



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL INDUSTRIAL
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL MATEMÁTICA

REDES DE EQUILIBRIO EN UN JUEGO DE INTERACCIÓN
LOCAL BAJO UNA NORMA SOCIAL

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN
ECONOMÍA APLICADA

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO
CIVIL MATEMÁTICO

ANGELA MARÍA DENIS PAGLIERO

PROFESOR GUÍA
FELIPE BALMACEDA MAHNS

MIEBROS DE LA COMISIÓN
ALEJANDRO JOFRÉ CÁCERES
NICOLÁS FIGUEROA GONZÁLEZ
JONATHAN CONNING

SANTIAGO DE CHILE
ENERO 2010

RESUMEN DEL INFORME FINAL
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
Y AL GRADO DE MAGÍSTER
EN ECONOMÍA APLICADA
POR : ANGELA DENIS PAGLIERO
PROF. GUÍA : FELIPE BALMACEDA

REDES DE EQUILIBRIO EN UN JUEGO DE INTERACCIÓN LOCAL BAJO UNA NORMA SOCIAL

El objetivo de este trabajo es estudiar un modelo de interacción local, es decir, estudiar situaciones en las cuales los individuos interactúan, pero dichas interacciones están limitadas al previo establecimiento de vínculos costosos entre los individuos. Nos interesa estudiar las estructuras de las redes que, bajo una norma social que funcione como un sistema de monitoreo público, sustenten cooperación.

Para responder esta inquietud, planteamos un modelo de N individuos que en el primer período pueden invertir en establecer vínculos entre ellos. A partir del período siguiente, los jugadores se ven envueltos en interacciones locales capturadas por el juego del Dilema del Prisionero repetido, donde la característica local hace referencia a que un individuo juega bilateralmente sólo con quienes ha establecido previamente un vínculo y sólo observa el actuar de estos individuos. Planteamos una estrategia que indica a cada individuo cooperar excepto cuando alguien lo engañó o engañó a uno de sus amigos en común. Así también un individuo que se deja engañar sin aplicar el castigo es castigado a su vez por quienes observan la situación. En caso que un individuo observe una defección de un vecino contra un individuo con quien él no estableció previamente un vínculo, y cuyo actuar por lo tanto no observa, no está seguro si la defección es un engaño o un castigo, y decide su actuar de acuerdo a un mecanismo aleatorio público. Definimos un sistema de creencias que denominamos ególatra, el cual establece que, ante una desviación, los individuos creen que sus amigos sólo se conectan a través de él, de sus amigos o directamente entre ellos. Estudiamos los equilibrios bayesianos del modelo así planteado.

El resultado de este trabajo es una caracterización parcial de las redes de equilibrio en función de la probabilidad con la cual cooperan los individuos en caso de incertidumbre. Cuando esta probabilidad es pequeña, sólo las redes formadas por componentes completas sustentan cooperación. Cuando la probabilidad supera una cierta cota, otras redes soportan el resultado cooperativo, y en el caso límite en que siempre se coopera en caso de incertidumbre, todas las redes sustentan cooperación.

A mi familia, mis amigos y mi amor, por todo su apoyo y paciencia. Y a mi profe guía, por todo su tiempo y por lograr motivarme a pesar de mi misma

Índice general

Índice	v
1. Introducción	1
2. Algunas definiciones	6
2.1. El modelo	6
2.2. La estrategia comunitaria	13
2.3. Redes	21
3. Equilibrios del juego	24
4. Discusiones y conclusiones	42
A. Demostración del lema 1	48
B. Demostración del lema 2	55
C. Demostración del lema 3	65

Capítulo 1

Introducción

Todo individuo se ve enfrentado diariamente a tomar decisiones y elegir su actuar en las situaciones en las que se ve envuelto. En muchos casos, el ambiente en el que se desenvuelve un individuo y las personas con las que interactúa dependen de inversiones previas realizadas por esos mismos individuos. Ejemplos hay varios: los padres eligen escuelas para sus hijos, la elección de la comuna o barrio, y las relaciones interpersonales que se establecen en los años de estudios determinan en muchos casos con quienes se interactuará laboralmente en el futuro. Si bien estas interacciones pueden ser amplias, se encuentran limitadas a una red o entorno social, y la información que observa cada individuo también se encuentra limitada a su entorno. En estas situaciones la acción cooperativa entre los individuos genera el resultado que mejora el bienestar social, si bien en muchos casos los incentivos individuales no se encuentran alineados en esa dirección y no hay instituciones formales que fuercen el resultado cooperativo.

El objetivo de este documento es estudiar, desde la teoría y mediante un modelo sencillo, una norma social que funcione como un sistema de monitorio público, garantizando cooperación. Nos interesa estudiar las estructuras de las redes que soportan esta estrategia cooperativa. Por ejemplo, ¿qué estructuras de relaciones son posibles? ¿son grupos

cerrados de individuos? ¿son grupos disjuntos? ¿cuán grandes pueden ser estos grupos?

Para responder esta inquietud, planteamos un modelo de N individuos que en $t = 0$ pueden invertir en establecer vínculos entre ellos. Este proceso de formación de vínculos es un juego cooperativo, es decir, el vínculo o *link* entre dos jugadores se establece si y solo si ambos jugadores invierten en él. El resultado de esta primera etapa es una red o grafo, donde cada individuo es representado por un nodo o vértice y el vínculo entre dos individuos es representado por un *link*. Desde $t = 1$, los jugadores se ven envueltos en interacciones locales capturadas por el juego del Dilema del Prisionero repetido, donde la característica local hace referencia a que un individuo juega bilateralmente sólo con quienes ha establecido previamente un vínculo. El Dilema del Prisionero se caracteriza porque la acción no cooperativa es una estrategia dominante del juego estático, sin embargo, ambos jugadores estarían mejor si se alcanza el resultado cooperativo. En este modelo planteamos una estrategia que consiste en una norma social que indica a cada individuo cooperar excepto cuando alguien lo engañó o engañó a uno de sus amigos en común. Así también un individuo que se deja engañar sin aplicar el castigo es castigado a su vez por quienes observan la situación. En caso que un individuo observe una defección de un vecino contra un individuo con quien él no estableció previamente un vínculo, y cuyo actuar por lo tanto no observa, no puede estar seguro si la defección es un engaño o un castigo, y decide su actuar de acuerdo a un mecanismo aleatorio público. En este caso de información incompleta, el individuo podría realizar complejos cálculos para estimar la probabilidad de que su vecino esté siguiendo la estrategia, dependiendo de sus creencias acerca de la estructura de la red y de las acciones pasadas de los jugadores que no están vinculados a él. Pero tales complejos cálculos son probablemente no utilizados en la práctica y por tanto asumimos que se utiliza este otro mecanismo. El clima o índices publicados en los diarios son ejemplos de mecanismos posibles, aunque no son estrictamente aleatorios. La principal idea detrás de esta es-

trategia es establecer una norma social que sea intuitiva, algo así como la frase *el amigo de mi amigo es mi amigo*, que permita alcanzar cooperación en equilibrio, considerando además que en muchas situaciones los individuos no realizan cálculos extremadamente complejos sino, por el contrario, dependen de reglas mucho más sencillas. A lo largo del documento estudiamos las condiciones que una red debe satisfacer para que esta norma social sustente cooperación en equilibrio.

Este modelo se relaciona con dos ramas de la literatura. Por una parte, se relaciona con la literatura de juegos repetidos. Es bien sabido que la interacción repetida puede mitigar los problemas de incentivos a una desviación de una acción beneficiosa pero que no es equilibrio: la frecuencia de las transacciones disuade a los jugadores de desviarse bajo la amenaza de un castigo futuro. Literatura estándar establece que resultados cooperativos son alcanzables cuando los individuos son suficientemente pacientes. Kandori (1992) muestra que estos resultados son también sostenidos cuando las transacciones entre dos individuos no son frecuentes, si las transacciones en la sociedad son lo suficientemente frecuentes. En su modelo los jugadores se comportan de acuerdo a una norma social y es el castigo de la comunidad en lugar del castigo de un individuo en particular el cual evita que los jugadores se desvíen. Nuestro modelo es similar a éste en el sentido que también usamos un tipo de estrategia relacionada a toda la comunidad, donde las desviaciones son castigadas no sólo por los jugadores engañados, sino también por otros jugadores. Sin embargo en su modelo las interacciones son globales o determinadas por un proceso de apareamiento, sin una estructura adicional o red, y no depende de la inversión previa de los mismos individuos. Por otra parte, hay una rama de la literatura relacionada a la formación de redes, donde individuos eligen establecer o no relaciones o vínculos que son costosos. Ejemplos de trabajos que estudian redes y sus propiedades son Jackson y Wolinsky (1996), Bala y Goyal (2000), Goyal y Joshi (2006). Estos trabajos consideran sin embargo que la red tiene un valor en sí misma y

el tema de la información a la que acceden los jugadores es inexistente porque el juego es estático. Por tanto no son completamente adecuados para modelar las elecciones posteriores que los jugadores deben tomar y los incentivos involucrados.

Existen algunos otros trabajos que parecen considerar ambos aspectos simultáneamente. Galeotti y Goyal (2007) presentan un modelo estático en el cual los individuos pueden invertir en la formación de vínculos y en recolectar información que es valiosa para ellos. La red permite a los jugadores acceder a la información recolectada por otros jugadores. En este juego la red es un medio para acceder a la información y puede ser pensada como un tipo de interacción local. La recolección de la información puede ser considerada una acción cooperativa. Sin embargo su modelo es estático y la cooperación tiene costos adicionales, en lugar de ser simplemente una acción no costosa dominada por otra, como en el caso de Dilema del Prisionero. Balmaceda (2006) formula un modelo más similar al nuestro. Plantea una sociedad donde cooperación en el juego repetido es forzada por la comunidad, pero en su caso existe transmisión de información que depende de la estructura de la red a la que pertenecen los individuos, como resultado de su inversión previa en ella. El autor presenta un modelo de interacción global, donde en todos los períodos cada jugador es emparejado con un miembro de la sociedad, y el rol de la red consiste exclusivamente en la transmisión de información. Por lo mismo no modela el fenómeno que mencionamos en un comienzo sino que está centrado en la transmisión de información, que en nuestro caso es inexistente (cada jugador decide su acción basado exclusivamente en las acciones que ha observado y el mecanismo aleatorio público). Haag y Lagunoff (2006) también estudian un modelo con interacciones locales y juego repetido, pero en su formulación el juego es colectivo, cada individuo elige una única acción la cual determina el pago con todos sus vecinos (por ejemplo, la acción de prender la luz de la entrada de la casa en la noche afecta a todos los vecinos en una calle, y cada individuo realiza sólo una elección, prender o apagar la luz), en

cambio en nuestra formulación los jugadores pueden elegir diferentes acciones con sus distintos amigos. Otro aspecto que diferencia estos modelos es que los autores se centran en el punto de vista de un planificador central, quien determina la estructura de la red sin costo, a diferencia de nuestro modelo en el cual individuos racionales deciden qué vínculos quieren establecer a un costo positivo. Tal como nosotros, ellos estudian en una determinada estrategia en el juego de continuación, que en su caso corresponde a estrategias gatillo. Cho (2007) estudia un equilibrio secuencial en una red en un modelo en el cual los individuos están limitados a jugar la misma acción contra todos sus vecinos, en búsqueda de un equilibrio que retorne al estado cooperativo. El enfoque de Cho no está en las estructuras de las redes de equilibrio.

Lo que sigue del documento se organiza de la siguiente manera: en el capítulo 2 se plantea el modelo y la estrategia a estudiar, más algunas definiciones básicas, en el capítulo 3 se estudian los principales resultados del modelo y finalmente las conclusiones se presentan en el capítulo 4.

Capítulo 2

Algunas definiciones

2.1. El modelo

El modelo planteado se describe de la siguiente manera: existe un set $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$ de individuos homogéneos que viven infinitos períodos. Asumimos que $N \geq 3$. En $t = 0$ los individuos pueden invertir en ofrecer vínculos a otros individuos, a un costo $r > 0$ cada ofrecimiento. El vínculo entre dos individuos se establece si y solo si ambos jugadores invierten en él. Denotamos la acción de i de ofrecer un vínculo al jugador j por $z_{ij} = 1$ y 0 en otro caso. Respectivamente denotamos $z_i = (z_{i1}, \dots, z_{iN}) \in \{0, 1\}^N$ al vector que representa los ofrecimientos de vínculos que i hace a los demás jugadores y escribimos $z = (z_i)_{i=1}^N$. Denotamos la existencia de un vínculo entre los jugadores i y j por $g_{ij} = 1$ y la ausencia por $g_{ij} = 0$. Es decir, $g_{ij} = 1$ si y sólo si $z_{ij} = z_{ji} = 1$. Así el resultado de esta etapa se representa por una red g , la cual determina el set de jugadores con el que interactuará un individuo a partir de $t = 1$. Denotamos por $N_i(g) = \{j \in \mathcal{N} : g_{ij} = 1\}$ al set de vecinos o amigos de i y $\bar{N}_i(g) = N_i(g) \cup \{i\}$. En caso que no cause confusión omitiremos la referencia a la red g .

Al comienzo de cada período $t \geq 1$ se tiene la realización de un mecanismo aleato-

rio público Q^t . Asumimos que Q^t se distribuye independientemente en el tiempo con una distribución uniforme en $[0, 1]$, es decir,

$$Q^t \sim i.i.d. \quad U[0, 1]$$

Denotamos q^t la realización de Q^t .

La secuencia del juego es la siguiente: en $t = 0$ los individuos ofrecen vínculos y se establece una red g . Para cada período $t \geq 1$, q^t es realizado y todos los individuos lo observan. Entonces cada individuo i juega simultáneamente $n_i(g) = |N_i(g)|$ dilemas del prisionero, uno con cada uno de sus vecinos $j \in N_i(g)$. Esto significa que i elige un vector $a_i^t = (a_{i1}^t, \dots, a_{in_i}^t) \in \{C, D\}^{n_i}$. Los pagos de cada dilema del prisionero están dados en la siguiente tabla:

		Jugador j	
		C	D
Jugador i	C	c, c	$0, b$
	D	$b, 0$	d, d

donde C representa cooperación y D defección. Asumimos además que:

$$b > c > d > 0 \tag{2.1}$$

$$2c > b \tag{2.2}$$

que corresponden a las condiciones usuales del dilema del prisionero: la primera condición establece que defección es estrategia dominante y que el resultado cooperativo es pareto superior al resultado no cooperativo y la segunda establece que cooperación es el resultado eficiente.

Denotamos por $w(a, a')$ al pago de un jugador i en el dilema del prisionero con un jugador j cuando $a_{ij} = a$ y $a_{ji} = a'$. Denotamos por a_i^t al vector de acciones del jugador i en el período t . Para un subconjunto $K \subseteq \mathcal{N}$, denotamos $a_K^t = (a_i^t)_{i \in K}$. Por conveniencia denotamos también $\mathbf{a}_i = (a_i^t)_{t=1}^\infty$ y correspondientemente $\mathbf{a}_K = ((a_i^t)_{i \in K})_{t=1}^\infty$. Dada una red g , el pago que recibe un jugador i en el período $t \geq 1$ del juego está dado por

$$u_i(a_{\mathcal{N}}^t/g) = \sum_{j \in N_i} w(a_{ij}^t, a_{ji}^t)$$

Notemos que las acciones de los jugadores que no están directamente conectados con i no afectan su utilidad. La utilidad del jugador i en el juego repetido, dada una red g , es

$$U_i(\mathbf{a}_{\mathcal{N}}/g) = (1 - \delta) \sum_{t=1}^\infty \delta^t u_i(a_{\mathcal{N}}^t/g) = (1 - \delta) \sum_{t=1}^\infty \delta^t \sum_{j \in N_i} w(a_{ij}^t, a_{ji}^t)$$

El parámetro $\delta \in [0, 1]$ es un factor de descuento intertemporal relacionado a las preferencias de los individuos así como también a la frecuencia de las interacciones. Finalmente, la utilidad del jugador i en el juego completo es

$$\begin{aligned} V_i(\mathbf{a}_{\mathcal{N}}, z) &= U_i(\mathbf{a}_{\mathcal{N}}/g) - (1 - \delta)r \sum_{j=1}^N z_{ij} \\ &= (1 - \delta) \sum_{t=1}^\infty \delta^t \sum_{j \in N_i} w(a_{ij}^t, a_{ji}^t) - (1 - \delta)r \sum_{j=1}^N z_{ij} \end{aligned}$$

Suponemos que el costo de ofrecer un vínculo es tal que es conveniente establecer dicho vínculo si se establece cooperación mutua en todos los períodos y no lo es si los jugadores defectan desde $t = 1$ en adelante, es decir

$$\delta c \geq (1 - \delta)r > \delta d \Leftrightarrow \frac{\delta}{1 - \delta}c \geq r > \frac{\delta}{1 - \delta}d \quad (2.3)$$

Una historia h^t al comienzo del período $t \geq 1$, representada por $(z, a_{\mathcal{N}}^s, q^1, q^{s+1})_{s=1}^{t-1}$, corresponde a los vínculos ofrecidos en el período $t = 0$, que determinan la red establecida, al set de acciones tomadas por los jugadores desde el periodo 1 al período $t - 1$ y a las realizaciones del mecanismo aleatorio, incluyendo la realización del período t . Denotamos por \mathcal{H}^t al set de posibles historias en el período t . La historia en $t = 0$ es simplemente la historia vacía $h^0 = \emptyset$.

Planteamos el modelo como un modelo de interacción y observación local: un individuo reconoce a aquellos individuos con quienes estableció un vínculo y es capaz de reconocer si dos de sus amigos son amigos entre ellos. Así mismo para $t \geq 1$, i sólo interactúa y sólo observa las acciones de aquellos individuos con los cuales estableció un vínculo en $t = 0$. Asumimos también que no hay transmisión de información y por tanto cada jugador sólo cuenta con la información que observa, correspondiente a las acciones de sus vecinos y a las realizaciones del mecanismo aleatorio. Denotamos por g_i al subgrafo inducido por $\bar{N}_i(g)$. Por lo tanto, en cada período t , el set de información de un jugador i , o_i^t , es el set de historias tales que se establece el mismo subgrafo g_i , las acciones de los individuos $j \in \bar{N}_i$ para $1 \leq s \leq t - 1$ son las mismas, al igual que las realizaciones del mecanismo aleatorio. Escribimos entonces $o_i^t = (z_i, g_i, a_{\bar{N}_i}^s, q^1, q^{s+1})_{s=1}^{t-1}$. Lo que diferencia a dos historias $h^t, h'^t \in o_i^t$ corresponde a las acciones de los individuos $k \in \mathcal{N} \setminus \bar{N}_i$ en los períodos $1 \leq s \leq t - 1$. Denotamos por $o_i^t(h^t)$ al set de información al que h^t pertenece. \mathcal{O}_i^t es el conjunto de los sets de información del individuo i en el período t . Notemos que para cada par (i, t) , \mathcal{O}_i^t es una partición de \mathcal{H}^t .

¹En estricto rigor, i es capaz de distinguir los ofrecimientos de vínculos que recibe de los otros jugadores más allá del subgrafo resultado de la primera etapa. Así, por ejemplo, si tenemos dos perfiles z y z' con $z_{ij} = z'_{ij} = 0$ exactamente iguales, excepto porque $z_{ji} = 1$ y $z'_{ji} = 0$, tenemos que el subgrafo g_i que se genera con ambos perfiles es el mismo, sin embargo i es capaz de distinguir un caso del otro. Esta diferencia es irrelevante para lo que sigue del juego, dado que en ambos casos i no interactúa con j en el futuro pues el vínculo no se establece en $t = 0$ y que la estrategia que definiremos no depende de los ofrecimientos de jugadores no conectados a i . Por simplicidad supondremos en un mismo set de información ambas historias.

En este trabajo restringimos nuestra atención a estrategias puras. La estrategia de un individuo i es una tupla de funciones $z_i \times \sigma_i$ con $z_i \in \{0, 1\}^N$ y

$$\sigma_i : \bigcup_{t=1}^{\infty} \mathcal{O}_i^t \rightarrow \{C, D\}^{n_i}$$

Por ejemplo, $z_i \times \sigma_i(o_i^t) = 1^N \times C^{n_i}$ significa que el individuo i ofrece vínculos a todos los individuos y elige la acción C con todos sus amigos cuando se encuentra en el set de información o_i^t . Notemos que el set de sus amigos se determina con las acciones de los demás jugadores en $t = 0$. Denotamos por σ al perfil de estrategias $(\sigma_i)_{i \in \mathcal{N}}$.

Al subjuego que comienza en $t = 1$ lo denominamos subjuego de continuación. En este subjuego, fija una red g y dada una estrategia σ , denotamos por $\alpha_i^t(\sigma)$ las acciones que el agente i elige en el período t bajo σ . Debido a que las acciones elegidas por un individuo en un período dado dependen de las realizaciones del mecanismo aleatorio hasta ese período, tenemos que $\alpha_i^t(\sigma)$ es una variable aleatoria que depende de la distribución de Q^1, \dots, Q^t . Más aún, dado un set de información o_i^t denotamos las acciones elegidas por el individuo i a partir de o_i^t por $(\alpha_i^s(\sigma, o_i^t))_{s=t}^{\infty}$. Notemos que para $s \geq t + 1$, $\alpha_i^s(\sigma, o_i^t)$ es una variable aleatoria que depende de la distribución de Q^{t+1}, \dots, Q^s .

Un sistema de creencias μ es una función que asigna a cada set de información o_i^t una distribución de probabilidad $\mu(\cdot, o_i^t)$ sobre el set de historias en o_i^t . Para $h^t \in o_i^t$, $\mu(h^t, o_i^t)$ es la probabilidad de h^t dado que se alcanzó o_i^t . Como o_i^t es finito, tenemos que $h^t \in \text{supp}(\mu(\cdot, o_i^t))$ si y sólo si $\mu(h^t, o_i^t) > 0$. El supuesto de observación local, es decir que i sólo observa la estructura de la red alrededor de él y sólo observa el accionar de los individuos con quienes estableció un vínculo, implica que la información que maneja es incompleta y que cada uno de sus sets de información consiste en más de una posible historia. Dado que el accionar de sus vecinos con él puede depender

de las situaciones que ellos enfrentan con otros individuos a quienes i no observa, es necesario establecer un sistema de creencias asociado, que permita estimar la utilidad de cada posible acción. Dada una estrategia (z, σ) y un sistema de creencias μ , el pago esperado de un jugador i de seguir la estrategia condicional en que se alcanzó el set de información o_i^t es:

$$\begin{aligned}
& E(V_i(z, \sigma, \mu, o_i^t)) \\
= & (1 - \delta) \sum_{s=1}^{t-1} \delta^s \sum_{j \in N_i} w(a_{ij}^s, a_{ji}^s) \\
& + (1 - \delta) \sum_{h^t \in o_i^t} \mu(h^t, o_i^t) \left(\delta^t \sum_{j \in N_i} w(\alpha_i^t(\sigma, o_i^t), \alpha_j^t(\sigma, o_j^t(h^t))) \right) \\
& + (1 - \delta) \sum_{h^t \in o_i^t} \mu(h^t, o_i^t) \left(\sum_{s=t+1}^{\infty} \delta^s E_{Q^{t+1}, \dots, Q^s} \left[\sum_{j \in N_i} w(\alpha_i^s(\sigma, o_i^t), \alpha_j^s(\sigma, o_j^t(h^t))) \right] \right) \\
& - (1 - \delta)r \sum_{j=1}^N z_{ij}
\end{aligned}$$

Decimos que la estrategia σ satisface el criterio de racionalidad bajo μ si para cada i y para cada $o_i^t \in \mathcal{O}_i^t$

$$E(V_i(z, \sigma, \mu, o_i^t)) \geq E(V_i(z, \sigma'_i, \sigma_{-i}, \mu, o_i^t)) \quad \forall \sigma'_i \neq \sigma_i \quad (2.4)$$

Si denotamos

$$\begin{aligned}
& EC(V_i(\sigma, \mu, o_i^t)) \\
= & (1 - \delta) \sum_{h^t \in o_i^t} \mu(h^t, o_i^t) \left(\delta^t \sum_{j \in N_i} w(\alpha_i^t(\sigma, o_i^t), \alpha_j^t(\sigma, o_j^t(h^t))) \right) \\
& + (1 - \delta) \sum_{h^t \in o_i^t} \mu(h^t, o_i^t) \left(\sum_{s=t+1}^{\infty} \delta^s E_{Q^{t+1}, \dots, Q^s} \left[\sum_{j \in N_i} w(\alpha_i^s(\sigma, o_i^t), \alpha_j^s(\sigma, o_j^t(h^t))) \right] \right)
\end{aligned}$$

entonces se cumple que, dada una red g definida de acuerdo a z , (2.4) es equivalente a

$$EC(V_i(\sigma, \mu, o_i^t)) \geq EC(V_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}, \mu, o_i^t)) \quad \forall \sigma'_i \neq \sigma_i \quad (2.5)$$

De esta manera planteamos un modelo en el cual las interacciones de los individuos están limitadas a un entorno, que a su vez depende de acciones previas de los mismos individuos. Así como en muchas situaciones, el bienestar social se ve maximizado cuando los individuos enfrentan estas interacciones de manera cooperativa, si bien los incentivos individuales podrían apuntar a un accionar diferente. Buscamos modelar aquellas situaciones en que no existe una institución que fuerce el resultado cooperativo, pero en las cuales la información es pública, aunque restringida al entorno individual. El objetivo es estudiar una estrategia o norma social que mediante un sistema de monitoreo público sustente el resultado cooperativo como equilibrio. Suponemos que los individuos determinan su actuar en función de la información dura que poseen, la cual corresponde a las acciones que observan en su entorno, y por tanto no consideramos transmisión de información.

Este es un modelo de información incompleta porque los individuos manejan dicha información sólo de manera local. Estamos interesados en estudiar una estrategia en particular que garantice cooperación, a la que llamamos estrategia comunitaria y que se define en la siguiente sección. Nos interesa caracterizar la estructura de las redes que soportan la estrategia comunitaria como equilibrio bayesiano perfecto y cooperativo en el subjuego de continuación, para un sistema de creencias que definiremos más adelante.

2.2. La estrategia comunitaria

En este apartado se define la estrategia a estudiar en este documento. Esta estrategia consiste en una norma social que busca asegurar cooperación mediante una regla intuitiva, similar a la frase *el amigo de mi amigo es mi amigo*. La idea general es cooperar con los buenos amigos y defectar con los malos, donde un buen amigo es básicamente aquel que coopera conmigo y coopera con los amigos que tenemos en común.

La estrategia se define de la siguiente manera: sea ϕ_{jt}^i la clasificación en bueno(0) o malo(1) que i tiene de su amigo j al comienzo del período t . La clasificación que i tiene de su amigo j al comienzo del período $t + 1$ depende de la clasificación en el período t y de las acciones tomadas en t por ambos jugadores de la siguiente forma:

- Depende de las acciones que los jugadores realizaron entre ellos en t . Si ambos cooperaron se consideran buenos amigos, de lo contrario se consideran malos. La función ψ^1 captura esta relación:

$$\psi_{ij,t+1}^1(o_i^{t+1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } (a_{ij}^t, a_{ji}^t) = (C, C) \\ 1 & \text{si } \sim \end{cases}$$

- Depende de las acciones de j en el período t contra los amigos que ambos tienen en común. Por un lado, si j pasa a defectar con uno de los amigos en común con i , digamos k y k no defecta con j , es decir si j engaña a k , entonces i considera que j se comportó como un mal amigo en el período t y por ende lo considerará malo este período. Notemos que esto es independiente de si i considera malo o bueno a k . Por otro lado, si j fue engañado por k en $t - 1$, es decir j cooperó con k y k defectó con j , y a pesar de esto j cooperó con k en el período t , entonces i considera a j un mal amigo por no aplicar el castigo correspondiente a k . Esta

relación es capturada por la función ψ^2 :

$$\psi_{ij,t+1}^2(o_i^{t+1}) = \max_{k \in N_i \cap N_j} \{\chi_{jk,t+1}(o_i^{t+1})\}$$

donde

$$\chi_{jk,t+1}(o_i^{t+1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } a_{jk}^{t-1} = D \\ 1 & \text{si } a_{jk}^{t-1} = C, \quad a_{kj}^{t-1} = C, \quad (a_{jk}^t, a_{kj}^t) = (D, C) \\ 0 & \text{si } a_{jk}^{t-1} = C, \quad a_{kj}^{t-1} = C, \quad (a_{jk}^t, a_{kj}^t) \neq (D, C) \\ 1 & \text{si } a_{jk}^{t-1} = C, \quad a_{kj}^{t-1} = D, \quad a_{jk}^t = C \\ 0 & \text{si } a_{jk}^{t-1} = C, \quad a_{kj}^{t-1} = D, \quad a_{jk}^t = D \end{cases}$$

- Depende de las acciones de j contra sus amigos que no se encuentran vinculados a i , cuyas acciones i no observa. Sea k uno de estos jugadores. Si i observa que j pasa a defectar con k , i no está seguro si j está siendo un mal amigo con k , razón por la cual podría esperar que fuera un mal amigo con él en el futuro, o j se encuentra castigando a k , debido a una desviación previa de este último. Para decidir i utiliza el mecanismo aleatorio público, considerando a j un mal amigo si $q^{t+1} > q$, para un valor q fijo (que no depende de i).

Hay un par de excepciones a esta regla general: si j pasó a defectar con uno de sus amigos l en $t-1$, que también es amigo de i , pero l defectó también con j en $t-1$, entonces i es capaz de reconocer que j no engañó a l . Sin embargo, si k no está vinculado con l , sólo observó la defección de j y por tanto puede haber decidido su actuar en t contra j de acuerdo al mecanismo aleatorio. Si $q^t > q$ anticipando una defección de k , j defecta con k en t . En este escenario, una defección de j contra uno de sus otros amigos k no es considerada una desviación por parte de i . La segunda excepción es que si i acaba de decidir su accionar

con j de acuerdo al mecanismo aleatorio y decidió cooperar con él, entonces no volverá a randomizar en el período inmediatamente siguiente ante una situación similar con j . Esta relación, un poco más compleja, es capturada por ψ^3 :

$$\psi_{ij,t+1}^3(o_i^{t+1}) = \begin{cases} 0 & \text{si existe } k \text{ tal que } g_{ki} = 0, g_{jk} = 1, a_{jk}^{t-1} = C, a_{jk}^t = D, \\ & \text{existe } l \text{ tal que } g_{il} = g_{jl} = 1, g_{lk} = 0 \\ & a_{jl}^{t-2} = C, a_{jl}^{t-1} = a_{lj}^{t-1} = D, q^t > q \\ 0 & \text{si existe } k \text{ tal que } g_{ki} = 0, g_{jk} = 1, a_{jk}^{t-1} = C, a_{jk}^t = D, \\ & \text{no se tiene el primer caso y } q^{t+1} \leq q \\ 0 & \text{si existe } k \text{ tal que } g_{ki} = 0, g_{jk} = 1, a_{jk}^{t-1} = C, a_{jk}^t = D, \\ & \text{no se tiene el primer caso, } q^{t+1} > q \text{ pero } i \text{ decidió} \\ & \text{según el mecanismo aleatorio su acción contra } j \text{ en } t \\ 1 & \text{si existe } k \text{ tal que } g_{ki} = 0, g_{jk} = 1, a_{jk}^{t-1} = C, a_{jk}^t = D, \\ & \text{no se tiene el primer caso, } q^{t+1} > q \text{ e } i \text{ no decidió} \\ & \text{según el mecanismo aleatorio su acción contra } j \text{ en } t \end{cases}$$

Notemos que i sólo evalúa estas decisiones cuando j pasa de cooperación a defección con uno de sus otros amigos k . Luego si la primera vez que i observa a j defectando con uno de sus otros amigos k decide perdonarlo o considerarlo bueno y j continúa defectando con k , entonces i no evalúa decisiones ante las nuevas defecciones de j contra k , sino que confía en lo que ya ha decidido. Sin embargo su decisión puede cambiar si en el futuro i observa que j pasó de cooperación a defección contra uno de sus otros amigos $k' \neq k$, que corresponde a una decisión distinta.

- Por último, si i prevé que j lo considera un mal amigo entonces i considera malo a j . Esta relación está capturada por las funciones $\tilde{\psi}^2, \tilde{\psi}^3$:

$$\tilde{\psi}_{ij,t+1}^2(o_i^{t+1}) = \max_{k \in N_i \cap N_j} \{ \chi_{ik,t+1}(o_i^{t+1}) \}$$

$$\tilde{\psi}_{ij,t+1}^3(o_i^{t+1}) = \begin{cases} 0 & \text{si existe } k \text{ tal que } g_{kj} = 0, g_{ik} = 1, a_{ik}^{t-1} = C, a_{ik}^t = D, \\ & \text{existe } l \text{ tal que } g_{jl} = g_{il} = 1, g_{lk} = 0 \\ & a_{il}^{t-2} = C, a_{il}^{t-1} = a_{li}^{t-1} = D, q^t > q \\ 0 & \text{si existe } k \text{ tal que } g_{kj} = 0, g_{ik} = 1, a_{ik}^{t-1} = C, a_{ik}^t = D, \\ & \text{no se tiene el primer caso y } q^{t+1} \leq q \\ 0 & \text{si existe } k \text{ tal que } g_{kj} = 0, g_{ik} = 1, a_{ik}^{t-1} = C, a_{ik}^t = D, \\ & \text{no se tiene el primer caso y } q^{t+1} > q \text{ pero } j \text{ decidió} \\ & \text{según el mecanismo aleatorio su acción contra } i \text{ en } t-1 \\ 1 & \text{si existe } k \text{ tal que } g_{kj} = 0, g_{ik} = 1, a_{ik}^{t-1} = C, a_{ik}^t = D, \\ & \text{no se tiene el primer caso, } q^{t+1} > q \text{ y } j \text{ no decidió} \\ & \text{según el mecanismo aleatorio su acción contra } i \text{ en } t-1 \end{cases}$$

Finalmente tenemos que i considera a j un buen jugador en $t+1$ si lo considera bueno en t , las acciones de j en t corresponden a lo que i espera de un buen jugador e i prevé que j lo considera bueno, es decir

$$\phi_{j,t+1}^i(o_i^{t+1}) = \max \left\{ \psi_{ij,t+1}^1, \psi_{ij,t+1}^2, \psi_{ij,t+1}^3, \tilde{\psi}_{ij,t+1}^2, \tilde{\psi}_{ij,t+1}^3, \phi_{jt}^i \right\} (o_i^{t+1})$$

La estrategia comunitaria se define como $\sigma_{ij} : \bigcup_{t=1}^{\infty} \mathcal{O}_i^t \rightarrow \{C, D\}$ tal que

$$\sigma_{ij}(o_i^t) = \begin{cases} C & \text{si } \phi_{jt}^i(o_i^t) = 0 \\ D & \text{si } \phi_{jt}^i(o_i^t) = 1 \end{cases}$$

es decir, la estrategia establece cooperar con los buenos amigos y defectar con los malos.

Esta estrategia no perdona: si un individuo i observa una acción de uno de sus amigos

j en t que lo hacen considerarlo como un mal amigo en $t + 1$, entonces i considera a j un mal amigo en todos los períodos $s \geq t + 1$. Es decir, la estrategia tiene la estructura de una estrategia gatillo. Así, ante la posibilidad de que un individuo escoja con probabilidad positiva desviarse del camino cooperativo, eventualmente y dependiendo de la estructura de la red, podría romperse cooperación en toda ella, debido a que el castigo que pueden aplicar algunos será visto a su vez por otros como una desviación con probabilidad positiva. Notemos también que los jugadores no castigan acciones, C o D , sino que castigan estrategias, es decir castigan a aquellos individuos que no realizan la estrategia comunitaria, ya sea porque se desvían y defectan con algunos jugadores o porque no concretizan un castigo, que equivale a un *free riding* del costo de castigar para quienes sí lo hacen.

Notemos que con esta definición de la estrategia, i no exige directamente a su amigo j que castigue a uno de sus amigos en común k que engañó a i en el pasado. Sin embargo, dado que k espera que j lo considere malo y defecte con él, la estrategia indica a j de todas maneras defectar con k . Si lo hace, i que está vinculado tanto a j como a k , observará que la defección es mutua y por lo tanto considera a j un buen amigo. Si j no castiga a k , i observará que j cooperó con k y k defectó con j , luego i le exigirá a j que defecte con k a partir del período siguiente. Este castigo que i espera que j aplique a k no se debe a la defección de k contra i sino a la defección de k contra j .

Notemos que q es un parámetro en esta estrategia. Si $q = 0$ entonces en caso de duda los individuos defectan y si $q = 1$ los individuos son confiados y cooperan.

Es intuitivo que un individuo conozca las relaciones existentes entre sus amigos, es decir, sepa si dos de sus amigos son amigos entre ellos, pero no es tan intuitivo asumir que un individuo sea capaz de observar las acciones que un jugador que no tiene un

vínculo con él toma contra otro jugador. Es lógico pensar que los jugadores son capaces de observar algunos de los resultados de su entorno, pero no mucho más allá. Por esta razón, cuando un jugador i observa una defección de parte de un miembro de su red, digamos j , contra otro individuo con quien no está relacionado, i no puede saber con certeza que ha sucedido, pero aún así tiene que tomar una decisión. Esta decisión podría basarse en un complejo sistema de creencias acerca de la probabilidad que la acción de j sea justificada, sin embargo en la práctica los individuos no realizan complejos cálculos de probabilidades para tomar decisiones, sino que usualmente deciden siguiendo reglas mucho más sencillas. En este caso consideramos que dicha regla está dada por el mecanismo aleatorio.

Así, independientemente de lo complejo de la notación, esta estrategia es muy intuitiva y establece una norma social muy similar a la frase “el amigo de mi amigo es mi amigo”, donde la palabra amigo se refiere a un vínculo o vecino a quien se considera bueno, agregando que en caso de duda utilizamos una regla sencilla dada por el mecanismo aleatorio y que exigimos que nuestros amigos no se dejen engañar.

Para completar la formulación del modelo, es necesario también definir un sistema de creencias μ que en el camino de equilibrio se comporte de acuerdo a la regla de Bayes, pero que fuera del camino de equilibrio podemos definir a discreción. Fijamos un sistema de creencias que pertenece al conjunto que denominamos sistemas de creencias ególatras de este modelo. Definimos este conjunto como el set formado por aquellos sistemas de creencias que fuera del camino de equilibrio satisfacen que, para todo jugador i , las únicas historias que pertenecen al soporte de un set de información o_i^t son aquellas en que la red establecida es tal que $\forall j, k \in N_i$ se verifica que j y k se conectan en la red sólo a través de i , de un vínculo directo entre ellos o a través de los amigos de i , es decir i cree que fuera del camino de equilibrio dos de sus amigos que no son

amigos entre ellos se conectan únicamente a través de él o de un camino formado exclusivamente por otros de sus amigos.

Imponer un sistema de creencias μ con estas características es por supuesto restrictivo, pero además de no parecer anti-intuitivo, simplifica los cálculos de las utilidades esperadas, de manera tal que ante una acción tomada hoy, i no espere cambios en un futuro no inmediato en el accionar de sus amigos. Pensemos por ejemplo en el caso en que los N individuos se organizan formando un círculo, es decir, g tiene la estructura de una rueda. Supongamos que en el período 1, i se desvía de la estrategia y juega D contra $i - 1$. Entonces, si $q^2 > q$, la estrategia le indica a $i + 1$ que debe defectar con i en $t = 2$. Para evaluar esta alternativa $i + 1$ debe estimar la utilidad esperada si sigue la acción indicada por la estrategia y si se desvía, para los juegos bilaterales con i y con $i + 2$. Pero si $i + 1$ conoce la estructura de la red entonces espera que el jugador $i - 2$ observe que $i - 1$ jugó D con uno de sus otros amigos (i) en $t = 2$ y se comporte de acuerdo al mecanismo aleatorio en $t = 3$. Si éste le indica a $i - 2$ que debe castigar a $i - 1$ entonces $i - 3$ observa que $i - 2$ defecta con uno de sus otros amigos ($i - 1$) en $t = 3$ y decide si castigarlo en $t = 4$ de acuerdo al mecanismo aleatorio, ... así sucesivamente puede suceder con una probabilidad positiva que a partir de la desviación de i en el período 1, el jugador $i + 1$ observe un cambio en la acción de su amigo $i + 2$ varios períodos después, castigando a $i + 3$ por una desviación contra uno de los otros amigos de $i + 3$, $i + 4$. En este caso la estructura de la red es sencilla. Más aún, supusimos que $i + 1$ conoce la estructura de la red y no necesita hacer supuestos adicionales acerca de ésta. Redes más complejas necesitan cálculos más complejos, los que no son consistentes con nuestro supuesto que los individuos en la práctica no realizan cálculos tan difíciles. Al considerar un sistema de creencias ególatra, $i + 1$ asigna probabilidad 0 a estos eventos, simplificando sus cálculos futuros. Por esta misma razón estudiamos equilibrios bayesianos y no, por ejemplo, equilibrios secuenciales, que requerirían esta

serie de cálculos.

Una manera de racionalizar esta elección, es la creencia que el camino mínimo entre dos individuos fuera del subgrafo g_i es tan largo, que eventualmente el mecanismo aleatorio sería tal que la cadena de defecciones se rompería con probabilidad muy cercana a uno. Por tanto, estas creencias tienen más sentido en grandes sociedades. Así, si bien este sistema de creencias es particular, lo que disminuye la generalidad de nuestros resultados, nos permite en gran medida caracterizar las redes de equilibrio, evitando cálculos extremadamente complejos, que además es intuitivo no se realicen en la práctica. Como veremos a lo largo de este documento, con la estrategia así definida, redes recurrentes en la literatura pueden constituir equilibrios cooperativos.

Por último, para completar la definición de la estrategia desde $t = 0$, dada una red g , la estrategia de ofrecimiento de vínculos de un individuo i está dada por:

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } g_{ij} = 1 \\ 0 & \text{si } g_{ij} = 0 \end{cases}$$

Además, a partir del resultado del período $t = 0$, se definen las condiciones iniciales

$$\phi_j^i(o_i^1) = \begin{cases} 0 & \text{si } o_i^1 = (z_i, g_i, q) \quad q \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } \sim \end{cases}$$

En este trabajo estudiaremos la estructura de las redes que son factibles de alcanzar en equilibrios de la forma (z, σ, μ) , de acuerdo a las definiciones anteriores.

2.3. Redes

En esta sección recordamos las definiciones de algunos conceptos de redes a los que hacemos mención en lo que sigue del documento. Tenemos que $\mathcal{N}=\{1, \dots, N\}$ denota el set finito de jugadores. Las relaciones entre estos jugadores son representadas mediante un grafo no dirigido, donde cada individuo es representado por un nodo y el vínculo entre dos individuos es representado por un *link* que une los nodos correspondientes. La letra g denota dicho grafo y el *link* entre dos jugadores i y j es llamado ij . Dos jugadores están vinculados si $g_{ij} = 1$ y en caso contrario $g_{ij} = 0$. Notemos que $g_{ij} = g_{ji}$.

Dado un grafo g , definimos

$$\begin{aligned} N_i(g) &= \{j \in \mathcal{N} : g_{ij} = 1\} \\ n_i(g) &= |N_i(g)| \end{aligned}$$

el set de jugadores conectados a i o los amigos de i y su cardinal. $n_i(g)$ se denomina el grado de i . Por definición $i \notin N_i(g)$, porque el *link* ii no es posible (no permitimos *loops* en estas redes). Cuando no sea confuso omitiremos la referencia a la red g .

Un subgrafo de g inducido por un subconjunto \mathcal{N}_o de \mathcal{N} es un grafo formado por los nodos en \mathcal{N}_o y los *links* presentes en g entre dos nodos de este subconjunto.

Decimos que existe un camino en g entre los jugadores i y j si existe un conjunto de jugadores diferentes $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ tales que $g_{ik_1} = g_{k_1k_2} = \dots = g_{k_{n-1}k_n} = g_{k_nj} = 1$. Una componente de g es un subgrafo g' tal que para todo par (i, j) de nodos en g' , con $i \neq j$, existe un camino en g entre i y j , y dado i en g' , para todo k tal que $g_{ik} = 1$ entonces k pertenece a g' . Denotamos $d(i, j)$ el largo del camino más corto entre los

jugadores i y j en la red g (omitimos la referencia a la red). Si no existe tal camino, $d(i, j) = \infty$.

Denotamos $g + ij$ al grafo obtenido al añadir el *link* ij al grafo g , $g - ij$ al grafo obtenido al eliminar el *link* ij del grafo g , y $g - S$ al grafo obtenido eliminando todos los *links* pertenecientes a S del grafo g .

En la literatura encontramos varias arquitecturas recurrentes:

- La red vacía: $\forall i, j \in \mathcal{N} \quad g_{ij} = 0$.
- La red completa: $\forall i, j \in \mathcal{N}, \quad i \neq j, \quad g_{ij} = 1$.
- La red de componentes completas: formada por m componentes diferentes, g_1, g_2, \dots, g_m , tales que $\forall s = 1, \dots, m, \quad \forall i, j \in g_s, \quad i \neq j, \quad g_{ij} = 1$.
- La rueda: $\forall i = 2, \dots, N - 1 \quad g_{ii-1} = g_{ii+1} = 1 \quad \forall j \neq i - 1, i + 1 \quad g_{ij} = 0$.
También debe cumplirse que $g_{N1} = 1$.
- La línea: $\forall i = 2, \dots, N - 1 \quad g_{ii-1} = g_{ii+1} = 1 \quad \forall j \neq i - 1, i + 1 \quad g_{ij} = 0$. La diferencia entre la rueda y la línea está dada porque en esta última los jugadores 1 y N no están vinculados.
- La estrella: $\forall j \neq 1, \quad \forall i \neq 1, \quad g_{1j} = 1$ y $g_{ij} = 0$.

Dado un jugador i fijo, denotamos con letras mayúsculas X, Y o Z a subconjuntos de amigos de i , y con letras minúsculas x, y o z sus correspondientes cardinalidades.

Denotamos $g_{jX} = 1$ si y solo si $g_{jk} = 1 \quad \forall k \in X$.

$$\begin{aligned} N_i^{YX} &= \{j \in Y : g_{jX} = 1\} \\ n_i^{YX} &= |N_i^{YX}| \\ M_i^{YX} &= (X \cap Y) \cup \{j \in Y : g_{jk} = 1 \text{ para algún } k \in X\} \\ m_i^{YX} &= |M_i^{YX}| \end{aligned}$$

N_i^{YX} es el subconjunto de amigos de i en Y que también están vinculados con todos los jugadores en X ; M_i^{YX} es el subconjunto formado por X más los amigos de i en Y que tienen un vínculo con al menos uno de los jugadores en X . Bajo la estrategia comunitaria N_i^{YX} es el subconjunto de los amigos de i en Y que, ante una desviación de los individuos en X desde el punto de vista de i , reconocen que él está castigando a este subconjunto de sus amigos y no desviándose él mismo, sino siguiendo la estrategia. El subconjunto M_i^{YX} corresponde a los amigos de i en Y que reconocen con certeza cuando i se desvía y defecta contra un conjunto X de sus amigos que cooperan con él. Omitimos el índice Y cuando nos referimos a $Y = N_i$. Estos dos subconjuntos serán utilizados recurrentemente en el resto del documento. Llamamos también a M_i^X la vecindad de X o V_X .

Por último definimos $\lambda_i = \min\{n_i^X : |X| = 1\}$ que corresponde al mínimo número de amigos en común entre i y sus amigos.

Estas definiciones nos permiten en el próximo capítulo escribir de forma más sencilla las utilidades de los jugadores en los distintos sets de información, ya sea cuando éstos siguen la estrategia comunitaria o frente a una desviación unilateral.

Capítulo 3

Equilibrios del juego

En este capítulo comenzamos estudiando las condiciones para que la estrategia comunitaria constituya un equilibrio bayesiano perfecto en el juego de continuación. Supongamos estamos al comienzo del período t . Tenemos entonces tres tipos de sets de información:

I. En un set de información tal que desde el punto de vista de i no han habido desviaciones en $t - 1$, es decir, $\forall j \in N_i \quad \phi_{jt-1}^i = \phi_{jt}^i$, sin castigos que comenzaron en $t - 1$ ni vecinos de i que deciden su actuar con él en t de acuerdo al mecanismo aleatorio con $q^t \leq q$:

Supongamos $N_i = Y \cup Z$, donde Y es el subconjunto de jugadores con quienes i se encuentra cooperando y Z el subconjunto con quienes se encuentra defectando (y ellos defectan a su vez con i). En otras palabras $j \in Y \Leftrightarrow \phi_{jt}^i = 0$. Debemos chequear que i no tenga incentivos unilaterales a desviarse y defectar con un subconjunto $Y_1 \subseteq Y$. Notemos que desviaciones contra Z no son interesantes, pues la clasificación que los amigos de i hacen de él no cambia a su favor dado que los jugadores en Z ya lo consideran un mal amigo y además i se deja engañar.

Notemos que, para un sistema de creencias μ ególatra, se tiene que $\forall h^t \in \text{supp}\{\mu(\cdot, o_i^t)\}$ se cumple que las acciones indicadas por la estrategia en t son las mismas y la probabilidad con que se jugarán las acciones a partir de $t + 1$ depende sólo directamente de las acciones realizadas en t . Esto nos permite eliminar la referencia a una historia específica $h^t \in o_i^t$.

Si el jugador i sigue la estrategia entonces los jugadores que lo consideran bueno en t lo considerarán bueno en $t + 1$ y quienes lo consideran malo en t lo considerarán malo en $t + 1$ y así sucesivamente. Así la utilidad esperada del individuo i de seguir la estrategia, una vez alcanzado o_i^t , en lo que sigue del juego es

$$\begin{aligned}
& EC(V_i(\sigma, \mu, o_i^t)) \\
&= \sum_{h^t \in o_i^t} \mu(h^t, o_i^t) \left\{ (1 - \delta) \delta^t \left(\sum_{j \text{ tal que } \phi_{jt}^i=0} w(\alpha_i^t(\sigma, o_i^t), \alpha_j^t(\sigma, o_j^t(h^t))) \right) \right. \\
&\quad \left. + (1 - \delta) \delta^t \left(\sum_{j \text{ tal que } \phi_{jt}^i=1} w(\alpha_i^t(\sigma, o_i^t), \alpha_j^t(\sigma, o_j^t(h^t))) \right) \right. \\
&\quad \left. + (1 - \delta) \left(\sum_{s=t+1}^{\infty} \delta^s E_{Q^{t+1}, \dots, Q^s} \left[\sum_{j \text{ tal que } \phi_{js}^i=0} w(\alpha_i^s(\sigma, o_i^t), \alpha_j^s(\sigma, o_j^t(h^t))) \right] \right) \right. \\
&\quad \left. + (1 - \delta) \left(\sum_{s=t+1}^{\infty} \delta^s E_{Q^{t+1}, \dots, Q^s} \left[\sum_{j \text{ tal que } \phi_{js}^i=1} w(\alpha_i^s(\sigma, o_i^t), \alpha_j^s(\sigma, o_j^t(h^t))) \right] \right) \right\} \\
&= (1 - \delta) \delta^t (yc + zd) + (1 - \delta) \left(\sum_{s=t+1}^{\infty} \delta^s (yc + zd) \right) \\
&= (yc + zd) [(1 - \delta) \delta^t + \delta^{t+1}] = (yc + zd) \delta^t
\end{aligned}$$

La desviación contra un conjunto Y_1 tiene una utilidad para i en t de $\delta^t (y_1 b + (y - y_1) c + zd)$ y la utilidad futura dependerá de cuán informados estén los individuos en Y de dicha desviación y del mecanismo aleatorio. En este caso, si i se desvía y defecta con $Y_1 \subseteq Y$ tenemos lo siguiente:

- Los individuos en Z consideran malo a i en t y por lo tanto también lo consideran malo en $s \geq t$, y viceversa, luego $\phi_{js}^i = 1 \forall j \in Z \forall s \geq t + 1$. Estos corresponden a z individuos.
- Los individuos en Y_1 consideran malo a i en $s \geq t+1$ debido a que i no cooperó con ellos en t , luego $\phi_{js}^i = 1 \forall j \in Y_1 \forall s \geq t + 1$. Notemos que en t , $\phi_{jt}^i = 0 \forall j \in Y_1$.
- Los individuos en Y que están conectados a alguno de los individuos en Y_1 observan que i defecta con un individuo que coopera con él, luego lo consideran malo. Corresponden a $m_i^{YY_1} - y_1$ individuos.
- Los individuos amigos de i que pertenecen a Y y que no están vinculados a ningún individuo en Y_1 observan que i defecta con otros de sus amigos en t y por lo tanto actuarán de acuerdo al mecanismo aleatorio en $t + 1$. Corresponden a $y - m_i^{YY_1}$.

Supongamos que este último grupo decide, siguiendo el mecanismo aleatorio, defectar con i en $t + 1$. Entonces a partir de $t + 1$ i defecta con todos sus amigos y ellos defectan a su vez con i . Si el grupo decide, siguiendo el mecanismo aleatorio público, cooperar con i en $t + 1$ entonces ven que en $t + 1$ i no sólo defectó con Y_1 sino que también defectó con otros individuos ($M_i^{YY_1} \setminus Y_1$). En caso que estén vinculados a estos individuos observan que ambos defectaron (ellos e i) y por lo tanto no lo consideran una desviación de i . En caso que no estén vinculados a estos individuos, observan que i defectó con otros de sus amigos en $t + 1$ pero, por la definición de la estrategia, dado que acaban de decidir cooperar con i siguiendo el mecanismo aleatorio, deciden no randomizar inmediatamente y seguir cooperando. Así podemos escribir

$$\begin{aligned}
& EC(V_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}, \mu, o_i^t)) \\
= & \sum_{h^t \in o_i^t} \mu(h^t, o_i^t) \left\{ (1 - \delta) \delta^t \left(\sum_{j \text{ tal que } \phi_{jt}^i=0} w(\alpha_i^t(\sigma', o_i^t), \alpha_j^t(\sigma', o_j^t(h^t))) \right) \right. \\
& + (1 - \delta) \delta^t \left(\sum_{j \text{ tal que } \phi_{jt}^i=1} w(\alpha_i^t(\sigma', o_i^t), \alpha_j^t(\sigma', o_j^t(h^t))) \right) \\
& + (1 - \delta) \left(\sum_{s=t+1}^{\infty} \delta^s E_{Q^{t+1}, \dots, Q^s} \left[\sum_{j \text{ tal que } \phi_{js}^i=0} w(\alpha_i^s(\sigma', o_i^t), \alpha_j^s(\sigma', o_j^t(h^t))) \right] \right) \\
& \left. + (1 - \delta) \left(\sum_{s=t+1}^{\infty} \delta^s E_{Q^{t+1}, \dots, Q^s} \left[\sum_{j \text{ tal que } \phi_{js}^i=1} w(\alpha_i^s(\sigma', o_i^t), \alpha_j^s(\sigma', o_j^t(h^t))) \right] \right) \right\} \\
= & (1 - \delta) \delta^t (y_1 b + (y - y_1) c + z d) \\
& + (1 - \delta) \left(\sum_{s=t+1}^{\infty} \delta^s (m_i^{YY_1} d + (y - m_i^{YY_1})(q c + (1 - q) d) + z d) \right) \\
= & (1 - \delta) \delta^t (y_1 b + (y - y_1) c + z d) + \delta^{t+1} (m_i^{YY_1} d + (y - m_i^{YY_1})(q c + (1 - q) d) + z d) \\
= & \delta^t [(1 - \delta) (y_1 b + (y - y_1) c + z d) + \delta (m_i^{YY_1} d + (y - m_i^{YY_1})(q c + (1 - q) d) + z d)]
\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}
& EC(V_i(\sigma, \mu, o_i^t)) \geq EC(V_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}, \mu, o_i^t)) \\
\Leftrightarrow & (y c + z d) \delta^t \\
& \geq \delta^t [(1 - \delta) (y_1 b + (y - y_1) c + z d) + \delta (m_i^{YY_1} d + (y - m_i^{YY_1})(q c + (1 - q) d) + z d)] \\
\Leftrightarrow & (y c + z d) \\
& \geq (1 - \delta) (y_1 b + (y - y_1) c + z d) + \delta (m_i^{YY_1} d + (y - m_i^{YY_1})(q c + (1 - q) d) + z d)
\end{aligned}$$

II. En un set de información en el cual, desde el punto de vista de i , $X \subseteq N_i$ jugadores se desviaron en $t - 1$, sin castigos que comenzaron en $t - 1$ ni vecinos de i que deciden su actuar con él en t de acuerdo al mecanismo aleatorio con $q^t \leq q$:

Supongamos $N_i = X \cup Y \cup Z$, donde Y son los jugadores con quienes i ha estado cooperando y a quienes no debe castigar, Z son los jugadores con quienes i ya viene defectando y X son los jugadores que deben ser castigados (ya sea porque defectaron con i , engañaron a un amigo de i , no castigaron a un jugador que los engañó, defectaron con alguno de sus otros amigos y el mecanismo aleatorio estableció que i debe castigarlos, o porque i prevé que lo consideran un mal amigo). Es decir

$$\phi_{jt-1}^i = \begin{cases} 0 & \text{si } j \in X \\ 0 & \text{si } j \in Y \\ 1 & \text{si } j \in Z \end{cases} \quad \phi_{jt}^i = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in X \\ 0 & \text{si } j \in Y \\ 1 & \text{si } j \in Z \end{cases}$$

De acuerdo a la estrategia, i defecta con X y Z y coopera con Y en t . El pago en t para i es $\delta^t(yc + (x + z)d)$. Veamos que sucede con los amigos de i a partir de $t + 1$

- Los individuos en X y Z categorizan a i como un mal amigo y defectan con él en todos los períodos sucesivos. Estos individuos son $x + z$.
- Los individuos en Y , que hasta el momento cooperan con i , que están conectados a todos los elementos en X observan que la defección entre i y los individuos en X es recíproca en t y por tanto no tienen razones para castigar a i y cooperan con él en $t + 1$. Estos son n_i^{YX} individuos.
- Los individuos en Y , que hasta el momento cooperan con i , que no están conectados a todos los elementos en X observan que i defecta con uno de sus otros

amigos, y por tanto estos individuos decidirán de acuerdo al mecanismo aleatorio en $t + 1$. Estos son $y - n_i^{YX}$ individuos.

Notemos que si los individuos que randomizan en $t + 1$ optan por cooperar, entonces no hay cambio en el actuar de i entre t y $t + 1$, por lo tanto nadie tiene nuevos incentivos a defectar con i . En el caso que estos individuos optan por defectar, los amigos de i que están conectados a todos los individuos en X y que cooperan con él en $t + 1$ pueden estar en uno de los siguientes dos casos: están conectados a todos los individuos k que, de acuerdo al mecanismo aleatorio, defectan con i en $t + 1$ y por tanto observan que las defecciones son mutuas, o no están conectados a alguno(s) de estos individuos y observan una defección de i contra uno(s) de sus otros amigos. En este caso, dada la primera excepción definida en $\tilde{\psi}_{ij,t+2}^3$, que corresponde a la anticipación por parte de los individuos en N_i^{YX} de una defección de i con $Y \setminus N_i^{YX}$ en $t + 1$, estos individuos cooperan con él. Así las acciones de los jugadores en $t + 1$ serán las mismas en los períodos sucesivos. Entonces se tiene que si i sigue la estrategia obtiene

$$\begin{aligned}
& EC(V_i(\sigma, \mu, o_i^t)) \\
&= \sum_{h^t \in o_i^t} \mu(h^t, o_i^t) \left\{ (1 - \delta) \delta^t \left(\sum_{j \text{ tal que } \phi_{jt}^i = 0} w(\alpha_i^t(\sigma, o_i^t), \alpha_j^t(\sigma, o_j^t(h^t))) \right) \right. \\
&\quad \left. + (1 - \delta) \delta^t \left(\sum_{j \text{ tal que } \phi_{jt}^i = 1} w(\alpha_i^t(\sigma, o_i^t), \alpha_j^t(\sigma, o_j^t(h^t))) \right) \right. \\
&\quad \left. + (1 - \delta) \left(\sum_{s=t+1}^{\infty} \delta^s E_{Q^{t+1}, \dots, Q^s} \left[\sum_{j \text{ tal que } \phi_{js}^i = 0} w(\alpha_i^s(\sigma, o_i^t), \alpha_j^s(\sigma, o_j^t(h^t))) \right] \right) \right. \\
&\quad \left. + (1 - \delta) \left(\sum_{s=t+1}^{\infty} \delta^s E_{Q^{t+1}, \dots, Q^s} \left[\sum_{j \text{ tal que } \phi_{js}^i = 1} w(\alpha_i^s(\sigma, o_i^t), \alpha_j^s(\sigma, o_j^t(h^t))) \right] \right) \right\} \\
&= \delta^t \left\{ (1 - \delta)(xd + yc + zd) + \delta[xd + zd + n_i^{YX}c + (y - n_i^{YX})(qc + (1 - q)d)] \right\}
\end{aligned}$$

Si el jugador i planea desviarse y defectar en t con un subconjunto de Y entonces también prefiere castigar a X , pues ningún jugador en Y cooperará con certeza con él en el futuro: quienes saben que i se desvió jugarán D y quienes no están seguros randomizarán, acciones que no cambiarán si i también castiga a X , tanto si los individuos observan que la defección es mutua como si no. Por esta razón existen sólo tres desviaciones interesantes:

1. Defectar con $Y_1 \subseteq Y$ y castigar a X : se tiene que el pago en t es $\delta^t(y_1b + (y - y_1)c + xd + zd)$. Además

- Los individuos en X y Z consideran a i un mal amigo, para todo $s \geq t$.
- Los individuos en Y_1 consideran a i un mal amigo, para todo $s \geq t$.
- Los individuos en $Y \setminus Y_1$ que están conectados al menos a algún individuo en Y_1 observan la defección de i contra este individuo y por tanto clasifican a i como un mal amigo en adelante. Este grupo más el anterior son $m_i^{YY_1}$ individuos.
- Los individuos en $Y \setminus Y_1$ que no están conectados a ningún individuo en Y_1 observan que i defecta con un grupo de sus otros amigos y por tanto actuarán dependiendo del mecanismo aleatorio. Notemos que si estos individuos cooperan en $t + 1$ también cooperarán en $t + 2$ y no observarán nuevas desviaciones de i a partir de $t + 3$, luego se mantienen cooperando con él. Estos son $y - m_i^{YY_1}$ individuos.

Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned}
& EC(V_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}, \mu, o_i^t)) \\
&= \sum_{h^t \in o_i^t} \mu(h^t, o_i^t) \left\{ (1 - \delta) \delta^t \left(\sum_{j \text{ tal que } \phi_{jt}^i = 0} w(\alpha_i^t(\sigma', o_i^t), \alpha_j^t(\sigma', o_j^t(h^t))) \right) \right. \\
&\quad \left. + (1 - \delta) \delta^t \left(\sum_{j \text{ tal que } \phi_{jt}^i = 1} w(\alpha_i^t(\sigma', o_i^t), \alpha_j^t(\sigma', o_j^t(h^t))) \right) \right. \\
&\quad \left. + (1 - \delta) \left(\sum_{s=t+1}^{\infty} \delta^s E_{Q^{t+1}, \dots, Q^s} \left[\sum_{j \text{ tal que } \phi_{js}^i = 0} w(\alpha_i^s(\sigma', o_i^t), \alpha_j^s(\sigma', o_j^t(h^t))) \right] \right) \right. \\
&\quad \left. + (1 - \delta) \left(\sum_{s=t+1}^{\infty} \delta^s E_{Q^{t+1}, \dots, Q^s} \left[\sum_{j \text{ tal que } \phi_{js}^i = 1} w(\alpha_i^s(\sigma', o_i^t), \alpha_j^s(\sigma', o_j^t(h^t))) \right] \right) \right\} \\
&= \delta^t \left\{ (1 - \delta)(xd + y_1b + (y - y_1)c + zd) \right. \\
&\quad \left. + \delta[xd + m_i^{YY_1}d + (y - m_i^{YY_1})(qc + (1 - q)d) + zd] \right\}
\end{aligned}$$

En este caso, el jugador i recibe en t un pago b por defectar contra un individuo que coopera con él, sin embargo esto causará que desde el período siguiente quienes fueron engañados o saben con certeza que i se desvió de la estrategia jugarán D con él y los demás seguirán el mecanismo aleatorio público.

2. Cooperar con X e Y : bajo una desviación de una etapa, i recibe en t $\delta^t(x0 + yc + zd)$.

Además:

- Los individuos en X y Z defectan con i pues lo tienen clasificado con $\phi_{it}^j = 1$.
- Los individuos en Y que están conectados a alguno de los elementos en X observan que i no realizó el castigo correspondiente y por tanto consideran malo a i en adelante. Estos son m_i^{YX} individuos.
- Los individuos en Y que no están conectados a ningún elemento en X no observan un cambio en el actuar de i entre $t - 1$ y t y tampoco saben que i debía aplicar el

castigo, luego cooperan con i en $t + 1$. Como resultado de esta etapa verán que i defectó con sus otros amigos X y por lo tanto randomizarán en $t + 2$.

Así,

$$\begin{aligned}
& EC(V_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}, \mu, o_i^t)) \\
= & \sum_{h^t \in o_i^t} \mu(h^t, o_i^t) \left\{ (1 - \delta) \delta^t \left(\sum_{j \text{ tal que } \phi_{j^i}^t = 0} w(\alpha_i^t(\sigma', o_i^t), \alpha_j^t(\sigma', o_j^t(h^t))) \right) \right. \\
& + (1 - \delta) \delta^t \left(\sum_{j \text{ tal que } \phi_{j^i}^t = 1} w(\alpha_i^t(\sigma', o_i^t), \alpha_j^t(\sigma', o_j^t(h^t))) \right) \\
& + (1 - \delta) \left(\sum_{s=t+1}^{\infty} \delta^s E_{Q^{t+1}, \dots, Q^s} \left[\sum_{j \text{ tal que } \phi_{j^i}^s = 0} w(\alpha_i^s(\sigma', o_i^t), \alpha_j^s(\sigma', o_j^t(h^t))) \right] \right) \\
& \left. + (1 - \delta) \left(\sum_{s=t+1}^{\infty} \delta^s E_{Q^{t+1}, \dots, Q^s} \left[\sum_{j \text{ tal que } \phi_{j^i}^s = 1} w(\alpha_i^s(\sigma', o_i^t), \alpha_j^s(\sigma', o_j^t(h^t))) \right] \right) \right\} \\
= & \delta^t \left\{ (1 - \delta)(x_0 + yc + zd) + (1 - \delta)\delta(xd + zd + m_i^{YX}d + (y - m_i^{YX})c) \right. \\
& \left. + \delta^2[xd + m_i^{YX}d + (y - m_i^{YX})(qc + (1 - q)d) + zd] \right\}
\end{aligned}$$

donde en t , i recibe 0 por cooperar con los jugadores en X , dado que ellos defectan con él anticipando un castigo. En $t + 1$, i defecta con los individuos en X y prevé que de sus amigos aquellos conectados a algún elemento en X defectan con él por no haber hecho efectivo el castigo en t , y los demás individuos en Y sólo han observado cooperación luego cooperan con i . Estos mismos individuos observan como resultado en $t + 1$ que i defectó con algunos de sus amigos (los elementos en X con quienes ellos no están conectados), luego seguirán el mecanismo aleatorio.

3. Castigar a $X_1 \subsetneq X$ y cooperar con Y : en t , i recibe $\delta^t(x_1d + (x - x_1)0 + yc + zd)$. A partir del período siguiente,

- Los individuos en X y Z consideran malo a i y por lo tanto defectan con él en

adelante.

- Los individuos en Y que están conectados a algún elemento en $X \setminus X_1$ reconocen que i no aplicó castigo en un caso que debía hacerlo y por lo tanto defectan con él en adelante.
- Los individuos en Y que no están conectados a ningún elemento en $X \setminus X_1$ y están conectados a todos los elementos en X_1 no observan la falta de castigo y, más aún, observan que i aplica el castigo cuando corresponde y por tanto cooperan con i en $t + 1$.
- Los individuos en Y que no están conectados a ningún elemento en $X \setminus X_1$ y no están conectados a todos los elementos en X_1 observan una defección de i contra sus otros amigos y por tanto deciden tratar a i de acuerdo al mecanismo aleatorio.

III. En un set de información con castigos que comenzaron en $t - 1$ o vecinos de i que deciden su actuar con él en t de acuerdo al mecanismo aleatorio con $q^t \leq q$:

Supongamos $N_i = X \cup Y \cup Z_1 \cup Z_2$, donde X son los jugadores con quienes i ha estado cooperando y a quienes debe castigar, Y son los jugadores con quienes i ha estado cooperando y a quienes no debe castigar, Z_1 son los jugadores con quienes i ya viene defectando previo a $t - 1$ y Z_2 son los jugadores con quienes i comenzó a defectar en $t - 1$. En este tipo de historias las condiciones se vuelven más complejas, debido a que en caso que un jugador en Y observe nuevas defecciones de i contra alguno de sus otros amigos, si este individuo está vinculado a alguno de los individuos en Z_2 , creerá que la defección de i es justificada y no randomizará sino que cooperará con i .

De la misma manera un jugador en Y que decide su actuar con i de acuerdo al mecanismo aleatorio en t , no volverá a randomizar inmediatamente al observar una nueva defección de i con uno de sus otros amigos. En el caso $q = 1$ estas condiciones son equivalentes a las condiciones de los sets de información del tipo II, dado que de todas maneras al observar una defección de i con uno de sus otros amigos todos cooperan.

Se demuestra en el apéndice A que la condición

$$EC(V_i(\sigma, \mu, o_i^t)) \geq EC(V_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}, \mu, o_i^t))$$

para los dos primeros tipos de sets de información implica las dos condiciones dadas por el siguiente lema

Lema 1 (Condición necesaria para los sets de información de tipo I y II)

Una red g que soporta la estrategia comunitaria como equilibrio bayesiano en el subjuego de continuación debe satisfacer las siguientes condiciones:

$$\forall i, \forall X \subseteq N_i,$$

$$\delta \leq \frac{dx}{(1-q)(c-d)(n_i - x - n_i^X)} \quad (3.1)$$

$$\forall i, \forall (Y, X, Y_1), Y \cap X = \emptyset, Y \cup X \subseteq N_i, Y_1 \subseteq Y$$

$$\delta \geq \frac{y_1(b-c)}{y_1(b-c) + (c-d)[qm_i^{YY_1} + (1-q)n_i^{YX}]} \quad (3.2)$$

Las cotas superiores para δ corresponden a condiciones necesarias para que un individuo tenga los incentivos para castigar, pues de lo contrario estaría dispuesto a soportar que lo engañen hoy con tal de no perder mayor cooperación en el futuro. Para el caso $q = 1$ las cotas superiores para δ no añaden restricciones, pues si en caso de duda los amigos de un jugador siempre lo consideran bueno, entonces dicho jugador siempre tiene incentivos a castigar: quienes saben que está castigando cooperan con él y quienes no están seguros lo consideran bueno y también cooperan con él. Si bien esta condición es sólo necesaria, demostraremos en el lema siguiente una condición suficiente que permite llegar a esta conclusión general.

Las cotas superiores nos dicen que, en un set de información de tipo II, cuando se debe castigar a un conjunto X , para que i no tenga incentivos a no castigar a ningún individuo en X , basta chequear la condición de, entre aquellos conjuntos de igual cardinal al de X , aquél que está más desconectado de los otros amigos de i , pues en ese caso es mayor el número de vecinos de i que no sabrán con certeza que i se encuentra castigando y no desviándose de la estrategia.

Por otro lado, las cotas inferiores para δ corresponden a las condiciones que deben cumplirse en estos sets de información para que los individuos no prefieran desviarse y jugar D contra individuos con quienes la estrategia establece cooperación.

Notemos que una condición necesaria para que existan equilibrios cooperativos es

$$\delta \geq \frac{b - c}{b - d} \tag{3.3}$$

que corresponde a la cota usual de un juego repetido bilateral. Esto pues la cota inferior

para δ , tomando $y_1 = y$ y considerando que $n_i^{YX} \leq y$, implica

$$\delta \geq \frac{y_1(b-c)}{y_1(b-c) + y(c-d)} = \frac{b-c}{b-d}$$

Se demuestra en el apéndice B el siguiente lema, que establece condiciones suficientes

Lema 2 (Condición suficiente para los sets de información de tipo I y II)

Sea g una red que satisface las siguientes condiciones

$\forall i, \forall (Y, X, Y_1), Y \cap X = \emptyset, Y \cup X \subseteq N_i, Y_1 \subseteq Y$

$$\delta \geq \frac{y_1(b-c)}{y_1(b-c) + (c-d)[qm_i^{YY_1} + (1-q)n_i^{YX}]} \quad (3.4)$$

$\forall i, \forall (Y, X_1, X_2), Y \cap X_1 = Y \cap X_2 = X_1 \cap X_2 = \emptyset, Y \cup X_1 \cup X_2 \subseteq N_i$

$$\delta(n_i^{YX_1} - n_i^{Y(X_1 \cup X_2)})(c-d)(1-q)(1-\delta q) \leq (1-\delta)x_2d \quad (3.5)$$

entonces ningún jugador tiene incentivos a desviarse de la estrategia en un set de información del tipo I o II.

La cota inferior corresponde a la condición para no tener incentivos a defectar con uno o más jugadores con quienes la estrategia indica cooperación. De este lema y el anterior, tal como se demuestra en el apéndice A, se desprende que esta es una condición de equivalencia. La segunda condición de este lema es más estricta que la cota superior del lema anterior, y establece una condición suficiente para tener los incentivos a castigar cuando la estrategia así lo establece.

Decimos que una red g es autosustentable si soporta la estrategia comunitaria como equilibrio en el subjuego de continuación. A partir de estos lemas podemos caracterizar parcialmente el espacio de las redes de equilibrio o autosustentables, resultado principal de este documento:

Teorema 1 *Se define $\bar{q} = \frac{b-c}{c-d} \frac{1-\delta}{\delta}$, entonces si δ verifica (3.3), tenemos*

- *Si $q < \bar{q}$ las redes autosustentables son las redes formadas por componentes completas.*
- *Si $q \geq \bar{q}$ una red g autosustentable debe satisfacer que $\forall i, \forall X \subseteq N_i$*

$$\delta \leq \frac{dx}{(1-q)(c-d)(n_i - x - n_i^X)}$$

- *Si $q = 1$ entonces todas las redes son autosustentables.*

Este teorema caracteriza, aunque no de manera cerrada, las redes autosustentables en función del parámetro q . Establece que si $q < \bar{q}$, es decir, si los amigos de un jugador i no lo consideran un buen amigo en caso de incertidumbre con una probabilidad suficientemente alta, entonces las únicas redes de equilibrio son aquellas formadas por componentes completas, porque en dichas redes todos los individuos diferencian un castigo de una defección y por tanto no hay necesidad de recurrir al mecanismo aleatorio. Si q es lo suficientemente alto, otras redes pueden también ser autosustentables y la estructura de dichas redes debe satisfacer al menos que los individuos tengan incentivos a seguir la estrategia en los dos primeros tipos de sets de información. En el caso extremo $q = 1$ todas las redes son autosustentables, pues los incentivos a castigar son directos dado que nadie pensará que i es quien se está desviando, y los incentivos a

cooperar están dados por (3.3).

Notemos que

$$\bar{q} = \frac{b-c}{c-d} \frac{1-\delta}{\delta} \Leftrightarrow \frac{b-c}{b-c + \bar{q}(c-d)} = \delta$$

$$\begin{aligned} \bar{q} \leq 1 &\Leftrightarrow \bar{q}(c-d) \leq c-d \Leftrightarrow b-c + \bar{q}(c-d) \leq b-d \\ &\Leftrightarrow \frac{b-c}{b-d} \leq \frac{b-c}{b-c + \bar{q}(c-d)} = \delta \end{aligned}$$

Demostración del teorema:

Supongamos $q < \bar{q}$. Consideremos una red g que no está formada exclusivamente por componentes completas. Luego existen i, j, k tales que $j, k \in N_i$ y $g_{jk} = 0$. Tomando $Y = Y_1 = \{j\}$, $X = Y^c$ se verifica que $m_i^{YY_1} = y_1$ y $n_i^{YY^c} = 0$ pues j no está conectado a $k \in Y^c$. Por lo tanto, la cota inferior para δ establecida en el lema 1 se reescribe

$$\frac{y(b-c)}{y(b-c) + (c-d)(qy + (1-q)n_i^{YY^c})} = \frac{b-c}{(b-c) + (c-d)q} > \frac{b-c}{(b-c) + (c-d)\bar{q}} = \delta$$

y la red no es autosustentable. Por otro lado, en una red de componentes completas, veamos que se satisfacen las condiciones del lema 2. Para la ecuación (3.4), estas redes verifican $n_i^{YX} = m_i^{YY_1} = y$ y se tiene que

$$\begin{aligned} &\frac{y_1(b-c)}{y_1(b-c) + (c-d)[qm_i^{YY_1} + (1-q)n_i^{YX}]} = \frac{y_1(b-c)}{y_1(b-c) + (c-d)y} \\ &\leq \frac{y(b-c)}{y(b-c) + (c-d)y} = \frac{b-c}{b-d} \leq \delta \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se cumple por (3.3). De la misma manera se observa que se cumple la segunda condición del lema, pues en estas redes $n_i^{YX_1} = n_i^{Y(X_1 \cup X_2)}$ y la condición queda $0 \leq (1-\delta)x_2d$. Más aún, en componentes completas no hay incer-

tidumbre, lo que implica que el mecanismo aleatorio no es necesario y el tercer tipo de historias no impone restricciones adicionales.

Supongamos $q \geq \bar{q}$. Notemos que

$$\begin{aligned} & \frac{y_1(b-c)}{y_1(b-c) + (c-d)(qm_i^{YY_1} + (1-q)n_i^{YX^c})} \\ \leq & \frac{y_1(b-c)}{y_1(b-c) + (c-d)(qy_1 + (1-q)0)} \\ = & \frac{b-c}{(b-c) + (c-d)q} \leq \frac{b-c}{(b-c) + (c-d)\bar{q}} = \delta \end{aligned}$$

Luego la cota inferior para δ es satisfecha por cualquier red y las condiciones que quedan por chequear corresponden a los incentivos para castigar cuando la estrategia así lo establece. De acuerdo al lema 1, una condición necesaria está dada por (3.1). Sin embargo, para la equivalencia queda chequear condiciones más fuertes de castigo en los sets de información de tipo II, así como las condiciones en los sets de información de tipo III.

En el caso $q = 1$, (3.5) nos asegura que se tienen los incentivos a castigar en los sets de información de tipo II, pues no impone ninguna restricción ($0 \leq (1-\delta)x_2d$) y las condiciones del tercer tipo de sets de información son equivalentes a las del segundo tipo, pues en caso de incertidumbre no hay randomización. Así, cuando $q = 1$ todas las redes son autosustentables.

■

De acuerdo a (2.3) una red autosustentable es también equilibrio del juego desde $t = 0$. Esto pues si un individuo decide no ofrecer algunos de los vínculos establecidos en g , en el mejor de los casos también observará cooperación todos los períodos, pero con un número menor de vecinos. Por otro lado tampoco tiene incentivos a ofrecer nuevos vínculos, pues el hacerlo tiene un costo $r > 0$ y de todas maneras no se establecen, dado que los ofrecimientos no son mutuos.

Sin embargo, el teorema anterior no permite caracterizar de manera cerrada las redes de equilibrio cuando $1 > q \geq \bar{q}$. El siguiente lema, cuya demostración se presenta en el apéndice C, establece las condiciones de equilibrio para algunas de las redes más recurrentes en la literatura, a manera de ejemplo, para demostrar que en este intervalo efectivamente sí es posible encontrar redes distintas a aquellas formadas por componentes completas que sustenten la estrategia en el juego de continuación. Supongamos los siguientes pagos del juego bilateral:

		Jugador 2	
		C	D
Jugador 1	C	12, 12	0, 16
	D	16, 0	4, 4

Notemos que se satisfacen las dos condiciones requisito: $16 > 12 > 4 > 0$ y $2 \cdot 12 = 24 > 16$.

Lema 3 (Condiciones de equilibrio para algunas redes tradicionales)

Supongamos se tienen los pagos recién descritos.

- *La rueda y la línea son redes autosustentables si y solo si se satisface que*

$$\begin{aligned}\delta &\geq \frac{1}{3} \\ q &\geq \max \left\{ \frac{1-\delta}{2\delta}, \frac{2\delta-1}{2\delta} \right\}\end{aligned}$$

- *La estrella cuyo centro tiene n_c vínculos es autosustentable si y solo si se satisface que*

$$\begin{aligned}\delta &\geq \frac{1}{3} \\ \delta &\leq \frac{1}{2(1-q)(n_c-1)} \\ q &\geq \frac{1-\delta}{2\delta}\end{aligned}$$

Supongamos que se tienen las condiciones para que la línea sea una red de equilibrio. Notemos que los jugadores 1 y N tienen incentivos a coordinarse y ofrecerse mutuamente un vínculo, pues la red que se establece (la rueda) también sustenta cooperación en el juego repetido y de acuerdo a (2.3) aumenta la utilidad de estos jugadores. Es decir, la línea no es una red estable pues existen incentivos bilaterales a desviarse.

Capítulo 4

Discusiones y conclusiones

En este documento planteamos un modelo de interacción y observación local en el cual definimos como estrategia una norma social que consiste básicamente en que cada individuo no sólo castiga a quienes lo engañan a él, sino también a quienes engañan a sus amigos y a quienes se dejan engañar. En caso que un individuo observe una defección del vecino contra una tercera persona a quien no observa, sigue el mecanismo aleatorio público. Para que una red sustente cooperación en este modelo debe satisfacer los incentivos necesarios para cooperar cuando así lo establece la estrategia y defectar cuando corresponde castigar. Los incentivos para cooperar se traducen en cotas inferiores para el factor de descuento intertemporal δ , de modo de asegurar que los individuos sean lo suficientemente pacientes y la valoración que tengan de la cooperación futura supere los incentivos de corto plazo por desviarse. Los incentivos para castigar implican cotas superiores para δ , pues si un jugador aplica un castigo hoy, quienes no reconozcan que está castigando y no desviándose de la estrategia lo castigarán con una probabilidad positiva y perderá dicha cooperación futura. Esta cota es irrelevante en dos casos: cuando ante la incertidumbre los individuos cooperan, y por tanto un jugador nunca se ve castigado por aplicar un castigo, y en el caso de las redes formadas por componentes completas, en las cuáles todos los individuos están informados de las desviaciones y

por tanto no hay incertidumbre ni necesidad de recurrir al mecanismo aleatorio.

El resultado principal es una caracterización parcial de las redes de equilibrio como función del parámetro q , la probabilidad de cooperar en caso de incertidumbre, cuando no se sabe si la defección observada es un castigo o una desviación. De acuerdo a este resultado, en sociedades desconfiadas, aquellas que cooperan con una baja probabilidad, las redes de equilibrio sólo son las redes formadas por componentes completas, en las cuales no hay oportunidad de incertidumbre. En sociedades más confiadas otras redes pueden sustentar cooperación y en el caso límite en que siempre se coopera en caso de duda todas las redes son equilibrio.

Lamentablemente no obtuvimos una caracterización cerrada, lo que no nos permite estudiar cuáles de las redes de equilibrio son estables, es decir, no hay incentivos bilaterales a una desviación. Como ejemplo tenemos el caso de la línea y la rueda, redes que son equilibrio bajo una serie de condiciones en común. Si el costo de ofrecer un vínculo adicional es menor al beneficio de lograr una relación cooperativa, entonces la línea no es estable pues los jugadores 1 y N tienen incentivos a coordinarse y ofrecerse mutuamente un vínculo formando una rueda. Una posible línea de trabajo es completar la caracterización de las redes de equilibrio y estudiar estabilidad.

Una de las condiciones necesarias para que exista una red de equilibrio es $\delta \geq \frac{b-c}{b-d}$, que corresponde a la cota usual del dilema del prisionero repetido, con lo cual la sola amenaza individual es suficiente para lograr cooperación. Surge entonces la duda de cuál es el beneficio de usar esta norma social, si cooperación es sustentable con una estrategia más sencilla. La primera respuesta es que no es intuitivo que los individuos ignoren información que observan, por ejemplo defecciones de un vecino contra un amigo en común. Además en el caso de individuos heterogéneos, con distintos factores de

descuento intertemporal o distintos beneficios al interactuar, en que no todas las relaciones bilaterales sustentan cooperación con una estrategia gatillo bilateral, la norma social puede ser la solución para asegurar cooperación. Basta modificar levemente la estrategia, indicando que un jugador coopera mientras un determinado subconjunto de sus amigos se mantiene cooperando con él, para lograr equilibrios cooperativos más allá de los que se lograrían con una estrategia bilateral gatillo.

En conclusión, hemos podido modelar adecuadamente ciertas situaciones que se encuentran en la vida real, situaciones de interacción y observación local que dependen de inversiones previas de los mismos individuos, sin perder la relativa simplicidad del modelo. Sin embargo, este trabajo presenta las limitaciones dadas por los supuestos asociados, principalmente el supuesto de creencias ególatras, es decir, la creencia de un individuo que sus amigos que no son amigos entre ellos sólo se conectan a través de su propio círculo social. Este supuesto, que nos permite simplificar los cálculos de las utilidades esperadas, podría intentar levantarse y estudiar equilibrios bajo supuestos menos restrictivos, si bien éste nos parece bastante intuitivo. Además existen otros aspectos que podrían incorporarse al modelo y que representan distintas posibilidades de extensión de este trabajo: en primer lugar podría modelarse el proceso de formación de la red como un proceso dinámico, de modo tal que a medida que pasa el tiempo los jugadores puedan ir adicionando o eliminando vínculos. En segundo lugar, podría intentar modelarse la transmisión de información entre los individuos, aspecto no considerado en este trabajo. Nuevos desarrollos son necesarios para estudiar estas alternativas y sus posibles diferencias e implicancias.

Bibliografía

- [1] I. Ahn and M. Suominen. Word-of-mouth communication and community enforcement. *International Economic Review*, 42:399–415, 2001.
- [2] J. Andreoni and J. H. Miller. Rational cooperation in the finitely repeated prisoner’s dilemma: Experimental evidence. *The Economic Journal*, 103(418):570–585, 1993.
- [3] V. Bala and S. Goyal. A noncooperative model of network formation. *Econometrica*, 68(5):1181–1229, 2000.
- [4] F. Balmaceda. Social interactions and repeated play in heterogeneous communities with no information flows. *working paper*.
- [5] F. Balmaceda. Endogenous cooperative networks: Social capital and the small-world property. <http://ssrn.com/abstract=930053>, 2006.
- [6] J. Bendor and D. Mookherjee. Regulating intergroup conflict: Ascriptive versus universalistic norms. *working paper*, 2001.
- [7] S. Bowles and H. Gintis. The evolution of strong reciprocity: Cooperation in heterogeneous populations. *Theoretical Population Biology*, 65:17–28, 2004.
- [8] H. Carlson and E. Van Damme. Global games and equilibrium selection. *Econometrica*, 61(5):989–1018, 1993.

- [9] I. Cho and D. M. Kreps. Signaling games and stable equilibria. *Quarterly Journal of Economics*, 102(2):179–222, 1987.
- [10] M. Cho. Public randomization in the repeated prisoner’s dilemma game with local interaction. *working paper*, 2007.
- [11] A. Dixit. On modes of economic governance. *Econometrica*, 71(2):449–481, 2003.
- [12] A. Dixit. *Lawlessness and Economics. Alternative Modes of Governance*. Oxford University Press, 2006.
- [13] B. Dutta, S. Ghosal, and D. Ray. Farsighted network formation. *Journal of Economic Theory*, 122(2):143–164, 2005.
- [14] J. Eeckhout. Minorities and endogenous segregation. *Review of Economic Studies*, 73:31–53, 2006.
- [15] G. Ellison. Cooperation in the prisoner’s dilemma with anonymous random matching. *Review of Economic Studies*, 61:567–588, 1994.
- [16] J. Henrich et al. In search of homo economicus: Behavioral experiments in 15 small-scale societies. *American Economic Review*, 91(2):73–78, 2002.
- [17] U. Fischbacher et al. Are people conditionally cooperative? evidence from a public goods experiments. *Working Paper No 16, Institute for Empirical Research in Economics, University of Zurich*, 2000.
- [18] A. Galeotti and S. Goyal. The law of the few. *Economics Discussion Papers, University of Essex*, (636), 2007.
- [19] A. Galeotti, S. Goyal, and J. Kamphorst. Network formation with heterogeneous players. *Games and Economic Behaviour*, 54:353–372, 2006.

- [20] S. Goyal and S. Joshi. Unequal connections. *International Journal of Game Theory*, 34(3):319–349, 2006.
- [21] M. Haag and R. Lagunoff. Social norms, local interaction and neighborhood planning. *International Economic Review*, 47(1):265–296, 2006.
- [22] M. Haag and R. Lagunoff. On the size and structure of group cooperation. *Journal of Economic Theory*, 135:68–89, 2007.
- [23] M. Jackson and A. Wolinski. A strategic model of social and economic networks. *Journal of Economic Theory*, 71:44–74, 1996.
- [24] M. Kandori. Social norms and community enforcement. *Review of Economic Studies*, 59:63–80, 1992.
- [25] M. Kinatered. The repeated prisoner’s dilemma in a network. <http://www.webmeets.com/SAEe/2009/Prog/viewpaper.asp?pid=77>, 2006.
- [26] M. Kosferld and F. Von Siemens. Competition, cooperation and corporate culture. *Iza Discussion paper n° 2927*, 2007.
- [27] D. Kreps and R. Wilson. Sequential equilibria. *Econometrica*, 50(4):863–894, 1982.
- [28] M. Rabin. Incorporating fairness into game theory and economics. *The American Economic Review*, 83(5):1281–1302, 1993.

Apéndice A

Demostración del lema 1

La demostración de este lema consiste en estudiar la condición de racionalidad de σ para los dos primeros tipos de sets de información y comprobar que se tienen las condiciones enunciadas en el lema.

I. En un set de información tal que desde el punto de vista de i no han habido desviaciones en $t-1$, sin castigos que comenzaron en $t-1$ ni vecinos de i que deciden su actuar con él en t de acuerdo al mecanismo aleatorio con $q^t \leq q$:

Debemos chequear que i no tiene incentivos a desviarse y defectar con un conjunto $Y_1 \subseteq Y$:

$$\begin{aligned} EC(V_i(\sigma, \mu, o_i^t)) &\geq EC(V_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}, \mu, o_i^t)) \\ \Leftrightarrow yc + zd &\geq \\ &(1 - \delta)[y_1b + (y - y_1)c + zd] + \delta[m_i^{YY_1}d + (y - m_i^{YY_1})(qc + (1 - q)d) + zd] \\ \Leftrightarrow \delta\{(1 - q)y(c - d) + q(c - d)m_i^{YY_1}\} &\geq (1 - \delta)y_1(b - c) \end{aligned}$$

que se reescribe como

$$\delta \geq \frac{y_1(b-c)}{y_1(b-c) + (c-d)[qm_i^{YY_1} + (1-q)y]} \quad \forall Y_1 \subseteq Y$$

Más aún, como $y \geq m_i^{YY_1} \geq y_1$, tenemos que

$$\frac{y_1(b-c)}{y_1(b-c) + (c-d)[qm_i^{YY_1} + (1-q)y]} \leq \frac{y_1(b-c)}{y_1(b-c) + (c-d)y_1} = \frac{b-c}{b-d}$$

luego $\delta \geq \frac{b-c}{b-d}$ es condición suficiente. Además, tomando $Y_1 = Y$, es decir si i defecta con todos sus amigos tenemos que

$$\begin{aligned} EC(V_i(\sigma, \mu, o_i^t)) &\geq EC(V_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}, \mu, o_i^t)) \\ \Leftrightarrow yc + zd &\geq (1-\delta)(yb + zd) + \delta(y+z)d \\ \Leftrightarrow yc &\geq yb + \delta(yd - yb) \\ \Leftrightarrow \delta &\geq \frac{b-c}{b-d} \end{aligned} \tag{A.1}$$

Por lo tanto esta condición es necesaria y suficiente. Notemos que si nos encontramos en el camino de equilibrio, es decir, si en $t = 0$ se estableció la red g y todos los individuos han cooperado en los períodos desde $t = 1$ al presente, en caso de que i se desvíe y defecte con un subconjunto Y_1 de sus amigos, el valor esperado de esta desviación está acotado superiormente por el valor esperado de una desviación similar fuera del camino de equilibrio. Esto pues si bien hay un subconjunto de sus amigos que no lo castigan en $t+1$ y siguen el mecanismo aleatorio público, esas eventuales cooperaciones se podrían perder en el futuro debido a las implicancias que la desviación de i tiene sobre la cooperación en el resto de la red. Por lo tanto (A.1) es suficiente para una desviación de este tipo en el camino de equilibrio.

II. En un set de información en el cual, desde el punto de vista de i , $X \subseteq N_i$ jugadores se desviaron en $t - 1$, sin castigos que comenzaron en $t - 1$ ni vecinos de i que deciden su actuar con él en t de acuerdo al mecanismo aleatorio con $q^t \leq q$:

Estudiemos la desviación en que i defecta con un subconjunto $Y_1 \subseteq Y$ y castiga a los individuos en X . De acuerdo a lo discutido en el cuerpo del documento tenemos:

$$\begin{aligned}
& EC(V_i(\sigma, \mu, o_i^t)) \geq EC(V_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}, \mu, o_i^t)) \\
\Leftrightarrow & (1 - \delta)[xd + zd + yc] + \delta[xd + zd + n_i^{YX}c + (y - n_i^{YX})(qc + (1 - q)d)] \\
& \geq (1 - \delta)[xd + zd + y_1b + (y - y_1)c] \\
& + \delta[xd + m_i^{YY_1}d + zd + (y - m_i^{YY_1})(qc + (1 - q)d)] \\
\Leftrightarrow & \delta[(1 - q)n_i^{YX}(c - d) + qm_i^{YY_1}(c - d)] \geq (1 - \delta)y_1(b - c)
\end{aligned}$$

que se reescribe como

$$\delta \geq \frac{y_1(b - c)}{y_1(b - c) + (c - d)[qm_i^{YY_1} + (1 - q)n_i^{YX}]} \quad (\text{A.2})$$

De esta forma hemos probado que (A.2) es condición necesaria y suficiente para probar que i no tiene incentivos a desviarse y defectar en un set de información de este tipo. Más aún, veamos que (A.2) implica (A.1). Basta considerar $X = \emptyset$ e $Y_1 = Y$, en cuyo caso tenemos que $n_i^{YX} = y$, $m_i^{YY_1} = y$ y las ecuaciones son equivalentes. Por lo tanto, en los sets de información de tipo I y II, i no tiene incentivos unilaterales a desviarse defectando con un grupo de cooperadores si y sólo si se satisface (A.2), que corresponde a la segunda condición del lema 1.

Veamos ahora que i tiene los incentivos necesarios para castigar a X , los cuales de-

mostraremos implican la primera condición dada por el lema. En el cuerpo del trabajo se establece que la utilidad de la desviación está dada por:

$$V_i' = EC(V_i(\sigma_i', \sigma_{-i}, \mu, \sigma_i^t)) = (1 - \delta)[x0 + yc + zd] + \delta(1 - \delta)[xd + zd + m_i^{YX}d] \\ + \delta(1 - \delta)(y - m_i^{YX})c + \delta^2[xd + m_i^{YX}d + (y - m_i^{YX})(qc + (1 - q)d) + zd]$$

Sin embargo en la derivación de la utilidad de la desviación anterior asumimos que todos los individuos en M_i^{YX} defectan con i en $t + 1$ por no aplicar el castigo en t . Esto es acorde a la definición de la estrategia en aquellos casos en que X defectó con i en $t - 1$. En esos casos si i no castiga a X en t , los individuos en M_i^{YX} observan que i se deja engañar en t y por tanto defectan con él en adelante de acuerdo a ψ^2 . Sin embargo si la razón por la cuál i debe castigar a X no es debido a una desviación contra el mismo, entonces en caso que no aplique el castigo, los individuos en M_i^{YX} no defectan con él. En este segundo caso, los individuos en Y cooperan con i en $t + 1$ y al observar las defecciones en $t + 1$ de i contra X , aquellos individuos en Y que observan que las defecciones son mutuas cooperan y los demás randomizan. Es decir, con esta desviación i logra un retraso del comienzo del castigo de quienes no reconocen que él está castigando, a costa de dejarse engañar en t . La utilidad de la desviación en este caso es:

$$V_i^* = EC(V_i(\sigma_i', \sigma_{-i}, \mu, \sigma_i^t)) = (1 - \delta)[x0 + yc + zd] + \delta(1 - \delta)[xd + yc + zd] \\ + \delta^2[xd + n_i^{YX}c + (y - n_i^{YX})(qc + (1 - q)d) + zd]$$

Una tercera posibilidad es que sólo $X_1 \subseteq X$ haya defectado con i en $t - 1$. Entonces si i no castiga a X en t , los individuos en $M_i^{YX_1}$ son quienes castigan a i en $t + 1$ por no aplicar el castigo correspondiente en t y los demás individuos en Y cooperan. Estos últimos individuos observan en $t + 1$ nuevas defecciones de i contra los individuos X_1 a

quienes no están conectados y por tanto optan por randomizar en $t + 2$. Notemos que ninguna de las excepciones descritas en ψ^3 aplican en este caso. Así la utilidad de una desviación es:

$$\begin{aligned} V_i^{**} &= EC(V_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}, \mu, o_i^t)) = (1 - \delta)(x0 + yc + zd) + \delta(1 - \delta)(xd + m_i^{YX_1}d + zd) \\ &\quad + \delta(1 - \delta)(y - m_i^{YX_1})c + \delta^2(xd + m_i^{YX_1}d + (y - m_i^{YX_1})(qc + (1 - q)d) + zd) \end{aligned}$$

En cualquiera de estos tres casos, la utilidad de seguir la estrategia es la misma. Por lo tanto la condición necesaria y suficiente para que i no tenga incentivos a desviarse es que el máximo de las utilidades de estas desviaciones sea menor a la utilidad de seguir la estrategia. Luego comparamos:

$$\begin{aligned} &V'_i \leq V_i^* \\ \Leftrightarrow &(1 - \delta)(x0 + yc + zd) + \delta(1 - \delta)(xd + m_i^{YX}d + (y - m_i^{YX})c + zd) \\ &\quad + \delta^2(xd + m_i^{YX}d + (y - m_i^{YX})(qc + (1 - q)d) + zd) \\ &\leq (1 - \delta)(x0 + yc + zd) + \delta(1 - \delta)(xd + yc + zd) \\ &\quad + \delta^2(xd + n_i^{YX}c + (y - n_i^{YX})(qc + (1 - q)d) + zd) \\ \Leftrightarrow &\delta(1 - \delta)(m_i^{YX}d + (y - m_i^{YX})c) + \delta^2(m_i^{YX}d + (y - m_i^{YX})(qc + (1 - q)d)) \\ &\leq \delta(1 - \delta)yc + \delta^2(n_i^{YX}c + (y - n_i^{YX})(qc + (1 - q)d)) \\ \Leftrightarrow &0 \leq \delta(1 - \delta)m_i^{YX}(c - d) + \delta^2[n_i^{YX}(c - d)(1 - q) + m_i^{YX}q(c - d)] \end{aligned}$$

que se satisface trivialmente.

De manera similar se tiene

$$\begin{aligned}
& V_i^{**} \leq V_i^* \\
\Leftrightarrow & (1 - \delta)(x0 + yc + zd) + \delta(1 - \delta)(xd + m_i^{YX_1}d + (y - m_i^{YX_1})c + zd) \\
& + \delta^2(xd + m_i^{YX_1}d + (y - m_i^{YX_1})(qc + (1 - q)d) + zd) \\
& \leq (1 - \delta)(x0 + yc + zd) + \delta(1 - \delta)(xd + yc + zd) \\
& + \delta^2(xd + n_i^{YX}c + (y - n_i^{YX})(qc + (1 - q)d) + zd) \\
\Leftrightarrow & \delta(1 - \delta)[m_i^{YX_1}d + (y - m_i^{YX_1})c] + \delta^2[m_i^{YX_1}d + (y - m_i^{YX_1})(qc + (1 - q)d)] \\
& \leq \delta(1 - \delta)yc + \delta^2[n_i^{YX}c + (y - n_i^{YX})(qc + (1 - q)d)] \\
\Leftrightarrow & \delta(1 - \delta)m_i^{YX_1}(d - c) - \delta^2q(c - d)m_i^{YX_1} \leq \delta^2n_i^{YX}(c - d)(1 - q) \\
\Leftrightarrow & \delta m_i^{YX_1}(d - c) + \delta^2(1 - q)(c - d)m_i^{YX_1} \leq \delta^2n_i^{YX}(c - d)(1 - q) \\
\Leftrightarrow & \delta^2(1 - q)(c - d)(m_i^{YX_1} - n_i^{YX}) \leq \delta m_i^{YX_1}(c - d) \\
\Leftrightarrow & \delta(1 - q)(m_i^{YX_1} - n_i^{YX}) \leq m_i^{YX_1}
\end{aligned}$$

Por tanto, la condición para no tener incentivos a desviarse y no castigar a X está dada por:

$$\begin{aligned}
& V_i^* \leq V_i \\
\Leftrightarrow & (1 - \delta)[x0 + yc + zd] + \delta(1 - \delta)[xd + yc + zd] \\
& + \delta^2[xd + n_i^{YX}c + (y - n_i^{YX})(qc + (1 - q)d) + zd] \\
& \leq (1 - \delta)[xd + yc + zd] + \delta[xd + n_i^{YX}c + (y - n_i^{YX})(qc + (1 - q)d) + zd] \\
\Leftrightarrow & \delta[xd + yc + zd] + \delta^2[n_i^{YX}c + (y - n_i^{YX})(qc + (1 - q)d) - yc] \\
& \leq (1 - \delta)xd + \delta[xd + n_i^{YX}c + (y - n_i^{YX})(qc + (1 - q)d) + zd] \\
\Leftrightarrow & \delta[(y - n_i^{YX})c - (y - n_i^{YX})(qc + (1 - q)d)] \\
& + \delta^2[(y - n_i^{YX})(qc + (1 - q)d) - (y - n_i^{YX})c] \leq (1 - \delta)xd
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \delta(y - n_i^{YX})(c - d)(1 - q) - \delta^2(y - n_i^{YX})(c - d)(1 - q) \leq (1 - \delta)xd \\
&\Leftrightarrow (y - n_i^{YX})(c - d)(1 - q)\delta(1 - \delta) \leq (1 - \delta)xd \\
&\Leftrightarrow \delta \leq \frac{xd}{(y - n_i^{YX})(c - d)(1 - q)}
\end{aligned}$$

Como dado X esta desigualdad debe cumplirse para todo Y tal que $Y \cap X = \emptyset$, se tiene que equivale a

$$\delta \leq \frac{xd}{(n_i - x - n_i^X)(c - d)(1 - q)} \quad \forall X \subseteq N_i \quad (\text{A.3})$$

Notemos que

$$\text{mín} \left\{ \frac{xd}{(n_i - x - n_i^X)(c - d)(1 - q)} : X \subseteq N_i \right\} \leq \frac{d}{(c - d)(1 - q)(n_i - 1 - \lambda_i)}$$

■

Apéndice B

Demostración del lema 2

Continuando a partir de la demostración del lema 1 para el segundo tipo de sets de información, notemos que si bien dichas condiciones son necesarias no son suficientes, dado que existe un tercer tipo de desviación posible que consiste en castigar sólo a algunos de los individuos en X . En este caso, al igual que antes, tenemos tres posibles situaciones: las desviaciones de X en $t - 1$ fueron contra i directamente, en cuyo caso i es castigado si no defecta con X en t ; las desviaciones de X en $t - 1$ no fueron contra i directamente, en cuyo caso i no es castigado si no defecta con X en t ; y las desviaciones de X fueron algunas directamente contra i y otras no lo fueron, en cuyo caso i es castigado sólo si no defecta con los individuos en X que defectaron con él en $t - 1$.

Caso 1: las desviaciones de X en $t - 1$ fueron directamente contra i . Veamos que sucede si i castiga sólo a un conjunto $X_1 \subsetneq X$. Notemos que en este caso, el valor de $EC(V_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}, \mu, o_i^t))$ depende de los conjuntos M_1, M_2, M_3 que definimos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
X_2 &= X \setminus X_1 \\
M_1 &= M_i^{YX_2} \\
M_2 &= N_i^{YX_1} \cap (M_i^{YX_2})^c \\
M_3 &= Y \cap (N_i^{YX_1})^c \cap (M_i^{YX_2})^c
\end{aligned}$$

M_1 representa los elementos en Y que están conectados a alguno de los elementos en X que no fueron castigados y por tanto observan la desviación de i y defectan con él por no aplicar el castigo correspondiente. M_2 es el conjunto de los amigos de i que no observan que él no castigó cuando debía hacerlo y además observan que todas las elecciones D de i fueron contra individuos que defectaron también con i y por tanto cooperan con i en $t + 1$. M_3 corresponde a los restantes amigos de i , que observan que éste defectó con alguien pero no están seguros de las razones de la defección de i , y por tanto siguen el mecanismo aleatorio en $t + 1$. Notemos que los individuos en M_2 observan en $t + 1$ que i juega D con sus otros amigos (X_2). En caso que el mecanismo aleatorio indique defección en $t + 1$, M_2 anticipa estas defecciones y de acuerdo a $\tilde{\psi}^3$ coopera con i en $t + 2$; en cambio, si el mecanismo aleatorio indica cooperación en $t + 1$, M_2 no anticipa estas defecciones y por lo tanto decide randomizar en $t + 2$. Por otro lado, notemos que en caso que, siguiendo el mecanismo aleatorio, M_3 coopere con i en $t + 1$ y M_2 defecte con i en $t + 2$, esto podría romper la cooperación de M_3 con i a partir de $t + 3$. Por tanto, tenemos la siguiente cota superior para la utilidad de la desviación

$$\begin{aligned}
W'_i &= EC(V_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}, \mu, o_i^t)) \\
&\leq (1 - \delta)\{x_1d + (x - x_1)0 + yc + zd\} + \delta(1 - \delta)\{xd + zd + m_1d + m_2c\} \\
&\quad + \delta(1 - \delta)\{m_3(qc + (1 - q)d)\} + \delta^2\{xd + zd + m_1d\} \\
&\quad + \delta^2\{m_2(q(qc + (1 - q)d) + (1 - q)c) + m_3(qc + (1 - q)d)\}
\end{aligned}$$

Caso 2: las desviaciones de X en $t - 1$ no fueron directamente contra i . En este caso, i no es castigado por no defectar con X_2 , por lo tanto no hay castigos seguros en $t + 1$ sino sólo algunos individuos que no reconocen si las desviaciones de i contra X_1 son castigos o desviaciones y por tanto randomizan. Los individuos en $N_i^{YX_1} \setminus N_i^{Y(X_1 \cup X_2)}$ cooperan con i en $t + 1$ y observan nuevas defecciones de i en ese mismo período contra individuos con quienes ellos no están conectados (X_2). Al igual como sucede con M_2 en el caso anterior, estas defecciones son esperadas si el mecanismo aleatorio indica defección en $t + 1$ y no lo son en caso contrario. Así, tenemos la siguiente cota superior para la utilidad de la desviación

$$\begin{aligned}
W_i^* &= EC(V_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}, \mu, o_i^t)) \leq (1 - \delta)[x_1d + (x - x_1)0 + yc + zd] \\
&\quad + \delta(1 - \delta)[xd + zd + qyc + (1 - q)(n_i^{YX_1}c + (y - n_i^{YX_1})d)] + \delta^2(xd + zd) \\
&\quad + \delta^2q \left\{ (y - n_i^{YX_1})c + n_i^{Y(X_1 \cup X_2)}c + (n_i^{YX_1} - n_i^{Y(X_1 \cup X_2)})(qc + (1 - q)d) \right\} \\
&\quad + \delta^2(1 - q) \left\{ n_i^{YX_1}c + (y - n_i^{YX_1})d \right\}
\end{aligned}$$

Caso 3: solo algunas de las desviaciones de X en $t - 1$ fueron directamente contra i .
Sea \tilde{X} el conjunto de los individuos en X que defectaron con i en $t - 1$. Definimos los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned}
X' &= \tilde{X} \cap X_2 \\
\tilde{M}_1 &= M_i^{YX'} \\
\tilde{M}_2 &= N_i^{YX_1} \cap (M_i^{YX'})^c \\
\tilde{M}_3 &= Y \cap (N_i^{YX_1})^c \cap (M_i^{YX'})^c
\end{aligned}$$

\tilde{M}_1 representa los elementos en Y que están conectados a alguno de los elementos en X que defectaron directamente con i en $t - 1$ y no fueron castigados y por tanto observan la desviación de i y defectan con él por no aplicar el castigo correspondiente. \tilde{M}_2 es el conjunto de los amigos de i que no observan que él no castigó cuando debía hacerlo y además observan que todas las elecciones D de i fueron contra individuos que defectaron también con i y por tanto cooperan con i en $t + 1$. \tilde{M}_3 corresponde a los restantes amigos de i , que observan que este defectó con alguien pero no están seguros de las razones de la defección de i , y por tanto siguen el mecanismo aleatorio en $t + 1$. Siguiendo el mismo razonamiento que para el caso 1 tenemos la siguiente cota superior para la utilidad de la desviación

$$\begin{aligned}
W_i^{**} &= EC(V_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}, \mu, \sigma_i^t)) \\
&\leq (1 - \delta)\{x_1d + (x - x_1)0 + yc + zd\} + \delta(1 - \delta)\{xd + zd + \tilde{m}_1d + \tilde{m}_2c\} \\
&\quad + \delta(1 - \delta)\{\tilde{m}_3(qc + (1 - q)d)\} + \delta^2\{xd + zd + \tilde{m}_1d\} \\
&\quad + \delta^2\{\tilde{m}_2(q(qc + (1 - q)d) + (1 - q)c) + \tilde{m}_3(qc + (1 - q)d)\}
\end{aligned}$$

Para obtener una condición suficiente para esta desviación, basta tener que la utilidad de seguir la estrategia sea mayor al máximo de las cotas superiores de las utilidades al desviarse W'_i, W_i^*, W_i^{**} . Para ello comparamos

$$\begin{aligned}
& W'_i \leq W_i^* \\
\Leftrightarrow & (1 - \delta)\{x_1d + (x - x_1)0 + yc + zd\} + \delta(1 - \delta)\{xd + zd + m_1d + m_2c\} \\
& + \delta(1 - \delta)\{m_3(qc + (1 - q)d)\} + \delta^2\{xd + zd + m_1d\} \\
& + \delta^2\{m_2(qc + (1 - q)d) + (1 - q)c + m_3(qc + (1 - q)d)\} \\
& \leq (1 - \delta)[x_1d + (x - x_1)0 + yc + zd] \\
& + \delta(1 - \delta)[xd + zd + qyc + (1 - q)(n_i^{YX_1}c + (y - n_i^{YX_1})d)] + \delta^2(xd + zd) \\
& + \delta^2q\left\{(y - n_i^{YX_1})c + n_i^{Y(X_1 \cup X_2)}c + (n_i^{YX_1} - n_i^{Y(X_1 \cup X_2)})(qc + (1 - q)d)\right\} \\
& + \delta^2(1 - q)\left\{n_i^{YX_1}c + (y - n_i^{YX_1})d\right\} \\
\Leftrightarrow & \delta(1 - \delta)\{m_1d + m_2c + m_3(qc + (1 - q)d)\} \\
& + \delta^2\left\{m_1d + m_2(qc + (1 - q)d) + (1 - q)c + m_3(qc + (1 - q)d)\right\} \\
& \leq \delta(1 - \delta)\{n_i^{YX_1}c + (y - n_i^{YX_1})(qc + (1 - q)d)\} \\
& + \delta^2\left\{n_i^{Y(X_1 \cup X_2)}c + (y - n_i^{YX_1})(qc + (1 - q)d)\right\} \\
& + \delta^2\left\{(n_i^{YX_1} - n_i^{Y(X_1 \cup X_2)})(q(qc + (1 - q)d) + (1 - q)c)\right\} \\
\Leftrightarrow & \delta\{m_1d + m_2c + m_3(qc + (1 - q)d)\} - \delta^2m_2q(1 - q)(c - d) \\
& \leq \delta\{n_i^{YX_1}c + (y - n_i^{YX_1})(qc + (1 - q)d)\} \\
& - \delta^2(n_i^{YX_1} - n_i^{Y(X_1 \cup X_2)})q(1 - q)(c - d) \tag{B.1}
\end{aligned}$$

Definiendo $R \equiv (N_i^{YX_1} \setminus N_i^{Y(X_1 \cup X_2)}) \setminus M_2$, que corresponde a los elementos en Y que están conectados a todos los elementos en X_1 y a algunos pero no todos los elementos en X_2 podemos reescribir (B.1) como

$$\begin{aligned}
& W'_i \leq W_i^* \\
\Leftrightarrow & \delta\{rd + (m_1 - r)d + m_2c + m_3(qc + (1 - q)d)\} \\
& \leq \delta\{rc + (n_i^{YX_1} - r)c + (y - n_i^{YX_1})(qc + (1 - q)d)\} - \delta^2rq(1 - q)(c - d) \\
\Leftrightarrow & \delta\{(m_1 - r)d + m_2c + m_3(qc + (1 - q)d)\} \\
& \leq \delta\{(n_i^{YX_1} - r)c + (y - n_i^{YX_1})(qc + (1 - q)d)\} - \delta^2rq(1 - q)(c - d) + \delta r(c - d)
\end{aligned}$$

Notando que

$$\begin{aligned}
M_3 \subseteq Y \setminus N_i^{YX_1} & \Leftrightarrow Y \setminus (M_1 \cup M_2) \subseteq Y \setminus N_i^{YX_1} \\
& \Leftrightarrow N_i^{YX_1} \subseteq M_1 \cup M_2 \\
& \Leftrightarrow \underbrace{[N_i^{YX_1} \cap (M_i^{YX_2})^c]}_{M_2} \cup \underbrace{[N_i^{YX_1} \cap M_i^{YX_2}]}_{\subseteq M_1} \subseteq M_1 \cup M_2 \\
1 \geq \delta q(1 - q) & \Leftrightarrow r(c - d) \geq \delta rq(1 - q)(c - d) \\
& \Leftrightarrow -\delta^2rq(1 - q)(c - d) + \delta r(c - d) \geq 0
\end{aligned}$$

tenemos que (B.1) se satisface, es decir $W'_i \leq W_i^*$.

Veamos a continuación que $W_i^{**} \leq W_i^*$

$$\begin{aligned}
& W_i^{**} \leq W_i^* \\
\Leftrightarrow & (1 - \delta)\{x_1d + (x - x_1)0 + yc + zd\} + \delta(1 - \delta)\{xd + zd + \tilde{m}_1d + \tilde{m}_2c\} \\
& + \delta(1 - \delta)\{\tilde{m}_3(qc + (1 - q)d)\} + \delta^2\{xd + zd + \tilde{m}_1d\} \\
& + \delta^2\{\tilde{m}_2(qc + (1 - q)d) + (1 - q)c + \tilde{m}_3(qc + (1 - q)d)\} \\
& \leq (1 - \delta)[x_1d + (x - x_1)0 + yc + zd] \\
& + \delta(1 - \delta)[xd + zd + qyc + (1 - q)(n_i^{YX_1}c + (y - n_i^{YX_1})d)] + \delta^2(xd + zd) \\
& + \delta^2q\left\{ (y - n_i^{YX_1})c + n_i^{Y(X_1 \cup X_2)}c + (n_i^{YX_1} - n_i^{Y(X_1 \cup X_2)})(qc + (1 - q)d) \right\} \\
& + \delta^2(1 - q)\left\{ n_i^{YX_1}c + (y - n_i^{YX_1})d \right\} \\
\Leftrightarrow & \delta(1 - \delta)\left\{ \tilde{m}_1d + \tilde{m}_2c + \tilde{m}_3(qc + (1 - q)d) \right\} \\
& + \delta^2\left\{ \tilde{m}_1d + \tilde{m}_2(qc + (1 - q)d) + (1 - q)c + \tilde{m}_3(qc + (1 - q)d) \right\} \\
& \leq \delta(1 - \delta)\left\{ n_i^{YX_1}c + (y - n_i^{YX_1})(qc + (1 - q)d) \right\} \\
& + \delta^2\left\{ n_i^{Y(X_1 \cup X_2)}c + (y - n_i^{YX_1})(qc + (1 - q)d) \right\} \\
& + \delta^2\left\{ (n_i^{YX_1} - n_i^{Y(X_1 \cup X_2)})(q(qc + (1 - q)d) + (1 - q)c) \right\} \\
\Leftrightarrow & \delta\left\{ \tilde{m}_1d + \tilde{m}_2c + \tilde{m}_3(qc + (1 - q)d) \right\} - \delta^2\left\{ \tilde{m}_2q(1 - q)(c - d) \right\} \\
& \leq \delta\left\{ n_i^{YX_1}c + (y - n_i^{YX_1})(qc + (1 - q)d) \right\} \\
& - \delta^2\left\{ (n_i^{YX_1} - n_i^{Y(X_1 \cup X_2)})q(1 - q)(c - d) \right\} \tag{B.2}
\end{aligned}$$

Definiendo $R \equiv (N_i^{YX_1} \setminus N_i^{Y(X_1 \cup X_2)}) \setminus \tilde{M}_2$, que corresponde a los elementos en Y que están conectados a todos los elementos en X_1 y a algunos de los elementos en $\tilde{X} \subseteq X_2$ pero no a todos los elementos en X_2 , podemos reescribir (B.2) como

$$\begin{aligned}
& W_i^{**} \leq W_i^* \\
\Leftrightarrow & \delta \left\{ rd + (\tilde{m}_1 - r)d + \tilde{m}_2c + \tilde{m}_3(qc + (1 - q)d) \right\} \\
& \leq \delta \left\{ rc + (n_i^{YX_1} - r)c + (y - n_i^{YX_1})(qc + (1 - q)d) \right\} - \delta^2rq(1 - q)(c - d) \\
\Leftrightarrow & \delta \left\{ (\tilde{m}_1 - r)d + \tilde{m}_2c + \tilde{m}_3(qc + (1 - q)d) \right\} \\
& \leq \delta \left\{ (n_i^{YX_1} - r)c + (y - n_i^{YX_1})(qc + (1 - q)d) \right\} - \delta^2rq(1 - q)(c - d) + \delta r(c - d)
\end{aligned}$$

Notando que

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_3 \subseteq Y \setminus N_i^{YX_1} & \Leftrightarrow Y \cap (N_i^{YX_1})^c \cap (M_i^{YX'})^c \subseteq Y \cap (N_i^{YX_1})^c \\
& \Leftrightarrow N_i^{YX_1} \subseteq N_i^{YX_1} \cup M_i^{YX'} \\
1 \geq \delta q(1 - q) & \Leftrightarrow r(c - d) \geq \delta rq(1 - q)(c - d) \\
& \Leftrightarrow -\delta^2rq(1 - q)(c - d) + \delta r(c - d) \geq 0
\end{aligned}$$

tenemos que (B.2) se satisface, es decir $W_i^{**} \leq W_i^*$.

Por lo tanto, en un set de información del segundo tipo, una condición suficiente para que i no tenga incentivos a desviarse castigando sólo a algunos de los individuos en X es

$$\begin{aligned}
W_i^* &\leq EC(V_i(\sigma, \mu, o_i^t)) \\
\Leftrightarrow & (1 - \delta)[x_1d + (x - x_1)0 + yc + zd] + \delta(1 - \delta)[xd + zd + qyc + (1 - q)n_i^{YX_1}c] \\
& + \delta(1 - \delta)(1 - q)((y - n_i^{YX_1})d) + \delta^2 \left[xd + zd + q \left\{ (y - n_i^{YX_1})c + n_i^{Y(X_1 \cup X_2)}c \right\} \right. \\
& \left. + q \left\{ (n_i^{YX_1} - n_i^{Y(X_1 \cup X_2)})(qc + (1 - q)d) \right\} + (1 - q) \left\{ n_i^{YX_1}c + (y - n_i^{YX_1})d \right\} \right] \\
& \leq (1 - \delta)[xd + yc + zd] + \delta[xd + n_i^{YX}c + (y - n_i^{YX})(qc + (1 - q)d) + zd] \\
\Leftrightarrow & \delta[xd + zd + n_i^{YX_1}c + (y - n_i^{YX_1})(qc + (1 - q)d)] \\
& + \delta^2(n_i^{YX_1} - n_i^{Y(X_1 \cup X_2)})(q(qc + (1 - q)d) + (1 - q)c - c) \\
& \leq \delta[xd + n_i^{YX}c + (y - n_i^{YX})(qc + (1 - q)d) + zd] + (1 - \delta)x_2 \\
\Leftrightarrow & \delta[n_i^{YX_1}c + (y - n_i^{YX_1})(qc + (1 - q)d)] - \delta^2(n_i^{YX_1} - n_i^{Y(X_1 \cup X_2)})(1 - q)q(c - d) \\
& \leq \delta[n_i^{YX}c + (y - n_i^{YX})(qc + (1 - q)d)] + (1 - \delta)x_2 \\
\Leftrightarrow & \delta(n_i^{YX_1} - n_i^{Y(X_1 \cup X_2)})(c - qc - (1 - q)d) \\
& \leq \delta^2(n_i^{YX_1} - n_i^{Y(X_1 \cup X_2)})(1 - q)q(c - d) + (1 - \delta)x_2d \\
\Leftrightarrow & \delta(n_i^{YX_1} - n_i^{Y(X_1 \cup X_2)})(c - d)(1 - q)(1 - \delta q) \leq (1 - \delta)x_2d \tag{B.3}
\end{aligned}$$

Para completar el lema, agregamos las condiciones necesarias y suficientes correspondientes a las otras desviaciones posibles en los sets de información tipo I y II (defectar cuando la estrategia indica cooperar o no defectar con ningún jugador a los cuales se debe castigar de acuerdo a la estrategia).

Por último veamos que (B.3) \Rightarrow (A.3), y por lo tanto las condiciones suficientes se reducen a (B.3) y (A.2). Dados $X \subseteq N_i$, tomando $X_1 = \emptyset$, $X_2 = X$ e $Y = N_i \setminus X$ tenemos que (B.3) se escribe como

$$\begin{aligned}
& \delta(n_i^{YX_1} - n_i^{Y(X_1 \cup X_2)})(c-d)(1-q)(1-\delta q) \leq (1-\delta)x_2d \\
\Leftrightarrow & \delta(y - n_i^{YX})(c-d)(1-q) \leq \frac{1-\delta}{1-\delta q}xd \\
\Leftrightarrow & \delta(n_i - x - n_i^X)(c-d)(1-q) \leq \frac{1-\delta}{1-\delta q}xd \\
\Rightarrow & \delta < \frac{xd}{(n_i - x - n_i^X)(c-d)(1-q)}
\end{aligned}$$

que corresponde precisamente a la condición (A.3).

■

Apéndice C

Demostración del lema 3

Sabemos que, para que estas redes tengan alguna posibilidad de ser equilibrio, debe satisfacerse que $q \geq \bar{q} = \frac{b-c}{c-d} \frac{1-\delta}{\delta} = \frac{1-\delta}{2\delta}$ y $\delta \geq \frac{b-c}{b-d} = \frac{1}{3}$.

La rueda: en esta red la situación es simétrica y basta chequear las condiciones para cualquier jugador. Sin pérdida de generalidad veamos las condiciones para el jugador 2 con $N_2 = \{1, 3\}$.

- En sets de información de tipo I, con $Y = \{1, 3\}$, $Z = \emptyset$, debemos chequear que 2 tenga los incentivos necesarios para no defectar con Y ni con un subconjunto de Y . Esto se traduce en las dos siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} EC(V_i(\sigma, \mu, o_i^t)) &\geq EC(V_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}, \mu, o_i^t)) \\ \Leftrightarrow 2c &\geq 2b(1 - \delta) + \delta 2d \\ \Leftrightarrow \delta &\geq \frac{b-c}{b-d} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& EC(V_i(\sigma, \mu, o_i^t)) \geq EC(V_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}, \mu, o_i^t)) \\
\Leftrightarrow & 2c \geq (1 - \delta)(b + c) + \delta(d + qc + (1 - q)d) \\
\Leftrightarrow & \delta \geq \frac{b - c}{b - d + (1 - q)(c - d)} = \frac{1}{3 + 2(1 - q)}
\end{aligned}$$

Ambas desigualdades se cumplen trivialmente dado que $\delta \geq \frac{1}{3}$

- En sets de información de tipo I, con $Y = \{1\}$, $Z = \{3\}$ debemos chequear que 2 tenga los incentivos necesarios para no defectar con Y .

$$\begin{aligned}
& EC(V_i(\sigma, \mu, o_i^t)) \geq EC(V_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}, \mu, o_i^t)) \\
\Leftrightarrow & c + d \geq (1 - \delta)(b + d) + \delta 2d \\
\Leftrightarrow & \delta \geq \frac{b - c}{b - d} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

- En sets de información de tipo II, $X \neq \emptyset$. En caso que $Y = \emptyset$ siempre es conveniente castigar pues no queda ningún jugador cooperando con 2. Luego el único caso relevante es $X = \{1\}$, $Y = \{3\}$, $Z = \emptyset$. Notemos que, dado que no existe un vínculo entre 1 y 3, ninguno de estos jugadores reconoce con certeza un castigo contra el otro. Las desviaciones a chequear son desviarse contra Y defectando con X y no castigar a X cooperando con Y , que se traducen en las siguientes dos condiciones:

$$\begin{aligned}
& EC(V_i(\sigma, \mu, o_i^t)) \geq EC(V_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}, \mu, o_i^t)) \\
\Leftrightarrow & (1 - \delta)(c + d) + \delta(d + qc + (1 - q)d) \geq (1 - \delta)(b + d) + \delta 2d \\
\Leftrightarrow & \delta(qc + (1 - q)d - d) \geq (1 - \delta)(b - c) \\
\Leftrightarrow & \delta \geq \frac{b - c}{b - c + q(c - d)} = \frac{1}{1 + 2q} \tag{C.1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& EC(V_i(\sigma, \mu, o_i^t)) \geq EC(V_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}, \mu, o_i^t)) \\
\Leftrightarrow & (1 - \delta)(c + d) + \delta(d + qc + (1 - q)d) \\
& \geq (1 - \delta)(c + 0) + (1 - \delta)\delta(d + c) + \delta^2(d + qc + (1 - q)d) \\
\Leftrightarrow & (1 - \delta)d + \delta(qc + (1 - q)d - c) \geq \delta^2(qc + (1 - q)d - c) \\
\Leftrightarrow & (1 - \delta)d \geq (\delta - \delta^2)(1 - q)(c - d) \\
\Leftrightarrow & \delta \leq \frac{d}{(1 - q)(c - d)} = \frac{1}{2(1 - q)} \tag{C.2}
\end{aligned}$$

- En sets de información de tipo III, $X \neq \emptyset$. Al igual que en el caso anterior, los incentivos para castigar a X cuando $Y = \emptyset$ son directos, por lo tanto nos queda chequear los incentivos cuando $X = \{1\}$, $Y = \{3\}$, $Z = \emptyset$. Como $Z = \emptyset$ no hay castigos que acaban de comenzar y lo que diferencia este set de información con el anterior, es que Y decide cooperar en t siguiendo el mecanismo público, luego en caso de incertidumbre en $t + 1$ continúa cooperando. Las condiciones en este caso son:

$$\begin{aligned}
& EC(V_i(\sigma, \mu, o_i^t)) \geq EC(V_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}, \mu, o_i^t)) \\
\Leftrightarrow & (1 - \delta)(c + d) + \delta(d + c) \geq (1 - \delta)(b + d) + \delta 2d \\
\Leftrightarrow & c + d \geq b + d + \delta(d - b) \\
\Leftrightarrow & \delta \geq \frac{b - c}{b - d} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& EC(V_i(\sigma, \mu, o_i^t)) \geq EC(V_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}, \mu, o_i^t)) \\
\Leftrightarrow & (1 - \delta)(c + d) + \delta(d + c) \\
& \geq (1 - \delta)(c + 0) + (1 - \delta)\delta(d + c) + \delta^2(d + qc + (1 - q)d) \\
\Leftrightarrow & d(1 - \delta) \geq \delta^2(qc + (1 - q)d - c) \\
\Leftrightarrow & (1 - \delta)d + \delta^2(1 - q)(c - d) \geq 0
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se cumple para cualquier valor de q y δ en el intervalo $[0, 1]$.

- En sets de información de tipo III, $X = \emptyset$. Si $Y = \{1\}$ y $Z = \{3\}$ los incentivos para cooperar con Y corresponden a incentivos bilaterales, $\delta \geq \frac{1}{3}$. Si $Y = \{1, 3\}$ y $Z = \emptyset$, los incentivos para no preferir desviarse y defectar con todo Y se reducen también a los incentivos bilaterales. En caso de desviarse con sólo un individuo en Y conviene seguir cooperando con aquel que coopera con i en t de acuerdo al mecanismo público, y por tanto no randomizará al observar la nueva defección de i contra uno de sus otros amigos en t .

$$\begin{aligned}
 EC(V_i(\sigma, \mu, o_i^t)) &\geq EC(V_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}, \mu, o_i^t)) \\
 \Leftrightarrow 2c &\geq (1 - \delta)(b + c) + \delta(d + c) \\
 \Leftrightarrow \delta &\geq \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, para que la rueda sea equilibrio, debe tenerse que $q \geq \frac{1-\delta}{2\delta}$, $\delta \geq \frac{1}{3}$ y las desigualdades (C.1) y (C.2). Notemos que

$$\begin{aligned}
 \delta \geq \frac{1}{1+2q} &\Leftrightarrow q \geq \frac{1-\delta}{2\delta} \\
 \delta \leq \frac{1}{2(1-q)} &\Leftrightarrow q \geq \frac{2\delta-1}{2\delta} \\
 \frac{1-\delta}{2\delta} \geq \frac{2\delta-1}{2\delta} &\Leftrightarrow 1-\delta \geq 2\delta-1 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \geq \delta \\
 \frac{1-\delta}{2\delta} \leq 1 &\Leftrightarrow \delta \geq \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

La línea: esta red es igual a la rueda excepto porque los jugadores 1 y N no tienen un vínculo entre ellos. Dado que $N_1 = \{2\}$ y $N_N = \{N - 1\}$, los incentivos para estos jugadores corresponden a aquellos de un juego bilateral: $\delta \geq \frac{1}{3}$.

La estrella: los jugadores distintos al jugador 1 (centro de la estrella) tienen un sólo vínculo, y por tanto para ellos las condiciones corresponden a las de un juego bilateral, $\delta \geq \frac{1}{3}$. Veamos las condiciones de equilibrio para el centro de la estrella:

- En sets de información de tipo I, con $Y \neq \emptyset$, debemos chequear que 1 no tiene incentivos a desviarse y defectar con $Y_1 \subseteq Y$. Esto es:

$$\begin{aligned}
& EC(V_i(\sigma, \mu, o_i^t)) \geq EC(V_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}, \mu, o_i^t)) \\
\Leftrightarrow & yc + zd \geq (1 - \delta)(y_1b + (y - y_1)c + zd) + \delta(y_1d + (y - y_1)(qc + (1 - q)d) + zd) \\
\Leftrightarrow & yc + zd \geq y_1(b - c) + yc + zd + \delta(-y_1(b - d) + (y - y_1)(qc + (1 - q)d - c)) \\
\Leftrightarrow & \delta \geq \frac{y_1(b - c)}{y_1(b - c) + (c - d)(qy_1 + (1 - q)y)}
\end{aligned}$$

Notando que esta fracción es creciente en y_1 , tenemos que una condición suficiente para que se satisfaga esta desigualdad es $\delta \geq \frac{b-c}{b-d} = \frac{1}{3}$.

- En sets de información de tipo II, con $X \neq \emptyset$, si $Y = \emptyset$ los incentivos a castigar son directos. El caso relevante es $Y \neq \emptyset$ y las desviaciones posibles son defectar con $Y_1 \subseteq Y$, no castigar a X o castigar sólo a algunos de los individuos en X . Notemos que, dada la estructura de la red, ninguno de los individuos en Y reconoce con certeza un castigo. Las condiciones se escriben como:

$$\begin{aligned}
& EC(V_i(\sigma, \mu, o_i^t)) \geq EC(V_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}, \mu, o_i^t)) \\
\Leftrightarrow & (1 - \delta)(yc + xd + zd) + \delta(xd + zd + y(qc + (1 - q)d)) \\
& \geq (1 - \delta)(y_1b + (y - y_1)c + xd + zd) \\
& + \delta(y_1d + (y - y_1)(qc + (1 - q)d) + xd + zd) \\
\Leftrightarrow & \delta[y_1(qc + (1 - q)d) + y_1(b - c)] \geq y_1(b - c) \\
\Leftrightarrow & \delta \geq \frac{b - c}{b - c + (qc + (1 - q)d)} = \frac{1}{2(q + 1)} \\
\Leftarrow & \delta \geq \frac{1}{2q + 1} \\
\Leftrightarrow & q \geq \frac{1 - \delta}{2\delta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& EC(V_i(\sigma, \mu, o_i^t)) \geq EC(V_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}, \mu, o_i^t)) \\
\Leftrightarrow & (1 - \delta)(yc + xd + zd) + \delta(xd + zd + y(qc + (1 - q)d)) \\
& \geq (1 - \delta)(yc + x0 + zd) + \delta(1 - \delta)(yc + xd + zd) \\
& + \delta^2(y(qc + (1 - q)d) + xd + zd) \\
\Leftrightarrow & (1 - \delta)xd \geq \delta(1 - \delta)(c - d)(1 - q)y \\
\Leftrightarrow & \delta \leq \frac{xd}{(c - d)(1 - q)y}
\end{aligned}$$

Notando que esta ecuación se vuelve más estricta cuando $x = 1$ e $y = n_c - 1$, tenemos que la condición se reescribe como

$$\delta \leq \frac{d}{(c - d)(1 - q)(n_c - 1)} = \frac{1}{2(1 - q)(n_c - 1)} \quad (\text{C.3})$$

Los incentivos para no castigar solo a algunos de los individuos en X están dados por:

$$\begin{aligned}
& EC(V_i(\sigma, \mu, o_i^t)) \geq EC(V_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}, \mu, o_i^t)) \\
\Leftrightarrow & (1 - \delta)(yc + xd + zd) + \delta(xd + zd + y(qc + (1 - q)d)) \\
& \geq (1 - \delta)(yc + x_1d + (x - x_1)0 + zd) + \delta(xd + zd + y(qc + (1 - q)d)) \\
\Leftrightarrow & (1 - \delta)(x - x_1)d \geq 0
\end{aligned}$$

que se satisface trivialmente

- En sets de información de tipo III, con $X \neq \emptyset$, si $Y = \emptyset$ los incentivos a castigar son directos. El caso relevante es $Y \neq \emptyset$ y las desviaciones posibles son defectar con $Y_1 \subseteq Y$, no castigar a X o castigar sólo a algunos de los individuos en X . Notemos que, dada la estructura de la red, ninguno de los individuos en Y reconoce con certeza un castigo. Lo que diferencia este caso del caso anterior, dado que ninguno de los individuos en Z está conectado con ninguno de los individuos en Y , es que algunos de los individuos en Y que cooperan con 1 en t actuaron de acuerdo al mecanismo público, y por ende en caso de incertidumbre continúan cooperando en $t + 1$. Llamemos a estos individuos Y_1 . Si 1 se desvía y defecta con $\tilde{Y} \subseteq Y$, definiendo

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}_1 &= \tilde{Y} \cap Y_1 \\
\tilde{Y}_2 &= \tilde{Y} \cap (Y \setminus Y_1) \\
Y'_1 &= (Y \setminus \tilde{Y}) \cap Y_1 \\
Y'_2 &= (Y \setminus \tilde{Y}) \cap (Y \setminus Y_1)
\end{aligned}$$

tenemos:

$$\begin{aligned}
& EC(V_i(\sigma, \mu, o_i^t)) \geq EC(V_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}, \mu, o_i^t)) \\
\Leftrightarrow & (1 - \delta)(yc + xd + zd) \\
& + \delta(1 - \delta)(y_1c + (y - y_1)(qc + (1 - q)d) + xd + zd) \\
& + \delta^2(xd + zd + qyc + (1 - q)((y - y_1)d + y_1(qc + (1 - q)d))) \\
\geq & (1 - \delta)(\tilde{y}b + (y - \tilde{y})c + xd + zd) \\
& + \delta(1 - \delta)(xd + zd + \tilde{y}d + y'_1c + y'_2(qc + (1 - q)d)) \\
& + \delta^2(xd + zd + \tilde{y}d + q(y'_1 + y'_2)c + (1 - q)(y'_2d + y'_1(qc + (1 - q)d))) \\
\Leftrightarrow & (1 - \delta)\tilde{y}(c - b) \\
& + \delta(1 - \delta)(\tilde{y}_1(c - d) + \tilde{y}_2(qc + (1 - q)d - d)) \\
& + \delta^2[q\tilde{y}c + (1 - q)(\tilde{y}_2d + \tilde{y}_1(qc + (1 - q)d)) - \tilde{y}d] \geq 0 \\
\Leftrightarrow & \delta(\tilde{y}_1(b - d) + \tilde{y}_2(b - c + q(c - d))) - \delta^2\tilde{y}_1(1 - q)^2(c - d) \\
\geq & (b - c)\tilde{y}
\end{aligned}$$

Notemos que esta equivalencia también es válida en los sets de información de tipo III con $X = \emptyset$ e $Y \neq \emptyset$. Por otro lado, esta condición es más estricta a medida

que \tilde{y}_2 disminuye, pues $\delta(b - c + q(c - d)) \geq (b - c) \Leftrightarrow \delta \geq \frac{1}{1+2q} \Leftrightarrow q \geq \frac{1-\delta}{2\delta}$.

Así tenemos que la condición se reescribe como

$$\begin{aligned}
& EC(V_i(\sigma, \mu, o_i^t)) \geq EC(V_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}, \mu, o_i^t)) \\
\Leftrightarrow & \delta(b - d) - (b - c) \geq \delta^2(1 - q)^2(c - d) \\
\Leftrightarrow & \frac{\delta(b - d) - (b - c)}{\delta^2(c - d)} \geq (1 - q)^2 \\
\Leftrightarrow & q \geq 1 - \sqrt{\frac{3\delta - 1}{2\delta^2}} \tag{C.4}
\end{aligned}$$

La condición para que 1 no tenga incentivos a desviarse cooperando con todos los individuos en X es

$$\begin{aligned}
& EC(V_i(\sigma, \mu, o_i^t)) \geq EC(V_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}, \mu, o_i^t)) \\
\Leftrightarrow & (1 - \delta)(yc + xd + zd) + \delta(1 - \delta)(y_1c + (y - y_1)(qc + (1 - q)d) + xd + zd) \\
& + \delta^2(xd + zd + qyc + (1 - q)((y - y_1)d + y_1(qc + (1 - q)d))) \\
\geq & (1 - \delta)(yc + x0 + zd) + \delta(1 - \delta)(yc + xd + zd) \\
& + \delta^2(xd + zd + y(qc + (1 - q)d)) \\
\Leftrightarrow & (1 - \delta)xd + \delta(1 - \delta)(y - y_1)[qc + (1 - q)d - c] \\
& + \delta^2[(1 - q)((y - y_1)d + y_1(qc + (1 - q)d)) - (1 - q)yd] \geq 0 \\
\Leftrightarrow & (1 - \delta)xd - \delta(1 - \delta)(y - y_1)(1 - q)(c - d) \\
& + \delta^2(1 - q)qy_1(c - d) \geq 0 \\
\Leftrightarrow & (1 - \delta)xd - \delta(1 - \delta)y(1 - q)(c - d) \geq 0 \\
\Leftrightarrow & \delta \leq \frac{xd}{y(1 - q)(c - d)} \\
\Leftrightarrow & \delta \leq \frac{d}{(1 - q)(c - d)(n_c - 1)} = \frac{1}{2(1 - q)(n_c - 1)}
\end{aligned}$$

que es también necesaria de acuerdo a (C.3). Por último, la condición para que 1 no tenga incentivos a castigar sólo a algunos de los individuos en X es

$$\begin{aligned}
& EC(V_i(\sigma, \mu, o_i^t)) \geq EC(V_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}, \mu, o_i^t)) \\
\Leftrightarrow & (1 - \delta)(yc + xd + zd) + \delta(1 - \delta)(y_1c + (y - y_1)(qc + (1 - q)d) + xd + zd) \\
& + \delta^2(xd + zd + qyc + (1 - q)((y - y_1)d + y_1(qc + (1 - q)d))) \\
\geq & (1 - \delta)(yc + x_1d + (x - x_1)0 + zd) \\
& + \delta(1 - \delta)(y_1c + (y - y_1)(qc + (1 - q)d) + xd + zd) \\
& + \delta^2(xd + zd + qyc + (1 - q)((y - y_1)d + y_1(qc + (1 - q)d))) \\
\Leftrightarrow & (1 - \delta)(x - x_1)d \geq 0
\end{aligned}$$

que se satisface trivialmente.

Así, la estrella es equilibrio si y solo si se satisface que $q \geq \frac{1-\delta}{2\delta}$, $\delta \geq \frac{1}{3}$ y las desigualdades (C.3) y (C.4). Notemos que $q \geq \frac{1-\delta}{2\delta} \Rightarrow$ (C.4):

$$\begin{aligned}
\frac{1 - \delta}{2\delta} \geq 1 - \sqrt{\frac{3\delta - 1}{2\delta^2}} & \Leftrightarrow \sqrt{\frac{3\delta - 1}{2\delta^2}} \geq \frac{3\delta - 1}{2\delta} \Leftrightarrow \frac{3\delta - 1}{2\delta^2} \geq \frac{(3\delta - 1)^2}{4\delta^2} \\
& \Leftrightarrow 1 \geq \frac{3\delta - 1}{2} \Leftrightarrow 2 \geq 3\delta - 1 \Leftrightarrow 1 \geq \delta
\end{aligned}$$

■