



**UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA CIVIL**

MODELACION NUMERICA DE FLUJO GRAVITACIONAL

MEMORIA PARA OPTAR AL TITULO DE INGENIERO CIVIL

FRANCISCO JAVIER FERNÁNDEZ URRUTIA

**PROFESOR GUÍA:
ALDO TAMBURRINO TAVANTZIS**

**MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
RAÚL CASTRO RUIZ
YARKO NIÑO CAMPOS**

**SANTIAGO DE CHILE
ABRIL 2009**

RESUMEN DE LA MEMORIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL
POR: FRANCISCO FERNANDEZ U.
PROF. GUÍA: ALDO TAMBURRINO T.

“MODELACIÓN NUMÉRICA DE FLUJO GRAVITACIONAL”

En este trabajo de título se estudia la validez del modelo cinemático para el problema de flujo gravitacional de partículas granulares no cohesivas. El flujo gravitacional es el mecanismo por el cual la roca fragmentada se moviliza en la minería por hundimiento (subterránea).

El modelo cinemático es un modelo fenomenológico que queda definido por una ecuación de difusión de la velocidad vertical de las partículas, siendo el coeficiente de difusión el parámetro a calibrar a partir de datos experimentales.

La solución analítica de este modelo ha sido utilizada de manera exitosa en otros estudios, lográndose obtener buenas concordancias con datos experimentales de modelos físicos. La solución analítica utiliza una serie de simplificaciones y no considera condiciones de borde adecuadas que le permitan predecir de manera correcta las geometrías de las zonas de flujo. En particular, no considera la condición impuesta por el ángulo de fricción interna del material granular. Además, no se ha validado para múltiples puntos de extracción interactuando entre sí.

Se implementó el modelo numérico 3D, utilizando Comsol y MATLAB, considerando condiciones de borde derivadas de la observación de experimentos en modelos físicos y se procedió a la calibración utilizando resultados experimentales con un punto de extracción aislado. Luego se validó el modelo en los experimentos con múltiples puntos de extracción, donde las zonas de flujo interactúan entre sí.

Los resultados de la validación corroboran el modelo, encontrándose errores cercanos al 10%, lo que es razonable para este tipo de modelos. La modelación contempló tanto un punto de extracción como la interacción entre múltiples puntos.

Se concluye que el modelo resulta adecuado para describir el comportamiento de material granular extraído desde uno o varios puntos de extracción, haciéndolo candidato como herramienta para el diseño de minería por block caving.

Se hace necesario en futuros trabajos considerar una validación a escala industrial (datos reales), considerar el efecto de subsidencia y la migración de finos. De este modo, el modelo resultará una completa y adecuada herramienta de apoyo en el diseño de minas por block caving.

*A mis padres y hermanos quienes me han apoyado durante toda mi vida
A mis profesores de tesis por siempre tener la disposición de aclarar mis dudas
A ti Andrea por siempre estar ahí pase lo que pase y hacer mi vida cada día mejor*

Tabla de contenido

CAPÍTULO 1	Introducción	1
1.1	Introducción y Motivación.....	1
1.2	Objetivo General.....	3
1.3	Objetivos Específicos	3
1.4	Metodología.....	3
CAPÍTULO 2	Revisión Bibliográfica.....	5
2.1	Modelos Físicos	5
2.1.1	Descripción del Modelo Físico e Experimental Utilizado.....	7
2.1.2	Múltiples Puntos de Extracción.....	10
2.2	Modelos Numéricos de Flujo Gravitacional.....	11
2.2.1	Elementos Discretos	11
2.2.2	Modelos continuos.....	11
2.2.3	Autómata Celulares	11
2.2.4	Modelos Cinemáticos o Difusión	12
2.3	Conclusiones.....	20
CAPÍTULO 3	Modelo de Difusión aplicado a Block Caving	21
3.1	Base Teórica	21
3.2	Cálculo de la zona de Movimiento	22
3.3	Coefficiente de Difusión	24
3.4	Plano de Falla.....	24
3.5	Condiciones de Borde.....	26
3.6	Solución Numérica	30
3.7	Integración de la Velocidad	30
3.8	Obtención del EZ y MZ	31
3.8.1	Zona de Extracción.....	31
3.8.2	Zona de Movimiento	32
3.9	Conclusiones.....	32
CAPÍTULO 4	Implementación del Modelo.....	33
4.1	Método de Volúmenes Finitos.....	34
4.1.1	Base Teórica	34
4.1.2	Discretización en volúmenes finitos.....	35
4.1.3	Condición de Borde.....	38

4.2	Implementación en COMSOL	42
4.2.1	Introducción a elementos finitos	42
4.2.2	Resolviendo el modelo en COMSOL.....	43
4.2.3	Definición de la Geometría del dominio	44
4.2.4	Parametros del Modelo.....	44
4.2.5	Condiciones de Borde.....	45
4.2.6	Velocidad del Modelo	45
4.2.7	Utilización de Resultados de COMSOL.....	46
4.3	Procesamiento de Resultados.....	47
4.3.1	Integración de las velocidades.....	47
4.3.2	Obtención del EZ y MZ.....	48
4.3.3	Extracciones alternadas y Simultáneas.....	50
4.4	Conclusiones.....	53
CAPÍTULO 5 Calibración y Validación del Modelo		54
5.1	Introducción	54
5.2	Descripción de la modelación física a gran escala.....	54
5.3	Metodología de calibración para tiraje aislado	56
5.4	Resultados de la Calibración.....	58
5.4.1	Comparación Cuantitativa	59
5.4.2	Comparación de la geometría global de las zonas de flujo	62
5.5	Validación para Múltiples Puntos.....	64
5.6	Estimaciones del coeficiente de difusión.....	69
5.7	Conclusiones.....	70
CAPÍTULO 6 Conclusiones y Recomendaciones		72
6.1	Conclusiones.....	72
6.2	Recomendaciones para futuros trabajos en el área	74
6.2.1	Validación a escala industrial.....	74
6.2.2	Resolución en estado trasiente.....	74
6.2.3	Subsistencia.....	75
6.2.4	Migración de finos.....	77
Bibliografía.....		78
ANEXO A Resultados experimentales para la calibración		
ANEXO B Códigos fuentes		

Listado de Tablas

Tabla 2.1. Resumen de la configuración del modelo físico estudiado por Castro (2007)	9
Tabla 2.2. Tabla Resumen con los experimentos realizados por Castro (2007).....	9
Tabla 2.3. Resumen de experimentos realizados por Castro (2007) con múltiples puntos de extracción	10
Tabla 2.4. Resumen de las publicaciones de flujo gravitacional revisadas.	19
Tabla 3.1: Tipos de Coeficientes usados en el modelo.....	24
Tabla 5.1 Resumen de la configuración del modelo físico empleado por Castro (2007)	55
Tabla 5.2. Resumen con los experimentos realizados para tiraje aislado (Castro, 2007)	55
Tabla 5.3. Resumen con los experimentos realizados para múltiples puntos de extracción (Castro, 2007).....	55
Tabla 5.4. Resultados de la Calibración	58
Tabla 5.5. Resultados Calibración para 18mm_WD	59
Tabla 5.6. Resultados calibración para 8mm_ND.....	60
Tabla 5.7. Variación del error del ancho del IMZ, cuando se calibra hasta la superficie	61
Tabla 5.8. Comparación de geometría global del IEZ, experimento 18mm_WD	62
Tabla 5.9. Resultados de la comparación cualitativa.....	68
Tabla 5.10. Resultados de la comparación cuantitativa.....	68
Tabla 5.11. Errores Medios con distintas estimaciones del coeficiente de difusión constante.....	69

Listado de Figuras

Fig. 1.1. Esquema de extracción por Block Caving.....	2
Fig. 2.1. Relación geométrica entre elipsoide de extracción y de movimiento (Kvapil 1965).....	6
Fig. 2.2. Definición de la zona de extracción y movimiento aislado (IEZ e IMZ).....	6
Fig. 2.3. Definición de Zona de Extracción y Zona de Movimiento (EZ, MZ).....	7
Fig. 2.4. Modelo Físico utilizado por Castro (2007).	8
Fig. 2.5. Observación experimental de la zona de falla (Castro, 2007).....	9
Fig. 2.6. Sistema de Celdas	12
Fig. 2.7. Coordenadas del Sistema de Celda de Litwiniszyn.....	13
Fig. 2.8. Expansión de la zona de baja densidad considerada por Mullins.....	15
Fig. 2.9.....	15
Fig. 3.1. Plano de falla encontrado en los experimentos de Castro (2007).....	25
Fig. 3.2. Condición de borde en el plano de falla	25
Fig. 3.3. Ejemplo del Dominio de solución para un punto de extracción.....	28
Fig. 3.4. Dominio de Solución para dos.	28
Fig. 3.5. Condición de No-Flujo en paredes, para simular el plano de falla observado en experimentos.	29
Fig. 3.6. Condición de flujo advectivo en la zona superior para simular un relleno constante de material.....	29
Fig. 3.7. Condiciones iniciales dadas por el volumen extraído por unidad de tiempo.....	29
Fig. 3.8. Líneas de Flujo del campo de velocidades, basado en la condición de borde.....	30
Fig. 3.9. Cálculo del EZ con el campo de velocidades. El contorno de la EZ es alcanzado en tiempo t^*	31
Fig. 4.1 Ejemplo de Volumen finito alrededor de un nodo de la malla caso 1D.....	34
Fig. 4.2. Ejemplo de Volumen finito alrededor de un nodo de la malla caso 2D.....	34
Fig. 4.3. Ejemplo de Volumen finito alrededor de un nodo de la malla caso 3D.....	35
Fig. 4.4. Volumen de control utilizado para discretizar el problema, es equivalente para el plano zy	35
Fig. 4.5. Condición de Borde Aserrada	38
Fig. 4.6. Volúmenes de Control en las cercanías de la condición de borde.....	39
Fig. 4.7. Volúmenes de Control considerados en la pared.....	39
Fig. 4.8. Balance de masa sobre el volumen de control 2.....	39
Fig. 4.9. Balance de masa sobre el flujo de control 3.....	40
Fig. 4.10. Volumen de Control Triangular.....	40
Fig. 4.11. Interface de COMSOL mostrando como para condición de borde.	44
Fig. 4.12. Tiempos de resolución del modelo para un punto de extracción.....	46
Fig. 4.13. Tiempo para extraer los datos de Comsol a MATLAB.....	46
Fig. 4.14. Se realiza una triponderación basado en la distancia a cada nodo para los tres ejes.	47
Fig. 4.16. Diagrama de Flujo del Algoritmo para el Cálculo del EZ o MZ.....	49
Fig. 4.17. Tiempos para obtener alguna zona de flujo.....	50
Fig. 4.18. Comparación de EZ, para extracción alternada y simultánea.....	52
Fig. 5.1. Esquema de la altura (H) y ancho (W) de las zonas.....	57
Fig. 5.2. Gráficos de comparación entre parámetros de las zonas de flujo experimentales y simuladas.....	59
Fig. 5.3. Gráficos de comparación entre parámetros de las zonas de flujo experimentales y simuladas.....	60
Fig. 5.4. Comparación de geometría elipsoides experimentales y del modelo.....	62
Fig. 5.5. Comparación de Área de la zona de extracción (IEZ), Experimento 8mm_ND.....	63
Fig. 5.6. Zonas de Movimiento correspondiente al experimento IN-T1.....	65
Fig. 5.7. Zonas de movimiento correspondiente al experimento IN-T2.....	66
Fig. 5.8. Zona de Movimiento correspondiente al experimento IN-T5.....	67
Fig. 6.1. Alternativa propuesta para modelar la subsidencia en la superficie.....	75
Fig. 6.2. Esquema de la zona afectada por subsidencia.....	76
Fig. 6.3. Esquema del efecto de subsidencia en el modelo.....	76

CAPÍTULO 1

Introducción

MODELACION NUMERICA DE FLUJO GRAVITACIONAL

1.1 *Introducción y Motivación*

En Chile los métodos de hundimiento se han utilizado por más de un siglo, en diversas faenas de Codelco que incluyen las Divisiones de El Teniente, División Andina, División El Salvador. A esto debe agregarse los nuevos proyectos en Chuquicamata Subterráneo, y las profundizaciones de minas en la actuales Divisiones de El Teniente y Andina.

Los métodos por hundimiento por bloques o block caving se refiere a métodos masivos de explotación subterráneos donde se utilizan los esfuerzos naturales y la gravedad para triturar y transportar la roca hacia puntos estratégicos de extracción ubicados bajo la columna de mineral en el nivel de producción (ver Figura 1). Los métodos de caving se utilizan debido a que presentan la ventaja de ser eficientes desde el punto de vista productivo y sólo requerir una mínima perforación y tronadura para el comienzo de la trituración y movilización del material de la roca in-situ, es decir, requieren poco gasto en energía.

La ubicación de los puntos de extracción (disposición y espaciamiento) es de suma importancia para la eficiencia económica de una mina subterránea de caving, ya que la extracción desde varios puntos permite optimizar la recuperación de mineral con un control de tiraje óptimo. La forma como se mueve la columna hacia los puntos de extracción tiene relación en cómo se mueven las roca hundida, fenómeno conocido como flujo gravitacional de mineral.

El fenómeno de flujo gravitacional de roca no es bien conocido actualmente, siendo aproximado a través de modelos físicos a escala que tratan de simular la realidad. Los actuales métodos de diseño de minería por hundimiento se basan en metodologías obtenidas de las observaciones de estos modelos (González 2008). Un mejor conocimiento de este fenómeno permitiría desarrollar criterios de diseño de espaciamiento y disposición de puntos de extracción pudiéndose minimizar la dilución del mineral.

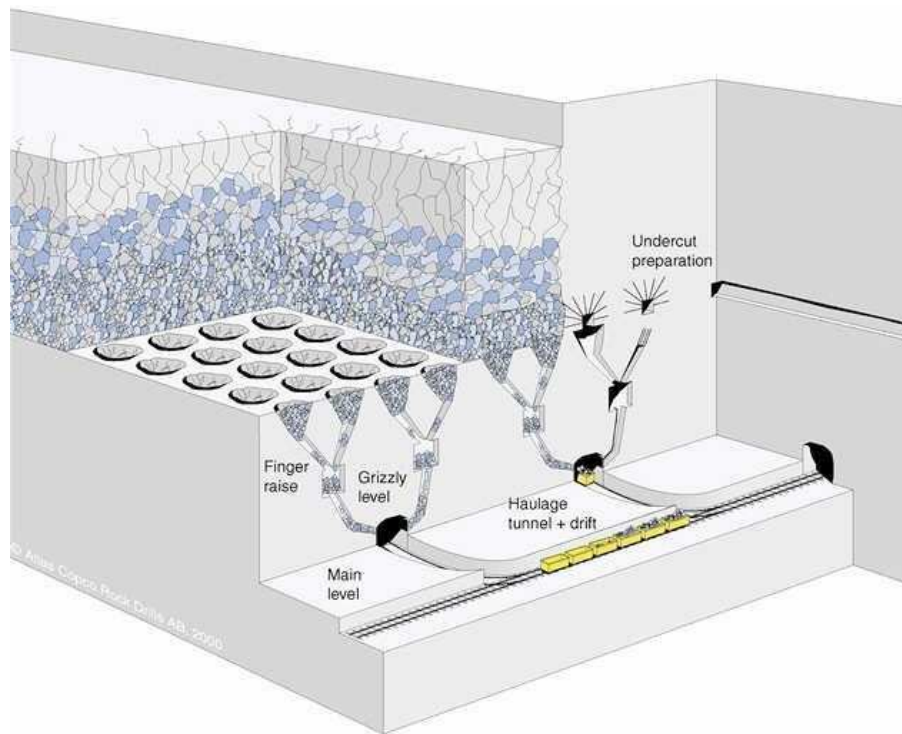


Fig. 1.1. Esquema de extracción por Block Caving para un sistema de traspaso integral en roca poco competente (ej. División Andina). En la actualidad se emplean equipos mecanizados o LHD.

Esta memoria se basa en la hipótesis que es posible modelar el flujo gravitacional de roca fragmentada con la utilización de modelos de difusión (o cinemáticos), los cuales tienen la ventaja de simplificar el análisis al no requerir un conocimiento detallado de los fenómenos dinámicos que ocurren entre las rocas y calcular directamente las velocidades de las partículas.

Los modelos de difusión (o modelos cinemáticos) han sido derivados desde distintas perspectivas. Litwiniszyn (Chen, 1997) supone que las partículas están confinadas a unos bloques y que cuando una partícula deja un bloque es reemplazada por una partícula de un bloque superior. Mullins (1972) considera un flujo de vacíos que sube a través del punto de extracción. Tüzün y Nedderman (Able et al., 1996) supone que las partículas tenderán a moverse hacia donde exista una gradiente de velocidad vertical. A pesar de los diferentes enfoques todos llegan a la misma ecuación diferencial que corresponde a una de difusión. Esta ecuación ha sido resuelta analíticamente para ciertas condiciones de borde y considerando una serie de simplificaciones que no necesariamente reflejan las observaciones experimentales del flujo gravitacional. Es por ello que este trabajo de título se centrará en la solución de la ecuación de difusión para condiciones más realistas correspondientes a los encontrados en la minería de block caving.

1.2 *Objetivo General*

El objetivo principal de este trabajo de título es desarrollar e implementar un modelo numérico de flujo gravitacional para partículas granulares no cohesivas, utilizando los modelos de difusión con condiciones de borde que reflejen las limitaciones físicas del modelo. Se plantea en este contexto que el modelo propuesto debe ser rápido en entregar resultados, tridimensional y tener potencial de ser utilizado como herramienta de apoyo en el diseño de minas de block caving. Para ello, en una primera etapa éste debe ser calibrado y validado con resultados experimentales disponibles a partir de modelos físicos de grandes dimensiones.

1.3 *Objetivos Específicos*

- Obtener un modelo numérico parametrizado para la solución de la ecuación de difusión aplicada a flujo gravitacional de granulares no cohesivos, con distintas condiciones de borde.
- Comparar el modelo con los propuestos por otros autores.
- Resolver numéricamente del modelo recreando las condiciones observadas en experimentos de flujo gravitacional y su respectiva calibración.
- Calibrar y validar del modelo con datos experimentales.

1.4 *Metodología*

Para la consecución de los objetivos de esta memoria se plantea la siguiente metodología de trabajo:

- Realizar una revisión bibliográfica de modelos numéricos y físicos de flujo gravitacional. Esta etapa es fundamental, pues permitirá determinar el estado del arte respecto al modelamiento numérico de flujo gravitacional utilizando modelos de difusión y determinar las condiciones a cumplir por el modelo numérico a ser implementado respecto a resultados experimentales con que cuenta el autor.
- Implementar un modelo numérico utilizando algún método de solución numérica con las distintas condiciones de borde determinadas en la revisión bibliográfica.
- Calibrar los parámetros del modelo utilizando experimentos de tiraje aislado, es decir, cuando se extrae por un punto de extracción.
- Validar los parámetros del modelo con resultados experimentales con múltiples puntos de extracción.

- Realizar el análisis de resultados, discusión y delinear recomendaciones para trabajos futuros en el área.

Como resultados de este trabajo de título se busca obtener un modelo de resolución rápida para el problema de flujo gravitacional, que pueda resolver problemas para distintas condiciones de borde. El modelo se validará con casos experimentales con que cuenta el autor.

Para ello esta memoria se ha definido en una serie de capítulos que muestran el desarrollo del presente proyecto:

- En el Capítulo 1, se presenta el problema a ser tratado y se esboza cómo se llevará a cabo esta investigación, además de los resultados esperados.
- En el Capítulo 2 se muestra el estado del arte, realizándose una revisión de las publicaciones existentes sobre flujo gravitacional y su modelamiento a través de las consideraciones cinemáticas.
- En el Capítulo 3 se describe el modelo a utilizar, se presentan las bases teóricas, ecuaciones generales, condiciones de borde y se muestra el procedimiento utilizado para calcular los parámetros relevantes al fenómeno de flujo gravitacional.
- En el Capítulo 4 se desarrolla la implementación del modelo descrito en el Capítulo 3 utilizando volúmenes finitos y usando el software comercial de elementos finitos COMSOL, además se describen los algoritmos utilizados para obtener resultados acordes con los obtenidos experimentalmente.
- En el Capítulo 5 se calibra el modelo con un sólo punto de extracción, para luego validarlo con múltiples puntos de extracción.
- En el Capítulo 6 se concluye sobre los resultados de este trabajo y se delinear recomendaciones para trabajos futuros en esta área.

CAPÍTULO 2

Revisión Bibliográfica

Este capítulo se centra en la revisión de las publicaciones relacionadas con flujo gravitacional, especialmente los referentes a modelos numéricos para flujo gravitacional, para así apreciar el estado del arte en la materia. También se comenta acerca de los modelos físicos, con el objeto de tener una idea de la validez de los datos experimentales utilizados para el escalamiento a tamaños utilizados en block caving.

2.1 Modelos Físicos

Los modelos físicos se basan en representar a pequeña escala fenómenos físicos con el fin de hacerlos más manejables y lograr entender las leyes físicas que los rigen. El uso de modelos físicos se basa en el hecho que las cantidades físicas pueden ser descritas con las leyes fundamentales de la mecánica.

La representatividad de un modelo depende de la similitud que este tenga con el fenómeno a escala real. Existen tres tipos de similitudes:

- Similitud Geométrica: Se refiere a que la geometría es reducida en un factor de escala.
- Similitud Cinemática: Las velocidades son escaladas con respecto al modelo
- Similitud Dinámica: Las fuerzas son escaladas con respecto al modelo.

La Similitud Dinámica Total se alcanza cuando un modelo satisface todas las similitudes. Pöschel (Castro, 2007) comenta que en modelos usando materiales granulares no es posible conseguir similitud dinámica total usando materiales conocidos. Sin embargo, estos modelos pueden ser aplicados para entender el fenómeno de flujo gravitacional, siempre y cuando se tenga en cuenta lo anterior (Castro, 2007).

El trabajo de Kvapil fue el primer intento de clasificar cuantitativamente el flujo gravitacional utilizando modelos físicos a escala en 2D. Kvapil notó que existen dos zonas dentro del flujo y que éstas tienen forma de elipsoide: i) El elipsoide de extracción, definido por la zona donde se encontraban la masa partículas que fueron extraídas. ii) El elipsoide de movimiento, el cual es la zona donde las partículas han sido perturbadas por el flujo gravitacional, ie. se han movido. Por lo tanto el material que no pertenece a la zona de movimiento estaría en reposo y en su posición original. Ver figura 2.1.

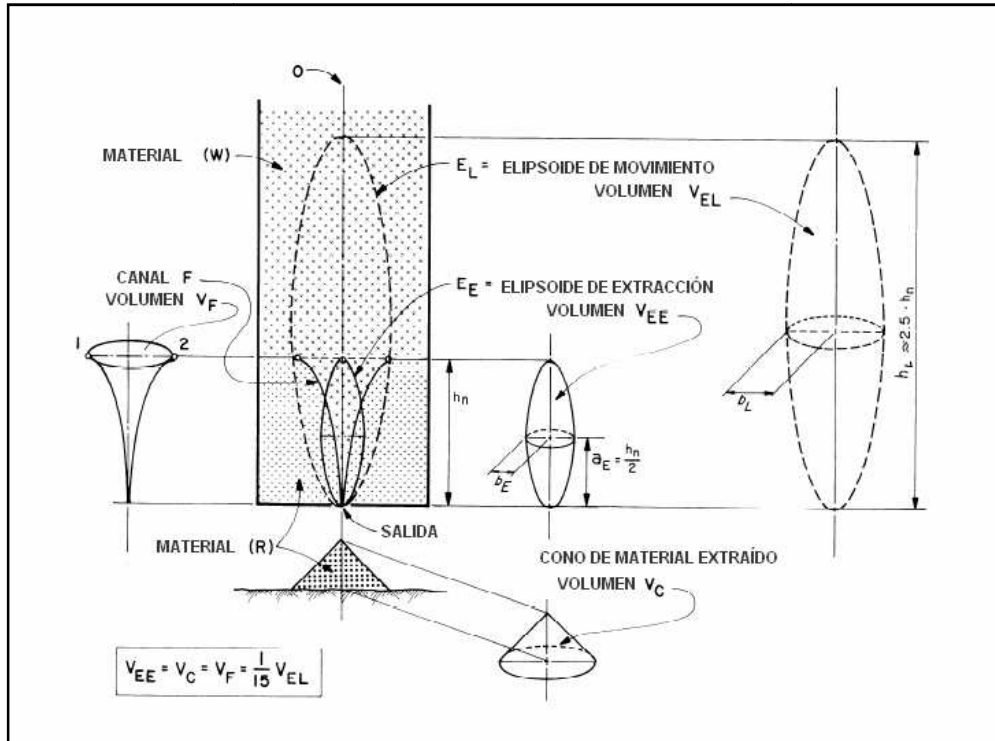


Fig. 2.1. Relación geométrica entre elipsoide de extracción y de movimiento (Kvapil 1965)

Distintos autores han notado que estas zonas no son exactamente un elipsoide (Castro, 2007), por lo que estas zonas han pasado a ser llamadas zonas de extracción y zonas de movimiento (EZ y MZ en sus siglas en inglés). Distintos experimentos han mostrado que dependiendo del espaciamiento entre puntos de extracción las zonas pueden interactuar perdiéndose la forma de elipsoide (Castro, 2007). Cuando existe tiraje aislado (las zonas no se intersectan) y se le llama en términos mineros zona de extracción aislada (IEZ) y zona de movimiento aislada (IMZ). En la Fig. 2.2 y Fig. 2.3 se puede apreciar el concepto antes mencionado.

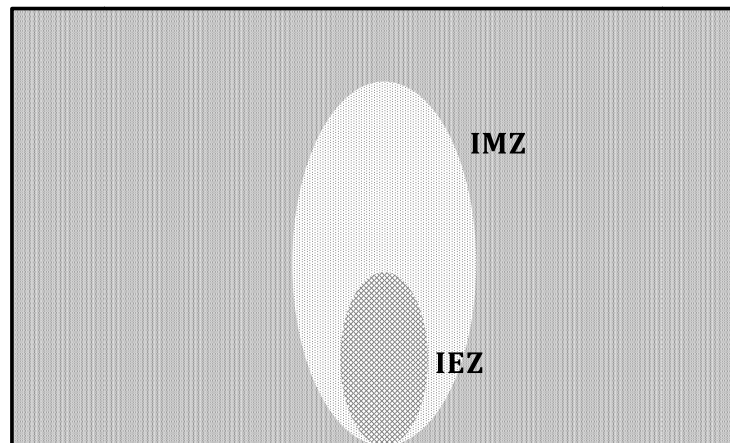


Fig. 2.2. Definición de la zona de extracción y movimiento aislado (IEZ e IMZ)

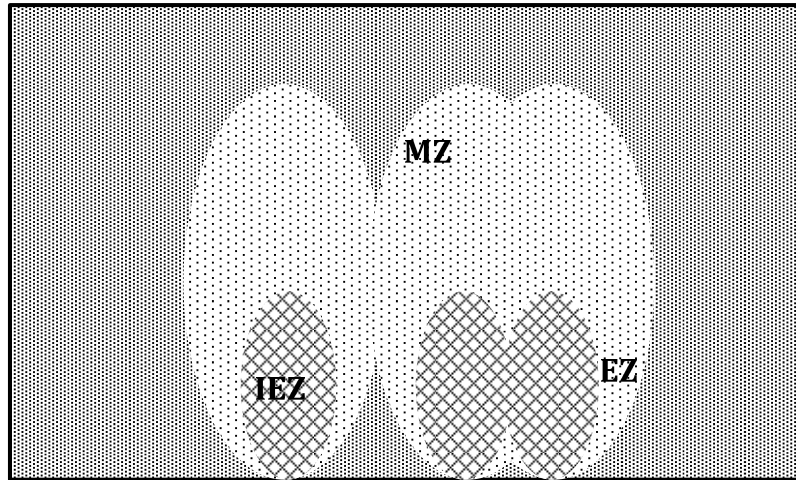


Fig. 2.3. Definición de Zona de Extracción y Zona de Movimiento (EZ, MZ), en el lado izquierdo se aprecia la existencia del IEZ ya que no ha interactuado con otras zonas, mientras en el lado derecho corresponde a un EZ debido a la interacción existente.

2.1.1 Descripción del Modelo Físico e Experimental Utilizado

Para el desarrollo de este trabajo de título se utilizarán los resultados experimentales obtenidos por Castro (2007) en su modelo físico. Los experimentos reportados del autor anterior fueron realizados en el modelo más grande construido a la fecha, con dimensiones de 3400mm de altura, 3300 mm de ancho y 2400mm de largo (ver Figura 2.4).



Fig. 2.4. Modelo Físico utilizado por Castro (2007).

Los experimentos se realizaron utilizando dos tamaños de material, uno más pequeño y con distribución granulométrica más estrecha de 8 mm de diámetro de partícula medio y otro más grueso y de distribución más amplia de 18 mm. La idea es que las partículas más gruesas representarían de mejor forma lo que ocurre en minas explotadas por block caving (Castro, 2007).

Se utilizaron sensores de movimiento (extensómetros modificados), que se activaban cuando las partículas se movían. Las zonas de extracción fueron estimadas realizando un análisis de los datos correspondiente a las salidas de marcadores ubicados en posiciones determinadas, luego de cierta masa extraída.

La escala utilizada en el modelo fue tal que representara de mejor manera los tamaños encontrados en minas reales, así por ejemplo la partícula de 18mm a una escala de 1:30 representaría una roca de 0.54 m y una columna de 100 m. A la escala 1:100 se representaría una columna de 330 m y utilizando un material de 8mm, una roca de 800mm. Los puntos de extracción son escalados de la misma manera.

A continuación en la tabla 2.1 se presenta la configuración del modelo con datos como escala, tamaño del punto de extracción y tasa de extracción utilizadas en los experimentos:

Tabla 2.1. Resumen de la configuración del modelo físico estudiado por Castro (2007)

Escala	Medio	Tamaño Punto de Extracción [mm x mm]	Altura de Columna [mm]	Altura de elipsoide [mm]	Tasa de extracción [kg/hr]
1:30	18mm	120x100	3300	3300	60
1:100	8mm	36x30	3300	3300	3

En la tabla 2.2 se encuentra el resumen con los experimentos realizados por Castro (2007) para tiraje aislado:

Tabla 2.2. Tabla Resumen con los experimentos realizados por Castro (2007)

Experimento	Medio	Tamaño Punto de Extracción [mm x mm]	Altura de Columna [mm]	Altura de elipsoide [mm]	Densidad [ton/m ³]	Escala
IS-T1	18mm	120x100	3300	3300	1.9	1:30
IS-T2	18mm	120x100				1:30
IS-T3	18mm	120x100				1:30
IS-T4	8mm	36x30	3300	3300	1.5	1:100
IS-T5	8mm	36x30				1:100
	8mm	36x30				1:100
	8mm	36x30				1:30

Los experimentos fueron realizados principalmente para obtener la geometría de las zonas de extracción y zonas de movimiento. Estas geometrías fueron obtenidas en función de la masa extraída, por lo que estos datos son los necesarios a obtener con el modelo a utilizar durante este trabajo de título. Durante los experimentos se observó una tendencia del flujo a quedar restringido en una zona definida por un ángulo θ como se muestra en la Fig. 2.5, a éste se le llama ángulo de plano de falla.

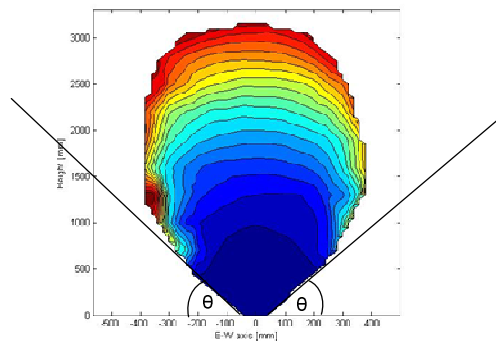


Fig. 2.5. Observación experimental de la zona de falla (Castro, 2007)

2.1.2 Múltiples Puntos de Extracción

La extracción por block caving se basa en la interacción que ocurre entre múltiples zonas de movimiento la cual es manejada a través del espaciamiento entre los puntos de extracción y el tiraje. La interacción entre zonas de movimiento permite una optimización en la extracción permitiendo una bajada uniforme de la columna de mineral (flujo en masa) y evitando la pronta entrada de estéril (material sin interés económico). Por esta razón, es importante conocer el comportamiento de flujo gravitacional y determinar si existe o no esta interacción.

Castro (2007) llevó a cabo una serie de experimentos con puntos de extracción a distinto espaciamiento y configuraciones. Para esto utiliza las mismas distribuciones de los experimentos de tiraje aislado: una amplia con una media de 18mm (18mm_W) y una más estrecha con una media de 8mm (8mm_ND).

A continuación se detalla un resumen de los experimentos realizados a múltiples puntos de extracción. Como se indica en la Tabla 2.3, la base de datos experimental cuenta con diferentes medios, número de puntos de extracción, espaciamiento, densidad aparente (inicial) y tasa de extracción por punto de extracción. Los resultados experimentales se expresan en las zonas de flujo (extracción y movimiento) en función de la masa extraída.

Tabla 2.3. Resumen de experimentos realizados por Castro (2007) con múltiples puntos de extracción

Experimento	Material	Número de puntos de extracción	Espaciamiento entre puntos de extracción	Tamaño Punto de Extracción [mm x mm]	Altura de Columna [mm]	Densidad Aparente inicial [ton/m ³]	Tasa de extracción [kg/hr]
IN-T1	18mm_WD	2	500	120X100	3300	1.9	60
IN-T2	18mm_WD	2	700	120x100	3300	1.9	60
IN-T3	18mm_WD	4	500x560	120x100	3300	1.9	60
IN-T4	8mm_WD	9	780x780	120x100	3300	1.4	3
IN-T5	8mm_WD	13	480x480	36x30	3300	1.4	3

2.2 Modelos Numéricos de Flujo Gravitacional

Distintos enfoques han sido usados para la modelación numérica de flujo gravitacional, estos incluyen:

- Autómatas Celulares
- Elementos Discretos
- Modelos Continuos
- Cinemáticos (o de Difusión)

Este trabajo se enfoca en un modelo cinemático o de difusión, pero se hace una breve revisión de los otros enfoques:

2.2.1 Elementos Discretos

En el enfoque de los elementos discretos, cada partícula es modelada independientemente y su interacción con otras partículas se basan en las leyes del movimiento (Newton) y de la elasticidad (ley de Hooke). Esta interacción ocurre en los puntos de contacto. Existen software capaces de resolver estos sistemas (PFC). El problema con este enfoque, es la gran capacidad computacional necesaria para modelar problemas a la escala observada en la minería.

2.2.2 Modelos continuos

El enfoque continuo considera el material granular como un sólido y utiliza la teoría de la plasticidad para modelar los esfuerzos dentro de estos.

2.2.3 Autómata Celulares

Los métodos de autómatas celulares pueden considerarse dentro de los modelos estocásticos, ya que usan una función de probabilidad para modelar el movimiento de las partículas.

Un autómata celular (AC) consiste en un sistema dinámico compuesto de celdas que evoluciona con un paso de tiempo discreto, el comportamiento de cada celda depende solamente de la interacción local entre una y otra (entre vecinos). Cada celda puede tener una serie de finitos estados y estos son actualizados simultáneamente en los pasos de tiempo.

Las principales características que definen un AC son:

- Dominio: El dominio se discretiza en una rejilla, donde cada cuadrícula de ésta representa una célula.
- Estado: Una célula puede tener un número finitos de estados.

- Vecindad: Cada célula sólo puede interactuar con sus vecinos. El cambio de estado de una célula en un paso de tiempo sólo depende de éstos y de ella misma.
- Función de Transición: es la función que toma los estados de la célula y sus vecinos y asigna el nuevo estado. Esta función es aplicada a todas las células por cada paso de tiempo.

Castro (2007) utilizando los datos obtenidos experimentalmente de su modelo, desarrolla un AC, llamado FlowSim, que es calibrado y validado con los experimentos desarrollados en la modelación física. FlowSim no intenta modelar los mecanismos de flujo, sino reproducir los patrones observados en los experimentos. Aunque los tiempos de modelación para problemas grandes son cortos con respecto a otros modelos, no son lo suficiente como para convertirlo en una herramienta de decisión industrial. González (2008) da cuenta que para modelar una columna de altura 150m considerando celdas de tamaño 1,2 m el AC FlowSim demoraría 63 horas.

2.2.4 Modelos Cinemáticos o Difusión

Este modelo es llamado así ya que no considera las fuerzas que ocurren dentro del sistema. Ha sido propuesto por varios autores considerando distintos puntos de vista para derivarlo.

Litwiniszyn (Chen, 2007) considera que las partículas están confinadas dentro de una celda y que cuando una partícula sale de una celda es remplazada por una partícula de la celda superior. A continuación se describe el modelo para la situación 2D. Para cada celda existen dos candidatos en la parte superior para reemplazarla (ver Fig. 2.6), se supone que cada una debe tener igual probabilidad ($p=1/2$). Al mismo tiempo, el reemplazo de una celda por una celda superior genera el mismo mecanismo de reemplazo sobre esta última, haciendo que las celdas en las capas superiores se muevan. Por lo tanto moviendo una celda en la capa inferior genera una distribución de probabilidades que tiende a una distribución normal.

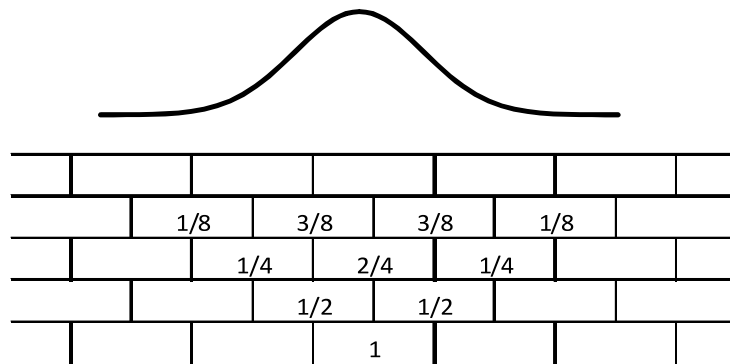


Fig. 2.6. Sistema de Celdas

Otra forma de verlo es considerando la configuración de la Fig. 2.7

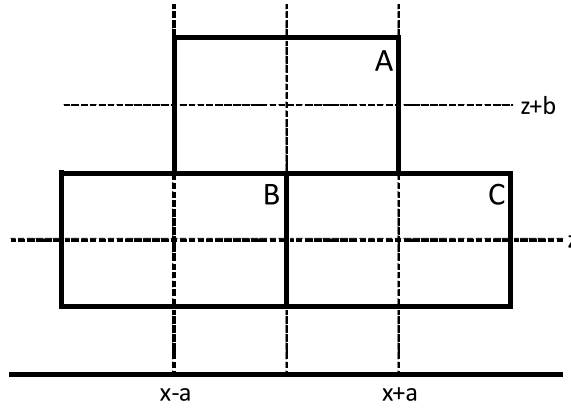


Fig. 2.7. Coordenadas del Sistema de Celda de Litwiniszyn

Cada celda A, B y C contiene una partícula afectada por la gravedad. Si una partícula es extraída en B o en C, la partícula A tenderá a moverse a alguna de las dos posiciones de manera aleatoria. Considerando que la probabilidad que la partícula se mueva hacia B es p y que se mueva hacia C es q con $p+q=1$.

Suponiendo que el sistema no tiene preferencias de movimiento en la horizontal se dice que $p=q=1/2$ y que las partículas se encuentran en el centro de las celdas. De la Fig. 2.6 y Fig. 2.7 se puede ver la probabilidad de la celda A, ie., $P(x, z+b)$ es:

$$P(x, z + b) = p \cdot P(x - a, z) + q \cdot P(x + a, z)$$

Con $p=q=1/2$ y reordenando:

$$\frac{b}{b}P(x, z + b) - P(x, z) = a^2 \frac{P(x - a, z) - 2P(x, z) + P(x + a, z)}{2a^2}$$

Considerando $A = a^2/2b$ y con a y b tendiendo a cero se llega a:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = A \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

Siendo a el ancho de la celda y b su altura. El parámetro A se refiere a la relación entre el desplazamiento horizontal y vertical de las partículas, él cual dependería de las condiciones del material y el flujo.

Otro enfoque es el de Mullins (Able et al., 1996), donde presenta una teoría discreta para partículas sin cohesión, en la cual considera que el flujo de partículas hacia abajo debido a un orificio se representa como un flujo de vacíos que suben a través de este orificio. Estos vacíos siguen un camino al azar, considerando el movimiento de estas partículas como un camino aleatorio, la solución a este problema para el caso 3D puede ser representado como:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial c}{\partial z}$$

Donde $c(x, y, z)$ representa la concentración de vacíos en la coordenada (x, y, z) y α es el coeficiente de difusión. Si n es la concentración de partículas y U_z las velocidades verticales de las partículas, entonces $U_z n = -c$, considerando que el medio está densamente empaquetado n es constante y por lo tanto c es proporcional a U_z reescribiendo:

$$\frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

De igual manera se tiene que:

$$U_x = -\alpha \frac{\partial U_z}{\partial x}$$

$$U_y = -\alpha \frac{\partial U_z}{\partial y}$$

Esta ecuación en estado permanente, tiene solución analítica para ciertos casos simplificados, Mullins y otros autores consideran el caso semi-infinito en 2D, tanto con orificio puntual como orificio finito. La constante α , tendría el orden del tamaño de las partículas.

Mullins (1974) en otra publicación, presenta evidencia experimental para sustentar este modelo utilizando los datos experimentales de los trabajos de Guinta et al. El modelo es capaz de predecir el comportamiento del flujo para alturas no muy grandes. Esto hace concluir que existe un efecto transiente en el cual la densidad tiene que caer a cierto nivel antes que el estado permanente ocurra, debido a que al haber extraído cierta cantidad de material no todas las capas del modelo se han movido.

Mullins (1974) presenta una modificación a su modelo donde considera este efecto transiente. Esta modificación supone que el flujo está restringido en una zona (zona de flujo), la cual se va expandiendo a medida que las partículas caen por el orificio. La velocidad a la que se expande esta zona depende del cambio de densidad que ocurre dentro de ésta (el que fue notado en la publicación antes referenciada y en experimentos). Utilizando el principio de conservación de masa (figura 2.8), se concluye que esta zona de movimiento tiene una velocidad:

$$v = -\frac{1}{\Delta\rho} J$$

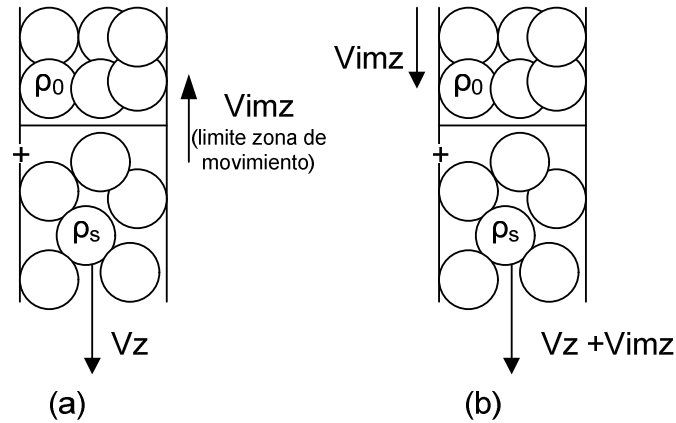


Fig. 2.8. Expansión de la zona de baja densidad considerada por Mullins

Siendo J el flujo de partículas predicho por el modelo de Mullins. Por lo tanto una partícula ubicada en (x, z) demorara en salir, lo que demora esta zona en llegar a esta partícula más lo que demora la partícula en llegar al orificio. Es decir, siendo $T(x, z)$ el tiempo que demora una partícula en salir por el punto de extracción, debido a la expansión de esta zona, el nuevo tiempo sería:

$$T^*(x, z) = \left(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho}\right) T(x, z)$$

Con esta modificación Mullins compara con los datos experimentales de Gardner obteniéndose una buena predicción, validando esta modificación al modelo.

Otro enfoque para derivar el modelo cinemático es el de Tüzün & Nedderman (Able et al., 1996), donde suponen que si dos partículas en una capa se están moviendo a distintas velocidad una partícula en la capa superior tenderá a irse hacia la partícula con mayor velocidad, ver Fig. 2.9. esto es:

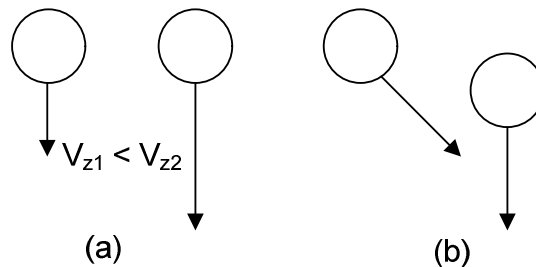


Fig. 2.9. En el caso (a) se ve que la partícula de la derecha tiene una velocidad vertical mayor que la partícula de la izquierda. Debido a que la partícula de la derecha deja un espacio para la partícula de la izquierda, esta tiende a moverse hacia la derecha como ocurre en (b)

$$V_x \approx -\frac{\partial V_z}{\partial x}$$

La forma más simple de expresar esta relación es con una constante:

$$V_x = -D \frac{\partial V_z}{\partial x}$$

Por continuidad se llega a:

$$D \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} - \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

A pesar de este enfoque distinto, se llega a la misma ecuación para modelar el flujo, pero en términos de velocidad (que Mullins a través de su enfoque, también pudo derivar).

Graham et al. (1987) utilizan el modelo cinemático para predecir el comportamiento de partículas granulares en un recipiente cilíndrico obteniendo una buena concordancia. Se utilizan datos experimentales de modelos físicos utilizando dos clases de partículas: “suaves” y “rugosas”. Se obtuvieron los perfiles de velocidad y los tiempos de residencia, y se compararon con los predichos por el modelo. Los autores notan que las partículas cercanas a la pared tienen tiempos de residencia muchos mayores al predicho, esto da cuenta de que existe una pequeña zona de corte generada por la pared que afecta las partículas. También notan que parar o reiniciar el flujo o la recarga de material por la superficie del modelo físico, no tiene mayor influencia en el comportamiento global.

Nedderman (1995) hace un trabajo sobre la predicción del borde de las zonas de estancamiento dentro un silo. El autor da cuenta que el modelo cinemático no ha sido considerado debido a que no podía estimar estas zonas de estancamiento por su naturaleza continua. Nedderman propone una modificación del modelo, similar con la propuesta de Mullins, considerando que existe una zona de baja densidad donde el flujo cumple con el modelo cinemático. Nedderman deriva una ecuación para la velocidad con que se expande esta zona dentro del dominio. Nedderman compara sus resultados con los datos experimentales de Watson obteniendo una buena concordancia.

Able et al. (1996) utilizan datos experimentales de los tiempos de residencia de partículas dentro de un silo con fondo plano comparándolos con los predichos por el modelo cinemático. Obtienen una concordancia durante las etapas iniciales de la descarga. En etapas posteriores los autores notan que las partículas a mayor distancia de la línea central se descargan más rápido que lo predicho por el modelo, a diferencia de lo que notan Graham et al. (1987), donde las partículas cercanas a la pared demoran mucho más en salir. Los autores comentan que esto ocurre debido a

que la superficie que desciende toma estas partículas a gran distancia y las transporta rápidamente hacia el centro.

Chen (1997) da cuenta de la discrepancia que existe en la forma de las zonas de movimiento predichas por el modelo cinemático y las obtenidas a través de modelos físicos. También nota que el modelo ha sido usado para predecir el flujo de material granular (mayoritariamente arena) y no para flujo de roca. Chen utiliza como base experimental los datos de Peters (1984), el cual modelo físicamente la forma de la zona de movimientos de flujo para roca en 2D.

Chen nota que la zona de extracción que se predice del modelo de Mullins, es distinta de la obtenida por medios experimentales. El primero tiene una zona superior angosta y una zona inferior más ancha. En los experimentos nota que la zona superior es más ancha que la zona inferior. Chen propone considerar que el coeficiente de difusión no es constante, sino que aumenta con la altura. Esto ocurriría debido a que la velocidad horizontal aumentaría a medida que el flujo va subiendo y esto produciría la parte superior más ancha.

Chen supone que el aumento del coeficiente es lineal con la altura, luego integra numéricamente la ecuación y compara sus resultados con los de Peters, obteniendo una buena concordancia. Hay que notar que por el planteamiento de Chen, ahora es necesario obtener dos constantes para describir el flujo (el valor inicial del coeficiente y el paso cada vez que se sube).

Zhang & Ooi (1998) utilizan datos experimentales para ver la validez del modelo cinemático en silos con fondo plano. Los modelos experimentales usados fueron pelets de mineral de hierro en un silo a escala real y pelets de polipropileno en un modelo semi-cilíndrico. Para la validación los autores comparan los tiempos de residencia predichos por el modelo con los obtenidos por los experimentos. Estos autores proponen una forma de tomar en cuenta el efecto de la subsidencia que ocurre en la superficie, considerando que las partículas se van a mover con las velocidades predichas por el modelo cinemático, a menos que se encuentren con la superficie (con subsidencia) donde pasan directamente al centro del flujo. Se encuentra una buena concordancia con los datos experimentales.

Melo et al. (2007) hacen una revisión de algunos modelos utilizados para predecir la forma del EZ, incluyendo el modelo cinemático (caso radial axisimétricos). Dan cuenta que distintos autores han visto la validez de este modelo para predecir las líneas de flujo y distribuciones de velocidades en materiales sueltos, pero que pierde validez en materiales compactos. Su hipótesis es que en estos últimos existiría un frente de dilación que se propagaría hacia arriba desde el punto de extracción, creando errores acumulativos con la altura. Se analiza el efecto de extracción desde múltiples puntos, y se postula que para extracciones simultáneas desde los puntos, el modelo cinemático sería congruente ya que por su linealidad correspondería solamente a la suma de velocidades. Sin embargo, para el caso de extracción alternada no es válida la superposición de soluciones de cada punto.

Wu et al. (2008) utilizan el modelo cinemático para predecir el comportamiento de aperturas excéntricas en modelos físicos. Los autores dan cuenta que realizando un cambio de coordenadas del modelo, haciendo que la línea (ya que es caso 2D) de máxima velocidad no sea perpendicular a la apertura, sino girado en un ángulo, se logra una buena concordancia con los resultados experimentales.

Melo et al. (2008) estiman la zona de movimiento (IMZ) considerando el efecto de dilatación propuesto por Mullins (1974), haciendo que el frente represente el contorno del IMZ. Por lo propuesto por Mullins el IMZ sólo dependería del cambio de densidad que ocurre dentro de esta zona, lo cual estaría de acuerdo con las observaciones experimentales de Janelid y Kvapil. Notan que, numéricamente, la altura del IMZ sería alrededor de 4.02 veces la del IEZ, sobrestimando en un 60% las observaciones experimentales de Janelid y Kvapil donde notan que es alrededor 2.5 veces, los autores concluyen que la discrepancia ocurre debido a que el modelo de elipsoides de Janelid y Kvapil supone que el IEZ e IMZ tienen la misma excentricidad, de lo cual no existe evidencia experimental.

A continuación, en la tabla 2.4 se presenta un resumen de las distintas publicaciones revisadas sobre modelos cinemáticos de flujo gravitacional:

Tabla 2.4. Resumen de las publicaciones de flujo gravitacional revisadas.

Autor	Modelo Físico	Dim.	Característica	Objetivo	Cond. de Borde	Validado
Mullins (1974)	Guinta, Gardner y Brown & Hawksley	3D	Se da cuenta que el modelo no puede predecir para zonas muy altas	Validar el modelo	No	Si
Mullins (1974)	Gardner	2D	Propone una zona de expansión donde se cumple el modelo cinemático	Proponer una ampliación al modelo	No	Si
Nedderman	Watson	2D	Considera la zona de expansión	Predecir las zonas de estancamientos dentro de un bunker	No	Si
Graham, Tait & Wadmore (1987)	Propio	Axi	Considera condición de borde en un bunker cilíndrico	Validar el uso para bunkers cilíndricos	Cilindro	Si
Able, Othen & Nedderman (1995)	Propio	Axi.	Hace una extracción batch en un silo, da cuenta del efecto de la subsidencia	Validar los tiempos de extracción considerando el frente que se expande	No	Si
Chen (1997)	Peters (1984)	2D	Ajusta el IEZ, considerando un coeficiente variable en altura	Diseño por Block Caving	Cuadrado	Si
Zhang & Ooi (1998)	Propios	Axi.	Considera subsidencia en la superficie	Modelas Problemas en Silo	No	Si
Melo, Vivanco, Fuentes y Apablaza (2007)	No usan	Axi.	Revisión del modelo cinemático y da cuenta de la su utilización para múltiples puntos.	Revisión de los modelos para predecir las zonas de flujo.	No	No
Wu, Chen & Yang (2008)	Propio	2D	Ajusta el modelo cinemático para considerar descargas excéntricas	Ampliar la aplicación del modelo	No	Si
Melo, Vivanco y Fuentes (2008)	Power Castro	Axi.	Estima el IMZ como el frente propuesto por Mullins	Predecir el IMZ y el IEZ	No	Si

Observando el resumen de las publicaciones se puede ver que pocos autores han validado el modelo para el caso 3D. Además, en la mayoría de los casos no se consideran las condiciones de borde, utilizando las soluciones analíticas para casos axisimétricos o semi-infinitos. Más importante es que ningún autor ha validado el modelo cinemático para múltiples puntos de extracción que interactúan entre sí, por lo tanto se hace necesario considerarlo en el desarrollo de esta memoria.

2.3 Conclusiones

De acuerdo con la revisión bibliográfica realizada, se puede afirmar que diversos autores han buscado herramientas matemáticas que permitan simular el fenómeno de flujo gravitacional, la validación de estos modelos se realizan con la comparación de experimentos realizados en modelos físicos a escala.

Sobre los modelos cinemáticos, la revisión bibliográfica entrega evidencia clara que justifica la realización de este trabajo. Las publicaciones existentes carecen de la validación para múltiples puntos de extracción, que es de interés para la minería y no todas consideran condiciones de borde adecuadas, observada en la experimentación. La incorporación de estas dos últimas en el modelo permitiría validarlo como herramienta para la simulación de block caving.

Por lo tanto la motivación de implementar un modelo numérico basado en el modelo cinemático, que considere las condiciones de borde adecuadas y se pueda calibrar y validar con múltiples puntos de extracción queda satisfecha.

CAPÍTULO 3

Modelo de Difusión aplicado a Block Caving

El presente capítulo muestra el desarrollo de un modelo cinemático de flujo gravitacional, el cual será implementado en un software de análisis numérico con el fin de calibrarlo y validarlo con una serie de datos experimentales. Se presentan las bases teóricas, ecuaciones generales, condiciones de borde y se muestra el procedimiento utilizado para calcular los parámetros del modelo propuesto que intentará dar una explicación al fenómeno de flujo gravitacional.

3.1 Base Teórica

Como se indicó en la revisión bibliográfica, el modelo cinemático puede ser derivado considerando distintos enfoques. Tanto como Mullins (1972), Nedderman y Tüzün (1979) consideran que un flujo de partículas a través de un punto de extracción es equivalente a un flujo de vacíos subiendo por este. Nedderman y Tüzün derivan la ecuación de flujo considerando que en un conjunto de partículas moviéndose por la gravedad, estas tenderán a moverse lateralmente hacia la posición de otra partícula que tenga una mayor velocidad vertical. De esta forma, existiría un espacio donde puede rodar, como se muestra en la Fig. 3.1. Esto se puede expresar de la siguiente forma:

$$V_x \approx -\frac{\partial V_z}{\partial x} \quad (3.1)$$

Es decir que la velocidad en el eje x, es proporcional al gradiente de velocidad vertical en el eje x. Esta relación se cumple también para la velocidad V_y .

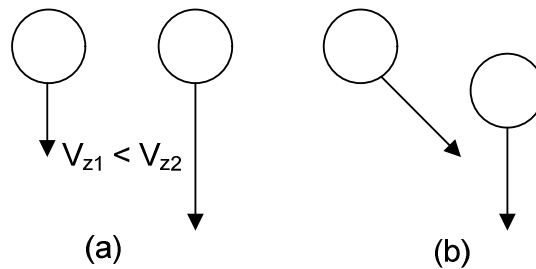


Fig. 3.1. En el caso (a) se ve que la partícula de la izquierda tiene una velocidad vertical mayor que la partícula de la derecha. Debido a que la partícula de la derecha deja un espacio para la partícula de la izquierda esta tiende a moverse hacia la derecha como ocurre en (b)

La forma más simple de expresar esta relación es con un coeficiente, que llamaremos coeficiente de difusión (debido a la similitud que existe con el fenómeno de difusión). Por lo tanto:

$$V_x = -D \frac{\partial V_z}{\partial x} \quad (3.2)$$

Donde:

V_x : Velocidad en el eje x
 D : Coeficiente de Difusión
 V_z : Velocidad en el eje z

Suponiendo que las partículas se encuentran lo suficientemente confinadas y que no existe un cambio de densidad ρ para que se cumpla continuidad, se tiene que:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (3.3)$$

Donde:

V_x : Velocidad en el eje x
 V_y : Velocidad en el eje y
 V_z : Velocidad en el eje z

Considerando que el coeficiente de difusión se mantiene constante en los ejes x e y, y reemplazando (3.2) en (3.3), se tiene que para la velocidad vertical V_z se cumple que:

$$D \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} - \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (3.4)$$

Donde:

V_x : Velocidad en el eje x
 V_y : Velocidad en el eje y
 V_z : Velocidad en el eje z
 D : Coeficiente de Difusión

Esta ecuación junto con la (3.2) son la base del modelo de difusión, ya que permite calcular los vectores de velocidades de cualquier partícula en cualquier posición, pudiendo ser utilizadas para calcular los tiempos de residencia, posiciones de partículas, etc.

Estas ecuaciones son equivalentes a las ecuaciones de difusión de masa con convección en z o a la de flujo de calor en tiempo cambiando 't' por 'z'.

3.2 Cálculo de la zona de Movimiento

Las ecuaciones (3.4) y (3.2) permiten calcular el campo de velocidad de todas las partículas del dominio. Sin embargo, como se vio en la revisión bibliográfica, este modelo no permite conocer las zonas de estancamiento y por lo tanto no predice la zona de movimiento. Debido a que la ecuación es en estado permanente, supone que todas las partículas en el dominio tienen velocidad, para futuros estudios sería interesante ver si un modelo dependiente del tiempo es capaz de predecir la zona de movimiento, el cual debería considerar cambios de densidad.

Nedderman (1995) considera que existe una zona de baja densidad (la cual se ha visto que ocurre en los modelos físicos) donde el modelo de difusión se cumple. El frente de esta zona se va expandiendo a medida que se va extrayendo material, por lo tanto las partículas comienzan el movimiento cuando esta zona llega. La velocidad del frente se estima considerando la configuración mostrada en Figura 3.2.

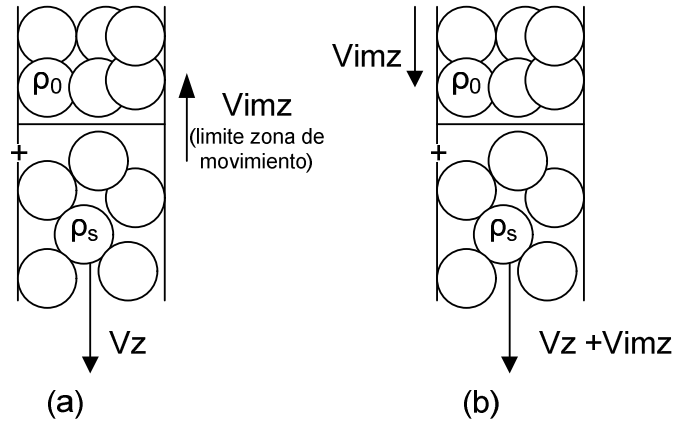


Fig. 3.2. Expansión de la zona de baja densidad.

En el esquema (a) se puede ver que sobre el límite de la zona de movimiento las partículas están inmóviles y a una densidad *inicial* ρ_0 , bajo el frente las partículas se mueven con la velocidad dado por el modelo cinemático y con densidad *menor* ρ_s ($\rho_0 > \rho_s$). La zona de movimiento se expande a una velocidad V_{imz} equivalente a la velocidad de la zona de flujo. Un observador moviéndose en el límite de la zona de movimiento ve las velocidades relativas dados por $V_z + V_{imz}$ como se muestra en la Figura 3.2.b. Luego, por conservación de masa se tiene que:

$$\rho_0 V_{imz} = \rho_s (V_z + V_{imz}) \quad (3.5)$$

Considerando que la densidad final es menor que la inicial por un término $\Delta\rho$ se tiene que:

$$\rho_0 = \rho_s - \Delta\rho \quad (3.6)$$

Reemplazando (3.6) en (3.5) se tiene que:

$$\begin{aligned} (\rho_s - \Delta\rho)V_{imz} &= \rho_s(V_z + V_{imz}) \\ -\Delta\rho V_{imz} &= \rho_s V_z \\ V_{imz} &= -\frac{\rho_s}{\Delta\rho} V_z \end{aligned} \quad (3.7)$$

Con lo cual se obtiene la velocidad de desplazamiento del frente de la zona de flujo (MZ). De este resultado, se puede ver que para tener una ecuación para el movimiento de las partículas (dependiente del tiempo) que considere la zona de movimiento necesariamente sería no-lineal, ya que la expansión del frente dependería de la velocidad calculada.

3.3 Coeficiente de Difusión

El coeficiente de difusión es el parámetro que influye en la tasa a la cual la velocidad en el punto de extracción se va propagando en la horizontal. Cómo el caudal debe mantenerse constante entre dos planos verticales influye también en como la velocidad vertical va disminuyendo en altura.

En el modelo propuesto el coeficiente de difusión se determinará cuantitativamente para la calibración del IEZ. La mayoría de los autores consideran que este coeficiente es constante. Sin embargo, Chen (1997) presenta un trabajo donde el coeficiente de difusión se hace variable con la altura, lo que le permite obtener una mejor concordancia con los datos experimentales de modelos en 2D publicados por Peters (1984). En el modelo propuesto, no se sabe a priori si D es constante y/o variable, lo cual se determinará de manera experimental mediante la comparación de los resultados del modelo y los experimentales. En la tabla 3.1 se presentan los coeficientes de difusión a utilizar.

Tabla 3.1: Tipos de Coeficientes usados en el modelo.

Tipo	Parámetros	Coeficiente de Difusión
Constante	D	$D=D$
Variable en altura	K, CC	$D=K(1+CC \cdot Z)$
con: $[D] = \text{mm}$; $[CC] = 1/\text{mm}$		

Un coeficiente de difusión constante da a entender que no existe influencia de la altura en el movimiento horizontal de las partículas. Un coeficiente de difusión variable (creciente o decreciente en altura) da cuenta de una mayor o menor facilidad de movimiento horizontal a medida que se sube por la columna. A priori esta definición en un modelo cinemático es sólo hipotético y deberá ser comparado con los resultados experimentales que permitan determinar cuál de los dos tipos de coeficiente (variable o constante) es más apropiado.

3.4 Plano de Falla

En el capítulo 2 se vio que los experimentos realizados por Castro (2007), en las cercanías del punto de extracción, las partículas sólo se mueven dentro de una zona finita en altura (tipo elipsoide), mientras que en su base presenta una geometría tipo cono definido por un ángulo de falla, ver figura 3.1. Este cono que limita el movimiento de las partículas en la base cercana al punto de extracción, depende de las condiciones mecánicas del material y ocurre para cada punto de extracción. Por lo tanto, para múltiples puntos el dominio del modelo corresponde a la unión de estos conos, existiendo una zona potencial entre puntos de extracción que el material queda inmóvil, lo cual se verifica en los experimentos.

Cuando existan efectos de pared por la construcción de zanjas recolectoras, por ejemplo, es necesario considerar el dominio como la intersección del cono de flujo de material con las paredes.

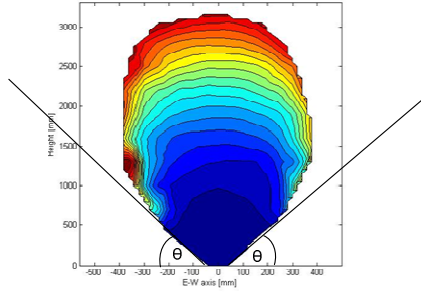


Fig. 3.1. Plano de falla encontrado en los experimentos de Castro (2007)

La condición de la figura 3.1 se puede imponer considerando que una partícula que se mueve por el plano tiene una dirección paralela a este. Por lo tanto:

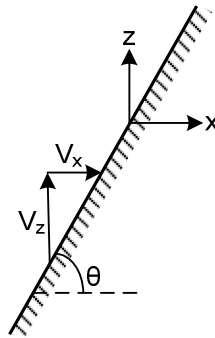


Fig. 3.2. Condición de borde en el plano de falla

Para 2D se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{V_z}{V_x} &= \tan\theta & (3.1) \\ V_x &= -D \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \Rightarrow \frac{\partial V_z}{\partial x} &= -\frac{V_z}{D \cdot \tan\theta} \end{aligned}$$

Con un razonamiento análogo se puede obtener la condición para 3D.

3.5 Condiciones de Borde

En el modelo propuesto se consideran tres condiciones de borde para cada punto de extracción:

- Zonas de no flujo: Cuando existe una pared de material o una pared sólida, el flujo de material sólo puede ocurrir paralelo a la superficie y por lo tanto no existe flujo en la dirección normal a ésta. Esta consideración es equivalente a plantear que no hay transferencia de masa perpendicular a la pared. Matemáticamente esta condición se puede escribir como:

$$\hat{n} \cdot \left(-D \frac{\partial V_z}{\partial x}, -D \frac{\partial V_z}{\partial y}, V_z \right) = 0 \quad 3.8$$

Donde:

\hat{n} : Vector normal a la superficie

V_x : Velocidad en el eje x

V_y : Velocidad en el eje y

V_z : Velocidad en el eje z

Para el caso 2D en una pared con ángulo θ como el de la figura 3.1, se tiene que:

$$\begin{aligned} \hat{n} &= (-\text{sen}\theta, \text{cos}\theta) \\ \hat{n} \cdot \left(-D \frac{\partial V_z}{\partial x}, V_z \right) &= 0 \\ \Rightarrow (-\text{sen}\theta, \text{cos}\theta) \cdot \left(V_z, -D \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \\ \Rightarrow V_z \text{cos}\theta &= -\text{sen}\theta \cdot D \cdot \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \Rightarrow \frac{\partial V_z}{\partial x} &= -\frac{V_z}{D \cdot \tan\theta} \end{aligned}$$

Lo cual es equivalente a la ecuación (3.1).

- Zona de flujo Convectivo: En la superficie se considera un flujo constante de material la cual se representa mediante la condición de flujo convectivo en la cara superior al cono. El flujo convectivo considera que la cara superior no tiene influencia y que siempre se está llenando con material. Matemáticamente esta condición se puede expresar como:

$$\hat{n} \cdot \left(D \frac{\partial V_z}{\partial x}, -D \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) = 0 \quad 3.9$$

Donde:

\hat{n} : Vector normal a la superficie

V_x : Velocidad en el eje x

V_y : Velocidad en el eje y

- Punto de extracción: En la base de cada cono existe un punto de extracción que cumple la función de extraer material. Esta condición se representa mediante un condición de flujo constante que matemáticamente se expresa como:

$$V_z = \frac{Q}{A_{dp}} \quad \forall x, y \in A; z = 0 \quad 3.10$$

Donde:

Q : Caudal extraído.

A_{dp} : Área del punto de extracción

V_z : Velocidad en el eje z

A : Punto de extracción

En los experimentos y en la práctica se mide la masa extraída en un periodo de tiempo, por lo tanto para obtener el caudal extraído se utiliza:

$$Q = \frac{M_{extraida}}{\rho_{aparente}}$$

En las figuras 3.3 y 3.4 se aprecian ejemplos de dominios a utilizar para resolver la ecuación (3.4).

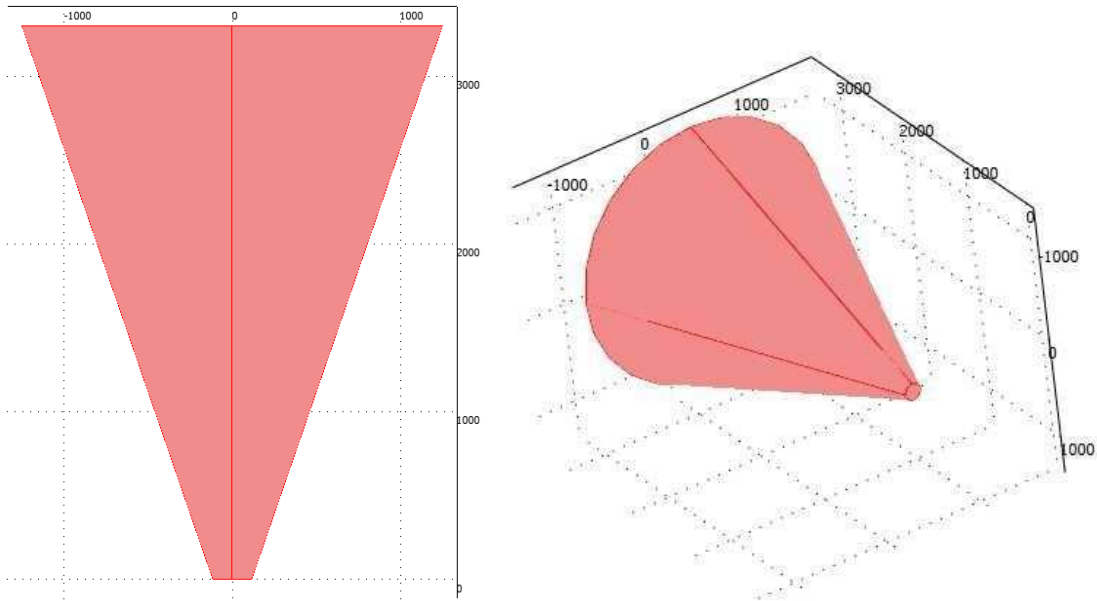


Fig. 3.3. Ejemplo del Dominio de solución para un punto de extracción, en la primera figura se ve como el dominio se define como un cono para representar de mejor manera el plano de falla, en la segunda se observa el punto de extracción.

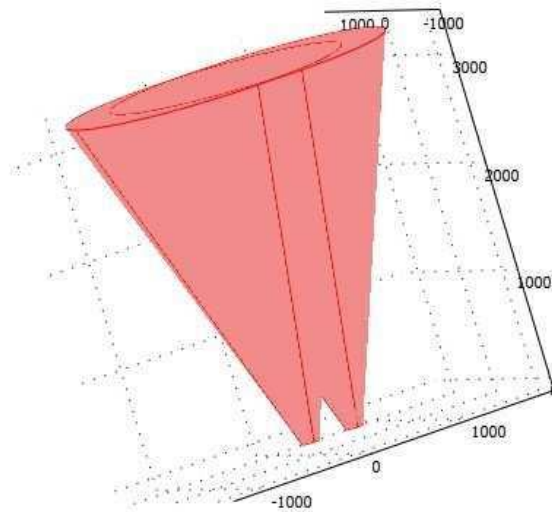


Fig. 3.4. Dominio de Solución para dos puntos de extracción. Es posible ver que el dominio es la unión de los distintos conos pertenecientes a cada punto de extracción, entre ellos se ve una zona donde no existe flujo.

En las figuras 3.5, 3.6 y 3.7 se observa las distintas zonas donde son impuestas las condiciones de borde antes comentadas

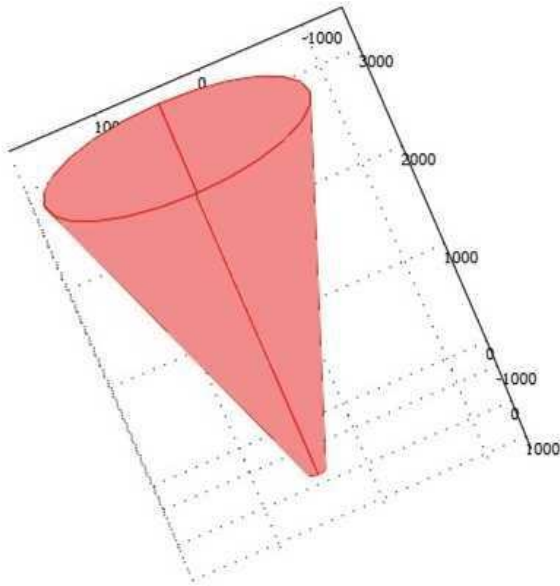


Fig. 3.5. Condición de No-Flujo en paredes, para simular el plano de falla observado en experimentos.

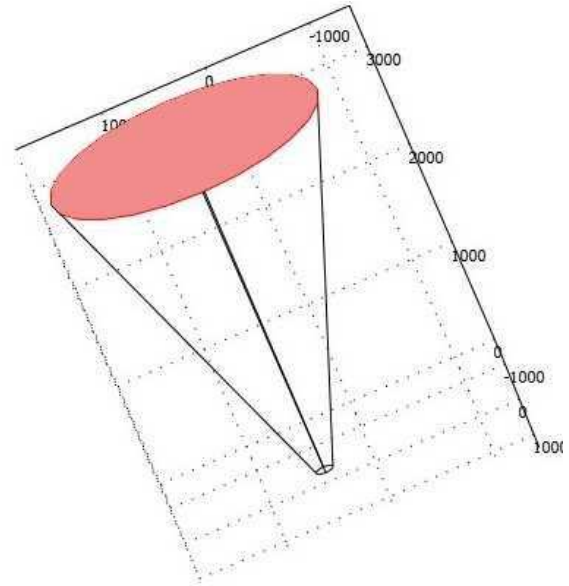


Fig. 3.6. Condición de flujo advectivo en la zona superior para simular un relleno constante de material.

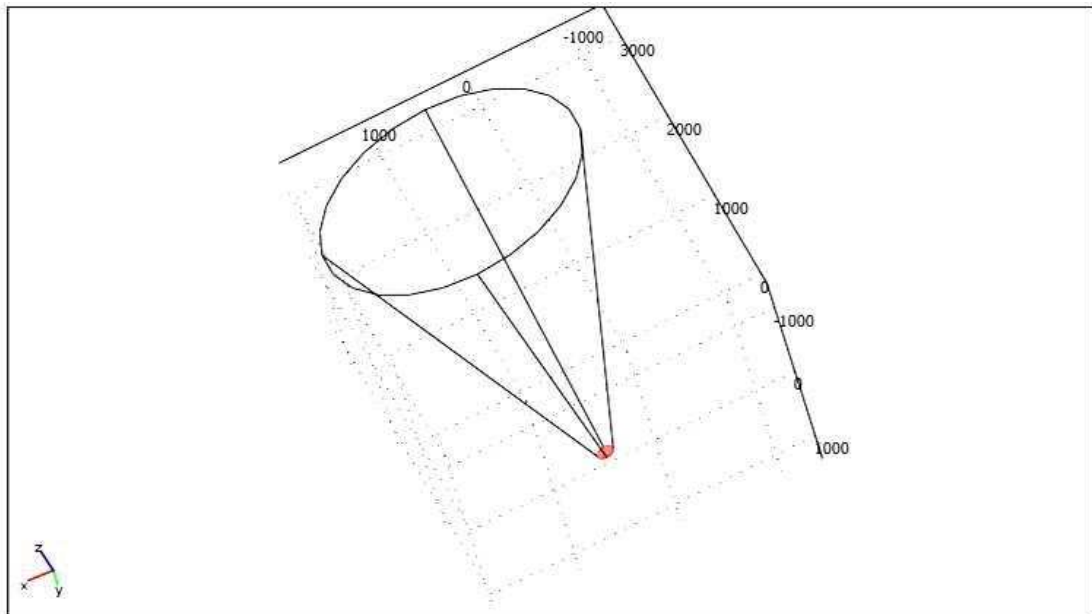


Fig. 3.7. Condiciones iniciales dadas por el volumen extraído por unidad de tiempo.

3.6 Solución Numérica

La ecuación (3.4), tiene una solución analítica para el caso de un una extracción puntual en un dominio semi-infinito, con coeficiente de difusión constante (Crank). En la revisión bibliográfica es posible ver que varios autores han obtenido la geometría de las zonas de flujo con soluciones cerradas.

Sin embargo, debido a las condiciones de borde consideradas en la presente memoria, la solución a la ecuación (3.4) debe obtenerse numéricamente.

3.7 Integración de la Velocidad

El modelo numérico entrega las velocidades en cada punto del dominio. El sentido de las velocidades depende del signo que tenga la velocidad dada en las condiciones iniciales, si se utiliza una velocidad negativa, las líneas de flujo se dirigen hacia el punto de extracción. Si el signo es positivo las líneas de flujo tienden a alejarse del punto de extracción. Para ambos casos la magnitud y de la velocidad y la línea de flujo es la misma. Por lo tanto solo cambiando el signo se obtiene uno u otro caso.

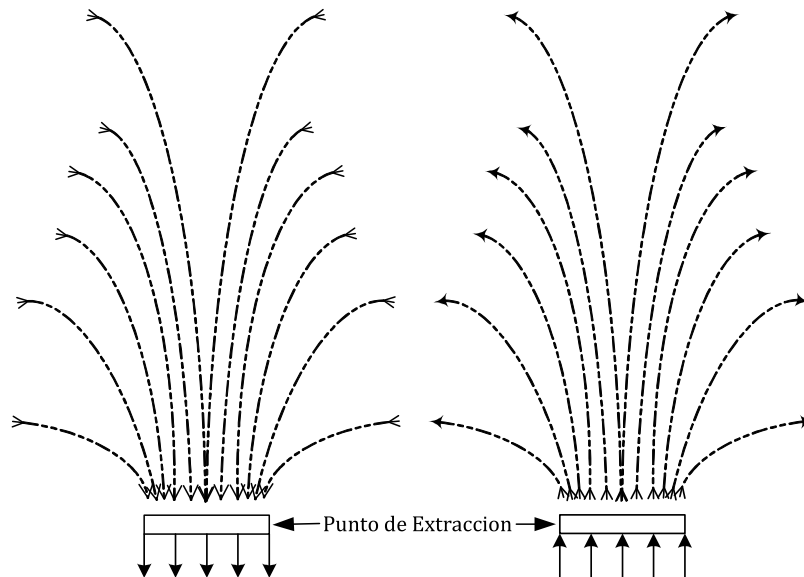


Fig. 3.8. Líneas de Flujo del campo de velocidades, basado en la condición de borde

Del campo de velocidades que se obtienen es posible calcular el tiempo de residencia de las partículas, con lo cual es posible calcular las geometrías de las zonas de flujo. Este tiempo se calcula integrando la velocidad a través de la línea de flujo y obtener el tiempo que demora una partícula en recorrerla.

El tiempo de residencia de una partícula en las coordenadas iniciales (x',y',z') corresponde al tiempo que demora en llegar a las velocidades entregadas por el modelo a $(x'',y'',0)$, es decir, al punto de extracción. Análogamente si se considera que una partícula comienza su trayectoria en $(x'',y'',0)$, para el mismo tiempo de residencia antes calculado se llegaría a la posición (x',y',z') . Así se tiene que es análogo considerar, en términos de cálculo de tiempo de residencia, que una partícula entra por el punto de extracción hacia el dominio, que una partícula salga del dominio por el punto de extracción.

El tiempo de residencia para cada partícula se relaciona con la masa extraída a través del caudal y la densidad del material en la forma:

$$M_{extraida} = \rho \cdot Q \cdot t_{residencia} \quad (3.11)$$

3.8 Obtención del EZ y MZ

Lo que se busca con el modelo es reproducir las zonas que caracterizan el flujo gravitacional desde el punto de vista minero. Debido a que el modelo presentado solo calcula el campo de velocidades de una partícula en una posición dada, es necesario realizar los cálculos necesarios para determinar las geometrías de las zonas de flujo.

3.8.1 Zona de Extracción

Como se mencionó en capítulos anteriores la zona de extracción se refiere al volumen insitu en $t=0$ donde se encontraban una masa de partículas antes de ser extraídas en un periodo posterior t (ver Fig. 3.9). Para calcular las zonas de extracción se obtiene la zona encerrada por las coordenadas donde las partículas tienen el mismo tiempo de residencia, es decir se obtiene las coordenadas de las últimas partículas que saldrían para ese tiempo dado.

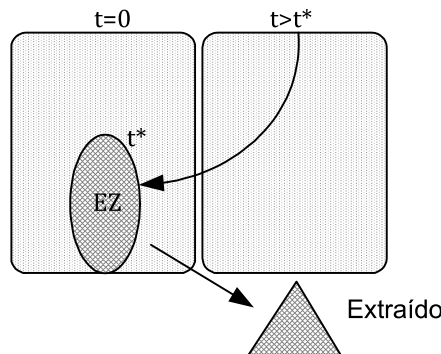


Fig. 3.9. Cálculo del EZ con el campo de velocidades. El contorno de la EZ es alcanzado en tiempo t^* .

3.8.2 Zona de Movimiento

La zonas de movimiento se obtiene de la misma forma que la zona de extracción pero utilizando la ecuación (3.7) aplicado para todo el campo de velocidades. Cuando la zona de movimiento llega a la superficie (parte superior del modelo), se considera que se mantiene a esa altura y sólo crece en ancho para ser consecuente con la condición de llenado de material.

3.9 Conclusiones

El modelo propuesto el flujo gravitacional de material granular, deriva de un supuesto físico sobre la tendencia (o probabilidad) del movimiento de las partículas, lo que resulta en una ecuación que es equivalente al problema de difusión de masa en estado permanente con convección en el eje vertical. La solución numérica de la ecuación de difusión es conocida para un número simplificado de casos.

El modelo propuesto considera condiciones de borde e iniciales que permitirían representar de manera más precisa el flujo gravitacional de material quebrado, la cual requiere la implementación en un modelo numérico de flujo gravitacional.

En el próximo capítulo se presentan la implementación del modelo propuesto y resultados preliminares utilizando varios puntos de extracción.

CAPÍTULO 4

Implementación del Modelo

En el capítulo 3 se definió un modelo numérico para predecir el flujo gravitacional de medios granulares. Este modelo se basaba en una hipótesis sobre la tendencia del movimiento, con lo cual es posible derivar una ecuación diferencial del tipo difusión. Se concluye que debido a las condiciones de borde especiales que hay que considerar en este fenómeno, se hace necesario resolver numéricamente la ecuación. También hay que notar que al resolver el modelo sólo se obtiene el campo de velocidades de las partículas, por lo tanto se hace necesario integrar este campo de velocidades para obtener los datos relevantes para una aplicación minera.

Este capítulo presenta la implementación del modelo descrito y se divide en dos secciones. La primera sección se refiere a la resolución de las ecuaciones que describen el modelo. Una basada en la implementación en MATLAB por el método de volúmenes finitos y la otra la implementación utilizando el software comercial COMSOL. La segunda sección describe los algoritmos necesarios para procesar los resultados provenientes de la solución numérica.

4.1 Método de Volúmenes Finitos

Los volúmenes finitos es un método numérico de discretización que permite resolver ecuaciones diferenciales. Su principal cualidad es que permite satisfacer de forma exacta la conservación de masa independientemente de la malla usada.

4.1.1 Base Teórica

En el método primero se discretiza el dominio en una malla con nodos en sus vértices. Para cada nodo de la malla se genera un volumen de control tal que no se traslape con los del nodo vecino. Debido a que la ecuación diferencial a resolver se cumple en todo el dominio, también se cumple para este volumen de control. Integrando la ecuación sobre este volumen, se obtiene una discretización para el valor en el nodo, basado en el de sus vecinos. En las siguientes figuras se muestran ejemplos de volúmenes de control en torno a nodos para los casos en una, dos y tres dimensiones.

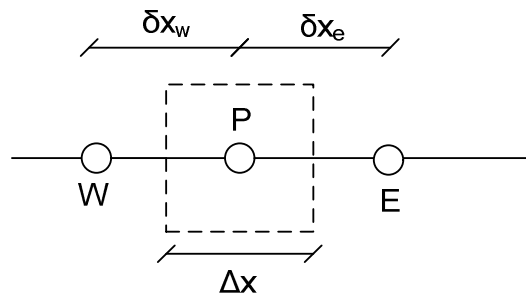


Fig. 4.1 Ejemplo de Volumen finito alrededor de un nodo de la malla caso 1D

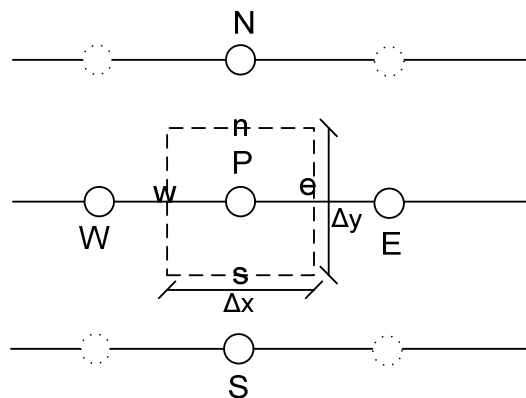


Fig. 4.2. Ejemplo de Volumen finito alrededor de un nodo de la malla caso 2D

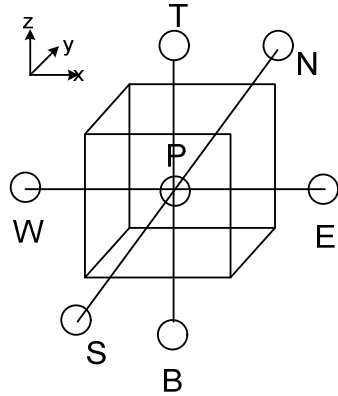


Fig. 4.3. Ejemplo de Volumen finito alrededor de un nodo de la malla caso 3D

También se puede ver la notación utilizada normalmente en este método, donde ‘W’ (West en inglés) se refiere al nodo a la izquierda del nodo analizado (P) y ‘w’ para el límite del volumen de control a la izquierda (ver Fig. 4.2).

4.1.2 Discretización en volúmenes finitos.

Se definen las velocidades en x, y, z como U, V, W. Por simplicidad, se considera una malla rectangular de discretización. La ecuación a resolver es:

$$D \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial W}{\partial z} = D \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \quad (4.1)$$

Esta ecuación es equivalente a la de difusión de masa en los eje ‘x’ e ‘y’ y en el tiempo cambiando ‘t’ por la vertical (eje ‘z’). Al integrar la ecuación (4.1) se considera un balance de masa en el volumen de control donde se iguala los flujos de entrada con los flujos de salida.

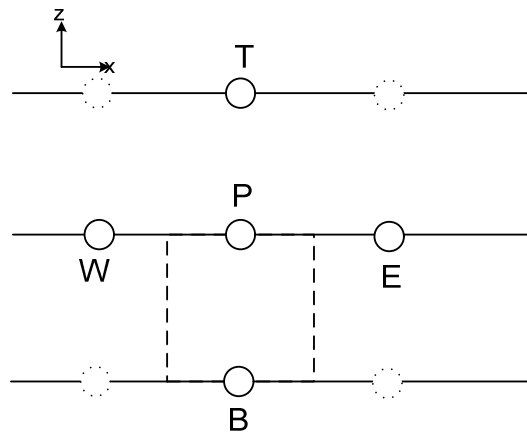


Fig. 4.4. Volumen de control utilizado para discretizar el problema, es equivalente para el plano zy

En la Figura 4.4 se muestra el volumen de control que se utiliza, alrededor de un nodo (P) de la malla. Integrando la ecuación (4.1) sobre el volumen de control se tiene que:

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial W}{\partial z} dV &= \int \left(D \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) dV \\ \Leftrightarrow \iiint \frac{\partial W}{\partial z} dx dy dz &= \iiint D \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dx dy dz + \iiint D \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} dx dy dz \end{aligned} \quad (4.2)$$

Suponiendo que D no varía en la dirección x ni en la dirección y:

$$\Leftrightarrow \iiint \frac{\partial W}{\partial z} dx dy dz = \iiint \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial W}{\partial x} \right) dx dy dz + \iiint \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial W}{\partial y} \right) dx dy dz$$

Integrando sobre la frontera del volumen de control:

$$\int_b^t \int_s^n \int_w^e \frac{\partial W}{\partial z} dx dy dz = \int_b^t \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial W}{\partial x} \right) dx dy dz + \int_b^t \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial W}{\partial y} \right) dx dy dz$$

Considerando que las derivadas no cambian en las fronteras, el lado derecho queda:

$$\left[\left(D \frac{\partial W}{\partial x} \right)^e - \left(D \frac{\partial W}{\partial x} \right)^w \right] \Delta y \Delta z + \left[\left(D \frac{\partial W}{\partial y} \right)^n - \left(D \frac{\partial W}{\partial y} \right)^s \right] \Delta x \Delta z$$

Para evaluar las derivadas es necesario hacer un supuesto de como varia W en el volumen de control. El supuesto más simple y que cumple con las 4 reglas de Patankar (criterio para que la aproximación sea válida) es una variación lineal de esta, entonces las derivadas quedan definidas como:

$$\begin{aligned} \left(D \frac{\partial W}{\partial x} \right)^w &= D \frac{W^p - W_z^w}{\delta x} ; \left(D \frac{\partial W}{\partial x} \right)^e = D \frac{W^e - W^p}{\delta x} \\ \left(D \frac{\partial W}{\partial y} \right)^s &= D \frac{W^p - W^s}{\delta y} ; \left(D \frac{\partial W}{\partial y} \right)^n = D \frac{W^n - W^p}{\delta y} \end{aligned}$$

Debido a que MATLAB tiene limitaciones de memoria en cuanto al tamaño de matrices y número de elementos y además por simplicidad, se considera un esquema 'explícito' para la coordenada 'z', esto es, que el valor en un nodo ubicado en el nivel $z+\Delta z$ depende sólo de valores en nivel z .

Dado lo anterior el lado izquierdo de la ecuación (4.2) queda:

$$\int_b^t \int_s^n \int_w^e \frac{\partial W_z}{\partial z} dx dy dz = (W_{z+\Delta z} - W_z) \Delta x \Delta y$$

No se comete gran error suponiendo que las derivadas en las fronteras en 'x' e 'y' dependen solamente del valor anterior. Por lo tanto la discretización queda:

$$\left(\frac{W_{z+\Delta z}^p - W_z^p}{\Delta z} \right) \Delta x \Delta y = D_z \left[\frac{W_z^e - W_z^p}{\delta x} - \frac{W_z^p - W_z^w}{\delta x} \right] \Delta y + D_z \left[\frac{W_z^n - W_z^p}{\delta y} - D_z \frac{W_z^p - W_z^s}{\delta y} \right] \Delta x$$

Reordenando los términos y considerando una malla equispaciada ($\delta x = \Delta x$, ídem para los otros):

$$a_p \cdot W_{z+\Delta z}^p = a_x (W_z^e + W_z^w) + a_y (W_z^n + W_z^s) + (-2a_x - 2a_y + a_p) W_z^p \quad (4.3)$$

Con:

$$a_p = \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta z} ; a_x = \frac{D_z \Delta y}{\Delta x} ; a_y = \frac{D_z \Delta x}{\Delta y}$$

Como se menciono antes, este método es explícito y por lo tanto debe cumplir con la siguiente condición para que sea estable:

$$\Delta z < \frac{1}{2D_z} \frac{\Delta y \Delta x}{(\Delta x + \Delta y)} \quad (4.4)$$

Las velocidades en x e y se resuelven con W calculado en el paso anterior, mediante un esquema centrado de diferencias finitas.

$$U_{xyz} = -D \frac{\partial W}{\partial x} = -D \frac{W_{x+\Delta x} y z - W_{x-\Delta x} y z}{2\Delta x}$$

$$V_{xyz} = -D \frac{\partial W}{\partial y} = -D \frac{W_{x y+\Delta y} z - W_{x y-\Delta y} z}{2\Delta y}$$

4.1.3 Condición de Borde

Durante la realización del modelo numérico se notó la necesidad de reproducir la condición de borde debido al plano de falla, como se explica en el punto 3.2 del Capítulo 3. Debido que hasta ese momento el modelo propuesto consideraba una malla cuadrada, se hace necesario adaptarlo. Cabe destacar que para el caso en 2D, la condición de borde corresponde a una situación de no flujo es una diagonal en una diagonal con un ángulo cualquiera con la vertical y en 3D es un cono.

El método de volúmenes finitos que se había realizado consideraba el uso de volúmenes de control cuadrados, y se postularon varias alternativas para reproducir la condición de borde.

- Una condición de borde aserrada: Considerando una condición de borde de no-flujo adyacente al nodo más cercano a la pared. Como se aprecia en la Fig. 4.5, se considera que existe una pared vertical para cada nodo cercano a la condición de borde, debido a esto se consigue una forma aserrada.

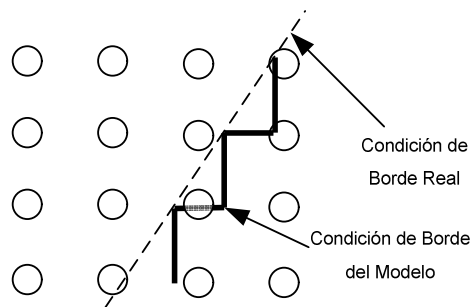


Fig. 4.5. Condición de Borde Aserrada

Esta alternativa presentaba el problema de no conservación de la masa dentro del dominio de solución, debido a que en los bordes no se cumplía a cabalidad el balance de masa, ya que el no flujo se impone sobre los nodos, que no siempre concordaban con los nodos.

- Malla no equidistante. Una malla de tamaño variable que se fuese más pequeña a medida que se acercara a la condición de borde. El problema con este enfoque fue que igual hay que realizar la alternativa anterior para imponer el no flujo de partículas.
- Volumen de Control Trapecial: La solución se encontró al usar un volumen de control trapecial en el nodo cercano a la condición de borde, como se muestra en la figura 4.6.

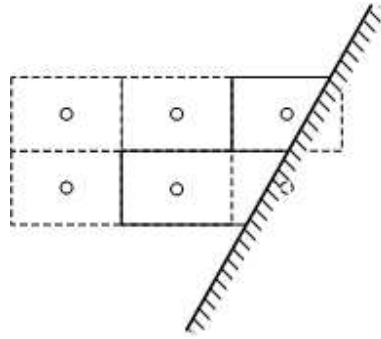


Fig. 4.6. Volúmenes de Control en las cercanías de la condición de borde.

En las cercanías de la pared se tiene entonces (Figura 4.7) que:

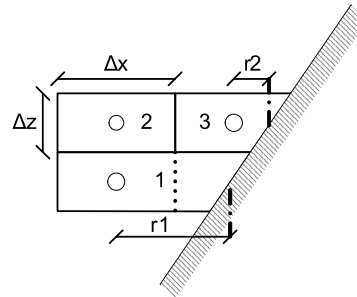


Fig. 4.7. Volúmenes de Control considerados en la pared

Haciendo un balance de masa en el volumen de control 2 se tiene que:

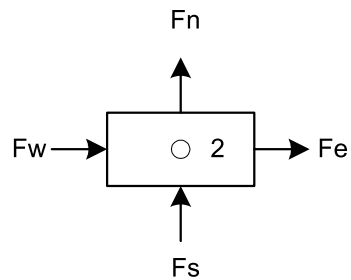


Fig. 4.8. Balance de masa sobre el volumen de control 2

Con F_w y F_e el flujo debido a la difusión y F_s , F_n el flujo debido a la advección.

Sobre el volumen de control 3 se tiene que:

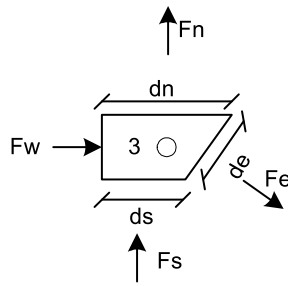


Fig. 4.9. Balance de masa sobre el flujo de control 3.

F_w es igual a F_e del volumen de control 2. F_e es igual a cero (Flujo cero) y por lo tanto se elimina, es necesario conocer los valores de dn y ds .

El valor del nodo es el representativo de todo el volumen de control y no del valor exacto que existe en la condición de borde. Sin embargo, al ser la malla más pequeña se acercaría a este valor.

Cuando el volumen de control es un triángulo, se cumple la condición de borde descrita en el capítulo 3:

$$F_w \cdot \Delta z - F_n \cdot dn = 0$$

Donde:

$$F_w = -D \frac{\partial W}{\partial x}$$

$$F_n = W$$

$$\Rightarrow W \cdot dn = -D \frac{\partial W}{\partial x} \Delta z$$

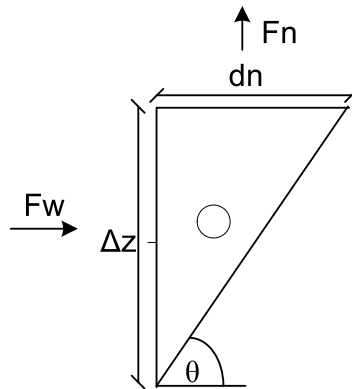


Fig. 4.10. Volumen de Control Triangular

Debido a la geometría dn vale:

$$dn = \Delta z \tan \theta$$

Entonces:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = - \frac{W \cdot \tan \theta}{D}$$

Que corresponde a la condición de borde que considera que las partículas se mueven a lo largo del plano de falla y que se determino en el punto 3.4 del capítulo 3.

Para el caso 3D es más complejo obtener los volúmenes de control en la frontera ya que hay que considerar fracciones del manto del cono para las caras del volumen de control. Además se deben calcular las caras laterales que no son necesariamente cuadradas.

Debido a que el tiempo para la realización de este trabajo era limitado y la realización del modelo en 3D con condición de borde era engorrosa, se tomó la decisión de utilizar un software comercial por elementos finitos para la resolución de las ecuaciones (4.1) que describen el modelo.

4.2 Implementación en COMSOL

COMSOL Multiphysics® es un software que permite modelar y resolver problemas científicos o de ingeniería que utilicen ecuaciones diferenciales parciales. Este permite fácilmente extender los modelos convencionales de un tipo de fenómeno físico en modelos multifísicos que se resuelven con ecuaciones acopladas, realizar análisis estacionarios y transientes, lineales y no-lineales, entre otros atributos.

Para resolver las ecuaciones diferenciales parciales, COMSOL utiliza el método de elementos finitos. El software también permite generar mallas libres que se adapten a cualquier geometría del problema. Además este puede ser ejecutado desde MATLAB lo que presenta una ventaja notable para el procesamiento de los resultados. Para el problema analizado en esta memoria se utiliza el módulo de Transferencia de Calor, ya que las ecuaciones son equivalentes.

4.2.1 Introducción a elementos finitos

El método de elementos finitos es un método que permite resolver ecuaciones diferenciales parciales, realizando aproximaciones discretas. El método de elementos finitos (MEF) particiona el dominio en pequeñas formas simples (ej.: líneas, cuadrados, triángulos), llamados elementos de la malla. Estos elementos se ensamblan tal que permiten representar cualquier geometría que tenga el dominio.

Sea la función diferencial:

$$L(u) - f = 0 \quad (4.5)$$

Donde:

L: es un operador lineal

f: una función cualquiera que fuerza el sistema

Se aproximan u de la forma:

$$u' = \sum_i^N u_i N_i \quad (4.6)$$

Donde N_i son funciones linealmente independientes definidas sobre el dominio de solución.

Para obtener los valores de u_i que satisfagan la ecuación (4.4), se pueden utilizar el método variacionales (Rayleigh-Ritz) o de residuos ponderados. A continuación se hace una breve explicación de este último.

Debido a que u' es una aproximación conlleva a un error, es decir:

$$L(u') - f = \epsilon \quad (4.7)$$

Donde ϵ , es el valor residual o error debido a la aproximación. El método de residuos ponderados intenta obtener los valores de u_i , tal que el residuo sea mínimo. Esto se consigue haciendo que la integral ponderada sea nula para N funciones de ponderación:, ie:

$$\int_R W_I \epsilon dR = \int_R W_I (L(\tilde{u}) - f) dR = 0 \quad \forall I = 1..N \quad (4.8)$$

Elegidas las funciones de ponderación y (4.2) con (4.5) permiten obtener N ecuaciones simultáneas, que permiten resolver las N incógnitas u_i .

4.2.2 Resolviendo el modelo en COMSOL

Como se menciona antes, se utiliza el módulo de 'Heat Transfer -> General Heat Transfer', que se refiere a la transferencia de calor, de COMSOL en 3D y en modo estacionario para resolver el modelo propuesto. Este modulo resuelve la siguiente ecuación general:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (-k \nabla T) &= Q - \rho C_p u \cdot \nabla T \\ \Rightarrow k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} &= \rho C_p \left(u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) - Q \end{aligned} \quad (4.9)$$

Considerando que:

$$\begin{aligned} Q &= 0 ; C_p = 1 ; \rho = 1 \\ k_x &= k_y = D ; k_z = 0 \\ u &= (0, 0, 1) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Se llega a:

$$D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (4.11)$$

Que claramente es la ecuación(4.1) del modelo propuesto, considerando $T=W$.

El vector de flujo conductivo de calor se define como:

$$J_{\text{conductor}} = -k_x \frac{\partial T}{\partial x} \hat{x} - k_y \frac{\partial T}{\partial y} \hat{y} \quad (4.12)$$

Por lo tanto el valor del flujo conductivo en la dirección x, es equivalente a obtener las velocidades en la dirección x, equivalente para y mientras que la velocidad en Z corresponde a T (ver definición de velocidad en x e y en el capítulo 3).

4.2.3 Definición de la Geometría del dominio

COMSOL Multiphysics permite generar dominios con geometrías cualesquiera, para esto el software presenta una interface en la cual se pueden insertar diferentes formas geométricas y unir las para formar el dominio deseado. Como se explico en el capítulo 3 la geometría básica para el modelo analizado es un cono. Esta forma viene incluida por defecto en COMSOL así que su generación es relativamente fácil como se muestra en la Figura 4.11.

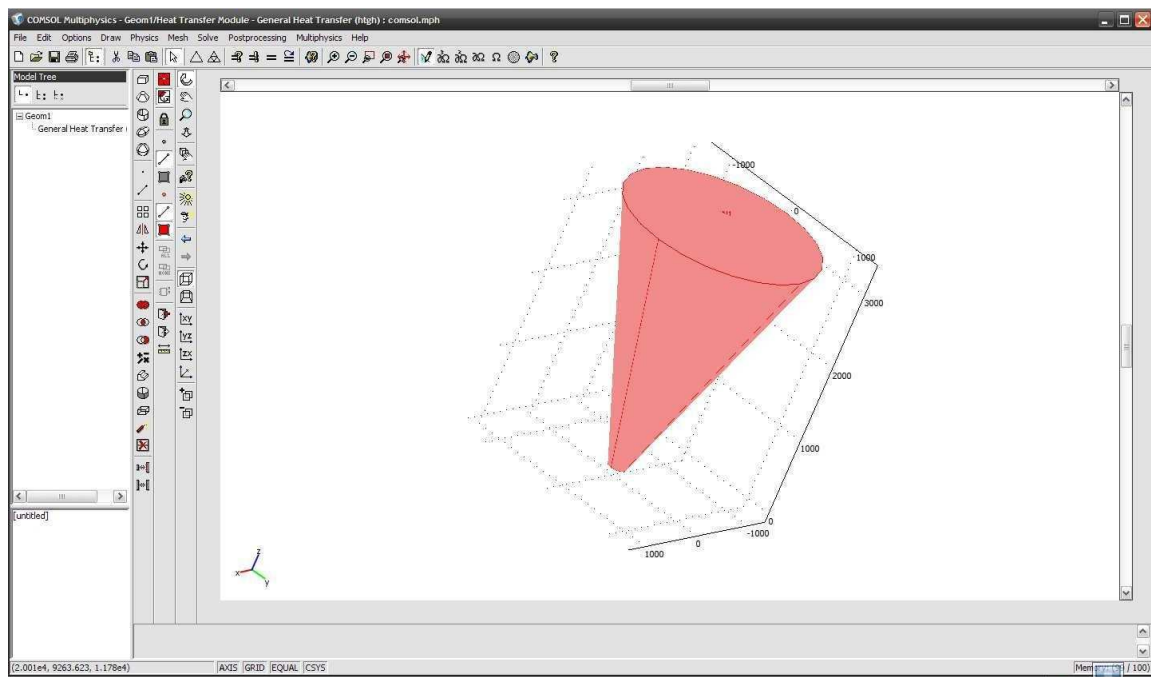


Fig. 4.11. Interface de COMSOL mostrando cono para condición de borde.

4.2.4 Parametros del Modelo

El menú Physics ->Subdomain Settings, COMSOL permite definir los parámetros del modelo, como el coeficiente de difusión, C_p y ρ .

4.2.5 Condiciones de Borde

COMSOL permite imponer en las caras de las figuras geométricas algunas de estas tres condiciones de borde (Menu Physics -> Boundary Settings):

- Zonas de no flujo: No existe flujo a la normal en la condición de borde, esta condición permite la modelar una pared o plano de falla.

$$\hat{n} \cdot \left(V_z, -D \frac{\partial W}{\partial x}, -D \frac{\partial W}{\partial y} \right) = 0 \quad 4.1$$

Donde:

\hat{n} : Vector normal a la superficie

W : Velocidad en el eje z

- Zona de flujo Convectivo: Condición de borde que considera que no existe difusión en este borde, es utilizada en el modelo para simular un llenado con material.

$$\hat{n} \cdot \left(D \frac{\partial W}{\partial x}, -D \frac{\partial W}{\partial y} \right) = 0 \quad 4.2$$

Donde:

\hat{n} : Vector normal a la superficie

W : Velocidad en el eje z

- Zona de flujo constante a un valor dado: Permite imponer un valor en la condición de borde. Esta es utilizada para simular el punto de extracción donde uno se da una velocidad inicial.

4.2.6 Velocidad del Modelo

En la figura 4.12 se puede apreciar el tiempo requerido por COMSOL para resolver las ecuaciones del modelo para en función de la fineza de la malla utilizada. El equipo utilizado para la resolución del modelo es un computador con un procesador Intel Pentium Core Duo 2 de 2.0 Ghz con 3.0 GB de Memoria. El modelo se corrió una vez antes de tomar los tiempos para que no afectara la lectura del disco duro a la memoria.

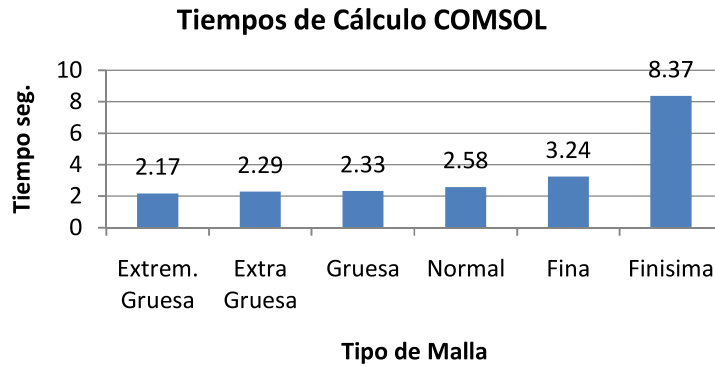


Fig. 4.12. Tiempos de resolución del modelo para un punto de extracción

4.2.7 Utilización de Resultados de COMSOL

COMSOL cuenta con una librería que se puede utilizar en MATLAB, la cual permite cambiar parámetros del modelo a resolver y obtener la solución numérica para luego ser analizada.

Se encontró que la utilización de la librería de Comsol para obtener las velocidades en tiempo real, es decir, coordenada por coordenada al momento de calcular las zonas de flujo era muy lento. Por lo tanto se decidió obtener todo el campo de velocidades de manera simultánea para el dominio y guardarlo en un arreglo para futuro uso, los tiempos de esto son:

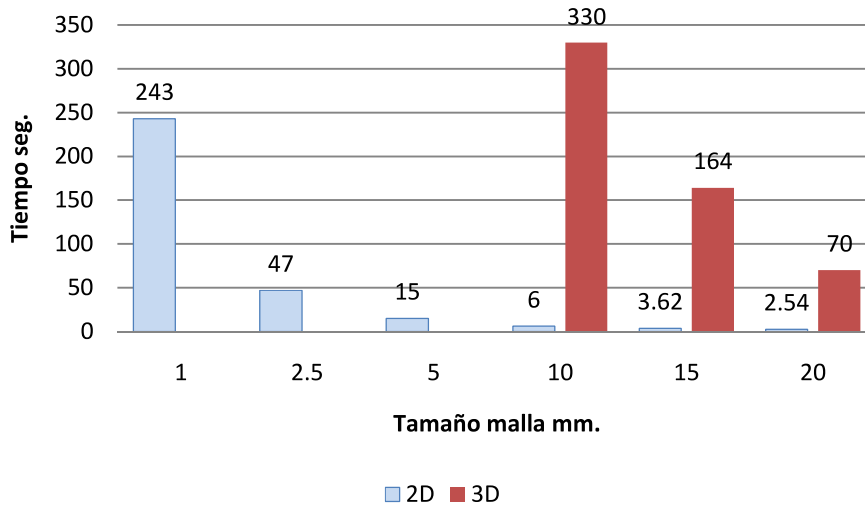


Fig. 4.13. Tiempo para extraer los datos de Comsol a MATLAB

4.3 Procesamiento de Resultados

Como se menciona antes, la resolución de las ecuaciones (4.1), a través de cualquier método numérico sólo entrega el campo de velocidades de las partículas. Es necesario hacer un procesamiento de estos datos para obtener resultados comparables con los experimentales.

Para ello se realizaron subrutinas que permiten obtener los siguientes datos del modelo numérico:

- Altura y ancho del EZ respecto a la masa extraída.
- Altura y ancho del MZ respecto a la masa extraída.
- Geometría del EZ respecto a la masa extraída.
- Geometría del MZ respecto a la masa extraída.
- Posición de marcadores luego de extraer una masa específica.

4.3.1 Integración de las velocidades

El cálculo de las líneas de flujo se realiza haciendo el rastreo de un ‘vacío’ que entra por el punto de extracción. Este rastreo consiste en obtener los vectores de velocidad de la partícula en su posición, para luego calcular su siguiente posición dado un paso de tiempo.

Para calcular las velocidades de una partícula en un punto cualquiera del dominio se realiza una triponderación con las velocidades en x, y, z, como indica en Fig. 4.14:

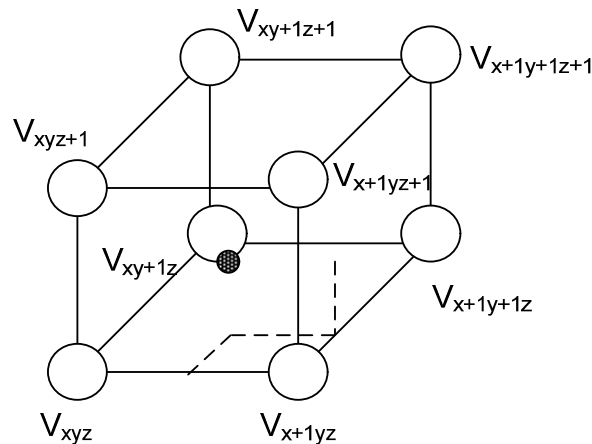


Fig. 4.14. Se realiza una triponderación basado en la distancia a cada nodo para los tres ejes.

La velocidad de la partícula se depende de su distancia a cada nodo respectivamente.

4.3.2 Obtención del EZ y MZ

En el capítulo 3 se indicó cómo obtener el IEZ e IMZ. En esta sección se abordara el algoritmo utilizado para obtenerlo. Se menciona que el contorno del EZ a una masa extraída es igual a la posición original de las últimas partículas que salen por el punto de extracción a esa masa.

La obtención del EZ o MZ es la base para conseguir los datos relevantes con el fin de calibrar el modelo con los datos experimentales. El algoritmo para obtener un contorno del EZ o MZ, se detalla en el diagrama de flujo de la Fig. 4.15.

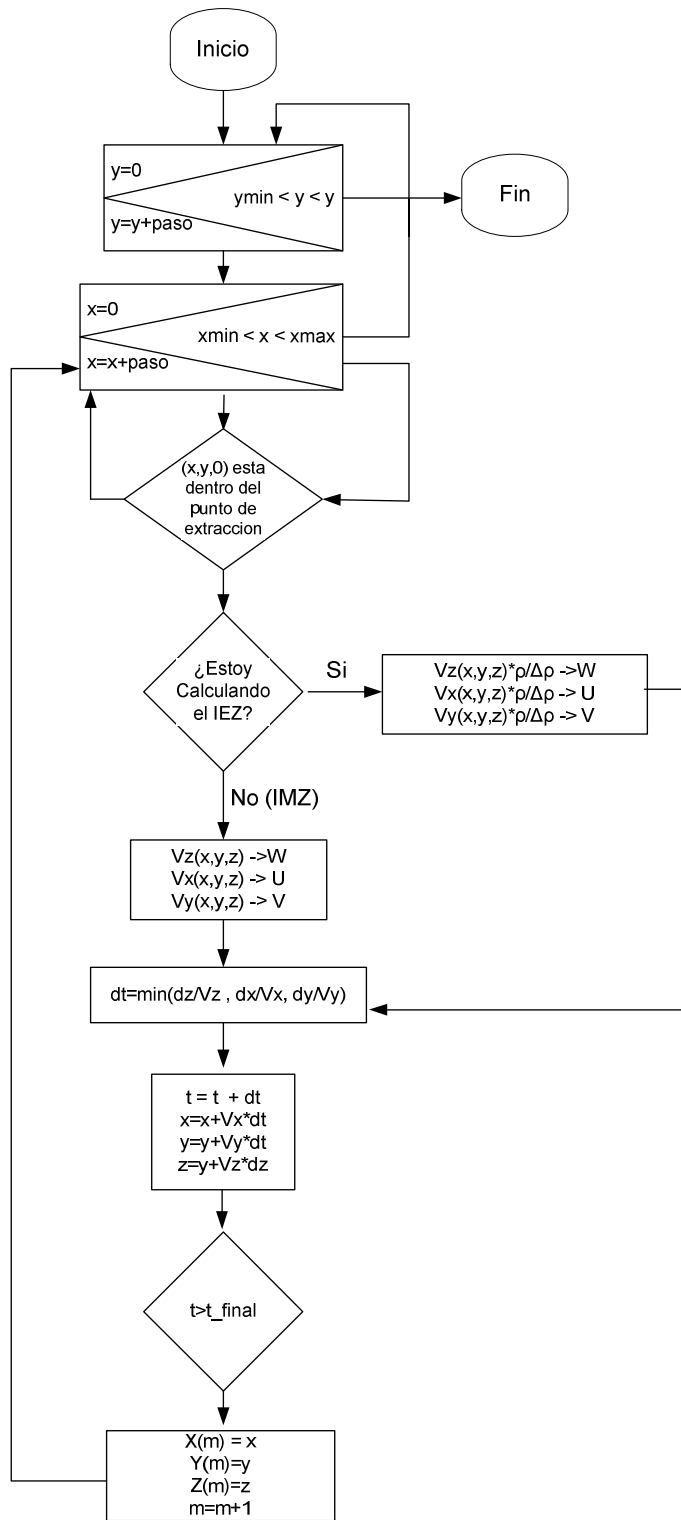


Fig. 4.15. Diagrama de Flujo del Algoritmo para el Cálculo del EZ o MZ.

Durante la realización del trabajo se crearon algoritmos simplificados que permitían obtener datos relevantes sin la necesidad de calcular toda la zona de flujo y así lograr la calibración y validación en un tiempo menor. Esto se basaba en que la mayoría de los modelos físicos eran simétricos con respecto al plano $y = 0$ y la velocidad en y en este plano es siempre nula.

A continuación se detallan los tiempos para obtener una zona de flujo (MZ o EZ) de un punto de extracción.

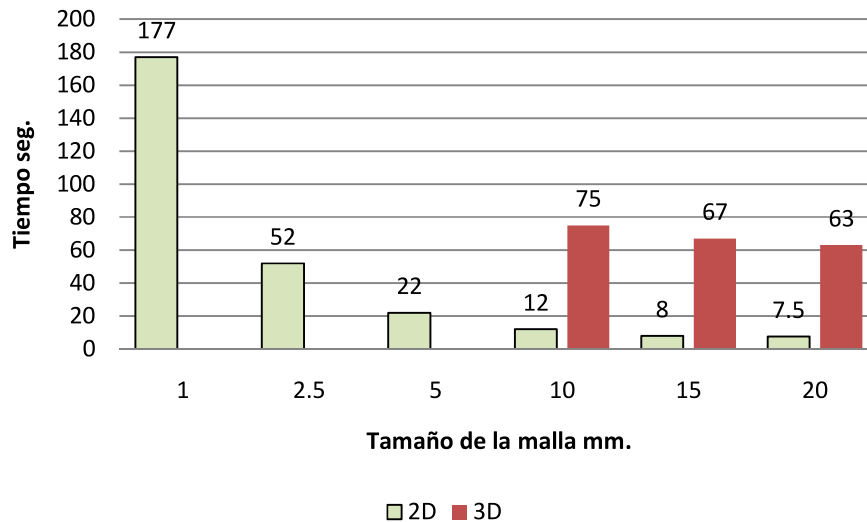


Fig. 4.16. Tiempos para obtener alguna zona de flujo.

4.3.3 Extracciones alternadas y Simultáneas

Melo et al. (2007) notan que el modelo cinemático, debido a su linealidad, hace posible resolver sistemas con extracción simultánea (extrayendo desde dos puntos al mismo tiempo) por el principio de superposición. Pero indican que la superposición no es válida cuando existe extracción alternada.

En los experimentos de Castro (2007) se realizaron con extracción alternada de un punto con otro, pero en la calibración se utilizó una extracción simultánea, debido a que ésta es equivalente a la otra cuando la extracción por punto es pequeña.

A modo de recomendación y desarrollo futuro se implemento un procedimiento para incorporar extracción alternada al modelo propuesto, este es parecido al procedimiento visto en la sección 4.3.2. Recordar que el contorno de una zona corresponde a las partículas que salen por el punto de extracción en un tiempo t .

Sean 2 puntos de extracción con campos de velocidad para el caso aislado V_1 y V_2 , y siendo m , la masa a extraer por punto de extracción, y M la masa total a extraer.

- 1) Se utiliza el procedimiento detallado en Fig. 4.15, pero con algunas variaciones.
- 2) Se ingresa un 'vacío' por el punto de extracción y se usan las velocidades entregadas por V_1 para seguir su trayectoria hasta que se ha extraído una masa m . Este llega hasta la posición (x_1, y_1, z_1)
- 3) Se usa V_2 y sigo la trayectoria de la partícula desde (x_1, y_1, z_1) hasta (x_2, y_2, z_2) al extraer una masa m por el punto 2.
- 4) Se vuelve a 2), hasta que se complete una masa total extraída M desde un punto de extracción

Ahora como los contornos dependen de la masa extraída, se considera que a cada contorno le corresponde la masa extraída desde un sólo punto de extracción, no la extraída desde los dos puntos (procedimiento usado por Castro (2007) en sus experimentos).

Los resultados de las zonas depende de cómo se elige m , ya que para el caso extremo donde m es muy grande desde un punto de extracción las zonas combinadas serían igual a la de extracción aislada. Por lo tanto para m pequeños la zona se parece a extracción simultánea.

En la Fig. 4.17, se observa una comparación de la EZ para el caso de extracción simultánea y extracción alternada. Para este caso se extrajo alrededor de 60 kg, que no es una masa muy grande pero tampoco pequeña, ya que en el experimento significaría extraer una hora por un punto para seguir con otra hora en otro. Se observa que ambas zonas son parecidas excepto en el sector de intercepción en que se aprecian algunas distorsiones en la altura alcanzada versus la masa extraída.

Hay que notar que se llega a la altura máxima a la misma masa, el ancho es parecido y sólo existen algunas distorsiones en las alturas medias. Por lo tanto podría decirse que a primera vista la extracción simultánea modelaría una extracción alternada para un tiempo largo, ya que sería igual a extraer con m infinitesimales.

Hay que considerar que en la industria minera se utiliza una extracción alternada con distintas masas extraídas por punto. Por lo tanto en estos casos sería necesario utilizar el procedimiento de extracción alternada.

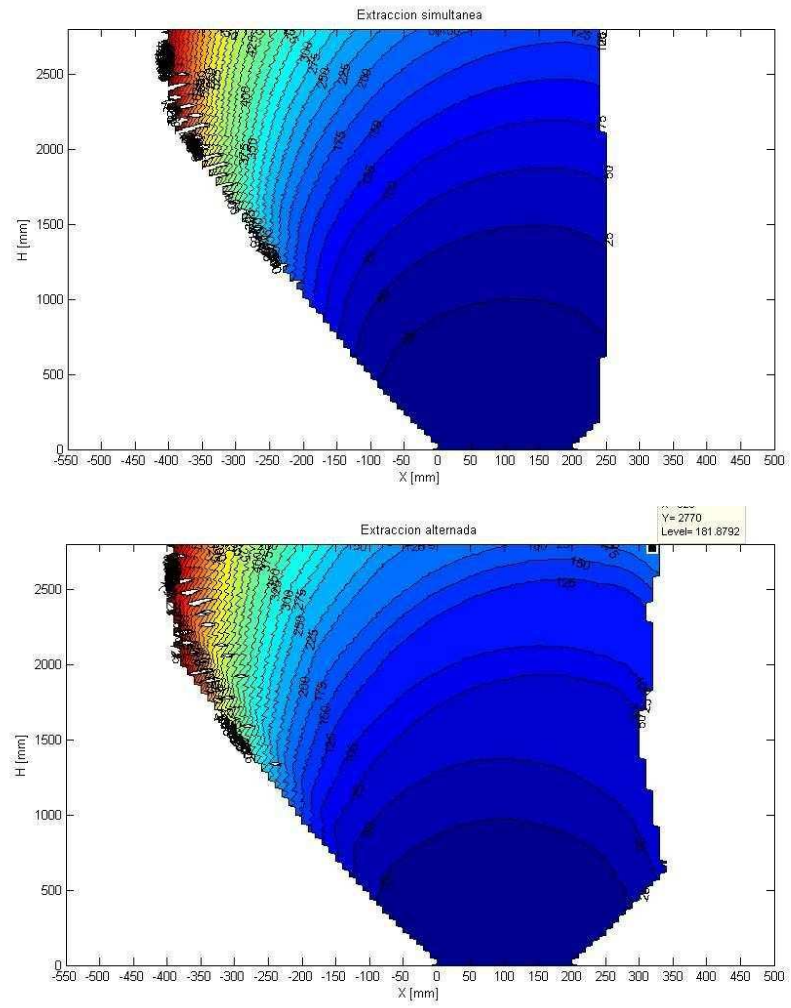


Fig. 4.17. Comparación de EZ, para extracción alternada y simultánea

4.4 Conclusiones

En este capítulo se presentan las dos implementaciones que se desarrollaron durante el trabajo de título. El primer caso corresponde a volúmenes finitos, con el cual se consigue resolver el modelo de manera rápida. Al tratar de imponer la condición de borde en esta implementación se vio que tomaría demasiado tiempo implementarla en 3D, por lo que se decide utilizar COMSOL para resolver el modelo.

COMSOL es un software comercial de elementos finitos que permite resolver ecuaciones diferencial parciales para cualquier geometría dada. Su facilidad de uso e interface con MATLAB lo hace el perfecto candidato para este trabajo y permitió la reutilización de las rutinas implementadas para el modelo de volúmenes finitos

Resolver las ecuaciones del modelo sólo entrega el campo de velocidad de las partículas en cierta posición. Es necesario integrar estas velocidades para obtener resultados acordes con los obtenidos en experimentos. Se realizaron una serie de rutinas en MATLAB, que permiten el manejo de estos datos.

Para la extracción desde múltiples puntos, se toma la decisión de utilizar un modelo con extracción simultánea aunque en los experimentos se utiliza una extracción alternada, ya que esta sería equivalente hasta cierta medida cuando las masas extraídas alternadamente por puntos de extracción son pequeñas. Este supuesto facilita la resolución cuando existen una variedad de puntos de extracción. Para el caso de simulación a escala industrial se recomienda la utilización de extracción alternada.

En el próximo capítulo se muestran los resultados de la calibración y validación.

CAPÍTULO 5

Calibración y Validación del Modelo

5.1 *Introducción*

Con el fin de poder utilizar el modelo para la predicción del comportamiento de flujo gravitacional en minas reales, es necesario corroborar su validez con datos de diversas fuentes. En este capítulo se muestra la metodología así como los resultados del ejercicio de validación y calibración del modelo propuesto. Para eso se cuenta con un set de datos obtenidos de manera experimental en el modelo físico de mayores dimensiones para estudiar el flujo gravitacional de block caving que se haya construido a la fecha (Castro, 2007).

En la primera parte del capítulo se describe de manera breve la instalación utilizada para obtener los datos experimentales para un punto y varios puntos de extracción. Luego se procede a la calibración del modelo utilizando un solo punto de extracción (tiraje aislado). Con los parámetros obtenidos de esta etapa se procede a la validación utilizando el set de datos con múltiples puntos de extracción.

Tanto para la calibración como validación se comparan los datos experimentales con los entregados por el modelo de manera cuantitativa como cualitativa.

5.2 *Descripción de la modelación física a gran escala*

Los datos a utilizar para la calibración y validación corresponden a un programa de experimentación para investigar el fenómeno del flujo de roca fracturada, utilizando grava gruesa como material (Castro, 2007). Los experimentos se realizaron utilizando dos tamaños del material, una correspondiente a grava, medianamente gruesa de 8 mm y otra más gruesa de 18 mm. La hipótesis de trabajo respecto a la modelación con arena, es que las partículas más gruesas representarían de mejor forma lo que ocurre en minas explotadas por block caving.

El modelo físico utilizado tenía dimensiones de 3.4 m de altura, 3.3 m de ancho y 2.4 m de largo. El modelo es usado para distintos tamaños del punto de extracción midiendo las geometrías de las zonas de flujo utilizando marcadores físicos y sensores que permiten detectar la zona de movimiento respectivamente. En la Tabla 5.1 se muestra la configuración utilizada en el modelo con información respecto a la escala, tamaño del punto de extracción y tasa de extracciones utilizadas en los experimentos, para más detalles sobre cada parámetro véase capítulo 2.

Tabla 5.1 Resumen de la configuración del modelo físico empleado por Castro (2007)

Escala	Medio	Tamaño Punto de Extracción [mm x mm]	Altura de Columna [mm]	Altura de elipsoide [mm]	Tasa de extracción [kg/hr]
1:30	18mm	120x100	3300	3300	60
1:100	8mm	36x30	3300	3300	3

En la Tabla 5.2 se muestra un resumen de la condición experimental para tiraje aislado, es decir cuando las zonas de flujo no se interceptan entre sí.

Tabla 5.2. Resumen con los experimentos realizados para tiraje aislado (Castro, 2007)

Experimento	Medio	Tamaño Punto de Extracción [mm x mm]	Altura de Columna [mm]	Altura de elipsoide [mm]	Densidad [ton/m ³]	Escala
IS-T1	18mm	120x100	3300	3300	1.9	1:30
IS-T2	18mm	120x100				1:30
IS-T3	18mm	120x100				1:30
IS-T4	8mm	36x30	3300	3300	1.5	1:100
IS-T5	8mm	36x30				1:100
	8mm	36x30				1:100
	8mm	36x30				1:30

Cabe destacar que la tasa de extracción varía. En general experimentos en múltiples puntos consisten en la extracción de puntos de extracción de manera discreta. Como se indica en la Tabla 5.3, la base de datos experimental cuenta con diferentes medios, número de puntos de extracción, espaciamiento, densidad aparente y tasa de extracción por punto de extracción. Los resultados de los experimentos son las zonas de flujo (extracción y movimiento), en función de la masa extraída.

Tabla 5.3. Resumen con los experimentos realizados para múltiples puntos de extracción (Castro, 2007)

Experimento	Medio	Número de puntos de extracción	Espaciamiento entre puntos de extracción [mm]	Tamaño Punto de Extracción [mm x mm]	Altura de Columna [mm]	Densidad [ton/m ³]	Tasa de extracción [kg/hr]
IN-T1	18mm_WD	2	500	120X100	3300	1.9	60
IN-T2	18mm_WD	2	700	120x100	3300	1.9	60
IN-T3	18mm_WD	4	500x560	120x100	3300	1.9	60
IN-T4	8mm_WD	9	780x780	120x100	3300	1.4	3
IN-T5	8mm_WD	13	480x480	36x30	3300	1.4	3

5.3 Metodología de calibración para tiraje aislado

El modelo fue calibrado utilizando los datos experimentales de tiraje aislado resumidos en la Tabla 5.2, es decir, donde la extracción ocurre en un solo punto de extracción tal que las zonas de flujo no se interceptan. Para validar el modelo de difusión con los datos experimentales se siguió el siguiente procedimiento:

1. Estimación del parámetro $\frac{\rho_s}{\Delta\rho}$, que representa la aceleración del IMZ frente al IEZ y que se supone constante durante toda la extracción, comparando los datos experimentales de uno y otro.

De la solución analítica obtenida por Melo et al. (2008) se puede obtener que la relación entre el H_{imz} y H_{iez} es:

$$H_{imz} = \left(\frac{\rho}{\Delta\rho}\right)^{1/2} H_{iez} \quad (5.1)$$

Se utilizaron los datos experimentales en las primeras extracciones para la obtención de este valor.

2. Estimación del ángulo del plano de falla de material, observando la geometría de los resultados experimentales.
3. Se dan valores iniciales para el cálculo del coeficiente de difusión. Según distintos autores, este valor sería del orden del tamaño de partículas.
4. Resolución del modelo numérico para obtener el campo de velocidades en el dominio. Resolviendo las ecuaciones 3.7, 3.3 y 3.5 utilizando el procedimiento descrito en el capítulo 4.
5. Comparación cualitativa de los datos provenientes de las dimensiones de las zonas de flujo. Utilizando para ello la altura (H) v/s masa extraída (ver Figura 5.1) tanto del IMZ como IEZ experimental con el que entrega el modelo numérico.
6. Si existe una buena concordancia cualitativa, se compara el grafico Ancho (W) v/s Masa Extraída (ver Figura 5.1) del IMZ experimental con el que entrega el modelo

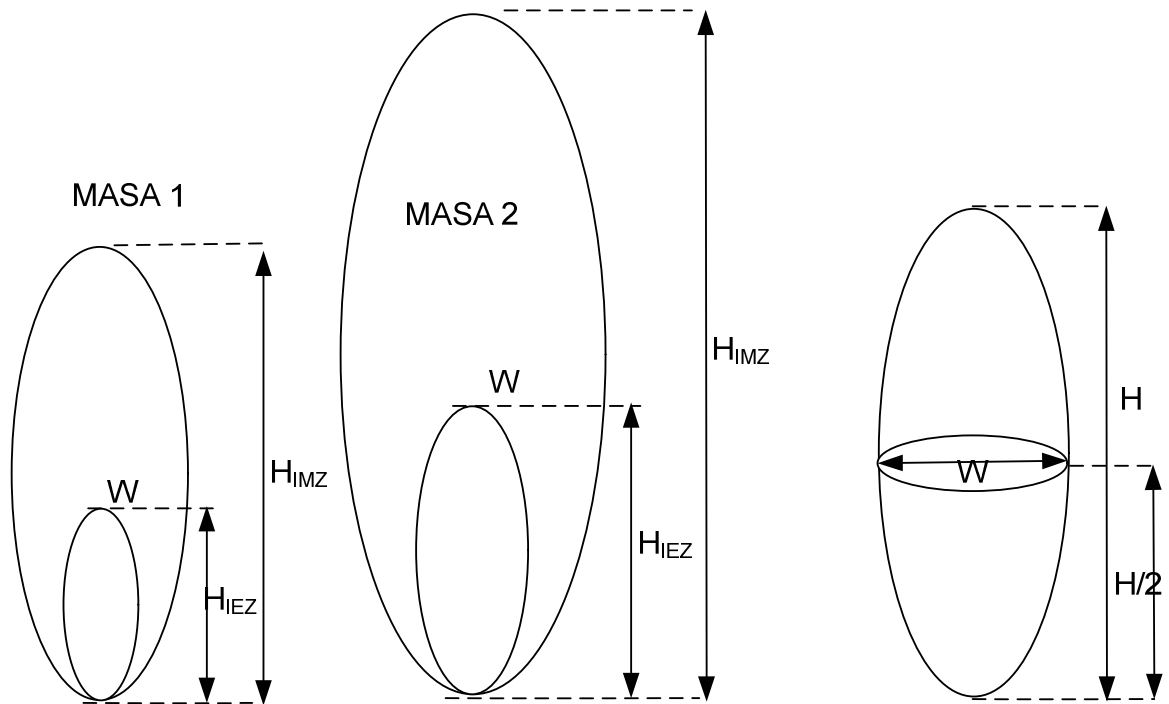


Fig. 5.1. Esquema de la altura (H) y ancho (W) de las zonas.

7. Cálculo del coeficiente de correlación y el error medio para los parámetros determinados en 1). Se realiza un análisis de sensibilidad variando los parámetros del coeficiente de difusión, para ver si existe una mejor estimación (pasos 1 a 4 se repiten). El error medio se calcula, definiendo la suma de los cuadrados del error como:

$$SSE = \sum_{i=1}^n (y - \hat{y})^2$$

Donde:

y : Datos experimentales

\hat{y} : Datos estimados

n : Número de datos

Para luego definir el error medio como:

$$Error\ Medio = \sqrt{\frac{SSE}{n}}$$

8. Se verifica la estimación del ancho vs masa para el caso de la geometría de la zona de extracción (IEZ), buscando la mejor concordancia.
9. Luego de calibrar el modelo, se utilizan los parámetros obtenidos para validar con múltiples puntos de extracción.

5.4 Resultados de la Calibración

La metodología de calibración se realiza tanto para los experimentos con medio granular denominados 18mm_WD y 8mm_ND (ver Tabla 5.1). Los parámetros que definen de mejor manera la geometría de las zonas de flujo corresponden a un coeficiente de difusión variable en altura, estos se muestran en la Tabla 5.4.

Tabla 5.4. Resultados de la Calibración

Medio	K [mm]	CC [1/mm]	$\frac{\rho_s}{\Delta\rho}$ (%)	Angulo Plano de Falla	Error medio geometría IMZ [mm]
18mm_WD	8.4	0.0007	18	21°	Altura: 129.8 Ancho: 59.8
8mm_ND	8.4	0.0007	18	20°	Altura: 48 Ancho: 140

Se observa que el coeficiente de difusión es exactamente igual para ambos casos, esto haría pensar que no existe un efecto importante del tamaño de la partícula, lo cual concuerda con lo observado por Castro (2007).

Como se vio en el capítulo 2, el parámetro $\frac{\rho_s}{\Delta\rho}$ permite calcular el IMZ considerando un frente de cambio de densidad. El ángulo de plano de falla, se obtiene observando los resultados experimentales y obteniendo el ángulo en el cual el flujo está confinado.

En los siguientes puntos se puede observar la comparación tanto cualitativa (geometría) como cuantitativa de la calibración realizada.

5.4.1 Comparación Cuantitativa

La comparación cuantitativa consiste en ver la relación que existe entre la masa extraída y los parámetros geométricos del flujo, como la altura del IEZ e IMZ, ancho del IEZ e IMZ.

En la figura 5.2 se puede apreciar una serie de gráficos donde se compara los valores entregados por el modelo versus los valores experimentales para una misma masa extraída para el material 18mm_WD.

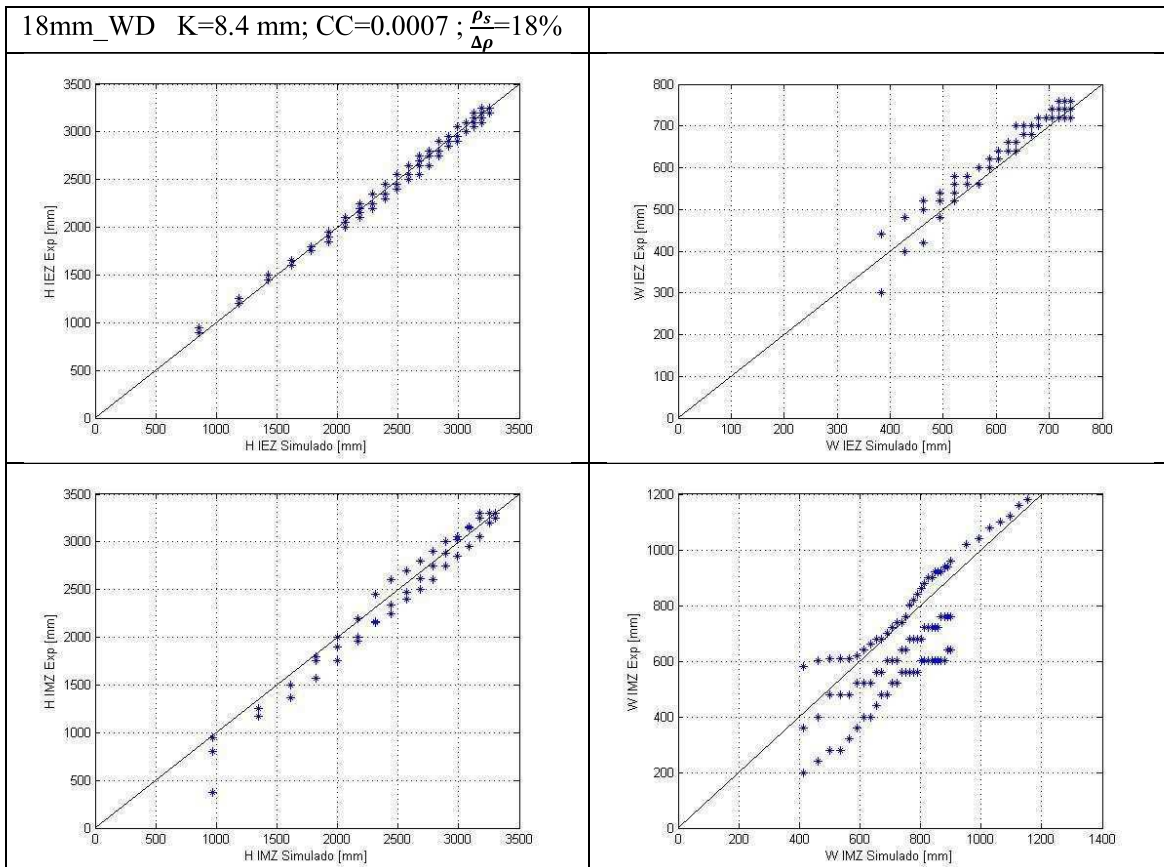


Fig. 5.2. Gráficos de comparación entre parámetros de las zonas de flujo experimentales y simuladas.

Los parámetros de correlación para el experimento 18mm_WD se presentan en la Tabla 5.5.

Tabla 5.5. Resultados Calibración para 18mm_WD

18mm_WD		R^2	Error Medio [mm]
IEZ	Altura	0.99	20.2
	Ancho	0.96	24.1
IMZ	Altura	0.97	129.8
	Ancho	0.93	59.8

En la figura 5.2 se puede apreciar una serie de gráficos donde se compara los valores entregados por el modelo versus los valores experimentales para una misma masa extraída para el material 8mm_ND.

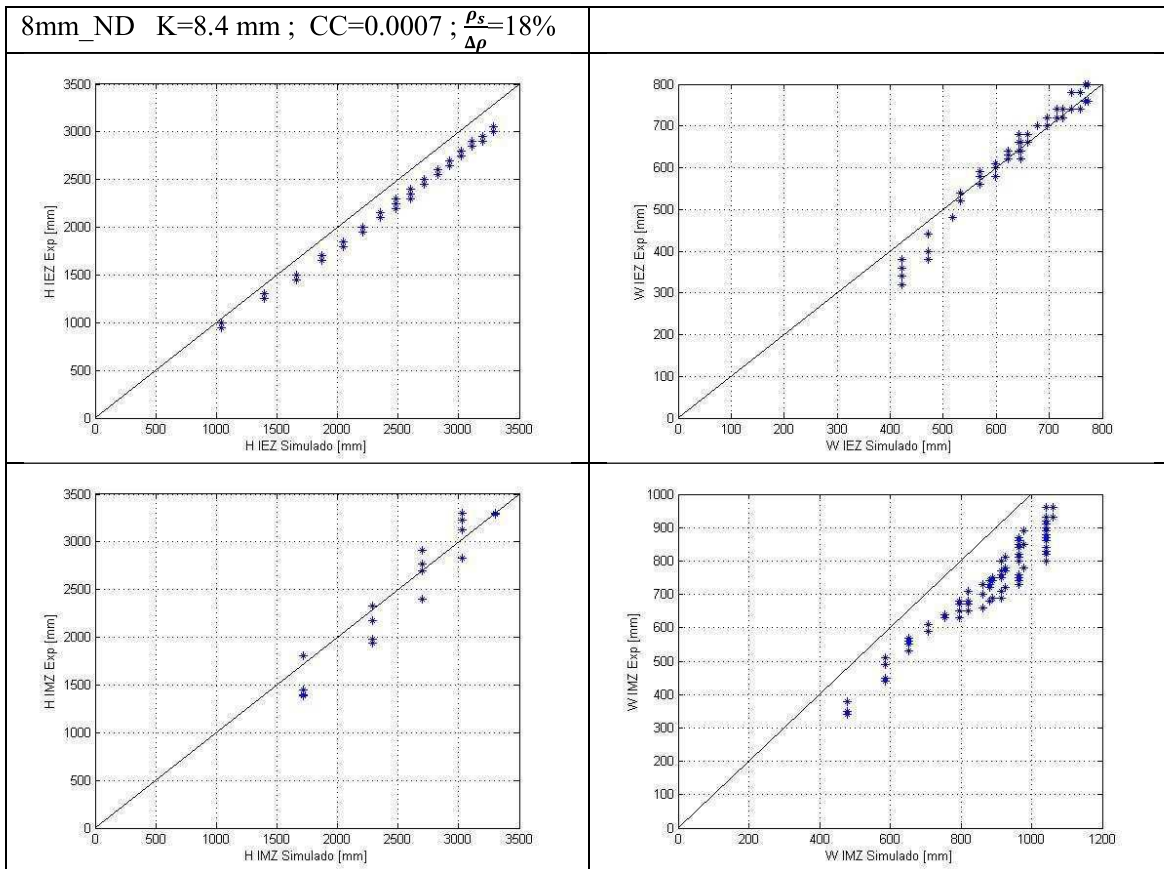


Fig. 5.3. Gráficos de comparación entre parámetros de las zonas de flujo experimentales y simuladas.

Los parámetros de correlación para el experimento 8mm_ND se presentan en la Tabla 5.6.

Tabla 5.6. Resultados calibración para 8mm_ND

8mm_ND		R ²	Error Medio [mm]
IEZ	Altura	0.87	240.21
	Ancho	0.95	29.17
IMZ	Altura	0.98	48.77
	Ancho	0.96	140.00

Se observa que para el caso 8mm_ND, no fue posible conseguir tan buen ajuste para el ancho de la zona de movimiento aislada (IMZ). Sin embargo, el error se encuentra acotado a un 15% del ancho máximo encontrado experimentalmente. Hay que notar que se consiguieron mucho mejores calibraciones con otros parámetros ($K=10.9$ $CC=0.0007$) para la altura y ancho del IEZ y Altura del IMZ, pero no así el ancho del IMZ. Esto se debería a que el modelo utilizado considera que la excentricidad del IMZ es igual a la del IEZ, de lo cual no existe evidencia y teóricamente no se cumpliría (Melo et al., 2008).

El desajuste del modelo se puede explicar debido al efecto de la condición de borde en la superficie del modelo numérico. En los modelos físicos esta condición infinita es lograda mediante el relleno constante del material. En el modelo físico, al llegar el IMZ a superficie se produce falla del borde debido a la subsidencia. Esta distorsión no es tomada en cuenta por el modelo numérico y se ve claramente ya que el error va aumentando a medida que se extrae.

Cuando el modelo se calibra hasta que el IMZ llegue a superficie los errores disminuyen como se puede observar en la tabla 5.7. En principio se debiese optar por calibrar hasta este escenario y en un futuro incluir un modelo de flujo superficial. Sin embargo, la calibración obtenida con el IMZ más allá de la superficie entrega errores aceptables y se utiliza para validar con múltiples puntos de extracción.

Tabla 5.7. Variación del error del ancho del IMZ, cuando se calibra hasta la superficie

8mm_ND		R ²	Error Medio [mm]
IMZ	Altura	0.98	130
	Ancho	0.99	110

Es interesante notar que este efecto también ocurre en el material 18mm_WD, pero el modelo logra obtener una buena concordancia con la zona de extracción y la zona de movimiento. Pero, al mismo tiempo, los resultados experimentales del ancho del IMZ tienen mayor dispersión. El efecto de la subsidencia afectaría todas las medidas sobre cierta altura. En futuras investigaciones se hará necesario considerar el efecto de subsidencia.

En el caso del IEZ, se observa que el modelo sobrestima la altura, pero el error se encuentra acotado a un 7% del ancho máximo encontrado experimentalmente, pero en general sigue la tendencia experimental.

En general se consigue un mejor ajuste para el material 18mm_WD, con una densidad de 1.9 ton/m³ que para 8mm_ND con una densidad de 1.4 ton/m³, Melo et al. (2008) dan cuenta de un trabajo donde se ve que el modelo cinemático obtiene una buena predicción de las zonas de flujo para material más suelto, caso que no se dio.

5.4.2 Comparación de la geometría global de las zonas de flujo

Se realizarán algunas comparaciones cualitativas con geometrías de los elipsoides, para el caso 18mm_WD y 8mm_ND. La calibración antes descrita, aunque optimiza cuantitativamente la diferencia entre valores característicos del elipsoide obtenido numéricamente con el experimental, no da cuenta de la forma de dichos elipsoides. De este modo, para determinar cuán cercanos son las geometrías de la zona de flujo resultantes de la modelación numérica como la experimental, se presenta a continuación una comparación cualitativa de ambas=

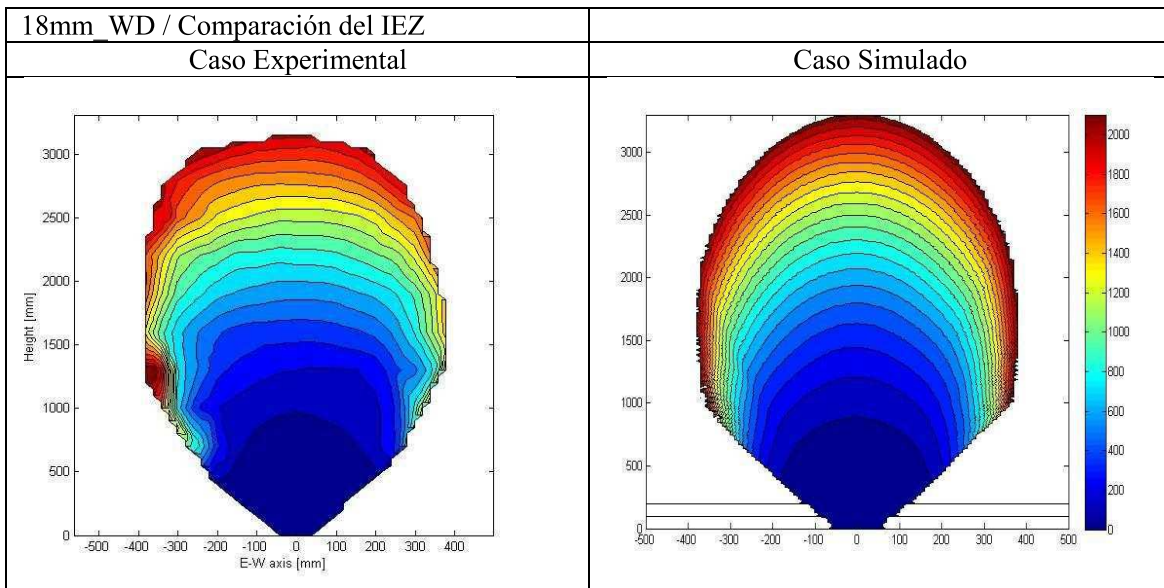


Fig. 5.4. Comparación de geometría elipsoides experimentales y del modelo.

En la tabla 5.8 se aprecia una comparación más detallada de la figura 5.4. Fig. 5.4, se ve que el máximo error encontrado es de 18% y la media se encuentra en los 7%, lo cual está dentro del rango de los errores experimentales visto por Castro (2007).

Tabla 5.8. Comparación de geometría global del IEZ, experimento 18mm_WD

Masa	Altura mm	Ancho mm (simulado)	Experimento (mm)	Diferencia
100Kg	1000	-	-	-
	750	270	274	1.34%
	500	387	381	1.49%
	250	258	303	14.87%
300kg	1500	-	-	-
	1125	470	506	7.24%
	750	450	424	6.29%

Masa	Altura mm	Ancho mm (simulado)	Experimento (mm)	Diferencia
	375	353	397	10.92%
600kg	2000	-	-	-
	1500	577	488	18.31%
	1000	577	595	2.91%
	500	444	482	7.88%
1000kg	2500	-	-	-
	1875	680	618	10.03%
	1250	692	701	1.28%
	625	517	563	8.23%
1700kg	3000	-	-	-
	2250	734	705	4.21%
	1500	774	826	6.30%
	750	575	652	11.76%

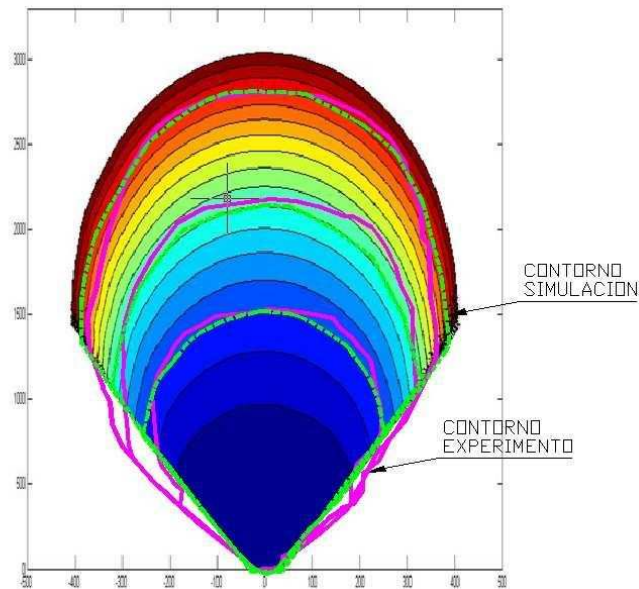


Fig. 5.5. Comparación de Área de la zona de extracción (IEZ), Experimento 8mm_ND

En la Fig. 5.5, se logra apreciar los contornos de la zona de extracción en términos de área para distintas masas, tanto para los experimentos (color magenta) como la simulación del modelo (color verde) y se compara el área de cada uno. Los errores entre una y otra área son (de mayor a menor área) 1.9%, 9%, 6.3%.

Se concluye que calibrando el ancho y la altura obtenida por el modelo con datos experimentales, es posible obtener una buena aproximación de la forma de la zona de extracción. En la próxima

sección se verá si el modelo es capaz de reproducir el efecto de múltiples puntos de extracción interactuando.

5.5 Validación para Múltiples Puntos

Habiéndose calibrado los parámetros del modelo para un punto aislado, el siguiente paso es comprobar el funcionamiento de éste bajo múltiples puntos de extracción. Para esto se realiza una validación del modelo, comparando cualitativamente y cuantitativamente los resultados obtenidos numéricamente con los experimentales llevados a cabo por Castro (2007) para múltiples puntos. Como se indica en la revisión bibliográfica, una validación del modelo expuesto utilizando varios puntos de extracción resulta interesante de evaluar, pues a la fecha no se ha efectuado por falta de datos experimentales con los que cuenta el autor.

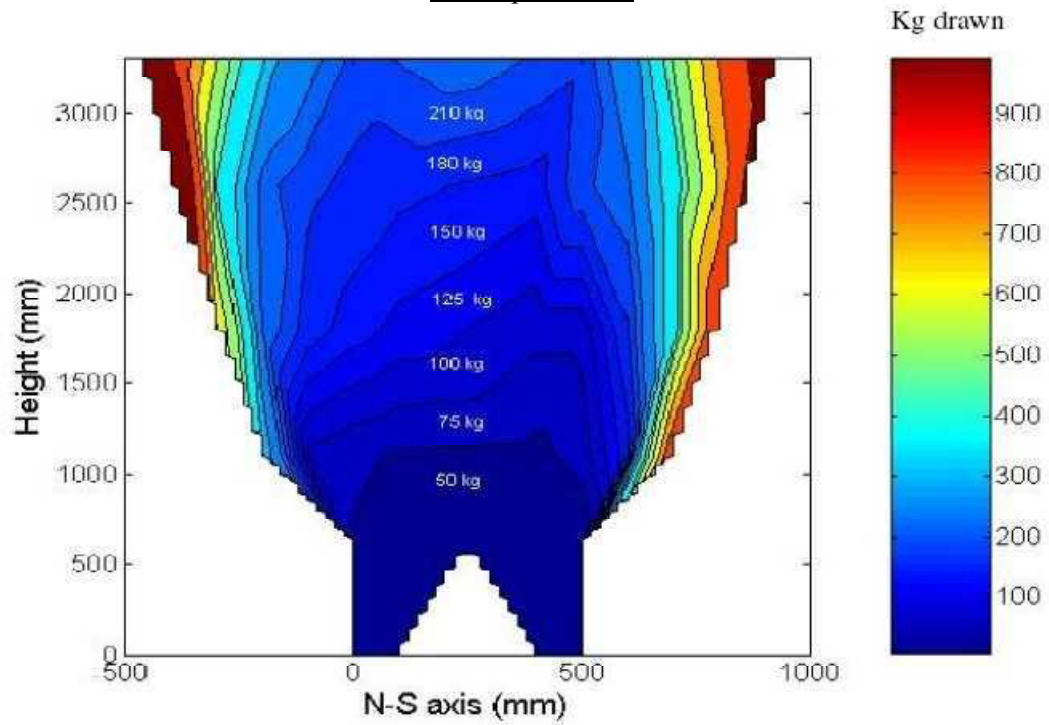
Para los modelos numéricos que representan las condiciones de borde de los experimentos resumidos en la Tabla 5.3, se generó el dominio de solución formado por la unión de los conos que genera cada punto de extracción (ver capítulo 3). Luego se procede a resolver el modelo utilizando los parámetros calculados en la calibración de tiraje aislado. Para esta etapa se consideró que cuando existen múltiples puntos no existen un ancho a ser considerado entre las zonas de flujo, ya que éstas se unen formando una zona de movimiento conjunta MZ. Es debido a esto, que solo se considera la altura como medida de la geometría, y cómo ésta cambia en función de número de puntos, en espaciamiento y masa extraída por punto de extracción.

La comparación cualitativa o inicial se refiere observar si la forma y la aceleración del flujo en zonas de interacción entre experimentos y modelo son similares.

1. Altura en la cual los MZ interactúan. Es decir cuando los MZ se combinan.
2. Masa necesaria para alcanzar la superficie. Ya que entre más interacción ocurra entre los MZ, con menos masa extraída (por punto de extracción) es posible llegar a la superficie, es decir, se aceleran las velocidades.

En la figura 5.6, 5.7 y 5.8 es posible observar las zonas de movimientos para los distintos experimentos y los simulados con el modelo.

MZ Experimental



Mz Simulado

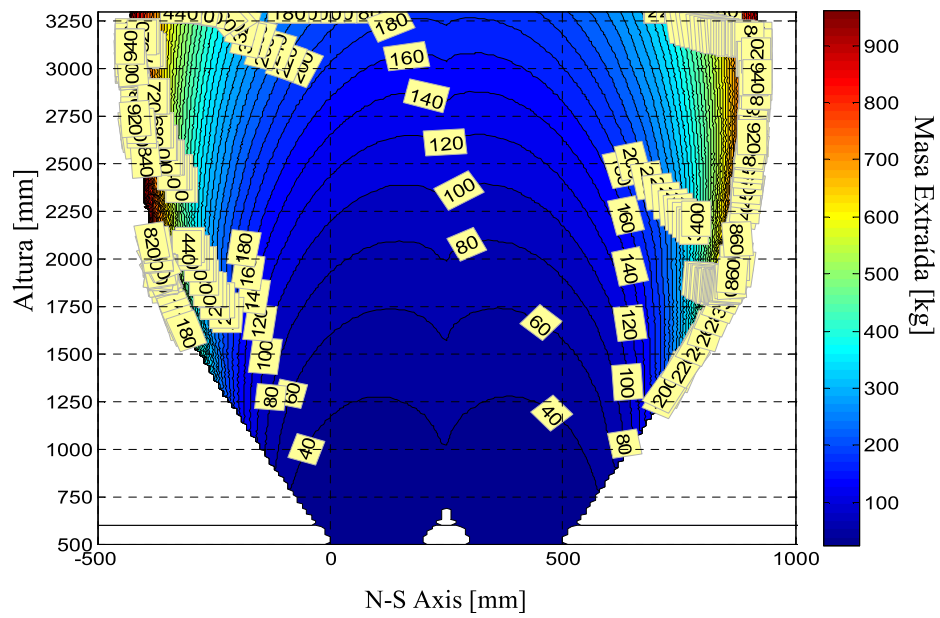


Fig. 5.6. Zonas de Movimiento correspondiente al experimento IN-T1, para el caso experimento y simulado.

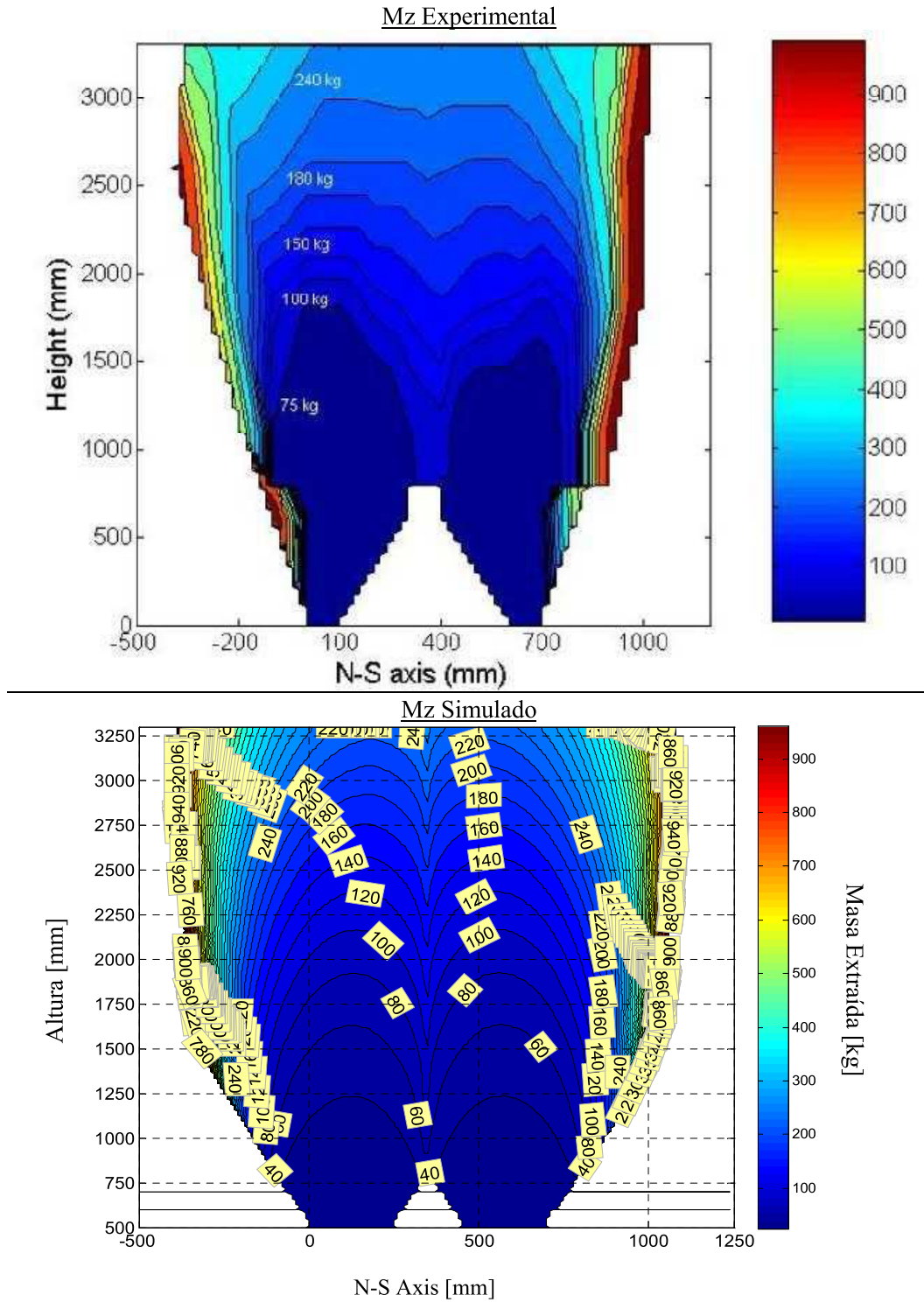


Fig. 5.7. Zonas de movimiento correspondiente al experimento IN-T2, para el caso experimental y el caso simulado.

MZ Experimental

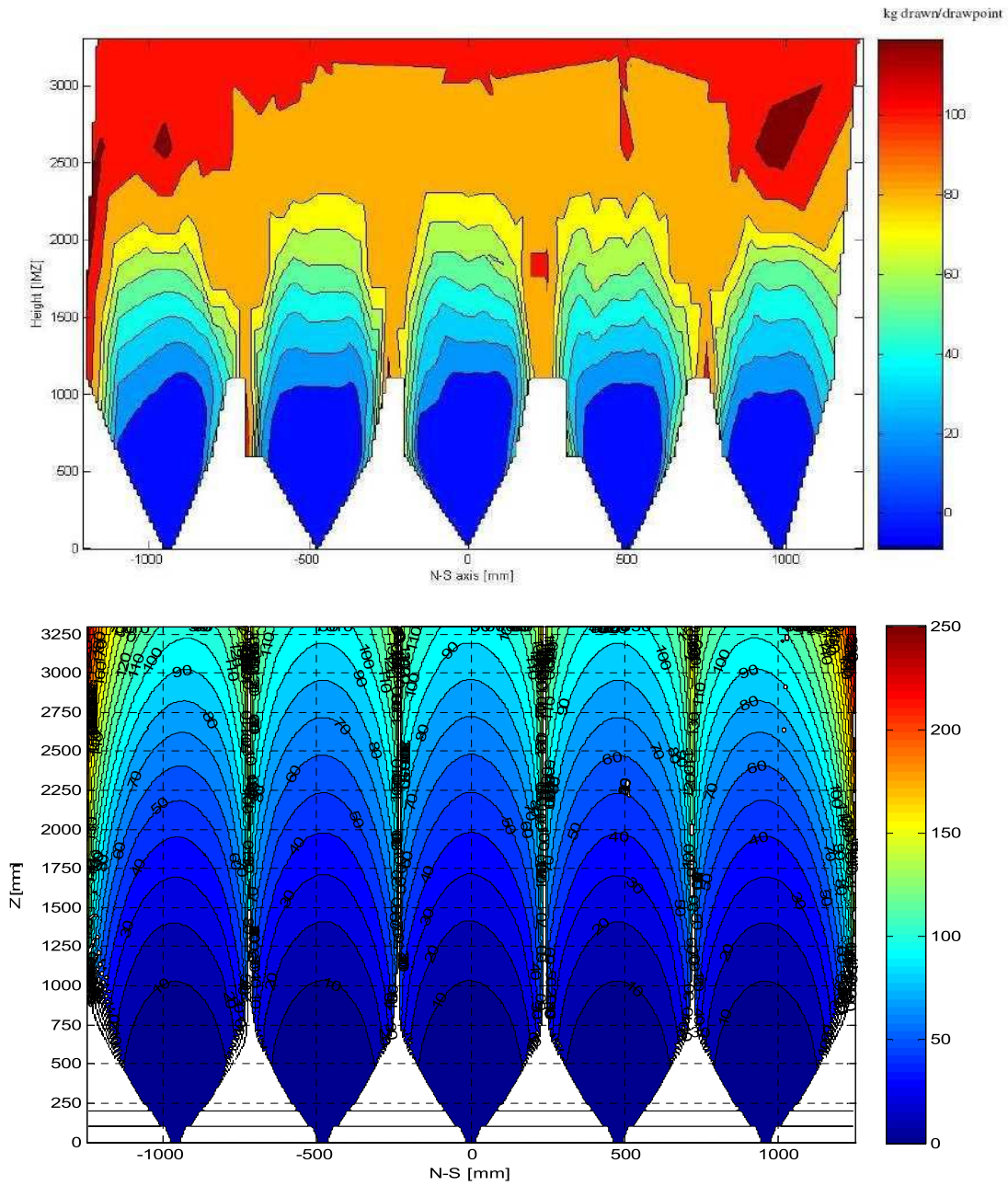


Fig. 5.8. Zona de Movimiento correspondiente al experimento IN-T5 tanto para el caso experimental (Castro 2007) y el simulado.

En la tabla 5.9 se presenta una comparación preliminar de las zonas de flujo. Se observa que en general el modelo representa la masa a la cual la zona de movimiento conjunta alcanza la superficie ubicada a 3300 mm del punto de extracción. Como se indica en la tabla 5.9 de forma experimental existe evidencia que a menor espaciamiento, mas rápido la zona de flujo compuesta alcanza la superficie. En el modelo numérico, esto corresponde a una suma lineal de velocidades. La diferencia en términos de masa corresponde a un 10% lo cual está dentro del error experimental.

Tabla 5.9. Resultados de la comparación cualitativa.

Experimento	Medio	Números de puntos de Extracción	Espaciamiento [mm]	Experimentos		Modelo Numérico	
				Altura Interacción De IMZs [mm]	Masa para alcanzar superficie [kg]	Altura Interacción de IMZs [kg]	Masa para alcanzar superficie [kg] (Dif %)
IN-T1	18mm_WD	2	500	600	215	700	200 (7%)
IN-T2	18mm_WD	2	700	800	240	850	250 (4%)
IN-T5	8mm_ND	13	480	1050	110	700-1000	100 (-9%)

Un análisis más detallado del comportamiento de la zona de flujo compuesta para dos puntos de extracción se muestra en la tabla 5.10. El análisis cuantitativo consistió en comparar la altura del MZ entregado por el modelo con los datos experimentales para distintas masas extraídas. Este análisis tiene como fin comparar directamente la altura de la zona de movimiento para los experimentos IN-T1, IN-T2 correspondiente a una fragmentación con un tamaño medio de 18 mm, y el experimento IN-T5 correspondiente a un tamaño medio de 8mm.

Tabla 5.10. Resultados de la comparación cuantitativa.

Experimento	Números de puntos de Extracción	Medio	Esp. [mm]	Masa Extraída [kg]	Altura del MZ		Diferencia	Error relativo
					Experimentos [mm]	Modelo Numérico [mm]		
IN-T2	2	18mm_WD	700	60	1400	1700	450	18%
				120	2340	2400	160	3%
				180	3160	2950	160	7%
IN-T1	2	18mm_WD	500	75	1600	1800	110	11%
				125	2500	2750	110	9%
				180	3100	3250	110	5%
IN-T5	13	8mm_ND	480x480	10	1125	1000	125	13%
				30	1600	1700	200	6%
				60	2100	2450	400	14%

De los resultados se puede concluir que el modelo logra predecir en cierto grado la altura de la zona de movimiento para distintas masas de extracción. En el experimento IN-T1 se ve que en la parte inicial el modelo tiene un error de 11%, que luego se va reduciendo a medida que se extrae más masa. Este mismo comportamiento se ve en IN-T2, pero con un error inicial de 18%, por lo tanto el modelo sobrestimaría la interacción que ocurre en las etapas iniciales. El experimento IN-T5 presenta un comportamiento distinto con una peor predicción de la altura de la zona de movimiento, obteniéndose un error medio en las primeras etapas de extracción, para luego bajar y volver a subir. Esto parece indicar que la fragmentación 8mm_ND parece ser afectada por la subsidencia, mientras que los parámetros calibrados para 18mm_WD logran considerar algo este efecto.

El máximo error fue de 18%, y el error promedio de las medidas es de alrededor de 9%.

5.6 Estimaciones del coeficiente de difusión

En la realización de este trabajo de título, se utilizó el coeficiente de difusión como un parámetro a buscar, el cual diera la mejor calibración con los datos experimentales. Distintos autores han dado un significado físico a este parámetro, el cual siempre tiende a ser del orden del tamaño de las partículas. Nedderman (Wu, 2007) comenta que este coeficiente es entre 2 y 3 veces el diámetro. Otros autores dan como valor el diámetro de la partícula, País (2006) en su memoria comenta que este coeficiente es cercano 0.5 veces el diámetro.

En la tabla 5.11 se muestra los errores medio del IEZ e IMZ obtenidos utilizando distintos coeficientes de difusión para el material 18mm_WD, considerando las condiciones de borde utilizadas en este trabajo.

Tabla 5.11. Errores Medios con distintas estimaciones del coeficiente de difusión constante

K [mm]	18mm_WD				8mm_ND			
	IEZ [mm]		IMZ [mm]		IEZ [mm]		IMZ [mm]	
	Altura	Ancho	Altura	Ancho	Altura	Ancho	Altura	Ancho
d/2	558	75	303	256	3008	190	303	227
d	189	17	112	159	1194	102	188	128
2d	600	109	434	116	247	52	28	146
3d	756	164	604	140	98	115	117	242

d: Diámetro de las partículas

Se observa que utilizando un coeficiente constante igual al diámetro, se obtienen errores bastante acotados para el caso 18mm_WD, mientras que para el caso 8mm_ND con 2 veces se consigue una buena concordancia. Los errores son parecidos a la de la calibración, pero en esta se buscó el mejor ajuste posible y no una relación física con los parámetros del material.

5.7 Conclusiones

Con respecto a la calibración para la zona de movimiento se obtuvieron los siguientes parámetros:

Medio	K [mm]	CC [1/mm]	$\frac{\rho_s}{\Delta\rho}$ (%)	Angulo Plano de Falla	Error medio IMZ [mm]
18mm_WD	8.4	0.0007	18	21°	Altura: 129.8 Ancho: 59.8
8mm_ND	8.4	0.0007	18	20°	Altura: 48 Ancho: 140

Para el caso de la zona de extracción se ve que la calibración ajustó bien para la fragmentación de tamaño medio 18mm, obteniéndose un error medio aproximado de 20mm para altura y ancho.

Para el caso de tamaño medio 8mm, se logró calibrar para la altura de la zona de extracción con un error medio menor al 7% para altura y ancho. Sin embargo, al calibrar la zona de movimiento no fue posible obtener un buen ajuste para el ancho y se obtuvo un error medio de 140 [mm]. Esto se explicaría debido al efecto que la subsidencia habría tomado sobre los resultados experimentales. Al calcular el error del modelo hasta que el IMZ llegue a la superficie se obtiene un error medio de 110 [mm].

Para el material de 8mm se observa que la suposición de excentricidad igual entre el IEZ y el IMZ, no se cumple, no pudiéndose calibrar de manera precisa ambos. Esto es congruente con Melo et al. (2008), que utiliza el mismo conjunto de datos con una solución analítica y llega a la misma conclusión.

Los resultados de la etapa de validación con múltiples puntos indican que no es necesario cambiar los parámetros ajustados en la etapa de calibración para una extracción aislada, pudiendo utilizarse para el caso de múltiples puntos de extracción, con errores promedios de 10% respecto a la altura conjunta de IMZ.

De manera cualitativa se ve que el modelo responde bien al efecto que tiene la distancia entre puntos de extracción, obteniéndose aceleraciones del flujo debido a la interacción de las zonas de flujo, similares a los experimentos. En ambos se tiene que, a menor distancia se tiene una menor masa para alcanzar la superficie que la correspondiente a tiraje aislado.

La estimación del parámetro de difusión como entre 1 y 2 veces el diámetro entrega valores acotados para las dos granulometrías utilizadas.

En general se puede concluir que el modelo logra predecir de manera aceptable el comportamiento del flujo gravitacional, consiguiéndose mejores resultados para el material granular más grueso y más denso (18mm_WD).

En el próximo capítulo se presentarán los principales comentarios y conclusiones del desarrollo de esta memoria, además de recomendaciones para futuros estudios.

CAPÍTULO 6

Conclusiones y Recomendaciones

6.1 Conclusiones

En este trabajo de título se desarrolló un modelo numérico de flujo gravitacional basado en el modelo cinemático (o de difusión) que es rápido y cumple con las condiciones de borde observadas de manera experimental. El modelo fue planteado, resuelto, calibrado y validado tanto para uno como múltiples puntos de extracción.

De la revisión bibliográfica realizada, se puede afirmar que diversos autores han buscado herramientas matemáticas que permitan simular el fenómeno de flujo gravitacional, la validación de estos modelos se ha realizado con la comparación de experimentos realizados en modelos físicos a escala.

Sobre los modelos cinemáticos, la revisión bibliográfica entrega evidencia clara que justifica la realización de este trabajo de título y el aporte que este abarcaría. Las publicaciones existentes carecen de la validación para múltiples puntos de extracción, aspecto que es de especial interés para la minería. La implementación de este aspecto al modelo, permitiría considerarlo como herramienta para la simulación de block caving.

El modelo propuesto para el modelamiento de flujo gravitacional de material granular, derivado de un supuesto físico sobre la tendencia del movimiento de las partículas, corresponde a un problema de difusión. La solución analítica a esta ecuación es conocida para un número simplificado de casos. El modelo propuesto considera condiciones de borde, que permitirían representar de manera más precisa el flujo gravitacional de material quebrado, especialmente la condición relacionada con el plano de falla que ocurre en las cercanías del punto de extracción. Para obtener la solución a este problema se requiere la implementación de un modelo numérico de flujo gravitacional.

Se realizaron dos implementaciones. El primer caso corresponde a volúmenes finitos, con el cual se consigue resolver el modelo de manera rápida. Sin embargo, se optó por usar de COMSOL debido a su facilidad para imponer condiciones de borde, especialmente para simulaciones 3-D, utilizando de manera exitosa el módulo de transferencia de calor, debidamente adaptado al problema planteado en esta memoria.

La calibración del modelo con tiraje aislado arroja los siguientes parámetros de mejor ajuste:

Medio	K [mm]	CC [1/mm]	$\frac{\rho_s}{\Delta\rho}$ (%)	Angulo Plano de Falla	Error medio IMZ [mm]
18mm_WD	8.4	0.0007	18	21°	Altura: 129.8 Ancho: 59.8
8mm_ND	8.4	0.0007	18	20°	Altura: 48 Ancho: 140

Se observa que fue posible calibrar el modelo para las dos granulometrías, utilizando los mismos parámetros en ambos casos. Esto hace pensar que no existe una influencia importante del tamaño de partícula en los resultados, que corrobora lo observado por Castro (2007), quien propone que un parámetro más relevante es ángulo de fricción interna del material.

Para el caso de la zona de extracción, se ve que la calibración ajustó bien para la fragmentación de tamaño medio 18mm, obteniéndose un error medio aproximado de 20mm para altura y ancho. Para el caso de tamaño medio 8mm, se logró calibrar para la zona de extracción con un error medio menor al 7% para altura y ancho. Sin embargo, al calibrar la zona de movimiento no fue posible obtener un buen ajuste para el ancho y se obtuvo un error medio de 14%. Esto se explicaría por el al efecto que la subsidencia habría tomado sobre los resultados experimentales. Al calcular el error del modelo hasta que el IMZ llegue a la superficie se obtiene un error medio de 11% [mm].

Para el material de 8mm se observa que la suposición de excentricidades iguales entre el IEZ y el IMZ no se cumple, no pudiéndose calibrar ambos valores característicos del IMZ de manera precisa. Esto es congruente con las conclusiones de Melo et al. (2008), que utiliza el mismo conjunto de datos con una solución analítica.

Los resultados de la etapa de validación con múltiples puntos indican que no es necesario cambiar los parámetros obtenidos del ajuste para un punto de extracción, con errores promedios de 10% respecto a la altura conjunta de IMZ. Esto es de gran importancia dado que facilita la calibración del modelo. En efecto, la experimentación en modelos físicos se reduce a experiencias con solo un punto de extracción si el objetivo es determinar los parámetros del modelo de difusión.

De manera cualitativa se ve que el modelo responde bien al efecto que tiene la distancia entre puntos de extracción, obteniéndose aceleraciones del flujo, debido a la interacción de las zonas de flujo, similares a los experimentos. En ambos se tiene que, para menor distancia se requiere una menor masa (con respecto a tiraje aislado) para alcanzar la superficie.

Lo anterior demuestra que este modelo, una vez que ha sido apropiadamente calibrado con modelos físicos, puede ser utilizado para problemas de flujo gravitacional obteniendo resultados rápidamente. Además, el modelo da solución, tanto para uno, como para múltiples puntos de extracción. El buen compromiso entre la base teórica versus velocidad para obtener resultados en un computador personal se considera apropiada para su posterior uso como herramienta de apoyo.

Según lo observado, es posible estimar el coeficiente de difusión como 1 a 2 veces el diámetro medio de las partículas. Este primer acercamiento entrega errores acotados, lo que lo hace apropiado para simulaciones preliminares. Cabe destacar que esto no es concluyente, se requiere un estudio más acabado para determinar la relación entre parámetros físicos del material y el coeficiente de difusión, lo que está fuera del alcance de este trabajo.

A modo de conclusión general, se puede decir que este trabajo de título representa un avance para el estudio de los modelos de flujo gravitacional, siendo su contribución considerar la presencia de una superficie de falla dentro de las condiciones de borde. Además, el modelo ha sido calibrado y validado tanto para un punto como para múltiples puntos de extracción.

6.2 Recomendaciones para futuros trabajos en el área

Este trabajo representa un primer paso en el desarrollo de un modelo numérico de flujo gravitacional, ya que quedan etapas y consideraciones para lograr obtener uno que sirva como herramienta de apoyo para diseño de minas por block caving. A continuación se detalla un sumario sobre los principales aspectos que deberían abordarse en futuros trabajos.

6.2.1 Validación a escala industrial

Para la utilización del modelo como herramienta de apoyo en el diseño de minas por block caving, es necesario poner a prueba el modelo (ya calibrado y validado) con secuencias de extracción de puntos en condiciones reales, *“donde es común encontrar diferencias en cuanto al tonelaje extraído y a los períodos en que ellos han sido explotados, condiciones alejadas en principio a cómo se concibió el modelo.”* (González 2008).

6.2.2 Resolución en estado trasiente

El modelo tiene un estado trasiente, donde el contorno del MZ, va subiendo a través del punto de extracción y donde las partículas ganan velocidad. Un aporte futuro sería considerar la ecuación de continuidad en estado no-permanente para el desarrollo del modelo y determinar si presenta alguna ventaja adicional al utilizado en el trabajo.

6.2.3 Subsistencia

La modelación realizada en esta memoria supone que por la superficie siempre existe aporte de material. En la realidad esto no ocurre, ya que se produce el efecto de subsistencia, y la superficie empieza a bajar. Otra mejora del modelo corresponde a la incorporación de este efecto. El alcance de este trabajo no contempla este desarrollo, pero se presentan una serie de posibles alternativas para abordar el problema.

- Ampliar el dominio en el eje Z, y seguir a toda partícula que venga sobre la altura máxima como vacío, por lo tanto la zona de subsistencia se definiría como la zona donde se encuentran ubicados estos “vacíos”. Esta solución no reproduciría el ángulo de reposo en la subsistencia.

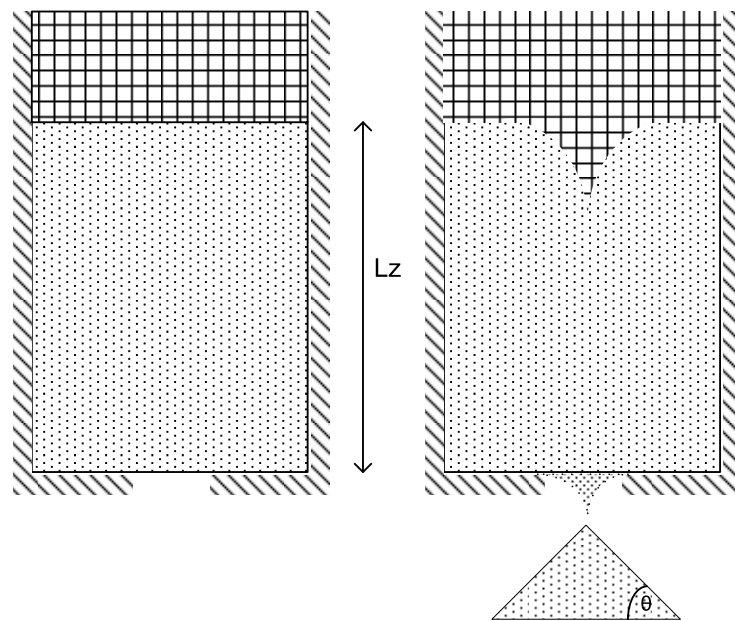


Fig. 6.1. Alternativa propuesta para modelar la subsistencia en la superficie, los vacíos se mueven con las velocidades calculadas por el modelo.

- Al llegar la zona de movimiento a la superficie, se crea una zona geométrica donde no existe material, ya que se conoce la geometría de la subsistencia (basado en el ángulo de reposo), se

calcula el cono tal que el volumen de éste por la densidad de igual a la masa extraída.
Entonces:

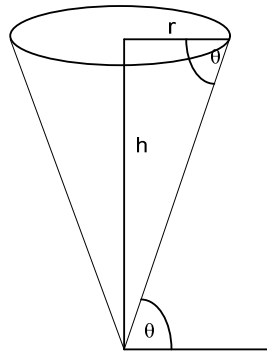


Fig. 6.2. Esquema de la zona afectada por subsidencia.

$$\frac{h}{r} = \tan\theta$$

$$V_{cono} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

$$V_{cono} \cdot \rho = M_{extraida}$$

Entonces:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot M_{extraida}}{\pi \cdot \rho \cdot \tan\theta}}$$

Zhang & Ooi (1998) consideran que cualquier partícula que quede atrapado en esta zona afectada por subsidencia se mueve inmediatamente al eje central, este esquema es fácil de implementar en tiraje aislado, pero en múltiples puntos de extracción habría que determinar la zona de subsidencia.

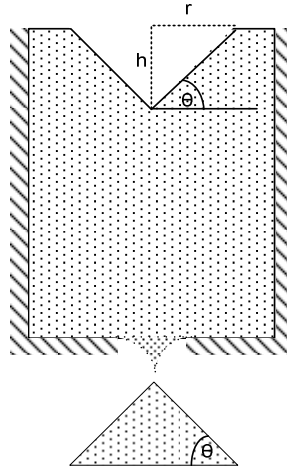


Fig. 6.3. Esquema del efecto de subsidencia en el modelo.

6.2.4 Migración de finos

Un problema que tampoco aborda esta memoria es la migración de finos, los que se encuentran en la columna a extraer. Los finos tienen mayor velocidad que las rocas, movilizándose a través de los espacios que existen entre ellas, por lo que demoran menos en llegar a los puntos de extracción. Los finos en algunos casos, son responsables de la dilución temprana en un punto de extracción y cuantificarlos se hace necesario. Uno de los objetivos de futuros trabajos es determinar una relación entre la velocidad de los finos con respecto a la velocidad de las rocas obtenidos por el modelo cinemático.

BIBLIOGRAFÍA

1. Able, R. ; Othen, S. ; Nedderman, R., 1996. The exit time distribution during the batch discharge of a cylindrical bunker. *Chemical Engineering Science* 51-20, 4605-4610.
2. Ahn, Başaranoğlu, Yilmaz, Buğutekin & Zafer GülHojin, 2007. Experimental investigation of granular flow through an orifice. *Powder Tech.* 186-1, 65-71.
3. Castro, R., 2001. Escalamiento para modelo físico de flujo gravitacional. Memoria para optar al título de Ingeniero Civil en Minas, Universidad de Chile.
4. Castro, R., 2007. Study of the mechanism of Gravity Flow for Block Caving. PhD Thesis, School of Engineering , University of Queensland.
5. Chen, 1997. Stochastic Modeling of Rock Fragment Flow under Gravity
6. Crank, J. *The Mathematics of Diffusion.*
7. González, F., 2008. Metodología para diseño de mallas de extracción incorporando autómatas celulares. Memoria para optar al título de Ingeniero Civil de Minas, Universidad de Chile.
8. Graham, D. ; Tait, R. ; Wadmore, R., 1987. Measurement and Prediction of Flow Patterns of Granular Solids in Cylindrical Vessls. *Powder Tech,* 50, 65-76.
9. H. K. Vestige And W. Malalasekera, “An introduction to computational fluid dynamics”.
10. Koziicki, J. ; Techman, J., 2002. Application of a cellular automata model to granular flow. *Task Quartely* 6 N°3, 429-436
11. Kvapil, R., 1965. Gravity Flow of Granular Materials in Hoppers and Bins I. *Int. J. Rock Mech. Mining Sci.* Vol. 2, 25-41.
12. Melo, F. Vivanco, F. ; Fuentes, C. Apablaza, V, 2007, On drawbody shapes: From Bergmark–Roos to kinematic models. *International journal of rock mechanics and mining sciences* N° 44, 77-86.
13. Melo, F., Vivanco, F. & Fuentes, C., 2008. Isolated extracted and movement zones from kinematic and plasticity models compared to scaled models. *IJRMMS.*
14. Melo, Vivanco, Fuentes & Aplablaza, 2008. Kinematic model for quasi static granular displacements in block caving: Dilatancy effects on drawbody shapes. *International journal of rock mechanics and mining sciences* N° 42, 248-259.
15. Mullins, W., 1972. Stochastic Theory of Particle Flow under Gravity. *J. Appl. Phys.* 43-2, 665-678
16. Mullins, W., 1974. Experimental Evidence for the Stochastic Theory of Particle Flow under Gravity. *Powder Tech.* 9, 29-37
17. Mullins, W., 1979. Critique and Comparison of Two Stochastic Theories of Gravity-Induced Particle Flow. *Powder Tech.* 23, 115-119.
18. Mullins, W., 1974. Nonsteady-State Particle Flow under gravity-An Extension of the Stochastic Theory. *J. Appl. Mech.* Dic 1974.

19. Nedderman, R., 1995. The use of the kinematic model to predict the development of the stagnant zone boundary in the batch discharge of a bunker. *Chemical Engineering Science* 50-6, 959-965.
20. Niño, Y., 2002. Método de los volúmenes finitos. CI71D Modelación Numérica en ingeniería hidráulica y ambiental.
21. País, 2006. Estudio de modelos de difusión para flujo gravitacional en un material granular. Memoria para optar al título de Ingeniero Civil de Minas, Universidad de Chile.
22. Power, G., 2004. Large Scale physical modeling and full scale experiments PhD thesis, The University of Queensland, Brisbane.
23. Ubilla, J., 2002. Flujo Gravitacional en medios Granulares. Memoria para optar al título de Ingeniero Civil, Universidad de Chile.
24. Wu, Chen & Yang, 2007. A modified kinematic model for particle flow in moving beds
25. Wu, J. ; Chen, J. ; Yang, Y. 2008. A modified kinematic model for particle flow in moving beds. *Powder Tech.* 181, 74-82.
26. Zhang, K. F. & Ooi, J. Y., 1998. A kinematic model for solids flow in flat-bottomed silos. *Géotechnique* 48, No 4, 545-553
27. Zúñiga, 2007. Estudio del efecto de la distribución granulométrica en el flujo gravitacional. Memoria para optar al título de Ingeniero Civil de Minas, Universidad de Chile.

Anexo A

Resultados experimentales para la calibración

Resultados experimentales para la Zona de Extracción para el material 18mm_WD

Experimento	IS-T4		IS-T5 dp1		IS-T5 dp2		IS-T4 dp3	
Masa extraída kg	Hiez mm	Wiez mm	Hiez mm	Wiez mm	Hiez mm	Wiez mm	Hiez mm	Wiez mm
100	950	300	1,000	280	950	300	950	300
200	1,250	380	1,300	320	1,250	360	1,250	340
300	1,450	440	1,450	380	1,450	400	1,500	380
400	1,650	480	1,650	480	1,650	480	1,700	480
500	1,800	540	1,800	520	1,800	540	1,850	520
600	2,000	590	1,950	560	2,000	580	2,000	580
700	2,150	610	2,100	580	2,100	580	2,150	600
800	2,300	630	2,200	620	2,200	620	2,250	640
900	2,400	640	2,350	620	2,300	620	2,350	660
1,000	2,500	680	2,450	640	2,450	660	2,500	660
1,100			2,550	660	2,550	680	2,600	680
1,200			2,650	700	2,650	700	2,700	700
1,300			2,750	700	2,750	700	2,800	720
1,400			2,850	740	2,850	720	2,900	720
1,500			2,950	740	2,900	720	2,950	740
1,600			3,000	780	3,000	740	3,050	740
1,700			3,100	780	3,100	740	3,150	740
1,800			3,150	800	3,150	760	3,200	760
1,900			3,200	800	3,200	760		
2,000					3,200	760		

Resultados Experimentales para Zona de movimiento para el material 18mm_WD

Experimento	IS-T1		IS-T2 dp1		IS-T2 dp2		IS-T3 dp1	
	Hiez mm	Wiez mm	Hiez mm	Wiez mm	Hiez mm	Wiez mm	Hiez mm	Wiez mm
100	950	200	900	380	900	400	900	420
200	1250	300	1250	440	1250	440	1200	440
300	1450	400	1450	480	1450	480	1500	480
400	1600	420	1650	500	1600	520	1650	500
500	1750	480	1800	540	1800	540	1800	520
600	1850	520	1950	580	1900	540	1950	560
700	2000	560	2100	580	2050	580	2050	560
800	2100	560	2250	600	2150	600	2200	600
900	2200	600	2350	620	2250	600	2350	600
1000	2300	620	2450	640	2350	620	2450	620
1100	2400	640	2550	660	2450	640	2550	640
1200	2500	660	2650	700	2550	640	2650	660
1300	2550	680	2700	700	2650	680	2750	680
1400	2650	700	2800	700	2750	680	2800	680
1500	2750	700	2900	720	2800	700	2900	700
1600	2850	720	2950	720	2900	720	2950	720
1700	2900	740	3050	720	2950	740	3050	720
1800	3000	760	3100	720	3000	740	3100	740
1900	3050	760	3200	720	3100	740	3150	740
2000	3100	760	3250	720	3150	740	3200	740
2100	3200	760			3250	740		
2200	3200	760						

Resultados experimentales para la Zona de movimiento para el material 8mm ND

Experimento	IS-T4		IS-T5 dp1		IS-T5 dp2		IS-T4 dp3	
	Hiez mm	Wiez mm	Hiez mm	Wiez mm	Hiez mm	Wiez mm	Hiez mm	Wiez mm
50	1,400	380	1,450	380	1,390	340	1,810	350
100	1,980	510	2,170	490	1,940	450	2,330	440
150	2,400	560	2,770	530	2,700	570	2,910	550
200	2,830	610	3,130	590	3,230	610	3,300	610
250	3,290	640	3,300	630	3,300	640	3,300	630
300	3,300	670	3,300	650	3,300	680	3,300	630
350	3,300	680	3,300	670	3,300	710	3,300	650
400	3,300	700	3,300	700	3,300	730	3,300	660
450	3,300	720	3,300	730	3,300	740	3,300	680
500	3,300	740	3,300	740	3,300	750	3,300	690
550	3,300	750	3,300	760	3,300	770	3,300	690
600	3,300	760	3,300	770	3,300	800	3,300	710
650	3,300	770	3,300	780	3,300	810	3,300	720
700			3,300	800	3,300	840	3,300	730
750			3,300	800	3,300	840	3,300	740
800			3,300	810	3,300	850	3,300	750
850			3,300	820	3,300	860	3,300	750
900			3,300	840	3,300	870	3,300	760
950			3,300	850	3,300	890	3,300	780
1,000			3,300	880	3,300	890	3,300	800
1,050			3,300	890	3,300	890	3,300	820
1,100			3,300	900	3,300	900	3,300	830
1,150			3,300	900	3,300	900	3,300	840
1,200			3,300	910	3,300	900	3,300	860
1,250			3,300	910	3,300	910	3,300	870
1,300			3,300	920	3,300	910	3,300	960
1,350			3,300	920	3,300	910	3,300	960
1,400			3,300	920	3,300	920	3,300	960
1,450			3,300	920	3,300	920	3,300	960
1,500			3,300	920	3,300	920	3,300	960
1,550			3,300	920	3,300	920	3,300	960
1,600			3,300	920	3,300	920	3,300	960
1,650			3,300	930			3,300	960
1,700			3,300	930			3,300	960
1,750			3,300	930			3,300	960
1,800			3,300	930			3,300	960
1,850			3,300	930				
1,900			3,300	930				

Resultados experimentales para la Zona de movimiento para el material 18mm WD

Experimento	IS-T1		IS-T2 dp1		IS-T2 dp2	
Masa extraída kg	Hiez mm	Wiez mm	Hiez mm	Wiez mm	Hiez mm	Wiez mm
20	370	260	950	120	800	160
40	1170	580	1250	200	1250	360
60	1370	600	1500	240	1500	400
80	1570	610	1800	280	1750	480
100	1760	610	1900	280	2000	480
120	1960	610	2000	320	2200	480
140	2160	620	2150	360	2450	520
160	2340	640	2250	400	2600	520
180	2470	660	2400	400	2700	520
200	2610	680	2500	440	2800	560
220	2750	680	2600	480	2900	560
240	2880	700	2750	480	3000	600
260	3020	720	2850	520	3050	600
280	3160	740	2950	520	3150	600
300	3300	740	3050	560	3250	640
320	3300	760	3200	560	3300	640
340	3300	800	3250	560	3300	680
360	3300	820	3300	560	3300	680
380	3300	840	3300	560	3300	680
400	3300	860	3300	600	3300	680
420	3300	880	3300	600	3300	720
440	3300	900	3300	600	3300	720
460	3300	900	3300	600	3300	720
480	3300	920	3300	600	3300	720
500	3300	920	3300	600	3300	720
520	3300	920	3300	600	3300	760
540	3300	940	3300	600	3300	760
560	3300	940	3300	640	3300	760
580	3300	960	3300	640	3300	760
700	3300	1020				
800	3300	1040				
900	3300	1080				
1000	3300	1100				
1100	3300	1120				
1200	3300	1160				
1300	3300	1180				
1400	3300	1200				
1500	3300	1200				
1600	3300	1200				

ANEXO B

CODIGOS FUENTE

Explicito_2d: Implementación del modelo en 2D considerando la condición de borde

```
Lx=3300;
Lz=3300;

dx=5;
dz=5;

X = (-Lx/2:dx:Lx/2);
Z = (0:dz:Lz);

% Definicion de velocidades para adveccion
imax = length(X);
zmax = length(Z);

D=K;
%Constantes Difusivas
Dx = K*(1+CC*Lz);

if dx^2/(2*Dx) < dz
    sprintf('Problemas de estabilidad')
    dx^2/(2*Dx)

    pause
end

clear Jz Jx
Jz = zeros(imax, zmax);
Jzz = zeros(imax,zmax);

Jx = zeros(imax, zmax);

Dw=Dx/dx; De=Dw;
ap = dx/dz;
flag=0;
tic
Q=60/3600/1900*1000^3; % m3/s
DrawWidthX = 100;

%Velocidad Lineal

ang = 20 * pi/180;
dpx=floor(0.5*DrawWidthX/dx);
Jz(find(X==0) - dpx:find(X==0) + dpx,1) = Q / DrawWidthX^2;
angulo = 19 * pi /180;
```

```

old_dx2 = -1;
db = dz*tan(ang);

Jx(2:imax-1,1) = -0.5/dx*D* (Jz(3:end,1) - Jz(1:end-2,1));

CONDICION_DE_BORDE = 1
cambio_de_nodo = false;

for z=1:zmax-1
    (z-1)*dz;
    D=K*(1+CC*(Z(z+1)));

tmp = (Z(z+1) * tan(ang));
R = DrawWidthX/2 + tmp +dx;
R0 = R - tmp + (Z(z) * tan(ang));
Dw=D/dx; De=Dw;

if CONDICION_DE_BORDE
    iter = 1:31;
else
    iter = 1:31;
end

kk=tan(ang)/D;
for ite=iter

    if mod(ite, 2) == 1
        ii=1:imax;
    else
        ii=imax:-1:1;
    end
    for i=ii %FOR PARA X

        Su = 0;
        Sp = 0;
        Sp0 = 0;
        ap0 = dx/dz;
        x=X(i);
        aw = Dw; ae=De;

        if i == 1
            aw = 0;
        elseif i == imax
            ae = 0;
        end

if CONDICION_DE_BORDE
    dr = (R-abs(x));
    dr2 = (R0-abs(x));

    if( dr > 0 && dr < dx && i ~= 1 && i ~= imax)

        dx2 = (dx/2 + (dr - db/2));

```

```

        if(dr2 < 0 )
            cambio_de_nodo = true;
        end

        old_dx2 = dx2;
        if ite == 1
            if(x > 0 )
                ae = 0;
            end
            if(x < 0 )
                aw = 0;
            end
        else
            if(x > 0)
                ap = (dx2 + db)/dz + aw;
                ap0 = (dx2)/dz;
                ae = 0;
                if(cambio_de_nodo)
                    Su = ap0 * Jz(i-1,z);
                    ap0 = 0;
                    cambio_de_nodo = false;
                end
            end
            if(x < 0)
                ap = (dx2 + db)/dz + ae;
                ap0 = dx2/dz;
                aw = 0;
                if(cambio_de_nodo)
                    Su = ap0 * Jz(i+1,z);
                    ap0 = 0;
                    cambio_de_nodo = false;
                end
            end
        end
        ap = ae + aw + dx/dz;
    end

    if(dr < 0)
        Jz(i,z+1)=0;
        continue;
    end

end

if ite == 1
    ap0 = dx/dz;
    ap = ap0;
    Jz(i,z+1) = Jz(i,z);
else

    ap = ap + Sp0 - Sp;
    Jz(i, z+1) = ((ap0) * Jz(i, z) + Su)/ap;

    if i ~= 1 && aw ~= 0

```

```

        Jz(i, z+1) = Jz(i, z+1) + aw * Jz(i-1,z+1)/ap;
    end

    if i ~= imax && ae ~= 0
        Jz(i, z+1) = Jz(i, z+1) + ae * Jz(i+1,z+1)/ap;
    end
end

end %for i=...
end

end

for z=1:zmax-1
D=K*(1+CC*(Z(z)));
tmp = (Z(z) * tan(ang));
R = DrawWidthX/2 + tmp +dx;

    for i=1:imax
        x=X(i);
    if CONDICION_DE_BORDE
        dr = (R-abs(x));
        if( (dr > 0 && dr < dx) && i~= 0 && i~=imax)

            if(x > 0)
                Jx(i, z) = -D / dx * (Jz(i,z) - Jz(i-1,z));
            end
            if(x < 0)
                Jx(i, z) = -D / dx * (Jz(i+1,z) - Jz(i, z));
            end
            continue;

        end

        if(dr < 0)
            Jz(i,z)=NaN;
            Jx(i,z)=NaN;
            continue;
        end
    end % for z=...

        if( i~= 0 && i~=imax)
            Jx(i, z) = (-0.5/dx * D * (Jz(i+1, z) - Jz(i-1, z)));
        end
    end
end
end
toc
beep
clear Dy M Sp Su a0 ae an ap as aw flag i j z

```

comsol_1dp.m: Resuelve un problema numérico para un punto de extracción.

```
% Parametros:
%   a = tamaño punto de extracción
%   L = Altura del modelo
%   ang = Angulo de la zona de falla
%   dpy = Ubicación del punto de extracción en y
%   dpx = Ubicación del punto de extracción en x
%   K = parámetro del coef. De difusión
%   CC= 2do parámetro del coef de Difusion.

% COMSOL Multiphysics Model M-file
% Generated by COMSOL 3.4 (COMSOL 3.4.0.248, $Date: 2007/10/10 16:07:51 $)
% Some geometry objects are stored in a separate file.
% The name of this file is given by the variable 'flbinaryfile'.
flclear fem

% COMSOL version
clear vrsn
vrsn.name = 'COMSOL 3.4';
vrsn.ext = '';
vrsn.major = 0;
vrsn.build = 248;
vrsn.rcs = '$Name: $';
vrsn.date = '$Date: 2007/10/10 16:07:51 $';
fem.version = vrsn;
flbinaryfile='comsol_18mm_1dp.mphm';

g9=cone3(a/2 + L * tan(ang), L, ang, 'pos', {dpx,dpy,L}, 'axis', {0,0,-1});

% COMSOL Multiphysics Model M-file
% Generated by COMSOL 3.4 (COMSOL 3.4.0.248, $Date: 2007/10/10 16:07:51 $)

% Geometry

% Analyzed geometry
clear s
s.objs={g9};
s.name={'CON1'};
s.tags={'g9'};

fem.draw=struct('s',s);
fem.geom=geomcsg(fem);

% (Default values are not included)
% Application mode 1
clear appl
appl.mode.class = 'GeneralHeat';
appl.module = 'HT';
appl.shape = {'shlag(1,'J'),'shlag(2,'T')'};
appl.assignsuffix = '_htgh';
clear prop
```

```

prop.analysis='static';
appl.prop = prop;
clear bnd
bnd.type = {'q0','qc','T'};
bnd.shape = 1;
bnd.T0 = {0,0,Q/(a^2*pi/4)};
bnd.ind = [1,1,2,3,1,1];
appl.bnd = bnd;
clear equ
equ.ktensor = {{ sprintf('%f*(1+%f*z)', K,CC); sprintf('%f*(1+%f*z)',
K,CC);0}};
equ.C = 1;
equ.ktype = 'aniso';
equ.rho = 1;
equ.convOn = 1;
equ.init = 0;
equ.shape = 2;
equ.w = 1;
equ.ind = [1];
appl.equ = equ;
fem.appl{1} = appl;
fem.frame = {'ref'};
fem.border = 1;
fem.outform = 'general';
clear units;
units.basesystem = 'SI';
fem.units = units;

% ODE Settings
clear ode
clear units;
units.basesystem = 'SI';
ode.units = units;
fem.ode=ode;
% Multiphysics
fem=multiphysics(fem);
fem.mesh=meshinit(fem, ...
    'hauto',4);

% Extend mesh
fem.xmesh=meshextend(fem);

% Solve problem
fem.sol=femstatic(fem, ...
    'solcomp',{'T'}, ...
    'outcomp',{'T'}, ...
    'ntol',1e-006);
% Save current fem structure for restart purposes
fem0=fem;

```


Comsol_2dp: Resuelve el modelo para dos puntos de extracción utilizando Comsol.

```
% Parametros:
%   a = tamaño punto de extracción
%   L = Altura del modelo
%   ds = separación entre puntos
%   ang = Angulo de la zona de falla
%   K = parámetro del coef. De difusión
%   CC= 2do parámetro del coef de Difusion.

% COMSOL Multiphysics Model M-file
% Generated by COMSOL 3.4 (COMSOL 3.4.0.248, $Date: 2007/10/10 16:07:51 $)
% Some geometry objects are stored in a separate file.
% The name of this file is given by the variable 'flbinaryfile'.

flclear fem

% COMSOL version
clear vrsn
vrsn.name = 'COMSOL 3.4';
vrsn.ext = '';
vrsn.major = 0;
vrsn.build = 248;
vrsn.rcs = '$Name: $';
vrsn.date = '$Date: 2007/10/10 16:07:51 $';
fem.version = vrsn;

flbinaryfile='comsol_cubo18mm_2dp_XXX.mphm';

g2=cone3(a/2 + L * tan(ang), L, ang, 'pos', {a/2,0,L}, 'axis', {0,0,-1});
g4=cone3(a/2 + L * tan(ang), L, ang, 'pos', {ds-a/2,0,L}, 'axis', {0,0,-1});

% Analyzed geometry
clear s
s.objs={g2,g4};
s.name={'CON1', 'CON2'};
s.tags={'g2', 'g4'};

fem.draw=struct('s',s);
fem.geom=geomcsg(fem);

% Initialize mesh
fem.mesh=meshinit(fem, ...
                  'hauto',4);

% (Default values are not included)

% Application mode 1
clear appl
appl.mode.class = 'GeneralHeat';
appl.module = 'HT';
appl.shape = {'shlag(1, 'J')', 'shlag(2, 'T')'};
appl.assignsuffix = '_htgh';
```

```

clear prop
prop.analysis='static';
appl.prop = prop;
clear bnd
bnd.type = {'q0','qc','cont','T'};
bnd.shape = 1;
bnd.T0 = {0,0,0,Q/(a^2*pi/4)};
bnd.ind = [1,1,2,3,2,3,4,1,1,1,3,2,1,3,4,1,1];
appl.bnd = bnd;
clear equ
equ.ktensor = {'8.400000*(1+0.000700*z)';'8.400000*(1+0.000700*z)';0};
equ.ktensor = {{ sprintf('%f*(1+%f*z)', K,CC); sprintf('%f*(1+%f*z)',
K,CC);0}};
equ.C = 1;
equ.ktype = 'aniso';
equ.rho = 1;
equ.convOn = 1;
equ.init = 0;
equ.shape = 2;
equ.w = 1;
equ.ind = [1,1,1];
appl.equ = equ;
fem.appl{1} = appl;
fem.frame = {'ref'};
fem.border = 1;
fem.outform = 'general';
clear units;
units.basesystem = 'SI';
fem.units = units;

% ODE Settings
clear ode
clear units;
units.basesystem = 'SI';
ode.units = units;
fem.ode=ode;
% Multiphysics
fem=multiphysics(fem);

% Extend mesh
fem.xmesh=meshextend(fem);

% Solve problem
fem.sol=femstatic(fem, ...
                 'solcomp',{'T'}, ...
                 'outcomp',{'T'});

% Save current fem structure for restart purposes
fem0=fem;

```

Get_data_for_w: Extrae los datos obtenidos con consol.

```
clear Jz_w Jx_w
Jz_w = zeros(length(X), length(Z));
Jx_w = zeros(length(X), length(Z));

[xx, yy] = meshgrid(X, 0);

xx = reshape(xx', 1, []);
yy = reshape(yy', 1, []);

zt=0;
x2 = [];
y2 = [];
z2 = [];

step = 25;
z_end = length(Z);
for z = 1:step:z_end
x2 = [];
y2 = [];
z2 = [];

z_max = min([z+step-1 z_end]);
    % pause;
    for zt = z:z_max
        z2 = [z2 zeros(size(xx))+Z(zt)];
        x2 = [x2 xx];
        y2 = [y2 yy];
    end % for z=...

[vz,vx]=postinterp(fem, 'T', 'dflux_x_htgh', [x2 ; y2; z2], 'Ext', 0);
Jz_w(:,z:z_max)=reshape(vz, length(X), []);
Jx_w(:,z:z_max)=reshape(vx, length(X), []);

end
```

h_imz.m: Calcula la altura del EZ e MZ con respecto a la masa extraida.

```
dpaso = dz;

z_iez = 0:dpaso:Lz;
x_iez = z_iez*0+0;
y_iez = z_iez*0+0;

vz = postinterp(fem, 'T', [x_iez ; y_iez; z_iez ], 'solnum', 'all');

%IMZ = [ IMZ z_imz ];
IEZ = [ z_iez(2:end) ];
IMZ = IEZ;
Tiempo_IMZ = [ cumsum(dpaso./vz(1:end-1)*dp) ];
Tiempo = [ cumsum(dpaso./vz(1:end-1))*(1+dp) ];
```

```

Masa = [ Tiempo*Q/1000^3*densidad ];
Masa_IMZ = [ Tiempo_IMZ*Q/1000^3*densidad ];

% Lleno las masas q faltan con la altura maxima

m = interp1(IMZ, Masa_IMZ, [3300], 'linear','extrap');
idx = find(Masa > m);
Masa_IMZ = [Masa_IMZ Masa(idx) ];
IMZ = [IMZ Masa(idx)*0+Lz ];

```

w_iez: Calcula el ancho del EZ v/s la masa extraida

```

tic

paso=dx/5;
end_x = Lx/2-dx;
tt=0;
z0 = 0;

Tiempos = ((LL(:,1))./Q/densidad*1000^3)'; % Defino los tiempos maximos
MasaW = zeros(size(Tiempos));
IEZ_W = zeros(size(Tiempos));

for idx=1:length(Tiempos)
    idx

    for xt=0:paso:end_x
        z = z0;
        x=xt;
        tt=0;

        while true
            if(z < 0) % problemas numericos dan velocidad negativa
                z=0;
            end

            k = z/dz + find(Z==0); % obtengo posicion en la matriz
            i = x/dx+find(X == 0);
            if k> length(Z)
                break;
            end
            vv = velocidad(i, k, Jx_w, Jz_w); %calculo velocidad

            deltat = min(abs([[dx/vv(1) dz/vv(2)] Tiempos(idx)-tt ]));
            if(isinf(deltat))
                break;
            end

            tt = tt + deltat;
            z = z + vv(2)*deltat;
            x = x + vv(1)*deltat;

            if(idx > length(Tiempos))

```

```

        break;
    end

    if(tt*(1+dp) >= Tiempos(idx)) % llegue al final del tiempo
        break;
    end

    if(idx > length(Tiempos))
        break;
    end

% Se encuentra en la mitad del elipsoide?
    if(IEZ_W(idx) < 2*x && z < LL(idx,2)/2+dz && z > LL(idx,2)/2-dz)
        IEZ_WH(idx) = z;
        IEZ_W(idx) = 2*x;
        MasaW(idx) = Tiempos(idx)*Q/1000^3*densidad;
    end

    if(z >= Lz)
        break;
    end

    if((z) == z0 || isnan(z) || isnan(x))
        break;
    end
end
end

    if(isnan(x) || isnan(z))
        continue;
    end
end
end
end

```

w_imz: Calcula el ancho del EZ v/s la masa extraída

```

paso=dx/5;
end_x = Lx/2-dx;
tt=0;
z0 = 0;
flag = 0;

Tiempos = ((LL2(:,1))./Q/densidad*1000^3)';
MasaW_IMZ = zeros(size(Tiempos));
IMZ_W = zeros(size(Tiempos));

for idx=1:length(Tiempos)
    idx

    for xt=0:paso:end_x
        z = z0;
        x=xt;
        tt=0;

        while true

            if(z < 0)

```

```

        z=0;
    end

    k = z/dz + find(Z==0);
    i = x/dx+find(X == 0);
    if k> length(Z)
        break;
    end
    vv = velocidad(i, k, Jx_w, Jz_w)/dp;
    if(idx > length(Tiempos))
        break;
    end

    deltat = min(abs([0.75*[dx/vv(1) dz/vv(2)] Tiempos(idx)-tt ]));
    if(isinf(deltat))
        break;
    end

    tt = tt + deltat;
    z = z + vv(2)*deltat;
    x = x + vv(1)*deltat;

    if(z >= Lz)
        z=Lz;
    end

    if(tt >= Tiempos(idx))
        break;
    end

    if(idx > length(Tiempos))
        break;
    end

    if(IMZ_W(idx) < 2*x && z < LL2(idx,2)/2+dz && z > LL2(idx,2)/2-dz)
        IMZ_WH(idx)= z;
        IMZ_W(idx) = 2*x;
        MasaW_IMZ(idx) = Tiempos(idx)*Q/1000^3*densidad;
    end

    if(z >= Lz)
        break;
    end

    if((z) == z0 || isnan(z) || isnan(x))
        break;
    end
end

if(isnan(x) || isnan(z))
    continue;
end
end
end

```

imz_per_masa: Calcula la geometria total del EZ para el caso 2D.

```
%Elipsoide para multiples puntos de extraccion, dibuja en todo el dominio
tic

deltat=1;
clear xx
clear zz
z = 0;
m=1;
n = 1;
paso=0.5;
end_x = Lx/2-dx;
tt=0;
z0 = 0;
flag = 0;
IEZ_PER_MASA = -ones(length(X), length(Z)) * NaN;

if length(dz) > 1
    dz_ = dz;
else
    dz_ = ones(size(Z))*dz;
end
for z0=0:100:0
    calc_time
    paso=0.1*dx;

for xt=-end_x:paso:end_x
    z = z0;
    x=xt
    tt=0;
    tmp1 = max(find(Z <= z));
    k = tmp1 + (z-Z(tmp1))/dz_(tmp1);
    i = x/dx+find(X == 0);
    if z0 > 0 && isnan(IEZ_PER_MASA(roundn(i,0.1), roundn(k,0.1)))
        continue;
    end

    if z0 > 0
        tt = IEZ_PER_MASA(roundn(i,0.1), roundn(k,0.1));
    end

    while k < length(Z)

        tmp1 = max(find(Z <= z));
        k = tmp1 + (z-Z(tmp1))/dz_(tmp1);
        i = x/dx+find(X == 0);

        if k > length(Z)
            break;
        end
    end
end
end
```

```

        IEZ_PER_MASA(roundn(i,0.1), roundn(k,0.1)) =
        tt*(1+dp)*Q/1000^3*densidad;

        vv = velocidad(i, k, Jx_w, Jz_w);
        if(vv(2) < 0)
            vv(2)=0;
        end
        deltat = min(abs(0.75*[dx/vv(1) dz_(tmp1)/vv(2)] ));

        if (isinf(deltat) || max(isnan(vv))~=0)
            break;
        end
        tt = tt + deltat;
        z = z + vv(2)*deltat;
        x = x + vv(1)*deltat;
        if(tt*(1+dp) > end_tt)
            break;
        end
        if(z >= Lz)
            break;
        end
        if((z) == z0 || isnan(z) || isnan(x))
            break;
        end

    end

end

end
end

toc
beep

```

imz_per_masa.m: Dibuja toda la MZ basado en la masa extraida para el caso 2D.

```

%Elipsoide para multiples puntos de extraccion, dibuja en todo el dominio

end_x = Lx/2-dx;
tt=0;
z0 = 0;
IMZ_PER_MASA = -ones(length(X), length(Z)) * NaN;

if length(dz) > 1
    dz_ = dz;
else
    dz_ = ones(size(Z))*dz;
end
tmp = (-end_x:paso:end_x);
Total = length((-end_x:paso:end_x));
for z0=0:100:200
    calc_time
    z0
    paso=0.5;
    MZ_Reach = inf;
for xt=-end_x:paso:end_x

```



```

z = z0;
x = xt;
tt=0;
tmp1 = max(find(Z <= z));
k = tmp1 + (z-Z(tmp1))/dz_(tmp1);
i = x/dx+find(X == 0);
if ~isnan(IMZ_PER_MASA(roundn(i,0.1), roundn(k,0.1)))
    tt = IMZ_PER_MASA(roundn(i,0.1), roundn(k,0.1));
end
while k < length(Z)

    tmp1 = max(find(Z <= z));
    k = tmp1 + (z-Z(tmp1))/dz_(tmp1);
    i = x/dx+find(X == 0);

    IMZ_PER_MASA(roundn(i,0.1), roundn(k,0.1)) = tt*Q/1000^3*densidad;
    if(i < 1 || i > length(X))
        vv=[0 0];
    else

        vv = velocidad(i, k, Jx_w, Jz_w)/dp;
    end
    if(vv(2) < 0)
        vv(2)=0;
    end
    deltat = min(abs(0.75*[dx/vv(1) dz_(tmp1)/vv(2)] ));

    if (isinf(deltat) || max(isnan(vv))~=0)
        break;
    end
    tt = tt + deltat;
    z = z + vv(2)*deltat;
    x = x + vv(1)*deltat;
    if(z >= zf || z > max(Z))
        MZ_Reach = min([ tt*Q/1000^3*densidad MZ_Reach]);
        z=max(Z);
        break;
    end
    if(tt > end_tt)
        break;
    end
    if(z >= Lz)
        break;
    end
    if((z) == z0 || isnan(z) || isnan(x))
        break;
    end

end

end
end

toc
beep

```