UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

COMPLEJIDAD TOPOLÓGICA DE NILSISTEMAS Y APLICACIONES

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

SEBASTIÁN ANDRÉS DONOSO FUENTES.

PROFESOR GUÍA:
ALEJANDRO MAASS SEPÚLVEDA

PROFESOR CO-GUÍA:
MICHAEL SCHRAUDNER

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
SERVET MARTÍNEZ AGUILERA

SANTIAGO DE CHILE
JULIO 2011

RESUMEN DE LA MEMORIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: SEBASTIÁN DONOSO FUENTES
FECHA: 13/07/2011
PROF. GUIA: ALEJANDRO MAASS

“COMPLEJIDAD TOPOLÓGICA DE NILSISTEMAS Y APLICACIONES”

El presente trabajo de memoria tiene por objetivo principal el estudio de propiedades topológicas de la clase de sistemas dinámicos llamados nilsistemas. Esta clase de sistemas dinámicos ha ganado importancia desde la demostración dada por B. Host y B. Kra en [25] de la convergencia de algunas medias ergódicas no convencionales. A partir de su demostración se han encontrado aplicaciones importantes de los nilsistemas en Teoría Ergódica y se han desarrollado herramientas ergódicas en otras áreas de las matemáticas, como en Combinatoria Aditiva.

En su artículo Host y Kra desarrollaron una teoría de nilsistemas desde el contexto medible. El desarrollo topológico de los nilsistemas se ha profundizado en dos artículos recientes de B. Host, B. Kra y A. Maass y de S. Shao y X. Ye, en 2010, en donde demuestran que cada sistema dinámico tiene factores que son nilsistemas de cualquier orden. En esta memoria, se estudian algunas propiedades topológicas adicionales de los nilsistemas, en particular propiedades de mezcla y estabilización de esos factores.

La complejidad asociada a un cubrimiento abierto finito en un sistema dinámico comenzó a ser estudiada en [4] en donde se muestra que esa cantidad goza de propiedades que permiten caracterizar sistemas dinámicos. Una de las motivaciones de la presente memoria es indagar qué otros tipos de conclusiones pueden ser obtenidas estudiando esta cantidad. Una pregunta interesante es qué clase de sistemas tiene complejidad polinomial. En particular, se estudia la complejidad de los nilsistemas y se concluye que ésta es polinomial en cada cubrimiento abierto donde el grado del polinomio es una constante del sistema.

En el Capítulo 1 se introduce el tema de memoria, el contexto histórico matemático que la motiva y las preguntas relevantes que se desarrollan a lo largo del texto.

En el Capítulo 2 se introducen las nociones básicas de Dinámica Topológica y Teoría Ergódica y también las definiciones y resultados recientes relacionados con la teoría de nilsistemas.

En el Capítulo 3, se estudia la complejidad topológica de los nilsistemas y de sus límites inversos y se logra demostrar que ésta es polinomial en cada cubrimiento abierto.

En el Capítulo 4 se desarrollan algunas propiedades topológicas sobre nilsistemas, las cuales fueron obtenidas en [10] en un artículo en colaboración. Se demuestra un criterio de débil mezcla utilizando los cubos dinámicos y se prueba que la secuencia de nilfactores de un sistema dinámico o es estrictamente creciente o se estabiliza en un cierto nivel. Se estudia además la relación entre recurrencia con estructura IP con el límite inverso de los nilfactores topológicos. Se muestra que un sistema sin recurrencia estructurada IP es una extensión casi uno a uno del límite inverso de sus nilfactores.

Finalmente, en el Anexo se adjunta el artículo *Infinite-step nilsystems, independence and complexity*, dentro del cual se inserta el trabajo realizado en esta memoria.

AGRADECIMIENTOS

Quiero dar las gracias a todos mis amigos y compañeros que me acompañaron en este proceso. Agradezco también enormemente a mis profesores guías por la confianza y paciencia depositada en mí, pero por sobre todo agradezco a mis padres Javier e Iris por su apoyo incondicional durante estos años.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El estudio sistemático de sistemas dinámicos a través de sus factores fue propuesto en los 60' en los trabajos de Furstenberg, quien notó la riqueza teórica de este concepto y las herramientas que entrega para entender un sistema dinámico. Variadas clases de factores han sido descritas, tanto en el contexto medible como en el topológico. Por mencionar un ejemplo importante, en Teoría Ergódica, el factor de Kronecker es el factor más grande que consiste en una rotación en un grupo abeliano compacto, y probar el Teorema Ergódico de Von Neumann en estos factores es suficiente para demostrarlo en el caso general. Esta idea se denomina técnica de factores característicos, introducida por Furstenberg en [12].

Un teorema notable de Combinatoria Aditiva demostrado por Szemerédi [37] en un artículo publicado en 1975, afirma que cualquier subconjunto de los naturales con densidad superior positiva contiene progresiones aritméticas de largo arbitrario. Las herramientas usadas en esta demostración son combinatoriales, de la teoría de grafos. Posteriormente, Furstenberg logró demostrar este mismo resultado usando técnicas de la Teoría Ergódica, en particular un Teorema Ergódico:

Teorema 1.1 (Furstenberg). *Sea $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ un sistema dinámico abstracto y sea $A \in \mathcal{X}$ un conjunto con medida positiva. Entonces para cada $d \in \mathbb{N}$,*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu(A \cap T^{-n}A \cap T^{-2n}A \cap \ldots \cap T^{-dn}A) > 0.$$

Con su demostración, Furstenberg estableció una conexión profunda entre Teoría Ergódica y Combinatoria Aditiva, que se ha alimentado de manera creciente en los últimos años. Por citar un resultado, la demostración del teorema de Green y Tao que afirma que los números primos contienen progresiones aritméticas de largo arbitrario surgió de esta conexión.

De aquí que toman importancia los llamados Teoremas Ergódicos no Convencionales, que se formulan como sigue. Sea $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ un sistema dinámico abstracto, $d \in \mathbb{N}$ y $f_1, \ldots, f_d$ funciones acotadas en X. En virtud de la demostración de Furstenberg del Teorema de Szemerédi interesa estudiar la convergencia en $L^2(\mu)$ (o en algún otro espacio) de expresiones de la forma

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_1(T^n x) f_2(T^{2n} x) \ldots f_d(T^{dn} x)$$

El caso $d = 3$ con la hipótesis de total ergodicidad fue probado por Conze y Lesigne en una serie de papers ([5], [6] y [7]) y posteriormente fue demostrado por Host y Kra en [24] en el caso general. En el caso débilmente mezclador, Furstenberg probó que para cualquier $d \in \mathbb{N}$ el límite es constante y es igual al producto de las integrales. En el caso no débilmente mezclador probar la convergencia de tales expresiones es un problema mucho más difícil, y estuvo abierto por muchos años. Finalmente, Host y Kra en [25] demostraron:

Teorema 1.2. *Sea $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ un sistema dinámico abstracto con T invertible. Sea $d \in \mathbb{N}$ y sean $f_1, \ldots, f_d$ funciones medibles y acotadas en X. Entonces*

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_1(T^n x) f_2(T^{2n} x) \ldots f_d(T^{dn} x)$$

converge en $L^2(\mu)$ cuando $N \to \infty$.

Host y Kra lograron demostrar este teorema usando la técnica de factores característicos de Furstenberg y tales factores característicos resultaron ser nilsistemas, los cuales han sido de gran utilidad tanto en el desarrollo de herramientas Ergódicas en Combinatoria Aditiva (por ejemplo Green y Tao en [18],[19],[20]) como en el desarrollo de la Teoría Ergódica en sí misma.

La contraparte topológica de la teoría de nilsistemas, es decir, los nilsistemas desde la Dinámica Topológica, ha sido desarrollada en artículos recientes (2010) de Host, Kra, Maass [27] y Shao y Ye [38]. Ellos demuestran que cada sistema dinámico topológico tiene asociados factores que son nilsistemas de cualquier orden, introduciendo una relación de equivalencia llamada de proximalidad regional de orden d y que se denota $\mathbf{RP}^{[d]}$. Estudiar propiedades topológicas adicionales de los nilsistemas es una de las motivaciones importantes de la presente memoria.

Otro concepto fundamental que aparece en la teoría de los sistemas dinámicos topológicos es el de clasificación. El buscar cómo se pueden clasificar los sistemas, qué conceptos o cantidades son útiles para discriminar si dos sistemas dinámicos tienen naturaleza distinta, ha sido un tópico frecuente en el desarrollo de la teoría. Algunos de los conceptos más profundos y populares que han surgido son:

- Estudiar propiedades de recurrencia y en particular el estudio de los tiempos de retorno. Esto es, si (X, T) es un sistema dinámico, $x \in X$ y U es una vecindad de x, estudiar el conjunto de tiempos de retorno $\{n \in \mathbb{N} : T^n x \in U\}$. Esta forma de estudiar un sistema fue profundizada por Furstenberg y siguió siendo desarrollada por E.Akin, E.Glasner, W.Huang, X.Ye, entre otros. Una buena referencia sobre el tema es [14].

- Otra manera, sistematizada también por Furstenberg en [13] es el estudio de sistemas vía *joinings*, donde se clasifican los sistemas estudiando disyunciones entre distintas familias. Para una revisión sobre el tema ver [9]. En [15] se puede encontrar una fuente más extensa y detallada.

- Una tercera manera de clasificación, y es la que motiva esta memoria, es la clasificación de sistemas dinámicos usando la función de complejidad. Un ejemplo, el caso acotado, fue estudiado por F. Blanchard, B. Host y A. Maass en [4] en donde prueban que los sistemas con complejidad acotada en cada cubrimiento abierto no trivial son exactamente los sistemas donde la acción es equicontinua. Surgen a este resultado preguntas naturales sobre qué otro tipo de conclusiones se pueden obtener de un sistema estudiando la función de complejidad, o más precisamente estudiando su escala de crecimiento . ¿Puede caracterizar otra escala de crecimiento de la complejidad alguna clase de sistemas? En particular, es interesante estudiar qué clase de sistemas tiene una complejidad que crece polinomialmente.

Por otro lado, dada la importancia de los nilsistemas en el desarrollo moderno de la Teoría Ergódica y Dinámica Topológica es razonable estudiar su complejidad. Como en los ejemplos básicos de nilsistemas se observa una polinomialidad de las órbitas, es natural estudiar la relación entre complejidad de nilsistemas y polinomialidad. Esta relación es uno de los ejes centrales de esta memoria, donde demostramos que en un nilsistema la complejidad está acotada polinomialmente en cada cubrimiento abierto, donde el grado del polinomio es constante.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo entregamos algunas definiciones básicas de Dinámica Topológica y Teoría Ergódica. Además exponemos algunos conceptos geométricos básicos en grupos de Lie que son mencionados a lo largo de esta memoria.

2.1. Definiciones básicas en Dinámica Topológica y Teoría Ergódica

2.1.1. Sistemas Dinámicos Topológicos

Un sistema dinámico topológico (X, T) es un espacio métrico compacto X dotado de una transformación T continua y sobreyectiva de X en sí mismo. Escribiremos s.d.t. por sistema dinámico topológico o simplemente hablaremos de *sistema*. En esta memoria supondremos que T es un homeomorfismo.

En lo que sigue mostramos algunos de los conceptos clásicos más usados en Dinámica Topológica, como la transitividad, minimalidad y débil mezcla, y teoremas ligados a estos conceptos.

Un sistema dinámico topológico (X, T) se dice transitivo si para cualquier par de abiertos no vacíos $U, V \subseteq X$ existe $n \in \mathbb{N}$ con $U \cap T^{-n}(V) \neq \emptyset$. Se tiene,

Teorema 2.1 ([1],Cap 1)**.** *Sea (X, T) un s.d.t. Son equivalentes:*

1. (X, T) *es transitivo.*
2. *Existe $x \in X$ tal que* $\overline{orb(x)_+} = \overline{\{T^n(x) : n \in \mathbb{N}\}} = X$.
3. *Existe $x \in X$ tal que* $\overline{orb(x)_-} = \overline{\{T^n(x) : n \in -\mathbb{N}\}} = X$.
4. *Existe $x \in X$ tal que* $\overline{orb(x)} = \overline{\{T^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}} = X$.
5. $\{x \in X : \overline{orb(x)} = X\}$ *es un G_δ denso.*
6. *Si $U \subseteq X$ es un abierto T-invariante no vacío, entonces U es denso en X.*

Un s.d.t. (X, T) se dice débilmente mezclador si $(X \times X, T \times T)$ es transitivo. Se tiene,

Teorema 2.2 ([1], Cap 7). *Son equivalentes:*

1. (X, T) *es débilmente mezclador.*
2. *Para* $A, B, C, D \subseteq X$ *abiertos no vacíos existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que simultáneamente* $A \cap T^{-n}(C) \neq \emptyset$ *y* $B \cap T^{-n}(D) \neq \emptyset$.
3. $(X \times X, T \times T)$ *es débilmente mezclador.*
4. *Para todo* $k \in \mathbb{N}$ *y* $(A_1, \cdots, A_k)$, $(B_1, \cdots, B_k)$ *k-tuplas de abiertos no vacíos existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que simultáneamente* $A_i \cap T^{-n}(B_i) \neq \emptyset$ *para todo* $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Una forma fuerte de transitividad es la minimalidad. Un s.d.t. (X, T) se dice minimal si cada $x \in X$ tiene órbita densa, es decir $\overline{orb(x)} = X$ en cada $x \in X$. Se tiene,

Teorema 2.3 ([1], Cap 1). *Son equivalentes:*

1. (X, T) *es minimal.*
2. *No existen conjuntos no vacíos cerrados e invariantes distintos a* X.
3. *Para cada conjunto* U *abierto no vacío, se tiene* $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(U) = X$.
4. *Para cada conjunto* U *abierto no vacío, existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $\bigcup_{n=-N}^{N} T^n(U) = X$.
5. *Para cada* $x \in X$ *y cada vecindad* U *de* x*, el conjunto* $N(x, U) = \{n \in \mathbb{N} : T^n(x) \in U\}$ *es sindético, es decir existe* $K \in \mathbb{N}$ *con* $N(x, U) + \{1, \ldots, K\} = \mathbb{Z}$.

Mencionamos ahora los conceptos de proximalidad y distalidad que son centrales en Dinámica Topológica desde los teoremas de Estructura de Furstenberg.

Sea (X, T) un s.d.t. Decimos que $(x, y) \in X \times X$ es un par proximal si

$$\inf_{n \in \mathbb{Z}} d(T^n x, T^n y) = 0.$$

Denotamos por $\mathbf{P}(X)$ los pares proximales en (X, T). Cuando el contexto sea claro, escribiremos $\mathbf{P}$ en lugar de $\mathbf{P}(X)$. Decimos que x e y son distales si $(x, y) \notin \mathbf{P}(X)$.

Ligado a los conceptos anteriores aparecen clases especiales de sistemas dinámicos topológicos. Decimos que:

1. (X, T) es una *isometría* si se preserva la distancia, es decir $d(x, y) = d(Tx, Ty)$ en cada $x, y \in X$.
2. (X, T) es *equicontinuo* si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$ entonces $d(T^n x, T^n y) < \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

3. (X,T) es *distal* si $\mathbf{P}(X) = \triangle_X = \{(x,x) : x \in X\}$, es decir no hay pares proximales no triviales.

Claramente de las definiciones, una isometría es un sistema equicontinuo y un sistema equicontinuo es un sistema distal. Además, cuando el sistema es equicontinuo y minimal se puede probar que es conjugado a una isometría minimal.

Citamos algunas propiedades clásicas de los sistemas distales, que usaremos.

Teorema 2.4 (Ver [1](Caps. 5 y 7))**.**

1. *El producto cartesiano de una familia finita de sistemas distales es distal.*
2. *Si (X,T) es un sistema distal e $Y \subseteq X$ es un subconjunto cerrado e invariante, entonces (Y,T) es distal.*
3. *Un sistema transitivo y distal es minimal.*
4. *Un factor de un sistema distal es distal.*
5. *Sea $\pi : X \to Y$ un factor entre los sistemas distales (X,T) e (Y,T). Si (Y,T) es minimal, entonces π es una función abierta.*

2.1.2. Semigrupo envolvente

En esta sección revisamos la noción de semigrupo envolvente desarrollada por Robert Ellis en la década del 60, la cual permite estudiar un sistema dinámico topológico minimal desde un punto de vista algebraico.

Sea (X,T) un sistema dinámico topológico. Sea X^X el conjunto de funciones de X en X. Si $u,v \in X^X$ denotamos como uv la composición de u y v. Con esta operación X^X resulta ser un semigrupo y la acción de T en X induce en X^X la operación $u \mapsto Tu$, la cual también llamaremos T. Consideramos en X^X la topología de la convergencia puntual (es decir la topología producto). El semigrupo envolvente o semigrupo de Ellis $E(X,T)$ se define como la clausura de $\{T^n : n \in \mathbb{Z}\}$ en X^X.

Se tiene que $E(X,T)$ con la composición de funciones resulta ser un semigrupo compacto en el cual las operaciones

$$u \mapsto uv \quad \text{y} \quad u \mapsto Tu$$

son continuas para $u,v \in E(X,T)$. Notemos que $(E(X,T),T)$ resulta ser un s.d.t.

El semigrupo envolvente ha ayudado a caracterizar propiedades topológicas de un sistema dinámico. A continuación enunciamos algunos de los resultados más notables.

Teorema 2.5 ([1], Caps 3 y 6)**.** *Sea (X,T) un s.d.t. y $E(X,T)$ su semigrupo envolvente. Entonces:*

1. *(X,T) es distal si y solamente si $E(X,T)$ es un grupo.*
2. *(X,T) es equicontinuo si y solamente si $E(X,T)$ es un grupo de homeomorfismos de X y la topología de la convergencia puntual en $E(X,T)$ coincide con la topología uniforme.*

Un resultado importante que permite caracterizar la proximalidad usando el semigrupo envolvente es el siguiente,

Teorema 2.6 ([1], Caps 3 y 6)**.** *Sea (X,T) un s.d.t. Se tiene,*

1. *$x_1, x_2 \in X$ son proximales si y solamente si existe $p \in E(X,T)$ tal que $px_1 = px_2$.*
2. *Si $x \in X$ y $u \in E(X,T)$ es un idempotente (es decir, un elemento que satisface $u^2 = u$), entonces $(x, ux) \in \mathbf{P}$.*
3. *Si (X,T) es minimal, entonces $(x,y) \in \mathbf{P}$ si y solamente si existe $u \in E(X,T)$ idempotente minimal tal que $y = ux$.*

2.1.3. Factores y conjugaciones entre sistemas dinámicos topológicos

Un factor $\pi : (X,T) \to (Y,S)$ es una función continua y sobreyectiva tal que $S \circ \pi = \pi \circ T$. Cuando tal función existe, diremos que (Y,S) es un factor de (X,T) y que (X,T) es una extensión de (Y,S). Cuando π es biyectiva se dirá que es una conjugación entre (X,T) e (Y,S) y (X,T) e (Y,S) se dirán sistemas conjugados. Escribiremos también $\pi : X \to Y$ o $\pi : (X,T) \to (Y,T)$ para denotar un factor y en general la transformación se denotará siempre T.

Notemos que una relación de equivalencia $R \subseteq X \times X$ cerrada y T-invariante define un factor $\pi_R : (X,T) \to (X/R,T)$. Recíprocamente, cada factor $\pi : X \to Y$ define la relación de equivalencia cerrada y T-invariante $R_\pi = \{(x,x') : \pi(x) = \pi(x')\}$.

Un *joining* entre X y Y es un subconjunto $J \subseteq X \times Y$ cerrado, que se proyecta en X e Y, es decir $\pi_X(J) = X$ y $\pi_Y(J) = Y$. Cuando $J \neq X \times Y$ se dirá que J es un *joining* no trivial. Diremos que X e Y son disjuntos como sistemas, si no existen *joining* no trivales y se anota $X \perp Y$.

Hay clases importantes de factores que se definen a partir de los conceptos de distalidad y proximalidad mencionados en la sección anterior. Definimos algunos a continuación.

Sea $\pi : X \to Y$ un factor entre sistemas dinámicos topológicos. Decimos que (X,T) es una extensión :

1. *Proximal* si $\pi(x) = \pi(y) \Rightarrow (x,y) \in \mathbf{P}(X)$.
2. *Distal* si $\pi(x) = \pi(y)$ y $x \neq y \Rightarrow (x,y) \neq \mathbf{P}(X)$.
3. *Isométrica* si $\pi(x) = \pi(y) \Rightarrow d(x,y) = d(T^n x, T^n y)\ \forall n \in \mathbb{Z}$.
4. *Casi uno a uno* si $\{x \in X : \pi^{-1}(\pi(x)) = \{x\}\}$ es un conjunto G_δ denso.

Factor equicontinuo maximal

En esta subsección, mostramos un ejemplo importante de factor asociado a un sistema dinámico topológico, que ha motivado importantes generalizaciones que han contribuido a recientes y notables desarrollos en Dinámica Topológica y Teoría Ergódica. Sea $\pi : X \to Y$ un factor entre los s.d.t. (X,T) e (Y,T). Decimos que (Y,T) es un factor equicontinuo de (X,T) si (Y,T) es un s.d.t. equicontinuo. Puede haber un amplio espectro de factores equicontinuos asociados a un sistema, pero un teorema clásico afirma lo siguiente.

Teorema 2.7. *Sea (X,T) un s.d.t. Entonces existe un factor equicontinuo maximal, es decir un factor (Y,T) equicontinuo, tal que si (Z,T) es un factor equicontinuo de (X,T), entonces (Z,T) también es factor de (Y,T).*

Al factor equicontinuo maximal de (X,T) lo anotamos (X_{eq},T). Si (Z,T) es cualquier factor equicontinuo de (X,T) tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(X,T) \arrow[d, "\pi_{eq}"'] \arrow[dr, "\pi_Z"] & \\
(X_{eq},T) \arrow[r, "\pi_{eq,Z}"'] & (Z,T)
\end{tikzcd}$$

El siguiente concepto permite construir explícitamente el factor equicontinuo maximal a través de una relación de equivalencia cerrada e invariante. Esta construcción permite generalizar el concepto de factor equicontinuo maximal, como mostraremos en la sección 2.5.

Sea (X,T) un s.d.t. y $x,y \in X$. Decimos que x,y son regionalmente proximales si para cada $\delta > 0$ y para cada $\epsilon > 0$ existen $\overline{x},\overline{y} \in X$ y existe $n \in \mathbb{Z}$ con $d(x,\overline{x}) < \delta, d(y,\overline{y}) < \delta$ y $d(T^n(\overline{x}),T^n(\overline{y})) < \epsilon$. Escribimos $\mathbf{RP}(X)$ a los pares regionalmente proximales y cuando no haya confusión, los anotaremos simplemente como $\mathbf{RP}$. Es un resultado clásico que en un sistema minimal $\mathbf{RP}(X)$ es una relación de equivalencia.

En cualquier sistema dinámico topológico se pueden definir los factores distal y equicontinuo maximal y se determinan por las relaciones $\mathbf{P}(X)$ y $\mathbf{RP}(X)$.

Teorema 2.8 ([15])**.** *Sea (X,T) un s.d.t. y sean S_d y S_{eq} las relaciones de equivalencia cerradas, T-invariantes más pequeñas que contienen a $\mathbf{P}(X)$ y $\mathbf{RP}(X)$ respectivamente. Luego $X_d = (X/S_d,T)$ y $X_{eq} = (X/S_{eq},T)$ son el factor distal y equicontinuo maximal respectivamente.*

Análogamente a ser factor equicontinuo maximal, ser factor distal maximal significa que si (Z,T) es un factor distal de (X,T), entonces (Z,T) también es un factor de (X_D,T)

Se deduce que (X_{eq},T) es factor de (X_D,T).

2.1.4. Sistemas Dinámicos Abstractos

Un sistema dinámico abstracto (s.d.a.) $(X,\mathcal{X},\mu,T)$ es un espacio de probabilidad $(X,\mathcal{X},\mu)$ dotado de la transformación $T : X \to X$ $\mathcal{X}$-$\mathcal{X}$-medible que preserva la medida, es decir $T\mu(B) := \mu(T^{-1}B) = \mu(B)$ para todo $B \in \mathcal{X}$. A menudo, un s.d.a. $(X,\mathcal{X},\mu,T)$ lo escribiremos como (X,μ,T), omitiendo la σ-álgebra.

Sea (X,μ,T) un s.d.a. Un conjunto medible $A \in \mathcal{X}$ se dice invariante si $\mu(A \triangle T^{-1}A) = 0$, donde $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. El s.d.a. (X,μ,T) se dice ergódico si no existen conjuntos invariantes no triviales, es decir, si $A \in \mathcal{X}$ y $\mu(A \triangle T^{-1}A) = 0$ entonces necesariamente $\mu(A) = 0$ o $\mu(A) = 1$.

Si (X,μ,T) es un s.d.a. usaremos la palabra factor con dos significados distintos: como una sub-σ-álgebra T-invariante $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{X}$ o como un s.d.a. $(Y,\mathcal{Y},\nu,S)$ y una función $\pi : X' \subseteq X \to Y' \subseteq Y$ medible con $\mu(X') = \nu(Y') = 1$ y tal que $\pi\mu = \nu$ y $S \circ \pi = \pi \circ T$. Se identifica la σ-álgebra $\mathcal{Y}$ de Y con la sub-σ-álgebra invariante $\pi^{-1}(\mathcal{Y})$ de $\mathcal{X}$.

Relación entre s.d.t. y s.d.a.

En esta memoria el objeto de estudio son los sistemas dinámicos topológicos. Sin embargo, los sistemas dinámicos abstractos aparecen como una herramienta importante en su estudio, por lo cual mostramos resultados clásicos que relacionan tales conceptos.

Sea (X,T) un s.d.t. y consideremos la σ-algebra de Borel $\mathcal{B}(X)$ generada por los abiertos de X. Denotemos por $\mathcal{M}(X)$ el conjunto de medidas de probabilidad definidas sobre $\mathcal{B}(X)$ y $\mathcal{M}(X,T)=\{\mu\in\mathcal{M}(X): T\mu=\mu\}$ el conjunto de medidas invariantes para T. Los siguientes teoremas clásicos ligan los s.d.t. con los s.d.a.

Teorema 2.9 (Krylov-Bogolioubov)**.** *Sea (X,T) un s.d.t. Luego $\mathcal{M}(X,T)$ es no vacío.*

Se tienen además las siguientes propiedades de $\mathcal{M}(X,T)$:

Teorema 2.10. *Sea (X,T) un s.d.t., luego*

1. *$\mathcal{M}(X,T)$ es un subconjunto compacto de $\mathcal{M}(X)$.*
2. *$\mathcal{M}(X,T)$ es convexo.*
3. *$\mu\in\mathcal{M}(X,T)$ es un punto extremo de $\mathcal{M}(X,T)$ si y solamente si (X,μ,T) es un s.d.a. ergódico. En este caso, decimos que μ es una medida ergódica.*
4. *Si $\mu,\nu\in\mathcal{M}(X,T)$ son dos médidas ergódicas, entonces $\mu=\nu$ o $\mu\perp\nu$.*

Así, si (X,T) es un s.d.t., siempre existe una medida invariante μ (o ergódica) que permite estudiarlo como un s.d.a.

2.2. Noción de cubo y cubos dinámicos

2.2.1. Cubos

En esta sección desarrollamos la noción de cubo, introducida en [27], la cual ha sido de gran utilidad en desarrollos recientes en Dinámica Topológica y Teoría Ergódica, siendo la base de un importante Teorema de Estructura demostrado en [27] que mencionamos al final de la Sección 2.4.

Sea X un conjunto y $d\in\mathbb{N}$. Escribimos $[d]=\{1,\ldots,d\}$. Vemos el hipercubo $\{0,1\}^d$ de dos maneras, como una secuencia $\epsilon=\epsilon_1\ldots\epsilon_d$ de ceros y unos o como un subconjunto de $[d]$. Un subconjunto ϵ corresponde a la secuencia $\epsilon_1\ldots\epsilon_d\in\{0,1\}^d$ tal que $\epsilon_i=1$ si y solamente si $i\in\epsilon$. Por ejemplo $\mathbf{0}=0\ldots0$ corresponde al conjunto vacío.

Si $\mathbf{n}=(n_1,\ldots,n_d)\in\mathbb{Z}^d$ y $\epsilon\subset[d]$, definimos

$$\mathbf{n}\cdot\epsilon=\sum_{i=1}^{d}\epsilon_i n_i=\sum_{i\in\epsilon}n_i.$$

Denotamos $X^{[d]}=X^{2^d}$. Un punto $\mathbf{x}\in X^{[d]}$ puede ser escrito de dos maneras equivalentes, dependiendo del contexto,

$$\mathbf{x}=(x_\epsilon:\epsilon\in\{0,1\}^d)=(x_\epsilon:\epsilon\subseteq[d]).$$

Como ejemplos, los puntos en $X^{[2]}$ se escriben como

$$(x_{00}, x_{10}, x_{01}, x_{11}) = (x_{\phi}, x_{\{1\}}, x_{\{2\}}, x_{\{1,2\}}),$$

y puntos en $X^{[3]}$ son de la forma

$$(x_{000}, x_{100}, x_{010}, x_{110}, x_{001}, x_{101}, x_{011}, x_{111}) = (x_{\emptyset}, x_{\{1\}}, x_{\{2\}}, x_{\{1,2\}}, x_{\{3\}}, x_{\{1,3\}}, x_{\{2,3\}}, x_{\{1,2,3\}}).$$

Dado $x \in X$, escribimos $x^{[d]} = (x, \ldots, x) \in X^{[d]}$. La diagonal de $X^{[d]}$ es $\triangle^{[d]} = \{x^{[d]} : x \in X\}$.

Un punto $\mathbf{x} \in X^{[d]}$ puede ser descompuesto como $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$ con $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in X^{[d-1]}$, donde $\mathbf{x}' = (x_{\epsilon 0} : \epsilon \in \{0,1\}^{d-1})$ y $\mathbf{x}'' = (x_{\epsilon 1} : \epsilon \in \{0,1\}^{d-1})$. También podemos aislar la primera coordenada, escribiendo un punto $\mathbf{x} \in X^{[d]}$ como $\mathbf{x} = (x_{\emptyset}, x_*)$, donde $x_* = (x_\epsilon : \epsilon \subset [d] \setminus \{\emptyset\}) \in X_*^{[d]} := X^{2^d - 1}$.

Identificando $\{0,1\}^d$ con los vértices del cubo unitario euclideano, una isometría euclideana del cubo permuta los vértices del cubo y por lo tanto las coordenadas de $\mathbf{x} \in X^{[d]}$. Estas permutaciones se denominan *permutaciones euclideanas* de $X^{[d]}$. Como ejemplos de permutaciones euclideanas podemos mencionar:

- *Permutaciones de dígitos*: son las permutaciones de $\{0,1\}^d$ inducidas por permutaciones de $[d]$.

- *Simetrías*: son las permutaciones de $\{0,1\}^d$ que se forman al reemplazar ϵ_i por $1 - \epsilon_i$ para algún $i \in [d]$.

Por ejemplo,

$$(00, 10, 01, 11) \to (00, 01, 10, 11)$$
$$(00, 10, 01, 11) \to (10, 00, 11, 01)$$

corresponden a una permutación de las coordenadas y a una simetría en la primera posición. Las permutaciones euclideanas son formadas por composiciones de permutaciones y simetrías.

2.2.2. Cubos dinámicos

En esta sección mostramos como formar cubos utilizando la dinámica de un sistema dinámico topológico. Esta construcción, como veremos más adelante, puede decir muchas propiedades del sistema dinámico mismo.

Sea (X, T) un sistema dinámico topológico y $d \in \mathbb{N}$. Definimos $\mathbf{Q}^{[d]}(X)$ como la cerradura en $X^{[d]}$ de elementos de la forma:

$$(T^{\mathbf{n} \cdot \epsilon}(x) : \epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_d) \in \{0,1\}^d)$$

donde $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$ y $x \in X$. Cuando no haya ambiguedad escribiremos $\mathbf{Q}^{[d]}(X)$ simplemente como $\mathbf{Q}^{[d]}$. Un elemento en $\mathbf{Q}^{[d]}(X)$ se llamará un cubo o paralelepípedo dinámico. Observemos algunas propiedades básicas de $\mathbf{Q}^{[d]}(X)$:

1. $x^{[d]} \in \mathbf{Q}^{[d]}(X)$ para todo $x \in X$;
2. $\mathbf{Q}^{[d]}(X)$ es invariante bajo permutaciones euclideanas;
3. Si $\mathbf{x} \in \mathbf{Q}^{[d]}(X)$, entonces $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in \mathbf{Q}^{[d+1]}(X)$.

Para clarificar:

- $\mathbf{Q}^{[1]}(X)$ es la clausura en $X^{[1]} = X^2$ del conjunto $\{(x, T^n(x)) : x \in X, n \in \mathbb{Z}\}$. Si (X,T) es minimal, $\mathbf{Q}^{[1]}(X) = X \times X$.
- $\mathbf{Q}^{[2]}(X)$ es la clausura en $X^{[2]} = X^4$ del conjunto

$$\{(x, T^m x, T^n x, T^{n+m} x) : x \in X, n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

- $\mathbf{Q}^{[3]}(X)$ es la clausura en $X^{[3]} = X^8$ del conjunto

$$\{(x, T^m x, T^n x, T^{n+m} x, T^p x, T^{p+m} x, T^{p+n} x, T^{p+n+m} x) : x \in X, n, m, p \in \mathbb{Z}\}.$$

Si $\pi : X \to Y$ es un factor entre los s.d.t., (X,T) e (Y,T) entonces $\pi^{[d]}(\mathbf{Q}^{[d]}(X)) = \mathbf{Q}^{[d]}(Y)$ donde $\pi^{[d]} = \pi \times \pi \cdots \times \pi$ (2^d veces).

Definimos a continuación transformaciones de $\mathbf{Q}^{[d]}(X)$ en sí mismo, definidas a partir de la transformación T en X, que determinan una dinámica en $\mathbf{Q}^{[d]}(X)$.

Definición 2.11 (Transformaciones de fase)**.** Sea (X,T) un s.d.t. y $d \in \mathbb{N}$. Definimos la transformación diagonal como $T^{[d]} : X^{[d]} \to X^{[d]}$ donde

$$(T^{[d]}\mathbf{x})_\epsilon = T x_\epsilon$$

para $\mathbf{x} = (x_\epsilon)_{\epsilon \in \{0,1\}^d}$.

Por ejemplo, en $X^{[2]}$, $T^{[2]}(x_{00}, x_{10}, x_{01}, x_{11}) = (Tx_{00}, Tx_{10}, Tx_{01}, Tx_{11})$.

Para cada $j \in [d]$ definimos la transformación de fase $T_j^{[d]} : X^{[d]} \to X^{[d]}$ como

$$T_j^{[d]}\mathbf{x} = \begin{cases} (T_j^{[d]}\mathbf{x})_\epsilon = T x_\epsilon & \text{si } j \in \epsilon \\ (T_j^{[d]}\mathbf{x})_\epsilon = x_\epsilon & \text{si } j \notin \epsilon \end{cases}$$

Si se piensa en las coordenadas de $\mathbf{x}$ como los vértices de un cubo, estas transformaciones corresponden a iterar la transformación en una sola cara. Por ejemplo, con $k = 3$, en la figura se muestran las transformaciones de fase asociadas. Cada una cambia los valores indexados por los símbolos pintados en azul:

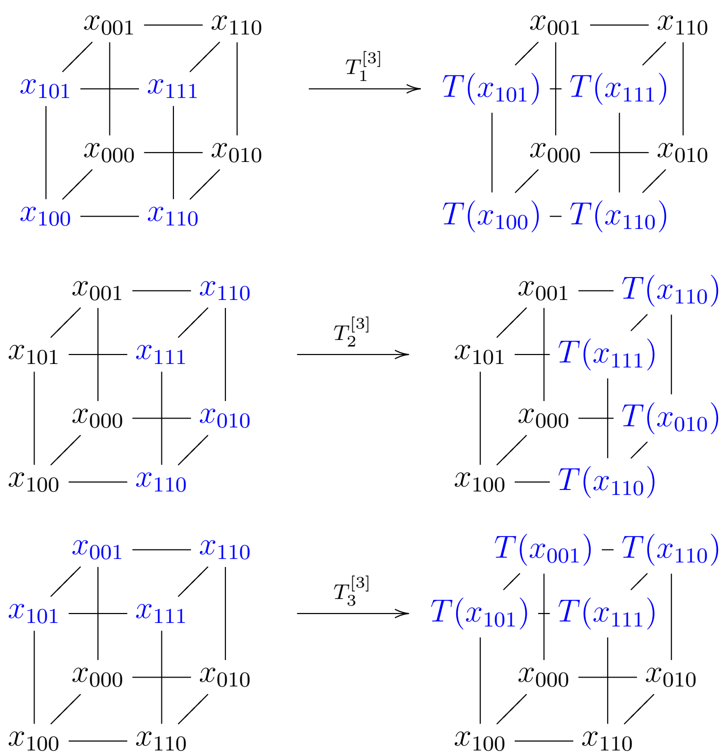

Figura 2.1: Transformaciones de fase en $X^{[3]}$.

El grupo de fase de dimensión d es el grupo $\mathcal{F}^{[d]}(X)$ de transformaciones en $X^{[d]}$ generadas por las transformaciones de fase. El grupo paralelepípedo de dimensión d es el grupo $\mathcal{G}^{[d]}(X)$ generado por la transformación diagonal y por las transformaciones de fase. Similar a la notación usada en $X^{[d]}$, un elemento $S \in \mathcal{F}^{[d]}(X)$ (o en $\mathcal{G}^{[d]}(X)$) será escrito como:

$$S = (S_\epsilon : \epsilon \in \{0,1\}^d\} = (S_\epsilon : \epsilon \subseteq [d]\}).$$

En particular,

$$\mathcal{F}^{[d]}(X) = \{S \in \mathcal{G}^{[d]}(X) : S_\emptyset = Id\}.$$

Notamos que el grupo $\mathcal{G}^{[d]}$ satisface propiedades análogas a $\mathbf{Q}^{[d]}$:

1. $T^{[d]} \in \mathcal{G}^{[d]}$;

2. $\mathcal{G}^{[d]}$ es invariante bajo permutaciones euclideanas;

3. Si $S \in \mathcal{G}^{[d]}$, entonces $(S,S) \in \mathcal{G}^{[d+1]}$.

2.3. Propiedades básicas de Grupos de Lie

En esta memoria aparecerá como objeto de estudio el concepto de grupo de Lie, lo cual hace necesario mostrar las nociones básicas sobre Grupos de Lie que se discutirán a lo largo de este texto. Dedicaremos esta sección a tal propósito, sin ambición de entrar en mayores detalles. Una referencia general a este tema es [21].

Un grupo de Lie G o $(G,\cdot)$ es un grupo (en el sentido abstracto) que además es una variedad diferenciable, donde las operaciones son compatibles con la diferenciabilidad, es decir:

$$\begin{aligned}(g,h) &\to g\cdot h := gh\\ g &\to g^{-1}\end{aligned}$$

son funciones diferenciables de $G\times G\to G$ y de $G\to G$ respectivamente.

Ejemplos:

1. $(\mathbb{R}^n,+)$ es un grupo de Lie.

2. Sea $GL_n=\{A\in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : A \text{ es invertible }\}$ el *grupo lineal general*. Es una variedad n^2-dimensional, y con la multiplicación usual de matrices resulta ser un grupo de Lie. Consta de dos componentes conexas, $GL_n^+=\{A\in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : det(A)>0\}$ y $GL_n^-=\{A\in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : det(A)<0\}$.

3. Sea $O(n)=\{A\in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : A^TA=Id\}$, con la multiplicación usual de matrices. Es un grupo de Lie que se denomina *grupo ortogonal* y consta de dos componentes conexas, $O(n)^+=\{A\in O(n) : det(A)=1\}$ y $O(n)^-=\{A\in O(n) : det(A)=-1\}$.

4. Sea $SO(n)=O(n)^+=\{A\in O(n) : det(A)=1\}$ con la multiplicación usual de matrices. Resulta ser un grupo de Lie conexo y se le denomina el *grupo especial ortogonal*.

5. Sea $G=\left\{\begin{pmatrix}1 & x & z\\ 0 & 1 & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} : x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$ con la multiplicación usual de matrices. Es un grupo de Lie conexo y se denomina el *grupo de Heisenberg*.

6. Sea
$$H_n=\left\{\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_2 & \dots & x_n & z\\ & 1 & 0 & \dots & 0 & y_1\\ & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ & & & 1 & 0 & y_{n-1}\\ & 0 & & & 1 & y_n\\ & & & & & 1\end{pmatrix} : x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n,z\in\mathbb{R}\right\}$$
con la multiplicación de matrices. Es un grupo de Lie y es la generalización más simple del grupo de Heisenberg.

7. Sea
$$U_n=\left\{\begin{pmatrix}1 & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n}\\ & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n}\\ & & \ddots & & \\ & 0 & & 1 & a_{n-1,n}\\ & & & & 1\end{pmatrix} : a_{ij}\in\mathbb{R} \text{ si } j-i\geq 1\right\}$$

con la multiplicación usual de matrices. Es un grupo de Lie y lo llamaremos el *grupo de Heisenberg de orden n*.

8. Sea $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S^1 = \{(x, y, z) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ y definamos la operación
$$(x_1, y_1, z_1) * (x_2, y_2, z_2) \to (x_1 + x_2, y_1 + y_2, e^{ix_1y_2} z_1z_2)$$
Se puede probar que G es un grupo de Lie y que no es isomorfo (como grupo) a ningún grupo matricial.

2.3.1. Campos vectoriales y el Algebra de Lie

Los siguientes conceptos y resultados geométricos son clásicos, para una referencia ver [21], [22].

Sea G un grupo de Lie de dimensión m. Un campo vectorial es una función X que a cada $g \in G$ le asocia $X_g \in T_g(G)$ donde $T_g(G)$ es el espacio tangente a G en g. Usando un sistema de coordenadas, podemos expresar el campo vectorial como

$$X_g(f) = \left. \left(\sum_{k=1}^{m} a_k(g) \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \right|_g \quad \text{para cada } f \in C^\infty(G).$$

Podemos definir una función $C^\infty(G) \to C^\infty(G)$, que llamaremos también X, escribiendo $X(f)(g) = X_g(f)$. A X definido de esta forma lo llamaremos también un campo vectorial. Para X e Y campos vectoriales (como funciones de $C^\infty(G)$ en sí mismo) definimos $[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$. Con esta operación, los campos vectoriales forman un álgebra de Lie de dimensión infinita.

Sea $g \in G$ un elemento fijo y definamos la aplicación $L_g : G \to G$ por $L_g(h) = gh$. Como la multiplicación es suave en $G \times G$, L_g resulta ser diferenciable. Denotemos por $D(L_g)$ el diferencial de L_g. Luego $D(L_g)(h) : T_h(G) \to T_{L_g(h)}(G) = T_{gh}(G)$ es un funcional lineal. Un campo vectorial se dice invariante por la izquierda si

$$D(L_g)(h)(X_h) = X_{gh} \text{ para cualquier } g, h \in G$$

Sea $T_e(G)$ el espacio tangente a G en la identidad e y sea $v \in T_e(G)$. Definamos el campo vectorial X^v colocando $X^v_g = D(L_g)(e)(v)$. Éste es el único campo vectorial que satisface $X^v_e = v$. Se tiene que el espacio de campos vectoriales invariantes por la izquierda es un espacio vectorial de la misma dimensión que G y es isomorfo como espacio vectorial a $T_g(e)$ vía evaluación en la identidad. Este isomorfismo permite hacer la siguiente definición.

Definición 2.12 (Álgebra de Lie)**.** Sea G un grupo de Lie. El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G es el espacio tangente a G en la identidad e, dotado de la operación definida por

$$[v, w] = [X^v, X^w](e).$$

Sea G un grupo de Lie simplemente conexo y $\mathfrak{g} = T_e(G)$ el álgebra de Lie. Se define el mapeo exponencial $\exp : \mathfrak{g} \to G$ como $\exp(v) = \gamma(1)$ donde γ es la única curva $\gamma : \mathbb{R} \to G$

tal que $\frac{d\gamma}{dt}|_{t=0} = v$. Sea G^0 la componente conexa de la identidad. Si G es simplemente conexo, G^0 es exponencial, es decir el mapeo exponencial entre $\mathfrak{g}$ y G^0 es un difeomorfismo. Luego, si G es conexo y simplemente conexo $\exp : \mathfrak{g} \to G$ es un difeomorfismo.

Sean G un grupo de Lie conexo y simplemente conexo y sean $a = \exp(X)$, $b = \exp(Y)$ donde $a, b \in G$ y $X, Y \in \mathfrak{g}$. En este caso $ab = \exp(Z)$ para algún $Z \in \mathfrak{g}$. La pregunta natural es la relación entre Z, X e Y. Esto lo responde la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff.

Teorema 2.13. *Sea G un grupo de Lie simplemente conexo, sean $X, Y \in \mathfrak{g}$ y sea $Z \in \mathfrak{g}$ tal que $\exp(Z) = \exp(X)\exp(Y)$. Entonces, se tiene la siguiente fórmula*

$$Z = \sum_{n>0} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{\substack{r_i+s_i>0 \\ 1\le i\le n}} \frac{(\sum_{i=1}^n r_i + s_i)^{-1}}{r_1!s_1!\cdots r_n!s_n!}[X^{r_1}Y^{s_1}\cdots X^{r_n}Y^{s_n}]$$

donde

$$[X^{r_1}Y^{s_1}\cdots X^{r_n}Y^{s_n}] = [\underbrace{X,[X,\dots[X,}_{r_1}\underbrace{[Y,[Y,\dots[Y,}_{s_1}\dots,[\underbrace{X,[X,\dots[X,}_{r_n}\underbrace{[Y,[Y,\dots Y]]}_{s_n}\dots]$$

Los primeros términos de la serie vienen dados por $X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] - \frac{1}{12}[Y,[X,Y]] - \frac{1}{24}[Y,[X,[X,Y]]] + \dots$.

Si G es abeliano se tiene $\exp(X)\exp(Y) = \exp(X+Y)$.

2.4. Nilvariedades y nilsistemas

En esta sección definimos las nilvariedades y nilsistemas, que serán los sistemas dinámicos de nuestro interés en esta memoria.

Sea G un grupo y $[\cdot,\cdot]$ el conmutador asociado, es decir $[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab$ en cada $a, b \in G$. Dados subgrupos $A, B \subseteq G$, escribimos $[A,B]$ para denotar al subgrupo generado por $\{[a,b] : a \in A, b \in B\}$. Se definen inductivamente los subgrupos conmutadores G_j como:

$$G_0 = G$$
$$G_{j+1} = [G, G_j] \quad j \ge 0$$

Definición 2.14. Decimos que G es un grupo nilpotente de orden d si G_d es el subgrupo trivial.

Ejemplos:

- El grupo nilpotente de orden 0 es el grupo trivial.
- Un grupo es nilpotente de orden 1 si y solamente si es abeliano.
- El grupo de Heisenberg definido en la Sección 2.3 es nilpotente de orden 2.
- Los grupos H_n definidos en la Sección 2.3 son nilpotentes de orden 2.

- Los grupos de Heisenberg U_n definidos en la Sección 2.3 son nilpotentes de orden $n-1$.

Definición 2.15. Dado un grupo de Lie G nilpotente de orden d y Γ un subgrupo discreto cocompacto de G (es decir, numerable y tal que G/Γ es compacto), decimos que $X = G/\Gamma$ es una nilvariedad de orden d. Los elementos de X se anotan como $h\Gamma$ donde $h \in G$.

En X consideramos la acción T dada por la traslación por la izquierda por un elemento $g \in G$ fijo, es decir $T(h\Gamma) = gh\Gamma$. El sistema (X, T) resulta ser un s.d.t. Sea μ la medida de Haar de (X, T) (aquella invariante por rotaciones en el grupo). Ésta es la única medida de probabilidad invariante bajo T. Notamos que (X, μ, T) resulta ser un s.d.a. y tanto al s.d.t. (X, T) como al s.d.a. (X, μ, T) los llamaremos nilsistemas de orden d o d-nilsistemas.

Ejemplos:

- La rotación $R_\alpha : x \mapsto x + \alpha$ en un grupo abeliano compacto es un nilsistema de orden 1.
- Sea

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z} \right\} \qquad \Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & m & k \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : n, m, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Es fácil ver que podemos identificar $\mathbb{T}^2$ con G/Γ asociando a $(x, y) \in \mathbb{T}^2$ el elemento $\begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma$.

Consideremos la acción T dada por la multiplicación por $g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y notemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x+y \\ 0 & 1 & x+\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x+y \\ 0 & 1 & x+\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma$$

El sistema $(G/\Gamma, T)$ es un nilsistema de orden 2 y se conoce como el toro torcido.

- El sistema de Heisenberg de orden n, dado por $(U_n/\Gamma_n, T)$ donde

$$U_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & 1 & a_{n-1,n} \\ & & & & 1 \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ si } j - i \geq 1 \right\}$$

$$\Gamma_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & m_{12} & \dots & \dots & m_{1n} \\ & 1 & m_{23} & \dots & m_{2n} \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & 1 & m_{n-1,n} \\ & & & & 1 \end{pmatrix} : m_{ij} \in \mathbb{Z} \text{ si } j-i \geq 1 \right\}$$

y T es la multiplicación por un elemento $g \in U_n$, es un nilsistema de orden $n-1$.

En lo que sigue mencionaremos algunas propiedades topológicas y medibles de los nilsistemas.

Teorema 2.16 ([2])**.** *Si $(G/\Gamma, T)$ es un nilsistema, entonces es distal. Es decir, para cada $x, y \in X$ se tiene*

$$\inf_{n\in\mathbb{Z}} d(T^n x, T^n y) > 0$$

Se observa una conexión estrecha entre la teoría medible y topológica de nilsistemas (lo que se conoce como rigidez). Un teorema importante que exhibe este hecho es el siguiente:

Teorema 2.17 ([34])**.** *Sea $(X = G/\Gamma, T)$ un nilsistema y μ su medida de Haar. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *(X, T) es transitivo.*
2. *(X, T) es minimal.*
3. *(X, T) es únicamente ergódico.*
4. *(X, μ, T) es ergódico.*

Sea $(X = G/\Gamma, \mu, T)$ un nilsistema de orden d, donde $T(h\Gamma) = gh\Gamma$. Definimos $(G/\Gamma)_{ab} = G/[G,G]\Gamma$ y $\pi : G/\Gamma \to G/[G,G]\Gamma$ la proyección canónica. Se tiene que $G/[G,G]\Gamma$ es isomorfo a $\mathbb{R}^{m_{ab}}/\mathbb{Z}^{m_{ab}}$ donde $m_{ab} = dim(G) - dim([G,G])$. Sea $\widetilde{T}$ la rotación inducida en $(G/\Gamma)_{ab}$ por $\pi(g)$. Decimos que $((G/\Gamma)_{ab}, \widetilde{T})$ es la abelianización del nilsistema $(G/\Gamma, T)$. La importancia de la abelianización de un nilsistema viene dada por el siguiente criterio de ergodicidad.

Teorema 2.18 ([2])**.** *Sea $(G/\Gamma, \mu, T)$ un nilsistema donde T es la traslación por $g \in G$ y sea $(G/[G,G]\Gamma, T)$ su abelianización. Supongamos que G está generado por G^0, la componente conexa de la identidad, y por el elemento $g \in G$. Luego $(G/\Gamma, \mu, T)$ es ergódico si y solamente si la rotación $((G/\Gamma)_{ab}, \widetilde{T})$ es ergódica.*

Ejemplo:
En el grupo de Heisenberg clásico

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \text{ y } \Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n & k \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : n, m, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Es fácil ver que

$$[G,G] = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}$$

y por lo tanto

$$[G,G]\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n & z \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \quad n,m \in \mathbb{Z} \right\}$$

Luego $G/[G,G]\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x,y \in [0,1) \right\}$. Si consideramos en G/Γ la traslación dada por $g = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, vemos que $(G/[G,G]\Gamma, T)$ es isomorfo a $(\mathbb{T}^2, \widetilde{T})$ donde $\widetilde{T}(x,y) = (x+a, y+b)$. Esta transformación es ergódica en $\mathbb{T}^2$ si y solamente si $\{1,a,b\}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$. Como G es conexo (es homeomorfo a $\mathbb{R}^3$), concluimos que la traslación dada por g en G/Γ es ergódica si y solamente si $\{1,a,b\}$ son l.i. sobre $\mathbb{Q}$.

Similarmente, en el grupo de Heisenberg U_n de orden n, se puede ver que la ergodicidad depende de la independencia lineal sobre $\mathbb{Q}$ de la superdiagonal.

El caso no ergódico en general se puede ignorar en las aplicaciones, gracias al siguiente teorema.

Teorema 2.19 ([33]). *Sea $(G/\Gamma, \mu, T)$ un nilsistema donde T es la traslación por $g \in G$. Sea $x_0 \in G/\Gamma$ y consideremos $Y = \overline{orb(x_0)} = \overline{\{T^n x_0 : n \in \mathbb{Z}\}}$. Luego, existe un subgrupo $G' \subseteq G$ tal que $g \in G'$, $\Gamma' = \Gamma \cap G'$ es cocompacto en G' y $Y = G'/\Gamma'$. Como $(Y, T|_Y)$ es transitivo, resulta ser minimal y ergódico.*

En el desarrollo de la teoría de nilsistemas son relevantes los límites inversos de éstos. La principal razón es que los límites inversos de nilsistemas no son nilsistemas, salvo si todos los grupos son abelianos.

Definición 2.20 (Límites inversos secuenciales).
Caso topológico:

Sean $\{(X_i, T_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ sistemas dinámicos topológicos donde cada X_i tiene una métrica d_i y $\mathrm{diam}(X_i) \leq 1$. Supongamos que existen factores $\pi_i : X_{i+1} \to X_i$. El límite inverso de estos sistemas se define como el conjunto

$$X = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} : \pi_i(x_{i+1}) = x_i\}$$

el cual resulta ser un subconjunto cerrado (y por lo tanto compacto) de $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ y el cual puede ser dotado de la métrica

$$d(x,y) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{d_i(x_i,y_i)}{2^i}.$$

Las transformaciones $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ inducen en X la transformación $T = \prod_{i\in\mathbb{N}} T_i$. Anotamos $(X,T) = \varprojlim (X_i, T_i)$.

Caso medible:

Sean $\{(X_i, \mathcal{X}_i, \mu_i, T_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ s.d.a. y supongamos que existen factores medibles $\pi_i : X_{i+1} \to X_i$. Sea X el conjunto

$$X = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} : \pi_i(x_{i+1}) = x_i\}.$$

Sea p_i la proyección de X en X_i, es decir $p_i((x_j)_{j\in\mathbb{N}}) = x_i$. A X lo dotamos de la σ-álgebra $\mathcal{X}$ generada por $p_i^{-1}(\mathcal{X}_i)$ donde $i \in \mathbb{N}$ y con la medida μ definida en el álgebra $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} p_i^{-1}(\mathcal{X}_i)$ como $\mu(p_i^{-1}(B)) = \mu_i(B)$ para $B \in \mathcal{X}_i$, $i \in \mathbb{N}$. Si $T = \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} T_i$, el límite inverso de los s.d.a. $(X_i, \mathcal{X}_i, \mu_i, T_i)$ es $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ y lo anotamos $(X, \mathcal{X}, \mu, T) = \varprojlim(X_i, \mathcal{X}_i, \mu_i, T_i)$.

Muchas propiedades dinámicas pasan hacia el límite inverso, como minimalidad, distalidad y única ergodicidad.

El siguiente teorema permite caracterizar los límites inversos de nilsistemas usando la noción de cubo dinámico.

Teorema 2.21 (Teorema de Estructura (Host-Kra-Maass))**.** *Sea (X, T) un sistema transitivo y $d \geq 2$ un entero. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{Q}^{[d]}(X)$ tienen $2^d - 1$ coordenadas en común, entonces $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.*
2. *Si $x, y \in X$ son tales que $(x, y, \ldots, y) \in \mathbf{Q}^{[d]}(X)$, entonces $x = y$.*
3. *X es un límite inverso de nilsistemas de orden $d - 1$.*

Un sistema satisfaciendo la hipótesis del teorema anterior se dice un *sistema de orden* $(d - 1)$.

2.5. Las relaciones de proximalidad regional

En esta sección se muestran generalizaciones de la relación **RP** definida anteriormente en la subsección 2.1.3. Similarmente a como **RP** define el factor equicontinuo maximal, estas relaciones definen los nilfactores topológicos maximales que definimos a continuación.

Definición 2.22. Sea (X, T) un s.d.t. y $d \in \mathbb{N}$. Decimos que un factor (Y, T) es el nilfactor de orden d maximal si (Y, T) es un sistema de orden d, es factor de (X, T) y si cada vez que existe (Z, T) sistema de orden d que es factor de (X, T), (Z, T) también es factor de (Y, T). En caso de existir tal (Y, T) lo escribimos como (Z_d, T) y se tiene el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
(X,T) \arrow[d, "\pi_{Z_d}"'] \arrow[dr, "\pi_Z"] & \\
(Z_d,T) \arrow[r, "\pi_{Z_d,Z}"'] & (Z,T)
\end{tikzcd}$$

La siguiente definición permite construir tales factores en cualquier sistema dinámico topológico minimal.

Definición 2.23. Sea (X,T) un s.d.t y $d \in \mathbb{N}$. Decimos que los puntos $x, y \in X$ son regionalmente proximales de orden d si para cualquier $\delta > 0$, existen $x', y' \in X$ y un vector $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$ tales que $d(x,x') < \delta$, $d(y,y') < \delta$ y

$$d(T^{\mathbf{n}\cdot\epsilon}x', T^{\mathbf{n}\cdot\epsilon}y') < \delta \quad \forall \epsilon \in \{0,1\}^d \setminus \{0,\ldots,0\}$$

donde $\mathbf{n} \cdot \epsilon = \sum_{i=1}^{d} n_i \epsilon_i$.

Denotamos por $\mathbf{RP}^{[d]}(X)$ el conjunto de los pares regionalmente proximales de orden d. Si el contexto es claro, escribiremos $\mathbf{RP}^{[d]}$ en lugar de $\mathbf{RP}^{[d]}(X)$.

Observamos que $\mathbf{RP}^{[1]} = \mathbf{RP}$ y que para cada $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{RP}^{[d+1]} \subseteq \mathbf{RP}^{[d]}$. Notamos también que $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{RP}^{[d]}$ para todo $d \in \mathbb{N}$. Damos acá una demostración alternativa a la dada en [38], en la que usaremos la estructura de cubos. Citamos para ello el siguiente resultado de [27].

Teorema 2.24. *Sea (X,T) un sistema. Luego si existe $a \in X_*^{[d]}$ tal que $(x,a,y,a) \in \mathbf{Q}^{[d+1]}$ entonces $(x,y) \in \mathbf{RP}^{[d]}$.*

Veamos entonces que $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{RP}^{[d-1]}$ para cada $d \geq 2$. Sean $(x,y) \in \mathbf{P}$ y $d \geq 2$. En virtud del Teorema 2.6 tomemos u idempotente del semigrupo envolvente $E(X,T)$ tal que $y = ux$. Consideramos las transformaciones de fase $u_j^{[d]}$, $j \in [d]$ asociadas a u

$$u_j^{[d]}(\mathbf{x}) = \begin{cases} (u_j^{[d]}\mathbf{x})_\epsilon = ux_\epsilon & \text{si } j \in \epsilon \\ (u_j^{[d]}\mathbf{x})_\epsilon = x_\epsilon & \text{si } j \notin \epsilon \end{cases}$$

Observamos que como $\mathbf{Q}^{[d]}$ es cerrado, se tiene $u_j^{[d]}(\mathbf{x}) \in \mathbf{Q}^{[d]}$ si $\mathbf{x} \in \mathbf{Q}^{[d]}$ para todo $j \in [d]$.

Notamos que

$$u_d^{[d]}(x,\ldots,x) = (x,\ldots,x,ux,\ldots,ux) = (x,\ldots,x,y,\ldots,y) \in \mathbf{Q}^{[d]}$$

$$\begin{aligned} u_{d-1}^{[d]}(x,\ldots,x,y,\ldots,y) &= (x,\ldots,x,ux,\ldots,ux,y,\ldots,y,uy,\ldots,uy) \\ &= (x,\ldots,x,\ y,\ldots,\ y,\ y,\ldots,y,\ y,\ldots,\ y) \end{aligned}$$

Y fácilmente deducimos que

$$u_1^{[d]} \circ u_2^{[d]} \cdots \circ u_d^{[d]}(x^{[d]}) = (x,y,\ldots,y) \in \mathbf{Q}^{[d]}$$

y por lo tanto $(x,y) \in \mathbf{RP}^{[d-1]}$.

Luego,

$$\mathbf{P} \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{RP}^{[d+1]} \subseteq \mathbf{RP}^{[d]} \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{RP}^{[2]} \subseteq \mathbf{RP}^{[1]} = \mathbf{RP}.$$

En [38], generalizando los resultados de [27], se demuestra:

Teorema 2.25. *Sea (X,T) un sistema minimal y $d \in \mathbb{N}$. Luego:*

1. *$(x,y) \in \mathbf{RP}^{[d]}$ si y solamente si $(x,y,\ldots,y) \in \mathbf{Q}^{[d+1]}$ si y solamente si $(x,y,\ldots,y) \in \overline{\mathcal{F}^{[d+1]}}(x^{[d+1]})$;*

2. $\mathbf{RP}^{[d]}$ *es una relación de equivalencia;*

3. (X,T) *es un sistema de orden d si y solamente si* $\mathbf{RP}^{[d]}(X) = \triangle_X$.

Teorema 2.26. *Sea $\pi : (X,T) \to (Y,T)$ un factor y $d \in \mathbb{N}$. Luego*

1. $(\pi \times \pi)(\mathbf{RP}^{[d]}(X)) \subseteq \mathbf{RP}^{[d]}(Y)$.

2. *Si (X,T) es minimal,* $(\pi \times \pi)(\mathbf{RP}^{[d]}(X)) = \mathbf{RP}^{[d]}(Y)$.

3. *Si (X,T) es minimal, (Y,T) es un sistema de orden d si y solamente si* $\mathbf{RP}^{[d]}(X) \subseteq R_\pi = \{(x,x') \in X \times X : \pi(x) = \pi(x')\}$.

En particular $(X/\mathbf{RP}^{[d]}, T)$ es el nilfactor maximal de orden d y obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(X,T) \arrow[d, "\pi_D"'] \arrow[drr, "\pi_{d+1}"] \arrow[drrr, "\pi_d"] \arrow[drrrrr, "\pi_{eq}"] & & & & & \\
(X_D,T) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\rho_{d+1}"'] \arrow[rrr, bend right, "\rho_d"'] \arrow[rrrrr, bend right, "\rho_1"'] & \cdots \arrow[r] & (Z_{d+1}(X),T) \arrow[r] & (Z_d(X),T) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & (Z_1(X),T) = (X_{eq},T)
\end{tikzcd}$$

donde X_D y X_{eq} son los factores distal y equicontinuo maximal respectivamente. Estos nilfactores aparecen entre los factores distal y maximal respectivamente, en los cuales desde Furstenberg se había notado una relación muy estrecha. La aparición de estos sistemas intermedios es novedosa y tienen importancia en Dinámica Topológica. Más aún, tienen una importancia trascendental desde el punto de vista medible que mostramos en la sección siguiente y que motivaron su desarrollo topológico.

2.6. Nilfactores medibles, medidas y seminormas HK

En esta sección exponemos brevemente la teoría de nilsistemas desarrollada por Host y Kra en el contexto medible, la cual logró resolver la convergencia de algunas medias ergódicas no convencionales.

Sea (X,μ,T) un s.d.a. ergódico y $d \in \mathbb{N}$. Con el objetivo de probar la convergencia en $L^2(\mu)$ de expresiones de la forma

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_1(T^n x) f_2(T^{2n}x) \dots f_d(T^{dn}x) \tag{2.1}$$

donde $f_1, \dots, f_d \in L^\infty(\mu)$, Host y Kra en [25] demuestran que es necesario y suficiente probar la existencia de tal expresión en un nilsistema de orden d, usando el concepto de *factor característico* introducido por Furstenberg y Weiss en [12].

Definición 2.27. Sea $\pi : (X, \mathcal{X}, \mu, T) \to (Y, \mathcal{Y}, \nu, T)$ un factor medible. Sean $d \in \mathbb{N}$ y $f_1, \ldots, f_d \in L^\infty(\mu)$. Decimos que (Y, ν, T) es un factor característico para los promedios

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_1(T^n x) f_2(T^{2n}x)\ldots f_d(T^{dn}x)$$

si cada vez que $\mathbb{E}(f_i|\mathcal{Y}) = 0$ para algún $i \in \{1, \ldots, d\}$, se tiene que el límite cuando $N \to \infty$ de

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_1(T^n x) f_2(T^{2n}x)\ldots f_d(T^{dn}x)$$

existe en $L^2(\mu)$ y es igual a 0.

Esta propiedad implica que

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\prod_{i=1}^{d} f_i(T^{in}x) - \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\prod_{i=1}^{d}\mathbb{E}(f_i(T^{in}x)|\mathcal{Y})\right) = 0$$

en $L^2(\mu)$ y por lo tanto para probar la convergencia de expresiones de la forma (2.1) es suficiente probar tal convergencia en un factor característico.

2.6.1. Construcción de factores característicos

En esta sección mencionamos sin entrar en detalles la construcción de factores característicos para los promedios (2.1).

Sea (X, μ, T) un sistema ergódico. En [25], capítulo 3, se define las medida $\mu^{[d]}$ en $X^{[d]}$ y la seminorma HK en $L^\infty(\mu)$ las cuales exponemos a continuación.

Medidas $\mu^{[d]}$

Escribiremos $Cz = \overline{z}$ la conjugación compleja en $\mathbb{C}$ y para $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_d) \in \{0,1\}^d$ denotamos $|\epsilon| = \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_d$. Definimos la medidas $\mu^{[d]}$ inductivamente.

Sea $\mu^{[0]} = \mu$ en $X^{[0]} = X$. Como es usual, un punto $\mathbf{x} \in X^{[d]}$ se escribe como $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$ con $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in X^{[d-1]}$. Supongamos que hemos definido $\mu^{[d-1]}$ en $X^{[d-1]}$, entonces definimos $\mu^{[d]}$ en $X^{[d]}$ como el producto independiente de $\mu^{[d-1]}$ consigo mismo sobre $\mathcal{I}^{[d-1]}$, la σ-algebra de los invariantes de $(X^{[d-1]}, \mu^{[d-1]}, T^{[d-1]})$. Es decir, si F, G son funciones acotadas en $X^{[d-1]}$ entonces

$$\int_{X^{[d]}} F(\mathbf{x}')G(\mathbf{x}'')d\mu^{[d]}(\mathbf{x}) = \int_{X^{[d-1]}} \mathbb{E}(F|\mathcal{I}^{[d-1]})(\mathbf{y}) \cdot \mathbb{E}(G|\mathcal{I}^{[d-1]})(\mathbf{y})d\mu^{[d-1]}(\mathbf{y})$$

Notemos con ello que,

$$\int_{X^{[d]}} \prod_{\epsilon\in\{0,1\}^d} C^{|\epsilon|}f(x_\epsilon)d\mu^{[d]} = \int_{X^{[d-1]}} |\mathbb{E}(\prod_{\eta\in\{0,1\}^{d-1}} C^{|\eta|}f(x_\eta)|\mathcal{I}^{[d-1]})(\mathbf{y})|^2 d\mu^{[d-1]}(\mathbf{y}) \geq 0$$

y se define la cantidad

$$|||f|||_d = (\int_{X^{[d]}} \prod_{\epsilon\in\{0,1\}^d} C^{|\epsilon|} f(x_\epsilon) d\mu^{[d]})^{\frac{1}{2^d}}$$

Se prueba que $|||\cdot|||_d$ es una seminorma en $L^\infty(\mu)$ y se denomina la seminorma HK.

Definición 2.28. Sea $d \in \mathbb{N}$. Definimos $\mathcal{Z}_{d-1}$ como el conjunto

$\{B \in \mathcal{B} :$ existe $A \subseteq X_*^{[d]} = X^{2^d-1}$ tal que $1_A(x_*) = 1_B(x)$ para $\mu^{[d]}$-c.s $x = (x_\phi, x_*) \in X^{[d]}\}$

Se prueba que ésta es una sub-σ-álgebra T-invariante y por lo tanto define un factor medible de (X, μ, T).

Lema 2.29. *Sea (X, μ, T) un s.d.a. y $f \in L^\infty(\mu)$. Luego*

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{Z}_{d-1}) = 0 \textit{ si y solamente si } |||f|||_d = 0$$

Se concluye del lema que $\mathcal{Z}_{d-1}$ es factor de $\mathcal{Z}_d$. Más aun, se tiene el siguiente Teorema de Estructura:

Teorema 2.30 (Teorema de Estructura de Host-Kra)**.** *Sea (X, μ, T) un s.d.a. ergódico. Entonces $\mathcal{Z}_d$ es un límite inverso (medible) de nilsistemas ergódicos de orden $(d-1)$.*

La importancia de este factor viene dada por el siguiente teorema:

Teorema 2.31 ([25])**.** *Sea (X, μ, T) un s.d.a. ergódico y $f_1, \ldots, f_d \in L^\infty(\mu)$. Luego $\mathcal{Z}_d(X)$ es un factor característico para los promedios*

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_1(T^n x) f_2(T^{2n} x) \ldots f_d(T^{dn} x).$$

Sea (X, μ, T) un s.d.a. y $d \in \mathbb{N}$. Decimos que (X, T) es un sistema de orden d en el sentido medible si $\mathcal{Z}_d(X) = X$. Al igual que en el caso topológico, el factor $\mathcal{Z}_d(X)$ define el factor de orden d medible maximal, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 2.32 ([25])**.**

1. *Un factor de un sistema de orden d es un sistema de orden d.*

2. *Sea $\pi : X \to Y$ un factor medible entre los s.d.a. (X, μ, T) y (Y, ν, T). Si (Y, ν, T) es un sistema de orden d (en el sentido medible), entonces es un factor medible de $\mathcal{Z}_d(X)$.*

3. *Un límite inverso (en el sentido medible) de sistemas de orden d es un sistema de orden d.*

Se deduce que si (X, T) es un s.d.t. y μ es una medida tal que (X, μ, T) es un s.d.a., entonces existe un factor medible entre $\mathcal{Z}_d(X)$ y $Z_d(X)$.

Resultados de convergencia

Además de probar la convergencia de los Teoremas Ergódicos no Convencionales, en [25] se prueban resultados de convergencia promediando en parelelepípedos, los cuales permiten definir funciones duales que han servido en el desarrollo de la teoría topológica de los nilsistemas.

Teorema 2.33 ([25]). *Sean f_ϵ, $\epsilon \in \{0,1\}^d_*$ $\quad 2^d - 1$ funciones en $L^\infty(\mu)$. Luego los promedios*

$$\frac{1}{H^d} \sum_{h_1,\cdots,h_d=0}^{H-1} \prod_{\epsilon\in\{0,1\}^d_*} f_\epsilon \circ T^{\epsilon\cdot\mathbf{h}}$$

convergen en $L^2(\mu)$ cuando $H \to \infty$.

Denotando F el límite de los promedios anteriores, se tiene que para toda $g \in L^2(\mu)$

$$\int_X g(x)F(x)d\mu(x) = \int_{X^{[d]}} g(\mathbf{x}_\emptyset) \prod_{\substack{\epsilon\subseteq[d]\\ \epsilon\neq\emptyset i}} f_\epsilon(\mathbf{x}_\epsilon) d\mu^{[d]}(\mathbf{x}).$$

Considerando $f_\epsilon = C^{|\epsilon|}f$, con $f \in L^\infty(\mu)$, se obtiene,

Corolario 2.34.

$$\frac{1}{H^d} \sum_{h_1,\cdots,h_d=0}^{H-1} \prod_{\epsilon\in\{0,1\}^d_*} C^{|\epsilon|} f(T^{\epsilon\cdot\mathbf{h}}x)$$

converge en $L^2(\mu)$ cuando $H \to \infty$.

Este límite se anota $D_d f$ y se denomina la función dual de f. Se prueba además que el corolario anterior vale también tomando $f \in L^{2^d}(\mu)$, con convergencia en $L^{\frac{2^d}{2^d-1}}(\mu)$ y que la función

$$D_d : L^{2^d}(\mu) \to L^{\frac{2^d}{2^d-1}}(\mu)$$

que a f le asocia su dual, es continua.

En [26] se muestran las propiedades de la medida $\mu^{[d]}$ y las seminormas HK, cuando $(X = G/\Gamma, \mu, T)$ es un nilsistema de orden $(d-1)$. Para ello, se usa el siguiente teorema:

Teorema 2.35 ([26]).

1. *La medida $\mu^{[d]}$ es la medida de Haar de una subvariedad X_d de $X^{[d]}$. Las transformaciones de fase $T^{[d]}$ y $T_j^{[d]}$, $1 \le i \le d$, actúan en X_d de manera ergódica (y por lo tanto de manera únicamente ergódica y minimal).*

2. *Sea X_{d*} la imagen de X_d bajo la proyección $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}_*$ desde $X^{[d]}$ a $X_*^{[d]}$. Entonces existe una función suave $\Phi : X_{d*} \to X_d$ tal que*

$$X_d = \{(\Phi(\mathbf{x}_*), \mathbf{x}_*) : \mathbf{x} \in X_{d*}\}$$

3. *$|||\cdot|||_d$ es una norma en $C(X)$.*

4. *Para cada $x \in X$, sea $W_{d,x} = \{\mathbf{x} \in X_d : \mathbf{x}_\emptyset = x\}$. Luego $W_{d,x}$ es únicamente ergódico bajo las transformaciones $T_j^{[d]}$, $1 \leq j \leq d$.*

5. *Para cada $x \in X$, sea ρ_x la medida invariante de $W_{d,x}$. Luego, si $x \in X$ y $g \in G$, entonces ρ_{gx} (la medida invariante de $W_{d,gx}$) es la imagen de ρ_x bajo la traslación por $g^{[d]} = (g, g, \cdots, g)$.*

A partir de este resultado, se prueban mejores convergencias que las establecidas en el Teorema 2.33.

Proposición 2.36 ([26])**.** *Sean f_ϵ, $\epsilon \in \{0,1\}^d_*$, $2^d - 1$ funciones continuas en X. Luego los promedios*

$$\frac{1}{H^d} \sum_{h_1,\cdots,h_d=0}^{H-1} \prod_{\epsilon \in \{0,1\}^d_*} f_\epsilon(T^{\epsilon\cdot\mathbf{h}}x) \to \int \prod_{\epsilon \in \{0,1\}^d_*} f_\epsilon(x_\epsilon) d\rho_x(\mathbf{x})$$

cuando $H \to \infty$. Mas aún, la convergencia es uniforme en $x \in X$.

Corolario 2.37 ([26])**.** *Si $f \in C(X)$, entonces*

$$D_d(f) = \int \prod_{\epsilon \in \{0,1\}^d_*} C^{|\epsilon|} f(x_\epsilon) d\rho_x(\mathbf{x})$$

y como es el límite uniforme de

$$\frac{1}{H^d} \sum_{h_1,\cdots,h_d=0}^{H-1} \prod_{\epsilon \in \{0,1\}^d_*} C^{|\epsilon|} f(T^{\epsilon\cdot\mathbf{h}}x)$$

$D_d f$ resulta ser una función continua.

Además se prueba que $D_d : C(X) \to C(X)$ se puede extender a $D_d : L^{2^d-1}(\mu) \to C(X)$. Del Teorema 2.33 se deduce:

Proposición 2.38 ([27])**.** *Sea (X, T) un sistema topológico minimal y μ una medida invariante ergódica definida en X. Luego, la medida $\mu^{[d]}$ está concentrada en el conjunto $\mathbf{Q}^{[d]}$.*

Capítulo 3

Complejidad topológica de nilsistemas

Como discutimos en el Capítulo 1, se han desarrollado en la teoría variadas maneras de clasificar los sistemas dinámicos topológicos transitivos. En este Capítulo discutiremos la clasificación de sistemas dinámicos utilizando la función de complejidad introducida por F.Blanchard, B.Host y A.Maass en [4]. En particular, discutiremos la relación entre complejidad topológica de nilsistemas y polinomialidad. Concluiremos que cada nilsistema tiene complejidad polinomial en cada cubrimiento abierto, donde el grado de la cota polinomial es constante. Asímismo, planteamos preguntas recíprocas que iremos revelando en el transcurso del capítulo.

3.1. Complejidad en un sistema dinámico topológico

Entregamos a continuación las definiciones básicas ligadas al concepto de complejidad así como también algunos de los resultados importantes obtenidos en [4] utilizando esta idea.

Definición 3.1. Sea (X, T) un sistema dinámico topológico. Un cubrimiento $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ es una colección de subconjuntos de X que satisfacen $\bigcup_{i\in I} U_i = X$. Cuando I es finito, diremos que el cubrimiento es finito y lo anotaremos como $\mathcal{U} = (U_1, \ldots, U_m)$. Un cubrimiento $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ se dirá abierto si U_i es un conjunto abierto para cada $i \in I$.

Dados dos cubrimientos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ definimos su *refinamiento* $\mathcal{U} \vee \mathcal{V}$ como el cubrimiento formado por los conjuntos no vacíos de la forma $U \cap V$ donde $U \in \mathcal{U}$ y $V \in \mathcal{V}$. Similarmente si $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ son n cubrimientos de X, entonces $\bigvee_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i := \mathcal{U}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{U}_n$ es la colección de conjuntos no vacíos de la forma $U_1 \cap \cdots \cap U_n$ con $U_i \in \mathcal{U}_i$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Notamos que el refinamiento de un conjunto de cubrimientos abiertos y finitos es un cubrimiento abierto y finito.

Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ dos cubrimientos de X. Decimos que $\mathcal{U}$ es más fino que $\mathcal{V}$ ($\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$) si para cada $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $U \subseteq V$.

Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de X. Para $i \in \mathbb{N}$ definimos $T^{-i}(\mathcal{U})$ como el cubrimiento abierto formado por los conjuntos de la forma $T^{-i}(U)$ con $U \in \mathcal{U}$. Se tiene que si $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$

entonces $T^{-i}\mathcal{V} \prec T^{-i}\mathcal{U}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Denotaremos por

$$\mathcal{U}_0^{n-1} = \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \vee T^{-1}(\mathcal{U}) \vee \ldots \vee T^{-(n-1)}(\mathcal{U})$$

Sea $\mathcal{U} = (U_1, \ldots, U_m)$ un cubrimiento abierto finito. Denotemos por

$$r(\mathcal{U}) = \text{mín}\{M \geq 0 : \exists A_1, \ldots, A_M \in \mathcal{U} \text{ tal que} \bigcup_{i=1}^{M} A_i = X\}$$

es decir, el cardinal mínimo entre los subrecubrimientos de $\mathcal{U}$.

La *función de complejidad* del cubrimiento $\mathcal{U}$ se define como:

$$c(\mathcal{U}, n) = r(\mathcal{U}_0^{n-1}) = r(\bigvee_{i=0}^{n} T^{-i}\mathcal{U}).$$

Notemos que si $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$, entonces $c(\mathcal{V}, n) \leq c(\mathcal{U}, n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

En [4] se inició el estudio de esta cantidad para clasificar sistemas dinámicos. Damos a continuación algunas nociones de complejidad introducidas.

Un cubrimiento se dice estándar si está formado por dos abiertos no densos. Un cubrimiento estándar $\mathcal{C} = (A, B)$ separa los puntos x e y si $x \in int(A^c)$, $y \in int(B^c)$.

Un s.d.t. (X, T) se dice dispersador (scattering) si cualquier cubrimiento finito no por abiertos no densos tiene complejidad no acotada y se dice 2-dispersador si cada cubrimiento estándar tiene complejidad no acotada. Claramente ser dispersador implica ser 2-dispersador. Intuitivamente hablando, estas nociones hablan de sistemas con gran complejidad, en el sentido de la combinatoria de sus órbitas.

Esta noción de complejidad de alguna manera recupera nociones clásicas de la teoría, como son la mezcla débil topológica. Estas nociones se ligan de la siguiente manera (todos estos resultados fueron demostrados en [4]).

Proposición 3.2 ([4])**.** *Sea (X, T) un s.d.t. débilmente mezclador. Luego (X, T) es un s.d.t. dispersador. Recíprocamente, si cada cubrimiento estándar $\mathcal{U}$ de (X, T) es tal que $c(\mathcal{U}, n) > n + 1$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces (X, T) es débilmente mezclador.*

Proposición 3.3 ([4])**.** *Si (X, T) es un s.d.t. 2-dispersador, entonces (X, T^n) es un s.d.t. 2-dispersador y transitivo para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Proposición 3.4 ([4])**.** *Supongamos que x es un punto de equicontinuidad del s.d.t. (X, T). Luego (X, T) no es débilmente mezclador topológicamente si para cualquier $y \in X$, $y \neq x$, hay un cubrimiento estándar $\mathcal{U}$ separando x e y con complejidad $c(\mathcal{U}, n) \leq n + 1$.*

Un teorema importante de caracterización de s.d.t. basado en la complejidad es el siguiente:

Teorema 3.5 ([4])**.** *[Teorema de disyunción] Para un s.d.t. transitivo (X, T) las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *(X, T) no es dispersador.*

2. *Existe un s.d.t. minimal (Y, S) tal que $(X \times Y, T \times S)$ no es transitivo. Si tal sistema existe, se puede encontrar un homeomorfismo con la misma propiedad.*

3. *Existe un s.d.t. minimal (Y, S), un subconjunto propio J de $X \times Y$, cerrado $T \times S$-invariante y un entero $N > 0$ tal que $\bigcup_{0 \leq n < N} (Id \times S^n)J = X \times Y$. Si tal sistema (Y, S) existe, hay un subshift minimal con la misma propiedad.*

Una consecuencia es que los s.d.t. dispersadores son disjuntos de los s.d.t. minimales distales.

Finalmente, en [30] se prueba que dispersador y 2-dispersador son equivalentes y se concluye:

Teorema 3.6. *Los s.d.t. 2-dispersadores son disjuntos de los s.d.t. minimales distales.*

Otra consideración sobre la complejidad viene dada por la velocidad con la que pueden diverger algunos cubrimientos abiertos. Dado un cubrimiento abierto finito podemos encontrar distintas escalas de crecimiento de la complejidad. Por ejemplo, podemos encontrar complejidad acotada, acotada linealmente, polinomialmente o exponencialmente.

El caso de complejidad acotada fue resuelta en [4] con el siguiente teorema:

Teorema 3.7. *Sea (X, T) un sistema dinámico topológico. Son equivalentes:*

1. *(X, T) es equicontinuo.*

2. *$(c(\mathcal{U}, n))_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada para cualquier cubrimiento finito $\mathcal{U}$.*

Luego, un sistema dinámico topológico minimal con complejidad acotada es equicontinuo y por lo tanto es conjugado a una rotación minimal. Es natural entonces preguntarse si se puede deducir alguna propiedad análoga en un sistema con complejidad polinomial.

Como vimos en el Capítulo 2, los nilsistemas son factores característicos para los promedios

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_1(T^n x) f_2(T^{2n} x) \ldots f_d(T^{dn} x).$$

El caso $d = 1$ corresponde al Teorema Ergódico de Von Neumann y en este caso el factor característico es una rotación en un grupo abeliano compacto (el factor de Kronecker) que tiene complejidad acotada. En el caso general los factores característicos corresponden a nilsistemas. Una de las propiedades principales de este tipo de sistemas es que sus órbitas tienden a separarse de manera polinomial, al menos en los ejemplos básicos. Esto hace pensar en alguna relación entre complejidad polinomial y nilsistemas.

Pregunta 3.8. ¿Cuál es la complejidad en un nilsistema básico? O más generalmente, ¿Cuál es la complejidad de límites inversos de nilsistemas?

Pregunta 3.9. ¿ Se puede caracterizar la complejidad en un nilsistema? ¿ Qué propiedades de la complejidad caracterizan un nilsistema?

Estas preguntas motivan este capítulo y se desarrollan en la sección siguiente.

3.2. Complejidad topológica en nilsistemas

En esta sección, estudiamos la complejidad topológica en la clase de los nilsistemas. Durante este trabajo, se pudo concluir que si (X,T) es un nilsistema entonces tiene complejidad polinomial en cada cubrimiento abierto finito donde el grado del polinomio es independiente del cubrimiento, dependiendo sólo del grado de nilpotencia y dimensión de la variedad. Para desarrollar esto, se utilizaron las herramientas introducidas por Green y Tao en [17] para estudiar el comportamiento cuantitativo de órbitas polinomiales en un nilsistema. En su trabajo, los autores introdujeron una métrica en una nilvariedad inducida por las bases de Mal'cev y estudiaron el comportamiento de esta métrica bajo multiplicaciones. Aquí usamos las notaciones y resultados de [17] y [2].

Primero recordemos algunas nociones clásicas introducidas por Dinaburg y Bowen para definir la entropía de un sistema dinámico topológico de una forma alternativa. Estos conceptos ayudarán a desarrollar las preguntas anteriormente planteadas.

Sea (X,T) un sistema dinámico topológico con una métrica d. Sea $n \in \mathbb{N}$ y escribamos

$$d_n(x,y) = \max_{0\leq i\leq n-1} d(T^i x, T^i y).$$

Decimos que un subconjunto $F \subseteq X$ es (n,ϵ)-shadowing si para cada $x \in X$, existe $y \in F$ tal que $d(T^i x, T^i y) \leq \epsilon$ para todo $i \in \{0,\ldots,n-1\}$ (es decir $d_n(x,y) \leq \epsilon$). Escribamos

$$r(n,\epsilon) = \min\{|F| : F \subseteq X, F \text{ is } (n,\epsilon)\text{-shadowing}\}$$

el cardinal mínimo de un conjunto (n,ϵ)-shadowing.

Decimos que un subconjunto $E \subseteq X$ es (n,ϵ)-separado respecto a T si para todo $x,y \in E$, $d_n(x,y) > \epsilon$. Escribamos

$$s(n,\epsilon) = \max\{|E| : E \subseteq X \text{ es un conjunto } (n,\epsilon)\text{-separado}\}$$

el cardinal máximo de un conjunto (n,ϵ)-separado.

Se tiene que

$$r(n,\epsilon) \leq s(n,\epsilon) \leq r(n,\frac{\epsilon}{2}).$$

El siguiente teorema liga estos conceptos con la complejidad de los cubrimientos abiertos.

Teorema 3.10. *Sea (X,T) un s.d.t. Luego:*

1. *Si $\mathcal{U} = (U_1,\ldots,U_k)$ es un cubrimiento abierto finito de X con número de Lebesgue $\delta > 0$, entonces*
$$c(\mathcal{U},n) \leq r(n,\frac{\delta}{2}) \leq s(n,\frac{\delta}{2}). \tag{3.1}$$

2. *Sea $\epsilon > 0$ y $\mathcal{U} = (U_1,\ldots,U_k)$ un cubrimiento abierto finito de X con $\max_{0\leq i\leq k}(diam(U_i)) < \epsilon$. Luego*
$$r(n,\epsilon) \leq s(n,\epsilon) \leq c(\mathcal{U},n). \tag{3.2}$$

Volviendo al desarrollo de las preguntas planteadas en la sección anterior, supondremos primero que G es un grupo de Lie conexo, simplemente conexo y denotaremos G_i al i-ésimo subgrupo asociado a los conmutadores. Bajo estas hipótesis, en 1951 Mal'cev [35] probó:

Teorema 3.11 (bases de Mal'cev)**.** *Sea G un grupo de Lie nilpotente m-dimensional y $\Gamma \subseteq G$ subgrupo cocompacto. Entonces existe una base $\mathcal{X} = \{X_1, \ldots, X_m\}$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ asociada al grupo G tal que:*

1. *Para cada $j \in \{0, \ldots, m-1\}$ el subespacio $\mathfrak{h}_j = Span(X_{j+1}, \ldots, X_m)$ es un ideal en $\mathfrak{g}$ y $exp(\mathfrak{h}_j)$ es un subgrupo normal de G.*

2. *$G_i = exp(\mathfrak{h}_{m-m_i})$, donde $m_i = dim(G_i)$.*

3. *Cada $g \in G$ se escribe de manera única como $exp(t_1 X_1) \cdots exp(t_m X_m)$ donde $t = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m$.*

4. *$\Gamma = \{\exp(n_1 X_1) \cdots \exp(n_m X_m) : n = (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{Z}^m\}$.*

Decimos que $\mathcal{X} = \{X_1, \ldots, X_m\}$ es una base de Mal'cev para G/Γ adaptada a la secuencia de conmutadores $(G_i)_{i\geq 0}$.

Sea $g = \exp(t_1 X_1) \cdots \exp(t_m X_m) \in G$ y denotemos $\psi(g) = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m$. Denotemos por $|\psi(g)| = \|\psi(g)\|_\infty$. Usando una base de Mal'cev $\mathcal{X}$ en [17] los autores introdujeron una métrica en G y en G/Γ.

Definición 3.12 (métrica de Green y Tao en G y G/Γ)**.** Sea

$$d(x,y) = \operatorname{ínf}\left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{mín}(|\psi(x_{i-1}x_i^{-1})|, |\psi(x_i x_{i-1}^{-1})|) \;:\; n \in \mathbb{N},\; x_0, \ldots, x_n \in G,\; x_0 = x, x_n = y \right\}$$

la cual es invariante por multiplicación a la derecha, es decir $d(x,y) = d(xg, yg)$ para todo $g \in G$ y $d(x,y) \leq |\psi(xy^{-1})|$.

Esta métrica induce una métrica en G/Γ que también llamamos $d(\cdot,\cdot)$ colocando:

$$\begin{aligned} d(x\Gamma, y\Gamma) &= \operatorname{ínf}\{d(x', y') : x' \in x\Gamma, y' \in y\Gamma\} \\ &= \operatorname{ínf}\{d(x\gamma_1, y\gamma_2) : \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma\} = \operatorname{ínf}\{d(x, y\gamma) : \gamma \in \Gamma\} \end{aligned}$$

donde la última igualdad es por invarianza por multiplicación a la derecha.

Motivación: 3.13. Si escribimos $x = gy$ o $y = g'x$, entonces una noción de distancia entre x e y es el tamaño de las coordenadas de g o g', es decir $\operatorname{mín}\{\psi(xy^{-1}), \psi(yx^{-1})\} =: k(x,y)$. La métrica escrita en G es tomar el camino más corto usando puntos entre x e y.

$$\begin{tikzcd}
 & x_1 \arrow[dr, "k(x_1,x_2)"] & & & & \\
x \arrow[ur, "k(x,x_1)"] & & x_2 \arrow[d, "k(x_2,x_3)"'] & & & y \\
 & & x_3 & \cdots & x_n \arrow[ur, "k(x_n,y)"'] &
\end{tikzcd}$$

En lo que sigue, usamos algunos resultados obtenidos en [17] y refraseamos otros de una manera conveniente. Recordemos primero el siguiente resultado clásico de grupos de Lie (ver [8]).

Teorema 3.14. *Si G es un grupo de Lie (conexo y simplemente conexo), entonces G es nilpotente de orden d si y solamente si su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es nilpotente de orden d.*

Usando este teorema y la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff se deduce:

Lema 3.15 (Multiplicación e inversión)**.** *Sean $x, y \in G$, $t = \psi(x)$, $u = \psi(y)$. Sea m la dimensión de G. Luego,*

1. $\psi(xy) = (t_1 + u_1, t_2 + u_2 + P_1(t_1, u_1), \ldots, t_m + u_m + P_{m-1}(t_1, \ldots, t_{m-1}, u_1, \ldots, u_{m-1}))$ *donde para cada $i \in \{1, \ldots, m-1\}$, P_i es un polinomio real.*

2. $\psi(x^{-1}) = (-t_1, -t_2 + Q_1(t_1), \ldots, -t_m + Q_{m-1}(t_1, \ldots, t_{m-1}))$ *donde para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, Q_i es un polinomio real.*

Fácilmente obtenemos $\psi(xy^{-1}) = (R_1(t, u), R_2(t, u), \ldots, R_m(t, u))$ donde R_i es un polinomio real para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Para simplificar notaciones, en lo que sigue escribiremos P para referirnos a cualquier polinomio real genérico con coeficientes positivos.

A partir de esto, utilizando la métrica de Green y Tao, podremos concluir que las órbitas en un nilsistema se separan polinomialmente. Para ello, necesitaremos el desarrollo de una serie de lemas.

Lema 3.16 (Cota polinomial de las coordenadas)**.** *Sean $x, y \in G$. Luego,*

$$d(x, y) \leq P(|\psi(x)|, |\psi(y)|)\ |\psi(x) - \psi(y)|$$

Demostración. Sea $\psi(x) = t$ y $\psi(y) = u$. Del Lema 3.15 tenemos,

$$d(x, y) \leq |\psi(xy^{-1})| = |(R_1(t, u), R_2(t, u), \ldots, R_m(t, u))|.$$

Escribamos $R_i(t, u) = \sum_{\vec{\alpha},\vec{\beta}} C^{(i)}_{\vec{\alpha},\vec{\beta}} t^{\vec{\alpha}} u^{\vec{\beta}}$. Como $R_i(t, t) = 0$, se deduce

$$R_i(t, u) = R_i(t, u) - R_i(t, t) = \sum_{\vec{\alpha},\vec{\beta}} C^{(i)}_{\vec{\alpha},\vec{\beta}} t^{\vec{\alpha}} (u^{\vec{\beta}} - t^{\vec{\beta}}).$$

Expandiendo $(u^{\vec{\beta}} - t^{\vec{\beta}}) = \sum_{i=1}^{m} (u_i - t_i) W_{\vec{\beta},i}(t, u)$, donde $W_{\vec{\beta},i}$ son polinomios, obtenemos,

$$d(x, y) \leq |\psi(x) - \psi(y)| \sum_{\vec{\alpha},\vec{\beta}} \sum_{i=1}^{m} |C^{(i)}_{\vec{\alpha},\vec{\beta}}||t^{\vec{\alpha}}||W_{\vec{\beta},i}(t, u)| \leq |\psi(x) - \psi(y)| P(|\psi(x)|, |\psi(y)|).$$

□

Lema 3.17. *Sean $g, x, y \in G$. Luego*

$$d(gx, gy) \leq P(|\psi(g)|, |\psi(x)|, |\psi(y)|)\ d(x, y).$$

Demostración. Sean $g, z \in G$. Del Lema 3.15 vemos que $\psi(gzg^{-1})$ es una función polinomial de $\psi(z)$ y $\psi(g)$ que se anula cuando $\psi(z) = 0$. Así el polinomio puede ser escrito como $\psi(z) P(\psi(g), \psi(z))$. Luego

$$|\psi(gzg^{-1})| \leq |\psi(z)| P(|\psi(z)|, |\psi(g)|). \tag{3.3}$$

Por el Lema 3.16,

$$d(x,y) \leq P(|\psi(x)|,|\psi(y)|)|\psi(x)-\psi(y)| \leq P(|\psi(x)|,|\psi(y)|)(1+|\psi(x)-\psi(y)|^2) = P(\psi(x),\psi(y)).$$

Luego, para calcular la distancia entre x e y podemos restringirnos a caminos $x = x_0 \dots x_n = y$ satisfaciendo

$$k(x_i, x_{i+1}) \leq P(|\psi(x)|,|\psi(y)|)$$

donde $k(x_i, x_{i+1}) = \mathrm{mín}(|\psi(x_i x_{i+1}^{-1})|, |\psi(x_{i+1}x_i^{-1})|)$.

Observemos que si $k(x,y) \leq P(|\psi(x)|,|\psi(y)|)$, entonces $|\psi(x_i x_{i+1}^{-1})| \leq P(|\psi(x)|,|\psi(y)|)$ o $|\psi(x_{i+1}x_i^{-1})| \leq P(|\psi(x)|,|\psi(y)|)$. En el primer caso, como $(x_{i+1}x_i^{-1})^{-1} = x_i x_{i+1}^{-1}$, usando el Lema 3.15 obtenemos que $|\psi(x_{i+1}x_i^{-1})| \leq P(P(|\psi(x)|,|\psi(y)|)) = P(|\psi(x)|,|\psi(y)|)$. En el segundo caso procedemos de manera similar para concluir que

$$\mathrm{máx}(|\psi(x_i x_{i+1}^{-1})|, |\psi(x_{i+1}x_i^{-1})|) \leq P(|\psi(x)|,|\psi(y)|). \tag{3.4}$$

Consideremos $x = x_0, \dots, x_n = y$ un camino satisfaciendo $k(x_i, x_{i+1}) \leq P(|\psi(x)|,|\psi(y)|)$ y veamos el camino $gx = gx_0, gx_1, \dots, gx_n = gy$. De (3.3), aplicado a $z = x_i x_{i+1}^{-1}$, obtenemos

$$\begin{aligned} k(gx_i, gx_{i+1}) &\leq |\psi(gx_i x_{i+1}^{-1} g^{-1})| \\ &\leq |\psi(x_i x_{i+1}^{-1})| P(|\psi(x_i x_{i+1}^{-1})|, |\psi(g)|). \end{aligned}$$

Aplicando (3.4) obtenemos

$$|\psi(x_i x_{i+1}^{-1})| P(|\psi(x_i x_{i+1}^{-1})|, |\psi(g)|) \leq |\psi(x_i x_{i+1}^{-1})| P(|\psi(x)|,|\psi(y)|,|\psi(g)|)$$

y por lo tanto

$$k(gx_i, gx_{i+1}) \leq |\psi(x_i x_{i+1}^{-1})| P(|\psi(x)|,|\psi(y)|,|\psi(g)|).$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} k(gx_i, gx_{i+1}) &\leq |\psi(gx_{i+1}x_i^{-1}g^{-1})| \\ &\leq |\psi(x_{i+1}x_i^{-1})| P(|\psi(x_{i+1}x_i^{-1})|, |\psi(g)|) \\ &\leq |\psi(x_{i+1}x_i^{-1})| P(|\psi(x)|,|\psi(y)|,|\psi(g)|). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} k(gx_i, gx_{i+1}) &\leq \mathrm{mín}\{|\psi(x_i x_{i+1}^{-1})| P(|\psi(x)|,|\psi(y)|,|\psi(g)|); |\psi(x_{i+1}x_i^{-1})| P(|\psi(x)|,|\psi(y)|,|\psi(g)|)\} \\ &= P(|\psi(x)|,|\psi(y)|,|\psi(g)|)\, \mathrm{mín}\{|\psi(x_i x_{i+1}^{-1})|, |\psi(x_{i+1}x_i^{-1})|\} \\ &= P(|\psi(x)|,|\psi(y)|,|\psi(g)|) k(x_i, x_{i+1}). \end{aligned}$$

Concluimos,

$$\begin{aligned} d(gx, gy) &\leq k(gx_0, gx_1) + \ldots + k(gx_{n-1}, gx_n) \\ &\leq P(|\psi(x)|,|\psi(y)|,|\psi(g)|)(k(x_0,x_1) + \ldots + k(x_{n-1},x_n)) \end{aligned}$$

y tomando el ínfimo obtenemos

$$d(gx, gy) \leq P(|\psi(x)|, |\psi(y)|, |\psi(g)|)d(x, y).$$

$\square$

Lema 3.18. *Sea $g \in G$, luego en cada $n \in \mathbb{N}$,*

$$|\psi(g^n)| \leq P(n)$$

donde P es un polinomio con coeficientes dependiendo de $|\psi(g)|$.

Demostración. De la fórmula de multiplicación del Lema 3.15 notamos que

$$(\psi(g^{n+1}))_1 = (\psi(g^n.g))_1 = (\psi(g^n))_1 + (\psi(g))_1$$

y fácilmente deducimos que

$$(\psi(g^n))_1 = n(\psi(g))_1.$$

Luego la primera coordenada está controlada polinomialmente.

Supongamos ahora que la j-ésima coordenada está controlada polinomialmente para $j \in \{1, \cdots, i\}$, es decir $(\psi(g^n))_j \leq P(n)$ si $j \leq i$. Veamos que lo mismo ocurre con la $(i+1)$-ésima coordenada.

En efecto, usando la fórmula de multiplicación del Lema 3.15 vemos inductivamente que

$$\begin{aligned}(\psi(g^{n+1}))_{i+1} &= (\psi(g^n.g))_{i+1} \\ &= (\psi(g^n))_{i+1} + (\psi(g))_{i+1} + P((\psi(g^n))_1, \ldots, \psi((g^n))_i, (\psi(g))_1, \ldots, (\psi(g))_i)\end{aligned}$$

y luego

$$(\psi(g^{n+1}))_{i+1} - (\psi(g^n))_{i+1} = (\psi(g))_{i+1} + P((\psi(g^n))_1, \ldots, (\psi(g^n))_i, (\psi(g))_1, \ldots, (\psi(g))_i)$$

Como $(\psi(g^n))_j$ está controlado polinomialmente si $j \leq i$, deducimos entonces que

$$(\psi(g^{n+1}))_{i+1} - (\psi(g^n))_{i+1} \leq P(n)$$

y concluimos

$$|(\psi(g^{n+1}))_{i+1}| \leq (n+1)P(n+1).$$

$\square$

Consideremos ahora $\Gamma \subseteq G$ el subconjunto discreto y cocompacto al cual está asociada la base de Mal'cev.

Lema 3.19 (Factorización)**.** *Cada $g \in G$ se escribe de una única manera como $g = \{g\}[g]$ con $\psi(\{g\}) \in [0, 1)^m$ y $[g] \in \Gamma$.*

Así al escribir $x\Gamma$ podemos suponer que x es tal que $|\psi(x)| \leq 1$.

Lema 3.20 (ver [17], Lema A.15). *Sean $x, y \in G$. Luego,*

$$d(x\Gamma, y\Gamma) = \inf_{\gamma\in\Gamma} d(x, y\gamma) = \inf_{\gamma\in\Gamma, |\psi(\gamma)|\leq C} d(x, y\gamma)$$

donde C es una constante dependiendo sólo de $|\psi(x)|$ y $|\psi(y)|$.

Combinando los dos últimos lemas vemos que:

$$d(x\Gamma, y\Gamma) = \inf_{\gamma\in\Gamma, |\psi(\gamma)|\leq C} d(x, y\gamma)$$

donce C es una constante.

Obtenemos, para $n \in \mathbb{N}$,

$$d(g^n x\Gamma, g^n y\Gamma) \leq \inf_{\gamma\in\Gamma, |\psi(\gamma)|\leq C} d(g^n x, g^n y\gamma)$$

Usando los Lemas 3.17, 3.18 y 3.20 obtenemos,

Corolario 3.21. *Sean $x, y, g \in G$ con $|\psi(x)| \leq 1$ y $|\psi(y)| \leq 1$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$*

$$\begin{aligned} d(g^n x\Gamma, g^n y\Gamma) &\leq \inf_{\gamma\in\Gamma, |\psi(\gamma)|\leq C} P(|\psi(g^n)|) d(x, y\gamma) \\ &\leq P(n) \inf_{\gamma\in\Gamma, |\psi(\gamma)|\leq C} d(x, y\gamma) = P(n) d(x\Gamma, y\Gamma) \end{aligned} \tag{3.5}$$

En lo que sigue escribimos $X = G/\Gamma$ y $T : X \to X$ es la transformación $T(x) = gx$ para un $g \in G$ fijo.

A partir del Corolario 3.21 obtenemos:

Teorema 3.22. *Sea G un grupo de Lie nilpotente conexo y simplemente conexo y sea $\Gamma \subseteq G$ un subgrupo discreto cocompacto. Consideremos la nilvariedad $X = G/\Gamma$ y $T : X \to X$ la transformación $x \mapsto gx$ para un $g \in G$ fijo. Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de X. Luego:*

$$c(\mathcal{U}, n) \leq P(n)$$

donde P es un polinomio real de grado uniformemente acotado, es decir que no depende del cubrimiento $\mathcal{U}$.

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de X y sea $\delta > 0$ su número de Lebesgue.

Para $\epsilon > 0$, sea $N(\epsilon)$ el número más pequeño de bolas de radio ϵ que se necesitan para cubrir X. La dimension de Minkowski (o dimensión de la caja) (ver [11],[36]) se define como

$$\limsup_{\epsilon\to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)}.$$

Esta dimensión coincide con la dimensión usual en una variedad compacta X y por lo tanto existe una constante K tal que:

$$N(\epsilon) \leq K \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{\dim(X)+1}. \tag{3.6}$$

Usando la cota (3.5) observamos que si $x, y \in X$ y $d(x, y) \leq \frac{\delta}{2P(n)}$, entonces

$$\begin{aligned} d(T^i x, T^i y) &= d(g^i x\Gamma, g^i y\Gamma) \\ &\leq P(i) d(x, y) \\ &\leq \frac{P(i)}{P(n)} \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto si $i \leq n$, dado que P tiene coeficientes positivos, obtenemos

$$d(T^i x, T^i y) \leq \frac{\delta}{2}.$$

Esto nos dice que si recubrimos X con bolas de radio $\frac{\delta}{2P(n)}$, entonces los centros de tales bolas forman un conjunto $(n, \frac{\delta}{2})$-shadowing. Deducimos entonces que,

$$r(n, \frac{\delta}{2}) \leq N(\frac{\delta}{2P(n)}). \tag{3.7}$$

Luego, usando las desigualdades (3.7), (3.1) y (3.6) obtenemos

$$c(\mathcal{U}, n) \leq r(n, \frac{\delta}{2}) \leq N(\frac{\delta}{2P(n)}) \leq K \frac{(2P(n))^{\dim(X)+1}}{\delta^{\dim(X)+1}}$$

y se obtiene una cota polinomial para la complejidad con grado independiente de $\mathcal{U}$. □

En el caso general, cuando G no es necesariamente un grupo de Lie conexo y simplemente conexo, seguimos un argumento dado por A.Leibman en [33], para lo cual definimos algunos conceptos.

Definición 3.23. Decimos que un subconjunto cerrado $Y \subseteq X$ es una subvariedad de X si $Y = Hx$ donde H es un subgrupo cerrado de G y $x \in X$.

Lema 3.24 (ver [33]). *Sea G un grupo de Lie nilpotente (no necesariamente conexo y simplemente conexo) y $\Gamma \subseteq G$ un subgrupo discreto cocompacto. Luego, existe un grupo de Lie nilpotente conexo y simplemente conexo $\widehat{G}$, $\widehat{\Gamma} \subseteq \widehat{G}$ un subgrupo discreto cocompacto, una subvariedad $\widetilde{X}$ de $\widehat{X} = \widehat{G}/\widehat{\Gamma}$ y un isomorfismo $\pi : X = G/\Gamma \to \widetilde{X}$ tal que $X = G/\Gamma$ con la acción de G es isomorfo a $\widetilde{X}$ con la acción de $\pi(G)$.*

$$X = G/\Gamma \longleftrightarrow \widetilde{X} \subseteq \widehat{G}/\widehat{\Gamma}$$

Concluimos

Teorema 3.25. *Sea G un grupo de Lie nilpotente y $\Gamma \subseteq G$ un subgrupo discreto cocompacto. Consideremos la nilvariedad $X = G/\Gamma$ y $T : X \to X$ la transformación $x \to gx$ para un $g \in G$ fijo. Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de X. Luego:*

$$c(\mathcal{U}, n) \leq P(n)$$

donde P es un polinomio real de grado uniformemente acotado, es decir que no depende del cubrimiento $\mathcal{U}$.

Demostración. Sean $\widetilde{X}$, $\widehat{X}$ y π como en el Lema 3.24. Notemos que (X,T) es isomorfo a $(\widetilde{X},\widetilde{T})$ donde $\widetilde{T}:\widehat{X}\to\widehat{X}$ está definido como $\widetilde{T}(\widehat{x})=\pi(g)\widehat{x}$. Luego $(\widetilde{X},\widetilde{T})$ es un subsistema de $(\widehat{X},\widetilde{T})$. Entonces, $\pi(\mathcal{U})=(\pi(U_1),\ldots,\pi(U_m))$ es un cubrimiento abierto de $\widetilde{X}$ y

$$c(\mathcal{U},n)=c(\pi(\mathcal{U}),n)\leq c(\widehat{\mathcal{U}},n)$$

donde $\widehat{\mathcal{U}}=(V_1,\ldots,V_m,\widetilde{X}^c)$ es un cubrimiento abierto de $\widehat{X}$ con $\pi(U_i)=\widetilde{X}\cap V_i$ para todo $i\in\{1,\ldots,m\}$. Del Teorema 3.22 $c(\widehat{\mathcal{U}},n)$ está acotado polinomialmente y obtenemos una cota polinomial en el caso general. Además notamos que el grado del polinomio no depende de $\mathcal{U}$. □

Dada la importancia de los límites inversos de nilsistemas, también consideremos su complejidad. Para ello, necesitamos el siguiente lema.

Lema 3.26. *Supongamos (X,T) es un límite inverso de los sistemas $(X_i,T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ donde (X_i,T_i) tiene complejidad polinomial para cada $i\in\mathbb{N}$. Luego X tiene complejidad polinomial.*

Demostración. Mostraremos que el sistema producto tiene complejidad polinomial y por lo tanto el límite inverso también posee aquella propiedad.

Denotemos por $r_Y(n,\epsilon)$ el cardinal mínimo de un conjunto (n,ϵ)-shadowing en Y y d_Y la métrica en el conjunto Y. Suponemos que la métrica en X_i es tal que $\operatorname{diam}(X_i)\leq 1$ para cada $i\in\mathbb{N}$. Sea $\epsilon>0$ y escojamos $N(\epsilon)\in\mathbb{N}$ tal que $\delta(\epsilon)=\epsilon-2^{-N(\epsilon)}>0$. Sea $\mathbf{x}=(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\in X$ y supongamos que $\forall i\leq N$ existe $z_i\in X_i$ con $d_{X_i}(T^jx_i,T^jz_i)\leq\delta(\epsilon)$ $\forall j\in\{0,\ldots,n-1\}$. Sea $\mathbf{z}\in\prod\limits_{i\in\mathbb{N}}X_i$ con $\mathbf{z}_i=z_i$ para $i\leq N(\epsilon)$. Entonces

$$\begin{aligned}
d_X(T^j\mathbf{x},T^j\mathbf{z})&=\sum_{i=1}^{N(\epsilon)}\frac{d_{X_i}(T^jx_i,T^jz_i)}{2^i}+\sum_{i>N(\epsilon)}\frac{d_{X_i}(T^jx_i,T^jz_i)}{2^i}\\
&\leq\delta(\epsilon)+\frac{1}{2^{N(\epsilon)}}\\
&\leq\epsilon.
\end{aligned}$$

Luego

$$r_X(n,\epsilon)\leq\prod_{i\leq N(\epsilon)}r_{X_i}(n,\delta(\epsilon)).$$

Concluimos usando el Teorema 3.10. Si $\mathcal{U}=(U_1,\ldots,U_m)$ es un cubrimiento abierto de X con número de Lebesgue $\epsilon>0$, entonces

$$c(\mathcal{U},n)\leq r_X(n,\frac{\epsilon}{2})\leq\prod_{i\leq N(\epsilon/2)}r_{X_i}(n,\delta(\epsilon/2))\leq\prod_{i\leq N(\epsilon/2)}c(\mathcal{U}_i,n)$$

donde $\mathcal{U}_i$ es un cubrimiento abierto de X_i con $\max\limits_{A\in\mathcal{U}_i}(diam(A))<\delta(\epsilon/2)$. Por hipótesis el último término está controlado polinomialmente y concluimos el lema.

□

Concluimos:

Corolario 3.27. *Si $d \in \mathbb{N}$ y (X,T) es un límite inverso de nilsistemas de orden d, entonces (X,T) tiene complejidad polinomial.*

En vista de lo anterior podemos formular la siguiente pregunta

Pregunta 3.28. ¿ Es un sistema con complejidad polinomial un nilsistema de orden d para algún $d \in \mathbb{N}$?

Rápidamente aparecen respuestas negativas a esta interrogante, por ejemplo algunos sistemas simbólicos, los cuales al ser expansivos no pueden ser distales y por lo tanto no son conjugados a los nilsistemas ni a sus límites inversos. Los resultados clásicos que se mencionan en lo siguiente pueden ser vistos en [32].

1) **Subshift Sturmianos**:

Sea $\alpha \in [0,1]$ y $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ el intervalo unitario. Consideramos en $\mathbb{T}$ la rotación por un ángulo α, es decir la transformación $R_\alpha : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ definida por $R_\alpha(x) = x + \alpha(mod 1)$.

Consideremos $\alpha \in [0,1] \cap \mathbb{I}$ irracional y definamos la partición $\mathcal{U} = (U_0, U_1)$ con $U_0 = [0, 1-\alpha]$, $U_1 = [1-\alpha, 1)$. Decimos que la secuencia $\omega = (w_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ es un itinerario para $x \in [0,1)$ si

$$w_n := \begin{cases} 0 & \text{si } R_\alpha^n(x) \in U_0 \\ 1 & \text{si } R_\alpha^n(x) \in U_1 \end{cases}$$

Sea $X_\alpha = \{\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} : \text{ existe } x \in \mathbb{T} \text{ tal que } \omega \text{ es un itinerario de } x\}$. Se tiene que X_α es un subshift y (X_α, σ) es una extensión de $(\mathbb{T}, R_\alpha)$. El sistema (X_α, σ) se llama el sistema Sturmiano asociado a $(\mathbb{T}, R_\alpha)$.

Mencionamos algunos resultados clásicos.

Proposición 3.29. *Sea (X_α, σ) un subshift Sturmiano y sea $\mathcal{L}_n(X_\alpha)$ el conjunto de las palabras de largo n que aparecen en X_α. Entonces $|\mathcal{L}_n(X_\alpha)| = n+1$.*

De la proposición anterior notamos que la complejidad de los cubrimientos abiertos está linealmente acotada. En efecto, sea $\mathcal{W} = \{[a]_0 : a \in \Sigma\}$ la partición del origen y sea $\mathcal{U} = (U_1, \ldots, U_n)$ un cubrimiento abierto finito. Tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{U} \prec \bigvee_{i=-N}^{N} \sigma^i(\mathcal{W})$. Entonces

$$c(\mathcal{U}, n) \le c(\bigvee_{-N}^{N} \sigma^i(\mathcal{W}), n) = |\mathcal{L}_{2N+1+n}(X_\alpha)| = (2N+1+n)$$

y por lo tanto la complejidad de cualquier cubrimiento abierto está acotada linealmente.

Además este sistema tiene la propiedad de que es una extensión asíntotica de la rotación, y en medida son isomorfos.

2) **Subshifts de sustitución**:

Sea Σ un alfabeto finito y Σ^* el lenguaje de palabras finitas sobre Σ. Una sustitución es una función $\tau : \Sigma \to \Sigma^*$. Notamos que podemos extender τ a Σ^* por concatenación, es decir

$$\tau(a_1 \dots a_n) = \tau(a_1) \dots \tau(a_n) \quad a_j \in \Sigma, \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

De la misma manera, se puede extender la sustitución a $\Sigma^{\mathbb{Z}}$. Sea $M_\tau(a,b)$ la cantidad de veces que aparece la letra b en $\tau(a)$ y $M_\tau = (M_\tau(a,b))_{a,b\in\Sigma}$. La sustitución se dice primitiva si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M_\tau^n > 0$. El lenguaje $\mathcal{L}_\tau \subseteq \Sigma^*$ asociado a τ es el conjunto de todas las subpalabras de palabras que se pueden formar iterando la sustitución, es decir

$$\mathcal{L}_\tau := \{u \in \Sigma_* : \exists a \in \Sigma, n \in \mathbb{N} \text{ tal que } u \text{ es subpalabra de } \tau^n(a)\}.$$

El subshift asociado a una sustitución es

$$X_\tau = \{x \in \Sigma^{\mathbb{Z}} : \forall k \in \mathbb{Z}, \forall i \in \mathbb{N} \quad x_k \dots x_{k+i} \in \mathcal{L}_\tau\}.$$

Recordemos los siguientes resultados clásicos:

Proposición 3.30. *Si la sustitución es primitiva, entonces (X_τ, σ) es minimal.*

Proposición 3.31. *Sea $\mathcal{L}_n(X_\tau)$ el conjunto de las palabras de largo n que aparecen en X_τ. Entonces existe una constante $K > 0$ tal que $|\mathcal{L}_n(X_\tau)| \leq Kn$.*

De la proposición anterior notamos que la complejidad de los cubrimientos abiertos está linealmente acotada. En efecto, sea $\mathcal{W} = \{[a]_0 : a \in \Sigma\}$ la partición del origen y sea $\mathcal{U} = (U_1, \dots, U_n)$ un cubrimiento abierto finito. Tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{U} \prec \bigvee_{i=-N}^{N} \sigma^i(\mathcal{W})$. Entonces

$$c(\mathcal{U}, n) \leq c(\bigvee_{-N}^{N} \sigma^i(\mathcal{W}), n) = |\mathcal{L}_{2N+1+n}(X_\tau)| \leq K(2N+1+n)$$

y por lo tanto la complejidad de cualquier cubrimiento abierto está acotada linealmente.

Entonces sabemos que un nilsistema tiene complejidad polinomial, pero no recíprocamente.

Pregunta 3.32. ¿ Qué condiciones adicionales pueden ser consideradas en (X,T) para que en conjunto con complejidad polinomial impliquen que ser un nilsistema?

Por ejemplo sería interesante obtener alguna cota inferior polinomial en la complejidad para cubrimientos abiertos con diámetros pequeños.

También sería beneficioso estudiar bajo qué tipos de extensiones la complejidad polinomial se preserva.

Capítulo 4

Sistemas Z_∞

En el Capítulo 2 mostramos la secuencia creciente de nilfactores en un sistema dinámico topológico. Aparece con naturalidad el límite inverso de estos nilfactores que resulta ser una extensión de cada nilfactor que preserva la complejidad polinomial y que presenta propiedades dinámicas interesantes que serán discutidas en este capítulo. Los resultados mostrados a continuación son demostrados en [10], en un artículo realizado en colaboración. Se omiten algunas demostraciones que se pueden ver en el artículo en Anexo.

4.1. La relación $\mathbf{RP}^{[\infty]}$

En el Capítulo 2, introdujimos la relación $\mathbf{RP}^{[d]}(X)$ en $X \times X$ la cual es cerrada, $T \times T$-invariante y es una relación de equivalencia en el caso minimal. Es fácil ver que

$$\mathbf{RP}^{\infty}(X) := \bigcap_{d=1}^{\infty} \mathbf{RP}^{[d]}(X)$$

es una relación de equivalencia cerrada e invariante. Cuando no haya confusión, escribiremos $\mathbf{RP}^{[\infty]}(X)$ como $\mathbf{RP}^{[\infty]}$.

Definición 4.1. Sea (X,T) un sistema minimal. Decimos que (X,T) es un sistema Z_∞ si y solamente si la relación $\mathbf{RP}^{[\infty]}(X)$ es trivial, es decir $\mathbf{RP}^{[\infty]}(X) = \triangle_X$.

Lema 4.2. *La relación $\mathbf{RP}^{[\infty]}(X)$ define el factor Z_∞ maximal.*

Demostración. Sea $\pi : X \to Y$ y supongamos que Y es un sistema Z_∞. Denotemos π_∞ la proyección de X en $X/\mathbf{RP}^{[\infty]}(X)$. Sean $x, y \in X$ con $\pi_\infty(x) = \pi_\infty(y)$. Entonces $(x, y) \in \mathbf{RP}^{[d]}(X)$ para cada $d \in \mathbb{N}$. Del Teorema 2.26 $(\pi(x), \pi(y)) \in \mathbf{RP}^{[d]}(Y)$ para todo $d \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $(\pi(x), \pi(y)) \in \mathbf{RP}^{[\infty]}(Y) = \triangle_Y$. Luego $\pi(x) = \pi(y)$. $\square$

Anotamos $Z_\infty(X) = X/\mathbf{RP}^{[\infty]}(X)$. Citamos a continuación un resultado de [10].

Teorema 4.3. *Un sistema minimal es un sistema Z_∞ si y solamente si es un límite inverso de nilsistemas minimales.*

Más aún, si (X,T) es un sistema Z_∞, se tiene $(X,T) = \varprojlim (Z_d(X), T)$.

Como los nilsistemas son sistemas distales, y la distalidad se preserva bajo límites inversos, del Teorema 4.3 deducimos que el factor $Z_\infty(X)$ de (X,T) es distal y por lo tanto obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(X,T) \arrow[d, "\pi_D"'] \arrow[dr, "\pi_\infty"'] \arrow[drr, "\pi_d"] & & \\
(X_D,T) \arrow[r, "\rho_\infty"'] \arrow[rr, bend right, "\rho_d"'] & (Z_\infty(X),T) \arrow[r, "\pi_{\infty,d}"'] & (Z_d(X),T)
\end{tikzcd}$$

donde X_D es el factor distal maximal.

4.2. Complejidad y sistemas Z_∞

Con los resultados obtenidos anteriormente fácilmente determinamos la complejidad de los sistemas Z_∞.

Teorema 4.4. *Si (X,T) es un sistema Z_∞ entonces tiene complejidad polinomial.*

Demostración. Recordemos que un límite inverso de nilsistemas de orden d tiene complejidad polinomial. Del Teorema 4.3, $(X,T) = \varprojlim (Z_d(X),T)$. Del Lema 3.26 la complejidad polinomial se preserva bajo límites inversos y concluimos la polinomialidad de la complejidad en (X,T). $\square$

Pregunta 4.5. Con la aparición de los sistemas Z_∞ podemos reformular la pregunta sobre complejidad. ¿Es un sistema con complejidad polinomial un sistema Z_∞?

Como estos sistemas siguen siendo distales, los mismos ejemplos de sistemas simbólicos mostrados en el capítulo anterior responden negativamente a esta pregunta. De todos modos, estos sistemas son una aproximación más estrecha a la pregunta recíproca.

4.3. Estabilización de nilfactores

Una pregunta interesante es analizar qué ocurre cuando tenemos dos nilfactores consecutivos iguales, es decir, entender qué significa $\mathbf{RP}^{[d]} = \mathbf{RP}^{[d+1]}$. A continuación daremos algunas observaciones para responder esta pregunta.

Notemos que $\mathbf{Q}^{[d+2]} = \mathbf{Q}^{[d+1]} \times \mathbf{Q}^{[d+1]}$ implica que $\mathbf{RP}^{[d]} = \mathbf{RP}^{[d+1]}$. Como siempre $\mathbf{RP}^{[d+1]} \subseteq \mathbf{RP}^{[d]}$, sólo hay que probar $\mathbf{RP}^{[d]} \subseteq \mathbf{RP}^{[d+1]}$. Sea $(x,y) \in \mathbf{RP}^{[d]}$. Del Teorema 2.25 tenemos que $(x,y,\ldots,y) \in \mathbf{Q}^{[d+1]}$. Si $\mathbf{Q}^{[d+2]} = \mathbf{Q}^{[d+1]} \times \mathbf{Q}^{[d+1]}$, como $(y,\ldots,y) \in \mathbf{Q}^{[d+1]}$, se deduce que $(x,y,\ldots,y,y,\ldots,y) \in \mathbf{Q}^{[d+2]}$ y por lo tanto $(x,y) \in \mathbf{RP}^{[d+1]}$.

Entonces la condición $\mathbf{Q}^{[d+2]} = \mathbf{Q}^{[d+1]} \times \mathbf{Q}^{[d+1]}$ es suficiente para obtener $\mathbf{RP}^{[d]} = \mathbf{RP}^{[d+1]}$ pero está lejos de ser necesaria, como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 4.6. *Sea (X,T) un s.d.t. minimal. Si $\mathbf{Q}^{[d+1]} = \mathbf{Q}^{[d]} \times \mathbf{Q}^{[d]}$ para algún $d \in \mathbb{N}$, entonces (X,T) es débilmente mezclador y por lo tanto $\mathbf{Q}^{[d]} = X^{[d]}$ y $\mathbf{RP}^{[d]}(X) = X \times X$ para todo $d \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sean $x, y, a \in X$. Por minimalidad observamos que $(x, y) \in \mathbf{Q}^{[1]}$. Recordemos que $\mathbf{x} \in \mathbf{Q}^{[d]} \Rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in \mathbf{Q}^{[d+1]}$. Aplicando esta propiedad reiteradamente obtenemos que

$$(x, y, x, y, x, y, \ldots, x, y) \in \mathbf{Q}^{[d]}.$$

Por hipótesis

$$\mathbf{x} = (x, y, x, y, x, y, \ldots, x, y, a, a, \ldots a, a) \in \mathbf{Q}^{[d+1]}.$$

Si $d = 1$, $(x, y, a, a) \in \mathbf{Q}^{[2]}$. Realizando una permutación euclidena obtenemos que $(x, a, y, a) \in \mathbf{Q}^{[2]}$ y luego $(x, y) \in \mathbf{RP}$.

Para $d > 1$, vemos que

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_{\epsilon 00})_{\epsilon \in [d-2]}, (\mathbf{x}_{\epsilon 10})_{\epsilon \in [d-2]}, (\mathbf{x}_{\epsilon 01})_{\epsilon \in [d-2]}, (\mathbf{x}_{\epsilon 11})_{\epsilon \in [d-2]}).$$

Permutando las dos últimas coordenadas ($\mathbf{Q}^{[d+1]}$ es invariante bajo estas operaciones) obtenemos

$$\begin{aligned} &((\mathbf{x}_{\epsilon 00})_{\epsilon \in [d-2]}, (\mathbf{x}_{\epsilon 01})_{\epsilon \in [d-2]}, (\mathbf{x}_{\epsilon 10})_{\epsilon \in [d-2]}, (\mathbf{x}_{\epsilon 11})_{\epsilon \in [d-2]}) \\ &= (x, y, \ldots, x, y, a, \ldots, a, x, y \ldots, x, y, a, \ldots, a) \in \mathbf{Q}^{[d+1]}. \end{aligned}$$

Proyectando la primera mitad e iterando el proceso habremos terminado en el caso $d = 1$. Concluimos $\mathbf{RP} = X \times X$ y como un sistema minimal es débilmente mezclador si y solamente si tiene un factor equicontinuo maximal trivial, obtenemos el resultado. El hecho que $\mathbf{Q}^{[d]} = X^{[d]}$ y $\mathbf{RP}^{[d]} = X \times X$ se obtiene de [38], Teorema 3.10. $\square$

En virtud de la Proposición 2.38 es necesario entender mejor la relación entre $\mathbf{Q}^{[d]}$ y $\mu^{[d]}$ y en particular deducir qué significa $\mu^{[d+1]} = \mu^{[d]} \otimes \mu^{[d]}$.

En lo que sigue discutiremos la propiedad de estabilización haciendo algunas reducciones.

Sea (X, T) un s.d.t. y $d \in \mathbb{N}$. Sea (P) la propiedad

$$\mathbf{RP}^{[d]} = \mathbf{RP}^{[d+1]} \Rightarrow \mathbf{RP}^{[d+1]} = \mathbf{RP}^{[d+2]}.$$

Esta propiedad naturalmente equivale a

$$Z_d(X) = Z_{d+1}(X) \Rightarrow Z_{d+1}(X) = Z_{d+2}(X).$$

Notemos primero que por maximalidad de los nilfactores, si $i, j \in \mathbb{N}$, $i < j$, entonces $(Z_j(Z_i(X)), T)$ es un factor de (X, T) y es un límite inverso de nilsistemas de orden i. Por otro lado, $(Z_i(Z_j(X)), T)$ es factor de (X, T) y es un límite inverso de nilsistemas de orden i. Como $(Z_i(X), T)$ es factor de $(Z_j(X), T)$, usando la maximalidad de los nilfactores concluimos que $Z_j(Z_i(X)) = Z_i(Z_j(X)) = Z_i(X)$.

Usando esto concluimos que si queremos probar (P) en un s.d.t. basta probar (P) en (X, T) un límite inverso de nilsistemas. En efecto, supongamos que hemos probado la propiedad (P) en la clase de límites inversos de nilsistemas y sea (X, T) s.d.t. con $Z_d(X) = Z_{d+1}(X)$. Entonces

$$Z_{d+1}(Z_{d+2}(X)) = Z_{d+1}(X) = Z_d(X) = Z_d(Z_{d+2}(X))$$

y como el Teorema 2.21 afirma que $Z_{d+2}(X)$ es un límite inverso de nilsistemas concluimos que $Z_{d+2}(X) = Z_{d+2}(Z_{d+2}(X)) = Z_{d+1}(Z_{d+2}(X)) = Z_{d+1}(X)$ y por lo tanto (X, T) tiene la propiedad (P).

Ahora, vemos que para probar la propiedad (P) en un límite inverso de nilsistemas podemos reducirnos a probarla en los nilsistemas. Para ello necesitamos los siguientes lemas.

Lema 4.7. *Sea* $(X, T) = \varprojlim(X_i, T_i)$ *donde* (X_i, T_i) *es un s.d.t. minimal para cada* $i \in \mathbb{N}$. *Sean* $\mathbf{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}, \mathbf{y} = (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X$. *Luego* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{RP}^{[d]}(X)$ *si y solamente si* $(x_i, y_i) \in \mathbf{RP}^{[d]}(X_i)$ *para todo* $i \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea $i \in \mathbb{N}$ y denotemos π_i la proyección de X en X_i. Notamos que $(x_i, y_i) \in \mathbf{RP}^{[d]}(X_i) = (\pi_i \times \pi_i)(\mathbf{RP}^{[d]}(X))$ y por lo tanto podemos encontrar $(\mathbf{w_i}, \mathbf{z_i}) \in \mathbf{RP}^{[d]}(X)$ con $(\pi_i \times \pi_i)(\mathbf{w_i}, \mathbf{z_i}) = (x_i, y_i)$ (y con ello $(\pi_j \times \pi_j)(\mathbf{w_i}, \mathbf{z_i}) = (x_j, y_j)$ para $j \leq i$). Claramente $(\mathbf{w_i}, \mathbf{z_i}) \to (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y como $\mathbf{RP}^{[d]}(X)$ es cerrado, concluimos $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{RP}^{[d]}(X)$. □

Del lema anterior claramente deducimos que si $\mathbf{RP}^{[d]}(X_i) = \mathbf{RP}^{[d+1]}(X_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces $\mathbf{RP}^{[d]}(X) = \mathbf{RP}^{[d+1]}(X)$.

Corolario 4.8. *Sea* $(X, T) = \varprojlim(X_i, T_i)$ *donde* (X_i, T_i) *es un s.d.t. minimal para cada* $i \in \mathbb{N}$. *Si cada* (X_i, T_i) *tiene la propiedad (P), entonces* (X, T) *también la tiene.*

Demostración. Supongamos $\mathbf{RP}^{[d]}(X) = \mathbf{RP}^{[d+1]}(X)$ y denotemos π_i la proyección de X en X_i. Luego

$$\mathbf{RP}^{[d]}(X_i) = (\pi_i \times \pi_i)(\mathbf{RP}^{[d]}(X)) = (\pi_i \times \pi_i)(\mathbf{RP}^{[d+1]}(X)) = \mathbf{RP}^{[d+1]}(X_i)$$

y por lo tanto $\mathbf{RP}^{[d+2]}(X_i) = \mathbf{RP}^{[d+1]}(X_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$. De la conclusión del lema anterior, deducimos $\mathbf{RP}^{[d+2]}(X) = \mathbf{RP}^{[d+1]}(X) = \mathbf{RP}^{[d]}(X)$ y (X, T) tiene la propiedad (P). □

Así, basta probar la propiedad (P) en un nilsistema. Estas reducciones fueron discutidas durante la memoria pero la demostración fue concluida en [10], donde los siguientes lemas son cruciales (ver el artículo en el Anexo para una demostración detallada).

Lema 4.9. *Si* $(X, T) = (G/\Gamma, T)$ *es un nilsistema básico y* $d \in \mathbb{N}$, *entonces los factores* $Z_d(X)$ *y* $\mathcal{Z}_d(X)$ *coinciden.*

Lema 4.10. *[23] Sea* $(X, T) = (G/\Gamma, T)$ *un nilsistema básico de orden* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces para cada* $d \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Z}_d(X) = Z_d(X) = G/G_d\Gamma$, *donde* G_d *es el d-ésimo subgrupo conmutador.*

Se concluye,

Teorema 4.11.

1. *Sea* (X, μ, T) *un s.d.a. ergódico. Si* $\mathcal{Z}_d(X) = \mathcal{Z}_{d+1}(X)$, *entonces* $\mathcal{Z}_n(X) = \mathcal{Z}_d(X)$ *para cada* $n \geq d$.

2. *Sea* (X, T) *es un s.d.t. minimal. Si* $\mathbf{RP}^{[d]} = \mathbf{RP}^{[d+1]}$, *entonces* $\mathbf{RP}^{[n]} = \mathbf{RP}^{[d]}$ *para cada* $n \geq d$.

3. *Sea (X,T) un s.d.t minimal y sea μ una medida ergódica. Si $\mathcal{Z}_d(X)$ es isomorfo (en el sentido medible), a $Z_d(X)$ par algún $d \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{Z}_n(X)$ es isomorfo a $Z_n(X)$ para cada $n \leq d$.*

Demostración. Mostremos los puntos generales de la propiedad de estabilización topológica, una demostración más detallada se puede ver en el Anexo. De la discusión anterior podemos suponer que $X = G/\Gamma$ es un nilsistema. Además podemos suponer que cada G_d es conexo (ver [3]). Entonces la propiedad $\mathbf{RP}^{[d]} = \mathbf{RP}^{[d+1]}$ equivale a $G_{d+1}\Gamma = G_{d+2}\Gamma$. Como Γ es discreto, se tiene G_{d+1} y G_{d+2} tienen la misma dimensión. Sean $\mathfrak{g}_{d+1}, \mathfrak{g}_{d+2}$ las álgebras de Lie asociadas a G_{d+1} y G_{d+2}. Entonces $\mathfrak{g}_{d+2}$ es subálgebra de $\mathfrak{g}_{d+1}$ y como tienen la misma dimensión, coinciden. La conexidad implica que $G_{d+1} = \exp(\mathfrak{g}_{d+1}) = \exp(\mathfrak{g}_{d+2}) = G_{d+2}$ y por lo tanto

$$G_{d+3} = [G, G_{d+2}] = [G, G_{d+1}] = G_{d+2} = G_{d+1}.$$

Esto implica naturalmente que $\mathbf{RP}^{[d+2]} = \mathbf{RP}^{[d+1]} = \mathbf{RP}^{[d]}$.

□

Ejemplos

- En un sistema débilmente mezclador, $\mathbf{RP}^{[d]} = X \times X$ para cada $d \geq 1$.
- En un nilsistema de orden d, $\mathbf{RP}^{[n]} = \triangle_X$ para $n \geq d$

Estas son las estabilizaciones triviales: $X \times X$ o $\triangle_X$. Sería interesante encontrar un ejemplo donde ocurra una estabilización que no sea trivial.

Un bosquejo de respuesta a esta interrogante viene dada por el siguiente lema:

Lema 4.12. *Sea $\pi : X \to Y$ un factor entre s.d.t. y supongamos que es proximal. Luego*

$$\mathbf{RP}^{[d]}(X) = \mathbf{RP}^{[d+1]}(X) \text{ si y solamente si } \mathbf{RP}^{[d]}(Y) = \mathbf{RP}^{[d+1]}(Y).$$

Demostración. Supongamos $\mathbf{RP}^{[d]}(Y) = \mathbf{RP}^{[d+1]}(Y)$ y sea $(x_1, x_2) \in \mathbf{RP}^{[d]}(X)$. Sea $(\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2}) \in \mathbf{RP}^{[d+1]}(X)$ tal que $(\pi \times \pi)(\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2}) = (\pi \times \pi)(x_1, x_2)$. Como π es proximal, obtenemos $(x_1, \widetilde{x_1}), (x_2, \widetilde{x_2}) \in \mathbf{P}(X) \subseteq \mathbf{RP}^{[d+1]}(X)$. Como $\mathbf{RP}^{[d+1]}(X)$ es una relación de equivalencia, concluimos $(x_1, x_2) \in \mathbf{RP}^{[d+1]}(X)$. □

Con el lema anterior, deducimos que:

Lema 4.13. *Sea $\pi : X \to Y$ un factor proximal entre s.d.t. y supongamos que (Y,T) es un nilsistema de orden d. Luego $\mathbf{RP}^{[\infty]}(X) = \mathbf{RP}^{[d]}(X)$.*

Demostración. Si (Y,T) es un nilsistema de orden d, se tiene que $\mathbf{RP}^{[n]}(Y) = \mathbf{RP}^{[d]}(Y) = \triangle_Y$ para cada $n \geq d$. Aplicando el lema anterior deducimos que $\mathbf{RP}^{[n]}(X) = \mathbf{RP}^{[d]}(X)$ si $n \geq d$ y por lo tanto $\mathbf{RP}^{[\infty]}(X) = \mathbf{RP}^{[d]}(X)$. □

Ejemplo: El subshift Sturmiano (X_α, σ) definido en el capítulo anterior es una extensión proximal de la rotación irracional en el círculo $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ por ángulo α y por lo tanto $\mathbf{RP}^{[\infty]}(X) = \mathbf{RP}^{[1]}(X) = \mathbf{RP}(X)$ y esta estabilización no es trivial.

De la misma manera, podemos preguntarnos si hay sistemas que no se estabilizan, y esto lo responde rápidamente el siguiente corolario del Teorema 4.11.

Corolario 4.14. *Sea (X,T) un s.d.t. minimal. Si* (X,T) *es un sistema* Z_∞ *entonces o bien es un nilsistema de orden* d *para algún* $d \geq 1$ *o bien* $\mathbf{RP}^{[d+1]} \subsetneq \mathbf{RP}^{[d]}$ *para cada* $d \geq 1$.

Demostración. Si $\mathbf{RP}^{[d]} = \mathbf{RP}^{[d+1]}$ para algún $d \geq 1$, entonces $\mathbf{RP}^{[n]} = \mathbf{RP}^{[d]}$ para $n \geq d$ y por lo tanto $\mathbf{RP}^{[\infty]} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbf{RP}^{[n]} = \mathbf{RP}^{[d]}$. Pero si (X,T) es un sistema Z_∞ $\triangle_X = \mathbf{RP}^{[\infty]} = \mathbf{RP}^{[d]}$ y luego (X,T) es un nilsistema de orden d. $\square$

Ejemplo:

Consideremos $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una secuencia tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ $(1, a_1, \ldots, a_n)$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$ (por argumentos de cardinalidad siempre podemos construir tal secuencia). Para $d \geq 2$ consideramos el nilsistema de Heisenberg de orden d, considerando la traslación dada por

$$g_d = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_{d-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Denotemos por (X_d, T) a este sistema. Notemos que cada X_d es minimal y hay un factor canónico $\pi_d : X_d \to X_{d-1}$. Consideremos entonces $(X,T) = \varprojlim (X_d, T)$, el cual en virtud del Teorema 4.3 es un sistema Z_∞ minimal. Observamos además que el grado de nilpotencia en los factores va creciendo, con lo que el sistema no es un nilsistema de orden d para algún $d \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $\mathbf{RP}^{[n]}(X) \subsetneq \mathbf{RP}^{[n+1]}(X)$ para cada $n \geq 1$.

4.4. Pares de independencia y sistemas Z_∞

En esta sección discutimos la estructura de sistemas minimales sin pares de independencia IP-finita, noción que aparece primeramente en [31] y fue desarrollada posteriormente en [28] y [29]. Mencionaremos la conexión de este concepto con la relación $\mathbf{RP}^{[\infty]}$. Todos los resultados que se exponen acá fueron obtenidos en [10] y se excluyen algunas demostraciones pues una parte importante es en colaboración.

Sea (X,T) un s.d.t. Para una tupla $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_m)$ de subconjuntos de X decimos que $F \subseteq \mathbb{Z}_+$ es un conjunto de independencia para $\mathbf{A}$ si para cada conjunto finito no vacío $J \subseteq F$, se tiene

$$\bigcap_{j\in J} T^{-j} A_{s(j)} \neq \emptyset$$

para cada $s \in \{1, 2, \ldots, m\}^J$.

Escribiremos por $\mathrm{Ind}(A_1, \ldots, A_m)$ o $\mathrm{Ind}(\mathbf{A})$ la colección de conjuntos de independencia de $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_m)$.

Un subconjunto finito $F \subseteq \mathbb{Z}_+$ se dice un conjunto IP-finito si existen $p_1, \ldots, p_k$ números naturales tales que F consiste en sus sumas finitas, es decir

$$F = \{\epsilon_1 p_1 + \epsilon_2 p_2 + \cdots + \epsilon_k p_k : \epsilon_1 \ldots \epsilon_k \in \{0,1\}^k\}.$$

Por ejemplo $\{0,2,3,5,7,9,10,12\}$ es un conjunto IP-finito pues consiste en las sumas de 2, 3 y 7.

Sea (X,T) un s.d.t. Un par $(x_1,x_2) \in X \times X$ se llama un par de *independencia IP-finita* si para cada par de vecindades U_1, U_2 de x_1 y x_2 respectivamente, $\mathrm{Ind}(U_1,U_2)$ contiene conjuntos IP-finitos de largo arbitrario. Denotamos $\mathrm{Ind}_{fip}(X,T)$ a los pares de *independencia IP-finita.*

Los siguientes lemas ligan la noción de pares de *independencia IP-finita* y los cubos dinámicos.

Lema 4.15. *Sea (X,T) un s.d.t. y $(x_1,x_2) \in X \times X$ con $x_1 \neq x_2$. Luego, $(x_1,x_2) \in Ind_{fip}(X,T)$ si y solamente si para cada $d \geq 1$, $\{x,y\}^{[d]} = \{x,y\}^{2^d} \subseteq \mathbf{Q}^{[d]}(X)$.*

Corolario 4.16. *Si (X,T) es un s.d.t. minimal, entonces $Ind_{fip}(X,T) \subseteq \mathbf{RP}^{[\infty]}(X)$.*

Demostración. Si $(x_1,x_2) \in \mathrm{Ind}_{fip}(X,T)$, entonces para cada $d \geq 1$ $(x,y,\ldots,y) \in \mathbf{Q}^{[d+1]}(X)$ y por lo tanto $(x,y) \in \mathbf{RP}^{[d]}(X)$. $\square$

Lema 4.17. *Sea (X,T) un s.d.t. transitivo, x_1 un punto transitivo y $d \geq 1$. Supongamos que $(x_2,x_1\ldots,x_1) \in \mathbf{Q}^{[d]}$ para cierto $x_2 \in X$. Sea $A = \overline{orb((x_1,x_2),T\times T)}$ y supongamos que la proyección en la primera coordenada $\pi_1 : A \to X$ es semi-abierta (es decir $int(\pi_1(U)) \neq \emptyset$ si $U \subseteq A$ es abierto no vacío). Entonces $\{x_1,x_2\}^{[d]} \subseteq \mathbf{Q}^{[d]}$.*

Corolario 4.18. *Sea (X,T) un s.d.t. minimal, $x_1,x_2 \in X$ y $d \geq 1$. Si $(x_1,x_2) \in \mathbf{RP}^{[d]}$ y (x_1,x_2) es un punto $T\times T$ minimal, entonces $\{x_1,x_2\}^{[d]} \subseteq \mathbf{Q}^{[d+1]}$.*

Demostración. Sea $A = \overline{\mathrm{orb}((x_1,x_2),T\times T)}$ y $\pi_1 : A \to X$ la proyección en la primera coordenada. Entonces π_1 es un factor entre s.d.t. minimales y por lo tanto π_1 es una función semi-abierta. Se concluye observando que $(x_2,x_1,\ldots,x_1) \in \mathbf{Q}^{[d+1]}$ y aplicando el lema anterior. $\square$

En el caso en que (X,T) es un s.d.t. minimal distal, (de [27], Corolario 4.2) se tiene que $(x,y) \in \mathbf{RP}^{[d]}$ si y solamente si $\{x,y\}^{[d]} \subseteq \mathbf{Q}^{[d]}(X)$ y por lo tanto el corolario anterior generaliza ese resultado dado que cada $(x_1,x_2) \in X\times X$ es $T\times T$ minimal al ser (X,T) distal. Como consecuencia observamos que en el caso minimal distal $\mathrm{Ind}_{fip}(X,T) = \mathbf{RP}^{[\infty]}$. En el caso no distal la inclusión puede ser estricta, como en el subshift Sturmiano ([10], Ejemplo 4.8), donde existen puntos $(x,y) \in \mathbf{P} \subseteq \mathbf{RP}^{[\infty]}$ y existe $d \geq 1$ con $\{x,y\}^{[d]} \nsubseteq \mathbf{Q}^{[d]}(X)$.

Recordemos que un sistema (X,T) es un sistema Z_∞ si $\mathbf{RP}^{[\infty]}(X) = \triangle_X$. Una pregunta interesante es investigar cómo son los sistemas sin pares de *independencia IP-finita* no triviales, es decir con $\mathrm{Ind}_{fip}(X,T) = \triangle_X$. ¿Hay alguna relación entre ausencia de recurrencia estructurada IP y complejidad polinomial? La respuesta es que un sistema con $\mathrm{Ind}_{fip}(X,T) = \triangle_X$ es una extensión casi uno a uno de un sistema con complejidad polinomial, como lo enuncia el siguiente teorema.

Teorema 4.19. *Si (X,T) es un s.d.t. con $Ind_{fip}(X,T) = \triangle_X$, entonces es una extensión casi uno a uno de su factor $Z_\infty(X)$.*

Para dar una demostración a este teorema, necesitamos los siguientes resultados clásicos de Dinámica Topológica. Si $\pi : X \to Y$ es un factor entre s.d.t. minimales entonces se puede cambiar por una extensión abierta vía modificaciones casi uno a uno. Más precisamente, si $\pi : X \to Y$ es un factor entre s.d.t. minimales, entonces existe el siguiente diagrama conmutativo (denominado *shadow diagram*)

$$\begin{tikzcd} X^* \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\pi^*"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\ Y^* \arrow[r, "\tau"] & Y \end{tikzcd}$$

con las siguiente propiedades:

1. σ y τ son extensiones casi uno a uno.
2. π^* es una extensión abierta, es decir $\pi^*(U)$ es abierto si $U \subseteq X^*$ es abierto.
3. X^* es el único conjunto minimal en $R_{\pi\tau} = \{(x, y) \in X \times Y^* : \pi(x) = \tau(y)\}$ y σ y π^* son las restricciones de las protecciones de $X \times Y^*$ a X e Y^* respectivamente.

Necesitamos además el siguiente teorema sobre extensiones débilmente mezcladoras, el cual aparece en [16].

Teorema 4.20. *Sea $\pi : X \to Y$ un factor entre s.d.t. minimales métricos. Supongamos que la extensión π es proximal y abierta. Entonces π es una extensión débilmente mezcladora, es decir existe un punto transitivo en $(R_\pi, T \times T)$.*

Con estos resultados demostremos el Teorema 4.19.

Demostración. Sea $\pi : X \to Z_\infty(X)$ el factor canónico. Primero veamos que π es una extensión proximal. Notemos que si $(x, y) \in R_\pi = \mathbf{RP}^{[\infty]}$ es $T \times T$ minimal, entonces $(x, y) \in \mathrm{Ind}_{fip}(X, T)$ y luego $x = y$. Sea ahora $(x, y) \in R_\pi$ arbitrario y sea $u \in E(X, T)$ un minimal idempodente. Entonces $(ux, uy) \in R_\pi$ es $T \times T$ minimal, y por lo tanto $ux = uy$. Esto dice que x e y son proximales.

Consideremos el diagrama asociado a π y sean π^*, σ y τ como en el diagrama. Notemos que $\pi \circ \sigma : X^* \to Y$ es una extensión proximal. Sean $(x_1, x_2) \in R_{\pi^*}$ y escribamos $x_1 = (x_1^1, y_1^*), x_2 = (x_2^1, y_2^*)$. Entonces $y_1^* = y_2^*$ y por lo tanto $\pi(x_1^1) = \tau(y_1^*) = \tau(y_2^*) = \pi(x_2^1)$. Como π es proximal se concluye que (x_1, x_2) es un par proximal y luego π^* es una extensión proximal. Del Teorema 4.20, π^* es una extensión débilmente mezcladora y por lo tanto existe $(x_1, x_2) \in R_{\pi^*}$ con $R_{\pi^*} = \overline{\mathrm{orb}((x_1, x_2), T \times T)}$. Probaremos que $(x_1, x_2) \in R_\sigma$ con lo que concluiremos $R_{\pi^*} \subseteq R_\sigma$. Para ello, consideremos π_1 la proyección de R_{π^*} en la primera coordenada. Si $U, V \subseteq X^*$ son conjuntos abiertos, entonces $\pi_1(U \times V) = \pi^*(U) \cap \pi^*(V)$ y por lo tanto π_1 es una función abierta. Luego como (x_1, x_2) es un par proximal, por el lema 4.17 se tiene que $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ind}_{fip}(X^*, T)$. Concluimos que $(\sigma(x_1), \sigma(x_2)) \in \mathrm{Ind}_{fip}(X, T)$ y por lo tanto, por hipótesis, $\sigma(x_1) = \sigma(x_2)$. Es decir $(x_1, x_2) \in R_\sigma$ y $R_{\pi^*} \subseteq R_\sigma$.

Como τ es casi uno a uno, sea $y \in Y$ tal que $|\tau^{-1}(y)| = 1$. Sean $x_1, x_2 \in \pi^{-1}(y)$ y sean $x_1^*, x_2^* \in X^*$ tales que $\sigma(x_1^*) = x_1$, $\sigma(x_2^*) = x_2$. Por la conmutatividad del diagrama tenemos que $\tau(\pi^*(x_1^*)) = \pi(\sigma(x_1^*)) = \pi(x_1) = y = \pi(x_2) = \pi(\sigma(x_2^*)) = \tau(\pi^*(x_2^*))$ y por lo tanto $\pi^*(x_1^*), \pi^*(x_1^*) \in \tau^{-1}(y)$, de donde $\pi^*(x_1^*) = \pi^*(x_2^*)$ y $(x_1^*, x_2^*) \in R_{\pi^*} \subseteq R_\sigma$. Concluimos que $x_1 = \sigma(x_1^*) = \sigma(x_2^*) = x_2$ y luego $|\pi^{-1}(y)| = 1$, lo que demuestra que π es una extensión casi uno a uno.

$\square$

Una pregunta que aún está abierta es determinar si un sistema con $\text{Ind}_{fip}(X,T) = \triangle_X$ es únicamente ergódico. Las siguientes ideas aparecen al intentar responder a esta pregunta y tienen importancia en sí mismas.

Sea (X,T) un s.d.t. y $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$ una medida ergódica. Consideremos el factor $\mathcal{Z}_d(X)$ del s.d.a. (X,μ,T) definido en el Capítulo 1. Sea μ_d la medida de $\mathcal{Z}_d(X)$ y $\mu = \int \mu_z d\mu_d(z)$ la descomposición de μ sobre μ_d. Consideremos $\lambda_d = \int \mu_z \times \mu_z d\mu_d(z)$ y denotemos $\mathcal{F}_d^\mu = sopp(\lambda_d)$. El siguiente teorema liga este concepto con $\mathbf{RP}^{[\infty]}$.

Teorema 4.21. *Sea (X,T) un s.d.t. y $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$ una medida ergódica. Luego:*

1. *Si $d \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{F}_d^\mu \subseteq \mathbf{RP}^{[d]}$.*

2. $\bigcap_{d=1}^{\infty} \mathcal{F}_d^\mu \subseteq Ind_{fip}(X,T)$

En el artículo mostrado en el apéndice, en la observación 6.3 se muestra un ejemplo donde las inclusiónes son estrictas. Surge naturalmente la pregunta si existe alguna medida ergódica tal que $\mathcal{F}_d^\mu = \mathbf{RP}^{[d]}$ o $\bigcap_{d=1}^{\infty} \mathcal{F}_d^\mu = \mathbf{RP}^{[\infty]}$.

Además, del Teorema 4.21 se deduce:

Teorema 4.22. *Sea (X,T) un s.d.t. minimal y $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$ con $Ind_{fip}(X,T) = \triangle_X$. Entonces para cada $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$ medida ergódica se tiene que $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ es isomorfo en el sentido medible a un sistema Z_∞.*

Capítulo 5

Conclusiones y Preguntas Abiertas

En este capítulo mostramos las conclusiones matemáticas obtenidas durante esta memoria y resumimos preguntas abiertas de interés.

Con respecto a la complejidad topológica de nilsistemas desarrollada en el Capítulo 2, concluimos que ésta es acotada superiormente en cada cubrimiento abierto por un polinomio de grado independiente al cubrimiento abierto. Respecto a esta conclusión quedan las siguientes interrogantes:

- ¿ Puede decirse algo sobre una cota inferior polinomial en alguna clase de cubrimientos abiertos (por ejemplo aquellos formados por abiertos pequeños)?

- ¿ Bajo qué tipo de extensiones podemos preservar la polinomialidad de la complejidad ?

- ¿ Qué otro tipo de condiciones necesitamos considerar para que la complejidad caracterice a la clase de nilsistemas?

- En general, ¿ qué otro tipo de conclusiones podemos obtener estudiando la complejidad de un sistema?

Con respecto a las propiedades topológicas de los nilsistemas abordadas durante esta memoria, pudimos concluir un criterio de débil mezcla usando el concepto de cubos dinámicos y la propiedad de estabilización de nilsistemas culminada en [10]. Quedan pendientes en este tema:

- ¿ Hay alguna relación más estrecha que la inclusión entre $sopp(\mu^{[d]})$ y $\mathbf{Q}^{[d]}$?

- Si (X,T) es un s.d.t, ¿ existe alguna medida ergódica μ tal que $\mathcal{F}_d^{\mu} = \mathbf{RP}^{[d]}$ o $\bigcap_{d=1}^{\infty} \mathcal{F}_d^{\mu} = \mathbf{RP}^{[\infty]}$?

- ¿ Es un s.d.t. (X,T) con $\mathrm{Ind}_{fip}(X,T) = \triangle_X$ únicamente ergódico ?

Algunas de estas interrogantes seguirán siendo discutidas durante los próximos meses.

Bibliografía

[1] J. Auslander, *Minimal flows and their extensions*, North-Holland Mathematics Studies 153 (1988), North-Holland, Amsterdam.

[2] L. Auslander, L. Green and F. Hahn, *Flows on homogeneous spaces*, Annals of Mathematics Studies **53**, Princeton University Press, Princeton, N.J. 1963 vii+107 pp.

[3] V. Bergelson, B. Host and B. Kra, *Multiple recurrence and nilsequences*, Invent. Math., **160**, (2005), 261–303, with an appendix by I.Z. Ruzsa.

[4] F. Blanchard, B. Host and A. Maass, *Topological complexity*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **20** (2000), 641–662.

[5] J.-P. Conze and E. Lesigne, *Théorèmes ergodiques pour des mesures diagonales.* Bull. Soc. Math. France, **112** (1984), 143–175.

[6] J.-P. Conze and E. Lesigne, *Sur un théorème ergodique pour des mesures diagonales*, Publications de l'Institut de Recherche de Mathématiques de Rennes, Probabilités, 1987.

[7] J.-P. Conze and E. Lesigne, *Sur un théorème ergodique pour des mesures diagonales*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, **306** (1988), 491–493.

[8] L. J. Corwin and F. P. Greenleaf, *Representations of nilpotent Lie groups and their applications. Part I. Basic theory and examples*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **18**, Cambridge University Press, Cambridge, 1990. viii+269 pp.

[9] T. de la Rue, *An introduction to joinings in ergodic theory*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **15** (2006), pp. 121–142.

[10] P. Dong, S. Donoso, A. Maass, S. Shao and X. Ye, *Infinite-step nilsystems, independence and complexity.* arXiv:1105.3584.

[11] K. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications.* Second edition. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2003. xxviii+337 pp..

[12] H. Furstenberg and B. Weiss. *A mean ergodic theorem for* $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(T^n x)g(T^{n^2}x)$, Convergence in Ergodic Theory and Probability, (Columbus, OH 1993) (Bergelson, March, and Rosenblatt, eds.), Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ . **5**, de Gruyter, Berlin (1996), 193–227.

[13] H. Furstenberg, *Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in diophantine approximation*, Math. Systems Theory **1** (1967), 1–49.

[14] H. Furstenberg *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1981. xi+203 pp.

[15] E. Glasner, *Ergodic theory via joinings*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. xii+384 pp.

[16] E. Glasner, *Topological weak mixing and quasi-Bohr systems*, Israel J. Math.,**148**, (2005), 277–304.

[17] B. Green and T.Tao, *The quantitative behaviour of polynomial orbits on nilmanifolds*, to appear in Annals of Math.

[18] B. Green and T. Tao, *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions*, Ann. of Math (2) **167** (2008), 481–547.

[19] B. Green and T. Tao, *Linear equations in primes*, Ann. of Math. (2) **171** (2010), no. 3, 1753–1850.

[20] B. Green and T. Tao, *Quadratic uniformity of the Möbius function*, Ann. Inst. Fourier **58** (2008), 1863–1935.

[21] V.V. Gorbatsevich, A.L. Onishchik and E.B. Vinberg , *Foundations of Lie theory and Lie transformation groups*. Translated from the Russian by A. Kozlowski. Reprint of the 1993 translation [Lie groups and Lie algebras. I, Encyclopaedia Math. Sci., 20, Springer, Berlin, 1993; MR1306737 (95f:22001)]. Springer-Verlag, Berlin, 1997. vi+235 pp.

[22] B. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations. An Elementary Introduction*, Springer, 2003.

[23] B. Host, *Convergence of multiple ergodic averages*, arXiv:0606362.

[24] B. Host and B. Kra, *Convergence of Conze-Lesigne Averages*, Ergod. Th. & Dynam. Sys., **21** (2001), 493–509.

[25] B. Host and B. Kra, *Nonconventional averages and nilmanifolds*, Ann. of Math., **161** (2005) 398–488.

[26] B. Host and B. Kra, *Uniformity seminorms on ℓ^∞ and applications*, J. d'Analyse Mathématique, **108** (2009), 219–276.

[27] B. Host, B. Kra and A. Maass, *Nilsequences and a Structure Theory for Topological Dynamical Systems*, Advances in Mathematics, **224** (2010) 103–129.

[28] W. Huang, H. Li and X. Ye, *Family-independence for topological and measurable dynamics*, Trans. Amer. Math. Soc., to appear,arXiv: 0908.0574.

[29] W. Huang, H. Li and X. Ye, *Localization and dynamical Ramsey property*, preprint.

[30] W. Huang and X. Ye, *Topological complexity, return times and weak disjointness*, Ergod. Th. & Dynam. Sys., **24** (2004), 825–846.

[31] D. Kerr and H. Li, *Independence in topological and C^*-dynamics*, Math. Ann. **338** (2007), 869–926.

[32] P. Kurka, *Topological and symbolic dynamics* volume 11 of *Cours spécialisés*. Société Mathématique de France, Paris, 2003. xii+315 pp.

[33] A. Leibman, *Pointwise convergence of ergodic averages for polynomial sequences of translations on a nilmanifold*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **25** (2005), no. 1, 201–213.

[34] E. Lesigne,*Sur une nil-variété, les parties minimales associées à une translation sont uniquement ergodiques*, Ergod. Th. & Dynam. Sys.**11** (1991), 379–391.

[35] A. Malcev, *On a Class of Homogeneous Spaces*, Amer. Math. Soc. Translations 1951, no. **39**, A. M. S., Providence, RI, 1951.

[36] M. Pollicott, *Fractals and Dimension Theory.* Available at http://www.warwick.ac.uk/m̃asdbl/preprints.html

[37] Z. Szemerédi , *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression*, Acta Arithmetica **27** (1975), 199–245

[38] S. Shao and X. Ye, *Regionally proximal relation of order d is an equivalence one for minimal systems and a combinatorial consequence*, arXiv:1007.0189.

Anexo

En este anexo, incluimos el artículo *Infinite-step nilsystems, independence and complexity* en donde se inserta, en la sección 7 el trabajo realizado en esta memoria.

INFINITE-STEP NILSYSTEMS, INDEPENDENCE AND COMPLEXITY

PANDENG DONG, SEBASTIÁN DONOSO, ALEJANDRO MAASS, SONG SHAO, AND XIANGDONG YE

Abstract. An ∞-step nilsystem is an inverse limit of minimal nilsystems. In this article is shown that a minimal distal system is an ∞-step nilsystem if and only if it has no nontrivial pairs with arbitrarily long finite IP-independence sets. Moreover, it is proved that any minimal system without nontrivial pairs with arbitrarily long finite IP-independence sets is an almost one to one extension of its maximal ∞-step nilfactor, and each invariant ergodic measure is isomorphic (in the measurable sense) to the Haar measure on some ∞-step nilsystem. The question if such a system is uniquely ergodic remains open. In addition, the topological complexity of an ∞-step nilsystem is computed, showing that it is polynomial for each nontrivial open cover.

1. Introduction

In this paper we introduce the notion of ∞-step nilsystem and study its relationship with the concept of independence. We also study its topological complexity. In this section, first we discuss the motivations for this subject and then we state the main results of the article.

1.1. **Motivations.** By a *topological dynamical system* (t.d.s. for short) we mean a pair (X,T), where X is a compact metric space and $T : X \to X$ is a homeomorphism.

There are several motivations for studying this subject. The first one comes from the so called *local entropy theory*, for a survey see [12]. Each t.d.s. admits a maximal zero topological entropy factor, and this factor is induced by the smallest closed invariant equivalence relation containing *entropy pairs* [5]. In [22], entropy pairs are characterized as those pairs that admit an *interpolating set* of positive

P. Dong and X. Ye were supported by NNSF of China (11071231). S. Donoso and A. Maass were supported by Basal-CMM and FONDAP-CRG grants. S. Shao was supported by NNSF of China (10871186) and Program for New Century Excellent Talents in University.

density. Later on, the notions of *sequence* entropy pairs [20] and *untame* pairs (called scrambled pairs in [17]) were introduced. In [24] the concept of *independence* was extensively studied and used to unify the afore mentioned notions. Let (X, T) be a t.d.s. and $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_k)$ be a tuple of subsets of X. We say that a subset $F \subseteq \mathbb{Z}_+$ is an *independence set* for $\mathcal{A}$ if for any nonempty finite subset $J \subseteq F$ and any $s = (s(j) : j \in J) \in \{1, \dots, k\}^J$ we have $\bigcap_{j \in J} T^{-j} A_{s(j)} \neq \emptyset$. It is shown that a pair of points x, y in X is a sequence entropy pair if and only if each $\mathcal{A} = (A_1, A_2)$, with A_1 and A_2 neighborhoods of x and y respectively, has arbitrarily long finite independence sets. Also, the pair is an untame pair if and only if each $\mathcal{A} = (A_1, A_2)$ as before has infinite independence sets. It is known that each t.d.s. admits a maximal zero sequence entropy factor, i.e. a null factor [20], which is induced by the smallest closed invariant equivalence relation containing sequence entropy pairs, and a maximal tame factor [24], which is induced by the smallest closed invariant equivalence relation containing untame pairs. It was shown ([20, 24, 10]) that a minimal null (resp. tame) system is an almost 1-1 extension of an equicontinuous t.d.s. and is uniquely ergodic. For a similar study see [27]. Moreover, in the equicontinuous case the uniquely ergodic measure is measure theoretical isomorphic to the Haar measure of the underlying Abelian group.

To get a better understanding of the role of the notion of independence in t.d.s., in [18, 19] the authors systematically investigate the independence for a given collection of subsets of $\mathbb{Z}_+$. For a finite subset $\{p_1, \dots, p_m\}$ of $\mathbb{N}$, the *finite IP-set* generated by $\{p_1, \dots, p_m\}$ is the set $\{\epsilon_1 p_1 + \ldots + \epsilon_m p_m : \epsilon_i \in \{0, 1\}, 1 \le i \le m\} \setminus \{0\}$. The notion of Ind_{fip}-pair is introduced and studied in [19]: a pair of points (x, y) in X is an Ind_{fip}-pair if and only if each $\mathcal{A} = (A_1, A_2)$, with A_1 and A_2 neighborhoods of x and y respectively, has arbitrarily long finite IP-independence sets. Among other results it is shown that the Ind_{fip}-pair relation has the lifting property, i.e. if $\pi : (X, T) \longrightarrow (Y, S)$ is a factor map between two t.d.s. then $\pi \times \pi(\mathrm{Ind}_{fip}(X, T)) = \mathrm{Ind}_{fip}(Y, S)$, where $\mathrm{Ind}_{fip}(X, T)$ is the set of all Ind_{fip}-pairs of (X, T). It is clear that,

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{Tameness} \arrow[dr] & \\
\text{Nullness} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{Zero entropy} \\
 & \mathrm{Ind}_{fip} = \Delta_X \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

So it is interesting to understand the dynamical properties of a minimal t.d.s. without Ind_{fip}-pairs.

A second motivation comes from the study of the dynamics of nilsystems. Let $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ be an ergodic system.

In [15], to study the convergence of some non-conventional ergodic averages in this system, the authors proved that the characteristic factors for such averages in $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ are d-step nilsystems for some integer $d \ge 1$. Then, in the topological setting, in [16] the authors defined the notion of regionally proximal relation of order

d associated to a t.d.s. (X, T), $\mathbf{RP}^{[d]}$, and showed that if the system is minimal and distal then $\mathbf{RP}^{[d]}$ is an equivalence relation and $(X/\mathbf{RP}^{[d]}, T)$ is the maximal d-step nilfactor of the system. In a recent preprint [29], this result was generalized to arbitrarily minimal t.d.s. When studying minimal distal systems carefully one finds that if $(x, y) \in \mathbf{RP}^{[d]}$ for some integer d then each $\mathcal{A} = (A_1, A_2)$, with A_1 and A_2 neighborhoods of x and y respectively, has a finite IP-independence set of length $n(d)$ such that $\lim_{d\to\infty} n(d) = \infty$. This means that if $(x, y) \in \mathbf{RP}^{[\infty]} = \cap_{d\geq 1}\mathbf{RP}^{[d]}$, then $(x, y) \in \mathrm{Ind}_{fip}(X, T)$. This is the main reason leading us to define ∞-step nilsystems and to study properties of minimal t.d.s. without Ind_{fip}-pairs.

The third motivation comes from the theory of *local complexity* in topological dynamics. In [4] the authors introduced the notion of topological complexity for a t.d.s. using open covers, and showed that a t.d.s. is equicontinuous if and only if each nontrivial open cover has a bounded complexity. For a further development, see [21]. An interesting, but more difficult question, is to understand t.d.s. with polynomial complexity or extensions of such systems. It appears (this is proved in Section 7) that inverse limits of nilsystems are special systems with polynomial complexity.

1.2. **Main results of the paper.** In this paper, we study ∞-step nilsystems, which are t.d.s. with trivial $\mathbf{RP}^{[\infty]}$, i.e. $\mathbf{RP}^{[\infty]} = \cap_{d=1}^{\infty}\mathbf{RP}^{[d]} = \Delta$, the diagonal. First, we prove that a minimal system is an ∞-step nilsystem if and only if it is an inverse limit of minimal nilsystems. Then we study the relation of ∞-step nilsystems and independence pairs. It is proved that any minimal system without nontrivial Ind_{fip}-pairs is an almost one-to-one extension of its maximal ∞-step nilfactor. Moreover, a minimal distal system is an ∞-step nilsystem if and only if it has no nontrivial Ind_{fip}-pairs. We observe that there are plenty of minimal distal systems which are not ∞-step nilsystems, though it is not easy to construct explicit examples.

In addition, we show for any minimal system without nontrivial Ind_{fip}-pairs that each invariant ergodic measure is measure theoretical isomorphic to the Haar measure on some ∞-step nilsystem. We conjecture that such class of systems are uniquely ergodic.

Finally, we prove the topological complexity of an ∞-step nilsystem is polynomial for each non-trivial open cover.

1.3. **Organization of the paper.** We organize the paper as follows. In Section 2 we introduce basic notions and facts we will meet in this article. Then we define ∞-step nilsystems in Section 3. In Section 4 we study the relationship between ∞-step nilsystems and independence pairs; and in Section 5, we give some examples. In section 6 we study the conjecture concerning unique ergodicity, and state some further ideas and questions. Finally, in Section 7, we discuss the complexity of an ∞-step nilsystem. Moreover, we give proofs of some results stated in Section 3 in the Appendix.

Acknowledgements: We thank W. Huang, H.F. Li and B. Kra for useful comments and suggestions.

2. Preliminaries

2.1. **Topological dynamical systems.** A *transformation* of a compact metric space X is a homeomorphism of X to itself. A *topological dynamical system* (t.d.s.) or just a *system*, is a pair (X,T), where X is a compact metric space and $T : X \to X$ is a transformation. We use $\rho(\cdot,\cdot)$ to denote the metric in X. In the sequel, and if there is no confusion, in any t.d.s. we will always use T to indicate the transformation.

We will also make use of a more general definition of a system. That is, instead of just considering a single transformation T, we will consider commuting homeomorphisms $T_1,\dots,T_k$ of X. We recall some basic definitions and properties of systems in the classical setting of one transformation. Extensions to the general case are straightforward.

A system (X,T) is *transitive* if there exists $x \in X$ whose orbit $\mathcal{O}(x,T) = \{T^n x : n \in \mathbb{Z}\}$ is dense in X and such point is called a *transitive point*. The system is *minimal* if the orbit of any point is dense in X. This property is equivalent to saying that X and the empty set are the unique closed invariant subsets of X.

Let (X,T) be a system and $\mathcal{M}(X)$ be the set of Borel probability measures in X. A measure $\mu \in \mathcal{M}(X)$ is *T-invariant* if for any Borel set B of X, $\mu(T^{-1}B) = \mu(B)$. Denote by $\mathcal{M}(X,T)$ the set of invariant probability measures. A measure $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$ is *ergodic* if for any Borel set B of X satisfying $\mu(T^{-1}B\triangle B) = 0$ we have $\mu(B) = 0$ or $\mu(B) = 1$. Denote by $\mathcal{M}^e(X,T)$ the set of ergodic measures. The system (X,T) is *uniquely ergodic* if $\mathcal{M}(X,T)$ consists of only one element.

A *homomorphism* between the t.d.s. (X,T) and (Y,T) is a continuous onto map $\pi : X \to Y$ which intertwines the actions; one says that (Y,T) is a *factor* of (X,T) and that (X,T) is an *extension* of (Y,T). One also refers to π as a *factor map* or an *extension* and one uses the notation $\pi : (X,T) \to (Y,T)$. The systems are said to be *conjugate* if π is a bijection. An extension π is determined by the corresponding closed invariant equivalence relation $R_\pi = \{(x_1,x_2) : \pi(x_1) = \pi(x_2)\} = (\pi \times \pi)^{-1}\Delta_Y \subset X \times X$, where Δ_Y is the diagonal on Y. An extension $\pi : (X,T) \to (Y,T)$ is *almost one-to-one* if the G_δ set $X_0 = \{x \in X : \pi^{-1}(\pi(x)) = \{x\}\}$ is dense.

2.2. **Distality and Proximality.** Let (X,T) be a t.d.s. A pair $(x,y) \in X \times X$ is a *proximal* pair if

$$\inf_{n\in\mathbb{Z}} \rho(T^n x, T^n y) = 0$$

and is a *distal* pair if it is not proximal. Denote by $P(X,T)$ or P_X the set of proximal pairs of (X,T). The t.d.s. (X,T) is *distal* if (x,y) is a distal pair whenever $x,y \in X$ are distinct.

An extension $\pi : (X,T) \to (Y,S)$ is *proximal* if $R_\pi \subset P(X,T)$ and is *distal* if $R_\pi \cap P(X,T) = \Delta_X$. Observe that when Y is trivial (reduced to one point) the map π is distal if and only if (X,T) is distal.

2.3. **Independence.** The notion of *independence* was firstly introduced and studied in [24, Definition 2.1]. It corresponds to a modification of the notion of *interpolating* studied in [11, 22] and was considerably discussed in [18, 19].

Definition 2.1. Let (X,T) be a t.d.s. Given a tuple $\mathcal{A} = (A_1,\dots,A_k)$ of subsets of X we say that a subset $F \subset \mathbb{Z}_+$ is an *independence set* for $\mathcal{A}$ if for any nonempty finite subset $J \subset F$ and any $s = (s(j) : j \in J) \in \{1,\dots,k\}^J$ we have

$$\bigcap_{j\in J} T^{-j} A_{s(j)} \neq \emptyset \ .$$

We shall denote the collection of all independence sets for $\mathcal{A}$ by $\mathrm{Ind}(A_1,\dots,A_k)$ or $\mathrm{Ind}\mathcal{A}$.

A finite subset F of $\mathbb{Z}_+$ is called a *finite IP-set* if there exists a finite subset $\{p_1,p_2,\dots,p_m\}$ of $\mathbb{N}$ such that

$$F = FS(\{p_i\}_{i=1}^m) = \{p_{i_1} + \cdots + p_{i_k} : 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m\}.$$

Now we define Ind_{fip}-pairs.

Definition 2.2. Let (X,T) be a t.d.s. A pair $(x_1,x_2) \in X \times X$ is called an Ind_{fip}-*pair* if for any neighborhoods U_1, U_2 of x_1 and x_2 respectively, $\mathrm{Ind}(U_1,U_2)$ contains arbitrarily long finite IP-sets. Denote by $\mathrm{Ind}_{fip}(X,T)$ the set of all Ind_{fip}-pairs of (X,T).

2.4. **Parallelepipeds.** Let X be a set, $d \ge 1$ be an integer, and write $[d] = \{1,2,\dots,d\}$. We view $\{0,1\}^d$ in one of two ways, either as a sequence $\epsilon = \epsilon_1 \dots \epsilon_d := (\epsilon_1,\dots,\epsilon_d)$ of $0'$s and $1'$s; or as a subset of $[d]$. A subset ϵ corresponds to the sequence $(\epsilon_1,\dots,\epsilon_d) \in \{0,1\}^d$ such that $i \in \epsilon$ if and only if $\epsilon_i = 1$ for $i \in [d]$. For example, $\mathbf{0} = (0,0,\dots,0) \in \{0,1\}^d$ is the same as $\emptyset \subset [d]$.

If $\mathbf{n} = (n_1,\dots,n_d) \in \mathbb{Z}^d$ and $\epsilon \in \{0,1\}^d$, we define

$$\mathbf{n} \cdot \epsilon = \sum_{i=1}^d n_i \epsilon_i.$$

If we consider ϵ as $\epsilon \subset [d]$, then $\mathbf{n} \cdot \epsilon = \sum_{i\in\epsilon} n_i$.

We denote X^{2^d} by $X^{[d]}$. A point $\mathbf{x} \in X^{[d]}$ can be written in one of two equivalent ways, depending on the context:

$$\mathbf{x} = (x_\epsilon : \epsilon \in \{0,1\}^d) = (x_\epsilon : \epsilon \subset [d]).$$

Hence $x_\emptyset = x_\mathbf{0}$ is the first coordinate of $\mathbf{x}$. As examples, points in $X^{[2]}$ are written

$$(x_{00}, x_{10}, x_{01}, x_{11}) = (x_\emptyset, x_{\{1\}}, x_{\{2\}}, x_{\{1,2\}}),$$

and points in $X^{[3]}$ look like

$$\begin{aligned}&(x_{000}, x_{100}, x_{010}, x_{110}, x_{001}, x_{101}, x_{011}, x_{111})\\ =\ &(x_{\emptyset}, x_{\{1\}}, x_{\{2\}}, x_{\{1,2\}}, x_{\{3\}}, x_{\{1,3\}}, x_{\{2,3\}}, x_{\{1,2,3\}}).\end{aligned}$$

For $x \in X$ we write $x^{[d]} = (x, x, \dots, x) \in X^{[d]}$. The diagonal of $X^{[d]}$ is $\Delta^{[d]} = \{x^{[d]} : x \in X\}$. Usually, when $d = 1$, we denote the diagonal by Δ_X or Δ instead of $\Delta^{[1]}$.

A point $\mathbf{x} \in X^{[d]}$ can be decomposed as $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$ with $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in X^{[d-1]}$, where $\mathbf{x}' = (x_{\epsilon 0} : \epsilon \in \{0,1\}^{d-1})$ and $\mathbf{x}'' = (x_{\epsilon 1} : \epsilon \in \{0,1\}^{d-1})$. We can also isolate the first coordinate, writing $X_*^{[d]} = X^{2^d-1}$ and then writing a point $\mathbf{x} \in X^{[d]}$ as $\mathbf{x} = (x_\emptyset, \mathbf{x}_*)$, where $\mathbf{x}_* = (x_\epsilon : \epsilon \neq \emptyset) \in X_*^{[d]}$.

Identifying $\{0,1\}^d$ with the set of vertices of the Euclidean unit cube, a Euclidean isometry of the unit cube permutes the vertices of the cube and thus the coordinates of a point $\mathbf{x} \in X^{[d]}$. These permutations are the *Euclidean permutations* of $X^{[d]}$.

2.5. **Dynamical parallelepipeds.** We follow definitions from [16].

Let (X, T) be a t.d.s. and $d \geq 1$ be an integer.

We define the set of (dynamical) *parallelepipeds of dimension d*, $\mathbf{Q}^{[d]}(X)$ (or just $\mathbf{Q}^{[d]}$), as the closure in $X^{[d]}$ of elements of the form

$$(T^{\mathbf{n}\cdot\epsilon}x = T^{n_1\epsilon_1+\ldots+n_d\epsilon_d}x : \epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_d) \in \{0,1\}^d),$$

where $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$ and $x \in X$. It is important to note that $\mathbf{Q}^{[d]}$ is invariant under the Euclidean permutations of $X^{[d]}$.

As examples, $\mathbf{Q}^{[2]}$ is the closure in $X^{[2]} = X^4$ of the set

$$\{(x, T^m x, T^n x, T^{n+m} x) : x \in X, m, n \in \mathbb{Z}\}$$

and $\mathbf{Q}^{[3]}$ is the closure in $X^{[3]} = X^8$ of the set

$$\{(x, T^m x, T^n x, T^{m+n} x, T^p x, T^{m+p} x, T^{n+p} x, T^{m+n+p} x) : x \in X, m, n, p \in \mathbb{Z}\}.$$

Let $\phi : (X, T) \to (Y, T)$ be a factor map. Define$\phi^{[d]} : X^{[d]} \to Y^{[d]}$ by $(\phi^{[d]}\mathbf{x})_\epsilon = \phi x_\epsilon$ for every $\mathbf{x} \in X^{[d]}$ and every $\epsilon \subset [d]$. The *diagonal transformation* of $X^{[d]}$ is the map $T^{[d]}$. We define *face transformations* inductively as follows: Let $T^{[0]} = T$, $T_1^{[1]} = \mathrm{id} \times T$. If $\{T_j^{[d-1]}\}_{j=1}^{d-1}$ is already defined, then set

$$\begin{aligned} T_j^{[d]} &= T_j^{[d-1]} \times T_j^{[d-1]},\ j \in \{1, 2, \dots, d-1\},\\ T_d^{[d]} &= \mathrm{id}^{[d-1]} \times T^{[d-1]}.\end{aligned}$$

It is easy to see that for $j \in [d]$, the face transformation $T_j^{[d]} : X^{[d]} \to X^{[d]}$ can be defined, for every $\mathbf{x} \in X^{[d]}$ and $\epsilon \subset [d]$, by

$$T_j^{[d]}\mathbf{x} = \begin{cases} (T_j^{[d]}\mathbf{x})_\epsilon = T x_\epsilon, & j \in \epsilon;\\ (T_j^{[d]}\mathbf{x})_\epsilon = x_\epsilon, & j \notin \epsilon.\end{cases}$$

The *face group* of dimension d is the group $\mathcal{F}^{[d]}(X)$ of transformations of $X^{[d]}$ spanned by the face transformations. The *parallelepiped group* of dimension d is the group $\mathcal{G}^{[d]}(X)$ spanned by the diagonal transformation and the face transformations. We often write $\mathcal{F}^{[d]}$ and $\mathcal{G}^{[d]}$ instead of $\mathcal{F}^{[d]}(X)$ and $\mathcal{G}^{[d]}(X)$, respectively. For $\mathcal{G}^{[d]}$ and $\mathcal{F}^{[d]}$, we use similar notations to that used for $X^{[d]}$: Namely, an element of either of these groups is written as $S = (S_\epsilon : \epsilon \in \{0,1\}^d)$. In particular, $\mathcal{F}^{[d]} = \{S \in \mathcal{G}^{[d]} : S_\emptyset = \mathrm{id}\}$.

For convenience, we denote the orbit closure of $\mathbf{x} \in X^{[d]}$ under $\mathcal{F}^{[d]}$ by $\overline{\mathcal{F}^{[d]}}(\mathbf{x})$, instead of $\overline{\mathcal{O}(\mathbf{x}, \mathcal{F}^{[d]})}$.

It is easy to verify that $\mathbf{Q}^{[d]}$ is the closure in $X^{[d]}$ of

$$\{Sx^{[d]} : S \in \mathcal{F}^{[d]}, x \in X\}.$$

If (X,T) is a transitive system and x a transitive point, then $\mathbf{Q}^{[d]}$ is the closed orbit of $x^{[d]}$ under the group $\mathcal{G}^{[d]}$. Moreover, it is easy to get that

$$\mathbf{Q}^{[d]} = \overline{\{(T^{\mathbf{n}\cdot\epsilon}x)_{\epsilon\in\{0,1\}^d} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d, x \in X\}} \ .$$

2.6. **Nilmanifolds and nilsystems.** Let G be a group. For $g, h \in G$ and $A, B \subset G$, we write $[g,h] = ghg^{-1}h^{-1}$ for the commutator of g and h and $[A,B]$ for the subgroup spanned by $\{[a,b] : a \in A, b \in B\}$. The commutator subgroups G_j, $j \geq 1$, are defined inductively by setting $G_1 = G$ and $G_{j+1} = [G_j, G]$. Let $d \geq 1$ be an integer. We say that G is *d-step nilpotent* if G_{d+1} is the trivial subgroup.

Let G be a d-step nilpotent Lie group and Γ be a discrete cocompact subgroup of G. The compact manifold $X = G/\Gamma$ is called a *d-step nilmanifold*. The group G acts on X by left translations and we write this action as $(g,x) \mapsto gx$. The Haar measure μ of X is the unique probability measure on X invariant under this action. Let $\tau \in G$ and T be the transformation $x \mapsto \tau x$ of X. Then (X, μ, T) is called a *d-step nilsystem*. In the topological setting we omit the measure and just say that (X,T) is a d-step nilsystem.

We will need to use inverse limits of nilsystems, so we recall the definition of a sequential inverse limit of systems. If $(X_i, T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ are systems with $diam(X_i) \leq 1$ and $\pi_i : X_{i+1} \to X_i$ are factor maps, the *inverse limit* of the systems is defined to be the compact subset of $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ given by $\{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} : \pi_i(x_{i+1}) = x_i\}$, and we denote it by $\varprojlim (X_i, T_i)_{i\in\mathbb{N}}$. It is a compact metric space endowed with the distance $\rho((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, (y_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \sum_{i\in\mathbb{N}} 1/2^i \rho_i(x_i, y_i)$, where ρ_i is the metric in X_i. We note that the maps T_i induce naturally a transformation T on the inverse limit.

The following structure theorem characterizes inverse limits of nilsystems using dynamical parallelepipeds.

Theorem 2.3 (Host-Kra-Maass)**.** [16, Theorem 1.2.] *Assume that (X,T) is a transitive topological dynamical system and let $d \geq 2$ be an integer. The following properties are equivalent:*

(1) *If* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{Q}^{[d]}$ *have* $2^d - 1$ *coordinates in common, then* $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.
(2) *If* $x, y \in X$ *are such that* $(x, y, \dots, y) \in \mathbf{Q}^{[d]}$*, then* $x = y$.
(3) X *is an inverse limit of* $(d-1)$*-step minimal nilsystems.*

A transitive system satisfying one of the equivalent properties above is called a *system of order* $(d-1)$.

3. ∞-step nilsystems

3.1. **Regionally proximal relation of order** d**.** First we recall a fundamental relation introduced in [16] allowing to characterize maximal nilfactors in [16] (for minimal distal systems) and in [29] (for general minimal systems).

Definition 3.1. Let (X, T) be a system and let $d \in \mathbb{N}$. The points $x, y \in X$ are said to be *regionally proximal of order* d if for any $\delta > 0$, there exist $x', y' \in X$ and a vector $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$ such that $\rho(x, x') < \delta, \rho(y, y') < \delta$, and

$$\rho(T^{\mathbf{n}\cdot\epsilon}x', T^{\mathbf{n}\cdot\epsilon}y') < \delta \text{ for any nonempty } \epsilon \subset [d].$$

In other words, there exists $S \in \mathcal{F}^{[d]}$ such that $\rho(S_\epsilon x', S_\epsilon y') < \delta$ for every $\epsilon \neq \emptyset$. The set of regionally proximal pairs of order d is denoted by $\mathbf{RP}^{[d]}$ (or by $\mathbf{RP}^{[d]}(X,T)$ in case of ambiguity), and is called *the regionally proximal relation of order* d.

It is easy to see that $\mathbf{RP}^{[d]}$ is a closed and invariant relation. Observe that

$$\mathbf{P}(X,T) \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{RP}^{[d+1]} \subseteq \mathbf{RP}^{[d]} \subseteq \ldots \mathbf{RP}^{[2]} \subseteq \mathbf{RP}^{[1]} = \mathbf{RP}(X,T).$$

The following theorems proved in [16] (for minimal distal systems) and in [29] (for general minimal systems) tell us conditions under which (x, y) belongs to $\mathbf{RP}^{[d]}$ and the relation between $\mathbf{RP}^{[d]}$ and d-step nilsystems.

Theorem 3.2. *Let* (X, T) *be a minimal system and let* $d \in \mathbb{N}$*. Then*

(1) $(x, y) \in \mathbf{RP}^{[d]}$ *if and only if* $(x, y, \dots, y) \in \mathbf{Q}^{[d+1]}$ *if and only if* $(x, y, \dots, y) \in \overline{\mathcal{F}^{[d+1]}}(x^{[d+1]})$.
(2) $\mathbf{RP}^{[d]}$ *is an equivalence relation.*
(3) (X, T) *is a system of order* d *if and only if* $\mathbf{RP}^{[d]} = \Delta_X$.

3.2. ∞**-step Nilsystems.** The regionally proximal relation of order d allows to construct the maximal d-step nilfactor of a system. That is, any factor of order d (inverse limit of d-step minimal nilsystems) factorize through this system.

Theorem 3.3. [29] *Let* $\pi : (X, T) \to (Y, T)$ *be a factor map between minimal systems and let* $d \in \mathbb{N}$*. Then,*

(1) $\pi \times \pi(\mathbf{RP}^{[d]}(X, T)) = \mathbf{RP}^{[d]}(Y, T)$.
(2) (Y, T) *is a system of order* d *if and only if* $\mathbf{RP}^{[d]}(X, T) \subset R_\pi$.

In particular, the quotient of (X, T) *under* $\mathbf{RP}^{[d]}(X, T)$ *is the maximal* d*-step nil-factor of* X *(i.e. the maximal factor of order* d*).*

It follows that for any minimal system (X,T),

$$\mathbf{RP}^{[\infty]} = \bigcap_{d\geq 1} \mathbf{RP}^{[d]}$$

is a closed invariant equivalence relation (we write $\mathbf{RP}^{[\infty]}(X,T)$ in case of ambiguity). Now we formulate the definition of ∞-step nilsystems or systems of order ∞.

Definition 3.4. A minimal system (X,T) is an *∞-step nilsystem* or *a system of order* ∞, if the equivalence relation $\mathbf{RP}^{[\infty]}$ is trivial, i.e. coincides with the diagonal.

Remark 3.5. Similar to Theorem 3.3, one can show that the quotient of a minimal system (X,T) under $\mathbf{RP}^{[\infty]}$ is the maximal ∞-step nilfactor of (X,T).

Let (X,T) be a minimal system. It is easy to see that if (X,T) is an inverse limit of minimal nilsystems, then (X,T) is an ∞-step nilsystem. Conversely, if (X,T) is a minimal ∞-step nilsystem, then $\mathbf{RP}^{[\infty]} = \Delta_X$. For any integer $d\geq 1$ let (X_d,T) be the quotient of (X,T) under $\mathbf{RP}^{[d]}$. Then $(X,T) = \varprojlim (X_d,T)_{d\in\mathbb{N}}$ as $\Delta_X = \mathbf{RP}^{[\infty]} = \bigcap\limits_{d\geq 1} \mathbf{RP}^{[d]}$. In fact we can show more as the following theorem says.

Theorem 3.6. *A minimal system is an ∞-step nilsystem if and only if it is an inverse limit of minimal nilsystems.*

Proof. It remains to prove that if (X,T) is a minimal ∞-step nilsystem, then it is an inverse limit of minimal nilsystems. First we may assume that $(X,T) = \varprojlim (X_d,T)_{d\in\mathbb{N}}$, where $X_d = X/\mathbf{RP}^{[d]}$ for any $d\geq 1$. By Theorem 2.3, for any $d\geq 1$, (X_d,T) is an inverse limit of minimal d-step nilsystems.

We need the following claim.

Claim: *Let (Y,S) be a minimal system, and let (Y_i,S) be factors of (Y,S) which are k_i-step nilsystems, where $1\leq i\leq n$ and $\max\{k_i : 1\leq i\leq n\} = k$. Then there exists a k-step nilsystem (Z,S) such that it is a factor of (Y,S) and is an extension of (Y_i,S) for $1\leq i\leq n$.*

Proof of Claim: Let π_i be the factor map between (Y,S) and (Y_i,S) and assume (Y_i,S) has the form of $(H_i/\Gamma_i,h_i)$, where $h_i\in H_i$ and S is the left translation by h_i on Y_i. Set $G = H_1\times\cdots\times H_n$, $\Gamma = \Gamma_1\times\cdots\Gamma_n$ and $g = (h_1,\ldots,h_n)$. Then G is a k-step nilpotent Lie group and Γ is a discrete uniform subgroup of G. Let $S : G/\Gamma\to G/\Gamma$ be the transformation $x\mapsto gx$. Choose any point $y\in Y$ and let $Z = \overline{\{g^n(\pi_1(y),\ldots,\pi_n(y)) : n\in\mathbb{Z}\}}\subset G/\Gamma$ be the orbit closure of $(\pi_1(y),\ldots,\pi_n(y))$ under S. Since nilsystems are distal, (Z,S) is minimal. Moreover it is a k-step nilsystem [25]. And of course, (Z,S) is a factor of (Y,S) and it is an extension of (Y_i,S) for $1\leq i\leq n$.

Now we show that (X,T) is an inverse limit of minimal nilsystems using previous claim. As (X_1,T) is a system of order 1, it is an inverse limit of some 1-step nilsystems $((X_1)_i,T)_{i\in\mathbb{N}}$ by Theorem 2.3. Similarly, as (X_2,T) is a system of order 2, it is an inverse limit of some 2-step nilsystems $((X_2)_i,T)_{i\in\mathbb{N}}$. Note that all $((X_1)_i,T)_{i\in\mathbb{N}}$ and $((X_2)_i,T)_{i\in\mathbb{N}}$ are factors of X_2. By the above claim, we may reconstruct 2-step nilsystems $((X_2)_i,T)_{i\in\mathbb{N}}$ such that for all $i\in\mathbb{N}$, $((X_2)_{i+1},T)$ is an extension of $((X_1)_1,T)$, $((X_1)_2,T)$, …, $((X_1)_{i+1},T)$ and $((X_2)_1,T),\dots,((X_2)_i,T)$.

Similarly and inductively, for any given $k\in\mathbb{N}$ (X_k,T) can be written as the inverse limit of some k-step nilsystems $((X_k)_i,T)_{i\in\mathbb{N}}$ satisfying that for all $i\in\mathbb{N}$, $((X_{k+1})_i,T)$ is an extension of $((X_k)_i,T)$.

Since (X,T) is the inverse limit of $(X_k,T)_{k\in\mathbb{N}}$, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C(X_k)$ is dense in $C(X)$. And as (X_k,T) is the inverse limit of $((X_k)_i,T)_{i\in\mathbb{N}}$, we have that $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C((X_k)_i)$ is dense in $C(X)$. So we may choose a sequence of $(k_n,i_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ with $k_n<k_{n+1}, i_n<i_{n+1}$ such that $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C((X_{k_n})_{i_n})$ is dense in $C(X)$. Thus (X,T) is the inverse limit of $((X_{k_n})_{i_n},T)_{n\in\mathbb{N}}$. That is, (X,T) is an inverse limit of minimal nilsystems. This completes the proof of the theorem.

□

Since minimal nilsystems are uniquely ergodic, it is easy to see that minimal ∞-step nilsystems are also uniquely ergodic.

3.3. **About $\mathbf{RP}^{[\infty]}=\mathbf{RP}^{[d]}$.** Observe that if $\mathbf{Q}^{[d+1]}=\mathbf{Q}^{[d]}\times\mathbf{Q}^{[d]}$ then $\mathbf{RP}^{[d-1]}=\mathbf{RP}^{[d]}$. Indeed, if $(x,y,\dots,y)$ and $(y,\dots,y)\in\mathbf{Q}^{[d]}$, then $(x,y,\dots,y,y,\dots,y)\in\mathbf{Q}^{[d+1]}$. Moreover, the system is weakly-mixing and thus $\mathbf{RP}^{[d]}=X\times X$ for any $d\geq 1$, as shows the following proposition.

Proposition 3.7. *Let (X,T) be a minimal system. If $\mathbf{Q}^{[d+1]}=\mathbf{Q}^{[d]}\times\mathbf{Q}^{[d]}$ for some $d\in\mathbb{N}$ then X is weakly-mixing and hence $\mathbf{Q}^{[d]}=X^{[d]}$ for any $d\in\mathbb{N}$.*

Proof. Let $x,y,a\in X$. By minimality $(x,y,x,y,\dots,x,y)\in\mathbf{Q}^{[d]}$ and by hypothesis the point $\mathbf{x}=(x,y,x,y,\dots,x,y,a,\dots,a)\in\mathbf{Q}^{[d+1]}$. If $d=1$, $(x,y,a,a)\in\mathbf{Q}^{[2]}$ and then $(x,y)\in\mathbf{RP}^{[1]}$. For any integer $d>1$, applying Euclidean permutations, we get that $\mathbf{y}=(x,y,\dots,x,y,a,\dots,a,x,y\dots,x,y,a,\dots,a)\in\mathbf{Q}^{[d+1]}$ too. Considering the first half of $\mathbf{y}$ and iterating the process we finish in the case $d=1$. We conclude $\mathbf{RP}^{[1]}=X\times X$ and the result follows. □

Now, if $\mathbf{RP}^{[d-1]}=\mathbf{RP}^{[d]}$ for some d the following theorem states that all regionally proximal relations of higher order coincide and thus $\mathbf{RP}^{[\infty]}=\mathbf{RP}^{[d-1]}$. This result is natural but its proof is somewhat involved, so we leave it for the appendix. For the definition of Z_d see Section 7.

Theorem 3.8.
(1) *Let (X,T) be a minimal system. If $\mathbf{RP}^{[d]}=\mathbf{RP}^{[d+1]}$ for some $d\in\mathbb{N}$, then $\mathbf{RP}^{[n]}=\mathbf{RP}^{[d]}$ for all $n\geq d$.*
(2) *Let $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ be an ergodic measure preserving system. If $Z_d=Z_{d+1}$ for some $d\in\mathbb{N}$, then $Z_n=Z_d$ for each $n\geq d$.*

(3) *Let (X,T) be a minimal system and μ be an ergodic Borel probability measure on X. If Z_n is isomorphic (with respect to the corresponding invariant measure) to $X_n = X/\mathbf{RP}^{[n]}$ for some $n \in \mathbb{N}$, then Z_k is isomorphic to $X_k = X/\mathbf{RP}^{[k]}$ for all $k \le n$.*

4. The structure of minimal systems without nontrivial Ind_{fip}-pairs

In this section we discuss the structure of minimal systems without nontrivial Ind_{fip}-pairs. We will show that such systems are almost one-to-one extensions of their maximal ∞-step nilfactors.

4.1. **A criterion to be an Ind_{fip}-pair.** First we characterize Ind_{fip}-pairs using dynamical parallelepipeds.

Let (X,T) be a transitive system. It is easy to check that $\mathbf{x} = (x_\epsilon : \epsilon \subset [d]) \in \mathbf{Q}^{[d]}$ if and only if for any neighborhood U_ϵ of x_ϵ respectively, there exist positive integers $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d$ such that $\bigcap_{\epsilon\subset[d]} T^{-\mathbf{n}\cdot\epsilon} U_\epsilon \neq \emptyset$. Moreover, the point in $\bigcap_{\epsilon\subset[d]} T^{-\mathbf{n}\cdot\epsilon} U_\epsilon$ can be chosen to be in the orbit of a transitive point.

Lemma 4.1. *Let (X,T) be a transitive t.d.s. and $(x_1,x_2) \in X \times X$ with $x_1 \neq x_2$. Then, $\{x_1,x_2\}^{[d]} \subset \mathbf{Q}^{[d]}$ for all integer $d \ge 1$ if and only if (x_1,x_2) is an Ind_{fip}-pair.*

Proof. Let $(x_1,x_2) \in X \times X$ with $x_1 \neq x_2$. First, we assume $\{x_1,x_2\}^{[d]} \subset \mathbf{Q}^{[d]}$ for all integer $d \ge 1$.

Let U_1, U_2 be neighborhoods of x_1 and x_2 respectively and fix $d \in \mathbb{N}$. We show there exist positive integers $\{p_1, p_2, \dots, p_d\}$ such that

$$F = FS(\{p_i\}_{i=1}^d) = \{p_{i_1} + \cdots + p_{i_k} : 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le d\}$$

belongs to $\mathrm{Ind}(U_1,U_2)$.

Since $\{x_1,x_2\}^{[d]}$ has 2^{2^d} elements we write it $\{\mathbf{x}_\eta : \eta \subset [2^d]\}$. Now, for any $\epsilon \subset [d]$ and $\eta \subset [2^d]$, let $x_{\epsilon\eta} = (\mathbf{x}_\eta)_\epsilon$ and construct the point $\mathbf{x} = (x_{\epsilon\eta} : \epsilon \subset [d], \eta \subset [2^d]) \in \{x_1,x_2\}^{[2^d+d]}$. Clearly, if we choose an identification of coordinates, we can write $\mathbf{x} = (x_\rho : \rho \subset [2^d+d])$. For any $\rho \subset [2^d+d]$, let $U_\rho = U_i$ if $x_\rho = x_i$, $i = 1,2$. Then the product set $\bigotimes_{\rho\subset[2^d+d]} U_\rho$ is a neighborhood of $\mathbf{x}$. Since, by hypothesis, $\mathbf{x} \in \mathbf{Q}^{[2^d+d]}$, then there exist $x \in X$, $p_0 \in \mathbb{N}$ and $\mathbf{p} = \{p_1, \dots, p_{2^d+d}\} \subset \mathbb{N}$ such that for any $\rho \subset [2^d+d]$, $T^{p_0+\mathbf{p}\cdot\rho} x \in U_\rho$.

We show that the finite IP set F generated by $\{p_1, p_2, \dots, p_d\}$ belongs to $\mathrm{Ind}(U_1,U_2)$. For any $s \in \{1,2\}^{2^d} = \{1,2\}^{[d]}$, since $\{x_{s(\epsilon)} : \epsilon \subset [d]\} \in \{x_1,x_2\}^{[d]}$, there exists $\eta \subset [2^d]$ such that $\mathbf{x}_\eta = \{x_{s(\epsilon)} : \epsilon \subset [d]\}$, i.e. for any $\epsilon \subset [d]$, $x_{\epsilon\eta} = x_{s(\epsilon)}$. Let $y = T^{p_0+\sum_{i\in\eta} p_{i+d}} x$. Then, for any $\epsilon \subset [d]$, $T^{\sum_{i\in\epsilon} p_i} y = T^{p_0+\mathbf{p}\cdot(\epsilon\eta)} x \in U_{\epsilon\eta} = U_{s(\epsilon)}$. So

$$\bigcap_{\epsilon\subset[d]} T^{-\sum_{i\in\epsilon} p_i} U_{s(\epsilon)} \neq \emptyset,$$

and F belongs to $\mathrm{Ind}(U_1,U_2)$.

Now assume that (x_1, x_2) is an Ind_{fip}-pair. That is, for any neighborhood $U_1 \times U_2$ of (x_1, x_2), any $d \in \mathbb{N}$ and any $s \in \{1,2\}^{[d]}$, there are positive integers $p_1, \dots, p_d$ such that $\bigcap_{\epsilon \subset [d]} T^{-\sum_{i\in\epsilon} p_i} U_{s(\epsilon)} \neq \emptyset$. Let $x \in \bigcap_{\epsilon \subset [d]} T^{-\sum_{i\in\epsilon} p_i} U_{s(\epsilon)}$. Then $T^{\sum_{i\in\epsilon} p_i} x \in U_{s(\epsilon)}$ for any $\epsilon \subset [d]$. This implies that $\{x_1, x_2\}^{[d]} \subset \mathbf{Q}^{[d]}$. □

The following lemma is a useful application of the previous lemma.

Lemma 4.2. *Let (X, T) be a transitive system, $x_1 \in X$ be a transitive point and $d \geq 1$ be an integer. Suppose that $(x_2, x_1, \dots, x_1) \in \mathbf{Q}^{[d]}$ for some $x_2 \in X$ and that $\pi_1 : A \to X$ is semi-open, where $A = \overline{orb((x_1, x_2), T \times T)}$ and π_1 is the projection to the first coordinate. Then $\{x_1, x_2\}^{[d]} \subset \mathbf{Q}^{[d]}$.*

Proof. If X is finite, then the lemma holds. Thus we assume that X is infinite. We first prove the following claim.

Claim: *If $\mathbf{x} = (x_1, \mathbf{a}_*) \in \{x_1, x_2\}^{[d]} \cap \mathbf{Q}^{[d]}$, then $(x_2, \mathbf{a}_*) \in \mathbf{Q}^{[d]}$.*

Let U_1 and U_2 be neighborhoods of x_1 and x_2 respectively. Since π_1 is semi-open and X is infinite, then $V_1 = int(\pi_1(U_1 \times U_2 \cap A)) \neq \emptyset$ and infinite. Set $V_2 = U_2$.

Let $s = (s(\epsilon) : \epsilon \subset [d]) \in \{1,2\}^{[d]}$ such that $\mathbf{x} = (x_{s(\epsilon)} : \epsilon \subset [d])$. From the hypothesis, $\mathbf{x} = (x_1, \mathbf{a}_*) \in \{x_1, x_2\}^{[d]} \cap \mathbf{Q}^{[d]}$, then there exist positive integers $n_0, n_1, \dots, n_d$ such that $T^{n_0 + \mathbf{n}\cdot\epsilon} x_1 \in V_{s(\epsilon)}$ for each $\epsilon \subset [d]$, i.e. $\bigcap_{\epsilon\subset[d]} T^{-\mathbf{n}\cdot\epsilon} V_{s(\epsilon)} \neq \emptyset$, where $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$.

Let $W_1 = \bigcap_{\epsilon\subset[d]} T^{-\mathbf{n}\cdot\epsilon} V_{s(\epsilon)} \subset V_1$ and $W_2 = V_2 = U_2$. Since $W_1 \times W_2 \cap A \neq \emptyset$, there exists a positive integer M such that $(T \times T)^M (x_1, x_2) \in W_1 \times W_2$. And, since $(x_2, x_1, \dots, x_1) \in \mathbf{Q}^{[d]}$, there exist positive integers $m_0, m_1, \dots, m_d$ such that $T^{m_0} x_1 \in T^{-M} W_2 = T^{-M} U_2$, and $T^{m_0 + \mathbf{m}\cdot\eta} x_1 \in T^{-M} W_1$ for all $\eta \subset [d] \setminus \{\emptyset\}$, where $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_d)$. It follows that $T^{-m_0-M} U_2 \cap \bigcap_{\eta\subset[d]\setminus\{\emptyset\}} T^{-m_0-M-\mathbf{m}\cdot\eta} W_1 \neq \emptyset$. That is,

$$U_2 \cap \bigcap_{\eta\subset[d]\setminus\{\emptyset\}} T^{-\mathbf{m}\cdot\eta} \bigcap_{\epsilon\subset[d]} T^{-\mathbf{n}\cdot\epsilon} V_{s(\epsilon)} \neq \emptyset.$$

Thus,

$$U_2 \cap \bigcap_{\eta\subset[d]\setminus\{\emptyset\}} T^{-\mathbf{m}\cdot\eta} \bigcap_{\epsilon\subset[d]} T^{-\mathbf{n}\cdot\epsilon} U_{s(\epsilon)} \neq \emptyset.$$

Set $p_i = n_i + m_i$ for $1 \leq i \leq d$, and $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_d)$. Then we have

$$U_2 \cap \bigcap_{\eta\subset[d]\setminus\{\emptyset\}} T^{-\mathbf{p}\cdot\eta} U_{s(\eta)} \neq \emptyset,$$

and so we get that $(x_2, \mathbf{a}_*) \in \mathbf{Q}^{[d]}$. The proof of the claim is completed.

For any $\mathbf{x} \in \{x_1, x_2\}^{[d]}$, let $l(\mathbf{x})$ be the number of x_2's appearing in $\mathbf{x}$. We prove this lemma by induction on $l(\mathbf{x})$.

If $l(\mathbf{x}) = 0$, then obviously $\mathbf{x} = x_1^{[d]} \in \mathbf{Q}^{[d]}$. Suppose the lemma holds when $l(\mathbf{x}) \le k$, i.e. $\mathbf{x} \in \mathbf{Q}^{[d]}$ if $l(\mathbf{x}) \le k$. Now, for $l(\mathbf{x}) = k+1$ without loss of generality we write $\mathbf{x} = (x_2, \mathbf{a}_*)$. Since $l((x_1, \mathbf{a}_*)) = k$, we have by hypothesis that $(x_1, \mathbf{a}_*) \in \mathbf{Q}^{[d]}$. Thus from the claim we get that $\mathbf{x} = (x_2, \mathbf{a}_*) \in \mathbf{Q}^{[d]}$. The proof of this lemma is completed. $\square$

The following corollary extends Corollaries 4.2. and 4.3. from [16], and the comment right after, that were only proved in the distal case.

Corollary 4.3. *Let (X,T) be a minimal t.d.s., $x_1, x_2 \in X$ and $d \ge 1$ an integer. If $(x_1,x_2) \in \mathbf{RP}^{[d]}$ and (x_1,x_2) is a $T \times T$-minimal point, then $\{x_1,x_2\}^{[d+1]} \subset \mathbf{Q}^{[d+1]}$.*

Proof. Let $A = \overline{orb((x_1,x_2), T \times T)}$. Since $(A, T \times T)$ and (X,T) are minimal, the projection $\pi_1 : A \to X$ is semi-open. By Theorem 3.2, $(x_2, x_1, \ldots, x_1) \in \mathbf{Q}^{[d+1]}$, so $\{x_1,x_2\}^{[d+1]} \subset \mathbf{Q}^{[d+1]}$ by Lemma 4.2. $\square$

By the above discussion, we get the following criterion to be a Ind_{fip}-pair.

Corollary 4.4. *Let (X,T) be a minimal system and $(x_1,x_2) \in \mathbf{RP}^{[\infty]} \setminus \Delta_X = \bigcap_{d\ge1} \mathbf{RP}^{[d]} \setminus \Delta_X$. If (x_1,x_2) is $T \times T$-minimal or the projection*

$$\pi_1 : \overline{orb((x_1,x_2), T \times T)} \to X$$

is semi-open, then (x_1,x_2) is an Ind_{fip}-pair.

Proof. If (x_1,x_2) is $T\times T$-minimal, by Corollary 4.3, we have $\{x_1,x_2\}^{[d]} \subset \mathbf{Q}^{[d]}$ for every integer $d \ge 1$. Now, if the projection $\pi_1 : \overline{orb((x_1,x_2), T \times T)} \to X$ is semi-open, then, since $(x_1,x_2) \in \mathbf{RP}^{[\infty]}$, we have $(x_2, x_1, \ldots, x_1) \in \mathbf{Q}^{[d]}$ for every $d \ge 1$. Hence, by Lemma 4.2, we also have $\{x_1,x_2\}^{[d]} \subset \mathbf{Q}^{[d]}$ for every integer $d \ge 1$.

By Lemma 4.1, the proof is completed. $\square$

4.2. **The structure of minimal systems without nontrivial Ind_{fip}-pairs.** The following is the main result of this section.

Theorem 4.5. *Let (X,T) be a minimal system. If X does not contain any non-trivial Ind_{fip}-pair, then it is an almost one-to-one extension of its maximal ∞-step nilfactor.*

To prove this theorem we need some preparation. Every extension of minimal systems can be lifted to an open extension by almost one-to-one modifications. To be precise, for every extension $\pi : (X,T) \to (Y,T)$ between minimal systems there exists a canonically defined commutative diagram of extensions (called the *shadow diagram*)

$$\begin{array}{ccc} X^* & \xrightarrow{\sigma} & X \\ {\scriptstyle \pi^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ Y^* & \xrightarrow{\tau} & Y \end{array}$$

with the following properties:

(1) σ and τ are almost one-to-one extensions;
(2) π^* is an open extension, i.e. for any open set $U \subset X^*$, $\pi^*(U)$ is an open set of Y^*;
(3) X^* is the unique minimal set in $R_{\pi\tau} = \{(x, y) \in X \times Y^* : \pi(x) = \tau(y)\}$ and σ and π^* are the restrictions to X^* of the projections of $X \times Y^*$ onto X and Y^* respectively.

We refer to [1, 8, 30, 31] for the details of this construction.

In [8] it was shown that, a metric minimal system (X, T) with the property that n-proximal tuples are dense in X^n for every $n \geq 2$, is weakly mixing. This was extended by van der Woude [33] as follows (see also [9]).

Theorem 4.6. *Let $\pi : (X, T) \to (Y, T)$ be a factor map between the metric minimal systems (X, T) and (Y, T). Suppose that π is an open proximal extension, then π is a weakly mixing extension, i.e. $(R_\pi, T \times T)$ is transitive.*

Now we give the proof of Theorem 4.5.

Proof of Theorem 4.5. Let (X, T) be a minimal system without Ind_{fip}-pairs. We denote by (Y, T) the quotient system of (X, T) determined by the equivalence relation $\mathbf{RP}^{[\infty]}(X, T)$ and let $\pi : (X, T) \to (Y, T)$ be the canonical projection map.

We first prove that π is a proximal extension. Remark that if $(x, y) \in R_\pi = \mathbf{RP}^{[\infty]}$ is a $T \times T$ minimal point, according to Corollary 4.4, we have (x, y) is an Ind_{fip}-pair and thus we must have $x = y$. Now consider any $(x, y) \in R_\pi$ and $u \in E(X, T)$ a minimal idempotent. Since (ux, uy) is a $T \times T$ minimal point, we have from previous observation that $ux = uy$, which implies (x, y) is a proximal pair.

As the shadow diagram shows, there exists a canonically defined commutative diagram of extensions

$$\begin{array}{ccc} X^* & \xrightarrow{\sigma} & X \\ {\scriptstyle \pi^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ Y^* & \xrightarrow{\tau} & Y \end{array}$$

verifying properties (1)-(3) above.

Since π is proximal and σ is almost one-to-one, we have $\pi \circ \sigma$ is proximal. For any $(x, x') \in R_{\pi^*}$, $\pi \circ \sigma(x) = \pi \circ \sigma(x')$, so (x, x') is a proximal pair, which implies π^* is proximal too. By Theorem 4.6, π^* is a weakly mixing extension, and hence there exists $(x_1, x_2) \in R_{\pi^*}$ such that $R_{\pi^*} = \overline{orb((x_1, x_2), T \times T)}$. Let π_1 be the projection of R_{π^*} to the first coordinate. It is easy to get that for any open sets $U, V \subset X^*$, $\pi^*(U \times V) = \pi^*(U) \cap \pi^*(V)$ is an open set. So we get that π_1 is an open map too. Since (x_1, x_2) is a proximal pair, we have (x_1, x_2) is an Ind_{fip}-pair by Corollary 4.4. Hence $(\sigma(x_1), \sigma(x_2))$ is an Ind_{fip}-pair too. Then we must have $\sigma(x_1) = \sigma(x_2)$, and thus $R_{\pi^*} \subset R_\sigma$.

Since τ is almost one-to-one, we can choose $y \in Y$ such that $\tau^{-1}(y)$ contains only one point. Suppose $x_1, x_2 \in \pi^{-1}(y)$, then there exist $x_1^*, x_2^* \in X^*$ such that $\sigma(x_1^*) = x_1$ and $\sigma(x_2^*) = x_2$. As $\tau \circ \pi^*(x_1^*) = \pi \circ \sigma(x_1^*) = y = \pi \circ \sigma(x_2^*) = \tau \circ \pi^*(x_2^*)$, we have $\pi^*(x_1^*), \pi^*(x_2^*) \in \tau^{-1}(y)$ and so $\pi^*(x_1^*) = \pi^*(x_2^*)$, i.e. $(x_1^*, x_2^*) \in R_{\pi^*} \subset R_\sigma$. Hence $x_1 = x_2$, which implies that $\pi^{-1}(y)$ contains only one point too. We conclude π is almost one-to-one. □

Proposition 4.7. *Let (X,T) be a minimal distal system. Then there are no non-trivial* Ind_{fip}*-pairs if and only if (X,T) is an ∞-step nilsystem.*

Proof. It is a direct consequence of Theorem 4.5. □

4.3. **The assumption of semi-openness in Lemma 4.2 cannot be removed.** In this subsection we give an example to show that the condition of semi-openness in Lemma 4.2 cannot be removed. First we recall some notions.

Let (X,T) be t.d.s. For any open cover $\mathcal{U}$, let $N(\mathcal{U})$ denote the smallest possible cardinality among finite subcovers of $\mathcal{U}$. Given an increasing sequence $\mathcal{A} = \{t_1, t_2, \ldots\}$ in $\mathbb{Z}_+$, the sequence entropy of (X,T) or just T with respect to $\mathcal{A}$ and the cover $\mathcal{U}$ is

$$h_{\mathcal{A}}(T,\mathcal{U}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N\left(\bigvee_{i=1}^{n} T^{-t_i}\mathcal{U}\right)$$

and the sequence entropy of T with respect to $\mathcal{A}$ is $h_{\mathcal{A}}(T) = \sup_{\mathcal{U}} h_{\mathcal{A}}(T,\mathcal{U})$, where the supremum is taken over all finite open covers $\mathcal{U}$ of X. The system (X,T) is a *null system* if for any sequence $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}_+$, $h_{\mathcal{A}}(T) = 0$.

Similar to Ind_{fip}-pair we can define IN-pairs. Let (X,T) be t.d.s. and $(x_1,x_2) \in X \times X$. Then, (x_1,x_2) is a *IN-pair* if for any neighborhoods U_1, U_2 of x_1, x_2 respectively, $Ind(U_1,U_2)$ contains arbitrary long finite independence sets. In [24] is shown that (X,T) is a null system if and only if it contains no nontrivial IN-pairs. It is obvious that a null system contains no nontrivial Ind_{fip}-pairs as Ind_{fip}-pairs are IN-pairs.

The following example is classical.

Example 4.8. *Sturmian system.*

Let α be an irrational number in the interval $(0,1)$ and R_α be the irrational rotation on the (complex) unit circle $\mathbb{T}$ generated by $e^{2\pi i\alpha}$. Set

$$A_0 = \left\{e^{2\pi i\theta} : 0 \le \theta < (1-\alpha)\right\} \text{ and } A_1 = \left\{e^{2\pi i\theta} : (1-\alpha) \le \theta < 1\right\}$$

Consider $z \in \mathbb{T}$ and define $x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ by: for all $n \in \mathbb{Z}$, $x_n = i$ if and only if $R_\alpha^n(z) \in A_i$. Let $X \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ be the orbit closure of x under the shift map σ on $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, i.e. for any $y \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, $(\sigma(y))_n = y_{n+1}$. This system is called Sturmian system. It is well known that (X,σ) is a minimal almost one-to-one extension of $(\mathbb{T}, R_\alpha)$. Moreover, it is an asymptotic extension. Also, it is not hard to prove that it is a null system.

Let $\pi : X \to \mathbb{T}$ be the former extension and consider $(x_1, x_2) \in R_\pi \setminus \Delta_X$. Then (x_1, x_2) is an asymptotic pair and thus $(x_1, x_2) \in \mathbf{RP}^{[d]}$ for any integer $d \geq 1$. In particular, $(x_2, x_1, \dots, x_1) \in \mathbf{Q}^{[d+1]}$ for any integer $d \geq 1$. Now, if $\{x_1, x_2\}^{[d+1]} \subset \mathbf{Q}^{[d+1]}$ for any integer $d \geq 1$, then, by Lemma 4.1, (x_1, x_2) is a nontrivial Ind_{fip}-pair, and so an IN-pair, which contradicts the fact that (X, T) is a null system. Therefore, there exists an integer $d \geq 1$ such that $\{x_1, x_2\}^{[d]} \not\subseteq \mathbf{Q}^{[d]}$, which implies the condition $\pi_1 : \overline{orb((x, y), T \times T)} \to X$ is semi-open in Lemma 4.2 cannot be removed.

5. Minimal distal systems which are not ∞-step nilsystems

In the previous section we showed that a minimal distal system is an ∞-step nilsystem if and only if it has no nontrivial Ind_{fip}-pairs. In this section we will give examples of minimal distal systems which are not ∞-step nilsystems. We remark that if (X, T) is minimal distal and $\pi : (X, T) \longrightarrow (X_{eq}, T)$ is the maximal equicontinuous factor of (X, T), then each pair in $R_\pi \setminus \Delta_X$ is an untame pair (see [20, 17, 27]). In fact, the result in previous section tells that if $\pi_\infty : (X, T) \longrightarrow (Z_\infty, T)$ is the factor map from X to its maximal ∞-step nilfactor, then each pair in $R_{\pi_\infty} \setminus \Delta_X$ is an Ind_{fip}-pair. We do not know how to glue both results together.

5.1. **The existence.** To show the existence of minimal distal systems which are not ∞-step nilsystems we use some abstract results from [26]. We use freely notations therein.

Proposition 5.1. [26, Theorem 4.4] *Every ergodic measurable distal system $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ can be represented as a minimal topologically distal system equipped with a Borel measure of full support.*

Lemma 5.2. [26, Claim 5.5] *Suppose $(Y, \mathcal{D}, \nu, T)$ is an isometric extension of the ergodic rotation $(\mathbb{T}, \mathcal{B}, \lambda, R_\alpha)$ by a finite group that is not a Kronecker system. Then $(Y, \mathcal{D}, \nu, T)$ does not have a uniquely ergodic distal model.*

The following result produces as much examples as we want.

Theorem 5.3. *Suppose $(Y, \mathcal{D}, \nu, T)$ is an isometric extension of the ergodic rotation $(\mathbb{T}, \mathcal{B}, \lambda, R_\alpha)$ by a finite group, that is not a Kronecker system. Then any minimal distal topological model of $(Y, \mathcal{D}, \nu, T)$ is not an ∞-step nilsystem.*

Proof. By Proposition 5.1, $(Y, \mathcal{D}, \nu, T)$ has a minimal topologically distal system (X, T) model equipped with a Borel measure of full support. By Lemma 5.2, (X, T) cannot be uniquely ergodic. It is clear that a minimal ∞-step nilsystem is uniquely ergodic, so (X, T) is not an ∞-step nilsystem. □

5.2. **An explicit example.** A way to produce an explicit example is to use the following Furstenberg result. It appeared first in [6]. We recall that a topological dynamical system is *strictly ergodic* if it is minimal and uniquely ergodic.

Theorem 5.4. [6, Theorem 3.1] *Let (Ω_0, T_0) be a strictly ergodic system and μ_0 its unique ergodic measure. Let $\Omega = \Omega_0 \times \mathbb{T}$ and let $T : \Omega \to \Omega$ be defined by $T(\omega_0, s) = (T_0(\omega_0), g(\omega_0)s)$, where $g : \Omega_0 \to \mathbb{T}$ is a continuous function. Then, if the equation*

$$g^k(\omega_0) = R(T_0(\omega_0))/R(\omega_0) \tag{5.1}$$

has a solution $R : \Omega_0 \to \mathbb{T}$ which is measurable but not equal almost everywhere to a continuous function, then $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n(\omega)$ cannot exist for all continuous functions f and all $\omega \in \Omega$.

Now we recall some elements of the example from [6] satisfying the criterion of the previous theorem. The first step (that we omit here) is the construction of a sequence of integers $(n_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ and an irrational number α such that

$$h(\theta) = \sum_{k\neq 0} \frac{1}{|k|}(e^{2\pi i n_k \alpha} - 1)e^{2\pi i n_k \theta}$$

and $g(e^{2\pi i\theta}) = e^{2\pi i\lambda h(\theta)}$, where λ is as yet undetermined, are C^∞ functions of $[0, 1)$ and $\mathbb{T}$ respectively. Clearly, $h(\theta) = H(\theta + \alpha) - H(\theta)$, where

$$H(\theta) = \sum_{k\neq 0} \frac{1}{|k|} e^{2\pi i n_k \theta} .$$

Thus $H(\cdot)$ is in $L^2(0, 1)$ and in particular defines a measurable function. However, $H(\cdot)$ cannot correspond to a continuous function since $\sum_{k\neq 0} \frac{1}{|k|} = \infty$ and hence the series is not Cesàro summable at $\theta = 0$ ([34]). Therefore, for some λ, $e^{2\pi i\lambda H(\theta)}$ cannot be a continuous function either. Considering $R(e^{2\pi i\theta}) = e^{2\pi i\lambda H(\theta)}$ we get

$$R(e^{2\pi i\alpha}s)/R(s) = g(s)$$

with $R : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ measurable but not continuous.

By Theorem 5.4, the transformation T of $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ given by

$$T(s_1, s_2) = (e^{2\pi i\alpha}s_1, g(s_1)s_2)$$

will not possess all its ergodic averages, i.e. there are a continuous function f and $\omega \in \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ such that $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n(\omega)$ does not exist.

Let $\Omega = \overline{orb(\omega, T)} \subset \mathbb{T} \times \mathbb{T}$. It is easy to get that $(\mathbb{T} \times \mathbb{T}, T)$ is distal, and so (Ω, T) is minimal distal. If (Ω, T) is an ∞-step nilsystem, then it is an inverse limit of minimal nilsystems, and of course (Ω, T) is strictly ergodic. Let $h = f|_\Omega$ and h apparently continuous on Ω, so $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} g \circ T^n(\omega)$ exists, contradicting the choice of f and ω. Therefore (Ω, T) is minimal distal but not an ∞-step nilsystem.

6. Discussion about the unique ergodicity

In this section we aim to investigate the question whether a minimal system without Ind_{fip}-pairs is uniquely ergodic. First we observe that when (X,T) is minimal, then $(X_\infty = X/\mathbf{RP}^{[\infty]}, T)$ is uniquely ergodic since it is an inverse limit of uniquely ergodic systems.

Assume that (X,T) is a minimal system and let μ be an ergodic measure for (X,T). Then $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ is an ergodic measure preserving system, where $\mathcal{B}$ is the σ-algebra of Borel sets of X (we omit $\mathcal{B}$ in the sequel). In [15], to prove the convergence in $L^2(X,\mathcal{B},\mu)$ of some non-conventional ergodic averages, the authors introduced measures $\mu^{[d]} \in \mathcal{M}(X^{[d]}, T^{[d]})$ for any integer $d \geq 1$ and used them to produce the maximal measure theoretical factor of order d of (X,μ,T) (in the measurable context this means that the system is an inverse limit, with measurable factor maps, of d-step nilsystems), denoted by $(Z_d, \mathcal{Z}_d, \mu_d, T)$.

In the topological setting, $(X_d = X/\mathbf{RP}^{[d]}, T)$ is the maximal factor of order d of (X,T) and is uniquely ergodic. In [16] it was observed that (X_d, T) is also a system of order d in the measurable sense for its unique invariant measure. This implies that X_d is a factor of Z_d in the measurable sense.

Let $\mu = \int_{Z_d} \mu_z d\mu_d(z)$ be the disintegration of μ over μ_d. Pairs in the support of the measure

$$\lambda_d = \int_{Z_d} \mu_z \times \mu_z d\mu_d(z)$$

are called $\mathcal{F}^\mu_d$-pairs, where $\mathcal{F}^\mu_d = supp(\lambda_d)$. To study $\mathcal{F}^\mu_d$ we will need the following lemma from [15].

Lemma 6.1. [15, Propostion 4.7., Theorem 13.1.] *Let $d \geq 1$ be an integer and $V_d = \{0,1\}^{[d]}$.*

(1) *For f_ϵ, $\epsilon \in V_d$, bounded measurable functions on X,*

$$\int_{X^{[d]}} \bigotimes_{\epsilon\in V_d} f_\epsilon d\mu^{[d]} = \int_{Z^{[d]}_{d-1}} \bigotimes_{\epsilon\in V_d} \mathbb{E}(f_\epsilon|\mathcal{Z}_{d-1}) d\mu^{[d]}_{d-1},$$

where $(Z^{[d]}_{d-1}, \mu^{[d]}_{d-1})$ is the joining of 2^d copies of (Z_{d-1}, μ_{d-1}).

(2) *For f_ϵ, $\epsilon \in V_d$, bounded measurable functions on X, the average*

$$\prod_{i=1}^d \frac{1}{N_i - M_i} \sum_{\mathbf{n}\in[M_1,N_1)\times\cdots\times[M_d,N_d)} \int_X \prod_{\epsilon\in V_d} f_\epsilon \circ T^{\mathbf{n}\cdot\epsilon} d\mu$$

converges to

$$\int_{X^{[d]}} \prod_{\epsilon\in V_d} f_\epsilon(x_\epsilon) d\mu^{[d]}(\mathbf{x})$$

as $N_i - M_i \to \infty$ for all $1 \leq i \leq d$.

We get the following theorem about $\mathcal{F}_d^\mu$.

Theorem 6.2. *Let (X,T) be a minimal system and μ an ergodic measure on X.*

(1) *Let $d \geq 1$ be an integer, then $\mathcal{F}_d^\mu \subset \mathbf{RP}^{[d]}$.*
(2) $\bigcap_{d\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_d^\mu \subset \mathrm{Ind}_{fip}(X,T)$.

Proof. Let $(x_0,x_1) \in \mathcal{F}_d^\mu$. Then for any neighborhood $U_0 \times U_1$ of (x_0,x_1)

$$\lambda_d(U_0\times U_1) = \int_{Z_d} \mathbb{E}(1_{U_0}|\mathcal{Z}_d)\mathbb{E}(1_{U_1}|\mathcal{Z}_d)d\mu_d > 0.$$

Let $\{U_\epsilon : \epsilon \in V_{d+1}\} \subset \{U_0, U_1\}$ be open sets. We claim that

$$\int_{X^{[d+1]}} \prod_{\epsilon\in V_{d+1}} 1_{U_\epsilon}(x_\epsilon)d\mu^{[d+1]}(\mathbf{x}) > 0.$$

Proof of the claim: Since $\int_{Z_d} \mathbb{E}(1_{U_0}|\mathcal{Z}_d)\mathbb{E}(1_{U_1}|\mathcal{Z}_d)d\mu_d > 0$, there exists $B \in \mathcal{Z}_d$ with $\mu_d(B) > 0$ such that for any $z \in B$, $\mathbb{E}(1_{U_0}|\mathcal{Z}_d)(z)\mathbb{E}(1_{U_1}|\mathcal{Z}_d)(z) > 0$. Also, since $U_\epsilon = U_0$ or $U_\epsilon = U_1$ for $\epsilon \in V_{d+1}$, we have for any $\mathbf{z} \in B^{[d+1]}$ that $\prod_{\epsilon\in V_{d+1}} \mathbb{E}(1_{U_\epsilon}|\mathcal{Z}_d)(z_\epsilon) > 0$. Now, by the previous lemma, we obtain

$$\begin{aligned}\int_{X^{[d+1]}} \prod_{\epsilon\in V_{d+1}} 1_{U_\epsilon}(x_\epsilon)d\mu^{[d+1]}(\mathbf{x}) &= \int_{Z_d^{[d+1]}} \prod_{\epsilon\in V_{d+1}} \mathbb{E}(1_{U_\epsilon}|\mathcal{Z}_d)(z_\epsilon)d\mu_d^{[d+1]}(\mathbf{z}) \\ &\geq \int_{B^{[d+1]}} \prod_{\epsilon\in V_{d+1}} \mathbb{E}(1_{U_\epsilon}|\mathcal{Z}_d)(z_\epsilon)d\mu_d^{[d+1]}(\mathbf{z}) > 0.\end{aligned}$$

This completes the proof of the claim since it was shown in [15] that $\mu_d^{[d+1]}(B^{[d+1]}) \geq \mu_d(B)^{2^{d+1}} > 0$.

Again, by Lemma 6.1,

$$\frac{1}{N^{d+1}} \sum_{0\leq n_1,\ldots,n_{d+1}<N} \int_X \prod_{\epsilon\in V_{d+1}} 1_{U_\epsilon}\circ T^{n_1\epsilon_1+\ldots+n_{d+1}\epsilon_{d+1}}d\mu$$

converges to

$$\int_{X^{[d+1]}} \prod_{\epsilon\in V_{d+1}} 1_{U_\epsilon}(x_\epsilon)d\mu^{[d+1]}(\mathbf{x}) > 0$$

as $N \to \infty$. Hence, there exists a Borel set B with $\mu(B) > 0$ and $n_1,\ldots,n_{d+1} \in \mathbb{Z}_+$ such that for each $x \in B$

$$\prod_{\epsilon\in V_{d+1}} 1_{U_\epsilon}\circ T^{n_1\epsilon_1+\ldots+n_{d+1}\epsilon_{d+1}}(x) > 0.$$

That is, for each $x \in B$, $T^{n_1\epsilon_1+\ldots+n_{d+1}\epsilon_{d+1}}(x) \in U_\epsilon$ or

$$\bigcap_{\epsilon\in V_{d+1}} T^{-n_1\epsilon_1-\ldots-n_{d+1}\epsilon_{d+1}}U_\epsilon \neq \emptyset.$$

First we prove statement (1). Let $(x_0, x_1) \in \mathcal{F}_d^\mu$. For $\delta > 0$ let $U_0 \times U_1$ be a neighborhood of (x_0, x_1) where the diameters of U_0 and U_1 are less than δ. Set $U_{(0,\dots,0)} = U_0$, $U_{(0,\dots,0,1)} = U_1$ and $U_\epsilon = U_0$ for any other $\epsilon \in V_{d+1}$. By previous discussion, there exist $x \in X$ and $n_1, \dots, n_{d+1} \in \mathbb{Z}_+$ such that $T^{n_1\epsilon_1+\dots+n_{d+1}\epsilon_{d+1}}(x) \in U_\epsilon$ for any $\epsilon \in V_{d+1}$. Let $y_0 = x = T^0 x \in U_{(0,\dots,0)} = U_0$, $y_1 = T^{n_{d+1}}x \in U_{(0,\dots,0,1)} = U_1$. Then, for any $\epsilon \in V_d \setminus \{(0,\dots,0)\}$, we have $T^{n_1\epsilon_1+\dots+n_d\epsilon_d}(y_0) \in U_{\epsilon 0} = U_0$ and $T^{n_1\epsilon_1+\dots+n_d\epsilon_d}(y_1) \in U_{\epsilon 1} = U_0$. Since the diameters of U_0 and U_1 are less than δ, we get that $d(x_0, y_0) < \delta$, $d(x_1, y_1) < \delta$ and for any $\epsilon \in V_d \setminus \{(0,\dots,0)\}$, $d(T^{n_1\epsilon_1+\dots+n_d\epsilon_d}(y_0), T^{n_1\epsilon_1+\dots+n_d\epsilon_d}(y_1)) < \delta$. Therefore $\mathcal{F}_d^\mu \subset \mathbf{RP}^{[d]}$.

To show (2), by Lemma 4.1, it remains to prove that if $(x_0, x_1) \in \bigcap_{d\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_d^\mu$ then $\{x_0, x_1\}^{[d]} \subset \mathbf{Q}^{[d]}$ for any integer $d \geq 1$. Let $d \geq 1$ be an integer and take $\mathbf{x} = (x_\epsilon)_{\epsilon\in V_d} \in \{x_0, x_1\}^{[d]}$. Given a neighborhood $\mathbf{V}$ of $\mathbf{x}$, there exists a neighborhood $U_0 \times U_1$ of (x_0, x_1) such that if we set $U_\epsilon = U_i$ depending on $x_\epsilon = x_0$ or $x_\epsilon = x_1$, then $\bigotimes_{\epsilon\in V_d} U_\epsilon \subset \mathbf{V}$. From the conclusion of part (1), there exist $x \in X$ and $n_1, \dots, n_d \in \mathbb{Z}_+$ such that $T^{n_1\epsilon_1+\dots+n_d\epsilon_d}(x) \in U_\epsilon$ for any $\epsilon \in V_d$. Let $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$. We have $(T^{\mathbf{n}\cdot\epsilon}x)_{\epsilon\in V_d} \in \mathbf{V}$, and thus $\mathbf{x} \in \mathbf{Q}^{[d]}$. The proof is completed. □

Remark 6.3. We have shown that $\mathcal{F}_d^\mu \subset \mathbf{RP}^{[d]}$. However, the converse is not true in general. For example, let (Z, S) be a non-trivial d-step nilsystem and ν an ergodic measure on Z. In [32] it was shown that there exists a weakly mixing minimal uniquely ergodic system (X, T) with the uniquely ergodic measure μ satisfying that for all $x, y \in X$ with $y \notin \{T^n x\}_{n\in\mathbb{Z}}$, the orbit $\{(T^n x, T^n y)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ is dense in $X \times X$; and (Z, ν, S) and (X, μ, T) are isomorphic. Then (X, μ) coincides with $(Z_d(X), \mu_d)$, and so $\mathcal{F}_\mu^d = \Delta_X$. Since (X, T) is weakly mixing, we get that $\mathbf{RP}^{[d]} = X \times X$, which implies that $\mathcal{F}_\mu^d \subsetneqq \mathbf{RP}^{[d]}$.

A direct application of the above theorem is the following.

Theorem 6.4. *Let (X, T) be a minimal system with $\mathrm{Ind}_{fip}(X, T) = \Delta_X$, then for each ergodic measure μ, (X, μ, T) is measure theoretical isomorphic to an ∞-step nilsystem.*

Proof. Applying Theorem 6.2 we get that $\bigcap_{d\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_d^\mu \subset \mathrm{Ind}_{fip}(X, T) = \Delta_X$. The result follows, since it is easy to check that $\bigcap_{d\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_d^\mu = \mathcal{F}_\infty^\mu$, where $\mathcal{F}_\infty^\mu$ is the support of $\lambda_\infty = \int_{\mathcal{Z}_\infty} \mu_z \times \mu_z d\mu_\infty(z)$ with (Z_∞, μ_∞) the inverse limit of (Z_d, μ_d). □

To show the unique ergodicity of an ∞-step nilsystem the following question is crucial.

Question 6.5. *Let (X, T) be an E-system (i.e. is transitive and admits an invariant measure with full support), let x be a transitive point and p be a fixed point of (X, T). Is it true that $(p, x, \dots, x) \in \mathbf{Q}^{[d]}$ for any integer $d \geq 1$?*

If this question has a positive answer, then by Lemma 4.2, we have $\{x, p\}^{[d]} \subset \mathbf{Q}^{[d]}$ for any integer $d \geq 1$ (since $\overline{orb((x, p), T \times T)} = X \times \{p\}$), and thus (x, p) is an Ind_{fip}-pair by Lemma 4.1.

Conjecture 6.6. *Let (X,T) be a minimal system with $\mathrm{Ind}_{fip}(X,T) = \Delta_X$. Then (X,T) is uniquely ergodic.*

If Question 6.5 has a positive answer, then using the proof of [20, Theorem 4.4] and the lifting property of Ind_{fip}-pairs [19], we may conclude that the conjecture holds.

7. Topological complexity of ∞-step nilsystems

The big development in the study of non-conventional ergodic averages during the last decade has put in evidence, among other facts, the crucial role of nilsystems when studying "polynomial" phenomena in dynamical systems theory. The objective of this section is to prove that ∞-step nilsystems have polynomial topological complexity. It is well known that bounded complexity characterize minimal rotations on compact Abelian groups (see [4]). Some basic symbolic examples (substitutions systems for example) show that polynomial complexity cannot characterize ∞-step nilsystems, so the characterizion of polynomial complexity seems to be a deep problem far to be solved.

In order to study the quantitative distribution of polynomial orbits in nilmanifolds, Green and Tao introduced in [13] a metric induced by the Mal'cev basis on a nilmanifold and they studied its behaviour under left multiplication. We obtain as an application a polynomial bound for the topological complexity of nilsystems and consequently of ∞-step nilsystems. We use freely the notations and results from [13] and [2].

7.1. Polynomial behaviour of orbits.

In this subsection we assume G is a connected and simply connected Lie Group and $\Gamma \subset G$ is a co-compact subgroup. We will denote by G_i the i-th subgroup of the associated lower central series. Under these assumptions Mal'cev proved the following theorem.

Theorem 7.1 (Mal'cev basis)**.** *Let G be an m-dimensional nilpotent Lie group and $\Gamma \subset G$ a co-compact subgroup. There exists a basis $\mathcal{X} = \{X_1, \ldots, X_m\}$ of the associated Lie algebra $\mathfrak{g}$ such that:*

1. *For each $j \in \{0, \ldots, m-1\}$ the subspace $\mathfrak{h}_j = Span(X_{j+1}, \ldots, X_m)$ is an ideal in $\mathfrak{g}$ and $exp(\mathfrak{h}_j)$ is a normal subgroup in G.*
2. *$G_i = exp(\mathfrak{h}_{m-m_i})$, where $m_i = dim(G_i)$.*
3. *Each $g \in G$ can be written uniquely as $exp(t_1X_1) \cdots exp(t_mX_m)$ where $t = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m$.*
4. *$\Gamma = \{\exp(n_1X_1) \cdots \exp(n_mX_m) : n = (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{Z}^m\}$.*

We say that $\mathcal{X} = \{X_1, \ldots, X_m\}$ is a Mal'cev basis for G/Γ adapted to the lower central series $(G_i)_{i \geq 0}$.

Let $g = \exp(t_1X_1) \cdots \exp(t_mX_m) \in G$ and denote $\psi(g) = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m$. Let $|\psi(g)| = \|\psi(g)\|_\infty$. Fix a Mal'cev basis $\mathcal{X}$. In [13], the authors introduced the following metric on G and G/Γ.

Definition 7.2. *Let $x, y \in G$ and define*

$$d(x,y) = \inf\left\{\sum_{i=0}^{n-1} min(|\psi(x_{i-1}x_i^{-1})|, |\psi(x_i x_{i-1}^{-1})|) \ : \ n \in \mathbb{N},\ x_0, \dots, x_n \in G,\ x_0 = x, x_n = y\right\}$$

which is right-invariant, i.e. $d(x,y) = d(xg, yg)$ for all $g \in G$ and $d(x,y) \leq |\psi(xy^{-1})|$.

This metric induces a metric on G/Γ that we also call $d(\cdot,\cdot)$ by setting:

$$\begin{aligned} d(x\Gamma, y\Gamma) &= \inf\{d(x', y') : x' \in x\Gamma, y' \in y\Gamma\} \\ &= \inf\{d(x\gamma_1, y\gamma_2) : \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma\} = \inf\{d(x, y\gamma) : \gamma \in \Gamma\} \end{aligned}$$

where the last equality follows from the right-invariance of the metric.

In the sequel we use some results obtained in [13] and we rephrase some others in a convenient way. The Mal'cev basis $\mathcal{X}$ is fixed.

Lemma 7.3 (Multiplication and inversion)**.** *Let $x, y \in G$, $t = \psi(x)$, $u = \psi(y)$. Then,*

(1) $\psi(xy) = (t_1+u_1, t_2+u_2+P_1(t_1,u_1), \dots, t_m+u_m+P_{m-1}(t_1,\dots,t_{m-1},u_1,\dots,u_{m-1}))$ *where for each $i \in \{1,\dots,m-1\}$, P_i is a real polynomial.*

(2) $\psi(x^{-1}) = (-t_1, -t_2 + Q_1(t_1), \dots, -t_m + Q_{m-1}(t_1,\dots,t_{m-1}))$ *where for each $i \in \{1,\dots,m\}$, Q_i is a real polynomial.*

We get easily that $\psi(xy^{-1}) = (R_1(t,u), R_2(t,u), \dots, R_m(t,u))$ where R_i is a real polynomial for each $i \in \{1,\dots,m\}$. In order to simplify notations in what follows we will write P to refer to any generic real polynomial with positive coefficients, not necessarily the same. This will be clear from the context.

Lemma 7.4 (Coordinates polynomial bound)**.** *Let $x, y \in G$. Then,*

$$d(x,y) \leq P(\max(|\psi(x)|, |\psi(y)|))\ |\psi(x) - \psi(y)|$$

Proof. Let $\psi(x) = t$ and $\psi(y) = u$. From the definition of the distance and Lemma 7.3 we have,

$$d(x,y) \leq |\psi(xy^{-1})| = |(R_1(t,u), R_2(t,u), \dots, R_m(t,u))|.$$

Write $R_i(t,u) = \sum\limits_{\vec\alpha,\vec\beta} C^{(i)}_{\vec\alpha,\vec\beta} t^{\vec\alpha} u^{\vec\beta}$. Since $R_i(t,t) = 0$, one deduces

$$R_i(t,u) = R_i(t,u) - R_i(t,t) = \sum_{\vec\alpha,\vec\beta} C^{(i)}_{\vec\alpha,\vec\beta} t^{\vec\alpha}(u^{\vec\beta} - t^{\vec\beta})$$

Expanding $(u^{\vec\beta} - t^{\vec\beta}) = \sum_{i=1}^m (u_i - t_i) W_{\vec\beta,i}(t,u)$, where $W_{\vec\beta,i}$ are polynomials, we get,

$$d(x,y) \leq |\psi(x)-\psi(y)| \sum_{\vec\alpha,\vec\beta} \sum_{i=1}^m |C^{(i)}_{\vec\alpha,\vec\beta}||t^{\vec\alpha}||W_{\vec\beta,i}(t,u)| \leq |\psi(x)-\psi(y)|\ P(max(|\psi(x)|, |\psi(y)|)).$$

□

Lemma 7.5. *Let $g, x, y \in G$, then*

$$d(gx, gy) \leq P(|\psi(g)|, |\psi(x)|, |\psi(y)|)\ d(x, y)$$

Proof. Let $g, z \in G$. From Lemma 7.3 we see that $\psi(gzg^{-1})$ is a polynomial function of $\psi(z)$ and $\psi(g)$ that vanishes when $\psi(z) = 0$. This this polynomial function can be written as $\psi(z)P(\psi(g), \psi(z))$. Then,

$$|\psi(gzg^{-1})| \leq |\psi(z)|\ P(|\psi(z)|, |\psi(g)|) \tag{7.1}$$

By Lemma 7.4, $d(x, y) \leq P(|\psi(x)|, |\psi(y)|)$, and then for computing the distance between x and y we can restrict to paths $x = x_0, \dots, x_n = y$ satisfying $k(x_i, x_{i+1}) \leq P(|\psi(x)|, |\psi(y)|)$ where $k(x_i, x_{i+1}) = \min(|\psi(x_i x_{i+1}^{-1})|, |\psi(x_{i+1} x_i^{-1})|)$. Let us observe (using Lemma 7.3) that this property implies that $\max(|\psi(x_i x_{i+1}^{-1})|, |\psi(x_{i+1} x_i^{-1})|) \leq P(|\psi(x)|, |\psi(y)|)$.

Consider $x = x_0, \dots, x_n = y$ such a path and the path $gx = gx_0, gx_1, \dots, gx_n = gy$. From (7.1),

$$\begin{aligned} k(gx_i, gx_{i+1}) &\leq |\psi(gx_i x_{i+1}^{-1} g^{-1})| \\ &\leq |\psi(x_i x_{i+1}^{-1})| P(|\psi(x_i x_{i+1}^{-1})|, |\psi(g)|) \\ &\leq |\psi(x_i x_{i+1}^{-1})| P(|\psi(x)|, |\psi(y)|, |\psi(g)|) \end{aligned}$$

In the same way,

$$|\psi(gx_{i+1} x_i^{-1} g^{-1})| \leq |\psi(x_{i+1} x_i^{-1})| P(|\psi(x)|, |\psi(y)|, |\psi(g)|)$$

and then

$$k(gx_i, gx_{i+1}) \leq P(|\psi(x)|, |\psi(y)|, |\psi(g)|) |k(x_i, x_{i+1})|$$

We conclude,

$$\begin{aligned} d(gx, gy) &\leq k(gx_0, gx_1) + \ldots + k(gx_{n-1}, gx_n) \\ &\leq P(|\psi(x)|, |\psi(y)|, |\psi(g)|)(k(x_0, x_1) + \ldots + k(x_{n-1}, x_n)) \end{aligned}$$

and the lemma follows taking the infimum. □

Lemma 7.6. *Let $g \in G$ and $n \in \mathbb{N}$, then $|\psi(g^n)| \leq P(n)$, where P is a polynomial with coefficients depending on $|\psi(g)|$.*

Proof. By the multiplication formula we observe that $(\psi(g^n))_1 = n\psi(g)_1$, i.e. the first coordinate is controlled polynomially. Suppose now that the i-th coordinate is controlled polynomially, then the same happens with the $i+1$-th coordinate. In fact, we see inductively that,

$$\psi(g^{n+1})_{i+1} = \psi(g^n g)_{i+1} = \psi(g^n)_{i+1} + \psi(g)_{i+1} + P(\psi(g^n)_1, \dots, \psi(g^n)_i, \psi(g)_1, \dots, \psi(g)_i)$$

and then $|\psi(g^{n+1})_{i+1}| - |\psi(g^n)_{i+1}| \leq P(n)$, and we conclude $|\psi(g^{n+1})_{i+1}| \leq (n+1)P(n+1)$. (Here all polynomials P are not necessarily the same.) □

Lemma 7.7 (Factorization)**.** *Each $g \in G$ can be written in a unique way as $g = \{g\}[g]$ with $\psi(\{g\}) \in [0, 1)^m$ and $[g] \in G$.*

Therefore, when writing $x\Gamma$ we can assume x is such that $|\psi(x)| \leq 1$.

Lemma 7.8. *Let $x, y \in G$. Then,*

$$d(x\Gamma, y\Gamma) = \inf_{\gamma\in\Gamma} d(x, y\gamma) = \inf_{\gamma\in\Gamma, |\psi(\gamma)|\leq C} d(x, y\gamma)$$

where C is a constant depending only on $|\psi(x)|$ and $|\psi(y)|$.

Combining the last two lemmas we see that:

$$d(x\Gamma, y\Gamma) = \inf_{\gamma\in\Gamma, |\psi(\gamma)|\leq C} d(x, y\gamma)$$

where C is a constant.

We obtain,

$$d(g^n x\Gamma, g^n y\Gamma) \leq \inf_{\gamma\in\Gamma, |\psi(\gamma)|\leq C} d(g^n x, g^n y\gamma)$$

Using Lemmas 7.5, 7.6 and 7.8 we get,

Corollary 7.9. *Let $x, y, g \in G$ with $|\psi(x)| \leq 1$ and $|\psi(y)| \leq 1$. Then,*

$$d(g^n x\Gamma, g^n y\Gamma) \leq \inf_{\gamma\in\Gamma, |\psi(\gamma)|\leq C} P(|\psi(g^n)|)\ d(x, y\gamma) \leq P(n)\ d(x\Gamma, y\Gamma) \tag{7.2}$$

7.2. **Complexity computation.** Let (X, T) be a t.d.s. We say that a subset $F \subseteq X$ is (n, ϵ)-shadowing if for all $x \in X$ there exists $y \in F$ such that $d(T^i x, T^i y) \leq \epsilon$ for all $i \in \{0, \ldots, n\}$. Write $r(n, \epsilon) = \min\{|F| : F \subseteq X, F \text{ is } (n, \epsilon)-\text{shadowing}\}$. Given an open cover $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_k\}$ the topological complexity function of $\mathcal{U}$ is the sequence on n: $c(\mathcal{U}, n) = \min\{M \geq 1 : \exists V_1, \ldots, V_M \in \bigvee_{i=0}^{n} T^{-i}\mathcal{U}, \text{ such that } \bigcup_{i=1}^{M} V_i = X\}$. One has that,

$$c(\mathcal{U}, n) \leq r(n, \frac{\delta}{2})$$

where $\delta > 0$ is the Lebesgue number of $\mathcal{U}$.

To compute the topological complexity of a nilsystem in the general case (i.e. when G is not neccesarily a connected and simply connected Lie group) we will use an argument given by A.Leibman in [25]. For that we require an extra definition and one lemma from [25].

Let $X = G/\Gamma$ be a nilmanifold and $T : X \to X$ the transformation given by $x \to gx$ with a fixed $g \in G$.

Definition 7.10. *We say that a closed subset $Y \subset X$ is a submanifold of X if $Y = Hx$ where H is a closed subgroup of G and $x \in X$.*

Lemma 7.11. *There exists a connected, simply connected nilpotent Lie group $\widehat{G}$ and $\widehat{\Gamma} \subseteq \widehat{G}$ a co-compact subgroup such that X with the action of G is isomorphic to a submanifold $\widetilde{X}$ of $\widehat{X} = \widehat{G}/\widehat{\Gamma}$ representing the action of G in $\widehat{G}$.*

This is the main result of the section.

Theorem 7.12. *Let $X = G/\Gamma$ be a nilmanifold and $T : X \to X$ the transformation given by $x \to gx$ with a fixed $g \in G$. Let $\mathcal{U}$ be an open cover of X. Then, for all $n \in \mathbb{N}$,*

$$c(\mathcal{U}, n) \leq P(n)$$

where P is a polynomial.

Proof. First, assume that G is a connected, simply connected nilpotent Lie Group. For $\epsilon > 0$, let $N(\epsilon)$ be the smallest number of balls of ratio ϵ needed to cover X. The upper Minkowski dimension or box dimension (see [28]) is defined by

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)}$$

This dimension coincides with the usual dimension of the manifold X and hence there exists a constant K such that:

$$N(\epsilon) \leq K(\frac{1}{\epsilon})^{\dim(X)+1}$$

Using the bound in (7.2) we observe that if $x, y \in X$ and $d(x, y) \leq \frac{\delta}{2P(n)}$, then $d(T^i x, T^i y) \leq \frac{P(i)}{P(n)} \frac{\delta}{2} \leq \frac{\delta}{2}$ if $i \leq n$ since P has positive coefficients. Let δ the Lebesgue number of $\mathcal{U}$. We get,

$$c(\mathcal{U}, n) \leq N\left(\frac{\delta}{2P(n)}\right) \leq K \frac{(2P(n))^{\dim(X)+1}}{\delta^{\dim(X)+1}}$$

and the polynomial bound of the complexity is obtained.

Now consider the general case. Denote by $\pi : X \to \widetilde{X}$ the isomorphism given by Lemma 7.11. We see that (X, T) is conjugate with $(\widetilde{X}, \widetilde{T})$ where $\widetilde{T} : \widehat{X} \to \widehat{X}$ is defined by $\widetilde{T}(\widehat{x}) = \pi(g)\widehat{x}$. Hence $(\widetilde{X}, \widetilde{T})$ is a subsystem of $(\widehat{X}, \widetilde{T})$.

If $\mathcal{U} = (U_1, \ldots, U_m)$ is an open cover of X, $\pi(\mathcal{U}) = (\pi(U_1), \ldots, \pi(U_m))$ is an open cover of $\widetilde{X}$ and $c(\mathcal{U}, n) = c(\pi(\mathcal{U}), n) \leq c(\widehat{\mathcal{U}}, n)$ where $\widehat{\pi}(U) = (V_1, \ldots, V_m, \widetilde{X}^c)$ is an open cover of $\widehat{X}$ with $\pi(U_i) = \widetilde{X} \cap V_i$ for all $i \in \{1, \ldots, m\}$. Thus, we get a polynomial bound of the complexity in the general case. □

Finally, we consider the complexity of a ∞-step nilsystem. For that we need the following easy lemma.

Lemma 7.13. *Suppose X is an inverse limit of the systems $(X_i, T)_{i \in \mathbb{N}}$ where (X_i, T) has a polynomial complexity for each $i \in \mathbb{N}$. Then X has polynomial complexity.*

Proof. We will show that the product system has polynomial complexity and therefore the inverse limit has the same property. Let $\epsilon > 0$ and choose $N \in \mathbb{N}$ such that $\delta = \epsilon - 2^{-N} > 0$. Then $r_X(\epsilon, n) \leq \prod_{i \leq N} r_{X_i}(\delta, n)$ and by assumption the right side is polynomially bounded. □

We conclude,

Theorem 7.14. *If X is an ∞-step nilsystem then it has a polynomial complexity.*

Proof. By the above discussion a d-step nilsystem has polynomial complexity. By Theorem [16] the factors (X_d, T) defined by the relation $\mathbf{RP}^{[d]}$ are inverse limits of d-step nilsystems and therefore they have polynomial complexity. Using again the inverse limit argument we conclude the polynomial bound for the complexity of (X, T). $\square$

8. Appendix

In this appendix we give the proof of Theorem 3.8. First we discuss Theorem 3.8 (2). The idea to prove this fact was inspired from personal communications with B. Kra [23], here we give details of the proof.

Lemma 8.1. [14] *Let (X, μ, T) be an ergodic d-step nilsystem with $X = G/\Gamma$, μ be its Haar probability measure and T be the translation by the element $t \in G$. Moreover, assume that the group G can be spanned by the connected component of the identity and the element t (it is always possible to reduce to this case, see* [3]*). Let $d \geq 1$ be an integer. If Z_k is the maximal factor of order d of (X, μ, T) with $k \leq d$, then Z_k has the form $G/(G_{k+1}\Gamma)$ endowed with the translation by the projection of t on G/G_{k+1}, where $G_1 = G, G_2 = [G, G_1], G_3 = [G, G_2], \ldots, G_{d+1} = \{e\}$.*

Now we prove Theorem 3.8 (2):

Proof of Theorem 3.8 (2): Let $n > d$ be any integer, we will show $Z_n = Z_d$. In [15] it was shown that Z_n is an inverse limit of n-step nilsystems $(Z_{n,i})_{i\in\mathbb{N}}$. For any $Z_{n,i}$, assume it has the form of G/Γ, where the group G is spanned by the connected component of the identity and the translation element t.

Let G^o be the identity component of G. Just as showed in [3], $G_2 = [G, G] = [G^o, G]$ is connected; and inductively for any integer $k \geq 2$, G_k is connected. By Lemma 8.1, the d-step maximal nilfactor and $d+1$-step maximal nilfactor of G/Γ is $G/(G_{d+1}\Gamma)$ and $G/(G_{d+2}\Gamma)$ respectively. We have that $G/(G_{d+2}\Gamma)$ is also a $d+1$-step nilfactor of X, so it is a factor of $Z_{d+1} = Z_d$, which implies that $G/(G_{d+2}\Gamma)$ is also a d-step nilsystem. Now, by the maximality of $G/(G_{d+1}\Gamma)$, we have $G/(G_{d+2}\Gamma)$ and $G/(G_{d+1}\Gamma)$ coincide. Then, $G_{d+1}\Gamma = G_{d+2}\Gamma$, and of course the nilpotent Lie groups G_{d+1} and G_{d+2} have the same dimension since Γ is discrete.

For any positive integer k, let $\mathfrak{g}_k$ be the associated Lie algebra of G_k. Then $\mathfrak{g}_{d+1}$ and $\mathfrak{g}_{d+2}$ have the same dimension, which implies that $\mathfrak{g}_{d+1}$ and $\mathfrak{g}_{d+2}$ coincide since $\mathfrak{g}_{d+2}$ is a subalgebra of $\mathfrak{g}_{d+1}$. Since G_{d+1} and G_{d+2} are connected, $G_{d+1} = \exp(\mathfrak{g}_{d+1}) = \exp(\mathfrak{g}_{d+2}) = G_{d+2}$, and then we have that

$$G_{d+3} = [G, G_{d+2}] = [G, G_{d+1}] = G_{d+2} = G_{d+1}.$$

Inductively, we have $G_{k+1} = G_{d+1}$ for all $d \leq k \leq n$, which implies that $G_{d+1} = \{e\}$, G is d-step nilpotent and $Z_{n,i} = G/\Gamma$ is a d-step nilsystem. So the inverse limit Z_n

is a d-step nilsystem. By the maximality of Z_d we conclude $Z_n = Z_d$. The proof is completed. □

To show the next lemma we need some results from [16].

Proposition 8.2. *Let (X,T) be a minimal system. Then, If (X,T) is an inverse limit of some d-step nilsystems, then each measurable factor is a topological factor.*

Proof. It is a combination of [16, Proposition 5.2] and [16, Lemma 6.1]. □

Lemma 8.3. *Let (X,T) be a minimal system of order n, then the maximal measurable and topological factors of order d coincide, where $d \le n$.*

Proof. Let μ be the unique invariant probability measure of X and Z_d is the maximal measurable factor of order d of (X,μ,T). It is clear that Z_d is a topological factor of order d of (X,μ,T) by Proposition 8.2. Endow the maximal topological factor X_d of order d of X with its unique invariant probability measure. Clearly it is a measurable factor of order d of (X,μ,T) and so is a measurable factor of Z_d. By Proposition 8.2 again, X_d is a topological factor of Z_d, and so $Z_d = X_d$ is the maximal topological factor of order d. □

Now we can finish the proof of Theorem 3.8.

Proof of Theorem 3.8: (1) For any $k \ge 1$, recall $X_k = X/\mathbf{RP}^{[k]}$ and let μ_k be its unique invariant probability measure. Let $n > d$ be an integer. By the Lemma 8.3 and since X_n is a minimal system of order n, then the maximal measurable and topological factors of order k of X_n coincide and $X_n/\mathbf{RP}^{[k]}(X_n) = X_k = Z_k$, $k \le n$. As $(Z_d,\mu_d,T) = (Z_{d+1},\mu_{d+1},T)$, by Theorem 3.8(2), we have for any $d \le k \le n$, $(Z_k,\mu_k,T) = (Z_d,\mu_d,T)$. Therefore (Z_n,μ_n,T) and (Z_d,μ_d,T) coincide in the measurable sense, and by Proposition 8.2, they coincide in the topological sense too, i.e. $X_n = Z_n = Z_d = X_d$, which implies that $\mathbf{RP}^{[n]}(X) = \mathbf{RP}^{[d]}(X)$.

(3) If Z_n is measure theoretical isomorphic with $X_n = X/\mathbf{RP}^{[n]}(X)$ for some $n \in \mathbb{N}$. By the Lemma 8.3, for any positive integer $k \le n$, the measurable and topological maximal factors of order k coincide, which implies Z_k is measure theoretical isomorphic with $X_k = X/\mathbf{RP}^{[k]}(X)$. The proof of the theorem is completed. □

References

[1] J. Auslander, *Minimal flows and their extensions*, North-Holland Mathematics Studies, **153**, (1988), North-Holland, Amsterdam.

[2] L. Auslander, L. Green and F. Hahn, *Flows on homogeneous spaces*, Annals of Mathematics Studies, **53**, Princeton University Press, Princeton, N.J. 1963 vii+107 pp.

[3] V. Bergelson, B. Host and B. Kra, *Multiple recurrence and nilsequences*, Invent. Math., **160**, (2005), 261–303, with an appendix by I.Z. Ruzsa.

[4] F. Blanchard, B. Host and A. Maass, *Topological complexity*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **20**, (2000), 641–662.

[5] F. Blanchard and Y. Lacroix, *Zero-entropy factors of topological flows*, Proc. Amer. Math. Soc., **119**, (1993), 985–992.

[6] H. Furstenberg, *Strict ergodicity and transformation of the torus*, Amer. J. Math., **83**, (1961), 573–601.

[7] H. Furstenberg, *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory*, M. B. Porter Lectures, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1981.

[8] E. Glasner, *Proximal flows*, Lecture Notes in Math. **517**, Springer-Verlag, 1976.

[9] E. Glasner, *Topological weak mixing and quasi-Bohr systems*, Israel J. Math., **148**, (2005), 277–304.

[10] E. Glasner, *The structure of tame minimal dynamical systems*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **27**, (2007), 1819–1837.

[11] E. Glasner and B. Weiss, *Quasi-factors of zero-entropy systems*, J. Amer. Math. Soc., **8**, (1995), 665–686.

[12] E. Glasner and X. Ye, *Local entropy theory*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **29**, (2009), 321–356.

[13] B. Green and T. Tao, *The quantitative behaviour of polynomial orbits on nilmanifolds*, to appear in Annals of Math.

[14] B. Host, *Convergence of multiple ergodic averages*, arXiv:0606362.

[15] B. Host and B. Kra, *Nonconventional averages and nilmanifolds*, Ann. of Math., **161**, (2005) 398–488.

[16] B. Host, B. Kra and A. Maass, *Nilsequences and a Structure Theory for Topological Dynamical Systems*, Advances in Mathematics, **224**, (2010) 103–129.

[17] W. Huang, *Tame systems and scrambled pairs under an Abelian group action*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **26**, (2006), 1549–1567.

[18] W. Huang, H. Li and X. Ye, *Family-independence for topological and measurable dynamics*, arXiv: 0908.0574, to appear in Trans. Amer. Math. Soc..

[19] W. Huang, H. Li and X. Ye, *Localization and dynamical Ramsey property*, Preprint.

[20] W. Huang, S. Li, S. Shao and X. Ye, *Null systems and sequence entropy pairs*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **23**, (2003), 1505-1523.

[21] W. Huang and X. Ye, *Topological complexity, return times and weak disjointness*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **24**, (2004), 825–846.

[22] W. Huang and X. Ye, *A local variational relation and applications*, Israel J. Math., **151**, (2006), 237–280.

[23] B. Kra, Personal communication.

[24] D. Kerr and H. Li, *Independence in topological and C^*-dynamics*, Math. Ann., **338**, (2007), 869–926.

[25] A. Leibman, *Pointwise convergence of ergodic averages for polynomial sequences of translations on a nilmanifold*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **25**, (2005), no. 1, 201–213.

[26] E. Lindenstrauss, *Measurable distal and topological distal systems*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **19**, (1999), no.4, 1063–1076.

[27] A. Maass and S. Shao, *Sequence entropy in minimal systems*, J. London of Math. Soc., **76**, (2007), no. 3, 702–718.

[28] M. Pollicott, *Fractals and Dimension Theory.* Available at http://www.warwick.ac.uk/ masdbl/preprints.html

[29] S. Shao and X. Ye, *Regionally proximal relation of order d is an equivalence one for minimal systems and a combinatorial consequence*, arXiv:1007.0189.

[30] W. A. Veech, *Point-distal flows*, Amer. J. Math., **92**, (1970), 205–242.

[31] W. A. Veech, *Topological dynamics*, Bull. Amer. Math. Soc., **83**, (1977), 775–830.

[32] B. Weiss, *Multiple recurrence and doubly minimal systems*, Contemporary Math., **215**, (1998), 189–196.

[33] J. van der Woude, *Topological dynamics*, Dissertation, Vrije Universiteit, Amsterdam, 1982. CWI Tract, **22**.
[34] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, second edition, University Press, Cambridge, 1959.

Wu Wen-Tsun Key Laboratory of Mathematics, USTC, Chinese Academy of Sciences and Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui, 230026, P.R. China.
E-mail address: dopandn@mail.ustc.edu.cn

Centro de Modelamiento Matemático and Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Chile, Av. Blanco Encalada 2120, Santiago, Chile.
E-mail address: sdonoso@dim.uchile.cl

Centro de Modelamiento Matemático and Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Chile, Av. Blanco Encalada 2120, Santiago, Chile.
E-mail address: amaass@dim.uchile.cl

Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui, 230026, P.R. China.
E-mail address: songshao@ustc.edu.cn

Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui, 230026, P.R. China.
E-mail address: yexd@ustc.edu.cn