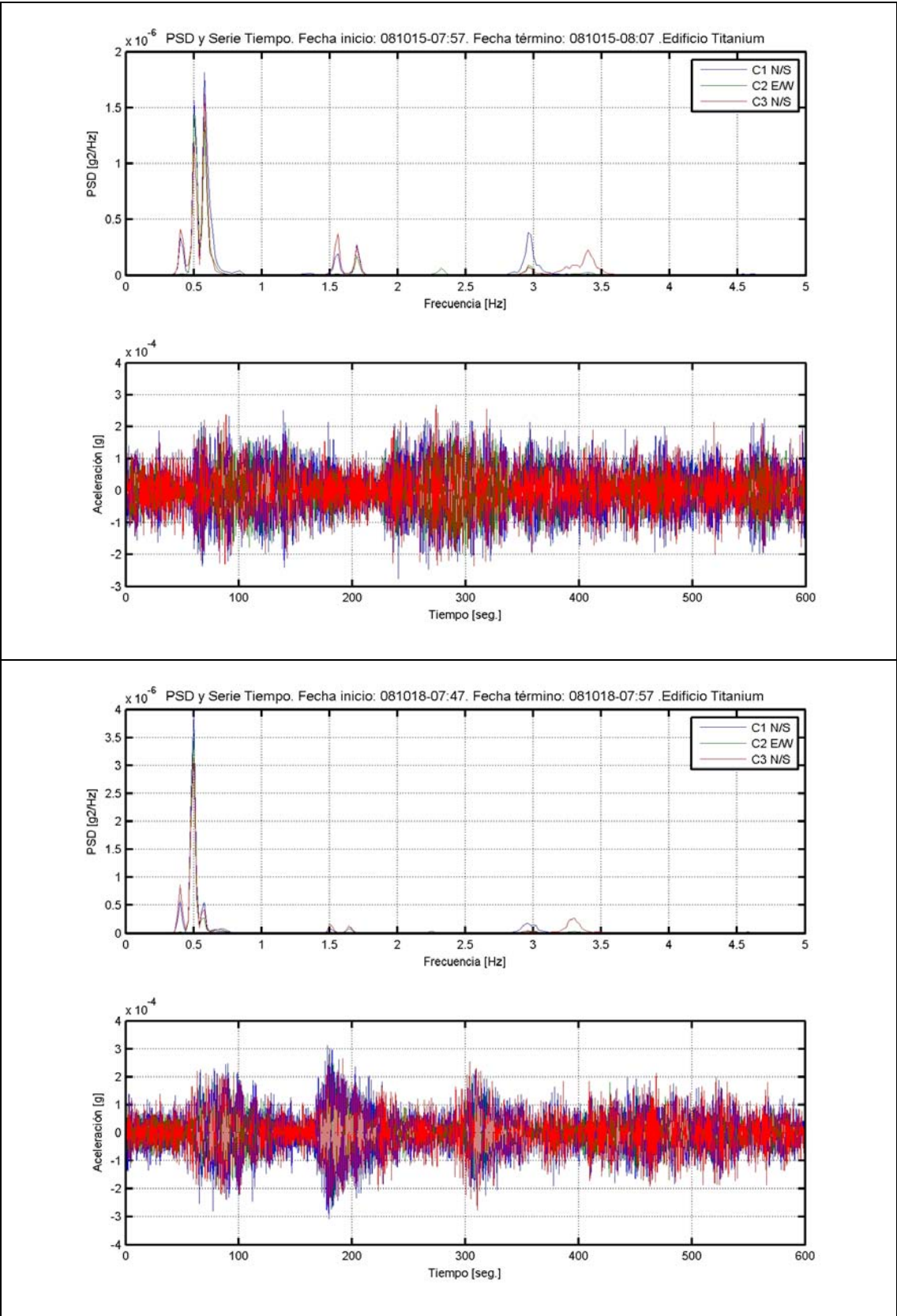


Figura D. 18. Serie de Tiempo y Espectro de Potencia. Torre Titanium La Portada.

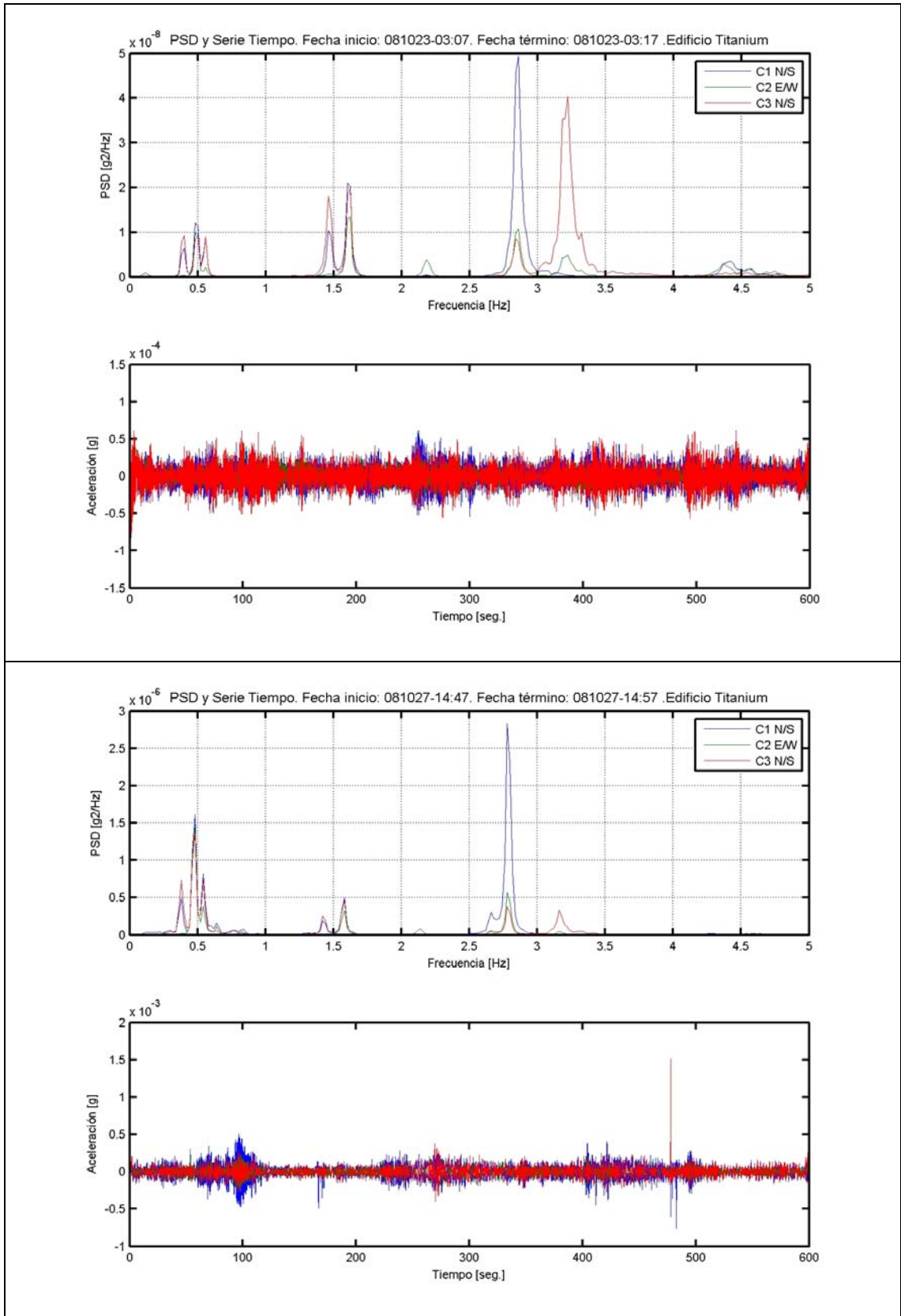


Figura D. 19. Serie de Tiempo y Espectro de Potencia. Torre Titanium La Portada.

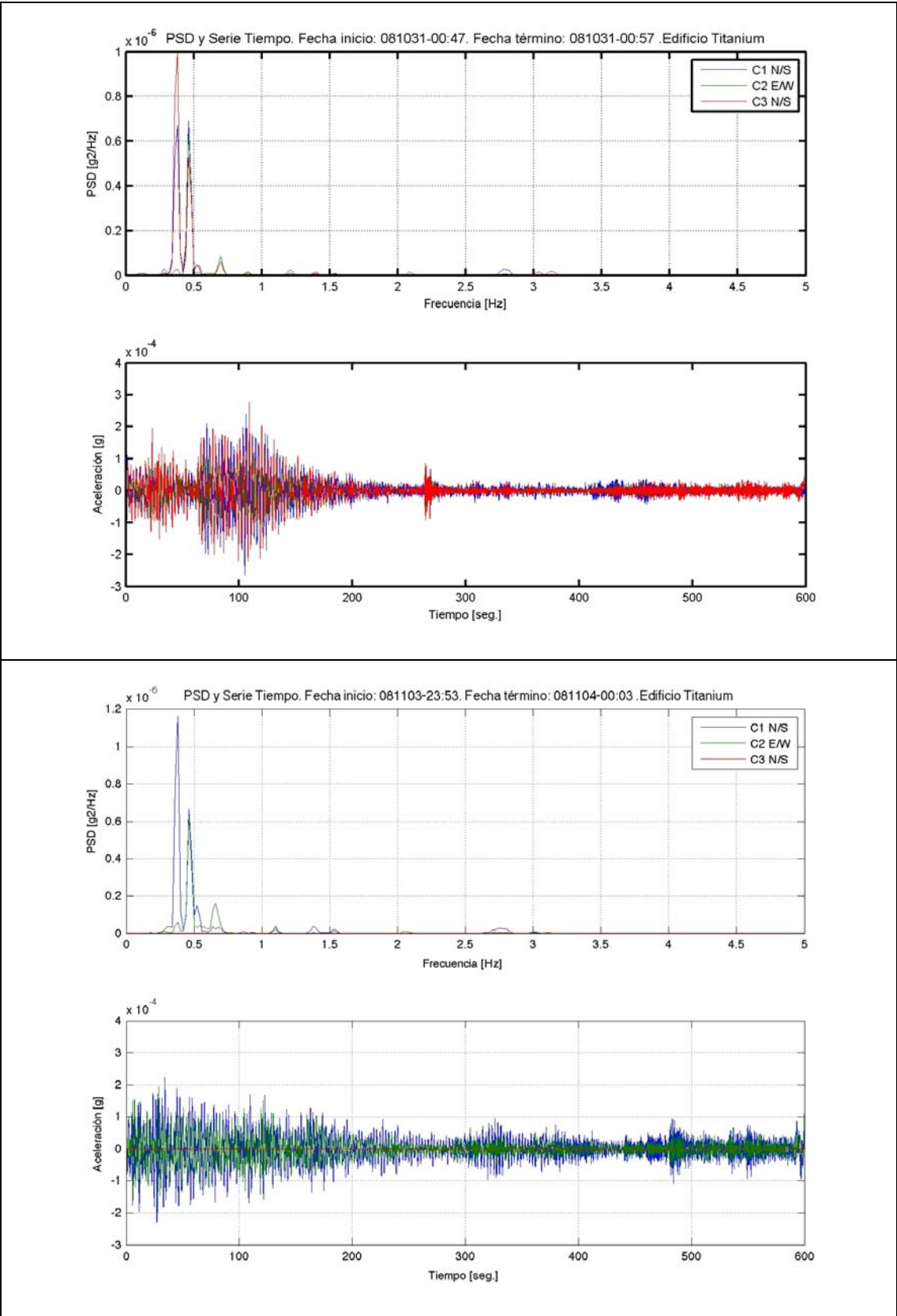


Figura D. 20. Serie de Tiempo y Espectro de Potencia. Torre Titanium La Portada.

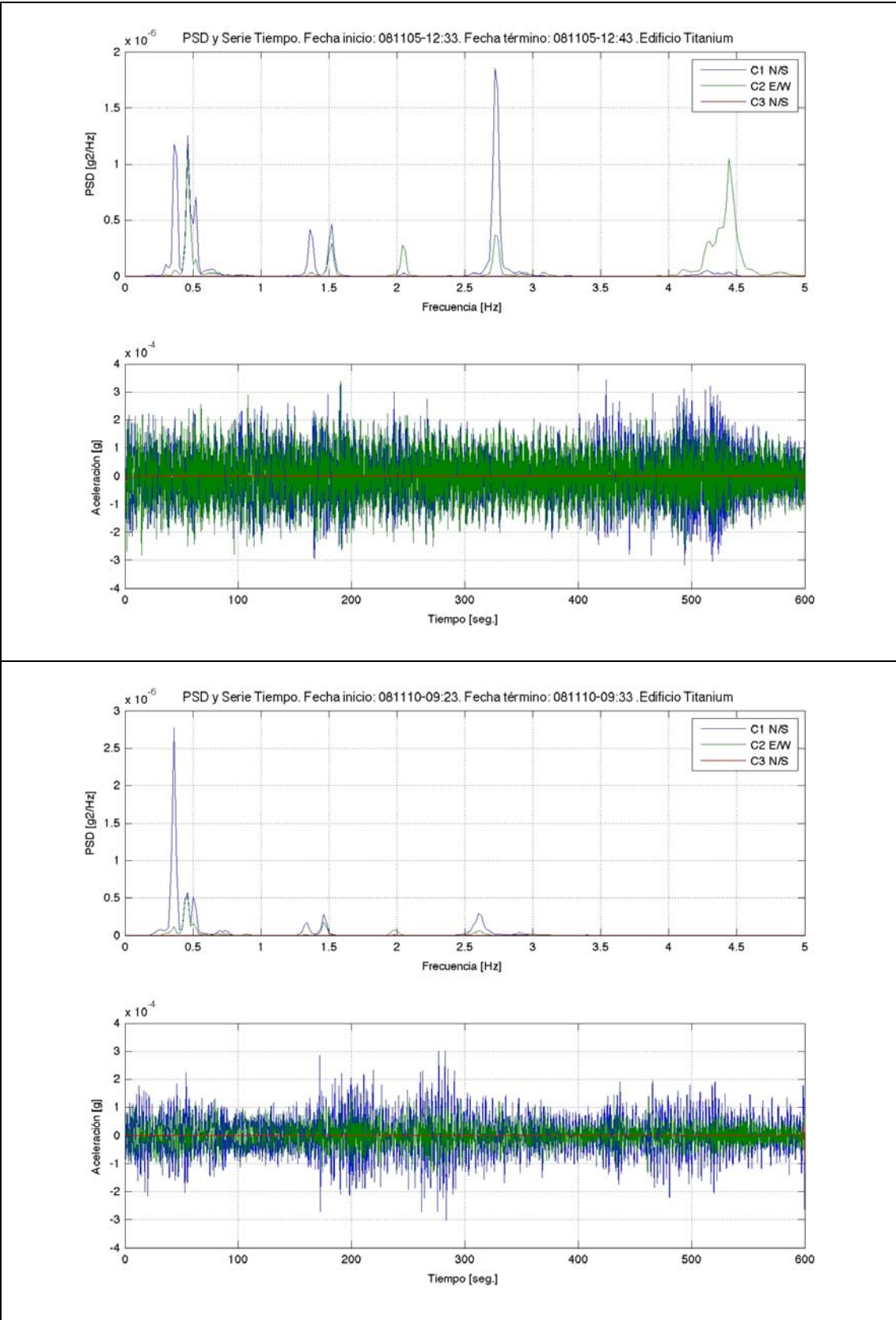


Figura D. 21. Serie de Tiempo y Espectro de Potencia. Torre Titanium La Portada.

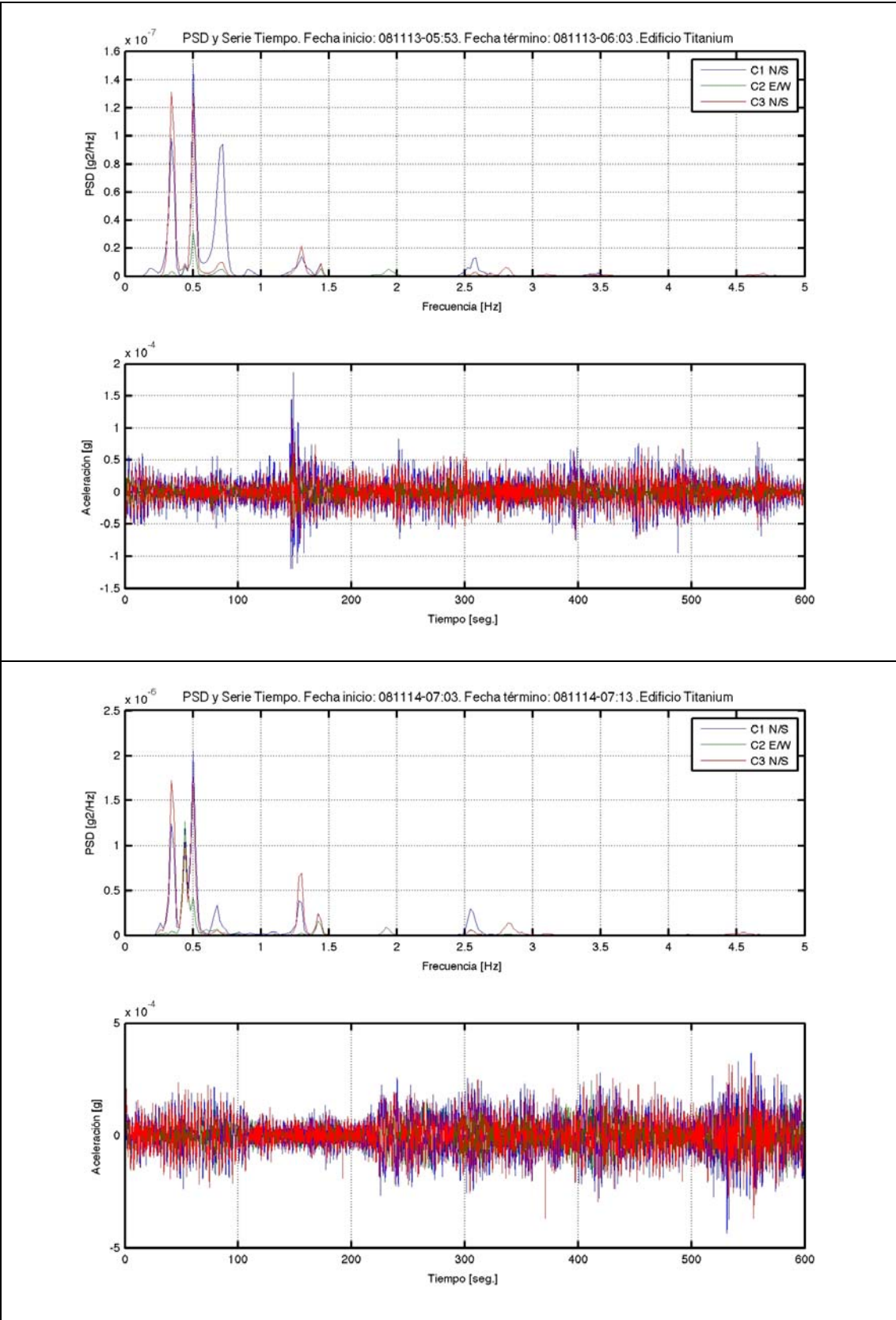


Figura D. 22. Serie de Tiempo y Espectro de Potencia. Torre Titanium La Portada.

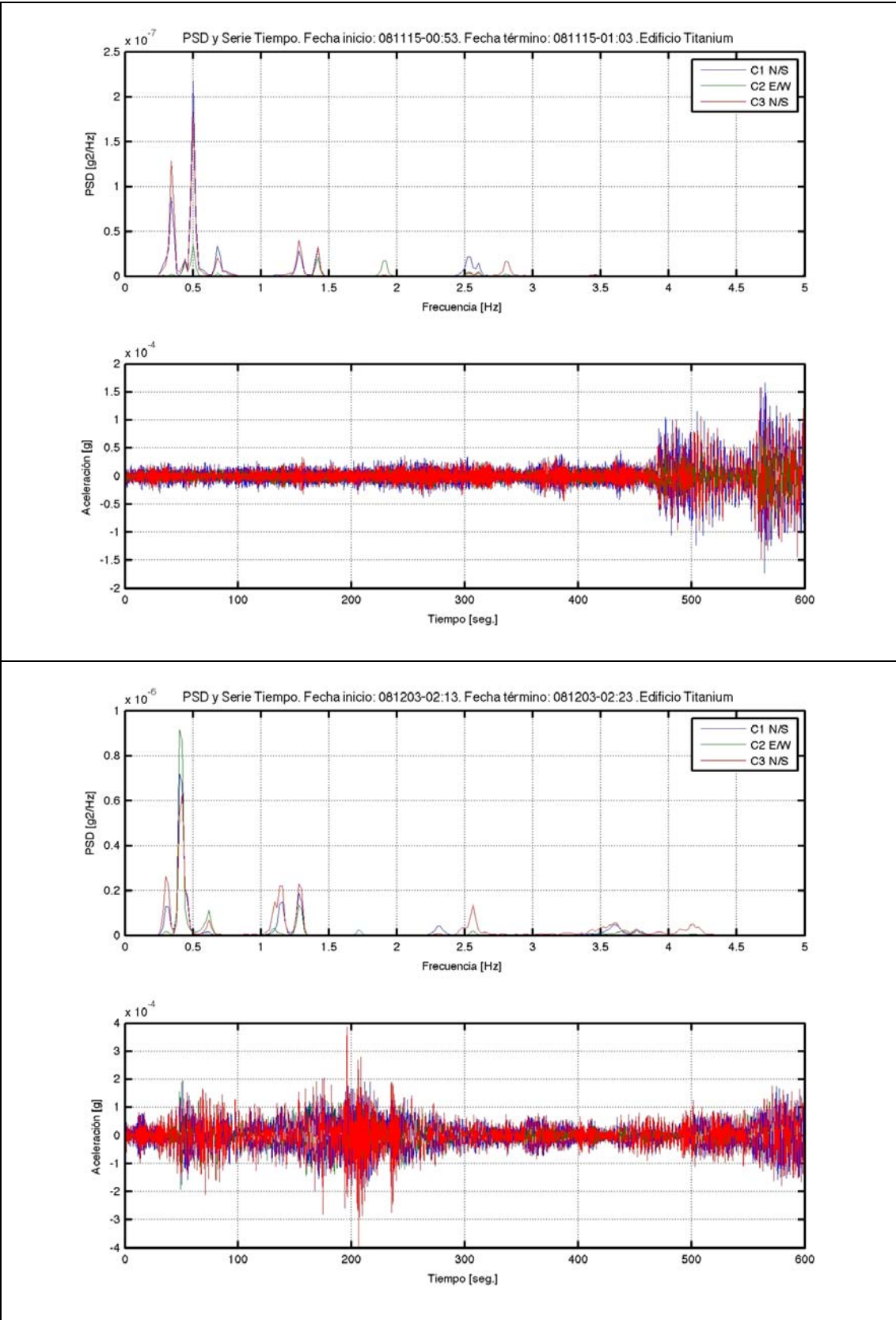


Figura D. 23. Serie de Tiempo y Espectro de Potencia. Torre Titanium La Portada.

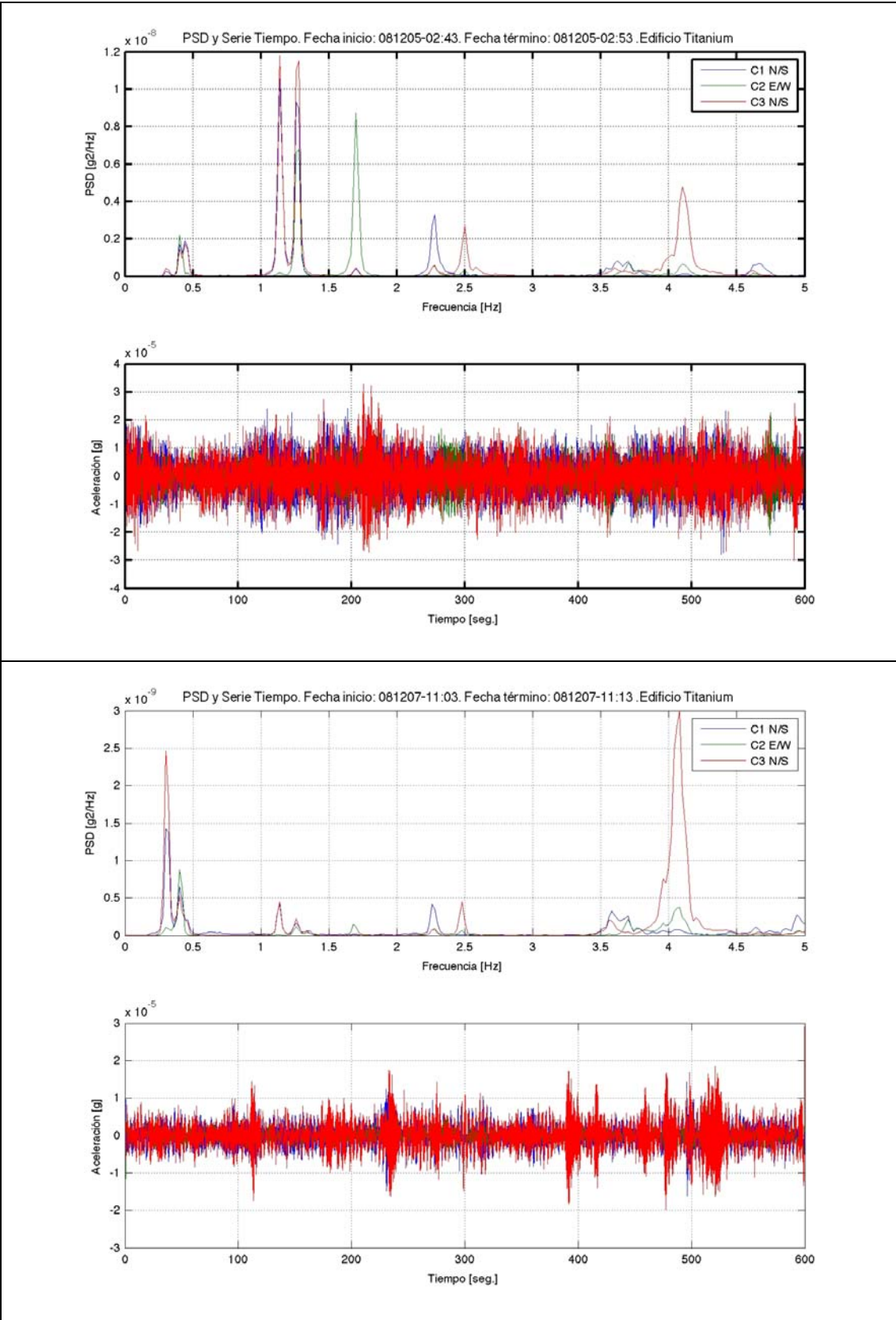


Figura D. 24. Serie de Tiempo y Espectro de Potencia. Torre Titanium La Portada.

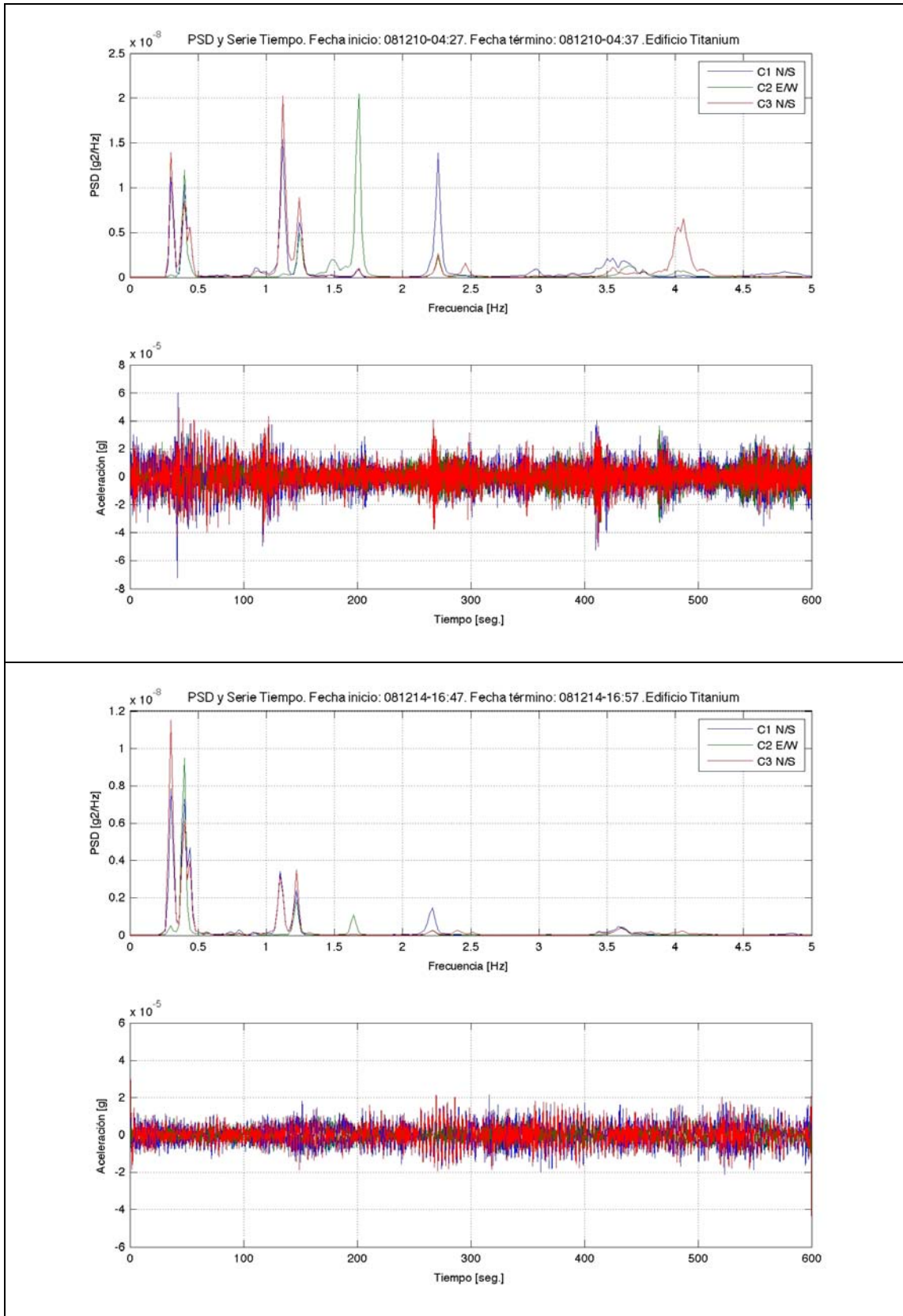


Figura D. 25. Serie de Tiempo y Espectro de Potencia. Torre Titanium La Portada.

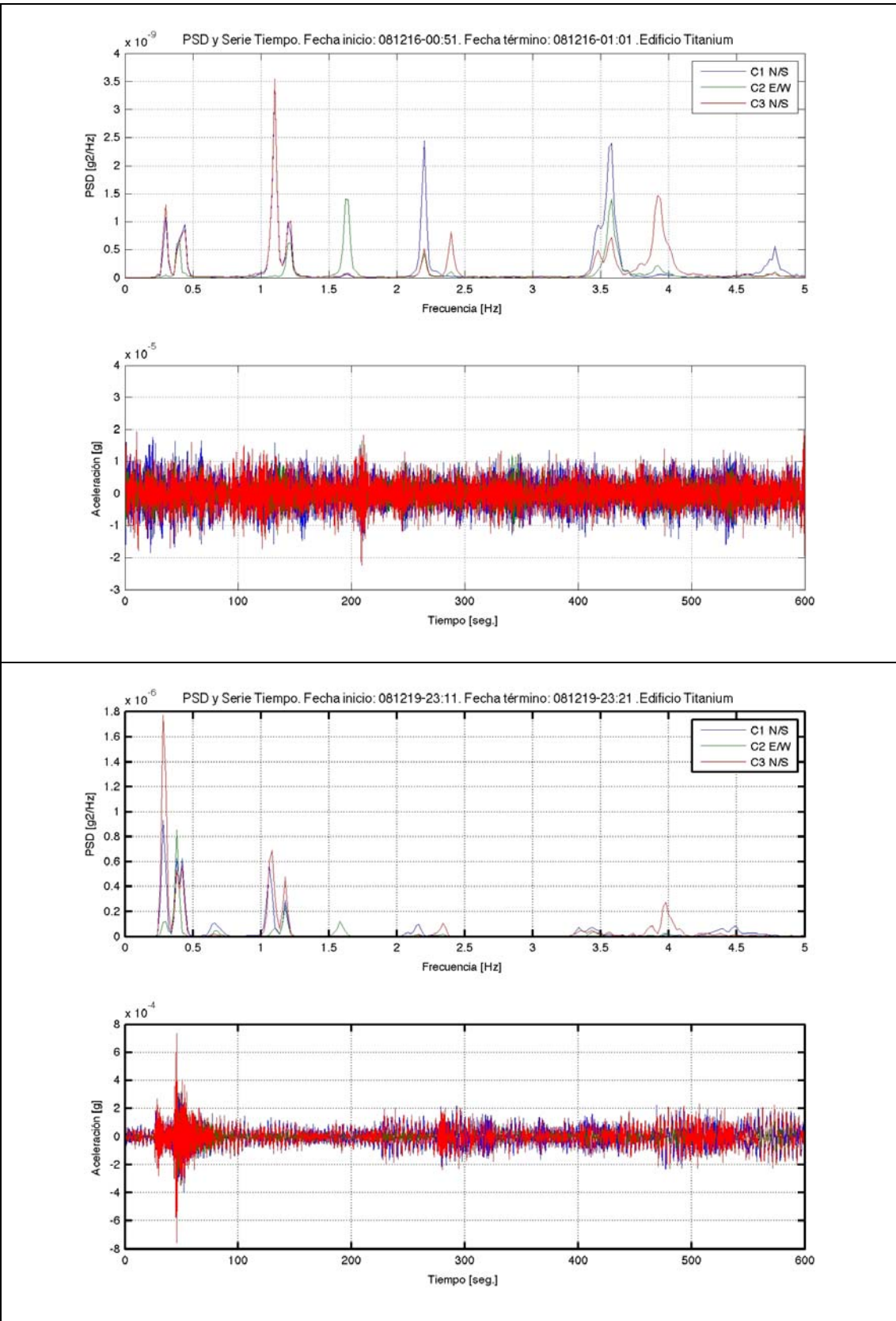


Figura D. 26. Serie de Tiempo y Espectro de Potencia. Torre Titanium La Portada.

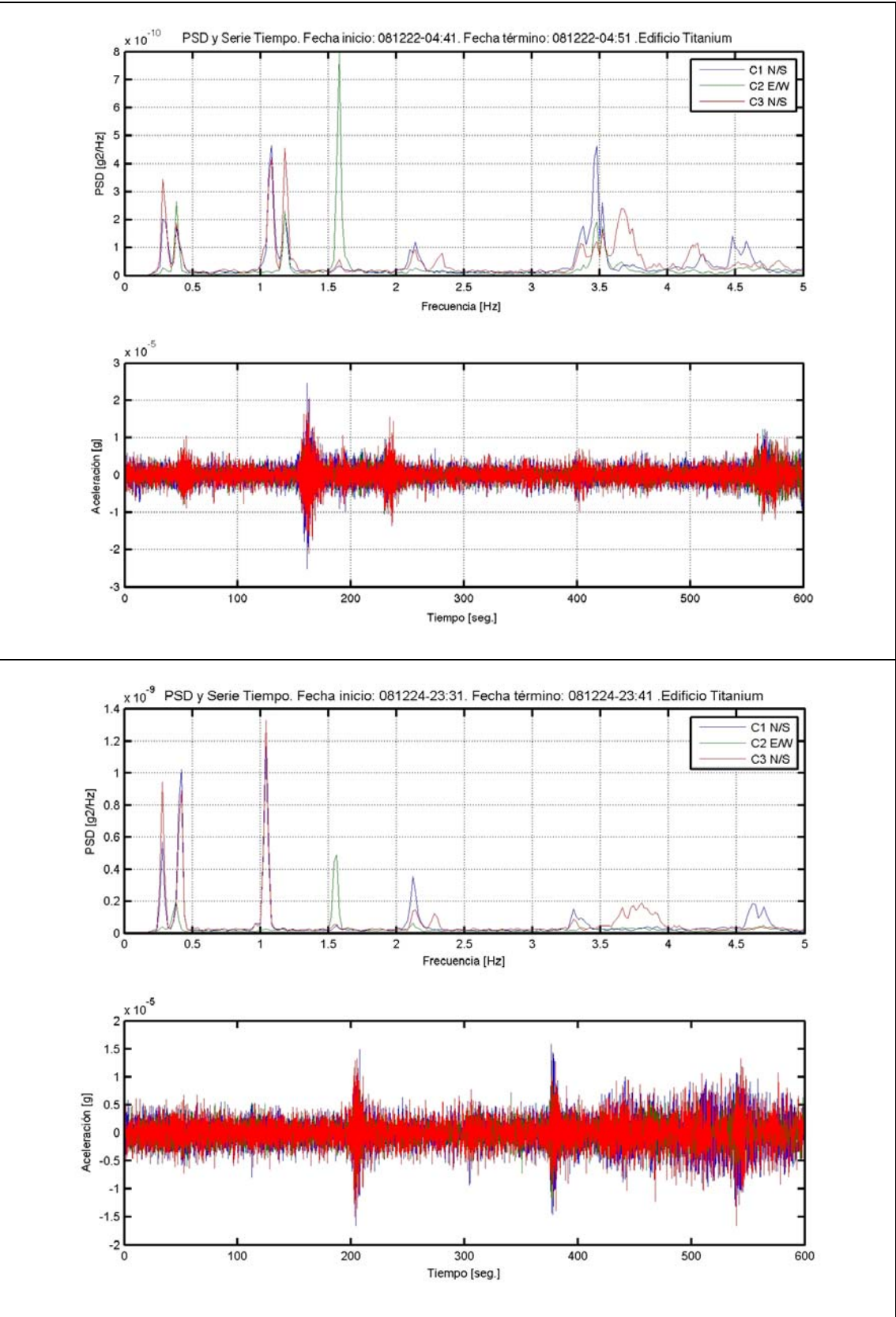


Figura D. 27. Serie de Tiempo y Espectro de Potencia. Torre Titanium La Portada.

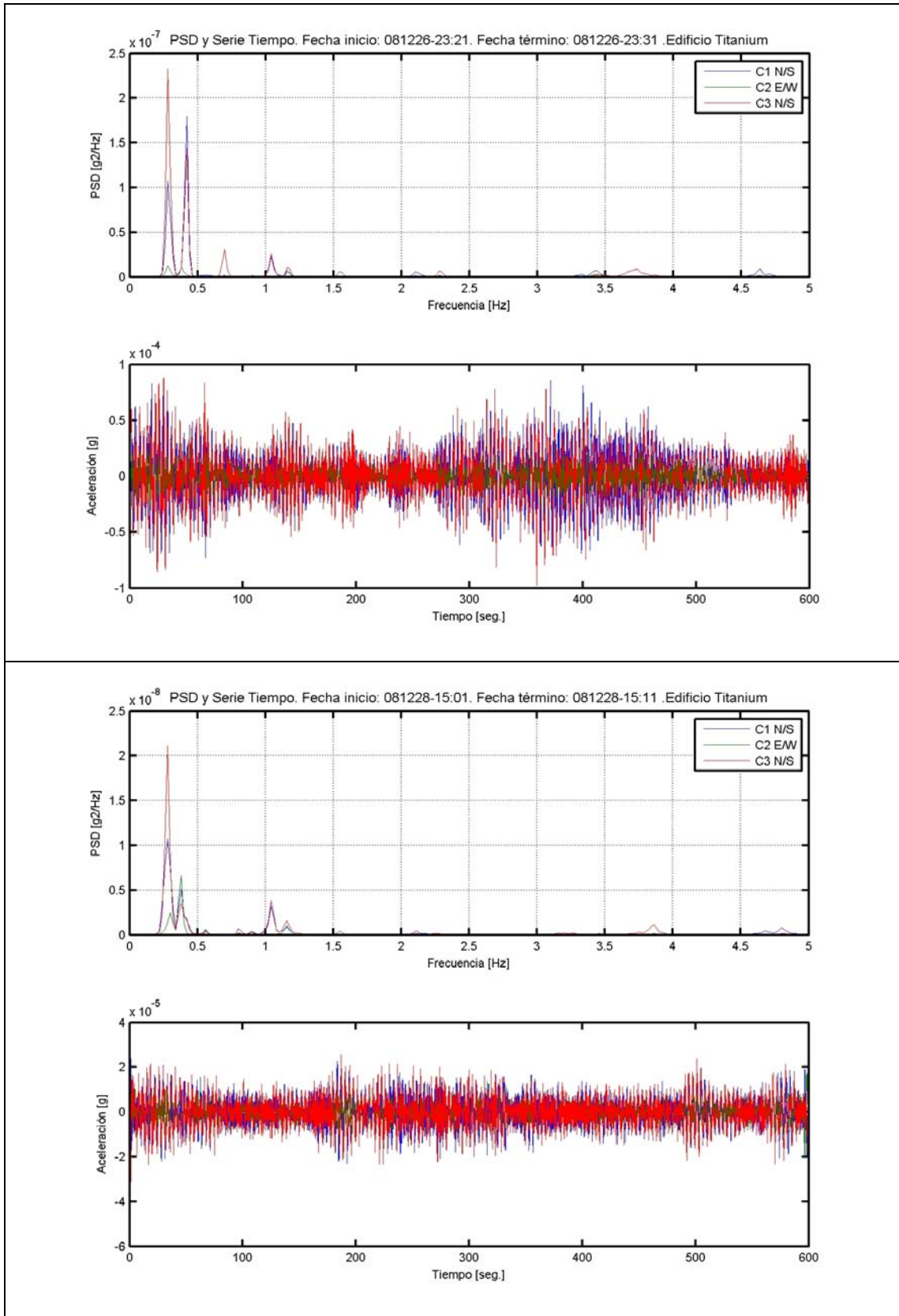


Figura D. 28. Serie de Tiempo y Espectro de Potencia. Torre Titanium La Portada.

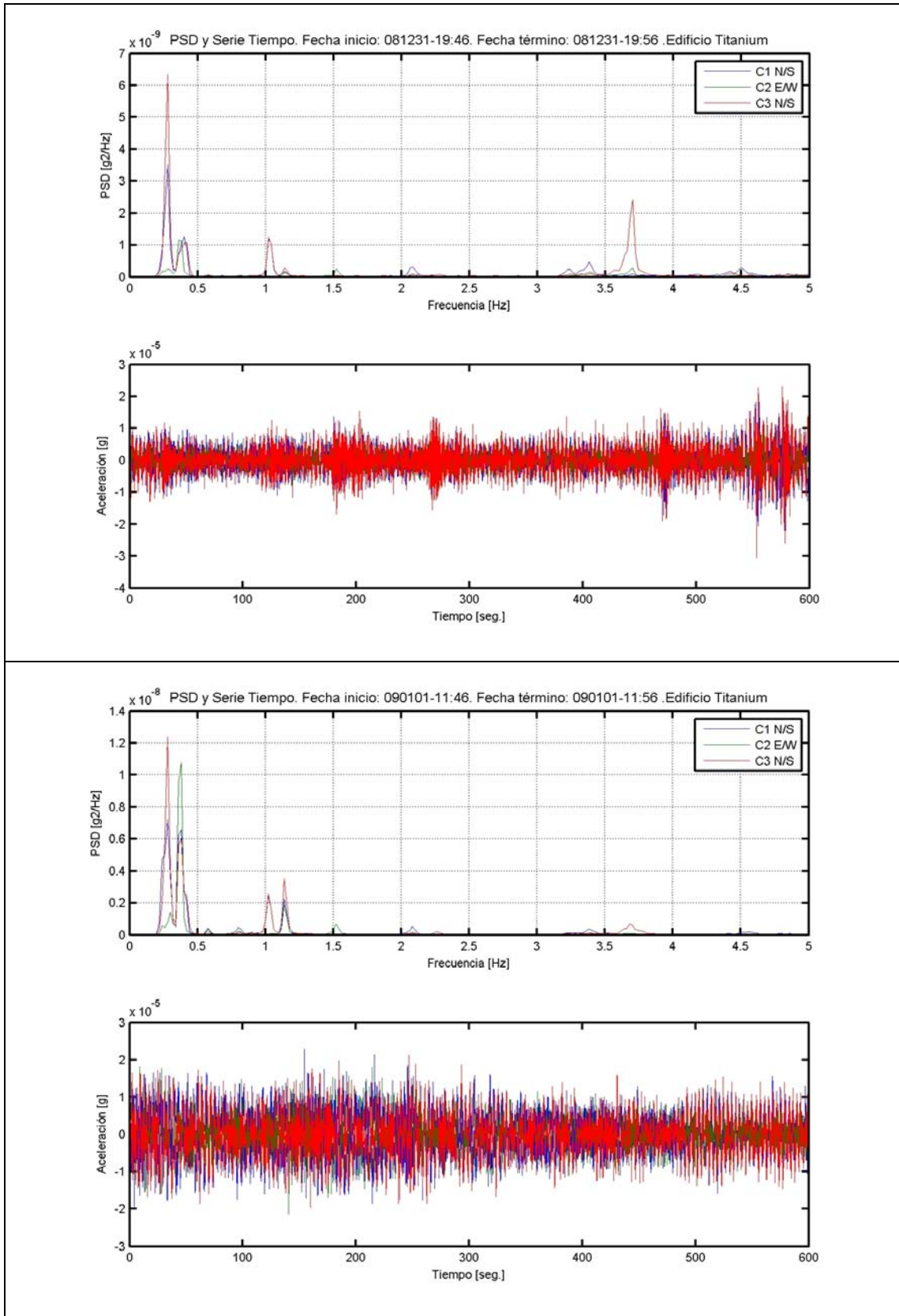


Figura D. 29. Serie de Tiempo y Espectro de Potencia. Torre Titanium La Portada.

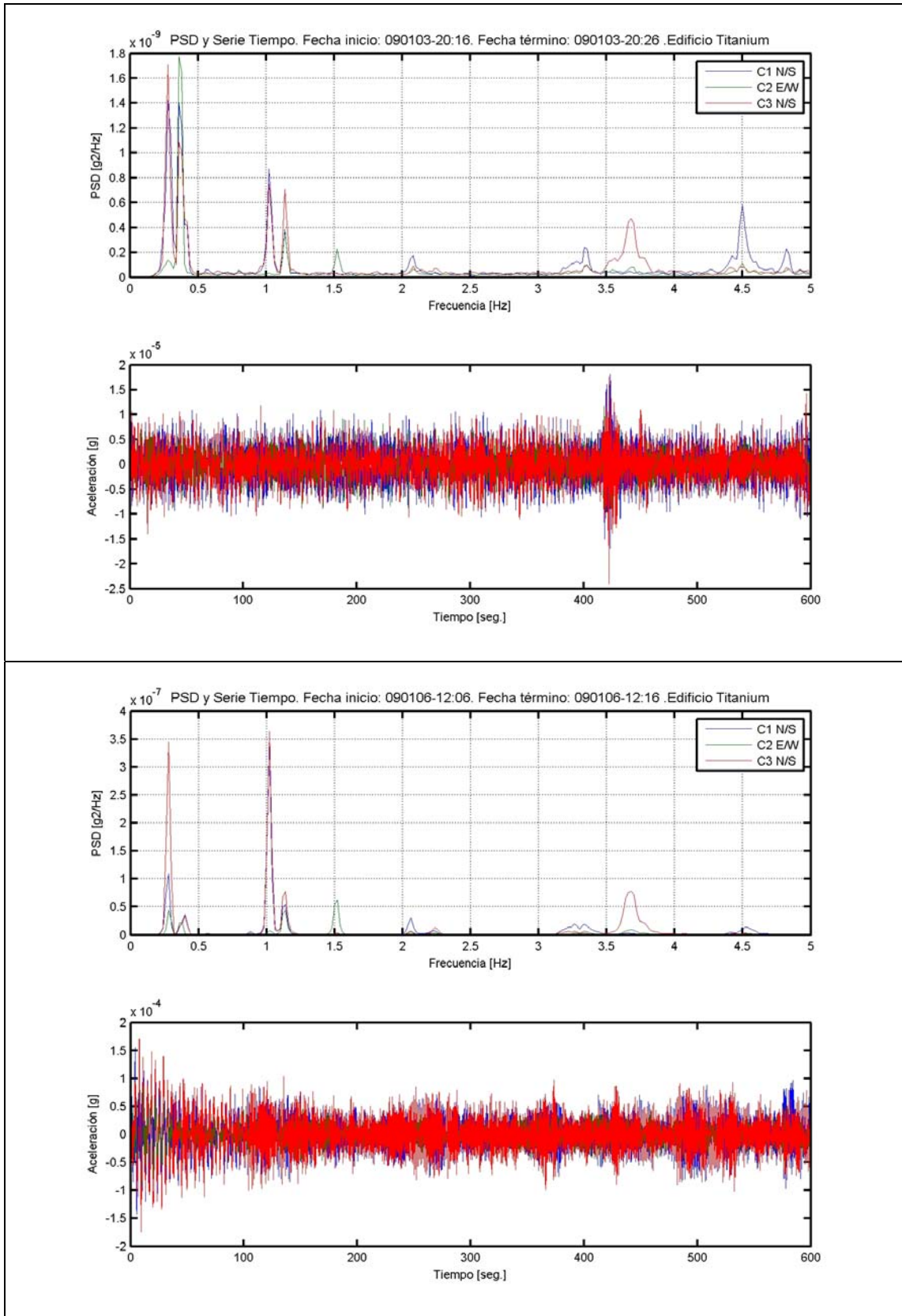


Figura D. 30. Serie de Tiempo y Espectro de Potencia. Torre Titanium La Portada.

Apéndice E

Diagramas de estabilización y evolución de parámetros dinámicos en función del orden del modelo espacio estado.

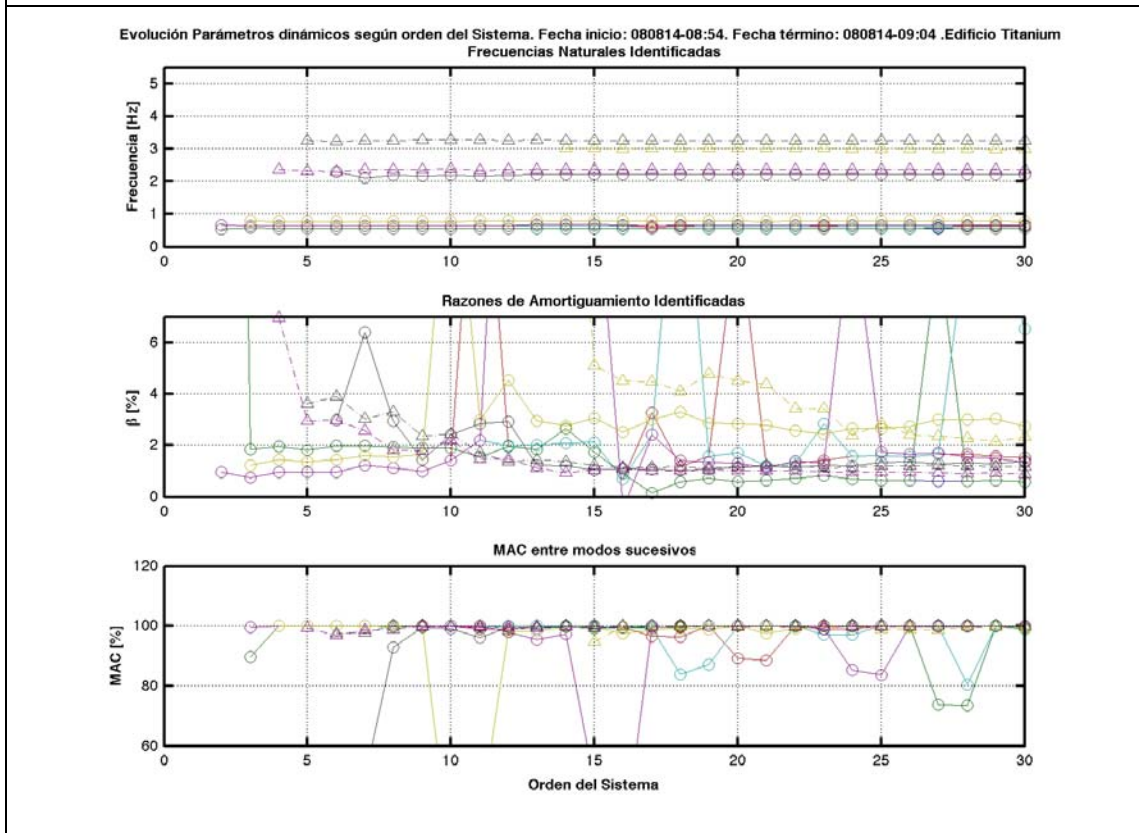
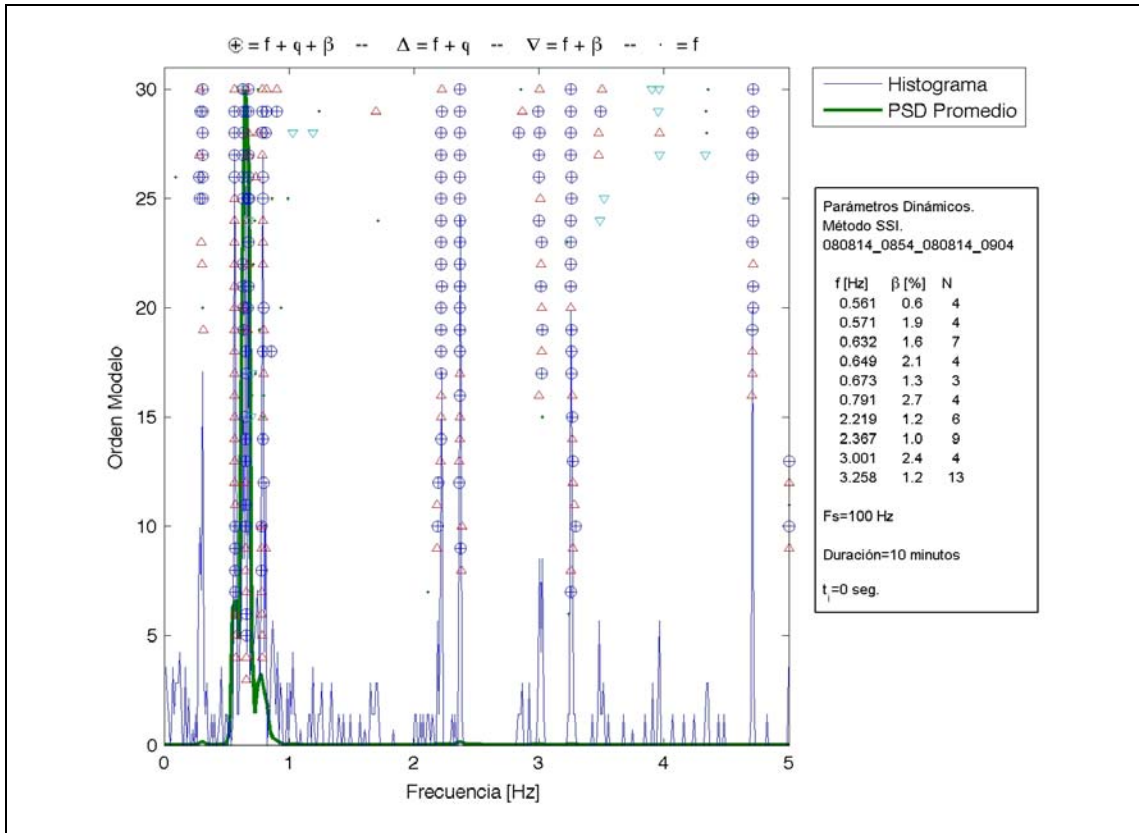


Figura E. 1. Diagrama de Estabilización y Evolución de Parámetros Dinámicos.

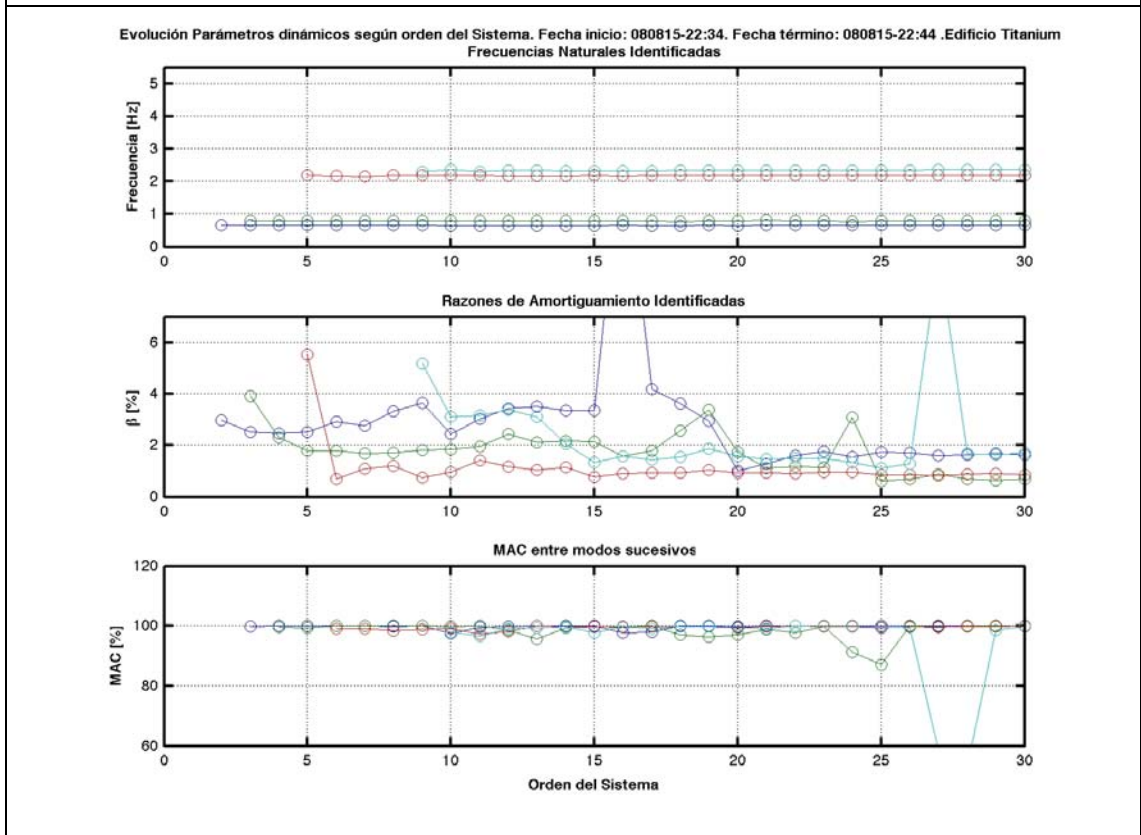
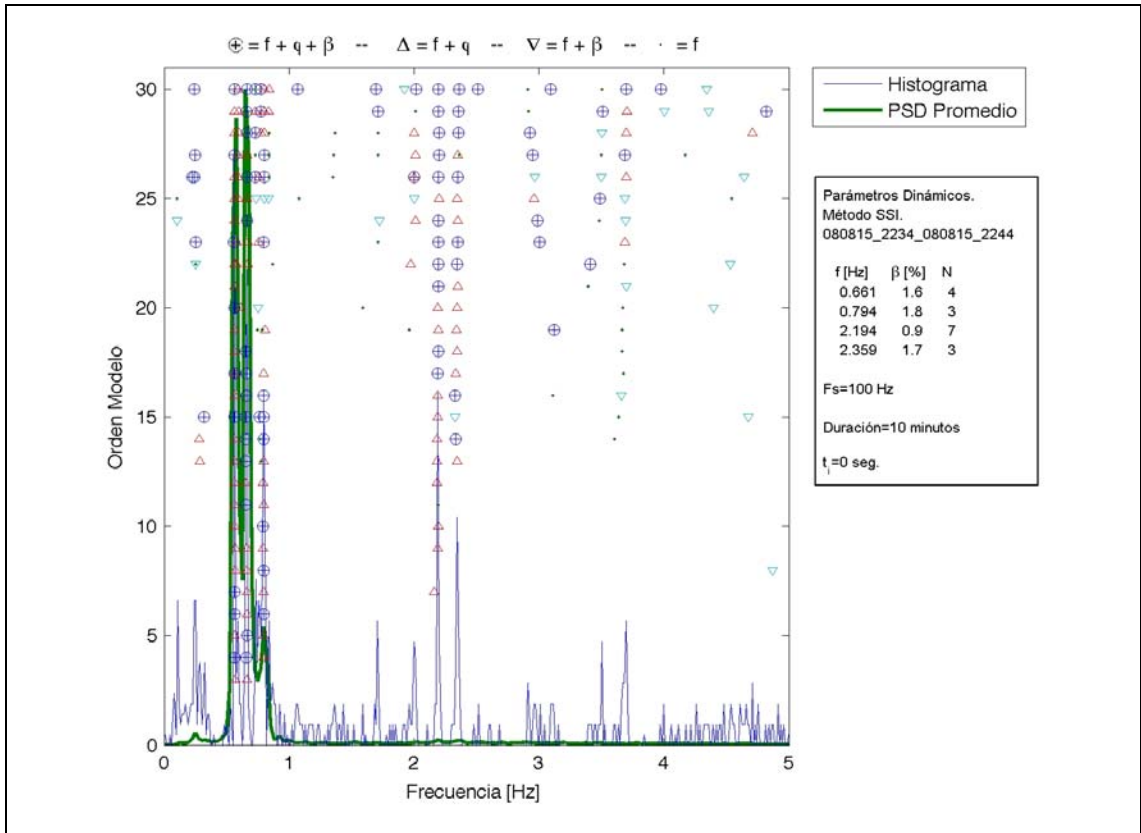


Figura E. 2. Diagrama de Estabilización y Evolución de Parámetros Dinámicos.

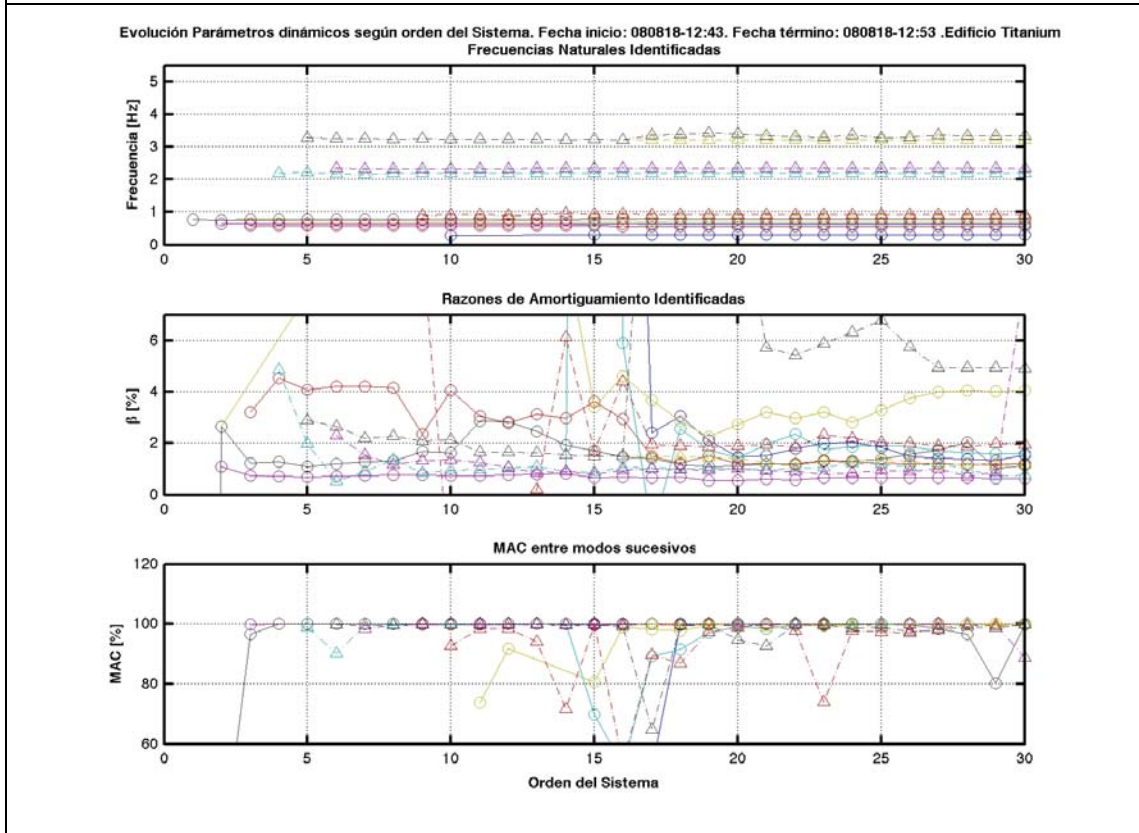
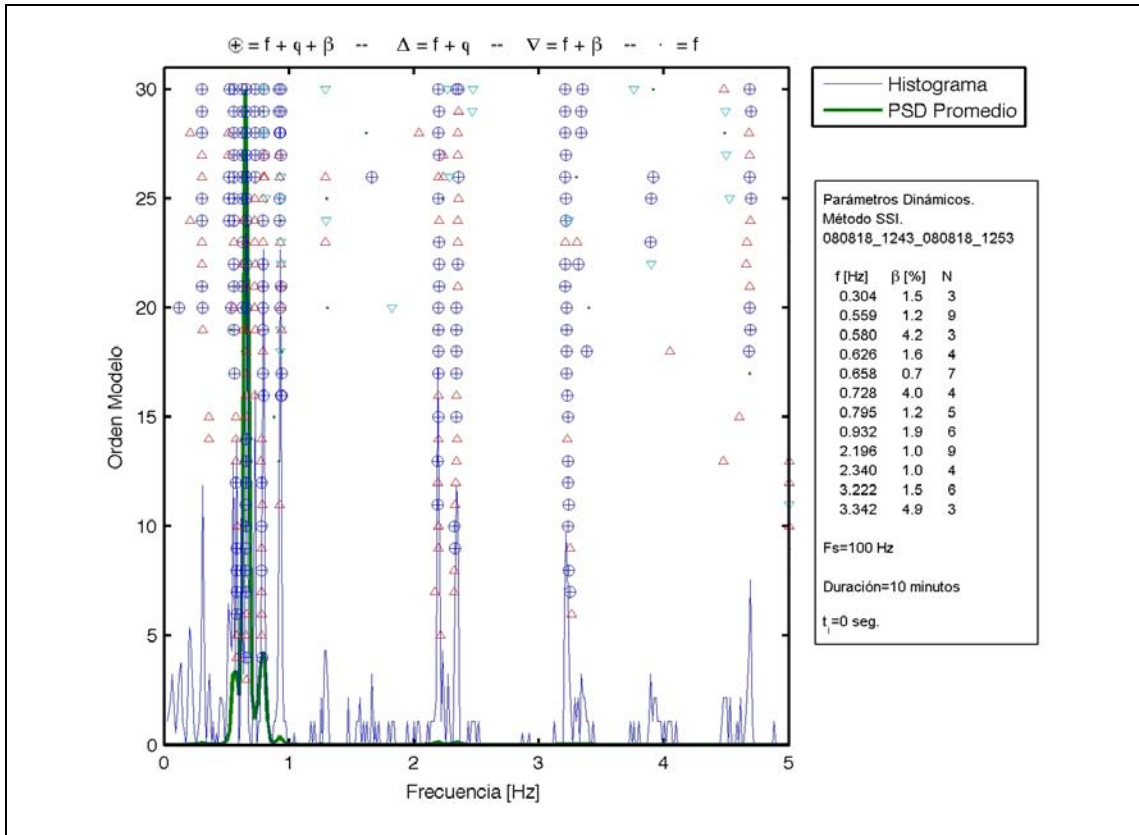


Figura E. 3. Diagrama de Estabilización y Evolución de Parámetros Dinámicos.

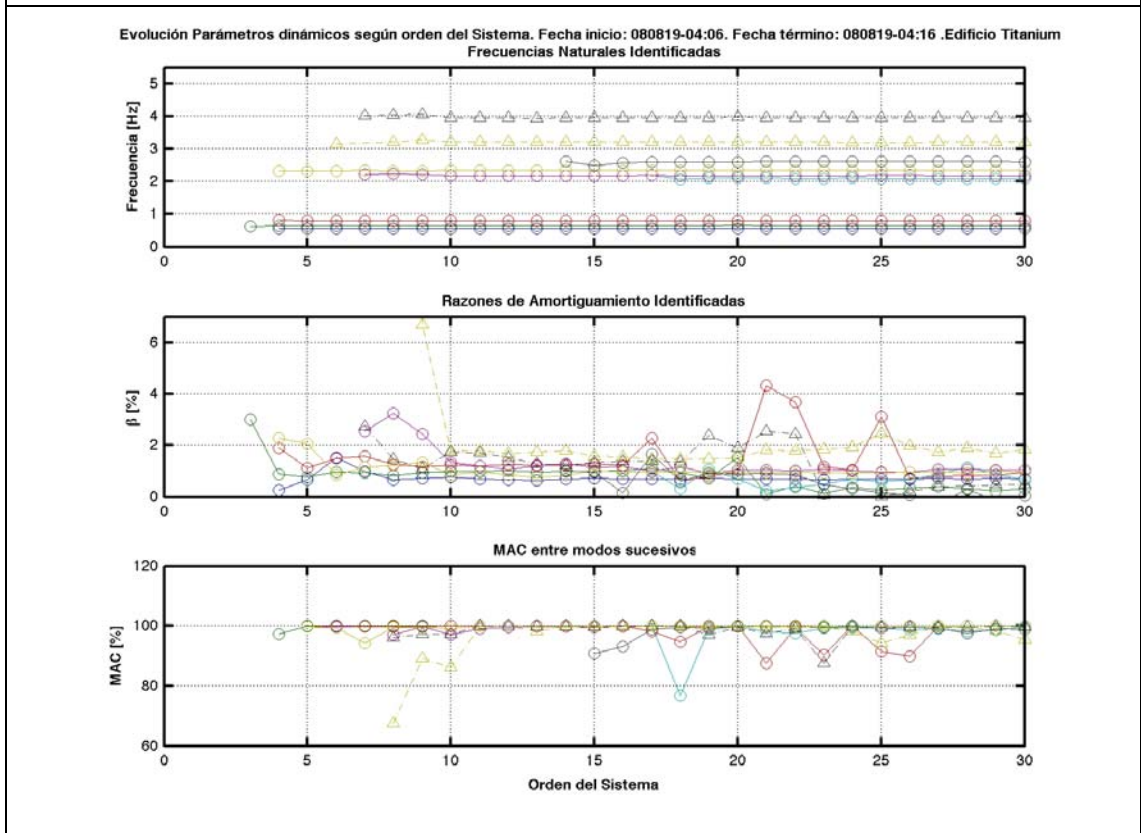
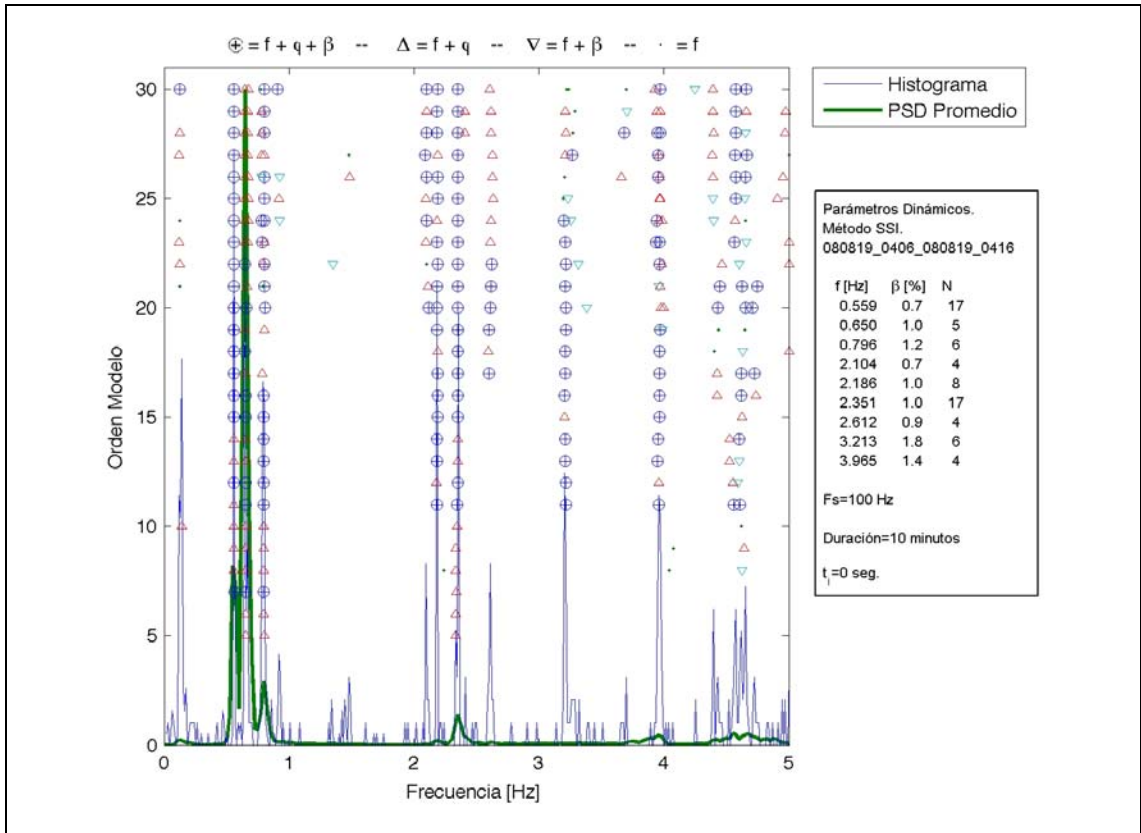


Figura E. 4. Diagrama de Estabilización y Evolución de Parámetros Dinámicos.

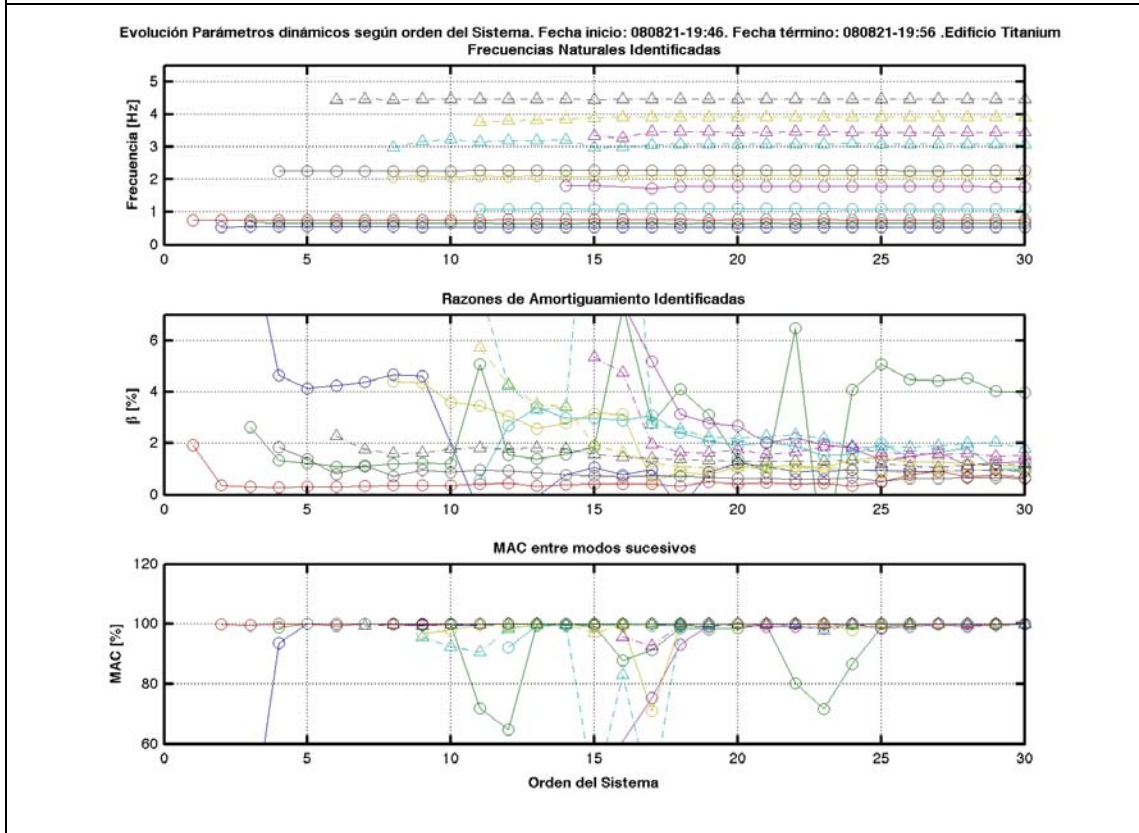
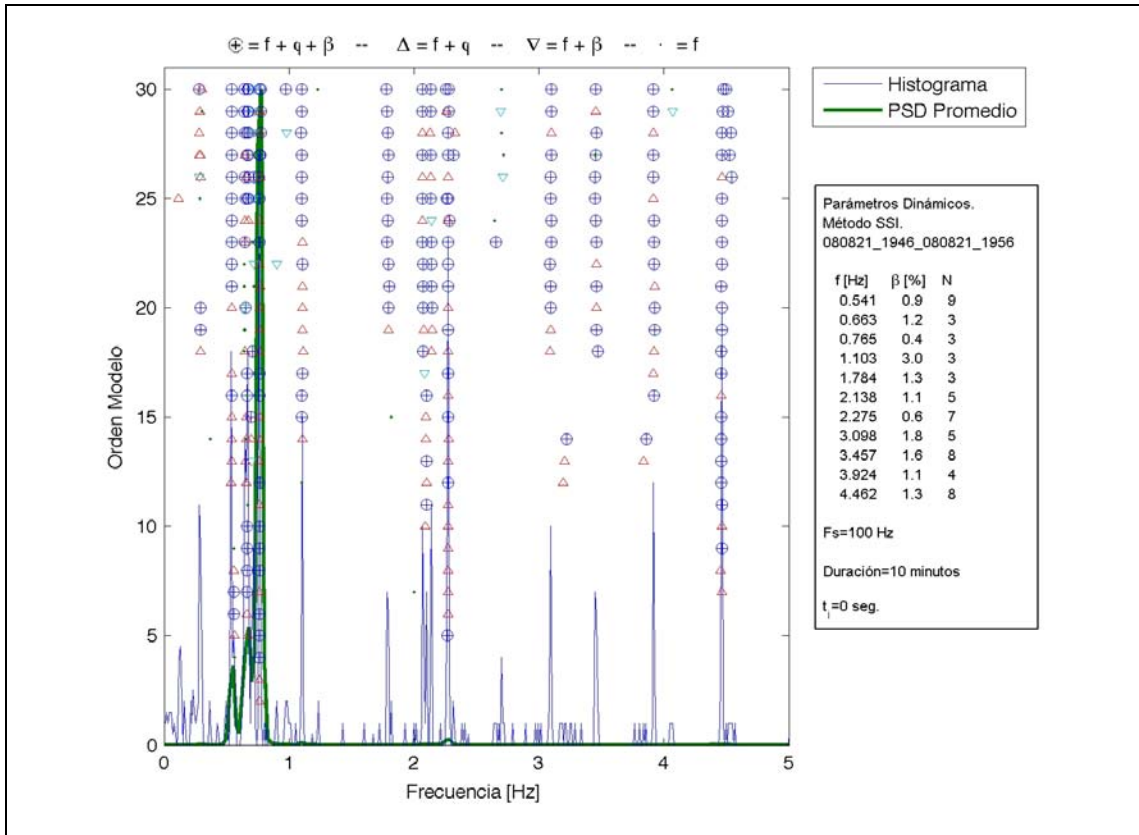


Figura E. 5. Diagrama de Estabilización y Evolución de Parámetros Dinámicos.

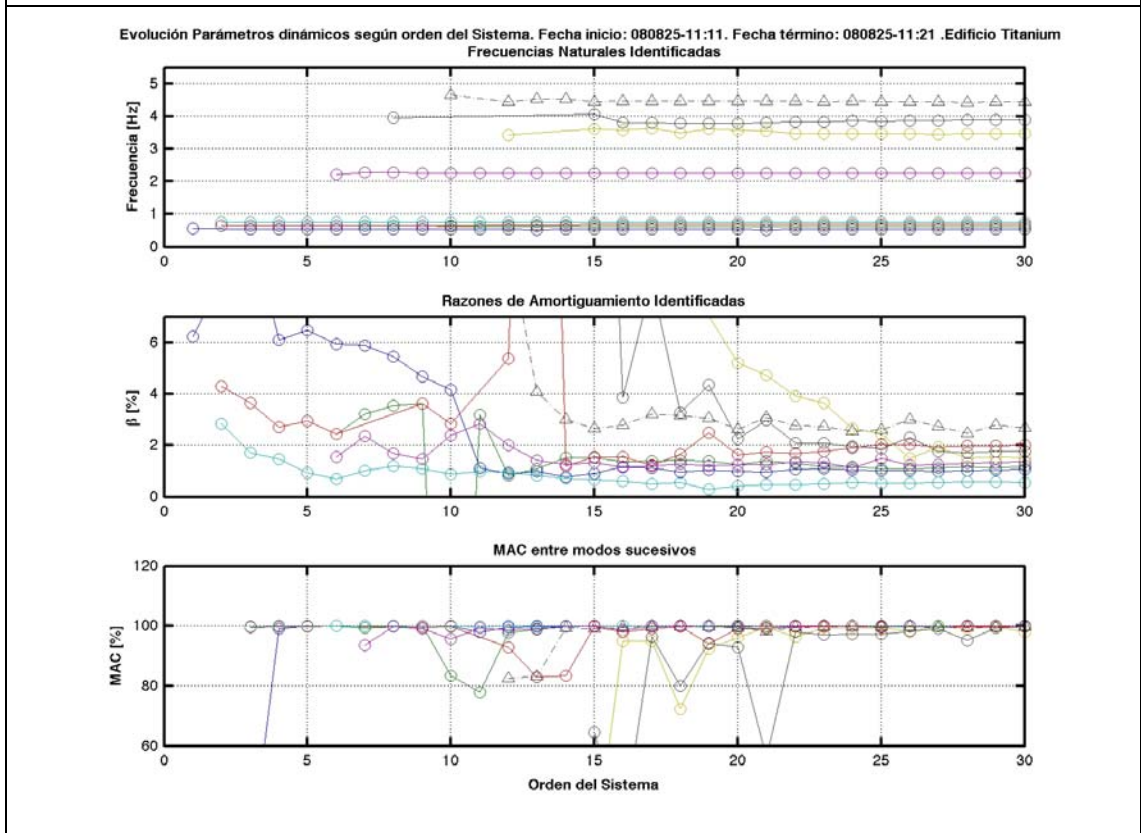
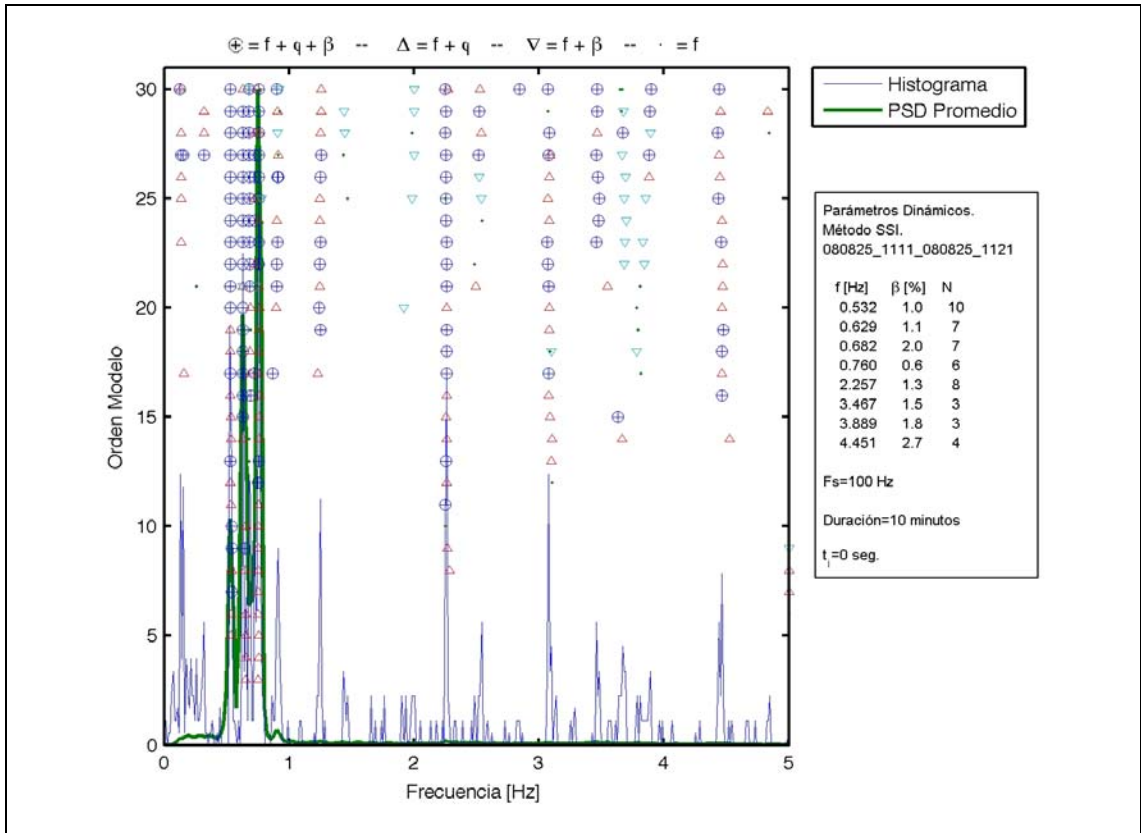


Figura E. 6. Diagrama de Estabilización y Evolución de Parámetros Dinámicos.

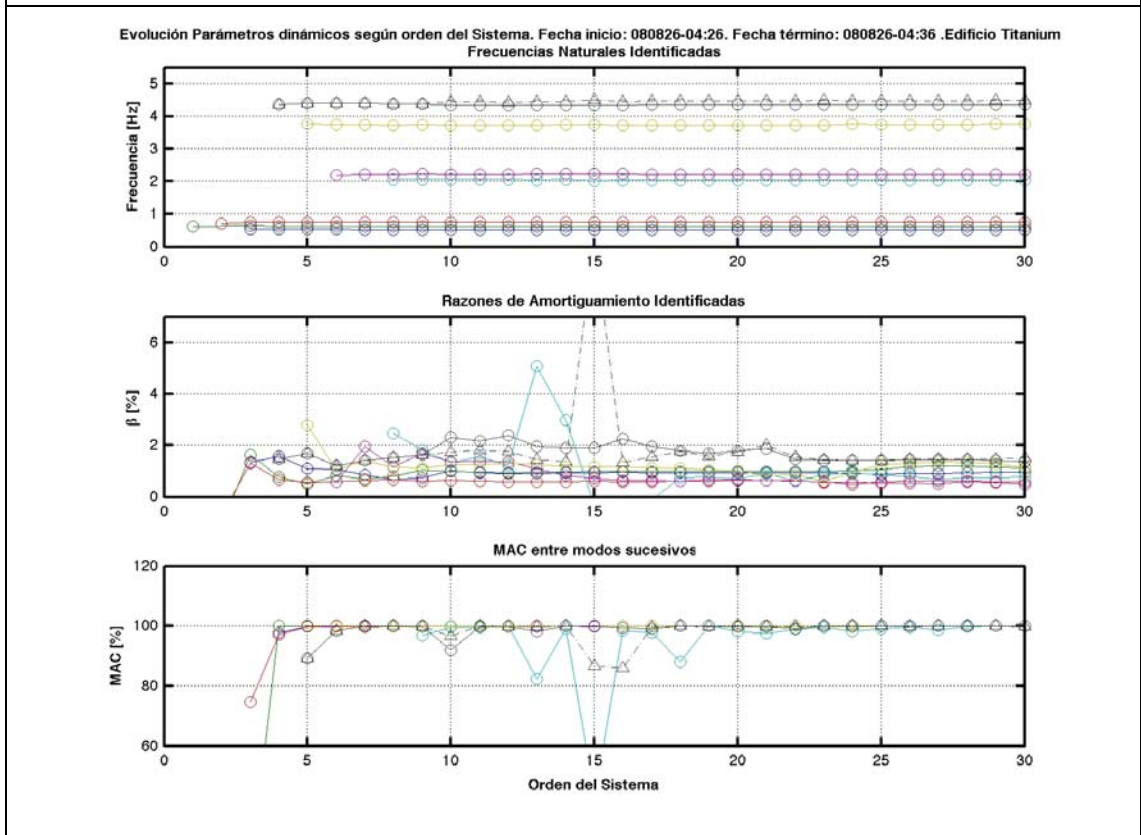
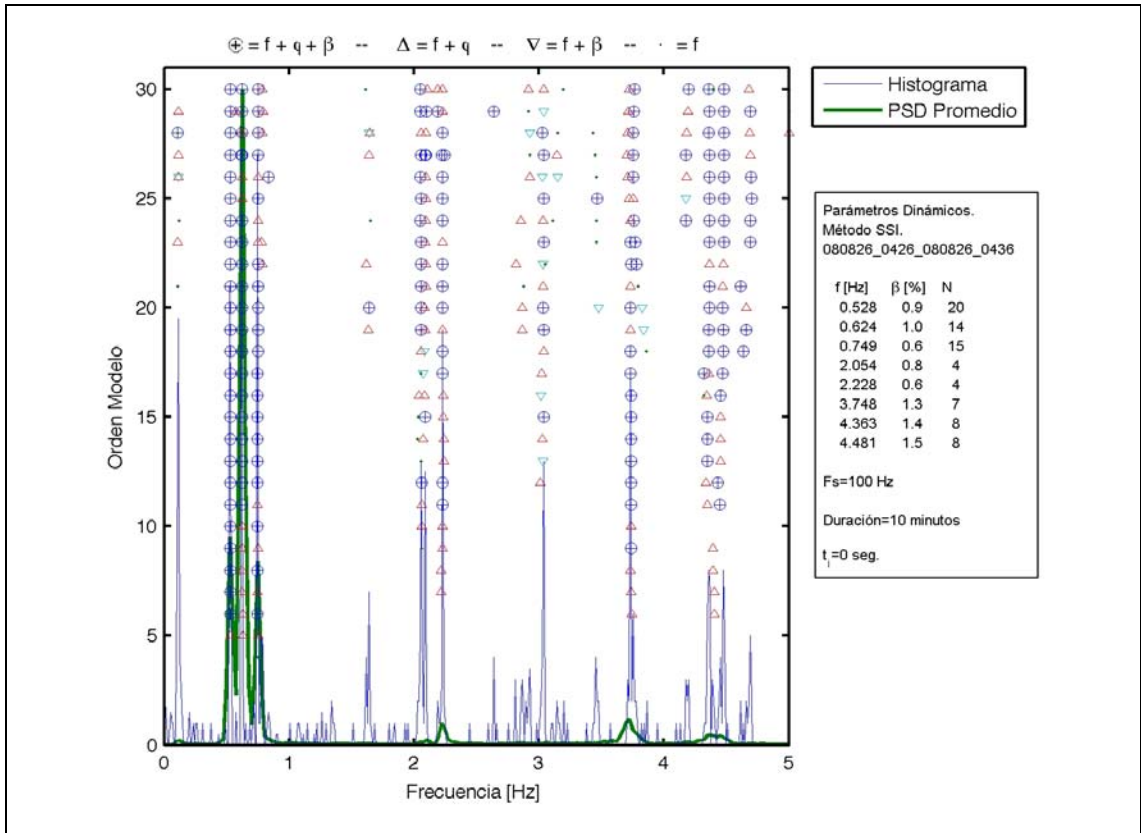


Figura E. 7. Diagrama de Estabilización y Evolución de Parámetros Dinámicos.

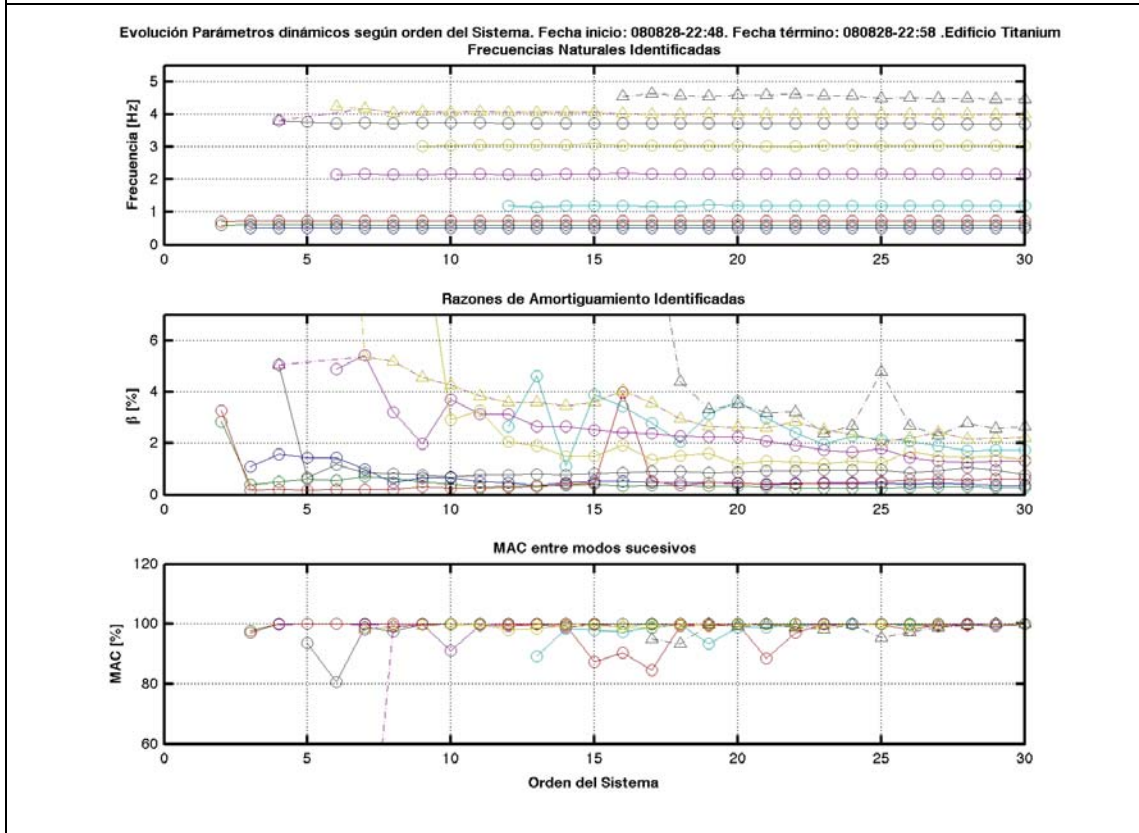
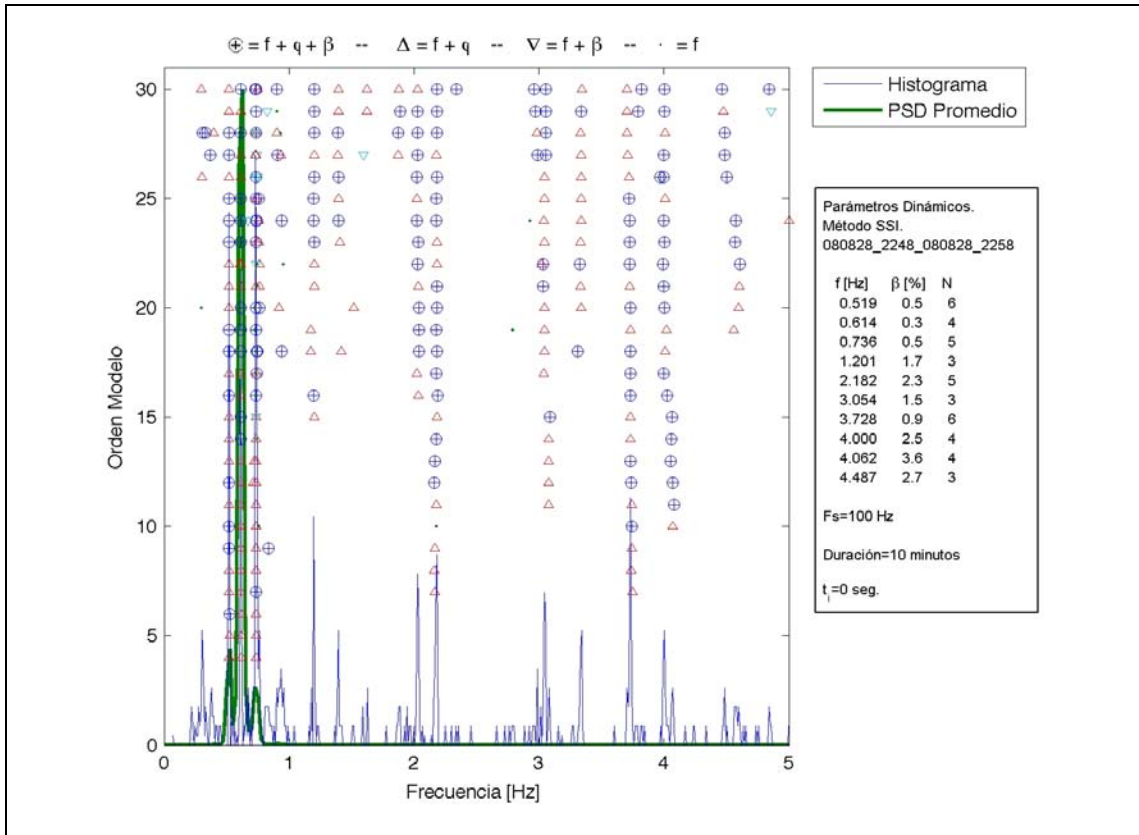


Figura E. 8. Diagrama de Estabilización y Evolución de Parámetros Dinámicos.

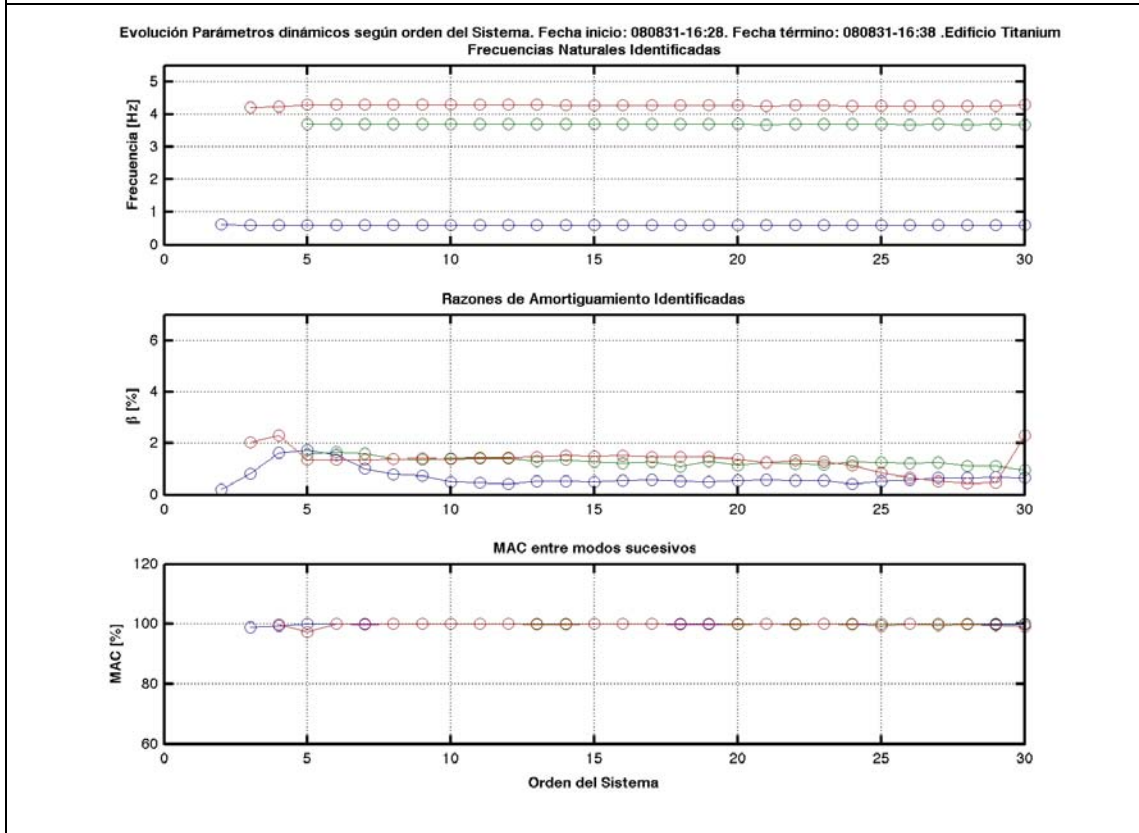
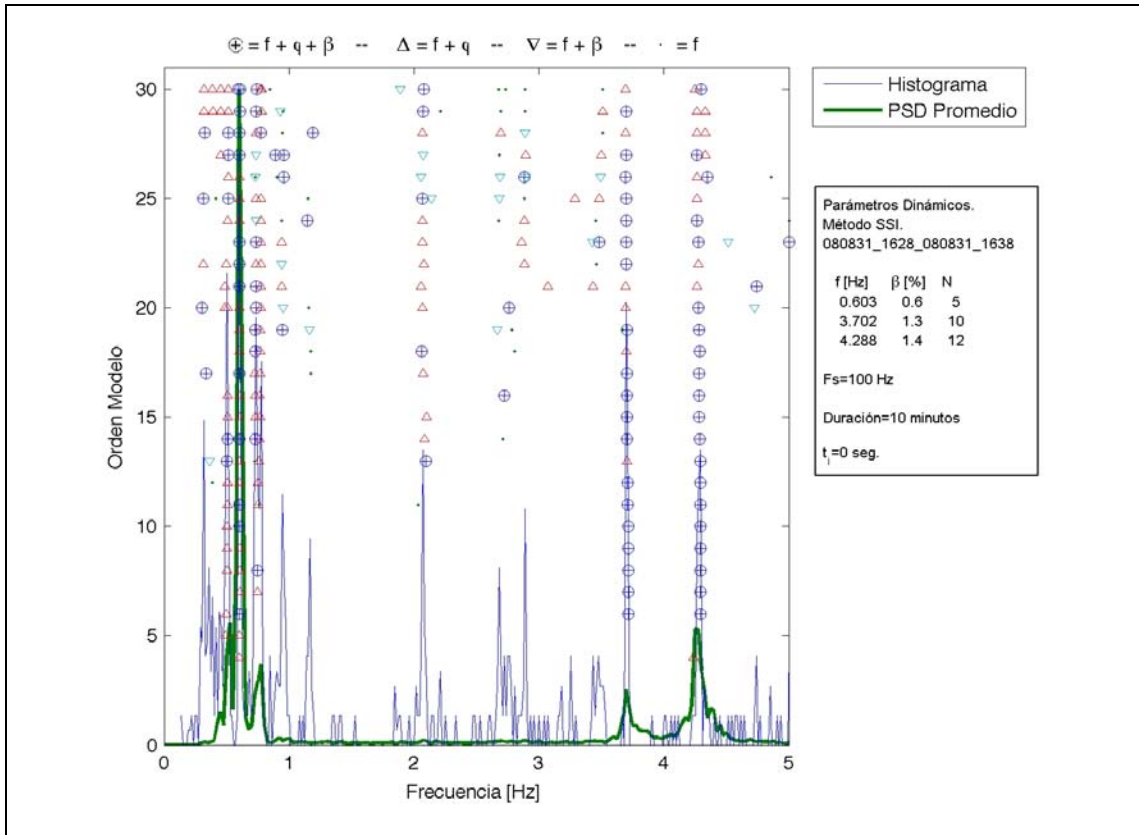


Figura E. 9. Diagrama de Estabilización y Evolución de Parámetros Dinámicos.

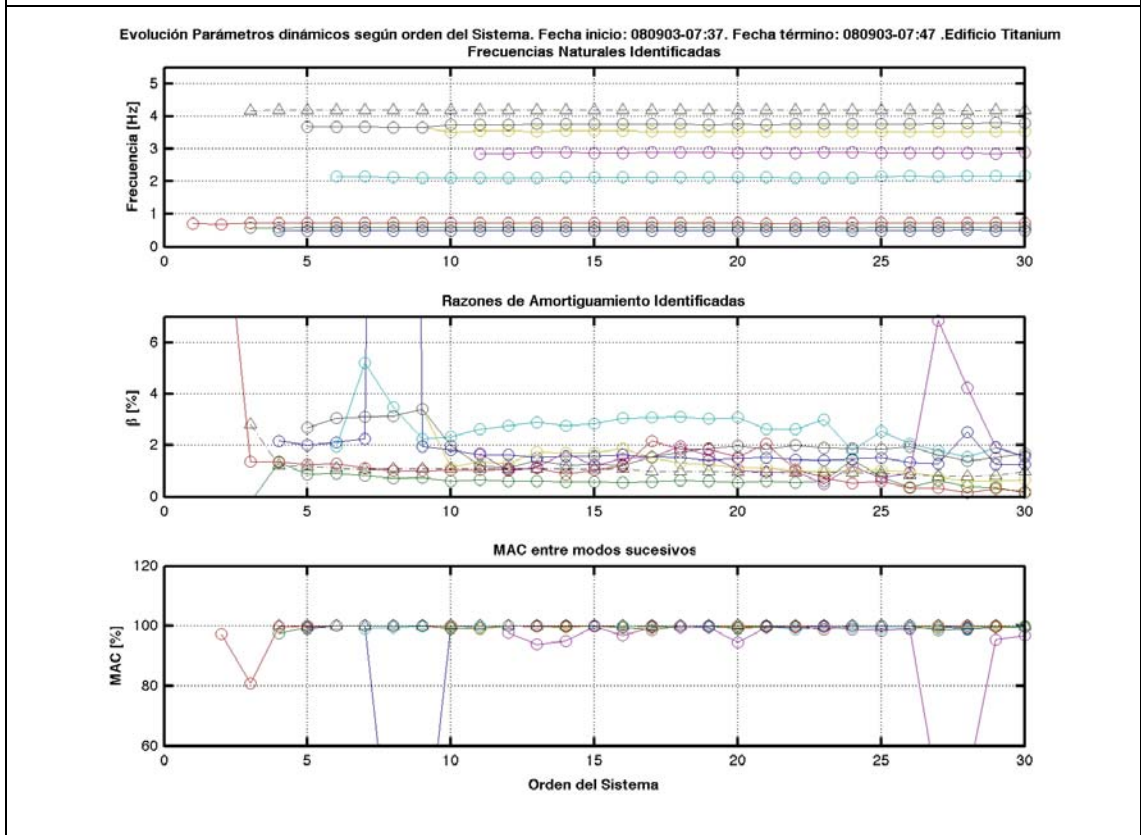
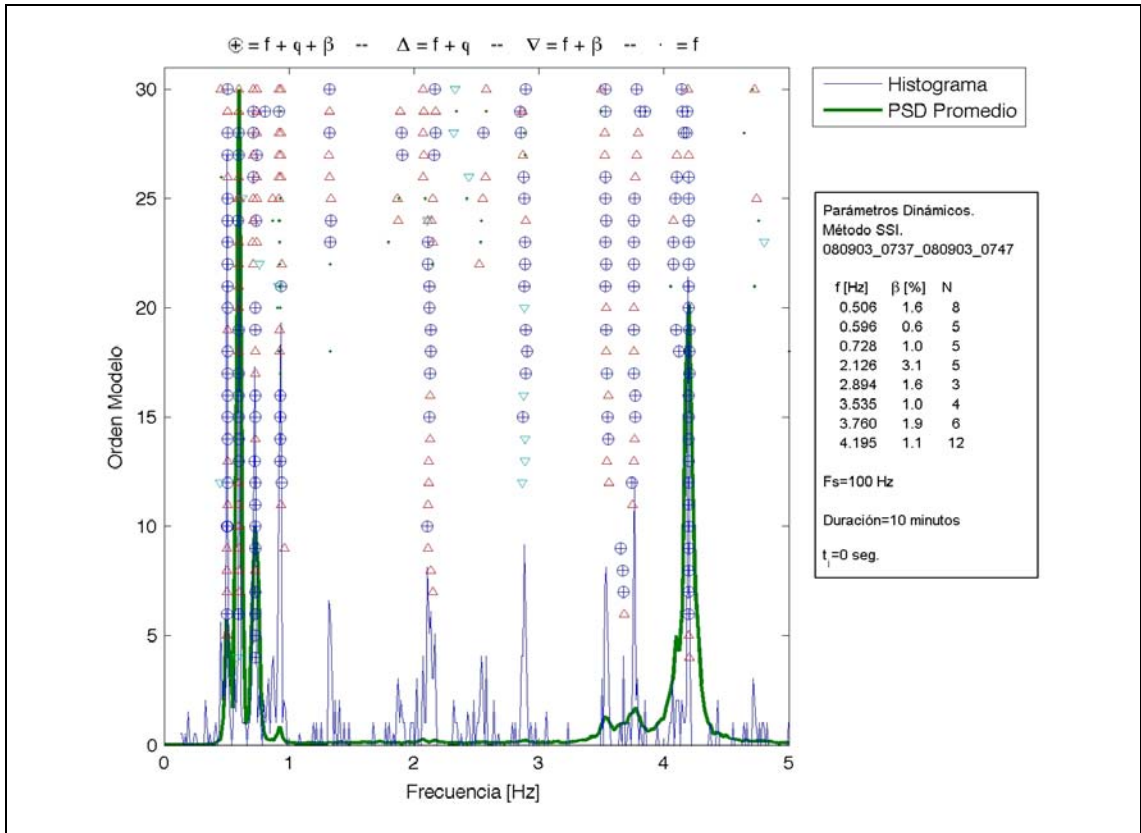


Figura E. 10. Diagrama de Estabilización y Evolución de Parámetros Dinámicos.

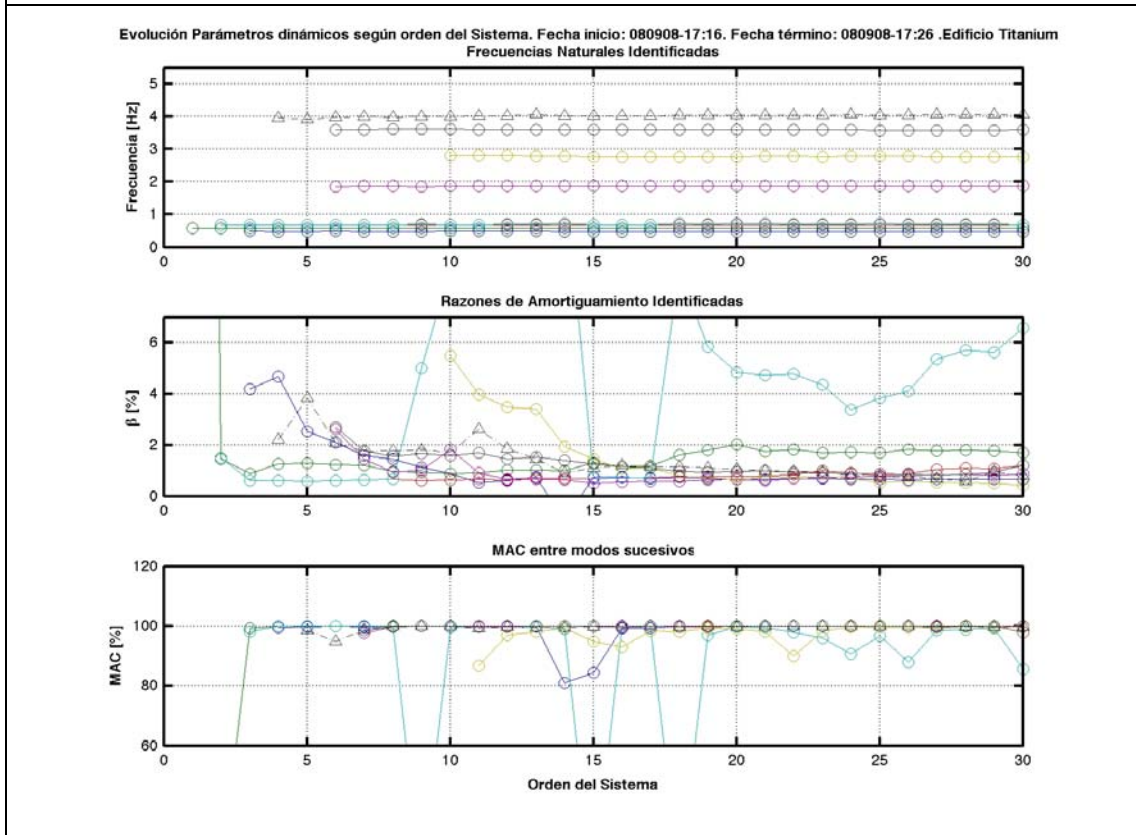
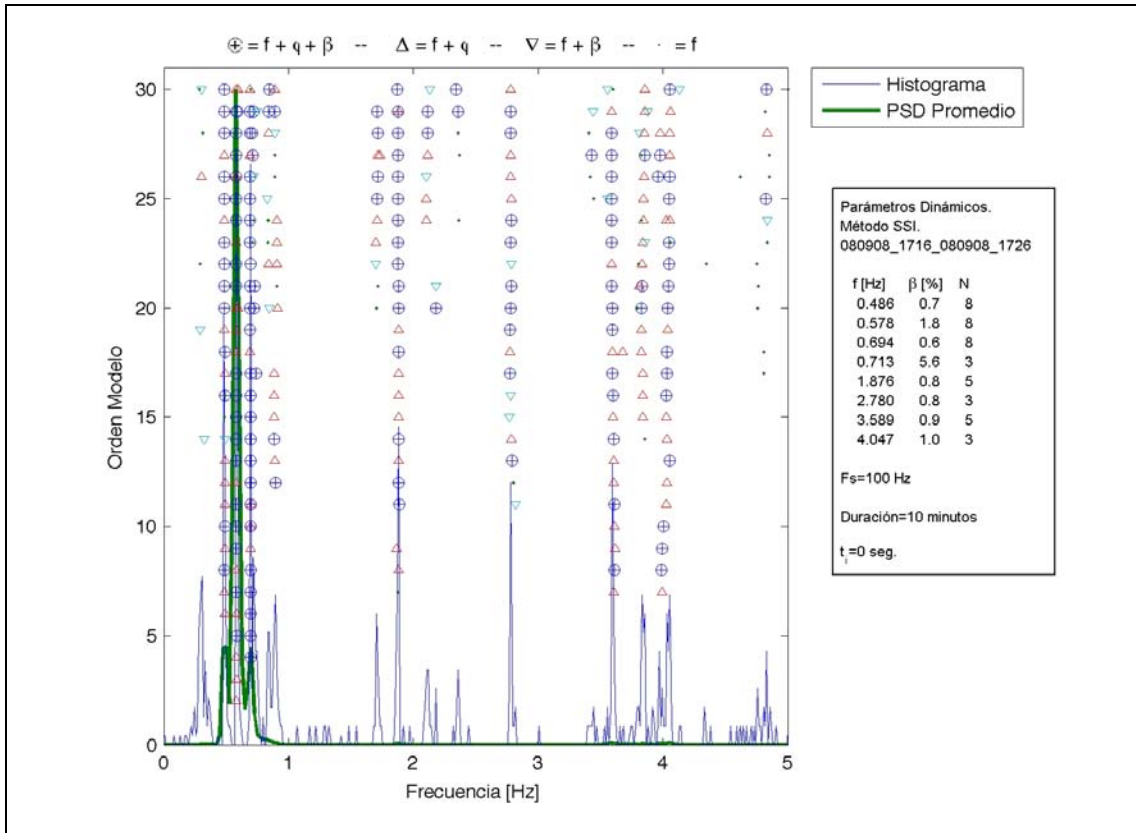


Figura E. 11. Diagrama de Estabilización y Evolución de Parámetros Dinámicos.

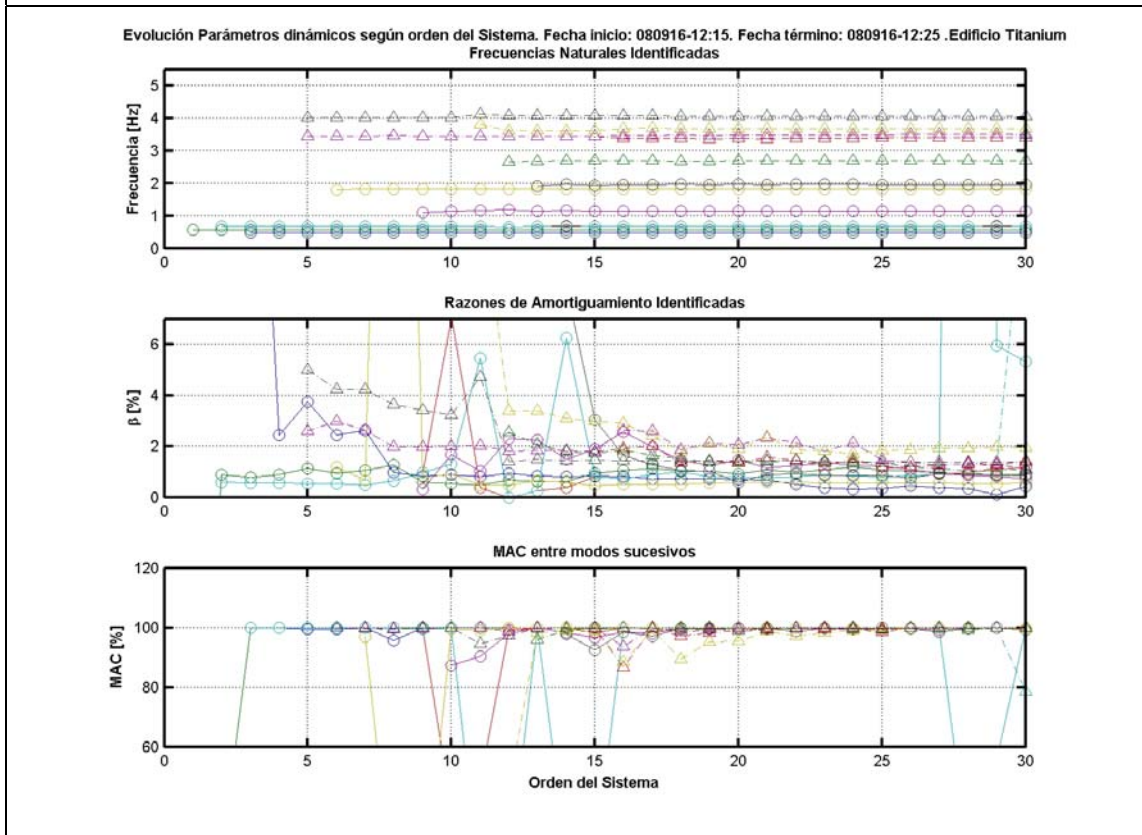
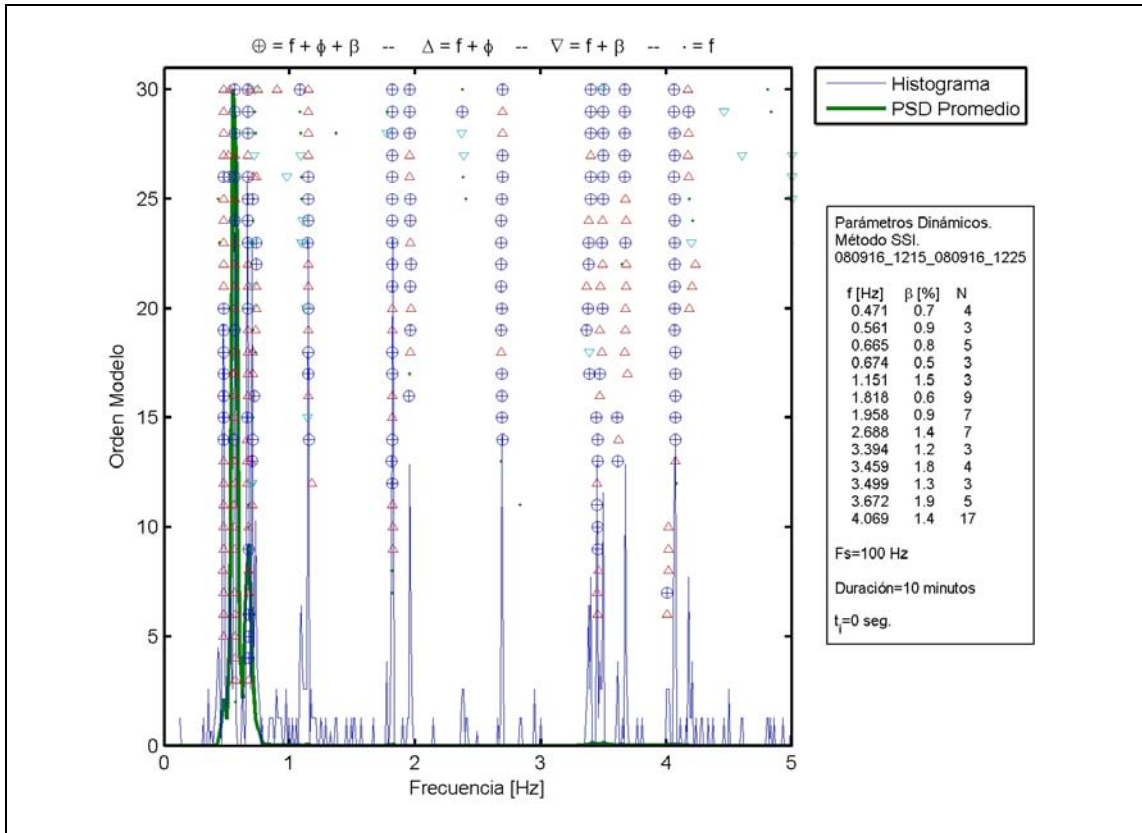


Figura E. 12. Diagrama de Estabilización y Evolución de Parámetros Dinámicos.

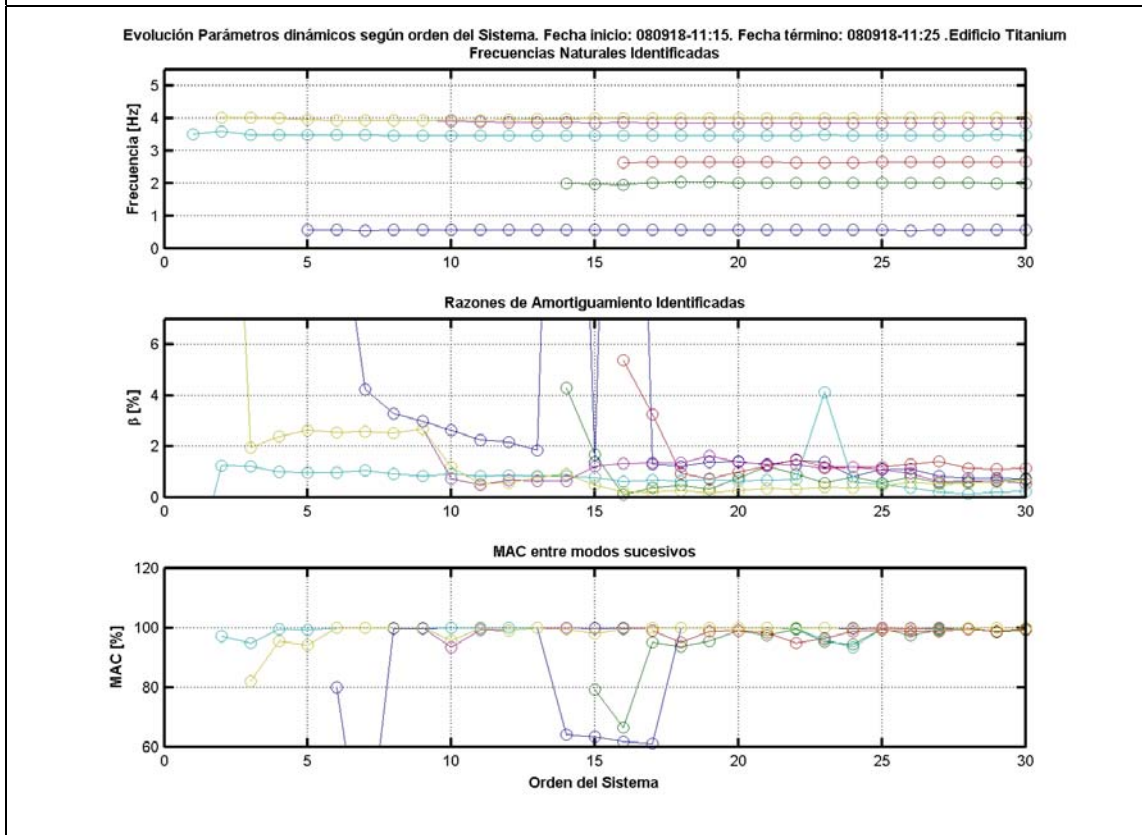
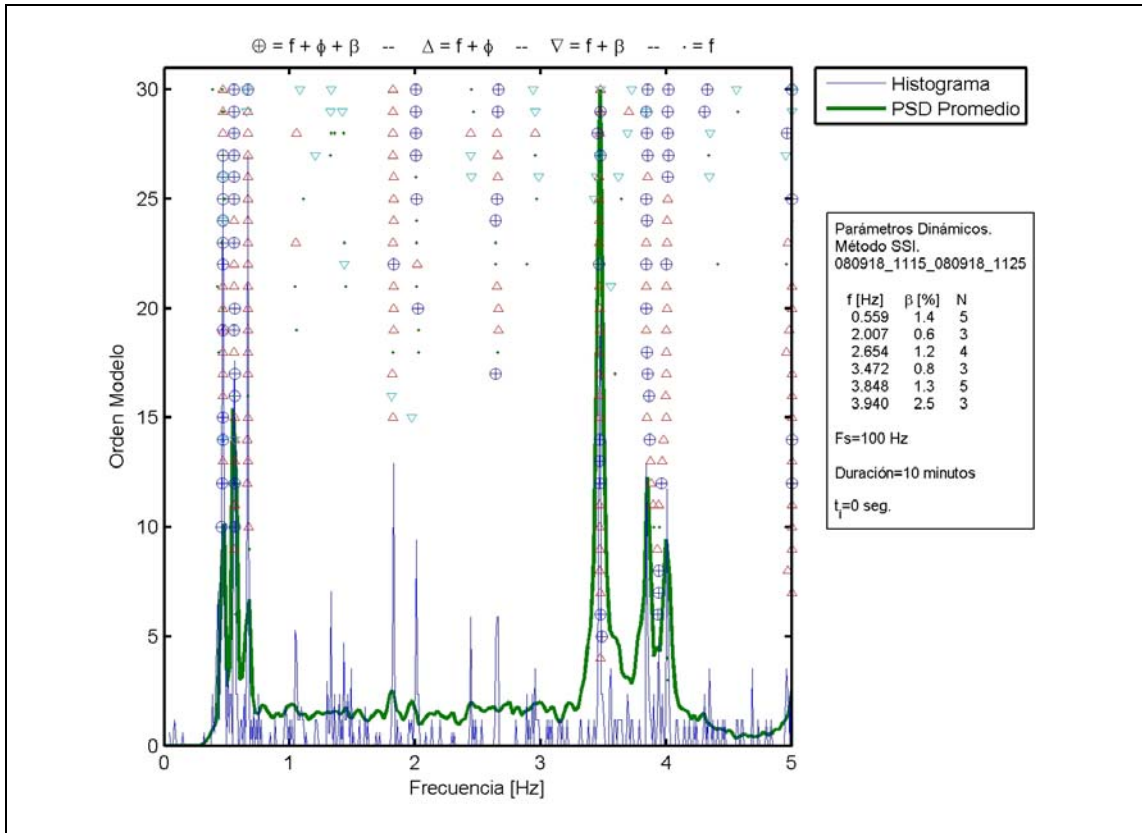


Figura E. 13. Diagrama de Estabilización y Evolución de Parámetros Dinámicos.

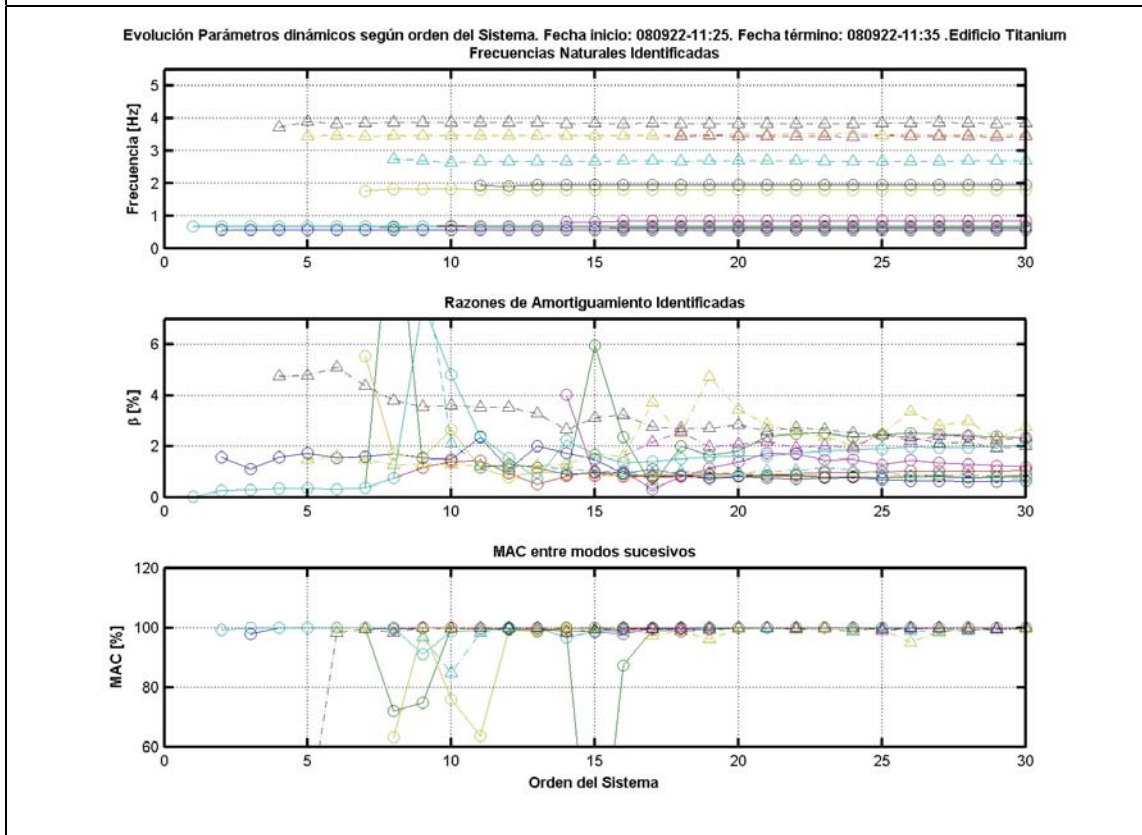
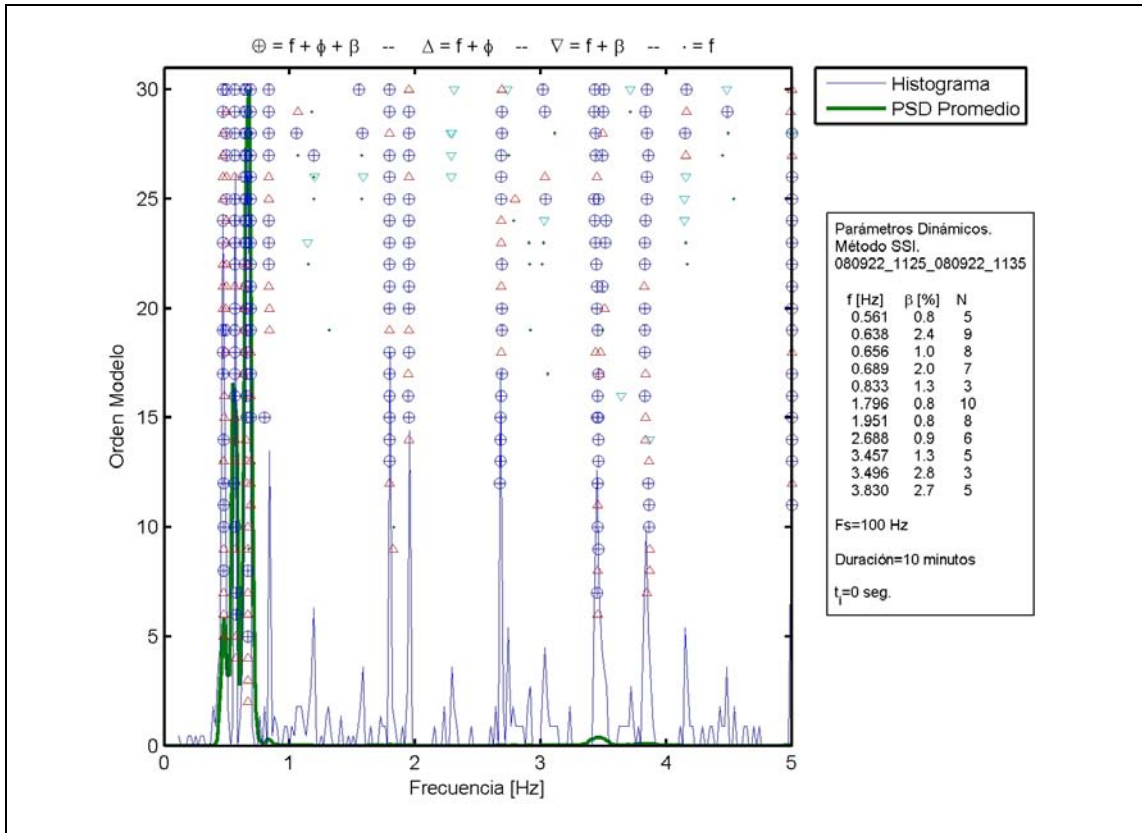


Figura E. 14. Diagrama de Estabilización y Evolución de Parámetros Dinámicos.

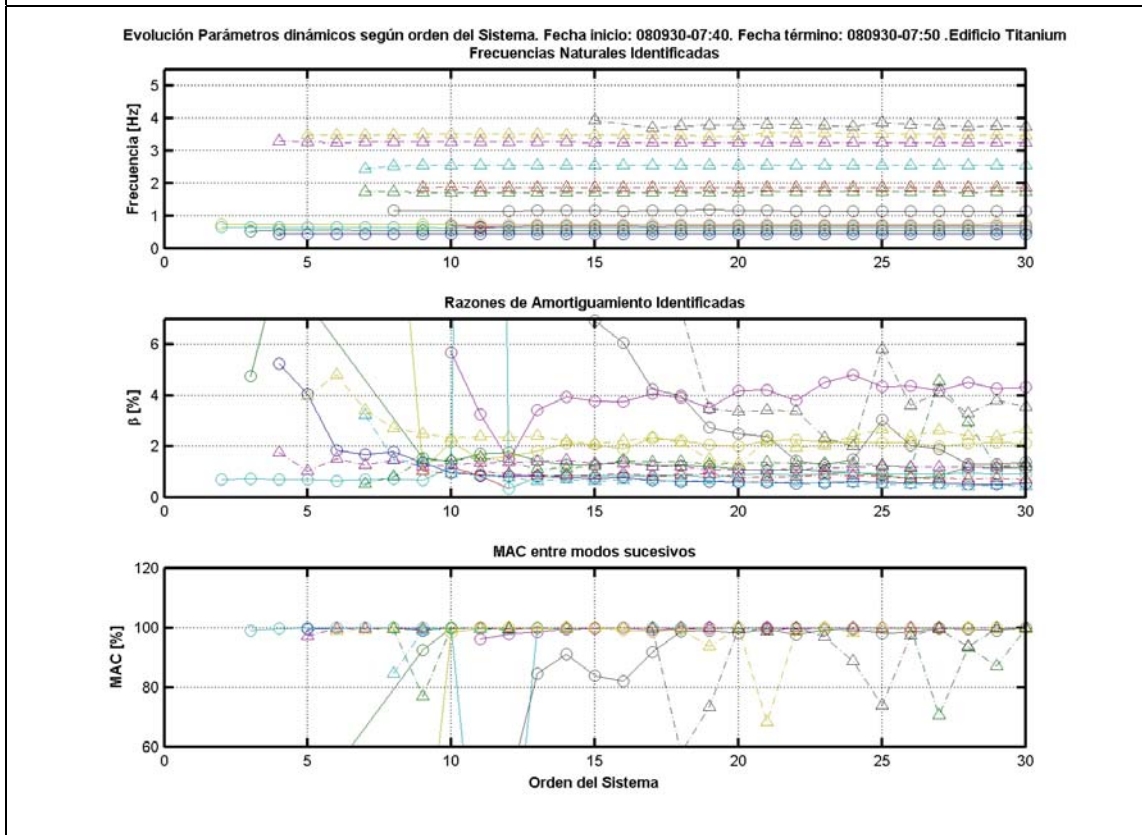
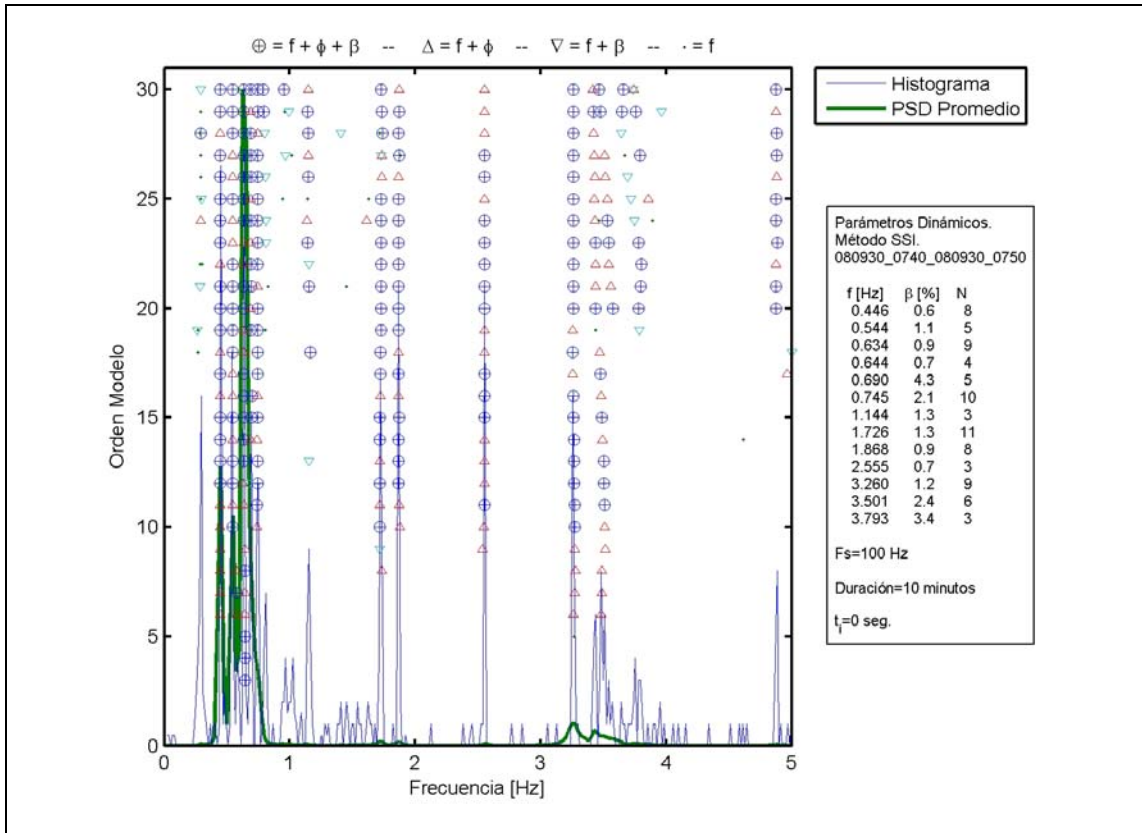


Figura E. 15. Diagrama de Estabilización y Evolución de Parámetros Dinámicos.

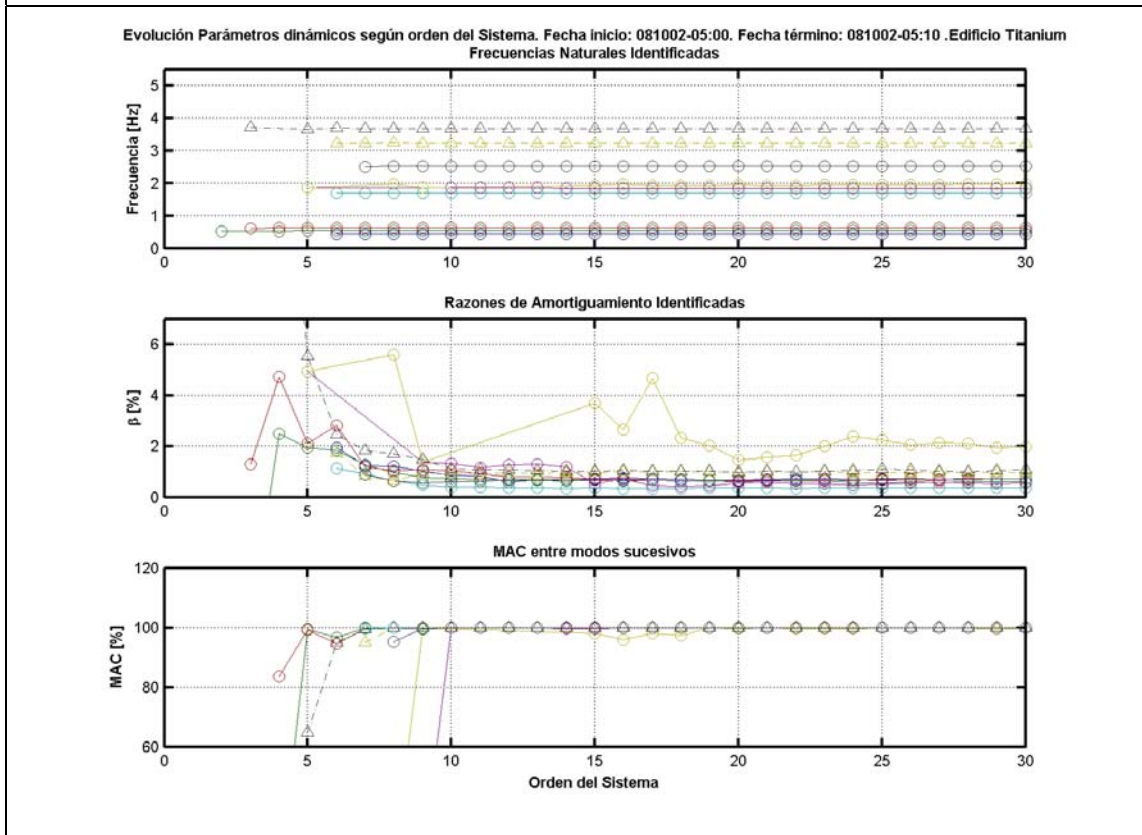
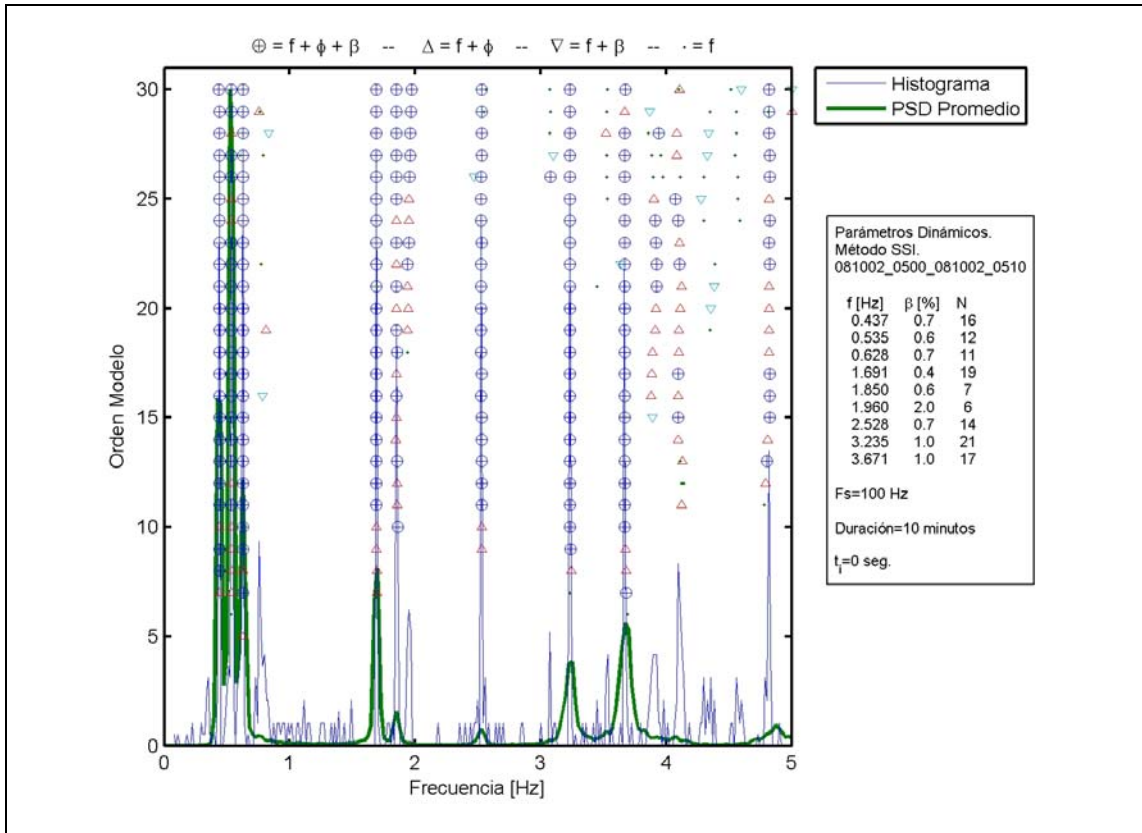


Figura E. 16. Diagrama de Estabilización y Evolución de Parámetros Dinámicos.

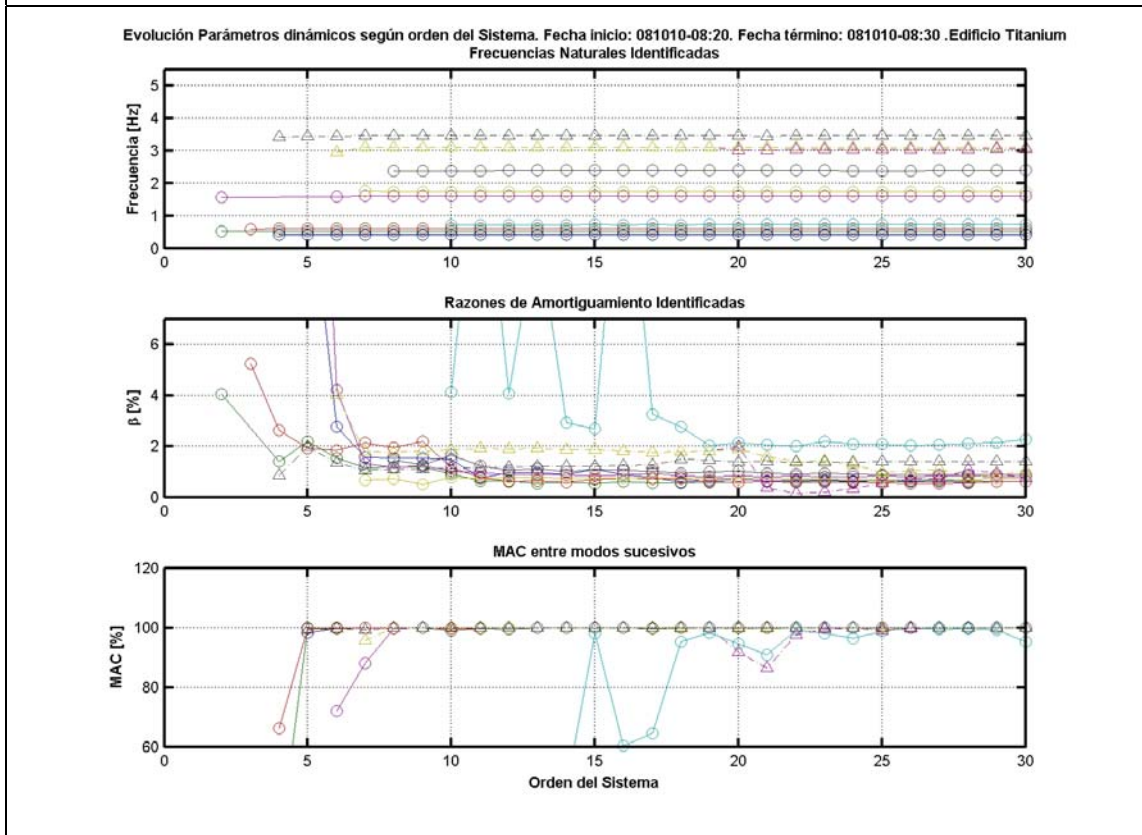
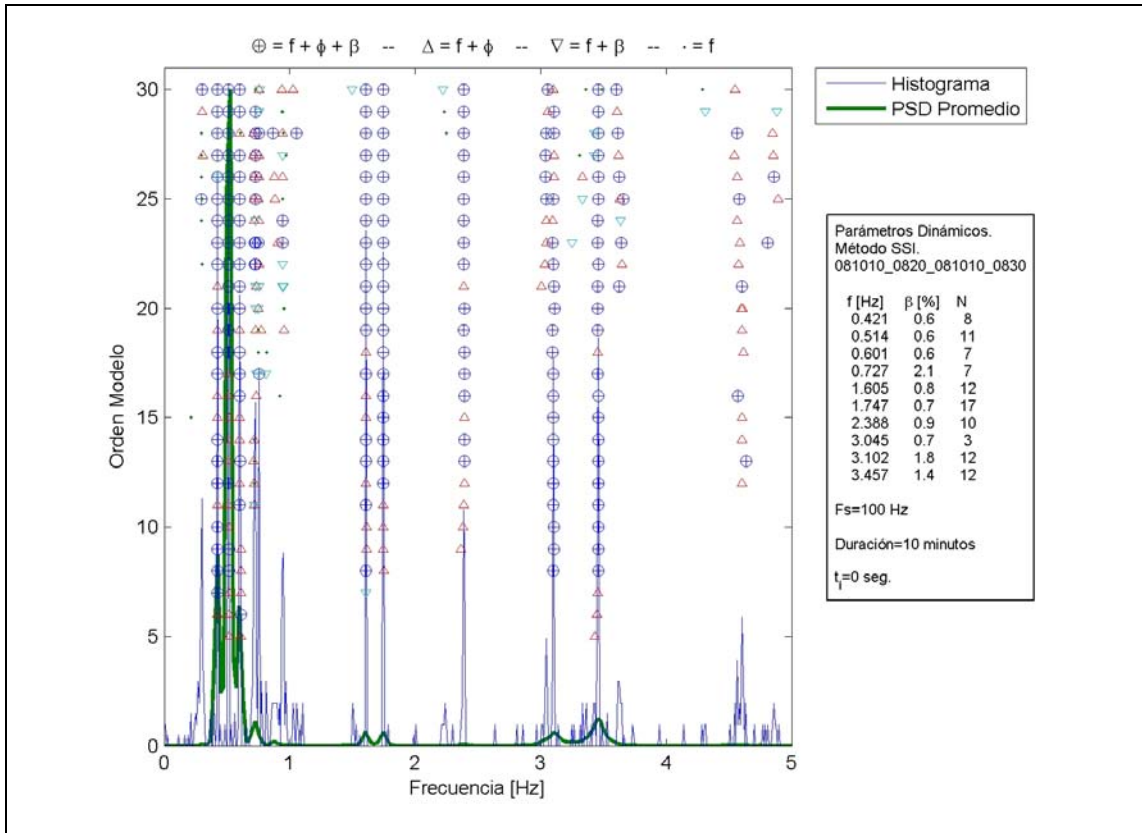


Figura E. 17. Diagrama de Estabilización y Evolución de Parámetros Dinámicos.

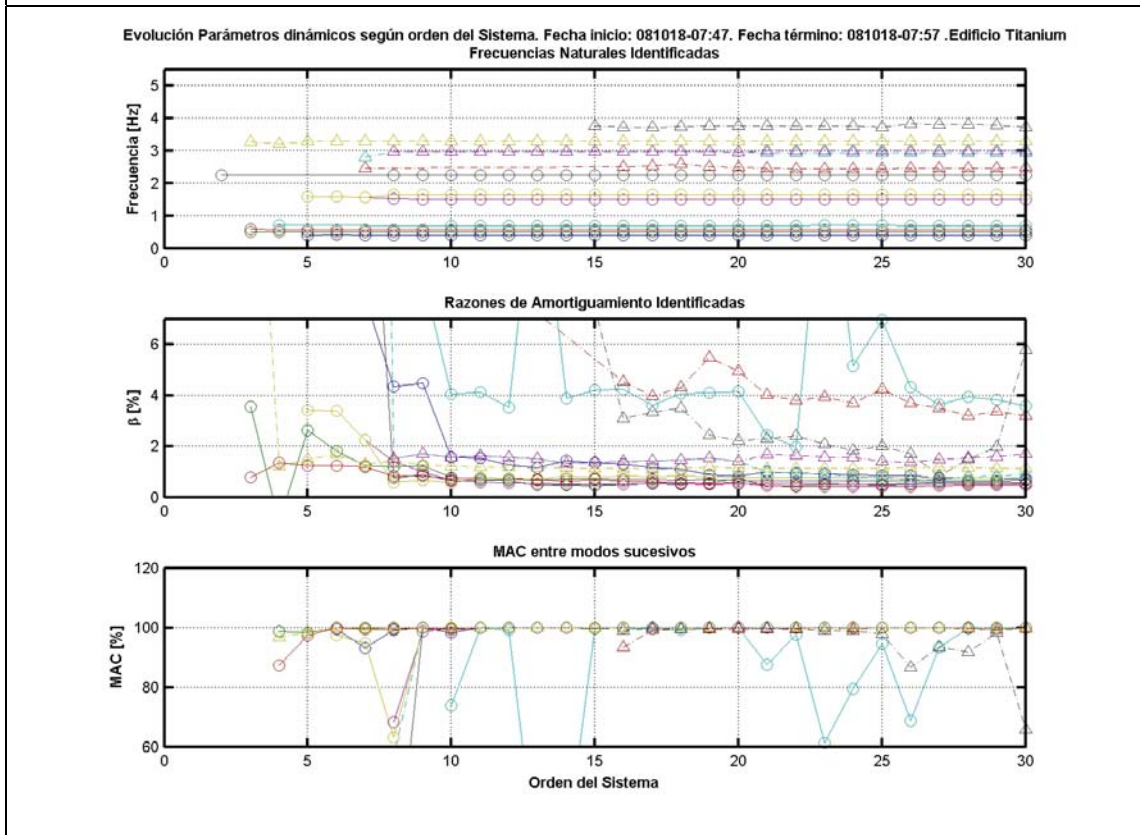
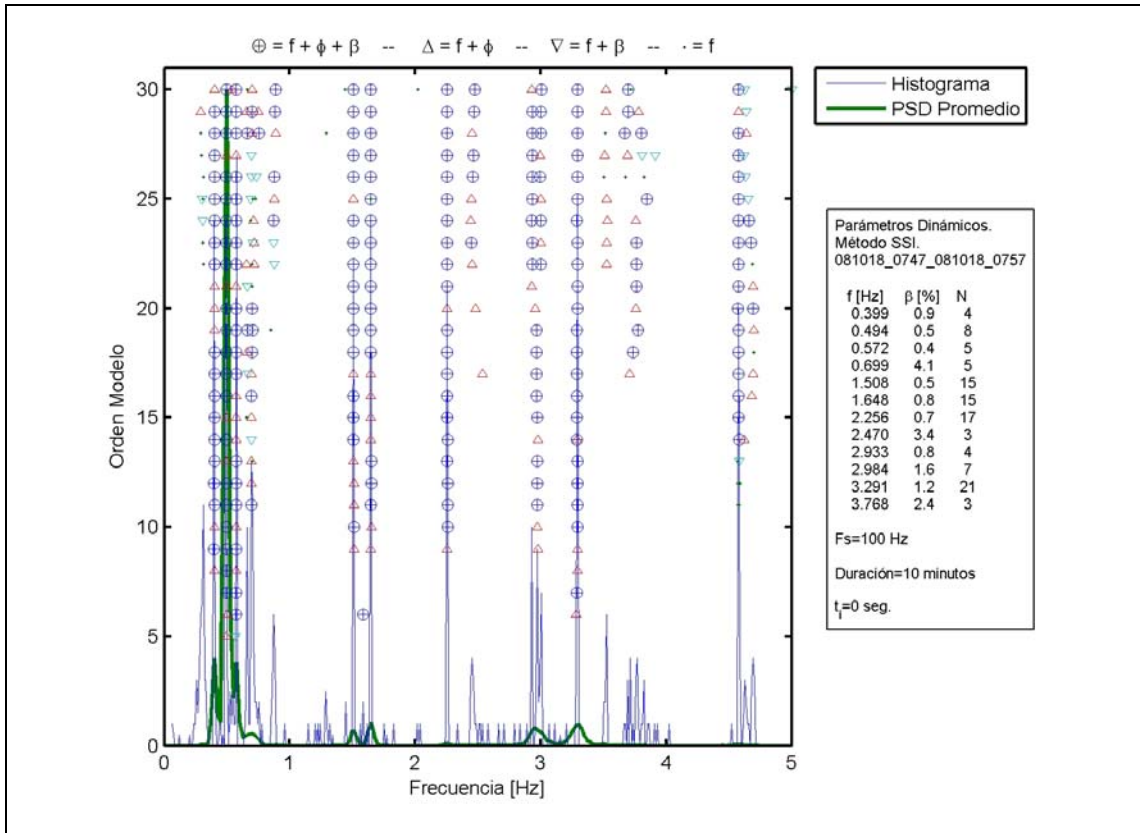


Figura E. 18. Diagrama de Estabilización y Evolución de Parámetros Dinámicos.

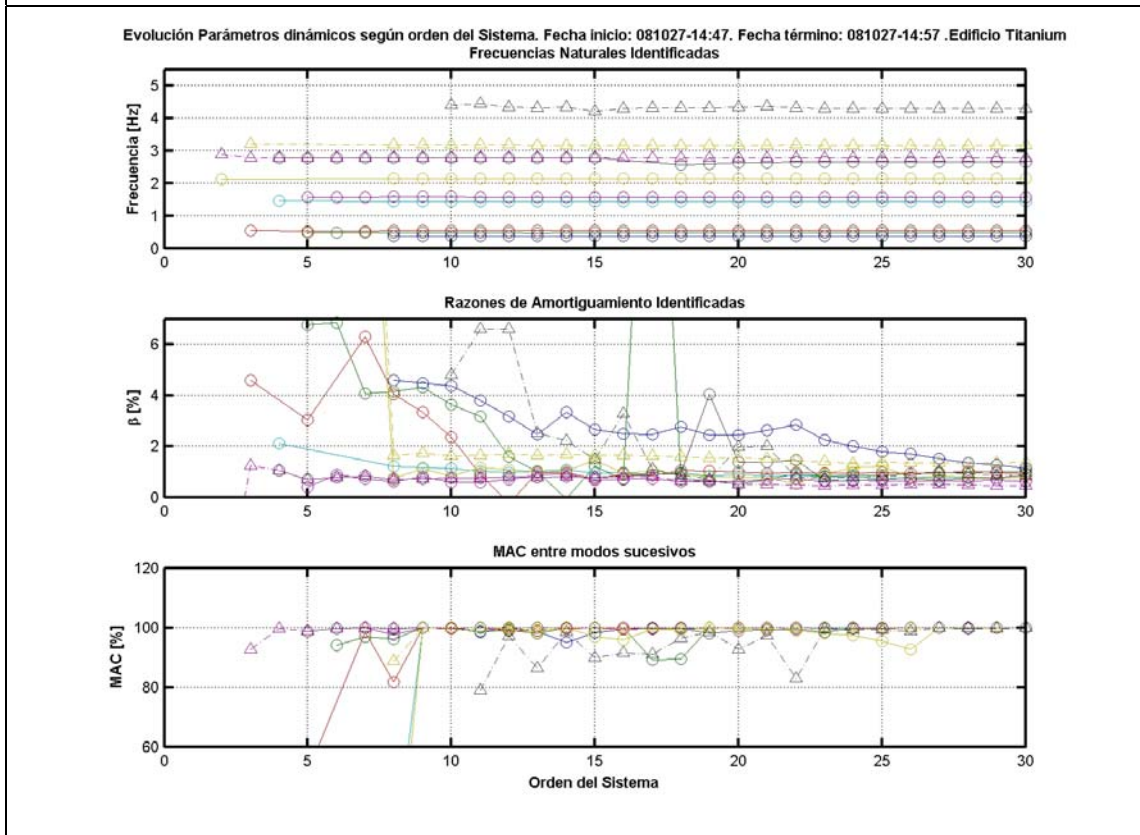
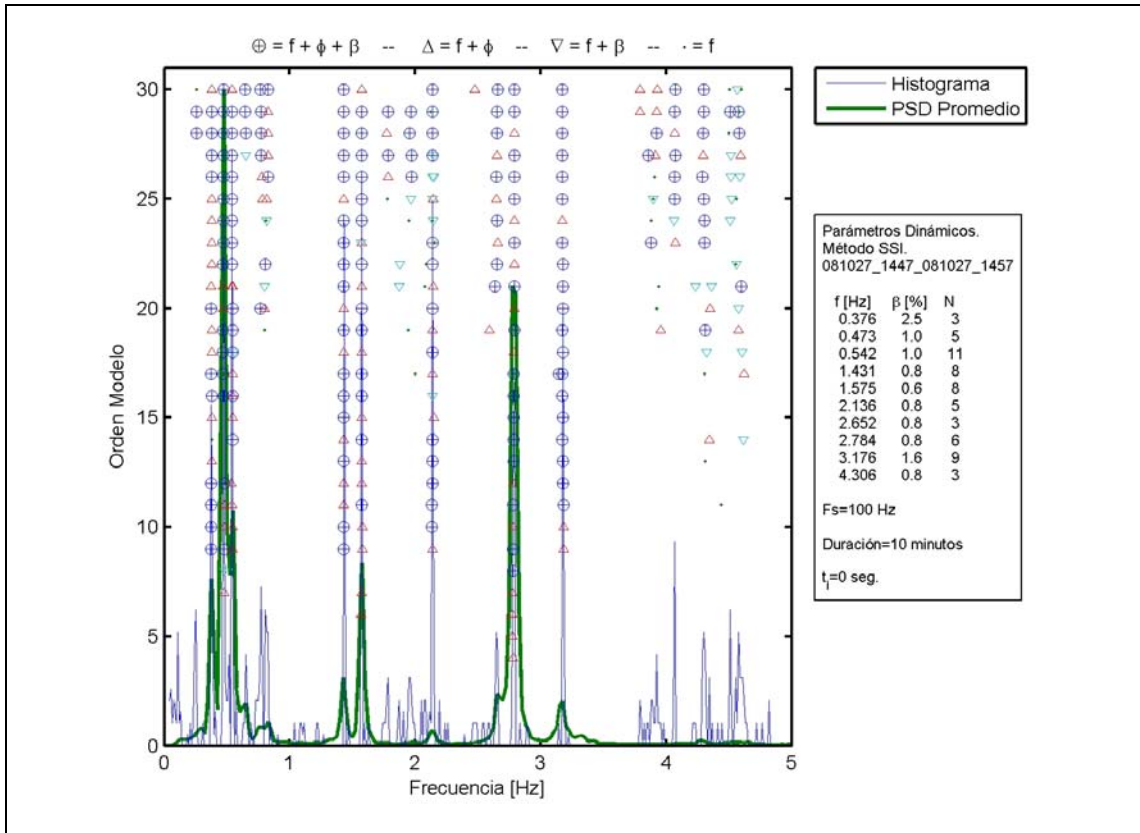


Figura E. 19. Diagrama de Estabilización y Evolución de Parámetros Dinámicos.

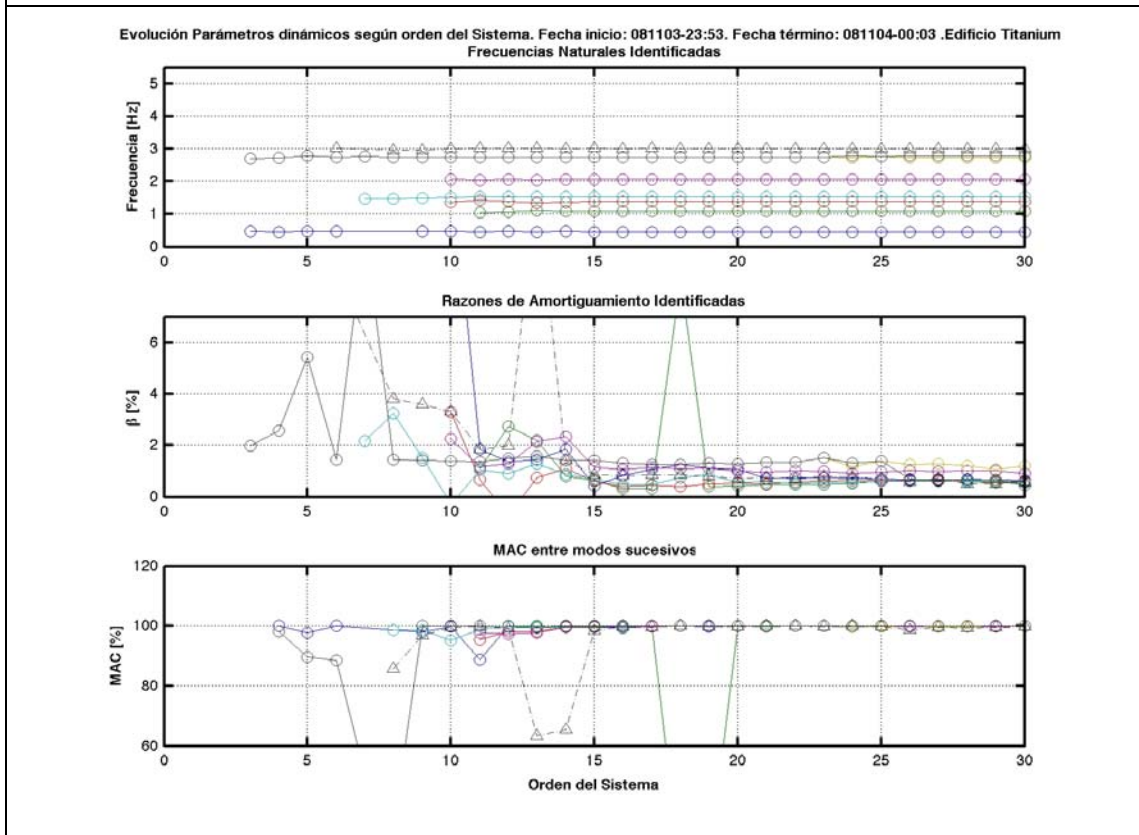
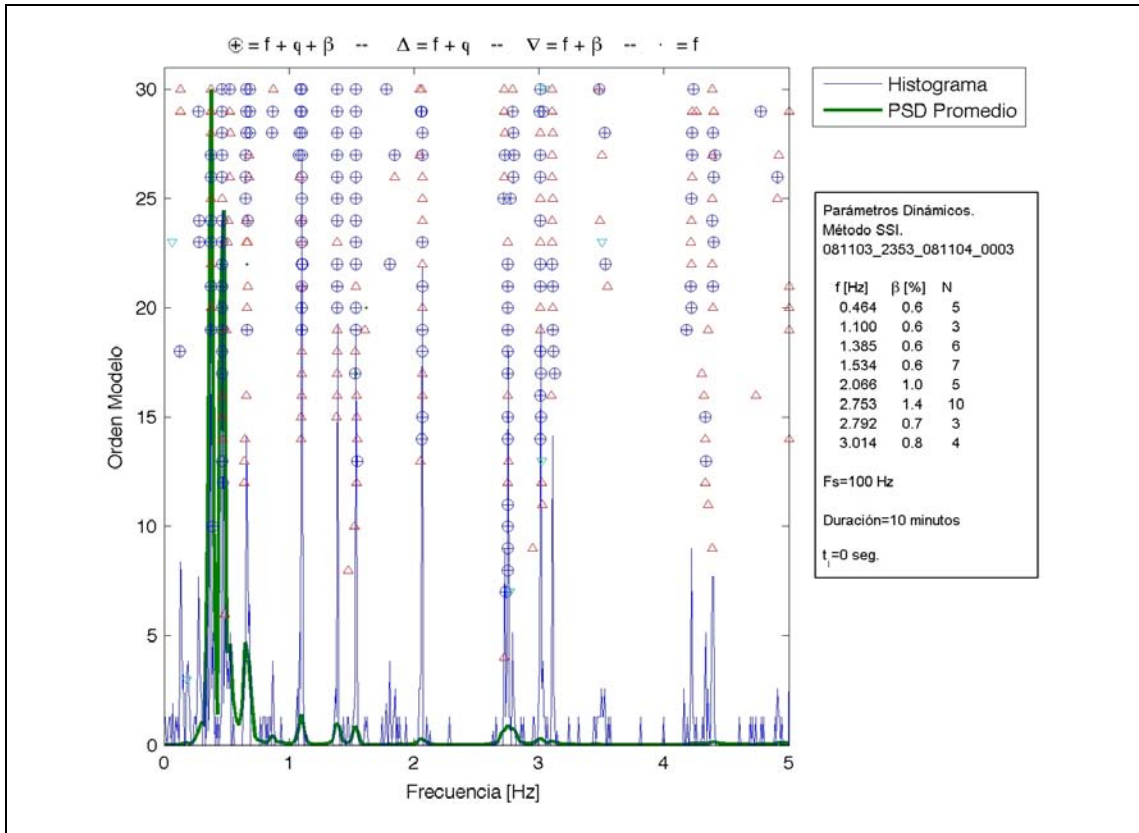


Figura E. 20. Diagrama de Estabilización y Evolución de Parámetros Dinámicos.

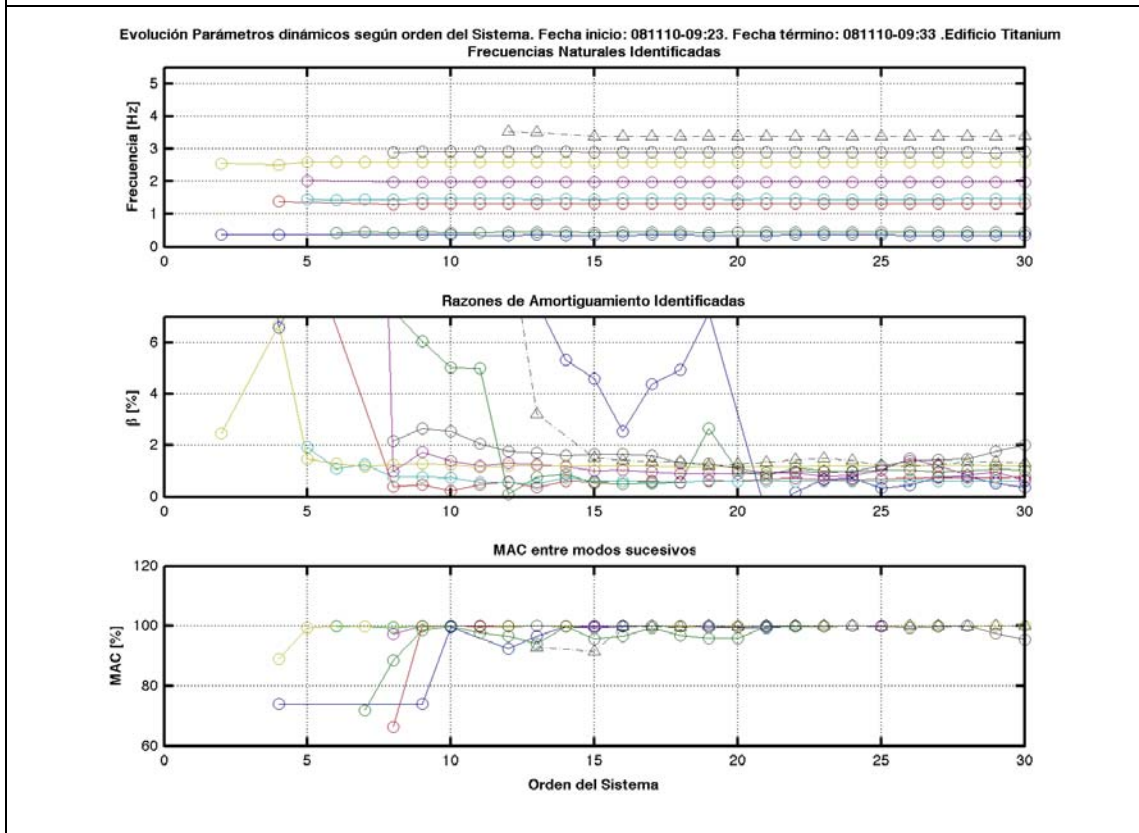
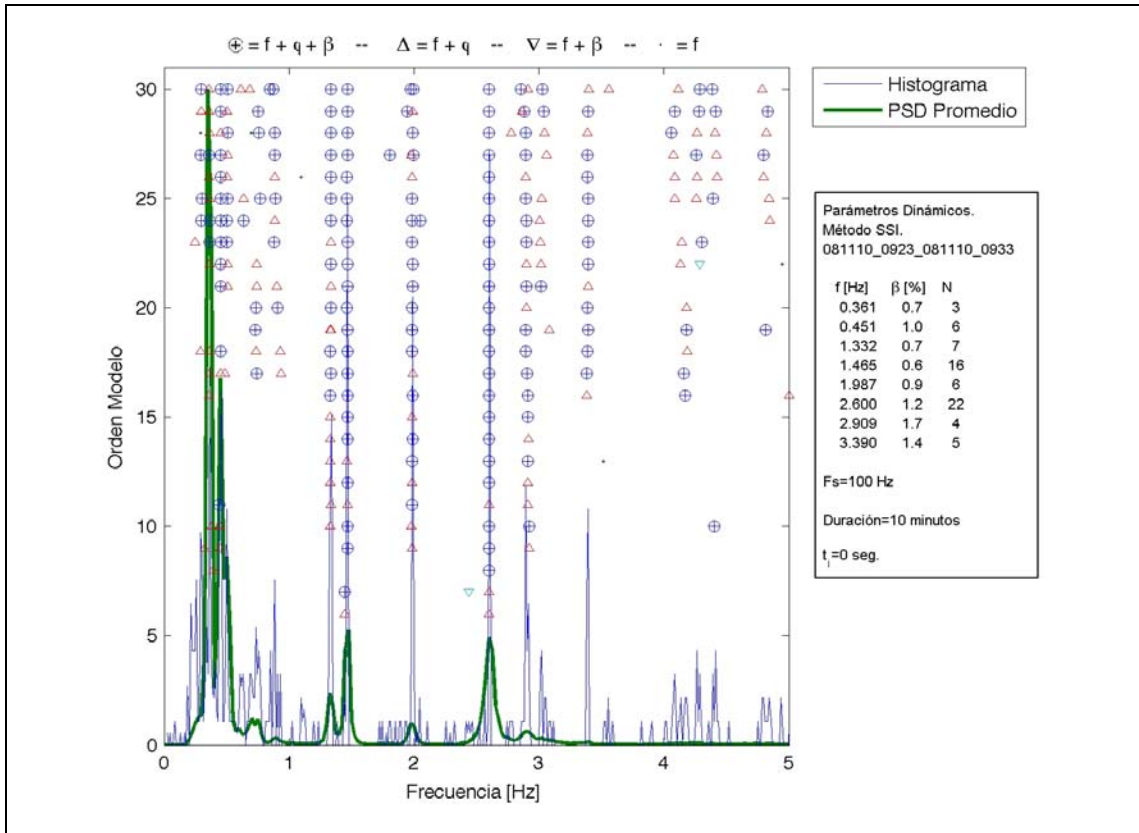


Figura E. 21. Diagrama de Estabilización y Evolución de Parámetros Dinámicos.

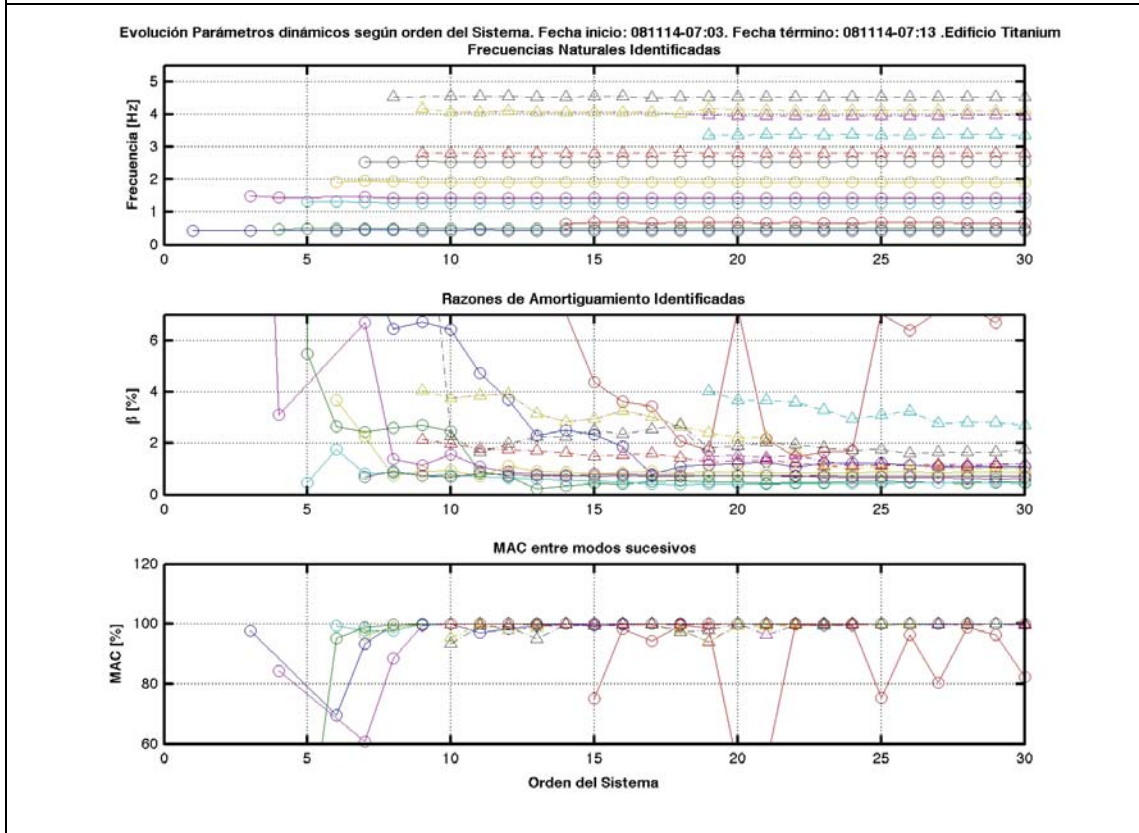
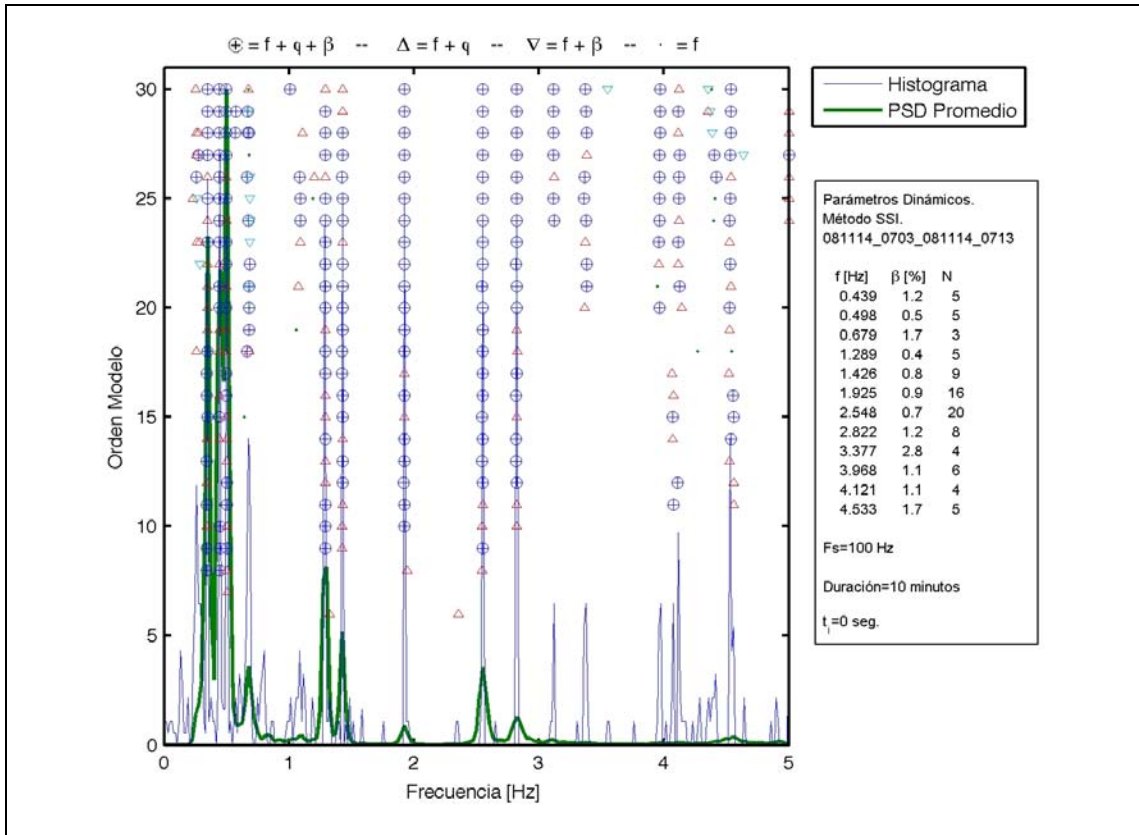


Figura E. 22. Diagrama de Estabilización y Evolución de Parámetros Dinámicos.

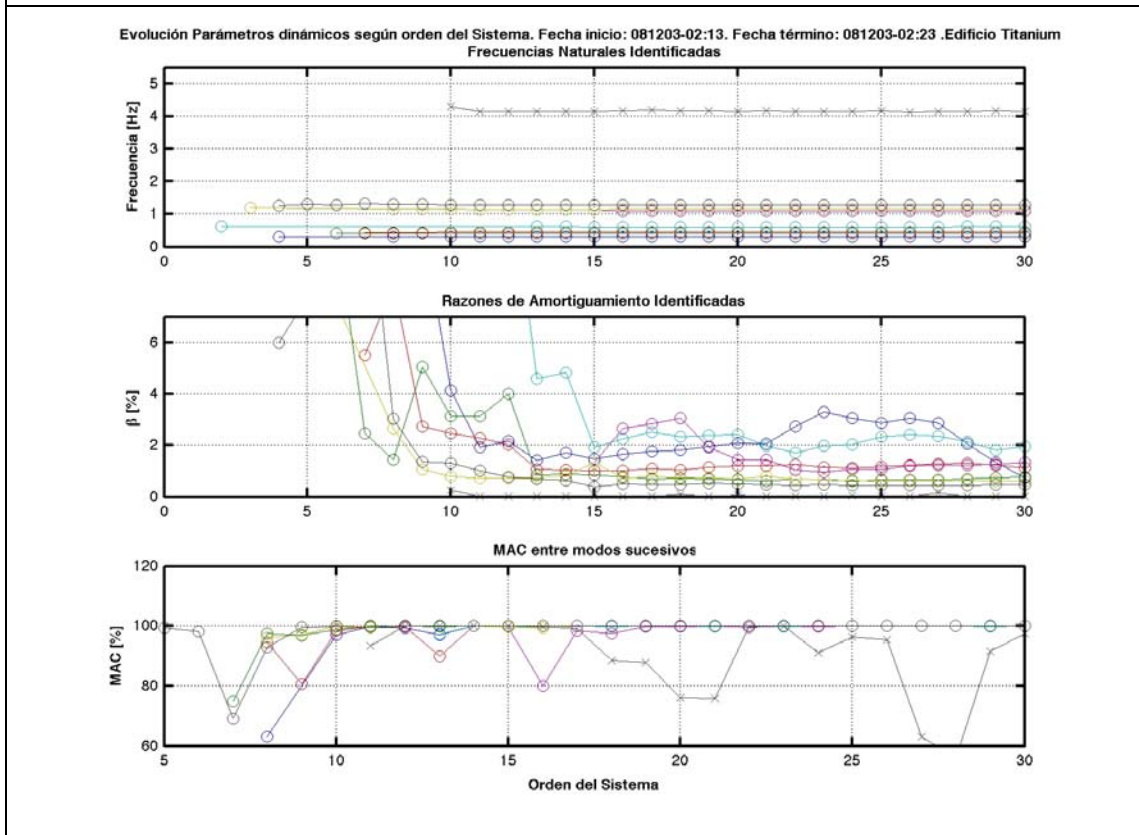
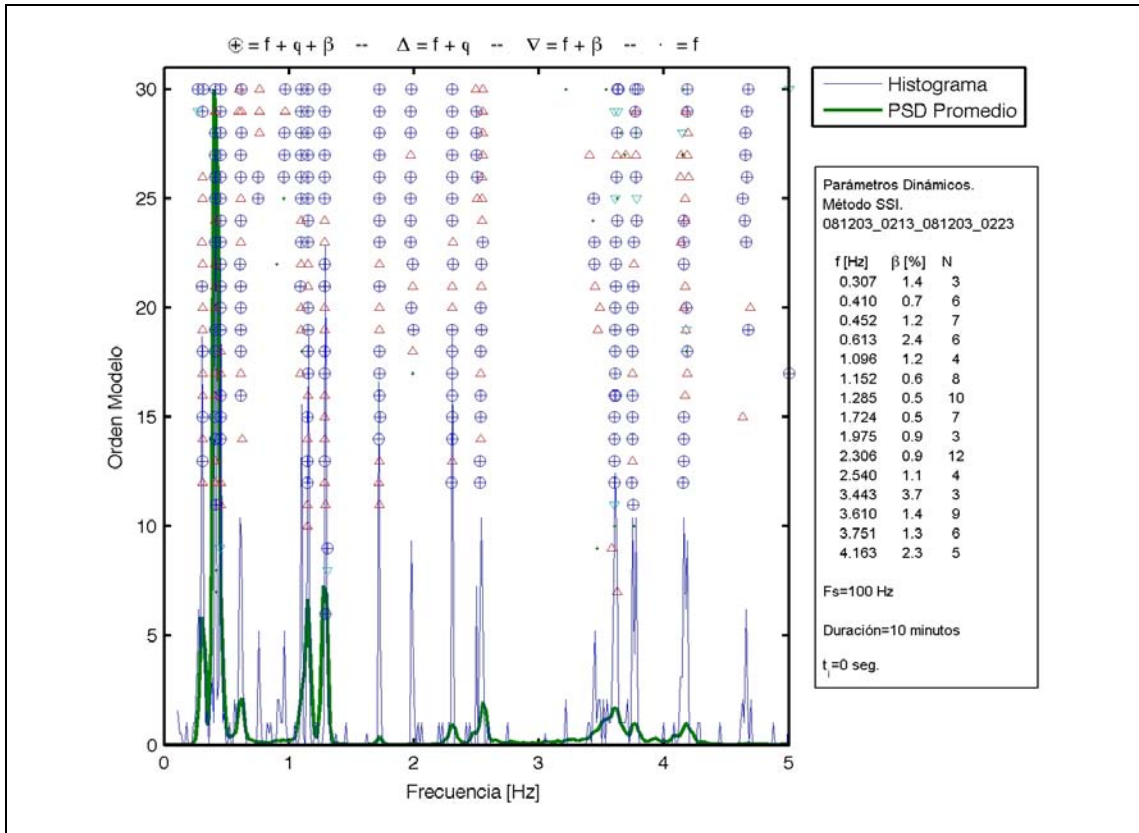


Figura E. 23. Diagrama de Estabilización y Evolución de Parámetros Dinámicos.

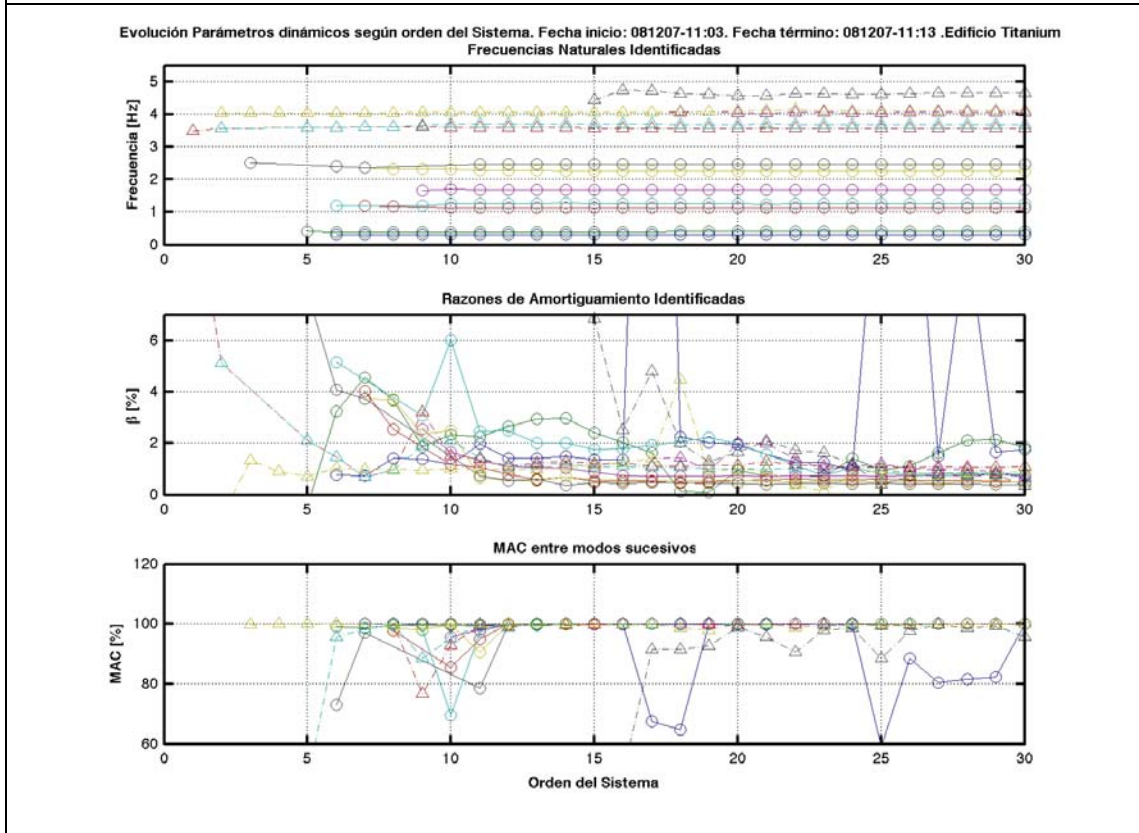
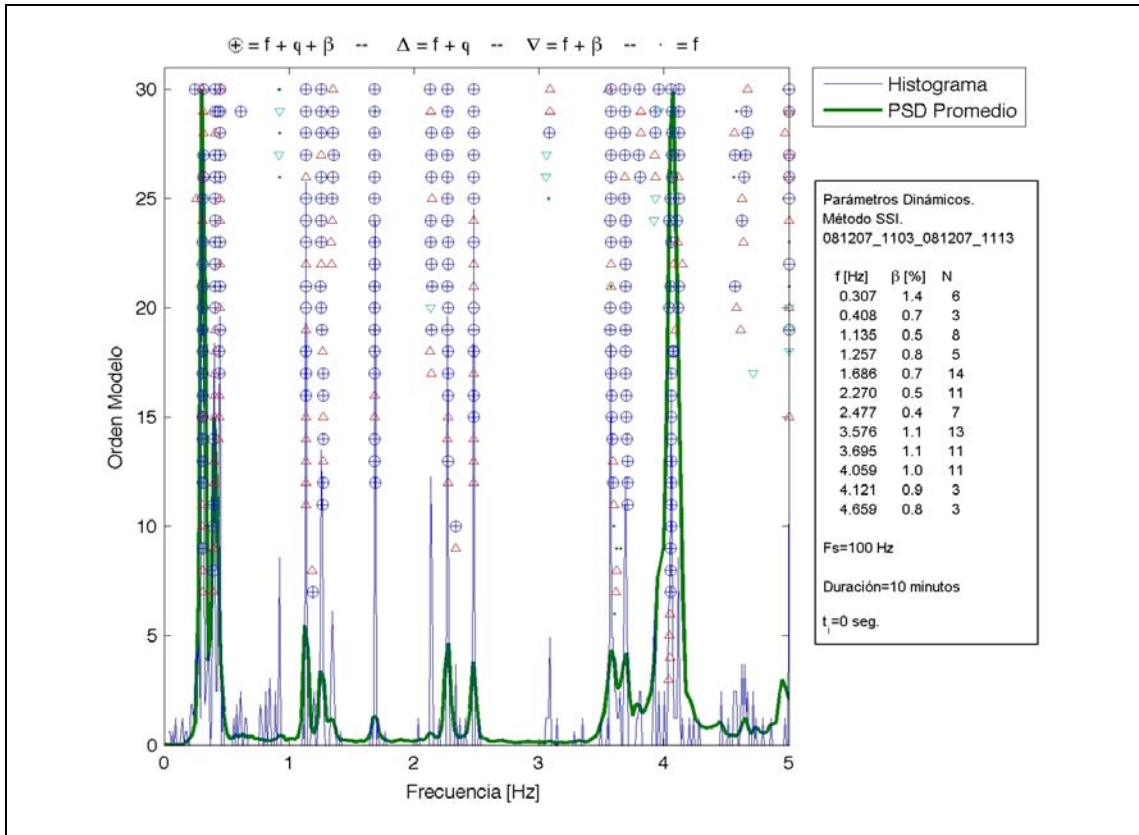


Figura E. 24. Diagrama de Estabilización y Evolución de Parámetros Dinámicos.

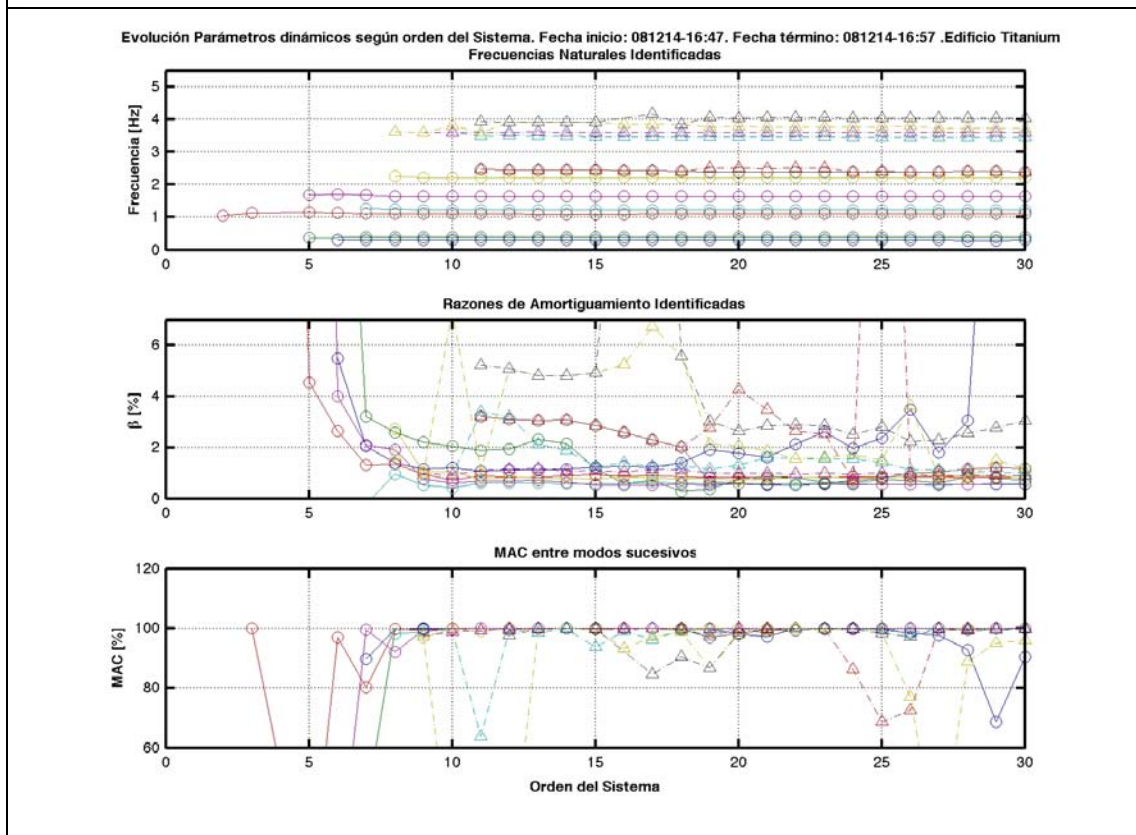
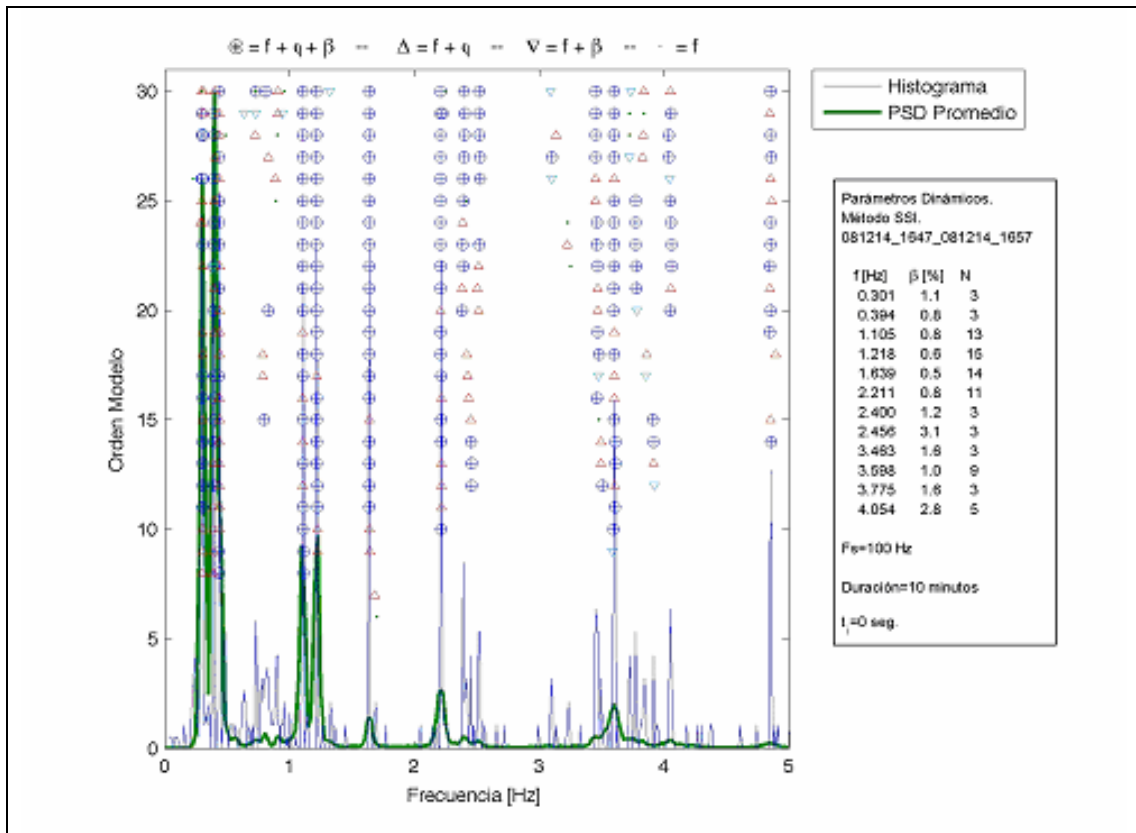


Figura E. 25. Diagrama de Estabilización y Evolución de Parámetros Dinámicos.

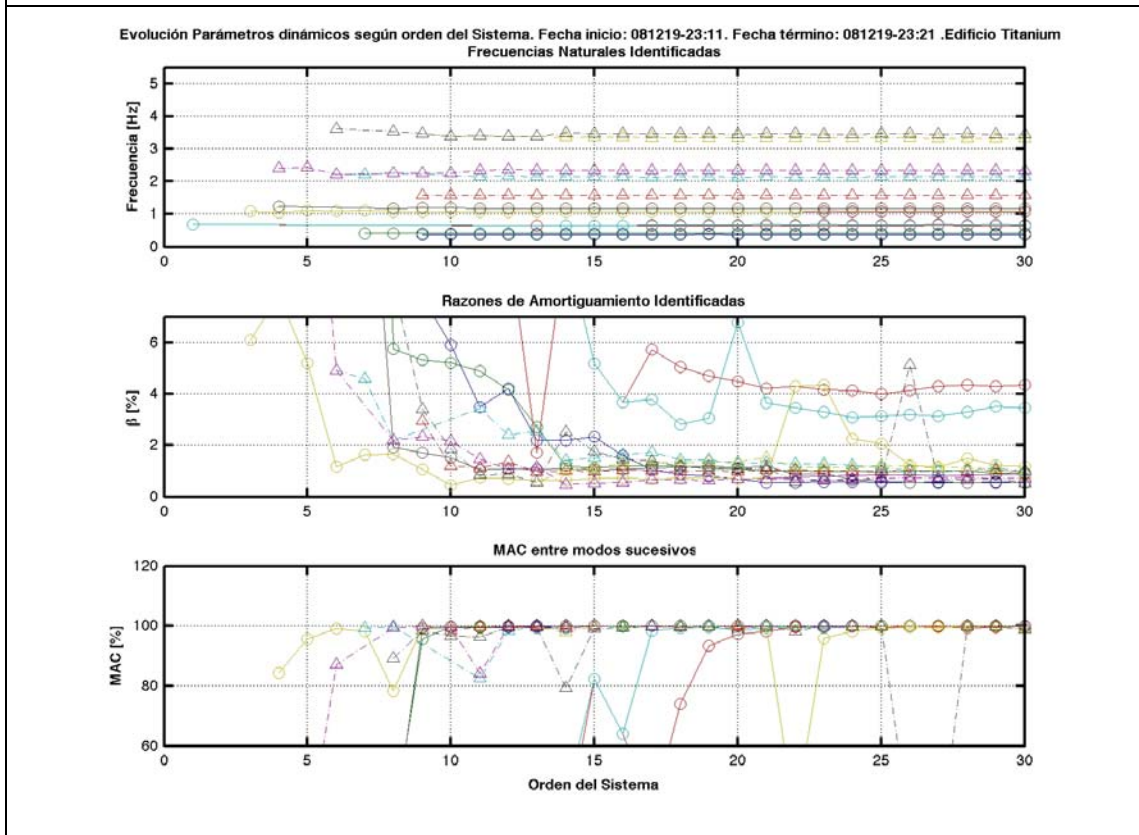
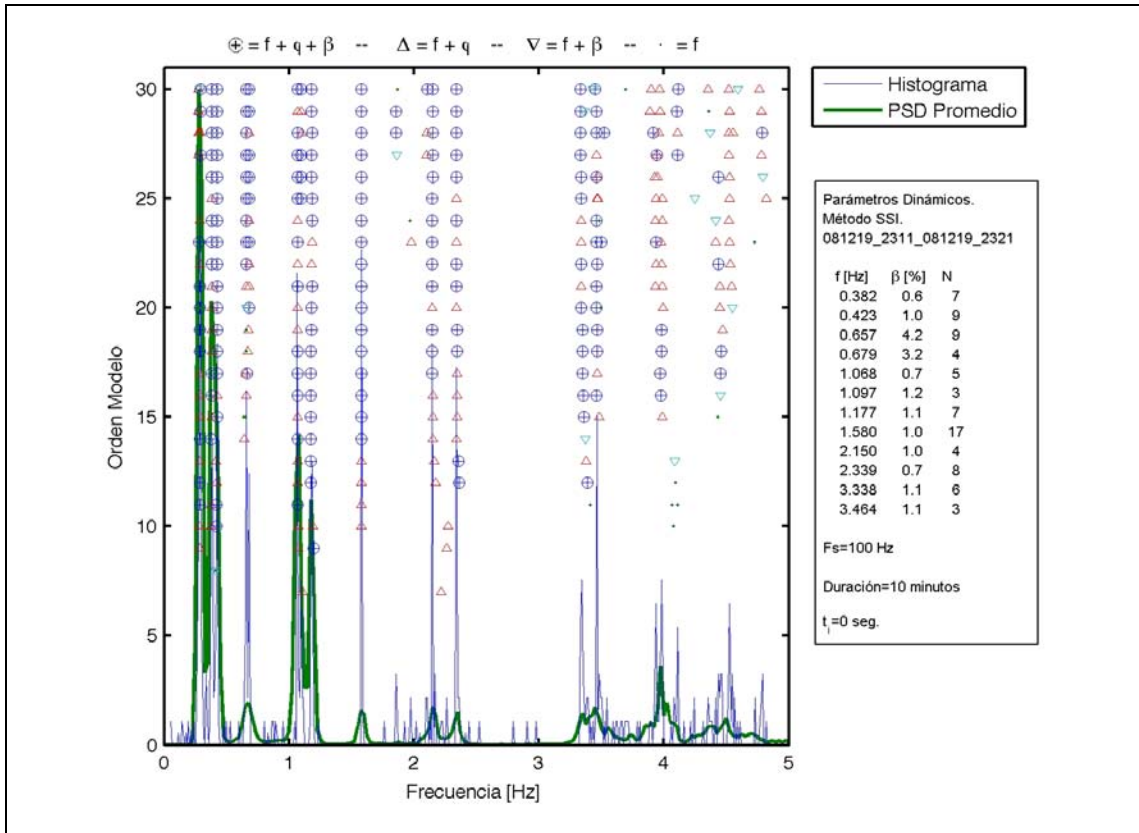


Figura E. 26. Diagrama de Estabilización y Evolución de Parámetros Dinámicos.

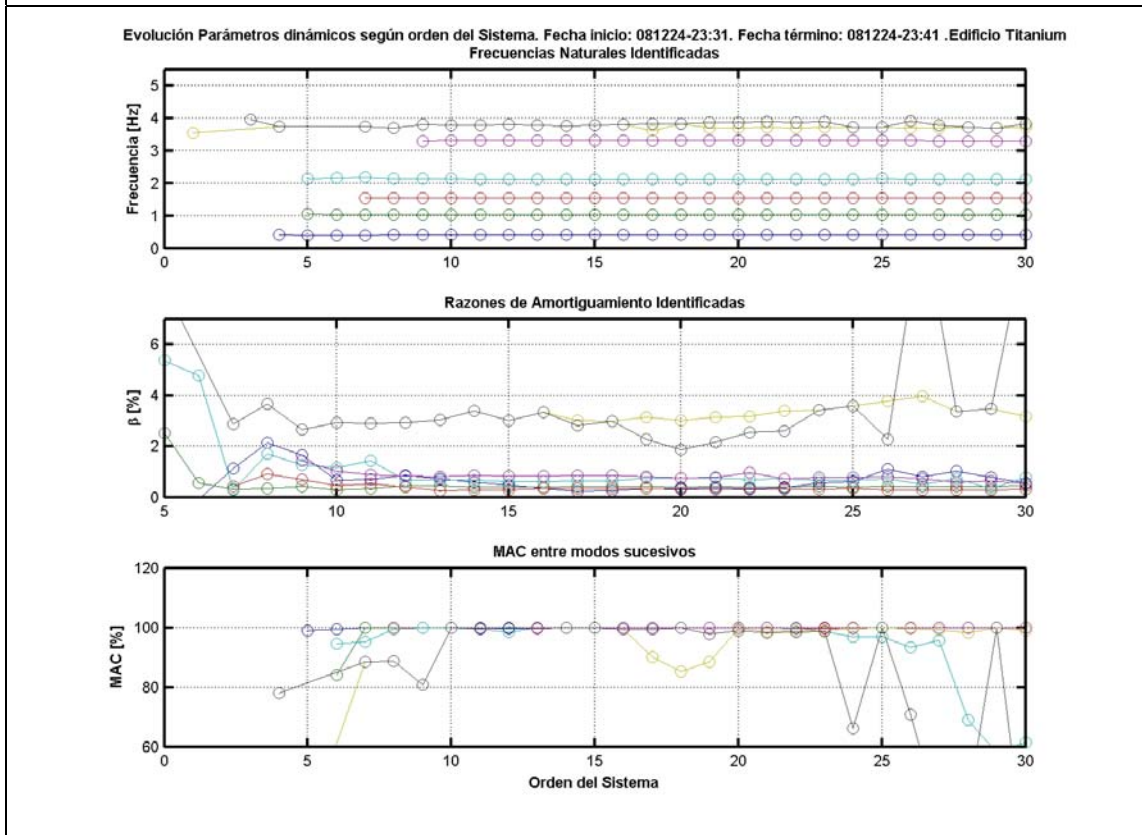
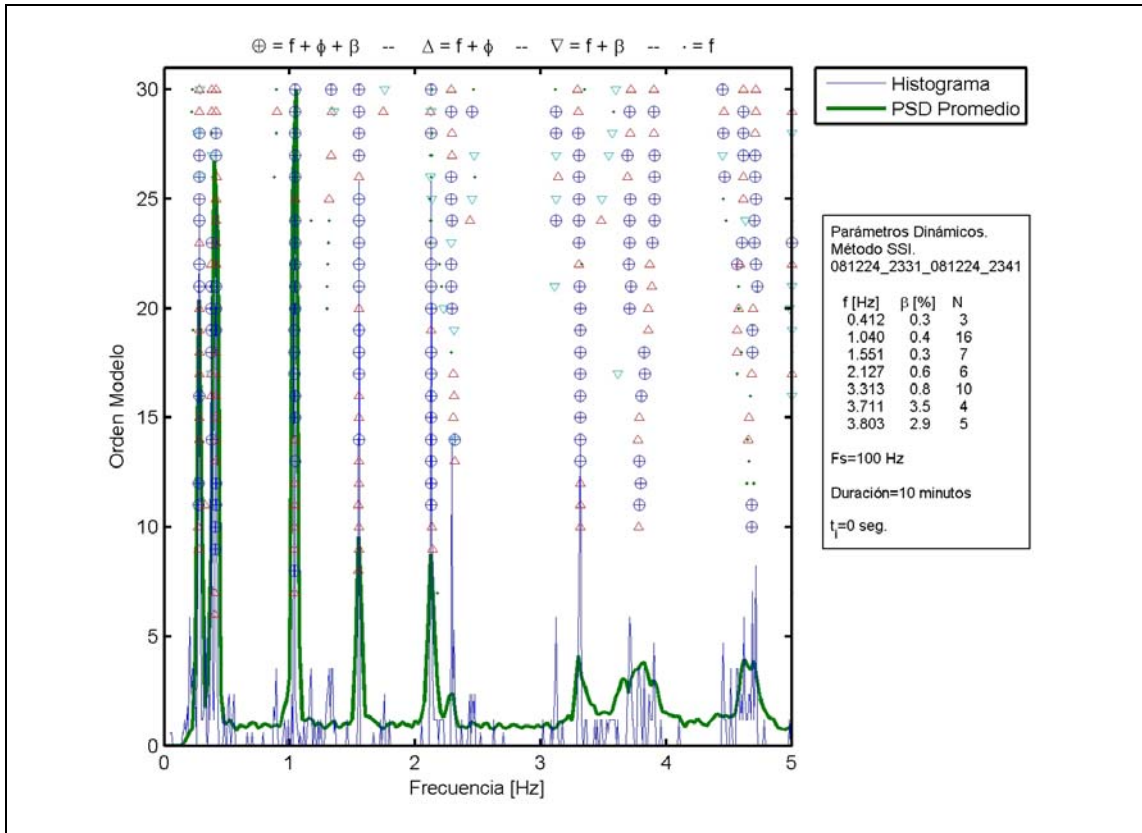


Figura E. 27. Diagrama de Estabilización y Evolución de Parámetros Dinámicos.

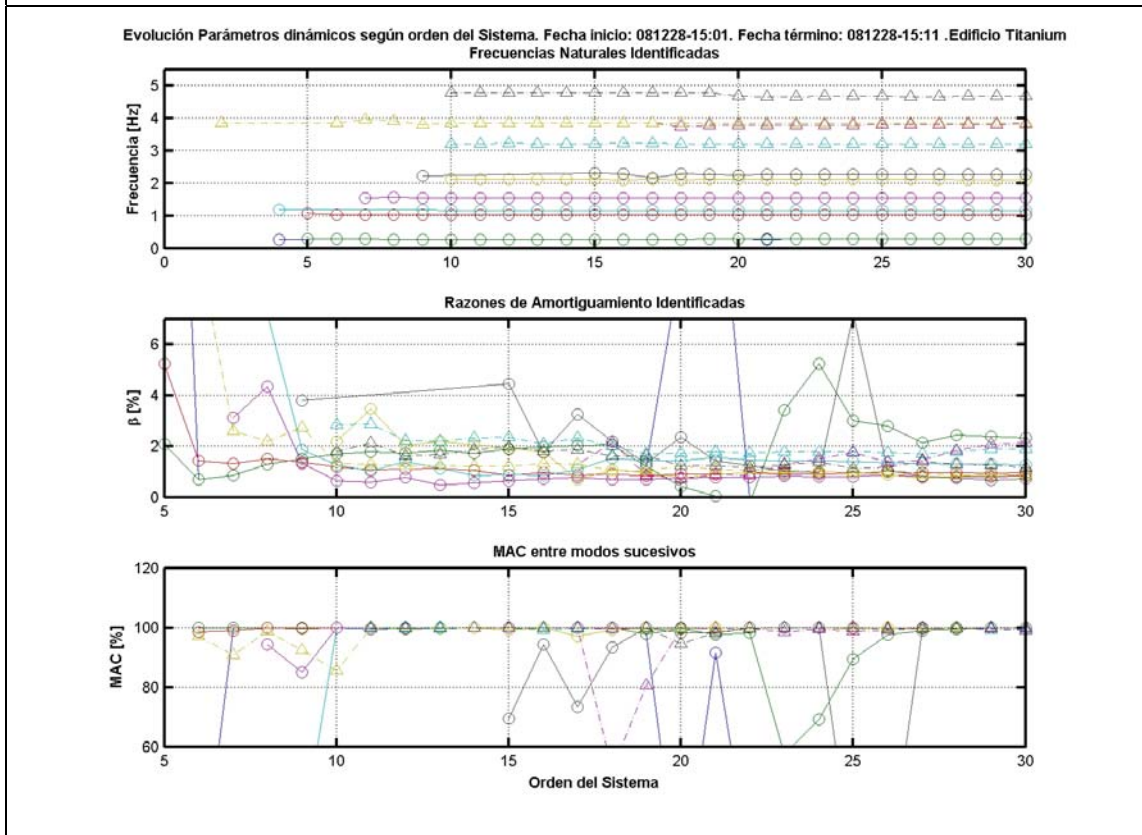
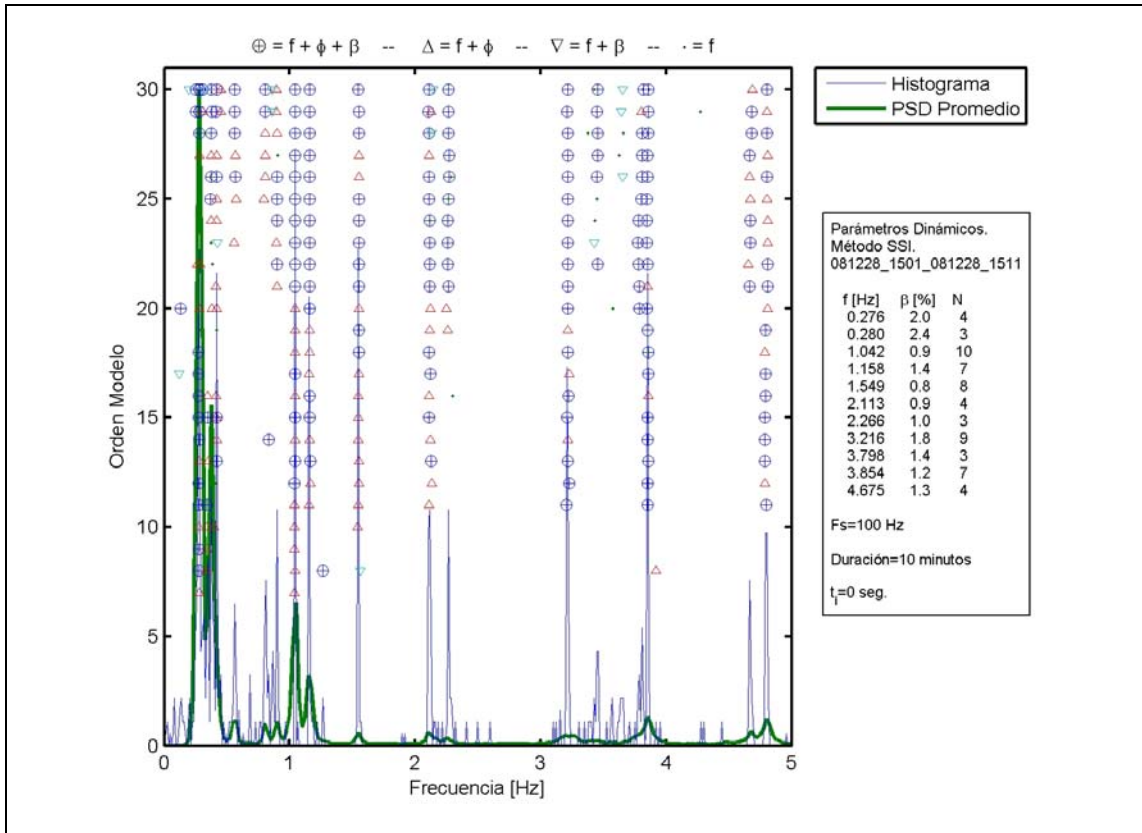


Figura E. 28. Diagrama de Estabilización y Evolución de Parámetros Dinámicos.

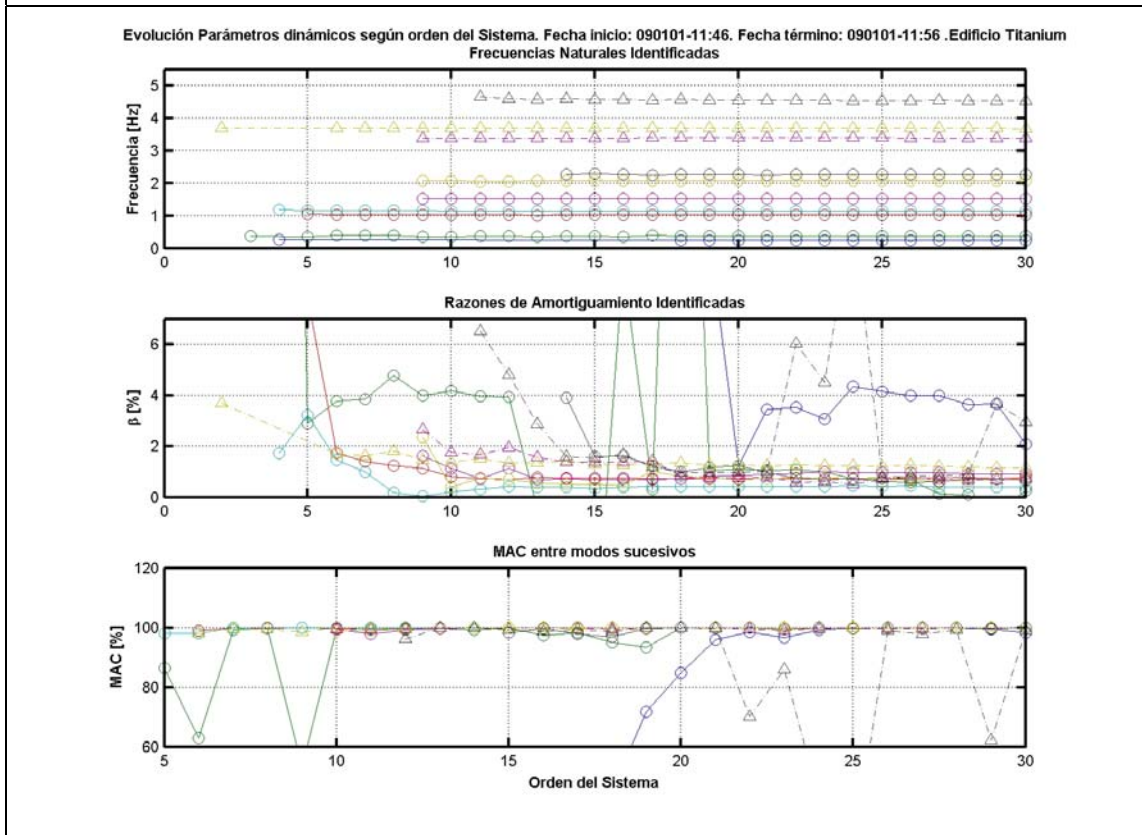
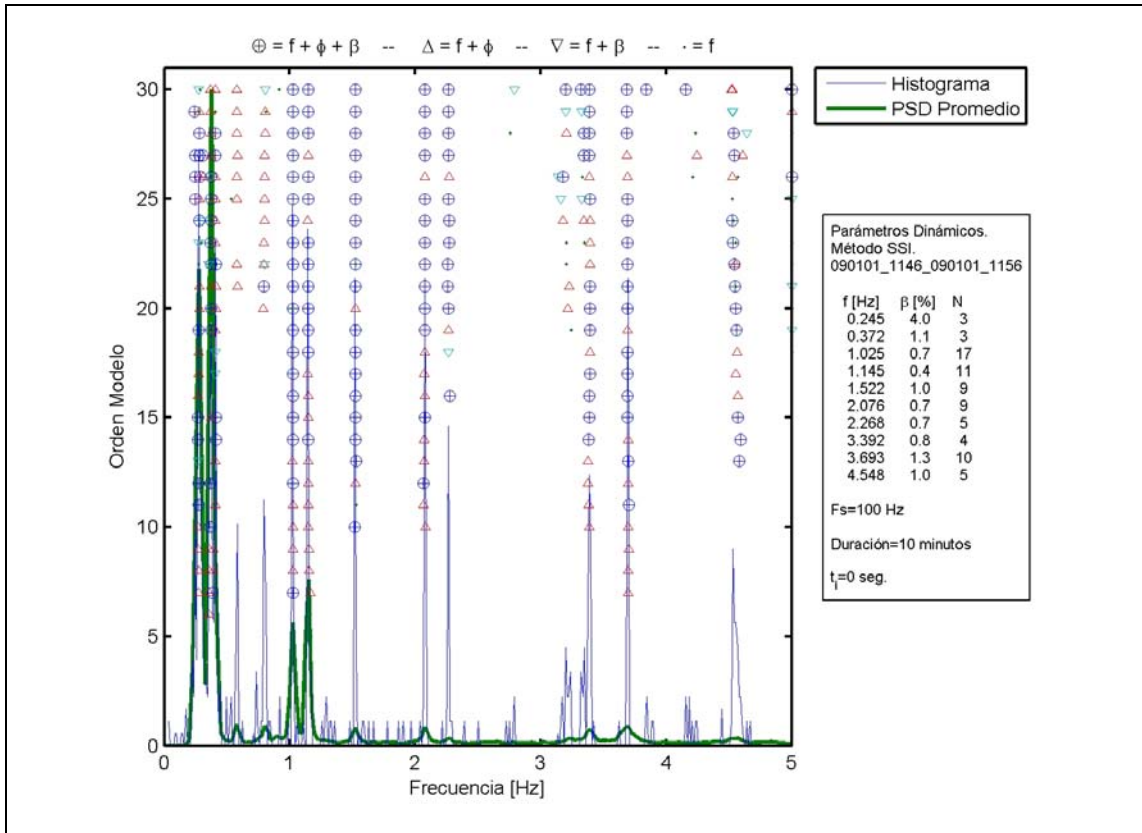


Figura E. 29. Diagrama de Estabilización y Evolución de Parámetros Dinámicos.

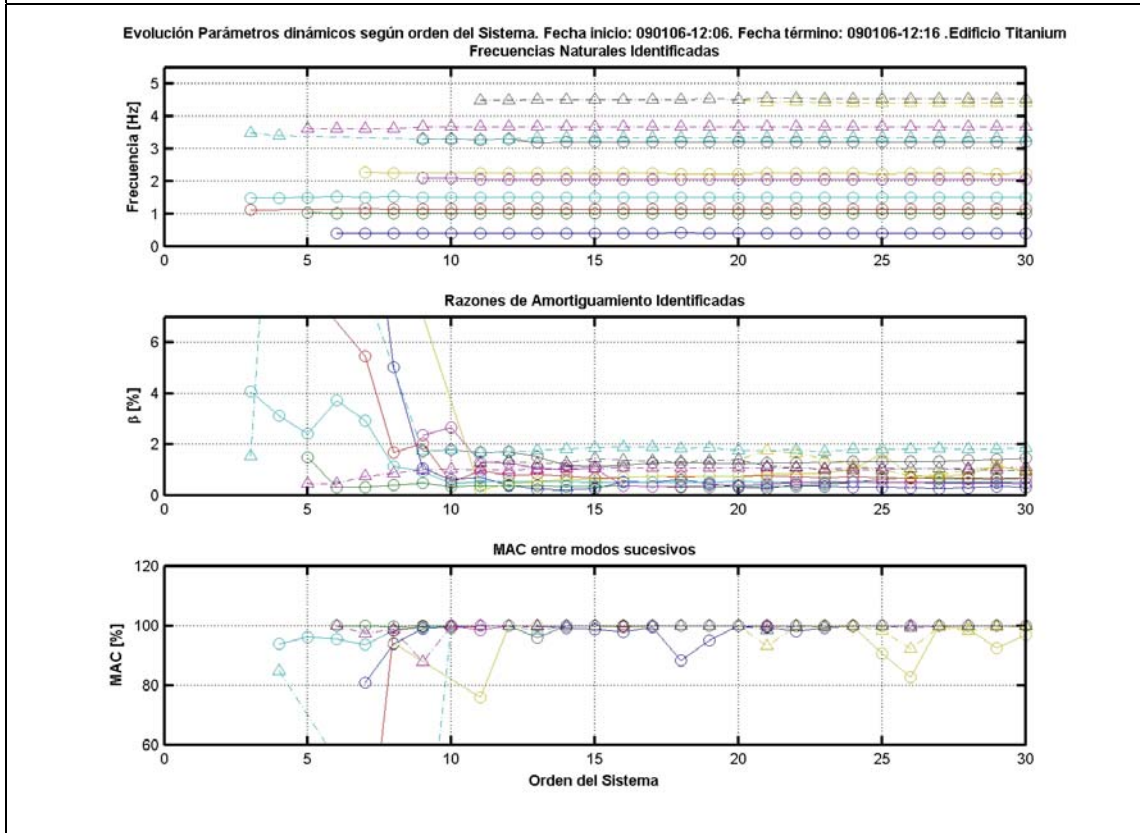
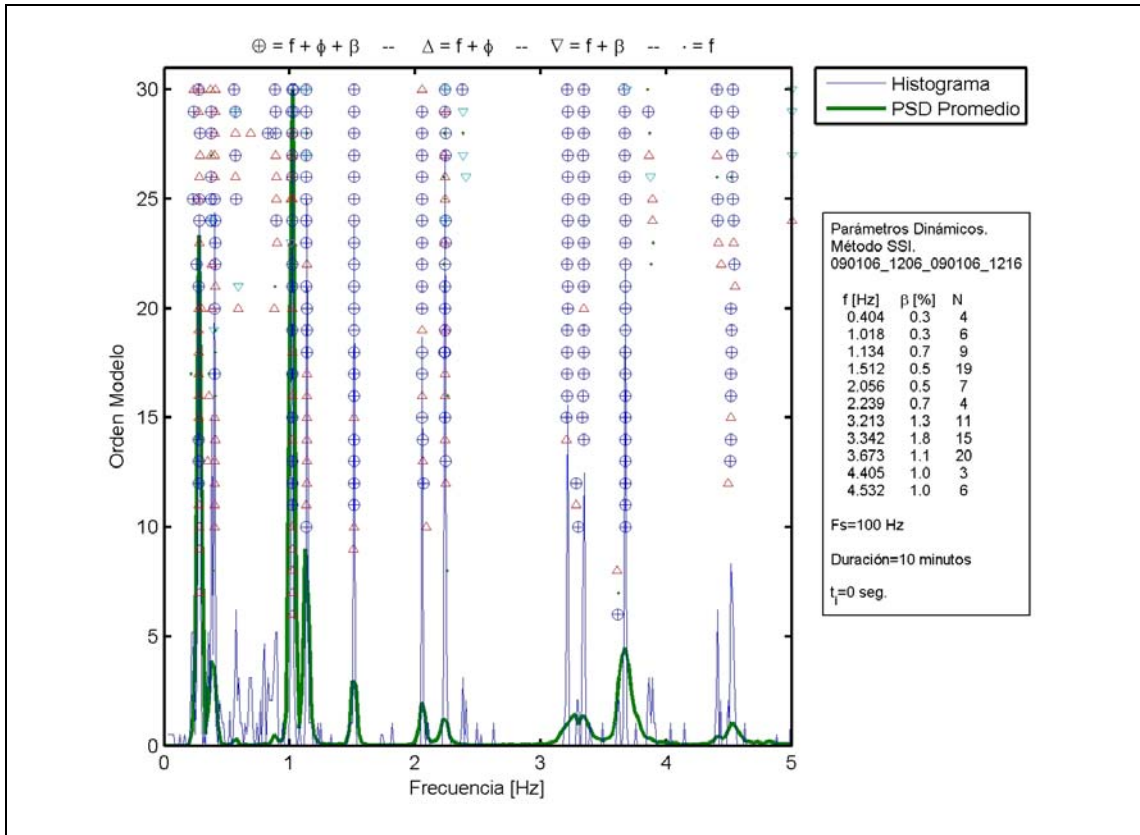


Figura E. 30. Diagrama de Estabilización y Evolución de Parámetros Dinámicos.

Apéndice F

Masas Modales Traslacionales y Rotacionales. Modelo de Elementos Finitos Edificio Titanium La Portada.

F.1 Introducción

A continuación se muestran las masas traslacionales y rotacionales correspondientes al modelo de elementos finitos desarrollados en el programa computacional *ETABS* (v.8.4.7).

Tabla F. 1. Masas Traslacionales Modelo Elementos Finitos Edificio Titanium La Portada.

Modo	Frecuencia [Hz]	Periodo [Seg.]	UX	UY	UZ	SumUX	SumUY	SumUZ
1	0.178	5.627	0.007	44.408	0.000	0.007	44.408	0.000
2	0.235	4.248	27.861	0.083	0.000	27.868	44.491	0.000
3	0.267	3.748	16.487	0.061	0.000	44.355	44.552	0.000
4	0.649	1.541	0.012	13.113	0.000	44.367	57.666	0.000
5	0.752	1.330	0.694	0.019	0.000	45.061	57.684	0.000
6	0.964	1.037	11.562	0.016	0.000	56.623	57.700	0.000
7	1.406	0.711	0.063	4.278	0.000	56.686	61.978	0.000
8	1.563	0.640	0.139	0.379	0.000	56.825	62.356	0.000
9	2.121	0.472	5.177	0.080	0.000	62.002	62.436	0.000
10	2.371	0.422	0.381	2.720	0.000	62.384	65.157	0.000
11	2.601	0.385	0.210	0.437	0.000	62.593	65.594	0.000
12	3.363	0.297	0.422	1.576	0.000	63.015	67.170	0.000
13	3.623	0.276	2.171	1.516	0.000	65.186	68.686	0.000
14	3.766	0.266	1.192	0.647	0.000	66.378	69.334	0.000
15	3.965	0.252	0.005	0.376	0.000	66.383	69.709	0.000
16	4.427	0.226	0.114	1.579	0.000	66.497	71.288	0.000
17	4.944	0.202	0.107	4.193	0.000	66.604	75.481	0.000
18	5.364	0.186	3.504	0.004	0.000	70.108	75.485	0.000
19	5.593	0.179	0.118	1.666	0.000	70.227	77.151	0.000
20	6.097	0.164	0.055	8.223	0.000	70.282	85.374	0.000
21	6.860	0.146	0.002	0.005	0.000	70.284	85.379	0.000
22	6.897	0.145	0.198	0.304	0.000	70.482	85.683	0.000
23	7.047	0.142	5.714	0.005	0.000	76.196	85.688	0.000
24	7.114	0.141	0.041	4.915	0.000	76.237	90.603	0.000
25	8.097	0.123	0.003	0.826	0.000	76.240	91.429	0.000
26	8.415	0.119	5.491	0.219	0.000	81.731	91.649	0.000
27	8.506	0.118	1.836	0.500	0.000	83.567	92.149	0.000
28	8.717	0.115	0.000	0.000	0.000	83.567	92.149	0.000
29	8.720	0.115	0.000	0.000	0.000	83.567	92.149	0.000
30	8.724	0.115	0.001	0.000	0.000	83.568	92.149	0.000

Tabla F. 2. Masas Traslacionales Modelo Elementos Finitos Edificio Titanium La Portada.

Modo	Frecuencia [Hz]	Periodo [Seg.]	UX	UY	UZ	SumUX	SumUY	SumUZ
31	8.725	0.115	0.000	0.000	0.000	83.568	92.149	0.000
32	8.728	0.115	0.000	0.000	0.000	83.568	92.149	0.000
33	8.730	0.115	0.000	0.000	0.000	83.568	92.149	0.000
34	8.732	0.115	0.000	0.000	0.000	83.569	92.149	0.000
35	8.737	0.114	0.000	0.000	0.000	83.569	92.149	0.000
36	8.737	0.114	0.003	0.000	0.000	83.572	92.149	0.000
37	8.743	0.114	0.001	0.000	0.000	83.574	92.149	0.000
38	8.745	0.114	0.000	0.000	0.000	83.574	92.150	0.000
39	8.750	0.114	0.017	0.003	0.000	83.590	92.153	0.000
40	8.750	0.114	0.002	0.001	0.000	83.592	92.153	0.000
41	8.754	0.114	0.123	0.000	0.000	83.715	92.153	0.000
42	8.759	0.114	0.032	0.000	0.000	83.747	92.153	0.000
43	8.766	0.114	0.016	0.001	0.000	83.763	92.154	0.000
44	8.774	0.114	0.029	0.000	0.000	83.793	92.154	0.000
45	8.778	0.114	0.074	0.010	0.000	83.866	92.164	0.000
46	8.782	0.114	0.008	0.022	0.000	83.874	92.186	0.000
47	8.784	0.114	0.076	0.016	0.000	83.950	92.202	0.000
48	8.786	0.114	0.022	0.002	0.000	83.972	92.204	0.000
49	8.789	0.114	0.001	0.000	0.000	83.973	92.204	0.000
50	8.796	0.114	0.004	0.000	0.000	83.977	92.205	0.000
51	8.798	0.114	0.002	0.000	0.000	83.978	92.205	0.000
52	8.800	0.114	0.000	0.000	0.000	83.978	92.205	0.000
53	8.808	0.114	0.031	0.005	0.000	84.009	92.210	0.000
54	8.812	0.113	0.161	0.000	0.000	84.171	92.210	0.000
55	8.814	0.113	0.057	0.002	0.000	84.228	92.212	0.000
56	8.816	0.113	0.007	0.000	0.000	84.235	92.212	0.000
57	8.817	0.113	0.010	0.000	0.000	84.245	92.213	0.000
58	8.818	0.113	0.001	0.000	0.000	84.246	92.213	0.000
59	8.818	0.113	0.005	0.000	0.000	84.251	92.213	0.000
60	8.818	0.113	0.004	0.000	0.000	84.255	92.213	0.000

Tabla F. 3. Masas Traslacionales Modelo Elementos Finitos Edificio Titanium La Portada.

Modo	Frecuencia [Hz]	Periodo [Seg.]	UX	UY	UZ	SumUX	SumUY	SumUZ
61	8.819	0.113	0.002	0.000	0.000	84.257	92.213	0.000
62	8.819	0.113	0.001	0.000	0.000	84.257	92.213	0.000
63	8.819	0.113	0.000	0.000	0.000	84.257	92.213	0.000
64	8.819	0.113	0.000	0.000	0.000	84.257	92.213	0.000
65	8.819	0.113	0.000	0.000	0.000	84.258	92.213	0.000
66	8.819	0.113	0.000	0.000	0.000	84.258	92.213	0.000
67	8.819	0.113	0.000	0.000	0.000	84.258	92.213	0.000
68	8.819	0.113	0.000	0.000	0.000	84.258	92.213	0.000
69	8.819	0.113	0.000	0.000	0.000	84.258	92.213	0.000
70	8.819	0.113	0.000	0.000	0.000	84.258	92.213	0.000
71	8.819	0.113	0.000	0.000	0.000	84.258	92.213	0.000
72	8.819	0.113	0.000	0.000	0.000	84.258	92.213	0.000
73	8.819	0.113	0.000	0.000	0.000	84.258	92.213	0.000
74	8.819	0.113	0.000	0.000	0.000	84.258	92.213	0.000
75	8.820	0.113	0.003	0.000	0.000	84.261	92.213	0.000
76	8.821	0.113	0.001	0.004	0.000	84.262	92.217	0.000
77	8.827	0.113	0.003	0.003	0.000	84.265	92.220	0.000
78	8.829	0.113	0.000	0.001	0.000	84.265	92.220	0.000
79	8.830	0.113	0.000	0.002	0.000	84.265	92.222	0.000
80	8.831	0.113	0.005	0.005	0.000	84.270	92.226	0.000
81	8.834	0.113	0.031	0.006	0.000	84.301	92.232	0.000
82	8.860	0.113	0.918	0.000	0.000	85.219	92.232	0.000
83	8.865	0.113	0.009	0.083	0.000	85.228	92.315	0.000
84	9.255	0.108	0.385	0.403	0.000	85.613	92.718	0.000
85	9.840	0.102	1.313	0.063	0.000	86.926	92.781	0.000
86	9.860	0.101	3.332	0.026	0.000	90.258	92.808	0.000
87	10.074	0.099	0.669	0.031	0.000	90.927	92.839	0.000
88	10.195	0.098	0.022	0.081	0.000	90.949	92.920	0.000
89	10.215	0.098	0.000	0.004	0.000	90.949	92.924	0.000
90	10.225	0.098	0.003	0.004	0.000	90.952	92.928	0.000

Tabla F. 4. Masas Traslacionales Modelo Elementos Finitos Edificio Titanium La Portada.

Modo	Frecuencia [Hz]	Periodo [Seg.]	UX	UY	UZ	SumUX	SumUY	SumUZ
91	10.227	0.098	0.000	0.000	0.000	90.952	92.928	0.000
92	10.229	0.098	0.000	0.000	0.000	90.952	92.929	0.000
93	10.230	0.098	0.000	0.001	0.000	90.953	92.929	0.000
94	10.232	0.098	0.000	0.001	0.000	90.953	92.930	0.000
95	10.232	0.098	0.000	0.000	0.000	90.953	92.930	0.000
96	10.232	0.098	0.000	0.000	0.000	90.953	92.930	0.000
97	10.232	0.098	0.001	0.001	0.000	90.954	92.931	0.000
98	10.232	0.098	0.000	0.000	0.000	90.954	92.931	0.000
99	10.232	0.098	0.000	0.000	0.000	90.954	92.931	0.000
100	10.233	0.098	0.000	0.000	0.000	90.954	92.932	0.000
101	10.233	0.098	0.000	0.000	0.000	90.954	92.932	0.000
102	10.233	0.098	0.000	0.000	0.000	90.954	92.932	0.000
103	10.233	0.098	0.000	0.000	0.000	90.954	92.932	0.000
104	10.233	0.098	0.000	0.001	0.000	90.954	92.933	0.000
105	10.232	0.098	0.000	0.000	0.000	90.954	92.933	0.000
106	10.233	0.098	0.000	0.000	0.000	90.954	92.933	0.000
107	10.244	0.098	0.000	0.000	0.000	90.954	92.933	0.000
108	10.245	0.098	0.000	0.000	0.000	90.954	92.933	0.000
109	10.246	0.098	0.000	0.000	0.000	90.955	92.933	0.000
110	10.248	0.098	0.000	0.000	0.000	90.955	92.933	0.000

Tabla F. 5. Masas Rotacionales Modelo Elementos Finitos Edificio Titanium La Portada.

Modo	Frecuencia [Hz]	Periodo [Seg.]	RX	RY	RZ	SumRX	SumRY	SumRZ
1	0.178	5.627	96.508	0.016	2.373	96.508	0.016	2.373
2	0.235	4.248	0.101	60.743	7.636	96.609	60.759	10.009
3	0.267	3.748	0.045	35.776	14.382	96.655	96.535	24.390
4	0.649	1.541	1.896	0.004	0.007	98.551	96.539	24.398
5	0.752	1.330	0.003	0.139	5.996	98.553	96.678	30.394
6	0.964	1.037	0.002	1.688	0.709	98.555	98.365	31.103
7	1.406	0.711	0.473	0.009	0.177	99.028	98.374	31.279
8	1.563	0.640	0.047	0.021	1.572	99.075	98.395	32.851
9	2.121	0.472	0.006	0.646	0.280	99.081	99.041	33.132
10	2.371	0.422	0.171	0.044	0.111	99.251	99.085	33.243
11	2.601	0.385	0.025	0.024	0.754	99.277	99.109	33.996
12	3.363	0.297	0.080	0.026	0.702	99.357	99.135	34.698
13	3.623	0.276	0.072	0.128	0.041	99.429	99.262	34.739
14	3.766	0.266	0.031	0.074	0.273	99.460	99.336	35.012
15	3.965	0.252	0.004	0.000	0.035	99.464	99.336	35.047
16	4.427	0.226	0.057	0.006	0.841	99.520	99.341	35.887
17	4.944	0.202	0.136	0.004	0.001	99.657	99.346	35.889
18	5.364	0.186	0.000	0.157	0.006	99.657	99.503	35.894
19	5.593	0.179	0.043	0.005	1.064	99.699	99.507	36.958
20	6.097	0.164	0.189	0.001	0.513	99.889	99.509	37.471
21	6.860	0.146	0.000	0.000	0.104	99.889	99.509	37.575
22	6.897	0.145	0.005	0.005	1.255	99.893	99.514	38.830
23	7.047	0.142	0.000	0.166	0.003	99.893	99.680	38.833
24	7.114	0.141	0.080	0.001	0.834	99.973	99.681	39.666
25	8.097	0.123	0.010	0.000	0.215	99.984	99.681	39.881
26	8.415	0.119	0.003	0.122	0.548	99.986	99.803	40.429
27	8.506	0.118	0.004	0.041	1.753	99.990	99.844	42.183
28	8.717	0.115	0.000	0.000	0.000	99.990	99.844	42.183
29	8.720	0.115	0.000	0.000	0.000	99.990	99.844	42.183
30	8.724	0.115	0.000	0.000	0.000	99.990	99.844	42.183

Tabla F. 6. Masas Rotacionales Modelo Elementos Finitos Edificio Titanium La Portada.

Modo	Frecuencia [Hz]	Periodo [Seg.]	RX	RY	RZ	SumRX	SumRY	SumRZ
31	8.725	0.115	0.000	0.000	0.000	99.990	99.844	42.183
32	8.728	0.115	0.000	0.000	0.000	99.990	99.844	42.183
33	8.730	0.115	0.000	0.000	0.000	99.990	99.844	42.183
34	8.732	0.115	0.000	0.000	0.000	99.990	99.844	42.183
35	8.737	0.114	0.000	0.000	0.000	99.990	99.844	42.183
36	8.737	0.114	0.000	0.000	0.000	99.990	99.844	42.183
37	8.743	0.114	0.000	0.000	0.000	99.990	99.844	42.183
38	8.745	0.114	0.000	0.000	0.000	99.990	99.844	42.183
39	8.750	0.114	0.000	0.000	0.003	99.990	99.844	42.186
40	8.750	0.114	0.000	0.000	0.000	99.990	99.844	42.186
41	8.754	0.114	0.000	0.003	0.002	99.990	99.847	42.188
42	8.759	0.114	0.000	0.001	0.001	99.990	99.847	42.188
43	8.766	0.114	0.000	0.000	0.000	99.990	99.848	42.189
44	8.774	0.114	0.000	0.001	0.000	99.990	99.848	42.189
45	8.778	0.114	0.000	0.002	0.000	99.991	99.850	42.189
46	8.782	0.114	0.000	0.000	0.000	99.991	99.850	42.189
47	8.784	0.114	0.000	0.002	0.002	99.991	99.851	42.191
48	8.786	0.114	0.000	0.000	0.000	99.991	99.852	42.191
49	8.789	0.114	0.000	0.000	0.000	99.991	99.852	42.191
50	8.796	0.114	0.000	0.000	0.000	99.991	99.852	42.191
51	8.798	0.114	0.000	0.000	0.000	99.991	99.852	42.191
52	8.800	0.114	0.000	0.000	0.000	99.991	99.852	42.191
53	8.808	0.114	0.000	0.001	0.001	99.991	99.853	42.192
54	8.812	0.113	0.000	0.003	0.000	99.991	99.856	42.192
55	8.814	0.113	0.000	0.001	0.000	99.991	99.857	42.192
56	8.816	0.113	0.000	0.000	0.000	99.991	99.857	42.193
57	8.817	0.113	0.000	0.000	0.000	99.991	99.857	42.193
58	8.818	0.113	0.000	0.000	0.001	99.991	99.857	42.194
59	8.818	0.113	0.000	0.000	0.000	99.991	99.857	42.194
60	8.818	0.113	0.000	0.000	0.000	99.991	99.858	42.194

Tabla F. 7. Masas Rotacionales Modelo Elementos Finitos Edificio Titanium La Portada.

Modo	Frecuencia [Hz]	Periodo [Seg.]	RX	RY	RZ	SumRX	SumRY	SumRZ
61	8.819	0.113	0.000	0.000	0.000	99.991	99.858	42.194
62	8.819	0.113	0.000	0.000	0.000	99.991	99.858	42.194
63	8.819	0.113	0.000	0.000	0.000	99.991	99.858	42.194
64	8.819	0.113	0.000	0.000	0.000	99.991	99.858	42.194
65	8.819	0.113	0.000	0.000	0.000	99.991	99.858	42.194
66	8.819	0.113	0.000	0.000	0.000	99.991	99.858	42.194
67	8.819	0.113	0.000	0.000	0.000	99.991	99.858	42.194
68	8.819	0.113	0.000	0.000	0.000	99.991	99.858	42.194
69	8.819	0.113	0.000	0.000	0.000	99.991	99.858	42.194
70	8.819	0.113	0.000	0.000	0.000	99.991	99.858	42.194
71	8.819	0.113	0.000	0.000	0.000	99.991	99.858	42.194
72	8.819	0.113	0.000	0.000	0.000	99.991	99.858	42.194
73	8.819	0.113	0.000	0.000	0.000	99.991	99.858	42.194
74	8.819	0.113	0.000	0.000	0.000	99.991	99.858	42.194
75	8.820	0.113	0.000	0.000	0.000	99.991	99.858	42.194
76	8.821	0.113	0.000	0.000	0.007	99.991	99.858	42.201
77	8.827	0.113	0.000	0.000	0.001	99.991	99.858	42.202
78	8.829	0.113	0.000	0.000	0.000	99.991	99.858	42.202
79	8.830	0.113	0.000	0.000	0.001	99.991	99.858	42.202
80	8.831	0.113	0.000	0.000	0.001	99.991	99.858	42.204
81	8.834	0.113	0.000	0.001	0.000	99.991	99.858	42.204
82	8.860	0.113	0.000	0.019	0.001	99.991	99.877	42.204
83	8.865	0.113	0.001	0.000	0.208	99.992	99.877	42.413
84	9.255	0.108	0.003	0.008	0.293	99.995	99.885	42.705
85	9.840	0.102	0.000	0.021	0.082	99.996	99.906	42.787
86	9.860	0.101	0.000	0.051	0.075	99.996	99.957	42.862
87	10.074	0.099	0.000	0.011	9.050	99.996	99.968	51.912
88	10.195	0.098	0.000	0.000	1.185	99.996	99.969	53.097
89	10.215	0.098	0.000	0.000	0.024	99.996	99.969	53.120
90	10.225	0.098	0.000	0.000	0.002	99.996	99.969	53.123

Tabla F. 8. Masas Rotacionales Modelo Elementos Finitos Edificio Titanium La Portada.

Modo	Frecuencia [Hz]	Periodo [Seg.]	RX	RY	RZ	SumRX	SumRY	SumRZ
91	10.227	0.098	0.000	0.000	0.009	99.996	99.969	53.132
92	10.229	0.098	0.000	0.000	0.001	99.996	99.969	53.133
93	10.230	0.098	0.000	0.000	0.001	99.996	99.969	53.134
94	10.232	0.098	0.000	0.000	0.006	99.996	99.969	53.139
95	10.232	0.098	0.000	0.000	0.002	99.996	99.969	53.142
96	10.232	0.098	0.000	0.000	0.003	99.996	99.969	53.145
97	10.232	0.098	0.000	0.000	0.002	99.996	99.969	53.147
98	10.232	0.098	0.000	0.000	0.001	99.996	99.969	53.147
99	10.232	0.098	0.000	0.000	0.000	99.996	99.969	53.147
100	10.233	0.098	0.000	0.000	0.004	99.996	99.969	53.151
101	10.233	0.098	0.000	0.000	0.002	99.996	99.969	53.153
102	10.233	0.098	0.000	0.000	0.001	99.996	99.969	53.153
103	10.233	0.098	0.000	0.000	0.001	99.996	99.969	53.154
104	10.233	0.098	0.000	0.000	0.004	99.996	99.969	53.158
105	10.232	0.098	0.000	0.000	0.000	99.996	99.969	53.159
106	10.233	0.098	0.000	0.000	0.000	99.996	99.969	53.159
107	10.244	0.098	0.000	0.000	0.001	99.996	99.969	53.160
108	10.245	0.098	0.000	0.000	0.003	99.996	99.969	53.163
109	10.246	0.098	0.000	0.000	0.005	99.996	99.969	53.168
110	10.248	0.098	0.000	0.000	0.033	99.996	99.969	53.201

