



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

OPTIMIZACIÓN DEL MOVIMIENTO DE CONTENEDORES VACÍOS BAJO INCERTIDUMBRE

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN GESTIÓN DE
OPERACIONES

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

GUSTAVO IVÁN ANGULO OLIVARES

PROFESOR GUÍA:
ANDRÉS WEINTRAUB POHORILLE

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
DANIEL ESPINOZA GONZÁLEZ
FERNANDO ORDÓÑEZ PIZARRO
ROBERTO COMINETTI COTTI-COMETTI

SANTIAGO DE CHILE
JULIO 2009

Antes que todo, quiero agradecer profundamente a mi familia por la vida que me ha tocado compartir con ellos. El cariño, apoyo y confianza de mis padres, Silvia y Eliomenes, ha sido fundamental en mi desarrollo como persona. A mi hermana Maricel le doy las gracias por los juegos y las risas, así como su paciencia y su no-paciencia. Agradezco de igual forma a mi abuela Rosa por los largos años que ha cuidado de nosotros. De forma muy especial agradezco a mi polola, Yeni, por estos años que hemos estado juntos y lo que he crecido a su lado.

Quiero agradecer a mi profesor guía, Andrés, por su apoyo en la elaboración de este trabajo y en muchas otras instancias de mi desarrollo académico. Agradezco también a los miembros de la comisión, Daniel, Fernando y Roberto, por sus comentarios y consejos respecto a este trabajo y sobre el mundo de la investigación, y a Rafael por haberme invitado a ser partícipe del proyecto con CSAV.

Finalmente, a mis pares de estudios, música, comidas y salidas, les agradezco los años, conversaciones y momentos compartidos, y por hacer mi paso por la universidad una etapa muy grata de mi vida.

A mis padres

Índice general

Resumen	VIII
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Literatura y estado del arte	3
1.3. Sobre este trabajo	5
2. Modelo básico	6
2.1. Descripción	6
2.2. Formulación original	7
2.3. Nueva formulación	12
2.4. Experimentos numéricos	16
2.5. Conclusiones	17
3. Optimización Robusta	18
3.1. Antecedentes y resultados previos	18
3.1.1. Optimización Lineal	19
3.2. Incertidumbre en demanda y retorno	23
3.3. Incertidumbre en tiempos de viaje	28
3.4. Incertidumbre conjunta	34
4. Optimización Robusta Ajustable	36
4.1. Resultados previos	36
4.2. Formulación robusta afínmente ajustable	39
4.2.1. Variables ajustables y no ajustables	39
4.2.2. Formulación por caminos	40
4.3. Experimentos numéricos	55
4.3.1. Resultados nominales	56
4.3.2. Desfase de información	57

4.3.3. Simulaciones	58
4.4. Conclusiones	61
5. Conclusiones y trabajo futuro	63
Bibliografía	65

Índice de cuadros

2.1. Comparativa entre formulación original y alternativa.	16
4.1. Resultados nominales para el modelo robusto ajustable.	56
4.2. Resultados nominales de modelo robusto ajustable con desfase de información.	58
4.3. Resultados de simulaciones sin reoptimizaciones intermedias.	59
4.4. Resultados de simulaciones con reoptimizaciones y horizonte móvil.	60

Índice de figuras

2.1. Itinerario de una nave.	8
2.2. Carga y descarga sin cruce.	12
2.3. Carga y descarga con cruce.	13
4.1. Caminos o rutas de una nave.	41

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO Y AL GRADO DE
MAGÍSTER EN GESTIÓN DE OPERACIONES
POR: GUSTAVO ANGULO OLIVARES
FECHA: JULIO 2009
PROF. GUÍA: Sr. ANDRÉS WEINTRAUB P.

OPTIMIZACIÓN DEL MOVIMIENTO DE CONTENEDORES VACÍOS BAJO INCERTIDUMBRE

En la actualidad, el flete marítimo es una actividad fuertemente ligada al desarrollo comercial entre distintos agentes alrededor del mundo. Permite, entre otras cosas, la expansión hacia nichos y mercados que de otra forma serían imposibles de alcanzar y con costos menores en relación a otros medios de transporte. El uso de contenedores, y por ende la logística de ellos, es clave en este aspecto, pues son el elemento básico de esta industria.

Consideramos el caso de Compañía Sudamericana de Vapores (CSAV), empresa de transporte marítimo que posee puntos de operación en diversas zonas geográficas del planeta. En cada uno de éstos, la compañía mantiene un stock de contenedores vacíos de distinto tipo con la finalidad de suplir la demanda por ellos. Cuando un cliente solicita un contenedor, éste es llenado con la carga y transportado en una nave hacia otra localidad, donde se desembarca y es devuelto vacío a la compañía. Si bien casi siempre los contenedores son retornados a manos de la empresa, esto no siempre ocurre en el lugar o momento indicado, creando situaciones de exceso de ellos en algunas zonas y falta en otras, efecto denominado desbalance comercial. Por esto, la compañía realiza movimientos de reposición de manera de distribuir eficientemente los contenedores entre sus puntos de operación. Dado que la demanda tiene un elemento de incertidumbre importante, es necesario el desarrollo de una planificación de inventario y reposicionamiento que considere este factor.

En este trabajo extendemos algunos aspectos del sistema de apoyo a las decisiones que CSAV ha implementado recientemente. Como primer paso, proponemos una formulación alternativa para el problema básico de movimiento de contenedores, el cual reduce en forma sustancial los tiempos de ejecución en relación a la formulación usual. Luego derivamos modelos robustos ante demanda, retorno y tiempos de viaje inciertos. Finalmente proponemos un modelo robusto ajustable para la relajación lineal del problema con demanda y retorno inciertos. Los experimentos numéricos indican que esta última metodología disminuye el costo nominal de las soluciones robustas, lo que es apoyado mediante simulaciones en distintas instancias.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

Compañía Sudamericana de Vapores (CSAV) es la empresa naviera más grande de Latinoamérica. Fundada en 1872, actualmente realiza operaciones en los cinco continentes y en más de 600 localidades alrededor del mundo. El negocio principal de la compañía es el envío de carga de distinto tipo, tales como carga general, congelados y vehículos, entre otros. Para esta labor, cuenta con una flota de contenedores de distintos tipos, adecuados para las necesidades y características del cliente y su carga, la cual suma aproximadamente 300.000 unidades. La compañía cuenta con múltiples tipos de transporte para los contenedores, siendo el principal la vía marítima en naves propias, además de la posibilidad de contratar servicios de terceros y realizar movimientos terrestres mediante camiones y trenes.

El esquema de funcionamiento de la compañía es común al resto de las empresas de la industria naviera, y por lo tanto, muchos de los problemas que enfrenta son propios del sector. Uno de los más importantes es el denominado desbalance comercial y que tiene su origen en la naturaleza del servicio. En efecto, cuando un cliente solicita el envío de carga hacia otra localidad en el mundo, la compañía debe proveer uno o más contenedores vacíos para realizar la orden, y como es de esperar, debe mantener un stock adecuado de ellos de forma de satisfacer la demanda. Por otro lado, si bien el destino del embarque es conocido, el lugar y fecha de devolución del contenedor por parte del receptor no son necesariamente conocidos a priori por la compañía, haciendo que el flujo de retorno de contenedores no sea un parámetro certero. En general, el efecto más visible del desbalance comercial es la existencia de zonas deficitarias y superavitarias, es decir, lugares donde la demanda es permanentemente mayor que la devolución de contenedores, generando escasez de ellos, y lugares donde el retorno es sostenidamente mayor que las entregas,

produciendo sobrestock de contenedores, respectivamente.

Para contrarrestar los efectos nombrados anteriormente, la compañía cuenta con una serie de mecanismos que permiten hacerles frente. El más natural de ellos es el reposicionamiento de contenedores vacíos a través de los distintos puntos de operación. En general, se utiliza parte de la capacidad de las naves para transportar contenedores vacíos desde zonas superavitarias hacia zonas deficitarias. También se realizan movimientos hacia y desde localidades que son consideradas como *hubs* para las operaciones, es decir, lugares de tráfico permanente que sirven como puntos de conexión en la red de viajes. Por otro lado, se cuenta con la posibilidad de ingresar contenedores a la flota, ya sea por compra o arriendo, acción conocida como *on-hire*. A su vez, la venta de un contenedor o la devolución de él por término de contrato da lugar a lo que se conoce como *off-hire*.

Como en la mayoría de las aplicaciones en la vida real, las operaciones de CSAV están sujetas a la presencia de incertidumbre. En este caso, las principales fuentes de incertidumbre son los niveles de demanda y retorno de contenedores, además de los posibles retrasos que pueden sufrir las naves en su itinerario. Por lo tanto, es necesario que la planificación del manejo de inventario y reposicionamiento de contenedores tome en cuenta este aspecto.

Hasta hace poco tiempo, los niveles de stock y movimiento de contenedores eran programados en base a la experiencia de los operadores, quienes estimaban, guiados por un pronóstico de demanda y su criterio, un nivel de inventario que evitara quiebres de stock, además de decidir los movimientos de reposición para mantener dicho nivel. Este esquema de funcionamiento, si bien era operativo, era lento de planificar, y más aún, estaba lejos de ser óptimo, puesto que las decisiones eran tomadas con una visión local de la zona de la cual está encargado el operador, y no bajo una visión más global del estado y necesidades de otras localidades ni de las múltiples combinaciones de movimientos que se pueden hacer entre ellas.

Recientemente, CSAV está poniendo en marcha un sistema de planificación basado en un modelo matemático que entrega sugerencias sobre el inventario y movimientos de forma diaria. Decimos sugerencias puesto que la planificación propuesta por el modelo no siempre es completamente aplicable, y usualmente debe ser modificada por el operador a medida que van ocurriendo los eventos. Con este esquema, se espera reducir los costos involucrados con la satisfacción de la demanda, y en lo posible, reducir la flota y operar de forma más ajustada. Este modelo considera la incertidumbre mediante la inclusión de un stock de seguridad para cada localidad y tipo de equipo, buscando con ello cubrir la variabilidad de la demanda, retorno y tiempos de viaje.

1.2. Literatura y estado del arte

El manejo de flotas o recursos, tales como contenedores y vehículos, es un tema ampliamente estudiado. Usualmente estos problemas deben lidiar con estocasticidad en demanda, tiempos, capacidades, etc. Por ello, diversos modelos dinámicos han sido propuestos. Crainic et al. ([19]) presentan un modelo integrado de dos etapas para la relocalización de contenedores vacíos basado en formulaciones de flujos *multicommodities* en una red extendida de espacio y tiempo. Cheung y Powell ([18]) proponen un método de aproximación iterativo para minimizar el costo esperado cuando la demanda es incierta. Por su parte, Carvalho y Powell ([15]) proponen un modelo de optimización local que permite reducir el requerimiento global de flota. En general, el manejo de flota requiere un número elevado de movimientos de unidades ociosas entre distintos puntos. En este contexto, Crainic y Dejax ([20]) presentan una revisión de modelos integrados para el manejo eficiente.

Ante la presencia de incertidumbre, existen diversas metodologías para considerarla y evaluarla dentro de un esquema de solución para un problema dado. Por ejemplo, cuando la distribución de probabilidad de los parámetros inciertos es conocida, podemos preguntarnos cómo minimizar el costo medio de operación a lo largo de un horizonte dado, cómo compatibilizar esto con la posición del tomador de decisiones frente al riesgo o cómo asegurar que la planificación obtenida es fiable por sobre un nivel de certeza dado.

Algunos de los primeros trabajos que consideran aleatoriedad en los parámetros datan de la década de 1950. Por ejemplo, Dantzig ([22]) estudia problemas de optimización lineal con coeficientes inciertos, mientras que Beale ([3]) muestra que esto involucra la minimización de una función convexa. En la misma década, Charnes y Cooper ([16]) introducen la metodología denominada *chance constraints*, donde buscan soluciones que sean factibles con alta probabilidad. En general, la optimización estocástica provee diferentes herramientas para resolver un problema, dependiendo de la naturaleza y estructura de éste (ver Birge y Louveaux [14]).

Lamentablemente, algunas de estas metodologías pueden exhibir características no deseables tales como no-convexidades y dificultades por la alta dimensionalidad de algunos problemas. Más aún, el conocimiento de la distribución de los eventos inciertos puede ser un supuesto muy fuerte y poco frecuente en la práctica. Por esta razón, en los últimos años la optimización robusta ha emergido como una alternativa viable a varios de estos problemas, concertando el interés de numerosos investigadores alrededor del mundo, destacando los trabajos de Ben-Tal y Nemirovski, y Bertsimas y Sim. La premisa principal de esta metodología es el desconocimiento de distribuciones de probabilidad para los parámetros inciertos, lo cual es compensado con el supuesto que dichos parámetros

pertenecen a un conjunto de incertidumbre predefinido y conocido. Obviamente, este supuesto puede ser más o menos realista dependiendo del problema a tratar, pero en general tiene la ventaja de proporcionar una metodología de solución que es implementable en la práctica y aplicable a escala real.

La optimización robusta parte con el trabajo de Soyster ([32]), quien presenta un problema de programación lineal bajo incertidumbre cuyo equivalente determinista sigue siendo lineal. En la última década, los trabajos de Ben-Tal y Nemirovski le han dado un importante impulso a esta área de investigación, ampliando su aplicabilidad a problemas de optimización convexa generales ([4]). Por su parte, El-Ghaoui et al. ([25]) presentan aplicaciones a programación semidefinida, aunque la mayoría de las investigaciones se han centrado en problemas lineales ([5],[6]). Por otro lado, Bertsimas y Sim ([11]) introducen un modelo de incertidumbre de cardinalidad acotada, mostrando que para problemas lineales el equivalente resultante sigue siendo un problema lineal, extendiendo su trabajo a problemas con normas generales ([9]) y a optimización combinatorial y en redes ([10]). En esta última línea, y de forma previa, Kouvelis ([27]) presenta soluciones robustas a una amplia gama de problemas combinatoriales.

Haciendo un paralelo con optimización estocástica en dos etapas, Ben-Tal y Nemirovski ([8]) extienden su trabajo a problemas con decisiones secuenciales donde sólo algunas variables deben ser decididas en el momento (*here-and-now*), mientras que otras pueden decidirse una vez que la incertidumbre ha sido revelada (*wait-and-see*). Es así como aparece el concepto de optimización robusta ajustable y el uso de reglas de decisión lineales. Chen et al. ([17]) presentan una extensión a esta metodología cuando existe un conocimiento parcial de las distribuciones de los parámetros inciertos.

Entre las aplicaciones de optimización robusta y similares encontramos optimización de portafolios (Goldfarb e Iyengar [26]), manejo de inventarios (Bertsimas y Thiele [12], Bienstock y Ozbay [13]), mínimos cuadrados (El-Ghaoui y Lebret [24]), diseño y expansión de redes (Atamturk y Zhang [2], Liu et al. [29], Ordóñez y Zhao [31]), contratos de suministro (Ben-Tal et al. [7]), entre otros. Destaca además el trabajo de Erera et al. ([28]), quienes presentan un modelo robusto en dos etapas para el reposicionamiento de contenedores vacíos. En su esquema, dada una perturbación de los valores nominales de demanda, las soluciones de la primera etapa pueden ser recuperadas en la segunda mediante un conjunto de acciones admisibles predefinidas. Dependiendo de la naturaleza de este conjunto, distintos modelos son desarrollados, entregando formulaciones explícitas en cada caso.

1.3. Sobre este trabajo

Avanzando en una dirección similar a este último trabajo, proponemos una aproximación para el problema de planificación del movimiento de contenedores vacíos en múltiples etapas. Como primer paso, abordamos el modelo básico de optimización determinista donde suponemos que los pronósticos son certeros y buscamos una solución a costo mínimo. Para este problema, proponemos una relajación que en optimalidad es factible para problema original, disminuyendo notoriamente el tiempo de cálculo y requerimientos del sistema. Posteriormente, proponemos modelos robustos para situaciones donde la demanda, retorno y tiempos de viaje son inciertos en algún sentido. En estos casos, el problema resultante no cambia de naturaleza y por lo tanto mantiene su complejidad original. Finalmente, consideramos la versión ajustable de este problema, donde las variables son ajustadas mediante una regla lineal sobre la demanda y retorno, respetando restricciones de no anticipatividad. Los resultados nominales y simulaciones muestran una mejora importante frente a los modelos robustos tradicionales o estáticos, a cambio de mayores requerimientos computacionales.

Capítulo 2

Modelo básico

2.1. Descripción

Como fue dicho al principio, CSAV cuenta con varios tipos de contenedores para las distintas necesidades de sus clientes. Si bien cada tipo de equipo tiene características especiales, existen dos formatos de tamaño/capacidad, habiendo de 20 y 40 pies. Se utiliza una medida llamada TEU, teniendo los primeros 1 TEU y los segundos 2 TEUs.

La compañía cuenta con una flota de naves que realizan un itinerario de viajes calendarizado. Sin embargo, muchas veces este itinerario se va modificando, particularmente por reprogramación de las fechas de zarpe o arribo, o incluso por introducción o eliminación de recaladas en la ruta. La mayoría de los movimientos de reposición se hacen por este medio, donde la capacidad de la nave es compartida por los distintos tipos de contenedores. Además, se cuenta con la posibilidad de realizar posicionamiento por medio de *feeders*, que corresponden a terceros que ofrecen servicios de traslado por vía marítima. Por vía terrestre, se cuenta con camiones y trenes, también operados por terceros. En general, estos movimientos suelen ser bastante más costosos que aquellos hechos a través de la flota de naves propias de la compañía. A grandes rasgos, el itinerario de una nave corresponde a una serie de visitas a localidades de forma secuencial, determinado por las fechas de viaje entre distintos puntos y el tiempo de estadía en cada uno de ellos. En el caso que estamos abordando, los itinerarios son un dato conocido y preestablecido al momento de elaborar la planificación, y por lo tanto su diseño no es parte de las decisiones a tomar.

Consideremos ahora un sistema de revisión de inventario como sigue. Para cada localidad y tipo de equipo, el inventario al comienzo del día $t + 1$ corresponde al inventario al comienzo del día t más la cantidad de contenedores que ingresaron en t menos la cantidad de contenedores que salieron en t . En el primer caso tenemos entradas por reposiciona-

miento, por ingreso a la flota (*on-hire*) y por retorno de clientes. En el segundo, tenemos salidas por reposicionamiento, por salidas de la flota (*off-hire*) y por demanda de clientes. Cabe notar que en el primer caso, las entradas por reposicionamiento se dividen en dos grupos: aquellos movimientos que fueron programados con anterioridad al inicio de la planificación y que deberían arribar a destino en una fecha definida, y aquellos movimientos que efectivamente serán parte de la planificación en curso. Así, el primer grupo corresponde una condición inicial y se considera como un parámetro fijo dado.

2.2. Formulación original

Procedemos a especificar los conjuntos. Sean

$i \in \mathcal{I}$: localidades

$k \in \mathcal{K}$: tipos de equipo

$t \in \mathcal{T}$: períodos

$v \in \mathcal{V}$: naves

Por simplicidad, el conjunto \mathcal{V} incorpora tanto las naves propias como otros medios ofrecidos por terceros, distinguidos de forma conveniente. También consideramos que $0 \in \mathcal{T}$, rescatando de esta forma condiciones iniciales como el inventario al comienzo de la planificación. Recordemos además que el inventario se calcula para cada localidad y tipo de equipo, por lo tanto el par $(i, k) \in \mathcal{I} \times \mathcal{K}$ será recurrente en lo que sigue. Además aprovechamos de dejar en claro que la mayoría de las decisiones están indexadas por la tupla anterior, puesto que cada par (i, k) puede entenderse como un depósito distinto.

Para $v \in \mathcal{V}$, sean $\mathcal{N}_v \subset \mathcal{I} \times \mathcal{T}$ y $\mathcal{E}_v \subset \mathcal{N}_v \times \mathcal{N}_v$ los conjuntos de nodos y arcos que conforman el itinerario de la nave v , respectivamente. En este sentido, un nodo (i, t) pertenece a \mathcal{N}_v si y sólo si en el período t la nave v arriba o zarpa desde la localidad i . Por otro lado, un arco $e \in \mathcal{E}_v$ corresponde a una tupla de la forma $(i, t)(j, s)$ donde $t \leq s$. Si $i \neq j$, entonces $e = (i, t)(j, s)$ corresponde a un arco de viaje desde i a j , zarpando en t y arribando en s . Si $i = j$, entonces $e = (i, t)(i, s)$ corresponde a un arco de recalada, donde la nave arriba a i en t y permanece en esa localidad hasta su zarpe en s . Notamos además que, de forma natural, podemos suponer que el itinerario de una nave parte y termina con arcos de recalada. Finalmente, llamamos \mathcal{A}_v y $\mathcal{C}_v \subset \mathcal{E}_v$ al conjunto de arcos de viajes y al conjunto de arcos de recaladas de la nave v , respectivamente.

A modo de ejemplo, consideremos la siguiente figura, donde se representa el itinerario de una nave v dada. En ella, los arcos diagonales corresponden a viajes entre distintas localidades, mientras que el arco horizontal y los arcos circulares corresponden a recaladas.

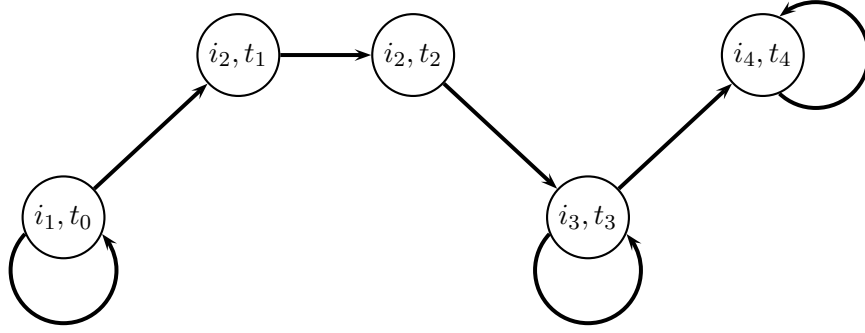


Figura 2.1: Itinerario de una nave.

En este ejemplo tenemos

$$\mathcal{N}_v = \{(i_1, t_0), (i_2, t_1), (i_2, t_2), (i_3, t_3), (i_4, t_4)\}$$

$$\mathcal{A}_v = \{(i_1, t_0)(i_2, t_1), (i_2, t_2)(i_3, t_3), (i_3, t_3)(i_4, t_4)\}$$

$$\mathcal{C}_v = \{(i_1, t_0)(i_1, t_0), (i_2, t_1)(i_2, t_2), (i_3, t_3)(i_3, t_3), (i_4, t_4)(i_4, t_4)\}$$

Notar que según las especificaciones previas, el grafo $\mathcal{G}_v = (\mathcal{N}_v, \mathcal{E}_v)$ correspondería a un grafo dirigido donde además permitimos la existencia de *loops*, es decir, arcos que conectan un nodo consigo mismo. Este es el caso de arcos de recalada cuando las fechas de arribo y zarpe desde una localidad coinciden. Por ejemplo, en la figura anterior, los arcos circulares caen en esta categoría.

Procedemos ahora a especificar las variables de decisión. Sean

W_t^{ik} : contenedores del tipo k que se tienen en inventario en la localidad i en el período t

X_{tsv}^{ijk} : contenedores del tipo k que se envían desde la localidad i a la localidad j partiendo en t y llegando en s en la nave v .

ON_t^{ik} : contenedores del tipo k que ingresan a la flota (*on-hire*) en la localidad i en el período t

OFF_t^{ik} : contenedores del tipo k que salen de la flota (*off-hire*) en la localidad i en el período t

En el caso de las variables X_{tsv}^{ijk} , entendemos que ellas pueden ser no nulas sólo si en el itinerario de la nave v está contemplado un viaje entre i y j con zarpe y arribo en t y s respectivamente, es decir, sólo si $(i, t)(j, s) \in \mathcal{A}_v$. Por lo mismo, en tal caso se entiende

que $t \leq s$.

Finalmente, especificamos los parámetros

D_t^{ik} : demanda por contenedores tipo k en localidad i en t

R_t^{ik} : retorno de contenedores tipo k en localidad i en t

SP_t^{ik} : ingreso por reposicionamiento programado previo al inicio de la planificación

M_t^{ik} : inventario mínimo de contenedores de tipo k en la localidad i en t

De esta forma, y de acuerdo a las especificaciones previas, tenemos la siguiente relación para el inventario

$$W_{t+1}^{ik} = W_t^{ik} + SP_t^{ik} + R_t^{ik} - D_t^{ik} + \sum_{j,v,s} X_{stv}^{jik} - \sum_{j,v,s} X_{tsv}^{ijk} + ON_t^{ik} - OFF_t^{ik} \quad (2.1)$$

donde también se tiene

$$M_t^{ik} \leq W_t^{ik} \quad (2.2)$$

Además tenemos restricciones de capacidad en la naves. Claramente, el total de TEUs transportadas en un trayecto no puede exceder la capacidad asociada a éste. Por otro lado, la suma de movimientos en cada nave entre dos localidades a lo largo del horizonte de planificación tiene un límite. Agregamos entonces los siguientes parámetros

Q_k : tamaño en TEUs de equipo tipo k

C_{tsv}^{ij} : capacidad en TEUs para el arco de viaje $(i, t)(j, s)$ en la nave v

C_v^{ij} : capacidad común en TEUs para los arcos de viaje de la forma $(i, \cdot)(j, \cdot)$ en la nave v .

Así, obtenemos las siguientes restricciones

$$\sum_k Q_k X_{tsv}^{ijk} \leq C_{tsv}^{ij} \quad (2.3)$$

$$\sum_{tsk} Q_k X_{tsv}^{ijk} \leq C_v^{ij} \quad (2.4)$$

La ecuación (2.1) no toma en cuenta algunas restricciones operacionales. Cuando un operador decide el embarque de una cantidad de contenedores en una nave durante una recalada, esta decisión y programación debe hacerse con anticipación al zarpe, digamos

l^U días antes, y es en esa fecha cuando los contenedores son descontados de inventario. Asimismo, al arribar la nave a destino, los contenedores estarán disponibles en inventario una cantidad dada de días después, digamos l^D . Además, en una recalada, o bien se embarcan contenedores en la nave, o bien se descargan de ella, pero no se hacen ambas operaciones a la vez pues carece de sentido. Estas consideraciones motivan la definición de las siguientes variables

VU_{tsv}^{ik} : contenedores de tipo k que se cargan en la nave v cuando recalca en la localidad i entre los períodos t y s

VD_{tsv}^{ik} : contenedores de tipo k que se descargan de la nave v cuando recalca en la localidad i entre los períodos t y s

Notar que las variables VU_{tsv}^{ik} y VD_{tsv}^{ik} pueden ser no nulas sólo si la nave v recalca en la localidad i entre t y s , es decir, sólo si $(i, t)(i, s) \in \mathcal{C}_v$. Sean $j, j' \in \mathcal{I}$ y $r, r' \in \mathcal{T}$ tales que $(j, r), (j', r') \in \mathcal{N}_v$ y $(j, r)(i, t), (i, s)(j', r') \in \mathcal{A}_v$. Luego, las variables VU_{tsv}^{ik} y VD_{tsv}^{ik} están dadas por las siguientes relaciones

$$VU_{tsv}^{ik} = \max \left\{ X_{sr'v}^{ij'k} - X_{rtv}^{jik}, 0 \right\} \quad (2.5)$$

$$VD_{tsv}^{ik} = \max \left\{ X_{rtv}^{jik} - X_{sr'v}^{ij'k}, 0 \right\} \quad (2.6)$$

Si alguno de los arcos $(j, r)(i, t)$ o $(i, s)(j', r')$ no existiese, entonces la variable de flujo asociada es nula y la relación se mantiene consistente. Esto sucede, por ejemplo, en los extremos del itinerario de una nave, donde no hay arcos de viaje entrantes al inicio y no hay arcos de viaje salientes al final. Así, con lo anterior en mente, de forma equivalente podemos escribir

$$VU_{tsv}^{ik} = \max \left\{ \sum_{j,r} X_{srv}^{ijk} - \sum_{j,r} X_{rtv}^{jik}, 0 \right\} \quad (2.7)$$

$$VD_{tsv}^{ik} = \max \left\{ \sum_{j,r} X_{rtv}^{jik} - \sum_{j,r} X_{srv}^{ijk}, 0 \right\} \quad (2.8)$$

puesto que cada sumatoria tendrá a lo más un término no nulo y no complicamos la notación.

Con esta modificación, la nueva dinámica de inventario está dada por

$$W_{t+1}^{ik} = W_t^{ik} + SP_t^{ik} + R_t^{ik} - D_t^{ik} + \sum_{v,s} VD_{(t-l^D)sv}^{ik} - \sum_{v,s} VU_{s(t+l^U)v}^{ik} + ON_t^{ik} - OFF_t^{ik} \quad (2.9)$$

De esta forma capturamos el desfase de tiempo entre el embarque o desembarque de contenedores y su salida o entrada a inventario respectivamente. Para incorporar estas variables, consideremos $M > 0$ suficientemente grande y la variable binaria $\delta_{tsv}^{ik} \in \{0, 1\}$ definida para $(i, t)(i, s) \in \mathcal{C}_v$ según

$\delta_{tsv}^{ik} = 1$ si se permite el embarque contenedores del tipo k en la nave v cuando recalca en la localidad i entre t y s .

Así, para $(i, t)(i, s) \in \mathcal{C}_v$, VU_{tsv}^{ik} y VD_{tsv}^{ik} quedan definidas por

$$VU_{tsv}^{ik} - VD_{tsv}^{ik} = \sum_{j,r} X_{srv}^{ijk} - \sum_{j,r} X_{rtv}^{jik} \quad (2.10)$$

$$0 \leq VU_{tsv}^{ik} \leq M\delta_{tsv}^{ik} \quad (2.11)$$

$$0 \leq VD_{tsv}^{ik} \leq M(1 - \delta_{tsv}^{ik}) \quad (2.12)$$

Por su parte, la función objetivo corresponde a

$$\min_{X,V,W,O,\delta} \sum_{ikt} (h^{ik}W_t^{ik} + p^{ik}ON_t^{ik} - q^{ik}OFF_t^{ik}) + \sum_{ijktsv} a_{tsv}^{ijk}X_{tsv}^{ijk} + \sum_{iktsv} (d^{ik}VD_{tsv}^{ik} + u^{ik}VU_{tsv}^{ik})$$

donde h es el costo de inventario, p es el costo de ingreso de contenedor a la flota, q es el beneficio obtenido al devolver o vender un contenedor, a es el costo de transporte por tramo y u y d son los costos de embarque y desembarque respectivamente.

Finalmente, nuestro problema de optimización (P_1) corresponde a

$$\min_{X,V,W,O,\delta} \sum_{ikt} (h^{ik}W_t^{ik} + p^{ik}ON_t^{ik} - q^{ik}OFF_t^{ik}) + \sum_{ijktsv} a_{tsv}^{ijk}X_{tsv}^{ijk} + \sum_{iktsv} (d^{ik}VD_{tsv}^{ik} + u^{ik}VU_{tsv}^{ik})$$

$$\forall i, k, t \quad W_{t+1}^{ik} = W_t^{ik} + SP_t^{ik} + R_t^{ik} - D_t^{ik} + \sum_{v,s} VD_{(t-l^D)sv}^{ik} - \sum_{v,s} VU_{s(t+l^U)v}^{ik} + ON_t^{ik} - OFF_t^{ik}$$

$$\forall i, k, t, s, v \quad VU_{tsv}^{ik} - VD_{tsv}^{ik} = \sum_{j,r} X_{srv}^{ijk} - \sum_{j,r} X_{rtv}^{jik}$$

$$\forall i, k, t, s, v \quad VU_{tsv}^{ik} \leq M\delta_{tsv}^{ik}$$

$$\forall i, k, t, s, v \quad VD_{tsv}^{ik} \leq M(1 - \delta_{tsv}^{ik})$$

$$\forall i, j, t, s, v \quad \sum_k Q_k X_{tsv}^{ijk} \leq C_{tsv}^{ij}$$

$$\begin{aligned}
 \forall i, j, v \quad & \sum_{tsk} Q_k X_{tsv}^{ijk} \leq C_v^{ij} \\
 W_0^{ik} = w_0^{ik} \quad & M_t^{ik} \leq W_t^{ik} \\
 X_{0sv}^{ijk} = ON_0^{ik} = OFF_0^{ik} = & 0 \\
 W_t^{ik}, X_{tsv}^{ijk}, ON_t^{ik}, OFF_t^{ik}, & VU_{tsv}^{ik}, VD_{tsv}^{ik} \in \mathbb{Z}_+ \\
 \delta_{tsv}^{ik} \in \{0, 1\} &
 \end{aligned}$$

2.3. Nueva formulación

En el modelo anterior, la incorporación de variables binarias y restricciones asociadas obedece a la dicotomía entre carga y descarga de contenedores en una recalada. En principio, por cada nave y por cada recalada, tenemos una variable binaria y dos restricciones adicionales para definir la cantidad de contenedores a subir o bajar, imponiendo que al menos una de estas cantidades sea nula. Sin embargo, mostraremos que podemos prescindir de algunas de ellas manteniendo factibilidad en el óptimo.

Recordemos que si una nave v recalca en la localidad i entre t y s , entonces el ingreso a inventario de los contenedores descargados será en $t + l^D$, mientras que la salida de inventario de los contenedores a cargar será en $s - l^U$. Para fijar ideas, supongamos que la nave zarpó desde j en r y que luego de recalcar en i arribará a j' en r' . Las siguientes figuras grafican las situaciones posibles: $t + l^D \leq s - l^U$ o $t + l^D \geq s - l^U$. En cada caso, las flechas continuas indican el itinerario de la nave y el flujo de contenedores a bordo, mientras que las flechas a rayas indican flujos de carga y descarga. La recta y nodos inferiores representan el flujo de inventario en la localidad i .

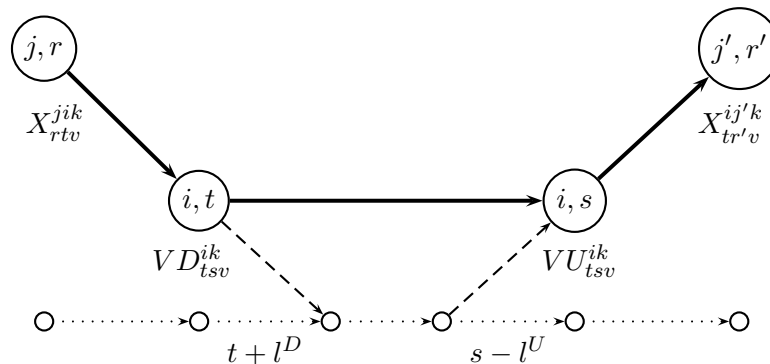


Figura 2.2: Carga y descarga sin cruce.

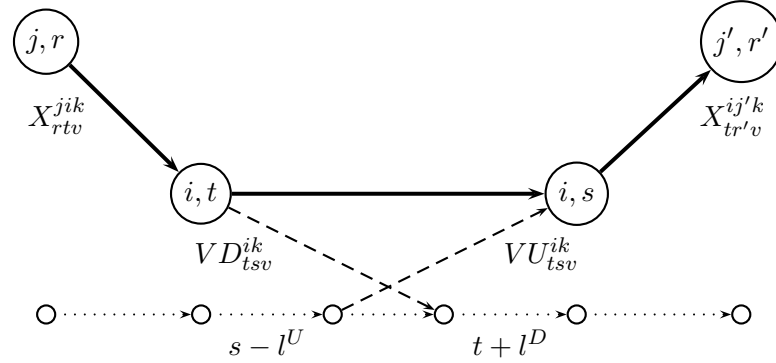


Figura 2.3: Carga y descarga con cruce.

Por otro lado, sin las variables binarias y restricciones adicionales, la relación entre el flujo de contenedores a bordo de una nave y los flujos de carga y descarga sólo sería

$$VU_{tsv}^{ik} - VD_{tsv}^{ik} = \sum_{j,r} X_{srv}^{ijk} - \sum_{j,r} X_{rtv}^{jik}$$

y en tal caso, dado un valor para el lado derecho de la ecuación, hay una infinidad de valores posibles para las variables del lado izquierdo que mantienen la relación. En particular, dada una constante B cualquiera, también se cumple que

$$(VU_{tsv}^{ik} + B) - (VD_{tsv}^{ik} + B) = \sum_{j,r} X_{srv}^{ijk} - \sum_{j,r} X_{rtv}^{jik}$$

y en general, el modelo podría modificar a conveniencia los flujos de carga y descarga, aumentándolos o disminuyéndolos de forma ficticia.

Consideremos primero el caso $t + l^D \leq s - l^U$. En esta situación, si el inventario mínimo entre $t + l^D$ y $s - l^U$ es muy elevado, una solución factible podría considerar descargar una cantidad B de contenedores en $t + l^D$, mantenerlos en inventario entre $t + l^D$ y $s - l^U$ y luego cargarlos en la nave en $s - l^U$.

Veamos ahora el caso $t + l^D \geq s - l^U$. En esta situación, si además se cumple que $d^{ik} + u^{ik} \leq (t + l^D - s + l^U)h^{ik}$, entonces es más costoso mantener un contenedor en inventario entre $t + l^D$ y $s - l^U$ que cargarlo y descargarlo en la nave. Por lo tanto, como las fechas de carga y descarga están cruzadas, una solución factible podría reducir inventario cargando contenedores en $s - l^U$ para luego recuperarlos mediante una descarga en $t + l^D$.

En ambos casos, estamos en presencia de operaciones no permitidas y que son eliminadas de nuestra región factible con el uso de variables binarias y restricciones adicio-

nales. En los casos restantes, es decir, cuando se cumple $[l^D + l^U > s - t] \wedge [d^{ik} + u^{ik} > (t + l^D - s + l^U)h^{ik}]$, la optimalidad de una solución impondrá de forma natural la dicotomía de carga y descarga.

Consideramos el siguiente modelo de optimización lineal (P_2)

$$\min_{X, V, W, O, \delta} \sum_{ikt} (h^{ik}W_t^{ik} + p_t^{ik}ON_t^{ik} - q_t^{ik}OFF_t^{ik}) + \sum_{ijktsv} a_{tsv}^{ijk}X_{tsv}^{ijk} + \sum_{iktsv} (d^{ik}VD_{tsv}^{ik} + u^{ik}VU_{tsv}^{ik})$$

$$\forall i, k, t \quad W_{t+1}^{ik} = W_t^{ik} + SP_t^{ik} + R_t^{ik} - D_t^{ik} + \sum_{v,s} VD_{(t-l^D)sv}^{ik} - \sum_{v,s} VU_{s(t+l^U)v}^{ik} + ON_t^{ik} - OFF_t^{ik}$$

$$\forall i, k, t, s, v \quad VU_{tsv}^{ik} - VD_{tsv}^{ik} = \sum_{j,r} X_{svr}^{ijk} - \sum_{j,r} X_{rtv}^{jik}$$

$$\forall i, k, t, s, v : [l^D + l^U \leq s - t] \vee [d^{ik} + u^{ik} \leq (t + l^D - s + l^U)h^{ik}] \quad VU_{tsv}^{ik} \leq M\delta_{tsv}^{ik}$$

$$\forall i, k, t, s, v : [l^D + l^U \leq s - t] \vee [d^{ik} + u^{ik} \leq (t + l^D - s + l^U)h^{ik}] \quad VD_{tsv}^{ik} \leq M(1 - \delta_{tsv}^{ik})$$

$$\forall i, j, t, s, v \quad \sum_k Q_k X_{tsv}^{ijk} \leq C_{tsv}^{ij}$$

$$\forall i, j, v \quad \sum_{tsk} Q_k X_{tsv}^{ijk} \leq C_v^{ij}$$

$$W_0^{ik} = w_0^{ik} \quad M_t^{ik} \leq W_t^{ik}$$

$$X_{0sv}^{ijk} = ON_0^{ik} = OFF_0^{ik} = 0$$

$$W_t^{ik}, X_{tsv}^{ijk}, ON_t^{ik}, OFF_t^{ik}, VU_{tsv}^{ik}, VD_{tsv}^{ik} \in \mathbb{Z}_+$$

$$\delta_{tsv}^{ik} \in \{0, 1\}$$

Notamos que (P_2) es una relajación de (P_1) dado que contiene sólo un subconjunto de las restricciones que definen a las variables VU y VD . Por lo mismo, dados x_1 y x_2 soluciones factibles para (P_1) y (P_2), respectivamente, notamos que estructuralmente sólo difieren en que x_1 contiene, eventualmente, más componentes asociadas a variables binarias que x_2 . Por lo tanto, si eliminamos de x_1 las componentes que sobran en (P_2), recuperamos una solución factible para este problema. Al revés, si x_2 cumple las condiciones de dicotomía de carga y descarga, es posible completar adecuadamente las componentes asociadas a variables binarias que restan y obtener una solución factible para (P_1). Sin embargo, en principio, nada asegura que x_2 cumpla dichas condiciones. A continuación veremos que el óptimo de (P_2) sí cumple con ellas.

Proposición 1. *Sea x una solución óptima para (P_2) . Entonces x induce una solución factible para (P_1) .*

Demostración. Sea x solución óptima de (P_2) . Notar que x satisface todas las restricciones de (P_1) salvo, eventualmente, un subconjunto de las restricciones que definen VU y VD . Fijemos i, k, t, s, v .

Si se cumple $[l^D + l^U \leq s - t] \vee [d^{ik} + u^{ik} \leq (t + l^D - s + l^U)h^{ik}]$, entonces $\min\{VU_{tsv}^{ik}, VD_{tsv}^{ik}\} = 0$ por la relación con δ_{tsv}^{ik} , lo cual es necesario para (P_1) .

Ahora, si no cumple lo anterior, entonces se tiene $[l^D + l^U > s - t] \wedge [d^{ik} + u^{ik} > (t + l^D - s + l^U)h^{ik}]$. Por contradicción, supongamos que $VU_{tsv}^{ik} > 0$ y $VD_{tsv}^{ik} > 0$, es decir, existe una restricción en (P_1) que no es satisfecha por x . Tenemos que $\min\{VU_{tsv}^{ik}, VD_{tsv}^{ik}\} = B > 0$. Definamos entonces

$$\begin{aligned}\widetilde{VU}_{tsv}^{ik} &= VU_{tsv}^{ik} - B \\ \widetilde{VD}_{tsv}^{ik} &= VD_{tsv}^{ik} - B\end{aligned}$$

Entonces $\widetilde{VU}_{tsv}^{ik} \geq 0$, $\widetilde{VD}_{tsv}^{ik} \geq 0$ y $\min\{\widetilde{VU}_{tsv}^{ik}, \widetilde{VD}_{tsv}^{ik}\} = 0$.

Para $r \in \{s - l^U + 1, \dots, t + l^D\} \neq \emptyset$, sea $\widetilde{W}_r^{ik} = W_r^{ik} + B$.

Si reemplazamos \widetilde{VU} , \widetilde{VD} y \widetilde{W} en x , obtenemos otro vector que llamamos \tilde{x} y que es factible para (P_2) . En particular, la diferencia de valor objetivo entre x y \tilde{x} es

$$\begin{aligned}d^{ik}(VD_{tsv}^{ik} - \widetilde{VD}_{tsv}^{ik}) + u^{ik}(VU_{tsv}^{ik} - \widetilde{VU}_{tsv}^{ik}) - \sum_{r \in \{s - l^U + 1, \dots, t + l^D\}} h^{ik}(W_r^{ik} - \widetilde{W}_r^{ik}) \\ = d^{ik}B + u^{ik}B - h^{ik}(t + l^D - s + l^U)B \\ = [d^{ik} + u^{ik} - h^{ik}(t + l^D - s + l^U)]B > 0\end{aligned}$$

Así el valor objetivo de \tilde{x} es estrictamente menor que el de x . Luego x no es solución óptima de (P_2) , lo cual es contradicción. Concluimos entonces que $\min\{VU_{tsv}^{ik}, VD_{tsv}^{ik}\} = 0$, por lo que x induce una solución factible para (P_1) . \square

Corolario 1. *Una solución óptima para (P_2) induce una solución óptima para (P_1) .*

Si bien la proposición anterior y su corolario parecieran ser simples y de poca relevancia, en la práctica resultan ser altamente eficientes al momento de resolver instancias de tamaño real en una cantidad limitada de tiempo debido a la eliminación de restricciones y variables binarias como lo indican las prueba numéricas a continuación.

2.4. Experimentos numéricos

Dado que el sistema de planificación es ejecutado de forma diaria, es necesario que el problema de optimización sea resuelto en el menor tiempo posible, generalmente en torno a media hora. A continuación presentamos una comparación entre la formulación original y la alternativa.

Usamos 3 conjuntos de datos correspondientes a instancias de tamaño real en distintos meses del año, denotados A, B y C respectivamente, creando planificaciones con proyecciones a 3, 4 y 5 meses. Estas instancias contemplan aproximadamente 600 localidades, 10 tipos de equipos y 250 naves. La pruebas se ejecutaron en un computador personal con procesador de 1.83 GHz y 3.5 GB de memoria RAM, corriendo GAMS/CPLEX con las opciones por defecto.

Instancia	Períodos	Modelo	It LP	It B&C	Nodos B&C	Tiempo
A	90	1	353279	4949	487	1799
		2	342086	600	0	472
	120	1	555174	4749	508	3313
		2	548702	562	0	1162
	150	1	789399	5704	400	-
		2	768693	815	0	2152
B	90	1	347928	6799	543	1958
		2	339006	211	0	416
	120	1	549749	4343	507	3160
		2	542500	519	0	947
	150	1	800323	4705	400	-
		2	760393	863	0	2071
C	90	1	302517	10932	495	1271
		2	296672	2761	0	432
	120	1	502844	6672	497	1931
		2	492241	1599	0	871
	150	1	732111	5166	500	-
		2	719359	494	0	1835

Cuadro 2.1: Comparativa entre formulación original y alternativa.

La columna *Instancia* denota el conjunto de datos usado y *Períodos* el horizonte de planificación. La columna *Modelo* indica la formulación utilizada para resolver el problema. Las columnas *It LP*, *It B&C*, *Nodos B&C* y *Tiempo* indican el número de iteraciones necesarias para resolver la relajación lineal, el número de iteraciones del procedimiento de Branch and Cut, el número de nodos visitados y el tiempo total de solución en segundos,

respectivamente. El signo - en la última columna indica que el sistema se quedó sin memoria y el problema no fue resuelto.

Como podemos ver, la segunda formulación es mucho más eficiente que la primera, disminuyendo los tiempos de ejecución hasta casi cinco veces en algunos casos. Más aún, cuando el horizonte de planificación es de 5 meses (150 períodos), la formulación original no es capaz de resolver el problema, mientras que la alternativa lo hace en poco más de media hora.

Otra observación interesante es el hecho que con la segunda formulación no se explora nodos más allá de la raíz, lo cual en este caso implica menos iteraciones, menor tiempo y menos recursos.

La razón principal de estas diferencias es la reducción del número de restricciones y variables binarias asociadas en el problema. En las instancias de prueba, la formulación original introduce alrededor de 80.000 variables binarias junto a las restricciones que las definen, mientras que la relajación propuesta introduce sólo unas pocas cientos.

2.5. Conclusiones

Podemos concluir que en el modelo básico de movimiento de contenedores la mayor dificultad está impuesta por la existencia de variables binarias asociadas a la decisión de cargar o descargar contenedores en cada recalada de una nave dada. Hemos propuesto una relajación que rescata la solución óptima para el problema original en un tiempo mucho menor, resolviendo incluso instancias que antes excedían los recursos disponibles en el sistema de prueba.

Finalmente, hacemos la observación que una versión modificada de este modelo es la que finalmente fue implementada en el ambiente productivo por la compañía, siendo parte del sistema de apoyo a las decisiones que se ejecuta diariamente.

Capítulo 3

Optimización Robusta

En vista de nuestros objetivos, se propone la Optimización Robusta como un camino viable para obtener soluciones que nos protejan de la incertidumbre. En esta metodología, no asumimos distribuciones o probabilidades para las realizaciones de los datos inciertos, sino que sólo asumimos su pertenencia a un conjunto de incertidumbre \mathcal{U} .

3.1. Antecedentes y resultados previos

Siguiendo la estructura de [4], consideremos un problema de optimización de la forma

$$(P_\zeta) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x, \zeta)$$
$$s.a. \quad F(x, \zeta) \in K \subseteq \mathbb{R}^m$$

donde

- $\zeta \in \mathbb{R}^M$ son los datos del problema.
- $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de decisión.
- las dimensiones n, m, M , las aplicaciones $f(\cdot, \cdot)$, $F(\cdot, \cdot)$ y el convexo K son elementos estructurales del problema.

Consideramos además un espacio o entorno de decisión caracterizado por

- poco conocimiento de los datos, que pueden ser parcial o totalmente inciertos, y sólo se sabe que ζ pertenece a un conjunto de incertidumbre $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^M$.
- las restricciones $F(\cdot, \zeta) \in K$ deben ser satisfechas para toda realización de $\zeta \in \mathcal{U}$.

Decimos entonces que un vector x es una solución factible del problema de optimización con incertidumbre $(P) = \{(P_\zeta)\}_{\zeta \in \mathcal{U}}$ si x satisface todas las posibles realizaciones de las restricciones

$$F(x, \zeta) \in K \quad \forall \zeta \in \mathcal{U}$$

Podemos entonces definir la noción de solución óptima para el problema de optimización con incertidumbre (P) , la cual debe entregar el mejor valor garantizado posible

$$\sup_{\zeta \in \mathcal{U}} f(x, \zeta)$$

es decir, debe ser solución óptima del problema de optimización “sin incertidumbre”

$$(P^*) \quad \min_x \left\{ \sup_{\zeta \in \mathcal{U}} f(x, \zeta) : F(x, \zeta) \in K \quad \forall \zeta \in \mathcal{U} \right\}$$

3.1.1. Optimización Lineal

Sea $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{mn} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto, convexo y no vacío. Denotemos $\zeta = [A, b, c] \in \mathcal{U}$ un elemento cualquiera de este conjunto. Llamemos $A = A(\zeta), b = b(\zeta), c = c(\zeta)$ a sus componentes. Para $\zeta \in \mathcal{U}$, definimos el problema (P_ζ)

$$(P_\zeta) \quad \min_x \{c(\zeta)'x : A(\zeta)x \leq b(\zeta)\}$$

Luego, tenemos una familia de problemas de optimización lineal indexados por los elementos $\zeta \in \mathcal{U}$. Asociado a esta familia, consideramos el problema de optimización bajo incertidumbre $(P_{\mathcal{U}})$

$$(P_{\mathcal{U}}) \quad \min_x \left\{ \sup_{\zeta \in \mathcal{U}} c(\zeta)'x : A(\zeta)x \leq b(\zeta) \quad \forall \zeta = [A, b, c] \in \mathcal{U} \right\}$$

Notemos que la definición de \mathcal{U} como subconjunto de $\mathbb{R}^{mn} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ indica que tanto la matriz A como los vectores b y c están afectos a incertidumbre. Sin embargo, en (P_ζ) , y por lo tanto en $(P_{\mathcal{U}})$, podemos remitirnos al caso donde sólo la matriz A está bajo esta condición. Para ello, consideremos sistema extendido $\tilde{x}' = (x', 1, t)$, $\tilde{A} = [c', 0, -1; A, -b, 0_m]$, $\tilde{b} = 0_{m+1}$, $\tilde{c}' = (0'_n, 0, 1)$ y el problema

$$\min_{x, t} \{t : c'x \leq t, Ax - b \leq 0\}$$

Así, (P_ζ) y $(P_{\mathcal{U}})$ toman la forma

$$(P_\zeta) \quad \min_x \{c'x : A(\zeta)x \leq b\}$$

$$(P_{\mathcal{U}}) \quad \min_x \{c'x : A(\zeta)x \leq b \quad \forall \zeta \in \mathcal{U}\}$$

Formulación de Soyster [32]

Para $j = 1, \dots, n$, sean $K_j \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos convexos no vacíos. Sea $A = [A_1, \dots, A_n]$ con $A_j \in K_j \quad \forall j = 1, \dots, n$. Soyster considera el problema

$$\max_{x \geq 0} \left\{ c'x : \sum_j A_j x_j \leq b \quad \forall A_j \in K_j \right\}$$

En este contexto, $A = [A_1, \dots, A_n] \in \mathcal{U} = K_1 \times \dots \times K_n \subset \mathbb{R}^{m \times n}$, es decir, la incertidumbre es por columnas. Soyster muestra que este problema es equivalente a

$$\max_{x \geq 0} \left\{ c'x : \sum_j \bar{a}_{ij} x_j \leq b_i \right\}$$

donde $\bar{a}_{ij} = \sup_{A_j \in K_j} \{a_{ij}\}$.

Formulación de Ben-Tal y Nemirovski [6]

En este caso consideramos que cada uno de los coeficientes a_{ij} de la matriz A sujetos a incertidumbre pertenece a un intervalo acotado en torno a un valor nominal \bar{a}_{ij} , es decir, $a_{ij} \in [\bar{a}_{ij} - \hat{a}_{ij}, \bar{a}_{ij} + \hat{a}_{ij}]$, con $\hat{a}_{ij} \geq 0$. En este contexto, \mathcal{U} corresponde a la caja resultante del producto cartesiano de los intervalos de pertenencia de los coeficientes, es decir, $\mathcal{U} = \prod_{ij} [\bar{a}_{ij} - \hat{a}_{ij}, \bar{a}_{ij} + \hat{a}_{ij}] \subset \mathbb{R}^{m \times n}$, donde $\hat{a}_{ij} = 0$ indica que a_{ij} es conocido. Como antes, sea $(P_{\zeta})_{\zeta \in \mathcal{U}}$ la familia de problemas asociados a \mathcal{U} . Dos resultados que se obtienen bajo condiciones muy generales son los siguientes

Proposición 2.

1. $(P_{\mathcal{U}})$ es infactible si y sólo si existe una instancia $\zeta \in \mathcal{U}$ tal que (P_{ζ}) es infactible.
2. Si $(P_{\mathcal{U}})$ es factible y su valor óptimo es z^* , entonces

$$z^* = \sup_{\zeta \in \mathcal{U}} \min_x \{c'x : A(\zeta)x \leq b\}$$

Formulación de Bertsimas y Sim [11]

Para la restricción i , sea $J_i \subset \{1, \dots, n\}$ el conjunto de índices tales que a_{ij} , $j \in J_i$, está sujeto a incertidumbre. Supongamos que a_{ij} puede modelarse como una variable aleatoria \tilde{a}_{ij} que toma valores en el intervalo $[\bar{a}_{ij} - \hat{a}_{ij}, \bar{a}_{ij} + \hat{a}_{ij}]$, distribuyendo de forma

simétrica en él. Definimos la variable aleatoria $\eta_{ij} = \frac{\tilde{a}_{ij} - \bar{a}_{ij}}{\hat{a}_{ij}}$ que toma valores en $[-1, 1]$ y es simétrica en torno al origen. Sea $\Gamma_i \in [0, |J_i|]$ la cantidad máxima de coeficientes de la fila i de A que pueden ser diferentes de sus valores nominales de forma simultánea. Se propone entonces

$$\begin{aligned}
 & \min c'x \\
 & \text{s.a.} \\
 & \sum_j a_{ij}x_j + \beta_i(y, \Gamma_i) \leq b_i \quad \forall i \\
 & -y_j - x_j \leq 0 \quad \forall j \\
 & -y_j + x_j \leq 0 \quad \forall j \\
 & y \geq 0
 \end{aligned}$$

donde, dado un vector x^* , $\beta_i(x^*, \Gamma_i)$ corresponde a la función de protección de la i -ésima restricción

$$\beta_i(x^*, \Gamma_i) = \max_{\{S_i \cup \{t_i\} : S_i \subseteq J_i, |S_i| = \lfloor \Gamma_i \rfloor, t_i \in J_i \setminus S_i\}} \left\{ \sum_{j \in S_i} \hat{a}_{ij} |x_j^*| + (\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor) \hat{a}_{it_i} |x_{t_i}^*| \right\}$$

Teorema 1. *El modelo anterior tiene una formulación lineal equivalente dada por*

$$\begin{aligned}
 & \min c'x \\
 & \text{s.a.} \\
 & \sum_j a_{ij}x_j + z_i \Gamma_i + \sum_{j \in J_i} p_{ij} \leq b_i \quad \forall i \\
 & z_i + p_{ij} - \hat{a}_{ij} y_j \geq 0 \quad \forall i, \forall j \in J_i \\
 & -y_j - x_j \leq 0 \quad \forall j \\
 & -y_j + x_j \leq 0 \quad \forall j \\
 & p_{ij} \geq 0 \quad \forall i, \forall j \in J_i \\
 & y_j \geq 0 \quad \forall j \\
 & z_i \geq 0 \quad \forall i
 \end{aligned}$$

Algunos resultados relevantes son los siguientes

Proposición 3. *Sea x^* una solución óptima del problema anterior. Sean S_i^* y t_i^* el conjunto y el índice, respectivamente, donde se alcanza el máximo para $\beta_i(x^*, \Gamma_i)$. Sea la matriz A tal que sigue el modelo de incertidumbre dado por \mathcal{U} .*

1. La probabilidad que la i -ésima restricción sea violada satisface

$$\mathbb{P} \left(\sum_j \tilde{a}_{ij} x_j^* > b_i \right) \leq \mathbb{P} \left(\sum_{j \in J_i} \gamma_{ij} \eta_{ij} \geq \Gamma_i \right)$$

donde

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} 1 & j \in S_i^* \\ \frac{\hat{a}_{ij}|x_j^*|}{\hat{a}_{ir^*}|x_{r^*}^*|} & j \in J_i \setminus S_i^* \end{cases}$$

y

$$r^* = \arg \min_{r \in S_i^* \cup \{t_i^*\}} \hat{a}_{ir} |x_r^*|$$

2. Las cantidades γ_{ij} satisfacen $\gamma_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in J_i \setminus S_i^*$.

Teorema 2.

1. Si η_{ij} , $j \in J_i$, son variables aleatorias simétricas e independientes que toman valores en $[-1, 1]$, entonces

$$\mathbb{P} \left(\sum_{j \in J_i} \gamma_{ij} \eta_{ij} \geq \Gamma_i \right) \leq B(n, \Gamma_i)$$

donde

$$\begin{aligned} B(n, \Gamma_i) &= \frac{1}{2^n} \left\{ (1 - \mu) \sum_{l=\lfloor \nu \rfloor}^n \binom{n}{l} + \mu \sum_{l=\lfloor \nu \rfloor + 1}^n \binom{n}{l} \right\} \\ &= \frac{1}{2^n} \left\{ (1 - \mu) \binom{n}{\lfloor \nu \rfloor} + \sum_{l=\lfloor \nu \rfloor + 1}^n \binom{n}{l} \right\} \end{aligned}$$

donde $n = |J_i|$, $\nu = (\Gamma_i + n)/2$ y $\mu = \nu - \lfloor \nu \rfloor$.

2. La cota anterior es exacta para η_{ij} tal que $\mathbb{P}(\eta_{ij} = -1) = \mathbb{P}(\eta_{ij} = 1) = 1/2$, con $\gamma_{ij} = 1$, $\Gamma_i \geq 1$ entero y $\Gamma_i + n$ par.

3. La cota anterior satisface

$$B(n, \Gamma_i) \leq (1 - \mu)C(n, \lfloor \nu \rfloor) + \sum_{l=\lfloor \nu \rfloor+1}^n C(n, l)$$

donde

$$C(n, l) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & l = 0 \vee l = n \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{(n-l)l}} \left(\frac{n}{2(n-l)}\right)^n \left(\frac{n-l}{l}\right)^l & l = 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

4. Para $\Gamma_i = \theta\sqrt{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B(n, \Gamma_i) = 1 - \Phi(\theta)$$

donde

$$\Phi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\theta} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$$

es la distribución de probabilidad de una normal estándar.

3.2. Incertidumbre en demanda y retorno

Consideremos primero la situación donde existe incertidumbre en la demanda y/o en el retorno. Dejemos primero en claro el problema nominal que abordaremos

$$\min_{X, V, W, O, \delta} \sum_{ikt} (h^{ik} W_t^{ik} + p^{ik} ON_t^{ik} - q^{ik} OFF_t^{ik}) + \sum_{ijktsv} a_{tsv}^{ijk} X_{tsv}^{ijk} + \sum_{iktsv} (d^{ik} VD_{tsv}^{ik} + u^{ik} VU_{tsv}^{ik})$$

$$\forall i, k, t \quad W_{t+1}^{ik} = W_t^{ik} + SP_t^{ik} + R_t^{ik} - D_t^{ik} + \sum_{v,s} VD_{(t-L^D)sv}^{ik} - \sum_{v,s} VU_{s(t+L^U)v}^{ik} + ON_t^{ik} - OFF_t^{ik}$$

$$\forall i, k, t, s, v \quad VU_{tsv}^{ik} - VD_{tsv}^{ik} = \sum_{j,r} X_{sv}^{ijk} - \sum_{j,r} X_{rtv}^{jik}$$

$$\forall i, k, t, s, v \quad VU_{tsv}^{ik} \leq M\delta_{tsv}^{ik}$$

$$\forall i, k, t, s, v \quad VD_{tsv}^{ik} \leq M(1 - \delta_{tsv}^{ik})$$

$$\forall i, j, t, s, v \quad \sum_k Q_k X_{tsv}^{ijk} \leq C_{tsv}^{ij}$$

$$\begin{aligned} \forall i, j, v \quad & \sum_{tsk} Q_k X_{tsv}^{ijk} \leq C_v^{ij} \\ & W_0^{ik} = w_0^{ik} \\ & X_{0sv}^{ijk} = ON_0^{ik} = OFF_0^{ik} = 0 \\ & W_t^{ik}, X_{tsv}^{ijk}, ON_t^{ik}, OFF_t^{ik}, VU_{tsv}^{ik}, VD_{tsv}^{ik} \in \mathbb{Z}_+ \\ & \delta_{tsv}^{ik} \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Las condiciones en $t = 0$ representan el inventario inicial y la imposibilidad de tomar decisiones en ese período.

Definamos ζ por

$$\begin{aligned} \zeta_0^{ik} &= 0 \\ \zeta_t^{ik} &= D_t^{ik} - R_t^{ik} - SP_t^{ik} \quad \forall t > 0 \end{aligned}$$

Con esto la ecuación de flujo queda

$$\forall i, k, t \quad W_{t+1}^{ik} = W_t^{ik} + \zeta_t^{ik} + \sum_{v,s} VD_{(t-l^D)sv}^{ik} - \sum_{v,s} VU_{s(t+l^U)v}^{ik} + ON_t^{ik} - OFF_t^{ik}$$

Asumimos que ζ pertenece a un conjunto \mathcal{U} compacto, convexo y no vacío. Dado que queremos hallar una solución que sea factible para toda realización de ζ , vemos que esto no es posible de conseguir si mantenemos el sistema de igualdades que definen de forma recursiva las variables de inventario (salvo en el caso donde \mathcal{U} contiene sólo un elemento). Por ello, eliminamos las ecuaciones que definen a las variables W_t^{ik} , dejándolas definidas de forma implícita por las desigualdades

$$0 \leq w_0^{ik} + \sum_{r < t} \left\{ -\zeta_r^{ik} + \sum_{v,s} VD_{s(r-l^D)v}^{ik} - \sum_{v,s} VU_{s(r+l^U)v}^{ik} + ON_r^{ik} - OFF_r^{ik} \right\}$$

De la misma forma, hacemos el reemplazo en la función objetivo, quedando

$$\min_{X, V, O, \delta} \sum_{ikt} h^{ik} \left(w_0^{ik} + \sum_{r < t} \left\{ -\zeta_r^{ik} + \sum_{v,s} VD_{s(r-l^D)v}^{ik} - \sum_{v,s} VU_{s(r+l^U)v}^{ik} + ON_r^{ik} - OFF_r^{ik} \right\} \right)$$

$$+ \sum_{ikt} (p^{ik} ON_t^{ik} - q^{ik} OFF_t^{ik}) + \sum_{ijktsv} a_{tsv}^{ijk} X_{tsv}^{ijk} + \sum_{iktsv} (d^{ik} VD_{tsv}^{ik} + u^{ik} VU_{tsv}^{ik})$$

Incorporando el hecho que buscamos una solución factible para todo $\zeta \in \mathcal{U}$ de costo mínimo, el problema a resolver queda

$$\min_{X, V, O, \delta} \max_{\zeta \in \mathcal{U}} \sum_{ikt} h^{ik} \left(w_0^{ik} + \sum_{r < t} \left\{ -\zeta_r^{ik} + \sum_{v, s} VD_{s(r-l^D)v}^{ik} - \sum_{v, s} VU_{s(r+l^U)v}^{ik} + ON_r^{ik} - OFF_r^{ik} \right\} \right) \\ + \sum_{ikt} (p^{ik} ON_t^{ik} - q^{ik} OFF_t^{ik}) + \sum_{ijktsv} a_{tsv}^{ijk} X_{tsv}^{ijk} + \sum_{iktsv} (d^{ik} VD_{tsv}^{ik} + u^{ik} VU_{tsv}^{ik})$$

$$\forall \zeta \in \mathcal{U} \quad 0 \leq w_0^{ik} + \sum_{r < t} \left\{ -\zeta_r^{ik} + \sum_{v, s} VD_{s(r-l^D)v}^{ik} - \sum_{v, s} VU_{s(r+l^U)v}^{ik} + ON_r^{ik} - OFF_r^{ik} \right\}$$

$$\forall i, k, t, s, v \quad VU_{tsv}^{ik} - VD_{tsv}^{ik} = \sum_{j, r} X_{srv}^{ijk} - \sum_{j, r} X_{rtv}^{jik}$$

$$\forall i, k, t, s, v \quad VU_{tsv}^{ik} \leq M \delta_{tsv}^{ik}$$

$$\forall i, k, t, s, v \quad VD_{tsv}^{ik} \leq M(1 - \delta_{tsv}^{ik})$$

$$\forall i, j, t, s, v \quad \sum_k Q_k X_{tsv}^{ijk} \leq C_{tsv}^{ij}$$

$$\forall i, j, v \quad \sum_{tsk} Q_k X_{tsv}^{ijk} \leq C_v^{ij}$$

$$W_0^{ik} = w_0^{ik}$$

$$X_{0sv}^{ijk} = ON_0^{ik} = OFF_0^{ik} = 0$$

$$W_t^{ik}, X_{tsv}^{ijk}, ON_t^{ik}, OFF_t^{ik}, VU_{tsv}^{ik}, VD_{tsv}^{ik} \in \mathbb{Z}_+$$

$$\delta_{tsv}^{ik} \in \{0, 1\}$$

Ahora, reescribiendo la primera restricción

$$\forall \zeta \in \mathcal{U} \quad 0 \leq w_0^{ik} + \sum_{r < t} \left\{ -\zeta_r^{ik} + \sum_{v, s} VD_{s(r-l^D)v}^{ik} - \sum_{v, s} VU_{s(r+l^U)v}^{ik} + ON_r^{ik} - OFF_r^{ik} \right\}$$

$$\iff \forall \zeta \in \mathcal{U} \quad \sum_{r < t} \zeta_r^{ik} \leq w_0^{ik} + \sum_{r < t} \left\{ \sum_{v, s} VD_{s(r-l^D)v}^{ik} - \sum_{v, s} VU_{s(r+l^U)v}^{ik} + ON_r^{ik} - OFF_r^{ik} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \max_{\zeta \in \mathcal{U}} \left\{ \sum_{r < t} \zeta_r^{ik} \right\} \leq w_0^{ik} + \sum_{r < t} \left\{ \sum_{v,s} VD_{s(r-l^D)v}^{ik} - \sum_{v,s} VU_{s(r+l^U)v}^{ik} + ON_r^{ik} - OFF_r^{ik} \right\}$$

En el caso de la función objetivo, tenemos

$$\begin{aligned} & \min_{X,V,O,\delta} \max_{\zeta \in \mathcal{U}} \sum_{ikt} h^{ik} \left(w_0^{ik} + \sum_{r < t} \left\{ -\zeta_r^{ik} + \sum_{v,s} VD_{s(r-l^D)v}^{ik} - \sum_{v,s} VU_{s(r+l^U)v}^{ik} + ON_r^{ik} - OFF_r^{ik} \right\} \right) \\ & + \sum_{ikt} (p^{ik} ON_t^{ik} - q^{ik} OFF_t^{ik}) + \sum_{ijktsv} a_{tsv}^{ijk} X_{tsv}^{ijk} + \sum_{iktsv} (d^{ik} VD_{tsv}^{ik} + u^{ik} VU_{tsv}^{ik}) \\ & \quad \Updownarrow \\ & \min_{X,V,O,\delta} \max_{\zeta \in \mathcal{U}} \sum_{ikt} h^{ik} \left(w_0^{ik} + \sum_{r < t} \left\{ \sum_{v,s} VD_{s(r-l^D)v}^{ik} - \sum_{v,s} VU_{s(r+l^U)v}^{ik} + ON_r^{ik} - OFF_r^{ik} \right\} \right) \\ & + \sum_{ikt} (p^{ik} ON_t^{ik} - q^{ik} OFF_t^{ik}) + \sum_{ijktsv} a_{tsv}^{ijk} X_{tsv}^{ijk} + \sum_{iktsv} (d^{ik} VD_{tsv}^{ik} + u^{ik} VU_{tsv}^{ik}) - \sum_{ikt} h^{ik} \sum_{r < t} \zeta_r^{ik} \\ & \quad \Updownarrow \\ & \min_{X,V,O,\delta} \sum_{ikt} h^{ik} \left(w_0^{ik} + \sum_{r < t} \left\{ \sum_{v,s} VD_{s(r-l^D)v}^{ik} - \sum_{v,s} VU_{s(r+l^U)v}^{ik} + ON_r^{ik} - OFF_r^{ik} \right\} \right) \\ & + \sum_{ikt} (p^{ik} ON_t^{ik} - q^{ik} OFF_t^{ik}) + \sum_{ijktsv} a_{tsv}^{ijk} X_{tsv}^{ijk} + \sum_{iktsv} (d^{ik} VD_{tsv}^{ik} + u^{ik} VU_{tsv}^{ik}) \\ & \quad + \max_{\zeta \in \mathcal{U}} - \sum_{ikt} h^{ik} \sum_{r < t} \zeta_r^{ik} \end{aligned}$$

Para cada (i, k, t) , asumimos que ζ_t^{ik} pertenece a un intervalo simétrico en torno a un valor nominal $\bar{\zeta}_t^{ik}$, es decir

$$\zeta_t^{ik} \in [\bar{\zeta}_t^{ik} - \widehat{\zeta}_t^{ik}, \bar{\zeta}_t^{ik} + \widehat{\zeta}_t^{ik}]$$

donde $\widehat{\zeta}_t^{ik} > 0$ representa la máxima desviación absoluta permitida. Definimos entonces

$$z_t^{ik}(\zeta) = \frac{\zeta_t^{ik} - \bar{\zeta}_t^{ik}}{\widehat{\zeta}_t^{ik}} \in [-1, 1]$$

como la desviación relativa de ζ_t^{ik} .

Sea

$$\mathcal{U} = \left\{ \zeta : \forall i, k, t \quad \sum_{r < t} \frac{|\zeta_r^{ik} - \bar{\zeta}_r^{ik}|}{\widehat{\zeta}_r^{ik}} \leq \Gamma_t^{ik} \right\} = \left\{ \zeta : \forall i, k, t \quad \sum_{r < t} |z_r^{ik}(\zeta)| \leq \Gamma_t^{ik} \right\}$$

donde $\Gamma_t^{ik} \geq 0$ es un parámetro que controla la suma de las desviaciones relativas de los valores de ζ con respecto al valor nominal $\bar{\zeta}$, acotando la cantidad de índices en los que se realiza la máxima desviación. Así, $\Gamma_t^{ik} \in [0, t - 1]$. Más aún, podemos considerar que para todo i, k, t $0 \leq \Gamma_t^{ik} - \Gamma_{t+1}^{ik} \leq 1$, puesto que de un período a otro se agrega sólo un parámetro incierto nuevo.

Por definición de $z_t^{ik}(\zeta)$, tenemos

$$\max_{\zeta \in \mathcal{U}} \left\{ \sum_{r < t} \zeta_r^{ik} \right\} = \max_{\zeta \in \mathcal{U}} \left\{ \sum_{r < t} z_r^{ik} \widehat{\zeta}_r^{ik} + \bar{\zeta}_r^{ik} \right\} = \sum_{r < t} \bar{\zeta}_r^{ik} + \max_{\zeta \in \mathcal{U}} \left\{ \sum_{r < t} z_r^{ik} \widehat{\zeta}_r^{ik} \right\}$$

Como $z_r^{ik}(\zeta) \in [-1, 1]$ y $\widehat{\zeta}_r^{ik} > 0$, entonces

$$\max_{\zeta \in \mathcal{U}} \left\{ \sum_{r < t} z_r^{ik} \widehat{\zeta}_r^{ik} \right\} = \max_{\zeta \in \mathcal{U}} \left\{ \sum_{r < t} |z_r^{ik}| \widehat{\zeta}_r^{ik} \right\}$$

Para i, k fijos, ordenemos los parámetros $\widehat{\zeta}_r^{ik}$ de forma no decreciente, es decir, $\forall l \quad \widehat{\zeta}_{r_l}^{ik} \geq \widehat{\zeta}_{r_{l+1}}^{ik}$. Es claro entonces que

$$\max_{\zeta \in \mathcal{U}} \left\{ \sum_{r < t} |z_r^{ik}| \widehat{\zeta}_r^{ik} \right\} = \sum_{l=1}^{\lfloor \Gamma_t^{ik} \rfloor} \widehat{\zeta}_{r_l}^{ik} + (\Gamma_t^{ik} - \lfloor \Gamma_t^{ik} \rfloor) \widehat{\zeta}_{r_{\lfloor \Gamma_t^{ik} \rfloor}}^{ik}$$

Sean las constantes (dependientes sólo de \mathcal{U})

$$\varphi(\mathcal{U}) = \max_{\zeta \in \mathcal{U}} - \sum_{ikt} h^{ik} \sum_{r < t} \zeta_r^{ik}$$

$$\varphi_t^{ik}(\mathcal{U}) = \sum_{r < t} \bar{\zeta}_r^{ik} + \sum_{l=1}^{\lfloor \Gamma_t^{ik} \rfloor} \widehat{\zeta}_{r_l}^{ik} + (\Gamma_t^{ik} - \lfloor \Gamma_t^{ik} \rfloor) \widehat{\zeta}_{r_{\lfloor \Gamma_t^{ik} \rfloor}}^{ik}$$

Luego, el modelo equivalente a resolver corresponde a

$$\min_{X, V, O, \delta} \sum_{ikt} h^{ik} \left(w_0^{ik} + \sum_{r < t} \left\{ \sum_{v, s} V D_{s(r-l^D)v}^{ik} - \sum_{v, s} V U_{s(r+l^U)v}^{ik} + ON_r^{ik} - OFF_r^{ik} \right\} \right)$$

$$+ \sum_{ikt} (p^{ik} ON_t^{ik} - q^{ik} OFF_t^{ik}) + \sum_{ijktsv} a_{tsv}^{ijk} X_{tsv}^{ijk} + \sum_{iktsv} (d^{ik} VD_{tsv}^{ik} + u^{ik} VU_{tsv}^{ik}) + \varphi(\mathcal{U})$$

$$[\varphi_t^{ik}(\mathcal{U})] \leq w_0^{ik} + \sum_{r < t} \left\{ \sum_{v,s} VD_{s(r-l^D)v}^{ik} - \sum_{v,s} VU_{s(r+l^U)v}^{ik} + ON_r^{ik} - OFF_r^{ik} \right\}$$

$$\forall i, k, t, s, v \quad VU_{tsv}^{ik} - VD_{tsv}^{ik} = \sum_{j,r} X_{svr}^{ijk} - \sum_{j,r} X_{rtv}^{jik}$$

$$\forall i, k, t, s, v \quad VU_{tsv}^{ik} \leq M \delta_{tsv}^{ik}$$

$$\forall i, k, t, s, v \quad VD_{tsv}^{ik} \leq M(1 - \delta_{tsv}^{ik})$$

$$\forall i, j, t, s, v \quad \sum_k Q_k X_{tsv}^{ijk} \leq C_{tsv}^{ij}$$

$$\forall i, j, v \quad \sum_{tsk} Q_k X_{tsv}^{ijk} \leq C_v^{ij}$$

$$W_0^{ik} = w_0^{ik}$$

$$X_{0sv}^{ijk} = ON_0^{ik} = OFF_0^{ik} = 0$$

$$W_t^{ik}, X_{tsv}^{ijk}, ON_t^{ik}, OFF_t^{ik}, VU_{tsv}^{ik}, VD_{tsv}^{ik} \in \mathbb{Z}_+$$

$$\delta_{tsv}^{ik} \in \{0, 1\}$$

Vemos que el problema resultante es de la misma naturaleza que el problema original, habiendo cambiado igualdades por desigualdades e incorporado cotas inferiores en estas últimas.

3.3. Incertidumbre en tiempos de viaje

Si bien la compañía dispone de naves con un itinerario de recaladas determinado, es posible que éste cambie debido a razones operacionales o inconvenientes no previstos. Con ello pueden producirse atrasos, adelantos, cancelación e incorporación de recaladas dentro del itinerario existente. Como es natural, cuanto más nos acercamos al final del horizonte de planificación, mayor es la posibilidad de cambios. Incluso, a veces no se cuenta con los itinerarios más allá de la mitad de este horizonte.

Los cambios de fechas y lugares de recalada inciden directamente en la red sobre la cual se está trabajando, creando o eliminando alternativas para el movimiento de contenedores. Por ejemplo, para que un transbordo pueda efectuarse, es necesario que los contenedores estén a tiempo en el lugar de operación, por lo que el atraso de la nave que los trae podría

dejar sin efecto el transbordo. En este contexto, el fenómeno más común es el cambio de fecha del arribo o zarpe de una nave, y con ello, el de los contenedores que van a bordo.

En lo que sigue, asumiremos que para cada nave, los puertos y orden de recaladas no se alteran, pero sí pueden producirse cambios en las fechas en que ocurren. Consideramos entonces que un arribo puede atrasarse y un zarpe puede adelantarse una cantidad de días dada. La demanda y el retorno se considerarán como deterministas. El objetivo entonces es obtener una planificación de envío de contenedores tal que sea robusta frente a modificaciones en el itinerario como las expuestas previamente.

Consideremos, a modo de ejemplo, una nave que tiene una recalada en alguna localidad en t , pero que puede tener un retraso de 2 días. Luego, si la planificación propone que esta nave descargue contenedores en este puerto, el ingreso de ellos a inventario puede producirse en $t+2$ o $t+3$ en lugar de $t+1$ (recordar que el sistema de revisión de inventario es al comienzo del día, por lo que considera los ingresos y salidas del día anterior al que se está revisando). De forma similar, si la nave tiene un zarpe programado en s y se admite un adelanto de 2 días, entonces se tendrá que los contenedores pueden salir de inventario en $s-1$ o s en lugar de $s+1$.

Siguiendo con el ejemplo anterior, y con el fin de simplificar la exposición, supondremos que la localidad en cuestión tiene sólo una recalada de ingreso de contenedores y que no hay otro tipo de movimiento. Por esta razón, dejaremos de lado todos los índices salvo el temporal, quedando la relación

$$W_{t+1} = W_t + X_t$$

Más aún, si la nave no sufre retraso, tenemos

$$W_{t+1} = W_t + X_t$$

$$W_{t+2} = W_{t+1}$$

$$W_{t+3} = W_{t+2}$$

Si la nave se retrasara un día, la cantidad X_t se haría efectiva en $t+2$, quedando

$$W_{t+1} = W_t$$

$$W_{t+2} = W_{t+1} + X_t$$

$$W_{t+3} = W_{t+2}$$

Finalmente, si el retraso fuera de dos días, la situación sería

$$\begin{aligned} W_{t+1} &= W_t \\ W_{t+2} &= W_{t+1} \\ W_{t+3} &= W_{t+2} + X_t \end{aligned}$$

Definamos un parámetro auxiliar binario que indique el día en que efectivamente se tiene el ingreso de contenedores. Sea $[\lambda]_d$ dicho parámetro, donde $d \in \{0, 1, 2\}$ indica los días de retraso. Agregando este parámetro a las relaciones anteriores, tenemos

$$\begin{aligned} W_{t+1} &= W_t + [\lambda]_0 X_t \\ W_{t+2} &= W_{t+1} + [\lambda]_1 X_t \\ W_{t+3} &= W_{t+2} + [\lambda]_2 X_t \end{aligned}$$

Además, como sólo uno de estos escenarios puede ocurrir a la vez, se debe tener que

$$\sum_d [\lambda]_d = 1$$

Aplicando esta idea a la ecuación de inventario original, a cada variable de flujo X_{tsv}^{ijk} le asociamos un parámetro binario de retraso $[\lambda_{tsv}^{ijk}]_d$, quedando

$$\forall i, k, t \quad W_{t+1}^{ik} = W_t^{ik} - \zeta_t^{ik} + \sum_{j,v,s,d} [\lambda_{s(t-d)v}^{jik}]_d X_{s(t-d)v}^{jik} - \sum_{j,v,s} X_{tsv}^{ijk} + ON_t^{ik} - OFF_t^{ik}$$

Se tiene además la condición

$$\forall i, j, k, t, s, v \quad \sum_d [\lambda_{tsv}^{ijk}]_d = 1$$

Volviendo al ejemplo, cabe notar que, independientemente del período admitido en que se haga efectivo el flujo X_t , en $t + 3$ éste ya habrá ingresado a inventario. Dicho de otra manera, sabemos que su ingreso no será más allá de $t + 3$, incluso si se realiza el retraso máximo permitido. De hecho, haciendo los reemplazos de la recursión

$$\begin{aligned}
 W_{t+3} &= W_{t+2} + [\lambda]_2 X_t \\
 &= W_{t+1} + [\lambda]_1 X_t + [\lambda]_2 X_t \\
 &= W_t + [\lambda]_0 X_t + [\lambda]_1 X_t + [\lambda]_2 X_t \\
 &= W_t + ([\lambda]_0 + [\lambda]_1 + [\lambda]_2) X_t \\
 &= W_t + X_t
 \end{aligned}$$

Lo mismo aplica en la ecuación original

$$\begin{aligned}
 W_{t+1}^{ik} &= W_t^{ik} - \zeta_t^{ik} + \sum_{j,v,s,d} [\lambda_{s(t-d)v}^{jik}]_d X_{s(t-d)v}^{jik} - \sum_{j,v,s} X_{tsv}^{ijk} + ON_t^{ik} - OFF_t^{ik} \\
 &= w_0^{ik} + \sum_{r=0}^t \left(-\zeta_r^{ik} + \sum_{j,v,s,d} [\lambda_{s(r-d)v}^{jik}]_d X_{s(r-d)v}^{jik} - \sum_{j,v,s} X_{rsv}^{ijk} + ON_r^{ik} - OFF_r^{ik} \right)
 \end{aligned}$$

Notar que

$$\sum_{j,v,s,d} [\lambda_{s(t-d)v}^{jik}]_d X_{s(t-d)v}^{jik} = \sum_{j,v,s} \left(\sum_{r,d:r+d=t} [\lambda_{srv}^{jik}]_d X_{srv}^{jik} \right)$$

Luego, para t dado

$$\sum_{r=0}^t \sum_{j,v,s,d} [\lambda_{s(r-d)v}^{jik}]_d X_{s(r-d)v}^{jik} = \sum_{j,v,s} \left(\sum_{r,d:r+d \leq t} [\lambda_{srv}^{jik}]_d X_{srv}^{jik} \right)$$

Si bien el retraso máximo permitido puede variar de un trayecto a otro, para no complicar más la notación, asumiremos que se tiene una cota uniforme para todos, denotada por \bar{d} . Ahora, para t dado, podemos separar la sumatoria en los flujos que con seguridad llegan antes de t (es decir, los que deberían llegar a más tardar en $t - \bar{d}$) y los que podrían atrasarse (es decir, aquellos cuya fecha de llegada más el retraso máximo exceden t).

$$\sum_{j,v,s} \left(\sum_{r,d:r+d \leq t} [\lambda_{srv}^{jik}]_d X_{srv}^{jik} \right) = \sum_{j,v,s} \left(\sum_{r \leq t - \bar{d}} \sum_{r+d \leq t} [\lambda_{srv}^{jik}]_d X_{srv}^{jik} + \sum_{r > t - \bar{d}} \sum_{r+d \leq t} [\lambda_{srv}^{jik}]_d X_{srv}^{jik} \right)$$

Al mirar la primera sumatoria doble en el lado derecho de la ecuación, notamos que la condición de la primera sumatoria implica la de la segunda, pues

$$r \leq t - \bar{d} \quad \wedge \quad d \leq \bar{d} \implies r + d \leq t$$

Luego, en la segunda sumatoria, d queda irrestricto (sólo acotado por \bar{d})

$$\begin{aligned} & \sum_{j,v,s} \left(\sum_{r \leq t - \bar{d}} \sum_{r+d \leq t} [\lambda_{srv}^{jik}]_d X_{srv}^{jik} + \sum_{t \geq r > t - \bar{d}} \sum_{r+d \leq t} [\lambda_{srv}^{jik}]_d X_{srv}^{jik} \right) \\ &= \sum_{j,v,s} \left(\sum_{r \leq t - \bar{d}} \sum_d [\lambda_{srv}^{jik}]_d X_{srv}^{jik} + \sum_{t \geq r > t - \bar{d}} \sum_{r+d \leq t} [\lambda_{srv}^{jik}]_d X_{srv}^{jik} \right) \end{aligned}$$

Como $\sum_d [\lambda_{srv}^{jik}]_d = 1$, se tiene

$$\sum_{j,v,s} \left(\sum_{r \leq t - \bar{d}} \sum_{r+d \leq t} [\lambda_{srv}^{jik}]_d X_{srv}^{jik} + \sum_{t \geq r > t - \bar{d}} \sum_{r+d \leq t} [\lambda_{srv}^{jik}]_d X_{srv}^{jik} \right) = \sum_{j,v,s} \left(\sum_{r \leq t - \bar{d}} X_{srv}^{jik} + \sum_{t \geq r > t - \bar{d}} \sum_{r+d \leq t} [\lambda_{srv}^{jik}]_d X_{srv}^{jik} \right)$$

quedando

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^t \sum_{j,v,s,d} [\lambda_{s(r-d)v}^{jik}]_d X_{s(r-d)v}^{jik} &= \sum_{j,v,s} \left(\sum_{r \leq t - \bar{d}} X_{srv}^{jik} + \sum_{r > t - \bar{d}} \sum_{r+d \leq t} [\lambda_{srv}^{jik}]_d X_{srv}^{jik} \right) \\ &= \sum_{j,v,s} \left(\sum_{r \leq t} X_{s(r-\bar{d})v}^{jik} + \sum_{r > t - \bar{d}} \sum_{r+d \leq t} [\lambda_{srv}^{jik}]_d X_{srv}^{jik} \right) \end{aligned}$$

y finalmente

$$\begin{aligned}
W_{t+1}^{ik} &= w_0^{ik} + \sum_{r=0}^t \left(-\zeta_r^{ik} + \sum_{j,v,s,d} [\lambda_{s(r-d)v}^{jik}]_d X_{s(r-d)v}^{jik} - \sum_{j,v,s} X_{rsv}^{ijk} + ON_r^{ik} - OFF_r^{ik} \right) \\
&= w_0^{ik} + \sum_{r=0}^t \sum_{j,v,s,d} [\lambda_{s(r-d)v}^{jik}]_d X_{s(r-d)v}^{jik} + \sum_{r=0}^t \left(-\zeta_r^{ik} - \sum_{j,v,s} X_{rsv}^{ijk} + ON_r^{ik} - OFF_r^{ik} \right) \\
&= w_0^{ik} + \sum_{j,v,s} \left(\sum_{r \leq t} X_{s(r-\bar{d})v}^{jik} + \sum_{r > t-\bar{d}} \sum_{r+d \leq t} [\lambda_{srv}^{jik}]_d X_{srv}^{jik} \right) \\
&\quad + \sum_{r=0}^t \left(-\zeta_r^{ik} - \sum_{j,v,s} X_{rsv}^{ijk} + ON_r^{ik} - OFF_r^{ik} \right) \\
&= w_0^{ik} + \sum_{j,v,s} \left(\sum_{r > t-\bar{d}} \sum_{r+d \leq t} [\lambda_{srv}^{jik}]_d X_{srv}^{jik} \right) \\
&\quad + \sum_{r=0}^t \left(-\zeta_r^{ik} + \sum_{j,v,s} X_{s(r-\bar{d})v}^{jik} - \sum_{j,v,s} X_{rsv}^{ijk} + ON_r^{ik} - OFF_r^{ik} \right)
\end{aligned}$$

Como la restricción es que el inventario sea no negativo, pedimos $\forall i, k, t$

$$0 \leq w_0^{ik} + \sum_{j,v,s} \left(\sum_{r > t-\bar{d}} \sum_{r+d \leq t} [\lambda_{srv}^{jik}]_d X_{srv}^{jik} \right) + \sum_{r=0}^t \left(-\zeta_r^{ik} + \sum_{j,v,s} X_{s(r-\bar{d})v}^{jik} - \sum_{j,v,s} X_{rsv}^{ijk} + ON_r^{ik} - OFF_r^{ik} \right) \quad (3.1)$$

Sea, en principio

$$\Lambda = \left\{ \left([\lambda_{tsv}^{ijk}]_d \right) : [\lambda_{srv}^{jik}]_d \in \{0, 1\} \wedge \forall ijktsv \quad \sum_d [\lambda_{srv}^{jik}]_d = 1 \right\}$$

Si queremos que la inecuación anterior se cumpla para todo $\lambda \in \Lambda$, en particular se tendrá que cumplir cuando se realicen todos los retrasos máximos de forma simultánea, en cuyo caso todos los parámetros $[\lambda_{tsv}^{ijk}]_d$ del segundo término serán nulos, obteniendo

$$\forall i, k, t \quad 0 \leq w_0^{ik} + \sum_{r=0}^t \left(-\zeta_r^{ik} + \sum_{j,v,s} X_{s(r-\bar{d})v}^{jik} - \sum_{j,v,s} X_{rsv}^{ijk} + ON_r^{ik} - OFF_r^{ik} \right)$$

Es claro además que si la realización de $\lambda \in \Lambda$ es distinta al peor caso, la restricción anterior se mantiene factible puesto que sólo se agregarían términos no negativos.

En el caso de la función objetivo, si reemplazamos la variable de inventario por el lado

derecho de (3.1) y maximizamos sobre $\lambda \in \Lambda$, nos damos cuenta que el peor caso es aquél donde ninguna nave se retrasa, puesto que ello implica que los contenedores pasan más tiempo en inventario en su lugar de destino con el consecuente aumento de costo. Por lo tanto, la función objetivo corresponde a

$$\begin{aligned} \min_{X, V, O, \delta} \sum_{ikt} h^{ik} & \left(w_0^{ik} + \sum_{r < t} \left\{ -\zeta_r^{ik} + \sum_{j, v, s} X_{srv}^{jik} - \sum_{j, v, s} X_{rsv}^{ijk} + ON_r^{ik} - OFF_r^{ik} \right\} \right) \\ & + \sum_{ikt} (p^{ik} ON_t^{ik} - q^{ik} OFF_t^{ik}) + \sum_{ijktsv} a_{tsv}^{ijk} X_{tsv}^{ijk} \end{aligned}$$

Con esto, notamos que una solución robusta ante el peor caso sigue un flujo de inventario con un *shift* \bar{d} en el arribo de contenedores, siendo un problema de la misma naturaleza que el original. Sin embargo, sería interesante redefinir el conjunto Λ de manera eliminar los patrones de retrasos que son menos probables de realizarse.

3.4. Incertidumbre conjunta

Habiendo considerado primero incertidumbre en demanda y retorno e incertidumbre en los tiempos de viaje por separado, ahora buscamos una solución que sea robusta ante estos parámetros de forma conjunta.

Partiendo de la restricción obtenida para los tiempos de viajes, basta imponer que ella se cumpla para todo $\zeta \in \mathcal{U}$. Así, siguiendo el desarrollo hecho para demanda y retorno inciertos, obtenemos

$$\begin{aligned} \min_{X, V, O, \delta} & \left(h^{ik} \left(w_0^{ik} + \sum_{r < t} \left\{ \sum_{v, s} VD_{(r-l^D)sv}^{ik} - \sum_{v, s} VU_{s(r+l^U)v}^{ik} + ON_r^{ik} - OFF_r^{ik} \right\} \right) \right) \\ & + \sum_{ikt} (p^{ik} ON_t^{ik} - q^{ik} OFF_t^{ik}) + \sum_{ijktsv} a_{tsv}^{ijk} X_{tsv}^{ijk} + \sum_{iktsv} (d^{ik} VD_{tsv}^{ik} + u^{ik} VU_{tsv}^{ik}) + \varphi(\mathcal{U}) \end{aligned}$$

$$[\varphi_t^{ik}(\mathcal{U})] \leq w_0^{ik} + \sum_{r < t} \left\{ \sum_{v, s} VD_{(r-l^D-\bar{d})v}^{ik} - \sum_{v, s} VU_{s(r+l^U)v}^{ik} + ON_r^{ik} - OFF_r^{ik} \right\}$$

$$\forall i, k, t, s, v \quad VU_{tsv}^{ik} - VD_{tsv}^{ik} = \sum_{j, r} X_{srv}^{ijk} - \sum_{j, r} X_{rtv}^{jik}$$

$$\forall i, k, t, s, v \quad VU_{tsv}^{ik} \leq M\delta_{tsv}^{ik}$$

$$\forall i, k, t, s, v \quad VD_{tsv}^{ik} \leq M(1 - \delta_{tsv}^{ik})$$

$$\forall i, j, t, s, v \quad \sum_k Q_k X_{tsv}^{ijk} \leq C_{tsv}^{ij}$$

$$\forall i, j, v \quad \sum_{tsk} Q_k X_{tsv}^{ijk} \leq C_v^{ij}$$

$$W_0^{ik} = w_0^{ik}$$

$$X_{0sv}^{ijk} = ON_0^{ik} = OFF_0^{ik} = 0$$

$$W_t^{ik}, X_{tsv}^{ijk}, ON_t^{ik}, OFF_t^{ik}, VU_{tsv}^{ik}, VD_{tsv}^{ik} \in \mathbb{Z}_+$$

$$\delta_{tsv}^{ik} \in \{0, 1\}$$

Capítulo 4

Optimización Robusta Ajustable

En la sección anterior hemos desarrollado un modelo de planificación que, bajo supuestos sobre el conjunto de pertenencia de los parámetros, permite obtener soluciones que son inmunes ante la incertidumbre. Sin embargo, estas soluciones son estáticas, en el sentido que las variables son decididas al comienzo del horizonte de planificación y se mantienen fijas durante él. Este hecho, en general, ocasiona que las soluciones sean conservadoras, puesto que no incorporan información a medida que los eventos van ocurriendo. Por el contrario, las soluciones ajustables se valen de la información de períodos pasados y, valga la redundancia, se ajustan a ella de manera de acomodarse a los eventos que se han realizado y evitar la miopía de las soluciones estáticas.

El objetivo de esta sección es desarrollar un modelo robusto ajustable para la planificación, que tome en cuenta la evolución de la información y que sea factible de implementar en la práctica.

4.1. Resultados previos

Partimos resumiendo algunos resultados presentados en [8]. Sea $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{mn} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto, convexo y no vacío, y denotemos $\zeta = [A, b, c] \in \mathcal{U}$ un elemento cualquiera de este conjunto. Tenemos entonces una familia de problemas de la forma

$$\left\{ \min_x \{c'x : Ax \leq b\} \right\}_{\zeta=[A,b,c] \in \mathcal{U}} \quad (4.1)$$

Supongamos que algunas variables deben ser decididas antes de tener cualquier información sobre la realización de ζ , mientras que otras pueden ser decididas cuando parte de la información de ζ es revelada. Particionamos entonces x en $x' = (u', v')$, donde u denota las variables no ajustables y v denota las variables ajustables, y consideramos la partición

de $A = [U, V]$ correspondiente. Luego podemos reescribir (4.1) de forma equivalente como

$$\min_{(s,u),v} \left\{ s : c' \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \leq s, Uu + Vv \leq b \right\}_{[U,V,b,c] \in \mathcal{U}}$$

La matriz V corresponde a la matriz de recurso, la cual en adelante consideraremos fija. Notando que siempre nos podemos remitir al caso donde la función objetivo también está fija y no depende de las variables ajustables, definimos $(P_{\mathcal{U}})$ como

$$(P_{\mathcal{U}}) \quad \left\{ \min_{u,v} c'u : Uu + Vv \leq b \right\}_{\zeta=[U,b] \in \mathcal{U}}$$

Si bien en principio la relación funcional entre v y ζ es arbitraria, impondremos que dicha relación sea lineal afín, es decir

$$v = v(\zeta) = w + W\zeta$$

Definimos entonces la Contraparte Robusta Afínmente Ajustable (*CRAA*) de $(P_{\mathcal{U}})$ como el problema

$$\min_{u,w,W} \{ c'u : Uu + V(w + W\zeta) \leq b \quad \forall \zeta = [U, b] \in \mathcal{U} \}$$

Más aún, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que \mathcal{U} está parametrizado por $\xi \in \mathcal{X}$, donde el conjunto de perturbaciones $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^L$ es un convexo compacto no vacío, mediante la aplicación

$$\xi \mapsto [U^0, b^0] + \sum_{l=1}^L \xi_l [U^l, b^l]$$

De la misma forma, podemos asumir que v es lineal afín en ξ , es decir

$$v = v(\xi) = v^0 + \sum_l \xi_l v^l$$

Luego, el *CRAA* de $(P_{\mathcal{U}})$ equivale a

$$\min_{u,v^0,v^1,\dots,v^L} \left\{ c'u : \left[U^0 + \sum \xi_l U^l \right] u + V \left[v^0 + \sum \xi_l v^l \right] \leq \left[b^0 + \sum \xi_l b^l \right] \quad \forall \xi \in \mathcal{X} \right\}$$

Consideramos el caso donde \mathcal{X} tiene una representación cónica de la forma

$$\mathcal{X} = \{ \xi \mid \exists \omega : A\xi + B\omega \geq_{\mathcal{K}} d \} \subset \mathbb{R}^L \tag{4.2}$$

donde A , B y d son los datos de la representación, \mathcal{K} es un cono convexo cerrado que contiene al vector nulo y de interior no vacío, y $a \geq_{\mathcal{K}} b$ significa $a - b \in \mathcal{K}$. Sean

$$\begin{aligned}\chi &= (u, v^0, v^1, \dots, v^L) \\ a_l^i &= a_l^i(\chi) = (-U^l u - V v^l + b^l)_i \quad l = 0, 1, \dots, L, \quad i = 1, \dots, m\end{aligned}$$

Teorema 3. *Asumamos que el conjunto de perturbación está representado por 4.2 y que la representación es estrictamente factible, es decir, existen $\bar{\xi}$, $\bar{\omega}$ tales que*

$$A\bar{\xi} + B\bar{\omega} - d \in \text{int}\mathcal{K}$$

Luego el CRAA de $(P_{\mathcal{U}})$ es equivalente al problema

$$\begin{aligned} & \min_{u, v^0, v^1, \dots, v^L, \lambda^1, \dots, \lambda^m} && c'u \\ & A'\lambda^i - a^i(u, v^0, v^1, \dots, v^L) &= & 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & B'\lambda^i &= & 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & d'\lambda^i - a_0^i(u, v^0, v^1, \dots, v^L) &\geq & 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & \lambda^i &\geq_{\mathcal{K}_*} & 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

donde \mathcal{K}_* es el cono dual de \mathcal{K} .

En particular, en los casos donde \mathcal{K} es producto directo de conos de Lorentz o un cono semidefinido, el CRAA de $(P_{\mathcal{U}})$ es un problema de Programación Cónica Cuadrática o un problema de Programación Semidefinida, respectivamente. Los tamaños de estos problemas son polinomiales en los de la descripción del conjunto de perturbación y de la aplicación de parametrización.

En el caso en que \mathcal{K} es el ortante no negativo, \mathcal{U} es un conjunto poliedral asociado a

$$\mathcal{X} = \{\xi \mid \exists \omega : A\xi + B\omega \geq d\} \subset \mathbb{R}^L \tag{4.3}$$

y la hipótesis de factibilidad estricta no es necesaria.

Teorema 4. *En el caso de perturbación poliedral, el CRAA de $(P_{\mathcal{U}})$ es equivalente a un problema de Programación Lineal. Los tamaños de este problema son polinomiales en los tamaños de la descripción del conjunto de perturbaciones y de la aplicación de parametrización.*

4.2. Formulación robusta afinmente ajustable

4.2.1. Variables ajustables y no ajustables

Supongamos que al decidir una variable en un período t , se cuenta con información certera sobre las realizaciones de ζ en un subconjunto de períodos de \mathcal{T} . Llamemos \mathcal{F}_t a este conjunto. Los casos extremos serían $\mathcal{F}_t = \phi$, donde toda la información es desconocida, incluso la anterior a t , y $\mathcal{F}_t = \mathcal{T}$, donde todos los datos, incluso los porteros a t , son conocidos. Un caso intermedio, más común y real en la práctica, es $\mathcal{F}_t = \{1, \dots, t-1\}$, donde los datos anteriores a t son conocidos y los posteriores a él son desconocidos. Otro caso corresponde a $\mathcal{F}_t = \{t-F, \dots, t-1\}$, donde sólo los F períodos anteriores a t son considerados. De aquí en adelante consideraremos \mathcal{F}_t como en el último ejemplo mencionado.

Ahora, dado que en t la información en \mathcal{F}_t será conocida, queremos desarrollar un modelo que permita que las variables decididas en t se ajusten a las posibles realizaciones en \mathcal{F}_t , manteniendo factibilidad cualquiera sea la realización. En nuestro caso, las variables que son de naturaleza ajustable son las correspondientes a movimientos de contenedores, puesto que en la práctica ellas varían de acuerdo a los escenarios que vayan ocurriendo. Distinto es el caso de las variables de ingreso o salida de contenedores a la flota, ya que como están sujetas a contratos, no son factibles de modificar de forma directa.

Supongamos que queremos decidir la cantidad de contenedores de tipo k a embarcar en la nave v con origen i y destino j , zarpando en t y arribando en s . En tal caso, los parámetros indexados por \mathcal{F}_t son conocidos y queremos utilizarlos para decidir X_{tsv}^{ijk} . Si bien podríamos considerar la información de todas las localidades y tipos de equipo en los períodos comprendidos en \mathcal{F}_t , nos limitaremos a incorporar sólo la correspondiente a las localidades i y j y al tipo de equipo k . Más aún, dada la estructura del problema original y la necesidad de enfrentar un problema computacionalmente tratable, impondremos que las variables ajustables estén afinmente relacionadas con los parámetros, de manera que el problema resultante siga siendo uno lineal. Específicamente, impondremos que X_{tsv}^{ijk} sea lineal afín en la diferencia del parámetro ζ en i y j en cada período $r \in \mathcal{F}_t$, es decir

$$X_{tsv}^{ijk} = [\lambda_{tsv}^{ijk}]_0 + \sum_{r \in \mathcal{F}_t} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r (\zeta_r^{jk} - \zeta_r^{ik})$$

De esta forma, las nuevas variables del problema serán $[\lambda_{tsv}^{ijk}]_r$, $r \in \mathcal{F}_t \cup \{0\}$, donde $r = 0$ denota el término afín en la relación entre X_{tsv}^{ijk} y ζ .

4.2.2. Formulación por caminos

Si bien la aproximación anterior parece razonable, hay algo que no hemos considerado. En la formulación actual del problema, X_{tsv}^{ijk} denota el flujo de contenedores a través del arco de viaje $(i, t)(j, s)$ de la nave v . Sin embargo, si estas localidades son recaladas intermedias en un viaje entre otras dos localidades, digamos i' y j' , entre las cuales hay un flujo efectivo de contenedores, la formulación podría limitar la ajustabilidad del mismo. En efecto, podría suceder que la realización del parámetro ζ en las localidades i' y j' sea distinto a su valor nominal, por lo que el flujo efectivo entre ellas debería ajustarse, pero si ζ en i y j es exactamente el valor nominal, entonces el flujo en ese arco no se modificaría, imposibilitando el ajuste del flujo efectivo entre i' y j' . Dada esta observación, es conveniente reformular el problema original, pasando de una formulación basada en arcos a una basada en caminos. De esta forma no se presentaría el problema mencionado, puesto que las nuevas variables representarían el flujo efectivo entre dos localidades y no en un arco intermedio.

Para $v \in \mathcal{V}$, sea $\mathcal{G}_v = (\mathcal{N}_v, \mathcal{E}_v)$ el grafo definido por el itinerario de la nave. Notamos que los únicos ciclos en el grafo corresponden a los arcos de recalada cuyos extremos corresponden al mismo nodo, es decir, cuando las fechas de arribo y zarpe coinciden. Observamos también que el flujo de contenedores está definido esencialmente desde nodos de zarpe hacia nodos de arribo. Definimos entonces $\mathcal{R}_v \subset \mathcal{P}(\mathcal{E}_v)$ como el conjunto de rutas o caminos asociados al itinerario de la nave v . En este sentido, un camino $P \in \mathcal{R}_v$ corresponde a una secuencia de arcos en \mathcal{E}_v ordenados y adyacentes entre sí en el itinerario de v , alternando entre arcos de viaje y de recalada, tales que los arcos inicial y final son arcos de viaje. En este caso, es claro que todo camino $P \in \mathcal{R}_v$ está determinado por su nodo origen y su nodo final. Así, la notación $P = P_v((i, t)(j, s))$ representa la secuencia de arcos tales que el primero de ellos corresponde al zarpe desde i en t y el último corresponde al arribo a j en s .

Por ejemplo, a partir de la figura usada para explicar el concepto de itinerario en el modelo básico, identificamos con flecha curvas a rayas los caminos asociados al itinerario de una nave v .

Luego

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_v = \{ & P_v((i_1, t_0)(i_2, t_1)), P_v((i_1, t_0)(i_3, t_3)), P_v((i_1, t_0)(i_4, t_4)), \\ & P_v((i_2, t_2)(i_3, t_3)), P_v((i_2, t_2)(i_4, t_4)), P_v((i_3, t_3)(i_4, t_4)) \} \end{aligned}$$

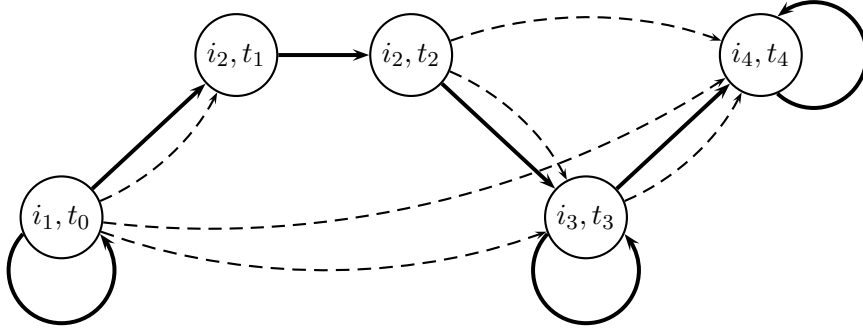


Figura 4.1: Caminos o rutas de una nave.

donde por ejemplo

$$\begin{aligned} P_v((i_1, t_0)(i_3, t_3)) &= ((i_1, t_0)(i_2, t_1))((i_2, t_1)(i_2, t_2))((i_2, t_2)(i_3, t_3)) \\ P_v((i_2, t_2)(i_4, t_4)) &= ((i_2, t_2)(i_3, t_3))((i_3, t_3)(i_3, t_3))((i_3, t_3)(i_4, t_4)) \end{aligned}$$

Asociada a cada nave v y ruta $P = P_v((i, t)(j, s)) \in \mathcal{R}_v$, definimos la variable

Y_{tsv}^{ijk} : cantidad de contenedores del tipo k que son transportados en la nave v a través de la ruta que parte en i en t y termina en j en s .

Para $v \in \mathcal{V}$ y $(i', t')(j', s') \in \mathcal{A}_v$, definimos

$$\delta_v((i', t')(j', s')) = \{P \in \mathcal{R}_v : (i', t')(j', s') \in P\}$$

el conjunto de rutas de v que contienen al arco de viaje $(i', t')(j', s')$. Sea

$$c_{tsv}^{ijk} = u^{ik} + d^{jk} + \sum_{(i', t')(j', s') \in P_v((i, t)(j, s)) \cap \mathcal{A}_v} a_{i' s' v}^{i' j' k}$$

el costo de transporte de la ruta $P = P_v((i, t)(j, s))$.

Omitiendo la dicotomía de carga y descarga y los desfases respectivos, la evolución de inventario está dada por

$$W_{t+1}^{ik} = W_t^{ik} - \zeta_t^{ik} + \sum_{j, s, v} Y_{stv}^{jik} - \sum_{j, s, v} Y_{tsv}^{ijk} + ON_t^{ik} - OFF_t^{ik}$$

mientras que la restricción de capacidad corresponde a

$$\sum_k \sum_{P_v((i, t)(j, s)) \in \delta_v(e)} Q^k Y_{tsv}^{ijk} \leq C_e^v$$

donde $e = (i', t')(j', s') \in \mathcal{A}_v$ y $C_e^v = C_{t's'v}^{i'j'}$.

Por su parte, la función objetivo corresponde a

$$\min_{Y, W, O} \sum_{ikt} (h^{ik} W_t^{ik} + p^{ik} ON_t^{ik} - q^{ik} OFF_t^{ik}) + \sum_{ijktsv} c_{tsv}^{ijk} Y_{tsv}^{ijk}$$

Al igual que antes, eliminamos las variables W_t^{ik} y las ecuaciones que las definen, reemplazándolas por desigualdades. Finalmente, definimos (P_A) según

$$\min_{Y, O} \max_{\zeta \in \mathcal{U}} \left\{ \sum_{ikt} h^{ik} \left(w_0^{ik} + \sum_{r < t} \left(-\zeta_r^{ik} + \sum_{j, s, v} Y_{srv}^{jik} - \sum_{j, s, v} Y_{rsv}^{ijk} + ON_r^{ik} - OFF_r^{ik} \right) \right) \right. \\ \left. + \sum_{ikt} (p^{ik} ON_t^{ik} - q^{ik} OFF_t^{ik}) + \sum_{ijktsv} c_{tsv}^{ijk} Y_{tsv}^{ijk} \right\}$$

$$\forall i, k, t \quad \forall \zeta \in \mathcal{U} \quad 0 \leq w_0^{ik} + \sum_{r < t} \left(-\zeta_r^{ik} + \sum_{j, s, v} Y_{srv}^{jik} - \sum_{j, s, v} Y_{rsv}^{ijk} + ON_r^{ik} - OFF_r^{ik} \right)$$

$$\forall v, e \quad \sum_k \sum_{(i,t)(s,j) \in \delta_v(e)} Q^k Y_{tsv}^{ijk} \leq C_e^v$$

$$Y_{0sv}^{ijk} = ON_0^{ik} = OFF_0^{ik} = 0$$

$$Y_{tsv}^{ijk}, ON_t^{ik}, OFF_t^{ik} \in \mathbb{Z}_+$$

Como hemos propuesto

$$Y_{tsv}^{ijk} = [\lambda_{tsv}^{ijk}]_0 + \sum_{r \in \mathcal{F}_t} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r (\zeta_r^{jk} - \zeta_r^{ik})$$

al hacer los reemplazos correspondientes en la formulación anterior, obtenemos un modelo cuya solución nos entrega los coeficientes $[\lambda_{tsv}^{ijk}]_r$ del control lineal que permitirá los ajustes de las decisiones dada la trayectoria de la demanda. El modelo mencionado incluye variables auxiliares necesarias para asegurar factibilidad cualquiera sea la realización de $\zeta \in \mathcal{U}$.

Como primer paso, presentamos el modelo ajustable correspondiente a la relajación de la condición de integralidad del número de contenedores asignados a cada ruta cuando \mathcal{U} está dado por $\mathcal{U} = \prod_{ikt} [\bar{\zeta}_t^{ik} - \hat{\zeta}_t^{ik}, \bar{\zeta}_t^{ik} + \hat{\zeta}_t^{ik}]$.

Proposición 4. Sea $\mathcal{U} = \prod_{ikt} [\bar{\zeta}_t^{ik} - \hat{\zeta}_t^{ik}, \bar{\zeta}_t^{ik} + \hat{\zeta}_t^{ik}]$. Entonces (P_A) es equivalente al problema

$$\begin{aligned}
 & \min_{O, \lambda, \mu, \nu, \alpha, \beta, \gamma} \left\{ \sum_{ikt} h^{ik} \sum_{r < t} \left(-\bar{\zeta}_r^{ik} + \sum_{j, s, v} \sum_{f \in \mathcal{F}_s} [\lambda_{srv}^{jik}]_f (\bar{\zeta}_f^{ik} - \bar{\zeta}_f^{jk}) - \sum_{j, s, v} \sum_{f \in \mathcal{F}_r} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f (\bar{\zeta}_f^{jk} - \bar{\zeta}_f^{ik}) \right) \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{ijktsv} c_{tsv}^{ijk} \sum_{f \in \mathcal{F}_t} [\lambda_{srv}^{ijk}]_f (\bar{\zeta}_f^{jk} - \bar{\zeta}_f^{ik}) + \sum_{ikf} \hat{\zeta}_f^{ik} [\nu_f^{ik}] \right\} \\
 & \forall i, k, f \quad -[\nu_f^{ik}] \leq \sum_{t > f} h^{ik} \left(1 - \sum_{r < t} \sum_{\substack{j, s, v: \\ f \in \mathcal{F}_s}} [\lambda_{srv}^{jik}]_f - \sum_{r < t} \sum_{\substack{j, s, v: \\ f \in \mathcal{F}_r}} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f \right) + \sum_{\substack{j, t, s, v: \\ f \in \mathcal{F}_t}} c_{tsv}^{ijk} [\lambda_{srv}^{jik}]_f \\
 & \quad + \sum_{t, j} h_t^{jk} \left(\sum_{r < t} \sum_{\substack{s, v: \\ f \in \mathcal{F}_s}} [\lambda_{srv}^{ijk}]_f + \sum_{r < t} \sum_{\substack{s, v: \\ f \in \mathcal{F}_r}} [\lambda_{rsv}^{jik}]_f \right) - \sum_{\substack{j, t, s, v: \\ f \in \mathcal{F}_t}} c_{tsv}^{ijk} [\lambda_{srv}^{ijk}]_f \leq [\nu_f^{ik}] \\
 & \forall i, j, k, t, s, v \quad \sum_{r \in \mathcal{F}_t} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r (\bar{\zeta}_r^{ik} - \bar{\zeta}_r^{jk}) + \sum_{r \in \mathcal{F}_t} [\mu_{tsv}^{ijk}]_r (\hat{\zeta}_r^{ik} + \hat{\zeta}_r^{jk}) \leq [\lambda_{tsv}^{ijk}]_0 \\
 & \forall i, j, k, t, s, v, r \quad -[\mu_{tsv}^{ijk}]_r \leq [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r \leq [\mu_{tsv}^{ijk}]_r \\
 & \forall i, k, t \quad -w_0^{ik} + \sum_{r < t} \left(\bar{\zeta}_r^{ik} - \sum_{j, s, v} \sum_{f \in \mathcal{F}_s} [\lambda_{srv}^{jik}]_f (\bar{\zeta}_f^{ik} - \bar{\zeta}_f^{jk}) + \sum_{j, s, v} \sum_{f \in \mathcal{F}_r} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f (\bar{\zeta}_f^{jk} - \bar{\zeta}_f^{ik}) \right) \\
 & \quad + \sum_{f < t} \hat{\zeta}_f^{ik} [\alpha_t^{ik}]_f + \sum_{f, j} \hat{\zeta}_f^{jk} [\beta_t^{ijk}]_f \leq \sum_{r < t} \left(\sum_{j, s, v} ([\lambda_{srv}^{jik}]_0 - [\lambda_{rsv}^{ijk}]_0) + ON_r^{ik} - OFF_r^{ik} \right) \\
 & \forall i, k, t, f \quad -[\alpha_t^{ik}]_f \leq 1 - \sum_{r < t} \sum_{\substack{j, s, v: \\ f \in \mathcal{F}_s}} [\lambda_{srv}^{jik}]_f - \sum_{r < t} \sum_{\substack{j, s, v: \\ f \in \mathcal{F}_r}} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f \leq [\alpha_t^{ik}]_f \\
 & \forall i, k, t, f \quad -[\beta_t^{ijk}]_f \leq \sum_{r < t} \sum_{\substack{s, v: \\ f \in \mathcal{F}_s}} [\lambda_{srv}^{jik}]_f + \sum_{r < t} \sum_{\substack{s, v: \\ f \in \mathcal{F}_r}} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f \leq [\beta_t^{ijk}]_f \\
 & \forall v, e \quad \sum_k \sum_{(i, t)(j, s) \in \delta_v(e)} Q^k \sum_{r \in \mathcal{F}_t} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r (\bar{\zeta}_r^{jk} - \bar{\zeta}_r^{ik}) + \sum_k Q^k \sum_{i, r} \hat{\zeta}_r^{ik} [\gamma_{ve}^{ik}]_r \\
 & \quad \leq C_e^v - \sum_k \sum_{(i, t)(j, s) \in \delta_v(e)} Q^k [\lambda_{tsv}^{ijk}]_0 \\
 & \forall i, k, v, e, r \quad -[\gamma_{ve}^{ik}]_r \leq \sum_{\substack{j, t, s: \\ (j, t)(i, s) \in \delta_v(e) \\ r \in \mathcal{F}_t}} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r - \sum_{\substack{j, t, s: \\ (i, t)(j, s) \in \delta_v(e) \\ r \in \mathcal{F}_t}} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r \leq [\gamma_{ve}^{ik}]_r \\
 & \quad ON_t^{ik}, OFF_t^{ik} \in \mathbb{Z}_+ \\
 & \quad [\nu_f^{ik}], [\mu_{tsv}^{ijk}]_r, [\alpha_t^{ik}]_f, [\beta_t^{ijk}]_f, [\gamma_{ve}^{ik}]_r \in \mathbb{R}_+
 \end{aligned}$$

Demostración. Partiremos la demostración reescribiendo las expresiones que dependen de ζ de forma general, sin considerar \mathcal{U} particular.

Flujo no negativo

$$\begin{aligned}
 & 0 \leq Y_{tsv}^{ijk} \\
 \Leftrightarrow & \forall \zeta \in \mathcal{U} \quad 0 \leq [\lambda_{tsv}^{ijk}]_0 + \sum_{r \in \mathcal{F}_t} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r (\zeta_r^{jk} - \zeta_r^{ik}) \\
 \Leftrightarrow & \forall \zeta \in \mathcal{U} \quad \sum_{r \in \mathcal{F}_t} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r (\zeta_r^{ik} - \zeta_r^{jk}) \leq [\lambda_{tsv}^{ijk}]_0 \\
 \Leftrightarrow & \max_{\zeta \in \mathcal{U}} \left\{ \sum_{r \in \mathcal{F}_t} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r (\zeta_r^{ik} - \zeta_r^{jk}) \right\} \leq [\lambda_{tsv}^{ijk}]_0
 \end{aligned}$$

Inventario no negativo

$$\begin{aligned}
 & \forall \zeta \in \mathcal{U} \quad 0 \leq w_0^{ik} + \sum_{r < t} \left(-\zeta_r^{ik} + \sum_{j,s,v} Y_{srv}^{jik} - \sum_{j,s,v} Y_{rsv}^{ijk} + ON_r^{ik} - OFF_r^{ik} \right) \\
 \Leftrightarrow & \forall \zeta \in \mathcal{U} \quad 0 \leq w_0^{ik} + \sum_{r < t} \left(-\zeta_r^{ik} + \sum_{j,s,v} \left([\lambda_{srv}^{jik}]_0 + \sum_{f \in \mathcal{F}_s} [\lambda_{srv}^{jik}]_f (\zeta_f^{ik} - \zeta_f^{jk}) \right) \right. \\
 & \quad \left. - \sum_{j,s,v} \left([\lambda_{rsv}^{ijk}]_0 + \sum_{f \in \mathcal{F}_r} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f (\zeta_f^{jk} - \zeta_f^{ik}) \right) + ON_r^{ik} - OFF_r^{ik} \right) \\
 \Leftrightarrow & \forall \zeta \in \mathcal{U} \quad \sum_{r < t} \left(\zeta_r^{ik} - \sum_{j,s,v} \sum_{f \in \mathcal{F}_s} [\lambda_{srv}^{jik}]_f (\zeta_f^{ik} - \zeta_f^{jk}) + \sum_{j,s,v} \sum_{f \in \mathcal{F}_r} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f (\zeta_f^{jk} - \zeta_f^{ik}) \right) \\
 & \quad \leq w_0^{ik} + \sum_{r < t} \left(\sum_{j,s,v} ([\lambda_{srv}^{jik}]_0 - [\lambda_{rsv}^{ijk}]_0) + ON_r^{ik} - OFF_r^{ik} \right) \\
 \Leftrightarrow & \max_{\zeta \in \mathcal{U}} \left\{ \sum_{r < t} \left(\zeta_r^{ik} - \sum_{j,s,v} \sum_{f \in \mathcal{F}_s} [\lambda_{srv}^{jik}]_f (\zeta_f^{ik} - \zeta_f^{jk}) + \sum_{j,s,v} \sum_{f \in \mathcal{F}_r} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f (\zeta_f^{jk} - \zeta_f^{ik}) \right) \right\} \\
 & \quad \leq w_0^{ik} + \sum_{r < t} \left(\sum_{j,s,v} ([\lambda_{srv}^{jik}]_0 - [\lambda_{rsv}^{ijk}]_0) + ON_r^{ik} - OFF_r^{ik} \right)
 \end{aligned}$$

Capacidad de transporte

$$\begin{aligned}
 & \sum_k \sum_{(i,t)(j,s) \in \delta_v(e)} Q^k Y_{tsv}^{ijk} \leq C_e^v \\
 \Leftrightarrow & \sum_k \sum_{(i,t)(j,s) \in \delta_v(e)} Q^k \left([\lambda_{tsv}^{ijk}]_0 + \sum_{r \in \mathcal{F}_t} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r (\zeta_r^{jk} - \zeta_r^{ik}) \right) \leq C_e^v \\
 \Leftrightarrow & \sum_k \sum_{(i,t)(j,s) \in \delta_v(e)} Q^k \sum_{r \in \mathcal{F}_t} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r (\zeta_r^{jk} - \zeta_r^{ik}) \leq C_e^v - \sum_k \sum_{(i,t)(j,s) \in \delta_v(e)} Q^k [\lambda_{tsv}^{ijk}]_0 \\
 \Leftrightarrow & \max_{\zeta \in \mathcal{U}} \left\{ \sum_k \sum_{(i,t)(j,s) \in \delta_v(e)} Q^k \sum_{r \in \mathcal{F}_t} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r (\zeta_r^{jk} - \zeta_r^{ik}) \right\} \leq C_e^v - \sum_k \sum_{(i,t)(j,s) \in \delta_v(e)} Q^k [\lambda_{tsv}^{ijk}]_0
 \end{aligned}$$

Función objetivo

$$\begin{aligned}
 & \min_{Y,O} \max_{\zeta \in \mathcal{U}} \left\{ \sum_{ikt} h^{ik} \left(w_0^{ik} + \sum_{r < t} \left(-\zeta_r^{ik} + \sum_{j,s,v} Y_{srv}^{jik} - \sum_{j,s,v} Y_{rsv}^{ijk} + ON_r^{ik} - OFF_r^{ik} \right) \right) \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{ikt} (p^{ik} ON_t^{ik} - q^{ik} OFF_t^{ik}) + \sum_{ijktsv} c_{tsv}^{ijk} Y_{tsv}^{ijk} \right\} \\
 \Leftrightarrow & \min_{\lambda,O} \max_{\zeta \in \mathcal{U}} \left\{ \sum_{ikt} h^{ik} \left(w_0^{ik} + \sum_{r < t} \left(-\zeta_r^{ik} + \sum_{j,s,v} \left([\lambda_{srv}^{jik}]_0 + \sum_{f \in \mathcal{F}_s} [\lambda_{srv}^{jik}]_f (\zeta_f^{ik} - \zeta_f^{jk}) \right) \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \sum_{j,s,v} \left([\lambda_{rsv}^{ijk}]_0 + \sum_{f \in \mathcal{F}_r} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f (\zeta_f^{jk} - \zeta_f^{ik}) \right) + ON_r^{ik} - OFF_r^{ik} \right) \right) \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{ikt} (p^{ik} ON_t^{ik} - q^{ik} OFF_t^{ik}) + \sum_{ijktsv} c_{tsv}^{ijk} \left([\lambda_{tsv}^{ijk}]_0 + \sum_{r \in \mathcal{F}_t} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r (\zeta_r^{jk} - \zeta_r^{ik}) \right) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \iff \min_{\lambda, O} \max_{\zeta \in \mathcal{U}} \left\{ \sum_{ikt} h^{ik} \left(w_0^{ik} + \sum_{r < t} \left(\sum_{j, s, v} ([\lambda_{srv}^{jik}]_0 - [\lambda_{rsv}^{ijk}]_0) + ON_r^{ik} - OFF_r^{ik} \right) \right) \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{ikt} (p^{ik} ON_t^{ik} - q^{ik} OFF_t^{ik}) + \sum_{ijktsv} c_{tsv}^{ijk} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_0 \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{ikt} h^{ik} \sum_{r < t} \left(-\zeta_r^{ik} + \sum_{j, s, v} \sum_{f \in \mathcal{F}_s} [\lambda_{srv}^{jik}]_f (\zeta_f^{ik} - \zeta_f^{jk}) - \sum_{j, s, v} \sum_{f \in \mathcal{F}_r} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f (\zeta_f^{jk} - \zeta_f^{ik}) \right) \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{ijktsv} c_{tsv}^{ijk} \sum_{r \in \mathcal{F}_t} [\lambda_{srv}^{ijk}]_r (\zeta_r^{jk} - \zeta_r^{ik}) \right\} \\
 & \iff \min_{\lambda, O} \left\{ \left\{ \sum_{ikt} h^{ik} \left(w_0^{ik} + \sum_{r < t} \left(\sum_{j, s, v} ([\lambda_{srv}^{jik}]_0 - [\lambda_{rsv}^{ijk}]_0) + ON_r^{ik} - OFF_r^{ik} \right) \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \sum_{ikt} (p^{ik} ON_t^{ik} - q^{ik} OFF_t^{ik}) + \sum_{ijktsv} c_{tsv}^{ijk} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_0 \right\} \right. \\
 & \quad \left. + \max_{\zeta \in \mathcal{U}} \left\{ \sum_{ikt} h^{ik} \sum_{r < t} \left(-\zeta_r^{ik} + \sum_{j, s, v} \sum_{f \in \mathcal{F}_s} [\lambda_{srv}^{jik}]_f (\zeta_f^{ik} - \zeta_f^{jk}) - \sum_{j, s, v} \sum_{f \in \mathcal{F}_r} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f (\zeta_f^{jk} - \zeta_f^{ik}) \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \sum_{ijktsv} c_{tsv}^{ijk} \sum_{r \in \mathcal{F}_t} [\lambda_{srv}^{ijk}]_r (\zeta_r^{jk} - \zeta_r^{ik}) \right\} \right\}
 \end{aligned}$$

Las condiciones anteriores son generales, independientes de la forma específica de \mathcal{U} . Su incorporación al modelo puede hacer utilizando el dual del problema de maximización asociado a cada restricción. Sin embargo, por simplicidad, abordaremos el caso donde \mathcal{U} corresponde al producto cartesiano de los intervalos de pertenencia de los parámetros. Dado que $\zeta_t^{ik} \in [\bar{\zeta}_t^{ik} - \hat{\zeta}_t^{ik}, \bar{\zeta}_t^{ik} + \hat{\zeta}_t^{ik}]$, tenemos que $\zeta_t^{ik} = \bar{\zeta}_t^{ik} + \tilde{\zeta}_t^{ik}$, donde $\tilde{\zeta}_t^{ik} \in [-\hat{\zeta}_t^{ik}, \hat{\zeta}_t^{ik}]$. Así, obtenemos las siguientes relaciones

Flujo no negativo

$$\begin{aligned}
 & \max_{\zeta \in \mathcal{U}} \left\{ \sum_{r \in \mathcal{F}_t} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r (\zeta_r^{ik} - \zeta_r^{jk}) \right\} \\
 & = \max_{\zeta \in \mathcal{U}} \left\{ \sum_{r \in \mathcal{F}_t} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r (\bar{\zeta}_r^{ik} + \tilde{\zeta}_r^{ik} - \bar{\zeta}_r^{jk} - \tilde{\zeta}_r^{jk}) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{r \in \mathcal{F}_t} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r (\bar{\zeta}_r^{ik} - \bar{\zeta}_r^{jk}) + \max_{\zeta \in \mathcal{U}} \left\{ \sum_{r \in \mathcal{F}_t} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r (\tilde{\zeta}_r^{ik} - \tilde{\zeta}_r^{jk}) \right\} \\
 &= \sum_{r \in \mathcal{F}_t} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r (\bar{\zeta}_r^{ik} - \bar{\zeta}_r^{jk}) + \sum_{r \in \mathcal{F}_t} \left| [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r \right| (\hat{\zeta}_r^{ik} + \hat{\zeta}_r^{jk})
 \end{aligned}$$

Así, esta restricción queda representada por

$$\begin{aligned}
 \sum_{r \in \mathcal{F}_t} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r (\bar{\zeta}_r^{ik} - \bar{\zeta}_r^{jk}) + \sum_{r \in \mathcal{F}_t} [\mu_{tsv}^{ijk}]_r (\hat{\zeta}_r^{ik} + \hat{\zeta}_r^{jk}) &\leq [\lambda_{tsv}^{ijk}]_0 \\
 -[\mu_{tsv}^{ijk}]_r &\leq [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r \leq [\mu_{tsv}^{ijk}]_r \\
 0 &\leq [\mu_{tsv}^{ijk}]_r
 \end{aligned}$$

Inventario no negativo

$$\begin{aligned}
 &\max_{\zeta \in \mathcal{U}} \left\{ \sum_{r < t} \left(\zeta_r^{ik} - \sum_{j,s,v} \sum_{f \in \mathcal{F}_s} [\lambda_{srv}^{jik}]_f (\zeta_f^{ik} - \zeta_f^{jk}) + \sum_{j,s,v} \sum_{f \in \mathcal{F}_r} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f (\zeta_f^{jk} - \zeta_f^{ik}) \right) \right\} \\
 &= \max_{\zeta \in \mathcal{U}} \left\{ \sum_{r < t} \left(\bar{\zeta}_r^{ik} + \tilde{\zeta}_r^{ik} - \sum_{j,s,v} \sum_{f \in \mathcal{F}_s} [\lambda_{srv}^{jik}]_f (\bar{\zeta}_f^{ik} + \tilde{\zeta}_f^{ik} - \bar{\zeta}_f^{jk} - \tilde{\zeta}_f^{jk}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{j,s,v} \sum_{f \in \mathcal{F}_r} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f (\bar{\zeta}_f^{jk} + \tilde{\zeta}_f^{jk} - \bar{\zeta}_f^{ik} - \tilde{\zeta}_f^{ik}) \right) \right\} \\
 &= \sum_{r < t} \left(\bar{\zeta}_r^{ik} - \sum_{j,s,v} \sum_{f \in \mathcal{F}_s} [\lambda_{srv}^{jik}]_f (\bar{\zeta}_f^{ik} - \bar{\zeta}_f^{jk}) + \sum_{j,s,v} \sum_{f \in \mathcal{F}_r} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f (\bar{\zeta}_f^{jk} - \bar{\zeta}_f^{ik}) \right) \\
 &+ \max_{\zeta \in \mathcal{U}} \left\{ \sum_{r < t} \left(\tilde{\zeta}_r^{ik} - \sum_{j,s,v} \sum_{f \in \mathcal{F}_s} [\lambda_{srv}^{jik}]_f (\tilde{\zeta}_f^{ik} - \tilde{\zeta}_f^{jk}) + \sum_{j,s,v} \sum_{f \in \mathcal{F}_r} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f (\tilde{\zeta}_f^{jk} - \tilde{\zeta}_f^{ik}) \right) \right\}
 \end{aligned}$$

Desarrollamos el argumento a maximizar en la última expresión

$$\begin{aligned}
 &\sum_{r < t} \left(\tilde{\zeta}_r^{ik} - \sum_{j,s,v} \sum_{f \in \mathcal{F}_s} [\lambda_{srv}^{jik}]_f (\tilde{\zeta}_f^{ik} - \tilde{\zeta}_f^{jk}) + \sum_{j,s,v} \sum_{f \in \mathcal{F}_r} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f (\tilde{\zeta}_f^{jk} - \tilde{\zeta}_f^{ik}) \right) \\
 &= \sum_{r < t} \left(\tilde{\zeta}_r^{ik} - \sum_{j,s,v} \sum_{f \in \mathcal{F}_s} [\lambda_{srv}^{jik}]_f \tilde{\zeta}_f^{ik} - \sum_{j,s,v} \sum_{f \in \mathcal{F}_r} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f \tilde{\zeta}_f^{ik} + \sum_{j,s,v} \sum_{f \in \mathcal{F}_s} [\lambda_{srv}^{jik}]_f \tilde{\zeta}_f^{jk} + \sum_{j,s,v} \sum_{f \in \mathcal{F}_r} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f \tilde{\zeta}_f^{jk} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{r < t} \tilde{\zeta}_r^{ik} - \sum_f \sum_{r < t} \sum_{\substack{j,s,v: \\ f \in \mathcal{F}_s}} [\lambda_{srv}^{jik}]_f \tilde{\zeta}_f^{ik} - \sum_f \sum_{r < t} \sum_{\substack{j,s,v \\ f \in \mathcal{F}_r}} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f \tilde{\zeta}_f^{ik} \\
 &\quad + \sum_{f,j} \sum_{r < t} \sum_{\substack{s,v: \\ f \in \mathcal{F}_s}} [\lambda_{srv}^{jik}]_f \tilde{\zeta}_f^{jk} + \sum_{f,j} \sum_{r < t} \sum_{\substack{s,v \\ f \in \mathcal{F}_r}} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f \tilde{\zeta}_f^{jk} \\
 &= \sum_{f < t} \tilde{\zeta}_f^{ik} - \sum_f \tilde{\zeta}_f^{ik} \sum_{r < t} \sum_{\substack{j,s,v: \\ f \in \mathcal{F}_s}} [\lambda_{srv}^{jik}]_f - \sum_f \tilde{\zeta}_f^{ik} \sum_{\substack{r < t: \\ f \in \mathcal{F}_r}} \sum_{j,s,v} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f \\
 &\quad + \sum_{f,j} \tilde{\zeta}_f^{jk} \sum_{r < t} \sum_{\substack{s,v: \\ f \in \mathcal{F}_s}} [\lambda_{srv}^{jik}]_f + \sum_{f,j} \tilde{\zeta}_f^{jk} \sum_{\substack{r < t: \\ f \in \mathcal{F}_r}} \sum_{s,v} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f \\
 &= \sum_{f < t} \tilde{\zeta}_f^{ik} \left(1 - \sum_{r < t} \sum_{\substack{j,s,v: \\ f \in \mathcal{F}_s}} [\lambda_{srv}^{jik}]_f - \sum_{\substack{r < t: \\ f \in \mathcal{F}_r}} \sum_{j,s,v} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f \right) + \sum_{f,j} \tilde{\zeta}_f^{jk} \left(\sum_{r < t} \sum_{\substack{s,v: \\ f \in \mathcal{F}_s}} [\lambda_{srv}^{jik}]_f + \sum_{\substack{r < t: \\ f \in \mathcal{F}_r}} \sum_{s,v} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f \right)
 \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
 &\max_{\zeta \in \mathcal{U}} \left\{ \sum_{r < t} \left(\tilde{\zeta}_r^{ik} - \sum_{j,s,v} \sum_{f \in \mathcal{F}_s} [\lambda_{srv}^{jik}]_f (\tilde{\zeta}_f^{ik} - \tilde{\zeta}_f^{jk}) + \sum_{j,s,v} \sum_{f \in \mathcal{F}_r} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f (\tilde{\zeta}_f^{jk} - \tilde{\zeta}_f^{ik}) \right) \right\} \\
 &= \max_{\zeta \in \mathcal{U}} \left\{ \sum_{f < t} \tilde{\zeta}_f^{ik} \left(1 - \sum_{r < t} \sum_{\substack{j,s,v: \\ f \in \mathcal{F}_s}} [\lambda_{srv}^{jik}]_f - \sum_{\substack{r < t: \\ f \in \mathcal{F}_r}} \sum_{j,s,v} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{f,j} \tilde{\zeta}_f^{jk} \left(\sum_{r < t} \sum_{\substack{s,v: \\ f \in \mathcal{F}_s}} [\lambda_{srv}^{jik}]_f + \sum_{\substack{r < t: \\ f \in \mathcal{F}_r}} \sum_{s,v} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f \right) \right\} \\
 &= \sum_{f < t} \widehat{\zeta}_f^{ik} \left| 1 - \sum_{r < t} \sum_{\substack{j,s,v: \\ f \in \mathcal{F}_s}} [\lambda_{srv}^{jik}]_f - \sum_{\substack{r < t: \\ f \in \mathcal{F}_r}} \sum_{j,s,v} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f \right| + \sum_{f,j} \widehat{\zeta}_f^{jk} \left| \sum_{r < t} \sum_{\substack{s,v: \\ f \in \mathcal{F}_s}} [\lambda_{srv}^{jik}]_f + \sum_{\substack{r < t: \\ f \in \mathcal{F}_r}} \sum_{s,v} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f \right|
 \end{aligned}$$

Luego, esta restricción queda representada por

$$\sum_{r < t} \left(\bar{\zeta}_r^{ik} - \sum_{j,s,v} \sum_{f \in \mathcal{F}_s} [\lambda_{srv}^{jik}]_f (\bar{\zeta}_f^{ik} - \bar{\zeta}_f^{jk}) + \sum_{j,s,v} \sum_{f \in \mathcal{F}_r} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f (\bar{\zeta}_f^{jk} - \bar{\zeta}_f^{ik}) \right) + \sum_{f < t} \widehat{\zeta}_f^{ik} [\alpha_t^{ik}]_f + \sum_{f,j} \widehat{\zeta}_f^{jk} [\beta_t^{ijk}]_f$$

$$\leq w_0^{ik} + \sum_{r < t} \left(\sum_{j,s,v} ([\lambda_{srv}^{jik}]_0 - [\lambda_{rsv}^{ijk}]_0) + ON_r^{ik} - OFF_r^{ik} \right)$$

donde

$$\begin{aligned} -[\alpha_t^{ik}]_f &\leq 1 - \sum_{r < t} \sum_{\substack{j,s,v: \\ f \in \mathcal{F}_s}} [\lambda_{srv}^{jik}]_f - \sum_{r < t} \sum_{\substack{j,s,v \\ f \in \mathcal{F}_r}} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f \leq [\alpha_t^{ik}]_f \\ -[\beta_t^{ijk}]_f &\leq \sum_{r < t} \sum_{\substack{s,v: \\ f \in \mathcal{F}_s}} [\lambda_{srv}^{jik}]_f + \sum_{r < t} \sum_{\substack{s,v \\ f \in \mathcal{F}_r}} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f \leq [\beta_t^{ijk}]_f \\ 0 &\leq [\alpha_t^{ik}]_f \\ 0 &\leq [\beta_t^{ijk}]_f \end{aligned}$$

Capacidad de transporte

$$\begin{aligned} &\max_{\zeta \in \mathcal{U}} \left\{ \sum_k \sum_{(i,t)(j,s) \in \delta_v(e)} Q^k \sum_{r \in \mathcal{F}_t} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r (\zeta_r^{jk} - \zeta_r^{ik}) \right\} \\ &= \max_{\zeta \in \mathcal{U}} \left\{ \sum_k \sum_{(i,t)(j,s) \in \delta_v(e)} Q^k \sum_{r \in \mathcal{F}_t} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r (\bar{\zeta}_r^{jk} + \tilde{\zeta}_r^{jk} - \bar{\zeta}_r^{ik} - \tilde{\zeta}_r^{ik}) \right\} \\ &= \sum_k \sum_{(i,t)(j,s) \in \delta_v(e)} Q^k \sum_{r \in \mathcal{F}_t} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r (\bar{\zeta}_r^{jk} - \bar{\zeta}_r^{ik}) + \max_{\zeta \in \mathcal{U}} \left\{ \sum_k \sum_{(i,t)(j,s) \in \delta_v(e)} Q^k \sum_{r \in \mathcal{F}_t} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r (\tilde{\zeta}_r^{jk} - \tilde{\zeta}_r^{ik}) \right\} \end{aligned}$$

Desarrollamos el argumento a maximizar en la última expresión

$$\begin{aligned} &\sum_k Q^k \sum_{(i,t)(j,s) \in \delta_v(e)} \sum_{r \in \mathcal{F}_t} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r (\tilde{\zeta}_r^{jk} - \tilde{\zeta}_r^{ik}) \\ &= \sum_k Q^k \sum_{j,r} \sum_{\substack{i,t,s: \\ (i,t)(j,s) \in \delta_v(e) \\ r \in \mathcal{F}_t}} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r \tilde{\zeta}_r^{jk} - \sum_k Q^k \sum_{i,r} \sum_{\substack{j,t,s: \\ (i,t)(j,s) \in \delta_v(e) \\ r \in \mathcal{F}_t}} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r \tilde{\zeta}_r^{ik} \\ &= \sum_k Q^k \sum_{i,r} \sum_{\substack{j,t,s: \\ (j,t)(i,s) \in \delta_v(e) \\ r \in \mathcal{F}_t}} [\lambda_{tsv}^{jik}]_r \tilde{\zeta}_r^{ik} - \sum_k Q^k \sum_{i,r} \sum_{\substack{j,t,s: \\ (i,t)(j,s) \in \delta_v(e) \\ r \in \mathcal{F}_t}} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r \tilde{\zeta}_r^{ik} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_k Q^k \sum_{i,r} \tilde{\zeta}_r^{ik} \sum_{\substack{j,t,s: \\ (j,t)(i,s) \in \delta_v(e) \\ r \in F_t}} [\lambda_{tsv}^{jik}]_r - \sum_k Q^k \sum_{i,r} \tilde{\zeta}_r^{ik} \sum_{\substack{j,t,s: \\ (i,t)(j,s) \in \delta_v(e) \\ r \in F_t}} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r \\
 &= \sum_k Q^k \sum_{i,r} \tilde{\zeta}_r^{ik} \left(\sum_{\substack{j,t,s: \\ (j,t)(i,s) \in \delta_v(e) \\ r \in F_t}} [\lambda_{tsv}^{jik}]_r - \sum_{\substack{j,t,s: \\ (i,t)(j,s) \in \delta_v(e) \\ r \in F_t}} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r \right)
 \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
 &\max_{\zeta \in \mathcal{U}} \left\{ \sum_k \sum_{(i,t)(j,s) \in \delta_v(e)} Q^k \sum_{r \in F_t} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r (\tilde{\zeta}_r^{jk} - \tilde{\zeta}_r^{ik}) \right\} \\
 &= \max_{\zeta \in \mathcal{U}} \left\{ \sum_k Q^k \sum_{i,r} \tilde{\zeta}_r^{ik} \left(\sum_{\substack{j,t,s: \\ (j,t)(i,s) \in \delta_v(e) \\ r \in F_t}} [\lambda_{tsv}^{jik}]_r - \sum_{\substack{j,t,s: \\ (i,t)(j,s) \in \delta_v(e) \\ r \in F_t}} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r \right) \right\} \\
 &= \sum_k Q^k \sum_{i,r} \tilde{\zeta}_r^{ik} \left| \sum_{\substack{j,t,s: \\ (j,t)(i,s) \in \delta_v(e) \\ r \in F_t}} [\lambda_{tsv}^{jik}]_r - \sum_{\substack{j,t,s: \\ (i,t)(j,s) \in \delta_v(e) \\ r \in F_t}} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r \right|
 \end{aligned}$$

Entonces, esta restricción es equivalente a

$$\sum_k \sum_{(i,t)(j,s) \in \delta_v(e)} Q^k \sum_{r \in F_t} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r (\tilde{\zeta}_r^{jk} - \tilde{\zeta}_r^{ik}) + \sum_k Q^k \sum_{i,r} \tilde{\zeta}_r^{ik} [\gamma_{ve}^{ik}]_r \leq C_e^v - \sum_k \sum_{(i,t)(j,s) \in \delta_v(e)} Q^k [\lambda_{tsv}^{ijk}]_0$$

donde

$$\begin{aligned}
 -[\gamma_{ve}^{ik}]_r &\leq \sum_{\substack{j,t,s: \\ (j,t)(i,s) \in \delta_v(e) \\ r \in F_t}} [\lambda_{tsv}^{jik}]_r - \sum_{\substack{j,t,s: \\ (i,t)(j,s) \in \delta_v(e) \\ r \in F_t}} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r \leq [\gamma_{ve}^{ik}]_r \\
 0 &\leq [\gamma_{ve}^{ik}]_r
 \end{aligned}$$

Función objetivo

$$\begin{aligned}
 & \max_{\zeta \in \mathcal{U}} \left\{ \sum_{ikt} h^{ik} \sum_{r < t} \left(-\zeta_r^{ik} + \sum_{j,s,v} \sum_{f \in \mathcal{F}_s} [\lambda_{srv}^{jik}]_f (\zeta_f^{ik} - \zeta_f^{jk}) - \sum_{j,s,v} \sum_{f \in \mathcal{F}_r} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f (\zeta_f^{jk} - \zeta_f^{ik}) \right) \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \sum_{ijktsv} c_{tsv}^{ijk} \sum_{f \in \mathcal{F}_t} [\lambda_{srv}^{ijk}]_f (\zeta_f^{jk} - \zeta_f^{ik}) \right\} \\
 & = \sum_{ikt} h^{ik} \sum_{r < t} \left(-\bar{\zeta}_r^{ik} + \sum_{j,s,v} \sum_{f \in \mathcal{F}_s} [\lambda_{srv}^{jik}]_f (\bar{\zeta}_f^{ik} - \bar{\zeta}_f^{jk}) - \sum_{j,s,v} \sum_{f \in \mathcal{F}_r} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f (\bar{\zeta}_f^{jk} - \bar{\zeta}_f^{ik}) \right) \\
 & \qquad \qquad \qquad + \sum_{ijktsv} c_{tsv}^{ijk} \sum_{f \in \mathcal{F}_t} [\lambda_{srv}^{ijk}]_f (\bar{\zeta}_f^{jk} - \bar{\zeta}_f^{ik}) \\
 & + \max_{\zeta \in \mathcal{U}} \left\{ \sum_{ikt} h^{ik} \sum_{r < t} \left(-\tilde{\zeta}_r^{ik} + \sum_{j,s,v} \sum_{f \in \mathcal{F}_s} [\lambda_{srv}^{jik}]_f (\tilde{\zeta}_f^{ik} - \tilde{\zeta}_f^{jk}) - \sum_{j,s,v} \sum_{f \in \mathcal{F}_r} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f (\tilde{\zeta}_f^{jk} - \tilde{\zeta}_f^{ik}) \right) \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \sum_{ijktsv} c_{tsv}^{ijk} \sum_{f \in \mathcal{F}_t} [\lambda_{srv}^{ijk}]_f (\tilde{\zeta}_f^{jk} - \tilde{\zeta}_f^{ik}) \right\}
 \end{aligned}$$

Desarrollamos la primera línea en el argumento a maximizar

$$\begin{aligned}
 & \sum_{ikt} h^{ik} \sum_{r < t} \left(-\tilde{\zeta}_r^{ik} + \sum_{j,s,v} \sum_{f \in \mathcal{F}_s} [\lambda_{srv}^{jik}]_f (\tilde{\zeta}_f^{ik} - \tilde{\zeta}_f^{jk}) - \sum_{j,s,v} \sum_{f \in \mathcal{F}_r} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f (\tilde{\zeta}_f^{jk} - \tilde{\zeta}_f^{ik}) \right) \\
 & = \sum_{ikt} h^{ik} \left(\sum_{f < t} \tilde{\zeta}_f^{ik} \left(1 - \sum_{r < t} \sum_{\substack{j,s,v: \\ f \in \mathcal{F}_s}} [\lambda_{srv}^{jik}]_f - \sum_{\substack{r < t: \\ f \in \mathcal{F}_r}} \sum_{j,s,v} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f \right) \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \sum_{f,j} \tilde{\zeta}_f^{jk} \left(\sum_{r < t} \sum_{\substack{s,v: \\ f \in \mathcal{F}_s}} [\lambda_{srv}^{jik}]_f + \sum_{\substack{r < t: \\ f \in \mathcal{F}_r}} \sum_{s,v} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{ikf} \left(\sum_{t>f} \tilde{\zeta}_f^{ik} h^{ik} \left(1 - \sum_{r<t} \sum_{\substack{j,s,v: \\ f \in \mathcal{F}_s}} [\lambda_{srv}^{jik}]_f - \sum_{r<t} \sum_{\substack{j,s,v \\ f \in \mathcal{F}_r}} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{t,j} \tilde{\zeta}_f^{jk} h^{ik} \left(\sum_{r<t} \sum_{\substack{s,v: \\ f \in \mathcal{F}_s}} [\lambda_{srv}^{jik}]_f + \sum_{r<t} \sum_{\substack{s,v \\ f \in \mathcal{F}_r}} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f \right) \right) \\
 &= \sum_{ikf} \tilde{\zeta}_f^{ik} \sum_{t>f} h^{ik} \left(1 - \sum_{r<t} \sum_{\substack{j,s,v: \\ f \in \mathcal{F}_s}} [\lambda_{srv}^{jik}]_f - \sum_{r<t} \sum_{\substack{j,s,v \\ f \in \mathcal{F}_r}} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f \right) \\
 &\quad + \sum_{ikf} \sum_{t,j} \tilde{\zeta}_f^{jk} h^{ik} \left(\sum_{r<t} \sum_{\substack{s,v: \\ f \in \mathcal{F}_s}} [\lambda_{srv}^{jik}]_f + \sum_{r<t} \sum_{\substack{s,v \\ f \in \mathcal{F}_r}} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f \right) \\
 &= \sum_{ikf} \tilde{\zeta}_f^{ik} \sum_{t>f} h^{ik} \left(1 - \sum_{r<t} \sum_{\substack{j,s,v: \\ f \in \mathcal{F}_s}} [\lambda_{srv}^{jik}]_f - \sum_{r<t} \sum_{\substack{j,s,v \\ f \in \mathcal{F}_r}} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f \right) \\
 &\quad + \sum_{jkf} \tilde{\zeta}_f^{jk} \sum_{t,i} h^{ik} \left(\sum_{r<t} \sum_{\substack{s,v: \\ f \in \mathcal{F}_s}} [\lambda_{srv}^{jik}]_f + \sum_{r<t} \sum_{\substack{s,v \\ f \in \mathcal{F}_r}} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f \right) \\
 &= \sum_{ikf} \tilde{\zeta}_f^{ik} \sum_{t>f} h^{ik} \left(1 - \sum_{r<t} \sum_{\substack{j,s,v: \\ f \in \mathcal{F}_s}} [\lambda_{srv}^{jik}]_f - \sum_{r<t} \sum_{\substack{j,s,v \\ f \in \mathcal{F}_r}} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f \right) \\
 &\quad + \sum_{ikf} \tilde{\zeta}_f^{ik} \sum_{t,j} h_t^{jk} \left(\sum_{r<t} \sum_{\substack{s,v: \\ f \in \mathcal{F}_s}} [\lambda_{srv}^{ijk}]_f + \sum_{r<t} \sum_{\substack{s,v \\ f \in \mathcal{F}_r}} [\lambda_{rsv}^{jik}]_f \right) \\
 &= \sum_{ikf} \tilde{\zeta}_f^{ik} \left(\sum_{t>f} h^{ik} \left(1 - \sum_{r<t} \sum_{\substack{j,s,v: \\ f \in \mathcal{F}_s}} [\lambda_{srv}^{jik}]_f - \sum_{r<t} \sum_{\substack{j,s,v \\ f \in \mathcal{F}_r}} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{t,j} h_t^{jk} \left(\sum_{r<t} \sum_{\substack{s,v: \\ f \in \mathcal{F}_s}} [\lambda_{srv}^{ijk}]_f + \sum_{r<t} \sum_{\substack{s,v \\ f \in \mathcal{F}_r}} [\lambda_{rsv}^{jik}]_f \right) \right)
 \end{aligned}$$

Desarrollamos la segunda línea en el argumento a maximizar

$$\begin{aligned}
 & \sum_{ijktsv} c_{tsv}^{ijk} \sum_{f \in \mathcal{F}_t} [\lambda_{srv}^{ijk}]_f (\tilde{\zeta}_f^{jk} - \tilde{\zeta}_f^{ik}) \\
 &= \sum_{ijktsv} c_{tsv}^{ijk} \sum_{f \in \mathcal{F}_t} [\lambda_{srv}^{ijk}]_f \tilde{\zeta}_f^{jk} - \sum_{ijktsv} c_{tsv}^{ijk} \sum_{f \in \mathcal{F}_t} [\lambda_{srv}^{ijk}]_f \tilde{\zeta}_f^{ik} \\
 &= \sum_{ijktsv} c_{tsv}^{jik} \sum_{f \in \mathcal{F}_t} [\lambda_{srv}^{jik}]_f \tilde{\zeta}_f^{ik} - \sum_{ijktsv} c_{tsv}^{ijk} \sum_{f \in \mathcal{F}_t} [\lambda_{srv}^{ijk}]_f \tilde{\zeta}_f^{ik} \\
 &= \sum_{ikf} \tilde{\zeta}_f^{ik} \sum_{\substack{j,t,s,v: \\ f \in \mathcal{F}_t}} c_{tsv}^{jik} [\lambda_{srv}^{jik}]_f - \sum_{ikf} \tilde{\zeta}_f^{ik} \sum_{\substack{j,t,s,v: \\ f \in \mathcal{F}_t}} c_{tsv}^{ijk} [\lambda_{srv}^{ijk}]_f \\
 &= \sum_{ikf} \tilde{\zeta}_f^{ik} \left(\sum_{\substack{j,t,s,v: \\ f \in \mathcal{F}_t}} c_{tsv}^{jik} [\lambda_{srv}^{jik}]_f - \sum_{\substack{j,t,s,v: \\ f \in \mathcal{F}_t}} c_{tsv}^{ijk} [\lambda_{srv}^{ijk}]_f \right)
 \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
 & \max_{\zeta \in \mathcal{U}} \left\{ \sum_{ikt} h^{ik} \sum_{r < t} \left(-\tilde{\zeta}_r^{ik} + \sum_{j,s,v} \sum_{f \in \mathcal{F}_s} [\lambda_{srv}^{jik}]_f (\tilde{\zeta}_f^{ik} - \tilde{\zeta}_f^{jk}) - \sum_{j,s,v} \sum_{f \in \mathcal{F}_r} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f (\tilde{\zeta}_f^{jk} - \tilde{\zeta}_f^{ik}) \right) \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{ijktsv} c_{tsv}^{ijk} \sum_{r \in \mathcal{F}_t} [\lambda_{srv}^{ijk}]_f (\tilde{\zeta}_f^{jk} - \tilde{\zeta}_f^{ik}) \right\} \\
 &= \max_{\zeta \in \mathcal{U}} \left\{ \sum_{ikf} \tilde{\zeta}_f^{ik} \left(\sum_{t > f} h^{ik} \left(1 - \sum_{r < t} \sum_{\substack{j,s,v: \\ f \in \mathcal{F}_s}} [\lambda_{srv}^{jik}]_f - \sum_{\substack{r < t: \\ f \in \mathcal{F}_r}} \sum_{j,s,v} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \sum_{t,j} h_t^{jk} \left(\sum_{r < t} \sum_{\substack{s,v: \\ f \in \mathcal{F}_s}} [\lambda_{srv}^{ijk}]_f + \sum_{\substack{r < t: \\ f \in \mathcal{F}_r}} \sum_{s,v} [\lambda_{rsv}^{jik}]_f \right) \right) \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{ikf} \tilde{\zeta}_f^{ik} \left(\sum_{\substack{j,t,s,v: \\ f \in \mathcal{F}_t}} c_{tsv}^{jik} [\lambda_{srv}^{jik}]_f - \sum_{\substack{j,t,s,v: \\ f \in \mathcal{F}_t}} c_{tsv}^{ijk} [\lambda_{srv}^{ijk}]_f \right) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \max_{\zeta \in \mathcal{U}} \left\{ \sum_{ikf} \tilde{\zeta}_f^{ik} \left(\sum_{t>f} h^{ik} \left(1 - \sum_{r<t} \sum_{\substack{j,s,v: \\ f \in \mathcal{F}_s}} [\lambda_{srv}^{jik}]_f - \sum_{r<t} \sum_{\substack{j,s,v \\ f \in \mathcal{F}_r}} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f \right) \right. \right. \\
 &+ \left. \sum_{t,j} h_t^{jk} \left(\sum_{r<t} \sum_{\substack{s,v: \\ f \in \mathcal{F}_s}} [\lambda_{srv}^{ijk}]_f + \sum_{r<t} \sum_{\substack{s,v \\ f \in \mathcal{F}_r}} [\lambda_{rsv}^{jik}]_f \right) + \sum_{\substack{j,t,s,v: \\ f \in \mathcal{F}_t}} c_{tsv}^{jik} [\lambda_{srv}^{jik}]_f - \sum_{\substack{j,t,s,v: \\ f \in \mathcal{F}_t}} c_{tsv}^{ijk} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f \right) \left. \right\} \\
 &= \sum_{ikf} \widehat{\zeta}_f^{ik} \left| \sum_{t>f} h^{ik} \left(1 - \sum_{r<t} \sum_{\substack{j,s,v: \\ f \in \mathcal{F}_s}} [\lambda_{srv}^{jik}]_f - \sum_{r<t} \sum_{\substack{j,s,v \\ f \in \mathcal{F}_r}} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f \right) \right. \\
 &+ \left. \sum_{t,j} h_t^{jk} \left(\sum_{r<t} \sum_{\substack{s,v: \\ f \in \mathcal{F}_s}} [\lambda_{srv}^{ijk}]_f + \sum_{r<t} \sum_{\substack{s,v \\ f \in \mathcal{F}_r}} [\lambda_{rsv}^{jik}]_f \right) + \sum_{\substack{j,t,s,v: \\ f \in \mathcal{F}_t}} c_{tsv}^{jik} [\lambda_{srv}^{jik}]_f - \sum_{\substack{j,t,s,v: \\ f \in \mathcal{F}_t}} c_{tsv}^{ijk} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f \right|
 \end{aligned}$$

Finalmente la función objetivo equivale a

$$\begin{aligned}
 \min \left\{ \sum_{ikt} h^{ik} \sum_{r<t} \left(-\bar{\zeta}_r^{ik} + \sum_{j,s,v} [\lambda_{srv}^{jik}]_f (\bar{\zeta}_f^{ik} - \bar{\zeta}_f^{jk}) - \sum_{j,s,v} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f (\bar{\zeta}_f^{jk} - \bar{\zeta}_f^{ik}) \right) \right. \\
 \left. + \sum_{ijktsv} c_{tsv}^{ijk} \sum_{f \in \mathcal{F}_t} [\lambda_{srv}^{ijk}]_f (\bar{\zeta}_f^{jk} - \bar{\zeta}_f^{ik}) + \sum_{ikf} \widehat{\zeta}_f^{ik} [\nu_f^{ik}] \right\}
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 -[\nu_f^{ik}] &\leq \sum_{t>f} h^{ik} \left(1 - \sum_{r<t} \sum_{\substack{j,s,v: \\ f \in \mathcal{F}_s}} [\lambda_{srv}^{jik}]_f - \sum_{r<t} \sum_{\substack{j,s,v \\ f \in \mathcal{F}_r}} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f \right) \\
 + \sum_{t,j} h_t^{jk} &\left(\sum_{r<t} \sum_{\substack{s,v: \\ f \in \mathcal{F}_s}} [\lambda_{srv}^{ijk}]_f + \sum_{r<t} \sum_{\substack{s,v \\ f \in \mathcal{F}_r}} [\lambda_{rsv}^{jik}]_f \right) + \sum_{\substack{j,t,s,v: \\ f \in \mathcal{F}_t}} c_{tsv}^{jik} [\lambda_{srv}^{jik}]_f - \sum_{\substack{j,t,s,v: \\ f \in \mathcal{F}_t}} c_{tsv}^{ijk} [\lambda_{rsv}^{ijk}]_f \leq [\nu_f^{ik}] \\
 0 &\leq [\nu_f^{ik}]
 \end{aligned}$$

□

Observaciones

- En general, la cantidad de caminos en un grafo es exponencial en la cantidad de arcos de él, por lo que una formulación por caminos requiere el uso de muchas más variables que una formulación por arcos. Sin embargo, primero se debe notar que los caminos simples maximales corresponden a las rutas completas de las naves. Además, si los costos de transporte y de inventario cumplen una relación similar a la usada para derivar (P_2) en el Capítulo 3, en optimalidad muchos de los posibles arcos tendrán flujo nulo. Luego, mediante un preprocesamiento adecuado, es posible eliminar subrutas y variables con estas características, reduciendo el tamaño del problema.
- La formulación anterior no es eficiente desde el punto de vista de la implementación, puesto que algunas restricciones (como las que definen implícitamente el nivel de inventario) incluyen sumas parciales que crecen notablemente con los períodos, haciendo que el modelo requiera de una gran cantidad de memoria. Por lo tanto, es recomendable la incorporación de variables adicionales definidas por recursión para evitar este problema.
- Dado que $\mathcal{F}_t = \{t - F, \dots, t - 1\}$, si un vector es factible para un valor F dado, entonces será factible para $F' \geq F$. En particular, el valor óptimo de la función objetivo mejora a medida que F crece. Más aún, si $F = 0$, entonces recuperamos el modelo robusto no ajustable.
- La observación anterior permite obtener la solución óptima para F fijo mediante una secuencia de soluciones factibles para $F' \leq F$.

4.3. Experimentos numéricos

Como se puede ver a partir de la formulación, el modelo ajustable es notablemente más grande que el modelo robusto estático, induciendo mayores requerimientos de memoria y tiempo para su solución. Por esta razón, para los experimentos numéricos usaremos conjuntos de datos reducidos a partir de una instancia de tamaño real. En particular, consideraremos $16 \leq |\mathcal{I}| \leq 144$, $120 \leq |\mathcal{T}| \leq 150$ y $|\mathcal{K}| = 1$, donde las localidades elegidas corresponden a las de mayor actividad para la compañía.

4.3.1. Resultados nominales

En esta parte comparamos el valor objetivo del modelo robusto estático con el valor objetivo del modelo ajustable para las distintas instancias y para distintos valores de F . En estas pruebas hemos fijado el nivel de incertidumbre a un 20% en relación al valor nominal de demanda y retorno.

\mathcal{I}	\mathcal{T}	F		
		7	14	21
16	120	-10.15 %	-15.50 %	-18.36 %
	150	-13.85 %	-21.66 %	-25.47 %
35	120	-11.79 %	-15.53 %	-17.37 %
	150	-17.94 %	-22.45 %	-24.52 %
56	120	-10.50 %	-13.44 %	-15.08 %
	150	-17.65 %	-20.57 %	-21.45 %
76	120	-9.38 %	-11.93 %	-13.38 %
	150	-15.95 %	-18.50 %	-19.28 %
103	120	-8.32 %	-10.52 %	-11.78 %
	150	-14.71 %	-16.49 %	-17.19 %
144	120	-6.78 %	-8.61 %	-9.61 %
	150	-11.37 %	-12.83 %	-13.32 %

Cuadro 4.1: Resultados nominales para el modelo robusto ajustable.

La primera y segunda columnas indican la cantidad de localidades y períodos considerados en cada instancia, respectivamente. Las columnas restantes indican la cantidad de períodos de ajuste F para el control lineal del modelo. En este caso probamos con $F \in \{7, 14, 21\}$. Finalmente, el valor de cada celda indica el porcentaje de cambio del valor objetivo de la solución ajustable respecto al valor objetivo de la solución estática, la cual equivale a fijar $F = 0$.

Lo primero que vemos es que en todas las instancias la solución ajustable disminuye notablemente el costo del peor escenario respecto a la solución estática. En nuestras pruebas, esta disminución oscila entre un 6% y 25%. Ahora es importante analizar la relación de esta mejora con los parámetros que definen las instancias.

En primer lugar, y como era de esperar, a medida que aumentamos la cantidad de períodos de ajuste F , mayor es la mejora de la solución ajustable. Sin embargo, hay un momento en que el aumento de F no repercute mayormente en el valor objetivo de la instancia, por lo que a partir de ese punto la mejora es marginal respecto al esfuerzo computacional requerido.

De forma similar, vemos que al aumentar la cantidad de períodos de la instancia el nivel de mejora también aumenta. Esto se debe principalmente a que las soluciones estáticas tienden a ser sobreprotectoras a medida que avanzamos en el horizonte de tiempo, puesto que la variabilidad en un período dado depende de la variabilidad de todos los períodos anteriores (similar al efecto látigo, donde una perturbación en un extremo se amplifica en el otro). Por su parte, las soluciones ajustables ayudan a atenuar este efecto y no requieren un nivel de sobreprotección tan alto, lo que produce mayor diferencia con el valor objetivo de la solución estática.

Por otro lado, el efecto del número de localidades consideradas es un poco menos claro. Vemos que al pasar de 16 a 35 localidades el nivel de mejora aumenta, mientras que en el resto de los casos la mejora es menor a medida que el número de localidades aumenta. Esta segunda situación puede deberse a la naturaleza de las localidades añadidas. Como dijimos en un principio, las localidades consideradas se fueron agregando según el nivel de actividad que se produce en ellas. En particular, localidades con menos actividad tienen menor nivel de demanda y retorno, cantidades pronosticadas menores y menor variabilidad, además de tener menos conexiones en la red de transporte de la compañía. Por esta razón, a medida que agregamos localidades a la instancia, agregamos ubicaciones que no se benefician tanto de un modelo ajustable, y por lo tanto no muestran los niveles de mejora exhibidos por instancias más pequeñas. De todas formas, una disminución sobre el 10% en el valor objetivo no deja de ser importante teniendo en cuenta el volumen de variables involucradas.

En resumen, podemos ver que las soluciones ajustables disminuyen sustancialmente la cota para el costo del peor caso, y que esta mejora es mayor cuando ampliamos el horizonte de planificación y aumentamos la cantidad de períodos de ajuste.

4.3.2. Desfase de información

En esta parte investigamos el efecto del desfase de la información al momento de hacer nuestras variables ajustables. En nuestro modelo ajustable hemos considerado \mathcal{F}_t de la forma $\mathcal{F}_t = \{t - F, \dots, t - 1\}$, es decir, usamos la información de los F períodos inmediatamente anteriores a t . Sin embargo, podríamos considerar la situación donde los D períodos inmediatamente anteriores a t no son tomados en cuenta, es decir, donde hay un desfase de D períodos en el ajuste. En este caso \mathcal{F}_t toma la forma $\mathcal{F}_t = \{t - D - F, \dots, t - D\}$. En esta sección, resolvemos el problema ajustable para $D \in \{0, 7, 14\}$, donde $D = 0$ corresponde a la situación original sin desfase.

Como antes, $|\mathcal{I}|$ y $|\mathcal{T}|$ indican la cantidad de localidades y períodos considerados, respectivamente. La tercera columna indica la cantidad de períodos de desfase la momento

$ \mathcal{I} $	$ \mathcal{T} $	D	F		
			7	14	21
16	120	0	-10.15 %	-15.50 %	-18.36 %
		7	-12.75 %	-16.07 %	-16.54 %
		14	-11.59 %	-12.96 %	-13.56 %
	150	0	-13.85 %	-21.66 %	-25.47 %
		7	-18.59 %	-23.13 %	-23.67 %
		14	-18.86 %	-20.19 %	-20.61 %
56	120	0	-10.50 %	-13.44 %	-15.08 %
		7	-10.16 %	-12.67 %	-13.26 %
		14	-9.00 %	-10.69 %	-11.29 %
	150	0	-17.65 %	-20.57 %	-21.45 %
		7	-17.37 %	-19.36 %	-19.57 %
		14	-16.28 %	-17.23 %	-16.28 %

Cuadro 4.2: Resultados nominales de modelo robusto ajustable con desfase de información.

de decidir una variable ajustable. Las columnas restantes indican la cantidad de períodos de ajuste. Las celdas indican el porcentaje de variación de la solución ajustable dados F y D respecto a la solución estática.

Vemos que los resultados no siguen un patrón determinado. Lo natural hubiese sido suponer que el desfase de información hubiese elevado el valor de la función objetivo en cada instancia. Sin embargo, esto no sucede cuando $|\mathcal{I}| = 16$. En este caso, cuando $F = 7$ o $F = 14$, la existencia de desfase produce una reducción en el valor de la función objetivo. En el resto de las instancias la situación es como se esperaba al principio, es decir, donde el desfase de información disminuye la mejora debida a la ajustabilidad de las variables.

4.3.3. Simulaciones

En esta parte simulamos los costos finales con dos formas de operación. En la primera, la planificación es determinada al inicio del horizonte y se mantiene a través de él sin dar lugar a reoptimizaciones intermedias. En la segunda, la planificación inicial es aplicada sólo a los primeros S períodos, luego de los cuales se observan las realizaciones y se reoptimiza la planificación dados estos eventos, siendo este mecanismo el más cercano a la operación real.

Simulaciones sin reoptimizaciones intermedias

Para cada instancia, resolvemos el problema y obtenemos la solución óptima. Luego, generamos 1000 trayectorias de demanda y retorno, donde cada parámetro es generado según una distribución uniforme en su intervalo de pertenencia y de forma independiente del resto. Para cada trayectoria, calculamos el costo asociado dada la solución encontrada inicialmente, con lo que estimamos la media y desviación estándar.

$ \mathcal{I} $	$ \mathcal{T} $	F	Media	Variación	Desviación
16	120	0	603400	0.00 %	12735
		7	577025	-4.3 %	8597
		14	554525	-8.09 %	6178
		21	539006	-10.67 %	5283
	150	0	656825	0.00 %	18702
		7	609309	-7.23 %	12297
		14	572808	-12.79 %	8474
		21	553334	-15.75 %	6229
56	120	0	1377808	0.00 %	15209
		7	1306943	-5.14 %	8953
		14	1280617	-7.05 %	6342
		21	1261007	-8.47 %	5704
	150	0	1484521	0.00 %	21490
		7	1346259	-9.31 %	10712
		14	1312749	-11.57 %	7101
		21	1295506	-12.73 %	7209
103	120	0	1821099	0.00 %	15961
		7	1750008	-3.90 %	8905
		14	1724534	-5.30 %	6214
		21	1704727	-6.39 %	5693
	150	0	1928388	0.00 %	20879
		7	1785268	-7.42 %	8229
		14	1756105	-8.93 %	7230
		21	1738744	-9.83 %	7281

Cuadro 4.3: Resultados de simulaciones sin reoptimizaciones intermedias.

En esta tabla la primera columna indica la cantidad de localidades consideradas, la segunda indica el largo del horizonte y la tercera la cantidad de períodos de ajuste. La cuarta columna indica el costo promedio de las simulaciones, la quinta la variación porcentual respecto al caso estático ($F = 0$) y la sexta la desviación estándar.

Como podemos apreciar, existen diferencias entre un 4 % y 15 % entre el costo promedio

de una solución estática y una solución ajustable. Sin embargo, estas diferencias son menores a las obtenidas al comparar los valores de las funciones objetivo de los modelos presentadas en la tabla anterior. En este punto, hay que recordar que el valor de la función objetivo corresponde al costo del peor caso posible, situación que puede ser muy rara y de baja probabilidad de ocurrencia.

Ahora, al igual que el caso nominal, vemos que el costo disminuye a medida que aumenta F . Nuevamente, esta es una situación esperable dada la interpretación de F como la cantidad de períodos tomamos en cuenta al momento de ajustar y decidir una variable. También es interesante notar que, en general, la desviación estándar del costo también disminuye a medida que F aumenta. De esta forma, podemos decir que la ajustabilidad de las variables permite contrarrestar parcialmente la variabilidad de los parámetros inciertos, siendo esto una característica importante al momento de implementar las decisiones.

Simulaciones con reoptimizaciones y horizonte móvil

Como prueba final, realizamos la siguiente serie de experimentos. Primero fijamos $S \in \mathbb{N}$. Para cada instancia resolvemos el problema ajustable para $t \in \{1, \dots, |T| - 1\}$, obteniendo la solución óptima correspondiente. Con esta solución, fijamos las variables asociadas a $t < S$, generamos una trayectoria de demanda y retorno para $t < S$, obteniendo entonces una nueva situación inicial de inventario y movimientos en curso. Finalmente, dado este punto de partida, resolvemos el problema para $t \in \{S + 1, \dots, S + |T| - 1\}$.

En nuestros experimentos, utilizamos $S \in \{7, 14, 28\}$, avanzando un total de 56 períodos en el horizonte y realizando 100 simulaciones para cada instancia.

$ \mathcal{I} $	$ T $	S	F	Media	Variación	Desviación
16	120	7	0	572678	0.00 %	565
			7	547529	-4.39 %	1199
			14	538763	-5.92 %	962
			21	531402	-7.20 %	773
		14	0	577122	0.00 %	1278
			7	547915	-5.06 %	2147
			14	547794	-5.08 %	2210
			21	540664	-6.31 %	2253
		28	0	587253	0.00 %	2972
			7	572695	-2.47 %	3944
			14	572990	-2.48 %	4780
			21	564498	-3.87 %	5694

Cuadro 4.4: Resultados de simulaciones con reoptimizaciones y horizonte móvil.

Como siempre, la primera y segunda columna indican la cantidad de localidades y períodos, respectivamente. La tercera columna indica la cantidad de períodos antes de reoptimizar y extender el horizonte. La cuarta columna indica el número de períodos de ajuste. Finalmente, la quinta columna indica el costo promedio de las simulaciones, la sexta la variación porcentual respecto al caso estático ($F = 0$) y la séptima la desviación estándar.

En esta pruebas vemos que la incorporación de ajustabilidad ($F > 0$) disminuye el costo promedio en las simulaciones entre un 2% y 7%. Como era de esperar, cuando mayor es F , mayor es la diferencia con el caso no ajustable. Diferente es la situación de la desviación estándar, pues no presenta un patrón claro de comportamiento respecto a F .

La incidencia de S también está dentro de lo esperado. Reoptimizaciones más frecuentes producen mayores disminuciones en el costo promedio, y el mismo fenómeno se presenta con la desviación estándar.

4.4. Conclusiones

En esta sección hemos propuesto un modelo robusto ajustable para el manejo de contenedores. La gran ventaja de un modelo de este tipo radica en la incorporación de información a medida que ella se revela.

La propuesta supone una relación lineal entre el número de contenedores a embarcar y el nivel de demanda y retorno en los puntos de origen y destino. Además, la formulación propuesta permite estudiar la incidencia de la cantidad de información y su disponibilidad inmediata o retrasada, lo cual captura elementos presentes en la operación real.

Los experimentos indican que se puede conseguir una disminución de costos significativa, tanto en el problema nominal como en las simulaciones. Como es de esperar, a mayor información disponible, mejor es la capacidad de respuesta y menores son los costos alcanzados. A cambio de esto, el problema crece considerablemente, debiéndose limitar las instancias para las pruebas.

Ahora, dada una solución ajustable para una instancia del problema y una trayectoria de demanda, es muy poco probable que los flujos resultantes de la ajustabilidad resulten ser números enteros. Cabe entonces preguntarnos qué hacer para obtener una solución aproximada cuando imponemos restricciones de integralidad. Una alternativa simple es redondear en algún sentido, es decir, transformar nuestra regla lineal en una regla constante por pedazos. Más aún, una posible elección es tomar el cajón inferior de la variable ajustada, es decir, considerar los flujos de la forma

$$Y_{tsv}^{ijk} = \left[[\lambda_{tsv}^{ijk}]_0 + \sum_{r \in \mathcal{F}_t} [\lambda_{tsv}^{ijk}]_r (\zeta_r^{jk} - \zeta_r^{ik}) \right]$$

Notar que el modelo ajustable asegura que este tipo de redondeo mantenga la no negatividad de las variables ajustadas y que se respete la capacidad de transporte. Sin embargo, no se asegura que el inventario sea no negativo, puesto que eventualmente podríamos estar enviando hacia una localidad menos contenedores que los necesita en un período dado. También se tiene que el valor de la función objetivo deja de ser una cota exacta para el costo de la peor instancia. Este hecho extiende la línea de trabajo hacia la incorporación de integralidad de flujos.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo nos hemos enfocado en la optimización del movimiento de contenedores vacíos en una empresa naviera, tanto en su versión determinista como en un ambiente bajo incertidumbre.

En una primera etapa, presentamos una relajación del problema con variables enteras donde se eliminan un número significativo de variables binarias, resultando un problema considerablemente más fácil de resolver, pero que tiene la particularidad de rescatar la solución óptima del problema original. En la práctica, este modelo disminuye considerablemente los tiempos de cálculo, y más aún, permite resolver instancias que estaban más allá de la capacidad del sistema de prueba con el modelo original.

En una segunda parte, presentamos modelos robustos en los ambientes donde existe incertidumbre en los niveles de demanda y retorno de contenedores, y en los tiempos de viaje de las naves. En todos los casos, los problemas resultantes corresponden a versiones modificadas del problema original, lo cual en particular no implica un aumento en la complejidad de su resolución.

Finalmente, como tercer paso presentamos un modelo ajustable para el caso donde la demanda y retorno son inciertos. Proponemos un modelo para la relajación lineal de este problema, donde derivamos un control lineal que depende de la información de períodos pasados y que permite ajustar las variables a los eventos que las anteceden. Mostramos que este esquema es aplicable a versiones reducidas de instancias reales.

Una extensión interesante de este trabajo es la obtención de reglas ajustables para el problema con variables enteras con otros modelos de incertidumbre y garantías para la probabilidad de violación de restricciones. En efecto, podemos entender que un modelo ajustable es un modelo cuya matriz es aleatoria, pero donde los coeficientes de ella están relacionados por las restricciones de factibilidad del control lineal para toda realización de los parámetros en el conjunto de incertidumbre. En particular, a este nuevo problema

podríamos aplicarle el modelo de incertidumbre utilizado en la segunda parte de este trabajo, donde se acota el número de parámetros que pueden alcanzar su desviación máxima, obteniendo a su vez un nuevo modelo, pero que presenta garantías de factibilidad en el caso en que el número de coeficiente inciertos excede la cota impuesta previamente. Es posible pensar que este modelo podría disminuir aún más el costo del peor escenario, a cambio de eventualmente sacrificar factibilidad en algunas de las instancias.

Bibliografía

- [1] ALONSO-AYUSO, A., ESCUDERO, L., ORTUÑO, M. BFC, A branch-and-fix coordination algorithmic framework for solving some types of stochastic pure and mixed 0-1 programs. Discrete Optimization, 151(3):503-519, Diciembre 2003.
- [2] ATAMTURK, A. y ZHANG, M. Two-stage robust network flow and design under demand uncertainty. Operations Research, 55(4):662-673, Julio 2007.
- [3] BEALE, E. On minimizing a convex function subject to linear inequalities. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 17(2):173-184, 1955.
- [4] BEN-TAL, A. y NEMIROVSKI, A. Robust Convex Optimization. Mathematics of Operations Research, 23(4):769-805, Noviembre 1998.
- [5] BEN-TAL, A. y NEMIROVSKI, A. Robust solutions of linear programming programs contaminated with uncertain data. Mathematical Programming, 88.
- [6] BEN-TAL, A. y NEMIROVSKI, A. Robust solutions to uncertain linear programs. Operations Research Letters, 25(1):1-13, Agosto 1999.
- [7] BEN-TAL, A., GOLANY, B., NEMIROVSKI, A., VIAL, J. Supplier-retailer flexible commitments contracts: A robust optimization approach. Manufacturing and Service Operations Management, 7(3):248-271, 2005.
- [8] BEN-TAL, A., GORYASHKO, A., GUSLITZER, E., NEMIROVSKI, A. Adjustable robust solutions of uncertain linear programs. Mathematical Programming, 99(2):351-376, Marzo 2004.
- [9] BERTSIMAS, D., PACHAMANOVA, D., SIM, M. Robust linear optimization under general norms. Operations Research Letters, 32(6):510-516, noviembre 2004.
- [10] BERTSIMAS, D. y SIM, M. Robust discrete optimization and network flows. Mathematical Programming, 98(1-3):49-71, Septiembre 2003.

- [11] BERTSIMAS, D. y SIM, M. The price of robustness. Operations Research, 52(1):35-53, Enero 2004.
- [12] BERTSIMAS, D. y THIELE, A. A robust optimization approach to inventory theory. Operations Research, 54(1):150-168, Enero 2006.
- [13] BIENSTOCK, D. y OZBAY, N. Computing robust basestock levels. Discrete Optimization, 5(2):389-414, Mayo 2008.
- [14] BIRGE, J. y LOUVEAUX, F. Introduction to stochastic programming. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, 2000.
- [15] CARVALHO, T. y POWELL, W. Real-time optimization of containers and flatcars for intermodal operations. Transportation Science, 32(2):110-126, Mayo 1998.
- [16] CHARNES, A. y COOPER, W. Chance-constrained programming. Management Science, 6(1):73-79, Octubre 1959.
- [17] CHEN, X., SIM, M. SUN, P. A robust optimization perspective on stochastic programming. Operations Research, 55(6):1058-1071, Noviembre 2007.
- [18] CHEUNG, R. y POWELL, W. Models and algorithms for distribution problems with uncertain demands. Transportation Science, 30(1):43-59, Febrero 1996.
- [19] CRAINIC, T., GENDREAU, M., DEJAX, P. Dynamic and stochastic models for the allocation of empty containers. Operations Research, 41(1):102-126, Enero 1993.
- [20] CRAINIC, T. y DEJAX, P. A review of empty flows and fleet management models in freight transportation. Transportation Science, 21(4):227-248, Noviembre 1987.
- [21] CSAV GROUP. Comunicaciones personales, 2007-2008.
- [22] DANTZIG, G. Linear programming under uncertainty. Management Science, 1(3-4):197-206, 1955.
- [23] EDORGAN, E. y IYENGAR, G. Ambiguous chance constrained problems and robust optimization. Mathematical Programming, 107(1-2):37-61, Junio 2006.
- [24] EL-GHAOU, L. y LEBRET, H. Robust solutions to least-square problems to uncertain data matrices. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 18(4):1035-1064, 1997

- [25] EL-GHAOUI, L., OUSTRY F., LEBRET, H. Robust solutions to uncertain semidefinite programs. SIAM Journal on Optimization, 9:33-52, 1998.
- [26] GOLDFARB, D. y IYENGAR, G. Robust portfolio selection problems. Mathematics of Operations Research, 28(1):1-38, Febrero 2003.
- [27] KOUVELIS, P. y YU, G. Robust discrete optimization and its applications. Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [28] ERERA, A., MORALES, J., SAVELSBERGH, M. Robust Optimization for empty repositioning problems. Operations Research, 57(2):468-483, Marzo 2009.
- [29] LIU, J., MUDCHANATONGSUK, S., ORDÓÑEZ, F. Robust solutions for network design under transportation cost and demand uncertainty. Journal of the Operational Research Society, 59(5):652-662, Mayo 2008.
- [30] NEMHAUSER, G. y WOLSEY, L. Integer and Combinatorial Optimization. Wiley-Interscience, 1999.
- [31] ORDÓÑEZ, F. y ZHAO, J. Robust capacity expansion of network flows. Networks, 50(2):136 - 145, Septiembre 2007.
- [32] SOYSTER, A. L. Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. Operations Research, 21(5):1154-1157, Septiembre 1973.