



**UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE FISICA**

**ESTUDIO DE UNA TRANSICION DE ONDA DE GRAVEDAD EN FLUJO
TURBULENTO**

**TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN
CIENCIAS MENCION FISICA**

CRISTOBAL MANUEL ARRATIA MARTINEZ

**PROFESOR GUIA:
NICOLAS MUJICA FERNANDEZ**

**MIEMBROS DE LA COMISION:
ENRIQUE CERDA VILLABLANCA
RODRIGO HERNANDEZ PELLICER
VICTOR MUÑOZ GALVEZ
YARKO NIÑO CAMPOS**

**SANTIAGO DE CHILE
NOVIEMBRE 2007**

Agradecimientos

A mis padres, gracias por su apoyo, confianza y todo lo que me han dado.

A mis hermanos, Alejandra, Pablo y Felipe. Gracias por poder contar siempre con su amistad y buena onda. No puedo dejar de mencionar lo mismo de Fernando, Elizabeth y Paola.

A Xime. Por todo tu amor y comprensión. Gracias por ayudarme a crecer tanto como persona.

A todos mis sobrinos: a mi ahijada Sofía, a Paula, Camila, Andrea, Elena, Damián y Nicolás.

A Nicolás Mujica, muchas gracias por haberme dado la excelente oportunidad de participar en esta investigación. Ha sido una gran experiencia en la que he aprendido y disfrutado mucho. Gracias también por tu guía, ayuda y confianza.

A Nico Rivas por su ayuda muy importante para este trabajo.

A todos los miembros del Departamento de física, especialmente a los del Laboratorio de materia fuera del equilibrio. Especial saludo a Carlos, Germán, Jocelyn, Loreto, Pascal y Thomas, con quienes he tenido el gusto de compartir este último tiempo.

Finalmente, agradezco a la Dirección Académica de la FCFM, al proyecto Fondap 11980002 y al proyecto Anillo ACT N°15. Gracias por el soporte que hizo posible esta investigación.

Resumen

Este trabajo es un estudio sobre una transición de onda de gravedad que ocurre en un flujo en régimen turbulento. Esta bifurcación fue descubierta recientemente y hay muchas preguntas abiertas respecto de ella. En particular, no se conoce el mecanismo de la inestabilidad ni se tiene claridad respecto del rol de la turbulencia en ella.

En el capítulo 1, además de describirse el fenómeno estudiado, se presentan brevemente los aspectos conocidos de la mecánica de fluidos que son más pertinentes al estudio realizado. Posteriormente se plantean los objetivos.

En el segundo capítulo se da una descripción detallada del montaje tipo Taylor-Couette desarrollado durante este trabajo. También se explican los protocolos de medición utilizados.

En el capítulo 3 se presentan los resultados experimentales obtenidos. El hallazgo más importante es el hecho de que el número de Froude es, dentro de los parámetros adimensionales considerados, el que mejor describe la bifurcación. Esto resulta evidente al comparar los diagramas de bifurcación de este experimento con el previamente existente. Por otro lado se obtiene la dependencia de las frecuencias propias de algunos modos fundamentales. En esa dependencia es posible observar que la zona en que se desarrolla la inestabilidad coincide con el encuentro de las frecuencias de dos modos propios de superficie. Finalmente, es importante mencionar que se registraron efectos asociados al desgaste del montaje que, junto con algunas diferencias entre estos resultados y los datos experimentales previos, se pueden interpretar como producto de la influencia de ruido en la transición, ruido asociado tanto a las fluctuaciones turbulentas como a las vibraciones mecánicas del montaje. Este aspecto requiere mayor caracterización que permita aislar de mejor manera el rol de la turbulencia.

En el capítulo 4 se realiza un análisis teórico que busca determinar la dependencia con la intensidad del flujo de los modos propios de onda de gravedad de la superficie libre. Esto busca determinar la aparición de alguna inestabilidad lineal en los modos a medida que incrementa la intensidad del flujo. Pese a no poderse determinar la estabilidad de los modos, los resultados para la dependencia de las frecuencias propias presentan un buen ajuste a las medidas.

Finalmente, en el capítulo 5 se presentan las conclusiones. Entre ellas se menciona una posibilidad respecto de cuál puede ser el mecanismo. Ese mecanismo estaría determinado por la colisión de las frecuencias de dos modos, lo que se sugiere tanto de los resultados experimentales como de los teóricos. Adicionalmente se proponen algunos aspectos que podrían abordar investigaciones futuras.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Algunas ecuaciones y conceptos fundamentales de los fluidos	1
1.2. Fenómenos de superficie: ondas de gravedad	5
1.3. Geometría tipo Taylor-Couette	8
1.4. Inestabilidades y flujos turbulentos	11
1.5. Transición de onda de gravedad en flujo turbulento en geometría T-C	15
1.5.1. Características del estado base	17
1.5.2. Estado de onda de gravedad	19
1.5.3. Cerca de Re_c	23
1.6. Objetivos	24
2. Descripción del experimento	27
2.1. Montaje	27
2.2. Medidas	31
2.2.1. Medición local de superficie	31
2.2.2. Presión	39
2.2.3. Temperatura	39
2.2.4. Velocidad y corriente del motor	40
2.3. Procedimientos experimentales	41

3. Resultados Experimentales	45
3.1. Rodaje	45
3.2. Aspectos relevantes de las medidas.	51
3.3. Medidas Definitivas.	56
3.4. Frecuencias propias de la superficie libre.	66
4. Análisis de Estabilidad Lineal	71
4.1. Estado Base y Planteamiento del Problema de Estabilidad	71
4.2. Análisis numérico	78
4.3. Resultados numéricos	80
4.4. Expansión para $\varepsilon \ll 1$	86
5. Conclusiones	93

Capítulo 1

Introducción

Esta tesis expone un estudio realizado sobre la transición de onda de gravedad que ocurre en un flujo de Taylor-Couette turbulento con superficie libre. Este fenómeno ha sido recientemente reportado [1] y varias de sus interrogantes fundamentales permanecen abiertas. El presente trabajo aborda tanto experimental como teóricamente algunos aspectos esenciales de este problema que, al ser una transición en flujo turbulento, pertenece a una clase de problemas que son en la actualidad objeto de activa investigación.

1.1. Algunas ecuaciones y conceptos fundamentales de los fluidos

Pese a ser una de las áreas más antiguas de la física y a tener establecidos sus conceptos y ecuaciones fundamentales desde hace casi 200 años, la mecánica de fluidos aún posee una gran variedad de fenómenos por explicar y descubrir. Por ello es que esta se mantiene en la actualidad como un área de investigación muy activa.

La ecuación fundamental para fluidos newtonianos incompresibles en equilibrio

térmico es la ecuación de Navier-Stokes [2, 3], la que establece que en un fluido en que se cumplen las condiciones anteriormente descritas, con densidad de masa por unidad de volumen ρ , con un campo de velocidades $\vec{v}(\vec{x}, t)$ dependiente del tiempo (t) y del espacio (\vec{x}), viscosidad cinemática ν y campo de presión $p(\vec{x}, t)$, se cumple que

$$\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{F} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v}, \quad (1.1)$$

donde \vec{F} será algún campo de fuerzas presente en el volumen del fluido considerado. Típicamente y de aquí en adelante $\vec{F} = \vec{g} = -g\hat{z}$. A partir de esta ecuación, con las condiciones de borde que correspondan (ej: adherencia a las superficies sólidas que limitan el fluido) y las simplificaciones apropiadas según el caso, se espera entender y/o predecir los distintos fenómenos que ocurren en esta clase de fluidos.

El término no lineal presente en la ecuación (1.1) dificulta su tratamiento matemático e impide la obtención de una solución general de la misma. En la mayoría de los casos este término es eliminado u objeto de alguna simplificación para obtener soluciones a primer orden en \vec{v} . En muchos casos se puede eliminar además en forma simple el término de gravedad al agregar una componente de la forma $-\rho g z$ a la presión. Por el contrario, en el caso de estudio en esta tesis la gravedad juega un rol importante, por lo que se mantendrá explícito toda vez que corresponda.

Para determinar en cada caso la relevancia que tendrá cada término de la ecuación (1.1), es conveniente realizar una adimensionalización, la que dará cuenta de la relación entre sus términos para valores dados de los parámetros. Esta adimensionalización puede hacerse considerando las escalas típicas en el problema específico a tratar. Por ejemplo, considerando las coordenadas adimensionales \vec{X} (espacial) y τ (temporal), y las escalas características V (velocidad), L (longitud) y T (tiempo)

de algún problema particular en consideración, es posible reescribir

$$\vec{v} = V\vec{u}(\vec{X}, \tau), \quad (1.2)$$

$$\vec{\nabla} = L^{-1}\vec{\nabla}_X, \quad (1.3)$$

$$\partial_t = T^{-1}\partial_\tau = \frac{V}{L}\partial_\tau \quad (1.4)$$

y

$$p = \rho V^2 P, \quad (1.5)$$

con \vec{u} y P adimensionales, para así obtener la ecuación de Navier-Stokes adimensionalizada

$$\partial_\tau \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}_X) \vec{u} = -\vec{\nabla}_X P - Fr^{-1} \hat{z} + Re^{-1} \vec{\nabla}^2 \vec{u}, \quad (1.6)$$

donde $Re = VL/\nu$ es el número de Reynolds y $Fr = V^2/(gL)$ es el número de Froude, dos números adimensionales que caracterizan la magnitud con que los términos en que aparecen entran en la ecuación, determinando distintos estados posibles para el flujo.

Un caso importante es el de $Re \gg 1$, en el cual se puede despreciar el último término y el problema puede ser bien descrito por la ecuación de Euler para un fluido ideal o sin viscosidad

$$\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - g \hat{z}. \quad (1.7)$$

Cabe señalar que en el caso en que $Re \gg 1$ debido a que $V \rightarrow \infty$, las condiciones de borde de adherencia correspondientes a la existencia de viscosidad en el fluido, implican grandes variaciones de \vec{v} en una pequeña región correspondiente al borde de una superficie sólida [2]. En estas regiones, debido a estos fuertes gradientes de velocidad, se hace importante el último término $Re^{-1} \vec{\nabla}^2 \vec{u}$ independiente de la magnitud de Re , por lo que corresponden otras aproximaciones (en particular la

aproximación de capa límite [2]), que eventualmente pueden ser calzadas con una solución existente en el resto del fluido, donde sí se desprecia el último término. Otro caso corresponde a aquel en que las velocidades son pequeñas y la viscosidad juega un papel despreciable, caso en el que la ecuación de Euler es una buena aproximación para determinar la naturaleza de las soluciones. En estos casos, al resolver la ecuación de Euler, las condiciones de borde de contacto con un sólido se relajan y se limitan a que el fluido no lo penetre, eliminando la imposición de adherencia.

Si consideramos un flujo estacionario, es decir, en el que \vec{v} no depende de t , se tiene que las partículas de fluido siguen trayectorias fijas en el tiempo y en el espacio, y la velocidad del flujo será tangente a esas trayectorias. Esas trayectorias se denominan líneas de flujo. Aplicando la identidad vectorial

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}v^2 - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \quad (1.8)$$

al término no lineal de la ecuación de Euler y proyectando los términos de esa ecuación en la dirección de una línea de flujo (paralela a \vec{v}), se obtiene la ecuación de Bernoulli que indica que para cada línea de flujo se cumple que

$$\frac{v^2}{2} - \frac{p}{\rho} + gz = c_l, \quad (1.9)$$

donde c_l es una constante que puede variar entre distintas líneas de flujo pero que se mantiene sin variación a lo largo de cada una de ellas.

Por otro lado, si el flujo es irrotacional, entonces existe un potencial de velocidad ϕ tal que $\vec{v} = \vec{\nabla}\phi$. En esos casos se habla de flujo potencial, caso en el que, utilizando la misma identidad vectorial (1.8) e integrando una vez en el espacio, se obtiene que

$$\partial_t \phi + \frac{v^2}{2} - \frac{p}{\rho} + gz = f(t), \quad (1.10)$$

donde ahora al lado derecho hay una función f que depende del tiempo t y que será la misma en todo el fluido. Considerando en este caso un flujo estacionario se

recupera directamente la ecuación de Bernoulli

$$\frac{v^2}{2} - \frac{p}{\rho} + gz = c, \quad (1.11)$$

con la diferencia de que en este caso de flujo potencial la constante c no varía entre líneas de flujo.

1.2. Fenómenos de superficie: ondas de gravedad

Cualquier fluido que se considere ocupará un cierto volumen en el espacio. En el caso de los líquidos, este volumen se ve delimitado por una región en que disminuye fuertemente la concentración de partículas. Esta región, al tener una de sus dimensiones macroscópicamente despreciable, puede ser considerada como una superficie bidimensional. Si la superficie se puede describir por una función $\eta(x, y, t)$ que corresponda a la coordenada z de la posición de la superficie para tiempo t y coordenadas en el plano (x, y) , entonces la evolución de la superficie se relacionará con la velocidad del fluido según la condición cinemática, que es

$$\partial_t \eta + \vec{v}_{\parallel}|_{\eta} \cdot \vec{\nabla} \eta = \vec{v}_{\perp}|_{\eta} \quad (1.12)$$

y establece el hecho de que la superficie se moverá acorde con el movimiento del fluido que delimita.

La superficie horizontal que presenta un líquido en reposo bajo la influencia de la gravedad corresponde a la configuración de equilibrio que minimiza la energía potencial del fluido. Si esta situación es perturbada se producirán ondas de gravedad [2] en torno a esta situación de equilibrio que es estable, constituyendo un problema básico en mecánica de fluidos. Como primera aproximación para estudiar estas ondas de gravedad en el límite de pequeñas perturbaciones, se puede definir que la superficie

de equilibrio corresponde a $z = 0$, la perturbada a η y utilizar la ecuación (1.10) despreciando el término cuadrático en v , con lo que se obtiene

$$\partial_t \phi - \frac{p}{\rho} + gz = f(t). \quad (1.13)$$

Como consideramos un fluido incompresible se cumple que $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ o bien, en términos de ϕ ,

$$\vec{\nabla}^2 \phi = 0 \quad (1.14)$$

se satisface en el volumen del fluido. Para determinar la condición de borde en la superficie del fluido, se puede considerar el hecho de que la cantidad físicamente relevante es $\vec{\nabla} \phi$, por lo que se tiene la libertad de agregar un término independiente del espacio en la elección de ϕ . Equivalentemente (a reemplazar $\phi \rightarrow \phi + \int f$) se puede elegir $f(t) = 0$ y, reemplazando $\partial_t \eta = \partial_z \phi|_{z=0}$ de (1.12) a primer orden y evaluando en la superficie de equilibrio $z = 0$, se obtiene que

$$[\partial_t^2 \phi + g \partial_z \phi]_{z=0} = 0. \quad (1.15)$$

De esta manera, como primera aproximación, se tiene planteado el problema de ondas de gravedad a través de ϕ , con una ecuación (1.14) que se cumple en el volumen del fluido y una condición de borde (1.15) que es lo que involucra la fuerza de gravedad. Las otras condiciones de borde necesarias para encontrar ϕ quedarán determinadas por la geometría de cada problema en particular.

Es importante tener en cuenta las aproximaciones hechas en esta deducción para establecer la validez de la misma. Al utilizar la ecuación (1.10), que proviene de la ecuación de Euler, se está despreciando la viscosidad. Además, al eliminar el término cuadrático de (1.10) se desprecia el término no lineal $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$ de la ecuación de Euler. Si consideramos que las ondas son de amplitud a , longitud de onda λ y período T ,

tendremos que $v \sim a/T$,

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \sim \left(\frac{a}{T}\right)^2 \frac{1}{\lambda}, \quad (1.16)$$

$$\partial_t \vec{v} \sim \frac{1}{T} \frac{a}{T} = \left(\frac{a}{T}\right)^2 \frac{1}{a}, \quad (1.17)$$

por lo que la imposición de que $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \ll \partial_t \vec{v}$ hecha al despreciar ese término, es válida sólo si

$$a \ll \lambda \quad (1.18)$$

o bien, en palabras, es válida para longitud de onda larga.

Es importante destacar que aparte de los aspectos hasta aquí discutidos, hay otros aspectos importantes relacionados con la superficie de un líquido. Las moléculas que se encuentran en el volumen de un líquido están rodeadas de otras moléculas de la misma especie, por lo que las fuerzas intermoleculares que recibe de sus vecinas se anulan. Ello en cambio no ocurre con las moléculas que se encuentran en la zona superficial del líquido, razón por la que ellas reciben una fuerza neta no nula de parte de las vecinas de su especie. Esta fuerza está caracterizada por el coeficiente de tensión superficial σ (con unidades de fuerza/longitud) y, como es de esperar, se hace considerable cuando la razón entre el volumen y la superficie involucrados es pequeña. La longitud capilar $\sqrt{2\sigma/(g\rho)}$ determina el orden de magnitud de la longitud en que la gravedad y la tensión superficial tienen efectos comparables sobre la forma de la superficie. Por ejemplo, la constante de capilaridad para el agua a 20°C tiene un valor de 1,22 mm, y para longitudes mucho mayores que esa el efecto de la tensión superficial es despreciable.

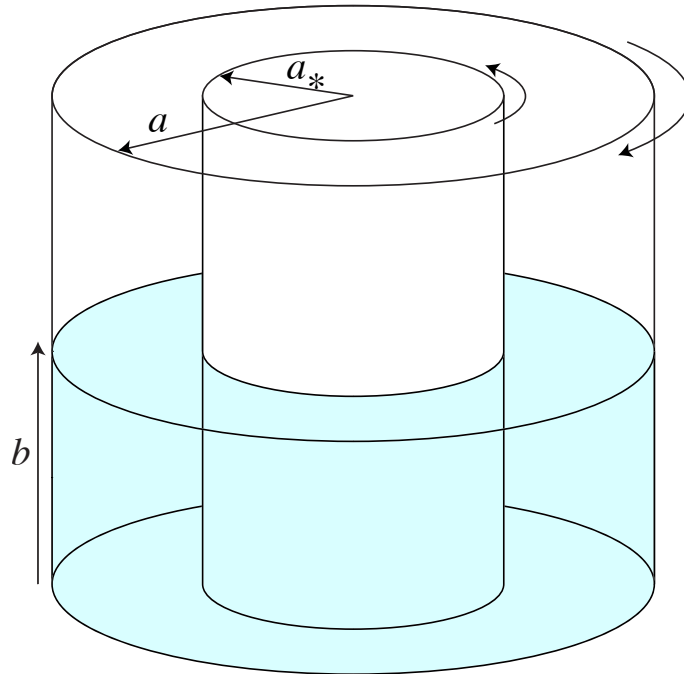


Figura 1.1: Geometría tipo Taylor-Couette.

1.3. Geometría tipo Taylor-Couette

En el estudio de la mecánica de fluidos hay una gran cantidad de casos y geometrías que han sido consideradas, unas más que otras y con distinto grado de éxito en explicar la fenomenología. Geometría se refiere al confinamiento espacial del fluido cuyo flujo se estudia. Un caso particular que ha sido considerado en numerosos trabajos es el de la geometría de Taylor-Couette (figura 1.1), la que consiste en un fluido confinado en el espacio entre dos cilindros coaxiales que giran en forma independiente.

Los primeros estudios del flujo en un dispositivo de este tipo, motivados en determinar la viscosidad del fluido involucrado, fueron presentados a fines del siglo XIX por Mallock [4, 5] y por Couette [6]. Este último es quien dio nombre al flujo de Couette, flujo puramente azimutal que se puede obtener al considerar al fluido extendido infinitamente en la dirección del eje de los cilindros. En ese caso el flujo

de Couette constituye una solución exacta de las ecuaciones de Navier-Stokes (1.1). Posteriormente en 1923, Taylor realizó, tanto experimental como matemáticamente, un revolucionario estudio [7] sobre la estabilidad de ese flujo, encontrando que el flujo caracterizado por la solución antes mencionada se vuelve inestable dando paso a un flujo con vórtices azimutales alternados (llamados vórtices de Taylor) y proponiendo un parámetro adimensional que caracteriza dicha inestabilidad. Ese parámetro fue posteriormente llamado número de Taylor, y está íntimamente ligado al número de Reynolds.

En esta tesis se realiza un estudio en geometría de Taylor-Couette (T-C), aunque a diferencia de la mayoría de los estudios previos, en este caso el fluido posee una superficie libre y una razón de radios a_0 entre los radios interno y externo mucho menor ($a_0 = 0,127$) que aquellas que han sido más estudiadas ($a_0 \gtrsim 0,8$ [8, 10]). Son pertinentes a este estudio las ondas de gravedad, por lo que a continuación se detallará lo que se obtiene de (1.15) y (1.14), visto en la sección anterior, para el caso de T-C con ambos cilindros en reposo. Este es el caso que se puede resolver analíticamente y que servirá como punto de referencia para las ondas de gravedad involucradas en este trabajo, las que ocurren con el cilindro interno en rotación.

La ecuación de Laplace (1.14) en una geometría T-C puede resolverse por separación de variables de la forma $\phi = W(r)\Psi(\theta)L(z)$, donde r , θ y z son respectivamente las componentes radial, azimutal, y vertical de las coordenadas cilíndricas. Denotando según la figura (1.1) el radio interno a_* , el externo a y la profundidad b , las soluciones son de la forma

$$\phi_{mn} = \text{Re} \left(F_{mn}(t) e^{im\theta} W_m \left(\alpha'_{mn} \frac{r}{a} \right) \cosh \left(\alpha'_{mn} \frac{z+b}{a} \right) \right), \quad (1.19)$$

donde

$$W_m \left(\alpha'_{mn} \frac{r}{a} \right) = J_m \left(\alpha'_{mn} \frac{r}{a} \right) N'_m \left(\alpha'_{mn} \frac{a_*}{a} \right) - J'_m \left(\alpha'_{mn} \frac{a_*}{a} \right) N_m \left(\alpha'_{mn} \frac{r}{a} \right), \quad (1.20)$$

J_m y N_m son las funciones de Bessel y Neumann respectivamente y α'_{mn} son la n -ésima solución de

$$J'_m(\alpha'_{mn})N'_m\left(\alpha'_{mn}\frac{a_*}{a}\right) - J'_m\left(\alpha'_{mn}\frac{a_*}{a}\right)N'_m(\alpha'_{mn}) = 0. \quad (1.21)$$

Los α'_{mn} y la forma de W_m son tales que se satisfacen las condiciones de borde de que el fluido se mantiene entre ambos radios, es decir,

$$\vec{v}|_{r=a_*,a} \cdot \hat{r} = \partial_r \phi|_{r=a_*,a} = 0. \quad (1.22)$$

Además, la dependencia en z está ajustada a la condición de borde análoga a (1.22), $\partial_z \phi(z = -b) = 0$ y m debe ser un entero para que $\phi(\theta = 0) = \phi(\theta = 2\pi)$, condición correspondiente a la ausencia de circulación del fluido en reposo. A lo largo de esta tesis, toda alusión a un modo m hará referencia a una dependencia azimutal de la forma expuesta en (1.19), salvo que se explicita lo contrario.

Al aplicar la condición de borde que involucra la fuerza de gravedad (1.15), debe considerarse la dependencia temporal. Para ello se reemplaza $F_{mn}(t) = A_{mn}e^{i\omega t}$ y, reemplazando la solución general $\phi = \sum \phi_{mn}$ en dicha condición, se obtiene que

$$\sum_{m,n} \operatorname{Re} \left(A_{mn} e^{i(m\theta + \omega t)} W_m \left(\alpha'_{mn} \frac{r}{a} \right) \left[-\omega_{mn}^2 \cosh \left(\frac{\alpha'_{mn} b}{a} \right) + \frac{\alpha'_{mn} g}{a} \sinh \left(\frac{\alpha'_{mn} b}{a} \right) \right] \right) = 0. \quad (1.23)$$

Como las funciones $e^{im\theta}$ son ortogonales para θ en $[0, 2\pi]$ y las $W_m(\alpha'_{mn}r/a)$ lo son para r entre a_* y a , entonces para cada valor de m y n debe cumplirse que

$$-\omega^2 \cosh \left(\frac{\alpha'_{mn} b}{a} \right) + \frac{\alpha'_{mn} g}{a} \sinh \left(\frac{\alpha'_{mn} b}{a} \right) = 0, \quad (1.24)$$

o bien

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\alpha'_{mn} g}{a} \tanh \left(\frac{\alpha'_{mn} b}{a} \right). \quad (1.25)$$

De esta forma quedan determinadas las frecuencias propias de los modos normales para el caso de ondas de gravedad en una geometría tipo Taylor-Couette con superficie libre.

1.4. Inestabilidades y flujos turbulentos

Si se considera un fluido sometido a condiciones externas estacionarias, debe en principio existir una solución estacionaria de (1.1). Sin embargo, es necesario que dicha solución sea estable para que efectivamente ocurra. Como norma general es aceptado que la existencia de flujos estacionarios (o bien, laminares) ocurre para bajo número de Reynolds Re , y que cuando este supera un valor crítico Re_c (típicamente Re_c entre 10 y 1000, dependiendo del ruido y la geometría), el flujo inicial se vuelve inestable dando paso a otros flujos con estructuras cada vez más complejas a medida que se incrementa Re .

En particular, la geometría Taylor-Couette referida en la sección anterior es uno de los casos más estudiados y caracterizados en la literatura. Luego de la primera inestabilidad descubierta por Taylor, se han escrito numerosos trabajos describiendo diversos tipos de flujos y numerosas inestabilidades. En T-C, con los 26 flujos distintos que según [8] fueron descritos por Coles [9] para un mismo número de Reynolds, queda graficada la existencia de múltiples soluciones para Navier-Stokes, problema que aún permanece abierto. Muchas de estas inestabilidades que aparecen al incrementar Re presentan quiebres de simetría. A medida que el número de Reynolds aumenta y el flujo se vuelve turbulento, va creciendo el nivel de desorden espacio temporal del flujo y disminuyendo la coherencia de las estructuras. Consistentemente con ello, se espera que en el límite $Re \rightarrow \infty$ el promedio temporal del flujo recupere las simetrías básicas del sistema [11].

Pese a lo anterior, recientemente se ha reportado una transición de primer orden

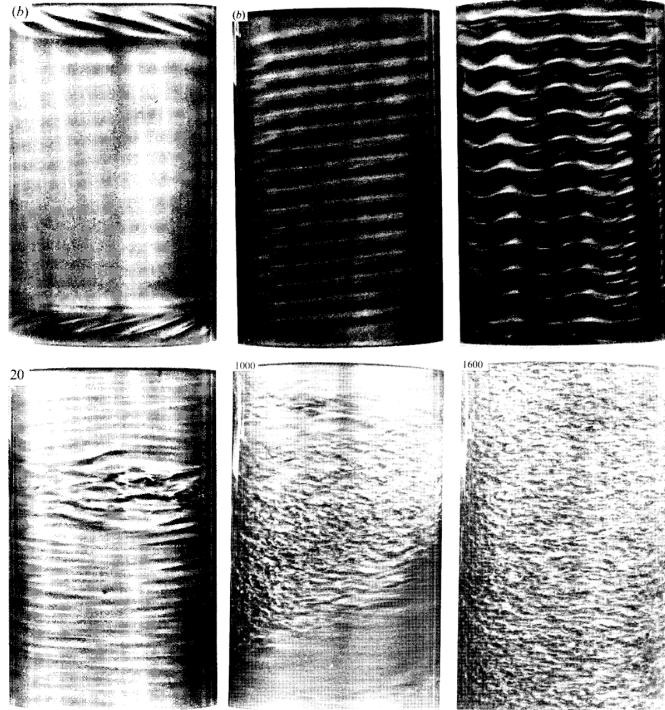


Figura 1.2: Ruta a Turbulencia en Taylor-Couette [8].

Imágenes del flujo para distintos valores de Reynolds interno Re_i y externo Re_o , asociados a la velocidad de rotación de los cilindros interno y externo respectivamente. El montaje es T-C con altura 30 veces el espacio entre cilindros y cociente de radios $a_0 = 0,889$. Los valores de Re de izquierda a derecha y desde arriba son: 1.- $Re_i = 1124$, $Re_o = 1000$ 2.- $Re_i = 240$, $Re_o = -300$ 3.- $Re_i = 350$, $Re_o = -100$ 4.- $Re_i = 590$, $Re_o = -1500$ 5.- $Re_i = 1000$, $Re_o = -3000$ 6.- $Re_i = 1600$, $Re_o = -3000$.

(que presenta histéresis y biestabilidad) con quiebre de simetría en un flujo turbulento con $Re \sim 10^5$ [12]. Asimismo, en el caso de magnetohidrodinámica se han encontrado las inestabilidades Dínamo [13] y Magneto-rotacional [14] que ocurren también en flujos fuertemente turbulentos. Estas inestabilidades son ejemplos de sistemas no lineales que presentan transiciones en presencia de ruido o fluctuaciones, ruido que en estos casos corresponde principalmente a las fluctuaciones inherentes al flujo turbulento en cuestión. Algunos aspectos del comportamiento de estos sistemas pueden ser descritos por sistemas dinámicos de baja dimensionalidad, aunque se desconocen las propiedades de la estadística que provendrá de la forma en que

las fluctuaciones turbulentas entran en esa descripción. Esta tesis aborda otro caso de inestabilidad en flujo turbulento, el que será presentado con detalle en la sección siguiente.

Una forma conocida de describir el comportamiento de sistemas no lineales cerca de una inestabilidad, es a través de ecuaciones de amplitud. Al respecto es posible explicar brevemente que, dada la ecuación que describe la dinámica de un sistema linealizado en torno al equilibrio que pierde estabilidad, las soluciones $f(t)$ de esta ecuación tendrán una dependencia temporal de la forma $f \sim \exp(\omega t)$, donde $\omega = \omega_r + i\omega_i$. Una inestabilidad ocurrirá cuando un modo se vuelva linealmente inestable ($\omega_r \geq 0$ para ese modo), situación en la que, en general, aparecerán oscilaciones cuya evolución dependerá de términos no lineales. Para estudiar la estabilidad y la evolución de la amplitud de esas oscilaciones, se propone una jerarquía de escalas temporales haciendo un reemplazo de la forma $f \sim A(T = \epsilon t) \exp(i\omega_i t)$, donde ϵ será una función de los parámetros del problema tal que $\omega_r(\epsilon = 0) = 0$ y $\omega_r(\epsilon) > 0$ si $\epsilon > 0$. La amplitud compleja A dependerá de la escala temporal lenta T para $\epsilon \ll 1$ (esto se justifica en que para $\epsilon \ll 1$, $\omega_r \ll \omega_i$ ya que $\omega_r(\epsilon = 0) = 0$. Si $\omega_i = 0$ no es necesario hacer introducir esta amplitud). Haciendo esta separación, en algunos casos se puede encontrar una ecuación cerrada para la evolución de A . La ecuación tipo para una inestabilidad de primer orden, también llamada bifurcación subcrítica, es de la forma

$$\partial_T A = \epsilon A + \nu |A|^2 A - |A|^4 A. \quad (1.26)$$

Esta es la ecuación más simple posible para describir una bifurcación con histéresis y biestabilidad. Sin embargo, encontrar la relación explícita entre los parámetros físicos de un problema en particular y los elementos de la ecuación (1.26) es un problema de gran dificultad. Es por ello que, en muchos casos, la pertinencia de una ecuación como (1.26) puede determinarse en la práctica sólo a través de un ajuste

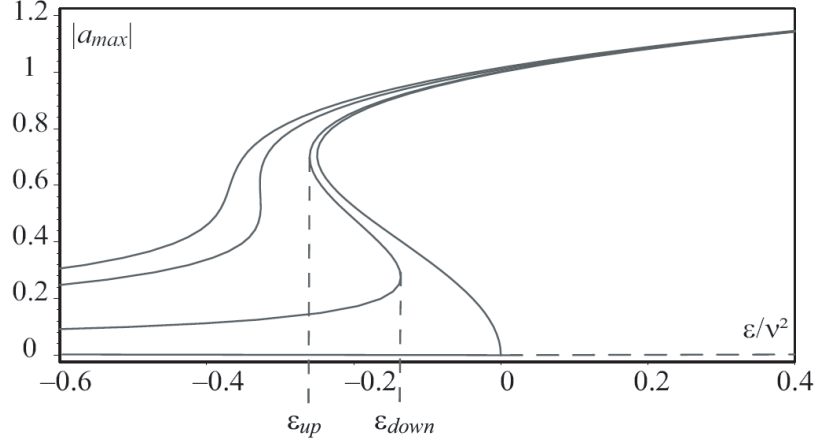


Figura 1.3: Diagrama de bifurcación con ruido [15].

Se muestra el valor de $|a|$ más probable (menos probable donde la pendiente es negativa) en función de ϵ/ν^2 , donde a es una medida global de A . De derecha a izquierda, la cuantificación del ruido $\gamma' = \gamma/\nu^3$ para las distintas curvas es $\gamma' = 0$, $\gamma' = 0,01$, $\gamma' = 0,07$ y $\gamma' = 0,1$.

con resultados experimentales. Al describir la dinámica de un sistema complejo en términos de una ecuación de amplitud de este tipo, se simplifica enormemente el problema a la vez que se elimina una gran cantidad de grados de libertad (la ecuación (1.26) incorpora sólo los efectos netos de estos grados de libertad, perdiendo el detalle de las fluctuaciones). La forma típica de modelar el efecto de estos grados de libertad despreciados es agregar ruido en la ecuación. Si se considera un ruido aditivo $\xi(t)$ con una amplitud $\sqrt{\gamma}$, la ecuación (1.26) queda

$$\partial_T A = \epsilon A + \nu |A|^2 A - |A|^4 A + \sqrt{\gamma} \xi(t). \quad (1.27)$$

Las características estadísticas del ruido dependerán de los grados de libertad eliminados, siendo la elección más usual la de considerar un ruido blanco delta-correlado tal que $\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \delta(t - t')$. En el caso de sistemas turbulentos, como fue recientemente mencionado, el ruido $\xi(t)$ provendrá principalmente de las fluctuaciones turbulentas. Actualmente hay un gran interés en determinar el efecto de estas fluctuaciones en este tipo de inestabilidades, lo que en este contexto se traduce tanto en las propiedades estadísticas del ruido como en la forma en que este

entra en la ecuación de amplitud: aditivamente como en (1.27), multiplicativamente, modificando los parámetros, etc.

El ruido puede tener efectos netos importantes en una inestabilidad. Como ejemplo de esto, en la figura 1.3 se observa la forma del diagrama de bifurcación de (1.27) (en la que A corresponde a la amplitud de un modo en un sistema extendido) para distintos niveles de ruido [15]. En la mencionada figura se observa que el incremento del ruido modifica el valor de los parámetros críticos y, para este caso de bifurcación subcrítica con ruido aditivo, disminuye la región de biestabilidad pudiendo incluso hacerla desaparecer por completo.

Parte de este trabajo se enfoca en la obtención de diagramas de bifurcación que, además de describir la bifurcación, permitan orientar la búsqueda de una ecuación de amplitud que describa correctamente el fenómeno estudiado. Esto resulta más abordable que la búsqueda de una ecuación de amplitud en forma directa. Adicionalmente se enfoca el problema teóricamente por medio de un análisis de estabilidad lineal.

1.5. Transición de onda de gravedad en flujo turbulento en geometría T-C

Recientemente, en [1] se ha reportado la observación experimental de una nueva inestabilidad de primer orden en un flujo turbulento. Esta inestabilidad consiste en el paso de un estado turbulento que respeta en promedio las simetrías del sistema, a un estado con una onda de gravedad de número azimutal $m = 1$. El trabajo realizado en [1] es, según el conocimiento de la gente involucrada en esta tesis, la única caracterización previa de esta inestabilidad. Por ello, al ser esta parte de la introducción referida a lo preexistente sobre esta inestabilidad, toda la información

contenida en esta sección proviene del trabajo reportado en [1].

El fenómeno se produce en un dispositivo Taylor-Couette con agua destilada y superficie libre, como en la figura 1.1 con la salvedad de que el cilindro externo permanece quieto. El problema tiene en total 8 parámetros:

$$\rho, \nu, g, \sigma, a_*, U, L \text{ y } b, \quad (1.28)$$

donde ρ y ν son respectivamente la densidad y la viscosidad del agua, g es la aceleración de gravedad, σ la tensión superficial en la interfaz agua-aire, a_* el radio del cilindro interno, $U = \Omega a_*$ es la velocidad con que se mueve la superficie del cilindro interno (Ω es la velocidad angular de rotación de este cilindro), $L = a - a_*$ la distancia entre ambos cilindros y b el nivel de agua en reposo. Habiendo 3 magnitudes físicas fundamentales (masa, tiempo y longitud) para esos 8 parámetros, estos pueden reducirse a 5 parámetros adimensionales:

1. Número de Reynolds Re . Se define como $Re = UL/\nu$ y corresponde al orden del cociente entre la inercia y las fuerzas viscosas. El rango explorado está entre $1,23 \times 10^5$ y $1,16 \times 10^6$, por lo que el flujo es muy turbulento.
2. Número de Froude Fr . Da el orden de magnitud de la razón entre la inercia y la fuerza de gravedad y se define como $Fr = U^2/(gL)$. Varía entre 0,2 y 17,9 y, al ser de orden 1, se espera competitividad entre la inercia y la gravedad.
3. Número capilar $Ca = \rho\nu U/\sigma$, definido como el cociente entre las fuerzas viscosas y de tensión superficial. En el rango explorado Ca varía aproximadamente entre $9,1 \times 10^{-3}$ y $8,4 \times 10^{-2}$. No se espera que este parámetro juegue un rol importante.
4. Los otros números son cocientes de longitudes que definen la geometría. El radio externo usado fue $a = 22,1$ cm, el interno $a_* = 3,34$ cm y los niveles

de agua fueron $h_0 = 34, 42$ y 50 cm, lo que para el cociente de radios da $a_0 = a_*/a = 0,128$ y para las razones de aspecto $b/L = 1,8, 2,2$ y $2,6$.

Los parámetros que se varían en el experimento son Ω y b , y la descripción se realiza en términos de Re y b/L .

El estado del flujo se caracteriza por medio de una medida dinámica de profundidad del agua en un punto y una medida de presión localizada en la pared exterior 20 cm sobre el fondo. En la caracterización del estado base se efectuaron también mediciones del campo de velocidades por medio de velocimetría ultrasónica Doppler, además de la toma de imágenes del perfil de la superficie.

1.5.1. Características del estado base

Existe una caracterización parcial del estado base. La medida de velocidad captura la componente radial y azimutal de la velocidad a lo largo de una cuerda como la indicada en la figura 1.4 A, situada a una altura fija. Dado que la azimutal es la principal componente de la velocidad, siendo al menos unas diez veces mayor que la radial, la caracterización se centra en ella.

Se reporta que el campo de velocidades caracterizado es efectivamente axisimétrico, tal como se espera para un flujo altamente turbulento. Mas aún, se mide que en promedio el momentum angular es prácticamente conservado en el volumen del flujo (fuera de las capas límites interna y externa), lo que corresponde a una velocidad azimutal de la forma $v_\theta = Ar^{-1}\hat{\theta}$, donde A es una constante y r la coordenada radial. En la figura 1.4 B se muestra esta medida para $F \equiv \Omega/(2\pi) = 5$ Hz. Un comportamiento similar se observa para frecuencias mayores, hasta 30 Hz.

Las imágenes de la superficie η [ver figura 1.5 (a)] capturadas para caracterizar el estado base arrojan que el perfil de esta es de la forma $\eta \sim r^{-\beta}$ con β en el rango $1,9 \rightarrow 2,0$. Este exponente es consistente con la predicción de la forma de

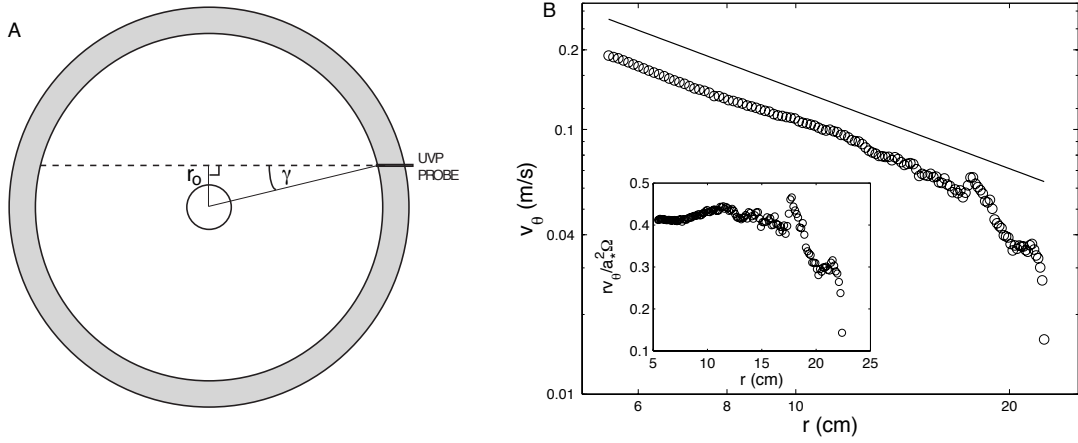


Figura 1.4: Medición de velocidad en el estado base.

A.- Vista superior esquemática de la velocimetría. La línea punteada muestra la dirección del haz ultrasónico que determina la zona de medición. El ángulo γ respecto de la normal es $\gamma = 13,6 \pm 0,5^\circ$, y el radio mínimo en que se mide es $r_0 = 5,2 \pm 0,2$ cm. B.- Perfil de Velocidad en el Estado Base. Se muestra en escala $\log_{10} \log_{10}$, la velocidad azimutal del flujo como función del radio y en la línea recta la pendiente -1 . Un ajuste de la forma $v_\theta \sim r^{-\alpha}$ para $r < 15$ cm arroja $\alpha = 0,97 \pm 0,05$. En el inserto se aprecia el perfil medio del momentum angular normalizado del fluido.

la superficie dada por la ley de Bernoulli (1.9) (al imponer una presión constante) para $v \sim r^{-1}$.

Se toman además medidas normalizadas de fluctuaciones de superficie en un punto fijo cercano al cilindro exterior, esto es, se mide $\delta h/b$ donde $\delta h = h - \langle h \rangle$ y $h = h(t)$ es la profundidad del agua en un punto fijo cercano al borde recién mencionado. Para este estado sólo se observan pequeñas fluctuaciones de la superficie y, para frecuencias $F \gtrsim 10$ Hz, se observa un dominio del modo fundamental $m = 1$ (notar la línea segmentada en 1.5 y el gráfico superior de la figura 1.7). Estas fluctuaciones no presentan una evolución temporal coherente. Por el contrario, la amplitud de estas varía en forma desordenada dentro del orden del 1% (ver figura 1.6 (a) y (c)). Adicionalmente se observa que la superficie cerca del eje posee una forma con una inclinación espacialmente consistente con el modo $m = 1$ (flecha

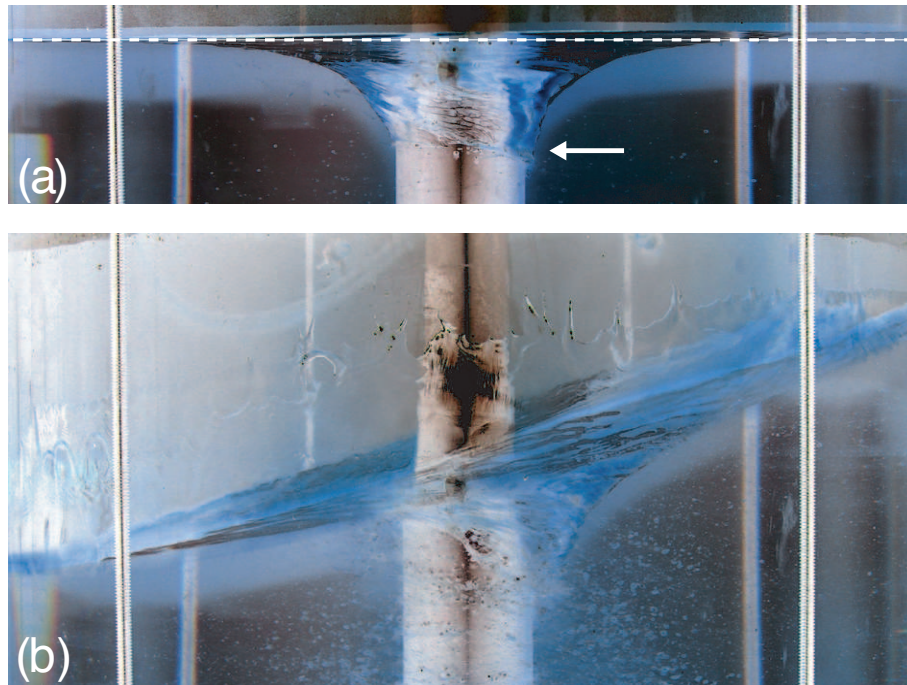


Figura 1.5: Estado base y de onda de gravedad.

(a) Se observa el perfil de la superficie para el estado base con $Re = 6,85 \times 10^5$ ($F = 20$ Hz). La línea punteada representa la horizontal y sirve como referencia para notar la inclinación de la superficie correspondiente al modo $m = 1$. (b) Imagen de la onda de gravedad para $Re = 8,22 \times 10^5$ ($F = 24$ Hz).

blanca en figura 1.5), aunque en la evolución temporal de la superficie en esta región cercana al eje no se observa predominio de la frecuencia del modo.

1.5.2. Estado de onda de gravedad

Se le llama estado base al estado anteriormente descrito pese a que en él ocurren fluctuaciones que son consecuencia de la fuerza de gravedad, razón por la que podría considerarse como un estado de ondas de gravedad. Al ocurrir la transición, estas fluctuaciones se vuelven coherentes dando paso al crecimiento de una estructura oscilatoria con ciertas propiedades que permanece en el tiempo. Esta estructura oscilatoria es una onda que también es producto de la fuerza de gravedad, y se le

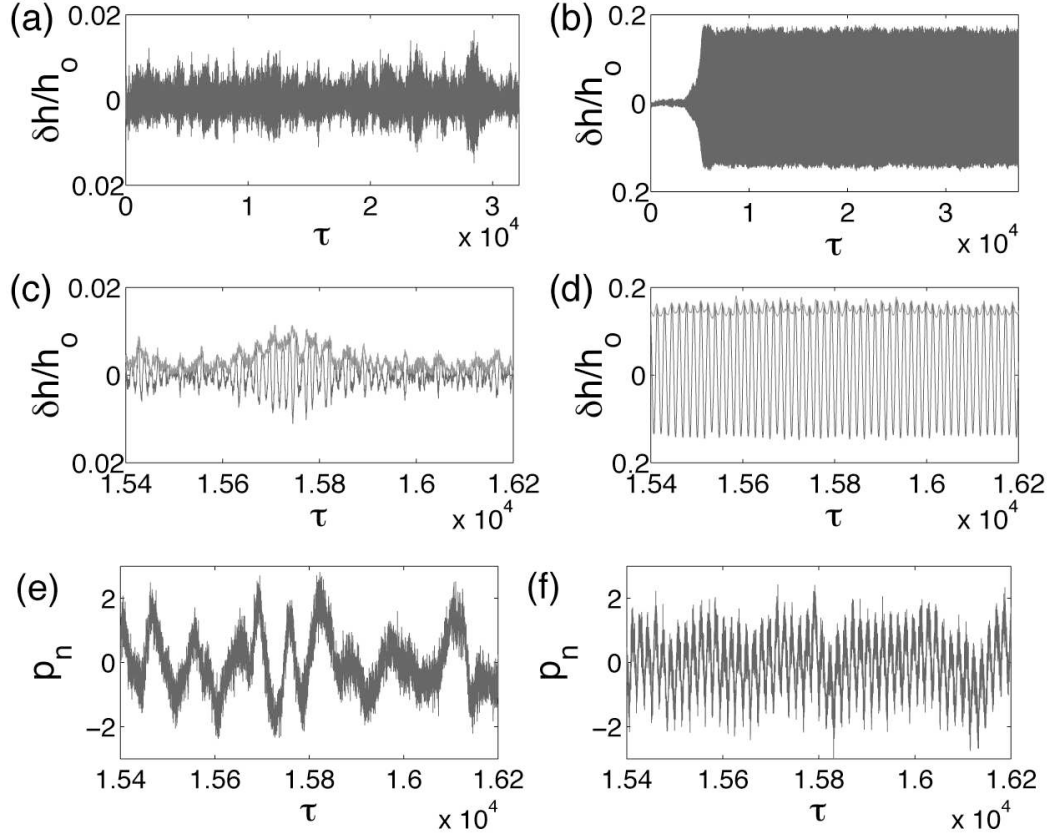


Figura 1.6: Medidas de superficie y presión.

En esta y otras figuras h_0 corresponde a b . Se grafica $\delta h = h - \langle h \rangle$ y $p_n = (p - \langle p \rangle)/p_{rms}$ en función del tiempo en unidades de vueltas del eje $\tau = tF$. La presión se normaliza con $p_{rms} = \sqrt{\langle p^2 - \langle p \rangle^2 \rangle} \approx 155$ Pa en ambos casos. En (a) y (b) se muestran series temporales largas en que se aprecian respectivamente las fluctuaciones de la superficie y el crecimiento y saturación de la onda. Para (d) y (f) ((c) y (e)) se muestran extractos de la serie temporal (b) ((a)) sobre (bajo) el valor de Re_c^+ , y se pueden apreciar las oscilaciones de $\delta h/h_0$ correspondientes a la onda y una fuerte componente de la presión a la misma frecuencia. En (c) y (d) se muestra en gris la envolvente obtenida de la transformada de Hilbert de $\delta h/h_0$.

llamará “estado de onda de gravedad” al estado del fluido en que el flujo contiene esta estructura, la que a su vez será llamada “onda de gravedad” o simplemente “onda”, cuando el contexto lo amerite.

El estado de onda de gravedad (figura 1.5 (b)) se manifiesta cuando la velocidad con que el eje se mantiene girando a velocidad constante es mayor que un cierto umbral. Si el eje empieza a girar desde el reposo este umbral equivale, para $b/L = 2,6$,

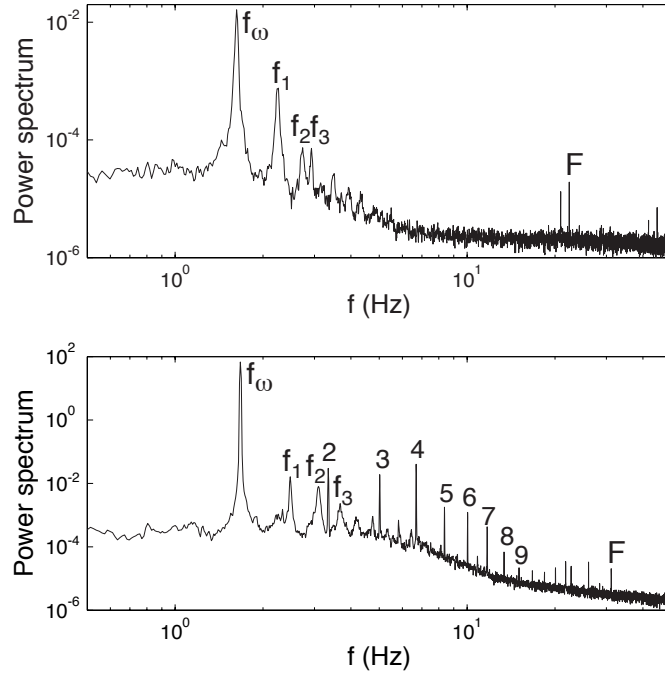


Figura 1.7: Espectro de potencias de estados de onda de gravedad y base.

Arriba (abajo) se muestra el espectro de potencias para $Re = 7,65 \times 10^5 < Re_c^+$ ($Re = 1,07 \times 10^6 < Re_c^+$) en el estado base. Se denota como f_ω la frecuencia dominante en ambos casos, correspondiente al modo fundamental $m = 1$. Se denotan como f_1 , f_2 y f_3 las frecuencias correspondientes a los modos $m = 2$, 0 y 3 respectivamente. Para la onda de gravedad se aprecian además sucesivos armónicos (1...9) de f_ω .

a un número de Reynolds $Re_c^+ = 8,65 \times 10^5$ ($F_c^+ = 25,2$ Hz), valor que corresponde a aquel a partir del cual la onda aparecerá con certeza tras una espera de 24 minutos. En la figura 1.6 se muestra la manifestación del estado de onda de gravedad (en la columna derecha, para $Re = 8,86 \times 10^5$) en las medidas de nivel de superficie y de presión, en comparación con las del estado base (columna izquierda, $Re = 7,65 \times 10^5$). Se aprecia que la amplitud de la onda es mayor en alrededor de un orden de magnitud que las fluctuaciones de superficie en el estado base.

Además de manifestarse en la superficie, el cambio de estado que ocurre en el sistema se manifiesta tanto en la presión, como se aprecia en la figura 1.6 (f), como

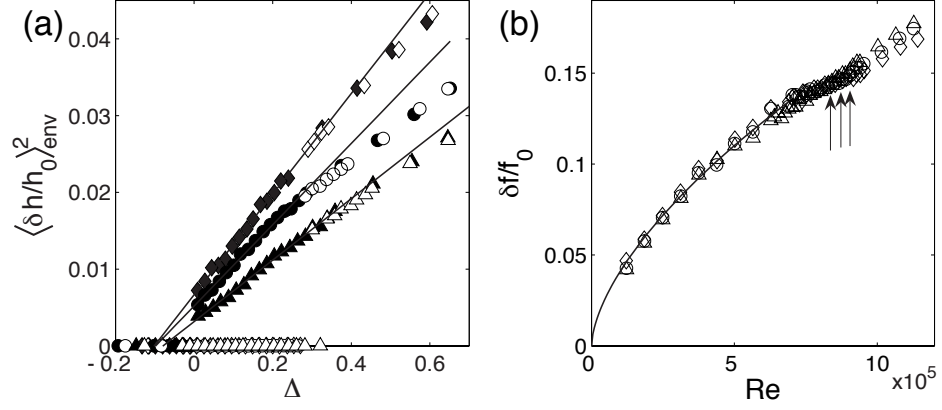


Figura 1.8: Diagrama de bifurcación y evolución de frecuencias.

(a) Se muestra el diagrama de bifurcación en términos del parámetro de bifurcación $\Delta = (Re - Re_c^-)/Re_c^-$ para distintos niveles de llenado $b/L = 2,6$ (Δ), $b/L = 2,2$ (\circ) y $b/L = 1,8$ (\diamond); símbolos en blanco corresponden a rampas de subidas y en negro a las de bajada. (b) Se muestra la dependencia en Re de $\delta f/f_0$. La línea sólida corresponde a un ajuste de la forma $\delta f/f_0 \sim Re^\zeta$ a todos los datos tales que $0 < Re < 7 \times 10^5$, arroja que $\zeta = 0,62 \pm 0,03$. La simbología es la misma que en (a) y las flechas indican aproximadamente los datos correspondientes a Re_c^+ . Notar que $h_0 = b$ y F es la frecuencia del motor.

en la velocidad del flujo. Esto último se respalda en [1] con medidas de velocidad tomadas en otro dispositivo similar (con esfera exterior en vez de cilindro) que presenta la misma inestabilidad. Esta medición indica que el flujo completo bifurca de un estado a otro.

En la figura 1.7 se observa el espectro de potencias de δh para distintos Re , revelándose una diferencia de cuatro órdenes de magnitud para la frecuencia dominante. El hecho más revelador respecto de la naturaleza de esta inestabilidad, es que desde el estado base se puede observar una variación continua en la frecuencia del modo fundamental de ondas de gravedad $m = 1$, frecuencia que, al momento de desarrollarse la inestabilidad, coincide con la frecuencia de la onda de gravedad, justificando el nombre de esta última. En efecto, la frecuencia del modo dominante $m = 1$ puede descomponerse en la forma $f_\omega = f_0 + \delta f(Re)$ donde δf es una corrección dependiente de Re que se anula cuando $Re \rightarrow 0$ y f_0 es la frecuencia correspon-

b/L	$Re_c^- \times 10^{-5}$	$Re_c^+ \times 10^{-5}$
1,8	$7,11 \pm 0,07$	$9,1 \pm 0,3$
2,2	$6,85 \pm 0,07$	$8,8 \pm 0,3$
2,6	$6,47 \pm 0,07$	$8,65 \pm 0,1$

Cuadro 1.1: Valores críticos de Reynolds según [1].

diente al fluido quieto, tal como se obtiene en (1.25). Esto se obtiene a partir de los espectros de las distintas medidas, con lo que se puede seguir la dependencia en Re de las frecuencias dominantes y asignarlas a los modos correspondientes.

La histéresis se manifiesta en que, si la onda de gravedad está establecida (con $Re \geq Re_c^+$) y se disminuye lenta y sucesivamente la velocidad manteniéndola constante durante 5 minutos, entonces esta no desaparece sino hasta que la frecuencia de rotación alcanza otro umbral $F_c^- < F_c^+$, el que para $b/L = 2,6$ corresponde a $Re_c^- = 6,47 \times 10^5$. Esto se aprecia claramente en la figura 1.8 (a), donde la curva ascendente (en que cada ejecución comienza del reposo) bifurca para un Re apreciablemente más alto que aquel en que vuelve al estado base la curva descendente. Los valores de Re_c^+ y Re_c^- encontrados para distintas alturas se muestran en el cuadro 1.1.

1.5.3. Cerca de Re_c .

En la región de biestabilidad, el efecto de las fluctuaciones turbulentas del flujo se hace importante en determinar si el sistema pasa o no de un estado a otro. Es por ello que en esa zona se realiza una mayor cantidad de mediciones con el fin de determinar la probabilidad de transición. Se observa buena reproducibilidad en el valor de Re para el cual ocurre el tránsito al estado base en las rampas con velocidad descendente, permitiendo ello una buena determinación de Re_c^- . No ocurre lo mismo para Re_c^+ , dado que al mantener una velocidad constante durante 24 minutos luego de partir del reposo, hubo valores de Re para los que el sistema en

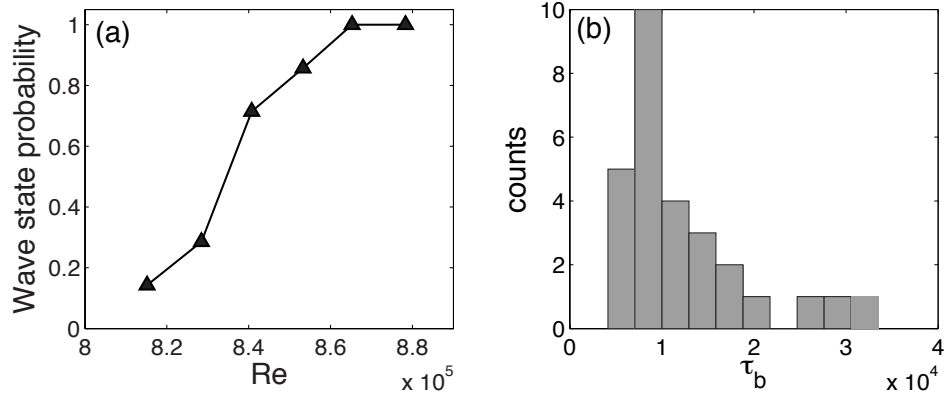


Figura 1.9: Estadística de aparición de la onda.

(a) Probabilidad de aparición de la onda obtenida tras 7 rampas independientes en un rango de Reynolds entre 815000 y 880000. (b) Histograma del tiempo normalizado de aparición de la onda, donde $\tau_b = t_b F$ y t_b es el tiempo que demora en saturar la onda.

ocasiones sí bifurcó y en otras no. Esto motiva un estudio estadístico en esa zona con el fin de determinar la probabilidad de transición. Este estudio estadístico se realizó parcialmente, llevándose a cabo 7 realizaciones en un rango reducido de Re . De esta manera se definió Re_c^+ como el mínimo valor de Re a partir del cual el sistema transitó siempre al estado de onda de gravedad. Los resultados de estas rampas se muestran en la figura 1.9, así como un histograma del tiempo que tomó la transición. Este último parece mostrar un tiempo determinado para el que la onda tiene mayor probabilidad de aparecer.

1.6. Objetivos

Fijado el contexto es apropiado establecer los objetivos de este trabajo. Dentro del estudio amplio que busca en principio entender la inestabilidad recién presentada y establecer el efecto de todos los distintos factores, se pueden destacar dos objetivos generales. El primero de ellos es determinar el mecanismo de la inestabilidad. El segundo objetivo general a destacar consiste en entender el rol de la turbulencia en

esta inestabilidad. Esto en el sentido de determinar si la turbulencia juega un papel importante en el mecanismo de inestabilidad, si es determinante para la saturación del estado de onda de gravedad, o si simplemente juega un rol pasivo en las características de la transición. Para abordar estos objetivos se construyó un montaje capaz de reproducir el experimento. Además, se realiza un análisis de estabilidad lineal con el fin de entender algunos aspectos del problema desde una perspectiva teórica.

Es claro que estos objetivos generales mencionados son ambiciosos, pero resulta apropiado plantearlos explícitamente. Esta tesis consiste entonces en una primera exploración, un primer intento por dilucidar estas preguntas abiertas. Finalmente se pueden mencionar además algunos objetivos específicos y su relación con este trabajo:

1. Encontrar el parámetro relevante que determina la inestabilidad. En [1] se describe el problema en términos de Re , aunque se menciona a Fr como un parámetro relevante. Las longitudes del montaje usado en este trabajo serán menores que las de [1] pero permitiendo acceder a los mismos rangos de Re y Fr , aunque por otra curva del espacio (Re, Fr) . Esto debe permitir determinar cuál es el parámetro que se repite en ambos experimentos e identificarlo como el más determinante para la inestabilidad.
2. Investigar la dependencia de las frecuencias propias de la superficie con la velocidad del flujo. Esto es interesante ya que puede dar algunos indicios acerca de interacciones entre diferentes modos que están presentes en el flujo. Estas interacciones pueden ser determinantes en el mecanismo de la inestabilidad.
3. Obtener diagramas de bifurcación. Estos pueden impulsar la obtención de una ecuación de amplitud que describa fenomenológicamente la inestabilidad. Tra-

bajos recientes de Agez, Clerc ([15, 16]) y otros estudian la forma de distintos tipos de inestabilidades con ruido, las que pueden ser ajustadas a los resultados de esta investigación para determinar la aplicabilidad de las ecuaciones de amplitud involucradas.

4. Determinar el efecto del ruido en la transición. Para ello se planea hacer una cantidad considerable de realizaciones experimentales con el fin de refinar la estadística obtenida en [1] referente a la probabilidad de ocurrencia del estado de onda de gravedad en la vecindad de la transición.
5. Establecer la dependencia en la profundidad de la transición. El montaje aquí involucrado tiene una mayor razón de aspecto por lo que permite investigar profundidades mayores que [1].

Capítulo 2

Descripción del montaje y procedimientos experimentales

2.1. Montaje

El montaje, de tipo Taylor-Couette (figura 2.1), posee como cilindro exterior (C) un tubo circular de acrílico de radio interno $14,58 \pm 0,02$ cm, adherido a una base (D) también circular del mismo material. Sobre el centro de la base se sitúa, concéntrico al tubo, un eje (B) de acero inoxidable de radio $1,85 \pm 0,01$ cm, el que puede rotar en torno a su eje de simetría. Estos elementos, sumados a un disco de aluminio que en el extremo superior actúa como tapa (A), definen el espacio de interés en el que ocurre el fenómeno a estudiar. Este espacio es llenado parcialmente con agua destilada, y la dinámica de esta es la que se procede a estudiar.

El eje se apoya en dos rodamientos que lo fijan y le permiten rotar, uno se encuentra en el extremo inferior protegido del agua por un retén (H,I), mientras que el otro se localiza en la parte superior (F) del eje y ambos se acoplan a sendas piezas de acero inoxidable (E,G). La pieza que aloja el rodamiento inferior y el

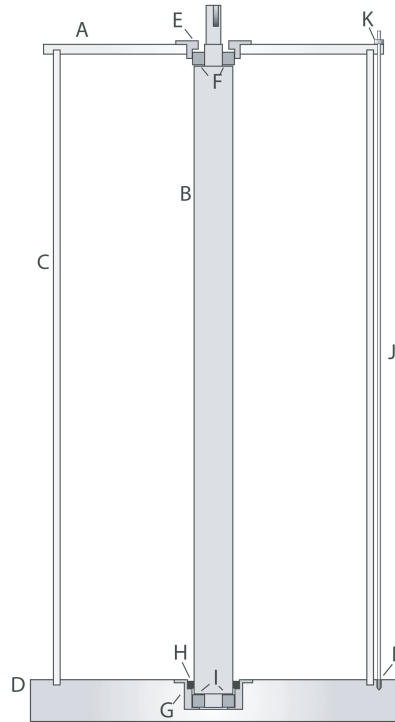


Figura 2.1: Montaje tipo Taylor-Couette.

A.-Tapa, B.-Eje, C.-Cilindro exterior, D.-Base, E.-Pieza para rodamiento superior, F.-Rodamiento superior, G.-Pieza para rodamiento inferior, H.-Retén, I.-Rodamiento inferior, J.-Varilla de refuerzo, K.-Tuerca, L.-Varilla atornillada.

retén es fijada con tornillos a una cavidad en la base y la que aloja el rodamiento superior es fijada de igual forma a la tapa. Para esta fijación, la tapa posee un agujero en el centro, por el que además atraviesa una prolongación del eje que se acopla a un motor que controla la rotación de este. El disco de aluminio (tapa) posee una ranura circular donde es fijado al canto del tubo acrílico mediante tornillos y además es apretado con tuercas (K) hacia la base por intermedio de 4 varillas (J, la diametralmente opuesta no se representa por simplicidad) que se atornillan a ella (L) y que refuerzan la fijación del tubo de acrílico entre sus extremos superior e inferior. La tapa posee además otros dos agujeros excéntricos, uno para cables de medición y el otro para introducir y extraer el agua. La altura medida entre la base y la tapa es



Figura 2.2: Foto del montaje

de $59,9 \pm 0,1$ cm. Toda esta unidad recién descrita es colocada en una estructura de fierro, donde también se ubica el motor (Servomotor Kollmorgen B-206-CA-34-T) y el instrumento (Servo Drive Kollmorgen S31061-NM) que lo controla enviándole la corriente necesaria para ir a la velocidad deseada, instrumento que llamaremos servo-alimentador. El motor se ubica en una placa que se une al resto de la estructura por medio de dos tétradas de tornillos en ranuras, cada una de las cuales se puede deslizar, con un sistema de roscas, en distinto sentido respecto a la estructura. Esto permite centrar con precisión la posición del motor respecto de la del eje.

El servo-alimentador posee un puerto serial RS232, a través del cual es posible comunicarse con él (código ASCII a 38400 bps) por medio de un computador. Esto, agregado a las interfaces de los instrumentos de medición que se detallarán a continuación, permite sincronizar y automatizar todo el sistema de control y adquisición de datos, lo que se realiza con un computador de escritorio usando el programa Labview.

Cabe mencionar que la estructura de fierro debe ser lo más rígida posible, esto para mantener fijo el montaje y evitar que a las frecuencias de trabajo ($0 \dots \sim 50$ Hz) aparezcan resonancias o vibraciones considerables que afecten el experimento en forma no controlada. Por esta razón, la estructura posee una masa considerable (~ 50 kg) y debió ser reforzada con diagonales para darle más rigidez estructural y lograr que las frecuencias de resonancia se eleven por sobre el rango en que se excita el sistema. La estructura se apoya en el suelo por medio de 3 patas engomadas, todas regulables en altura, que permiten alinear el espacio experimental con la gravedad y evitar el deslizamiento del conjunto sobre el piso.

Respecto de los otros aspectos físicos que afectan la dinámica y las medidas en el experimento aparte de la ya mencionada respuesta mecánica del montaje, hay tres factores a destacar: el ruido electromagnético, la temperatura y la contaminación del agua. El ruido electromagnético afecta principalmente la adquisición de datos, se produce mayormente debido a las corrientes que alimentan al motor y se disminuyen sus efectos usando cables con blindaje. La contaminación del agua se produce por varios efectos indeseados como el desgaste del retén, filtraciones de aceite de rodamiento, polvo, etc., y aunque puede en principio afectar la viscosidad del agua y sus propiedades superficiales, se observa al cambiar el agua que el efecto más apreciable es en la conductividad del líquido (afectando las medidas más que la dinámica), cuya importancia se detallará en adelante al describir la medición de profundidad. Por

otro lado, la temperatura del agua se ve afectada tanto por la temperatura ambiente como por la energía inyectada al fluido durante la realización de los experimentos. La energía inyectada es principalmente cinética, la cual es disipada por viscosidad en el interior del fluido incrementando la energía interna y por ende la temperatura. El efecto más relevante que se puede esperar de esta variación es en la viscosidad, dado que esta tiene una dependencia importante con la temperatura. Por ello, la temperatura es constantemente monitoreada durante los experimentos.

2.2. Medidas

Durante los experimentos se miden los siguientes parámetros: profundidad, presión, temperatura, velocidad de rotación del motor y la corriente que lo hace girar. A continuación se explica el detalle de cada medida.

2.2.1. Medición local de superficie

El aspecto más importante en la caracterización del fenómeno es la evolución de la superficie del agua. El estado de la superficie determina en cada instante la columna de agua sobre cada punto del fondo del recipiente, es decir, la profundidad. En este experimento se obtiene información de la profundidad en una posición fija cerca de la pared exterior, lo que se logra por medio de dos varas paralelas de acero inoxidable de $0,51 \pm 0,01$ mm de radio, dispuestas entre sí a una distancia de $3,1 \pm 0,1$ mm y semisumergidas. Estas varillas se disponen verticalmente desde el fondo hasta la parte superior del montaje, de manera que su longitud sumergida corresponde a la profundidad del agua en el lugar en que se encuentran.

La medida de profundidad se obtiene indirectamente de la medida de voltaje entre estas barras, voltaje asociado a la conductancia que, despreciando la conduc-

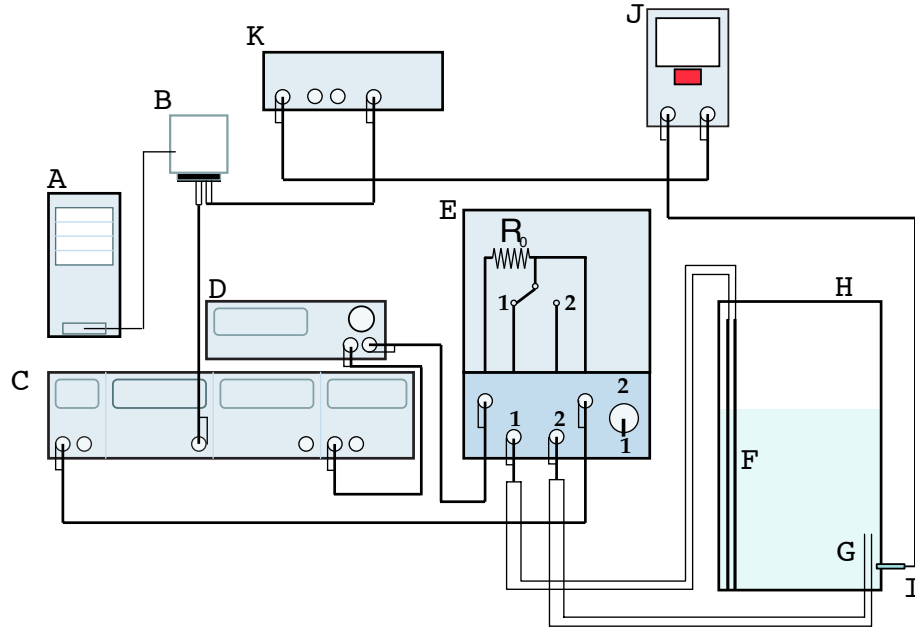


Figura 2.3: Diagrama de medición de altura y presión.

A.-Computador, B.-Convertidor análogo digital, C.-Lock-In Amplifier, D.-Generador de funciones, E.-Selector, F.-Barras para medir altura, G.-Barras para referencia de conductividad, H.-Recipiente tipo Taylor-Couette, I.-Sensor de presión, J.-Acondicionador de señales, K.-Preamplificador.

tividad del aire, viene dada exclusivamente por el agua en que ambas varas están sumergidas. Para obtener esta medida de voltaje, las varas se conectan (ver figura 2.3) por medio de una resistencia de $R_0 = 1,02 \pm 0,01 \text{ M}\Omega$ a un generador de funciones (Agilent 33220A) que alimenta el circuito con una señal sinusoidal de $V_0 = 16, 12$ ó 8 Vpp a 1 kHz . El voltaje entre las barras es medido con un Lock-in Amplifier (Stanford Research Systems, SR830 DSP), el que mide en la señal de voltaje la componente con la misma frecuencia y desfase fijo respecto de la señal con que es alimentado el circuito, para deshacerse de esa forma de otras señales espurias que pudieren contaminar la medida. El Lock-in entrega la medida de voltaje por medio de una señal análoga que es transmitida por un dispositivo análogo-digital (National Instruments, USB-6008) al computador, donde la tasa de adquisición de datos es de 100 Hz . Para los distintos valores de V_0 utilizados, el comportamiento

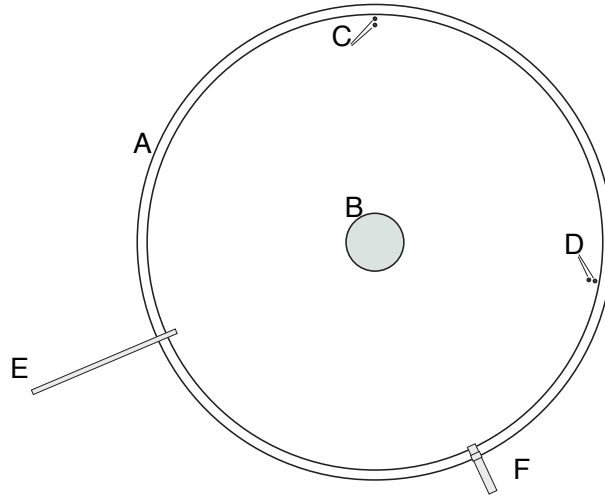


Figura 2.4: Vista superior de la celda y los sensores.

A.-Cilindro Externo, B.-Eje interno, C.-Barras para medir altura, D.-Barras para referencia de conductividad, E.-Sensor de temperatura, F.-Sensor de presión. La distribución angular de estos elementos corresponde a la real $\pm 5^\circ$.

del circuito es similar y la única razón para cambiar este valor es el rango en que se obtiene la medida, ya que dependiendo del rango de esta será la sensibilidad de la señal análoga del Lock-in a los cambios de la medida, influyendo en la resolución de la medida finalmente adquirida en el computador.

Como esta medida no depende solamente de la altura del agua sino que también depende fuertemente de su composición y temperatura, se dispone para referencia otro par de barras, igual al anterior salvo porque estas últimas son más cortas (poseen un largo $l = 10 \pm 0,1\text{cm}$) y permanecen sumergidas. Con ellas se puede realizar un seguimiento de la variación de la conductividad del agua, para así poder normalizar y calibrar la medida de altura. Estas barras se conectan por medio de un selector al mismo circuito que las varas de medición de altura, y con este selector se determina manualmente la medida de qué par de varillas se tomará.

Para analizar el circuito podemos considerarlo simplificado como en la figura 2.5. En él se aplica un voltaje V_0 y se obtiene la medida V_m de caída de tensión

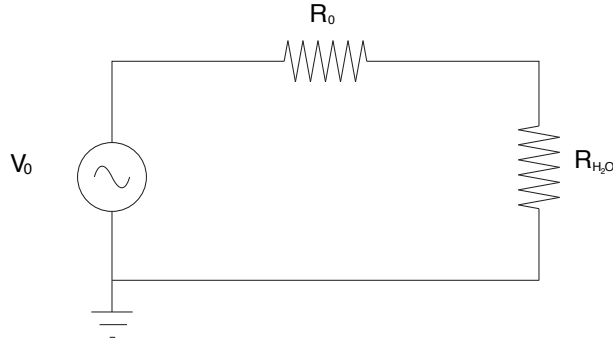


Figura 2.5: Diagrama del circuito para medir altura.

El circuito se alimenta con un voltaje V_0 proveniente del generador de funciones. La caída de tensión en R_{H_2O} dependerá de cómo esta se compara con $R_0 \cong 1 \text{ M}\Omega$.

en la resistencia del agua R_{H_2O} , medida a utilizar para obtener la conductancia $G_{H_2O} = 1/R_{H_2O}$. Por la ley de Ohm sabemos que

$$V_0 = I(R_0 + R_{H_2O}), \quad (2.1)$$

donde I es la corriente. Esto también es válido para R_{H_2O} y V_m

$$V_m = IR_{H_2O}. \quad (2.2)$$

Reemplazando I de (2.1) en (2.2) y despejando la conductancia normalizada definida como $R_0/R_{H_2O} = G_n$ se obtiene

$$G_n = \frac{1}{V_n} - 1 \quad (2.3)$$

donde $V_n = V_m/V_0$ y se espera que, salvo efectos de borde, G_n sea proporcional a la altura. Se obtiene además de los valores obtenidos experimentalmente que $V_n^{-1} \gtrsim 10^2$, por lo que el error al considerar simplemente $G_n = 1/V_n$ es menor al 1%.

En el gráfico 2.6 se observa que efectivamente hay una relación lineal entre $1/V_m$ y el nivel del agua, pero que esta relación es muy susceptible a variaciones de temperatura y de composición del agua (de la que no se tiene información), como se observa al comparar la pendiente de ambas curvas en A. Como es de esperar, se observa también que al normalizar con las varillas sumergidas se neutraliza esta variación

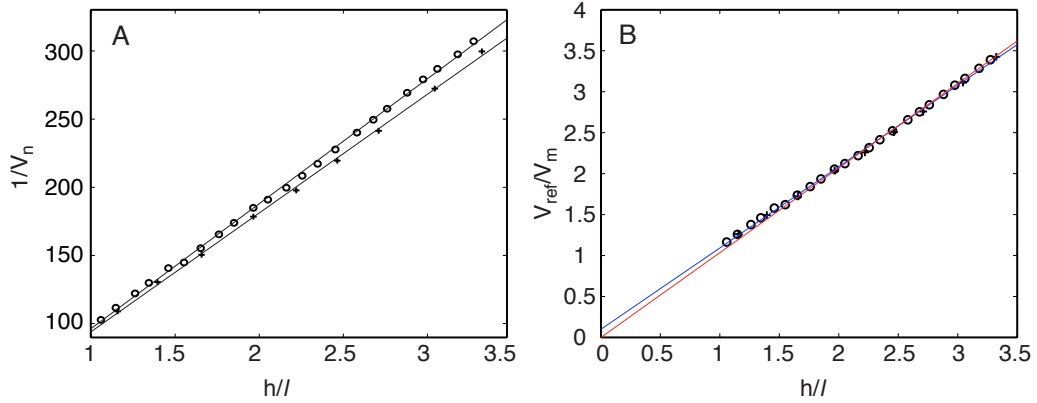


Figura 2.6: Relación entre la medida de voltaje y la profundidad del agua.

La profundidad está dada en unidades de $l = 10 \pm 0,1 \text{cm}$ que corresponde a la longitud de las barras de referencia. A-. Valor de $1/V_n = V_0/V_m$ para distintos niveles de agua obtenidos en dos ocasiones diferentes. Las líneas sólidas muestran un ajuste lineal en cada caso. B-. Mismas medidas pero normalizadas con el valor de voltaje obtenido con las barras de referencia, V_{ref}/V_m . Se observa un buen colapso entre ambos casos y se muestran fits de la forma $y = ax + b$ (curva azul) y $y = ax$ (curva roja).

y en B se aprecia una buena coincidencia entre ambas curvas. Un ajuste del tipo $y = ax + b$ para esta curva arroja valores de $a = 0,993 \pm 0,012$ y $b = 0,09912 \pm 0,0272$ con un indicador $R^2 = 0,9989$. El hecho de que el ajuste no pase por cero puede explicarse tanto por el término despreciado en (2.3) como por el efecto de las partes inductiva y capacitiva del circuito, aunque con el ajuste de la forma $y = ax$ ($a = 1,034 \pm 0,006$, $R^2 = 0,9971$) se aprecia buena concordancia especialmente para mayor profundidad, cuando V_n crece (mejorando la aproximación $-1 + 1/V_n \approx 1/V_n$) y disminuyen comparativamente los efectos inductivos y capacitivos.

La importancia de normalizar la medida de voltaje radica en neutralizar los efectos de las variaciones lentas (variaciones del orden de un 1% en una escala de tiempo $T \sim 10^3 \text{s}$, ver figura 2.7) en la conductividad del agua, efectos indeseados cuando el objetivo es medir las fluctuaciones de la superficie que ocurren en escalas de tiempo mucho más pequeñas (variaciones del orden del 10% en escala $t \sim 1 \text{s}$). Aunque no es factible obtener la medición de altura y datos de las barras de referencia simultánea-

mente (para lo cual se requeriría otro Lock-in), de igual manera se puede normalizar la medida de altura para obtener una medida consistente. Para ello, se puede considerar explícitamente que la señal de voltaje es de la forma $V_m = k(T)V_{H_2O}(t)$, donde $k(T)$ será una función lenta que da cuenta de la variación en las propiedades conductivas del agua (y cualquier cambio lento en las propiedades del circuito, principalmente por cambios de temperatura) mientras que $V_{H_2O}(t)$ es la componente debida sólo a la profundidad. Debido a que la altura de agua no depende de los aspectos eléctricos que afectan la medida V_m , la relación entre la medida de voltaje y la profundidad h debe ser de la forma $h(t) = qk(T)/V_m(t) = q/V_{H_2O}(t)$, donde q es una constante dimensional. Considerando las variaciones de altura normalizadas definidas como $\delta h(t)/\langle h \rangle = (h(t) - \langle h \rangle)/\langle h \rangle$, se tiene que

$$\frac{\delta h}{\langle h \rangle} = \frac{\frac{qk(T)}{V_m} - \langle \frac{qk(T)}{V_m} \rangle}{\langle \frac{qk(T)}{V_m} \rangle} = \frac{\frac{1}{V_{H_2O}} - \langle \frac{1}{V_{H_2O}} \rangle}{\langle \frac{1}{V_{H_2O}} \rangle}. \quad (2.4)$$

Por otro lado, si se promedia $1/V_m$ sólo en t , se obtendrá un promedio que conserva las variaciones lentas a escala T que denotaremos por $\langle \rangle_T$. De esta manera, se tendrá que $\langle 1/V_m \rangle_T = \langle 1/k(T)V_{H_2O} \rangle_T = \langle 1/V_{H_2O} \rangle_T/k(T)$. Así se tiene que

$$\frac{\frac{1}{V_m} - \langle \frac{1}{V_m} \rangle_T}{\langle \frac{1}{V_m} \rangle_T} = \frac{\frac{1}{k(T)V_{H_2O}} - \frac{1}{k(T)}\langle \frac{1}{V_{H_2O}} \rangle}{\frac{1}{k(T)}\langle \frac{1}{V_{H_2O}} \rangle} = \frac{\delta h}{\langle h \rangle_T}, \quad (2.5)$$

con lo que se obtiene una medida normalizada de δh sólo a partir de V_m . En la línea blanca presente en la figura 2.7 A se puede observar el promedio de $1/V_m$ conservando la tendencia ascendente que se aprecia a tiempos largos. Este promedio dependiente en el tiempo se obtiene separando la señal temporal de $1/V_m$ en varios intervalos (25 en el caso mostrado), promediando por separado en cada uno de ellos e interpolando los promedios de cada intervalo. Restando y dividiendo por el promedio obtenido se obtiene la señal mostrada en la figura B.

Es importante notar también que este promedio sobre las fluctuaciones rápidas no conserva solamente los efectos de $k(T)$, sino que también conserva las variaciones

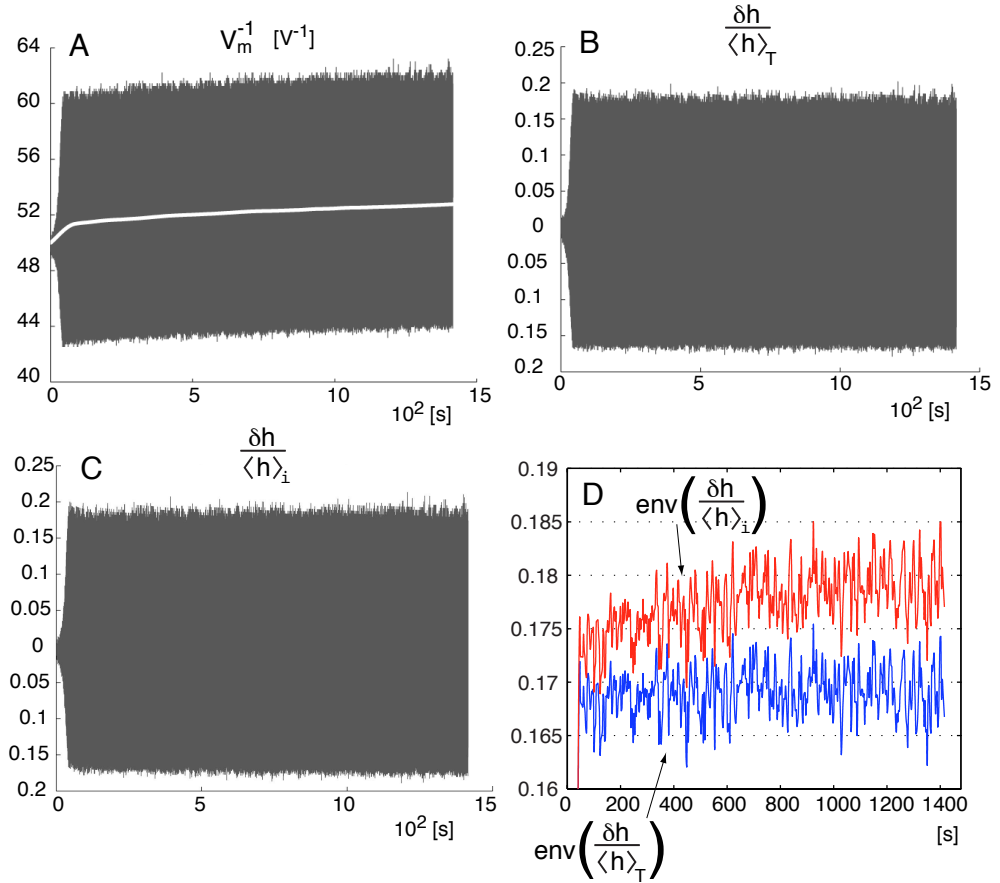


Figura 2.7: Normalización de la medida de altura.

A.- Señal de altura $1/V_m$ durante una ejecución del experimento de 20 minutos. Se aprecia una variación lenta superpuesta a las fluctuaciones rápidas inmersas en la franja gris. La línea blanca representa la variación lenta de $1/V_m$. B.- Misma señal que en A pero centrada y normalizada con $\langle 1/V_m \rangle_T$. C.- Señal normalizada como se hizo en [1]. D.- Diferencia de envolventes entre el método aquí descrito $\delta h / \langle h \rangle_T$ y el usado en [1], $\delta h / \langle h \rangle_i$. Notar la tendencia ascendente de la envolvente $env(\delta h / \langle h \rangle_i)$.

lentas en la profundidad h . Esto se puede apreciar al comienzo de la curva blanca en la figura 2.7 A, donde se aprecia un incremento en la pendiente de $\langle 1/V_m \rangle_T$ a medida que crece la amplitud de las fluctuaciones en el flujo. Esto implica que la profundidad promedio en el punto de medición crece a medida que crece la onda de gravedad, por lo que en la transición entre ambos estados hay un flujo neto desde el

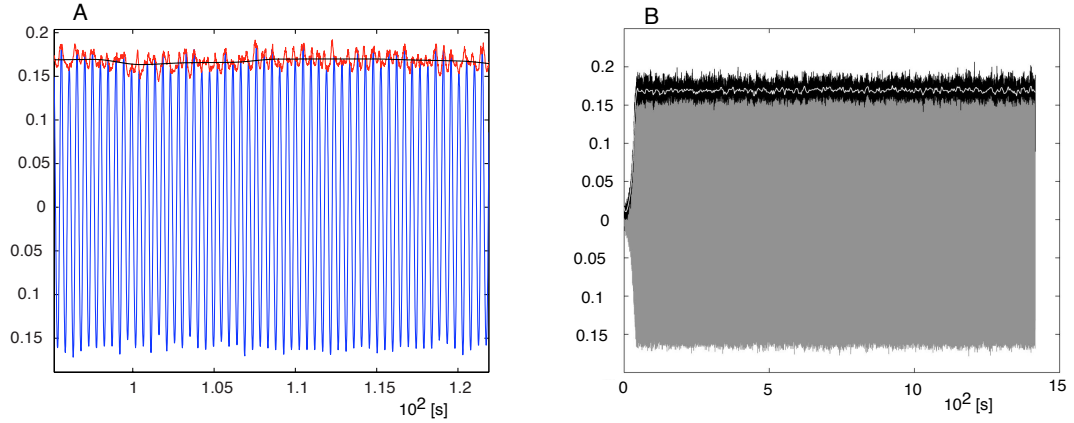


Figura 2.8: Comparación de envolventes.

Se muestra para corto (A) y largo (B) tiempo la evolución de $\delta h/\langle h \rangle_T$ (A azul, B gris), de la envolvente (A rojo, B negro) y de la envolvente filtrada (A negro, B blanco).

centro hacia los bordes.

Esta forma de normalizar la medida de voltaje difiere de la utilizada previamente en [1], donde el promedio $\langle 1/V_m \rangle_i$ usado para dividir era adquirido al inicio del experimento, antes de la aparición de la onda. El resultado obtenido normalizando de esa manera se muestra en el gráfico 2.7 C, gráfico en el que se hace presente un leve crecimiento en la amplitud de la onda debido a la variación lenta contenida en $k(T)$. En el gráfico 2.7 D se puede apreciar esa diferencia al comparar la envolvente de la señal de altura en ambos casos. La envolvente corresponde al valor absoluto de la transformada de Hilbert de la señal. Es necesario señalar que, debido a que la onda no es sinusoidal, la transformada de Hilbert posee variaciones a alta frecuencia que no corresponden a fluctuaciones en la amplitud de la onda. Por ello, para eliminar dichas fluctuaciones y poder comparar apropiadamente ambos casos, se grafica la envolvente filtrada, que corresponde a una interpolación de la misma obtenida a partir del promedio en 500 intervalos, análogamente a como se obtiene el promedio $\langle \rangle_T$. En la figura 2.8, se aprecia en referencia a la señal, la diferencia entre la

envolvente filtrada de esta forma y la original.

2.2.2. Presión

Para medir la presión se utiliza un sensor de presión PCB 113M226 (ver figuras 2.4 F y 2.3 I) con un acondicionador de señales (PCB, ICP Sensor Signal Conditioner, Model 480C02, figura 2.3 J). La señal, de bajo voltaje (14,7 mV/kPa), es amplificada por un preamplificador (Stanford Research Systems SR560) y luego recogida y transmitida al computador por el mismo dispositivo análogo-digital usado para la señal de altura (NI, USB-6008). Este sensor se coloca en la pared del experimento a través de un agujero en el tubo, a una altura de 6,4 cm sobre la base. De esta forma se miden variaciones en un rango de frecuencias entre 0,3 y 50 Hz, donde el valor mínimo de frecuencia está dado por un filtro del amplificador y el máximo por la tasa de adquisición (100 Hz).

Esta medida de presión permite caracterizar la naturaleza turbulenta del flujo, así como indagar en el cambio que involucra en el volumen del fluido la aparición del estado de onda de gravedad, el que se manifiesta con claridad en la superficie pero no se limita a esta sino que involucra también el flujo en el volumen.

2.2.3. Temperatura

Tal como se explica en la sección anterior, es importante monitorear la temperatura debido principalmente a su influencia en la viscosidad. La medida se obtiene por medio de un dispositivo que se introduce a través del tubo a una altura de 3,8 cm. Este dispositivo es un sensor de temperatura 4W-RTD (detector de temperatura resistivo de 4 puntos) serie PT100 (sonda de platino 100 Ω), el que es conectado a un multímetro (Keithley, 2010 Multimeter) por medio de un adaptador (Keithley, 8680 RTD Probe Adapter). El instrumento se comunica con el computador a través

de un puerto GPIB y le entrega un dato de temperatura por segundo, velocidad adecuada para monitorear las variaciones de temperatura del agua debido al uso continuado del montaje.

Las mayores variaciones en la temperatura del agua causadas por la temperatura ambiente consisten en una diferencia de alrededor de 5°C entre invierno y verano. Las variaciones debidas a la energía inyectada al fluido durante los experimentos pueden llegar a alrededor de $\sim 1^{\circ}\text{C}$ y tener una tasa de cambio del orden de $\sim 0,01^{\circ}\text{C}/\text{min}$. El efecto que estos cambios de temperatura tienen en la viscosidad ν se reflejan en el número de Reynolds. Para determinar esta dependencia se deriva el número de Reynolds con respecto a la temperatura T

$$\frac{\partial Re}{\partial T} = -\frac{U^2 l}{\nu^2} \frac{\partial \nu}{\partial T} = -\frac{Re \nu'}{\nu} \quad (2.6)$$

e integrando y agrupando se obtiene que

$$Re(T_1) = Re(T_0) e^{-\int_{T_0}^{T_1} \frac{\nu'}{\nu} dT}. \quad (2.7)$$

De datos de ν en función de T obtenidos en [17] se obtiene que en el rango de temperatura relevante (entre 15 y 28°C), ν'/ν tiene un valor entre $-0,021$ y $-0,027^{\circ}\text{C}^{-1}$, por lo que se puede establecer que

$$\frac{Re(T_1)}{Re(T_0)} \approx e^{0,024(T_1 - T_0)}. \quad (2.8)$$

Esta variación de temperatura puede provocar cambios en el número de Reynolds de hasta alrededor de un 20% como se aprecia en la figura 2.9, por lo que al calcular este número, los datos de temperatura obtenidos son utilizados para seleccionar el valor de la viscosidad correspondiente en cada caso.

2.2.4. Velocidad y corriente del motor

La condición de “Servo” que caracteriza al motor implica que en el sistema que lo controla hay un circuito de retroalimentación que permite que el alimentador

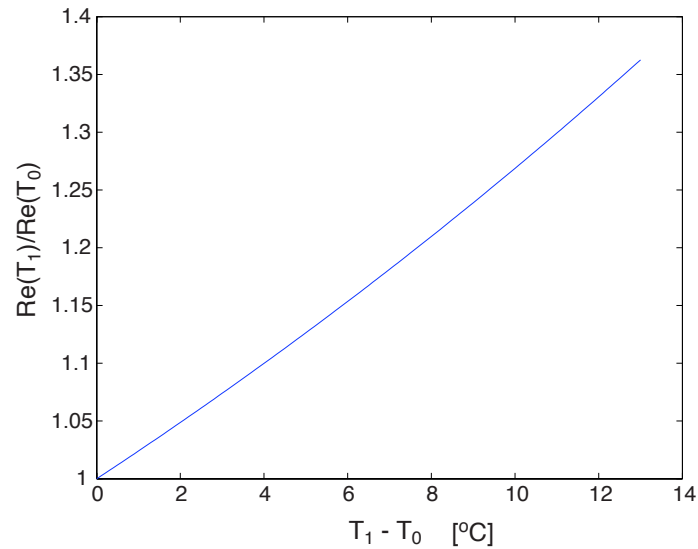


Figura 2.9: Dependencia de Re con la temperatura

Válido para T_1 y T_0 entre 15 y 28°C. Para un $\Delta T = 1^\circ\text{C}$ ocurre un cambio $Re(T_1)/Re(T_0) \approx 1,02$, y para $\Delta T = 5^\circ\text{C}$, $Re(T_1)/Re(T_0) \approx 1,13$. La dependencia en la temperatura de la viscosidad es considerada al calcular el número de Reynolds.

monitoree constantemente la velocidad del motor y corrija la corriente enviada a este para mantenerlo girando a la velocidad deseada. Por otro lado, a través del computador es posible controlar y monitorear los parámetros del servo-alimentador, por lo que durante los experimentos se obtiene, a una tasa de 20 Hz, los valores de la velocidad y de la componente de la corriente proporcional al torque. La velocidad es el parámetro de control que se utiliza y el torque se relaciona con la energía que se entrega al flujo, aunque este es afectado por el desgaste del sistema mecánico y el comportamiento del circuito de retroalimentación.

2.3. Procedimientos experimentales

Para estudiar la aparición y desaparición del estado de onda de gravedad en el sistema, se utilizan dos estrategias similares a las utilizadas en [1], una de velocidad

constante y otra de disminución de velocidad, las que se llamarán respectivamente Rampa *cero* (R0) y Rampa *menos* (R-).

El método de velocidad constante (R0) posee la particularidad de permitir estudiar la probabilidad de aparición de la onda de gravedad a una velocidad dada. Consiste en rampas en que se hace un barrido de velocidades, donde para cada velocidad se hace rotar el motor a velocidad constante por un tiempo dado (tiempo que incluye lo que demora el motor en acelerar a 100 rpm/s desde el estado previo) partiendo con el fluido en reposo (motor quieto por al menos 15 minutos antes de comenzar, tiempo que probará ser suficiente para el decaimiento de vórtices remanentes en el flujo). De esta forma, se espera que cada una de estas ejecuciones de velocidad constante dentro de una rampa, sea independiente de las ejecuciones previas para que los resultados sean reproducibles. El tiempo que se mantiene la velocidad constante es por lo general de 24 minutos (igual al usado en [1]), tiempo que lejos de la bifurcación es suficiente para determinar la aparición de la onda. Por el contrario, cerca de la bifurcación hay incertidumbre sobre la aparición de la onda en un tiempo determinado, por lo que para estudiar los eventos que pueden ocurrir en esa región de coexistencia de estados, se efectúan realizaciones con ocho horas de velocidad constante en los que se espera observar los distintos fenómenos posibles en este sistema, en particular la probabilidad de transición en ambos sentidos para una velocidad fija.

El otro método (R-), de velocidad en disminución, tiene por objetivo investigar el tránsito desde el estado oscilatorio hacia el estado base. Para ello se comienza a girar el motor a una velocidad lo suficientemente alta para que con certeza aparezca la onda, y luego se va disminuyendo la velocidad de rotación en pequeños pasos sin detención intermedia, manteniendo la velocidad constante en cada velocidad durante un tiempo determinado, que puede ser de 5, 10 ó 24 minutos. 5 minutos es un tiempo

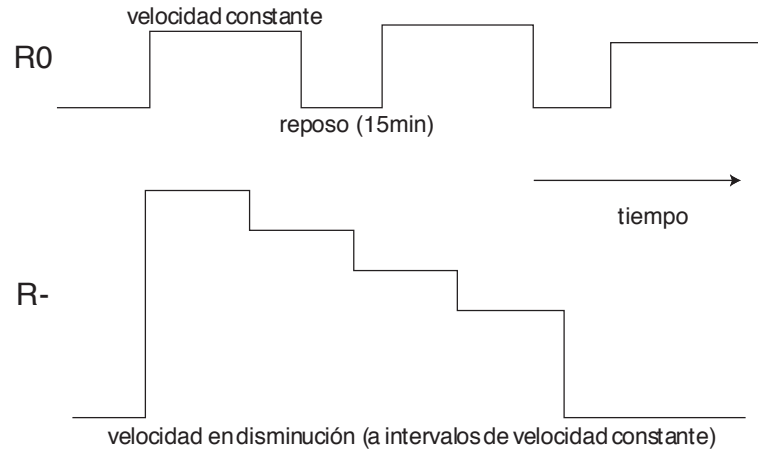


Figura 2.10: Tipos de rampa.

En la parte superior se muestra el tipo de perfil de velocidad del motor que se utiliza para el método R0. Abajo se muestra el perfil que concierne a R-.

suficiente para el tránsito del estado de onda de gravedad al estado base, el que puede tomar entre 2 y 3 minutos. Diferencias entre los distintos tiempos de espera pueden dar información respecto de si la transición es debida a la desaparición del estado de onda de gravedad o si ocurre debido a fluctuaciones que llevan al fluido al estado base.

Para mayor claridad, el procedimiento para determinar el diagrama de bifurcación a partir de estos métodos se puede resumir como sigue:

1. Determinar a grandes rasgos la apariencia del diagrama de bifurcación. Esto se obtiene haciendo un amplio barrido de velocidades con R0.
2. Determinar el punto crítico para la aparición del estado de onda de gravedad y el rango en que existe una probabilidad de que este aparezca. Para ello se realiza con R0, un barrido fino en la región cercana al punto crítico.
3. Determinar el punto crítico para la desaparición de la onda de gravedad. Para esto se realizan ejecuciones tipo R-.

Estos procedimientos no se ejecutan necesariamente en el orden aquí señalado

Por último, con el fin de medir las frecuencias de los modos propios de la superficie en el estado base, se realizan rampas de incremento continuo de velocidad, en las que cada velocidad se mantiene constante por 10 minutos (suficiente para obtener un espectro de fluctuaciones) y se incrementa sin detención intermedia (análogo a R-, puede denotarse por R+). En estas medidas se modifica el cero de la salida del Lock-in para que entregue sólo las variaciones, las que además son amplificadas para tener una mayor resolución en la toma de datos.

Capítulo 3

Resultados Experimentales

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos con el montaje descrito en el capítulo anterior. Luego de una primera etapa que llamaremos “rodaje”, se tomaron medidas exhaustivas para dos niveles de llenado diferentes, privilegiando una caracterización detallada para cada altura b más que el detalle de la dependencia en ella. Las profundidades caracterizadas corresponden a $b = 33 \pm 0,2$ cm y $42,8 \pm 0,2$ cm, lo que corresponde al valor de $b/L = 2,6$ caracterizado en [1] y a $b/L = 3,4$. A continuación se presentan los resultados.

3.1. Rodaje

En una primera etapa se procede a intentar establecer el valor de los parámetros críticos. Sin embargo, se observa que el sistema presenta un comportamiento inadecuado para este propósito, ya que a medida que se repiten las mediciones va disminuyendo la velocidad necesaria para observar el estado de onda de gravedad. Ya en [1] se reporta la dificultad existente para lograr reproducibilidad en la obtención de Re_c^+ debido a su gran sensibilidad con respecto a pequeñas perturbaciones en la geometría del sistema, lo que se traduce en cambios del orden del 10% en el

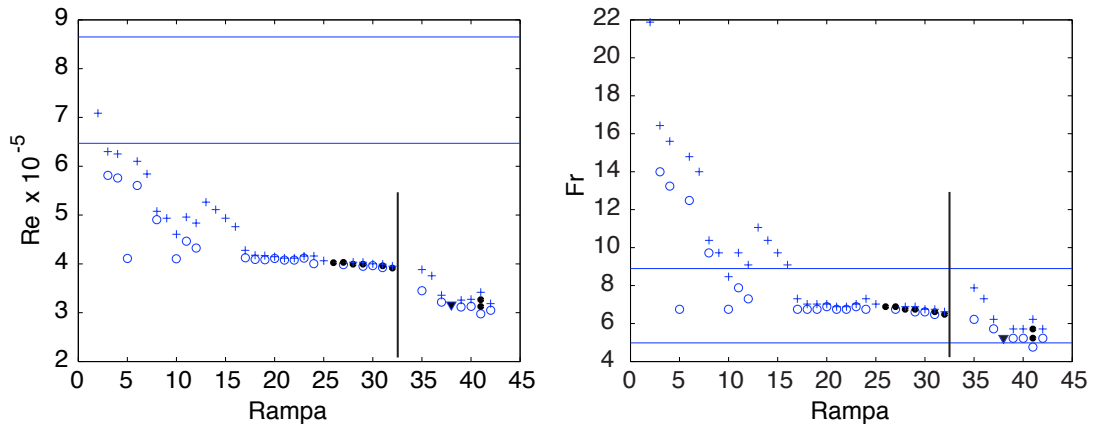


Figura 3.1: Variación inicial del rango de los puntos críticos.

A la izquierda (derecha) se muestra con “+” el mínimo valor de Re (Fr) para el que se desarrolló la onda de gravedad en una rampa tipo R0 de 24 minutos y, análogamente, con “o” se muestra el valor máximo para el que no se desarrolló la onda. El símbolo “▼” denota la desaparición del estado de onda de gravedad en una rampa R- y los símbolos “.” denotan puntos de rampas R0 en los que no es posible determinar la aparición de la onda. Las líneas horizontales indican los valores críticos encontrados en [1]. La línea vertical en cada gráfico coincide con un cambio de rodamientos, y a la izquierda de ella la profundidad correspondía a $b/L = 2,5$ y a la derecha a $b/L = 2,6$.

valor crítico Re_c^+ debidos a la inexactitud de la concentricidad del giro del cilindro interno. En este caso parece ser el ajuste mecánico de las piezas el responsable de una evolución en las vibraciones con un efecto similar. Además, en esta etapa inicial no se lograba aún la obtención adecuada de datos de fluctuaciones de superficie (se estaba en la búsqueda de los parámetros instrumentales necesarios para obtener una buena señal), por lo que, salvo en algunos casos, sólo fue posible determinar con certeza la aparición o no de la onda de gravedad. Por ello, en esta etapa, no resulta adecuada la cuantificación de estos datos.

De igual manera se obtiene información interesante durante este período. Parte de esta radica en los rangos sobre y bajo los cuales ocurrió o no la onda de gravedad a medida que se ejecutaba el experimento. Esto se muestra en la figura 3.1. Al comparar los rangos de los valores de Re y Fr con aquellos obtenidos previamente

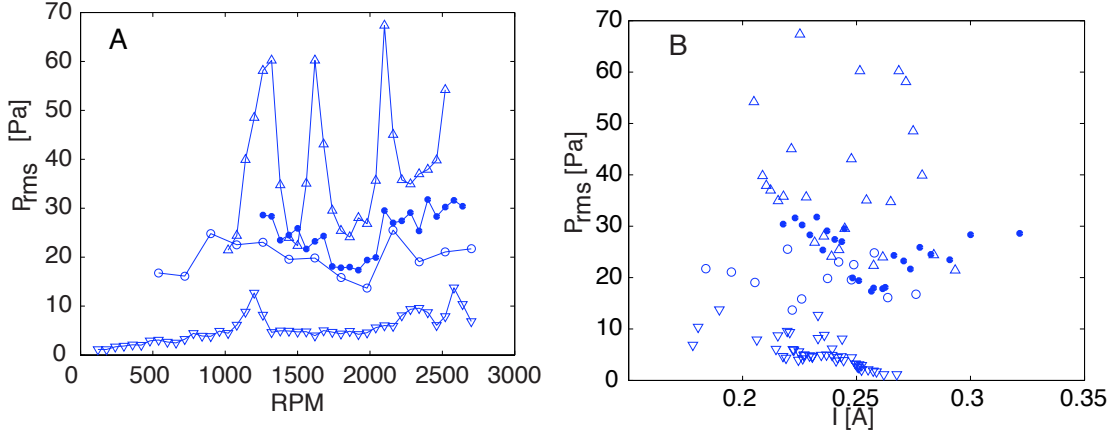


Figura 3.2: Evolución de las fluctuaciones de presión

A.- Se muestra el valor medido de P_{rms} para distintas velocidades, tomado en la rampa 2 (\circ), 23 (\bullet) y 42 (\triangle), además de una prueba sin agua (∇) para referencia del nivel de ruido EM. Los máximos que se aprecian para algunas velocidades pueden deberse a resonancias tanto de la estructura del montaje como del circuito de retroalimentación. B.- Se muestra la corriente promedio del motor y su correlación con la presión durante cada realización (mismos símbolos que en A). A medida que se suceden las rampas, no se aprecian cambios considerables en la magnitud de la corriente del motor, por lo que el aumento de P_{rms} no es atribuible a un aumento de ruido proveniente de incremento de corriente.

en [1], es posible notar que los resultados son consistentes sólo si se considera que Fr , en desmedro de Re , es el parámetro que determina la inestabilidad.

También se puede mencionar la tendencia ascendente que se aprecia en la magnitud de las variaciones de presión a medida que ocurre la evolución descrita en la figura 3.1. Esto se puede apreciar a pesar de que estas medidas se ven afectadas por el ruido electromagnético. En la figura 3.2 se ve claramente cómo el valor de $P_{rms} = \sqrt{\langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle}$ tiende a incrementar con el uso del montaje, dando cuenta de otra manifestación de desgaste. Este incremento en las fluctuaciones de presión junto con la disminución del rango para el valor de Fr crítico, es consistente con que un incremento en el nivel de vibraciones del montaje aumente la intensidad de fluctuaciones turbulentas en el flujo y favorezca la transición al estado de onda de gravedad (ver figura 1.3 y la discusión relacionada). El aumento del ruido acústico

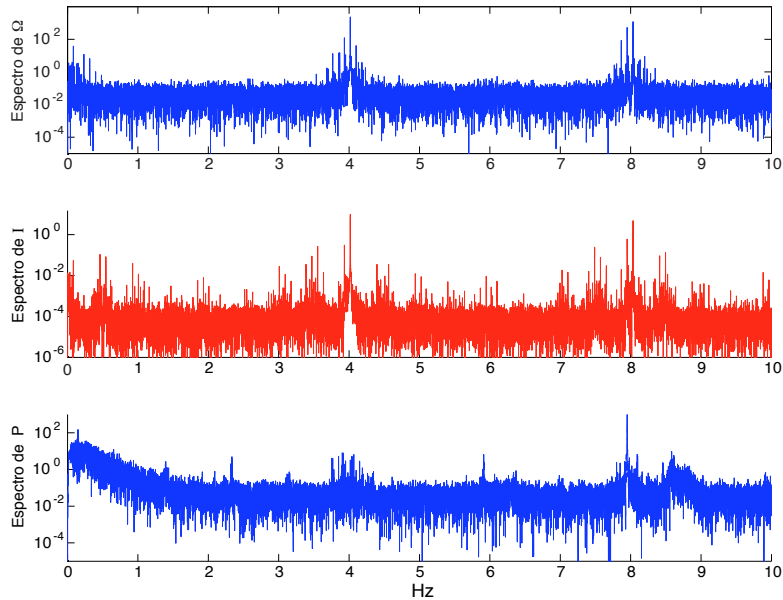


Figura 3.3: Espectros de potencias. Efecto del ruido EM en la medida de P .

En el gráfico superior se muestra el espectro para las fluctuaciones de velocidad angular Ω , al medio para las fluctuaciones de corriente (I) y abajo, en el espectro de presión, se aprecia cómo esta señal se ve afectada por las frecuencias dominantes de la corriente I . El rango de frecuencias mostrado corresponde al accesible para Ω e I ; el espectro de P se muestra en ese rango para facilitar su comparación, pese a que se omiten los armónicos presentes en la totalidad del espectro accesible (hasta 50 Hz). Estos espectros corresponden a la primera realización correspondiente a la no aparición de la onda en la figura 3.1.

que se percibe con el desgaste del montaje apunta también en la misma dirección.

Es importante recalcar que las variaciones del valor medido de P_{rms} con la velocidad, dependen no sólo de las fluctuaciones del flujo, sino también del acoplamiento electromagnético con el motor y probablemente de las vibraciones mecánicas del montaje. Una muestra de este acoplamiento se puede apreciar en la figura 3.3, en la que se muestran los espectros de potencia de la velocidad de rotación del eje, de la corriente del motor y de la presión. En ella se puede notar una huella del espectro de la corriente en el de la presión, reflejando un acoplamiento electromagnético en la medida que es apreciable incluso con el motor detenido. Esto impide que la medida

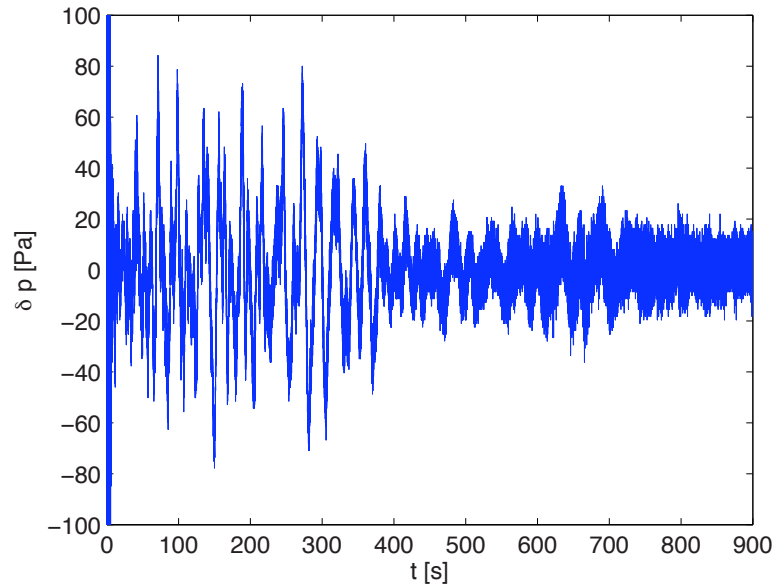


Figura 3.4: Decaimiento al reposo.

Se muestra una medida de presión $\delta p = p - \langle p \rangle$ tomada durante una espera de 15 minutos de una rampa R0 de 24 minutos. El Fr del fluido inmediatamente antes de la medida es $Fr \approx 3,13$, correspondiente al estado base. Se pueden apreciar fluctuaciones que perduran hasta alrededor de 700 s después de la detención del motor.

de presión aporte una buena caracterización del estado del flujo

Por otro lado, en la figura 3.4 se observa el decaimiento de las fluctuaciones de presión una vez que el motor es detenido. Es posible notar que la espera de 15 minutos resulta adecuada para el tiempo que toman en decaer las fluctuaciones de mayor amplitud.

Sobre la aparición de frecuencias predominantes en el espectro de la corriente y de la velocidad del motor, es importante hacer algunas observaciones. El circuito de retroalimentación usado para mantener constante la velocidad posee varios parámetros que pueden ser ajustados para alcanzar un desempeño óptimo. El valor óptimo de estos parámetros dependerá de la tarea requerida y, en forma similar, el desempeño del motor variará, para un mismo conjunto de parámetros, según las condiciones de trabajo. Esto se traduce en que el motor tiene un comportamiento

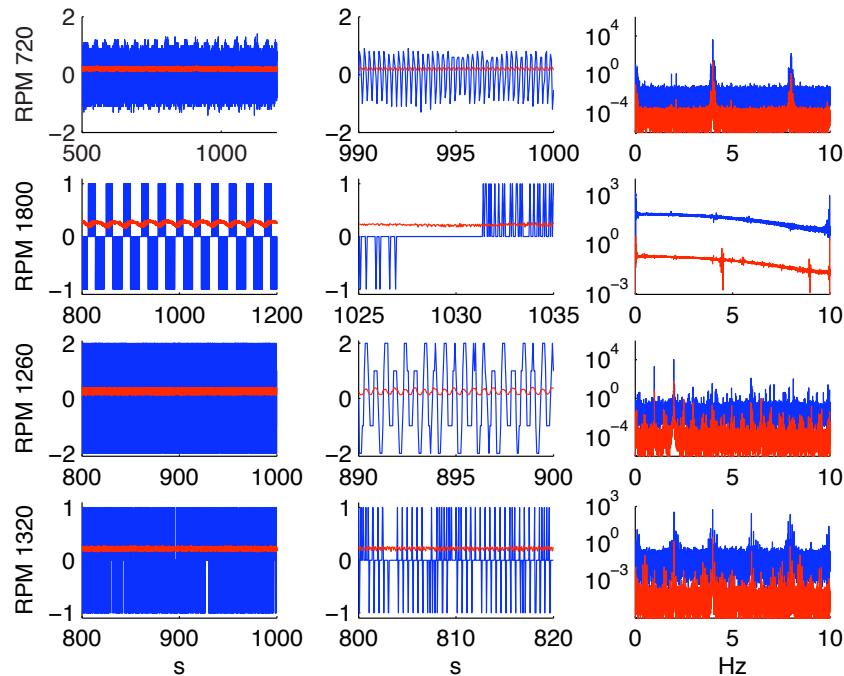


Figura 3.5: Comportamiento del motor

Se muestran algunas curvas representativas del tipo de comportamiento del motor. Se grafican la velocidad del motor (azul) en *ciclos/minuto* (RPM) en torno al valor indicado en cada fila. En rojo se grafica I en Amperes. Cada fila corresponde a una realización en particular. En la primera columna se muestra el comportamiento estacionario a tiempo largo, en la segunda se muestra el detalle de la variación fina y en la tercera el espectro de potencias entre 0 y 10 Hz. En general, con el desgaste del sistema este comportamiento no se conserva necesariamente de la misma forma para una velocidad dada.

distinto según la velocidad y la carga a la que está sometido. En la figura 3.5 se muestran series temporales de velocidad y corriente del motor para distintas velocidades, las que en muchos casos muestran la probable presencia de una resonancia del circuito de retroalimentación. A pesar de lo nefasto que esto puede parecer, las fluctuaciones de velocidad son del orden del 0,1% por lo que el sistema ejerce efectivamente un control de velocidad apropiado.

3.2. Aspectos relevantes de las medidas.

Con la medición local de superficie casi completamente controlada, se obtiene una cantidad importante de información relevante. Los aspectos aún por perfeccionar en estas mediciones provocan que algunas medidas presenten exceso de ruido y, aunque es posible e importante presentar en esta sección los resultados de esta etapa, la cuantificación definitiva de los resultados del experimento se realizará con los datos presentados en la sección siguiente. A pesar de ello es posible mostrar algunos hechos cualitativos relevantes e, incluso, presentar aspectos cuantitativos que se pueden obtener en esta etapa y que serán precisados más adelante.

Inicialmente, para una altura correspondiente a $b/L = 2,6$ como la utilizada en [1], se busca hacer determinar la apariencia del diagrama de bifurcación a grandes rasgos. Para ello se efectúan medidas tipo R0 de 24 minutos a velocidad constante en un rango de frecuencias de rotación entre 17 y 42 Hz, midiendo a intervalos de 1 Hz. Los resultados respectivos se muestran en la figura 3.6, donde $\langle A \rangle$ denota el promedio de la amplitud de las fluctuaciones de superficie medidas, calculada a partir del módulo de la transformada de Hilbert de $\delta h / \langle h \rangle_T$ (ver sección 2.2.1). Cuando se produce la bifurcación, intervienen en el promedio calculado sólo aquellos valores correspondientes al estado de onda de gravedad, esto con el fin de obtener una medida de amplitud en este estado no contaminada por la evolución previa. El corte lo realiza el programa de procesamiento de datos utilizado por medio de un criterio basado en la envolvente. Un ejemplo del corte se muestra en la figura 3.7, en que además se muestra cómo se compara el valor absoluto de la transformada de Hilbert (envolvente) con la amplitud de la onda y cómo se determinan las barras de error. Considerando lo mencionado en la sección anterior referido a la pertinencia del número de Froude como el parámetro adimensional relevante para la aparición de la inestabilidad, se realiza este y otros gráficos de $\langle A \rangle$ en función de este parámetro.

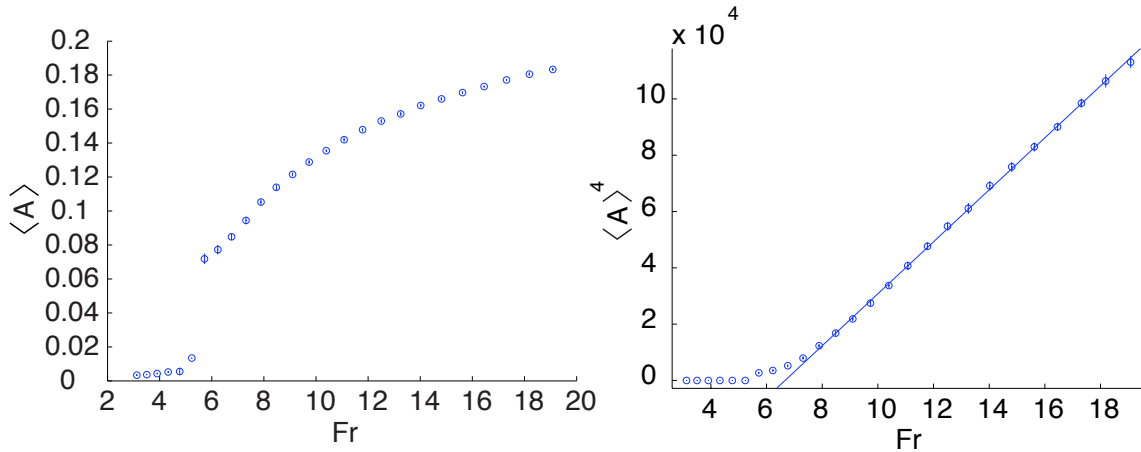


Figura 3.6: Evolución de amplitud de fluctuaciones con Fr .

Se muestra el diagrama de bifurcación sin detalle cerca del punto crítico y sólo con la curva de subida. A la derecha se observa que $\langle A \rangle$ crece como $(Fr - Fr_c^+)^{1/4}$.

Se obtiene que el valor del Fr crítico Fr_c^+ para la aparición de la onda debería encontrarse entre 5,24 y 5,72, valores que, con un error de $\pm 0,05$, corresponden respectivamente a los extremos para los que no y sí hubo transición.

Continuando con las mediciones, para indagar sobre la persistencia del rango para Fr_c^+ en este montaje, se realizan 11 mediciones similares (R0) en el rango de $Fr \approx 4,1 \rightarrow 6,8$ con pasos de 0,5 Hz (la mitad que la anterior), que en este rango corresponden a intervalos de Fr entre 0,2 y 0,3 (recordar que Fr es cuadrático en Ω). Al no encontrarse una tendencia clara de desgaste en el sistema y comprobar que se reproducen los resultados expuestos en la figura 3.6, se procede a realizar una mayor cantidad de mediciones concentradas en el rango para Fr_c^+ arrojado por los datos de la figura 3.6. En este rango se realizan 27 mediciones con intervalos de 1/6 Hz (10 RPM), con el fin de encontrar una probabilidad de transición del sistema en función del forzamiento. Esta probabilidad puede buscarse como una densidad de probabilidad de transición en el tiempo o, más fácilmente, como la probabilidad de que ocurra la transición al cabo de los 24 minutos que dura cada medida. En cualquier caso, esta probabilidad debe ser fruto de la dinámica del sistema para

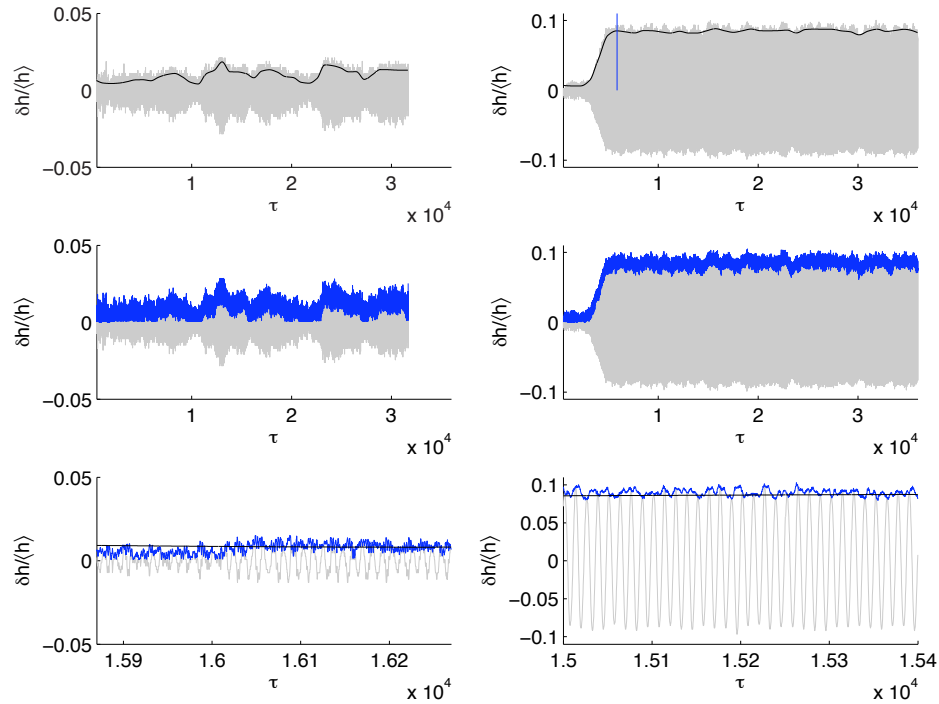


Figura 3.7: Tratamiento de fluctuaciones de superficie

Se muestran en gris las curvas de fluctuaciones locales de superficie correspondientes a los puntos con $Fr \approx 5,24$ (columna izquierda) y $Fr \approx 6,76$ (derecha) de la figura 3.6. En azul, en las dos filas inferiores, se muestran las respectivas transformadas de Hilbert a partir de las que se mide la amplitud. Debido a la fuerte y excesiva variación de esta última, las barras de error se calculan a partir de la desviación estándar de la curva negra que se muestra en las filas superior e inferior, la que corresponde a la variación lenta de la transformada de Hilbert tomada a partir de sus promedios en intervalos de 36 segundos. Esta curva negra se utiliza también para definir el punto de corte hecho para considerar sólo los datos posteriores a la transición, punto que se indica con una línea vertical en la figura superior derecha.

que tenga validez para el estudio de esta transición. Sin embargo, en estas medidas detalladas se pueden también observar efectos del paso del tiempo en el sistema, reflejándose en que la probabilidad, como sea que esta se defina, no se mantiene constante en el tiempo que duran estas mediciones. Esto se puede apreciar en la figura 3.8.

Respecto de las medidas con velocidad en descenso hechas para determinar Fr_c^- ,

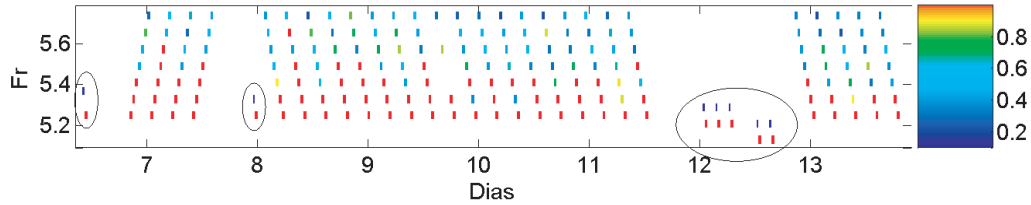


Figura 3.8: Evolución de medidas cerca del punto crítico.

Se muestra, en función del tiempo de ejecución (en días) y del número de Froude, las sucesivas medidas R0 realizadas para determinar la probabilidad de transición. El rojo corresponde a que no hay transición y la escala de colores entre amarillo y azul, mostrada en el borde derecho, corresponde al tiempo que demoró la onda en saturar normalizado por los 24 minutos que dura cada medida. Es posible notar una tendencia al aumento de la probabilidad de aparición de la onda para Fr fijo a medida que se suceden las repeticiones, tanto en el hecho mismo de la transición (siguiendo por ejemplo las corridas alrededor de $Fr = 5,4$) como, en menor medida, en la disminución del tiempo de saturación (para $Fr \approx 5,6$ inicialmente demoraba más que al final, donde bifurca rápidamente). Las elipses encierran valores de rampas con velocidad en disminución R-, donde el rojo indica el lugar en el que el flujo vuelve al estado base y el azul indica el último punto para el que persistió el estado de onda de gravedad. Se observa que la zona de biestabilidad es mucho menor que en [1].

también se observa una variación en el tiempo análoga a la apreciada con Fr_c^+ . Esto no contradice lo mencionado en [1] respecto de que el valor de Re_c^- es reproducible y no requiere de un estudio estadístico, sino que confirma que el montaje sufre efectos por el desgaste, y lo recién mencionado sobre la no necesidad de estadística para encontrar Fr_c^- parece traducirse aquí en reproducibilidad salvo por las variaciones lentas atribuibles al desgaste. Se observa que la región de biestabilidad es aquí considerablemente menor que en [1], donde se reporta que dicha región está comprendida entre $Fr_c^+ = 8,9$ y $Fr_c^- = 5,0$. Sin embargo, debido a que estas medidas fueron en esta etapa las más afectadas por el exceso de ruido (que será posteriormente controlado), es preferible cuantificar la amplitud A en la zona de biestabilidad con datos que se expondrán a continuación.

Se opta por efectuar además medidas R0 de 8 horas a velocidad constante. Esto debe permitir lo siguiente:

1. Estudiar la probabilidad de transición en ambos sentidos para un Fr fijo. La

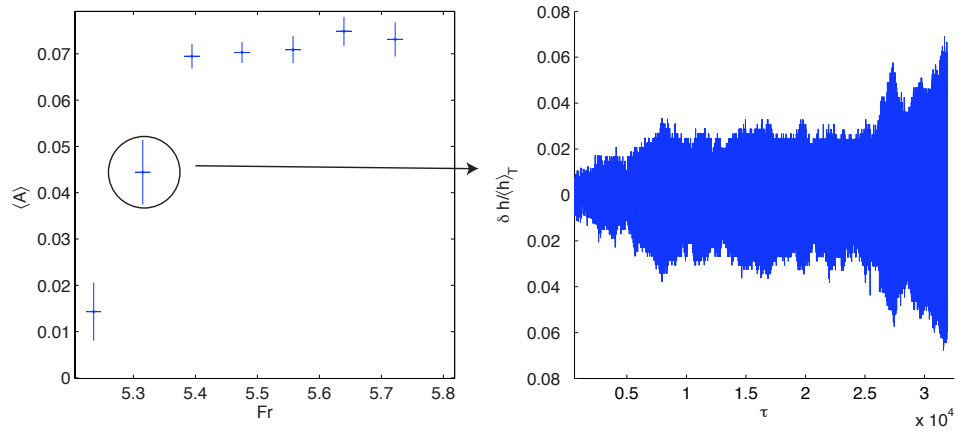


Figura 3.9: Efecto de la no saturación del estado de onda de gravedad.

En el gráfico de la izquierda se aprecia, encerrada en un círculo, una medida de la amplitud promedio $\langle A \rangle$ que posee un valor intermedio entre aquellos en que se desarrolla la onda (a la derecha) y aquel en que no (izquierda). Para las barras de error horizontales se toma el máximo de la diferencia entre la velocidad y su promedio y no se consideran los errores de los demás valores, siempre constantes en el experimento (aceleración de gravedad y medidas del montaje). En el gráfico de la derecha se aprecia, en función del tiempo normalizado por el período de rotación del eje τ , que la amplitud de la onda estaba creciendo al momento de terminar el tiempo de medición, por lo que esa medida no corresponde a la amplitud de la onda saturada.

mayor reproducibilidad en la determinación de Fr_c^- parece deberse a que este tránsito se debe a la desaparición del estado de onda de gravedad. Sin embargo, es esperable que las fluctuaciones induzcan el paso del estado de onda de gravedad al estado base cerca de Fr_c^- . Como adicionalmente se ha observado que Fr_c^+ es cercano a Fr_c^- , es posible que se pueda gatillar la transición en ambos sentidos para una velocidad fija, lo que ocurriría con baja probabilidad y sería observable sólo con mayores tiempos de espera.

2. Evitar las medidas de transientes logrando obtener las medidas correspondientes sólo al estado base o al de onda de gravedad. Como se ve en la figura 3.9, en ocasiones la espera de 24 minutos es insuficiente para la saturación de la onda, a pesar de que su aparición pueda haberse gatillado, lo que impide una medida real de su amplitud saturada. Con un tiempo mayor es posible discriminar de

mejor manera los transientes y poder medir la amplitud de las fluctuaciones asociadas a cada estado.

3. Disminuir el efecto de la falta de reproducibilidad visto para rampas R0 de 24 minutos, permitiendo discriminar con mayor certidumbre si a un Fr dado puede aparecer o no la onda. Esto debido a que el mayor tiempo de medida aumenta la capacidad de registrar la aparición de la onda aún si las probabilidades de aparición de esta son tan bajas que difícilmente se hubiere manifestado en 24 minutos. De esta manera se torna más factible encontrar un valor experimental reproducible análogo a Fr_c^+ , aunque en este caso será Fr_m definido como aquel valor mínimo de Fr para el que apareció el estado de onda de gravedad, ya que, por lo que se ha visto, el valor mínimo para el que este estado **siempre** aparece (que corresponde a la definición de Fr_c^+) no es reproducible en este montaje.

3.3. Medidas Definitivas.

Pasadas las etapas de ajuste en la adquisición de datos de superficie, se realizan medidas exhaustivas para $b/L = 2,6$ y $3,4$. En la figura 3.10 se muestran las medidas en un amplio rango de frecuencias para ambas alturas. En esta y todas las otras medidas mostradas, los símbolos iguales indican distintas medidas de una misma rampa R0 ó R-. Para ambas alturas se observa el mismo comportamiento mostrado en la sección anterior respecto de la dependencia $\langle A \rangle \sim (Fr - Fr_*)^{1/4}$, lo que se ve claramente en la figura 3.11, figura en que también se comparan las amplitudes para ambas alturas.

En la figura 3.12 se muestra el resultado de las medidas a R0 de 24 minutos hechas para obtener mayor detalle cerca del punto crítico, gracias a las cuales se

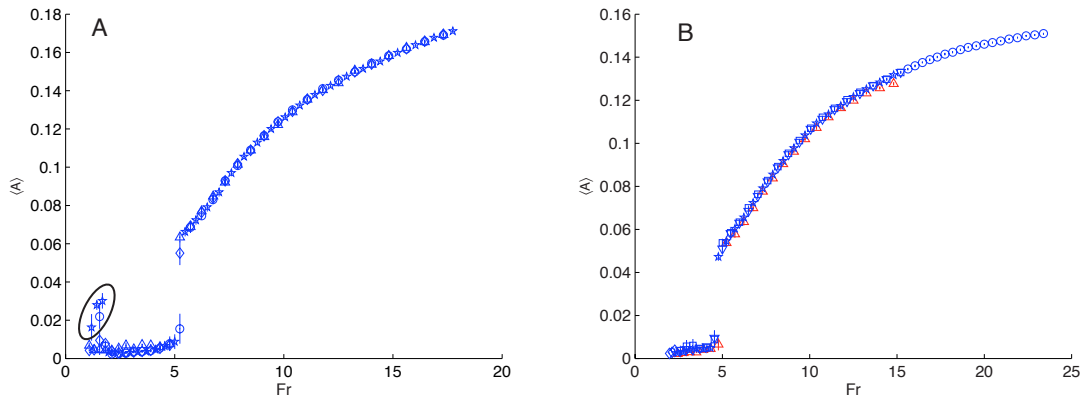


Figura 3.10: Amplio rango de Fr

A.- Se muestra la dependencia en Fr de la amplitud de las fluctuaciones de superficie para $b/L = 2,6$. Se superponen 4 mediciones diferentes apreciándose una buena reproducibilidad en la medida de amplitud. Para las medidas con bajo número de Fr encerradas en un óvalo se observa un alto nivel de ruido. B.- Misma curva para $b/L = 3,4$. Las marcas en rojo muestran la primera medida rampa R0, realizada con Fr en disminución. En ella se puede apreciar una amplitud levemente inferior.

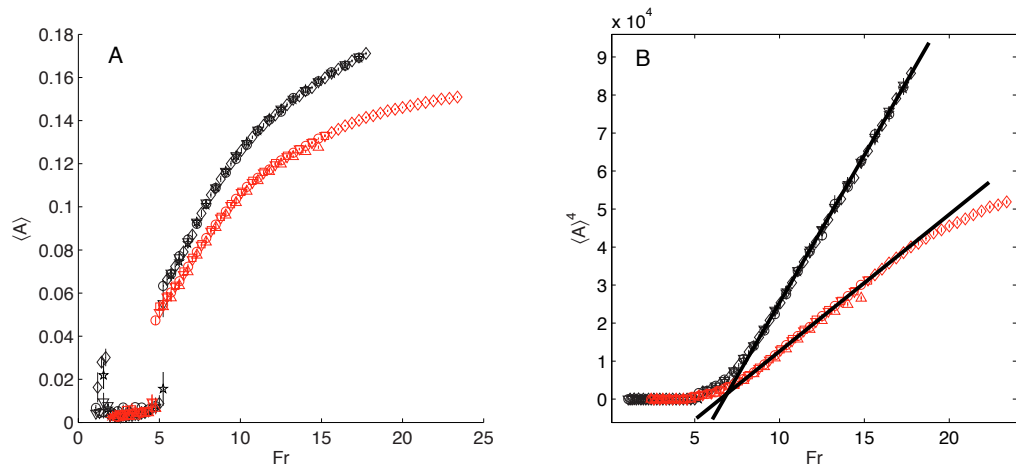


Figura 3.11: Comparación entre alturas y dependencia en Fr

A.- Se aprecian en negro las medidas para $b/L = 2,6$ y en rojo, con menor amplitud, para $b/L = 3,4$. B.- En el gráfico de $\langle A \rangle^4$ se observa que en un rango de Fr aproximadamente entre 8 y 18, $\langle A \rangle \sim (Fr - Fr_*)^{1/4}$, tal como se mostró en la sección anterior.

puede obtener mediciones de las fluctuaciones de superficie en el estado base en la zona de biestabilidad. Estas medidas fueron tomadas a intervalos de $1/12$ Hz (5 RPM) en un rango de Fr limitado aproximadamente por 5,08 y 5,89 para $b/L = 2,6$

y por 4,76 y 5,23 para la otra profundidad.

En la búsqueda de Fr_c^- se ejecutan varias rampas con velocidad en disminución. Contrariamente a lo esperado, para $b/L = 2,6$ se encuentran importantes variaciones en el valor crítico para el que la onda decae. Se realizaron rampas de descenso de 24, 10 y 5 minutos, observándose, como es de suponer, que el menor valor de Fr alcanzado con la onda aún establecida fue conseguido en una rampa de cinco minutos (ver la curva denotada por \star de color rojo en la figura 3.13). Sin embargo aquel resultado fue sólo eventual y en él es llamativo que se observa un decaimiento de la amplitud de la onda para posteriormente volver a crecer. Lo contrario ocurre para $b/L = 3,4$, caso en el que se encontró con buena reproducibilidad que para un valor de Fr entre $4,315 \pm$ y $4,335$ (ver figura 3.14), el estado de onda de gravedad se mantiene durante al menos 10 minutos, y para valores bajo este la onda de gravedad comienza a decaer, salvo cuando se utiliza el mínimo paso de descenso de velocidad que es de 0,03 Hz (3 RPM). Debido a esto último se determina que Fr_c^- está entre 4,295 y 4,315.

Como es de esperar, con las mediciones de ocho horas se observa la transición para valores de Fr menores. Resulta notable que para $b/L = 2,6$ se obtiene un valor crítico Fr_m perfectamente determinado dentro de estas mediciones, ya que en el límite de resolución del montaje se obtuvo el mismo resultado en 3 ejecuciones diferentes no consecutivas. Esto es, para las tres ejecuciones a frecuencia nominal 21,45 Hz ($Fr \approx 4,98$) no hubo transición, y para las tres con frecuencia 21,50 Hz ($Fr \approx 5,00$) sí la hubo. En las dos últimas de estas ejecuciones a 21,50 Hz ocurrió la transición en ambos sentidos, como se puede apreciar en la figura 3.16.

Contrariamente a lo acontecido para $b/L = 2,6$, para $b/L = 3,4$ se observa una variación muy considerable del valor de Fr que determina la aparición de la onda. Nuevamente en este caso se observa el efecto de desgaste y, extrañamente, con una

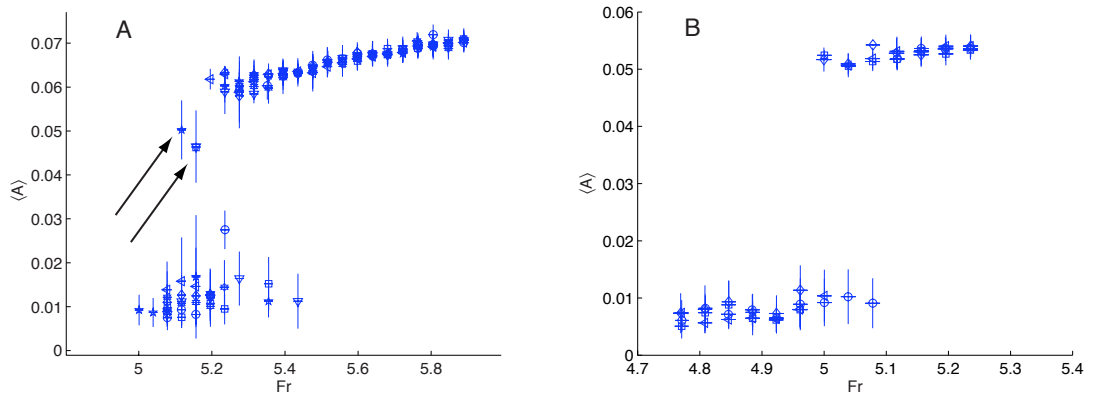


Figura 3.12: Medidas R_0 cerca del punto crítico

Se observa que Fr_c^+ disminuye al incrementarse la altura b/L de 2,6 a 3,4. A.- Resultados de siete rampas en el rango cercano a Fr_c^+ para $b/L = 2,6$. Las flechas indican que las ejecuciones correspondientes se encontraban en proceso de transición y que no lograron saturar durante los 24 minutos, pese a lo cual el criterio de corte establecido (indicado en la figura 3.7) indica transición y elimina datos al calcular el promedio indicado por esos puntos. B.- Resultados de cuatro rampas en torno a Fr_c^+ para $b/L = 3,4$.

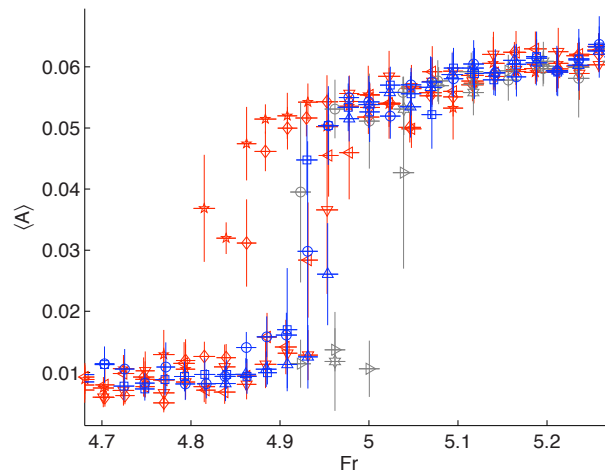


Figura 3.13: Búsqueda de Fr_c^- para $b/L = 2,6$.

Se muestran los resultados de las rampas R- para los distintos tiempos de espera utilizados. Los puntos grises corresponden a ejecuciones con tiempo de espera de 24 minutos, los azules 10 y los rojos 5. No se observa un valor reproducible que determine el decaimiento de la onda al estado base, aunque se puede observar que el decaimiento ocurre con mayor probabilidad en un rango de Fr entre 4,92 y 4,96.

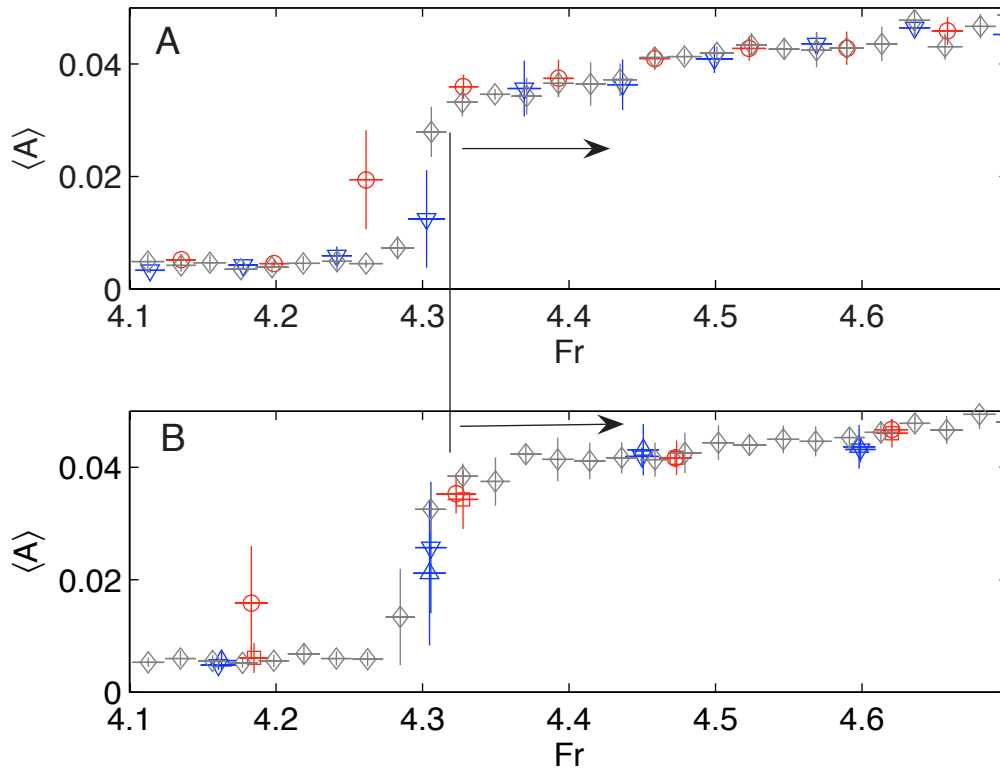


Figura 3.14: Desaparición del estado para $b/L = 3,4$.

La línea vertical indica aproximadamente $Fr \approx 4,32$, el límite de la zona indicada por las flechas en que permanece la onda de gravedad. A.- Rampas R- de 5 minutos. B.- R- de 10 minutos. Los colores identifican rampas que pasan por distintos valores de Fr . Se ven en rojo aquellas curvas que, en el descenso, pasan por el punto límite de Fr entre 4,315 y 4,335 manteniendo la amplitud del estado de onda, para luego decaer sólo en el paso siguiente. En azul se aprecia que las curvas empiezan a decaer al llegar al punto inmediatamente inferior que es Fr_c^- . El hecho de que en las rampas con el paso mínimo (\diamond gris) la onda se mantiene hasta Fr_c^- justifica su definición.

componente reversible tras un tiempo de reposo del montaje, es decir, tras una pausa prolongada el sistema parece volver a una situación anterior. Esto último se muestra en la figura 3.18. De igual manera es posible ratificar en la figura 3.17 la buena correlación entre la amplitud del estado de onda de gravedad y el número de Froude en comparación con el número de Reynolds. De esa figura también se pueden descartar a las variaciones de Re provenientes de variaciones de temperatura como

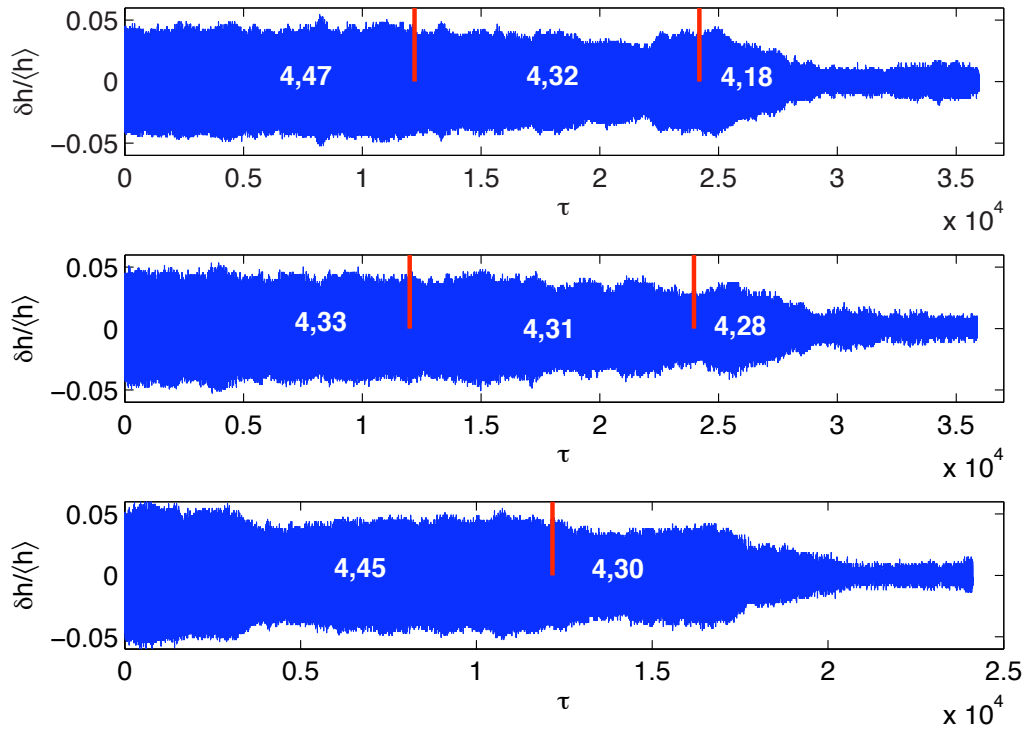


Figura 3.15: Decaimiento al estado base.

Se muestra, en función del tiempo τ normalizado por el período de rotación del eje, la evolución de la onda en forma continua a medida que disminuye el número de Froude (indicado en cada gráfico, las barras verticales indican el momento del cambio de velocidad) y esta decae al estado base. Todas las curvas tienen sus promedios de amplitud representados en la figura 3.14 B, donde los símbolos \circ corresponden a la curva superior, \diamond a la intermedia y \triangle a la inferior.

las responsables del efecto del uso mostrado en la figura 3.18.

En la figura 3.19 se muestran los resúmenes de todas las medidas para ambas alturas. En dicho resumen se han promediado las distintas medidas realizadas para cada tipo de rampa, acorde con el criterio de que si las barras de error verticales se superponen las medidas se promedian y si no se consideran medidas distintas. Previo a ello, para mostrar con claridad sólo las medidas respectivas a cada estado, han sido excluidas las medidas de transientes correspondientes a la transición en rampas R- (sólo hasta una medida eliminada por transición), así como tampoco están incluidas

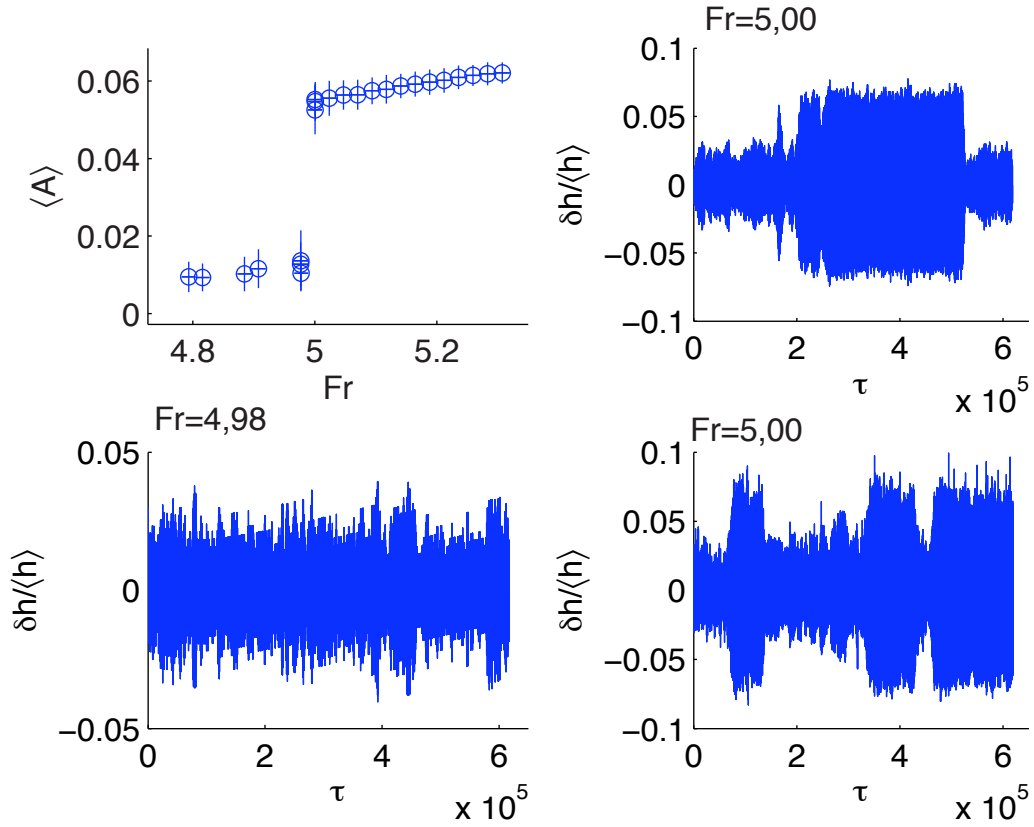


Figura 3.16: Esperas largas para $b/L = 2,6$.

En la esquina superior izquierda se muestra el resumen de todas las medidas de ocho horas tomadas para esta altura. En los otros tres gráficos aparecen trazas de $\delta h / \langle h \rangle$ para los números de Fr indicados en cada esquina superior izquierda. En la columna derecha se aprecian las dos ejecuciones con transición en ambos sentidos, mientras en el gráfico inferior izquierdo se muestra cómo, para el valor de Fr explorado inmediatamente inferior, la transición no se produce durante las ocho horas.

las medidas señaladas con flechas en la figura 3.12 A ni las ruidosas indicadas en la figura 3.10 (ambas atañen $b/L = 2,6$). En el cuadro 3.1 se muestra el resumen de los valores críticos obtenidos para ambas alturas, donde Fr_c^+ se define, análogamente con Re_c^+ de [1], como el mínimo valor de Fr para el que siempre ocurrió la onda de gravedad tras una espera de 24 minutos. Notar también el hecho de que se sigue verificando la tendencia de disminución de valores críticos con el aumento de profundidad reportada en [1] (cuadro 1.1), lo que indica que para $b/L = 2,6$ aún no

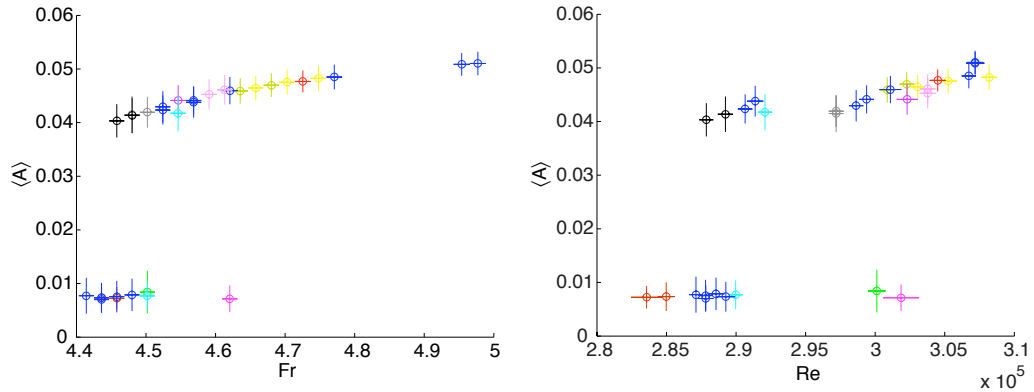


Figura 3.17: Resultados de medidas de ocho horas para $b/L = 3,4$.

A.- $\langle A \rangle$ en función de Fr . B.- $\langle A \rangle$ en función de Re . Cada realización se presenta con el mismo color en ambos gráficos. La monotonicidad que se aprecia en la figura A es otro indicio de que Fr es el parámetro apropiado que describe la amplitud del estado en oposición a Re , el que presenta menor correlación con $\langle A \rangle$. El elemento distintivo entre Fr y Re , que evita que ambos varíen simultáneamente, está dado por las variaciones de temperatura que sólo afectan a Re .

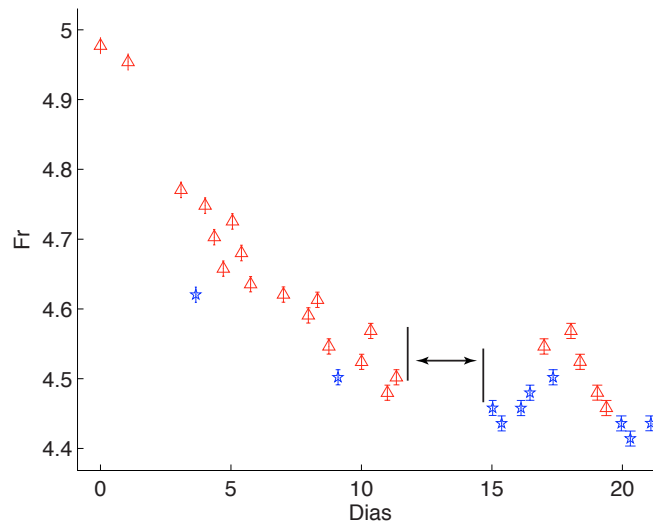


Figura 3.18: Efecto del uso y reposo del montaje.

Se muestra, en función del tiempo de ejecución, el valor de Fr para el que se realizan las distintas medidas de ocho horas y si estas presentan transición (Δ rojo) o no (\star azul). Se aprecia que a medida que se suceden las ejecuciones disminuye el Fr necesario para que ocurra la transición, y en el momento en que se produce una pausa en el uso del montaje (indicada por los trazos verticales), vuelve a incrementar el Fr requerido para gatillar la transición de onda de gravedad.

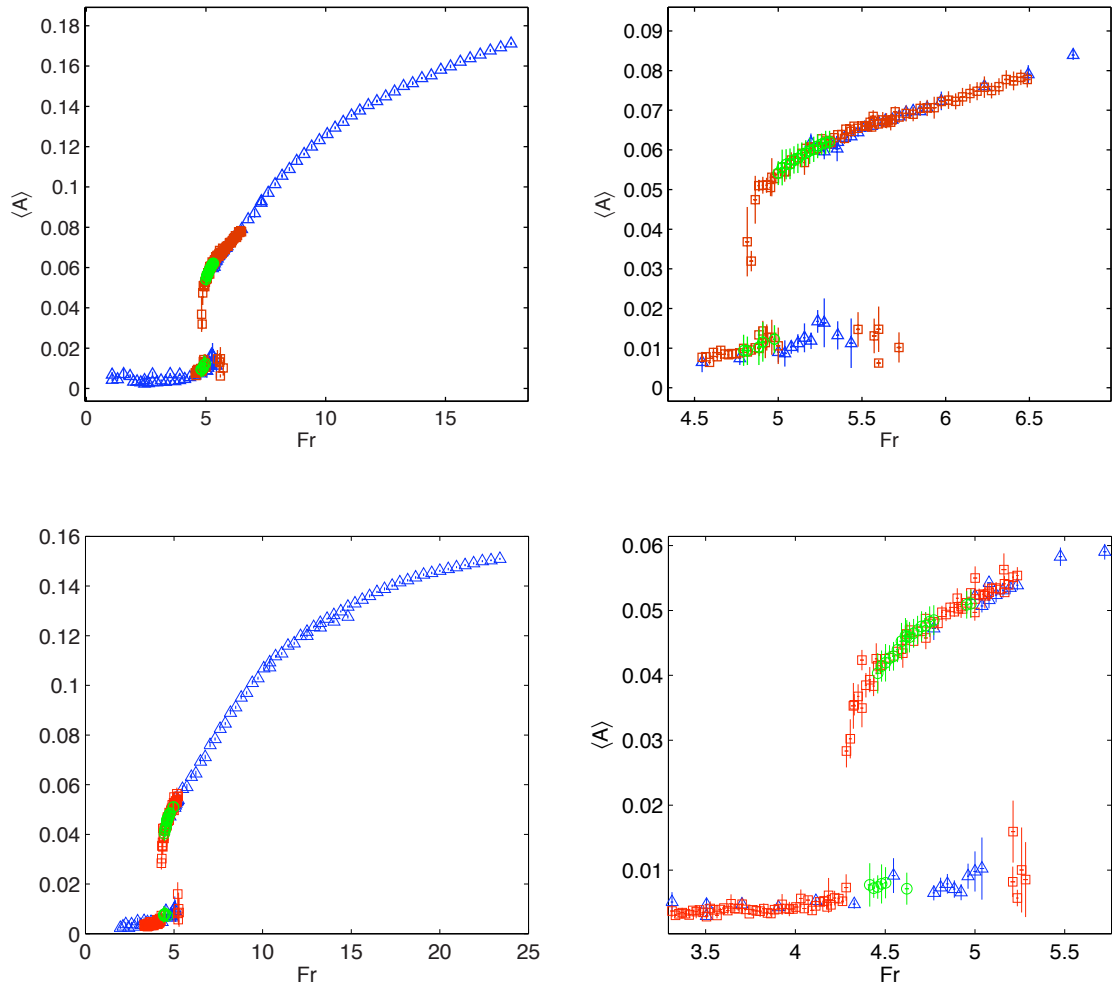


Figura 3.19: Resumen de medidas.

En la fila superior se muestran las medidas para $b/L = 2,6$ y en la inferior aquellas para $b/L = 3,4$. En la columna izquierda aparecen las medidas en todo el rango explorado y a la derecha el detalle en la zona de biestabilidad, cerca de los puntos críticos. Los símbolos \triangle azules corresponden a las medidas independientes de 24 minutos a velocidad constante, los \square , de color rojo, corresponden a las rampas con velocidad en descenso y los \circ verdes a las medidas de ocho horas.

se alcanza el límite de altura infinita.

b/L	Fr_c^-	Fr_m	Fr_c^+
2,6	$4,82 \pm 0,02$	$5,00 \pm 0,01$	$5,48 \pm 0,01$
3,4	$4,31 \pm 0,02$	$4,46 \pm 0,02$	$5,08 \pm 0,02$

Cuadro 3.1: Valores Críticos de Froude.

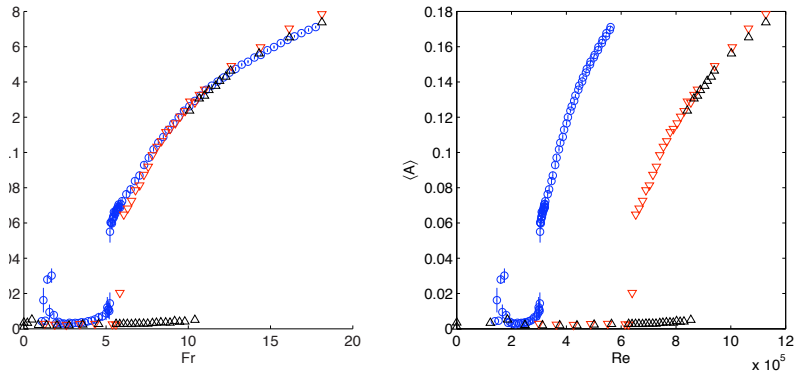


Figura 3.20: Comparación con el experimento previo.

En la figura de la izquierda se observa cómo se superponen las curvas de los diagramas de bifurcación al ser graficadas en Fr , mientras a la derecha se observa que al graficar según Re ambas curvas no coinciden. Los círculos azules corresponden a las medidas de este trabajo y los triángulos a [1], \triangle negros y ∇ rojos a rampas tipo R0 y R- respectivamente.

Finalmente, en la figura 3.20 se comparan las medidas hechas con $b/L = 2,6$ con aquellas obtenidas en [1]. Es claro como estas presentan una muy buena coincidencia si son descritas en términos de Fr . Muy por el contrario, al compararlas según Re se hace evidente que ese no es el parámetro adecuado para describir la transición. Resulta muy notoria la diferencia en la extensión de la región de biestabilidad, la que se observa al ver que las medidas del estado base en [1] llegan hasta alrededor de $Fr = 10$, alrededor de un 50% más que en los datos que aquí se exponen. Notar, sin embargo, que en los primeros datos obtenidos en la etapa de rodaje, aquellos mostrados en la figura 3.1, se observan rampas tipo R0 para las que no hubo transición hasta con $Fr \approx 14$. La atribución al ruido de los efectos de desgaste y de las diferencias en la figura 3.20 surge en forma natural al observar la figura 1.3 de la sección 1.4. Para determinar cuanto de ese ruido es efectivamente atribuible a las transiciones turbulentas es necesario una caracterizar directamente la turbulencia del flujo.

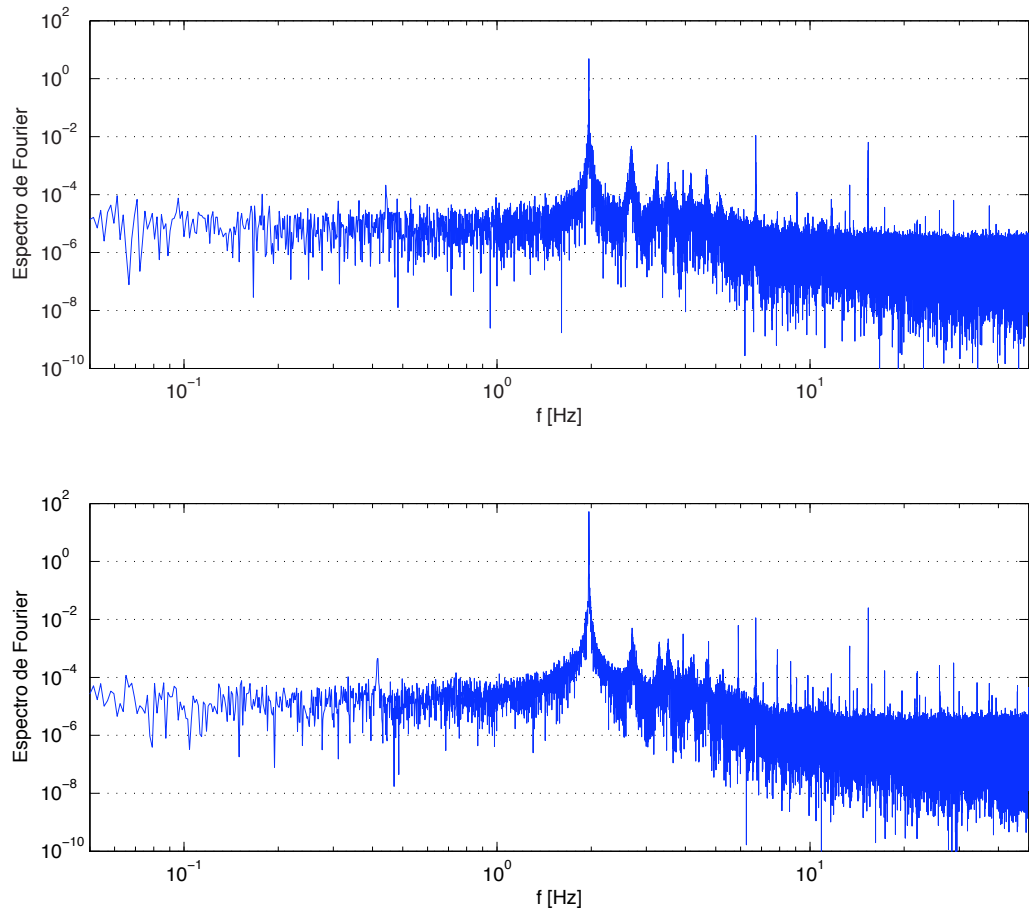


Figura 3.21: Espectro de potencias en función de frecuencias.

Se muestran los espectros de potencias de Fourier para $Fr \approx 5,44$, para $b/L = 2,6$. Arriba corresponde al estado base y abajo al de onda de gravedad. En el caso mostrado, la intensidad de las fluctuaciones del estado base hace que la diferencia en la amplitud del máximo sea sólo cercana a 1 orden de magnitud.

3.4. Frecuencias propias de la superficie libre.

Tal como se ha mencionado, un aspecto interesante radica en la evolución de las frecuencias propias de la superficie libre a medida que aumenta la intensidad del flujo. Estas frecuencias se obtienen a partir del espectro de potencias de la señal de superficie, como los que se muestran en la figura 3.21. Para velocidades altas

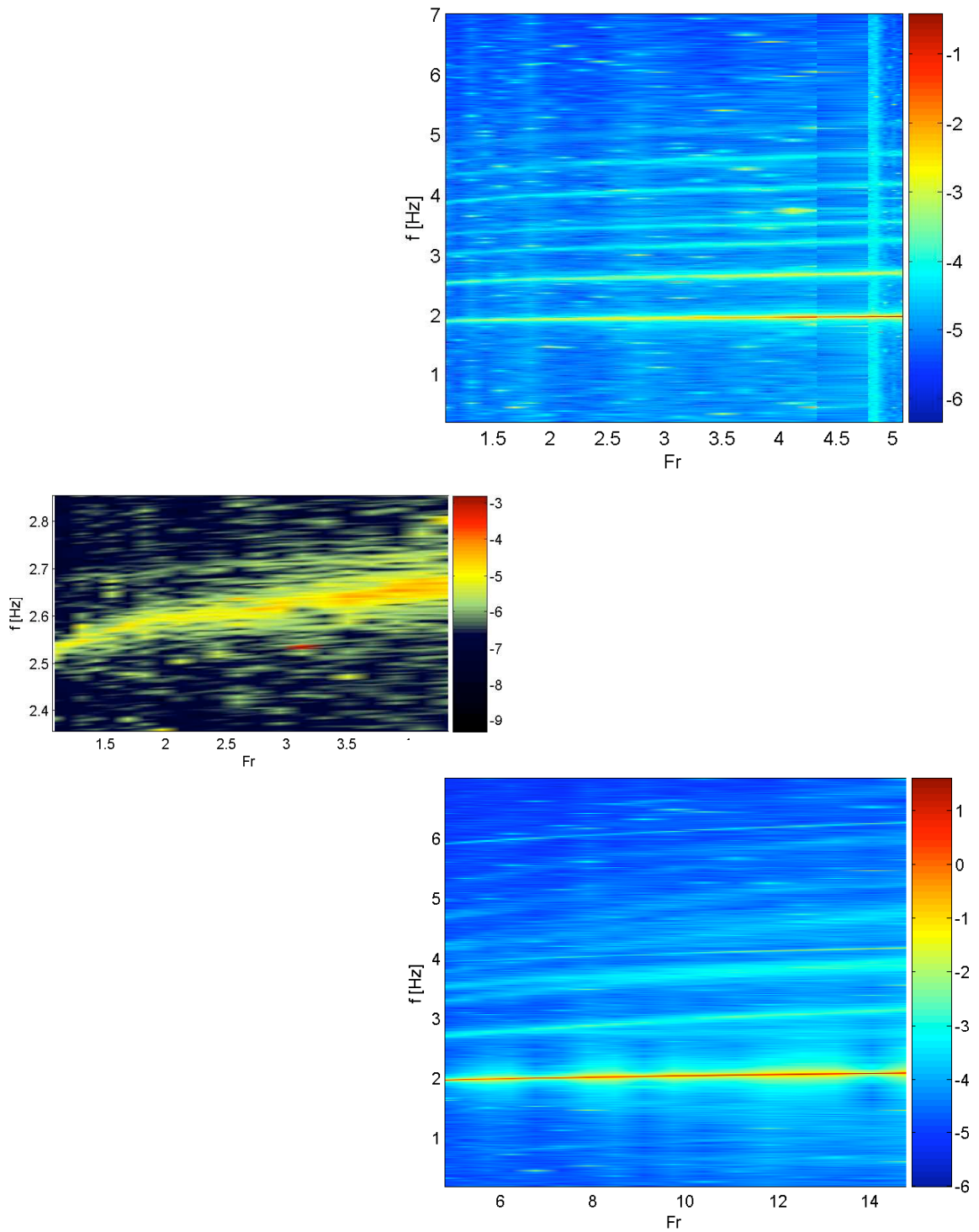


Figura 3.22: Evolución de modos para $b/L = 3,4$.

Se grafica en escala de colores (a la derecha en cada figura) el \log_{10} de la amplitud del espectro de Fourier. La figura superior corresponde al estado base y la inferior al estado de onda. La figura de la izquierda es un acercamiento de la superior.

y moderadas, esto no requiere medidas adicionales a las ya presentadas, pero para obtener una mejor medida en la región del estado base donde las fluctuaciones son pequeñas, se ejecutan rampas con velocidad en ascenso sin detención intermedia y con el Lock-in configurado para entregar sólo las variaciones amplificadas, tal como se mencionó en el capítulo anterior. De esta forma se facilita la obtención de modos para Fr bajo, límite que facilita la identificación con los modos de ondas de gravedad con fluido en reposo, gracias a que ellos son conocidos para $Fr = 0$.

A partir del espectro de Fourier (como el de la figura 3.21) para distintos valores de Fr , es posible obtener la evolución de los modos. Ello se puede lograr graficando estos espectros en escala de colores para los distintos Fr , pudiéndose así identificar como los modos propios de la superficie aquellos máximos que persisten y se desplazan continuamente. Esto se aprecia en la figura 3.22, en cuyos gráficos es posible distinguir varios modos obtenidos con $b/L = 3,4$, tanto para el estado base como para el estado de onda de gravedad. Es importante notar el gráfico que está a la izquierda en esa figura. En él se muestra un acercamiento al segundo modo que aparece en la figura superior, observándose un leve rastro de intensidad que puede corresponder a otro modo con una frecuencia levemente superior. La trayectoria de estos dos modos sugiere que pueden colisionar en la zona en que se desarrolla la inestabilidad, pudiendo ser ese el mecanismo de la inestabilidad, a pesar de que este modo no se pudo obtener para $b/L = 2,6$.

En la figura 3.23 se muestran las frecuencias de los máximos asociados a los modos fundamentales que se pueden apreciar en la figura 3.22. Se muestran también, en trazos horizontales, los primeros modos fundamentales con $m = 1, 2, 0$ y 3 para el fluido en reposo (ver sección 1.3), notándose que, a partir del tercer modo de menor frecuencia, no es evidente la correspondencia entre los modos medidos y los conocidos para $Fr = 0$. Esta incertidumbre se eliminará con el cálculo del capítulo

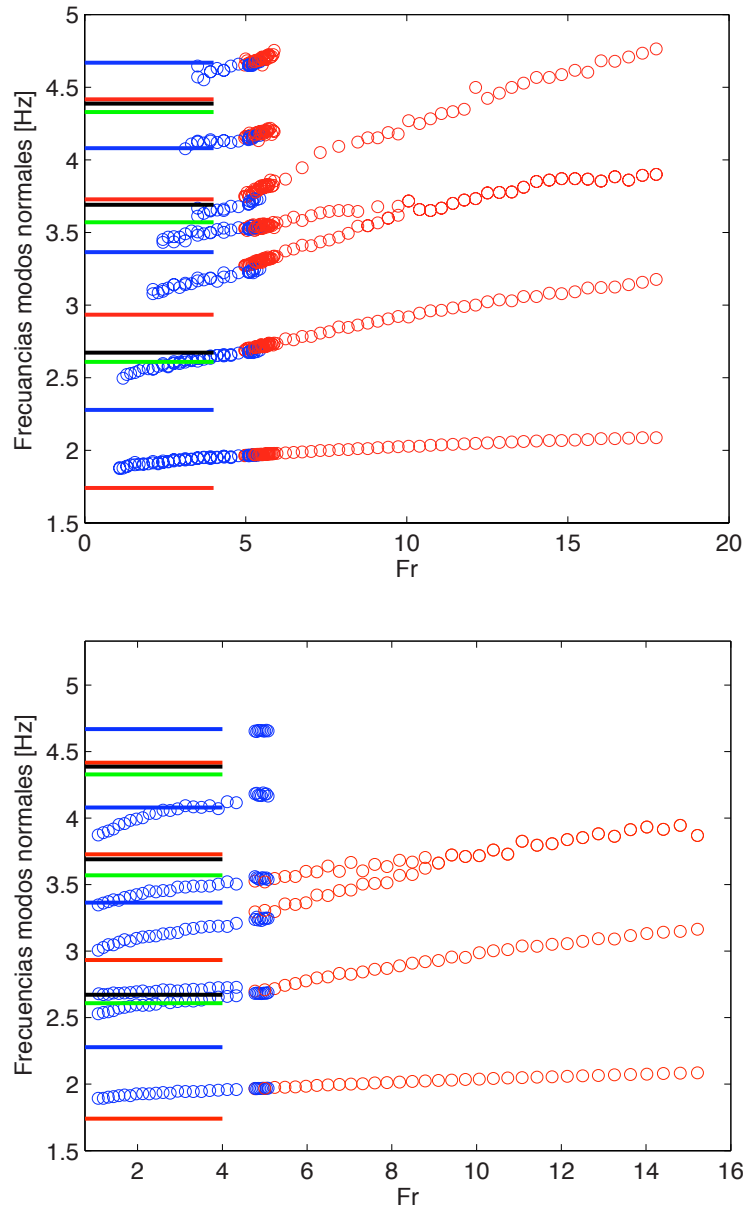


Figura 3.23: Modos fundamentales de superficie.

En la figura superior (inferior) se muestran, para $b/L = 2,6$ ($b/L = 3,4$), en rojo las frecuencias correspondientes al estado de onda de gravedad y en azul las del estado base. A la izquierda, hacia $Fr = 0$, los trazos muestran como referencia los modos fundamentales de onda de gravedad para el fluido quieto. Los trazos rojos corresponden a los primeros modos con $m = 1$, los azules a $m = 2$, los verdes a $m = 0$ y los negros a $m = 3$. Notar que la figura inferior sugiere que se producirá una colisión de modos en la región en que se desarrolla la inestabilidad. Esto podría ser la firma del mecanismo de la inestabilidad.

siguiente. Es posible notar además que en la región de biestabilidad, para los modos tercero y quinto, la frecuencia en el estado de onda de gravedad supera en alrededor de un 1,5% a la del estado base, no pudiéndose detectar diferencia para los otros modos.

Capítulo 4

Análisis de Estabilidad Lineal

4.1. Estado Base y Planteamiento del Problema de Estabilidad

Con el fin de indagar en los mecanismos físicos a través de los cuales se produce esta bifurcación, se procede a estudiar la estabilidad lineal de la superficie. Para ello, como se muestra en la figura 4.1, se describe el sistema con coordenadas cilíndricas, donde a_* y a son los radios del cilindro interno y externo respectivamente, b es la profundidad del fluido en reposo, η_0 la superficie del fluido en el estado base que se perturbará y h , que será definido en forma explícita más adelante, es la altura a la que se encuentra el eje $z = 0$ medida desde el fondo del recipiente.

Como estado base se usará un flujo potencial con circulación Γ de la forma $\vec{v} = v_0 \hat{\theta}$, donde

$$v_0 = \vec{\nabla} \phi_0 \cdot \hat{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad (4.1)$$

y

$$\phi_0 = \frac{\Gamma \theta}{2\pi} \quad (4.2)$$

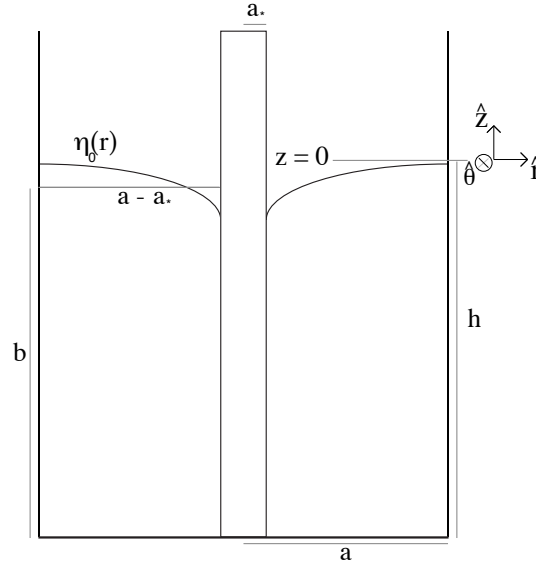


Figura 4.1: Definición de Variables

es el potencial de velocidad. Del inserto de la figura 1.4 B se puede desprender que, descontando la capa límite

$$\lim_{r \rightarrow a_*} v_0 \sim cU, \quad (4.3)$$

donde U es la velocidad de la superficie del eje y $c \approx 0,41$ para el caso de la figura citada. Luego, la circulación Γ debe corresponder a

$$\Gamma = (2\pi)^2 a_*^2 cF, \quad (4.4)$$

donde F es la frecuencia de rotación del eje.

A través de la ecuación de Bernoulli (1.9), o bien de la ecuación para flujo potencial (1.10) que es importante recordar

$$\partial_t \phi + \frac{v^2}{2} - \frac{p}{\rho} + gz = f(t), \quad (4.5)$$

se encuentra que esta velocidad (4.1) determina que la presión sea $p = \rho(gz + (\frac{\Gamma}{2\pi})^2 \frac{1}{2r^2}) + cte$. La forma de la superficie $\eta_0(r)$ queda determinada por el lugar

geométrico en que la presión es constante e igual a la presión atmosférica p_0 . Elijiendo la $f(t) = p_0$ y despejando $z = \eta_0(r)$ obtenemos la forma de la superficie

$$\eta_0 = -\frac{v_0^2}{2g} = -\left(\frac{\Gamma}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{2gr^2}, \quad (4.6)$$

la que coincide con la observada experimentalmente [1]. De esta manera, el eje $z = 0$ queda definido de forma tal que $\lim \eta_0 = 0$ cuando $r \rightarrow \infty$, y el valor de h que lo define en función de los parámetros físicos del problema se obtiene de la conservación del volumen entre el fluido en reposo (V_{rep}) y en el estado base (V_{base}). Esto es

$$V_{rep} = \pi b(a^2 - a_*^2) \quad (4.7)$$

$$V_{base} = \int_{a_*}^a \int_0^{2\pi} \int_{-h}^{\eta_0} r dz d\theta dr = \pi h(a^2 - a_*^2) - \frac{\Gamma^2}{4\pi g} \ln\left(\frac{a}{a_*}\right) \quad (4.8)$$

y al imponer $V_{rep} = V_{base}$ se obtiene explícitamente que

$$h = b + \frac{1}{g(a^2 - a_*^2)} \left(\frac{\Gamma}{2\pi}\right)^2 \ln\left(\frac{a}{a_*}\right), \quad (4.9)$$

con lo que queda completamente definido el estado base.

Además de la ecuación de Bernoulli, esta configuración satisface la condición cinemática (1.12) directamente al ser la velocidad paralela a la superficie. Esto también puede verificarse al hacer los reemplazos correspondientes en la citada condición

$$\partial_t \eta + \vec{v}_{\parallel}|_{\eta} \cdot \vec{\nabla} \eta = \vec{v}_{\perp}|_{\eta}. \quad (4.10)$$

En estas dos ecuaciones (4.5) y (4.10) se procede a realizar una perturbación sobre ϕ_0 y η_0 para determinar la estabilidad de la superficie. Explícitamente, se realiza el reemplazo

$$\eta_0 \longrightarrow \eta_0 + \eta \quad (4.11)$$

$$\phi_0 \longrightarrow \phi_0 + \phi \quad (4.12)$$

y, evaluando en $z = \eta_0$, se obtiene a primer orden el sistema

$$\partial_t \phi + \frac{v_0}{r} \partial_\theta \phi + g\eta = 0, \quad (4.13)$$

$$\partial_t \eta + \eta'_0 \partial_r \phi + \frac{v_0}{r} \partial_\theta \eta = \partial_z \phi. \quad (4.14)$$

De la ecuación (4.13) de este sistema puede despejarse η , que al ser reemplazado en la otra ecuación (4.14), entrega la que llamaremos condición de compatibilidad

$$\partial_t^2 \phi + \frac{2v_0}{r} \partial_{t\theta} \phi + \left(\frac{v_0}{r}\right)^2 (\partial_\theta^2 \phi - r \partial_r \phi) + g \partial_z \phi = 0, \quad (4.15)$$

que es válida en la superficie no perturbada $z = \eta_0$. Esta condición de borde es equivalente a (1.15), aquella a través de la cual entra la fuerza de gravedad.

Por otro lado, como se vio en la sección 1.2, el potencial de velocidades debe satisfacer la ecuación de Laplace $\vec{\nabla}^2 \phi = 0$ (1.14) en Taylor-Couette, cuya solución es (ver sección 1.3)

$$\phi = \sum_{m,n} \text{Re} \left(F_{mn}(t) e^{im\theta} W_m \left(\alpha'_{mn} \frac{r}{a} \right) \cosh \left(\alpha'_{mn} \frac{z+h}{a} \right) \right), \quad (4.16)$$

donde

$$W_m \left(\alpha'_{mn} \frac{r}{a} \right) = J_m \left(\alpha'_{mn} \frac{r}{a} \right) N'_m \left(\alpha'_{mn} \frac{a_*}{a} \right) - J'_m \left(\alpha'_{mn} \frac{a_*}{a} \right) N_m \left(\alpha'_{mn} \frac{r}{a} \right), \quad (4.17)$$

α'_{mn} la n -ésima solución de

$$J'_m(\alpha'_{mn}) N'_m \left(\alpha'_{mn} \frac{a_*}{a} \right) - J'_m \left(\alpha'_{mn} \frac{a_*}{a} \right) N'_m(\alpha'_{mn}) = 0, \quad (4.18)$$

J_m y N_m las funciones de Bessel y Neumann respectivamente y m un entero para respetar la monovaluación de ϕ (las perturbaciones no incrementarían la circulación).

Las funciones $F_{mn}(t)$ que tienen la dependencia temporal [ver (4.16)], deben ser tales que se satisfaga la condición de compatibilidad (4.15). Reemplazando en dicha

condición el ϕ obtenido y escribiendo el valor explícito de h de (4.9) se obtiene que

$$\sum_{m,n} \operatorname{Re} \left(\left[\left\{ \left[\ddot{F}_{mn} + \frac{im\Gamma}{\pi r^2} \dot{F}_{mn} - \left(\frac{\Gamma m}{2\pi r^2} \right)^2 F_{mn} \right] W_{mn} - \left(\frac{\Gamma}{2\pi} \right)^2 \frac{\alpha'_{mn}}{ar^3} F_{mn} W'_{mn} \right\} \cosh(\zeta) + \frac{\alpha'_{mn} g}{a} F_{mn} W_{mn} \sinh(\zeta) \right] e^{im\theta} \right) = 0, \quad (4.19)$$

donde

$$W_{mn}^{(j)} \equiv W_m^{(j)} \left(\alpha'_{mn} \frac{r}{a} \right), \quad (4.20)$$

$$\zeta \equiv \alpha'_{mn} \left[\beta - \left(\frac{\Gamma}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{a^3 g} \frac{1}{2\rho^2} \right], \quad (4.21)$$

$$\beta \equiv b_0 - \left(\frac{\Gamma}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{a^3 g} \frac{\ln(a_0)}{1 - a_0^2}, \quad (4.22)$$

y se han normalizado la profundidad en reposo $b_0 \equiv b/a$ y el radio interno $a_0 \equiv a_*/a$ con el radio externo.

Como las $e^{im\theta}$ son funciones de θ ortogonales para distintos m , la condición (4.19) debe satisfacerse por separado para cada término de la suma en m . Luego, para analizar la estabilidad de los modos normales de este sistema se hace el reemplazo

$$F_{mn} = A_{mn} e^{i\omega_m t}, \quad (4.23)$$

donde los valores de ω_m que admitan soluciones con algún $A_{mn} \neq 0$ serán las frecuencias propias de la superficie para un m dado. Haciendo el reemplazo correspondiente, usando la ortogonalidad en m y dividiendo por $e^{i\omega_m t}$, se obtiene que la condición es

$$\sum_n \operatorname{Re} \left(A_{mn} \left[\left\{ \left[-\omega_m^2 - \frac{m\Gamma\omega_m}{\pi r^2} - \left(\frac{\Gamma m}{2\pi r^2} \right)^2 \right] W_{mn} - \left(\frac{\Gamma}{2\pi} \right)^2 \frac{\alpha'_{mn}}{ar^3} W'_{mn} \right\} \cosh(\zeta) + \frac{\alpha'_{mn} g}{a} W_{mn} \sinh(\zeta) \right] \right) = 0 \quad (4.24)$$

Ahora se procede a adimensionalizar el problema haciendo los reemplazos

$$\rho = \frac{r}{a}, \quad (4.25)$$

$$\varepsilon = \frac{\Gamma}{2\pi\sqrt{a^3g}} \quad (4.26)$$

y, normalizando la frecuencia ω_m con $\omega_0 = \sqrt{g/a}$, el problema se traduce en encontrar las frecuencias normalizadas $\lambda_m = \omega_m/\omega_0$ con las que se satisface

$$\sum_n \operatorname{Re} \left(A_{mn} \left[\left\{ - \left[\lambda_m + \frac{m\varepsilon}{\rho^2} \right]^2 W_{mn} - \frac{\alpha'_{mn}\varepsilon^2}{\rho^3} W'_{mn} \right\} \cosh(\zeta) + \alpha'_{mn} W_{mn} \sinh(\zeta) \right] \right) = 0, \quad (4.27)$$

donde las notaciones definidas en (4.20), (4.21) y (4.22) ahora quedan como $W_{mn}^{(j)} = W_m^{(j)}(\alpha'_{mn}\rho)$, $\zeta = \alpha'_{mn}(\beta - \varepsilon^2/2\rho^2)$ y $\beta = b_0 - \varepsilon^2 \ln(a_0)/(1 - a_0^2)$.

Este problema se puede plantear en forma matricial como un problema cuadrático de valores propios, eliminando así la dependencia en la coordenada ρ . Para ello es necesario escribir esta serie en términos de una base de funciones ortogonales. La elección más directa en este caso es usar la ortogonalidad de las funciones de Bessel W_{mn} para distintos n [18], esto es

$$\int_{a_0}^1 W_m(\alpha'_{mn}\rho)\rho W_m(\alpha'_{mi}\rho) d\rho = \delta_{ni} N_n, \quad (4.28)$$

con

$$N_n = \frac{1}{2} \left[\left(\rho^2 - \frac{m^2}{\alpha'^2_{mn}} \right) W_m(\alpha'_{mn}\rho)^2 \right]_{a_0}^1. \quad (4.29)$$

Dada esta propiedad, una función $g(\rho)$ continua en el intervalo $[a_0, 1]$ puede descomponerse de la forma:

$$g(\rho) = \sum_n c_n W_m(\alpha'_{mn}\rho) \quad (4.30)$$

donde

$$c_n = \int_{a_0}^1 g(\rho) \rho W_m(\alpha'_{mn} \rho) d\rho / N_n. \quad (4.31)$$

En este caso hay una función $f(\rho)$ de la forma $f(\rho) \equiv \sum_n \text{Re}(A_n f_n(\rho))$, para la que se debe satisfacer $f(\rho) = 0$. Luego es directo de (4.30) y (4.31) que el problema es equivalente a

$$\sum_{i>1} W_m(\alpha'_{mi} \rho) \int_{a_0}^1 \sum_n \text{Re}(A_n f_n(\rho')) \rho' W_m(\alpha'_{mi} \rho') d\rho' / N_i = 0 \quad (4.32)$$

y, como las W_{mi} son ortogonales, cada integral se debe anular anular por separado, es decir, para todo $i > 0$ debe cumplirse que

$$\sum_n \text{Re} \left[A_n \int_{a_0}^1 f_n(\rho) \rho W_m(\alpha'_{mi} \rho) d\rho \right] = 0, \quad (4.33)$$

lo que se puede escribir directamente en forma matricial como $\text{Re}(\mathcal{M}\vec{a}) = 0$, donde \vec{a} es el vector compuesto por los $A_n = A_{mn}$ y el elemento de la fila i y columna n de la matriz de dimension infinita \mathcal{M} es:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{in} = & \int_{a_0}^1 \left[\left\{ - \left(\lambda_m + \frac{m\varepsilon}{\rho^2} \right)^2 W_{mn} - \frac{\varepsilon^2 \alpha'_{mn}}{\rho^3} W'_{mn} \right\} \cosh \left(\alpha'_{mn} \left[\beta - \frac{\varepsilon^2}{2\rho^2} \right] \right) \right. \\ & \left. + \alpha'_{mn} W_{mn} \sinh \left(\alpha'_{mn} \left[\beta - \frac{\varepsilon^2}{2\rho^2} \right] \right) \right] \rho W_{mi} d\rho. \end{aligned} \quad (4.34)$$

De esta forma el problema queda reducido a encontrar los valores de λ_m para los que existe solución de \vec{a} no nula, esto es, los λ_{mj} tales que $\det(\mathcal{M}) = 0$. Así queda explicitado el problema cuadrático de valores propios que determina la estabilidad lineal de la superficie en el estado base definido. Los λ_{mj} reales indicarán la presencia de modos oscilatorios que linealmente no tienden a crecer en el tiempo, sino que por el contrario se espera que decaigan por la acción de la viscosidad, la que no es considerada en este análisis. Por otro lado, la aparición de una parte imaginaria

negativa en alguno de los λ_{mj} implica que el modo asociado presenta linealmente un crecimiento exponencial. Cabe señalar que, al ser \mathcal{M} una matriz de coeficientes reales, las raíces del determinante serán reales o complejas conjugadas, por lo que basta que $Im(\lambda_{mj}) \neq 0$ para algún λ_{mj} para que exista un modo linealmente inestable.

4.2. Análisis numérico

Para proceder a hacer el cálculo de la matriz \mathcal{M} es necesario notar algunos aspectos. Obviando la imposibilidad de calcular en las infinitas dimensiones del problema, lo más inmediato es notar la presencia de funciones hiperbólicas en (4.34). La presencia del n -ésimo cero de W'_m , α'_{mn} , como factor común del argumento de dichas funciones, implica que el orden de magnitud de los elementos de la matriz crece exponencialmente de una columna a otra, por lo que atacar directamente el problema es numéricamente inmanejable. Esta dificultad se resuelve si se considera que todos los elementos de una misma columna multiplican al mismo A_{mn} . Como los A_{mn} son constantes por determinar, no hay impedimento en redefinir ese set de constantes para neutralizar ese crecimiento.

Para hacerlo apropiadamente debemos analizar cómo crece el orden de magnitud de los elementos a medida que crece α'_{mn} . Este crecimiento irá como

$$\mathcal{M}_{in} \sim e^{\alpha'_{mn}\beta} \int_{a_0}^1 e^{-\frac{\alpha'_{mn}\varepsilon^2}{2\rho^2}} d\rho \pm e^{-\alpha'_{mn}\beta} \int_{a_0}^1 e^{\frac{\alpha'_{mn}\varepsilon^2}{2\rho^2}} d\rho, \quad (4.35)$$

por lo que lo relevante es el límite de los términos a la derecha de (4.35) cuando $\alpha'_{mn} \rightarrow \infty$. Aplicando apropiadamente la regla de L'Hôpital se puede obtener que

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} e^{\alpha\beta} \int_{a_0}^1 e^{-\alpha \frac{\varepsilon^2}{2\rho^2}} d\rho = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{e^{\alpha(\beta - \varepsilon^2/2)}}{2\beta^2\alpha} = \begin{cases} 0 \sim e^{-\infty} & \text{si } \beta < \frac{\varepsilon^2}{2} \\ 0 \sim \frac{1}{\infty} & \text{si } \beta = \frac{\varepsilon^2}{2} \\ \infty \sim e^{\infty} & \text{si } \beta > \frac{\varepsilon^2}{2} \end{cases} \quad (4.36)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} e^{-\alpha\beta} \int_{a_0}^1 e^{\alpha \frac{\epsilon}{2\rho^2}} d\rho = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{e^{-\alpha(\beta - \frac{\epsilon^2}{2a_0^2})}}{2\beta^2\alpha} = \begin{cases} \infty \sim e^\infty & \text{si } \beta < \frac{\epsilon^2}{2a_0^2} \\ 0 \sim \frac{1}{\infty} & \text{si } \beta = \frac{\epsilon^2}{2a_0^2} \\ 0 \sim e^{-\infty} & \text{si } \beta > \frac{\epsilon^2}{2a_0^2} \end{cases} \quad (4.37)$$

Considerando (4.36) y (4.37), es claro que la redefinición de A_{mn} debe ser de la forma

$$B_{mn} \equiv 2A_{mn}e^{\alpha'_{mn}\gamma}. \quad (4.38)$$

con la elección apropiada de γ para que los $\mathcal{M}_{in} \rightarrow 0 \sim (\alpha'_{mn})^{-1}$ cuando n crece [ver (4.35), (4.36) y (4.37)], para así evitar también que los elementos se hagan cero muy rápidamente, lo que también es numéricamente problemático. Para determinar el valor de γ , se analiza la relación (4.35) multiplicada por el factor $e^{-\alpha'_{mn}\gamma}$ que aparece tras el reemplazo de A_{mn} (4.38), es decir, se busca el valor de γ que hace que

$$\mathcal{M}_{in} \sim e^{\alpha'_{mn}(\beta-\gamma)} \int_{a_0}^1 e^{-\frac{\alpha'_{mn}\epsilon^2}{2\rho^2}} d\rho \pm e^{-\alpha'_{mn}(\beta+\gamma)} \int_{a_0}^1 e^{\frac{\alpha'_{mn}\epsilon^2}{2\rho^2}} d\rho \quad (4.39)$$

tienda a 0 como $1/\alpha'_{mn}$ dados los límites (4.36) y (4.37). Para ello debe distinguirse los distintos casos definidos por la comparación entre $\frac{\epsilon^2}{2}$ ($< \frac{\epsilon^2}{2a_0^2}$), $\frac{\epsilon^2}{2a_0^2}$ y β . Analizando caso a caso se puede determinar que el valor de γ requerido está dado por

$$\gamma = \begin{cases} -\beta + \frac{\epsilon^2}{2a_0^2} & \text{si } \beta \leq \frac{\epsilon^2}{2} \\ \text{máx} \left\{ \frac{\epsilon^2}{2a_0^2} - \beta, \beta - \frac{\epsilon^2}{2} \right\} & \text{si } \frac{\epsilon^2}{2} < \beta < \frac{\epsilon^2}{2a_0^2} \\ \beta - \frac{\epsilon^2}{2} & \text{si } \frac{\epsilon^2}{2a_0^2} \leq \beta \end{cases} \quad (4.40)$$

Una vez hecha la normalización, se procede a evaluar numéricamente las integrales

$$I_{in}^{l\pm} = \int_{a_0}^1 W_{mn}\rho^l W_{mi} e^{\mp \alpha'_{mn} \frac{\epsilon^2}{2\rho^2}} d\rho \quad (4.41)$$

y

$$D_{in}^{\pm} = \int_{a_0}^1 \frac{\alpha'_{mn} W'_{mn} W_{mi} e^{\mp \alpha'_{mn} \frac{\epsilon^2}{2\rho^2}}}{\rho^2} d\rho \quad (4.42)$$

para $l = 1, -1, -3$ en (4.41). A partir de estas matrices de integrales se puede explorar la matriz \mathcal{M} para cualquier b_0 sin necesidad de integrar nuevamente. Descomponiendo $\mathcal{M} = \mathcal{Q}\lambda_m^2 + \mathcal{L}\lambda_m + \mathcal{C}$, usando (4.34), (4.38), (4.41) y (4.42) tenemos que

$$\mathcal{Q}_{in} = -e^{\alpha'_{mn}(\beta-\gamma)}I_{in}^{1+} - e^{-\alpha'_{mn}(\beta+\gamma)}I_{in}^{1-} \quad (4.43)$$

$$\mathcal{L}_{in} = -m\varepsilon \left(e^{\alpha'_{mn}(\beta-\gamma)}I_{in}^{-1+} + e^{-\alpha'_{mn}(\beta+\gamma)}I_{in}^{-1-} \right) \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{in} = & e^{\alpha'_{mn}(\beta-\gamma)}[\alpha'_{mn}I_{in}^{1+} - \varepsilon^2(m^2I_{in}^{-3+} + D_{in}^+)] \\ & - e^{-\alpha'_{mn}(\beta+\gamma)}[\alpha'_{mn}I_{in}^{1-} + \varepsilon^2(m^2I_{in}^{-3-} + D_{in}^-)]. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Hasta este punto todo el cálculo se realiza con el programa “Mathematica”. Las matrices \mathcal{Q} , \mathcal{L} y \mathcal{C} son luego analizadas con el programa “Matlab”, donde se hace uso de la función “polyeig” para determinar los valores propios de este problema.

4.3. Resultados numéricos

Debido a que la estructura involucrada en la bifurcación estudiada posee una dependencia azimutal del tipo $m = 1$, el análisis se concentra principalmente en los resultados para este valor de m . Se calculan las matrices con b_0 barriendo entre 0,4 y 3,5 con un paso de 0,1, además de 4, 5, 7, 10 y 15. Para ε refinando con pasos de hasta 0,001, dependiendo del rango y de la dimensión de matriz calculada. En la figura 4.2 se muestra el efecto de distintas dimensiones de matriz usadas en el cálculo. No se observa que el cálculo converja a medida que aumenta la dimensión de la matriz, además de registrarse un efecto asociado a la paridad de la matriz que determina los pares de frecuencias que colisionan (recordar que la colisión de 2 frecuencias implica la aparición de un par complejo conjugado que determina la inestabilidad del modo).

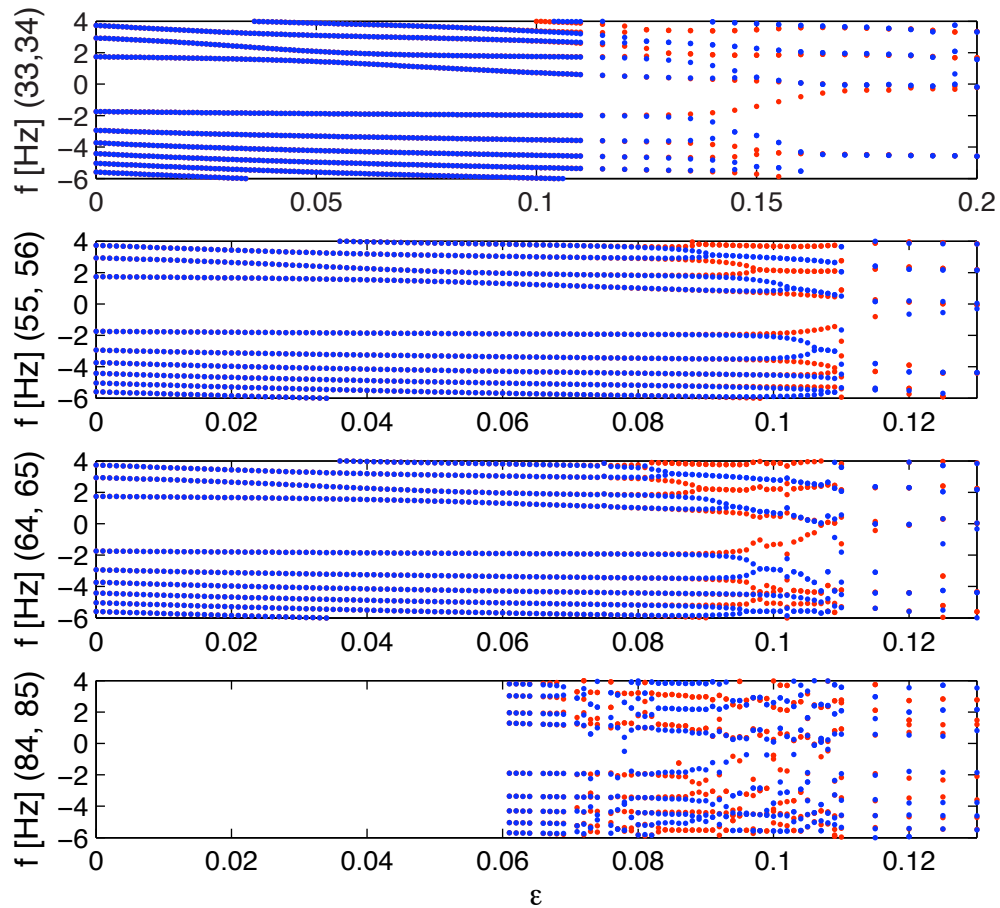


Figura 4.2: Dependencia en la dimensión de las matrices.

Se muestran las primeras frecuencias propias en función del parámetro ε para matrices de dimensión 33 y 34 (arriba), 55 y 56 (la que sigue), 64 y 65 y, en el extremo inferior, 84 y 85. Los puntos azules corresponden a las matrices de dimensión par. Las frecuencias negativas corresponden a modos que viajan en el mismo sentido que el flujo base. Se observa que a medida que se aumenta la dimensión de la matriz utilizada en el cálculo, en lugar de converger, el comportamiento se torna menos suave probablemente por la acumulación de errores numéricos. El distinto comportamiento que presentan los resultados para matrices de dimensión par e impar es otro indicador del mal comportamiento del cálculo en la zona en que se desarrollan las inestabilidades (zona de colisión de frecuencias).

Pese al mal comportamiento mostrado en la figura 4.2, se observa un comportamiento bien establecido para ε pequeño, como se muestra en la figura 4.3 al superponerse los modos en todo el rango previo al desarrollo de la colisión de las frecuencias.

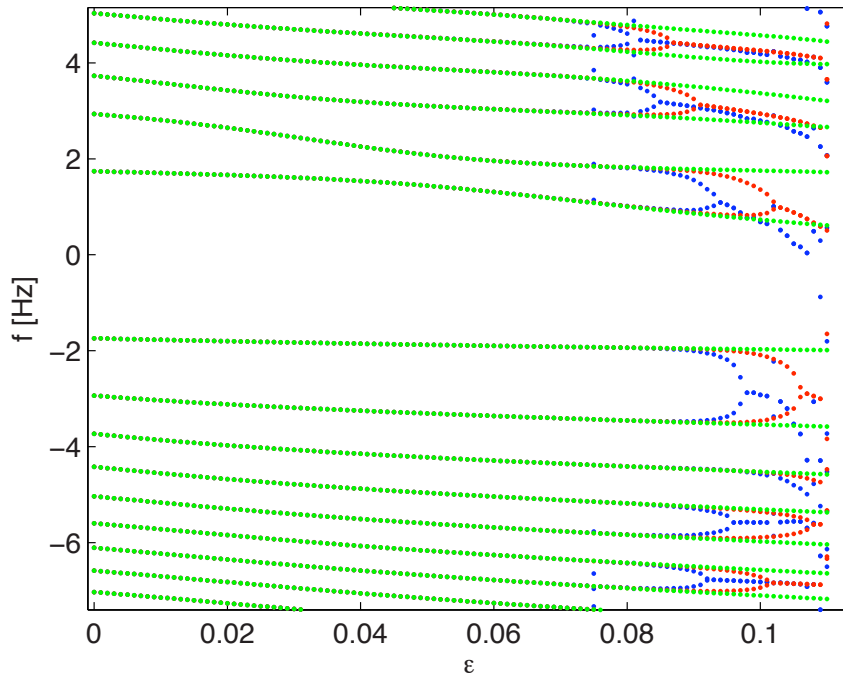


Figura 4.3: Comportamiento robusto para $\varepsilon \ll 1$.

Se muestran las frecuencias propias para las matrices de dimensión 34 (en verde), 56 (rojo) y 64 (azul). Se observa que para $\varepsilon \ll 1$ el comportamiento es independiente de la dimensión de la matriz.

Se calculan también las matrices para $m = 0, 2$ y 3 hasta dimensión 30 y para ε entre 0 y 0,15 con un paso de 0,002. Los resultados de estos cálculos para las frecuencias propias se muestran en la figura 4.4. Se observan algunos modos que se cruzan en un punto y pero que al seguir luego cada uno con sus trayectorias por separado, no indica una inestabilidad. Además se puede apreciar que la frecuencia fundamental del modo $m = 0$ experimenta una variación más leve que las demás, lo que se puede entender por el gradiente nulo que según θ posee la superficie para ese modo, disminuyendo el acoplamiento entre el flujo base azimutal y las perturbaciones asociadas a ese modo.

Para comparar la dependencia de los modos obtenida con este cálculo a la de-

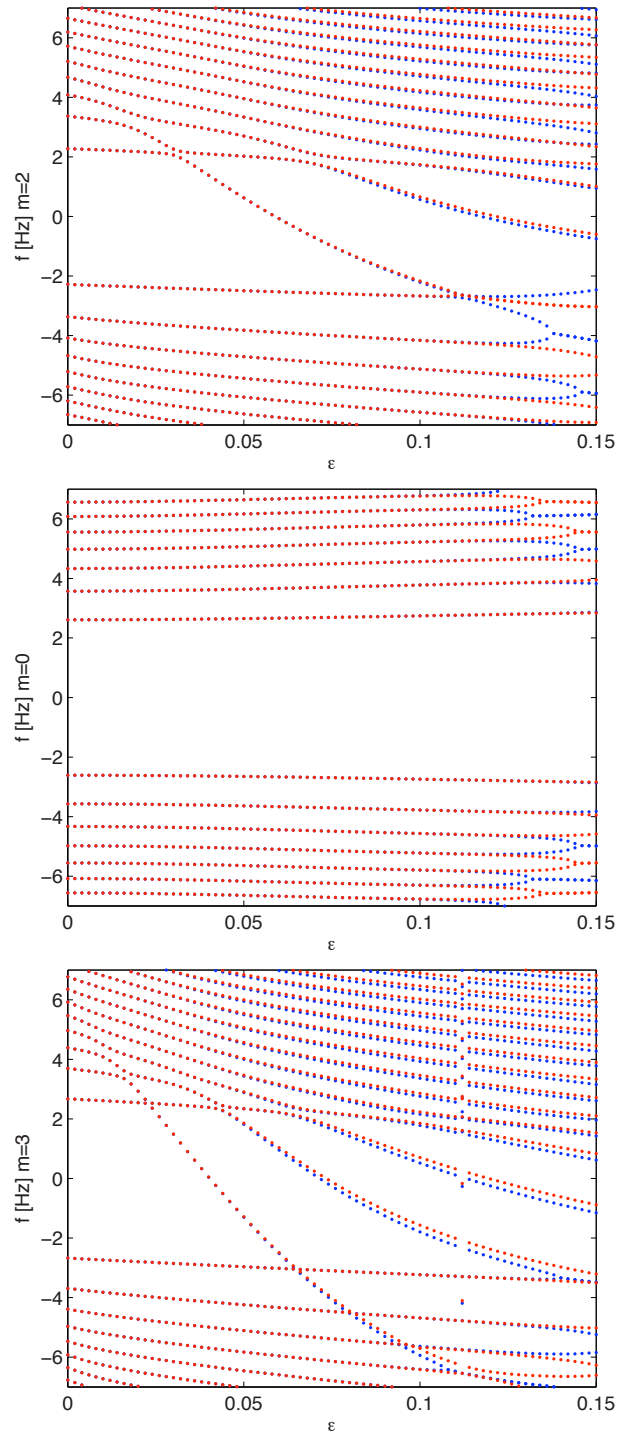


Figura 4.4: Evolucion de modos $m = 2, 3$ y 0 .

Los puntos rojos corresponden a resultados con matriz de 27×27 y los azules con matriz de 30×30 . En cada gráfico se indica el modo correspondiente.

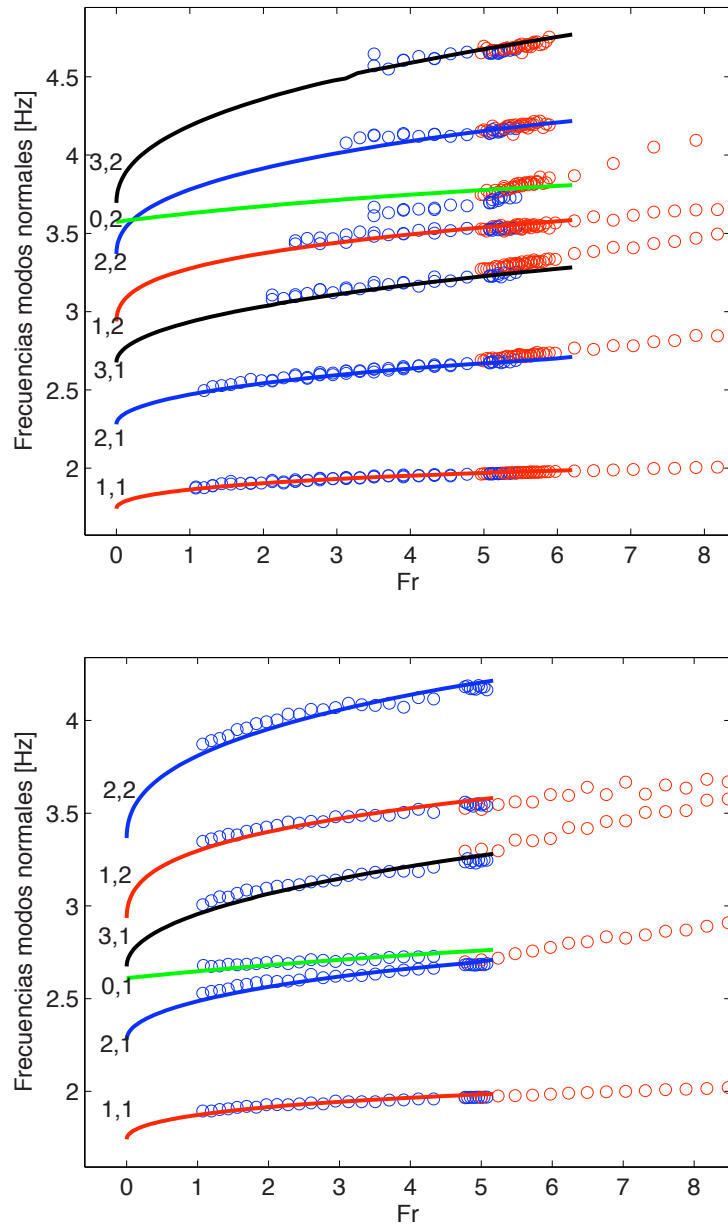


Figura 4.5: Ajuste de frecuencias calculadas a las medidas.

Se muestran (\circ azules) las medidas de las frecuencias de los modos fundamentales en el estado base en función de Fr , y en las líneas sólidas se muestran las frecuencias calculadas. La figura superior corresponde a $b/L = 2,6$ y la inferior a $3,4$. Junto a cada curva de frecuencia se señala el modo correspondiente según sus números m, n . Notar para el gráfico inferior la trayectoria de colisión entre los modos $2,1$ y $0, 1$. El comportamiento de esos modos es idéntico para $b/L = 2,6$, aunque para esa altura no se logra medir el modo $0, 1$. El valor de la constante de ajuste es $c = 2,34$ para $b/L = 2,6$ y $c = 2,56$ para $b/L = 3,4$.

pendencia experimental con Fr , es necesario considerar la relación entre ε y Fr . De la definición de ambos se obtiene que estos se deben ligar por la relación

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{4\pi^2} a_0^2 (1 - a_0) Fr, \quad (4.46)$$

donde c es la constante que liga la velocidad del eje con la velocidad media del flujo fuera de las capas límites (4.3). Esa constante se dejará como parámetro de ajuste para calzar la dependencia de las frecuencias medidas con las calculadas. El resultado del ajuste se aprecia en la figura 4.5, donde se puede apreciar una buena correspondencia entre las frecuencias medidas y las calculadas, permitiendo asignar las frecuencias medidas a los modos correspondientes de onda de gravedad. En función de la profundidad, las frecuencias calculadas convergen rápidamente al límite de profundidad infinita, tal como se espera de la dependencia en profundidad de la forma $\tanh(\alpha'_{mn} b/a)$ existente para las ondas de gravedad en reposo. En efecto, para el modo de convergencia mas lenta ($m, n = 1, 1$), la diferencia entre las frecuencias calculadas para ambas alturas esta acotada por $4,4 \times 10^{-4}$ Hz en todo el rango relevante de ε .

Con los resultados expuestos en la figura 4.5 se confirman fuertemente los indicios de que puede haber una colisión de modos en la región en que se desarrolla la inestabilidad, en particular, entre los modos $m, n = 0, 1$ y $m, n = 2, 1$. En este cálculo, estos modos no interactúan debido a que poseen distinto m . Sin embargo, es muy posible que estos modos si interactúen, ya sea linealmente debido a elementos no considerados (fluctuaciones turbulentas, viscosidad, capa límite, tensión superficial) o no linealmente a través de términos de orden superior a los considerados en este cálculo. Es por ello que esta colisión de frecuencias puede ser parte del mecanismo de la inestabilidad, aunque incluso en el caso en que se demuestre que estos modos colisionan provocando una pérdida de estabilidad, es necesario determinar cómo ello induce el crecimiento del modo $m, n = 1, 1$.

4.4. Expansión para $\varepsilon \ll 1$

Dado que tal como está planteado este problema se recuperan en buena forma las frecuencias de los modos normales para $\varepsilon \approx 0$, se procede a expandir en ε en torno a ese valor para intentar obtener y entender la variación de las frecuencias observada tanto experimental como numéricamente.

Dada la matriz \mathcal{M} definida en (4.34) y su descomposición como $\mathcal{M} = \mathcal{Q}\lambda_m^2 + \mathcal{L}\lambda_m + \mathcal{C}$ detallada en (4.43), (4.44) y (4.45), se tiene para ε pequeño que

$$\mathcal{Q}_{in} = -e_{+n}N_n\delta_{in} + \frac{\alpha'_{mn}\varepsilon^2}{2} \left[e_{-n}{}^1I_{in} - \left(e_{+n} + 4e^{-2\alpha'_{mn}b_0} \frac{\ln(a_0)}{1-a_0^2} \right) N_n\delta_{in} \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \quad (4.47)$$

$$\mathcal{L}_{in} = -\varepsilon m e_{+n}{}^1I_{in} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{in} = & e_{-n}\alpha'_{mn}N_n\delta_{in} + \varepsilon^2 \left[\frac{\alpha'^2_{mn}}{2} \left(e_{-n} - 4e^{-2\alpha'_{mn}b_0} \frac{\ln(a_0)}{1-a_0^2} \right) N_n\delta_{in} \right. \\ & \left. - \frac{\alpha'^2_{mn}}{2} e_{+n}{}^1I_{in} - m^2 e_{+n}{}^3I_{in} - \alpha'_{mn} e_{+n} D_{in} \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^4), \end{aligned} \quad (4.49)$$

donde

$$e_{\pm n} = 1 \pm e^{-2\alpha'_{mn}b_0}, \quad (4.50)$$

$${}^jI_{in} = \int_{a_0}^1 \frac{W_{mn}W_{mi}}{\rho^j} \quad (4.51)$$

para $j = 1, 3$ y

$$D_{in} = \int_{a_0}^1 \frac{W'_{mn}W_{mi}}{\rho^2}. \quad (4.52)$$

Recordando que se buscan las raíces del determinante de la matriz \mathcal{M} , es importante notar que todos los términos que sobreviven para $\varepsilon = 0$ están en la diagonal, caso en el que se obtiene que

$$\mathcal{M}_{in} = \lambda^2 \mathcal{Q}_{in} + \mathcal{C}_{in} = (-\lambda^2 e_{+n} + e_{-n} \alpha'_{mn}) N_n \delta_{in}, \quad (4.53)$$

y al buscar soluciones de $\det(\mathcal{M}) = 0$, se recuperan directamente las frecuencias al imponer que

$$\prod_n N_n(-\lambda^2 e_{+n} + e_{-n} \alpha'_{mn}) = 0 \quad (4.54)$$

y encontrar que

$$\lambda_n^2 = \frac{e_{-n}}{e_{+n}} \alpha'_{mn} = \alpha'_{mn} \tanh(\alpha'_{mn} b_0), \quad (4.55)$$

lo que, salvo por el factor de normalización $\omega_0^{-1} = \sqrt{a/g}$, corresponde a las frecuencias conocidas de los modos normales 1.25.

Con esto en consideración se hace más claro que al agregar el efecto de ε en el determinante, el término dominante vendrá dado por el producto de los elementos de la diagonal. Es importante notar que todas las otras permutaciones que intervienen en el determinante contendrán al menos 2 elementos fuera de la diagonal, por lo que el conjunto de esas permutaciones contribuirá sólo a partir del orden ε^2 . Entonces, para obtener la corrección de $\det(\mathcal{M})$ lineal en ε , basta considerar el producto de los elementos de la diagonal. Luego, si consideramos \mathcal{M} de dimensión d tendremos

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{M}) &= \prod_{j=1}^d (-\lambda^2 N_j e_{+j} + N_j e_{-j} \alpha'_{mj} - \varepsilon \lambda m e_{+j} {}^1I_j + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) \\ &\quad + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} &= \prod_{j=1}^d N_j (-\lambda^2 e_{+j} + e_{-j} \alpha'_{mj}) \\ &\quad - \varepsilon \sum_{i=1}^d \lambda m e_{+i} {}^1I_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^d N_j (-\lambda^2 e_{+j} + e_{-j} \alpha'_{mj}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (4.57)$$

donde se ha definido ${}^1I_i \equiv {}^1I_{ii}$ y se ha expandido a orden lineal el producto, usando

que

$$\begin{aligned}
& \prod_{i=1}^d (A_i + \epsilon B_i + \epsilon^2 C_i) - \mathcal{O}(\epsilon^4) = \\
& \prod_{i=1}^d A_i + \epsilon \sum_{j=1}^d B_j \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^d A_i + \epsilon^2 \left[\sum_{k=1}^d \sum_{j=k+1}^d B_k B_j \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j, k}}^d A_i + \sum_{j=1}^d C_j \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^d A_i \right] \\
& + \epsilon^3 \left[\sum_{k=1}^d \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^d B_k C_j \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j, k}}^d A_i + \sum_{l=1}^d \sum_{k=l+1}^d \sum_{j=k+1}^d B_j B_k B_l \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j, k, l}}^d A_i \right]. \quad (4.58)
\end{aligned}$$

Esta fórmula será utilizada con todos sus términos más adelante.

Es posible notar que en el producto que aparece en (4.56) está el determinante ya factorizado en factores hasta orden ϵ , cada uno de los cuales es un polinomio cuadrático en λ al que se le pueden encontrar las raíces fácilmente. Sin embargo, esa factorización corresponde a la de un polinomio de orden ϵ^d que no contiene el resto de los elementos del determinante a ese orden, por lo que las raíces en λ de esos polinomios cuadráticos no corresponden a soluciones del problema.

Para estudiar a orden ϵ las frecuencias propias de este problema, se deben considerar todos los términos hasta ese orden. Sin embargo, como se aprecia en (4.57), se obtiene un polinomio en λ que no se puede resolver analíticamente. Por esto es conveniente asirse del conocimiento de las frecuencias propias para $\epsilon = 0$ y estudiar la variación de las mismas, buscando una ecuación que determine esta variación. Para ello reescribimos λ de la forma

$$\lambda = \lambda_p + \delta_p, \quad (4.59)$$

donde

$$\lambda_p = \pm \sqrt{\frac{e_{-p}}{e_{+p}} \alpha'_{mp}} \quad (4.60)$$

corresponde a uno de los valores propios para el problema sin rotación ($\varepsilon = 0$). De esta manera, al expandir en δ_p se podrá obtener la condición $\det(\mathcal{M}) = 0$ en la forma de un polinomio en δ_p . Haciendo este reemplazo en el término constante de la expansión del determinante en (4.57) se tiene

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^d N_j(-\lambda^2 e_{+j} + e_{-j} \alpha'_{mj}) &= \prod_{j=1}^d N_j(e_{-j} \alpha'_{mj} - e_{+j} (\lambda_p + \delta_p)^2) = \\ &-N_p e_{+p} (2\lambda_p \delta_p + \delta_p^2) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^d N_j(e_{-j} \alpha'_{mj} - e_{+j} (\lambda_p^2 + 2\lambda_p \delta_p + \delta_p^2)), \end{aligned} \quad (4.61)$$

que al ser expandido hasta orden cúbico en δ_p haciendo uso de (4.58), resulta ser

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^d N_j(e_{-j} \alpha'_{mj} - e_{+j} (\lambda_p + \delta_p)^2) &= \\ &-2\delta_p e_{+p} \lambda_p N_p \Pi_{p|} - \delta_p^2 e_{+p} N_p \left\{ \Pi_{p|} - 4\lambda_p \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^d N_j e_{+j} \Pi_{p|j} \right\} \\ &+ \delta_p^3 e_{+p} N_p \left\{ 4\lambda_p \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^d e_{+j} N_j \Pi_{p|j} - 8\lambda_p^3 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^d \sum_{\substack{i=j+1 \\ i \neq p}}^d N_j N_i e_{+j} e_{+i} \Pi_{p|i_j} \right\}, \end{aligned} \quad (4.62)$$

donde se ha definido

$$\begin{aligned} \Pi_{p|i_1 \dots i_n} &\equiv \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq p, i_1, \dots, i_n}}^d N_j(e_{-j} \alpha'_{mj} - e_{+j} \lambda_p^2) \\ &= \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq p, i_1, \dots, i_n}}^d N_j e_{+j} (\lambda_j^2 - \lambda_p^2), \end{aligned} \quad (4.63)$$

definición que también es válida cuando el conjunto $i_1 \dots i_n$ es vacío.

Para los términos del determinante (4.57) lineales en ε , se puede hacer una

expansión similar en δ_p utilizando (4.58) y que

$$2 \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq p}}^d \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq p}}^d B_{ij} = \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq p}}^d \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p, i}}^d B_{ij} \quad \text{si } B_{ij} = B_{ji}. \quad (4.64)$$

Al hacerlo se obtiene que el término lineal es

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^d m e_{+i} \lambda^1 I_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^d N_j (-e_{+j} \lambda^2 + e_{-j} \alpha'_{mj}) = \\ & m e_{+p} \lambda_p^1 I_p \Pi_{p|} + \delta_p e_{+p} m \left[{}^1 I_p \Pi_{p|} - 2 \lambda_p^2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^d e_{+i} (N_i {}^1 I_p + N_p {}^1 I_i) \Pi_{p|i}^d \right] \\ & + \delta_p^2 m e_{+p} \left[-3 \lambda_p \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^d e_{+i} (N_i {}^1 I_p + N_p {}^1 I_i) \Pi_{p|i} \right. \\ & \left. + 2 \lambda_p^3 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^d \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i, p}}^d e_{+i} e_{+j} N_j (N_i {}^1 I_p + 2 N_p {}^1 I_i) \Pi_{p|ij} \right] \\ & + \delta_p^3 e_{+p} m \left\{ 4 \lambda_p^2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^d \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i, p}}^d e_{+i} e_{+j} N_j (N_i {}^1 I_p + 2 N_p {}^1 I_i) \Pi_{p|ij} \right. \\ & - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^d e_{+i} (N_i {}^1 I_p + N_p {}^1 I_i) \Pi_{p|i} \\ & - 8 \lambda_p^4 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^d \left[N_p \sum_{\substack{j=1 \\ k \neq p, i}}^d \sum_{\substack{k=j+1 \\ k \neq p, i}}^d e_{+i} e_{+j} e_{+k} N_j N_k {}^1 I_i \Pi_{p|ijk} \right. \\ & \left. \left. + {}^1 I_p \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq p}}^d \sum_{\substack{k=j+1 \\ k \neq p}}^d e_{+i} e_{+j} e_{+k} N_i N_j N_k \Pi_{p|ijk} \right] \right\}. \quad (4.65) \end{aligned}$$

La ecuación que se obtiene para δ_p correspondiente a $\det(\mathcal{M}) = 0$ puede simplificarse al dividirla por $e_{+p}\Pi_p$. Al hacerlo considerando su definición 4.63 ocurre que

$$\frac{\Pi_p|i_1\dots i_j}{\Pi_p} = \prod_{k=1}^j \frac{1}{N_{i_k} e_{+i_k} (\lambda_{i_k}^2 - \lambda_p^2)}, \quad (4.66)$$

que hasta el orden cúbico considerado es un producto de no más de 3 términos. Las dobles sumas pueden también simplificarse considerando que

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p, i}} f_i g_j = \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}} f_i \right) \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}} g_i \right) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}} f_i g_i, \quad (4.67)$$

lo que junto con usar 4.64, sirve también para simplificar la primera de las sumas triple. Para la otra suma triple se puede usar que

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^d \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq p}}^d \sum_{\substack{k=j+1 \\ k \neq p}}^d f_i f_j f_k = \frac{1}{6} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^d \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p, i}}^d \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p, i, j}}^d f_i f_j f_k \quad (4.68)$$

junto con que

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^d \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p, i}}^d \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p, i, j}}^d f_i f_j f_k = \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^d f_i \right)^3 - 3 \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^d f_i \right) \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^d f_i^2 \right) + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^d f_i^3 \quad (4.69)$$

para obtener finalmente que

$$\begin{aligned} \frac{\det \mathcal{M}}{e_{+p}\Pi_p} = & \varepsilon m \lambda_p {}^1I_p + \delta_p \{ -2\lambda_p N_p - \varepsilon m [{}^1I_p - 2\lambda_p^2 ({}^1I_p S_1 + N_p R_1)] \} + \\ & \delta_p^2 \{ -N_p + 4\lambda_p^2 N_p S_1 + \varepsilon m [3\lambda_p ({}^1I_p S_1 + N_p R_1) \\ & - 2\lambda_p^3 ({}^1I_p (S_1^2 - S_2) + 2N_p (R_1 S_1 - R_2))] \} + \\ & \delta_p^3 \left\{ N_p [4\lambda_p S_1 - 4\lambda_p^3 (S_1^2 - S_2)] + \varepsilon m \left[{}^1I_p S_1 + N_p R_1 \right. \right. \\ & - 4\lambda_p^2 ({}^1I_p (S_1^2 - S_2) + 2N_p (R_1 S_1 - R_2)) \\ & + 4\lambda_p^4 \left\{ N_p (R_1 (S_1^2 - S_2) - 2(R_2 S_1 - R_3)) \right. \\ & \left. \left. + \frac{{}^1I_p}{3} (S_1^3 - 3S_1 S_2 + 2S_3) \right\} \right] \right\}, \quad (4.70) \end{aligned}$$

donde

$$S_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^d \frac{1}{(\lambda_i^2 - \lambda_p^2)^j} \quad (4.71)$$

y

$$R_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^d \frac{{}^1I_i}{N_i(\lambda_i^2 - \lambda_p^2)^j} \quad (4.72)$$

Es importante recordar que

$$\frac{1}{\lambda_i^2 - \lambda_p^2} = \frac{1}{\alpha'_{mi} \tanh(\alpha'_{mi} b_0) - \alpha'_{mp} \tanh(\alpha'_{mp} b_0)} \quad (4.73)$$

y que cuando $i \rightarrow \infty$, $\alpha'_{mp} \rightarrow \infty$ linealmente con i , por lo que al tomar el límite cuando $d \rightarrow \infty$ la serie S_1 (y probablemente también R_1 , dependiendo del comportamiento de ${}^1I_i/N_i$ cuando $i \rightarrow \infty$) diverge en forma logarítmica.

Considerando esto último, no parecen extrañas las dificultades encontradas para determinar el valor de las frecuencias a partir de un cierto valor de ε , así como tampoco sorprende el mal comportamiento de los resultados obtenidos cuando la dimensión de las matrices se torna muy grande (ver figura 4.2).

De esta manera, además de la importancia de controlar los errores numéricos (lo que no fue hecho), se hace imperiosa la necesidad de agregar algún otro elemento en el cálculo que elimine los modos de mayor número de onda. La justificación física para la eliminación de esos modos radica tanto en la viscosidad como en la capilaridad, las que adquieren mayor preponderancia para a medida que incrementa el número de onda. Por otro lado, para dar cuenta de la influencia de la altura de mejor manera es necesario agregar una componente radial y axial en el flujo. Otro camino posible puede considerar la capa límite. Todos estos son elementos ajenos a este cálculo que, al ser considerados, podrían mejorar el comportamiento del mismo.

Capítulo 5

Conclusiones

En cuanto al trabajo realizado en esta tesis, el primer resultado obtenido que se puede mencionar es la determinación del número de Froude como el parámetro crítico de la bifurcación estudiada.

Adicionalmente, se ha medido la frecuencia de algunos modos de onda de gravedad de la superficie, obteniéndose su dependencia con la velocidad del flujo para un cierto rango. Se ha desarrollado también una formulación que permite obtener esta dependencia en forma aproximada para el estado base.

La dependencia obtenida brinda una sugerencia respecto de cual puede ser el mecanismo de inestabilidad del estado base. En efecto, hay indicios, tanto experimentales como teóricos, de que se produce una colisión de frecuencias en la región en que se produce la transición. Es probable que esta colisión de frecuencias desestabilice el estado base provocando la transición al estado de onda de gravedad. No obstante, no hay claridad sobre la interacción entre esos modos. En el análisis de estabilidad lineal realizado, estos modos no interactúan debido a que están asociados a un distinto modo azimutal m . A pesar de ello, dichos modos podrían interactuar no linealmente a través de términos de orden mayor al considerado, o bien, en forma

lineal debido a factores no considerados en el cálculo. Evidentemente hay aspectos importantes que por explicar si se desea justificar este mecanismo. Uno de ellos es la dependencia en la profundidad de la transición, dependencia que no se observa ni en las frecuencias propias medidas ni en las calculadas. También está el hecho de que los modos que colisionan lo hacen a una frecuencia distinta a la de la transición. Ambas cosas deberían ser explicadas si este es el mecanismo.

El cálculo se realizó con la intención de determinar la estabilidad lineal de la superficie. Sin embargo, aunque el desarrollo resultó apropiado para la descripción de las frecuencias propias de la superficie, no fue posible determinar la estabilidad lineal de los modos. Esto puede ser debido a diversos factores. Uno de ellos es la falta de algún elemento que restrinja la cantidad de modos, más aún si se considera que la expansión en torno al fluido quieto mostró que, incluso a primer orden, hay divergencias en el problema si se consideran infinitos modos. Otro aspecto relevante es que el cálculo no considera elementos disipativos, lo que constituye una dificultad fundamental del planteamiento realizado, debido a que un flujo potencial no es compatible con los efectos de la viscosidad. Por ello podría resultar más factible agregar el efecto de la tensión superficial. Alternativamente se podría intentar considerar el efecto de la capa límite.

Por otro lado, se han obtenido diagramas de bifurcación de las medidas realizadas. Con ellos se puede orientar la búsqueda de una ecuación de amplitud que describa el fenómeno. En ese contexto resulta clave la comparación con los datos preexistentes en [1], ya que ahora se tiene mucho más certeza en cuanto al parámetro apropiado para la descripción.

Respecto de la influencia del ruido en la bifurcación, su relevancia ha quedado de manifiesto al afectar la reproducibilidad de algunos resultados. En efecto, en este montaje (salvo probablemente al inicio de la etapa de rodaje) se tiene una zona de

biestabilidad mucho menor que en [1], lo que es consistente con que un mayor nivel de fluctuaciones saque al sistema del estado base con mayor probabilidad, desplazando la curva del diagrama de bifurcación. Asimismo, los efectos del desgaste del montaje son también consistentes con el aumento en la intensidad del ruido.

Al hablar de ruido se involucra tanto a las fluctuaciones turbulentas inherentes al flujo como a las vibraciones mecánicas e imperfecciones del montaje que, aunque se desean minimizar, están siempre presentes. Las vibraciones e imperfecciones del montaje claramente influirán en las fluctuaciones turbulentas, por lo que ambas están ligadas. Por ello, parece razonable pensar que es el ruido asociado a las fluctuaciones turbulentas el responsable de las diferencias en la probabilidad de transición registradas, y que esas diferencias tienen su raíz en el desgaste del montaje. Sin embargo, al no haberse podido controlar las imperfecciones del montaje ni caracterizar las fluctuaciones turbulentas, no se puede tener certeza absoluta en cuanto al rol de la turbulencia. De igual manera, al comparar los resultados aquí obtenidos y los de [1], no parece muy arriesgado aventurar que las fluctuaciones turbulentas no afectan demasiado la saturación de la onda de gravedad, sino que más bien influyen en la probabilidad de transición en la zona de biestabilidad.

Se hace importante recalcar que para tener reproducibilidad es necesario un montaje más robusto. Para ello es esencial la precisión en la forma y posición del eje. Sólo una vez obtenido aquello se podrá pretender modificar el ruido de forma controlada para determinar claramente sus efectos.

En relación a la dependencia en el nivel de agua de la transición, con este montaje se han determinado valores críticos para dos profundidades de agua diferentes. Estos valores se presentan en el cuadro 5.1 junto con los encontrados en [1]. En él, Fr_c^- denota el mínimo valor de Fr para el que el estado de onda de gravedad, una vez establecido, se puede mantener sin decaer al estado base por al menos 5 minutos. El

valor de Fr_m (no medido en [1]) pretende determinar el mínimo valor necesario que haga posible la transición desde el estado base hacia el estado de onda de gravedad de modo $m = 1$; su determinación se hizo a partir de ejecuciones con tiempos de espera de ocho horas. El valor de Fr_c^+ se define como el mínimo valor para el que ocurrirá la transición con certeza tras una espera de 24 minutos. Como bien se ha explicado, todos estos valores, especialmente Fr_c^+ , son susceptibles a la influencia del ruido de una manera aún desconocida.

b/L	Fr_c^-	Fr_m	Fr_c^+
1,8 [1]	$6,0 \pm 0,1$	×	$9,8 \pm 0,7$
2,2 [1]	$5,6 \pm 0,1$	×	$9,2 \pm 0,6$
2,6 [1]	$5,0 \pm 0,1$	×	$8,9 \pm 0,2$
2,6	$4,82 \pm 0,02$	$5,00 \pm 0,01$	$5,48 \pm 0,01$
3,4	$4,31 \pm 0,02$	$4,46 \pm 0,02$	$5,08 \pm 0,02$

Cuadro 5.1: Valores Críticos de Froude.

Hay una disminución no despreciable de los valores críticos al aumentarse la profundidad del fluido. La cantidad de profundidades exploradas no permite sacar demasiadas conclusiones, más aún si se considera que hay diferencias considerables entre ambos montajes. A pesar de ello se puede considerar el hecho de que la transición depende de la profundidad en un rango en que los modos de ondas de gravedad no dependen de ella. Esto pone de manifiesto la posible relevancia del flujo tridimensional en el volumen, dado que la dependencia en la profundidad está probablemente ligada a la componente radial y axial del flujo. Este es un aspecto interesante para investigaciones futuras.

Bibliografía

- [1] N. Mujica y D. Lathrop. 2006. Hysteretic Gravity-Wave Bifurcation in a Highly Turbulent Swirling Flow. *J. Fluid Mech.* 551, 49-62.
- [2] L. D. Landau y E. M. Lifshitz. 1987. *Fluid Mechanics*. 2^a ed. Butterworth Heinemann. 539p.
- [3] G. K. Batchelor. 1970. *An Introduction to Fluid Dynamics*. 2^a ed. Londres. Cambridge University Press. 615p.
- [4] A. Mallock. 1888. Determination of the viscosity of water. *Proc. R. Soc. Lond.* A 45, 126.
- [5] A. Mallock. 1896. Experiments on fluid viscosity. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* A 187, 41.
- [6] M. Couette. 1890. Études sur le frottement des liquides. *Ann. Chim. Phys.* 21, 433.
- [7] G. I. Taylor. 1923. Stability of a Viscous Liquid contained between Two Rotating Cylinders. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* A 223, 289.
- [8] C. D. Andereck, S. S. Liu y H. L. Swinney. 1986. Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders, *J. Fluid Mech.* 164, 155.

- [9] D. Coles. 1965. Transition in circular Couette flow. *J. Fluid Mech.* 21, 385.
- [10] A. Prigent, G. Grgoire, H. Chat y O. Dauchot. 2003. Long-wavelength modulation of turbulent shear flows, *Physica D* 174: 100-113.
- [11] U. Frisch. 1995. *Turbulence - The Legacy of A.N. Kolmogorov*. Cambridge University Press.
- [12] F. Ravelet, L. Marié, A. Chiffaudel y F. Daviaud. 2004. Multistability and memory effect in a highly turbulent flow: evidence for a global bifurcation, *Phys. Rev. Lett.*, 93, 164501.
- [13] S. Fauve y F. Pétrélis, 2003. The dynamo effect. In *Peyresq Lectures on Non-linear Phenomena, Vol. II* (ed. J.-A. Sepulchre) pp. 1-64. World Scientific.
- [14] D. R. Sisan et al. 2004. Experimental observation and characterization of the magnetorotational instability, *Phys. Rev. Lett.*, 93, 114502.
- [15] G. Agez, M. G. Clerc, E. Louvergneaux y R. Rojas. 2007. Supercritical and subcritical bifurcation in presence of noise. Preprint.
- [16] G. Agez, M. G. Clerc y E. Louvergneaux. Universal shape law of stochastic supercritical bifurcations: Theory and experiments. arXiv:nlin/0702057v1 [nlin.PS]
- [17] E. W. Lemmon, M. O. Mc Linden y D. G. Friend. *Thermophysical Properties of Fluid Systems*. NIST Chemistry WebBook, editado por P. J. Linstrom y W. G. Mallard, NIST Standard Reference Database No. 69, 2001, National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD 20899.
- [18] J. Mathews, R.L. Walker. 1970. *Mathematical methods of physics*. 2^a ed. Redwood City, California. Addison-Wesley. 501p.