



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

VALORIZACIÓN DE INSTRUMENTOS DE RENTA FIJA CON OPCIÓN DE
PREPAGO

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

ERNESTO JAVIER ARAYA VALDIVIA

PROFESOR GUÍA:
JOAQUÍN FONTBONA TORRES

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
RODRIGO GONZÁLEZ DEL BARRIO
JAIME SAN MARTÍN ARISTEGUI
ALEJANDRO JOFRÉ CÁCERES

SANTIAGO DE CHILE
NOVIEMBRE 2011

RESUMEN DE LA MEMORIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: ERNESTO ARAYA VALDIVIA
FECHA: 01/11/2011
PROF. JOAQUIN FONTBONA TORRES

VALORIZACIÓN DE INSTRUMENTOS DE RENTA FIJA CON OPCIÓN DE PREPAGO

En este trabajo se busca abordar el problema de valorización de bonos prepagables. A pesar que este tipo de bonos son predominantes en los mercados, existen relativamente pocos modelos que describan el comportamiento de sus precios. Una de las excepciones es el modelo de Jarrow *et al.* [24], que estudiaremos e implementaremos en este trabajo, adaptándolo a las condiciones particulares del mercado chileno.

En resumen, los objetivos de este trabajo se pueden dividir en dos:

- Exponer la teoría que permite contextualizar el modelo de Jarrow *et al.*, recopilando y extendiendo resultados relativos al modelamiento del riesgo de crédito. Esto define una base matemática que permite tratar distintos tipos de riesgo de manera unificada.
- Implementar el modelo, utilizando datos chilenos para su calibración. Se expone el algoritmo de filtro de Kalman extendido, que será la base de la metodología de estimación. Se realizan simulaciones, tanto de bonos de gobierno como bonos prepagables, para testear el modelo. Finalmente, se realiza una aplicación con datos reales del mercado chileno.

AGRADECIMIENTOS

A mi familia por su apoyo constante a lo largo de estos años.

A los profesores guía y co-guía: Joaquín Fontbona y Rodrigo González. Por sus valiosos aportes y buena disposición.

A mis compañeros de carrera. Por los buenos momentos que pasamos, tanto fuera como dentro (principalmente dentro) de la universidad. Por equilibrar (y desequilibrar, en ocasiones) la balanza entre lo estrictamente académico y lo cotidiano (lo lúdico, lo denso, lo importante). En resumen, por demostrarme una vez más que las personas, y no otra cosa, son lo más importante en nuestro paso por cualquier institución o lugar.

A mis amigos, que conocí hace mucho tiempo y que han estado siempre acompañándome, algunos casi a diario. Espero que nuestros caminos no se dejen de cruzar una y otra vez.

Índice general

1. Introducción	1
2. Preliminares	4
2.1. Bono cero cupón	4
2.1.1. Curva de retorno y estructura temporal de tasa de interés	7
2.2. Modelos de tasas de interés	8
2.2.1. El modelo de Cox, Ingersoll y Ross	12
2.2.2. Modelo de tasas a dos factores	14
3. Bonos prepagables	17
3.1. La teoría	17
3.2. Fórmula de valorización	20
3.3. Especificación del modelo	24
4. Estimación	30
4.1. Metodología	30
4.1.1. Filtro de Kalman	31
4.1.2. Filtro de Kalman Extendido	33
4.2. Aplicación	37
4.2.1. Simulaciones	37
4.3. Estudio Empírico	41
5. Conclusiones	45
6. Apéndice	47
6.1. Algunas definiciones	47
6.2. Algunos resultados útiles	47
6.3. Método de Kimmel	49
6.3.1. Caso general afín	51
6.3.2. Aplicación al modelo de Jarrow et al.	52
Bibliografía	54

Capítulo 1

Introducción

En 1969, Robert Merton comienza a aplicar técnicas de cálculo estocástico en problemas financieros. Las herramientas usadas hasta entonces no alcanzaban para responder la pregunta de cómo funcionan los mercados financieros. Visto desde otra perspectiva, esto corresponde a trasladar (al contexto financiero) la pregunta económica clásica del equilibrio y su relación con los precios de activos financieros. El contexto proporcionado por el cálculo estocástico parecía describir satisfactoriamente el comportamiento, eminentemente aleatorio, de los precios de instrumentos financieros. Para esto fueron necesarios los trabajos de Fisher Black y Myron Scholes (en 1973), que mediante su fórmula de valoración de opciones lograron responder a la pregunta de cuál es el precio justo para una opción europea¹. Esto motivó el desarrollo de nuevos modelos, puestos sobre una base teórica sólida, que permitían obtener precios de otros instrumentos y derivados.

En el contexto de mercados de renta fija, la pregunta sería cuál es el precio “justo” de un bono. A fines de los años 70’s comienza el desarrollo de una teoría que permitía responder a esa pregunta. Acá entra en juego el concepto de tasa de interés, que engloba diferentes acepciones, todas relacionadas con el hecho que el emisor del bono debe pagar intereses al receptor del bono. Para explotar toda la potencia de las herramientas del cálculo estocástico se introduce el concepto de tasa corta (o instantánea), que intuitivamente representa la tasa a la cual es posible obtener ganancia de manera “instantánea”, es decir, por período muy corto de tiempo. Bajo suposiciones de ausencia de arbitraje, la tasa corta determina el precio de los bonos de gobierno, que son considerados como los menos riesgosos. El modelamiento de la tasa corta como proceso de difusión da origen a una familia de modelos conocidos como modelos de tasas de interés. Los bonos emitidos por empresas, o bonos corporativos, tienen riesgos implícitos adicionales a los que posee un bono de gobierno. El llamado “riesgo de crédito” (o default) está relacionado con la incapacidad de una empresa para cubrir sus deudas. Ha sido estudiado desde diversas perspectivas, siendo particularmente importante que tipo de información se asume como conocida. La gran mayoría de los modelos existentes que consideran el riesgo de crédito se dividen en dos familias: los llamados modelos estructurales y los modelos de forma reducida. Los primeros se basan en los trabajos de Merton, Black y Scholes, asumiendo como conocida la estructura de capitales de una empresa. Se modela, entonces, el valor de una firma como un proceso de difusión y se imponen condiciones bajo las cuales se puede considerar que una firma incurre en default.

¹En su trabajo fundacional [3].

En los modelos de forma reducida, que comienzan con los trabajos de Jarrow y Tunbull [25], y Duffie y Singleton [17], se modela la probabilidad instantánea de default como la intensidad de un proceso (de salto) asociado al evento de no pago². Esto permite establecer una analogía directa entre la valorización de bonos con y sin riesgo de default, obteniendo una tasa ajustada por riesgo que cumple el mismo rol que la tasa corta cumple en el contexto libre de riesgo. Esta clase de modelo ha sido frecuentemente señalada como la más exitosa entre las dos, aunque cabe señalar que en la práctica dependerá en gran medida de la información que se asume disponible. Otra fuente de riesgo asociada a algunos bonos corporativos es la posibilidad que se reserva la empresa de prepagar su deuda anticipadamente a un valor pactado previamente. A pesar de que los bonos con esta condición son los que predominan, en cantidad, en los mercados de renta fija, pocos estudios se han dedicado a tratar el problema de valorización de bonos prepagables en detalle. El trabajo de Jarrow *et al.* [24] es una de las excepciones, combinando la teoría y la práctica de una manera bastante atractiva. Proponen un modelo de forma reducida que modela la probabilidad (instantánea) de prepago como el proceso de intensidad de un proceso asociado al evento de prepago. De esta forma, la valorización se simplifica, siendo análoga al caso de los modelos de riesgo crediticio. Se obtiene una tasa ajustada por riesgo de prepago.

En líneas generales nuestro trabajo se divide en dos partes. En la primera estudiamos el modelo de Jarrow *et al.* para bonos prepagables, revisando la base teórica, las nociones financieras y las herramientas que permiten su implementación. Adicionalmente realizamos modificaciones que permiten aplicar el modelo al mercado chileno. En la segunda parte, implementamos el modelo de forma computacional, usando el programa Matlab. Primero testeamos el modelo utilizando simulaciones de precios de bonos (del tesoro y prepagables) para ello. Posteriormente, calibramos el modelo utilizando datos reales del mercado chileno proporcionados por la empresa LVAIndices. Para una mejor lectura el trabajo se ha dividido en 4 capítulos. A continuación una breve descripción de cada uno de ellos:

- El capítulo 2 tiene por objetivo sentar las bases sobre las cuales se construye el modelo de valorización de bonos prepagables. Se entregan las definiciones de los conceptos básicos de renta fija. Posteriormente se revisan los modelos de tasas de interés de Cox-Ingersoll-Ross, de uno y dos factores, que son la principal herramienta de modelación en el modelo de Jarrow *et al.*
- En el capítulo 3 revisamos la teoría básica de modelos de forma reducida que permiten obtener una fórmula de valorización para bonos prepagables. Extendemos la teoría desarrollada por Duffie *et al.* (en [16]), poniéndola en el contexto de bonos prepagables. Esto permite la valorización de bonos cero cupón y en base a esto se deduce la fórmula de valorización de bonos con cupones. Se pone especial énfasis en la similitud entre la valorización de bonos con y sin riesgo de prepago.
- El capítulo 4 está consagrado a la implementación del modelo. Se revisa la metodología y la estrategia de estimación de los parámetros del modelo. Específicamente, se revisa el algoritmo de filtro de Kalman extendido y su aplicación al modelo de Jarrow *et al.*, considerando una estrategia de estimación de dos pasos. Posteriormente,

²También se conoce como evento de crédito.

se aplica el modelo a datos simulados, evaluando su desempeño en este caso. Finalmente, se utilizan datos del mercado chileno para alimentar el modelo, entregando un breve diagnóstico con posibles fuentes de error y modificaciones posibles.

Capítulo 2

Preliminares

Los mercados reales de renta fija están determinados por los precios de instrumentos financieros llamados bonos. Estos representan, a grandes rasgos, deudas que una parte emisora contrae con una parte receptora, acordándose el pago de intereses en uno o más períodos de tiempo. El precio de los bonos a su vez, está relacionado con el concepto de tasa de interés. Este concepto engloba diferentes definiciones que dependen de los plazos considerados, de la regla de composición utilizada y del tipo de riesgo considerado. La tasa corta, por ejemplo, corresponde a una tasa a la cual es posible obtener ganancias en un período corto de tiempo en un ambiente “libre de riesgo”. Existe consenso en que el movimiento de los precios de bonos está guiado por un número relativamente pequeño de variables, en otras palabras el movimiento de los precios se explica, en parte, por el movimiento del mercado en su conjunto. Regularmente se asume que precios de bonos donde el riesgo de default es pequeño (muy cercano a 0) están guiados por los valores de la tasa corta. La modelación de esta variable como proceso estocástico constituye un gran campo de estudio en matemáticas financieras conocido como modelos de tasa de interés. El obtener los precios de los bonos en base a este proceso estocástico es lo que se conoce usualmente como valorización del instrumento financiero de renta fija. En este capítulo revisaremos las definiciones y nociones básicas involucradas en la teoría de valorización de bonos cero cupón. Expondremos los modelos más utilizados de tasa de interés, que serán la herramienta básica para la modelación de bonos con opción de prepago. Entre las referencias generales que seguimos en parte se cuentan [4], [21] y [29].

2.1. Bono cero cupón

Existen básicamente dos tipos de bonos, los que pagan cupones y los que no. A los que no pagan cupones se les conoce como bonos cero cupón y constituyen uno de los conceptos básicos para el modelamiento de precios de instrumentos de renta fija.

Definición 2.1.1. Un **bono cero cupón** con fecha de maduración T es un contrato entre dos partes: un emisor y un receptor. El emisor acuerda pagarle una cantidad X , conocida como principal, en la fecha de maduración, sin pagos intermedios. El valor del contrato en un tiempo $t \leq T$ se denota por $S(t, T)$.

El valor del contrato en un tiempo t es lo que llamaremos el precio del bono cero cupón en el tiempo t . Por su parte, un bono con cupones incluye pagos intermedios en fechas acordadas.

Definición 2.1.2. Un **bono con cupones**, con fecha de maduración T es un contrato entre dos partes, una emisora y otra receptora. El emisor contrae una deuda con el receptor que acuerda pagar en la fecha de maduración (pago del principal). Los intereses se entregan en forma de cupones con valores acordados previamente en fechas $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\}$, donde N es el número de cupones.

Se utilizará la notación $S_c(t, T)$ para el precio de un bono con cupones en el instante t , donde T es la fecha de maduración. Un bono con cupones se puede ver como un portfolio de bonos cero cupón. Luego se puede establecer una relación entre el precio de bonos cero cupón y el precio de bonos con cupones. En efecto, se tiene:

$$S_c(t, T) = \sum_{t \leq \tau_i < T} c_i S(t, \tau_i) + (1 + c_N) S(t, T) \quad (2.1)$$

Donde c_i representa la tasa del cupón pagado en el instante τ_i , para $i \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$, y c_N el interés pagado en la última fecha. Frecuentemente se considera que $c_N = 0$ y que $c_i = c$ (con $i \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$), donde c es una constante.

La función $t \rightarrow S(t, T)$ presenta discontinuidades en las fechas de pago de los cupones. Debido a esto los precios que se manejan en los mercados son calculados de forma diferente. Definimos el **interés acumulado** en el tiempo $t \in (\tau_{i-1}, \tau_i]$ como:

$$AI(i, t) = c_i \frac{t - \tau_{i-1}}{\tau_i - \tau_{i-1}}$$

Definición 2.1.3. Definimos el **precio limpio** de un bono con cupones en el tiempo $t \in (\tau_{i-1}, \tau_i]$ como:

$$S_l(t, T) = S_c(t, T) - AI(i, t) \quad (2.2)$$

Usaremos los términos bonos de gobierno (o del tesoro) y bonos corporativos para referirnos a bonos emitidos por el gobierno y por compañías privadas respectivamente. Esta diferencia cobra sentido cuando se considera el riesgo inherente que tiene cada bono. Existen diversas fuentes de riesgo, pero las que abordaremos en este trabajo son dos: el riesgo de default (o crédito) y el riesgo de prepago¹. El primero tiene relación con la capacidad de una empresa para pagar sus deudas. Es un tema complejo definir cuando una empresa no tiene capacidad de pago de sus deudas, sin embargo, en este trabajo nos interesan más las consecuencias que las causas de este hecho. Por otro lado, el riesgo de prepago se relaciona con la posibilidad, que se puede reservar la empresa, de pagar anticipadamente la deuda a un costo acordado previamente. Desde el punto de vista de un inversionista esto presenta un problema pues debe rehacer su plan de inversiones con un dinero que retorna anticipadamente. Los bonos de gobierno son considerados como los menos riesgosos y sirven como base de comparación del riesgo, sin embargo, no se pueden considerar libres de riesgo.

Definición 2.1.4. Un **bono con opción de prepago** consiste en un bono corporativo donde la entidad emisora cuenta con la posibilidad de recuperar el bono antes de la fecha de maduración, pagando una cantidad acordada previamente que llamaremos **precio de ejercicio**. Además, se puede acordar una fecha a partir de la cual el bono puede ser prepago.

¹Otros factores importantes son el grado de liquidez de una compañía y la tasa de inflación.

Definición 2.1.5. El **tiempo de duración** de un bono es la cantidad de días, considerados de acuerdo a las convenciones del mercado, que se cuentan entre la fecha de emisión del bono y su fecha de maduración.

Definición 2.1.6. El **tiempo a la maduración** $T - t$, es la cantidad de tiempo, medida en años, desde el tiempo presente t a la fecha de maduración T .

La expresión $T - t$ cobra sentido cuando t y T son números reales que representan instantes determinados. Si t y T están expresados como fechas, es decir, en el formato $t = (d_t, m_t, a_t)$, $T = (d_T, m_T, a_T)$, entonces se necesita definir una cantidad numérica que represente la cantidad de tiempo que hay entre ambas fechas. Existen múltiples elecciones posibles que dependen de los instrumentos a considerar y las convenciones del mercado para ellos. Lo importante es ver que días entre ambas fechas son considerados para así obtener algún valor numérico. En general, elegiremos expresar $T - t$ como una fracción de un año y asumiremos implícitas las convenciones del mercado, que en el caso corporativo corresponden a usar una base 365. Es decir, se considera $T - t = \frac{Days\{(d_t, m_t, a_t), (d_T, m_T, a_T)\}}{365}$, donde $Days\{f_1, f_2\}$ representa la cantidad de días entre las fechas f_1 y f_2 .

El término tasa de interés agrupa distintos conceptos que a grandes rasgos dependen de lo que se llama el tipo de composición.

Definición 2.1.7. La **tasa continuamente compuesta**, de un bono cero cupón, considerada en el tiempo t para la fecha de maduración T se denota $R(t, T)$ y corresponde a la tasa constante bajo la cual una inversión en el presente de $S(t, T)$ lleva a la obtención en el futuro de una unidad monetaria en la fecha de maduración T . Formalmente esto equivale a

$$R(t, T) \equiv -\frac{\ln(S(t, T))}{T - t}. \quad (2.3)$$

En otras palabras es la tasa constante que es consistente con los precios de bonos cero cupón, en el sentido que $e^{R(t, T)(T-t)}S(t, T) = 1$. A partir de esto se obtiene una expresión para los precios en términos de la tasa continuamente compuesta:

$$S(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}.$$

A la tasa continuamente compuesta se le conoce, en el contexto de bonos cero cupón, como **retorno del bono**. Pues mide precisamente el rendimiento del instrumento financiero en un período fijo de tiempo. Es equivalente al concepto de tasa interna de retorno, usado frecuentemente para evaluar la rentabilidad de una inversión.

En el caso de bonos con cupones el retorno, que llamaremos $R_c(t, T)$, está definido por la relación:

$$S_l(t, T) = \sum_{j=i+1}^N \frac{cX/2}{(1 + R_c(\tau_j, T)/2)^{j-i}} + \frac{X}{(1 + R_c(\tau_i, T)/2)^{N-i}} \quad (2.4)$$

para $t = T_i$. Si $t \in [T_i, T_{i+1})$, se tiene:

$$S_l(t, T) = \sum_{j=i+1}^N \frac{cX/2}{(1 + R_c(\tau_j, T)/2)^{j-i-1+\nu}} + \frac{X}{(1 + R_c(\tau_i, T)/2)^{N-i-1+\nu}} \quad (2.5)$$

con c la tasa del cupón, X el valor del principal, y

$$\nu = \frac{T_{i+1} - t}{T_{i+1} - T_i}.$$

Observación 2.1.8. Existen otras reglas de composición, como la composición simple y la composición semi-anual, que para propósitos de este trabajo no son importantes.

2.1.1. Curva de retorno y estructura temporal de tasa de interés

La curva de retorno es el grafo de una función que relaciona tiempos de maduración y tasas de interés dadas por el mercado en un instante determinado. Formalmente:

Definición 2.1.9. La **curva de retorno** en el instante t se define como el grafo de la función:

$$T \rightarrow R(t, T), T > t$$

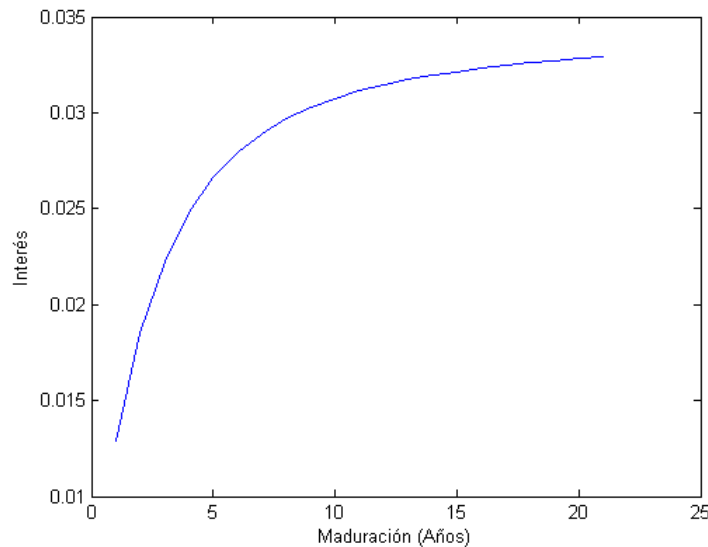
Llamaremos $C_t(T)$ a esta función.

La curva cero cupón se define de manera similar:

Definición 2.1.10. La **curva cero cupón** en el instante t se define como el grafo de la función:

$$T \rightarrow S(t, T), T > t$$

Definiremos la estructura de plazos de las tasas de interés como el conjunto de curvas de retorno entre fechas determinadas. Formalmente, la estructura de plazos entre las fechas s y u corresponde a $(C_t)_{s \leq t \leq u}$. En la Figura 2.1.1 se muestra un ejemplo con la forma típica de la estructura temporal de tasa de interés.



Notar que la estructura de plazos de la tasa de interés, que describe el estado general del mercado, está determinado por los retornos de los bonos cero cupón. A su vez, estos están determinados por los precios de los respectivos bonos. Un primer paso es la modelación de los precios de dichos bonos. Como anticipamos en la introducción de este capítulo, esto se llevará a cabo considerando la tasa corta como el principal ente que determina el estado del mercado, guiando los precios de bonos.

2.2. Modelos de tasas de interés

En esta sección presentaremos las principales características de los modelos de tasas de interés. En estos se asume que las tasas futuras no se conocen con certeza y, por ende, son modeladas como variables aleatorias. En particular, nos interesa modelar la tasa corta, que intuitivamente corresponde a la tasa válida por un instante muy corto de tiempo, a la cual es posible invertir el dinero en un ambiente “libre de riesgo”. La suposición fundamental, de tipo económico, es que la tasa corta es una especie de indicador del estado general de la economía y que determina los precios de los bonos cero cupón. Esta tasa se modela como un proceso estocástico que posee cierta dinámica que se explicita mediante una ecuación diferencial estocástica (EDE, en lo que sigue). La diferencia entre los modelos de tasas de interés radica en el tipo de EDE escogida. Nos concentraremos en los modelos del tipo CIR², donde la volatilidad es proporcional a la raíz cuadrada de la tasa corta. Revisaremos los casos unifactorial y bifactorial, explicitando en cada caso la relación entre los precios de bonos cero cupón y el proceso de tasa corta.

Consideramos un espacio filtrado de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T})$ con $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Supondremos, en esta sección, que \mathcal{F}_t es la filtración natural de un movimiento browniano estandar $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$. La medida P es conocida como la medida física u objetiva. Introduciremos la llamada cuenta bancaria³ B_t que cumple:

$$B_t = e^{\int_0^t r_s ds}$$

donde $(r_t)_{0 \leq t \leq T}$ es un proceso adaptado que satisface: $\int_0^T |r_t| dt < \infty$, casi seguramente. El proceso r se conoce como tasa corta (equivalentemente se usa el término “tasa instantánea”). Cabe mencionar que hemos supuesto la existencia de dicho proceso (cuyo valor no se conoce empíricamente). El valor que puede ser apreciado por los agentes que componen el mercado es el que toma la cuenta bancaria.

Los activos menos riesgosos son, en este contexto, los bonos del tesoro, que son bonos cero cupón, con una fecha de maduración menor o igual a un horizonte fijo T , emitidos por el gobierno. Para cada $u \leq T$, definimos un proceso adaptado $(S(t, u)_{0 \leq t \leq u})$ que satisface $S(u, u) = 1$ y que corresponde al precio de un bono cero-cupón con fecha de maduración u , como función del tiempo.

Supondremos la existencia de una medida de probabilidad Q equivalente a P bajo la cual los precios descontados de los activos son martingalas. Esto corresponde bajo ciertas condiciones técnicas a la ausencia de oportunidades de arbitraje⁴. Supondremos además que es la única medida con tal propiedad, lo que corresponde a la hipótesis de mercado completo. Esta medida, conocida también como medida de riesgo neutro, es la que se utiliza para calcular precios de bonos y en general, de cualquier instrumento financiero que dependa de la tasa de interés. En términos generales, a la operación de encontrar la representación de estos precios en función de la tasa es lo que se conoce como valorización a riesgo neutro.

²Este modelo fue desarrollado por Cox, Ingersoll y Ross en su trabajo [6].

³El depósito en la cuenta bancaria se considera una inversión libre de riesgo.

⁴En términos simples una posibilidad de arbitraje se presenta cuando es posible obtener una ganancia instantánea libre de riesgo aprovechando la diferencia de precios entre dos o más mercados distintos. Ver [19], [28] para una discusión más detallada

Suponiendo lo anterior, el proceso de precios cumple⁵:

$$S(t, u) = \mathbb{E}^Q(e^{-\int_t^u r_s ds} S_T | \mathcal{F}_t) \quad (2.6)$$

Esto muestra que los precios $S(t, u)$ solo dependen del comportamiento del proceso $(r_t)_{0 \leq t \leq T}$ bajo la medida de probabilidad Q . Se puede extender la relación (2.6) para activos que entregan dividendos. Para esto se consideran los dividendos entregados por el activo S como un proceso estocástico D_t , de variación integrable, que llamaremos proceso de dividendos acumulados. El valor en el instante t de dicho proceso corresponde al total de dividendos acumulados hasta el tiempo t . En base a esto, se define el proceso de ganancia G_t como la suma del precio del activo y los dividendos acumulados, es decir, $G = S + D$. La condición de no arbitraje, en este caso, equivale a la existencia de una medida Q equivalente a P de modo que el proceso de ganancia descontado sea una martingala. En este contexto, los precios del activo S cumplen lo siguiente⁶:

$$S(t, u) = \mathbb{E}^Q\left(\exp\left(-\int_t^u r_s ds\right) S_T + \int_t^u \exp\left(-\int_t^l r_s ds\right) dD_l \mid \mathcal{F}_t\right) \quad (2.7)$$

Definiremos el proceso del precio de mercado del riesgo⁷, que permite conectar los “mundos” que representan las medidas P y Q . Esto resulta especialmente importante cuando es necesario pasar de uno a otro contexto, por ejemplo, al hacer estimaciones históricas, basadas en datos reales de mercado. Cabe notar que si el objetivo es únicamente realizar valorización de instrumentos financieros, es posible saltarse el contexto del mundo objetivo y modelar el proceso de tasas directamente con la medida de riesgo neutro. En tal caso, el precio de mercado del riesgo queda implícito en la dinámica adoptada para la tasa corta. Consideremos L_T la densidad de la medida Q respecto a P . Dada cualquier variable aleatoria no negativa X , se tiene: $\mathbb{E}^Q(X) = \mathbb{E}(XL_T)$. Si, además, X es \mathcal{F}_t medible se tiene: $\mathbb{E}^Q(X) = \mathbb{E}(XL_t)$, donde $L_t = \mathbb{E}(L_T | \mathcal{F}_t)$. Es decir, L_t es la densidad de Q respecto de P si nos restringimos a \mathcal{F}_t . La siguiente proposición define el proceso del precio de mercado del riesgo.

Proposición 2.2.1. *Existe un proceso adaptado $(\eta_t)_{0 \leq t \leq T}$ tal que, para todo $t \in [0, T]$, se tiene:*

$$L_t = \exp\left(\int_0^t \eta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \eta_s^2 ds\right), \text{ cs.} \quad (2.8)$$

Demostración. El proceso L_t es una martingala relativa a la filtración \mathcal{F}_t , que es la filtración natural del browniano W_t . En virtud del teorema de representación de martingalas (ver [29, pag.66]) existe un proceso adaptado, que denotaremos por $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$, que cumple $\int_0^T H_s^2 ds < \infty$. Se tiene que para todo $t \in [0, T]$:

$$L_t = L_0 + \int_0^t H_s dW_s, \text{ cs} \quad (2.9)$$

Sabemos que L_T es una densidad, luego $\mathbb{E}(L_T) = L_0 = 1$. Como Q es equivalente con P , tenemos que $L_T > 0$, casi seguramente. En general, para todo $t \in [0, T]$ se tiene

⁵Ver, por ejemplo, [19]

⁶Esto será probado más adelante.

⁷En ingles se conoce como market price of risk.

$P(L_t > 0) = 1$. Aplicaremos la fórmula de Itô a $\log(L_t)$. Debemos chequear que $P(\forall t \in [0, T] : L_0 + \int_0^t H_s dW_s > 0) = 1$. Esto lo logamos utilizando el Lema 6.2.1 del apéndice. Finalmente obtenemos:

$$\log(L_t) = \int_0^t \frac{1}{L_s} H_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{L_s^2} H_s^2 ds, \text{ cs.} \quad (2.10)$$

Tomando $\eta_t = H_t/L_t$ se obtiene la fórmula(2.8). \square

Enunciaremos una proposición que permite entender mejor la idea económica que hay detrás del proceso de riesgo de mercado.

Proposición 2.2.2. *Dada una fecha de maduración u , existe un proceso adaptado $(\sigma_t^u)_{0 \leq t \leq u}$ tal que:*

$$\frac{dS(t, u)}{S(t, u)} = (r_t - \sigma_t^u \eta_t) dt + \sigma_t^u dW_t, \text{ para } t \in [0, T] \quad (2.11)$$

Demostración. Sabemos que el proceso de precios descontados $(\tilde{S}_t)_{0 \leq t \leq u}$ es una martingala bajo la medida Q . En virtud del lema 6.2.2 del apéndice $(\tilde{S}_t L_t)_{0 \leq t \leq u}$ es una martingala bajo P . Más aún, se tiene: $S(t, u)L_t > 0$, cs. para todo $t \in [0, u]$. Utilizando la misma lógica de la demostración de 2.2.1 (recordando que $L_0 = 1$), vemos que existe un proceso adaptado $(\theta_t^u)_{0 \leq t \leq u}$ que cumple $\int_0^u (\theta_t^u)^2 dt < \infty$ y

$$\tilde{S}(t, u)L_t = \tilde{S}(0, u)e^{\int_0^t \theta_s^u dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t (\theta_s^u)^2 ds} \quad (2.12)$$

Usando la definición de \tilde{S}_t , y la expresión para L_t que entrega la proposición 2.2.1, obtenemos:

$$\begin{aligned} S(t, u) &= S(0, u) \exp\left(\int_0^t r_s ds + \int_0^t (\theta_s^u - \eta_s) dW_s \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^t ((\theta_s^u)^2 - \eta_s^2) ds \right) \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de Itô (ver [29, pag.42]) a la función exponencial en la igualdad anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned} dS(t, u) &= S(t, u) \left(r_t dt + (\theta_t^u - \eta_t) dW_t - \frac{1}{2} ((\theta_t^u)^2 - \eta_t^2) dt \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\theta_t^u - \eta_t)^2 dt \right) \\ &= S(t, u) \left((r_t + \eta_t^2 - \theta_t^u \eta_t) dt + (\theta_t^u - \eta_t) dW_t \right) \end{aligned}$$

Tomando $\sigma_t^u = \theta_t^u - \eta_t$ se concluye la demostración. \square

La ecuación (2.11) puede ser comparada con la que define una cuenta bancaria, es decir, $\frac{dB_t}{B_t} = r_t dt$. El término que multiplica a dW_s es el que influye en el riesgo de un bono. En la cuenta bancaria ese término es nulo, por lo que la consideramos como libre de riesgo, si bien r_t puede ser aleatorio. Por otra parte, el término $r_t - \sigma_t^u \eta_t$ se puede interpretar como el retorno promedio del bono en el tiempo t . Esto, pues los incrementos del browniano tienen esperanza 0. El término $-\sigma_t^u \eta_t$ corresponde a la diferencia entre

el retorno promedio del bono y la tasa libre de riesgo. De ahí la interpretación de $-\eta_t$ como premio por riesgo. Bajo la medida Q , el proceso (\tilde{W}_t) definido $\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t \eta_s ds$ es un movimiento browniano estándar. Esto se demuestra usando el teorema de Girsanov (ver [29, pag.66]). Con esto se tiene:

$$\frac{dS(t, u)}{S(t, u)} = r_t dt + \sigma_t^u d\tilde{W}_t \quad (2.13)$$

Para poder calcular precios de bonos cero cupón, es necesario conocer la dinámica que sigue el proceso de tasas de interés. En general, la dinámica de r se especifica mediante una ecuación diferencial estocástica (EDE). Es decir, se asume que r satisface una ecuación del tipo:

$$dr_t = \mu(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)dW_t, \quad (2.14)$$

donde μ y σ son funciones medibles y W_t es un movimiento browniano estándar, respecto de la medida Q . También se puede especificar la dinámica de r_t respecto de la medida P , aunque se debe escoger una forma para η . El siguiente teorema permite asegurar existencia y unidad de soluciones de (2.14) bajo ciertas condiciones sobre μ y σ .

Teorema 2.2.3. Sean $\mu : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones medibles para las cuales existen constantes C y D tal que:

$$|\mu(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|)$$

$$|\mu(t, x) - \mu(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq D|x - y|$$

para todo t en $[0, T]$ y para todo x, y en \mathbb{R} .

Sea Z una variable aleatoria independiente de la filtración generada por $W_t, t \geq 0$, con segundo momento finito, es decir, $\mathbb{E}(|Z|^2) < \infty$. Entonces, la ecuación

$$\begin{aligned} dr_t &= \mu(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)dW_t, \text{ para } t \in [0, T] \\ r_0 &= Z \end{aligned} \quad (2.15)$$

tiene una única solución t -continua X_t , adaptada a la filtración \mathcal{F}_t^Z generada por Z y W_s , para $s \leq t$. Además se tiene:

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T |X_t|^2 dt\right) < \infty$$

Se entiende por unicidad lo siguiente: si X_t e Y_t son dos soluciones de (2.15), entonces P -casi seguramente $\forall 0 \leq t \leq T, X_t = Y_t$.

Una demostración del teorema anterior se puede encontrar en [31, p.68]. Entre los modelos de tasas de interés unifactoriales, lo más usados son el de Vasicek y el de Cox, Ingersoll y Ross. El primero fue introducido en 1977 por Oldrich Vasicek (en [37]) en su intento por describir la estructura de plazos utilizando un enfoque de equilibrio económico. Fue el primer modelo en capturar una propiedad esencial de las tasas de interés conocida como reversión a la media. A diferencia de los precios de acciones u otros instrumentos financieros, las tasas de interés no pueden subir ni bajar indefinidamente, pues cambios bruscos limitan la actividad económica. De este modo las tasas de interés muestran una

tendencia a volver sobre una media de largo plazo. El modelo que propuso para r es el siguiente⁸:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t \quad (2.16)$$

donde a, b y σ son constantes positivas. A pesar de poseer características destacables, como la existencia de una solución explícita, este modelo tiene una debilidad importante: existe una probabilidad no nula que r tome valores negativos, lo que claramente no puede ocurrir en la realidad.

2.2.1. El modelo de Cox, Ingersoll y Ross

Cox, Ingersoll y Ross sugirieron en 1985(ver [6]) un modelo que describe la evolución de la tasa corta como un proceso de raíz cuadrada de un factor. Es decir, la dinámica de tasas está gobernada por la siguiente ecuación diferencial estocástica (bajo la medida física):

$$\begin{aligned} dr_t &= k(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t \\ r_t &= x \end{aligned} \quad (2.17)$$

con σ y θ reales no negativos, $k \in \mathbb{R}$. Se debe imponer la condición $2k\theta > \sigma^2$ para asegurar que el proceso r_t se mantenga no negativo.

Se modela usualmente $\eta_t = \eta\sqrt{r_t}$ el precio de mercado del riesgo, donde η es una constante. Bajo la medida neutra al riesgo, se tiene la siguiente dinámica para r_t :

$$\begin{aligned} dr_t &= (k\theta - (k + \eta)r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}d\hat{W}_t \\ r_t &= x \end{aligned} \quad (2.18)$$

Cabe mencionar que el teorema de existencia y unicidad enunciado en 2.2.3 no es válido en este caso, sin embargo, podemos recurrir al siguiente teorema (que aparece en [29, capítulo 6]):

Teorema 2.2.4. *Supongamos que $2k\theta > \sigma^2$, entonces para cualquier $x \geq 0$, existe un único proceso r_t , adaptado a una filtración \mathcal{F}_t , continuo, que toma valores en \mathbb{R}_+ y satisface en $[0, \infty)$:*

$$\begin{aligned} dr_t &= k(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t \\ r_0 &= x \end{aligned}$$

Observación 2.2.5. El proceso r_t es un proceso adaptado respecto al espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T})$, que hemos considerado durante esta sección.

Una demostración del teorema anterior puede encontrarse en [22, p.221] Se puede probar que bajo la medida de riesgo neutro el proceso r sigue una distribución chi-cuadrado no central. Específicamente, la distribución p_{r_t} cumple:

$$p_{r_t}(x) = p_{\chi^2(v, \lambda_t)/c_t}(x) = c_t p_{\chi^2(v, \lambda_t)}(c_t x)$$

donde

$$c_t = \frac{4k}{r^2(1 - \exp(-kt))}$$

⁸En otras palabras r es un proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

$$v = 4k\theta/\sigma^2$$

$$\lambda_t = c_t r_0 \exp(-kt)$$

$\chi^2(\cdot, v, \lambda)$ representa una variable aleatoria chi cuadrado no central con v grados de libertad y parametro de no-centralidad λ , cuya densidad está dada por:

$$p_{\chi^2(v, \lambda)}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda/2} (\lambda/2)^i}{i!} p_{\Gamma(i+v/2, 1/2)}(z)$$

$$\begin{aligned} p_{\Gamma(i+v/2, 1/2)}(z) &= \frac{(1/2)^{i+v/2}}{\Gamma(i+v/2)} z^{i-1+v/2} e^{-z/2} \\ &= p_{\chi^2(v+2i)}(z) \end{aligned}$$

con $p_{\chi^2(v+2i)}(z)$ la densidad de una distribución chi cuadrado central con $v + 2i$ grados de libertad.

La media y la varianza de r_t condicional a \mathcal{F}_s están dados por:

$$\mathbb{E}(r_t | \mathcal{F}_s) = r_s e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)})$$

$$Var(r_t | \mathcal{F}_s) = r_s \frac{\sigma^2}{k} (e^{-k(t-s)} - e^{-2k(t-s)}) + \theta \frac{\sigma^2}{2k} (1 - e^{-k(t-s)})^2$$

Es importante notar que el modelo de Cox-Ingersoll-Ross es del tipo exponencial afín⁹. Se puede probar que en esta clase de modelos los precios de bonos cero cupón (de gobierno) $S(t, T)$ tienen la siguiente forma¹⁰:

$$S(t, T) = A(t, T) e^{B(t, T)r_t} \quad (2.19)$$

donde

$$\begin{aligned} A(t, T) &= \left[\frac{2h \exp\{(k + \eta + h)(T - t)/2\}}{2h + (k + \eta + h)(\exp\{(T - t)h\} - 1)} \right]^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}} \\ B(t, T) &= \frac{2(\exp\{(T - t)h\} - 1)}{2h + (k + \eta + h)(\exp\{(T - t)h\} - 1)} \\ h &= \sqrt{(k + \eta)^2 + 2\sigma^2} \end{aligned}$$

Es fácil ver que el retorno es de la forma:

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \log A(t, T) + \frac{1}{T-t} B(t, T) r_t. \quad (2.20)$$

Esto es especialmente útil a la hora de calibrar el modelo.

⁹También se conocen con el nombre de modelos de retorno afín

¹⁰En [13] se desarrolla una teoría general para modelos exponenciales afines.

2.2.2. Modelo de tasas a dos factores

Cuando se trata de ajustar un modelo de tasas de interés a la estructura temporal que viene dada por los datos de mercado, los resultados pueden mejorarse considerablemente utilizando dos ó más factores. Jamshidian y Zhu (en [23]) realizaron un análisis histórico de curvas de retorno del mercado norteamericano. Utilizando análisis de componentes principales determinan que, para ese mercado específico, dos factores explican entre el 85 % y el 90 % de la varianza total, mientras un sólo factor explica entre el 68 % y el 73 % de la varianza total.

A partir de estos análisis se observa que un modelo multifactorial es necesario para describir la evolución de las tasas de interés. La evidencia muestra que dos o tres factores son necesarios para mantener el equilibrio entre precisión y buen manejo analítico. Por otra parte, deben considerarse las posibilidades de implementación de cada modelo, es decir, el tiempo de cálculo necesario para estimar los parámetros que lo definen. En este trabajo se opta por considerar modelos de dos factores para la estructura de plazos de tasas de interés, pues el modelo que considera el problema de bonos prepagables agrega otro factor al problema, lo que aporta cierto grado de flexibilidad. Por otra parte, las características de los modelos tipo CIR hacen posible extensiones a un número mayor de factores si fuese necesario. Cabe mencionar que el agregar factores puede incrementar el tiempo necesario de cálculo sin que esto repercuta en una gran diferencia en la precisión.

Revisaremos, sin entrar en detalles, las propiedades básicas de los modelos de Cox-Ingersoll-Ross a dos factores. Seguiremos principalmente a [35, capítulo 10], [4, capítulo 4], en esta parte.

La forma general de los modelos de Cox-Ingersoll-Ross a dos factores considera que la tasa corta r_t es de la forma:

$$r_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_t + \alpha_2 y_t, \text{ para } t > 0 \quad (2.21)$$

Usualmente se supone que $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$, para asegurar que la tasa corta sea positiva¹¹. La evolución de los procesos x_t, y_t en la forma canónica está dada por:

$$dx_t = (\mu_1 - \gamma_{11}x_t - \gamma_{12}y_t)dt + \sqrt{x_t}dW_{1,t} \quad (2.22)$$

$$dy_t = (\mu_2 - \gamma_{21}x_t - \gamma_{22}y_t)dt + \sqrt{y_t}dW_{2,t} \quad (2.23)$$

donde $W_{1,t}$ y $W_{2,t}$ son dos movimientos brownianos estándar independientes¹². Bajo este modelo el precio de un bono cero cupón (con fecha de maduración T) es de la forma:

$$S(t, T, x_t, y_t) = f(t, x_t, y_t)$$

para alguna función f , dado (2.6) y la propiedad de Markov para (2.22)-(2.23), que se cumple por la unicidad trayectorial de la soluciones de estas ecuaciones (ver [35]). Buscamos soluciones de la forma

$$f(t, x_t, y_t) = \exp \{-x_t B_1(T - t) - y_t B_2(T - t) - A(T - t)\}$$

¹¹En la práctica se relaja la condición $\alpha_0 \geq 0$, admitiendo que tome valores negativos.

¹²De lo contrario se pierde la estructura afín del modelo y con esto gran parte de su valor como herramienta de modelación de estructuras de plazo.

para algunas funciones B_1, B_2 y A . Usando lo anterior, se llega al sistema de ecuaciones diferenciales de tipo Ricatti:

$$B_1'(\tau) = -\gamma_{11}B_1(\tau) - \gamma_{21}B_2(\tau) - \frac{1}{2}B_1^2(\tau) + \alpha_1 \quad (2.24)$$

$$B_2'(\tau) = -\gamma_{12}B_1(\tau) - \gamma_{22}B_2(\tau) - \frac{1}{2}B_2^2(\tau) + \alpha_2 \quad (2.25)$$

$$A'(\tau) = \mu_1B_1(\tau) + \mu_2B_2(\tau) + \alpha_0 \quad (2.26)$$

En general estas ecuaciones deben resolverse numéricamente. Sin embargo, para los capítulos que vienen es conveniente contar con una expresión en forma cerrada para el precio de los bonos cero cupón. Para esto, consideramos que la tasa corta r_t sigue un modelo CIR de dos factores x_t e y_t , de la forma particular:

$$\begin{aligned} r_t &= x_t + y_t \\ dx_t &= k_1(\theta_1 - x_t)dt + \sigma_1\sqrt{x_t}dW_{1,t} \\ dy_t &= k_2(\theta_2 - y_t)dt + \sigma_2\sqrt{y_t}dW_{2,t} \end{aligned}$$

donde $W_{1,t}$ y $W_{2,t}$ representan dos movimientos brownianos estándar independientes bajo la medida Q . Suponemos además que $2k_x\theta_x > \sigma_x^2$ y $2k_y\theta_y > \sigma_y^2$, para asegurar la positividad de los procesos x_t e y_t (ver Teorema 2.2.4).

En este caso, la fórmula para el precio $S(t, T, x_t, y_t)$ que se obtiene es análoga al caso unifactorial, dada la independencia entre los factores x_t e y_t . De esta manera, tenemos:

$$S(t, T, x_t, y_t) = S^1(t, T, x_t)S^2(t, T, y_t), \quad (2.27)$$

donde $S^1(t, T, x_t)$ y $S^2(t, T, y_t)$ corresponden a reemplazar x_t e y_t , respectivamente, en la fórmula (2.19). La tasa continuamente compuesta en el instante t , considerando una fecha de maduración T , está dada por:

$$R(t, T, x_t, y_t) = R^1(t, T, x_t) + R^2(t, T, y_t),$$

donde R^1 y R^2 representan los retornos dados por la fórmula (2.3), para el caso unifactorial. Es decir,

$$R^1(t, T, x_t) = -\frac{1}{T-t} \log(A^1(t, T)) + \frac{1}{T-t} B^1(t, T)x_t \quad (2.28)$$

$$R^2(t, T, y_t) = -\frac{1}{T-t} \log(A^2(t, T)) + \frac{1}{T-t} B^2(t, T)y_t, \quad (2.29)$$

donde

$$A^i(t, T) = \left[\frac{2h_i \exp\{(k_i + \eta + h_i)(T-t)/2\}}{2h_i + (k_i + \eta_i + h_i)(\exp\{(T-t)h_i\} - 1)} \right]^{\frac{2k_i\theta_i}{\sigma_i^2}} \quad (2.30)$$

$$B^i(t, T) = \frac{2(\exp\{(T-t)h_i\} - 1)}{2h_i + (k_i + \eta_i + h_i)(\exp\{(T-t)h_i\} - 1)} \quad (2.31)$$

$$h_i = \sqrt{(k_i + \eta_i)^2 + 2\sigma_i^2} \quad (2.32)$$

para $i = 1, 2$. Utilizaremos un modelo tipo CIR de dos factores para calibrar la estructura temporal con los datos del mercado chileno.

Es frecuente, en el contexto de modelos lineales de dos factores, denominar a uno de los factores como el “nivel” de la estructura temporal y el otro como la “pendiente”¹³. Se ha determinado (ver, por ejemplo, [7]) que unos pocos factores influyen en los cambios (que se producen en el tiempo) de la curva de retorno. Los dos factores que explican en mayor porcentaje la variación de esta curva son el “nivel” y la “pendiente”. El primero está relacionado con cambios uniformes (como una traslación) en la curva de retorno. El segundo está relacionado con cambios en las tasas de bonos de corta duración, mientras los bonos de larga duración varían relativamente poco. Esta interpretación es especialmente importante en el modelo de Jarrow *et al.* [24] que estudiaremos en el siguiente capítulo.

¹³En el caso de un modelo con 3 factores, el factor adicional se denomina “curvatura”

Capítulo 3

Bonos prepagables

En este capítulo volveremos a considerar el procedimiento de valorización, tomando el proceso de tasa corta como dado y explicitando de que manera este determina el precio de bonos corporativos. La teoría, tal y como la hemos presentado en el capítulo anterior no considera la posibilidad de que una compañía incurra en default ni la posibilidad que una compañía prepague un bono. Ambas posibilidades se consideran como un riesgo para el portador del bono que debe verse reflejado en el precio de los activos, en forma de prima por riesgo.

Las dos grandes familias de modelos que permiten atacar el problema de valorización de bonos corporativos son los llamados modelos estructurales y los modelos de forma reducida. En los primeros, se asume cierta dinámica para el valor de la firma y cuando este valor cae bajo un límite establecido se considera que la empresa incurre en default. Esto implica que se debe tener información completa respecto a la estructura de capitales de la empresa. La opción de prepago es tratada como una opción americana¹. En los modelos de forma reducida, en cambio, se modelan tanto la probabilidad de default, como la probabilidad de prepago, vía procesos de intensidad. Esto permite establecer analogías metodológicas con la valorización de bonos cero cupón, revisada en el capítulo 1. En particular, la fórmula de precios de un bono corporativo es idéntica a la establecida en (2.6), salvo que la tasa aparecerá ahora ajustada por riesgo. Esto simplifica enormemente el análisis y hace posible implementaciones a gran escala. En este capítulo seguimos principalmente los trabajos de Duffie, Schroeder y Skiadas [16], Duffie y Singleton [17].

3.1. La teoría

Consideramos un espacio filtrado de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, P)$. La filtración $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t : T \geq t \geq 0\}$ ² representa la evolución en el tiempo de la información disponible. Asumiremos que P es la medida neutra al riesgo. En lo que sigue, las igualdades entre variables aleatorias serán en el sentido casi seguro, es decir, si se lee $X = Y$ quiere decir que $P[X = Y] = 1$.

En este contexto, el proceso de tasa corta r_t se asume como dado. Se busca una fórmula que relacione el precio de un bono prepagable con el proceso de tasa corta, de manera

¹Duffie y Singleton en [17] utilizan este enfoque, aunque no lo desarrollan en detalle. Berndt (en [2]) realiza uno de los pocos estudios que tratan tanto la teoría como la práctica desde este enfoque.

²Suponemos que satisface las condiciones habituales: continua por la derecha, etc.

análoga a como se hace en la valorización de bonos sin opción de prepago. Incorporando las diferencias que acarrea considerar dicha opción.

Consideramos un horizonte fijo de tiempo T , que representa la fecha de maduración del bono prepagable. Trataremos a la evolución del precio de un activo S en el tiempo como un proceso estocástico S_t respecto al espacio de probabilidad filtrado definido al comienzo de esta sección. Análogamente, el proceso de dividendos entregados por el activo será un proceso estocástico adaptado D_t ³ definido en el espacio de probabilidad de referencia.

Probaremos el siguiente resultado utilizado sin demostración en [16]:

Lema 3.1.1. *El proceso de precios S de cualquier activo con dividendos acumulados D cumple:*

$$S_t = \mathbb{E} \left[\int_t^T \exp\left(-\int_t^u r_v dv\right) dD_u + \exp\left(-\int_t^T r_v dv\right) S_T \mid \mathcal{F}_t \right], t \leq T \quad (3.1)$$

ssi el proceso de ganancia descontado G_t definido por:

$$\left\{ \int_0^t \exp\left(-\int_0^u r_v dv\right) dD_u + \exp\left(-\int_0^t r_v dv\right) S_t : t \geq 0 \right\}$$

es una martingala.

Demostración. Se define $\gamma_t = \exp\left(-\int_0^t r_v dv\right)$. Probaremos primero que si S_t cumple (3.1), entonces G_t es una martingala. Multiplicando por γ_t y sumando $\int_0^t \gamma_u dD_u$ (ambas variables \mathcal{F}_t -medibles) se obtiene:

$$\begin{aligned} G_t &= \int_0^t \gamma_u dD_u + \gamma_t \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{\gamma_u}{\gamma_t} dD_u + \frac{\gamma_T}{\gamma_t} S_T \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^t \gamma_u dD_u + \gamma_t \int_t^T \frac{\gamma_u}{\gamma_t} dD_u \right. \\ &\quad \left. + \gamma_T S_T \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^T \gamma_u dD_u + \gamma_T S_T \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E} [G_T \mid \mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

para todo t , luego G_t es una martingala.

Ahora probaremos la otra implicancia. Si G_t es una martingala, entonces se cumple que $G_t = \mathbb{E}[G_T \mid \mathcal{F}_t]$. Por definición:

$$\begin{aligned} \int_0^t \gamma_u dD_u + \gamma_t S_t &= \mathbb{E} \left[\int_0^T \gamma_u dD_u + \gamma_T S_T \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \int_0^t \gamma_u dD_u \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\int_t^T \gamma_u dD_u + \gamma_T S_T \mid \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

Luego, se tiene:

$$\gamma_t S_t = \mathbb{E} \left[\int_t^T \gamma_u dD_u + \gamma_T S_T \mid \mathcal{F}_t \right]$$

³El proceso D_t se asume de variación integrable.

Finalmente

$$S_t = \mathbb{E} \left[\int_t^T \frac{\gamma_u}{\gamma_t} dD_u + \frac{\gamma_T}{\gamma_t} S_T \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (3.2)$$

□

A las ecuaciones de la forma (3.2) las llamaremos ecuaciones recursivas. En [12] se desarrolla rigurosamente una teoría para este tipo de ecuaciones, definidas en el espacio \mathcal{S} de las semimartingalas V_t que satisfacen $\mathbb{E}[(\sup_t |v_t|)^p] < \infty$, con $p \in (1, \infty)$. Esto incluye la demostración de un teorema de existencia y unicidad par este tipo de ecuaciones, que usaremos en este trabajo (ver [12, Apéndice C]).

Usaremos la tripleta $\{(X, T), (X_c, \tau_c), (X_d, \tau_d)\}$ para denotar los ingresos que reporta un bono prepagable cero cupón. La primera componente (X, T) representa la obligación de pagar una cantidad X en el tiempo T , de no mediar un evento de prepago o default. En lo que sigue, supondremos que X es una variable aleatoria \mathcal{F}_T -medible y acotada. La segunda componente (X_c, τ_c) está determinada por un tiempo de parada τ_c que representa el instante en que la firma decide prepagar el bono⁴. En general, la firma decide prepagar un bono si su precio es mayor que el precio de ejercicio acordado previamente. Cuando el bono es prepagado el inversionista recibe el precio de ejercicio X_c , el cual representa una fracción k del valor de mercado⁵. Similarmente (X_d, τ_d) corresponde a la cantidad recibida en el evento de default, y el tiempo de parada que indica el instante en que este ocurre. Al igual que X_c , se considera que la cantidad recibida en caso de default corresponde a una fracción δ del valor de mercado. En lo que sigue, consideraremos que los procesos X_c y X_d son predecibles⁶. Con esto queda bien definido el proceso de dividendos (compuesto por estos tres elementos).

En todo lo que sigue, haremos la siguiente hipótesis: $S_t = 0$ para $t \geq t_0$ si todos los dividendos son iguales a cero despues de t_0 . Esto es consecuente con la intuición, en el sentido que si un activo no reporta ningún beneficio, entonces su precio debe ser nulo.

Se asume la existencia de los procesos de riesgo λ_d y λ_c , asociados a los tiempos de parada τ_d y τ_c respectivamente, que se suponen acotados. A continuación se detallará, formalmente, este requerimiento.

Se introducen la funciones indicadoras $N_{d,t} = \mathbf{1}_{t \geq \tau_d}$ y $N_{c,t} = \mathbf{1}_{t \geq \tau_c}$ para $t \geq 0$. Utilizando un resultado clásico de Doob y Meyer (Ver [32, pag.106]), se descompone $N_{j,t} = A_{j,t} + M_{j,t}$ con $j \in \{c, d\}$, donde $A_{j,t}$ es un proceso predecible, creciente y $M_{j,t}$ es una martingala. Se asume que existen funciones progresivamente medibles $\lambda_{d,t}$ y $\lambda_{c,t}$ tales que:

$$A_{j,t} = \int_0^{t \wedge \tau_j} \lambda_{j,u} du = \int_0^t \lambda_{j,u} \mathbf{1}_{u < \tau_j} du, t \geq 0, \text{ con } j \in \{c, d\} \quad (3.3)$$

Los procesos $\lambda_{d,t}$ y $\lambda_{c,t}$ se interpretan como las tasa de riesgo bajo la medida equiva-

⁴Se utiliza la letra c como subíndice debido a que inglés los bonos prepagables se denominan “callable bonds”.

⁵Existen, al respecto, otras formas de modelar el valor de ejercicio. La forma elegida simplifica de manera considerable la formula de evaluación. Para otras formas de prepago ver [17].

⁶Intuitivamente el hecho que estos procesos sean predecibles quiere decir que se podría conocer el valor que toman “justo antes” de un evento de prepago o default.

lente. Esto pues:

$$\lambda_{j,t} \mathbf{1}_{t \geq \tau_j} = \lim_{u \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}[N_{j,t+u} - N_{j,t} | \mathcal{F}_t]}{u} = \lim_{u \downarrow 0} \frac{\mathbf{P}[t < \tau_j \leq t + u | \mathcal{F}_t]}{u}, \quad j \in \{c, d\}$$

Discutiremos a continuación (siguiendo [26]) como se realiza la construcción de los tiempos de parada τ_c y τ_d , a partir de los procesos $\lambda_{c,t}$ y $\lambda_{d,t}$. Para esto se asume la existencia de una variable aleatoria Θ , construida en Ω , independiente de la sigma algebra \mathcal{F}_T , con ley exponencial de parámetro 1, ie $P(\Theta \geq t) = e^{-t}$. Se define el tiempo τ_j como la primera vez que el proceso $A_{j,t}$ está sobre la variable aleatoria Θ , es decir,

$$\tau_j = \inf\{t \geq 0 : A_{j,t} \geq \Theta\},$$

para $j \in \{c, d\}$. En particular, $\{\tau_j \geq s\} = \{A_{j,t} \leq \Theta\}$. Asumimos que $A_{j,t}$ es acotado para todo t . Esta construcción se conoce con el nombre de proceso de Cox.

El siguiente lema (que aparece en [33, pag.419]) entrega la distribución condicional de los tiempos de parada τ_c y τ_d : τ_j ($j \in \{c, d\}$) dada la σ -algebra \mathcal{F}_t .

Lema 3.1.2. *La distribución condicional de τ_j ($j \in \{c, d\}$) dada la σ -algebra \mathcal{F}_t , es*

$$P[\tau_j | \mathcal{F}_t] = \exp(-A_{j,t})$$

3.2. Fórmula de valorización

En lo que sigue, se buscará obtener una expresión explícita para el precio de un bono prepagable. Utilizaremos la metodología usada por Duffie *et al.* (en [16]), extendiendo el análisis a el caso con proceso de prepagado.

Definimos el proceso de dividendos acumulados D como:

$$D_t = \begin{cases} X_{c,\tau_c} \mathbf{1}_{\{\tau_c \leq t, \tau_c < \tau_d\}} + X_{d,\tau_d} \mathbf{1}_{\{\tau_d \leq t, \tau_d < \tau_c\}} & : \text{para } t < T \\ X_{c,\tau_c} \mathbf{1}_{\{\tau_c \leq T, \tau_c < \tau_d\}} + X_{d,\tau_d} \mathbf{1}_{\{\tau_d \leq T, \tau_d < \tau_c\}} + X \mathbf{1}_{\{\tau_c > T, \tau_d > T\}} & : \text{para } t \geq T \end{cases}$$

Escribamos lo anterior en términos de la funciones indicadoras $N_{c,t}, N_{d,t}$:

$$D_t = \int_0^{t \wedge T} X_{c,u} (1 - N_{d,u}) dN_{c,u} + \int_0^{t \wedge T} X_{d,u} (1 - N_{c,u}) dN_{d,u} + X \mathbf{1}_{\{\tau_c > T, \tau_d > T, t \geq T\}} \quad (3.4)$$

Por otro lado, sabemos que $N_{c,t}$ y $N_{d,t}$ satisfacen lo siguiente:

$$dN_{j,t} = (1 - N_{j,t}) \lambda_{j,t} dt + dm_{j,t}, \quad \text{para } j \in \{c, d\} \quad (3.5)$$

donde $m_{j,t}$ es una martingala. Supondremos que $X_{c,u}$ y $X_{d,u}$ cumplen lo siguiente: $X_{c,u} = kS_u$ y $X_{d,u} = \delta S_u$.

Con esto, el proceso de precios queda de la forma:

$$S_t = \mathbb{E} \left[\int_t^T \exp\left(-\int_t^u r_v dv\right) S_u (k\lambda_{c,u} + \delta\lambda_{d,u}) du + \exp\left(-\int_t^T r_v dv\right) X (1 - N_{c,T}) (1 - N_{d,T}) | \mathcal{F}_t \right], \quad \text{para } t < T \quad (3.6)$$

y $S_t = 0$ para $t \geq T$, pues el bono expira en el instante T .

El siguiente resultado explicita la fórmula de valorización de un bono prepagable. Se establece una clara analogía con la fórmula (2.6) para una bono cero cupón del tesoro.

Proposición 3.2.1. *Sea V un proceso definido por:*

$$V_t = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_t^T (r_u + (1-k)\lambda_{c,u} + (1-\delta)\lambda_{d,u})du\right)X|\mathcal{F}_t\right], t < T, \quad (3.7)$$

y $V_t = 0$, para $t \geq T$. Supondremos además que $\Delta V_{\tau_c} = 0$ y $\Delta V_{\tau_d} = 0$ (ver Obs 3.2.2), entonces:

$$S_t = V_t \mathbf{1}_{\{t < \tau_c, t < \tau_d\}}, \text{ para todo } t \geq 0$$

Observación 3.2.2. La suposición que V_t no salta en los instantes τ_c y τ_d impone una condición sobre los procesos r_t , $\lambda_{c,t}$ y $\lambda_{d,t}$, y sobre la filtración \mathcal{F}_t . Esto significa que la probabilidad de que ocurran saltos en el proceso V_t en los instantes τ_c y τ_d es cero. Un caso interesante se da cuando V_t es continuo, en [16] se discuten condiciones sobre la filtración bajo las cuales esto se cumple. En [17] se supone que el proceso V_t sólo salta una cantidad finita de veces (en tiempos deterministas) en el intervalo $(0, T)$. De manera intuitiva podemos decir que los cambios en los precios en general no se pueden anticipar a los cambios que provoca un evento de default o prepago, es por esto que es razonable la suposición que se ha utilizado.

Como se indica en [16] (sin demostración) el proceso V_t es continuo por la derecha con límite por la izquierda. Para probar esto, usaremos el siguiente resultado, que aparece en [33, pag.62]:

Proposición 3.2.3. *Sea ξ_n una secuencia de variables aleatorias que convergen casi seguramente a otra variable aleatoria ξ y tal que $\forall n |\xi_n| \leq \vartheta$, con ϑ integrable. Si \mathcal{F}_n es una secuencia creciente (resp. decreciente) de sub sigma-algebras, entonces $\mathbb{E}[\xi_n|\mathcal{F}_n]$ converge casi seguramente a $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}]$, con $\mathcal{F} = \sigma(\bigcup_n \mathcal{F}_n)$ (resp. $\mathcal{F} = \bigcap_n \mathcal{F}_n$)*

Sea ν_n una sucesión de números reales positivos tal que $\nu_n \rightarrow 0$. Definimos $\zeta_t = r_t + (1-k)\lambda_{c,t} + (1-\delta)\lambda_{d,t}$. Usando el resultado anterior se prueba que:

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_{t+\nu_n}^T (\zeta_u)du\right)X|\mathcal{F}_{t+\nu_n}\right] \rightarrow \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_t^T (\zeta_u)du\right)X|\mathcal{F}_{t+}\right] \text{ casi seguramente,}$$

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_{t-\nu_n}^T (\zeta_u)du\right)X|\mathcal{F}_{t-\nu_n}\right] \rightarrow \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_t^T (\zeta_u)du\right)X|\mathcal{F}_{t-}\right] \text{ casi seguramente.}$$

Como la filtración es continua por la derecha, se tiene que $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$. Se concluye que V_t es un proceso continuo por la derecha con límite por la izquierda.

Antes de probar la Proposición 3.2.1, demostraremos lo siguiente:

Lema 3.2.4. *Supongamos que B es un proceso adaptado continuo por la derecha con límite por la izquierda, con variación integrable, y ψ es progresivamente medible y acotado. Entonces:*

$$dY_t = -dB_t - Y_t\psi_t dt + dm_t, t \leq T$$

para alguna martingala m , si y solo si:

$$Y_t = \mathbb{E}\left[\int_t^T \exp\left(\int_t^u \psi_v dv\right)dB_u + \exp\left(\int_t^T \psi_v dv\right)Y_T|\mathcal{F}_t\right], t \leq T$$

Demostración. Sea $\gamma_t = \exp(\int_0^t \psi_v dv)$, $t \geq 0$. Se tiene que:

$$\begin{aligned}\gamma_t Y_t &= \mathbb{E}\left[\int_t^T \exp\left(\int_0^u \psi_v dv\right) dB_u + \exp\left(\int_0^T \psi_v dv\right) Y_T \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= -\int_0^t \gamma_u dB_u + \mathbb{E}\left[\int_0^T \gamma_u dB_u + \gamma_T Y_T \middle| \mathcal{F}_t\right]\end{aligned}\quad (3.8)$$

La ecuación (3.8) se puede escribir equivalentemente como:

$$d(\gamma_t Y_t) = -\gamma_t dB_t + dn_t, t \leq T \quad (3.9)$$

para alguna martingala n . Para probar la primera implicancia basta tomar $n = \mathbb{E}[\int_0^T \gamma_u dB_u + \gamma_T Y_T | \mathcal{F}_t]$, que claramente es una martingala.

Para probar la recíproca, integramos entre t y T la ecuación (3.9), obteniendo:

$$\begin{aligned}\gamma_T Y_T - \gamma_t Y_t &= -\int_t^T \gamma_u dB_u + \int_t^T dn_u \\ \gamma_t Y_t &= -\int_0^t \gamma_u dB_u + \int_0^T \gamma_u dB_u + \gamma_T Y_T - \int_t^T dn_u\end{aligned}$$

Tomando esperanza condicional respecto a \mathcal{F}_t se tiene (3.9), dado que $\mathbb{E}(n_t - n_T | \mathcal{F}_t) = 0$.

Por otra parte, usando la fórmula de integración por partes de Itô para semimartingalas cádlag (notando que γ es un proceso continuo), tenemos:

$$\begin{aligned}d(\gamma_t Y_t) &= \gamma_t dY_t + Y_t d\gamma_t, t \leq T \\ &= \gamma_t (dY_t + Y_t \psi_t dt)\end{aligned}$$

Luego, (3.9) es equivalente a $dY_t = -dB_t - Y_t \psi_t dt + dm_t$, $t \leq T$, donde $m_t = (\gamma_t)^{-1} dn_t$. Como n es una martingala y el proceso γ es continuo y acotado se tiene que m es también una martingala. Esto prueba el lema. \square

Para probar la Proposición 3.2.1 necesitaremos un lema técnico que enunciaremos a continuación⁷:

Lema 3.2.5. *Sea M una martingala que cumple $\mathbb{E}[(\sup_t |M_t|)^p]$, Y es un proceso predecible que cumple $\mathbb{E}[(\sup_t |Y_t|)^p] < \infty$, entonces $\int Y dM$ es una martingala.*

Demostración. El resultado es una consecuencia de la desigualdad de Emery (6.2.5, en el apéndice). En particular, usaremos el Corolario 6.2.6. Usaremos la notación $\tilde{M}_t = \int_0^\infty Y_t dM_t$. Notar que \tilde{M}_t es una martingala local. En virtud del corolario 6.2.6 se tiene:

$$\mathbb{E}[(\sup_t |\tilde{M}_t|)^p] \leq C \mathbb{E}[(\sup_t |M_t|)^p] \mathbb{E}[(\sup_t |Y_t|)^p] \quad (3.10)$$

Lo anterior permite concluir que \tilde{M}_t es martingala. \square

⁷Ver [16]

Demostración de la Prop.3.2.1. Definamos, para $t \geq 0$, $\tilde{V}_t = V_t \mathbf{1}_{\{t < T\}} + X \mathbf{1}_{\{t \geq T\}}$. Notamos que \tilde{V} satisface (3.7), pero en $[0, T]$ en vez de $[0, T)$. Utilizando el Lema 3.2.4 (con $\psi = -(r + \lambda_c(1 - k) + \lambda_d(1 - \delta))$ y $B = 0$) se sigue que:

$$d\tilde{V}_t = (r + \lambda_{c,t}(1 - k) + \lambda_{d,t}(1 - \delta))\tilde{V}_t dt + dm_t, t \leq T$$

para alguna martingala m .

Definamos ahora $\kappa_t = (1 - N_{c,t})(1 - N_{d,t}) = \mathbf{1}_{\{t < \tau_c, t < \tau_d\}}$, para $t \geq 0$. Notemos que $d\kappa_t = -(1 - N_{d,t})dN_{c,t} - (1 - N_{c,t})dN_{d,t} = -(\lambda_{c,t} + \lambda_{d,t})\kappa_t dt - dM_t$, para una martingala M . Definiendo $U_t = \tilde{V}_t \kappa_t$, se tiene:

$$\begin{aligned} \kappa_t d\tilde{V}_t &= (r_t + \lambda_{c,t}(1 - k) + \lambda_{d,t}(1 - \delta))\kappa_t \tilde{V}_t dt + \kappa_t dm_t \\ &= (r_t + \lambda_{c,t}(1 - k) + \lambda_{d,t}(1 - \delta))U_t dt + \kappa_t dm_t. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Por otra parte, usando la fórmula de integración por partes de Itô para semimartingalas càdlàg (ver [32, pag.81]):

$$\begin{aligned} \kappa_t d\tilde{V}_t &= d(\tilde{V}_t \kappa_t) - \tilde{V}_t d\kappa_t - \Delta \tilde{V}_t \Delta \kappa_t \\ &= dU_t + U_t(\lambda_{c,t} + \lambda_{d,t})dt + \tilde{V}_t dM_t \end{aligned} \quad (3.12)$$

dato que $-\Delta \tilde{V}_t \Delta \kappa_t \neq 0$ sólo cuando $t = \tau_c$ o $t = \tau_d$ y, se tiene, $\Delta \tilde{V}_{\tau_c} = \Delta \tilde{V}_{\tau_d} = 0$. Combinando las expresiones (3.11) y (3.12) se obtiene:

$$dU_t = U_t(r_t - \lambda_{c,t}k - \lambda_{d,t}\delta)dt + dL_t, t \leq T$$

donde

$$dL_t = -\tilde{V}_t dM_t + \kappa_t dm_t.$$

Si asumimos que L es una martingala, aplicando el Lema 3.2.4 (con $Y_t = U_t, \psi_t = r_t, dB_t = -U_t(\lambda_{c,t}k + \lambda_{d,t}\delta)$ y $m_t = X_t$) obtenemos:

$$U_t = \mathbb{E}\left[\int_t^T \frac{\gamma_t}{\gamma_u} U_u(\lambda_{c,u}k + \lambda_{d,u}\delta)du + \frac{\gamma_t}{\gamma_T} U_T | \mathcal{F}_t\right], t \leq T \quad (3.13)$$

con $\gamma_t = \exp(\int_0^t r_u du), t \geq 0$.

Por otra parte, se define \tilde{S}_t de la siguiente forma: $\tilde{S}_t = S_t$ para $t < T$ y $\tilde{S}_T = X \mathbf{1}_{\{T < \tau_c, T < \tau_d\}}$. Entonces \tilde{S} satisface

$$\begin{aligned} S_t &= \mathbb{E}\left[\int_t^T \exp\left(-\int_t^u r_v dv\right) S_u(k\lambda_{c,u} + \delta\lambda_{d,u})du \right. \\ &\quad \left. + \exp\left(-\int_t^T r_v dv\right) S_T | \mathcal{F}_t\right], t \leq T \end{aligned} \quad (3.14)$$

Utilizando el Lema 3.2.4 se tiene:

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t(r_t - \lambda_{c,t}k - \lambda_{d,t}\delta)dt + d\tilde{H}_t$$

donde \tilde{H} es una martingala. Notar que $\tilde{S}_T = U_T$, luego en virtud del teorema de existencia y unicidad⁸ para la ecuación integral (3.2), se tiene: $S_t = U_t = \tilde{V}_t \mathbf{1}_{\{t < \tau_c, t < \tau_d\}}$.

⁸Para una demostración del teorema ver [12, Apéndice C].

Para concluir la demostración de la proposición debemos probar que L es efectivamente una martingala. Es claro que L es una martingala local. El término $\int \kappa_t dm_t$ es una martingala pues κ_t es un proceso acotado. El hecho que $\int V_t dM_t$ es una martingala es una consecuencia del Lema 3.2.5, dado que V cumple: $\mathbb{E}(\sup_t |V_t|^p) < \infty$. A su vez, esto es consecuencia de la desigualdad maximal de Doob (ver [32, pag.11]). \square

La fórmula de valorización que hemos obtenido es similar a la propuesta por Duffie y Singleton (en [17]), en el contexto de bonos corporativos no prepagables. En resumen, la metodología de valorización para bonos corporativos prepagables se reduce a usar la fórmula (2.6) con una tasa ajustada por riesgo. En su trabajo la tasa ajustada es de la forma: $r_t + (1 - \delta)\lambda_{d,t}$. El término $(1 - \delta)$ mide la pérdida del receptor del bono cuando ocurre un evento de default y $\lambda_{d,t}$ mide la probabilidad instantánea de default. Llamaremos R_t a la tasa ajustada para un bono corporativo prepagable, dada por: $R_t = r_t + (1 - \delta)\lambda_{d,t} + (1 - k)\lambda_{c,t}$. El término $(1 - k)$ mide la pérdida del receptor del bono en caso de prepago y $\lambda_{c,t}$ mide la probabilidad instantánea de prepago.

Observación 3.2.6. A partir de la fórmula de valorización para un bono prepagable cero cupón podemos valorizar un bono prepagable con cupones. Como mencionamos anteriormente, un bono prepagable con cupones puede verse como un portfolio de bonos prepagables cero cupón. Si $S_c(t, T)$ es el precio de un bono prepagable con cupones cuyos pagos equivalen a una cantidad c , pagados en fechas $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n = T$ y con un principal de 1, la fórmula para el precio es la siguiente:

$$\begin{aligned} S_c(t, T) &= \mathbb{E} \left[\sum_{t < \tau_i \leq T} c e^{-\int_t^{\tau_i} R_u du} + e^{-\int_t^T R_u du} \right] \\ &= \sum_{t < \tau_i \leq T} c S(t, \tau_i) + S(t, T). \end{aligned} \quad (3.15)$$

3.3. Especificación del modelo

Hasta el momento, hemos expuesto la forma general de los modelos de forma reducida. En lo que sigue, entraremos en lo que podríamos considerar como modelación propiamente tal. Es decir, la especificación de las dinámicas que siguen las tasas de interés y los procesos asociados a las opciones de prepago y default. Con esto se hace explícita la fórmula de valorización. Estudiaremos el modelo de Jarrow *et al.* ([24])⁹, donde se propone un modelo exponencial afín de cuatro factores independientes para la dinámica conjunta de la estructura de plazos (libre de riesgo), el spread de crédito y el spread de prepago. De estos cuatro factores, dos son utilizados para modelar la estructura de plazos de tasa de interés, uno en la dinámica del spread por default y uno en la dinámica del spread de prepago. Supondremos, adicionalmente, que cada factor sigue un proceso tipo CIR. Además se incorpora la dependencia no lineal del spread de prepago respecto al nivel de la tasa corta, situación que se observa en la práctica. Por ejemplo, cuando el nivel de la tasa baja, la probabilidad de que una compañía prepague un bono sube, por ende el precio del bono baja, y cuanto más baje la tasa el precio del bono experimentará una caída más brusca.

⁹Que a su vez se inspira en el artículo de Duffie ([10]) para bonos no prepagables.

Seguendo los trabajos de Duffee [10], Duffie y Singleton [17], y Duffie, Pedersen y Singleton [15], se usará un modelo afín de dos factores para la tasa corta r_t :

$$r_t = \alpha_r + s_{1,t} + s_{2,t}, \quad (3.16)$$

donde α_r es una constante¹⁰ y las dos variables de estado $\{s_{1,t}, s_{2,t}\}$ siguen procesos CIR independientes. Formalmente, la dinámica de estos dos factores, bajo la medida física, tiene la forma:

$$ds_{i,t} = k_i(\theta_i - s_{i,t})dt + \sigma_i\sqrt{s_{i,t}}dW_{i,t}, \text{ para } i = 1, 2. \quad (3.17)$$

donde $W_{1,t}$ y $W_{2,t}$ son dos movimientos brownianos estándar independientes. Bajo la medida neutra equivalente Q , estos procesos pueden ser representados como:

$$ds_{i,t} = (k_i\theta_i - (k_i - \eta_i)s_{i,t})dt + \sigma_i\sqrt{s_{i,t}}d\hat{W}_{i,t}, \text{ para } i = 1, 2 \quad (3.18)$$

donde $\hat{W}_{1,t}$ y $\hat{W}_{2,t}$ son dos movimientos brownianos independientes y η_i es el precio del riesgo del mercado asociado con $\hat{W}_{i,t}$. Con una cantidad suficiente de datos se podría hacer una estimación por separado de la tasa de recuperación y la intensidad, tanto de default como de prepago. Dada la limitada información que es posible encontrar sobre tasa de recuperación se elige realizar una modelación conjunta de $(1 - \delta)\lambda_{d,u}$ y $(1 - k)\lambda_{c,u}$. Es decir, se modelan directamente los spread de default y prepago.

Se asume, siguiendo lo hecho por Duffee [10], la siguiente representación del spread de default, bajo la medida física P :

$$(1 - \delta)\lambda_{d,t} = \alpha_d + h_{d,t} + \beta_{d1}(s_{1,t} - \bar{s}_1) + \beta_{d2}(s_{2,t} - \bar{s}_2) \quad (3.19)$$

y

$$dh_{d,t} = k_d(\theta_d - h_{d,t})dt + \sigma_d\sqrt{h_{d,t}}dW_{d,t} \quad (3.20)$$

donde $W_{d,t}$ es un movimiento browniano estándar independiente de $W_{1,t}$ y $W_{2,t}$. Bajo la medida equivalente Q :

$$dh_{d,t} = (k_d\theta_d - (k_d - \eta_d)h_{d,t})dt + \sigma_d\sqrt{h_{d,t}}d\hat{W}_{d,t} \quad (3.21)$$

donde $\hat{W}_{d,t}$ es un movimiento browniano estándar bajo Q que es independiente de $\hat{W}_{1,t}$ y $\hat{W}_{2,t}$, y η_d es el precio del riesgo de mercado asociado con $\hat{W}_{d,t}$. Los términos $\beta_{d1}(s_{1,t} - \bar{s}_1)$ y $\beta_{d2}(s_{2,t} - \bar{s}_2)$ indican la sensibilidad ante diferencias con la media en la tasa de interés. Esto captura la dependencia de los retornos de bonos corporativos en relación a la estructura de plazos (libre de riesgo de default). La inclusión de la constante α_d permite que haya un spread distinto de 0, incluso para compañías con riesgo de default muy bajo. En principio, esto permitiría reflejar factores no considerados directamente, como la liquidez¹¹ u otras.

Hay diferencias importantes entre las decisiones de prepago y default. En primer lugar, cuando una firma cae en default, lo hace en todos los bonos emitidos. Sin embargo, cuando una firma prepaga un bono, no necesariamente hace lo mismo con el resto de bonos

¹⁰En principio, lo lógico sería que la constante α_r fuera positiva, para asegurar que la tasa corta sea positiva. Sin embargo, en la práctica α_r es negativa, esto añade cierta flexibilidad al modelo. El precio que hay que pagar es la posibilidad de una tasa corta negativa.

¹¹Se podría incluir un nuevo factor que representara este término, sin embargo, se ha decidido no incluir directamente. Ver [24]), para una discusión más extensa.

vigentes. El ejercicio del prepago dependerá de la relación entre el precio de mercado y el valor de ejercicio de la opción de prepago. Luego, es más probable que en un bono con cupones más altos sea prepago que uno con cupones más bajos. Por otra parte, es claro que si la tasa de interés (tasa corta) es suficientemente baja, todos los bonos corporativos prepagables tienen mayor probabilidad de ser prepagados. En la práctica, se ha observado que existe una relación no lineal entre la intensidad de prepago y la tasa de interés. Luego se debe incluir un término que refleje esta no linealidad al modelar el spread de prepago. Se considera la siguiente representación para el spread de prepago:

$$(1 - k)\lambda_{c,t} = \alpha_c + h_{c,t} + \phi(c, s_{1,t}, s_{2,t}), \quad (3.22)$$

Se pueden distinguir dos componentes esenciales en la representación anterior; una sistemática y una idiosincrática. La componente sistemática $\phi(c, s_{1,t}, s_{2,t})$ refleja la parte del spread de prepago determinada por las razones económicas¹² que llevan a prepagar un bono. Por otro lado, la componente idiosincrática $h_{c,t}$ considera las razones no estandar. La inclusión del término α_c permite un spread de prepago distinto de cero incluso para firmas con muy bajo riesgo de prepago.

Se enumeran algunas características que son deseables en la representación de la componente sistemática:

- Dependencia explícita del spread de prepago respecto a la tasa de los cupones.
- Dependencia no lineal del spread de prepago respecto a las tasas de interés.
- Existencia de una aproximación en forma cerrada para los precios de bonos prepagables.

La última característica restringe bastante la elección de la componente sistemática. Siguiendo [24] se escoge ϕ de la siguiente manera:

$$\phi(c, s_{1,t}, s_{2,t}) = \beta_{c1}(s_{1,t} - \bar{s}_1) + \beta_{c2}\frac{c}{s_{2,t}} \quad (3.23)$$

donde c es la tasa del cupón de un bono prepagable. Como se menciona en [24] la función no lineal $c/s_{2,t}$ incluida en la componente sistemática ha sido usada anteriormente en el contexto de letras hipotecarias (ver por ejemplo, [34]). Si el cupón es más alto en un bono que en otro, suponiendo que el resto de las características se mantienen, entonces la prima por riesgo de prepago será mayor para ese bono (existe una mayor probabilidad de prepago). Lo mismo ocurre si la componente $s_{2,t}$ de la tasa corta es baja. Por su parte, la componente idiosincrática $h_{c,t}$ del spread de prepago sigue un proceso estocástico del tipo CIR. Bajo la medida P , $h_{c,t}$ cumple la siguiente EDE:

$$dh_{c,t} = k_c(\theta_c - h_{c,t})dt + \sigma_c\sqrt{h_{c,t}}dW_{c,t}, \quad (3.24)$$

donde $W_{c,t}$ es un movimiento browniano estándar, independiente de $W_{d,t}$, $W_{1,t}$ y $W_{2,t}$. Bajo la medida equivalente Q , la dinámica de $h_{c,t}$ tiene la forma:

$$dh_{c,t} = (k_c\theta_c - (k_c + \eta_c)h_{c,t})dt + \sigma_c\sqrt{h_{c,t}}d\hat{W}_{c,t}, \quad (3.25)$$

¹²Bajo los supuestos estandar de racionalidad en economía.

donde $\hat{W}_{c,t}$ es un movimiento browniano estándar independiente de $\hat{W}_{d,t}$, $\hat{W}_{1,t}$ y $\hat{W}_{2,t}$, η_c es el precio del riesgo de mercado asociado a $\hat{W}_{c,t}$. Con las especificaciones introducidas durante esta sección la tasa ajustada queda:

$$\begin{aligned} R_u &= r_u + (1 - \delta)\lambda_{d,u} + (1 - k)\lambda_{c,u} \\ &= \alpha_r + s_{1,u} + s_{2,u} \\ &\quad + [\alpha_d + h_{d,u} + \beta_{d1}(s_{1,u} - \bar{s}_1) + \beta_{d2}(s_{2,u} - \bar{s}_2)] \\ &\quad + \left[\alpha_c + h_{c,u} + \beta_{c1}(s_{1,u} - \bar{s}_1) + \beta_{c2} \frac{c}{s_{2,u}} \right] \\ &= A + s_{1,u}^* + (1 + \beta_{d2})s_{2,u} + \beta_{c2} \frac{c}{s_{2,u}} + h_{d,u} + h_{c,u} \end{aligned}$$

donde $\tilde{A} = \alpha_r + \alpha_d + \alpha_c - \beta_{d1}\bar{s}_1 - \beta_{c1}\bar{s}_1 - \beta_{d2}\bar{s}_2$ y $s_{1,u}^* = [1 + \beta_{d1} + \beta_{c1}] s_{1,u}$. La dinámica del factor trasladado $s_{1,u}^*$ es de la siguiente manera, bajo la medida P :

$$ds_{1,u}^* = k_1(\theta^* - s_{1,u}^*)du + \sigma_1^* \sqrt{s_{1,u}^*} d\hat{W}_{1,t}, \quad (3.26)$$

donde $\theta_1^* = \theta_1(1 + \beta_{d1} + \beta_{c1})$ y $\sigma_1^* = \sigma_1 \sqrt{1 + \beta_{d1} + \beta_{c1}}$. Bajo la medida Q , la ecuación para $s_{1,u}^*$ es la siguiente:

$$ds_{1,u}^* = (k_1\theta_1^* - (k_1 + \eta_1)s_{1,u}^*)du + \sigma_1^* \sqrt{s_{1,u}^*} d\hat{W}_{1,t}. \quad (3.27)$$

Luego, el precio de un bono zero cupón es de la forma:

$$\begin{aligned} V(t, T, 0, \delta, k) &= E_t^Q \left[\exp\left(-\int_t^T R_u du\right) \right] \\ &= \exp[-\tilde{A}(T-t)] \cdot E_t^Q \left[\exp\left(-\int_t^T s_{1,u}^* du\right) \right] \\ &\quad \cdot E_t^Q \left[\exp\left(-\int_t^T h_{d,u} du\right) \right] \\ &\quad \cdot E_t^Q \left[\exp\left(-\int_t^T h_{c,u} du\right) \right] \cdot \pi(s_{2,t}, t, T), \end{aligned}$$

donde $\pi(s_{2,t}, t, T) = E_t^Q \left[\exp\left(-\int_t^T ((1 + \beta_{d2})s_{2,u} + \beta_{c2} \frac{c}{s_{2,u}}) du\right) \right]$.

Puesto que la estructura del modelo es exponencial afín, se puede hacer explícita la fórmula de valorización (ver [14]):

$$\begin{aligned} V(t, T, 0, \delta, k) &= \exp(-\tilde{A}(T-t)) \exp\{\psi_0(t) - \psi_1(t)s_{1,u}^* - \psi_d(t)h_{d,u} \\ &\quad - \psi_c(t)h_{c,t}\} \cdot \pi(s_{2,t}, t, T) \end{aligned} \quad (3.28)$$

donde $\psi_0(t) = \psi_0^1(t) + \psi_0^c(t) + \psi_0^d(t)$,

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= \frac{2(e^{\gamma_1(T-t)} - 1)}{2\gamma_1 + (k_1 + \eta_1 + \gamma_1)(e^{\gamma_1(T-t)} - 1)} \\ \psi_0^1(t) &= \frac{2k_1\theta_1^*}{\sigma_1^*} \log \left[\frac{2\gamma_1 e^{\frac{1}{2}(k_1 + \eta_1 + \gamma_1)}}{2\gamma_1 + (k_1 + \eta_1 + \gamma_1)(e^{\gamma_1(T-t)} - 1)} \right]. \end{aligned}$$

Para $j \in \{c, d\}$ se tiene:

$$\psi_j(t) = \frac{2(e^{\gamma_j(T-t)} - 1)}{2\gamma_j + (k_j + \eta_j + \gamma_j)(e^{\gamma_j(T-t)} - 1)}$$

$$\psi_0^j(t) = \frac{2k_j\theta_j}{\sigma_j} \log \left[\frac{2\gamma_j e^{\frac{1}{2}(k_j + \eta_j + \gamma_j)}}{2\gamma_j + (k_j + \eta_j + \gamma_j)(e^{\gamma_j(T-t)} - 1)} \right],$$

donde $\gamma_1 = \sqrt{(k_1 + \eta_1)^2 + \sigma_1^{*2}}$ y $\gamma_j = \sqrt{(k_j + \eta_j)^2 + 2\sigma_j^2}$. Es difícil obtener una expresión en forma cerrada de $\pi(s_{2,t}, t, T)$, pues el factor $(1 + \beta_d 2)s_{2,u} + \beta_{c2} \frac{c}{s_{2,u}}$ escapa de la categoría de modelos afines. La alternativa es usar algún método de aproximación para $\pi(s_{2,t}, t, T)$. En [27] se desarrolla un método que permite obtener una expansión en serie de potencias de la función π . Considerando los primeros términos de esta expansión se obtiene una aproximación en forma cerrada de π , y en consecuencia, se completa la metodología de valorización para un bono zero cupón prepagable $V(t, T, 0, \delta, k)$. En el apéndice se expone brevemente el método desarrollado en [27] y su aplicación en este caso. Para obtener el precio de un bono prepagable con cupones se usa la equivalencia, detallada en la Observación 3.2.6, entre este tipo de bonos y un portfolio de bonos zero cupón. En [24], se opta por no incluir el término $\beta_{c2}c/s_{2,t}$ para descontar el principal, mas se incluye en la valorización de los cupones. El argumento es el siguiente: si se incluye el término $\beta_{c2}c/s_{2,t}$ en el factor de descuento tanto de los cupones como del principal entonces el precio del bono converge a 0 si $s_{2,t} \rightarrow 0$, pues en ese caso $c/s_{2,t} \rightarrow \infty$. Este hecho sugiere que $c/s_{2,t}$ descuenta los flujos futuros de manera muy intensa cuando $s_{2,t}$ es bajo¹³.

Observación 3.3.1. Hay básicamente dos maneras de considerar los pagos recibidos en el evento de prepago. La forma estándar consiste en el pago tanto de los cupones futuros como el valor de prepago del principal. Esto implica que se deben usar el mismo spread de prepago para descontar el principal y los cupones. El otro enfoque consiste en asumir que en el evento de prepago el receptor del bono recibe una cantidad equivalente al valor de prepago del principal y pierde los cupones. En este caso se debe usar un spread de prepago que descuenta fuertemente los cupones, pues estos se pierden. Este enfoque alternativo es usado en este trabajo.

Para calibrar el modelo de bonos prepagables podemos usar datos de precios o retornos de los bonos. Para un bono zero cupón prepagable, la relación entre el precio y el retorno viene dada por la fórmula (2.3). Usando la expresión obtenida para el precio de un bono zero cupón prepagable (correspondiente a (3.28)), se obtiene:

$$\begin{aligned} R(t, T) &= -\frac{1}{T-t} \log(V(t, T)) \\ &= \tilde{A} - \frac{1}{T-t} (\psi_0(t) - \psi_1(t)s'_{1,u} - \psi_d(t)h_{d,u} - \psi_c(t)h_{c,t}) \\ &\quad - \frac{1}{T-t} \log(\pi(s_{2,t}, t, T)) \end{aligned} \tag{3.29}$$

donde hemos usado $R(t, T)$ para referirnos al retorno de un bono zero cupón prepagable.

¹³La justificación es de orden eminentemente empírico, como se comenta en [24].

Consideremos un bono que paga cupones en las fechas $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\}$, que tiene un principal de 1 y una tasa por cupón de $c\%$. La relación entre el precio $S_c(t, T)$ y el retorno $R_c(t, T)$ del bono es la siguiente:

$$S_c(t, T) = \sum_{t \leq \tau_i \leq T} ce^{-R_c(t, T)(\tau_i - t)} + e^{-R_c(t, T)(T - t)}. \quad (3.30)$$

Luego, para calcular la tasa de retorno de un bono con cupones, conociendo el precio de mercado, se debe resolver (numéricamente en la práctica¹⁴) la ecuación anterior. A diferencia del caso sin cupones, en este caso la relación entre el retorno del bono y la tasa de interés (en este caso la tasa corta ajustada) es no lineal.

En [24] se divide el proceso de estimación en 3 pasos. Primero se estima la estructura temporal de tasas de interés, usando exclusivamente retornos de bonos de gobierno. Esto incluye estimar los parámetros de los dos factores¹⁵ que determinan la estructura temporal y los factores propiamente tales. Este paso se debe realizar sólo una vez. Luego, se estima el spread por default, usando datos de bonos corporativos sin opción de prepago. Para esto se toman como dadas las estimaciones realizadas en el primer paso. Por último, se estima el spread por prepago usando datos de bonos prepagables. Para esto se asumen como correctas las variables estimadas en los pasos anteriores. Tanto el segundo como el tercer paso deben realizarse una vez por cada bono. Aunque, como se señala en [24], es posible utilizar las estimaciones de factores idiosincráticos estimados para diferentes bonos de la misma empresa. Esto permite realizar la estimación una vez por cada compañía.

En el mercado de bonos de Chile, prácticamente no existen compañías que emitan bonos prepagables y además bonos no prepagables. Por esto, un sistema de estimación como el propuesto por Jarrow *et al.* [24], es imposible de implementar. Sin embargo, se puede realizar una modificación en el modelo que permita una implementación usando dos tipos de datos: bonos de gobierno y bonos prepagables. La modificación consiste en reducir el spread por default $(1 - \delta)\lambda_{d,t}$ a una constante α_d . Esto permite reducir la cantidad de parámetros a estimar, haciendo posible una estimación en dos pasos. Por otra parte, se puede argumentar que en la práctica el riesgo de default de las compañías que componen el mercado chileno (al menos las estudiadas) es muy cercano a 0. Por lo tanto, el estudio del riesgo de default no es tan relevante como en Estados Unidos. En lo que sigue, adoptaremos esta suposición. Además, a diferencia del modelo de Jarrow *et al.* [24] hemos decidido utilizar el precio (limpio)¹⁶ de bonos prepagables y no los retornos. Esto involucra menos cálculo, ya que el precio se debe calcular de todas formas.

¹⁴Usando Newton-Rhapson, por ejemplo.

¹⁵Parámetros que aparecen en la dinámica que los define.

¹⁶Fue definido en 2.1.3

Capítulo 4

Estimación

Este capítulo está dedicado a la calibración del modelo descrito en el capítulo 3. Lo dividiremos en dos secciones principales: Metodología y Aplicación. En la primera se expone la estrategia de estimación, es decir, como será abordado el problema de estimar los parámetros del modelo. Daremos una breve descripción de los métodos utilizados para este fin, poniendo énfasis en el algoritmo de filtro de Kalman extendido, cuyo uso en este tipo de problemas es predominante en la literatura. En la sección 4.2 se muestra como se puede llevar a la práctica la metodología de estimación. En primer lugar se realiza una evaluación del modelo, utilizando datos obtenidos por medio de simulaciones. Posteriormente, se realiza una aplicación del modelo con datos reales del mercado chileno.

4.1. Metodología

En esta sección seguimos los trabajos [9] y [5], que utilizan un procedimiento similar. La estrategia que usaremos para abordar el problema de estimación consiste en dividir el problema en dos pasos: primero se estima la estructura temporal usando datos de bonos de gobierno y luego se estima el spread de prepago usando datos de bonos corporativos. En ambos casos usamos una variante de filtro de Kalman conocida como filtro de Kalman extendido (EKF, por sus siglas en inglés). Este es uno de los métodos más usados para calibrar modelos de estructura de plazos. Para otros métodos de estimación y su comparación con EKF, bajo este contexto, se puede consultar [11]. Un desarrollo detallado de filtro de Kalman extendido puede encontrarse en [20].

El objetivo fundamental de EKF es estimar un sistema dinámico que evoluciona, que modelaremos mediante un proceso estocástico que satisface una EDE. Denotaremos de manera genérica a este proceso como x_t , y nos referiremos a él como la variable de estado. Supondremos que x_t toma valores en \mathbb{R}^N . Se asume que, a pesar de contar con la especificación de la dinámica de x_t , no es posible observar este proceso en ningún instante. Es decir, no se puede de manera empírica conocer su valor. Por otra parte, se asume la existencia de un proceso estocástico y_t que toma valores en \mathbb{R}^M . Este proceso sí se puede medir y está determinado, al menos en la teoría, por la variable de estado. Nos referiremos a él como variable observable. Ambas variables están, en teoría, relacionadas por la ecuación $y_t = f(x_t)$, $t \geq 0$, donde supondremos que f es una función continua de \mathbb{R}^N en \mathbb{R}^M . La ecuación anterior se conoce como ecuación de medición. Frecuentemente se agrega un término que representa los posibles errores cometidos en el proceso de medición. Estos

errores se modelan como un conjunto de variables normales multivariadas independientes (de dimensión N) ϵ_t que se añaden a la ecuación de medición, resultando:

$$y_t = f(x_t) + \epsilon_t, \quad t \geq 0. \quad (4.1)$$

La dinámica del proceso x_t está determinada, como se mencionó anteriormente, por una EDE de la forma:

$$dx_t = \mu(x_t, t)dt + \sigma(x_t, t)dW_t \quad (4.2)$$

donde W_t es un movimiento browniano estándar. En este trabajo, sólo usaremos procesos tipo CIR, por lo que μ y σ se puede pensar como los coeficientes de la EDE que define este tipo de procesos. La ecuación (4.2) es conocida como la ecuación de transición. En resumen, la descripción del modelo puede realizarse especificando la ecuación de medición y la ecuación de transición.

4.1.1. Filtro de Kalman

En esta sección se dará un breve descripción del algoritmo de filtro de Kalman en el caso lineal. El método de filtro de Kalman se utiliza para estimar modelos del tipo

$$\begin{aligned} y_t &= A + Bx_t + \epsilon_t \\ x_{t+1} &= H_0 + H_1x_t + v_{t+1} \end{aligned}$$

donde ϵ_t y v_t son normales que cumplen:

$$E(\epsilon_t) = 0, E(v_{t+1}) = 0, E(\epsilon'_t \epsilon_t) = R, E(v'_{t+1} v_{t+1}) = Q$$

En cada instante t el algoritmo encuentra una estimación de x_t , dada la información contenida en \mathcal{Y}_t ¹, que denotaremos $x_{t|t}$. El conjunto de estas estimaciones $(x_{t|t})_{t \geq 0}$ corresponde a la salida que entrega el algoritmo. Es fácil ver que la mejor estimación, en lo que a error cuadrático medio se refiere, es $\mathbb{E}(x_t | \mathcal{Y}_t)$.

En el instante $t + 1$ (por ejemplo), se cuenta con la predicción (que viene del paso anterior) de x_{t+1} , que llamaremos $x_{t+1|t}$ ². Además contamos con la matriz de covarianza asociada $P_{t+1|t} = \mathbb{E}[(x_t - x_{t|t})(x_t - x_{t|t}) | \mathcal{Y}_t]$. En base a esto calculamos la estimación de x_{t+1} , que llamaremos $x_{t+1|t+1}$. Posteriormente se calcula la predicción $x_{t+2|t+1}$. Luego se avanza al instante $t + 2$, repitiendo el proceso. En resumen, el filtro de Kalman ejecuta dos tipos de acciones: una de actualización(o estimación) y otra de predicción.

En el paso de predicción filtro de Kalman calcula una estimación parcial de x_{t+1} , que llamaremos $x_{t+1|t}$, basándose en la información disponible hasta el tiempo t . Esto corresponde a calcular

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[x_{t+1} | \mathcal{Y}_t] &= \mathbb{E}[H_0 + H_1x_t | \mathcal{Y}_t] \\ &= H_0 + H_1x_{t|t}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

¹Esta definida como $\mathcal{Y}_t = \sigma(y_s : s \leq t)$.

²El subíndice hace referencia a que es la estimación de x_{t+1} con la información disponible hasta el instante t .

Además se calcula la matriz de covarianza asociada

$$\begin{aligned}
P_{t+1|t} &= \mathbb{E}[(x_{t+1} - x_{t+1|t})(x_{t+1} - x_{t+1|t})' | \mathcal{Y}_t] \\
&= \mathbb{E}[(H_1(x_t - x_{t|t}) + v_t)(H_1(x_t - x_{t|t}) + v_t)' | \mathcal{Y}_t] \\
&= H_1 P_{t|t} H_1' + Q.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

De modo similar, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[y_{t+1} | \mathcal{Y}_t] &= \mathbb{E}[A + Bx_{t+1} + \epsilon_t | \mathcal{Y}_t] \\
&= A + Bx_{t+1|t} \\
&\equiv y_{t+1|t}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Calculamos la covarianza asociada:

$$\text{Var}[y_{t+1} | \mathcal{Y}_t] = BP_{t+1|t}B' + R$$

Otro cálculo simple nos muestra que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(y_{t+1} - y_{t+1|t})(x_{t+1} - x_{t+1|t})' | \mathcal{Y}_t] &= \mathbb{E}[(Bx_{t+1} + v_t - Bx_{t+1|t})(x_{t+1} - x_{t+1|t})' | \mathcal{Y}_t] \\
&= BP_{t+1|t}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Se puede probar que la distribución de (x_{t+1}, y_{t+1}) , condicional a \mathcal{Y}_t , es una normal con media $\begin{pmatrix} x_{t+1|t} \\ Bx_{t+1|t} \end{pmatrix}$ y covarianza $\begin{pmatrix} P_{t+1|t} & P_{t+1|t}B' \\ BP_{t+1|t} & BP_{t+1|t}B' + R \end{pmatrix}$.

Finalmente, se obtienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
x_{t+1|t+1} &= x_{t+1|t} + P_{t+1|t}B'(BP_{t+1|t}B' + R)^{-1}(y_{t+1} - A + Bx_{t+1|t}), \\
P_{t+1|t+1} &= P_{t+1|t} - P_{t+1|t}B'(BP_{t+1|t}B' + R)^{-1}BP_{t+1|t}.
\end{aligned}$$

Un desarrollo riguroso del algoritmo del filtro de Kalman, en un contexto más amplio, puede encontrarse en [20].

Cabe mencionar que en el caso lineal y gaussiano, la esperanza condicional de una variable respecto a la filtración que representa el arribo de la información en el instante t coincide con la proyección de esa variable en el espacio lineal generado por las observaciones disponibles hasta el tiempo t . En otras palabras, la proyección no lineal coincide con la proyección lineal. En la literatura existen muchas versiones del filtro de Kalman, cada una con propiedades específicas que las hace atractivas para cierta clase de problemas. Debemos anticipar que la versión del filtro de Kalman que nos interesa para la calibración del modelo de bonos prepagables no goza de las buenas propiedades que tiene el filtro de Kalman estándar u otras versiones. En particular, podría no converger. A pesar de eso, es el procedimiento más usado para implementar modelos de estructura de plazos, como se menciona en [24].

A continuación describiremos el algoritmo del filtro de Kalman extendido, que es básicamente usar la recursión de filtro de Kalman, cuidándose de linealizar la ecuación de medición³.

³En caso que la ecuación de transición fuera no lineal, también habría que linealizarla. En nuestro caso esto no ocurre, pues en este trabajo sólo consideramos procesos de tipo CIR.

4.1.2. Filtro de Kalman Extendido

Cuando la ecuación de medición es no lineal, se calcula en cada paso una aproximación lineal de primer orden en torno a la predicción anterior. Formalmente, el problema que deseamos considerar, escrito en su forma canónica, es:

$$y_t = \Phi(x_t) + \epsilon_t \quad (4.7)$$

$$x_{t+1} = F_0(x_t, \rho) + F_1(x_t, \rho)x_t + v_{t+1} \quad (4.8)$$

donde ϵ_t y v_t son variables aleatorias normales que cumplen:

$$E(\epsilon_t) = 0, E(v_{t+1}) = 0, E(\epsilon_t' \epsilon_t) = R, E(v_{t+1}' v_{t+1}) = Q(x_t, \rho)$$

Para aplicar la recursión del filtro de Kalman estándar, debemos linealizar la función de observación en cada paso. Salvo esta diferencia, la recurrencia es idéntica a la descrita para el caso lineal gaussiano. Empieza con el vector de parámetros ρ , que incluye todos los parámetros del modelo (4.7)-(4.8). Con el vector de parámetros se calcula la esperanza (no condicional) de x_0 , que llamaremos $x_{0|0}$ y su covarianza, que denotamos como $P_{0|0}$. A continuación se enumerarán los pasos que ejecuta el algoritmo en cada iteración:

1. Usar $x_{t|t}$ y ρ para evaluar las matrices $F_0(x_t, \rho)$, $F_1(x_t, \rho)$ y $Q(x_t, \rho)$. Denotaremos esos valores como F_{0t}, F_{1t} y Q_t .
2. Calcular la predicción un paso adelante de x_{t+1} y su varianza: $x_{t+1|t} = F_{0t} + F_{1t}x_{t|t}$ y $P_{t+1|t} = F_{1t}P_{t|t}F_{1t}' + Q_t$.
3. Linealizar la dinámica de observación $y_t = \Phi(x_t) + \epsilon_t$, alrededor de $x_{t+1|t}$. En particular, se calcula: $H_{t+1} = \nabla \Phi|_{x_{t+1|t}}$.
4. Calcular la predicción un paso adelante de y_t y su varianza: $y_{t+1|t}^p = \Phi(x_{t+1|t})$ y $V_{t+1|t} = H_{t+1}'P_{t+1|t}H_{t+1} + R$.
5. Calcular el error de predicción de y_{t+1} , $e_{t+1} = y_{t+1} - y_{t+1|t}$.
6. Actualizar la predicción de x_{t+1} : $x_{t+1|t+1} = x_{t+1|t} + P_{t+1|t}H_{t+1}V_{t+1|t}^{-1}e_{t+1}$ y $P_{t+1|t+1} = P_{t+1|t} - P_{t+1|t}H_{t+1}V_{t+1|t}^{-1}H_{t+1}'P_{t+1|t}$.

La estimación de parámetros se lleva a cabo mediante la maximización de la función de cuasi-máxima verosimilitud. Formalmente, el vector de parámetros estimados ρ_T satisface:

$$\rho_T = \arg \max_{\rho} \sum_{t=1}^T f(e_t, V_{t|t-1}) \quad (4.9)$$

donde la verosimilitud (aproximada), en el periodo t es:

$$f(e_t, V_{t|t-1}) = -\frac{1}{2}[M \log(2\pi) + \log(|V_{t|t-1}|) + e_t' V_{t|t-1}^{-1} e_t]. \quad (4.10)$$

Recordamos que M corresponde a la dimensión de la variable observable y .

Observación 4.1.1. El caso que nos interesa estudiar (léase, un modelo de la forma (4.7)-(4.8)) no sólo es no lineal, sino que además es no gaussiano. Esto se puede ver en la ecuación de transición, como veremos a continuación. Está ecuación corresponde a la dinámica discreta de un modelo tipo CIR. La discretización se obtiene utilizando las características (media condicional y varianza condicional) de la distribución χ^2 no central. Para nuestros propósitos basta señalar que para un proceso CIR multivariado donde cada factor es independiente del resto se tiene que:

$$\begin{aligned} (F_0(x_t))_j &= \theta_j(1 - e^{-k_j\Delta t}), \\ (F_1(x_t))_{ij} &= \delta_{ij}e^{-k_j\delta t}, \\ (Q(x_t))_{jj} &= \sigma_j^2\left(\frac{1 - e^{-k_j\Delta t}}{k_j}\right)\left(\frac{1}{2}\theta_j(1 - e^{-k_j\Delta t}) + e^{-k_j\Delta t}x_{j,t}\right), \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde $\{\theta_j, k_j, \sigma_j\}$ son los parámetros del factor j y Δt respresenta el paso de la discretización. En este trabajo usaremos frecuentemente $\Delta t = 1/12$, que corresponde a mediciones bajo un regimen mensual.

Observación 4.1.2. Es un hecho conocido que en el procedimiento de filtro de Kalman es necesario que la covarianza de v_{t+1} , es decir $Q(x_t, \rho)$, sea definida positiva. Como en la versión que nos interesa de filtro de Kalman, esta matriz depende del estado, es necesario introducir alguna modificación que permita mantenerla definida positiva. Como se señala en [30] esto restringe el soporte de las variables de estado. Una forma de asegurar que la matriz Q sea definida positiva es imponer que las variables de estado no puedan tomar valores negativos o que al menos estos no se usen para calcular Q . Entre las alternativas (heurísticas) se cuentan⁴:

- Imponer las condiciones de positividad, modificando el paso de actualización del filtro de Kalman. Conceptualmente, esta es quizás la mejor solución. Sin embargo, implica que el paso de actualización se vuelva mucho más complejo y el tiempo de cálculo aumente considerablemente.
- Simplemente reemplazar los valores negativos del estado por cero. Esta es la solución que se adopta en [9], una de las referencias obligadas en el tema.
- Se puede simplemente ignorar las condiciones de positividad y utilizar el valor absoluto del estado para calcular la matriz Q . Alternativamente, Lund([30]) propone ignorar las condiciones de positividad y utilizar la varianza no condicional de v_t en vez de Q .

En este trabajo usamos la tercera alternativa, utilizando el valor absoluto del estado para calcular la matriz Q . Cabe señalar que la segunda alternativa, es decir, reemplazar por 0 los valores negativos, entrega resultados similares.

Observación 4.1.3. A pesar del uso extendido del filtro de Kalman para la calibración de modelos financieros como los tratados en este trabajo, existen ciertas deficiencias que cabe mencionar. Debe entenderse que en este contexto, el filtro de Kalman no es un filtro óptimo como en el caso lineal gaussiano, es decir, no produce una estimación que minimice el error $x_k - x_{k|k}$ en media cuadrática (en otras palabras no se tiene $\mathbb{E}(x_{k+1}|\mathcal{Y}_k) = x_{k+1|k}^p$).

⁴Como se señala en [30].

Más bien, el algoritmo se basa en una serie de aproximaciones (y proyecciones) lineales. Las estimaciones $P_{k|k}$ y $P_{k+1|k}$ de las matrices de covarianza, calculadas en los pasos de la recursión, no son confiables y es preferible entender que su cálculo es un paso necesario dentro del algoritmo. Es importante señalar que el filtro de Kalman extendido, al contrario de su símil lineal, puede no converger. Su convergencia depende en gran medida de que tan buenas sean las aproximaciones lineales sucesivas realizadas en cada paso de la recursión.

Como se mencionó anteriormente, la metodología de estimación consta de dos pasos fundamentales. El primer paso consiste en estimar la estructura de plazos de las tasas de interés, valiéndose de los datos de retornos históricos de bonos de gobierno. Para esto se aplica filtro de Kalman, obteniéndose una estimación de los parámetros que corresponden a esta parte del modelo, es decir, la constante α_r y el conjunto de parámetros $\{k_1, k_2, \theta_1, \theta_2, \sigma_1, \sigma_2, \eta_1, \eta_2\}$ que aparecen en la especificación de la dinámica de los factores $s_{1,t}$ y $s_{2,t}$. Además de los parámetros, el filtro de Kalman nos entrega una estimación para las variables, que llamamos variables filtradas y que notaremos $\hat{s}_{1,t}$ y $\hat{s}_{2,t}$. Para cada intervalo de tiempo (en el cual se realizará el estudio) este procedimiento debe realizarse sólo una vez. En el segundo paso se estiman los parámetros restantes del modelo, es decir, las constantes α_c, β_{c1} y β_{c2} , el conjunto de parámetros $\{k_c, \theta_c, \sigma_c, \lambda_c\}$ que determinan la dinámica del proceso $h_{c,t}$ y el spread de prepago. Este procedimiento se debe realizar para cada bono prepagable que se desee estudiar. Se utilizan, para este propósito, los precios de bonos prepagables emitidos por empresas. Cabe mencionar que durante este paso se trabaja con las variables estimadas en el primer paso (variables filtradas) como si fueran los valores reales. A continuación presentaremos los problemas abordados en cada paso de la estimación expuesto en la forma canónica de filtraje, es decir, en la forma (4.7)-(4.8).

Sean $Y_t = (y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{Nt})'$ los retornos de N bonos del tesoro en el tiempo t , con duraciones $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\}$. Es decir, y_{it} es una abreviación de $R(t, t + \tau_i)$ con $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. En la jerga de problemas de filtraje el vector Y_t contiene las variables observables. Las variables de estado están contenidas en el vector S_t definido por: $S_t = \{s_{1,t}, s_{2,t}\}$. Con esto, las ecuaciones de medición-transición quedan:

$$Y_t = \Phi_r(S_t) + \epsilon_t, \quad E_{t-1}(\epsilon_t \epsilon_t') = \sigma,$$

$$S_t = \mu + \Gamma S_{t-1} + v_t, \quad E_{t-1}(v_t v_t') = \Omega(S_{t-1}),$$

donde $\Phi_r(\cdot)$ es la función que mapea las variables de estado en retornos de bonos de tesoro según la relación $\Phi_r(S_t) = H_0 + H_1 S_t$, con

$$(H_0)_i = -\frac{1}{\tau_i} \log(A(t, t + \tau_i)) \quad (4.12)$$

y

$$(H_1)_{ij} = \frac{1}{\tau_i} B^j(t, t + \tau_i) \quad (4.13)$$

Las expresiones para $A(t, T)$ y $B^j(t, T)$, con $j = \{1, 2\}$, aparecen en (2.30)-(2.31). Por otra parte, Σ y $\Omega(S_{t-1})$ son matrices diagonales que corresponden a las varianzas de los errores de medición de los retornos y las variables de estado, respectivamente. En la ecuación de transición, μ y Γ están definidos como:

$$\mu = \begin{pmatrix} \theta_1(1 - e^{-k_1/12}) \\ \theta_2(1 - e^{-k_2/12}) \end{pmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} e^{-k_1/12} & 0 \\ 0 & e^{-k_2/12} \end{pmatrix}$$

y

$$\Omega_{i,i} = k_i^{-1} \sigma_i^2 [s_{i,t-1}(e^{-k_i/12} - e^{-2k_i/12}) + \frac{\theta}{2}(1 - e^{-k_i/12})^2]$$

para $i = 1, 2$.

Basándonos en la estimación realizada para el proceso libre de riesgo, usaremos filtro de Kalman para estimar el spread de prepago de cada firma específica. Para esto utilizamos las variables de estado previamente estimadas $\{\hat{s}_{1,t}, \hat{s}_{2,t}\}$ como si fueran las variables reales. Las observaciones corresponden en este caso al precio de bonos corporativos con opción de prepago, en diferentes fechas.

Sea $Y_{c,t}$ el precio limpio correspondiente a un bono corporativo prepagable. Las ecuaciones de medición y transición quedan determinadas de la siguiente forma:

$$Y_{c,t} = \Phi_c(h_{c,t}, \hat{s}_{1,t}, \hat{s}_{2,t}) + \epsilon_{c,t}, \quad E_{t-1}(\epsilon_{c,t} \epsilon_{c,t}') = \Sigma_c$$

$$h_{c,t} = \mu_c + \Gamma_c h_{c,t-1} + \psi_t, \quad E_{t-1}(\psi_t \psi_t') = \Omega_c(h_{c,t-1}).$$

La función $\Phi_c(h_{c,t}, \hat{s}_{1,t}, \hat{s}_{2,t})$ mapea el proceso la intensidad $h_{c,t}$ y las dos variables de estado $\hat{s}_{1,t}$ y $\hat{s}_{2,t}$ en el precio limpio de bonos prepagables. Es decir, es el análogo discreto de la fórmula (2.2), donde se reemplaza $S_c(t)$ por el precio de un bono con cupones obtenido en el modelo de Jarrow *et al.*, es decir, se usará como base el precio de un bono cero cupón con precio dado por (2.6). Σ_c es la varianza del error de medición para bonos prepagables. Las componentes μ_c y Γ_c están dadas por:

$$\mu_c = \theta_c(1 - e^{-k_c/12}),$$

$$\Gamma_c = e^{-k_c/12}.$$

La varianza Ω_c asociada al spread de prepago está dada por:

$$\Omega_c(h_{c,t-1}) = k_c^{-1} \sigma_j^2 \left[h_{c,t-1}(e^{-k_c/12} - e^{-k_c/6}) + \frac{\theta}{2}(1 - e^{-k_c/12})^2 \right]$$

Es conocido de la teoría de filtro de Kalman extendido que, en general, este no provee de estimadores con buenas propiedades para los parámetros. Sin embargo, al considerar los modelos exponenciales afines se obtienen buenos resultados, sin desviaciones importantes (respecto de los valores reales), de acuerdo a lo estudiado por Lund [30], Duan y Simonato [9], Duffee y Stanton [11] y recientemente Trolle y Schwarz [36].

Una vez realizada la estimación de los parámetros del modelo, podríamos usarlos para realizar la valorización de la opción de prepago del bono más allá de la fecha en que se observan los precios en los mercados reales. Para esto proponemos realizar simulaciones con los parámetros ya estimados (para un número suficientemente grande de simulaciones) y luego calcular el promedio de estar. Además de permitirnos calcular un “precio futuro”, se puede utilizar este procedimiento para evaluar la probabilidad de prepago, considerando el contexto en que la condición de prepago viene dada por una zona de prepago, es decir, que la compañía podrá prepagar el bono si su precio cae en cierta zona definida generalmente respecto al precio de un bono de referencia (usualmente un bono del tesoro). Para lo

anterior se realizar el mismo procedimiento, es decir, se realizar simulación y se cuentan los casos en que hay prepagos.

Antes de realizar un proceso como el que hemos propuesto es conveniente definir cuántas simulaciones son necesarias para que el error se cometa se mantenga en límites razonables. Para esto es necesario un estudio más cuidadoso y detallado del problema que dejamos para un trabajo futuro.

4.2. Aplicación

Usando el lenguaje de cálculo Matlab se implementó la versión del filtro de Kalman extendido presentado en la sección anterior. Basándose en esta herramienta se calibró el modelo, usando la metodología de dos pasos ya descrita. En líneas generales, nos interesa el desempeño del filtro de Kalman en dos aspectos: el ajuste respecto a los datos de entrada⁵ y el error en la estimación de parámetros. Mientras el primero cobra importancia respecto a la confiabilidad de la calibración para datos ya existentes, el segundo nos da una referencia del posible desempeño del modelo de manera “predictiva” (en el sentido de la propuesta realizada en este trabajo, en la sección 4.1, respecto a la valorización de la opción de prepagos).

Esta sección se divide en dos partes. Primero se aplica el modelo a datos simulados, lo que permite comprender mejor los alcances del método de estimación. Finalmente, se utilizan los datos del mercado chileno, aportados por la empresa LVAIndices, para calibrar el modelo.

4.2.1. Simulaciones

Antes de calibrar el modelo con los datos de bonos del mercado chileno, realizamos el procedimiento de estimación a dos pasos, utilizando como entrada datos simulados de retornos de bonos del tesoro y precios de bonos prepagables. Específicamente simulamos los procesos de tipo CIR, que representan los factores involucrados, y usando las fórmulas de valorización (casos prepagable y del tesoro) obtenemos los retornos y precios simulados. Un análisis similar puede encontrarse en [9].

Utilizamos un esquema de primer orden para simular los procesos tipo CIR. Es decir, para obtener los valores del proceso

$$dx_t = (k\theta - x_t(k + \eta))dt + \sigma\sqrt{x_t}dW_t$$

definido en $[0, T]$, utilizaremos la siguiente recursión:

$$x_{j+1} = x_j + (k\theta - x_j(k + \eta))\Delta t + \sigma\sqrt{x_j}\xi_j\sqrt{\Delta t}, \quad (4.14)$$

donde j es de la forma $n * \Delta t$, con Δt el paso de la discretización y $n \in \{0, 1, \dots, n^* = T\}$.

Para empezar, se simularon trayectorias de retornos mensuales de 21 bonos de gobierno utilizando parámetros que indican en la Tabla 4.1. Estos parámetros son los obtenidos, en la estimación realizada por Jarrow *et al.* [24], para el caso de bonos del tesoro en

⁵Con esto referimos al error que se comete al usar las variables filtradas en vez de los valores reales de las variables de estado.

Estados Unidos. Los tiempos de duración de los 21 bonos corresponden (en años) a: $1/2, 1, 2, 3, \dots, 20$.

i	k_i	θ_i	η_i	σ_i
1	0.61134	0.81875	-0.0045	0.01494
2	0.03646	0.07429	-0.0295	0.02011

Tabla 4.1: Parámetros usados en la simulación.

Realizamos 200 simulaciones para cada bono. En cada una estimamos los parámetros usando filtro de Kalman y maximizando la función de cuasi-máxima verosimilitud. En la Tabla 4.2 se muestra un resumen de los resultados obtenidos. A pesar de que en promedio los resultados son relativamente satisfactorios, caso a caso la evidencia es diversa. Tanto en términos de error respecto a los parámetros originales, como en términos del error cometido factor por factor. Esto no debe sorprendernos, pues no existe información a priori (contenida en las observaciones) acerca del rango en que se mueve cada factor. En ninguna de las referencias usuales en la estimación de modelos tipo CIR a dos factores (léase, [5], [9], [18]) se menciona de que forma se condicionan los parámetros al realizar la optimización de la función de verosimilitud. Esto es comprensible, pues en la mayoría de estos trabajos no se realizan pruebas vía simulaciones, lo que implica que no se conocen los factores reales que generan la tasa corta. El conocer los factores por separado⁶ no resulta primordial en el caso de la estimación de la estructura temporal de tasas de interés, lo más importante es el resultado que se obtiene de combinar esos factores según los coeficientes que correspondan. Sin embargo, en los trabajos relacionados (pusimos como ejemplos [5], [9] y [18]) se da la interpretación de los factores como “nivel” y “pendiente” que es generalmente aceptada. Por otra parte, en el modelo de Jarrow *et al.* [24], se utiliza no sólo la interpretación de los factores, sino que además los valores particulares que tienen de hecho. Luego es de vital importancia mantener acotado el rango en que se mueve cada factor, pues de su valor que depende la valorización del spread de prepagos⁷. Como se aprecia en la literatura (como la ya mencionada), los valores de los parámetros $k_1, k_2, \theta_1, \theta_2, \sigma_1, \sigma_2$ se pueden situar en el intervalo $[0, 1]$ ⁸. Por otra parte, η_1, η_2 toman valores negativos, lo que es consecuente con la interpretación del precio de mercado del riesgo. La constante α_r , generalmente toma valores negativos, como se explica en [10]. Sin embargo, el método no permite estimar este valor con un grado razonable de confiabilidad, luego se opta por fijarlo igual a una cota inferior⁹. Después de realizar diferentes pruebas, notamos que al fijar el valor de $\alpha_r = -0,85$ se obtenían los mejores resultados. En resumen, en esta primera parte hemos impuesto las siguientes condiciones sobre los parámetros de la estructura temporal: $k_1, k_2, \theta_1, \theta_2, \sigma_1, \sigma_2 \in [0, 1]$, $\eta_1, \eta_2 \in [-1, 0]$ y $\alpha_r = -0,85$. La Figura 4.2.1 muestra algunos ejemplos del ajuste obtenido usando los parámetros estimados y filtro de Kalman.

⁶No es claro que se puedan identificar con precisión cada factor por separado.

⁷Al estar involucrada una función no lineal es importante identificar con cierta precisión cada factor.

⁸Notar que al estar trabajando con tasas esto es perfectamente razonable.

⁹El valor que se elige en [10] es $\alpha_r = -1$.

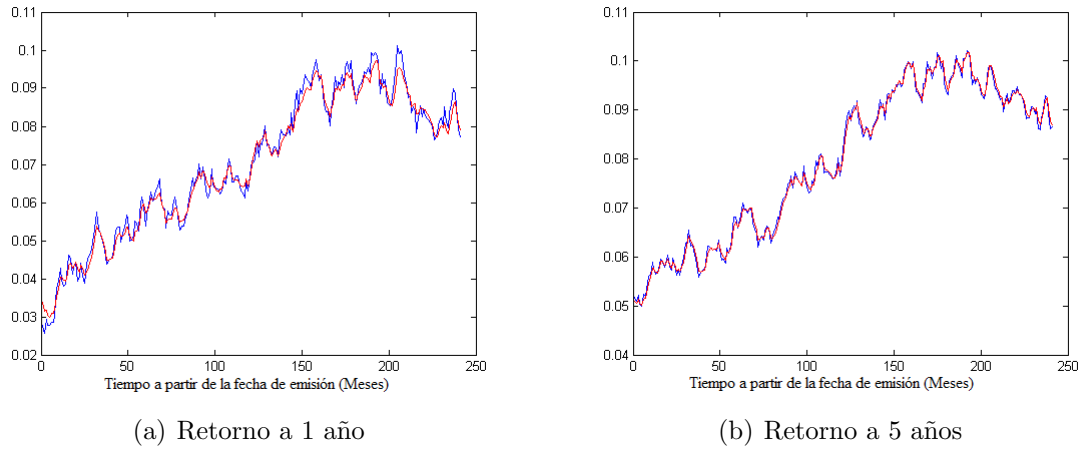


Figura 4.1: En azul se muestran trayectorias de retornos de bonos con 1 y 5 años de duración (figuras 4.1(a) y 4.1(b) respectivamente), en rojo la estimación obtenida en cada caso.

	k_1	θ_1	η_1	σ_1	k_2	θ_2	η_2	σ_2
Valor real	0.611	0.820	-0.0045	0.0149	0.0364	0.07429	-0.0295	0.0201
Promedio	0.5600	0.8300	-0.0051	0.0099	0.0402	0.0798	-0.0356	0.0192
RMSE	0.0590	0.0348	0.0005	0.0036	0.0376	0.316	0.0762	0.0065

Tabla 4.2: Resumen comparativo entre el promedio de las estimaciones y los valores reales. RMSE=raíz del error cuadrático medio.

A partir del nivel promedio que tienen los factores en el trabajo de Jarrow *et al.* [24], y tomando en cuenta la interpretación que tiene cada factor (uno como nivel y el otro como pendiente) acotamos el rango en que puede estar cada parámetro respecto al utilizado en la estimación inicial. La evidencia (en los trabajos empíricos existentes) muestra que θ_2 , que frecuentemente se asocia a los bonos de larga duración, se mueve en el rango $0 \leq \theta_2 \leq 0,1$. Dentro de este rango, lo más frecuente es que sea menor que 0,05, sin embargo, optamos por darle cierta holgura, considerando que $0 \leq \theta_2 \leq 0,1$. Las pruebas muestran que utilizando el rango elegido existe mayor eficacia en la estimación de parámetros. Al mismo tiempo, el error que se comete en la estimación de los factores es menor al que se cometió en la estimación inicial. Cabe señalar que no existe un método sistemático para elegir el rango de los parámetros, por lo que debe recurrirse a heurísticas o sencillamente realizar pruebas de ensayo y error¹⁰. La experiencia y el conocimiento de cada mercado pueden influir en un buen condicionamiento de los parámetros. A pesar de esto, se constata que el rango (para los parámetros) elegido en este trabajo permite un cierto grado de flexibilidad al no ser demasiado restrictivo, por lo que no debería haber problemas con su aplicación, sin perjuicio que no sea el rango “óptimo”. Por otra parte, impondremos que $0 \leq k_2 \leq 0,1$, esto pues la evidencia sugiere¹¹ que este factor debe tener menor velocidad de reversión a la media y los valores obtenidos en los trabajos citados generalmente se mueven en el rango que hemos impuesto para k_2 . Al estar relacionado con los bonos de larga duración debe

¹⁰En la práctica esto es un proceso engorroso, tratándose de un problema con un gran número de parámetros por estimar.

¹¹Basándonos en la información contenida en los trabajos [5], [9] y [18]

ser más estable. La Figura 4.2 muestra algunos ejemplos de la estimación suponiendo que $0 \leq k_2 \leq 0,1$ y $0 \leq \theta_2 \leq 0,1$. No es sencillo elegir a priori un intervalo para los parámetros σ_2, η_2 , luego optamos por mantener las restricción iniciales sobre estos.

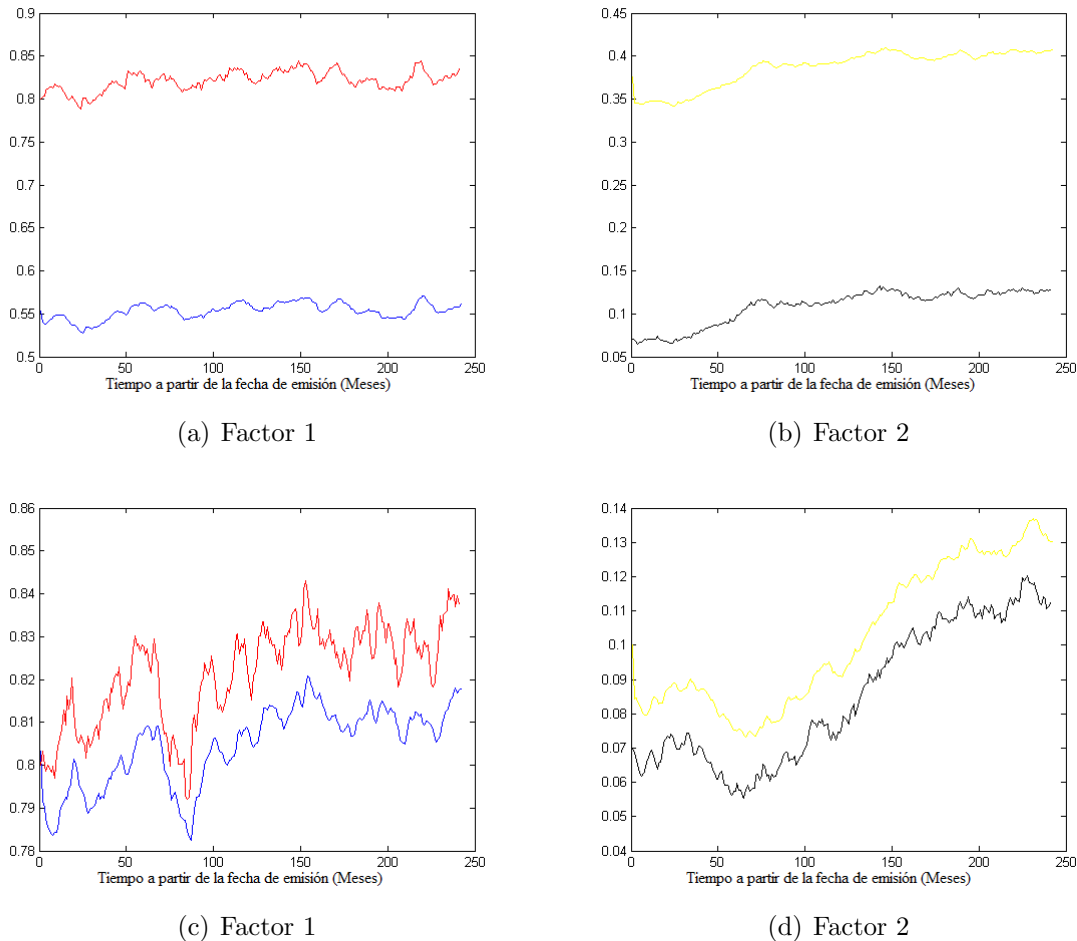


Figura 4.2: En 4.2(a)-4.2(b) se muestra la estimación de los factores con las restricciones generales de los parámetros. En 4.2(c)-4.2(d) aparece la estimación de los factores considerando que $0 \leq k_2 \leq 0,1$ y $0 \leq \theta_2 \leq 0,1$

Usando el esquema (4.14) se simularon trayectorias de retornos de bonos prepagables cero cupón con tasa $c\%$. Usamos los parámetros que aparecen en la Tabla 4.3, bajo el rótulo de parámetros reales. Estos son similares a los obtenidos en [24] en su estimación de los parámetros del mercado de Estados Unidos¹². Para bonos con cupones se simuló trayectorias de sus precios y no de los retornos, pues esto simplifica la estimación al no tener que calcular el retorno en cada paso. Todos los bonos simulados corresponden a bonos con cupones constantes (con tasa c) pagados semianualmente. En la Tabla 4.3 se muestra un resumen con los resultados obtenidos para estas simulaciones. El tiempo de computación de las estimaciones es relativamente alto, del orden de 1 hora para 20 simulaciones en un computador con core 2 duo (usando Matlab). Se constató que el tiempo

¹²No usamos exactamente los mismos parámetros pues los que aparecen en [24] no cumplen la condición $2k_c\theta_c/\sigma^2 \geq 1$, que asegura la positividad del proceso h_c

de cálculo disminuye de manera considerable si los parámetros estimados de la estructura temporal de tasa de interés son cercanos a los parámetros reales.

	k_c	θ_c	η_c	σ_c	α_c	β_{c1}	β_{c2}
Valor real	0.5500	0.0100	-0.0100	0.1400	0.0001	0	0.0005
Promedio	0.6000	0.0101	-0.9400	0.0050	0.0185	0	0.0005
RMSE	0.0030	0.2508	0.1349	0.5006	0.2237	0	0

Tabla 4.3: Resumen comparativo de los resultados obtenidos y los valores reales.

En cuanto a la exactitud en la estimación de parámetros en el paso 2, los resultados indican que estos varían dependiendo la exactitud en la estimación de los parámetros del paso 1. Las pruebas realizadas sugieren que de mantenerse los factores de la estructura temporal (estimados en el paso 1) en un rango razonable, como el que se eligió en el paso 1, el ajuste obtenido del modelo respecto al precio de los bonos es razonable. En la Figura 4.3 se muestran algunos ejemplos significativos.

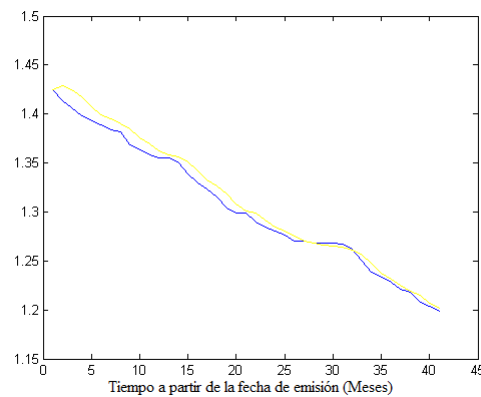


Figura 4.3: En azul, una simulación del precio limpio de un bono prepagable con cupones constantes de $c\%$. En amarillo la estimación por filtro de Kalman.

Concluimos que a pesar de que no se pueda asegurar teóricamente que el método de estimación basado en el filtro de Kalman (y maximización de la función de cuasi-máxima verosimilitud) produzca resultados satisfactorios, en la práctica los resultados obtenidos parecen razonables. Esto se menciona frecuentemente en los estudios que utilizan este método, y el nuestro lo corrobora.

Existen otros métodos de filtraje no lineal, como filtro de partículas, que en principio se podrían utilizar¹³. En términos teóricos, estos métodos ofrecen estimadores con buenas propiedades, sin embargo, la aplicabilidad de estos métodos en forma empírica depende del “costo” computacional que puedan tener que, en todo caso, se prevé elevado.

4.3. Estudio Empírico

En esta sección realizaremos una aplicación del modelo con datos reales del mercado chileno, proporcionados por la empresa de servicios financieros LVAIndices. Específica-

¹³Para la teoría de filtro de partículas se puede ver [8].

mente, contamos con los retornos de bonos de gobierno, con duraciones que van desde 1 a 20 años, entre las fechas 02/01/2008 y 12/09/2011. Adicionalmente, contamos con los datos de bonos prepagables (precio limpio, precio sucio, tasa interna de retorno, tasa de cupones, etc.) de algunas de las empresas chilenas que emiten este tipo de bonos entre las fechas 01/04/2008 y el 17/08/2011.

Algunos de los bonos prepagables emitidos por empresas chilenas no poseen las características necesarias para aplicar el modelo. En ocasiones, consideran cupones variables o existe la posibilidad de amortizar la deuda por parte de la compañía. Lo que implica que existen pagos intermedios que no corresponden a cupones. Esto no está contemplado en el modelo desarrollado en este trabajo. Sin embargo, estas características podrían considerarse en una eventual extensión del modelo.

Para empezar, estimamos la estructura temporal de tasas de interés, usando los retornos de bonos de gobierno. Consideramos observaciones mensuales de estos datos. Los resultados de esta estimación se muestran en la Tabla 4.4.

k_1	θ_1	η_1	σ_1	k_2	θ_2	η_2	σ_2	α_r
1	0.9999	-0.0259	0.0396	0.1000	0.0008	0.0050	-0.2610	-0.9943

Tabla 4.4: Estimación de los parámetros de la estructura temporal de tasas de interés.

En la Figura 4.4 se muestran el ajuste obtenido por filtro de Kalman para los retornos de los bonos con duración 1 y 5 años.

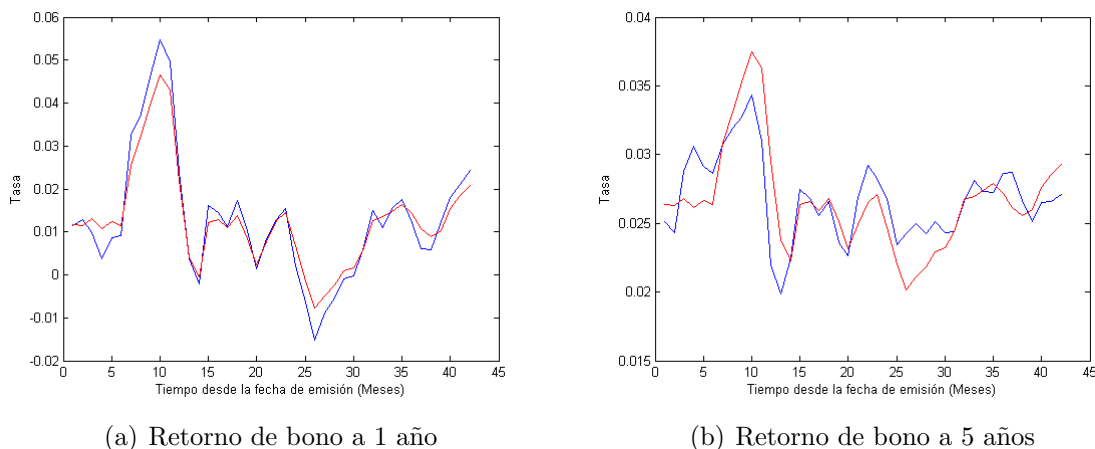


Figura 4.4: En azul el retorno de bonos de gobierno y en rojo el retorno estimado por filtro de Kalman.

La primera columna de la matriz H (que aparecen en (4.13)) contiene los coeficientes que multiplican al primer factor en la combinación que resulta en el retorno de un bono de gobierno. Análogamente, la segunda columna de H contiene los coeficientes que multiplican al segundo factor. En la Figura 4.5 mostramos como varían estos coeficientes en función de la fecha de maduración, para duraciones hasta 6 años. El segundo factor influye de manera casi transversal en los bonos de mayor y menor duración. De aquí la interpretación de este factor como un nivel general de la tasa de interés. El primer factor influye en mayor medida en los bonos de duración corta, bajo un año. Estos resultados son similares a los obtenidos en [18].

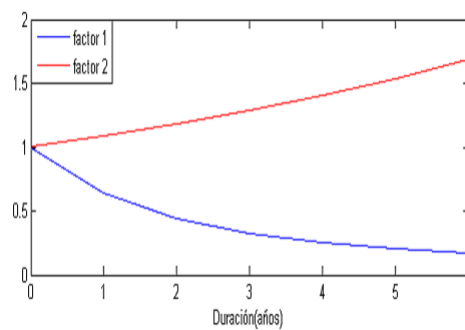


Figura 4.5: Se muestran los coeficientes de la columna de la matriz H , correspondientes a ambos factores.

Realizando una comparación con los trabajos [9], [5] y [18], concluimos que el método utilizado para estimar la estructura temporal de tasas de interés entrega resultados razonables. Aunque existe evidencia en contra de los modelos CIR multifactoriales, como es señalado en [18], en términos de su capacidad de adaptarse a las variaciones de la estructura temporal, consideramos que para los modelos que consideren factores adicionales a los incluidos en la estructura temporal (como el modelo Jarrow *et al.* [24]) estas pruebas en contra no deberían ser demasiado concluyentes. Es necesario en todo caso, un estudio más acabado del impacto que tiene la estimación de la estructura temporal en modelos que consideren otros factores de riesgo. Por otra parte, esto podría ser motivación para buscar otro tipo de modelos, eventualmente no lineales, que logren capturar mejor la dinámica de la estructura temporal de tasa de interés.

Mostraremos el análisis de uno de los bonos prepagables a los que se puede aplicar este modelo. El bono BAGUA-G (emitido por Aguas Andinas) tiene una duración de 6 años. Paga cupones semianualmente de 1,4889%, sobre un principal de 100. Este bono, emitido en 01/04/2008, fue prepagado el 17/08/2011. Por lo tanto, la estimación se realiza entre esas fechas. En la Tabla 4.5 se muestran los resultados de la estimación de los parámetros del proceso de prepagado h_c .

k_c	θ_c	η_c	σ_c	$\alpha_c \times 10^{-5}$	β_{c1}	β_{c2}
0.6000	0.0100	-1	0.1483	-2	1.719	0

Tabla 4.5: Resultados estimación parámetros relativos a h_c .

En la Figura 4.6 se muestra el ajuste obtenido para el bono BAGUA-G. Se puede apreciar que para los primeros 10 meses el ajuste es pobre y muestra valores desproporcionados. Después de los primeros 10 meses el ajuste es más que aceptable. En el global, el error promedio obtenidos por concepto de ajuste es alto, pero haciendo la diferencia entre antes de los primeros 10 meses y después de los primeros 10 meses se deduce que el mayor error se comete antes de los primeros 10 meses. En 4.6(b) se muestra sólo el período que va desde 10 meses después de la fecha de emisión hasta la fecha de prepagado. A pesar de que se podría simplemente dejar esta parte de las estimaciones, pues la estimación es razonable, no existe evidencia que la estimación de los parámetros del proceso h_c sea confiable. En este sentido, no se puede acreditar un mínimo grado de confiabilidad en la estimación de estos parámetros, indicando que quizás las simulaciones con fines predictivos no tendrían demasiada precisión.

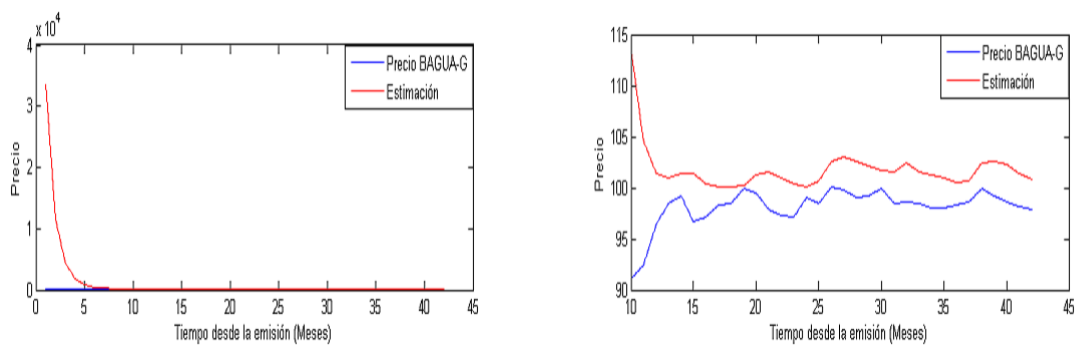


Figura 4.6: En rojo se muestra la estimación del bono prepagable y en azul el valor real de la serie de precios. En 4.6(a) se muestra la estimación entre la fechas de emisión del bono y la fecha de prepago. En 4.6(b) aparece la estimación a partir de 10 meses después de la fechas de emisión hasta la fecha de prepago.

Entre las causas que intervienen en el error desproporcionado en los primeros 10 meses se cuentan: incapacidad para capturar completamente la dinámica de la estructura temporal, demasiada sensibilidad de la función no lineal ante cambios en el factor $s_{2,t}$, diferencias en los conceptos de precio limpio para un bono prepagable entre el modelo y el mundo real, entre otras.

Capítulo 5

Conclusiones

El objetivo fundamental de este trabajo es presentar de la manera más autocontenida posible la teoría que permite formular e implementar un modelo, basado en procesos estocásticos, de valorización de bonos con opción de prepago.

Basandonos en el trabajo de Jarrow et al. [24] obtuvimos un modelo de forma reducida que contempla alguna de las particularidades del mercado chileno. Ofreciendo una base teórica que al estar formulada en un contexto más general es especialmente atractiva para futuras extensiones. Posteriormente implementamos el modelo, realizando aplicaciones tanto a datos obtenidos vía simulaciones como a datos reales del mercado chileno. Para lo anterior, fue necesario:

- Revisar la teoría básica de modelos de tasas de interés, en particular los modelos de Cox-Ingersoll-Ross que son la herramienta básica de modelación de los procesos estocásticos involucrados. Adicionalmente se dio una revisión a los conceptos financieros involucrados.
- Realizar pequeñas modificaciones a los argumentos presentes en los teoremas en los que se basa la valorización en forma reducida para modelos de riesgo crediticio, permitiendo que estos apliquen en el caso de bonos con opción de prepago. Se simplificó el modelo de Jarrow et al. [24] de modo que fuera posible la implementación del modelo al caso chileno.
- Revisar el algoritmo de filtro de Kalman extendido y su aplicación en la estimación conjunta (paramétrica y de variables de estado) de los modelos de estructura temporal. Esto incluye realizar modificaciones para una correcta aplicación.
- Poner en el problema de estimación del modelo en el contexto de filtro de Kalman extendido. Para esto se dividió el problema de estimación, en lo que hemos denominado estrategia de 2 pasos, en analogía a la estrategia de 3 pasos presentada en [24].
- Testear el modelo mediante simulaciones de retornos de bonos de gobierno para diferentes duraciones y precios de bonos prepagables.
- Aplicar el modelo a datos de bonos del mercado chileno. Tomamos el ejemplo de BAGUA-G, un bono prepagable con 6 años de duración nominal, que fue prepagado. Para esto fue necesario hacer calzar el tiempo de vida del bono con la estimación de la estructura temporal, así como sincronizar las observaciones mensuales.

A pesar de que los resultados no son del todo satisfactorios, el modelo y la implementación parecen un buen apunte al problema, considerando que no existen muchos modelos en su tipo, menos aún que hayan sido calibrados con datos del mercado chileno. Por otra parte, tampoco es claro que el precio de bonos prepagables (al menos en el caso chileno) pueda ser descrito por un modelo como el de Jarrow *et al.*. Quizás el punto más débil en la modelación (en cuanto a consistencia con la realidad) sea la forma en que se modela el spread de prepago. En particular, el uso de la función no lineal de la forma $\frac{1}{x}$ no tiene una justificación sólida. Hace falta un estudio empírico más acabado del spread de prepago para contar con una expresión más adecuada. Otra crítica al modelo viene dada por la falta de un desarrollo extenso acerca del comportamiento de prepago, que permita obtener alguna estimación de la probabilidad de prepago. Esto tiene sus dificultades en la práctica, y probablemente se necesite información adicional a la ya considerada, sin embargo, un desarrollo teórico explícito permitiría cubrir otra de las aristas del problema, lo que deviene en un entendimiento más profundo del problema.

Introduciendo cambios en la forma de estimación de los parámetros, utilizando quizás otros métodos de filtraje no lineal¹ se podrían obtener mejores resultados. Por otra parte, es necesario una revisión del rol que juegan los factores que definen la estructura temporal en el spread de prepago, incorporando elementos tanto teóricos como prácticos. Esto podría reducir la ambigüedad presente en la formulación de este término, que resulta en dificultades para realizar la estimación en la práctica. Por otra parte, existen modelos de tasa no afines que podrían ser más adecuados para describir el comportamiento de prepago. Sin embargo, su desarrollo y difusión aún es escaso. Es claro que estas y otras posibilidades pueden ser mejor entendidas contando con un estudio más acabado de los mercados financieros y la forma en que funcionan en la realidad. Con esto se pueden obtener modelos que no solo tengan una base teórica sólida sino que sean consistentes con lo que pasa en el mundo real.

Como tarea pendiente, que se podría realizar sin hacer cambios sustanciales a lo desarrollado en este trabajo, tenemos el extender el modelo para hacer admisible la estimación de bonos prepagables con características como posibilidad de amortizar la deuda, pagos no constantes, etc. Esto permitiría realizar pruebas a mayor escala, puesto que algunos bonos del mercado chileno contemplan estas posibilidades. También, queda pendiente una análisis con simulaciones para tratar de realizar predicciones acerca del comportamiento de prepago (determinado, en parte, por la evolución del proceso h_c). Para esto es necesario revisar confiabilidad de la estimación de los parámetros.

Como se aprecia, existe un amplio espacio para innovar dentro de los llamados modelos de forma reducida. Presentan ventajas teóricas respecto a otro tipo de modelos de valorización de renta fija, que los hacen particularmente atractivos. En la práctica, aún se encuentran en una fase inmadura, sobre todo en términos empíricos. Su desarrollo puede ayudar no solo a obtener estimaciones más precisas, sino que a entender mejor el funcionamiento de los mercados financieros.

¹Una exposición de estos métodos se puede encontrar en [8].

Capítulo 6

Apendice

6.1. Algunas definiciones

En esta sección consideraremos un espacio filtrado de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, P)$, donde $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t : T \geq t \geq 0\}$. Por otra parte, se considera un proceso estocástico $X : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{X}$, donde $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ representa un espacio medible.

Definición 6.1.1. El proceso X se dice **progresivamente medible** o simplemente progresivo (con respecto a la filtración \mathbf{F}) si para todo t la función $(s, \omega) \rightarrow X_s(\omega)$, definida de $[0, T] \times \Omega$ en $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$, es $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ -medible. La σ -álgebra $\mathcal{B}([0, t])$ representa la tribu de los borelianos.

En lo que sigue, consideraremos que la filtración \mathbf{F} es completa (*ie.* \mathcal{F}_0 contiene todos los eventos de probabilidad 0) y continua por la derecha.

Definimos en $\Omega \times \mathbb{R}_+$ la σ -álgebra predecible (que llamaremos \mathcal{P}) como la generada por el espacio de los procesos adaptados y continuos.

Definición 6.1.2. El proceso X se dice **predecible** si la función $(t, \omega) \rightarrow X_t(\omega)$, definida de $(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ en $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$, es medible respecto a \mathcal{P} .

6.2. Algunos resultados útiles

Lema 6.2.1. Sea $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ una martingala continua tal que para cualquier $t \in [0, T]$ se tiene: $P(M_t > 0) = 1$. Entonces se tiene también que $P(\{\forall t \in [0, T] M_t > 0\}) = 1$

Demostración. Se define $\tau = (\inf\{t \in [0, T] | M_t = 0\}) \wedge T$. Probaremos que es un tiempo de parada. En efecto, se tiene que

$$\{\tau \leq t\} = \bigcap_{\epsilon \in \mathbb{Q}_+^*} \{\sup_{s \leq t} M_s > -\epsilon\} = \bigcap_{\epsilon \in \mathbb{Q}_+^*} \bigcup_{s \in \mathbb{Q}_+^*, s \leq t} \{M_s > -\epsilon\} \quad (6.1)$$

Como $\{M_s > -\epsilon\} \in \mathcal{F}_t$ se concluye que τ es un tiempo de parada. Por teorema de muestreo opcional de doob, se tiene:

$$\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_\tau \mathbf{1}_{\tau=T} + M_\tau \mathbf{1}_{\tau < T}) \quad (6.2)$$

pero $M_\tau \mathbf{1}_{\tau < T} = 0$, luego:

$$\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_\tau \mathbf{1}_{\tau=T}) \quad (6.3)$$

Por lo tanto $P(\tau = T) = 1$. Lo que concluye la demostración. \square

Lema 6.2.2. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, P)$ un espacio filtrado de probabilidad y sea Q una medida de probabilidad absolutamente continua respecto a P . Denotamos por L_t la densidad de la restricción de Q a \mathcal{F}_t (ie, $L_t = \mathbb{E}(L_T | \mathcal{F}_t)$ con L_T la densidad de Q respecto a P). Un proceso adaptado $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ es martingala bajo Q si y solo si el proceso $(L_t M_t)_{0 \leq t \leq T}$ es martingala bajo P .*

Demostración. Usando la definición de L_t , se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(L_t M_t | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(L_T | \mathcal{F}_t) M_t | \mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(L_T M_t | \mathcal{F}_t) | \mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{E}(L_T M_t | \mathcal{F}_s) \end{aligned}$$

para $s \leq t$. Usando la igualdad $\mathbb{E}^Q(X | \mathcal{F}_t) L_t = \mathbb{E}(X L_T | \mathcal{F}_t)$, valida para cualquier variable aleatoria X no negativa, obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(L_t M_t | \mathcal{F}_s) &= L_s \mathbb{E}^Q(M_t | \mathcal{F}_s) \\ &= L_s M_s \end{aligned}$$

Lo que prueba que $(L_t M_t)_{0 \leq t \leq T}$ es una martingala bajo P . \square

Teorema 6.2.3 (Desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy). *Sea M una martingala con caminos cadlag y sea $p \geq 1$ fijo. Definimos $M_t^* = \sup_{s \leq t} |M_s|$, entonces existen constantes c_p y C_p tal que se cumple:*

$$\mathbb{E}\{|M_t^*|^p\}^{\frac{1}{p}} \leq c_p \mathbb{E}\{(M_t^*)^p\}^{\frac{1}{p}} \leq C_p \mathbb{E}\{|M_t^*|^p\}^{\frac{1}{p}} \quad (6.4)$$

Una demostración del teorema anterior aparece en [32, p.194]

Lema 6.2.4. *Si Z es una martingala local, entonces $\|Z\|_{\mathcal{H}^p} = \|[Z]_\infty^{\frac{1}{2}}\|_{L^p}$ para $p \geq 1$*

La demostración aparece en [32, p.245]

Teorema 6.2.5 (Desigualdad de Emery). *Sea Z una semimartingala, $H \in \mathbb{L}$ (procesos cadlag adaptados) y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, ($1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty$). Entonces*

$$\left\| \int_0^\infty H_s dZ_s \right\|_{\mathcal{H}^r} \leq \|H\|_{\mathcal{S}^p} \|Z\|_{\mathcal{H}^q} \quad (6.5)$$

Una demostración puede encontrarse en [32, p.246]

Corolario 6.2.6. *Sea M una martingala, H un proceso adaptado cadlag y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, ($1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty$). Entonces*

$$\mathbb{E}\{(L_\infty^*)^p\} \leq C \|H\|_{\mathcal{H}^p} \mathbb{E}\{(M_\infty^*)^p\} \quad (6.6)$$

donde $L = \int H dM$.

Demostración. Como $L = \int HdM$ es martingala local se tiene aplicando la desigualda de Emery con $q = p$:

$$\|L\|_{\mathcal{H}^{\frac{p}{2}}} \leq \|H\|_{\mathcal{S}^p} \|M\|_{\mathcal{H}^p} \quad (6.7)$$

Aplicando el corolario 6.2.6 y la desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy se tiene :

$$\mathbb{E}\{(L_{\infty}^*)^p\} \leq C \|H\|_{\mathcal{H}^p} \mathbb{E}\{(M_{\infty}^*)^p\} \quad (6.8)$$

□

6.3. Método de Kimmel

En este apéndice mostraremos la idea básica del método desarrollado en (ref a Kimmel). El desarrollo detallado del método está fuera del alcance de este trabajo.

Consideramos una variable de estado $X_t \in \mathbb{R}$, que sigue un proceso de difusión (posiblemente no lineal):

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad (6.9)$$

con $X_0 = x$.

Bajo condiciones técnicas, la esperanza condicional

$$f(\Delta, x) = \mathbb{E}_t[\exp(-\int_t^{t+\Delta} r(x_u)du)g(X_{t+\Delta})|X_t = x], \quad (6.10)$$

que usualmente se identifica con el precio de un activo, satisface la ecuación diferencial parcial

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \mu(x)\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial \Delta} = r(x)f \quad (6.11)$$

con la condición final $f(0, x) = g(x)$ ¹.

La manera que predomina en la literatura de atacar el problema (*i.e.* calcular la función $f(\Delta, x)$) consiste en buscar aproximaciones de la densidad condicional de los procesos de difusión, como ejemplo podemos citar [1]. En Kimmel optan, directamente, por desarrollar en serie de potencias (en Δ , centrada en 0) la función $f(\Delta, x)$, de la forma:

$$f(\Delta, x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x) \frac{\Delta^i}{i!}. \quad (6.12)$$

Con esto se deriva la siguiente recursión para los términos de la serie:

$$a_0(x) = g(x) \quad (6.13)$$

$$a_n(x) = \mu(x)\frac{\partial a_{n-1}(x)}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2 a_{n-1}(x)}{\partial x^2} - \sigma(x)a_{n-1}(x). \quad (6.14)$$

Es sabido que la expansión en serie de potencias en Δ de la función $f(\Delta, x)$ alrededor de Δ_0 converge en una vecindad circular de Δ_0 que se extiende hasta la singularidad de $f(\Delta, x)$ más cercana a este punto. En [27] se menciona que la existencia de singularidades

¹La variable Δ representa, en el contexto de bonos prepagables, el tiempo a la fecha de maduración, es por esto que cuando $\Delta = 0$ hablamos de condición final.

para valores complejos de Δ (que no son interesantes en las aplicaciones) puede ocasionar que la serie (6.12) no converja en todo el intervalo $[0, +\infty)$ (valores que son de interés en nuestra aplicación). Como resultado para valores altos de Δ (bonos de larga duración) la serie (6.12) puede no converger. Para remediar esto en [27] se introducen cambios de variable tanto temporales como espaciales. Kimmel, en [27], realiza un cambio de variables de la forma:

$$f(\Delta, x) = \eta(x)h(\Delta, y(x)),$$

para funciones $\eta(x)$ e $y(x)$ apropiadas. Con esto la función $h(\Delta, y)$ satisface el problema siguiente:

$$\frac{\partial h}{\partial \Delta} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(\Delta, y) - r_h(y)h(\Delta, y) \quad (6.15)$$

$$h(0, y) = g(y) \quad (6.16)$$

En [27] se refieren a las ecuaciones escritas en la forma (6.15)-(6.16) como la “forma canónica”, y se caracterizan explícitamente las soluciones para dos especificaciones particulares de $r_h(y)$:

$$r_h(y) = \frac{b^2}{2}(y - a)^2 + dy \quad (6.17)$$

$$r_h(y) = \frac{a}{y^2} + \frac{b^2}{2}y^2 + d. \quad (6.18)$$

Estas especificaciones cubren buena parte de los modelos de tasa corta usados en la literatura. Para estas dos especificaciones, la región donde $h(\Delta, y)$ es analítica depende de dos atributos de la condición final g . El primer requerimiento es que $g(y)$ debe ser analítica para todo número complejo y . Si esto se cumple, la región donde g es analítica esta determinada por una condición de crecimiento para $g(y)$. En el caso de la especificación (6.18) (la que interesa en nuestra aplicación) g debe ser de la forma:

$$g(y) = \begin{cases} g_1(y)y^{\frac{1-\sqrt{1+8a}}{2}} + g_2(y)y^{\frac{1+\sqrt{1+8a}}{2}} & : \text{si } \frac{\sqrt{1+8a}}{2} \notin \mathbb{N} \\ g_1(y)y^{\frac{1-\sqrt{1+8a}}{2}} + g_2(y)y^{\frac{1+\sqrt{1+8a}}{2}} \log(y) & : \text{si } \frac{\sqrt{1+8a}}{2} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

donde $g_1(y)$ y $g_2(y)$ son funciones pares y analíticas en todos los complejos. Además deben satisfacer las siguientes condiciones de crecimiento:

$$|e^{-\frac{b}{2}y^2}g_1(y)| \leq ke^{\frac{\|y\|^2}{2}},$$

$$|e^{-\frac{b}{2}y^2}g_2(y)| \leq ke^{\frac{\|y\|^2}{2}},$$

para algún $k > 0$ y alguna norma $\|y\|$. Como se mencionó anteriormente, la serie para $h(\Delta, x)$ puede no converger para ciertos valores de Δ , por la presencia de singularidades complejas. Esto impediría realizar aproximaciones para bonos con fecha de maduración larga. Para remediar esto se introduce una familia de transformaciones no lineales en Δ , denotadas $\tau_q(\Delta)$, de modo que una serie de potencias (relacionada) en la variable $\tau_q(\Delta)$ converge para todos los valores de Δ en el intervalo $[0, +\infty)$. Repasaremos las transformaciones básicas realizadas en [27]. Estas, en un principio, pueden verse como independientes de las transformaciones espaciales. Las transformaciones básicas corresponden a tomar:

$$f(\Delta, x) = w(\tau, x) \quad (6.19)$$

donde

$$\tau = \tau_q(\Delta) = 1 - \exp(-q\Delta) \quad (6.20)$$

para alguna constante $q \neq 0$. Con esto, la ecuación diferencial de valorización queda:

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\tau, x) + \mu(x)\frac{\partial w}{\partial x}(\tau, x) - q(1 - \tau)\frac{\partial w}{\partial \tau} = r(x)w(\tau, x) \quad (6.21)$$

con la condición final $w(0, x) = g(x)$. Consideramos la expansión en serie de potencias de $w(\tau, x)$ en τ , de la forma:

$$w(\tau, x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i(x) \frac{\tau^i}{i!} \quad (6.22)$$

con $b_0(x) = g(x)$. El resto de los coeficientes b_n pueden obtenerse de la ecuación recursiva:

$$b_n(x) = \frac{1}{q}\mu(x)\frac{\partial b_{n-1}(x)}{\partial x} + \frac{1}{2q}\sigma^2(x)\frac{\partial^2 b_{n-1}(x)}{\partial x^2} - \left[\frac{r(x)}{q} + 1 - n\right]b_{n-1}(x). \quad (6.23)$$

6.3.1. Caso general afín

En [27] se llama “general afín” al caso definido por (6.18). Es decir, se considera el siguiente problema:

$$\frac{\partial h}{\partial \Delta} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(\Delta, y) - \left(\frac{a}{y^2} + \frac{b^2}{2}y^2 + d\right)(y)h(\Delta, y) \quad (6.24)$$

$$h(0, y) = g(y) \quad (6.25)$$

Como se mencionó anteriormente, la condición final debe ser de la forma:

$$g(y) = \begin{cases} g_1(y)y^{\frac{1-\sqrt{1+8a}}{2}} + g_2(y)y^{\frac{1+\sqrt{1+8a}}{2}} & : \text{si } \frac{\sqrt{1+8a}}{2} \notin \mathbb{N} \\ g_1(y)y^{\frac{1-\sqrt{1+8a}}{2}} + g_2(y)y^{\frac{1+\sqrt{1+8a}}{2}} \log(y) & : \text{si } \frac{\sqrt{1+8a}}{2} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

con $g_1(y)$ y $g_2(y)$ funciones pares y analíticas. El siguiente teorema² permite explicitar la forma de la función $h(\Delta, y)$ en términos de la función auxiliar $w(\tau, z)$.

Teorema 6.3.1. Sean $b \neq 0, a$ y d números reales arbitrarios, y $g_1(y)$ y $g_2(y)$ funciones pares que son analíticas para todos los complejos y . Se supone la existencia de una constante $c \neq 0$ y una norma $\|y\|$ tal que $g_1(y)$ y $g_2(y)$ satisfacen las cotas:

$$|e^{-\frac{b}{2}y^2}g_1(y)| \leq ke^{\frac{\|y\|^2}{2}},$$

$$|e^{-\frac{b}{2}y^2}g_2(y)| \leq ke^{\frac{\|y\|^2}{2}}.$$

Entonces existen funciones $w_1(\tau, z)$ y $w_2(\tau, z)$, analíticas para todo z en los complejos con $\|\sqrt{\tau}\| < 1$, que satisfacen las ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial w_1}{\partial \tau}(\tau, z) = \frac{1 - \sqrt{1+8a}}{2z}\frac{\partial w_1}{\partial z}(\tau, z) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2}(\tau, z), \quad (6.26)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial \tau}(\tau, z) = \frac{1 + \sqrt{1+8a}}{2z}\frac{\partial w_2}{\partial z}(\tau, z) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2}(\tau, z), \quad (6.27)$$

$$w_1(0, z) = e^{\frac{z^2}{4}}g_1\left(\frac{z}{\sqrt{2b}}\right) \quad w_2(0, z) = e^{\frac{z^2}{4}}g_2\left(\frac{z}{\sqrt{2b}}\right). \quad (6.28)$$

²Correspondiente al Teorema 5 de [27]

De esta manera, $h(\Delta, y)$ queda definido como:

$$h(\Delta, y) = e^{\frac{b}{2}y^2 - (\frac{b}{2}+d)\Delta} \left[\left(\frac{z}{\sqrt{2b}} \right)^{\frac{1-\sqrt{1+8a}}{2}} w_1(\tau, z) + \left(\frac{z}{\sqrt{2b}} \right)^{\frac{1+\sqrt{1+8a}}{2}} w_2(\tau, z) \right] \quad (6.29)$$

donde $\tau = \tau_{2b}(\Delta)$ y $z = \sqrt{2b}e^{-b\Delta}y$. La función $h(\Delta, y)$ satisface (6.24)-(6.25), con $g(y)$ especificada por 6.3.1, para todo complejo $y \neq 0$ y $|\sqrt{\tau_{2b}(\Delta)}| < 1$.

La demostración aparece en el apéndice de [27].

6.3.2. Aplicación al modelo de Jarrow et al.

La ecuación que satisface la función $\pi(t, s)$ es de la forma:

$$\frac{\partial \pi}{\partial t}(t, s) = [k\theta - (k + \eta)x] \frac{\partial \pi}{\partial s}(t, s) + \frac{\sigma^2 s}{2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial s^2}(t, s) - (s + \frac{\beta_{c2}c}{s})\pi(t, s) \quad (6.30)$$

$$\pi(0, s) = 1 \quad (6.31)$$

Siguiendo a Kimmel (ver [27]) usamos el cambio de variables $y(s) = \frac{2\sqrt{s}}{\sigma}$. Con esto se obtiene la siguiente representación para la función π :

$$\pi(t, s) = \left(\frac{4s}{\sigma^2} \right)^{\frac{1}{4} - \frac{\theta k}{\sigma^2}} e^{\frac{s(k+\eta)}{\sigma^2}} h(t, y(s)) \quad (6.32)$$

Reemplazamos lo anterior en la ecuación (6.30) para obtener la ecuación en forma canónica (en el sentido de Kimmel [27]). Esta ecuación queda:

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t, s) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(t, s) - \left[\frac{a}{y^2} + \frac{b^2}{2}y^2 + d \right] h(t, s), \quad (6.33)$$

$$h(0, s) = y^\alpha e^{-\frac{k}{4}y^2}, \quad (6.34)$$

donde

$$a = -\frac{3}{8} + \frac{1}{\sigma^2}(2\theta k + 4\beta_{c2}c + k + \eta) + \frac{1}{\sigma^3}4\theta k(k + \eta) + \frac{1}{\sigma^4}2\theta^2 k^2,$$

$$b = \frac{\sigma}{2} \sqrt{2\sigma^2 + (k + \eta)^2},$$

$$d = (k + \eta) \left(\frac{k\theta}{\sigma} + \frac{1}{4} - \frac{k\theta}{\sigma^2} + \frac{(k + \eta)}{\sigma} \right).$$

Podemos utilizar el Teorema 6.3.1 con $g_1(y) = e^{-\frac{k_2}{4}y^2}$, $g_2(y) = 0$ y $\|y\| = |y| \left[\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{k}{4b}} + \epsilon \right]$

Esto establece la existencia de $w_1(\tau, z)$ y $w_2(\tau, z)$ que son analíticas para $\|\sqrt{\tau}\| < 1$, y satisfacen las ecuaciones (6.26)-(6.27), que aparecen en el Teorema 6.3.1, luego su expansión en serie de potencias se puede obtener usando el método recursivo (6.23).

Como se señala en [27], se tiene que $w_2(\tau, z) = 0$, por su parte $w_1(\tau, z)$ es analítica en la región $\|\tau\| < 1$ (como establece el Teorema 6.3.1), que incluye $|\tau| < \rho$ para algún $\rho > 1$. La serie de potencias converge uniformemente en una región que incluye $\tau \in [0, 1]$.

Los primeros términos de esta serie de potencias son:

$$\begin{aligned}
w_1(\tau, z) = & \left(\frac{z}{\sqrt{2b}}\right)^{\alpha-\gamma} e^{\frac{z^2}{4}\left(1-\frac{k}{2b}\right)} \left[1 + \tau \left[\frac{(\alpha-\gamma)(\alpha+\gamma-1)}{2z^2} \right. \right. \\
& + \left. \left. \left(\frac{2\alpha+1}{4}\right)\left(1-\frac{k}{2b}\right) + \frac{z^2}{8}\left(1-\frac{k}{2b}\right)^2 + \frac{z^2}{8} \right] \right. \\
& + \frac{\tau^2}{2} \left[\frac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\gamma-2)(\alpha+\gamma-1)(\alpha+\gamma-3)}{4z^2} + \frac{(2\alpha-1)(\alpha-\gamma)(\alpha+\gamma-1)}{4z^2} \right. \\
& + \left. \left. \left(\frac{(2\alpha+3)(2\alpha+1)}{16} + \frac{(\alpha-\gamma)(\alpha+\gamma-1)}{8}\right)\left(1-\frac{k}{2b}\right)^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{(2\alpha+3)z^2}{16}\left(1-\frac{k}{2b}\right) + \frac{z^4}{64}\left(1-\frac{k}{2b}\right) \right] + \dots \right], \tag{6.35}
\end{aligned}$$

donde $\gamma = \frac{1-\sqrt{1+8a}}{2}$. El Teorema 6.3.1 entrega una expresión de $h(t, y)$ que es solución de (6.24)-(6.25). Se puede obtener una aproximación de $h(t, y)$ considerando los primeros términos de la serie de potencias para $w_1(\tau, z)$. Esto permite contar con una forma cerrada para aproximar la función π que utilizamos en el procedimiento de valorización.

Bibliografía

- [1] Y Aït-Sahalia. Transition densities for interest rate and other nonlinear diffusions. *The Journal of Finance*, 54:1361–1395, 1999.
- [2] A Berndt. Estimating the term structure of yield spreads from callable corporate bond price data. *Working paper, Carnegie Mellon University*, 2004.
- [3] F Black and M Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81:637–654, 1973.
- [4] D Brigo and F Mercurio. *Interest rate models-theory and practice: with smile, inflation and credit*. Springer, 2^o edition, 2006.
- [5] R Chen and L Scott. Multi-factor cox-ingersoll-ross models of the term structure: Estimates and tests from a kalman filter model. *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 27:143–172, 2003.
- [6] J Cox, J Ingersoll, and S Ross. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53:385–407, 1985.
- [7] Q Dai and K Singleton. Specification analysis of affine term structure models. *The Journal of Finance*, 55:1943–1978, 2000.
- [8] P Del Moral. *Feynman-Kac Formulae*. Springer, 1^o edition, 2004.
- [9] J Duan and J Simonato. Estimating and testing exponential-affine term structure models by kalman filter. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 13:111–135, 1999.
- [10] G Duffee. Estimating the price of default risk. *Review of Financial Studies*, 12:197–226, 1999.
- [11] G Duffee and R Stanton. Estimation of dynamic term structure models. *Working paper*, 2004.
- [12] D Duffie and L Epstein. Stochastic differential utility. *Econometrica*, 60:353–394, 1992.
- [13] D Duffie, D Filipovic, and W Schachermayer. Affine processes and applications in finance. *The Annals of Applied Probability*, 13:984–1053, 2003.
- [14] D Duffie and R. Kan. Stochastic differential utility. *Econometrica*, 60:353–394, 1992.

- [15] D Duffie, L Pedersen, and K Singleton. Modeling sovereign yield spreads: A case study of russian debt. *Journal of finance*, 55:119–159, 2003.
- [16] D Duffie, M Schroder, and C Skiadas. Recursive valuation of defaultable securities and the timing of the resolution of uncertainty. *Annals of Applied Probability*, 6:1075–1090, 1996.
- [17] D Duffie and K Singleton. Modeling term structure of defaultable bonds. *Review of Financial Studies*, 12:687–720, 1999.
- [18] R Geyer and L Pichler. A state-space approach to estimate and test multifactor cox-ingersoll-ross models of the term structure. *Journal of Financial Research*, 22:107–130, 1999.
- [19] J Harrison and S Pliska. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous tradings. *Stochastic Processes and Applications*, 11:215–260, 1981.
- [20] A Harvey. *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*. Cambridge University Press, 1^o edition, 1989.
- [21] J Hull. *Options, Futures and other Derivatives*. Pearson Prentice Hall, 7^o edition, 2008.
- [22] N Ikeda and S Watanabe. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*. Elsevier Science, 1981.
- [23] F Jamshidian and Y Zhu. Scenario simulation: theory and methodology. *Finance and Stochastic*, 1:43–67, 1997.
- [24] R Jarrow, H Li, S Liu, and C Wu. Reduced-form valuation of callable corporate bonds: Theory and evidence. *Journal of Financial Economics*, 95:227–248, 2010.
- [25] R Jarrow and S Turnbull. Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk. *Journal of Finance*, 50:53–85, 1995.
- [26] M Jeanblanc and M Yor. *Mathematical Methods for Financial Markets*. Springer, 1^o edition, 2009.
- [27] R Kimmel. Changing times: Accurate solutions to pricing and conditional moments problems in non-affine continuous time models. *Working paper. Ohio State University*, 2008.
- [28] D Kreps. Arbitrage and equilibrium in economies with infinitely many commodities. *Journal of Mathematical Economics*, 8:15–35, 1981.
- [29] D Lamberton and P Lapeyre. *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. Chapman & Hall, 2007.
- [30] J Lund. Non-linear kalman filtering techniques for term-structure models. *Aarhus School of Business*, 1997.

-
- [31] B Oksendal. *Stochastic Differential Equations: An introduction with applications*. Springer, 6th edition, 2003.
- [32] P Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer, 2005.
- [33] D Revuz and M Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer, 3rd edition, 2004.
- [34] S Richard and R Roll. Prepayment of fixed rate mortgage-backed securities. *Journal of portfolio management*, 15:375–392, 1989.
- [35] S Shreve. *Stochastic calculus for finance II*. Springer, 2004.
- [36] A Trolle and E Schwartz. A general stochastic volatility model for the pricing of interest rate derivatives. *Review of Financial Studies*, 22:2007–2057, 2009.
- [37] O Vasicek. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5:177–188, 1977.