



**UNIVERSIDAD DE CHILE**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS**

**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE MINAS**

**COMPARACIÓN DE MODELOS PARA LA SIMULACIÓN  
CONDICIONAL DE LEYES DE BLOQUES**

**MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL DE MINAS**

**RODRIGO EDUARDO ZÚÑIGA RAMÍREZ**

**PROFESOR GUÍA:**

**XAVIER EMERY**

**MIEMBROS DE LA COMISIÓN:**

**JULIÁN ORTIZ CABRERA**

**EDUARDO MAGRI VARELA**

**SANTIAGO DE CHILE**

**ABRIL 2009**

## **RESUMEN.**

En la industria minera, las simulaciones geoestadísticas se utilizan para cuantificar la incertidumbre en las leyes de mineral y predecir los recursos recuperables sobre una determinada ley de corte. Para estos efectos, uno de los modelos más utilizados es el modelo multigaussiano, el cual permite simular las leyes de un material de interés a soporte puntual, para luego rebloquear los valores puntuales y construir un modelo de leyes a tamaño de bloques.

En este trabajo, se propone estudiar el modelo gaussiano discreto, que permite realizar directamente las simulaciones a tamaño de bloques sin pasar por simulaciones puntuales, con los beneficios en tiempos de cálculo que esto significa, pero también con algunas aproximaciones en las que incurre con respecto al modelo multigaussiano.

La primera parte del trabajo apunta a establecer las condiciones bajo las cuales el modelo gaussiano discreto entrega resultados similares al modelo multigaussiano. Así, se realiza un estudio de sensibilidad al variograma, que modela la variabilidad espacial de la ley, así como al tamaño de los bloques a utilizar en el modelo, a la cantidad de datos condicionantes y a la asimetría que presente el histograma de estos.

En la segunda parte del trabajo, se aplica el modelo multigaussiano y el gaussiano discreto a dos bases de datos de leyes reales con distintas características, con el objetivo de evaluar en la práctica los resultados de estos modelos. En particular, se compara las estimaciones de recursos mediante curvas tonelaje-ley y las medidas de incertidumbre asociadas a cada estimación.

Los resultados obtenidos indican que, con una base de datos con un histograma de asimetría leve o moderada, el modelo gaussiano discreto aproxima de buena forma al modelo multigaussiano, observándose distribuciones de leyes simuladas y curvas tonelaje-ley prácticamente idénticas, además de medidas de incertidumbre similares. Sin embargo, al aplicar el modelo gaussiano discreto en una base de datos con un histograma de asimetría considerable, la similitud de resultados con el modelo multigaussiano se pierde: se observa diferencias importantes en la estimación de recursos recuperables, especialmente en las leyes medias obtenidas para distintas leyes de corte, y en las medidas de incertidumbre obtenidas con cada modelo.

Las conclusiones de este trabajo indican que aplicar el modelo gaussiano discreto a datos con un histograma muy asimétrico no es recomendable. En estos casos, el modelo gaussiano discreto tiende a sobrestimar la cola de altas leyes en el histograma de frecuencias de leyes simuladas, y además presenta diferencias importantes en las frecuencias de leyes menores, todo esto en comparación al modelo multigaussiano. Sin embargo, con una base de datos de histograma con asimetría leve o moderada, el modelo gaussiano discreto es perfectamente aplicable, además de requerir tiempos de cálculo considerablemente menores.

## **ABSTRACT.**

In the mining industry, geostatistical simulations are used to quantify the uncertainty in the mineral grades and to predict the recoverable resources above given cut-off grades. One of the most used models is the multigaussian model, which allows to simulate the grade of a material at a point support, and then to get the average of the punctual values and build a block grade model by averaging them.

This work proposes to study the so-called discrete gaussian model, which allows to directly simulate block grades without going through point support simulations, with a gain in computing time, but also with approximations, as compared to the multigaussian model.

The first part of the work tries to establish under which conditions the discrete gaussian model gets similar results to the multigaussian model. Thus, a sensitivity study to the variogram, which models the spatial variability of grades, as well as to the block size, to the amount of conditioning data and to skewness of these data is realized.

In the second part of the work, the multigaussian and discrete gaussian models are applied to two real databases with different characteristics, in order to evaluate in practice the results of these models. Especially the grade-tonnage curves and the measures of uncertainty associated with each estimation are compared.

The results indicate that, with a database with a moderately skewed histogram, the discrete gaussian model properly approximates the multigaussian model, obtaining virtually identical grade distributions, grade-tonnage curves and measures of uncertainty. However, when the discrete gaussian model is implemented with a database with a highly skewed histogram, the results of both models become very dissimilar. There are significant differences in the estimation of recoverable resources, especially in the mean grade above different cut-off grades, and in the measures of uncertainty.

The conclusions of this study indicate that applying the discrete gaussian model to data with a highly skewed histogram is not advisable. In these cases, the discrete gaussian model tends to overestimate the upper tail of grades in the histogram of simulated grades, and also presents significant differences in the frequencies of lower grades, in comparison to the multigaussian model. However, with a database showing a moderately skewed histogram, the discrete gaussian model is perfectly applicable, requiring significantly less computation time.

## **Agradecimientos.**

Gracias a mi familia y en especial a mis padres, por el apoyo y la paciencia durante estos años de estudio, y durante toda una vida.

Gracias a ti Jessica, mi compañera durante estos últimos tres años. Por tu amor, apoyo y comprensión. He sido muy feliz contigo este tiempo.

Un agradecimiento a los profesores del área de Evaluación de Yacimientos. A los profesores Julián Ortiz y Eduardo Magri por las observaciones y correcciones hechas a este trabajo. Y en especial al profesor Xavier Emery, quién ha sido un gran profesor guía.

Gracias a todos mis amigos de la facultad, ya ingenieros varios, quienes me acompañaron en los momentos más difíciles de esta historia universitaria. Y a mis amigos de la carrera de ingeniería de minas, quienes juntos nos hemos formado como futuros profesionales.

Agradecimientos a Fondecyt por el financiamiento de este trabajo mediante el proyecto 1061103, y a Codelco por patrocinar la cátedra de Evaluación de Yacimientos.



# INDICE DE CONTENIDOS.

1 INTRODUCCIÓN.....	11
1.1 Objetivos.....	12
1.1.1 Objetivo General. ....	12
1.1.2 Objetivos Específicos. ....	12
1.2 Alcances.....	13
1.2.1 Etapas del trabajo. ....	13
1.2.2 Bases de datos.....	13
1.2.3 Alcances Generales. ....	14
2 ANTECEDENTES.....	15
2.1 Antecedentes Generales.....	15
2.1.1 Estudio Exploratorio de Datos.....	16
2.1.2 Estudio Variográfico. ....	16
2.1.3 Estimación Local. ....	17
2.1.4 Simulaciones.....	17
2.2 Modelos de Incertidumbre a Soporte Puntual. ....	18
2.2.1 Modelo Multigaussiano. ....	19
2.3 Modelos con cambio de soporte. ....	20
2.3.1 Modelo Gaussiano Discreto para estimación global. ....	21
2.3.2 Modelo Gaussiano Discreto para estimación local. ....	24
2.4 Algoritmos de simulación.....	25
2.5 Cálculo de recursos recuperables. ....	26
3 DESCRIPCIÓN DE IMPLEMENTACIÓN DE MODELOS.....	27
3.1 Descripción Estudio Conceptual. ....	27
3.2 Descripción Casos de Estudio. ....	30
4 METODOLOGÍA PRÁCTICA.....	32
4.1 Metodología Estudio Conceptual. ....	32
4.2 Metodología Casos de Estudio. ....	36

5 RESULTADOS ESTUDIO CONCEPTUAL.....	38
5.1. Configuración 1: Sin datos condicionantes. ....	38
5.1.1 Alcance de variograma. ....	38
5.1.2 Efecto Pepa de variograma. ....	39
5.1.3 Desviación Estándar Logarítmica.....	41
5.1.4 Tamaño de bloques.....	42
5.2 Configuración 2: 15 datos condicionantes.....	43
5.2.1 Alcance de variograma. ....	43
5.2.2 Efecto Pepa de variograma. ....	44
5.2.3 Desviación Estándar Logarítmica.....	46
5.2.4 Tamaño de bloques.....	47
5.3 Configuración 3: 40 datos condicionantes.....	48
5.3.1 Alcance de variograma. ....	48
5.3.2 Efecto Pepa de variograma. ....	49
5.3.3 Desviación Estándar Logarítmica.....	51
5.3.4 Tamaño de bloques.....	52
5.4 Configuración 4: sondaje cruzando al bloque (15 datos). ....	53
5.4.1 Alcance de variograma. ....	53
5.4.2 Efecto Pepa de variograma. ....	54
5.4.3 Desviación Estándar Logarítmica.....	56
5.4.4 Tamaño de bloques.....	57
5.5 Resumen de gráficos.....	58
5.5 Resumen de estudio conceptual.....	61
6. RESULTADOS CASOS DE ESTUDIO.....	63
6.1 Resultados Don Luis.....	63
6.1.1 Resultados preliminares.....	63
6.1.2 Curvas tonelaje-ley.....	65
6.1.3 Varianzas condicionales. ....	68

6.1.4 Intervalos de probabilidad.....	69
6.1.5 Tiempos de cálculos.....	70
6.2 Resultados Radomiro Tomic.....	71
6.2.1 Resultados preliminares.....	71
6.2.2 Curvas tonelaje-ley.....	72
6.2.3 Varianzas condicionales.....	77
6.2.4 Intervalos de probabilidad.....	78
6.2.5 Tiempos de cálculo.....	79
6.2.6 Comentarios finales.....	80
7 CONCLUSIONES.....	81
7.1 Conclusiones estudio conceptual.....	81
7.2 Conclusiones casos de estudio.....	83
7.3 Conclusiones generales.....	85
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	87
ANEXOS.....	88
ANEXO A. “Detalle de configuración de sondajes”.....	89
ANEXO B. “Detalle de resultados estudio conceptual”.....	91
B1. Configuración 1: Sin datos condicionantes.....	91
B2. Configuración 2: 15 datos condicionantes.....	98
B3. Configuración 3: 40 datos condicionantes.....	105
B4. Configuración 4: Sondaje cruzando al bloque (15 datos).....	112
ANEXO C: “Trabajo previo Don Luis”.....	119
ANEXO D: “Trabajo previo Radomiro Tomic”.....	127
ANEXO E: “Mapas y vistas 2D de bases de datos”.....	135
ANEXO F: “Gráficos resumen de estudio conceptual”.....	137

## INDICE DE TABLAS.

Tabla 1: Descripción de etapas MMG.....	28
Tabla 2: Descripción de etapas MGD en estudio conceptual.....	29
Tabla 3: Descripción de etapas MGD en casos de estudio.....	31
Tabla 4: Valores de cada parámetro en estudio.....	34
Tabla 5: Estadísticas básicas de ley de bloque esperada (Don Luis). ....	64
Tabla 6: Detalle de curvas tonelaje-ley de corte Don Luis.....	67
Tabla 7: Detalle de curvas ley media-ley de corte Don Luis.....	67
Tabla 8: Detalle de curvas finos-ley de corte Don Luis. ....	68
Tabla 9: Tiempos de cálculo Don Luis.....	70
Tabla 10: Estadísticas básicas de variable ley de bloque Radomiro Tomic.....	71
Tabla 11: Detalle de curvas tonelaje-ley de corte Radomiro Tomic. ....	75
Tabla 12: Detalle de curvas ley media-ley de corte Radomiro Tomic. ....	76
Tabla 13: Detalle de curvas finos-ley de corte Radomiro Tomic.....	76
Tabla 14: Tiempos de cálculos Radomiro Tomic.....	79
Tabla 15: Coordenadas de 40 datos en 3 sondajes. ....	89
Tabla 16: Coordenadas de 15 datos en 1 sondaje.....	89
Tabla 17: Coordenadas de 1 sondaje cruzando el bloque.....	90
Tabla 18: Estadísticas básicas de datos originales Don Luis.....	119
Tabla 19: Estadísticas básicas de datos gaussianos Don Luis. ....	119
Tabla 20: Parámetros de cálculo de mapas variográficos Don Luis.....	122
Tabla 21: Estadísticas básicas de datos originales Radomiro Tomic. ....	127
Tabla 22: Estadísticas básicas de datos gaussianos Radomiro Tomic.....	127
Tabla 23: Parámetros de cálculo de mapas variográficos Radomiro Tomic. ....	130

## INDICE DE FIGURAS.

Figura 1: Histogramas de leyes para ambas bases de datos reales. ....	14
Figura 2: Ejemplo de variograma experimental. ....	16
Figura 3: Determinación de función de transformación (anamorfosis).....	19
Figura 4: Esquema explicativo de hipótesis de modelo gaussiano discreto. ....	22
Figura 5: Determinación de coeficiente de cambio de soporte $r$ . ....	23
Figura 6: Tipos de algoritmos de simulación. ....	25
Figura 7: Esquema explicativo de implementación de MMG. ....	27
Figura 8: Esquema explicativo de implementación de MGD.....	28
Figura 9: Esquema explicativo de implementación de MGD en casos de estudio. ....	30
Figura 10: Forma de histograma asociado a caso base.....	33
Figura 11: Gráficos de alcance de variograma Configuración 1. ....	38
Figura 12: Gráficos de efecto pepa Configuración 1.....	39
Figura 13: Gráficos de desviación estándar logarítmica Configuración 1. ....	41
Figura 14: Gráficos de tamaño de bloques Configuración 1. ....	42
Figura 15: Gráficos de alcance de variograma Configuración 2. ....	43
Figura 16: Gráficos de efecto pepa Configuración 2.....	44
Figura 17: Gráficos de desviación estándar logarítmica Configuración 2. ....	46
Figura 18: Gráficos de tamaños de bloque Configuración 2. ....	47
Figura 19: Gráficos de alcances de variograma Configuración 3. ....	48
Figura 20: Gráficos de efecto pepa Configuración 3.....	49
Figura 21: Gráficos de desviación estándar logarítmica Configuración 3. ....	51
Figura 22: Gráficos de tamaño de bloques Configuración 3. ....	52
Figura 23: Gráficos de alcance de variograma Configuración 4. ....	53
Figura 24: Gráficos de efecto pepa de variograma Configuración 4.....	54
Figura 25: Gráficos de desviación estándar logarítmica Configuración 4. ....	56
Figura 26: Gráficos de tamaño de bloques Configuración 4. ....	57
Figura 27: Gráficos que resumen estudio de alcance de variograma. ....	59
Figura 28: Gráficos que resumen estudio de tamaño de bloques. ....	59
Figura 29: Gráficos que resumen estudio de desviación estándar logarítmica.....	60
Figura 30: Gráficos que resumen estudio de efecto pepa. ....	60
Figura 31: Resumen de resultados estudio conceptual.....	61
Figura 32: Distribuciones de ley esperada Don Luis.....	63
Figura 33: Mapas de ley Don Luis. ....	64
Figura 34: Curvas de tonelaje sobre ley de corte para cada modelo. ....	65
Figura 35: Curvas de fino sobre ley de corte para cada modelo.....	65
Figura 36: Curvas de ley media sobre ley de corte para cada modelo. ....	65
Figura 37: Tonelaje v/s Ley de corte Don Luis.....	66
Figura 38: Finos v/s Ley de corte Don Luis. ....	66
Figura 39: Ley media v/s Ley de corte Don Luis. ....	66
Figura 40: Mapas de varianza condicional Don Luis. ....	68
Figura 41: Nube de correlación de varianzas condicionales Don Luis. ....	69
Figura 42: Nube de correlación de intervalos de probabilidad 95% Don Luis. ....	69
Figura 43: Nube de correlación de intervalos de probabilidad 90% Don Luis. ....	70
Figura 44: Distribuciones de ley esperada Radomiro Tomic. ....	71
Figura 45: Mapas de ley Radomiro Tomic.....	72

Figura 46: Curvas de tonelaje sobre ley de corte para cada modelo .....	73
Figura 47: Curvas de fino sobre ley de corte para cada modelo.....	73
Figura 48: Curvas de ley media sobre ley de corte para cada modelo. ....	73
Figura 49: Tonelaje v/s Ley de corte Radomiro Tomic. ....	74
Figura 50: Ley media v/s Ley de corte Radomiro Tomic.....	74
Figura 51: Finos v/s Ley de corte Radomiro Tomic.....	75
Figura 52: Mapas de varianza condicional Radomiro Tomic.....	77
Figura 53: Nube de correlación de varianzas condicionales Radomiro Tomic.....	78
Figura 54: Nube de correlación de intervalos de probabilidad 95% Radomiro Tomic.....	78
Figura 55: Nube de correlación de intervalos de probabilidad 90% Radomiro Tomic.....	79
Figura 56: Esquema conceptual con las distintas configuraciones espaciales de datos. ....	90
Figura 57: Nubes de correlación variando alcances de variograma (Configuración 1). ....	91
Figura 58: Gráficos q-q plot variando alcances de variograma (Configuración 1).....	92
Figura 59: Nubes de correlación variando tamaño de bloques (Configuración 1).....	93
Figura 60: Gráficos q-q plot variando tamaño de bloques (Configuración 1). ....	94
Figura 61: Nubes de correlación variando desviación estándar logarítmica (Configuración 1). ..	95
Figura 62: Gráficos q-q plot variando desviación estándar logarítmica (Configuración 1).....	96
Figura 63: Nubes de correlación variando efecto pepa (Configuración 1).....	97
Figura 64: Gráficos q-q plot variando efecto pepa (Configuración 1). ....	97
Figura 65: Nubes de correlación variando alcances de variograma (Configuración 2). ....	98
Figura 66: Gráficos q-q plot variando alcances de variograma (Configuración 2).....	99
Figura 67: Nubes de correlación variando tamaño de bloques (Configuración 2).....	100
Figura 68: Gráficos q-q plot variando tamaño de bloques (Configuración 2). ....	101
Figura 69: Nubes de correlación variando desviación estándar logarítmica (Configuración 2). 102	
Figura 70: Gráficos q-q plot variando desviación estándar logarítmica (Configuración 2).....	103
Figura 71: Nubes de correlación variando efecto pepa (Configuración 2).....	104
Figura 72: Gráficos q-q plot variando efecto pepa (Configuración 2). ....	104
Figura 73: Nubes de correlación variando alcances de variograma (Configuración 3). ....	105
Figura 74: Gráficos q-q plot variando alcances de variograma (Configuración 3).....	106
Figura 75: Nubes de correlación variando tamaño de bloques (Configuración 3).....	107
Figura 76: Gráficos q-q plot variando tamaño de bloques (Configuración 3). ....	108
Figura 77: Nubes de correlación variando desviación estándar logarítmica (Configuración 3). 109	
Figura 78: Gráficos q-q plot variando desviación estándar logarítmica (Configuración 3).....	110
Figura 79: Nubes de correlación variando efecto pepa (Configuración 3).....	111
Figura 80: Gráficos q-q plot variando efecto pepa (Configuración 3). ....	111
Figura 81: Nubes de correlación variando alcances de variograma (Configuración 4). ....	112
Figura 82: Gráficos q-q plot variando alcances de variograma (Configuración 4).....	113
Figura 83: Nubes de correlación variando tamaño de bloques (Configuración 4).....	114
Figura 84: Gráficos q-q plot variando tamaño de bloques (Configuración 4). ....	115
Figura 85: Nubes de correlación variando desviación estándar logarítmica (Configuración 4). 116	
Figura 86: Gráficos q-q plot variando desviación estándar logarítmica (Configuración 4).....	117
Figura 87: Nubes de correlación variando efecto pepa (Configuración 4).....	118
Figura 88: Gráficos q-q plot variando efecto pepa (Configuración 4). ....	118
Figura 89: Histograma y mapa XY de datos originales Don Luis.....	119
Figura 90: Histograma de datos gaussianos Don Luis. ....	120
Figura 91: Nubes de correlación de datos gaussianos Don Luis. ....	120
Figura 92: Test de comparación de raíz de variograma v/s madograma. ....	121
Figura 93: Nubes de correlación Ley v/s coordenadas Don Luis.....	121

Figura 94: Mapas variográficos en planos principales Don Luis. ....	123
Figura 95: Variograma experimental y modelo de variograma Don Luis.....	124
Figura 96: Variograma de datos gaussianos a soporte de bloques Don Luis. ....	125
Figura 97: Histograma y mapa XY de datos originales Radomiro Tomic .....	127
Figura 98: Histograma de datos gaussianos Radomiro Tomic .....	128
Figura 99: Nubes de correlación diferida de datos gaussianos Radomiro Tomic .....	128
Figura 100: Test de comparación de raíz de variograma v/s madograma. ....	129
Figura 101: Nubes de correlación Ley v/s coordenadas Radomiro Tomic. ....	129
Figura 102: Mapas variográficos en planos principales Radomiro Tomic.....	131
Figura 103: Variograma experimental y modelo de variograma Radomiro Tomic. ....	132
Figura 104: Variograma de datos gaussianos a soporte de bloques Radomiro Tomic.....	133
Figura 105: Mapas de leyes Don Luis.....	135
Figura 106: Mapas de ley Radomiro Tomic.....	136
Figura 107: Vistas 2D de grilla v/s datos en sondajes.....	136
Figura 108: Gráficos resumen de estudio de alcance de variograma. ....	137
Figura 109: Gráficos resumen de efecto pepa. ....	137
Figura 110: Gráficos resumen de estudio de tamaño de bloques. ....	138
Figura 111: Gráficos resumen de estudio de desviación estándar logarítmica.....	138

# 1 INTRODUCCIÓN.

En el negocio minero una etapa fundamental es la evaluación de yacimientos, que tiene como objetivo evaluar los grados de concentración (leyes) de uno o más materiales de interés. Para esto se realizan sondajes de exploración que consisten en perforaciones que se hacen en el macizo rocoso donde se ubica el yacimiento, y que permiten obtener información cuantitativa de las leyes presentes en los sitios que cruzan los sondajes. De este modo, mediante técnicas geoestadísticas, se pueden estimar las leyes presentes en un yacimiento a partir de los datos obtenidos en los sondajes, entregándose como resultado final un modelo con valores de ley asociados a bloques que cubren el espacio en estudio. Dada la complejidad del problema es recomendable no sólo estimar los valores de ley sino también cuantificar la incertidumbre asociada a la imposibilidad de conocer exactamente las leyes reales.

Es así como en la industria minera la simulación condicional de leyes se utiliza para predecir los recursos y reservas recuperables en yacimientos mineros, así como para evaluar la incertidumbre asociada a esta predicción. En este contexto, se suele utilizar el llamado “modelo multigaussiano” para simular las leyes a soporte puntual (a partir de los datos puntuales disponibles de sondajes), y luego rebloquear las simulaciones para pasar a tamaño de bloques, es decir, promediando los valores puntuales que entran en un mismo bloque.

La motivación para el uso de las simulaciones surge a partir de las limitaciones que presenta el kriging, que es la metodología clásica utilizada en la estimación de recursos y reservas mineras. El kriging presenta dos limitaciones importantes: suaviza la variabilidad real de la variable en estudio (es decir las leyes estimadas presentan menor dispersión que las leyes reales) y no considera el efecto proporcional (mayor variabilidad en zonas de alta ley debido a que en estas zonas se observa valores altos mezclados a corta distancia con valores bajos), lo que puede traer consigo estimaciones sesgadas de los recursos recuperables asociados a un yacimiento.

En este trabajo se propone estudiar el llamado “modelo gaussiano discreto”, que permite realizar directamente las simulaciones a tamaño de bloques sin pasar por simulaciones puntuales, con los beneficios en tiempos de cálculo que esto significa, pero también con las aproximaciones en las que puede incurrir con respecto al modelo multigaussiano que ha sido más utilizado.

El modelo gaussiano discreto consiste en un modelo de cambio de soporte, es decir, que permite superar el conflicto de disponer de datos puntuales en el espacio y de requerir obtener resultados a soporte de bloques. Para resolver el problema, no sólo existe la opción de simular puntualmente y luego rebloquear como en el caso del modelo multigaussiano, sino también otras alternativas permiten simular puntualmente pero sólo manteniendo en la memoria del computador los valores de bloques ya simulados. En cambio el modelo gaussiano discreto permite simular directamente a tamaño de bloques, considerando los datos puntuales disponibles.

En lo que prosigue del informe, en muchas ocasiones se optará por abreviar el nombre de los modelos debido a la recurrente mención de los mismos, en particular en las figuras gráficas. Así, el modelo multigaussiano será MMG y el modelo gaussiano discreto MGD.



## **1.1 Objetivos.**

### **1.1.1 Objetivo General.**

El objetivo primordial de este trabajo es comparar los resultados obtenidos con la utilización del modelo multigaussiano y el modelo gaussiano discreto (en su versión local), para así establecer las potenciales limitaciones o aproximaciones que cometa el modelo gaussiano discreto, y en cuales circunstancias se dan estos problemas.

### **1.1.2 Objetivos Específicos.**

Para conocer en mayor detalle las aproximaciones que pueda cometer el modelo gaussiano discreto se realizarán estudios en función de algunos parámetros o variables, para así establecer las condiciones en las cuales el modelo tiene un buen comportamiento. Los parámetros o variables son los siguientes:

- Tamaño de los bloques a considerar en el modelo de leyes.
- Distribución estadística de los datos de leyes obtenidos en los sondeos (forma del histograma de los datos disponibles).
- Variograma, que es una función que permite caracterizar la variabilidad espacial de los valores de ley.
- Cantidad de datos que condicionan las simulaciones en cada punto o bloque del espacio estudiado.

Además se aplicarán los modelos en casos de estudio (bases de datos reales) realizándose los siguientes trabajos:

- Evaluar las diferencias en tiempos de cálculo.
- Estudiar cambios en curvas tonelaje-ley.
- Estudiar las diferencias en la cuantificación de la incertidumbre.

## **1.2 Alcances.**

### **1.2.1 Etapas del trabajo.**

El trabajo de la memoria se divide en dos etapas:

#### Primera Etapa: Estudio Conceptual

En esta etapa se busca determinar que tan aproximado es el modelo gaussiano discreto, considerando el análisis de sensibilidad en función de los parámetros mencionados en los objetivos específicos.

#### Segunda Etapa: Casos de Estudio

En esta etapa se aplicarán los modelos a bases de datos y calcularán y compararán los siguientes conceptos:

- Las curvas tonelaje-ley esperadas
- Los recursos recuperables locales para distintas leyes de corte
- Los intervalos de probabilidad
- Los tiempos de cálculo

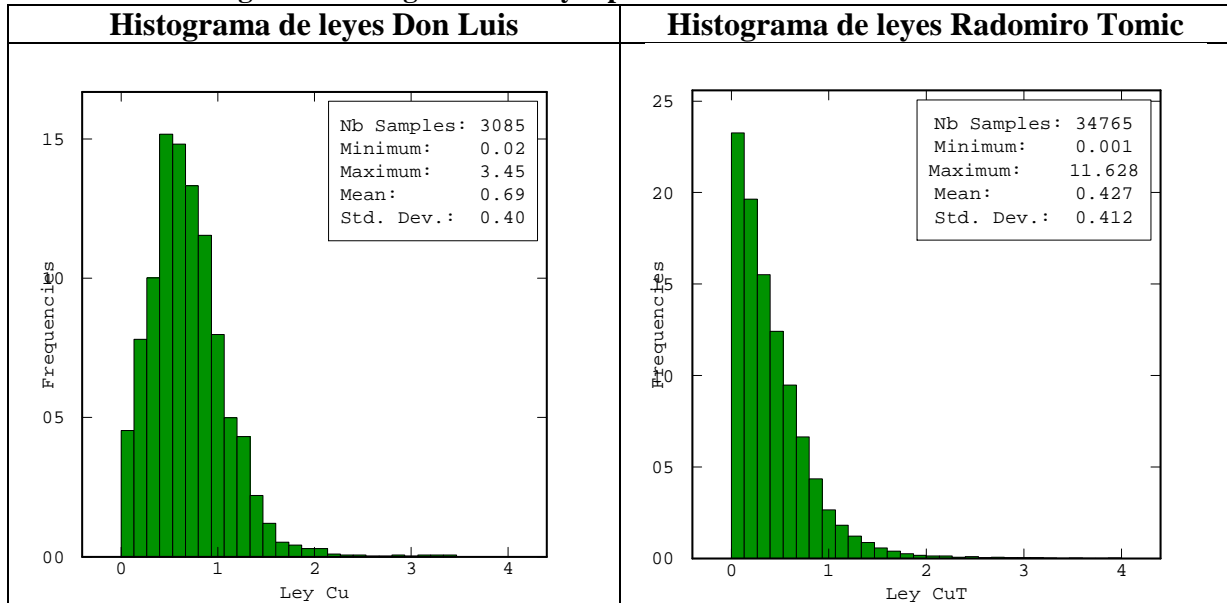
### **1.2.2 Bases de datos.**

En la primera etapa se utilizarán diferentes series de datos ficticios, los cuales siguen una distribución lognormal. En la segunda etapa se considerarán bases de datos de leyes reales, para darle sentido al cálculo de las curvas tonelaje-ley y recursos asociados. Estas bases de datos son de las siguientes faenas mineras:

1. Mina Radomiro Tomic, de la División Codelco Norte de Codelco Chile, ubicada en la región de Antofagasta, Chile.
2. Rajo Don Luis de la División Andina de Codelco Chile, ubicada en la región de Valparaíso, Chile.

A continuación se presenta un breve análisis de estas bases de datos.

**Figura 1: Histogramas de leyes para ambas bases de datos reales.**



Se observa que en el caso de las leyes de “Don Luis” se tiene un histograma levemente asimétrico, pero que en el caso de las leyes de “Radomiro Tomic” se presenta una gran asimetría positiva. Estas diferencias pueden ser posteriormente importantes en el comportamiento del modelo gaussiano discreto con cada una de las bases de datos.

### 1.2.3 Alcances Generales.

En el desarrollo del trabajo de memoria se utilizarán principalmente los softwares Matlab e Isatis, y la biblioteca de archivos ejecutables GSLib.

El espacio físico donde se desarrolló la memoria corresponde al Laboratorio Computacional U-Mine perteneciente al Departamento de Ingeniería de Minas de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile.

Además el trabajo de memoria cuenta con financiamiento del proyecto Fondecyt número 1061103, titulado “Cuantificación de la incertidumbre en atributos geológicos, mineros y metalúrgicos: nuevos modelos geoestadísticos y aspectos de implementación”.

## 2 ANTECEDENTES.

### 2.1 Antecedentes Generales.

La geoestadística es una rama de la estadística, aplicada en un contexto espacial. Busca estudiar las variables regionalizadas, que corresponden a variables numéricas que se distribuyen en el espacio y presentan cierta continuidad espacial, aunque escapan a toda representación simple debido a que varían irregularmente. Ejemplo de una variable regionalizada es la ley en un yacimiento minero, caso que es de interés en este trabajo. Una variable regionalizada queda caracterizada por:

- Su naturaleza: puede ser continua, discreta o categórica.
- El dominio en estudio, es decir, las dimensiones espaciales que abarca la variable.
- El volumen sobre el cual se mide (tamaño de soporte), dado que no es lo mismo medirla en puntos del espacio o en soportes mayores (bloques).

Si bien los fenómenos naturales son determinísticos, pueden ser muy complejos. Es por esto que en el estudio de una variable regionalizada se puede considerar la aplicación de probabilidades, como por ejemplo en la ley de un metal presente en la mineralización de un macizo rocoso. En un modelo probabilístico una variable regionalizada  $z(x)$  en un sitio  $x$  del dominio  $D$  en estudio, se interpreta como una realización de una variable aleatoria  $Z(x)$ . El conjunto de estas variables en distintos puntos del espacio constituye una función aleatoria que se expresa como  $Z = \{Z(x), x \in D\}$ .

Una variable aleatoria  $Z$  se caracteriza por una distribución de probabilidad:

- Función de distribución:  $\forall z \in \mathbb{R}, F(z) = \text{Prob}(Z \leq z)$
- Densidad de probabilidad: corresponde a la derivada de la función de distribución.

Una función aleatoria se caracteriza por una distribución espacial, que consta de todas las distribuciones de probabilidad de sus componentes, en particular:

- Distribución univariable:  $F(z_1; \mathbf{x}_1) = \text{Prob}(Z(\mathbf{x}_1) < z_1)$
- Distribución bivariable:  $F(z_1, z_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \text{Prob}(Z(\mathbf{x}_1) < z_1, Z(\mathbf{x}_2) < z_2)$

donde  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$  representan distintos sitios en el espacio.

En los estudios geoestadísticos se asumen algunas hipótesis simplificatorias, como la hipótesis de estacionaridad que establece que la distribución que sigue la función aleatoria es invariante por traslación en el espacio. Es decir, independiente de la ubicación en el espacio, presenta las mismas medias y varianzas.

En un estudio geoestadístico previamente se desarrollan las etapas de estudio exploratorio y variográfico, que se describen brevemente a continuación.

### 2.1.1 Estudio Exploratorio de Datos.

El objetivo es conocer de modo general la distribución de la variable regionalizada en estudio, para definir zonas de estudio o anticipar y corregir dificultades asociadas a las bases de datos disponibles. Algunas herramientas de análisis exploratorio de datos, presentadas con sus respectivos objetivos son:

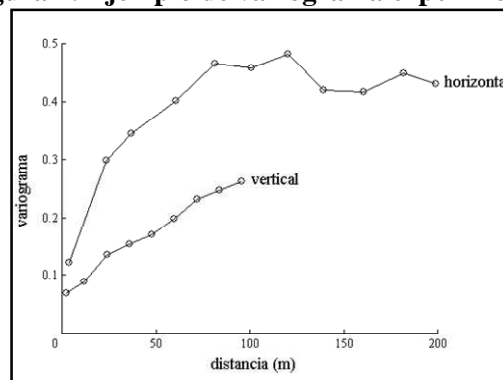
- Mapas para visualizar la ubicación espacial de los datos.
- Histogramas para conocer la distribución estadística de los datos.
- Estadísticas básicas como las medidas de posición y dispersión.
- Gráficos de probabilidad para comparar una distribución empírica con una teórica.
- Gráficos q-q plot para comparar dos distribuciones empíricas.
- Nubes de correlación para visualizar valores de una variable en función de otra.

### 2.1.2 Estudio Variográfico.

Su objetivo es conocer la continuidad espacial de la variable en estudio, debido a que los valores observados en distintos puntos del espacio pueden estar correlacionados. De este modo es importante estudiar el que tan rápido o lento se pierde esta correlación al aumentar la distancia de separación entre dos puntos.

Para desarrollar este estudio se utiliza una función llamada variograma (que equivale a desarrollar la función de covarianza de los datos espaciales), que es una forma analítica de expresar la variabilidad espacial de los valores que toma la variable en estudio. De este modo se pueden calcular variogramas en algunas direcciones del espacio, obteniéndose resultados gráficos como el siguiente ejemplo de un variograma experimental:

**Figura 2: Ejemplo de variograma experimental.**



En un variograma experimental se define como meseta al valor en el cual se estabiliza el variograma, y como alcance a la distancia que se alcanza la meseta. Formalmente la meseta debe ser igual a la varianza de los datos. Además se define como efecto pepa a la discontinuidad en el origen del variograma (en este caso poco menor a 0.1). Mientras más alto el efecto pepa, más errática a pequeña escala presenta la variable en estudio.

Un variograma experimental como el anterior requiere ser modelado debido a que es incompleto, ya que se calcula sólo para ciertas direcciones. Existen una serie de modelos

elementales que, según la forma que presente el variograma experimental principalmente en el origen, permiten modelarlo adecuadamente:

- Efecto pepa: discontinuidad en el origen.
- Modelo esférico y exponencial: lineales en el origen.
- Modelo gaussiano: parabólico en el origen.

### **2.1.3 Estimación Local.**

En minería y en otros ámbitos de aplicación de la geoestadística, se busca predecir la variable regionalizada en sitios del espacio donde no se conoce el valor real, a partir de los datos disponibles. Una de las metodologías más utilizadas es el kriging, que consiste en estimar valores de la variable regionalizada mediante un promedio lineal ponderado de los datos. Los 2 principales tipos de kriging son el kriging simple (en el cual la media de la variable se asume conocida) y el kriging ordinario (media desconocida).

Estas metodologías consideran los siguientes aspectos en las estimaciones:

- 1) La distancia de los datos al sitio a estimar.
- 2) La redundancia entre los datos (si es que hay datos muy cercanos unos con otros).
- 3) La continuidad espacial de la variable regionalizada, es decir, que tan rápido o lento varían los valores que toma la variable en el espacio.

Además el kriging presenta otras características importantes; es una estimación insesgada porque establece una esperanza nula para el error de estimación, y es óptimo porque busca minimizar la varianza del error de estimación.

Pero presenta ciertas limitaciones importantes:

- Suavizamiento: los valores estimados presentan menos dispersión que los valores verdaderos.
- La varianza de kriging no considera el efecto proporcional, que es una distorsión de la hipótesis de estacionaridad. El efecto proporcional comúnmente se presenta en minería y consiste en observar mayor variabilidad en zonas de valores altos, es decir, se observa valores altos mezclados a corta distancia con valores bajos.

Estas dos limitaciones hacen que el kriging no sea una buena herramienta en la estimación de funciones umbrales, como por ejemplo en la determinación de tonelajes de roca sobre una ley de corte, que es un problema crítico en la estimación de recursos y reservas recuperables en un negocio minero.

### **2.1.4 Simulaciones.**

Debido a las limitaciones del kriging, se propone la simulación como metodología para cuantificar la incertidumbre asociada al desconocimiento de los valores reales de la variable regionalizada en estudio. Una simulación es un modelo numérico que busca reproducir la

variabilidad real de la variable en estudio mediante la construcción de varias realizaciones que representan escenarios posibles.

Se pueden diferenciar dos tipos de simulaciones: las no condicionales y las condicionales. Las simulaciones no condicionales buscan reproducir la distribución global de la variable regionalizada, sin reproducir los valores de los datos en sitios ya conocidos. En cambio las simulaciones condicionales buscan reproducir las distribuciones locales, que dependen de los datos conocidos. De esta forma, en un sitio con dato no hay incertidumbre, y estas simulaciones condicionales pueden considerarse más realistas que las no condicionales.

Así como el kriging tradicional sólo permite resolver el problema de estimación, es decir, de predecir valores en sitios no conocidos, las simulaciones además entregan una medición de la incertidumbre y permiten desarrollar análisis de riesgo, debido a la disposición de varios escenarios posibles.

Para aplicar simulaciones es necesario definir un modelo adecuado de función aleatoria. Además, estas simulaciones pueden realizarse a distintos soportes, es decir, a soporte de puntos o a soporte de bloques, dado que en minería resulta de interés desarrollar un modelo de leyes a soporte de bloques.

## **2.2 Modelos de Incertidumbre a Soporte Puntual.**

La incertidumbre en un modelo está asociada a la falta de conocimiento por no disponer de un muestreo exhaustivo de la variable en estudio. Es por esto que ningún modelo numérico reproduce la realidad sin error. Los modelos de incertidumbre buscan caracterizar los valores desconocidos de la variable regionalizada no por estimaciones, sino que por distribuciones de probabilidad.

Un modelo de incertidumbre global busca describir la distribución global de la variable regionalizada, distribución que no depende de la ubicación considerada en el espacio. Esta función de distribución puede ser obtenida a partir del histograma acumulado de los datos disponibles, el cual antes debe ser desagrupado para corregir los problemas que genera la disposición de datos espaciados irregularmente en el espacio.

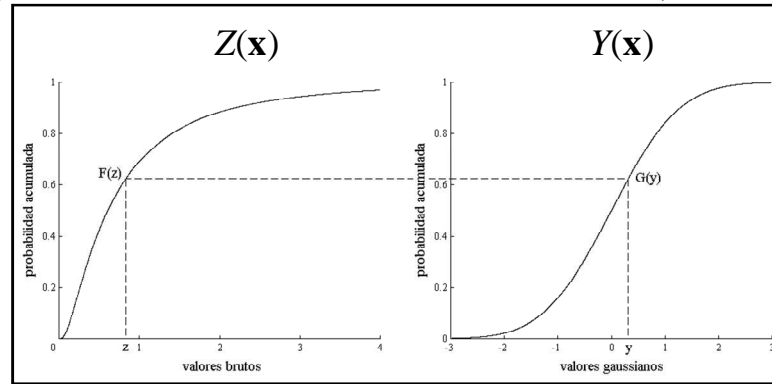
Este desagrupamiento puede realizarse mediante ponderación, asignando un ponderador pequeño a los datos agrupados y un ponderador mayor a los datos aislados. Las técnicas geométricas más utilizadas son el método de las celdas y el método de los polígonos de influencia.

Por su parte, un modelo de incertidumbre local busca describir la distribución local de la variable regionalizada, es decir, condicional a los datos disponibles. De esta forma la distribución depende de la ubicación del espacio, al considerar los valores y las posiciones de los datos cercanos.

### 2.2.1 Modelo Multigaussiano.

Es uno de los modelos de incertidumbre a soporte puntual típicamente utilizados [1]. Este modelo requiere trabajar con variables gaussianas, lo que hace necesario transformar los datos disponibles mediante una función de transformación llamada anamorfosis. Gráficamente, la anamorfosis consiste en deformar el histograma de los datos en un histograma gaussiano, de modo que la variable transformada, denotada  $Y(x)$ , tenga una distribución gaussiana estándar (de media 0 y varianza 1). Lo anterior se observa en el siguiente esquema:

**Figura 3: Determinación de función de transformación (anamorfosis).**



La hipótesis fundamental del modelo es que los valores transformados tienen una distribución multigaussiana, la cual se define por las siguientes propiedades:

1. Toda combinación lineal de los valores sigue una distribución gaussiana.
2. La densidad de probabilidad de un conjunto de valores ubicados en los sitios  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  es:

$$g(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sqrt{\det(\mathbf{C})}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \mathbf{y}' \mathbf{C}^{-1} \mathbf{y}\right\}$$

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^t \quad \mathbf{C}_{i,j} = \text{cov}\{Y(\mathbf{x}_i), Y(\mathbf{x}_j)\}$$

Se destaca que la densidad de probabilidad queda definida sólo con la matriz de varianza-covarianza  $\mathbf{C}$ .

Una propiedad fundamental del modelo es que la distribución global de un valor transformado  $Y(x)$  es una gaussiana estándar  $N(0,1)$ . Por su parte la distribución local de  $Y(x)$  también es una gaussiana pero no estándar, sino de media igual al kriging simple de  $Y(x)$  y de varianza igual a la varianza de kriging simple. Un resultado directo de esto es que la distribución local tiende a la distribución global en posiciones del espacio lejanas a los datos.

Lo más interesante de construir una función de distribución local es la posibilidad de expresar la probabilidad de superar un cierto valor umbral (por ejemplo una ley de corte en minería) no sólo en función del valor medio de una estimación, sino también en función de la varianza de estimación.



Por otra parte, debido a que en ciertos casos transformar los datos originales en datos gaussianos puede resultar complicado, es necesario verificar la hipótesis básica del modelo que establece multigaussianidad. Para esto se pueden desarrollar los siguientes tests que prueban la bigaussianidad<sup>1</sup>:

1. Nubes de correlación diferida: en las cuales se grafican pares de datos gaussianos separados a una cierta distancia. Estas nubes deben presentar una forma elipsoidal para distancias de separación menores, y una forma circular para distancias mayores.
2. Variogramas de indicadores: Existe una relación entre el variograma de un indicador y el variograma de los datos gaussianos. Entonces se puede estimar el variograma de indicador teóricamente, y luego comparar con el variograma experimental de indicador.
3. Comparación de madograma con variograma: siendo el madograma el variograma de orden 1, se tiene una razón de proporcionalidad entre ellos que puede ser verificada.

Una vez verificada la hipótesis del modelo, se pueden ejecutar simulaciones multigaussianas o desarrollar una versión del kriging llamado kriging multigaussiano. A lo que apunta este trabajo es a desarrollar simulaciones multigaussianas.

### **2.3 Modelos con cambio de soporte.**

Cuando se trabaja con variables regionalizadas, la distribución estadística que siguen los valores que toma la variable depende del volumen o soporte sobre el cual se miden. Los efectos que tiene el cambio de soporte son los siguientes:

- La media no depende del soporte.
- La varianza disminuye al aumentar el soporte.
- El histograma cambia de forma (se simetriza).

De este modo la forma de la distribución cambia al pasar de valores puntuales a valores de bloques. Así, para determinar ya sea la distribución global o local a tamaño de bloques (que es de interés en la industria minera debido a temas operacionales en una mina) se debe recurrir a un modelo de cambio de soporte.

Un modelo de cambio de soporte consiste en especificar una distribución entre los valores puntuales y los de bloques, y permite simular directamente a soporte de bloques (sin pasar por simulaciones puntuales como en el modelo multigaussiano) condicionando a datos puntuales, que es lo desarrollado en este trabajo. Existen algunas alternativas que combinan simulaciones con el uso del llamado kriging disyuntivo para construir distribuciones condicionales a soporte de bloques ya sea a partir de datos puntuales o de bloques [8].

---

<sup>1</sup> Probar la hipótesis multigaussiana más allá de la bigaussiana se vuelve demasiado complejo para fines prácticos.

Uno de los modelos para cambio de soporte más utilizados es el modelo gaussiano discreto tanto para estimación global y local, y que será el utilizado en este trabajo. De todos modos existen otras metodologías que permiten la realización de simulaciones condicionales considerando cambio de soporte, como por ejemplo el formulismo LU pero que tiene la limitante del número de datos; al tener muchos datos (sobre 1000 datos) los cálculos se vuelven lentos. Se han encontrado ventajas en este formulismo que deben ser consideradas al evaluar los resultados del modelo gaussiano discreto, en particular al realizar simulación con discretización de bloques, para luego integrar parámetros económicos en la selección de bloques buscando maximizar beneficios [2] y también en la predicción de recursos recuperables locales a unidad de selección minera [3].

### 2.3.1 Modelo Gaussiano Discreto para estimación global.

Uno de los modelos de cambio de soporte más eficientes es el Modelo Gaussiano Discreto [9], que en pocas palabras asume que los valores puntuales y de bloques (transformados a valores gaussianos) siguen distribuciones multigaussianas. Esto constituye una extensión del modelo multigaussiano ya descrito.

La variable regionalizada regularizada no es más que el promedio de los valores puntuales que entran en el soporte regularizado (por ejemplo un bloque). O sea, visto de forma continua, el valor regularizado sobre un bloque  $v$  se define como:

$$Z(v) = \frac{1}{|v|} \int_v Z(x) dx$$

donde  $Z(v)$  es el valor regularizado,  $Z(x)$  el valor puntual y  $|v|$  el volumen de  $v$ .

Las hipótesis generales que considera el modelo son las siguientes:

- El espacio se considera como una reunión de bloques que no traslapan y que son idénticos [4,5]
- La posición de cada dato puntual  $\underline{x}$  se considera como aleatoria y uniforme dentro del bloque al cual pertenece, para evitar inconsistencias matemáticas asociadas a la teoría. (Esto limita el uso de bloques muy grandes).

El detalle del modelo se puede describir a partir de sus hipótesis específicas:

1. La variable puntual  $Z(x)$  se puede transformar en una variable gaussiana  $Y(x)$  mediante la función de transformación definida para el modelo multigaussiano, y que se denomina  $\Phi$

$$Z(x) = \Phi[Y(x)]$$

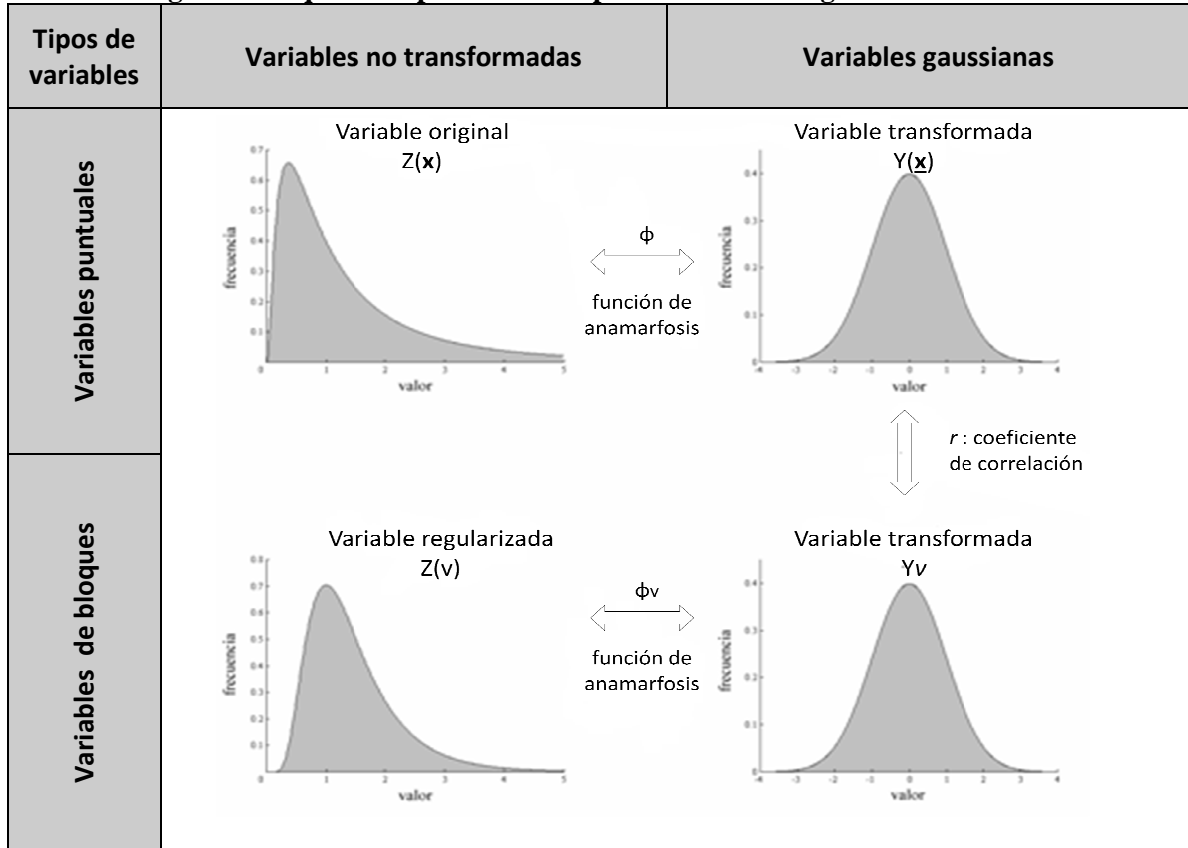
2. La variable regularizada  $Z(v)$  se puede transformar en una variable gaussiana estándar  $Y_v$  [4] mediante una función de transformación a soporte de bloque que se denomina  $\Phi_v$

$$Z(v) = \Phi_v(Y_v)$$

- Si el punto  $\underline{x}$  pertenece al bloque  $v$ , el par  $\{Y(\underline{x}), Y_v\}$  es bigaussiano, con coeficiente de correlación  $r$  (coeficiente de cambio de soporte).

El siguiente esquema presenta de forma más clara las relaciones establecidas mediante estas hipótesis:

**Figura 4: Esquema explicativo de hipótesis de modelo gaussiano discreto.**



En este esquema se resumen todas las relaciones establecidas entre los tipos de variables. Es importante destacar que la variable gaussiana  $Y_v$  no es la regularizada de  $Y(\underline{x})$ . La variable gaussiana regularizada se denomina  $Y(v)$  y será definida posteriormente. Anteriormente ya se indicó cómo se determina la función de transformación puntual  $\Phi$  y además se presentó la definición de regularización. Por lo tanto, para definir completamente este modelo falta determinar la función de transformación a soporte de bloques  $\Phi_v$  y el coeficiente de cambio de soporte  $r$ .

Para resolver el problema anterior se utiliza la llamada relación de Cartier [4] que dice que el valor esperado de un dato tomado al azar dentro de un bloque cuyo valor es conocido, es igual al valor del bloque. A partir de esto se puede obtener una expresión que relaciona ambas funciones de transformación, puntual y de bloques. Sin embargo esta expresión es bastante compleja (involucra integrales), por lo tanto se acude a una familia de polinomios llamados

polinomios de Hermite que permiten expresar ambas funciones de transformación en función de los coeficientes de los polinomios y en función de  $r$ . Las expresiones son las siguientes:

$$\Phi(y) = \sum_{p=0}^{\infty} \Phi_p H_p(y)$$

$$\Phi_v(y) = \sum_{p=0}^{\infty} \Phi_p r^p H_p(y)$$

donde  $H_p(y)$  corresponde al polinomio de Hermite de grado  $p$ , y  $\Phi_p$  corresponde al coeficiente del desarrollo en polinomios de la anamorfosis. De este modo sólo falta determinar  $r$  para definir completamente el modelo.

Para determinar  $r$  se aprovecha la posibilidad de expresar la varianza de los datos a soporte de bloques mediante dos expresiones distintas donde en una de ellas aparece el coeficiente  $r$ :

- A partir del desarrollo de la función de transformación en polinomios de Hermite.

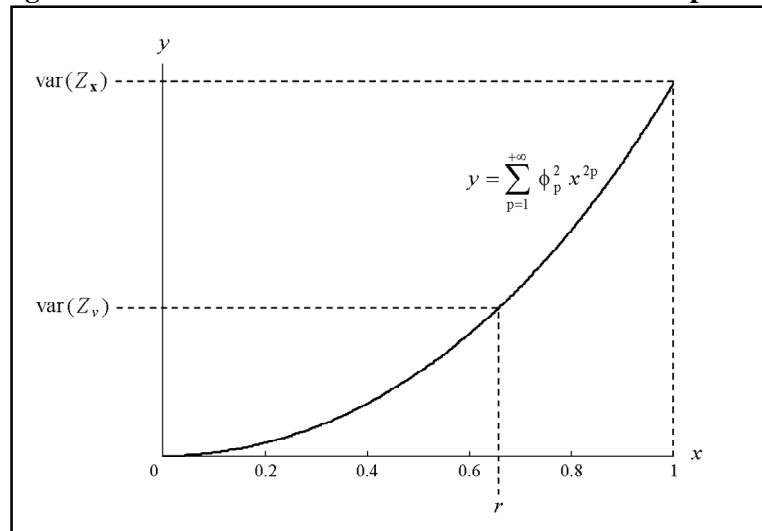
$$\text{var}[Z(v)] = \sum_{p=1}^{+\infty} \Phi_p^2 r^{2p}$$

- A partir del modelo variográfico de la variable original.

$$\text{var}[Z(v)] = \gamma(\infty) - \bar{\gamma}(v, v)$$

Así, del siguiente gráfico que relaciona la varianza de datos a soporte de bloques con el coeficiente  $r$ , se puede despejar el valor de  $r$ :

**Figura 5: Determinación de coeficiente de cambio de soporte  $r$ .**



Del gráfico además se deduce que para  $r = 1$  se tiene la varianza de los datos puntuales, es decir, a menor  $r$  se tiene mayor tamaño de bloques, y por lo tanto menor varianza de las leyes.

### 2.3.2 Modelo Gaussiano Discreto para estimación local.

Este modelo es posible extenderlo también para resolver problemas de estimación local [5]. Para esto, se hace más fuerte la hipótesis general del modelo y ahora todo conjunto de valores de  $Y(\underline{x})$  e  $Y_v$  tiene una distribución multigaussiana, independiente si el punto  $x$  pertenece o no al bloque  $v$ . Esto constituye una aproximación, pues en teoría se establece que las variables gaussianas puntual  $Y(\underline{x})$  y regularizada  $Y_v$  serán multigaussianas sólo si la función de transformación es lineal [6].

En la práctica, además de disponer de las funciones de transformación y del coeficiente de cambio de soporte  $r$  (para el caso global), es necesario conocer la función de covarianza (o equivalentemente de variograma) de los valores gaussianos de bloques  $Y_v$ .

Así este modelo queda caracterizado por:

- la función de transformación puntual  $\Phi$
- el coeficiente de cambio de soporte  $r$
- las covarianzas simples (punto-punto y bloque-bloque) y cruzadas (punto-bloque) de las variables gaussianas  $Y(\underline{x})$  e  $Y_v$ .

La notación es la siguiente:

1.  $\rho(\underline{x}, \underline{x}')$  = covarianza punto-punto.
2.  $\rho(\underline{x}, v')$  = covarianza punto-bloque.
3.  $\rho(v, v')$  = covarianza bloque-bloque.

Para resolver el último punto, dada la aleatorización de los datos dentro de los bloques, se tienen expresiones que relacionan las covarianzas punto-punto y punto-bloque con la covarianza bloque-bloque [5]:

$$\forall \underline{x} \in v, \forall \underline{x}' \in v' \Rightarrow \rho(\underline{x}, \underline{x}') = \begin{cases} r^2 \rho(v, v') & \text{si } \underline{x} \neq \underline{x}' \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$
$$\forall \underline{x} \in v, \rho(\underline{x}, v') = r \rho(v, v')$$

Es decir, determinando la última covarianza (o equivalentemente el variograma bloque-bloque) el modelo queda definido. Para esto se pueden utilizar dos métodos; uno que parte del variograma de los datos originales puntuales, y el otro que parte del variograma de los datos gaussianos puntuales:

#### Método 1:

1. Se desarrolla el estudio variográfico de los datos originales  $Z(x)$ .
2. Mediante regularización se obtiene el variograma de los datos regularizados  $Z(v)$ .
3. Finalmente se determina el variograma de los datos gaussianos a soporte de bloques  $Y_v$ , mediante una expresión que lo relaciona con el variograma de  $Z(v)$  [5]

## Método 2:

1. Se desarrolla el estudio variográfico de los datos gaussianos puntuales  $Y(x)$ .
2. Mediante regularización se obtiene el variograma de la variable gaussiana regularizada  $Y(v)$ , definida como:

$$Y(v) = \frac{1}{|v|} \int_v Y(x) dx$$

3. Finalmente se determina el variograma de los datos gaussianos a soporte de bloques  $Y_v$  (que es la variable que corresponde transformar de vuelta, ver figura 4), estandarizando el variograma de  $Y(v)$  con el factor  $1/r^2$

El factor  $1/r^2$  se obtiene a partir de una serie de resultados conocidos para las variables gaussianas regularizada  $Y(v)$  y a soporte de bloques  $Y_v$  [7]:

- La covarianza entre ambas gaussianas es igual a  $r$
- La varianza de  $Y(v)$  es igual a  $r^2$
- La varianza de  $Y_v$  es igual a 1.

A partir de estos resultados se obtiene una relación lineal entre ambas gaussianas, cuya constante de proporcionalidad es  $r$ :

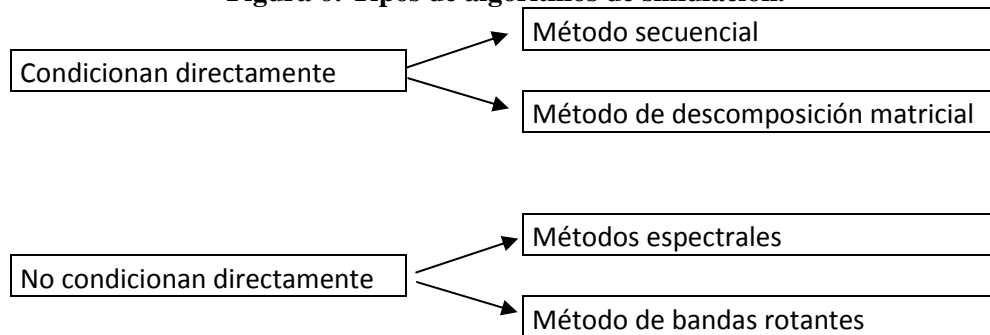
$$Y(v) = r Y_v$$

El segundo método se utilizará en el presente trabajo. Finalmente se pueden ejecutar simulaciones directamente a soporte de bloques mediante un algoritmo adecuado.

## **2.4 Algoritmos de simulación.**

Existen una serie de algoritmos que permiten simular funciones aleatorias multigaussianas. Estos algoritmos se pueden clasificar en dos tipos, según si desarrollan directamente simulaciones condicionales o si las simulaciones deben ser condicionadas posteriormente:

**Figura 6: Tipos de algoritmos de simulación.**



Un método interesante es el método de bandas rotantes, dado que permite reducir a una dimensión las simulaciones a desarrollar en dos o más dimensiones. En breves palabras el método consiste en construir simulaciones unidimensionales para luego esparcirlas a más dimensiones mediante una serie de rectas que discretizan el espacio. Para esto existen expresiones que permiten relacionar la covarianza de la simulación en una dimensión con las covarianzas de la simulación en dos o tres dimensiones.

Por otra parte, para condicionar las simulaciones de los métodos que no lo hacen directamente, se puede desarrollar un kriging asociado al conjunto de datos condicionantes. Así se utiliza una expresión de condicionamiento que cumple dos condiciones básicas:

- En un sitio con dato, la simulación debe ser igual al valor del dato.
- En un sitio muy lejano a los datos, la simulación condicional y no condicional deben ser iguales.

Lo interesante de esta metodología es que basta con desarrollar un solo kriging para condicionar todas las realizaciones construidas con las simulaciones. Es decir, si bien se podría pensar que un método que condiciona directamente tiene la ventaja de reducir los tiempos de cálculo, esto en la práctica no necesariamente ocurre así.

## **2.5 Cálculo de recursos recuperables.**

En particular, en lo que concierne a la industria minera, a partir de los modelos considerados es posible estimar los recursos recuperables asociados a un yacimiento minero, resultados que no sólo dependerán del efecto de soporte, sino también del efecto de información, que se traduce en la práctica en un envío incorrecto de bloques de mineral a botadero y bloques de estéril a planta. En este sentido existen estudios que plantean que el modelo gaussiano discreto tiene un mejor comportamiento que otras metodologías al estimar los recursos recuperables globales [9].

### 3 DESCRIPCIÓN DE IMPLEMENTACIÓN DE MODELOS.

En cada una de las dos partes del trabajo, los modelos se implementaron con algunas diferencias. A continuación se presenta una descripción simplificada de las etapas a desarrollar con cada modelo en cada parte del trabajo. Estas descripciones consideran tanto las etapas a desarrollar previo a las ejecuciones de las simulaciones con Matlab, como las etapas que están propiamente implementadas en cada programa. En particular, se considera una verificación previa de la aplicabilidad de los modelos (verificación de hipótesis multigaussiana).

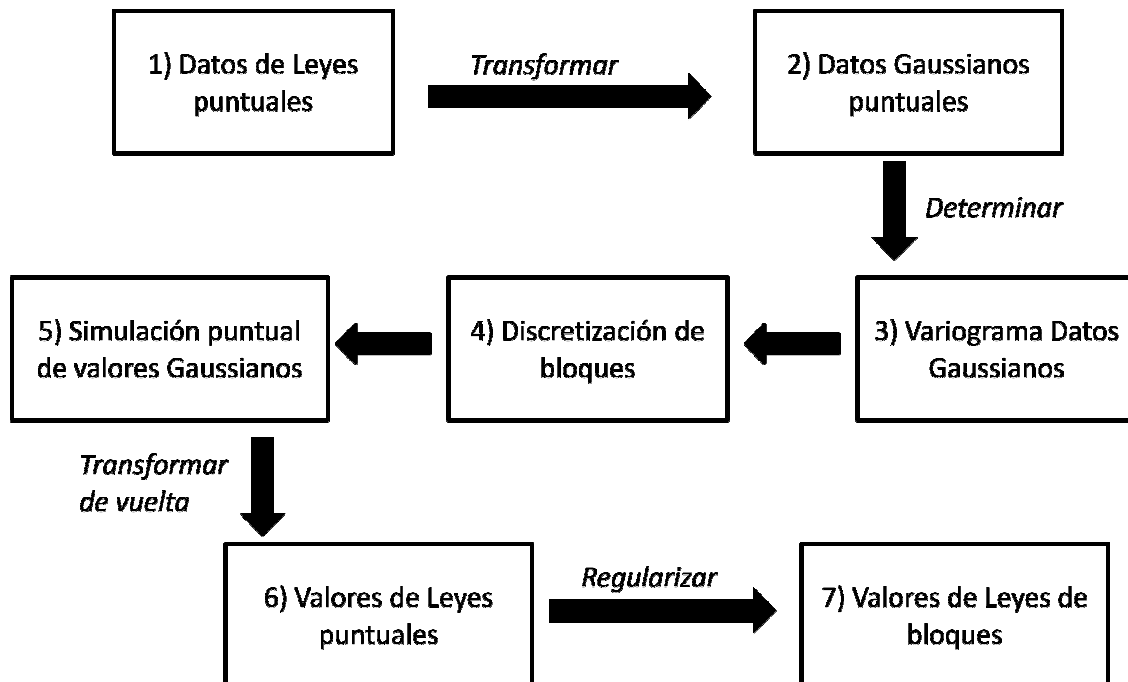
Además, los modelos a comparar están implementados en Matlab, disponiéndose de programas que desarrollan las simulaciones con el modelo multigaussiano [10] y con el modelo gaussiano discreto [11].

#### 3.1 Descripción Estudio Conceptual.

Primero se presenta un esquema con la secuencia de trabajo a desarrollar con cada modelo, y luego se explica con más detalle cada uno de los pasos o etapas.

##### Etapas Modelo Multigaussiano.

Figura 7: Esquema explicativo de implementación de MMG.





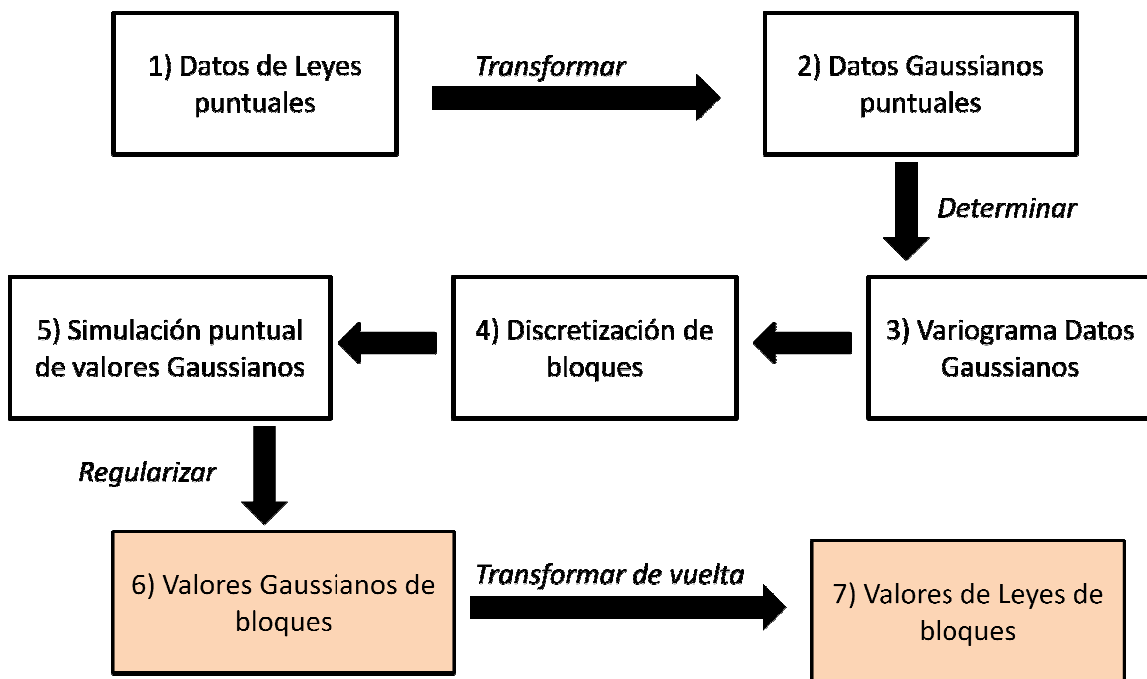
**Tabla 1: Descripción de etapas MMG.**

<b>Etapa</b>	<b>Descripción</b>
1) y 2)	Transformar datos de leyes originales a datos gaussianos estándar $N(0,1)$ , es decir, pasar de $Z(x) \rightarrow Y(x)$ mediante la función de transformación a soporte puntual $\Phi$ obtenida a partir del histograma desagrupado de las leyes originales.
2) y 3)	Determinar el variograma de los datos gaussianos.
4)	Dada una grilla de bloques, se discretiza los bloques para definir la grilla puntual donde se simulan los datos gaussianos puntuales.
5)	Simulación puntual de los datos gaussianos $Y(x)$ en una grilla fina.
5) y 6)	Transformación de vuelta al espacio $Z(x)$ mediante la inversa de la función de transformación a soporte puntual $\Phi^{-1}$ .
6) y 7)	Regularizar las leyes simuladas $Z(x)$ a tamaño de bloques $Z(v)$ .

**Etapas Modelo Gaussiano Discreto.**

La diferencia con respecto al modelo multigaussiano se presenta en las últimas dos etapas. Las primeras cinco etapas son idénticas.

**Figura 8: Esquema explicativo de implementación de MGD.**



**Tabla 2: Descripción de etapas MGD en estudio conceptual.**

<b>Etapa</b>	<b>Descripción</b>
1) y 2)	Transformar datos de leyes originales a datos gaussianos estándar $N(0,1)$ , es decir, pasar de $Z(x) \rightarrow Y(x)$ mediante la función de transformación a soporte puntual $\Phi$ obtenida a partir del histograma desagrupado de las leyes originales.
2) y 3)	Determinar el variograma de los datos gaussianos.
4)	Dada una grilla de bloques, se discretiza los bloques para definir la grilla puntual donde se simulan los datos gaussianos puntuales.
5)	Simulación puntual de los datos gaussianos $Y(x)$ en una grilla fina.
5) y 6)	Antes de transformar de vuelta al espacio $Z(x)$ , se regularizan los valores gaussianos simulados $Y(x)$ a tamaño de bloques $Y(v)$ .
6) y 7)	Finalmente se transforma de vuelta al espacio de valores reales a soporte de bloques pasando desde $Y(v) \rightarrow Z(v)$ mediante la función de transformación a soporte de bloques $\Phi_v$ , la cual se puede obtener a partir de la función de transformación a soporte puntual $\Phi$ .

### **Cumplimiento de objetivos.**

Considerando una variable inicial de distribución lognormal, se compararán los resultados obtenidos con ambos modelos, haciendo variar los siguientes parámetros:

- El coeficiente de variación de la distribución lognormal, que equivale a modificar el histograma respectivo para así afectar a las funciones de transformación en ambos soportes. En particular, se trabajará modificando la desviación estándar logarítmica de los datos.
- El tamaño de los bloques a simular, para obtener un rango de tamaños adecuados.
- El modelo de variograma de la variable gaussiana, para establecer la funcionalidad del modelo gaussiano discreto con distintos variogramas.
- La cantidad de datos condicionantes, teniendo presente que si bien al aumentar los datos condicionantes se mejora la robustez de los cálculos, también se afecta negativamente el tiempo de los mismos (es decir, se debe buscar un equilibrio).

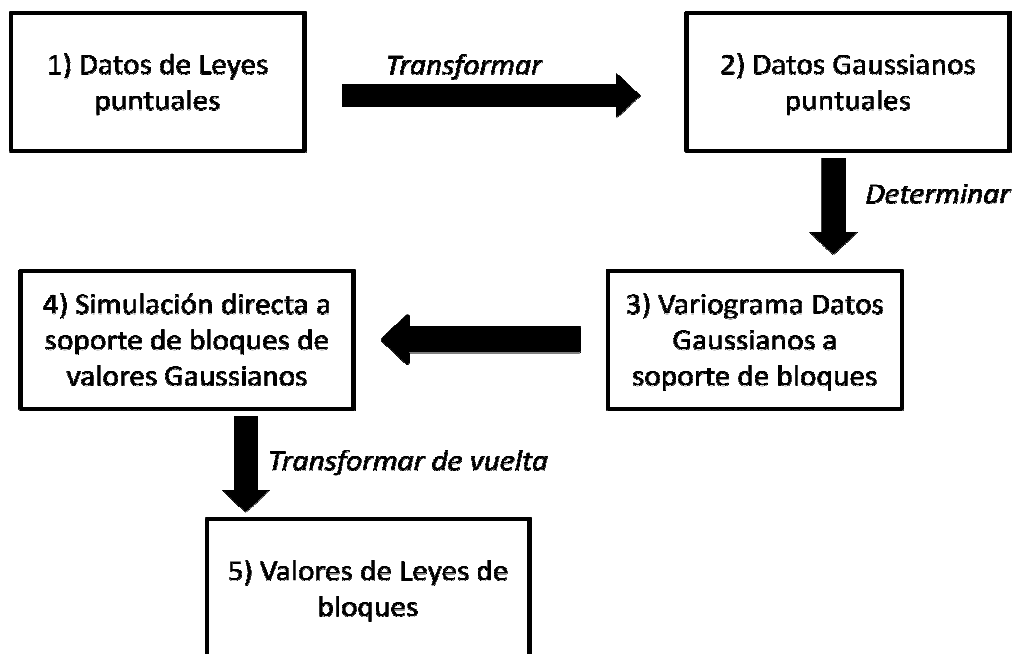
## 3.2 Descripción Casos de Estudio.

### Etapas Modelo Multigaussiano.

Las etapas del modelo Multigaussiano son exactamente las mismas que las consideradas en el estudio conceptual<sup>2</sup>.

### Etapas Modelo Gaussiano Discreto.

Figura 9: Esquema explicativo de implementación de MGD en casos de estudio.



<sup>2</sup> Ver página 23.

**Tabla 3: Descripción de etapas MGD en casos de estudio.**

<b>Etapa</b>	<b>Descripción</b>
1) y 2)	Transformar datos de leyes originales a datos gaussianos estándar $N(0,1)$ , es decir, pasar de $Z(x) \rightarrow Y(x)$ mediante la función de transformación a soporte puntual $\Phi$ obtenida a partir del histograma desagrupado de las leyes originales.
2) y 3)	A diferencia de los casos anteriores, se determina directamente el variograma de los datos gaussianos a soporte de bloques $Yv$
4)	Se realiza la simulación de la variable gaussiana a soporte de bloques $Yv$ condicional a los datos gaussianos a soporte puntual $Y(x)$
4) y 5)	Finalmente se transforma de vuelta al espacio de valores reales a soporte de bloques pasando desde $Y(v) \rightarrow Z(v)$ mediante la función de transformación a soporte de bloques $\Phi_v$ , la cual se puede obtener en función de la función de transformación a soporte puntual $\Phi$ .

**Cumplimiento de objetivos.**

Con cada modelo se realizarán varias simulaciones para comparar:

- Las curvas tonelaje-ley esperadas.
- Los recursos recuperables locales para distintas leyes de corte
- Los intervalos de probabilidad

Finalmente se compararán los resultados y tiempos de cálculo involucrados, y se presentarán las conclusiones y recomendaciones pertinentes.

## 4 METODOLOGÍA PRÁCTICA.

En este capítulo se presenta una descripción de todo el trabajo práctico desarrollado en cada etapa.

### 4.1 Metodología Estudio Conceptual.

Considerando toda la información reportada en la descripción del estudio conceptual, a continuación se describen las diferentes consideraciones y trabajos realizados para desarrollar el estudio.

#### **1) Consideración básica.**

El estudio conceptual se desarrollará considerando 1 sólo bloque ubicado en las coordenadas (0,0,0), es decir, en el origen del sistema de referencia (X,Y,Z). En esta etapa no es de interés considerar una gran cantidad de bloques como los desarrollados en la práctica en la industria minera. Esto se realizará en los casos de estudio.

#### **2) Definición de datos condicionantes.**

En el estudio conceptual se decidió trabajar con datos que sigan perfectamente una distribución lognormal, los cuales pueden generarse como datos aleatorios que responden a los momentos de primer y segundo orden (media y varianza respectivamente) de la distribución lognormal definida en cada caso.

De este modo se puede variar la asimetría del histograma de los datos lognormales modificando la desviación estándar de la distribución lognormal. Esto es importante debido a que una base de datos con un histograma más asimétrico puede generar problemas en el modelo gaussiano discreto. Además, es común encontrar en minería bases de datos que siguen histogramas de forma lognormal.

Por otra parte, se definió trabajar con 4 configuraciones espaciales de datos condicionantes:

- Configuración 1: Sin datos condicionantes.
- Configuración 2: 15 datos condicionantes asociados a 1 sondaje.
- Configuración 3: 40 datos condicionantes repartidos en 3 sondajes.
- Configuración 4: 1 sondaje (con 15 datos) que cruza al bloque.

El detalle de estas configuraciones se muestra en el Anexo A.

### 3) Definición de caso base.

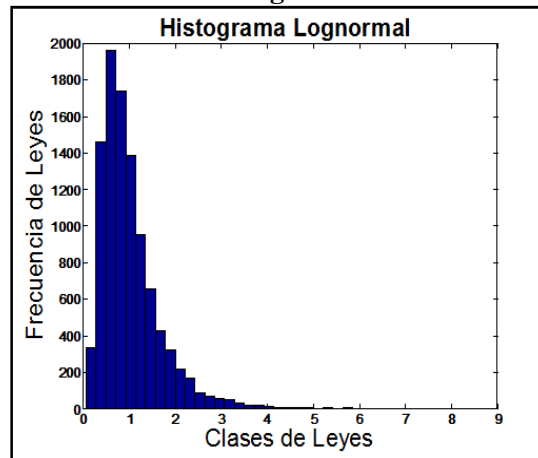
Para ordenar el estudio conceptual se definió un caso base, que consiste en establecer valores para cada uno de los parámetros a estudiar. El caso base se presenta a continuación.

#### 1) Histograma lognormal.

Datos originales con: Media logarítmica = -0.15  
Desviación estándar logarítmica = 0.60

Esto se traduce en un histograma con la siguiente forma:

**Figura 10: Forma de histograma asociado a caso base.**



#### 2) Tamaño de Bloque.

Se definió trabajar con bloque regulares (de igual medida en cada dirección). El caso base consiste en un bloque de 5x5x5 metros.

#### 3) Variograma de datos gaussianos.

Se considera un variograma isótropo (mismo alcance en las distintas direcciones del espacio) de las siguientes características:

Efecto Pepa = 0.1  
Alcance = 100 metros.  
Modelo esférico.

De este modo, formalmente se tiene la siguiente expresión para el variograma:

$$\gamma(h) = 0.1 + 0.9 \text{esf}(100,100,100)$$

#### **4) Definición de valores a estudiar con cada parámetro.**

A continuación se presenta los distintos valores que toma cada una de los parámetros en estudio. Es importante considerar que en algunos casos se incluyeron valores extremos sólo de modo conceptual.

**Tabla 4: Valores de cada parámetro en estudio.**

<b>Bloques [mxmxm]</b>	<b>Efecto pepa</b>	<b>Alcance variograma [m]</b>	<b>Desv. Estándar Logarítmica*</b>
0.1x0.1x0.1	0.0	1	0.0
5x5x5	0.1	2	0.1
10x10x10	0.2	10	0.2
15x15x15	0.3	15	0.3
20x20x20	0.4	20	0.4
25x25x25	0.5	25	0.5
30x30x30	0.6	50	0.6
35x35x35		75	0.7
40x40x40		100	0.8
50x50x50		150	0.9
60x60x60		200	1.0
75x75x75		250	1.1
100x100x100		500	1.2
200x200x200		5000	1.3
			1.4
			1.5
			1.6
			2.0

\*Para abreviar el término, se expresará simplemente como desviación estándar.

#### **5) Creación de sondajes.**

Para esto se inventaron las coordenadas de cada dato asociado a 1 ó 3 sondajes (15 ó 40 datos respectivamente, según las configuraciones espaciales ya descritas). Esto considerando que el único bloque a estimar se encuentra ubicado en el origen del sistema de coordenadas. Los sondajes no se encuentran ubicados regularmente en el espacio. Cada uno se encuentra a distinta distancia del bloque, y tienen diferentes dip y azimuth. Más detalle de esto se puede revisar en el Anexo A.

#### **6) Creación de datos asociados a cada caso.**

Para generar los datos condicionantes (se crean directamente gaussianos y no lognormales debido a la forma de implementación disponible en los programas de Matlab) se realizan simulaciones puntuales no condicionales (mediante método de descomposición matricial LU) en los puntos con las coordenadas obtenidas en la creación de sondajes. Estas simulaciones entregan valores gaussianos simulados que serán los datos condicionantes para cada configuración en el estudio conceptual.

De esta forma se debe ser consistente y generar distintos datos condicionantes cuando se hace variar ya sea el efecto pepa o el alcance del variograma, de modo que efectivamente esos datos sean expresión de cada variograma estudiado.

Por otra parte, los datos originales lognormales  $Z$  se pueden expresar en función de los datos gaussianos  $Y$  según la expresión:

$$Z = \exp(m + s \cdot Y)$$

Con  $m$  = media de los logaritmos de los datos.

$s$  = desviación estándar de los logaritmos de los datos.

Considerando esta expresión se puede modificar la forma del histograma de los datos originales en función de la desviación estándar de los logaritmos de los datos.

### **7) Ejecución de simulaciones con ambos modelos.**

Para cada configuración espacial de datos y sondajes, y para cada uno de los valores que toman los distintos parámetros a estudiar (tamaño de bloque, efecto pepa, alcance de variograma, desviación estándar de logaritmos de datos) se construyen 1000 realizaciones, simulando con cada uno de los dos modelos (MMG y MGD). Para que sean comparables los resultados observados, se ejecutan estas simulaciones con el mismo número de semilla para ambos modelos.

### **8) Estudio comparativo de resultados.**

Una vez obtenidos los resultados, se analizan gráficamente las aproximaciones que tengan los modelos construyendo:

- Nubes de correlación: con el objetivo de estudiar la correlación espacial que presenten las series de 1000 realizaciones construidas con cada modelo para cada configuración.
- Gráficos q-q plot: que permiten comparar la distribución que siguen los 1000 valores simulados con cada modelo y ver si estas distribuciones tienden a parecerse o no.

### **9) Conclusiones.**

Apuntarán a definir un rango de valores para cada uno de los parámetros estudiados, de modo de establecer las condiciones en que el modelo gaussiano discreto entrega resultados similares al modelo multigaussiano.



## **4.2 Metodología Casos de Estudio.**

### **1) Estudio exploratorio de bases de datos.**

Se realizan las estadísticas básicas de las dos bases de datos y todo el análisis exploratorio, y se busca identificar cualquier problema que pueda existir, incluyendo un estudio de la hipótesis de estacionaridad.

### **2) Transformación de datos originales en datos gaussianos.**

Mediante el archivo ejecutable nscore.exe de GSLib, se desarrolla la transformación a datos gaussianos que además permite disponer de una tabla de transformación que es requerida por los programas de Matlab donde se ejecutan ambos modelos en estudio.

Previamente se desarrolla el desagrupamiento de los datos originales mediante el archivo ejecutable declus.exe, que trabaja con el método de las celdas.

### **3) Verificación de hipótesis multigaussiana.**

Los datos transformados son exportados al software Isatis que tiene implementados dos tests de verificación de la hipótesis multigaussiana:

- Nubes de correlación diferida.
- Test de comparación madograma v/s variograma.

### **4) Análisis variográfico de datos gaussianos y ajuste de modelo de variograma.**

Esto debido a que ambos modelos requieren como entrada el modelo de variograma de los datos gaussianos puntuales. Todo esto se lleva a cabo en el software Isatis.

### **5) Determinación de coeficiente de cambio de soporte y de variograma de datos gaussianos a soporte de bloques.**

Una función implementada y disponible en Matlab permite calcular el coeficiente de cambio de soporte ( $r$ ) y el variograma experimental de los datos gaussianos a soporte de bloque para diferentes direcciones del espacio.

Esta función requiere como entrada el modelo de variograma de datos gaussianos puntuales, el tamaño de bloques y la discretización de los mismos. Posteriormente se modela el variograma de la función gaussiana de bloques.

## **6) Ejecución de simulaciones con ambos modelos.**

Se procede a ejecutar las simulaciones con cada modelo, construyéndose 100 simulaciones para la base de datos Don Luis, y 50 simulaciones para la base de datos Radomiro Tomic. Nuevamente se considera los mismos números de semilla para que los resultados sean comparables.

## **7) Post-procesamiento de las simulaciones.**

Para comparar los resultados obtenidos con cada modelo, se considerará tanto la estimación de recursos que superen distintas leyes de corte como la incertidumbre asociada a cada modelo. De esta forma se construyen:

- Curvas tonelaje ley
- Varianzas condicionales
- Intervalos de probabilidad.

Para comparar tanto las varianzas condicionales como los intervalos de probabilidad se construirán nubes de correlación que permitan comparar la incertidumbre asociada a cada bloque.

## 5 RESULTADOS ESTUDIO CONCEPTUAL.

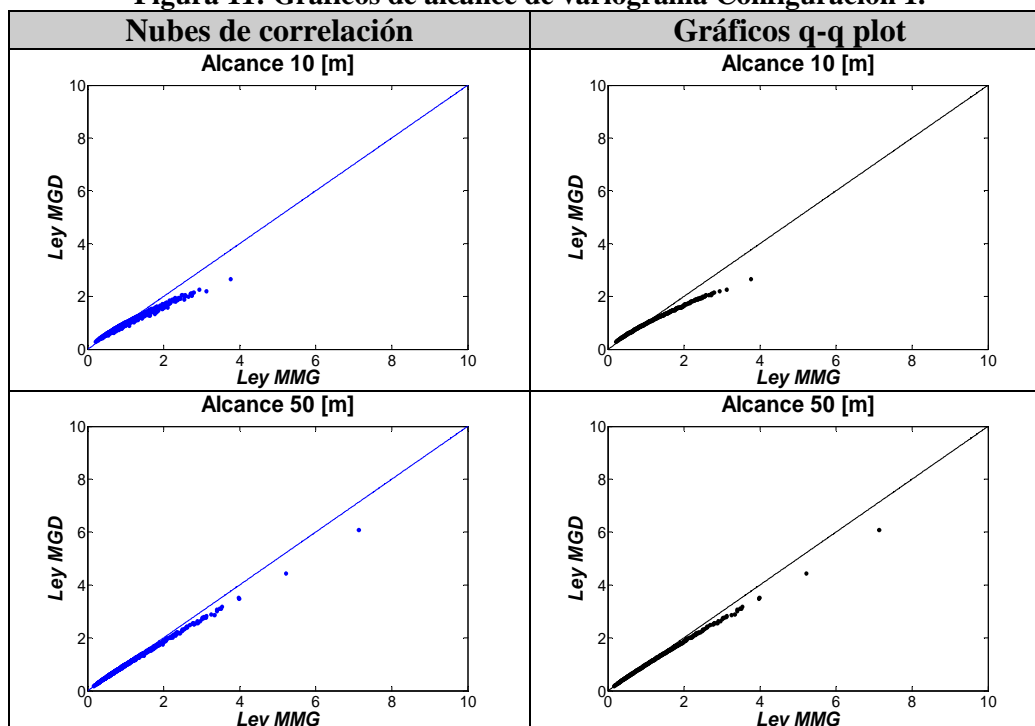
En este capítulo se presenta los resultados del estudio conceptual clasificados según cada una de las configuraciones espaciales ya descritas. Se muestran gráficamente los resultados mediante nubes de correlación y gráficos q-q plot. A continuación se presenta sólo una selección de gráficos de modo de mostrar los resultados de forma concisa. El detalle de todos los gráficos obtenidos considerando todos los valores elegidos para los parámetros a estudiar se muestran en el Anexo B.

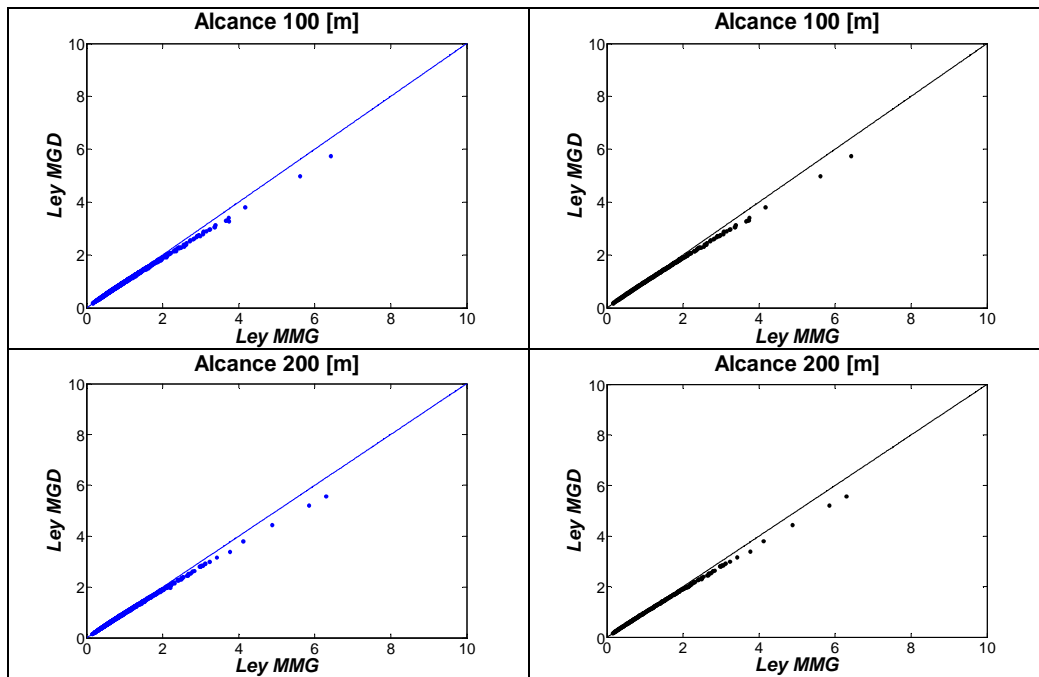
Es importante mencionar que la mayoría de los gráficos (alcance variograma, efecto pepa, tamaño de bloques) se muestran en la misma escala de los ejes (de 0 a 10). En cambio, los gráficos de desviación estándar logarítmica se presentan en la escala de ejes de 0 a 50 (recordar que para abreviar el término, se expresa simplemente como desviación estándar). Se debe tener presente esto para posteriormente evaluar correctamente cual es el parámetro que afecta en mayor medida las aproximaciones de los modelos.

### 5.1. Configuración 1: Sin datos condicionantes.

#### 5.1.1 Alcance de variograma.

Figura 11: Gráficos de alcance de variograma Configuración 1.

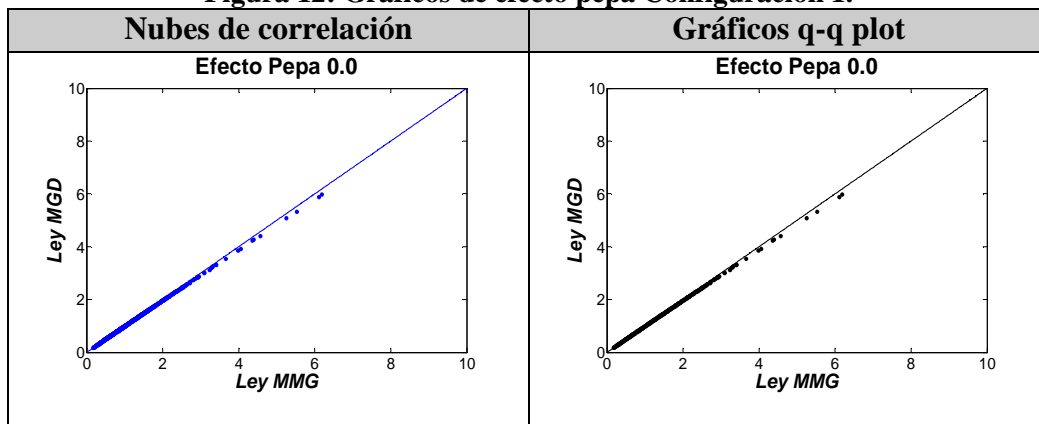


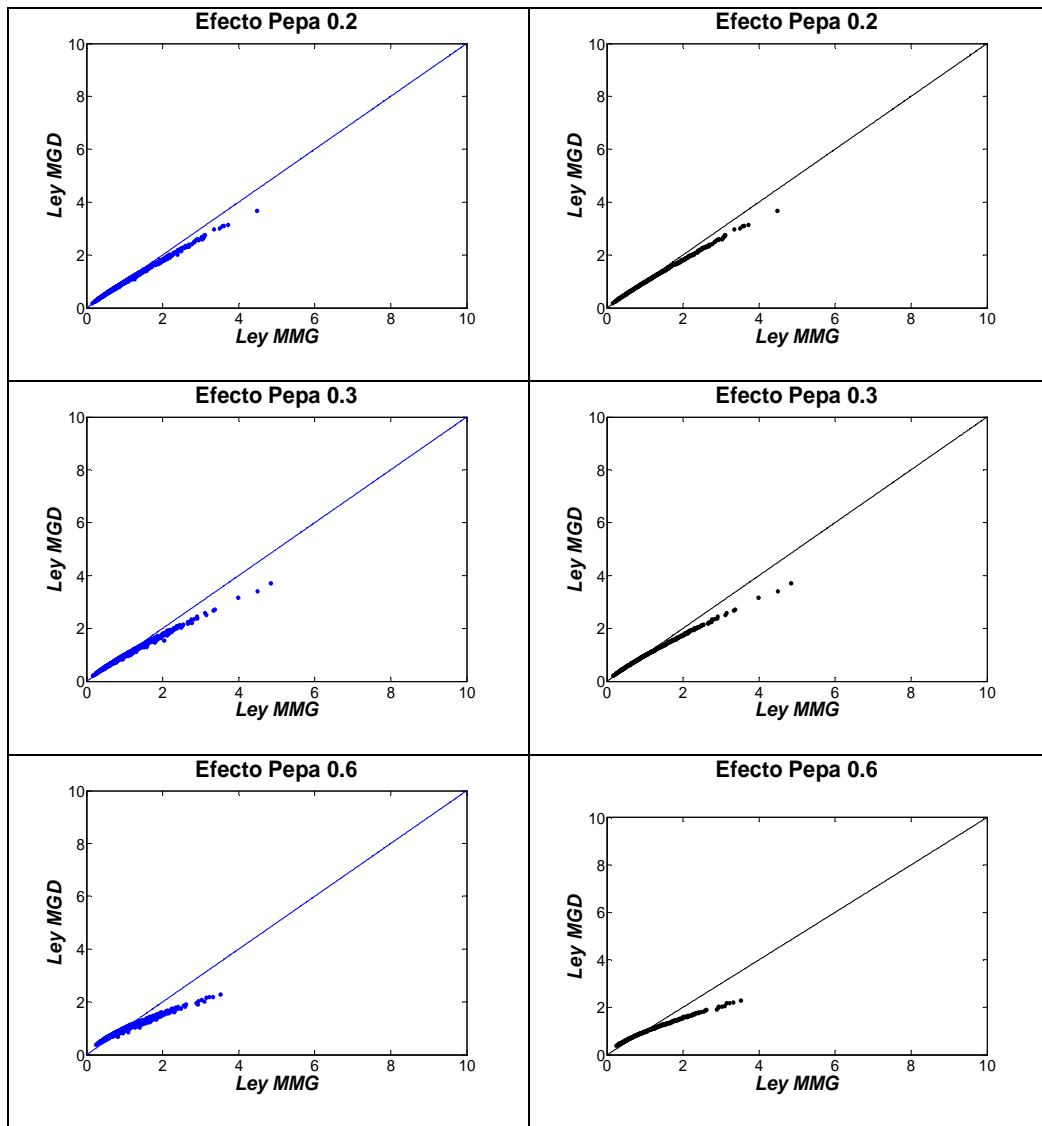


Se observa que para alcances desde los 50 [m] se tiene tanto una buena correlación como distribuciones similares entre las series de datos simulados. Para alcances menores a 50 [m] estas propiedades se pierden, y para alcances mayores a 100 [m] los resultados mantienen la similitud entre ambos modelos.

### 5.1.2 Efecto Pepa de variograma.

Figura 12: Gráficos de efecto pepa Configuración 1.

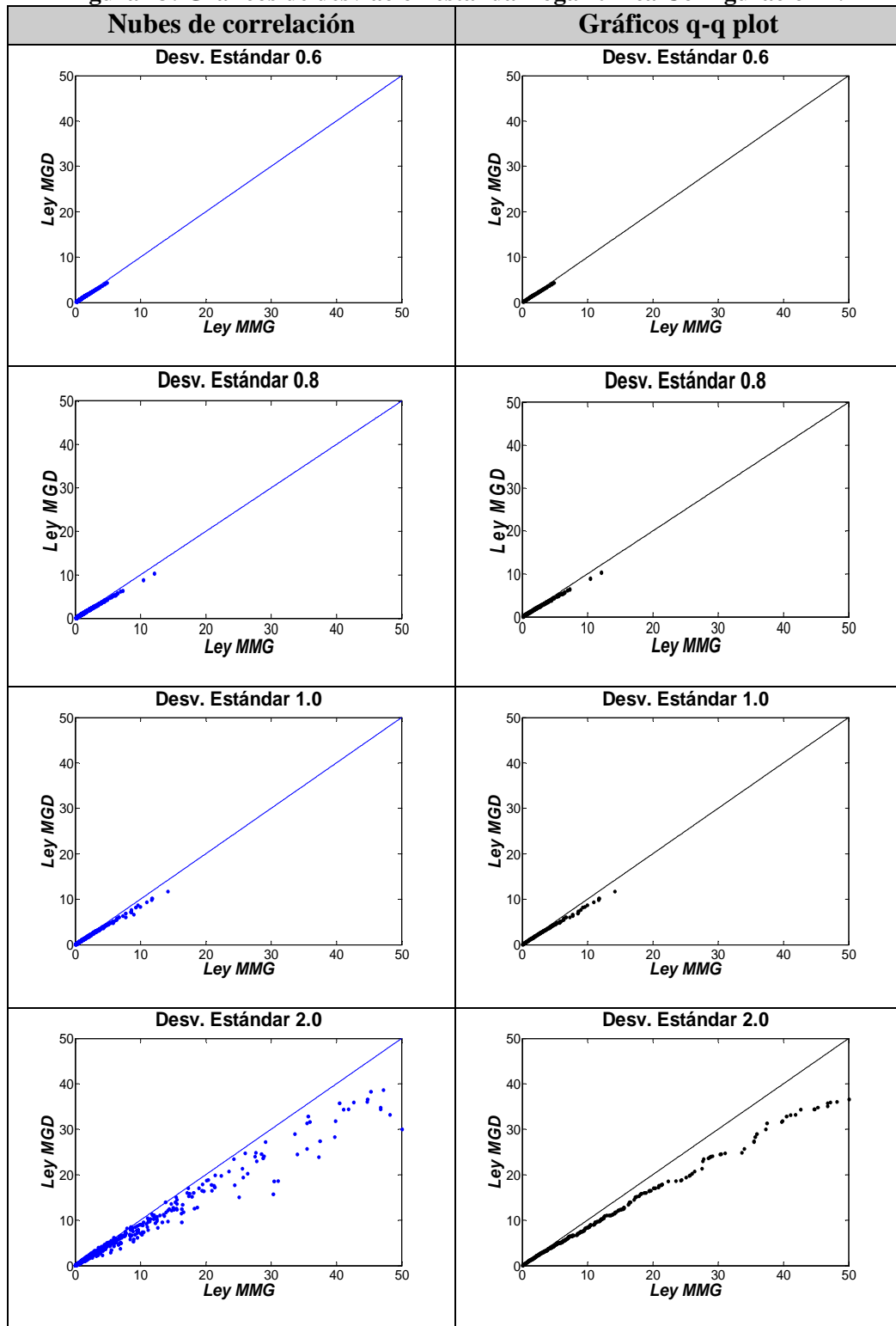




Se observa que hasta un efecto pepa de 0.2 se tiene similitud entre los valores simulados con cada modelo, pero desde un efecto pepa de 0.3 las diferencias comienzan a acentuarse.

### 5.1.3 Desviación Estándar Logarítmica.

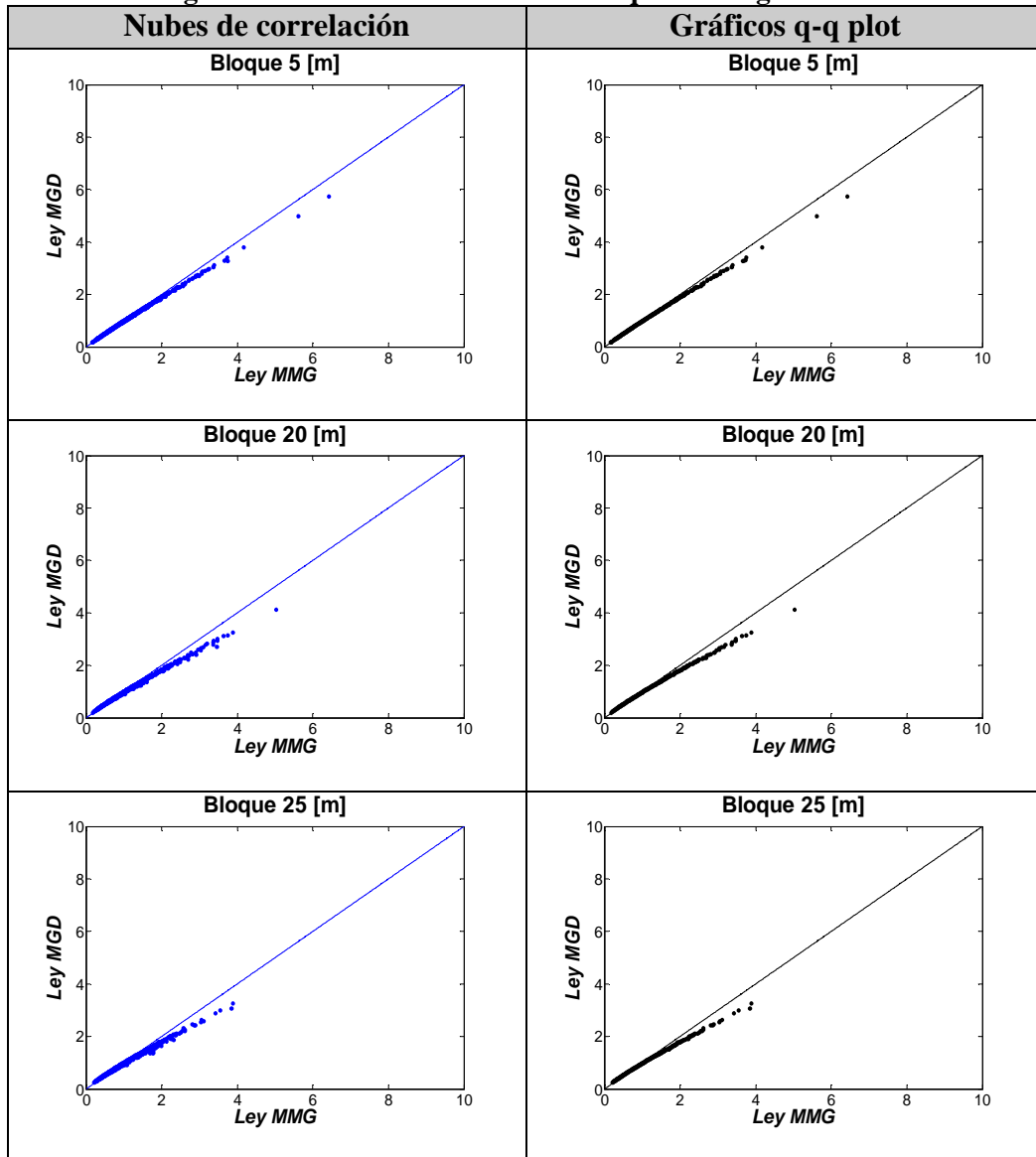
Figura 13: Gráficos de desviación estándar logarítmica Configuración 1.

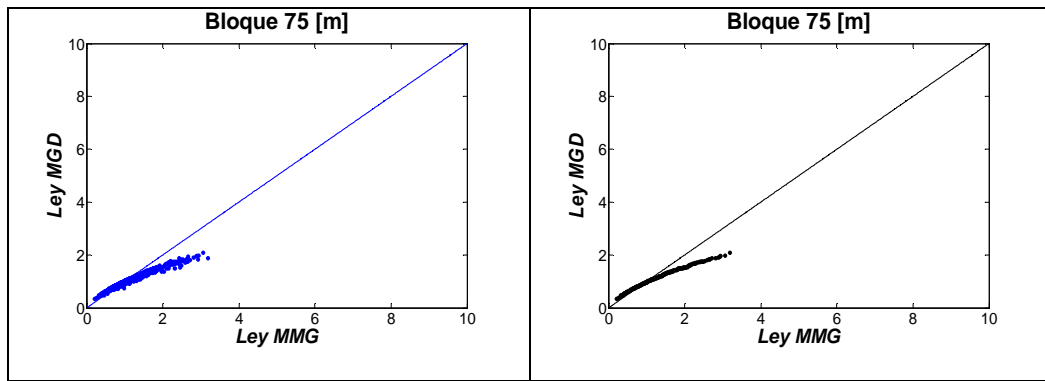


Se observa que hasta una desviación estándar logarítmica de 0.8-0.9 los modelos entregan valores simulados similares. Desde una desviación estándar logarítmica de 1.0 se observa resultados con mayores diferencias (recordar que éstos gráficos se muestran en una escala más amplia).

### 5.1.4 Tamaño de bloques.

**Figura 14: Gráficos de tamaño de bloques Configuración 1.**



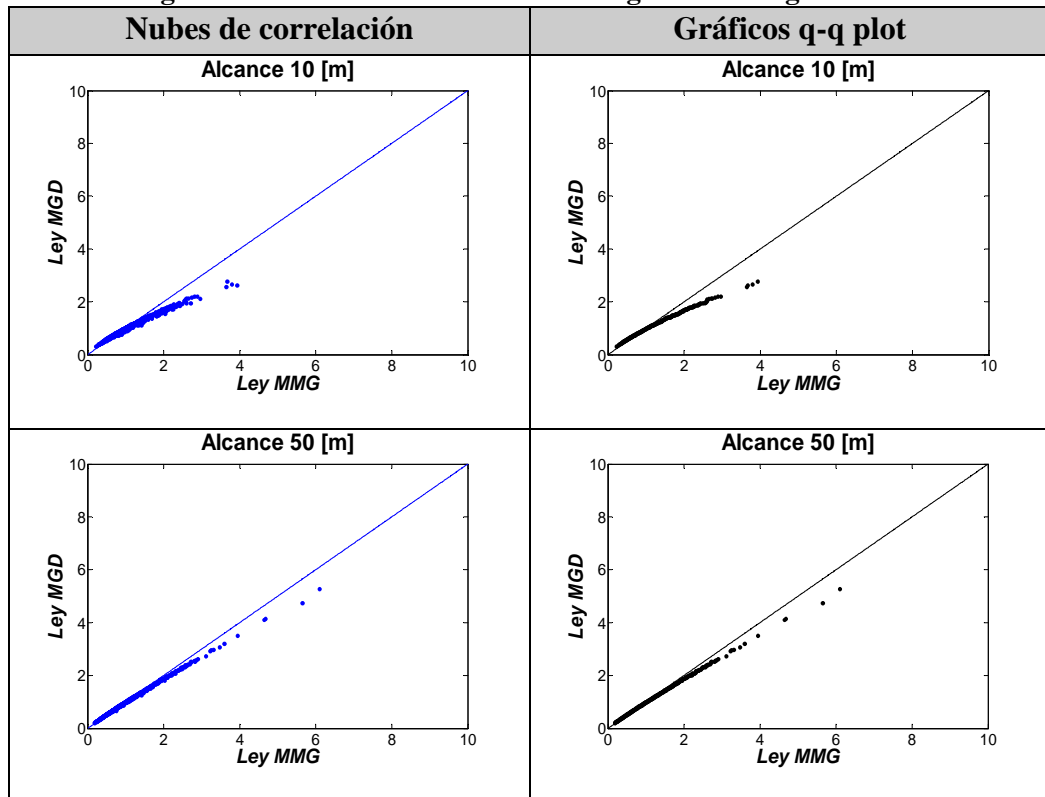


Se observa que hasta los tamaños de bloques de 20x20x20 metros y 25x25x25 metro se tiene tanto buena correlación como similitud en las distribuciones que siguen las series de datos simulados con ambos modelos.

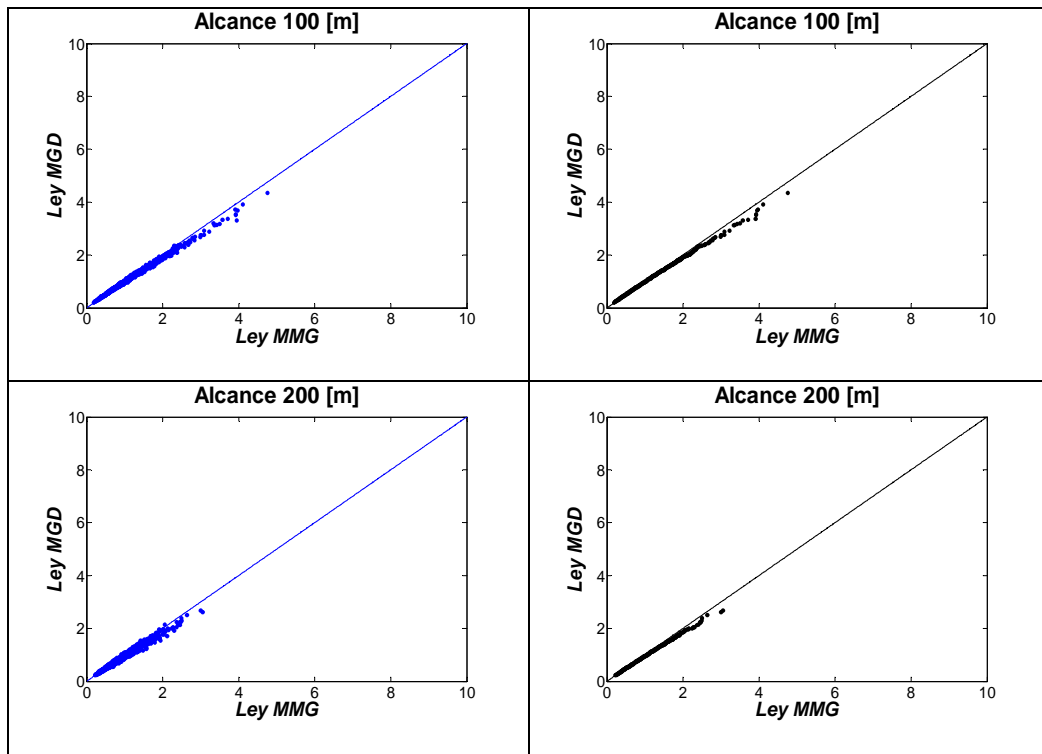
## 5.2 Configuración 2: 15 datos condicionantes.

### 5.2.1 Alcance de variograma.

Figura 15: Gráficos de alcance de variograma Configuración 2.



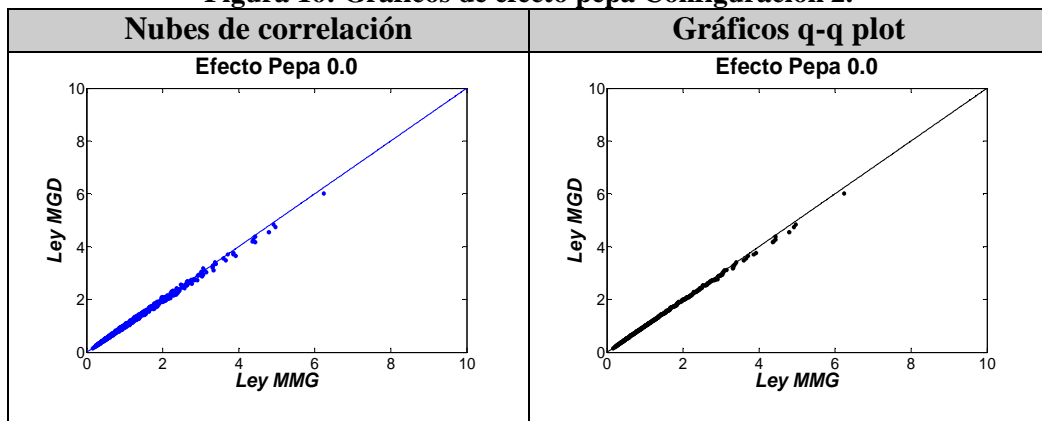


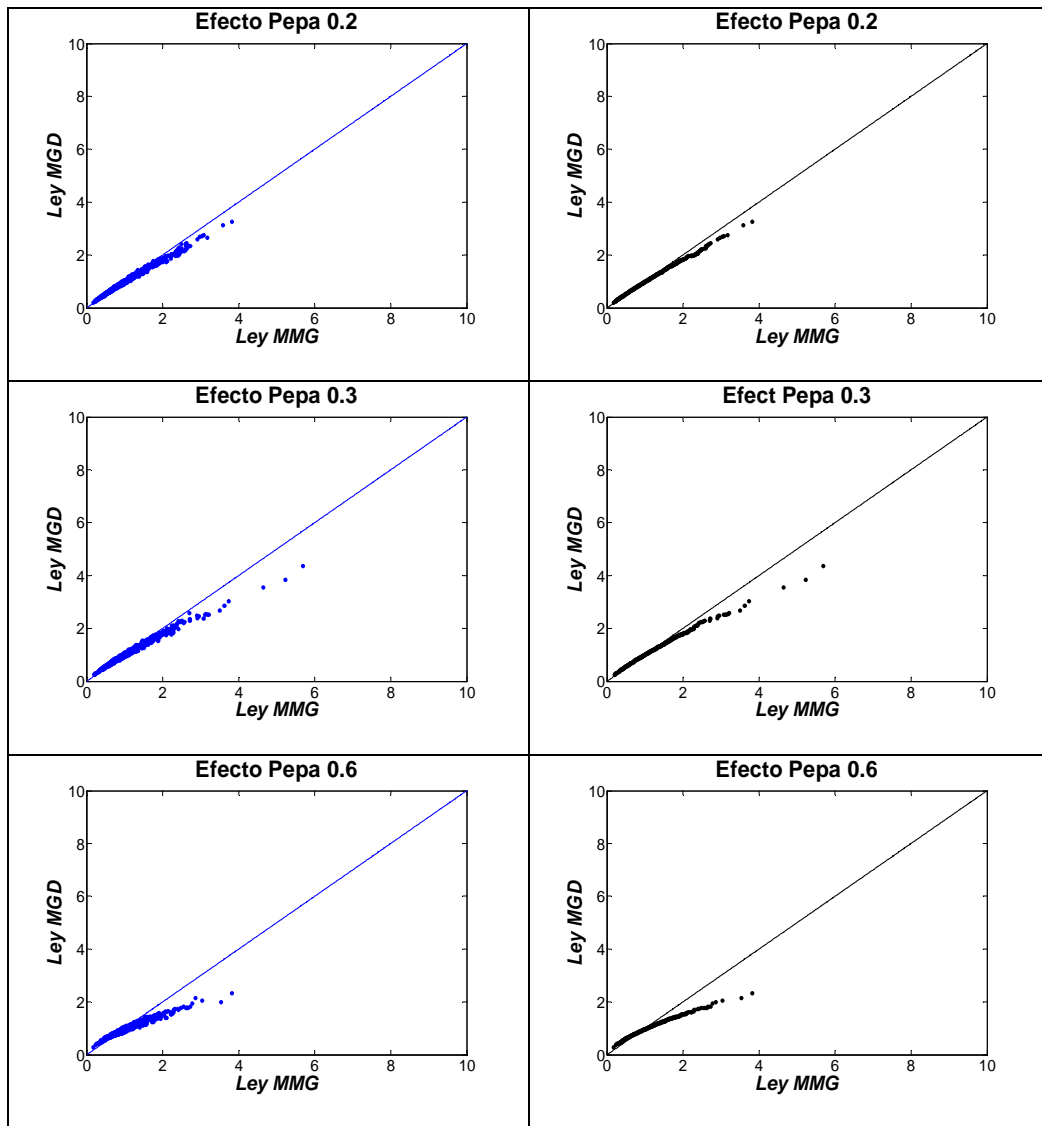


Se observa que para alcances desde los 50 [m] se tiene tanto una buena correlación como distribuciones similares entre las series de datos simulados. Para alcances menores a 50 [m] estas propiedades se pierden, y para alcances mayores a 100 [m] disminuye el rango de valores simulados.

### 5.2.2 Efecto Pepa de variograma.

Figura 16: Gráficos de efecto pepa Configuración 2.

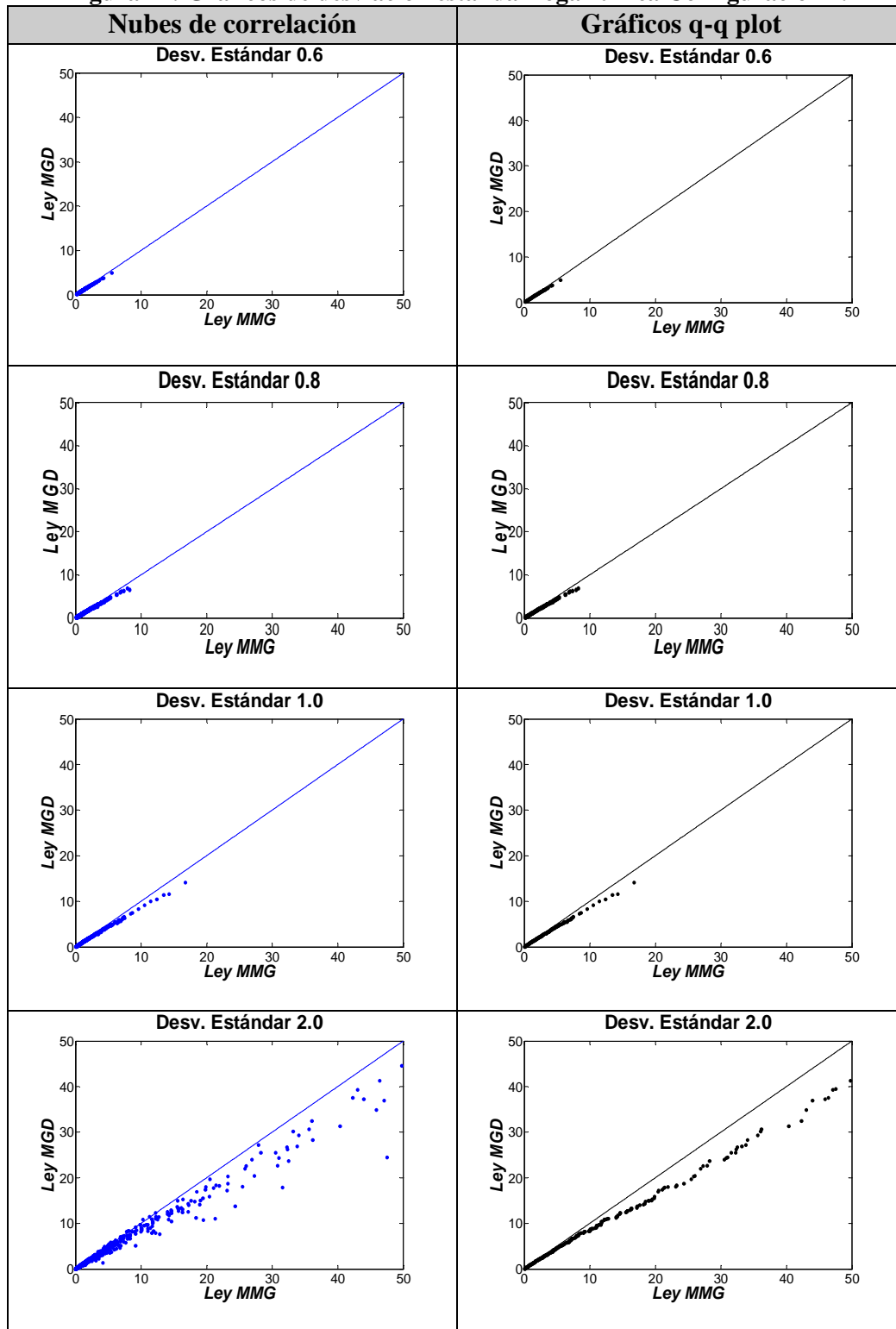




Se observa que hasta un efecto pepa de 0.2 se tiene similitud entre los valores simulados con cada modelo, pero desde un efecto pepa de 0.3 las diferencias comienzan a acentuarse.

### 5.2.3 Desviación Estándar Logarítmica.

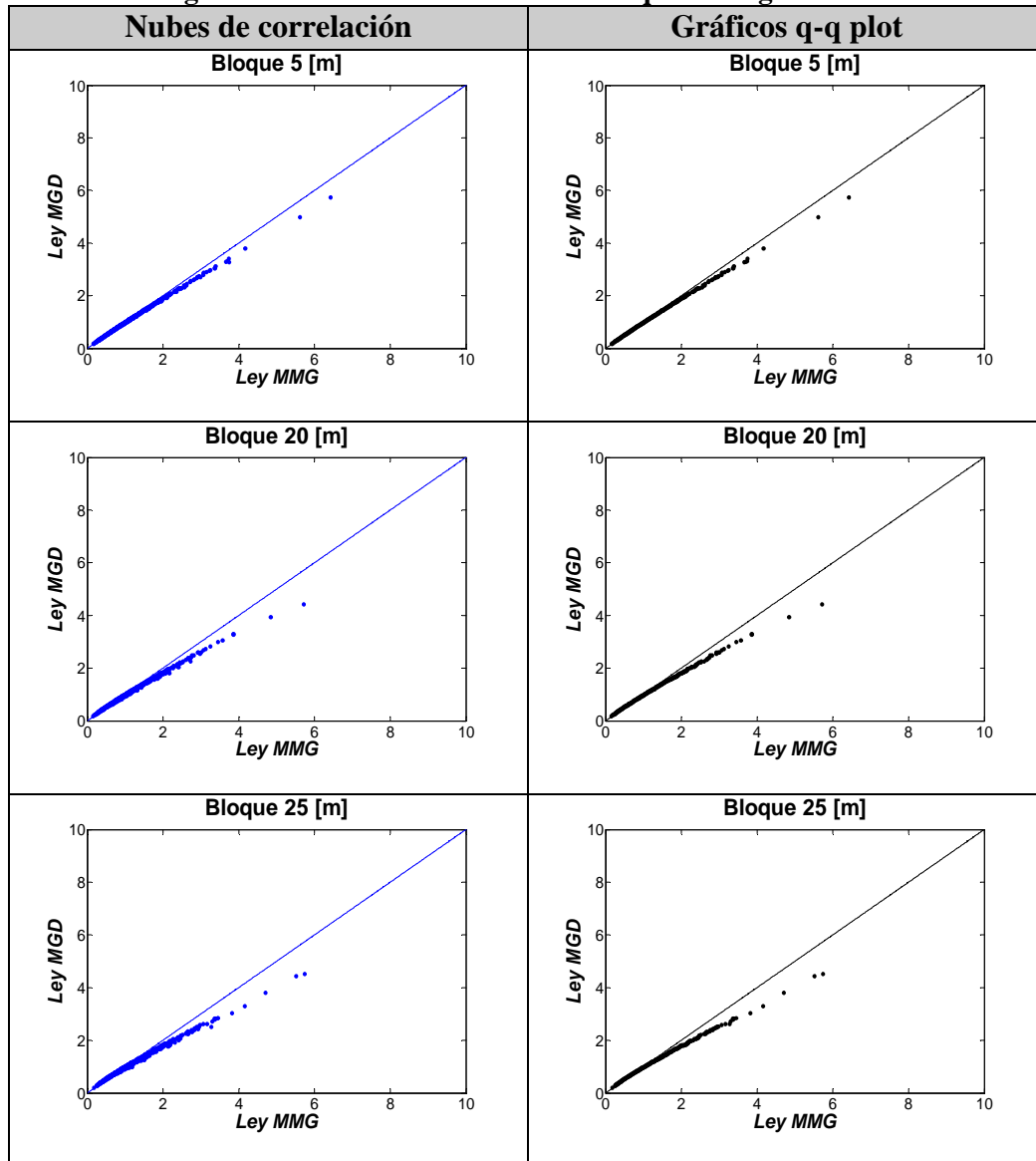
Figura 17: Gráficos de desviación estándar logarítmica Configuración 2.

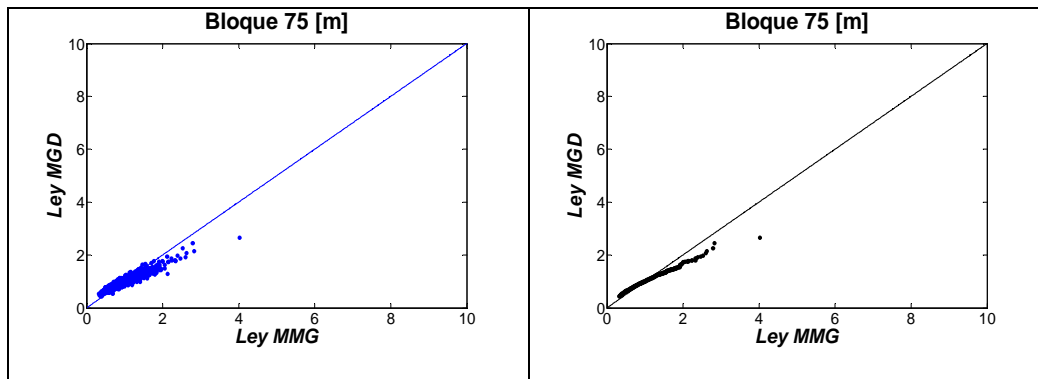


Al igual que en la configuración 1, en esta configuración de datos se observa que hasta una desviación estándar logarítmica de 0.8-0.9 los modelos entregan valores simulados similares. Desde una desviación estándar logarítmica de 1.0 se observa resultados con mayores diferencias (recordar que éstos gráficos se muestran en una escala más amplia).

### 5.2.4 Tamaño de bloques.

Figura 18: Gráficos de tamaños de bloque Configuración 2.



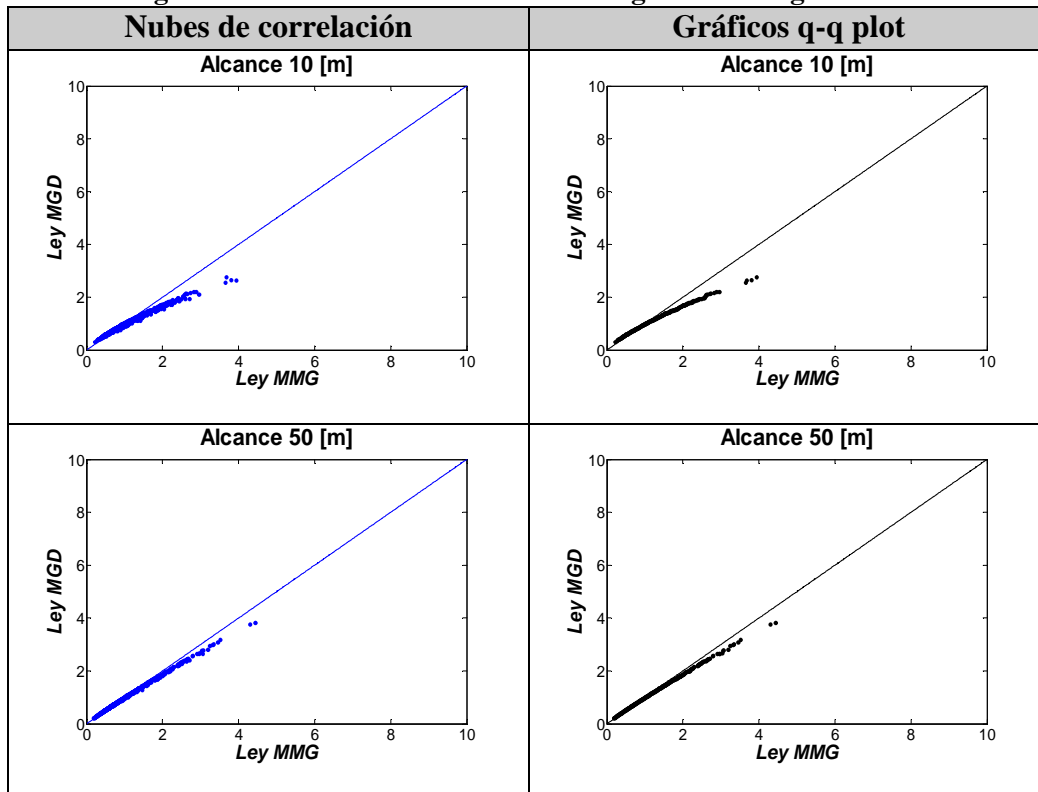


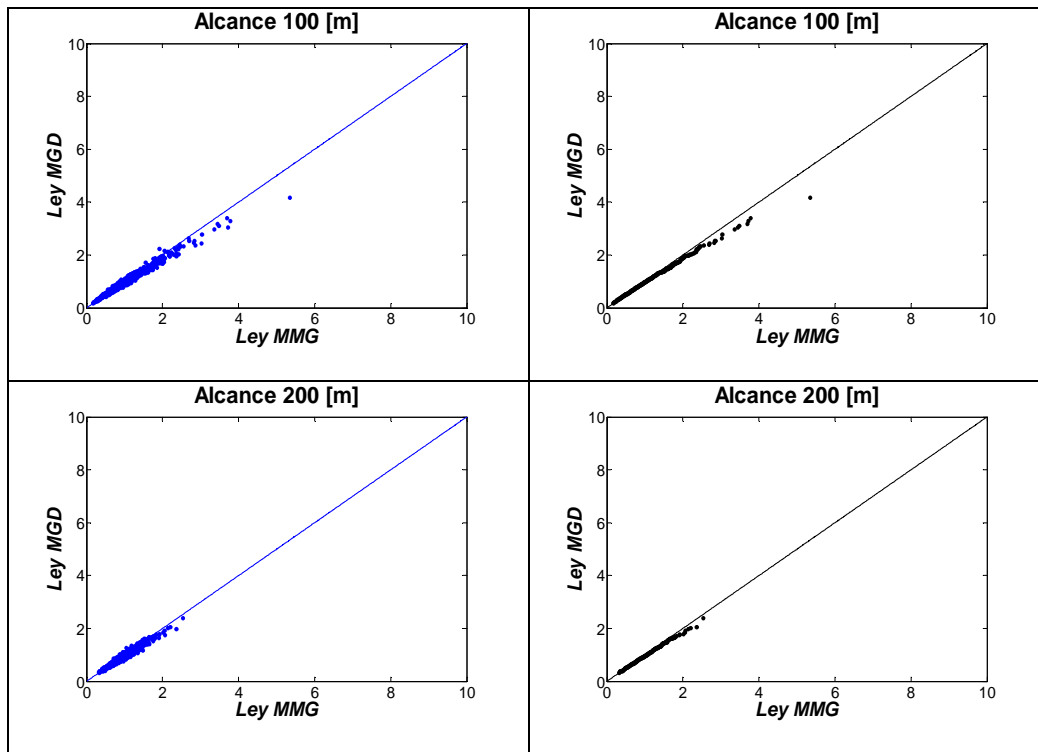
Se observa resultados similares a la configuración 1; hasta los tamaños de bloques de 20x20x20 metros y 25x25x25 metros se tiene tanto buena correlación como similitud en las distribuciones que siguen las series de datos simulados con ambos modelos.

### 5.3 Configuración 3: 40 datos condicionantes.

#### 5.3.1 Alcance de variograma.

Figura 19: Gráficos de alcances de variograma Configuración 3.

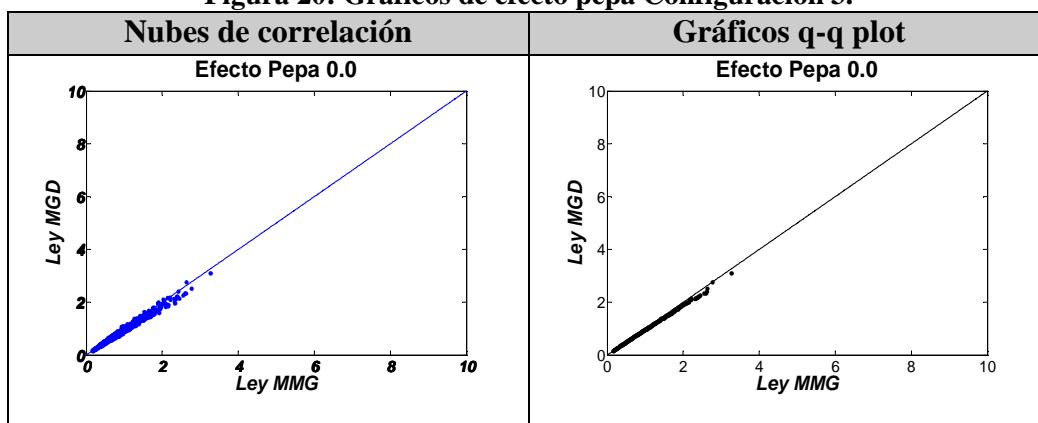


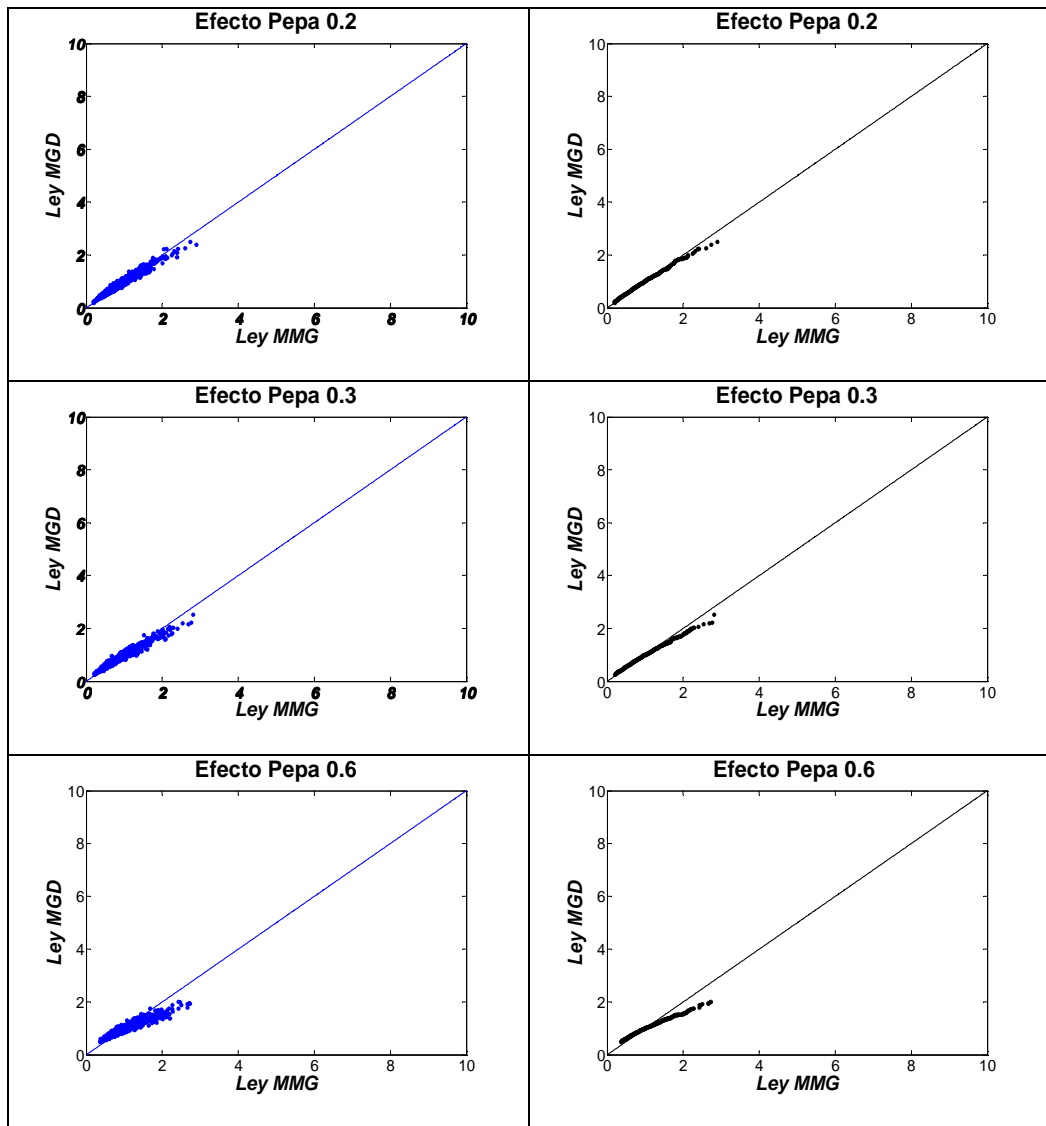


Se observa que para alcances desde los 50 [m] se tiene tanto una buena correlación como distribuciones similares entre las series de datos simulados. Para alcances menores a 50 [m] estas propiedades se pierden, y para alcances mayores a 100 [m] disminuye el rango de valores simulados.

### 5.3.2 Efecto Pepa de variograma.

Figura 20: Gráficos de efecto pepa Configuración 3.

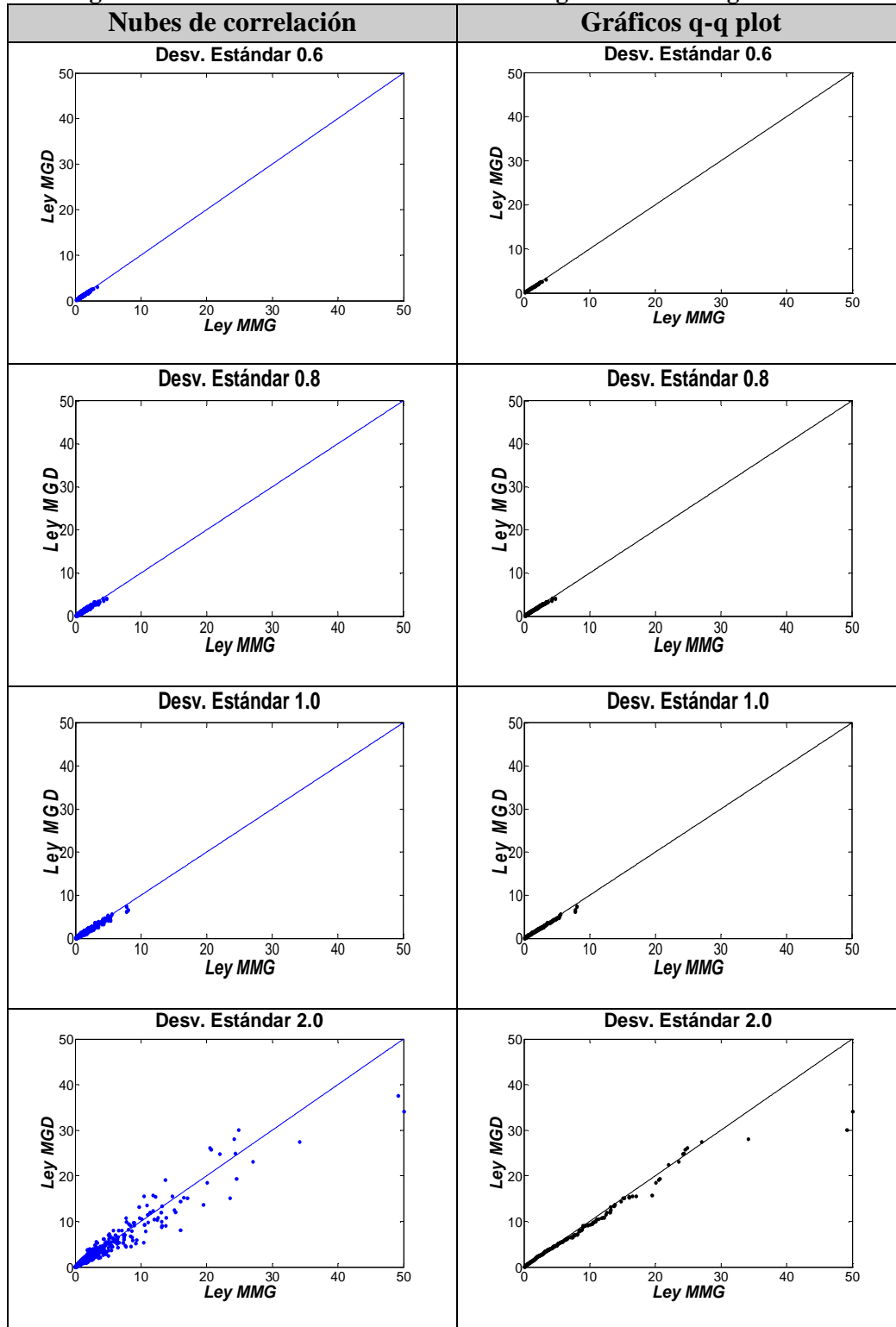




Si bien los gráficos qq-plot muestran distribuciones similares hasta un efecto pepa de 0.3, las nubes de correlación muestran mayor dispersión que en las dos configuraciones anteriores.

### 5.3.3 Desviación Estándar Logarítmica.

Figura 21: Gráficos de desviación estándar logarítmica Configuración 3.



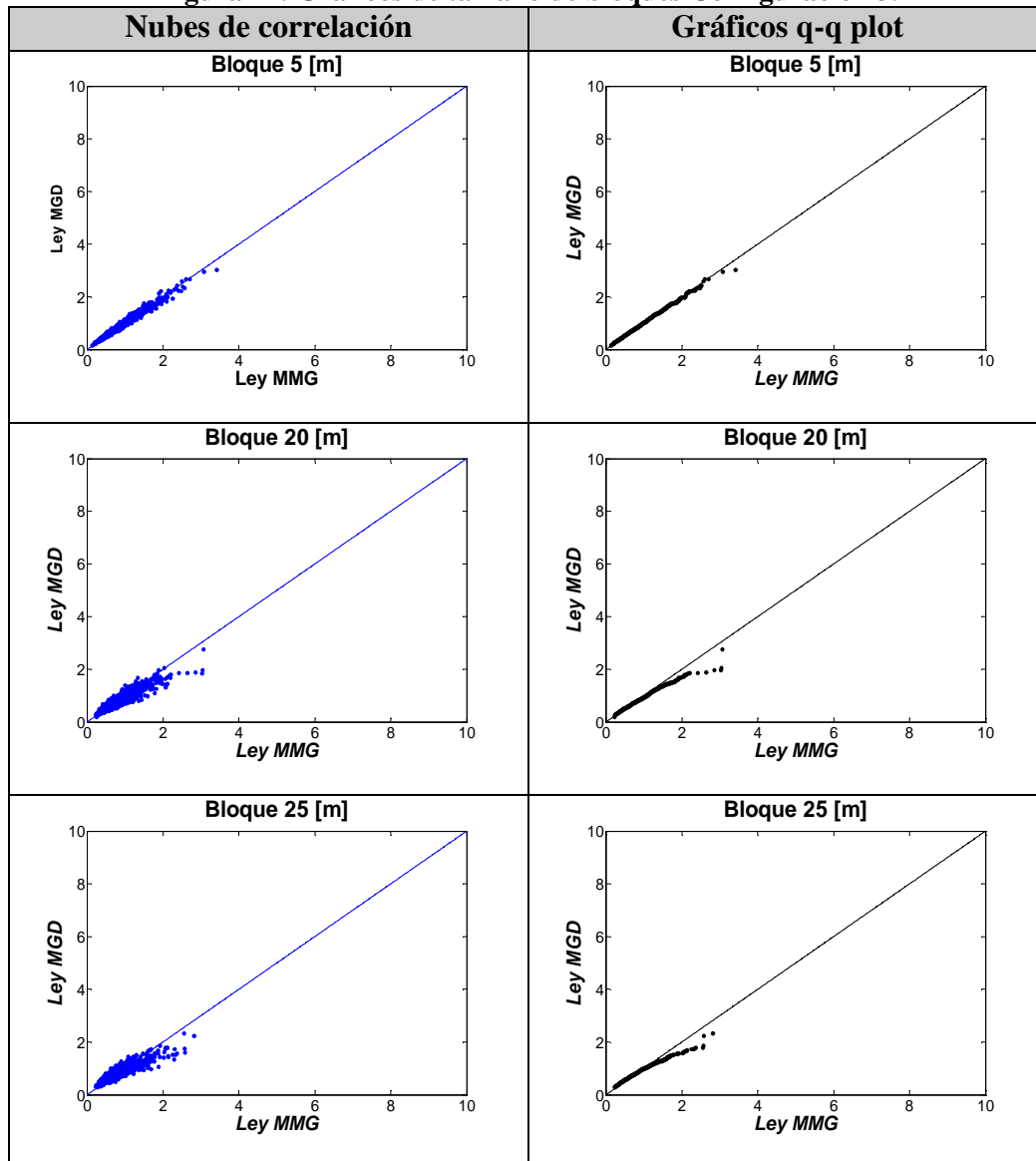
Análogo al estudio de efecto pepa antes mencionado, si bien los gráficos q-q plot muestran similitud hasta una desviación estándar de 1.0, las nubes de correlación son más

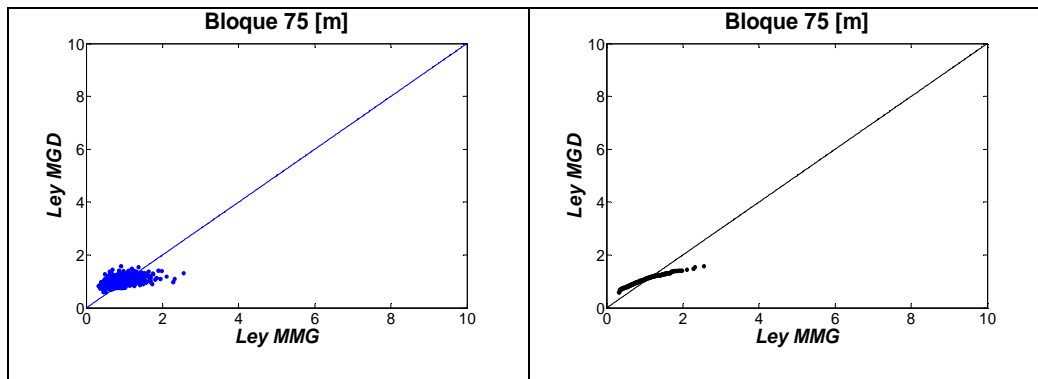


dispersas que en las dos configuraciones anteriores (recordar que éstos gráficos se muestran en una escala más amplia).

### 5.3.4 Tamaño de bloques.

Figura 22: Gráficos de tamaño de bloques Configuración 3.



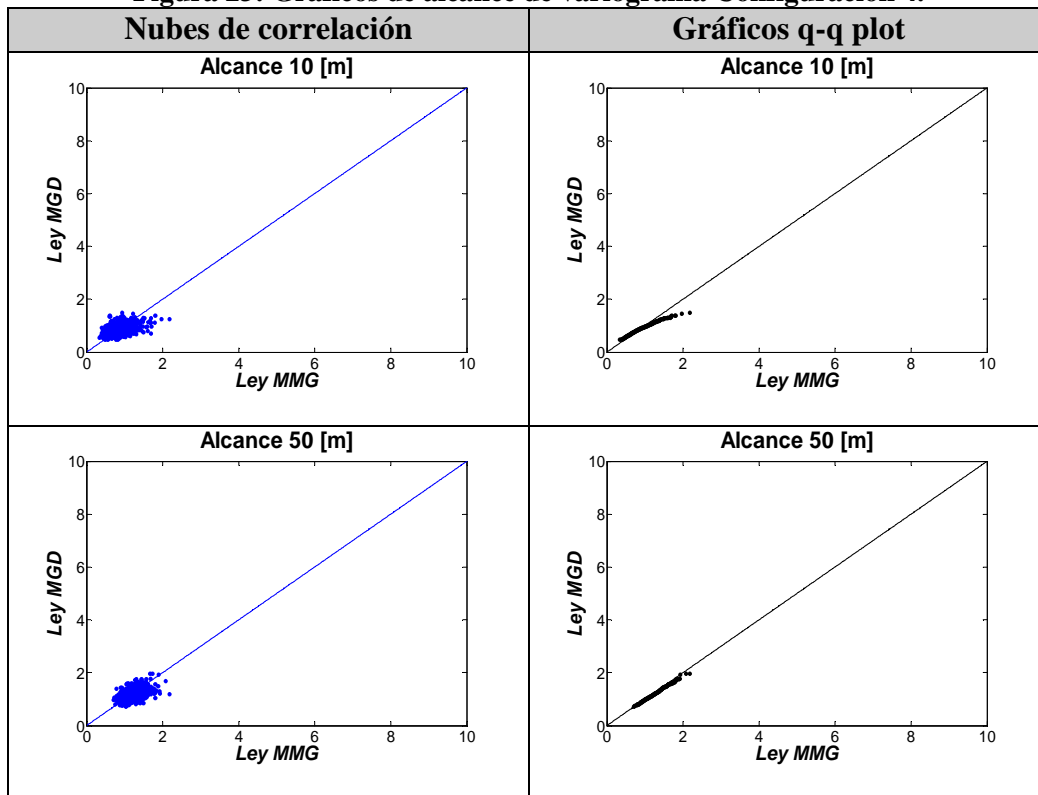


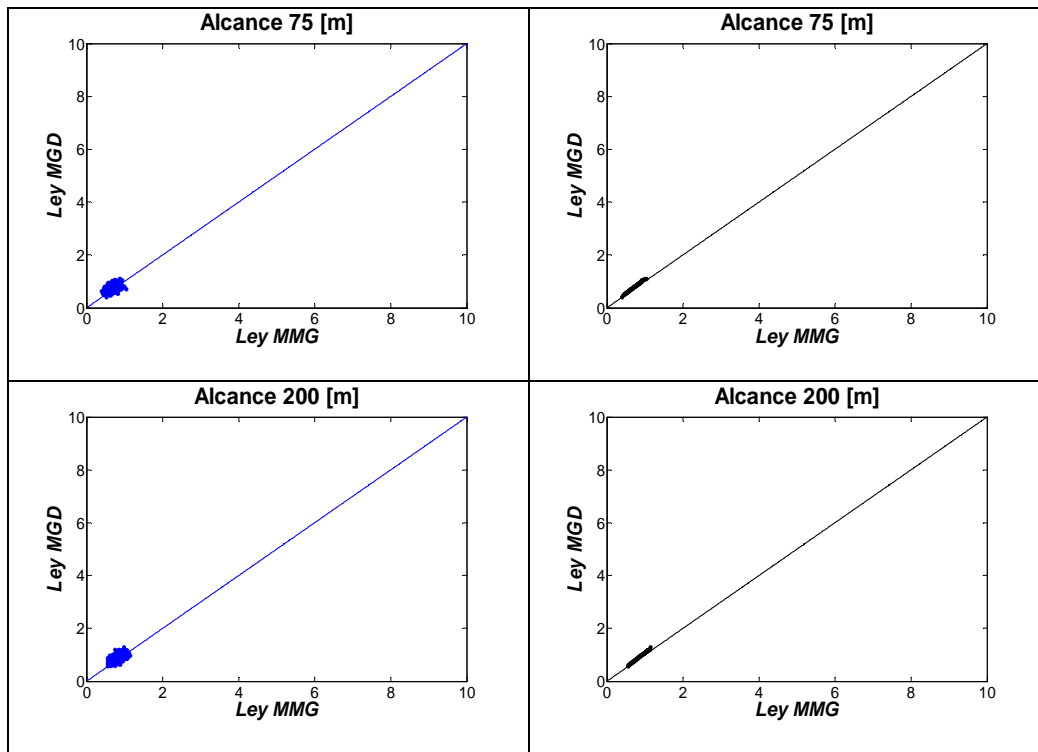
Si bien en este caso los rangos de valores simulados son menores y las distribuciones de valores simulados siguen siendo similares hasta los tamaños de bloques de 25x25x25 metros (aunque con algunos problemas en valores altos), se observa correlaciones menores en comparación a las dos configuraciones anteriores. Se hace necesario establecer un límite menor en esta configuración.

## 5.4 Configuración 4: sondaje cruzando al bloque (15 datos).

### 5.4.1 Alcance de variograma.

Figura 23: Gráficos de alcance de variograma Configuración 4.

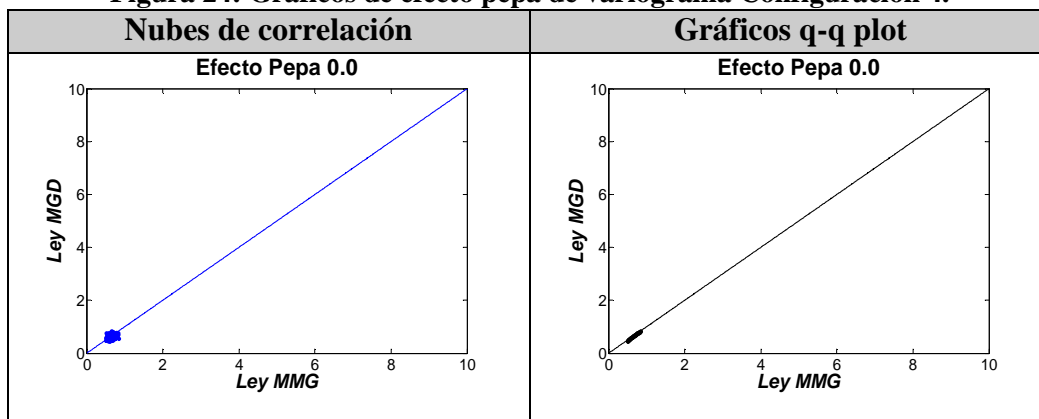


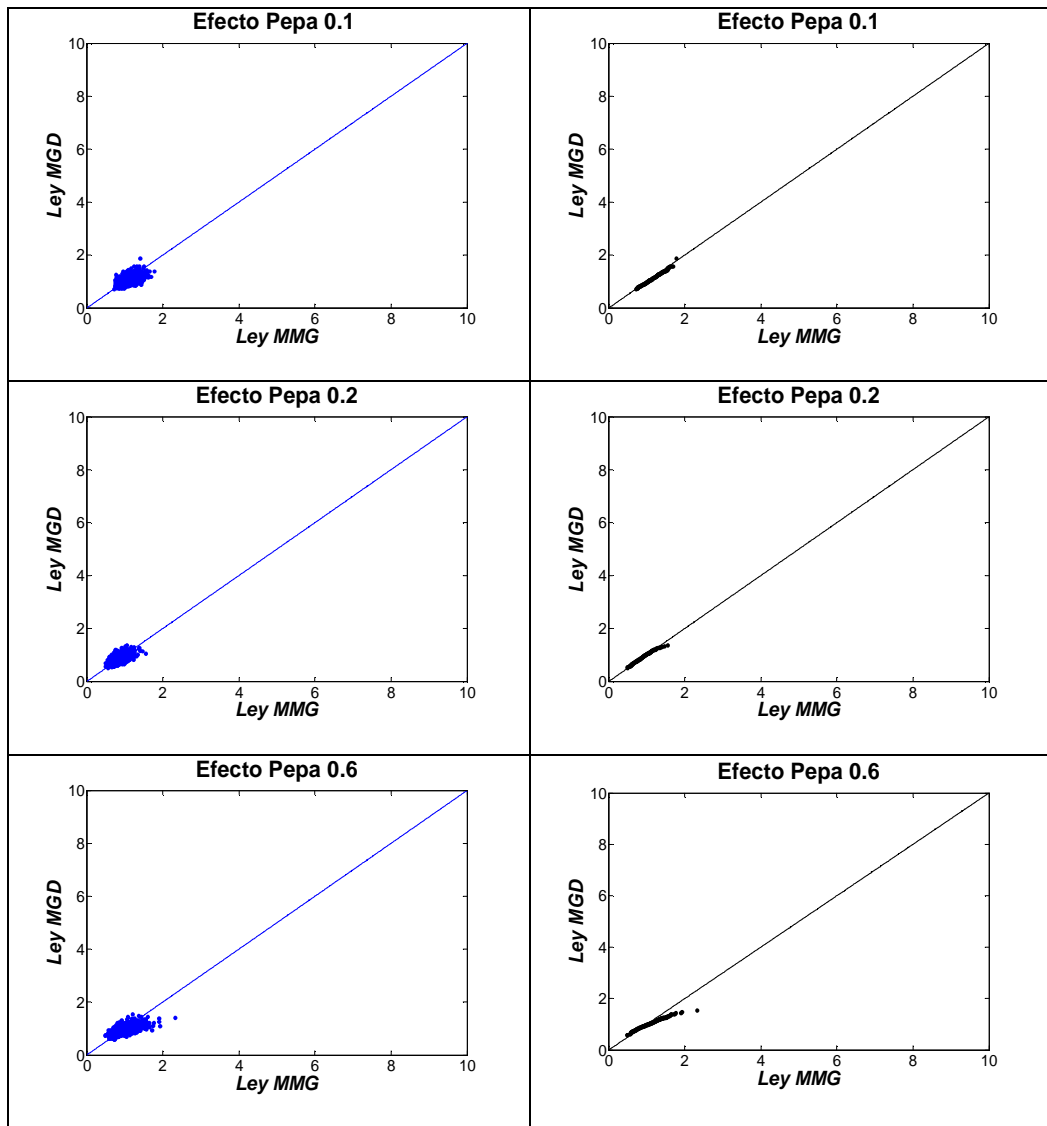


En los gráficos q-q plot se observa similitud entre las distribuciones de las series de valores generados con cada modelo (a partir de alcance 50 [m]), pero las nubes de correlación indican baja correlación debido a la forma circular de las nubes. Es por esto que se prefiere establecer en 75 [m] el mínimo alcance para el cual se observa resultados similares con cada modelo, debido a que la nube de correlación se reduce bastante de tamaño, presentándose rangos muy reducidos de valores simulados.

#### 5.4.2 Efecto Pepa de variograma.

**Figura 24: Gráficos de efecto pepa de variograma Configuración 4.**

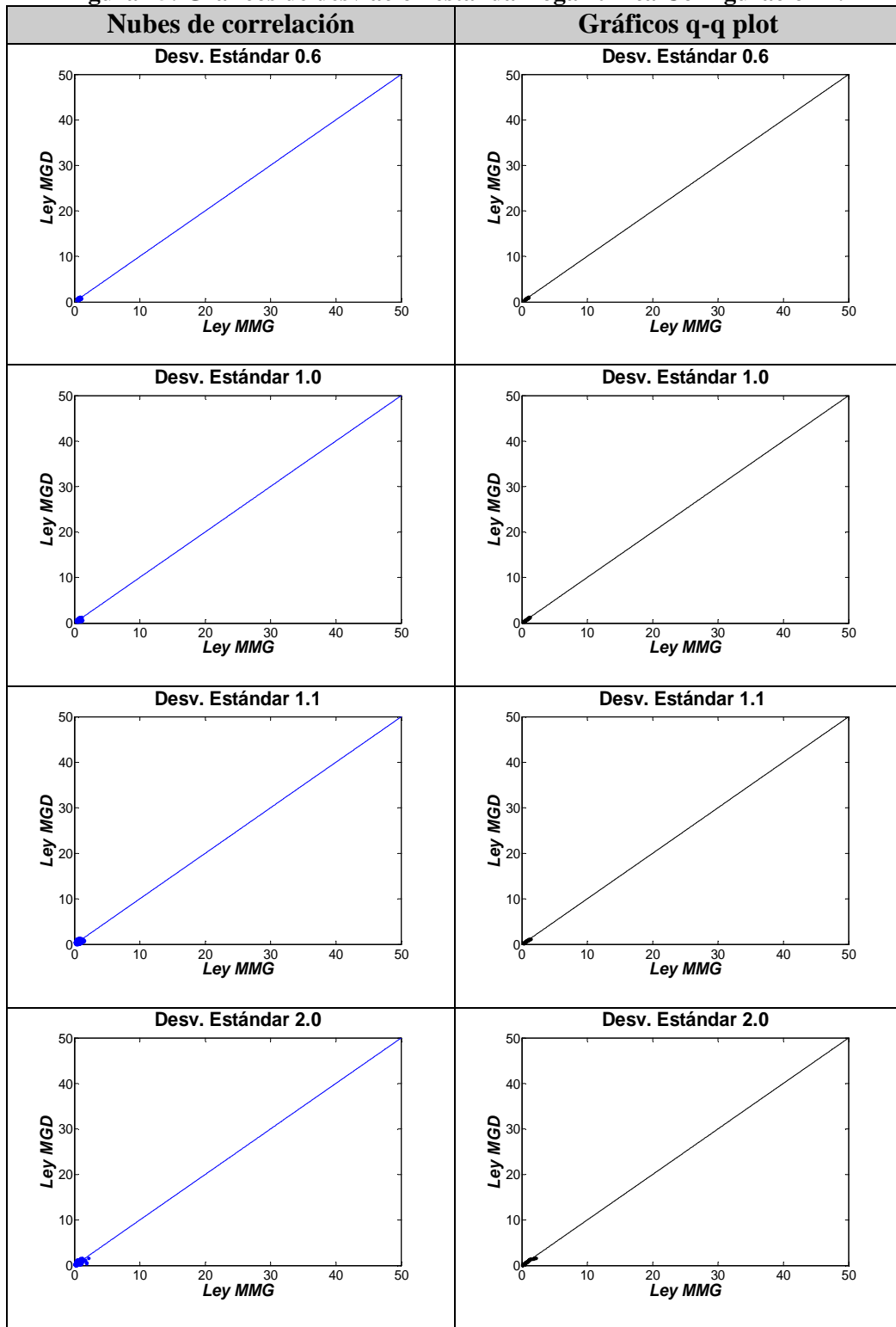




Se observa un comportamiento similar al caso de los alcances del variograma. Si bien los gráficos q-q plot muestran similitud entre los valores simulados con cada modelo hasta un efecto pepa de 0.2, las nubes de correlación (con comportamiento circular) ya presentan una dispersión importante con efecto pepa 0.1.

### 5.4.3 Desviación Estándar Logarítmica.

Figura 25: Gráficos de desviación estándar logarítmica Configuración 4.

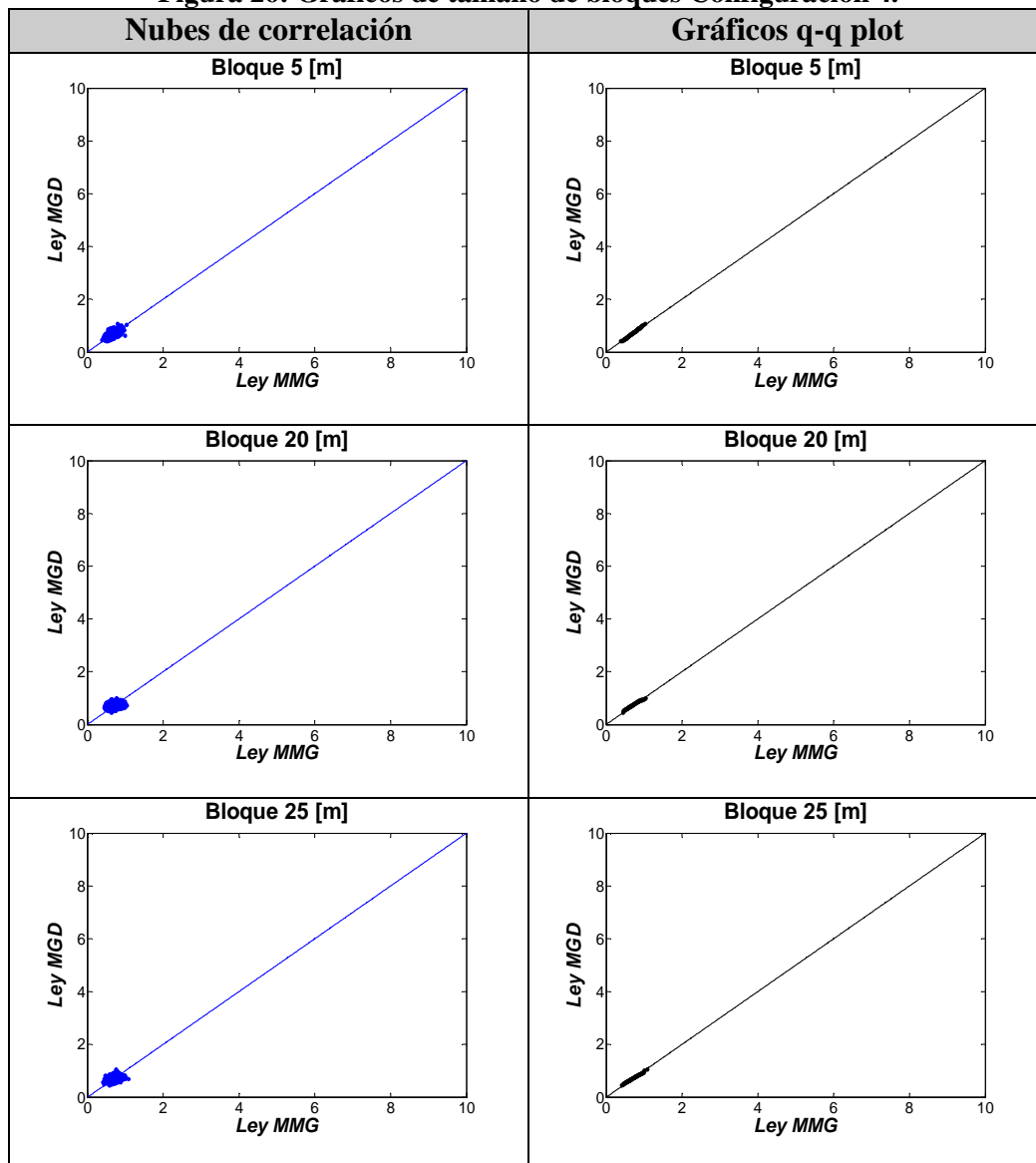


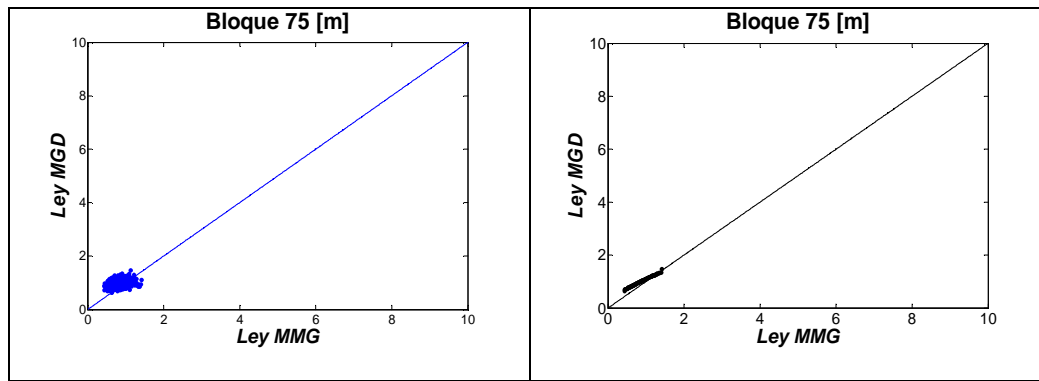
Si bien la escala de los ejes no permite visualizar de la mejor forma estos gráficos, se ha preferido presentarlos así para mantener la misma escala de ejes que las utilizadas en las tres

configuraciones anteriores para el estudio de la desviación estándar logarítmica. En este caso se observa que el rango de valores simulados es mucho más estrecho que el obtenido en los casos anteriores. En las nubes de correlación no se observa grandes diferencias al ir aumentando la desviación estándar, y en los gráficos q-q plot se observa que incluso para desviaciones estándar mayores se tienen dos series muy similares de valores simulados. Sin embargo se debe ser cauteloso ya que las nubes de correlación son bastante circulares.

#### 5.4.4 Tamaño de bloques.

Figura 26: Gráficos de tamaño de bloques Configuración 4.





Se observa resultados similares a los observados con los otros parámetros en estudio para esta configuración. Si bien los gráficos q-q plot muestran similitud entre los valores simulados hasta tamaños de bloques mayores, las nubes de correlación que muestran baja correlación (nubes circulares), presentan menores rangos de valores simulados.

## 5.5 Resumen de gráficos.

Como forma de resumir los resultados gráficos ya presentados, a continuación se presentan gráficos que permiten analizar comparativamente los resultados obtenidos en cada una de las cuatro configuraciones espaciales, con cada parámetro en estudio. Se presentan dos tipos de resúmenes gráficos:

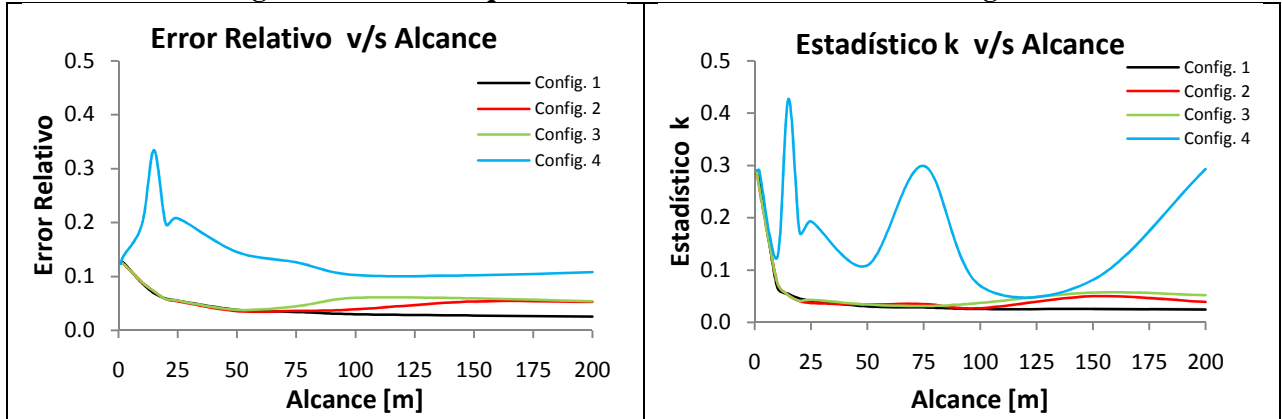
- Para resumir los gráficos qq-plot (cuyo objetivo era comparar las distribuciones de valores simulados con cada modelo) se utiliza el estadístico  $k$  del test de bondad de ajuste Kolmogorov-Smirnov. Este estadístico muestra la mayor diferencia observada entre las distribuciones acumuladas de los valores simulados con cada variable.
- Si bien para resumir las nubes de correlación lo más obvio sería utilizar el coeficiente de correlación respectivo, se prefiere utilizar un estadístico adimensional que permita rescatar más información de las nubes de correlación, considerando especialmente que con algunos parámetros se obtuvo rangos de valores simulados más amplios, lo que complica la comparación directa de las distintas nubes. De este modo, se establece la siguiente definición de error relativo:

$$error\ relativo = promedio \left[ \sqrt{\left( \frac{z_{MGD} - z_{MMG}}{z_{MMG}} \right)^2} \right]$$

donde  $z_{MGD}$  son los valores simulados con MGD,  $z_{MMG}$  son los valores simulados con MMG, y se normaliza por el promedio de los valores simulados con MMG debido a que el objetivo del trabajo es estudiar las aproximaciones que comete el MGD tomando como referencia el MMG.

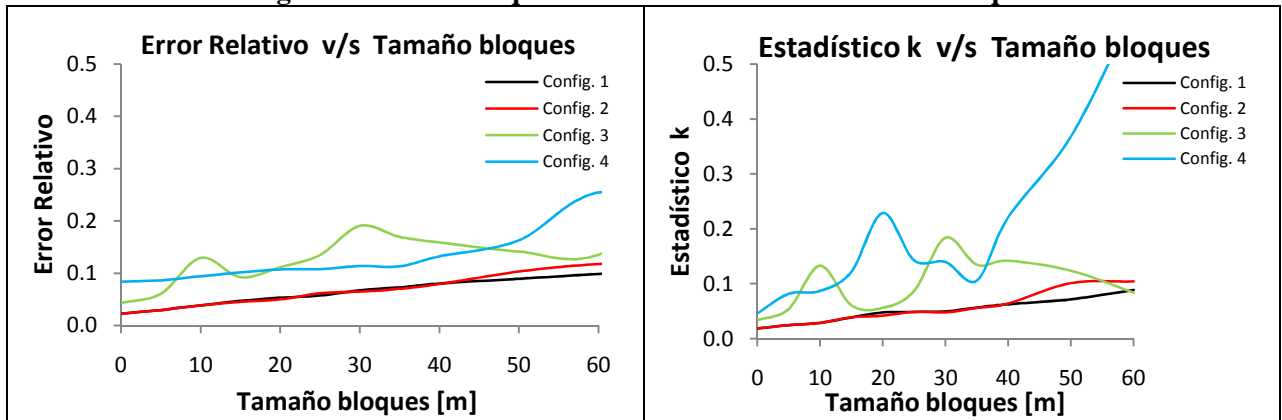
La ventaja de esta última definición con respecto al coeficiente de correlación, es que “castiga” a las nubes de puntos que -si bien pueden presentar una buena correlación (nube estrecha)- pueden a la vez presentar un sesgo importante (nube inclinada con respecto a los 45°).

**Figura 27: Gráficos que resumen estudio de alcance de variograma.**



En ambos gráficos se observa que la configuración 4 presenta los resultados más deficientes. Las otras tres configuraciones muestran un comportamiento similar.

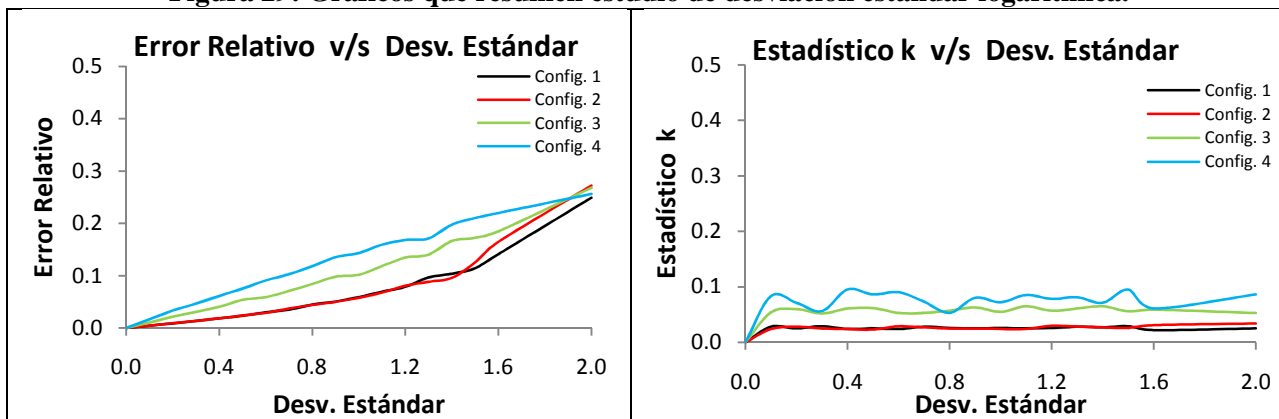
**Figura 28: Gráficos que resumen estudio de tamaño de bloques.**



La configuración 4 muestra los resultados más deficientes, y la configuración 3 muestra resultados más deficientes que las otras dos configuraciones, a diferencia del caso anterior.

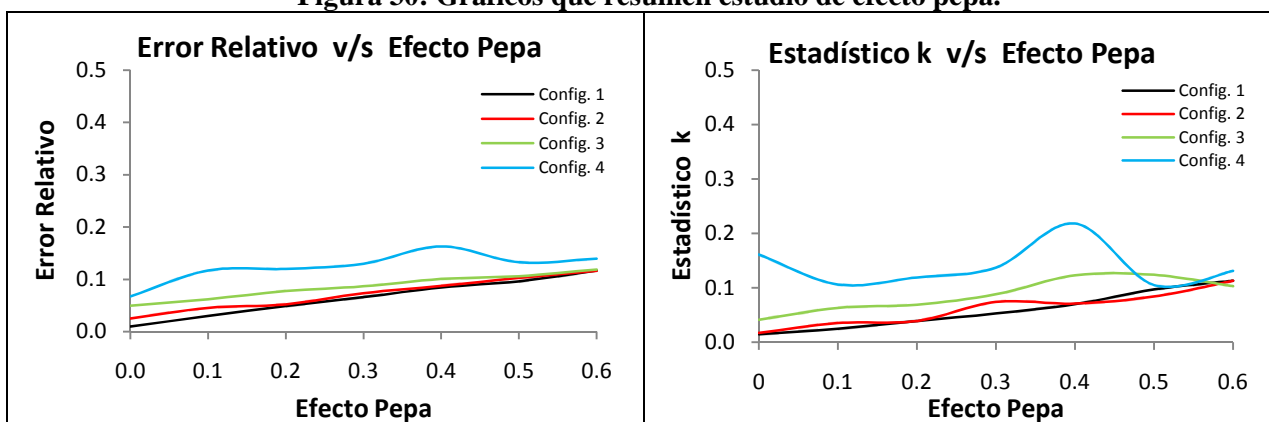


**Figura 29: Gráficos que resumen estudio de desviación estándar logarítmica.**



Para una desviación estándar logarítmica menor a 1.2, las configuraciones 1 y 2 muestran resultados similares (izquierda), y la configuración 4 presenta resultados más deficientes. Al estudiar el estadístico  $k$  (derecha) se observa que la configuración 3 presenta mayor deficiencia que las configuraciones 1 y 2.

**Figura 30: Gráficos que resumen estudio de efecto pepa.**



En este caso la configuración 4 también muestra los resultados más deficientes, y si bien el estadístico  $k$  muestra mayores problemas en la configuración 3, las configuraciones 1, 2 y 3 muestran similar comportamiento según el error relativo.

Generalizando los resultados gráficos presentados, los gráficos de estadístico  $k$  muestran globalmente mejores resultados en el estudio de la desviación estándar logarítmica. Sin embargo, en el detalle de los gráficos qq-plot presentados en el Anexo B se observa que el rango de los valores simulados aumenta considerablemente al aumentar la desviación estándar logarítmica, y en particular la similitud de las distribuciones de ambos modelos se pierde en los valores altos<sup>3</sup>. De este modo, en los gráficos del error relativo se observa que al aumentar la desviación estándar logarítmica las diferencias entre ambos modelos se acentúan, siendo éste el parámetro que presenta los peores resultados. Esto último se corrobora al visualizar las nubes de correlación del

<sup>3</sup> Al ser menor la cantidad de valores altos simulados, las diferencias observadas no son recogidas de la misma forma en las distribuciones acumuladas, debido a que en consecuencia, son pocos los datos que se “acumulan” en la cola de valores altos de las distribuciones.

estudio de la desviación estándar logarítmica en la misma escala que los otros parámetros, donde se observa mayor dispersión de la nube, lo que refleja mayores diferencias entre los valores simulados con cada modelo.

Para complementar estos resúmenes gráficos, en el Anexo F se presentan otros gráficos que resumen para cada parámetro y configuración, los coeficientes de correlación y los rangos de valores simulados con cada variable. Además, se presenta una forma alternativa de expresar el error relativo, observándose resultados similares en el estudio de cada parámetro.

## 5.5 Resumen de estudio conceptual.

A continuación se presenta una tabla que resume los resultados obtenidos con cada configuración espacial de datos y con cada parámetro en estudio. En particular, con esta tabla se busca establecer las condiciones en las cuales el modelo gaussiano discreto tiende a presentar resultados similares al modelo multigaussiano.

**Figura 31: Resumen de resultados estudio conceptual.**

Datos condicionantes		Alcance	Efecto Pepa	Desviación Estándar Logarítmica	Bloques
Configuración 1	Sin datos	> 50 m	< 0.2	< 0.9	< 25 m
Configuración 2	15 datos	> 50 m	< 0.2	< 0.9	< 25 m
Configuración 3	40 datos	> 50 m	< 0.2	< 0.8	< 20 m
Configuración 4	Sondaje que cruza al bloque	> 75 m	< 0.1	< 0.7	< 15 m

En esta tabla se observa que los resultados observados para las dos primeras configuraciones son similares, es decir, sin datos condicionantes o condicionando a 15 datos en un sondaje. Esto además queda de manifiesto en el detalle de todos los gráficos presentados. Por otra parte, a pesar que los resultados observados en la configuración 3 (40 datos condicionantes) presentan algunas deficiencias (gráficos resúmenes presentados en 5.5), se prefiere establecer restricciones similares a las configuraciones 1 y 2, pero castigando un poco en este caso al tamaño de bloques y la desviación estándar.

Tal como se mencionó en la presentación de los gráficos, la configuración 4 con 1 sondaje con 15 datos que cruza al bloque, presenta resultados diferentes. En particular, para cualquiera de los parámetros en estudio se observa nubes de correlación bastante circulares (baja correlación entre los modelos) pero a la vez rangos menores de valores simulados y similitud entre las series de 1000 valores simulados con cada modelo. Es por esto que se establecieron los rangos que

pueden tomar los parámetros respectivos teniendo como criterio no observar una nube de correlación de tamaño mayor.

En particular, considerando las diferencias observadas en los resultados obtenidos para la desviación estándar logarítmica en esta última configuración en comparación a las tres primeras configuraciones (rangos de valores simulados mucho más acotados), se puede establecer como límite superior una desviación estándar logarítmica sólo un poco menor que en las otras configuraciones.

En términos generales, se observa que el modelo gaussiano discreto es una buena aproximación del modelo multigaussiano cuando:

- Los bloques son pequeños o el alcance es grande y el efecto pepa pequeño, dado que en estos casos se tiene:

$$Var Z(v) \approx Var Z(x)$$

- La distribución (histograma) de leyes no es muy asimétrica.
- Los datos condicionantes no son tan numerosos (recordando que la configuración 3 con 40 datos condicionantes presenta algunas deficiencias en los gráficos resumen, y mayor dispersión en las nubes de correlación).

Un caso particular ocurre cuando dentro del bloque a simular existen datos condicionantes (configuración 4), en cuyo caso, si bien los criterios de comparación considerados muestran deficiencias en las aproximaciones que comete el modelo gaussiano discreto, el hecho que el rango de valores simulados se reduzca notablemente (en particular en el estudio de la desviación estándar logarítmica) compensa en cierto modo aquellas deficiencias.

Considerando que en un trabajo real se tienen las cuatro configuraciones a la vez, parece razonable pensar que cumpliendo con las restricciones ya establecidas, el modelo gaussiano discreto debería aproximar adecuadamente al modelo multigaussiano. Incluso considerando el caso de la configuración 4, dado que el rango de valores a ser simulados con uno u otro modelo quedan fuertemente condicionados a los datos condicionantes que quedan dentro del bloque.

## 6. RESULTADOS CASOS DE ESTUDIO.

Todo el trabajo y los resultados previos obtenidos para ambas bases de datos se presentan en Anexos. Estos trabajos previos consideran:

- Estudio exploratorio de bases de datos
- Transformación de datos originales en datos gaussianos.
- Verificación de hipótesis multigaussiana.
- Análisis variográfico de datos gaussianos y ajuste de modelo de variograma.
- Determinación de coeficiente de cambio de soporte y de variograma experimental de datos a soporte de bloques.

El trabajo previo desarrollado para la base de datos Don Luis se presenta en el Anexo C, y el trabajo desarrollado para Radomiro Tomic se presenta en el Anexo D.

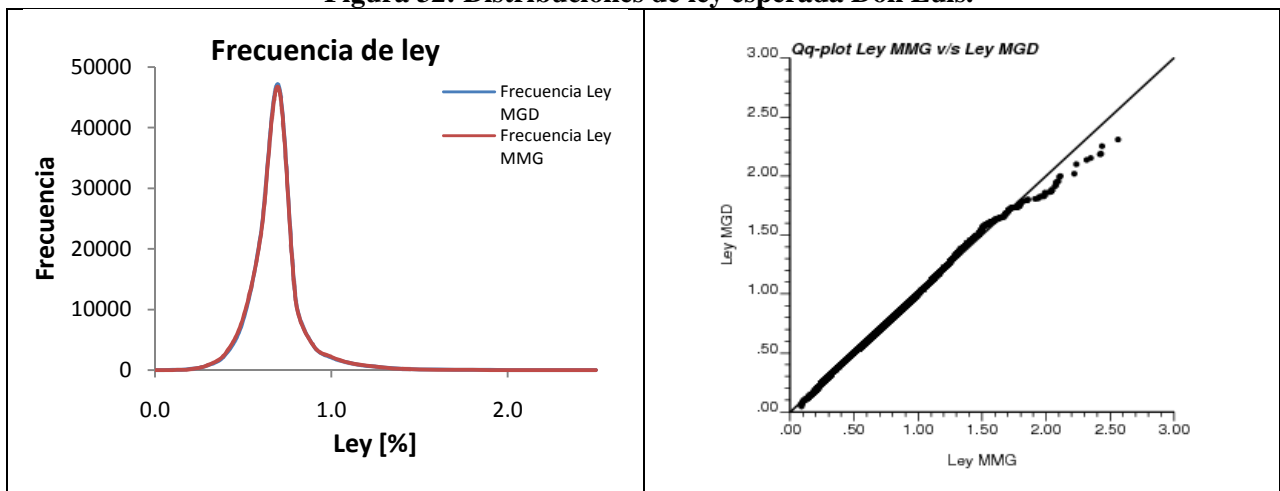
A continuación se presenta los resultados comparativos obtenidos para las etapas de ejecución de las simulaciones con ambos modelos, y el post-procesamiento requerido.

### 6.1 Resultados Don Luis.

#### 6.1.1 Resultados preliminares.

Un primer acercamiento para comparar los resultados de ambos modelos se hace considerando el promedio de las 100 realizaciones. En la siguiente figura, primero se comparan las distribuciones de ley esperada con cada modelo. Se presenta las frecuencias de leyes esperadas en el modelo de bloques (izquierda), y un gráfico qq-plot para comparar las distribuciones.

**Figura 32: Distribuciones de ley esperada Don Luis.**



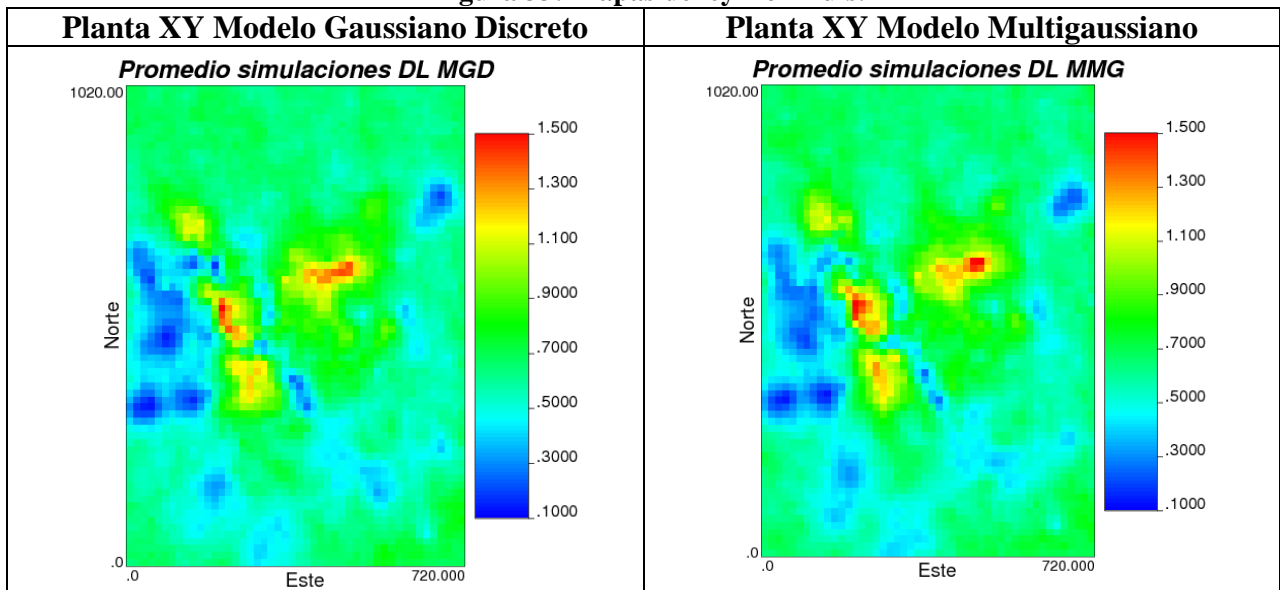
Se observa que las distribuciones de ley de bloques obtenidas con ambos modelos son muy similares. Esto mismo se ve reflejado en las estadísticas básicas para la ley esperada:

**Tabla 5: Estadísticas básicas de ley de bloque esperada (Don Luis).**

Promedio Simulaciones	MGD	MMG
Ley Media	0.640	0.638
Mínimo	0.047	0.089
Máximo	2.308	2.561
Desv. Estándar	0.147	0.147

En las siguientes figuras se presenta mapas de ley esperada (promedio de realizaciones) obtenidos con cada modelo:

**Figura 33: Mapas de ley Don Luis.**



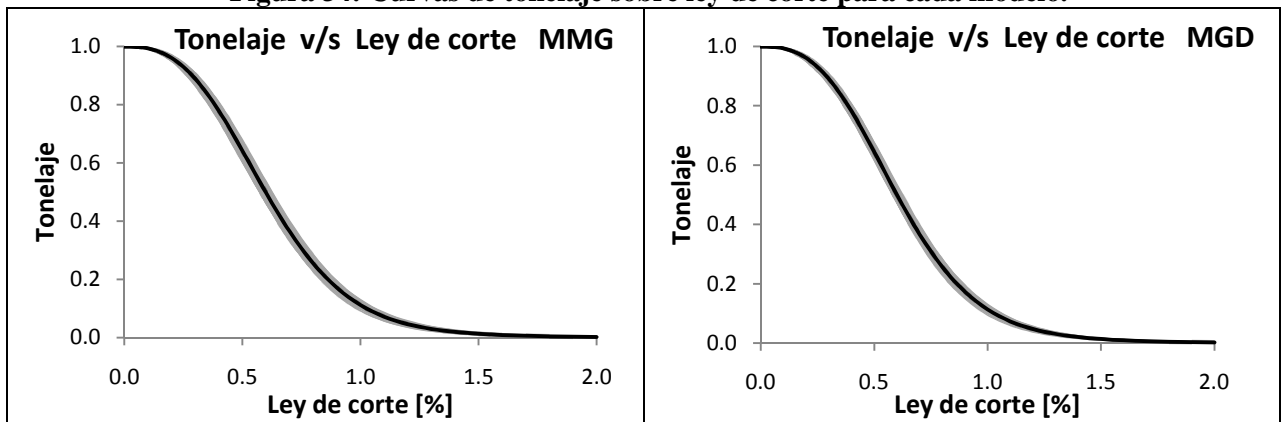
Se confirma que los resultados obtenidos con la aplicación de ambos modelos son -preliminarmente- muy similares. En el Anexo E se presenta otros mapas de ley en secciones verticales.

## 6.1.2 Curvas tonelaje-ley.

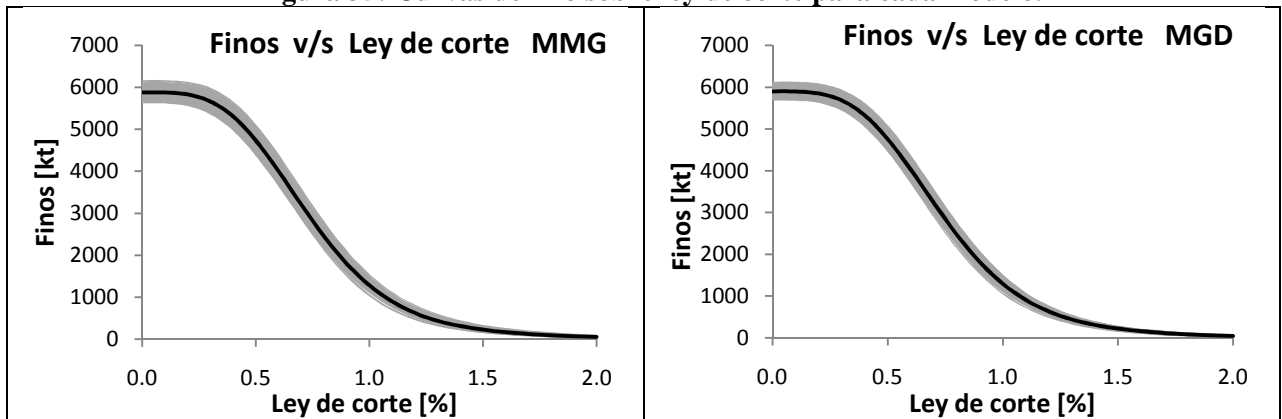
### 6.1.2.1 Curvas tonelaje-ley por cada realización.

Primero se presenta gráficamente las curvas tonelaje, finos y ley media sobre una ley de corte, para cada modelo y para cada realización (en gris), destacándose la curva promedio en cada caso (en negro). En estas figuras se observa resultados similares con ambos modelos.

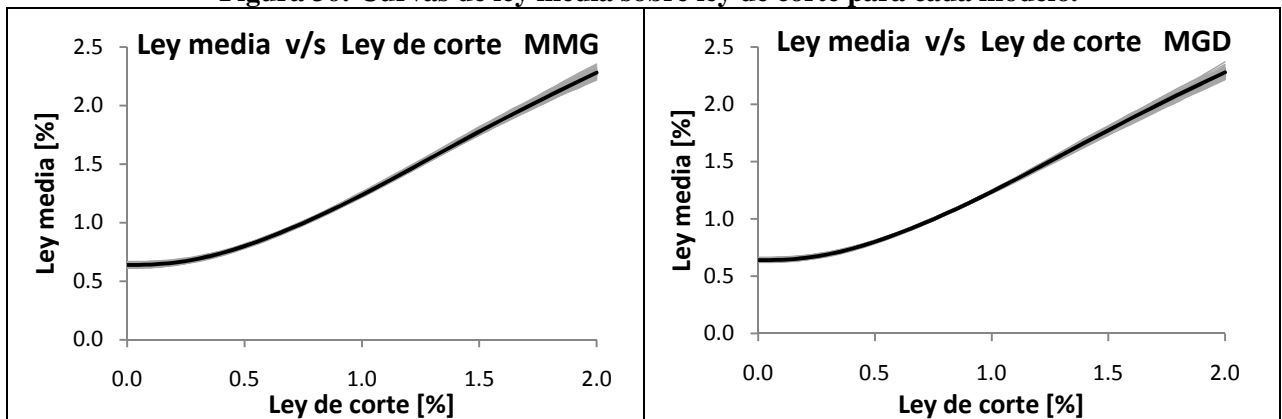
**Figura 34: Curvas de tonelaje sobre ley de corte para cada modelo.**



**Figura 35: Curvas de fino sobre ley de corte para cada modelo.**



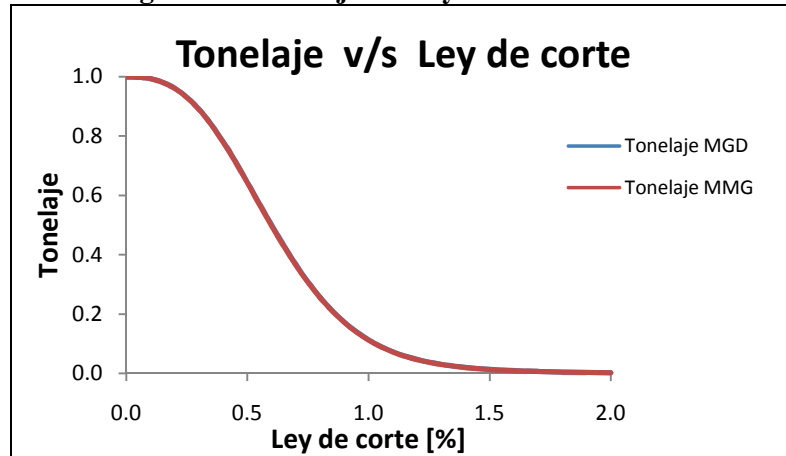
**Figura 36: Curvas de ley media sobre ley de corte para cada modelo.**



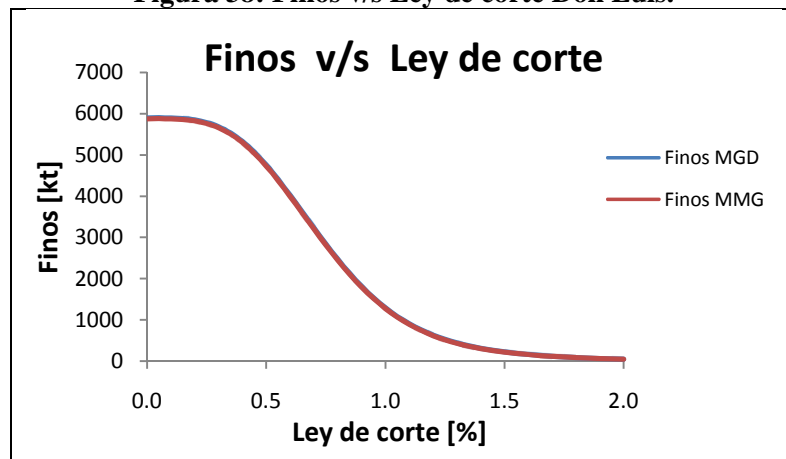
### 6.1.2.2 Curvas tonelaje-ley promedio para cada modelo.

A continuación se reporta gráficamente los resultados obtenidos de las curvas tonelaje-ley. Estas curvas consisten en el promedio de las curvas tonelaje-ley de cada realización, y se muestran comparativamente para cada modelo.

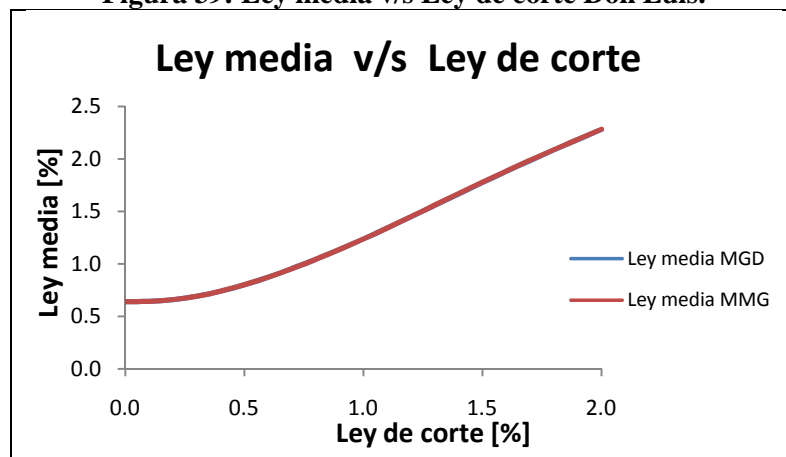
**Figura 37: Tonelaje v/s Ley de corte Don Luis.**



**Figura 38: Finos v/s Ley de corte Don Luis.**



**Figura 39: Ley media v/s Ley de corte Don Luis.**



En las tres figuras anteriores se observa curvas prácticamente idénticas. Para conocer más en detalle los resultados, a continuación se presenta en tablas las diferencias de tonelaje, finos y ley media sobre una ley de corte, obtenidas con los dos modelos. Las diferencias se expresan como porcentaje en función del valor obtenido con MMG.

**Tabla 6: Detalle de curvas tonelaje-ley de corte Don Luis.**

Ley de corte [%]	Ton MGD	Ton MMG	Diferencia [%]	Ley de corte [%]	Ton MGD	Ton MMG	Diferencia [%]
0.0	1.000	1.000	0.00	1.1	0.073	0.072	1.71
0.1	0.994	0.994	0.01	1.2	0.047	0.046	2.14
0.2	0.962	0.961	0.06	1.3	0.031	0.030	2.47
0.3	0.892	0.890	0.16	1.4	0.020	0.020	2.17
0.4	0.782	0.780	0.24	1.5	0.014	0.013	1.85
0.5	0.645	0.643	0.37	1.6	0.009	0.009	0.95
0.6	0.500	0.498	0.52	1.7	0.006	0.006	0.66
0.7	0.367	0.365	0.65	1.8	0.005	0.005	0.07
0.8	0.257	0.255	0.76	1.9	0.003	0.003	-0.47
0.9	0.173	0.172	0.94	2.0	0.002	0.002	-0.14
1.0	0.114	0.112	1.16				

En esta tabla se observa que las diferencias porcentuales en tonelaje sobre ley de corte no son considerables. En el peor de los casos (ley de corte de 1.3%) el MGD entrega un 2.47% más de tonelaje que el MMG.

**Tabla 7: Detalle de curvas ley media-ley de corte Don Luis.**

Ley de corte [%]	Ley media MGD [%]	Ley media MMG [%]	Diferencia [%]	Ley de corte [%]	Ley media MGD [%]	Ley media MMG [%]	Diferencia [%]
0.0	0.640	0.638	0.32	1.1	1.341	1.341	0.01
0.1	0.643	0.641	0.31	1.2	1.448	1.449	-0.08
0.2	0.660	0.658	0.27	1.3	1.557	1.560	-0.18
0.3	0.691	0.690	0.22	1.4	1.666	1.669	-0.20
0.4	0.739	0.738	0.19	1.5	1.774	1.777	-0.22
0.5	0.800	0.799	0.15	1.6	1.880	1.883	-0.14
0.6	0.873	0.872	0.12	1.7	1.983	1.986	-0.14
0.7	0.954	0.953	0.11	1.8	2.085	2.087	-0.09
0.8	1.042	1.041	0.11	1.9	2.184	2.184	-0.03
0.9	1.137	1.136	0.10	2.0	2.280	2.282	-0.09
1.0	1.237	1.236	0.09				

No se observa grandes diferencias en ley media. Las mayores diferencias se presentan en las leyes de corte menores, pero no superan un 0.4%.



**Tabla 8: Detalle de curvas finos-ley de corte Don Luis.**

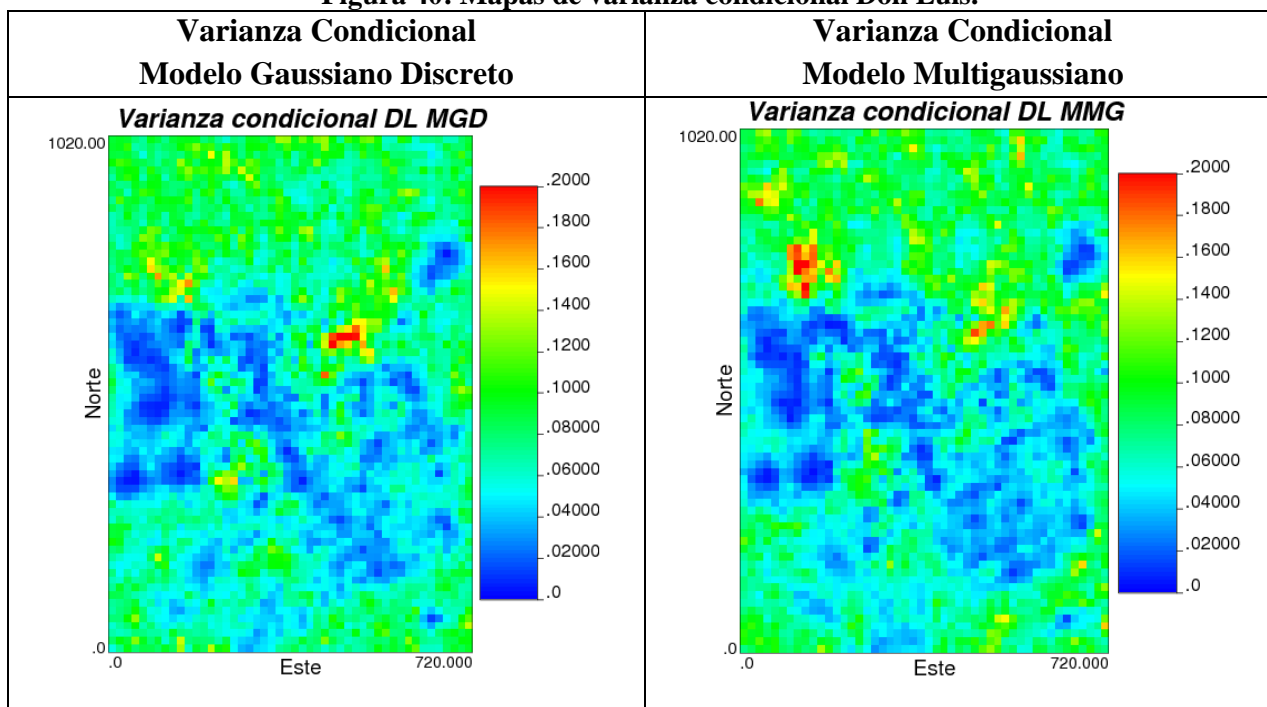
Ley de corte [%]	Finos MGD [kt]	Finos MMG [kt]	Diferencia [%]	Ley de corte [%]	Finos MGD [kt]	Finos MMG [kt]	Diferencia [%]
0.0	5899.8	5881.2	0.32	1.1	908.7	893.3	1.72
0.1	5895.8	5877.2	0.32	1.2	633.3	620.6	2.06
0.2	5848.4	5829.1	0.33	1.3	442.8	432.9	2.29
0.3	5683.8	5662.6	0.37	1.4	312.9	306.8	1.97
0.4	5327.8	5305.1	0.43	1.5	223.8	220.2	1.62
0.5	4758.5	4733.8	0.52	1.6	161.7	160.4	0.82
0.6	4026.5	4001.0	0.64	1.7	118.3	117.7	0.52
0.7	3231.2	3207.0	0.75	1.8	87.1	87.1	-0.02
0.8	2472.2	2450.8	0.87	1.9	64.5	64.8	-0.50
0.9	1816.9	1798.1	1.05	2.0	47.9	48.0	-0.23
1.0	1295.7	1279.7	1.25				

Al igual que en las tablas anteriores, no se observa mayores diferencias. Al igual que en la tabla de tonelaje-ley de corte, el peor caso corresponde a la ley de corte de 1.3%, cuando el MGD indica un 2.29% más de finos que el MMG.

### 6.1.3 Varianzas condicionales.

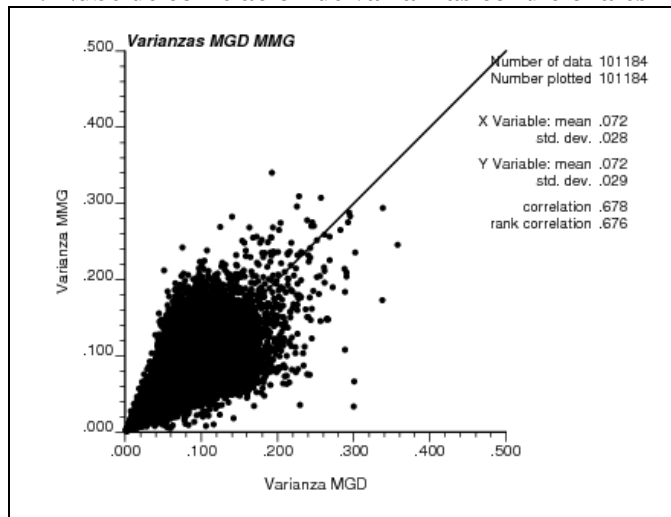
En la siguiente figura se presenta mapas de la varianza condicional obtenida con cada modelo.

**Figura 40: Mapas de varianza condicional Don Luis.**



Se observa dos mapas de características muy similares. Para corroborar esto a continuación se presenta una nube de correlación con las varianzas condicionales obtenidas con cada modelo para cada bloque, donde se observa una buena correlación.

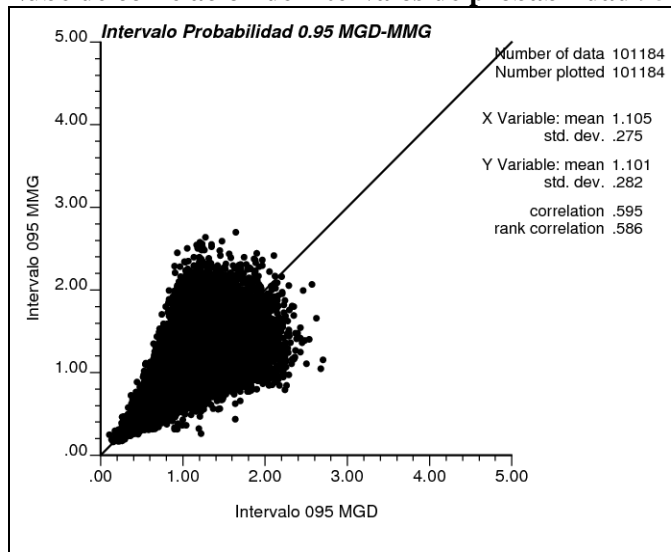
**Figura 41: Nube de correlación de varianzas condicionales Don Luis.**



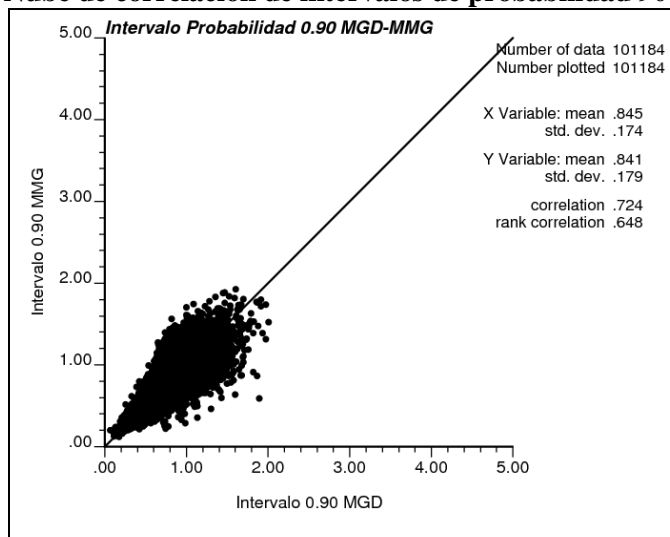
#### 6.1.4 Intervalos de probabilidad.

Se determinaron los intervalos de probabilidad de 90% y 95%, y se presenta nubes de correlación con el largo de los intervalos obtenidos para cada bloque con cada uno de los modelos.

**Figura 42: Nube de correlación de intervalos de probabilidad 95% Don Luis.**



**Figura 43: Nube de correlación de intervalos de probabilidad 90% Don Luis.**



En los intervalos de probabilidad de 90% se observa una buena correlación. En los intervalos de 95% si bien la correlación es menor, se considera aceptable. Posiblemente, las diferencias entre los dos modelos se acentúan en los sectores de mayor incertidumbre (intervalos de probabilidad de mayor largo), los que corresponden a los sectores con escasas muestras y los sectores de altas leyes (debido al efecto proporcional).

### 6.1.5 Tiempos de cálculos.

Antes de comparar los tiempos de cálculo, es importante recordar algunas características de la base de datos y del modelo de bloques construido:

- N° de bloques: 101.184 (grilla de 48x68x31).
- N° de datos condicionantes: 3.085

Para comparar los tiempos de cálculo se ejecutaron simulaciones con distinto número de realizaciones:

**Tabla 9: Tiempos de cálculo Don Luis.**

N° realizaciones	Tiempo [min]		Diferencia [%]
	MMG	MGD	
1	30.7	17.7	-42.1
10	134.3	28.7	-78.6
25	338.5	46.7	-86.2

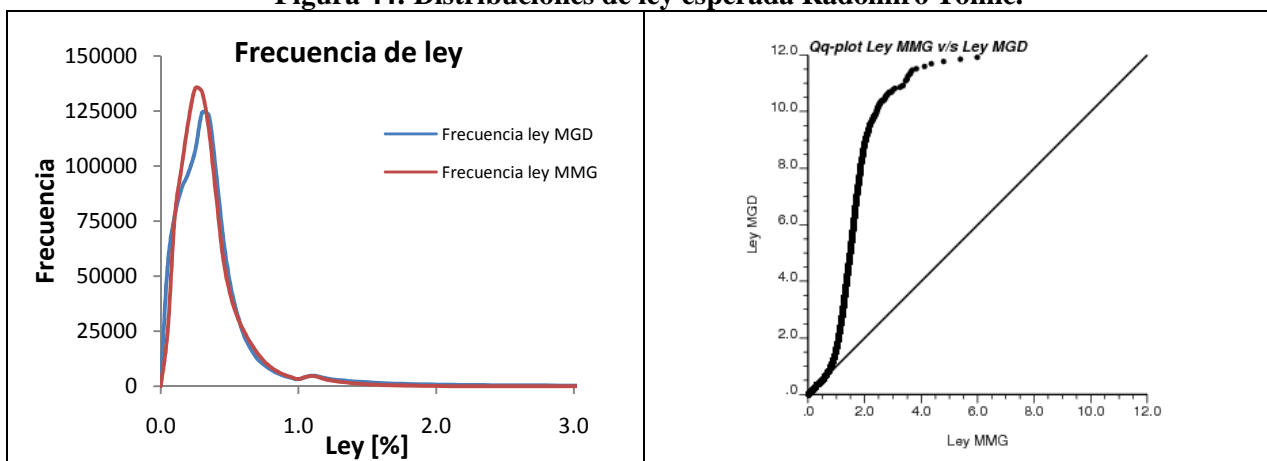
Lo importante a destacar es que el programa que desarrolla el modelo gaussiano discreto tiene ventajas importantes con respecto al programa que tiene implementado el modelo multigaussiano.

## 6.2 Resultados Radomiro Tomic.

### 6.2.1 Resultados preliminares.

Un primer acercamiento para comparar los resultados de ambos modelos se hace considerando el promedio de las 50 realizaciones. En la siguiente figura, primero se comparan las distribuciones de ley esperada con cada modelo. Se presenta las frecuencias de leyes esperadas en el modelo de bloques (izquierda), y un gráfico qq-plot para comparar las distribuciones.

**Figura 44: Distribuciones de ley esperada Radomiro Tomic.**



Se observa que las distribuciones de ley de bloques obtenidas con ambos modelos presentan diferencias importantes (derecha), especialmente en el rango de leyes 0.0% - 0.5% (izquierda).

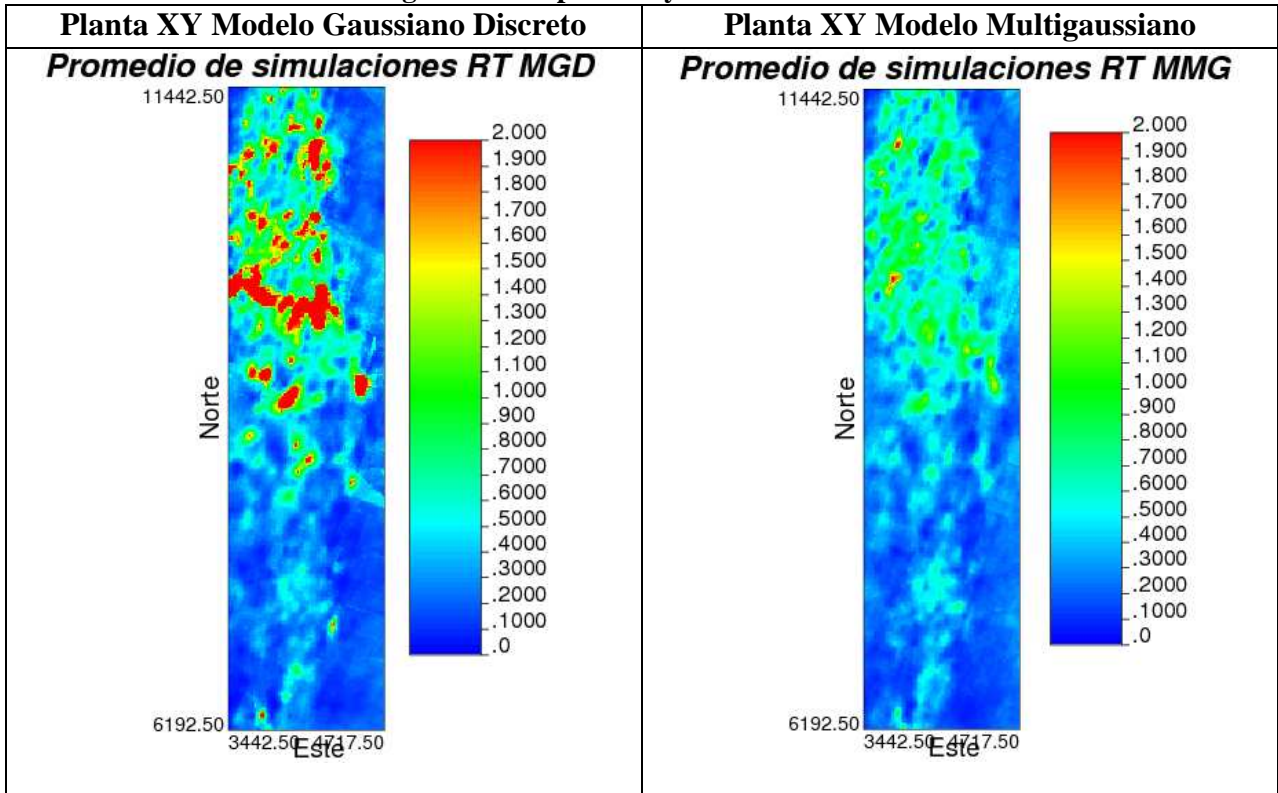
**Tabla 10: Estadísticas básicas de variable ley de bloque Radomiro Tomic.**

Promedio Simulaciones	MGD	MMG
Ley Media	0.352	0.314
Mínimo	0.000	0.007
Máximo	11.796	4.970
Desv. Estándar	0.442	0.209

En la tabla de estadísticas básicas se observa que la ley máxima obtenida mediante MGD es muy superior a la obtenida mediante MMG, lo que se traduce en una mayor dispersión de las leyes MGD y también en una ley media mayor. Si bien esto no se observa con tanta claridad en el gráfico de frecuencia de ley ya presentado, sí se observará con mayor claridad en los mapas de leyes.

En las siguientes figuras se presenta mapas de ley esperada (promedio de realizaciones) obtenidos con cada modelo.

**Figura 45: Mapas de ley Radomiro Tomic.**



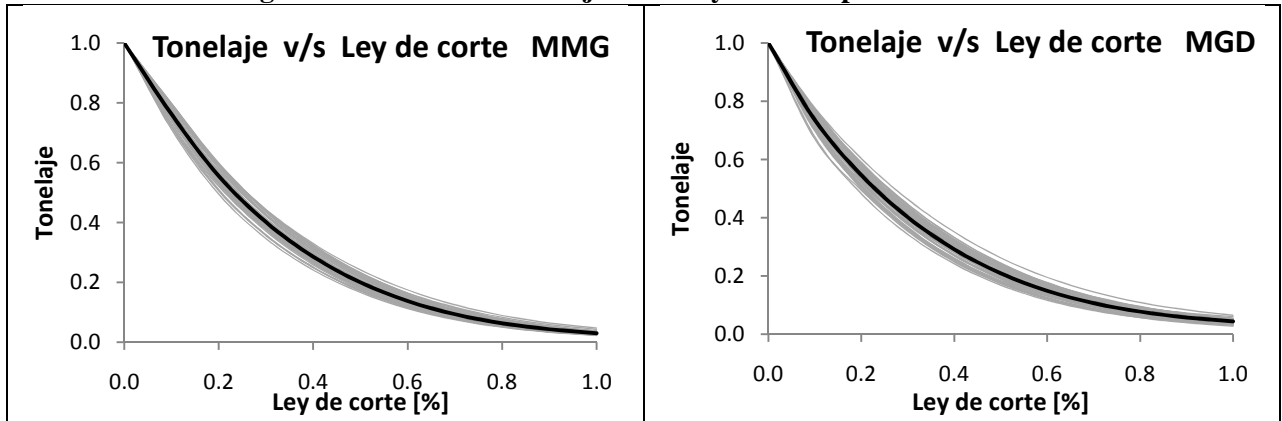
Se observa que en las zonas de altas leyes el MGD presenta leyes superiores al MMG. Esto se reflejará en el estudio de las curvas tonelaje-ley. En el Anexo E se presenta otros mapas de ley en secciones verticales.

## **6.2.2 Curvas tonelaje-ley.**

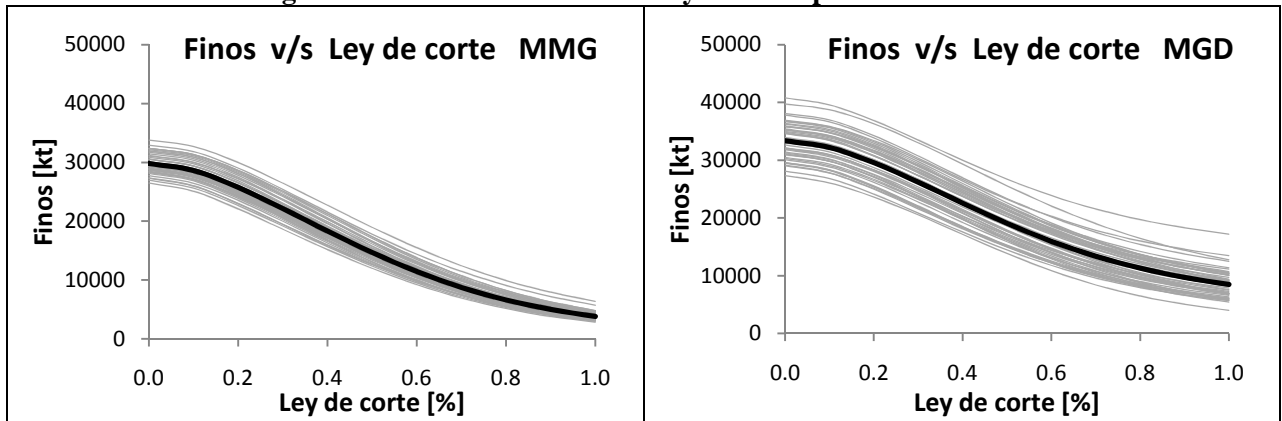
### **6.2.2.1 Curvas tonelaje-ley por cada realización.**

Primero se presenta gráficamente las curvas tonelaje, finos y ley media sobre una ley de corte, para cada modelo y para cada realización (en gris), destacándose la curva promedio en cada caso (en negro). En estas figuras se observa resultados diferentes con cada modelo, en particular en los gráficos de ley media y finos sobre una ley de corte. En ambos casos se observa mayor variabilidad en las simulaciones obtenidas con el modelo gaussiano discreto.

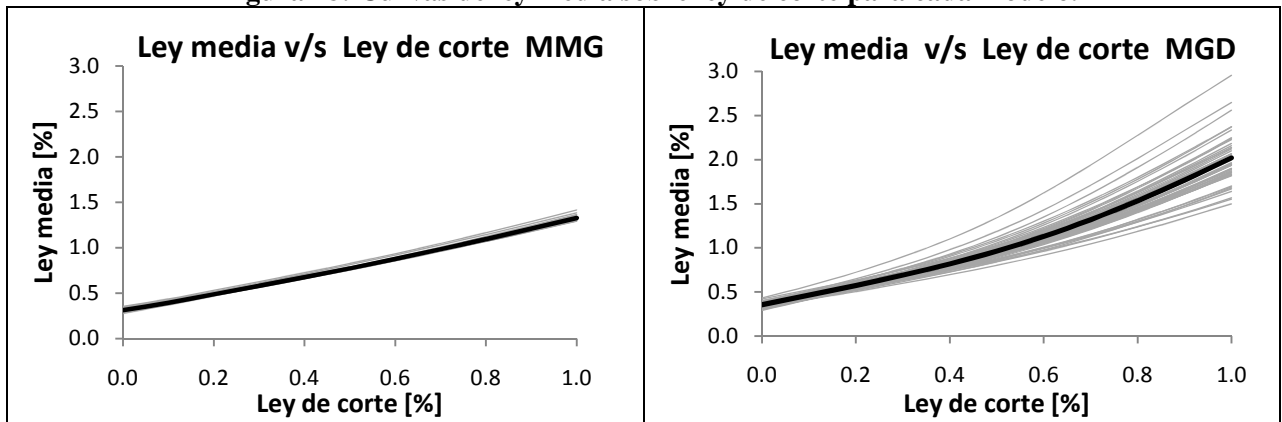
**Figura 46: Curvas de tonelaje sobre ley de corte para cada modelo**



**Figura 47: Curvas de fino sobre ley de corte para cada modelo.**



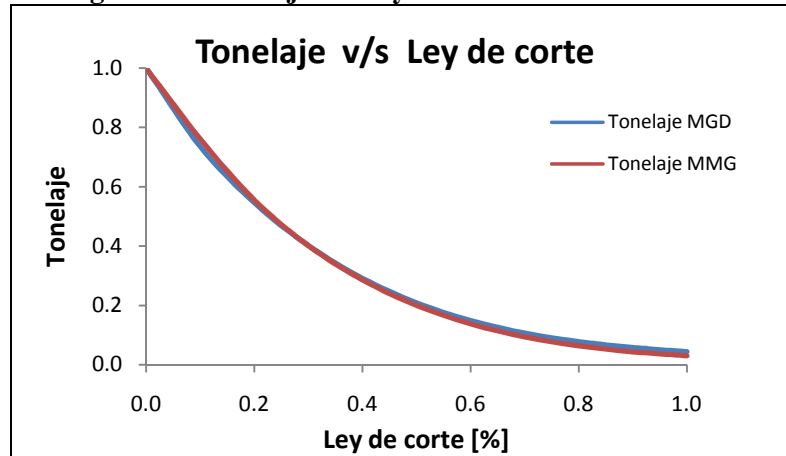
**Figura 48: Curvas de ley media sobre ley de corte para cada modelo.**



### 6.2.2.2 Curvas tonelaje-ley promedio para cada modelo.

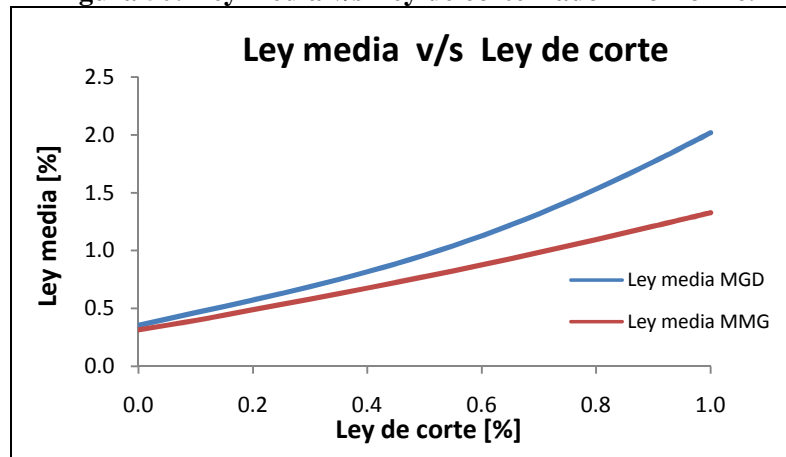
A continuación se reporta gráficamente los resultados obtenidos de las curvas tonelaje-ley. Estas curvas consisten en el promedio de las curvas tonelaje-ley de cada realización, y se muestran comparativamente para cada modelo.

**Figura 49: Tonelaje v/s Ley de corte Radomiro Tomic.**



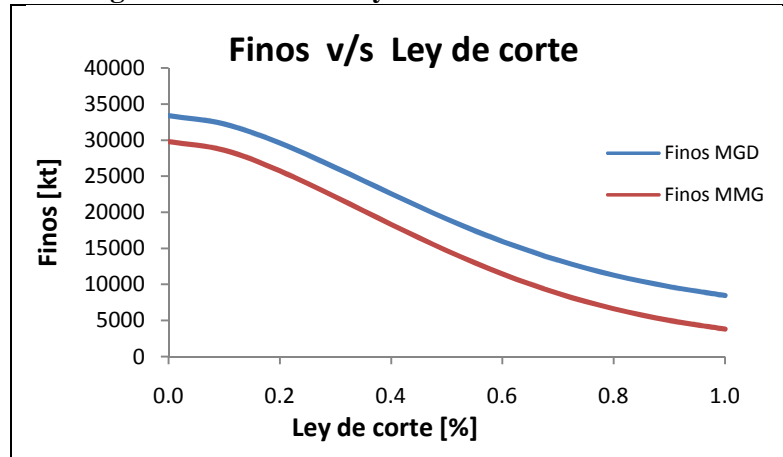
En este gráfico se observa algunas diferencias entre ambas curvas, a diferencia de la base de datos Don Luis que presentaba curvas prácticamente idénticas.

**Figura 50: Ley media v/s Ley de corte Radomiro Tomic.**



En este caso se observa diferencias importantes en las leyes medias sobre leyes de corte obtenidas con cada modelo. En particular, las leyes medias MGD son sistemáticamente superiores a las leyes medias MMG (para cualquier ley de corte). Esto refleja las diferencias ya observadas en los mapas de leyes.

**Figura 51: Finos v/s Ley de corte Radomiro Tomic.**



Del mismo modo, las diferencias observadas en la ley media sobre una ley de corte, se ven reflejadas en diferencias de finos.

Para conocer más en detalle los resultados, a continuación se presenta en tablas las diferencias de tonelaje, finos y ley media sobre una ley de corte, obtenidas con los dos modelos. Las diferencias se expresan como porcentaje en función del valor obtenido con MMG.

**Tabla 11: Detalle de curvas tonelaje-ley de corte Radomiro Tomic.**

Ley de corte [%]	Tonelaje MGD	Tonelaje MMG	Diferencia [%]
0.0	1.000	1.000	0.00
0.1	0.736	0.762	-3.44
0.2	0.546	0.555	-1.66
0.3	0.402	0.401	0.10
0.4	0.292	0.286	2.04
0.5	0.209	0.200	4.61
0.6	0.149	0.138	8.49
0.7	0.107	0.094	14.19
0.8	0.078	0.064	22.11
0.9	0.058	0.044	32.73
1.0	0.044	0.030	46.44

Si bien no se observan grandes diferencias para leyes de corte menores a 0.5, para leyes de corte mayores las diferencias porcentuales aumentan bastante (al tratarse de proporciones de tonelaje menores, esto no se observa con claridad en la figura 45). De hecho, para una ley de corte de 1.0, el MGD presenta un 46% más de tonelaje que el MMG.



**Tabla 12: Detalle de curvas ley media-ley de corte Radomiro Tomic.**

Ley de corte [%]	Ley media MGD [%]	Ley media MMG [%]	Diferencia [%]
0.0	0.352	0.314	12.06
0.1	0.462	0.396	16.70
0.2	0.571	0.488	16.95
0.3	0.688	0.581	18.34
0.4	0.816	0.676	20.80
0.5	0.961	0.773	24.27
0.6	1.128	0.876	28.68
0.7	1.318	0.984	33.94
0.8	1.533	1.096	39.82
0.9	1.768	1.211	45.98
1.0	2.020	1.328	52.11

**Tabla 13: Detalle de curvas finos-ley de corte Radomiro Tomic.**

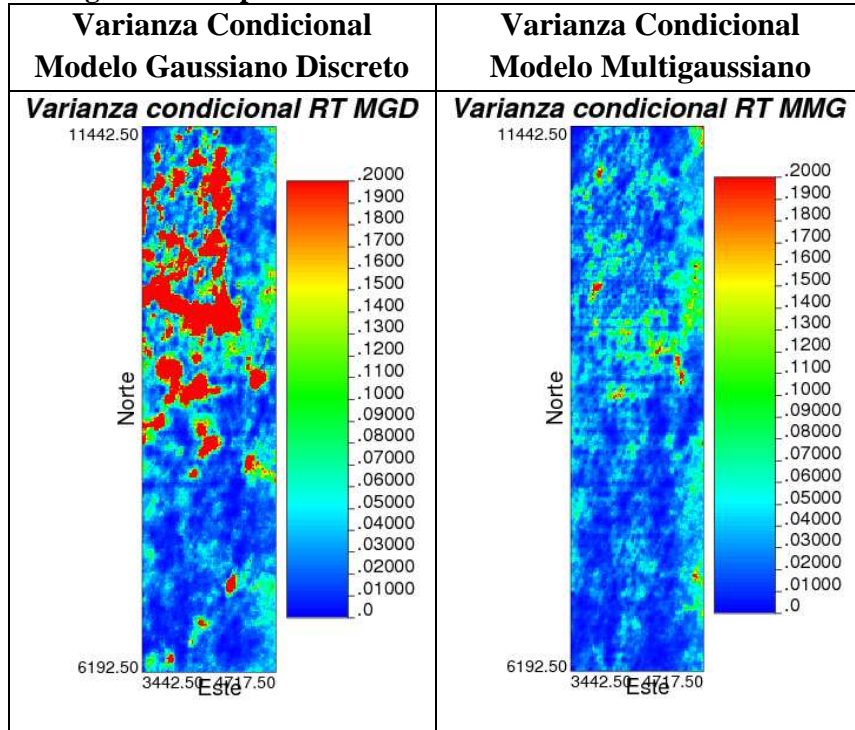
Ley de corte [%]	Finos MGD [kt]	Finos MMG [kt]	Diferencia [%]
0.0	33407.6	29812.6	12.06
0.1	32248.8	28620.9	12.68
0.2	29604.8	25741.0	15.01
0.3	26216.1	22129.8	18.47
0.4	22593.7	18330.2	23.26
0.5	19098.9	14691.6	30.00
0.6	15985.4	11450.0	39.61
0.7	13386.2	8752.5	52.94
0.8	11319.9	6630.2	70.73
0.9	9725.1	5019.3	93.76
1.0	8500.9	3816.2	122.76

Tal como ya se había observado gráficamente, los modelos MMG y MGD entregan resultados disímiles en ley media sobre una ley de corte, y por lo tanto en la cantidad de finos esperados. Estas diferencias se acentúan para leyes de corte mayores.

### 6.2.3 Varianzas condicionales.

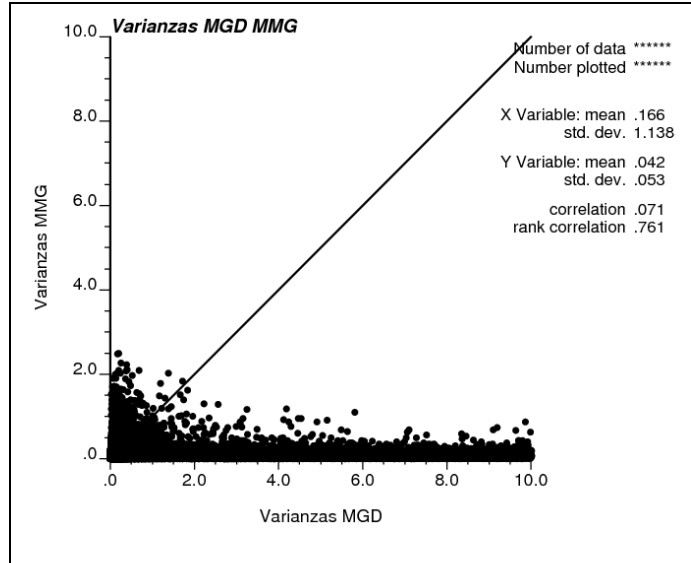
En la siguiente figura se presenta los mapas de varianza condicional obtenidos con cada modelo.

**Figura 52: Mapas de varianza condicional Radomiro Tomic.**



Se observa que las simulaciones MGD presentan una varianza condicional significativamente superior al caso MMG. Para corroborar esto, a continuación se presenta una nube de correlación con las varianzas condicionales obtenidas con cada modelo para cada bloque, donde se observa nula correlación entre los modelos.

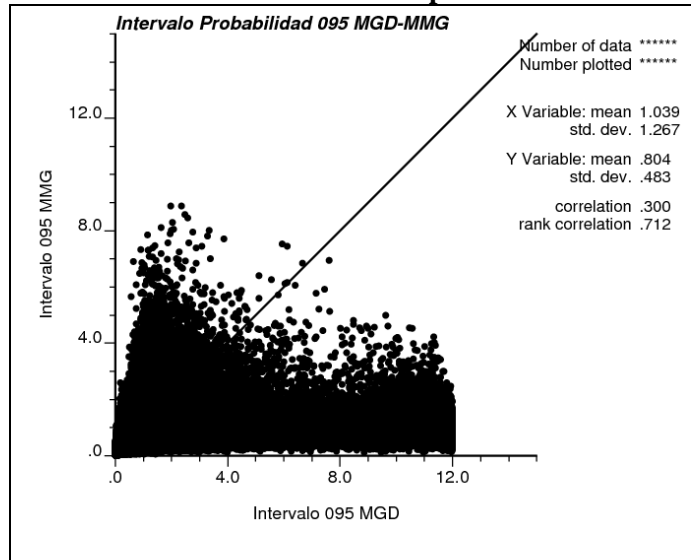
**Figura 53: Nube de correlación de varianzas condicionales Radomiro Tomic.**



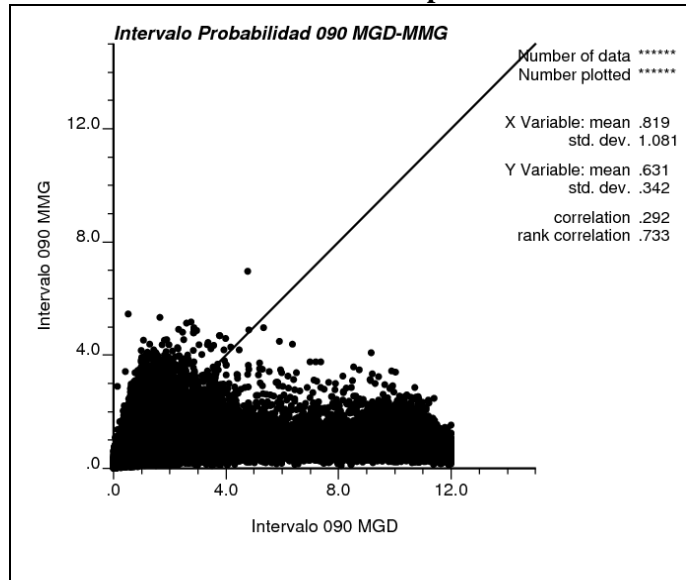
#### 6.2.4 Intervalos de probabilidad.

Se determinaron los intervalos de probabilidad de 90% y 95%, y se presenta nubes de correlación con el largo de los intervalos obtenidos para cada bloque con cada uno de los modelos.

**Figura 54: Nube de correlación de intervalos de probabilidad 95% Radomiro Tomic.**



**Figura 55: Nube de correlación de intervalos de probabilidad 90% Radomiro Tomic.**



En ambos casos no se observa buenas correlaciones entre los largos de intervalos obtenidos con cada modelo. Estos resultados corroboran lo observado en las figuras 43 y 44, donde se observa alta variabilidad entre las 50 simulaciones.

### 6.2.5 Tiempos de cálculo.

Antes de comparar los tiempos de cálculo, es importante recordar algunas características de la base de datos y del modelo de bloques construido:

- N° de bloques: 1.041.250 (grilla de 85x350x35).
- N° de datos condicionantes: 34.765

Para comparar los tiempos de cálculo se ejecutaron simulaciones con distinto número de realizaciones:

**Tabla 14: Tiempos de cálculos Radomiro Tomic.**

N° realizaciones	Tiempo [hr]		Diferencia [%]
	MMG	MGD	
1	7.49	4.72	-37.0
10	32.39	12.65	-61.0
25	80.78	26.05	-67.7

Lo importante a destacar es que, al igual que en el caso Don Luis, el programa que desarrolla el modelo gaussiano discreto tiene ventajas importantes con respecto al programa que tiene implementado el modelo multigaussiano.

## 6.2.6 Comentarios finales.

Observando las diferencias en los resultados obtenidos al aplicar cada modelo en esta base de dato, a continuación se analizan las posibles causas de estas diferencias:

- La base de datos Radomiro Tomic presenta mayor asimetría en el histograma de los datos. De hecho, la desviación estándar de los logaritmos de los datos es de 1.05. Considerando que en el estudio conceptual se observó errores relativos mayores para desviaciones estándar logarítmicas mayores a 1.0, ésta es la causa más probable de los problemas observados<sup>4</sup>.
- En el variograma modelado de los datos gaussianos se tienen alcances superiores a los 200 metros, lo que parece suficiente para tener una buena correlación espacial de datos. Además, el efecto pepa es de sólo 0.05, y el tamaño de bloques es de 15x15x15, que son valores adecuados según lo observado en el estudio conceptual.
- Sin embargo, también es posible que en esta base de datos se presenten casos de configuraciones espaciales desfavorables, aunque de las vistas en planta y perfiles que se presentan en el Anexo E se desprende que los sondeos cubren de buena forma el dominio que abarca el modelo de bloques, con sólo algunas excepciones en las zonas más externas, y además en esta base de datos se observa espaciamientos de sondeos entre 50 y 100 metros, por lo tanto no debería presentarse en una alta proporción, el problema observado con la configuración 4 del estudio conceptual.

---

<sup>4</sup> Considerar que la base de datos Radomiro Tomic es real, por lo tanto no sigue una distribución lognormal perfecta. De este modo, los valores establecidos en el estudio conceptual sólo dan una idea general de las condiciones bajo las cuales el modelo gaussiano discreto aproxima correctamente al modelo multigaussiano.

## 7 CONCLUSIONES.

Las conclusiones sobre el trabajo desarrollado en este informe se presentan primero para cada una de las dos etapas consideradas. Finalmente se presentan conclusiones generales del estudio.

### 7.1 Conclusiones estudio conceptual.

Esta etapa del trabajo apuntó a establecer las condiciones en las cuales el modelo gaussiano discreto entrega resultados similares al modelo multigaussiano. En este sentido, se buscó determinar rangos para los parámetros o variables estudiados en los cuales los modelos comparados se aproximarán de buena forma.

El análisis del alcance del variograma muestra que para alcances superiores a 50 metros se comienzan a tener resultados similares. Sin embargo, para la configuración que presenta un sondaje cruzando al bloque simulado, se prefiere establecer este límite en 75 metros debido a que para menores alcances la correlación de los valores simulados con ambos modelos se ve afectada. Es importante mencionar que los resultados observados para los alcances de variograma pueden depender de la distancia a la cual se ubican los datos, que para las configuraciones con uno y tres sondajes alejados del bloque simulado están entre los 50 y los 75 metros, y para la configuración 4 (con un sondaje cruzando al bloque) van desde los 2 hasta los 40 metros aproximadamente, tal como se muestra con detalle en el Anexo A.

Con respecto al estudio sobre el efecto pepa del variograma de los datos gaussianos, se obtuvo resultados similares para las primeras dos configuraciones (sin datos condicionantes y 15 datos en 1 sondaje, respectivamente), observándose resultados similares con ambos modelos hasta un efecto pepa de 0.2. Para la configuración 3 con 40 datos condicionantes, si bien se observa distribuciones similares hasta efecto pepa de 0.3, las nubes de correlación se vuelven más dispersas que en las configuraciones anteriores, por lo que se prefiere castigar este hecho y establecer el mismo límite que en las otras dos configuraciones. Por su parte la configuración 4 con el sondaje cruzando al bloque se observa que desde un efecto pepa de 0.1 ya se observa nubes de correlación con una dispersión importante. Es por esto que se prefiere ser más cuidadosos con este caso.

En relación al estudio de la desviación estándar de los logaritmos de los datos originales, nuevamente los resultados observados para las configuraciones 1 y 2 son bastante similares, estableciéndose como límite superior una desviación estándar logarítmica de 0.9. Por su parte la configuración 3 con mayor cantidad de datos condicionantes muestra distribuciones similares con los modelos para desviaciones estándar mayores, pero en este caso también las nubes de correlación se vuelven más dispersas. Un caso particular es el estudio de la desviación estándar logarítmica para la configuración 4, dado que se observa rangos de valores simulados bastante menores que con las otras configuraciones, además de distribuciones de valores simulados más

parecidas que las observadas con los otros parámetros en esta misma configuración. De todos modos se prefiere ser cautelosos en este sentido y no establecer límites superiores a los ya mencionados en las otras configuraciones.

Englobando los resultados obtenidos, se observa que con las dos primeras configuraciones (sin datos condicionantes y 15 datos en un sondaje) se obtienen resultados similares entre ellas. Esto lleva a suponer que condicionar a 15 datos no es suficiente para observar resultados tan diferentes. Por otra parte, la tercera configuración (tres sondajes con 40 datos condicionantes) muestra resultados un tanto distintos en comparación a las dos primeras configuraciones, dado que se tiende a observar correlaciones menores (y errores relativos mayores). Esto se debe a que en esta configuración, el modelo gaussiano discreto aleatoriza una mayor cantidad de datos, aumentando las diferencias con respecto al otro modelo.

Tal como se mencionó en la presentación de los resultados gráficos de este estudio, la configuración 4 (con 1 sondaje con 15 datos que cruza al bloque), presenta resultados diferentes. En particular, para cualquiera de los parámetros en estudio se observa nubes de correlación bastante circulares (lo que significa baja correlación entre los modelos) pero a la vez rangos menores de valores simulados. Este hecho puede deberse al fuerte condicionamiento que significa la existencia de datos condicionantes dentro del bloque en estudio, y la aleatorización de la posición de los datos al interior del bloque (que establece la hipótesis del modelo gaussiano discreto) puede influir en las bajas correlaciones observadas.

Al comparar los efectos que tiene cada uno de los parámetros en estudio en relación a la mayor o menor similitud entre los resultados obtenidos con cada modelo, se observa que la desviación estándar de los logaritmos de los datos influye fuertemente en el error relativo que comete el MGD en relación al MMG. Sin embargo, las distribuciones de valores simulados son bastante similares, observándose en los gráficos qq-plot las mayores diferencias en valores altos. Por otra parte, los efectos que tienen los otros parámetros son similares. Al ir aumentando el tamaño de bloques o el efecto pepa, se ven resultados análogos a los observados al reducir el alcance del variograma.

Al analizar las hipótesis del modelo gaussiano discreto, considerando el efecto que tiene cada uno de los cuatro parámetros considerados en el estudio, se establece que tres de ellos afectan de modo equivalente al modelo gaussiano discreto. Aumentar el tamaño de bloques o el efecto pepa del variograma, o reducir el alcance del variograma (y por lo tanto la correlación espacial de los datos), aumentan el efecto de soporte, que se traduce en un aumento de la pérdida de varianza al pasar de soporte puntual a bloque, es decir, la diferencia entre las varianzas de  $Z(x)$  y  $Z(v)$ .

Aumentar el tamaño de bloques se traduce en una mayor regularización de los valores puntuales, reduciéndose la varianza. Además, con un tamaño mayor de bloques, la aleatorización de la posición de los puntos dentro de los bloques se vuelve más crítica. La reducción de la varianza de  $Z(v)$  se traduce en una reducción del coeficiente de cambio de soporte  $r$  (ver figura 5, pag. 23) disminuyendo también la correlación entre las variables gaussianas puntual y de bloques

$Y(\underline{x})$  e  $Y_v$ , y afectando el cumplimiento de la hipótesis de multigaussianidad (aumentando la aproximación a la hipótesis, ver hipótesis 3 del caso global, pag. 22, y extensión de la hipótesis para el caso local, pag. 24).

Del mismo modo, aumentar el efecto pepa del variograma conlleva un aumento de la pérdida de varianza punto-bloque, debido a que el efecto pepa se traduce en pérdida total de varianza al pasar de punto a bloque. Es decir, aumentar el efecto pepa tiene un efecto equivalente a aumentar el tamaño de bloque. Además, disminuir el alcance del variograma es equivalente a acentuar el efecto pepa. En un caso extremo, una reducción del alcance a una mínima distancia se traduce prácticamente en un efecto pepa puro. Así, reducir el alcance de variograma tiene un efecto equivalente a aumentar el tamaño de bloque.

Por otra parte, analizando el efecto que tiene la desviación estándar logarítmica de los datos, la relación lineal establecida entre las variables gaussianas regularizada  $Y(v)$  y de bloques  $Y_v$  (ver expresiones para ambas variables, pag. 25), se cumple en teoría cuando la función de transformación es lineal, y por lo tanto, se ve afectada cuando la asimetría de los datos originales aumenta, dado que esto provoca una función de transformación no lineal. De hecho, con distribuciones de datos de forma lognormal, la función de transformación tiende a ser de forma exponencial.

## **7.2 Conclusiones casos de estudio.**

Las conclusiones de esta etapa del trabajo apuntan a comparar los resultados obtenidos con cada una de las bases de datos estudiadas. Para comenzar es importante destacar la principal diferencia que presentan estas bases de datos, y que se recogen de los trabajos previos realizados y presentados en los Anexos C y D. Esta diferencia se refiere a las distintas asimetrías observadas en los histogramas de los datos disponibles en cada caso; mientras la base de datos Don Luis presenta una asimetría moderada, la base de datos Radomiro Tomic presenta una alta asimetría que se traduce en la presencia de mayores frecuencias de leyes en los valores más bajos y cercanos a cero.

Conectando esto directamente con lo establecido en el estudio conceptual, se infiere que la alta asimetría tiene directa relación con una mayor desviación estándar de los datos disponibles (que en el estudio conceptual se desarrolló con la desviación estándar de los logaritmos de los datos). De este modo, habiéndose establecido en el estudio conceptual que se producen efectos negativos considerables en los resultados del modelo gaussiano discreto al aumentar la asimetría del histograma de los datos, los resultados observados eran esperables.

En los resultados preliminares asociados a la ley esperada (promedio de las realizaciones), en la base de datos Don Luis se obtuvo estadísticas básicas similares con cada modelo aplicado. Al observar mapas de ley obtenidos con cada modelo se corroboró la similitud entre los



resultados obtenidos, lo que se confirmó al analizar el gráfico de las frecuencias de ley que son prácticamente idénticas.

Al pasar a la etapa de desarrollo de curvas tonelaje-ley, se obtuvo nuevamente resultados muy similares tanto para los tonelajes como para las leyes medias sobre distintas leyes de corte. En particular, las diferencias porcentuales entre un modelo y otro con respecto a las proporciones de tonelajes que superan una ley de corte son prácticamente despreciables, y de este modo cualquiera de los dos resultados podría ser utilizado en etapas posteriores de diseño y planificación minera.

Al pasar al estudio de la cuantificación de la incertidumbre que entrega cada modelo aplicado, se obtuvo en los mapas de varianzas condicionales resultados similares, observándose con cada modelo zonas similares de baja y alta incertidumbre. Para corroborar esto se construyó una nube de correlación entre las varianzas condicionales por bloque obtenidas con cada modelo, obteniéndose una buena correlación entre ellas.

Para complementar lo anterior, se analizaron los largos de intervalo de probabilidad obtenidos para cada bloque y con cada modelo, obteniéndose buena correlación en intervalos del 90% y menor correlación aunque aceptable en intervalos del 95%.

En síntesis, con la base de datos Don Luis se observaron resultados similares con ambos modelos aplicados tanto en términos de estimación como de cuantificación de la incertidumbre asociada al desconocimiento de las leyes reales.

Con respecto a la base de datos Radomiro Tomic, los resultados de estimación con cada modelo muestran diferencias significativas. En las estadísticas básicas la mayor diferencia se observó en la ley máxima; el MGD entrega una ley máxima mucho mayor al MMG, lo que finalmente influye en la ley media y en la desviación estándar observada, dado que el MGD entrega mayor media y mayor dispersión. Complementando esto, en los mapas de ley se observa que en las zonas de alta ley el MGD entrega leyes mayores. Además las curvas de frecuencia de ley presentan diferencias importantes.

En el desarrollo de las curvas tonelaje-ley se observaron dos resultados importantes. Primero, en las curvas de tonelaje sobre distintas leyes de corte, si bien gráficamente no se observa diferencias importantes, para leyes de corte mayores a 0.5% se obtuvieron diferencias porcentuales importantes. Segundo, en las curvas de ley media sobre distintas leyes de corte se observa diferencias importantes, debido a que sistemáticamente el MGD presenta leyes medias superiores al MMG. Esto claramente es resultado directo de lo ya mencionado; el MGD simula valores superiores en altas leyes. De este modo los resultados entregados con cada modelo no pueden ser utilizados indistintamente para fines de diseño o planificación.

En relación al estudio de la cuantificación de la incertidumbre que entrega cada uno de los modelos, en los mapas de varianza condicional se observó diferencias importantes dado que el MGD presenta varianzas mayores en zonas de alta ley, lo cual está relacionado directamente con el hecho de presentar mayores leyes en zonas de alta ley. Al complementar esto con la nube de

correlación entre las varianzas condicionales por bloque se tiene una correlación prácticamente nula entre los modelos. Por otra parte, al estudiar los intervalos de probabilidad de 90% y 95%, se observa bajas correlaciones de los largos de intervalos obtenidos.

En síntesis, con la base de datos Radomiro Tomic se observa diferencias importantes entre los resultados obtenidos con los modelos, tanto para los resultados de estimación como de cuantificación de la incertidumbre.

Finalmente, al comparar los tiempos de cálculos con cada modelo se concluye que el modelo gaussiano discreto tarda menos en llevar a cabo las simulaciones, lo que puede significar una ventaja práctica importante con respecto al modelo multigaussiano.

### **7.3 Conclusiones generales.**

Buscando englobar los resultados obtenidos en cada etapa de este trabajo, a continuación se busca establecer las condiciones bajo las cuales en la práctica el modelo gaussiano discreto puede ser una buena alternativa en los procesos de evaluación de yacimientos.

Si bien el espaciamiento de sondajes observado en la práctica suele ser variable, comúnmente se encuentran en las campañas de exploración sondajes separados a menos de 100 metros. Esto significa que en esos casos el bloque más alejado de los datos estará a no más de 50 metros. Recordando que en el estudio conceptual los datos se encuentran entre 50 y 75 metros de distancia al bloque, parece razonable pensar que variogramas con alcances superiores a 50 metros aseguran obtener buenos resultados con la aplicación del modelo gaussiano discreto.

Por otra parte, sumando los resultados observados en el estudio del efecto pepa, se puede establecer que un variograma de datos gaussianos puntuales que no supere un efecto pepa de 0.2 entregará con el modelo gaussiano discreto resultados similares a los posibles de obtener con simulaciones puntuales y rebloqueo.

En relación al tamaño de bloques, en todas las configuraciones espaciales de datos condicionantes estudiadas se observa que tamaños de bloques menores a 20x20x20 metros permiten obtener buenas aproximaciones con ambos modelos, aunque se recomienda ser más cuidadosos con la configuración 4.

El caso de la desviación estándar logarítmica de los datos condicionantes es más crítico. Tal como ya ha sido mencionado, aplicar el modelo gaussiano discreto a un histograma de datos demasiado asimétrico no es recomendable. En particular, se recomienda no utilizar este modelo para datos con una desviación estándar de sus logaritmos superior a 0.8 (tentativamente, recordando que las bases de datos reales no necesariamente siguen una distribución con buena aproximación a una lognormal). Esto implica en la práctica que este modelo puede ser aplicado por ejemplo en mineralizaciones como la observada en la base de datos Don Luis, pero no debe

ser aplicada en mineralizaciones como las típicamente observadas en yacimientos de oro donde las asimetrías suelen ser mayores. Es necesario recordar que el estudio presentado considera el modelo gaussiano discreto en su versión local, el cual presenta hipótesis más estrictas que la versión global. De este modo, este estudio no restringe la aplicación de este modelo en el cálculo de recursos globales, considerando que si es utilizado comúnmente en estos casos. En este sentido, es esperable que la versión global de este modelo aproxime de mejor forma al modelo multigaussiano, al tener ambas hipótesis menos estrictas que el modelo gaussiano discreto en el caso local.

Finalmente, considerando los resultados diferentes que se obtuvieron con un sondeaje cruzando al bloque (configuración 4), si bien las correlaciones son menores, el hecho de observar en general similitud entre las distribuciones de valores simulados con cada modelo, además de los menores rangos de valores simulados, permiten considerar en este caso condiciones de aplicación del modelo gaussiano discreto sólo un poco más restrictivas que las ya mencionadas. Es decir, en la práctica, a no ser que se tenga una proporción importante de bloques siendo cruzados por sondeos, el modelo gaussiano discreto puede ser aplicado bajo las restricciones establecidas.

En síntesis, el modelo gaussiano discreto tiende a sobrestimar la cola de altas leyes en el histograma de frecuencias de las leyes simuladas, y además presenta diferencias importantes en las frecuencias de leyes menores, todo esto en comparación al modelo multigaussiano cuando se trabaja con una base de datos con un histograma de asimetría considerable. Considerando datos originales condicionantes de distribución lognormal, se recomienda no utilizar este modelo con una desviación estándar logarítmica superior a 0.8, que se traduce en un coeficiente de variación de 0.95 (con distribución lognormal perfecta). Esto valores deben ser vistos como una aproximación, dado que la base de datos Radomiro Tomic presenta una desviación estándar logarítmica de 1.05, pero al no presentar una distribución lognormal perfecta, su coeficiente de variación es de 0.97 (es decir, estaría muy cerca del límite y no se justificaría las diferencias observadas en este caso).

Sin embargo, con una base de datos de histograma con asimetría moderada el modelo gaussiano discreto es perfectamente aplicable, además de requerir tiempos de cálculos menores. En este caso, la base de datos Don Luis presenta una desviación estándar logarítmica de 0.69, con un coeficiente de variación de 0.57. Análogo al razonamiento hecho con la otra base de datos, al conectar estos valores con los considerados en el estudio conceptual, se debe recordar que la base de datos Don Luis no es perfectamente lognormal. De hecho, una distribución lognormal de coeficiente de variación de 0.57, tiene una desviación estándar logarítmica de 0.57, que en este caso es menor a la desviación estándar logarítmica de los datos reales.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

### Referencias bibliográficas generales.

- X. Emery, 2008. “Apuntes de clases MI68-A Geoestadística”. Departamento de Ingeniería de Minas, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile.
- X. Emery, 2008. “Apuntes de clases MI75-D Tópicos Avanzados en Evaluación de Yacimientos”. Departamento de Ingeniería de Minas, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile.

### Referencias bibliográficas específicas.

- [1] A.G. Journel, 1974. Geostatistics for conditional simulation of orebodies. *Economic Geology* 69 (5): 673-687.
- [2] I. Glacken, 1997. Change of support and use of economic parameters for block selection. In: E.Y. Baafi and N.A. Schofield (Eds.), *Geostatistics Wollongong'96*, Kluwer, Dordrecht, pp. 811-820.
- [3] J. Boisvert, J.M. Ortiz, C.V. Deutsch, 2008. Local recoverable reserves prediction with block LU simulation. *International Journal of Mining and Mineral Engineering*, 1(1):3-21.
- [4] J.P. Chilès, P. Delfiner, 1999. *Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty*. Wiley, New York, 695 p.
- [5] J. Rivoirard, 1994. *Introduction to Disjunctive Kriging and Nonlinear Geostatistics*. Oxford University Press, Oxford, 191 p.
- [6] G. Verly, 1984. The block distribution given a point multivariate normal distribution. In: G. Verly, M. David, A.G. Journel, A. Maréchal (Eds.), *Geostatistics for Natural Resources Characterization*, Reidel, Dordrecht, pp. 495-515.
- [7] X. Emery, 2007. On Some Consistency Conditions for Geostatistical Change-of-Support Models. *Mathematical Geology* 39(2): 205-223.
- [8] D. Marcotte, 1994. Direct conditional simulation of block grades. In: R. Dimitrakopoulos (Ed.), *Kluwer, Dordrecht, Geostatistics for the Next Century*, Kluwer, Dordrecht, pp. 245-252.
- [9] X. Emery, J.F. Soto Torres, 2005. Models for Support and Information Effects: A Comparative Study. *Mathematical Geology* 37(1): 49-68.
- [10] X. Emery, C. Lantuéjoul, 2006. TBSIM: A computer program for conditional simulation of three-dimensional Gaussian random fields via the turning bands method. *Computer&Geosciences*, Volume 32, Issue 10, pp. 1615-1628
- [11] X. Emery, 2009. Change-of-supports models and computer program for direct block support simulation. *Computer&Geosciences*, in press.

## **ANEXOS.**

## ANEXO A. “Detalle de configuración de sondajes”.

En cada caso se muestran las coordenadas de los datos, y finalmente un esquema con las configuraciones espaciales. Se consideraron compósitos de 5 metros.

1) 40 datos en 3 sondajes.

**Tabla 15: Coordenadas de 40 datos en 3 sondajes.**

Sondaje 1			Distancia bloque	Sondaje 2			Distancia a bloque	Sondaje 3			Distancia a bloque
X	Y	Z		X	Y	Z		X	Y	Z	
-43.90	48.69	30.30	72.22	50.00	45.00	30.00	73.65	10.45	-42.55	30.34	53.29
-42.80	47.38	25.60	68.79	49.57	44.25	25.08	71.02	10.67	-43.82	25.51	51.82
-41.70	46.07	20.90	65.56	49.13	43.50	20.15	68.64	10.90	-45.10	20.68	50.80
-40.60	44.76	16.21	62.57	48.70	42.74	15.23	66.56	11.12	-46.37	15.85	50.25
-39.50	43.45	11.51	59.84	48.26	41.99	10.30	64.79	11.35	-47.65	11.02	50.21
-38.40	42.14	6.81	57.42	47.83	41.24	5.38	63.38	11.57	-48.92	6.19	50.65
-37.31	40.83	2.11	55.35	47.40	40.49	0.46	62.34	11.80	-50.20	1.36	51.59
-36.21	39.52	-2.59	53.66	46.96	39.74	-4.47	61.68	12.02	-51.47	-3.47	52.97
-35.11	38.21	-7.29	52.40	46.53	38.98	-9.39	61.42	12.25	-52.74	-8.30	54.78
-34.01	36.90	-11.98	51.59	46.09	38.23	-14.32	61.57	12.47	-54.02	-13.13	56.97
-32.91	35.59	-16.68	51.26	45.66	37.48	-19.24	62.13	12.70	-55.29	-17.96	59.50
-31.81	34.28	-21.38	51.42	45.22	36.73	-24.16	63.07	12.92	-56.57	-22.79	62.34
-30.71	32.97	-26.08	52.06	44.79	35.98	-29.09	64.40	13.15	-57.84	-27.61	65.43
								13.37	-59.12	-32.44	68.75

2) 15 datos en 1 sondaje.

**Tabla 16: Coordenadas de 15 datos en 1 sondaje.**

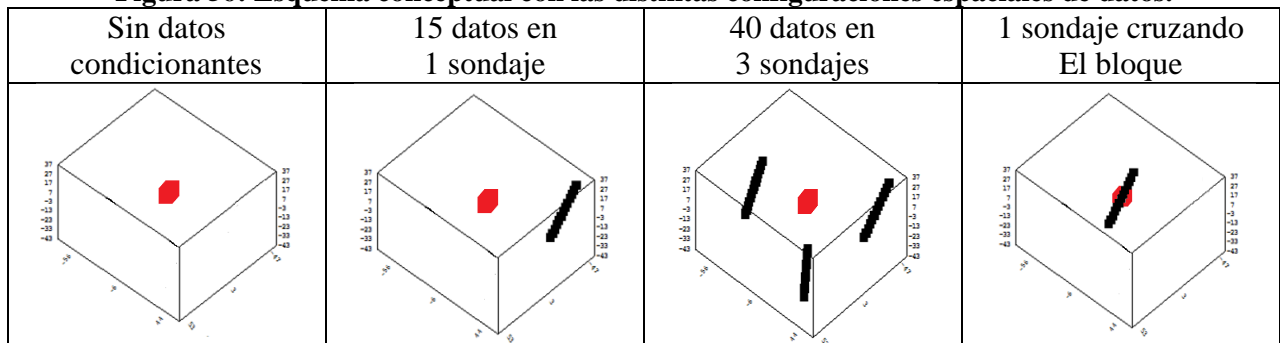
Sondaje			Distancia a bloque
X	Y	Z	
50.00	45.00	30.00	73.65
49.57	44.25	25.08	71.02
49.13	43.50	20.15	68.64
48.70	42.74	15.23	66.56
48.26	41.99	10.30	64.79
47.83	41.24	5.38	63.38
47.40	40.49	0.46	62.34
46.96	39.74	-4.47	61.68
46.53	38.98	-9.39	61.42
46.09	38.23	-14.32	61.57
45.66	37.48	-19.24	62.13
45.22	36.73	-24.16	63.07
44.79	35.98	-29.09	64.40
44.36	35.23	-34.01	66.07
43.92	34.47	-38.94	68.07

3) 1 sondaje (15 datos) cruzando el bloque.

**Tabla 17: Coordenadas de 1 sondaje cruzando el bloque.**

Sondaje			Distancia a bloque
X	Y	Z	
18.75	18.75	26.50	37.49
16.25	16.25	22.96	32.49
13.75	13.75	19.43	27.49
11.25	11.25	15.89	22.49
8.75	8.75	12.36	17.49
6.25	6.25	8.82	12.49
3.75	3.75	5.29	7.49
1.25	1.25	1.75	2.49
-1.25	-1.25	-1.79	2.52
-3.75	-3.75	-5.32	7.51
-6.25	-6.25	-8.86	12.51
-8.75	-8.75	-12.39	17.51
-11.25	-11.25	-15.93	22.51
-13.75	-13.75	-19.46	27.51
-16.25	-16.25	-23.00	32.51

**Figura 56: Esquema conceptual con las distintas configuraciones espaciales de datos.**



## ANEXO B. “Detalle de resultados estudio conceptual”.

A continuación se presenta el detalle de los resultados gráficos obtenidos en el estudio conceptual. Se muestran los resultados clasificados según configuración espacial de datos condicionantes, y los gráficos de nubes de correlación y q-q plot se presentan en tablas clasificados según alcance de variograma, efecto pepa, desviación estándar y tamaño de bloques.

### B1. Configuración 1: Sin datos condicionantes.

#### ALCANCE DE VARIOGRAMA

Figura 57: Nubes de correlación variando alcances de variograma (Configuración 1).

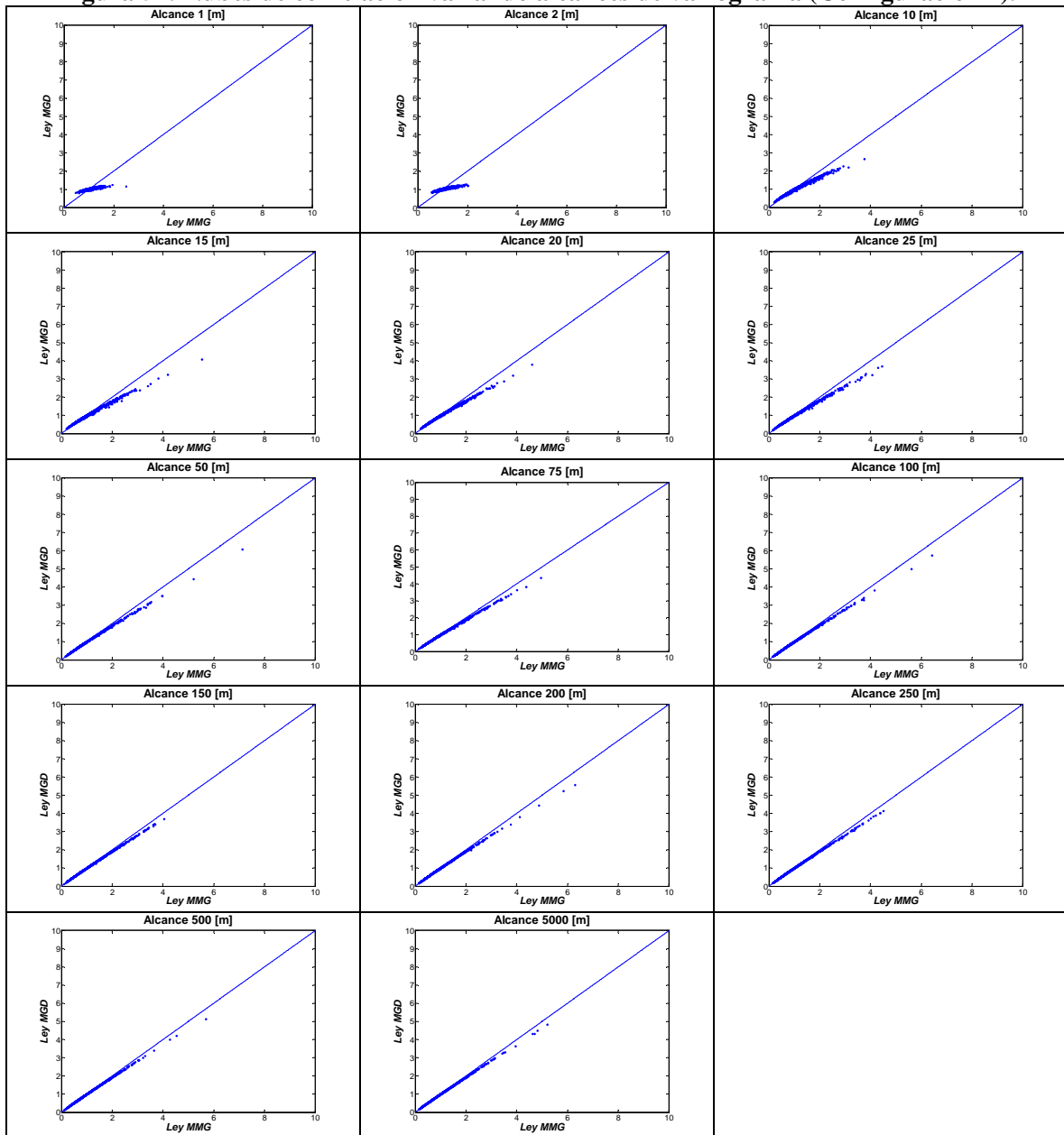
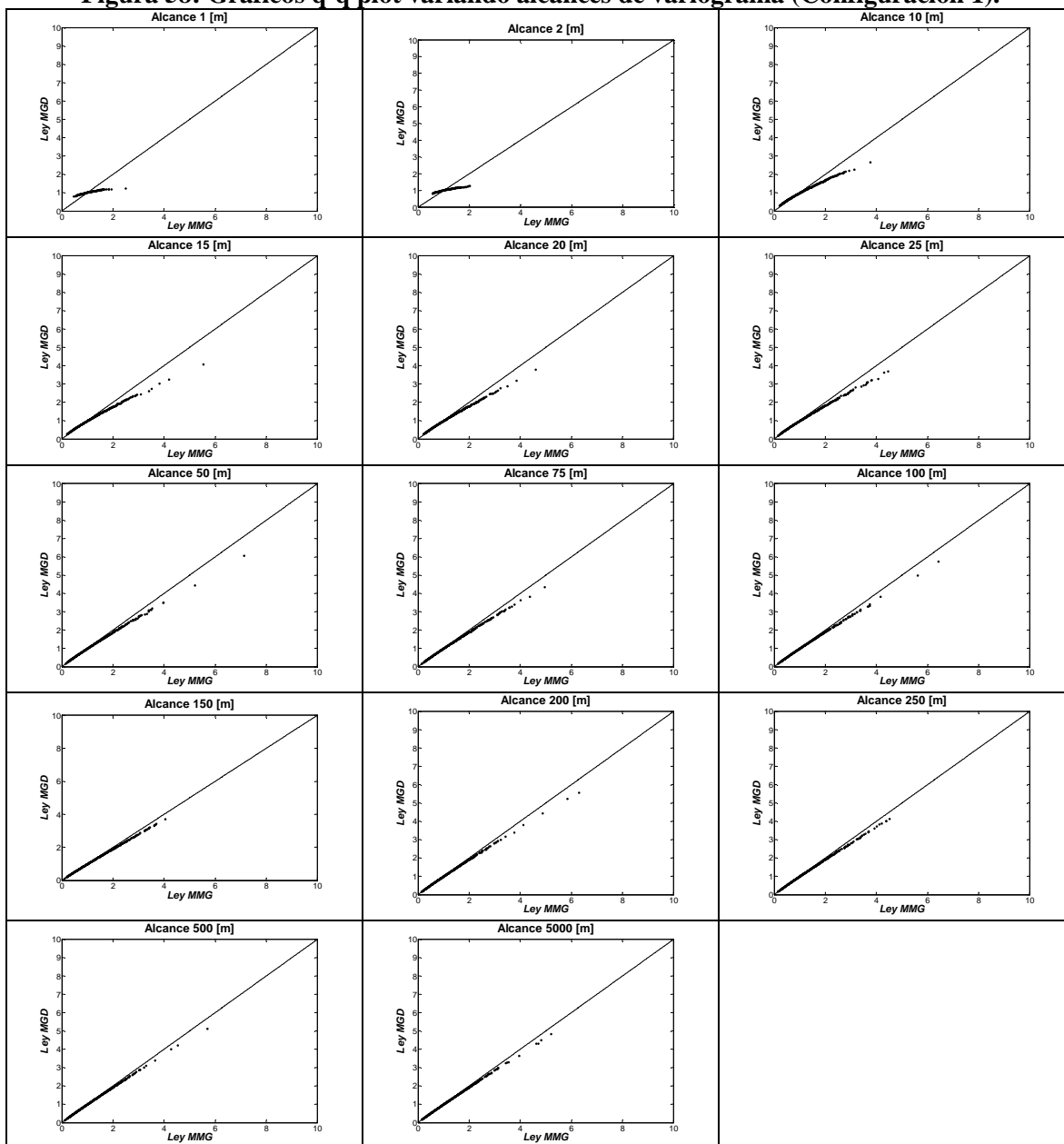




Figura 58: Gráficos q-q plot variando alcances de variograma (Configuración 1).



## TAMAÑO DE BLOQUES

Figura 59: Nubes de correlación variando tamaño de bloques (Configuración 1).

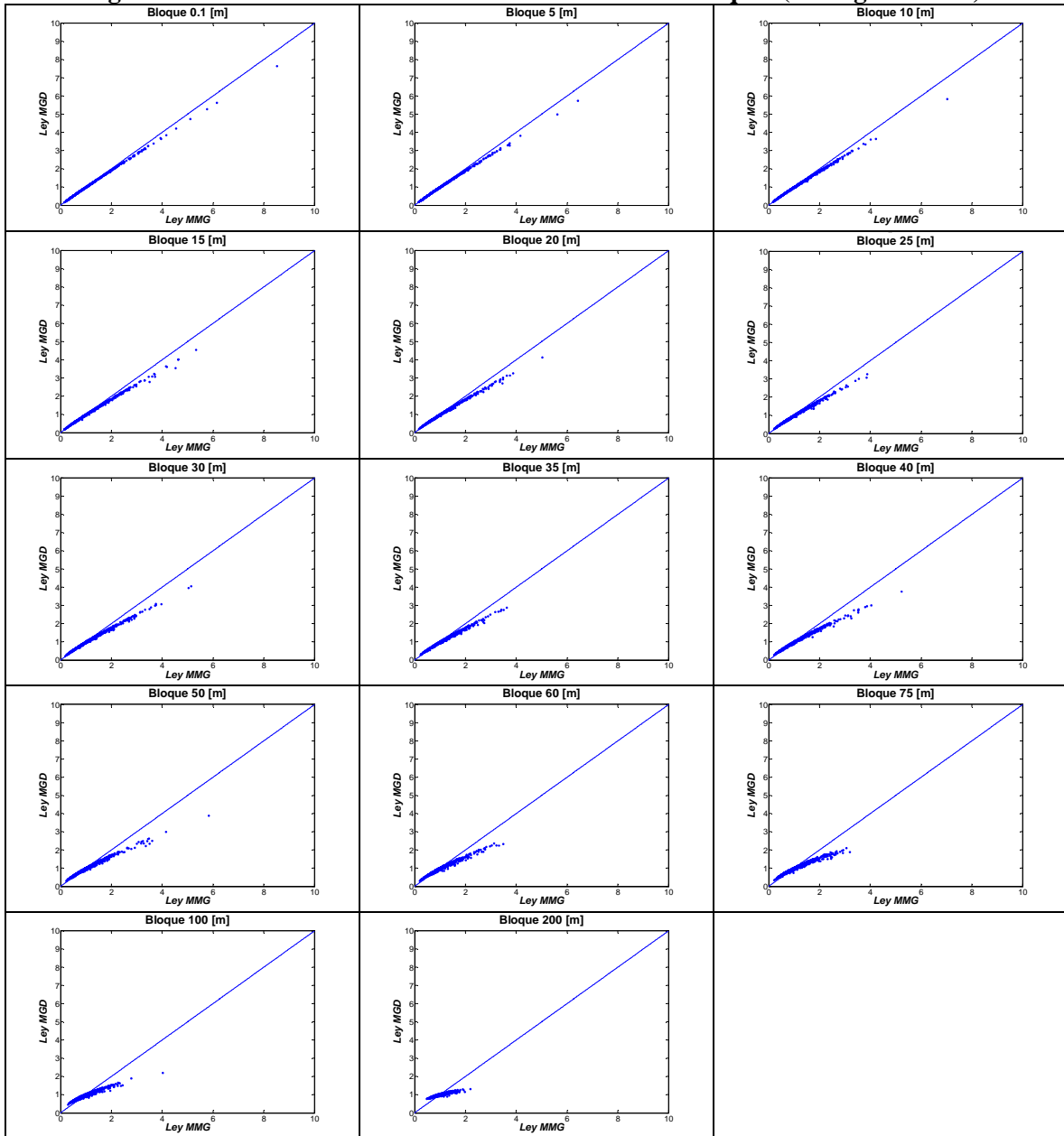
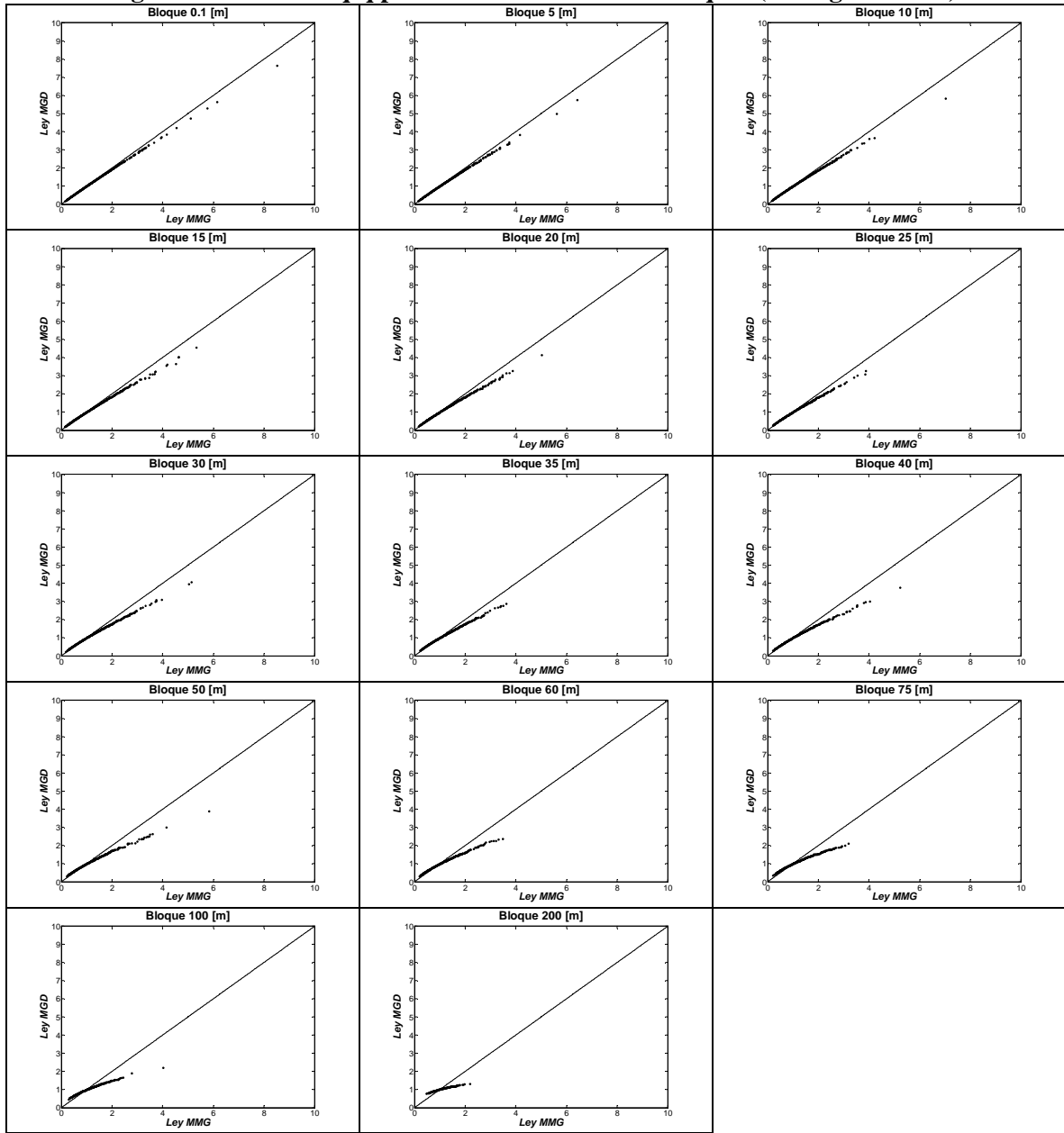
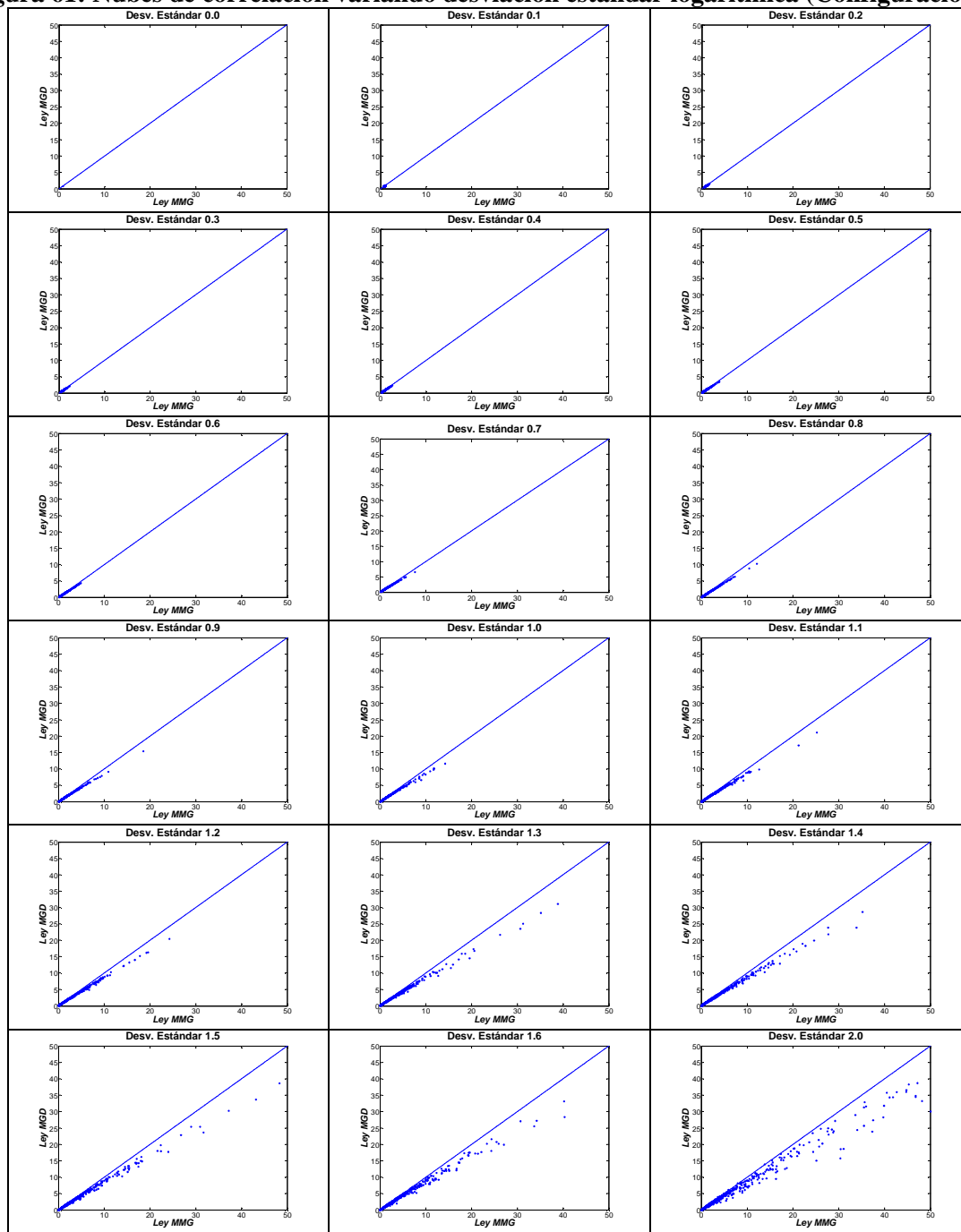


Figura 60: Gráficos q-q plot variando tamaño de bloques (Configuración 1).

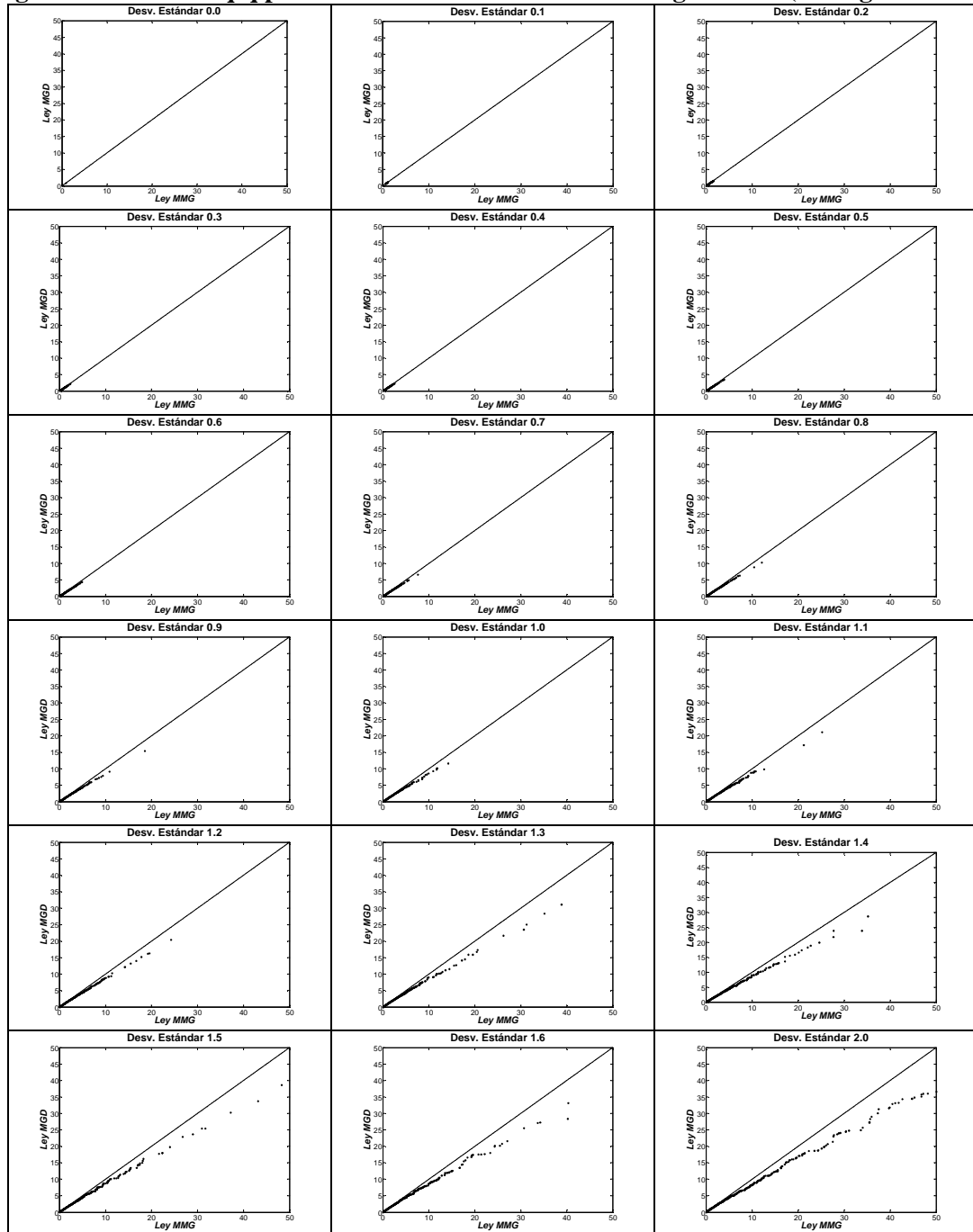


## DESVIACIÓN ESTÁNDAR LOGARITMICA

**Figura 61: Nubes de correlación variando desviación estándar logarítmica (Configuración 1).**

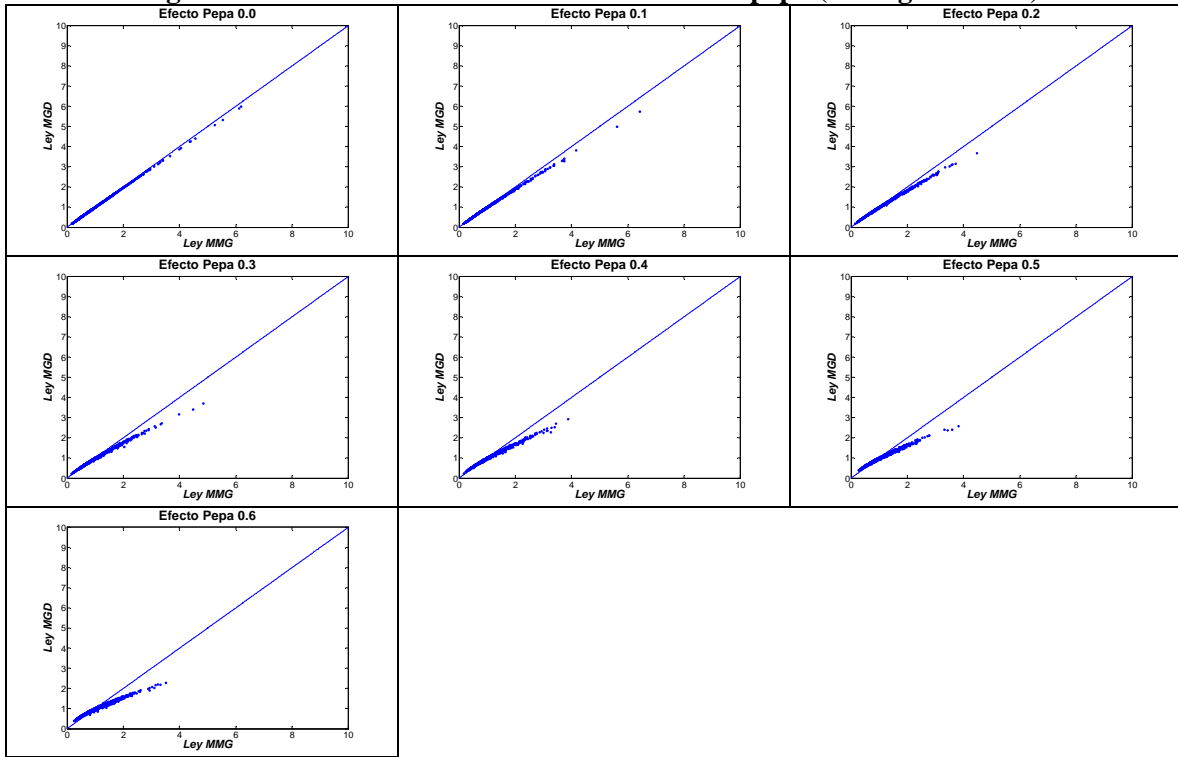


**Figura 62: Gráficos q-q plot variando desviación estándar logarítmica (Configuración 1).**

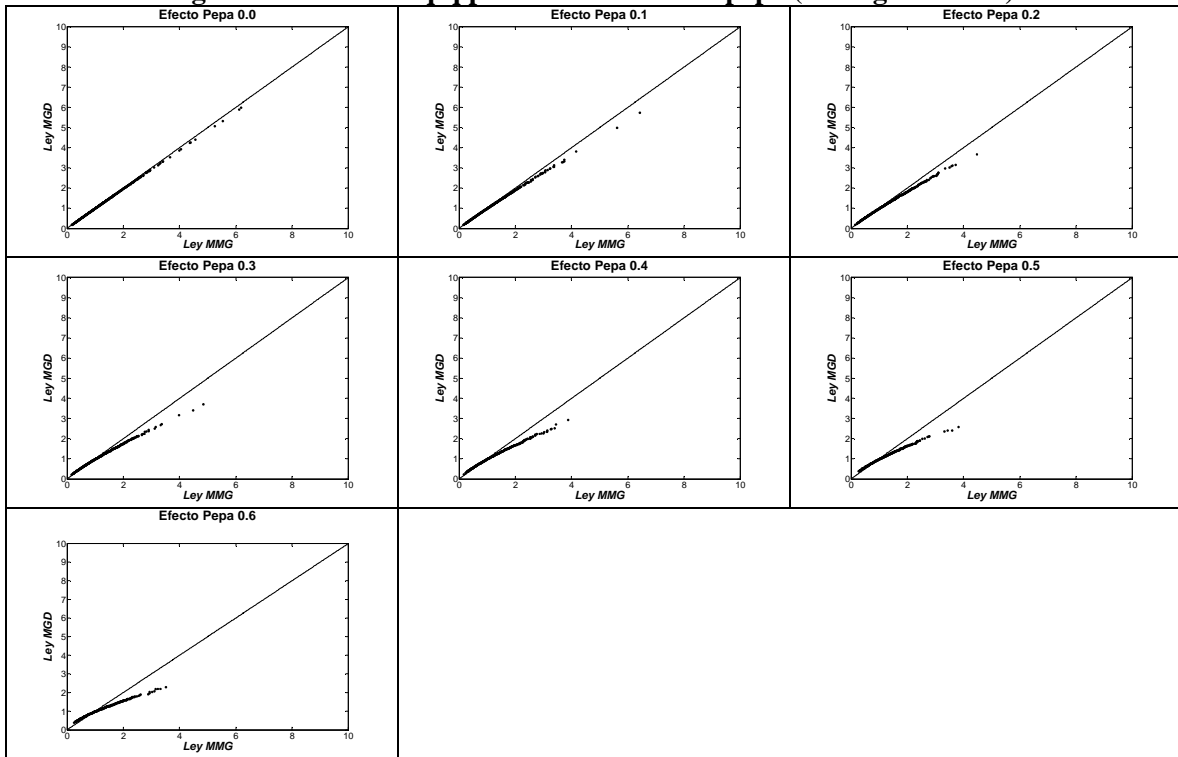


## EFEECTO PEPA

**Figura 63: Nubes de correlación variando efecto pepa (Configuración 1).**



**Figura 64: Gráficos q-q plot variando efecto pepa (Configuración 1).**



## B2. Configuración 2: 15 datos condicionantes.

### ALCANCE DE VARIOGRAMA

Figura 65: Nubes de correlación variando alcances de variograma (Configuración 2).

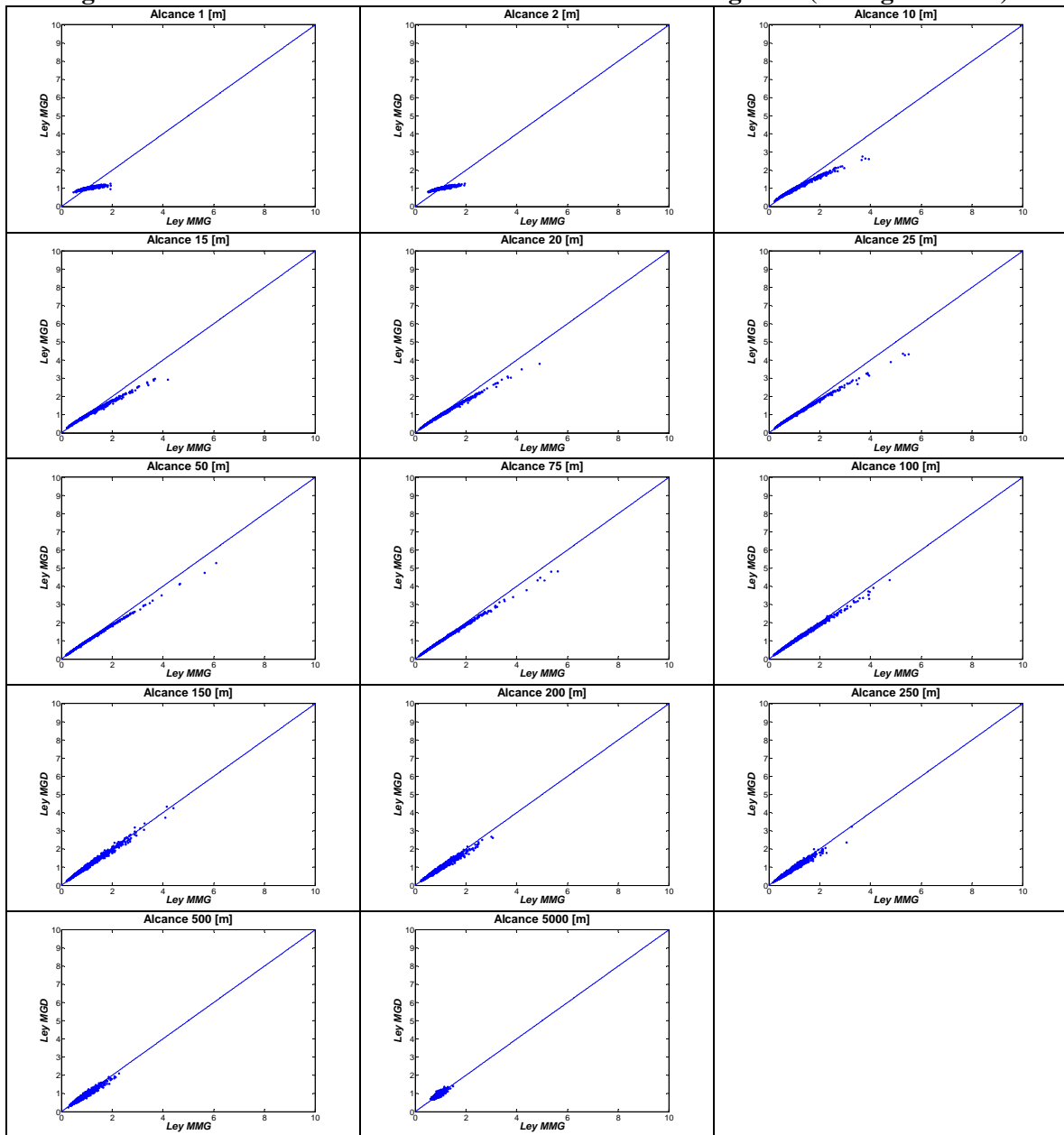
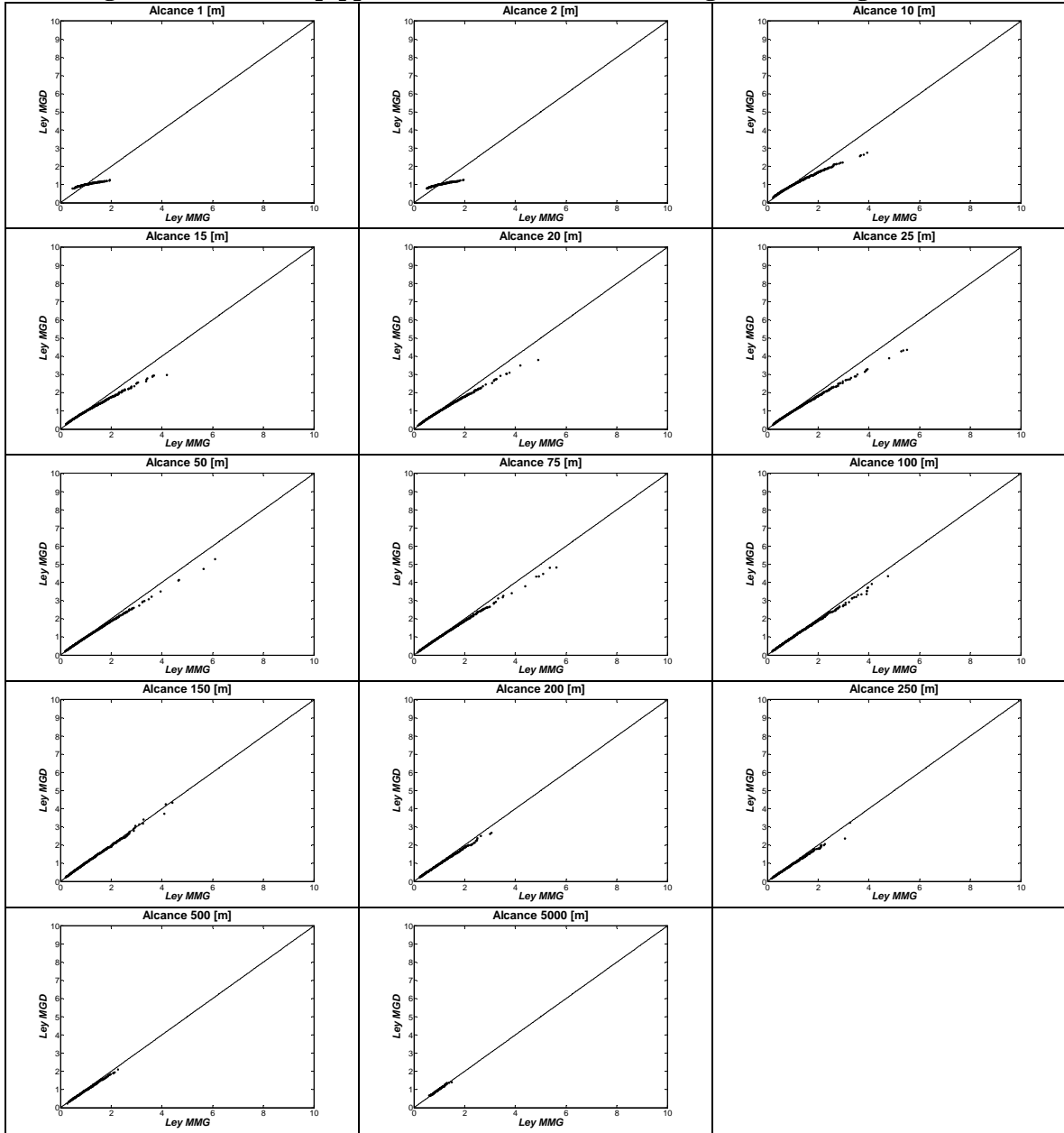


Figura 66: Gráficos q-q plot variando alcances de variograma (Configuración 2).





## TAMAÑO DE BLOQUES

Figura 67: Nubes de correlación variando tamaño de bloques (Configuración 2).

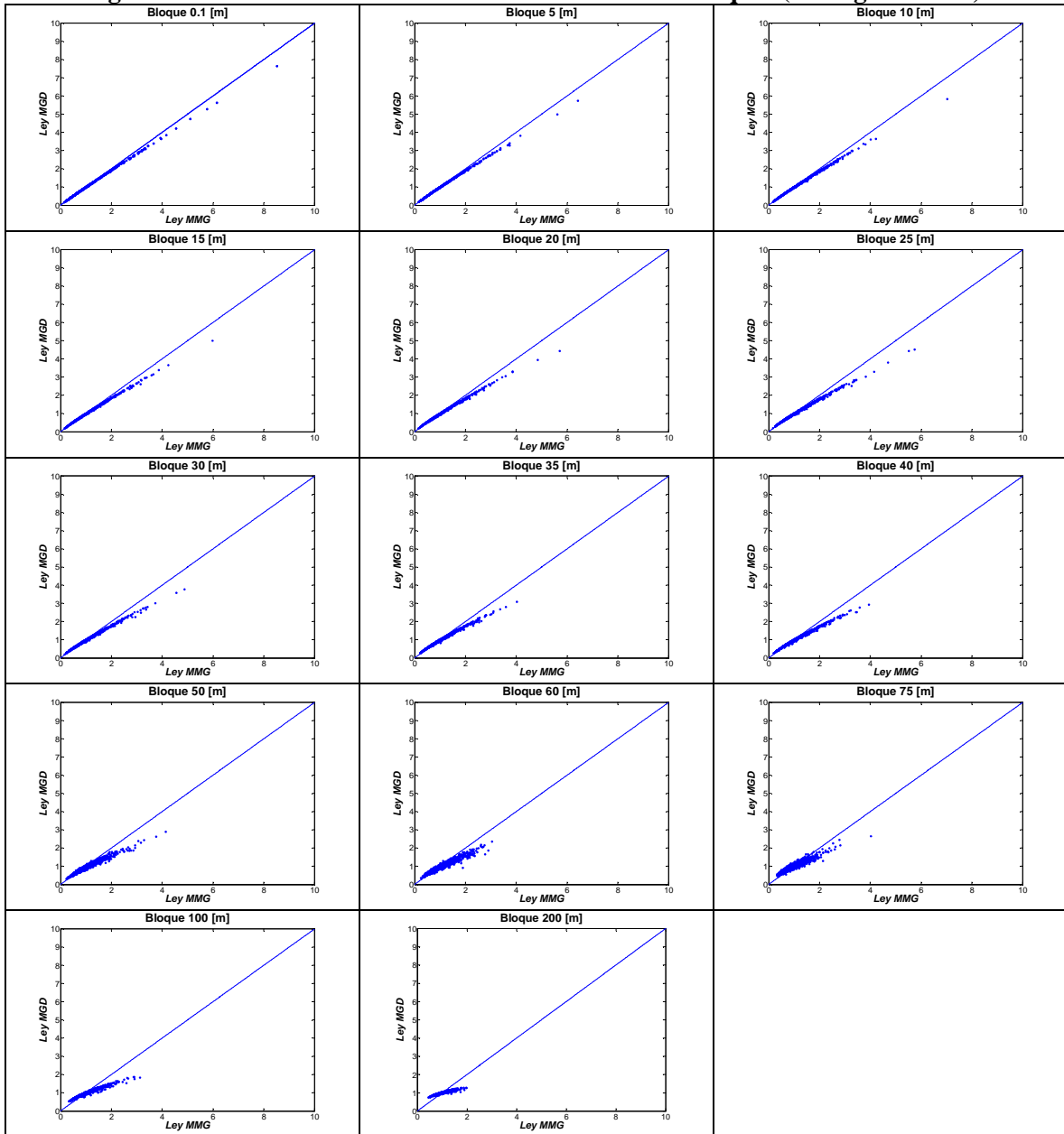
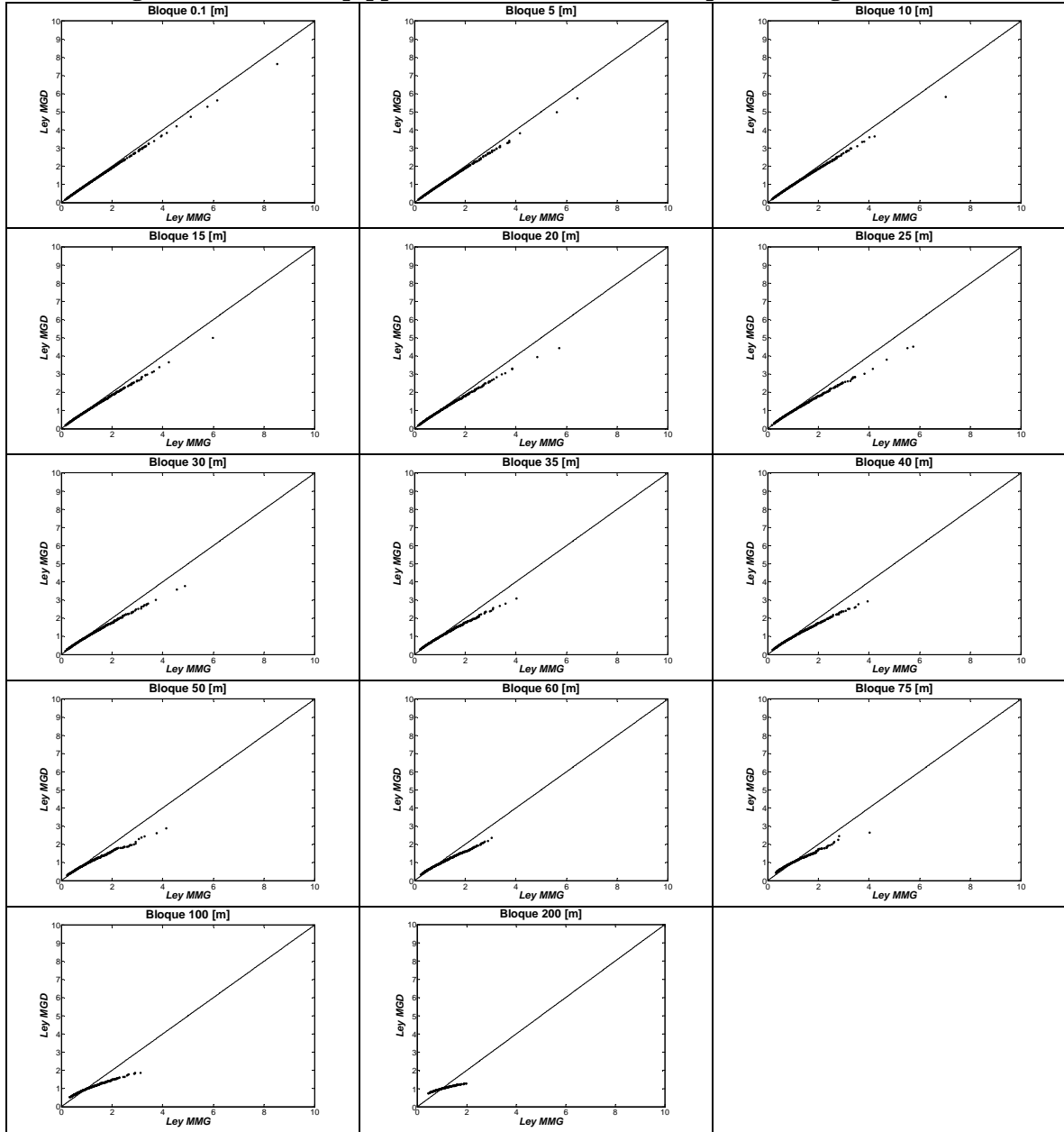
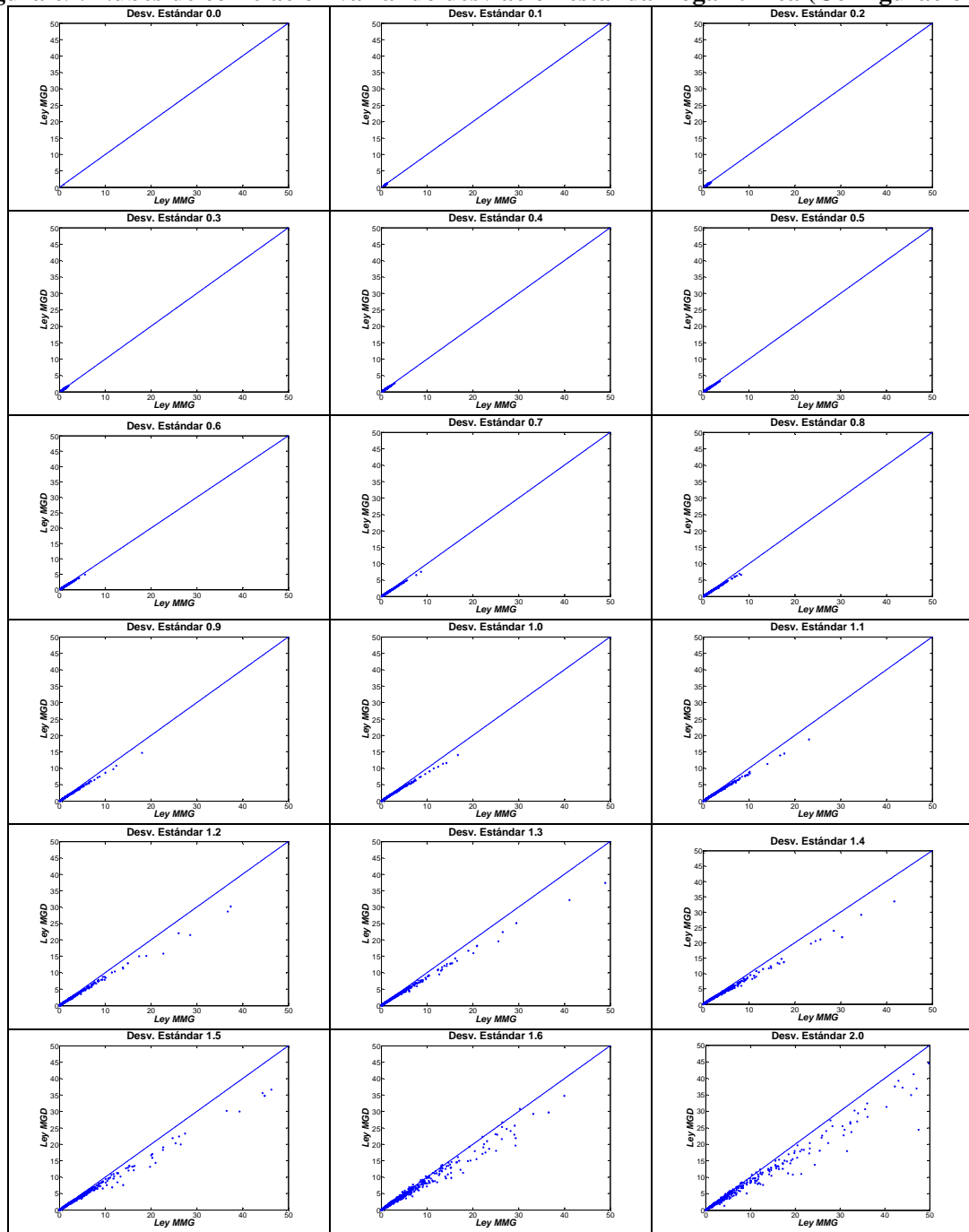


Figura 68: Gráficos q-q plot variando tamaño de bloques (Configuración 2).

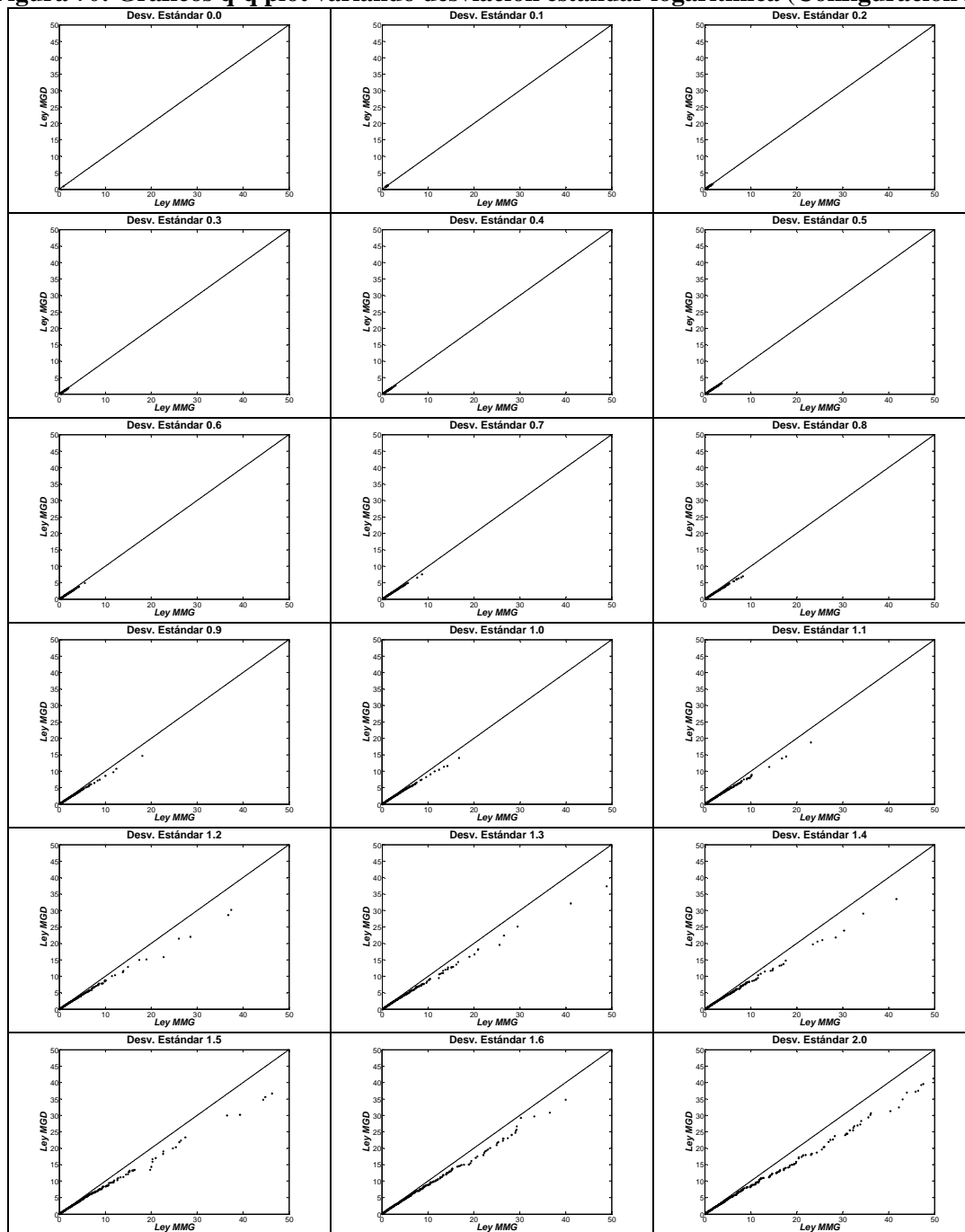


## DESVIACIÓN ESTÁNDAR LOGARITMICA

**Figura 69: Nubes de correlación variando desviación estándar logarítmica (Configuración 2).**

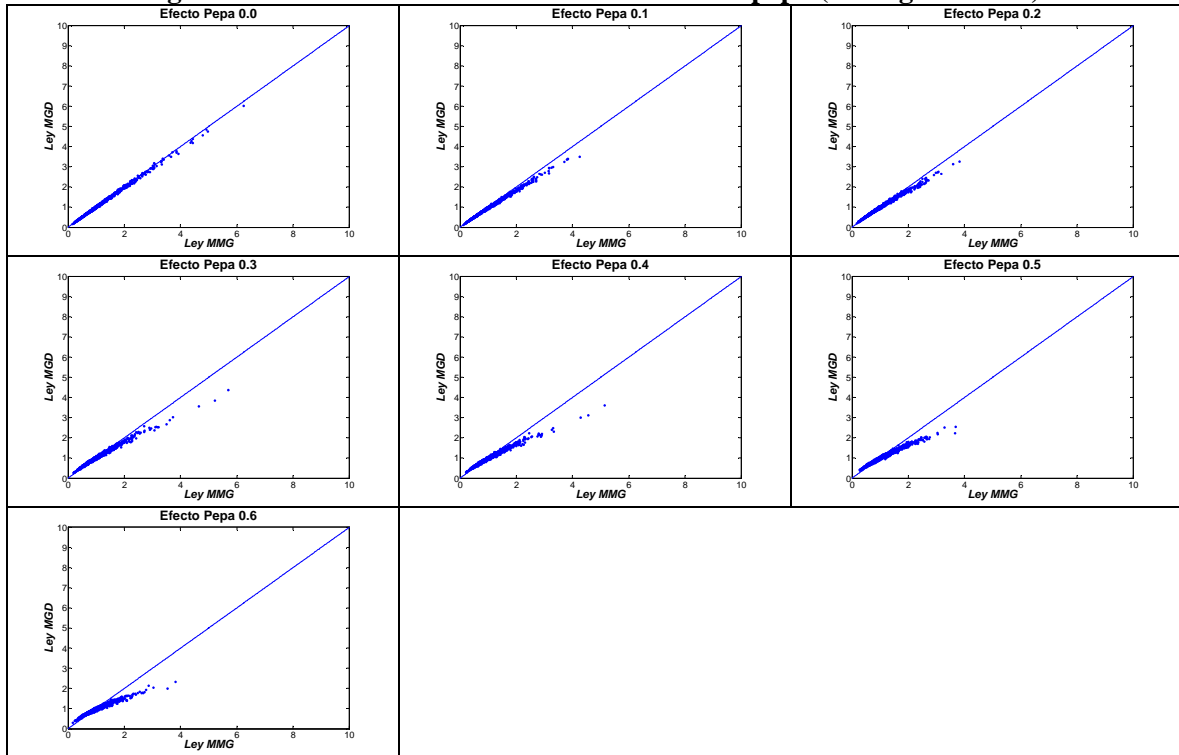


**Figura 70: Gráficos q-q plot variando desviación estándar logarítmica (Configuración 2).**

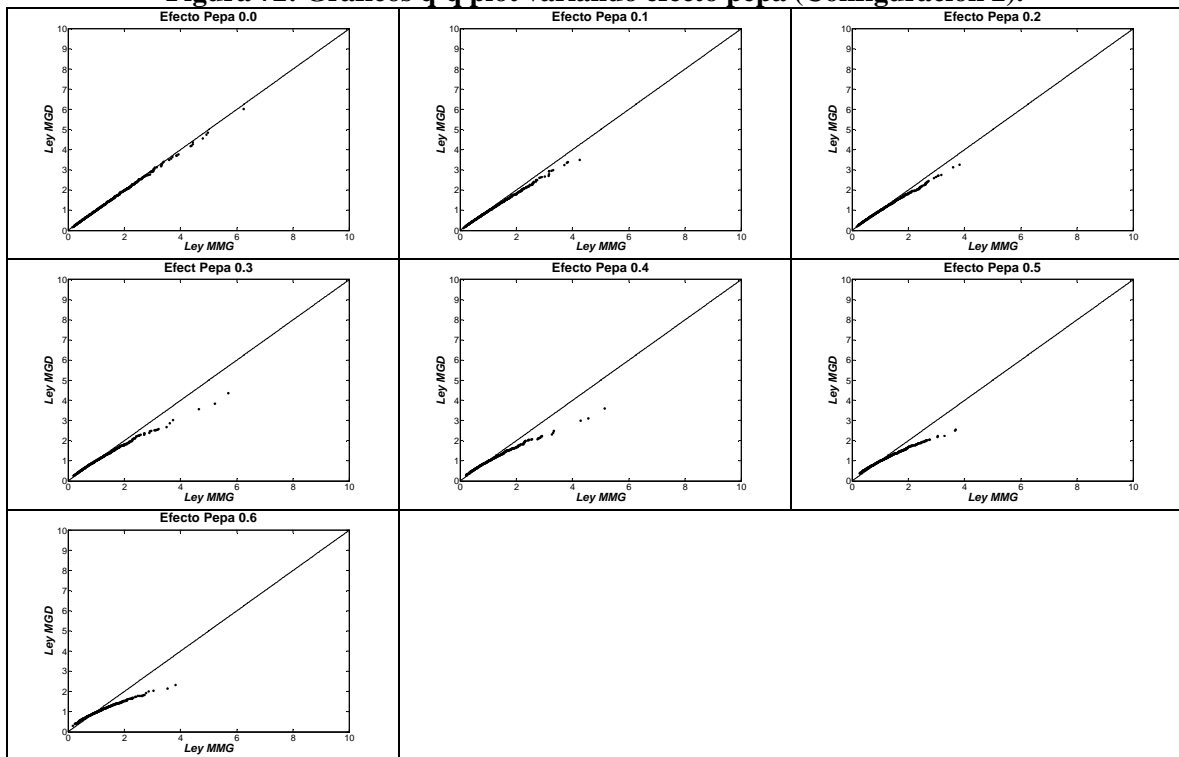


## EFEECTO PEPA

**Figura 71: Nubes de correlación variando efecto pepa (Configuración 2).**



**Figura 72: Gráficos q-q plot variando efecto pepa (Configuración 2).**



### B3. Configuración 3: 40 datos condicionantes.

#### ALCANCE DE VARIOGRAMA

Figura 73: Nubes de correlación variando alcances de variograma (Configuración 3).

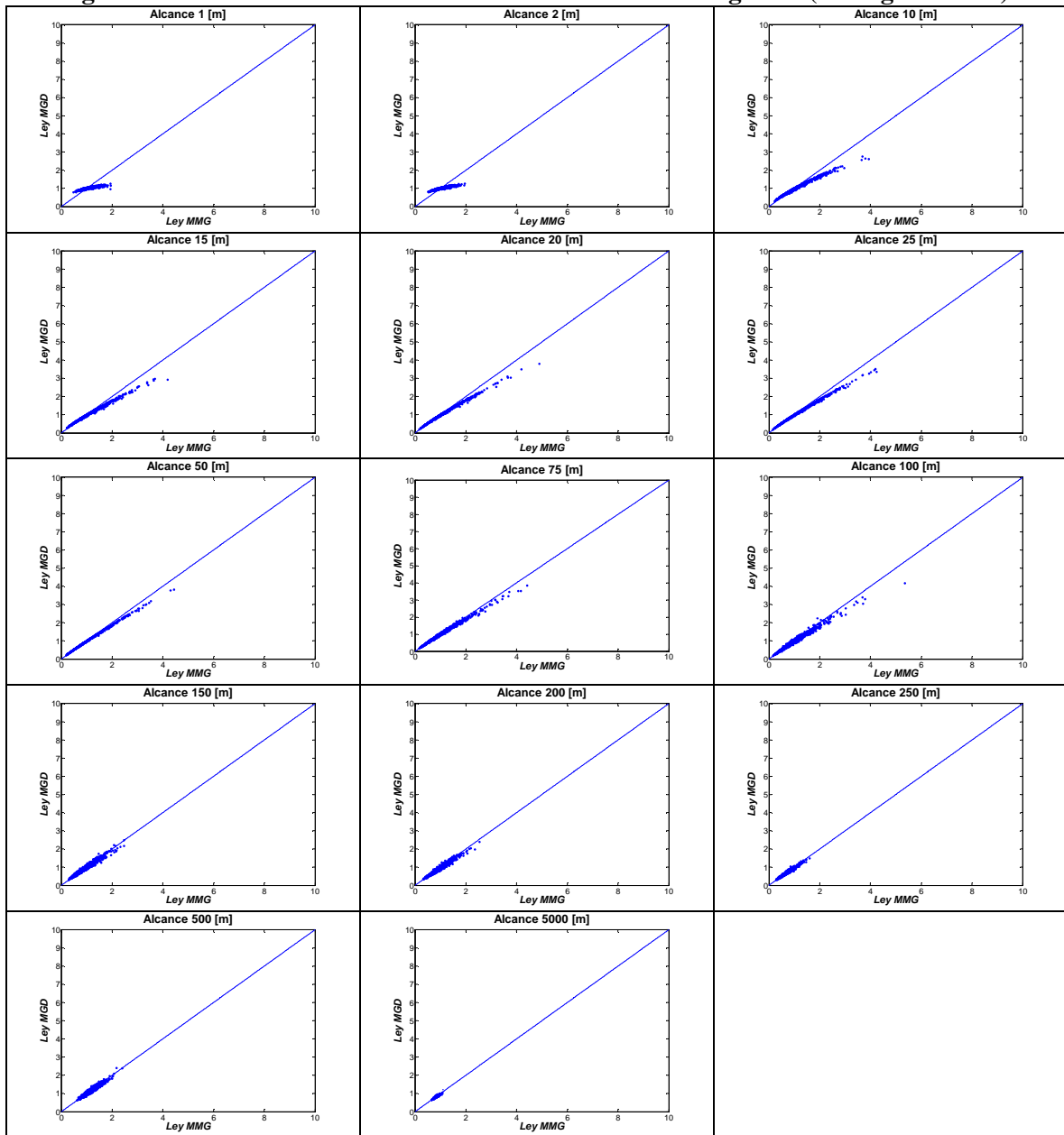
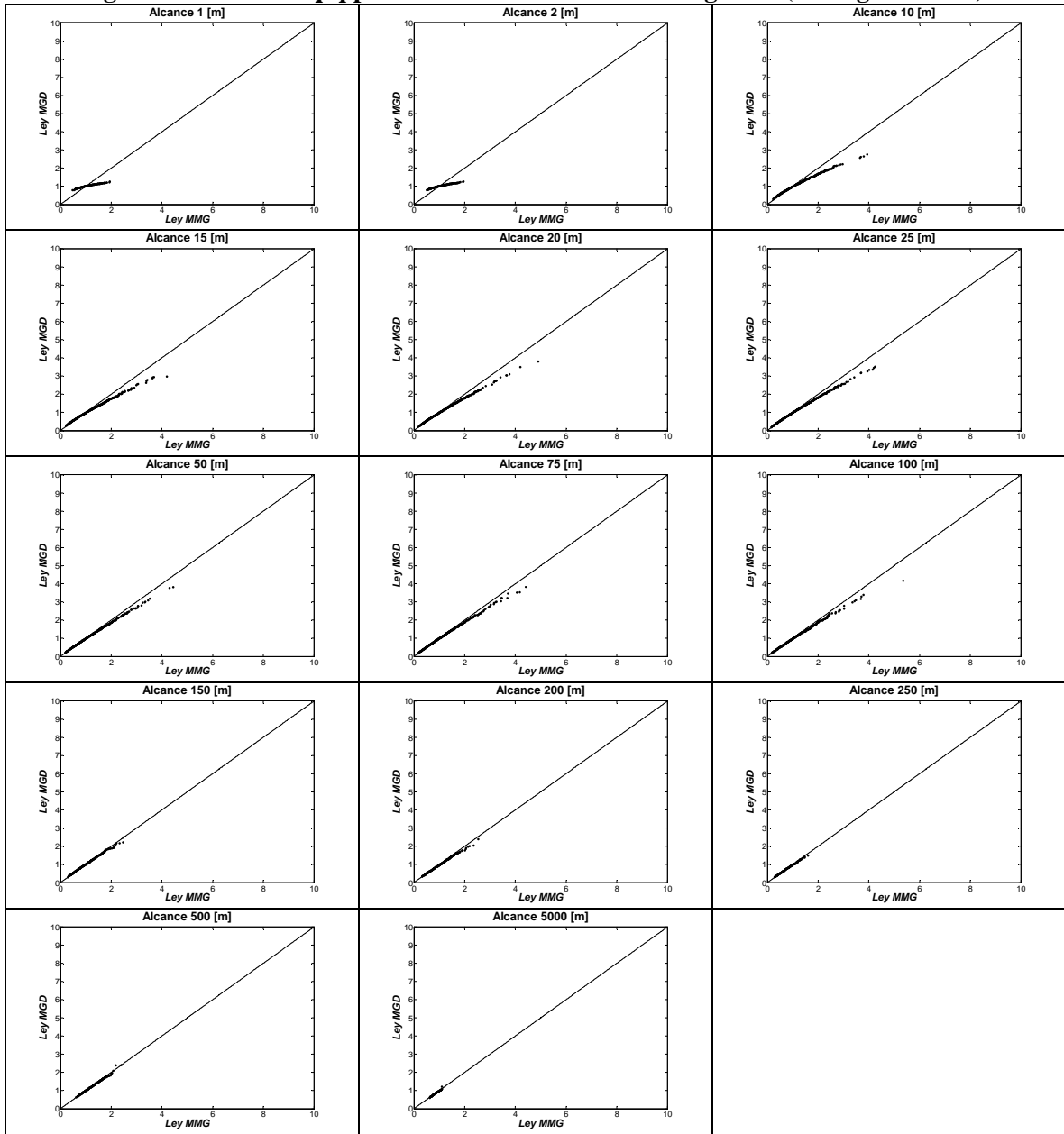


Figura 74: Gráficos q-q plot variando alcances de variograma (Configuración 3).



## TAMAÑO DE BLOQUES

Figura 75: Nubes de correlación variando tamaño de bloques (Configuración 3).

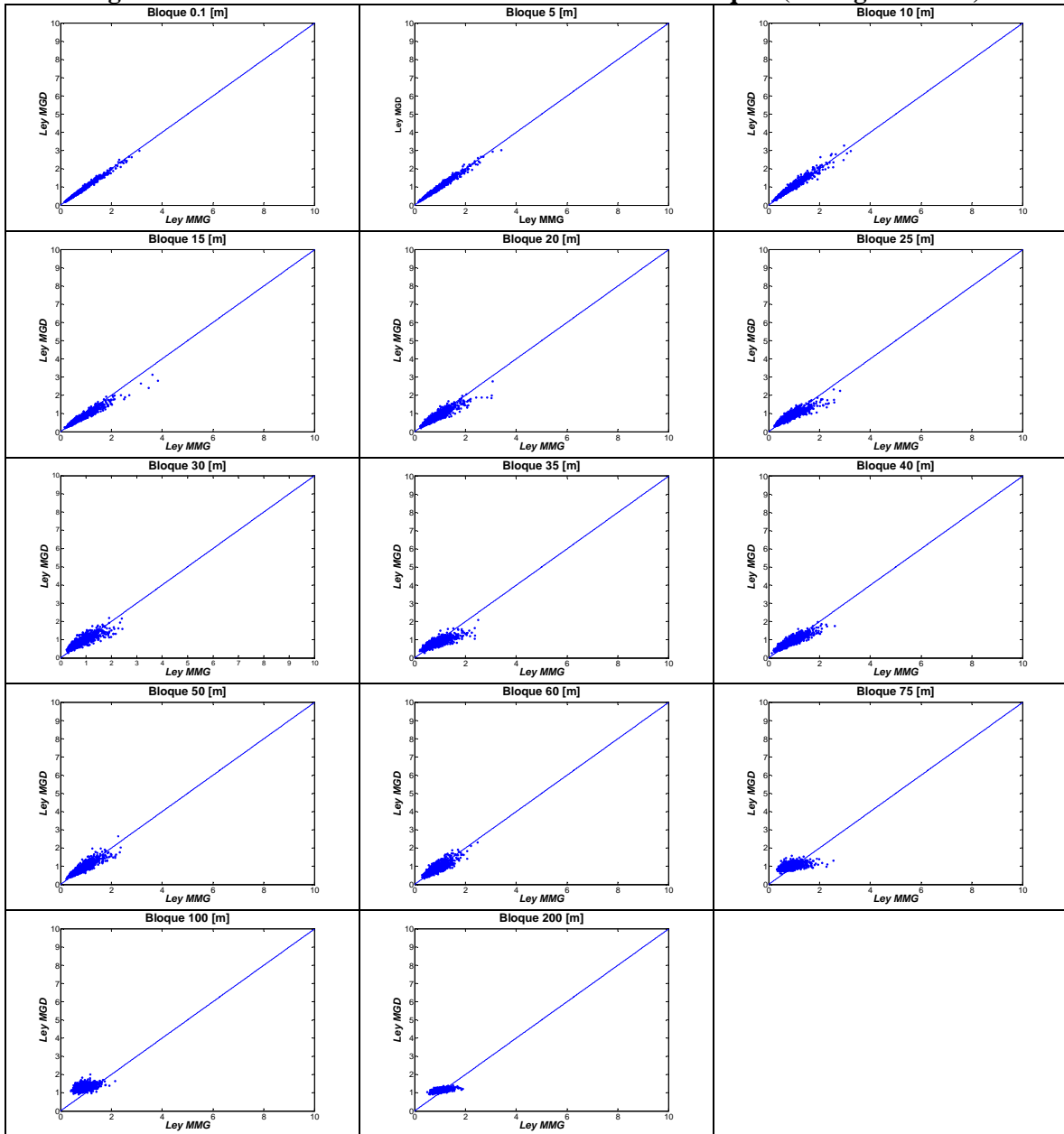
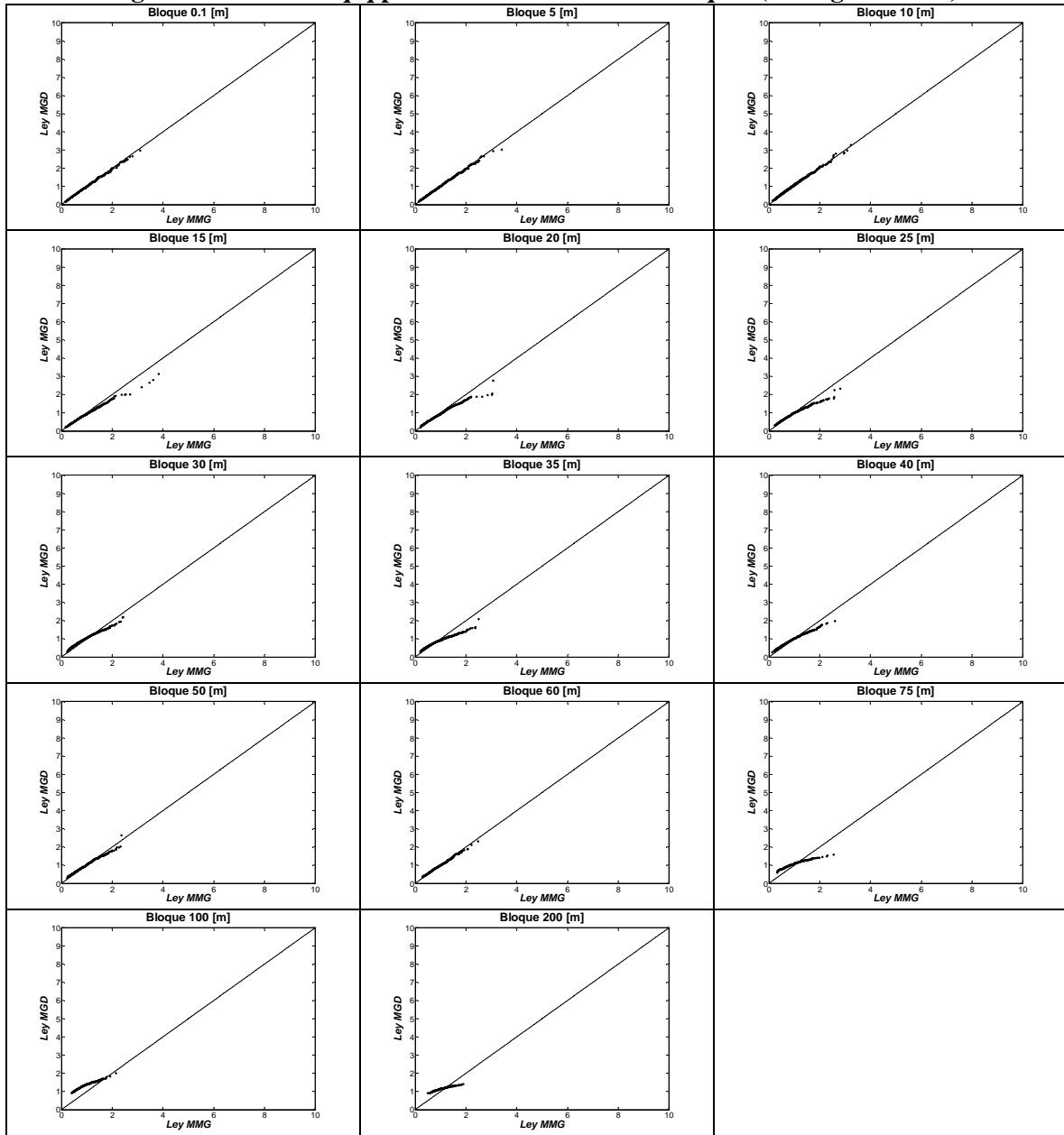


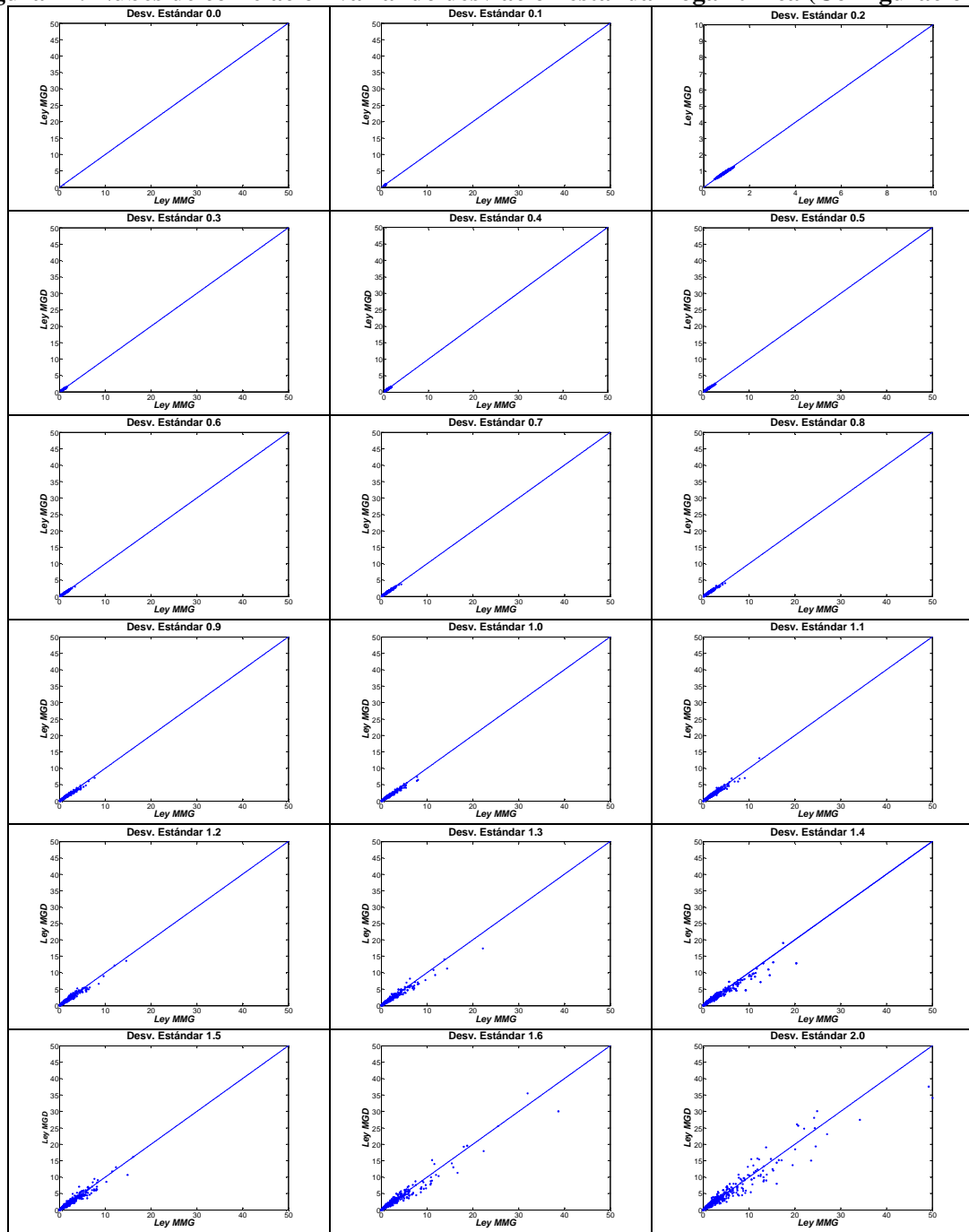


Figura 76: Gráficos q-q plot variando tamaño de bloques (Configuración 3).

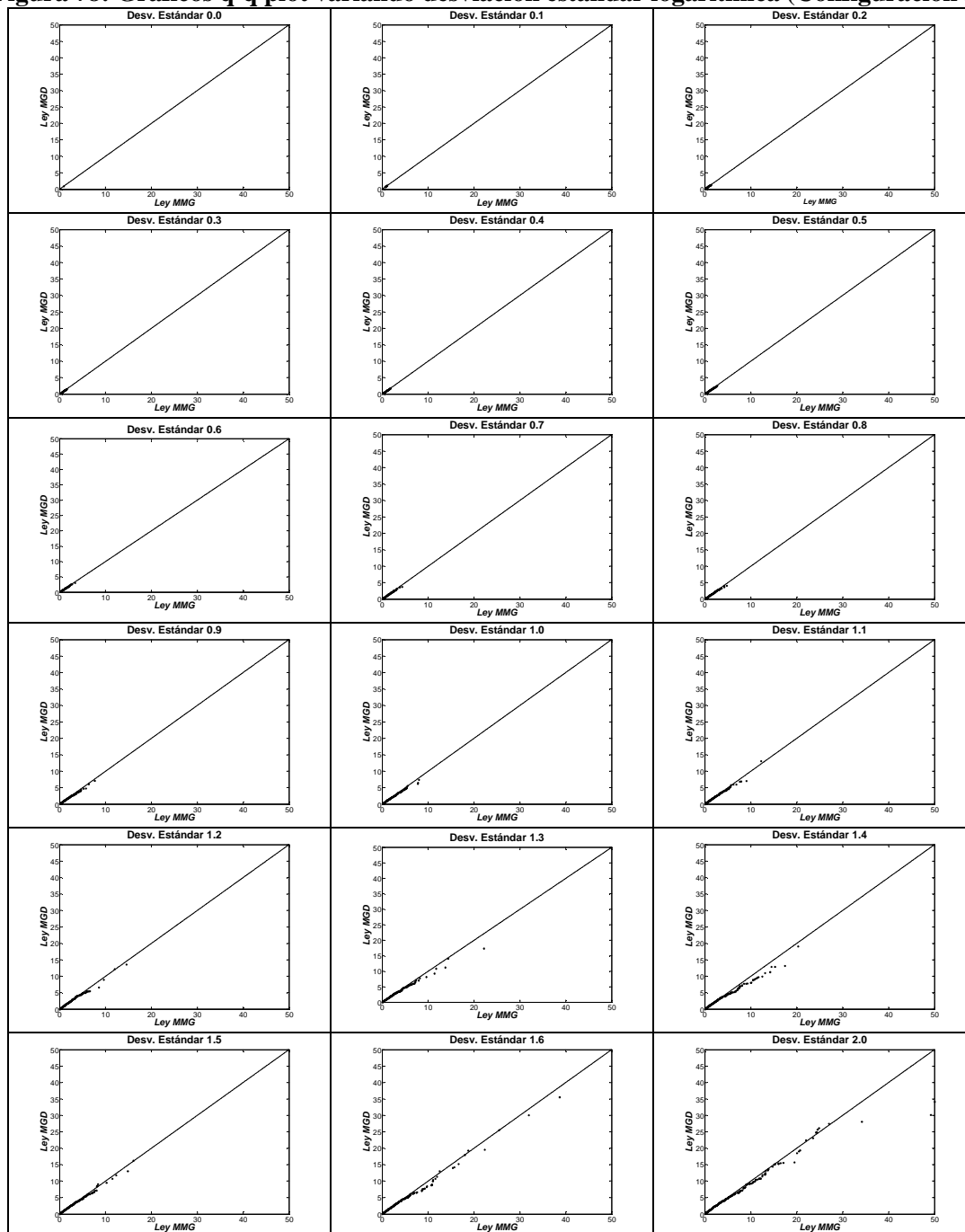


## DESVIACIÓN ESTÁNDAR LOGARÍTMICA

**Figura 77: Nubes de correlación variando desviación estándar logarítmica (Configuración 3).**

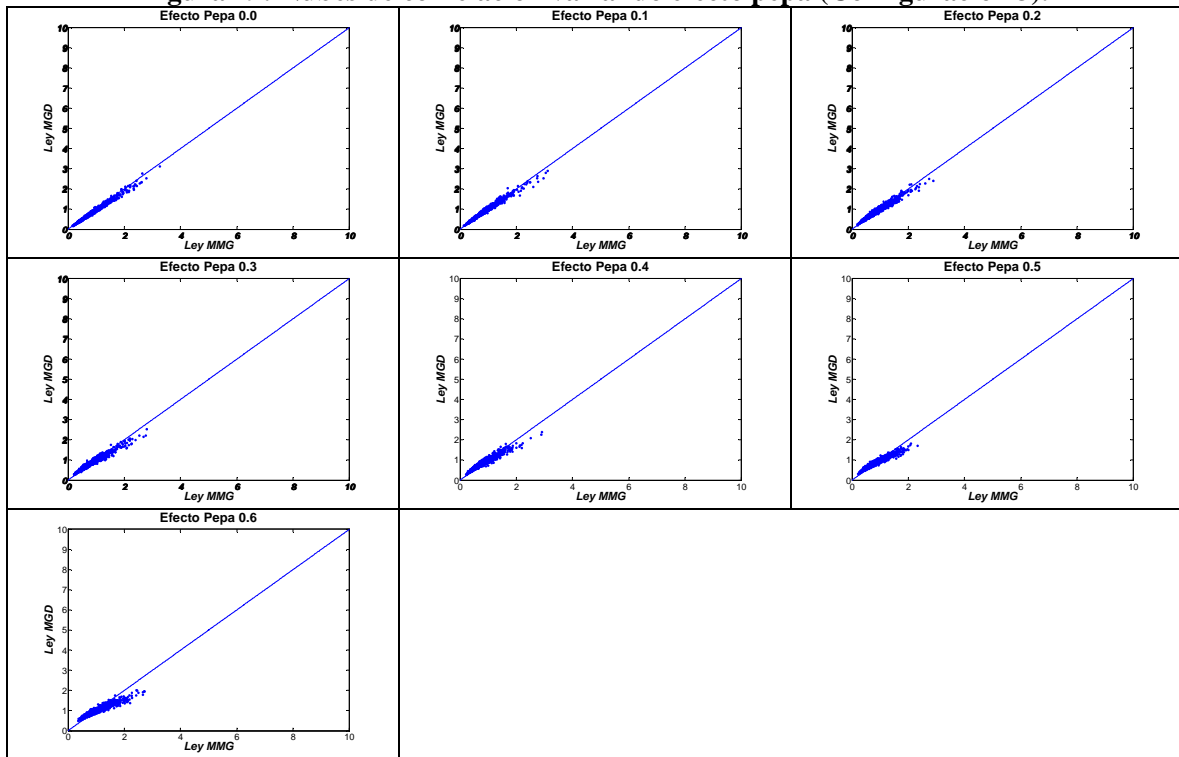


**Figura 78: Gráficos q-q plot variando desviación estándar logarítmica (Configuración 3).**

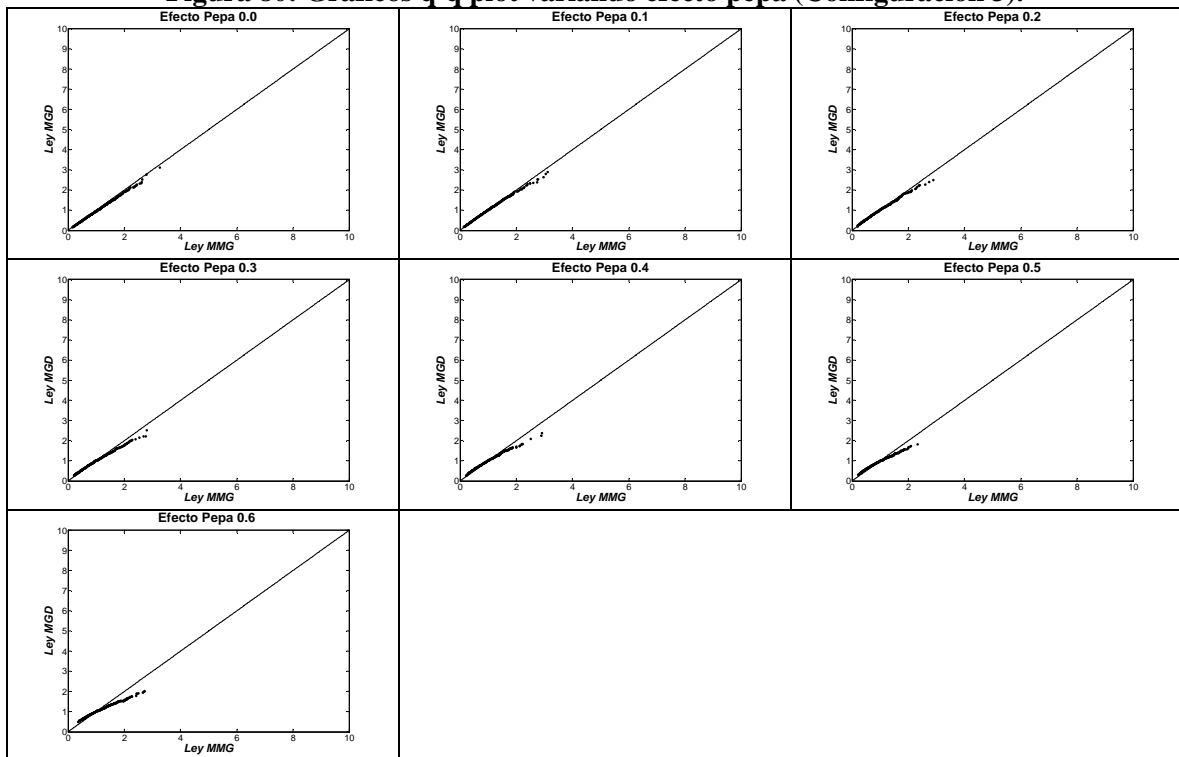


## EFEECTO PEPA

**Figura 79: Nubes de correlación variando efecto pepa (Configuración 3).**



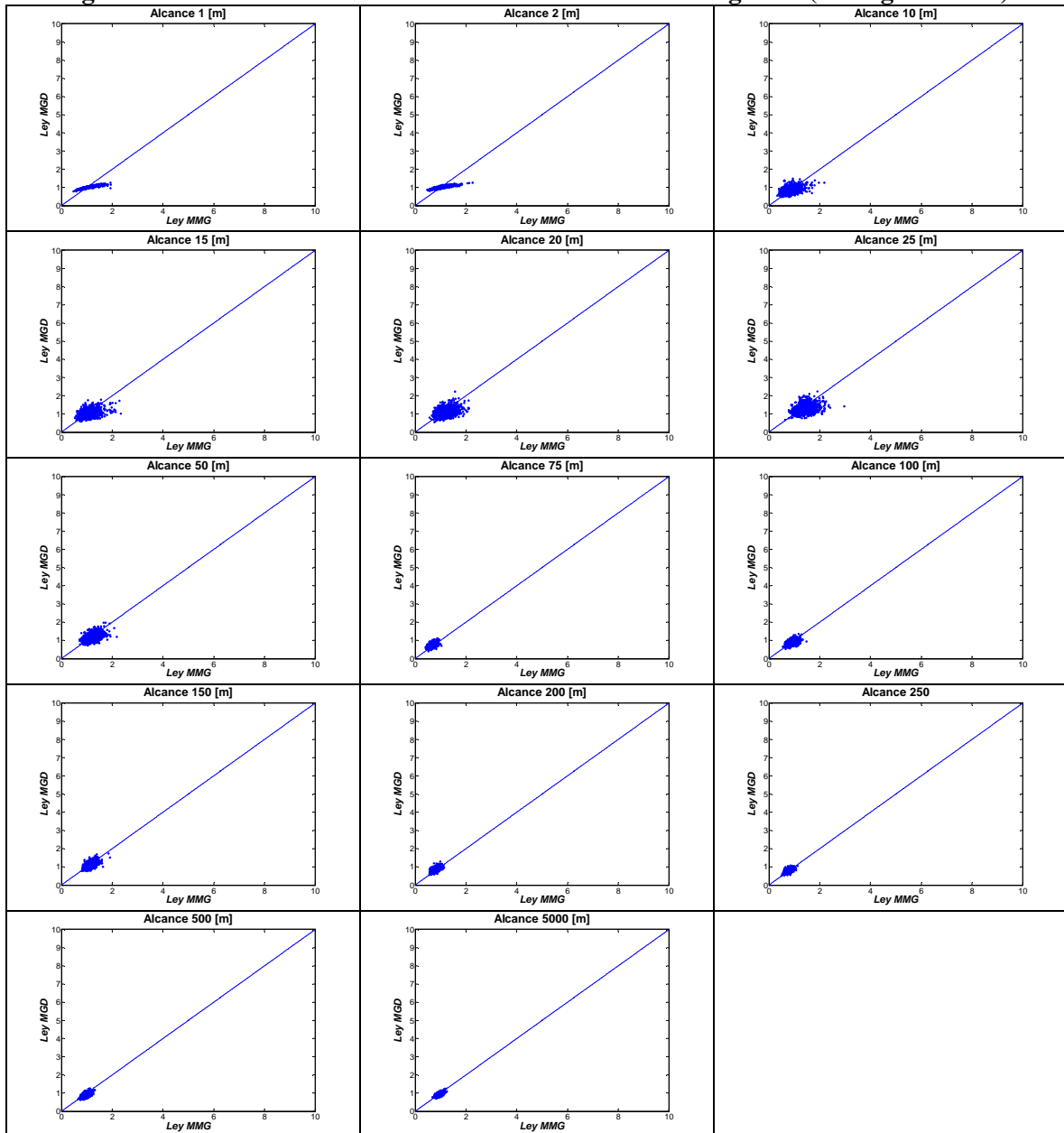
**Figura 80: Gráficos q-q plot variando efecto pepa (Configuración 3).**



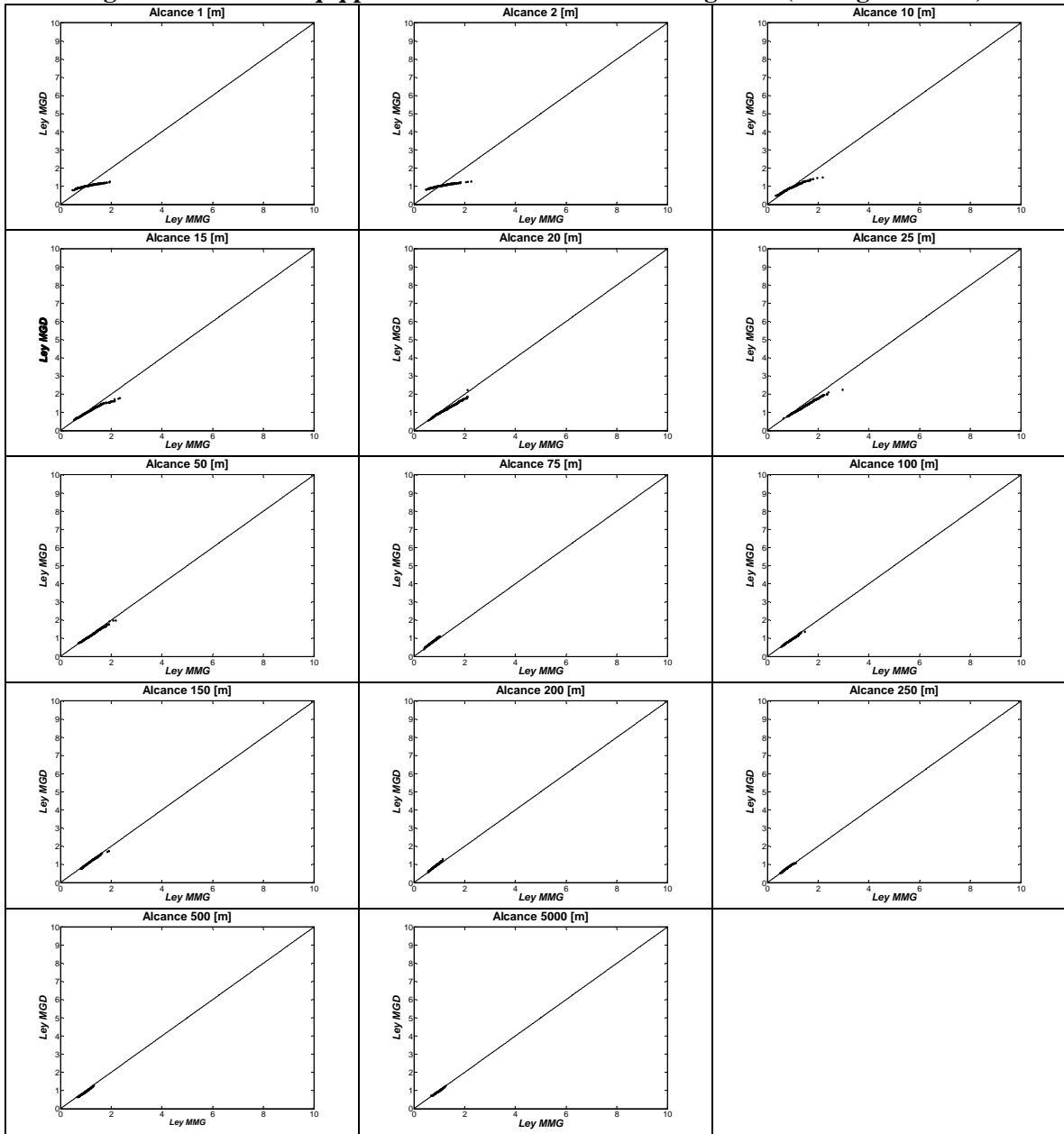
## B4. Configuración 4: Sondaje cruzando al bloque (15 datos).

### ALCANCE DE VARIOGRAMA

Figura 81: Nubes de correlación variando alcances de variograma (Configuración 4).

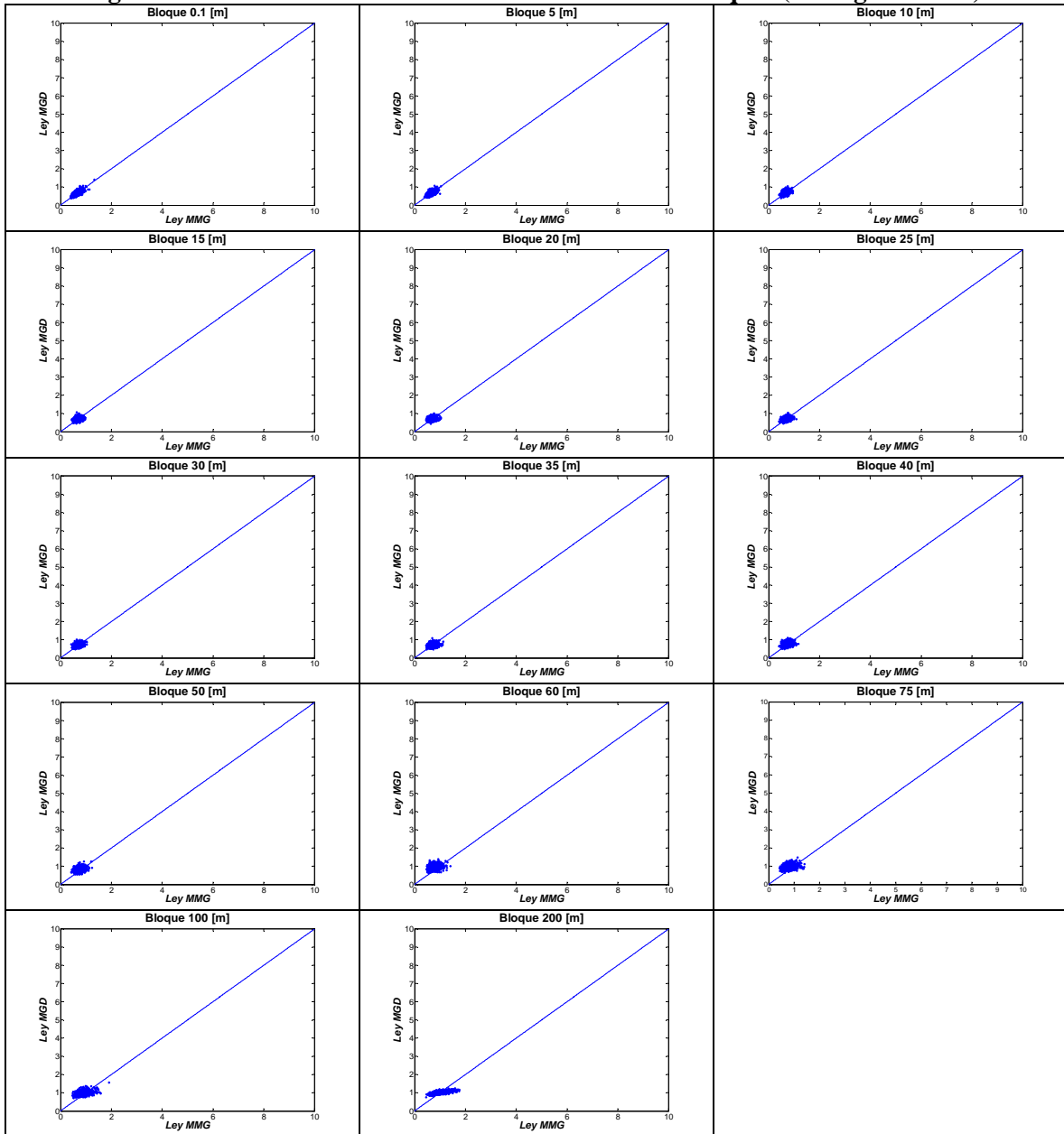


**Figura 82: Gráficos q-q plot variando alcances de variograma (Configuración 4).**

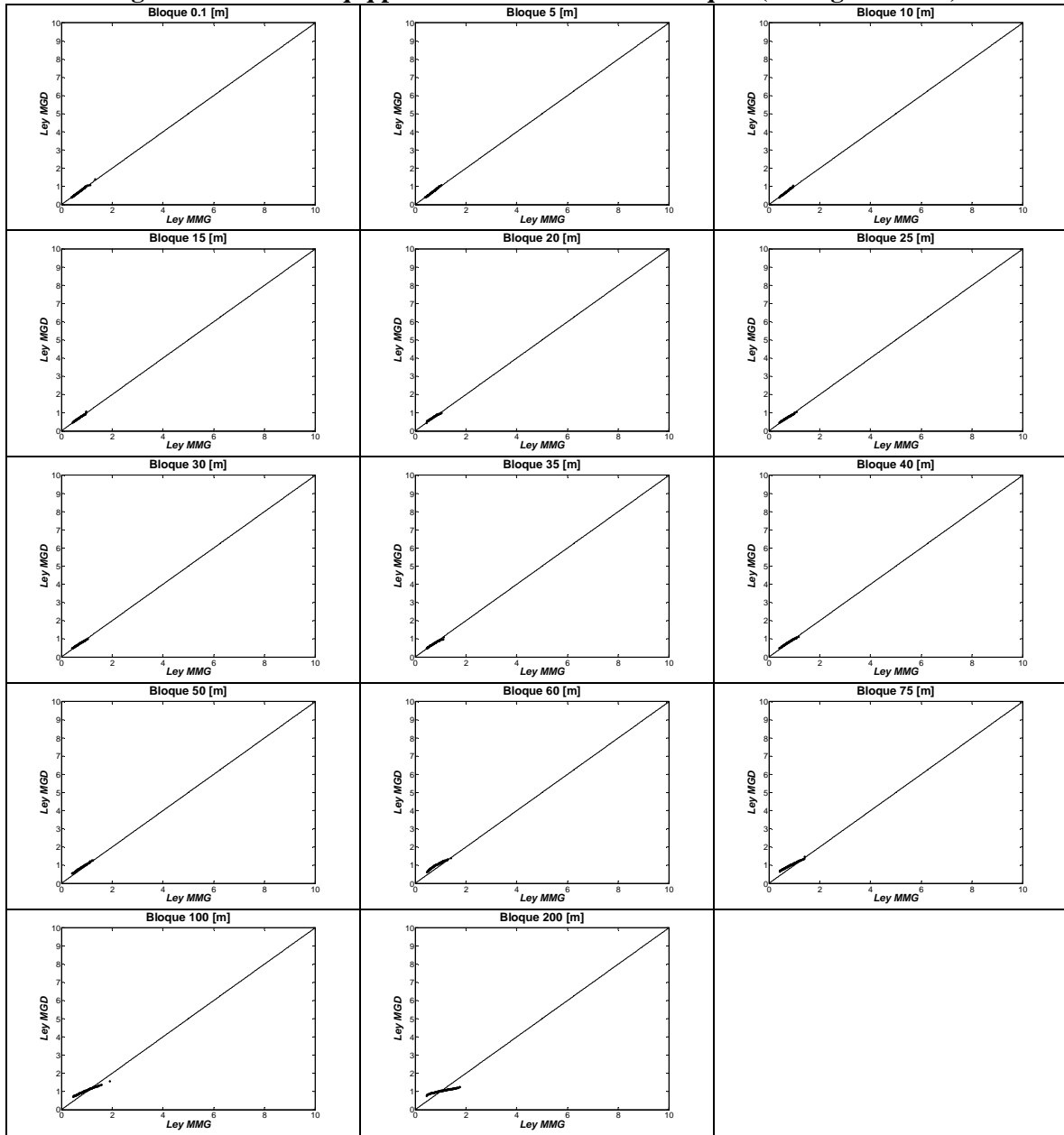


## TAMAÑO DE BLOQUES

Figura 83: Nubes de correlación variando tamaño de bloques (Configuración 4).



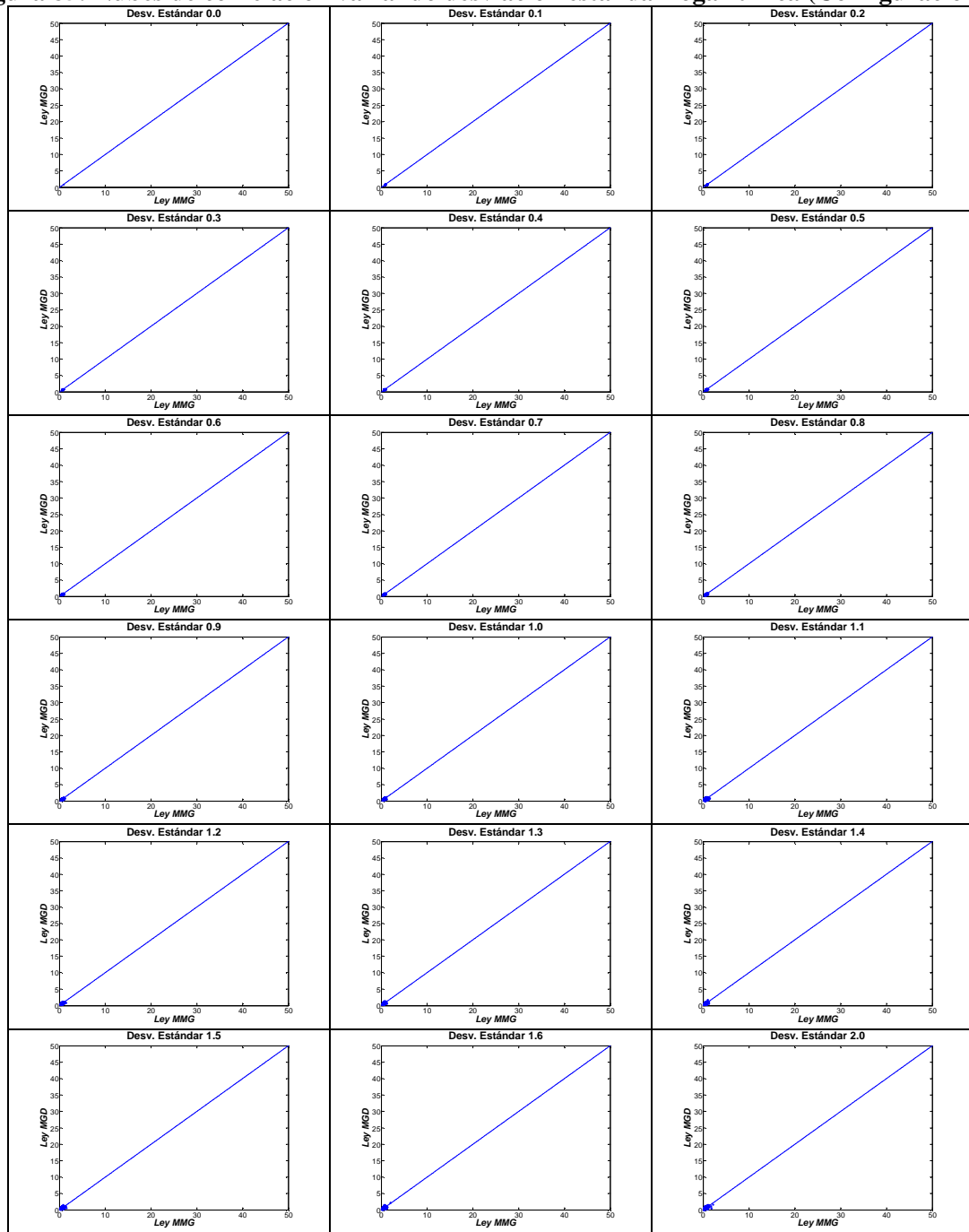
**Figura 84: Gráficos q-q plot variando tamaño de bloques (Configuración 4).**



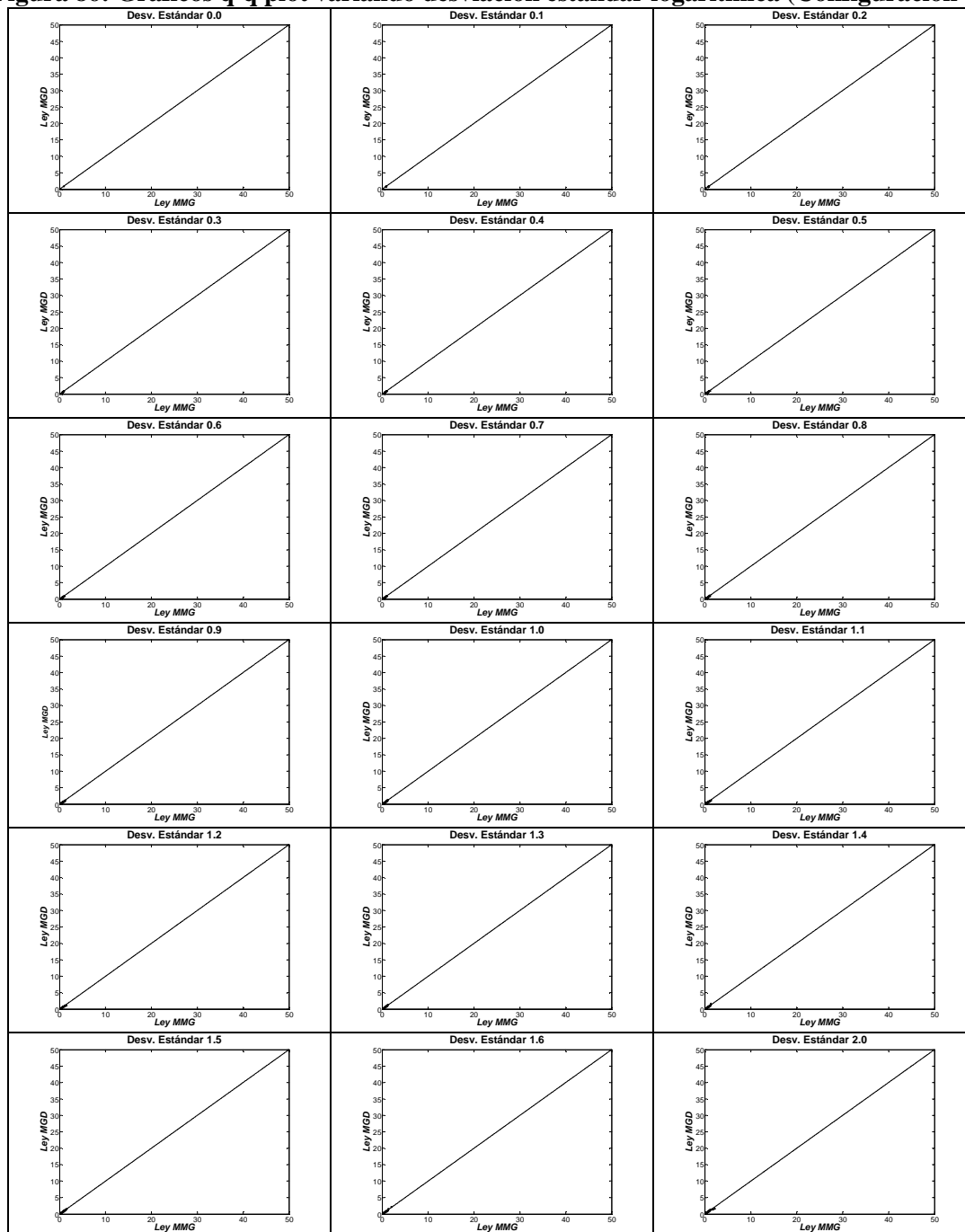


## DESVIACIÓN ESTÁNDAR LOGARITMICA

**Figura 85: Nubes de correlación variando desviación estándar logarítmica (Configuración 4).**

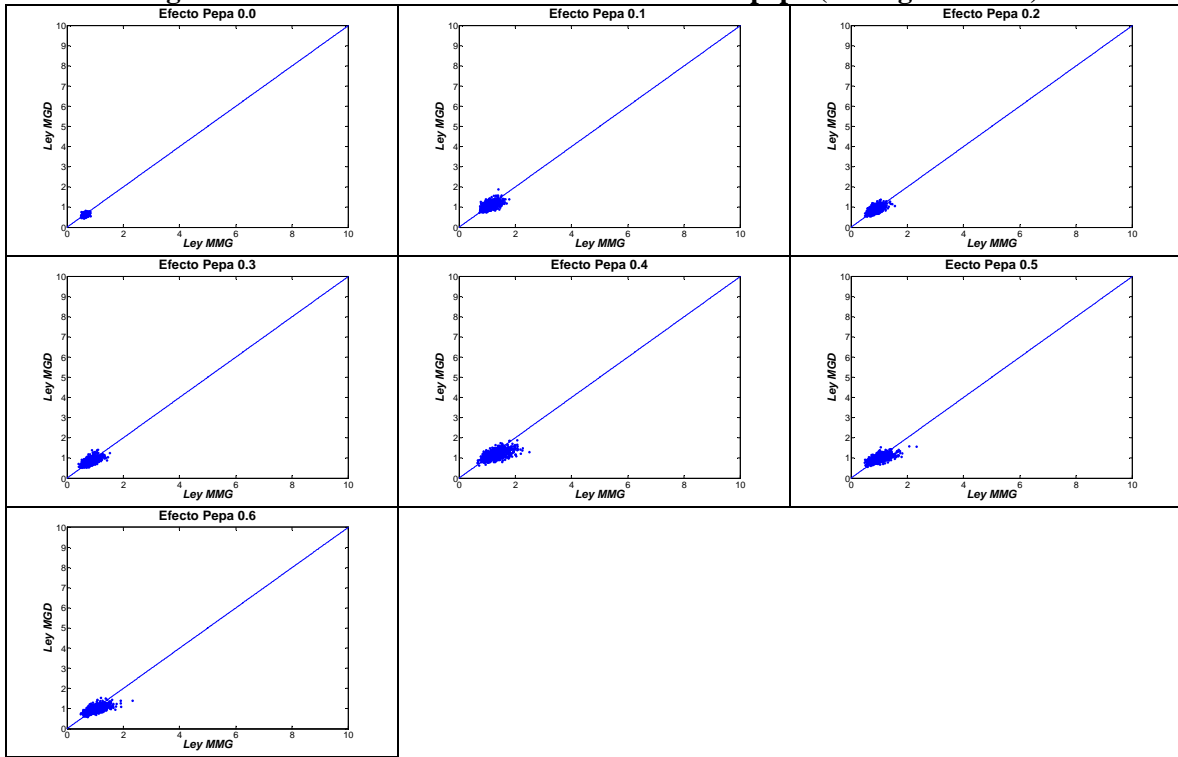


**Figura 86: Gráficos q-q plot variando desviación estándar logarítmica (Configuración 4).**

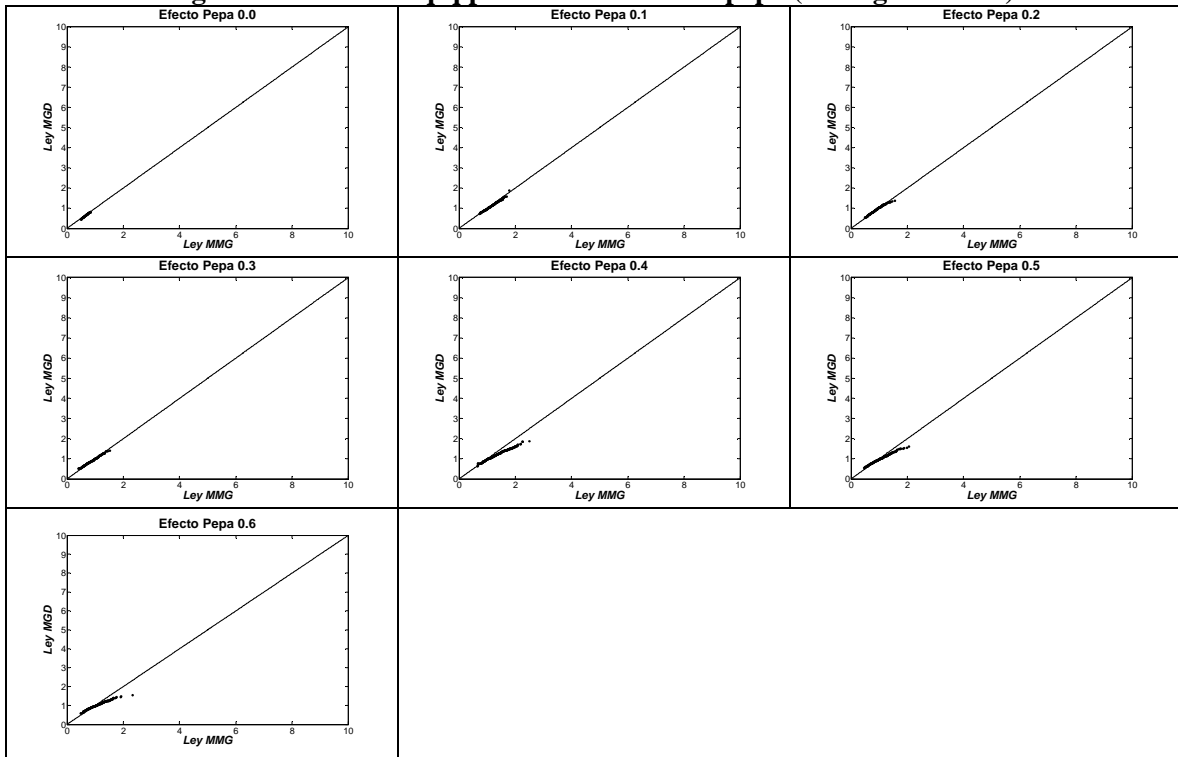


## EFEECTO PEPA

**Figura 87: Nubes de correlación variando efecto pepa (Configuración 4).**



**Figura 88: Gráficos q-q plot variando efecto pepa (Configuración 4).**



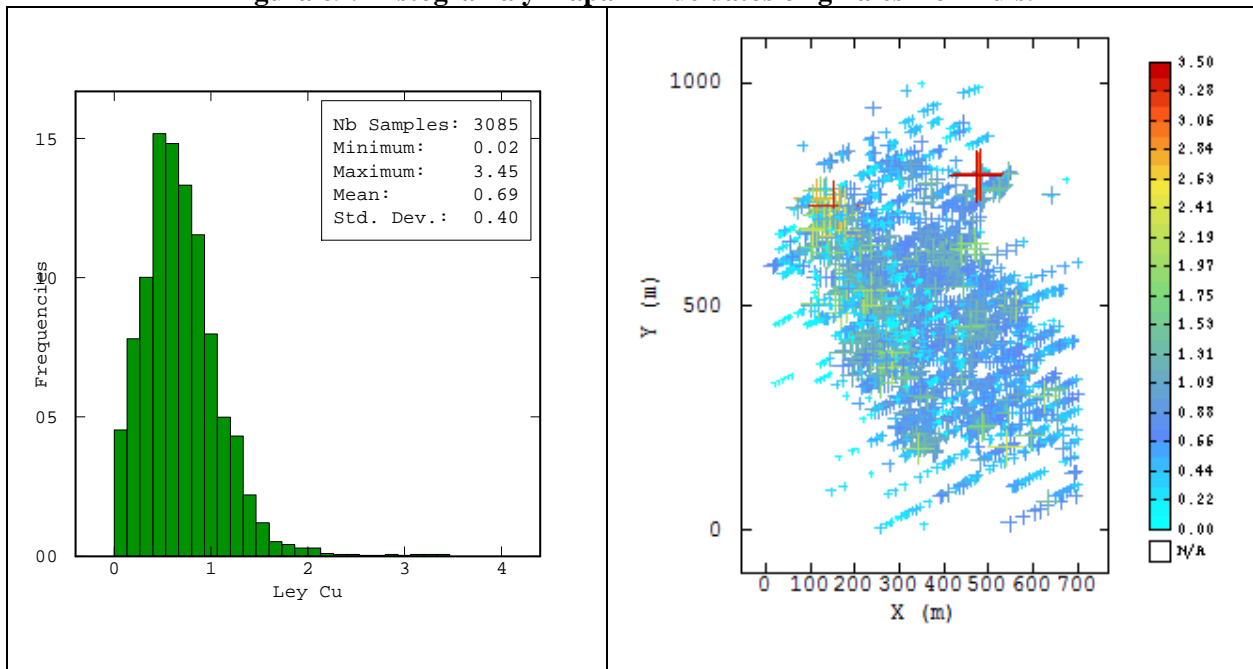
## ANEXO C: “Trabajo previo Don Luis”.

### Estudio Exploratorio de datos originales.

**Tabla 18: Estadísticas básicas de datos originales Don Luis.**

N° datos	Mínimo [% Cu]	Máximo [% Cu]	Media [% Cu]	Varianza [% Cu] <sup>2</sup>
3085	0.020	3.450	0.693	0.158

**Figura 89: Histograma y mapa XY de datos originales Don Luis.**



No se observa datos atípicos u otros problemas. El histograma de las leyes de cobre es levemente asimétrico, presentando una forma aproximadamente lognormal.

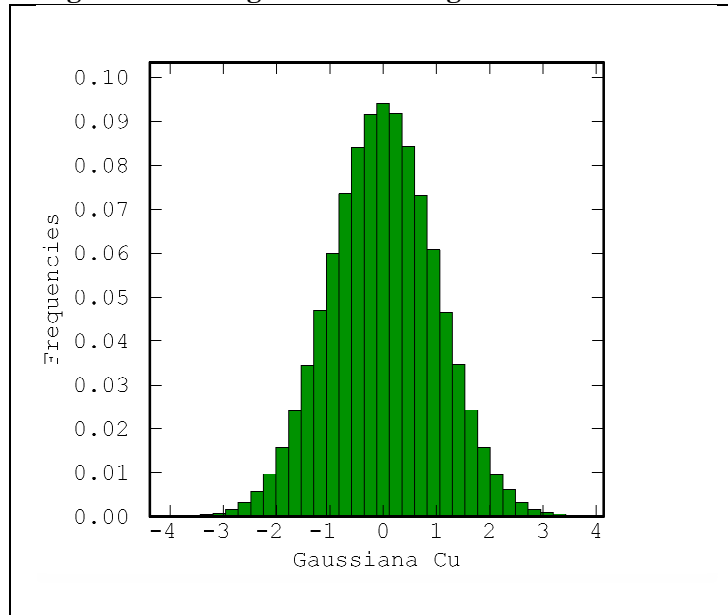
### Transformación de datos originales en gaussianos.

Primero se desarrolla el desagrupamiento de los datos, y posteriormente la transformación a datos gaussianos, obteniéndose los siguientes resultados:

**Tabla 19: Estadísticas básicas de datos gaussianos Don Luis.**

N° datos	Mínimo	Máximo	Media	Varianza	Media desagrupada	Varianza desagrupada
3085	-3.662	3.422	0.073	1.037	0.000	0.999

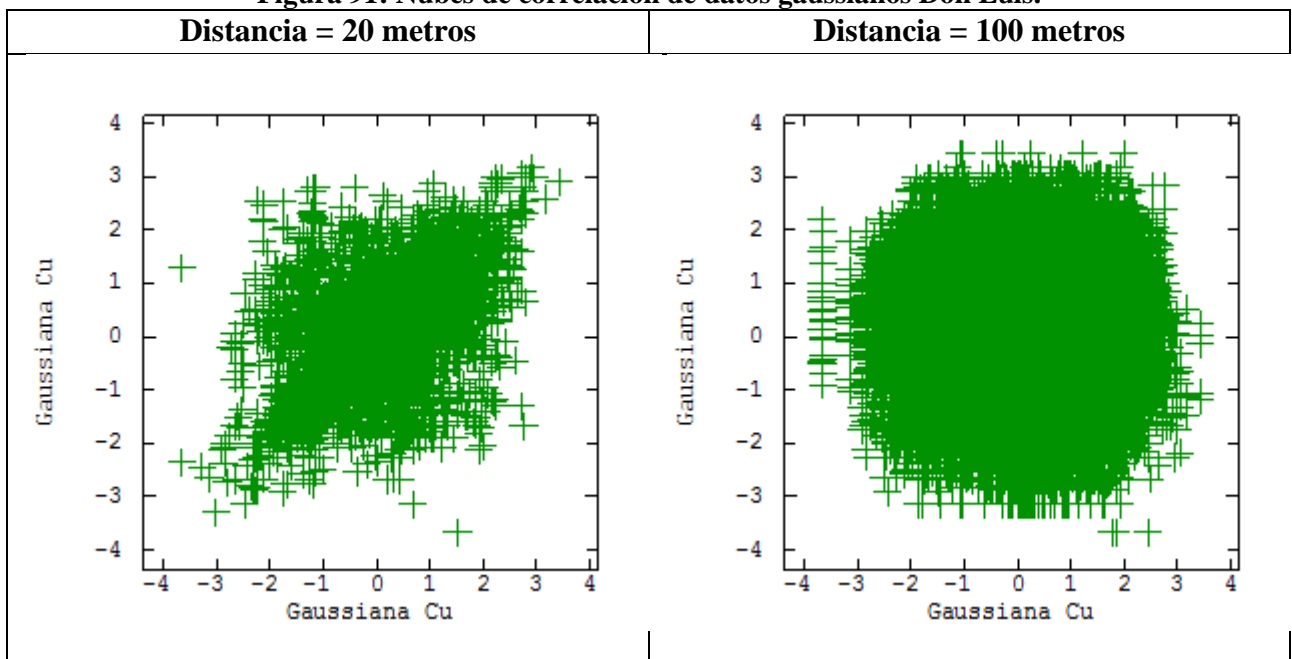
**Figura 90: Histograma de datos gaussianos Don Luis.**



**Verificación de hipótesis multigaussianas.**

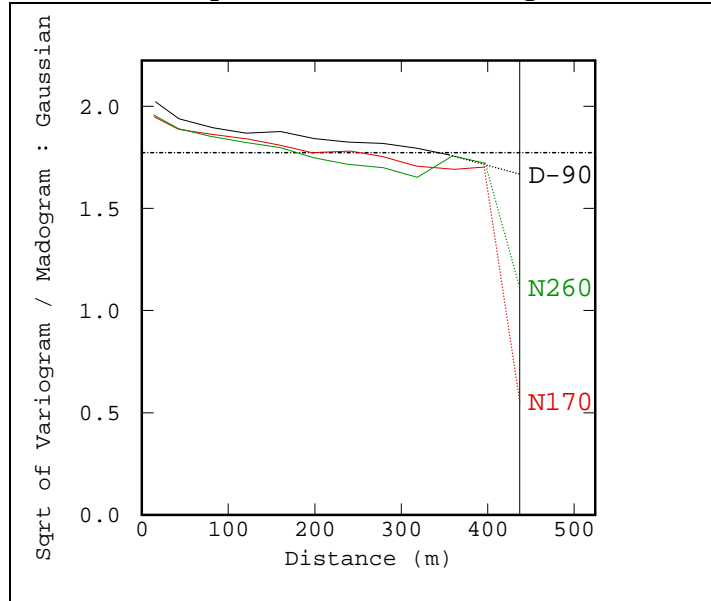
A continuación se presenta dos tests para verificar la hipótesis multigaussiana.

**Figura 91: Nubes de correlación de datos gaussianos Don Luis.**



Se observa algunos problemas con las nubes de correlación, en particular para una distancia de separación de 20 metros se observa una elipse un tanto deformada.

**Figura 92: Test de comparación de raíz de variograma v/s madograma.**



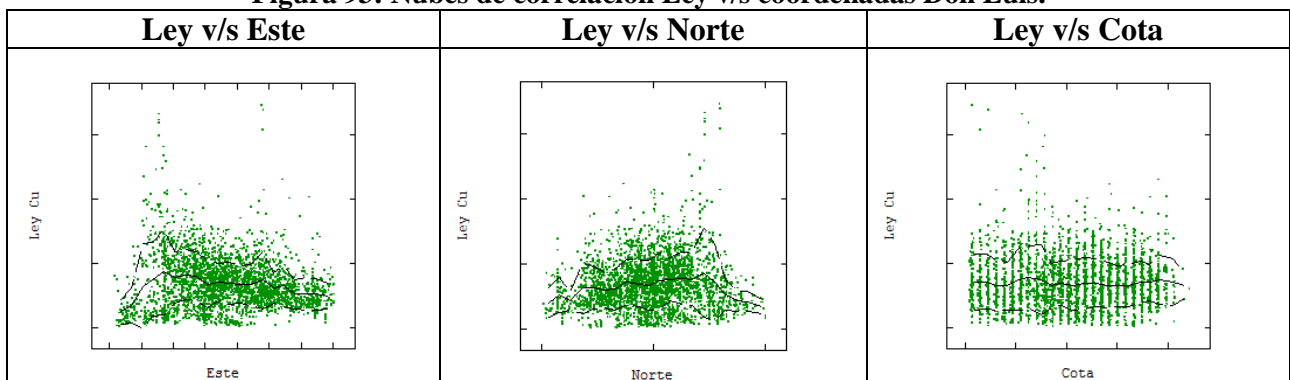
Se observa cierta inclinación de la curva en cada una de las direcciones.

Si bien se observa algunos problemas, se puede seguir trabajando mediante simulaciones multigaussianas.

**Estudio de hipótesis de estacionaridad.**

Para evaluar eventuales problemas de estacionaridad, a continuación se presenta nubes de correlación de la ley versus cada una de las coordenadas espaciales. Se agregan a los gráficos las curvas de esperanza condicional y las desviaciones estándar asociadas a esas curvas.

**Figura 93: Nubes de correlación Ley v/s coordenadas Don Luis.**



En los gráficos anteriores se observa que, si bien la media y la dispersión no son constantes en el espacio, las variaciones son lentas, de modo que no existen problemas mayores de estacionariedad en este sentido.

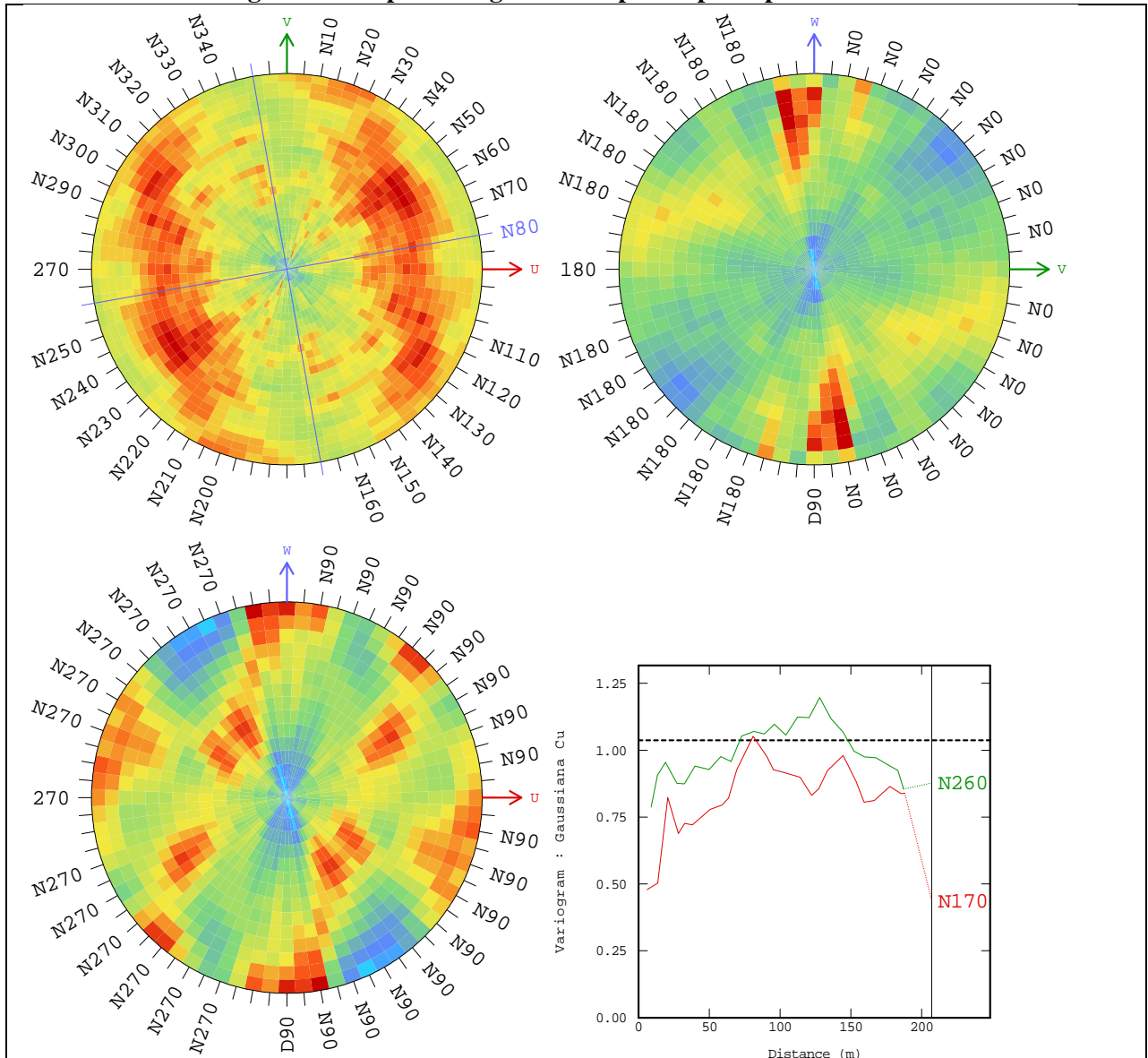
### **Mapas Variográficos.**

**Tabla 20: Parámetros de cálculo de mapas variográficos Don Luis.**

<b>Mapas variográficos</b>	<b>Horizontal</b>	<b>Vertical</b>
<b>N° pasos</b>	25	15
<b>Largo pasos [m]</b>	8	25
<b>Ancho banda [m]</b>	15	15

A continuación se presenta los mapas variográficos construidos.

**Figura 94: Mapas variográficos en planos principales Don Luis.**



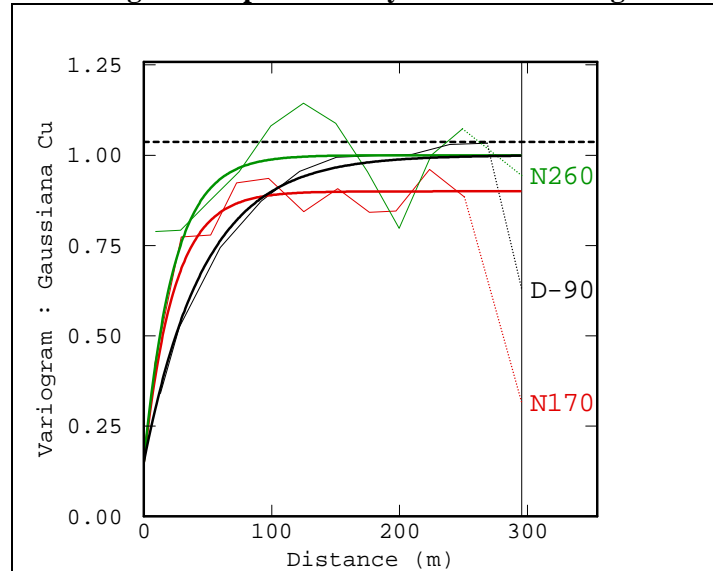
Se observa anisotropía en el plano horizontal:

- Dirección de menor variabilidad N170° (equivale a N10°W)
- Dirección de mayor variabilidad N260° (equivale a N80°E)



## Variograma experimental y modelado de los datos gaussianos.

Figura 95: Variograma experimental y modelo de variograma Don Luis.



Finalmente el modelo de variograma de los datos gaussianos puntuales, en términos de alcances prácticos (expresado en metros), es el siguiente<sup>5</sup>:

$$\gamma(h) = 0.15 + 0.75 \cdot \exp(70, 70, 140) + 0.10 \cdot \exp(\infty, 70, 140)$$

Y en términos de factores de escala<sup>6</sup> (en metros):

$$\gamma(h) = 0.15 + 0.75 \cdot \exp(23.3, 23.3, 46.7) + 0.10 \cdot \exp(\infty, 23.3, 46.7)$$

<sup>5</sup> Notación: modelo (Ay, Ax, Az)  $\Leftrightarrow$  modelo (Az170, Az 260, Dip90).

<sup>6</sup> Sea el factor de escala =  $a$   
Modelo exponencial  $\Rightarrow$  alcance práctico =  $3a$

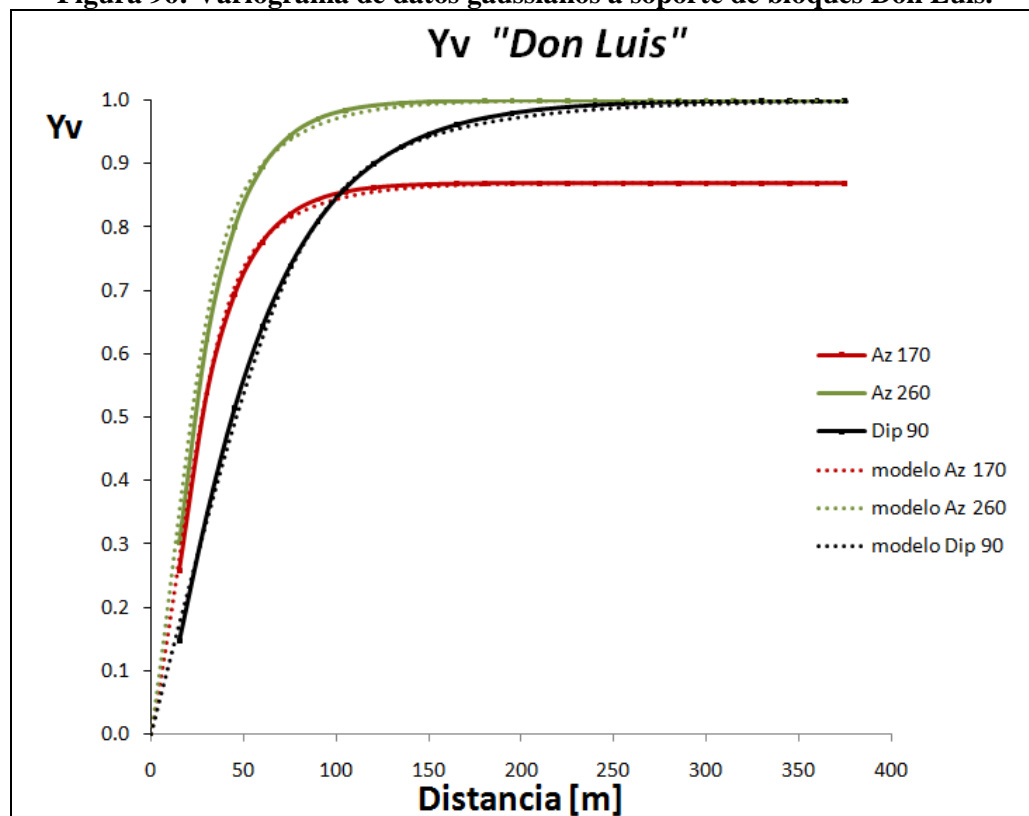
## Determinación del coeficiente de cambio de soporte y del variograma de datos a soporte de bloques.

Considerando el modelo de variograma ya presentado, además de la siguiente información:

- Bloques de tamaño 15x15x15 metros.
- Discretización de bloques de 5x5x1.

Se obtuvo el variograma experimental de datos a soporte de bloques, el cual posteriormente fue modelado. Los resultados se muestran a continuación:

**Figura 96: Variograma de datos gaussianos a soporte de bloques Don Luis.**



El modelo de variograma en términos de alcances prácticos (en metros) es:

$$\begin{aligned}\gamma(h) = & 0.00 + 0.35 \cdot \text{gau}(50, 45, 110) \\ & + 0.52 \cdot \text{exp}(100, 100, 200) \\ & + 0.13 \cdot \text{exp}(\infty, 80, 100)\end{aligned}$$

Y en términos de los factores de escala<sup>7</sup> (en metros):

$$\begin{aligned}\gamma(h) = & 0.00 + 0.35 \cdot \text{gau}(28.9, 26.0, 63.5) \\ & + 0.52 \cdot \text{exp}(33.3, 33.3, 66.7) \\ & + 0.13 \cdot \text{exp}(\infty, 26.7, 33.3)\end{aligned}$$

Además el coeficiente de cambio de soporte  $r$  es:

$$r = 0.7931$$

---

<sup>7</sup> Sea el factor de escala =  $a$

Modelo gaussiano => alcance práctico =  $a\sqrt{3}$

Modelo exponencial => alcance práctico =  $3a$

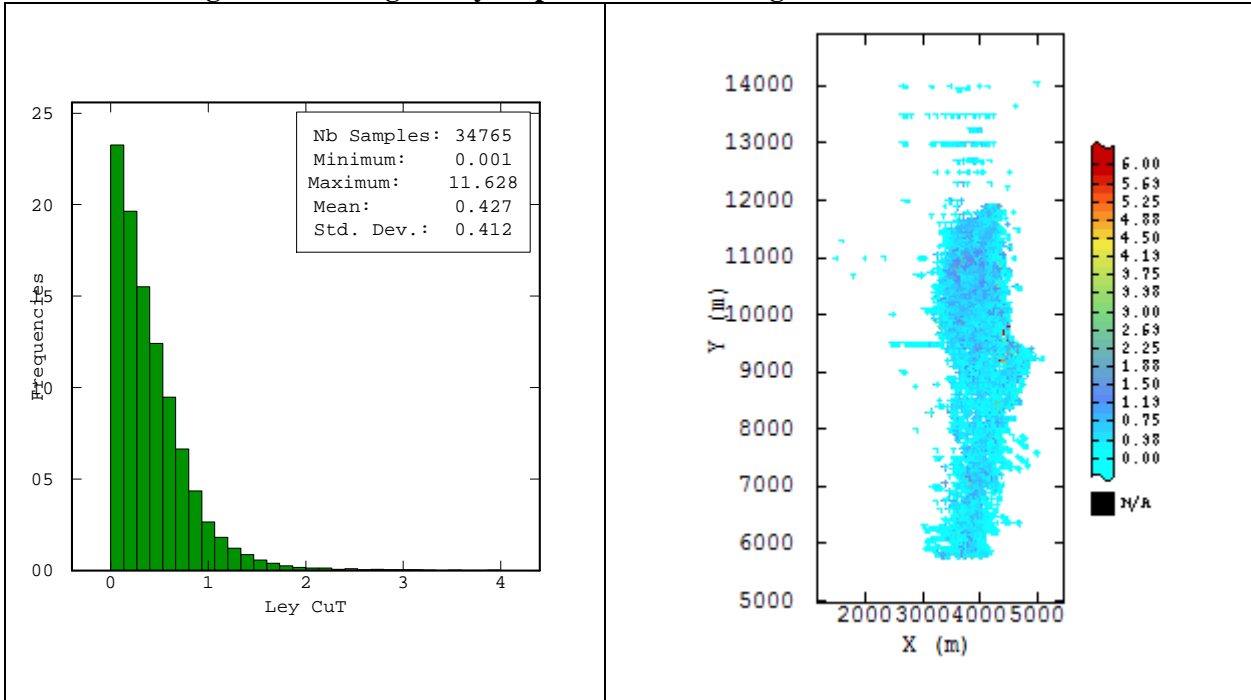
## ANEXO D: “Trabajo previo Radomiro Tomic”.

### Estudio Exploratorio de datos originales.

**Tabla 21: Estadísticas básicas de datos originales Radomiro Tomic.**

N° datos	Mínimo [% Cu]	Máximo [% Cu]	Media [% Cu]	Varianza [% Cu] <sup>2</sup>
34765	0.001	11.628	0.427	0.170

**Figura 97: Histograma y mapa XY de datos originales Radomiro Tomic**



Si bien la ley máxima es bastante alta, no se considera dato atípico. El histograma de las leyes de cobre presenta bastante asimetría, siendo incluso decreciente la frecuencia desde las primeras clases.

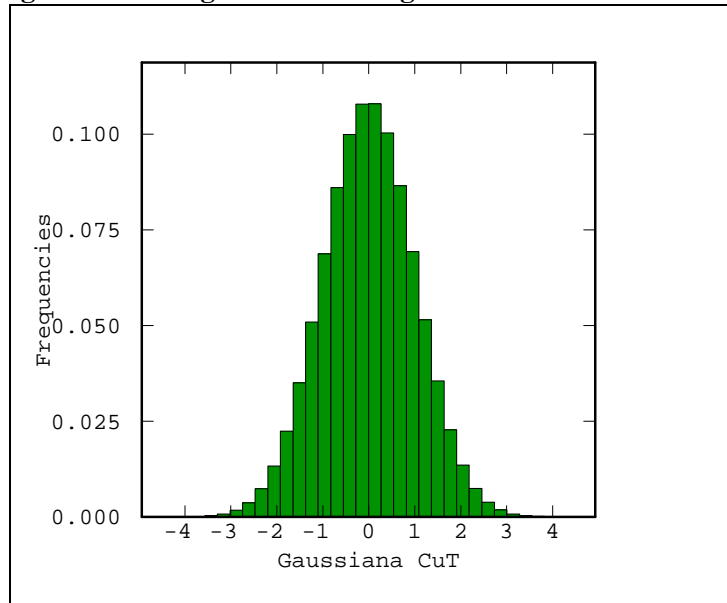
### Transformación de datos originales en gaussianos.

Primero se desarrolla el desagrupamiento de los datos, y posteriormente la transformación a datos gaussianos, obteniéndose los siguientes resultados:

**Tabla 22: Estadísticas básicas de datos gaussianos Radomiro Tomic.**

N° datos	Mínimo	Máximo	Media	Varianza	Media desagrupada	Varianza desagrupada
34765	-4.103	4.095	0.084	0.980	0.000	1.000

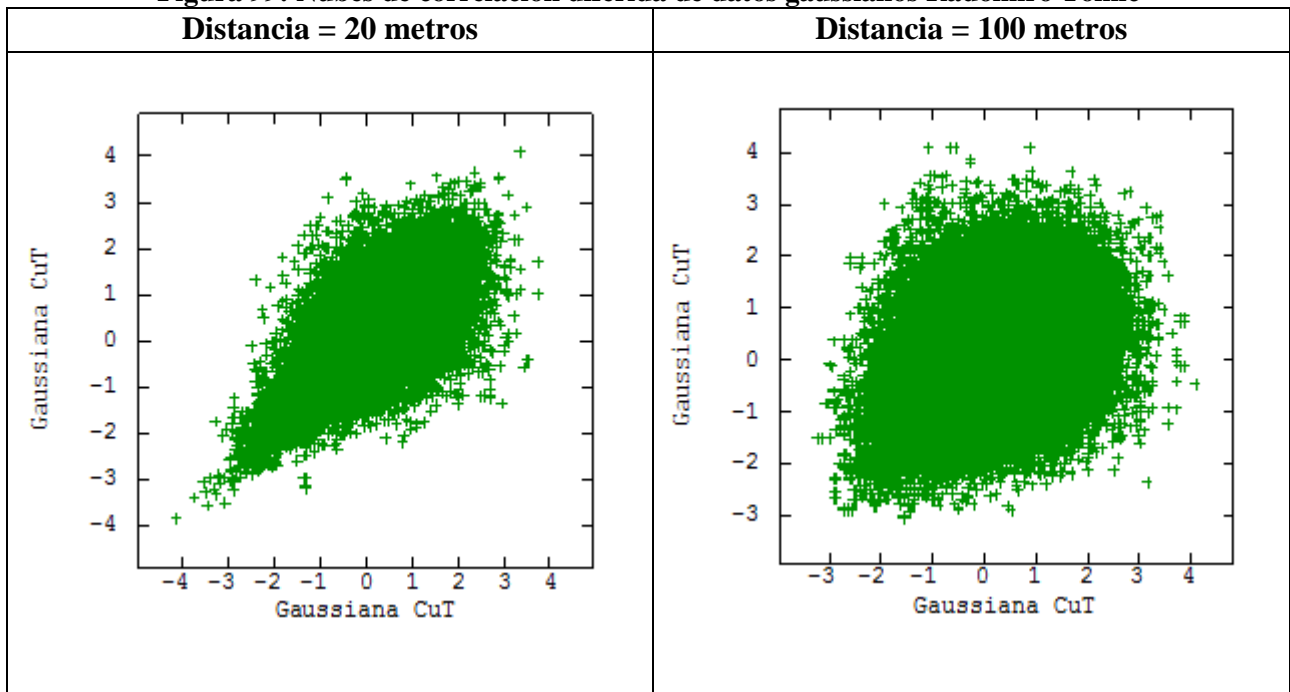
**Figura 98: Histograma de datos gaussianos Radomiro Tomic**



**Verificación de hipótesis multigaussianas.**

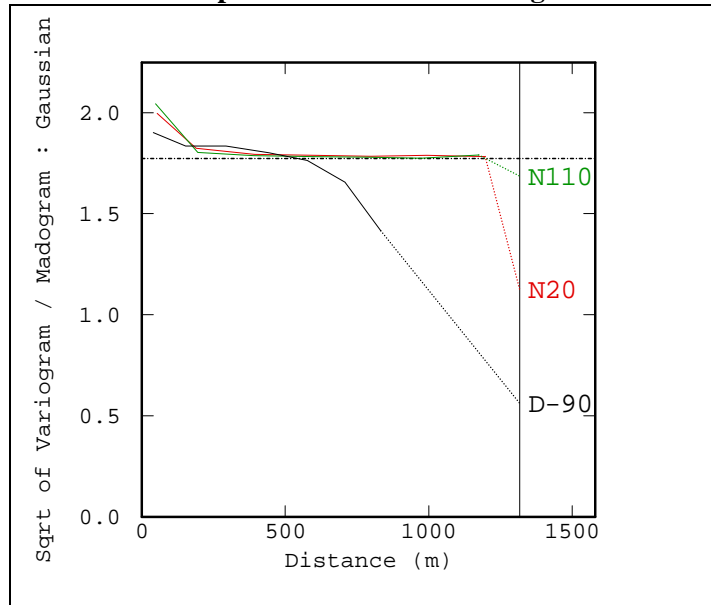
A continuación se presenta dos tests para verificar la hipótesis multigaussiana.

**Figura 99: Nubes de correlación diferida de datos gaussianos Radomiro Tomic**



Se observa nubes alejadas de la forma elipsoidal esperada, en particular para una distancia de separación de 20 metros se observa una nube con forma de lagrima.

**Figura 100: Test de comparación de raíz de variograma v/s madograma.**



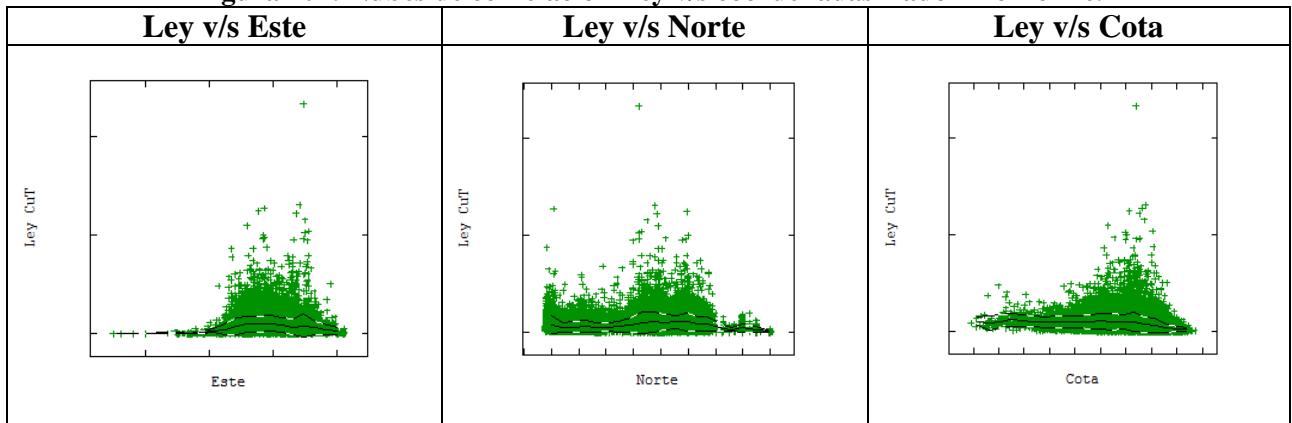
Se observa una discrepancia con lo esperado (curvas constantes e iguales a  $\sqrt{\pi}$ ) a distancias menores.

Si bien se observa algunos problemas, se puede seguir trabajando mediante simulaciones multigaussianas.

**Estudio de hipótesis de estacionaridad.**

Para evaluar eventuales observan problemas de estacionaridad, a continuación se presenta nubes de correlación de la ley versus cada una de las coordenadas espaciales. Se agregan a los gráficos las curvas de esperanza condicional y las desviaciones estándar asociadas a esas curvas.

**Figura 101: Nubes de correlación Ley v/s coordenadas Radomiro Tomic.**



En los gráficos anteriores se observa que la media y la dispersión varían lentamente en el espacio, por lo que no existen problemas mayores en la hipótesis de estacionaridad.

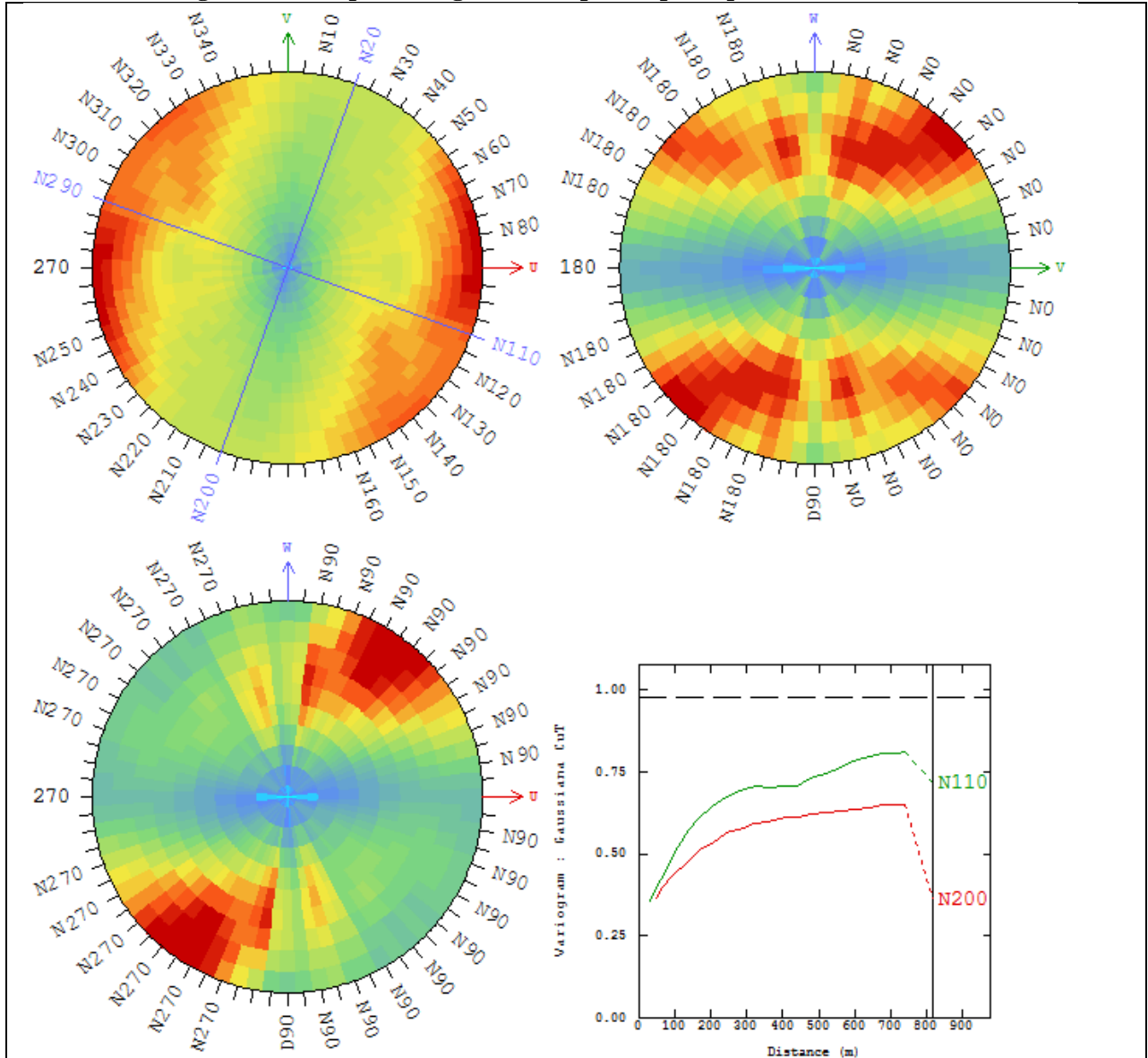
### **Mapas Variográficos.**

**Tabla 23: Parámetros de cálculo de mapas variográficos Radomiro Tomic.**

<b>Mapas variográficos</b>	<b>Horizontal</b>	<b>Vertical</b>
<b>N° pasos</b>	20	10
<b>Largo pasos [m]</b>	40	40
<b>Ancho banda [m]</b>	15	15

A continuación se presenta los mapas variográficos construidos.

**Figura 102: Mapas variográficos en planos principales Radomiro Tomic.**



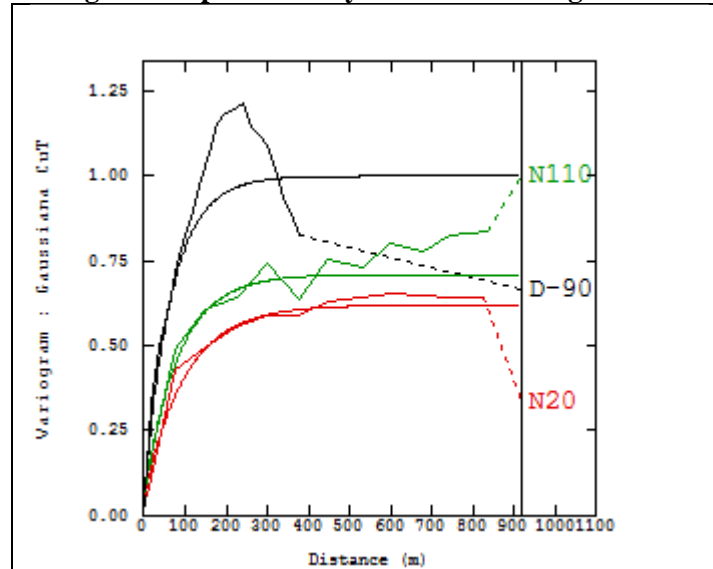
Se observa anisotropía en el plano horizontal:

- Dirección de menor variabilidad N200° (equivale a N20°E)
- Dirección de mayor variabilidad N110° (equivale a N110°E)



**Variograma experimental y modelado de los datos gaussianos.**

**Figura 103: Variograma experimental y modelo de variograma Radomiro Tomic.**



Finalmente el modelo de variograma de los datos gaussianos puntuales, en términos de alcances prácticos (en metros), es el siguiente<sup>8</sup>:

$$\begin{aligned} \gamma(h) = & 0.05 + 0.57 \cdot \exp(300, 250, 200) \\ & + 0.09 \cdot \exp(\infty, 250, 200) \\ & + 0.29 \cdot \exp(\infty, \infty, 200) \end{aligned}$$

Y en términos de factores de escala (en metros):

$$\begin{aligned} \gamma(h) = & 0.05 + 0.57 \cdot \exp(100, 83.3, 66.7) \\ & + 0.09 \cdot \exp(\infty, 83.3, 66.7) \\ & + 0.29 \cdot \exp(\infty, \infty, 66.7) \end{aligned}$$

<sup>8</sup> Notación: modelo (Ay, Ax, Az) ⇔ modelo (Az20, Az 110, Dip90).

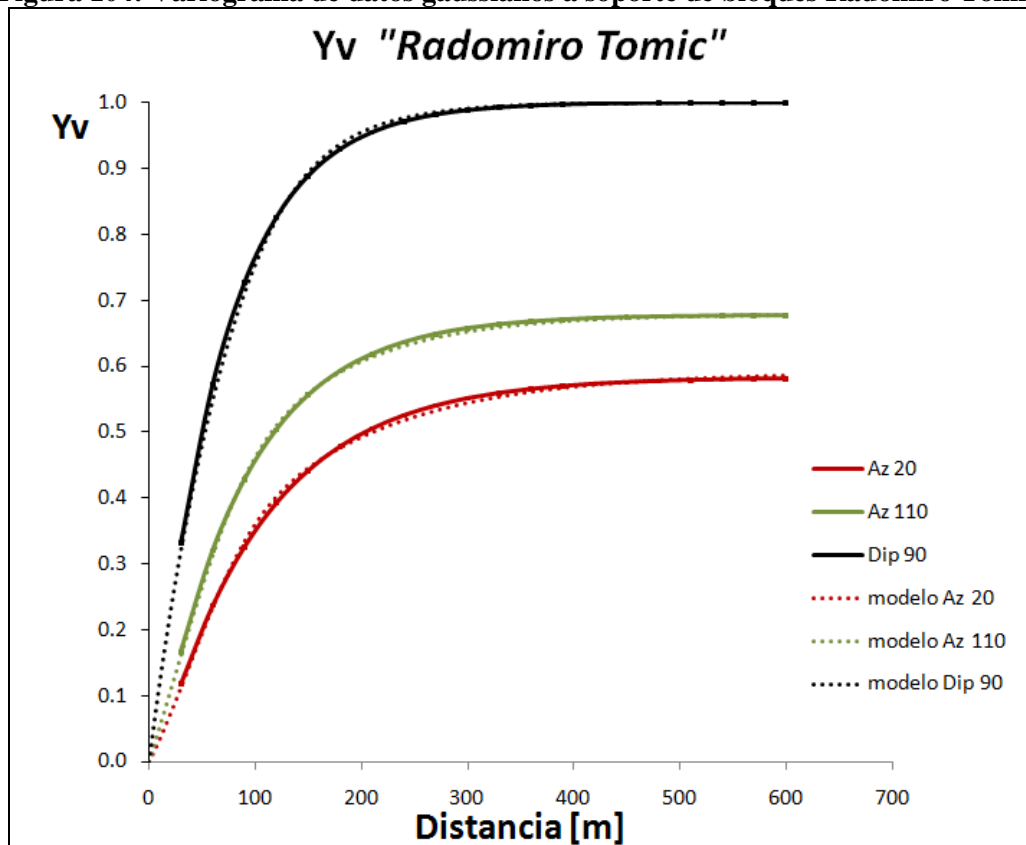
## Determinación del coeficiente de cambio de soporte y del variograma de datos a soporte de bloques.

Considerando el modelo de variograma ya presentado, además de la siguiente información:

- Bloques de tamaño 15x15x15 metros.
- Discretización de bloques de 5x5x1.

Se obtuvo el variograma experimental de datos a soporte de bloques, el cual posteriormente fue modelado. Los resultados se muestran a continuación:

**Figura 104: Variograma de datos gaussianos a soporte de bloques Radomiro Tomic.**



El modelo de variograma en términos de alcances prácticos (en metros) es:

$$\begin{aligned}\gamma(h) = & 0.00 + 0.15 \cdot \text{gau}(125,125,175) \\ & + 0.44 \cdot \text{exp}(400,300,200) \\ & + 0.09 \cdot \text{exp}(\infty,300,200) \\ & + 0.09 \cdot \text{exp}(\infty, \infty, 200)\end{aligned}$$

Y en términos de los factores de escala (en metros):

$$\begin{aligned}\gamma(h) = & 0.00 + 0.15 \cdot \text{gau}(72.2, 72.2, 101.0) \\ & + 0.44 \cdot \text{exp}(133.3, 100.0, 66.7) \\ & + 0.09 \cdot \text{exp}(\infty, 100.0, 66.7) \\ & + 0.09 \cdot \text{exp}(\infty, \infty, 66.7)\end{aligned}$$

Además el coeficiente de cambio de soporte  $r$  es:

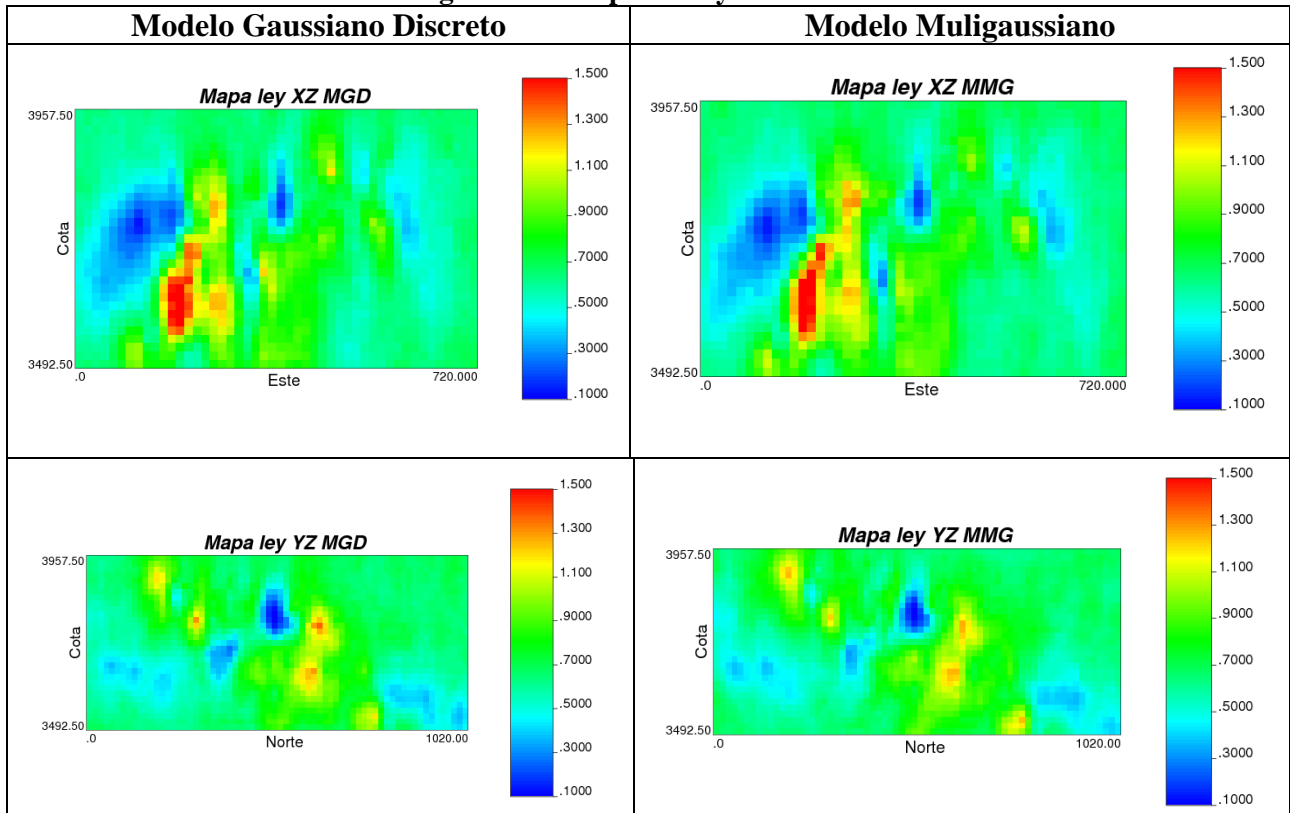
$$r = 0.9483$$

## ANEXO E: “Mapas y vistas 2D de bases de datos”.

A continuación se presenta mapas en secciones verticales para complementar los mapas horizontales expuestos en el capítulo de resultados.

### Mapas de ley Don Luis.

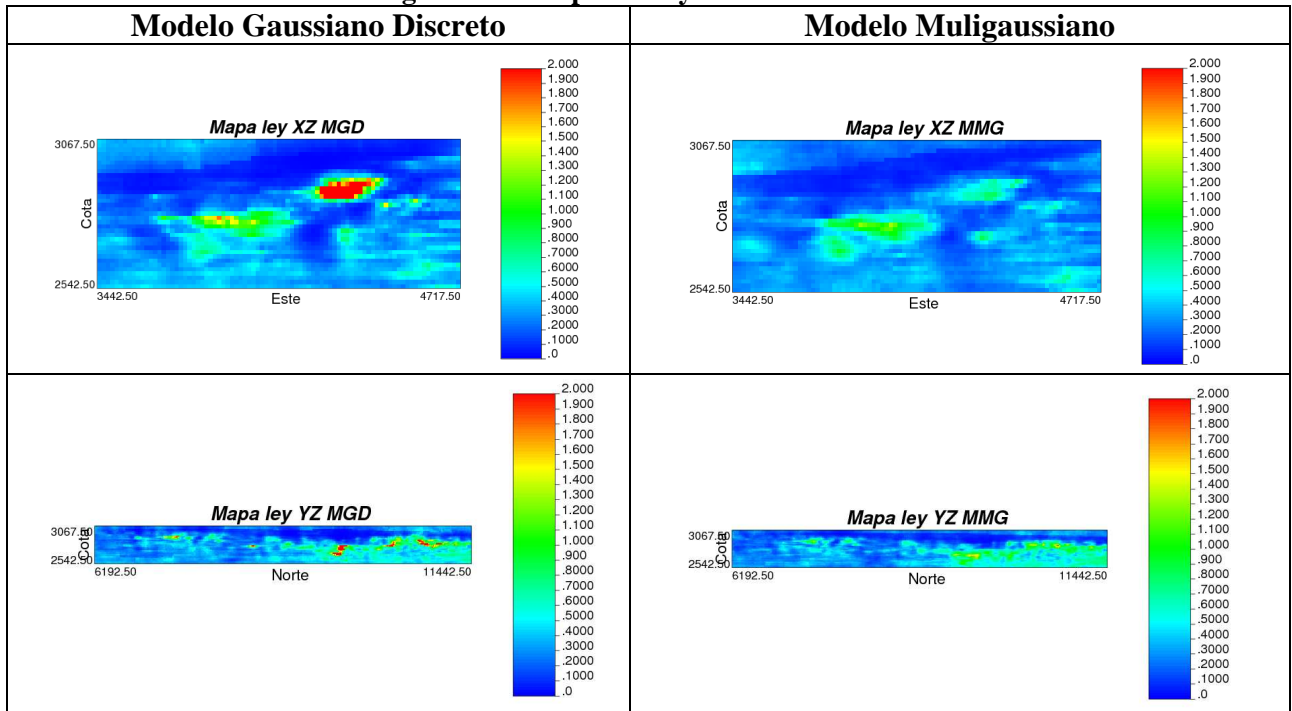
Figura 105: Mapas de leyes Don Luis.



En ambas cosas se confirma la gran similitud observada en los resultados entregados con cada modelo.

**Mapas de ley Radomiro Tomic.**

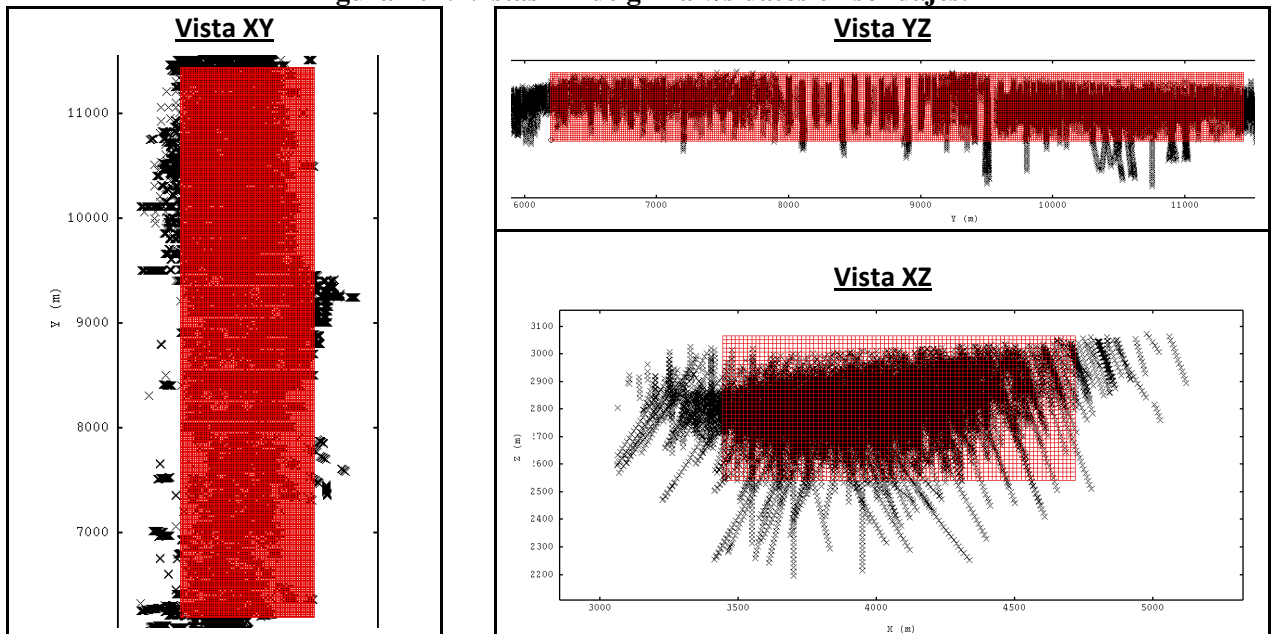
**Figura 106: Mapas de ley Radomiro Tomic.**



Se observa que el modelo gaussiano discreto tiende a presentar mayores leyes en zonas de altas leyes.

**Grilla de bloques v/s datos en sondajes Radomiro Tomic.**

**Figura 107: Vistas 2D de grilla v/s datos en sondajes.**

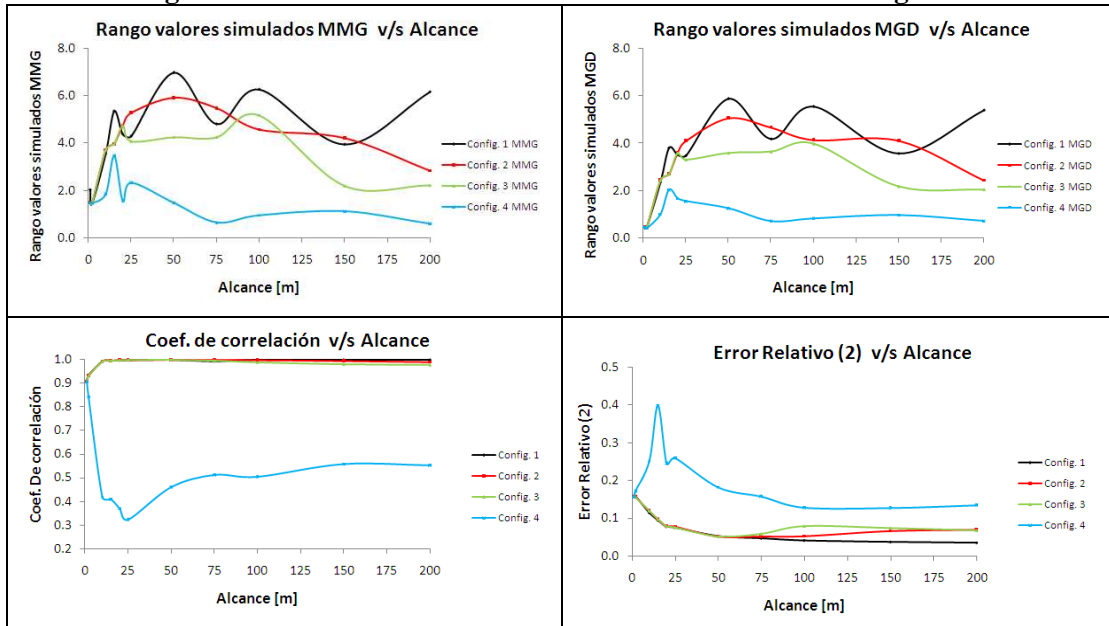


## ANEXO F: “Gráficos resumen de estudio conceptual”.

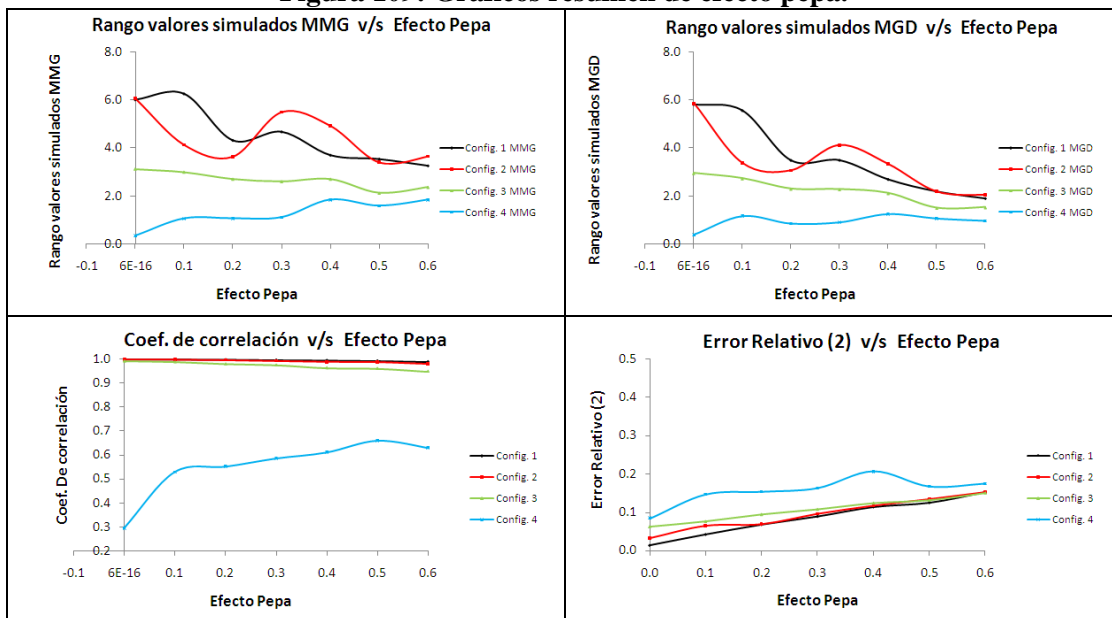
A continuación se presenta gráficos que resumen los rangos de valores simulados con ambos modelos, y el coeficiente de correlación en cada caso. Además se presenta otra forma de expresar el error relativo:

$$error\ relativo\ (2) = \sqrt{promedio \left[ \left( \frac{Z_{MGD} - Z_{MMG}}{Z_{MMG}} \right)^2 \right]}$$

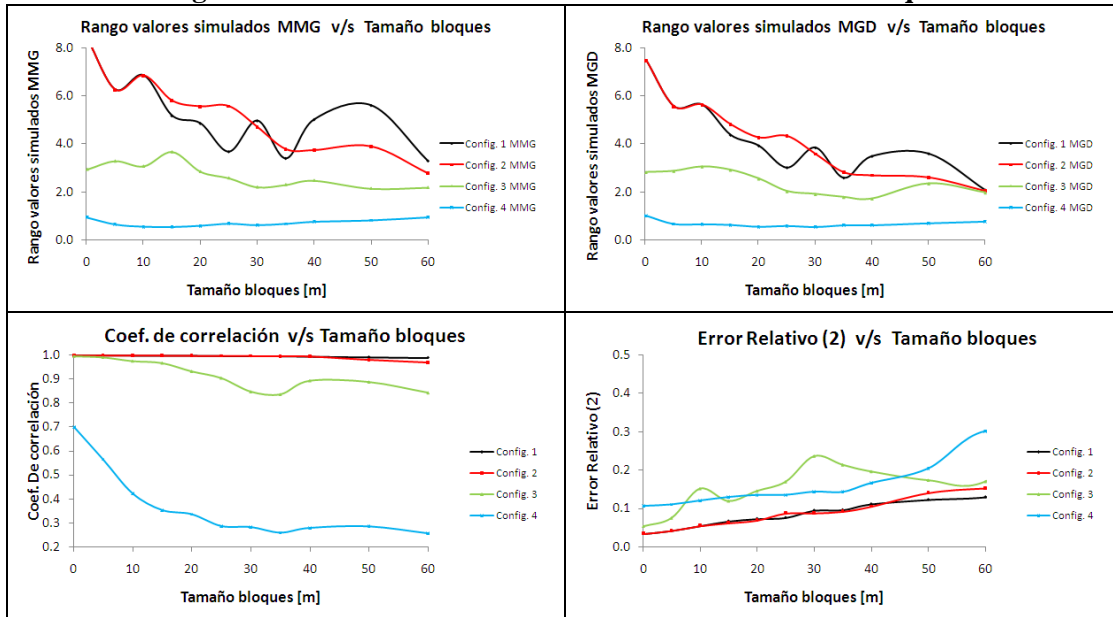
**Figura 108: Gráficos resumen de estudio de alcance de variograma.**



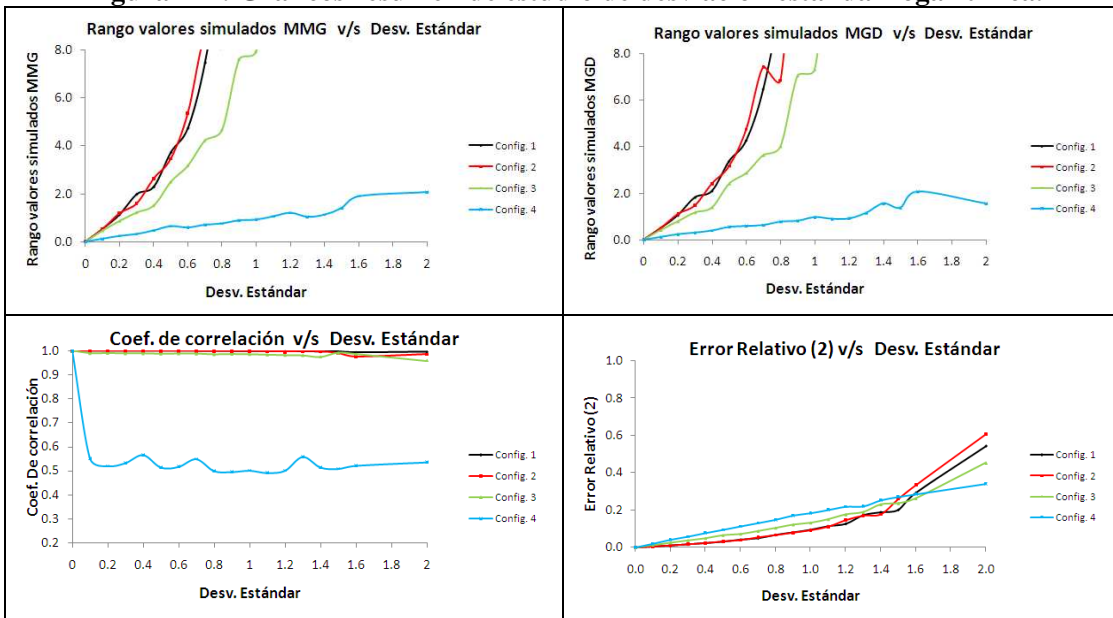
**Figura 109: Gráficos resumen de efecto pepa.**



**Figura 110: Gráficos resumen de estudio de tamaño de bloques.**



**Figura 111: Gráficos resumen de estudio de desviación estándar logarítmica.**



De estos gráficos se desprende que los rangos de valores simulados con la configuración 4 son mucho menores que el resto de las configuraciones, al igual que la correlación espacial. Por otra parte, el error relativo (2) muestra tendencias similares al error relativo presentado en el estudio conceptual.