



**UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL**

MODELOS DE COMPORTAMIENTO DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

**TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGISTER EN ECONOMÍA APLICADA**

GRACIELA PÉREZ NÚÑEZ

**SANTIAGO DE CHILE
DICIEMBRE 2011**



**UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL**

MODELOS DE COMPORTAMIENTO DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

**TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGISTER EN ECONOMIA APLICADA**

GRACIELA PÉREZ NÚÑEZ

**PROFESOR GUIA:
NICOLÁS FIGUEROA GONZÁLEZ**

**MIEMBROS DE LA COMISION:
FELIPE BALMACEDA MAHNS
JUAN ESCOBAR CASTRO
ANDREA REPETTO LISBOA**

**SANTIAGO DE CHILE
DICIEMBRE 2011**

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR AL GRADO
DE MAGISTER EN ECONOMIA APLICADA
POR: GRACIELA INES PÉREZ NÚÑEZ
FECHA: 23 DE DICIEMBRE 2011
PROFESOR GUIA: NICOLÁS FIGUEROA GONZÁLEZ

MODELOS DE COMPORTAMIENTO DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

En este trabajo se modela la decisión de esfuerzo y carga académica de un estudiante que posee una creencia de su habilidad que puede estar sobre o subestimada. Este sesgo perceptivo inicial evoluciona a medida que el estudiante contrasta las notas que obtiene con las notas proyectadas, mediante una regla de ajuste que posee inercia en la creencia pasada. En este contexto, estudiamos el efecto sobre las decisiones óptimas del estudiante y su evolución dinámica, de la influencia positiva de compañeros de curso esforzados ("efecto pares"), de la valoración de la reputación académica y de un sistema de evaluación que premia la posición relativa en una clase.

Una mayor percepción de habilidad personal eleva la carga académica y el esfuerzo óptimo, no obstante, el efecto sobre la nota obtenida es ambiguo (aumenta sólo cuando el efecto positivo del mayor esfuerzo supera al efecto negativo de la mayor carga académica). Pese a que el bienestar se maximiza cuando el estudiante posee una creencia de habilidad personal acertada, la nota puede alcanzar su máximo en presencia de sesgos perceptivos. En este sentido, para inducir un buen rendimiento académico podría ser conveniente una creencia de habilidad sesgada. Por su parte, la exposición a compañeros de clase esforzados opera como un sustituto del esfuerzo propio, lo cual incrementa tanto el rendimiento académico como el bienestar alcanzado por un estudiante, pero no afecta el nivel de esfuerzo escogido.

En tanto, el efecto del prestigio académico (reflejado a través de las notas), eleva el esfuerzo sólo cuando induce a una mayor valoración relativa de las notas en la función de utilidad. Bajo esta premisa, el nivel de carga académica disminuye, y mejoran tanto las notas como la utilidad alcanzadas. Adicionalmente, un sistema de evaluación que premia el "ranking" lleva a que el esfuerzo de los compañeros de clase desincentive el esfuerzo individual, por lo cual decaen la carga académica elegida, y la nota y bienestar alcanzados. De esta manera, frente a sesgos perceptivos de los compañeros de clase, conviene mantener sesgos perceptivos propios que permitan contrarrestar el efecto negativo del esfuerzo de los pares sobre las decisiones personales.

Por otra parte, se presenta un modelo en que el objetivo del estudiante es aprobar dos cursos, bajo un sistema que exige una nota de aprobación mínima, lo cual le exige la obtención de notas superiores a un nivel mínimo. Al igual que en los modelos anteriores, la elección de esfuerzo y proyección de notas se va perfeccionando a medida que el estudiante experimenta y ajusta su creencia de habilidad inicial. Sin embargo, en este modelo la trayectoria de las notas no es monótona en la creencia de habilidad personal. Una mayor creencia de habilidad personal no necesariamente se traduce en mejores notas. Es posible que a medida que el estudiante adquiere más confianza en sus capacidades decida concentrar esfuerzos en mejorar su desempeño en el curso más fácil a expensas de menores notas (incluso reprobación) en el curso que le resulta más difícil.

Por último, se comparan los resultados dinámicos obtenidos con la regla de ajuste del modelo inicial, con los generados a partir de una regla que ajusta las creencias de manera bayesiana. Este ejercicio muestra trayectorias de ajuste más rápidas pero significativamente menos estables respecto del ajuste adaptativo.

Índice

1. INTRODUCCIÓN	3
1.1. Revisión de Literatura	10
2. MODELO	13
3. RESULTADOS	15
3.1. MODELO BÁSICO	16
3.1.1. ESTÁTICA	16
3.1.2. DINÁMICA	24
3.2. EXTERNALIDAD COMPAÑEROS	29
3.2.1. ESTÁTICA	29
3.2.2. DINÁMICA	33
3.3. PRESTIGIO ACADÉMICO Y SOBREALORACIÓN DE LA NOTA . . .	36
3.3.1. ESTÁTICA	37
3.3.2. DINÁMICA	41
3.4. SISTEMA DE EVALUACIÓN POR “RANKING ACADÉMICO”	46
3.4.1. ESTÁTICA	47
3.4.2. DINÁMICA	53
4. MODELO APROBACIÓN DE CURSOS	57
4.1. ESTÁTICA	59
4.2. DINÁMICA	69
5. ACTUALIZACIÓN DE CREENCIA BAYESIANA	77
6. CONCLUSIONES	82
7. APÉNDICE	85

1. INTRODUCCIÓN

En los modelos económicos convencionales los individuos conocen sus habilidades y preferencias. Más aún, procesan la información de manera precisa e insesgada lo que les permite una toma de decisiones óptima. En contraste, la psicología le otorga un importante rol al proceso de aprendizaje, autoconocimiento y constante redefinición de identidad que experimentan los sujetos. Estos procesos explican varios rasgos conductuales que no tienen suficiente cabida dentro del marco analítico estándar, como la sobreconfianza, problemas de auto-control, la autocomplacencia, puntos de referencia arbitrarios que afectan la elección, el arrepentimiento, preferencias ancladas, entre otros. Estos modelos de racionalidad limitada permiten hacerse cargo de las habilidades cognitivas limitadas que presentan los individuos. En contextos de incertidumbre resulta más realista postular que existe un conocimiento imperfecto de la habilidad personal, y que mediante ciertos procedimientos introspectivos las personas van refinando su noción acerca de sí mismos. A priori, un individuo posee una idea preconcebida en la cual tiende a sobrestimar sus capacidades y desempeño personal (véase Langer y Roth (1975), Weinstein (1980), Taylor y Brown (1988) quienes documentan la tendencia de los individuos a sobrestimar sus habilidades). Cabe destacar que la inclusión de estos aspectos en el modelamiento económico es compatible con mantener el supuesto de optimización en la toma de decisiones (véase Benabou-Tirole, 2002). Dado un set de creencias y percepciones de la realidad, los agentes maximizan objetivos personales consistentes a estas ideas. La “irracionalidad” puede reflejarse en suponer que las personas no ajustan correctamente su creencia de habilidad a medida que experimentan, sino que existe una inercia de ésta. Kahneman y Tversky (1974) denominan “anclaje” a la persistencia de la creencia inicial en el proceso de actualización de expectativas ante nueva información.

En el contexto de la educación universitaria, un estudiante enfrenta un problema complejo en que debe decidir la carga académica, su esfuerzo y proyectar su rendimiento, en un ambiente en que influyen los compañeros de clase y el sistema de evaluación de los cursos. El estudiante tiene una noción imperfecta de sus capacidades la cual interfiere en el proceso de toma de decisión y se va ajustando a través de la experiencia. La capacidad para evaluar el aprendizaje y las habilidades en los cursos configura la base que permite definir una estrategia de estudio y esfuerzo adecuada. Percepciones sesgadas o imprecisas acerca de la habilidad personal en relación a las exigencias de los cursos, podrían ocasionar malas decisiones académicas y un menor bienestar.

Evidencia experimental que mide la capacidad de predicción de los estudiantes sobre sus resultados en pruebas de conocimientos, muestra que aquellos con mejor rendimiento académico tienden a estimar de manera más precisa su desempeño. Adicionalmente, estudiantes de más bajo rendimiento académico tienden a sobrestimar sistemática-

mente su desempeño (Grimes, 2002). También se ha documentado que estudiantes de áreas científicas predicen mejor su desempeño en pruebas respecto de estudiantes de áreas humanistas, como también los estudiantes de cursos más avanzados en relación a los estudiantes de primer año (Falchikov y Boud, 1989). En regresiones probit, la medición de la sobreconfianza (medida como el porcentaje de sobrestimación de la predicción de la nota a obtener en una prueba de conocimientos) ha resultado estar positivamente vinculada a estudiantes más jóvenes, con peor rendimiento en los cursos de pregrado y peor desempeño relativo en las pruebas en que se les solicita predecir su resultado (Grimes, 2002). Profusa evidencia empírica muestra que los estudiantes se preocupan de su desempeño, pero consistentemente sobrestiman sus habilidades cognitivas. Estas creencias están determinadas por las experiencias académicas pasadas y por unas expectativas exageradas de sus habilidades relativas (Clayson, 2005).

El contexto en que se desenvuelven los estudiantes también ejerce influencias sobre su comportamiento. La motivación personal es susceptible de estímulos del medio como el de un profesor o los compañeros de clase. La interacción con pares competentes y motivados en una clase genera efectos positivos que estimulan el aprendizaje y esfuerzo personal. En la literatura se denomina como “efecto pares” a la externalidad resultante de esta interacción. Hanushek et al (2003), obtienen que el desempeño de los pares afecta positivamente el rendimiento. Más aún, los estudiantes a lo largo de toda la distribución de resultados en pruebas, se benefician del efecto positivo de los pares. Por su parte, Aizer (2008) mide el impacto del efecto que ejercen los pares sobre el desempeño académico de escolares, aislando el efecto de compañeros con déficit atencional. En sus hallazgos, el efecto del comportamiento de los pares, más que sus habilidades intrínsecas, resultan ser significativas: escolares expuestos a un entorno con mejores compañeros mejoran su desempeño académico. Varios investigadores, entre los que destacan Winston y Zimmerman (2003) y Sacerdote (2001), miden el “efecto pares” en universitarios asociando alguna característica exógena del entorno y su influencia sobre el desempeño (por ejemplo, la asignación aleatoria de los compañeros de dormitorio en las residencias universitarias). En general, estudiantes expuestos a pares con mejores antecedentes académicos (puntajes en pruebas de ingreso a la universidad, rendimiento promedio universitario, entre otras) ostentan un mejor desempeño académico.

Como resultado de estas interacciones con pares o como consecuencia del esquema de incentivos en los cursos, los estudiantes valoran construir una imagen favorable respecto de sus cualidades académicas debido al componente de estatus social que esto involucra. Un estudiante percibido más hábil puede despertar sentimientos de respeto o envidia entre sus pares, y en general expectativas de que seguirá manteniendo un buen desempeño lo que presiona un mayor esfuerzo que puede perpetuarlo en tal condición. En este sentido, la reputación académica influye en la importancia asignada a las notas por sobre otros objetivos académicos, debido a que este es un indicador objetivo que

refleja cualidades afines a la capacidad de los estudiantes. Por las mismas razones, un sistema de evaluación que premia la posición relativa de los estudiantes (su ranking), induce una sobrevaloración de la nota relativa por sobre otros objetivos académicos. En este sentido, compañeros de clase percibidos más hábiles desincentivan el esfuerzo, pues dificultan la posibilidad de lograr un mejor ranking. Crooks (1988), describe distintas formas de evaluación y su impacto sobre los resultados de los estudiantes. En general, concluye que el sistema de evaluación de los cursos tiene una importancia determinante, que puede ser positiva o negativa, sobre la motivación y resultados de los estudiantes. En la línea de los incentivos negativos, Wang y Yang (2003) muestran que los incentivos a competir por la nota inducidos por evaluaciones que miden el desempeño relativo, pueden llevar a que estudiantes que valoran su percepción de habilidad decidan esforzarse menos para evitar la decepción de percatarse de su menor habilidad en caso de obtener un mal resultado habiéndose esforzado mucho.

En esta investigación se caracterizan aspectos básicos del comportamiento de estudiantes en un ambiente académico universitario. Modelamos las motivaciones y características de la toma de decisiones académicas, lo cual representa un esfuerzo en al menos dos frentes. Primero, en definir las metas que se trazan los alumnos en materias relacionadas a su rendimiento en la carrera. Y segundo, en identificar la influencia de distintos factores sobre el proceso de toma de decisión y los resultados obtenidos a partir del mismo.

La toma de decisiones del estudiante permitirá evaluar su eficacia en relación a las metas trazadas, como también la compatibilidad de las motivaciones de los estudiantes en relación a su proceso de aprendizaje y formación profesional. A través de distintos modelos, se retratará la elección bajo distintos contextos de análisis, los cuales nos permitirán centrar la atención en aspectos específicos que influyen en esta elección académica.

En los modelos presentados en la sección 3, el objetivo del estudiante consiste en obtener buenas notas en los cursos y avanzar en la malla curricular de su carrera de estudios. Las variables de elección del problema serán el nivel de esfuerzo asignado a los cursos, la carga académica (número de cursos por periodo académico), y la nota a obtener en cada uno de los cursos tomados. Así, resolviendo óptimamente, el estudiante obtiene como resultado notas en los cursos, cierto grado de avance en la malla curricular y un nivel de utilidad.

Desde un enfoque estático el estudiante maximizará su objetivo bajo distintos escenarios que afectan la decisión. Supondremos distintas formas de interacción con compañeros de clase. Entre ellas, el efecto positivo que puede ejercer un ambiente de estudios que propicie el esfuerzo personal, constituido por una clase con compañeros

motivados y que por tanto se esfuerzan en los cursos. Esta forma de interacción se representa mediante una externalidad positiva del esfuerzo ejercido por los compañeros de clase sobre el esfuerzo personal. Otra forma de interacción que consideraremos, será la importancia para un estudiante de mantener una reputación de “inteligente” frente a los compañeros de clase, lo cual induce a priorizar mayormente las notas en la función objetivo a maximizar, pues mostrarse de habilidad alta exige el logro de notas más elevadas respecto a los compañeros. Independiente de cuán acertada sea la creencia de habilidad personal en relación a la de los compañeros de clase, el hecho de suponerse más inteligente llevará, en algunos casos, a esforzarse más y a conseguir mejores resultados, lo cual elevará la satisfacción conseguida por el estudiante. Un tercer aspecto estudiado es la incidencia del esquema de evaluación en los cursos. Específicamente, supondremos un sistema de calificaciones basado en la posición relativa o ranking académico, el cual lleva a que la nota de los compañeros de clase, y por tanto su habilidad, genere una desutilidad en el esfuerzo personal escogido. Esto ocurre debido a que una mejor nota por parte de los compañeros de clase se traduce en una mayor competencia por obtener la mejor nota de la clase, tornándose más costoso el esfuerzo implicado en su logro. Asimismo, veremos que dependiendo de la habilidad y notas de los compañeros de clase, puede ser beneficioso poseer una noción de habilidad personal distinta a la real. Esto contradice los resultados obtenidos en los modelos anteriores que señalan que a medida que más acertada es la percepción de habilidad personal que posea un estudiante, más eficientes serán sus decisiones y por tanto mayor el nivel de bienestar alcanzado. En este sentido, un sistema de evaluación que premie el ranking lleva a que sesgos cognitivos (por ejemplo, una noción de habilidad superior a la real) puedan ser ventajosos.

Ahora bien, dado que la habilidad que un estudiante cree tener puede diferir de su verdadera habilidad, por ejemplo debido a una imagen sobrestimada de sí mismo (optimismo), las notas que obtenga no necesariamente coincidirán con las esperadas. Las notas esperadas se basan en la creencia de habilidad personal junto al esfuerzo incurrido por un estudiante. En cambio, las notas efectivas son resultado de la habilidad real y del esfuerzo. A partir de la experiencia y constatación de sus resultados académicos, el estudiante podrá ajustar sus creencias lo que le permitirá mejorar sus decisiones pasadas en función de los resultados obtenidos mediante un proceso introspectivo de refinamiento de la noción de habilidad personal. En este sentido, la ganancia en experiencia a medida que se avanza en la carrera permite que los estudiantes adquieran una noción más precisa de su habilidad o destreza “intelectual” aplicada en su campo de estudio, lo cual implica una toma de decisiones más informada. Luego, desde una perspectiva dinámica estudiaremos el ajuste de creencias de un estudiante. Supondremos dos mecánicas de ajuste de esta creencia de habilidad personal: un ajuste adaptativo y otro bayesiano.

A partir de un modelo genérico, analizamos las distintas aristas del proceso de elección que lleva a cabo un estudiante. A continuación, mencionamos algunos de los alcances de los distintos aspectos constituyentes de este proceso de decisión antes esbozados.

En el modelo de la sección 3.1 tratamos el problema de un estudiante en ausencia de interacción con compañeros de clase. Aquí, las variables de control dependen positivamente de la creencia preconcebida de habilidad personal que posea un estudiante. Es decir, a mayor creencia de habilidad personal aumenta el esfuerzo, la carga académica y la expectativa de notas. En este sentido, una visión personal optimista eleva el esfuerzo, lo cual contribuye a la obtención de mejores notas. Sin embargo, también promueve una sobrecarga académica que induce peores notas. Por lo tanto, a mayor creencia de habilidad la nota obtenida por un estudiante puede aumentar o disminuir. En la medida que el mayor esfuerzo realizado ante una creencia demasiado optimista domine al efecto de una sobrecarga académica, el estudiante terminará con mejores notas.

La utilidad obtenida por un estudiante es más alta cuanto más precisa sea la percepción que tenga de sí mismo. En el extremo, cuando conoce perfectamente su tipo (habilidad), toma decisiones óptimas y alcanza el máximo bienestar posible. En cambio, si no se conoce bien podría obtener mejores notas pero a un costo personal demasiado alto que le exigiría un esfuerzo por sobre el óptimo.

Un estudiante con una visión personal optimista (que cree tener una habilidad superior a la efectiva), obtendrá notas inferiores a las esperadas. Esta discrepancia lo llevará a ajustar su creencia de habilidad a la baja, de modo de paulatinamente ir convergiendo a su habilidad verdadera. En este proceso, tanto el esfuerzo como la carga académica y la expectativa de nota decrecen. En cambio, la utilidad alcanzada por el estudiante aumenta, pues precisa su creencia personal lo que le permite decidir mejor. Por su parte, la nota efectiva obtenida por un estudiante puede crecer o decrecer. En el caso de un estudiante optimista, si la reducción de su carga académica supera el efecto del menor esfuerzo, entonces las notas efectivas crecen.

En el modelo de la sección 3.2, introducimos una externalidad positiva sobre el rendimiento asociada al esfuerzo de los compañeros de clase, lo cual modifica algunos de los resultados antes señalados. La interacción con compañeros altamente esforzados, eleva los estándares de discusión e intercambio de ideas, lo cual redundo en un mayor rendimiento individual. Este efecto se conoce en la literatura como “efecto pares”. El tratamiento de este efecto, descansa en el supuesto crucial de que la creencia que un estudiante posea sobre su habilidad personal y la de sus compañeros, equivale a la percepción colectiva. Es decir, las percepciones de habilidad entre estudiantes deben estar alineadas.

El esfuerzo individual y la externalidad actúan como sustitutos. Esto, pues es posible lograr un mismo rendimiento esforzándose menos como consecuencia de la externalidad positiva que ejercen los compañeros. En este modelo, la sustitución es perfecta por lo que el rendimiento marginal del esfuerzo no se ve alterado por la externalidad. En cambio, la decisión de carga académica y la expectativa de notas, aumentan por el efecto positivo del esfuerzo de los compañeros. En este sentido, el efecto de elevar la carga académica en respuesta a una mayor creencia de habilidad personal, se ve reforzado con la externalidad ejercida por los compañeros de clase. Como la externalidad promueve la carga académica y no altera el incentivo al esfuerzo, la nota efectiva lograda por un estudiante será decreciente con respecto a la creencia de habilidad personal en un mayor rango de valores. De todas formas, tanto la nota efectiva como la utilidad alcanzan niveles más altos ante la presencia de la externalidad positiva. Mientras más hábiles sean percibidos los compañeros de clase por un estudiante, mayor será el efecto de la externalidad y más alta la utilidad que puede alcanzar.

En la sección 3.3, revisamos el caso de un estudiante que le importa su reputación académica, la cual refleja a través de sus notas. Por ello, cuando se considere más capaz que sus pares le otorgará mayor importancia a las notas en su función de utilidad, y le destinará una mayor proporción de sus recursos académicos al logro de las mismas. Es decir, dado un nivel de esfuerzo, los recursos asignados a las notas aumentan si el estudiante se considera más capaz que sus pares, con el fin de validar esta creencia mediante el logro de mejores notas. Sin embargo, el esfuerzo incurrido no necesariamente aumenta cuando se sobrevaloran las notas en la función de utilidad. Esto ocurre debido a que el rendimiento marginal del esfuerzo se intensifica sólo cuando se desproporcionan las valoraciones de las notas y la carga académica en la función de utilidad. Mientras más desbalanceada sea la valoración de notas y carga académica en la función de utilidad de un estudiante, el esfuerzo requerido para su logro es mayor. Por ello, el esfuerzo crece con la sobreponderación de las notas siempre que la valoración relativa entre las notas y la carga académica se desequilibre en favor de las primeras. Un estudiante que le asignaba una mayor importancia a las notas en su función objetivo, al creerse más capaz que sus pares les asignará una importancia aún mayor, lo que generará un aumento del esfuerzo.

Sólo bajo la condición antes señalada, el percibirse más hábil que los compañeros de clase eleva el esfuerzo, la expectativa de notas y las notas que efectivamente obtiene un estudiante. Adicional a esto, el logro de las mayores notas que el estudiante proyecta obtener, a pesar de incrementar el esfuerzo, se traducen en un mayor bienestar. En consecuencia, el poseer una creencia de habilidad por sobre la del resto, aunque carezca de legitimidad, es beneficioso para el estudiante tanto en términos de la mejor nota que obtiene como de una mayor satisfacción personal.

En la sección 3.4 mostramos algunos efectos sobre los incentivos y las decisiones que adopta un estudiante, cuando le interesa maximizar su posición relativa en una clase o “ranking” académico. Aquí, la expectativa de la nota a obtener por los compañeros de clase afectará negativamente el esfuerzo individual, la carga académica y la expectativa de notas personal. Asimismo, la nota efectiva obtenida también se verá reducida ante una creencia de mayor habilidad de los compañeros de clase.

Por su parte, el bienestar de un estudiante no necesariamente alcanza su máximo cuando su creencia de habilidad personal ha convergido a la real. Ahora, es posible explotar en beneficio personal sesgos cognitivos personales y de los compañeros de clase. Que los compañeros se perciban menos hábiles de lo que efectivamente son, lleva a una reducción de su esfuerzo lo cual facilita la obtención de un mejor “ranking” académico. Del mismo modo, también podría ser beneficiosa cierta cuota de optimismo/pesimismo personal que permita contrarrestar o acentuar el efecto del sesgo de los compañeros cuando éste es desfavorable o beneficioso, respectivamente.

En el modelo presentado en la sección 4 se retrata la elección de estudiantes enfrentados a una malla curricular rígida, donde la variable de elección es el esfuerzo en función de cierto objetivo de rendimiento (notas) en los cursos. Más aún, incorporamos el rasgo realista de requisito de una nota mínima para aprobar un curso, y consecuentemente obtener utilidad de este logro. Siempre es posible, además, eliminar un curso y optar por no dedicarle esfuerzo. Esta última decisión es más probable cuanto menor sea el grado de complementariedad de los cursos respecto al avance curricular en la carrera. Sesgos perceptivos en la creencia de habilidad (pesimismo u optimismo) generan una brecha entre las metas y los logros académicos obtenidos por un estudiante, que lo llevan a reevaluar su percepción de habilidad y replantearse su ambición académica. Esta creencia de habilidad, en conjunto al grado de complementariedad/sustituibilidad de los cursos (en el sentido de avance curricular) y al precio relativo de los cursos (dificultad relativa), determinan las decisiones y la dinámica consecuente de las notas esperadas, notas reales, esfuerzo y utilidad.

1.1. Revisión de Literatura

Muchos de los aspectos considerados en los modelos antes descritos han sido estudiados mediante distintos enfoques en la literatura económica. El enfoque adoptado en cada uno de estos modelos, asume un agente optimizador cuya función de utilidad tiene rasgos específicos según los distintos aspectos considerados, tales como la externalidad que generan los compañeros de clase o la valoración del estatus académico reflejado a través de las notas, entre otros.

En relación a los sesgos cognitivos, una vasta línea de investigación en economía muestra que las personas poseen sesgos cognitivos, los cuales no se disipan tan rápidamente mediante la experiencia como sugieren los modelos estándares. Kahneman y Tversky (1974), sostienen que en la formación de estimaciones las personas a menudo presuponen valores arbitrarios y con la experiencia los ajustan. La evidencia experimental muestra que este ajuste es insuficiente, y que tienden a anclarse en su supuesto inicial. Barberis y Thaler (2003), también plantean la importancia de la persistencia de las creencias por sobre un ajuste optimizador. Abundante evidencia muestra que cuando las personas se forman una opinión se aferran a ella por mucho tiempo, reconociéndose dos efectos. Por una parte, las personas son renuentes a buscar evidencia que contradiga sus creencias; y por otra, incluso si encuentran tal evidencia, la tratan con excesivo escepticismo. Algunos estudios han encontrado un efecto aún más fuerte, conocido como sesgo de confirmación, en que las personas interpretan erróneamente evidencia que contradice sus hipótesis, para así validar sus creencias. Por su parte, Compte y Postlewaite (2004) sostienen que las decisiones y el desempeño se ven afectadas por las emociones, las cuales son susceptibles a sesgos en el procesamiento de información que pueden mejorar el bienestar (emociones positivas). Así, los resultados negativos se tienden a atribuir a la mala suerte, mientras que los positivos a habilidades intrínsecas o al esfuerzo. Van Den Steen (2004), supone agentes racionales que poseen distintas creencias (reveladas en las acciones que eligen), y que tienen un sesgo cognitivo sistemático debido al sobreoptimismo acerca de sus posibilidades de éxito y la tendencia a atribuir fracasos a causas exógenas. Weinberg (2006) arguye que la elección de tareas se basa en la información sobre la habilidad personal. De ahí que en presencia de sesgos perceptivos, tareas más exigentes en habilidad sean evitadas por personas temerosas de contradecir sus creencias favorables.

La evidencia experimental muestra que, pese a tener incentivos correctos, las personas poseen sesgos difíciles de corregir, que pueden ser de dos tipos: en las creencias y formación de expectativas, o en las preferencias. En nuestro modelo la irracionalidad no será por la vía de las preferencias, como mucha de las referencias antes citadas, sino a través del ajuste de las creencias que poseen los individuos. Más específicamente, supondremos un ajuste de creencias con inercia en la creencia pasada. Este supuesto se condice con lo que Barberis y Thaler (2003) denominan “*belief perseverance*”, en que

los agentes tienden a aferrarse fuertemente a su creencia inicial. El aprendizaje será más lento, (pero consistente), en consideración a la profusa evidencia que muestra la existencia y persistencia de este efecto.

En lo que respecta al “efecto pares”, o la influencia ejercida sobre el comportamiento por homólogos en contextos de interacción entre personas, este tiene una extensa documentación en estudios que resaltan su importancia analítica y empírica, principalmente en el marco de la educación escolar. Investigaciones más recientes han contextualizado el “efecto pares” a la educación universitaria (Stinebrickner y Stinebrickner 2000; Sacerdote 2001; Zimmerman, 2003; entre otros). La calidad de los pares, usualmente medida a través de su rendimiento académico, tiene un impacto considerable sobre la efectividad de una clase y aprendizaje de los estudiantes. De ahí el incentivo de las universidades por atraer a los mejores estudiantes, ofreciéndoles generosas becas las cuales reditúan a través del alza en el estándar académico promedio si el efecto pares opera positivamente (Hoxby, 2004).

En la literatura que analiza de este efecto entre universitarios, destaca el de Zimmerman (2003) en que se cuantifica el efecto positivo y negativo que ejercen estudiantes de alto y bajo rendimiento en pruebas estandarizadas, respectivamente, sobre compañeros de rendimiento medio que comparten residencia y son asignados aleatoriamente en éstas. En tanto, Sacerdote (2001) usando datos de Dartmouth College, también encuentra evidencia significativa de la influencia de los compañeros de residencia de los estudiantes de primer año, sobre su promedio de notas y la participación en organizaciones sociales. Por su parte, Stinebrickner y Stinebrickner (2000) emplean datos de estudiantes universitarios de primer año de Berea College, el cual recibe a estudiantes de un nivel socioeconómico relativamente bajo. En este grupo de estudiantes, a diferencia de las universidades altamente selectivas de los estudios anteriores, no se encuentra evidencia de influencia del rendimiento académico de los compañeros de residencia sobre las notas obtenidas el primer semestre de clases o sobre la permanencia universitaria. No obstante, el estudio encuentra un efecto positivo del nivel de ingreso del compañero de residencia sobre las notas y permanencia universitaria en estudiantes mujeres.

En la misma línea, Winston y Zimmerman (2003) siguen a una cohorte completa de estudiantes de diversas universidades altamente selectivas de Estados Unidos. Encuentran un efecto positivo y estadísticamente significativo del ranking de las pruebas de ingreso obtenidas por los compañeros de residencia (asignados aleatoriamente) sobre el rendimiento alcanzado en la universidad.

En suma, diversa evidencia muestra la existencia del denominado “efecto pares” entre estudiantes universitarios. La exposición compañeros de clase motivados y sobresalientes, promueve el esfuerzo personal, lo cual repercute en un mejor rendimiento.

Por último, desde distintas aristas la literatura económica ha estudiado la valoración que las personas asignan al prestigio y reconocimiento entre los pares, a través de la

comparación de resultados en distintas esferas de su quehacer. En el caso de estudiantes universitarios, la reputación académica influye en la importancia asignada a las notas por sobre otros objetivos académicos, si se considera que mayor habilidad se refleja en este indicador de rendimiento. Samuelson (2004), desarrolla un modelo en que las preferencias exhiben una valoración por el consumo relativo. Esto mediante un proceso evolutivo en que la naturaleza óptimamente dota a las preferencias de una valoración por el consumo en relación al de los demás con el fin de compensar la falta de información e incertidumbre. Solnick y Hemenway (2005), plantean que la valoración del estatus y la posición relativa se ve reflejada en los denominados “bienes posicionales”. Estos bienes no sólo proporcionan bienestar a partir de su consumo sino también de cómo sea el consumo de los demás, esto es, el consumo relativo. Este aspecto afecta más a algunos bienes que otros, entre estos el dinero por sobre el ocio (Frank, 1985; Luttmer, 2005; Neumar, D. y A. Postlewaite, 1998), aumento de bienes por sobre reducción de males (Solnick y Hemenway, 1998), los bienes privados por sobre los bienes públicos (ganancias por sobre pérdidas), vivienda y ropa por sobre salud y seguridad. Schor (1998) argumenta que las comparaciones interpersonales incluso podrían contribuir a incrementar las horas trabajadas (para así obtener mayor ingreso), lo cual redundaría en un empeoramiento de la calidad de vida. En tanto, Köszegi (2006) desarrolla un modelo simple en que el tomador de decisión valora poseer percepciones positivas sobre su habilidad en actividades ambiciosas. Esta sobreconfianza se refleja en la tendencia a recolectar información sesgada sobre el desempeño personal que confirme la creencia sobreoptimista, evitando desafíos que arriesguen tal percepción. Por otra parte, se selecciona información a través de acciones en que se realce la percepción personal, particularmente cuando se han experimentado fracasos, por lo que escogen acciones más riesgosas. En general, estos sesgos en las preferencias hacen que se prefiera obtener información en dosis pequeñas y lo más flexible y manipulable posible, para así construir y validar una imagen personal favorable.

2. MODELO

Consideramos un estudiante representativo i , con cierto nivel fijo de habilidad θ^* , que posee una creencia inicial para su propia habilidad θ_i , y para la de sus compañeros de clase θ_j . Sobre la base de estas creencias, en cada periodo académico escoge un nivel de esfuerzo e_i , carga académica UD_i , y se forma expectativas de las notas que obtendrá $Nota_i$.

Para ello, maximiza una combinación de carga académica y notas, que lo obliga a incurrir en cierto nivel de esfuerzo. Como el esfuerzo es costoso, se asumirá una función cuadrática para el mismo (e_i^2). Suponer que los estudiantes valoran el avance curricular, es equivalente a plantear que valoran el no atrasarse en el término de sus estudios, puesto que de este modo se acelera la inserción al mundo laboral, y consecuente obtención de ingresos. Asimismo, terminar a tiempo (o antes) la carrera es sinónimo de capacidad, lo cual es apreciado en un ambiente de incertidumbre. No obstante, considerar la carga curricular como un argumento de la función de utilidad tiene sentido sólo cuando la malla curricular del plan de estudios es flexible, por lo que el estudiante debe escoger cuántos cursos realiza. Supondremos una función de utilidad tipo Cobb-Douglas con retornos constantes a escala, siendo γ y $(1 - \gamma)$ las participaciones de la carga académica y las notas en la dotación de recursos académicos, respectivamente. Así, la función objetivo a maximizar será:

$$UD_i^\gamma Nota_i^{1-\gamma} - e_i^2$$

La dotación de recursos académicos con que cuenta el estudiante, está compuesta por la interacción entre su esfuerzo y su creencia de habilidad personal: $e_i\theta_i$. Esta complementariedad entre la dotación de habilidad y el esfuerzo es más plausible en ambientes de alta exigencia intelectual, como es el caso de una universidad de elite. No así en otros contextos donde se observa que un alto esfuerzo puede suplir, a un menor costo, la falta de talento. Alternativamente, de suponer sustitución entre la habilidad y el esfuerzo ($e_i + \theta_i$), se obtendría una influencia similar del esfuerzo sobre las variables de decisión en cuanto al sentido de los cambios, pero en menor magnitud respecto del caso que se tratará en esta modelación. Esto se debe a que cuando asumimos que la dotación es del tipo: $(e + \theta)$, el esfuerzo óptimo e_i^* no depende de la creencia de habilidad θ_i . Aún así es cierto que las notas y la carga académica serán crecientes en θ_i debido a la mayor disponibilidad de recursos, pero no existirá el efecto de reforzamiento inducido por un alza en θ_i .

Por otra parte, el esfuerzo realizado por los compañeros de clase e_j , constituye una externalidad favorable que eleva el rendimiento marginal del esfuerzo personal, permitiéndole al estudiante alcanzar mayores notas. La magnitud de este efecto será βe_j .

Cabe señalar que el efecto sobre la decisión individual que ejercen los pares se transmite a través del esfuerzo que éstos dedican a los cursos, (por su incidencia positiva en el ambiente académico), y no a través de sus habilidades intrínsecas.

De este modo, el estudiante debe asignar esta dotación de recursos $(e_i + \beta e_j)\theta_i$, al logro de notas y avance curricular. El precio de una mayor carga académica relativo a las notas, está dado por η . Asumimos que la relación de “producción” entre UD y $Nota$ en la restricción de recursos académicos es lineal: $Nota + \eta UD = e\theta$. La justificación detrás de esto es que concentrarse en el logro de notas o en el avance curricular, representan actividades independientes y que se sustituyen. Las horas efectivas (dotación de recursos académicos: $e\theta$), se dividen entre intentar aprobar el máximo número de cursos (UD) o intentar obtener buenas notas ($Nota$). Una formulación alternativa interesante, es asumir que $Nota = \frac{e\theta}{UD}$. Esto corresponde a suponer que las horas de trabajo efectivas son repartidas de forma uniforme entre los cursos que se toman, generando peores o mejores notas. En ambos casos un aumento de la carga curricular disminuye las notas, no obstante, en el caso alternativo este efecto es más intenso. Bajo nuestra suposición, la maximización estará restringida por la siguiente dotación de recursos académicos:

$$Nota_i + \eta UD_i = (e_i + \beta e_j)\theta_i$$

Las notas que obtiene un estudiante son un reflejo de su habilidad. Estudiantes que valoran la percepción de sus compañeros respecto de su habilidad, se interesan por obtener buenas notas a fin de señalar alta habilidad. Por ello, supondremos que un estudiante interesado en señalar una habilidad superior que la de sus compañeros ($\theta_i > \theta_j$), valorará en una mayor proporción ($\phi > 0$) a las notas en su función de utilidad, por lo que les asignará una mayor proporción de sus recursos académicos ($1 - \gamma + \phi$). De cumplirse esta condición, la función de utilidad que maximiza el estudiante será:

$$UD_i^{\gamma-\phi} Nota_i^{1-\gamma+\phi} - e_i^2$$

De manera genérica, el problema que resuelve el estudiante puede representarse por:

$$\begin{aligned} \max_{\{e_i, UD_i, Nota_i\}} \quad & UD_i^\gamma Nota_i^{(1-\gamma)} \left(UD_i^{-\phi \mathbf{1}_{\{Nota_i > Nota_j\}}} Nota_i^{\phi \mathbf{1}_{\{Nota_i > Nota_j\}}} \right) - e_i^2 \\ \text{s.a.} \quad & Nota_i + \eta UD_i = (e_i + \beta e_j)\theta_i \end{aligned} \quad (1)$$

A partir de una creencia preconcebida de habilidad en el periodo t , θ_{it} , el estudiante escoge una carga académica UD_{it} y un nivel de esfuerzo e_{it} , teniendo en mente una expectativa de notas $Nota_{it}$. Sin embargo, la nota que efectivamente obtiene, dependerá de su verdadera habilidad θ_i^* junto a la carga académica y el esfuerzo que haya escogido. Así, la nota obtenida $Nota_{it}^*$ se deriva a partir de la restricción presupuestaria del estudiante, evaluada en su habilidad real:

$$Nota_{it}^* = e_{it}\theta_i^* - \eta UD_{it}$$

Cuán sesgada sea la expectativa de nota en relación a la nota obtenida, dependerá de la diferencia entre la habilidad efectiva θ_i^* y la percibida θ_{it} . Mientras la habilidad real (θ^*) la suponemos exógena y no entrenable, la habilidad percibida (θ_{it}) varía a través del tiempo según cómo el estudiante ajuste su creencia de habilidad en virtud de los resultados académicos que obtiene. Por ejemplo, un estudiante optimista de su capacidad personal $\theta_{it} > \theta_i^*$, observará notas inferiores a las esperadas.

Una vez que el estudiante constata las notas que efectivamente obtiene, las confronta con sus notas proyectadas y así deduce su posible sesgo perceptivo. El mecanismo que asumimos para el ajuste de la creencia de habilidad cada periodo, está dado por:

$$\theta_{i,t+1} = \theta_{it} + \mu(Nota_{it}^* - Nota_{it}) \quad (2)$$

Es decir, el proceso de ajuste posee cierta inercia dada por la creencia pasada, y se renueva a una tasa μ por sobre la diferencia entre la nota efectiva y la esperada.

3. RESULTADOS

En esta sección, se comparan los principales hallazgos del modelo considerado. Por una parte se establecen los alcances estáticos del problema, como lo son la relación entre la creencia de habilidad y la decisión de esfuerzo, carga académica, expectativa de notas, notas efectivas y utilidad alcanzada. Por otra parte, se examina la dinámica del problema, que está determinada por el ajuste de las creencias y su repercusión sobre las variables de decisión y de resultado. Específicamente, estudiamos cómo varían el esfuerzo, la carga académica, las notas que obtiene un estudiante y su nivel de bienestar, a medida que su creencia de habilidad se aproxima a su valor real. Además de la trayectoria temporal de estas variables, indagaremos la velocidad a la cual convergen a sus valores de largo plazo consistentes con una creencia de habilidad insesgada.

La sección se compone de cuatro partes. En la primera subsección, se consignan los resultados más interesantes del modelo en ausencia de interacción con compañeros de clase. En la segunda, el foco se centra en los efectos introducidos por una externalidad positiva del esfuerzo de los compañeros de clase sobre el rendimiento individual. En la tercera subsección, se analiza la reputación académica basada en la obtención de mejores notas entre los estudiantes, y su repercusión sobre las decisiones y variables de resultado. Por último, en la cuarta subsección se muestran los efectos sobre las elecciones académicas de un estudiante sometido a un esquema de evaluación que

premia el “ranking” y que induce a una competencia entre los compañeros de clase por lograr la primera posición.

3.1. MODELO BÁSICO

En este modelo, el objetivo de un estudiante es maximizar una combinación de notas y carga académica, en ausencia de externalidad de compañeros de clase y de interés por señalar una habilidad alta. Suponemos una malla de cursos flexible, que permite al estudiante decidir cuánta carga académica sobrellevar, por lo cual la decisión del esfuerzo y carga académica se traducen en notas obtenidas en los cursos.

El estudiante, basado en una noción de su habilidad personal θ_i , determina un nivel de esfuerzo que implica un costo creciente. Asimismo, a mayor esfuerzo, se incrementa la dotación de recursos académicos $e_i\theta_i$ que el estudiante asigna a la obtención de notas o de avance curricular. El efecto interactivo entre el esfuerzo y la habilidad, esto es, que actúen como complementos en términos de los recursos académicos disponibles; lleva a que una creencia de mayor habilidad afecte positivamente la decisión de esfuerzo, y tenga una mayor incidencia sobre la decisión de la carga curricular y de la proyección de notas respecto de lo que tendría en caso de no ser complementos.

Si el estudiante opta por destinar una mayor fracción de sus recursos académicos al avance curricular, sacrifica la obtención de buenas notas, pudiendo incluso reducirlas. Por lo tanto, el mayor esfuerzo puede llevar a la obtención de peores notas, a pesar de que se incrementan los recursos académicos disponibles para su uso. Por el contrario, si el estudiante asigna una mayor proporción de sus recursos académicos a la obtención de notas, el resultado de estas mejorará.

De este modo, el problema considerado es el planteado en (1) cuando $\beta = \phi = 0$:

$$\begin{aligned} \max_{\{e, UD, Nota\}} \quad & UD^\gamma Nota^{(1-\gamma)} - e^2 \\ \text{s.a.} \quad & Nota + \eta UD = e\theta \end{aligned}$$

3.1.1. ESTÁTICA

En el óptimo, tanto el esfuerzo, la carga académica como la expectativa de notas, dependen positivamente de la creencia de habilidad. Un estudiante con una percepción alta de sí mismo, supone un rendimiento marginal del esfuerzo mayor al efectivo, por lo cual elige un nivel de esfuerzo y carga académica mayores, y presume la obtención de una mejor nota.

$$e_t(\theta_t) = a\theta_t \quad (3)$$

$$UD_t(\theta_t) = a\frac{\gamma}{\eta}\theta_t^2 \quad (4)$$

$$Nota_t(\theta_t) = a(1-\gamma)\theta_t^2 \quad (5)$$

$$\text{Con } a = \left(\frac{\gamma}{\eta}\right)^\gamma \frac{(1-\gamma)^{1-\gamma}}{2}.$$

Que el esfuerzo dependa positivamente de la creencia de habilidad, así como que las notas proyectadas y la decisión de carga curricular dependan cuadráticamente de esta creencia de habilidad, es consecuencia de que el esfuerzo y la habilidad actúen como complementos en la dotación de recursos académicos con que cuenta un estudiante: $e\theta$. En términos de los resultados del modelo, la principal diferencia es el caso en que se asume que el esfuerzo y el talento actúan como sustitutos (por ejemplo: $e + \theta$). En este caso alternativo, una mayor habilidad no afectaría el nivel de esfuerzo, y la decisión de carga curricular y la proyección de notas dejarían de reaccionar en la misma magnitud respecto de lo que lo hacen cuando el esfuerzo y el talento actúan como complementos. En consecuencia, en esta forma alternativa para la dotación de recursos académicos, los resultados serían menos marcados pero manteniendo el mismo signo. De hecho, cuando el esfuerzo y la habilidad son complementos, como se asume en nuestro modelo, el esfuerzo depende linealmente de la habilidad. Y como la decisión de carga curricular y proyección de notas dependen del esfuerzo y de la habilidad, entonces una mayor habilidad afecta por ambas vías a estas variables. En cambio, cuando la habilidad y el esfuerzo operan como sustitutos, entonces el esfuerzo es independiente de la habilidad, por lo que una mayor habilidad afecta positivamente la decisión de carga curricular y proyección de notas sólo por la vía de la mayor habilidad, y no por la vía del esfuerzo que no se afecta ante una mayor habilidad.

Proposición 1 *El esfuerzo $e(\theta_t, \eta, \gamma) = \left(\frac{\gamma}{\eta}\right)^\gamma \frac{(1-\gamma)^{1-\gamma}}{2} \theta_t$ es decreciente con respecto a η , y para η, θ_t fijos tiene un mínimo en $\gamma = \frac{\eta}{1+\eta}$.*

$$i. \frac{\partial e(\theta_t, \eta, \gamma)}{\partial \eta} < 0$$

$$ii. \frac{\partial e(\theta_t, \eta, \gamma)}{\partial \gamma} \leq 0 \Leftrightarrow \gamma \leq \frac{\eta}{1+\eta}$$

$$iii. e(\theta_t, \eta, \cdot) \text{ se minimiza en } \gamma = \frac{\eta}{1+\eta}$$

Demstración Proposición 1 :

i. $\frac{\partial e(\theta_t, \eta, \gamma)}{\partial \eta} < 0$

A partir de la expresión para el esfuerzo en (3), tenemos:

$$\frac{\partial e(\theta_t, \eta, \gamma)}{\partial \eta} = - \left(\frac{\gamma}{\eta} \right)^{\gamma+1} \frac{(1-\gamma)^{1-\gamma}}{2} \theta_t < 0$$

Como $\gamma \in (0, 1)$, el esfuerzo siempre será no creciente con respecto a η (el costo relativo entre UD_i y $Nota_i$).

ii. $\frac{\partial e(\theta_t, \eta, \gamma)}{\partial \gamma} \leq 0 \Leftrightarrow \gamma \leq \frac{\eta}{1+\eta}$

En efecto,

$$\frac{\partial e(\theta_t, \eta, \gamma)}{\partial \gamma} = a\theta_t \left(\ln \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right) - \ln(\eta) \right) \leq 0$$

Como $a\theta_t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \left(\ln \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right) - \ln(\eta) \right) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right) &\leq \eta \\ \Leftrightarrow \gamma &\leq \frac{\eta}{1+\eta} \end{aligned}$$

iii. $e(\theta_t, \eta, \cdot)$ se minimiza en $\gamma = \frac{\eta}{1+\eta}$

Aplicando la transformación monótona $\ln(\cdot)$ a la expresión del esfuerzo (3), tenemos que el esfuerzo se minimiza en γ cuando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(e(\theta_t, \eta, \gamma))}{\partial \gamma} &= \ln \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right) - \ln(\eta) = 0 \\ \Rightarrow \frac{\gamma}{1-\gamma} &= \eta \\ \gamma &= \frac{\eta}{1+\eta} \end{aligned}$$

□

El resultado [i.] es intuitivo. Si un bien (UD_i en este caso) es más barato, crece la utilidad marginal de los recursos académicos, haciéndose más atractivo el esfuerzo. El esfuerzo es un constituyente de los recursos con que cuenta un estudiante para asignar entre UD_i y $Nota_i$. La conveniencia de un mayor esfuerzo radica en el aporte al bienestar de un estudiante. Es decir, mientras mayor sea la utilidad marginal del esfuerzo más rentable será esforzarse. Así, cuanto mayor sea el costo de la carga académica (mayor η), menor será la rentabilidad del esfuerzo en términos de los bienes adquiridos y por tanto del bienestar alcanzado, por lo que convendrá incurrir en un menor esfuerzo.

En este sentido, conviene que se abaraten aquellos bienes con una mayor participación en el gasto, pues la utilidad marginal de una unidad extra de esfuerzo destinado a su consumo es mayor. En otras palabras, una unidad extra de esfuerzo rinde más cuando se asigna a bienes más baratos; o bien, mientras se gaste una mayor proporción de los recursos en bienes más económicos, la utilidad marginal de los mismos será mayor. Mientras más importante es la valoración de la carga académica en la función de utilidad de un estudiante (mayor γ), un encarecimiento de la carga académica se traduce en una reducción del esfuerzo más pronunciada. Esto ocurre debido a que mientras mayor es la importancia de UD_i en la función de utilidad, mayor es su participación en la dotación de recursos académicos con que cuenta un estudiante. Luego, un encarecimiento de la carga académica (mayor η) reduce la utilidad marginal del esfuerzo (pues se encarece uno de los “bienes”), por lo que disminuye el nivel de esfuerzo escogido. Este efecto se verá amplificado en la medida que la fracción de recursos asignados a la carga académica (γ), sea mayor. Esto es, mientras mayor sea la participación de UD_i en los recursos académicos, el efecto de un encarecimiento de UD_i intensificará la caída del esfuerzo asociado. Esto pues el encarecimiento de un bien con una mayor importancia en el gasto, reduce en mayor magnitud el poder adquisitivo de los recursos disponibles.

Gráficamente, los resultados anteriores se aprecian mediante una mirada vertical a las curvas del gráfico derecho de la figura 1. Cada una de estas curvas ilustra la relación entre el esfuerzo y γ (valoración de UD_i), para distintos valores de η (costo relativo entre UD_i y $Nota_i$). Claramente, a mayor η el esfuerzo escogido es menor. Y a medida que aumenta γ , esta reducción del esfuerzo es cada vez mayor.

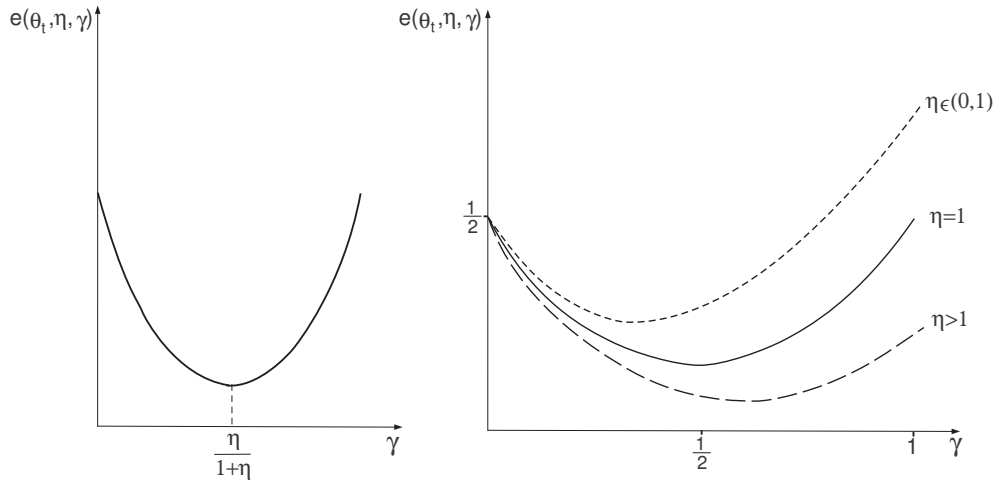


Figura 1: Esfuerzo, Precio UD-Nota, Valoración UD-Nota

Los siguientes resultados [ii.] y [iii.], se desprenden de un análisis horizontal de los gráficos de la figura 1. La decisión de esfuerzo se verá influida por la valoración relativa de los bienes en la función de utilidad del estudiante. Como ya se estableció, mientras más valorada sea UD_i en la función de utilidad, una mayor proporción de los recursos se asignará a su consumo. No obstante, será incierto el efecto de una mayor valoración relativa de UD_i respecto de $Nota_i$ sobre la decisión de esfuerzo. Se distinguen dos fuerzas contrapuestas. Por una parte, un mayor γ eleva la utilidad derivada del consumo de UD_i ; pero, por otra, disminuye la utilidad asociada a $Nota_i$. Así, para valores pequeños de γ , cuando este aumenta, el efecto positivo sobre el esfuerzo de la mayor utilidad de UD_i es superado por el efecto negativo de la menor utilidad de $Nota_i$, por lo que el esfuerzo termina disminuyendo. En cambio, un aumento de la valoración de UD_i para rangos de γ más grandes, eleva el esfuerzo pues predomina el efecto de UD_i por sobre el efecto de $Nota_i$. El gráfico izquierdo resume lo anterior, exhibiendo un rango en que el esfuerzo es decreciente y otro tramo en que es creciente en γ . En el cambio de tendencia, el esfuerzo alcanza un mínimo cuando $\gamma = \frac{\eta}{1+\eta}$.

Una mirada horizontal al gráfico derecho de la figura 1 muestra que el tramo del esfuerzo decreciente en γ es más extenso mientras mayor es η . Esto debido a que cuanto más cara es UD_i respecto de $Nota_i$, se aplaca el efecto positivo de la mayor valoración de la carga académica sobre la utilidad, prevaleciendo el efecto negativo de la menor valoración de las notas. Por consiguiente, el efecto de la mayor valoración de UD_i tarda más en manifestarse, por lo cual el esfuerzo es decreciente en un mayor rango. En general, mientras más asimétricos sean los costos respecto de los beneficios relativos entre UD_i y $Nota_i$, mayores incentivos habrán para esforzarse, puesto que el rendimiento marginal del esfuerzo en términos de utilidad es mayor. En particular, mientras más cara sea la carga académica respecto de las notas (mayor η) será conveniente esforzarse siempre que el beneficio más que compense los costos. Esto es, el

esfuerzo será más rentable cuanto menor sea la valoración de la carga académica en relación a las notas (menor γ), pues su mayor costo relativo tendrá un menor impacto en la pérdida de poder adquisitivo del esfuerzo.

Es posible reinterpretar esto escribiendo el punto donde el esfuerzo es mínimo como: $\eta = \frac{\gamma}{1-\gamma}$. De esta expresión, el parámetro η representa el costo de la carga académica en relación a las notas; y $\frac{\gamma}{1-\gamma}$ es la razón de participaciones en los recursos académicos de la carga académica y las notas, respectivamente. Por ello, el esfuerzo se reduce a medida que se asemeja la razón de costos entre UD_i y $Nota_i$, respecto de la razón de sus participaciones en los recursos académicos. Esto debido a que se reduce el margen para arbitrar la relación entre los costos y beneficios del esfuerzo, por lo que conviene un nivel menor del mismo.

La habilidad real de un estudiante no tiene efecto sobre las variables de control (carga académica, esfuerzo y expectativa de nota), pues estas están determinadas por la creencia de la habilidad al momento de decidir. Sin embargo, la habilidad real sí afecta las notas y utilidad conseguidas por un estudiante. Una mayor habilidad repercute positivamente en las notas que efectivamente obtiene un estudiante, en el rango de notas positivas. Del mismo modo, en el tramo de notas positivas, una mayor habilidad real reporta mayores niveles de utilidad a tasa decreciente.

$$\begin{aligned} Nota_t^*(\theta_t, \theta^*) &= \begin{cases} e_t \theta^* - \eta UD_t & \text{si } e_t \theta^* - \eta UD_t \geq 0 \\ 0 & \sim \end{cases} \\ &= \begin{cases} a \theta_t (\theta^* - \gamma \theta_t) & \text{si } \theta_t \leq \frac{\theta^*}{\gamma} \\ 0 & \sim \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} Utilidad_t^*(\theta_t, \theta^*) &= \begin{cases} UD_t^\gamma (Nota_t^*)^{1-\gamma} - e_t^2 & \text{si } e_t \theta^* - \eta UD_t \geq 0 \\ -e_t^2 & \sim \end{cases} \\ &= \begin{cases} a \left(\frac{\gamma}{\eta}\right)^\gamma \theta_t \left[\theta_t^\gamma (\theta^* - \gamma \theta_t)^{1-\gamma} - \frac{(1-\gamma)^{1-\gamma}}{2} \theta_t \right] & \text{si } \theta_t \leq \frac{\theta^*}{\gamma} \\ -(a \theta_t)^2 & \sim \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

Suponer una habilidad personal superior a la efectiva ($\theta_t > \theta^*$), tiene consecuencias sobre las decisiones y resultados académicos de un estudiante. Estudiantes con una creencia de habilidad personal superior a la real, decidirán tomar una alta carga académica, se esforzarán más y esperarán obtener mayores notas amparados en una percepción personal sobrestimada. Estas decisiones tienen efectos contrapuestos sobre las notas efectivamente obtenidas. Por una parte, una creencia de habilidad personal alta lleva

aparejada una decisión de mayor esfuerzo, el cual se traduce en mejores notas. Sin embargo, la creencia de alta habilidad personal también lleva a un estudiante a elegir una mayor carga académica, lo cual puede ocasionar una reducción de las notas. Esto porque el estudiante se recarga por sobre sus capacidades reales, lo cual se manifiesta en la obtención de peores notas respecto de las proyectadas al momento de escoger la carga académica. En consecuencia, es incierto el efecto sobre las notas de una creencia de habilidad por sobre las capacidades efectivas. Dependiendo de cuál de estas dos fuerzas contrapuestas predomine, será la incidencia de la creencia de habilidad personal sobre la nota obtenida por un estudiante. Sólo en el caso en que prevalece el efecto de mayor esfuerzo por sobre el de mayor carga académica, mejoran las notas obtenidas por un estudiante con una creencia de habilidad personal superior a la real.

Lema 2 $\frac{\partial Nota_t^*(\theta_t, \theta^*)}{\partial \theta_t} \leq 0$ ssi $\theta_t \in (\frac{\theta^*}{2\gamma}, \frac{\theta^*}{\gamma})$.

Demostración : A partir de (6), se tiene:

$$\frac{\partial Nota_t^*}{\partial \theta_t} = \begin{cases} a(\theta^* - 2\gamma\theta_t) & \text{si } \theta_t \leq \frac{\theta^*}{\gamma} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

□

Gráficamente:

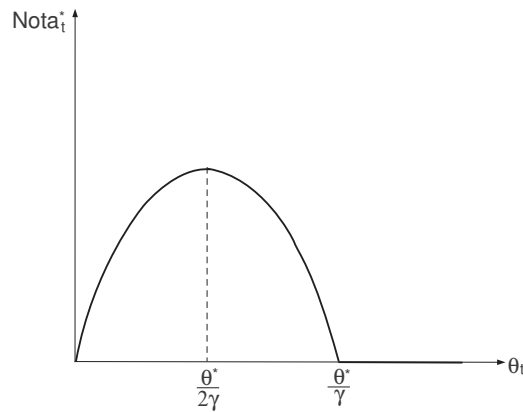


Figura 2

En el rango de notas positivas, las notas son decrecientes en la creencia de habilidad personal si $\theta_t \in (\frac{\theta^*}{2\gamma}, \frac{\theta^*}{\gamma})$. Esto es, en este rango de creencia de habilidad, una expectativa de mayor habilidad personal hace que el estudiante tome más cursos de los que puede sobrellevar con el nivel de esfuerzo escogido, por lo que las notas que obtiene decaen a pesar del mayor esfuerzo elegido. En cambio, en el rango $\theta_t \in (0, \frac{\theta^*}{2\gamma})$, una expectativa de mayor habilidad personal lleva a la obtención de una mejor nota.

En suma, podemos establecer que la habilidad real θ^* de un estudiante siempre tiene un efecto positivo sobre la nota y bienestar alcanzados. En cambio, la creencia de habilidad θ_t tiene un efecto ambiguo sobre el desempeño académico y la utilidad. Esta ambivalencia radica en que una mayor creencia de habilidad personal promueve tanto el esfuerzo como la decisión de avance curricular. Como el aumento del esfuerzo y la elección de mayor carga académica tienen efectos opuestos sobre las notas, estas pueden aumentar o disminuir. Del mismo modo, el cambio en el bienestar disfrutado por un estudiante cuando aumenta el esfuerzo también es incierto y dependerá, nuevamente, de qué efecto prevalezca. Si como consecuencia de una mayor creencia de habilidad, además de una mayor carga académica las notas obtenidas mejoran, entonces la utilidad también mejorará. En tal situación, el costo del mayor esfuerzo asociado a una creencia de habilidad más alta se más que compensa con la mayor utilidad asociada a las mejores notas y al mayor avance curricular logrado.

Adicionalmente, puede notarse que estudiantes que valoran más la carga académica en relación a las notas (mayor γ), exhiben notas decrecientes con respecto a su percepción de habilidad en un mayor rango de habilidades efectivas. Esto debido a que priorizan el avance curricular por sobre la obtención de notas altas, por lo que una mejor percepción de habilidad personal los induce a elegir una mayor carga académica en perjuicio de las notas.

La utilidad de un estudiante mejora a medida que aproxima su noción de habilidad personal hacia su verdadero valor, y se maximiza cuando ha convergido a él.

Lema 3 ($\forall \theta^*$) $Utilidad_t^*(\cdot, \theta^*)$ es máxima cuando $\theta_t = \theta^*$.

Demostración : Ver Apéndice.

□

Gráficamente:

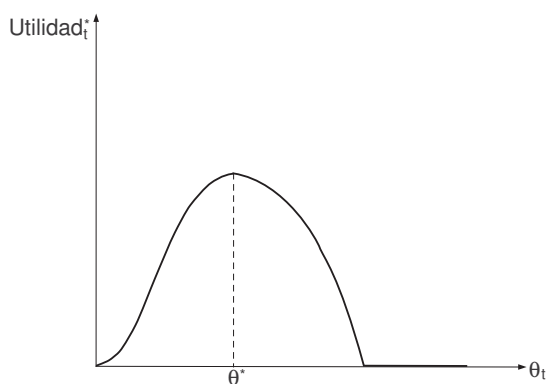


Figura 3

Lo anterior es bastante intuitivo, puesto que un agente con una percepción más precisa de sí mismo toma mejores decisiones (basado en información certera), lo cual redundará en niveles de utilidad más altos.

3.1.2. DINÁMICA

En lo que sigue se examina cómo los resultados estáticos de la elección de un estudiante (carga académica, esfuerzo, notas obtenidas y nivel de bienestar), se ven afectados por el ajuste de creencias de habilidad personal a partir del contraste entre estos mismos resultados y los proyectados basados en la creencia de habilidad inicial. La comparación entre las notas proyectadas (sustentadas en θ_i) y las notas obtenidas (dependientes de θ^*), permiten al estudiante deducir su posible sesgo y así actualizar su expectativa de habilidad personal a través del tiempo. La diferencia entre la nota proyectada y la obtenida (diferencia entre (6) y (5)), está dada por:

$$Nota_t^*(\theta_t, \theta^*) - Nota_t(\theta_t) = a\theta_t^2 \left(\frac{\theta_t^*}{\theta_t} - 1 \right)$$

Claramente estudiantes optimistas ($\theta_t > \theta^*$) obtendrán notas menores de las esperadas, con lo cual dispondrán de información que les permitirá redefinir su idea acerca de sí mismos. De (2), recordemos que el mecanismo mediante el cual un estudiante ajusta su creencia de habilidad cada periodo¹, es:

$$\theta_{t+1} = \theta_t + \mu(Nota_t^* - Nota_t)$$

Un estudiante optimista ($\theta_t > \theta^*$), observa notas inferiores a las esperadas, por lo cual ajusta a la baja su percepción de habilidad ($\theta_{t+1} < \theta_t$). Dinámicamente, la repetición de este proceso aproxima la percepción de habilidad hacia su valor real ($\theta_t \rightarrow \theta^*$). En la transición hacia la verdadera habilidad, un estudiante optimista reduce tanto su esfuerzo, carga académica, como su expectativa de nota. Inversamente, cuando un estudiante pesimista ($\theta_t < \theta^*$) ajusta su creencia, incrementará su esfuerzo, carga académica y expectativa de nota. En cualquiera de los casos, la convergencia de la creencia de habilidad hacia la habilidad real, incrementa la utilidad que obtiene un estudiante.

¹En la **sección 5** se propone un ajuste bayesiano para la creencia de habilidad de un estudiante. A grandes rasgos, la dinámica resultante es más rápida en el ajuste pero menos estable.

Proposición 4 *A partir de una creencia de habilidad inicial, la sucesión converge hacia la habilidad efectiva.*

- Si $\theta_0 > \theta^*$, entonces $\theta_t \searrow \theta^*$.
- Si $\theta_0 < \theta^*$, entonces $\theta_t \nearrow \theta^*$.

Demostración : Ver Apéndice.

□

Sin embargo, la evolución de la nota efectiva ($Nota_t^*$) no es necesariamente monótona en la creencia de habilidad. Pueden distinguirse dos casos, según cómo sea la valoración relativa de las notas y la carga académica en la función de utilidad.

Si se valora el avance curricular por sobre la obtención de mejores notas, entonces $\gamma > \frac{1}{2}$. En este caso la trayectoria de las notas variará dependiendo de cuán optimista o pesimista sea la creencia de habilidad personal que posea un estudiante en relación a su habilidad efectiva. En el caso de un estudiante sobre-optimista ($\theta_t > \theta^*$), a partir del umbral de notas positivas $\theta_t \leq \frac{\theta^*}{\gamma}$ (las notas son cero cuando el alumno se sobrecarga de cursos suponiendo una habilidad muy por sobre la real), la senda de las notas efectivas será creciente hasta estabilizarse cuando se haya convergido a la habilidad efectiva. En tanto, un estudiante pesimista de su habilidad personal ($\theta_t < \theta^*$), tendrá notas crecientes en un primer tramo, y luego decrecientes hasta estabilizarse cuando la creencia de habilidad haya convergido a su valor real. Las notas serán crecientes mientras domine el efecto positivo de un aumento del esfuerzo, y decrecientes cuando domine el efecto negativo sobre las notas de una mayor carga académica. La figura 4 ilustra ambos casos:

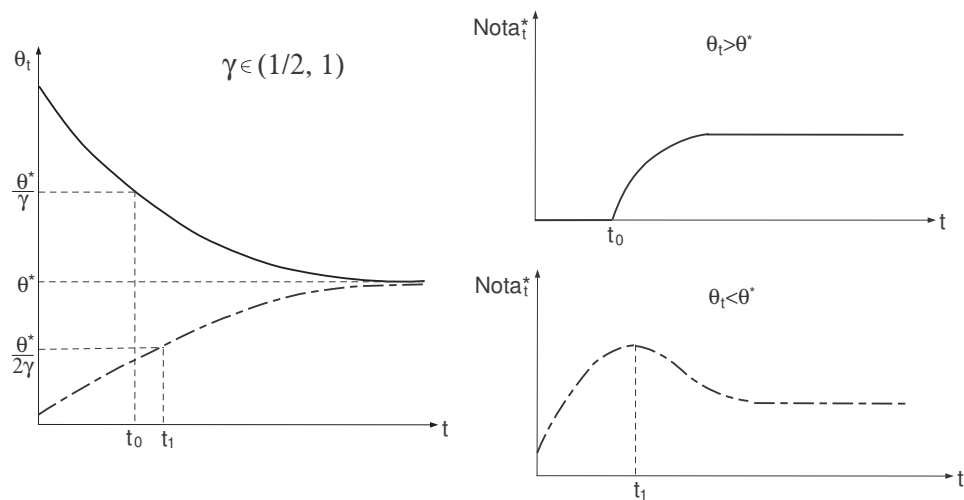


Figura 4

En el caso en que se valora obtener mejores notas por sobre el avance curricular, entonces $\gamma < \frac{1}{2}$. Aquí, un estudiante optimista exhibe un primer tramo de notas creciente y un segundo tramo decreciente. La tendencia de las notas será creciente mientras prevalezca el efecto positivo de una disminución de la carga académica por sobre el efecto negativo de una reducción del nivel de esfuerzo. A medida que $\theta_t \rightarrow \theta^*$ y cuando la reducción en el nivel de esfuerzo supera el efecto positivo de una disminución de la carga académica, las notas se tornan decrecientes. Las notas se estabilizan cuando la creencia de habilidad converge a la habilidad efectiva. Por su parte, un estudiante pesimista ($\theta_t < \theta^*$), ostenta una trayectoria creciente de notas efectivas en todo el lapso que toma la convergencia de la creencia de habilidad. La figura 5 resume estas secuencias de eventos:

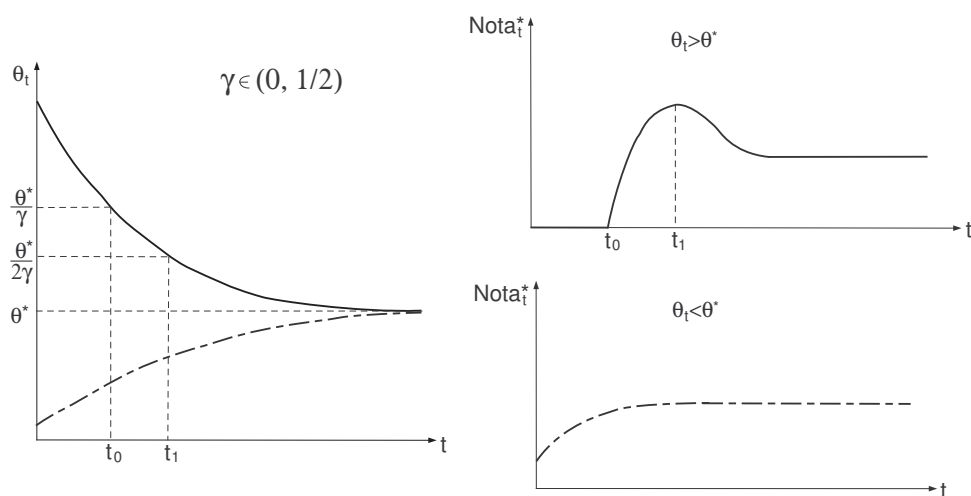


Figura 5

En cualquier tipo de estudiante (optimista o pesimista, que valora más Nota_t a UD_t o vice-versa), una mejor noción acerca de su habilidad personal lleva a mayores niveles de utilidad. Por tanto, la dinámica de ajuste de creencias siempre eleva el bienestar alcanzado por el estudiante, lo cual queda de manifiesto en la figura 6:

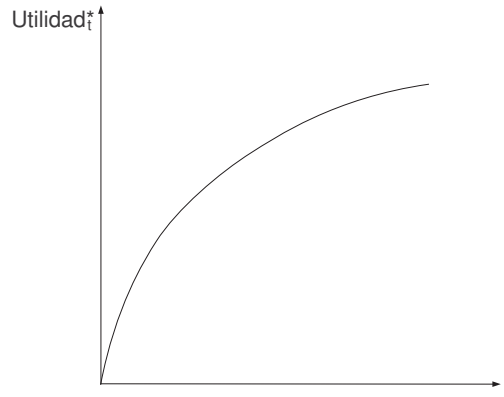


Figura 6

Cabe destacar que cuando la nota obtenida por un estudiante a medida que actualiza su creencia de habilidad, alcanza su máximo; la creencia de habilidad no ha convergido necesariamente a su nivel real (por ejemplo, el caso del estudiante pesimista que valora más el avance curricular, o el optimista que valora más las notas). Esto se debe a que es posible mejorar la utilidad mediante una mayor asignación de recursos académicos al avance curricular, o a través de reducciones en el nivel de esfuerzo. En ambos casos, las notas efectivas comienzan a caer hasta estabilizarse cuando $\theta_t = \theta^*$ y la $Utilidad_t^*$ es máxima. En este sentido, en términos del bienestar del estudiante, una mejor nota no necesariamente es deseable.

No obstante, desde la perspectiva de un regulador interesado en inducir notas altas por parte de los estudiantes, hay un espacio para explotar el sesgo cognitivo de los mismos. Es decir, con el objetivo de lograr un mejor rendimiento, sería necesario sacrificar parte del bienestar del estudiante manteniéndolo con una creencia de habilidad personal sesgada. Más específicamente, en el caso de un estudiante pesimista ($\theta_t < \theta^*$) que valora más el avance curricular que la nota ($\gamma > \frac{1}{2}$), convendría mantener cierto sesgo pesimista ($\theta_t = \frac{\theta^*}{2\gamma}$) a fin de mantener notas más elevadas. Este nivel de pesimismo óptimo garantizaría un rendimiento superior al logrado cuando este tipo de estudiantes refina su noción de habilidad personal. Del mismo modo, en el caso de estudiantes optimistas ($\theta_t > \theta^*$) que valoran más las notas que la carga académica ($\gamma < \frac{1}{2}$), al regulador maximizador de nota le convendría mantenerles un nivel de optimismo ($\theta_t = \frac{\theta^*}{2\gamma}$). Así conseguiría la obtención de notas máximas, y por sobre de las alcanzadas en ausencia de sesgo cognitivo ($\theta_t = \theta^*$).

En los otros tipos de estudiantes (optimistas que valoran más las notas que la carga académica, o pesimistas que valoran más la carga académica que las notas), el ajuste de sus creencias de habilidad personal lleva a una senda siempre creciente de las notas. Por lo tanto, si se quisiera inducir el logro de notas máximas por parte de los mismos,

habría acelerar el procesos de ajuste de sus creencias de habilidad a sus valores reales, erradicando el sesgo cognitivo.

Sería interesante analizar el caso en que la habilidad real (θ^*) sí variara en el tiempo. Por ejemplo, podría plantearse un modelo en que la habilidad real se correlaciona positivamente con el esfuerzo pasado. Una formulación posible es $E(\theta_{t+1}) = f(\theta_t, e_t)$, con $f(\cdot)$ creciente en ambos argumentos. Este tipo de modelos genera distintas implicancias dependiendo de la forma funcional de $f(\cdot)$. Si θ_t y e_t son complementos (por ejemplo: $f = \theta_t e_t$), entonces puede existir multiplicidad de equilibrios. Por ejemplo, en Dewatripont et al (1999) se discuten las implicancias de un modelo de *career concerns* tipo *learning by doing*, en que la habilidad del segundo periodo es el resultado tanto de la habilidad intrínseca de un agente como del esfuerzo realizado el primer periodo. Como plantean los autores, suponer complementariedad entre el esfuerzo y el talento puede redundar en múltiples equilibrios.

Sin embargo, el enfoque que estamos considerando es de un modelo en que los agentes sólo extraen señales con miras a conocer su verdadera habilidad. Entonces, el problema es estadístico, y no de creencias que actúan como profecías autocumplidas (“self-fulfilling”).

3.2. EXTERNALIDAD COMPAÑEROS

En este modelo incorporamos el efecto de una externalidad asociada a la interacción con compañeros de clase. Asumimos que el esfuerzo de los compañeros de clase tiene un efecto positivo sobre el rendimiento reflejado a través de las notas. Este problema equivale al planteado en (1) cuando $\phi = 0$ y $\beta > 0$.

Cabe señalar que en este modelo son las acciones de los compañeros de clase en relación a su compromiso académico, las que mejoran el ambiente de trabajo, y consigo promueven el esfuerzo colectivo. Las habilidades intrínsecas de los compañeros de clase, en sí mismas, no inducen un mayor esfuerzo, salvo que se traduzcan en un mayor trabajo en clases que mejore el clima de estudio.

$$\begin{aligned} & \underset{\{e_i, UD_i, Nota_i\}}{\text{máx}} && UD_i^\gamma Nota_i^{(1-\gamma)} - e_i^2 \\ & \text{s.a.} && Nota_i + \eta UD_i = (e_i + \beta e_j) \theta_i \end{aligned}$$

En la descripción de resultados, centraremos la atención en las diferencias inducidas por la presencia de la externalidad respecto del modelo sin interacción descrito en la subsección 3.1.

Supondremos que las creencias alusivas a las habilidades son comunes entre los individuos. Lo que un estudiante crea sobre su propia habilidad y la del resto, es compartido por los demás. Es decir, las creencias o percepciones individuales son equivalentes a las colectivas.

3.2.1. ESTÁTICA

En el óptimo, la externalidad no afecta la decisión de esfuerzo debido a que se ha asumido una forma aditiva para ésta. En consecuencia, tal como se presentó en el modelo básico, el rendimiento marginal del esfuerzo del estudiante i sigue siendo θ_{it} .

Sin embargo, la elección de la carga académica y la expectativa de notas sí se ven alteradas por la presencia de la externalidad. Mientras mayor sea el efecto de la externalidad β , o mayor sea la creencia de habilidad de los compañeros de clase θ_{jt} , un estudiante escogerá una mayor carga académica y esperará obtener mejores notas.

$$e_{it}(\theta_{it}) = a\theta_{it} \quad (8)$$

$$UD_{it}(\theta_{it}, \theta_{jt}) = a\frac{\gamma}{\eta}\theta_{it}(\theta_{it} + \beta\theta_{jt}) \quad (9)$$

$$Nota_{it}(\theta_{it}, \theta_{jt}) = a(1 - \gamma)\theta_{it}(\theta_{it} + \beta\theta_{jt}) \quad (10)$$

$$\text{Con } a = \left(\frac{\gamma}{\eta}\right)^\gamma \frac{(1-\gamma)^{1-\gamma}}{2}.$$

Al igual que en el modelo básico, la habilidad real θ_i^* de un estudiante no tiene efecto sobre sus variables de decisión, ni tampoco lo tiene la habilidad efectiva de los compañeros θ_j^* . En la elección de estas variables sólo influyen las habilidades percibidas θ_{it}, θ_{jt} . En cambio, la nota y utilidad efectivas sí están determinadas por la habilidad real de un estudiante (no así de la habilidad efectiva de los compañeros de clase²). En el rango de notas positivas, tanto la nota como la utilidad efectivas aumentan como consecuencia de la externalidad positiva que ejercen los compañeros de clase.

$$\begin{aligned} Nota_{it}^*(\theta_{it}, \theta_i^*, \theta_{jt}) &= \begin{cases} (e_{it} + \beta e_{jt})\theta_i^* - \eta UD_{it} & \text{si } (e_{it} + \beta e_{jt})\theta_i^* - \eta UD_{it} \geq 0 \\ 0 & \sim \end{cases} \\ &= \begin{cases} a(\theta_{it} + \beta\theta_{jt})(\theta_i^* - \gamma\theta_{it}) & \text{si } \theta_{it} \leq \frac{\theta_i^*}{\gamma} \\ 0 & \sim \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} Utilidad_{it}^*(\theta_{it}, \theta_i^*, \theta_{jt}) &= \begin{cases} UD_{it}^\gamma (Nota_{it}^*)^{1-\gamma} - e_{it}^2 & \text{si } (e_{it} + \beta e_{jt})\theta_i^* - \eta UD_{it} \geq 0 \\ -e_{it}^2 & \sim \end{cases} \\ &= \begin{cases} a\left(\frac{\gamma}{\eta}\right)^\gamma \left[\theta_{it}^\gamma (\theta_{it} + \beta\theta_{jt})(\theta_i^* - \gamma\theta_{it})^{1-\gamma} - \frac{(1-\gamma)^{1-\gamma}}{2} \theta_{it}^2 \right] & \text{si } \theta_{it} \leq \frac{\theta_i^*}{\gamma} \\ -(a\theta_{it})^2 & \sim \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

El impacto de una creencia de habilidad personal mayor sobre la nota obtenida, como se analizó en el modelo básico, es ambiguo. Se contraponen el efecto positivo del mayor esfuerzo, con el efecto negativo de una sobrecarga académica. La existencia de la externalidad refuerza el incentivo a una mayor carga académica, por lo cual se expande el rango en que la nota efectiva es decreciente.

²La habilidad real de los compañeros de clase θ_j^* no incide en la nota obtenida ni en la utilidad alcanzada ($Nota_{it}^*, Utilidad_{it}^*$), debido a que éstas están determinadas por el esfuerzo de los compañeros, el cual sólo depende de su propia creencia de habilidad personal θ_{jt} .

Proposición 5 La externalidad positiva de los compañeros de clase $\beta\theta_{jt}$, amplía el rango de valores de θ_{it} en que $Nota_{it}^*(\theta_{it}, \theta_i^*, \theta_{jt})$ es decreciente en θ_{it} .

Demostración : A partir de (11)

$$\frac{\partial Nota_{it}^*}{\partial \theta_{it}} = \begin{cases} a[\theta_i^* - \gamma(2\theta_{it} + \beta\theta_{jt})] & \text{si } \theta_{it} \leq \frac{\theta_i^*}{\gamma} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Las notas serán no crecientes en θ_{it} , cuando $\theta_{it} \in \left(\frac{\theta_i^*}{2\gamma} - \frac{\beta}{2}\theta_{jt}, \frac{\theta_i^*}{\gamma}\right)$. Este rango es más extenso que el derivado en ausencia de externalidad: $\left(\frac{\theta_i^*}{2\gamma}, \frac{\theta_i^*}{\gamma}\right)$.

□

En la figura 7 se ilustra la expansión del rango en que las notas efectivas son decrecientes, como consecuencia de la externalidad asociada a la interacción con compañeros:

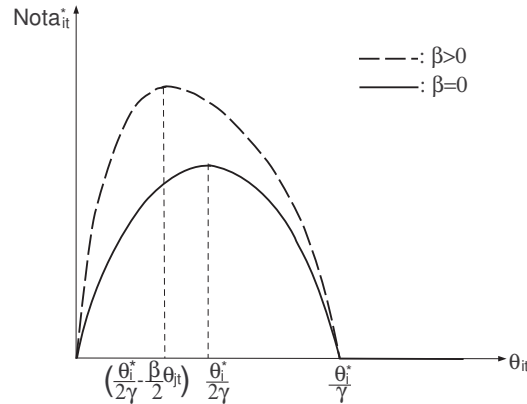


Figura 7

Para cualquier θ_{it} , la nota efectiva alcanzada será mayor debido al efecto positivo de la externalidad derivada del esfuerzo de los compañeros de clase, que actúa como sustituto del esfuerzo propio. Por otra parte, una mayor externalidad $\beta\theta_{jt}$ aumenta el rango de posibilidades en que la nota efectiva es decreciente en la creencia de habilidad θ_{it} . Lo anterior se debe a que la externalidad aumenta los incentivos a la carga académica y no afecta los incentivos al esfuerzo. Así, como el efecto marginal positivo del esfuerzo sobre las notas permanece constante, la mayor carga académica escogida como consecuencia de la externalidad, termina reduciéndolas.

Al igual que en el modelo básico, la utilidad efectiva alcanza su máximo cuando la creencia de habilidad ha convergido a su verdadero nivel, pues es ahí cuando un individuo toma decisiones óptimamente.

Proposición 6 $(\forall \theta_i^*, \theta_{jt})$ $Utilidad_{it}^*(\cdot, \theta_i^*, \theta_{jt})$ es máxima en $\theta_{it} = \theta_i^*$.

Demostración : Ver Apéndice.

□

Adicionalmente, la externalidad positiva derivada del esfuerzo de los compañeros de clase, eleva la utilidad que obtiene un estudiante para cualquier θ_{it} . Gráficamente:

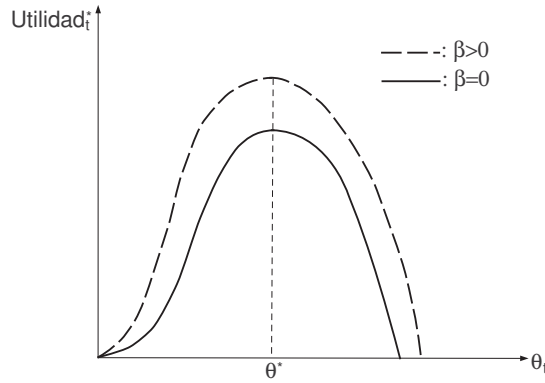


Figura 8

La externalidad positiva que ejercen los compañeros de clase, será más beneficiosa en términos de las notas obtenidas y el bienestar alcanzado mientras más esforzados sean los compañeros. A mayor esfuerzo de j , mayor es la externalidad positiva que enfrenta i . Dado que el esfuerzo de j es proporcional a la creencia de su habilidad, mientras mayor sea ésta el estudiante i obtendrá tanto mayores notas como mayor nivel de utilidad.

Proposición 7 En el rango de notas positivas ($\theta_{it} \leq \frac{\theta_i^*}{\gamma}$), mientras mayor sea θ_{jt} el estudiante i obtiene notas y utilidad más altas.

Demostración :

$$\frac{\partial Nota_{it}^*}{\partial \theta_{jt}} = \begin{cases} a\beta(\theta_i^* - \gamma\theta_{it}) & \text{si } \theta_{it} \leq \frac{\theta_i^*}{\gamma} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$\frac{\partial Utilidad_{it}^*}{\partial \theta_{jt}} = \begin{cases} a\left(\frac{\gamma}{\eta}\right)^\gamma \beta \theta_{it}^\gamma (\theta_i^* - \gamma\theta_{it})^{1-\gamma} & \text{si } \theta_{it} \leq \frac{\theta_i^*}{\gamma} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

En efecto, tanto la nota como la utilidad de i son crecientes en la expectativa de habilidad de j .

□

3.2.2. DINÁMICA

En esta subsección se establece el impacto de la externalidad sobre el ajuste dinámico de la creencia de habilidad, y las repercusiones en las trayectorias temporales de las variables de decisión (e_{it} , $Nota_{it}$, UD_{it}) y de resultado ($Nota_{it}^*$, $Utilidad_{it}^*$).

Proposición 8 *A partir de una creencia de habilidades iniciales, las sucesiones convergen hacia las habilidades efectivas.*

- Si $\theta_{k0} > \theta_k^*$, entonces $\theta_{kt} \searrow \theta_k^*$
- Si $\theta_{k0} < \theta_k^*$, entonces $\theta_{kt} \nearrow \theta_k^*$ $k = \{i, j\}$

Demostración : Ver Apéndice.

□

En lo que sigue, se analizará el caso de un estudiante i optimista de su habilidad ($\theta_{it} > \theta_i^*$), expuesto a la externalidad positiva del esfuerzo de un estudiante j pesimista de su habilidad ($\theta_{jt} < \theta_j^*$). Ambos ajustan sus creencias de habilidad, hasta converger a los valores reales.

En consideración a lo anterior, la creencia de habilidad del agente i disminuirá dinámicamente, mientras que la del agente j aumentará, hasta converger a las habilidades efectivas.

Al igual que en el modelo básico, la dinámica de la nota obtenida por un estudiante puede ser creciente o decreciente dependiendo del rango de valores en que se sitúe la creencia de habilidad. La externalidad positiva del esfuerzo de los compañeros de clase, modifica el punto en que la nota cambia su tendencia creciente a decreciente en θ_{it} . Específicamente, la externalidad reduce el punto de quiebre de $\frac{\theta_i^*}{2\gamma}$ a $(\frac{\theta_i^*}{2\gamma} - \frac{\beta}{2}\theta_{jt})$. Y, debido a que centraremos el análisis en el caso en que la creencia de habilidad del estudiante j aumenta a través del tiempo, el punto de quiebre decaerá dinámicamente.

Denotemos al punto de quiebre dinámico como $\Upsilon_t = (\frac{\theta_i^*}{2\gamma} - \frac{\beta}{2}\theta_{jt})$, y al estado estacionario del mismo, por $\Upsilon^* = (\frac{\theta_i^*}{2\gamma} - \frac{\beta}{2}\theta_j^*)$. Nótese que $\Upsilon_t \searrow \Upsilon^*$, esto es, el punto de quiebre decae hasta que el estudiante j ha convergido a su creencia de habilidad.

Dependiendo del rango de valores en que se encuentre γ , se distinguen dos casos para la evolución de las notas del estudiante optimista i .

- **Caso 1:** $\gamma > \frac{1}{2}$

Aquí el estudiante i , cuya creencia de habilidad excede su habilidad efectiva, valora el avance curricular por sobre las notas. Esto implica que $Y_t < \theta_{it} \ \forall t$, con lo cual las notas tendrán una trayectoria creciente durante todo el proceso de ajuste de la creencia de habilidad. Esto ocurre debido a que a medida que el estudiante ajusta su creencia de habilidad a la baja, el efecto negativo sobre las notas de la reducción del esfuerzo es superado por el efecto positivo de la menor carga académica elegida, con lo cual las notas obtenidas se incrementan. Este resultado es idéntico al ilustrado en la figura 4, del modelo básico revisado en la sección 3.1.2.

- **Caso 2:** $\gamma < \frac{1}{2}$

Cuando i valora mayormente las notas en relación a la carga académica, la existencia de la externalidad introduce cambios a la trayectoria de las notas. Dependiendo de la posición de la habilidad efectiva de i en relación al equilibrio del punto de quiebre dinámico de la trayectoria de notas, destacan dos nuevos casos:

- i. $Y^* > \theta_i^*$

Las notas exhiben una trayectoria creciente en el tramo en que $\theta_{it} > Y_t$, alcanzando el máximo cuando $\theta_{it} = Y_t$. Una vez que $\theta_{it} < Y_t$, la nota comienza a decrecer hasta estabilizarse en $\theta_{it} = \theta_i^*$. Gráficamente:

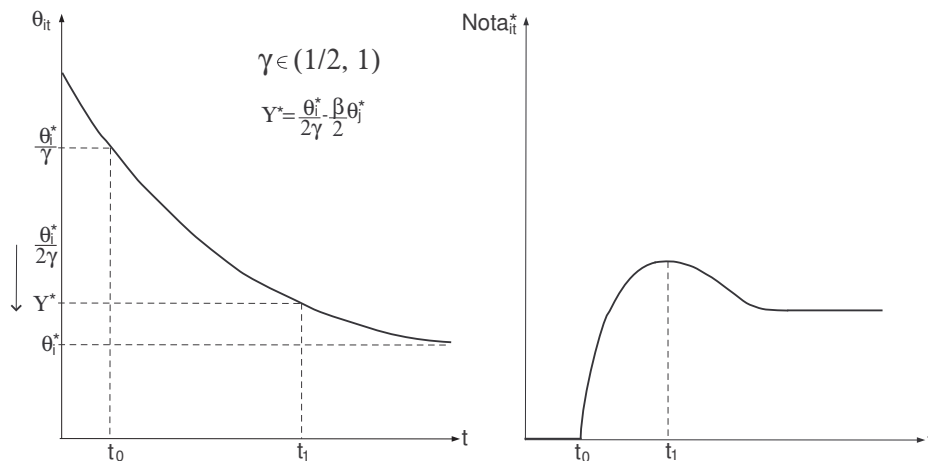


Figura 9

ii. $\Upsilon^* < \theta_i^*$

En este caso, la evolución de las notas puede adoptar dos trayectorias. Una es que sea siempre creciente, la cual se da si durante todo el proceso de ajuste de las creencias de habilidades, $\theta_{it} > \Upsilon_t$. Esta tendencia creciente se estabiliza en $\theta_{it} = \theta_i^*$. El panel derecho inferior de la figura 10 ilustra este caso.

La segunda trayectoria de notas posible, se da si la cota dinámica Υ_t queda transitoriamente por encima de la creencia de habilidad θ_{it} , ante lo cual las notas disminuyen. Una vez que $\theta_{it} > \Upsilon_t$, las notas retoman su tendencia creciente hasta estabilizarse en $\theta_{it} = \theta_i^*$. El panel derecho superior de la figura 10, expone gráficamente esta trayectoria.³

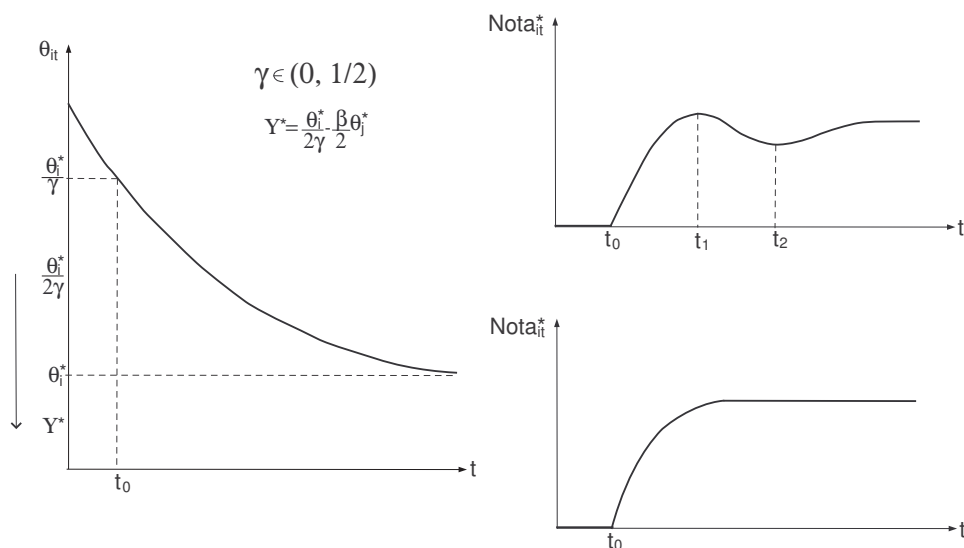


Figura 10

Al igual que en el modelo básico, la utilidad se maximiza en $\theta_{it} = \theta_i^*$, punto en el cual la nota alcanzada no es necesariamente la máxima.

³En el lapso (t_0, t_1) : $\theta_i^* < \Upsilon_t < \theta_{it}$, las notas exhiben una tendencia creciente. En (t_1, t_2) : $\theta_i^* < \theta_{it} < \Upsilon_t$, por lo cual las notas son decrecientes. A partir de t_2 en adelante, $\Upsilon_t < \theta_{it}$, por lo que las notas crecen hasta estabilizarse en $\theta_{it} = \theta_i^*$.

3.3. PRESTIGIO ACADÉMICO Y SOBREVALORACIÓN DE LA NOTA

En esta variante del modelo estudiamos la importancia para un estudiante de mantener una reputación de “inteligente” frente a sus compañeros de clase. El prestigio académico frente a los pares se construye a partir de las notas obtenidas. Las notas reflejan la habilidad, por tanto estudiantes que desean señalar alta habilidad se verán obligados a incurrir en un mayor esfuerzo a fin de obtener notas altas. La valoración del prestigio académico es equivalente a darle una alta prioridad a las notas en la función objetivo a maximizar, pues mostrarse de habilidad alta exige el logro de notas más elevadas respecto a los compañeros. Cuando esto ocurre, el problema que resuelve un estudiante corresponde al planteado al planteado en (1) cuando $\phi > 0$ y $\beta = 0$.

$$\begin{aligned} \max_{\{e_i, UD_i, Nota_i\}} \quad & UD_i^\gamma Nota_i^{(1-\gamma)} \left(UD_i^{-\phi \mathbf{1}_{\{Nota_i > Nota_j\}}} Nota_i^{\phi \mathbf{1}_{\{Nota_i > Nota_j\}}} \right) - e_i^2 \\ \text{s.a.} \quad & Nota_i + \eta UD_i = e_i \theta_i \end{aligned}$$

Como una creencia de alta habilidad lleva a un estudiante a esperar obtener una buena nota, es posible replantear la función de utilidad del siguiente modo:

$$UD_i^\gamma Nota_i^{(1-\gamma)} \left(UD_i^{-\phi \mathbf{1}_{\{\theta_i > \theta_j\}}} Nota_i^{\phi \mathbf{1}_{\{\theta_i > \theta_j\}}} \right)$$

Visto así, la percepción de habilidad personal que posea un estudiante en relación a sus compañeros de clase afecta la ponderación otorgada a las notas y carga académica en la función de utilidad. Es decir, si el estudiante i se percibe más hábil que sus pares ($\theta_i > \theta_j$), entonces esperará obtener mayores notas y las valorará en mayor medida en su utilidad. Por consiguiente, el problema a resolver será:

$$\begin{aligned} \max_{\{e_i, UD_i, Nota_i\}} \quad & UD_i^{(\gamma-\phi)} Nota_i^{(1-\gamma+\phi)} - e_i^2 \\ \text{s.a.} \quad & Nota_i + \eta UD_i = e_i \theta_i \end{aligned}$$

A diferencia del modelo con externalidad, aquí no es necesario suponer que las creencias individuales son similares a las colectivas. Independiente de lo que perciban los compañeros, basta que un estudiante sea sobreconfiado y crea tener una mayor habilidad que el resto, para que se dedique más a la obtención de mejores notas.

3.3.1. ESTÁTICA

Que el estudiante i se sienta más hábil que sus compañeros j , lo lleva a otorgarle una mayor importancia a las notas en su función de utilidad. En este sentido, el parámetro ϕ sesga la valoración relativa de notas y carga académica hacia las notas, lo cual tiene consecuencias sobre las variables de decisión.

El efecto directo de una sobre-ponderación de las notas en la función de utilidad, es el desvío de una fracción de la dotación de recursos esperada $e_{it}\theta_{it}$, desde la carga académica hacia las notas.

$$e_{it}(\theta_{it}) = b\theta_{it} \quad (13)$$

$$UD_{it}(\theta_{it}) = b\left(\frac{\gamma-\phi}{\eta}\right)\theta_{it}^2 = \left(\frac{\gamma-\phi}{\eta}\right)e_{it}\theta_{it} \quad (14)$$

$$Nota_{it}(\theta_{it}) = b(1-\gamma+\phi)\theta_{it}^2 = (1-\gamma+\phi)e_{it}\theta_{it} \quad (15)$$

$$\text{Con } b = \left(\frac{\gamma-\phi}{\eta}\right)^{\gamma-\phi} \frac{(1-\gamma+\phi)^{1-\gamma+\phi}}{2}.$$

Una creencia de habilidad personal mayor que la de los compañeros, induce a un estudiante a pensar que obtendrá mejores notas y, consecuentemente, a sobrevalorar éstas por sobre el avance curricular. En este sentido, resultaría intuitivo que la expectativa de notas fuese creciente en ϕ , en consistencia al objetivo de obtener mayores notas. Sin embargo, debido a que la dotación de recursos académicos no es necesariamente creciente en ϕ , lo anterior no siempre es cierto. Específicamente, el componente esfuerzo de la dotación de recursos académicos, puede aumentar o disminuir con ϕ .

Proposición 9 e_{it} es creciente en ϕ , ssi $\phi \geq \gamma - \frac{\eta}{1+\eta}$.

Demostración : Ver Apéndice.

□

El esfuerzo es mayor mientras más asimétrica sea la valoración de las notas y la carga académica en la función de utilidad. Si se valoran igualmente las notas y el avance curricular, el esfuerzo es mínimo. El efecto de ϕ sobre el esfuerzo, como ya se planteó en el modelo básico desarrollado en la sección 3.1, puede ser positivo o negativo. En la medida que ϕ contribuya a desbalancear la valoración relativa notas-carga académica, el esfuerzo aumentará. En la figura 11, el gráfico izquierdo presenta el caso en que ϕ eleva el esfuerzo, en tanto, el gráfico derecho muestra el efecto negativo que puede tener ϕ sobre el esfuerzo.

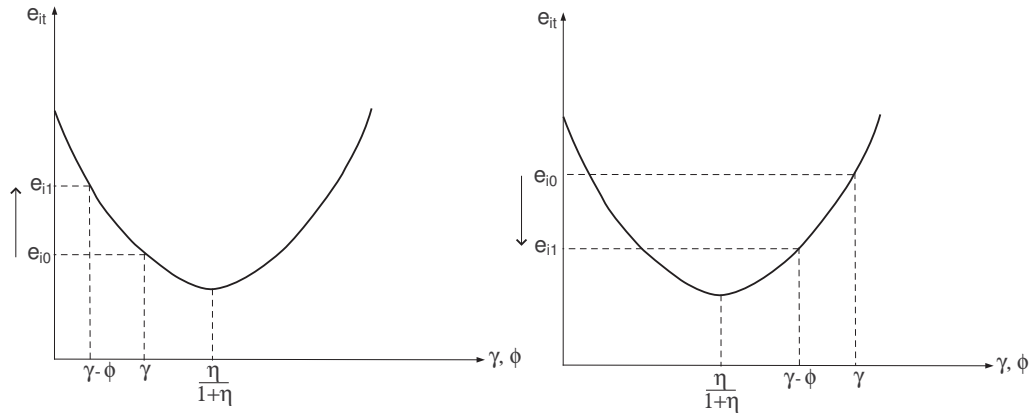


Figura 11

El estudiante sobreconfiado i ($\theta_{it} > \theta_{jt}$), comienza a darle mayor importancia a las notas en su función de utilidad. Si originalmente valoraba más las notas que el avance curricular ($\gamma < \frac{1}{2}$), el efecto de $\phi > 0$ acentúa la preponderancia de éstas, por lo cual el esfuerzo crece y también la expectativa de notas. Por el contrario, si valoraba el avance curricular por sobre las notas ($\gamma > \frac{1}{2}$), el efecto de $\phi > 0$ armoniza la importancia relativa de las notas y la carga académica en la función de utilidad, por lo cual disminuye tanto el esfuerzo como la expectativa de nota.

En el rango en que el esfuerzo es creciente en ϕ , la expectativa de notas también lo es.

Corolario 10 Si $\phi \geq \gamma - \frac{\eta}{1+\eta}$, entonces $Nota_{it}$ es creciente en ϕ .

Demostración: Ver Apéndice.

□

Observación: El efecto neto de ϕ sobre la decisión de carga académica no es claro. Incluso si el esfuerzo es creciente en ϕ , se contraponen dos efectos. Por un lado, ϕ reduce la participación de la carga académica en la dotación de recursos $\theta_{it}e_{it}$; y por otro, el mayor esfuerzo incentiva una mayor carga académica.

Un estudiante con una convicción de habilidad personal por sobre la de sus pares, desea concentrar su esfuerzo en la obtención de mejores notas. En este contexto, es razonable esperar que una mayor expectativa de notas se traduzca en un mayor esfuerzo, de modo de conseguir notas efectivas más altas. Por esta razón, en lo que sigue centraremos el análisis en un esfuerzo creciente en ϕ , que se verifica cuando $\phi \geq \gamma - \frac{\eta}{1+\eta}$.

La nota efectiva y la utilidad del estudiante sobre-confiado i , están dadas por:

$$\begin{aligned}
Nota_{it}^*(\theta_{it}, \theta_i^*) &= \begin{cases} e_{it}\theta_i^* - \eta UD_{it} & \text{si } e_{it}\theta_i^* - \eta UD_{it} > 0 \\ 0 & \sim \end{cases} \\
&= \begin{cases} b\theta_{it}[\theta_i^* - (\gamma - \phi)\theta_{it}] & \text{si } \theta_{it} \leq \frac{\theta_i^*}{\gamma - \phi} \\ 0 & \sim \end{cases} \quad (16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Utilidad_{it}^*(\theta_{it}, \theta_i^*) &= \begin{cases} UD_{it}^{\gamma - \phi} (Nota_{it}^*)^{1 - \gamma + \phi} - e_{it}^2 & \text{si } e_{it}\theta_i^* - \eta UD_{it} > 0 \\ -e_{it}^2 & \sim \end{cases} \\
&= \begin{cases} b \left(\frac{\gamma - \phi}{\eta}\right)^{-\gamma + \phi} \theta_{it} \left[\theta_{it}^{\gamma - \phi} (\theta_i^* - (\gamma - \phi)\theta_{it})^{1 - \gamma + \phi} - \frac{(1 - \gamma + \phi)^{1 - \gamma + \phi}}{2} \theta_{it} \right] & \text{si } \theta_{it} \leq \frac{\theta_i^*}{\gamma - \phi} \\ -(b\theta_{it})^2 & \sim \end{cases} \quad (17)
\end{aligned}$$

Proposición 11 Cuando las notas son positivas, $Nota_{it}^*$ es creciente en ϕ . Además, en el rango de notas crecientes en θ_{it} , $\frac{\partial Nota_{it}^*}{\partial \theta_{it}}$ es creciente en ϕ .

Demostración : Ver Apéndice.

□

Es decir, cuando una mayor valoración de la nota en la función de utilidad es seguida por un mayor esfuerzo por parte de un estudiante sobreconfiado, entonces éste logrará notas más elevadas. Más aún, el efecto de una mayor valoración de la nota, incrementa el aumento de la nota resultante de una mayor creencia de habilidad personal. Gráficamente:

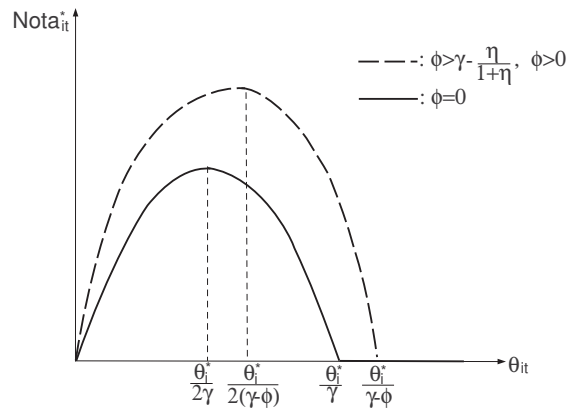


Figura 12

Proposición 12 ($\forall \theta_i^*$) $Utilidad_{it}^*(\cdot, \theta_i^*)$ es máxima en $\theta_{it} = \theta_i^*$, y este máximo crece con ϕ .

Demostración : Ver Apéndice.

□

Al igual que en el modelo básico 3.1, la utilidad alcanza su máximo cuando $\theta_{it} = \theta_i^*$. A su vez, cuando ϕ eleva el esfuerzo, también aumenta la utilidad máxima alcanzada. Gráficamente:

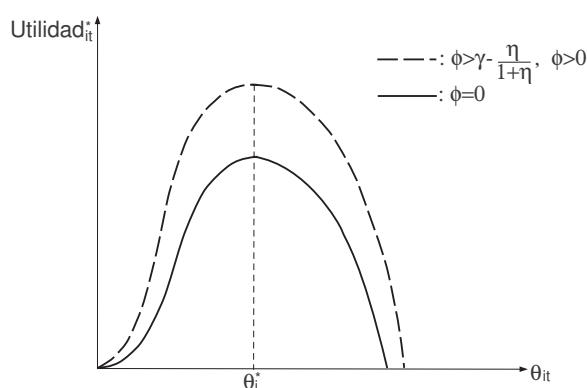


Figura 13

Un estudiante con una creencia de habilidad personal mayor que la de sus compañeros de clase, asigna más recursos académicos al logro de mejores notas. Cuando esto se traduce en un mayor esfuerzo, efectivamente un estudiante obtiene mejores notas. A pesar de los costos que implica el esfuerzo adicional, el logro del objetivo de mejores notas le permite alcanzar un mayor bienestar. Esto debido a que señalar públicamente la posesión de una alta habilidad mediante la obtención de una buena nota, se traduce en una mayor satisfacción personal.

Un sesgo sobre-optimista, esto es creerse más hábil que los compañeros de clase, tiene una implicancia favorable sobre el bienestar de un estudiante. Aunque la percepción que tenga un estudiante de sí mismo sea errada, en el sentido de sobrestimar su verdadera habilidad respecto de la de sus compañeros de clase, el sesgo es beneficioso debido a que promueve el esfuerzo invertido en la obtención de mejores notas y aumenta la utilidad. Bajo este esquema resulta conveniente incitar sobre-optimismo en los estudiantes, con el fin de aumentar su esfuerzo, mejorar sus notas y elevar el bienestar alcanzado.

A diferencia de cuando se consideraba la externalidad de compañeros en el modelo 3.2, en este caso el sesgo de un estudiante a sobrevalorar las notas cuando cree que éstas

superarán la de los compañeros, además de elevar la nota efectivamente alcanzada, siempre incrementa el bienestar. Por tanto, no se da la situación en que la nota máxima obtenida no necesariamente coincidía con el punto de máximo bienestar que sucedía en el modelo 3.2. En esta variante del modelo, en cambio, cuando se alcanza el máximo de bienestar un estudiante necesariamente está logrando notas mejores.

3.3.2. DINÁMICA

En este apartado estudiamos las repercusiones temporales sobre las variables de interés, del ajuste de creencias resultante de la interacción entre un estudiante i sobre-optimista ($\theta_{it} > \theta_i^*$) con otro j pesimista ($\theta_{jt} < \theta_j^*$); cuando el estudiante i es sobre-confiado creyendo, erróneamente, que su habilidad es superior a la de j :

$$\theta_{it} > \theta_{jt} \quad \wedge \quad \theta_i^* < \theta_j^*$$

Es decir, nos centraremos en el caso del estudiante i que además de creerse más hábil de lo que realmente es (sobre-optimista), también supone que es más hábil que los demás (sobre-confiado). Por su parte, el otro estudiante j tendrá una creencia de habilidad personal inferior a la real (pesimista). En la realidad, el estudiante j es más hábil que el estudiante i , por lo que la sobre-confianza de i carece de sustento real.

En ambos estudiantes, la percepción de habilidad se ajusta dinámicamente hasta converger a su nivel efectivo. En el caso del estudiante sobre-optimista i , la trayectoria seguida por su creencia de habilidad es decreciente; en cambio la del estudiante pesimista j es creciente. Mientras i crea ser más hábil que j ($\theta_{it} > \theta_{jt}$), resolverá el problema de optimización planteado en 3.3, por lo cual sobrevalorará las notas en su función de utilidad. En el proceso de ajuste de la creencia de habilidades, habrá un instante t^* en que $\theta_{it^*} = \theta_{jt^*}$. Aquel momento define un cambio de fase en la dinámica de la creencia de habilidad de i en relación a la creencia de habilidad de j . A partir de t^* , i deja de ser sobre-confiado y comienza a percibir a j como más hábil ($\theta_{it} < \theta_{jt}$). En consecuencia, deja de sobrevalorar las notas en su función de utilidad y retoma la dinámica de ajuste que seguiría bajo el modelo básico 3.1. Inversamente, una vez que el estudiante j se percató de que es más hábil que su contraparte, comienza a darle más importancia a las notas en su función de utilidad, resolviendo ahora el problema definido en 3.3.

Gráficamente:

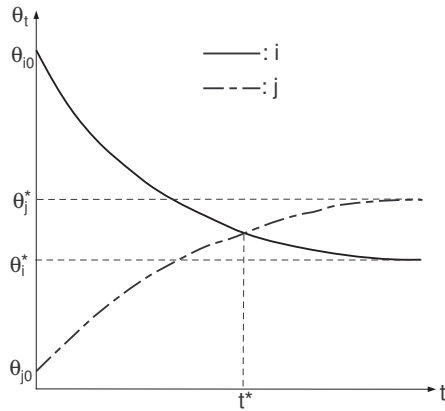


Figura 14

Proposición 13 *A partir de una creencia de habilidad inicial, las sucesiones convergen hacia las habilidades efectivas.*

- Si $\theta_{kt} < \theta_k^*$, entonces $\theta_{kt} \nearrow \theta_k^*$
- Si $\theta_{kt} > \theta_k^*$, entonces $\theta_{kt} \searrow \theta_k^*$ $\forall k = \{i, j\}$

Demostración : Ver Apéndice.

□

El proceso de ajuste de la creencia de habilidad, se mantiene tanto antes como después del cambio en las percepciones de habilidad relativas entre i y j , ocurrido en t^* .

La evolución temporal que siguen el esfuerzo y la expectativa de notas de los sujetos i y j , se muestra en la figura 15:

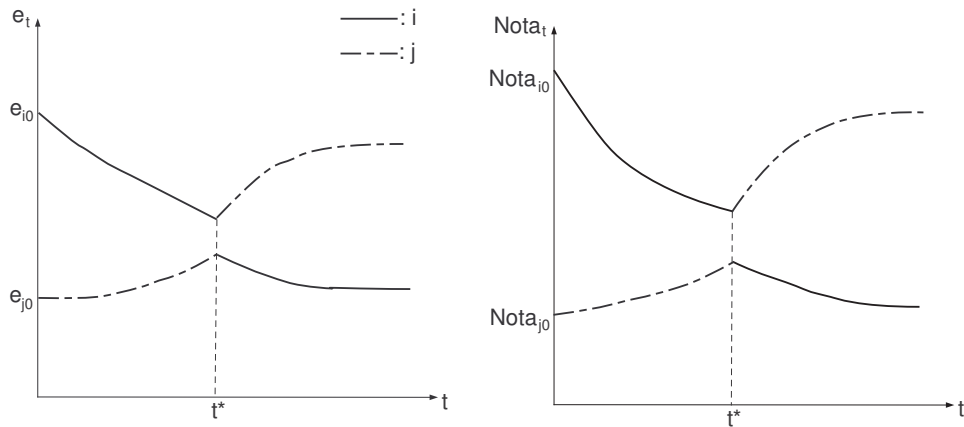


Figura 15

Debido a que el esfuerzo y la expectativa de nota dependen positivamente de la creencia de habilidad, a medida que ésta converge hacia su valor efectivo, ambas exhiben una tendencia monótona. El cambio de percepción de habilidades relativas entre i y j ocurrido en el instante t^* , modifica la importancia que i y j le asignan a ambas variables. Concretamente, el estudiante i disminuye su esfuerzo y le resta prioridad a la obtención de buenas notas, en cambio j hace lo contrario. Por ello, en t^* las trayectorias del esfuerzo y la expectativa de notas de ambos sujetos efectúan un salto, y a partir de ahí cambian sus pendientes. Cuando aumenta la valoración otorgada a las notas en la utilidad ($\phi > 0$), la pendiente seguida por ambas trayectorias es más empinada.

El estudiante sobreconfiado i ($\theta_{it} > \theta_{jt}$), valora más las notas que el avance curricular en su función de utilidad. Como ya lo establecimos, esto lo induce a esforzarse más, a elevar su expectativa de notas y a obtener notas más altas. La evolución temporal seguida por la nota obtenida, es similar a la derivada en el modelo básico 3.1 cuando se valoraba la nota por sobre la carga académica ($\gamma < \frac{1}{2}$). Es decir, a medida que se ajusta la creencia de habilidad (y consigo disminuye el esfuerzo, la carga académica y la expectativa de notas), la nota efectiva crece en un primer tramo (cuando prima el efecto de una reducción de la carga académica), y luego decrece (cuando domina el efecto de la reducción en el esfuerzo) hasta estabilizarse.

La figura 16, señala cuatro posibles rangos en que puede encontrarse la creencia de habilidad del estudiante i cuando éste deja de creerse más hábil que j . En cualquiera de estos rangos, la trayectoria de la nota exhibe una discontinuidad que reduce su nivel debido a la menor valoración que i pasa a asignarle a las notas, y a la reducción en su esfuerzo resultante. En el gráfico, la nota efectiva pasa de la trayectoria descrita por la línea discontinua (problema de sobrevaloración de nota 3.3) a la de la línea continua (problema básico 3.1).

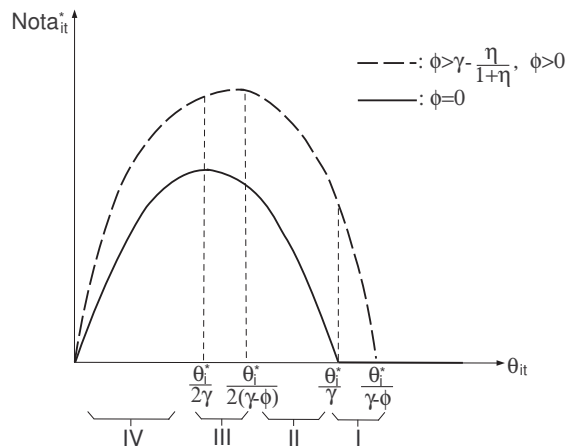


Figura 16

A partir del instante t^* , i deja de creerse más hábil que su par j . Según donde se sitúe su creencia de habilidad personal en t^* , la nota obtenida por i puede adoptar cuatro distintas trayectorias:

- I. Si $\theta_{it^*} \in \left(\frac{\theta_i^*}{\gamma}, \frac{\theta_i^*}{\gamma - \phi} \right)$, antes de t^* la nota crece siguiendo la trayectoria propia del problema en que se sobrevalora la nota en la función de utilidad. Como en t^* , θ_{it} aún no ha traspasado el umbral en que las notas son positivas en la dinámica del problema básico 3.1, las notas se tornan nulas para luego seguir la trayectoria habitual de este último problema.
- II. Si $\theta_{it^*} \in \left(\frac{\theta_i^*}{2(\gamma - \phi)}, \frac{\theta_i^*}{\gamma} \right)$, la creencia de habilidad ya ha traspasado el umbral en que la nota es cero en el problema básico 3.1 (representado por la curva continua en la figura 14), por lo que en t^* las notas, que venían con una tendencia creciente, se reducen a un nivel positivo y siguen la trayectoria normal de este problema.
- III. Si $\theta_{it^*} \in \left(\frac{\theta_i^*}{2\gamma}, \frac{\theta_i^*}{2(\gamma - \phi)} \right)$, antes de t^* las notas ya han alcanzado su máximo y luego adquirido una senda decreciente en el marco del problema en que se sobrevalora la nota en la función de utilidad 3.3. En t^* la nota efectiva cae a un nivel positivo, y a partir de ahí retoma la trayectoria creciente y luego decreciente hasta estabilizarse, del problema básico 3.1.
- IV. Si $\theta_{it^*} < \frac{\theta_i^*}{2\gamma}$, antes de t^* las notas ya han adquirido la trayectoria decreciente en el problema de sobrevaloración de la nota 3.3. A partir de t^* , la nota efectiva sólo alcanza a experimentar el tramo decreciente de su trayectoria en el problema básico 3.1.

La figura 17 esboza estas posibles trayectorias para la nota obtenida por el estudiante i , a medida que ajusta su noción de habilidad personal:

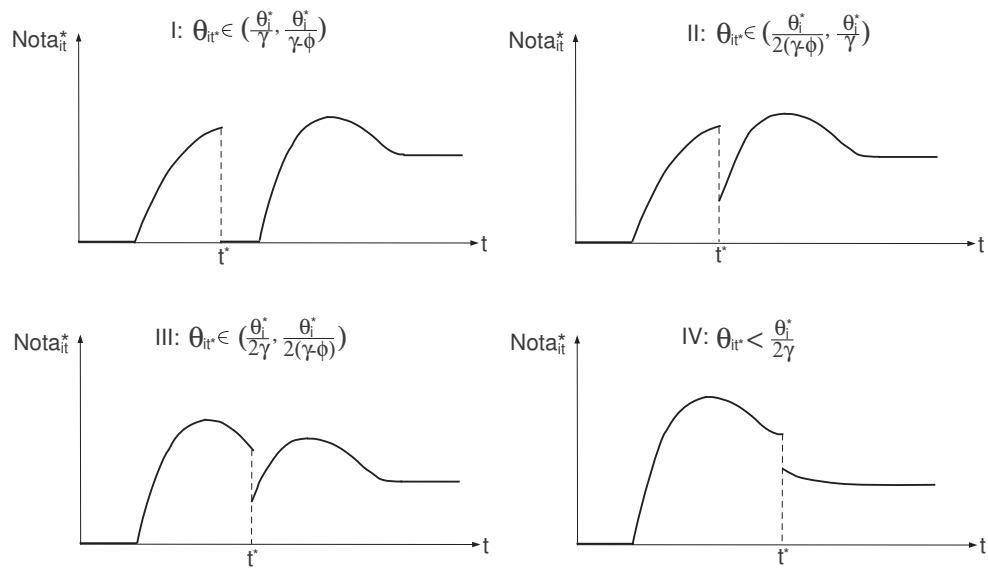


Figura 17

La pérdida de la sobreconfianza del estudiante i , en que este se da cuenta de que es menos hábil que su compañero j , lo llevan a reducir la nota obtenida y el bienestar alcanzado. Sentirse menos inteligente que los compañeros, a pesar de ser algo cierto cuya comprensión ayudaría a la toma de mejores decisiones, tiene consecuencias negativas sobre el rendimiento académico y sobre el bienestar. Esto pues el estudiante deja de valorar como antes a las notas en su función de utilidad, deja de percibir la satisfacción asociada al prestigio académico, y se esfuerza menos. En este sentido, es conveniente fomentar la sobreconfianza por parte de los estudiantes, porque los lleva a mejorar sus notas y a mejorar su bienestar como consecuencia del mayor prestigio académico ganado.

3.4. SISTEMA DE EVALUACIÓN POR “RANKING ACADÉMICO”

El sistema de evaluación de muchos cursos distingue la posición relativa de los estudiantes, más que su rendimiento en términos absolutos. Bajo este esquema es común que los estudiantes se interesen en obtener el mejor “ranking” posible de la clase, lo cual tiene efectos sobre su comportamiento y decisiones, algunos de los cuales analizaremos a continuación.

Cuando un estudiante se percibe más hábil que sus compañeros de clase, valora mayormente las notas en su función de utilidad por el prestigio académico asociado, tal como se discutió en el modelo 3.3. Si adicionalmente el esquema de evaluación fomenta el logro del mejor rendimiento en términos relativos, el estudiante concentrará sus energías en obtener una nota lo más alta posible en relación a sus compañeros de modo de alcanzar el mejor “ranking” o posición relativa de la clase.

Al igual que en el modelo con externalidad discutido en la sección 3.2, supondremos que las creencias individuales coinciden con las sociales. Asumiremos que los estudiantes comparten la creencia de que el estudiante i es más hábil que j ($\theta_i > \theta_j$), por lo cual debería obtener las mejores notas. Según estas creencias, el problema que resuelve el estudiante i , es el siguiente:

$$\begin{aligned} & \underset{\{e_i, UD_i, Nota_i\}}{\text{máx}} && UD_i^\gamma Nota_i^{(1-\gamma)} \left(UD_i^{-\phi \mathbf{1}_{\{Nota_i > Nota_j\}}} \left(\frac{Nota_i}{Nota_j} \right)^{\phi \mathbf{1}_{\{Nota_i > Nota_j\}}} \right) - e_i^2 \\ & \text{s.a.} && Nota_i + \eta UD_i = e_i \theta_i \end{aligned}$$

El estudiante i sustentado en la creencia colectiva de posesión de una mayor habilidad relativa, valorará en mayor medida las notas en su función de utilidad y se verá perjudicado ante compañeros de clase hábiles que le restan posibilidades de conseguir el mejor “ranking” de la clase. Una forma reducida de este problema es la siguiente:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Nota_j^\phi} \left[\underset{\{e_i, UD_i, Nota_i\}}{\text{máx}} && UD_i^{(\gamma-\phi)} Nota_i^{(1-\gamma+\phi)} - e_i^2 Nota_j^\phi \right] \\ & \text{s.a.} && Nota_i + \eta UD_i = e_i \theta_i \end{aligned}$$

Queda de manifiesto que cuando un estudiante maximiza su posición relativa en una clase, una expectativa de mayor nota por parte de los compañeros eleva la competencia por la mejor nota relativa, lo cual incrementa la desutilidad del esfuerzo implicado en su logro.

Cabe notar que bajo estas creencias de habilidad relativas entre i y j , el problema que resuelve j es el planteado en el modelo básico 3.1. Como j percibe que obtendrá peores notas que i , escogerá un nivel de esfuerzo y carga académica ignorando el desempeño de sus compañeros. Para j pretender obtener el mejor ranking de la clase es infructuoso, pues se considera de menor habilidad relativa.

3.4.1. ESTÁTICA

Cuando el estudiante i es percibido más hábil que el estudiante j ($\theta_i > \theta_j$), el estudiante j se comporta según lo descrito en el modelo básico 3.1. Por consiguiente, nos centraremos en caracterizar la elección adoptada por el estudiante i .

Cuando consideramos la nota relativa como mecanismo de evaluación de los cursos, la decisión óptima de esfuerzo de un estudiante depende positivamente de su creencia de habilidad personal, al igual que en los modelos antes estudiados. Es decir, mientras mayor sea la confianza de un estudiante en sí mismo (mayor θ_i), mayor será el esfuerzo escogido. Considerar la importancia del ranking académico, añade un nuevo determinante a la decisión de esfuerzo. Lo novedoso es que la decisión de esfuerzo del estudiante también depende de cómo sea percibida la habilidad de los compañeros de clase. Así, mientras más hábiles se perciban los compañeros de clase, menos atractivo resultará esforzarse pues más difícil se considerará el logro del mejor ranking académico.

La decisión de esfuerzo, carga académica y expectativa de nota serán:

$$e_{it}(\theta_{it}, \theta_{jt}) = c \frac{\theta_{it}}{\theta_{jt}^{2\phi}} \quad (18)$$

$$UD_{it}(\theta_{it}, \theta_{jt}) = c \left(\frac{\gamma - \phi}{\eta} \right) \frac{\theta_{it}^2}{\theta_{jt}^{2\phi}} = \left(\frac{\gamma - \phi}{\eta} \right) e_{it} \theta_{it} \quad (19)$$

$$Nota_{it}(\theta_{it}, \theta_{jt}) = c(1 - \gamma + \phi) \frac{\theta_{it}^2}{\theta_{jt}^{2\phi}} = (1 - \gamma + \phi) e_{it} \theta_{it} \quad (20)$$

$$\text{Con } c = \left(\frac{\gamma - \phi}{\eta} \right)^{\gamma - \phi} \left(\frac{\gamma}{\eta} \right)^{-\gamma\phi} \frac{(1 - \gamma + \phi)^{1 - \gamma + \phi}}{2^{1 - \phi}} (1 - \gamma)^{-\phi(2 - \gamma)}.$$

Si se espera que los compañeros obtengan buenas notas, la decisión de carga académica y la expectativa de nota personales se verán reducidas. Una mayor competencia por el ranking desincentiva el esfuerzo, lo cual reduce la carga académica y la expectativa de nota. El estudiante pierde motivación por el logro de la mejor nota relativa, pues

tal objetivo se vuelve más lejano en la medida que se compita con estudiantes más talentosos. Por otra parte, de manera similar a los modelos previos, una mayor percepción de habilidad personal promueve la elección de una mayor carga académica y una mayor expectativa de notas.

Al igual que en el modelo de sobrevaloración de la nota (sección 3.3), el estudiante i sobrevalorará las notas en su función de utilidad. Esto lo lleva a asignar una mayor proporción de sus recursos académicos esperados $e_{it}\theta_{it}$ al logro de notas en vez de avance curricular. Cuando la valoración del ranking académico (aumento de ϕ) trae consigo una mayor preferencia de las notas respecto del avance curricular, el estudiante elevará su esfuerzo y esperará alcanzar mejores notas.

Proposición 14 e_{it} es creciente en ϕ , ssi $\phi \geq \gamma - \frac{2\eta^{1+\gamma}}{\gamma(1-\gamma)^{2-\gamma}\theta_{jt}^2 + 2\eta^{1+\gamma}}$.

Demostración : Ver Apéndice.

□

La nota que obtiene el estudiante i , está dada por:

$$\begin{aligned} Nota_{it}^*(\theta_{it}, \theta_i^*, \theta_{jt}) &= \begin{cases} e_{it}\theta_i^* - \eta UD_{it} & \text{si } e_{it}\theta_i^* - \eta UD_{it} > 0 \\ 0 & \sim \end{cases} \\ &= \begin{cases} c \frac{\theta_{it}}{\theta_{jt}^{2\phi}} [\theta_i^* - (\gamma - \phi)\theta_{it}] & \text{si } \theta_{it} \leq \frac{\theta_i^*}{\gamma - \phi} \\ 0 & \sim \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

Esta nota puede ser creciente o decreciente en la creencia de habilidad personal, dependiendo en qué rango se sitúe esta creencia. Los quiebres del rango son los mismos del modelo de sobrevaloración de nota 3.3. Es decir, cuando el efecto positivo de un aumento del esfuerzo asociado a una mayor creencia de habilidad personal supera al efecto negativo de la mayor carga académica escogida, entonces las notas mejoran.

Por su parte, una mayor habilidad personal efectiva (θ_i^*) sigue teniendo un efecto positivo sobre la nota que obtiene un estudiante. Lo particular de este modelo es que una percepción de mayor habilidad de los compañeros de clase (θ_{jt}), tiene una repercusión negativa sobre la nota que obtiene un estudiante. Una expectativa de mejor nota de los compañeros de clase reduce el esfuerzo, la carga académica y la nota esperada por un estudiante. La reducción de la carga académica libera recursos que no son asignados a la obtención de nota, pues el estudiante ha rebajado la importancia que le asigna a las mismas, lo cual repercute en la nota obtenida. En consecuencia, la reducción del esfuerzo determina que la habilidad de los compañeros incida negativamente sobre la nota obtenida por el estudiante preocupado por su ranking académico.

Proposición 15 $Nota_{it}^*(\theta_{it}, \theta_i^*, \theta_{jt})$ es decreciente en θ_{jt} y creciente en θ_i^* . Es decreciente en θ_{it} ssi $\theta_{it} \in \left(\frac{\theta_i^*}{2(\gamma-\phi)}, \frac{\theta_i^*}{\gamma-\phi}\right)$.

Demostración : Ver Apéndice.

□

En suma, tal como en los modelos precedentes, una mayor habilidad efectiva permite el logro de mayores notas, y una mayor percepción de habilidad personal tiene efectos contrapuestos que en ciertos casos llevan al logro de mejores notas. Lo novedoso cuando se considera un sistema de evaluación que premia el ranking de notas, es que una creencia de mayor habilidad de los compañeros de clase siempre deprime la nota obtenida por un estudiante. Gráficamente:

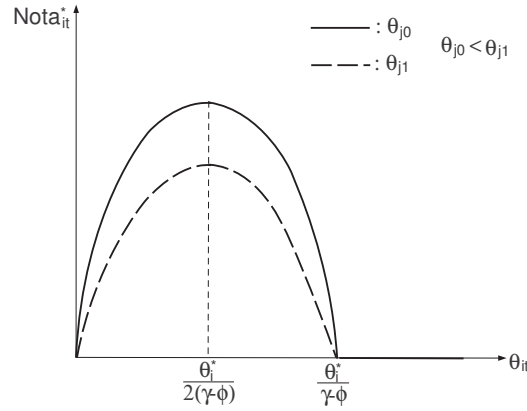


Figura 18

La función de utilidad del estudiante i , bajo un esquema de ranking de notas, depende de las creencias de habilidad y de las habilidades reales, tanto personales como de los compañeros de clase.

$$\begin{aligned}
 Utilidad_{it}^*(\theta_{it}, \theta_i^*, \theta_{jt}, \theta_j^*) &= UD_{it}^{\gamma-\phi} \frac{(Nota_{it}^*)^{1-\gamma+\phi}}{(Nota_j^*)^\phi} - e_{it}^2 \\
 &= \begin{cases} \frac{c}{a^\phi} \left(\frac{\gamma-\phi}{\eta}\right)^{\gamma-\phi} \frac{\theta_{it}^{1+\gamma-\phi} (\theta_i^* - (\gamma-\phi)\theta_{it})^{1-\gamma+\phi}}{\theta_{jt}^{3\phi} (\theta_j^* - \gamma\theta_{jt})^\phi} - \left(c \frac{\theta_{it}}{\theta_{jt}^{2\phi}}\right)^2 & \text{si } \theta_{it} \leq \frac{\theta_i^*}{\gamma-\phi} \\ - \left(c \frac{\theta_{it}}{\theta_{jt}^{2\phi}}\right)^2 & \sim \end{cases} \quad (22)
 \end{aligned}$$

$$\text{Con } a = \left(\frac{\gamma}{\eta}\right)^\gamma \frac{(1-\gamma)^{1-\gamma}}{2}.$$

El bienestar del estudiante i es creciente en su habilidad real. Esto debido a que una mayor habilidad efectiva permite el logro de mejores notas relativas, lo cual incrementa la utilidad.

De manera inversa, el bienestar alcanzado por el estudiante i es decreciente en la habilidad poseída por su contraparte j . Una mayor habilidad le permite obtener mejores notas al estudiante j , lo cual empeora la posición de notas relativa de i y consigo su utilidad.

Lema 16 *Utilidad $^*_i(\theta_{it}, \theta_i^*, \theta_{jt}, \cdot)$ es decreciente en θ_j^* .*

Demostración : Ver Apéndice.

□

Cambios en la creencia de habilidad de i , tienen un efecto ambiguo sobre su bienestar. Una mayor creencia de habilidad de i tiene un efecto incierto sobre la nota obtenida por el mismo (pues aumenta el esfuerzo y la carga académica elegida), y por tanto también será incierto el efecto sobre la utilidad alcanzada.

Del mismo modo, cambios en la creencia de habilidad de j tendrán repercusiones inciertas sobre el bienestar derivado por i . Esto porque una creencia de mayor habilidad de j lo llevan a escoger un mayor esfuerzo y una mayor carga curricular, acciones cuyos efectos operan inversamente sobre las notas obtenidas por el mismo. Como las notas obtenidas por j pueden aumentar o disminuir ante una percepción de mayor habilidad personal, y la nota obtenida por i siempre decae frente a la creencia de mayor habilidad de j ; es incierto lo que ocurra con la nota relativa de ambos estudiantes. Por ello, no es posible predecir con certeza cómo se afecta el bienestar del estudiante i .

Bajo un esquema de ranking académico, las decisiones y el bienestar de un estudiante están influidos por la percepción de habilidad personal en relación a la de los compañeros de clase. En lo que sigue, indagaremos qué creencia de habilidad personal le es más conveniente concebir a un estudiante, dependiendo de la creencia de habilidad que se tenga de su compañero de clase. En este sentido, analizaremos si es posible explotar en términos de bienestar, sesgos perceptivos sobre la habilidad poseída por los compañeros de clase.

En primer lugar, nos interesa establecer la creencia de habilidad personal que maximiza el bienestar del estudiante i , cuando se enfrenta a un compañero de clase j percibido

con una habilidad similar a la real ($\theta_{jt} = \theta_j^*$). En este caso y al igual que en los modelos anteriores, el estudiante i aumenta su utilidad a medida que su creencia de habilidad converge a la efectiva $\theta_{it} \rightarrow \theta_i^*$. Cuando ha convergido a ésta su bienestar es máximo.

Proposición 17 $(\forall \theta_i^*, \theta_{jt}, \theta_j^*) Utilidad_{it}^*(\cdot, \theta_i^*, \theta_{jt}, \theta_j^*) \Big|_{\theta_{jt}=\theta_j^*}$ es máxima cuando $\theta_{it} = \theta_i^*$

Demostración : Ver Apéndice.

□

Gráficamente:

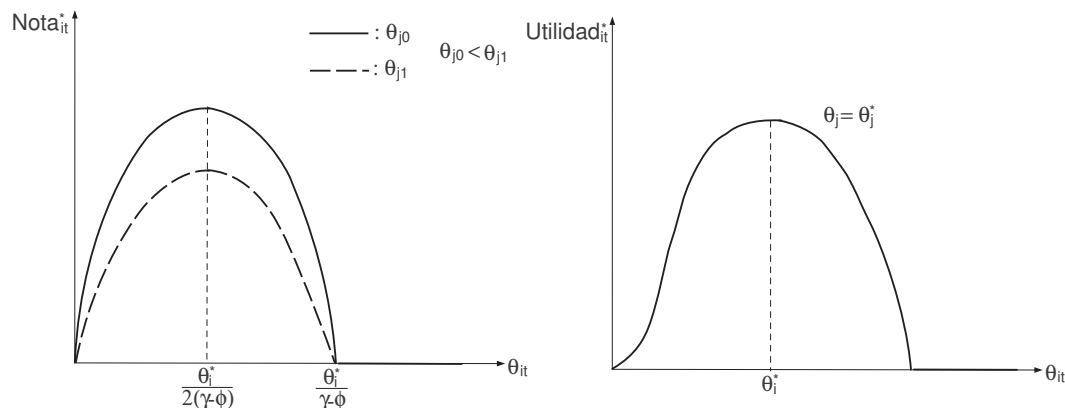


Figura 19

Cuando la creencia alusiva a la habilidad de j es acertada ($\theta_{jt} = \theta_j^*$), el estudiante i mejora su bienestar mientras más exacta sea su percepción de habilidad propia respecto de la efectiva ($\theta_{it} \rightarrow \theta_i^*$). Esto debido a que en ausencia de sesgos en la creencia de habilidad de los compañeros, las decisiones de esfuerzo y carga académica adoptadas por un estudiante se aproximarán a las óptimas en la medida que se erradique el sesgo en la percepción de habilidad personal.

Lo que queda ahora es analizar qué percepción de habilidad personal es beneficiosa que posea el estudiante i , cuando existen sesgos en la noción de habilidad de los compañeros de clase j .

Cuando j es percibido menos hábil de lo que realmente es ($\theta_{jt} < \theta_j^*$), al estudiante i también le convendrá poseer una creencia de habilidad personal pesimista ($\theta_{it} < \theta_i^*$). En cambio, cuando j es percibido más talentoso de lo que efectivamente es ($\theta_{jt} > \theta_j^*$), entonces al estudiante i también le convendrá tener una creencia optimista respecto de

su habilidad personal ($\theta_{it} > \theta_i^*$). Es decir, ante sesgos en la percepción de la habilidad de los compañeros, a un estudiante le conviene poseer sesgos en su percepción de habilidad personal en el mismo sentido.

Proposición 18 Si $\theta_{jt} \geq \theta_j^*$, entonces $Utilidad_{it}^*(\cdot, \theta_i^*, \theta_{jt}, \theta_j^*)$ se maximiza en $\bar{\theta}_{it} \geq \theta_i^*$.

Demostración : Ver Apéndice.

□

En el equilibrio en ausencia de sesgos cognitivos ($\theta_i = \theta_i^*$, $\theta_j = \theta_j^*$), si aumenta la habilidad real del compañero de clase θ_j^* (por lo tanto j se torna pesimista: $\theta_j < \theta_j^*$), se incrementa $Nota_j^*$. Esto eleva el costo marginal del esfuerzo para el estudiante i , por lo que desciende su bienestar. En esta situación, el estudiante i tiene espacio para mejorar su bienestar mediante una reducción de su esfuerzo personal, que en términos de creencias se traduce en hacerse pesimista: $\bar{\theta}_i < \theta_i^*$.

Gráficamente:

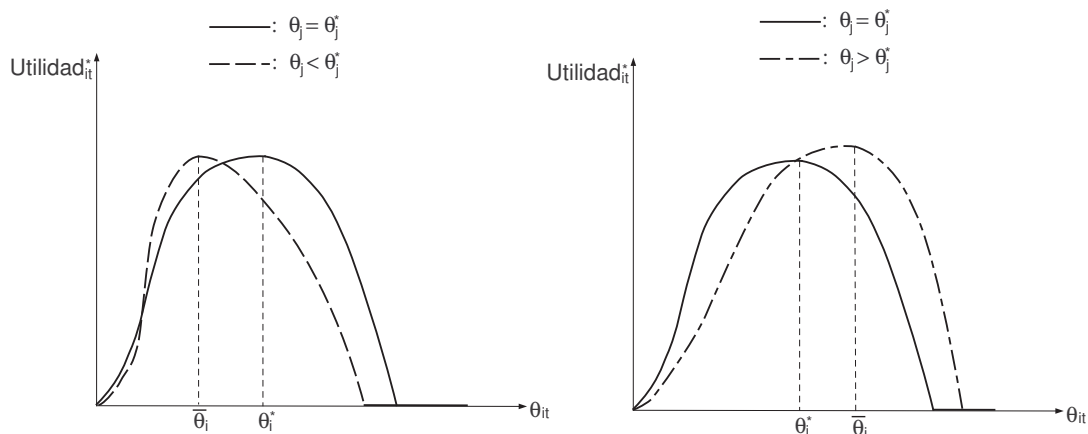


Figura 20

Cuando el compañero de clase j es percibido más hábil de lo que realmente es, el estudiante i asume que la posición de nota relativa que el mismo obtendrá será inferior de la que realmente puede alcanzar, por lo que se esforzará menos de lo eficiente. En este caso, una cuota de optimismo ($\theta_i > \theta_i^*$) lleva al estudiante i a aumentar su esfuerzo y consigo el nivel bienestar alcanzado.

Resumiendo, dada una creencia de habilidad de personal, al estudiante i siempre le conviene conocer la verdadera habilidad de su compañero j . En términos de bienestar, i toma mejores decisiones en ausencia de sesgos relacionados con la habilidad de j .

En cambio, dada cierta creencia de habilidad del compañero de clase, al estudiante i no necesariamente le conviene tener una noción precisa acerca de su propia habilidad. Lo anterior ocurre porque un sesgo en la creencia de habilidad que se tenga de j , lleva al estudiante i a sobre/sub-esforzarse, lo cual puede corregirse mediante sesgos en su propia noción de habilidad personal que afecten la elección en sentido contrario. De este modo, ambos sesgos se contrarrestan y el estudiante puede alcanzar mayores niveles de bienestar.

3.4.2. DINÁMICA

En lo que sigue examinamos la evolución temporal de las notas de un estudiante i optimista de su habilidad personal ($\theta_{it} > \theta_i^*$), expuesto a la interacción con un compañero j pesimista ($\theta_{jt} < \theta_j^*$). Por simplicidad, supondremos que la habilidad efectiva de ambos estudiantes es la misma $\theta_i^* = \theta_j^*$.

De manera análoga a modelos anteriores, las creencias colectivas de habilidad se ajustan dinámicamente hasta converger a sus niveles reales. En el caso del estudiante optimista, a medida que reduce su creencia de habilidad personal, decaen su nivel de esfuerzo, su elección de carga académica y su expectativa de notas. Por su parte, el alza en la noción de habilidad personal que experimenta j , también reduce la tendencia temporal de las variables de decisión de i .

De la ecuación (21), tenemos que la nota del estudiante i es:

$$Nota_{it}^*(\theta_{it}, \theta_i^*, \theta_{jt}) = \begin{cases} c \frac{\theta_{it}}{\theta_{jt}^{2\phi}} [\theta_i^* - (\gamma - \phi)\theta_{it}] & \text{si } \theta_{it} \leq \frac{\theta_i^*}{\gamma - \phi} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

De la proposición 15 sabemos que a medida que la creencia de habilidad de j se ajusta al alza, se reduce la nota que obtiene el estudiante i ($Nota_{it}^*$ es decreciente en θ_{jt}). De la misma proposición, sabemos que $Nota_{it}^*$ es decreciente en θ_{it} cuando $\theta_{it} \in \left(\frac{\theta_i^*}{2(\gamma - \phi)}, \frac{\theta_i^*}{\gamma - \phi}\right)$; y es creciente cuando $\theta_{it} < \frac{\theta_i^*}{2(\gamma - \phi)}$. Por lo tanto, el ajuste a la baja de la creencia de habilidad de i puede aumentar o disminuir sus notas, dependiendo del rango en que se encuentre θ_{it} .

En el caso en que $\theta_{it} < \frac{\theta_i^*}{2(\gamma - \phi)}$, entonces $Nota_{it}^*$ disminuye a través del tiempo tanto por el ajuste dinámico de θ_{it} como por el de θ_{jt} . En cambio, cuando $\theta_{it} \in \left(\frac{\theta_i^*}{2(\gamma - \phi)}, \frac{\theta_i^*}{\gamma - \phi}\right)$ el descenso de θ_{it} eleva $Nota_{it}^*$ y se contrapone al efecto negativo del ajuste alcista de θ_{jt} .

Asimismo la evolución de $Nota_{it}^*$ en cada uno de estos casos, dependerá de la valoración relativa notas-carga académica. Si el estudiante i valora mayormente las notas al avance curricular: $(\gamma - \phi) \in (0, \frac{1}{2})$, entonces $Nota_{it}^*$ crece en un primer tramo y luego decrece. El cambio en la tendencia de crecimiento puede producirse antes si predomina el efecto decreciente del alza de θ_{jt} , por sobre el efecto creciente de la reducción de θ_{it} cuando $\theta_{it} \in \left(\frac{\theta_i^*}{2(\gamma - \phi)}, \frac{\theta_i^*}{\gamma - \phi}\right)$. Gráficamente:

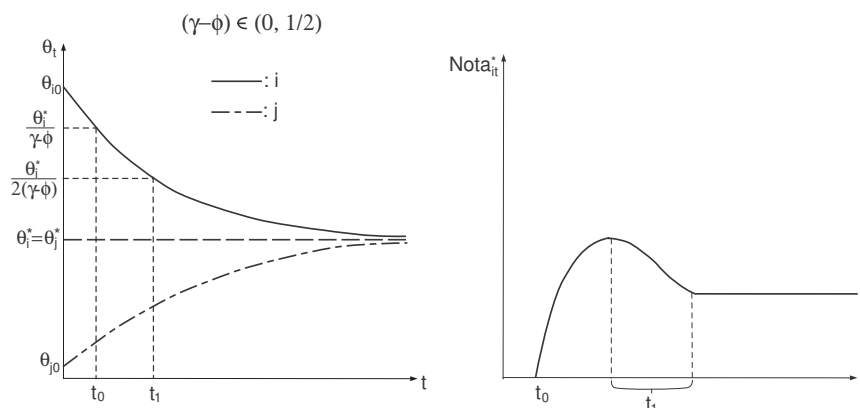


Figura 21

Cuando el estudiante valora más el avance curricular que las notas, el rango de nota positiva en que se ajusta la creencia de habilidad es: $\theta_{it} \in \left(\frac{\theta_i^*}{2(\gamma - \phi)}, \frac{\theta_i^*}{\gamma - \phi}\right)$. De este modo, $Nota_{it}^*$ puede ser siempre creciente, o exhibir un tramo creciente y luego otro decreciente. Este último tramo decreciente se da sólo si el efecto negativo del ajuste al alza de θ_{jt} supera al efecto positivo del ajuste de θ_{it} , sobre $Nota_{it}^*$. Gráficamente:

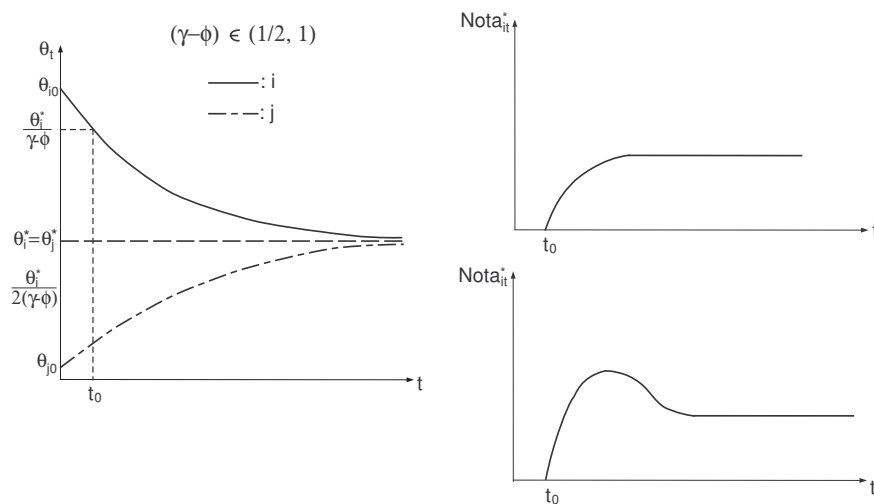


Figura 22

La evolución de la nota efectiva de i , está dada por:

$$\begin{aligned} Nota_{i,t+1}^* - Nota_{it}^* &= c \frac{\theta_{i,t+1}}{\theta_{j,t+1}^{2\phi}} (\theta_i^* - (\gamma - \phi)\theta_{i,t+1}) - c \frac{\theta_{it}}{\theta_{jt}^{2\phi}} (\theta_i^* - (\gamma - \phi)\theta_{it}) \\ &= c\theta_i^* \left(\frac{\theta_{i,t+1}}{\theta_{j,t+1}^{2\phi}} - \frac{\theta_{it}}{\theta_{jt}^{2\phi}} \right) + c(\gamma - \phi) \left(\frac{\theta_{it}^2}{\theta_{jt}^{2\phi}} - \frac{\theta_{i,t+1}^2}{\theta_{j,t+1}^{2\phi}} \right) \end{aligned}$$

Como i es optimista y j pesimista de su habilidad personal, el ajuste de creencias de ambos ($\theta_{it} \searrow \theta_i^*$ y $\theta_{jt} \nearrow \theta_j^*$) permiten asegurar que el primer término de la expresión anterior es negativo: $\left(\frac{\theta_{i,t+1}}{\theta_{j,t+1}^{2\phi}} - \frac{\theta_{it}}{\theta_{jt}^{2\phi}} \right) < 0$; y el segundo positivo: $\left(\frac{\theta_{it}^2}{\theta_{jt}^{2\phi}} - \frac{\theta_{i,t+1}^2}{\theta_{j,t+1}^{2\phi}} \right) > 0$.

La rapidez del ajuste en la percepción de habilidad personal que tengan i y j , incide en la trayectoria adoptada por $Nota_{it}^*$. Analizaremos la evolución temporal de $Nota_{it}^*$, en el caso en que la creencia del estudiante j converge más rápido que la de i a su verdadero valor. En el extremo, cuando $\theta_{jt} \approx \theta_j^*$:

$$Nota_{i,t+1}^* - Nota_{it}^* \approx \frac{c\theta_i^*}{(\theta_j^*)^{2\phi}} (\theta_{i,t+1} - \theta_{it}) + \frac{c(\gamma - \phi)}{(\theta_j^*)^{2\phi}} (\theta_{it}^2 - \theta_{i,t+1}^2)$$

En este caso, la senda seguida por $Nota_{it}^*$ será similar a alguna de las esbozadas en las figuras 21 y 22, bajo los mismos criterios de análisis. Gráficamente:

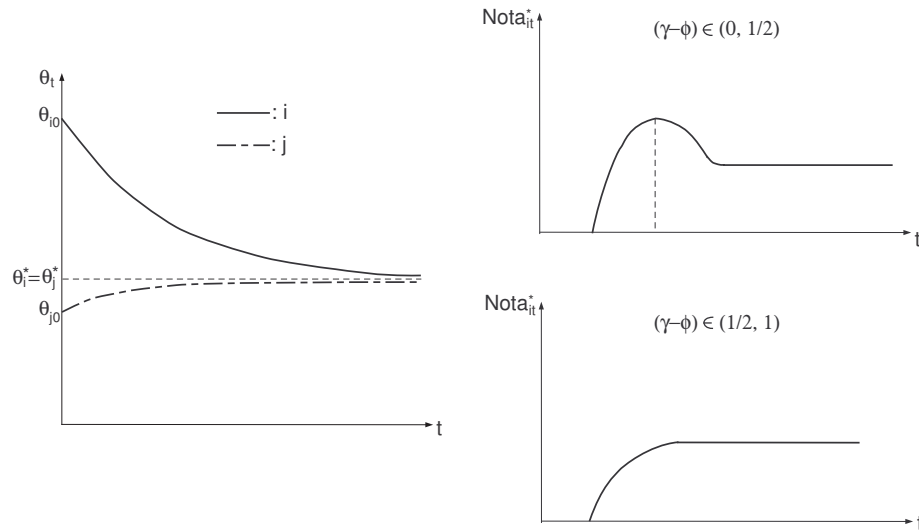


Figura 23

En cambio, si es el estudiante i quien refina más rápido su percepción personal, entonces $Nota_{it}^*$ será decreciente en un mayor lapso hasta estabilizarse. En efecto, si $\theta_{it} \approx \theta_i^*$:

$$\begin{aligned} Nota_{i,t+1}^* - Nota_{it}^* &\approx c(\theta_i^*)^2 \left(\frac{1}{\theta_{j,t+1}^{2\phi}} - \frac{1}{\theta_{jt}^{2\phi}} \right) + c(\gamma - \phi)(\theta_i^*)^2 \left(\frac{1}{\theta_{jt}^{2\phi}} - \frac{1}{\theta_{j,t+1}^{2\phi}} \right) \\ &\approx c(\theta_i^*)^2 (1 - \gamma + \phi) \left(\frac{1}{\theta_{j,t+1}^{2\phi}} - \frac{1}{\theta_{jt}^{2\phi}} \right) < 0 \end{aligned}$$

Gráficamente:

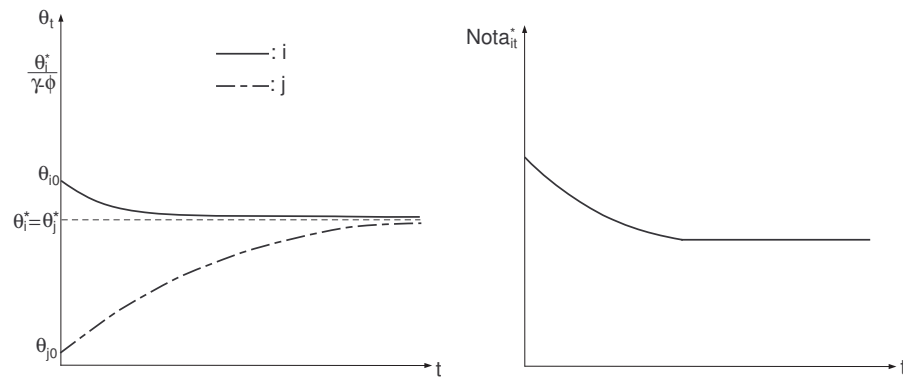


Figura 24

La rapidez de la convergencia puede deberse a una menor persistencia de la creencia, o a un menor sesgo inicial. En el gráfico a la izquierda de la figura 24, se ilustra un ajuste más rápido de la creencia del estudiante i debido a que la brecha inicial respecto de su habilidad efectiva es menor que la que mantiene el estudiante j . En este caso, $Nota_{it}^*$ adopta siempre valores positivos pues hemos asumido que $\theta_{it} < \frac{\theta_i^*}{\gamma - \phi}$. Y como θ_i decrece y θ_j crece, entonces $Nota_{it}^*$ es siempre decreciente hasta estabilizarse.

4. MODELO APROBACIÓN DE CURSOS

En las secciones precedentes vimos cómo un estudiante decidía la carga curricular y el esfuerzo incurrido en los cursos tomados a partir de una proyección de las notas basada en una creencia de habilidad personal. A continuación modificaremos este modelo, omitiendo la decisión de la carga académica y sólo analizando la proyección de notas a obtener en distintos cursos. En los modelos anteriores la nota consistía en una medida promedio, en cambio ahora habrá notas específicas a cada curso. La elección consistirá en esforzarse para obtener notas por sobre un umbral reprobatorio α , y a partir de él lograr las mejores notas posibles. Esta versión del modelo retrata el caso en que un estudiante sigue una malla curricular establecida, y sólo debe decidir cuánto esforzarse a fin de lograr aprobar sus cursos obteniendo ciertas notas sustentadas en una creencia de habilidad personal.

Por simplicidad, supondremos que el estudiante maximiza la diferencia entre una función creciente en las notas de dos cursos N_1, N_2 , y el esfuerzo implicado en su logro. El esfuerzo es costoso y la obtención de notas altas reporta utilidad. La función de utilidad, cuyos argumentos son las notas, tendrá elasticidad de sustitución constante, siendo el parámetro $\gamma \in (-\infty, 1)$ el grado de sustituibilidad entre los cursos. En tanto, la función de costos representada a través del esfuerzo, será cuadrática. En el primer curso será más costoso obtener notas elevadas, siendo $\eta > 1$ el precio relativo del curso 1 en relación al curso 2. En ambos cursos será requisito la obtención de un nivel de nota “ α ” para aprobarlos. Al igual que en los modelos anteriores, la combinación de esfuerzo y habilidad determinan la dotación de recursos con que cuenta un estudiante para la consecución de notas altas en sus cursos.

Así, el problema que resuelve el estudiante es el siguiente:

$$\begin{aligned} \max_{\{N_1, N_2, e\}} & [N_1^\gamma \cdot 1_{N_1 \geq \alpha} + N_2^\gamma \cdot 1_{N_2 \geq \alpha}]^{\frac{1}{\gamma}} - e^2 \\ \text{s.a} & \quad \eta N_1 + N_2 \leq \theta e \end{aligned}$$

El parámetro α simboliza el nivel de notas bajo el cual un curso se reprueba. El estudiante sólo estará dispuesto a esforzarse si confía en obtener notas mayores o iguales a tal nivel. En caso contrario, si cree que no logrará obtener notas por sobre el nivel aprobatorio, decidirá no esforzarse y eliminar el curso (con lo cual la nota obtenida será nula). Así, según la apreciación de los cursos que tenga el estudiante en relación a su propia habilidad, el problema que resuelve puede consistir en maximizar las notas esperando aprobar ambos cursos, sólo uno (eliminando el otro), o eliminar ambos cursos no esforzándose.

Como se estableció, el parámetro $\eta \geq 1$ es el precio relativo del curso 1 en relación al curso 2. Es decir, el curso 1 es más caro en términos de recursos requeridos para la obtención de cierta nota. Por lo tanto, en caso de eliminar un curso, el estudiante comenzará eliminando el curso 1 que exige más recursos académicos, concentrándose sólo en la maximización de la nota del curso 2.

La variable θ corresponde a la creencia de habilidad personal del estudiante. A medida que un estudiante se considera más hábil esperará aprobar ambos cursos, obteniendo notas superiores a α , o bien una nota mínima en un curso y una nota mayor en el otro. En cambio, a medida que descende su percepción de habilidad personal, el estudiante preferirá eliminar el curso 1 y sólo maximizar su nota en el curso 2. La nota esperada en este último curso podrá ser mayor o igual al nivel mínimo de aprobación, dependiendo del esfuerzo realizado por el estudiante en consistencia a su percepción de habilidad. Una vez que su percepción de habilidad personal descienda lo suficiente, optará por eliminar ambos cursos, no esforzándose. La decisión de cuánto esforzarse, en sintonía con cierta aspiración de notas en ambos cursos, depende de la creencia de habilidad personal. Para alcanzar cierto nivel de notas, un estudiante decidirá esforzarse poco si se considera muy hábil, y mucho en caso de percibirse poco hábil.

A partir de una creencia de habilidad θ , el estudiante escoge un nivel de esfuerzo e , teniendo en mente una expectativa de notas N_1, N_2 . A partir de la restricción de recursos del estudiante evaluada en su habilidad real, es posible deducir las notas que efectivamente obtiene. Estas equivaldrán a la participación de recursos académicos asignada por el estudiante a cada curso (que dependen de su creencia de habilidad personal), multiplicada por los recursos académicos con que efectivamente cuenta (que dependen de su habilidad real). Por lo tanto, la nota obtenida por el estudiante dependerá de su verdadera habilidad θ^* , y del esfuerzo que haya escogido. Esto es:

$$\begin{aligned} N_1^*(\theta^*, \theta) &= \frac{\eta N_1(\theta) \theta^* e(\theta)}{\theta e(\theta) \eta} \\ &= N_1(\theta) \frac{\theta^*}{\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_2^*(\theta^*, \theta) &= \frac{N_2(\theta)}{\theta e(\theta)} \theta^* e(\theta) \\ &= N_2(\theta) \frac{\theta^*}{\theta} \end{aligned}$$

Como se aprecia, un estudiante que espera obtener unas notas N_1, N_2 en sus cursos, en la práctica obtiene las notas N_1^*, N_2^* , las cuales difieren de las esperadas en la razón $\frac{\theta^*}{\theta}$.

Mientras mayor sea la percepción de habilidad personal en relación a la habilidad real de un estudiante ($\theta > \theta^*$), la nota esperada en los cursos excederá a la nota realmente obtenida, y vice-versa.

En una primera parte de lo que sigue, trataremos la resolución del problema estático del estudiante. En la segunda parte, revisaremos las implicancias de la actualización de la creencia de habilidad realizada por el estudiante en la versión dinámica del problema.

4.1. ESTÁTICA

Dada una percepción de habilidad personal, si el estudiante cree que es óptimo aprobar ambos cursos, procurará esforzarse lo suficiente para obtener el máximo de nota en los dos. Esto puede traducirse en obtener notas superiores al mínimo aprobatorio en ambos cursos, $N_1, N_2 > \alpha$, o bien obtener una nota mínima en el curso más difícil y otra superior a este mínimo en el otro curso, $N_1 = \alpha, N_2 > \alpha$. Si el estudiante cree que sólo aprobará el curso más fácil, se concentrará en éste y eliminará el curso en que es más demandante en esfuerzo obtener notas altas (curso 1). Por lo tanto, el problema consistirá en maximizar exclusivamente la nota del curso en que se confía aprobar, pudiendo esperar una nota superior o igual al nivel mínimo de aprobación $N_2 \geq \alpha$. Por último, si el estudiante cree que reprobará ambos cursos, los elimina y no resuelve el problema de maximización, $N_1, N_2 = 0$.

A continuación analizaremos los dos casos en que el estudiante al menos maximiza la nota en un curso, dependiendo de cuán elevada sea su percepción de habilidad propia. De este modo, el problema de maximización del estudiante puede descomponerse en dos partes, según cuán restrictivas sean las condiciones sobre las notas obtenidas. Estas son:

1. Aprobación de ambos cursos ($N_1, N_2 \geq \alpha$):

$$F_1 = \max_{\{N_1, N_2, e\}} [N_1^\gamma + N_2^\gamma]^{\frac{1}{\gamma}} - e^2$$

$$s.a \quad \eta N_1 + N_2 \leq \theta e$$

$$N_1 \geq \alpha$$

$$N_2 \geq \alpha$$

Este problema se desglosa en tres casos. Primero, cuando las notas de ambos cursos son mayores a la nota mínima de aprobación ($N_1, N_2 > \alpha$). Segundo, cuando la nota de uno de los cursos es superior al umbral aprobatorio ($N_2 > \alpha$), y la nota del otro curso es igual a la nota mínima de aprobación ($N_1 = \alpha$). Por último, cuando la nota de ambos cursos es igual al nivel mínimo de aprobación

($N_1 = N_2 = \alpha$). La posición de las notas respecto del umbral α dependerá del rango en que se encuentre la creencia de habilidad del estudiante. Se distinguen tres rangos para la creencia de habilidad θ , delimitados por las siguientes cotas:

$$A = 2^{\frac{2\gamma-1}{2\gamma}} \alpha^{\frac{1}{2}} (\eta + 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$B = 2^{\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{1}{2}} \eta^{\frac{1}{2(1-\gamma)}} (\eta^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + 1)^{\frac{2\gamma-1}{2\gamma}}$$

Con ($A < B$).

A mayor creencia de habilidad θ , el estudiante obtendrá mayores notas en ambos cursos. A medida que descende esta percepción de habilidad personal, el estudiante se esforzará menos por lo que reducirá sus notas, especialmente en aquel curso en que es más costoso obtenerlas.

Lema 19 *Si el problema se restringe a soluciones en que $N_1, N_2 \geq \alpha$, la función objetivo del estudiante, su elección de esfuerzo y las notas esperadas en sus cursos están dadas por:*

$$F_1(\theta) = \begin{cases} \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \left(\eta^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + 1\right)^{\frac{2(1-\gamma)}{\gamma}} & \text{si } \theta \geq B \\ (\alpha^\gamma + [\tilde{N}_2(\gamma, \alpha)]^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}} - e^2 & \text{si } \theta \in (A, B) \\ 2^{\frac{1}{\gamma}} \alpha - \left(\frac{\alpha(\eta+1)}{\theta}\right)^2 & \text{si } \theta \leq A \end{cases}$$

$$e_1(\theta) = \begin{cases} \frac{\theta}{2} \left(\eta^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + 1\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} & \text{si } \theta \geq B \\ \frac{\eta\alpha + \tilde{N}_2(\gamma, \alpha)}{\theta} & \text{si } \theta \in (A, B) \\ \frac{\alpha(\eta+1)}{\theta} & \text{si } \theta \leq A \end{cases}$$

$$N_1^{(1)}(\theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{2} \eta^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(\eta^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + 1\right)^{\frac{1-2\gamma}{\gamma}} & \text{si } \theta \geq B \\ \alpha & \text{si } \theta < B \end{cases}$$

$$N_2^{(1)}(\theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{2} \left(\eta^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + 1\right)^{\frac{1-2\gamma}{\gamma}} & \text{si } \theta \geq B \\ \tilde{N}_2(\gamma, \alpha) & \text{si } \theta \in (A, B) \\ \alpha & \text{si } \theta \leq A \end{cases}$$

Con $\tilde{N}_2(\gamma, \alpha)$ la solución de $(\alpha^\gamma + N_2^\gamma)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} N_2^{\gamma-1} - \frac{2(\eta\alpha + N_2)}{\theta^2} = 0$,
y $A = 2^{\frac{2\gamma-1}{2\gamma}} \alpha^{\frac{1}{2}} (\eta + 1)^{\frac{1}{2}}$, $B = 2^{\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{1}{2}} \eta^{\frac{1}{2(1-\gamma)}} (\eta^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + 1)^{\frac{2\gamma-1}{2\gamma}}$.

Demostración : Ver Apéndice.

□

2. **Aprobación de sólo un curso** ($N_1 < \alpha$, $N_2 \geq \alpha$):

$$F_2 = \max_{\{N_2, e\}} N_2 - e^2$$

$$s.a \quad N_2 \leq \theta e$$

$$N_2 \geq \alpha$$

En este caso el estudiante reprueba el curso 1, por lo cual lo elimina de su problema de optimización y concentra sus esfuerzos sólo en el curso 2 (el más barato en términos de recursos académicos). La solución de este problema de maximización podrá descomponerse en dos casos. Primero, cuando en el único curso aprobado se logra una nota superior al nivel aprobatorio ($N_2 > \alpha$). Y segundo, cuando en este curso se obtiene una nota equivalente al nivel mínimo de aprobación ($N_2 = \alpha$). En los dos casos, la nota del curso eliminado es nula ($N_1 = 0$).

La nota obtenida en el curso 2 será mejor mientras mayor sea la creencia de habilidad que posea un estudiante. Existe un punto de quiebre “C”, a partir del cual valores de θ superiores a él, llevan a un estudiante a optimizar en consistencia a la obtención de una nota superior al mínimo aprobatorio $N_2 > \alpha$. En cambio, para valores de la creencia de habilidad inferiores a este punto, $\theta < C$, el estudiante decidirá esforzarse aspirando a obtener el mínimo de nota $N_2 = \alpha$.

Lema 20 *Si el problema se restringe a soluciones en que $N_1 < \alpha$ y $N_2 \geq \alpha$, la función objetivo del estudiante, su esfuerzo y las notas esperadas en sus cursos están dadas por:*

$$F_2(\theta) = \begin{cases} \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 & \text{si } \theta \geq C \\ \alpha - \left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^2 & \text{si } \theta < C \end{cases}$$

$$e_2(\theta) = \begin{cases} \frac{\theta}{2} & \text{si } \theta \geq C \\ \frac{\alpha}{\theta} & \text{si } \theta < C \end{cases}$$

$$N_1^{(2)}(\theta) = \begin{cases} 0 & \end{cases}$$

$$N_2^{(2)}(\theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{2} & \text{si } \theta \geq C \\ \alpha & \text{si } \theta < C \end{cases}$$

Con $C = (2\alpha)^{\frac{1}{2}}$.

Demostración : Ver Apéndice.

□

Integrando todas las posibilidades, la función objetivo del estudiante y las notas esperadas en cada uno de sus cursos, quedan definidas por:

$$F(\theta) = \max\{F_1(\theta), F_2(\theta), 0\}$$

$$N(\theta) = (N_1(\theta), N_2(\theta)) = \begin{cases} N^{(1)}(\theta) & \text{si } F_1(\theta) \geq \max\{F_2(\theta), 0\} \\ N^{(2)}(\theta) & \text{si } F_2(\theta) \geq \max\{F_1(\theta), 0\} \\ 0 & \text{si } 0 \geq \max\{F_1(\theta), F_2(\theta)\} \end{cases}$$

Si el estudiante se esfuerza mucho, en consistencia a una alta creencia de habilidad personal, y por tanto una alta expectativa de notas, optará por maximizar la nota en ambos cursos. En consecuencia, su utilidad vendrá dada por la utilidad asociada al primer problema, $F_1(\theta)$. En cambio, si el estudiante tiene una baja autoestima, se esforzará poco creyendo que no es capaz de obtener buenas notas, por lo que resolverá el segundo problema en que sólo maximiza la nota del único curso que cree aprobará (eliminando el otro), con lo que su bienestar sería $F_2(\theta)$. En el extremo, si la creencia de habilidad del estudiante es muy baja, este no se esfuerza y obtiene una utilidad nula.

Del mismo modo, las notas esperadas en los cursos serán las asociadas a los tres problemas recién descritos, los cuales se vinculan a la percepción de habilidad personal que posea el estudiante.

Como el curso 2 requiere de menos recursos académicos para el logro de cierta nota, en muchos casos en que la creencia de habilidad es baja, el estudiante opta por eliminar el curso 1 concentrándose sólo en el curso 2. A continuación demostramos que la nota obtenida en el curso 2, en cada uno de los problemas de optimización del estudiante ($N_2^{(1)}$ o $N_2^{(2)}$), es continua y no decreciente en la creencia de habilidad. Es decir, tanto en el caso en que el estudiante maximiza la nota en los dos cursos o cuando lo hace sólo en uno, la nota N_2 crece conforme se incrementa la percepción de habilidad individual, y su trayectoria es continua en cada uno de estos problemas

Proposición 21 $N_2^{(1)}, N_2^{(2)}$ son continuas y no decrecientes en θ .

Demostración : Ver Apéndice.

□

Observación : N_2 no es necesariamente creciente en $\bar{\theta}$, donde $\bar{\theta}$ es tal que $F_1(\bar{\theta}) = F_2(\bar{\theta})$. Es decir, justo en la transición en que el estudiante pasa de maximizar exclusivamente la nota en un curso, a resolver el problema en que maximiza la nota de los dos cursos, la trayectoria de N_2 puede ser decreciente en θ . Por ejemplo, un estudiante especializado en el curso 2 que aspira a obtener notas superiores al mínimo de aprobación $N_2 > \alpha$, a medida que mejora la confianza en sí mismo, puede decidir también maximizar la nota en el otro curso. La reasignación de recursos académicos desde el curso 2 al curso 1, podría ocasionar un descenso en la nota esperada en el curso 2, a fin de aprobar el otro curso. En este caso, la nota esperada en ambos cursos podría ser igual a la mínima de aprobación, $N_1 = N_2 = \alpha$. A medida que la habilidad personal percibida por el estudiante siguiera mejorando, este podría decidir esforzarse más con miras a obtener notas superiores al mínimo de aprobación en ambos cursos $N_1, N_2 > \alpha$. Una evolución ascendente de la creencia de habilidad, como puede notarse, se traduce en una tendencia de N_2 no necesariamente creciente en θ en la transición entre problemas de optimización.

Para distintos valores de la creencia de habilidad, en la siguiente figura se muestran valores adoptados por las notas del curso 2 a partir de simulaciones con datos. Claramente se aprecia una no monotonía en la relación positiva entre las notas y la percepción de habilidad, que se da justamente cuando el estudiante modifica su decisión de aprobar un sólo curso con nota alta a aprobar los dos cursos con nota mínima.

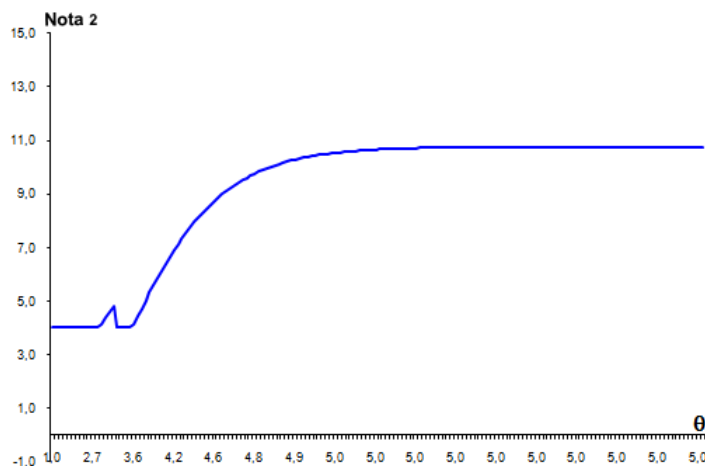


Figura 25: Nota no monótona en θ

($\alpha = 4$, $\eta = 1,5$, $\gamma = 0,6$, $\theta^* = 5$, $\theta_0 = 1$)

Asimismo, también podemos sostener que la utilidad esperada del estudiante será no decreciente en su creencia de habilidad personal. Esto debido a que la utilidad esperada depende de las notas proyectadas por el estudiante, las cuales ya se demostró que son no decrecientes en la creencia de habilidad personal. Intuitivamente, mientras mayor sea la percepción de habilidad personal, más recursos académicos estarán a disposición del estudiante para distribuirlos a la obtención de notas elevadas en sus cursos, lo cual se traduce en mayor bienestar.

Proposición 22 $F(\theta)$ es no decreciente en θ .

Demostración : Ver Apéndice.

□

Dependiendo de la percepción de habilidad que posea un estudiante, este puede optar por esforzarse con miras a aprobar sólo un curso especializándose en él, o bien, aprobar ambos cursos. En el caso de especialización, esta será en el curso menos exigente en esfuerzo (curso 2), y la decisión puede traducirse en aprobar con la nota mínima o una superior, y reprobado el otro curso. Cuando el estudiante tiene una mejor percepción de sí mismo, aspirará a aprobar los dos cursos. Esto le exigirá transferir recursos académicos del curso 2 al curso 1. Como consecuencia, el estudiante podría aprobar con la nota mínima ambos cursos, aprobar con el mínimo el curso 1 y con una nota mayor el curso 2, o aprobar ambos cursos con una nota superior al mínimo.

Lo que finalmente decida hacer el estudiante dependerá tanto de su creencia de habilidad como de sus preferencias. Las preferencias del estudiante se reflejan en sus parámetros de la función de utilidad y de la restricción de recursos académicos que enfrenta. El parámetro $\gamma \in (-\infty, 1)$ de la función de utilidad da cuenta del grado de sustituibilidad o complementariedad entre los cursos, en términos de avance curricular. Es decir, en la medida que $\gamma \rightarrow 1$ los cursos serán más independientes entre sí, lo que le permitirá a un estudiante especializarse sólo en un curso cuando el otro se torna muy exigente, siendo esta decisión menos costosa en términos de progreso en la carrera. Por el contrario, mientras menor sea este parámetro ($\gamma \rightarrow -\infty$) los cursos se tornan más complementarios entre sí, por lo que el estudiante se inclinará a esforzarse para aprobar ambos.

El parámetro $\eta \geq 1$ de la restricción de recursos académicos representa el precio o costo relativo del curso 1 respecto del curso 2. Esto es, da cuenta de cuán exigente es el curso 1 en términos de recursos académicos necesarios para conseguir cierto nivel de notas. Cuando $\eta \rightarrow 1$ ambos cursos se hacen igual de exigentes, por lo que resultará igual de beneficioso el esfuerzo en cada uno de ellos. En contraste, cuando $\eta \rightarrow \infty$ el curso 1 se hace muy caro, por lo que será más conveniente dedicarse al curso 2. Bajo estas circunstancias es más plausible la especialización.

Considerando estos aspectos, la función objetivo F del estudiante puede corresponder al problema F_1 en que se procura aprobar ambos cursos, o al problema F_2 en que sólo se intenta aprobar un curso. El primer problema F_1 tiene definidos dos puntos de quiebres para θ : A y B . Cuando $\theta < A$ el estudiante se esfuerza con el objetivo de aprobar ambos cursos con la nota mínima α . Cuando $\theta \in (A, B)$ el esfuerzo escogido apunta a aprobar el curso 1 con la nota mínima y el curso 2 con una nota superior. Por último, cuando $\theta > B$ el estudiante se esfuerza pretendiendo aprobar ambos cursos con una nota superior a α . Por su parte, el segundo problema F_2 tiene sólo un punto de quiebre C para la creencia de habilidad θ . Así, cuando $\theta < C$ el estudiante decide esforzarse con miras a aprobar el curso 2 con la nota mínima α , y cuando $\theta > C$ el objetivo será aprobar ese curso con una nota mayor a α .

En todo el rango de posibles valores para la creencia de habilidad θ , el punto de quiebre C puede ser menor al punto A , estar entre A y B , o ser mayor al punto B . Su posición depende de los parámetros γ y η de la siguiente forma:

$$C \leq A \quad \Leftrightarrow \quad 2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \leq (\eta + 1)$$

$$C \geq B \quad \Leftrightarrow \quad \eta^{\frac{1}{1-\gamma}} \left(\eta^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + 1 \right)^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}} \leq 1$$

Definimos tres intervalos para θ según el orden de precedencia de los puntos de quiebre A, B, C de los problemas de optimización. El primer caso que analizaremos será cuando $C \leq A < B$, el segundo cuando $A < C < B$, y el tercero cuando $A < B \leq C$. Las trayectorias que sigan las notas N_1, N_2 para las distintas percepciones de habilidad, dependerán crucialmente del nivel de θ en que la función de utilidad del problema de maximización de los dos cursos (F_1) iguale a la función de utilidad del problema de maximización de un sólo curso (F_2). Denominaremos $\bar{\theta}$ a esta creencia de habilidad en que $F_1(\bar{\theta}) = F_2(\bar{\theta})$.

De este modo, habrán doce casos para los posibles problemas de optimización que resuelve el estudiante, cuya taxonomía se muestra en la siguiente tabla:

Cuadro 1: Taxonomía de Decisiones del Estudiante

$\bar{\theta} \mid F_1(\bar{\theta}) = F_2(\bar{\theta})$				
1. $C \leq A < B$	$\bar{\theta} < C$ Caso 1.1	$\bar{\theta} \in (C, A)$ Caso 1.2	$\bar{\theta} \in (A, B)$ Caso 1.3	$\bar{\theta} > B$ Caso 1.4
2. $A < C < B$	$\bar{\theta} < A$ Caso 2.1	$\bar{\theta} \in (A, C)$ Caso 2.2	$\bar{\theta} \in (C, B)$ Caso 2.3	$\bar{\theta} > B$ Caso 2.4
3. $A < B \leq C$	$\bar{\theta} < A$ Caso 3.1	$\bar{\theta} \in (A, B)$ Caso 3.2	$\bar{\theta} \in (B, C)$ Caso 3.3	$\bar{\theta} > C$ Caso 3.4

En lo que sigue analizamos los casos 1.2, 2.4 y 3.3. El análisis del resto de los casos puede verse en la sección de Anexos.

▪ Caso 1.2: $C < \bar{\theta} < A < B$

Dada la disposición de estos puntos de quiebre, tenemos que cuando la creencia de habilidad es baja ($\theta < \bar{\theta}$) el estudiante opta por esforzarse esperando aprobar un solo curso. La nota obtenida en este curso puede ser la mínima o una nota mayor a esta dependiendo de cuán elevada sea la percepción de habilidad personal ($\theta \leq C$). Cuando la creencia de habilidad supera el umbral $\bar{\theta}$, el estudiante decide aprobar los dos cursos. Cuando esta creencia se sitúa en el rango $\theta \in (\bar{\theta}, A)$ la intención del estudiante es aprobar ambos cursos con nota mínima ($N_1 = N_2 = \alpha$). Cuando la creencia se encuentra en el rango $\theta \in (A, B)$, el estudiante se propone aprobar uno de estos cursos con una nota superior a la mínima ($N_1 = \alpha, N_2 > \alpha$). Para mayores grados de confianza personal, cuando $\theta > B$, el estudiante decide aprobar ambos cursos con nota superior a la mínima ($N_1, N_2 > \alpha$). La siguiente figura sintetiza esta relación entre las notas esperadas y los niveles de confianza personal.

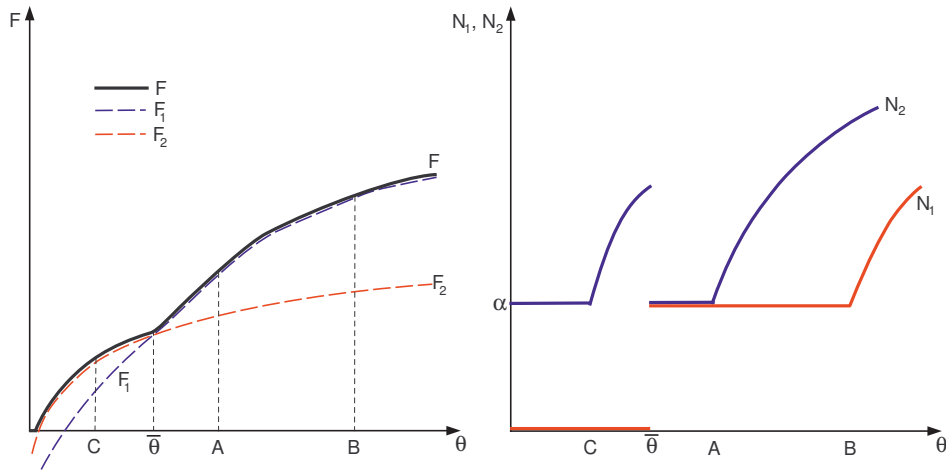


Figura 26

Cabe resaltar, tal como se hizo en una observación anteriormente, que la nota esperada no es necesariamente monótona en la creencia de habilidad. Esto se aprecia en el punto $\bar{\theta}$. Para creencias de habilidad un poco inferiores a esta, la nota esperada en el curso 2 es superior a la mínima. En cambio para niveles de confianza superiores, la nota esperada en este curso se reduce a la mínima. Esto ocurre debido a que para estos estándares de confianza el estudiante decide aprobar también el otro curso, lo que no hacía con creencias de habilidad inferiores.

■ Caso 2.4: $A < C < B < \bar{\theta}$

En este caso el estudiante, en un mayor rango de valores para la creencia de habilidad $\theta < \bar{\theta}$, decide maximizar la nota en un curso y eliminar el más difícil. Dentro de este espectro de creencias de habilidad, cuando esta se sitúe en $\theta < C$ el estudiante decide esforzarse con la intención de aprobar el curso 2 con la nota mínima ($N_1 = 0, N_2 = \alpha$). En tanto, cuando $\theta \in (C, \bar{\theta})$ decide esforzarse esperando alcanzar una nota superior a la mínima en este curso ($N_1 = 0, N_2 > \alpha$). En niveles de confianza personal más elevados, $\theta > \bar{\theta}$, el estudiante opta por esforzarse con miras a aprobar ambos cursos con nota elevada ($N_1, N_2 > \alpha$). La siguiente figura exhibe la relación entre las notas esperadas y la percepción de habilidad recién descrita.

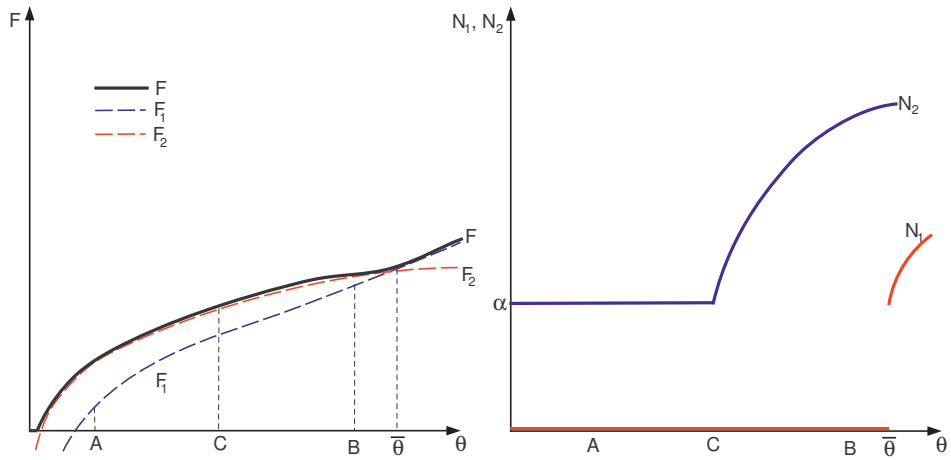


Figura 27

■ Caso 3.3: $A < B < \bar{\theta} < C$

Aquí el estudiante opta por mantenerse aprobando sólo un curso con la nota mínima y eliminando el otro ($N_1 = 0, N_2 = \alpha$) en un extenso rango de valores de creencia de habilidad $\theta < \bar{\theta}$. Cuando la creencia de habilidad excede el umbral $\bar{\theta}$, el estudiante elige un esfuerzo consistente con el objetivo de aprobar ambos cursos con nota superior a la mínima ($N_1, N_2 > \alpha$). La siguiente figura ilustra este patrón entre las notas esperadas y la creencia de habilidad.

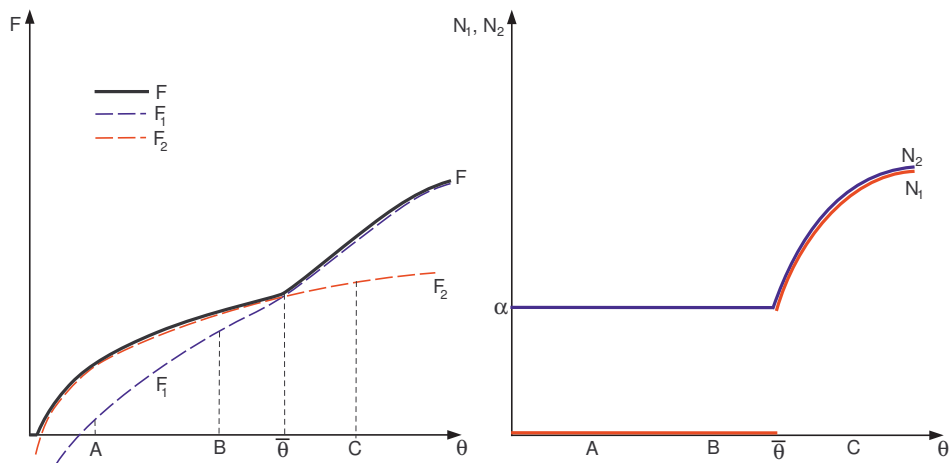


Figura 28

4.2. DINÁMICA

La creencia de habilidad personal θ de un estudiante se actualiza dinámicamente hacia su nivel efectivo θ^* , siguiendo una regla de ajuste simple. El proceso de ajuste posee cierta inercia dada por la creencia del periodo previo, y se renueva a una tasa μ sobre el promedio simple de las diferencias entre las notas efectivas $N^*(\theta^*, \theta)$ y las esperadas $N(\theta)$. Formalmente,

$$\begin{aligned}\theta_{t+1} &= \theta_t + \mu \left[\frac{(N_{1t}^* - N_{1t})}{2} + \frac{(N_{2t}^* - N_{2t})}{2} \right] \\ &= \theta_t + \mu \left[\frac{1}{2}N_{1t} \left(\frac{\theta^*}{\theta_t} - 1 \right) + \frac{1}{2}N_{2t} \left(\frac{\theta^*}{\theta_t} - 1 \right) \right] \\ &= \theta_t + \mu \left(\frac{\theta^*}{\theta_t} - 1 \right) \frac{(N_{1t} + N_{2t})}{2}\end{aligned}$$

A pesar de la complejidad del problema, donde las decisiones adoptadas por el estudiante cambian radicalmente ante cambios en la percepción de habilidad θ (pudiendo dejar de esforzarse con miras a aprobar dos cursos y sólo aprobar uno, por ejemplo), de todas formas esta creencia de habilidad converge monótonamente a su verdadero valor θ^* . Esta trayectoria monótona de la creencia θ , es semejante a las obtenidas en los modelos de la sección 3. La rapidez de ajuste viene dada por el parámetro μ . Así, cuando un estudiante tiene una creencia de habilidad inicial θ_0 demasiado baja en relación a su habilidad efectiva θ^* , la obtención de notas mejores a las esperadas inducirá un ajuste al alza en esta creencia. En consistencia, este estudiante pesimista de sus capacidades irá incrementando periodo a periodo su creencia de habilidad como se muestra en el cuadro izquierdo de la figura a continuación. Por el contrario, un estudiante con expectativas exageradas de su habilidad ($\theta_0 > \theta^*$) obtendrá notas inferiores a las esperadas lo que lo llevará a reducir en el tiempo su percepción personal. Esta dinámica de ajuste se aprecia en el cuadro derecho de la misma figura.

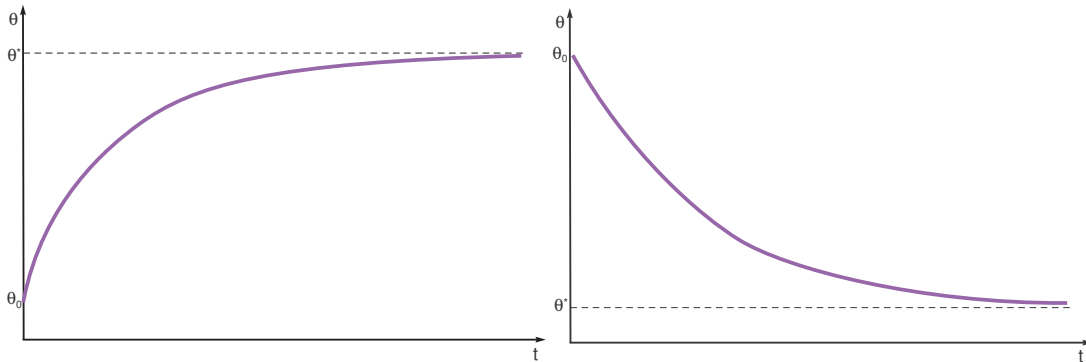


Figura 29: Convergencia creencia de habilidad

Al término del análisis estático del apartado anterior, planteamos 12 posibles formas de resolución del problema del estudiante, en que a partir de su percepción de habilidad decidía aprobar sólo un curso o ambos. Esta elección también se veía influida por los parámetros γ, η que miden el grado de complementariedad y costos de los cursos, respectivamente. Dadas estas preferencias y dependiendo del grado de confianza de un estudiante en sus capacidades académicas, este decidía su esfuerzo teniendo como objetivo ciertas notas N_1, N_2 .

En esta sección nos centraremos en la dinámica subyacente al caso 1.2 de todas estas posibilidades de resolución del problema de optimización revisados en la sección previa. Indagar la dinámica de este problema de optimización resulta interesante por sobre los demás casos, por cuanto el estudiante en los distintos tramos de creencia de habilidad escoge esforzarse en consistencia a todas las combinaciones de notas esperadas en sus dos cursos. Más específicamente, para bajos niveles de creencia de habilidad el estudiante decide sólo aprobar un curso con la nota mínima. A medida que se incrementa θ , decide aprobar este curso con una nota superior al mínimo. Posteriormente, se propone aprobar ambos cursos con nota mínima, y después en uno de ellos aprobar con una nota superior a la mínima. Por último, para niveles más altos de creencia de habilidad, decide aprobar los dos cursos con notas mayores a la mínima.

Estudiaremos las trayectorias esbozadas para el esfuerzo, utilidad, notas reales y notas esperadas a medida que el estudiante ajusta su percepción de habilidad en vista de las notas que va obteniendo. Realizaremos esto en el caso de un estudiante pesimista de su habilidad ($\frac{\theta^*}{\theta} > 1$), y otro optimista de su habilidad personal ($\frac{\theta^*}{\theta} < 1$).

- Estudiante Pesimista ($\theta_0 < \theta^*$)

En todo el rango de posibles valores para la creencia de habilidad, el estudiante decide esforzarse con el objetivo de aprobar un sólo curso cuando su percepción de habilidad es más baja, y luego los dos cursos a medida que mejora su confianza personal. Los parámetros $C < \bar{\theta} < A < B$ definen los valores de la creencia de habilidad θ en que el estudiante modifica su decisión de esfuerzo y objetivo de notas. Así, tempranamente cuando $\theta < C$ la decisión óptima será esforzarse con la ambición de aprobar con nota mínima el curso 2 y reprobado el curso 1 ($N_1 = 0, N_2 = \alpha$). A medida que transcurre el tiempo y cuando $\theta \in (C, \bar{\theta})$ el estudiante sigue velando por sólo aprobar el curso 2, pero ahora con una nota superior a la mínima ($N_1 = 0, N_2 > \alpha$). Una vez que la percepción de habilidad supera cierto umbral $\bar{\theta}$ el estudiante se sentirá con la confianza suficiente para incrementar su esfuerzo apostando a aprobar los dos cursos con nota mínima ($N_1 = N_2 = \alpha$). Esto último se traducirá en la reducción de las notas del curso 2 como consecuencia del desvío de recursos implicado en la aprobación del curso 1 que antes estaba eliminado. Posteriormente, cuando $\theta \in (A, B)$, el estudiante elevará su esfuerzo

paulatinamente con miras a incrementar su nota en el curso 2, manteniendo la del curso 1 en su nivel mínimo ($N_1 = \alpha, N_2 > \alpha$). Por último, cuando la percepción de habilidad personal ya es cercana a la real, $\theta > B$, el estudiante se siente en condiciones de rendir aprobando ambos cursos con nota superior a la mínima ($N_1, N_2 > \alpha$), lo cual le exige un aumento continuo de su esfuerzo.

Como el ajuste de θ es monótonamente creciente para el estudiante pesimista, todas las variables analizadas describirán las mismas trayectorias tanto en θ como en el tiempo. Esto permite que la lectura de los gráficos analizados a medida que aumenta la percepción de habilidad, sea análoga a cuando transcurre el tiempo.

Los siguientes dos gráficos muestran la senda proyectada por las notas esperadas por el estudiante y su esfuerzo concordante, a medida que transcurre el tiempo y conforme precisa su noción acerca de sí mismo va aumentando su percepción de habilidad. El estudiante transita desde el problema de aprobación de un sólo curso hacia los problemas en que se exige aprobar ambos y con notas altas. Por lo tanto, la evolución de las notas esperadas será creciente en el tiempo.

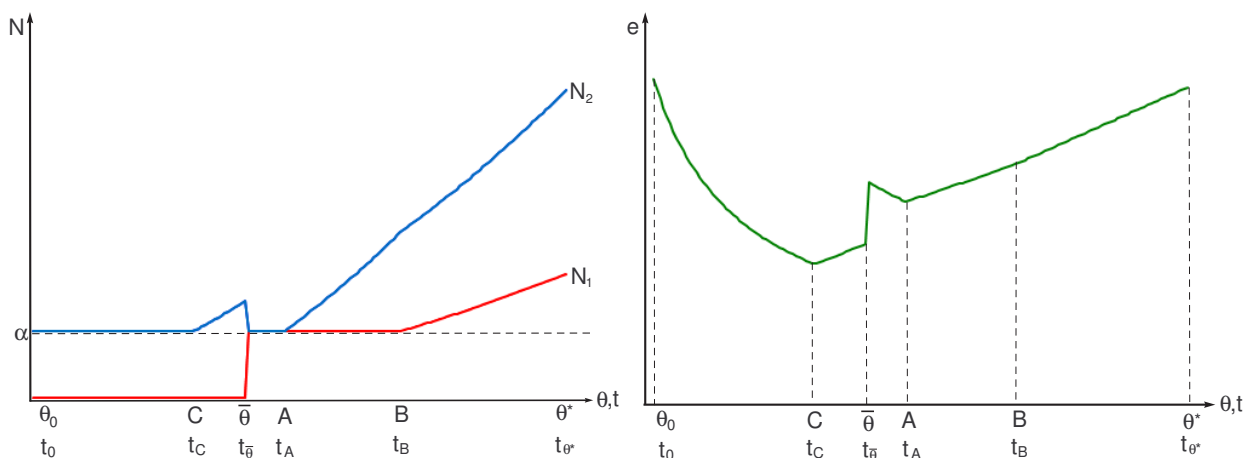


Figura 30: Evolución Notas Esperadas y Esfuerzo ($\theta_0 < \theta^*$)

Como puede notarse, el esfuerzo sigue una trayectoria no monótona a través del tiempo. Mientras el estudiante se tenga poca fe decidirá aprobar sólo un curso con la nota mínima ($\theta < C$), debido a que cree (erróneamente) que el rendimiento marginal de su esfuerzo es muy bajo. En consecuencia se estará esforzando más de la cuenta para lograr su objetivo, por lo que a medida que mejora su percepción de habilidad su nivel de esfuerzo irá descendiendo. En el transcurso del tiempo mejorará su confianza, y mientras $\theta \in (C, \bar{\theta})$, elegirá aprobar este mismo curso con una mejor nota, lo que le exigirá elevar levemente su esfuerzo. Una vez que el estudiante adquiere mayor confianza en sus habilidades, $\theta \in (\bar{\theta}, A)$, decidirá aprobar ambos cursos con nota mínima

lo que lo obliga a incrementar su nivel de esfuerzo. No obstante, como su potencial de desempeño sigue por sobre sus expectativas el esfuerzo invertido excederá lo requerido para lograr este objetivo académico, lo que se traducirá en un descenso paulatino del esfuerzo. A medida que el estudiante sigue mejorando su percepción de habilidad, $\theta \in (A, B)$, se impone elevar su nota en el curso fácil lo que le exige aumentar sus niveles de esfuerzo. Avanzado el tiempo y cuando la percepción de habilidad se empieza a aproximar a su valor real, $\theta > B$, el estudiante incrementará monótonamente su esfuerzo con el objetivo de aprobar los dos cursos con notas cada vez más altas.

Las notas efectivamente obtenidas por el estudiante no coincidirán con las que espera alcanzar mientras mantenga sesgada su percepción de habilidad. Esta discrepancia le permitirá inferir que su habilidad es mejor, ajustándola al alza. Así, en el rango de valores por los que evoluciona la percepción de habilidad las notas reales serán las mostradas en el gráfico siguiente. Para cada objetivo académico trazado por el estudiante, sus notas evolucionan en coherencia a la trayectoria seguida por el esfuerzo y que recién explicamos.

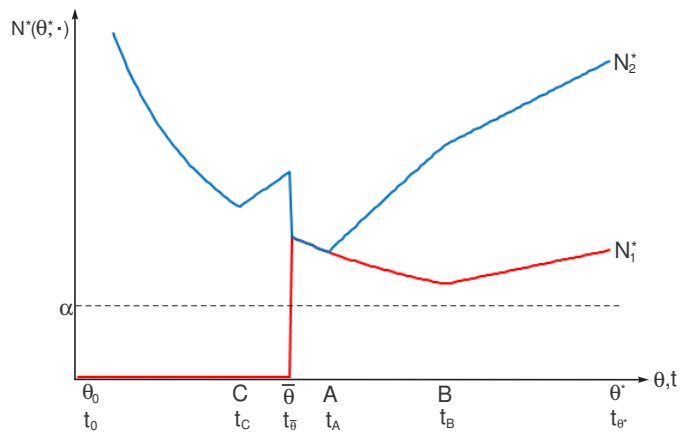


Figura 31: Evolución notas efectivas ($\theta_0 < \theta^*$)

A medida que el estudiante aproxima su idea de habilidad personal hacia su nivel efectivo, toma mejores decisiones académicas lo que hace que la distancia entre la nota esperada y la nota obtenida se vaya disipando. Las diferencias entre las notas esperadas N_1, N_2 y las obtenidas N_1^*, N_2^* , se ilustran a través de las líneas continuas y discontinuas del gráfico siguiente:

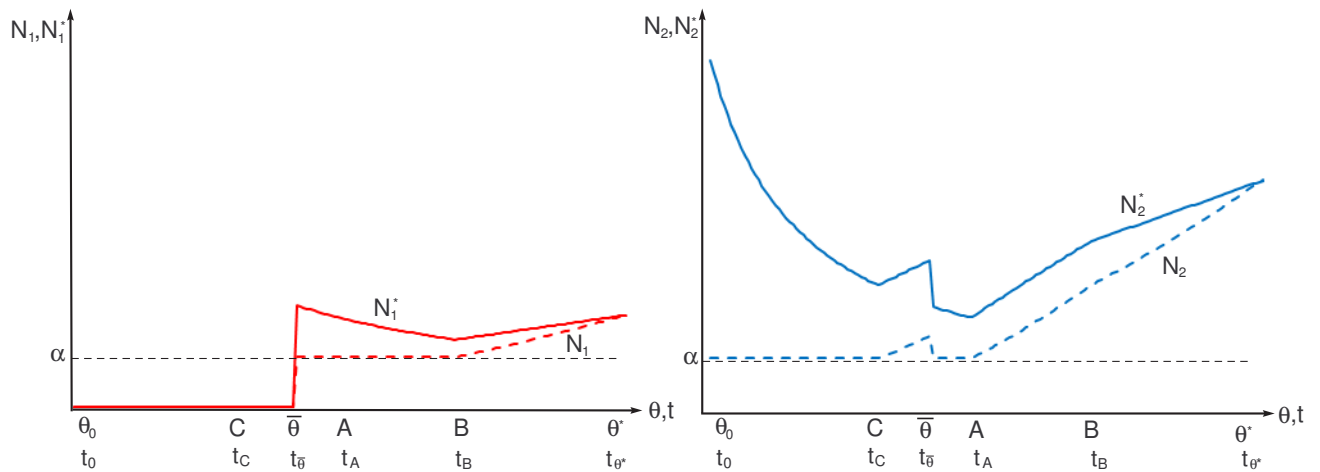


Figura 32: Comparación notas esperadas y efectivas ($\theta_0 < \theta^*$)

Las decisiones académicas adoptadas por el estudiante tienen por objetivo el logro de un nivel de utilidad $F(\theta)$, el cual no necesariamente se cumple. De hecho, la utilidad efectivamente alcanzada por el estudiante $F^*(\theta^*, \theta)$ mientras piensa que es menos hábil de lo que en realidad es, será mayor que su expectativa de utilidad. Esto debido a que el estudiante pesimista siempre obtiene mejores resultados académicos de los esperados, lo que se condice con un mayor bienestar respecto del proyectado. Sin embargo, mientras el estudiante se mantenga pesimista ($\theta < \theta^*$) este bienestar alcanzado estará por debajo de su máximo nivel posible $F^*(\theta^*, \theta^*)$. Esto se muestra en el gráfico que sigue:

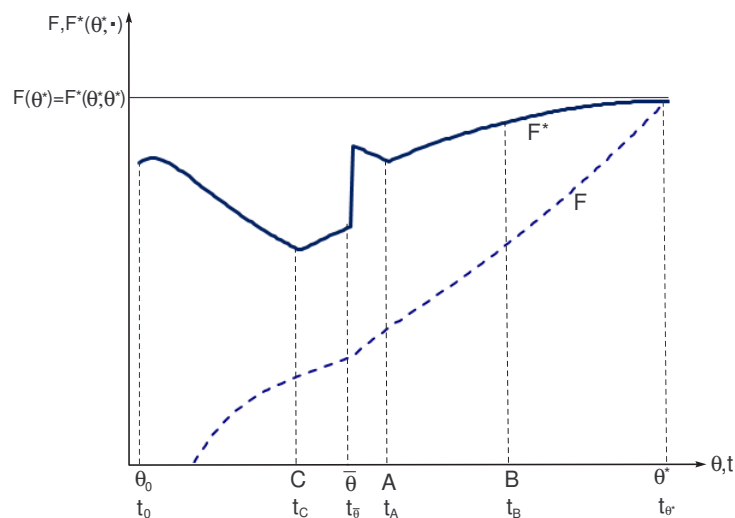


Figura 33: Comparación utilidad esperada y efectiva ($\theta_0 < \theta^*$)

La utilidad proyectada por el estudiante es siempre creciente en θ . Sin embargo, la utilidad real experimenta descensos cuando el estudiante se encuentra resolviendo objetivos académicos que exigen notas invariables a medida que evoluciona su percepción de habilidad (por ejemplo, cuando se propone obtener notas mínimas en ambos cursos). En estas situaciones el esfuerzo requerido para el logro de tal objetivo es decreciente en la percepción de habilidad. Por tanto, debido a que estas decisiones provienen de una estimación sesgada a la baja de la productividad marginal del esfuerzo, terminan agravando la suboptimalidad de la utilidad resultante. En suma, un estudiante pesimista se esfuerza siempre menos de lo óptimo, lo que se exagera cuando el objetivo de notas se mantiene fijo a medida que se ajusta la creencia de habilidad. En estos últimos casos la tendencia de la utilidad alcanzada por el estudiante será decreciente en el tiempo, y en los demás será creciente y tendiendo a la utilidad máxima.

- Estudiante Optimista ($\theta_0 > \theta^*$)

El estudiante optimista parte con una percepción sobredimensionada de su habilidad personal, lo cual lo lleva a creer que el rendimiento marginal de su esfuerzo es más elevado de lo efectivo. Por ello, se esforzará mucho esperando obtener notas altas en ambos cursos. Tal como la dinámica de ajuste de creencia del estudiante pesimista, en este caso el estudiante optimista ajustará a la baja su percepción de habilidad, lo que irá reduciendo a través del tiempo el objetivo académico que se trace y su nivel de esfuerzo asociado. En toda esta trayectoria del esfuerzo hacia su nivel óptimo, este experimentará alzas transitorias cuando el estudiante se mantenga en objetivos académicos donde pretenda obtener una nota mínima de aprobación (por ejemplo, cuando $N_1 = 0, N_2 = \alpha$ o $N_1 = N_2 = \alpha$). La dinámica de las notas esperadas y del esfuerzo, se aprecian en la figura que sigue.

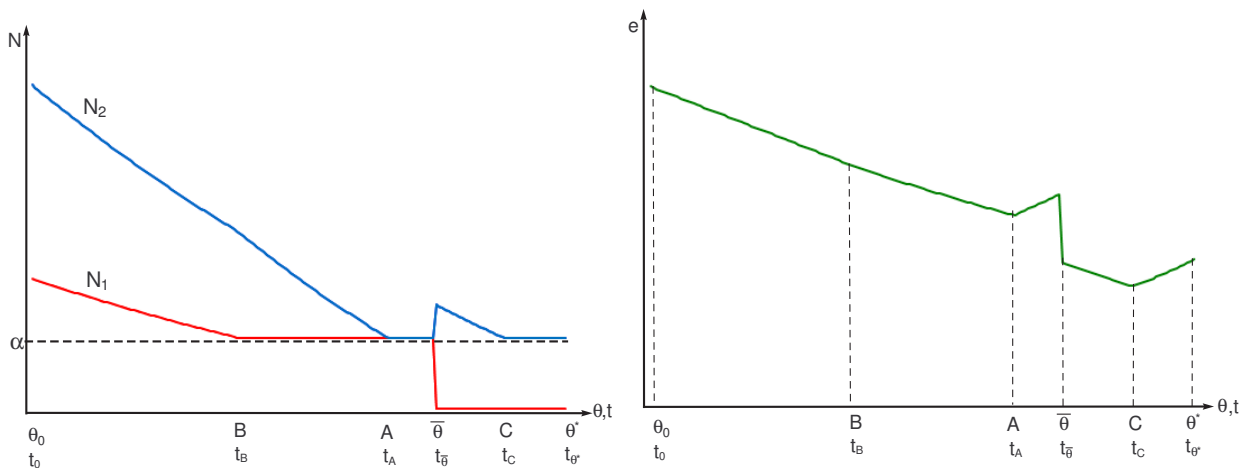


Figura 34: Evolución Notas Esperadas y Esfuerzo ($\theta_0 > \theta^*$)

Por su parte, las notas que realmente obtiene el estudiante, y que le permiten ir infiriendo su verdadera habilidad, son las mostradas en la figura siguiente. En un principio el estudiante reprueba el curso 1, a pesar que su intención es aprobarlo con una nota superior a la mínima. La tendencia temporal de la nota del curso 2 es decreciente conforme decrece el esfuerzo, y sólo en los tramos en que el esfuerzo es creciente también se vuelve creciente. Cuando el estudiante anula su sesgo perceptivo y su creencia de habilidad converge a la real, logra aprobar el curso 2 con la nota mínima tal como se lo propone a esa altura de su proceso de conocimiento personal.

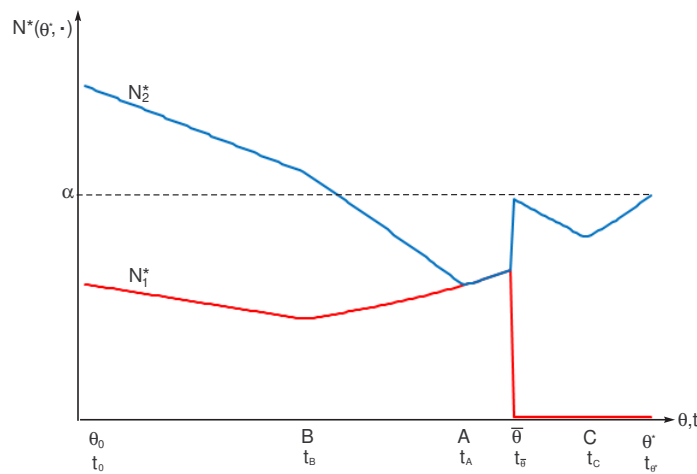


Figura 35: Evolución notas efectivas ($\theta_0 > \theta^*$)

En la siguiente figura se comparan las notas esperadas y las notas obtenidas en cada uno de los cursos. Como se observa, la nota obtenida siempre está por debajo de las expectativas. Esto incita el ajuste a la baja de creencias y de aspiraciones académicas trazadas por el estudiante.

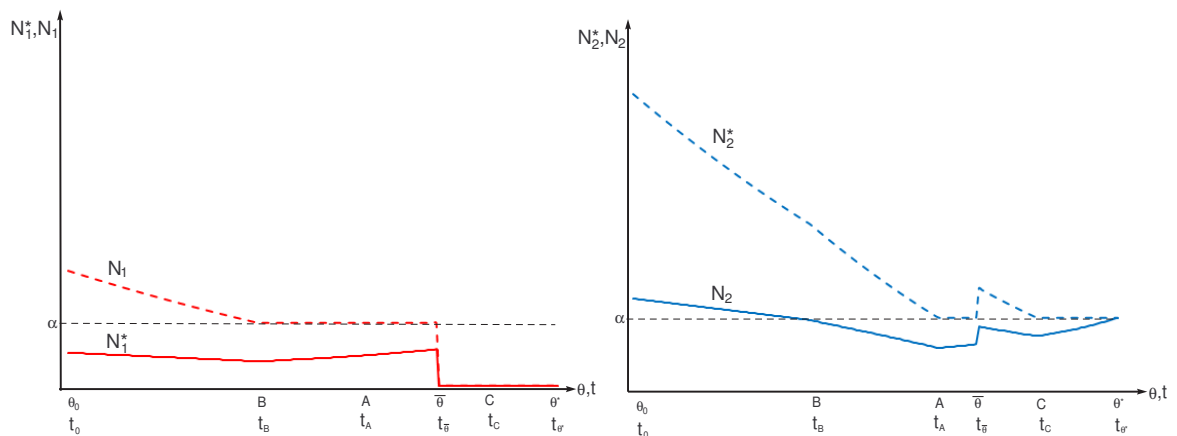


Figura 36: Comparación notas esperadas y efectivas ($\theta_0 > \theta^*$)

El nivel de bienestar alcanzado $F^*(\theta, \theta^*)$ por este estudiante demasiado optimista de su habilidad, estará por debajo tanto del nivel de utilidad óptimo $F^*(\theta^*, \theta^*)$, como del bienestar esperado $F(\theta)$. La tendencia general del bienestar será creciente a medida que el estudiante aproxima su noción de habilidad hacia su nivel real, alcanzando su nivel máximo en $F^*(\theta^*, \theta^*)$, como se aprecia en la siguiente figura.

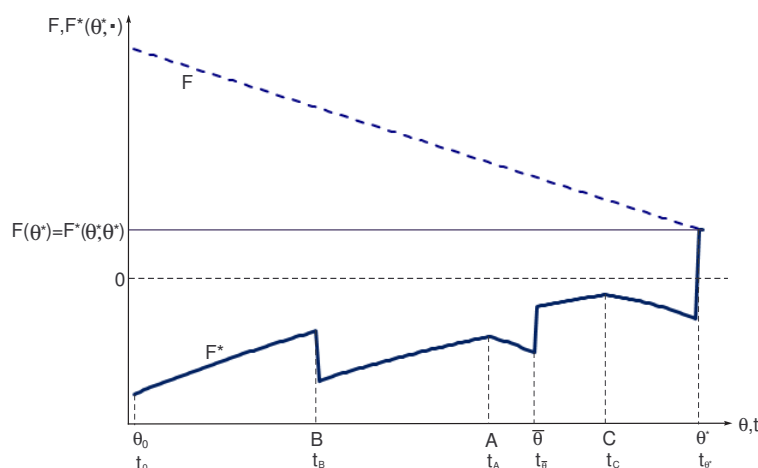


Figura 37: Comparación utilidad esperada y efectiva ($\theta_0 > \theta^*$)

La utilidad aportada por cursos reprobados (obtención de notas inferiores a α) es cero. En estos casos el bienestar alcanzado es negativo debido al costo del esfuerzo incurrido en cursos que no se logran aprobar. Un estudiante que sobrestima sus capacidades, a pesar de que proyecta notas elevadas, reprueba los cursos pues cree que la productividad marginal de su esfuerzo es mayor de lo real. Esto genera una desutilidad durante todo el ajuste de la creencia de habilidad. Es sólo cuando la noción de habilidad ha convergido a su valor real que la decisión académica adoptada por el estudiante es adecuada a sus capacidades, y el bienestar se torna positivo. Como se observa en la figura 37, el bienestar adopta una trayectoria decreciente en el tiempo cuando el estudiante, habiéndose trazado obtener una nota mínima en los cursos, reprueba y simultáneamente incrementa su esfuerzo conforme reduce su percepción de habilidad (esto ocurre cuando $\theta \in (\bar{\theta}, A)$ o cuando $\theta \in (\theta^*, C)$)

5. ACTUALIZACIÓN DE CREENCIA BAYESIANA

En este apartado indagamos las características de la dinámica de las creencias, suponiendo una regla de ajuste bayesiana. En las distintas variantes del modelo de elección analizadas en la sección 3, la dinámica estaba dominada por un ajuste adaptativo en que un estudiante convergía gradualmente a una verdadera percepción de su habilidad a partir del contraste entre las notas esperadas y las obtenidas. La rapidez del ajuste dependía del parámetro μ que reflejaba el grado de inercia de la creencia de habilidad por parte del estudiante:

$$\theta_t^* = \theta_{t-1} + \mu(Nota_{t-1}^* - Nota_{t-1})$$

A continuación consideramos la dinámica del modelo básico de la sección 3.1, pero con un ajuste bayesiano. Para ello supondremos que la habilidad real de un estudiante θ^* , se distribuye normal con media equivalente a la habilidad promedio de la población (el estudiantado) de forma $\bar{\theta}$, y varianza s^2 . Asimismo, en cada periodo el estudiante recibe una señal de su verdadera habilidad θ . Esta señal se distribuye normal con media igual a la habilidad real y una varianza σ^2 .

Siendo θ^* la habilidad real de un estudiante, θ_t la habilidad observada, $\bar{\theta}$ la habilidad promedio de la población, σ^2 la varianza de la señal de habilidad, y s^2 la varianza de la habilidad poblacional; la habilidad real de un estudiante y la habilidad observada se distribuirán del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\theta^* &\sim \mathcal{N}(\bar{\theta}, s^2) \\ \theta_t &\sim \mathcal{N}(\theta^*, \sigma^2)\end{aligned}$$

Por consiguiente, la creencia de habilidad de un estudiante, condicional en la señal recibida después de un periodo, tiene la siguiente distribución:

$$P(\theta^*|\theta_1) \sim \mathcal{N}\left(\frac{\frac{\bar{\theta}}{s^2} + \frac{\theta_1}{\sigma^2}}{\frac{1}{s^2} + \frac{1}{\sigma^2}}, \left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{\sigma^2}\right)^{-1}\right)$$

La regla de actualización de la creencia de habilidad, está afectada por las señales recibidas cada periodo por el estudiante. A partir de las distribuciones anteriores, el estudiante actualiza su creencia mediante un proceso iterativo explicado a continuación.

- 1era etapa:

Un estudiante decide suponiendo que su habilidad real es similar a la habilidad

promedio del estudiantado, $\theta^* = \bar{\theta}$. Luego, su creencia de habilidad sigue el siguiente proceso:

$$\theta_1 \sim \mathcal{N}(\theta^*, \sigma^2)$$

$$P(\theta^* | \theta_1) \sim \mathcal{N}\left(\underbrace{\frac{\bar{\theta} + \frac{\theta_1}{\sigma^2}}{\frac{1}{s^2} + \frac{1}{\sigma^2}}}_{Hab_2}, \underbrace{\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{\sigma^2}\right)^{-1}}_{Var_2}\right)$$

- 2da etapa:
Suponiendo $\theta^* = Hab_2$, el estudiante decide.

$$\theta_2 \sim \mathcal{N}(\theta^*, \sigma^2)$$

$$P(\theta^* | \theta_2) \sim \mathcal{N}\left(\underbrace{\frac{Hab_2 + \frac{\theta_2}{\sigma^2}}{\frac{1}{Var_2} + \frac{1}{\sigma^2}}}_{Hab_3}, \underbrace{\left(\frac{1}{Var_2} + \frac{1}{\sigma^2}\right)^{-1}}_{Var_3}\right)$$

$$\vdots$$

- n-ésima etapa:
Suponiendo $\theta^* = Hab_n$, se toma la decisión.

$$\theta_n \sim \mathcal{N}(\theta^*, \sigma^2)$$

$$P(\theta^* | \theta_n) \sim \mathcal{N}\left(\frac{Hab_n + \frac{\theta_n}{\sigma^2}}{\frac{1}{Var_n} + \frac{1}{\sigma^2}}, \left(\frac{1}{Var_n} + \frac{1}{\sigma^2}\right)^{-1}\right)$$

Mediante simulaciones con datos generados de manera aleatoria, replicamos este proceso de ajuste, a fin de compararlo con la actualización adaptativa estudiada en los modelos de la sección 3. Para realizar este ejercicio es necesario definir criterios de comparación adecuados, en virtud de las diferencias intrínsecas de ambos métodos.

En la actualización adaptativa, la rapidez del ajuste de la creencia de habilidad se englobaba en el parámetro μ . Este coeficiente determinaba la gradualidad de la convergencia de la creencia de habilidad hacia su valor efectivo. Una medida análoga para cuantificar la rapidez del ajuste en el contexto bayesiano, corresponde a la varianza de la señal de habilidad σ^2 . Esta varianza afecta la probabilidad de aproximación de la noción de habilidad hacia su verdadero valor.

Por otra parte, en el ajuste adaptativo, el estudiante posee un sesgo inicial en su creencia de habilidad personal, dado por la distancia entre su creencia de habilidad inicial θ_0 y el parámetro de habilidad real θ^* . Esto es, en la dinámica de ajuste adaptativo, $(\theta^* - \theta_0)$ da cuenta de la magnitud del error perceptivo de un estudiante en relación al conocimiento de su habilidad personal. En la dinámica bayesiana, una medida parecida a este sesgo cognitivo inicial será la varianza de la habilidad real s^2 . Mientras mayor sea esta varianza, mayor será la dispersión de la distribución de la habilidad real en torno a su valor promedio (la habilidad poblacional). Un mayor valor de este parámetro, en consecuencia, reflejará un menor conocimiento a priori de la habilidad personal.

Sabiendo que el sesgo inicial de un estudiante en el ajuste adaptativo es $(\theta^* - \theta_0)$, podemos demostrar que la medida equivalente del sesgo inicial en el ajuste bayesiano s^2 , cuando la habilidad real de un estudiante distribuye normal con media $\bar{\theta}$ y varianza s^2 , es:

$$\frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \int_t^{\infty} (\theta^* - t) \exp^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta^*-t}{s}\right)^2} dt = (\theta^* - \theta_0)$$

Definiendo $\omega = \theta^* - t$, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \omega \cdot \exp^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{s}\right)^2} d\omega &= (\theta^* - \theta_0) \\ \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \left(-s^2 \exp^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{s}\right)^2} \right) \Big|_0^{\infty} &= (\theta^* - \theta_0) \\ \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} s^2 &= (\theta^* - \theta_0) \\ s^2 &= 2\pi(\theta^* - \theta_0)^2 \end{aligned}$$

Teniendo bases de comparación para ambas medidas de ajuste, a continuación examinaremos sus principales características. Para analizar la rapidez del ajuste bajo ambas dinámicas, diremos que cuando la distancia entre la creencia de habilidad y la habilidad real no supera un 5 % de la distancia inicial entre ambas medidas:

$$|\theta_t - \theta^*| < 0,05 \cdot |\theta_0 - \theta^*|$$

entonces el sesgo perceptivo se ha hecho despreciable. Esto es, la creencia de habilidad es suficientemente cercana a la habilidad real.

A partir de datos aleatorios distribuidos según lo señalado anteriormente, simulamos la dinámica de ajuste bayesiano en un total de 500 etapas. Suponiendo un sesgo inicial en

la creencia del ajuste adaptativo de $\theta_0 - \theta^* = 0,3$, el símil en el caso de ajuste bayesiano será una varianza de la habilidad poblacional de $s^2 \approx 0,57$ (lo cual se calcula mediante el procedimiento antes descrito). En cada uno de los métodos registramos el primer periodo en que la creencia de habilidad alcanzaba el rango más próximo a la habilidad real, a fin de comparar la rapidez de ambos procesos de ajuste. Del mismo modo, contabilizamos el porcentaje de periodos en que esta creencia se situaba próxima a su valor real, con el objetivo de examinar la persistencia del ajuste en torno a su valor de estado estacionario. Para el ajuste bayesiano, el registro de estas estadísticas lo obtuvimos a partir de un promedio de 100 repeticiones del ajuste, debido al carácter estocástico del proceso.

En el caso de la actualización adaptativa, al ser un mecanismo de ajuste determinístico, una vez que la creencia de habilidad se aproxima monótonamente a su valor real, seguirá haciéndolo en el futuro. En cambio, en el ajuste bayesiano la naturaleza estocástica del proceso hace que la creencia de habilidad fluctúe en torno al valor real, incluso después de haber estado muy cerca de él. Las comparaciones entre ambos mecanismos se hicieron para distintos valores del parámetro de ajuste de la creencia de habilidad, dado por el coeficiente μ en el caso adaptativo, y la varianza de la señal de habilidad σ^2 en el caso de ajuste bayesiano. A mayor valor del parámetro de ajuste adaptativo (μ), más rápido será el ajuste. En tanto, mientras mayor sea la varianza de la señal de habilidad (σ^2) en el caso de ajuste bayesiano, menos rápido será el ajuste.

La siguiente tabla resume las estadísticas comparativas de las dinámicas de actualización de la creencia de habilidad:

Actualización Adaptativa			Actualización Bayesiana		
μ	% Éxito	T_0	σ^2	% Éxito	T_0
0,1	59,4	203	1,5	25,6	64,5
0,2	79,8	101	1,3	27,1	64,6
0,3	86,6	67	1,1	27,8	58,9
0,4	90,0	50	1,0	35,6	64,1
0,5	92,0	40	0,9	36,8	52,6
0,6	93,4	33	0,7	40,2	44,4
0,7	94,4	28	0,5	55,3	31,8
0,8	95,2	24	0,3	69,4	25,9
0,9	95,8	21	0,1	86,9	9,8

Con: $\theta^* = 0,5$, $\theta_0 = 0,8$, $s^2 = 0,57$,
 T_0 : primer periodo en que $|\theta_t - \theta^*| < 0,05|\theta_0 - \theta^*|$,
 % Éxito: % de periodos en que $|\theta_t - \theta^*| < 0,05|\theta_0 - \theta^*|$.

El ajuste adaptativo es más lento en erradicar el sesgo perceptivo inicial, pero una vez que esto ocurre, la creencia de habilidad permanece en torno a la habilidad real. En cambio, en el ajuste bayesiano alcanzar la habilidad real ocurre temporalmente más

temprano, pero la dinámica posterior es menos estable incluso con señales precisas sobre la habilidad real (σ^2 pequeña).

En ambas dinámicas, mientras más rápido es el parámetro de ajuste (mayor parámetro μ en el caso de ajuste adaptativo, y menor σ^2 en el caso de ajuste bayesiano), el número de periodos en que la creencia de habilidad se aproxima lo suficiente a su valor efectivo se incrementa, lo cual se ilustra a través del mayor “% de Éxitos” reportado en la tabla. Cabe destacar que esta medida de permanencia en torno al valor real de la habilidad, es más pronunciado en el caso de ajuste adaptativo. Es decir, aún con realizaciones acertadas para la señal de habilidad en el caso de ajuste bayesiano (baja varianza de la señal de habilidad), la frecuencia con que esta se aproxima a su verdadero valor es menor respecto de los resultados del ajuste de creencias adaptativo.

Por otra parte, la etapa T_0 en que por primera vez la creencia de habilidad se acerca a su verdadero valor, es mucho más temprana en el ajuste bayesiano. Un estudiante bayesiano percibe su verdadera habilidad más rápido que un estudiante adaptativo. Sin embargo, el estudiante adaptativo, a pesar de aprender a conocerse más lento, una vez que lo hace es de manera permanente. Cuando esto sucede, el estudiante adaptativo converge a un equilibrio en sus notas, esfuerzo y bienestar. En contraste, el estudiante bayesiano por un mayor tiempo oscila en torno a su habilidad real, lo que lleva a que la trayectoria de sus notas, nivel de esfuerzo y bienestar sean más inestables.

De hecho, de los resultados expuestos en la tabla se aprecia que para conseguir más de un 86 % de aproximaciones de la creencia de habilidad hacia su valor efectivo (“%Éxito”), la dinámica adaptativa requiere un parámetro de ajuste de $\mu = 0,3$ bastante lento, en cambio la dinámica estocástica exige una varianza de la señal de habilidad extremadamente pequeña de $\sigma^2 = 0,1$. Esto es, la actualización determinística garantiza un mayor grado de acierto de la creencia de habilidad, incluso con parámetros de ajuste extremadamente lentos, a diferencia del ajuste probabilístico que para lograr el mismo grado de acierto requiere de un parámetro de ajuste considerablemente rápido.

6. CONCLUSIONES

Considerando distintos aspectos de la psicología social y cognitiva, en este trabajo modelamos la decisión óptima de esfuerzo y carga académica de un estudiante universitario que posee una creencia de habilidad personal que puede diferir de la real. Sobre este escenario base estudiamos la incidencia sobre el rendimiento académico y el bienestar del estudiante, de la influencia ejercida por los compañeros de clase (también denominado “efecto pares”), de la importancia social asignada a la reputación académica reflejada a través de notas altas, y del impacto de cursos que premian la posición relativa obtenida en las notas de una clase. En cada una de estas variantes del modelo de elección, se obtienen resultados específicos sobre el accionar del estudiante, en una dimensión estática y dinámica.

En ausencia de interacción con compañeros de clase, mientras mayor sea la percepción de habilidad personal que posea un estudiante, mayor será su decisión de esfuerzo y mayor será la carga académica escogida. Asimismo, el estudiante proyectará la obtención de buenas notas en los cursos elegidos, no obstante obtendrá notas inferiores a las esperadas. Esta discrepancia lo llevará a ajustar su creencia de habilidad a la baja, de modo de paulatinamente ir convergiendo a su habilidad verdadera. En este proceso, tanto el esfuerzo como la carga académica y la expectativa de nota decrecen. En cambio, la utilidad alcanzada por el estudiante aumenta, pues refina su creencia personal lo que le permite decidir mejor. La regla de ajuste de la creencia de habilidad, que determina la dinámica de las variables de decisión, es de tipo determinística. A fin de establecer comparaciones entre las trayectorias de las variables de elección, estudiamos la dinámica resultante de una regla de ajuste bayesiana. La actualización de creencias siguiendo la regla de bayes, es más rápida en erradicar el sesgo perceptivo inicial pero la dinámica posterior es significativamente más volátil, incluso con señales precisas de la habilidad real.

El sesgo perceptivo acerca de la creencia de habilidad personal, pese a que puede traducirse en el logro de un mejor rendimiento académico, no garantiza la maximización de utilidad por parte del estudiante. En el extremo, cuando un estudiante conoce perfectamente su habilidad, toma decisiones óptimas y alcanza el máximo bienestar posible. En cambio, si no se conoce bien podría obtener mejores notas pero a un costo personal demasiado alto que le exigiría un esfuerzo por sobre el óptimo. Este último resultado se da en el caso de estudiantes sobreconfiados de su habilidad personal que valoran mayormente la obtención de buenas notas por sobre el avance curricular en la carrera, y en estudiantes pesimistas de su habilidad personal que valoran mayormente el avance curricular. Una política universitaria tendiente a elevar el rendimiento académico tendría que perpetuar los sesgos cognitivos en estos perfiles de estudiantes.

Cuando introducimos una externalidad positiva sobre el rendimiento asociada al esfuerzo de los compañeros de clase, se modifican algunos de los resultados antes señalados. La interacción con compañeros altamente esforzados, eleva los estándares de discusión e intercambio de ideas, lo cual mejora el rendimiento individual. Este efecto se conoce en la literatura como “efecto pares”. El tratamiento de este efecto, descansa en el supuesto de que la creencia que un estudiante posea sobre su habilidad personal y la de sus compañeros, equivale a la percepción colectiva. Es decir, las percepciones de habilidad entre estudiantes deben estar alineadas.

El esfuerzo individual y la externalidad actúan como sustitutos. Esto, pues es posible lograr un mismo rendimiento esforzándose menos como consecuencia de la externalidad positiva que ejercen los compañeros. En este modelo, la sustitución es perfecta por lo que el rendimiento marginal del esfuerzo no se ve alterado por la externalidad. En cambio, la decisión de carga académica y la expectativa de notas, aumentan por el efecto positivo del esfuerzo de los compañeros. En este sentido, el efecto de elevar la carga académica en respuesta a una mayor creencia de habilidad personal, se ve reforzado con la externalidad ejercida por los compañeros de clase. Como la externalidad promueve la carga académica y no altera el incentivo al esfuerzo, la nota lograda por un estudiante será decreciente con respecto a la creencia de habilidad personal en un mayor rango de valores. De todas formas, tanto la nota obtenida como la utilidad alcanzan niveles más altos ante la presencia de la externalidad positiva. Mientras más hábiles sean percibidos los compañeros de clase, mayor será el efecto de la externalidad y más alta la utilidad y notas que puede alcanzar el estudiante.

Cuando consideramos un estudiante que valora su reputación académica reflejada a través de sus notas, éste le otorgará mayor importancia a las notas en su función de utilidad y le destinará una mayor proporción de sus recursos académicos al logro de las mismas, siempre que se considere más capaz que sus pares. Es decir, dado un nivel de esfuerzo, los recursos asignados a las notas aumentan si el estudiante se considera más capaz que sus pares con el fin de validar su prestigio académico mediante el logro de mejores notas. Sin embargo, el esfuerzo incurrido no necesariamente aumenta cuando se sobrevaloran las notas en la función de utilidad. Esto ocurre debido a que el rendimiento marginal del esfuerzo se intensifica sólo cuando se desproporcionan las valoraciones de las notas y la carga académica en la función de utilidad. Mientras más desbalanceada sea la valoración de notas y carga académica en la función de utilidad de un estudiante, el esfuerzo requerido para su logro será mayor. Así, el esfuerzo crece con la sobreponderación de las notas siempre que la valoración relativa entre las notas y la carga académica se desequilibre en favor de las primeras. De este modo, un estudiante que le asignaba una mayor importancia a las notas en su función objetivo, al creerse más capaz que sus pares les asignará una importancia aún mayor, lo que generará un aumento del esfuerzo y una mejora tanto en las notas proyectadas como

en las obtenidas. Adicional a esto, el logro de mejores notas, a pesar de incrementar el esfuerzo, se traducen en un mayor bienestar. En consecuencia, el poseer una creencia de habilidad por sobre la del resto, aunque carezca de legitimidad, es beneficioso para el estudiante tanto en términos de la mejor nota que obtiene como de una mayor satisfacción personal.

Ahora, cuando el estudiante se somete a un esquema de evaluación que premia el “ranking”, tendrá incentivos a maximizar su nota relativa a la de sus compañeros de clase. Maximizar la posición relativa en una clase, lleva a que una expectativa de mayor nota por parte de los compañeros eleve la competencia por la mejor nota relativa, lo cual incrementa la desutilidad del esfuerzo implicado en su logro. De esta forma, la expectativa de la nota a obtener por los compañeros de clase afectará negativamente el esfuerzo individual, la carga académica y la expectativa de notas personal. Asimismo, la nota efectivamente obtenida también se verá reducida ante una creencia de mayor habilidad de los compañeros de clase. Por su parte, el bienestar del estudiante no necesariamente alcanza su máximo cuando su creencia de habilidad personal ha convergido a la real. En este contexto será posible explotar en beneficio personal sesgos cognitivos personales y de los compañeros de clase. Que los compañeros se perciban menos hábiles de lo que efectivamente son, los lleva a reducir su esfuerzo personal lo cual facilita la obtención de un mejor “ranking” académico. Del mismo modo, también puede ser beneficiosa cierta cuota de optimismo/pesimismo personal que permita contrarrestar o acentuar el efecto del sesgo de los compañeros cuando éste es desfavorable o beneficioso, respectivamente.

Por último, retratamos la elección de un estudiante enfrentado a una malla curricular rígida, donde la variable de elección es el esfuerzo en función de conseguir aprobar dos cursos. La aprobación exige una nota mínima, por lo que el estudiante deberá esforzarse para lograr exceder este mínimo, de lo cual deriva utilidad. Así, según la apreciación de los cursos que tenga el estudiante en relación a su propia habilidad, el problema que resuelve puede consistir en maximizar las notas esperando aprobar ambos cursos, sólo uno (eliminando el otro), o eliminar ambos cursos no esforzándose. La decisión de eliminar un curso es más probable cuanto menor sea el grado de complementariedad de los cursos respecto al avance curricular en la carrera. Sesgos perceptivos en la creencia de habilidad (pesimismo u optimismo) generan una brecha entre las metas y los logros académicos obtenidos por un estudiante, que lo llevan a reevaluar su percepción de habilidad y replantearse su ambición académica. Esta creencia de habilidad, en conjunto al grado de complementariedad/sustituibilidad de los cursos (en el sentido de avance curricular) y al precio relativo de los cursos (dificultad relativa), determinan las decisiones y la dinámica consecuente de las notas esperadas, notas reales, esfuerzo y utilidad.

7. APÉNDICE

Demostración Proposición 3:

La utilidad efectiva es máxima cuando $\theta_t = \theta^*$. Esto es: $\left. \frac{\partial Utilidad_t^*(\theta_t, \theta^*)}{\partial \theta_t} \right|_{\theta_t = \theta^*} = 0$

A partir de (6):

$$\frac{\partial Utilidad_t^*}{\partial \theta_t} = a \left(\frac{\gamma}{\eta} \right)^\gamma [(1 + \gamma)\theta_t^\gamma (\theta^* - \gamma\theta_t)^{1-\gamma} - \gamma(1 - \gamma)\theta_t^{1+\gamma} (\theta^* - \gamma\theta_t)^{-\gamma} - (1 - \gamma)^{1-\gamma}\theta_t]$$

Luego, si $\theta_t = \theta^* = \theta$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial Utilidad_t^*}{\partial \theta_t} \right|_{\theta_t = \theta^* = \theta} &= a \left(\frac{\gamma}{\eta} \right)^\gamma [(1 + \gamma)\theta^\gamma (\theta - \gamma\theta)^{1-\gamma} - \gamma(1 - \gamma)\theta^{1+\gamma} (\theta - \gamma\theta)^{-\gamma} - (1 - \gamma)^{1-\gamma}\theta] \\ &= a \left(\frac{\gamma}{\eta} \right)^\gamma [(1 + \gamma)\theta(1 - \gamma)^{1-\gamma} - \gamma(1 - \gamma)^{1-\gamma}\theta - (1 - \gamma)^{1-\gamma}\theta] \\ &= a \left(\frac{\gamma}{\eta} \right)^\gamma \theta(1 - \gamma)^{1-\gamma}[(1 + \gamma) - \gamma - 1] \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Demostración Proposición 4:

Haremos el caso $\theta_0 > \theta^*$, el otro es análogo. Probaremos que $\theta_t \searrow \theta^*$.

Primero demostraremos que la sucesión θ_t tiene un límite. Para esto, demostraremos inductivamente que la sucesión es decreciente y acotada inferiormente.

1. Verifiquemos que se cumple para $t = 0$:

1.1 $\theta_0 \geq \theta^*$

Se cumple por hipótesis.

1.2 $\theta_1 \leq \theta_0$

En efecto:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta_0 + \mu(Nota_0^* - Nota_0) \\ &= (1 - \mu e_0)\theta_0 + \mu e_0\theta^* \\ &\leq \theta_0 \end{aligned}$$

Debido a que $\theta_0 \geq \theta^*$.

2. Supongamos que la propiedad es cierta para t :

i. $\theta_{t+1} \leq \theta_t$

ii. $\theta^* \leq \theta_t$

Ahora la probamos para $t + 1$:

2.1 A partir de la actualización de creencia, en $t + 1$:

$$\begin{aligned}\theta_{t+1} &= \theta_t + \mu(Nota_t^* - Nota_t) \\ &= \theta_t + \mu(e_t\theta^* - \eta UD_t - e_t\theta_t + \eta UD_t) \\ &= (1 - \mu e_t)\theta_t + \mu e_t\theta^* \\ &\geq \theta^*\end{aligned}$$

Donde la última desigualdad viene de la hipótesis inductiva (ii), $\theta_t \geq \theta^*$.

2.2 Nuevamente, a partir del proceso de actualización de la creencia de habilidad, en $t + 2$:

$$\begin{aligned}\theta_{t+2} &= \theta_{t+1} + \mu(Nota_{t+1}^* - Nota_{t+1}) \\ \theta_{t+2} - \theta_{t+1} &= \mu e_{t+1}(\theta^* - \theta_{t+1})\end{aligned}$$

De (2.1), $\theta_{t+1} \geq \theta^*$. En consecuencia: $\theta_{t+2} \leq \theta_{t+1}$.

Por consiguiente, la creencia de habilidad converge monótonamente. Además, el esfuerzo $e(\theta_t)$, que es lineal en la creencia de habilidad, está siempre por encima del nivel $e(\theta^*) > 0$.

3. $\theta_t \longrightarrow \bar{\theta}$

En efecto,

$$\begin{aligned}\theta_{t+1} &= \theta_t + \mu(Nota_t^* - Nota_t) \\ \theta_{t+1} - \theta_t &= \mu e_t(\theta^* - \theta_t)\end{aligned}$$

De (2) sabemos que $\lim e_t > 0$. Como $\lim(\theta_{t+1} - \theta_t) = 0$, entonces $\theta_t \longrightarrow \theta^*$.

□

Demostración Proposición 6:

La utilidad es máxima cuando $\theta_{it} = \theta_i^*$. Esto es: $\left. \frac{\partial Utilidad_{it}^*(\theta_{it}, \theta_i^*, \theta_{jt})}{\partial \theta_{it}} \right|_{\theta_{it} = \theta_i^*} = 0$

A partir de (11):

$$\begin{aligned} \frac{\partial Utilidad_{it}^*}{\partial \theta_{it}} &= a \left(\frac{\gamma}{\eta} \right)^\gamma [((1 + \gamma)\theta_{it}^\gamma + \gamma\beta\theta_{it}^{\gamma-1}\theta_{jt})(\theta_i^* - \gamma\theta_{it})^{1-\gamma} \\ &\quad - \gamma(1 - \gamma)\theta_{it}^\gamma(\theta_{it} + \beta\theta_{jt})(\theta_i^* - \gamma\theta_{it})^{-\gamma} - (1 - \gamma)^{1-\gamma}\theta_{it}] \end{aligned}$$

Luego, si $\theta_{it} = \theta_i^* = \theta_i$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial Utilidad_{it}^*}{\partial \theta_{it}} \right|_{\theta_{it}=\theta_i^*=\theta_i} &= a \left(\frac{\gamma}{\eta} \right)^\gamma [((1 + \gamma)\theta_i^\gamma + \gamma\beta\theta_i^{\gamma-1}\theta_{jt})(\theta_i - \gamma\theta_i)^{1-\gamma} \\ &\quad - \gamma(1 - \gamma)\theta_i^\gamma(\theta_i + \beta\theta_{jt})(\theta_i - \gamma\theta_i)^{-\gamma} - (1 - \gamma)^{1-\gamma}\theta_i] \\ &= a \left(\frac{\gamma}{\eta} \right)^\gamma [((1 + \gamma)\theta_i + \gamma\beta\theta_{jt})(1 - \gamma)^{1-\gamma} - \gamma(1 - \gamma)^{1-\gamma}(\theta_i + \beta\theta_{jt}) \\ &\quad - (1 - \gamma)^{1-\gamma}\theta_i] \\ &= a \left(\frac{\gamma}{\eta} \right)^\gamma (1 - \gamma)^{1-\gamma} [(1 + \gamma)\theta_i + \gamma\beta\theta_{jt} - (1 + \gamma)\theta_i - \gamma\beta\theta_{jt}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Demostración Proposición 8:

Para el caso $\theta_{k0} > \theta_k^*$ (con $k = \{i, j\}$) se demostrará que $\theta_{kt} \searrow \theta_k^*$. El otro caso es similar. Para ésto, de demostrará inductivamente que la sucesión es decreciente y acotada inferiormente.

1. Veamos si se cumple para $t = 0$:

1.1 $\theta_{i0} \geq \theta_i^*$

Lo cual es cierto por hipótesis.

1.2 $\theta_{i1} \leq \theta_{i0}$

En efecto:

$$\begin{aligned} \theta_{i1} &= \theta_{i0} + \mu(Nota_{i0}^* - Nota_{i0}) \\ &= [1 - \mu(e_{i0} + \beta e_{j0})]\theta_{i0} + \mu(e_{i0} + \beta e_{j0})\theta_i^* \\ &\leq \theta_{i0} \end{aligned}$$

Por hipótesis.

2. Supongamos que se cumple para t :

- i. $\theta_{it} \geq \theta_i^*$ $\theta_{jt} \leq \theta_j^*$
 ii. $\theta_{i,t+1} \leq \theta_{it}$ $\theta_{j,t+1} \geq \theta_{jt}$

Ahora, probemos para $t + 1$.

2.1 A partir de la actualización de creencia, en $t + 1$:

$$\begin{aligned}\theta_{i,t+1} &= \theta_{it} + \mu(Nota_{it}^* - Nota_{it}) \\ &= \theta_{it} + \mu[(e_{it} + \beta e_{jt})\theta_i^* - \eta UD_t - (e_{it} + \beta e_{jt})\theta_{it} + \eta UD_t] \\ &= [1 - \mu(e_{it} + \beta e_{jt})]\theta_{it} + \mu(e_{it} + \beta e_{jt})\theta_i^* \\ &\geq \theta_i^*\end{aligned}$$

Debido a hipótesis inductiva (ii): $\theta_{it} \geq \theta_i^*$.

2.2 Del mismo modo, en $t + 2$:

$$\begin{aligned}\theta_{i,t+2} &= \theta_{i,t+1} + \mu(Nota_{i,t+1}^* - Nota_{i,t+1}) \\ \theta_{i,t+2} - \theta_{i,t+1} &= \mu(e_{i,t+1} + \beta e_{j,t+1})(\theta_i^* - \theta_{i,t+1})\end{aligned}$$

De (2.1), $\theta_{t+1} \geq \theta^*$, por lo tanto $\theta_{i,t+2} \leq \theta_{i,t+1}$.

Como la creencia de habilidad converge monótonamente hacia la habilidad efectiva, el esfuerzo $e(\theta_{it})$, que es lineal en la creencia de habilidad, siempre estará por sobre el nivel $e(\theta_i^*) > 0$. Bajo la misma lógica, si $\theta_{k0} < \theta_k^*$, entonces $e(\theta_{kt})$ será creciente y acotado superiormente por $e(\theta_k^*)$.

3. $\theta_{i,t+1} \longrightarrow \bar{\theta}$

En efecto,

$$\begin{aligned}\theta_{i,t+1} &= \theta_{it} + \mu(Nota_{it}^* - Nota_{it}) \\ \theta_{i,t+1} - \theta_{it} &= \mu(e_{it} + \beta e_{jt})(\theta_i^* - \theta_{it})\end{aligned}$$

De (2), tenemos que $\lim(e_{it} + \beta e_{jt}) > 0$. Luego, como $\lim(\theta_{i,t+1} - \theta_{it}) = 0$, entonces $\theta_{it} \longrightarrow \theta_i^*$.

□

Demostración Proposición 9:

e_{it} es creciente en ϕ , ssi $\phi \geq \gamma - \frac{\eta}{1+\eta}$.

A partir de (12), el esfuerzo óptimo está dado por:

$$\begin{aligned} e_{it} &= b\theta_{it} \\ &= \left(\frac{\gamma-\phi}{\eta}\right)^{\gamma-\phi} \frac{(1-\gamma+\phi)^{1-\gamma+\phi}}{2} \theta_{it} \end{aligned}$$

Aplicando logaritmo y derivando con respecto a ϕ , se tiene:

$$\begin{aligned} \log e_{it} &= (\gamma-\phi)(\log(\gamma-\phi) - \log(\eta)) + (1-\gamma+\phi)\log(1-\gamma+\phi) - \log(2) + \log(\theta_{it}) \\ \frac{\partial \log e_{it}}{\partial \phi} &= \log\left(\frac{\eta(1-\gamma+\phi)}{\gamma-\phi}\right) \end{aligned}$$

El esfuerzo es mínimo cuando $\frac{\partial \log e_{it}}{\partial \phi} = 0$, donde se cumple:

$$\phi = \gamma - \frac{\eta}{1+\eta}$$

El esfuerzo será creciente ssi $\phi > \gamma - \frac{\eta}{1+\eta}$.

□

Demostración Corolario 10:

Si $\phi \geq \gamma - \frac{\eta}{1+\eta}$, entonces $Nota_{it}(\theta_{it})$ es creciente en ϕ .

A partir de (14), la nota esperada es:

$$Nota_{it} = (1-\gamma+\phi)e_{it}(\phi)\theta_{it}$$

Derivando con respecto a ϕ , se tiene:

$$\frac{\partial Nota_{it}}{\partial \phi} = e_{it}\theta_{it} + (1-\gamma+\phi)\frac{\partial e_{it}}{\partial \phi}\theta_{it}$$

De la proposición 8, $\frac{\partial e_{it}}{\partial \phi} > 0$ cuando $\phi \geq \gamma - \frac{\eta}{1+\eta}$. Bajo esta condición, la nota es creciente en ϕ .

□

Demostración Proposición 11:

i. En el tramo positivo, $Nota_{it}^*$ es creciente en ϕ

En efecto, a partir de (15), en el tramo de notas positivas $\theta_{it} \leq \frac{\theta_i^*}{\gamma - \phi}$, las notas efectivas son:

$$\begin{aligned} Nota_{it}^* &= b\theta_{it}[\theta_i^* - (\gamma - \phi)\theta_{it}] \\ &= e_{it}[\theta_i^* - (\gamma - \phi)\theta_{it}] \end{aligned}$$

Derivando con respecto a ϕ :

$$\frac{\partial Nota_{it}^*}{\partial \phi} = \frac{\partial e_{it}}{\partial \phi} [\theta_i^* - (\gamma - \phi)\theta_{it}] + e_{it}\theta_{it}$$

De la proposición 8, $\frac{\partial e_{it}}{\partial \phi} > 0$. Por lo tanto, las notas efectivas son crecientes en ϕ .

ii. En el rango de notas crecientes en θ_{it} , $\frac{\partial Nota_{it}^*}{\partial \theta_{it}}$ es creciente en ϕ .

En efecto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Nota_{it}^*}{\partial \theta_{it}} &= b[\theta_i^* - 2(\gamma - \phi)\theta_{it}] \\ &= \frac{e_{it}(\phi)}{\theta_{it}} [\theta_i^* - 2(\gamma - \phi)\theta_{it}] \end{aligned}$$

Derivando respecto a ϕ , se tiene:

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial Nota_{it}^*}{\partial \theta_{it}} \right)}{\partial \phi} = \frac{1}{\theta_{it}} \frac{\partial e_{it}}{\partial \phi} [\theta_i^* - 2(\gamma - \phi)\theta_{it}] + 2e_{it}$$

De la proposición la 8: $\frac{\partial e_{it}}{\partial \phi} > 0$, por lo tanto $\frac{\partial Nota_{it}^*}{\partial \theta_{it}}$ es creciente en ϕ .

□

Demostración Proposición 12:

i. $(\forall \theta_i^*) Utilidad_{it}^*(\cdot, \theta_i^*)$ es máxima en $\theta_{it} = \theta_i^*$

Derivando la utilidad efectiva expresada en (16), con respecto a la creencia de habilidad:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Utilidad_{it}^*}{\partial \theta_{it}} &= b \left(\frac{\gamma - \phi}{\eta} \right)^{\gamma - \phi} [(1 + \gamma - \phi)\theta_{it}^{\gamma - \phi} (\theta_i^* - (\gamma - \phi)\theta_{it})^{1 - \gamma + \phi} \\ &\quad - (1 - \gamma + \phi)(\gamma - \phi)\theta_{it}^{1 + \gamma - \phi} (\theta_i^* - (\gamma - \phi)\theta_{it})^{-\gamma + \phi} - (1 - \gamma + \phi)^{1 - \gamma + \phi} \theta_{it}] \end{aligned}$$

Luego, si $\theta_{it} = \theta_i^* = \theta_i$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Utilidad_i^*}{\partial \theta_{it}} \Big|_{\theta_{it}=\theta_i^*=\theta_i} &= b \left(\frac{\gamma-\phi}{\eta} \right)^{\gamma-\phi} [(1+\gamma-\phi)(1-\gamma+\phi)^{1-\gamma+\phi}\theta_i - (1-\gamma+\phi)^{1-\gamma+\phi}(\gamma-\phi)\theta_i \\ &\quad - (1-\gamma+\phi)^{1-\gamma+\phi}\theta_i] \\ &= b \left(\frac{\gamma-\phi}{\eta} \right)^{\gamma-\phi} (1-\gamma+\phi)^{1-\gamma+\phi}\theta_i [(1+\gamma-\phi) - (\gamma-\phi) - 1] \\ &= 0 \end{aligned}$$

De este modo, la utilidad efectiva alcanza su máximo cuando $\theta_{it} = \theta_i^*$.

ii. La utilidad máxima crece con ϕ .

En efecto, la utilidad efectiva máxima es:

$$\begin{aligned} Utilidad_{it}^* \Big|_{\theta_{it}=\theta_i^*=\theta_i} &= b \left(\frac{\gamma-\phi}{\eta} \right)^{-\gamma+\phi} \theta_i \left[\theta_i^{\gamma-\phi} (\theta_i - (\gamma-\phi)\theta_i)^{1-\gamma+\phi} - \frac{(1-\gamma+\phi)^{1-\gamma+\phi}}{2} \theta_i \right] \\ &= \frac{(1-\gamma+\phi)^{1-\gamma+\phi}}{2} \theta_i \left[\theta_i (1-\gamma+\phi)^{1-\gamma+\phi} - \theta_i \frac{(1-\gamma+\phi)^{1-\gamma+\phi}}{2} \right] \\ &= \left[\frac{(1-\gamma+\phi)^{1-\gamma+\phi}}{2} \theta_i \right]^2 \end{aligned}$$

Aplicando logaritmo y derivando con respecto a ϕ :

$$\begin{aligned} \log \left(Utilidad_{it}^* \Big|_{\theta_{it}=\theta_i^*} \right) &= 2[(1-\gamma+\phi) \log(1-\gamma+\phi) - \log(2) + \log(\theta_i)] \\ \frac{\partial \log \left(Utilidad_{it}^* \Big|_{\theta_{it}=\theta_i^*} \right)}{\partial \phi} &= 2[\log(1-\gamma+\phi) + 1] > 0 \end{aligned}$$

En consecuencia, la utilidad efectiva máxima crece con ϕ .

□

Demostración Proposición 13:

Se supondrá el caso en que $\theta_{i0} > \theta_j^* > \theta_i^* > \theta_{j0}$, donde $\forall t > t^* \theta_{i,t+1} < \theta_{j,t+1}$. Se demostrará que para $t < t^*$ θ_{it} es decreciente; y para $t \geq t^* + 1$ $\theta_{it} \searrow \theta_i^*$. Además, se probará que $\theta_{it^*} > \theta_{i,t^*+1}$. La convergencia de θ_{jt} es análoga.

1. ($\forall t < t^*$) θ_{it} es decreciente.

Para probarlo, usamos exactamente la misma demostración de las partes 1 y 2 de la proposición 3.

$$2. (\forall t \geq t^* + 1) \theta_{it} \searrow \theta_i^*$$

Análogo a demostración de Proposición 4.

$$3. \theta_{it^*} > \theta_{i,t^*+1}$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \theta_{i,t^*+1} &= \theta_{it^*} + \mu(Nota_{it^*}^* - Nota_{it^*}) \\ &= (1 - \mu e_{it^*})\theta_{it^*} + \mu e_{it^*}\theta_i^* \\ &\leq \theta_{it^*} \end{aligned}$$

Pues hemos supuesto que $\forall t \theta_{it} > \theta_i^*$.

□

Demostración Proposición 14:

e_{it} es creciente en ϕ , ssi $\phi \geq \gamma - \frac{2\eta^{1+\gamma}}{\gamma^\gamma(1-\gamma)^{2-\gamma}\theta_{jt}^2 + 2\eta^{1+\gamma}}$.

De (17) tenemos:

$$\begin{aligned} e_{it} &= c \frac{\theta_{it}}{\theta_{jt}^{2\phi}} \\ &= \left(\frac{\gamma - \phi}{\eta}\right)^{\gamma - \phi} \left(\frac{\gamma}{\eta}\right)^{-\gamma\phi} \frac{(1 - \gamma + \phi)^{1 - \gamma + \phi}}{2^{1 - \phi}} (1 - \gamma)^{-\phi(2 - \gamma)} \frac{\theta_{it}}{\theta_{jt}^{2\phi}} \end{aligned}$$

Aplicando logaritmo y derivando con respecto a a ϕ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \log e_{it} &= (\gamma - \phi)(\log(\gamma - \phi) - \log \eta) - \gamma\phi(\log \gamma - \log \eta) + (1 - \gamma + \phi) \log(1 - \gamma + \phi) \\ &\quad - (1 - \phi) \log 2 - \phi(2 - \gamma) \log(1 - \gamma) + \log \theta_{it} - 2\phi \log \theta_{jt} \\ \frac{\partial \log e_{it}}{\partial \phi} &= -\log(\gamma - \phi) + (1 + \gamma) \log \eta - \gamma \log \gamma + \log(1 - \gamma + \phi) + \log 2 - (2 - \gamma) \log(1 - \gamma) \\ &\quad - 2 \log \theta_{jt} \\ &= \log \left[\frac{2\eta^{1+\gamma}(1 - \gamma + \phi)}{\gamma^\gamma(\gamma - \phi)(1 - \gamma)^{2-\gamma}\theta_{jt}^2} \right] \end{aligned}$$

El esfuerzo se minimiza cuando $\frac{\partial \log e_{it}}{\partial \phi} = 0$, en que se cumple:

$$\phi = \gamma - \frac{2\eta^{1+\gamma}}{\gamma^\gamma(1-\gamma)^{2-\gamma}\theta_{jt}^2 + 2\eta^{1+\gamma}}$$

Luego, el esfuerzo será creciente en ϕ ssi $\phi \geq \gamma - \frac{2\eta^{1+\gamma}}{\gamma^\gamma(1-\gamma)^{2-\gamma}\theta_{jt}^2 + 2\eta^{1+\gamma}}$

□

Demostración Proposición 15:

i. $Nota_{it}^*(\theta_{it}, \theta_i^*, \theta_{jt})$ es decreciente en θ_{jt}

A partir de (21), en el rango de notas positivas ($\theta_{it} < \frac{\theta_i^*}{\gamma - \phi}$) se tiene:

$$\frac{\partial Nota_{it}^*}{\partial \theta_{jt}} = -2c\phi \frac{\theta_{it}}{\theta_{jt}^{2\phi+1}} [\theta_i^* - (\gamma - \phi)\theta_{it}] < 0$$

ii. $Nota_{it}^*(\theta_{it}, \theta_i^*, \theta_{jt})$ es creciente en θ_i^*

De (21):

$$\frac{\partial Nota_{it}^*}{\partial \theta_i^*} = c \frac{\theta_{it}}{\theta_{jt}^{2\phi}} > 0$$

iii. $Nota_{it}^*(\theta_{it}, \theta_i^*, \theta_{jt})$ es decreciente en θ_{it} ssi $\theta_{it} \in \left(\frac{\theta_i^*}{2(\gamma - \phi)}, \frac{\theta_i^*}{\gamma - \phi} \right)$

De (21):

$$\frac{\partial Nota_{it}^*}{\partial \theta_{it}} = \frac{c}{\theta_{jt}^{2\phi}} [\theta_i^* - 2(\gamma - \phi)\theta_{it}]$$

Por lo tanto, la nota efectiva es creciente en θ_{it} cuando $\theta_{it} < \frac{\theta_i^*}{2(\gamma - \phi)}$.

□

Demostración Lema 18:

$Utilidad_{it}^*(\theta_{it}, \theta_i^*, \theta_{jt}, \cdot)$ es decreciente en θ_j^* .

En efecto, derivando (22) con respecto a θ_j^* :

$$\frac{\partial Utilidad_{it}^*}{\partial \theta_j^*} = -\phi \left(\frac{\gamma - \phi}{\eta} \right)^{\gamma - \phi} ca^{-\phi} \theta_i^{1 + \gamma - \phi} (\theta_i^* - (\gamma - \phi)\theta_{it})^{1 - \gamma + \phi} \theta_j^{-3\phi} (\theta_j^* - \gamma\theta_{jt})^{-\phi - 1} < 0$$

□

Demostración Proposición 17:

$(\forall \theta_i^*, \theta_{jt}, \theta_j^*) Utilidad_i^*(\cdot, \theta_i^*, \theta_j, \theta_j^*) \Big|_{\theta_j = \theta_j^*}$ es máxima cuando $\theta_i = \theta_i^*$

De (22):

$$Utilidad_i^* = \left(\frac{\gamma - \phi}{\eta} \right)^{\gamma - \phi} ca^{-\phi} \theta_i^{1 + \gamma - \phi} (\theta_i^* - (\gamma - \phi) \theta_i)^{1 - \gamma + \phi} \theta_j^{-3\phi} (\theta_j^* - \gamma \theta_j)^{-\phi} - c^2 \theta_i^2 \theta_j^{-4\phi}$$

$$Utilidad_i^* \Big|_{\theta_j = \theta_j^*} = \left(\frac{\gamma - \phi}{\eta} \right)^{\gamma - \phi} ca^{-\phi} \theta_i^{1 + \gamma - \phi} (\theta_i^* - (\gamma - \phi) \theta_i)^{1 - \gamma + \phi} \theta_j^{-4\phi} (1 - \gamma)^{-\phi} - c^2 \theta_i^2 \theta_j^{-4\phi}$$

Derivando la $Utilidad_i^* \Big|_{\theta_j = \theta_j^*}$ con respecto a la creencia de habilidad y evaluando en $\theta_i^* = \theta_i$:

$$\frac{\partial Utilidad_i^* \Big|_{\theta_j = \theta_j^*}}{\partial \theta_i} = \left(\frac{\gamma - \phi}{\eta} \right)^{\gamma - \phi} ca^{-\phi} \theta_j^{-4\phi} (1 - \gamma)^{-\phi} [(1 + \gamma - \phi) \theta_i^{\gamma - \phi} (\theta_i^* - (\gamma - \phi) \theta_i)^{1 - \gamma + \phi} - (\gamma - \phi) (1 - \gamma + \phi) \theta_i^{1 + \gamma - \phi} (\theta_i^* - (\gamma - \phi) \theta_i)^{-\gamma + \phi}] - 2c^2 \theta_i \theta_j^{-4\phi}$$

$$\frac{\partial Utilidad_i^* \Big|_{\theta_j = \theta_j^*}}{\partial \theta_i} \Big|_{\theta_i = \theta_i^*} = \left(\frac{\gamma - \phi}{\eta} \right)^{\gamma - \phi} ca^{-\phi} \theta_j^{-4\phi} (1 - \gamma)^{-\phi} [(1 + \gamma - \phi) (1 - \gamma + \phi)^{1 - \gamma + \phi} \theta_i^{1 - \gamma + \phi} - (\gamma - \phi) (1 - \gamma + \phi)^{1 - \gamma + \phi} \theta_i] - 2c^2 \theta_i \theta_j^{-4\phi}$$

$$= \left(\frac{\gamma - \phi}{\eta} \right)^{\gamma - \phi} \frac{(1 - \gamma + \phi)^{1 - \gamma + \phi}}{2} a^{-\phi} (1 - \gamma)^{-\phi} 2c \theta_i \theta_j^{-4\phi} - 2c^2 \theta_i \theta_j^{-4\phi}$$

$$= 2c^2 \theta_i \theta_j^{-4\phi} - 2c^2 \theta_i \theta_j^{-4\phi}$$

$$= 0$$

Donde $c = \left(\frac{\gamma - \phi}{\eta} \right)^{\gamma - \phi} \frac{(1 - \gamma + \phi)^{1 - \gamma + \phi}}{2} a^{-\phi} (1 - \gamma)^{-\phi}$.

□

Demostración Proposición 18:

Si $\theta_{jt} \leq \theta_j^*$, entonces $Utilidad_{it}^*(\cdot, \theta_i^*, \theta_{jt}, \theta_j^*)$ se maximiza en $\bar{\theta}_{it} \leq \theta_i^*$.

1. En efecto, de la proposición 15 sabemos que:

$$\frac{\partial Utilidad_i^*}{\partial \theta_i} = \left(\frac{\gamma - \phi}{\eta} \right)^{\gamma - \phi} ca^{-\phi} \theta_j^{-3\phi} (\theta_j^* - \gamma \theta_j)^{-\phi} [(1 + \gamma - \phi) \theta_i^{\gamma - \phi} (\theta_i^* - (\gamma - \phi) \theta_i)^{1 - \gamma + \phi} - (1 - \gamma + \phi) (\gamma - \phi) \theta_i^{1 + \gamma - \phi} (\theta_i^* - (\gamma - \phi) \theta_i)^{-\gamma + \phi}] - 2c^2 \theta_i \theta_j^{-4\phi}$$

$$\left. \frac{\partial Utilidad_i^*}{\partial \theta_i} \right|_{\theta_i = \theta_i^*, \theta_j = \theta_j^*} = 0$$

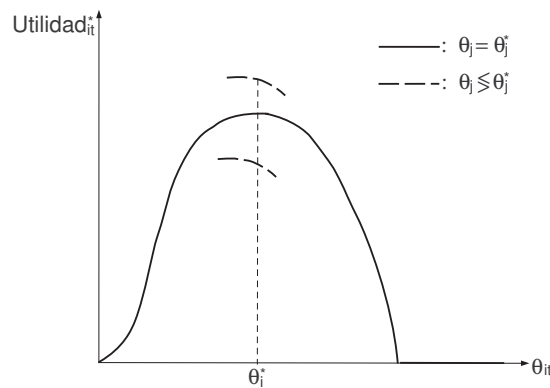
En el máximo bienestar de i en ausencia de sesgos cognitivos, el paréntesis del primer término debe ser positivo, de modo de anularse con el segundo término negativo. Así:

$$[(1 + \gamma - \phi) \theta_i^{\gamma - \phi} (\theta_i^* - (\gamma - \phi) \theta_i)^{1 - \gamma + \phi} - (1 - \gamma + \phi) (\gamma - \phi) \theta_i^{1 + \gamma - \phi} (\theta_i^* - (\gamma - \phi) \theta_i)^{-\gamma + \phi}] > 0$$

2. Luego, cuando $\theta_i = \theta_i^*$, una desviación de la creencia de habilidad de j respecto de su habilidad efectiva (reflejado en un mayor θ_j^*), torna negativa esta pendiente:

$$\left. \frac{\partial^2 Utilidad_i^*}{\partial \theta_j^* \partial \theta_i} \right|_{\theta_i = \theta_i^*} = -\phi \left(\frac{\gamma - \phi}{\eta} \right)^{\gamma - \phi} ca^{-\phi} \theta_j^{-3\phi} (\theta_j^* - \gamma \theta_j)^{-\phi - 1} [(1 + \gamma - \phi) \theta_i^{\gamma - \phi} (\theta_i^* - (\gamma - \phi) \theta_i)^{1 - \gamma + \phi} - (1 - \gamma + \phi) (\gamma - \phi) \theta_i^{1 + \gamma - \phi} (\theta_i^* - (\gamma - \phi) \theta_i)^{-\gamma + \phi}] < 0$$

Un aumento marginal en θ_j^* ($\theta_j < \theta_j^*$) reduce la pendiente de $Utilidad_i^* \Big|_{\theta_i = \theta_i^*}$, a partir de lo cual puede deducirse que el máximo bienestar en el nuevo nivel de Utilidad se alcanza en $\bar{\theta}_i < \theta_i^*$. Gráficamente:



□

Demostración Lema 19:

$$\begin{aligned}
F_1 = \max_{\{N_1, N_2, e\}} & [N_1^\gamma + N_2^\gamma]^{\frac{1}{\gamma}} - e^2 \\
s.a & \quad \eta N_1 + N_2 \leq \theta e \\
& \quad N_1 \geq \alpha \\
& \quad N_2 \geq \alpha
\end{aligned}$$

$$F_1 = [N_1^\gamma + N_2^\gamma]^{\frac{1}{\gamma}} - e^2 + \lambda(\theta e - \eta N_1 - N_2) + \lambda_1(N_1 - \alpha) + \lambda_2(N_2 - \alpha)$$

CPO:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial N_1} &= \frac{1}{\gamma} [N_1^\gamma + N_2^\gamma]^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \gamma N_1^{\gamma-1} - \eta \lambda + \lambda_1 = 0 \\
\frac{\partial F_1}{\partial N_2} &= \frac{1}{\gamma} [N_1^\gamma + N_2^\gamma]^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \gamma N_2^{\gamma-1} - \lambda + \lambda_2 = 0 \\
\frac{\partial F_1}{\partial e} &= -2e + \lambda \theta = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta e - \eta N_1 - N_2 &\geq 0 \\
N_1 &\geq \alpha \\
N_2 &\geq \alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &\geq 0 \\
\lambda_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1(N_1 - \alpha) &= 0 \\
\lambda_2(N_2 - \alpha) &= 0
\end{aligned}$$

- Caso 1: $N_1, N_2 > \alpha$ ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$)

$$\begin{aligned}
 e(\theta) &= \frac{\theta}{2} (\eta^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + 1)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \\
 N_1(\theta) &= \frac{\theta^2}{2} \eta^{\frac{1}{\gamma-1}} (\eta^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + 1)^{\frac{1-2\gamma}{\gamma}} \\
 N_2(\theta) &= \frac{\theta^2}{2} (\eta^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + 1)^{\frac{1-2\gamma}{\gamma}} \\
 \lambda &= (\eta^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + 1)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}
 \end{aligned}$$

$$\eta > 0, \gamma \in (-\infty, 1]$$

$$N_1, N_2 > \alpha:$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\theta^2}{2} \eta^{\frac{1}{\gamma-1}} (\eta^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + 1)^{\frac{1-2\gamma}{\gamma}} &> \alpha \\
 \theta &> 2^{\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{1}{2}} \eta^{\frac{1}{2(1-\gamma)}} (\eta^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + 1)^{\frac{2\gamma-1}{2\gamma}} = B
 \end{aligned}$$

Luego, si $\theta > B$:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= ((N_1)^\gamma + (N_2)^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}} - e^2 \\
 &= \frac{\theta^2}{2^2} (\eta^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + 1)^{\frac{2(1-\gamma)}{\gamma}}
 \end{aligned}$$

- Caso 2: $N_1 = \alpha, N_2 > \alpha$ ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$)

$$\begin{aligned}
 e &= \frac{\eta\alpha + N_2}{\theta} \\
 N_1 &= \alpha \\
 (\alpha^\gamma + N_2^\gamma)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} N_2^{\gamma-1} - \frac{2(\eta\alpha + N_2)}{\theta^2} &= 0 \\
 \lambda &= \frac{2(\eta\alpha + N_2)}{\theta^2} \\
 \lambda_1 &= \frac{2\eta(\eta\alpha + N_2)}{\theta^2} - (\alpha^\gamma + N_2^\gamma)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \alpha^{\gamma-1}
 \end{aligned}$$

Solución no tiene forma cerrada.

- Caso 3: $N_1 = N_2 = \alpha$ ($\lambda_1, \lambda_2 > 0$)

$$\begin{aligned} e(\theta) &= \frac{\alpha(\eta + 1)}{\theta} \\ N_1(\theta) &= \alpha \\ N_2(\theta) &= \alpha \\ \lambda &= \frac{2\alpha(\eta + 1)}{\theta^2} \\ \lambda_1 &= \frac{2\alpha\eta(\eta + 1)}{\theta^2} - 2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \\ \lambda_2 &= \frac{2\alpha(\eta + 1)}{\theta^2} - 2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \end{aligned}$$

$\lambda_1, \lambda_2 > 0$:

$$\begin{aligned} 2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} &< \frac{2\alpha(\eta + 1)}{\theta^2} \\ \theta &< 2^{\frac{2\gamma-1}{2\gamma}} \alpha^{\frac{1}{2}} (\eta + 1)^{\frac{1}{2}} = A \end{aligned}$$

Luego, si $\theta < A$:

$$\begin{aligned} F_1 &= ((N_1)^\gamma + (N_2)^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}} - e^2 \\ &= 2^{\frac{1}{\gamma}} \alpha - \frac{\alpha^2 (\eta + 1)^2}{\theta^2} \end{aligned}$$

□

Demostración Lema 20:

Si $N_1 < \alpha$, entonces es óptimo $N_2 = 0$. Así:

$$F_2 = \max_{\{N_2, e\}} (N_2^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}} - e^2$$

$$s.a \quad N_2 \leq \theta e$$

$$N_2 \geq \alpha$$

$$F_2 = N_2 - e^2 + \lambda(\theta e - N_2) + \lambda_2(N_2 - \alpha)$$

CPO:

$$\frac{\partial F_2}{\partial N_2} = 1 - \lambda + \lambda_2$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial e} = -2e + \lambda\theta = 0$$

$$\theta e - N_2 = 0$$

$$N_2 \geq \alpha$$

$$\lambda_2 \geq 0$$

$$\lambda_2(N_2 - \alpha) = 0$$

- Caso 1: $N_2 > \alpha$ ($\lambda_2 = 0$)

$$e(\theta) = \frac{\theta}{2}$$

$$N_2(\theta) = \frac{\theta^2}{2}$$

$$\lambda = 1$$

$N_2 > \alpha$:

$$\begin{aligned}\frac{\theta^2}{2} &> \alpha \\ \theta &> 2^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}} = C\end{aligned}$$

Luego, si $\theta > C$:

$$\begin{aligned}F_2 &= N_2^* - (e^*)^2 \\ &= \frac{\theta^2}{2^2}\end{aligned}$$

▪ Caso 2: $N_2 = \alpha$ ($\lambda_2 > 0$)

$$\begin{aligned}e(\theta) &= \frac{\alpha}{\theta} \\ N_2(\theta) &= \alpha \\ \lambda &= \frac{2\alpha}{\theta^2} \\ \lambda_2 &= \frac{2\alpha}{\theta^2} - 1\end{aligned}$$

$\lambda_2 > 0$:

$$\begin{aligned}\frac{2\alpha}{\theta^2} - 1 &> 0 \\ \theta &< 2^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}} = C\end{aligned}$$

Luego, si $\theta < C$:

$$\begin{aligned}F_2 &= N_2^* - (e^*)^2 \\ &= \alpha - \frac{\alpha^2}{\theta^2}\end{aligned}$$

□

Demostración Proposición 21:

$N_2^{(1)}, N_2^{(2)}$ son continuas y no decrecientes en θ .

1. $N_2^{(1)}$ es no decreciente en los tres tramos y continua :

1.1 $N_2^{(1)}$ es no decreciente en los tres tramos:

▪ Si $\theta > B$ ($N_1^{(1)}, N_2^{(1)} > \alpha$):

$$N_2 = \frac{\theta^2}{2} \left(\eta^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + 1 \right)^{\frac{1-2\gamma}{\gamma}}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \theta} = \theta \left(\eta^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + 1 \right)^{\frac{1-2\gamma}{\gamma}} > 0$$

▪ Si $\theta \in (A, B)$ ($N_1^{(1)} = \alpha, N_2^{(1)} > \alpha$):

$$0 = (\alpha^\gamma + N_2^\gamma)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} N_2^{\gamma-1} - \frac{2(\eta\alpha + N_2)}{\theta^2}$$

$$\frac{dN_2}{d\theta} = \frac{2\theta (\alpha^\gamma + N_2^\gamma)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} N_2^{\gamma-1}}{\theta^2(1-\gamma) (\alpha^\gamma + N_2^\gamma)^{\frac{1-2\gamma}{\gamma}} N_2^{\gamma-2} + 2} > 0$$

▪ Si $\theta < A$ ($N_1^{(1)} = N_2^{(1)} = \alpha$):

$$N_2 = \alpha$$

$$\frac{dN_2}{d\theta} = 0$$

1.2 $N_2^{(1)}$ es continua.

Es trivial ver que es continua en cada tramo. Sólo nos resta analizar la continuidad en los quiebres A y B .

▪ Quiebre $\theta = B$:

$$\text{Si } \theta > B, \text{ entonces } N_2 = \frac{\theta^2}{2} \left(\eta^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + 1 \right)^{\frac{1-2\gamma}{\gamma}}$$

$$\text{Si } \theta < B, \text{ entonces } (\alpha^\gamma + N_2^\gamma)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} N_2^{\gamma-1} - \frac{2(\eta\alpha + N_2)}{\theta^2} = 0$$

$$\text{Con } B = 2^{\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{1}{2}} \eta^{\frac{1}{2(1-\gamma)}} (\eta^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + 1)^{\frac{2\gamma-1}{2\gamma}}$$

Luego:

Cuando $\theta > B$:

$$\begin{aligned} N_2 \Big|_{\theta=B} &= \frac{\left(2^{\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{1}{2}} \eta^{\frac{1}{2(1-\gamma)}} (\eta^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + 1)^{\frac{2\gamma-1}{2\gamma}} \right)^2}{2} (\eta^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + 1)^{\frac{1-2\gamma}{\gamma}} \\ &= \alpha \eta^{\frac{1}{1-\gamma}} \end{aligned}$$

Ahora, si imponemos $\theta < B$ y $N_2 \Big|_{\theta=B} = \alpha \eta^{\frac{1}{1-\gamma}}$ tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha^\gamma + N_2^\gamma)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} N_2^{\gamma-1} - \frac{2(\eta\alpha + N_2)}{\theta^2} \\ 0 &= (\alpha^\gamma + \alpha^\gamma \eta^{\frac{\gamma}{1-\gamma}})^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \alpha^{\gamma-1} \eta^{\frac{\gamma-1}{1-\gamma}} - \frac{2(\eta\alpha + \alpha \eta^{\frac{1}{1-\gamma}})}{2\alpha \eta^{\frac{1}{1-\gamma}} (\eta^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + 1)^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}}} \\ 0 &= \frac{(1 + \eta^{\frac{\gamma}{1-\gamma}})^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\eta} - \frac{(1 + \eta^{\frac{\gamma}{\gamma-1}})^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}}}{(1 + \eta^{\frac{\gamma}{\gamma-1}})^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}}} \\ 0 &= \frac{(1 + \eta^{\frac{\gamma}{1-\gamma}})^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\eta} - \frac{(1 + \eta^{\frac{\gamma}{1-\gamma}})^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\eta} \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $N_2^{(1)}$ es continua en el quiebre $\theta = B$.

■ Quiebre $\theta = A$

$$\text{Si } \theta > A, \text{ entonces } (\alpha^\gamma + N_2^\gamma)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} N_2^{\gamma-1} - \frac{2(\eta\alpha + N_2)}{\theta^2} = 0$$

$$\text{Si } \theta < A, \text{ entonces } N_2 = \alpha$$

$$\text{Con } A = 2^{\frac{2\gamma-1}{2\gamma}} \alpha^{\frac{1}{2}} (\eta + 1)^{\frac{1}{2}}$$

Luego, si imponemos $\theta > A$ y $N_2 \Big|_{\theta=A} = \alpha$:

$$\begin{aligned}
0 &= (\alpha^\gamma + N_2^\gamma)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} N_2^{\gamma-1} - \frac{2(\eta\alpha + N_2)}{\theta^2} \\
0 &= (\alpha^\gamma + \alpha^\gamma)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \alpha^{\gamma-1} - \frac{2(\eta\alpha + \alpha)}{2^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}} \alpha(\eta+1)} \\
0 &= 2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto $N_2^{(1)}$ es continua en el quiebre $\theta = A$.

En conclusión, $N_2^{(1)}$ es no decreciente y continua en θ .

2. $N_2^{(2)}$ es no decreciente en los dos tramos y continua:

2.1 $N_2^{(2)}$ no decreciente en los dos tramos:

▪ Si $\theta > C$ ($N_1^{(2)} < \alpha$, $N_2^{(2)} > \alpha$):

$$\begin{aligned}
N_2^{(2)} &= \frac{\theta^2}{2} \\
\frac{dN_2^{(2)}}{d\theta} &= \theta > 0
\end{aligned}$$

▪ Si $\theta < C$ ($N_1^{(2)} < \alpha$, $N_2^{(2)} = \alpha$):

$$\begin{aligned}
N_2^{(2)} &= \alpha \\
\frac{dN_2^{(2)}}{d\theta} &= 0
\end{aligned}$$

2.2 $N_2^{(2)}$ es continua.

Es trivial ver que es continua en cada uno de los tramos. Ahora, analizaremos la continuidad en el quiebre C .

Si $\theta > C$, entonces $N_2 = \frac{\theta^2}{2}$

Si $\theta < C$, entonces $N_2 = \alpha$

Con $C = 2^{\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{1}{2}}$

Luego, imponiendo $\theta > C$ y $N_2|_{\theta=C}$, tenemos:

$$\begin{aligned} N_2 &= \frac{\theta^2}{2} \\ N_2|_{\theta=C} &= \frac{2\alpha}{2} = \alpha \end{aligned}$$

Por lo tanto $N_2^{(2)}$ es continua en el quiebre $\theta = C$.

En conclusión, $N_2^{(2)}$ es no decreciente y continua en θ .

□

Demostración Proposición 22:

$F(\theta)$ es no decreciente en θ .

- Sabemos que

$$F(\theta) = \begin{array}{l} \text{máx } F_i(\theta) \\ \text{s.a. } \theta \in S(\theta) \end{array} \quad (i = 1, 2)$$

Con $S(\theta) = \{(N_1, N_2, e) \mid \eta N_1 + N_2 \leq \theta e\}$.

Es directo que $F(\theta)$ es no decreciente en θ :

$$\begin{aligned} S(\theta) &\subseteq S(\theta') & \theta' &\geq \theta \\ \Rightarrow F(\theta) &\leq F(\theta') \end{aligned}$$

- Además, la función será creciente estricta en θ cuando $F(\theta) > 0$. Es decir, queremos demostrar que $F(\theta) < F(\theta')$ cuando $\theta' > \theta$.

Tomemos $N_1(\theta), N_2(\theta), e(\theta)$. Sabemos que

$$\eta N_1(\theta) + N_2(\theta) = \theta e(\theta)$$

También es cierto que:

$$\eta N_1(\theta) + N_2(\theta) < \theta' e(\theta)$$

Consideremos:

$$\begin{aligned}N_1(\theta') &= N_1(\theta) + \xi \\N_2(\theta') &= N_2(\theta) \\e(\theta') &= e(\theta)\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$F(\theta) \leq F(\theta')$ y es estrictamente creciente en θ cuando $F(\theta) > 0$.

□

*Análisis Cuadro 1 Modelo Aprobación de Cursos*⁴

1. Cuando $C \leq A < B$

Este caso se genera cuando $2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \leq (\eta + 1)$. El problema en que el estudiante sólo maximiza la nota en el curso 2 y elimina el curso 1 (F_2), está marcado por el punto C que determina si el estudiante se esfuerza para aprobar con nota mínima o con nota superior a α . Cuando $\theta < C$, en niveles bajos de auto-confianza, el estudiante decide aprobar un único curso con la nota mínima ($N_2 = \alpha$). En cambio, cuando $\theta > C$ decide aprobar ese único curso con una nota mayor ($N_2 > \alpha$). En tanto, el punto A afecta las decisiones del problema en que el estudiante se esfuerza para aprobar los dos cursos (F_1). Cuando $\theta < A$ el estudiante se esfuerza para aprobar ambos cursos con la nota mínima ($N_1 = N_2 = \alpha$), en cambio cuando $\theta > A$ su esfuerzo tendrá por propósito aprobar ambos cursos pero el curso 2 con una nota mayor ($N_1 = \alpha, N_2 > \alpha$). En niveles de confianza más elevados, cuando $\theta > B$ el estudiante decide esforzarse con miras a conseguir notas elevadas en ambos cursos ($N_1, N_2 > \alpha$).

Dependiendo de dónde se encuentre la creencia de habilidad $\bar{\theta}$ en que $F_1(\bar{\theta}) = F_2(\bar{\theta})$, existen 4 posibilidades para la forma funcional de la función objetivo y las notas, mostradas a continuación:

1.1 $\bar{\theta} < C$

El cruce en $\bar{\theta} < C$ entre las funciones F_1 y F_2 determina que el estudiante decide aprobar un único curso (problema F_2) en un rango pequeño de creencias de habilidad, y para valores bajos de estas. De hecho, cuando $\theta < \bar{\theta}$ el

⁴Ver Cuadro1 en la sección 4.1.

estudiante opta por concentrar sus esfuerzos en aprobar sólo el curso 2 con la nota mínima α . Para creencias de habilidad mayores, el estudiante se esfuerza con el objetivo de aprobar ambos cursos. Así, dependiendo de cuán buena sea la percepción del estudiante acerca de sí mismo, podrá esforzarse para aprobar ambos cursos con nota α , el curso 1 con nota α y el curso 2 con nota mayor a α , o ambos cursos con nota superior a α . En este último caso, el estudiante requiere de altos niveles de confianza en sí mismo. La siguiente figura muestra los intervalos para la percepción de habilidad individual en que las notas siguen la tendencia antes anunciada:

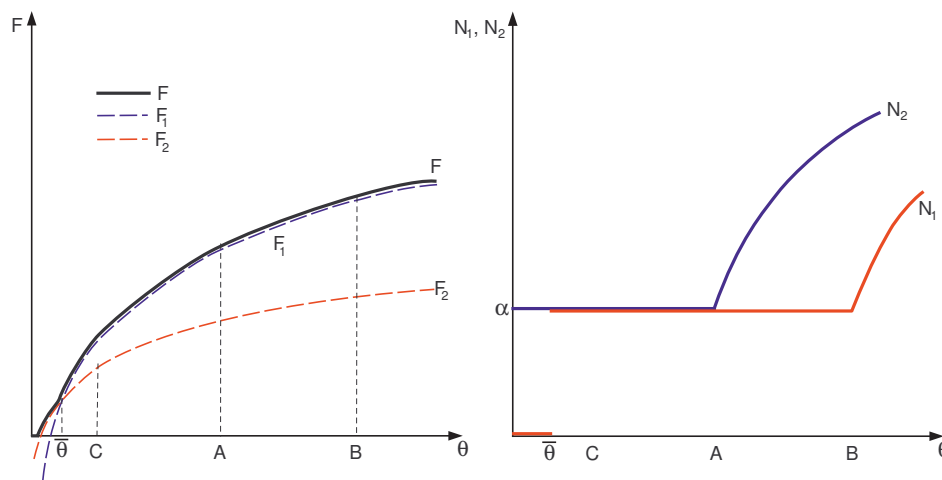


Figura 38

1.2 $\bar{\theta} \in (C, A)$

Analizado en la sección 4.1.

1.3 $\bar{\theta} \in (A, B)$

La trayectoria exhibida por N_1, N_2 será similar a la del caso 1.2, salvo que para creencias de habilidad levemente superiores a A el estudiante en vez de optar por maximizar la nota en ambos cursos como antes, decide seguir especializado en el curso 2 ($N_2 > \alpha$). Por consiguiente, el curso 1 se mantendrá eliminado por el estudiante en un mayor rango de creencias de habilidad; y la nota esperada del curso 2, por el contrario, se mantendrá por sobre la nota mínima desde bajos niveles de creencia de habilidad ($N_1 = 0, N_2 > \alpha$). Sólo para altos estándares de percepción de habilidad, $\theta > \bar{\theta} > A$, el estudiante decidirá dedicarse también al curso 1, apostando a aprobarlo con nota superior a la mínima, como se ilustra en la figura que sigue.

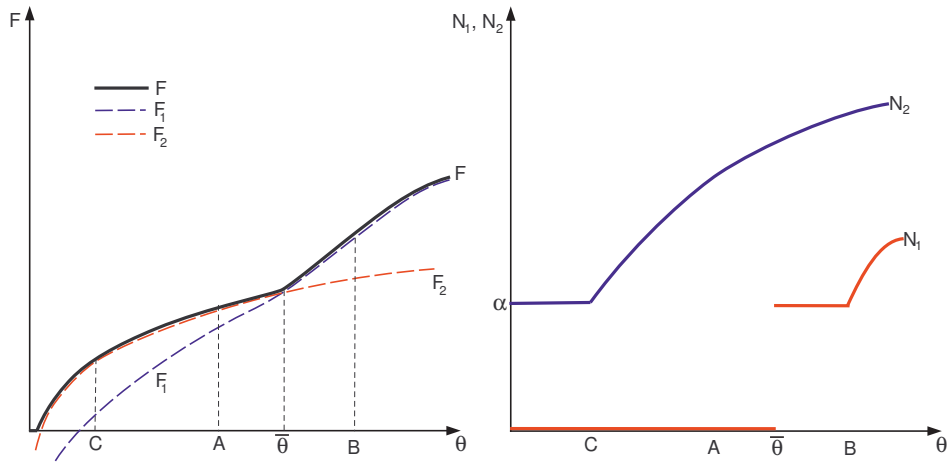


Figura 39

1.4 $\bar{\theta} > B$

La diferencia entre este caso y el 1.3, radica en que el estudiante se mantiene especializado en el curso 2 para un mayor rango de valores de θ . Es decir, el estudiante elige maximizar exclusivamente la nota en el curso 2 hasta altos niveles de percepción de habilidad. Una vez que la creencia de habilidad personal es lo suficientemente alta ($\theta > \bar{\theta} > B$), el estudiante elegirá además aprobar el curso 1 con una nota superior a α . Esto se aprecia en la figura a continuación.

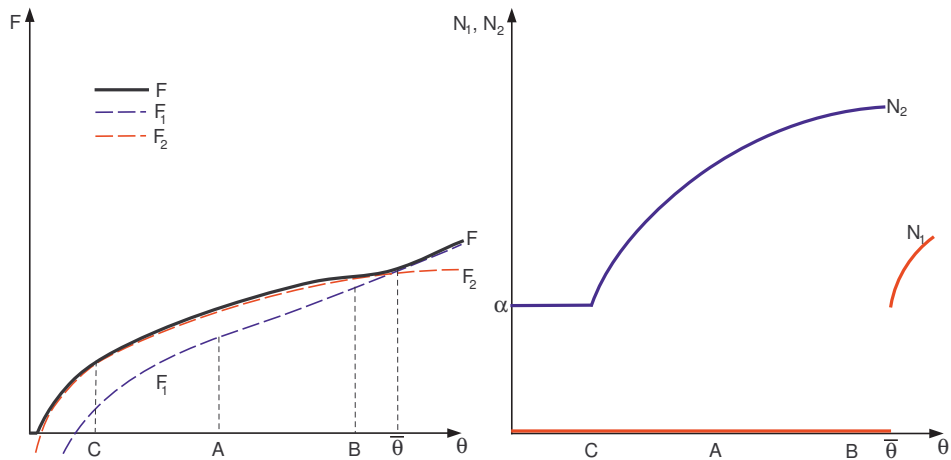


Figura 40

2. Cuando $A < C < B$

Este caso se genera cuando $2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} > (\eta + 1)$. Aquí, como $C \in (A, B)$, en un rango más amplio de valores de θ el estudiante decide aprobar un único curso con la nota mínima. Y que el punto A sea inferior al punto C se traduce en que cuando el estudiante decide esforzarse para aprobar ambos cursos, el rango de valores de θ en que lo haga esperando obtener notas mínimas en ambos cursos sea más reducido. Por lo tanto, para una menor creencia de habilidad el estudiante opta por aprobar con notas elevadas en ambos cursos ($N_1 = \alpha, N_2 > \alpha$).

Dependiendo de dónde se encuentre la creencia de habilidad $\bar{\theta}$ en que $F_1(\bar{\theta}) = F_2(\bar{\theta})$, existen 4 posibilidades para la forma funcional de la función objetivo y las notas, analizadas a continuación.

2.1 $\bar{\theta} < A$

Que $\bar{\theta}$ se halle en un valor tan reducido de creencia de habilidad, equivale a que para una percepción de habilidad baja el estudiante decide aprobar los dos cursos en vez de sólo uno. Por lo tanto, en un estrecho rango de pequeños valores de θ decidirá sólo aprobar el curso 2 con la nota mínima ($N_2 = \alpha$). Cuando $\theta > \bar{\theta}$ decidirá aprobar ambos cursos con la nota mínima ($N_1 = N_2 = \alpha$). En tanto, cuando $\theta > A$, decidirá elevar su nota en el curso 2 y mantener en la nota mínima el curso 1 ($N_1 = \alpha, N_2 > \alpha$). Sólo en rangos elevados de percepción de habilidad, cuando $\theta > B$ el estudiante decide también elevar la nota del curso 1 por sobre el nivel mínimo ($N_1, N_2 > \alpha$). Esto puede verse en la figura que sigue.

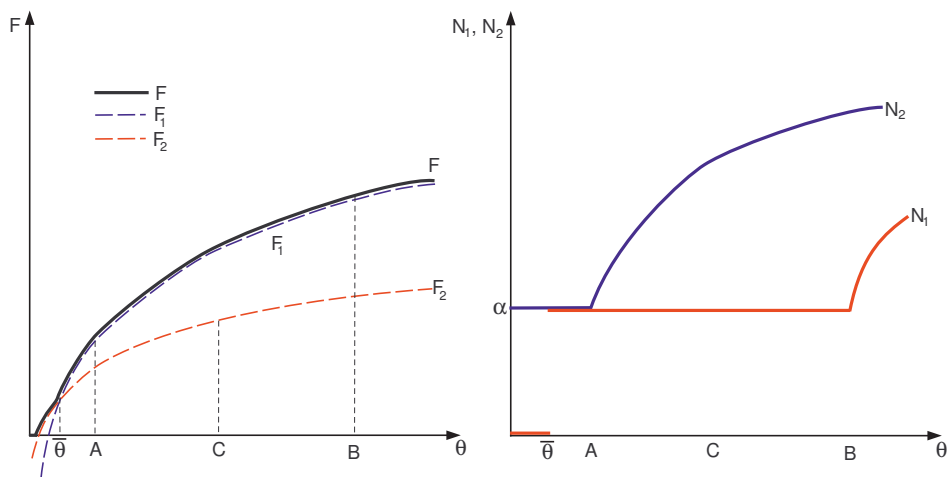


Figura 41

2.2 $\bar{\theta} \in (A, C)$

La diferencia con el caso 2.1 reside en que el tramo de valores de creencia de habilidad en que el estudiante decide mantenerse especializado en el curso 2 aprobando con la nota mínima ($N_2 = \alpha$) es más extenso. Esto es, a partir de una mayor creencia de habilidad personal $\theta = \bar{\theta}$, el estudiante elige aprobar los dos cursos con la nota mínima ($N_1 = N_2 = \alpha$). La tendencia de las notas cuando $\theta > \bar{\theta}$ es similar a la del caso anterior, como puede observarse en el gráfico subsecuente.

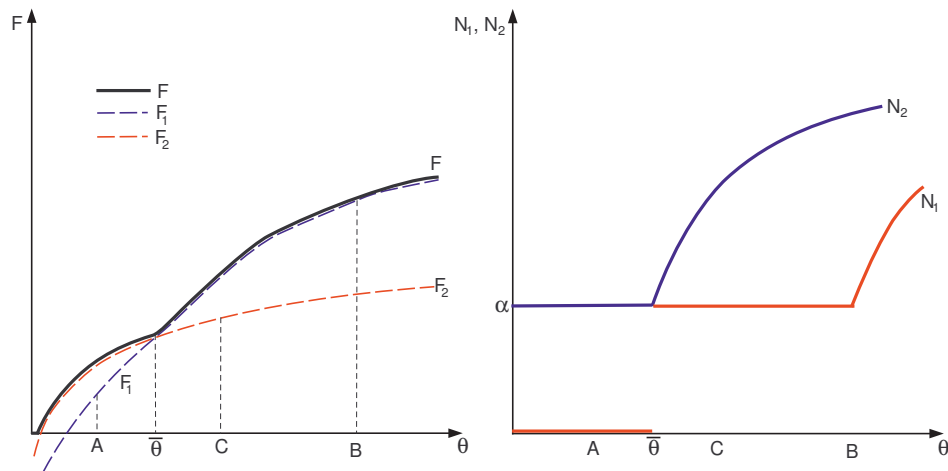


Figura 42

2.3 $\bar{\theta} \in (C, B)$

En este caso la especialización en el curso 2 se da para un mayor rango de valores de θ . Aquí el estudiante opta por eliminar el curso 1 y esforzarse en aprobar sólo el curso 2 con nota mínima ($N_2 = \alpha$), y luego mayor a esta ($N_2 > \alpha$) en un espectro más extenso de valores de la creencia de habilidad $\theta < \bar{\theta}$. Sólo a partir de niveles de confianza elevados, $\theta \in (\bar{\theta}, B)$, el estudiante decide esforzarse para también aprobar el curso 1 con la nota mínima ($N_1 = \alpha, N_2 > \alpha$). Ya en niveles mayores de creencia de habilidad personal, $\theta > B$, el estudiante decide alcanzar notas superiores a la mínima en ambos cursos ($N_1, N_2 > \alpha$), como se aprecia en el gráfico que sigue.

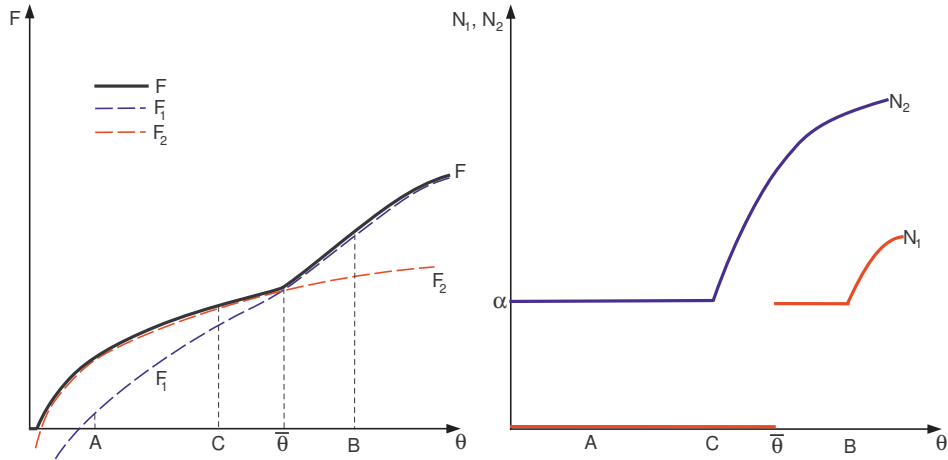


Figura 43

2.4 $\bar{\theta} > B$

Analizado en la sección 4.1.

3. Cuando $A < B \leq C$

Este caso se genera cuando $\eta^{\frac{1}{1-\gamma}} \left(\eta^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + 1 \right)^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}} \leq 1$. Que los puntos de quiebre A, B (del problema en que el estudiante decide aprobar ambos cursos) se den para valores inferiores al punto de quiebre C (asociado al problema en que el estudiante se especializa en un curso), se reflejarán en que la relación entre las notas y la percepción de habilidad será parecida en ambos cursos.

Dependiendo de dónde se encuentre la creencia de habilidad $\bar{\theta}$ en que $F_1(\bar{\theta}) = F_2(\bar{\theta})$, existen 4 posibilidades para la forma funcional de la función objetivo y las notas, discutidas a continuación.

3.1 $\bar{\theta} < A$

En este caso el estudiante decide aprobar un sólo un curso en un rango estrecho y para valores pequeños de θ . Más aún, la nota alcanzada en este curso será la mínima ($N_2 = \alpha$). Para valores mayores de percepción de habilidad, $\theta > \bar{\theta}$, el estudiante decidirá esforzarse con el objetivo de aprobar ambos cursos. En una primera fase lo hace con miras a obtener una nota mínima en estos ($N_1 = N_2 = \alpha$), y para valores mayores de percepción de habilidad decidirá mejorar su nota en el curso 2 ($N_1 = \alpha, N_2 > \alpha$) y luego elevar también su nota en el curso 1 ($N_1, N_2 > \alpha$). La siguiente figura muestra lo recién descrito.

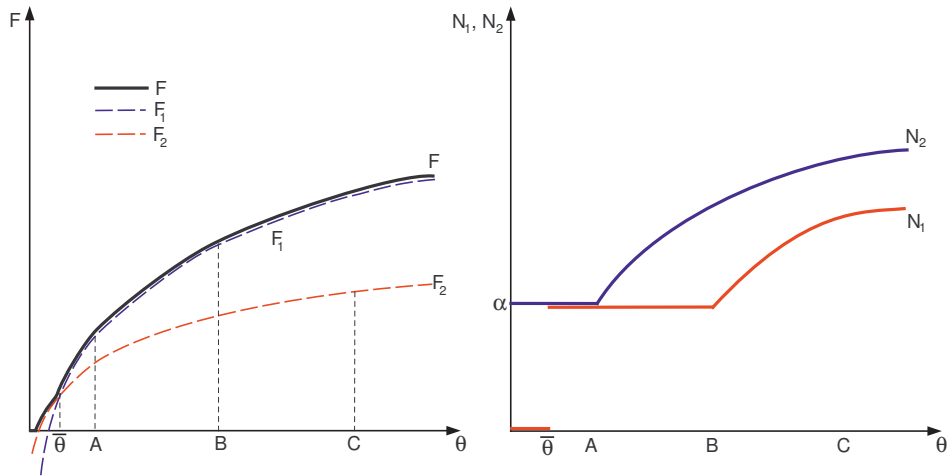


Figura 44

3.2 $\bar{\theta} \in (A, C)$

En este caso el estudiante se mantiene especializado en la aprobación con nota mínima del curso 2 para un rango de valores más extenso de la percepción de habilidad ($N_1 = 0, N_2 = \alpha$). Esto debido a que la decisión de esforzarse en aprobar ambos cursos en vez de sólo uno, se da para una creencia de habilidad mayor $\theta > \bar{\theta} > A$. Una vez que alcanza este nivel de confianza, el estudiante decide aprobar con nota mínima el curso 1 y una nota mayor el curso 2 ($N_1 = \alpha, N_2 > \alpha$). A mayor grado de confianza personal, el estudiante decide esforzarse para también elevar la nota del curso 1 por sobre la mínima ($N_1, N_2 > \alpha$). El siguiente gráfico ilustra lo anterior.

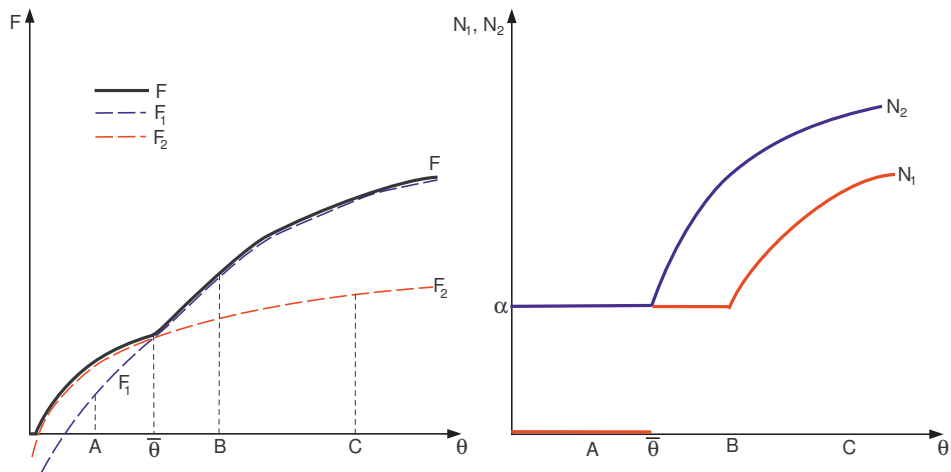


Figura 45

3.3 $\bar{\theta} \in (C, B)$

Analizado en la sección 4.1.

3.4 $\bar{\theta} > B$

En este caso el estudiante decide aprobar exclusivamente el curso 2 en un amplio rango de valores de creencia de habilidad $\theta \in (C, \bar{\theta})$. En una parte sustantiva de este rango, decide aprobar el curso con nota mínima ($N_2 = \alpha$), y cuando la creencia de habilidad supera el punto C se esfuerza con el objetivo de aprobar con nota superior a la mínima ($N_2 > \alpha$). Por su parte, el curso 1 se mantiene eliminado para todas las creencias de habilidad inferiores a $\bar{\theta}$. Para niveles de creencia de habilidad superiores a este umbral, el estudiante decide esforzarse en pos de aprobar ambos cursos con notas que exceden la mínima ($N_1, N_2 > \alpha$). El gráfico a continuación sintetiza todo esto.

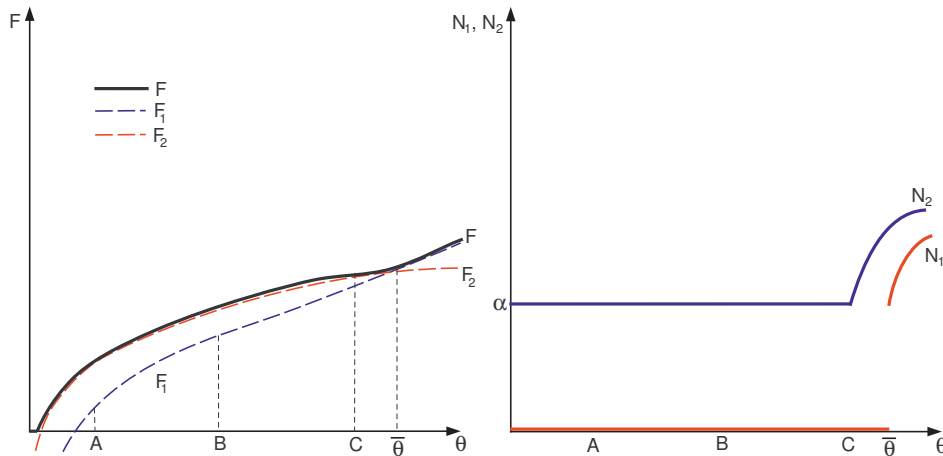


Figura 46

Referencias

- Aizer, Anna. 2008. "Peer Effects and Human Capital Accumulation: The Externalities of Add." *NBER Working Paper* (14354).
- Barberis, Nicholas y Richard Thaler. 2003. *Handbook of the Economics of Finance*. Elsevier Science B.V. chapter 18, pp. 1051–1121.
- Bénabou, Roland y Jean Tirole. 2002. "Self-Confidence and Personal Motivation." *The Quarterly Journal of Economics* pp. 871–915.
- Camerer, C. 2003. *Advances in Behavioral Economics*. Princeton University Press.
- Clayson, Dennis. 2005. "Performance Overconfidence: Metacognitive Effects or Mismatched Student Expectations?" *Journal of Marketing Education* 27(2):122–129.
- Compte, Olivier y Andrew Postlewaite. 2004. "Confidence-Enhanced Performance." *The American Economic Review* 94(5):1536–1557.
- Crooks, Terence J. 1988. "The Impact of Classroom Evaluation Practices on Students." *Review of Educational Research* 58(4):438–481.
- Dewatripont, Mathias, Ian Jewitt y Jean Tirole. 1999. "The Economics of Career Concerns, Part I: Comparing Information Structures." *Review of Economic Studies* 66(1):183–98.
- Falchikov, N. y D. Boud. 1989. "Student Self-Assessment in Higher Education: A Meta-Analysis." *Review of Educational Research* 59(4):395–430.
- Frank, Robert. 1985. *Choosing the right pond: Human behavior and the quest for status*. New York: Oxford University Press.
- Glaeser, Edward y José Scheinkman. 2002. "Non-Market Interactions." En *Advances in Economics and Econometrics: Theory and Applications*, Cambridge University Press. .
- Grimes, Paul. 2002. "The Overconfident Principles of Economics Student: An Examination of a Metacognitive Skill." *Journal of Economic Education* .
- Hanushek, Eric A., John F. Kain, Jacob M. Markman y Steven G. Rivkin. N.d. . Forthcoming.
- Henry Wang, X. y Bill Z. Yang. 2003. "Why Competition may Discourage Students from Learning? A Behavioral Economic Analysis." *Education Economics* 11(2):117–128.

- Hewstone, Miles. 1989. *Causal Attribution : From Cognitive Processes to Collective Beliefs*. Oxford ; Cambridge, Mass.: B. Blackwell.
- Hoxby, Caroline (ed.). 2004. *College Choices: The Economics of Where to Go, When to Go and How to Pay for It*. Chicago: University of Chicago Press for NBER.
- Köszegi, Botond. 2006. "Ego Utility, Overconfidence, and Task Choice." *Journal of the European Economic Association* 4(4):673–707.
- Langer, Ellen y Jane Roth. 1975. "Heads I win, tails it's chance: The illusion of control as a function of the sequence of outcomes in a purely chance task." *Journal of Personality and Social Psychology* (32):951–955.
- Luttmer, Erzo. 2005. "Neighbors as Negatives: Relative Earnings and Well-Being." *Quarterly Journal of Economics* 120(3):963–1002.
- Neumark, David y Andrew Potlewaite. 1998. "Relative Income Concerns and the Rise in Married Women's Employment." *Journal of Public Economics* 70(1):157–183.
- Sacerdote, Bruce. 2001. "Peer Effects with Random Assignment: Results for Dartmouth Roommates." *The Quarterly Journal of Economics* 116(2):681–704.
- Samuelson, Larry. 2004. "Information-Based Relative Consumption Effects." *Econometrica* 72(1):93–118.
- Schor, Juliet. 1998. "Work, Free Time and Consumption." *Time and Society* 7(1):119–127.
- Solnick, Sara y David Hemenway. 1998. "Is More Always Better?: A Survey about Positional Concerns." *Journal of Economic Behavior and Organization* 37(3):373–383.
- Solnick, Sara y David Hemenway. 2005. "Are Positional Concerns Stronger in Some Domains than in Others?" *The American Economic Review* 95(2):147–151.
- Steen, Eric Van den. 2004. "Rational Overoptimism (And Other Biases)." *The American Economic Review* 94(4):1141–1151.
- Stinebrickner, Ralph y Todd R. Stinebrickner. 2003. "Understanding educational outcomes of students from low-income families: Evidence from a liberal arts college with a full tuition subsidy program." *Journal of Human Resources* 38(3):591–617.
- Taylor, S. y J. Brown. 1988. "Illusion and well-being: A social psychological perspective on mental health." *Psychological Bulletin* (103):193–210.

- Tversky, Amos y Daniel Kahneman. 1974. "Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases." *Science* 185(4157):1124–1131.
- Weinberg, Bruce. 2006. "A Model of Overconfidence." *NBER Working Papers* .
- Weinstein, Neil. 1980. "Unrealistic Optimism about Future Life Events." *Journal of Personality and Social Psychology* 39(5):806–820.
- Winston, Gordon C. y David J. Zimmerman. 2003. *College choices the economics of where to go, when to go, and how to pay for it*. University of Chicago Press chapter Peer Effects in Higher Education, pp. 395–423.
- Zimmerman, David J. 2003. "Peer Effects in Academic Outcomes: Evidence from a Natural Experiment." *The Review of Economics and Statistics* 85(1):9–23.