



**UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE MINAS**

**INFLUENCIA DE LA DISTRIBUCIÓN DE TAMAÑO DE BURBUJAS EN LA  
RECUPERACIÓN DE LA FLOTACIÓN PARA MINERALES DE COBRE**

**TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA  
MENCIÓN METALURGIA EXTRACTIVA**

**MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL DE MINAS**

**FERNANDO ANDRÉS BARONA OSORIO**

**PROFESOR GUÍA:  
SR.TA. GIANNA VALLEBUONA STAGNO**

**PROFESOR CO-GUÍA:  
SR. ALDO CASALI BACELLI**

**MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
SR. JESUS CASAS DE PRADA  
SR. CONSTANTINO SUAZO HORMAZABAL**

**SANTIAGO DE CHILE  
DICIEMBRE, 2007**

*Dedicado a mis padres, por su legado de formación y educación...*

## AGRADECIMIENTOS

Gracias mamá, papá, y hermanos Ricardo, Javier, Nicolás. Gracias por quererme, apoyarme y tenerme paciencia, por toda la ayuda que me han dado siempre. Gracias padres por su gran legado de educación que nos dieron a todos, por el colegio y el apoyo incondicional en estos 8 años.

Gracias Kathy, mi amada compañera, nos conocimos y crecimos juntos durante todo nuestro periodo universitario, hace ya 7 años. Tú has sido un pilar importantísimo en mi desarrollo personal, tú me acompañaste en los momentos más duros que viví en el desarrollo de esta tesis y durante toda la carrera, por esto sólo te digo gracias y te amo.

Gracias a mis grandes y viejos amigos, Matías, Marcelo, Julio, Fernando y Carlos, quienes complementan en gran medida el desarrollo de mi vida. También a aquellos que conocí desde que decidí estudiar Ingeniería. Gracias Gonzalo, Fernando, Tomas, Andrés, Alejandro, Nicolás, e Ignacio.

Gracias a mis guías, los profesores Gianna Vallebuona y Aldo Casali, por participar de manera activa en el desarrollo de la investigación. Sus consejos y enseñanzas fueron de gran ayuda durante todas las etapas del trabajo. Les agradezco también por el apoyo en los momentos más duros de la campaña experimental y por seguir confiando en mí.

Gracias a mis compañeros del Laboratorio de Procesamiento de Minerales: Oscar y Víctor, y a mis compañeros de carrera que participaron parcialmente en la investigación, Felipe y Erika. Su trabajo y su ayuda fueron fundamentales en la realización de esta tesis.

Un especial agradecimiento a la empresa Alquimia Ingenieros, que me cobijó y apoyó durante todo el tiempo que duró esta investigación. A Leticia y José, guías que me enseñaron a mantener la calma en los días más grises. Gracias a mis compañeros y amigos Sebastián, César, Carlos, por creer en el desarrollo de mi trabajo.

Gracias a CONICYT, que a través del proyecto FONDECYT N° 1050939, financió e hizo posible la realización de esta investigación.

## RESUMEN

La investigación realizada tiene por objeto entender y relacionar los parámetros de la distribución de tamaño de burbujas con la recuperación primaria de cobre. Específicamente, busca estudiar experimentalmente la influencia de la distribución de tamaño de burbujas en los rangos granulométricos con menor recuperación de la flotación primaria, el mineral ultra fino y el grueso.

El estudio se realiza en una celda de flotación de laboratorio con agitación mecánica y utilizando un mineral de cobre de la División Andina de Codelco Chile. La determinación del tamaño de burbujas se realiza por medio de muestreo de burbujas, las que pasan por una cámara de visualización que permite filmarlas para un posterior procesamiento con un programa de análisis de imágenes. Las variables operacionales involucradas son la velocidad de agitación, el flujo de aire y la distribución granulométrica del mineral.

La influencia de la distribución de tamaño de burbujas en la recuperación del mineral es equivalente para las partículas finas y gruesas. Para ambos tamaños de partícula resultó beneficiosa la generación de distribuciones de tamaño de burbujas más finas, aumentando en 3 y 10 puntos la recuperación, para las partículas finas y gruesas, respectivamente.

El análisis de los resultados experimentales se desarrolla en dos líneas distintas. Por un lado se define un parámetro que involucra información referente a la distribución de tamaños de mineral y burbuja que responde a la fenomenología del proceso, pronosticando cambios para la recuperación con cierta precisión (coeficiente de correlación de 0,8) para las recuperaciones del tamaño grueso (+100#) y fino (-400#) solamente. Para las recuperaciones global y del tamaño medio (-100#, +400#) no se obtiene buenas correlaciones.

En la segunda línea de análisis, se genera una estructura de modelo de recuperación, para cada tamaño de partícula, que mezcla la información de la distribución de tamaño de mineral ( $p_{80}$ ), variables operacionales como la agitación ( $N_s$ ), y aquella relacionada a la distribución de tamaño de burbujas como es el índice referente a la superficie total de las burbujas, con un coeficiente de correlación promedio de 0,92 y errores del orden de 2 - 4 puntos porcentuales de recuperación.

Dentro de las aplicaciones de esta investigación, se destaca la posibilidad de un tratamiento diferenciado de gruesos y finos, con condiciones específicas para cada fracción, que posibilite maximizar la recuperación global.

## ABSTRACT

The research objective was to understand and relate the parameters of the bubble size distribution with the copper recovery in the rougher flotation of copper ores. Specifically, to study the influence of the bubble size distribution in those particle size ranges with lower recovery on the rougher flotation, the very fine and the coarse particles.

The study was done in a laboratory batch flotation cell with mechanical agitation and using a copper ore from Division Andina, Codelco Chile. The bubble size was calculated by bubble sampling, visualization and recording with a video camera and processing with an image analysis software. The operational variables are agitation velocity, gas flow rate and particle size distribution.

The influence of the bubble size distribution in the copper recovery can be described with two different results. For the fine particles, a generation of fine bubble size distribution is beneficial, increasing up to 3 points the copper recovery. On the other side, for the coarse particles, it is negative to generate a coarse bubble size distribution. All referred in comparison to the base case.

In the experimental campaign, the flotation was performed in presence of different particle and bubble size distributions, so it is necessary to study the effects in an integral way to project specific results.

Two different analyses were performed with the research results. First, a recovery predicting parameter was developed which involves information about particle and bubble size distribution, which is related to the process phenomenology. This parameter is able to predict recovery changes with certain precision ( $r^2$  0,8), only for the recovery of coarse (+100#) and fine (-400#) particles. For the medium size particles and global recoveries, the correlations were not good enough.

In a second analysis, recovery models were developed, for each particle size class. These models have information about particle size distribution ( $p_{80}$ ), operational variables like agitation (Ns), and a compound variable representing the total bubble surface. Correlations coefficient average 0.92 and errors were in the range of 2 – 4 % copper recovery.

# ÍNDICE DE MATERIAS

<b>1</b>	<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>1</b>
1.1	OBJETIVO GENERAL .....	2
1.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	2
<b>2</b>	<b>ANTECEDENTES</b> .....	<b>4</b>
2.1	PRINCIPIOS DE LA FLOTACIÓN .....	4
2.2	IMPORTANCIA DEL TAMAÑO DE PARTICULA EN LA FLOTACIÓN.....	7
2.2.1	.. Colisión .....	8
2.2.2	.. Adhesión.....	10
2.2.3	.. Agregado estable partícula-burbuja.....	12
2.2.4	.. Flotabilidad de partículas gruesas .....	13
2.2.5	.. Flotabilidad de partículas finas .....	15
2.3	PARÁMETROS RELATIVOS AL GAS.....	17
2.3.1	.. Tamaño de burbuja.....	17
2.3.2	.. Velocidad superficial del gas .....	18
2.3.3	.. Flujo de área superficial de burbujas .....	20
2.3.4	.. Holdup de gas.....	21
2.4	IMPORTANCIA DEL TAMAÑO DE BURBUJA PARA LA FLOTACIÓN .....	22
2.5	VARIABLES OPERACIONALES RELATIVAS AL GAS.....	25
2.5.1	.. Flujo de aire .....	25
2.5.2	.. Velocidad de agitación.....	26
2.5.3	.. Tipo de impeler .....	27
2.5.4	.. Espumantes .....	28
2.5.5	.. Otras variables operacionales .....	29
2.6	MEDICIÓN DE TAMAÑO DE BURBUJAS.....	30
2.6.1	.. Universidad de McGill .....	30
2.6.2	.. Universidad de Cape Town .....	31
2.6.3	.. Universidad Tecnológica de Helsinki.....	32
2.7	DISTRIBUCIÓN DE TAMAÑO DE BURBUJAS.....	33

<b>3</b>	<b>TRABAJO EXPERIMENTAL .....</b>	<b>35</b>
3.1	CARACTERIZACIÓN DEL MINERAL.....	35
3.1.1	.. Análisis químico .....	35
3.1.2	.. Análisis microscópico .....	35
3.1.3	.. Densidad.....	36
3.1.4	.. Granulometría descarga molienda .....	36
3.1.5	.. Cinética de flotación .....	36
3.2	EQUIPO EXPERIMENTAL .....	39
3.2.1	.. Máquina de flotación.....	39
3.2.2	.. Cámara de visualización de burbujas .....	40
3.2.3	.. Otros equipos auxiliares .....	42
3.3	CALIBRACIÓN DE INSTRUMENTOS.....	43
3.3.1	.. Rotámetro .....	43
3.3.2	.. Medidor de pH .....	45
3.3.3	.. Jeringa de reactivos.....	45
3.4	MODELO DE DISTRIBUCIÓN DE TAMAÑO DE BURBUJAS .....	46
3.4.1	.. Modelación del Holdup de gas .....	47
3.4.2	.. Modelo de distribución de tamaño de burbujas modificado.....	51
3.5	COMPOSICIÓN DE DISTRIBUCIONES DE TAMAÑO DE BURBUJAS .....	53
3.6	COMPOSICIÓN DE DISTRIBUCIONES DE TAMAÑO DE PARTÍCULAS.....	55
3.7	CRITERIOS DE FLOTACIÓN .....	57
3.7.1	.. Molienda .....	57
3.7.2	.. Preparación de paquetes para alimentación a flotación .....	57
3.7.3	.. Flotación .....	58
3.7.4	.. Preparación de muestras para análisis químico .....	58
3.8	DETERMINACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN DE TAMAÑO DE BURBUJAS .....	59
3.8.1	.. Captura del video.....	59
3.8.2	.. Digitalización del video .....	60
3.8.3	.. Análisis de imágenes.....	60
3.8.4	.. Determinación de la distribución de tamaño de burbujas .....	61
3.9	CAMPAÑA EXPERIMENTAL .....	64
<b>4</b>	<b>RESULTADOS EXPERIMENTALES .....</b>	<b>66</b>
4.1	RESULTADO EN LA DTB .....	66
4.2	RESULTADOS METALÚRGICOS.....	69

<b>5</b>	<b>ANÁLISIS Y MODELACIÓN .....</b>	<b>72</b>
5.1	ANÁLISIS DE RESULTADOS .....	72
5.1.1	.. Reproducibilidad de resultados .....	72
5.1.2	.. Curvas de distribución de tamaño de burbujas (DTB).....	74
5.1.3	.. Influencia de la distribución de tamaño de mineral (DTM) en la DTB.....	77
5.1.4	.. Influencia de la DTB en la recuperación de Cu .....	82
5.1.5	.. Índices para pronosticar la tendencia de la recuperación.....	86
5.2	MODELACIÓN.....	90
5.2.1	.. Modelamiento de la recuperación.....	90
5.2.2	.. Análisis de parámetros del modelo seleccionado.....	100
<b>6</b>	<b>CONCLUSIONES .....</b>	<b>104</b>
6.1.1	.. Conclusiones sobre las variables operacionales y la distribución de tamaño de burbujas .....	104
6.1.2	.. Conclusiones sobre la influencia de la distribución de tamaño de burbujas en la recuperación de mineral. ....	106
6.1.3	.. Conclusiones sobre el índice pronosticador de la recuperación.....	108
6.1.4	.. Conclusiones sobre la modelación de la recuperación.....	108
6.1.5	.. Conclusiones con respecto al modelo de recuperación seleccionado .....	110
6.1.6	.. Recomendaciones .....	112
	<b>REFERENCIAS .....</b>	<b>113</b>

**ANEXOS:**

- ANEXO A : CÁLCULO DE LA DENSIDAD POR PICNOMETRÍA.**
- ANEXO B : ALGORITMO DE REGRESIÓN POR PASOS.**
- ANEXO C : PROTOCOLO DE REALIZACIÓN DE PRUEBAS EXPERIMENTALES.**
- ANEXO D : ANÁLISIS DE IMÁGENES.**
- ANEXO E : CURVAS DE DISTRIBUCIÓN DE TAMAÑO DE BURBUJAS.**
- ANEXO F : ÍNDICES PARA PRONOSTICAR LA TENDENCIA DE LA RECUPERACIÓN.**
- ANEXO G : DETALLE PROCESO DE MODELACIÓN.**
- ANEXO H : DATOS DE MUESTREO**



## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla N° 1: Rango de tamaño observado para la máxima recuperación en flotación [6].....	7
Tabla N° 2: Diámetro de burbuja y su carga en peso.....	15
Tabla N° 3: Granulometría descarga molienda .....	36
Tabla N° 4: Caracterización de la cinética de flotación .....	38
Tabla N° 5: Calibración rotámetro .....	43
Tabla N° 6: Relación caudales y Jg.....	45
Tabla N° 7: Calibración de peso por gota de reactivo .....	45
Tabla N° 8: Resumen pruebas para modelar el Holdup del gas. ....	48
Tabla N° 9: Variables candidatas utilizadas para generar el modelo del holdup.....	49
Tabla N° 10: Coeficientes y $r^2$ para modelo de holdup del gas. ....	50
Tabla N° 11: Resumen de resultados en la calibración de las constantes de los modelos.....	52
Tabla N° 12: Constantes utilizadas en modelos de $\lambda$ y $d_{50}$ .....	52
Tabla N° 13: Resumen de resultados en la definición de las DTB .....	54
Tabla N° 14: Perfil granulométrico alimentaciones a flotación primaria.....	56
Tabla N° 15: Condiciones en las DTB para la campaña experimental. ....	64
Tabla N° 16: Resumen de campaña experimental .....	65
Tabla N° 17: Estadísticas generales en la DTB.....	68
Tabla N° 18: Estadísticas según número de burbujas.....	68
Tabla N° 19: Estadísticas según superficie de burbujas .....	68
Tabla N° 20: Resultados en masa .....	69
Tabla N° 21: Resultado de leyes de Cobre .....	70

Tabla N° 22: Resultados en recuperación .....	71
Tabla N° 23: Resultados del error experimental calculado para diferentes variables .....	73
Tabla N° 24: Parámetros obtenidos de las DTB para cada distribución de tamaño de mineral. .	74
Tabla N° 25: Correlaciones de índices para pronosticar la tendencia de la recuperación. ....	87
Tabla N° 26: Correlaciones de índices para pronosticar la tendencia de la recuperación incluyendo el $p_{80}$ .....	88
Tabla N° 27: Datos utilizados para el modelamiento de las recuperaciones.....	91
Tabla N° 28: Variables candidatas utilizadas para generar los modelos de recuperación. ....	92
Tabla N° 29: Resumen de datos asociados a la modelación de las recuperaciones .....	93
Tabla N° 30: Resumen de datos asociados a la modelación de la recuperación del tamaño 1 ..	94
Tabla N° 31: Resumen de datos asociados a la modelación general 1 <sup>ra</sup> Iteración .....	95
Tabla N° 32: Matriz de correlaciones estructura general 1 <sup>ra</sup> Iteración .....	95
Tabla N° 33: Resumen de datos asociados a la modelación general 2 <sup>da</sup> Iteración .....	96
Tabla N° 34: Matriz de correlaciones estructura general 2 <sup>da</sup> Iteración .....	96
Tabla N° 35: Resumen de datos asociados a la modelación general 3 <sup>ra</sup> Iteración .....	97
Tabla N° 36: Matriz de correlaciones estructura general 3 <sup>ra</sup> Iteración .....	97
Tabla N° 37: Rango de evaluación para las variables del modelo de recuperación.....	100

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura N° 1: Interacción entre la partícula y la burbuja en la flotación .....	4
Figura N° 2: Representación esquemática de la trayectoria de la partícula.....	5
Figura N° 3: Ángulo de contacto.....	6
Figura N° 4: Variación en la recuperación producto del tamaño de partícula en concentradores industriales [5] .....	7
Figura N° 5: Efecto del diámetro, de partícula y de burbuja, en la probabilidad de adhesión para diferentes tiempos de inducción. [5].....	11
Figura N° 6: Efecto del diámetro de partícula en la eficiencia de adhesión para diferentes ángulos de contacto: • $\theta_a = 50^\circ$ , □ $\theta_a = 60^\circ$ , ▲ $\theta_a = 70^\circ$ , ◇ $\theta_a = 80^\circ$ . [2] .....	12
Figura N° 7: Efecto del diámetro de partícula en la eficiencia de la estabilidad para diferentes niveles de turbulencia. [2].....	13
Figura N° 8: Impacto de la dosis de espumante en el tamaño de burbuja ( $d_{3,2}$ y $d_{10}$ ) y en la distribución de frecuencia (número, superficie y volumen). [18] .....	18
Figura N° 9: Variación del diámetro de Sauter en función del $J_g$ . [18].....	19
Figura N° 10: Impacto del flujo de gas en la frecuencia en número de burbujas (Celda Impala – Bateman). [18].....	19
Figura N° 11: Impacto del flujo de gas en la frecuencia en número de burbujas (Celda LDI – Outokumpu). [18].....	20
Figura N° 12: Influencia del diámetro de burbuja en la cinética de flotación por rangos de diámetro de partícula: ● $d_b = 0,8$ mm, □ $d_b = 1,0$ mm, ▲ $d_b = 1,2$ mm. [2].....	24
Figura N° 13: Impellers utilizados por Gorain et al. [25] .....	25
Figura N° 14: Impellers utilizados por Gorain et al. [25] .....	25
Figura N° 15: Relación entre tamaño de burbujas y flujo de aire a escala de laboratorio [25]. ....	26
Figura N° 16: Relación entre tamaño de burbujas y velocidad de agitación a escala de laboratorio [25]. .....	27
Figura N° 17: Distribución de tamaño de burbujas para impeller Outokumpu y Labtech [27]. ....	27

Figura N° 18: Distribución de tamaño de burbujas para diferentes espumantes [27].....	28
Figura N° 19: Muestreador de burbujas [33].....	30
Figura N° 20: Visualizador de burbujas inclinado [34]. ....	31
Figura N° 21: Equipo de medición de tamaño de burbujas HUT [22, 26].....	32
Figura N° 22: Caracterización de la cinética de flotación .....	38
Figura N° 23: Máquina de flotación Labtech-ESSA.....	39
Figura N° 24: Impeller Labtech-ESSA. ....	40
Figura N° 25: Visualizador de burbujas. ....	41
Figura N° 26: Instalación de equipos para muestrear burbujas.....	42
Figura N° 27: Calibración rótametro ( $r^2 = 0,998$ ) .....	44
Figura N° 28: Comparación de valores reales y modelados para el holdup de gas. ....	50
Figura N° 29: Curvas de distribución de tamaños (DTB), proyectadas a partir de los modelos establecidos .....	53
Figura N° 30: Perfil granulométrico alimentaciones a flotación primaria .....	56
Figura N° 31: Fracción retenida en superficie por cada distribución de tamaño de burbujas (DTB) para la distribución de tamaño de mineral Media (DTM 1).....	75
Figura N° 32: Fracción retenida en superficie por cada distribución de tamaño de burbujas (DTB) para la distribución de tamaño de mineral Fina (DTM 2).....	76
Figura N° 33: Fracción retenida en superficie por cada distribución de tamaño de burbujas (DTB) para la distribución de tamaño de mineral Guesa (DTM 3).....	76
Figura N° 34: Influencia del tamaño de partícula en la DTB.....	77
Figura N° 35: Efecto del $p_{80}$ en la DTB, considerando el porcentaje acumulado en la DTB bajo los diámetros de burbuja 0,2, 0,4, y 0,6 [mm] en número y superficie.....	78
Figura N° 36: Efecto del $p_{80}$ en la DTB, considerando el porcentaje acumulado en la DTB sobre los diámetros de burbuja 1,0, 1,5, y 2,0 [mm] en número y superficie.....	79
Figura N° 37: Variación de $\lambda$ y $d_{32}$ en función de la DTB para cada DTM .....	80

Figura N° 38: Influencia, por tamaño, de la velocidad de agitación periférica ( $N_s$ ), en la recuperación metalúrgica, con la velocidad superficial del gas ( $J_g$ ) variable. ....	82
Figura N° 39: Influencia, por tamaño, de la velocidad de agitación periférica ( $N_s$ ), en la ley del concentrado, con la velocidad superficial del gas ( $J_g$ ) variable. ....	83
Figura N° 40: Influencia, por tamaño, de la velocidad superficial del gas ( $J_g$ ), en la recuperación metalúrgica, con la velocidad de agitación periférica ( $N_s$ ) variable. ....	84
Figura N° 41: Influencia del diámetro de Sauter ( $d_{32}$ ), en la recuperación metalúrgica.....	85
Figura N° 42: Correlaciones obtenidas para $I_2$ asociada a la recuperación global (a) y la recuperación del tamaño 2 (b). ....	89
Figura N° 43: Correlaciones obtenidas para $I_2'$ asociada a la recuperación del tamaño 1 (c) y la recuperación del tamaño 3 (d). ....	89
Figura N° 44: Correlación de la estructura encontrada. A la izquierda se aprecia la recuperación global, mientras que al lado derecho se aprecia la recuperación del tamaño 1 (+100#).....	99
Figura N° 45: Correlación de la estructura encontrada. A la izquierda se aprecia la recuperación del tamaño 2 (-100# +400#), mientras que al lado derecho se aprecia la recuperación del tamaño 3 (-400#). ....	99
Figura N° 46: Respuesta del modelo de recuperación a la variación del $p_{80}$ .....	101
Figura N° 47: Respuesta del modelo de recuperación a la variación del $N_s$ .....	102
Figura N° 48: Respuesta del modelo de recuperación a la variación del índice de superficie ..	103

## SIMBOLOGÍA

- $A$  : Área de la sección transversal efectiva de la celda ( $\text{cm}^2$ ).
- $C_b$  : Carga máxima transportable de una burbuja determinada.
- $C_p$  : Concentración de sólidos en peso [%].
- CCC : Concentración crítica de coalescencia.
- $d_0$  : Diámetro de burbuja cuando  $J_g = 0$  [mm].
- $d^*$  : Diámetro de burbuja en cámara de visualización (sin corrección por presión hidrostática) [mm].
- $d_{3,2}$  : Diámetro estadístico de Sauter [mm].
- $d_{10}$  : Diámetro bajo el cual se encuentra el 10% de las burbujas [mm].
- $d_{25}$  : Diámetro bajo el cual se encuentra el 25% de las burbujas [mm].
- $d_{50}$  : Diámetro bajo el cual se encuentra el 50% de las burbujas [mm].
- $d_{75}$  : Diámetro bajo el cual se encuentra el 75% de las burbujas [mm].
- $d_{80}$  : Diámetro bajo el cual se encuentra el 80% de las burbujas [mm].
- $d_b$  : Diámetro de burbuja [mm].
- $d_m$  : Diámetro promedio de burbujas [mm].
- $d_p$  : Diámetro de partícula [mm].
- $d_{p \text{ min},K}$  : Diámetro de partícula mínimo flotable asociado a una energía cinética  $K$ .
- DTB : Distribución de tamaño de burbujas.
- DTM : Distribución de tamaño de mineral.
- $E_a$  : Eficiencia en la adhesión burbuja-partícula [%].
- $E_c$  : Eficiencia en la colisión [%].
- $E_c^{ic}$  : Eficiencia de colisión debido al efecto de intercepción [%].
- $E_c^{in}$  : Eficiencia de colisión debido al efecto inercial [%].
- $E_c^g$  : Eficiencia de colisión debido al efecto gravitacional [%].
- $E_d$  : Eficiencia en la separación [%].
- $E_s$  : Eficiencia en la estabilidad del agregado burbuja-partícula [%].

- $\epsilon_g$  : Holdup del gas [%].
- $\epsilon_{g \text{ vis}}$  : Holdup del gas en la cámara de visualización [%].
- $f_{i2}(d)$  : Fracción retenida en superficie para el tamaño  $d$  [%].
- $F_{u2}(d)$  : Fracción acumulada en superficie bajo el tamaño  $d$  [%].
- $g$  : aceleración de gravedad [ $m/s^2$ ].
- $J_g$  : Velocidad superficial del gas [ $cm/s$ ].
- $K$  : Número de Stokes.
- $K_c$  : Constante cinética de flotación,  $min^{-1}$ .
- $\kappa$  : Línea de tensión, que se opone a la expansión del contacto trifásico.
- $L_a$  : Ley de cobre en la alimentación [%].
- $L_c$  : Ley de cobre en el concentrado [%].
- $L_r$  : Ley de cobre en el relave [%].
- $N$  : Velocidad de agitación de la celda [rpm].
- $N_s$  : Velocidad de agitación periférica del impeler [ $m/s$ ].
- $n_b$  : Número de burbujas.
- $P_0$  : Presión atmosférica [m.c.a].
- $P_{80}$  : Diámetro bajo el cual se encuentra el 80% en peso de mineral [ $\mu m$ ].
- $P_{\text{celda}}$  : Presión hidrostática en el punto de medición, en la cámara de visualización [m.c.a].
- $P_{\text{vacío}}$  : Presión de vacío en la cámara de visualización [m.c.a].
- $P_{\text{vis}}$  : Presión hidrostática en el punto de medición, en la cámara de visualización [m.c.a].
- $Q_{\text{nominal}}$  : Flujo de gas nominal agregado en la celda [l/min].
- $Q_{\text{real}}$  : Flujo de gas real agregado en la celda [l/min].
- $Q_{\text{std}}$  : Flujo de gas en condiciones estándar de presión y temperatura agregado a la celda [l/min].
- $R$  : Recuperación metalúrgica [%].

- $R(t)$  : Corresponde a la recuperación al tiempo  $t$  [%].
- $R^\infty$  : Recuperación a tiempo infinito [%].
- $Re_b$  : Número de Reynolds para la burbuja.
- $S$  : Superficie total de la DTB calculada a partir de la fracción retenida en número [ $cm^2$ ].
- $S (f_{i2})$  : Superficie total de la DTB calculada a partir de la fracción retenida en superficie [ $cm^2$ ].
- $sd$  : Desviación estándar de la muestra.
- $S_b$  : Flujo de área superficial de gas [ $s^{-1}$ ].
- $t$  : Tiempo de flotación [min].
- $T1$  : Rango de tamaño de mineral correspondiente a +100# (150  $\mu m$ ).
- $T2$  : Rango de tamaño de mineral correspondiente a -100# (150  $\mu m$ ) +400 # (38  $\mu m$ ).
- $T3$  : Rango de tamaño de mineral correspondiente a -400# (38  $\mu m$ ).
- $V$  : Volumen total de la DTB calculada a partir de la fracción retenida en número [ $mm^3$ ].
- $V_b$  : Velocidad de burbuja.
- $V_p$  : Velocidad de partícula.
- $V_t$  : Velocidad relativa de la partícula en régimen de turbulencia.
- $\lambda$  : Parámetro de ajuste del modelo de distribución de tamaño de burbujas.
- $\gamma$  : Tensión superficial.
- $\psi_c$  : Función de corriente.
- $\theta$  : Ángulo de contacto.
- $\theta_c$  : Ángulo máximo de colisión.
- $\Delta\rho$  : Diferencia de densidad entre la partícula y el fluido.
- $\rho_p$  : Densidad partícula.
- $\rho_{bp}$  : Densidad agregado burbuja-partícula.



# 1 INTRODUCCIÓN

El proceso de flotación de minerales constituye el principal método de concentración de minerales de cobre actualmente en uso. En Chile se utiliza principalmente para el tratamiento de minerales sulfurados de cobre, de los cuales es posible obtener molibdeno como subproducto del proceso de flotación.

Dado que de las especies de cobre, las de mayor abundancia son los sulfuros, los procesos asociados a su concentración son de una importancia crucial y cualquier mejora que se pueda incorporar redundaría en un significativo aumento de las utilidades en la minería.

Para el tratamiento de minerales por flotación existen dos tecnologías de uso masivo que son complementarias: la flotación en celdas agitadas mecánicamente y la flotación en celdas columnares; siendo la primera de ellas destinada esencialmente a la recuperación de los minerales de interés y la segunda a la limpieza de los concentrados. En consecuencia y dados los tonelajes involucrados en la industria, la mayor parte del proceso corresponde a las celdas agitadas mecánicamente.

La concentración por flotación es el resultado de la interacción de muchas variables, que involucran factores fisicoquímicos, operacionales y mecánicos. Estudios realizados por diferentes autores indican que la velocidad de agitación, el flujo de aire y el diseño de la celda crean las condiciones hidrodinámicas (régimen de flujos, mezclamiento, suspensión de sólidos, dispersión de gas, interacción burbuja-partícula) que gobiernan el rendimiento del proceso de flotación. [1, 2].

En el último tiempo se ha puesto una especial atención a la dispersión de gas en la celda, pues se considera un factor clave en el proceso. En las celdas de flotación la dispersión del gas en finas burbujas puede ser expresada por diversos indicadores: tamaño de burbuja ( $d_b$ ), holdup de gas ( $\epsilon_g$ ), velocidad superficial de gas ( $J_g$ ) y el flujo de área superficial de burbujas ( $S_b$ ). De estos, el tamaño de burbuja y más precisamente, la distribución de tamaño de burbujas en la celda, es la variable de dispersión de gas más relevante. Es por ello que resulta de gran importancia para el conocimiento, control y optimización del proceso, el que dicha distribución pueda ser medida, modelada y reproducida correctamente.

Ante la situación planteada se pretende estudiar, mediante trabajo experimental de laboratorio y análisis teórico de los fundamentos del fenómeno, las distribuciones de tamaño de burbujas que se presentan en flotación por celdas agitadas mecánicamente. Se considerará sus condiciones de generación y los efectos que pueden ejercer en la

flotación, específicamente en la recuperación del mineral, buscando generar un mayor conocimiento con miras al análisis y optimización del proceso.

Se buscará establecer las condiciones de operación (agitación, flujo de aire, etc.), que permitan modificar la distribución de tamaño de burbujas en una celda de flotación agitada mecánicamente.

En esta tesis, se realizarán pruebas con celdas de flotación batch a escala de laboratorio, para estudiar la respuesta en la recuperación de minerales de cobre, en la flotación primaria, ante modificaciones de las distribuciones de tamaño de partículas y de burbujas. Se pretende modelar la recuperación de cobre en función de variables operacionales y de indicadores asociados a la distribución de tamaño de burbujas.

Además se espera poder complementar un modelo de distribución de tamaño de burbujas existente, eliminando su dependencia del holdup de gas, redefiniéndolo sólo en función de variables operacionales.

Teniendo como base estudios anteriores, en lo que respecta al análisis del fenómeno de flotación y sus resultados en modelación de distribución de tamaño de burbujas, se reproducirán rangos de tamaño de burbujas para ciertos rangos granulométricos del mineral a flotar, que se piensa impactarán positivamente en la recuperación del mineral con respecto a su proceso de flotación actual.

## **1.1 OBJETIVO GENERAL**

Estudiar las condiciones de generación, la modelación y los efectos en la flotación de las distribuciones de tamaño de burbujas, para una celda de flotación batch a escala de laboratorio y analizar la relación entre dichas distribuciones y la recuperación de sulfuros de cobre.

## **1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Estudiar que forma de distribución (en número, área superficial o volumen) es más apropiada y que tamaños y/o parámetros característicos representan la distribución de tamaño de burbujas de mejor manera, en relación con su influencia en los resultados de la flotación.

- Analizar teórica y experimentalmente la relación entre la distribución de tamaño de burbujas, la distribución de tamaño de mineral y la recuperación de cobre en la flotación primaria, para generar modelos que permitan predecir la recuperación de cobre en función de parámetros relacionados a dichas variables.
- Determinar el holdup de gas en cada caso a estudiar, para aislar los efectos causados por la distribución de burbujas de aquellos causados por diferentes holdup. Se debe estudiar el holdup asociado a cada distribución de burbujas.
- Modelar la recuperación primaria de cobre en función de los parámetros que caracterizan la distribución de tamaño de burbujas (número, superficie y/o volumen).

## 2 ANTECEDENTES

### 2.1 PRINCIPIOS DE LA FLOTACIÓN

La colección de partículas sólidas mediante burbujas de aire en la flotación, ocurre por el resultado de tres microprocesos, el encuentro y colisión entre la partícula y la burbuja, la adhesión y finalmente su asenso estable (la no separación), ver Figura N° 1.

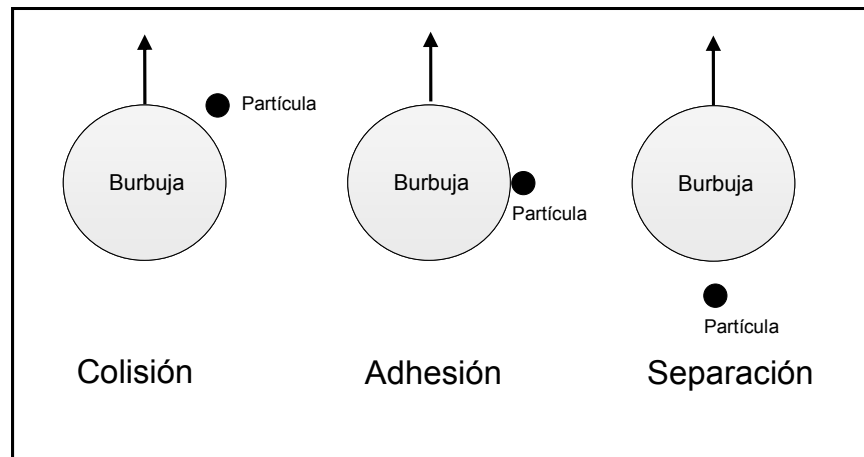


Figura N° 1: Interacción entre la partícula y la burbuja en la flotación

Según Stechemesser [3] el encuentro de la partícula y la burbuja implica el acercamiento de una partícula a una burbuja en su campo de flujo. Esto se encuentra determinado por la física del movimiento de la burbuja y la partícula y por la hidrodinámica del fluido en que se desarrolla el proceso, lo cual se muestra en la Figura N° 2.

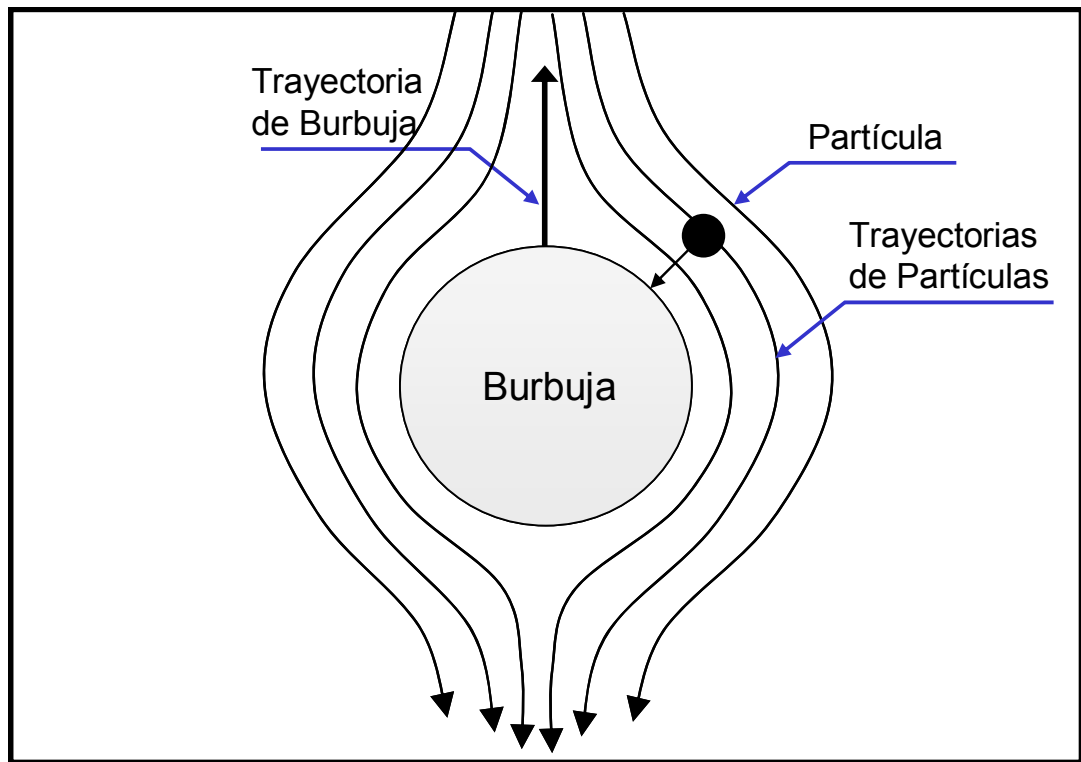


Figura N° 2: Representación esquemática de la trayectoria de la partícula

La colisión puede ser definida como cuando una partícula se acerca a una burbuja a una distancia en la cual las fuerzas superficiales comienzan a funcionar. Las partículas se mueven a esta distancia principalmente bajo acción de fuerzas hidrodinámicas, fuerzas gravitacionales, fuerzas de inercia de la partícula, fuerzas de fricción y la flotabilidad estática del líquido (Pyke [2]).

Wills [4] explica que el proceso de adhesión y transporte se basa en la diferencia de propiedades físico-químicas en la superficie de las partículas de distintos minerales. Para que ocurra la flotación una burbuja debe ser capaz de adherirse a la partícula y transportarla hacia la superficie. Por este motivo el proceso puede aplicarse sólo a partículas relativamente finas, ya que, si la partícula es muy grande la fuerza de adhesión entre la partícula y la burbuja será menor que la fuerza ejercida por su peso, impidiendo que permanezcan adheridas.

Las burbujas de aire sólo pueden adherirse a las partículas de mineral, si logran desplazar el agua de la superficie del mineral, por lo que es necesario que la especie de interés sea, en alguna manera, repelente al agua o hidrofóbica. Alcanzada la superficie, las burbujas de aire sólo pueden continuar soportando a las partículas de mineral, si éstas forman una espuma estable, si no, estallarán y el mineral caerá nuevamente dentro de la celda.

En la Figura N° 3 se muestran las fuerzas que tienden a separar a la partícula de la burbuja. Las fuerzas de tensión llevan a la formación de un ángulo entre la superficie del mineral y de la burbuja, que se denomina ángulo de contacto. Mientras más grande es el ángulo de contacto mayor es la adhesión entre la partícula y la burbuja.

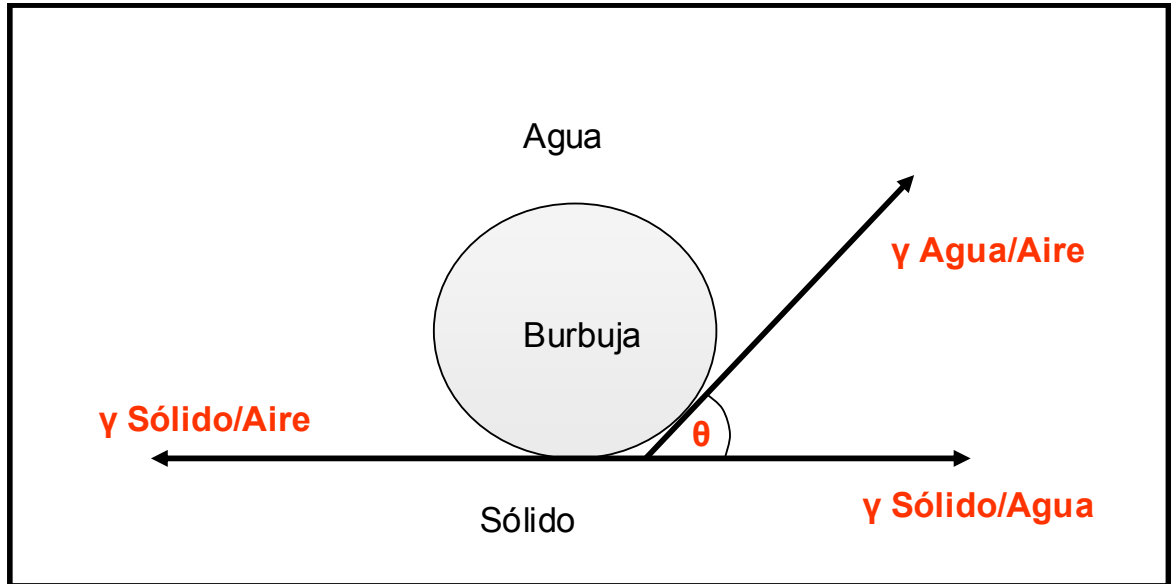


Figura N° 3: Ángulo de contacto.

Por otro lado Stechemesser y Nguyen [3] señalan que un aspecto importante del proceso de asenso estable, es el estudio de la separación (detachment) del agregado burbuja-partícula debido a fuerzas externas al interior de la celda de flotación. Este concepto cobra mayor fuerza y relevancia al momento de estudiar la flotación de partículas de mayor tamaño y/o de mayor masa.

## 2.2 IMPORTANCIA DEL TAMAÑO DE PARTICULA EN LA FLOTACIÓN

Las plantas concentradoras de sulfuros metálicos han sido históricamente diseñadas para la recuperación de partículas con un rango de tamaño acotado, entre los 40 – 100 micrones, ver Figura N° 4. Las condiciones de molienda, clasificación, acondicionamiento, equipos (hidrodinámica/aireación), parámetros operacionales, etc, no están diseñados ni optimizados para la recuperación de partículas finas ni gruesas.

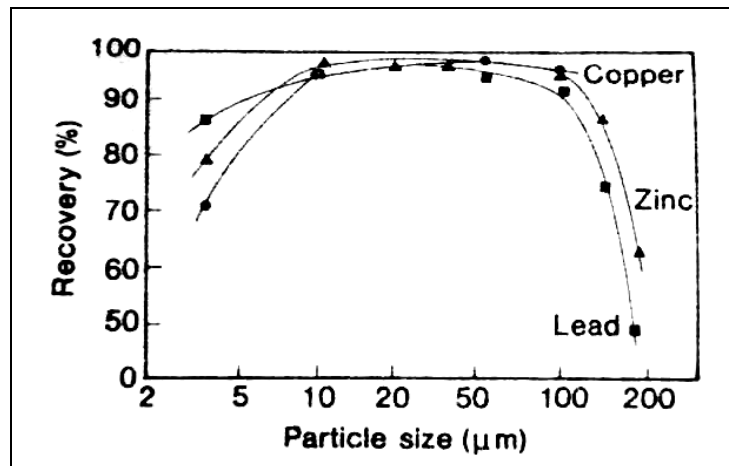


Figura N° 4: Variación en la recuperación producto del tamaño de partícula en concentradores industriales [5]

En función de lo anterior se puede decir que en cualquier sistema de flotación existe un tamaño y una distribución de tamaño de burbujas óptimas, donde la captura de partículas por las burbujas es máxima. King [6] reporta en Tabla N° 1 rangos de tamaño óptimos para distintas mineralogías.

Tabla N° 1: Rango de tamaño observado para la máxima recuperación en flotación [6].

Mineral	Rango de tamaño	Condiciones
	um	
Baritina	10 - 30	Laboratorio
Casiterita	3 - 20	Industrial
Fluorita	40 - 110	Laboratorio
	50 - 150	Industrial
Galena	40 - 300	Laboratorio
	10 - 75	Industrial
Pirita	50 - 150	Laboratorio
Cuarzo	10 - 50	Laboratorio
Esfalerita	8 - 70	Laboratorio
	15 - 100	Industrial
Wolframita	20 - 50	Laboratorio

Diversos autores coinciden en que el tamaño de partícula afecta los procesos físicos de impacto, adhesión y separación entre las partículas y las burbujas en las celdas de flotación.

### 2.2.1 Colisión

Antes que la partícula pueda ser recuperada mediante la flotación, es necesario que ésta colisione y se adhiera a la burbuja. Distintos autores han estudiado y modelado la fenomenología del proceso coincidiendo que existe una proporcionalidad entre la eficiencia de la colisión y el radio de la partícula. Pyke [2] realiza una compilación de autores entre los cuales se puede mencionar:

- Sutherland (1948)  $E_c \approx \frac{d_p}{d_b}$  (1)

- Gaudin (1957)  $E_c \approx \left(\frac{d_p}{d_b}\right)^2$  (2)

- Flint and Howarth (1971)  $E_c \approx \frac{\frac{v_p}{v_b}}{\left(1 + \frac{v_p}{v_b}\right)}$  (3)

- Reay and Ratcliff (1973)  $P_c \approx \left(\frac{d_p}{d_b}\right)^n$  (4)

- Anfruns and Kitchener (1977)  $E_c \approx \left(\frac{1 + \frac{d_p}{d_b}}{1 + \frac{v_p}{v_b}}\right)^2 \cdot \left[ \frac{v_p}{v_b} + \frac{\psi_c}{\left(1 + \frac{d_p}{d_b}\right)^2} \right]$  (5)

- Weber and Paddock (1983)  $E_c \approx \left(1 + \frac{d_p}{d_b}\right)^2 \cdot \left(\frac{v_p}{v_b}\right) \cdot \sin^2 \theta_c$  (6)

- Yoon and Luttrell (1989)  $E_c \approx \left(\frac{3}{2} + \frac{4\text{Re}_b^{0.72}}{15}\right) \cdot \left(\frac{d_p}{d_b}\right)^2$  (7)



Donde:

- $P_c$  : Probabilidad de colisión.
- $d_p$  : Diámetro de partícula.
- $d_b$  : Diámetro de burbuja.
- $v_p$  : Velocidad de partícula.
- $v_b$  : Velocidad de burbuja.
- $\psi_c$  : Función de corriente.
- $\theta_c$  : Ángulo máximo de colisión.
- $Re_b$  : Número de Reynolds para la burbuja.

Schulze [7] propone que la colisión de partícula-burbuja puede ser causada por tres mecanismos diferentes. El efecto de intercepción, el efecto gravitacional y el efecto inercial. Así el autor propone una eficiencia en la colisión como la suma aritmética de los tres efectos:

$$E_c = E_c^{ic} + E_c^g + \left( 1 - \frac{E_c^{ic}}{\left(1 + \frac{d_p}{d_b}\right)^2} \right) \cdot E_c^{in} \quad (8)$$

$$E_c^{ic} = \frac{2 \cdot \psi_c}{\left(1 + \frac{v_p}{v_b}\right) \cdot \frac{v_p}{v_b} \cdot Re_b^2} \quad (9)$$

$$E_c^{in} = \frac{1}{\left(1 + \frac{v_p}{v_b}\right)} \cdot \left(1 + \frac{d_p}{d_b}\right)^2 \cdot \left(\frac{K}{K+a}\right)^b \quad (10)$$

Donde:

- $K$  : Corresponde al número de Stokes.
- $a$  y  $b$  : Son coeficientes dependientes del número de Reynolds descritos por el propio autor.

En general se puede apreciar que todos los autores coinciden en que la eficiencia en la colisión aumenta al aumentar el tamaño de partícula, y al disminuir el tamaño de burbuja.

Esto se refleja en la expresión  $E_c \approx \left(\frac{d_p}{d_b}\right)^n$ , donde n es una constante que varía entre 1

y 2, y depende del cociente entre las densidades de la partícula y el fluido, el tamaño de burbuja y el régimen del fluido en la superficie de la burbuja.

En base a esto último se fundamenta uno de los primeros objetivos a estudiar, en el cual se postula que variaciones de la distribución de tamaño de burbujas (más fina o más gruesa) influyen en la flotación de partículas dependiendo del tamaño de éstas.

### 2.2.2 Adhesión

Como se mencionó anteriormente la adhesión entre las partículas y las burbujas es un proceso complejo de interacciones hidrodinámicas y fuerzas superficiales. La probabilidad de que este fenómeno ocurra es definida como la fracción de partículas que se mantienen adheridas a la burbuja después que la colisión ha ocurrido, y se modela en términos de tiempo de inducción y contacto.

El tiempo del contacto es el tiempo durante el cual una partícula y una burbuja están en contacto después de la colisión, mientras que el tiempo de inducción es el tiempo mínimo requerido para que la fina película líquida entre la partícula y la burbuja pueda ser desplazada y así se forme una línea trifásica de contacto.

El subproceso de adhesión no es bien entendido en la actualidad, pero Sutherland [8] propone de manera simple que la adhesión será exitosa si el tiempo de contacto es mayor que el tiempo de inducción.

Después de la colisión partícula burbuja, el tiempo de contacto ocurre por un período sumamente corto, típicamente  $10^{-2}$  segundos o menos. Como el tiempo de contacto de la burbuja-partícula es controlado por las fuerzas hidrodinámicas, las investigaciones en este campo se han centrado en calcular el tiempo de contacto con los principios de la dinámica de fluidos.

Dobby y Finch [1] plantearon un modelo en donde al aumentar el tamaño de la partícula se obtenía un aumento de la probabilidad de colisión pero una disminución en la probabilidad de adhesión.

Luttrell y Yoon [9] plantearon un modelo para la probabilidad de adhesión en función del número de Reynolds de la burbuja, el tiempo de inducción, la velocidad de la burbuja, el diámetro de la burbuja y el diámetro de la partícula, en donde también se predice una disminución de la probabilidad al aumentar el diámetro de partícula en concordancia con Dobby y Finch. Además Luttrell y Yoon plantean que el óptimo en la probabilidad de adhesión es función del tamaño de burbuja, debido a diferencia de efectos en el proceso de adhesión producidos por el tamaño de burbuja y su velocidad de ascenso.

Para un tamaño de partícula y burbuja dado, el tiempo de inducción disminuye con el aumento del ángulo de contacto. Por lo tanto, aumentando el ángulo de contacto de la partícula se logrará aumentar la eficiencia de la adhesión. Obviamente, cuanto más hidrofóbica es la superficie de la partícula, es más fuerte la atracción hidrofóbica y así es más baja la energía total potencial (barrera) entre la partícula y la burbuja (Yoon y Mao, [10]).

Yoon y Luttrell [11] demostraron que la eficiencia de la adhesión para burbujas menores a 0,4 [mm] es constante y del orden de 0,5. Para burbujas mayores a este diámetro, disminuciones en su tamaño aumentan la eficiencia de adhesión.

Por otro lado el tamaño de partícula afecta fuertemente en el tiempo de inducción, el cual aumenta con el tamaño de partícula disminuyendo la eficiencia de adhesión.

Laskowski [5] muestra en la Figura N° 5 y Pyke [2] en Figura N° 6 como varía la probabilidad de adhesión según el tamaño de partícula y burbuja respectivamente.

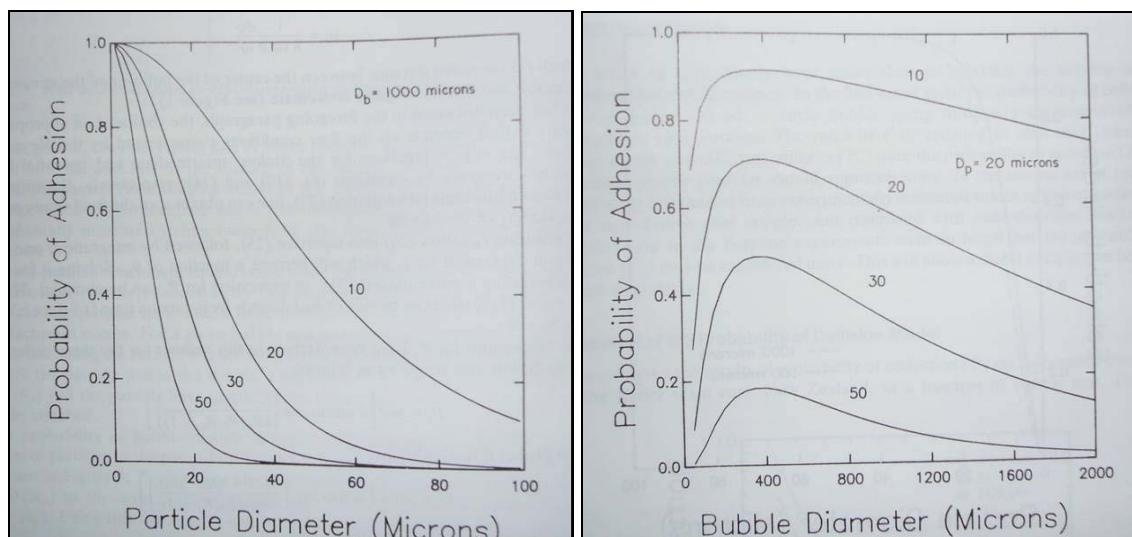


Figura N° 5: Efecto del diámetro, de partícula y de burbuja, en la probabilidad de adhesión para diferentes tiempos de inducción. [5]

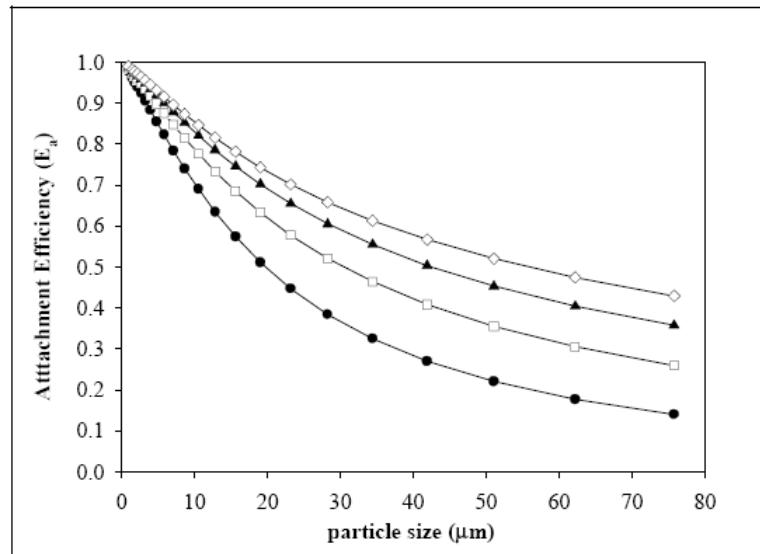


Figura N° 6: Efecto del diámetro de partícula en la eficiencia de adhesión para diferentes ángulos de contacto:  $\bullet$   $\theta_a = 50^\circ$ ,  $\square$   $\theta_a = 60^\circ$ ,  $\blacktriangle$   $\theta_a = 70^\circ$ ,  $\diamond$   $\theta_a = 80^\circ$ . [2]

### 2.2.3 Agregado estable partícula-burbuja

La estabilidad del agregado partícula-burbuja es controlado por la relación que existe entre las fuerzas que actúan en la adhesión de la partícula a la burbuja, y la tensiones externas presentes en la celda de flotación. El análisis de la separación es de vital importancia en los sistemas turbulentos, debido a la constante presencia de tensiones que impactan y que pueden llegar a desestabilizar el agregado partícula-burbuja.

La eficiencia en la separación ( $E_d$ ) se define como la fracción de partículas unidas a la burbuja, que por algún motivo se separa de esta dentro de la celda de flotación, y es igual a uno menos la eficiencia de la estabilidad ( $1 - E_s$ ).

La estabilidad de los agregados partícula-burbuja ha sido investigada teóricamente por Schulze [12], y experimental por Crawford y Ralston [13], exponiendo una relación establecida entre el tamaño de partícula máximo flotable ( $d_{p \max}$ ) y el ángulo de contacto, la densidad de la partícula, el tamaño de burbuja y la velocidad.

Como se mencionó la eficiencia en la estabilidad es dependiente de las fuerzas de adhesión entre la partícula y la burbuja. Esta última es directamente proporcional al ángulo de contacto e inversamente proporcional al diámetro de la partícula. Es así como se puede definir, que la fuerza resultante entre la fuerza de adhesión menos la fuerza de separación definirá la estabilidad del agregado partícula-burbuja.

La fuerza de separación dependerá a su vez de la gravedad, la flotabilidad estática, la presión hidrostática, la fuerza capilar y las fuerzas adicionales causadas por la agitación en la máquina de flotación.

En la Figura N° 7 Pyke [2] muestra como influye el tamaño de partícula en la eficiencia de la estabilidad del agregado partícula-burbuja. En donde se ve que para partículas finas no existe problema de la estabilidad del agregado, pero a medida que la partícula aumenta de tamaño, disminuye notoriamente la eficiencia.

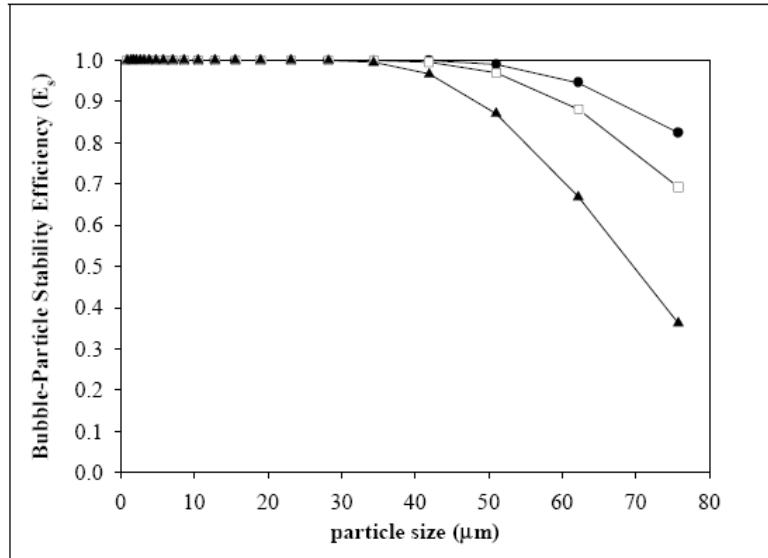


Figura N° 7: Efecto del diámetro de partícula en la eficiencia de la estabilidad para diferentes niveles de turbulencia. [2]

#### 2.2.4 Flotabilidad de partículas gruesas

El problema fundamental a entender en la estabilidad del agregado partícula-burbuja es saber si la fuerza de adhesión, que está actuando en la línea trifásica de contacto, es lo bastante grande para prevenir la destrucción del agregado bajo condiciones dinámicas que existen en la celda de flotación.

Nguyen [14] realiza una determinación del tamaño máximo para que una partícula sea flotable. Las ecuaciones utilizadas son una función del ángulo de contacto de la partícula, la tensión superficial, la densidad de la partícula y la aceleración centrífuga de corrientes turbulentas al interior de la celda. En el artículo citado se señala que, para los tamaños de partículas y ángulos de contacto encontrados típicamente en flotación, el tamaño de burbuja tiene muy poco efecto en la tenacidad de la adhesión de la partícula.

Además, Nguyen señala que la recuperación de las partículas más finas y las partículas más gruesas, es usualmente, muy baja. Las partículas gruesas presentan problemas debido a que el agregado partícula - burbuja no es lo suficientemente fuerte como para impedir el desprendimiento causado por el peso de la partícula y las corrientes turbulentas durante el ascenso de los agregados. Indica que la eficiencia de la estabilidad del agregado partícula - burbuja depende del tamaño de la partícula, su hidrofobicidad y fuerzas externas que tienden a despegarlo. Incluso para partículas finas, el desprendimiento del agregado puede influenciar en forma significativa la cinética de flotación, debido a una agitación turbulenta demasiado intensa.

El autor realiza un análisis físico-matemático y obtiene como resultado que el tamaño de burbuja no tiene mucha influencia en la fuerza de adhesión del agregado ni tampoco en la determinación del tamaño máximo para una partícula flotable.

Sin embargo, experimentos de Gallegos-Acevedo et al. [15] indican que la carga máxima que puede llevar una burbuja dependen de: el diámetro de la burbuja, la densidad de la partícula, el diámetro de la partícula, la forma de la partícula y el arreglo geométrico de las partículas.

La densidad del agregado burbuja-partícula ( $\rho_{bp}$ ) puede calcularse a partir del diámetro de la burbuja ( $d_b$ ), la densidad de la partícula ( $\rho_p$ ) y el diámetro de la partícula ( $d_p$ ). Asumiendo que la burbuja se encuentra completamente cargada con una monocapa de partículas, se obtiene la siguiente expresión:

$$\rho_{bp} = \frac{\pi \cdot d_p \cdot \rho_p}{d_b + \pi \cdot d_p} \quad (11)$$

La carga máxima de una burbuja esta dada por la siguiente expresión:

$$|C_b| = \frac{\pi^2 \cdot d_p \cdot \rho_p \cdot d_b^3}{6 \cdot (d_b + \pi \cdot d_p)} \quad (12)$$

A partir de trabajos experimentales se obtuvo diferentes valores de carga máxima para diferentes diámetros de burbuja, como se muestra en la Tabla N° 2 a continuación:

Tabla N° 2: Diámetro de burbuja y su carga en peso

Ensayo	d <sub>b</sub>	Sup. Burb.	Masa sólidos
	cm	cm <sup>2</sup>	mg
1	0,21	0,14	2,7
2	0,22	0,15	3,9
3	0,21	0,14	2,8
4	0,15	0,07	1,4
5	0,19	0,11	1,8
6	0,14	0,06	0,8
7	0,40	0,28	5,6
8	0,50	0,22	5,4
9	0,45	0,21	3,7
10	0,53	0,27	5,2
11	0,54	0,26	4,3
12	0,50	0,28	5,9

Estos resultados confirman que existe una relación entre el tamaño de burbujas y las características del mineral que se desea flotar, en particular, su granulometría.

Wills y Ralston et al. [3, 16] coinciden en que a medida que aumenta el diámetro de partícula a transportar, la estabilidad del agregado va resultando cada vez más inestable producto de la interacción de las fuerzas presentes en la celda de flotación. En donde para tener posibilidades de éxito el diámetro de la burbuja debe ser considerablemente superior al de la partícula a transportar.

### 2.2.5 Flotabilidad de partículas finas

Wills y Ralston et al. [4, 16] coinciden en que el modelo planteado por Scheludko et al. [17], que busca representar el diámetro de partícula mínimo flotable, genera una buena predicción:

$$d_{p \text{ min,K}} = 2 \cdot \left[ \frac{3 \cdot \kappa^2}{V_t^2 \cdot \Delta\rho \cdot \gamma \cdot (1 - \cos\theta)} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (13)$$

Donde:

- $d_{p \text{ min},K}$  : Diámetro de partícula mínimo flotable asociado a una energía cinética K.
- $\kappa$  : Línea de tensión, que se opone a la expansión del contacto trifásico.
- $V_t$  : Velocidad relativa de la partícula en régimen de turbulencia.
- $\Delta\rho$  : Diferencia de densidad entre la partícula y el fluido.
- $\gamma$  : Tensión superficial.
- $\theta$  : Ángulo de contacto.



## 2.3 PARÁMETROS RELATIVOS AL GAS

En la actualidad existen una serie de indicadores relativos al gas, a partir de los cuales se obtiene información característica de la dispersión del gas dentro de la celda.

### 2.3.1 Tamaño de burbuja

Un indicador representativo del tamaño de burbuja corresponde al diámetro de Sauter expresado a través de  $d_{3,2}$ , el cual se define como:

$$d_{3,2} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} d_i^3}{\sum_{i=1}^{i=n} d_i^2} \quad (14)$$

Donde:

- $d_i$  : diámetro equivalente esférico de la burbuja.
- $n$  : tamaño de muestra.

Notar que el diámetro de burbuja así calculado incorpora información sobre el volumen y superficie de burbujas de la muestra tomada.

Nesset et al. [18] explica que el tamaño de burbuja observado en una celda de flotación de cualquier diseño, es el resultado de procesos primarios de generación, y aquellos secundarios relacionados con la coalescencia de burbujas. Las características de la pulpa (porcentaje de sólidos, viscosidad, etc) pueden influenciar importantemente la coalescencia de burbujas.

El autor destaca que es la dosis de espumante uno de los parámetros más importantes para minimizar la coalescencia de burbujas, y a su vez controlar el tamaño de burbuja. El rol del espumante es ilustrado en la Figura N° 8, donde se puede apreciar que el diámetro de Sauter ( $d_{3,2}$ ) disminuye a un valor constante a medida que aumenta la dosis de espumante.

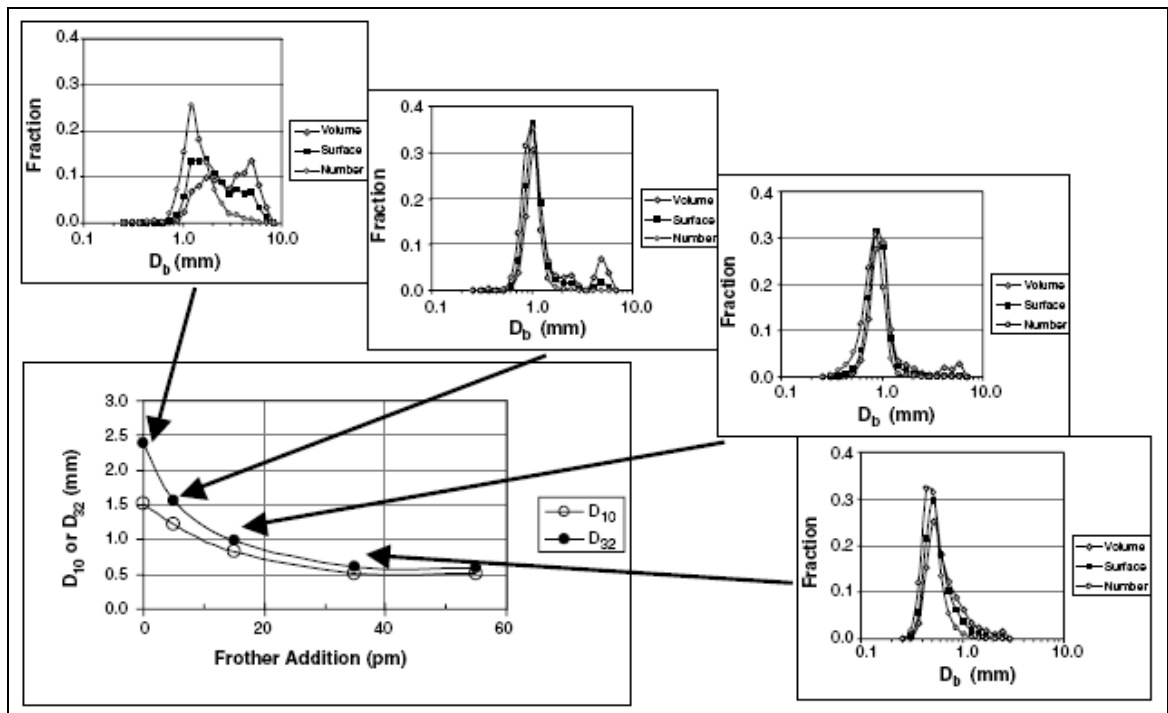


Figura N° 8: Impacto de la dosis de espumante en el tamaño de burbuja ( $d_{3,2}$  y  $d_{10}$ ) y en la distribución de frecuencia (número, superficie y volumen). [18]

### 2.3.2 Velocidad superficial del gas

La velocidad superficial del gas representa la velocidad de ascenso de las burbujas de gas en la celda de flotación, la que puede ser expresada mediante la ecuación:

$$J_g = \frac{Q}{A} \quad (15)$$

Donde:

- $J_g$  : Velocidad superficial de gas (cm/s).
- $Q$  : Flujo de gas de alimentación a la celda (cm<sup>3</sup>/s).
- $A$  : Área de la sección transversal efectiva de la celda (cm<sup>2</sup>).

Nesset et al. [18] en la Figura N° 9 resume la experiencia para cuatro tipos de máquinas de flotación en las cuales se cumple que la velocidad superficial de gas influye en el

tamaño de burbuja, donde la tendencia encontrada queda representada por la siguiente ecuación<sup>1</sup>:

$$d_{3,2} = d_0 + C \cdot J_g^n, \text{ donde:} \quad (16)$$

- $d_0$  : Corresponde al diámetro de burbuja cuando  $J_g = 0$ .
- $C$  y  $n$  : Corresponden a parámetros de ajuste dependientes del mecanismo de producción de burbujas, el sistema químico y las propiedades de la pulpa.

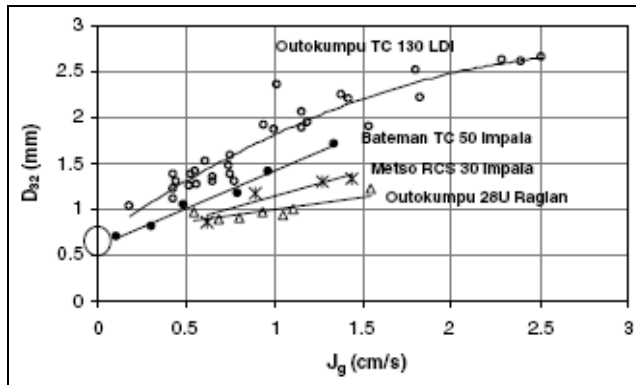


Figura N° 9: Variación del diámetro de Sauter en función del  $J_g$ . [18]

El autor plantea que el aumento en la media de las burbujas, producto de aumento en la velocidad superficial del gas, responde a su influencia en los procesos primarios y/o secundarios (coalescencia), y que depende del tipo de celda ocupada. En la Figura N° 10 (Impala) se observa como el  $J_g$  afecta los procesos primarios, en donde la frecuencia en número responde de manera constante al aumento en la tasa de gas con un desplazamiento horizontal de las curvas de distribución manteniendo la forma y máximo (peak) de las burbujas.

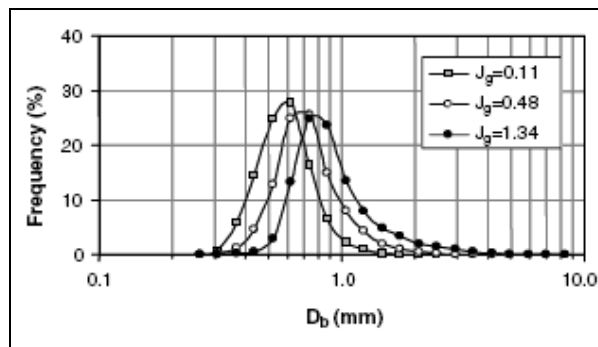


Figura N° 10: Impacto del flujo de gas en la frecuencia en número de burbujas (Celda Impala – Bateman). [18]

<sup>1</sup> Esta ecuación corresponde a un modelo actualizado a aquel planteado por Dobby and Finch en 1986

Por otro lado, se muestra en la Figura N° 11 (LDI), que el aumento en la tasa de gas produce un aumento en el tamaño de burbuja, pero con la excepción que modifica la forma y máximo (peak) de la curva de frecuencia, generando curvas cada vez más anchas y con máximo (peak) de menor tamaño, donde el  $J_g$  estaría afectando los procesos secundarios de formación de burbujas. El autor explica este comportamiento señalando que el aumento en la tasa de gas llegaría a ser tan alto que la dosis de espumante no es capaz de retardar completamente el proceso de coalescencia.

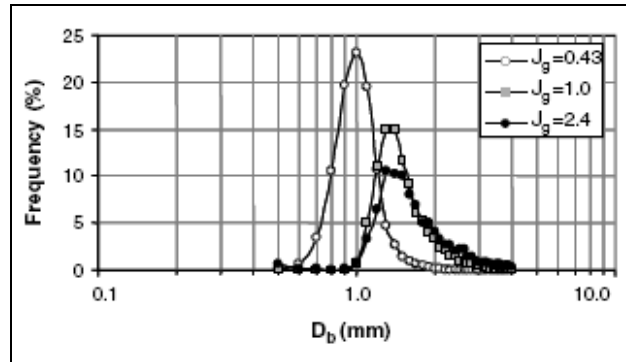


Figura N° 11: Impacto del flujo de gas en la frecuencia en número de burbujas (Celda LDI – Outokumpu). [18]

### 2.3.3 Flujo de área superficial de burbujas

Como la flotación está fuertemente determinada por la superficie de burbujas disponible para el ascenso de mineral a la fase espuma, es necesario definir una nueva variable que de cuenta del flujo de área superficial de burbujas, que se define en la ecuación 17 y 18 por Finch et. al. [19]

$$S_b = \frac{6 \cdot J_g}{d_{3,2}} \quad (17)$$

$$S_b = 5,59 \cdot \varepsilon_g \quad (18)$$

Donde:

- $J_g$  : Velocidad superficial de gas (cm /s).
- $d_{3,2}$  : Diámetro de Sauter (cm)
- $S_b$  : Flujo de área superficial de burbujas ( $s^{-1}$ ).
- $\varepsilon_g$  : Holdup del gas (°/1)

En la deducción de la ecuación 17 se trabaja sobre el supuesto de burbujas esféricas. Además en la ecuación 18 el autor destaca que la constante 5,59 se deduce de experimentos asociados a celdas con agitación mecánica.

#### 2.3.4 Holdup de gas

Cuando se introduce gas a una celda, sea esta columnar o agitada mecánicamente, se produce un desplazamiento de pulpa. La fracción volumétrica desplazada se denomina “holdup” de gas o contenido volumétrico de gas y se representa por  $\epsilon_g$ . De la definición de  $\epsilon_g$  se puede ver que el complemento  $(1 - \epsilon_g)$ , corresponde al “holdup” de pulpa.

Ocupando las ecuaciones 17 y 18 (Finch et. al. [19]), sobre el flujo de área superficial de burbujas ( $S_b$ ), se puede encontrar una relación entre el holdup del gas, el diámetro de Sauter y la velocidad superficial del gas ( $J_g$ ) expresada por la ecuación 19.

$$\epsilon_g = \frac{6 \cdot J_g}{5,59 \cdot d_{3,2}} \quad (19)$$

## 2.4 IMPORTANCIA DEL TAMAÑO DE BURBUJA PARA LA FLOTACIÓN

Ata y Jameson [20] en su estudio acerca de la formación de agregados de burbujas indican que el tamaño medio de las burbujas formadoras de clusters fue generalmente mayor que el tamaño de las burbujas no agregadas, sugiriendo que la tasa de agregación aumenta con el diámetro de las burbujas.

En Gorain et. al. [21] se intenta relacionar algunos parámetros relativos al gas con la constante cinética de flotación ( $k$ ), llegando a las siguientes conclusiones:

- El tamaño de burbuja no se relaciona por sí sólo con la constante cinética de flotación, de alguna manera debe considerarse la cantidad de aire en la celda, es decir, se esperaría que la tasa de flotación aumentara si se aumenta de 1 a millones de burbujas del mismo tamaño por unidad de volumen.
- El holdup de gas, que es una medida de la cantidad de aire por unidad de volumen de pulpa, tampoco se relaciona bien con  $k$ . Esto también es esperable debido a que es necesario considerar el tamaño de burbuja. Millones de burbujas pequeñas con un volumen de  $20 \text{ cm}^3$  se espera que produzcan una tasa de flotación mucho mayor que sólo una burbuja de  $20 \text{ cm}^3$ .
- El que mejor se correlaciona con la tasa de flotación, es la velocidad superficial del gas. Esta es más que una proporción volumétrica de aire en la celda, es una medida de la tasa a la cual el aire pasa a través de la celda. Nuevamente se esperaría una diferencia si la cantidad de aire se repartiera como millones de burbujas pequeñas o pocas burbujas grandes.

Grau y Heiskanen [22] realizan experimentos en un sistema bifásico variando velocidad de agitación y flujo de aire para medir propiedades de dispersión del gas: velocidad superficial del gas  $J_g$ , diámetro de burbuja  $d_{3,2}$ , holdup, y flujo de área superficial de burbujas  $S_b$ . Estos autores señalan que la velocidad superficial del gas es una medida de la habilidad de aireación del equipo de flotación y es un parámetro importante debido a su influencia en el desempeño del proceso de flotación. En otras palabras, la medición de la velocidad superficial local del gas entrega una idea de cómo el aire que entra se dispersa en la celda de flotación.

Heiskanen [23] señala que la distribución axial del aire depende de la geometría de la celda. En celdas rectangulares existe una alta velocidad superficial de gas en las esquinas del estanque.

Grau y Heiskanen [22] indican que el flujo de área superficial de burbujas es un parámetro clave en la flotación, dado que describe la capacidad del equipo de flotación para transportar sólidos hasta la fase de espuma.

Concluyen que  $d_{3,2}$  aumenta con el flujo de aire. La desviación estándar de la distribución de tamaño de burbujas también aumenta con el aumento del flujo de aire. El holdup de gas crece con un aumento en la velocidad de agitación. Obtienen valores de  $S_b$  entre 27 - 36 ( $s^{-1}$ ).

Gorain encontró valores para  $S_b$  entre 36 - 200 ( $s^{-1}$ ). Grau y Heiskanen señalan que estos valores pueden deberse a mediciones equivocadas de  $d_b$  o considera erróneo un promedio aritmético de los  $d_{3,2}$  realizado por Gorain. Indican que el medidor de burbujas utilizado por Gorain (UCT) favorece tamaños pequeños, porque rompe las burbujas al entrar al tubo muestreador, esto subestimaría el  $S_b$ .

Finch, et. al. [19] indican que  $S_b$  se relaciona con el desempeño de la flotación y ha sido considerado como una variable clave del equipo de flotación. Proponen una relación entre  $S_b$  y el holdup de gas dada por la ecuación:  $S_b = 5,59 \cdot \epsilon_g$ .

Además de lo anterior, estos autores señalan que el proceso de flotación es un sistema triangular interactivo que involucra factores químicos, físicos y del equipo. Estos últimos son: velocidad de agitación, flujo de aire y diseño de la celda. Los factores relativos al equipo no afectan los resultados de flotación en forma aislada, si no que crean las condiciones hidrodinámicas – régimen de flujo, intensidad de mezclado, suspensión de sólidos, dispersión de gas, interacción burbuja-partícula – que gobiernan el desempeño metalúrgico. Se señala la dispersión de aire como la característica hidrodinámica clave de la flotación.

Para ejemplificar la relación propuesta entre  $S_b$  y holdup, Finch, et. al. [19] indican que la recuperación de tinta en una columna de flotación para “destintar” papel reciclado mostró una buena correlación con  $S_b$  y con el holdup. Dado que el holdup es más fácil de medir, pues no requiere el diámetro de burbujas, una relación entre  $S_b$  y holdup sería conveniente para usarla como un factor del equipo.

Con respecto a la relación entre holdup y tamaño de burbujas Dobby y Finch [24] indican que el holdup de gas crece cuando aumenta el flujo de aire y cuando decrece el tamaño de burbujas, debido a que las burbujas más pequeñas tienen menor velocidad de ascenso y permanecen más tiempo en la celda.

Heiskanen [23] discute los resultados obtenidos por Gorain et al [21]. Según Heiskanen, Gorain et al. muestrea en celdas con pobre dispersión de aire, donde la constante de

flotación  $k$  es buena, lo que entra en contradicción con el conocimiento de experiencias industriales.

Heiskanen [23] dice que  $k$  debería crecer cuando crece el holdup y decrecer cuando el tamaño de burbujas aumenta. Señala también que, en celdas agitadas mecánicamente, el efecto del tamaño de burbujas es menor que en columnas de flotación. La constante de flotación decrece para partículas más grandes y que para partículas más pequeñas es necesario un  $J_g$  más alto para una flotación efectiva.

Dobby y Finch [24], en su revisión acerca de columnas de flotación, definen la capacidad de transporte del equipo como la masa de sólidos transportados por unidad de tiempo por unidad de área transversal de la columna. Esta capacidad de transporte depende del diámetro de burbuja, el diámetro de partícula, la densidad de la partícula y  $J_g$ . A través de análisis de los modelos obtienen que, para alcanzar la capacidad de transporte máxima con partículas de mayor tamaño, se necesitan burbujas de mayor tamaño. Sin embargo señalan que esta afirmación les parece cuestionable.

Pyke [2] muestra en la Figura N° 12 que existe una influencia distinta del diámetro de burbuja asociado a un tamaño de partícula en la flotación. Así para partículas de menor tamaño (menor que  $25 \mu\text{m}$ ) se genera una mejor flotación con burbujas más finas ( $d_b$  de  $0,8 \text{ mm}$ ), mientras que para partículas más gruesas (mayores a  $25 \mu\text{m}$ ) se genera una mejor flotación con burbujas más gruesas ( $d_b$  de  $1,2 \text{ mm}$ ).

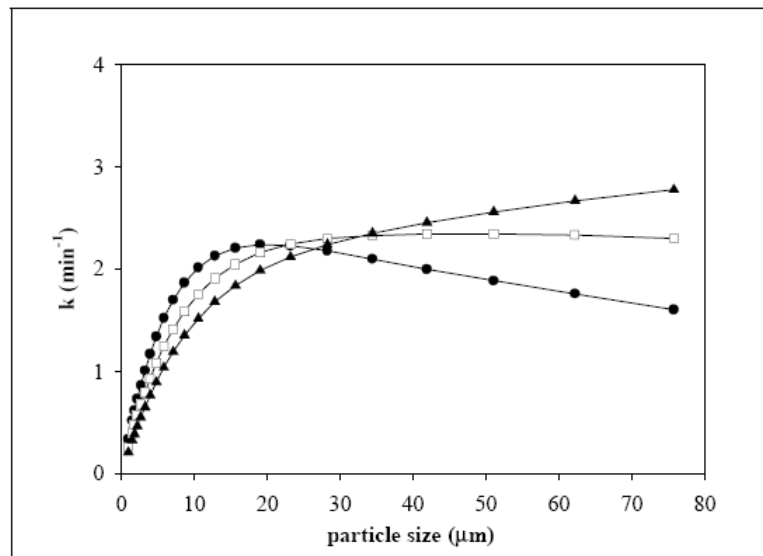


Figura N° 12: Influencia del diámetro de burbuja en la cinética de flotación por rangos de diámetro de partícula: ●  $d_b = 0,8 \text{ mm}$ , □  $d_b = 1,0 \text{ mm}$ , ▲  $d_b = 1,2 \text{ mm}$ . [2]



## 2.5 VARIABLES OPERACIONALES RELATIVAS AL GAS

Como se señaló anteriormente, para una celda agitada mecánicamente existen diferentes diseños de mecanismos de agitación, los cuales operan a diferentes rangos de velocidad de agitación, lo que resulta en características hidrodinámicas diferentes al interior de la celda, que entregarían distintas distribuciones de tamaño de burbujas.

A continuación se muestran resultados obtenidos por diferentes autores con respecto a la respuesta del tamaño medio de burbuja ante variaciones de las condiciones operacionales.

### 2.5.1 Flujo de aire

Gorain et al. [25] realizaron pruebas en una celda de flotación industrial a escala utilizando 4 impellers diferentes (Figura N° 13 y Figura N° 14) y variando el flujo de aire y la velocidad de agitación.

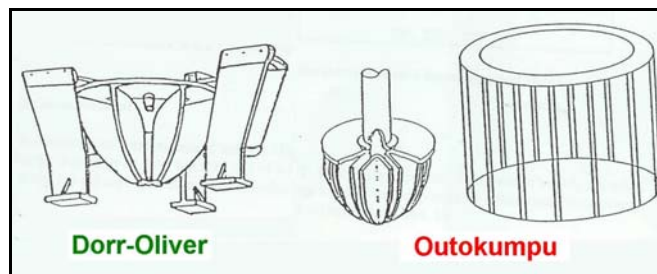


Figura N° 13: Impellers utilizados por Gorain et al. [25]

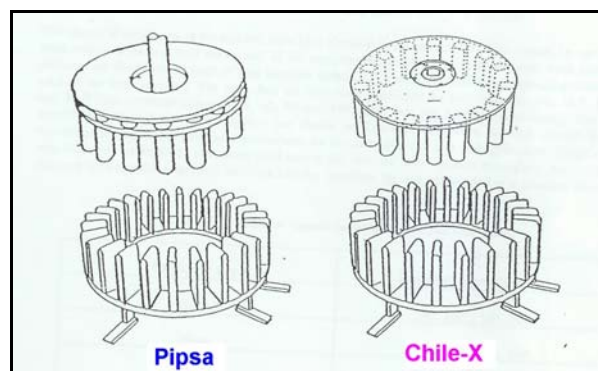


Figura N° 14: Impellers utilizados por Gorain et al. [25]

En la Figura N° 15 se observan algunos de los resultados obtenidos por Gorain et al. [25] estos muestran que un aumento en el flujo de aire aumenta el tamaño medio de las burbujas. Otro resultado importante es que para flujos de aire mayores se obtienen distribuciones de tamaño más anchas que en el caso de flujos de aire bajos.

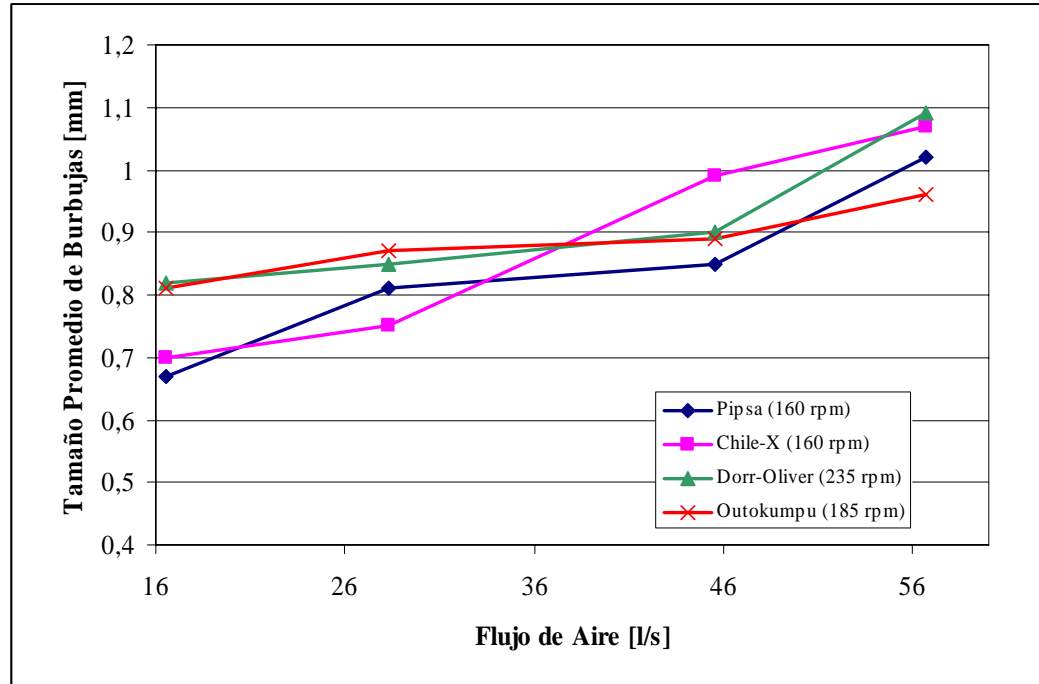


Figura N° 15: Relación entre tamaño de burbujas y flujo de aire a escala de laboratorio [25].

Grau et. al. [26] realizaron pruebas en una celda de laboratorio y en un sistema bifásico, ellos indican que el tamaño medio de burbuja aumenta al aumentar el flujo de aire en la celda.

## 2.5.2 Velocidad de agitación

Grau et. al. [26], señalan que cuando la dispersión de aire en la celda es baja, se esperan burbujas grandes y con formas elipsoidales. Sus experimentos demuestran que el tamaño medio de burbuja decrece con el aumento de la velocidad de agitación.

En la Figura N° 16 se muestra gráficamente algunos de los resultados obtenidos por Gorain et al. cuando variaban la velocidad de agitación. Para la mayoría de los casos es cierto que un aumento en la velocidad de agitación disminuye el tamaño medio de las burbujas.

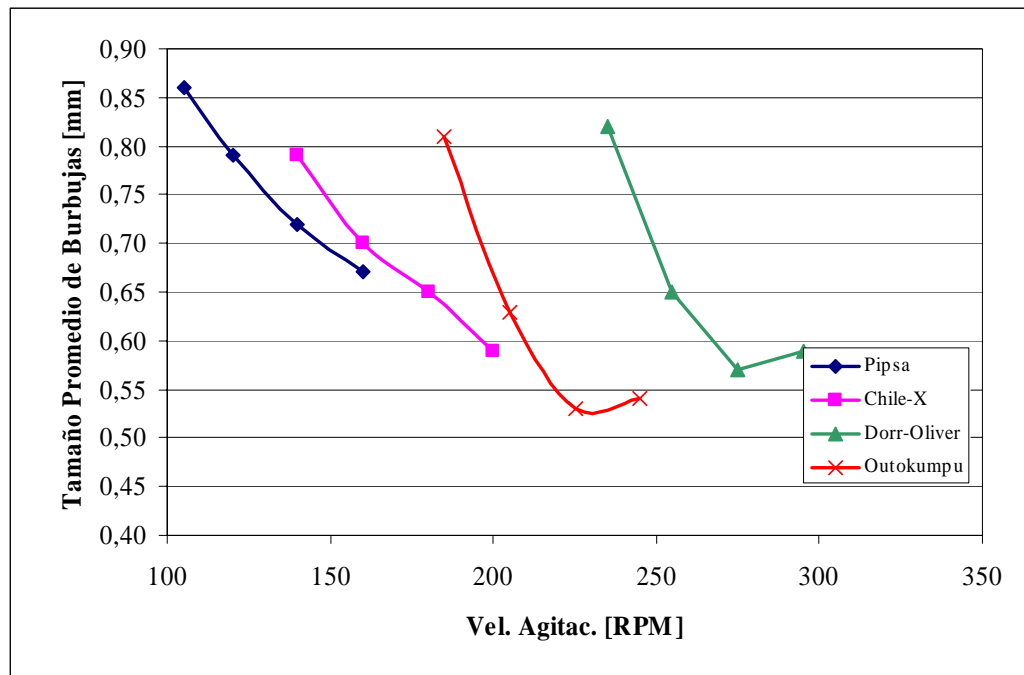


Figura N° 16: Relación entre tamaño de burbujas y velocidad de agitación a escala de laboratorio [25].

### 2.5.3 Tipo de impeler

Como se observa en los gráficos anteriores los diferentes tipos de impeler responden de manera diferente a las variaciones en las condiciones de operación, lo que indica que el tipo de impeler es una variable operacional importante.

En el trabajo de Kracht [27] se utilizaron dos tipos de impeler en dos celdas de laboratorio diferentes, a pesar que las condiciones de operación en ambas celdas eran diferentes, debido principalmente a los rangos de velocidad de agitación, se observan diferencias en la distribución de tamaño de burbujas que pueden ser atribuidas al uso de diferentes mecanismos de agitación (ver Figura N° 17).

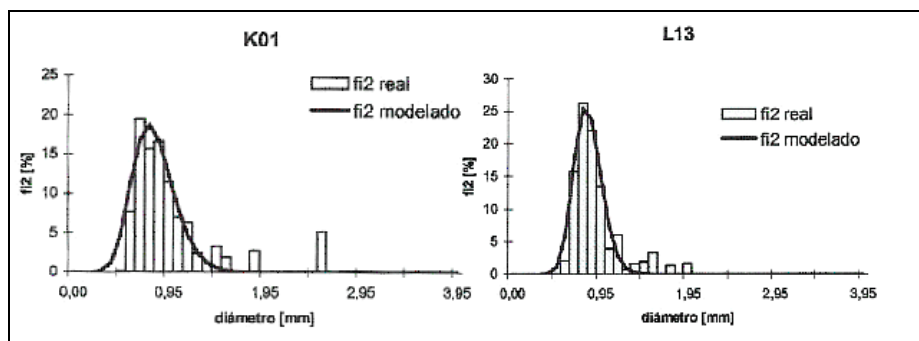


Figura N° 17: Distribución de tamaño de burbujas para impeller Outokumpu y Labtech [27].

## 2.5.4 Espumantes

Aldrich y Feng [28] realizaron pruebas con diferentes espumantes para ver como afectaban la distribución de tamaño de burbujas en la pulpa y en la espuma, en la Figura N° 18 se observan los resultados obtenidos para la pulpa.

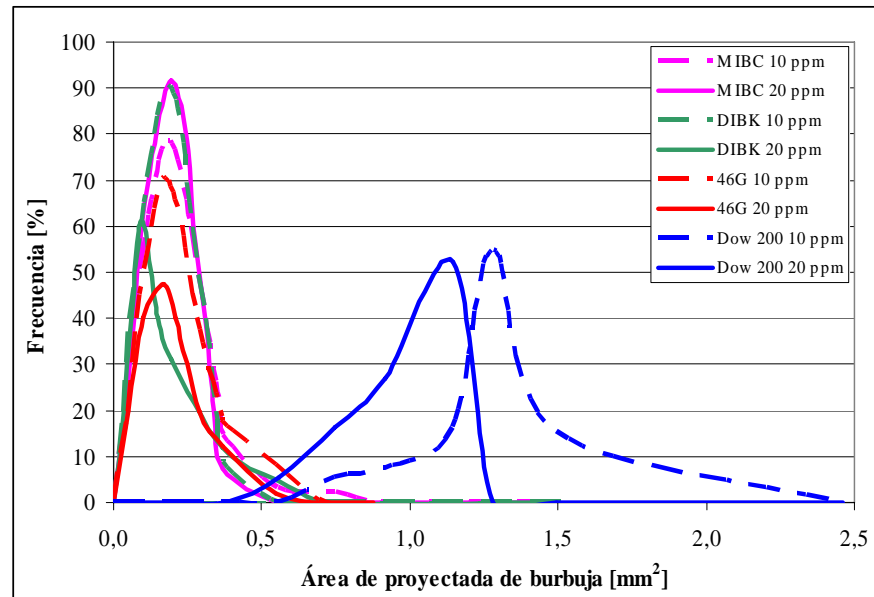


Figura N° 18: Distribución de tamaño de burbujas para diferentes espumantes [27].

Reportes posteriores de Cho [29], Laskowski [30] y Grau [31] indican la existencia de una concentración crítica de coalescencia (CCC) para los espumantes. Esta concentración representa un valor máximo para la dosis de espumante, pues se postula que a concentraciones mayores que la CCC no existe coalescencia de burbujas. En otras palabras, aumentar la concentración de espumante a un valor por sobre la CCC no tendría influencia en el tamaño de las burbujas y este estaría dado únicamente por las condiciones de formación de la burbuja.

Se señalan valores de CCC para 2 de los espumantes utilizados por Aldrich y Feng [28]. Si bien existen diferencias entre los tres artículos, se entrega una concentración de alrededor de 18 ppm (los diferentes valores entregados fluctúan alrededor de esa dosis) para el espumante Dowfroth-200. Para el espumante MIBC se entrega una CCC de 11,2 ppm.

### 2.5.5 Otras variables operacionales

O'Connor et al. [32] señalan que el tamaño de una burbuja en la pulpa está influenciado principalmente por:

- El tamaño de la abertura por donde emerge.
- La tensión superficial de la interfase formada con la pulpa cuando emerge.
- La velocidad a la que emerge y la presión del gas.
- La turbulencia de la pulpa que la rodea.

Los autores estudian la influencia de parámetros físicos y químicos en el tamaño de burbuja en sistemas bifásicos y trifásicos.

A continuación se citan algunos de los resultados obtenidos por los autores para sistemas trifásicos:

- Tamaño medio de burbujas aumenta con el flujo de aire y la distribución es más ancha.
- Tamaño medio de burbujas aumenta con el tamaño de las partículas de mineral.
- Tamaño medio de burbujas aumenta cuando aumenta la densidad de la pulpa, en este caso además, la distribución es más ancha a medida que aumenta la densidad. Explican que se puede deber a que a medida que la viscosidad aumenta, el film líquido necesario para la formación de la burbuja se forma más lento, atrapando más aire en cada burbuja y como consecuencia, se obtienen burbujas más grandes.
- Tamaño medio de burbujas disminuye cuando aumenta la temperatura y la distribución es más angosta. Esto es consistente con el resultado anterior, dado que a medida que aumenta la temperatura, disminuye la viscosidad.
- Tamaño medio de burbujas aumenta con el pH.

## 2.6 MEDICIÓN DE TAMAÑO DE BURBUJAS

### 2.6.1 Universidad de McGill

Chen et al. [33] presentan en el año 2000 una técnica de medición de tamaño de burbujas. Las burbujas ascendentes se colectan en un tubo vertical lleno con agua, las burbujas son llevadas a una cámara de visualización plana ubicada en la parte superior. En esta cámara es posible tomar fotografías o videos de las burbujas para un análisis de imágenes fuera de línea. En la cámara de visualización hay un alambre de dimensiones conocidas que se utiliza como referencia (ver Figura N° 19).

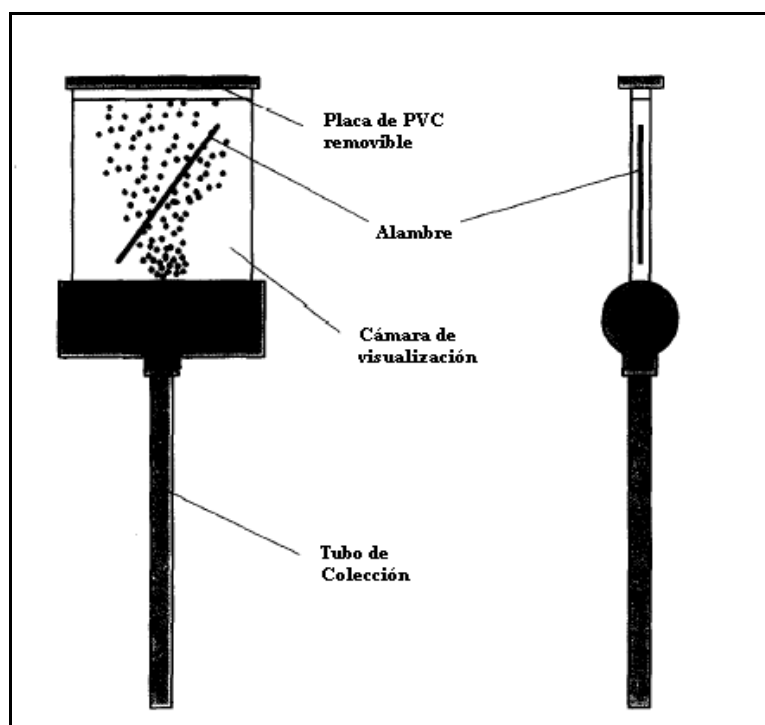


Figura N° 19: Muestreador de burbujas [33].

Gómez et al. [34] presentan un medidor de burbujas basado en la técnica propuesta por Chen et al. con algunas modificaciones. Utilizan una cámara de visualización inclinada en  $15^\circ$ , donde las burbujas se distribuyen en una monocapa a medida que ascienden. Los autores señalan que esta modificación elimina el efecto de traslape de burbujas y entrega un plano de enfoque definido (ver Figura N° 20).

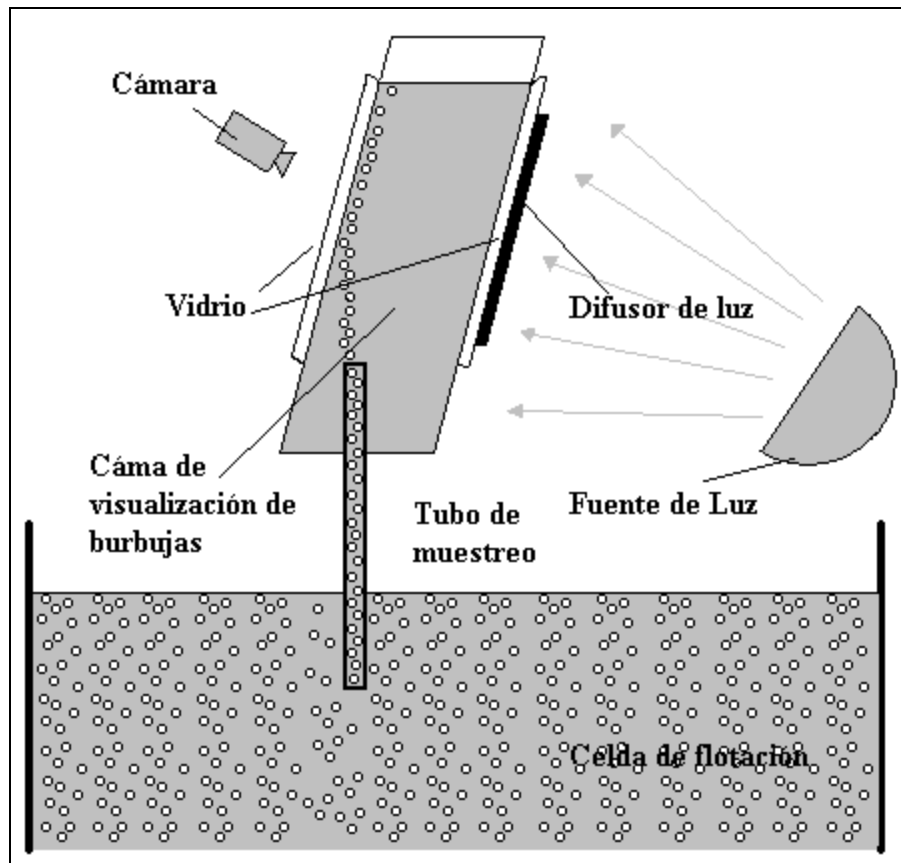


Figura N° 20: Visualizador de burbujas inclinado [34].

Una versión de la cámara de visualización propuesta por Chen et al. [33] se utilizó en el trabajo de Kracht [27] en el que se obtuvieron distribuciones de tamaño de burbujas coherentes con lo esperado.

## 2.6.2 Universidad de Cape Town

Grau et. al. [26] describen un método de medición de burbujas desarrollado en la Universidad de Cape Town (UCT). El equipo cuenta con un tubo de ascenso y una reserva de agua, donde se ubica un tubo capilar. Una fracción de las burbujas que llegan a la reserva de agua es succionada por el tubo capilar, al interior de este tubo se mide el largo y la velocidad de la burbuja por medio de 2 detectores ópticos. Se mide el volumen total de gas capturado por el capilar, con lo que es posible registrar la distribución de tamaño de burbujas a través de la longitud de los pulsos y las velocidades.

Señalan que las burbujas grandes se rompen al entrar al tubo capilar, con lo que se favorece la aparición de burbujas pequeñas en la distribución de tamaños medida por el UCT. Heiskanen [23], dice que el equipo de UCT puede medir burbujas de hasta 5 mm como máximo.

### 2.6.3 Universidad Tecnológica de Helsinki

Grau y Heiskanen [22, 26]. diseñan un equipo basado en la propuesta de Chen et al. [33]. En este caso se trata de un sistema bifásico. En la Figura N° 21 se observan los componentes principales del equipo y su ubicación. La última versión mantiene un nivel constante de líquido en la cámara de visualización. Para esto se incorporó una bomba peristáltica extra que se utiliza para remover el exceso de gas en la cámara de visualización. Se utilizó un LED como fuente de iluminación de fondo (“LED backlight”), que produce un fondo blanco y uniforme. Este sistema de iluminación no aumenta significativamente la temperatura del agua en la cámara. Caracteriza de 6.000 a 10.000 burbujas. Los autores sugieren que el muestreador incluya una etapa de limpieza, para evitar la acumulación de partículas acarreadas por las burbujas a la cámara de visualización y lograr un mayor tiempo de muestreo.

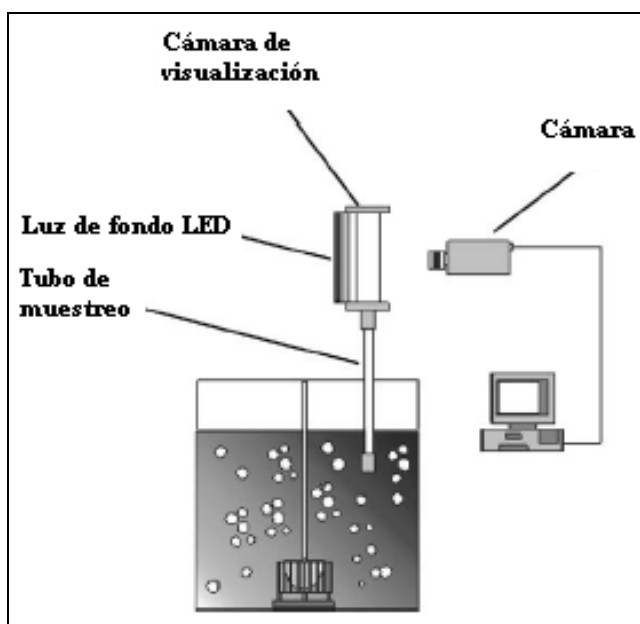


Figura N° 21: Equipo de medición de tamaño de burbujas HUT [22, 26].

El muestreador de burbujas se llena con agua que contiene la misma concentración de espumante que el líquido en la celda, para reducir problemas de coalescencia al interior del equipo. En este tipo de técnicas, donde se mide el tamaño de burbujas por medio de fotografías el resultado puede entregar un mayor número de burbujas pequeñas, ya que estas tienen una menor velocidad de ascenso.



## 2.7 DISTRIBUCIÓN DE TAMAÑO DE BURBUJAS

Gómez et al. [34] presentan distribuciones de tamaño de burbujas construidas a partir del número de burbujas perteneciente a cada clase y utilizan los diámetros estadísticos  $d_{32}$  y  $d_{10}$  para representar el tamaño de burbuja. Sin embargo, los mismos autores señalan que, representar la distribución de tamaño de burbujas por un tamaño medio puede ocultar información. Por este motivo sugieren que un enfoque más adecuado sería calcular distribuciones de área, volumen o flujo de área superficial de burbujas en función del tamaño de burbuja.

Kracht [27] presenta un modelo para la distribución en superficie de burbujas. El modelo, derivado de la distribución estadística Gamma, representa la fracción retenida de burbujas en función del diámetro medio de la clase y utiliza tres parámetros. El ajuste del modelo a los datos es bastante bueno, sin embargo, no se encuentran relaciones entre los parámetros y las variables operacionales del proceso.

En publicaciones posteriores Kracht et al. [35] y Vallebuona et al. [36] prueban diferentes modelos de distribución de tamaños y se obtiene que una ecuación empírica, utilizada para representar curvas de partición en la separación de medios densos, entrega buenas correlaciones para la distribución en superficie de tamaño de burbujas. La ecuación es la siguiente:

$$F_{u2}(d) = 100 \cdot e^{\left( -0,693 \left( \frac{d}{d_{50}} \right)^{-\lambda} \right)} \quad (20)$$

Donde:

- $F_{u2}(d)$  : % acumulado en superficie bajo el tamaño  $d$ .
- $d_{50}$  : tamaño bajo el cual se encuentra el 50% de la superficie de las burbujas.
- $\lambda$  : parámetro de ajuste.

El parámetro  $\lambda$  representa la forma de la distribución de tamaño de burbujas, mientras más alto el valor de  $\lambda$ , más angosta es la distribución. Sin embargo se desconoce su significado físico.

En conjunto con lo anterior Rodríguez [37] modela los parámetros  $d_{50}$  y  $\lambda$  en función del holdup de gas  $\varepsilon_g$  y las variables operacionales  $J_g$  y  $N_s$ , encontrando lo siguiente:

$$\lambda = A_1 \cdot N_s^3 + A_2 \cdot \left( \frac{J_g}{\varepsilon_g} \right) + A_3 \quad (21)$$

$$d_{50} = B_1 \cdot N_s + B_2 \cdot N_s^3 + B_3 \cdot J_g^3 + B_4 \quad (22)$$

Donde:

- $A_i$  y  $B_i$  : Constantes de ambos modelos.
- $N_s$  : Velocidad de agitación periférica del impeler
- $J_g$  : Velocidad superficial del gas.
- $\varepsilon_g$  : Holdup del gas.

El modelo para  $\lambda$  predice que aumentos en la velocidad de agitación provocan un aumento en el parámetro, lo que se traduce en una distribución más concentrada entorno a la media. Indica también que aumentos en la velocidad superficial del gas conllevan una disminución en el valor de  $\lambda$ , es decir, una distribución más ancha.

El modelo para  $d_{50}$  muestra que a medida que aumenta el flujo de aire, aumenta el  $d_{50}$  de la distribución. Señala también que dependiendo del rango en que se opere, un aumento en la velocidad de agitación puede contribuir a un aumento o una disminución del  $d_{50}$ .

## 3 TRABAJO EXPERIMENTAL

### 3.1 CARACTERIZACIÓN DEL MINERAL

En las pruebas experimentales se utiliza muestras de mineral de cobre proveniente de la División Andina de Codelco-Chile.

La muestra es tomada de la alimentación a molienda convencional, 100% bajo  $\frac{1}{2}$ ", operación que antecede al circuito de flotación primaria. La muestra es secada en el laboratorio y se reduce su tamaño a fin de obtener una granulometría de 100% bajo 6#. Posteriormente se realiza un protocolo de muestreo para separar el mineral en submuestras de 2 [kg] de peso.

Para caracterizar el mineral se realiza los siguientes análisis:

- Análisis químico
- Análisis microscópico
- Densidad por picnometría
- Granulometría descarga molienda
- Cinética de flotación en condiciones estándares

#### 3.1.1 Análisis químico

El análisis químico entrega como resultado una ley media de 1,17% de cobre total para el mineral sulfurado.

#### 3.1.2 Análisis microscópico

Se observan por microscopía óptica especies sulfuradas de cobre, dentro de las cuales se puede distinguir: calcopirita, bornita y calcosina, siendo la calcopirita el mineral de cobre predominante en la muestra.

Se encuentra además presencia de molibdenita, blenda, galena y rutilo.

La ganga está constituida principalmente por silicatos y ganga metálica de pirita, magnetita y hematina.

### 3.1.3 Densidad

La densidad del mineral se realiza por picnometría, correspondiendo al promedio de seis pruebas con resultado de 2,80 [g/cm<sup>3</sup>], ver Anexo A.

### 3.1.4 Granulometría descarga molienda

La molienda se realiza en un molino de barras Denver a una concentración de sólidos en peso de 78% y una carga de barras de acero de 22 [kg] durante 16 minutos.

Se realiza un análisis granulométrico al producto de la molienda cuyos resultados se presentan en la Tabla N° 3.

Tabla N° 3: Granulometría descarga molienda

Tamaño		Fu
Malla	um	%
40	425	99,70
50	300	96,79
70	212	89,05
100	150	77,94
140	106	66,12
200	75	57,54
270	53	50,13
325	45	46,13
400	38	44,09
-400	-	-
P80	um	161

Las condiciones de molienda fueron definidas para generar una granulometría que fuera representativa del producto de molienda típico de una planta industrial.

### 3.1.5 Cinética de flotación

Se realizó una prueba de flotación cuyos resultados aparecen en la Tabla N° 4. Además estos resultados fueron ajustados ocupando los modelos de García-Zúñiga y Klimpel. Los resultados se pueden ver en la Figura N° 22.

Las condiciones en que se efectuó la prueba de cinética son:

- Agitación : 430 rpm.
- Aire : 25,3 [l/m] en sistema estándar de presión y temperatura.
- Espumante : MIBC en 33,95 [g/t].
- Colector : Aero 3894 en 41,3 [g/t].
- pH en la celda : 10,5.
- Porcentaje de sólidos : 31,4 %.
- Acondicionamiento : 30 minutos.
- Tiempo de flotación : 16 minutos.
- Tiempo entre paleteo : 15 segundos.

Los modelos están definidos por:

**García-Zúñiga:**

$$R(t) = R_{\infty} \cdot (1 - e^{-K_c \cdot t}) \quad (23)$$

**Klimpel:**

$$R(t) = R_{\infty} \left[ 1 - \left( \frac{1}{K_c \cdot t} \right) \cdot (1 - e^{-K_c \cdot t}) \right] \quad (24)$$

Donde:

- $R(t)$  : Corresponde a la recuperación modelada al tiempo  $t$ , %.
- $R_{\infty}$  : Recuperación a tiempo infinito, %.
- $K_c$  : Constante cinética de flotación,  $\text{min}^{-1}$ .
- $t$  : Tiempo de flotación, min.

Tabla N° 4: Caracterización de la cinética de flotación

Intervalo	Tiempo	ley	Rec	Modelo Garcia-Zuñiga	Modelo Klimpel
min	min	%	%	%	%
0 - 1	1	13,90	69,1	67,0	69,0
1 - 2	2	9,70	79,3	83,1	79,1
2 - 4	4	4,08	83,6	87,9	84,3
4 - 8	8	1,83	86,2	88,2	86,9
8 - 16	16	0,97	88,2	88,2	88,2
Relave	-	0,17			

$r^2$	0,93	1,00
-------	------	------

$R^\infty =$	0,88	0,90
$K_c =$	1,43	4,30

Como se puede apreciar, es el modelo de Klimpel aquel que mejor representa el comportamiento cinético del mineral en su flotación primaria.

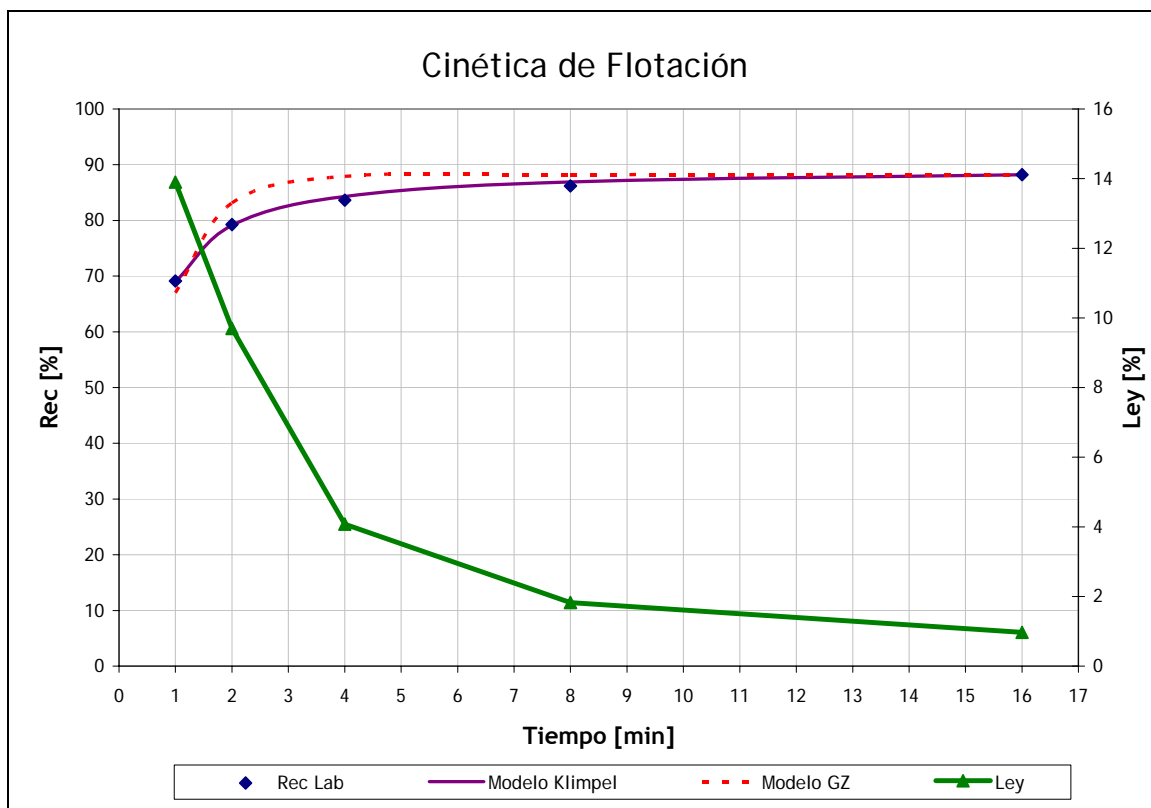


Figura N° 22: Caracterización de la cinética de flotación

## 3.2 EQUIPO EXPERIMENTAL

### 3.2.1 Máquina de flotación

Para el trabajo se utiliza una máquina de flotación de laboratorio marca “Labtech-ESSA” agitada mecánicamente y con inyección forzada de aire (ver Figura N° 23). La celda es de acrílico con paredes y fondo plano, la que cuenta con difusores radiales en su base para proporcionar un mejor mezclamiento.



Figura N° 23: Máquina de flotación Labtech-ESSA.

La máquina está dotada de un rotámetro (Dwyer) graduado de 5 a 25 l/min, un manómetro (Festo) para medir la presión de aire, graduado de 0 a 36 psi y con un sensor digital para medir la velocidad de agitación con una precisión, informada por el fabricante de +/- 2%. La velocidad máxima de agitación es de 1200 rpm.

La máquina se puede utilizar con celdas de diferente tamaño, por lo que cuenta con una serie de impellers adecuados para cada tamaño de celda. En este trabajo se utiliza únicamente la celda de mayor capacidad, de 5 litros de volumen útil. El área de la celda, medida en la región interfase pulpa-espuma, corresponde a 397 cm<sup>2</sup>.

El impeler, ver Figura N° 24, tiene un diámetro de 10,7 cm y un alto de 2,7 cm, con lo que se obtiene una relación de aspecto (diámetro/altura) de 3.96.



Figura N° 24: Impeller Labtech-ESSA.

### 3.2.2 Cámara de visualización de burbujas

Para la determinación del tamaño de las burbujas se construyó una cámara de visualización en base a antecedentes recopilados en la literatura [33, 34]. El visualizador permite que las burbujas asciendan hasta una zona de agua clara donde es posible filmarlas en video para un posterior análisis de las imágenes. La cámara de visualización tiene en su interior agua con una concentración de espumante, expresada en g/l, igual a la que existe dentro de la celda de flotación.

En la Figura N° 25 se observa un esquema del visualizador, donde se señalan los componentes más importantes.



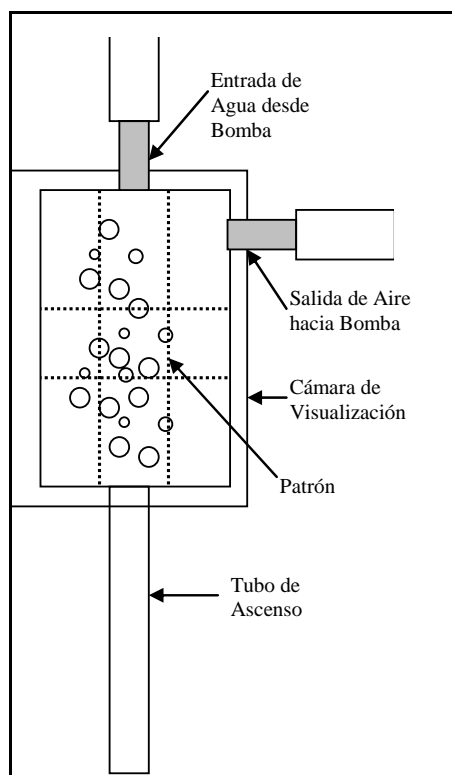


Figura N° 25: Visualizador de burbujas.

Las burbujas ingresan a la cámara de visualización subiendo por el tubo de ascenso desde la celda de flotación. Este tubo es construido a partir de una pipeta de 10 ml, su largo es de 17,5 cm y su diámetro interno es 8 mm.

La cámara de visualización se encuentra conectada a una bomba peristáltica a través de 2 mangueras, ver Figura N° 26. La manguera ubicada en la parte superior se utiliza para llenar el visualizador con la mezcla de agua con espumante, mientras que la manguera ubicada en la parte lateral permite extraer el aire acumulado después del ingreso de las burbujas. Esto último se hace para que no disminuya el nivel de agua en el visualizador.

La cámara de visualización está construida de vidrio, con paredes planas para evitar distorsiones y una inclinación de 75 grados con respecto a la horizontal, ver Figura N° 26. Esta tiene 5,2 cm de ancho, 7,2 cm de alto y 3,5 cm de profundidad.

El patrón es un cuadrado de 15 mm que se encuentra tallado en el vidrio y sirve de referencia para determinar el tamaño de cada burbuja en la cámara de visualización.

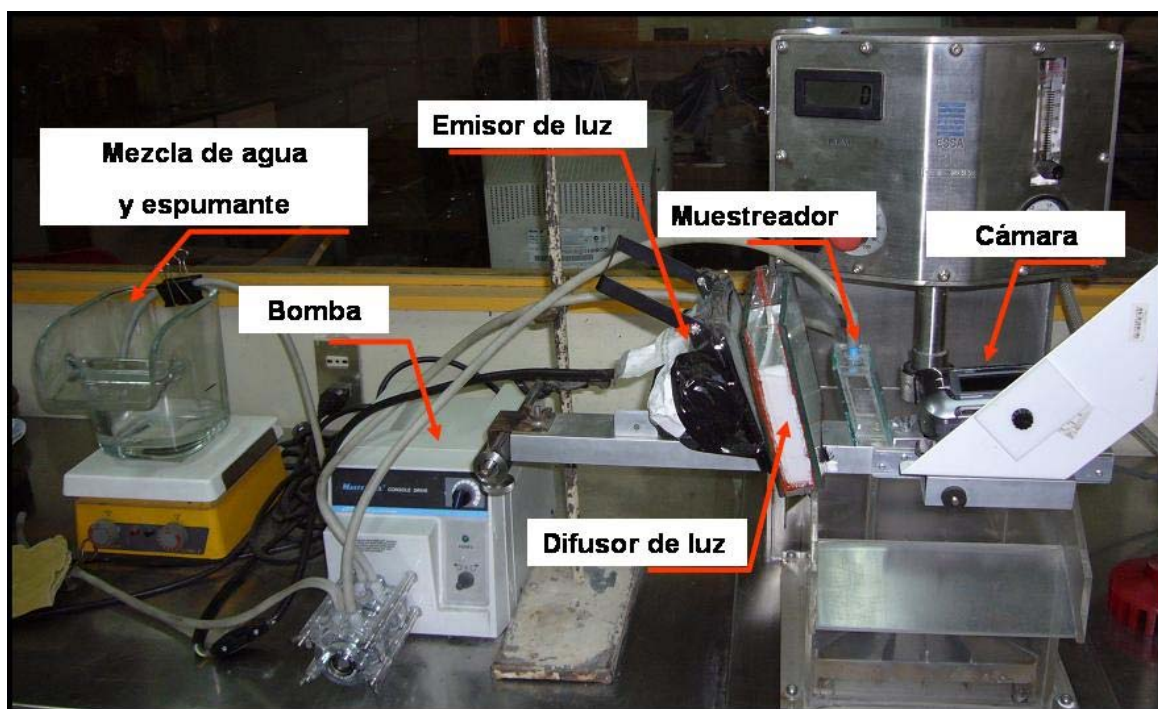


Figura N° 26: Instalación de equipos para muestrear burbujas.

### 3.2.3 Otros equipos auxiliares

Además de los equipos antes mencionados, se utilizaron los siguientes equipos auxiliares para la realización de los experimentos.

- Molino de barras Denver batch, tipo rodillo de 12 ½" de largo y 8 ½" de diámetro, con 22 [kg] de barras.
- Medidor de pH CORNING pH-meter 445, con electrodo CORNING cat N° 476436.
- Balanzas de precisión SARTORIUS, modelos: BL-1500-S, BL-6100, 2842.
- Compresor de Aire JOINVILLE, modelo Schultz, tipo CRPM-757, con capacidad para 230 psi.
- Cortador rotatorio Labtech Essa, modelo RSD, capacidad de 20 litros y frecuencia de vibración variable.
- Filtro de pulpas Denver, modelo de bandeja, tipo Vacuoasistido, de capacidad de 3400 cm<sup>3</sup> y bomba de vacío.
- Estufa Heraeus, modelo TU-1, tipo R, de capacidad 4,3 m<sup>3</sup> a 100 °C.

### 3.3 CALIBRACIÓN DE INSTRUMENTOS

Para asegurar la confiabilidad de los resultados experimentales se procede a calibrar los equipos de laboratorio de acuerdo a los protocolos que a continuación se describen.

#### 3.3.1 Rotámetro

El rotámetro, componente de la celda de flotación que permite regular el caudal de aire, se calibra por medio del método de la probeta invertida.

El método de calibración consiste en medir el tiempo necesario para desplazar un volumen conocido de agua desde una probeta invertida. A través de este procedimiento se obtiene una curva que relaciona el flujo nominal con el real, ver Tabla N° 5 y Figura N° 27.

Tabla N° 5: Calibración rotámetro

Q nominal	Volumen desplazado	Tiempo	Q real
l/min	cm <sup>3</sup>	s	l/min
5	680	6,85	6,0
5	640	6,80	5,6
10	780	4,41	10,6
10	825	4,55	10,9
15	1.060	3,80	16,7
15	820	2,94	16,7
20	1.160	3,30	21,1
20	835	2,38	21,1
24	1.220	2,81	26,0
24	1.240	2,90	25,7

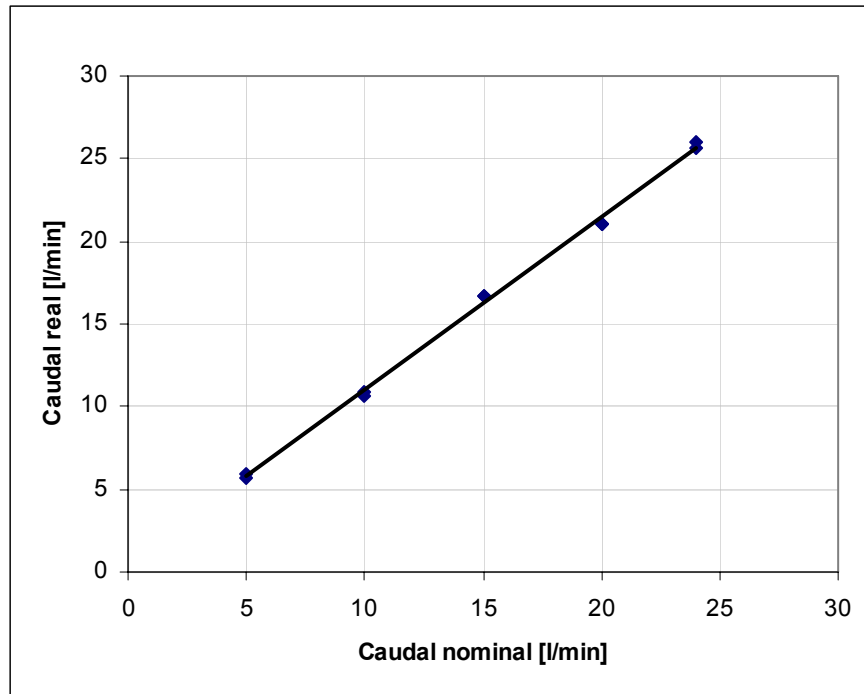


Figura N° 27: Calibración rotámetro ( $r^2 = 0,998$ )

El cálculo del caudal de aire real esta dado por la siguiente ecuación:

$$Q_{\text{real}} = 1,05 \cdot Q_{\text{nominal}} + 0,50 \quad (25)$$

Para expresar el flujo real en litros por minuto a condiciones estándar de presión y temperatura se ocupa la siguiente expresión:

$$Q_{\text{std}} \left[ \frac{\text{l}}{\text{min}} \right] = \frac{Q_{\text{real}} \left[ \frac{\text{l}}{\text{min}} \right] \cdot P[\text{psi}] \cdot 273,15}{14,697[\text{psi}] \cdot T[\text{K}]} \quad (26)$$

Donde:

- $Q_{\text{std}}$  : Flujo de aire [l/min] a condiciones estándar de presión y temperatura.
- $P$  : Presión de admisión de aire a la celda [psi].
- $T$  : Temperatura ambiente [K].
- $Q_{\text{real}}$  : Flujo real de aire [l/min] incorporado a la celda a la presión  $P$  y temperatura  $T$ .

En la Tabla N° 6 se presenta los valores de los flujos de aire nominal, real y estandar y la velocidad superficial del gas ( $J_g$ ), los cuales fueron calculados a partir de los valores de caudal estándar.

Tabla N° 6: Relación caudales y  $J_g$

Q nominal l/min	Q real l/min	Q estándar l/min	$J_g$ cm/s
5	5,8	7,0	0,30
10	11,0	14,1	0,59
15	16,3	21,1	0,89
20	21,5	26,9	1,13
24	25,7	32,3	1,36

Para obtener los valores de velocidad superficial de gas, estos fueron calculados a partir de los valores de caudal estándar.

### 3.3.2 Medidor de pH

Se calibra a diario de acuerdo al procedimiento estándar para este tipo de instrumentos.

### 3.3.3 Jeringa de reactivos

Las concentraciones de reactivos son alcanzadas con la composición de un cierto número de gotas. Es así como se debe calibrar una jeringa para cada reactivo ocupado, resultado que se muestra en la Tabla N° 7 a continuación.

Tabla N° 7: Calibración de peso por gota de reactivo

N° gotas n°	MIBC g	aero 3894 g	Concentración MIBC g/t	Concentración aero 3894 g/t
1	0,008	0,009	4,85	5,90
2	0,020	0,021	9,70	11,80
3	0,030	0,033	14,55	17,70
4	0,040	0,047	19,40	23,60
5	0,046	0,059	24,25	29,50
6	0,060	0,069	29,10	35,40
7	0,064	0,085	33,95	41,30
8	0,079	0,095	38,80	47,20

### 3.4 MODELO DE DISTRIBUCIÓN DE TAMAÑO DE BURBUJAS

Para generar distribuciones de tamaño de burbujas, se ocupará el modelo definido por Kracht et al. [35] y Vallebuona et al. [36], el cual relaciona la fracción acumulada en superficie bajo un diámetro de burbuja “d” ( $F_{u2}(d)$ ) y las variables empíricas  $d_{50}$  (diámetro bajo el cual se encuentra el 50% de la superficie de burbujas) y  $\lambda$  (parámetro de ajuste del modelo).

$$F_{u2}(d) = 100 \cdot e^{-0,693 \cdot \left(\frac{d}{d_{50}}\right)^{-\lambda}} \quad (27)$$

En conjunto con lo anterior se utiliza los modelos establecidos por Rodríguez [37] que relacionan los parámetros  $d_{50}$  y  $\lambda$  en función del holdup de gas  $\varepsilon_g$  y las variables operacionales  $J_g$  y  $N_s$ .

$$\lambda = A_1 \cdot N_s^3 + A_2 \cdot \left(\frac{J_g}{\varepsilon_g}\right) + A_3 \quad (28)$$

$$d_{50} = B_1 \cdot N_s + B_2 \cdot N_s^3 + B_3 \cdot J_g^3 + B_4 \quad (29)$$

Los modelos planteados para  $d_{50}$  y  $\lambda$ , están estudiados bajo las siguientes condiciones:

- Molienda realizada en molino de barras Denver batch, tipo rodillo de 12 ½” de largo y 8 ½” de diámetro, con 22 [kg] de barras.
- Máquina de flotación de laboratorio marca “Labtech-ESSA” agitada mecánicamente y con inyección forzada de aire.
- Impeler de 10,7 cm de diámetro y 2,7 cm de alto.
- Cámara de visualización de burbujas descrita en el punto 3.2.2.
- Espumante AEROFROTH® 70 (MIBC) con dosis de 33,07 [g/t].
- Rango de estudio para  $N_s$  entre 2,24 – 2,58 [m/s].
- Rango de estudio para  $J_g$  entre 0,4 – 1,24 [cm/s].

Para la ecuación 28 se decide buscar un modelo que correlacione el holdup del gas en función de variables operacionales. Esto se debe principalmente a que los métodos con los que se cuenta para realizar su medición no son del todo precisos.

### 3.4.1 Modelación del Holdup de gas

En esta parte se busca obtener un modelo para el holdup de gas ( $\epsilon_g$ ) en función de las siguientes variables operacionales de flotación:  $J_g$  (velocidad superficial del gas),  $N_s$  (velocidad de agitación periférica del impeler) y dosis del espumante.

El conjunto de pruebas utilizadas para realizar el modelo, corresponden a 14 experimentos en los cuales cambian los valores de las distintas variables operacionales ya definidas. Estas pruebas fueron realizadas por Rodríguez [36] durante el año 2006. Las condiciones en que fueron realizadas las pruebas se detallan a continuación:

- El mineral se muele durante 16 minutos en un molino de barras a un Cp de 78%. Durante la molienda se agrega un porcentaje de los reactivos, con el objetivo de aumentar su tiempo de acondicionamiento y reproducir las condiciones de la planta. Cada una de las pruebas experimentales se realiza con 2 [kg] de mineral.
- En la etapa de molienda se agrega el 50% de la dosis de colector requerida para la prueba y el 55% de la dosis de espumante. Se agregan también 4 g de cal a la molienda para incrementar el pH de la pulpa.
- El mineral molido se lleva a la celda de flotación, donde se agrega agua para alcanzar una concentración de sólidos en peso de 31,4%.
- Se fija las revoluciones del impeler y se ajusta el pH hasta llegar a 10,5 utilizando cal. Posteriormente se agrega el resto de los reactivos y se verifica nuevamente el pH.
- Se abre lentamente el paso del aire hasta alcanzar el valor requerido para la prueba.
- Con las condiciones estabilizadas se procede con la toma de video, empleando la metodología explicada anteriormente. Posteriormente se corta el paso de aire a la celda.

El holdup de gas se calcula a partir de la ecuación 19 mostrada en el Sub-Capítulo 2.3.4 en la sección de antecedentes. Esta relaciona la velocidad superficial del gas y el diámetro de Sauter con el holdup del gas  $\left( \epsilon_g = \frac{6 \cdot J_g}{5,59 \cdot d_{3,2}} \right)$ .

En la Tabla N° 8 se muestra un resumen de las condiciones y resultados de las pruebas realizadas por Rodríguez [37].

Tabla N° 8: Resumen pruebas para modelar el Holdup del gas.

Medición	Jg	Ns	Espumante	Dosis	$\epsilon_g$
	cm/s	m/s	-	g/t	%
1	0,72	2,24	MIBC	33,05	8,59
2	0,72	2,35	MIBC	33,05	9,24
3	0,72	2,58	MIBC	33,05	10,04
4	0,40	2,41	MIBC	33,05	5,35
5	1,05	2,41	MIBC	33,05	13,51
6	1,24	2,41	MIBC	33,05	15,11
7	0,72	2,41	MIBC	24,04	9,75
8	0,72	2,41	MIBC	30,05	9,96
9	0,72	2,41	MIBC	36,05	9,06
10	0,72	2,41	Dow 200	37,44	9,53
11	0,72	2,41	Dow 200	41,18	9,75
12	0,72	2,41	Dow 200	44,93	9,60
13	0,72	2,41	Dow 200	48,67	9,93
14	0,72	2,41	MIBC	33,05	9,83

Para la modelación del holdup se utiliza el método de regresión por pasos.

### Regresión por pasos

El propósito de este método es encontrar una estructura de un modelo lineal en los parámetros que prediga el comportamiento de la variable estudiada. El método consiste en ir seleccionando paso a paso las componentes que forman parte del modelo, a partir de variables candidatas a incorporarse a dicho modelo.

En la etapa de selección, el modelo que se propone se somete a pruebas de comportamiento en base a las cuales se decide la inclusión o no de la variable candidata a entrar al modelo final, así mismo el método permite la determinación del conjunto de coeficientes que mejor reproducen la variable modelada.

El detalle del algoritmo se presenta en el Anexo B.

### Variables candidatas

La calidad del modelo encontrado dependerá fundamentalmente de la acertada proposición y elección de las variables candidatas. Estas deben contener variables simples, como por ejemplo la velocidad superficial del gas o la velocidad de agitación periférica del impeler, y composiciones matemáticas más complejas de dichas variables simples, teniendo la precaución de representar siempre la fenomenología del proceso modelado.



En la elección de las variables candidatas para modelar el holdup, se propone una serie de variables operacionales y en base a éstas se componen estructuras matemáticas de diferentes tipos (potencias, multiplicaciones y razones). Las variables operacionales, en función de las cuales se modelará el holdup, son la velocidad superficial del gas ( $J_g$ ), la velocidad de agitación periférica del impeler ( $N_s$ ) y dosis del espumante ( $[MIBC]$  o  $[DOW]$ )<sup>2</sup>.

A continuación se presenta en la Tabla N° 9 las variables candidatas propuestas.

Tabla N° 9: Variables candidatas utilizadas para generar el modelo del holdup.

Variable	Estructura	Variable	Estructura	Variable	Estructura	Variable	Estructura
X1	$J_g$	X23	$1/[DOW]^2$	X45	$(N_s \cdot [MIBC])^3$	X67	$J_g / N_s$
X2	$J_g^2$	X24	$1/[DOW]^3$	X46	$1/(N_s \cdot [MIBC])$	X68	$J_g / [MIBC]$
X3	$J_g^3$	X25	$J_g \cdot N_s$	X47	$1/(N_s \cdot [MIBC])^2$	X69	$J_g / [DOW]$
X4	$1/J_g$	X26	$(J_g \cdot N_s)^2$	X48	$1/(N_s \cdot [MIBC])^3$	X70	$J_g / [MIBC]^2$
X5	$1/J_g^2$	X27	$(J_g \cdot N_s)^3$	X49	$N_s \cdot [DOW]$	X71	$J_g / [MIBC]^3$
X6	$1/J_g^3$	X28	$1/(J_g \cdot N_s)$	X50	$(N_s \cdot [DOW])^2$	X72	$N_s / J_g$
X7	$N_s$	X29	$1/(J_g \cdot N_s)^2$	X51	$(N_s \cdot [DOW])^3$	X73	$N_s / [MIBC]$
X8	$N_s^2$	X30	$1/(J_g \cdot N_s)^3$	X52	$1/(N_s \cdot [DOW])$	X74	$N_s / [DOW]$
X9	$N_s^3$	X31	$J_g \cdot [MIBC]$	X53	$1/(N_s \cdot [DOW])^2$	X75	$N_s / [MIBC]^3$
X10	$1/N_s$	X32	$(J_g \cdot [MIBC])^2$	X54	$1/(N_s \cdot [DOW])^3$	X76	$(J_g / N_s)^2$
X11	$1/N_s^2$	X33	$(J_g \cdot [MIBC])^3$	X55	$J_g \cdot N_s \cdot [MIBC]$	X77	$(J_g / N_s)^3$
X12	$1/N_s^3$	X34	$1/(J_g \cdot [MIBC])$	X56	$(J_g \cdot N_s \cdot [MIBC])^2$	X78	$(N_s / J_g)^2$
X13	$[MIBC]$	X35	$1/(J_g \cdot [MIBC])^2$	X57	$(J_g \cdot N_s \cdot [MIBC])^3$	X79	$(N_s / J_g)^3$
X14	$[MIBC]^2$	X36	$1/(J_g \cdot [MIBC])^3$	X58	$1/(J_g \cdot N_s \cdot [MIBC])$	X80	$(J_g \cdot N_s) / [MIBC]$
X15	$[MIBC]^3$	X37	$J_g \cdot [DOW]$	X59	$1/(J_g \cdot N_s \cdot [MIBC])^2$	X81	$(J_g \cdot [MIBC]) / N_s$
X16	$1/[MIBC]$	X38	$(J_g \cdot [DOW])^2$	X60	$1/(J_g \cdot N_s \cdot [MIBC])^3$	X82	$(N_s \cdot [MIBC]) / J_g$
X17	$1/[MIBC]^2$	X39	$(J_g \cdot [DOW])^3$	X61	$J_g \cdot N_s \cdot [DOW]$	X83	$J_g / (N_s \cdot [MIBC])$
X18	$1/[MIBC]^3$	X40	$1/(J_g \cdot [DOW])$	X62	$(J_g \cdot N_s \cdot [DOW])^2$	X84	$J_g / (N_s \cdot [MIBC])^2$
X19	$[DOW]$	X41	$1/(J_g \cdot [DOW])^2$	X63	$(J_g \cdot N_s \cdot [DOW])^3$	X85	$J_g / (N_s \cdot [MIBC])^3$
X20	$[DOW]^2$	X42	$1/(J_g \cdot [DOW])^3$	X64	$1/(J_g \cdot N_s \cdot [DOW])$	X86	$J_g / (N_s^2 \cdot [MIBC])^3$
X21	$[DOW]^3$	X43	$N_s \cdot [MIBC]$	X65	$1/(J_g \cdot N_s \cdot [DOW])^2$	X87	$J_g / (N_s^3 \cdot [MIBC])^2$
X22	$1/[DOW]$	X44	$(N_s \cdot [MIBC])^2$	X66	$1/(J_g \cdot N_s \cdot [DOW])^3$	-	-

<sup>2</sup> El estudio se realizó para dos tipos de espumantes, MIBC (Aerofroth® 70) y DOW-200.

### Modelo seleccionado

Una vez que se proponen las variables candidatas, se procede a aplicar el algoritmo de regresión por pasos, descrito en el Anexo B. Mediante este método se encuentra un modelo para el holdup según la siguiente estructura:

$$\varepsilon_g = A + B \cdot J_g \cdot N_s \quad (30)$$

En la Tabla N° 10 se muestran el valor de las constantes del modelo y el coeficiente de correlación del modelo. En la Figura N° 28 se muestra gráficamente los valores que predice el modelo versus los datos experimentales.

Tabla N° 10: Coeficientes y  $r^2$  para modelo de holdup del gas.

<b>A</b>	1,139
<b>B</b>	4,817
<b><math>r^2</math></b>	0,979

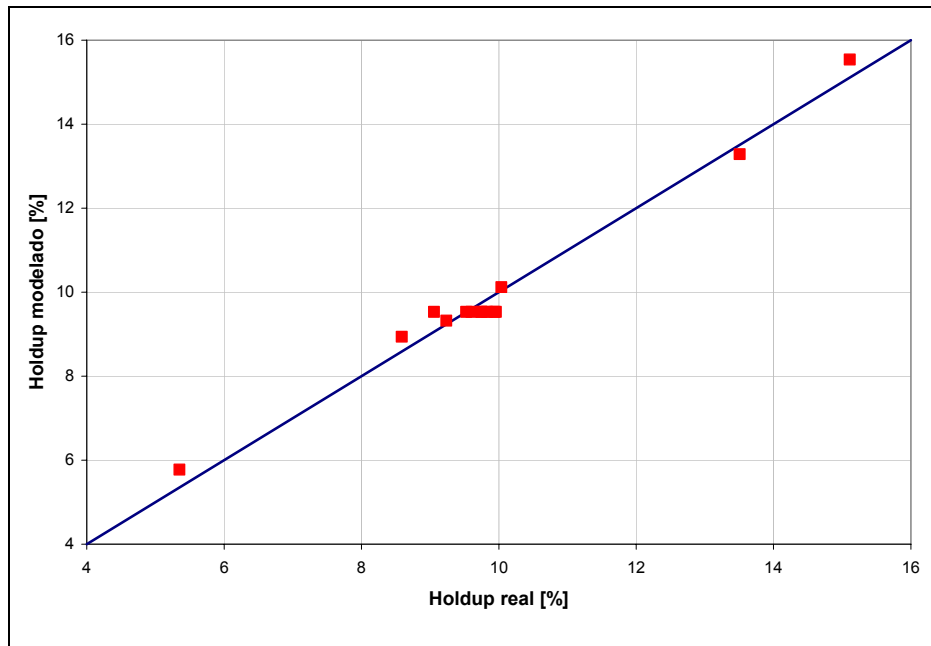


Figura N° 28: Comparación de valores reales y modelados para el holdup de gas.

Como se puede ver, el tener una  $r^2$  de 0,979 nos dice que el modelo correlaciona bastante bien con los datos reales. Pero no basta con esto si no que además el modelo debe ser robusto desde el punto de vista de predicción de valores. Es así como en la Figura N° 28 se aprecia que los valores reales son muy parecidos a los que el modelo pronostica validando la estructura y constantes para ser utilizadas en la predicción del holdup de gas ( $\varepsilon_g$ ).

### 3.4.2 Modelo de distribución de tamaño de burbujas modificado

Con el modelo para el holdup de gas obtenido en el punto anterior, se modifica la ecuación 28 y se reformula como sigue:

$$\lambda = A_1 \cdot N_s^3 + A_2 \left( \frac{J_g}{1,139 + 4,817 \cdot J_g \cdot N_s} \right) + A_3 \quad (31)$$

Para ocupar los modelos planteados en las ecuaciones 29 y 31, se realizan nuevas pruebas de flotación en las mismas condiciones del caso base planteado por Rodríguez [37], y así se ajustan los coeficientes de los modelos:

- Velocidad periférica : 2,41 [m/s]
- Velocidad superficial del gas : 1,06 [cm/s] en sistema estándar de presión y temperatura.
- Espumante : MIBC en 33,95 [g/t].
- Colector : Aero 3894 en 41,3 [g/t].

En función de las pruebas descritas, y mediante el análisis de imágenes explicado en el Sub-capítulo 3.8, se procede a comparar las distribuciones de superficie de burbuja, tanto para la fracción acumulada ( $F_{u2}(d)$ ) como la fracción retenida ( $f_{i2}(d)$ ). Así se procede a estimar el valor de los coeficientes de ambos modelos minimizando la siguiente función objetivo:

$$\phi = \left( F_{u2 \text{ real}}(d) - F_{u2 \text{ obtenido}}(d) \right)^2 + \left( f_{i2 \text{ real}}(d) - f_{i2 \text{ obtenido}}(d) \right)^2 \quad (32)$$

Donde:

- $F_{u2 \text{ real}}(d)$  : Fracción en superficie acumulada bajo el diámetro de burbuja “ $d_i$ ” obtenida mediante mediciones [%].
- $f_{i2 \text{ real}}(d)$  : Fracción en superficie retenida para el diámetro de burbuja “ $d_i$ ” obtenida mediante mediciones [%].
- $F_{u2 \text{ obtenido}}(d)$  : Fracción en superficie acumulada bajo el diámetro de burbuja “ $d_i$ ” obtenida mediante modelos 27, 29 y 31 [%].
- $f_{i2 \text{ obtenido}}(d)$  : Fracción en superficie retenida para el diámetro de burbuja “ $d_i$ ” obtenida mediante modelos 27, 29 y 31 [%].

En la Tabla N° 11, se muestran los resultados en la calibración de las constantes para los modelos planteados.

Tabla N° 11: Resumen de resultados en la calibración de las constantes de los modelos

Datos Medidos															
Prueba	Datos estadísticos					Modelo $\lambda$				Modelo $d_{50}$					$r^2$
	n° datos	d32	d75	d50	d25	A1	A2	Cte 1	$\lambda$	B1	B2	B3	Cte	d50	
A0	1994	0,99	1,27	0,91	0,67	0,07	-7,16	2,38	2,77	-4,41	0,61	0,04	7,91	0,89	0,993
A2-01	2121	1,00	1,21	0,91	0,63	0,07	-7,20	2,33	2,71	-4,41	0,61	0,04	7,91	0,88	0,992
A2-02	1734	1,00	1,39	0,95	0,62	0,07	-7,21	2,31	2,69	-4,39	0,61	0,04	7,92	0,93	0,979
A2-03	2202	0,72	0,90	0,68	0,49	0,09	-7,19	2,31	3,02	-4,39	0,47	0,86	7,83	0,66	0,995
A2-04	2005	0,89	1,15	0,82	0,60	0,07	-7,19	2,32	2,70	-4,40	0,60	0,03	7,88	0,79	0,994
Promedio	1964	0,97	1,25	0,90	0,63	0,07	-7,19	2,34	2,72	-4,40	0,61	0,04	7,91	0,87	0,9894
error %	8,32	5,3	8,2	5,9	4,3	0,6	0,3	1,2	1,3	0,1	1,1	12,5	0,2	6,6	0,7

En función del análisis realizado se establece que los valores de las constantes para los modelos a utilizar son los presentados en la Tabla N° 12 a continuación:

Tabla N° 12: Constantes utilizadas en modelos de  $\lambda$  y  $d_{50}$

Modelo $\lambda$		Modelo $d_{50}$	
<b>A1</b>	0.07	<b>B1</b>	-4.40
<b>A2</b>	-7.19	<b>B2</b>	0.61
<b>Cte</b>	2.34	<b>B3</b>	0.04
		<b>Cte</b>	7.91

### 3.5 COMPOSICIÓN DE DISTRIBUCIONES DE TAMAÑO DE BURBUJAS

Para establecer la campaña experimental es necesario definir una serie de curvas de distribución de tamaño de burbujas (DTB) con las cuales se trabajará. Estas DTB deben ser distinguibles entre sí y deben mostrar un aumento en el ancho de la curva de DTB en superficie. Bajo este concepto se obtienen 5 DTB, las cuales se muestran a continuación en la Figura N° 29:

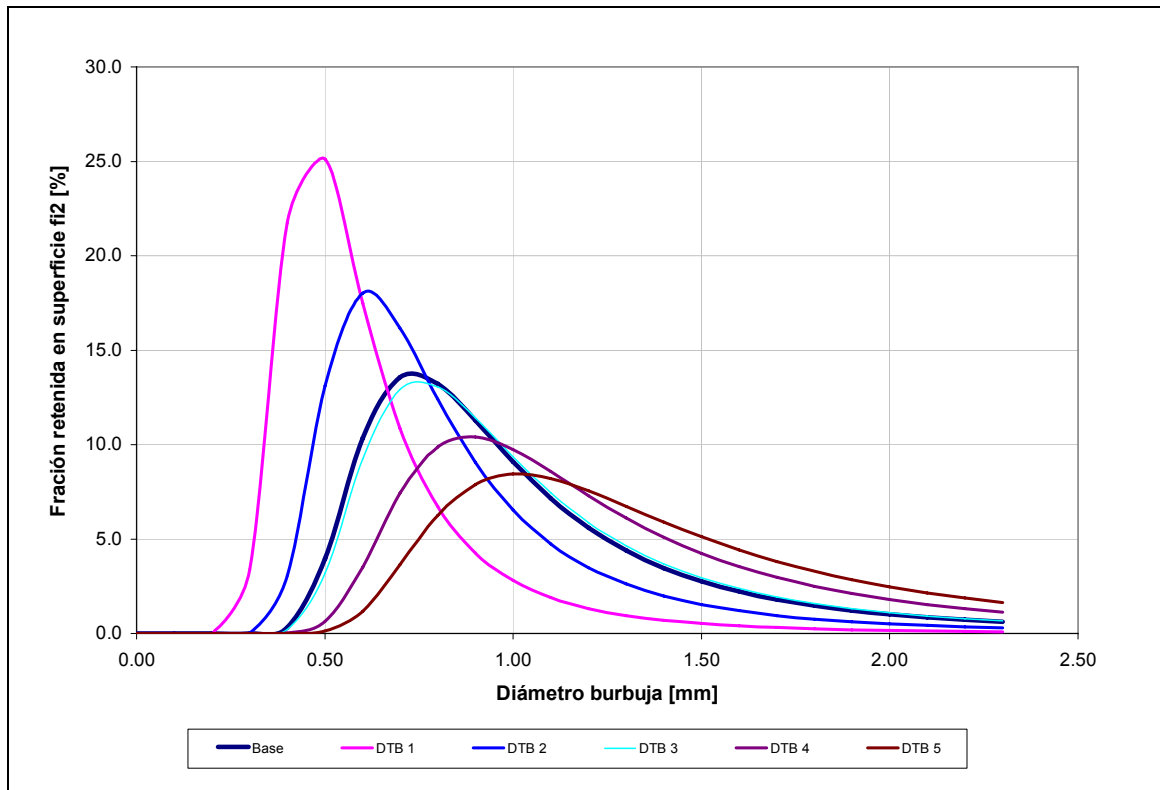


Figura N° 29: Curvas de distribución de tamaños (DTB), proyectadas a partir de los modelos establecidos

La metodología para definir el par ordenado  $J_g$  y  $N_s$  que genera las DTB se explica a continuación:

- Primero se define un rango, reproducible en laboratorio, para las variables operacionales  $J_g$  y  $N_s$ , dentro de los cuales se podrán mover estas variables para generar las distribuciones de tamaño de burbujas requeridas. Para esto se recurrió a pruebas ya realizadas por Kracht et al. [35] y Rodríguez [37].
- Se plantea un par  $\lambda$  y  $d_{50}$  objetivo para una DTB.

- Se busca la combinación  $J_g$  y  $N_s$  que genera el menor error de 
$$\left| \lambda_{objetivo} - \lambda_{real} \right| + \left| d_{50\,objetivo} - \lambda_{50\,real} \right|. \quad (33)$$

Los resultados obtenidos para cada DTB se muestran en Tabla N° 13:

Tabla N° 13: Resumen de resultados en la definición de las DTB<sup>3</sup>

	$\lambda$ obj	$\lambda$ real	$d_{50}$ obj	$d_{50}$ real	error	$N_s$	$J_g$
	-	-	mm	mm	-	m/s	cm/s
<b>DTB 1</b>	3.120	3.120	0.500	0.499	0.002	2.67	0.70
<b>DTB 2</b>	2.900	2.903	0.700	0.697	0.005	2.54	1.15
<b>DTB 3</b>	2.700	2.699	0.900	0.900	0.002	2.40	1.20
<b>DTB 4</b>	2.520	2.520	1.100	1.098	0.002	2.24	0.70
<b>DTB 5</b>	2.370	2.371	1.300	1.300	0.002	2.14	0.95

<sup>3</sup> El error mostrado en la Tabla N° 13 es calculado a partir de la ecuación 33

### 3.6 COMPOSICIÓN DE DISTRIBUCIONES DE TAMAÑO DE PARTÍCULAS

El objetivo principal de esta tesis, descrito en el Capítulo de Introducción, es estudiar el impacto de variaciones de la distribución de tamaño de burbujas en la recuperación de minerales de cobre asociados a tamaños históricamente difíciles de flotar, las partículas gruesas y finas.

Es así como resulta necesario generar distribuciones de tamaño del mineral que representen tales condiciones. Con esto se decide crear 3 distribuciones de tamaño de mineral (DTM), normal (1), fina (2) y gruesa (3). Los criterios ocupados para generar estas granulometrías se muestran a continuación.

- La DTM 1 representará la descarga natural del molino, que tiene las condiciones de operación establecidas con tal de entregar un producto similar al de una planta industrial,  $p_{80}$  del orden de 180  $\mu\text{m}$ .
- Las DTM 2 y 3, representarán las distribuciones de tamaño de mineral fina y gruesa respectivamente. Su generación vendrá dada por la composición de mineral de la descarga natural (DTM1) y mineral de fracciones tamizadas de la misma DTM con tal de emular lo que podría ser un corte de ciclón.
- Para la DTM 2, fina, se decide compositar en proporciones iguales, el mineral de granulometría natural (DTM 1) con mineral de la misma distribución granulométrica pero tamizado a un 100% bajo 400# (38  $\mu\text{m}$ ).
- Para la DTM 3, gruesa, se decide compositar en proporciones iguales, el mineral de granulometría natural (DTM 1) con mineral de la misma distribución granulométrica pero tamizado a un 100% sobre 100# (150  $\mu\text{m}$ ).

Es así como se obtiene los perfiles granulométricos que se muestran en la Tabla N° 14 y Figura N° 30, a continuación:

Tabla N° 14: Perfil granulométrico alimentaciones a flotación primaria

Tamaño		Pasante Acumulado ( $F_{u3}$ )		
Malla	um	DTM 1	DTM 2	DTM 3
		%		
40	425	99.7	99.9	98.8
50	300	96.8	98.4	89.2
70	212	89.0	94.5	65.7
100	150	77.9	89.0	39.9
140	106	66.1	83.1	32.9
200	75	57.5	78.8	28.4
270	53	50.1	75.1	24.6
325	45	46.1	73.1	22.3
400	38	44.1	72.0	21.4
-400	-	-	-	-
P <sub>80</sub>	um	161	83	265

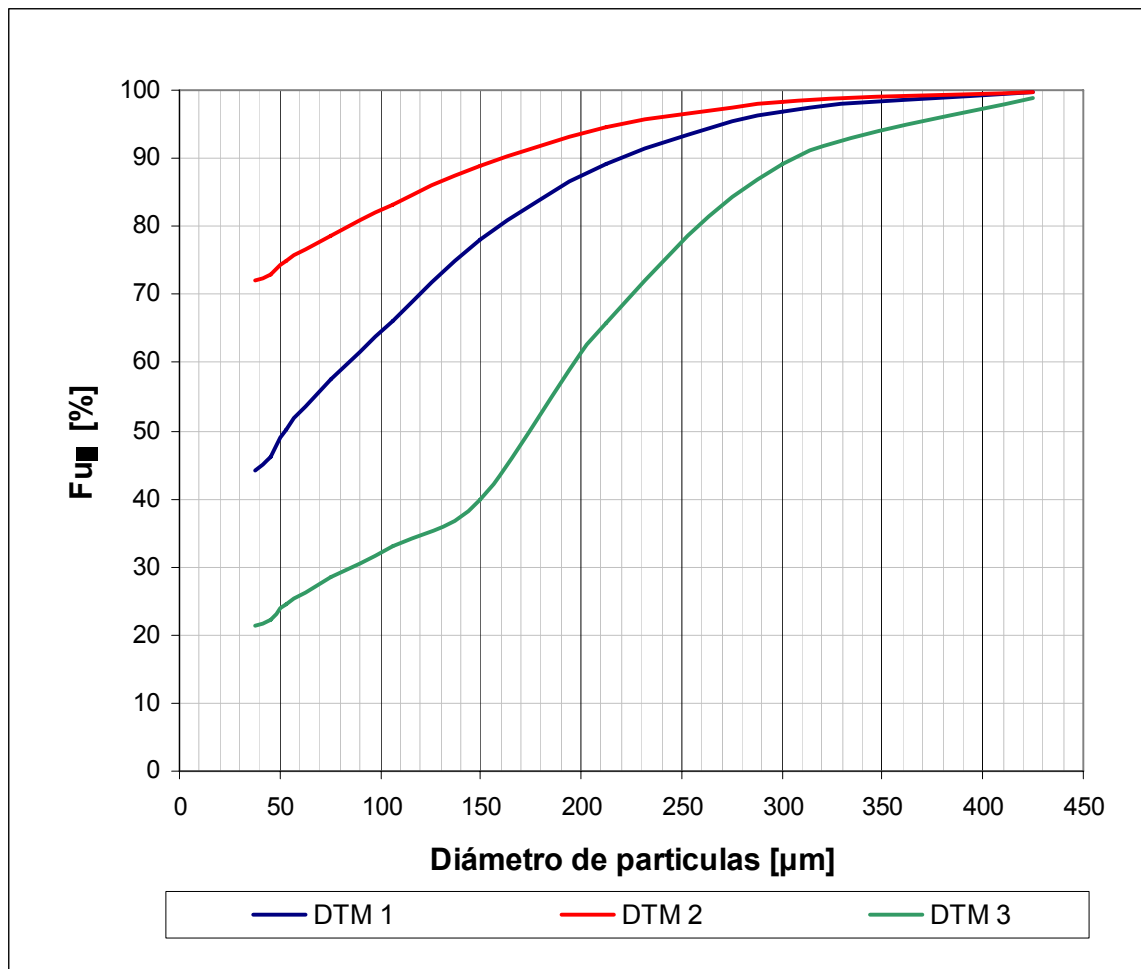


Figura N° 30: Perfil granulométrico alimentaciones a flotación primaria



### 3.7 CRITERIOS DE FLOTACIÓN

Las pruebas de flotación a realizar requieren, antes y después, una serie de pasos, de los cuales se muestra un resumen a continuación. El detalle del protocolo completo para realizar las pruebas experimentales se encuentra en el Anexo C del presente documento.

#### 3.7.1 Molienda

La molienda presenta los siguientes criterios:

- Se realiza con una muestra de 2 [kg] de mineral 100% -1/2".
- Se le incorpora una carga de barras de 22,02 [kg] distribuidas en barras de 1/2", 5/8", 3/4" y 1 1/8".
- No se adicionan reactivos<sup>4</sup>
- Se muele durante 16 minutos en un molino de barras con un Cp de 78%.
- Existe la necesidad de generar mineral fino, grueso y natural. Es por esto que a algunas moliendas se les filtra y seca (granulometría de descarga natural) y a otras además se les tamiza según los tamaños +100#, -100# +400#, y -400#.

#### 3.7.2 Preparación de paquetes para alimentación a flotación

El mineral de alimentación a flotación corresponde a 2 [kg] de material compositado dependiendo de la granulometría requerida en la prueba de flotación de la siguiente forma:

- Granulometría natural (DTM 1). Se forma por 2.000 gramos de la descarga natural sin tamizar.
- Granulometría fina (DTM 2). Se compone por 1.000 [g] de la granulometría natural con 1.000 [g] de la granulometría -400#.
- Granulometría gruesa (DTM 3). Se compone por 1.000 [g] de la granulometría natural con 1.000 [g] de la granulometría +100#.

---

<sup>4</sup> Debido a que será necesario secar y tamizar el producto de molienda, es que se decidió no adicionar reactivos ya que podrían impactar en la calidad del mineral de una manera no cuantificable.

### 3.7.3 Flotación

La flotación se realiza según los siguientes criterios:

- Celda : ESSA de 5 litros
- Cp : 31,4%
- pH : 10,5
- Reactivos
  - Espumante : MIBC en 33,95 [g/t]
  - Colector : Aero 3894 en 42,35 [g/t]
- Velocidad Impeller : Variable según campaña experimental
- Flujo de aire : Variable según campaña experimental
- Ciclo de paleteo : Cada 15 segundos
- Tiempo de flotación : 16 minutos

### 3.7.4 Preparación de muestras para análisis químico

Para conocer el efecto en las partículas finas y gruesas es necesario realizar los análisis químicos por rango de tamaño. Para esto, tanto los concentrados como los relaves se tamizan en los rangos de tamaños ya mencionados, T1, T2 y T3 (+100#, -100# + 400#, -400#, respectivamente)

### 3.8 DETERMINACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN DE TAMAÑO DE BURBUJAS

El procedimiento usado para obtener la información sobre la DTB se puede dividir en cuatro etapas:

- Captación del video.
- Digitalización y procesamiento del video.
- Análisis de imágenes.
- Determinación de la distribución de tamaño de burbujas

En el desarrollo de este Capítulo se explicará cada uno de los pasos que se realizan para el procesamiento de las imágenes. En el Anexo D del presente documento se incluye un estudio realizado para validar la estimación de la distribución de tamaño de burbujas a partir del procesamiento de imágenes, dentro del cual se encuentra el protocolo específico y detallado para esto.

#### 3.8.1 Captura del video

Para la captura de las imágenes se ocupa el sistema ejemplificado en la Figura N° 20 mostrada en el sub-capítulo 2.6.1. y la Figura N° 25 mostrada en el sub-capítulo 3.2.2 del presente documento.

Este sistema actualmente se encuentra implementado en el Laboratorio de Procesamiento de Minerales y contempla los siguientes pasos:

- En una celda de vidrio se prepara una mezcla de agua y espumante con una concentración igual a la concentración de espumante en la pulpa, expresada en gramos de espumante por litro de agua en la pulpa.
- El muestreador se sitúa entre la cámara y la lámpara, como se observa en la Figura N° 26, del sub-capítulo 3.2.2.
- Utilizando una bomba, el muestreador se llena con la mezcla de agua y espumante.
- Comienza la filmación del video.
- La toma de video continúa hasta por 45 segundos.

- El contenido del visualizador se vierte en la celda para evitar perder el mineral que asciende con las burbujas.

### 3.8.2 Digitalización del video

Lo primero que hay que hacer con el video filmado es digitalizarlo, esto significa que de la grabación en casete se pasará a un video con formato digital. Para esto se ocupará un programa llamado VirtualDub que transformará el video grabado en un conjunto de imágenes (cuadros).

Los criterios más importantes de la digitalización se detallan a continuación:

- El video debe ser descargado por la metodología –FireWire.
- El video debe ser capturado a una tasa de 29,97<sup>5</sup> cuadros por segundo.
- Se deben aplicar dos filtros a las imágenes:
  - Filtro deinterlace con la opción Discar field 2
  - Filtro reize con la opción 320 x 240 y Interlaced
- Se exporta las imágenes (cuadros) con formato Windows BMP para ser procesados por el programa ImageJ.

### 3.8.3 Análisis de imágenes

Para el análisis del video se ocupa el programa, ImageJ<sup>6</sup>, caracterizado en el Anexo D. Este programa contiene una serie de herramientas para el procesamiento de imágenes digitales, donde el uso de éstas depende del usuario y el objetivo que se requiere cumplir. A continuación se explicarán las herramientas utilizadas y los criterios asociados a estas.

Los criterios más importantes utilizados en esta etapa se detallan a continuación:

- Mejora de Contraste. Se utiliza la herramienta de mejorar el contraste para que las burbujas tengan contornos más delimitados.
- Setear la referencia conocida, el patrón de cuadrado, en su diagonal a  $15 \cdot \sqrt{2}$  para determinar la escala.

<sup>5</sup> La tasa de captación es una variable del programa VirtualDub y el valor de 29,97 es reconocido internacionalmente.

<sup>6</sup> Este programa es de uso gratuito, desarrollado por el NIH (National Institutes of Health) del gobierno de EEUU, y puede ser descargado por un sin número de links de Internet.

- Pasar a escala de grises las imágenes en 8-bit.
- Pasar a blancos y negros puros las imágenes.
- Seleccionar un área clara, para analizar, en donde sólo las burbujas estén delimitadas por el color negro y no el fondo.
- Usar la herramienta para cerrar posibles burbujas que hubiesen quedado abiertas en su contorno.
- Rellenar las burbujas con color negro, para contar el área, a través de los píxeles, de éstas.
- Usar la herramienta para separar posibles burbujas que hubiesen quedado pegadas. Esta herramienta sirve cuando hay burbujas superpuestas unas a otras.
- Analizar imágenes con los siguientes criterios:
  - Filtro en tamaño de área, desde 0,01 mm<sup>2</sup> hasta el infinito
  - Filtro de esfericidad entre 0,85 y 1,00

#### **3.8.4 Determinación de la distribución de tamaño de burbujas**

Para procesar la información entregada por el programa ImageJ se crearon dos planillas Excel, la primera para filtrar la información en función de una elección cada cierta cantidad de cuadros, y la segunda para procesar y generar la información estadística de la DTB.

##### **FILTRADO DE CUADROS**

Como se mencionó en el párrafo anterior se debe establecer cada cuantos cuadros tomaremos la información.

El criterio que prevalece es el de no contar una burbuja más de una vez. Según esto lo que se necesita saber es la velocidad con que ascienden las burbujas para ver el tiempo que demoran en cruzar el área definida en el programa ImageJ.

Pruebas realizadas con algunos videos arrojaron que la velocidad de ascenso de las burbujas es de 200 mm/s para un caudal de aire de 17,72 [l/min]. Según esto y con la información de la distancia que atraviesa la burbuja en el área de análisis, se pudo llegar a que el n° de cuadros mínimo era del orden de 1 de 2 cuadros.

Para ser conservador, y aunque se pierda un poco de información, que no es relevante para el análisis que se realiza, se decidió ocupar un muestreo uniforme para todas las pruebas de 1 cada 4 cuadros comenzando por el 001 y terminando con el 750.

### ANALISIS DE DTB

Se toma la información entregada por la planilla de filtro y se calcula el diámetro obtenido por la información de área según la siguiente expresión:

$$d^* = \sqrt{\frac{\text{Area} \cdot 4}{\pi}} \quad (34)$$

El diámetro  $d^*$  corresponde al valor medido en la cámara de visualización, sin embargo este valor se ve afectado por la diferencia de presión entre el punto de muestreo y el punto de medición. Para obtener el valor del diámetro de burbuja en la celda de flotación es necesario corregir este efecto.

La corrección se realiza relacionando las presiones en la celda y en la cámara de visualización. La presión en la celda se expresa como sigue:

$$P_{\text{celda}} = \rho_{\text{pulpa}} \cdot g \cdot h_{\text{celda}} \cdot \left( 1 - \frac{\varepsilon_g}{100} \right) + \frac{m_{\text{espuma}} \cdot g}{A_{\text{celda}}} + P_0 \quad (35)$$

Donde:

- $P_{\text{celda}}$  : presión hidrostática en el punto de muestreo en la celda [cm H<sub>2</sub>O].
- $\rho_{\text{pulpa}}$  : densidad de la pulpa en la celda [t/m<sup>3</sup>].
- $g$  : aceleración de gravedad [m/s<sup>2</sup>].
- $h_{\text{celda}}$  : distancia entre el punto de muestreo en la celda y la interfase pulpa espuma (7,0 cm.) [m].
- $\varepsilon_g$  : holdup de gas en la celda [%].
- $m_{\text{espuma}}$  : masa de espuma en el instante de muestreo [g].
- $A_{\text{celda}}$  : área de la celda [cm<sup>2</sup>].
- $P_0$  : presión atmosférica [cm H<sub>2</sub>O].

La masa de espuma se estima en base a la masa de espuma correspondiente al primer paleteo en el desarrollo de la prueba experimental.

La presión en la cámara de visualización se expresa de la siguiente forma:

$$P_{vis} = \rho_{agua} \cdot g \cdot h_{vis} \cdot \left( 1 - \frac{\epsilon_{g\ vis}}{100} \right) + P_{vacío} \quad (36)$$

Donde:

- $P_{vis}$  : presión hidrostática en el punto de medición en la cámara de visualización [cm H<sub>2</sub>O].
- $\rho_{agua}$  : densidad del agua [kg/m<sup>3</sup>].
- $h_{vis}$  : distancia entre el punto de medición y la superficie del agua en la cámara de visualización (3,5 cm) [m].
- $\epsilon_{g\ vis}$  : holdup de gas en la cámara de visualización (10%) [%].
- $P_{vacío}$  : presión de vacío en la cámara de visualización, calculada a través de un balance de presiones hidrostáticas tanto por el lado del medidor como por el lado de la pulpa [cm H<sub>2</sub>O].

Después de calcular las presiones para la celda de flotación y la cámara de visualización es posible determinar un factor de corrección para el tamaño de burbujas utilizando esos valores y la ley de los gases ideales, como se muestra en la siguiente relación:

$$P_{celda} \cdot V_{b\ celda} = P_{vis} \cdot V_{b\ vis}, \text{ donde:} \quad (37)$$

- $V_{b\ celda}$  : volumen de burbuja en la celda.
- $V_{b\ vis}$  : volumen de burbuja en cámara de visualización.

Asumiendo que las burbujas en la celda son esféricas, se llega a que:

$$d_b = d^* \cdot \sqrt[3]{\left( \frac{P_{vis}}{P_{celda}} \right)} = d^* \cdot \phi, \text{ donde:} \quad (38)$$

- $d_b$  : diámetro de burbuja en la celda.
- $\phi$  : factor de corrección por presión hidrostática, cuyo valor resulta ser 0,995.

Luego se calcula el factor de corrección explicado en el Capítulo 4.2 del Anexo D, para entregar el diámetro de la burbuja.

### 3.9 CAMPAÑA EXPERIMENTAL

Se realizaron pruebas de flotación primaria, variando la distribución de tamaño de burbujas y la granulometría de alimentación.

Con respecto a la distribución de tamaño de burbujas, se establecieron 5 condiciones distintas, la cuales pueden ser apreciadas en la Figura N° 29 del Capítulo 3.5. Estas buscan representar condiciones de flotación en donde exista una gran concentración de burbujas finas, DTB 1, variando hacia una concentración de burbujas más gruesas, DTB 5. Esta última caracterizada por la presencia de burbujas de mayor diámetro. Las condiciones proyectadas se muestran en la Tabla N° 15.

Tabla N° 15: Condiciones en las DTB para la campaña experimental.<sup>7</sup>

	$\lambda$	d50	Ns	Jg
		mm	m/s	cm/s
<b>DTB 1</b>	3,12	0,50	2,67	0,70
<b>DTB 2</b>	2,90	0,70	2,54	1,15
<b>DTB 3</b>	2,70	0,90	2,40	1,20
<b>DTB 4</b>	2,52	1,10	2,24	0,70
<b>DTB 5</b>	2,37	1,30	2,14	0,95

La otra condición que varía, es la granulometría de alimentación a la celda de flotación. Se definen tres distribuciones de tamaño de mineral:

- **DTM 1** : Corresponde a 2 [kg] de mineral de descarga del molino de molienda batch, cuyo perfil granulométrico está caracterizado en el capítulo 3.1 del presente documento.
- **DTM 2** : Corresponde a 1 [kg] de mineral de descarga del molino de molienda batch, compositado con 1[kg] de mineral con 100% bajo la malla 400.
- **DTM 3** : Corresponde a 1 [kg] de mineral de descarga del molino de molienda batch, compositado con 1[kg] de mineral con 100% sobre la malla 100.

<sup>7</sup> Cabe recordad que los valores de velocidad superficial del gas están definidos en condiciones estándar de presión y temperatura.



Los perfiles granulométricos de las tres alimentaciones se muestran en la Tabla N° 14 y la Figura N° 30 en el Capítulo 3.6.

Como se planteó en los objetivos de este estudio en el Capítulo de Introducción, se busca entender como influye la distribución de tamaño de burbujas, ya sea más fina o más gruesa, en la recuperación de la flotación primaria realizada en una celda de laboratorio batch, en los tamaños de partículas más complicados tradicionalmente en la flotación, el sobre 100# y el bajo 400#. En función de esto se proyecta una campaña experimental cubriendo las tres granulometrías de mineral descritas y las cinco distribuciones de tamaño de burbujas planteadas, en duplicado, según se muestra en la Tabla N° 16.

Tabla N° 16: Resumen de campaña experimental

SET	Prueba	Tipo de Mineral	DTB	RPM	Ns [m/s]	Caudal Q		Jg [cm/s]
						Nom	std	
						[l/min]		
A	A1	1	1	477	2,67	11,1	16,7	0,70
	A2	1	1	477	2,67	11,1	16,7	0,70
	A3	1	2	454	2,55	18,5	27,4	1,15
	A4	1	2	454	2,55	18,5	27,4	1,15
	A5	1	3	429	2,41	19,3	28,6	1,20
	A6	1	3	429	2,41	19,3	28,6	1,20
	A7	1	4	401	2,25	11,1	16,7	0,70
	A8	1	4	401	2,25	11,1	16,7	0,70
	A9	1	5	382	2,14	15,2	22,6	0,95
	A10	1	5	382	2,14	15,2	22,6	0,95
B	B1	2	1	477	2,67	11,1	16,7	0,70
	B2	2	1	477	2,67	11,1	16,7	0,70
	B3	2	2	454	2,55	18,5	27,4	1,15
	B4	2	2	454	2,55	18,5	27,4	1,15
	B5	2	3	429	2,41	19,3	28,6	1,20
	B6	2	3	429	2,41	19,3	28,6	1,20
	B7	2	4	401	2,25	11,1	16,7	0,70
	B8	2	4	401	2,25	11,1	16,7	0,70
	B9	2	5	382	2,14	15,2	22,6	0,95
	B10	2	5	382	2,14	15,2	22,6	0,95
C	C1	3	1	477	2,67	11,1	16,7	0,70
	C2	3	1	477	2,67	11,1	16,7	0,70
	C3	3	2	454	2,55	18,5	27,4	1,15
	C4	3	2	454	2,55	18,5	27,4	1,15
	C5	3	3	429	2,41	19,3	28,6	1,20
	C6	3	3	429	2,41	19,3	28,6	1,20
	C7	3	4	401	2,25	11,1	16,7	0,70
	C8	3	4	401	2,25	11,1	16,7	0,70
	C9	3	5	382	2,14	15,2	22,6	0,95
	C10	3	5	382	2,14	15,2	22,6	0,95

## 4 RESULTADOS EXPERIMENTALES

Para exponer los resultados de la campaña experimental, estos se mostrarán de acuerdo al siguiente quiebre conceptual:

- Resultados en la distribución de tamaño de burbujas (DTB):
  - Burbujas medidas.
  - Estadísticas según número de burbujas.
  - Estadísticas según superficie de burbujas.
  - Diámetro máximo y mínimo.
  - Otras estadísticas.
- Resultados metalúrgicos:
  - Masa de concentrado y relave, global y por rango de tamaño.
  - Leyes de concentrado y relave, global y por rango de tamaño.
  - Ley de cabeza calculada, global y por rango de tamaño.
  - Recuperación metalúrgica, global y por rango de tamaño.

### 4.1 RESULTADO EN LA DTB

En esta etapa es necesario determinar distribuciones de tamaño de burbujas. Los valores de  $d_b$  medidos se agrupan por clases de tamaño y así se cuenta el número de burbujas por cada rango de tamaños, determinando finalmente la DTB por número de burbujas según el procedimiento explicado en el Capítulo 3.8.

Como para la DTB se debe tomar en cuenta la naturaleza superficial del fenómeno de flotación, se procede a determinar la DTB en superficie y volumen de burbujas según las siguientes relaciones:

$$f_{i2} = \left( \frac{X_i^2 \cdot f_{i0}}{\sum_{i=1}^{i=n} X_i^2 \cdot f_{i0}} \right) \quad (39)$$

$$f_{i3} = \left( \frac{X_i^3 \cdot f_{i0}}{\sum_{i=1}^{i=n} X_i^3 \cdot f_{i0}} \right) \quad (40)$$

Donde:

- $f_{i0}$  : Fracción retenida en número en el tamaño i.
- $f_{i2}$  : Fracción retenida en superficie en el tamaño i.
- $f_{i3}$  : Fracción retenida en volumen en el tamaño i.
- $x_i$  : Tamaño medio de burbuja en la clase i.

Además se definen los parámetros S y V representativos de la superficie y el volumen total, respectivamente, de la DTB como:

$$S = \pi \cdot \sum_{i=1}^n (X_i^2) f_{i0} \quad (41)$$

$$V = \left( \frac{\pi}{6} \right) \cdot \sum_{i=1}^n X_i^3 \cdot f_{i0} \quad (42)$$

En las Tablas 17, 18 y 19, se muestran los resultados en la DTB

Tabla N° 17: Estadísticas generales en la DTB.

SET	Condiciones				Estadísticas generales					
	Alim.	DTB	Jg	Ns	Datos	d3,2	S	V	d Máx	d Min
	-	-	[cm/s]	[m/s]	[n°]	[mm]	[cm²]	[mm³]	[mm]	[mm]
SET A	1	1	0,70	2,670	7.674	0,77	0,98	12,60	2,45	0,08
	1	2	1,15	2,545	7.115	0,93	1,35	21,03	2,94	0,07
	1	3	1,20	2,405	6.656	1,01	1,77	30,05	2,90	0,11
	1	4	0,70	2,245	4.652	0,92	1,37	21,19	2,65	0,08
	1	5	0,95	2,140	4.612	1,04	1,24	21,81	3,45	0,06
SET B	2	1	0,70	2,670	6.045	0,73	0,83	10,26	2,03	0,04
	2	2	1,15	2,545	6.219	0,84	1,16	16,80	2,23	0,03
	2	3	1,20	2,405	3.781	1,15	2,01	38,57	3,11	0,06
	2	4	0,70	2,245	3.931	0,94	1,67	27,01	2,46	0,15
	2	5	0,95	2,140	2.946	1,25	2,20	46,10	4,02	0,15
SET C	3	1	0,70	2,670	6.835	0,86	1,09	15,70	2,79	0,16
	3	2	1,15	2,545	3.955	1,06	1,54	27,29	3,84	0,15
	3	3	1,20	2,405	4.546	1,19	0,87	18,09	3,84	0,03
	3	4	0,70	2,245	3.129	1,15	1,21	23,81	3,66	0,10
	3	5	0,95	2,140	2.138	1,43	2,04	52,47	3,69	0,31

Tabla N° 18: Estadísticas según número de burbujas

SET	Condiciones				Estadísticas según número de burbujas				
	Alim.	DTB	Jg	Ns	Media	Desv	d25	d50	d75
	-	-	[cm/s]	[m/s]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]
SET A	1	1	0,70	2,670	0,49	0,26	0,29	0,47	0,64
	1	2	1,15	2,545	0,57	0,33	0,32	0,52	0,75
	1	3	1,20	2,405	0,66	0,34	0,44	0,63	0,86
	1	4	0,70	2,245	0,58	0,32	0,35	0,53	0,75
	1	5	0,95	2,140	0,51	0,35	0,27	0,46	0,68
SET B	2	1	0,70	2,670	0,44	0,26	0,25	0,41	0,58
	2	2	1,15	2,545	0,52	0,30	0,31	0,48	0,69
	2	3	1,20	2,405	0,67	0,42	0,34	0,64	0,94
	2	4	0,70	2,245	0,65	0,32	0,43	0,63	0,84
	2	5	0,95	2,140	0,69	0,46	0,15	0,66	0,99
SET C	3	1	0,70	2,670	0,51	0,29	0,28	0,46	0,69
	3	2	1,15	2,545	0,60	0,35	0,36	0,55	0,77
	3	3	1,20	2,405	0,37	0,36	0,13	0,28	0,49
	3	4	0,70	2,245	0,47	0,39	0,18	0,35	0,66
	3	5	0,95	2,140	0,60	0,40	0,44	0,56	0,71

Tabla N° 19: Estadísticas según superficie de burbujas

SET	Condiciones				Estadísticas según superficie de burbujas				
	Alim.	DTB	Jg	Ns	Media	Desv	d25	d50	d75
	-	-	[cm/s]	[m/s]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]
SET A	1	1	0,70	2,670	0,78	0,34	0,53	0,71	0,95
	1	2	1,15	2,545	0,94	0,42	0,64	0,88	1,16
	1	3	1,20	2,405	1,02	0,44	0,71	0,94	1,24
	1	4	0,70	2,245	0,93	0,41	0,63	0,86	1,17
	1	5	0,95	2,140	1,05	0,62	0,62	0,89	1,27
SET B	2	1	0,70	2,670	0,74	0,34	0,50	0,69	0,93
	2	2	1,15	2,545	0,85	0,35	0,59	0,81	1,05
	2	3	1,20	2,405	1,15	0,49	0,82	1,07	1,39
	2	4	0,70	2,245	0,94	0,35	0,70	0,89	1,14
	2	5	0,95	2,140	1,25	0,58	0,88	1,15	1,49
SET C	3	1	0,70	2,670	0,86	0,40	0,60	0,79	1,05
	3	2	1,15	2,545	1,06	0,59	0,67	0,92	1,30
	3	3	1,20	2,405	1,19	0,81	0,60	0,97	1,55
	3	4	0,70	2,245	1,15	0,65	0,69	1,03	1,46
	3	5	0,95	2,140	1,43	0,88	0,74	1,21	1,93

Donde:

- $d_{3,2}$  : Corresponde al diámetro de Sauter.
- Media : Corresponde al diámetro de la media aritmética de la distribución.
- Desv : Corresponde a la desviación estándar de la distribución.
- $d_{25}$  : Corresponde al diámetro bajo el cual se encuentra el 25% de la distribución de burbujas acumulada.
- $d_{50}$  : Corresponde al diámetro bajo el cual se encuentra el 50% de la distribución de burbujas acumulada.
- $d_{75}$  : Corresponde al diámetro bajo el cual se encuentra el 75% de la distribución de burbujas acumulada.

Las curvas de DTB retenida y acumulada de todas las pruebas realizadas, original y duplicado, se muestran en el Anexo E del presente documento.

## 4.2 RESULTADOS METALÚRGICOS

En la Tabla N° 20, N° 21 y N° 22 se muestran los resultados obtenidos en la campaña experimental, en masa, ley y recuperación.

Tabla N° 20: Resultados en masa<sup>8</sup>

SET	Condiciones				Masa											
	Alim.	DTB	Jg	Ns	Alimentación				Concentrado				Relave			
	-	-	[cm/s]	[m/s]	Total	T1	T2	T3	Total	T1	T2	T3	Total	T1	T2	T3
					[gramos]	[%] retenido			[gramos]	[%] retenido			[gramos]	[%] retenido		
SET A	1	1	0,70	2,670	1.997	24,1	33,7	42,2	242	11,7	23,5	64,8	1.754	25,8	35,1	39,1
	1	2	1,15	2,545	1.997	24,3	33,4	42,3	230	11,3	22,8	65,8	1.768	26,0	34,8	39,2
	1	3	1,20	2,405	1.996	24,3	33,6	42,1	215	11,2	23,3	65,4	1.781	25,8	34,8	39,3
	1	4	0,70	2,245	1.997	24,6	33,5	41,9	176	9,1	23,9	67,0	1.821	26,1	34,5	39,5
	1	5	0,95	2,140	1.998	23,2	32,3	44,5	190	6,7	20,2	73,0	1.809	25,0	33,5	41,5
SET B	2	1	0,70	2,670	1.997	11,1	18,9	70,0	371	2,5	6,0	91,5	1.626	13,1	21,8	65,1
	2	2	1,15	2,545	1.997	10,8	18,6	70,5	425	3,3	6,5	90,2	1.572	12,9	21,9	65,2
	2	3	1,20	2,405	1.997	10,7	19,1	70,2	340	2,2	5,9	91,9	1.657	12,4	21,8	65,8
	2	4	0,70	2,245	1.998	11,5	18,7	69,7	339	1,7	6,2	92,1	1.659	13,5	21,3	65,2
	2	5	0,95	2,140	1.998	11,9	18,4	69,6	317	1,7	5,4	92,9	1.681	13,9	20,9	65,2
SET C	3	1	0,70	2,670	2.015	52,8	23,6	23,6	168	41,1	23,4	35,5	1.847	53,8	23,7	22,5
	3	2	1,15	2,545	2.021	55,3	22,2	22,5	153	39,8	21,6	38,7	1.868	56,6	22,2	21,2
	3	3	1,20	2,405	2.005	55,2	22,5	22,2	142	36,0	22,7	41,3	1.863	56,7	22,5	20,8
	3	4	0,70	2,245	1.997	55,1	23,3	21,6	109	30,4	27,2	42,5	1.887	56,5	23,1	20,4
	3	5	0,95	2,140	1.998	57,5	20,8	21,7	105	29,7	22,2	48,0	1.893	59,0	20,7	20,2

<sup>8</sup> Cabe recordar que el tamaño llamado T1 corresponde a mineral +100#, el T2 a -100# + 400#, y el T3 a -400#

La masa en la alimentación corresponde a la suma de los valores medidos en el concentrado y relave, ya sea en el total y por rango de tamaño.

Tabla N° 21: Resultado de leyes de Cobre

SET	Condiciones				Ley											
	Alim.	DTB	Jg	Ns	Alimentación				Concentrado				Relave			
	-	-	[cm/s]	[m/s]	Total	T1	T2	T3	Total	T1	T2	T3	Total	T1	T2	T3
	[%]															
SET A	1	1	0,70	2,670	1,16	0,52	1,10	1,57	7,53	4,00	11,65	6,67	0,28	0,31	0,12	0,41
	1	2	1,15	2,545	1,15	0,50	1,08	1,59	7,69	3,33	12,17	6,89	0,30	0,34	0,14	0,43
	1	3	1,20	2,405	1,16	0,52	1,09	1,59	8,28	3,77	12,89	7,41	0,30	0,35	0,13	0,42
	1	4	0,70	2,245	1,13	0,50	1,05	1,57	9,12	4,57	14,08	7,97	0,36	0,37	0,18	0,52
	1	5	0,95	2,140	1,17	0,52	1,03	1,62	8,57	4,17	13,72	7,55	0,40	0,41	0,23	0,52
SET B	2	1	0,70	2,670	1,40	0,51	1,00	1,65	5,23	3,09	13,82	4,72	0,53	0,40	0,19	0,67
	2	2	1,15	2,545	1,39	0,51	1,06	1,61	4,73	2,19	11,98	4,30	0,49	0,40	0,18	0,60
	2	3	1,20	2,405	1,38	0,49	1,00	1,62	5,11	2,02	15,28	4,59	0,60	0,42	0,25	0,75
	2	4	0,70	2,245	1,35	0,51	1,02	1,58	5,06	3,57	14,02	4,48	0,60	0,43	0,24	0,76
	2	5	0,95	2,140	1,38	0,51	1,05	1,62	5,02	2,48	15,66	4,46	0,69	0,46	0,34	0,86
SET C	3	1	0,70	2,670	0,84	0,50	0,87	1,58	7,24	4,10	9,04	9,75	0,26	0,26	0,14	0,41
	3	2	1,15	2,545	0,83	0,48	0,91	1,58	7,92	4,15	11,24	10,15	0,26	0,28	0,13	0,33
	3	3	1,20	2,405	0,85	0,49	0,91	1,68	8,10	4,16	10,50	10,26	0,29	0,31	0,17	0,39
	3	4	0,70	2,245	0,84	0,50	0,90	1,63	9,22	5,79	10,70	10,86	0,35	0,34	0,24	0,52
	3	5	0,95	2,140	0,83	0,51	0,94	1,57	8,93	5,51	12,14	9,61	0,38	0,37	0,28	0,52

Del laboratorio se obtuvieron los valores de leyes por cada rango de tamaño, para el concentrado y el relave. A partir de esto se calcula la siguiente información:

$$Ley_{Ti}^A = \frac{m_{Ti}^C \cdot ley_{Ti}^C + m_{Ti}^R \cdot ley_{Ti}^R}{m_{Ti}^C + m_{Ti}^R} \quad (43)$$

$$Ley_T^{C,R} = \frac{\sum_{i=1}^3 m_{Ti}^{C,R} \cdot ley_{Ti}^{C,R}}{m_T^{C,R}} \quad (44)$$

Donde:

- $Ley_{Ti}^A$  : Ley del tamaño "i" (1, 2, 3 o Global) de alimentación.
- $Ley_T^X$  : Ley global de "X" (concentrado o relave).
- $m_{Ti}^X$  : Masa del tamaño "i" (1, 2 o 3) de "X" (concentrado, relave o alimentación).
- $m_T^X$  : Masa global de "X" (concentrado, relave o alimentación).

Tabla N° 22: Resultados en recuperación

SET	Condiciones				Recuperación			
	Alim.	DTB	Jg	Ns	Total	T1	T2	T3
	-	-	[cm/s]	[m/s]				
SET A	1	1	0,70	2,670	78,7	44,9	90,1	78,8
	1	2	1,15	2,545	76,7	35,6	88,3	77,9
	1	3	1,20	2,405	76,7	36,0	88,6	78,0
	1	4	0,70	2,245	70,7	29,7	83,8	71,4
	1	5	0,95	2,140	69,5	22,2	79,3	72,9
SET B	2	1	0,70	2,670	69,0	25,0	81,8	69,1
	2	2	1,15	2,545	72,5	27,5	83,9	72,7
	2	3	1,20	2,405	63,7	16,6	76,2	63,9
	2	4	0,70	2,245	63,1	17,5	77,4	63,1
	2	5	0,95	2,140	57,8	11,4	69,1	58,3
SET C	3	1	0,70	2,670	71,5	52,6	85,6	77,3
	3	2	1,15	2,545	71,2	45,8	86,3	81,9
	3	3	1,20	2,405	67,8	40,0	82,7	79,9
	3	4	0,70	2,245	60,1	34,8	75,1	71,1
	3	5	0,95	2,140	56,3	29,3	71,7	70,9

La recuperación para cada rango de tamaños, fue calculada a partir del método de recuperación por finos ocupando la ley de cabeza calculada.

$$R_{Ti} = \frac{m_{Ti}^C \cdot ley_{Ti}^C}{(m_{Ti}^C \cdot ley_{Ti}^C + m_{Ti}^R \cdot ley_{Ti}^R)} \quad (45)$$

$$R_T = \frac{\sum_1^3 [m_{Ti}^C \cdot ley_{Ti}^C]}{\left( \sum_1^3 [m_{Ti}^C \cdot ley_{Ti}^C + m_{Ti}^R \cdot ley_{Ti}^R] \right)} \quad (46)$$

Donde:

- $R_{Ti}$  : Recuperación del tamaño "i" (1, 2 o 3).
- $R_T$  : Recuperación global.

## 5 ANÁLISIS Y MODELACIÓN

### 5.1 ANÁLISIS DE RESULTADOS

#### 5.1.1 Reproducibilidad de resultados

La reproducibilidad de los resultados se analiza para un intervalo de confianza del 95% según Himmelblau [38], y queda definida como:

$$sd = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - x_m)^2}{n \cdot (n - 1)}} \quad (47)$$

Donde:

- $sd$  : Desviación estándar de la muestra.
- $x_i$  : valor de la variable en la repetición "i".
- $x_m$  : Promedio de todas las repeticiones de la variable a estudiar
- $n$  : Número de datos

A partir de lo anterior, el error porcentual para un intervalo de confianza del 95% se calcula como:

$$\text{Error} = 100 \cdot \frac{t \cdot sd}{x_m} \quad (48)$$

Donde "t" se despeja de la tabla asociada a la distribución t-student con 3 grados de libertad (n-1) y una distribución acumulada de  $t^* = 0,975$ , tomado el valor de 3,182.

Así en la Tabla N° 23 se muestra el error calculado para la ley de concentrado, relave, recuperaciones y algunos parámetros de la distribución de tamaño de burbujas, utilizando los resultados de 4 pruebas realizadas bajo las condiciones experimentales de: Alimentación de mineral 1 (DTM1),  $J_g = 1,20$  [cm/s] y  $N_s = 2,405$  [m/s].



Tabla N° 23: Resultados del error experimental calculado para diferentes variables<sup>9</sup>

Prueba	Ley								Recuperación				DTB						
	Concentrado				Relave				Global	T1	T2	T3	d3,2	d50 (n°)	d50 (sup)	$\Sigma(f_i3/d_i)$	S	V	
	Global	T1	T2	T3	Global	T1	T2	T3											
1	A5	8,17	3,7	13,0	7,2	0,3	0,36	0,14	0,45	75,72	33,3	87,6	76,9	1,03	0,68	0,97	97,06	1,95	33,50
2	A6	8,38	3,8	12,8	7,6	0,3	0,34	0,13	0,40	77,77	38,7	89,5	79,1	1,00	0,58	0,92	99,60	1,59	26,60
3	RP1	8,08	3,9	13,6	6,9	0,3	0,38	0,16	0,43	75,95	30,4	85,1	78,2	1,02	0,57	0,92	96,96	1,56	26,76
4	RP2	8,26	3,6	13,5	7,0	0,3	0,36	0,16	0,43	74,22	28,2	85,9	75,0	0,99	0,59	0,94	99,68	1,60	26,73
Promedio		8,2	3,7	13,2	7,2	0,3	0,36	0,15	0,43	75,9	32,7	87,0	77,3	1,0	0,6	0,9	98,3	1,7	28,4
sd	%	0,06	0,07	0,19	0,16	0,01	0,01	0,01	0,01	0,73	2,28	0,97	0,90	0,01	0,03	0,01	0,76	0,09	1,70
Error	-	0,2	0,2	0,4	0,4	0,02	0,02	0,02	0,02	1,7	5,4	2,3	2,1	0,02	0,06	0,03	1,8	0,2	4,0

Como es de esperar, las leyes presentan bajo error, menores a 0,5 puntos en el concentrado y menor que 0,02 en el relave.

Por otro lado, las recuperaciones presentan un error aceptable, del orden de 2 puntos porcentuales, excepto la asociada el tamaño 1 (5,4%). Si bien es un error mayor, se espera que sea útil para comparar las variaciones en la recuperación de dicho tamaño.

Con respecto a los parámetros relativos a la distribución de tamaño de burbujas, se observa que en general todos presentan errores bajos. Para el diámetro de sauter, y los  $d_{50}$  (en número y superficie), los errores de reproducibilidad son menores 0,06 [mm], mientras que para el índice de superficie total es del orden de 2 [1/mm].

En general se puede decir que la reproducibilidad es buena a nivel de leyes, recuperaciones y condiciones relativas al gas presente en la celda.

<sup>9</sup> Cabe recordar que los errores aquí mostrados están en referencia al promedio y poseen su misma unidad

### 5.1.2 Curvas de distribución de tamaño de burbujas (DTB)

Como se planteó en la campaña experimental, para cada distribución de tamaño de mineral (DTM media, fina y gruesa) se definieron cinco distribuciones de tamaño de burbujas (DTB), esperando que cambiaran en el ancho de la distribución desde la DTB 1 hacia la DTB 5.

En la Tabla N° 24, se muestran los resultados de  $\lambda$  y  $d_{50}$ , parámetros del modelo de distribución de tamaño de burbujas, obtenidos y proyectados en la campaña experimental para cada distribución de tamaño de mineral (DTM).

Tabla N° 24: Parámetros obtenidos de las DTB para cada distribución de tamaño de mineral.

	DTB	Objetivo		Obtenido	
		$d_{50}$	$\lambda$	$d_{50}$	$\lambda$
		mm	-	mm	-
<b>DTM 1 Media</b>	DTB 1	0,50	3,12	0,70	3,02
	DTB 2	0,70	2,90	0,84	2,89
	DTB 3	0,90	2,70	0,91	2,99
	DTB 4	1,10	2,52	0,83	2,85
	DTB 5	1,30	2,37	0,94	2,67
<b>DTM 2 Fina</b>	DTB 1	0,50	3,12	0,76	3,18
	DTB 2	0,70	2,90	0,84	3,10
	DTB 3	0,90	2,70	0,96	2,95
	DTB 4	1,10	2,52	0,85	3,25
	DTB 5	1,30	2,37	1,10	3,01
<b>DTM 3 Gruesa</b>	DTB 1	0,50	3,12	0,72	2,74
	DTB 2	0,70	2,90	0,83	2,33
	DTB 3	0,90	2,70	1,04	2,03
	DTB 4	1,10	2,52	1,02	2,42
	DTB 5	1,30	2,37	1,28	1,93

Como se puede observar en la Tabla N° 24, no se obtuvieron los parámetros deseados, es más en la DTM 1, tenemos que se generan curvas con un  $d_{50}$  poco variable. Lo más importante a destacar es que en las condiciones de DTM 2 y DTM 3, se obtuvieron curvas con un  $d_{50}$  un poco mayor que con la DTM 1.

Con respecto al  $\lambda$ , podemos ver que éste en la DTM 2 aumenta, comparándolo con la DTM 1, mientras que en la DTM 3 disminuye. Esto implicará curvas de distribución de tamaño de burbujas en superficie retenida más angostas, para la DTM 2, y más anchas para la DTM 3. Este resultado es bastante importante ya que muestra una clara influencia de la distribución de tamaño de mineral (DTM) en la distribución de tamaño de burbujas (DTB) lo que afecta la reproducibilidad de las DTB.

Pese a esto, en las Figura N° 31, Figura N° 32 y Figura N° 33 se puede observar que en cada distribución de tamaño de mineral (DTM) se obtienen cuatro o cinco curvas de distribución de tamaño de burbujas (DTB) que responden al objetivo principal, el cual es reproducir DTB que sean diferenciables entre sí y que se ensanchen paulatinamente.

Por otra parte se puede observar el resultado descrito con respecto al  $\lambda$  obtenido. Para la DTM 2 (Fina), Figura N° 32, se ve que las curvas se contraen, generando distribuciones más angostas que en la DTM 1 (Media). Por el contrario en la DTM3 (Gruesa), Figura N° 33, en donde se ve que las curvas se expanden, generando distribuciones más anchas que en la DTM 1(Media).

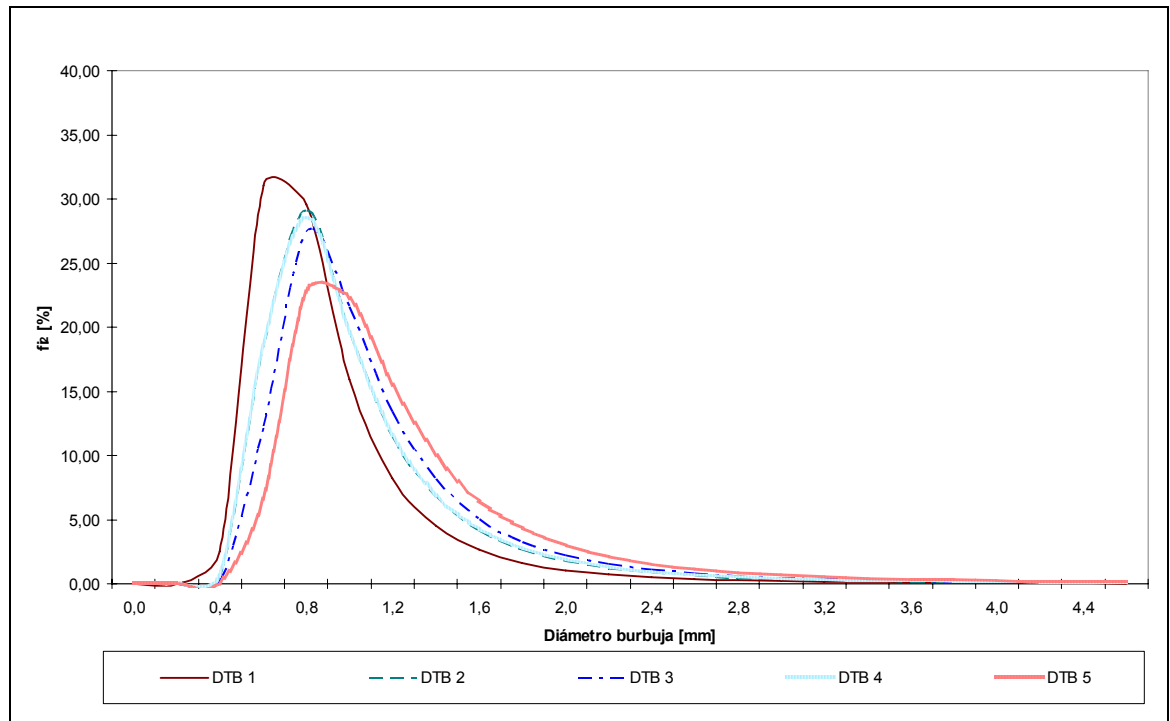


Figura N° 31: Fracción retenida en superficie por cada distribución de tamaño de burbujas (DTB) para la distribución de tamaño de mineral Media (DTM 1)

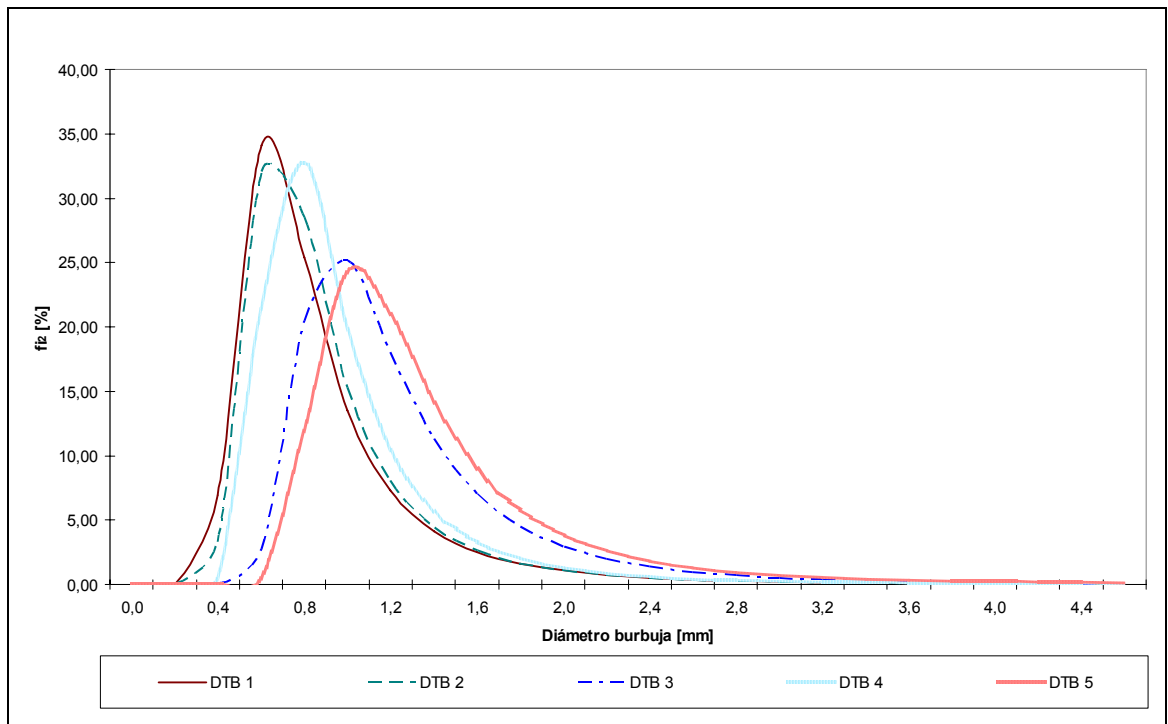


Figura N° 32: Fracción retenida en superficie por cada distribución de tamaño de burbujas (DTB) para la distribución de tamaño de mineral Fina (DTM 2)

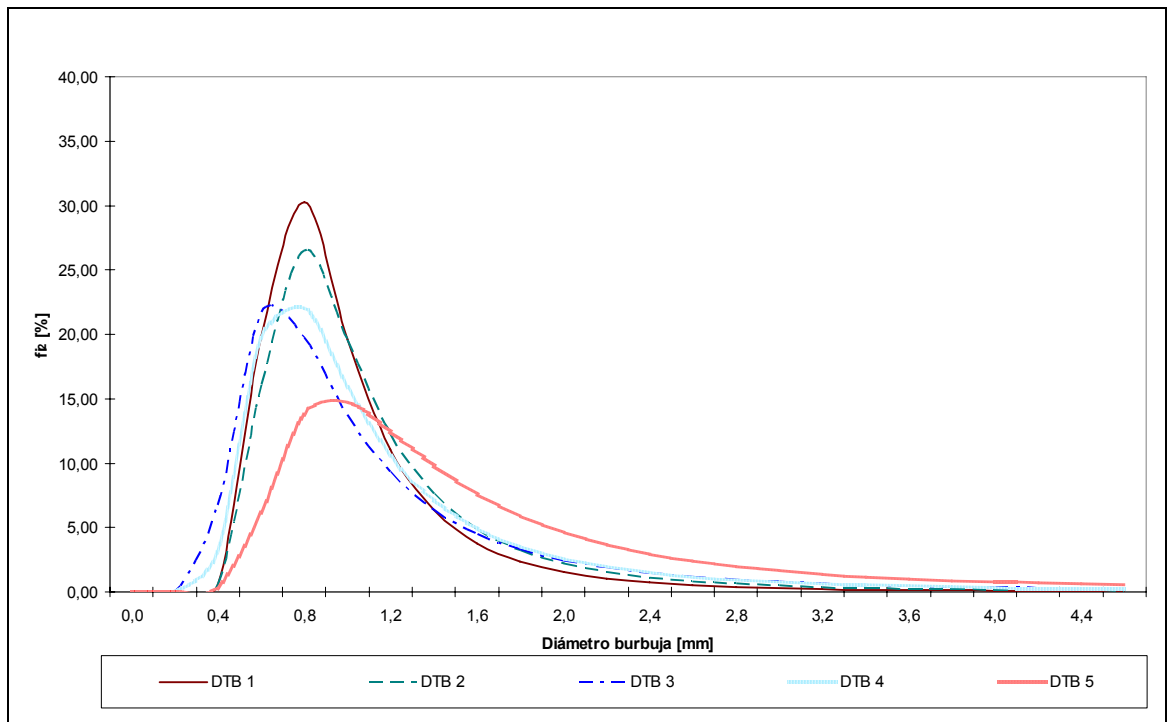


Figura N° 33: Fracción retenida en superficie por cada distribución de tamaño de burbujas (DTB) para la distribución de tamaño de mineral Gruesa (DTM 3)

### 5.1.3 Influencia de la distribución de tamaño de mineral (DTM) en la DTB

Como se mostró en la campaña experimental, las distintas distribuciones de tamaño de burbujas (DTB) fueron reproducidas en tres condiciones granulométricas de mineral diferentes: fina, media y gruesa. Es así como se pudo observar que existe una influencia del tamaño de partícula, representado por el  $p_{80}$ , en la distribución de tamaño de burbujas (DTB) proyectada.

En la Figura N° 34 se representa, de manera esquemática y cualitativa el efecto producido por la granulometría del mineral.

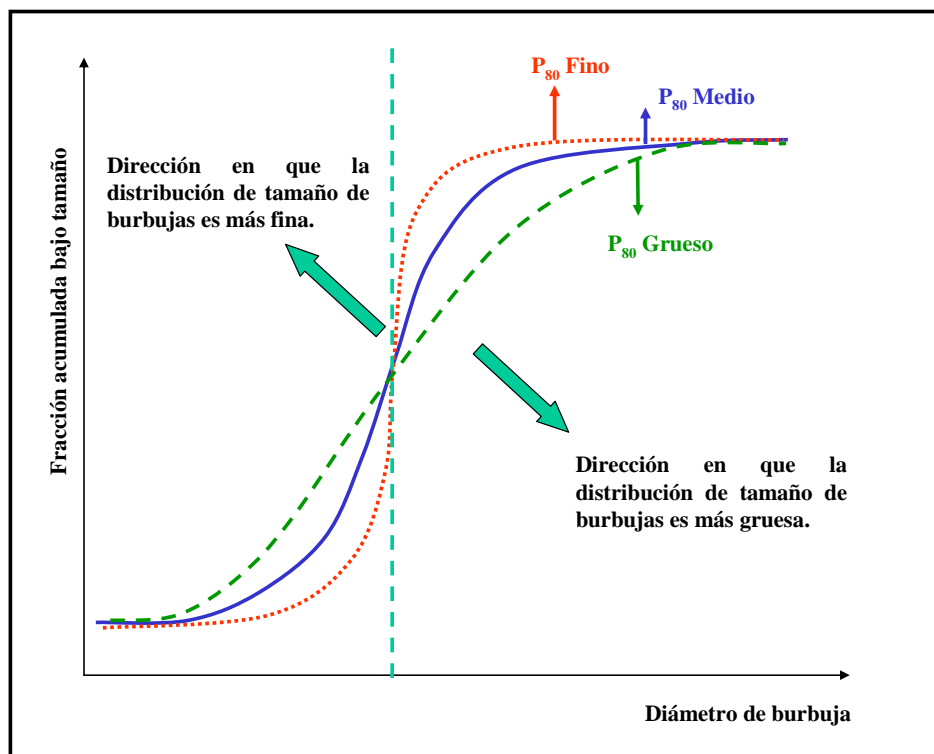


Figura N° 34: Influencia del tamaño de partícula en la DTB

Como se puede observar, para un  $p_{80}$  más fino (curva rojo punteada), la DTB es más fina para  $d_b$  altos y es más gruesa para  $d_b$  pequeños, con respecto a la de  $p_{80}$  medio. De forma contraria, para un  $p_{80}$  más grueso (curva verde con guión), la DTB es más gruesa para  $d_b$  altos y es más fina para  $d_b$  pequeños, también con respecto a la de  $p_{80}$  medio. Esto ocurre tanto para la distribución acumulada en número de burbujas ( $Fu_0$ ) como para la distribución acumulada en superficie ( $Fu_2$ ).

Para ver los efectos señalados, se presentan a continuación distintos gráficos desagregando la información. Se debe tener en cuenta que la distribución de tamaño de

mineral es caracterizada por su  $p_{80}$ , y que los valores mostrados corresponden a los promedios de las 5 distribuciones de tamaño de burbujas (DTB).

En la Figura N° 35 se muestra el porcentaje en número y superficie bajo los diámetros de burbuja 0,2, 0,4 y 0,6<sup>10</sup> [mm]. Como se puede observar para un  $p_{80}$  fino (83  $\mu\text{m}$  en la DTM 2), se obtiene un menor porcentaje acumulado, en número y superficie, para los tres tamaño de burbujas. De forma contraria, para un  $p_{80}$  grueso (265  $\mu\text{m}$  en la DTM 3), se obtiene un mayor porcentaje acumulado, en número y superficie.

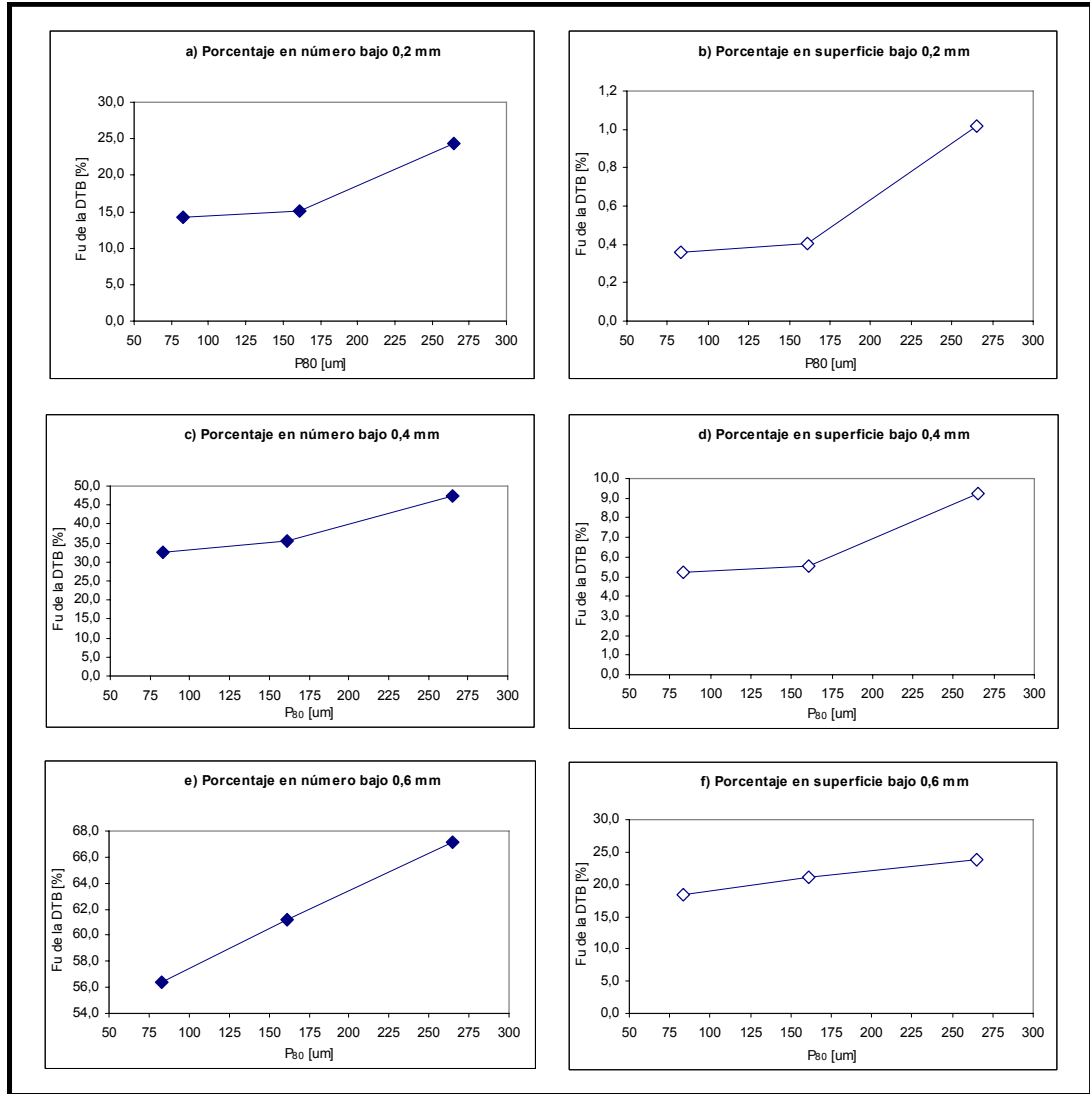


Figura N° 35: Efecto del  $p_{80}$  en la DTB, considerando el porcentaje acumulado en la DTB bajo los diámetros de burbuja 0,2, 0,4, y 0,6 [mm] en número y superficie.

<sup>10</sup> Como se obtiene una respuesta en la DTB de diferentes magnitudes a medida que cambia el  $d_p$ , se definen distintos  $d_b$  fijos de manera arbitraria (0,2, 0,4, 0,6, 1,0, 1,5 y 2,0) con tal de ver la influencia aislada de DTM en un rango que abarque el punto de inflexión mostrado en la Figura N° 34.

En la Figura N° 36 se muestra el porcentaje en número y superficie bajo los diámetros de burbuja 1,0, 1,5 y 2,0 [mm]. Como se puede observar el efecto producido para el  $d_b$  de 1,0 [mm] es distinto a aquellos de 1,5 y 2,0 [mm]. Para el  $d_b$  de 1,0 [mm] y con un  $p_{80}$  fino (83  $\mu\text{m}$ ), se obtiene un menor porcentaje pasante acumulado, en número y superficie. De forma contraria, para un  $p_{80}$  grueso (265  $\mu\text{m}$ ), se obtiene un mayor porcentaje pasante acumulado, en número y superficie. Esto se debe a que en el  $d_b$  de 1,0 [mm], todavía no se alcanza el punto de inflexión, representado por la línea punteada en calipso, en la Figura N° 34.

En función de lo anterior, se puede observar en Figura N° 36, que para los  $d_b$  de 1,5 y 2,0 [mm] y con un  $p_{80}$  fino (83  $\mu\text{m}$ ), se obtiene un mayor porcentaje pasante acumulado, en número y superficie, bajo  $d_b$ . De forma contraria, para un  $p_{80}$  grueso (265  $\mu\text{m}$ ), se obtiene un menor porcentaje pasante acumulado, en número y superficie, bajo  $d_b$ .

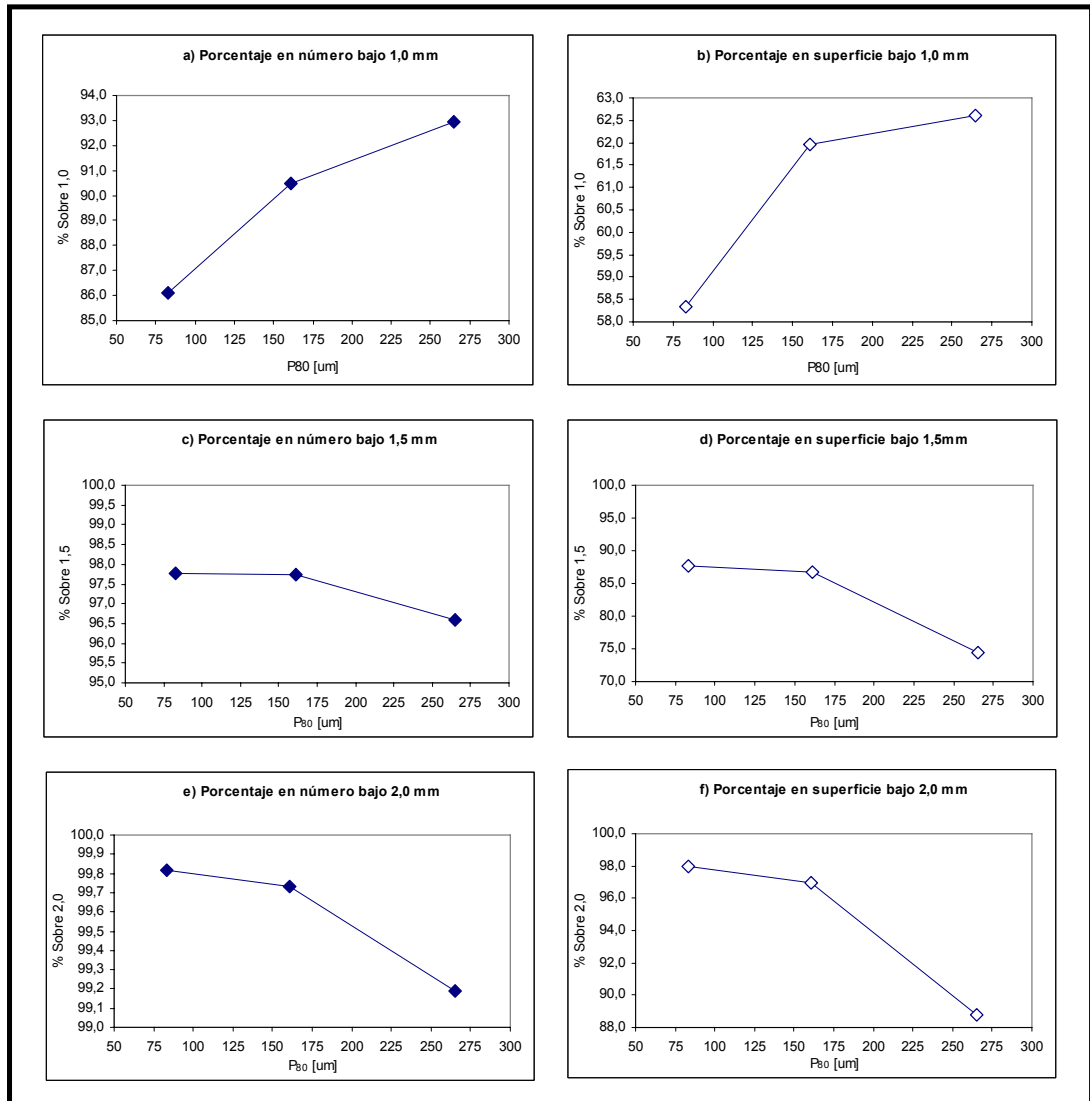


Figura N° 36: Efecto del  $p_{80}$  en la DTB, considerando el porcentaje acumulado en la DTB sobre los diámetros de burbuja 1,0, 1,5, y 2,0 [mm] en número y superficie.

Por otro lado, en la Figura N° 37 se puede apreciar como cambian los valores reales obtenidos de  $\lambda$  y  $d_{32}$  por cada distribución de tamaño de partículas.

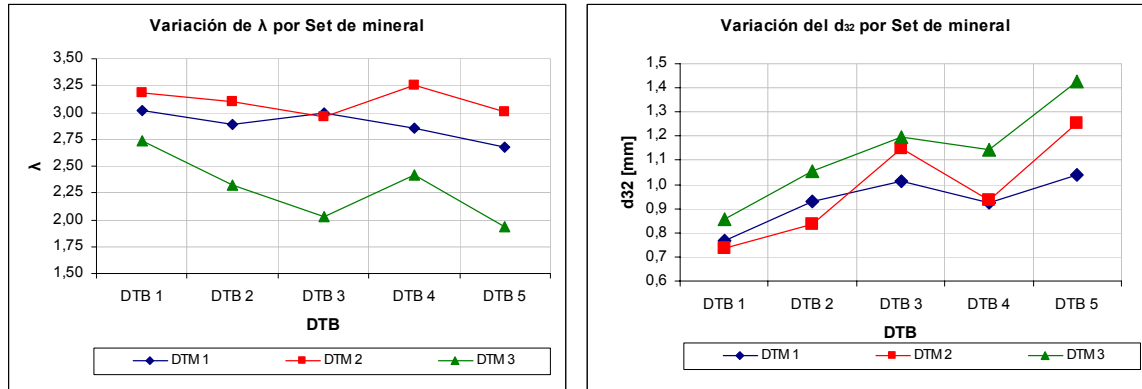


Figura N° 37: Variación de  $\lambda$  y  $d_{32}$  en función de la DTB para cada DTM

Según los gráficos expuestos, es claro ver que para una misma distribución de tamaño de burbujas, el valor de  $\lambda$  se comporta inversamente proporcional a la distribución de tamaño de partículas. Por otro lado el  $d_{32}$  tiende a comportarse directamente proporcional a la distribución de tamaño de partículas, en las DTB más finas.

En el estudio de Gorain et. al [39], los autores desarrollan un modelo empírico general para la predicción del flujo de área superficial de burbujas ( $S_b$ ) para distintos diseños de celdas, mineralogías y escalas, en función de 4 parámetros; la velocidad superficial del gas ( $J_g$ ), la velocidad periférica del impeler ( $N_s$ ), la razón de tipo de impeler (que tiene que ver con el diámetro y la altura), y la distribución de tamaño de partículas representada por el  $p_{80}$ .

Si bien el autor toma en cuenta la influencia del  $p_{80}$  en  $S_b$ , al momento de plantear su modelo empírico, no es claro en definir las razones por las cuales la distribución de tamaños de partículas afecta a la distribución de tamaño de burbujas.

Por otro lado O'Connor et. al. [32], presenta un estudio de influencia de variables físicas y químicas en el tamaño de burbuja. Los autores señalan que la presencia de diferentes tamaños de partícula influyen en el tamaño de burbuja medio. En donde a mayor tamaño de partícula se obtiene un mayor tamaño medio de burbuja, y de forma inversa a menor tamaño de partícula se obtiene un menor tamaño medio de burbuja.

Si bien O'Connor et. al. [32] muestra la influencia del tamaño de partícula en el promedio de tamaño de burbujas, no da una explicación de este fenómeno. Por otro lado recalca que la viscosidad y densidad de la pulpa influyen en el tamaño de burbuja, en donde a aumentos de la densidad o viscosidad, genera un tamaño medio de burbuja mayor. Esto vendría explicado por que a medida que la viscosidad aumenta, el film líquido necesario



para la formación de la burbuja se forma más lento, atrapando más aire en cada burbuja y como consecuencia, se obtienen burbujas más grandes.

Es claro ver que existe un efecto de la distribución de tamaños del mineral (DTM), en la generación de DTB. Aquí se mostró de manera cualitativa ya que corresponde a un resultado complementario que escapa de los alcances de esta tesis, y que requiere de otro grupo de pruebas experimentales para ser estudiado a cabalidad. A juicio del autor, la explicación de la influencia del tamaño de partícula en la distribución de tamaño de burbujas podría explicarse de dos maneras:

- Que la distribución de tamaño de partícula afecte la densidad y/o viscosidad de la pulpa de tal manera que el film líquido necesario para la formación de la burbuja se forma más lento (o rápido), atrapando más (o menos) aire en cada burbuja y por ende afecte la distribución de tamaño de burbujas en su etapa primaria de formación.
- Que la distribución de tamaño de partícula afecte la etapa secundaria de formación de burbujas, en donde ocurre el fenómeno de coalescencia. Este efecto podría producirse bajo el marco en que en presencia de partículas más finas, existe menor superficie expuesta de burbujas a la cual no se han adherido partículas, superficie mediante la cual ocurrirá el fenómeno de coalescencia. Producto de esto deberían disminuir los eventos y por ende el diámetro de burbuja.

Según los resultados expuestos es posible postular que los parámetros del modelo de distribución de tamaño de burbujas, en superficie,  $d_{50}$  y  $\lambda$  no sólo dependen de las variables operacionales  $J_g$  y  $N_s$ , si no que también de la distribución de tamaño de partículas en la alimentación, en este caso representada por el  $p_{80}$ .

### 5.1.4 Influencia de la DTB en la recuperación de Cu

En los siguientes gráficos se muestran los resultados metalúrgicos<sup>11</sup> de las pruebas de flotación realizadas para cada distribución de tamaño de mineral (DTM<sup>12</sup>) versus distintas condiciones, como la velocidad de agitación periférica ( $N_s$ ) o la velocidad superficial del gas ( $J_g$ ), y también parámetros relativos a la distribución de tamaño de burbujas (DTB) como el diámetro de Sauter ( $d_{32}$ ).

Es importante señalar que para los gráficos de  $N_s$ , la variable  $J_g$  no se mantiene constante y viceversa. Esto responde a que la campaña experimental no fue concebida así, por lo que el efecto mostrado en el gráfico no es absoluto a la variación del parámetro señalado, si no que representa un efecto combinado.

#### Velocidad agitación periférica ( $N_s$ )

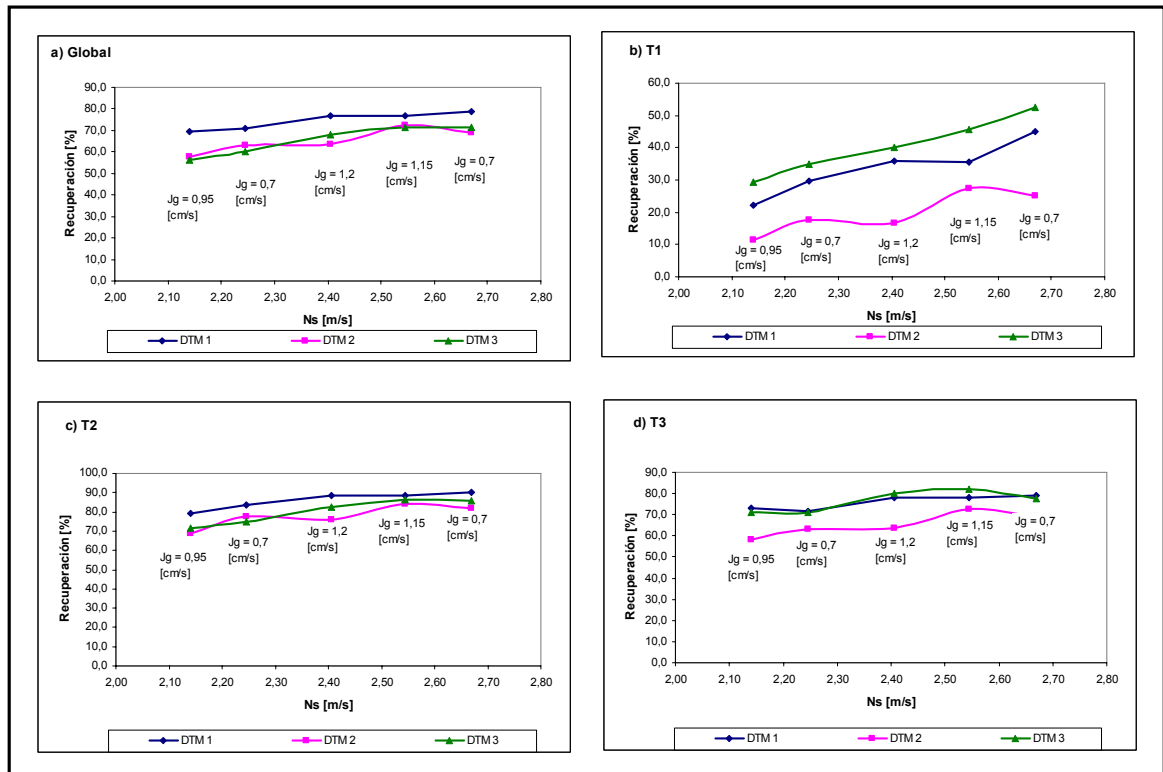


Figura N° 38: Influencia, por tamaño, de la velocidad de agitación periférica ( $N_s$ ), en la recuperación metalúrgica, con la velocidad superficial del gas ( $J_g$ ) variable.

<sup>11</sup> Es importante recordar que el espectro de tamaños del mineral se dividió en tres tramos, T1 +100#, T2 -100# + 400#, y T3 -400#.  
<sup>12</sup> Cabe recordar que las distribuciones de tamaño de mineral (DTM) se dividen en DTM 1, DTM 2 y DTM 3, que correspondería a una granulometría normal (según la caracterización hecha en el sub-capítulo 3.1.4), fina y gruesa respectivamente.

En la Figura N° 38 se puede observar que para las 3 distribuciones de tamaño de mineral la recuperación, global y por cada tamaño, aumenta con el aumento de la velocidad de agitación periférica aunque el efecto con respecto al  $J_g$  no es tan directo.

Esto puede deberse a que el aumento de la agitación contribuye a una mejor dispersión del aire, lo que lleva a un aumento en la cantidad de burbujas y a una disminución de su tamaño. Respaldo lo anterior, es que se observa en la Tabla N° 17 como a medida que disminuye  $N_s$  la distribución de tamaño de burbujas (DTB) comienza a engrosarse aumentando el diámetro de Sauter ( $d_{32}$ ).

Al observar la Figura N° 39 se puede ver que existe una pequeña tendencia a que la ley del concentrado baje, por lo que se puede entender que el aumento de  $N_s$  genera una mejor recuperación debido a un efecto combinado de la mejor dispersión del gas y a un aumento en el arrastre mecánico, hecho que produce la disminución progresiva de la ley.

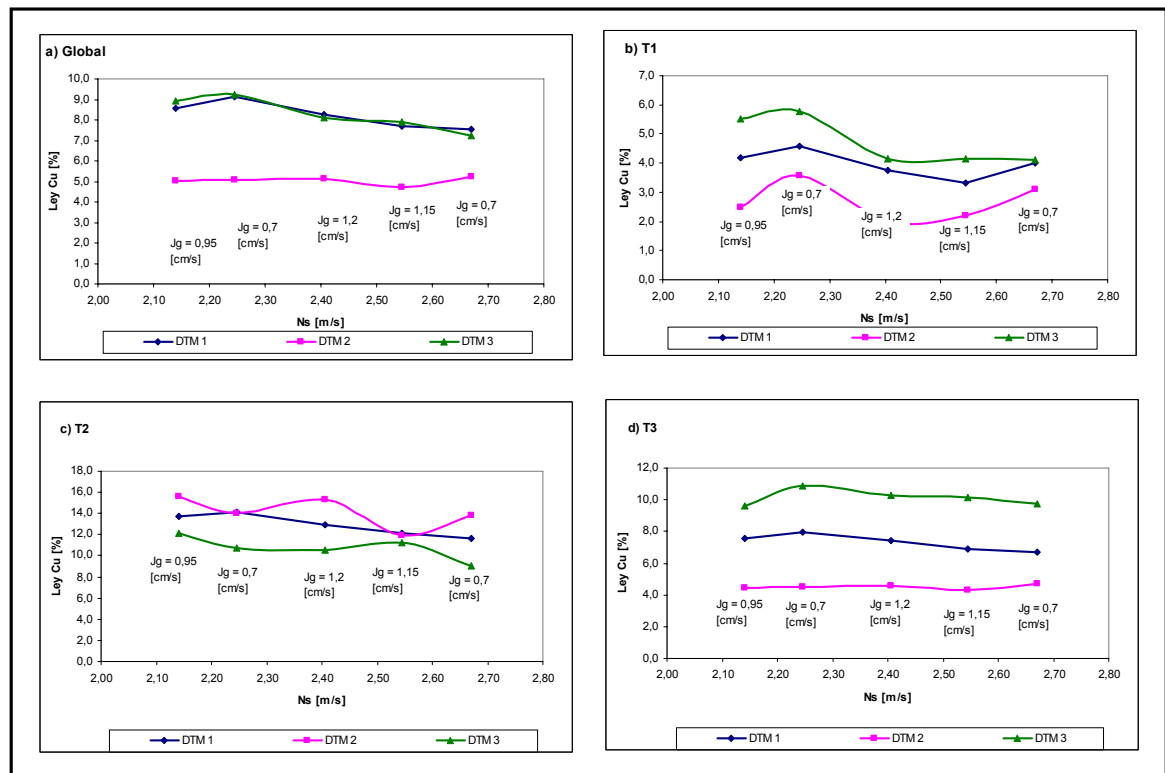


Figura N° 39: Influencia, por tamaño, de la velocidad de agitación periférica ( $N_s$ ), en la ley del concentrado, con la velocidad superficial del gas ( $J_g$ ) variable.

Un aumento significativo en la velocidad de agitación podría provocar una disminución de la recuperación si la agitación fuese tan alta como para romper el agregado burbuja-partícula, lo que generalmente no ocurre. Por otro lado una agitación muy baja podría atender contra la formación y dispersión de burbujas con un diámetro muy alto tal que reduzca significativamente la probabilidad de colisión burbuja-partícula.

## Velocidad superficial del gas ( $J_g$ )

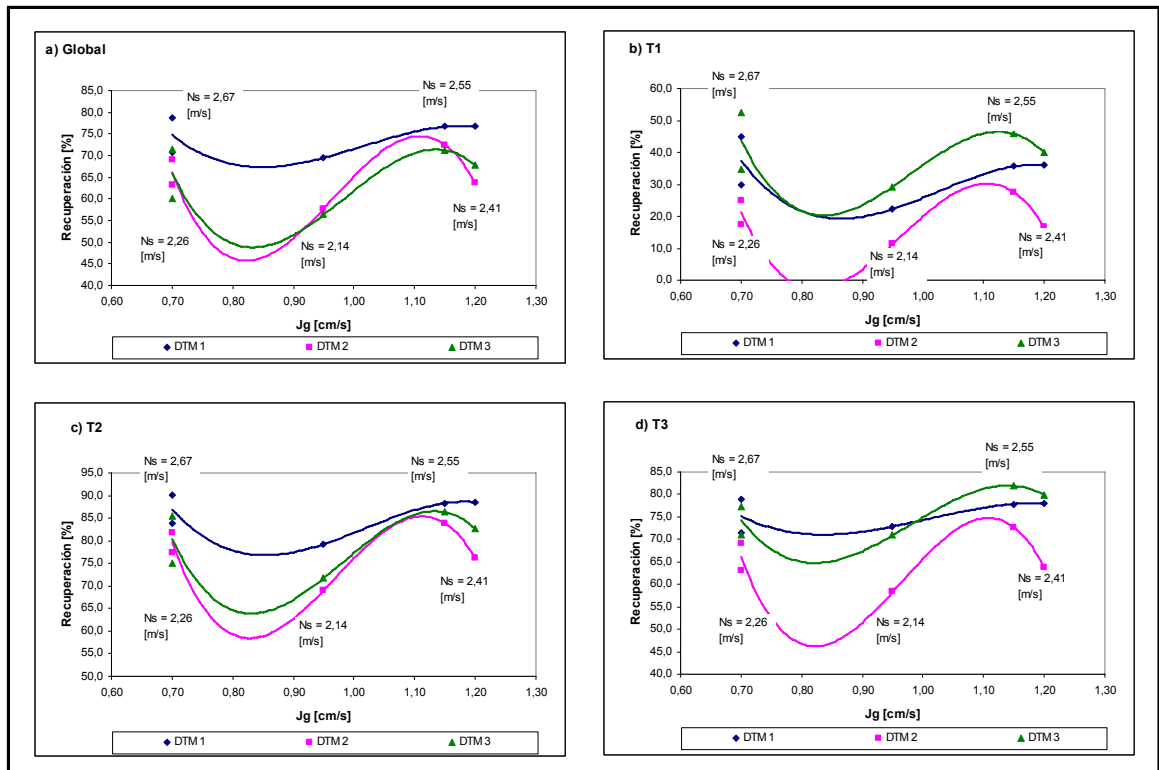


Figura N° 40: Influencia, por tamaño, de la velocidad superficial del gas ( $J_g$ ), en la recuperación metalúrgica, con la velocidad de agitación periférica ( $N_s$ ) variable.

En la Figura N° 40 se aprecia que es difícil asociar una tendencia en la recuperación al variar el flujo de aire, sobre todo si también varía la agitación en la celda. Al parecer a partir de un valor de  $J_g$  de 0,8, la recuperación respondería positivamente ante aumentos del caudal. Pero estos deben ir a la par con una agitación adecuada para no impactar negativamente en la distribución de tamaño de burbujas presente en la celda.

Independiente de lo anterior, se puede decir que según la literatura investigada, al aumentar el flujo de aire la recuperación debería aumentar [2, 37], donde este impacto se nota de forma más importante para partículas gruesas [2].

## Diámetro de Sauter ( $d_{32}$ )

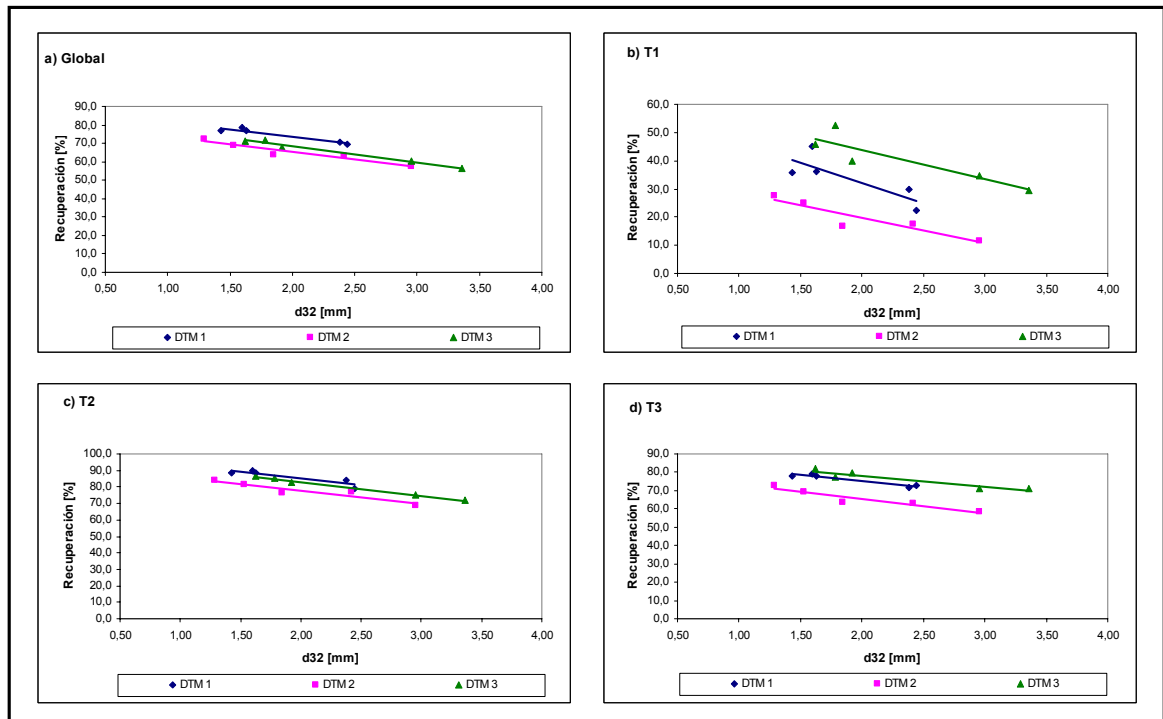


Figura N° 41: Influencia del diámetro de Sauter ( $d_{32}$ ), en la recuperación metalúrgica.

Como se aprecia en la Figura N° 41, al aumentar el tamaño de burbuja, representado por el diámetro de Sauter, la recuperación tiende a bajar, esto tanto para la recuperación Global de mineral, como por tamaño de partículas.

El impacto es mucho más fuerte a medida que el tamaño de partícula crece, así en la Figura N° 41 (d), Tamaño 3 (partículas finas), se ve que el efecto es relativamente pequeño generando una variación de la recuperación de 10 puntos. Mientras que en la Figura N° 41 (b), Tamaño 1 (partículas gruesas), se ve que el efecto es muy importante generando una variación de la recuperación de 20 puntos.

La explicación más directa es que, dada las distribuciones de tamaño de burbujas existentes, aumentar el diámetro de Sauter impactaría negativamente la probabilidad de colisión de la partícula-burbuja, ya que esta es inversamente proporcional al diámetro de burbuja, efecto que al parecer perjudica de mayor forma a las partículas más gruesas.

### 5.1.5 Índices para pronosticar la tendencia de la recuperación

Como se pudo apreciar en los gráficos presentados en el Sub-capítulo anterior (5.1.4), poder pronosticar la recuperación de cobre, ya sea en el global o por cada rango de tamaños ocupado, es bastante difícil cuando se quiere tomar en cuenta sólo algún parámetro, ya sea operacional, como la velocidad superficial del gas ( $J_g$ ) o la velocidad de agitación periférica ( $N_s$ ), o aquellos representativos de la distribución de tamaño de burbujas presente en la celda, como el diámetro de Sauter ( $d_{32}$ ), la superficie total ( $S$ ) o el volumen total ( $V$ ).

Si bien más adelante se desarrollará la búsqueda de modelos que puedan predecir la recuperación en función de distintas variables, es interesante analizar la existencia de algún índice, fácil de calcular, que pueda entregar información que se correlacione con la recuperación de cobre, y así poder predecir su variación en función de la fenomenología del proceso.

Dentro de este marco se definieron siete índices que podrían entregar información correlacionada con la recuperación obtenida, cuya deducción se ejemplifica en el Anexo F del presente documento:

- Índice 1 = 
$$\frac{\sum_i (f_{i2} \cdot d_i^2) N_s \cdot \epsilon_g}{Q_{std}} \quad (49)$$

- Índice 2 = 
$$\epsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right) \quad (50)$$

- Índice 3 = 
$$\sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right) \cdot \epsilon_g \cdot J_g \quad (51)$$

- Índice 4 = 
$$J_g \cdot N_s \cdot \epsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right) \quad (52)$$

- Índice 5 = 
$$N_s \cdot \epsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right) \quad (53)$$

- Índice 6 = 
$$S \cdot \epsilon_g \quad (54)$$

- Índice 7 = 
$$V \cdot \epsilon_g \quad (55)$$

Donde:

- $\sum_i (f_{i2} \cdot d_i^2)$  : Cálculo de la superficie total en función de la fracción retenida en superficie.
- $N_s$  : Velocidad de agitación periférica del impeler.
- $J_g$  : Velocidad superficial del gas.
- $\varepsilon_g$  : Holdup del gas.
- $Q_{std}$  : Caudal estándar inyectado a la celda.
- $\varepsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right)$  : Representa la superficie total del gas asociado a un volumen de celda determinado.
- $S$  : Cálculo de la superficie total en función de la fracción retenida en número.
- $V$  : Cálculo de volumen total en función de la fracción retenida en número.

A partir de los índices definidos se procede a calcular la correlación<sup>13</sup> de cada uno con las recuperaciones metalúrgicas obtenidas. Los resultados se muestran en la Tabla N° 25:

Tabla N° 25: Correlaciones de índices para pronosticar la tendencia de la recuperación.

Correlaciones							
Indice	I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7
Global	0,283	0,604	0,410	0,307	0,321	0,001	0,106
T1	0,001	0,062	0,023	0,047	0,080	0,119	0,164
T2	0,212	0,483	0,310	0,254	0,283	0,010	0,137
T3	0,021	0,202	0,193	0,138	0,101	0,060	0,133

Como se puede ver, los índices propuestos presentan malas correlaciones para las recuperaciones de los tamaños extremos (T1 y T3), mientras que para la recuperación global y del T2 se puede observar que encontramos en I2 algún grado de correlación.

<sup>13</sup> Específicamente se calcula el cuadrado del coeficiente de correlación del momento del producto de Pearson.

Como fue establecido en los Sub-capítulos 5.1.2 y 5.1.3, la granulometría del mineral influyó en las distribuciones de tamaño de burbujas (DTB) obtenidas. Es por esto que se estudió probar los mismos índices propuestos pero multiplicados por el  $p_{80}$ , enfocándose en ver la respuesta de los tamaños extremos (T1 y T3). En la Tabla N° 26, se pueden ver los resultados obtenidos:

Tabla N° 26: Correlaciones de índices para pronosticar la tendencia de la recuperación incluyendo el  $p_{80}$ .

Indice	Correlaciones						
	I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7
Global	0,105	0,390	0,319	0,269	0,261	0,000	0,066
T1	0,228	0,820	0,452	0,506	0,698	0,103	0,021
T2	0,031	0,491	0,371	0,344	0,357	0,005	0,035
T3	0,088	0,845	0,695	0,559	0,515	0,093	0,011

Con la inclusión del  $p_{80}$  en los índices, se puede observar que sube absolutamente la correlación de algunos de éstos, asociados a los tamaños extremos (T1 y T3), destacándose las respuestas obtenidas nuevamente en I2 llegando a valores del orden de 0,8 en su correlación.

Así como aumenta la correlación obtenida para las recuperaciones de T1 y T3, se observa que la correlación de T2 disminuye en muy poco, pero aquellas asociadas a la recuperación global disminuyen significativamente.

En función de los resultados obtenidos, se define el índice 2 como aquel que entrega la mayor información acerca de la tendencia que pudiese tomar las recuperaciones. Donde para la recuperación global y la del tamaño 2 no se pudo correlacionar satisfactoriamente, y para la recuperaciones del tamaño 1 y 3 se usará  $I2' = p_{80} \cdot I2$ .

En las Figura N° 42 y Figura N° 43 se pueden observar los resultados asociados a I2 e I2' gráficamente. En el Anexo F se muestran los datos ocupados para generar las correlaciones establecidas en el presente Capítulo.



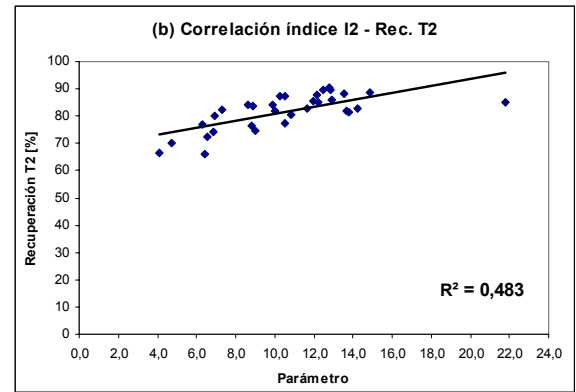
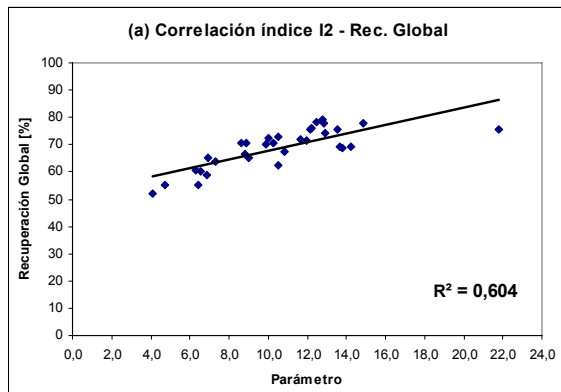


Figura Nº 42: Correlaciones obtenidas para I2 asociada a la recuperación global (a) y la recuperación del tamaño 2 (b).

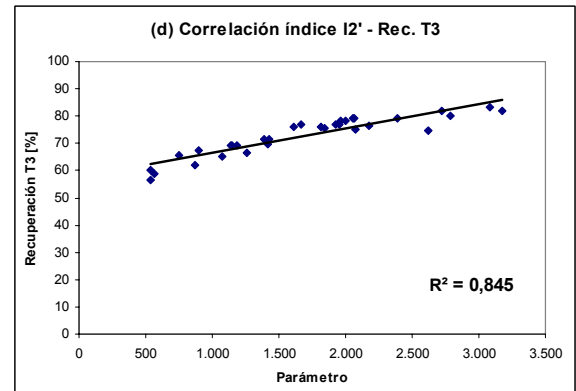
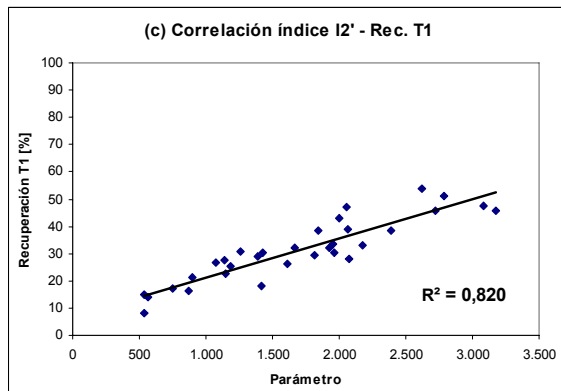


Figura Nº 43: Correlaciones obtenidas para I2' asociada a la recuperación del tamaño 1 (c) y la recuperación del tamaño 3 (d).

## 5.2 MODELACIÓN

### 5.2.1 Modelamiento de la recuperación

Para predecir la recuperación en función de las variables operacionales  $J_g$  y  $N_s$ , y de los parámetros relacionados con la distribución de tamaño de burbujas, se procedió a desarrollar expresiones de modelos para reproducir con la mayor exactitud posible los valores de la recuperación esperable.

Por otro lado el ideal sería modelar<sup>14</sup> las 4 recuperaciones, Global, T1 (+100#), T2 (-100# + 400#) y T3 (-400#); con una sola estructura, para lo cual se realizará el procedimiento de modelación de manera independiente para cada recuperación por separado.

A partir de lo anterior se pretende buscar aquellas variables que se repiten en las distintas estructuras arrojadas por la metodología de modelamiento. Así se obtendría aquellas variables que aportan la información necesaria para generar una estructura única que sea capaz de reproducir los resultados asociados a las cuatro recuperaciones.

El conjunto de datos utilizados quedan expresados en la Tabla N° 27, en la cual se muestran las 15 pruebas, en duplicado, de la campaña experimental realizada, más 2 pruebas de repetición para la estimación del error experimental.

#### Regresión por pasos

Como ya se expresó en el Sub-capítulo 3.4.1, el propósito de este método es encontrar una estructura de un modelo lineal en los parámetros, que prediga el comportamiento de la variable estudiada. El método consiste en ir seleccionando paso a paso las componentes que forman parte del modelo, a partir de variables candidatas a incorporarse a dicho modelo.

En la etapa de selección, el modelo que se propone se somete a pruebas de comportamiento en base a las cuales se decide la inclusión o no de la variable candidata a entrar al modelo final, así mismo el método permite la determinación del conjunto de coeficientes que mejor reproducen la variable modelada. El detalle del algoritmo se presenta en el Anexo B.

---

<sup>14</sup> Como se describe en este capítulo, la metodología ocupada para generar los modelos corresponde a la Regresión por pasos.

Tabla N° 27: Datos utilizados para el modelamiento de las recuperaciones.

prueba	Recuperación				P80	Jg	Ns	S	V	$\epsilon_g \cdot \Sigma(f_{i3}/d_i)$	d <sub>32</sub>	$\epsilon_g$ cal	Sb
	Global	T1	T2	T3									
	%	%	%	%									
1	78,22	43,05	89,46	78,36	161	0,7	2,67	0,9	12	12,5	0,77	0,10	54,3
2	79,22	46,84	90,65	79,31	161	0,7	2,67	1,0	13	12,8	0,76	0,10	55,1
3	77,95	38,25	88,49	79,39	161	1,2	2,55	1,3	19	14,9	0,91	0,14	76,1
4	75,36	32,96	88,14	76,36	161	1,2	2,55	1,4	23	13,6	0,95	0,13	72,5
5	75,72	33,27	87,65	76,87	161	1,2	2,41	2,0	34	12,2	1,03	0,13	70,2
6	77,77	38,74	89,47	79,06	161	1,2	2,41	1,6	27	12,9	1,00	0,13	72,2
7	70,75	30,36	83,50	71,31	161	0,7	2,25	1,3	20	8,9	0,92	0,08	45,8
8	70,73	28,99	84,17	71,55	161	0,7	2,25	1,4	22	8,7	0,93	0,08	45,3
9	72,62	26,40	82,08	75,82	161	1,0	2,14	0,9	15	10,0	1,00	0,10	56,7
10	66,37	18,05	76,46	69,90	161	1,0	2,14	1,6	29	8,6	1,10	0,09	51,7
11	68,88	22,59	81,63	69,10	83	0,7	2,67	0,8	10	13,8	0,73	0,10	57,3
12	69,18	27,41	81,98	69,10	83	0,7	2,67	0,8	11	13,7	0,73	0,10	57,1
13	75,56	29,60	85,14	76,08	83	1,2	2,55	0,9	11	21,8	0,75	0,16	92,1
14	69,36	25,33	82,66	69,28	83	1,2	2,55	1,5	23	14,2	0,93	0,13	74,5
15	62,28	16,11	77,57	61,98	83	1,2	2,41	2,1	38	10,5	1,10	0,12	65,3
16	65,15	17,06	74,88	65,79	83	1,2	2,41	1,9	39	9,0	1,19	0,11	60,3
17	67,31	21,06	80,35	67,27	83	0,7	2,25	1,2	17	10,8	0,83	0,09	50,5
18	58,98	13,96	74,37	58,97	83	0,7	2,25	2,1	37	6,9	1,04	0,07	40,3
19	60,15	14,73	72,28	60,27	83	1,0	2,14	1,9	39	6,5	1,25	0,08	45,6
20	55,37	8,03	65,88	56,36	83	1,0	2,14	2,5	53	6,4	1,26	0,08	45,3
21	72,77	51,28	87,24	79,87	265	0,7	2,67	1,1	15	10,5	0,84	0,09	49,9
22	70,26	53,85	83,96	74,79	265	0,7	2,67	1,1	16	9,9	0,87	0,09	48,3
23	71,66	45,80	85,39	82,01	265	1,2	2,55	1,4	24	12,0	1,01	0,12	68,1
24	70,78	45,70	87,24	81,81	265	1,2	2,55	1,7	31	10,3	1,10	0,11	62,8
25	72,02	47,68	82,77	83,06	265	1,2	2,41	0,5	9	11,6	1,06	0,12	67,9
26	63,65	32,30	82,54	76,70	265	1,2	2,41	1,2	27	7,3	1,33	0,10	54,2
27	65,07	38,64	80,19	75,74	265	0,7	2,25	0,8	15	6,9	1,04	0,07	40,6
28	55,21	30,93	69,97	66,50	265	0,7	2,25	1,6	33	4,7	1,26	0,06	33,4
29	60,63	32,08	77,03	76,72	265	1,0	2,14	0,6	12	6,3	1,28	0,08	44,6
30	52,05	26,48	66,41	65,08	265	1,0	2,14	3,5	93	4,1	1,58	0,06	36,1
31	75,95	30,43	85,07	78,22	161	1,2	2,41	1,6	27	12,2	1,02	0,13	70,4
32	74,22	28,18	85,93	74,95	161	1,2	2,41	1,6	27	12,9	0,99	0,13	72,5

### Variables candidatas

La calidad del modelo encontrado dependerá fundamentalmente de la acertada proposición y elección de las variables candidatas. Estas deben contener variables simples, como por ejemplo la velocidad superficial del gas o la velocidad de agitación periférica del impeler, y variables de la fenomenología del proceso modelado. En la Tabla N° 28 se listan las variables candidatas propuestas.

### Modelo seleccionado

Una vez que se proponen las variables candidatas, se procede a aplicar el algoritmo de regresión por pasos, descrito en el Anexo B. Mediante este método se encuentra un modelo para cada recuperación.

Tabla N° 28: Variables candidatas utilizadas para generar los modelos de recuperación.

Variable	Estructura	Variable	Estructura
X1	P80	X26	$x6^3$
X2	Jg	X27	$x7^3$
X3	Ns	X28	$x8^3$
X4	Ley Alimentación	X29	$x9^3$
X5	S	X30	$x10^3$
X6	V	X31	$x1^{-1}$
X7	d32	X32	$x2^{-1}$
X8	$\epsilon_g \cdot \Sigma (fi3/di)$	X33	$x3^{-1}$
X9	$\epsilon_g$	X34	$x4^{-1}$
X10	Sb	X35	$x5^{-1}$
X11	$x1^2$	X36	$x6^{-1}$
X12	$x2^2$	X37	$x7^{-1}$
X13	$x3^2$	X38	$x8^{-1}$
X14	$x4^2$	X39	$x9^{-1}$
X15	$x5^2$	X40	$x10^{-1}$
X16	$x6^2$	X41	$x1^{-2}$
X17	$x7^2$	X42	$x2^{-2}$
X18	$x8^2$	X43	$x3^{-2}$
X19	$x9^2$	X44	$x4^{-2}$
X20	$x10^2$	X45	$x5^{-2}$
X21	$x1^3$	X46	$x6^{-2}$
X22	$x2^3$	X47	$x7^{-2}$
X23	$x3^3$	X48	$x8^{-2}$
X24	$x4^3$	X49	$x9^{-2}$
X25	$x5^3$	X50	$x10^{-2}$

### Modelamientos por tipo de Recuperación

Al realizar los modelamientos por cada recuperación (global, tamaño 1, tamaño 2 y tamaño 3), como ya se explicó, se busca definir aquellas variables, del conjunto mostrado en la Tabla N° 28, que se repiten en las estructuras arrojadas por la metodología de la modelación.

Así es, como se encuentran los modelos para cada recuperación definidos por las siguientes estructuras:

$$R Gb(\%) = C_0 + C_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right)} + C_2 \cdot \frac{1}{p_{80}^2} + C_3 \cdot \frac{1}{Ley_A^2} + C_4 \cdot \frac{1}{d_{32}^2} \quad (56)$$

$$R T1(\%) = C_0 + C_1 \cdot \frac{1}{p_{80}} + C_2 \cdot N_s^2 + C_3 \cdot d_{32}^3 + C_4 \cdot p_{80}^3 \quad (57)$$

$$R T2(\%) = C_0 + C_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right)} + C_2 \cdot \frac{1}{p_{80}^2} + C_3 \cdot \frac{1}{d_{32}^2} \quad (58)$$

$$R T3(\%) = C_0 + C_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right)} + C_2 \cdot \frac{1}{p_{80}^2} + C_3 \cdot \left[ \varepsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right) \right]^3 + C_4 \cdot \frac{1}{Ley_A^2} \quad (59)$$

En la Tabla N° 29 se muestran los valores de las constantes de las estructuras, además se aprecian datos de correlación, error<sup>15</sup>, y resultados de los test de varianza del parámetro sobre parámetro.

Tabla N° 29: Resumen de datos asociados a la modelación de las recuperaciones

Constantes	Modelo			
	GB	T1	T2	T3
C0	90,6	17,7	95,0	82,8
C1	-123,9	-1.866,9	-118,5	-103,6
C2	-87.411	5	-60.379	-77.718
C3	-6,65	-4,78	3,01	6,53E-04
C4	2,88	4,49E-07		5,69
Test	GB	T1	T2	T3
$\sigma_{\theta/\theta} X0$	0,03	0,37	0,03	0,03
$\sigma_{\theta/\theta} X1$	0,08	0,18	0,10	0,11
$\sigma_{\theta/\theta} X2$	0,10	0,19	0,11	0,14
$\sigma_{\theta/\theta} X3$	0,21	0,27	0,44	0,39
$\sigma_{\theta/\theta} X4$	0,36	0,38		0,29
Otros	GB	T1	T2	T3
Correlación	0,956	0,918	0,909	0,933
Error	1,6	3,6	2,1	2,0

De las estructuras encontradas para las cuatro recuperaciones, se observa que son capaces de reproducir los datos con una muy buena correlación, del orden de 0,93, y bajos errores  $\pm 2 - 4$  puntos porcentuales. Por otro lado se aprecia que al realizar el test  $\sigma_{\theta/\theta}$ , se cumple el criterio (menor a 0,5) para los resultados de todas las variables.

<sup>15</sup> El error calculado para las correlaciones corresponde al error estándar entregado por la estimación lineal múltiple, que ocupa el método de mínimos cuadrados.

Además, de los modelos encontrados se puede interpretar que las variables de superficie total  $\left(\varepsilon_g \cdot \sum_i \left(\frac{f_{i3}}{d_i}\right)\right)$  y  $p_{80}$ , están bastante correlacionadas con las recuperaciones, global del tamaño 2 y 3, generando la base sobre la que se construyen los modelos de predicción, ya que estas fueron las primeras en entrar.

Por esto último es que se decide imponer para el modelo del tamaño 1 estas variables y luego aplicar el método de regresión por pasos para desarrollar un modelo acorde con el resto de las recuperaciones. Así es que se encuentra el modelo propuesto en la ecuación 60:

$$RT1(\%) = C_0 + C_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon_g \cdot \sum_i \left(\frac{f_{i3}}{d_i}\right)} + C_2 \cdot \frac{1}{P_{80}^2} + C_3 \cdot N_s^3 + C_4 \cdot P_{80}^3 \quad (60)$$

El modelo planteado posee una correlación de 0,903 con un error de 3,9 puntos porcentuales. Las constantes se muestran en la Tabla N° 30.

Tabla N° 30: Resumen de datos asociados a la modelación de la recuperación del tamaño 1

Modelo	C0	C1	C2	C3	C4
T1	21,2	-74,7	-97.058	1,39	5,96E-07

Los detalles de las iteraciones que proporcionan las estructuras seleccionadas se encuentra en el Anexo G del presente documento.

Como gran parte de la estimación de los modelos viene dada por la presencia de las variables de superficie total y el  $p_{80}$ , se decide buscar una estructura única capaz de reproducir los resultados de las cuatro recuperaciones. Para esto se propone partir con una estructura definida por las variables señas y complementar con variables asociadas principalmente a la recuperación del tamaño 1, con tal que se cumplan los siguientes criterios:

- Que sea un modelo de variables relativamente independiente (correlaciones entre las variables menores a 0,7).
- Se cumpla en gran parte de las constantes el test de varianza del parámetro sobre parámetro.
- Reproduzca las recuperaciones tanto a nivel global como por tamaño.

## 1<sup>ra</sup> Iteración

- Estructura : 
$$R(\%) = C_0 + C_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right)} + C_2 \cdot \frac{1}{p_{80}^2} .$$
- Constantes, errores y Test : Tabla N° 31.
- Matriz de correlación : Tabla N° 32.

Tabla N° 31: Resumen de datos asociados a la modelación general 1<sup>ra</sup> Iteración

Constante	Modelo			
	GB	T1	T2	T3
C0	89,0	54,0	99,9	90,7
C1	-157,8	-114,6	-136,6	-105,7
C2	-51.444	-163.708	-57.459	-102.177
Test	GB	T1	T2	T3
$\sigma_{\theta/\theta} X0$	0,01	0,07	0,01	0,02
$\sigma_{\theta/\theta} X1$	0,06	0,24	0,07	0,10
$\sigma_{\theta/\theta} X2$	0,15	0,13	0,13	0,08
Otros	GB	T1	T2	T3
Correlación	0,905	0,695	0,889	0,880
Error	2,31	6,62	2,27	2,55

Tabla N° 32: Matriz de correlaciones estructura general 1<sup>ra</sup> Iteración

Matriz	X1	X2
X1	1,00	0,03
X2	0,03	1,00

Como ya se expuso, estas variables aportan gran información para la preedición de las recuperaciones global, tamaño 2 y tamaño 3. Como se aprecia las constantes asociadas a la recuperación del tamaño 1 son menores que su símil del resto de las recuperaciones, ya que para este tamaño la regresión le asocia menos peso, producto que se encuentran menos correlacionadas.

## 2<sup>da</sup> Iteración

- Estructura : 
$$R(\%) = C_0 + C_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right)} + C_2 \cdot \frac{1}{P_{80}^2} + C_3 \cdot N_s^3$$
- Constantes, errores y Test : Tabla N° 33.
- Matriz de correlación : Tabla N° 34.

Tabla N° 33: Resumen de datos asociados a la modelación general 2<sup>da</sup> Iteración

Constante	Modelo			
	GB	T1	T2	T3
C0	89,0	15,7	94,2	86,5
C1	-157,7	-16,0	-121,7	-94,9
C2	-51.431	-150.577	-55.476	-100.742
C3	0,00	1,90	0,29	2,08E-01
Test	GB	T1	T2	T3
$\sigma_{\theta/\theta} X0$	0,04	0,46	0,04	0,05
$\sigma_{\theta/\theta} X1$	0,08	<b>1,63</b>	0,10	0,15
$\sigma_{\theta/\theta} X2$	0,15	0,10	0,13	0,08
$\sigma_{\theta/\theta} X3$	<b>91,21</b>	0,18	<b>0,55</b>	<b>0,89</b>
Otros	GB	T1	T2	T3
Correlación	0,905	0,859	0,900	0,885
Error	2,35	4,58	2,18	2,54

Tabla N° 34: Matriz de correlaciones estructura general 2<sup>da</sup> Iteración

Matriz	X1	X2	X3
X1	1,00	0,03	0,43
X2	0,03	1,00	0,00
X3	0,43	0,00	1,00

Como se aprecia al agregar información sobre la agitación, la correlación del modelo asociado a la recuperación del tamaño 1 aumenta considerablemente, de 0,7 a 0,86. Mientras que para los otros tamaños su efecto es mucho menor. Este efecto esta en concordancia con la investigación hecha por Pyke [2], quien muestra que a medida que aumenta el tamaño de partícula, el efecto en la cinética y la probabilidad de flotación de aumentos en la agitación, es más significativo.

Esto podría deberse a que a medida que aumenta la agitación, los agregados de burbuja-partícula más finos se vuelven más inestables.



Si bien se producen mejoras en la correlación del tamaño 1, se aprecia que aparecen cuatro chequeos del test de varianza del parámetro sobre parámetro que no cumplen con el criterio (menor a 0,5). Como se verá a continuación al incorporar otra variable al modelo este problema logra reducirse.

### 3<sup>ra</sup> Iteración

- Estructura : 
$$R(\%) = C_0 + C_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right)} + C_2 \cdot \frac{1}{p_{80}^2} + C_3 \cdot N_s^3 + C_4 \cdot p_{80}^3.$$
- Constantes, errores y Test : Tabla N° 35.
- Matriz de correlación : Tabla N° 36.

Tabla N° 35: Resumen de datos asociados a la modelación general 3<sup>ra</sup> Iteración

Constante	Modelo			
	GB	T1	T2	T3
C0	85,6	21,0	92,7	89,2
C1	-120,6	-73,5	-106,2	-124,8
C2	-85.859	-97.122	-69.901	-72.975
C3	0,32	1,41	0,42	-0,05
C4	-3,82E-07	5,93E-07	-1,60E-07	3,08E-07
Test	GB	T1	T2	T3
$\sigma\theta/\theta$ X0	0,03	0,30	0,04	0,04
$\sigma\theta/\theta$ X1	0,10	0,38	0,14	0,13
$\sigma\theta/\theta$ X2	0,10	0,21	0,16	0,16
$\sigma\theta/\theta$ X3	0,44	0,23	0,41	<b>3,64</b>
$\sigma\theta/\theta$ X4	0,20	0,29	<b>0,58</b>	0,32
Otros	GB	T1	T2	T3
Correlación	0,951	0,902	0,910	0,916
Error	1,71	3,88	2,11	2,21

Tabla N° 36: Matriz de correlaciones estructura general 3<sup>ra</sup> Iteración

Matriz	X1	X2	X3	X4
X1	1,00	0,03	0,43	0,18
X2	0,03	1,00	0,00	0,57
X3	0,43	0,00	1,00	0,00
X4	0,18	0,57	0,00	1,00

Como se aprecia, al agregar un segundo término asociado al  $p_{80}$ , la correlación de todas las recuperaciones aumenta, manteniendo la independencia (que siempre es relativa) de las variables y disminuyendo los chequeos del test de varianza del parámetro sobre parámetro a dos casos.

De la matriz de correlación se puede deducir que las variables más correlacionadas serían las segunda y cuarta, lo cual es lógico ya que se basan en la misma variable ( $p_{80}$ ). Por otro lado aparece un cierto grado de dependencia (correlación de 0,43) entre la primera y tercera variable. Lo cual también es lógico ya que la agitación influye en la formación de la distribución de tamaño de burbujas, información con la cual se construye el índice de superficie total.

Por un lado para la recuperación del tamaño 3 vemos que la variable ( $N_s^3$ ) no cumple con el criterio, lo cual ya fue explicado y es razonable, pero la regresión se encarga de asociarle un valor pequeño a dicha constante (0,06) manteniendo su equilibrio al momento de pronosticar la recuperación del tamaño 3.

En las Figura N° 44 y Figura N° 45 se muestran los resultados de las recuperaciones reales y las predichas por los modelos.

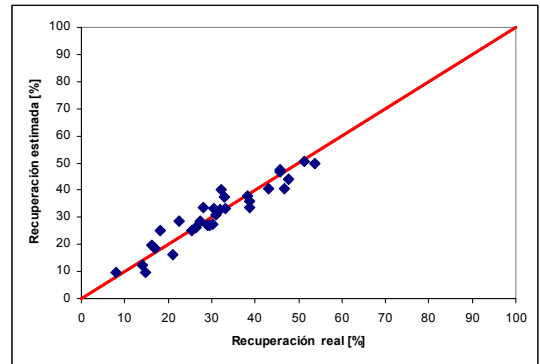
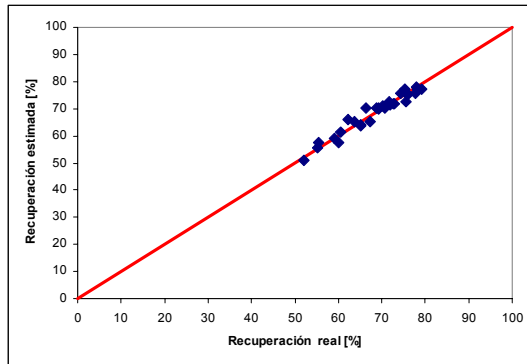


Figura N° 44: Correlación de la estructura encontrada. A la izquierda se aprecia la recuperación global, mientras que al lado derecho se aprecia la recuperación del tamaño 1 (+100#).

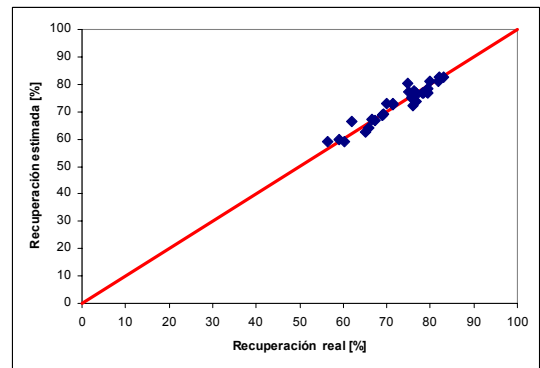
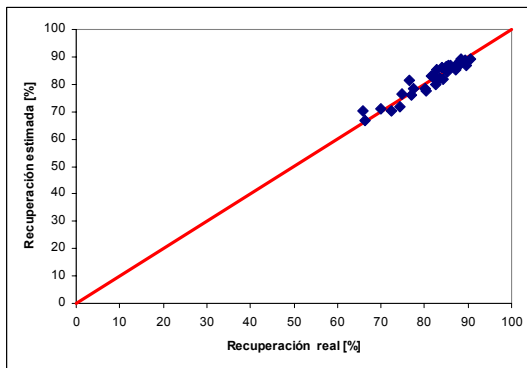


Figura N° 45: Correlación de la estructura encontrada. A la izquierda se aprecia la recuperación del tamaño 2 (-100# +400#), mientras que al lado derecho se aprecia la recuperación del tamaño 3 (-400#).

## 5.2.2 Análisis de parámetros del modelo seleccionado

El modelo seleccionado se construye a partir de las siguientes variables:

- Tamaño característico de la distribución de mineral ( $p_{80}$ ).
- Velocidad de agitación ( $N_s$ ).
- Superficie parcial del gas  $\left( \epsilon_g \cdot \sum_{i=1}^n \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right) \right)$

A partir de las mediciones de cada variable en las pruebas de flotación, se define un rango de funcionamiento dentro de los cuales el modelo fue concebido. Estas se aprecian en la Tabla N° 37.

Tabla N° 37: Rango de evaluación para las variables del modelo de recuperación

Datos	P80	Ns	$\epsilon_g \cdot \Sigma(f_{i3}/d_i)$
	um	m/s	1/mm
min	83	2,14	4,1
max	265	2,67	21,8
media	169	2,40	10,5

A continuación se realizará un análisis en donde se varía un sólo parámetro mientras que el resto se deja en su valor medio.

Es importante, para el análisis que se efectuará más adelante, recordar que existen 4 recuperaciones que predice el modelo. Primero está la recuperación global de cobre, y luego se encuentran las recuperaciones por rango de tamaño, T1, T2 y T3. El tamaño T1 corresponde al mineral que se encuentra sobre la malla 100<sup>16</sup> (150  $\mu$ m), la del tamaño T2 corresponde al mineral que se encuentra entre la malla 100 y la 400 (38  $\mu$ m), y por último el mineral asociado al tamaño T3 es aquel que se encuentra bajo la malla 400.

<sup>16</sup> Esta malla y las otras nombradas corresponden a la escala de American Standard ASTM

## Respuesta al $p_{80}$

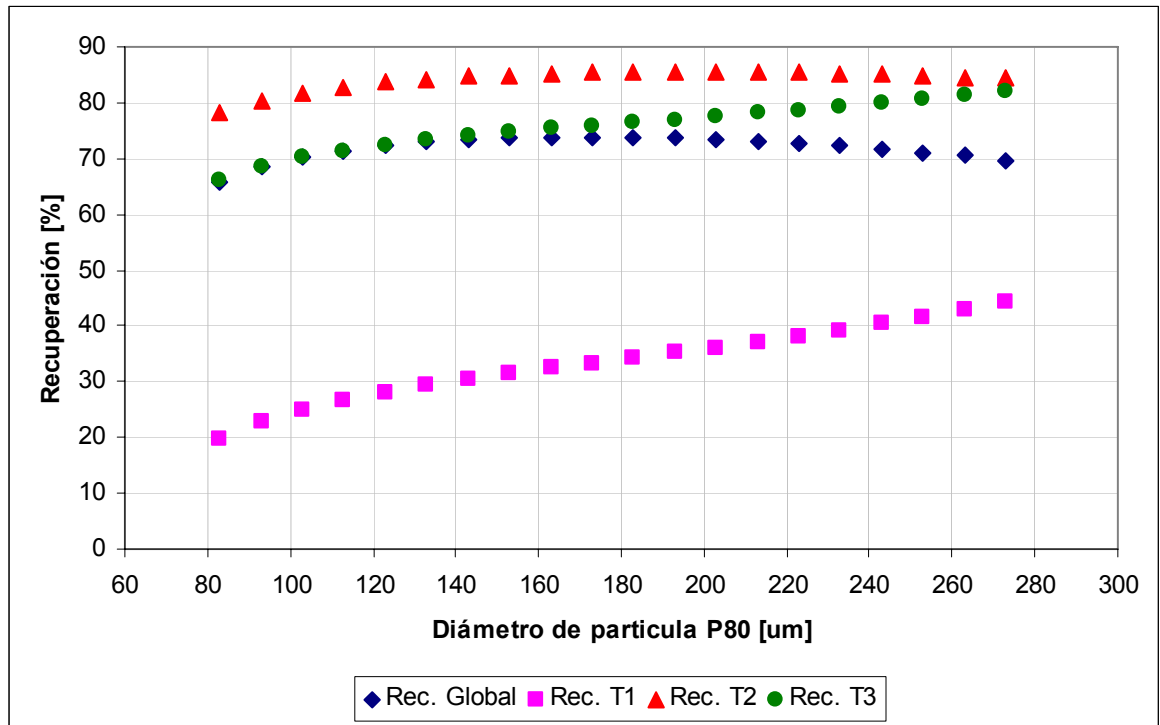


Figura N° 46: Respuesta del modelo de recuperación a la variación del  $p_{80}$

De la Figura N° 46 se puede realizar los siguientes comentarios:

- Como es de esperar, la recuperación global presenta una parábola invertida, en donde al engrosar o afinar la granulometría del mineral, baja la recuperación.
- Al realizar el análisis por tamaño, vemos que para los tamaños extremos al aumentar el  $p_{80}$  aumenta la recuperación.
- Este último efecto hay que entenderlo dentro del marco de condiciones en que se dieron las pruebas, ya que en aquellas con mineral fino,  $p_{80}$  bajo, la flotación se desarrolló en condiciones adversas para la flotación de mineral fino y grueso<sup>17</sup>, mientras que las flotaciones de mineral grueso, fueron desarrolladas en condiciones muy favorables para la recuperación de mineral fino y grueso.
- En función de lo anterior, al aumentar el  $p_{80}$  aumenta la recuperación por tamaños, sobre todo para minerales finos y gruesos, producto que el aumento de granulometría, a iguales condiciones de flujo de aire y agitación, impacta en la distribución de tamaño de burbujas, mejorando el marco para la recuperación de mineral de los tamaños descritos.

<sup>17</sup> Esto se desarrolló y explicó en el Sub-capítulo 5.1.3

## Respuesta al $N_s$

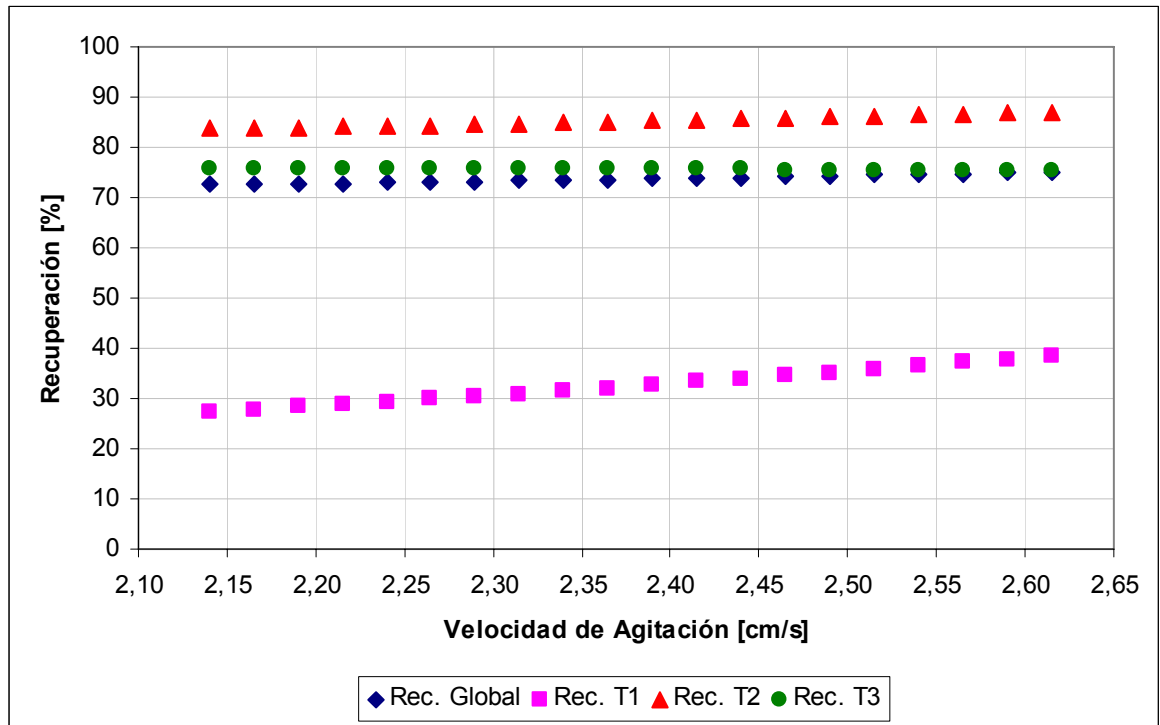


Figura N° 47: Respuesta del modelo de recuperación a la variación del  $N_s$

De la Figura N° 47 se puede realizar los siguientes comentarios:

- Al aumentar la agitación en la celda, aumenta la recuperación, ya sea global como por tamaños. Se aprecia que el efecto es mayor a medida que aumenta el tamaño de partículas.
- Este efecto está en concordancia con la investigación hecha por Pyke [2], quien muestra que a medida que aumenta el tamaño de partícula, el efecto en la cinética y la probabilidad de flotación de aumentos en la agitación, es más significativo.
- Esto podría deberse a que a medida que aumenta la agitación, los agregados de burbuja-partícula más finos se vuelven más inestables.

Respuesta al índice referente a la superficie total del gas en la celda  $\left( \varepsilon_g \cdot \sum_{i=1}^n \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right) \right)$

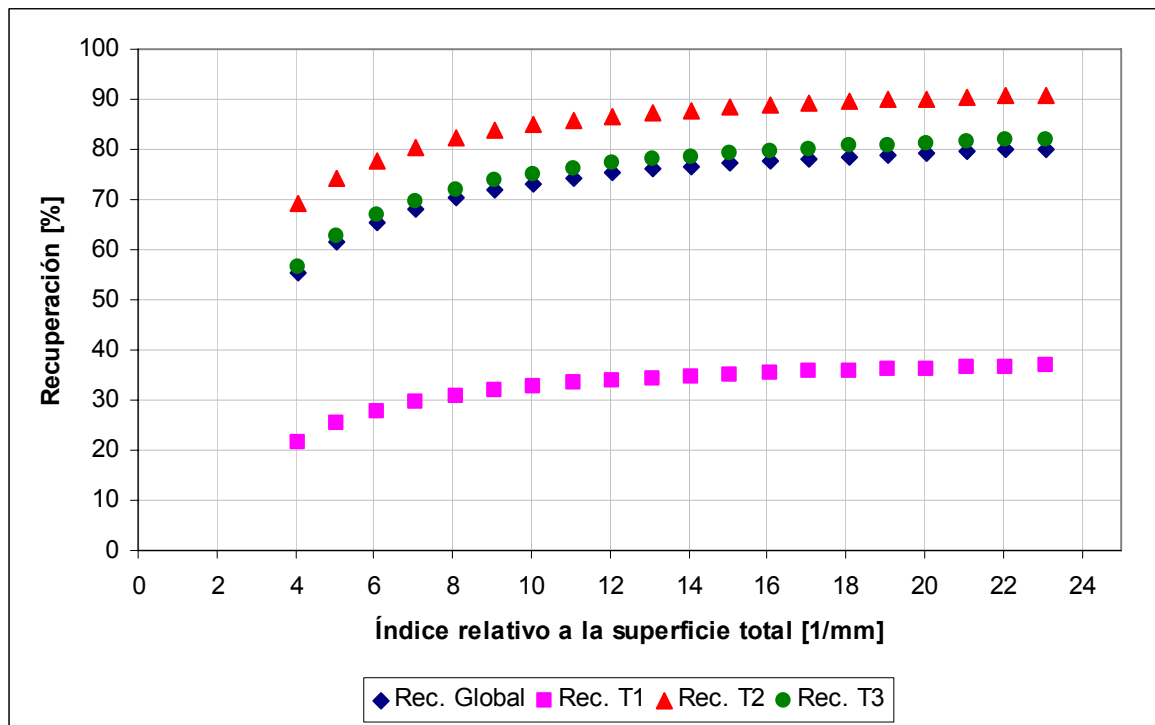


Figura N° 48: Respuesta del modelo de recuperación a la variación del índice de superficie

De la Figura N° 48 se puede realizar los siguientes comentarios:

- El aumento de superficie total disponible para la flotación, impacta positivamente en la recuperación de minerales de todos los tamaños, T1 (gruesos), T2 (medios) y T3 (finos), en donde se generan condiciones más favorables para que estas partículas puedan ser recuperadas.
- Esto es absolutamente lógico, desde el punto de vista que en flotación uno de los puntos importantes es la superficie disponible para la adherencia de la partícula, ya que la burbuja funciona como vehículo transportador de la partícula.
- Como se observa en la Figura N° 48 la recuperación responde al índice de superficie total, de la forma  $C_1 \cdot \left( 1 - e^{-C_2 \cdot \text{Superficie Total}} \right)$ .

## 6 CONCLUSIONES

La flotación es un proceso que, como ya se ha dicho, depende tanto de factores físico-químicos como de factores relativos al gas. Estos últimos son de una real importancia ya que por ser el proceso un fenómeno heterogéneo, la superficie disponible por rango de tamaño de la fase dispersa, en este caso aire, determina las capacidades del proceso. Esto es validado y respaldado por la presente investigación, en donde se muestra la incidencia de las variables relativas a la dispersión de gas, en número y superficie, sobre la recuperación en la flotación primaria de cobre, de manera global y por rango de tamaños.

La investigación realizada buscaba entender y relacionar los parámetros de la distribución de tamaño de burbujas con la recuperación primaria de cobre, específicamente buscaba estudiar la influencia de la distribución de tamaño de burbujas en los rangos granulométricos con menor recuperación de la flotación primaria, el mineral muy fino y el grueso.

La distribución de tamaño de burbujas se representa como distribución en superficie, pues la flotación es un fenómeno que ocurre a nivel superficial, ya que las partículas se adhieren a la superficie de las burbujas.

### 6.1.1 Conclusiones sobre las variables operacionales y la distribución de tamaño de burbujas

En relación a las variables operacionales,  $N_s$  y  $J_g$ , y la distribución de tamaño de burbujas, se puede decir que para reducir el diámetro de Sauter ( $d_{32}$ ) es necesario un efecto combinado de  $N_s$  y  $J_g$ . Para igual flujo de aire, al aumentar la agitación se reduce el diámetro de burbuja y se uniformiza la curva de distribución en superficie, en torno al valor medio. Además, como se aprecia en los resultados estadísticos (Tabla N° 18 y Tabla N° 19), al aumentar la agitación se obtiene una disminución del  $d_{75}$ ,  $d_{50}$ , y  $d_{25}$  donde este efecto es más notorio para las distribuciones de tamaño de burbujas más gruesas.

Por otro lado se obtiene que la granulometría del mineral afecta la distribución de tamaño de burbujas a igualdad de condiciones de todo el resto de variables operacionales. Se puede decir que aumentos en el  $p_{80}$  del mineral generan una distribución de tamaño de burbujas retenidas, en número y superficie, más ancha con respecto al valor medio, aumentando la fracción retenida para los diámetros de las burbujas más finas y gruesas. Esto se muestra en la Figura N° 34 y se explica en el subcapítulo 5.1.3.



De manera inversa al disminuir el  $p_{80}$  del mineral, se genera una distribución de tamaño de burbujas retenida, en número y superficie, más angosta, o sea genera una distribución más concentrada en torno al máximo (peak) de curva, disminuyendo la fracción retenida para los diámetros de burbuja más finas y gruesas.

Es claro ver que existe un efecto de la distribución de tamaños de partícula (DTM), en la generación de DTB. A juicio del autor, la explicación de la influencia del tamaño de partícula en la distribución de tamaño de burbujas podría explicarse de dos maneras:

- Que la distribución de tamaño de partícula afecte la densidad y/o viscosidad de la pulpa de tal manera que el film líquido necesario para la formación de la burbuja se forma más lento (o rápido), atrapando más (o menos) aire en cada burbuja y por ende afecte la distribución de tamaño de burbujas en su etapa primaria de formación.
- Que la distribución de tamaño de partícula afecte la etapa secundaria de formación de burbujas, en donde ocurre el fenómeno de coalescencia. Este efecto podría producirse bajo el marco en que en presencia de partículas más finas, existe menor superficie expuesta de burbujas a la cual no se han adherido partículas, superficie mediante la cual ocurrirá el fenómeno de coalescencia. Producto de esto deberían disminuir los eventos y por ende el diámetro de burbuja.

Según lo anterior es posible postular que los parámetros del modelo de distribución de tamaño de burbujas, en superficie,  $d_{50}$  y  $\lambda$  no sólo dependen de las variables operacionales  $J_g$  y  $N_s$ , si no que también de la distribución de tamaño de partículas en la alimentación, en este caso representada por el  $p_{80}$ .

Resulta fundamental comprender el efecto señalado en los párrafos anteriores, ya que influye en la distribución de tamaño de burbujas, y finalmente en la recuperación de cobre obtenida. Es así como se puede explicar que se obtengan mejores resultados metalúrgicos asociados a las partículas finas y gruesas en los experimentos realizados en el set C de la campaña experimental, set que utiliza granulometría de mineral gruesa. De forma complementaria, los resultados de aquellos experimentos realizados en el set B son peores, set que utiliza granulometría de mineral fina. Ambas comparaciones son con respecto a los resultados del set A, set que utiliza granulometría de mineral normal.

Según lo planteado en el párrafo anterior, y en plena concordancia con la teoría expuesta, en el set C, que utiliza granulometría de mineral gruesa, se favorecen las condiciones de flotación de las partículas finas y gruesas, aumentando la recuperación de cobre en 4 puntos porcentuales para las partículas gruesas, y en 2 puntos para las partículas finas, asociadas al caso base (DTB 3) (Tabla N° 22, sub-capítulo 4.2).

En contraste con los resultados asociados al set C, para el set B, set de alimentación de mineral fino, y según lo expresado anteriormente, se genera una distribución más concentrada en torno al máximo (peak) de la curva, disminuyendo la fracción retenida,

en número y superficie, para los diámetros de burbuja más finos y gruesos. Por ende, y en plena concordancia con la teoría planteada, se perjudica las condiciones de flotación de las partículas finas y gruesas, disminuyendo la recuperación en 20 puntos porcentuales para las partículas gruesas, y en 14 puntos para las partículas finas, asociadas al caso base (DTB 3) (Tabla N° 22, sub-capítulo 4.2).

Para poder generar las curvas de distribución de tamaño de burbujas que fueron ocupadas en los experimentos, fue necesario modificar el modelo planteado por Rodríguez [37], el cual relaciona los parámetros del modelo de distribución acumulada en superficie [35,36] en función del holdup de gas  $\varepsilon_g$  y las variables operacionales  $J_g$  y  $N_s$ . Se logró modelar el holdup de gas en función de las mismas variables operacionales,  $J_g$  y  $N_s$ , encontrando la estructura  $\varepsilon_g = A + B \cdot J_g \cdot N_s$ , con una correlación de 0,98.

Con lo último resuelto, se pudo generar curvas de distribución de tamaño de burbujas, más finas o gruesas, sólo variando  $J_g$  y  $N_s$ , y se puede decir que a igualdad de mineral, el modelo redefinido de distribución en superficie genera un buen comportamiento, concluyendo que a nivel de laboratorio, y enmarcado en las condiciones de esta investigación, se pueden reproducir curvas de distribución de tamaño de burbujas según sea el requerimiento. Esto se encuentra proyectado en el sub-capítulo 3.5 y confirmado en el sub-capítulo 5.1.2 de análisis de resultados.

### **6.1.2 Conclusiones sobre la influencia de la distribución de tamaño de burbujas en la recuperación de mineral.**

La influencia de las curvas de distribución de tamaño de burbujas en la recuperación del mineral, puede desagregarse en dos efectos diferentes. El asociado a las partículas finas y el de las partículas gruesas.

Para las partículas finas, resulta completamente proporcional que la generación de burbujas más finas impacta en una mejor recuperación de mineral, obteniendo una diferencia de 6, 14 y 11 puntos porcentuales entre la condición más favorable y la más desfavorable, según la DTM (1, 2 y 3 respectivamente), todo esto tomando en cuenta que el error experimental de las recuperaciones obtenidas en las partículas de tamaño fino es de  $\pm 2,1$  punto porcentual (Tabla N° 23).

A su vez existe una diferencia de 1, 5 y 2 puntos entre la condición base y la condición más favorable, según la DTM (1, 2 y 3 respectivamente). Esto se enmarca dentro de la teoría que dicta que al disminuir el diámetro de partícula se genera una disminución en la probabilidad de colisión, burbuja-partícula, impactando negativamente en la recuperación de finos, pero que se puede equilibrar al disminuir el diámetro de burbuja, lo cual aumenta nuevamente esta probabilidad.

Por otro lado para las partículas gruesas, y al igual que para las partículas finas, la generación de curvas de distribución de burbujas más finas impacta en una mejor recuperación para las partículas de mineral gruesas, obteniendo una diferencia de 22, 14 y 22 puntos porcentuales entre la condición más favorable y la más desfavorable, según la DTM (1, 2 y 3 respectivamente). Por otro lado existe una diferencia de 7, 8 y 13 puntos entre la condición base y la condición más favorable, según la DTM (1, 2 y 3 respectivamente). Tomando en cuenta que el error experimental de las recuperaciones obtenidas en las partículas de tamaño grueso es de  $\pm 5,4$  puntos porcentuales (Tabla N° 23).

Si bien la teoría indica que al aumentar el diámetro de partícula se genera una disminución en la probabilidad de adhesión y estabilidad, burbuja-partícula, impactando negativamente en la recuperación de gruesos. Esto se puede equilibrar si se sube el diámetro de burbuja, lo cual aumenta nuevamente la probabilidad de adhesión (por la disminución del tiempo que demora en generar la unión trifásica).

Esto no se ve reflejado en los resultados obtenidos. Su explicación, a juicio del autor, se puede encontrar en que en la celda de flotación se presenta un sistema integrado de distribuciones de tamaño de mineral y de burbujas por lo que las partículas finas, medias y gruesas compiten para adherirse a la superficie de una burbuja de mayor tamaño y así flotar exitosamente. No así para burbujas finas, en donde sólo las partículas finas podrán adherirse a su superficie. Este efecto puede generar que los resultados obtenidos para las partículas finas estén mezclados por recuperaciones exitosas debido a burbujas finas, medias y gruesas.

Otro factor que se debe tomar en cuenta es que para las partículas más gruesas el grado de liberación es menor, y aunque existan mejores condiciones de distribución de tamaño de burbujas, no van a flotar nunca bajo este marco. Por lo que la mejora en recuperaciones asociado a este tamaño estaría compuesta por aquellas partículas, que enmarcadas dentro del rango de tamaño de mineral más grueso, correspondan a su extremo más fino y así no requerirán burbujas tan gruesas.

Siguiendo la lógica anterior, la recuperación de las partículas gruesas debiese estabilizarse en un mínimo, correspondiente a aquellas partículas que producto de su grado de liberación son capaces de flotar. Pero los resultados muestran que sigue disminuyendo la recuperación a medida que se generan burbujas cada vez más gruesas. Esto se explicaría por la baja paulatina que sufriría la probabilidad de colisión de partícula-burbuja, donde ésta es inversamente proporcional al diámetro de burbuja.

Como se ha expuesto, los resultados en recuperación para partículas finas, medias y gruesas, corresponden a una integración compleja de efectos y condiciones que interactúan dinámicamente entre sí, y que es difícil de desagregar para un correcto análisis. Como en la campaña experimental la flotación fue realizada en presencia de

distribuciones de tamaño de mineral y burbujas, es necesario estudiar los efectos de una manera integral para proyectar resultados de una manera específica.

### 6.1.3 Conclusiones sobre el índice pronosticador de la recuperación

Se desarrolló un parámetro que involucra información referente a la distribución de tamaño de mineral y burbujas que responde a la fenomenología del proceso, pronosticando el resultado para la recuperación sólo para los tamaños extremos, T1 (gruesos) y T3 (finos), datos que pudieron ser correlacionados exitosamente.

Para la recuperación del tamaño 1 (+100#) y la del tamaño 3 (-400#) se propone utilizar el siguiente parámetro predictor:

$$P_{80} \cdot \varepsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right)$$

El parámetro presenta una correlación de 0,820 y 0,845 para las recuperaciones del tamaño 1 y 3, respectivamente, aceptables para predecir la tendencia de la recuperación.

### 6.1.4 Conclusiones sobre la modelación de la recuperación

La modelación entregó una estructura distinta para predecir la recuperación de cobre ya sea globalmente o por tamaños.

$$R_{Gb}(\%) = C_0 + C_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right)} + C_2 \cdot \frac{1}{P_{80}^2} + C_3 \cdot \frac{1}{Ley_A^2} + C_4 \cdot \frac{1}{d_{32}^2}$$

$$R_{T1}(\%) = C_0 + C_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right)} + C_2 \cdot \frac{1}{P_{80}^2} + C_3 \cdot N_s^3 + C_4 \cdot P_{80}^3$$

$$R_{T2}(\%) = C_0 + C_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right)} + C_2 \cdot \frac{1}{P_{80}^2} + C_3 \cdot \frac{1}{d_{32}^2}$$

$$R_{T3}(\%) = C_0 + C_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right)} + C_2 \cdot \frac{1}{P_{80}^2} + C_3 \cdot \left[ \varepsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right) \right]^3 + C_4 \cdot \frac{1}{Ley_A^2}$$

Las estructuras mostradas generan los siguientes resultados:

Escenario	Correlación	Error
Global	0,956	1,6
Rec T1	0,903	3,9
Rec T2	0,909	2,1
Rec T3	0,933	2,0

Los modelos otorgan una buena correlación para las cuatro recuperaciones definidas. Con respecto a los errores, las cuatro recuperaciones presentan errores aceptables, teniendo para la recuperación global y el tamaño 3 (-400#) un error bajo los 2 puntos. Para los Tamaños 1 y 2 los errores oscilan entre 2 – 4 puntos porcentuales.

Al comparar los errores de los modelos con los asociados al experimento, a modo de referencia, se aprecia que son del mismo orden (1,7, 5,4, 2,3 y 2,1 para la recuperación global, T1, T2 y T3 respectivamente).

Por otro lado, se definió una estructura única que es capaz de reproducir los mismos resultados que los modelos encontrados para cada tamaño.

$$R(\%) = C_0 + C_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right)} + C_2 \cdot \frac{1}{p_{80}^2} + C_3 \cdot N_s^3 + C_4 \cdot p_{80}^3$$

A continuación se presenta los valores resultantes de las constantes cuando se ajusta la estructura del modelo general a las recuperaciones por tamaño, y los resultados del test de  $\sigma_\theta/\theta$ .

Constante	Modelo			
	GB	T1	T2	T3
C0	85,6	21,0	92,7	89,2
C1	-120,6	-73,5	-106,2	-124,8
C2	-85.859	-97.122	-69.901	-72.975
C3	0,32	1,41	0,42	-0,05
C4	-3,82E-07	5,93E-07	-1,60E-07	3,08E-07
Test	GB	T1	T2	T3
$\sigma_\theta/\theta$ X0	0,03	0,30	0,04	0,04
$\sigma_\theta/\theta$ X1	0,10	0,38	0,14	0,13
$\sigma_\theta/\theta$ X2	0,10	0,21	0,16	0,16
$\sigma_\theta/\theta$ X3	0,44	0,23	0,41	<b>3,64</b>
$\sigma_\theta/\theta$ X4	0,20	0,29	<b>0,58</b>	0,32
Otros	GB	T1	T2	T3
Correlación	0,951	0,902	0,910	0,916
Error	1,7	3,9	2,1	2,2

Si bien al hacer el test de varianza del parámetro sobre parámetro ( $\sigma_\theta/\theta$ ) se obtienen dos valores fuera de rango (el criterio ocupado es 0,5), al momento de predecir la recuperación la estructura global posee constantes pequeñas (proporcional al rango que opera la variable correspondiente) que logran mantener la indiferencia del modelo ante variables que aportan poca información.

De la matriz de correlación se puede deducir que las variables más correlacionadas serían las segunda y cuarta (correlación de 0,57), lo cual es lógico ya que se basan en la misma variable ( $p_{80}$ ). Por otro lado aparece un cierto grado de dependencia (correlación de 0,43) entre la primera y tercera variable. Lo cual también es lógico ya que la agitación influye en la formación de la distribución de tamaño de burbujas, información con la cual se construye el índice de superficie total.

### **6.1.5 Conclusiones con respecto al modelo de recuperación seleccionado**

Al analizar el modelo seleccionado, variando los valores de sus parámetros, se pueden obtener las siguientes conclusiones:

- Al variar el  $p_{80}$ , la recuperación global y del tamaño medio presenta una parábola invertida, en donde al engrosar o afinar la granulometría del mineral, baja la recuperación.
- Por otro lado para los tamaños extremos de mineral al aumentar el  $p_{80}$  aumenta la recuperación. Este último efecto hay que entenderlo dentro del marco de condiciones en que se dieron las pruebas, ya que en aquellas con mineral fino,  $p_{80}$  bajo, la flotación se desarrolló en condiciones adversas para la flotación de mineral fino y grueso, mientras que las flotaciones de mineral grueso, fueron desarrolladas en condiciones muy favorables para la recuperación de mineral fino y grueso.
- En función de lo anterior, al aumentar el  $p_{80}$  aumenta la recuperación por tamaños, sobre todo para minerales finos y gruesos, producto que el aumento de granulometría, a iguales condiciones de flujo de aire y agitación, impacta en la distribución de tamaño de burbujas, mejorando el marco para la recuperación de mineral de los tamaños descritos.
- Al aumentar la agitación en la celda, aumenta la recuperación, ya sea global como por tamaños. Se aprecia que el efecto es mayor a medida que aumenta el tamaño de partículas, esto podría deberse a que a medida que aumenta la agitación, los agregados de burbuja-partícula más finos se vuelven más inestables.
- El aumento de superficie total disponible para la flotación, impacta positivamente en la recuperación de minerales de todos los tamaños, T1 (gruesos), T2 (medios) y T3 (finos), en donde se generan condiciones más favorables para que estas partículas puedan ser recuperadas. Esto es absolutamente lógico, desde el punto de vista que en flotación uno de los puntos importantes es la superficie disponible

para la adherencia de la partícula, ya que la burbuja funciona como vehículo transportador de la partícula.

- Se observa que la recuperación responde al índice de superficie total, de la forma  $C_1 \cdot (1 - e^{-(C_2 \cdot Superficie\ Total)})$ .
- Si se separa el mineral en gruesos y finos, tal vez con un ciclón previo a la flotación, y se modifican las condiciones de flotación, agitación y caudal de gas, es posible aumentar la flotabilidad de las partículas extremas, la fracción más gruesa de bajotamaño del ciclón, y la fracción más fina del sobretamaño del ciclón, sin perjudicar la flotabilidad del rango medio de partículas (la fracción fina del bajotamaño y la fracción gruesa del sobretamaño), aumentando la recuperación global.

## 6.1.6 Recomendaciones

La realización de esta investigación plantea nuevos e importantes desafíos para futuros desarrollos en esta área.

- Es necesario realizar una ampliación del modelo de distribución de tamaño de burbujas propuesto por Kracht et al. [35], Vallebuona et al. [36] y Rodríguez [37] donde debe incluirse el efecto producido por la distribución de tamaño de mineral, que en este caso fue representada por el  $p_{80}$ , pero que debiera ser estudiada además con puntos de la curva que representen al mineral fino, medio y grueso.
- Por otro lado es importante estudiar el comportamiento, protocolo y automatización de la medición de tamaño de burbujas en condiciones más amplias ya que en este estudio sólo se limitó a un rango de burbujas de 0,1 [mm] a 3-4 [mm].
- En un nivel más profundo, se podría modelar la probabilidad de flotación a través de sub-modelos de colisión, adhesión y estabilidad del agregado (que existen en la literatura), y estudiar la influencia directa de la distribución de tamaño de mineral y burbuja dentro de estos modelos y así cuantificar de manera más robusta su impacto en la recuperación.
- El modelo elegido para representar la recuperación, posee un índice relativo a la superficie total de burbujas  $\left( \varepsilon_g \cdot \sum_{i=1}^n \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right) \right)$ , que sería bueno modelarlo en función de las variables operacionales, agitación, caudal de gas, y tamaño de partícula. Para así tener una injerencia directa de variables operacionales en la recuperación de cobre.
- Realizar un análisis de optimización de los modelos propuestos para la maximización de la recuperación, en función de las variables de dichos modelos, para lograr condiciones óptimas de las variables operacionales presentes en su generación.
- Desagregar la influencia de la DTB en la recuperación, desde un punto de vista de la cinética del sistema. Así se podría evaluar si estos cambios vienen dados por cambios en las constantes  $k$  y/o  $R_{\infty}$ .
- Por último se propone evaluar los resultados obtenidos en este estudio, principalmente en lo referente a los modelos propuestos para la recuperación, a escala piloto y/o industrial.



## REFERENCIAS

1. Dobby G. S., and Finch J. A.; "Particle size dependence in flotation derived from a fundamental model of the capture process"; International Journal of Mineral Processing, 21, pp 241 – 260; 1987,
2. Pyke B.; "Bubble-Particle capture in turbulent flotation systems"; Ian Wark Research Institute; University of South Australia; Thesis submitted to the University of South Australia for the Degree of Doctor of Philosophy; 2004.
3. Stechemesser H. and Nguyen A.V.; "Time of gas–solid–liquid three-phase contact expansion in flotation"; International Journal of Mineral Processing, 56, pp 117 – 132; 1999.
4. Wills B.A.; "Mineral Processing Technology"; Butterworth-Heinemann; 1997.
5. Laskowski J.S; "Frothing in flotation"; Gordon and Brach science publishers; 1989.
6. King R.P.; "Principles of Flotation"; South African Institute of Mining and Metallurgy; 1982.
7. Schulze H.J., Radoev B., Geidel., Stechemesser H., and Topfer E.; "Investigations of the collision process between particles and gas bubbles in flotation – A Theoretical analysis"; International Journal of Mineral Processing, 27, pp 263 –278; 1989.
8. Sutherland K.L.; "Kinetics of the flotation processes"; Journal of Physical chemistry, 52, pp 394 – 425; 1948.
9. Luttrell G. H., and Yoon R. H.; "A hydrodynamic model for bubble-particle attachment"; Journal of Colloid and Interface Science, 154, pp 129 – 137; 1992.
10. Yoon R. H., and Mao L.; "Application of Extended DLVO Theory"; Journal of Colloid and Interface Science, 181, pp 613 – 626; 1996.
11. Yoon R. H., and Luttrell G. H.; "The Effect of Bubble Size on Fine Particle Flotation"; Mineral Processing and Extractive Metallurgy Review, 5, pp 101 – 122; 1986.

12. Schulze H. J.; "New theoretical and experimental investigation on stability of bubble/particle aggregates in flotation – A theory on the upper particle size of flotability"; *International Journal of Mineral Processing*, 4, pp 241 – 259; 1977.
13. Crawford R. J., and Ralston J.; "The Influence of Particle Size and Contact Angle in Mineral Flotation"; *International Journal of Mineral Processing*, 23, pp 1 – 24; 1988.
14. Nguyen A.V.; "New method and equations for determining attachment tenacity and particle size limit in flotation"; *International Journal of Mineral Processing*. 68 167– 182; 2003.
15. Gallegos-Acevedo P.M, Pérez-Garivay R., Uribe-Salas A.; "Maximum bubble loads: Experimental measurement vs. analytical estimation"; *Mineral Engineering* 19, pp 12 – 18; 2006.
16. Ralston J., Fornasiero D., Hayes R.; "Bubble-particle attachment and detachment in flotation"; *International Journal of Mineral Processing*, 56, pp 133 – 164; 1999.
17. Scheludko A., Toshev B.V., Bojadjev D.T.; "Attachment of particles to a liquid surface (capillary theory of flotation)"; *J. Chem. Soc. Faraday Trans. 1 (72)*, 2815; 1976.
18. Nasset J.E, Hernandez-Aguilar J.R., Acuna C., Gomez C.O., Finch J.A.; "Some gas dispersion characteristics of mechanical flotation machines"; *Mineral Engineering Vol 19*, pp 807 – 815; 2006.
19. Finch J.A., Xiao J., Hardie C., and Gomez C.O.; "Gas dispersion properties: bubble surface area and gas holdup"; *Minerals Engineering*, Vol. 13, N°4, pp. 365-372; 2000.
20. Ata S., Jameson G.J.; "The formation of bubble clusters in flotation cells"; *International Journal of Mineral Processing*, 76 123– 139; 2005.
21. Gorain B.K., Franzidis J.P, and Manlapig E.V; "Studies on impeller type, impeller speed and air flow rate in an industrial scale flotation cell, Part 4: Effect on bubble surface area flux on flotation performance"; *Minerals Engineering*, Vol. 8, N°6, pp. 615-635; 1995.
22. Grau R.A. and Heiskanen K.; "Gas dispersion measurements in a flotation cell"; *Minerals Engineering* 16 (2003) 1081–1089; 2003.

23. Heiskanen K.; "On the relationship between flotation rate and bubble surface area flux"; *Minerals Engineering*, Vol. 13, No. 2, pp. 141-149; 2000.
24. Finch J.A. and Dobby G.S.; "Column Flotation"; Pergamon Press; 1990
25. Gorain B.K., Franzidis J.P, and Manlapig E.V; "Studies on impeller type, impeller speed and air flow rate in an industrial scale flotation cell, Part 1: Effect on bubble size distribution"; *Minerals Engineering*, Vol. 10, No 4, pp. 367-379; 1997.
26. Grau R.A., Janusz T., Laskowski S. and Heiskanen K.; "Effect of frothers on bubble size"; *International Journal of Mineral Processing*, Vol 76, No 4, pp. 225-233; 2005.
27. Kratch W.; "Efecto de la dispersión de gas en la cinética de flotación batch para celdas agitadas mecánicamente"; Tesis para optar al grado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería mención Metalurgia Extractiva, Universidad de Chile; 2004.
28. Aldrich C. and Feng D.; "The effect of frothers on bubble size distribution in flotation pulp phases and surface froths"; *Minerals Engineering*, Vol. 13, No. 10-1, pp. 1049-1057; 2000.
29. Cho Y.S., Laskowski J.S.; "Effect of flotation frothers on bubble size and foam stability"; *International Journal of Mineral Processing* 64 2002 69–80; 2002.
30. Laskowski J.S., Tihone T., Williams P., Ding K.; "Fundamental properties of the polyoxypropylene alkyl ether flotation frothers"; *International Journal of Mineral Processing*, 72 (2003) 289-299; 2003.
31. Grau R.A.and Heiskanen K.; "Visual technique for measuring bubble size in flotation machines"; *Minerals Engineering* 15 (2002) 507–513; 2002.
32. O'Connor C.T., Randall E.W., and Goodall C.M.; "Measurement of the effects of physical and chemical variables on bubble size"; *International Journal of Mineral Processing*, Vol. 28, pp. 139-149; 1990.
33. Chen F., Gomez C. O. and Finch J. A.; "Technical note: Bubble size measurements in flotation machines"; *Minerals Engineering*. Vol. 14, No. 4, pp 427-432; 2001.
34. Gomez C.O., Hernandez-Aguilar J.R., McSorley G., Voigt P. and Finch J.A.; "Plant experiences in the measurement and interpretation of bubble size

distribution in flotation machines”; Proceedings of Copper 2003, Vol. III - Mineral Processing, Santiago, Chile, pp. 225-240; 2003.

35. Kracht W., Vallebuona G. and Casali A.; “Rate Constant modelling for batch flotation, as a function of gas dispersion properties”; Minerals Engineering. Vol 18, pp 1067-1076; 2005.
36. Vallebuona G., Casali A. y Kracht W.; “Caracterización y modelación de las distribuciones de tamaño de burbujas en celdas de flotación con agitación mecánica”; Revista de Metalurgia. Vol 41, pp 243-250; 2005.
37. Rodríguez F.; “Efecto de las condiciones de operación en la distribución de tamaño de burbujas en una celda de flotación”; Memoria para optar al título de Ingeniero Civil de Minas, Universidad de Chile; 2006.
38. Himmelblau D.; “Process analysis by statistical methods”; Editorial Sterling Swift; Capítulo 3, pp 55; 1970.
39. Gorain B.K., Franzidis J.P, and Manlapig E.V; “The empirical prediction of bubble surface area flux in mechanical flotation cells from cell design and operating data”; Minerals Engineering, Vol. 12, No 3, pp. 309-322; 1999.

## **ANEXOS**

## **ANEXO A**

### **CÁLCULO DE LA DENSIDAD POR PICNOMETRÍA**

## Densidad por picnometría

- Temperatura: 17 °C.
- Densidad agua: 0,9988 [g/cm<sup>3</sup>].

Prueba	P1	P2	P3	P4	ρ mineral
	g	g	g	g	g/cm <sup>3</sup>
1	23,848	31,482	53,166	48,262	2,794
2	24,619	32,063	54,198	49,422	2,787
3	22,501	30,211	52,590	47,637	2,793
4	25,489	32,687	54,561	49,928	2,804
5	23,374	30,794	52,557	47,759	2,827
promedio					2,801

$$\rho_{\text{mineral}} = \frac{(p_2 + p_1)}{[(p_4 + p_2) - (p_1 + p_3)]} \rho_{\text{agua}}$$

Donde:

- p1 : Peso de picnómetro vacío.
- p2 : Peso de picnómetro con mineral.
- p3 : Peso de picnómetro con mineral y agua.
- p4 : Peso de picnómetro con agua.

## **ANEXO B**

### **ALGORITMO DE REGRESIÓN POR PASOS**



## Algoritmo de regresión por pasos

En primer lugar se genera una tabla con las variables candidatas a entrar en el modelo. Estas variables incluyen tanto las variables simples, así como combinaciones de éstas. Se debe poner especial atención en tratar de representar la fenomenología del proceso en la construcción de las variables candidatas.

Una vez que se cuenta con las variables candidatas se procede del siguiente modo:

- Se normalizan estadísticamente los datos de cada término (variables candidatas y variables a modelar):

$$X_i^* = \frac{X_i - \bar{X}_i}{\sigma_i}, \text{ Donde:}$$

- $X_i$  : Valores de la variable i sin normalizar.
  - $\bar{X}_i$  : Media de los valores de la variable i.
  - $\sigma_i$  : Desviación estándar de la variable i.
- Se hacen regresiones lineales simples entre cada variable normalizada y la salida normalizada.
  - Se elige el término  $X_j^*$  que está más estrechamente correlacionado con la variable de salida Y.
  - Se incluye en el modelo el término que da la más alta correlación parcial con la salida. La correlación parcial es interpretada como la correlación parcial entre la salida y el término propuesto quitándole el efecto de componentes ya elegidas.

$$Y - \sum_j a_j \cdot X_j^* \text{ vs } X_i, \text{ Donde:}$$

- $a_j$  : Coeficiente correspondiente a la variable  $X_j^*$ .

En etapas intermedias, la correlación parcial entre la salida y la k-ésima componente que no pertenece al modelo, puede ser calculada a partir de las correlaciones calculadas en etapas anteriores, a través de una relación de recurrencia general.

- Los coeficientes  $a_j$  en cada etapa se estiman a través de un estimador de predicción de error. Los estimadores tienen una varianza estimada de predicción de error y los coeficientes estimados están normalmente distribuidos alrededor de su media. Estos valores son usados en la determinación del grado de significación dentro del modelo de cada componente, a través de la Prueba de Razón F.

- Si se logra un aumento de la correlación múltiple ajustada y la razón entre la desviación del parámetro y éste no supera un valor preestablecido, la variable es aceptada como parte del modelo. En caso contrario es rechazada.

Se detallan a continuación los indicadores que permiten determinar si la variable entra o no al modelo:

- Test de la Razón: la variable entra si,

$$\left| \frac{\sigma_{\theta}}{\theta} \right| < 0,5, \text{ Donde:}$$

- $\sigma_{\theta}$  : Desviación del parámetro identificado por  $\theta$  (error estándar del coeficiente).
- $\theta$  : Parámetro (coeficiente).

El valor máximo del Test de la razón (0,5) determina que tan significativa es la componente en cuestión para el modelo. Este valor no es fijo, y dependiendo del proceso que se esté modelando se puede reducir para exigir un mayor grado de significancia en las componentes que ingresan al modelo.

- Tes F: La variable entra si,

$$\eta \left( \frac{R_{\text{nuevo}}^2 - R_{\text{anterior}}^2}{1 - R_{\text{nuevo}}^2} \right) > 4, \text{ Donde:}$$

- $\eta$  : Grados de libertad.
- $R_{\text{anterior}}^2$  : Correlación lineal múltiple obtenida en la etapa anterior.
- $R_{\text{nuevo}}^2$  : Correlación lineal múltiple obtenida en la etapa actual.

## **ANEXO C**

# **PROTOCOLO DE REALIZACIÓN DE PRUEBAS EXPERIMENTALES**

## 1.0 MOLIENDA

- 1.0 Se toma la muestra de 2 [kg] desde el depósito del laboratorio para ser procesada en el molino de barras. Se pesa para corroborar masa.
- 2.0 Se le incorpora una carga de barras conocida por el técnico del laboratorio, que se detalla en la siguiente tabla.

Cantidad Barra	diametro	masa
und	pulg	kg
7	1 1/8	9,644
6	3/4	3,536
7	5/8	2,845
23	1/2	5,993

- 3.0 Se muele durante 16 minutos en un molino de barras. con un Cp de 78% (564 cm<sup>3</sup> para una masa de 2 [kg]). Durante la molienda NO se agrega reactivos.
- 4.0 Se retira la pulpa y se limpia el molino con sus barras, para recuperar todo el mineral.
- 5.0 La pulpa recuperada se debe deslamar previamente en la malla 100 (secar y guardar el +100 para el tamizaje) y el producto (- 100#) se deslama en malla 400, este último mediante los siguientes pasos:
  - Tomar con alguna cubeta de mano una cierta cantidad de la pulpa del mineral – 100#.
  - Diluir con agua.
  - Verter sobre la malla del deslame sólo el agua de la cubeta.
  - Repetir pasos anteriores hasta que el agua que salga de la cubeta sea relativamente clara.
  - Verter el mineral resultante en la cubeta (-100 +400#) sobre otro contenedor.
  - Repetir los pasos con otra cantidad de mineral para deslamar. Hasta terminar con todo el mineral
- 6.0 El fino, –400 # (Tamaño 3), debe recuperarse en un tambor, filtrar y secar a temperatura moderada (60° C). Pesar la fracción y guardarla en un tambor bien identificado (-400# Proyecto Fondecyt 2005).

7.0 La fracciones + 100 y -100 +400# deben secarse, pesarse y tamizarse en las siguientes mallas:

- Para la fracción “+100#”, utilizar las mallas 100 y 400; colocando el mineral sobre la malla 100.
- Para la fracción “-100#, +400#”, utilizar la malla 400; colocando el mineral sobre dicha malla.

El mineral se debe repartir para no exceder el contenido de cada fracción en algún tamiz: para el caso (a) poner en el rot-up dos lotes de tamiz 100#, tamiz 400# y fondo, tratando la mitad del mineral en cada lote; para el caso (b) poner en el rot-up tres lotes de tamiz 400# y fondo, tratando un tercio del mineral en cada lote. Los productos deben ser agregados al balde (debidamente sellado) correspondiente:

- Balde 1: +100# Proyecto Fondecyt 2005. (Tamaño 1)
- Balde 2: -100 + 400# Proyecto Fondecyt 2005. (Tamaño 2)
- Balde 3: -400# Proyecto Fondecyt 2005. (Tamaño 3)
- El peso del -400# del tamizaje debe sumarse al peso -400# del deslame.

Informar los resultados en la Tabla:

Molienda	Fecha	T1	T2	T3 rot up	T3 deslame
		gramos	gramos	gramos	gramos
1					
2					
3					
....					

- Molienda Granulometría Descarga Natural del Molino

De forma independiente debe realizarse el mismo procedimiento señalado anteriormente hasta el punto 4 (antes del deslame). La pulpa que se genera naturalmente por la descarga del molino debe ser filtrada y secada para luego ser guardada en un balde aparte que estará rotulado como granulometría “natural”.

## **2.0 PREPARACIÓN DE PAQUETES PARA ALIMENTACIÓN A FLOTACIÓN**

### **MUESTREO PREVIO**

Cuando se junten unos 10 [kg] en los baldes que contienen mineral separado por fracciones, y unos 10 [kg] de la granulometría natural, debe realizarse un muestreo de este mineral para formar paquetes de 1 [kg].

- 1.0 Verter todo el contenido del balde de una de las clases de tamaño en el cortador rotatorio.
- 2.0 Realizar el muestreo correspondiente procurando no contaminar la muestra con mineral existente en el cortador y a una frecuencia de operación baja.
- 3.0 Cuando termine de pasar el mineral hay que limpiar los bordes de los contenedores (donde cae el mineral) con la máquina girando y una brocha.
- 4.0 Luego se deben pesar los paquetes ya que estos no pueden exceder los 1000 [g].
- 5.0 Se realiza un cálculo para ver cuantas muestras deben ser cuarteadas y muestreadas a mano para completar paquetes de 1000 [g].

Preparación de una muestra representativa de cada clase de tamaño y de la descarga natural para Análisis Químico.

### **COMPOSITAR MUESTRAS DE ALIMENTACIÓN**

La composición de muestras de la alimentación a flotación depende exclusivamente del programa de pruebas a realizar y estos tienen 3 opciones:

- 6.0 Granulometría 100% natural : Se juntan dos paquetes de 1000 gramos de la granulometría "natural".
- 7.0 Granulometría Fina : Se juntan 1000 [g] de la granulometría natural con 1000 [g] de la granulometría -400#.
- 8.0 Granulometría Gruesa : Se juntan 1000 [g] de la granulometría natural con 1000 [g] de la granulometría +100#.

Como se aprecia siempre son 2 [kg] de mineral los que ingresan a la celda de flotación

### 3.0 FLOTACIÓN

- 1.0 En una celda de vidrio tener preparada una mezcla de agua y espumante con una concentración igual a la concentración de espumante en la pulpa, expresada en gramos de espumante por litro de agua en la pulpa. Para 1 gota de espumante se deben tener 624 cm<sup>3</sup> de agua.
- 2.0 El mineral ya compositado, se agrega en la celda ESSA de 5 litros la que contiene un poco menos del agua necesaria, como 3.700 cm<sup>3</sup> (necesaria = 4.370 cm<sup>3</sup>) para obtener un Cp resultante de 31,4%. Es conveniente agregar gradualmente el mineral a la celda agitada a las rpm de la prueba.
- 3.0 Una vez que esté bien agitado mida el pH natural y agregue lechada de cal (la cal tamizada previamente) gradualmente, la cual se encuentra disuelta en un vaso, para llegar al pH de operación (pH 10,5).
- 4.0 Agregar todos los reactivos (7 gotas de MIBC y 7 gotas de Aero 3894) para iniciar el proceso de acondicionamiento 5 min.
- 5.0 Al minuto 4 medir de nuevo el pH de la pulpa para constatar el valor de 10,5, ajustar si se requiere con lechada de cal.
- 6.0 Terminado el tiempo de acondicionamiento se abre lentamente el paso del aire hasta alcanzar el valor requerido para la prueba. Cuidado que en esta parte empezará a flotar el mineral por lo que se debe tener una bandeja para recepcionar la pulpa que salga de la celda, para luego ser devuelta.
- 7.0 Una vez alcanzado el flujo de aire espere un minuto para estabilizar las condiciones y proceda a hacer la toma del video, para lo cual el muestreador se debe situar entre la cámara y la lámpara. El punto de muestreo se ubica lejos de las paredes y del impeller, como se observa en la Figura 1:

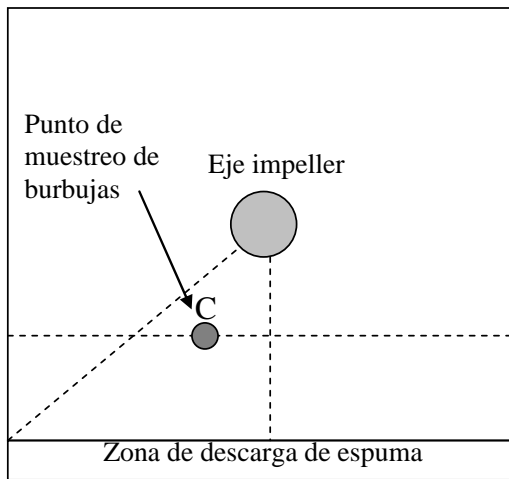


Figura 1: Esquema de muestreador de burbujas

- 8.0 Antes de comenzar la filmación del video hay que realizar un enfoque manual del muestreador de burbujas procurando centrarlo en el cuadrado que indica la escala. Además se deben instalar el foco halógeno y el difusor con agua.
- 9.0 Utilizando la bomba, que debe contener el agua preparada en el punto 3.1, el muestreador se llena con la mezcla de agua y espumante y debe ser conectada como lo muestra la figura N° 2:

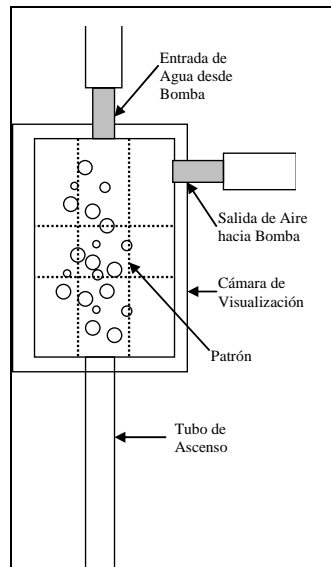


Figura N°2: Visualizador de burbujas con sus empalmes

- 10.0 Comienza la filmación del video y esta dura 45 segundos.



- 11.0 Al finalizar la filmación, se corta el aire y se devuelve a la celda la espuma que sale durante la toma de muestras para la filmación del video, aquí se ocupa el agua que sobró en limpiar la bandeja y las paredes de la celda y así devolver toda la espuma a la celda.
- 12.0 Se chequea nuevamente el pH y se ajusta si fuese necesario.
- 13.0 Ahora se comienza la prueba de flotación en sí.
- 14.0 Nuevamente se abre el paso de aire lentamente, hasta llegar al flujo requerido para la prueba. Una vez alcanzado el valor, comienza a correr el tiempo de flotación.
- 15.0 El tiempo de flotación es de 16 minutos y la remoción de espuma se realiza cada 15 segundos.
- 16.0 El concentrado y el relave se filtran, secan y pesan para posteriormente tamizarlos en los tamaños ya definidos y preparar cada fracción para enviarlos a análisis químico.

## **4.0 PREPARACIÓN DE MUESTRAS PARA ANÁLISIS QUÍMICO**

### **PREPARACIÓN DE CONCENTRADOS**

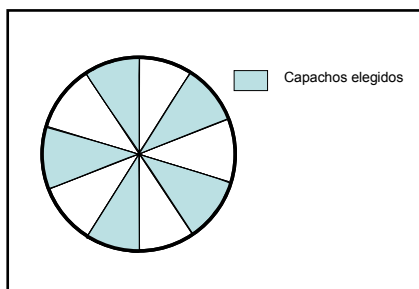
- 1.0 Se toma la muestra de concentrado y si estuviese muy compactada se pasa por una malla 30# para desagregarla homogéneamente.
- 2.0 El mineral sigue el procedimiento definido, obteniéndose tres fracciones.
- 3.0 El mineral -400#, se filtra, seca y pesa y guarda para luego juntarlo con el remanente del tamizaje.
- 4.0 Con las otras 2 fracciones (+100# y -100# +400#) se sigue el procedimiento definido. Pesar cada fracción retenida y llenar ficha adjunta.
- 5.0 Producto de que existen tamaños, para distintas pruebas de la campaña experimental, que generan poca cantidad de gramos en los rangos de tamaños definidos (desde 10 a 40 gramos), NO se generarán duplicados de los resultados de concentrados para las pruebas de flotación.
- 6.0 El mineral resultante por cada tamaño T1, T2 y T3 (+100#, -100# + 400#, -400# respectivamente) será puesto en una bolsa de plástico con la siguiente nomenclatura de rotulación XX – Y – TZ, donde:
  - XX: Significa el nombre de la prueba de flotación de la campaña experimental, los cuales son A1 a A10, o B1 a B10, o C1 a C10.
  - Y: Corresponde a una “C” si el mineral es concentrado, y una “R” si el mineral es relave, en este caso será una “C”.
  - TZ: Corresponde al rango de tamaño del mineral, T1 para +100#, T2 para -100# +400#, y T3 para -400#.

Nota las fracciones T1 y T2 deben prepararse para A.Q. (- 150#)

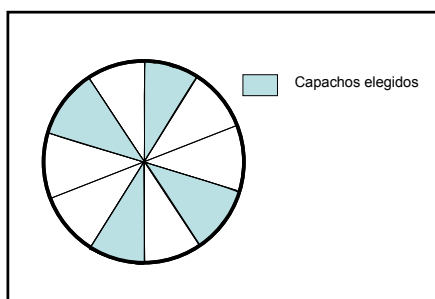
### **PREPARACIÓN DE RELAVES**

- 7.0 Se toma la muestra de relave y se pasa por una malla 30# para desagregarla homogéneamente.
- 8.0 Se procede a utilizar el cortador rotatorio en una frecuencia de 8 - 9.

- 9.0 Se toman cinco capachos (alternados entre sí) y se procede a realizar un segundo corte, según la figura adjunta (Nota: la contramuestra se pesa, rotula y guarda):



- 10.0 En el segundo corte se eligen 4 capachos para obtener las fracciones T1, T2 y T3 según el procedimiento explicado para los concentrados (puntos 4.1.2 a 4.1.4). La contramuestra se pesa, rotula y guarda. El mineral se mete al rotup procurando no exceder el contenido de cada fracción en algún tamiz. Utilizar el esquema de corte adjunto:



- 11.0 El mineral que queda como contramuestra del corte 1 y 2 se junta y se rotula como XX – Y, si se obtuvo suficiente muestra de cada fracción para A.Q, si no, se debe realizar otro tamizaje con la contramuestra del corte 2 y juntar las fracciones con las que estaban listas. Rotulación en caso de juntar los cortes:

- XX: Significa el nombre de la prueba de flotación de la campaña experimental, los cuales son A1 a A10, o B1 a B10, o C1 a C10.
- Y: Corresponde a una “C” si el mineral es concentrado, y una “R” si el mineral es relave, en este caso será una “R”.

- 12.0 El mineral resultante por cada tamaño T1, T2 y T3 (+100#, -100# + 400#, -400# respectivamente) será Pesado y puesto en una bolsa de plástico con la siguiente nomenclatura de rotulación XX – Y – TZ, donde:

- XX: Significa el nombre de la prueba de flotación de la campaña experimental, los cuales son A1 a A10, o B1 a B10, o C1 a C10.

- Y: Corresponde a una "C" si el mineral es concentrado, y una "R" si el mineral es relave, en este caso será una "R".
- TZ: Corresponde al rango de tamaño del mineral, T1 para +100#, T2 para -100# +400#, y T3 para -400#.

Nota las fracciones T1 y T2 deben prepararse para A.Q. (- 150#)

## FICHA DE FLOTACIÓN

Prueba N°: \_\_\_\_\_

Condiciones de Operación:

Granulometría Alimentación a flotación: \_\_\_\_\_

Reactivos de flotación:

**Colector:** \_\_\_\_\_ **Dosis:** \_\_\_\_\_  
**Espumante:** \_\_\_\_\_ **Dosis:** \_\_\_\_\_

Celda de Flotación ESSA (l) : \_\_\_\_\_

Cp Flotación (%) : \_\_\_\_\_

Tiempo acondicionamiento (min) : \_\_\_\_\_

Tiempo de flotación (min) : \_\_\_\_\_

**Velocidad de agitación (rpm)** : \_\_\_\_\_  
**Flujo de aire (l/s)** : \_\_\_\_\_

Concentrado:	rotulación	Peso (g)	Ley Cu Total (%)
<b>Total</b>			<b>Por cálculo</b>
+ 100# (T1)			
- 100 + 400# (T2)			
-400 # (T3) (total deslame + tamizaje)			

Relave:	rotulación	Peso (g)	Ley Cu Total (%)
<b>Total</b>			<b>Por cálculo</b>
<b>Contramuestra</b>			
<b>Fración a A.G.</b>			<b>Por cálculo</b>
+ 100# (T1)			
- 100 + 400# (T2)			
-400 # (T3) (total deslame + tamizaje)			

## **ANEXO D**

### **ANÁLISIS DE IMÁGENES**

## 1.0 RESUMEN

Con el objeto de estudiar la factibilidad de procesar digitalmente imágenes para obtener el diámetro de burbujas se realizó un estudio sobre los resultados que entrega el programa especializado ImageJ y su posible implementación con las actuales instalaciones y equipos del laboratorio de Procesamiento de Minerales.

Las principales conclusiones y recomendaciones que se desprenden de los resultados obtenidos son las siguientes:

- El programa ImageJ realiza exactamente la misma medición bajo simulaciones en iguales condiciones.
- El programa ImageJ entrega una buena estimación del área de la burbuja, y por consecuencia del diámetro de esta, tomando en cuenta toda la sección de la burbuja.
- Se incorporó un factor de corrección para comparar la medición manual con la entregada por ImageJ, definiendo la relación  $\frac{d_{real}}{d_{programa}} = \frac{d}{d + 2 \cdot \Delta}$ , en donde  $\Delta$  corresponde a un 40 – 50 % del ancho del borde delimitado por el programa para la burbuja que varía entre 0,2 – 0,3 mm
- Con respecto a los resultados estadísticos, se puede decir que en promedio el programa entrega un  $d_{32}$  con un error del 3,8 % lo cual se define como aceptable.
- Se da por validado el uso del programa pero conservando estrictamente la metodología y criterios en el uso del ImageJ y la correcta interpretación de los resultados
- Se entrega al final de este Anexo un protocolo para realizar el análisis de distribución de tamaño de burbujas desde el video ya captado hasta la información estadística característica de la prueba como  $d_{32}$ ,  $d_{25}$ ,  $d_{50}$ ,  $d_{75}$ , medias, y  $fi_2$ ,  $Fu_2$

## 2.0 INTRODUCCIÓN

En los últimos años el análisis digital de imágenes ha sido ampliamente utilizado como una moderna herramienta por diversas disciplinas tales como la Medicina, Biología, Física e Ingeniería. Mediante el procesamiento digital de imágenes es posible manipular imágenes digitales en un computador con el fin de obtener información objetiva de la escena captada por una cámara.

Se pueden mencionar como aplicaciones típicas, la detección de presencia de objetos, inspección visual automática, medición de características geométricas y/o de color de objetos, clasificación de objetos, restauración de imágenes y mejoramiento de la calidad de las imágenes.

Este trabajo busca implementar la medición de características geométricas de imágenes en el proceso de flotación de minerales a escala de laboratorio. Específicamente busca obtener el diámetro de un conjunto de burbujas a partir de una filmación de estas y en función de esto se quiere construir la distribución de tamaño de burbujas, con las estadísticas que esta conlleva. Se espera que los resultados muestren una gran reproducibilidad de la realidad.

Para esto se ha dividido el trabajo en dos partes:

Primero se hace una validación del programa ocupado para analizar las imágenes en cuanto a los resultados que éste entrega, poniendo énfasis en el error de repetición, características generales obtenidas de la distribución de tamaño de burbujas, y la medición puntual de diámetros de burbujas.

Lo segundo, y basándose en un buen funcionamiento del programa, es definir un conjunto de pasos en la grabación del vídeo, metodología de análisis de imagen e interpretación de resultados, para implementar esta herramienta con los recursos que actualmente posee el laboratorio de procesamiento de minerales del departamento de Minas.



### 3.0 ANTECEDENTES

#### 3.1 SOBRE PROGRAMA IMAGEJ

Imagen es un programa ocupado para realizar el análisis de imágenes. Esta es una aplicación Java de dominio público, de análisis y procesamiento de imágenes digitales. Ofrece dos modalidades de trabajo: como applet integrado en un navegador web y como aplicación de escritorio mediante la máquina virtual Java. Es compatible con imágenes de 8, 16 o 32-bits y reconoce los formatos TIFF, GIF, JPEG, BMP, DICOM, FITS y RAW.

Tiene una arquitectura basada en plugins, lo que permite extender progresivamente sus aplicaciones. Entre sus funciones básicas destacan:

- Cálculos con los valores de los píxeles.
- Medición de distancias, ángulos y de áreas, previa detección de contornos.
- Ejecución de transformaciones geométricas (rotar, escalar, etc.) y zoom.
- Operaciones simultáneas con un número ilimitado de imágenes.

Destacado por muchos usuarios, esta herramienta de análisis y procesamiento de imágenes lo debe todo a su rapidez y arquitectura basada en plug-ins, lo que amplía sus posibilidades hasta límites desconocidos. Inspirado en el popular NIH Image.

ImageJ puede utilizarse para el análisis de imágenes biológicas y de teledetección. Sus aplicaciones abarcan numerosos campos: colorimetría, cálculos de áreas, ángulos y distancias entre píxeles, histogramas de densidad, manipulación del contraste, o la aplicación de filtros para el mejoramiento de las imágenes (detección de contornos, filtrado de medianas, aumento de nitidez o efectos de suavizado, etc.).

Para mayores referencias se puede acceder a la página web <http://rsb.info.nih.gov/ij/> en donde se encontrará información relacionada con el uso del programa ImageJ.

## 4.0 VALIDACIÓN PROGRAMA IMAGEJ

Como se definió en un comienzo, en este Capítulo se buscará validar el programa computacional de análisis de imágenes digitales. Para esto se revisarán tres puntos cruciales para aceptar y utilizar la información entregada por el programa:

1. Definir el error de repetición. Se busca ratificar que si se corre el programa para un determinado video varias veces en iguales condiciones, los resultados estadísticos de este presenten un error mínimo de no más de un 3,00 %.
2. Medición de diámetros de burbuja puntuales y cálculo del error de medición.
3. Representatividad de la distribución de tamaño de burbujas en su conjunto, a través de valores estadísticos de ésta tales como d32, media, desviación estándar, moda, d25, d50, d75, forma de curva, etc.

Además de aquí en adelante para referirse a la distribución de tamaño de burbujas se ocupará la sigla DTB.

### 4.1 ERROR DE REPETICIÓN

Para este punto se eligió un video general al cual se le aplicó el procedimiento elegido para procesar las imágenes<sup>18</sup>. Este procedimiento se repitió 5 veces entregando los siguientes resultados:

Tabla N° 4.1: Resultados estadísticos para 5 pruebas de repetición.

		Prueba					Promedio	Error	
		Rep 1	Rep 2	Rep 3	Rep 4	Rep 5			
n° datos	und	2260	2260	2260	2260	2260	2260	0.0%	
d32	mm	0.88	0.88	0.88	0.88	0.88	0.88	0.00	
max	mm	2.20	2.20	2.20	2.20	2.20	2.20	0.00	
min	mm	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.00	
d media	n°	mm	0.44	0.44	0.44	0.44	0.44	0.44	0.00
	sup	mm	0.88	0.88	0.88	0.88	0.88	0.88	0.00
desv est.	n°	mm	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30	0.00
	sup	mm	0.48	0.48	0.48	0.48	0.48	0.48	0.00
moda	n°	mm	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.00
	sup	mm	0.55	0.55	0.55	0.55	0.55	0.55	0.00
d 25	n°	mm	0.23	0.23	0.23	0.23	0.23	0.23	0.00
	sup	mm	0.51	0.51	0.51	0.51	0.51	0.51	0.00
d 50	n°	mm	0.38	0.38	0.38	0.38	0.38	0.38	0.00
	sup	mm	0.76	0.76	0.76	0.76	0.76	0.76	0.00
d 75	n°	mm	0.56	0.56	0.56	0.56	0.56	0.56	0.00
	sup	mm	1.13	1.13	1.13	1.13	1.13	1.13	0.00

<sup>18</sup> El procedimiento para el análisis de imágenes se detalla y explica en el capítulo n° 5.

Como se puede observar al realizar el procedimiento de análisis de imagen establecido, el programa arroja resultados estadísticos exactamente iguales lo cual puede ser revalidado con las curvas de distribución de tamaño de burbujas, Gráfico 4.1 para la fracción retenida y Gráfico 4.2 para la fracción acumulada.

En consecuencia se asume un error experimental, intrínscico a la realización de la prueba varias veces bajo las mismas condiciones, de cero.

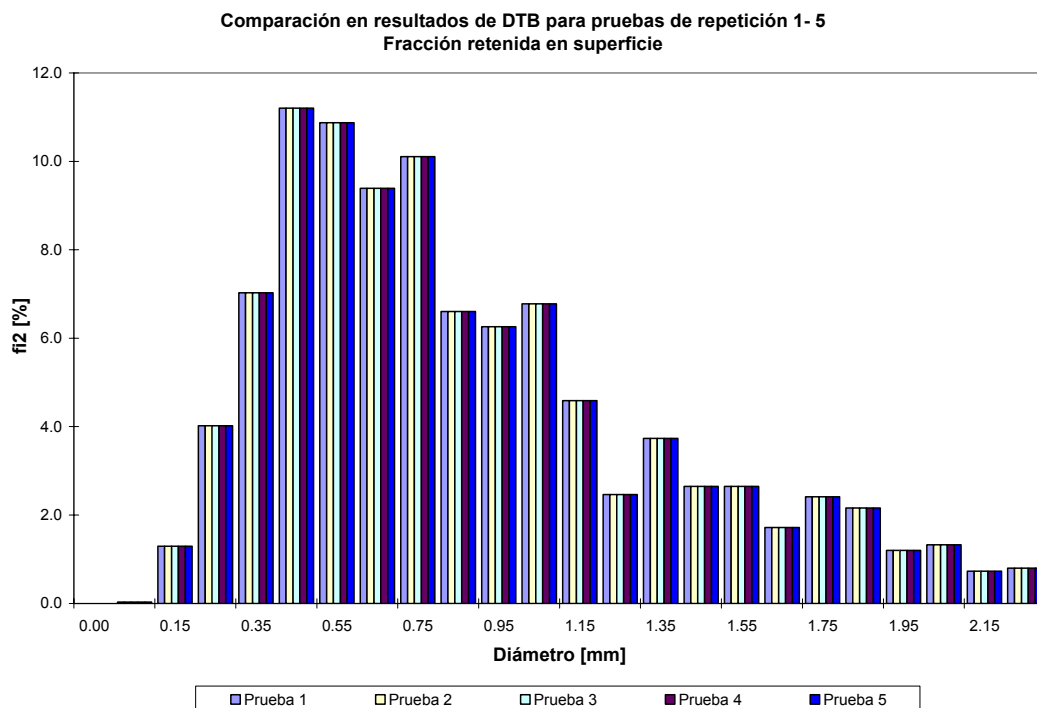


Gráfico N° 4.1: Fracción retenida de distribución de tamaño de burbujas por superficie para las pruebas de repetición 1, 2, 3, 4, y 5.

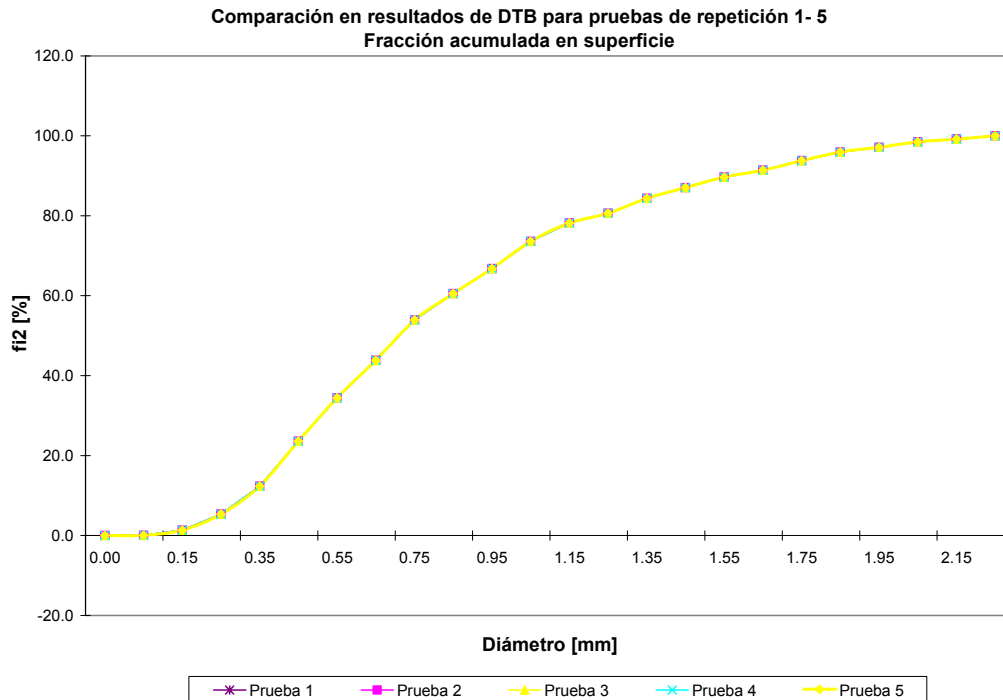


Gráfico N° 4.2: Fracción acumulada de distribución de tamaño de burbujas por superficie para las pruebas de repetición 1, 2, 3, 4, y 5.

## 4.2 ERROR DE MEDICIÓN

### 4.2.1 Medición puntual burbuja a burbuja

En este punto se eligieron de forma aleatoria un grupo de burbujas para comparar los resultados, en cuando a diámetro, entre la estimación realizada por el programa y burbujas medidas manualmente abarcando un rango de tamaño entre 0,25 [mm] y 1,75 [mm]. Los resultados se presentan el gráfico 4.3.

Correlación por burbuja  
Valores reales vs digitalizados

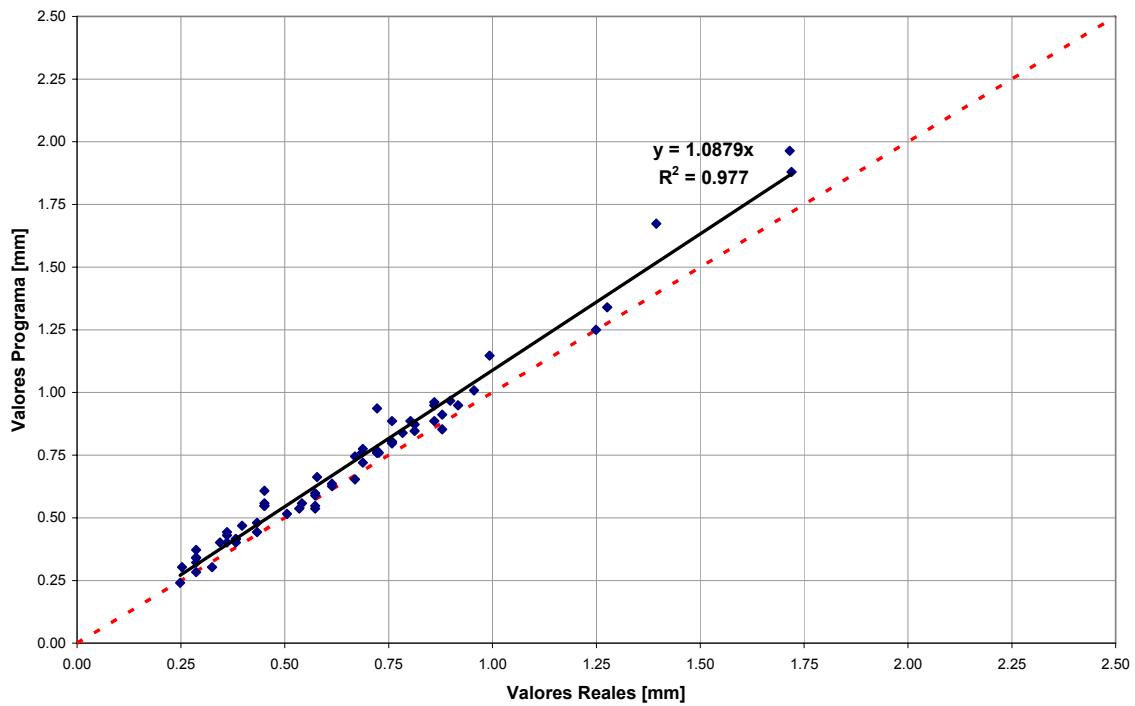


Gráfico N° 4.3: Correlación entre valores reales y valores digitalizados

Como se puede apreciar los valores presentan una buena correlación, 0,977 pero en su gran mayoría están por encima de la curva roja punteada (curva de identidad) lo que nos señala que sobre estima el valor del diámetro. Esto se ve reflejado en el gráfico N° 4.4, de distribuciones para la prueba I208:

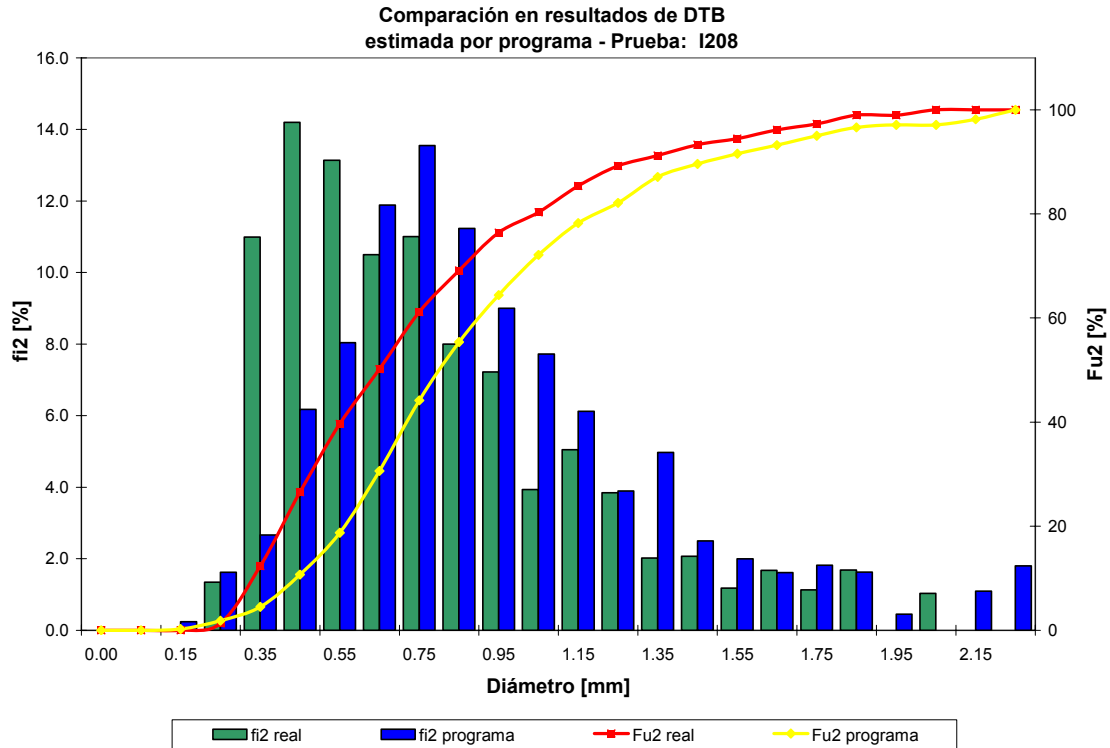


Gráfico N° 4.4: Comparación de distribuciones para la prueba I208

Se observa que tanto la distribución retenida en superficie como la acumulada están desplazadas. Esto se puede explicar por el modo en que el programa analiza la burbuja.

Éste rellena el área de la burbuja que está siendo analizada y cuenta el número de píxeles que conforman la burbuja. Como se está trabajando con burbujas sumamente finas se produce un error al contar manualmente con respecto al borde de esta, ya que visualmente no se puede abarcar la burbuja desde el punto superior de su capa hasta el punto inferior.

#### 4.2.2 Corrección en la estimación del diámetro

La figura 4.1 muestra en un esquema, fuera de escala, lo que está pasando con la burbuja:

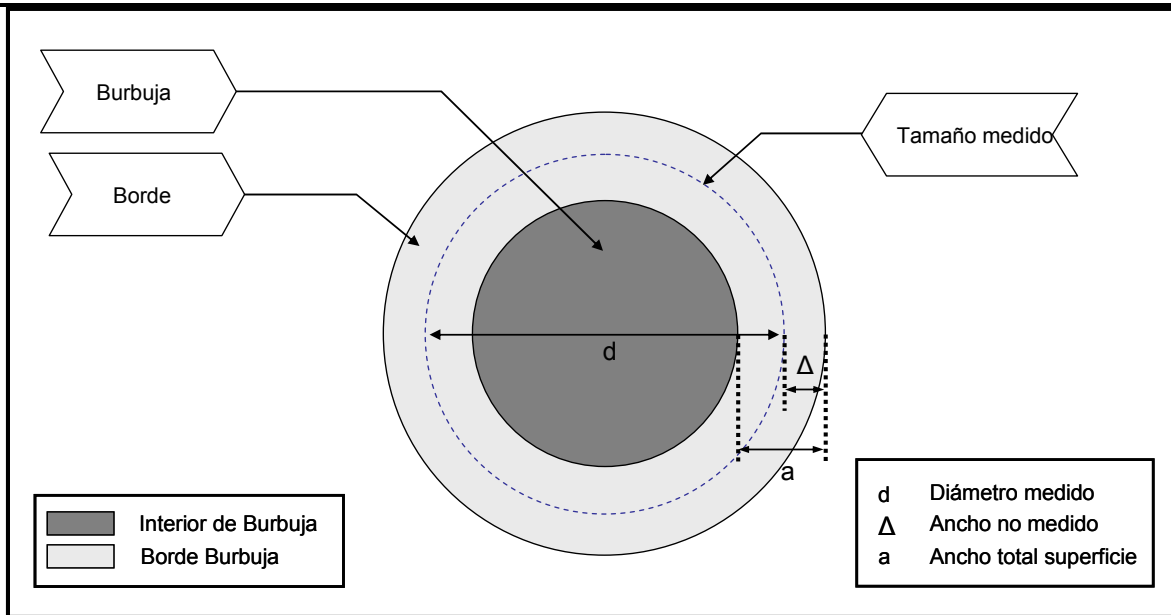


Figura N° 4.1: Esquema en la medición del diámetro de manera manual

Realizando algunas pruebas se estimó que el valor de “a” (ancho de la superficie de la burbuja definida por la filmación) se encontraba entre 2 – 3 píxeles, lo que se traduce en 0.2 – 0.3 mm, valores preponderantes si se miden burbujas de diámetro entre 0.2 – 2.0 mm. Asumiendo que el punto de medición, dentro del ancho “a”, se puede distribuir de una manera aleatoria, al valor de  $\Delta$  le asignaremos una proporción de “a”.

Al ecualizar los datos entregados por el procesador de imágenes y las mediciones echas manualmente por Erika Méndez<sup>19</sup>, se pudo llegar a que el valor de  $\Delta$  fluctuaba entre el 40 – 50 % del ancho “a”.

Como este ancho es relativamente similar para las burbujas, en el rango estudiado, implica que la corrección de diámetros no será igual para todos estos, obviamente porque a mayor diámetro de burbuja “d”, se tendrá una repercusión menor del error cometido. Es así como se definió la corrección:

$$\frac{d_{real}}{d_{programa}} = \frac{d}{d + 2 \cdot \Delta} = \frac{1}{1 + \frac{2 \cdot \Delta}{d}}$$

<sup>19</sup> Estudiante de Ingeniería Civil de Minas, quien realizo las mediciones manuales de DTB de las pruebas experimentales ocupadas como antecedentes de este informe.

En el gráfico N° 4.5 se muestra como varía el factor de corrección que es aplicado a los diámetros entregados por el programa según el valor de estos.

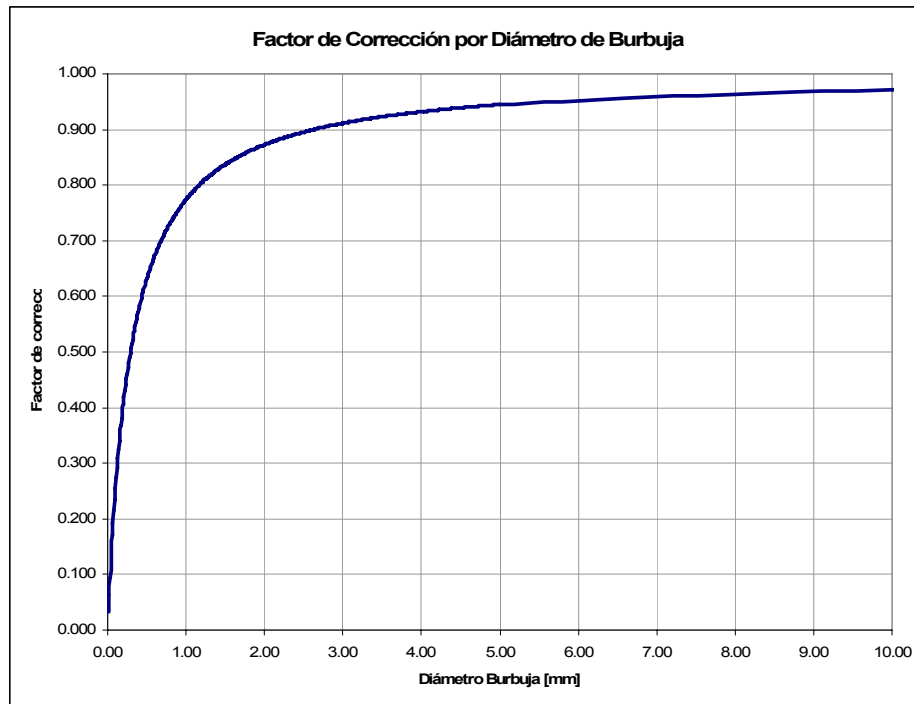


Gráfico N° 4.5: Variación del factor de corrección según se el diámetro a corregir.

Es así como al corregir los diámetros entregados por el programa, se genera un resultado muy acertado. Siguiendo con el ejemplo de la prueba I208 se puede apreciar en el gráfico 4.6 como queda la distribución retenida en superficie y la acumulada.



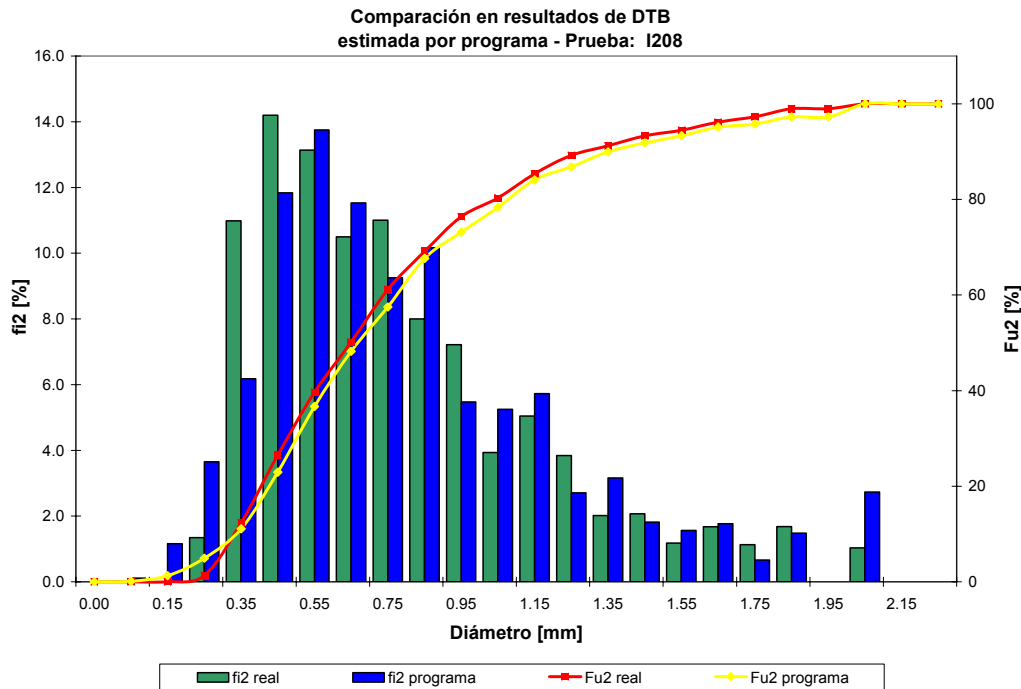


Gráfico N° 4.6: DTB corregida para la prueba I208

### 4.3 ANÁLISIS ESTADÍSTICO

En base a lo expuesto en el punto 4.2.2, se realizó un análisis estadístico con los valores corregidos según la metodología explicada, en donde se eligieron algunas pruebas experimentales del set n° 2 y n° 3<sup>20</sup> para comparar los resultados. Estas fueron las pruebas I208, I210, I211, I213, I301, I302, I303, e I304.

Es importante señalar que el hecho de corregir los valores entregados por el programa sólo fue realizado para poder comparar los resultados entregados por el procesador de imágenes y las mediciones realizadas manualmente. En estricto rigor para un futuro deberían tomarse los valores entregados sin esta corrección ya que miden de manera más exacta las características de la DTB.

Los resultados estadísticos se muestran en las tablas del N° 4.2 al 4.5, mientras DTB se muestran en los gráficos del N° 4.7 al 4.14.

<sup>20</sup> Sólo de estos sets se encontraron videos en formato de casete.

Tabla N° 4.2: Resultados estadísticos para pruebas I208 e I210

Prueba	I 208	Medición		Error	Prueba	I 210	Medición		Error	
		Real	Programa				Real	Programa		
n° datos	und	2458	1805	0.15%	n° datos	und	2392	1031	6.44%	
d32	mm	0.81	0.81		d32	mm	0.87	0.81		
max	mm	2.97	2.07		max	mm	3.36	1.94		
min	mm	0.23	0.07		min	mm	0.24	0.13		
d media	n°	mm	0.52	0.42	d media	n°	mm	0.50	0.51	3.62%
	sup	mm	0.79	0.82		sup	mm	0.79	0.82	
desv est.	n°	mm	0.24	0.28	desv est.	n°	mm	0.24	0.27	3.65%
	sup	mm	0.39	0.42		sup	mm	0.43	0.36	
d 25	n°	mm	0.36	0.20	d 25	n°	mm	0.34	0.30	14.69%
	sup	mm	0.49	0.51		sup	mm	0.48	0.55	
d 50	n°	mm	0.46	0.38	d 50	n°	mm	0.44	0.47	11.18%
	sup	mm	0.70	0.72		sup	mm	0.67	0.75	
d 75	n°	mm	0.67	0.56	d 75	n°	mm	0.63	0.66	4.38%
	sup	mm	1.09	1.04		sup	mm	1.05	1.00	

Tabla N° 4.3: Resultados estadísticos para pruebas I211 e I213

Prueba	I 211	Medición		Error	Prueba	I 213	Medición		Error	
		Real	Programa				Real	Programa		
n° datos	und	2451	1127	8.31%	n° datos	und	2870	1240	1.41%	
d32	mm	0.86	0.79		d32	mm	0.74	0.73		
max	mm	3.83	1.86		max	mm	2.58	2.03		
min	mm	0.25	0.08		min	mm	0.24	0.07		
d media	n°	mm	0.51	0.47	d media	n°	mm	0.49	0.47	0.13%
	sup	mm	0.80	0.79		sup	mm	0.73	0.73	
desv est.	n°	mm	0.25	0.27	desv est.	n°	mm	0.22	0.24	7.82%
	sup	mm	0.42	0.38		sup	mm	0.36	0.36	
d 25	n°	mm	0.34	0.28	d 25	n°	mm	0.34	0.31	1.32%
	sup	mm	0.48	0.51		sup	mm	0.45	0.49	
d 50	n°	mm	0.44	0.43	d 50	n°	mm	0.42	0.44	12.09%
	sup	mm	0.69	0.71		sup	mm	0.64	0.65	
d 75	n°	mm	0.63	0.59	d 75	n°	mm	0.61	0.59	8.22%
	sup	mm	1.07	0.98		sup	mm	0.99	0.87	

Tabla N° 4.4: Resultados estadísticos para pruebas I301 e I302

Prueba	I 301	Medición		Error	Prueba	I 302	Medición		Error	
		Real	Programa				Real	Programa		
n° datos	und	2060	1343	7.45%	n° datos	und	2780	1618	0.99%	
d32	mm	0.88	0.94		d32	mm	0.78	0.77		
max	mm	1.99	2.71		max	mm	2.04	1.77		
min	mm	0.23	0.11		min	mm	0.22	0.11		
d media	n°	mm	0.61	0.51	d media	n°	mm	0.57	0.48	5.02%
	sup	mm	0.88	0.92		sup	mm	0.78	0.78	
desv est.	n°	mm	0.27	0.31	desv est.	n°	mm	0.23	0.26	0.89%
	sup	mm	0.38	0.51		sup	mm	0.34	0.35	
d 25	n°	mm	0.42	0.30	d 25	n°	mm	0.41	0.28	2.02%
	sup	mm	0.57	0.56		sup	mm	0.53	0.52	
d 50	n°	mm	0.54	0.46	d 50	n°	mm	0.51	0.44	6.43%
	sup	mm	0.79	0.78		sup	mm	0.70	0.71	
d 75	n°	mm	0.77	0.65	d 75	n°	mm	0.71	0.62	1.14%
	sup	mm	1.21	1.13		sup	mm	1.02	0.95	

Tabla N° 4.5: Resultados estadísticos para pruebas I303 e I304

Prueba	I 303	Medición		Error	Prueba	I 304	Medición		Error	
		Real	Programa				Real	Programa		
n° datos	und	2407	1723	4.85%	n° datos	und	1114	980	1.04%	
d32	mm	0.75	0.71		d32	mm	0.86	0.85		
max	mm	3.00	1.68		max	mm	2.37	2.21		
min	mm	0.21	0.11		min	mm	0.26	0.08		
d media	n°	mm	0.50	0.48	d media	n°	mm	0.62	0.61	0.56%
	sup	mm	0.75	0.71		sup	mm	0.86	0.85	
desv est.	n°	mm	0.22	0.23	desv est.	n°	mm	0.26	0.27	
	sup	mm	0.37	0.30		sup	mm	0.34	0.35	
d 25	n°	mm	0.35	0.31	d 25	n°	mm	0.42	0.42	2.89%
	sup	mm	0.47	0.50		sup	mm	0.60	0.62	
d 50	n°	mm	0.45	0.45	d 50	n°	mm	0.56	0.58	
	sup	mm	0.65	0.66		sup	mm	0.79	0.79	
d 75	n°	mm	0.63	0.61	d 75	n°	mm	0.80	0.76	11.24%
	sup	mm	0.99	0.85		sup	mm	1.14	1.01	

Como se ve en las tablas adjuntas, en general la medición del diámetro corregida entregada por el programa genera datos estadísticos bastante similares a los hechos manualmente, ya sea en  $d_{32}$  como los diámetros 25, 50, y 75 en superficie.

Gráfico N° 4.7: Comparación de DTB para prueba I208

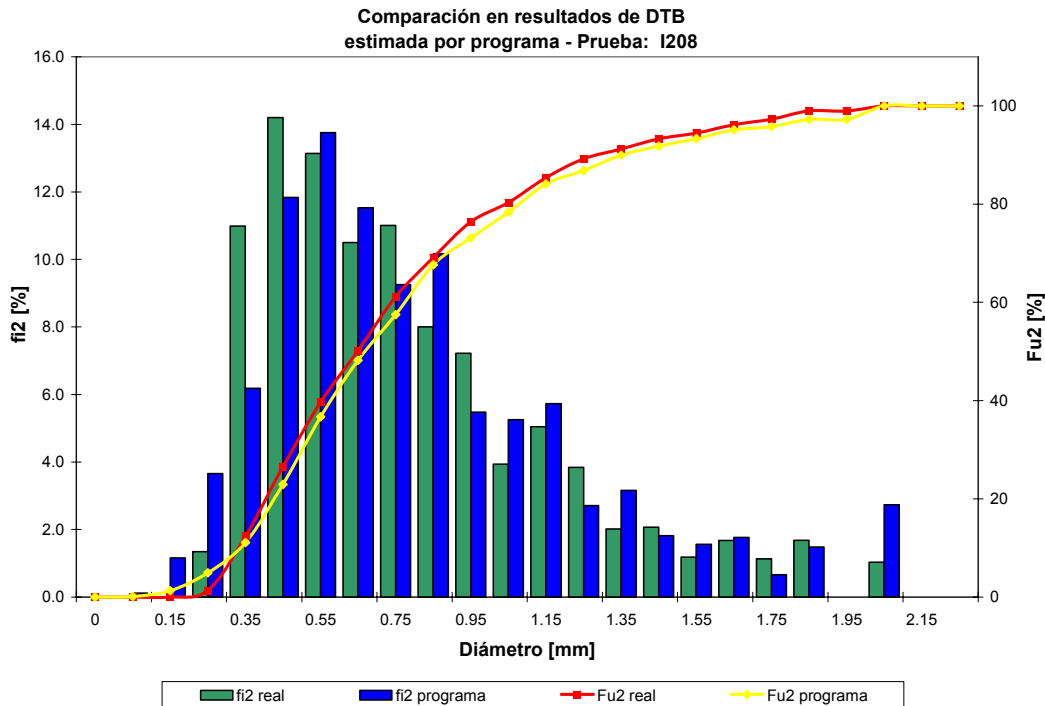


Gráfico N° 4.8: Comparación de DTB para prueba I210

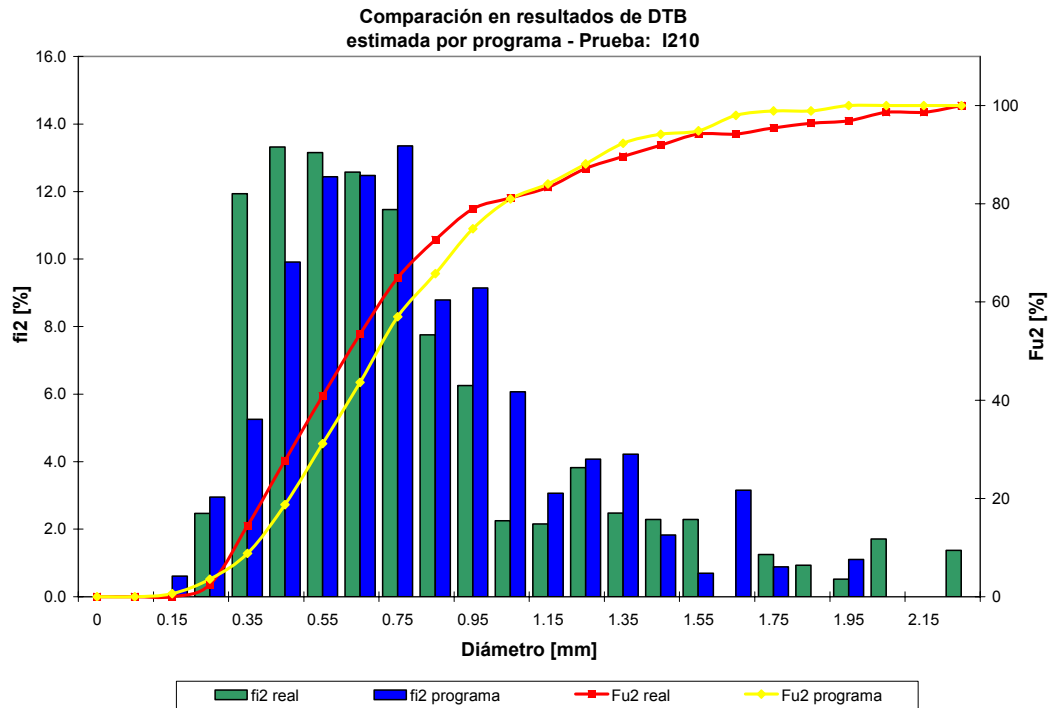


Gráfico N° 4.9: Comparación de DTB para prueba I211

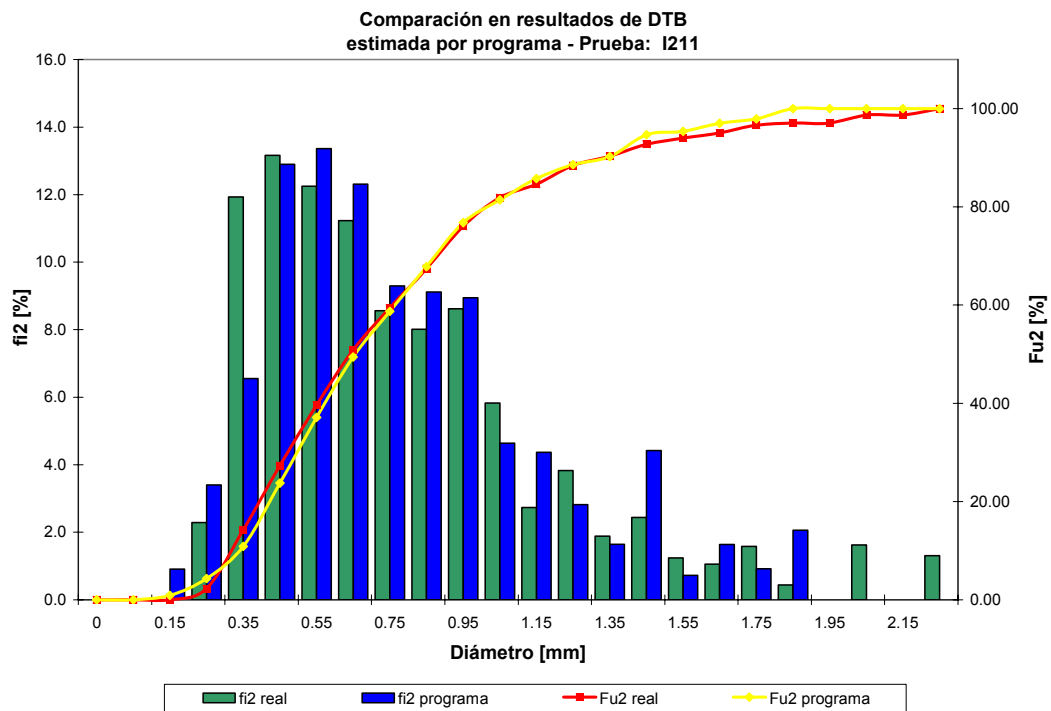


Gráfico N° 4.10: Comparación de DTB para prueba I213

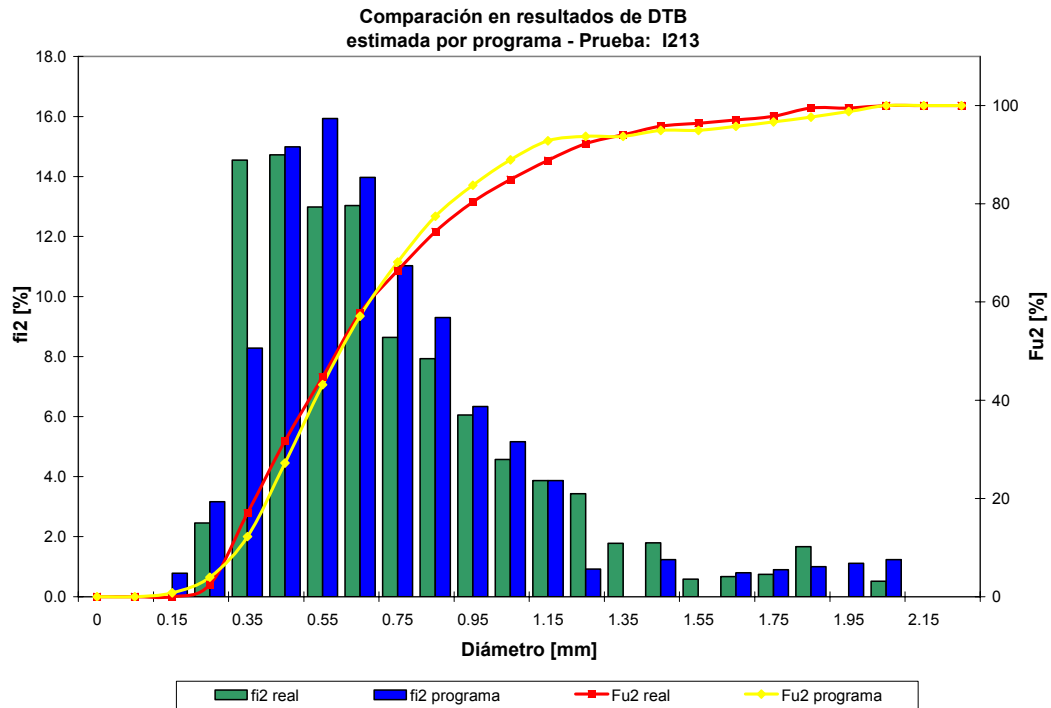


Gráfico N° 4.11: Comparación de DTB para prueba I301

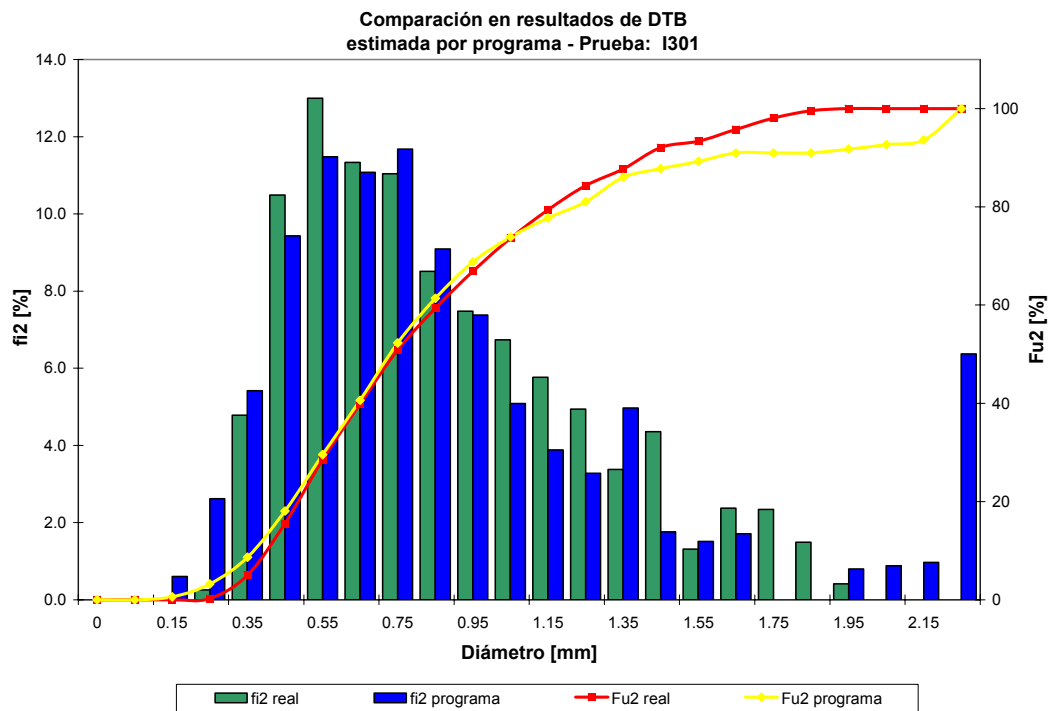


Gráfico N° 4.12: Comparación de DTB para prueba I302

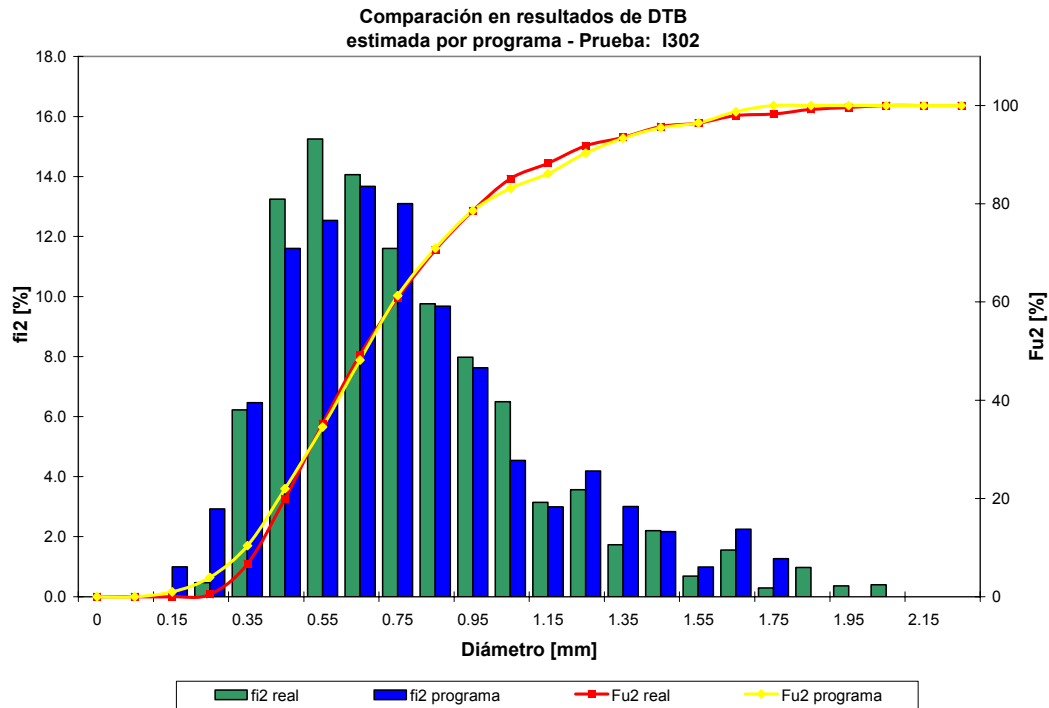


Gráfico N° 4.13: Comparación de DTB para prueba I303

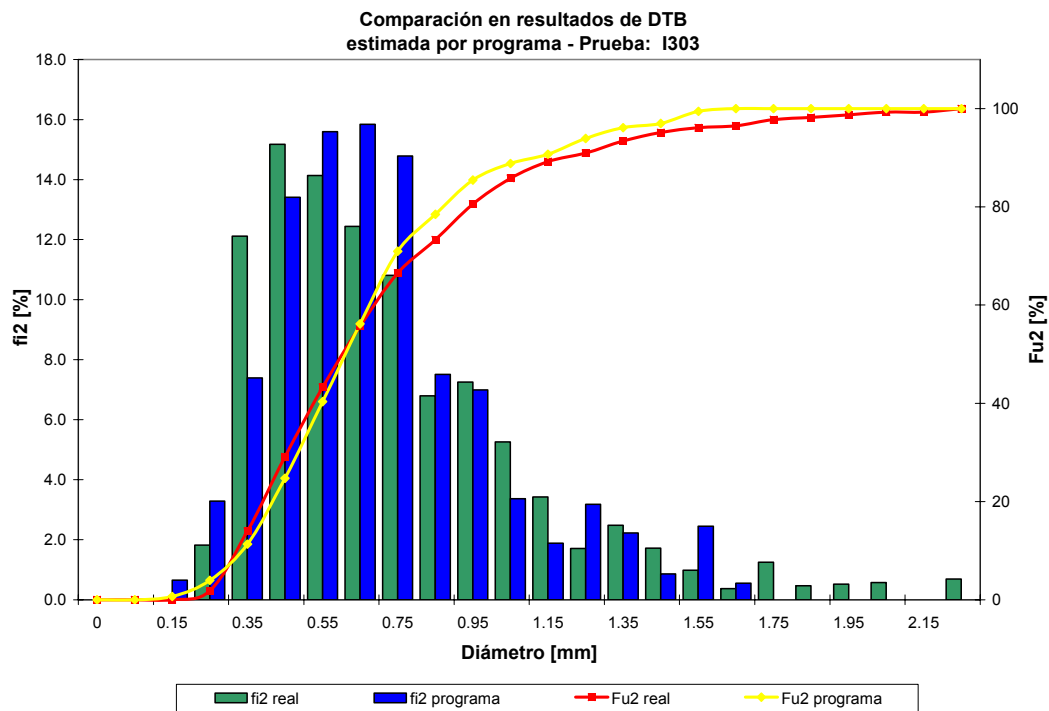
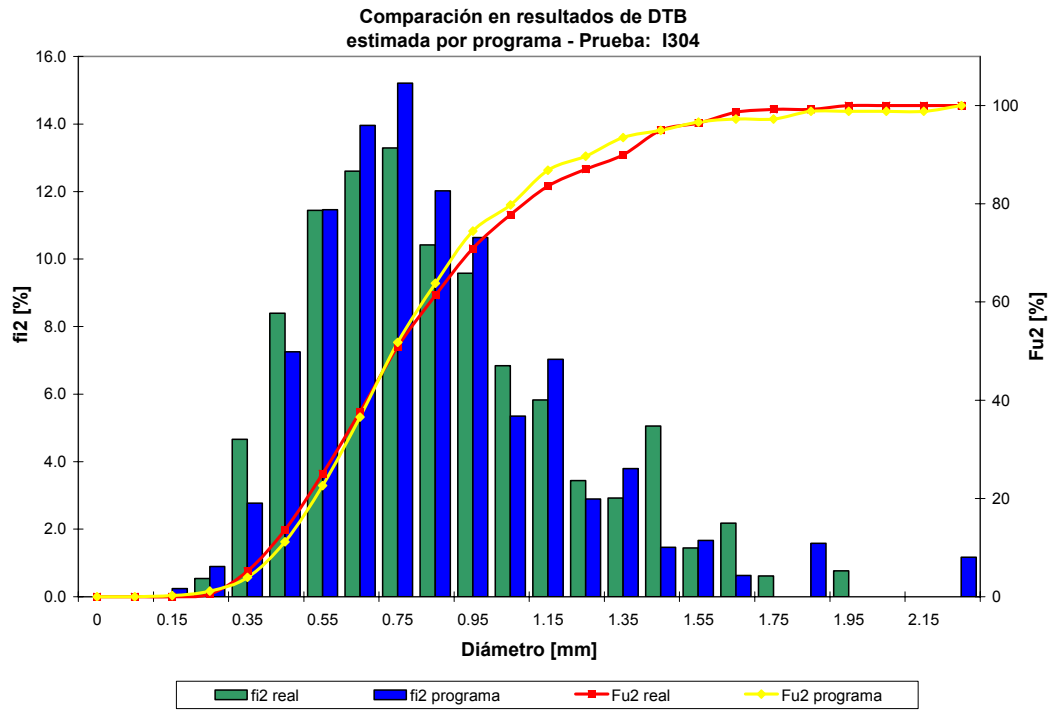


Gráfico N° 4.14: Comparación de DTB para prueba I304



## 5.0 CRITERIOS Y PROCEDIMIENTOS

El procedimiento usado para obtener la información sobre la DTB se puede dividir en tres etapas:

- Captación del video.
- Digitalización y procesamiento del video.
- Procesamiento de la información entregada por el ImageJ

En el desarrollo de este Capítulo se explicará cada uno de los pasos que se realizan para el procesamiento de las imágenes. Finalmente se adjunta un protocolo que abarca las tres etapas.

### 5.1 CAPTACIÓN DEL VIDEO

Para la captación de la imagen se ocupa el sistema ejemplificado en las figuras N° 5.1 y 5.2.

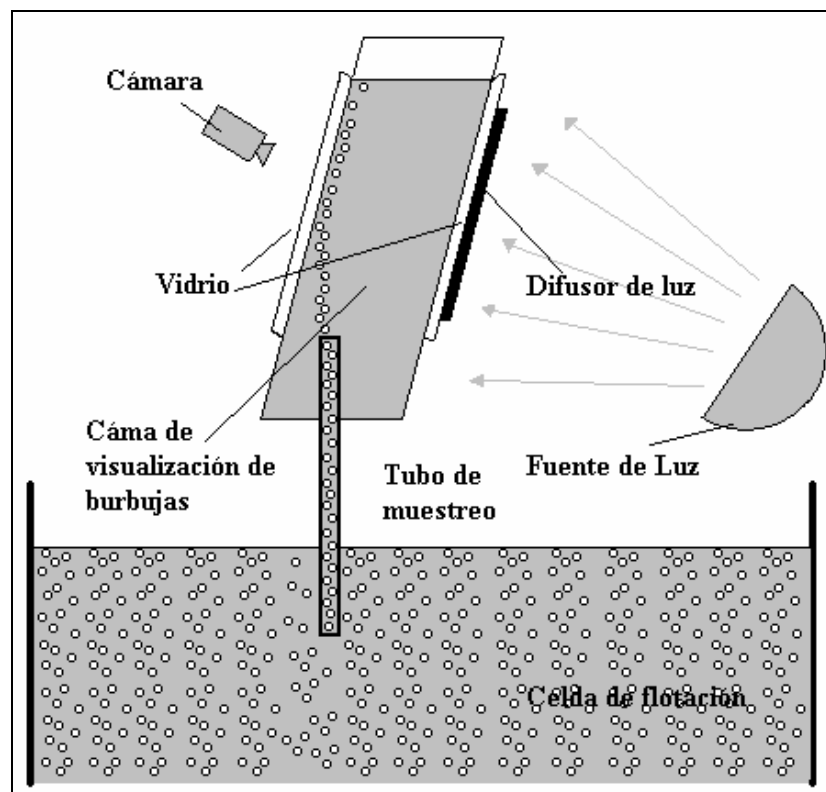


Figura N° 5.1: Esquema general del sistema de filmación de Burbujas



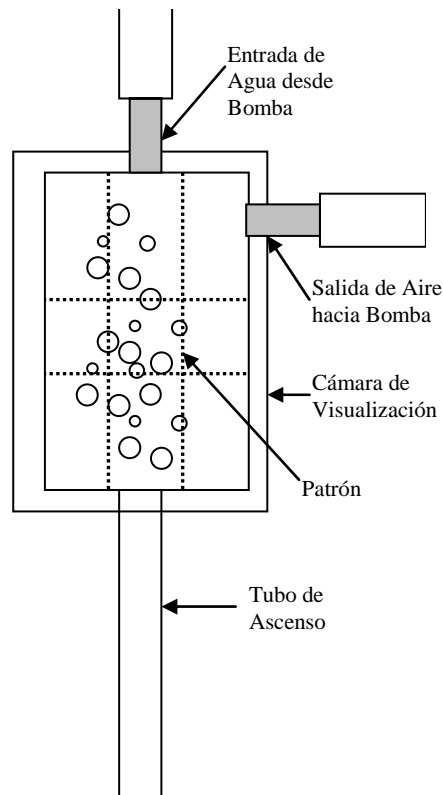


Figura N° 5.2: Esquema específico del visualizador de Burbujas-

Este sistema actualmente se encuentra implementado en el laboratorio de procesamiento de minerales y contempla los siguientes pasos<sup>21</sup>:

- En una celda de vidrio se prepara una mezcla de agua y espumante con una concentración igual a la concentración de espumante en la pulpa, expresada en gramos de espumante por litro de agua en la pulpa.
- El muestreador se sitúa entre la cámara y la lámpara, como se observa en la Figura 5.3.
- Utilizando una bomba, el muestreador se llena con la mezcla de agua y espumante.
- Comienza la filmación del video.
- La toma de video continúa hasta por 45 segundos.
- El contenido del visualizador se vierte en la celda para evitar perder el mineral que asciende con las burbujas.

<sup>21</sup> Para mayores antecedentes se puede consultar la memoria de Ingeniero Civil de Minas de Francisca Rodríguez Mackenna, año 2006, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, paginas 38 – 40.



Figura N° 5.3: Instalación del muestreador de burbujas.

## 5.2 DIGITALIZACIÓN Y ANÁLISIS DEL VIDEO

### 5.2.1 Digitalización del video

Lo primero que hay que hacer con el video filmado es digitalizarlo, esto significa que de la grabación en casete se pasará a un video con formato digital. Para esto se ocupará un programa llamado VirtualDub que transformará el video grabado en un conjunto de imágenes (cuadros).

Los criterios más importantes de esta se detallan a continuación:

- El video debe ser descargado por la metodología –FireWire.
- El video debe ser captado a una tasa de 29.97 cuadros por segundo.
- Se deben aplicar dos filtros a las imágenes:
  - Filtro deinterlace con la opción Discar field 2
  - Filtro reize con la opción 320 x 240 y Interlaced
- Se exporta las imágenes (cuadros) con formato Windows BMP para ser procesados por el programa ImageJ.

### 5.2.2 Análisis del video

Para el análisis del video se ocupa el programa, ImageJ, caracterizado en el Capítulo 3 de este Anexo. Este programa contiene una serie de herramientas para el

procesamiento de imágenes digitales, donde el uso de estas depende del usuario y el objetivo que se requiere cumplir. Está fuera del alcance de este documento explicar el funcionamiento del programa ImageJ completamente. Solamente se explicarán las herramientas utilizadas y los criterios asociados a estas.

Los criterios más importantes utilizados en esta etapa se detallan a continuación:

- Mejora de Contraste. Se utiliza la herramienta de mejorar el contraste para que las burbujas tengan contornos más delimitados.
- Setear la referencia conocida, el patrón de cuadrado, en su diagonal a  $\sqrt{2} \cdot 15$  para determinar la escala.
- Pasar a escala de grises las imágenes en 8-bit.
- Pasar a blancos y negros puros las imágenes.
- Seleccionar un área clara, para analizar, en donde sólo las burbujas estén delimitadas por el color negro y no el fondo.
- Usar la herramienta para cerrar posibles burbujas que hubiesen quedado abiertas en su contorno.
- Rellenar las burbujas con color negro, para contar el área, a través de los píxeles, de estas.
- Usar la herramienta para separar posibles burbujas que hubiesen quedado pegadas. Esta herramienta sirve cuando hay burbujas sobrepuestas unas a otras.
- Analizar imágenes con los siguientes criterios:
  - Filtro en tamaño de área, desde 0,01 mm<sup>2</sup> hasta el infinito
  - Filtro de esfericidad entre 0,85 y 1,00

### **5.3 PROCESAMIENTO DE INFORMACIÓN ENTREGADA POR IMAGEJ**

Para procesar la información entregada por el programa ImageJ se crearon dos planillas Excel, la primera para filtrar la información en función de una elección cada cierta cantidad de cuadros, y la segunda para procesar y generar la información estadística de la DTB.

#### **5.3.1 Filtrado de cuadros**

Como se mencionó en el párrafo anterior se debe establecer cada cuantos cuadros tomaremos la información.

Para esto se levanta la restricción de muestreo ocupada en el análisis manual<sup>22</sup>, ya que ahora el procesamiento es por computador y por ende se puede analizar un gran número de cuadros en un pequeño tiempo.

Ahora el único criterio que prevalece es el de no contar una burbuja más de una vez. Según esto lo que necesitaríamos saber es la velocidad con que ascienden las burbujas para ver el tiempo que demoran en cruzar el área definida en el programa ImageJ.

Pruebas realizadas con algunos videos arrojaron que la velocidad de ascenso de las burbujas es de 200 mm/s para un caudal de aire de 17,72 l/min. Según esto y con la información de la distancia que atraviesa la burbuja en el área de análisis, se pudo llegar a que el n° de cuadros mínimo era del orden de 1 de 4 cuadros.

Para ser conservador, y aunque se pierda un poco de información, que no es relevante para el análisis que se realiza, se decidió ocupar un muestreo uniforme para todas las pruebas de 1 cada 7 cuadros comenzando por el 120 y terminado con el 800<sup>23</sup>.

### **5.3.2 Analisis de DTB**

La planilla de análisis de DTB posee 3 hojas con las características que se explican a continuación.

#### **Hoja 1 – Results**

En esta hoja se toma la información entregada por la planilla de filtro y se calcula el diámetro obtenido por la información de área y el diámetro obtenido por la información de perímetro. Luego se calcula el factor de corrección explicado en el Capítulo 4.2, para entregar el diámetro de la burbuja. Con este se calcula el  $d^2$  y  $d^3$ .

Esto se muestra en la figura N° 5.4.

#### **Hoja 2 – Distribución**

En esta hoja se calcula las fracciones retenidas, ya sea en número o superficie, y las fracciones acumuladas. Además se calculan las estadísticas que quedan claramente identificadas en la hoja.

---

<sup>22</sup> Manualmente se utilizaba uno de cada diez cuadros.

<sup>23</sup> En función de lo postulado en la memoria de Ingeniero Civil de Francisca Rodríguez Mackenna, año 2006, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, paginas 48 – 53.

### Hoja 3 – Gráfico

En esta hoja se grafica automáticamente los resultados en distribución retenida y acumulada en superficie de las burbujas estudiadas.

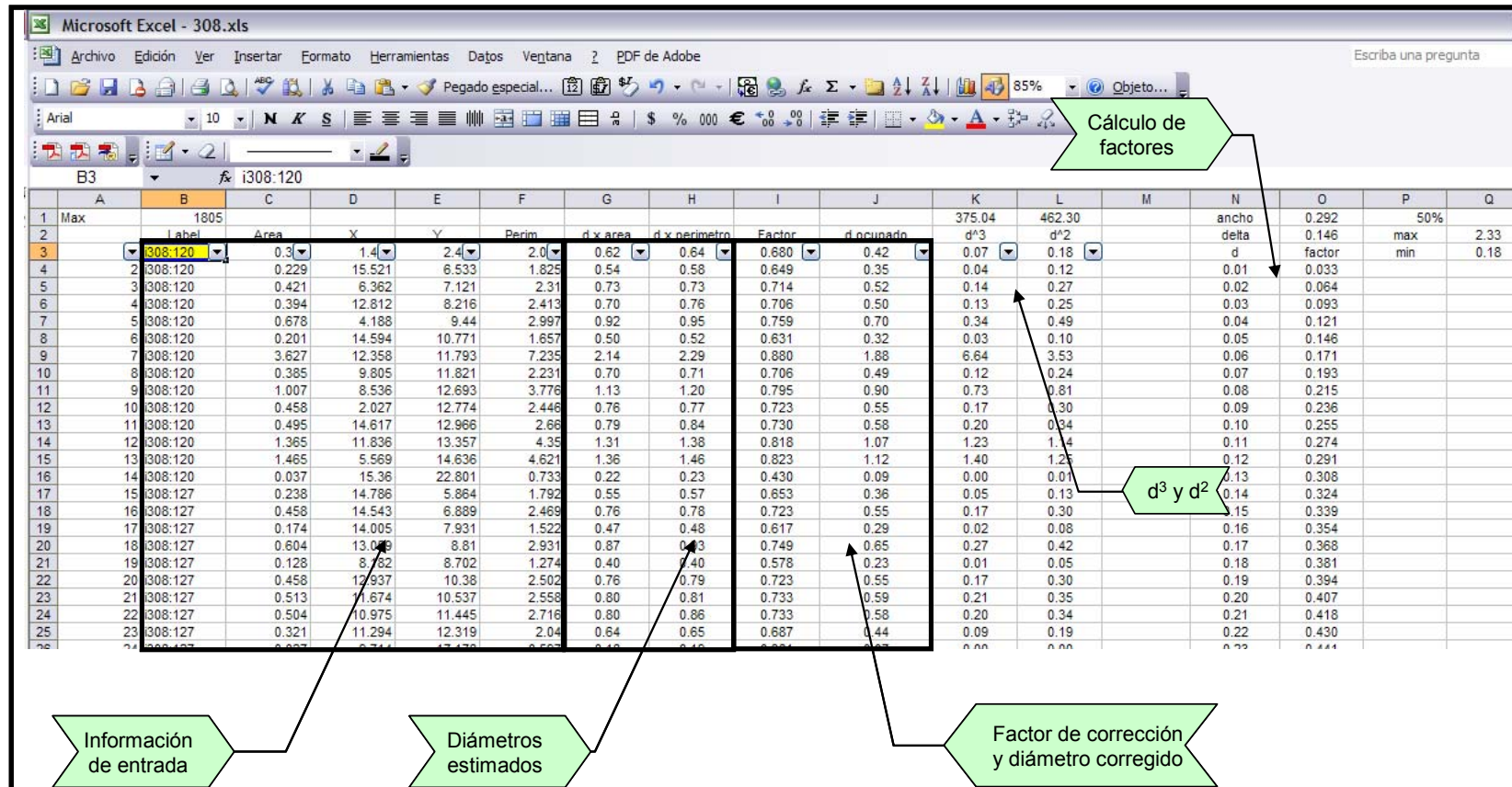


Figura N° 5.4: Hoja n°1, cálculo de diámetro por burbuja

## 6.0 CONCLUSIONES

Las conclusiones y recomendaciones principales que se desprenden de los resultados obtenidos son las siguientes:

- El programa ImageJ posee una desviación de cero al repetir un análisis en idénticas condiciones varias veces.
- El programa ImageJ entrega una buena estimación del área de la burbuja, y por consecuencia del diámetro de esta, tomando en cuenta toda la sección de la burbuja. En este punto se mostró diferencia con la medición manual ya que esta última comete errores por la falta de precisión para incluir los bordes de la burbuja completamente.
- Para el punto anterior se incorporó un factor de corrección para comparar la medición manual con la entregada por ImageJ, definiendo la relación  $\frac{d_{real}}{d_{programa}} = \frac{d}{d + 2 \cdot \Delta}$ , en donde  $\Delta$  corresponde a un 40 – 50 % del ancho del borde delimitado por el programa para la burbuja que varía entre 0,2 – 0,3 mm. Este factor no debería usarse para futuras mediciones, excepto al querer comparar con mediciones manuales.
- Con respecto a los resultados estadísticos, se puede decir que en promedio el programa entrega un  $d_{32}$  con un error del 3,8 % lo cual se define como aceptable.
- Se da por validado el uso del programa pero conservando estrictamente la metodología y criterios en el uso del ImageJ y la correcta interpretación de los resultados
- Se entrega a continuación un protocolo para realizar el análisis de distribución de tamaño de burbujas desde el video ya captado hasta la información estadística característica de la prueba como  $d_{32}$ ,  $d_{25}$ ,  $d_{50}$ ,  $d_{75}$ , medias, y  $fi_2$ ,  $Fu_2$

## PROTOCOLO PARA ANÁLISIS DE DTB



## 1.0 DIGITALIZACIÓN DEL VIDEO

1.1 Se activa el modo de captura con el VirtualDub versión 1.6.15 o superior, de la siguiente manera: Una vez conectada la cámara, se abre el programa, en **File**, se va a la opción **Capture AVI** (Figura 1.1)

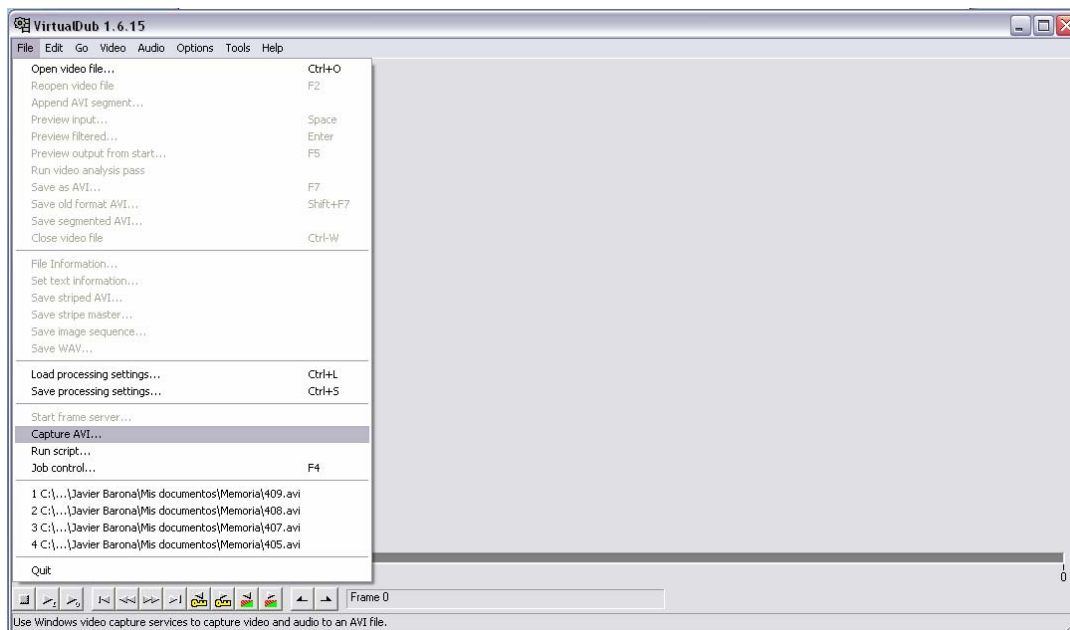


Figura N° 1.1: Punto 1.1, Capturación del video.

1.2 Una vez estando en el modo de captura, se selecciona la ubicación del video, en la opción **File, Set capture file** (Figura N° 1.2)



Figura N° 1.2: Punto 1.2, selección de la ubicación del video.

1.3 Luego, se debe ubicar el comienzo del video a traspasar en la propia cámara (Con las teclas de la cámara) y se pausa.

1.4 Después, en el programa, hay que tener cuidado de que se esté capturando a 29.97 cuadros por segundo. Para esto, en la parte inferior de la pantalla, debiera aparecer la cantidad de cuadros por segundos (FPS). Si no es así, se hace click sobre el cuadro y se selecciona 29.97 FPS (Figura 1.3)

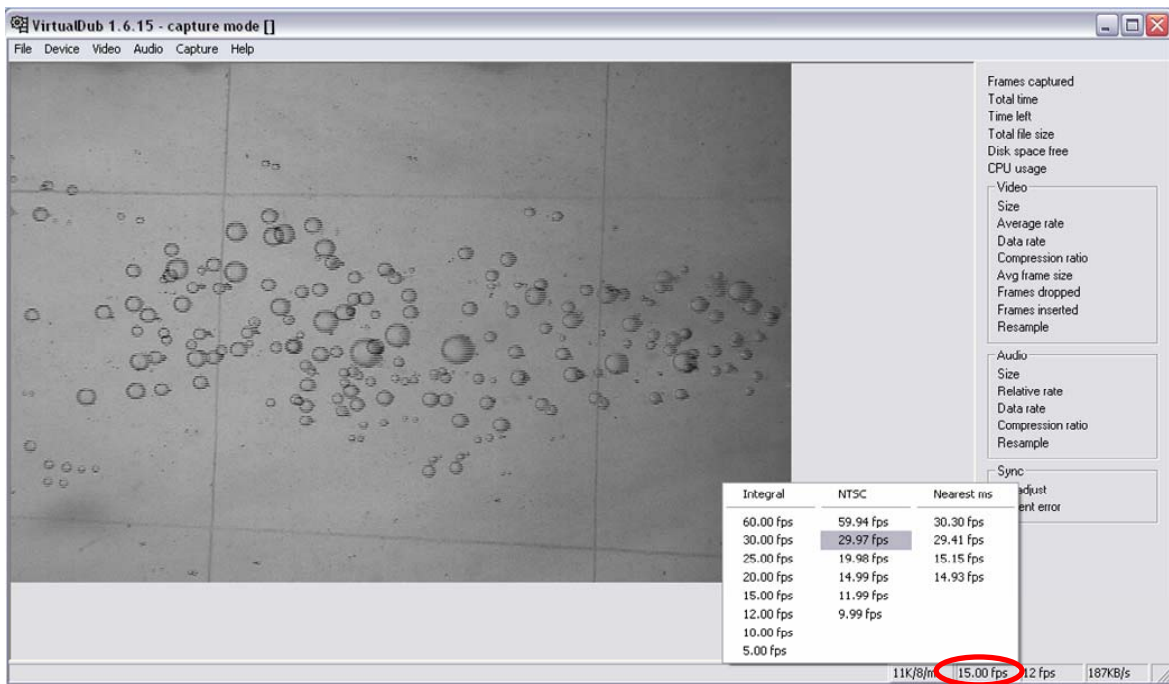


Figura N° 1.3: Punto 1.4, definición de cuadros de captura por segundo.

1.5 Así, para iniciar la captura del video, se presiona play en la cámara y luego F5 en el computador. Así comienza la captura del video. Una vez terminada, se debe presionar la tecla Esc para finalizar la captura. Con esto, queda grabado el video al PC. Esto se debe realizar con cada video a capturar. Luego, se puede cerrar el modo de captura en **File, Exit capture mode**.

1.6 Ahora, antes de analizar las imágenes, hay que filtrarlas ya que los videos se encuentran entrelazados debido a que la velocidad de captura es muy alta. Para esto, se abre el video en el programa VirtualDub, **en File, Open video file** (Figura N° 1.4).

1.7 Una vez abierto el video, se le deben aplicar dos filtros. Los filtros se aplican en **Video, Filters** (Figura N° 1.5).

1.8 Se le agrega el filtro **Deinterlace** con la opción **Discard field 2** y luego el filtro **Resize** con la opción **320x240** y con la opción **Interlaced**, quedando como la figura N° 1.6.

1.9 Luego, el video filtrado se exporta en una secuencia de imágenes en una carpeta, en la opción **Save image sequence**, con la opción **Windows BMP** (Figura 1.7 y 1.8)

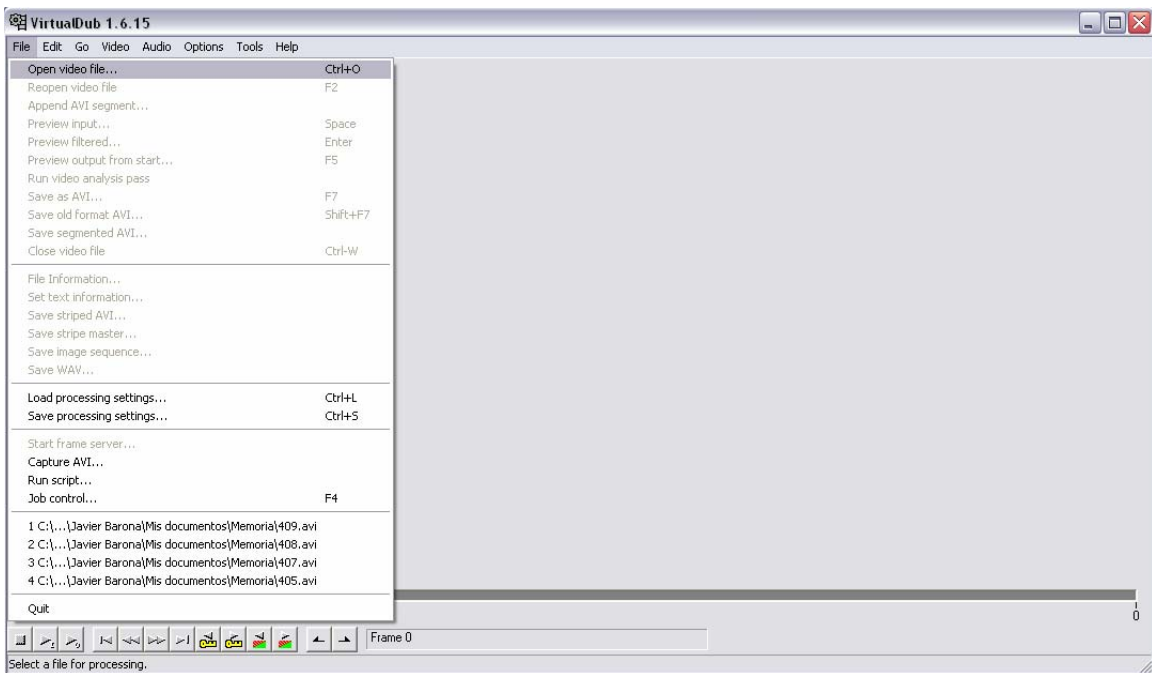


Figura N° 1.4: Punto 1.6, apertura de video capturado.

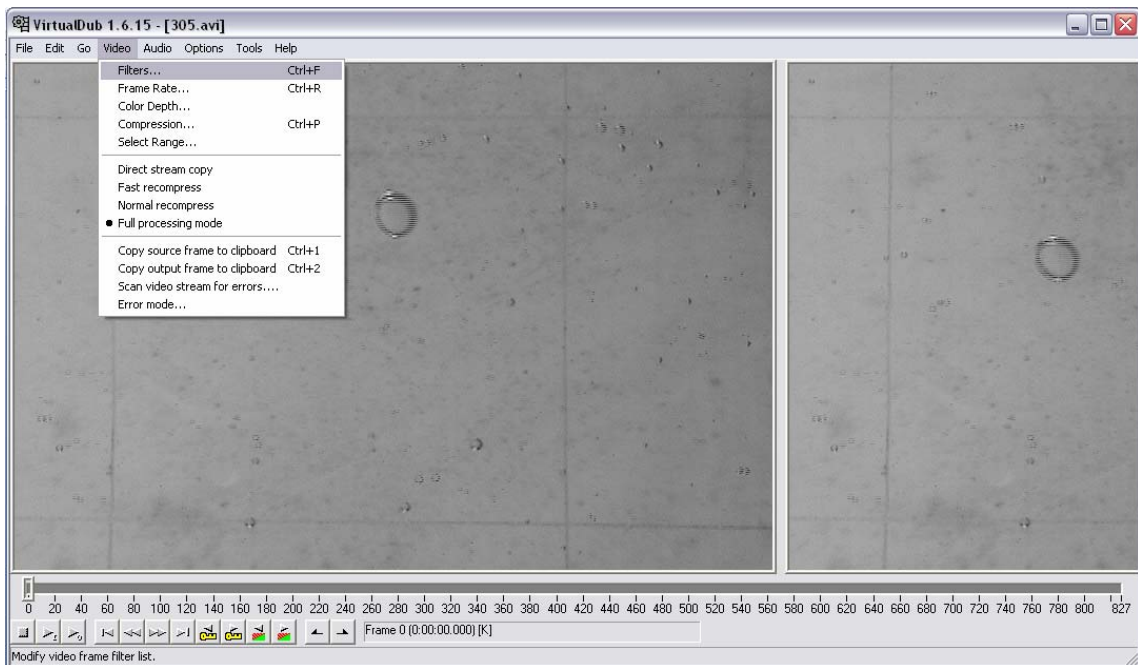


Figura N° 1.5: Punto 1.7, selección de herramienta de filtros.

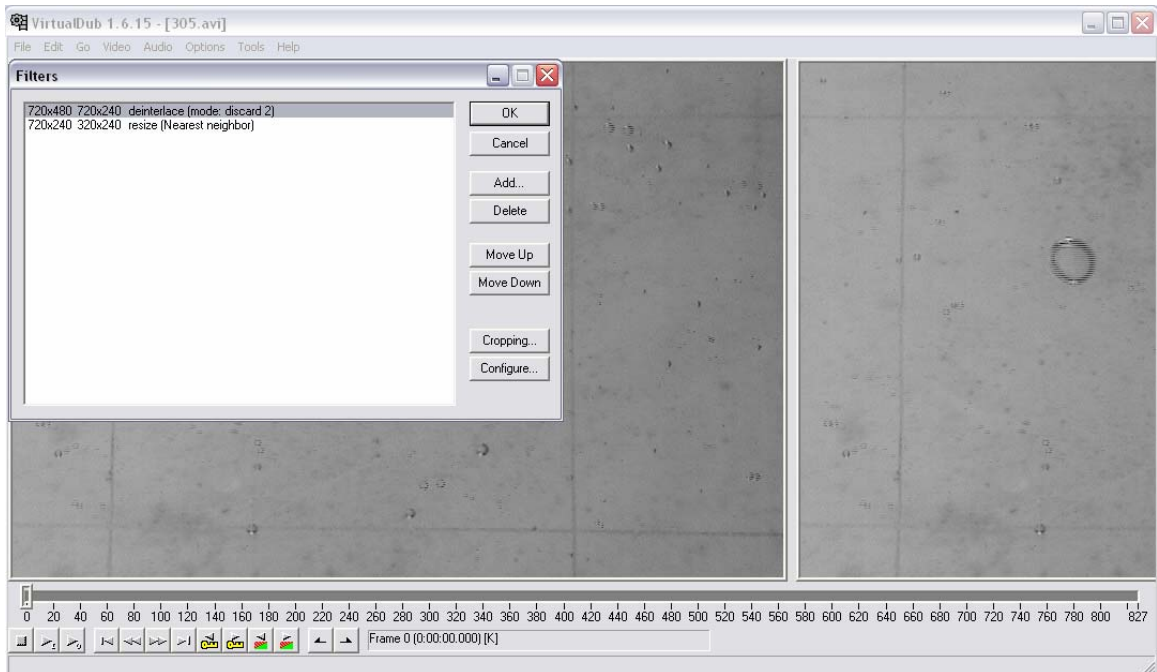


Figura N° 1.6: Punto 1.8, filtros del video.

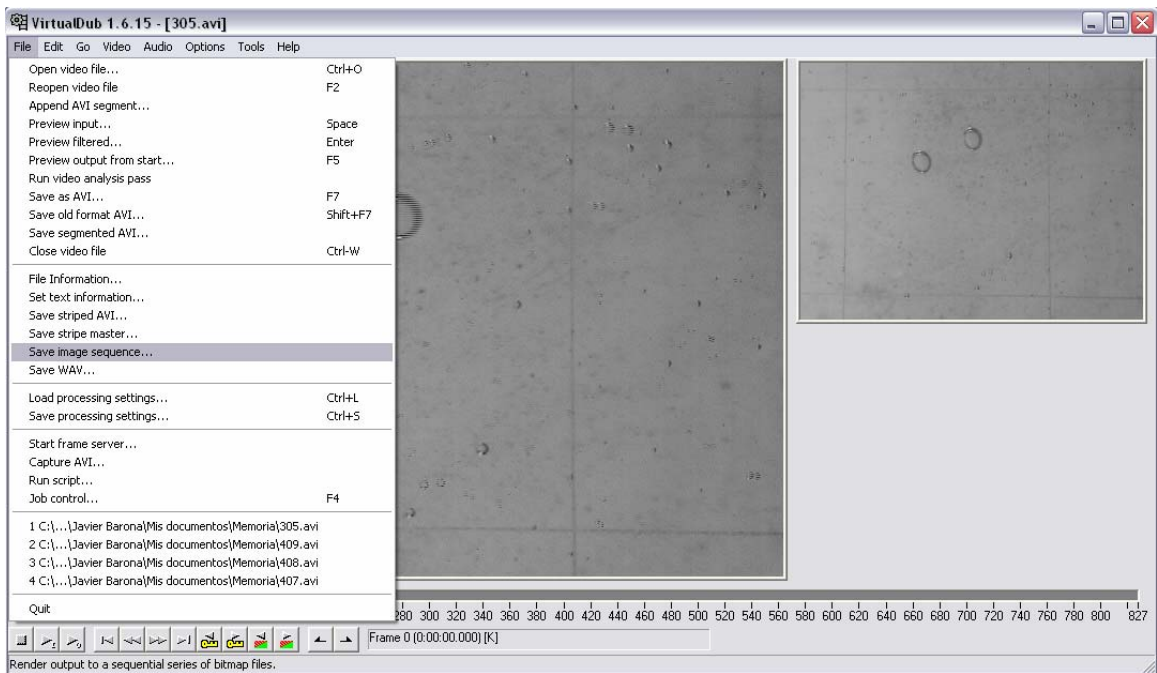


Figura N° 1.7: Punto 1.9, exportación de imágenes.

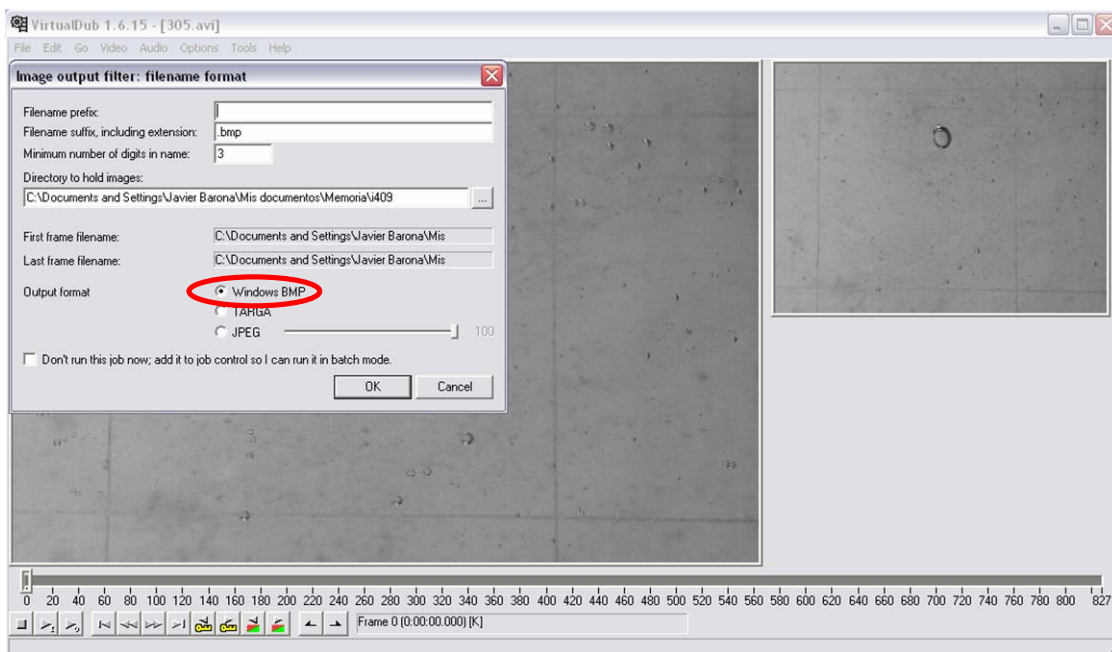


Figura N° 1.8: Punto 1.9, formato de imágenes exportadas.

Después de esto último las imágenes digitalizadas están listas para ser analizadas por el programa ImageJ versión 1.36 o superior.

## 2.0 ANÁLISIS DEL VIDEO

2.1 Se abren las imágenes en la opción **File, Import, Image Sequence** (Figura N° 2.1). Y se selecciona una de las imágenes.

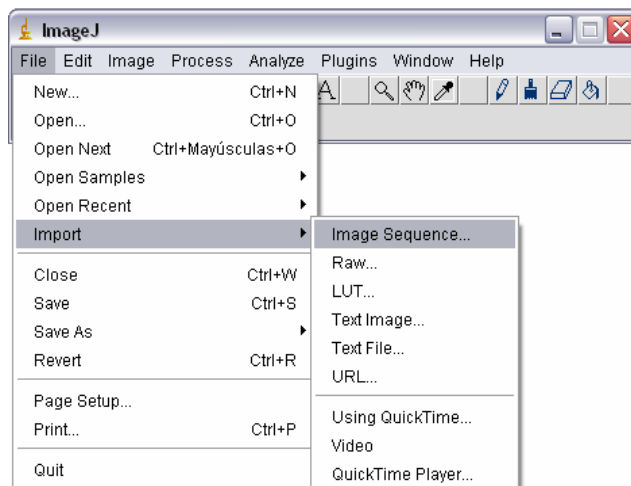


Figura N° 2.1: Punto 2.1, importación de imágenes en programa ImageJ

2.2 Luego aparecerá una ventana con opciones, donde **no deben haber opciones seleccionadas** y se debe hacer click en OK (Figura N° 2.2)

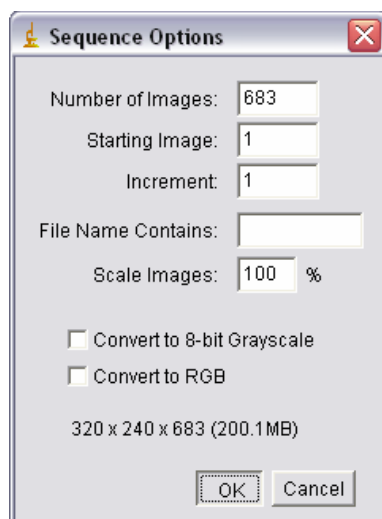


Figura N° 2.2: Punto 2.2, cuadro de opciones en importación de imágenes

2.3 Una vez importada la secuencia de imágenes, se debe mejorar el contraste de estas ya que necesitamos imágenes bien contrastadas. Se va a **Process, Enhance Contrast**, y se debe seleccionar la opción **Normalize all Slices**. (Figura N° 2.3)

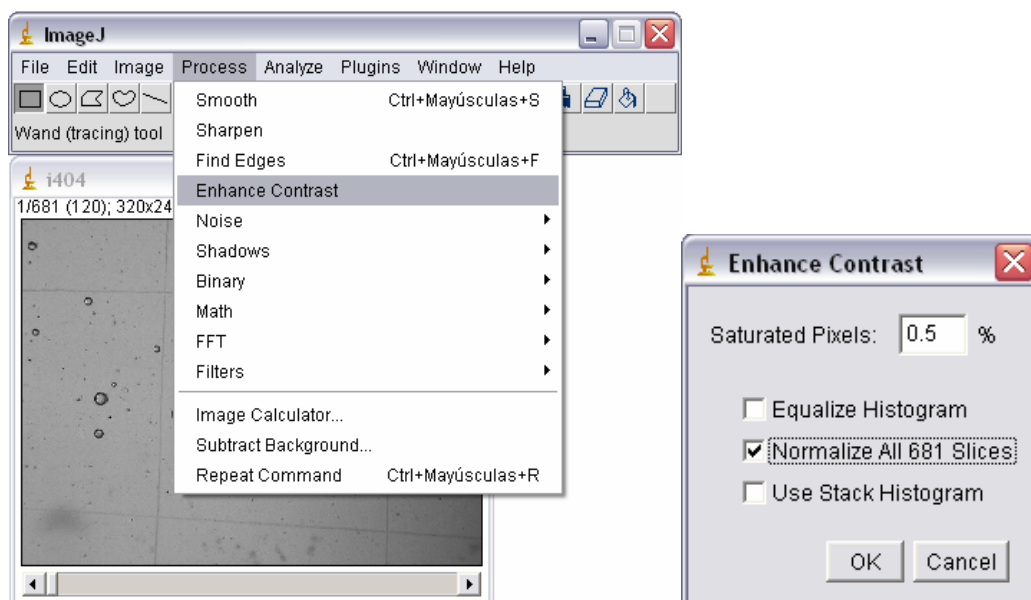


Figura N° 2.3: Punto 2.3, proceso para mejorar contraste.

2.4 Luego, se debe definir la escala de la imagen a procesar. Para esto, se hace una línea en la imagen con la referencia conocida. (Figura N° 2.4). Luego, en **Analyse, Set Scale** se le ingresa la distancia conocida en **Known Distance**, en nuestro caso es  $\sqrt{2} \cdot 15$ , y se le ingresa las unidades en **Unit of Length**, milímetros. (Figura N° 2.5)

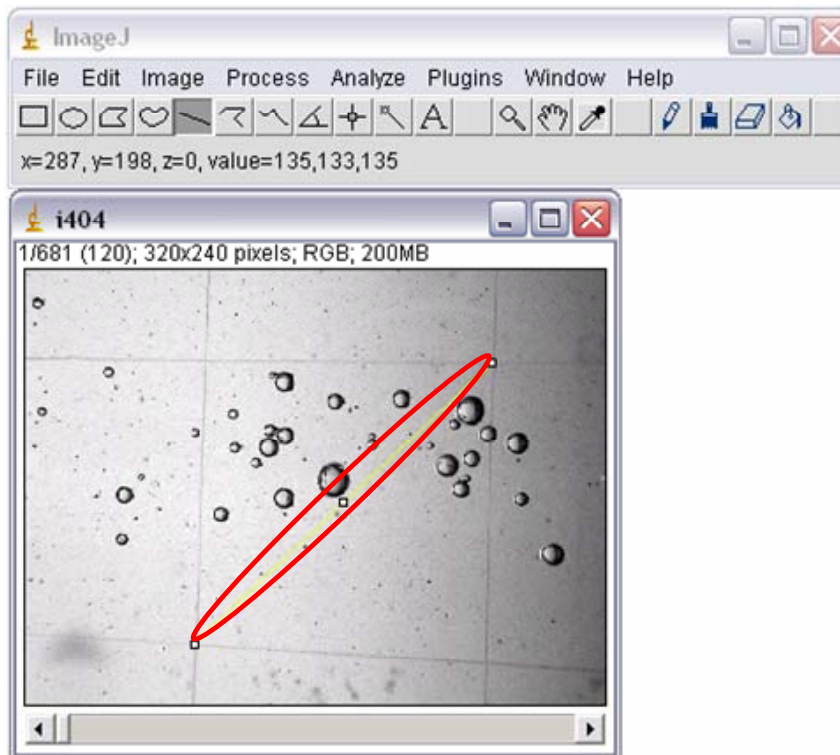


Figura N° 2.4: Punto 2.4, selección de referencia de escala.

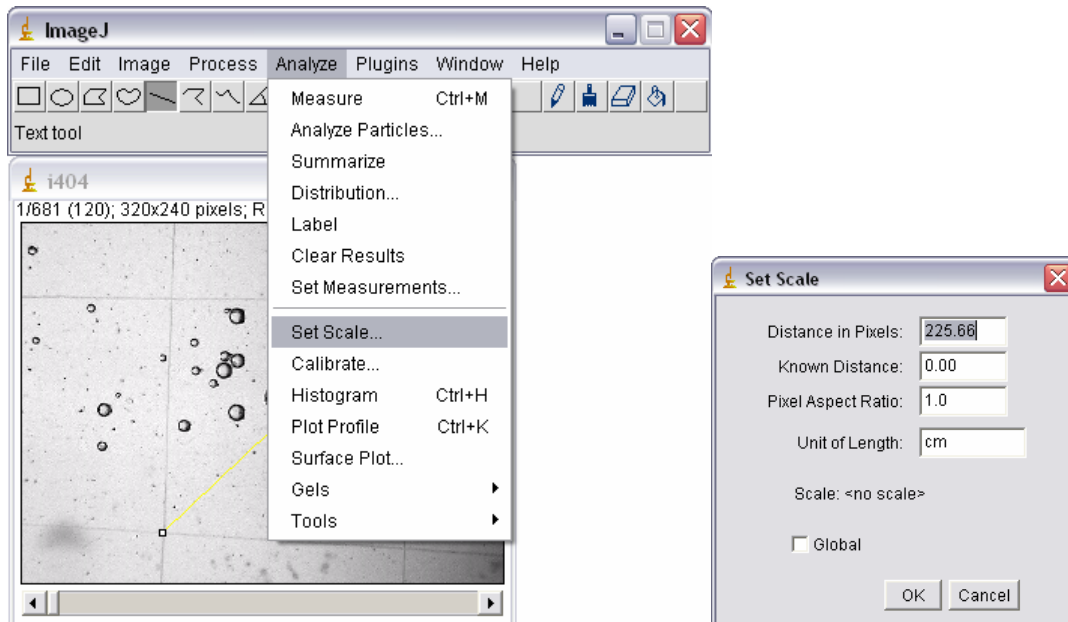


Figura N° 2.5: Punto 2.4, selección de referencia de escala.

2.5 De ahí hay que eliminar la línea que se hizo haciendo click en cualquier parte de la imagen.



2.6 Luego hay que cambiar el tipo de imagen a escala de grises para luego pasarla a blanco y negro y así poder analizarla. Primero escala de grises en **Image, Type, 8-bit**. (Figura N° 2.6). De ahí hay que pasarla a blanco y negro, en **Process, Binary, Threshold**. (Figura N° 2.7)

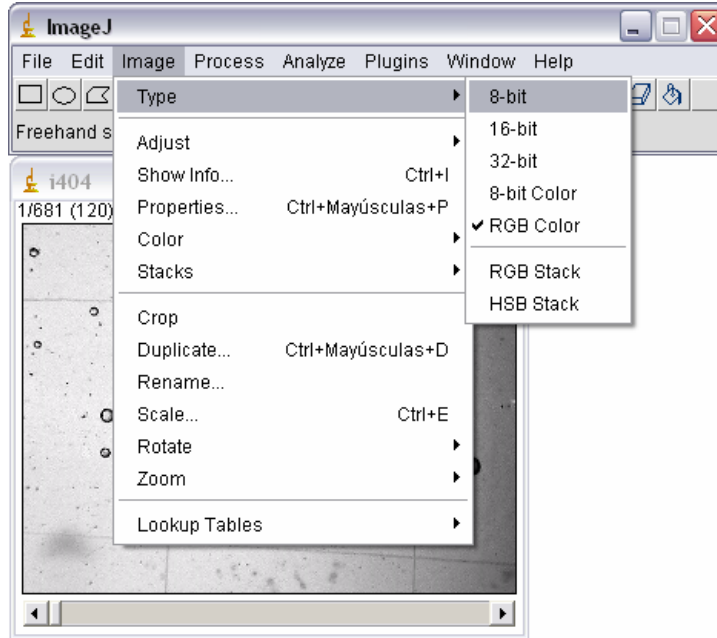


Figura N° 2.6: Punto 2.6, cambio de imagen a escala de grises.

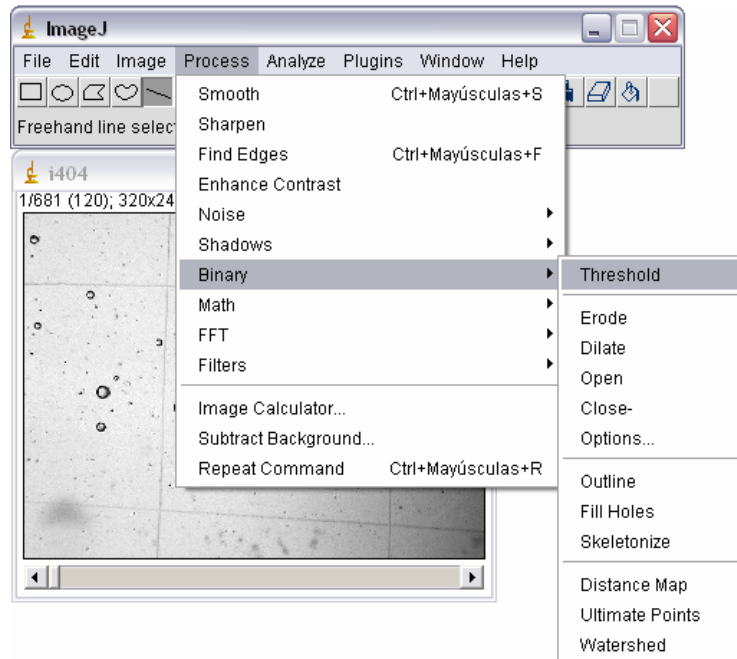


Figura N° 2.7: Punto 2.6, cambio de imagen a negros y blancos puros.

2.7 Ahora hay que definir y seleccionar el área donde el programa analizara. Esto se hace seleccionando un cuadrado en la imagen (Figura N° 2.8), luego hay que borrar el resto de la imagen en **Edit, Clear Outside** (Figura N° 2.9), y luego deseleccionando el cuadrado haciendo click en cualquier parte de la imagen.

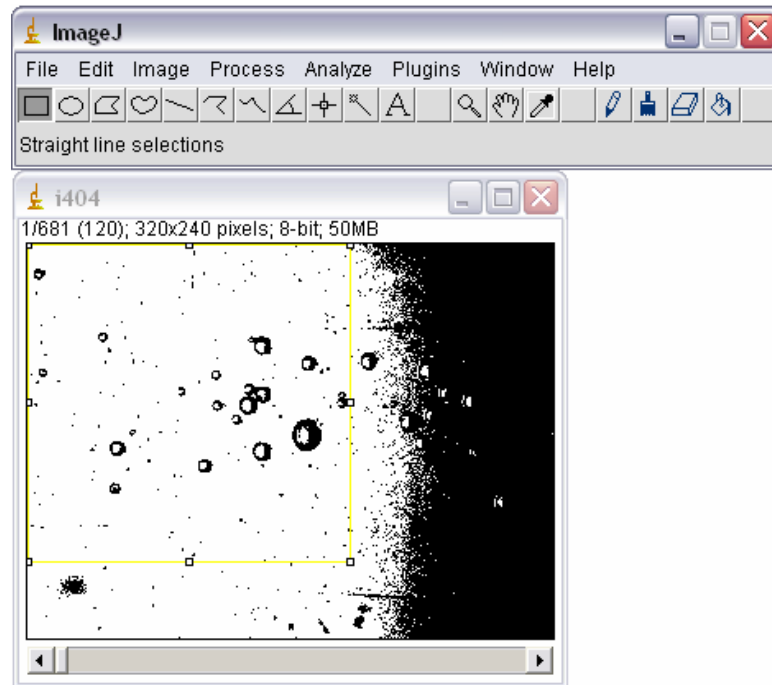


Figura N° 2.8: Punto 2.7, selección de área de análisis.

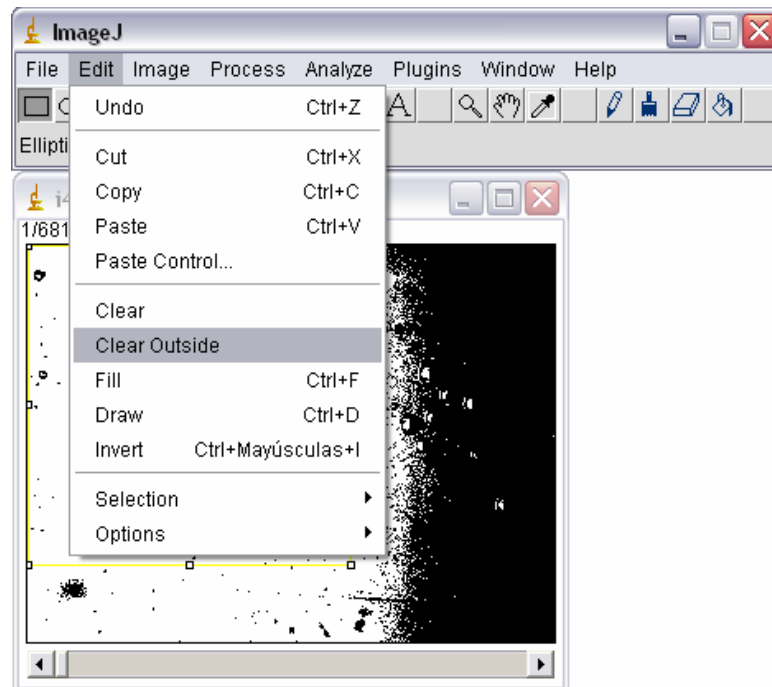


Figura N° 2.9: Punto 2.7, eliminación del resto de la imagen.

2.8 Luego, se cierran las burbujas que puedan haber quedado abiertas en **Process, Binary, Close**. (Figura N° 2.10)

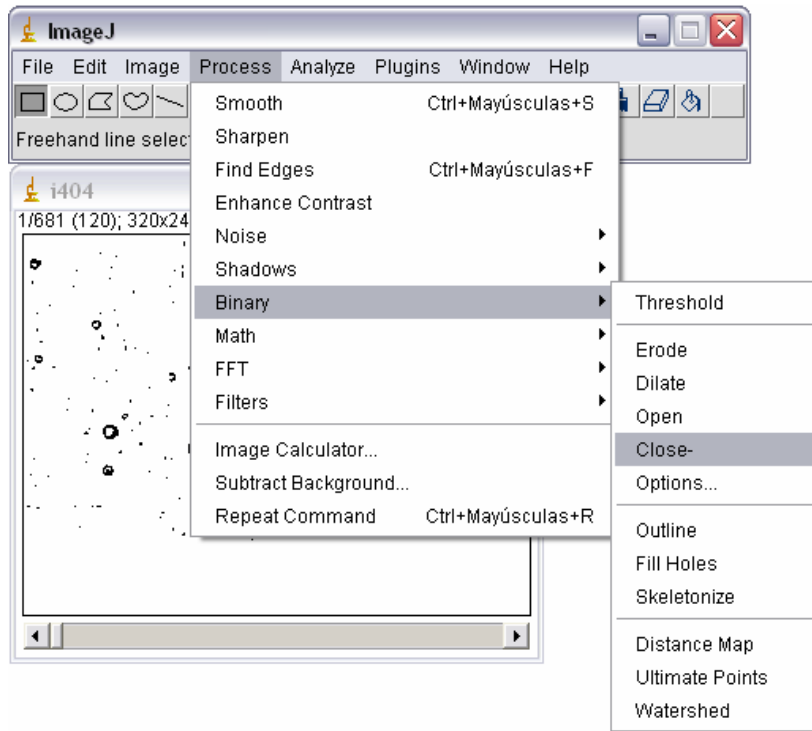


Figura N° 2.10: Punto 2.8, cierre de burbujas que quedaron abiertas.

2.9 Luego se rellenan las burbujas para que pueda ser contada el área de estas, en **Process, Binary, Fill Holes**. (Figura N° 2.11)

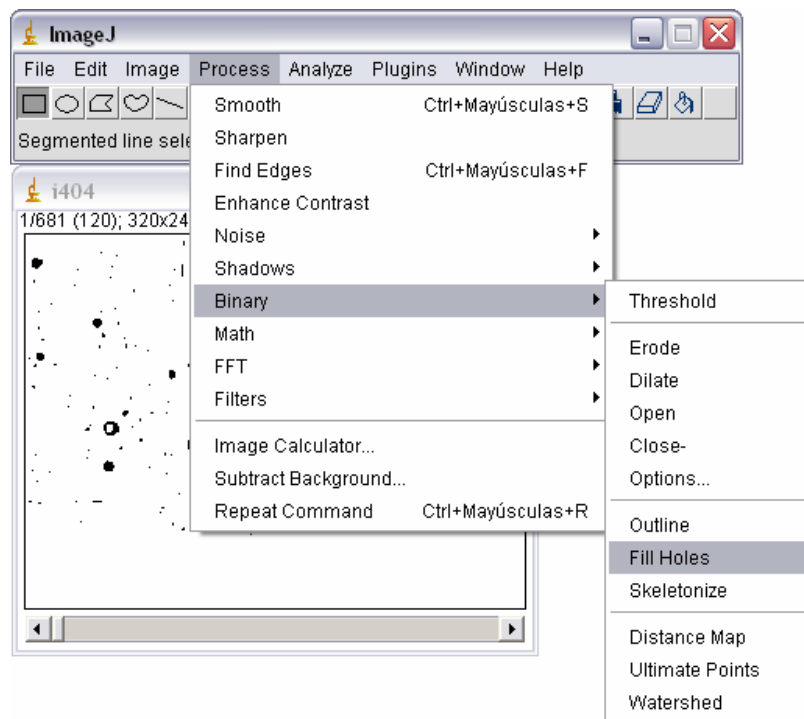


Figura N° 2.11: Punto 2.9, relleno de burbujas.

2.10 Para poder procesar las burbujas que pudiesen haber quedado pegadas, se separan en **Process, Binary, Watershed**. (Figura N° 2.12)

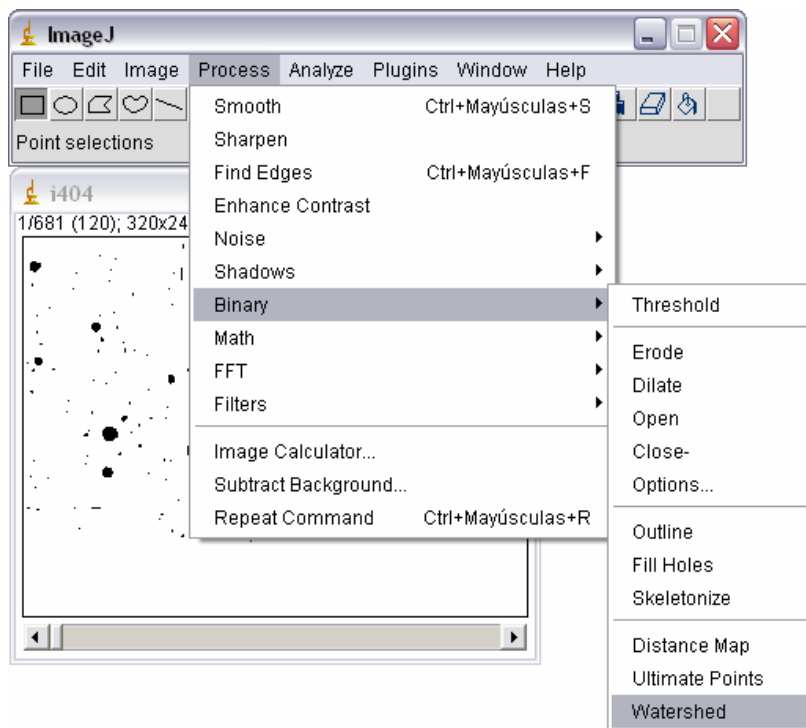


Figura N° 2.12 Punto 2.10, separación de burbujas.

2.11 Ahora se pueden analizar las burbujas en **Analyze, Analyze Particles**. (Figura N° 2.13).

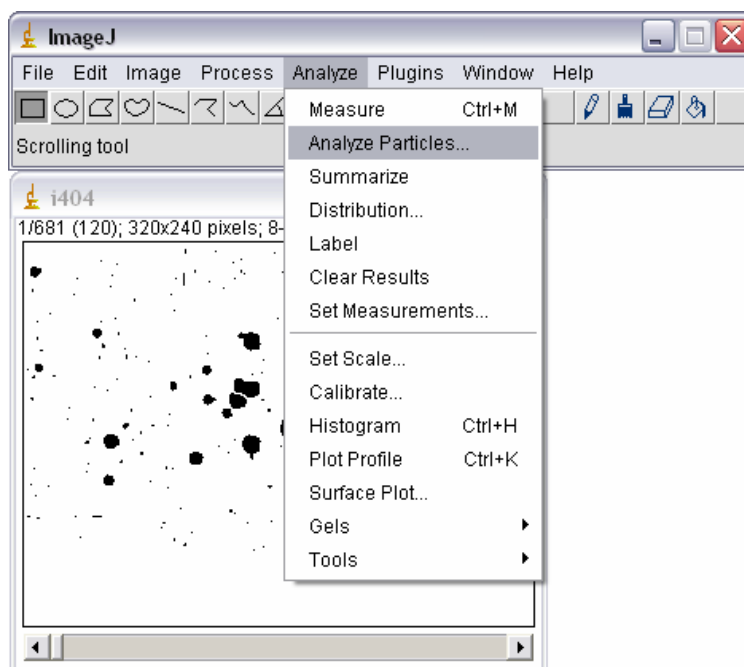


Figura N° 2.13: Punto 2.11, análisis de imágenes.

2.12 En la ventana de opciones, en **size** se ingresa el rango de área a analizar y en **Circularity**, la esfericidad de las burbujas a analizar. En **Show** se selecciona **Outlines** para poder ver que burbujas analizó y se selecciona la opción **Display Results**. (Figura N° 2.14)

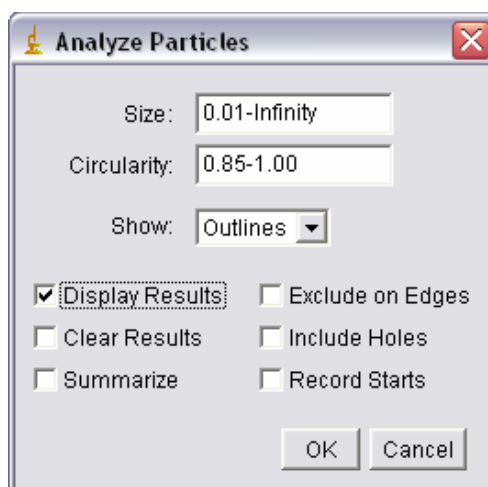


Figura N° 2.14: Punto 2.12, opciones de análisis de imágenes.

2.13 En la ventana de resultados, se guardan a un archivo .txt para luego analizar los resultados. (Figura N° 2.15)

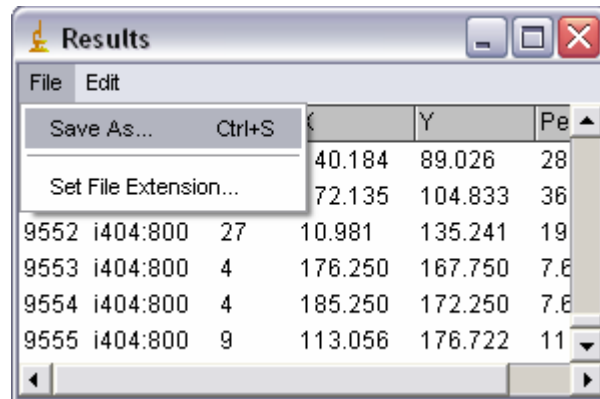


Figura N° 2.15: Punto 2.13, exportación de resultados.

### 3.0 PROCESAMIENTO DE RESULTADOS

3.1 Se importan los resultados .txt para ser abiertos por el programa Excel.

3.2 Se copia la información de todas las burbujas, sin la primera línea de nombre de campos, para las 6 columnas (número, label, area, x, y, perímetro).

3.3 Se pega esta información como valor en la planilla de filtro desde la celda pintada en amarillo. Esta planilla tiene la capacidad programa de procesar 22.000 datos de burbujas.(Figura N° 3.1)

3.4 Se le asigna un valor de muestreo de cuadros en la celda celeste. (Figura N° 3.1)

3.5 Se procede a filtrar la columna "J" por celdas vacías para luego copiar el valor de las burbujas que cumplen con el criterio del filtro de la columna B hasta la F, para las filas 3 en adelante.

prueba	Label	Area	X	Y	Perim.	cuadros			
1	1402:120	0.036	14.543		0.31	0.731	120	7	1.0
2	21402:120	0.401	13.486				120	7	1.0
3	31402:120	0.529	2.055				120	7	1.0
4	41402:120	0.903	7.254				120	7	1.0
5	51402:120	0.894	13.526				120	7	1.0
6	61402:120	0.228	5.168	8.194	1.733	120			
7	71402:120	0.31	12.516	9.353	1.98	120			
8	81402:120	0.474	2.645	10.021	2.497	120			
9	91402:120			10.05	2.25	120			
10	101402:120			10.889	2.497	120			
11	111402:120			11.073	3.149	120			
12	121402:120			16.095	0.596	120			
13	131402:120	0.411	15.399	17.528	2.306	120			
14	141402:121	0.036	16.931	1.934	0.731	121	8	1.1	1
15	151402:121	0.666	4.917	7.7	3.014	121	8	1.1	1
16	161402:121	0.876	2.216	7.992	3.364	121	8	1.1	1
17	171402:121	0.876	8.709	8.079	3.555	121	8	1.1	1
18	181402:121	0.776	16.818	8.272	3.373	121			
19	191402:121	0.94	11.904	8.5	3.634	121			
20	201402:121	0.201	1.628	8.658	1.598	121			
21	211402:121	0.338	5.64	9.393	2.115	121			
22	221402:121	0.365	15.978	9.731	2.227	121	8	1.1	1
23	231402:121	0.566	3.45	10.651	2.688	121	8	1.1	1
24	241402:121	0.73	13.814	10.838	3.252	121	8	1.1	1
25	251402:121	0.465	6.549	10.778	2.52	121	8	1.1	1

Figura N° 3.1: Punto 3.3 y 3.4, Hoja de filtrado.

3.6 La información copiada debe ser pegada en la planilla de análisis en la celda de amarillo como referencia. (Figura N° 3.2). A partir de esto se calculan automáticamente las estadísticas y se genera el gráfico de DTB respectivo.

3.7 Queda como variable el ancho asociado a superficie definida por el programa de la burbuja, así como también la proporción entre  $\Delta$  y el ancho de la superficie, valores planteados en el punto 4.2.2 de este informe. (Figura N° 3.2).

Max	Label	Area	X	Y	Perim.	d x area	d x perimetro	Factor	d ocupado	375.04	462.30	ancho delta	0.292	50%	2.33
3	308:120	0.3	1.4	2.4	2.0	0.62	0.64	0.680	0.42	0.07	0.18	0.18	0.146	0.18	0.18
4	408:120	0.229	15.521	6.533	1.628	0.54	0.55	0.649	0.35	0.04	0.12	0.01	0.033	0.02	0.064
5	508:120	0.421	6.362	7.121	2.31	0.73	0.73	0.714	0.52	0.14	0.2	0.02	0.064	0.03	0.093
6	608:120	0.394	12.812	8.216	2.413	0.70	0.76	0.706	0.50	0.13	0.34	0.04	0.121	0.05	0.146
7	708:120	0.678	4.188	9.44	2.997	0.92	0.95	0.759	0.70	0.34	0.34	0.05	0.171	0.06	0.193
8	808:120	0.201	14.594	10.771	1.657	0.50	0.52	0.631	0.32	0.03	0.24	0.12	0.24	0.11	0.274
9	908:120	3.627	12.358	11.793	7.233	2.14	2.29	0.880	1.88	6.64	3.53	0.24	0.236	0.25	0.255
10	1008:120	0.385	9.805	11.821	2.23	0.70	0.71	0.706	0.49	0.12	0.24	0.11	0.274	0.10	0.274
11	1108:120	1.007	8.536	12.693	3.776	1.13	1.20	0.795	0.90	0.73	0.81	0.11	0.274	0.11	0.274
12	1208:120	0.458	2.027	12.774	2.448	0.76	0.77	0.723	0.55	0.17	0.30	0.11	0.274	0.11	0.274
13	1308:120	0.495	14.817	12.966	2.68	0.79	0.84	0.730	0.58	0.20	0.34	0.11	0.274	0.11	0.274
14	1408:120	1.365	10.655	10.655	3.55	1.13	1.38	0.818	1.07	1.23	1.14	0.11	0.274	0.11	0.274
15	1508:120	1.465	8.536	12.693	3.776	1.13	1.20	0.795	0.90	0.73	0.81	0.11	0.274	0.11	0.274
16	1608:120	0.037	16.095	16.095	1.628	0.22	0.23	0.430	0.09	0.00	0.01	0.13	0.308	0.13	0.308
17	1708:120	0.238	16.095	16.095	1.628	0.55	0.57	0.653	0.36	0.05	0.13	0.14	0.324	0.14	0.324
18	1808:120	0.458	16.095	16.095	1.628	0.76	0.78	0.723	0.55	0.17	0.30	0.15	0.339	0.15	0.339
19	1908:120	0.174	16.095	16.095	1.628	0.48	0.48	0.617	0.29	0.02	0.08	0.16	0.354	0.16	0.354
20	2008:120	0.804	13.059	8.81	2.937	0.87	0.93	0.749	0.65	0.27	0.42	0.17	0.368	0.17	0.368
21	2108:120	1.128	8.182	8.702	1.274	0.40	0.40	0.578	0.23	0.01	0.05	0.18	0.381	0.18	0.381
22	2208:120	0.458	12.937	10.38	2.503	0.76	0.79	0.723	0.55	0.17	0.30	0.19	0.394	0.19	0.394
23	2308:120	0.513	11.674	10.537	2.558	0.80	0.81	0.733	0.59	0.21	0.35	0.20	0.407	0.20	0.407
24	2408:120	0.504	10.975	11.445	2.718	0.80	0.86	0.733	0.58	0.20	0.34	0.21	0.418	0.21	0.418
25	2508:120	0.321	11.294	12.319	2.04	0.64	0.65	0.687	0.44	0.09	0.19	0.22	0.430	0.22	0.430

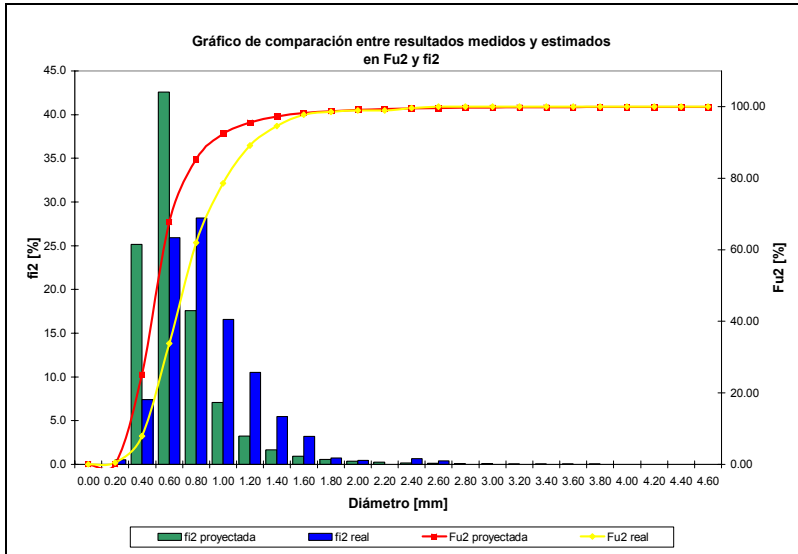
Figura N° 3.2: Punto 3.6 y 3.7, Hoja de análisis.

## **ANEXO E**

### **CURVAS DE DISTRIBUCIÓN DE TAMAÑO DE BURBUJAS**

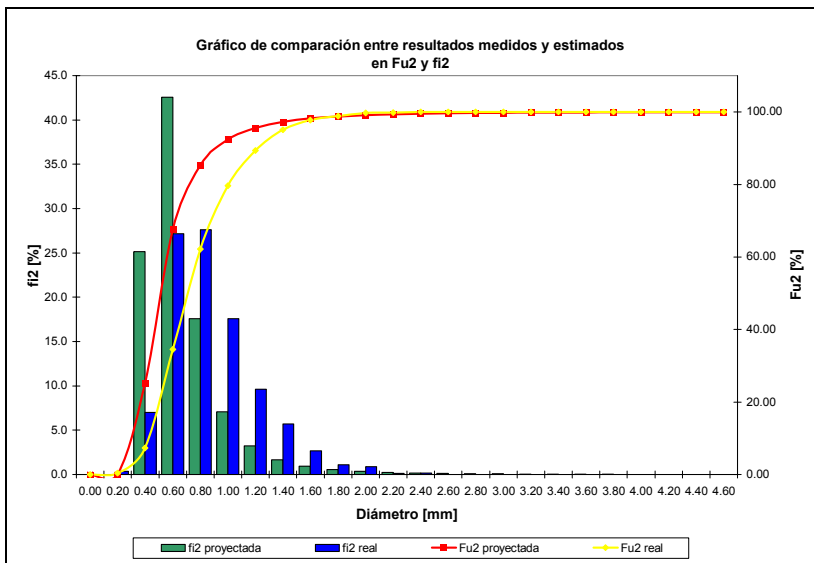


## Prueba A1



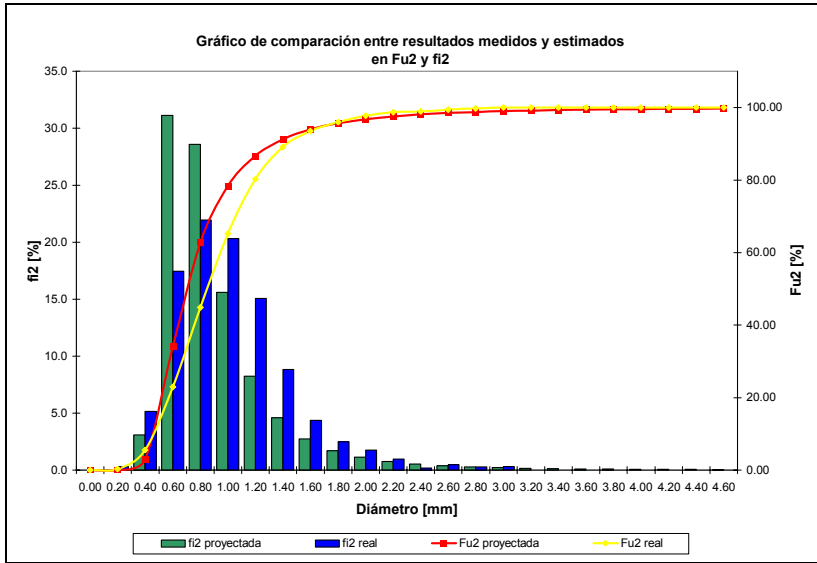
Tamaño medio xi	fi0	Fu0
0.00	0.0	0.00
0.10	16.3	16.26
0.30	24.8	41.02
0.50	31.3	72.28
0.70	17.3	89.62
0.90	6.2	95.80
1.10	2.6	98.43
1.30	1.0	99.40
1.50	0.4	99.83
1.70	0.1	99.91
1.90	0.0	99.94
2.10	0.0	99.94
2.30	0.0	99.98
2.50	0.0	100.00
2.70	0.0	100.00
2.90	0.0	100.00
3.10	0.0	100.00
3.30	0.0	100.00
3.50	0.0	100.00
3.70	0.0	100.00
3.90	0.0	100.00
4.10	0.0	100.00
4.30	0.0	100.00
4.50	0.0	100.00

## Prueba A2



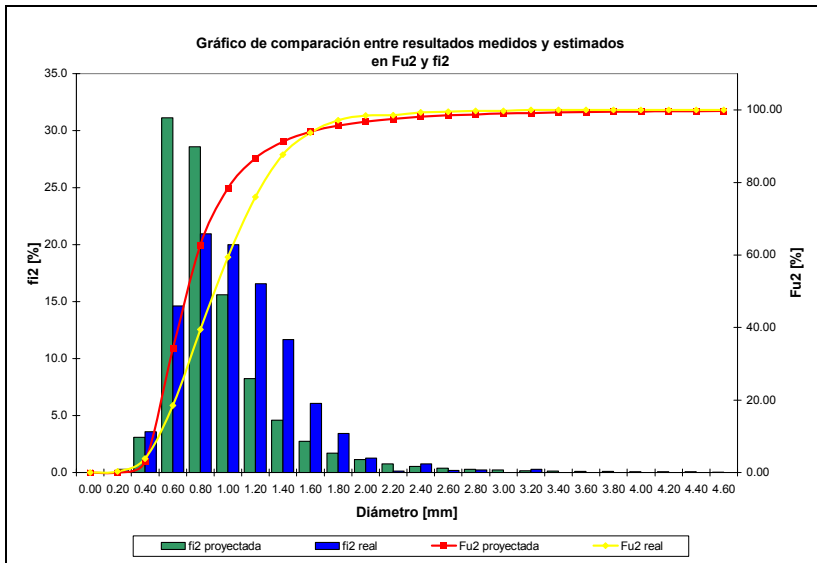
Tamaño medio xi	fi0	Fu0
0.00	0.0	0.00
0.10	11.3	11.35
0.30	24.8	36.19
0.50	34.7	70.87
0.70	18.0	88.86
0.90	6.9	95.78
1.10	2.5	98.32
1.30	1.1	99.40
1.50	0.4	99.78
1.70	0.1	99.90
1.90	0.1	99.98
2.10	0.0	99.99
2.30	0.0	100.00
2.50	0.0	100.00
2.70	0.0	100.00
2.90	0.0	100.00
3.10	0.0	100.00
3.30	0.0	100.00
3.50	0.0	100.00
3.70	0.0	100.00
3.90	0.0	100.00
4.10	0.0	100.00
4.30	0.0	100.00
4.50	0.0	100.00

### Prueba A3



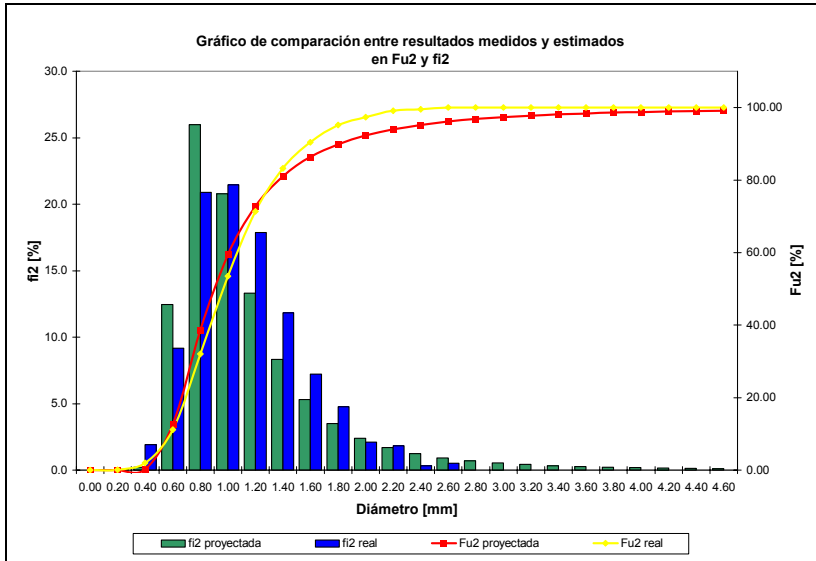
Tamaño medio xi	fi0	Fu0
0.00	0.0	0.00
0.10	12.6	12.63
0.30	23.0	35.59
0.50	27.9	63.51
0.70	17.9	81.42
0.90	10.0	91.45
1.10	5.0	96.43
1.30	2.1	98.52
1.50	0.8	99.30
1.70	0.3	99.64
1.90	0.2	99.84
2.10	0.1	99.93
2.30	0.0	99.94
2.50	0.0	99.97
2.70	0.0	99.99
2.90	0.0	100.00
3.10	0.0	100.00
3.30	0.0	100.00
3.50	0.0	100.00
3.70	0.0	100.00
3.90	0.0	100.00
4.10	0.0	100.00
4.30	0.0	100.00
4.50	0.0	100.00

### Prueba A4



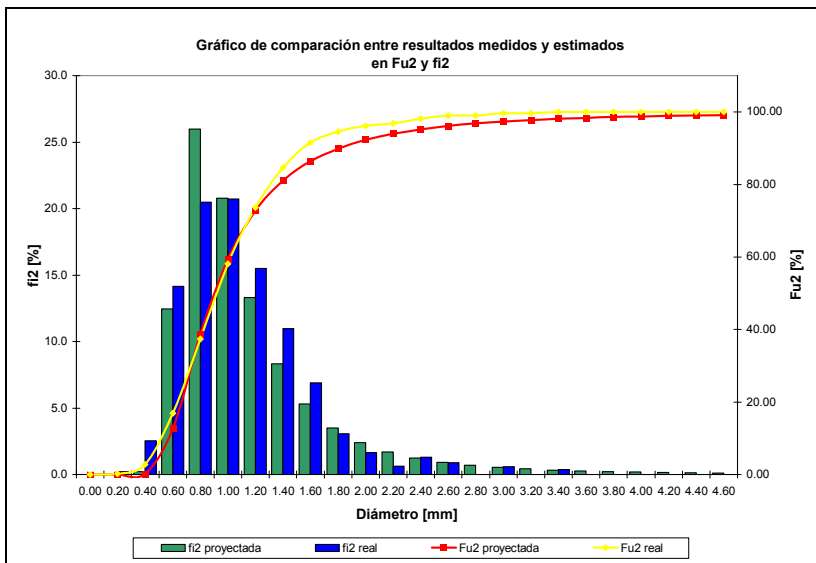
Tamaño medio xi	fi0	Fu0
0.00	0.0	0.00
0.10	12.8	12.79
0.30	18.2	30.97
0.50	26.7	57.70
0.70	19.5	77.24
0.90	11.3	88.53
1.10	6.3	94.79
1.30	3.2	97.94
1.50	1.2	99.18
1.70	0.5	99.72
1.90	0.2	99.88
2.10	0.0	99.89
2.30	0.1	99.96
2.50	0.0	99.97
2.70	0.0	99.99
2.90	0.0	99.99
3.10	0.0	100.00
3.30	0.0	100.00
3.50	0.0	100.00
3.70	0.0	100.00
3.90	0.0	100.00
4.10	0.0	100.00
4.30	0.0	100.00
4.50	0.0	100.00

## Prueba A5



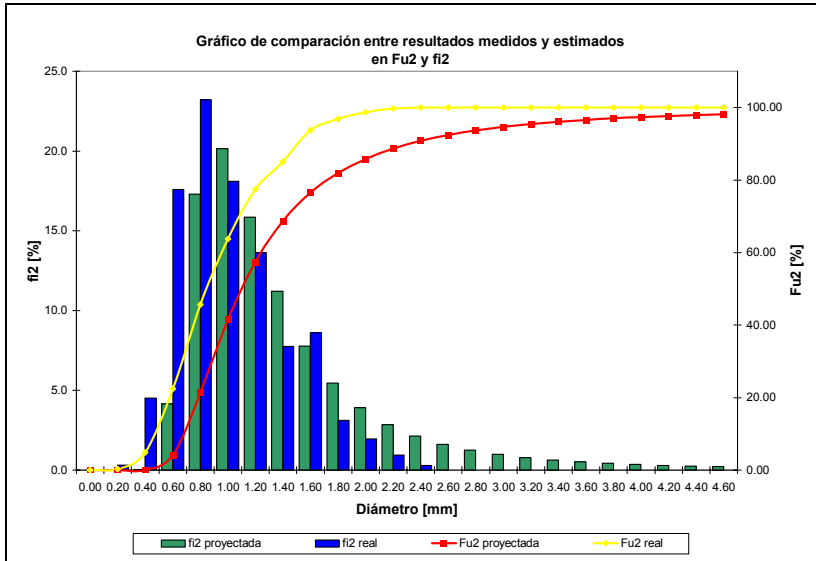
Tamaño medio $x_i$	$fi_0$	$Fu_0$
0.00	0.0	0.00
0.10	3.8	3.79
0.30	13.3	17.08
0.50	22.7	39.81
0.70	26.5	66.29
0.90	16.5	82.75
1.10	9.2	91.92
1.30	4.3	96.27
1.50	2.0	98.26
1.70	1.0	99.29
1.90	0.4	99.65
2.10	0.3	99.91
2.30	0.0	99.95
2.50	0.1	100.00
2.70	0.0	100.00
2.90	0.0	100.00
3.10	0.0	100.00
3.30	0.0	100.00
3.50	0.0	100.00
3.70	0.0	100.00
3.90	0.0	100.00
4.10	0.0	100.00
4.30	0.0	100.00
4.50	0.0	100.00

## Prueba A6



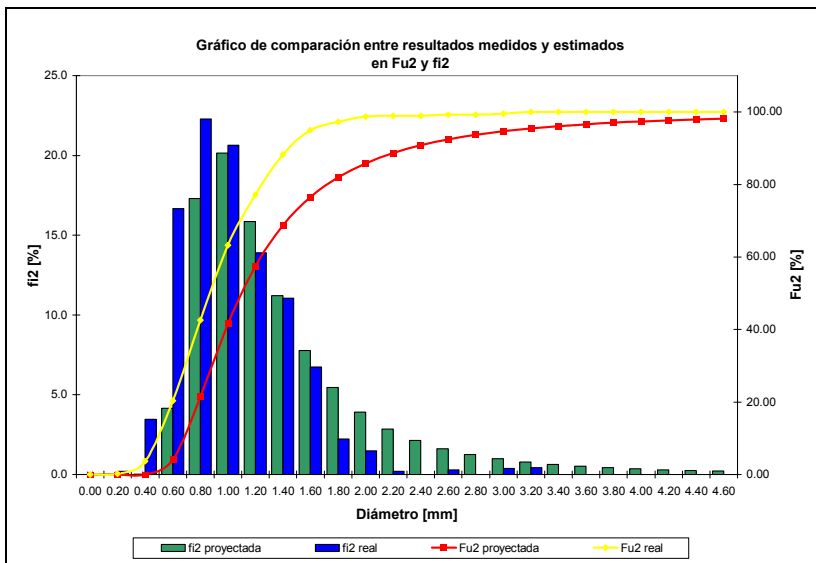
Tamaño medio $x_i$	$fi_0$	$Fu_0$
0.00	0.0	0.00
0.10	10.7	10.68
0.30	14.2	24.86
0.50	28.6	53.48
0.70	21.2	74.64
0.90	12.9	87.59
1.10	6.5	94.07
1.30	3.3	97.36
1.50	1.6	98.91
1.70	0.5	99.45
1.90	0.2	99.68
2.10	0.1	99.75
2.30	0.1	99.88
2.50	0.1	99.95
2.70	0.0	99.95
2.90	0.0	99.98
3.10	0.0	99.98
3.30	0.0	100.00
3.50	0.0	100.00
3.70	0.0	100.00
3.90	0.0	100.00
4.10	0.0	100.00
4.30	0.0	100.00
4.50	0.0	100.00

## Prueba A7



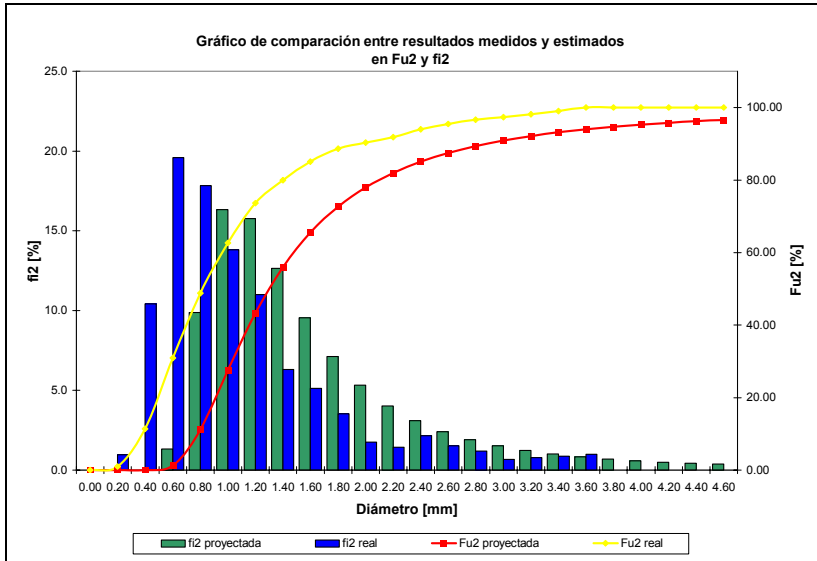
Tamaño medio xi	fi0	Fu0
0.00	0.0	0.00
0.10	12.9	12.86
0.30	20.7	33.52
0.50	28.9	62.45
0.70	19.5	81.93
0.90	9.2	91.13
1.10	4.6	95.77
1.30	1.9	97.65
1.50	1.6	99.22
1.70	0.4	99.67
1.90	0.2	99.89
2.10	0.1	99.98
2.30	0.0	100.00
2.50	0.0	100.00
2.70	0.0	100.00
2.90	0.0	100.00
3.10	0.0	100.00
3.30	0.0	100.00
3.50	0.0	100.00
3.70	0.0	100.00
3.90	0.0	100.00
4.10	0.0	100.00
4.30	0.0	100.00
4.50	0.0	100.00

## Prueba A8



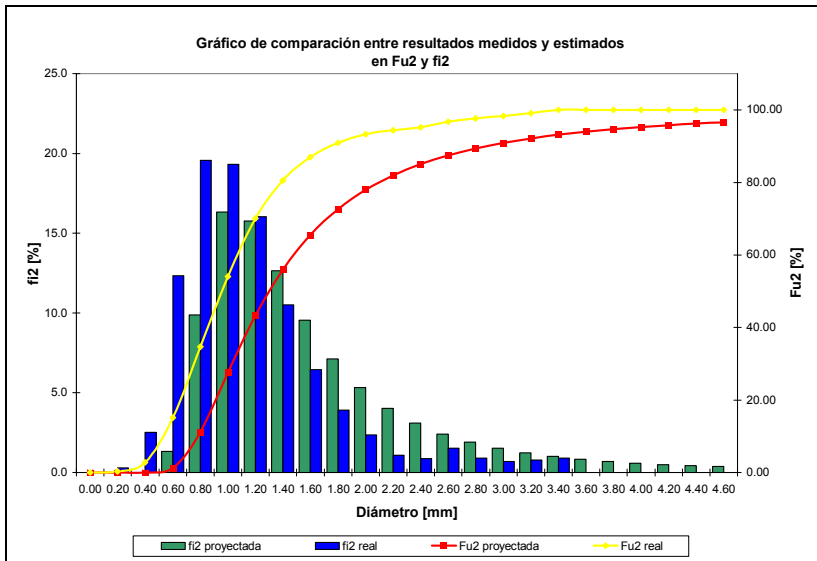
Tamaño medio xi	fi0	Fu0
0.00	0.0	0.00
0.10	8.8	8.83
0.30	17.7	26.50
0.50	30.6	57.12
0.70	20.9	78.01
0.90	11.7	89.71
1.10	5.3	94.99
1.30	3.0	98.00
1.50	1.4	99.37
1.70	0.4	99.73
1.90	0.2	99.92
2.10	0.0	99.94
2.30	0.0	99.94
2.50	0.0	99.96
2.70	0.0	99.96
2.90	0.0	99.98
3.10	0.0	100.00
3.30	0.0	100.00
3.50	0.0	100.00
3.70	0.0	100.00
3.90	0.0	100.00
4.10	0.0	100.00
4.30	0.0	100.00
4.50	0.0	100.00

## Prueba A9



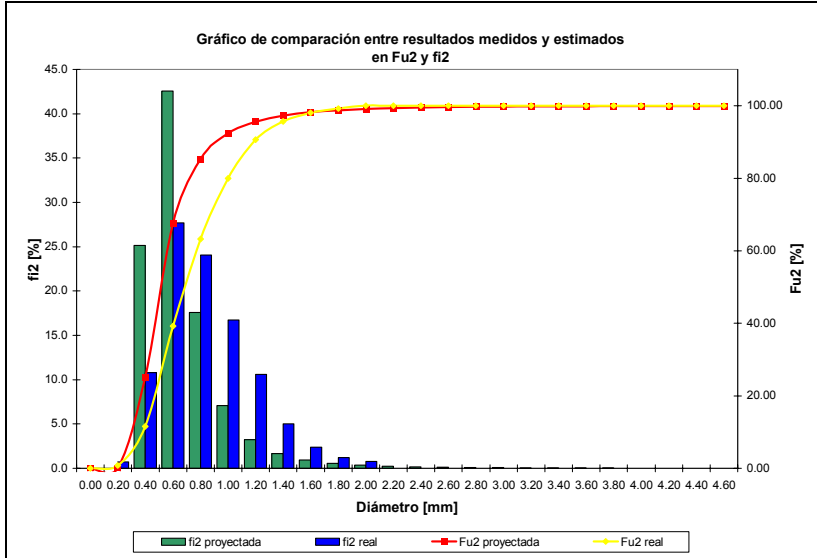
Tamaño medio xi	fi0	Fu0
0.00	0.0	0.00
0.10	26.7	26.66
0.30	31.9	58.59
0.50	21.6	80.20
0.70	10.0	90.25
0.90	4.7	94.96
1.10	2.5	97.47
1.30	1.0	98.50
1.50	0.6	99.13
1.70	0.3	99.46
1.90	0.1	99.60
2.10	0.1	99.69
2.30	0.1	99.80
2.50	0.1	99.87
2.70	0.0	99.91
2.90	0.0	99.93
3.10	0.0	99.96
3.30	0.0	99.98
3.50	0.0	100.00
3.70	0.0	100.00
3.90	0.0	100.00
4.10	0.0	100.00
4.30	0.0	100.00
4.50	0.0	100.00

## Prueba A10



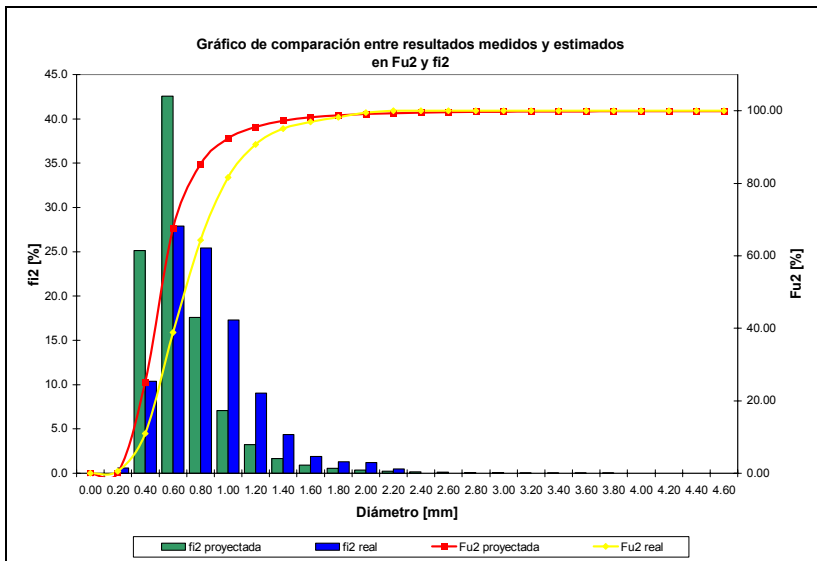
Tamaño medio xi	fi0	Fu0
0.00	0.0	0.00
0.10	14.6	14.61
0.30	14.3	28.93
0.50	25.3	54.26
0.70	20.5	74.75
0.90	12.2	86.99
1.10	6.8	93.79
1.30	3.2	96.98
1.50	1.5	98.45
1.70	0.7	99.14
1.90	0.3	99.48
2.10	0.1	99.60
2.30	0.1	99.69
2.50	0.1	99.81
2.70	0.1	99.87
2.90	0.0	99.92
3.10	0.0	99.96
3.30	0.0	100.00
3.50	0.0	100.00
3.70	0.0	100.00
3.90	0.0	100.00
4.10	0.0	100.00
4.30	0.0	100.00
4.50	0.0	100.00

## Prueba B1



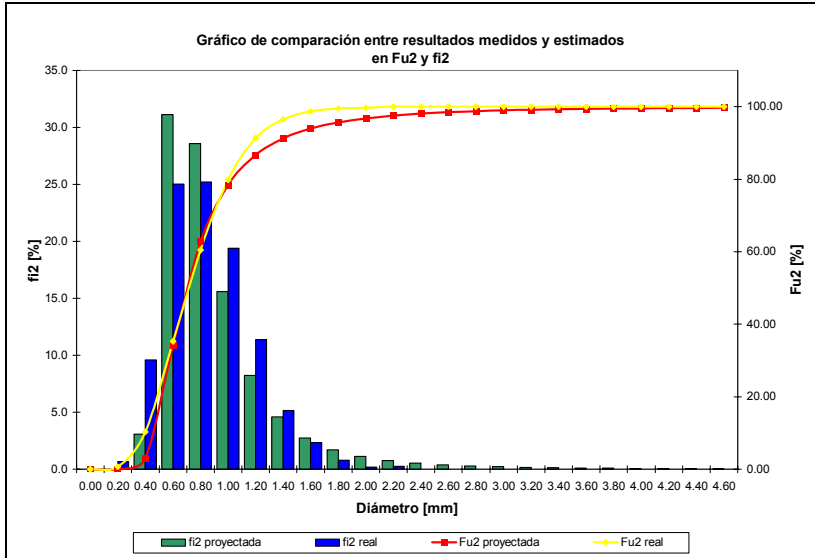
Tamaño medio xi	fi0	Fu0
0,00	0,0	0,00
0,10	19,2	19,22
0,30	30,9	50,09
0,50	28,5	78,59
0,70	12,6	91,23
0,90	5,3	96,54
1,10	2,3	98,80
1,30	0,8	99,56
1,50	0,3	99,84
1,70	0,1	99,95
1,90	0,1	100,00
2,10	0,0	100,00
2,30	0,0	100,00
2,50	0,0	100,00
2,70	0,0	100,00
2,90	0,0	100,00
3,10	0,0	100,00
3,30	0,0	100,00
3,50	0,0	100,00
3,70	0,0	100,00
3,90	0,0	100,00
4,10	0,0	100,00
4,30	0,0	100,00
4,50	0,0	100,00

## Prueba B2



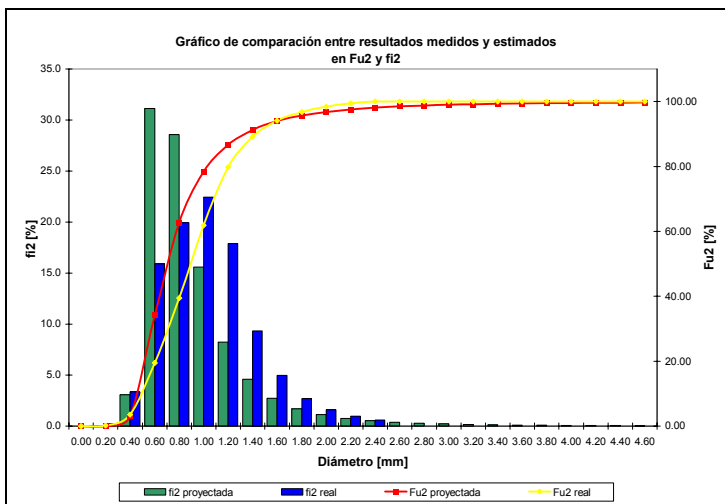
Tamaño medio xi	fi0	Fu0
0,00	0,0	0,00
0,10	16,1	16,10
0,30	31,0	47,10
0,50	30,0	77,12
0,70	13,9	91,07
0,90	5,7	96,82
1,10	2,0	98,83
1,30	0,7	99,53
1,50	0,2	99,76
1,70	0,1	99,88
1,90	0,1	99,97
2,10	0,0	100,00
2,30	0,0	100,00
2,50	0,0	100,00
2,70	0,0	100,00
2,90	0,0	100,00
3,10	0,0	100,00
3,30	0,0	100,00
3,50	0,0	100,00
3,70	0,0	100,00
3,90	0,0	100,00
4,10	0,0	100,00
4,30	0,0	100,00
4,50	0,0	100,00

## Prueba B3



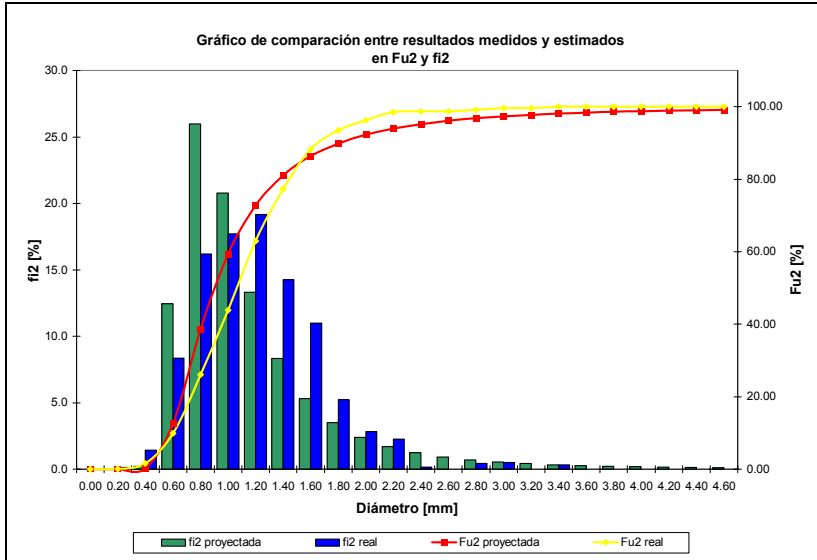
Tamaño medio xi	fi0	Fu0
0,00	0,0	0,00
0,10	18,4	18,44
0,30	29,3	47,79
0,50	27,6	75,38
0,70	14,2	89,57
0,90	6,6	96,17
1,10	2,6	98,77
1,30	0,8	99,61
1,50	0,3	99,89
1,70	0,1	99,97
1,90	0,0	99,98
2,10	0,0	100,00
2,30	0,0	100,00
2,50	0,0	100,00
2,70	0,0	100,00
2,90	0,0	100,00
3,10	0,0	100,00
3,30	0,0	100,00
3,50	0,0	100,00
3,70	0,0	100,00
3,90	0,0	100,00
4,10	0,0	100,00
4,30	0,0	100,00
4,50	0,0	100,00

## Prueba B4



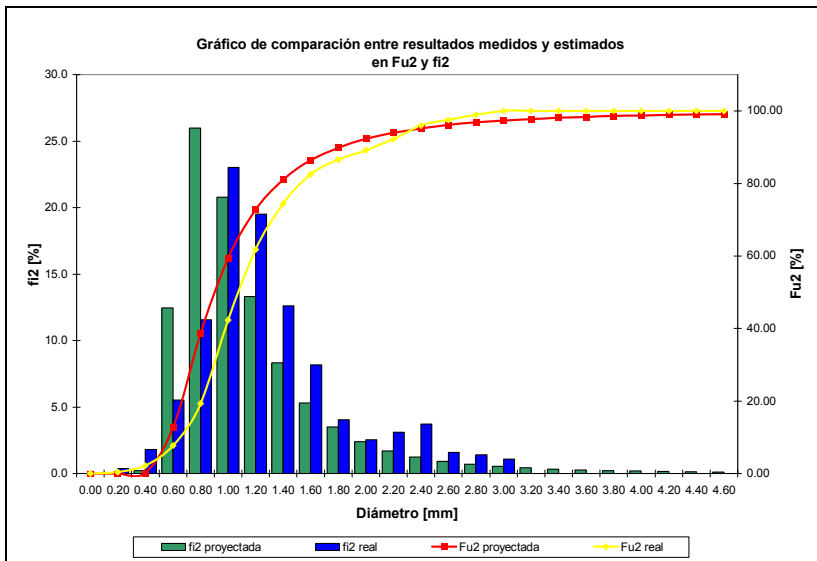
Tamaño medio xi	fi0	Fu0
0,00	0,0	0,00
0,10	10,2	10,21
0,30	17,4	27,57
0,50	29,5	57,05
0,70	18,9	75,92
0,90	12,8	88,77
1,10	6,9	95,62
1,30	2,6	98,18
1,50	1,0	99,20
1,70	0,4	99,64
1,90	0,2	99,84
2,10	0,1	99,95
2,30	0,1	100,00
2,50	0,0	100,00
2,70	0,0	100,00
2,90	0,0	100,00
3,10	0,0	100,00
3,30	0,0	100,00
3,50	0,0	100,00
3,70	0,0	100,00
3,90	0,0	100,00
4,10	0,0	100,00
4,30	0,0	100,00
4,50	0,0	100,00

## Prueba B5



Tamaño medio xi	fi0	Fu0
0,00	0,0	0,00
0,10	9,7	9,69
0,30	10,4	20,12
0,50	22,1	42,21
0,70	21,9	64,09
0,90	14,5	78,54
1,10	10,5	89,01
1,30	5,6	94,60
1,50	3,2	97,83
1,70	1,2	99,02
1,90	0,5	99,54
2,10	0,3	99,88
2,30	0,0	99,90
2,50	0,0	99,90
2,70	0,0	99,94
2,90	0,0	99,98
3,10	0,0	99,98
3,30	0,0	100,00
3,50	0,0	100,00
3,70	0,0	100,00
3,90	0,0	100,00
4,10	0,0	100,00
4,30	0,0	100,00
4,50	0,0	100,00

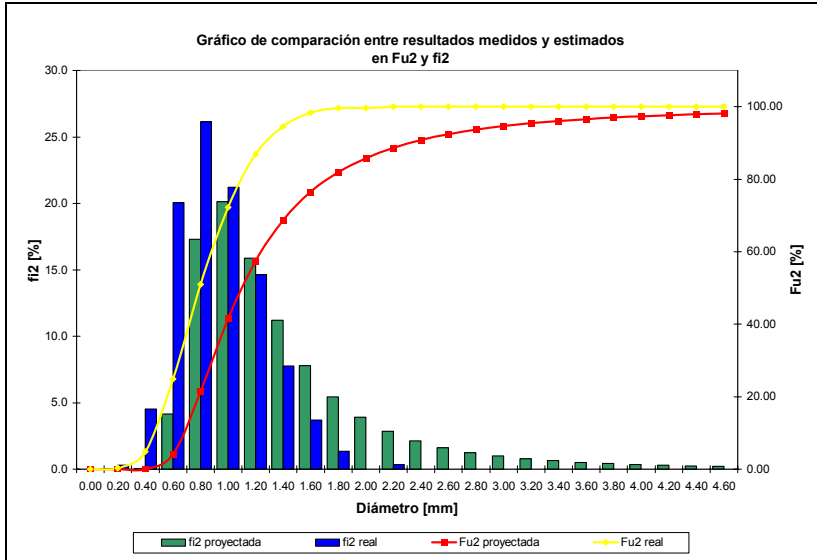
## Prueba B6



Tamaño medio xi	fi0	Fu0
0,00	0,0	0,00
0,10	22,6	22,62
0,30	12,5	35,07
0,50	13,6	48,66
0,70	14,5	63,20
0,90	17,5	80,71
1,10	9,9	90,65
1,30	4,6	95,25
1,50	2,2	97,49
1,70	0,9	98,35
1,90	0,4	98,78
2,10	0,4	99,21
2,30	0,4	99,65
2,50	0,2	99,80
2,70	0,1	99,92
2,90	0,1	100,00
3,10	0,0	100,00
3,30	0,0	100,00
3,50	0,0	100,00
3,70	0,0	100,00
3,90	0,0	100,00
4,10	0,0	100,00
4,30	0,0	100,00
4,50	0,0	100,00

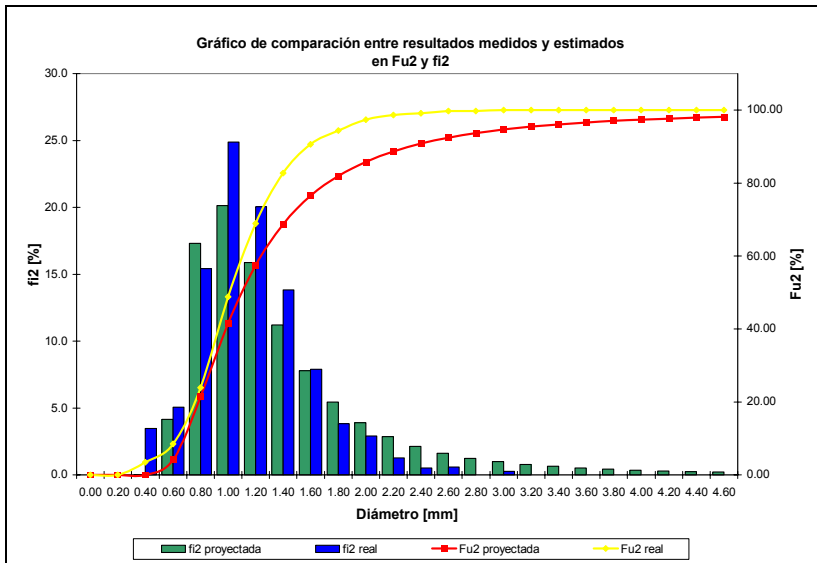


## Prueba B7



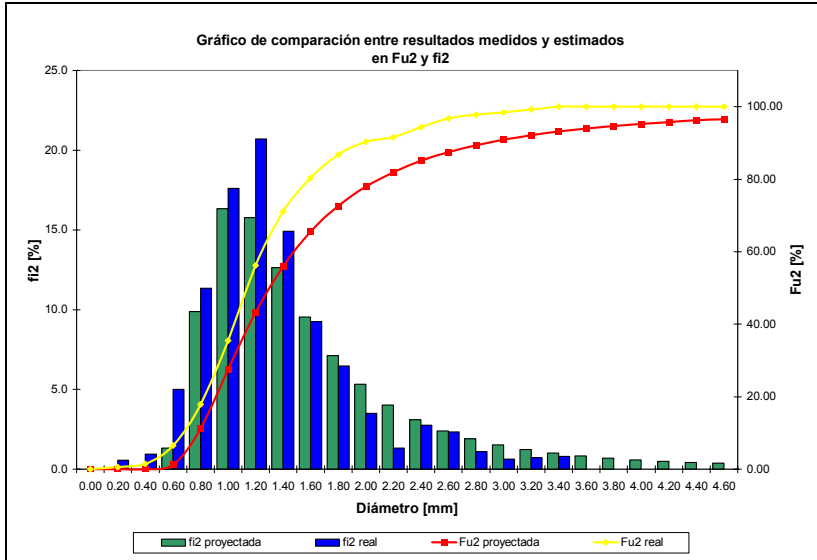
Tamaño medio xi	fi0	Fu0
0,00	0,0	0,00
0,10	11,2	11,25
0,30	19,5	30,75
0,50	31,1	61,84
0,70	20,7	82,52
0,90	10,2	92,68
1,10	4,7	97,37
1,30	1,8	99,15
1,50	0,6	99,79
1,70	0,2	99,97
1,90	0,0	99,97
2,10	0,0	100,00
2,30	0,0	100,00
2,50	0,0	100,00
2,70	0,0	100,00
2,90	0,0	100,00
3,10	0,0	100,00
3,30	0,0	100,00
3,50	0,0	100,00
3,70	0,0	100,00
3,90	0,0	100,00
4,10	0,0	100,00
4,30	0,0	100,00
4,50	0,0	100,00

## Prueba B8



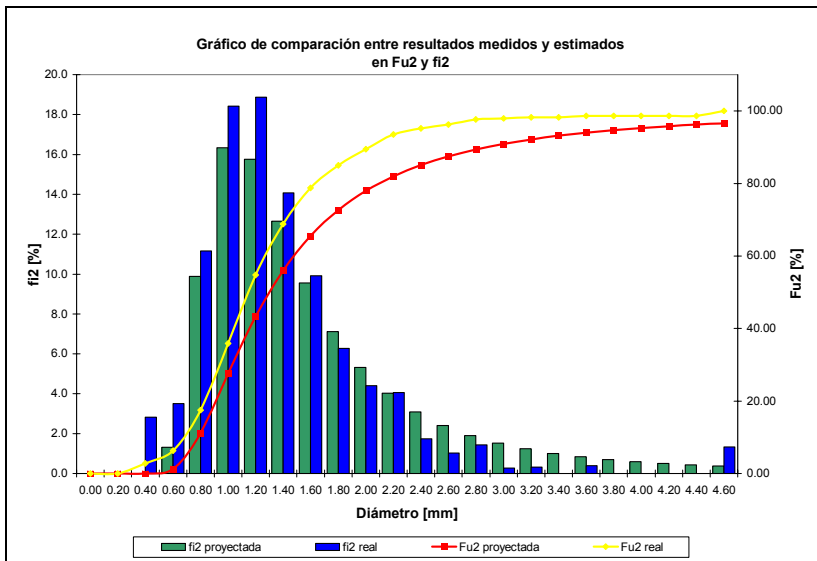
Tamaño medio xi	fi0	Fu0
0,00	0,0	0,00
0,10	0,0	0,00
0,30	25,4	25,39
0,50	13,3	38,72
0,70	20,7	59,43
0,90	20,2	79,65
1,10	10,9	90,57
1,30	5,4	95,95
1,50	2,3	98,26
1,70	0,9	99,13
1,90	0,5	99,66
2,10	0,2	99,85
2,30	0,1	99,92
2,50	0,1	99,98
2,70	0,0	99,98
2,90	0,0	100,00
3,10	0,0	100,00
3,30	0,0	100,00
3,50	0,0	100,00
3,70	0,0	100,00
3,90	0,0	100,00
4,10	0,0	100,00
4,30	0,0	100,00
4,50	0,0	100,00

## Prueba B9



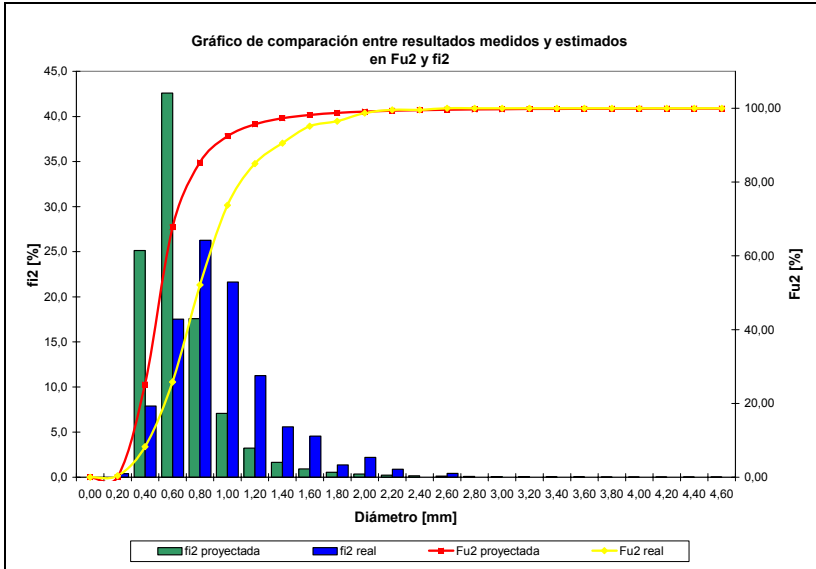
Tamaño medio xi	fi0	Fu0
0,00	0,0	0,00
0,10	34,0	34,05
0,30	6,2	40,27
0,50	12,0	52,26
0,70	13,9	66,13
0,90	13,0	79,15
1,10	10,2	89,40
1,30	5,3	94,68
1,50	2,5	97,14
1,70	1,3	98,48
1,90	0,6	99,06
2,10	0,2	99,24
2,30	0,3	99,55
2,50	0,2	99,78
2,70	0,1	99,87
2,90	0,0	99,91
3,10	0,0	99,96
3,30	0,0	100,00
3,50	0,0	100,00
3,70	0,0	100,00
3,90	0,0	100,00
4,10	0,0	100,00
4,30	0,0	100,00
4,50	0,0	100,00

## Prueba B10



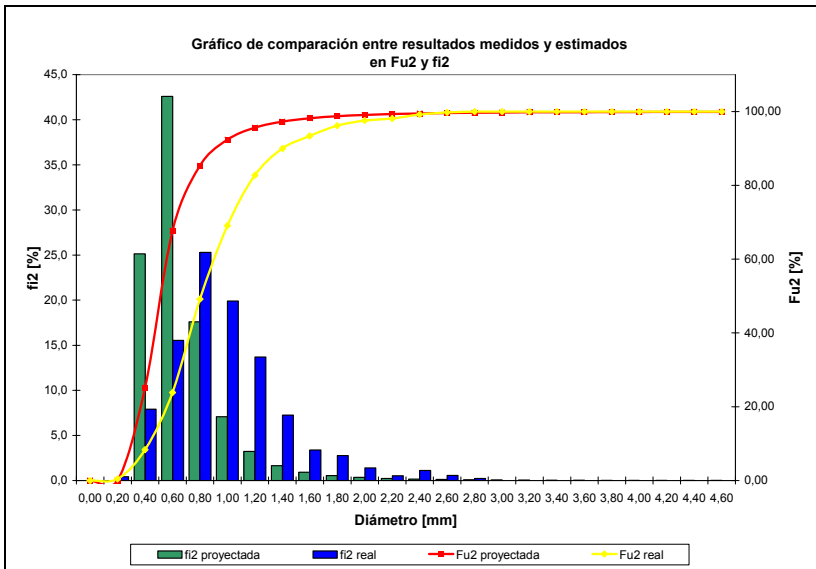
Tamaño medio xi	fi0	Fu0
0,00	0,0	0,00
0,10	0,0	0,00
0,30	25,2	25,17
0,50	11,3	36,45
0,70	18,3	54,76
0,90	18,3	73,05
1,10	12,5	85,60
1,30	6,7	92,30
1,50	3,5	95,84
1,70	1,7	97,59
1,90	1,0	98,57
2,10	0,7	99,31
2,30	0,3	99,58
2,50	0,1	99,71
2,70	0,2	99,87
2,90	0,0	99,89
3,10	0,0	99,92
3,30	0,0	99,92
3,50	0,0	99,95
3,70	0,0	99,95
3,90	0,0	99,95
4,10	0,0	99,95
4,30	0,0	99,95
4,50	0,1	100,00

## Prueba C1



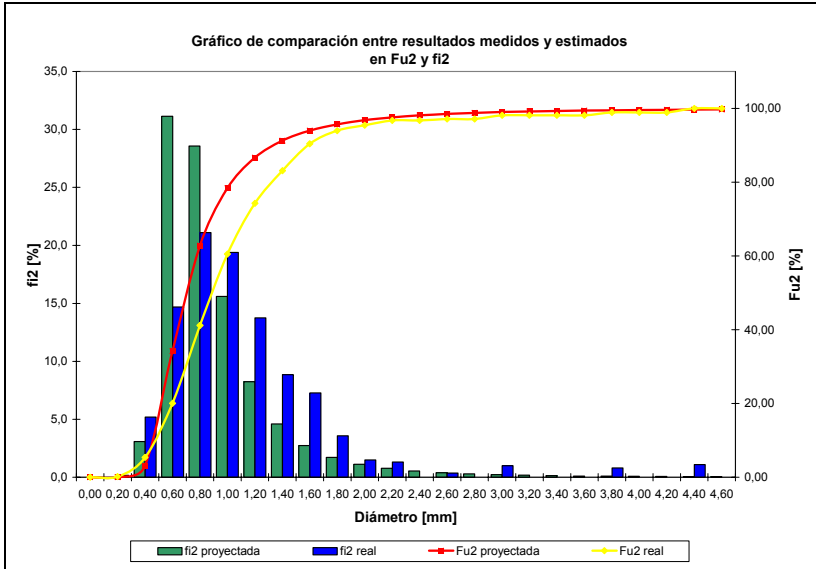
Tamaño medio xi	fi0	Fu0
0,00	0,0	0,00
0,10	13,1	13,10
0,30	30,0	43,08
0,50	24,0	67,07
0,70	18,3	85,40
0,90	9,1	94,53
1,10	3,2	97,72
1,30	1,1	98,85
1,50	0,7	99,54
1,70	0,2	99,70
1,90	0,2	99,91
2,10	0,1	99,98
2,30	0,0	99,98
2,50	0,0	100,00
2,70	0,0	100,00
2,90	0,0	100,00
3,10	0,0	100,00
3,30	0,0	100,00
3,50	0,0	100,00
3,70	0,0	100,00
3,90	0,0	100,00
4,10	0,0	100,00
4,30	0,0	100,00
4,50	0,0	100,00

## Prueba C2



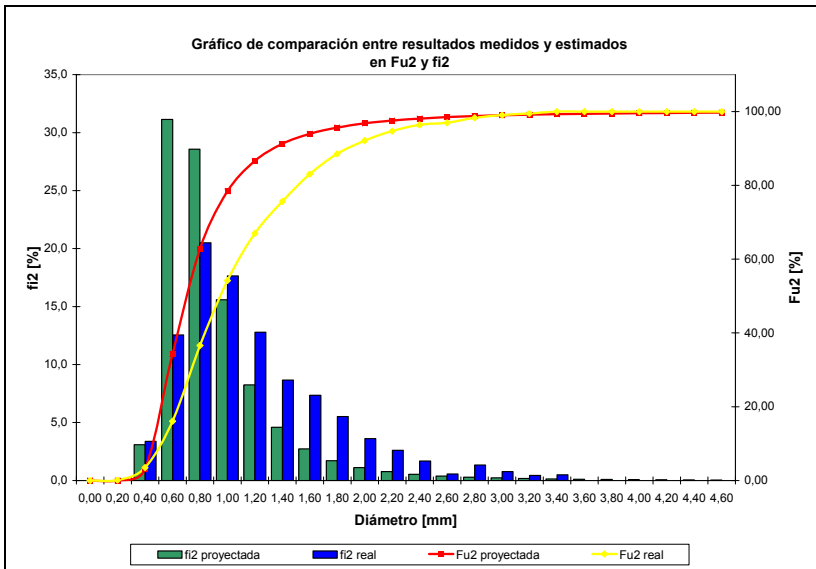
Tamaño medio xi	fi0	Fu0
0,00	0,0	0,00
0,10	13,1	13,08
0,30	28,2	41,33
0,50	23,7	64,98
0,70	19,0	83,98
0,90	9,1	93,03
1,10	4,4	97,46
1,30	1,6	99,02
1,50	0,6	99,66
1,70	0,2	99,87
1,90	0,1	99,93
2,10	0,0	99,95
2,30	0,0	99,98
2,50	0,0	99,98
2,70	0,0	99,99
2,90	0,0	99,99
3,10	0,0	99,99
3,30	0,0	99,99
3,50	0,0	99,99
3,70	0,0	100,00
3,90	0,0	100,00
4,10	0,0	100,00
4,30	0,0	100,00
4,50	0,0	100,00

### Prueba C3



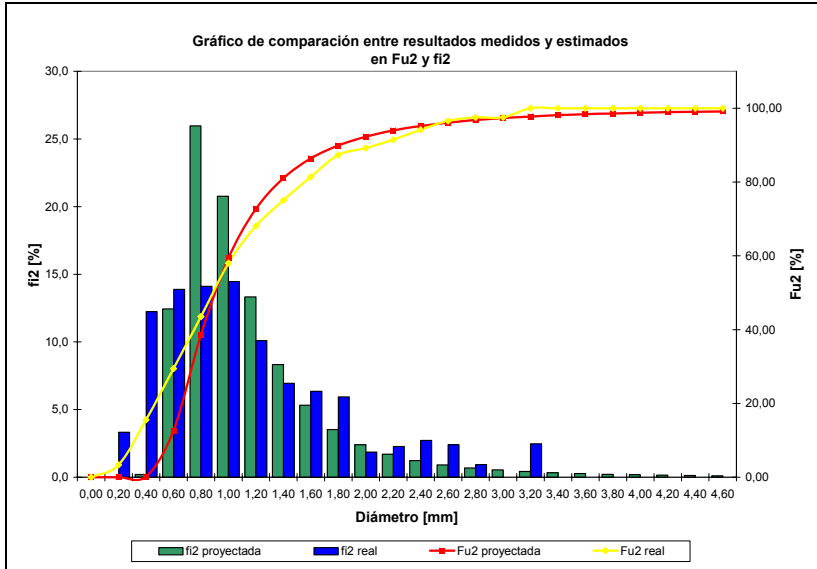
Tamaño medio xi	fi0	Fu0
0,00	0,0	0,00
0,10	7,3	7,30
0,30	26,0	33,32
0,50	26,5	59,81
0,70	19,4	79,24
0,90	10,8	90,05
1,10	5,1	95,17
1,30	2,4	97,53
1,50	1,5	98,99
1,70	0,6	99,55
1,90	0,2	99,73
2,10	0,1	99,87
2,30	0,0	99,87
2,50	0,0	99,89
2,70	0,0	99,89
2,90	0,1	99,95
3,10	0,0	99,95
3,30	0,0	99,95
3,50	0,0	99,95
3,70	0,0	99,97
3,90	0,0	99,97
4,10	0,0	99,97
4,30	0,0	100,00
4,50	0,0	100,00

### Prueba C4



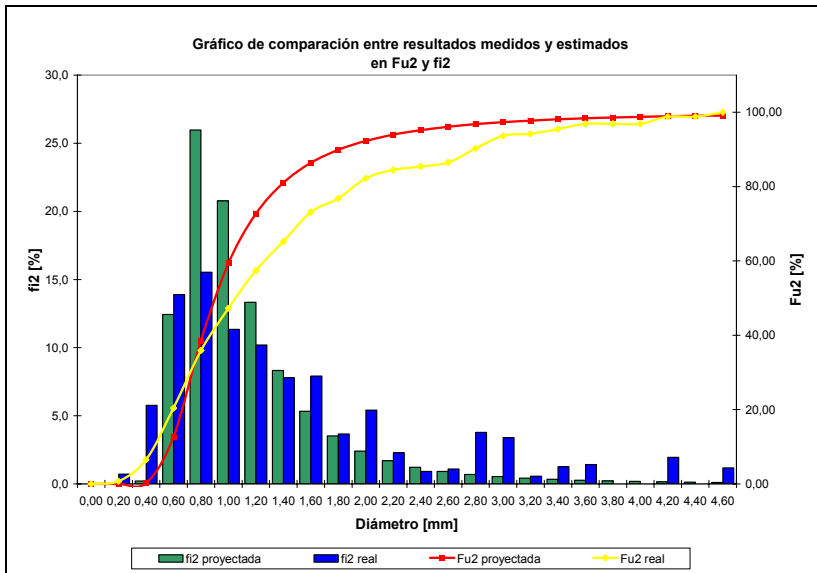
Tamaño medio xi	fi0	Fu0
0,00	0,0	0,00
0,10	7,2	7,19
0,30	19,9	27,09
0,50	26,7	53,79
0,70	22,3	76,05
0,90	11,6	87,64
1,10	5,6	93,26
1,30	2,7	95,99
1,50	1,7	97,73
1,70	1,0	98,74
1,90	0,5	99,28
2,10	0,3	99,59
2,30	0,2	99,76
2,50	0,0	99,81
2,70	0,1	99,90
2,90	0,0	99,95
3,10	0,0	99,98
3,30	0,0	100,00
3,50	0,0	100,00
3,70	0,0	100,00
3,90	0,0	100,00
4,10	0,0	100,00
4,30	0,0	100,00
4,50	0,0	100,00

## Prueba C5



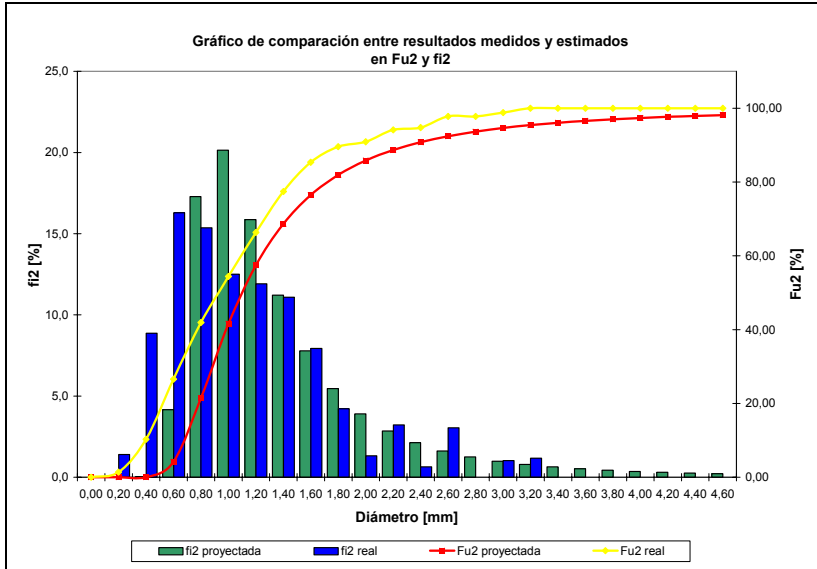
Tamaño medio xi	fi0	Fu0
0,00	0,0	0,00
0,10	56,4	56,37
0,30	23,0	79,38
0,50	9,4	88,78
0,70	4,9	93,65
0,90	3,0	96,67
1,10	1,4	98,09
1,30	0,7	98,78
1,50	0,5	99,26
1,70	0,3	99,61
1,90	0,1	99,70
2,10	0,1	99,78
2,30	0,1	99,87
2,50	0,1	99,93
2,70	0,0	99,96
2,90	0,0	99,96
3,10	0,0	100,00
3,30	0,0	100,00
3,50	0,0	100,00
3,70	0,0	100,00
3,90	0,0	100,00
4,10	0,0	100,00
4,30	0,0	100,00
4,50	0,0	100,00

## Prueba C6



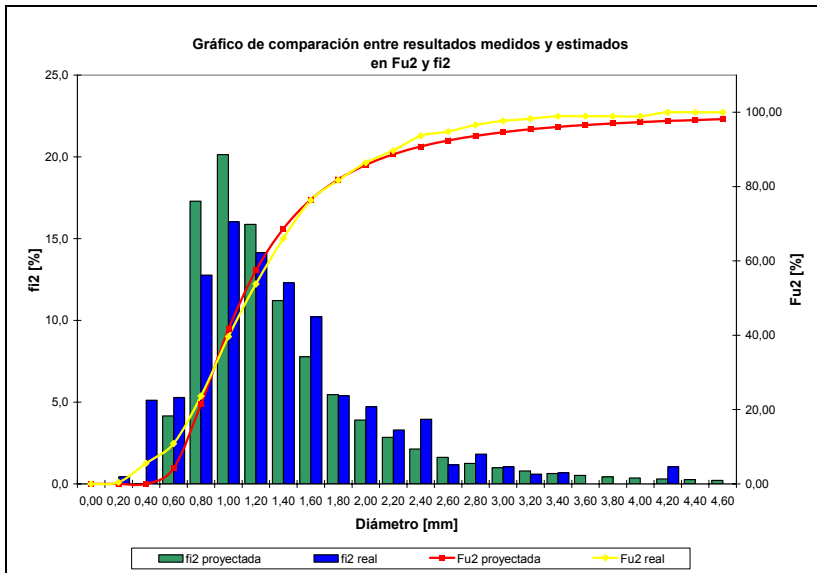
Tamaño medio xi	fi0	Fu0
0,00	0,0	0,00
0,10	27,8	27,82
0,30	24,7	52,57
0,50	21,5	74,03
0,70	12,2	86,27
0,90	5,4	91,68
1,10	3,2	94,93
1,30	1,8	96,71
1,50	1,4	98,06
1,70	0,5	98,55
1,90	0,6	99,13
2,10	0,2	99,33
2,30	0,1	99,40
2,50	0,1	99,47
2,70	0,2	99,67
2,90	0,2	99,82
3,10	0,0	99,84
3,30	0,0	99,89
3,50	0,0	99,93
3,70	0,0	99,93
3,90	0,0	99,93
4,10	0,0	99,98
4,30	0,0	99,98
4,50	0,0	100,00

## Prueba C7



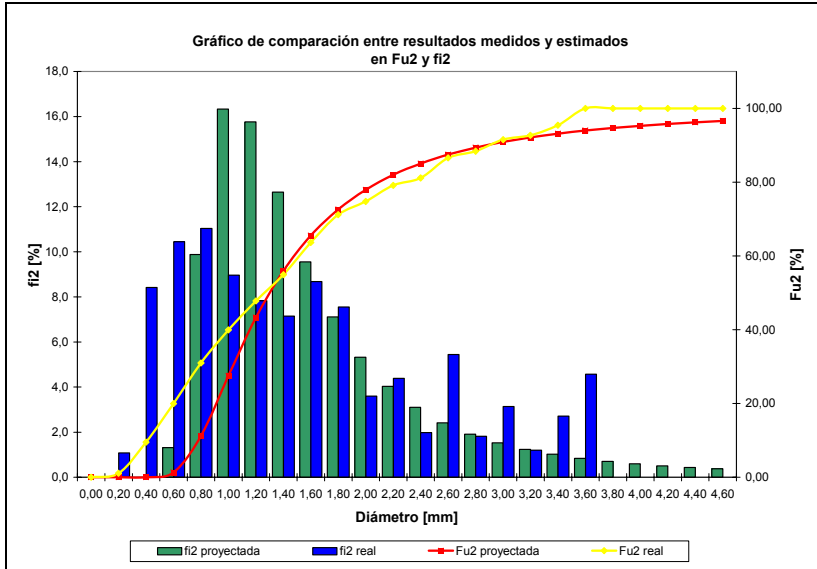
Tamaño medio xi	fi0	Fu0
0,00	0,0	0,00
0,10	37,4	37,37
0,30	26,4	63,77
0,50	17,4	81,22
0,70	8,4	89,62
0,90	4,1	93,75
1,10	2,6	96,39
1,30	1,8	98,14
1,50	0,9	99,09
1,70	0,4	99,48
1,90	0,1	99,58
2,10	0,2	99,77
2,30	0,0	99,80
2,50	0,1	99,93
2,70	0,0	99,93
2,90	0,0	99,97
3,10	0,0	100,00
3,30	0,0	100,00
3,50	0,0	100,00
3,70	0,0	100,00
3,90	0,0	100,00
4,10	0,0	100,00
4,30	0,0	100,00
4,50	0,0	100,00

## Prueba C8



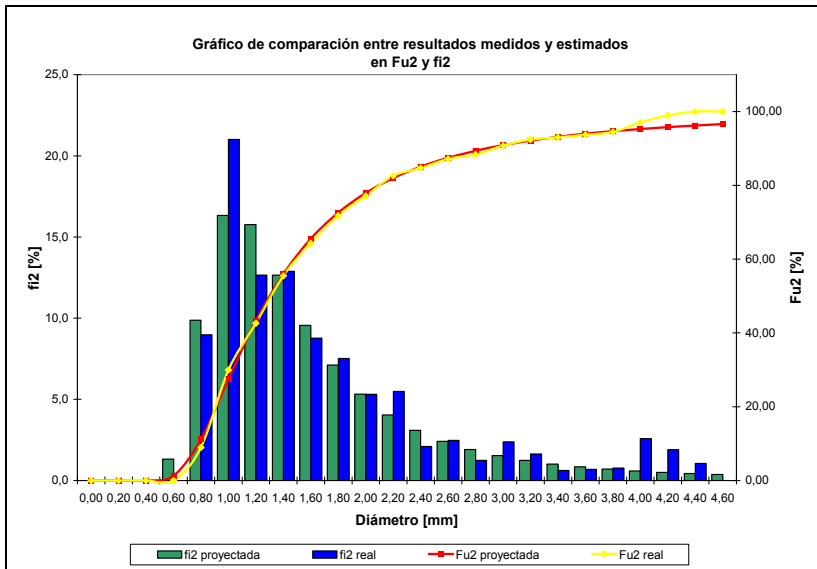
Tamaño medio xi	fi0	Fu0
0,00	0,0	0,00
0,10	21,9	21,88
0,30	29,1	50,95
0,50	10,8	61,77
0,70	13,3	75,10
0,90	10,1	85,21
1,10	6,0	91,19
1,30	3,7	94,91
1,50	2,3	97,23
1,70	1,0	98,19
1,90	0,7	98,85
2,10	0,4	99,24
2,30	0,4	99,62
2,50	0,1	99,71
2,70	0,1	99,84
2,90	0,1	99,90
3,10	0,0	99,94
3,30	0,0	99,97
3,50	0,0	99,97
3,70	0,0	99,97
3,90	0,0	99,97
4,10	0,0	100,00
4,30	0,0	100,00
4,50	0,0	100,00

## Prueba C9



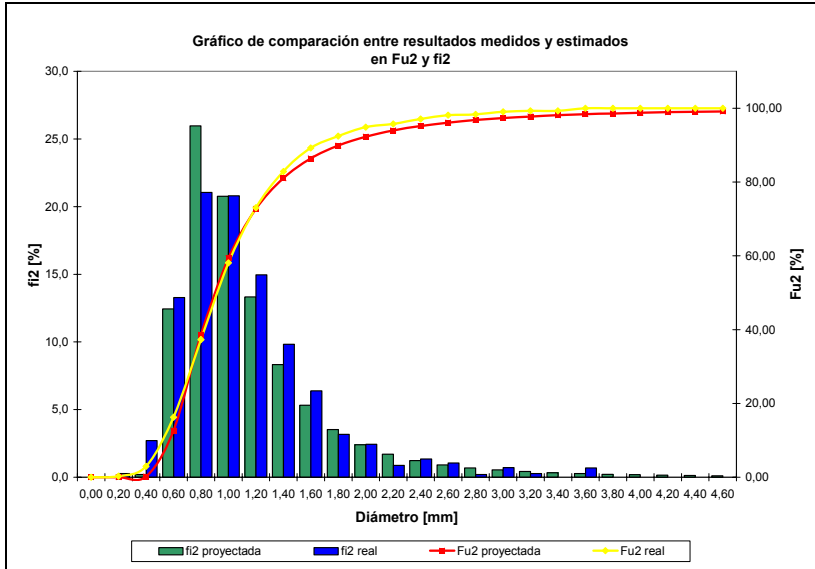
Tamaño medio xi	fi0	Fu0
0,00	0,0	0,00
0,10	36,0	36,02
0,30	31,4	67,40
0,50	14,0	81,43
0,70	7,6	88,98
0,90	3,7	92,70
1,10	2,2	94,87
1,30	1,4	96,29
1,50	1,3	97,58
1,70	0,9	98,46
1,90	0,3	98,79
2,10	0,3	99,12
2,30	0,1	99,25
2,50	0,3	99,54
2,70	0,1	99,62
2,90	0,1	99,75
3,10	0,0	99,79
3,30	0,1	99,87
3,50	0,1	100,00
3,70	0,0	100,00
3,90	0,0	100,00
4,10	0,0	100,00
4,30	0,0	100,00
4,50	0,0	100,00

## Prueba C10



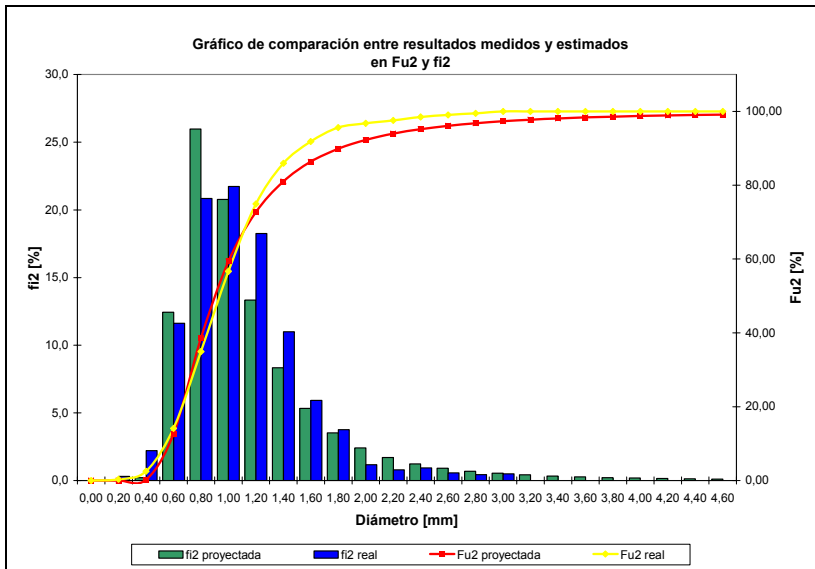
Tamaño medio xi	fi0	Fu0
0,00	0,0	0,00
0,10	0,0	0,00
0,30	0,0	0,00
0,50	0,0	0,00
0,70	24,9	24,92
0,90	35,3	60,23
1,10	14,2	74,46
1,30	10,4	84,85
1,50	5,3	90,15
1,70	3,5	93,69
1,90	2,0	95,69
2,10	1,7	97,38
2,30	0,5	97,92
2,50	0,5	98,46
2,70	0,2	98,69
2,90	0,4	99,08
3,10	0,2	99,31
3,30	0,1	99,38
3,50	0,1	99,46
3,70	0,1	99,54
3,90	0,2	99,77
4,10	0,2	99,92
4,30	0,1	100,00
4,50	0,0	100,00

## Prueba RP1



Tamaño medio xi	fi0	Fu0
0,00	0,0	0,00
0,10	13,1	13,10
0,30	14,9	27,98
0,50	26,3	54,30
0,70	21,3	75,58
0,90	12,7	88,31
1,10	6,1	94,43
1,30	2,9	97,31
1,50	1,4	98,72
1,70	0,5	99,26
1,90	0,3	99,60
2,10	0,1	99,69
2,30	0,1	99,82
2,50	0,1	99,90
2,70	0,0	99,92
2,90	0,0	99,96
3,10	0,0	99,97
3,30	0,0	99,97
3,50	0,0	100,00
3,70	0,0	100,00
3,90	0,0	100,00
4,10	0,0	100,00
4,30	0,0	100,00
4,50	0,0	100,00

## Prueba RP2



Tamaño medio xi	fi0	Fu0
0,00	0,0	0,00
0,10	15,1	15,14
0,30	12,5	27,63
0,50	23,6	51,27
0,70	21,6	72,91
0,90	13,6	86,56
1,10	7,7	94,24
1,30	3,3	97,55
1,50	1,3	98,89
1,70	0,7	99,55
1,90	0,2	99,71
2,10	0,1	99,80
2,30	0,1	99,89
2,50	0,0	99,94
2,70	0,0	99,97
2,90	0,0	100,00
3,10	0,0	100,00
3,30	0,0	100,00
3,50	0,0	100,00
3,70	0,0	100,00
3,90	0,0	100,00
4,10	0,0	100,00
4,30	0,0	100,00
4,50	0,0	100,00



## **ANEXO F**

# **ÍNDICES PARA PRONOSTICAR LA TENDENCIA DE LA RECUPERACIÓN**

## Deducción de Índices

$$1\text{- Índice 1} = \frac{\sum_i (f_{i2} \cdot d_i^2) N_s \cdot \epsilon_g}{Q_{\text{std}}}$$

Por análisis adimensional donde:

$$\text{Superficie total de burbujas} = \pi \cdot \sum_i (f_{i2} \cdot d_i^2) \Rightarrow L^2$$

$$N_s \Rightarrow LT^{-1}$$

$$Q_g \Rightarrow L^3 T^{-1}$$

No se utiliza  $\pi$  porque después pasa a la constante

$$2\text{- Índice 2} = \epsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right)$$

$$\text{Volumen del gas de tamaño } i \Rightarrow V_c \cdot \epsilon_g \cdot f_{i3} = N_i \cdot \frac{\pi}{6} \cdot d_i^3 \quad (a)$$

Donde  $V_c$  es el volumen de la celda

$$\text{Superficie de gas de tamaño } i \Rightarrow N_i \cdot \pi \cdot d_i^2 \quad (b)$$

Despejando  $N_i$  de (a) y sustituyendo en (b)

$$\text{Superficie de gas de tamaño } i \Rightarrow \frac{6 \cdot V_c \cdot \epsilon_g \cdot f_{i3}}{d_i}$$

$$\text{Superficie total del gas} \Rightarrow 6 \cdot V_c \cdot \epsilon_g \cdot \sum_i \frac{f_{i3}}{d_i}$$

Como 6 y  $V_c$  son números, y se van a la constante.

$$3\text{- Índice 3} = J_g \cdot \epsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right)$$

Considerando que la capacidad de transporte es función de  $d_p$  (diámetro de las partículas),  $d_b$  (diámetro de las burbujas),  $\rho_p$  (densidad de las partículas) y del  $J_g$  según la siguiente expresión:

$$Ca = k \cdot \frac{\pi \cdot d_p \cdot \rho_p \cdot J_g}{d_b}, \text{ Finch and Dobby Colum flotation, Pergamon Press 1990.}$$

$$4- \text{Índice } 4 = J_g \cdot N_s \cdot \varepsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right) \quad \text{e} \quad \text{Índice } 5 = N_s \cdot \varepsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right)$$

Se introduce la variable agitación en conjunto con los indicadores asociados a la superficie total de burbujas.

$$5- \text{Índice } 6 = \varepsilon_g \cdot S \quad \text{e} \quad \text{Índice } 7 = \varepsilon_g \cdot V$$

A partir de otro razonamiento se calcula unos índices que responden a la superficie total y al volumen total de burbujas.

De 100 burbujas presentes en la celda se tiene que la superficie y el volumen total vienen dados por:

$$\text{Superficie} \quad 100 \cdot \sum_i f_{i0} \cdot \pi \cdot d_i^2 = 100 \cdot S$$

$$\text{Volumen} \quad 100 \cdot \sum_i f_{i0} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot d_i^3 = 100 \cdot V$$

Para utilizar información acerca de la cantidad de gas en la celda el parámetro se multiplica por el holdup de gas y el volumen de la celda, luego  $V_c$  y 100 pasan a la constante.

#### Detalle de datos ocupados en el análisis de correlaciones

Prueba	Recuperación				Sin P80								Con P81							
	Global %	T1 %	T2 %	T3 %	I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7		
A1	78,22	43,05	89,46	78,36	0,9	12,5	8,7	23,3	33,3	0,1	1,2	137	2002	1401	3741	5345	15	192		
A2	79,22	46,84	90,65	79,31	0,8	12,8	8,9	23,9	34,1	0,1	1,3	133	2052	1436	3835	5479	16	204		
A3	77,95	38,25	88,49	79,39	1,0	14,9	17,1	43,5	37,9	0,2	2,6	154	2389	2747	6991	6079	27	419		
A4	75,36	32,96	88,14	76,36	1,0	13,6	15,6	39,7	34,5	0,2	3,0	157	2176	2502	6368	5537	30	477		
A5	75,72	33,27	87,65	76,87	0,5	12,2	14,6	17,5	14,6	0,2	4,2	78	1955	2347	2816	2347	39	675		
A6	77,77	38,74	89,47	79,06	0,5	12,9	15,4	18,5	15,4	0,2	3,4	80	2066	2479	2975	2479	33	552		
A7	70,75	30,36	83,50	71,31	0,8	8,9	6,2	13,9	19,9	0,1	1,6	134	1424	997	2238	3197	17	262		
A8	70,73	28,99	84,17	71,55	0,9	8,7	6,1	13,6	19,4	0,1	1,8	137	1389	972	2183	3119	19	292		
A9	72,62	26,40	82,08	75,82	1,1	10,0	9,5	20,4	21,5	0,1	1,5	172	1613	1532	3278	3451	14	238		
A10	66,37	18,05	76,46	69,90	1,0	8,8	8,4	17,9	18,8	0,2	2,8	160	1413	1342	2873	3024	25	443		
B1	68,88	22,59	81,63	69,10	0,8	13,8	9,6	25,8	36,8	0,1	1,0	67	1144	801	2138	3054	7	85		
B2	69,18	27,41	81,98	69,10	0,8	13,7	9,6	25,6	36,6	0,1	1,1	69	1137	796	2125	3035	7	89		
B3	75,56	29,60	85,14	76,08	0,8	21,8	25,1	63,9	55,5	0,1	1,8	64	1811	2083	5300	4609	12	149		
B4	69,36	25,33	82,66	69,28	0,9	14,2	16,4	41,7	36,2	0,2	3,0	78	1182	1359	3459	3007	16	251		
B5	62,28	16,11	77,57	61,98	0,5	10,5	12,6	15,1	12,6	0,2	4,5	44	872	1047	1256	1047	20	373		
B6	65,15	17,06	74,88	65,79	0,6	9,0	10,8	13,0	10,8	0,2	4,2	48	747	896	1075	896	17	346		
B7	67,31	21,06	80,35	67,27	0,7	10,8	7,6	17,0	24,3	0,1	1,5	60	898	628	1411	2015	9	127		
B8	58,98	13,96	74,37	58,97	0,9	6,9	4,8	10,8	15,4	0,2	2,7	75	569	398	895	1278	13	221		
B9	60,15	14,73	72,28	60,27	1,1	6,5	6,2	13,3	14,0	0,2	3,2	90	541	514	1101	1159	13	265		
B10	55,37	8,03	65,88	56,36	1,1	6,4	6,1	13,1	13,8	0,2	4,3	92	534	507	1086	1143	17	356		
C1	72,77	51,28	87,24	79,87	0,9	10,5	7,4	19,6	28,0	0,1	1,4	247	2784	1949	5203	7433	25	360		
C2	70,26	53,85	83,96	74,79	1,0	9,9	6,9	18,5	26,4	0,1	1,4	257	2621	1835	4899	6999	25	371		
C3	71,66	45,80	85,39	82,01	1,2	12,0	13,8	35,0	30,5	0,2	2,9	317	3171	3647	9282	8071	46	776		
C4	70,78	45,70	87,24	81,81	1,2	10,3	11,8	30,0	26,1	0,2	3,4	317	2718	3125	7954	6917	50	910		
C5	72,02	47,68	82,77	83,06	0,6	11,6	14,0	16,8	14,0	0,1	1,1	157	3085	3701	4442	3701	17	298		
C6	63,65	32,30	82,54	76,70	0,8	7,3	8,7	10,5	8,7	0,1	2,6	214	1929	2315	2778	2315	31	692		
C7	65,07	38,64	80,19	75,74	1,1	6,9	4,9	10,9	15,6	0,1	1,1	285	1841	1289	2893	4133	16	282		
C8	55,21	30,93	69,97	66,50	1,2	4,7	3,3	7,5	10,7	0,1	2,0	329	1258	881	1977	2825	25	522		
C9	60,63	32,08	77,03	76,72	1,3	6,3	6,0	12,8	13,5	0,0	1,0	346	1667	1583	3389	3567	12	253		
C10	52,05	26,48	66,41	65,08	1,5	4,1	3,9	8,3	8,7	0,2	6,0	408	1078	1024	2192	2307	60	1590		
RP 1	75,95	30,43	85,07	78,22	0,5	12,2	14,7	17,6	14,7	0,2	3,4	85	1960	2353	2823	2353	31	541		
RP 2	74,22	28,18	85,93	74,95	0,5	12,9	15,5	18,6	15,5	0,2	3,5	78	2074	2489	2987	2489	33	556		

## **ANEXO G**

### **DETALLE PROCESO DE MODELACIÓN**

## Modelación Recuperación Global

### 1<sup>ra</sup> Iteración

- Estructura :  $C_0 + C_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right)}$
- Correlación : 0,751

### 2<sup>da</sup> Iteración

- Variable :  $C_0 + C_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right)} + C_2 \cdot \frac{1}{p_{80}^2}$
- Correlación : 0,905

### 3<sup>ra</sup> Iteración

- Variable :  $C_0 + C_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right)} + C_2 \cdot \frac{1}{p_{80}^2} + C_3 \cdot \frac{1}{Ley_A^2}$
- Correlación : 0,941

### 4<sup>ta</sup> Iteración

- Variable :  $C_0 + C_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right)} + C_2 \cdot \frac{1}{p_{80}^2} + C_3 \cdot \frac{1}{Ley_A^2} + C_4 \cdot \frac{1}{d_{32}^2}$
- Correlación : 0,954

## Modelación Recuperación T1

### 1<sup>ra</sup> Iteración

- Estructura :  $C_0 + C_1 \cdot \frac{1}{p_{80}}$
- Correlación : 0,729

### 2<sup>da</sup> Iteración

- Variable :  $C_0 + C_1 \cdot \frac{1}{p_{80}} + C_2 \cdot N_s^2$
- Correlación : 0,874

### 3<sup>ra</sup> Iteración

- Variable :  $C_0 + C_1 \cdot \frac{1}{p_{80}} + C_2 \cdot N_s^2 + C_3 \cdot d_{32}^3$
- Correlación : 0,896

### 4<sup>ta</sup> Iteración

- Variable :  $C_0 + C_1 \cdot \frac{1}{p_{80}} + C_2 \cdot N_s^2 + C_3 \cdot d_{32}^3 + C_4 \cdot p_{80}^3$
- Correlación : 0,917

## Modelación Recuperación T1 – Con primeras 2 variables impuestas

### 1<sup>ra</sup> Iteración

- Estructura :  $C_0 + C_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right)}$
- Correlación : 0,537

### 2<sup>da</sup> Iteración

- Variable :  $C_0 + C_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right)} + C_2 \cdot \frac{1}{P_{80}^2}$
- Correlación : 0,698

### 3<sup>ra</sup> Iteración

- Variable :  $C_0 + C_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right)} + C_2 \cdot \frac{1}{P_{80}^2} + C_3 \cdot N_s^3$
- Correlación : 0,859

### 4<sup>ta</sup> Iteración

- Variable :  $C_0 + C_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right)} + C_2 \cdot \frac{1}{P_{80}^2} + C_3 \cdot N_s^3 + C_4 \cdot P_{80}^3$
- Correlación : 0,903

## Modelación Recuperación T2

### 1<sup>ra</sup> Iteración

- Estructura :  $C_0 + C_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right)}$
- Correlación : 0,656

### 2<sup>da</sup> Iteración

- Variable :  $C_0 + C_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right)} + C_2 \cdot \frac{1}{p_{80}^2}$
- Correlación : 0,892

### 3<sup>ra</sup> Iteración

- Variable :  $C_0 + C_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right)} + C_2 \cdot \frac{1}{p_{80}^2} + C_3 \cdot \frac{1}{d_{32}^2}$
- Correlación : 0,909



## Modelación Recuperación T3

### 1<sup>ra</sup> Iteración

- Estructura :  $C_0 + C_1 \cdot \frac{1}{P_{80}^2}$
- Correlación : 0,484

### 2<sup>da</sup> Iteración

- Variable :  $C_0 + C_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right)} + C_2 \cdot \frac{1}{P_{80}^2}$
- Correlación : 0,882

### 3<sup>ra</sup> Iteración

- Variable :  $C_0 + C_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right)} + C_2 \cdot \frac{1}{P_{80}^2} + C_3 \cdot \left[ \varepsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right) \right]^3$
- Correlación : 0,905

### 4<sup>ta</sup> Iteración

- Variable :  $C_0 + C_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right)} + C_2 \cdot \frac{1}{P_{80}^2} + C_3 \cdot \left[ \varepsilon_g \cdot \sum_i \left( \frac{f_{i3}}{d_i} \right) \right]^3 + C_4 \cdot \frac{1}{Ley_A^2}$
- Correlación : 0,933

## **ANEXO H**

### **DATOS DE MUESTREO**

Prueba	nb	Nb
A1	5.339	21.107
A2	10.009	26.491
A3	6.690	23.238
A4	7.539	29.796
A5	7.711	22.959
A6	5.600	22.308
A7	4.511	17.756
A8	4.793	19.327
A9	4.460	17.689
A10	4.764	18.803
B1	5.494	11.071
B2	6.595	26.294
B3	6.661	19.952
B4	5.777	17.333
B5	5.015	20.198
B6	2.546	7.540
B7	3.307	9.893
B8	4.556	18.138
B9	2.235	8.850
B10	3.658	16.180
C1	4.336	17.373
C2	9.334	25.849
C3	3.767	14.975
C4	4.142	16.670
C5	4.598	18.293
C6	4.493	17.870
C7	3.072	12.583
C8	3.185	12.613
C9	2.396	9.423
C10	1.879	7.339
RP 1	7.184	28.968
RP 2	6.645	26.456

- nb : Número de burbujas en la muestra
- Nb : Número de burbujas en el lote