



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

APORTES A LA TEORÍA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS
REFLEJADAS Y AL MODELAMIENTO DE PROCESOS NEUROBIOLÓGICOS
SUBYACENTES A FENÓMENOS COGNITIVOS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

GONZALO ESTEBAN MENA CARRASCO

PROFESOR GUÍA:
PABLO DARTNELL ROY

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
ROBERTO ARAYA SCHULZ
JAIME SAN MARTÍN ARISTEGUI
PEDRO MALDONADO ARBOGAST

SANTIAGO DE CHILE
AGOSTO 2011

RESUMEN DE LA MEMORIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: GONZALO MENA CARRASCO
FECHA: 22/08/2011
PROF. GUÍA: PABLO DARTNELL

APORTES A LA TEORÍA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS
REFLEJADAS Y AL MODELAMIENTO DE PROCESOS NEUROBIOLÓGICOS
SUBYACENTES A FENÓMENOS COGNITIVOS

Esta memoria fue concebida con el objetivo de ser un aporte tanto a la matemática como a la neurociencia computacional. En el capítulo 1 se proveen los antecedentes bibliográficos necesarios.

El capítulo 2 es una investigación sobre ecuaciones diferenciales estocásticas reflejadas en el caso multidimensional con drift dado por $b(x) = -\nabla\Psi(x)$ y matriz de difusión $\sigma(x) = \sigma I_d$. Se obtiene una expresión explícita para la medida estacionaria primero cuando el dominio de reflexión es acotado y de clase C^∞ , y posteriormente para dominios no necesariamente suaves ni acotados, pero que son aproximables por estos últimos. También se obtienen algunos resultados de convergencia a la medida estacionaria.

En el capítulo 3 se propone un nuevo modelo para la toma de decisiones, que busca conciliar las discusiones de la literatura cognitiva con los hallazgos neurobiológicos recientes. En este modelo, se utiliza el proceso de Ornstein-Uhlenbeck con reflexiones en el primer cuadrante para dar cuenta de la dinámica aleatoria de las poblaciones de neuronas que están involucradas en la toma de una decisión. A través de simulaciones computacionales se muestra que el modelo es capaz de representar varios hechos empíricos asociados a la toma de decisiones. Cabe mencionar que aunque el capítulo 2 sea una investigación independiente, ésta fue motivada absolutamente por el interés de estudiar el modelo del capítulo 3.

Finalmente, en el capítulo 4 se propone un mecanismo, basado en un algoritmo de aproximación estocástica, para dar cuenta de algunos fenómenos de aprendizaje. Este mecanismo implementa las ideas que recientemente se han propuesto en el campo de la neurociencia computacional, y tiene buenas propiedades matemáticas en tanto que garantiza la convergencia casi segura a una constante. Los resultados de simulación muestran que efectivamente se logra explicar el aprendizaje aunque la lentitud de la convergencia exige que se hagan mejoras, lo que queda propuesto como una línea de trabajo futuro.

AGRADECIMIENTOS

*Gracias a la vida que me ha dado tanto
Me dio el corazón que agita su marco
cuando miro el fruto del cerebro humano*

Violeta Parra

Quiero agradecer en primer lugar el apoyo y confianza incondicional de mi familia. Este trabajo está dedicado a mi hermano Manuel.

Agradezco también a los integrantes de mi comisión examinadora por haber estado siempre abiertos a la discusión de los resultados, y a los profesores Patricio Felmer, Joaquín Fontbona y Servet Martínez, quienes sin ser miembros de la comisión accedieron a darme ayuda cuando lo necesité. Agradezco particularmente a Pablo Dartnell por darme plena libertad para trabajar y por su infinita paciencia.

Doy las gracias a mis compañeros del Departamento de Ingeniería Matemática por haber contribuido a hacer mi paso por la facultad una experiencia tremendamente positiva. También agradezco a Mauricio Toro y Rodrigo Avaria por su interés en discutir y aprender juntos del fascinante mundo de la neurociencia.

A nivel institucional agradezco al Departamento de Ingeniería Matemática por haberme otorgado una formación matemática de primer nivel y al Centro de Investigación Avanzada en Educación por financiar este trabajo.

Finalmente agradezco a mis amigos por su compañía y en especial a los miembros de la comunidad habitacional José Arrieta 83 por soportar mi mal humor.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Naturaleza de la investigación	1
1.2. Introducción a los conceptos y técnicas relevantes en neurociencia	4
1.2.1. Nociones básicas de neurofisiología	4
1.2.2. Electrofisiología	8
1.3. Modelos Neurodinámicos	10
1.3.1. El modelo de Hodgking y Huxley	10
1.3.2. El modelo Integrate and fire	11
1.3.3. Modelos de poblaciones	13
1.3.4. Elección del modelo adecuado	14
1.4. Un Marco Teórico para la toma de decisiones	14
1.4.1. Leyes psicofísicas asociadas a la toma de decisiones	21
Referencias	27
2. Aportes a la teoría de difusiones reflejadas	28
2.1. Definiciones y resultados previos	28
2.1.1. Ecuación diferencial estocástica reflejada	28
2.1.2. Resultados clásicos sobre semigrupos y procesos de Markov	30
2.1.3. Algunos resultados auxiliares	35
2.2. Resultados Originales	35
2.2.1. Caracterización del generador de una difusión reflejada para dominios regulares	36
2.2.2. Medida estacionaria para un cierto tipo de difusión reflejada en dominios regulares	37
2.2.3. Extensión a dominios generales	42
2.2.4. Convergencia a la medida estacionaria	47
Referencias	51
3. Un modelo para la toma de decisiones basado en evidencia neurobiológica	52
3.1. Introducción	52
3.1.1. Neurobiología de la toma de decisiones	53
3.1.2. Uniendo dos niveles de descripción	60
3.2. Un nuevo modelo para la toma de decisiones	65
3.2.1. El Modelo	65
3.2.2. Esquema de simulación	66
3.2.3. Parámetros del modelo	69

3.3. Resultados	70
3.3.1. Fenómenos conductuales	71
3.3.2. Fenómenos neurobiológicos	74
3.4. Discusion	78
Referencias	82
4. Una aplicación a aprendizaje	83
4.1. Introducción	83
4.1.1. Conceptualización del aprendizaje	83
4.1.2. Optimalidad en la toma de decisiones	85
4.1.3. El umbral de decisión como responsable del aprendizaje	86
4.2. Un mecanismo para el aprendizaje perceptual	89
4.2.1. Preliminares: algoritmos de aproximación estocástica y resultados de convergencia	90
4.2.2. El mecanismo	92
4.2.3. Análisis del algoritmo	95
4.3. Resultados	98
4.3.1. Convergencia a un equilibrio de acuerdo a un criterio pre-establecido	99
4.3.2. Aprendizaje como mejora en los tiempos de decisión y la precisión .	101
4.3.3. Aprendizaje como adaptación	103
4.4. Discusión	107
Referencias	111
5. Conclusiones y Problemas Abiertos	112

Capítulo 1

Introducción

Mientras el cerebro sea un misterio, el universo continuará siendo un misterio

Santiago Ramón y Cajal

Este capítulo introductorio tiene dos objetivos: el primero es definir todas las aristas del programa de investigación llevado a cabo, lo que se realiza en la sección 1.1. El segundo objetivo es mostrar todos los antecedentes que son relevantes para este trabajo, pero que no corresponden al quehacer matemático de manera directa. En esa línea, en la sección 1.2 se da una breve introducción de neurofisiología, y se presentan una herramienta experimental básica en neurociencia. En 1.3 se muestran modelos neurodinámicos que explican el funcionamiento de neuronas o conjuntos de ellas. Finalmente, en 1.4 se presenta el proceso cognitivo de la toma de decisiones, mirado desde el punto de vista de la psicología.

1.1. Naturaleza de la investigación

El trabajo realizado no se circunscribe sólo a la demostración de certezas matemáticas. Parte importante de la investigación se centró en el planteamiento mismo de un modelo matemático, el que no es antojadizo pues responde a una profunda inmersión en la literatura pertinente de dos áreas relevantes: la psicología cognitiva y las neurociencias cognitivas. Este modelo no pretende ser una idea original del todo; es más bien una sofisticación de modelos previos. Su importancia está en que permitirá representar fenómenos cognitivos que hasta la fecha no han sido abordados desde el punto de vista de la modelación matemática. Además, hace uso de herramientas matemáticas que no son frecuentemente utilizadas con estos fines, lo que se confía tiene el valor de proveer de nuevos *insights* a este tipo de investigaciones.

La motivación para esta investigación es un profundo interés en tratar de entender la cognición. Para tales fines podría uno tomar una aproximación conductista, entendiendo la mente como una caja negra de la que sólo podemos registrar respuestas o *outputs* correspondientes a determinados estímulos o *inputs* [37], sin embargo dicha estrategia de conductismo ingenuo nos privaría de cualquier intento de entender las bases que subyacen a la relación estímulo-respuesta. Un enfoque más fructífero sería el dado por la psicología cognitiva, disciplina que explícitamente hipotetiza sobre los mecanismos internos que

dan lugar a la conducta. Esta visión, que surge como reacción al conductismo [45], ha sido ampliamente explotada durante la segunda mitad del siglo XX, y de ella ha nacido, a modo de ejemplo, la metáfora de que la mente opera como un computador [55, 45]. Lamentablemente, la psicología cognitiva también está sujeta a críticas: puede suceder que un modelo del funcionamiento mental sea capaz de explicar de manera satisfactoria la conducta, pero podría perfectamente tratarse de una quimera. Es por eso importante incorporar la visión neurobiológica, que dará luces sobre cómo estos procesos mentales abstractos pueden ser implementados en el organo que de manera unánime se piensa da cabida a dichos procesos: el cerebro. Tomando en cuenta la fisiología del cerebro por una parte, y la ampliamente estudiada conducta por otro lado, es posible converger a mecanismos más restringidos sobre el funcionamiento mental, esta vez dotados de una mayor plausibilidad como sistemas biológicos

Es respecto a este punto donde la matemática juega un rol fundamental: a pesar de los conocimientos que la neurociencia nos brinda sobre el funcionamiento del cerebro, existe la opinión generalizada -con justa razón- de que el cerebro es un sistema en extremo complejo; yendo al nivel microscópico observamos inmediatamente que se caracteriza por su inmensa interconectividad. ¹ Mi convicción es que la matemática, sobre todo en sus ramas más modernas, puede resultar una herramienta extremadamente útil para hacer más asible el conocimiento de la fisiología del cerebro, y aún más, para generar un puente de entendimiento entre los dominios biológico y psicológico, específicamente, determinando cómo estos dos dominios se influyen recíprocamente.

¿Por qué es relevante pasar por la matemática? Si bien muchas investigaciones que sólo dan a la matemática un estatus instrumental estadístico han sido relevantes para entender la relación mente-cerebro, es común que este vínculo causal se presente de una manera un tanto laxa y poco específica. Por ejemplo, la industria farmacéutica explota la relación entre la acción de determinados neurotransmisores y estados de ánimo [21], sin embargo no se sabe con precisión cuáles y cómo son exactamente las estructuras y procesos que intervienen para generar un estado de ánimo. A través de la matemática es posible establecer relaciones de manera más precisa; sin ir más lejos en esta investigación se presenta un modelo paramétrico que da cuenta del curso temporal de un proceso cognitivo. Un modelo de esta naturaleza tiene la ventaja que de él se pueden hacer predicciones precisas. Para la validación del modelo se requiere el cumplimiento de dos condiciones. En primer lugar, debe ser capaz de dar cuenta de la conducta: del campo de la psicología se conoce la existencia de determinadas leyes psicofísicas, que en un sentido amplio hablan sobre relaciones funcionales no arbitrarias entre estímulos y sus respuestas asociadas. Estas leyes usualmente se plantean de manera paramétrica a través de ecuaciones [52]. Así el modelo será bueno en la medida que provea un buen ajuste a las leyes psicofísicas relacionadas al fenómeno a explicar. En segundo lugar, el mecanismo que se propone debe estar en concordancia con lo establecido por las teorías neurobiológicas sobre el proceso en cuestión. Sobre este punto es importante advertir que no necesariamente se pretende reducir la explicación del fenómeno cognitivo al nivel más básico, el de la dinámica de las neuronas. Si bien es indispensable usar el conocimiento que se dispone en esta área, el sistema nervioso forma una red suficientemente vasta como para que el pretender describir la conducta como el producto de las dinámicas producidas a nivel neuronal sea una empresa invia-

¹La cantidad de neuronas en el cerebro humano se estima en 10^{12} y la cantidad de conexiones o sinapsis en 10^{15} [59]

ble: se requeriría resolver sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales de una cantidad de variables apenas conmensurable. Es por eso importante situarse dentro del nivel de descripción adecuado. Este nivel será adecuado en tanto que permita el planteamiento de modelos suficientemente sencillos como para permitir un tratamiento analítico, y al mismo tiempo, que sea capaz de seguir representando procesos biológicos que subyagan al fenómeno cognitivo.

Es importante reconocer que en este trabajo hay mucho de heurístico: una vez situados en un nivel adecuado de descripción se debe fundamentar cómo es que este nuevo nivel de descripción más macroscópico se origina a partir de las interacciones de unidades (neuronas) en el nivel más básico. Esa tarea en general es complicada pues rigurosamente se requiere exhibir las simplificaciones empleadas que permiten pasar de un nivel al siguiente. A diferencia de lo que sucede con la mecánica estadística, en el campo de las neurociencias las unidades básicas están acopladas mediante complejas ecuaciones [22], luego, el comportamiento a nivel macroscópico no puede ser obtenido de manera simple a partir del nivel básico mediante métodos sencillos. De esa manera, se recurre forzosamente a simplificaciones que puedan parecer razonables aunque en algunos casos se carezca de una justificación matemática completa. Esta falta de rigurosidad puede ser compensada si se dan suficientes argumentos neurobiológicos que apoyen la simplificación. En este último punto es también importante considerar los argumentos provenientes de la psicología. En efecto, es interesante notar que a pesar de que estas dos áreas hayan permanecido sin mayor interacción durante buena parte del siglo XX, existen modelos provenientes del mundo de la psicología, que son concebidos para los fines propios de esa disciplina, pero que han mostrado adaptarse de buena manera a los hechos descubiertos por la neurociencia. Así, no se debe subvalorar el esfuerzo de las investigaciones psicológicas "en abstracto", y sin duda el *corpus teórico* aportado por esta disciplina debe ser tomado muy en consideración en la investigación, ésta resultará un aporte valioso para argumentar la pertinencia de las simplificaciones que podrían ser hechas.

Los resultados de la investigación se presentan en los capítulos 2,3 y 4. En el capítulo 2 se realiza una investigación matemática que concluye con resultados originales en la teoría de probabilidades. En el capítulo 3 se presenta un nuevo modelo para el proceso cognitivo de la toma de decisiones. Aquel modelo está en concordancia con las evidencias provenientes tanto de la psicología, presentadas en la sección 1.4, como de la neurobiología, presentadas estas últimas en el mismo capítulo 3. Finalmente, en el capítulo 4 se muestra un nuevo mecanismo un mecanismo que podría implementar el aprendizaje perceptual.

Los tres capítulos están fuertemente ligados. Si bien el capítulo 2 es una investigación autocontenida, la construcción matemática que se estudia, un tipo de ecuación diferencial estocástica reflejada, es utilizada para construir el modelo del capítulo 3. Una motivación para realizar el estudio teórico del capítulo 2 es que como el modelo para la toma de decisiones que se quiere crear hace uso de herramientas matemáticas sofisticadas y un tanto áridas, era importante mostrar que aún así éste es lo suficientemente razonable como para permitir un tratamiento analítico básico.

Los mecanismos propuestos en el capítulo 4 están basados en las arquitecturas concebidas por el modelo desarrollado en el capítulo 3, por lo que bien pueden considerarse una extensión de éste, para dar cabida a fenómenos de aprendizaje.

En lo que resta de este capítulo se revisan conceptos elementales y se muestran evidencias

científicas que serán utilizadas ampliamente en los capítulos 3 y 4.

1.2. Introducción a los conceptos y técnicas relevantes en neurociencia

En primer lugar, en 1.2.1, se mostrarán los conceptos elementales sobre cómo se rige el sistema nervioso desde una perspectiva neuroquímica. Luego de eso, en 1.2.2, se mostrará una metodología experimental que permite obtener registros de los fenómenos descritos en 1.2.1. Las evidencias que se presentarán en el capítulo 3 han sido obtenidas principalmente a través del uso de esta metodología.

1.2.1. Nociones básicas de neurofisiología

En la sección 1.3 se plantearán en detalle ecuaciones que rigen la dinámica de una red neuronal real. Como paso previo se mostrarán algunos conceptos básicos de neurofisiología. Si bien este enfoque no será relevante para los desarrollos de este trabajo, es importante conocer los sustratos neuroquímicos que darán finalmente lugar a las ecuaciones con las que se trabajará. Tener este conocimiento permite incorporar la dimensión biológica, con todos los supuestos y restricciones que ésta impone².

La neurona

La neurona, unidad funcional del sistema nervioso, puede adoptar variadas morfologías dependiendo del lugar donde se encuentre y su función. Sin embargo, se reconoce siempre una estructura típica mostrada en la figura 1.1. Se puede observar el cuerpo o soma donde se llevan a cabo los procesos metabólicos, un único axón mediante el cual la neurona establece comunicaciones con neuronas vecinas y variadas dendritas, que son pequeñas prolongaciones a través de las cuales la neurona puede recibir comunicación desde otras neuronas.

La comunicación entre las neuronas se lleva a cabo a través del llamado impulso nervioso.

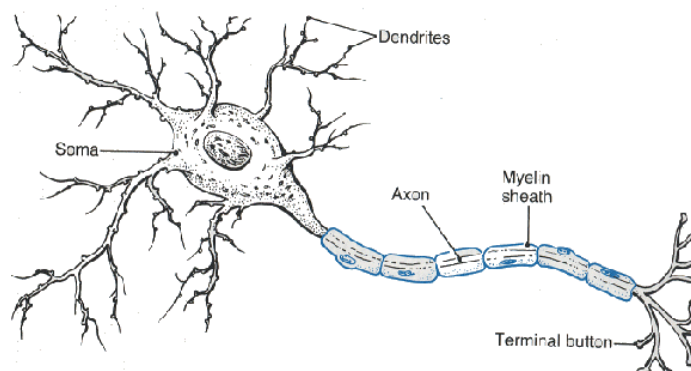


Figura 1.1: Imagen de una neurona típica. Obtenido de [5]

²Una presentación extensa sobre los tópicos tratados en esta subsección puede ser encontrada en [27]

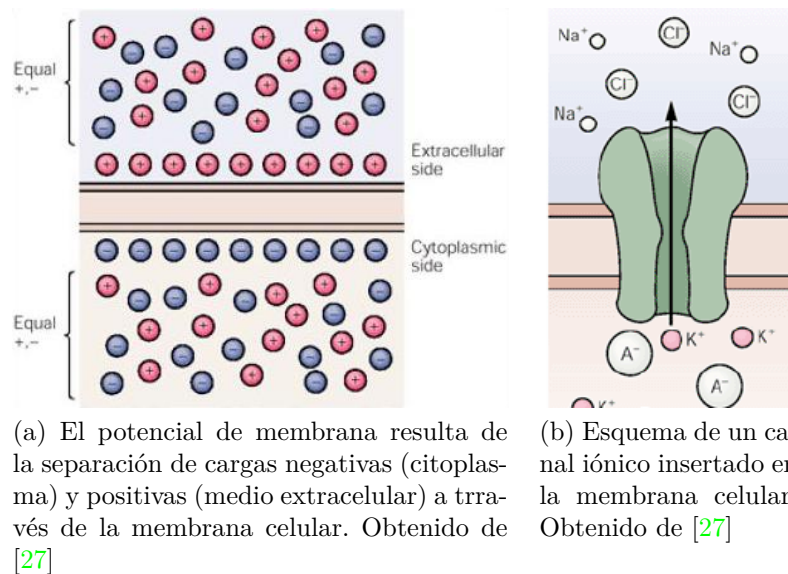


Figura 1.2

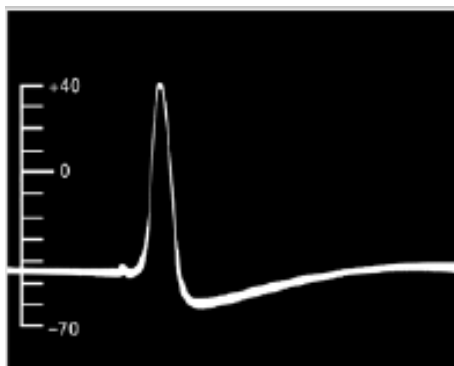
El impulso nervioso

El impulso nervioso es una onda eléctrica que se propaga a través de la membrana del axón. De manera última está explicado por la dinámica que los iones de K^+ , Na^+ , Cl^- y Ca^{2+} siguen al moverse desde el interior de la célula hacia el medio extracelular, o vice versa.

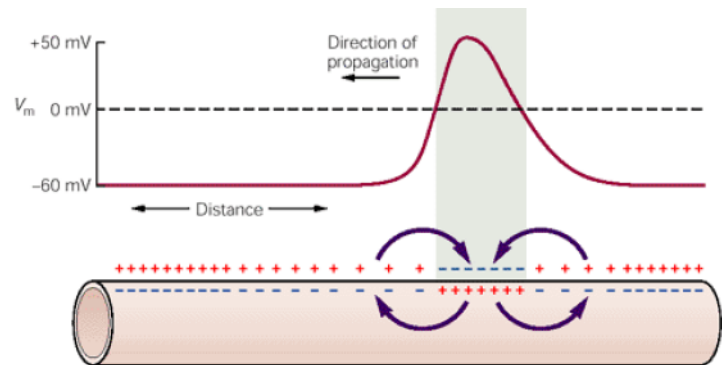
En el estado de reposo de la neurona existe una diferencia de potencial entre el interior de la membrana, donde hay una mayor cantidad de cargas negativas y el exterior, donde hay mayor cantidad de cargas positivas (ver figura 1.2a). Esta diferencia se explica por la mayor concentración de K^+ y aniones orgánicos (A^-) al interior de la membrana y a la mayor concentración de Na^+ , Cl^- en el exterior. Este estado es mantenido debido a la acción de estructuras proteínicas llamadas canales iónicos, que permiten el paso selectivo de iones a través de la membrana celular (ver figura 1.2b). Así, se obtiene que en reposo existe una diferencia de -65mV entre el interior y el exterior de ésta.

Este estado de reposo puede ser perturbado debido a la aplicación de pulsos de corriente. Si estos pulsos hacen la diferencia de potencial más negativa entonces se habla de hiperpolarización de la membrana. Por el contrario, se conoce como depolarización a la disminución en la separación de cargas. En este último caso se puede producir una reacción en cadena: Si la diferencia de potencial es suficientemente cercana a cero y supera un determinado umbral entonces se gatilla la apertura de ciertos canales iónicos dependientes del voltaje, lo que produce un abrupto aumento del potencial, el que incluso se hace positivo. Ese proceso es rápidamente silenciado por la apertura de otros canales iónicos, generándose así una rápida caída en el potencial, tomando esta vez valores más negativos que en el estado de reposo. En este último estado, de hiperpolarización, la neurona se hace más insensible a la aplicación de corriente, haciendo muy difícil que pueda volver a producirse este ciclo hasta después de un tiempo conocido como periodo refractario.

El proceso recién descrito corresponde a la emisión de un potencial de acción en la neurona. En la figura 1.3a se observa la forma típica de este, el estado de reposo es sucedido por la depolarización llegando a un máximo de potencial, para luego producirse la hiper-



(a) Primer registro intracelular de un potencial de acción del axón gigante de una jibia. Obtenido de [23]



(b) Esquema del proceso que da lugar a la propagación del impulso nervioso. Obtenido de [27]

Figura 1.3

poralización que se prolonga hasta que se recupera el estado basal.

Los potenciales de acción también deben ser entendidos en un sentido espacial, como una onda viajera. Lo que se ha mostrado hasta ahora puede corresponder a la medición del curso temporal del potencial en algún punto específico de la membrana. Sin embargo, debido a las propiedades de conducción eléctrica de la neurona, las variaciones de potencial en un lugar determinado son propagadas por el axón a regiones cercanas, induciendo así la depolarización de estas regiones. Debido al ciclo antes descrito, estas zonas ya depolarizadas experimentarán la apertura de canales dependientes de voltaje, lo que conducirá a la producción del potencial de acción en estos nuevos lugares. De esa manera, el potencial de acción se ha desplazado desde su localización original. Este proceso se esquematiza en la figura 1.3b.

Este pulso viajero, el impulso nervioso, raramente es generado de manera espontánea. Como se mencionó, para que se produzca el ciclo de apertura de canales dependientes de voltaje debe haber una depolarización. Esta depolarización típicamente ocurre como consecuencia de la llegada de un impulso nervioso desde una célula adyacente a través de una conexión en un terminal dendrítico. El proceso mediante el cual el impulso nervioso es comunicado desde una neurona a otra es conocido como sinapsis y será detallado a continuación.

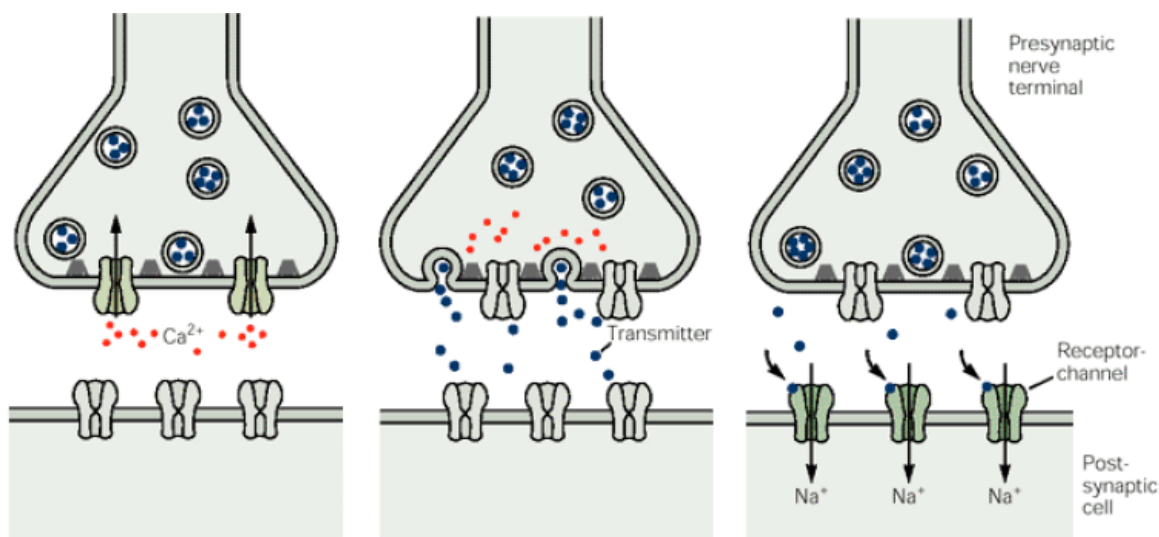
La transmisión del impulso nervioso

La comunicación entre dos células nerviosas se lleva a cabo mediante la sinápsis. Esta puede ser eléctrica o química. En las sinapsis eléctrica el mecanismo que las une hace que pueda considerarse a las dos células unidas como una única gran célula [61]. En la sinapsis química el proceso resulta más complejo y es a este tipo al que se hará referencia en lo sucesivo.

Yendo a la anatomía de la sinapsis, en general se tiene a una neurona presináptica cuyo terminal axónico se proyecta sobre una dendrita (o soma) de una neurona postsináptica. Estas dos células no están físicamente conectadas, entre ellas existe un espacio llamado hendidura sináptica. La parte final del axón presináptico, conocido como botón presi-

náptico, posee sustancias llamadas neurotransmisores, las que en el estado de reposo se encuentran encerradas en vesículas. También en el botón presináptico existen canales iónicos dependientes al voltaje; cuando el potencial de membrana es suficientemente alto éstos se abren permitiendo la entrada de iones de Ca^{2+} (ver figura 1.4a). La manera natural en que el potencial de membrana puede hacerse alto en el botón presináptico es mediante la llegada de un impulso nervioso propagándose por el axón presináptico

La apertura de los canales de Ca^{2+} ocasiona la fusión de las vesículas sinápticas con la



(a) Los iones Ca^{2+} entran desde el medio extracelular si el potencial de membrana es alto. Obtenido de [27]

(b) La entrada de iones Ca^{2+} provoca la fusión de las vesículas con la membrana. Obtenido de [27]

(c) Los neurotransmisores al unirse a su receptores permiten la entrada de iones (en este caso Na^+) al citoplasma de la célula postsináptica. Obtenido de [27]

Figura 1.4

membrana celular (ambas tienen similar composición química) provocando la salida de los neurotransmisores hacia la hendidura sináptica (ver figura 1.4b).

Por otra parte, en el extremo de la dendrita de la neurona postsináptica existen proteínas de membrana llamadas receptores sinápticos. Estos receptores son canales iónicos³ que sólo se abren cuando se encuentran unidos a neurotransmisores. La apertura de estos canales iónicos provoca el ingreso de iones a la célula postsináptica, lo que traerá consecuencias electroquímicas en esta última célula. (ver figura 1.4c)

En el caso que el neurotransmisor permita el ingreso de cationes (como Na^+) entonces el efecto será la depolarización de la célula postsináptica, que de ser lo suficientemente fuerte provocará el surgimiento de un nuevo impulso nervioso en esta última célula. Así, el impulso ha sido propagado de una célula a la siguiente a través de la sinapsis química. Se conoce a este tipo de sinapsis como excitatoria. Un ejemplo típico es la formada por los neurotransmisores glutamato y aspartato y sus correspondientes receptores NMDA y AMPA. En caso contrario, cuando se permite el ingreso de aniones (como Cl^-) entonces el

³Los receptores no necesariamente deben ser canales iónicos. De hecho, la mayoría de los receptores asociados a neurotransmisores conocidos como la acetilcolina, serotonina, dopamina, etc. operan bajo mecanismos más complejos que no tiene sentido detallar en este trabajo

efecto es de hiperpolarización, haciendo que la neurona postsináptica se haga menos sensible a estimulaciones eléctricas, disminuyendo así la probabilidad de generar un potencial de acción. En este último caso se habla de sinapsis inhibitoria, cuyo ejemplo clásico es el conformado por el neurotransmisor GABA y sus receptores $GABA_A$ y $GABA_B$.

Finalmente, es preciso mencionar que existen mecanismos que hacen que la sinapsis no se produzca de manera indefinida. Los neurotransmisores eventualmente se desacoplan de sus receptores y vuelven a la hendidura sináptica donde son recuperados y reciclados por la célula presináptica mediante el proceso de recaptación.

Los procesos mencionados anteriormente han sido descritos desde la neurobiología, sin embargo es necesario obtener fórmulas matemáticamente tratables que permitan una buena representación de ellos. Una vez obtenidas estas relaciones se podrá seguir adelante, quizás olvidando los detalles de la biología teórica, pero siempre teniendo en mente que estas expresiones matemáticas hayan su justificación final en lo mostrado en esta parte. La obtención de estas fórmulas matemáticas se hará en la sección 1.3. Antes, es importante tener una idea de cómo se miden los potenciales de acción emitidos por una neurona.

1.2.2. Electrofisiología

Los estudios electrofisiológicos hacen uso de las propiedades eléctricas del sistema nervioso. Debido a la llamada "doctrina de la neurona" instaurada por Santiago Ramon y Cajal [43], estas células constituyen la unidad funcional del sistema nervioso. Sumado a la conocida excitabilidad eléctrica de estas células [18], es natural pensar que si se quieren encontrar los correlatos neurobiológicos de la conducta, que es producto del funcionamiento del sistema nervioso, entonces es necesario investigar la dinámica de las actividades eléctricas producidas en toda la red del encéfalo. Este es de hecho el caso, pues las mediciones electrofisiológicas usualmente se hacen durante la realización de una tarea conductual. En esta parte se describe un tipo particular de estudio electrofisiológico, el de *single unit*.

Estudios locales (*single unit*)

En esta clase de estudios un conjunto de electrodos microscópicos se localizan en las cercanías de alguna célula nerviosa, detectando así la actividad eléctrica de dicha célula. Resulta particularmente importante la detección de potenciales de acción, estas ondas de descarga eléctrica descritas en 1.2.1. Es posible detectarlos pues son eventos discretos (debido al periodo refractario no puede haber dos de ellos en poco tiempo) y estereotipados. Los potenciales de acción como fenómeno sujeto a la modelación matemática serán estudiados en detalle la sección capítulo 1.3, por ahora es sólo importante mencionar su relevancia en las neurociencias cognitivas: las secuencias de potenciales de acción en conjuntos de neuronas apropiadas portan información importante sobre procesos cognitivos. De hecho, el hallazgo de que en la corteza visual primaria del gato es posible que neuronas específicas respondan a propiedades particulares del estímulo visual (como la longitud de onda) les valió el premio Nobel a los científicos David Hubel y Torsten Wiesel ([25],[24]). Debido a las evidentes complicaciones éticas que tendría el abrir el cerebro de un ser humano para insertarle los microelectrodos *in-vivo* (sólo se hace en casos especiales como en intervenciones quirúrgicas a pacientes epilépticos) es que esta clase de estudios es realizado con primates, con los problemas de interpretación de resultados que ello implica:

Los primates no humanos no poseen el complejo espectro de funcionamiento cognitivo que presenta el ser humano, luego, las habilidades cognitivas que pueden ser analizadas en esta clase de estudios son sólo las más básicas. A pesar de esto, es posible hacer extrapolaciones razonables.

Las mediciones *single-unit* permiten obtener distintos tipos de datos: En primer lugar, se puede hacer un análisis del llamado *raster plot*, en el que se muestra la secuencia de emisiones de potenciales de acción medido por cada uno de los electrodos durante un determinado lapso.⁴ Los *raster plot* son especialmente útiles para determinar si existen patrones de respuestas propios de algunas neuronas específicas frente a la presentación de estímulos, o bien si existen conjuntos de neuronas que se comunican en sincronía durante algún proceso neuronal. Un ejemplo de *raster* se muestra en la figura 1.5

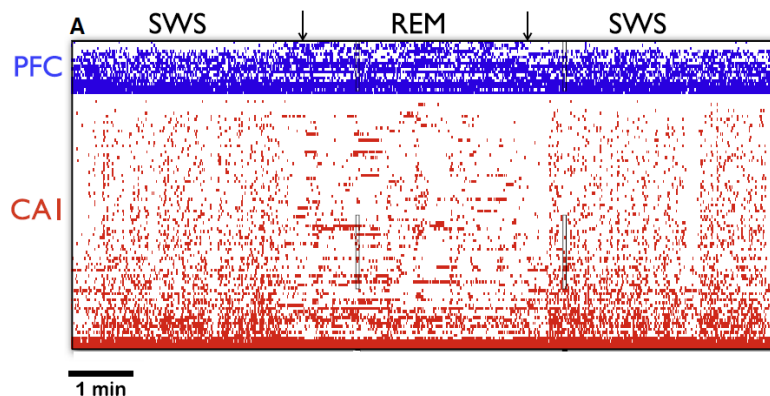


Figura 1.5: Ejemplo de un *raster plot*. Cada secuencia horizontal corresponde a la sucesión de emisión de espigas de una determinada neurona. Distintas neuronas son ordenadas verticalmente. Imagen obtenida de [58]

Agrupando apropiadamente la información de los *rasters* se obtienen los llamados histogramas de tiempo periestímulo (o *PSTH* por sus siglas en inglés). Con los *PSTH* es posible describir el curso temporal de la actividad de una neurona particular, en respuesta a un estímulo. Para ello se particiona el lapso relevante a la tarea⁵ en intervalos iguales o *bins*. Por ejemplo, puede considerarse la duración del trial, que denotamos por T , y así $[O, T] = \{[i\Delta, (i+1)\Delta]\}_{i=0, n-1}$ donde n es la cantidad de *bins*, que está en función de T y el largo de cada *bin*, denotado Δ . La misma estimulación es realizada N veces, de donde se obtiene la cantidad k_i de espigas totales que caen en $I_i = [i\Delta, (i+1)\Delta]$. De esa manera, es posible concebir que la cantidad $r_i = \frac{k_i}{N\Delta}$ como el número de espigas emitidas por la neurona por unidad de tiempo (usualmente en segundos) en el intervalo I_i . Dicha cantidad es conocida como la tasa de descargas o *firing rate* de la neurona. Repetir N veces la experimentación, además de las ventajas estadísticas que trae, es un reflejo del supuesto implícito de que existen muchas neuronas que se rigen por una dinámica similar, formando una población de gran tamaño. Luego, puede pensarse que si N es grande entonces es equivalente repetir N veces la prueba a sólo realizarla una vez, pero midiendo cada una de las neuronas de la población [12],[28]. Bajo este supuesto, podemos hablar indistintamente de tasa de descarga de la neurona o de la población. Luego, si Δ es pequeño

⁴Es común referirse a cada uno de estos potenciales de acción como espigas o *spikes*

⁵El objetivo de esta metodología es determinar cambios en la actividad debido a la ejecución de una tarea experimental, que en un sentido amplio consiste en dar una respuesta frente a un determinado estímulo. Cada uno de estos intentos particulares es denominado un *trial*

entonces por un proceso límite nos acercamos a conocer la tasa instantánea de descarga $r(t)$ de la población. Esta tasa es la cantidad instantánea de espigas emitidas por unidad de tiempo y por neurona perteneciente a la población. Esta nueva cantidad $r(t)$ es de suma importancia pues a pesar de ser una idealización permite ser concebida como el resultado de una dinámica continua (ecuación diferencial). Si existe un modelo matemático que represente adecuadamente la evolución de esta cantidad, se puede ir un paso más lejos y estudiar cómo la dinámica influencia y es influenciada por procesos cognitivos. Es éste el objetivo de los capítulos 3 y 4.

El objetivo de las dos secciones siguientes es plantear el problema en el que se trabajará de manera mucho más específica. En primer lugar, en 1.3, se presentan y discuten los modelos matemáticos existentes para dar cuenta de las dinámicas neuronales. De ellas saldrá el modelo que servirá de base para la modelación matemática en el capítulo 3. En ese capítulo se mostrará evidencia reciente sobre cómo la toma de decisiones podría estar implementada en determinadas dinámicas neuronales. Esa dinámica será finalmente representada a través de una de las ecuaciones discutidas en la sección 1.3. Se tendrá así un procedimiento *Bottom-Up*, es decir, tratar de explicar fenómenos de un nivel complejo, el psicológico, como surgiendo de un nivel más básico, el biológico.

Posteriormente, en la sección 1.4 se presenta el tema de la toma de decisiones, visto desde el punto de vista clásico, el de la psicología cognitiva. Utilizando argumentos provenientes de las ciencias cognitivas, se deducirán modelos que dan cuenta de la toma de decisiones, pero no necesariamente tienen un correlato biológico. Esto puede ser entendido como un proceso *Top-Down*.

Notablemente, los enfoques *Top-Down* y *Bottom-Up* entregan modelos que son bastante similares y compatibles, por lo que el modelo final que se plantee en el capítulo 3 podrá ser entendido como el resultado del diálogo entre estos dos enfoques.

1.3. Modelos Neurodinámicos

En esta sección se verán los principales modelos existentes para dar cuenta de las dinámicas que ocurren en las neuronas o poblaciones de neuronas. Cada modelo se sitúa en una escala espacial y temporal específica, yendo desde los que explican la apertura misma de los canales iónicos que producen el impulso nervioso (1.3.1), a los que se centran en la interacción de grupos de neuronas acopladas (1.3.2) y finalmente a los que reflejan la actividad resultante de la interacción de grandes grupos de neuronas excitándose e inhibiéndose mutuamente (1.3.3). Aún más, cada modelo se construye sobre el anterior haciendo las simplificaciones necesarias y rescatando las propiedades que es necesario reproducir.

1.3.1. El modelo de Hodgkin y Huxley

El modelo matemático más célebre sobre la producción del impulso nervioso es el de Hodgkin y Huxley propuesto originalmente en [22]. En éste se muestran las ecuaciones que rigen el potencial de membrana $V = V(t)$ en un punto determinado de ésta. Estas

son [29, 18]

$$C \frac{dV}{dt} = g_l(E_l - V) + g_{Na}(E_{Na} - V_m) + g_k(E_K - V) + I_{ext}(t) \quad (1.1)$$

$$g_{Na} = G_{Na}m(t)^3h(t), \quad g_k = G_kn(t)^4 \quad (1.2)$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{m_\infty(V) - m}{\tau_m(V)}, \quad \frac{dh}{dt} = \frac{h_\infty(V) - h}{\tau_h(V)}, \quad \frac{dn}{dt} = \frac{n_\infty(V) - n}{\tau_n(V)} \quad (1.3)$$

Si bien no es necesario analizar en detalle este sistema, es importante destacar que estas ecuaciones nacen al traducir los procesos descritos en 1.2.1 al lenguaje de los circuitos eléctricos. Para modelar la membrana se considera un condensador (de capacidad C) y tres conductores (de conductancias g_l, g_{Na}, g_k) que corresponden a los canales iónicos. También se toman en cuenta influencias externas mediante la corriente I_{ext} . De ahí es posible obtener (1.1) usando las ecuaciones típicas que describen a los circuitos eléctricos. Las ecuaciones (1.2) describen el curso temporal de las conductancias de los canales iónicos, los que debido a su dependencia del voltaje tienen comportamientos dependientes de las variables ficticias m, n, h , cuya dinámica está dada por (1.3).

El gran logro del planteamiento de estas ecuaciones es que permite describir de manera precisa la generación del impulso nervioso [30], e incluso la propagación de éste si se incorporan efectos de propagación espacial mediante el término $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ [29, 22]. Sin embargo, claramente el alto grado de no linealidad de estas ecuaciones sumado al gran número de parámetros libres hace que sea necesario buscar simplificaciones, como la de FitzHugh-Nagumo [18]. Aún así, estas ecuaciones siguen siendo poco tratables e incluso menos interpretables en términos biofísicos [30].

1.3.2. El modelo Integrate and fire

El paso siguiente consiste en simplemente dejar de intentar reproducir de manera exacta los potenciales de acción, de esa manera surgen los llamados modelos *integrate and fire* [11, 30, 12], que sólo se centran en modelar la dinámica del potencial antes de que la onda de depolarización produzca la apertura de canales necesaria para el potencial de acción. Se considera así un umbral ν y la dinámica se obtiene al hacer la analogía con un circuito RC típico, de dónde

$$I(t) = I_R(t) + I_C(t), \quad I_R(t) = \frac{V}{R}, \quad I_C(t) = C \frac{dV}{dt} \quad (1.4)$$

Juntando todas las ecuaciones de (1.4) y llamando $\tau = RC$ se obtiene finalmente ⁶

$$\tau \frac{dV}{dt} = -V(t) + RI(t) \quad (1.5)$$

La ecuación (1.5) define al modelo *integrate and fire*. Debido al término $-V(t)$ se le conoce también como *leaky integrate and fire*. Esta ecuación en general es fácil de resolver incluso analíticamente si la corriente entrante $I(t)$ es una función típica (constante por pedazos,

⁶Puede parecer extraño que en esta última ecuación se tenga que en ausencia de input externo ($I(t) = 0$) entonces $V(t) \rightarrow 0$, siendo que el potencial de reposo es estrictamente negativo. En realidad, la cantidad que debe considerarse en (1.4) y (1.5) es $V(t) - V_L$ donde V_L es el potencial de reposo

suma de deltas de dirac o exponencial, por ejemplo). Una vez que $V(t)$ llega a superar ν entonces se contabiliza una espiga y la ecuación (1.5) vuelve a regir desde la condición inicial $V(0) = V_r$, donde V_r es el valor (arbitrario) en que se resetea la ecuación. Ciertas variaciones del modelo [12] permiten sofisticaciones como la existencia de un periodo refractario después de una espiga.

En cuanto a cómo modelar la interacción entre varias neuronas comunicándose mediante sinapsis, de acuerdo a este modelo, se hacen simplificaciones con lo que ocurre espacialmente: se considera a cada neurona $i \in \{1 \dots N\}$ dotada de una variable V_i que corresponde al potencial de membrana en cualquier punto de ella. Es decir, se ignora completamente la existencia del axón y la propagación del impulso a través de éste.⁷ Las espigas provenientes de la neurona $j \neq i$ son incorporados a la neurona i después de un cierto retraso o delay, con el fin de compensar la no existencia del axón. La manera en que una espiga producida en una neurona presináptica j actúa sobre la neurona postsináptica i depende de la simpleza que quiera darsele al tratamiento de las ecuaciones: en general, como fue visto en 1.2.1, la llegada del impulso nervioso al terminal sináptico crea finalmente una corriente eléctrica en la célula postsináptica, y a pesar de que existen formas de modelar las conductancia de los mismos receptores sinápticos a través de ecuaciones no lineales [12], es preferible hacerlo de la manera más simple, que consiste en considerar pulsos de corriente post sináptica que se incorporan a la parte $I(t)$ de la ecuación (1.5) con la forma específica de una delta de dirac⁸ o una función de rápido decaimiento temporal. El signo de $I(t)$ dependerá si la conexión sináptica es inhibitoria (negativo) o excitatoria (positivo). A modo de ejemplo, si en $t = 0$ la neurona 1, que se proyecta hacia la neurona 2 mediante una conexión inhibitoria, emite una espiga, y la propagación de ésta tarda t_0 en llegar a la neurona 2, donde se traduce en un pulso de corriente instantáneo de magnitud I , entonces la evolución de la neurona 2, para $t \geq 0$ está dada por:

$$\tau \frac{dV_2}{dt} = -V_2(t) - RI\delta(t - t_0)$$

En general se tendrá que una neurona recibe conexiones de muchas otras neuronas, y el término $I(t)$ reflejará todas las contribuciones de las neuronas adyacentes. Así, en un conjunto de N neuronas se puede escribir

$$\tau \frac{dV_i}{dt} = -V_i(t) - \sum_{j \neq i, k \in \mathbb{N}} w_{ji} \delta(t - t_j^k - t_0) \quad (1.6)$$

En la ecuación (1.6) w_{ji} representa el peso de la conexión entre la neurona j y la neurona i , su signo dependerá de si ésta es inhibitoria o excitatoria. La suma de las deltas de dirac permite incorporar todas las contribuciones debido a las neuronas adyacentes a la i -ésima. Cada una de ellas tiene asociado un conjunto de espigas, las que ocurren en los tiempos $\{t_j^1, t_j^2, \dots\}$.⁹

⁷Por esta razón a los modelos con esa clase de simplificaciones se les conoce como *Single-Point models* [30]

⁸Se entiende en este contexto a $\delta(t)$ como a una distribución que integra 1 y se concentra en $t = 0$

⁹Se debe tener la precaución que los tiempos en que ocurren las espigas de las neuronas $j \neq i$ también están dados por ecuaciones similares a (1.6)

1.3.3. Modelos de poblaciones

Un último paso en la modelación consiste en obviar la dinámica de neuronas particulares, y en vez de eso asumir que hay grandes grupos o poblaciones de neuronas que se comportan de manera similar. Es esa la idea desarrollada por Wilson y Cowan [60]. La variable relevante en este caso dejará de ser el potencial de acción, y en vez de eso se considerará la tasa de descargas $A(t)$ de la población, que puede ser definida como [12, 11]¹⁰

$$A(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{N} \frac{n(t; t + \Delta t)}{\Delta t} \quad (1.7)$$

Donde N es el número de neuronas de la población. La cantidad $n(t; t + \Delta t)$ en la ecuación (1.7) representa el número de potenciales de acción emitidos por la población de en el intervalo $[t, t + \Delta t]$. Las ecuaciones que se plantean en este caso corresponden a las de la tasa de descarga de la población. Mediante técnicas de filtraje temporal, como el *time coarse grain*, Wilson y Cowan desprecian variaciones en escalas de tiempo pequeña [9] y obtienen así expresiones del estilo [8, 9, 18]

$$\tau \frac{dA(t)}{dt} = -A(t) + h(I(t)) \quad (1.8)$$

donde h es una función continua y creciente y tal que $h(-\infty) = 0, h(\infty) = 1$. La elección particular de esta función dependerá de los objetivos específicos de modelamiento, pero es importante que en cualquier caso se verifique que en tramos intermedios sea parecida a una función lineal y para valores grandes en magnitud debe saturarse a las asíntotas 0 y 1. τ es una constante e $I(t)$ representa el input que se le da a la población de neuronas. En su planteamiento original se consideró una población inhibitoria (I) y otra excitatoria (E), pudiendo haber todas las conexiones posibles entre esos grupos ($I \rightarrow I, I \rightarrow E, E \rightarrow I, E \rightarrow E$). De esa manera se obtuvieron las ecuaciones [60, 9, 18]

$$\tau_E \frac{dA_E(t)}{dt} = -A_E(t) + h(w_{EE}A_E(t) - w_{IE}A_I(t) + I_E(t)) \quad (1.9)$$

$$\tau_I \frac{dA_I(t)}{dt} = -A_I(t) + h(w_{EI}A_E(t) - w_{II}A_I(t) + I_I(t)) \quad (1.10)$$

Es decir, el input total a cada grupo se descompone en el input producido por el grupo sobre sí mismo ($w_{EE}A_E(t), w_{II}A_I(t)$) el proveniente del otro grupo ($w_{EI}A_E(t), w_{IE}A_I(t)$) y finalmente los inputs provenientes del exterior ($I_E(t), I_I(t)$).

El enfoque original de los grupos neuronales puede ser fácilmente relajado para considerar una mayor cantidad de poblaciones neuronales interactuando [8]. Así se obtienen ecuaciones similares a (1.9)-(1.10) pero esta vez cada grupo i posee su propia dinámica $A_i(t)$, que está influida por el resto de los grupos $j \neq i$. Lo anterior permite considerar arquitecturas neuronales más complejas y ricas.

La principal crítica a este modelo es que el parámetro τ se escoge de manera arbitraria al aplicar la técnica del *time coarse grain*, y no tiene a priori una interpretación biológica [11].

¹⁰El límite en (1.7) no debe ser tomado de manera literal. Si Δt es suficientemente pequeño entonces inevitablemente $n(t; t + \Delta t) = 0$. Sin embargo esta definición es útil como una abstracción si se considera por ejemplo que la secuencia de espigas emitidas por cada neurona forman un proceso de Poisson no homogéneo.

A pesar de esta crítica, y de que las ecuaciones a las que se llega parecen un tanto simplistas para resumir la actividad de grandes grupos neuronales, el modelo goza de gran popularidad debido a que tiene el poder de reproducir una buena cantidad de fenómenos neuronales, capturando lo observado en diversos experimentos, y a que su complejidad es relativamente baja permitiendo un tratamiento analítico que permite un entendimiento de los mecanismos neurales que subyacen a la conducta [9, p. 2].

1.3.4. Elección del modelo adecuado

Una vez que han sido ya presentados los diversos modelos disponibles se hace necesario escoger cuál es el modelo que más se adapta a los requerimientos de modelación. Para elegir se requiere saber cuál es la manera en que las neuronas codifican información. En este trabajo se requiere dar cuenta de un fenómeno cognitivo, luego, el modelo a elegir debe poder ser una buena base para la representación de dicho fenómeno.

Como ya se ha mencionado en el capítulo introductorio, las neuronas de hecho utilizan distintos códigos de comunicación. El código de tasas de descargas ha sido ampliamente utilizado durante al menos 90 años para describir principalmente las propiedades de los circuitos sensoriales [12, p. 26]. Sin embargo, estos modelos son ciegos a cualquier tipo de comunicación que se dé sobre la base de los instantes precisos de las espigas [11]. En esa línea, se ha encontrado que en ciertos casos relacionados con el estudio de funciones cognitivas superiores, como la conciencia, parece ser relevante la llamada sincronía neural [54], que corresponde a la actividad coordinada (no aleatoria) de las espigas de ciertos grupos de neuronas, los que incluso pueden estar a gran distancia. Por otra parte, ha sido mencionado que los instantes de las espigas portan escasa información, y que es más plausible que las neuronas se comuniquen a través de tasas de descarga de grandes grupos de neuronas (50-100) que portan la misma información redundante pero ruidosa [46].

Entonces, la elección del modelo adecuado depende de la clase de fenómenos que se quiere representar. Se verá en lo sucesivo que en este caso particular, las evidencias neurobiológicas apoyan más bien un código a base de tasas de descarga poblacional. La ecuación (1.8) podrá ser entonces considerada como la base analítica para el modelamiento matemático.

1.4. Un Marco Teórico para la toma de decisiones

El objetivo del capítulo 3, por cierto también el objetivo central de este trabajo, es el planteamiento de un modelo matemático que sea capaz de dar cuenta del proceso mediante el cual se lleva a cabo la toma de una decisión. Se entiende por decisión a un proceso deliberado que resulta en la ejecución de una acción [15]. En este contexto debe entenderse la decisión de la manera más simplificada posible: un sujeto experimental (*subject*) debe escoger dentro de un conjunto de alternativas la que resulte más apropiada, dado un determinado estímulo. No se consideran las influencias emocionales que podrían llevar a un sujeto a elegir una determinada alternativa, lo que corresponde al estudio de la toma de decisiones con valor emocional ¹¹.

Existen dos medidas elementales relacionadas a una decisión: el tiempo de reacción o tiempo de respuesta y la precisión. La primera puede definirse como lapso que va desde la presentación del estímulo hasta que se da la respuesta. La segunda corresponde a la

¹¹ Para una revisión extensa sobre este tema ver [40]

proporción de intentos o *trials* en los que la respuesta que se da es la correcta. Se asume que los estímulos son presentados en una tarea donde se requiere elegir una alternativa de acuerdo a un cierto criterio; así cada estímulo lleva asociada una respuesta correcta.

El problema de la toma de decisiones ha sido abordado ampliamente desde la psicología experimental. Clásicamente se han considerado experimentos de discriminación perceptual, por ejemplo, la tarea de determinar si la altura de un rectángulo supera su largo. En cada *trial* se presenta un rectángulo particular, y el *subject* debe responder decidiendo sí o no. Otro ejemplo es la prueba de discriminación de frecuencia vibrotáctil (*VTF*), donde al *subject* se le estimula la mano con dos frecuencias distintas separadas por un lapso, a lo que debe responder cuál de las dos frecuencias fue la mayor.

Del punto de vista matemático es razonable concebir al tiempo de reacción como una variable aleatoria con una determinada distribución ¹². Esto, porque es innegable la aleatoriedad inherente a la experimentación. Las fuentes de ruido pueden ser externas, relativas al proceso de medición o a las particularidades de cada *trial*, o bien internas, relativas al ruido del mismo proceso de decisión.

La precisión puede ser considerada como la probabilidad de escoger la alternativa correcta. Para que todo lo anterior sea coherente se debe entender cada *trial* como la realización de dos variables aleatorias: tiempo de reacción y alternativa elegida.

En general se considerará siempre alguno de los dos siguientes protocolos de respuesta: el primero de ellos, llamado elección forzada, corresponde a aquel donde el *subject* es obligado a responder en un determinado momento, por ejemplo luego de la presentación de una señal. El otro protocolo corresponde a la elección libre, donde no hay ninguna restricción sobre el momento en el que se debe dar la respuesta.

La toma de decisiones ha sido ampliamente estudiada en la psicología cognitiva desde hace cincuenta años [7, 31, 35, 17]. Se han hipotetizado distintas etapas o módulos que forman parte de este proceso cognitivo, que van desde la percepción del estímulo hasta la ejecución de una respuesta. En psicología es común que estas etapas sean esquematizadas en un diagrama donde se ven todas las relaciones, secuenciales o simultáneas, relativas al procesamiento cognitivo. En la figura 1.6 se muestra un esquema típico asociado a la toma de decisiones. No es la intención de este trabajo hacer supuestos fuertes sobre las etapas de procesamiento cognitivo, ni adscribirse completamente a uno de los tantos modelos de funcionamiento mental como el de la misma figura 1.6. Los supuestos serán más bien simples: la presentación de un estímulo induce un procesamiento interno con un cierto desfase temporal que corresponde al retraso debido al procesamiento en las vías perceptuales. La información ya procesada (decodificada) se encuentra a disposición de los mecanismos de toma de decisiones que se encargarán de dar una respuesta, la que será ejecutada por las vías motoras luego de otro desfase. La principal consecuencia de esto es que el tiempo de reacción (RT) podrá ser descompuesto en un tiempo de procesamiento y decodificación (desfase) t_1 , un tiempo relacionado a la toma de decisiones t_{des} y un tiempo de ejecución de la respuesta motora t_2 . Tomando $t_1 + t_2$ como una constante ¹³ entonces se tiene $RT = C + t_{des}$.

¹²A pesar de lo anterior, se debe hacer la advertencia de que también es válido llamar tiempo de reacción a la media de la distribución asociada; el contexto dirá de qué se trata en cada caso.

¹³Algunos autores [6] consideran a ese tiempo "basal" como una variable aleatoria, aquello parece una complicación innecesaria para este trabajo

En lo sucesivo de esta parte se mostrarán cuáles son los mecanismos mentales relacionados a la decisión. El resultado de ello será conocer cómo se construye y a qué corresponde t_{des} .

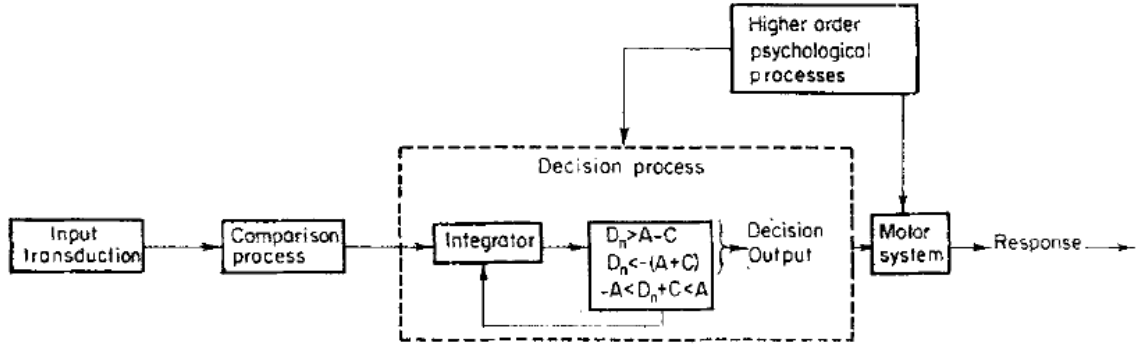


Figura 1.6: Ejemplo de esquema ilustrativo de las etapas relativas a la toma de decisiones. Obtenido de [31]

El enfoque que se utilizará acá proviene de la teoría de detección de señales [17, 13]. Si bien este es un tema importante en sí mismo, acá solo se revisarán, de manera muy breve y obviando tecnicismos matemáticos, los argumentos que permiten concebir el proceso de toma de decisión.

Si se restringe a una tarea sencilla de dos alternativas entonces la toma de decisiones puede ser vista como un proceso de inferencia estadística: un sujeto experimental requiere elegir una alternativa sobre la base de la información ruidosa provista por sus sistemas sensoriales. Esa información puede ser modelada al concebir una variable aleatoria e que porta una cantidad numérica llamada evidencia. Esta evidencia tiene distribuciones condicionales a cada una de las hipótesis h_i correspondientes a "la alternativa correcta es la i -ésima". Se considera la razón de verosimilitud (*likelihood ratio*) ¹⁴:

$$LR_{1,2|e} = \frac{\mathbb{P}(e|h_1)}{\mathbb{P}(e|h_2)} \quad (1.11)$$

Asumiendo que las probabilidades a priori de cada alternativa son iguales ($\mathbb{P}(h_1) = \mathbb{P}(h_2) = \frac{1}{2}$) entonces un criterio sensato para elegir la alternativa 1 es que $LR_{1,2|e} > 1$. Este proceso puede ser generalizado a uno donde cada cierto tiempo se recibe una nueva pieza de evidencia e_i de la secuencia i.i.d. $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. De esa manera, se considera para cada n fijo la razón de verosimilitud asociada a $\{e_i\}_{i \leq n}$

$$LR_{1,2|e_1 \dots e_n} = LR_{1,2|e_1} \cdot LR_{1,2|e_2} \cdot \dots \cdot LR_{1,2|e_n} \quad (1.12)$$

En este nuevo caso la decisión no necesariamente debe ser hecha luego de recibir el primer trozo de evidencia. Si forzosamente la decisión debe ser realizada en el el paso N entonces puede usar el criterio: si $LR_{1,2|e_1 \dots e_N} > 1$ escoger la alternativa 1. Por el contrario, si no hay restricciones acerca de cuándo se debe responder entonces se podrá esperar hasta el

¹⁴La escritura $\mathbb{P}(e|h_i)$ es una simplificación: se trata de la probabilidad de que la evidencia tome el valor particular e dado que la alternativa i es correcta. En caso de distribuciones a tiempo continuo se pueden considerar las densidades condicionales

paso n donde n sea tal que $LR_{1,2|e_1\dots e_n} > l_1$ o bien $LR_{1,2|e_1\dots e_n} < l_2$ donde l_1 y l_2 son los llamados umbrales de decisión para las alternativas 1 y 2, respectivamente. En este caso, los umbrales l_1, l_2 dependen, por ejemplo, del grado de aversión al riesgo del *subject*: podría suceder que éste no se decida por una respuesta a menos que haya muchas garantías de estar eligiendo la alternativa correcta. En tal caso tanto l_1 como l_2 son altos. Estos valores pueden también estar modulados por influencias emocionales y por las probabilidades a priori de cada alternativa [13, 15]. Por ejemplo, si se sabe de antemano que es más probable que la alternativa 1 sea correcta, entonces l_1 deberá ser más bajo que l_2 . Es importante notar la analogía entre los procedimientos anteriores y los dos protocolos de respuesta descritos al comienzo de esta sección. En el primer caso, donde se debe responder con la información acumulada hasta N , está la correspondencia con el paradigma de elección forzada. Cuando el tiempo no apremia, es decir, cuando el momento de la decisión es aquel donde la razón de verosimilitud ha alcanzado un umbral, entonces se trata obviamente del protocolo de elección libre. A pesar de lo abstracto que puedan parecer estos modelos, es de hecho esa la manera en que se concibe el proceso cognitivo de la toma de decisiones: como la sucesiva acumulación de evidencia, tanto en elección forzada como libre.

Debido a la monotonía de la función logaritmo es posible realizar todos los procedimientos anteriores en base al logaritmo de la razón de verosimilitud. Los criterios siguen siendo los mismos, cambiando l_1, l_2 por sus logaritmos. La conveniencia de tomar logaritmos está dada por la siguiente relación, si $x_i = \log(LR_{1,2|e_i})$

$$I_n \equiv \log(LR_{1,2|e_1\dots e_n}) = \sum_{i=1}^n x_i \quad (1.13)$$

Luego, el proceso de acumulación de evidencia puede ser concebido como un paseo aleatorio, notando que las cantidades x_i son de hecho variables aleatorias i.i.d. Si se trata de un estímulo que favorece h_1 entonces la media de x_i es positiva, en caso contrario será negativa¹⁵. A pesar de que la cantidad con la que se trabaja es el logaritmo de la razón de verosimilitud de la evidencia acumulada, por simplicidad nos referimos a la misma cantidad I_n como a la evidencia acumulada hasta el paso n .

Este procedimiento secuencial puede ser considerado en distintas escalas de tiempo con el fin de encontrar su límite continuo. Para eso, para cada $n \in \mathbb{N}$ se puede considerar el proceso

$$I^n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i \leq nt} (X_i - m) + \frac{1}{n} \sum_{i \leq nt} X_i \quad (1.14)$$

Donde X_i son i.i.d. y cumplen $\mathbb{E}(X_i) = m, \mathbb{E}(X_i^2) = \sigma^2 \leq \infty$. Usando el principio de invarianza de Dönsker [2] para el primer término de la ecuación y la ley de los grandes números para el segundo, se tiene la siguiente convergencia en distribución

$$I^n(t) \rightarrow \sigma B(t) + mt \equiv I(t), n \rightarrow \infty \quad (1.15)$$

Donde $B(t)$ es un movimiento browniano. La ecuación (1.14) corresponde esencialmente al mismo proceso mostrado en (1.13); introduciendo la variable temporal t se puede considerar un proceso límite: al crecer n , cada evidencia es acumulada a intervalos más cortos

¹⁵Aunque esto parece arbitrario, es esencialmente lo que se describe en la literatura: si bien algunos autores han hecho un tratamiento mucho más concienzudo sobre cómo interpretar la cantidad $\log(LR_{1,2|e_i})$ [13, 14], resulta una simplificación razonable el considerar $\{\log(LR_{1,2|e_i})\}_{i \in \mathbb{N}}$ como un conjunto de variables aleatorias donde el signo de su valor esperado depende de cuál hipótesis es la correcta.

y el peso de cada evidencia es menor.¹⁶ La variable $I(t)$ en ecuación (1.15) corresponde a la evidencias acumulada a tiempo continuo hasta t y la dinámica de esta cantidad está de hecho regida por una ecuación diferencial estocástica:

$$dI(t) = mdt + \sigma dB(t) \quad I(0) = 0 \quad (1.16)$$

El proceso de Weiner descrito en (1.16) es uno de los modelos más ampliamente utilizados para la toma de decisiones en psicología [ver por ejemplo 26, 41, 3, 49].

Hasta ahora se han mostrado mecanismos, tanto a tiempo discreto como continuo que podrían ser una base psicológica para la toma de decisiones tanto en los paradigmas de elección libre como forzada. Bien podría cuestionarse la necesidad de esta clase de modelos como explicación a los procesos mentales que subyacen a la toma de una decisión, y aún más, estos bien podrían no tener ningún sustento biológico. El mayor argumento que apoya el uso de estos modelos es su optimalidad; en el caso de elección libre con dos alternativas, el procedimiento mencionado es conocido en estadística como *The Sequential Probability Ratio Test (SPRT)* [56], que es un test óptimo en tanto que para una tasa de error determinada, requiere de la menor cantidad de muestreos, en valor esperado [3, 15, 56]. En el caso de elección forzada, cuando el momento de la decisión está fijo, el criterio antes descrito es de hecho el test de Neyman-Pearson [3, 38] y es óptimo pues produce la menor tasa de error, como consecuencia del lema de Neyman-Pearson.

Se deben considerar también otras situaciones algo más complejas, como por ejemplo la posibilidad de que haya múltiples alternativas de respuesta. En tal caso el modelo anterior deja de tener sentido, y por esa razón se ha concebido una gran diversidad de modelos que intentan implementar estas ideas de optimalidad en contextos más generales. Se comentarán los principales modelos que en esa línea han surgido hasta la actualidad.

En todos los modelos las unidades relevantes son los *acumuladores evidencia* en favor de cada una de las alternativas disponibles. Cada acumulador de evidencia es entonces una variable de decisión, y la decisión se da en base a un criterio relacionado a dichos acumuladores. Para elección forzada puede considerarse la respuesta dada por el acumulador que tenga la mayor cantidad de evidencia en un tiempo fijo. Para elección libre se puede considerar un criterio absoluto, donde se da la respuesta cuando algún acumulador alcance su umbral, o bien criterios relativos, donde se da la respuesta cuando alguna función de todos los acumuladores supere un determinado umbral¹⁷ [53, 36, 31]. Este enfoque ha sido ampliamente utilizado en la literatura psicológica [ver por ejemplo 41, 48, 47], lo que varía es la manera en que se concibe la acumulación de evidencia y la relación que puede existir entre los distintos acumuladores. Para ilustrar el primer caso, en los denominados *Poisson Counter Models* se supone que cierta cantidad fija de evidencia en favor de cada una de las alternativas es acumulada en instantes que corresponden a las llegadas de procesos de Poisson independientes, y la tasa es mayor en el acumulador correspondiente a la alternativa correcta. En el instante en que alguna de las cantidades acumuladas supere un determinado umbral se da como respuesta la correspondiente a dicho acumulador. El modelo anterior se muestra en la figura 1.7

A pesar de la gran diversidad de modelos para la toma de decisiones, en lo sucesivo sólo se mostrarán modelos a tiempo continuo, que en general corresponden a sistemas de

¹⁶A pesar de lo intuitivo de lo anterior, puede no resultar claro por qué aparecen dos términos en la sumatoria. La justificación de esto es simplemente que así tiene que ser hecho para capturar correctamente la aleatoriedad del proceso límite; a través del primer término de la sumatoria se obtiene el movimiento

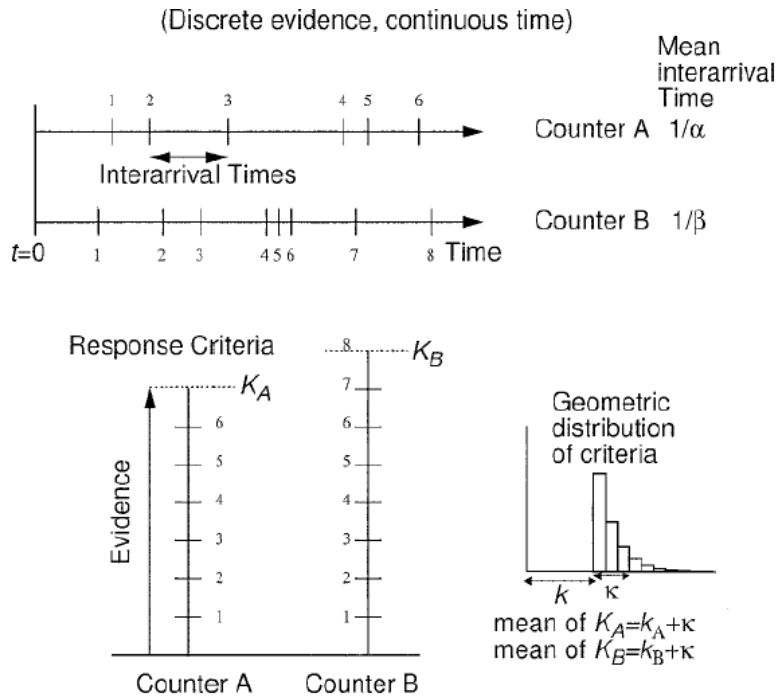


Figura 1.7: En la parte superior se muestran las llegadas poissonianas correspondientes a cada una de las alternativas. En la parte inferior los acumuladores (contadores) relativos a cada una de las alternativas. Si el acumulador i supera k_i entonces se da la respuesta i . Obtenido de [41]

ecuaciones diferenciales estocásticas. A continuación se muestran los más relevantes. ¹⁸

El modelo *race*

En este modelo [3, 41] existe un acumulador de evidencia x_i para la alternativa i -ésima, y cada acumulador evoluciona como un proceso de Wiener con la misma varianza σ^2 y donde el drift I_i del acumulador i -ésimo es mayor en el acumulador correspondiente a la alternativa correcta. El modelo es el siguiente

$$dx_i(t) = I_i dt + \sigma dB_i(t) \tag{1.17}$$

donde $B_i(t)$ son movimientos brownianos independientes (siempre será el caso). Una ventaja de este modelo por sobre el de la ecuación (1.16) es que, por una parte, puede haber varias alternativas, y por otra, puede concebirse que un estímulo favorezca parcialmente a más de una alternativa. Esto se logra considerando la respuesta correcta dada por la del acumulador con I_i máxima, y donde el resto de los I_j son mayores o iguales a cero. Así, se amplía la cantidad de paradigmas experimentales que pueden ser representados. Una esquematización del modelo se encuentra en la figura 1.8a

El modelo *race* con decaimiento (*leakage*)

Una propiedad importante que hasta ahora no se ha mencionado es el decaimiento de

browniano, que representa las fluctuaciones en torno a m que existen en el límite.

¹⁷Por ejemplo, el criterio podría ser dar la respuesta i si $x_i - \max_{j \neq i} x_j > L$ donde x_j es la cantidad acumulada en el acumulador j .

¹⁸A pesar de la gran cantidad de modelos que se presentarán debe tenerse siempre presente que los criterios de respuesta son esencialmente los mismos que han sido enunciados para los casos de respuesta libre o forzada.

información: como ya se mencionó, la evidencia es efectivamente información, luego, está sujeta a fenómenos de decaimiento u olvido [53, 51, 42, 10, 16]. Típicamente en estos modelos el decaimiento es exponencial, y tiene como consecuencia que en ausencia de un input I_i , el acumulador vuelva a su estado inicial. En el caso de modelos de tiempo continuo, como el de (1.17) este decaimiento puede ser implementado de la siguiente manera, dando lugar a este nuevo modelo:

$$dx_i(t) = (-\alpha_i x_i + I_i)dt + \sigma dB_i(t) \quad (1.18)$$

La constante α_i es la tasa de decaimiento del acumulador i , usualmente $\alpha_i = \alpha, \forall i$. Debido a la ubicuidad de los fenómenos de olvido en psicología, es que el contar con mecanismos de decaimiento, como los dados por la ecuación (1.18), es un requisito mínimo para cualquier modelo que explique la toma de decisiones. Un diagrama relativo al modelo de la ecuación (1.18) se muestra en la figura 1.8b.

El modelo de inhibición mutua

Los modelos presentados hasta ahora ((1.17),(1.18)) tienen la propiedad de que cada acumulador evoluciona de manera completamente independiente del resto. Volviendo a lo discutido al anteriormente en esta sección, es importante concebir modelos que sean óptimos en el sentido que minimicen tiempo de reacción y/o tasas de error. Como se vio, el modelo (1.16) es en ese sentido óptimo, pero al crearse distintos acumuladores, que no se comunican entre sí, esa optimalidad se pierde [3]. Se ha argumentado que esta optimalidad puede ser reinstaurada al incorporar términos de inhibición mutua [3]¹⁹, de la manera siguiente

$$dx_i(t) = (I_i - \alpha x_i - \sum_{j \neq i} \beta_{ji} x_j)dt + \sigma dB_i(t) \quad (1.19)$$

Los coeficientes dados por la matriz $B = \{\beta_{ij}\}$ representan la inhibición mutua entre el acumulador i y el acumulador j . No se hacen supuestos en general sobre la forma de dichos coeficientes, esto dependerá de la arquitectura misma de la red utilizada para representar un paradigma de elección. Un esquema general de este modelo se encuentra en la figura 1.8c. Es importante notar que la cantidad de inhibición que el acumulador i ejerce sobre el acumulador j es proporcional a la cantidad de evidencia en el acumulador i , lo cual parece razonable.

El modelo presentado en (1.19) parece ser bastante convincente: permite incorporar múltiples alternativas de elección y sería eficiente de acuerdo a lo ya discutido. Sin embargo, los tres modelos presentados tienen el problema de que los acumuladores pueden tomar valores negativos, lo cual es difícil de interpretar en términos de cantidad de evidencia. La justificación matemática de lo anterior, básicamente es que el movimiento browniano puede incorporar fluctuaciones infinitamente grandes: En efecto, para los modelos (1.18) y (1.17) si no existiera la perturbación browniana entonces es fácil verificar que para condiciones iniciales positivas se tiene que $x_i(t) \geq 0, \forall i, \forall t$. Al incorporar el movimiento browniano en la ecuación (1.18)²⁰ se tiene de hecho que cada acumulador es un proceso

¹⁹Si bien este argumento es hecho de manera poco rigurosa, a través de simulaciones computacionales, será tomado en cuenta sin mayores cuestionamientos. Realizar demostraciones rigurosas de esa clase de argumentos puede ser digno de un trabajo de tesis completo.

²⁰Se presenta el argumento sólo para la ecuación (1.18), el tratamiento con (1.17) y (1.19) es similar

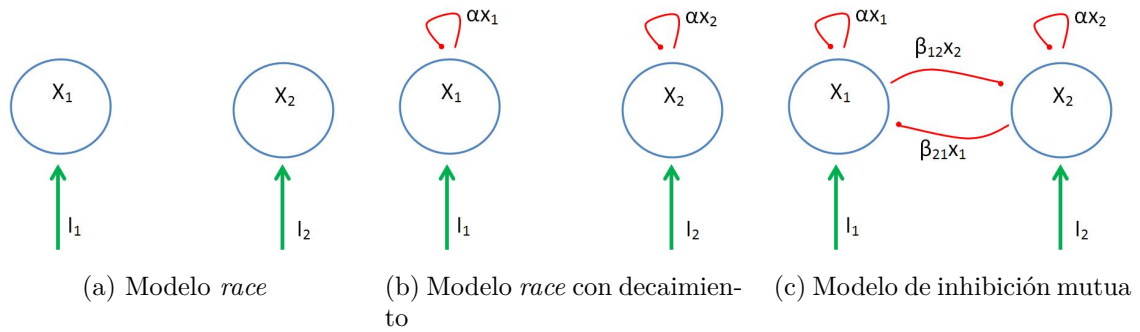


Figura 1.8: Esquemas de distintos modelos de acumulación de evidencia a tiempo continuo. Las terminaciones en círculo corresponden a conexiones inhibitorias (decaimiento o competencia). Para número de alternativas mayor a dos la generalización es obvia

de Ornstein-Uhlenbeck [39], cuya solución puede ser encontrada explícitamente gracias al lema de Itô, obteniéndose

$$x(t) = x_0 + e^{-\alpha t} + \frac{I}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) + \int_0^t e^{\alpha(s-t)} \sigma dB_S \quad (1.20)$$

Además, debido a que si $f : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función en L^2 entonces, de acuerdo a [1, p. 238]

$$\int_0^t f(s) dB(s) \sim \mathcal{N}(0, \int_0^t f^2(s) ds)$$

y así, el último término de la ecuación (1.20) se distribuye $\mathcal{N}(0, k)$ con $k > 0$, y así es claro, despejando los términos involucrados, que $\mathbb{P}(x_i(t) < 0) > 0$.

La posibilidad de que haya acumuladores cuya evidencia acumulada es negativa resulta aún más preocupante en el modelo de inhibición mutua. Si alguno de los acumuladores toma valores muy negativos provocará que los otros acumuladores aumenten su tasa de acumulación de evidencia, lo que a su vez hará más negativo al acumulador original. Así, pueden tenerse explosiones ∞ o $-\infty$ que son poco realistas.

Este problema puede ser solucionado sofisticando el modelo anterior de manera que sea imposible que los acumuladores tomen valores negativos. En 3.1 se mostrarán resultados proveniente de las neurociencias relativos a la toma de decisiones. Se verá que estos acumuladores de evidencia bien podrían corresponder a las tasas de descargas de cierto tipo de neuronas. Luego, podrá pensarse en utilizar ecuaciones como las mostradas en 1.3 para describir al proceso de acumulación de evidencia. Al estar la evidencia representada por tasas de descarga, necesariamente se tendrán que obtener ecuaciones en ningún caso negativas.

Antes de finalizar este capítulo introductorio, se muestran dos leyes psicofísicas asociadas a la toma de decisiones y que se presentan en paradigmas experimentales bastante generales.

1.4.1. Leyes psicofísicas asociadas a la toma de decisiones

En el dominio de la psicología, en particular de la psicofísica, es común la búsqueda relaciones matemáticas que hay entre los distintos tipos de estimulación y la respuesta

que se obtiene. En la sección 3.1 se mostrarán algunas leyes de este estilo asociadas a un paradigma particular, que será el objetivo del modelamiento matemático de esta memoria. Existen sin embargo otras leyes conductuales o psicofísicas, enunciadas a continuación, y que son válidas en una gran cantidad de paradigmas experimentales asociados a la toma de decisiones. Estas leyes hablan sobre relaciones que hay entre las dos variables importantes relacionadas a la toma de decisiones, el tiempo de reacción y la precisión. Debido a su generalidad, es imperioso que cualquier modelo que implemente la toma de decisiones dé cuenta de ellas.

El Speed Accuracy Trade-Off

El *Speed Accuracy Trade-Off* [53, 57, 32, 34, 4] o simplemente SAT describe la relación funcional existente entre la precisión y el tiempo de reacción en algún paradigma experimental en que se lleva a cabo una decisión. Si bien ha estado presente en la literatura psicológica durante más de cien años, es en [57] donde por primera vez se plantea una metodología para un estudio sistemático. Este principio psicofísico es bastante intuitivo: a mayor tiempo de reacción mayor es la precisión; por el contrario, para tiempos de reacción demasiado bajos es esperable que la precisión sea similar a responder al azar.

Este principio puede ser representado gráficamente de manera más precisa (ver figura 1.9). La construcción de dependerá del tipo de protocolo de respuesta utilizado: en elección libre, y suponiendo que la distribución de las respuestas y los tiempos de los *subjects* no cambia (es decir, considerando todos los *subjects* como similares y obviando fenómenos de aprendizaje) se pueden separar los tiempos de reacción en determinados intervalos o *bins*, y para todos los tiempos que caen en un mismo intervalo calcular la precisión correspondiente. En elección forzada se puede encontrar directamente la precisión para ese tiempo, y repitiendo el procedimiento para distintas elecciones de tiempos se puede construir la curva.

Si bien algunos autores han puesto énfasis en encontrar descripciones paramétricas de dicha curva, por ejemplo vía funciones exponenciales [34, 57, 44], en este trabajo no se hacen supuestos fuertes sobre la forma precisa que adopta función SAT. Más bien, el *Speed Accuracy trade-off* es considerado de manera referencial, pero siendo un requerimiento básico que debe satisfacer el modelo.

La función SAT representa distintos "estilos" para responder. El extremo izquierdo podría ser considerado como rápido-riesgoso y el derecho como lento-seguro. No necesariamente un estilo de respuesta es mejor que el otro pero si hay un aspecto importante de optimalidad que puede ser explorado: podría considerarse la situación extrema de contestar en un tiempo muy alto y con muy pocos errores. Aquella situación sin duda podría mejorarse contestando un poco más rápido, sin todavía mermar drásticamente la precisión. Es decir, se puede concebir un punto óptimo que relaciona la precisión y el tiempo de reacción. Esto será explorado a fondo en el capítulo 4

La distribución de los tiempos de respuesta

Se ha determinado experimentalmente [33, 35] que la distribución de los tiempos de reacción en muchos paradigmas experimentales no es arbitraria, ésta presenta un patrón típico. Naturalmente, debido a que los tiempos de reacción son por definición positivos, la distribución debe concentrar toda su masa en \mathbb{R}^+ . Sin embargo, empíricamente no se

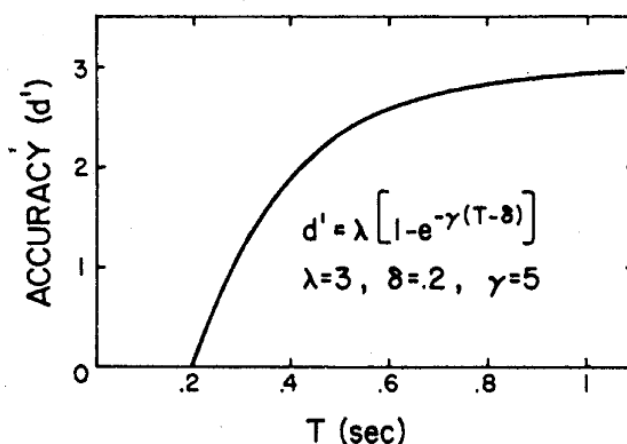


Figura 1.9: Ejemplo de una curva SAT hipotética, donde se especula explícitamente su representación funcional. La precisión es medida a través del índice d' , proveniente de la teoría de detección de señales. Obtenido de [57]

observan tiempos arbitrariamente pequeños; los tiempos se presentan sistemáticamente lejos del cero (tiempos demasiado cercanos a cero son eventos raros y hacen sospechar de errores de medición). Aún más, la distribución típicamente presenta una oblicuidad o *skewness* positiva, lo que implica que hay una mayor concentración de la distribución en los valores más bajos, pero con una cola larga abarcando muchos valores altos.

Se han sugerido formas explícitas para esta distribución, como la gamma [35] o una convolución entre dos variables aleatorias: exponencial y normal [19, 50]. Estas distribuciones se proponen principalmente porque generan un buen ajuste a datos experimentales. Sin embargo, en este trabajo no se intentará demostrar que la distribución es alguna en específico. Aún así, como se menciona en [33, p. 119], para que el modelo sea exitoso es esencial que éste dé cuenta de propiedades básicas de la distribución; positividad y *skewness* positiva.

Un ejemplo de una distribución de los tiempos de reacción obtenida experimentalmente se encuentra en la figura 1.10

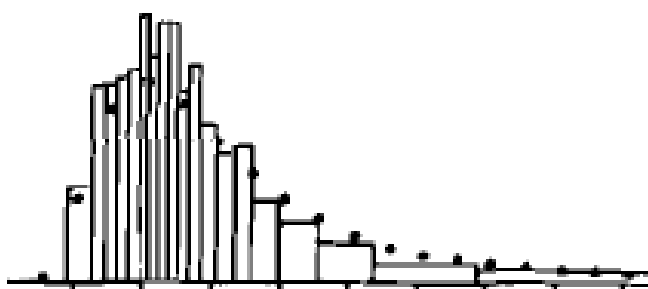


Figura 1.10: Ejemplo de una distribución de tiempos de respuesta obtenida empíricamente, junto con predicciones hechas por un modelo matemático (puntos). Obtenido de [33]

Bibliografía

- [1] D. Applebaum. *Levy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge University Press, second edition, 2009.
- [2] P. Billingsley. *Convergence of Probability Measures*. John Wiley and Sons, 1968.
- [3] R. Bogacz, E. Brown, J. Moehlis, P. Holmes, and J.D. Cohen. The physics of optimal decision making: A formal analysis of models of performance in two-alternative forced-choice tasks. *Psychological Review*, 113(4):700–765, 2006.
- [4] R. Bogacz, E.J. Wagenmakers, B.U. Forstmann, and S. Nieuwenhuis. The neural basis of the speed-accuracy tradeoff. *Trends Neuroscience*, 33(1):732–738, 2010.
- [5] N.A. Carlson. *Foundations of Physiological Psychology*. Simon & Schuster, 1992.
- [6] J.D. Cohen, K. Dunbar, and J.L. McClelland. On the control of automatic processes: A parallel distributed processing account of the stroop effect. *Psychological Review*, 97(3):332–361, 1990.
- [7] W. Edwards. The relative judgment theory of two choice response times. *Journal of Mathematical Psychology*, 2:312–329, 1965.
- [8] B. Ementrout. Phase-plane analysis of neural nets. In M.A. Arbib, editor, *The Handbook of Brain Theory and Neural Networks*. MIT Press, second edition, 2003.
- [9] U. A. Ernst and C. W. Eurich. Cortical population dynamics and psychophysics. In M.A. Arbib, editor, *The Handbook of Brain Theory and Neural Networks*. MIT Press, second edition, 2003.
- [10] W.T. Fu and J.R. Anderson. From recurrent choice to skill learning: A reinforcement learning model. *Journal of Experimental Psychology: General*, 135(2):184–206, 2006.
- [11] W. Gerstner. Integrate-and-fire neurons and networks. In M.A. Arbib, editor, *The Handbook of Brain Theory and Neural Networks*. MIT Press, second edition, 2003.
- [12] W. Gerstner and W. M. Kistler. *Spiking Neuron Models: Single Neurons, Populations, Plasticity*. Cambridge University Press, 2002.
- [13] J. I. Gold and M. N. Shadlen. Neural computations that underlie decisions about sensory stimuli. *TRENDS in Cognitive Sciences*, 5(1):10–16, 2001.
- [14] J. I. Gold and M. N. Shadlen. Banburismus and the brain: Decoding the relationship between sensory stimuli, decisions, and reward. *Neuron*, 36:299–308, 2002.

-
- [15] J. I. Gold and M. N. Shadlen. The neural basis of decision making. *Annual Review of Neuroscience*, 30:535–575, 2007.
- [16] D. Gomez, P. Dartnell, and R. Araya. On two mechanisms associated to learning: A mathematical point of view. In *IEEE Congress on Evolutionary Computation*, Sheraton Vancouver Wall Centre Hotel, Vancouver, BC, Canada, July 2006.
- [17] D.M. Green and J.S. Swets. *Signal Detection Theory*. John Wiley & Sons Inc, 1966.
- [18] H. Haken. *Brain Dynamics: an Introduction to Models and Simulations*. Springer, second edition, 2002.
- [19] A. Heathcote, S.J. Popiel, and D. J. K. Mewhort. Analysis of response time distributions: An example using the stroop task. *Psychological Bulletin*, 109(2):340–347, 1991.
- [20] W.E. Hick. On the rate of gain of information. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 4:11–26, 1952.
- [21] C. Hiemke and S. Hartter. Pharmacokinetics of selective serotonin reuptake inhibitors. *Pharmacology and Therapeutics*, 85:11–28, January 2000.
- [22] A. Hodgkin and A. Huxley. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol*, 117:500–544, 1952.
- [23] A. L. Hodgkin and A. F. Huxley. Action potentials recorded from inside a nerve fibre. *Nature*, 144:710–711, 1939.
- [24] D. H. Hubel and T. N. Wiesel. Receptive fields of single neurones in the cat’s striate cortex. *J. physiol.*, 148:574–591, 1959.
- [25] D. H. Hubel and T. N. Wiesel. Receptive fields, binocular interaction and functional architecture in the cat’s visual cortex. *J. physiol.*, 160:106–154, 1962.
- [26] J.Zhanga and P. Holmes R. Bogacz. A comparison of bounded diffusion models for choice in time controlled tasks. *Journal of Mathematical Psychology*, 53(2):231–241, 2009.
- [27] E. R. Kandel, J.H. Schwartz, and T.M. Jessell. *Principles of Neural Science*. McGraw-Hill, 2000.
- [28] B.W. Knight. Dynamics of encoding in a population of neurons. *The Journal of General Physiology*, 59:734–766, 1972.
- [29] C. Koch and O. Bermander. Cortical population dynamics and psychophysics. In M.A. Arbib, editor, *The Handbook of Brain Theory and Neural Networks*. MIT Press, second edition, 2003.
- [30] C. Koch, C.H. Mo, and W. Softky. Single-cell models. In M.A. Arbib, editor, *The Handbook of Brain Theory and Neural Networks*. MIT Press, second edition, 2003.

- [31] S. W. Link. The relative judgment theory of two choice response times. *Journal of Experimental Psychology*, 12:114–135, 1975.
- [32] D.M. Green R.D. Luce. Speed-accuracy tradeoff in auditory detection. In S. Kornblum, editor, *Attention and Performance, IV*. New York: Academic Presss, 1973.
- [33] R. D. Luce. Response times distributions in memory search: A caution. In F. Klix and H. Hagendorf, editors, *Human Memory and Cognitive Capabilities: Mechanisms and Performances*. Elsevier Science Publishers, 1986.
- [34] J.L McClelland. On the time relations of mental processes: An examination of systems of processes in cascade. *Psychological Review*, 86(4):287–330, 1979.
- [35] W. J. McGill and J. Gibbon. The general gamma distribution and reaction times. Technical Report 61, Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Stanford University, 1963.
- [36] T. McMillen and P. Holmes. The dynamics of choice among multiple alternatives. *Journal of Mathematical Psychology*, 50(1):30–57, 2006.
- [37] F.L Mueller. *La psicología contemporánea*. Fondo de Cultura económica, 1965.
- [38] J. Neyman and E. S. Pearson. On the problem of the most efficient tests of statistical hypotheses. *Royal Society of London Philosophical Transactions*, 231(4):289–337, 1933.
- [39] B. Oksendal. *Stochastic Differential Equations: An Introduction With Applications*. Springer Verlag, sixth edition, 2003.
- [40] A. Rangel, C. Camerer, and P. R. Montague. A framework for studying the neurobiology of value-based decision making. *Nature Reviews Neuroscience*, 9:545–556, July 2008.
- [41] R. Ratclif and P. Smith. A comparison of sequential sampling models for two-choice reaction time. *Psychological Review*, 111(2):333–367, 2004.
- [42] E. Del Rosal, L. Alonso, R. Moreno, M. Vazquez, and J. Santacreu. Simulation of habituation to simple and multiple stimuli. *Behavioural Processes*, 73:272–277, 2006.
- [43] R.M.E. Sabatini. Neurons and synapses: The history of its discovery. *Brain and Mind Magazine*, 17, 2003.
- [44] H. Samavatyan and C. Leth-Steensen. The time course of task switching: A speed accuracy trade off analysis. *Memory and Cognition*, 37(2):1051–1058, 2009.
- [45] J.R. Searle. Consciousness. *Annu. Rev. Neurosci.*, 23:557–578, 2000.
- [46] M.N. Shadlen and W.T. Newsome. Noise, neural codes and cortical organization. *Current Opinion in Neurobiology*, 148:569–579, 1994.
- [47] P. Smith and D. Vickers. The accumulator model of two-choice discrimination. *Journal of Mathematical Psychology*, 32:135–168, 1988.

- [48] P. L. Smith. From poisson shot noise to the integrated ornstein uhlenbeck process: Neurally principled models of information accumulation in decision making and response time. *Journal of Mathematical Psychology*, 54(2):266–283, 2010.
- [49] P.L. Smith and R. Ratclif. Psychology and neurobiology of simple decisions. *TRENDS in Neurosciences*, 27(3):161–168, 2004.
- [50] D.H. Spieler, D.A. Balota, and M.E. Faust. Levels of selective attention revealed through analyses of response time distributions. *Journal of Experimental Psychology*, 26(2):506–526, 2000.
- [51] J.E.R. Staddon, I.M. Chelaru, and J.J. Higa. Habituation, memory and the brain: the dynamics of interval timing. *Behavioural Processes*, 57:71–88, 2002.
- [52] S.S. Stevens and Miguelina Guirao. Subjective scaling of length and area and the matching of length to loudness. *Journal of Experimental Psychology*, 66(2):177–186, 1963.
- [53] M. Usher, Z. Olami, and J.L. McClelland. Hicks law in a stochastic race model with speed accuracy tradeoff. *Journal of Mathematical Psychology*, 46(6):704–715, 2002.
- [54] F. Varela, E. Rodriguez J.P. Lachaux, and J. Martinerie. The brainweb: Phase synchronization and large-scale integration. *Nature Reviews Neuroscience*, 2:229–239, 2001.
- [55] F.J. Varela. *Conocer. Las ciencias cognitivas: tendencias y perspectivas. Cartografía de las ideas actuales*. Gedisa, 1988.
- [56] A. Wald and A. Wolfowitz. Optimum character of the sequential probability ratio test. *Annals of Mathematical Statistics*, 19(3):326–339, 1948.
- [57] W.A. Wickelgren. Speed-accuracy tradeoff and information processing dynamics. *Acta Psychologica*, 41:67–85, 1977.
- [58] C.M. Wierzynski, E. V. Lubenov, M. Gu, and A. G. Siapas. State-dependent spike-timing relationships between hippocampal and prefrontal circuits during sleep. *Nature*, 51:587–596, 2009.
- [59] H. R. Wilson. *Spikes , decisions and actions: The dynamical foundations of neuroscience*. Oxford University Press, 1999.
- [60] H. R. Wilson and J. D. Cowan. Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons. *BIOPHYSICAL JOURNAL*, 12:1–24, 1972.
- [61] N.J. Wolf and S.R. Hameroff. A quantum approach to visual conciousness. *TRENDS in Cognitive Sciences*, 5(11):472–478, 2001.

Capítulo 2

Aportes a la teoría de difusiones reflejadas

El objetivo de este capítulo es presentar teoremas relativos a las medidas estacionarias asociadas a cierto tipo de difusión reflejada. En particular, algunos resultados son válidos para el proceso de Ornstein Uhlenbeck reflejado en el conjunto $\bar{D} = \mathbb{R}_+^n$, el que será ampliamente utilizado en los capítulos 3 y 4.

En la sección 2.1 se define el objeto de matemático de ecuación diferencial estocástica reflejada, y se dan a conocer resultados clásicos provenientes de áreas como la teoría de semigrupos, las ecuaciones en derivadas parciales o las probabilidades. En la sección 2.2 se presenta el trabajo original.

2.1. Definiciones y resultados previos

2.1.1. Ecuación diferencial estocástica reflejada

Se dará una definición rigurosa de una difusión reflejada. Para fijar ideas, puede pensarse primero en una difusión $X(t)$, gobernada por una ecuación diferencial estocástica. La difusión reflejada puede concebirse intuitivamente como el proceso $Y(t)$ que en el interior de un conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ sigue la misma dinámica que $X(t)$, pero cuando $Y(t)$ se acerca a ∂D es repelida de manera de permanecer siempre en \bar{D} . Para dar una buena caracterización de la descripción anterior, es conveniente primero considerar una formulación determinista, conocida como ecuación de Skorohod.

Definición 2.1.1. Sea $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \bar{D}$ RCLL ¹, entonces se dice que la función $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ está asociada a ζ si se cumple

1. ϕ es RCLL y a variación acotada en compactos (cada componente es a variación acotada) con $\phi(0) = 0$ y

$$\phi(t) = \int_0^t n(s) d|\phi|(s) \quad (2.1)$$

donde $n(t)$ es un vector normal a $\zeta(t) \in \partial D$ para casi todo t con respecto a la medida $d|\phi|$

¹Continua a la derecha con límite por la izquierda

2.

$$\int_0^\infty 1_{\{\zeta(t) \in D\}} d|\phi|(t) = 0 \quad (2.2)$$

Definición 2.1.2. Problema de Skorohod

Dado $w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ RCLL con $w(0) \in \bar{D}$ se desea encontrar una solución (ζ, ϕ) de la ecuación

$$\zeta = w + \phi \quad (2.3)$$

donde ϕ está asociada a ζ . El par (ζ, ϕ) es la solución al problema de Skorohod y se denota $(\zeta, \phi) = \Psi(w)$ donde Ψ es el mapeo de Skorohod

Se supondrá en lo sucesivo que D es abierto convexo y satisface la siguiente condición:

Condición (A1): Existe $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ tal que $\forall x \in \partial D$ se puede encontrar una bola $B_\epsilon(x_0)$ satisfaciendo $B_\epsilon(x_0) \subseteq D$, $|x - x_0| \leq \delta$

Observación 2.1.3. De acuerdo a [14] y [10], si $n \leq 2$ ó D es acotado ó \bar{D} es un polígono entonces la condición (A1) se verifica.

Se tiene entonces el primer resultado de existencia

Teorema 2.1.4. (Teorema 2.1 y Lema 2.4 de [14])

Sea w RCLL. Si el dominio D cumple la condición (A1), entonces existe una única solución a la ecuación 2.3. Si w es continua, ζ es continua.

Sobre la base de ese resultado determinista es posible construir el proceso deseado. Para ello, se considera el espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t)$ satisfaciendo las hipótesis usuales de completitud y continuidad. La siguiente definición proviene de [14].

Definición 2.1.5. Ecuación diferencial estocástica reflejada

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio convexo, y que cumple (A1). Sea $B(t)$ movimiento browniano n -dimensional \mathcal{F}_t adaptado y sean $\sigma : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ y $b : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, funciones Borel medibles, que corresponden a la matriz de difusión y el drift, respectivamente. El proceso $X(t)$, \mathcal{F}_t adaptado, se dice solución a la ecuación diferencial estocástica con reflexión normal en ∂D ² con condición inicial $x = (x^1, \dots, x^n) \in \bar{D}$ si:

1. $X(t)$ resuelve la ecuación:

$$dX(t) = \sigma(X)dB + b(X)dt + d\Phi(t) \quad (2.4)$$

Es decir, para cualquier $i \leq n$

$$X^i(t) = x^i + \sum_{k=1}^n \int_0^t \sigma_{ki}(X(s))dB^k(s) + \int_0^t b^i(X(s))ds + \Phi^i(t) \quad (2.5)$$

2. $\Phi(t)$ es un proceso asociado a $X(t)$, es decir $\Phi(t)$ es \mathcal{F}_t adaptado, y \mathbb{P} -c.s $\Phi(t)$ está asociada a $X(t)$

²También se usarán, indistintamente, los términos reflexión en D ó \bar{D}

Equivalentemente, para la función $w(t) = \int_0^t \sigma(X)dB + \int_0^t b(X)dt$ se tiene c.s. que $(X, \Phi) = \Psi(w)$. El proceso $\Phi(t)$ es llamado el regulador de la difusión reflejada en D .

Observación 2.1.6. Para que la última equivalencia tenga sentido la función $w(t)$ debe ser c.s. RCLL. Esto se puede verificar a posteriori si b, σ son continuas. De hecho, así $w(t)$ resulta ser continua c.s., pues la construcción de la solución está basada en iteraciones de Picard, y así

$$w(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \sigma(X^n(s))dB + \int_0^t b(X^n(s))dt$$

donde X^n es continuo y el límite es c.s. en la topología de la convergencia uniforme en compactos.

Es importante considerar la siguiente condición sobre el drift y la matriz de difusión:

Condición (B): Existe $K > 0$ tal que para cualquier $x, y \in \bar{D}$

$$\begin{aligned} \|\sigma(x) - \sigma(y)\| + \|b(x) - b(y)\| &\leq K|x - y| \\ \|\sigma(x)\| + \|b(x)\| &\leq K(1 + |x|^2)^{1/2} \end{aligned}$$

Se tiene el siguiente teorema de existencia y unicidad de soluciones de la ecuación 2.4.

Teorema 2.1.7. (Teorema 4.1 de [14])

Si D satisface y **(A1)** y b, σ satisfacen **(B)** entonces para cada $x \in \bar{D}$ existe una solución $X(t)$ a la ecuación 2.4 con condición inicial x . Además, si $Y(t)$ es otra solución con misma condición inicial, entonces

$$\mathbb{P}(X(t) = Y(t) \quad \forall t \geq 0) = 1$$

Por la observación 2.1.6, los procesos $X(t)$ y $\Phi(t)$ son continuos c.s.

2.1.2. Resultados clásicos sobre semigrupos y procesos de Markov

Se comienza esta sección con la definición de un semigrupo de operadores sobre un espacio de Banach y su generador infinitesimal \mathcal{A} , y se enuncia una proposición que será muy útil.

Definición 2.1.8. Una familia $\{T(t) : t \geq 0\}$ de operadores acotados sobre un espacio de Banach L ($T(t) : L \rightarrow L$) es llamado semigrupo si $T(0) = I$ y $T(s+t) = T(s)T(t)$. El semigrupo se dice fuertemente continuo si $\lim_{t \rightarrow 0} T(t)f = f, \forall f \in L$ ³. Se dice de contracciones si $\|T(t)\| \leq 1, \forall t \geq 0$. En espacios de funciones se dice positivo si $f \geq 0 \Rightarrow T(t)f \geq 0$. Se define el generador infinitesimal de un semigrupo de la siguiente manera (cuando tenga sentido)

$$\mathcal{A}f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(T(t)f - f) \quad (2.6)$$

El conjunto de las $f \in L$ tales que el límite anterior tiene sentido, es llamado el dominio de \mathcal{A} , denotado $D_{\mathcal{A}}$ ⁴

³Obviamente el límite es en la topología fuerte

⁴Más generamente, para un operador A , no necesariamente generador de un semigrupo, se denota D_A al conjunto donde A está definido. Se denota también R_A a la imagen por A del conjunto D_A

Definición 2.1.9. Un operador $A : D_A \subseteq L \rightarrow R_A \subseteq L$ se dice cerrado si su grafo es cerrado. Se dice cerrable si existe B , de grafo cerrado ⁵ con $D_A \subseteq D_B$ y que es una extensión minimal de A . En tal caso B se dice la cerradura de A y se denota $\bar{A} = B$. Este operador se caracteriza ([16, p. 78]) de la siguiente manera

$$x \in D_B \Leftrightarrow \exists x_n \in D_A \quad x_n \rightarrow x \wedge Ax_n \rightarrow y \quad (2.7)$$

Así, naturalmente $Bx = y$

Proposición 2.1.10. (Proposiciones 1.1.5 y 1.1.6 de [3]) Sea $T(t)$ semigrupo fuertemente continuo con generador infinitesimal \mathcal{A} . Entonces, para cada $f \in D_{\mathcal{A}}$, se tiene $T(t)f \in D_{\mathcal{A}}, \forall t \geq 0$, y se verifica

$$\mathcal{A}T(t)f = T(t)\mathcal{A}f \quad (2.8)$$

Además, $D_{\mathcal{A}}$ es denso en L y \mathcal{A} es cerrado

A continuación se definen los espacios vectoriales que serán relevantes para el presente trabajo.

Definición 2.1.11. En lo sucesivo sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto o cerrado, de interior no vacío, y se consideran los siguientes espacios de Banach (con la norma del supremo, denotada $\|\cdot\|_{\infty}$)

1. $B(E)$ el conjunto de las funciones acotadas y medibles definidas en E a valores reales.
2. $\bar{C}(E)$ el conjunto de las funciones en $B(E)$ que son continuas.
3. $\hat{C}(E)$ el conjunto de las funciones en $\bar{C}(E)$ que se anulan en infinito.

Si E es acotado $\bar{C}(E) = \hat{C}(E)$.

Denotamos también $C^k(E)$ el espacio de funciones k veces continuamente diferenciables definidas en E .

Por último, llamamos $\mathcal{P}(E)$ al conjunto de las medidas de probabilidad definidas en E . Todas las definiciones anteriores tienen sentido en el caso en que E es cerrado de interior no vacío, considerando $C^k(\bar{E})$ como el conjunto de funciones en $C^k(int(E))$ cuyas k primeras derivadas se extienden continuamente a E .

El espacio $B(E)$ es el más grande en el que se trabajará. Ahí se puede definir la siguiente noción de convergencia de funciones.

Definición 2.1.12. Sea f_n en $B(E)$. Se dice que f_n converge bp (*boundedly pointwise*) a $f \in B(E)$ si $\sup \|f_n\|_{\infty} < \infty$ y $\forall x \in E, \lim f_n(x) = f(x)$. Un conjunto $M \subseteq B(E) \times B(E)$ se dice bp cerrado si cada vez que $(f_n, g_n) \in M, (f, g) \in B(E) \times B(E)$ y f_n converge bp a f, g_n converge bp a g se cumple entonces $(f, g) \in M$. Por último, la bp cerradura de $M \subseteq B(E) \times B(E)$ se define como el más pequeño conjunto bp cerrado que contiene a M .

Un operador A en $B(E)$ se dice conservativo si $(1,0)$ está en la bp cerradura del grafo de A

⁵Notar que ni A ni B son acotados necesariamente

Otra noción relevante con la que se trabajará es la de conjunto separante. Esta se define a continuación.

Definición 2.1.13. Sea $M \subseteq \overline{C}(E)$. M se dice separante si para cualquier μ_1, μ_2 medidas de probabilidad definidas en E se cumple

$$\text{Si } \int f d\mu_1 = \int f d\mu_2, \quad \forall f \in M \quad (2.9)$$

entonces $\mu_1 = \mu_2$

El siguiente teorema proposición da una buena caracterización de los conjuntos separantes.

Teorema 2.1.14. (Teorema 3.4.5 [3])

Sea $M \subseteq \overline{C}(E)$ un álgebra que separa puntos, es decir, si $x \neq y \in E$ existe $f \in M$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Entonces M es separante.

Observación 2.1.15. Como consecuencia directa de 2.1.14, si $M = \hat{C}(E)$ ó si M es el conjunto de las funciones uniformemente continuas y acotadas definidas en E , entonces M es separante.

Ya se tienen todas las herramientas para aplicar la teoría de operadores al estudio de los procesos de Markov.

Definición 2.1.16. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t)$ como en 2.1.1 y $X(t)$ proceso \mathcal{F}_t adaptado y a valores en E , cerrado de interior no vacío, y satisfaciendo $\mathcal{F}_t^X \equiv \sigma(X(s) : s \leq t) \subseteq \mathcal{F}_t$. Se dirá Markoviano (homogéneo) si

$$\mathbb{E}(f(X(t+s)) | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}^{X(t)}(f(X(s)), \forall f \in B(E), s, t \geq 0 \quad (2.10)$$

Una función $P(t, x, \Gamma)$ definida en $([0, \infty) \times E \times \mathcal{B}(E))$ es una función de transición homogénea en el tiempo si

$$\begin{aligned} P(t, x, \cdot) &\in \mathcal{P}(E) & (t, x) &\in [0, \infty) \times E \\ P(0, x, \cdot) &= \delta_x & x &\in E \\ P(\cdot, \cdot, \Gamma) &\in \mathcal{B}([0, \infty) \times E) & \Gamma &\in \mathcal{B}(E) \end{aligned}$$

Decimos que $P(t, x, \Gamma)$ es una función de transición para X si

$$\mathbb{E}(f(X(t+s)) | \mathcal{F}_t) = \int f(y) P(s, X(t), dy), \forall f \in B(E), s, t \geq 0 \quad (2.11)$$

Dada una función de transición P es posible construir un semigrupo de contracciones $T(t)$ en $B(E)$ a través de la asignación

$$T(t)f(x) = \int_E f(y) P(t, x, dy) \quad (2.12)$$

Recíprocamente, es posible construir una función de transición a partir de un semigrupo de contracciones positivo. En efecto, si $T(t)$ es un semigrupo de contracciones positivo definido en $L = \hat{C}(E)$ y su generador es conservativo, entonces, como consecuencia del teorema de Riesz se tiene la existencia de una función de transición que satisface 2.12.

Un semigrupo con tales características, y que además es fuereamente continuo, se conoce como semigrupo de Feller.

Por último, dado un semigrupo $T(t)$ en un subespacio cerrado $L \subseteq B(E)$, y un proceso de Markov $X(t)$, se dice que $X(t)$ corresponde a $T(t)$ si

$$T(s)f(X(t)) = \mathbb{E}(f(X(t+s)) | \mathcal{F}_t^X) \quad \forall f \in L \quad (2.13)$$

Se trabajará con procesos de Markov que corresponden a semigrupos de Feller. Así, es importante conocer algunas consecuencias obvias pero muy importante de las definiciones anteriores. Éstas se enuncian en las proposiciones 2.1.17, 2.1.18, las que son válidas en el caso particular en que $T(t)$ es Feller.

La proposición 2.1.17 dice que bajo ciertas condiciones, una medida inicial y un semigrupo $T(t)$ determinan a los procesos de Markov que le corresponden.

Proposición 2.1.17. (Proposición 4.1.6 de [3])

Sea $X(t)$ proceso de Markov a valores en E con distribución inicial $\mu \in \mathcal{P}(E)$ y que corresponde a $T(t)$, que está definido en un subespacio cerrado $L \subseteq B(E)$, el que además es separante (ver definición 2.1.13). Entonces $T(t)$ y μ determinan las leyes finito dimensionales de $X(t)$

La proposición 2.1.18 da una útil caracterización para el generador de $T(t)$

Proposición 2.1.18. Sea $X(t)$ proceso de Markov a valores en E que corresponde a $T(t)$, el que está definido en $L \subseteq B(E)$ cerrado, y cuya distribución inicial es $\delta_x, x \in E$. Si se denota $\mathbb{P}^x(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot | X(0) = x)$ entonces

$$T(t)f(x) = \mathbb{E}(f(X(t)) | X(0) = x) = \mathbb{E}^x(f(X(t))) \quad (2.14)$$

En tal caso se tiene la siguiente expresión para el generador

$$\mathcal{A}f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\mathbb{E}^x(f(X(t))) - f(x)) \quad (2.15)$$

y además $D_{\mathcal{A}} \equiv \{f \in L : \mathcal{A}f(x) \text{ existe } \forall x\}$

El siguiente importante resultado, consecuencia del teorema de Hille-Yosida, permite construir un semigrupo de Feller $T(t)$ a partir de un operador A definido en un espacio suficientemente rico.

Teorema 2.1.19. (Teorema 4.2.2 y Corolario 4.2.8 de [3])

Sea A un operador con $D_A \subseteq \hat{C}(E)$. A es cerrable y su cerradura \bar{A} es el generador de un semigrupo $T(t)$ de contracciones fuertemente continuo y positivo en $\hat{C}(E)$ si y solamente si se cumple

1. D_A es denso en $\hat{C}(E)$
2. A satisface el principio del máximo positivo, es decir, $\forall f \in D_A, x_0 \in E$ y $\sup_{x \in E} f(x) = f(x_0) \geq 0$ se tiene $\mathcal{A}f(x_0) \leq 0$
3. $R(\lambda - A)$ es denso en $\hat{C}(E)$ para algún $\lambda > 0$.

Además, si A es conservativo entonces $T(t)$ es Feller y para cualquier $x \in E$ existe un proceso de Markov $X(t)$ con trayectorias RCLL que corresponde a $T(t)$, y cuya distribución inicial es δ_x .

Como es usual en la teoría de difusiones, se trabajará con operadores elípticos. A continuación se da una definición de estos operadores y un teorema clásico de existencia de soluciones que eventualmente resultará muy útil.

Teorema 2.1.20. (Consecuencia directa del Teorema 6.31 de [5])

Sea D un dominio acotado de clase C^2 y definamos el operador uniformemente elíptico

$$Lu(x) := \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(x) + \sum_i b_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}$$

con $a_{i,j}, b_i$ en $C(\bar{D})$. Entonces la ecuación

$$\begin{aligned} Lu(x) &= f(x) && \text{en } D \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) &\equiv \nabla u(x) \cdot n(x) = 0 && \text{en } \partial D \end{aligned} \quad (2.16)$$

tiene solución en $C^2(\bar{D})$ para cualquier $f \in C(\bar{D})$

El teorema anterior es utilizado en [3] para demostrar el siguiente resultado.

Teorema 2.1.21. Consecuencia directa del teorema 8.1.5 de [3]. Sea D un dominio acotado de clase C^2 , y consideremos el siguiente espacio de funciones

$$\mathcal{M} = \{f \in C^2(\bar{D}), \nabla f(x) \cdot n(x) = 0, x \in \partial D\}$$

Sea A el operador definido por $Af = Lf$ con L como en el teorema 2.1.20 y $D_A = \mathcal{M}$. Entonces A satisface las condiciones del teorema 2.1.19, y así, \bar{A} es el generador de un semigrupo de Feller $T(t)$ en $\bar{C}(\bar{D})$, y además, para cada $x \in \bar{D}$ existe $X(t)$ con distribución inicial δ_x que corresponde a $T(t)$

Observación 2.1.22. El hecho de que A es conservativo es trivial notando que como D es acotado y A es un operador diferencial, el par $(1, 0)$ está en el grafo de A . Para probar que se cumplen las condiciones del teorema 2.1.20 se usa fuertemente una variante del teorema 2.1.20

El primer resultado original que se demostrará es una caracterización de los procesos de Markov que surgen como consecuencia del teorema 2.1.21. Para eso, se utilizará una herramienta usual en probabilidades, que consiste en probar que una determinada cantidad es una martingala. El teorema clave, que entrega dicha herramienta, es el 2.1.24. Antes de enunciarlo, es necesario definir lo que es una solución al problema de martingala asociado al par (A, μ)

Definición 2.1.23. Sea $X(t)$ un proceso \mathcal{F}_t progresivo a valores en E , A un operador en $D_A \subseteq B(E)$ y $\mu \in \mathcal{P}(E)$. Supongamos que se verifica

$$f(X(t)) - \int_0^t Af(X(s))ds \text{ es martingala} \quad \forall f \in D_A \quad (2.17)$$

y que $\mathbb{P} \circ X(0)^{-1} = \mu$. Entonces $X(t)$ es llamado solución al problema de martingala para (A, μ) con respecto a \mathcal{F}_t .

Teorema 2.1.24. (Consecuencia directa del Teorema 4.4.1 de [3])

Supongamos que A es conservativo y satisface las hipótesis del teorema 2.1.19. Entonces, si $X(t)$ es una solución al problema de martingala para (A, μ) con respecto a \mathcal{F}_t , se tiene que $X(t)$ es un proceso de Markov que corresponde al semigrupo $T(t)$ generado por \bar{A} .

2.1.3. Algunos resultados auxiliares

Se reúnen en esta parte algunos resultados provenientes de diversas áreas de la matemática, que serán muy útiles en la sección 2.2.

Teorema 2.1.25. Sea D dominio acotado de clase C_∞ . Entonces existe una función continua $G : \bar{D} \times \bar{D} \setminus \{(x, x) \mid x \in \bar{D}\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para cualquier $x \in \bar{D}$ la función $G_x(\cdot) \equiv G(x, \cdot)$ definida en $\bar{D} \setminus \{x\}$ satisface:

1. G_x es de clase $C^2(D \setminus \{x\})$ y es solución a la ecuación

$$\begin{aligned} \Delta G_x &= -\frac{1}{|D|} \quad \text{en } D \setminus \{x\} \\ \frac{\partial G_x}{\partial n} &= 0 \quad \text{en } \partial D \setminus \{x\} \end{aligned}$$

donde $|D|$ es la medida de Lebesgue de D

2.

$$\int_D G_x(y) dy = 0$$

3. Para cualquier ϕ de clase $C^2(\bar{D})$ se cumple la identidad

$$\phi(x) - \bar{\phi} = \int_D G_x(y) \Delta \phi(y) dy + \int_{\partial D} G_x(y) \frac{\partial \phi}{\partial n}(y) dy$$

donde $\bar{\phi} = \frac{1}{|D|} \int_D \phi(y) dy$

Lema 2.1.26. (Lema 6.38 de [5])

Sea D dominio de clase C^2 y $u \in C^2(\bar{D})$. Dado $D' \supseteq \bar{D}$ abierto existe $w \in C^2(D')$ que extiende a u

2.2. Resultados Originales

Los resultados obtenidos están divididos en cuatro partes. En 2.2.1 se obtiene una caracterización de las difusiones reflejadas a partir de su generador infinitesimal. En 2.2.2 se calcula explícitamente una medida estacionaria para cierto tipo de difusión, en dominios regulares. En 2.2.3 se extiende dicho resultado a dominios aproximables por dominios regulares. Finalmente, en 2.2.4 se prueban algunos resultados de convergencia a la medida estacionaria. A lo largo de esta sección, \mathcal{M} es el espacio de funciones definido en 2.1.21, es decir:

$$\mathcal{M} = \{f \in C^2(\bar{D}), \nabla f(x) \cdot n(x) = 0, x \in \partial D\}$$

2.2.1. Caracterización del generador de una difusión reflejada para dominios regulares

En esta parte se considera un dominio D convexo y acotado, el que además es de clase C^2 y verifica **(A1)**. Suponemos que los coeficientes b, σ son continuos y verifican **B**. Suponemos además que σ es acotado.

El siguiente resultado auxiliar permitirá aplicar el teorema 2.1.24

Proposición 2.2.1. *Sea $f \in \mathcal{M}$ y $X(t)$ satisfaciendo 2.4 con condición inicial $x \in \bar{D}$. Entonces:*

$$M(t) \equiv f(X(t)) - f(x) - \int_0^t \left(\nabla f(X(s)) \cdot b(X(s)) + \frac{1}{2} \sum_{i,j \leq n} (\sigma^t \sigma)_{ij} f''(X(s))_{ij} \right) ds \quad (2.18)$$

es una \mathbb{P}^x martingala nula en cero

Demostración. Dada $f \in \mathcal{M}$, consideramos $D' \supseteq \bar{D}$ abierto y F la extensión de f dada por el lema 2.1.26. El proceso $X(t)$ es así a valores en D' c.s. y es posible aplicar la fórmula de Ito multidimensional (Teorema 3.3.6 de [7], y observación 1 de Teorema 4.3.3 de [12]). Notando que $X(t) \in \bar{D}$, se tiene $f(X(s)) = F(X(s))$ y lo mismo con las derivadas de f, F . Recordando que $\Phi(t)$ es a variación acotada se tiene

$$\begin{aligned} f(X(t)) &= f(X(0)) + \int_0^t \nabla f(X(s)) \cdot dX(s) + \frac{1}{2} \sum_{i,j \leq n} \int_0^t f''(X(s))_{ij} d\langle X^i(s), X^j(s) \rangle \\ &= f(X(0)) + \int_0^t \nabla f(X(s)) \cdot b(X(s)) ds + \sum_{k \leq n} \int_0^t \nabla f(X(s)) \sigma_k(X(s)) dB^k(s) + \\ &\quad \int_0^t \nabla f(X(s)) \cdot d\Phi(t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k \leq n} \int_0^t f''(X(s))_{ij} \sigma_{ki}(X(s)) \sigma_{kj}(X(s)) ds \quad (2.19) \end{aligned}$$

Pero

$$\int_0^t \nabla f(X_s) \cdot d\Phi(t) = \int_0^t \nabla f(X_s) 1_{\{X(s) \in \partial D\}} \cdot n(X_s) d|\Phi|(t) = 0$$

Así, se obtiene

$$M(t) = \sum_{k \leq n} \int_0^t \nabla f(X(s)) \sigma_k(X(s)) dB^k(s) \quad (2.20)$$

Luego, $M(t)$ es una suma de integrales estocásticas cuyos integrandos son procesos continuos, luego, es una martingala local. Como cada integrando está acotado, a posteriori es una martingala nula en cero. \square

El siguiente teorema muestra que las soluciones a la ecuación 2.4 son procesos de Markov que corresponden a un semigrupo de Feller cuyo generador se conoce de manera explícita.

Teorema 2.2.2. *Bajo las condiciones de la proposición 2.2.1, para cualquier condición inicial $x \in \bar{D}$ el proceso $X(t)$, solución de la ecuación 2.4, es Markov homogéneo, correspondiente a un semigrupo de Feller $T(t)$. Su generador \mathcal{A} , para funciones en \mathcal{M} se escribe como*

$$\mathcal{A}f(x) = \nabla f(x) \cdot b(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j \leq n} (\sigma^t \sigma)_{ij} f''(x)_{ij} \quad (2.21)$$

Demostración. Sea A el operador definido en $D_A = \mathcal{M}$ por

$$Af(x) = \nabla f(x) \cdot b(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j \leq n} (\sigma^t \sigma)_{ij} f''(x)_{ij}$$

Por teorema 2.1.21, A es cerrable y \bar{A} es el generador de un semigrupo de Feller $T(t)$. Por otra parte, de la proposición 2.2.1, si $f \in \mathcal{M}$ se tiene que

$$f(X(t)) - \int_0^t Af(X(s)) ds$$

es una \mathbb{P}^x martingala. Luego, $X(t)$ resuelve el problema de martingala asociado a A con distribución inicial δ_x . Por el teorema 2.1.24, $X(t)$ es un proceso de Markov homogéneo que corresponde a $T(t)$. La ecuación 2.21 viene simplemente de que $\mathcal{A} = \bar{A}$. \square

Observación 2.2.3. Para reflexiones en algunos dominios más generales, a pesar de que no es posible caracterizar el generador como en el teorema 2.2.2, se tiene de todas formas la existencia de un semigrupo de Feller $T(t)$ de manera tal que las soluciones a la ecuación 2.4 con condición inicial $x \in \bar{D}$ corresponden a $T(t)$. Lo anterior es cierto en el caso en que $D = \{x \in \mathbb{R}^n, \forall i = 1 \dots n, x_i > 0\}$ ($\bar{D} := \mathbb{R}_+^n$), como se menciona en [11].

La siguiente observación tiene por objetivo extender la noción de solución 2.4 con condición inicial aleatoria, lo que es fundamental para lo que sigue

Observación 2.2.4. Por el teorema 4.1.1 de [3], dada una función de transición $P(t, x, \Gamma)$ y una medida $\mu \in \mathcal{P}(E)$, con E cerrado, entonces existe un proceso de Markov en E cuyas leyes finito dimensionales están determinadas por μ y P , y tal P es una función de transición para $X(t)$.

En el caso de difusiones reflejadas cuyas soluciones corresponden a semigrupos de Feller $T(t)$ (como en el teorema 2.2.2 y la observación 2.2.3) se tiene que dicho semigrupo da a lugar a una función de transición, y así, para cada distribución inicial μ existe un proceso $X(t)$, dado por el teorema 4.1.1. de [3] Dicho proceso corresponde a $T(t)$, y más aún, se tiene la siguiente expresión

$$\mathbb{E}(f(X(t))) = \int_E \mathbb{E}^x(f(X(t))) d\mu(x) \quad \forall f \in \hat{C}(E)$$

Con lo anterior en mente, dada una medida inicial μ se puede considerar la solución de la ecuación 2.4 con condición inicial μ como el proceso dado por el teorema 4.1.1 de [3]. Ese proceso satisface que $\forall x \in \bar{D}$ se tiene que bajo \mathbb{P}^x , $X(t)$ es solución a 2.4 con condición inicial x .

2.2.2. Medida estacionaria para un cierto tipo de difusión reflejada en dominios regulares

A continuación se encontrará explícitamente una medida estacionaria asociada a la ecuación 2.4. Esta vez se asumirá que además el dominio D es de clase C^∞ , y que el drift y la difusión tienen expresiones particulares. Primero se da la definición de medida estacionaria en este contexto, y se presenta una caracterización que será útil para demostrar el teorema principal.

Definición 2.2.5. Decimos que μ es una medida estacionaria para el proceso de Markov $X(t)$ si $X(t) \sim \mu, \forall t \geq 0$. Tiene sentido hablar de medidas estacionarias para semigrupos $T(t)$ de contracciones en un subespacio cerrado L de $B(E)$, con L separante, en los que para cada μ inicial existe un proceso de Markov que corresponde a $T(t)$. Si $T(t)$ cumple lo anterior diremos que corresponde a procesos de Markov. En tal caso, si μ es estacionaria para $X(t)$, que corresponde a $T(t)$, se tendrá que $\forall f \in L, t \geq 0$:

$$\int_E T(t)f(x)d\mu(x) = \int_E f(x)d\mu(x) \quad (2.22)$$

Recíprocamente, si 2.22 es válida para todo $f \in L$, como L es separante se tendrá que la ley de $X(t)$ es μ para cualquier $t \geq 0$.

Así, decimos que μ es estacionaria para $T(t)$ si se verifica la ecuación 2.22.

Proposición 2.2.6. Sea A conservativo que cumple las hipótesis del teorema 2.1.19, generando (su cerradura) así un semigrupo de Feller $T(t)$ en $\hat{C}(E)$. Sea $\mu \in \mathcal{P}(E)$ y $X(t)$ que corresponde a $T(t)$, y que $\forall x \in E$, bajo \mathbb{P}^x es solución al problema de martingala asociado a (A, δ_x) . Supongamos que D_A es separante. Si μ satisface

$$\int_E Af(x)d\mu(x) = 0 \quad \forall f \in D_A \quad (2.23)$$

Entonces μ es una distribución estacionaria para $X(t)$

Demostración. Se probará que $\forall f \in D_A$ se cumple la ecuación 2.22, la que también puede ser expresada como

$$\mathbb{E}(f(X(t))) = \mathbb{E}(f(X(0))) \quad (2.24)$$

Y como D_A es separante, se tendrá que μ es estacionaria.

Probemos entonces 2.24. En efecto, dado $x \in E$, como $X(t)$ es solución al problema de martingala para (A, δ_x) , tomando \mathbb{E}^x en la ecuación 2.17, con $f \in D_A$ se obtiene

$$\mathbb{E}^x(f(X(t))) = f(x) + \mathbb{E}^x \left(\int_0^t Af(X(s))ds \right) \quad (2.25)$$

Así,

$$\mathbb{E}(f(X(t))) = \int_E \mathbb{E}^x(f(X(t)))d\mu(x) = \int_E f(x)d\mu(x) + \int_E \mathbb{E}^x \left(\int_0^t Af(X(s))ds \right) d\mu(x) \quad (2.26)$$

Por una parte, $\mathbb{E}(f(X(0))) = \int_E f(x)d\mu(x)$. Por otra parte, debido a la existencia de un semigrupo $T(t)$ de contracciones fuertemente continuo que corresponde a $X(t)$ generado por $\mathcal{A} = \bar{A}$, y haciendo uso de la proposición 2.1.10, se tiene

$$\begin{aligned} \int_E \mathbb{E}^x \left(\int_0^t Af(X(s))ds \right) d\mu(x) &= \int_E \int_0^t \mathbb{E}^x(Af(X(s)))dsd\mu(x) \\ &= \int_0^t \int_E T(s)Af(x)d\mu(x)ds \\ &= \int_0^t \int_E AT(s)f(x)d\mu(x)ds \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$(2.28)$$

Ahora, también por 2.1.10, se tiene que $T(s)f \in D_A$, y por (2.7) $\mathcal{A}T(s)f = \lim Af_n$ con $f_n \in D_A$, $T(s)f = \lim f_n$

$$\int_E \mathcal{A}T(s)f d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E Af_n d\mu(x) = 0 \quad (2.29)$$

La última convergencia es una consecuencia del teorema de convergencia dominada, notando que μ es medida de probabilidad y que la convergencia es en la norma del supremo. \square

Observación 2.2.7. La proposición 2.2.6 es una leve adaptación de la proposición 4.9.2 de [3]

El siguiente lema es fundamental para la demostración del teorema principal.

Lema 2.2.8. \mathcal{M} es separante.

Demostración. Se demostrará que \mathcal{M} es un álgebra que separa puntos. El que es álgebra es trivial, para ver que separa puntos razonamos por contradicción: supongamos existen $x \neq y \in \bar{D}$ tal que $\forall u \in \mathcal{M}$ se tiene $u(x) = u(y)$. Usamos el teorema 2.1.25, recordando que D de clase C^∞ . De ahí se obtiene la existencia de G_x, G_y tales que $\forall u \in C^2(\bar{D})$

$$\begin{aligned} u(x) - \bar{u} &= \int_D G_x(z) \Delta u(z) dz + \int_{\partial D} G_x(z) \frac{\partial u}{\partial n}(z) dz \\ u(y) - \bar{u} &= \int_D G_y(z) \Delta u(z) dz + \int_{\partial D} G_y(z) \frac{\partial u}{\partial n}(z) dz \end{aligned}$$

Si tomamos $u \in \mathcal{M}$ se tiene, por una parte, que $u(x) = u(y)$. Por otra parte las integrales en el borde se anulan, obteniéndose así

$$\int_D (G_x(z) - G_y(z)) \Delta u(z) dz = 0 \quad \forall u \in \mathcal{M}$$

En particular, lo anterior se cumple para todas las u que sean solución de la ecuación (con $f \in C(\bar{D})$)

$$\begin{aligned} \Delta u &= f && \text{en } D \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \text{en } \partial D \end{aligned}$$

Notar que La existencia de u está garantizada por el teorema 2.1.20, y es evidente que $u \in \mathcal{M}$. De lo anterior se tiene

$$\int_{D \setminus \{x, y\}} (G_x(z) - G_y(z)) f(z) dz = 0 \quad \forall f \in C(\bar{D} \setminus \{x, y\})$$

Como G_x, G_y son continuas en $\bar{D} \setminus \{x, y\}$ obtenemos que $G_x(z) - G_y(z) = 0, z \in \bar{D} \setminus \{x, y\}$. Consideremos la función

$$H(z) = \begin{cases} G_x(z) & \text{si } z \in \bar{D} \setminus \{x\} \\ G_y(z) & \text{si } z = x \end{cases}$$

Es fácil ver que $H \in C^2(\bar{D})$. En efecto, es obvio que $H \in C^2(\bar{D} \setminus \{x\})$ y en x también se tiene la regularidad, pues en una vecindad de este punto se tiene que $H(z) = G_y(z)$

(recordando que $G_x(z) = G_y(z)$ si $z \neq y$). Por otra parte, es trivial ver que $\frac{\partial H(z)}{\partial n} = 0$ en ∂D y que $\Delta H(z) = -\frac{1}{|D|}$ en D .

Entonces para la función H se cumple que para cualquier $z \in \bar{D}$

$$\begin{aligned} H(z) - \bar{H} &= \int_D G_z(y) \Delta H(y) dy + \int_{\partial D} G_z(y) \frac{\partial H}{\partial n}(y) dy \\ &= -\frac{1}{|D|} \int_D G_z(y) dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

De ahí, $H(z) = \bar{H} = K$ contradiciendo el hecho que $\Delta H = -\frac{1}{|D|}$ □

El siguiente objetivo es dar una representación explícita de una distribución estacionaria para procesos reflejados, dadas expresiones particulares del drift y la matriz de difusión. Para eso, es preciso antes dar algunas definiciones.

Definición 2.2.9. Sea Y variable aleatoria en el espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a valores en $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $E \subseteq B$ se puede definir la ley condicional

$$\mu_Y^E(A) = \frac{\mathbb{P}(Y^{-1}(A \cap E))}{\mathbb{P}(Y^{-1}(E))} = \mathbb{P}(Y \in A | Y \in E)$$

que es una distribución en E . Es fácil ver que si Y tiene densidad f_Y en B entonces la densidad de μ_Y^E está dada por

$$f_Y^E(y) = \begin{cases} \frac{f_Y(y)}{\mathbb{P}(Y \in E)} & y \in E \\ 0 & y \in B \setminus E \end{cases} \quad (2.30)$$

El teorema principal se enuncia entonces de la manera siguiente

Teorema 2.2.10. Sea $X(t)$ el proceso definido por 2.4 en D , y supongamos los parámetros están dados por $\sigma(x) = \sigma I_d$, $b(X) = -\nabla \Psi(x)$ donde $\Psi \in C^1(\bar{D})$. Si para algún conjunto B tal que $\bar{D} \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$ se tiene

$$Z \equiv \int_B \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} \Psi(x)\right) dx < \infty$$

Entonces la medida

$$\mu(A) = \mu_Y^{\bar{D}}(A) \quad \text{con} \quad f_Y(x) = Z^{-1} \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} \Psi(x)\right) \quad \text{para } x \in B$$

Es estacionaria para el proceso $X(t)$

Demostración. Aplicando el 2.2.2, las proposiciones 2.2.1, 2.2.6 y la observación 2.2.4 basta probar que

$$\int_{\bar{D}} \mathcal{A}f(x) d\mu(x) = 0, \quad \forall f \in \mathcal{M}$$

En este caso el generador infinitesimal está dado por

$$\mathcal{A}f(x) = \frac{1}{2} \sigma^2 \Delta f(x) - \nabla f(x) \cdot \nabla \Psi(x) \quad \forall f \in \mathcal{M}$$

Con eso, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{\bar{D}} \mathcal{A}f(x) d\mu(x) &= \frac{1}{\mathbb{P}(Y \in \bar{D})} \int_{\bar{D}} \mathcal{A}f(x) f_Y(x) dx \\
&= \frac{Z^{-1}}{\mathbb{P}(Y \in \bar{D})} \int_{\bar{D}} \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} \Psi(x)\right) \left(\frac{1}{2} \sigma^2 \Delta f(x) - \nabla f(x) \cdot \nabla \Psi(x)\right) dx \\
&= \frac{\sigma^2 Z^{-1}}{2\mathbb{P}(Y \in \bar{D})} \int_{\bar{D}} \left[\exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} \Psi(x)\right) \Delta f(x) + \nabla f(x) \cdot \nabla \left(\exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} \Psi(x)\right)\right) \right] dx
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Además, como consecuencia del teorema de la divergencia, para $g(x) = \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} \Psi(x)\right)$

$$\int_{\bar{D}} [g(x) \Delta f(x) + \nabla f(x) \cdot \nabla g(x)] dx = \int_{\partial D} g(x) \nabla f(x) \cdot n(x) dx = 0 \tag{2.32}$$

Pues $\nabla f(x) \cdot n(x) = 0$ en ∂D para funciones en \mathcal{M} . Así, juntando 2.31 y 2.32 se concluye. \square

Corolario 2.2.11. *Sea $X(t)$ el proceso de Ornstein-Uhlenbeck reflejado, es decir $\sigma(x) = \sigma^2 I_d$, $b(x) = I - Ax$ con I un vector y A una matriz simétrica definida positiva. Entonces una medida estacionaria para $X(t)$ está dada por*

$$\mu = \mu_Y^{\bar{D}} \quad Y \sim \mathcal{N}(A^{-1}I, \frac{\sigma^2}{2}A^{-1}) \tag{2.33}$$

Demostración. Se considera $\Psi(x) = \frac{1}{2}(-2I \cdot x + x^t Ax + I^t A^{-1}I)$. Así, como $A^t = A$ se tiene $\nabla \Psi(x) = -I + Ax = -b(x)$. Notemos además que

$$(x - A^{-1}I)^t \left(\frac{\sigma^2 A^{-1}}{2}\right)^{-1} (x - A^{-1}I) = -\frac{1}{\sigma^2} (x^t Ax + I^t A^{-1}I - 2I \cdot x)$$

Luego, por el teorema 2.2.10, una distribución estacionaria está dada por $\mu = \mu_Y^{\bar{D}}$ Donde Y es una normal multivariada, más específicamente, $Y \sim \mathcal{N}(A^{-1}I, \frac{\sigma^2}{2}A^{-1})$ \square

Observación 2.2.12. Notar que finalmente sólo se requiere que

$$\int_D \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} \Psi(x)\right) dx < \infty$$

Sin embargo es preferible dejar que B sea un conjunto más grande pues así se puede interpretar la medida estacionaria como el condicionamiento de una medida definida en un conjunto más grande (relacionada a una variable aleatoria) al dominio de reflexión. En el caso del proceso de OU reflejado, se puede decir que la distribución estacionaria es una normal multivariada condicionada a permanecer en el dominio de reflexión.

Observación 2.2.13. Otra consecuencia del teorema 2.2.10 se obtiene cuando $\Psi(x) = 0$. En tal caso la distribución estacionaria que se obtiene es la uniforme en el dominio de reflexión.

En 2.2.3 se generalizará el teorema anterior a dominios que son aproximables por dominios suaves.

2.2.3. Extensión a dominios generales

Como se vio en 2.2.2, en la demostración del teorema 2.2.10 se utiliza fuertemente la expresión que se dispone para el generador de las difusión reflejada, para funciones en \mathcal{M} . Dicha expresión podría no tenerse si D es no acotado o no es de clase C^2 . Más aún, si D no es de clase C^∞ no se puede demostrar que \mathcal{M} es separante como se hizo en 2.2.8, lo que es fundamental para que se verifiquen las hipótesis de 2.2.10. Es necesario entonces buscar otra estrategia. Esta se basará en el hecho de que si dos dominios son suficientemente cercanos entonces las soluciones a la ecuación 2.4 en ambos dominios es similar. Así, si un dominio D admite aproximaciones vía dominios regulares se tendrá una secuencia de medidas estacionarias asociadas a cada dominio, las que convergerán a una medida que será estacionaria para la reflexión en D . En esta subsección, cada vez que se considere la ecuación (2.4) se asumirá que $\sigma(x) = \sigma I_d$, $b(X) = -\nabla\Psi(x)$ donde $\Psi \in C^1(\bar{D})$.

El siguiente teorema es una ligera modificación de un resultado clásico, y es la clave para justificar la estrategia recién descrita.

Teorema 2.2.14. (Modificación del teorema 3.9.10 de [3]) Sean $T_n(t), T(t)$ semigrupos de contracciones definidos en $\bar{C}(E)$, que corresponden a procesos de Markov. Supongamos que para cada n , $\mu_n \in \mathcal{P}(E)$ es una medida estacionaria para $T_n(t)$. Supongamos además que para cualquier $K \subseteq E$ compacto

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |T_n(t)f(x) - T(t)f(x)| = 0, \forall t \geq 0, f \in L \quad (2.34)$$

donde $L \subseteq \bar{C}(E)$ es separante. Entonces, si $\mu \in \mathcal{P}(E)$ es tal que $\mu_n \Rightarrow \mu$, se tiene que μ es una medida estacionaria para $T(t)$

Demostración. Demostremos que $\forall f \in L, \forall t \geq 0$ se cumple la ecuación 2.22. En efecto, dado $n \in \mathbb{N}$, usando que μ_n es estacionaria para T_n y la desigualdad triangular, se tiene

$$\begin{aligned} \left| \int T(t)f d\mu - \int f d\mu \right| &\leq \left| \int T(t)f d\mu - \int T(t)f d\mu_n \right| + \left| \int T(t)f d\mu_n - \int T_n(t)f d\mu_n \right| \\ &\quad + \left| \int T_n(t)f d\mu_n - \int f d\mu \right| \end{aligned} \quad (2.35)$$

Podemos tomar \limsup_n en la desigualdad anterior, y como $f, T(t)f$ son funciones continuas acotadas, debido a la convergencia débil se tiene finalmente que

$$\begin{aligned} \left| \int T(t)f d\mu - \int f d\mu \right| &\leq \limsup_n \left| \int T(t)f d\mu_n - \int T_n(t)f d\mu_n \right| \\ &\leq \limsup_n \left(\left| \int_K (T(t)f - T_n(t)f) d\mu_n \right| + \left| \int_{K^c} (T(t)f - T_n(t)f) d\mu_n \right| \right) \\ &\leq \limsup_n \mu_n(K) \sup_K |T(t)f(x) - T_n(t)f(x)| \\ &\quad + \limsup_n \left| \int_{K^c} (T(t)f - T_n(t)f) d\mu_n \right| \end{aligned} \quad (2.36)$$

Donde K es un compacto arbitrario. El primer término es cero por la hipótesis del teorema. Para acotar el segundo integrando notamos que $|\int_{K^c}(T(t)f - \int T_n(t)f)d\mu_n| \leq (||T(t)f||_\infty + ||T_n(t)f||_\infty)\mu_n(K^c) \leq 2||f||_\infty\mu_n(K^c)$. Para concluir, notemos que como μ_n converge débilmente, por el teorema de Prohorov (Teorema 1.6.1 de [2]) la familia $\{\mu_n\}$ resulta ser tensa, y entonces dado $\epsilon > 0$ se tendrá $\limsup_n \mu_n(K^c) \leq \epsilon$, para un determinado compacto K .

Recapitulando, se tiene que $\forall \epsilon > 0 \quad |\int T(t)f d\mu - \int f d\mu| \leq \epsilon$, de donde se obtiene la conclusión deseada. \square

Observación 2.2.15. A pesar de que la demostración es prácticamente igual a la de [3], hay un detalle técnico importante, y que obliga a reproducir los argumentos en su totalidad. En el teorema 2.2.14 se tienen semigrupos definidos en $\overline{C}(E)$, pero se consideran funciones en un subespacio L separante. En su formulación original se exige que el semigrupo esté definido en L , y que por lo tanto $T(t)f \in L$ para $f \in L$, lo que es una hipótesis demasiado restrictiva para que el teorema sea aplicable a las construcciones que se harán a continuación.

En la demostración anterior se probó que la ecuación 2.22 es válida para $T(t)$ considerando sólo funciones en L . Esto es de hecho suficiente para probar que la medida es estacionaria, por el mismo argumento que se da en la definición 2.2.5: como L es separante entonces si la ecuación 2.22 se tiene para todas las funciones de L , entonces la distribución de $X(t)$ es la misma para todo t .

El siguiente lema muestra una forma natural de extender un semigrupo.

Lema 2.2.16. *Sean $D_1 \subseteq D_2$ abiertos y D_1 convexo. Si $T(t)$ es un semigrupo de contracciones en $\overline{C}(\overline{D}_1)$ que corresponde a procesos de Markov, entonces definiendo la familia de operadores $S(t)$ mediante*

$$S(t)f(x) = T(t)f_{|\overline{D}_1}(P(x)) \quad f \in \overline{C}(\overline{D}_2), t > 0, S(0) = I \quad (2.37)$$

Donde P es la proyección sobre \overline{D}_1 (continua).

Se tiene que $S(t)$ es un semigrupo de contracciones en $\overline{C}(\overline{D}_2)$. Más aún, para cualquier $x \in \overline{D}_2$, si $X_{P(x)}(t)$ corresponde a $T(t)$ y tiene distribución inicial $\delta_{P(x)}$ entonces el proceso $Y_x(t) \equiv X_{P(x)}(t)$ para $t > 0$ y $Y_x(0) = x$ corresponde a $S(t)$. En consecuencia, $S(t)$ corresponde a procesos de Markov RCLL.

Por último, si $\mu \in \mathcal{P}(\overline{D}_1)$ es una medida estacionaria para $T(t)$, entonces, si se define $\nu(A) = \mu(A \cap \overline{D}_1) \in \mathcal{P}(\overline{D}_2)$ se tiene que ν es una medida estacionaria para $S(t)$

Demostración. Primero verificamos que $S(t)$ está bien definido como semigrupo en $\overline{C}(\overline{D}_2)$. En efecto, si $f \in \overline{C}(\overline{D}_2)$ entonces $f_{|\overline{D}_1} \in \overline{C}(\overline{D}_1)$ y si $x_n \rightarrow x$ en \overline{D}_2 entonces $P(x_n) \rightarrow P(x)$ en \overline{D}_1 . Así $T(t)f_{|\overline{D}_1}(P(x_n)) \rightarrow T(t)f_{|\overline{D}_1}(P(x))$ lo que equivale a decir $S(t)f(x_n) \rightarrow S(t)f(x)$. La propiedad de semigrupo se tiene trivialmente, y además para cualquier $x \in \overline{D}_2$

$$|S(t)f(x)| = |T(t)f_{|\overline{D}_1}(P(x))| \leq \sup_{x \in \overline{D}_1} |T(t)f_{|\overline{D}_1}(x)| \leq ||f_{|\overline{D}_1}||_\infty \leq ||f||_\infty$$

Lo que prueba que $S(t)$ es un semigrupo de contracciones. Ahora se debe probar que $\forall s, t \geq 0, f \in \overline{C}(\overline{D}_2), x \in \overline{D}_2$

$$S(s)f(Y_x(t)) = \mathbb{E}(f(Y_x(t+s)) | \mathcal{F}_t^{Y_x})$$

Notamos en primer lugar que $\mathcal{F}_t^{Y_x} = \mathcal{F}_t^X$ y que $P(Y_x(t)) = X_{P(x)}(t)$ Así, si $s > 0$ (si $s = 0$ la igualdad se cumple trivialmente):

$$\begin{aligned}
S(s)f(Y_x(t)) &= T(s)f|_{\bar{D}_1}(P(Y_x(t))) \\
&= T(s)f|_{\bar{D}_1}(X_{P(x)}(t)) \\
&= \mathbb{E}(f|_{\bar{D}_1}(X_{P(x)}(t+s))|\mathcal{F}_t^{X_{P(x)}}) \\
&= \mathbb{E}(f|_{\bar{D}_1}(X_{P(x)}(t+s))|\mathcal{F}_t^{Y_x}) \\
&= \mathbb{E}(f|_{\bar{D}_1}(P(Y_x(t+s)))|\mathcal{F}_t^{Y_x}) \\
&= \mathbb{E}(f(Y_x(t+s))|\mathcal{F}_t^{Y_x})
\end{aligned}$$

Por último, sea ν como en el enunciado. Entonces, si $f \in \bar{C}(\bar{D}_2)$

$$\begin{aligned}
\int_{\bar{D}_2} S(t)f(x)d\nu(x) &= \int_{\bar{D}_1} S(t)f(x)d\mu(x) \\
&= \int_{\bar{D}_1} T(t)f|_{\bar{D}_1}d\mu(x) \\
&= \int_{\bar{D}_1} f|_{\bar{D}_1}(x)d\mu(x) \\
&= \int_{\bar{D}_1} f(x)d\nu(x)
\end{aligned}$$

Lo que prueba que ν es estacionaria para $S(t)$

□

Como se mencionó, se buscará aproximar dominios no diferenciables o no acotados por otros que sí lo sean. Dicha aproximación se hace en términos de la distancia de Hausdorff, definida a continuación.

Definición 2.2.17. Se define la distancia de Hausdorff entre los conjuntos A y B como

$$\rho(A, B) \equiv \max(\sup_{x \in \bar{A}} d(x, \bar{B}), \sup_{x \in \bar{B}} d(x, \bar{A}))$$

Para D convexo se considera además la cantidad $c(x, D) \equiv \inf_{a \in D} (|a - x|^2 + 1)/d(a, \partial D)$. Por la observación 3.4 de [13], si D satisface la condición **(A1)** con ϵ, δ entonces $c(x, D) \leq \max(\delta^{-1}, (4\delta^2 + 1)/\epsilon)$

Se tiene el siguiente teorema que trata sobre aproximaciones de soluciones a la ecuación 2.4 en diferentes dominios.

Teorema 2.2.18. (Teorema 5.1 de [13])

Sean $D' \subseteq D$ dominios convexos satisfaciendo **(A1)** y consideramos las soluciones $X(t), X'(t)$ a la ecuación 2.4 en D y D' con condiciones iniciales $X(0) \in \bar{D}, X'(0) \in \bar{D}'$, respectivamente. Supongamos además que existe C tal que

$$\max(|X(0)| + c(X(0), D), |X'(0)| + c(X'(0), D')) \leq C$$

y que además para cierto $\epsilon > 0$ se tiene

$$\rho(D^{1/\epsilon}, D^{1/\epsilon}) \leq \epsilon$$

Donde $A^r \equiv A \cap B(0, r)$.

Entonces existe $L = L(C)$ tal que

$$\mathbb{E}(\sup_{s \leq t} |X(s) - X'(s)|^2) \leq L(\epsilon + |X(0) - X(0)'|^2)$$

Se puede ya enunciar el teorema principal de esta sección

Teorema 2.2.19. *Supongamos Sea D dominio convexo que satisface **(A1)** y la medida de Lebesgue de ∂D es cero. Sea $D_n \subseteq D_{n+1} \subseteq D$ sucesión de convexos tales que*

- *Existe ϵ_n convergente a cero tal que $\rho(D^{1/\epsilon_n}, D_n^{1/\epsilon_n}) \leq \epsilon_n$.*
- *Para cualquier n , D_n es acotado, de clase C^∞ y verifica la condición **(A1)***
- *El par (ϵ, δ) para D_n de la condición **(A1)** puede ser elegido uniformemente en n , y es el mismo que el asociado a D*
- *si $x \in D$ entonces $x \in D_n$ para cierto n .*

Suponemos también que los coeficientes b, σ están definidos en \bar{D} y satisfacen las hipótesis del teorema 2.2.10. Luego, existe una variable aleatoria Y a valores en $B \supseteq \bar{D}$ de manera que existen medidas estacionarias

$$\mu_n = \mu_{\bar{Y}^n}$$

para los semigrupos $T_n(t)$, asociados a las reflexiones en D_n . Suponemos por último que existe $T(t)$ semigrupo de contracciones tales que las soluciones de la ecuación 2.4 en \bar{D} corresponden a $T(t)$.

Entonces, la medida $\mu = \mu_{\bar{Y}}$ es estacionaria para $T(t)$

Demostración. Por el teorema 2.2.10 se tiene la siguiente expresión para las medidas $\mu_n \in \mathcal{P}(\bar{D}_n)$

$$\mu_n(A) = Z_n^{-1} \int_{A \cap \bar{D}_n} \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} \Psi(x)\right) dx \quad Z_n \equiv \int_{\bar{D}_n} \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} \Psi(x)\right) dx$$

Consideremos las extensiones ν_n de μ_n a $\mathcal{P}(\bar{D})$ dadas por el lema 2.2.16. Estas son medidas estacionarias asociadas a los semigrupos $S_n(t)$, extensiones de los $T_n(t)$. Notemos que si $x \in D$ entonces se tiene la siguiente convergencia case segura (considerando la medida de Lebesgue).

$$\mathbf{1}_{\bar{D}_n}(x) \rightarrow \mathbf{1}_{\bar{D}}(x)$$

Así, es posible usar el teorema de convergencia dominada para probar que $\forall A \in \mathcal{B}(\bar{D})$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(A) = Z^{-1} \int_A \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} \Psi(x)\right) dx \quad Z \equiv \int_{\bar{D}} \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} \Psi(x)\right) dx$$

y así $\mu(A)$ es límite débil de los ν_n . Para probar que μ es de hecho medida estacionaria para $T(t)$ usamos el teorema 2.2.14. En virtud de éste, basta considerar funciones f en un subespacio separante $L \subseteq \overline{C}(E\bar{D})$. Consideramos entonces el conjunto L de las funciones f uniformemente continuas y acotadas, que es claramente un álgebra que separa puntos, y de ahí separante. Luego, para f uniformemente continua y $K \subseteq \bar{D}$ compacto, se requiere probar la convergencia a cero de

$$\sup_{x \in K} |S_n(t)f(x) - T(t)f(x)| \quad (2.38)$$

Sea $X(t)$ la solución de 2.4 en D con condición inicial x . Este proceso corresponde a $T(t)$. Además, por construcción, para cada $n \in \mathbb{N}$, si $X_n(t)$ denota a la solución a la ecuación 2.4 en D_n con condición inicial $P_n(x)$ (la proyección de x sobre \bar{D}_n), se tiene que el proceso $X'_n(0) = x, X'_n(t) = X_n(t), t > 0$ corresponde a $S_n(t)$. Con lo anterior, para $x \in K, \delta_2 > 0, t > 0$ tenemos

$$\begin{aligned} |S_n(t)f(x) - T(t)f(x)| &= |\mathbb{E}(f(X'_n(t))) - \mathbb{E}(f(X(t)))| \\ &= |\mathbb{E}(f(X_n(t))) - \mathbb{E}(f(X(t)))| \\ &\leq \mathbb{E}(|f(X_n(t)) - f(X(t))|) \\ &\leq \mathbb{E}(|f(X_n(t)) - f(X(t))| \mathbf{1}_{|X_n(t) - X(t)| < \delta_2}) \\ &\quad + \mathbb{E}(|f(X_n(t)) - f(X(t))| \mathbf{1}_{|X_n(t) - X(t)| \geq \delta_2}) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Como f es uniformemente continua, se tiene la existencia de $\delta_2 > 0$ tal que si $|x - y| \leq \delta_2$ entonces $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon_2}{2}$. De esa manera es posible seguir acotando

$$\begin{aligned} |S_n(t)f(x) - T(t)f(x)| &\leq \frac{\epsilon_2}{2} + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(|X_n(t) - X(t)| \geq \delta_2) \\ &\leq \frac{\epsilon_2}{2} + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta_2} \mathbb{E}(|X_n(t) - X(t)|) \end{aligned} \quad (2.40)$$

Donde se ha usado la desigualdad de Markov. Sea ahora n_0 tal que si $n \geq n_0$ se tiene $K \subseteq B(0, 1/\epsilon_n)$. Para aquellos n , si $x \in K$

$$\begin{aligned} \|x - P_n(x)\| &= d(x, \bar{D}_n) \leq d(x, \bar{D}_n^{1/\epsilon_n}) \leq \sup_{x \in K} d(x, \bar{D}_n^{1/\epsilon_n}) \\ &= \sup_{x \in K^{1/\epsilon_n}} d(x, \bar{D}_n^{1/\epsilon_n}) \leq \sup_{x \in \bar{D}^{1/\epsilon_n}} d(x, \bar{D}_n^{1/\epsilon_n}) \leq \rho(\bar{D}_n^{1/\epsilon_n}, \bar{D}^{1/\epsilon_n}) \leq \epsilon_n \end{aligned}$$

Así, como consecuencia del teorema 2.2.18, si $n \geq n_0$

$$\mathbb{E}(|X_n(t) - X(t)|) \leq L(\epsilon_n + \epsilon_n^2) \quad (2.41)$$

Un punto clave que debe ser considerado en detalle es que $L > 0$ puede ser escogido de manera uniforme en n . Eso viene de que, por una parte, fue posible escoger (ϵ, δ) de la condición **(A1)** de manera uniforme en todos los dominios. De la observación siguiente a la definición 2.2.17 se deduce que $C(x, D_n)$ puede ser acotado por una constante que no depende de n . Por otra parte, como K es compacto y debido a que $|P_n(x)| \leq \epsilon_n + |x|$ se tiene

$$\max(|x| + c(x, D), |P_n(x)| + c(P_n(x), D_n)) \leq C$$

donde C no depende de n , aunque sí depende de K y de t . Sea n'_0 tal que si $n \geq n'_0$

$$\epsilon_n + \epsilon_n^2 < \frac{\epsilon_2 \delta}{4L\|f\|_\infty}$$

Ahora se puede juntar 2.40 y 2.41 obteniéndose que para $n \geq \max\{n_0, n'_0\}$

$$\begin{aligned} |S_n(t)f(x) - T(t)f(x)| &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta}L(\epsilon_n + \epsilon_n^2) \\ &\leq \frac{\epsilon_2}{2} + \frac{\epsilon_2}{2} = \epsilon_2 \end{aligned} \quad (2.42)$$

y la desigualdad se tiene para cualquier $x \in K$, de donde se obtiene la convergencia deseada. \square

Corolario 2.2.20. *Las conclusiones del teorema 2.2.10 son válidas en $\bar{D} = \mathbb{R}_+^n$*

Demostración. Sea y consideramos la secuencia de dominios dados por

$$D_m = \{(x_1, \dots, x_n) \in D : x_1 \cdots x_n > \frac{1}{m}\}$$

es claro que aquella secuencia satisface todas las condiciones del teorema 2.2.19. Se comprueba fácilmente que para $\epsilon_m = n(\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{m}}$ se verifica $d(D^{1/\epsilon_m}, D_m^{1/\epsilon_m}) = \epsilon_m$. Los conjuntos D_m son claramente suaves y convexos, por ser el interior del epígrafo de una función convexa. Por otra parte, como D es suave a trozos se tiene que su medida de Lebesgue es cero. Los dominios D_m pueden finalmente ser intersectados con conjuntos acotados crecientes de manera cuidadosa para preservar su suavidad. Finalmente, usando el teorema 2.2.19 se tiene la existencia de soluciones estacionarias si los coeficientes cumplen las hipótesis del teorema 2.2.10. \square

2.2.4. Convergencia a la medida estacionaria

Ya se ha demostrado la existencia de medidas estacionarias para cierto tipo de difusiones reflejadas. Para estas difusiones cabe preguntarse si se tiene la convergencia a dicha medida partiendo de una condición arbitraria. Dicha pregunta tiene antecedentes en la literatura. En [4] se analiza el caso de dimensión uno, donde el dominio es un intervalo (acotado o no acotado) y se encuentra explícitamente la medida estacionaria y la convergencia a ésta desde condiciones iniciales arbitrarias.

En el caso del proceso de Ornstein-Uhlenbeck, en [15] se demuestra la convergencia a la medida estacionaria en el caso unidimensional. En ambas publicaciones los argumentos utilizados no pueden extenderse fácilmente a más dimensiones, considerando otras geometrías para el dominio, por lo tanto se hace necesario recurrir a otras técnicas.

Los resultados de convergencia que se obtengan son más bien corolarios y aplicaciones de resultados clásicos sobre procesos de Feller.

En esta parte sea $T(t)$ un semigrupo de Feller en un subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Consideramos la siguiente condición sobre su función de transición asociada:

Condición (C): existe una medida boreliana $\lambda \in \mathcal{P}(E)$ y una función continua y estrictamente positiva $p(t, x, y), t > 0, x, y \in E$ tal que la función de transición asociada a $T(t)$ satisface

$$P(t, x, dy) = p(t, x, y)\lambda(dy)$$

Es necesario también definir el concepto de recurrencia en el sentido de Harris

Definición 2.2.21. Decimos que el proceso $X(t)$ es recurrente en el sentido de Harris si $\forall x \in E, \forall A$ tal que $\lambda(A) > 0$ ⁶

$$\int_0^\infty 1_A(X(t))dt = \infty \quad \mathbb{P}^x \text{ c.s.}$$

Un semigrupo de Feller $T(t)$ que verifica la condición **(C)** es recurrente en el sentido de Harris si para cualquier $X(t)$ con condición inicial δ_x que corresponde a $T(t)$, $X(t)$ es recurrente en el sentido de Harris.

El siguiente teorema da condiciones para la convergencia a la medida estacionaria.

Teorema 2.2.22. (Teoremas 1.3.5, 1.3.6 y 1.3.10 de [8]) Sea $T(t)$ que satisface la condición **(C)**. Entonces se tienen las siguientes afirmaciones.

- Si E es compacto entonces $T(t)$ es recurrente en el sentido de Harris
- Si $T(t)$ es recurrente en el sentido de Harris y μ es una medida estacionaria para $T(t)$, entonces se verifica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(t)f(x) = \int_E f(x)d\mu(x) \quad \forall f \in B(E)$$

equivalentemente,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X(t) \in A) = \mu(A) \quad \forall A \subseteq E$$

Es decir, se tiene la convergencia a la medida estacionaria y en particular, μ es la única medida estacionaria para $T(t)$

A continuación se presenta un resultado que muestra que si el dominio es regular, entonces la función de transición asociada a una reflexión tiene buenas propiedades de continuidad.

Teorema 2.2.23. (Consecuencia de [9])

Supongamos D, b y σ cumplen las condiciones del teorema 2.2.10. Sea $p(t, x, y)$ la solución fundamental de⁷

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= Lu(t, x) \in D, t > 0 \\ \frac{\partial u(t, x)}{\partial n} &= 0 \in \partial D \end{aligned}$$

Por el teorema 1 de [6] $p(t, x, y)$ es continua.

Definiendo la función

$$P(t, x, \Gamma) = \int_\Gamma p(t, x, y)dy$$

Se tiene que P es la función de transición del semigrupo $T(t)$, que corresponde a las soluciones de la ecuación 2.4.

⁶A pesar de que λ es una medida boreliana cualquiera, la definición cobra más sentido cuando λ es la misma medida que en la condición **(C)**

⁷En este contexto L es el operador elíptico definido por

$$Lu(x) := \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma^t \sigma)_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(x) + \nabla u(x) \cdot b(x)$$

El teorema anterior puede se aplicado al proceso de Ornstein-Uhlenbeck, donde se tiene de hecho la convergencia a la medida estacionaria.

Teorema 2.2.24. *Sea D acotado de clase C^∞ , $\sigma(x) = \sigma I_d$ y $b(x) = I - AX$ con A simétrica definida positiva. Entonces se tiene la convergencia a la medida estacionaria para cualquier condición inicial $x \in D$*

Demostración. Como D es acotado, el semigrupo asociado es recurrente en el sentido de Harris. Basta verificar la condición **(C)**, más específicamente, que $p(t, x, y)$ es una función estrictamente positiva. En efecto, notemos que

$$P(t, x, \Gamma) \geq P_N(t, x, \Gamma)q(t)$$

Donde $P_N(t, x, \Gamma)$ es la función de transición asociada al proceso de Ornstein-Uhlenbeck sin reflejar, y $q(t)$ es la probabilidad de que $X(s)$ no llegue al borde de D en $[0, t]$, partiendo de x . Claramente $q(s) > 0$. Intuitivamente, se están considerando sólo las trayectorias donde $\Phi(t) = 0$. Bajo ese evento, la ley de $X(t)$ es una normal multivariada de media $xe^{-At} + A^{-1}I(I_d - e^{-At})$ y matriz de varianzas $\frac{\sigma^2 A^{-1}}{2}$. Sea $f(t, x, y)$ la función de densidad correspondiente (estrictamente positiva). Se tiene entonces

$$\int_{\Gamma} p(t, x, y)dy \geq \int_{\Gamma} q(t)f(t, x, y)dy \quad \forall t, x, \Gamma$$

De la continuidad de $p(t, x, y)$ y $f(t, x, y)$ se deduce que $p(t, x, y) \geq q(t)f(t, x, y) > 0$ \square

En el caso en que $\bar{D} = \mathbb{R}_+^n$ se tiene también la recurrencia de la difusión reflejada

Teorema 2.2.25. *(Teorema 2.2 de [1]) Sea \bar{D} un polihedro definido por la intersección de los semiespacios $\langle x, d_i \rangle \geq 0, i = 1 \dots N$. Definiendo los conjuntos*

$$\mathcal{C} = \left\{ - \sum_{i=1}^N \alpha_i d_i : \alpha_i \geq 0, i = 1 \dots N \right\}$$

$$C(\delta) = \{v \in \mathcal{C} : d(v, \partial C) \geq \delta\}, \quad \delta > 0$$

*Consideremos la difusión reflejada en D con b, σ satisfaciendo la condición **(B)** y σ acotado. Supongamos además que b verifica que para cierto conjunto $A \subseteq \bar{D}$ acotado*

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \bar{D} \setminus A, b(x) \in C(\delta)$$

Si $T(t)$ es el semigrupo asociado, entonces $T(t)$ es recurrente positivo, y de ahí, recurrente en el sentido de Harris

Corolario 2.2.26. *El proceso de Ornstein Uhlenbeck reflejado en $\bar{D} = \mathbb{R}_+^n$ es recurrente en el sentido de Harris si la matriz A es simétrica, definida positiva y todos sus coeficientes son positivos.*

Demostración. En efecto, basta elegir $A = [0, M]^n$ donde $M = 2 \frac{\max_i |I_i|}{\min_{i,j} a_{i,j}}$ Así, se tendrá que si $x \in \bar{D} \setminus A$

$$(I - AX)_i = I_i - \sum_j a_{i,j} x_j \leq - \max_i |I_i|$$

tomando $\delta = \max_i |I_i|$ se concluye \square

Lamentablemente en este último caso no se puede concluir la convergencia a la medida estacionaria, debido a que no se puede aplicar el teorema 2.2.23 para concluir la existencia de $p(t, x, y)$. En cualquier caso, el corolario anterior puede ser un aporte en esa dirección.

Bibliografía

- [1] R. Atar, A. Budhiraja, and P. Dupuis. On positive recurrence of constrained diffusion processes. *The Annals of Probability*, 29(2):979–1000, 2001.
- [2] P. Billingsley. *Convergence of Probability Measures*. John Wiley and Sons, 1968.
- [3] S.T. Ethier and T.G. Kurtz. *Markov Processes*. Springer Verlag, second edition, 1983.
- [4] I.I. Gihman and A.V. Skorohod. *Stochastic Differential Equations*. Springer, 1972.
- [5] D. Gilbarg and N.S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. John Wiley & Sons, 2005.
- [6] S. Ito. The fundamental solution of the parabolic equation in a differentiable manifold, ii. *Osaka Mathematical Journal*, 6(2):167–186, 1954.
- [7] I. Karatzas and S.E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, second edition, 1991.
- [8] H. Kunita. *Stochastic Flows and stochastic differential equations*. Cambridge University Press, 1990.
- [9] M. Nagasawa. The adjoint process of a diffusion with reflecting barrier. *Kodai Math. Sem. Rep.*, 13(4):235–248, 1961.
- [10] R. Petterson. Aproximations for stochastic differential equations with reflecting convex boundaries. *Stochastic Processes and their Applications*, 59:295–308, 1995.
- [11] F.J. Piera and R.V. Mazumdar. Comparison results for reflected jump-diffusions in the orthant with variable reflection directions and stability applications. *Electronic Journal of Probability*, 13:1886–1908, 2008.
- [12] D. Revuz and M. Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer, third edition, 1999.
- [13] L. Slominski. On the lp-distance between semimartingales reflecting in different domains. *Stochastics and Stochastic Reports*, 71:91–118, 2000.
- [14] H. Tanaka. Stochastic differential equations with reflecting boundary condition in convex regions. *Hiroshima Math J.*, 9:163–177, 1979.

-
- [15] A.M. Ward and P.W. Glynn. Properties of the reflected ornstein-uhlenbeck process. *Queueing Systems*, 44(2):109–123, 2003.
- [16] Kosaku Yosida. *Functional Analysis*. Springer, sixth edition, 1980.

Capítulo 3

Un modelo para la toma de decisiones basado en evidencia neurobiológica

Concedo que el estado de avances de las neurociencias en ese dominio sigue siendo muy fragmentario. Esas investigaciones dependen de funciones muy integradas del cerebro del hombre, de procesos conscientes abiertos al mundo cuya modelización constituye un envite crucial de nuestra disciplina. En todo ello, ¡hay mucho desconocido, pero nada incognoscible! Necesitamos tener gran prudencia y humildad en ese dominio. Aún si la ambición del proyecto es grande, debemos avanzar a pasos pequeños, proponiendo modelos sencillos, parciales, fragmentarios

Jean-Pierre Changeaux

3.1. Introducción

En 1.4 se revisó una buena cantidad de modelos psicológicos que se hipotetiza podrían implementar la toma de decisiones. Sin embargo, a veces ni siquiera resulta claro el sentido que puedan tener los parámetros asociados a un modelo (por ejemplo los valores de los coeficientes de inhibición entre acumuladores) lo que hace que la discusión en torno a cuáles deben ser los valores de dichos parámetros se vuelva artificiosa, y poco decidora de qué es lo que realmente está sucediendo. La forma de evitar ese problema y otros relacionados a mantener un enfoque puramente cognitivista consiste en incorporar la evidencia proveniente de la neurobiología. En 3.1.1 se mostrará un paradigma experimental extremadamente relevante para investigar las bases neurales de la toma de decisiones, conocido como el movimiento de puntos aleatorios (*RDM* por sus siglas en inglés) [12]. Los resultados de investigaciones que hacen uso de este paradigma han permitido hipotetizar una nueva clase de modelos para la toma de decisiones, mostrados en 3.1.2.

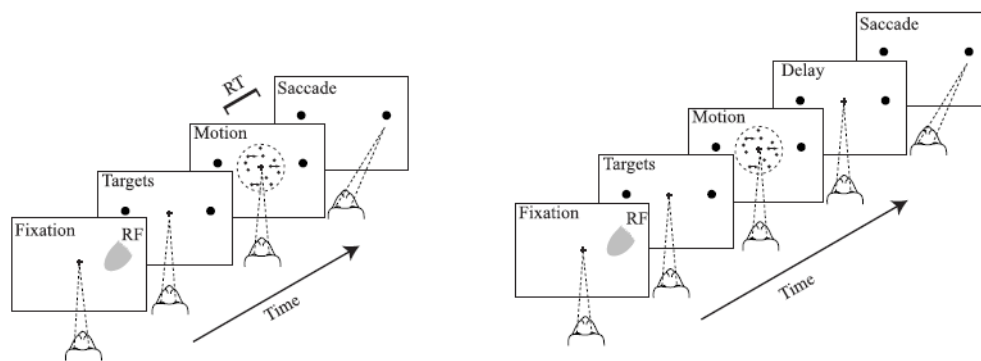
El trabajo original se presenta en la sección 3.2, donde se propone un modelo para la toma de decisiones, que recoge elementos de todos los presentados hasta ahora pero contiene nuevos elementos que le dan, en definitiva, una buena razón para existir. En la sección

3.3 varias pruebas son llevadas a cabo en este modelo, y finalmente, en la sección 3.4 se discuten los resultados obtenidos.

3.1.1. Neurobiología de la toma de decisiones

El paradigma RDM fue introducido por William Newsome y colegas en 1989. En éste se presenta una pantalla con un conjunto de puntos y dos puntos grandes o *targets* situados en posiciones opuestas con respecto al centro de la pantalla. Ese conjunto de puntos se actualiza cada cierto tiempo con una regla aleatoria: cada punto tiene una probabilidad β de desplazarse dirección a uno de los *targets* (en un determinado *trial* la dirección está determinada de antemano) y probabilidad $1 - \beta$ de moverse a una posición aleatoria dentro del campo visual. La cantidad porcentual $100\beta\%$ es llamada coherencia. Si ésta es 0% entonces el movimiento es totalmente aleatorio; por el contrario, si ésta es cercana a 100% entonces se percibe movimiento aparente hacia algún *target*. En cualquier caso la tarea consiste en escoger el *target* hacia el cual existe movimiento aparente.

A pesar de la gran cantidad de variaciones de este experimento, se distinguen gruesamente dos versiones: En la versión de elección libre el movimiento de puntos se presenta hasta que el *subject*, elige su respuesta a través de una sacada ¹. En la versión de duración limitada el movimiento es presentado por un tiempo fijo, seguido de una cruz que se presenta en la pantalla durante un lapso variable. Cuando esa cruz se extingue el *subject* da su respuesta también a través de una sacada. Ambos paradigmas se encuentran esquematizados en la figura 3.1. Se debe destacar que las evidencias mostradas en esta sección corresponden a estudios realizados con primates no humanos, ² (usualmente de la especie *Macaca Mulatta*). La razón es que esas investigaciones se basan en la técnica de *single-unit*, la que es demasiado lesiva para ser aplicada en humanos.



(a) Elección libre. Obtenido de [15]

(b) Elección forzada. Obtenido de [15]

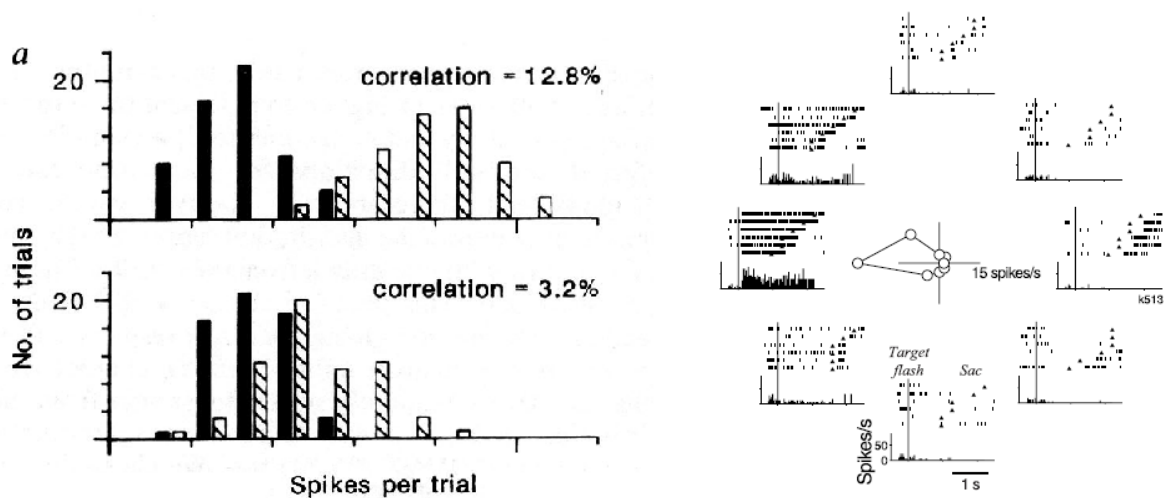
Figura 3.1: Esquemas de los dos paradigmas experimentales asociados a la prueba RDM

Para incorporar este tipo de mediciones se hace necesario identificar el grupo de neuronas relevantes a la tarea: En el mono se insertan microelectrodos capaces de registrar los

¹Una sacada o movimiento sacádico es un movimiento repentino y a alta velocidad del ojo.

²A pesar de lo extraño que pueda parecer el instruir a un mono a realizar tareas complejas como las que se muestran a continuación, esto es posible al utilizar mecanismos de recompensa donde por ejemplo, se premie al primate al dar la respuesta que se desea.

potenciales de acción emitidos por un conjunto amplio de neuronas (decenas a cientos) en determinadas áreas del cerebro. Debido a la naturaleza visual de la tarea es razonable buscar correlato de actividad neuronal en áreas visuales. Un buen candidato es la región temporal media (también llamada MT o V5), que ha sido relacionada a la percepción de movimiento. De hecho, en [2] se comprobó que neuronas de dicha área responden, mediante su tasa de descargas, de manera proporcional a la coherencia del movimiento. Sin embargo, esta respuesta es más bien localizada: neuronas particulares de MT responden preferencialmente al movimiento en una dirección específica. A esta dirección de movimiento se le denomina *preferida* por dicha neurona. Para ejemplificar, en 3.2a se muestran histogramas de tiempos de respuesta para dos valores de coherencia. Las barras rayadas corresponden a las respuestas en donde el movimiento iba en la dirección preferida por la neurona en cuestión. Las barras negras corresponden a los *trials* donde el movimiento va en sentido opuesto al preferido. Se observa que en el caso de movimiento en la dirección preferida hay una modulación de la actividad de la neurona; a mayor coherencia es mayor la tasa de descargas. Por el contrario, la actividad de esta neurona es insensible a la coherencia, o la sensibilidad es muy baja, cuando el movimiento es en dirección opuesta a la preferida.



(a) Respuesta de una neurona MT a distintos niveles de coherencia (correlation). Obtenido de [11]

(b) Respuesta de una neurona LIP a distintos lugares de presentación del target. Obtenido de [16]

Figura 3.2: Algunas metodologías utilizadas para determinar la dirección preferida de neuronas MT y el campo de respuesta (RF) de neuronas LIP

Otra área de la corteza de especial interés es la relacionada al planeamiento de movimientos sacádicos; la corteza lateral intraparietal (LIP) posee neuronas que se activan frente a sacadas hacia una posición particular del campo visual. Se conoce como campo receptivo (RF) de dicha neurona al área donde presenta mayor sensibilidad a los movimientos sacádicos. Al igual que con neuronas MT, es posible identificar el RF de estas neuronas. En [16] se realizó una prueba consistente en la presentación de un *target* en una determinada posición, de un total de ocho posibles. Luego de la extinción del *target* se presentaba un punto de fijación, cuya desaparición era la señal para que el *subject* realizara una sacada en dirección al *target* recordado. En la figura 3.2b se muestran los rasters y PSTH (definidos en el capítulo 1 relativos a cada uno de los *targets*). Se observa que para la posición

del *target* de la izquierda la respuesta de la neurona es mayor que para el resto, y esta se mantiene incluso en el periodo que va desde la desaparición del punto de fijación hasta la ejecución de la sacada. Así, el área que comprende al *target* de la izquierda es denominado el campo receptivo de dicha neurona LIP.

Una vez conocidos las direcciones preferidas y RF de las neuronas en cuestión, se pueden hacer análisis más finos, con el objetivo de conocer de manera precisa el curso temporal de las tasas de descargas de las neuronas posterior a la presentación del estímulo. En el caso de neuronas MT ésto es relativamente sencillo, y es realizado en [2]. Los resultados se muestran en la figura 3.3, donde para tres niveles de coherencia (6.4%, 25.6% y 99.0%) se muestra el curso temporal de las tasas de descargas de una neurona MT, cuando el movimiento es en la dirección de movimiento preferida (*preferred*), o en la opuesta (*null*). En general, se observa que pocos milisegundos posterior al comienzo del *trial* hay un incremento brusco en la actividad de la neurona, para luego estabilizarse y permanecer más o menos constante durante la presentación del movimiento de puntos. El nivel de actividad alcanzado en esta etapa depende crecientemente (de hecho linealmente) de la coherencia, cuando el movimiento es en la dirección asociada a la neurona, y decreciente³ cuando el movimiento es en dirección opuesta. Es importante notar que la actividad de esta neurona decae rápidamente a valores basales una vez que termina la presentación del estímulo. El conocimiento de estos resultados relativos a neuronas MT serán especialmente útiles cuando se discutan modelos neurobiológicamente inspirados relativos a la toma de decisiones.

Respecto a lo que se conoce relativo a los fenómenos conductuales (sin considerar la

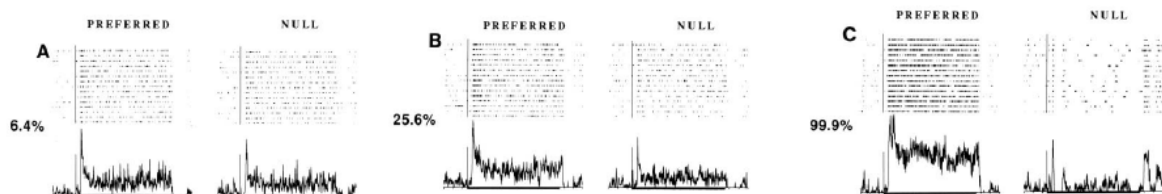


Figura 3.3: Respuesta de una neurona MT típica a distintos valores de coherencia y considerando movimiento en la dirección preferida (*preferred*) y en la opuesta (*null*). Obtenido de [2]

actividad neuronal) asociados a la prueba RDM, es preciso señalar algunos puntos importantes: los tiempos de respuesta en el paradigma de elección libre obtenidos en [15] se muestran en el cuadro 3.1. Se observa que para respuestas correctas, los tiempos de respuesta disminuyen progresivamente al aumentar la coherencia. En cambio, las respuestas incorrectas no muestran un patrón claro de crecimiento o decrecimiento. Esto bien podría estar causado porque los errores son relativamente infrecuentes, sobre todo a altas coherencias, por lo que los promedios son calculados sobre la base de muy pocos *trials* y son mucho más ruidosos. De todas formas, es relevante notar que en general, para un valor de coherencia determinado, una respuesta incorrecta tarda en promedio más que

³Esto puede parecer contradictorio con la figura 3.2a, donde no se observa mayor sensibilidad de la respuesta en la dirección *null* frente a cambios en la coherencia. La explicación es que no todas las neuronas responden de la misma manera, algunas tienen un comportamiento no-lineal [2] en función de la coherencia. Por otra parte, los histogramas de [12] corresponden a promediaciones temporales a lo largo de toda la presentación del movimiento de puntos, lo cual puede ser una medida un tanto "gruesa"

una correcta.

Es importante mostrar también cómo la precisión y el tiempo de respuesta varían como función de la coherencia. En la figura 3.4 se muestran las curvas de precisión en función de la coherencia para los dos paradigmas involucrados. Independiente del tipo de elección (libre o forzada) se observa un patrón bien definido: para valores cercanos a cero la precisión es cercana a 0,5, para luego incrementarse progresivamente hasta saturarse en valores de precisión cercanos al 100 %, para valores de coherencia relativamente bajos (~ 20 %). Por último, también en la figura 3.4 se muestra la dependencia entre el tiempo de respuesta y la coherencia: hay una correlación negativa entre RT y el logaritmo de la coherencia. En

Correctitud \ Coherencia(%)	3.2	6.4	12.8	25.6	51.2
Incorrecta	872	823	890	785	-
Correcta	795	758	671	532	409

Cuadro 3.1: Promedios de tiempos de respuesta para distintos valores de coherencia, tanto en respuestas correctas como incorrectas. Obtenido de [15]

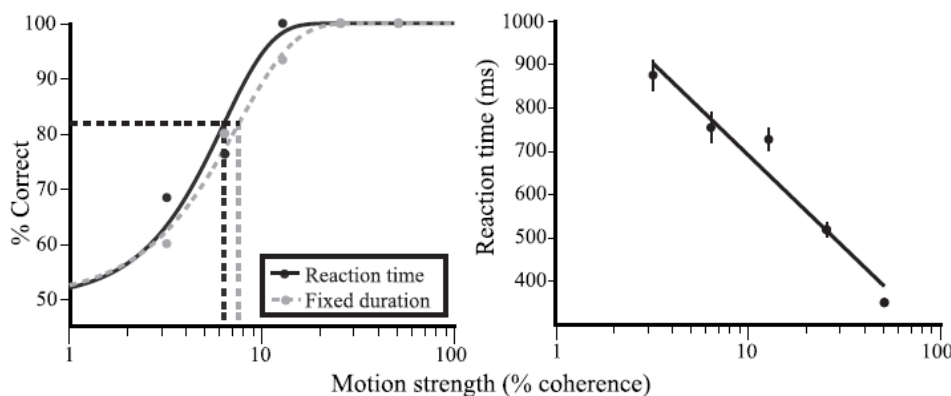


Figura 3.4: Dos mediciones conductuales asociadas a la coherencia del movimiento : A la izquierda, precisión como función de la coherencia, tanto en elección libre como forzada. A la derecha, tiempo de respuesta, en elección libre, como función de la coherencia considerando sólo las respuestas correctas. Notar el escalamiento logarítmico del eje x. Obtenido de [15]

lo sucesivo se comentará extensamente la evidencia existente relativa al curso temporal de las respuestas de las neuronas LIP durante la tarea RDM. Como se verá, éstas no sólo responden selectivamente a planeamientos de sacadas en una determinada posición; las variaciones de actividad temporal (tasas de descarga, como siempre) entregan información extremadamente valiosa sobre el mismo proceso de decisión.

La técnica utilizada consiste en, para cada neurona LIP, determinar primero su RF usando la prueba antes descrita ⁴. Se registran una gran cantidad de *trials*, cada uno de ellos (si $\beta > 0$) puede asociarse a una de las 8 posibles posiciones a las que se dirigen los puntos. Luego, cada *trial* tiene también asociado un conjunto de neuronas tales que el movimiento ocurre en dirección a su RF, y otro conjunto que “ve” el movimiento en el sentido opuesto a su RF. Considerando una neurona particular, denotamos T1 al *target* asociado a su RF y T2 al *target* simétrico con respecto al origen. Bajo esta convención, cada neurona tiene

⁴Se consideran ocho posibles posiciones, y si bien podría suceder que el RF de una neurona no coincida precisamente con ninguna de esas posiciones o *targets*, se elige la que evoque una mayor respuesta

asociado un conjunto de *trials* relevantes para el análisis: aquellos donde el movimiento ocurre hacia T1 o hacia T2. Así, finalmente cada trial puede ser visto como poseyendo (si $\beta > 0$) movimiento hacia T1 y T2, lo que corresponde, en el caso de T1, a considerar las neuronas donde el movimiento es hacia su RF, y en el caso de T2, aquellas donde el movimiento es en dirección opuesta a su RF.

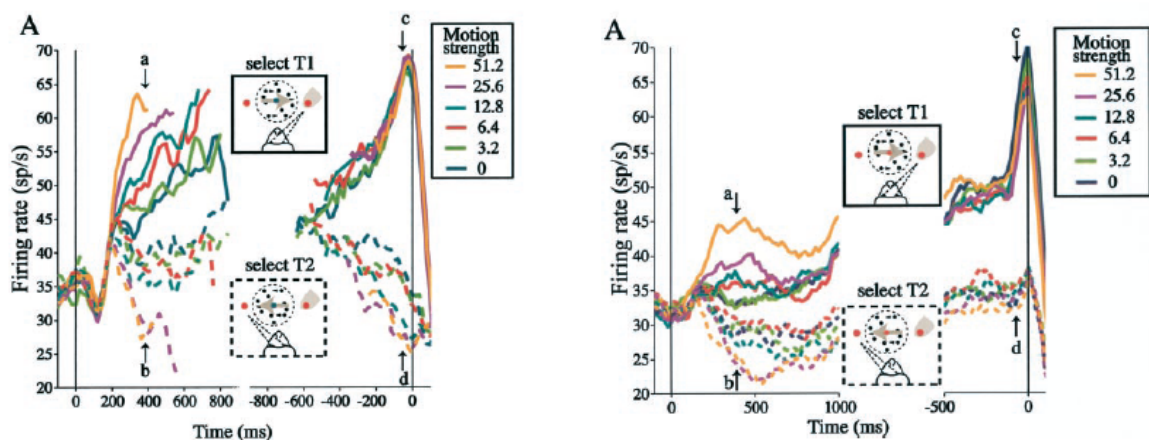
A pesar de lo abstracta que pueda parecer la metodología anterior, ella permite, por una parte considerar una única geometría para el problema: en las figuras 3.1a y 3.1b por convención siempre se presenta T1 y el RF a la derecha y T2 a la izquierda, a pesar de que el movimiento de puntos podría ser en otras direcciones. Por otra parte, al hacer esta consideración es posible una gran economía de datos, ya que se pueden promediar las actividades de un gran número de neuronas, a diferencia de un PSTH, donde se muestra la actividad promediada de una neurona particular. Está implícito el supuesto que las neuronas cuyo RF es el mismo pueden ser consideradas como una población, que se comporta de la misma manera frente a estímulos.

Al promediar sobre todos los trials y neuronas se pueden obtener las curvas de las figura 3.5. Se puede pensar, sin ambigüedad que todo está referido a una única neurona: los *trials* contienen movimiento hacia su RF (T1) o en dirección opuesta (T2) (o hacia ninguno de los dos si la coherencia es cero). Las respuestas (sacadas) pueden ser clasificadas respecto a aquella neurona hipotética, pudiendo ser en la misma dirección que el RF de la neurona o en dirección opuesta. En la figura las líneas sólidas corresponden a respuestas donde se elige T1 y las líneas punteadas a aquellas donde se elige T2. Para coherencias mayores a cero sólo se muestran *trials* correspondientes a respuestas correctas, por lo que en ese caso se puede decir, equivalentemente, que las líneas sólidas corresponden a trials en los que el movimiento es hacia T1, y lo mismo con las líneas punteadas.

Los gráficos de la figura 3.5 merecen ser revisados minuciosamente: El primer hecho que se hace evidente es que en etapas primeras luego de la presentación del movimiento de puntos el patrón de descarga es similar independiente tanto de la modalidad (libre o forzada) como de la coherencia y la dirección de la sacada (T1 o T2). Este patrón, de duración de 250ms desde el comienzo del movimiento, puede describirse como una caída en la tasa de descargas seguida de una subida rápida. Este patrón estereotipado bien podría asociarse a las primeras etapas del procesamiento en las vías perceptuales. Para efectos de este trabajo, sólo es necesario notar que existe un periodo de actividad similar en todas las condiciones, y que podríamos considerar como el t_1 que fue mencionado en 1.4.

En cuanto a lo que sucede posterior a esta primera etapa, se observa una dependencia en la tasa de descargas tanto de la coherencia como de la dirección del movimiento. Si se elige T1 se produce un rápido aumento de la tasa de descarga, la que depende de hecho de manera lineal de la coherencia para un tiempo fijo [15, pp. 9482-9484]. Dicho patrón se encuentra completamente invertido para elecciones hacia T2, donde la dependencia es también lineal pero con signo negativo. En general, todas las tasas de descarga para elecciones T2 se encuentran por debajo de las correspondientes a elecciones T1, incluso para 0% de coherencia, donde el movimiento no privilegia ninguna de las alternativas. Lo anterior es válido en ambas condiciones experimentales, sin embargo es importante destacar que en general las tasas de descarga resultan mayores cuando la elección es libre. Los autores señalan este hecho [15, p. 9484] sin embargo no hipotetizan mayormente sobre las causas de este fenómeno, por lo que esto no se considerará acá.

Respecto a lo que sucede en las cercanías de la sacada, se observa que, para respuestas T1, en ambas tareas la sacada viene acompañada de un repentino aumento de la tasa de descarga, la que en unos 100ms aumenta de ~ 50 a ~ 70 espigas por segundo. En ese lapso ya no existe dependencia de la tasa de descargas como función de la coherencia. Lo anterior ocurre tanto en elección libre como forzada. Sin embargo, en elecciones T2 no existe este patrón; las neuronas no parecen responder de manera especial cuando el movimiento es en dirección opuesta a su RF, de hecho, en este caso la correlación lineal negativa entre la tasa de descargas y la coherencia sigue teniéndose en esta última fase. Este comportamiento es clara evidencia de que la respuesta está muy asociada a una tasa de descarga crítica del grupo de neuronas sensitivas al lugar de la sacada. Una vez que se alcanza esta tasa umbral se produce un patrón estereotipado consistente en un aumento brusco en la tasa de descargas, seguido finalmente por la sacada.



(a) Curso temporal de la tasa de descarga en la tarea de elección libre para distintas coherencias. Obtenido de [15]

(b) Curso temporal de la tasa de descarga en la tarea de elección forzada para distintas coherencias. Obtenido de [15]

Figura 3.5: Curso temporal de la tasa de descargas para un conjunto grande de neuronas (~ 50) para distintos valores de coherencia (*motion strength*), alineados al comienzo del *trial* (izquierda) y al comienzo de la respuesta sacádica (derecha)

Hasta ahora sólo se ha hecho un análisis relativo a *trials* donde no hay errores. Es importante también ver qué sucede en los *trials* con valores de coherencia mayores a cero, y donde la dirección de la sacada no coincide con la de movimiento aparente de los puntos. Estos *trials* pueden ser desglosados en aquellos donde la respuesta es hacia T1 o T2. Así, por ejemplo, una respuesta errónea hacia T1 implica que el movimiento de puntos era hacia T2. En la figura 3.6 se muestra el curso temporal de las tasas de descarga, alineadas tanto al principio del movimiento de puntos como al inicio de la sacada (izquierda y derecha de cada gráfico, respectivamente) en el paradigma de elección forzada. Alineando a la presentación del estímulo, se observa que si la respuesta errónea es hacia T1, la actividad se ve menguada en relación a respuestas correctas hacia T1. En cuanto a respuestas hacia T2, las tasas de descargas son mayores en respuestas erróneas. Tanto en respuestas hacia T1 como T2, la diferencia entre aciertos y errores se hace más notia a medida que la coherencia aumenta, llegando a tenerse que para altos valores de coherencias la tasa de

descarga en respuestas erróneas hacia T2 supera a la de las respuestas erróneas hacia T1. En cuanto a lo que sucede previo a la sacada, se observa que incluso en *trials* con errores, si la respuesta es hacia T1 entonces el patrón de descargas es similar al de las respuestas correctas. Esto no se observa en respuestas erróneas hacia T2; en este caso la tasa de descarga tiende a ser mayor en las cercanías de la sacada comparado con respuestas correctas. Nuevamente la coherencia ejerce un rol modulador; para valores de coherencia bajos las curvas para respuestas erróneas son más parecidas a las de respuestas correctas que para coherencias altas.

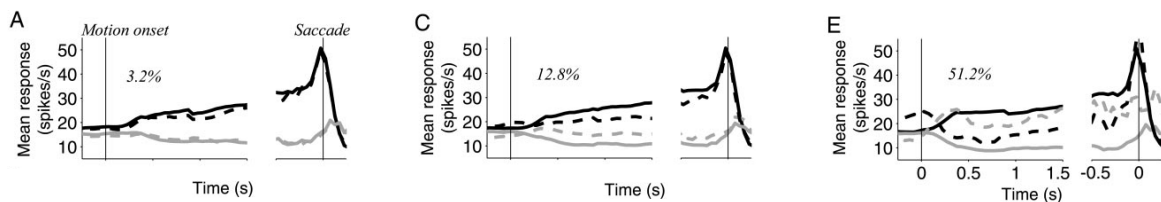


Figura 3.6: Patrones de tasas de descarga para respuestas erróneas (línea punteada) y correctas (línea sólida) en el paradigma de elección forzada. Respuestas hacia T1 se muestran de color negro y hacia T2 de color gris. Obtenido de [16]

Con todo lo anterior ya se puede elucubrar sobre el verdadero rol de las neuronas LIP, más allá de su preferencia por sacadas en determinadas direcciones. En palabras de los autores: *"When the activity reaches a threshold value, the decision process is complete and the monkey initiates a saccade ~50ms later. The process suggests an accumulation of information toward a threshold,"* [15, p. 9488]. Es decir, las neuronas LIP son, en este caso, la base neural del proceso de acumulación de evidencia descrito en 1.4. La evidencia acumulada queda representada por la tasa de descargas, que al superar un determinado umbral conduce de manera irrevocable a la respuesta sacádica.

Se hace entonces necesario saber cuál es la dinámica que rige la acumulación de evidencia. Es importante recordar que los gráficos presentados corresponden a una geometría idealizada del problema, y la metodología para obtener las curvas es sin duda arbitraria. Entonces, se deben proponer modelos que puedan dar cuenta de todas las simplificaciones/idealizaciones que se han hecho en la experimentación, y que obviamente sean capaces de explicar la toma de decisiones como una cierta dinámica neuronal, donde la decisión queda determinada cuando la tasa promedio de un grupo de neuronas alcanza un determinado valor.

Aparecen muchas nuevas preguntas; ¿cuántos acumuladores considerar? ¿cómo se relacionan estos acumuladores? ¿cómo se implementaría neurobiológicamente la toma de decisiones en contextos más complejos y generales (más de dos alternativas)? ¿cuál es el rol de las neuronas MT? En 3.1.2 se mostrarán los modelos que se han propuesto en la última década para dar respuesta a esas preguntas. Estos poseen una fuerte inspiración neurobiológica, e intentan responder las preguntas propuestas a la luz de la evidencia ya presentada, tomando también en consideración los modelos presentados en 1.3 y 1.4.

3.1.2. Uniendo dos niveles de descripción

Los fenómenos descritos en 3.1.1 han sido sujetos a un modelamiento matemático o computacional. Los modelos explícitamente hipotetizan cuáles son las dinámicas que rigen la actividad de neuronas MT y LIP, cómo esta dinámica da lugar a los gráficos mostrados anteriormente, y finalmente cómo se genera la conducta (toma de decisiones). A continuación se muestran los modelos más representativos.

El modelo de integradores neurales

Si bien este modelo [9] no será relevante para el presente trabajo, es importante mostrarlo pues fue creado por el mismo equipo de investigadores autores de los trabajos que fueron expuestos en 3.1.1. Por simplicidad se asume que el movimiento de puntos sólo puede ir hacia la izquierda o derecha, denotados arbitrariamente T2 y T1, respectivamente.

El supuesto fundamental es suponer la existencia de poblaciones de neuronas LIP cuyo campo receptivo puede ser T1 o T2. Cuando la tasa de descargas de alguno de estos grupos supera un determinado umbral se da la respuesta. De la misma manera, en el caso del área MT, se consideran neuronas que responden al movimiento de puntos tanto hacia T1 como T2.

Para determinar la dinámica de las neuronas LIP se parte modelando las neuronas MT. La actividad promedio de dichas neuronas a partir del comienzo del trial está dada por las ecuaciones (3.1),(3.2) (suponiendo que el movimiento de puntos es coherente hacia la derecha)

$$\mathbb{E}(r_{der}^{MT}(t)) = \begin{cases} r_{spont}^{MT} & t < t_0^{MT} \\ r_0^{MT} + Cb_1 & t \geq t_0^{MT} \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\mathbb{E}(r_{izq}^{MT}(t)) = \begin{cases} r_{spont}^{MT} & t < t_0^{MT} \\ r_0^{MT} - Cb_2 & t \geq t_0^{MT} \end{cases} \quad (3.2)$$

Notar en primer lugar que los lados izquierdos de las ecuaciones (3.1),(3.2) son valores esperados. Más específicamente, en las simulaciones en cada paso de tiempo se agregan fluctuaciones normalmente distribuidas a los lados derechos de las ecuaciones (3.1) y (3.2), lo que corresponde (en el límite) a la adición de un ruido browniano. Esto se expresa compactamente mediante el operador \mathbb{E} .

Se asume la existencia de un estado de actividad espontánea de las neuronas MT (r_{spont}), observable en ausencia de estimulación. Esta actividad se presenta incluso en presencia de estímulos visuales, hasta un tiempo t_0^{MT} , determinado experimentalmente y a partir del cuál se hacen sensibles los efectos del movimiento de puntos: Las neuronas receptoras al movimiento hacia la derecha ($r_{der}^{MT}(t)$) responden de manera lineal con la coherencia C , con una pendiente positiva $b_1 > 0$. Por el contrario, para neuronas receptoras al movimiento hacia la izquierda la relación lineal es de pendiente negativa. No necesariamente $b_1 = b_2$, de hecho para algunas neuronas podría ser el caso que $b_2 = 0$ como se vio en 3.1.1. Básicamente se busca representar lo que se observa gruesamente en la figura 3.3. Se debe mencionar una importante simplificación; la subida repentina en la tasa de descargas que se observa en dicha figura, y que es seguida de un descenso a un nivel más estable que se

mantiene por el resto del trial, no es representada por las ecuaciones anteriores.

La dinámica (promedio) de las neuronas LIP está dada por las ecuaciones (3.3),(3.4).

$$r_{der}^{LIP}(t) = \begin{cases} r_0^{LIP} + k \int_{t_0^{MT}}^{t-t_0^{LIP}} (r_{der}^{MT}(s) - r_{izq}^{MT}(s))ds & t \geq t_0^{MT} + t_0^{LIP} \\ \sim & t < t_0^{MT} + t_0^{LIP} \end{cases} \quad (3.3)$$

$$r_{izq}^{LIP}(t) = \begin{cases} r_0^{LIP} + k \int_{t_0^{MT}}^{t-t_0^{LIP}} (r_{izq}^{MT}(s) - r_{der}^{MT}(s))ds & t \geq t_0^{MT} + t_0^{LIP} \\ \sim & t < t_0^{MT} + t_0^{LIP} \end{cases} \quad (3.4)$$

La evolución de las cantidades $r_{der}^{LIP}(t), r_{izq}^{LIP}(t)$ sólo tiene sentido a partir de $t_0^{LIP} + t_0^{MT}$, donde t_0^{LIP} es el tiempo a partir del cuál la coherencia comienza a tener influencia en la tasa de descargas, de acuerdo a lo visto en 3.1.1.

El ruido introducido en las neuronas MT se propaga a las neuronas LIP al hacer la integración, haciendo que las variables de decisión sean también aleatorias. Como siempre, la respuesta se da cuando $r_{der}^{LIP}(t)$ ó $r_{izq}^{LIP}(t)$ supera un umbral L (el mismo para ambos). Estas tasas de descarga pueden entenderse como cantidades de evidencia de ciertos acumuladores, correspondientes a la respuesta hacia T1 o T2. De manera indirecta se incorpora una competencia entre estos acumuladores: específicamente, a través de la resta entre las tasas de descarga aportadas por cada neurona MT. Además, distintos valores de b_1, b_2 se traducen en patrones distintos para las tasas $r_{izq}^{LIP}(t), r_{der}^{LIP}(t)$. Si, por ejemplo, b_1 aumenta y/o b_2 aumenta entonces los valores de $r_{der}^{LIP}(t)$ serán finalmente más altos, para cada t . Por el contrario, los valores de $r_{izq}^{LIP}(t)$ tenderán a ser cada vez más bajo. Es decir, se da cuenta del efecto modulador de la coherencia en las tasas de descargas, como bien es observado en la figura 3.5. Más aún, este efecto está mediado por competencia entre los acumuladores.⁵ En cuánto a la evolución temporal de dichas variables, se ve que al crecer t , $r_{der}^{LIP}(t)$ aumentará y $r_{izq}^{LIP}(t)$ decrecerá.

Si bien gruesamente el modelo plasmado en las ecuaciones (3.3),(3.4) es capaz de explicar los fenómenos descritos en 3.1.1, éste presenta algunos problemas: la cantidad r_{izq}^{LIP} puede decrecer a valores menores a cero, los que ciertamente están debajo del rango fisiológico de tasas de descargas. La adición de aleatoriedad como variables gaussianas hace que incluso r_{der}^{LIP} pueda ser negativa. Por otra parte, una predicción obvia es que salvo ruido, $r_{der}^{LIP}(t)$ y $r_{izq}^{LIP}(t)$ crecen y decrecen de manera lineal en el tiempo, lo que no es concordante con lo observado en la figura 3.5, donde los crecimientos y decrecimientos parecen estabilizarse luego de que el estímulo ha sido presentado.

En resumen, el aporte de este modelo que será tomado en cuenta en la sección 3.2 es que en él se da una conceptualización de los resultados provenientes de la metodología abstracta de 3.1.1; más aún, esta conceptualización se da en términos de dinámicas de grupos de neuronas que compiten y que representan acumuladores de evidencia.⁶

⁵Implícita está la suposición de que las líneas punteadas de la figura 3.5 corresponden a la cantidad $r_{izq}^{LIP}(t)$. A pesar de ser una decisión arbitraria, ya que en [16, 15] no se registra explícitamente la interacción entre neuronas "opuestas", se trata de un supuesto razonable que se admite sin mayores cuestionamientos.

⁶Casos donde pueden existir múltiples alternativas, por ejemplo a través de varios targets en el campo visual, son abordados en [5]. Para los fines de este trabajo, basta saber que esta generalización puede ser llevada a cabo sin alteraciones importantes en la dinámica básica.

Un modelo de espigas

Este modelo, presentado originalmente en [19], es creado con el objetivo de dar cuenta de fenómenos más complejos asociados a la toma de decisiones, como los relativos a la memoria; por ejemplo, en el paradigma de elección forzada el *subject* debe esperar un tiempo determinado antes de dar la respuesta, y se ha observado que en ese intervalo la actividad neuronal se estabiliza, incluso en ausencia de estimulación. Poder dar cuenta de esas estabilizaciones requiere la implementación de dinámicas más complejas que las que se han presentado hasta ahora. El modelo de espigas presentado a continuación implementa el Integrate and Fire introducido en 1.3.2, en el caso donde las neuronas en cuestión son de las áreas MT Y LIP.

Al igual que en el modelo de integradores neurales, existen grupos de neuronas dedicadas a codificar cada una de las alternativas de respuesta. Estas neuronas son del tipo piramidal, y se conectan por tanto de manera excitatoria tanto con neuronas del mismo grupo como del otro. Adicionalmente existe un grupo de interneuronas que inhibe a las neuronas piramidales pero es excitada por las mismas. Un esquema de esta arquitectura se muestra en la figura 3.7 Los inputs provenientes de las neuronas MT son representadas a través de

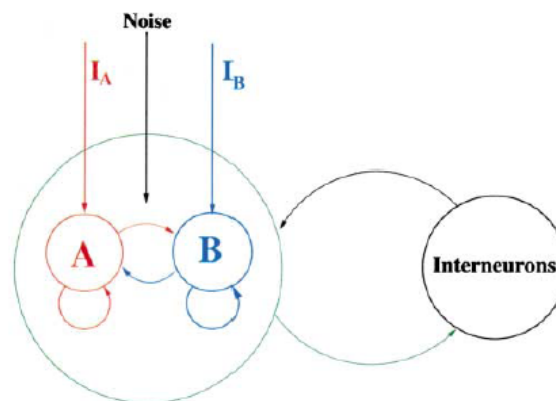


Figura 3.7: Los grupos A (izquierda) y B (derecha) están representados por ~ 800 neuronas piramidales cada uno. Adicionalmente hay 400 interneuronas. Obtenido de [19]

espigas dadas por procesos de Poisson independientes cuya tasa depende de la coherencia (Para movimiento coherente hacia la derecha se espera una alta tasa del proceso correspondiente a I_B y una tasa cercana a cero para I_A). Estos inputs son incorporados en las neuronas de los grupos A y B a través de corrientes post sinápticas. Cada neurona involucrada es modelada a través de su potencial de membrana, con ecuaciones del tipo (1.5). Adicionalmente se modelan las corrientes iónicas que se producen como consecuencia de las sinapsis. Estas corrientes pueden provenir de sinapsis inhibitorias (a través de receptores GABA) e excitatorias (a través de los receptores AMPA y NMDA, siendo estos últimos dependientes de voltaje). La dinámica que rige la apertura de los canales iónicos asociados a estos receptores se representa a través de ecuaciones diferenciales no lineales, muy similar a la ecuación (1.3). Esto último incrementa enormemente la complejidad del sistema.

Este conjunto de ecuaciones da lugar a espigas produciéndose constantemente en las neuronas tanto de los grupos A y B como las interneuronas. Estas espigas a su vez influyen el sistema a través de las corrientes sinápticas que correspondan. De esta forma la dinámi-

ca da lugar también a trenes de espigas, con los cuales es posible reconstruir histogramas periestímulo y estimar las tasas de descarga de la población, calculando las espigas emitidas por unidad de tiempo. La regla de decisión es la misma que en todos los modelos anteriores: una vez que la tasa de descarga de algún grupo supere el umbral, se da la respuesta.

En este modelo la competencia entre los dos acumuladores es implementada de manera indirecta, a través del grupo de interneuronas [19, p. 956]. La aleatoriedad es incorporada tanto en los procesos de Poisson correspondientes a los outputs de las neuronas MT, y a través de un ruido de fondo que es modelado como otro proceso de Poisson independiente de los demás, que corresponde a los disparos (espigas) que emiten espontáneamente otras neuronas incidentalmente conectadas con estos grupos pero que no participan en el proceso de decisión. Este es el más rico de todos los modelos presentados hasta ahora, en tanto que permite capturar fenómenos complejos que emergen de las dinámicas de las unidades, por lo que ha gozado de una amplia revisión en la literatura [14, 20, 1]. Además, la aleatoriedad es incorporada de una manera en que no es simplemente la adición de variables Gaussianas, sino que corresponde a la misma estocasticidad de los disparos de las neuronas en cuestión. Debido a que la tasa de descargas finalmente se obtiene contando las espigas producidas, no existe el problema en otros modelos ya presentados donde esta cantidad puede ser negativa.

A pesar de todos los buenos aspectos de este modelo, éste es sólo útil si se dispone de un potente computador que sea capaz de simular el sistema de miles de ecuaciones diferenciales no lineales acopladas. Intentar extraer propiedades analíticas se puede convertir en una tarea muy difícil; al incrementarse el número de variables este sistema deviene rápidamente inasible desde el punto de vista matemático.

En definitiva, y con el objetivo de obtener un modelo matemáticamente tratable y que a la vez tenga una interpretación tanto como dinámica de poblaciones de neuronas y como la acumulación de evidencia en el sentido psicológico discutido en 1.4, es necesario considerar ecuaciones más simplificadas. A continuación se verá otro modelo que surge como una aplicación de las ecuaciones descritas en 1.3.3, y por tanto tienen un número de variables considerablemente menor.

Modelo basado en dinámica de poblaciones

Este modelo es formulado explícitamente en [7, 3] como una aplicación de las ecuaciones de dinámica de poblaciones de neuronas descritas en 1.3.3. La ventaja de estas ecuaciones es que se refieren a la cantidad relevante para la toma de decisiones, esto es, tasas de descarga. Sin embargo, no tiene sentido aplicar estas ecuaciones en su forma más pura: tal como fueron planteadas por Wilson y Cowan, estas son completamente deterministas. Escribiendo las ecuaciones del tipo (1.8) para dos poblaciones mutuamente inhibitorias ⁷

⁷Podrían considerarse grupos mutuamente excitatorios y un tercer grupo que inhiba a ambos grupos, haciendo la analogía con el modelo de espigas presentado anteriormente donde hay neuronas piramidales e interneuronas. Si bien esto es más realista del punto biológico, es una complicación innecesaria ya que finalmente lo que se pretende representar es la competencia entre ambos grupos. Por esa razón los autores plantean la dinámica de dos grupos neuronales para una decisión de dos alternativas, y es un enfoque similar el que se utilizará en este trabajo.

se obtiene

$$\tau \frac{dx_1(t)}{dt} = -x_1(t) + h(I_1(t)) \quad I_1(t) = I_1 - \beta x_2(t) \quad (3.5)$$

$$\tau \frac{dx_2(t)}{dt} = -x_2(t) + h(I_2(t)) \quad I_2(t) = I_2 - \beta x_1(t) \quad (3.6)$$

Es fácil verificar que debido a que la función h toma siempre valores mayores a cero, entonces la positividad de las soluciones de (3.5),(3.6) se encuentra garantizada si se parte de una condición inicial positiva. Este conjunto de ecuaciones debe ser modificado de alguna manera para introducir correctamente la aleatoriedad. Esto es realizado en [3] mediante la introducción de procesos de ruido blanco independientes en $I_1(t), I_2(t)$, los que pueden ser entendidos intuitivamente como la derivada temporal de movimientos brownianos. Con esto se pretende reflejar el hecho de que existe aleatoriedad inherente en el input a cada grupo de neuronas, resultante de fluctuaciones aleatorias en la información proveniente de los sistemas sensoriales. El problema con introducir directamente el ruido en el input es que así las expresiones $h(I_1(t)), h(I_2(t))$ dejan de tener sentido matemático. Por esta razón es que finalmente el ruido blanco se agrega directamente en las ecuaciones, obteniéndose así las siguientes ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$\tau dx_1(t) = (-x_1(t) + h(I_1(t)))dt + \sigma dB_1(t) \quad I_1(t) = I_1 - \beta x_2(t) \quad (3.7)$$

$$\tau dx_2(t) = (-x_2(t) + h(I_2(t)))dt + \sigma dB_2(t) \quad I_2(t) = I_2 - \beta x_1(t) \quad (3.8)$$

Las ecuaciones (3.7),(3.8) pueden así entenderse como versiones aleatorias de las de Wilson y Cowan.

De manera análoga a como se hizo en 1.4, se puede demostrar que al introducir el movimiento browniano se tendrá que las cantidades $x_1(t), x_2(t)$ eventualmente tomarán valores negativos, generando así dinámicas irrealistas.

Interesantemente este modelo ha sido deducido usando argumentos que nada tienen que ver con los de Wilson y Cowan. Es el caso del "*Leaky competing accumulator model*", creado por Marius Usher y James McClelland [18]. Las cantidades representadas en este modelo también son tasas de descargas neuronales, aunque la deducción de las ecuaciones es realizada teniendo como punto de partida versiones continuas de redes neuronales analógicas [10, 8, 4]. Si bien las ecuaciones de [18] no son idénticas a las de [3], en este último artículo se demuestra que ambos enfoques llevan esencialmente a reproducir los mismos comportamientos.

Una innovación de [18] que vale la pena mencionar es la manera en que se fuerza a la existencia de soluciones positivas. En primer lugar, de entre todas las elecciones posibles de funciones h se elige $h(x) = x\mathbb{1}_{x \geq 0}$. A pesar de no ser acotada superiormente (como se requiere originalmente en 1.3.3) sigue siendo cierto que, en ausencia de ruido, la solución a (3.5),(3.6) es positiva para condiciones iniciales positivas. Entonces, si una solución no es positiva en algún punto, esto sólo puede ser debido a las perturbaciones aleatorias. Los autores, para descartar esa posibilidad, proponen que en cada iteración del esquema numérico que simula las ecuaciones (3.7),(3.8), se realice la operación adicional $x_i \rightarrow \max(0, x_i)$.

Ya se han presentado todos los antecedentes necesarios para construir el modelo. Es importante notar que el modelo de poblaciones recién presentado posee gran similaridad con el modelo de inhibición mutua, mostrado en 1.4. La única diferencia es que en éstos

no existe una función h que se aplique al input. Sin embargo, es esperable que los resultados con y sin la función h produzcan resultados cualitativamente similares (pensar por ejemplo en $h(x) = x\mathbb{1}_{x \geq 0}$). Así, es razonable pensar que este nuevo conjunto de ecuaciones siguen respetando los principios psicológicos de 1.4 por una parte, y por otra, son descripciones matemáticas de dinámicas de las poblaciones de grupos de neuronas que codifican la decisión a través de su tasa de descarga.

Las ecuaciones (3.7),(3.8) cumplen de manera básica con todos los principios, tanto psicológicos como neurodinámicos, que se han mencionado y que es imperativo respetar. Por esta razón, son la base del trabajo de modelación que será llevado a cabo en la siguiente sección.

3.2. Un nuevo modelo para la toma de decisiones

En esta sección se parte presentando el modelo y luego se discute cuál es su relación con todos los que han sido presentados. A pesar de que se recurre a la teoría presentada en el capítulo 2, se omitirán tecnicismos matemáticos que sólo contribuirían a dificultar la lectura, en desmedro de la comprensión de la dinámica que se quiere mostrar.

3.2.1. El Modelo

El modelo busca dar cuenta de la toma de decisiones en la tarea RDM, específicamente para el paradigma de elección libre. Como se vio en 3.1, el modelamiento de la prueba de elección forzada es más complejo porque se debe además describir fenómenos de memoria asociados. Se consideran las cantidades

$$I_1 = I_0 + \lambda_1 C \quad (3.9)$$

$$I_2 = I_0 - \lambda_2 C \quad (3.10)$$

donde $I_0 \geq 0, \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0, C \geq 0, C \leq 1$. Además, se consideran las variables $x_1(t), x_2(t)$ que evolucionan dinámicamente de acuerdo a las ecuaciones (3.11),(3.12), donde $\sigma, \alpha, \beta > 0, \alpha > \beta$ y los procesos $B_1(t), B_2(t)$ son dos movimientos brownianos independientes.

$$dx_1(t) = (I_1 - \alpha x_1 - \beta x_2)dt + \sigma dB_1(t) + d\Phi_1(t) \quad (3.11)$$

$$dx_2(t) = (I_2 - \alpha x_2 - \beta x_1)dt + \sigma dB_2(t) + d\Phi_2(t) \quad (3.12)$$

Éstas se expresan matricialmente como

$$dX(t) = (I - AX)dt + \sigma dB(t) + d\Phi(t) \quad (3.13)$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \end{pmatrix}$$

La ecuación (3.13) es una ecuación diferencial estocástica reflejada, y $\Phi(t)$ es el proceso regulador asociado a las reflexiones en $\bar{D} = \mathbb{R}_+^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2 \geq 0\}$. Es fácil demostrar que los procesos $\Phi_1(t), \Phi_2(t)$ varían sólo cuando $x_1(t) = 0$ y $x_2(t) = 0$, respectivamente. Así, pueden ser vistos como regulando a las variables $x_1(t), x_2(t)$ por

separado, impidiendo que cada una de ellas tome valores negativos.

Como es de suponer, $x_1(t), x_2(t)$ se relacionan con acumuladores de evidencia. Específicamente, representan la evidencia acumulada en favor de las alternativas de responder hacia T1 ($x_1(t)$) o hacia T2 ($x_2(t)$) en el paradigma de movimiento de puntos. Nos referiremos en lo sucesivo a estas alternativas simplemente como T1 y T2. Suponemos que T1 y T2 representan siempre las mismas orientaciones espaciales, por ejemplo, izquierda y derecha. Estos acumuladores a su vez representan tasas de descargas neuronales, suponiendo la existencia de un grupo de neuronas LIP asociadas a cada posible decisión (T1 o T2). Como se observa, estos acumuladores reciben los inputs I_1, I_2 , que corresponde a la actividad de las neuronas MT, y que están dados por las ecuaciones (3.9), (3.10). Se asume que el movimiento de puntos es hacia T_1 , pero si éste fuera en sentido opuesto bastaría cambiar los roles de I_1, I_2 para obtener el mismo resultado. La cantidad C representa la coherencia, y λ_1 no necesariamente es igual a λ_2 . A través de esta asimetría se busca representar el hecho de que la sensibilidad a la coherencia es mayor para neuronas cuya dirección preferida es la misma que la del movimiento de puntos, en comparación a neuronas cuya dirección preferida es opuesta a la del movimiento. Como regla general, $I_1 > I_2$ si el movimiento de puntos es hacia T1, $I_1 < I_2$ si va hacia T2 y $I_1 = I_2$ si el movimiento no privilegia ninguna dirección, es decir, la coherencia es cero (este caso merece un tratamiento especial y no será considerado en este capítulo)

Para este modelo existen dos funcionales de interés, el tiempo de decisión y la precisión. Para definirlos de manera apropiada, primero consideramos los siguientes tiempos de parada.

$$\tau_i = \inf\{t \geq 0 \mid x_i(t) = L_i\} \quad ; i = 1, 2 \quad (3.14)$$

$$\tau = \min(\tau_1, \tau_2) \quad (3.15)$$

Las cantidades L_1, L_2 son los umbrales de decisión asociados a las alternativas T1 o T2, y no necesariamente son iguales. La precisión ρ y el tiempo T se definen en las ecuaciones (3.16) y (3.17), respectivamente

$$\rho = \mathbb{E}(p) \quad \text{donde } p = \mathbb{1}_{I_1 > I_2} \mathbb{1}_{\tau = \tau_1} + \mathbb{1}_{I_1 < I_2} \mathbb{1}_{\tau = \tau_2} \quad (3.16)$$

$$T = \mathbb{E}(\tau) \quad (3.17)$$

Se debe recordar que el T recién definido es el tiempo de decisión y no el tiempo de respuesta. Este último se obtiene sumando a T una cantidad t_1 , descrita en 1.4.

3.2.2. Esquema de simulación

En la sección 3.3 se obtendrán resultados computacionales provenientes del modelo presentado, es por ello importante conocer cómo estas ecuaciones serán simuladas. Consideramos el siguiente esquema numérico, mostrado en la ecuación (3.18) : para la condición inicial $X(0) = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$ y $\{t_k\}_{k=1 \dots N(\delta)}$ partición equiespaciada de $[0, T]$ con $T > 0$ (no confundir con el tiempo de decisión definido en (3.17)) con paso δ se considera

$$\begin{aligned} X^\delta(t) &= X(0) \quad 0 \leq t < t_1 \\ X^\delta(t) &= \Pi_D(X^\delta(t_{k-1}) + (I - AX^\delta(t_{k-1}))\delta + \sigma\Delta B(t_k)) \quad t_k \leq t < t_{k+1} \end{aligned} \quad (3.18)$$

La función $\Pi_D(x)$ es la proyección sobre $D = \mathbb{R}_+^2$, es decir,

$$\Pi_D(x_1, x_2) = (\max(x_1, 0), \max(x_2, 0))$$

Este esquema fue propuesto en [13], en contextos más generales (que abarcan el caso particular de este capítulo), donde D podría ser un dominio convexo satisfaciendo hipótesis razonables y el drift y la difusión no necesariamente son como acá. No es el objetivo de este trabajo hacer un análisis exhaustivo de la convergencia del esquema, pero es importante mencionar que en el mismo artículo [13] se establece la siguiente velocidad de convergencia

$$\mathbb{E} \left(\sup_{[0,T]} |x^\delta(t) - x(t)|^2 \right) = o(\delta^{1/2-\epsilon}) \quad \forall \epsilon > 0 \quad (3.19)$$

Es decir, hay convergencia en media cuadrática uniformemente en $[0, T]$, lo cuál es sin dudas razonables para este trabajo donde no hay ningún objetivo particular de eficiencia, pero sí se requiere disponer de un algoritmo fácil de implementar, y que funciona.

Para simular este proceso hasta que se realiza el tiempo de parada τ se propone el algoritmo 1. Las variables $Y(i)$ se corresponden con la cantidad $\Delta B(t_k) = B(t_k) - B(t_{k-1})$ de la ecuación (3.18). El valor de T se escoge muy grande de manera que sea poco probable que en las N iteraciones no se haya alcanzado un umbral de decisión. Si ese fuera el caso, esa rama puede ser desechada. Un algoritmo equivalente, y que de hecho se usó en las simulaciones, consiste en no considerar T y realizar las simulaciones hasta que algún acumulador supere su umbral, eligiendo $Y(i)$ en cada paso. La implementación de ese algoritmo no será detallada.

Otro problema es que podría suceder que los dos acumuladores superen su umbral en un determinado paso. La opción natural es obviar dicha rama de cálculo. A pesar de todas esas excepciones, debido a su simplicidad es que se enuncia el algoritmo 1 de la manera en que está, pero se debe tener presente que se han considerado todos los casos patológicos.

Algoritmo 1 Simulación de $X(t)$

Entrada: $\delta, T, \sigma, I_1, I_2, \alpha > \beta, L_1, L_2 > 0, X(0) \in \mathbb{R}_+^2$

- 1: $I = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, N = \frac{T}{\delta}$
- 2: $Y(i), i = 1 \dots N$ i.i.d, $Y(i) \sim \mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \right)$
- 3: **for** $i = 0 \dots N - 1$ **do**
- 4: $X(i+1) = X(i) + (I - AX(i))\delta + \sigma Y(i)$
- 5: $X(i+1)_1 = \max(X(i+1)_1, 0), X(i+1)_2 = \max(X(i+1)_2, 0)$
- 6: **if** $X(i+1)_1 \geq L_1$ **then**
- 7: $\tau = i\delta$
- 8: $p = \mathbb{1}_{I_1 > I_2}$
- 9: Salir
- 10: **else if** $X(i+1)_2 \geq L_2$ **then**
- 11: $\tau = i\delta$
- 12: $p = \mathbb{1}_{I_1 < I_2}$
- 13: Salir
- 14: **end if**
- 15: **end for**

Salida: $X(i)_{i \leq \tau}, \tau, p$

La precisión y los tiempos de reacción se pueden estimar usando Monte Carlo, es decir, simular el algoritmo anterior n veces con n un número grande, y en cada simulación (i) recoger las variables p_i, τ_i . Así, se puede estimar

$$T \simeq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tau_i$$

$$\rho \simeq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i$$

Debido a la convergencia del esquema, en la práctica se tomara al proceso $X^\delta(t)$ como si realmente fuera $X(t)$, obviamente eligiendo δ muy pequeño. La elección de ese delta pequeño es más bien basada en el sentido común, teniendo en cuenta que se quiere evitar problemas como los recién descritos, pero considerando también que es importante que las simulaciones no tarden demasiado pues en 3.3 serán repetidas n veces para estimar las cantidades T, ρ .

Las condiciones impuestas en la matriz A hacen que sea simétrica y definida positiva, y además sus coeficientes son todos estrictamente positivos. En el corolario 2.2.26 se mostró que entonces el proceso en cuestión es recurrente en el sentido de Harris, pero faltaba verificar una pequeña condición para obtener la convergencia a la medida estacionaria (teorema 2.2.24). Se asumirá de todas maneras que esta convergencia ocurre. La razón es que simulaciones preliminares mostraron que es ese el caso, pero incluso si no fuera así, el dominio de reflexión podría ser ligeramente cambiado para que el teorema 2.2.24 sea válido. Esos cambios pueden ser, por una parte, a través de una aproximación del dominio y/o cambiando el dominio de reflexión por uno acotado, por ejemplo el intervalo $[0, A] \times [0, A]$ con A muy grande. Ninguno de esos cambios afectaría sustancialmente los resultados, por las mismas cotas para reflexiones en distintos dominios que se mostraron en 2.2.3.

Al asumir la convergencia a una medida estacionaria se tiene una predicción que podría ser testeada experimentalmente: en ausencia de input ($I = (0, 0)$) se tiene que $X(t)$ es un proceso estacionario cuya distribución es una normal de media $(0, 0)$ y varianza $\frac{1}{2}A^{-1}\sigma^2$, condicionada a permanecer en el dominio de reflexión. Esto podría ser eventualmente testeado en el laboratorio, determinando si la actividad de descargas espontáneas de neuronas LIP puede ser bien aproximada por la distribución anterior (se tendría que hacer un registro de varias neuronas y varios *trials* falsos, es decir, sin estimulación, para luego promediar y obtener así la tasa de descargas). En este trabajo eso se traduce en la elección de $X(0)$, que se toma como el valor esperado de la distribución anterior. Para simular esta distribución se muestrean variables gaussianas con la misma media y varianza pero seleccionando sólo las realizaciones donde el resultado cae dentro del dominio. La media puede ser aproximada mediante Monte Carlo, promediando los valores obtenidos con el procedimiento antes descrito.⁸ Para concluir esta sección, se especifica cuál fue el rango de parámetros escogidos y se muestran simulaciones que ejemplifican de buena manera cómo funciona el modelo.

⁸Podría considerarse, de manera más consistente, que el valor inicial sea aleatorio, dado por la distribución de $X(t)$ en ausencia de estimulación. La razón para no hacerlo es que introduce una fuente de aleatoriedad que es mejor omitir, pues se requerirán más simulaciones para obtener buenas aproximaciones en las curvas que se intentará crear. A través de simulaciones preliminares se estableció que las dos elecciones son equivalentes en tanto que reproducen los mismos resultados

3.2.3. Parámetros del modelo

La única cantidad que varía durante las simulaciones es C , la coherencia, que está en unidades porcentuales, es decir, si la coherencia es 10 % entonces $C = 10$.

De manera completamente arbitraria se eligieron $\alpha = 1, \beta = 0,5$. No hay ninguna razón particular para esta elección, pero de todas formas preliminarmente se verificó que distintas elecciones de α, β (donde $\alpha > \beta$) traen como resultados comportamientos que son esencialmente los mismos, aunque obviamente hay variación de todas las medidas como función de estos parámetros. Se eligieron además $\sigma = 1, \delta = 0,01, \lambda_2 = 0, I_0 = 1,5, \lambda_1 = 0,02, L_1 = L_2 = 2,1$. Esta elección de parámetros también es arbitraria, y aunque otras también son válidas, los parámetros escogidos permiten obtener resultados que se pueden visualizar de buena manera. Si bien los rangos donde fluctúan las variables relevantes no corresponden con los observados, debido a la riqueza de parámetros es que se tiene la esperanza de que un ajuste más preciso podría ser logrado si los parámetros fueran escogidos más minuciosamente. Así, se debe advertir por ejemplo que al fijar $L_1, L_2 = 2,1$ entonces en todas las simulaciones se observarán tasas de descargas inferiores a 2.1 (más específicamente, dos descargas por neurona y unidad de tiempo). Esto contrasta con algunos resultados experimentales mostrados en 3.1, donde se vio que las tasas de descargas fluctúan en rangos fisiológicos que van hasta $70Hz$.

Una justificación para no realizar ajustes más precisos es que éstos simplemente no podrían ser logrados porque no existe una fuente de datos única a la cual recurrir. Los experimentos que se tratarán de reproducir son varios, y cada uno de ellos arroja resultados distintos. Por lo tanto, para los fines de esta investigación basta tener un conjunto de parámetros que permitan obtener dinámicas razonables, pero se tendrá siempre en mente que ajustes a datos experimentales reales son siempre posibles mediante cambios de parámetros y unidades de medición. Por esta razón, las unidades en las que se presentan los resultados deben ser consideradas como medidas ficticias que no se corresponden con la realidad inmediatamente.

En la figura 3.8 se muestran cuatro simulaciones del modelo (como siempre, dado que $I_1 > I_2$ entonces las respuestas correctas son aquellas donde $\tau = \tau_1$).

Hay varios hechos que debe ser mencionados. En primer lugar, se observa la acción del proceso regulador en ambos acumuladores, impidiendo que cualquiera de ellos tome valores negativos. Otra propiedad del modelo que es importante mencionar, ya que es algo contraintuitiva, es puede suceder que un acumulador llegue al valor cero pero esto no significa que ha "perdido la competencia", porque puede terminar siendo el primero en alcanzar el umbral (por ejemplo figura 3.8a). Se observa también que puede suceder que en algunos trials la competencia entre ambos acumuladores ocurra durante largos intervalos de tiempos (figuras 3.8a,3.8c) sin que algún acumulador llegue al umbral. Puede suceder por el contrario, que en etapas tempranas algún acumulador supere definitivamente al otro y llegue a su umbral (figuras 3.8b,3.8d). Estos comportamientos pueden producirse tanto en trials incorrectos como correctos.

En resumen, existe una gran variabilidad en los comportamientos esperados, aunque poder caracterizar esa variabilidad está fuera del alcance de este trabajo, donde más bien se busca caracterizar las dinámicas promedio, es decir, de $\mathbb{E}(X(t))$.

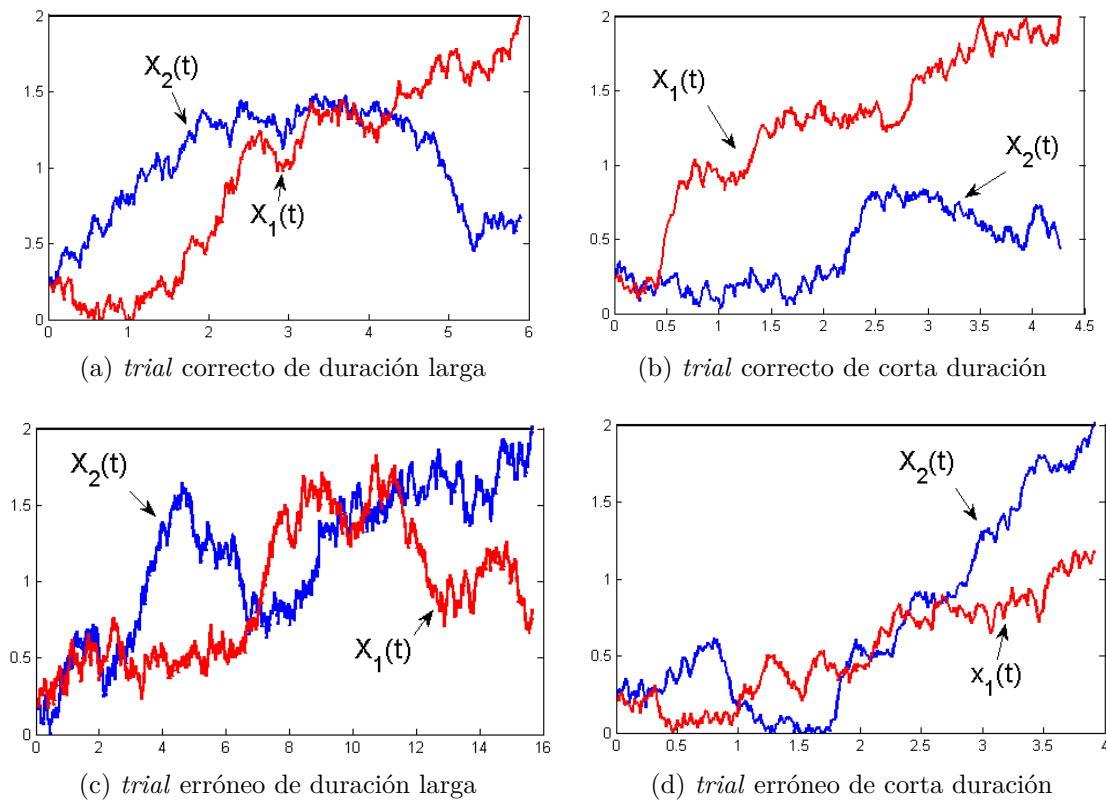


Figura 3.8: Cuatro simulaciones del modelo. En el eje horizontal hay unidades temporales y en el vertical la tasa de descargas

3.3. Resultados

En esta sección se mostrará que el modelo descrito tiene propiedades que lo hacen una propuesta interesante para dar cuenta de la toma de decisiones. El criterio más obvio para testear la calidad del modelo sería ver que provee un buen ajuste a datos experimentales. Lamentablemente, no se dispone de datos reales como para ver si ese ajuste es bueno, y aunque se tuviera, no implicaría que se tiene un buen modelo, pues bien podría ser el caso que éste simplemente tiene suficientes variables como para permitir tal ajuste.

Por lo tanto, el enfoque será otro. Se dará una lista de fenómenos que el modelo debe dar cuenta de manera cualitativa, y se harán pruebas, simulando el modelo de acuerdo al algoritmo 1 de 3.2.2 y los parámetros de 3.2.3, para determinar si efectivamente se logran esos resultados. Esto quiere decir que no necesariamente se busca dar un ajuste preciso a todos los datos que se conocen experimentalmente, pero al menos poder reproducir los comportamientos deseados, los que usualmente se pueden visualizar gráficamente. Es importante destacar que la metodología escogida no es antojadiza, es de hecho esa la manera en que los modelos son testeados en la literatura, tanto de la psicología cognitiva como de la neurobiología computacional o teórica. [17]

Los fenómenos que el modelo debe dar cuenta pueden ser divididos gruesamente entre los conductuales y los neurobiológicos. Estos han sido descritos en distintas partes de este trabajo, y se listan a continuación:

Fenómenos conductuales ⁹

- Distribución de los tiempos de respuesta (ver 1.4.1)
- Modulación de los tiempos y respuesta y la precisión como función de la coherencia (ver 3.1)
- Tiempos de respuesta mayores para respuestas erróneas (ver 3.1)

Fenómenos neurobiológicos

- Curso temporal de la tasa de descargas para trials correctos (ver 3.1)
- Curso temporal de la tasa de descargas para trials erróneos (ver 3.1)

A continuación se muestran los resultados obtenidos; también se muestran comparaciones hechas tanto con datos experimentales como con predicciones hechas por algunos de los modelos que han sido mencionados.

3.3.1. Fenómenos conductuales

Distribución de los tiempos de respuesta

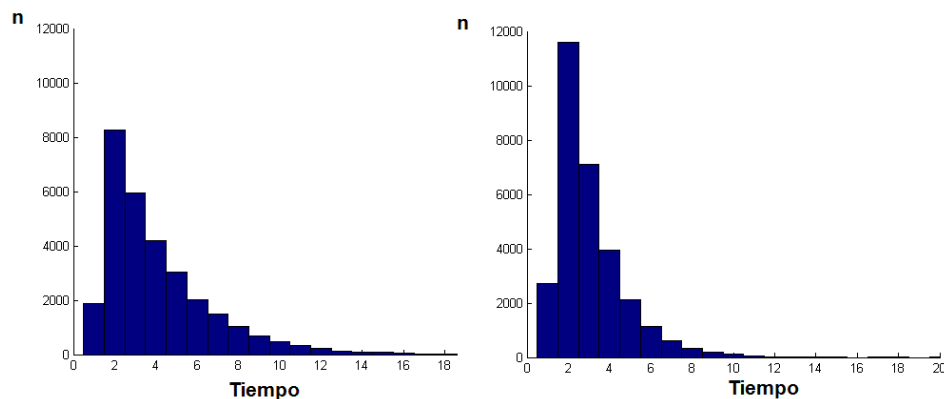


Figura 3.9: Distribución de los tiempos de decisión para dos valores de coherencia; 0 % (izquierda) y 50 % (derecha).

En la figura 3.9 se muestran las distribuciones (histogramas) de los tiempos de decisión obtenidos para dos valores de coherencia, 0 % y 50 %, con 30,000 simulaciones en cada caso. Se observa que independiente de la coherencia éstos tienen la forma típica de la figura 1.10 de 1.4.1, es decir, son distribuciones con *skewness* positiva. Más aún, se observa que para valores grandes de coherencia los tiempos de decisión tienen una distribución más concentrada en torno al valor medio, es decir, la variabilidad es menor. Esto es concordante con datos experimentales [15], donde se observa que efectivamente al aumentar la coherencia la variabilidad disminuye.

Estos gráficos también fueron reproducidos en el modelo de espigas, y se muestran en la figura 3.10. Una vez más, es preciso recordar que los tiempos de la figura 3.9 deben ser añadidos a una cantidad estrictamente positiva para determinar el tiempo de reacción.

⁹El lector podrá advertir que no se presenta el Speed Accuracy Trade Off en esta lista. La razón es que éste será analizado mucho más en detalle en el capítulo 4

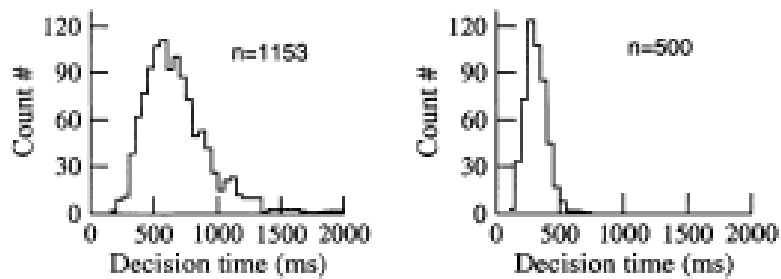


Figura 3.10: Distribución de los tiempos de respuesta para dos valores de coherencia; 0% (izquierda) y 50% (derecha). Obtenido de [19]

Precisión y tiempos de respuesta como función de la coherencia

La evidencia experimental fue mencionada en 3.1, y específicamente, en la figura 3.4, donde se observa que al graficar la precisión y el tiempo de reacción como función de la coherencia se obtienen curvas bien características, siendo incluso el tiempo de reacción una función lineal del logaritmo de la coherencia. En la figura 3.11 se muestran resultados experimentales similares, que muestran las mismas relaciones, pero además se observa que si la coherencia es suficientemente baja entonces el tiempo de reacción medio casi no varía (las figuras 3.4,3.11 no muestran resultados que son incompatibles, la diferencia se explica en que 3.11 se toman valores de coherencia en rangos más cercanos a cero, que es donde se tiene este comportamiento distinto.) Estas curvas también han sido obtenidas

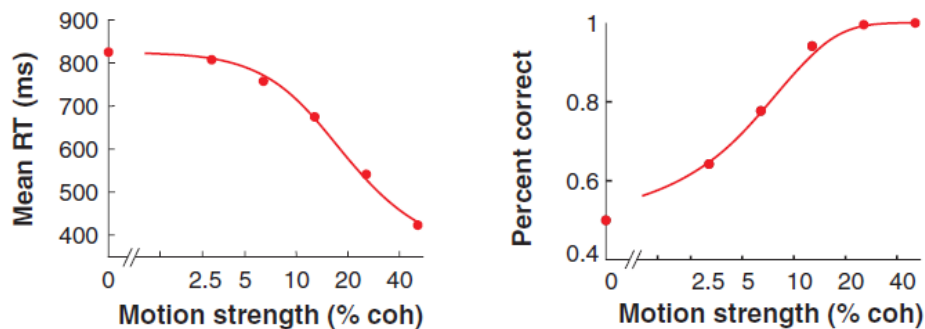


Figura 3.11: Tiempo de reacción (izquierda) y precisión (derecha) como función de la coherencia. Obtenido de [6]

en el modelo de espigas mostrado en 3.1. Los resultados obtenidos se muestran en la figura 3.12, donde además se muestra la predicción de que al aumentar la coherencia los tiempos de reacción se hacen menos variables. Esto queda reflejado en las barras de error del gráfico de tiempo de reacción, cuyo largo disminuye en función de la coherencia. La disminución de la variabilidad a medida que la coherencia aumenta es concordante con lo observado en las figuras 3.9, 3.10.

Los resultados del modelo se muestran en la figura 3.13. Se observa que efectivamente se han logrado reproducir los comportamientos deseados en este ítem. Se podría objetar que la curva de precisión no llega a una meseta, como sí ocurre en las figuras 3.11 y 3.12, pero esto no es una complicación pues podría arreglarse modificando el parámetro λ_1 . Para

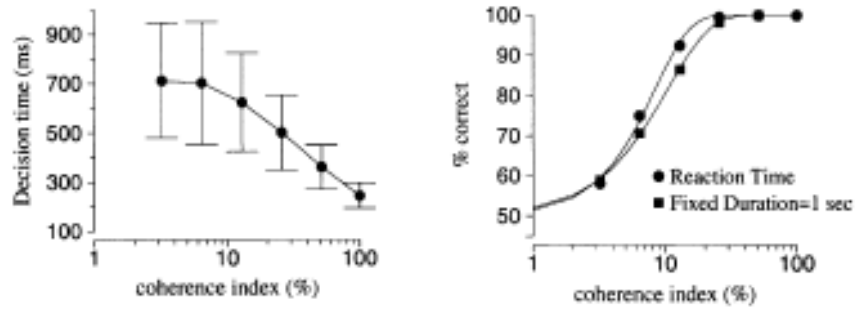


Figura 3.12: Tiempo de reacción (izquierda) y precisión (derecha) como función de la coherencia. Obtenido de [19]

confeccionar estos gráficos de tiempos de reacción y precisión se hicieron aproximaciones simulando 30,000 veces el modelo para cada valor de coherencia. Los valores de coherencia escogidos fueron 2,5 %,5 %, 7,5 %,10 %,20 %,50 % y 100 %.

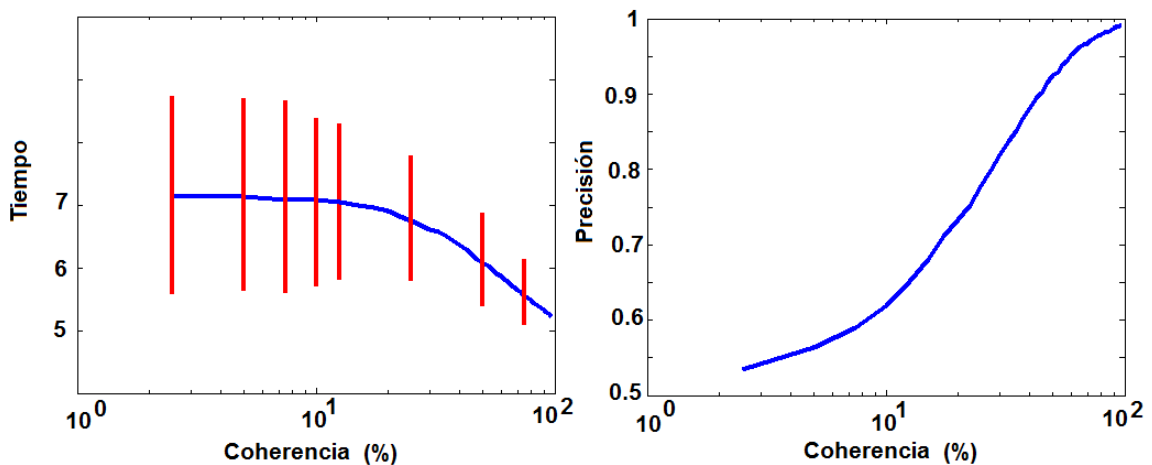


Figura 3.13: Tiempo de decisión (izquierda) y precisión (derecha) como función de la coherencia.

Tiempos de respuesta mayores para respuestas erróneas

Lamentablemente, el modelo no es capaz de dar cuenta de este fenómeno como fue descrito en 3.1 (cuadro 3.1). En la figura 3.14 se muestran los tiempos de decisión como función de la coherencia. La cantidad de simulaciones y los valores de coherencia escogidos son los mismos que en el análisis anterior. Las irregularidades en la forma de la curva que se observan para coherencias grandes en las respuestas erróneas se deben a que cada vez se hace más difícil muestrear respuestas erróneas, por lo que los promedios son calculados con una cantidad no suficientemente alta. Sin embargo es evidente la tendencia a que los tiempos sean cada vez más bajos en relación a respuestas correctas.

Una interpretación para lo anterior, y que también permite explicar por qué para coherencias bajas los tiempos son indistinguibles, es que para valores altos de coherencia la

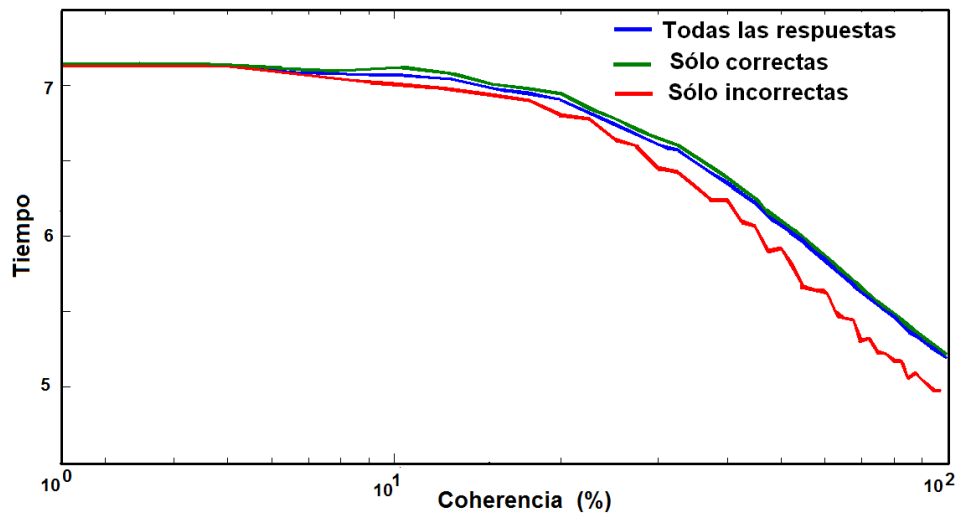


Figura 3.14: Tiempos de decisión, tanto en respuestas correctas como erróneas, para distintos valores de coherencia

única posibilidad de que ocurra un error consiste en que el acumulador correspondiente a la alternativa incorrecta "tome el control" de la competencia rápidamente. En cambio, en las respuestas correctas también existe la posibilidad de que ocurra una competencia más prolongada entre ambos acumuladores. En términos de lo mostrado en la figura 3.8, a coherencias altas las trayectorias como las de la figura 3.8c se hacen poco probables y sólo se obtienen errores como los de la figura 3.8d

3.3.2. Fenómenos neurobiológicos

Curso temporal de la tasa de descargas para trials correctos

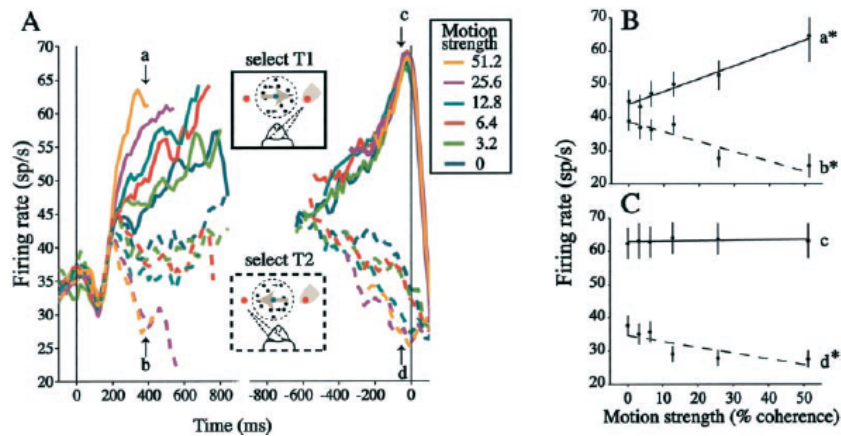


Figura 3.15: A la izquierda, curso temporal de la tasa de descargas para distintos valores de coherencia, alineados al comienzo del trial y al comienzo de la respuesta. Las líneas sólidas reflejan elecciones T1 y las punteadas hacia T2. Para valores de coherencia mayores que cero sólo se muestran respuestas correctas. A la derecha, tasa de descargas como función de la coherencia para los puntos a,b,c,d. Obtenido de [15]

En la figura 3.15 se muestra el curso temporal de la tasa de descargas para respuestas correctas en el paradigma de elección libre. Esta figura es idéntica a 3.5a, pero a la derecha se muestra también cómo la tasa de descargas está modulada como función de la coherencia, en distintos tiempos del proceso de decisión. Se observa que al comienzo del trial, la tasa de descarga es una función lineal de la coherencia, y la pendiente es positiva cuando el movimiento es hacia T1, y negativa cuando es hacia T2. Al final del trial dicha correlación se tiene sólo cuando el movimiento es hacia T2.

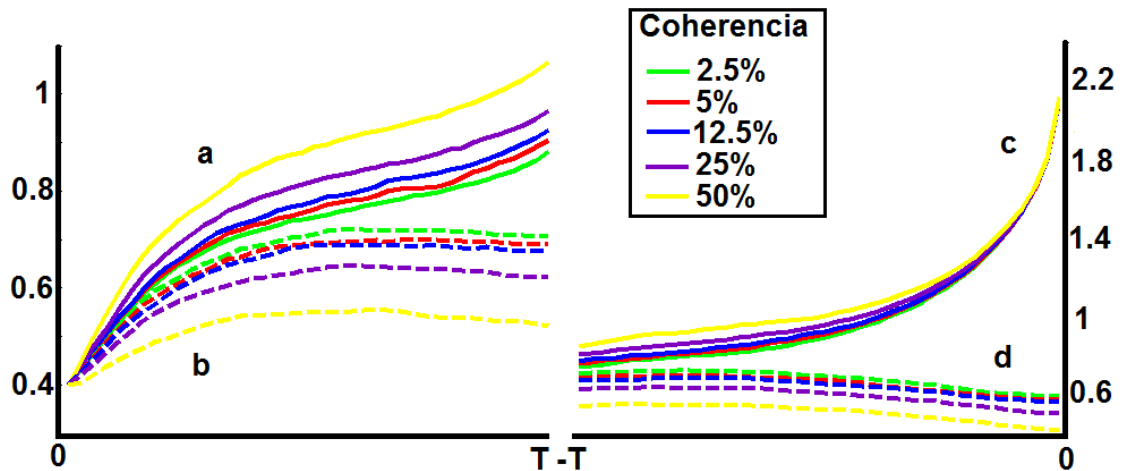


Figura 3.16: Curso temporal de la tasa de descargas de respuestas correctas, alineado al comienzo del trial (izquierda) y final del trial (derecha). Las líneas punteadas sólidas corresponden a tasa del acumulador de la alternativa T1 y las punteadas a la actividad del acumulador de la alternativa T2. Sólo se muestran respuestas correctas. Distintos valores de coherencia se representan mediante distintos colores

Los gráficos de la figura 3.16 fueron obtenidos usando una metodología similar a la experimental. Para un total de 30,000 simulaciones, correspondientes a cada valor de coherencia, se promediaron todas las curvas de duración mayor o igual a un valor fijo T , considerando desde el comienzo del trial hasta T (izquierda) y en el intervalo de largo T antes del final del trial (derecha). La cantidad T fue escogida como la mitad de la duración promedio de los 30.000 trials¹⁰. Se debe notar que en la figura 3.15 fue escogida una ventana de tiempo mayor, casi igual a la duración promedio del trial. La razón para justificar esta diferencia es que de haber hecho así se limitaría el número de simulaciones, entorpeciendo la visualización. Análisis preliminares mostraron sin embargo que cualitativamente el comportamiento observado de 3.16 no varía si se elige T de otra manera.

Considerando el comienzo del trial, este comportamiento se puede resumir como un aumento progresivo en la tasa de descargas del acumulador correspondiente a la alternativa T1, y un ligero aumento en el acumulador de T2, pero en este último caso puede suceder que la tasa de descargas caiga posteriormente a niveles cercanos al basal, obtenido como la media de la distribución estacionaria correspondiente a la ausencia de estimulación. Esto también es observable experimentalmente (figura 3.15); pues aunque al comienzo las tasas de descargas se parecen, cuando la elección es T1 éstas aumentan, y cuando es T2 éstas disminuyen a un nivel inferior al inicial. Mirado desde el final del trial, se observa que inevitablemente el acumulador T1 aumenta su tasa de descarga hasta llegar a

¹⁰Se consideraron sólo los trials con 25% de coherencia para ese cálculo

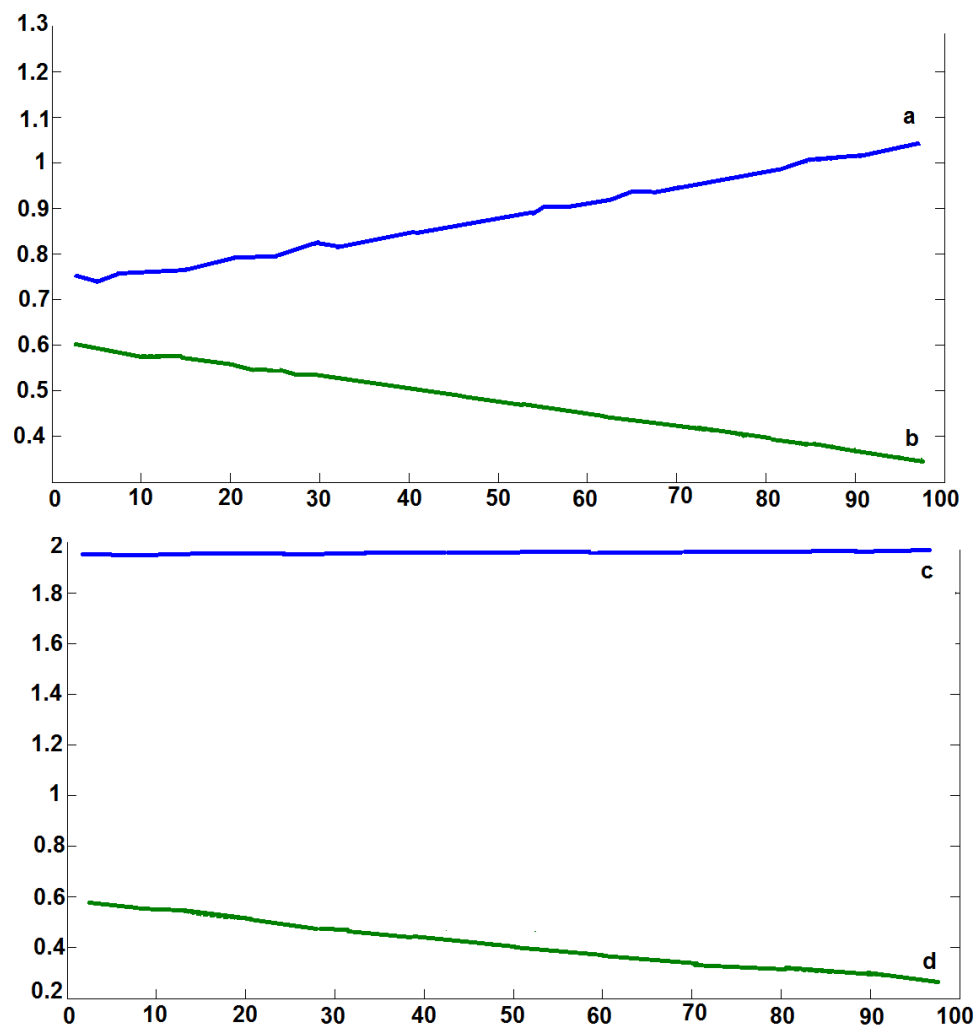


Figura 3.17: Tasa de descargas como función de la coherencia en los puntos a,b,c,d. (Se hicieron simulaciones para valores de coherencia mayores a 50%)

su valor umbral, mientras que el acumulador T2 sigue decayendo de la misma forma que al comienzo del trial.

Estas relaciones quedan más claras al ver la figura 3.17, que es el equivalente al gráfico de la derecha de la figura 3.15. Es preciso mencionar que las curvas graficadas en 3.17 pueden ser ligeramente distintas a lo que se obtendría directamente de la figura 3.16, pues los datos de ambas figuras corresponden a conjuntos de simulaciones distintas (de hecho, para construir las curvas de la figura 3.17 se consideraron muchos más valores de coherencia que para la figura 3.16).

Se debe tener presente que este modelo no es capaz de dar cuenta de fenómenos más complejos, como los observados en la figura en los primeros 250ms de la figura 3.15. Estos fenómenos podrían estar relacionados a mecanismos propios de las primeras etapas de procesamiento del estímulo, y este modelo simplemente no incorpora esos mecanismos. Concluimos entonces que se han logrado reproducir cualitativamente los resultados deseados.

Curso temporal en trials erróneos

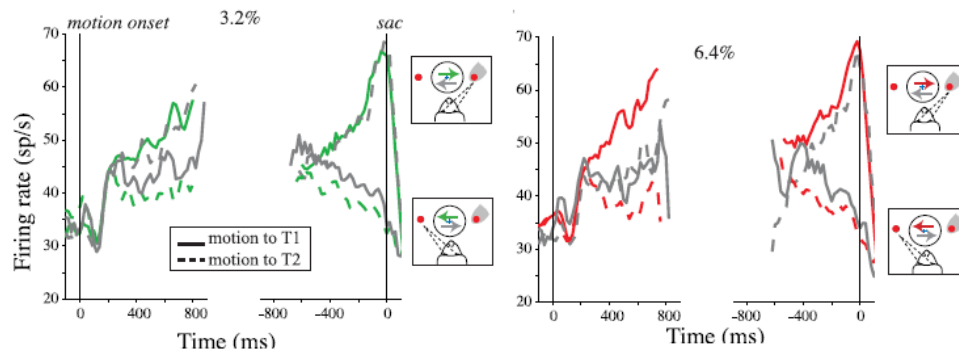


Figura 3.18: Curso temporal en respuestas correctas y erróneas, alineadas al comienzo y final del trial. Se consideran dos valores de coherencia. Corresponden a datos experimentales obtenidos de [15]

Se deben tener presente, en primer lugar, los gráficos de la figura 3.6, donde se muestran en líneas sólidas los trials correctos y en punteadas los erróneos. Las líneas negras representan elecciones T1 y las grises elecciones hacia T2. Luego, las líneas punteadas negras representan trials donde el movimiento de puntos era hacia T2 y erróneamente se elige T1, y las líneas punteadas grises son trials donde el movimiento era hacia T1 pero se elige T2. Se debe notar, sin embargo, que los datos corresponden al paradigma de elección forzada, donde, como se vio en 3.1, se obtienen comportamientos algo distintos al paradigma de elección libre. Se presentan en la figura 3.18 nuevos gráficos, ésta vez correspondientes a datos experimentales para el paradigma de elección libre. Debe advertirse que las convenciones son distintas, en estos gráficos las curvas de colores son respuestas correctas y las grises errores. Líneas sólidas corresponden a movimiento hacia T1 (elecciones T2 en respuestas erróneas) y las punteadas hacia T2 (elecciones T1 en respuestas erróneas). La diferencia cualitativa principal entre el gráfico de la figura 3.6 y el de la figura 3.18 es que en esta última el incremento en las tasas de descargas es más fuerte; en 3.6 la tasa de descargas se estabiliza en una "meseta", lo que es consecuencia de que se trata del paradigma de elección forzada.

En ese paradigma se dispone de resultados provenientes del modelo de espigas, los que se muestran en la figura 3.19. Las convenciones son iguales a las de la figura 3.6. Se ve claramente que se logra reproducir el aumento característico de la tasa de descarga en el paradigma de elección forzada.

Los resultados de simulación de este modelo se muestran en la figura 3.20. Las convenciones de esta figura son las mismas que las de la figura 3.6 y las especificaciones de simulación son las mismas que para el análisis del curso temporal de respuestas correctas. Se logra reproducir lo esperado, de acuerdo a lo descrito en la sección 3.1. Se debe tener presente que dado que se trata del paradigma de elección libre, la figura 3.20 más bien debería ser comparada con la figura 3.18, y no con 3.6. Lamentablemente, la figura 3.18 no informa de los cambios que ocurren para valores altos de coherencia, pero es razonable pensar que las curvas de errores cambiarían de manera similar a como lo hacen en la figura 3.6. Si ese es el caso, entonces se ha logrado reproducir lo que era deseado. El hecho de que para coherencias altas las curvas de errores se vean poco regulares es nuevamente el resultado de que se dispone de relativamente pocos *trials* para tomar promedios.

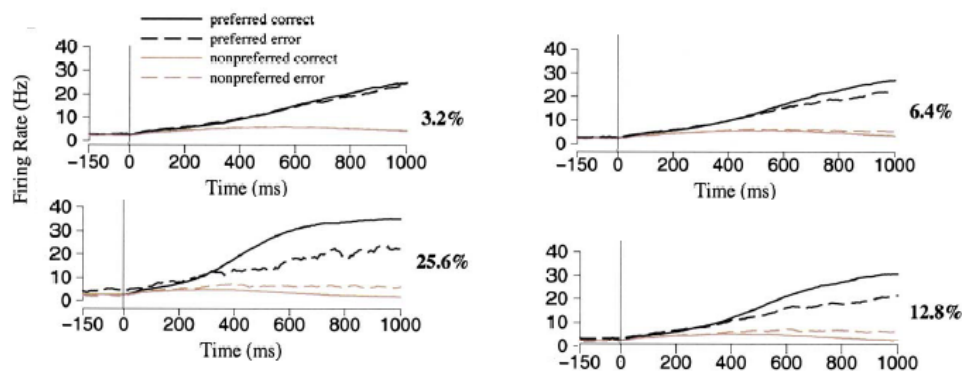


Figura 3.19: Curso temporal en respuestas correctas y erróneas, alineadas al comienzo de movimiento de puntos. Se consideran 4 valores de coherencia. Corresponden a simulaciones del modelo de espigas de [19]

3.4. Discusion

El modelo satisfactoriamente reprodujo 5 de los 6 hechos de los que debía dar cuenta, de acuerdo al criterio previamente acordado. La única falla es que no predice que los trials con errores son más lentos que los trials correctos, como sí sucede en el experimento del movimiento de puntos. Este hecho no es una particularidad de este paradigma; también ha sido mencionado como una propiedad general de la toma de decisiones [17, p. 163]. De todos modos, debido a que el resto de los ítems son cumplidos de manera muy satisfactoria es que puede decirse con propiedad que es un buen modelo, aunque sin duda sujeto a mejoras.

Este modelo fue concebido con el fin de conciliar las ideas de la psicología cognitiva y los conocimientos experimentales de la neurociencia. Al ser las tasas de descargas cantidades siempre positivas, era necesario contar con dinámicas dadas por ecuaciones cuya solución sea siempre positiva. Fue con ese objetivo que se llegó a la idea de usar ecuaciones diferenciales estocásticas reflejadas, que es una manera estándar de lidiar con la posible negatividad de las soluciones. Podrían haberse considerado otras posibles soluciones para evitar ese problema, por ejemplo, considerando una matriz de difusión dependiente de la tasa de descargas.¹¹ Sin embargo, aquello implicaría hacer supuestos que no tienen su contraparte en la literatura experimental sobre cómo es el ruido que se observa en las tasas de descargas,

El modelo puede así entenderse como un híbrido entre el de inhibición mutua, presentado en la sección 1.4, y los de dinámicas de poblaciones presentados en 3.1. La diferencia con el primero es que en este existe un mecanismo para evitar la negatividad de las soluciones, y con el segundo, en que no aparece la función h que se aplica al input. Incidentalmente, resulta que el esquema numérico que permite simular las ecuaciones estocásticas reflejadas coincide con lo que se hace en uno de los modelos de dinámicas de poblaciones ([18]), es decir, hacer $x_i \leftarrow \max(x_i, 0)$ al finalizar cada paso. De esa manera, el modelo tiene el poder de permitir interpretar en términos matemáticos rigurosos aquello que se hizo durante algunos años de manera heurística. Ese es tal vez el alcance de mayor relevancia del modelo; más que constituir una forma radicalmente distinta de conceptualizar la

¹¹Tal es el caso, por ejemplo, del movimiento browniano geométrico, utilizado en finanzas para modelar el precio de un activo.

toma de decisiones, presenta un nuevo marco matemático mediante el cual la toma de decisiones puede ser vista, con el objetivo que se respeten los principios de la psicología y de las neurociencias. Aquel marco teórico, el de las ecuaciones reflejadas, no resulta ser en ningún caso intratable, pues de hecho, en el capítulo 2 se demostraron resultados de medidas estacionarias que son aplicados en este capítulo para obtener el nivel de actividad basal

En cuanto a líneas de trabajo futuro relacionado con el modelo, están, en primer lugar, poder estudiar mejor el espacio de parámetros con el objetivo de proveer ajustes más reales a los resultados empíricos, al menos sobre los cuales existan buenas bases de datos. Como se planteó en la sección 3.2, existe la convicción de que tal ajuste es posible, pero en este trabajo fueron priorizados otros aspectos que en primera instancia se vislumbraban importantes. Otra vertiente de trabajo consiste en estudiar el uso de funciones no lineales que se apliquen sobre el input. En este caso, con el objetivo de mantener la mayor simplicidad posible, se consideró una ecuación lineal sólo afectada por el término de reflexiones. Incluir funciones h no lineales en el modelo podría ser eventualmente la clave para subsanar el punto que constituye la gran piedra de tope, los tiempos de reacción en trials erróneos en comparación con aciertos.

Por último, es importante explorar cómo este modelo podría ser utilizado para dar cuenta de la toma de decisiones en contextos más generales, no necesariamente limitados al movimiento de puntos. La razón de escoger ese paradigma particular es que para él se conocen datos neurobiológicos reales, pero eso no excluye la posibilidad de que en otras tareas, más complejas, podrían observarse dinámicas similares en las neuronas apropiadas. En palabras de Joshua Gold y Michael Shadlen, pioneros en la investigación experimental en el paradigma de movimiento de puntos

”The path from simple decisions to complex ones may be more straightforward than it appears [...] These considerations may one day allow us to extend insights obtained from simple sensory-motor paradigms to the kind of complex decisions that comprise the fabric of cognition [6, pp. 562-563]”

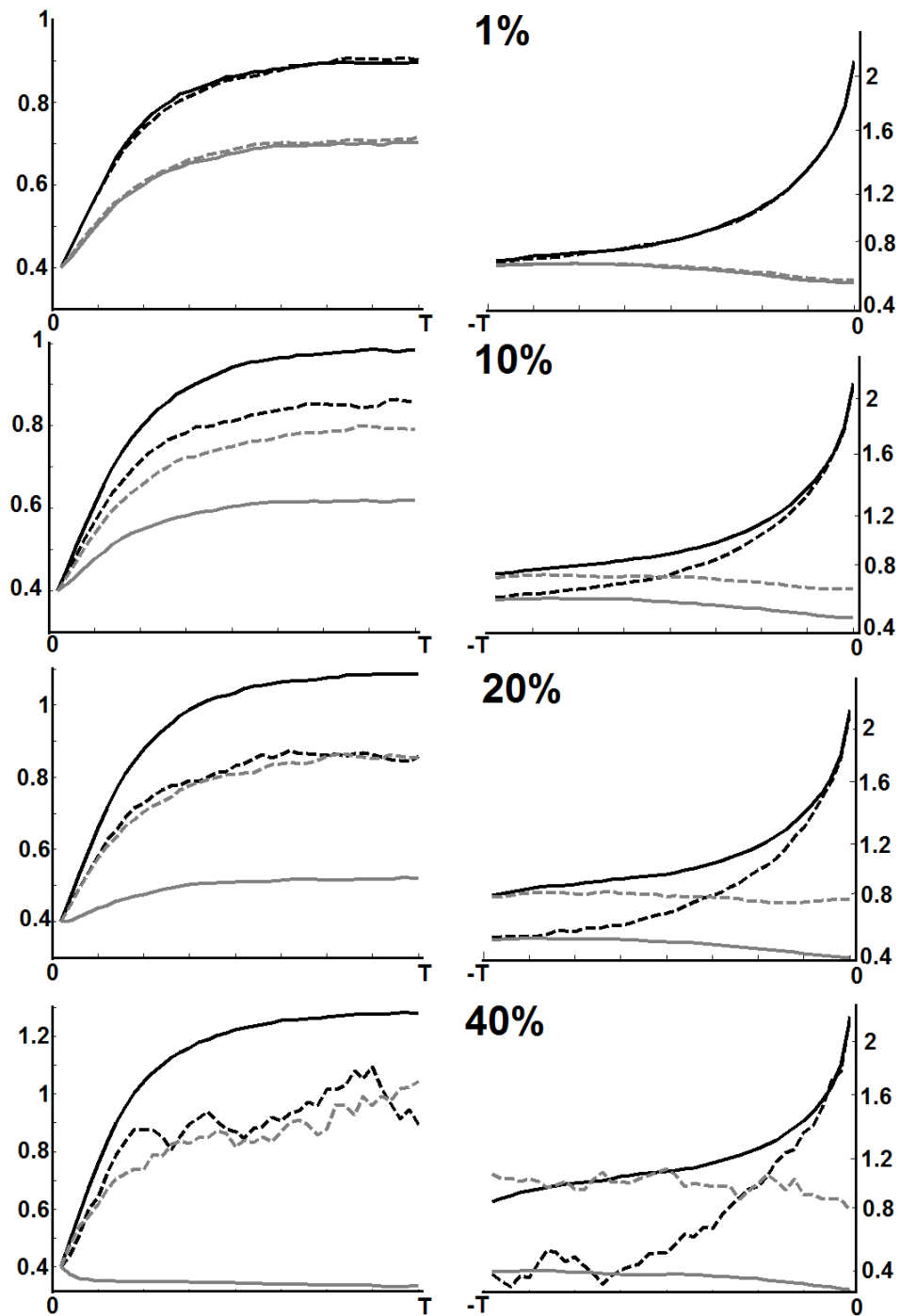


Figura 3.20: Curso temporal de la tasa de descargas para respuestas correctas y erróneas, alineadas al comienzo del trial y comienzo de la respuesta. Se consideran 4 valores de coherencia

Bibliografía

- [1] R. Bogacz, E. Brown, J. Moehlis, P. Holmes, and J.D. Cohen. The physics of optimal decision making: A formal analysis of models of performance in two-alternative forced-choice tasks. *Psychological Review*, 113(4):700–765, 2006.
- [2] K.H. Britten, M.N. Shadlen, W.T. Newsome, and J.A. Movshon. Responses of neurons in macaque mt to stochastic motion signals. *Visual Neuroscience*, 10:1157–1169, 1993.
- [3] E. Brown, J. Gao, P. Holmes, R. Bogacz, M. Gilzenrat, and J.D. Cohen. Simple neural networks that optimize decisions. *Int. J. Bifurcation and Chaos, Vol. 15, No. 3 (2005) 803-826*, 15(3):803–826, 2005.
- [4] J.D. Cohen, K. Dunbar, and J.L. McClelland. On the control of automatic processes: A parallel distributed processing account of the stroop effect. *Psychological Review*, 97(3):332–361, 1990.
- [5] M. Furman and X.J. Wang. Similarity effect and optimal control of multiple-choice decision making. *Neuron*, 60:1153–1168, 2008.
- [6] J. I. Gold and M. N. Shadlen. The neural basis of decision making. *Annual Review of Neuroscience*, 30:535–575, 2007.
- [7] P. Holmes, E. Shea-Brown, J. Moehlis, R. Bogacz, J.Gao, G. Aston-Jones, J.Rajkowski, and J.D. Cohen. Optimal decisions: From neural spikes, through stochastic differential equations, to behavior. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, E88-A(9):1–8, 2004.
- [8] J. J. Hopfield. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 79(8):2554–2558, 1982.
- [9] M.E. Mazurek, J. D. Roitman, J. Ditterich, and M.N. Shadlen. A role for neural integrators in perceptual decision making. *Cerebral Cortex*, 13:1257–1269, 2003.
- [10] J.L McClelland. On the time relations of mental processes: An examination of systems of processes in cascade. *Psychological Review*, 86(4):287–330, 1979.
- [11] W. Newsome, K.H. Britten, and J.A Movshon. Neuronal correlates of a perceptual decision. *Nature*, 341:52–54, 1989.

-
- [12] W.T. Newsome, K.H. Britten, and J.A. Movshon. Neural correlates of a perceptual decision. *Nature*, 341(6237):52–54, 1989.
- [13] R. Petterson. Aproximations for stochastic differential equations with reflecting convex boundaries. *Stochastic Processes and their Applications*, 59:295–308, 1995.
- [14] R. Bogacz, M. Usher, J. Zhang, and J. L. McClelland. Extending a biologically inspired model of choice: multi-alternatives, nonlinearity and value-based multidimensional choice. *Philosophical Transactions of the Royal Society B*, 362:1655–1670, 2007.
- [15] J.D. Roitman and M. N. Shadlen. Response of neurons in the lateral intraparietal area during a combined visual discrimination reaction time task. *The Journal of Neuroscience*, 22(21):9476–9486, 2002.
- [16] M. N. Shadlen and W. T. Newsome. Neural basis of a perceptual decision in the parietal cortex (area lip) of the rhesus monkey. *J. Neurophysiol*, 85:1916–1936, 2001.
- [17] P.L. Smith and R. Ratclif. Psychology and neurobiology of simple decisions. *TRENDS in Neurosciences*, 27(3):161–168, 2004.
- [18] M. Usher and J. McClelland. The time course of perceptual choice: The leaky, competing accumulator model. *Psychological Review*, 108(3):550–592, 2001.
- [19] X.J. Wang. Probabilistic decision making by slow reverberation in cortical circuits. *Neuron*, 36:955–968, 2002.
- [20] X.J. Wang. Decision making in recurrent neuronal circuits. *Neuron*, 60:215–235, 2008.

Capítulo 4

Una aplicación a aprendizaje

4.1. Introducción

En este último capítulo se especulará un mecanismo neurobiológico que puede dar cuenta de varios fenómenos de aprendizaje que surgen en la toma de decisiones. En este contexto no se entiende aprendizaje en el sentido corriente, sino de la manera más elemental posible, es decir, como una modificación en la conducta con el fin de obtener mejores resultados. Se tendrá siempre en mente el paradigma del movimiento de puntos, pues es de ahí de donde se dispone del mayor conocimiento neurobiológico, y se asumirá válido el modelo presentado en el capítulo 3. Sin embargo, es necesario dejar en claro que todos los argumentos que se darán en este capítulo son independientes de la forma particular que adopte el modelo de decisión, pues sólo se requiere que éste respete una estructura básica, que es la de poseer acumuladores de evidencia en donde la decisión se produce cuando un acumulador llega a su umbral.

En esta sección introductoria se dan a conocer todos los antecedentes que permitirán construir el mecanismo, lo que se llevará a cabo en la sección 4.2

A continuación se definirán los fenómenos que englobaremos mediante el término aprendizaje.

4.1.1. Conceptualización del aprendizaje

El primer tipo de aprendizaje tiene que ver con las mejoras sostenidas que un individuo experimenta gracias a la práctica. Este ha sido largamente descrito en psicología (ver por ejemplo [4, 14]). Es sabido que durante la ejecución de una tarea (en particular, durante la toma de una decisión), si las condiciones experimentales no cambian, entonces es posible observar tanto una disminución en los tiempos de reacción como un aumento en la precisión. Estos cambios pueden observarse gráficamente en las llamadas curvas de aprendizaje, que muestran estas variables como función del *trial*. Un ejemplo de esas curvas se muestra en la figura 4.1. Al comienzo los tiempos son altos y la precisión cercana al azar, pero con el transcurso del tiempo (*trials*) estas variables parecen converger a valores asintóticos. Estas cantidades asintóticas no necesariamente son 0 para el tiempo de reacción y 1 para la precisión, aunque pueden acercarse mucho a estos valores si la tarea es sencilla. Las curvas de aprendizaje se construyen calculando grandes promedios poblacionales, pero no tiene sentido construir una curva de aprendizaje con un solo subject porque en una serie experimental no se observan las precisiones, sino sólo una secuencia de ceros (errores) o

unos (aciertos). Sin embargo, eso no significa que no se pueda suponer que cada individuo experimente aprendizaje, de hecho, para dar cuenta de estas curvas es común considerar modelos donde hay variables ocultas que evolucionan en el tiempo como procesos de markov [14]. Los resultados experimentales de cada individuo (tiempos de reacción para cada trial y variables binarias que codifican los aciertos) pueden entenderse como una función de esas variables ocultas. A diferencia de esa visión, en este trabajo se propondrá explícitamente cuáles son las variables (aleatorias) cuyas dinámicas producen el aprendizaje.

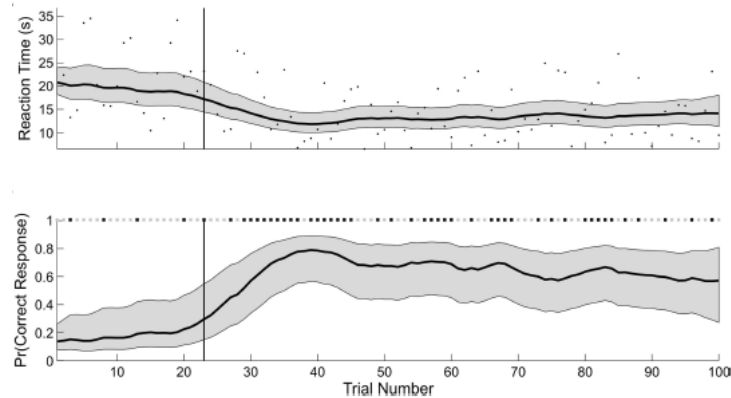


Figura 4.1: Curvas de aprendizaje típicas para el tiempo de reacción (arriba) y precisión (abajo). Obtenido de [14]

El segundo tipo de aprendizaje que se considera es el de la adaptación a las condiciones del entorno, las que pueden ser cambiantes. En el mismo contexto del movimiento de puntos, puede considerarse una situación en la que el movimiento va siempre en la misma dirección. El *subject*, aprenderá rápidamente cuál es la dirección del movimiento y aprovechará ese conocimiento que tiene (que el movimiento es siempre hacia el mismo lado) para sesgar su elección hacia ese lado. Los tiempos rápidamente decrecerán y la precisión aumentará, el *subject* no debe destinar esfuerzos para determinar la dirección del movimiento pues ha aprendido que siempre es la misma. Sin embargo, si repentinamente el movimiento se cambia hacia la dirección contraria, entonces el *subject* experimentará una inercia a dar la respuesta que ya no es válida. Así, nuevamente se cometerán errores y el tiempo de reacción aumentará durante los trials siguientes, hasta que logre aprender la nueva dirección de movimiento. El aprendizaje será logrado a través de una plasticidad para modificar la conducta. Se ha documentado que efectivamente los *subjects*, incluso si son primates no humanos, son capaces de rápidamente cambiar su conducta frente a cambios en las condiciones experimentales, siempre que sean dados los incentivos (recompensas) suficientes para realizar ese cambio[18]

El mecanismo que se propondrá en 4.2 permite explicar estos dos tipos de aprendizajes como si fueran en realidad las caras de una misma moneda. A continuación se presentará la teoría existente en la toma de decisiones óptimas, y se discutirá cómo ese marco puede ser aprovechado para concebir el aprendizaje.

4.1.2. Optimalidad en la toma de decisiones

Se ha hipotetizado [1] que un individuo, al tomar una decisión busca maximizar una función f de las dos variables relevantes, la precisión ρ y el tiempo de decisión T . Específicamente, se han mencionado dos funciones razonables: la primera de ellas, propuesta en el contexto de la teoría de detección de señales (mostrada en la sección 1.4), es una suma ponderada del tiempo de decisión y la probabilidad de cometer un error, $1 - \rho$. Es decir

$$f_1(\rho, T) = c_1 T + c_2(1 - \rho) \quad (4.1)$$

El individuo busca minimizar f_1 , es decir, minimizar el tiempo de reacción y al mismo tiempo la posibilidad de errar. La segunda función, la tasa de recompensa o *Reward Rate*, surge como propuesta en el contexto de la neurobiología, específicamente en [5] (los mismos autores de varios de los artículos mencionado en el capítulo 3). En este caso la función está dada por ¹

$$f_2(\rho, T) = \frac{\rho}{RT}; \quad RT = T + t_1 \quad (4.2)$$

La cantidad RT es el tiempo de reacción y se obtiene sumando T con t_1 , como se vio en 1.4. Obviamente, en este caso se busca maximizar f_2 .

Una diferencia fundamental entre (4.1) y (4.2) es que en el caso de f_1 se tienen los parámetros c_1, c_2 , los que podrían variar de acuerdo a cada individuo, reflejando distintas preferencias o estilos de respuesta. Por ejemplo, si $c_1 = 0$ entonces estamos en presencia de un individuo que busca minimizar la probabilidad de errar, pero que es indiferente al tiempo de reacción. Estos parámetros pueden estar determinados por distintas condiciones experimentales, pues por ejemplo a un individuo se le puede instruir a responder precisamente en desmedro de la rapidez. A su vez lo anterior puede ser visto en términos del *Speed-Accuracy trade-off*, introducido en 1.4.1, ya que cada punto de la curva SAT (figura 1.9) se corresponde con una cierta combinación de preferencias entre precisión y tiempo. Luego, si un individuo es instruido a privilegiar una variable por sobre la otra (por ejemplo precisión sobre tiempo de reacción), puede pensarse que está tratando de moverse a lo largo de la curva SAT, y equivalentemente, tratando de minimizar la función f_1 (en el ejemplo, con $c_1 = 0$).

En el caso de f_2 no existen parámetros que puedan reflejar diferencias individuales relacionadas a diferentes estilos de respuesta. A pesar de esa "desventaja" gran parte del trabajo que se ha hecho previamente considera a la *reward rate* como la cantidad relevante.

Debe tenerse presente que ρ, T son en realidad funciones de los parámetros internos del modelo, y también de las condiciones experimentales. Esto puede expresarse como

$$(\rho, T) = g(I_1, I_2, \alpha, \beta, \sigma, x(0)_1, x(0)_2, L_1, L_2) \quad (4.3)$$

Así, si un individuo quiere optimizar la función f debe producir cambios en las variables que determinan ρ y T . Entenderemos como aprendizaje en este contexto² al procedimiento mediante el cual se logran modificar las variables del argumento de la función g , con el

¹La ecuación 4.2 es una versión simplificada para efectos de la exposición. El lector interesado puede ver la forma de la función en detalle por ejemplo en [1, p.721]

²A priori esta definición de aprendizaje no se relaciona con las discutidas en 4.1.1

objetivo de producir valores de ρ, T que optimicen la función f . Dado que I_1, I_2 son parámetros manipulados experimentalmente y que no dependen del control del individuo es que no se consideran como candidatos para ser modificados por él. Por el contrario, éstas son variables que determinan el entorno o contexto en el que se produce el aprendizaje y la tarea del individuo es, mediante modificaciones de los otros parámetros, optimizar f , la que está a su vez parcialmente determinada por I_1, I_2 . Estas variables no necesariamente están fijas, de hecho pueden obedecer a una distribución de probabilidad que varía en el tiempo.

De todos los parámetros internos, σ no es un buen candidato para ser responsable del aprendizaje, pues como se definió en el capítulo 3, es un reflejo de la actividad espontánea aleatoria en el sistema encargado de la toma de decisiones, producida por perturbaciones externas. Los candidatos restantes son los pesos de las conexiones entre ambos acumuladores (α, β) , la actividad basal $x(0)_1, x(0)_2$ y los umbrales de decisión L_1, L_2 .

La idea de que los pesos de las conexiones pueden modificarse dinámicamente con el objetivo de minimizar una función ha sido la piedra angular para la conceptualización del aprendizaje en inteligencia artificial [8]. En esa disciplina las neuronas son modeladas mediante unidades que interactúan dinámicamente como un autómata celular. Asociadas a dichas redes de autómatas aparecen funcionales de energía, que dependen de los pesos de las conexiones entre las unidades [6]. El aprendizaje consiste entonces en un procedimiento dinámico, o algoritmo, donde los pesos de la red son modificados de manera que la función de energía converja a su valor mínimo. Dicha idea ha sido explotada tanto en contextos industriales como en las ciencias cognitivas (ver por ejemplo [3, 4]). Su fundamento biológico será detallado más adelante.

Entonces, la alternativa más obvia para modelar el aprendizaje es proponer a α, β como variables temporales, descartando las otras opciones. Sin embargo, recientemente la actividad basal y los umbrales han sido señalados como las opciones más factibles para convertirse en variables dinámicas [2]. Ese estudio trata sobre las bases neuronales del SAT (ver capítulo 1), y basado en evidencia proveniente de estudios de imágenes funcionales (fMRI) propone que son esas las cantidades que podrían reflejar cambios en la curva SAT (por ejemplo, pasar de preocupación por la precisión a preocupación por la velocidad), y de acuerdo a lo antes discutido, finalmente en la función f . Lamentablemente la técnica fMRI, que permite detectar cambios de actividad cerebral locales provocados por la ejecución de una tarea, tiene una buena resolución espacial a nivel macroscópico, pero es poco decidora de qué es lo que ocurre en el nivel de poblaciones de neuronas. La metodología necesaria para poder determinar qué variables podrían influir en cambiar la función f es la del *single-unit*, y lamentablemente no se dispone de resultados que hagan uso de esa técnica

A continuación se mostrará que a pesar de que no existe una validación experimental, el considerar al umbral de decisión como la variable cuya dinámica produce el aprendizaje es una alternativa biológicamente razonable.

4.1.3. El umbral de decisión como responsable del aprendizaje

La alternativa que ha sido más explotada a nivel teórico, y que también es la base de este capítulo, es que son los umbrales de decisión L_1, L_2 las variables dinámicas que constituyen

la base del aprendizaje perceptual [17]³. En el artículo [5], y en la misma línea de lo descrito en la sección 1.4, es decir, considerando la toma de decisiones en un contexto psicológico o estadístico pero no necesariamente neurobiológico, se considera al umbral de decisión como el resultado de las condiciones experimentales. Estas condiciones pueden relacionarse con algún sesgo motivacional (por ejemplo, si alguna respuesta está asociada a una mayor recompensa) o a una mayor probabilidad de ocurrencia de una alternativa por sobre la otra. En cuanto a la posible contraparte neural se hipotetiza:

”we propose that in the brain, the threshold may be controlled by neural circuits that calculate the rate of reward. [5, pp.299]”

En la figura 4.2 se muestra cómo la *reward rate* es una función del umbral de decisión, y que existe un umbral tal que la tasa de recompensa alcanza su valor máximo. Dicha

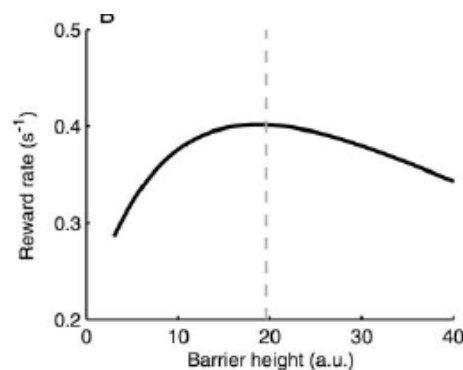


Figura 4.2: Reward rate como función del umbral de decisión (barrier height). Resultados de simulación obtenidos de [5]

hipótesis es posteriormente explotada de manera teórica en [12]. En un artículo de modelamiento computacional, y en una línea muy similar a la de [16] (asociado al modelo de espigas presentado en la sección 3.1) se muestra cómo el umbral de decisión podría ser el resultado de un circuito neuronal. Este mecanismo es esquematizado en la figura 4.3. Específicamente, en 4.3a se muestran las conexiones entre las distintas componentes del circuito: desde arriba hacia abajo, el input sensorial es provisto por las neuronas MT, las que alimentan a las neuronas corticales (LIP)⁴. Así, la parte superior del dibujo 4.3a representa la misma estructura que la figura 3.7 mostrada en el modelo de espigas. Se observan conexiones recíprocas entre este nivel cortical y niveles inferiores, que corresponden a estructuras cerebrales subcorticales. Una simulación del mecanismo que da lugar al umbral de decisión se muestra en la figura 4.3b. Explicado en términos sencillos, al alcanzar un valor determinado, el umbral, la actividad de algún grupo neuronal cortical se produce una gran descarga súbita en el nivel subcortical del colículo superior (en la figura 4.3a corresponde al nivel más bajo), el que se piensa está encargado de comandar acciones motoras. Esa actividad súbita a su vez actúa sobre el nivel cortical, reseteando el sistema.

³lo denominamos perceptual porque estamos en el contexto del movimiento de puntos, una tarea de discriminación perceptual

⁴La palabra cortical se usa para referirse a las estructuras ubicadas en la corteza cerebral. Tanto las áreas MT y LIP se encuentran en la corteza, sin embargo en lo sucesivo nos referiremos sólo a las neuronas LIP como las corticales

El valor exacto de actividad cortical necesaria para que se produzca este fenómeno queda entonces determinado por los parámetros del circuito.

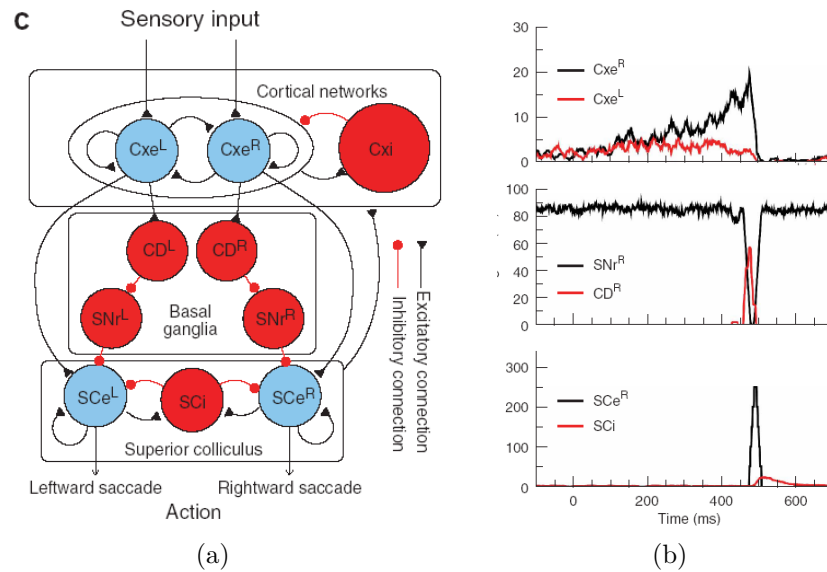


Figura 4.3: Mecanismo neuronal teórico para el umbral de decisión. Obtenido de [12]

En ese mismo artículo se explora cómo los pesos de las conexiones entre las distintas estructuras involucradas pueden modular el valor del umbral. En la figura 4.4 se muestra cómo las conexiones entre la corteza y los niveles inferiores pueden modular este valor. Se observa que el peso (o eficiencia) de las conexiones entre la corteza y el colículo superior prácticamente no afectan el umbral de decisión, contrariamente a lo que sucede con el peso de las conexiones entre la corteza y la estructura subcortical del núcleo caudado ⁵ (nivel medio de la figura 4.3a).

Entonces, el peso de las conexiones cortico-caudales modifican el umbral de decisión, el que a su vez modifica la *reward rate*. Debido a que la función mostrada en 4.4 (color negro) es monótona decreciente, se concluye (mirando también la figura 4.2) que hay un único peso que maximiza la *reward rate*.

Ahora se puede retomar un idea previamente enunciada, la de los pesos de las conexiones como la base del aprendizaje: vemos que finalmente en este modelo teórico los cambios en el umbral de decisión están medidados por cambios en pesos de conexiones en la red, por lo tanto, el concebir el aprendizaje sobre la base de cambios dinámicos en el umbral de decisión está en línea con la corriente principal. Cabe en este momento preguntarse: ¿qué mecanismos biológicos pueden ser la base de cambios en los pesos de las conexiones cortico-caudales, y así, y de acuerdo a este modelo, del umbral?

En el artículo [12] se concluye

”Our finding of tunable threshold through cortico-striatal synapses is notable especially in light of the fact that modification of cortico-striatal connections

⁵Específicamente, el núcleo caudado es un conjunto de neuronas de naturaleza similar, y con forma de C, ubicado en los ganglios de la base

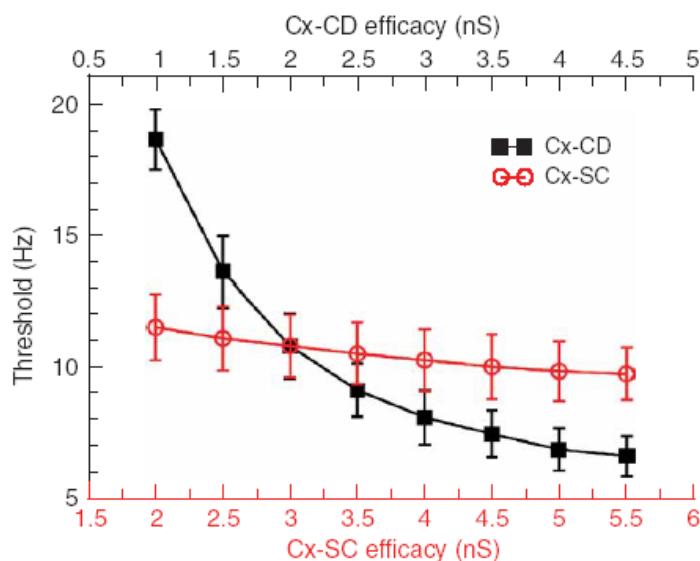


Figura 4.4: Cambios en los pesos de las conexiones cortico-caudales (Cx-CD) y cortico-coliculares (Cx-SC) producen cambios en el umbral de decisión. Obtenido de [12]

is strongly modulated by reward signals mediated by the dopamine system”⁶
[12, p. 962]

La importancia de ese párrafo es que el sistema dopaminérgico es el que está involucrado en mecanismos de plasticidad sináptica, específicamente de las denominadas *Long Term Potenciation* y *Long Term Depression* [9, 7]. Para los fines de este trabajo, basta saber que estos mecanismos permiten rápidas variaciones en los pesos de las conexiones relevantes. Estas variaciones tienen como objetivo proveer al *subject* la mayor recompensa posible de su entorno, y responder rápidamente ante cambios en éste [18] (de ahí, que el sistema dopaminérgico sea también llamado ”de recompensa”). Con esto, los autores también señalan

”a mechanism for tunable threshold can be implemented by the cortico-striatal synaptic plasticity[...] more specifically, the activated cortico-striatal synapses increase their strenght by a small amount in rewarded trials and reduce it in error trials. Such cortico-striatal synaptic modifications in turn alter choice behavior and thus the reward rate itself”[12, p. 962]

Es decir, se hipotetiza una regla biológicamente implementable mediante la cuál los pesos de las conexiones son modificados con el objetivo de optimizar la *reward rate*.

El objetivo de la sección 4.2 es mostrar explícitamente un mecanismo (o regla) que esté en línea con todas las ideas que han sido presentadas

4.2. Un mecanismo para el aprendizaje perceptual

En 4.1.1 se mencionaron los fenómenos cognitivos específicos que en el contexto de este trabajo quedarán englobados bajo el término aprendizaje. Posteriormente, en 4.1.2 se

⁶La conexión *cortico-striatal* es la misma que en esta memoria se denomina cortico-caudal.

propuso que una manera razonable de entender el concepto de aprendizaje en la toma de decisiones es mediante un proceso de optimización. Finalmente, en 4.1.3 se dieron argumentos basados en la literatura que apoyan la idea de que la modificación de los umbrales de decisión constituye un mecanismo biológicamente implementable para dar cuenta de aquel proceso de optimización.

El objetivo de esta sección es proponer explícitamente aquel mecanismo que modifica los umbrales de decisión con el objetivo de optimizar una determinada función ⁷. Se hará un análisis matemático riguroso de las propiedades de convergencia del algoritmo. En la sección 4.3 se mostrará que mediante esta modificación de los umbrales se puede dar cuenta del aprendizaje como fue definido en 4.1.1.

4.2.1. Preliminares: algoritmos de aproximación estocástica y resultados de convergencia

En esta subsección se utilizará un tipo particular de los llamados algoritmos de optimización estocástica. En estos algoritmos se tiene una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de la que se pretende encontrar $\bar{\theta}$ de manera que $f(\bar{\theta}) = 0$. Existen procedimientos recursivos estándar para encontrar raíces de f , pero ahora, como se está en un contexto estocástico, estas recursiones resultan distintas. La aleatoriedad es incluida al asumir que f es de la forma $f(\theta) = \mathbb{E}(Y|\theta)$ donde Y es una variable aleatoria que depende del parámetro θ . El algoritmo específico que se utilizará es el de Robbin-Monro [15]. En su versión original se asume que f es una función de un solo parámetro y además es creciente. La recursión puede plantearse como

$$\theta_{n+1} = \theta_n - Y_n \epsilon_n \quad (4.4)$$

Las cantidades Y_n son aleatorias tales que $\mathbb{E}(Y_n) = f(\theta_n)$ y la sucesión ϵ_n satisface

$$\sum_n \epsilon_n = \infty \quad \sum_n \epsilon_n^2 < \infty$$

así, una elección razonable es $\epsilon_n = \frac{K}{n}$. A pesar de que existen algoritmos eventualmente más eficientes, la ventaja de la recursión (4.4) es que el valor de θ se actualiza sobre la base un sólo muestreo (Y_n). La conveniencia de lo anterior será más clara cuando se plantee el algoritmo en el contexto de este trabajo.

La pregunta fundamental relativa al funcionamiento de los algoritmos de aproximación estocástica es qué tipo de convergencia satisface la secuencia $\{\theta_n\}_n$. Aquello dependerá, además de la condición sobre ϵ_n , de las particularidades de la función f y la sucesión Y_n . Por ejemplo, si Y_n es acotada y f es de clase C^1 entonces hay convergencia casi segura a $\bar{\theta}$. El mecanismo que se propondrá implementa este algoritmo para el parámetro $\theta = (L_1, L_2)$. Por lo tanto, es necesario conocer un resultado de convergencia para el caso multidimensional, el que será ampliamente explotado en lo que resta de este capítulo. Para enunciar ese resultado, consideramos primero la siguiente recursión, una ligera modificación de (4.4)

$$\theta_{n+1} = \Pi_D(\theta_n + Y_n \epsilon_n) \quad (4.5)$$

⁷Debe advertirse que acá el término optimización es usado en un sentido más bien vago, pues realmente no se resolverá un problema de optimización, ya que esta modificación de los umbrales no conduce al punto que maximiza o minimiza la función objetivo. Sin embargo, conviene usar ese término por el bien de la exposición

Donde Π_D es la proyección sobre el conjunto D , que podemos suponer un hipercubo. El objetivo de proyectar en Π_D es evitar que el parámetro θ fluctúe, debido al azar, en valores donde no debería. Afortunadamente la teoría de convergencia se tiene también en este caso.

Los resultados y definiciones se enunciarán de la manera más breve posible y evitando sobrecargar la notación. Obviamente se asume un contexto probabilista, donde todas las variables están definidas en un mismo espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. El lector interesado en una exposición más rigurosa puede consultar los capítulos 4 y 5 de [10].

La primera definición relevante es la de ecuación diferencial ordinaria proyectada

Definición 4.2.1. Ecuación diferencial ordinaria proyectada (EDOP)

Sea $D = \Pi_{i=1}^n [a_i, b_i]$ y para $x \in D$ consideramos el conjunto $C(x)$ definido como el singleton 0 si x está en el interior de D y si $x \in \partial D$ como el cono convexo infinito generado por las normales externas a las caras a las que x pertenece. Definimos para f continua la EDOP dada por la dinámica

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + z(t) \quad z(t) \in -C(x(t)) \quad (4.6)$$

$z(t)$ es tomado como el vector de norma mínima necesario para que $x(t) \in D, \forall t$

Otro concepto importante es el de conjunto límite, el cuál en general tiene sentido para sistemas dinámicos más generales que los dados por el flujo de soluciones de una ecuación diferencial.

Definición 4.2.2. Conjunto límite

Para $x_0 \in D$ definimos un conjunto límite a partir de la solución $x(s)$ de la ecuación (4.6) con condición inicial x_0 , de la siguiente manera

$$L(x_0) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\{x(s) : s \geq t\}}$$

Con las definiciones anteriores se puede ya enunciar el teorema

Teorema 4.2.3. (Teoremas 5.2.1 de [10]) *Supongamos que para la ecuación recursiva (4.5) se verifican las siguientes condiciones:*

- (C1) $\sup_n \mathbb{E}(|Y_n|^2) < \infty$
- (C2) $\mathbb{E}(Y_n) = f(\theta_n)$
- (C3) $\sum_n \epsilon_n = \infty$ y $\sum_n \epsilon_n^2 < \infty$
- (C4) f es continua

Entonces casi seguramente la secuencia θ_n converge al algún conjunto límite de la ecuación (4.6), es decir, existe $\Omega' \subset \Omega$ con $\mathbb{P}(\Omega') = 1$ tal que si $\omega \in \Omega'$ entonces existe $x_0 \in D$ tal que

$$\text{dist}(\theta_n(\omega), L(x_0)) \rightarrow 0$$

4.2.2. El mecanismo

Se considera en lo sucesivo el modelo para la toma de decisiones del capítulo 3. Con todos los parámetros fijos, (exceptuando L_1, L_2 . Los valores usados están en la entrada del algoritmo 2, pero se debe mencionar que el mayor cambio respecto a lo realizado en el capítulo 3 es que se considera la condición inicial $X(0) = (0, 0)$. La elección arbitraria de esta variable es solamente para facilitar los cálculos pero se debe destacar que se obtienen resultados equivalentes si se consideran niveles de actividad inicial mayores a cero, como en el capítulo 3, donde éstos se escogían como la media de la distribución estacionaria asociada al proceso en ausencia de input.

En dicho modelo se insertará un mecanismo cuyo fin es producir cambios en los umbrales de decisión, que serán el resultado del aprendizaje. El contexto es una sesión experimental con N trials, donde las cantidades L_1^n, L_2^n representan los valores de los umbrales de decisión al comienzo del trial $n \leq N$. Las ecuaciones recursivas para L_1^n, L_2^n buscan actualizar los umbrales sobre la base de la nueva información adquirida durante el trial $n - 1$. Esta información es el tiempo de decisión y la precisión. En otras palabras, se asume que el sistema (o individuo) tiene pleno conocimiento del tiempo exacto de su decisión anterior, y de si la respuesta que dio fue un error o un acierto, lo que implica también el conocimiento de la dirección del movimiento de puntos.

Para explicitar la regla de actualización, primero se considera la sucesión (I_1^n, I_2^n) de inputs. Esta secuencia la supondremos aleatoria. La aleatoriedad permite reflejar distintas condiciones experimentales, por ejemplo, distintos valores de coherencia, a través de cambios en la cantidad $|I_1^n - I_2^n|$, o bien, el lugar donde está la respuesta correcta, lo que queda reflejado en si $I_1^n > I_2^n$ ó $I_2^n > I_1^n$.

Para representar los tiempos de decisión y la precisión en el trial n consideramos las cantidades

$$\tau_1^n = \inf\{t \geq 0 : x_1(t) = L_1^{n-1}\}, \tau_2^n = \inf\{t \geq 0 : x_2(t) = L_2^{n-1}\}, \tau^n = \min(\tau_1^n, \tau_2^n)$$

que son los tiempos de decisión, y por último

$$p^n = \mathbb{1}_{I_1^n > I_2^n} \mathbb{1}_{\tau_1^n = \tau^n} + \mathbb{1}_{I_1^n < I_2^n} \mathbb{1}_{\tau_2^n = \tau^n}$$

que es la precisión ⁸ en el trial n .

En el algoritmo 2 se muestra la recursión que permite determinar L_1^n, L_2^n . Este puede ser expresado concisamente a través de las ecuaciones (4.7),(4.8).

$$L_1(i+1) = \max\left(L_1(i) + \frac{1}{i} \left((1 - Z_1^{i+1}) \mathbb{1}_{I_2^{i+1} > I_1^{i+1}} \mathbb{1}_{\tau^{i+1} = \tau_1^{i+1}} - Z_1^{i+1} \tau^{i+1} \right), 0\right) \quad (4.7)$$

$$L_2(i+1) = \max\left(L_2(i) + \frac{1}{i} \left((1 - Z_2^{i+1}) \mathbb{1}_{I_1^{i+1} > I_2^{i+1}} \mathbb{1}_{\tau^{i+1} = \tau_2^{i+1}} - Z_2^{i+1} \tau^{i+1} \right), 0\right) \quad (4.8)$$

Es importante notar que a pesar de la dependencia en $i + 1$ de los términos multiplicados por el factor $1/i$ de las ecuaciones (4.7), (4.8), éstos son esencialmente funciones de $L(i)$ y de términos aleatorios que no dependen de ningún $L(i)$. Es decir, hay dependencia en

⁸Notar que en este caso no nos referimos a la precisión como a un promedio (esperanza), sino como a la variable aleatoria que codifica si la respuesta fue errónea o correcta. Se usará la palabra indistintamente en ambos contextos pero es importante entender la diferencia

Algoritmo 2 Mecanismo de aprendizaje para los umbrales L_1^n, L_2^n

Entrada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma = 0,5, X(0) = (0, 0)$$

$N > 0, \quad L, \alpha,$
 Secuencia $I_1^n, I_2^n, n \leq N$

1: L_1^0, L_2^0 i.i.d, $L_1^0, L_2^0 \sim \text{Uniforme}(0, L)$
2: $Z_1(i), Z_2(i), i = 1 \dots N$ i.i.d, $Z_1(i), Z_2(i) \sim \text{Bernoulli}(\alpha)$
3: **for** $i = 1 \dots N$ **do**
4: Simular variables $\tau_1^i, \tau_2^i, \tau^i, p^i$ con el algoritmo 1 del capítulo 3 con los parámetros $A, \sigma, X(0), I = (I_1^i, I_2^i)$ y $\delta = 0,01$
5: **if** $Z_1(i) = 1$ **then**
6: $L_1(i) = L_1(i - 1) - \frac{1}{i} \tau^i$
7: **else**
8: **if** $I_2^i > I_1^i$ **then**
9: $L_1(i) = L_1(i - 1) + \frac{1}{i} (1 - p^i)$
10: **else**
11: $L_1(i) = L_1(i - 1)$
12: **end if**
13: **end if**
14: **if** $Z_2(i) = 1$ **then**
15: $L_2(i) = L_2(i - 1) - \frac{1}{i} \tau^i$
16: **else**
17: **if** $I_1^i > I_2^i$ **then**
18: $L_2(i) = L_2(i - 1) + \frac{1}{i} (1 - p^i)$
19: **else**
20: $L_2(i) = L_2(i - 1)$
21: **end if**
22: **end if**
23: $L_1(i) = \text{máx}(L_1(i), 0), L_2(i) = \text{máx}(L_2(i), 0)$
24: **end for**
Salida: $(L_1^i, L_2^i, p^i, \tau^i)_{\{i=1 \dots N\}}$

$L(i)$ pero no en $L(k)$ con $k \neq i$

El algoritmo 2 se puede interpretar como sigue: se parte en una situación donde los parámetros L_1^0, L_2^0 tienen una distribución uniforme entre 0 y un valor L . Estas cantidades son independientes entre sí, y la aleatoriedad representa el desconocimiento total previo a la realización de una tarea. En el primer *trial* de la tarea el individuo toma una decisión con los umbrales dados por L_1^0, L_2^0 , donde se obtiene un muestreo de las variables τ^1, p^1 , las que además de las condiciones aleatorias dadas por L^0, L^1 y la aleatoriedad misma del proceso de decisión (σ) dependen también del azar de las condiciones externas dadas por I_1^1, I_2^1 . Con esas variables el individuo modifica sus umbrales de decisión de acuerdo la siguiente regla, que se aplica en general al comienzo del *trial* n : en cada acumulador de evidencia y de manera independiente se tira una moneda con probabilidad α de salir cara. Si ese es el caso, en ese acumulador se bajará el umbral asociado. Si por el contrario sale sello entonces se subirá el umbral, pero sólo en el caso en que en el *trial* $n - 1$ haya habido un error ($p^i = 0$) y que ese error se haya debido a que el umbral correspondiente estaba en un valor demasiado bajo. Por ejemplo, si la moneda del acumulador 1 sale sello y en el *trial* $n - 1$ hubo un error debido a que el movimiento de puntos favorecía al acumulador 2 pero se dio la respuesta 1 ($I_1^{n-1} < I_2^{n-1}, \tau^{n-1} = \tau_1^{n-1}$), entonces el umbral 1 subirá su nivel. En este punto es conveniente aclarar que las tres fuentes de aleatoriedad existentes; a saber, el ruido del proceso de decisión, los umbrales iniciales, los lanzamientos de moneda y la secuencia de inputs externos son además todas independientes entre ellas.

Las cantidades exactas en la que suben o bajan estos umbrales son inversamente proporcionales al *trial* y directamente proporcionales al tiempo de decisión anterior en el caso que algún umbral descienda. Si los umbrales suben, la cantidad en la que lo hacen sólo depende del número del *trial*. Esta elección, a pesar de parecer arbitraria, se justifica porque permite asegurar la convergencia, como se verá en 4.2.3.

El rol del parámetro α debe ser explicado en detalle: éste representa la predilección del individuo hacia la alternativa de responder rápido, en desmedro de responder de manera precisa. Así, $\alpha = 1$ representa la opción de un individuo de que su tiempo de decisión sea 0, independiente de los eventuales errores que se podrán cometer. Por el contrario, si $\alpha \approx 0$ corresponde al caso en el que el individuo quiere responder correctamente, independiente del tiempo que esto pudiera tardarle. Casos intermedios entre $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$ pueden ser interpretados como una mayor o menor predilección por las alternativas de responder rápido o responder precisamente. Sin embargo, aunque sea tentador, no tiene sentido decir por ejemplo que $\alpha = 0.5$ corresponde a tener la misma preocupación por la rapidez que por la precisión, a pesar de que en el algoritmo esto signifique que la mitad de las veces se privilegie disminuir el umbral en pos del tiempo y la otra mitad aumentarlo en pos de la precisión. La razón es que la precisión y el tiempo de reacción no son unidades a priori comparables. De hecho, los tiempos de reacción pueden tomar valores arbitrariamente altos pero la precisión siempre es menor que uno.

Ahora que el algoritmo ha sido explicitado corresponde preguntarse cuál es la convergencia de éste. En la siguiente subsección se mostrará un resultado de convergencia casi segura. Lamentablemente, la demostración deberá hacerse de manera poco rigurosa; hay varios detalles que pueden parecer intuitivos pero cuyas pruebas demandarían un trabajo que está fuera del alcance de esta tesis. Las simulaciones computacionales se convierten así en un gran aliado al momento de enunciar estos resultados, pues permiten comprobar la veracidad de éstos aunque en rigor sean sólo conjeturas.

4.2.3. Análisis del algoritmo

Teorema 4.2.4. *Sea $\alpha \in (0, 1]$. Si los vectores aleatorios (I_1^n, I_2^n) son i.i.d.⁹ (e independientes del resto de las fuentes de aleatoriedad) y $\mathbb{P}(I_1^n = I_2^n) = 0$, entonces existen constantes (\bar{L}_1, \bar{L}_2) de manera que casi seguramente*

$$(L_1^n, L_2^n) \rightarrow (\bar{L}_1, \bar{L}_2)$$

Esquema de la demostración: La estrategia consiste en usar el teorema 4.2.3. Para eso, primero tomamos las variables aleatorias $(I_1, I_2) \sim (I_1^n, I_2^n)$ y denotamos $\beta = \mathbb{P}(I_1 < I_2)$. Para cada par de $L_1, L_2 \geq 0$ consideramos las variables aleatorias

$$\tau(L_1, L_2), \tau_1(L_1, L_2), \tau_2(L_1, L_2)$$

obtenidas a través del muestreo del modelo de decisión considerando los umbrales de decisión L_1, L_2 , y inputs I_1, I_2 . Es importante hacer explícita la dependencia de dichas variables, y de sus valores esperados, en L_1, L_2 . Aunque no se escribe explícitamente, se debe notar también la dependencia de las variables en I_1, I_2 . Con eso, definimos las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} f_1(L_1, L_2) &= (1 - \alpha)\beta - (1 - \alpha)\mathbb{P}(\tau(L_1, L_2) = \tau_2(L_1, L_2), I_1 < I_2) - \alpha\mathbb{E}(\tau(L_1, L_2)) \\ f_2(L_1, L_2) &= (1 - \alpha)(1 - \beta) - (1 - \alpha)\mathbb{P}(\tau(L_1, L_2) = \tau_1(L_1, L_2), I_1 > I_2) - \alpha\mathbb{E}(\tau(L_1, L_2)) \end{aligned}$$

Sean ahora Z_1, Z_2 v.a. i.i.d Bernoulli (α) y además independientes de las variables aleatorias I_1, I_2 y del movimiento browniano asociado al proceso de decisión. Notando la relación

$$1 = \mathbb{1}_{\tau(L_1, L_2) = \tau_1(L_1, L_2)} + \mathbb{1}_{\tau(L_1, L_2) = \tau_2(L_1, L_2)} \quad \text{c.s. si } (L_1, L_2) \neq (0, 0) \quad (4.9)$$

se pueden obtener nuevas expresiones para f_1, f_2 (4.10), (4.11).

$$f_1(L_1, L_2) = \mathbb{E}((1 - Z_1)\mathbb{1}_{I_2 > I_1}\mathbb{1}_{\tau(L_1, L_2) = \tau_1(L_1, L_2)} - Z_1\tau(L_1, L_2)) \quad (4.10)$$

$$f_2(L_1, L_2) = \mathbb{E}((1 - Z_2)\mathbb{1}_{I_1 > I_2}\mathbb{1}_{\tau(L_1, L_2) = \tau_2(L_1, L_2)} - Z_2\tau(L_1, L_2)) \quad (4.11)$$

Ahora se puede aplicar el teorema 4.2.3. Definamos la secuencia de variables aleatorias $Y_n = (Y_1^n, Y_2^n, Y^n)$ mediante

$$Y_1^n(L_1^n, L_2^n) = (1 - Z_1^{n+1})\mathbb{1}_{I_2^{n+1} > I_1^{n+1}}\mathbb{1}_{\tau^{n+1}(L_1^n, L_2^n) = \tau_1^{n+1}(L_1^n, L_2^n)} - Z_1^{n+1}\tau^{n+1}(L_1^n, L_2^n)$$

$$Y_2^n(L_1^n, L_2^n) = (1 - Z_2^{n+1})\mathbb{1}_{I_1^{n+1} > I_2^{n+1}}\mathbb{1}_{\tau^{n+1}(L_1^n, L_2^n) = \tau_2^{n+1}(L_1^n, L_2^n)} - Z_2^{n+1}\tau^{n+1}(L_1^n, L_2^n)$$

Donde los Z_1^n, Z_2^n son una sucesión i.i.d de Bernoulli(α), como en el algoritmo 4.8. Luego, de (4.10), (4.11) se deduce que

$$f_1(L_1^n, L_2^n) = \mathbb{E}(Y_1^n), f_2(L_1^n, L_2^n) = \mathbb{E}(Y_2^n)$$

Consideramos entonces la función $f = (f_1, f_2)$. Para obtener la convergencia deseada basta, en primer lugar, observar que las ecuaciones (4.7), (4.8) corresponden justamente al

⁹Puede haber sin embargo dependencia entre I_1^n y I_2^n . De hecho, suponemos que estas cantidades se pueden obtener mediante el muestreo de la variable aleatoria $V_n = |I_1^n - I_2^n|$ seguido de una variable aleatoria independiente a V_n , que indica si $I_1^n > I_2^n$ o $I_2^n > I_1^n$

esquema numérico propuesto por la ecuación (4.5) considerando f, Y_n como fueron recién definidos y $\theta^n = (L_1^n, L_2^n)$, $\epsilon_n = 1/n$ y $D = \mathbb{R}_+^2$. Luego, en virtud del teorema 4.2.3, sólo resta demostrar que f satisface **C1-C4**, y que cualquier conjunto límite de la ecuación (4.6) es el singleton (\bar{L}_1, \bar{L}_2) .

Es en esta parte donde sólo hay en este instante algunas ideas y demostraciones incompletas. Las condiciones **C2, C3** se satisfacen trivialmente. La condición **C1** no es fácil de verificar, pues a priori las cantidades τ^n podrían ser ilimitadamente grandes. Se propone como posible solución considerar esquemas donde las cantidades L_1, L_2 sean truncadas también superiormente, acotando así los momentos de orden dos de τ^n (es fácil demostrar que si L es fijo entonces efectivamente τ^n tiene su segundo momento finito), para luego levantar dicha restricción, considerando una sucesión de recursiones asociadas a proyecciones sobre dominios D_n convergiendo a \mathbb{R}_+^2 . La condición **C4** de hecho no se verifica. Esto, porque para $L_1, L_2 > 0$ se tienen las igualdades

$$f(L_1, 0) = (0, (1 - \alpha)(1 - \beta)), f(0, L_2) = ((1 - \alpha)\beta, 0), f(0, 0) = (0, 0)$$

Lo que sucede cerca de $(0, 0)$ debe ser tomado con precaución. En efecto, la ecuación (4.9) es válida sólo para $(L_1, L_2) \neq (0, 0)$ porque en caso contrario se obtiene $1 = 2$. Lo anterior hace suponer que, o bien esa discontinuidad puede ser arreglada modificando ligeramente f (y el algoritmo), o que simplemente la hipótesis de continuidad podría ser violada sin afectar la conclusión del teorema. Esta conjetura toma más fuerza al observar las simulaciones computacionales preliminares, de las que se concluye que raramente ocurre que ambos umbrales decaigan a cero, pero incluso si aquello sucede, estos vuelven a valores positivos rápidamente. La continuidad de f para puntos distintos a $(0, 0)$ es bastante intuitiva, pero una demostración rigurosa requeriría usar herramientas avanzadas del cálculo estocástico. Para probar que todos los conjuntos límites de (4.6) son el mismo singleton (\bar{L}_1, \bar{L}_2) procedemos, en primer lugar, demostrando la existencia de un único punto estacionario para la ecuación (4.6). Luego se debería demostrar que el sistema es globalmente asintóticamente estable, es decir, todas las trayectorias convergen a ese punto estacionario. No se dispone de demostración para ninguno de esos dos puntos, sin embargo se debe mencionar que un hecho sin duda clave para probar la estabilidad es que f_1 es una función decreciente en L_1 y f_2 es decreciente en L_2 . Luego, es esperable que estos puntos sean estables. De hecho, si se tuviera que f_1, f_2 son diferenciables (es razonable pensar que ese es el caso) la estabilidad sería trivial.

Asumiendo válido el teorema 4.2.4 cabe preguntarse qué propiedades satisface el punto (\bar{L}_1, \bar{L}_2) . Como se vio en el esquema de la demostración, éste debe corresponder a un punto estacionario de la ecuación (4.6). Obviando el término $z(t)$ (debido a que buscamos puntos en el primer cuadrante), esto significa imponer las ecuaciones (4.12), (4.13)

$$(1 - \alpha)\mathbb{P}(\tau(\bar{L}_1, \bar{L}_2) = \tau_2(\bar{L}_1, \bar{L}_2), I_1 < I_2) + \alpha\mathbb{E}(\tau(\bar{L}_1, \bar{L}_2)) = (1 - \alpha)\beta \quad (4.12)$$

$$(1 - \alpha)\mathbb{P}(\tau(\bar{L}_1, \bar{L}_2) = \tau_1(\bar{L}_1, \bar{L}_2), I_1 > I_2) + \alpha\mathbb{E}(\tau(\bar{L}_1, \bar{L}_2)) = (1 - \alpha)(1 - \beta) \quad (4.13)$$

Mediante álgebra sencilla, se deduce que

$$\mathbb{P}(\tau(\bar{L}_1, \bar{L}_2) = \tau_1(\bar{L}_1, \bar{L}_2)) = 1 - \beta \quad (4.14)$$

$$\mathbb{P}(\tau(\bar{L}_1, \bar{L}_2) = \tau_2(\bar{L}_1, \bar{L}_2)) = \beta \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\tau(\bar{L}_1, \bar{L}_2)) &= \frac{1 - \alpha}{\alpha} \mathbb{P}(\tau(\bar{L}_1, \bar{L}_2) = \tau_1(\bar{L}_1, \bar{L}_2), I_1 < I_2) \quad (4.16) \\ &= \frac{1 - \alpha}{\alpha} \mathbb{P}(\tau(\bar{L}_1, \bar{L}_2) = \tau_1(\bar{L}_1, \bar{L}_2) | I_1 < I_2) \beta \end{aligned}$$

La interpretación de estas ecuaciones se dará en las secciones 4.3 y 4.4. Se argumentará que las propiedades que gozan \bar{L}_1, \bar{L}_2 implican que el algoritmo escogido da las convergencias que en este contexto son útiles. Por el momento basta notar (ecuaciones (4.14),(4.15)) que se han encontrado expresiones explícitas para la probabilidad de elegir una alternativa, y más aún, éstas dependen sólo de β . Lamentablemente, no es el caso del valor esperado del tiempo τ (ecuación (4.16)), pues la probabilidad que ahí aparece depende de α y β de manera desconocida. Sin embargo, algunos casos particulares pueden ser analizados más profundamente. Si $\beta = 0.5$ y suponemos que I_1^n e I_2^n tienen la misma distribución, entonces es posible aprovechar la simetría del problema. En tal caso debe tenerse $\bar{L}_1 = \bar{L}_2$ (si no, se contradicen las ecuaciones (4.14),(4.15)). Otro análisis sencillo corresponde a los casos $\beta = 0$ ó $\beta = 1$. Debe tenerse que casi seguramente $\tau(\bar{L}_1, \bar{L}_2) = \tau_1(\bar{L}_1, \bar{L}_2) = 0$ (si $\beta = 0$) y $\tau(\bar{L}_1, \bar{L}_2) = \tau_2(\bar{L}_1, \bar{L}_2) = 0$ (si $\beta = 1$). Esas igualdades casi seguras implican que $\bar{L}_1 = 0$ (si $\beta = 0$) y $\bar{L}_2 = 0$ (si $\beta = 1$), aunque los valores de la variable restante (\bar{L}_2 y \bar{L}_1) no puedan ser calculados de manera sencilla.

Debe destacarse que las ecuaciones (4.14) y (4.15) son coherentes con lo que fue sugerido en la sección 1.4, esto es, que los umbrales de decisión deberían reflejar las probabilidades a priori de ocurrencia los distintos eventos (en este caso $I_1^n > I_2^n$ y $I_1^n < I_2^n$). La última observación respecto a la convergencia es que ésta implica la convergencia de los tiempos de decisión ($T(L_1^n, L_2^n)$) y la precisión ($\rho(L_1^n, L_2^n)$). La demostración se omite, pero intuitivamente, la convergencia se tiene porque éstas cantidades son valores esperados de variables aleatorias que dependen de I_1^n, I_2^n , que son i.i.d, y además son continuas funciones continuas en L_1, L_2 . Al converger los umbrales a una constante, en el límite las cantidades T y ρ son simplemente $T(\bar{L}_1, \bar{L}_2)$.

En la sección 4.3 se mostrarán los resultados provenientes de la simulación del algoritmo 2, con el objetivo de comprobar cómo a través de él se puede dar cuenta del aprendizaje como fue entendido en 4.1.1.

4.3. Resultados

Se comienza esta sección con algunas simulaciones elementales cuyo objetivo es ilustrar el funcionamiento básico del algoritmo 2. En la figura 4.5 se muestran dos simulaciones de la evolución temporal (*trials*) de los umbrales de decisión, escogiendo $L_1^0 = L_2^0 = 2$ ¹⁰. Las variables se eligieron de modo que I_1^n, I_2^n tomaran dos valores posibles, 4 y 5, con $\mathbb{P}(I_1^n = I_2^n) = 0$, y además se tomó $\alpha = 0.2, \beta = 0.5$. Es decir, la secuencia I_1^n, I_2^n puede ser simulada simplemente a través de Bernoullis independientes de parámetro β (en este caso 0.5). Así, con probabilidad 0.5 $I_1^n = 4, I_2^n = 5$ y con probabilidad 0.5 $I_1^n = 5, I_2^n = 4$. Se observa en la figura 4.5 que efectivamente se tiene la convergencia casi segura de los umbrales de decisión a la constante (\bar{L}_1, \bar{L}_2) . A pesar de que se tiene la convergencia, ésta puede ser extremadamente lenta. En la simulación, se consideran $N = 100.000$ trials, pero se observa que al comienzo (primeros miles de trials) los umbrales se encuentran distantes, e incluso en el *trial* 100.000 los umbrales se mantienen a una distancia considerable. Se comprueba también en la figura 4.5 que los dos umbrales convergen al mismo valor (aunque eso no sea aún del todo claro en la figura, debido a la lentitud de la convergencia).

Esta lentitud en la convergencia puede apreciarse también en la figura 4.6 donde se

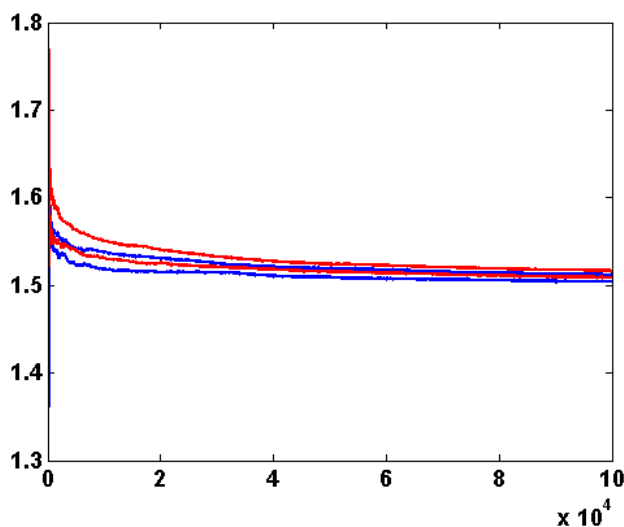


Figura 4.5: Umbral de decisión como función del *trial* (hasta 100.000) para dos simulaciones. Cada simulación está en un color distinto, y líneas distintas del mismo color representan a los dos umbrales).

muestran 2000 simulaciones durante los primeros $N = 100$ trials (sólo se muestran las secuencias L_1^n). Es evidente también la gran variabilidad que existe en los umbrales, sobre todo en los primeros trials.

En lo sucesivo se mostrarán los resultados que demuestran que este modelo permite dar cuenta de fenómenos de aprendizaje, como fueron entendidos en las subsecciones 4.1.1 y 4.1.2. Estos resultados pueden ser clasificados dentro de tres tipos:

- Convergencia a un equilibrio entre tiempo de decisión y precisión de acuerdo a un criterio pre-establecido (ver 4.1.2)

¹⁰En general los umbrales iniciales son escogidos con distribución uniforme, pero en algunas simulaciones estas cantidades son elegidas iguales, con el fin de dar una mejor exposición

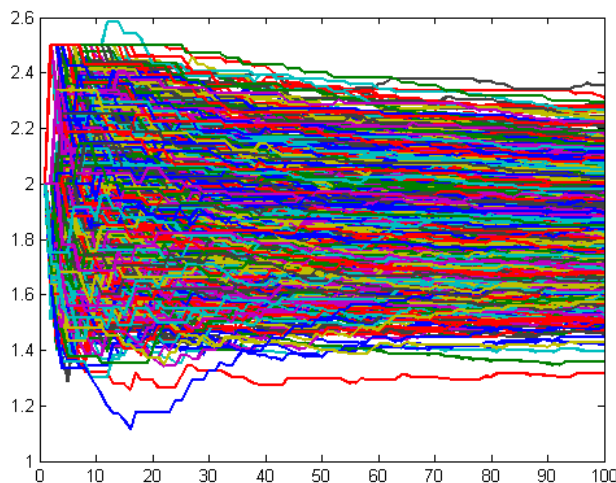


Figura 4.6: Umbral de decisión como función del *trial* para 2000 simulaciones

- Mejoras en los tiempos de reacción y la precisión como producto de la práctica (ver 4.1.1)
- Adaptación a un entorno cambiante (ver 4.1.1)

4.3.1. Convergencia a un equilibrio de acuerdo a un criterio pre-establecido

La figura 4.7 muestra al de decisión T y la precisión ρ como funciones de un único umbral de decisión, es decir, cuando se asume que $L_1 = L_2 = L$. El gráfico fue creado usando los mismos parámetros I_1, I_2 y β , pero no se ejecutó el algoritmo 2, sino que sólo se muestreó el modelo de decisión para distintos valores de L . Específicamente, se consideraron todos los valores de $L = 0.1k, k = 1 \dots 50$. Para cada uno de esos valores de L , T y ρ fueron estimados usando montecarlo con 10.000 simulaciones. En la figura 4.7a se observa que T es una función creciente en $L, T(L = 0) = 0$, y aunque no se provea de una demostración rigurosa, es claro que $T(L = \infty) = \infty$. En la figura 4.7b se observa que ρ también es una función creciente en L , con $\rho(L = 0) = 0.5$ y $\rho(L = \infty) = 1$. La figura 4.7c puede obtenerse a partir de las figuras 4.7a y 4.7b, y muestra la relación entre el tiempo de reacción y la precisión, así que puede ser entendida como una curva SAT. Es importante mencionar que una de las tareas pendientes del modelo presentado en el capítulo 3 era dar cuenta del *speed-accuracy trade off*. La semejanza entre la figura 4.7c y la figura 1.9 de la sección 1.4 permiten concluir que efectivamente el modelo puede dar cuenta de la curva SAT, y más aún, que distintos puntos esta curva pueden ser obtenidos a través de distintas elecciones del parámetro L , lo que fue propuesto en 4.1.2.

En el análisis de convergencia del algoritmo 2 se argumentó que en un contexto donde los I_1^n, I_2^n son estacionarios (tienen la misma distribución) entonces se tiene la convergencia casi segura de (L_1^n, L_2^n) a (\bar{L}_1, \bar{L}_2) . Estos valores límites son funciones de los parámetros α y de la distribución de I_1^n, I_2^n . Con el objetivo de visualizar ese resultado, en la figura 4.8 se muestra cómo, en el largo plazo, el tiempo de decisión y la precisión son funciones decrecientes de α . Se ejecutó el algoritmo 2 en $N = 200$ trials, para los valores

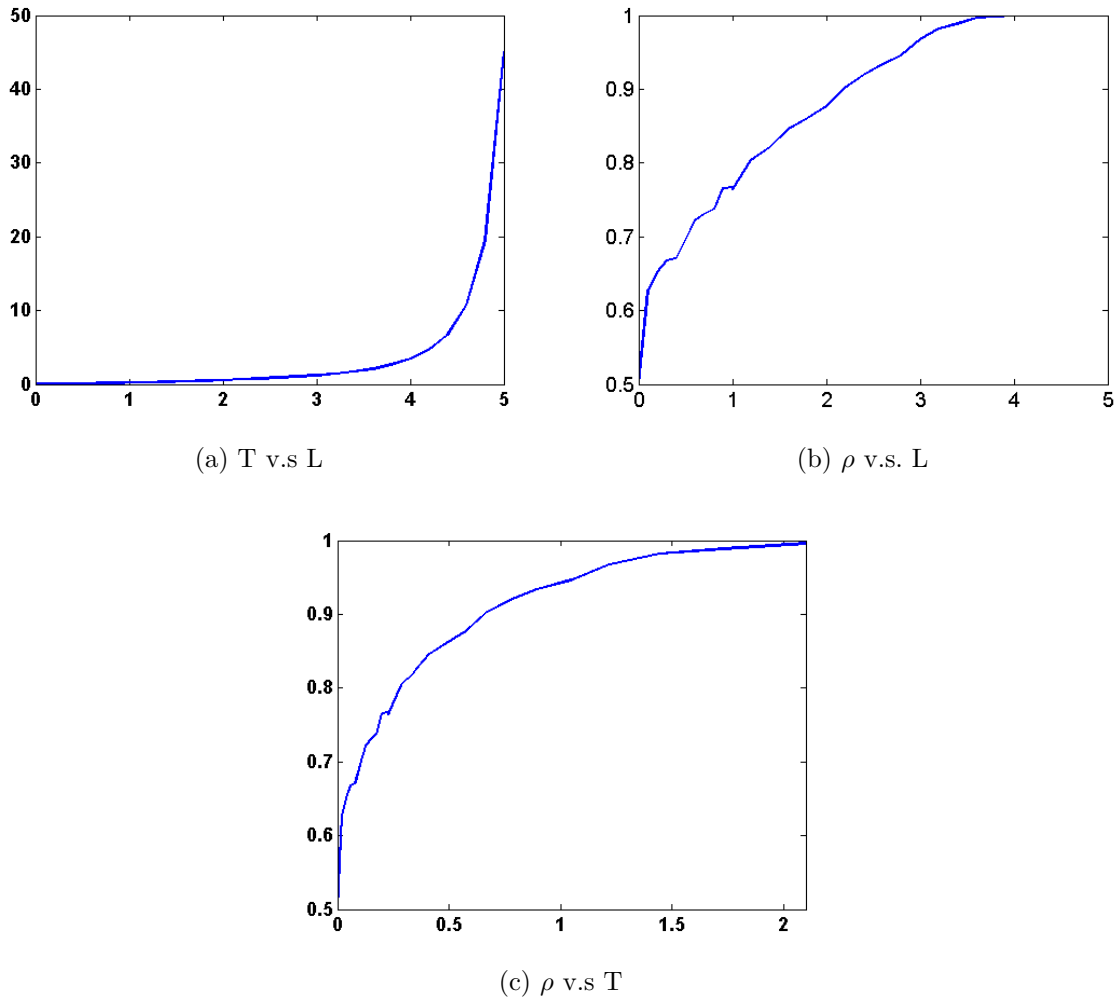


Figura 4.7: Arriba, tiempo de decisión y precisión como función del umbral. Abajo, Precisión como función del tiempo de decisión.

$\alpha = 0.1k, k = 1 \dots 9$. El resto de los parámetros se mantuvo fijo ($\beta = 0.5$ e I_1^n, I_2^n tomando los valores 4 y 5), salvo la distribución inicial de los umbrales de decisión, que fue escogida como una Uniforme $\sim (0, 4.5)$ para L_1 y L_2 . Los gráficos fueron obtenidos utilizando montecarlo con 2.000 simulaciones. Para esas simulaciones se calcularon, en el *trial* 200, los tiempos de decisión (figura 4.8a), la precisión (figura 4.8a) y el umbral de decisión promedio (figura 4.8c).¹¹ La relevancia de la figura 4.8 es que muestra que independiente de las condiciones iniciales (L_1^0, L_2^0), se converge en valor esperado a una configuración de umbrales (en este caso iguales) que son un reflejo de la alternativa del individuo; valores de α bajos implican tiempos de decisión altos y precisión alta, los que a su vez se corresponden con un umbral de decisión alto. Por el contrario, α altos están asociados con tiempos de decisión bajos pero también precisiones más cercanas al azar.

Interesantemente, aunque no mostradas acá, se realizaron pruebas donde las magnitu-

¹¹Debido a que $\beta = 0.5$, ambos umbrales deben tener el mismo valor esperado. A pesar de que en las simulaciones ambos umbrales resultan ligeramente distintos, en la figura 4.8c sólo se muestra un umbral

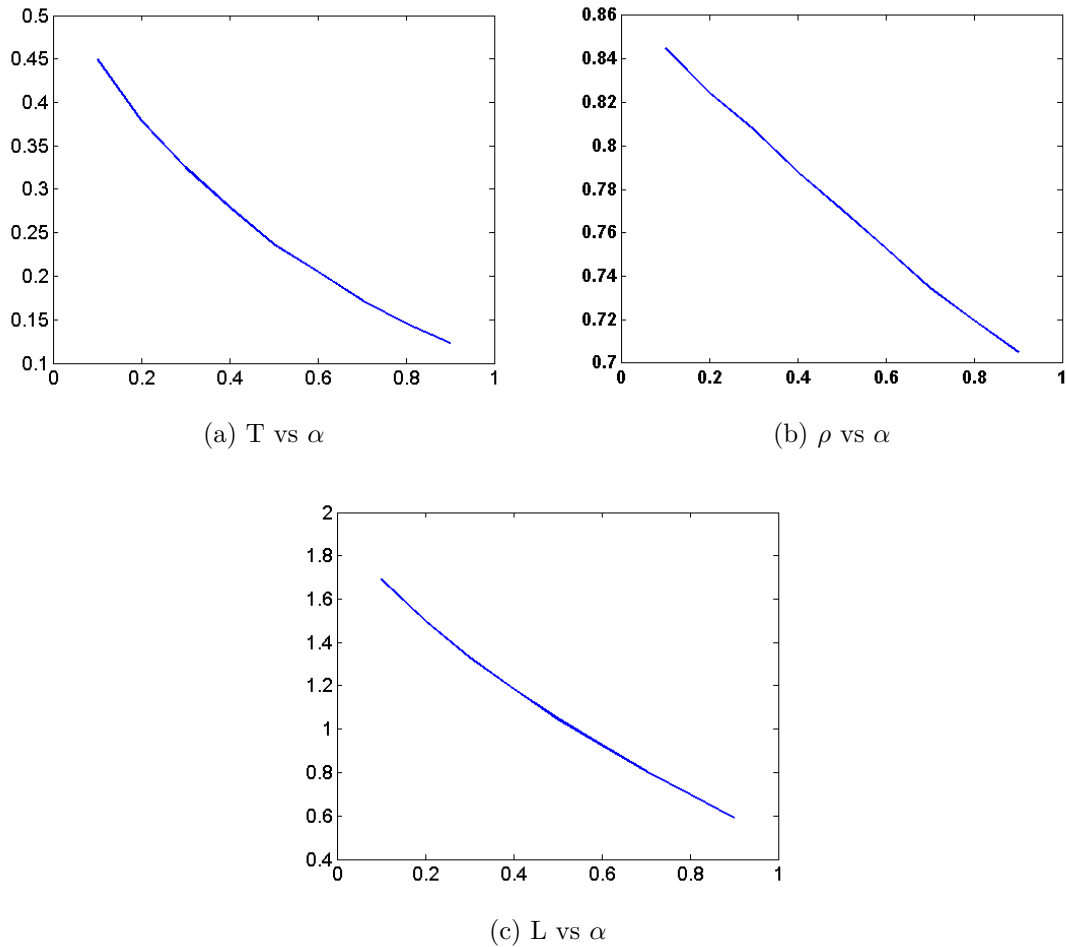


Figura 4.8: Tiempo de decisión, precisión y umbrales de decisión como función de α en el trial 200

des de I_1, I_2 eran también variables (es decir, considerar distintos niveles de coherencia de movimiento, a diferencia de lo mostrado hasta ahora, donde hay un único nivel). En tal caso se obtienen gráficos muy similares a los de la figura 4.8. Lo que es digno de destacar es que la convergencia ocurre incluso cuando hay aleatoriedad en la coherencia de los trials, y el umbral al que se converge es un reflejo de esas distintas coherencias. (de hecho, el umbral al que se converge corresponde al de la coherencia esperada)

Como conclusión general de este análisis vemos que el algoritmo 2 permite ajustar los umbrales de decisión a un nivel que será una función tanto de las preferencias individuales (α) como de las condiciones externas (distribución de I_1^n, I_2^n).

4.3.2. Aprendizaje como mejora en los tiempos de decisión y la precisión

En la figura 4.9 se muestran las curvas de aprendizaje obtenidas durante 20 trials, y tomando $\alpha = 0.2$. Nuevamente, los umbrales iniciales se distribuyen como una Uniforme $\sim (0, 4.5)$ y la secuencia de I_1^n, I_2^n es como en las simulaciones anteriores ($\beta = 0.5$). Se observan los claros efectos de aprendizaje; en la figura 4.9a se ve la rápida caída del tiempo de reacción y en la figura 4.9b el rápido crecimiento de la precisión. El aumento de

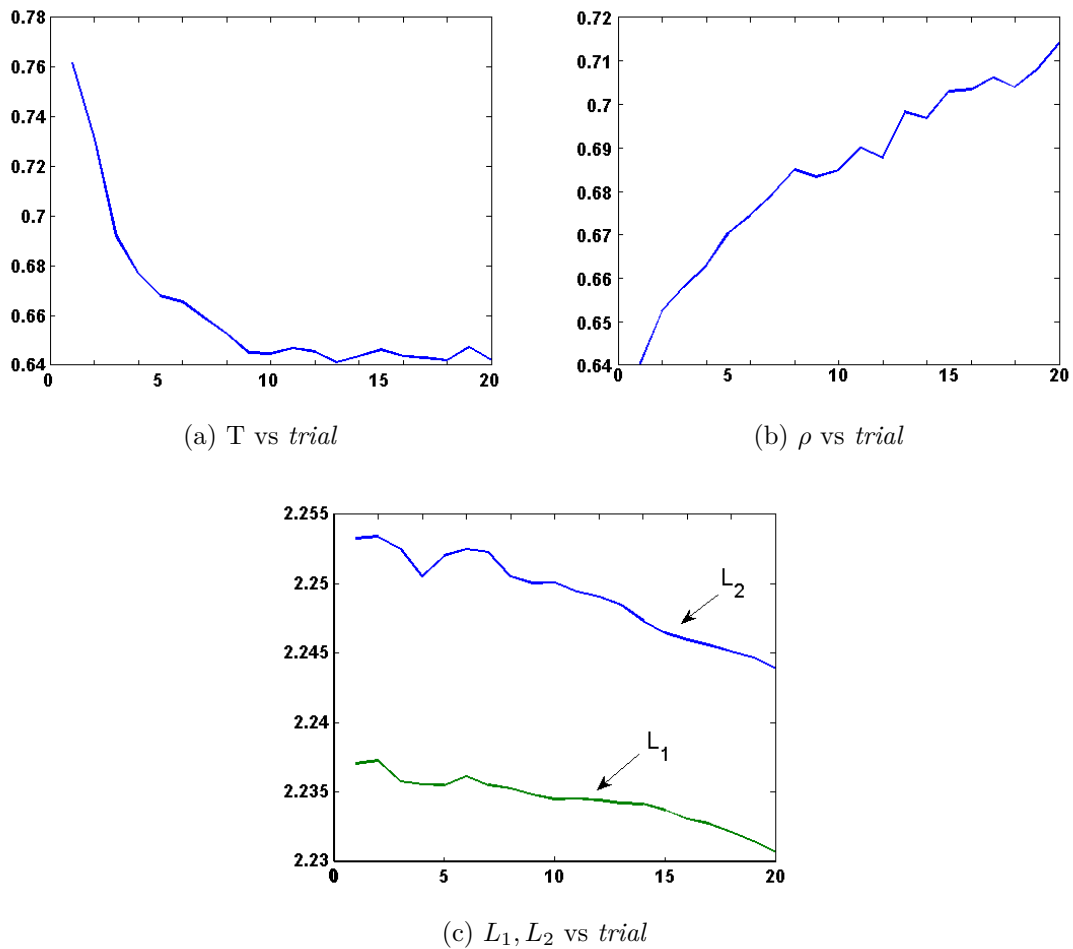


Figura 4.9: Tiempo de decisión, precisión y umbrales de decisión como función del $trial$. $\alpha = 0.2$. Los promedios fueron calculados sobre la base de 10.000 simulaciones

esta última cantidad puede entenderse porque al principio hay mucha variabilidad en los umbrales iniciales, induciendo una fuente de error. El sistema rápidamente evoluciona de manera tal que ambos umbrales tomen valores similares, debido a que $\beta = 0.5$. Por otra parte, el decaimiento de los tiempos de reacción se debe a que en el comienzo, en promedio los umbrales están en un nivel más alto que el asintótico. La figura 4.9 debe ser comparada con la figura 4.1, de ahí vemos que el modelo permite representar al aprendizaje como mejoras en los tiempos de reacción y la decisión.

Sin embargo, mediante otras elecciones de parámetros es posible observar curvas que no se parecen del todo a las de 4.1. En la figura 4.10 se muestran resultados correspondientes a simulaciones similares a las de 4.9, con la única diferencia que ahora $\alpha = 0.5$. Al ser α ahora mayor, se tiende a privilegiar el disminuir los tiempos de reacción, lo que trae como consecuencia una caída en la precisión en los primeros $trials$.

La conclusión de estas simulaciones es que el modelo puede dar cuenta de este tipo de aprendizaje. Sin embargo, éstas curvas son también muy dependientes de la elección de parámetros, de manera que para ciertas elecciones de éstos, dejan de ser patentes los efectos de la figura 4.1. Una discusión más profunda sobre la validez de este resultado se realizará en 4.4

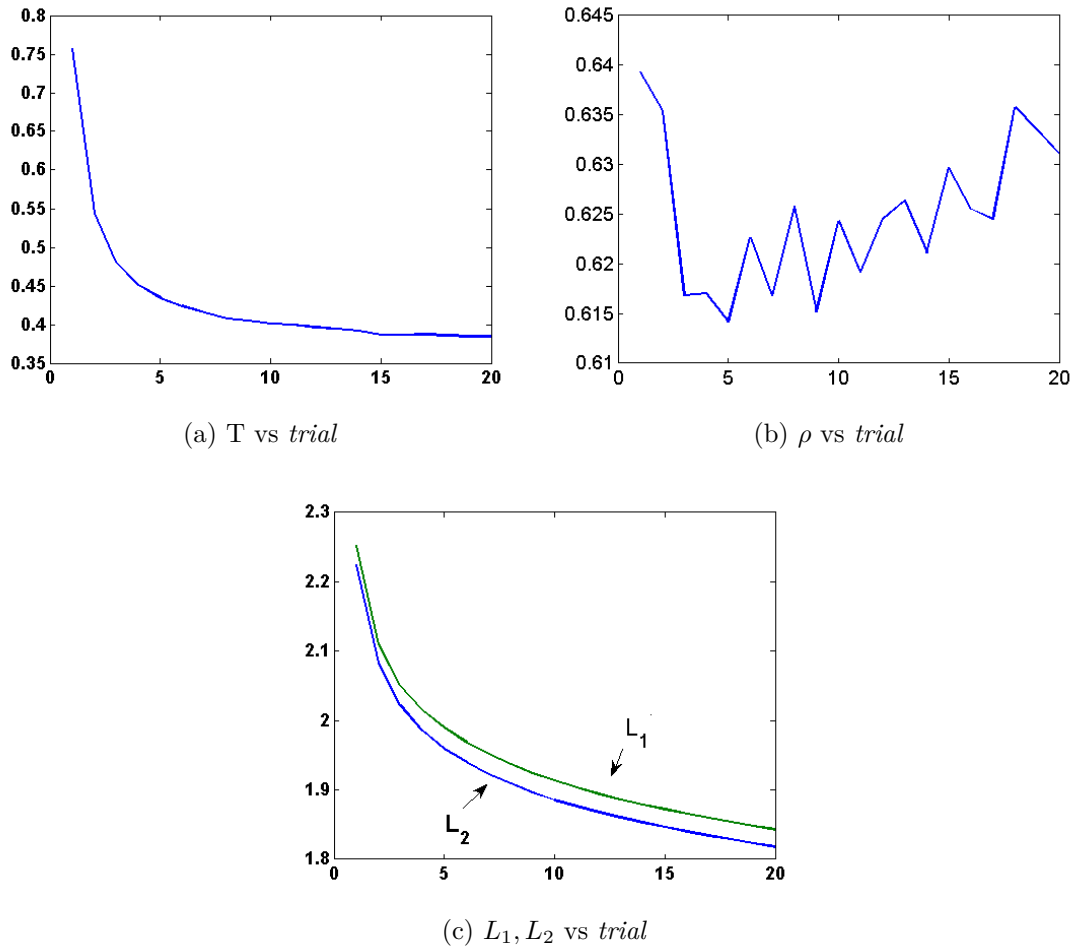


Figura 4.10: Tiempo de decisión, precisión y umbrales de decisión como función del *trial*. $\alpha = 0.5$. Los promedios fueron calculados sobre la base de 10.000 simulaciones

4.3.3. Aprendizaje como adaptación

Este punto en realidad está muy ligado a lo que ya se ha visto. En esta subsección se presentan dos resultados. En primer lugar, se muestra cómo el sistema puede aprovechar las ventajas o pistas que le otorga el medio para obtener un mejor resultado. Después se muestra cómo este sistema es capaz de adaptarse a cambios súbitos en las condiciones experimentales.

En la figura 4.11 se muestra cómo, después de 200 trials el sistema logra aprovechar sesgos en las condiciones experimentales. Específicamente, se consideran valores de $\alpha = 0.1$, L_1^0, L_2^0 como antes y $\beta = 0.1k, k = 0 \dots 10$ es decir, yendo de la situación donde siempre la respuesta correcta es la del acumulador 1 ($\beta = 0$) hacia aquella donde la respuesta correcta es la del acumulador 2 ($\beta = 1$). En las figuras 4.11a y 4.11b observamos claramente que el sistema ha aprovechado las ventajas que han sido dadas por el medio: si $\beta \neq 0.5$ entonces existe sesgo a privilegiar una determinada dirección del movimiento. Como consecuencia, los tiempos de decisión son menores (figura 4.11a) y la precisión es mayor (figura 4.11b) a medida que β se aleja de 0.5. La figura 4.11c muestra que el sistema ha modificado sus umbrales de decisión, reflejando el sesgo introducido por β . Si $\beta < 0.5$ entonces $L_1 < L_2$,

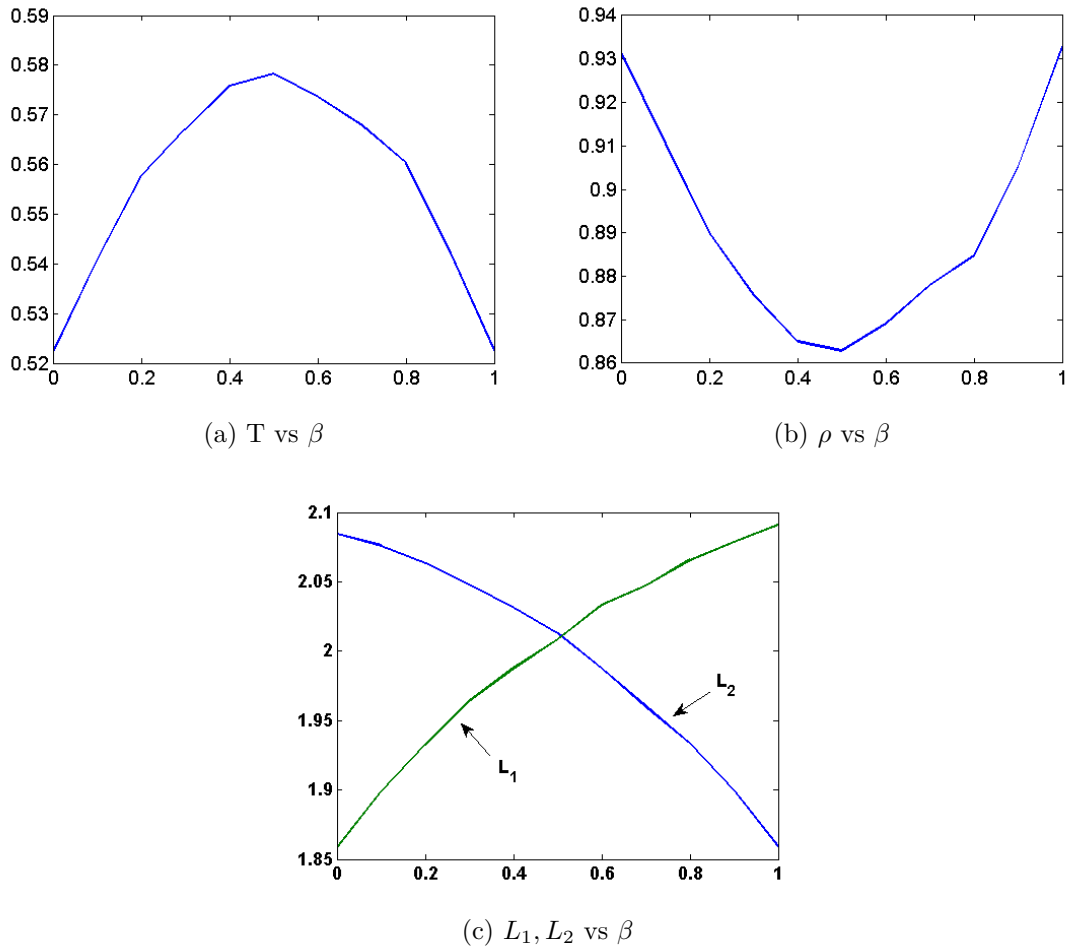


Figura 4.11: Tiempo de decisión, precisión y umbrales de decisión como función del parámetro β en el *trial* 200. $\alpha = 0.1$. Promedios sobre la base de 10.000 simulaciones para cada valor de β

y si $\beta > 0.5$ $L_1 > L_2$.

La figura 4.12 muestra que este patrón es robusto frente a modificaciones del parámetro α . Si ahora $\alpha = 0.5$ se está en la situación donde se privilegia la rapidez. Luego, las precisiones de la figura 4.12b son inferiores a las de la figura 4.11b, y los tiempos de decisión de la figura 4.12a son también inferiores a los de la figura 4.11a

En este punto comienzan a hacerse más evidente los problemas que acarrea la lentitud de la convergencia. De acuerdo a lo establecido de manera teórica en 4.2.3, en el caso en que $\beta = 0$ ó $\beta = 1$, en el límite se debe tener que alguno de los umbrales tome el valor 0. Sin embargo, tanto en la figura 4.11c como en la 4.12c se observa que ambos umbrales están lejos del cero. Lo anterior es aún más evidente en la figura 4.13. En ella se muestran los umbrales L_1, L_2 como función del *trial* (hasta 20.000), en el caso en que $\beta = 0$. y α es 0.1 ó 0.5

el resto de los comentarios sobre estos resultados se harán en la sección 4.4

Los últimos resultados corresponden a situaciones donde la condición experimental es cambiada de un *trial* a otro. Con el objetivo de obtener una mejor visualización del fenómeno, algunos parámetros fueron cambiados. Los umbrales de decisión iniciales fueron elegidos con distribución uniforme $[0, 2]$, los valores I_1^n, I_2^n como 2 ó 2.5, y además se fijó

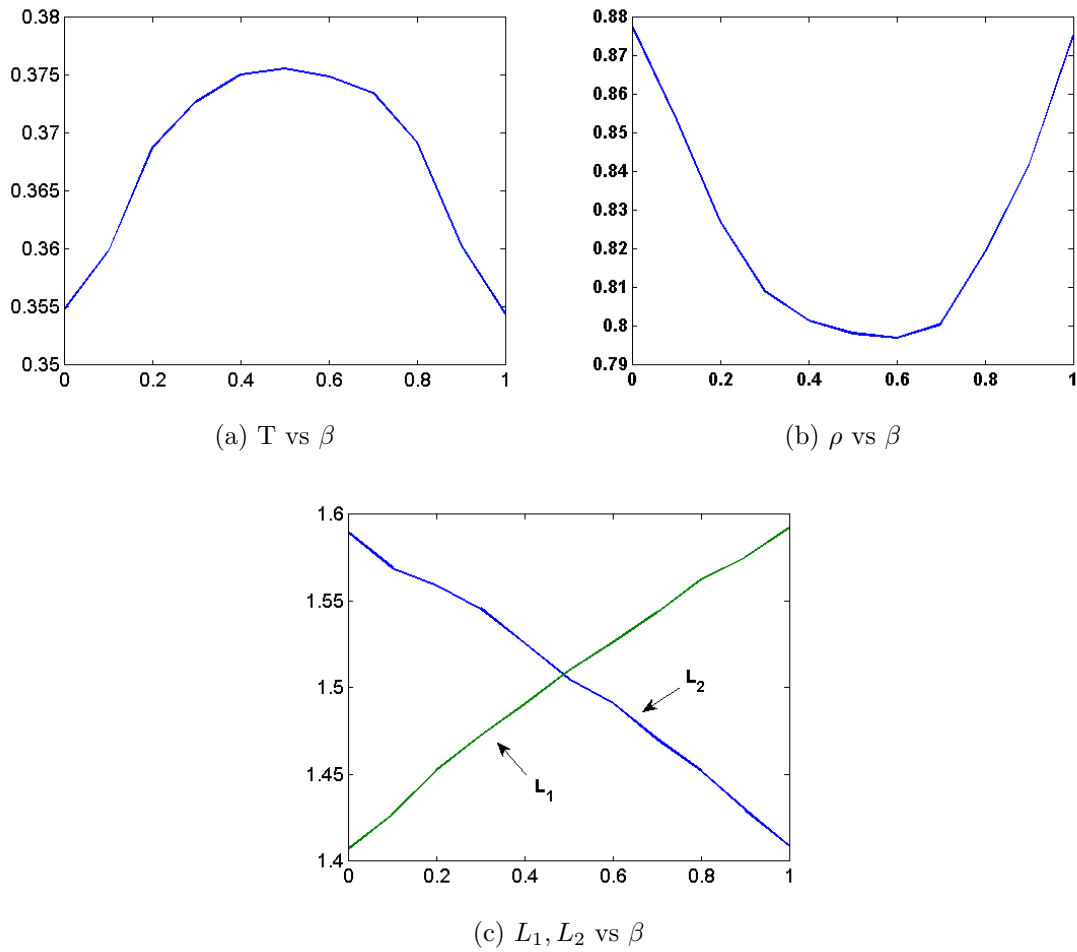


Figura 4.12: Tiempo de decisión, precisión y umbrales de decisión como función del parámetro β en el *trial* 200. $\alpha=0.5$ Promedios sobre la base de 10.000 simulaciones para cada valor de β

$\alpha=0.7$

En la figura 4.14 se muestra la evolución de los tiempos de decisión, precisión y umbrales como función del *trial*. En azul se muestran las trayectorias correspondientes a $\beta = 1$. Las líneas rojas y verdes corresponden a cambiar, después del *trial* 5, la cantidad β . Esto corresponde a cambiar la lateralidad del movimiento. Como $\beta = 1$ en los primeros *trials*, el movimiento siempre favorece al acumulador 2. Cambiar a $\beta = 0$ corresponde invertir la dirección del movimiento de puntos, y cambiar a $\beta = 0,5$ corresponde a restablecer una situación experimental en la que el movimiento no está sesgado hacia ninguna alternativa. Para obtener estas curvas, en cada una de las simulaciones, posterior al *trial* 5 se consideraron también los escenarios de continuar con $\beta = 1$ (azul), cambiar a $\beta = 0.5$ (verde) o cambiar a $\beta = 0$ (rojo). Las curvas se obtienen promediando sobre esas simulaciones, que comparten los valores L_1^5, L_2^5 . Se observa que en el *trial* 6 los tiempos de reacción aumentan y la precisión disminuye en las condiciones de cambio. En cuanto a los tiempos de decisión, en la figura 4.14a éstos llegan a ser mayores cuando se cambia completamente la dirección de movimiento ($\beta = 1$), y esa tendencia se prolonga durante al menos 15 *trials*, ya que la curva roja siempre está por sobre la verde. De todas maneras, es posible observar que posterior al cambio los tiempos de reacción continúan disminuyendo en todas

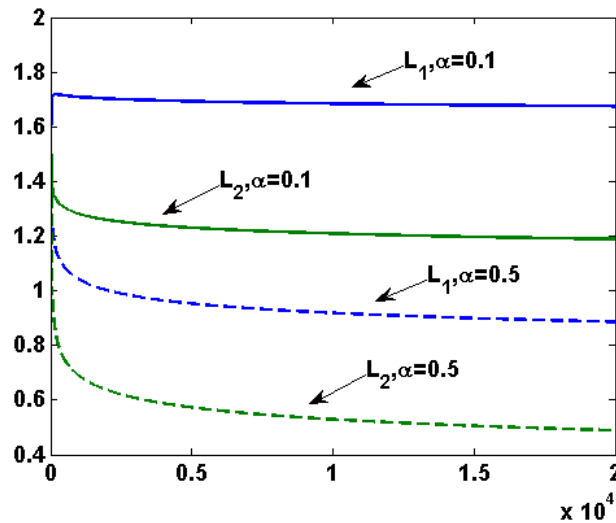


Figura 4.13: Umbrales L_1, L_2 promedio como función del *trial*, para $\beta = 0$ y $\alpha = 0.1$ y $\alpha = 0.5$, sobre la base de 200 simulaciones

las curvas. En la figura 4.14b se observa la caída en las precisiones. Interesantemente, en la curva roja se obtiene una precisión inferior a 0.5 posterior al *trial* 5, lo que significa que sistemáticamente se está eligiendo la alternativa incorrecta. Las precisiones vuelven a subir rápidamente, y la curva roja llega a superar a la curva verde luego de algunos *trials*. La figura 4.14c permite observar cómo estos cambios en la precisión y tiempos de reacción tienen su contraparte en cambios en los umbrales de decisión.

La figura 4.14 muestra que el mecanismo propuesto permite dar cuenta de cómo el acostumbramiento a una condición experimental puede implicar una disminución en la *performance* cuando súbitamente se cambia el contexto. Sin embargo, el mecanismo no es capaz de dar cuenta de una plasticidad para adaptarse al nuevo contexto en un plazo que sea razonable. Sería deseable que a pesar del aumento en tiempos de reacción y disminución de la precisión justo después de cambiar de $\beta = 1$ a $\beta = 0$, las curvas rojas y azules vuelvan a juntarse luego de algunos *trials*, pues después de todo, ambas condiciones ($\beta = 0, \beta = 1$) representan un mismo nivel de dificultad. Una discusión más profunda sobre posibles soluciones para este problema se darán en 4.4.

Para finalizar esta sección, en la figura 4.15 se muestran los resultados para el cambio de $\beta = 0,5$ a $\beta = 0$. Los parámetros y convenciones son iguales que en la figura 4.14. Se observa que el sistema es capaz de aprovecharse de que a partir del *trial* 6 el movimiento va en una única dirección, lo que es patente al comparar las curvas de la figura 4.15b. Extrañamente, los tiempos de reacción son ligeramente superiores después del cambio a $\beta = 0$, como se observa en 4.15a. Sin embargo este cambio es realmente pequeño, y concluimos que al menos en un sentido (el de la precisión) se logra una adaptación a esta nueva condición experimental, que es más sencilla.

Se concluye este capítulo con una discusión más profunda de los resultados y de cómo éstos pueden ser insertados en la literatura.

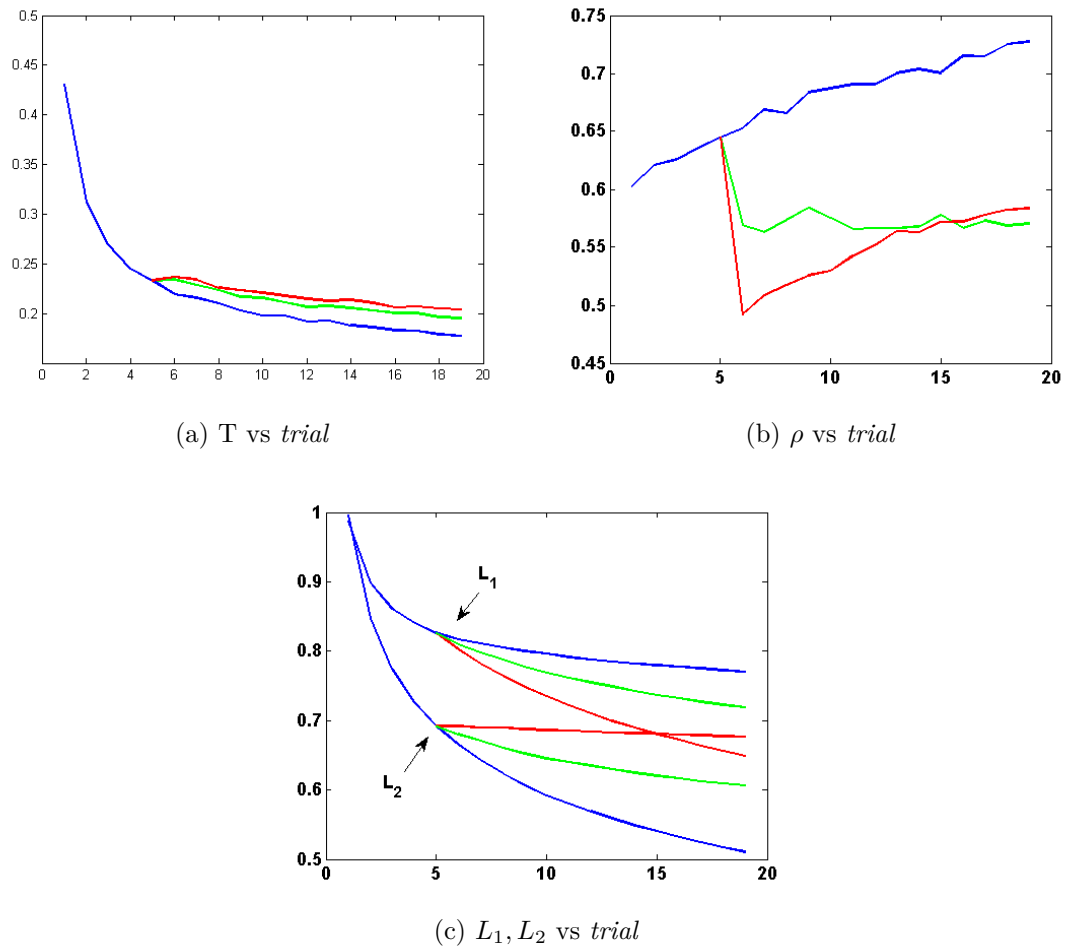


Figura 4.14: Tiempo de decisión, precisión y umbrales de decisión como función del $trial$. Promedios sobre la base de 5000 simulaciones. $\alpha = 0.7$

4.4. Discusión

Se ha inventado un mecanismo mediante el cual es posible dar cuenta de algunos tipos de aprendizaje. Este tiene cualidades que lo convierten en una propuesta atractiva. En primer lugar, está en línea con lo que ha sido sugerido en la literatura, es decir, los umbrales de decisión son una alternativa biológicamente plausible para ser la cantidad que es modificada con el objetivo de maximizar la *reward rate*. El enfoque utilizado en este trabajo fue ligeramente distinto; en vez de maximizar una función como la *reward rate*, se optó por buscar un procedimiento que esencialmente busca una raíz a una función lineal del tiempo de decisión y la precisión. Esa raíz, el par (\bar{L}_1, \bar{L}_2) , cumple propiedades razonables y que son interpretables en términos de la preferencia del individuo hacia privilegiar el tiempo de decisión o la precisión (parámetro α). Entonces, pese de la diferencia de enfoques, el trabajo esencialmente sigue las directrices planteadas por las ideas predominantes de la neurobiología computacional. El trabajo es original en tanto que hasta la fecha no se disponían de mecanismos explícitos que mostraran cómo los umbrales deben ser modificados.

El tipo de ecuaciones que rigen la dinámica tiene cualidades que merecen ser comentadas.

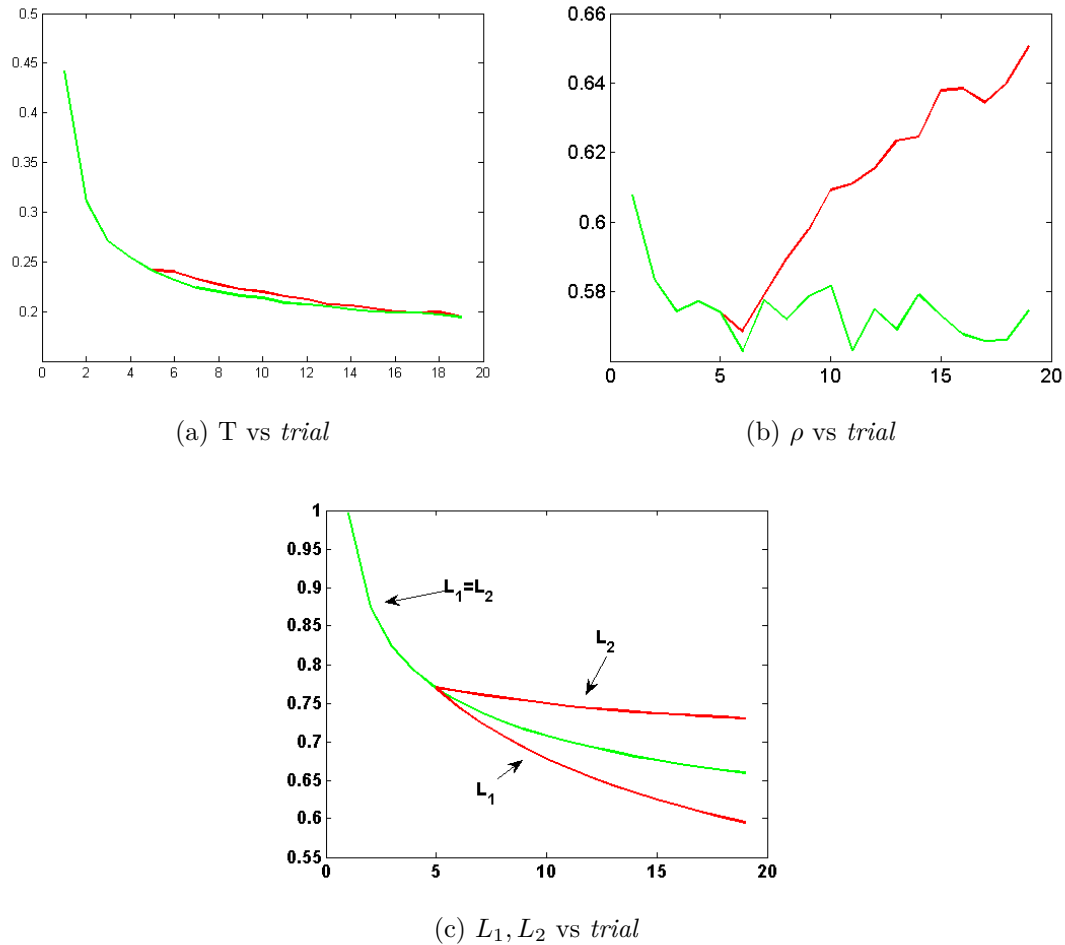


Figura 4.15: Tiempo de decisión, precisión y umbrales de decisión como función del *trial*. Promedios sobre la base de 5000 simulaciones. $\alpha = 0.7$

Pensando que todos los cálculos son llevados a cabo a través de dinámicas neuronales, es bastante razonable suponer que la información necesaria para actualizar los umbrales consiste sólo en el tiempo de decisión y la precisión en el trial anterior¹². Además, los dos umbrales son modificados de manera independiente, lo que implica que ambos acumuladores ni siquiera necesitan actuar coordinadamente para obtener resultados coherentes. El hecho de que exista una convergencia casi segura a una constante es lo que uno debería esperar en este tipo de modelos; a pesar del azar de las condiciones aleatorias internas o externas se converge al valor que refleja las preferencias del individuo. Con esta convergencia se puede explicar también por qué al calcular promedios poblacionales se obtienen comportamientos coherentes, como las curvas de aprendizaje. Respecto a estas curvas, se observó en 4.3.2 que éstas pueden ser reproducidas en condiciones bien particulares sobre los parámetros. Se debe reconocer que no se piensa que este tipo de aprendizaje puede ser entendido exclusivamente en términos de este modelo. De hecho, recientemente se ha comprobado de manera experimental, mediante estudios *single-unit*, que las mejoras en los tiempos de reacción y precisión van acompañadas de modificaciones en el proceso de

¹²Incluso podría no conocerse el tiempo de reacción con precisión sino sólo una estimación ruidosa de éste; de cualquier manera se tendrá la convergencia.

acumulación misma, probablemente a través de las modificaciones de las conexiones entre los mismos grupos LIP. [11]. Aquello no desecha la hipótesis de los umbrales como fuente de dinámica en absoluto, pues la metodología usada impide que cualquier cambio en los umbrales sea observable¹³. Además, la escala temporal en la que se trabaja es la de días, y por ende podría haber otros mecanismos de aprendizaje de más largo plazo y comandados por procesos neuronales diferentes. En conclusión, respecto a ese tipo de aprendizaje se propone que este mecanismo puede explicar parcialmente el aprendizaje pero se deja en claro que hay otros procesos que pueden ser más relevantes.

Una crítica que se le puede hacer al modelo es que el término $\frac{1}{i}$ no tiene interpretación en términos biológicos. Este cociente arbitrario es también la causa de la falta de plasticidad del modelo para permitir la adaptación a un cambio en las condiciones de la tarea. De hecho, a medida que n aumenta los umbrales son cada vez más insensibles, haciendo más difícil la adaptación. Aquello que surgió como un instrumento para generar la convergencia ahora se convierte en un terrible impedimento para dar cuenta del aprendizaje. Se propone como solución el considerar también una dinámica para el coeficiente ϵ_n de la ecuación (4.5). Esto corresponde a considerar el problema más desde el punto de vista de la teoría del control óptimo. Se han descrito dinámicas explícitas para los ϵ_n , en los llamados algoritmos de aproximación estocástica adaptativos [13]. Eventualmente, si se encuentra un algoritmo apropiado para ϵ_n se podría, además de obtener una mayor plasticidad, poder pensar en una interpretación para esta dinámica en términos de algún circuito neuronal, sin que ésta parezca arbitraria y carente de explicación. Otra alternativa más sencilla es suponer que en entornos cambiantes ϵ_n es fijo. Esa alternativa es sugerida como una solución heurística en [10]. A pesar de esta crítica, los resultados del modelo hacen pensar que al menos se está escogiendo la dirección correcta, pues aunque la adaptación sea lenta, ésta ocurre. El hecho que sea lenta puede también estar influido porque el mecanismo que se propone es demasiado elemental, pero podría haber otros más complejos interviniendo, y que hagan que en la práctica los primates, humanos o no, sean capaces de adaptarse de manera rápida. Estos otros mecanismos bien podrían estar relacionados, por ejemplo, con la capacidad de razonamiento, fenómeno que no es explicado por lo propuesto en este capítulo.

Como un último comentario general, pensamos que el mecanismo presentado es sin duda una contribución a la neurociencia computacional; Todas las ideas presentadas en este trabajo son comprobables empíricamente, tanto a través de mediciones conductuales como electrofisiológicas. Algunas de ellas podrían resultar ser falsas, pero si al menos una es cierta, creemos que este trabajo podrá considerarse exitoso.

¹³básicamente, la razón es que se considera movimiento de puntos en varias direcciones posibles, entonces, al hacer el promedio, las variaciones se cancelan

Bibliografía

- [1] R. Bogacz, E. Brown, J. Moehlis, P. Holmes, and J.D. Cohen. The physics of optimal decision making: A formal analysis of models of performance in two-alternative forced-choice tasks. *Psychological Review*, 113(4):700–765, 2006.
- [2] R. Bogacz, E.J. Wagenmakers, B.U. Forstmann, and S. Nieuwenhuis. The neural basis of the speed-accuracy tradeoff. *Trends Neuroscience*, 33(1):732–738, 2010.
- [3] Matthew M. Botvinick, Todd S. Braver, Deanna M. Barch, Cameron S. Carter, and Jonathan D. Cohen. Conflict Monitoring and Cognitive Control. *Psychological Review*, 108(3):624–652, 2001.
- [4] J.D. Cohen, K. Dunbar, and J.L. McClelland. On the control of automatic processes: A parallel distributed processing account of the stroop effect. *Psychological Review*, 97(3):332–361, 1990.
- [5] J. I. Gold and M. N. Shadlen. Banburismus and the brain: Decoding the relationship between sensory stimuli, decisions, and reward. *Neuron*, 36:299–308, 2002.
- [6] E. Goles and S. Martinez. *Neural and Automata Networks*. Neural and Automata Networks, 1991.
- [7] O. Hikosaka, K. Nakamura, and H. Nakahara. Basal ganglia orient eyes to reward. *Journal of Neurophysiology*, 95:567–584, 2006.
- [8] J. J. Hopfield. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 79(8):2554–2558, 1982.
- [9] E. R. Kandel, J.H. Schwartz, and T.M. Jessell. *Principles of Neural Science*. McGraw-Hill, 2000.
- [10] H. Kushner and G. Yin. *Stochastic Approximation and Recursive Algorithms and Applications*. Springer, 2003.
- [11] C. T. Law and J.I. Gold. Neural correlates of perceptual learning in a sensor motor, but not a sensory, cortical area. *Nature Neuroscience*, 11(4):505–513, 2008.
- [12] C.C. Lo and X.J. Wang. Cortico basal ganglia circuit mechanism for a decision threshold in reaction time tasks. *Nature Neuroscience*, 9(7):956–963, 2003.

-
- [13] Y. Maeda and Y. Kawamura. An extension of the Multi-dimensional Adaptive Robbins-Monro Procedure. *Bulletin of the University of Osaka Prefecture*, 39(3):47–57, 1990.
- [14] M. J. Prerau, A. C. Smith, U.T. Eden, Y. Kubota, M. Yanike, W. Suzuki, A. M. Graybie, and E. N. Brown. Characterizing learning by simultaneous analysis of continuous and binary measures of performance. *Journal of Neurophysiology*, 102:3060–3072, 2009.
- [15] H. Robbins and S. Monro. A Stochastic Approximation Method. *The Annals of Mathematical Statistics*, 22(3):400–407, 1951.
- [16] X.J. Wang. Probabilistic decision making by slow reverberation in cortical circuits. *Neuron*, 36:955–968, 2002.
- [17] X.J. Wang. Decision making in recurrent neuronal circuits. *Neuron*, 60:215–235, 2008.
- [18] K. Watanabe and O. Hikosaka. Immediate changes in anticipatory activity of caudate neurons associated with reversal of position reward contingency. *Journal of Neurophysiology*, 94:1879–1887, 2005.

Capítulo 5

Conclusiones y Problemas Abiertos

La conclusión general, además de todas las conclusiones particulares mencionadas en cada capítulo, es que este trabajo cumple sus objetivos más importantes. En primer lugar, se logra dar buen uso de la matemática para explicar cómo los procesos neurobiológicos pueden dar lugar a los procesos psicológicos. Por otra parte, el capítulo dedicado a las ecuaciones diferenciales estocásticas reflejadas fue motivado por el interés de estudiar el modelo que se plantea en el capítulo sobre la toma de decisiones. Así, se muestra claramente que la neurociencia cognitiva puede también ser una fuente de inspiración para un mayor enriquecimiento de la matemática. Creemos en efecto que estas dos disciplinas pueden establecer un diálogo fructífero que beneficie a ambas, y esa visión fue el gran motor de esta memoria.

En cuanto a problemas abiertos, en el capítulo 2 hay algunos detalles técnicos que deben ser solucionados. Es importante mostrar claramente cuál es la sucesión de dominios acotados que permite aproximar correctamente al primer cuadrante. Además, sería interesante poder dar resultados de convergencia a la medida estacionaria para dominios no suaves ni acotados.

En el capítulo 3 se deben hacer modificaciones que permitan dar cuenta de todos los hechos asociados a la toma de decisiones que fueron mostrados, así como otros más. También queda como tarea futura el buscar conjuntos de parámetros que permitan simulaciones de datos en sus escalas naturales.

Por último, en el capítulo 4 algunos cambios deben ser hechos en el algoritmo con el objetivo de aumentar tanto la rapidez de la convergencia como permitir una mayor plasticidad frente a cambios en las condiciones externas.