



**UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA DE MINAS**

**MODELAMIENTO Y CO-SIMULACIÓN DE LEYES DE COBRE TOTAL  
Y SOLUBLE**

**MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL DE MINAS**

**WERNER JOSEPH LANGE BALBOA**

**PROFESOR GUÍA:  
XAVIER EMERY**

**MIEMBROS DE LA COMISIÓN  
JULIÁN M. ORTIZ CABRERA  
EDUARDO MAGRI VARELA**

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por Conicyt

**SANTIAGO DE CHILE  
ABRIL 2012**

## RESUMEN

En el negocio minero, se requiere cuantificar los recursos en un yacimiento con la menor incertidumbre posible, para la toma de decisiones en áreas tan diversas como el proceso metalúrgico a utilizar, el diseño y la planificación minera. Muchos proyectos mineros han debido abordar la problemática de explotar minerales que son recuperables sólo en un porcentaje de su ley total, por lo que se debe generar modelos que reproduzcan las restricciones entre leyes totales y leyes recuperables.

Este trabajo consiste en aplicar una metodología para modelar conjuntamente las leyes de cobre total y cobre soluble en un yacimiento óxido cuprífero, vía simulación geoestadística. El modelamiento enfrenta tres dificultades: la restricción de desigualdad (la ley de cobre soluble es menor que la ley de cobre total), la presencia de un muestreo preferencial (no se realizan pruebas químicas de cobre soluble en muestras con baja ley de cobre total) y la presencia de una deriva vertical (la solubilidad tiende a disminuir en profundidad).

La metodología se basa en la generación de un modelo bivariable que represente la relación entre las leyes de cobre total y soluble, logrando de este modo independizar ambas variables de la restricción de desigualdad inicial. Con este modelo, se puede transformar dichas variables en variables Gaussianas y aplicar métodos convencionales para la simulación condicional.

Los modelos de leyes de cobre total y cobre soluble obtenidos reproducen tanto las relaciones de dependencia entre estas dos variables como su continuidad espacial, permitiendo discriminar de mejor manera si se está trabajando con minerales oxidados, mixtos o estériles y optimizar las rutas de envío a plantas de tratamiento metalúrgico.

## **ABSTRACT**

The appraisal of a mining project requires assessing the amount and location of the mineral resources as accurately as possible, in order to support future decisions in mine design, mine planning and metallurgical processing. In many projects however, only a fraction of the total grade can be recovered, so that one has to construct resources models of both total and recoverable grades.

This work presents a geostatistical model to simulate the total and soluble copper grades in an oxide copper deposit known through a set of exploration drill holes. The model accounts for the inequality restriction between grades (soluble copper grade is always less than or equal to total copper grade), the presence of a preferential sampling design (few assays for soluble copper are realised when the total copper grade is low) and the presence of a vertical trend (the solubility ratio tends to decrease with depth). The proposed approach relies on the fitting of a bivariate distribution that allows converting the total and soluble copper grades into two unconstrained variables that can be considered as independent. Accordingly, the unconstrained variables can be transformed into Gaussian variables in order to proceed with conditional simulation through traditional Gaussian simulation algorithms.

The resources models so obtained reproduce the spatial continuity and dependence relationships of the total and soluble copper grades and can be used to better characterise the mineral type (oxide, mixed or waste) and to optimise the material sent to the metallurgical plant.

A Sylvia, Myriam Teresa y Marcela

## AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi familia por el apoyo, cariño y educación que me han entregado durante toda mi vida, gracias a ellos he logrado formarme en la persona que soy. En particular deseo agradecerle a la persona que me dio la vida, mi madre, por todo el amor y devoción en mi crianza. De igual forma quisiera agradecer de manera muy especial a mi tía Tere, que por años me acompañó con todo su afecto y cariño maternal, siendo un pilar fundamental junto con mi madre, logrando así que todo esto fuese posible.

Me es imposible no mencionar el apoyo de mi tía Elena y tío Eugenio Rodríguez, quien fue la persona que me mostro esta hermosa carrera como lo es la Ingeniería Civil de Minas.

En especial agradezco a Marcela por ser mi amiga y compañera durante estos últimos 6 años, dándome no solo su amor, sino también su comprensión en muchos momentos de nuestra relación. Mi amor, sin ti esto no hubiera sido posible.

También deseo agradecer el afecto, cariño y amistad recibida por parte de mis primos Eugenio, Juan Guillermo, Mónica y Cote, quien junto con Alejandra, me acogieron en su casa en más de alguna ocasión. No puedo olvidar el apoyo de mi querida Pitita y su santa paciencia conmigo, así como la compañía de la Walkiria hasta altas horas de la noche debido a mis estudios y al trabajo de mi memoria.

Durante estos años en la universidad conocí muchas personas que de algún modo u otro repercutieron en mi vida y en mi trabajo, lamentablemente me es imposible enumerarlos a todos. Muchas gracias David Rosales, Juan Cuevas, Rodrigo Martínez y Alonso Olate por estar siempre conmigo. Como no agradecer a Nicolás Cisternas, Sebastián Pizarro, Juano y Marco Orellana.

De manera especial agradezco a mis colegas y amigos: Pera, Jimmy Ip, Matías Pinto, Felipe Aguilera, Antonio Cecchi, Diego Muñoz, Nacho Galvez y Winston Rocher. Muchas gracias por estar siempre ayudándome, no solo en temas académicos.

A mis profesores que me ayudaron en mi formación como profesional, a los miembros de mi comisión y especialmente al profesor Xavier Emery que con paciencia y dedicación, siempre se dio un tiempo para guiarme y ayudarme durante mi trabajo de título, sin importar muchas veces las altas horas de la madrugada.

Finalmente deseo agradecer de manera especial a Conicyt por el proyecto Fondecyt 1090013 llamado “Multivariate Geostatistics and its Applications to the Characterization of Mineral Resources”, con el cual se financió esta memoria.

Muchas gracias.

## ÍNDICE

1. Introducción.....	1
1.1. Motivación del trabajo .....	3
1.2. Objetivos.....	4
1.2.1. Objetivo general .....	4
1.2.2. Objetivos específicos.....	4
1.3. Alcances.....	5
2. Antecedentes.....	6
2.1. Conceptos básicos de geoestadística.....	6
2.1.1. Variable regionalizada.....	6
2.1.2. Función aleatoria .....	7
2.1.2.1. Estacionaridad.....	7
2.1.2.2. Ergodicidad .....	7
2.1.3. Variogramas directos y cruzados.....	8
2.1.3.1. Variograma directo .....	8
2.1.3.2. Variograma cruzado.....	10
2.1.3.3. Variograma experimental .....	11
2.1.3.4. Variogramas modelados .....	14
2.1.3.5. Caso multivariable: modelo lineal de correogionalización.....	16
2.1.4. Tipos de muestreo.....	17
2.1.5. Desagrupamiento .....	18
2.1.5.1. Desagrupamiento poligonal .....	18
2.1.5.2. Desagrupamiento por celdas .....	19
2.2. Métodos de estimación .....	20
2.2.1. Kriging.....	20
2.2.2. Kriging con deriva .....	21
2.2.3. Co-kriging.....	21
2.2.4. Propiedades del Kriging y Co-kriging.....	22
2.3. Métodos de simulación .....	24
2.3.1. Propiedades de las simulaciones .....	25
2.3.2. Cosimulación multi-gaussiana.....	25
2.3.3. Consideraciones con caso de estudio.....	28
2.3.4. Simulación usando transformación condicional paso a paso .....	28
2.4. Modelamiento de distribuciones .....	32
2.4.1. Distribución Gamma .....	32

2.4.2.	Distribución Beta.....	34
3.	Metodología.....	36
3.1.	Estudio exploratorio de datos .....	37
3.2.	Anamorfosis Gamma y modelamiento .....	37
3.3.	Anamorfosis Gaussiana y estudio variográfico .....	40
3.4.	Co-simulación y transformación inversa .....	41
3.5.	Validaciones y análisis.....	41
4.	Caso de estudio: yacimiento de cobre .....	42
4.1.	Estudio exploratorio de datos .....	42
4.2.	Anamorfosis Gamma y modelamiento .....	46
4.2.1.	Modelo sin deriva .....	48
4.2.2.	Modelo con deriva.....	50
4.3.	Anamorfosis Gaussiana y estudio variográfico .....	54
5.	Resultados.....	60
5.1.	Modelos de bloques generados .....	60
5.2.	Validación de los modelos .....	65
5.3.	Reproducción de la solubilidad.....	70
5.4.	Análisis de resultados .....	75
6.	Conclusiones y recomendaciones.....	85
7.	Bibliografía.....	87
8.	Anexos.....	89
8.1.	Anexo I: Estudio exploratorio de datos .....	89
8.1.1.	Despliegue de datos de ley de cobre total.....	89
8.1.2.	Dispersión de variables estudiadas .....	90
8.2.	Anexo II: Desagrupamiento.....	92
8.3.	Anexo III: Anamorfosis gamma .....	92
8.4.	Anexo IV: Validaciones modelo sin deriva.....	96
8.5.	Anexo V: Histogramas Gaussianos .....	97
8.6.	Anexo VI: Estudio variográfico.....	99
8.6.1.	Mapas variográficos .....	99
8.6.2.	Variogramas cruzados .....	100
8.7.	Anexo VII: Simulaciones.....	101
8.8.	Anexo VIII: Jackknife .....	103
8.8.1.	Base de datos completada.....	103
8.8.2.	Base de datos completamente simulada .....	104

8.9. Anexo IX: Reproducción de solubilidad .....	105
8.10. Anexo X: Estadísticas de destinos .....	107



# 1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad, la cuantificación de los recursos de un yacimiento es fundamental en la industria minera, debido a que los proyectos se están realizando cada vez con leyes más bajas y a mayor profundidad, lo que limita la cantidad de información disponible, lo que hace imperatorio generar modelos precisos y lograr establecer límites de incertidumbre razonables.

Una de las principales herramientas para enfrentar estos desafíos corresponde a la geoestadística, la cual permite estudiar fenómenos regionalizados, es decir, fenómenos que se disponen de manera específica en el espacio, presentando en diferentes medidas una estructura espacial. La geoestadística permite trabajar en diversos casos de estudio, desde trabajos agrícolas hasta el estudio de dispersión de contaminantes, dentro de los cuales la minería, específicamente en la estimación de recursos, está presente. En particular, se puede estudiar diversas variables regionalizadas, tales como: leyes, densidades, recuperación metalúrgica, entre muchas otras más.

Dentro de estos estudios, en la industria minera existe una complicación asociada al momento del diseño y planificación, debido a que por lo general la variable regionalizada que se estudia es la ley total del mineral de interés, pero sólo un porcentaje de dicha variable es recuperable. Por ejemplo en un yacimiento cuprífero, existen valores de leyes de cobre total, pero sólo una fracción de dicha ley es recuperable (por ejemplo en el caso de óxidos, sólo es recuperable por lixiviación la parte soluble del mineral). La problemática se presenta al momento de querer generar modelos de bloques que consideren ambas leyes, tanto la total como la recuperable, debido a que al momento de realizarse el muestreo, para ciertos valores bajos de leyes totales, se decide no gastar recursos en analizar las leyes recuperables, lo cual genera un sesgo importante al momento de realizar la estimación o simulación.

Además de dicha problemática, se debe considerar también que se desea modelar variables ligadas por una desigualdad, lo cual restringe las opciones posibles de estimación, debido a que las leyes recuperables serán siempre menores o iguales a las leyes totales. Tampoco se debe olvidar que puede haber una deriva presente, debido a que es conocido que a medida que se descende en la cota la recuperabilidad de ciertas variables disminuye. En el caso del cobre, la solubilidad está asociada a óxidos de cobre, los cuales se encuentran más cerca de la superficie, para luego con la profundidad convertirse en cobre mixto y después en sulfuros.

En la actualidad el problema del muestreo preferencial se aborda considerando diversas técnicas de desagrupamiento y usos de variables secundarias. En relación al problema de enfrentar una desigualdad, en la actualidad se descarta el uso de kriging o co-kriging, ya que esta técnica de estimación no logra reproducir desigualdades. Se utilizan cambios de variables, como por ejemplo simular la ley de cobre soluble y cobre insoluble o la ley de cobre soluble con la solubilidad, logrando independizar una variable con respecto a la cual dependía. Otro mecanismo que será considerado durante la metodología presentada será la co-simulación mediante una transformación condicional paso a paso [14].

Este trabajo se basa principalmente en la aplicación de una metodología capaz de co-simular leyes de cobre total y soluble, por medio de un modelamiento de la solubilidad, con el fin de independizar ambas variables. Se utiliza el método de co-simulación condicional paso a paso, considerando la posible presencia de derivas, específicamente aquella generada por la elevación.

Cabe mencionar que este trabajo se enmarca dentro del proyecto Fondecyt 1090013 llamado “Multivariate Geostatistics and its Applications to the Characterization of Mineral Resources”.

## **1.1. Motivación del trabajo**

Es muy común que diversos proyectos generen sus diseños, planificaciones y parámetros en relación a las leyes del mineral de interés establecidas después de una evaluación de las leyes presentes. Pero existe la salvedad que, por motivos de la misma geología, la tecnología con que se cuenta y otras razones más, el mineral recuperable no es igual al total de éste, caso común en yacimientos con óxidos de cobre donde el porcentaje recuperable corresponde al cobre soluble. Por consiguiente es necesario co-simular las leyes totales del mineral y las leyes recuperables, siendo el principal problema de esta labor, la dependencia entre las variables por medio de una desigualdad (la ley de cobre total es siempre mayor o igual a la ley de cobre soluble), además del sesgo que se podría generar por el muestreo preferencial que se tiene al desconocer la ley soluble en todas las muestras.

La principal motivación del presente trabajo consiste en establecer una metodología para lograr co-simular dichas variables ligadas entre sí y obtener modelos de bloques en conjunto, permitiendo establecer modelos que ayuden a la creación de mejores planificaciones. A conocer la solubilidad de cada bloque, se puede discriminar de mejor manera si se está trabajando con minerales oxidados, mixtos o estériles, permitiendo optimizar las rutas de envío a las plantas de tratamiento metalúrgico.

## **1.2. Objetivos**

### *1.2.1. Objetivo general*

El objetivo general de este trabajo comprende diseñar y aplicar una metodología para co-simular leyes de cobre total y soluble, generando modelos de bloques en conjunto.

### *1.2.2. Objetivos específicos*

Se utilizará métodos de análisis de datos, variografía y simulación geoestadística multivariable, para modelar la incertidumbre de los recursos del yacimiento, y corregir el posible sesgo debido al muestreo preferencial.

Adicionalmente, se estudiará un modelo de la solubilidad que considere una posible deriva vertical, debido a que es conocido que la solubilidad disminuye con la profundidad en yacimientos de óxidos de cobre.

### **1.3. Alcances**

Se aplicará una metodología de co-simulación a leyes de cobre total y soluble de un yacimiento oxidado cuprífero, aplicando métodos matemáticos y geoestadísticos. En la base de datos, se poseen sondeos con información de leyes de cobre soluble y leyes de cobre total, teniendo como primer obstáculo el sesgo generado por la ausencia de información de la ley soluble de ciertas muestras. En efecto, en muchas ocasiones al tener una ley total muy baja se decide no hacer análisis de solubilidad por considerarla innecesaria, procedimiento común en la industria.

Se realizará un estudio exploratorio de los datos, para lograr generar modelos matemáticos validables que representen las variables regionalizadas (considerando diversas dependencias tales como la ley de cobre total y la elevación) y de este modo aplicar métodos geoestadísticos de simulación.

El análisis en conjunto de ambas variables permite establecer desde la planificación el destino específico de cada bloque, logrando distinguir los bloques que se deben enviar a flotación, a lixiviación o al botadero.

## 2. ANTECEDENTES

A continuación se busca describir el estado del arte de la simulación de variables ligadas entre sí por una desigualdad y de los mecanismos actuales para enfrentar el sesgo por muestreo preferencial, además de entregar un respaldo teórico con respecto a las técnicas de simulación y la del estudio de derivas.

### 2.1. Conceptos básicos de geoestadística

#### 2.1.1. *Variable regionalizada*

La geoestadística se define como el estudio de fenómenos regionalizados, es decir, fenómenos que se extienden en el espacio y presentan una organización o estructura, considerando por espacio en general el espacio geográfico, pero pudiendo tratarse tanto del eje temporal o de espacios más abstractos [1] [4].

El estudio geoestadístico no busca trabajar sobre el fenómeno regionalizado en sí, que es una realidad física, sino sobre una descripción matemática de esta realidad, la cual se denomina variable regionalizada o regionalización, que se supone logra representar y medir correctamente el fenómeno estudiado. Esta variable es regionalizada un atributo asociado a un punto geográfico en específico, como por ejemplo, densidad, acumulación, recuperación metalúrgica, concentración de algún elemento, conductividad, entre muchos más.

Todo trabajo geoestadístico que se basa en el estudio de variables regionalizadas a partir de un conjunto de datos, busca caracterizar dichas variables en el espacio con el propósito de observar las posibles relaciones existentes y cuantificar la incertidumbre presente. Para esto se consideran dichas variables como resultados de realizaciones de funciones aleatorias, las cuales por lo general se considera estacionarias, teniendo de esta manera sus distribuciones de probabilidad invariantes en el espacio.

En el caso particular multivariable se consideran correionalizaciones para representar a un conjunto de variables regionalizadas pertenecientes a un mismo dominio o campo en el espacio. Este campo puede representar una zona natural, fuera de la cual las variables regionalizadas no están definidas, pudiendo tratarse también de un dominio particular, donde la regionalización interesa, como por ejemplo sitios donde es superior a un límite de detección.

### 2.1.2. Función aleatoria

Los modelos geoestadísticos consideran el valor  $z(x)$  de la variable regionalizada en un sitio  $x$  del campo  $D$ , donde  $D \subset R^3$ , como una realización de una variable aleatoria  $Z(x)$ . Cuando  $x$  recorre el campo  $D$  se genera un conjunto de variables aleatorias  $Z=\{Z(x), x \in D\}$  que constituye una función aleatoria. De esta manera, la variable regionalizada queda interpretada por una realización de una función aleatoria, siendo este enfoque el responsable de permitir tomar en cuenta los aspectos erráticos y estructurados de la regionalización [1] [4]. La función aleatoria se caracteriza por tener una distribución espacial que se puede representar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \forall n \in N^* \\ & \forall z_1, \dots, z_n \in R, \forall x_1, \dots, x_n \in D \subset R^3 \\ & F(z_1, \dots, z_n; x_1, \dots, x_n) = Prob(Z(x_1) < z_1, \dots, Z(x_n) < z_n) \end{aligned}$$

En la práctica, al contarse exclusivamente con una sola realización de esta función aleatoria, su determinación a partir de la variable regionalizada no es una operación unívoca, es decir, varios modelos pueden resultar aceptables, en cuanto sean compatibles con la información disponible. Sumado a esto, sólo se posee un dominio con información limitada, para lo cual se asumen algunas hipótesis con la finalidad de relajar las inferencias, tales como:

#### 2.1.2.1. Estacionaridad

La distribución espacial no varía por traslación en el espacio, lo que describe de cierta manera una homogeneidad espacial de la regionalización. Esto permite hacer inferencias estadísticas, reemplazando la repetición sobre las realizaciones de la función aleatoria por una repetición en el espacio sobre una sola realización.

#### 2.1.2.2. Ergodicidad

Las esperanzas matemáticas pueden aproximarse mediante la media muestral o promedio en el espacio. En general, se interpreta la distribución espacial mediante sus parámetros más importantes o primeros momentos como lo son la esperanza y la varianza (los cuales miden posición y dispersión respectivamente) y la covarianza y el variograma (los cuales miden el grado de similitud entre los datos en función de una separación).

### 2.1.3. Variogramas directos y cruzados

La dependencia espacial de las variables regionalizadas es descrita gracias a los momentos de orden 2, entre los cuales se encuentran los variogramas.

#### 2.1.3.1. Variograma directo

El caso más sencillo de análisis de continuidad espacial consiste en el estudio de una cierta variable regionalizada en cuestión.

Considerando la variable como una realización de una función aleatoria  $Z_i$  estacionaria se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\gamma_i(h) &= \frac{1}{2} \text{var}\{Z_i(x+h) - Z_i(x)\} \\ &= \frac{1}{2} E\{[Z_i(x+h) - Z_i(x)]^2\}\end{aligned}$$

Siendo  $x$  la posición en el espacio y  $h$  un vector separación. En la práctica, el variograma se estima a partir de los datos de la variable, conduciendo a un variograma “experimental”, el cual es posteriormente ajustado por un modelo teórico de variograma.

Como modo de ejemplo se despliegan a continuación dos variogramas experimentales considerando dos direcciones de análisis, la omnihorizontal (N0) y la vertical (D-90).



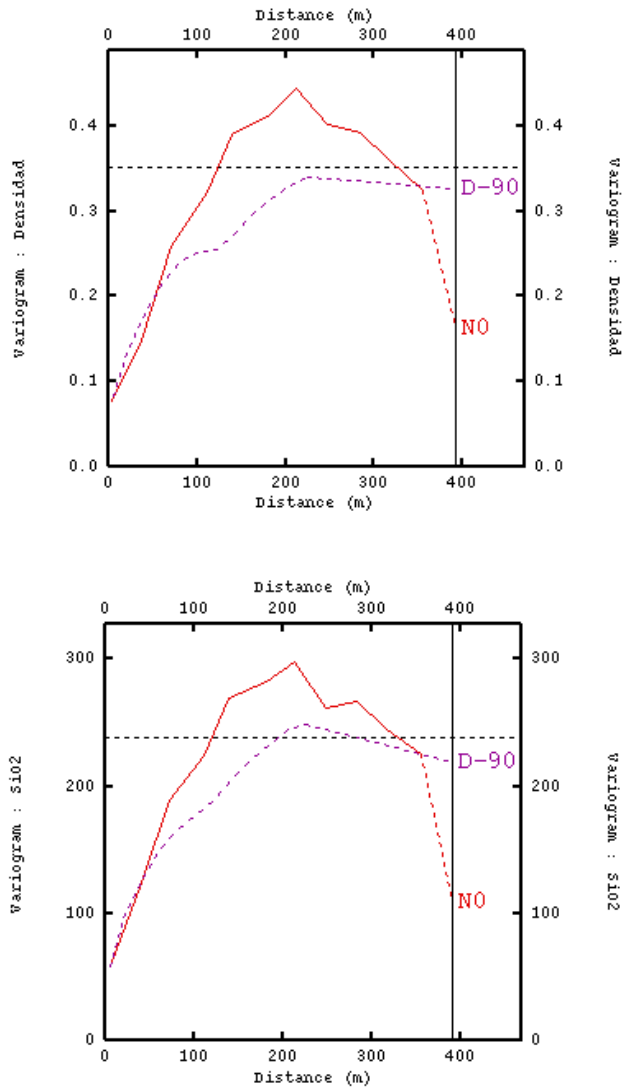


Figura 1: Variogramas experimentales directos.

### 2.1.3.2. Variograma cruzado

En relación al variograma cruzado, se busca modelar una interacción entre dos variables en el espacio, siendo su presentación formal la siguiente si se consideran las variables de medias constantes  $Z_i$  y  $Z_j$ :

$$\begin{aligned}\gamma_{ij}(h) &= \frac{1}{2} \text{cov}\{[Z_i(x+h) - Z_i(x)], [Z_j(x+h) - Z_j(x)]\} \\ &= \frac{1}{2} E\{[Z_i(x+h) - Z_i(x)][Z_j(x+h) - Z_j(x)]\}\end{aligned}$$

En el caso de que  $Z_i$  sea igual a  $Z_j$  el variograma cruzado se simplifica en uno directo.

A continuación se muestra un ejemplo de un variograma cruzado considerando dos direcciones de análisis: la dirección omnihorizontal (N0) y la vertical (D-90).

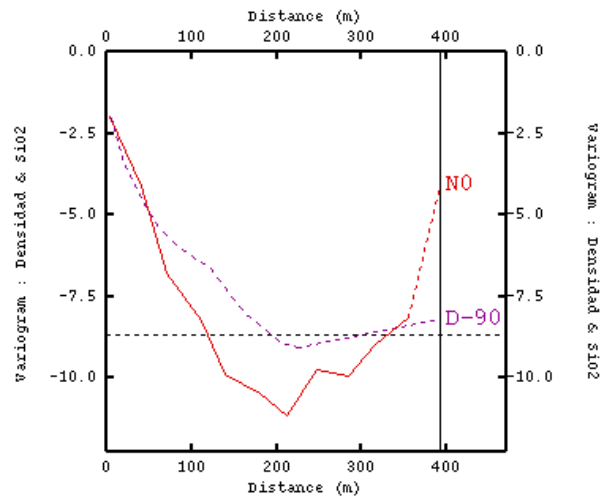


Figura 2: Variograma experimental cruzado.

### 2.1.3.3. Variograma experimental

En la práctica los variogramas directos o cruzados se calculan al reemplazar las esperanzas matemáticas por medias muestrales, aplicadas al conjunto de pares de datos separados por el vector  $h$ .

En relación a la búsqueda de datos para generar los variogramas experimentales, se está limitado a las probabilidades de encontrar pares de datos en una cierta dirección y un cierto paso  $h$ . Es por esta razón que con la finalidad de generar una cantidad representativa de pares se introducen los conceptos de holguras y tolerancias.

Al establecer tolerancias en la búsqueda de pares de datos es posible que las interpretaciones variográficas cambien. Es por este motivo que su comprensión y uso son fundamentales en un apropiado estudio variográfico. A continuación se presentan ilustraciones de las diferentes tolerancias atribuibles a los variogramas, tanto para dos como para tres dimensiones, además de las regiones de búsqueda de pares de datos [5].

En dos dimensiones se consideran los siguientes tipos de tolerancia:

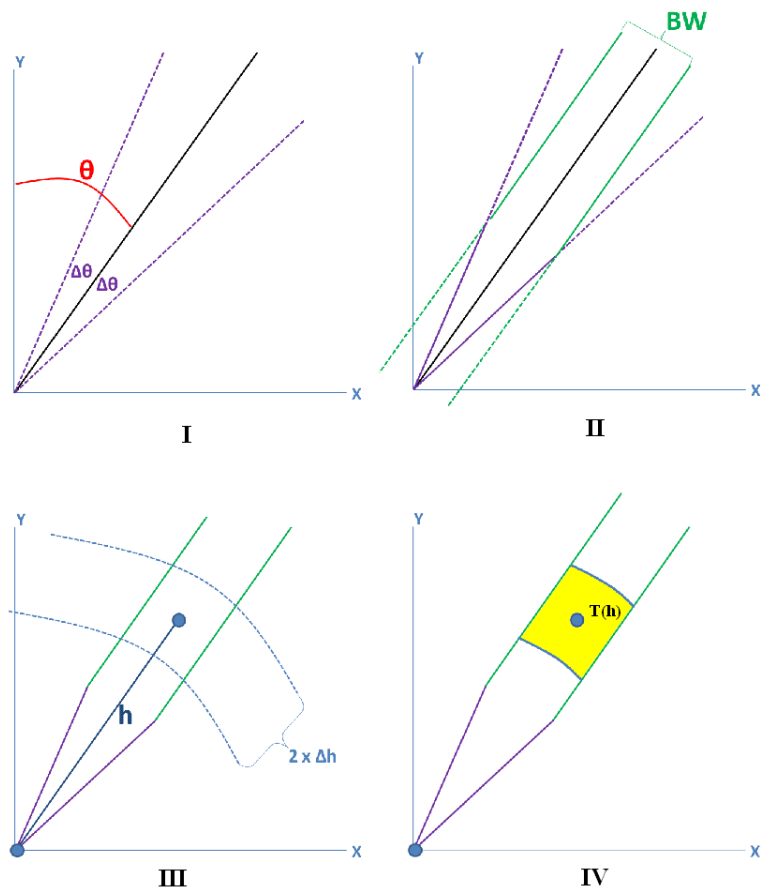


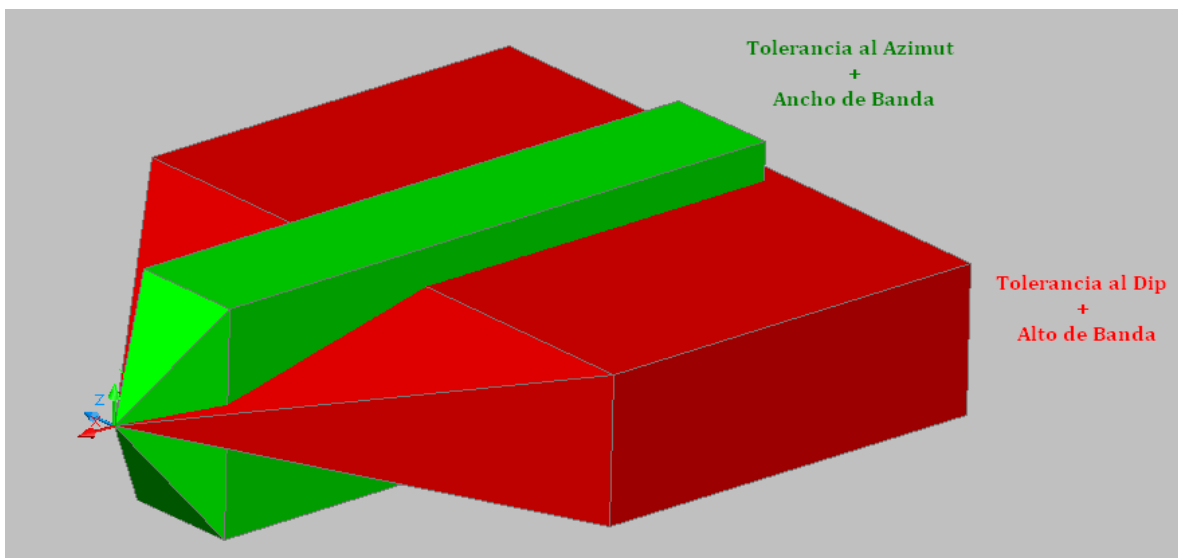
Figura 3: En I la construcción según tolerancia angular en torno a la dirección de azimuth  $\theta$ , II según ancho de banda, III según tolerancia en la distancia y IV el área de tolerancia final.

Donde:

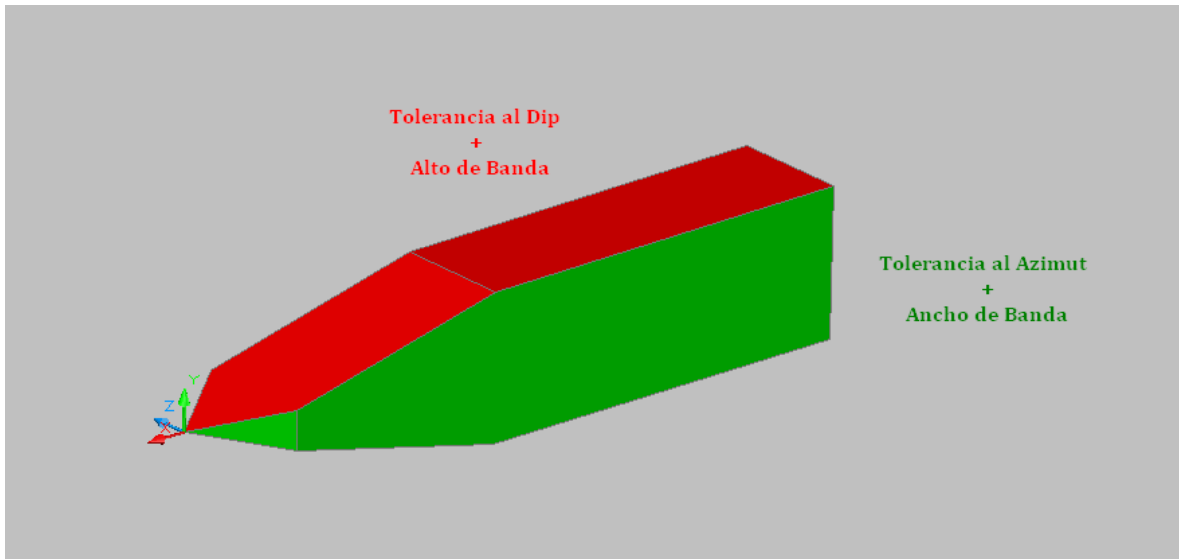
- $h$  = vector de separación.
- $\theta$  = azimut (contado en el sentido del reloj desde la dirección norte).
- $\Delta h$  = tolerancia en la distancia.
- $\Delta\theta$  = tolerancia en el azimut.
- BW = ancho de banda (band width).
- $T(h)$  = región de tolerancia asociada al vector  $h$ .

Con un adecuado uso de las tolerancias es posible generar direcciones particulares de análisis, tal como ocurre al considerar un ancho de banda lo suficientemente grande como para abarcar todo el dominio, y una tolerancia en el azimut de  $90^\circ$ : la dirección de búsqueda abarcará completamente el dominio estudiado, dependiendo exclusivamente de la norma del vector  $h$  y de la tolerancia de este mismo, que genera un variograma experimental denominado “omnidireccional” debido a que trata de estudiar y modelar el dominio como función de la distancia solamente.

Para el caso de tres dimensiones, se considera una nueva holgura, la cual corresponde a la tolerancia en la inclinación (dip, considerando positivamente desde el plano horizontal hacia arriba), además que para el caso análogo al ancho de banda se debe introducir un nuevo parámetro denominado alto de banda (band height). A continuación se aprecia la zona de tolerancia en torno a una dirección del espacio que se define como la intersección de dos prismas.



**Figura 4: Zonas de búsqueda por parámetros de tolerancia en 3D (superpuestas).**



**Figura 5: Prisma de tolerancia, intersección de zonas de búsqueda solapadas de la ilustración 4.**

Alternativamente, existe la posibilidad de considerar un solo ángulo de tolerancia y definir un cono en torno a la dirección de interés, dejando de lado las tolerancias angulares del azimut y de la inclinación. Pero esta simplificación limita la flexibilidad de búsqueda, debido a que con la interacción de las tolerancias angulares, se pueden generar diversos prismas de búsquedas, generándole al evaluador un mayor control sobre la dirección de búsqueda que desea realizar, como por ejemplo estudiar la continuidad en cuerpos mantiformes de baja potencia.

#### 2.1.3.4. Variogramas modelados

Si bien se cuenta con el variograma experimental como una representación de la continuidad espacial existente, éste no puede ser utilizado de manera directa debido a que sólo está definido para ciertas distancias y direcciones, además de estar sujeto a ciertas aproximaciones debido a su construcción. De esta manera, se debe generar un modelo teórico de variograma en torno al variograma experimental con la finalidad de trabajar con un modelo completo (conocido en todo el espacio).

La realización de este modelo requiere de la interpretación correspondiente de la continuidad presente.

Las principales propiedades que se deben cumplir para establecer un variograma al momento de modelar, son las siguientes:

- *Paridad:*  $\gamma(\mathbf{h}) = \gamma(-\mathbf{h})$
- *Nulidad en el origen:*  $\gamma(\mathbf{0}) = 0$
- *Positividad:*  $\gamma(\mathbf{h}) \geq 0$
- *Comportamiento al infinito:*  $\lim_{|\mathbf{h}| \rightarrow \infty} \gamma(\mathbf{h})/|\mathbf{h}|^2 = 0$
- *Función de tipo negativo condicional:*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \text{ tales que } \sum_{i=1}^k \lambda_i = 0, \forall x_1, \dots, x_k \in D, \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i - x_j) \leq 0$$

Esta última propiedad es una condición necesaria y suficiente para que  $\gamma$  sea un modelo de variograma matemáticamente coherente.

El variograma modelado consta con una serie de características que lo definen en sí. El comportamiento en el origen determina cómo se comporta la variable regionalizada en el espacio, ya que mientras más regular sea la variable regionalizada en el espacio, más suave deberá ser el comportamiento creciente del variograma modelado.

El variograma modelado crece desde su origen hasta estabilizarse en un rango que representa la varianza a priori. Esta varianza se le conoce como “meseta”, mientras que la distancia necesaria para alcanzar dicha estabilización es conocida como “alcance”. Cabe destacar que existen casos donde el variograma crece infinitamente sin alcanzar una meseta. En este caso la varianza a priori es infinita.

A continuación se presentan algunas funciones conocidas por ser de tipo negativo condicional que permiten modelar variogramas:

- Efecto pepita: 
$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & \text{si } h = 0 \\ C & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Este variograma alcanza inmediatamente su meseta C. Existe una ausencia total de correlación espacial, siendo poco frecuente en las aplicaciones, a menos que existan errores de medición muy grandes o que las distancias entre los datos sean mayores al alcance real.

- Modelo esférico: 
$$\gamma(h) = \begin{cases} C \left\{ \frac{3|h|}{2a} - \frac{1}{2} \left( \frac{|h|}{a} \right)^3 \right\} & \text{si } |h| \leq a \\ C & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

En este caso C representa la meseta y “a” corresponde al alcance.

Si bien se podría considerar el efecto pepita como una función esférica de alcance infinitamente pequeño, la principal diferencia corresponde en que el efecto pepita representa una variable regionalizada discontinua, mientras que el modelo esférico describe una variable regionalizada continua.

- Modelo exponencial: 
$$\gamma(h) = C \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{|h|}{a}\right) \right\}$$

A diferencia del modelo esférico, el modelo exponencial tiene un crecimiento mucho más rápido, llegando a la meseta en forma asintótica.

Existen varios modelos más, tales como el modelo Gaussiano, el modelo seno cardinal, el modelo potencia, entre otros.

Al momento de generar el modelo variográfico, se deben considerar en general más de una función para representar la continuidad espacial, por lo que se generan modelos anidados de funciones tipo negativo condicional, tales como las que se mencionaron. Esto se debe a que generalmente existen quiebres de pendiente, que muestran cambios en la continuidad espacial a partir de ciertas distancias. Por lo tanto, el variograma se puede modelar como la suma de varios modelos elementales denominados “modelos anidados”.

$$\gamma(h) = \gamma_1(h) + \gamma_2(h) + \dots + \gamma_n(h)$$

### 2.1.3.5. Caso multivariable: modelo lineal de correogionalización

Este modelo asume que todos los variogramas (directos y cruzados) corresponden a un modelo anidado compuesto de las mismas funciones variográficas elementales, pero asociadas a distintas mesetas.

El modelo de correogionalización se puede representar de la siguiente manera:

$$G(h) = \sum_{i=1}^s S_i g_i(h)$$

Considerando  $G(h)$  como la matriz de variogramas modelados (directos y cruzados de las variables) para el vector  $h$ ,  $S_i$  como la matriz de coeficientes (mesetas) de modelos bases (siendo simétrica y semi-definida positiva) y  $g_i(h)$  una función de variograma básica escogida, cuyos valores dependen del paso  $h$ .

Existen tres aspectos principales a considerar en la construcción del modelo, uno de ellos relacionado a la forma del modelo matemático (estructuras anidadas a usar), otro involucra los parámetros de éstos (alcances y mesetas) y finalmente, se señala la restricción de simetría y positividad de cada matriz de coeficientes, con la finalidad que el modelo sea válido.

El modelo es bastante flexible, pero se torna complejo si el número de variables es importante, de modo que una vez realizado el modelo, este se debe analizar para ver si posee alguna estructura redundante o innecesaria. En el caso opuesto si no representa de manera apropiada, sería necesario agregar alguna estructura nueva. El ajuste se ve facilitado por algoritmos de ajuste automático o semiautomático [11] [16].



#### 2.1.4. Tipos de muestreo

Una de las principales diferencias entre la estadística clásica y la geoestadística, es que en esta última disciplina, los datos a estudiar no son independientes unos de otros y conocer tanto el posicionamiento específico de éstos como la distribución en la que se encuentran resulta ser fundamental. Es por esta razón que se debe tener en consideración el tipo de muestreo del cual provienen los datos.

El caso más sencillo corresponde al denominado muestreo homotópico o isotópico, en el cual se conocen las variables en todos los sitios estudiados. Pero también existen casos donde ciertas variables sólo tienen una fracción de sus datos en los sitios, como en casos de variables sub-muestreadas con respecto a otra. Estos tipos de muestreos se catalogan como muestreos parcialmente heterotópicos. Un caso particular habitual en la industria minera, se conoce como muestreo preferencial, el cual consiste en que ciertas variables son conocidas luego de un estudio específico sobre otra variable del mismo punto, y en muchas ocasiones cuando el valor de esta última variable no es lo suficientemente importante o relevante para el estudio, no se utilizan recursos para conocer la otra variable. El caso más típico corresponde a bases de datos de un yacimiento cuprífero oxidado, en el cual se conocen las leyes del cobre total en todos los sitios, mientras que las leyes de cobre soluble sólo se conocen en los sitios donde la ley de cobre total supera un cierto límite en particular.

Como un tercer tipo de muestreo se pueden tener subconjuntos excluyentes entre sí denominados como muestreo totalmente heterotópico, siendo el caso más común cuando se tiene una base de datos nueva y se estudia considerando una anterior que considera otras variables.

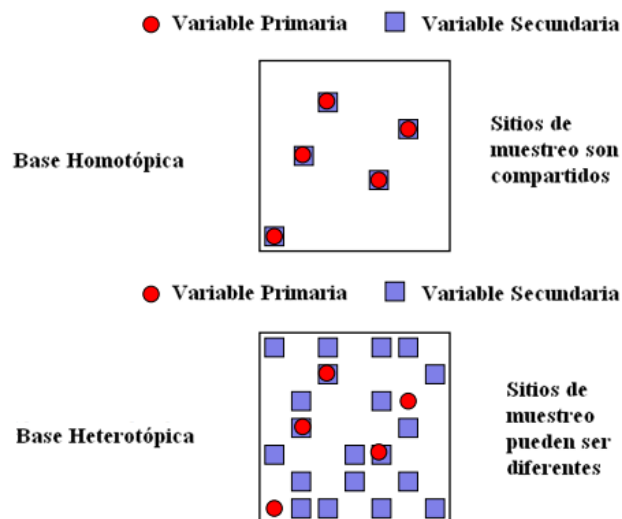


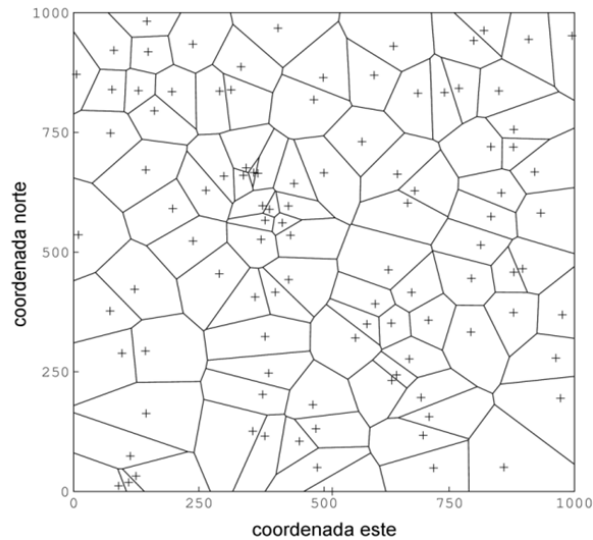
Figura 6: Arriba: Muestreo homotópico, Abajo: Muestreo heterotópico.

### 2.1.5. Desagrupamiento

Para lograr enfrentar en particular el problema de datos muy agrupados se han desarrollado métodos de desagrupamiento, que permiten generar distribuciones representativas a partir de una ponderación de los datos en función de su aislamiento en el espacio. A esto se le debe agregar la dificultad por la presencia de muestreo preferencial, el cual genera un sesgo adicional en las distribuciones experimentales de datos debido a que, en la práctica, es común que se conozca una variable por sobre la otra debido a que ciertas leyes secundarias, como leyes recuperables, no son medidas debido a la baja ley de la variable primaria, como por las leyes totales. El caso más conocido corresponde al muestreo preferencial en el estudio de leyes de cobre total y cobre soluble, en la cual no se tiene información de las leyes de cobre soluble en aquellos sitios donde la ley de cobre total es inferior a una cierta ley de corte.

#### 2.1.5.1. Desagrupamiento poligonal

Este tipo de desagrupamiento pondera cada dato por su área o volumen de influencia en el espacio, tal como se ve a continuación:



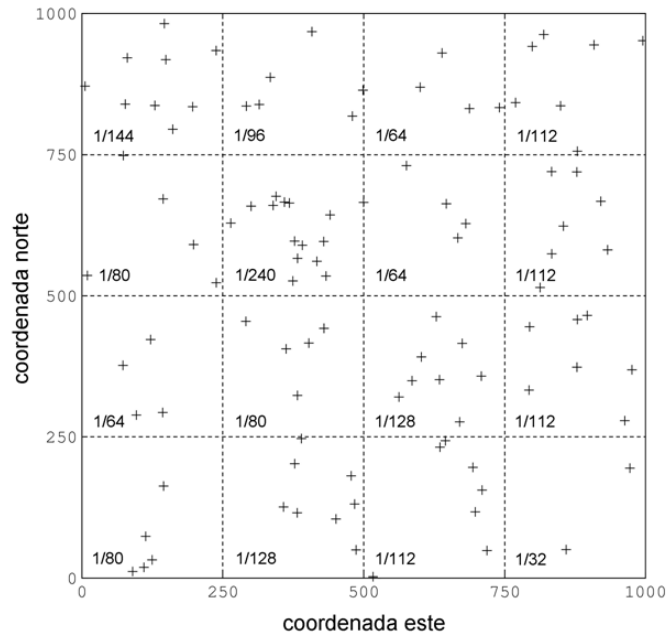
**Figura 7: Ejemplo de datos diseminados en el espacio (cruces) con sus respectivos polígonos de influencia.**

El ponderador asignado al  $j$ -ésimo dato es el siguiente.

$$w_j' = \frac{\text{área}_j}{\sum_{j=1}^n \text{área}_j}$$

### 2.1.5.2. Desagrupamiento por celdas

Este tipo de desagrupamiento divide el espacio en celdas congruentes, las cuales tienen asignadas un ponderador equivalente para cada una. El ponderador dependerá de la cantidad de datos presentes en la celda, respetando que aquellos valores más alejados posean una mayor ponderación, tal como se puede ver a continuación.



**Figura 8: Ejemplo de datos diseminados en el espacio con sus ponderadores respectivos.**

Específicamente, el ponderador asignado al  $j$ -ésimo dato, ubicado en la  $i$ -ésima celda, es:

$$w_j' = \frac{\frac{1}{n_i}}{\text{Número total de celdas con datos}}$$

Siendo  $n_i$  el número de datos en la  $i$ -ésima celda.

## 2.2. Métodos de estimación

Existen diversos métodos de estimación que cumplen una serie de condiciones, por su propia construcción, que les permiten considerarse estimadores óptimos e insesgados [2] [5].

A nivel más general se tienen los estimadores globales, los cuales consisten en estimar el valor promedio de la variable regionalizada dentro de un campo D completo. De manera contraria, la estimación local, sólo abarca un sector del campo D estudiado, para lo cual considera generalmente un número limitado de datos.

### 2.2.1. Kriging

Una de las maneras de generar modelos de bloques en la actualidad, corresponde a la aplicación de métodos geoestadísticos como el kriging. Este método permite estimar el valor de un punto o bloque de una cierta variable regionalizada, a partir de valores circundantes, considerando las configuraciones geométricas y espaciales del campo presente.

El kriging considera la variable regionalizada a estimar como una realización de una función aleatoria, la cual es descrita por su variograma. Este método busca generar una estimación en base de una combinación lineal ponderada de los datos ubicados en una vecindad de este sitio, considerando que esta ponderación de los datos cumpla con propiedades fundamentales para un buen estimador, como lo es el no tener sesgo y minimizar el error cuadrático promedio de la estimación.

Este método de estimación posee distintas variantes dependiendo de la información conocida, como por ejemplo la media de la variable estudiada, siendo estas sus principales características y diferencias:

- *Kriging Simple*: Corresponde al kriging que se genera considerando la media o esperanza de la función aleatoria como conocida.
- *Kriging Ordinario*: En este caso se desconoce la media de la función aleatoria. Esta diferencia en relación al kriging simple permite generalizar el estimador a situaciones donde esta media no es constante en el espacio.

### 2.2.2. *Kriging con deriva*

Este kriging se sustenta en la hipótesis que la función aleatoria ya no es estacionaria y su valor esperado (la denominada deriva) varía en el espacio, reflejando una tendencia sistemática en la distribución espacial de los valores. Entre los enfoques que hay para enfrentar este problema, existen tres variantes que dependen de la forma de la deriva [3] [5]:

- *Kriging Universal*: En la cual se supone que la deriva es un polinomio de las coordenadas.
- *Kriging trigonométrico*: Donde la deriva resulta ser una combinación de funciones senos y cosenos.
- *Kriging con deriva externa*: En este tipo de kriging se supone que la deriva es proporcional a una variable externa conocida en forma exhaustiva, como por ejemplo, la elevación.

La diferencia y a la vez dificultad de estos kriging en relación a los anteriores mencionados, es que el variograma experimental de los datos está sesgado con respecto al variograma teórico, debido a que la deriva oculta el verdadero variograma, pero su inferencia es posible si se considera que la deriva es constante en una dirección, como por ejemplo con el caso de la profundidad.

### 2.2.3. *Co-kriging*

El co-kriging consiste en la extensión del kriging al caso multivariable, es decir, considera no sólo la variable a estimar en el espacio, sino además utiliza la información de una o varias variables adicionales en sitios cercanos. Si bien el co-kriging posee las mismas características del kriging (genera estimaciones precisas e insesgadas), el considerar variables adicionales mejora la precisión de la variable de interés, generando más coherencia a los resultados si es que en un estudio multivariable se estima cada variable con kriging de manera independiente, pero dificulta la inferencia.

Para realizar la estimación en un campo multivariable, el co-kriging considera los variogramas de las distintas variables (variogramas directos) así como los variogramas cruzados entre variables, los cuales describen la estructura de correlación espacial conjunta de todas las variables.

#### 2.2.4. Propiedades del Kriging y Co-kriging

Las principales propiedades del kriging se mantienen válidas para el co-kriging, las cuales son:

- *Interpolación exacta:* La variable regionalizada estimada vuelve a generar el valor experimental en un punto de medición.
- *Insesgo:* El error de estimación tiene esperanza nula.
- *Precisión:* El error de estimación tiene una varianza mínima.
- *Aditividad:* La estimación de una función lineal de las variables coincide con la función lineal de las estimaciones de estas variables, siempre que se tomen los mismos datos para todas las estimaciones.

Tanto el kriging como el co-kriging presentan desventajas generales y significativas para el caso particular de este estudio, las cuales son:

- *Suavizamiento:* Este método de estimación genera una sobrevaloración a los valores bajos y subestima los valores altos, generando una reducción importante en la dispersión de los valores estimados en comparación a los valores reales desconocidos. Esto implica la limitación de estos mecanismos para estimar la variabilidad presente y los valores extremos, generando una complicación a la hora de estudiar casos donde los valores alejados de la media son importantes, tales como análisis de leyes de corte o con desigualdades presentes. Este problema se ve presente en otros métodos de estimación, como el inverso de la distancia o las splines de interpolación.
- *Ponderadores y varianza de error independientes de los valores de los datos:* La generación tanto de los ponderadores como de la varianza asociada al kriging (co-kriging) considera una serie de factores, como cercanía, anisotropías, apantallamiento, entre otros, pero su estimación no depende del valor de los datos propiamente tal, lo que implica que no se considera la variabilidad local en las zonas de altos valores, donde es conocido que existe una mayor variabilidad (efecto proporcional), restándole importancia a esta fuente de incertidumbre.
- *Desigualdades:* Este método de estimación no asegura una reproducción de relaciones de desigualdad entre variables, como lo es el caso de estudio que se aborda en este trabajo (ley de cobre total con ley de cobre soluble), siendo éste

el punto más crítico para ver otros mecanismos de modelamiento como lo son las simulaciones condicionales.

### 2.3. Métodos de simulación

Las simulaciones (co-simulaciones en el caso multivariable), consisten en modelos numéricos o realizaciones que construyen variables regionalizadas similares a la que se estudia, reproduciendo su continuidad espacial. [1] [2] [10].

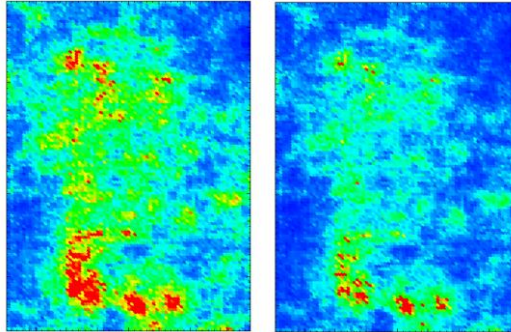


Figura 9: Co-simulación de variables ligadas por una desigualdad.

Estos métodos poseen la ventaja por sobre el kriging (co-kriging) que no generan modelos suavizados como estos últimos, permitiendo estudiar casos donde los valores alejados de la media son fundamentales.

Teniendo en consideración que la variable a estudiar es por naturaleza aleatoria, se busca seguir la misma lógica de su función generadora, estableciendo una serie de realizaciones aleatorias que pueden estar condicionadas o no a los datos conocidos, generando diversos escenarios posibles y permitiendo tener un concepto o una idea realista de la distribución de los valores en el espacio.

La simulación puede considerar o no los datos conocidos en el estudio, lo que genera dos casos particulares de simulaciones, las cuales son:

- *Simulación no condicional:* Este tipo de simulaciones busca construir realizaciones de la función aleatoria que representa la variable regionalizada sin considerar los valores de los datos, con lo cual si bien se logra reproducir la variabilidad de la variable, no logra interpolar los datos.
- *Simulación condicional:* Para lograr una simulación más realista del caso en estudio, a diferencia de la simulación no condicional, se impone que la simulación respete los valores de los datos conocidos. La incertidumbre, descrita por distribuciones de probabilidad condicional, es mayor lejos de los sitios con datos y nula en dichos sitios.



### 2.3.1. *Propiedades de las simulaciones*

Las propiedades de las simulaciones son las siguientes:

- *Interpolación exacta:* Sólo cuando se utiliza simulación condicional.
- *Insesgo:* La variable regionalizada puede ser estimada sin sesgo por la misma función aplicada a los valores simulados.
- *No suaviza:* La dispersión de los valores simulados es la misma que la dispersión de los valores verdaderos.
- *No es precisa:* El error entre el valor real y el valor simulado no tiene una varianza mínima, a diferencia del kriging.

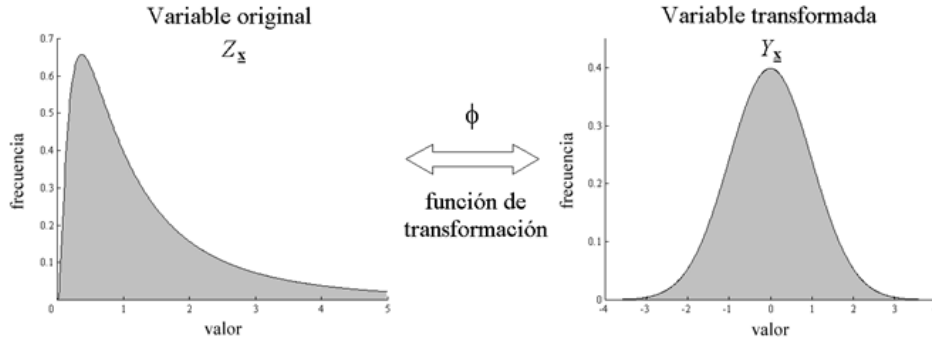
Para el estudio de leyes en la industria minera, es común la utilización de simulaciones condicionales, siendo las simulaciones no condicionales sólo utilizadas en etapas preliminares en la construcción de éstas. Al generar diferentes escenarios, es factible generar diversos planes de mina estimando los mejores y peores casos.

### 2.3.2. *Cosimulación multi-gaussiana*

El caso particular multi-Gaussiano, se puede desglosar en las siguientes etapas [1] [2] [10]:

1.- *Desagrupamiento:* Se debe comenzar con un análisis de los datos originales de tal modo de corregir las distorsiones estadísticas provocadas por el agrupamiento de muestras [19].

2.- *Transformación Gaussiana (Anamorfosis):* Por lo general se trabaja con distribuciones asimétricas bastante alejadas de un modelo Gaussiano regular, por lo cual se debe realizar una transformación llamada “anamorfosis” que logra generar una distribución Gaussiana a partir de la distribución original, logrando establecer una media igual a cero y una varianza de uno.



**Figura 10: Transformación Gaussiana (Anamorfosis).**

3.- *Test de adecuación de la hipótesis multi-Gaussiana:* Para lograr generar una correcta validación de modelo multi-Gaussiano se deben realizar los tests pertinentes. [1] [6] [10]

1° Test: Nubes de correlación diferida.

Considerando un par de valores Gaussianos  $(Y(x), Y(x+h))$  en dos sitios separados por un vector  $h$ . Las curvas de isodensidad corresponden a elipses concéntricas, tendiendo a circulares cuando la norma de  $h$  es muy grande.

2° Test: Comparación entre variogramas y madogramas.

El madograma o variograma de orden 1 se define para un vector  $h$  de la siguiente manera:

$$\gamma_1(h) = \frac{1}{2} E\{|Y(x+h) - Y(x)|\}$$

Dado que la distribución multi-Gaussiana está enteramente caracterizada por la función de covarianza, se puede establecer la siguiente relación:

$$\frac{\sqrt{\gamma(h)}}{\gamma_1(h)} = \sqrt{\pi} \approx 1,77$$

3° Test: Variograma de indicadores.

Existe una relación entre el variograma de la variable Gaussiana y el variograma  $\gamma_{I,Y}(h)$  de la variable indicador. Con  $G(\cdot)$  como función de distribución Gaussiana estándar se define el variograma  $\gamma_{I,Y}(h)$  de la variable indicador de la siguiente manera.

$$\gamma_{I,y}(h) = G(y)[1 - G(y)] - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\arcsen[1-\gamma(h)]} \exp\left[-\frac{y^2}{1 + \sen\theta}\right] d\theta$$

El test propuesto consiste en los siguientes pasos:

- 1) Modelar el variograma  $\gamma(h)$  de los datos Gaussianos.
- 2) Deducir el variograma  $\gamma_{I,y}(h)$  del indicador asociado a un determinado umbral  $y$ .
- 3) Codificar los datos Gaussianos en indicador (0 ó 1) según si superan o no el umbral  $y$ .
- 4) Calcular el variograma experimental de los datos de indicador.
- 5) Comparar este variograma experimental con la expresión teórica obtenida en el paso 2).
- 6) Repetir el procedimiento (pasos 2 a 5) para varios valores del umbral  $y$ .
- 7) Concluir si los variogramas teóricos de indicador se ajustan razonablemente bien a los variogramas experimentales.

4.- *Análisis variográfico conjunto de las variables Gaussianas:* Durante este análisis se debe identificar las posibles anisotropías presentes y sus direcciones, establecer los variogramas experimentales correspondientes para su posterior modelación mediante un modelo lineal de correogionalización. Este modelo implica algunas restricciones en cuanto a los parámetros de los variogramas directos y cruzados de las variables Gaussianas.

5.- *Co-simulación de las variables:* Se define el algoritmo que generará las realizaciones condicionadas a los valores disponibles. Uno de los más conocidos corresponde al “método secuencial Gaussiano” [2] [10]. Se debe establecer una grilla en la cual se realizarán las simulaciones, siendo esta grilla de diversos tamaños dependiendo de la vecindad de análisis. Además de este método de simulación, existen otros como [1] [10] [13]:

- Método de bandas rotantes
- Método de descomposición matricial
- Método de convolución
- Método espectral discreto y continuo.

6.- *Transformación inversa:* Se transforman esta vez los valores Gaussianos simulados a los valores originales utilizando la inversa de la anamorfosis usada anteriormente.

### 2.3.3. Consideraciones con caso de estudio

En base al caso de estudio que se analizará, cabe mencionar los problemas y dificultades que se asoman:

*Relación de desigualdad:* El modelo multi-Gaussiano también está limitado para reproducir relaciones de desigualdad entre variables simuladas. Es por lo que una solución consiste en realizar un cambio de variable, como para el caso de estudio, cambiar la variable ley de cobre soluble por una nueva denominada solubilidad [7], debido a que libera esta variable de la desigualdad y lo acota a pertenecer al intervalo entre 0 y 1.

### 2.3.4. Simulación usando transformación condicional paso a paso

Como una manera de abordar el problema de co-simular variables ligadas por una desigualdad, se presenta esta variante que, a diferencia de otras simulaciones, las realizaciones se basan en la priorización de una variable primaria, o de interés, por sobre otra variable denominada secundaria. Esta última se debe conocer en todos los sitios donde existan datos primarios, por lo que en ciertas ocasiones (muestreos heterotópicos) es necesario una simulación previa de dichos datos [14].

La transformación condicional paso a paso elimina toda correlación característica entre las variables, produciendo modelos no correlacionados, pero pueden ser dependientes para un vector de separación  $h=0$ . La co-simulación puede proceder en una o dos formas:

- Asumiendo que las correlaciones cruzadas son nulas o despreciables para  $h \neq 0$ .
- Ajustando los variogramas simples y cruzados con un modelo lineal de correogionalización.

El primer caso simplifica los procesos de co-simulación a simulación independiente de las variables transformadas. La correlación entre las variables es reproducida durante la transformación de vuelta.

El procedimiento propuesto por Leuangthong y Deutsch [14] se puede desglosar de la siguiente manera:

1.- *Revisión general de los datos:* Es preciso conocer las variables con las cuales se estará trabajando.

2.- *Jerarquización de variables:* Se realiza una categorización jerárquica de las variables presentes, estableciendo la variable primaria y la secundaria, dándole prioridad a la que posee menor reproducibilidad de información.

3.- *Transformación Gaussiana:* Se procede con la transformación Gaussiana de la variable primaria ( $z_1$ ):

$$Y_1 = G^{-1}[F_1(z_1)]$$

Donde:

- $G(y)$  es la función de distribución Gaussiana de media 0 y varianza 1.
- $F_1(z)$  es la función de distribución de la variable primaria.
- $Y_1 = \{Y_1(x), x \in D\}$  es la función aleatoria que representa a la variable transformada.

De la misma manera se procede a transformar la variable secundaria condicionándola por las clases de la variable primaria:

$$Y_2 = G^{-1}[F_{2|1}(z_2|z_1)]$$

4.- *Análisis exploratorio y variográfico:* Una vez transformadas las variables originales en variables Gaussianas se realiza en estudio exploratorio y variográfico correspondiente.

5.- *Simulación de la variable secundaria:* Como se mencionó, una de las condiciones para establecer esta metodología era tener una información completa de la variable secundaria en los sitios con valores primarios, es por esta razón que se debe simular esta variable en los sitios correspondientes.

6.- *Simulación de la variable primaria:* La simulación de la variable primaria se realiza luego de tener la variable secundaria simulada. Durante estas realizaciones no es necesario condicionar el resultado primario con respecto a la variable secundaria, debido a que la hipótesis de Markov [2] [10] menciona que el valor primario es linealmente dependiente del valor secundario, por lo que sólo es necesario el valor secundario del sitio y

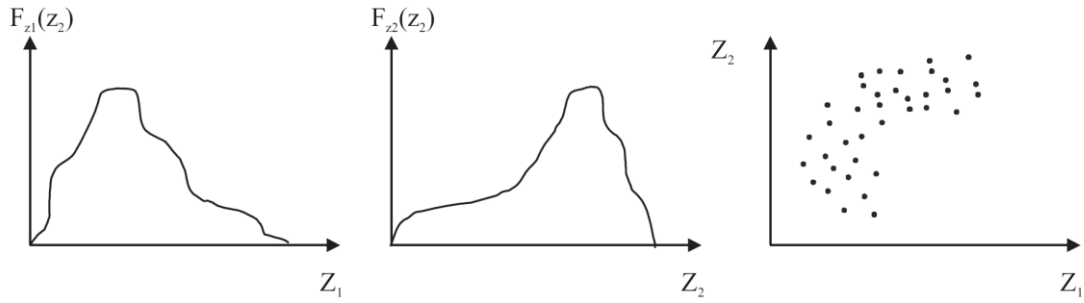
los datos primarios colindantes según la vecindad, excepto para la transformación inversa donde la variable secundaria si es necesaria.

*7.-Construcción de función de distribución condicional:* Es necesario en este punto construir una función de distribución condicional para la variable primaria. En el caso en los cuales no se pueda crear dicha función, se procede a simular con la hipótesis de Markov basada en la variable secundaria.

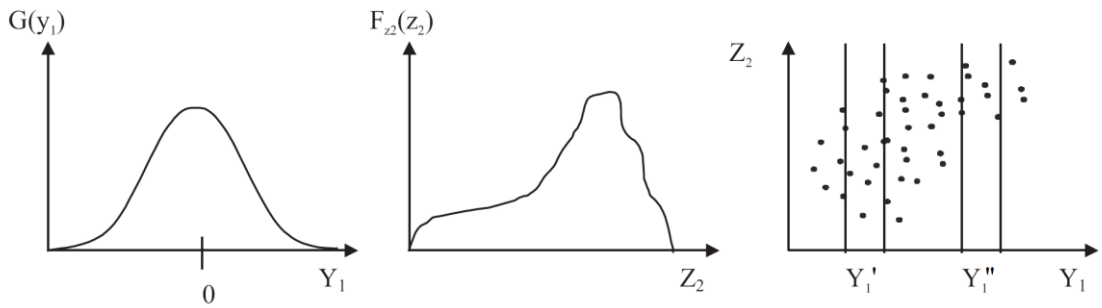
*8.-Transformación inversa:* Una vez terminada la simulación es necesario volver a obtener los valores en las condiciones iniciales del estudio, es por esto que se realiza una transformación inversa de los valores Gaussianos mediante las anamorfosis inversas utilizadas anteriormente.

Se puede apreciar en el siguiente esquema la evolución para dos variables, siendo  $Z_1$  la variable primaria y  $Z_2$  la secundaria, según la metodología recién mencionada.

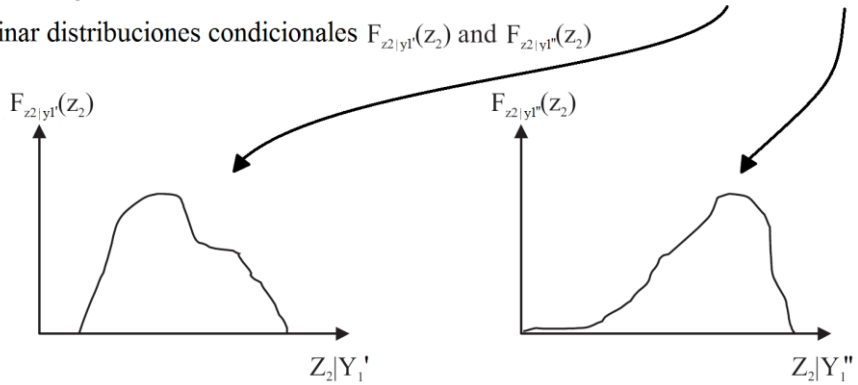
a) Datos iniciales



b) Transformación normal de  $Z_1$  a  $Y_1$



c) Determinar distribuciones condicionales  $F_{z_2|y_1'}(z_2)$  and  $F_{z_2|y_1''}(z_2)$



d) Transformación condicional  $Z_2|Y_1$ , usando las distribuciones condicionales correspondientes

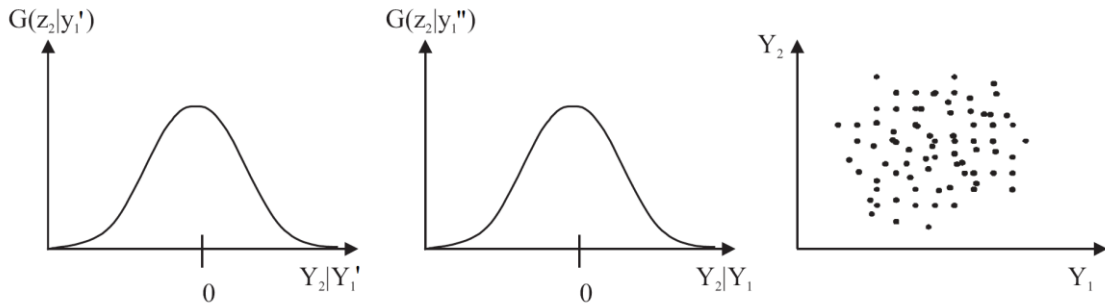


Figura 11: Transformación condicional paso a paso para dos variables [14].

## 2.4. Modelamiento de distribuciones

Tanto para las variables originales como para ciertas relaciones entre variables, será necesario el uso de distribuciones particulares [17] [18]. En el modelo propuesto en este trabajo, se hará uso de las siguientes distribuciones.

### 2.4.1. Distribución Gamma

Este modelo corresponde a una generalización del modelo Exponencial. Su densidad de probabilidad definida en  $\mathbb{R}_+^*$  es la siguiente:

$$\forall y > 0, \quad f(y) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\lambda y}$$

Con

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

El parámetro  $\alpha$  es un parámetro de forma que determina el coeficiente de asimetría de la distribución, y  $\lambda$  es un parámetro de escala.

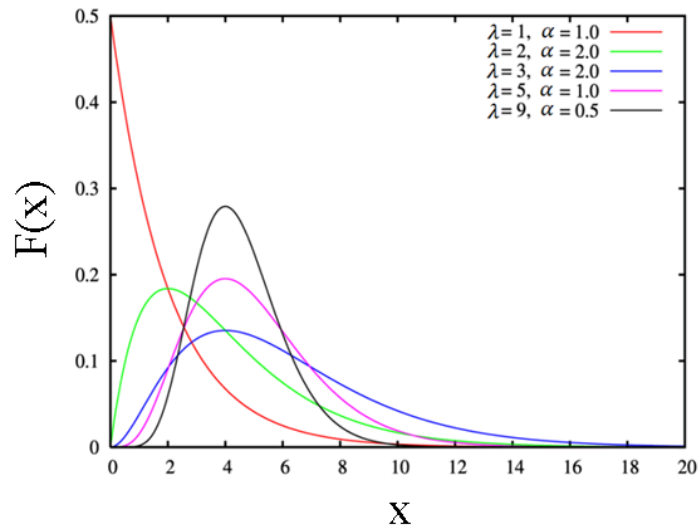


Figura 12: Distribución Gamma.

Para el caso que se utilizará durante este trabajo se considerará una distribución Gamma con el parámetro  $\lambda$  igual a 1 (distribución gamma estándar), la cual se comporta de la siguiente manera:



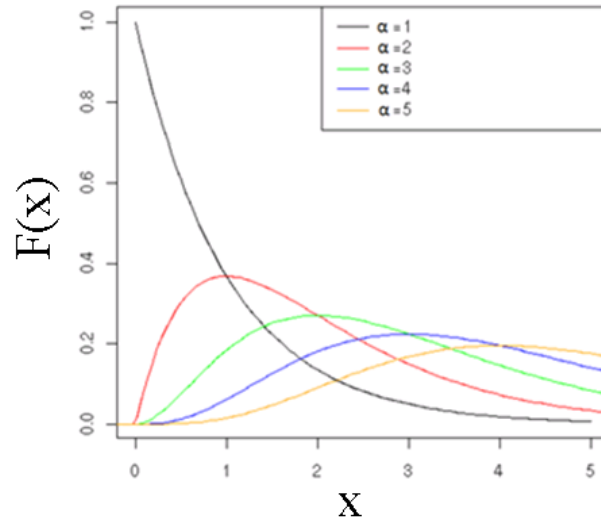


Figura 13: Distribución Gamma con parámetro  $\lambda = 1$ .

La distribución Gamma tiene las siguientes propiedades:

- Su esperanza es igual a  $\frac{\alpha}{\lambda}$
- Su varianza es igual a  $\frac{\alpha}{\lambda^2}$

### 2.4.2. Distribución Beta

En estadística la distribución Beta es una distribución de probabilidad continua con dos parámetros de forma ( $\alpha$  y  $\beta$ ) mayores a 0, cuya función de densidad para valores entre 0 y 1 es:

$$0 < x < 1, \quad f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

La combinación de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  da forma a diversas densidades de probabilidad que se presentan en el intervalo  $[0,1]$ . Como ejemplo, para  $\alpha=\beta=1$ , la distribución beta coincide con la distribución uniforme en  $[0,1]$ .

Las funciones de densidad de probabilidad y de distribución para diversos parámetros de forma se ven a continuación:

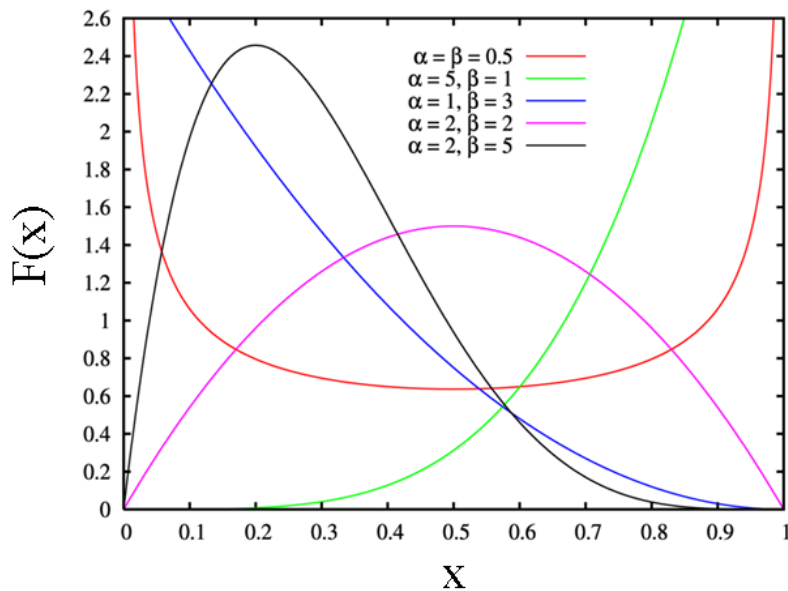
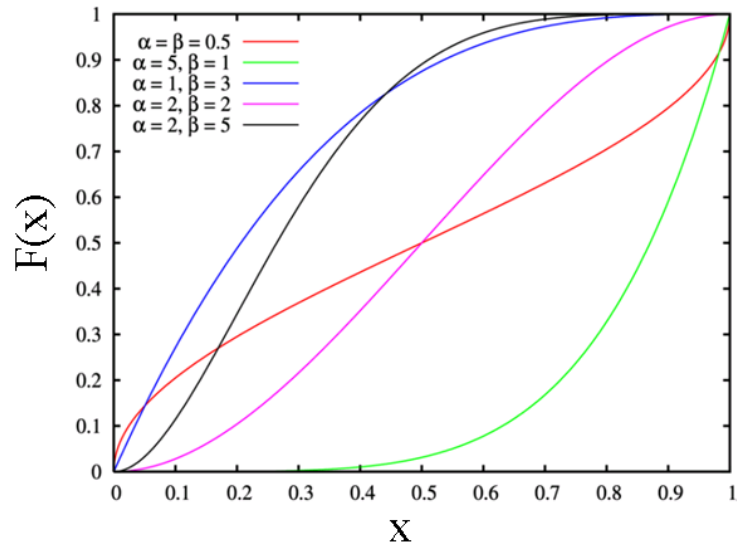


Figura 14: Función de densidad de probabilidad de una Beta.



**Figura 15: Función de distribución de probabilidad.**

Las propiedades de esta distribución son las siguientes:

- La esperanza es igual a  $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$
- La varianza es igual a  $\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$
- Cabe mencionar que cuando los parámetros de forma,  $\alpha$  y  $\beta$ , son iguales a uno, se obtiene la distribución uniforme.

### 3. METODOLOGÍA

A continuación se presenta la metodología que se utilizará para desarrollar el trabajo pretendiendo, finalmente generar modelos de bloques para leyes de cobre total y cobre soluble.

- 1- Estudio exploratorio de datos.
- 2- Anamorfosis Gamma y modelamiento.
- 3- Anamorfosis Gaussiana y estudio variográfico.
- 4- Co-simulación y transformación inversa.
- 5- Validaciones y análisis.

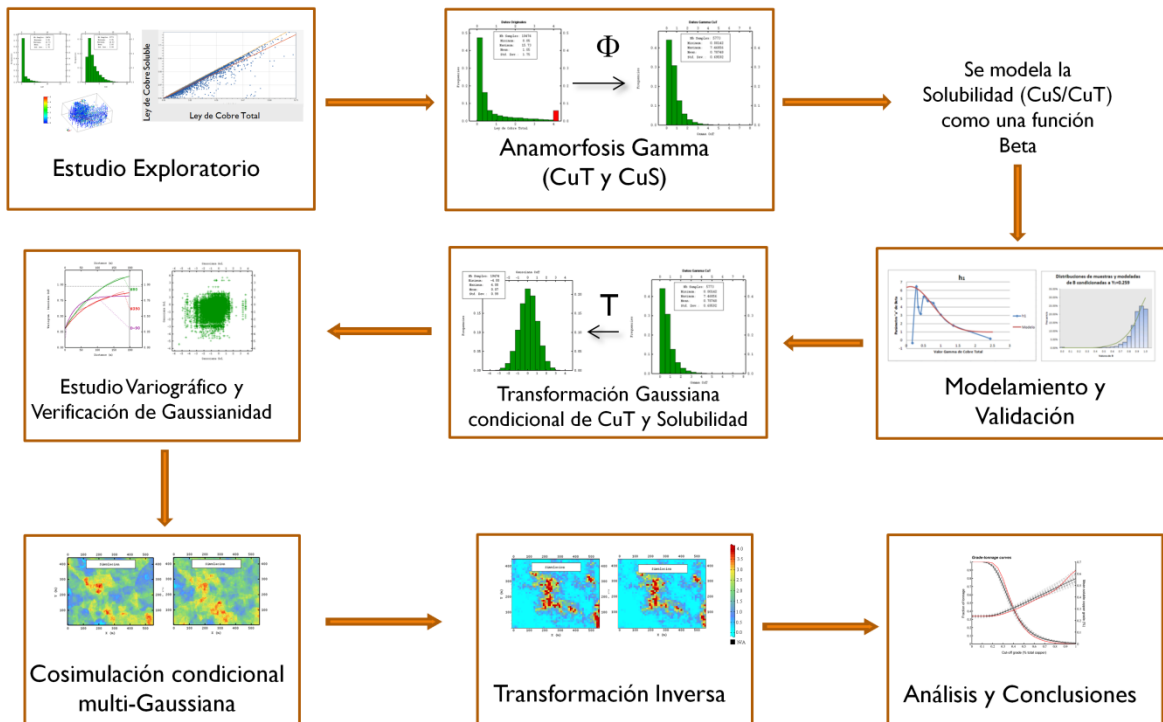


Figura 16: Esquema de metodología a emplear.

### 3.1. Estudio exploratorio de datos

En una primera instancia se realizará un estudio exploratorio de los datos de sondeos disponibles, con la finalidad de conocer las estadísticas básicas y el comportamiento de las poblaciones existentes, considerando la presencia de posibles derivas en las tres direcciones, con el propósito de manejar una eventual no estacionaridad. Se jerarquizarán las variables de la siguiente manera:

- Variable Primaria: Corresponderá a la variable total (ley de cobre total).
- Variable Secundaria: Corresponderá a la variable recuperable (ley de cobre soluble).

Como se tendrá que enfrentar el problema del muestreo preferencial debido a que el muestreo de la variable secundaria se realiza con mayor interés en la zona de mejores leyes, se deberá realizar un desagrupamiento correspondiente.

### 3.2. Anamorfosis Gamma y modelamiento

La variable primaria  $Z_1$  (ley de cobre total) se transformará en una distribución teórica Gamma (estableciendo su parámetro de forma  $\alpha$  de manera implícita en una primera instancia, para luego ir ajustándola si los modelos posteriores son pobres), mediante una anamorfosis. Esta última se puede deducir por expansiones de polinomios de Laguerre [12] o por vía de tabla de transformación [8].

$$Z_1 = \phi_\alpha(Y_1)$$

Luego se transforma la variable secundaria  $Z_2$  (ley de cobre soluble) de manera análoga:

$$Z_2 = \phi_\alpha(Y_2)$$

Considerando que la anamorfosis  $\phi_\alpha$  utilizada es no decreciente, la desigualdad  $Z_2 \leq Z_1$  se puede extender a  $0 \leq Y_2 \leq Y_1$ , con lo cual se puede establecer la siguiente razón:

$$\beta = \frac{Y_2}{Y_1}$$

$\beta$  es una variable aleatoria entre 0 y 1, la cual se definirá con una función de probabilidad Beta de parámetros “a” y “b”. Con esto, se puede establecer que la distribución conjunta ( $Y_1, Y_2$ ) es [15] [20]:

$$f_{a,b}(y_1, y_2) = \frac{y_2^{a-1} \times (y_1 - y_2)^{b-1} e^{-y_1}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$$

Una manera más general es considerar que la distribución de  $\beta$  depende de la variable primaria  $Y_1$  y de una posible deriva vertical, por lo cual se estudiarán dos modelos, donde sus parámetros de forma (“a” y “b”) se establecerán de la siguiente manera:

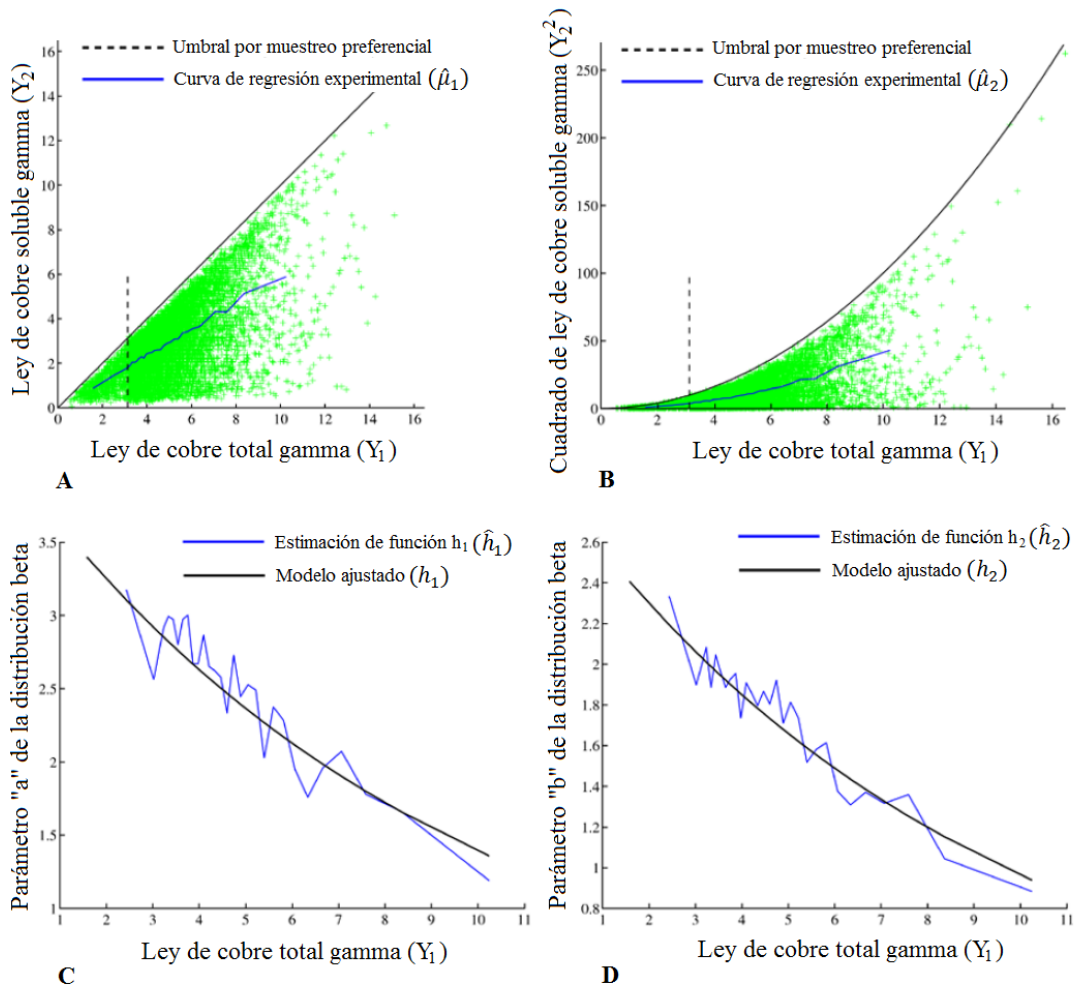
- Modelo sin deriva:  $a = h_1(y_1)$   
 $b = h_2(y_1)$
- Modelo con deriva:  $a = h_1(y_1, \text{elevación})$   
 $b = h_2(y_1, \text{elevación})$

Ambas funciones  $h_1$  y  $h_2$  se determinan posteriormente considerando los dos primeros momentos ( $\mu_1$  y  $\mu_2$ ) de la variable secundaria transformada ( $Y_2$ ). A continuación se muestran los momentos para  $Y_2$  condicional a  $Y_1=y_1$ , y las funciones  $h_1$  y  $h_2$ .

$$\begin{aligned} \forall n > 0, \mu_n(y_1) &= E(Y_2^n | Y_1 = y_1) \\ &= E(\beta^n | Y_1 = y_1) y_1^n \\ &= \frac{\Gamma(h_1 + n) \Gamma(h_1 + h_2)}{\Gamma(h_1 + h_2 + n) \Gamma(h_1)} y_1^n \end{aligned}$$

$$h_1 = \frac{\frac{\mu_1}{y_1} \left( \frac{\mu_1}{y_1} - \frac{\mu_2}{y_2} \right)}{\frac{\mu_2}{y_2} - \left( \frac{\mu_1}{y_1} \right)^2} \qquad h_2 = \frac{\left( 1 - \frac{\mu_1}{y_1} \right) \left( \frac{\mu_1}{y_1} - \frac{\mu_2}{y_2} \right)}{\frac{\mu_2}{y_2} - \left( \frac{\mu_1}{y_1} \right)^2}$$

Posteriormente se ajustan estas funciones con regresiones experimentales tal como se puede apreciar a continuación:



**Figura 17: Regresiones experimentales entre variable primaria gamma  $Y_1$  y (A) variable secundaria gamma  $Y_2$  y (B) cuadrado de variable secundaria gamma  $Y_2^2$ . Curvas de ajuste de funciones (C)  $h_1$  y (D)  $h_2$ .**

En primer lugar se obtienen los dos primeros momentos experimentales ( $\hat{\mu}_1$  y  $\hat{\mu}_2$ ) mediante las regresiones lineales entre la variable primaria gamma (transformada gamma de ley de cobre total) y la variable secundaria gamma (transformada gamma de ley de cobre soluble) de orden 1 y de orden 2 respectivamente. Con los momentos generados se obtienen las funciones experimentales de  $h_1$  y  $h_2$  ( $\hat{h}_1$  y  $\hat{h}_2$ ), las cuales se modelan posteriormente con curvas exponenciales.

Una vez terminada esta parte se procederá a realizar las validaciones correspondientes para ver si los modelos obtenidos son lo suficientemente convincentes para continuar o si se debe comenzar nuevamente pero con un parámetro de forma  $\alpha$  para la distribución Gamma distinto al utilizado inicialmente.

### 3.3. Anamorfosis Gaussiana y estudio variográfico

Una vez obtenidos los modelos anteriores se procede con la transformación de la variable primaria (ley de cobre total) en una distribución Gaussiana estándar, al igual que la razón entre las variables definida como una Beta, tal como se ve a continuación:

$$Y_1 = \phi_1(T_1)$$

$$\beta = \phi_{1|2}(T_2|T_1)$$

Recordando que la variable Beta puede depende tanto de  $Y_1$  como de la elevación.

En la práctica, al utilizar el programa MATLAB, las variables  $Y_1$  y  $\beta$  se transforman en distribuciones uniformes entre 0 y 1, para posteriormente transformarlas en Gaussianas.

$$Y_1 \text{ (Gamma } \alpha) \xrightarrow{G_\alpha} \text{ Uniforme } [0,1] \xrightarrow{G^{-1}} T_1 \text{ Gaussiana } N(0,1)$$

$$\beta \xrightarrow{\beta h_1 h_2} \text{ Uniforme } [0,1] \xrightarrow{G^{-1}} T_2 \text{ Gaussiana } N(0,1)$$

Posteriormente se procede con el estudio variográfico correspondiente de las variables Gaussianas, estudiando tanto los variogramas directos como cruzados y ajustando un modelo de correogionalización.

El estudio variográfico se debe realizar considerando que el muestreo preferencial puede causar problemas de sesgos en los variogramas de las variables Gaussianas. En el caso de estimarse independientes ambas variables entre sí, se pueden modelar de manera directa ambas variables, pero de lo contrario, se debe realizar variogramas condicionales, pudiendo seguir la metodología propuesta por Emery [9].



### 3.4. Co-simulación y transformación inversa

Luego se realizan las simulaciones condicionales correspondientes de las variables Gaussianas  $T_1$  y  $T_2$ , pudiendo utilizarse algoritmos de simulación Gaussiana secuenciales, espectrales, de bandas rotantes, entre otros. Una vez realizado esto se recuperan las variables iniciales a través de una serie de transformaciones inversas, las cuales se pueden apreciar a continuación.

$$(T_1, T_2) \rightarrow (Y_1, \beta) \rightarrow (Z_1, Z_2)$$

### 3.5. Validaciones y análisis

Se procede con la validación final del estudio del yacimiento óxido cuprífero, estableciendo la efectividad de la metodología propuesta, midiendo el comportamiento de los modelos generados en relación a los valores originales y sus comportamientos, tales como la solubilidad en relación a la elevación.

Se estudiará las diferencias generales entre los dos modelos generados (modelo sin deriva y con deriva vertical) comparándolos entre sí, y entre un tercer modelo de bloques generado por co-kriging. Se determina utilizar un co-kriging simple debido al problema de muestreo preferencial que existe con las leyes muy bajas, de tal modo que se considera una ley media para las leyes de cobre soluble como una ponderación entre la media conocida por los datos originales y una estimación en aquellos lugares donde sólo se conoce la ley de cobre total, manteniendo la razón entre la ley de cobre soluble y de cobre total ( $CuS/CuT$ ) en todo el yacimiento. En otras palabras, se mide la solubilidad en los lugares conocidos y esa razón se utiliza para calcular la ley de cobre soluble donde sólo se conozca la ley de cobre total.

Se concluye con un análisis de modelos de bloques, que con ciertos criterios de procesamiento, podría establecer las rutas de envío a las plantas correspondientes.

## 4. CASO DE ESTUDIO: YACIMIENTO DE COBRE

### 4.1. Estudio exploratorio de datos

El objetivo principal de este estudio, consiste en analizar los datos disponibles que se utilizan para realizar este trabajo, determinando estadísticas básicas y ciertos criterios para la toma de decisiones en la construcción posterior de los modelos.

Se posee una base de datos heterotópica de un yacimiento óxido cuprífero con 19.474 datos, de los cuales existe un marcado muestreo preferencial, al sólo conocer la ley de cobre soluble en 5.773 datos. Esto se debe a que en sitios donde la ley de cobre total era muy baja, se limitaron a una cierta cantidad de análisis químicos.

Los datos tienen un largo de compósito aproximado de un metro y están distribuidos dentro de un volumen de 530 [m] x 420 [m] x 190 [m] en las direcciones Este, Norte y Cota, en una malla semi regular aproximadamente de 25 [m] x 25 [m], excepto en la zona de mejores leyes donde la malla se vuelve más fina (aproximadamente 10[m] x 10[m]). En la sección de anexos 8.1.1 se ven los perfiles de las leyes de cobre total.

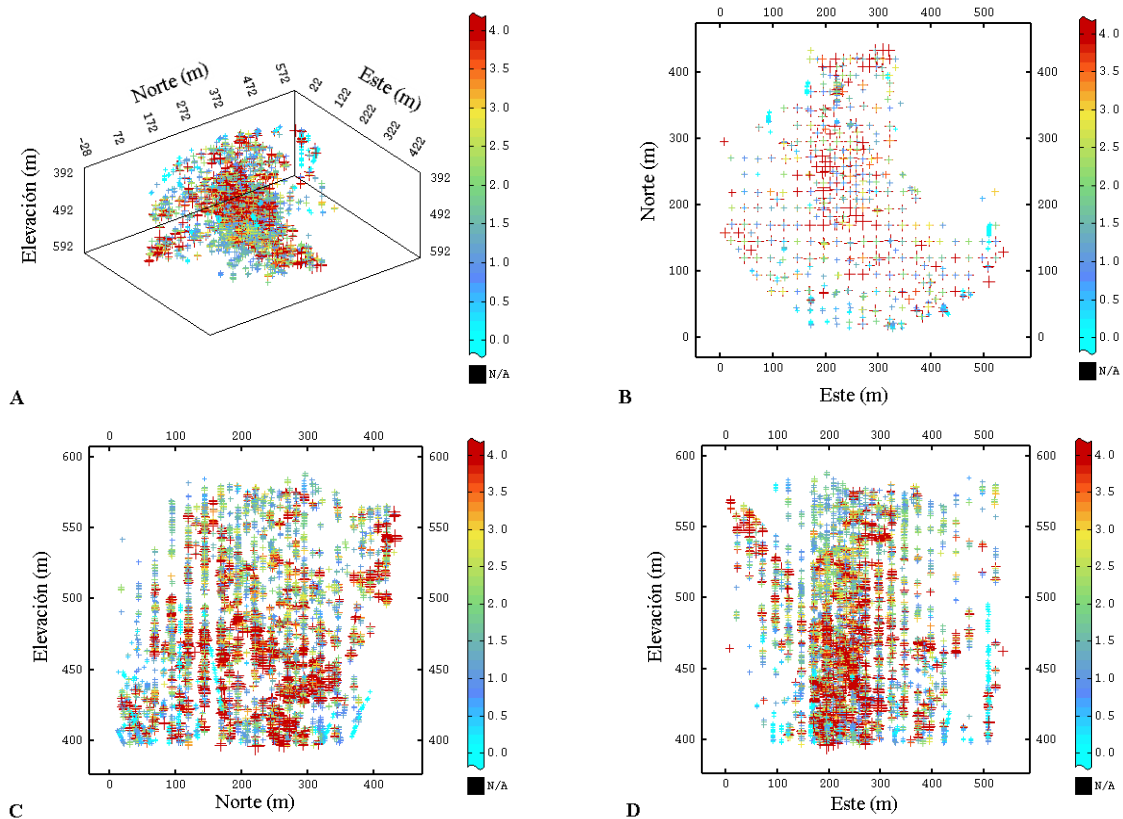
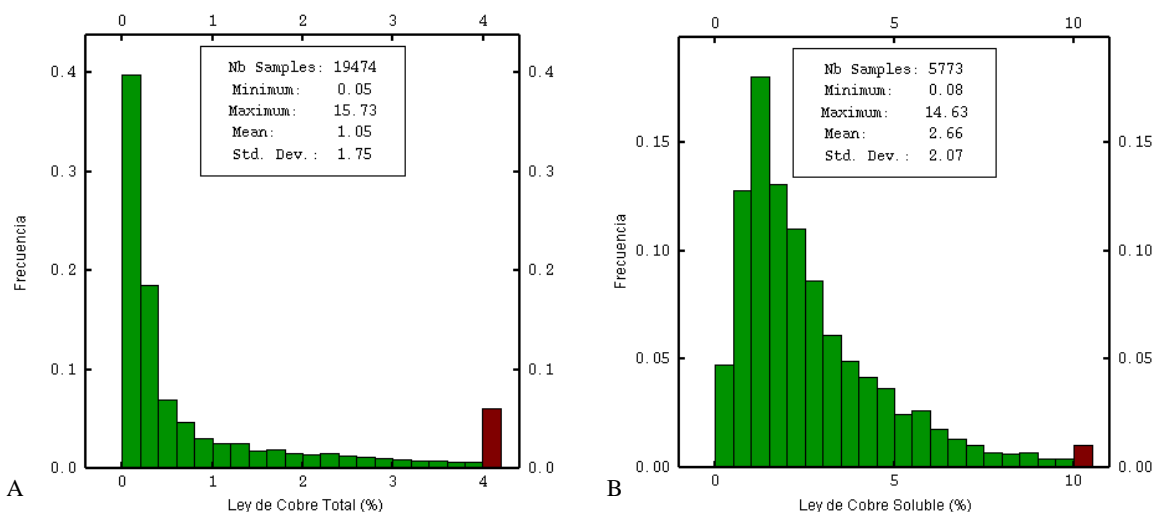


Figura 18: (A) Vista isométrica de sondajes con leyes de cobre soluble. (B), (C) y (D) perfiles de los sondajes con leyes de cobre soluble.

Las estadísticas básicas junto con los histogramas de los datos originales se ven a continuación, los cuales muestran claramente cómo el muestreo preferencial se genera en aquellas leyes de cobre total menores a un cierto umbral.

**Tabla 1: Estadísticas básicas de la base de datos de cobre.**

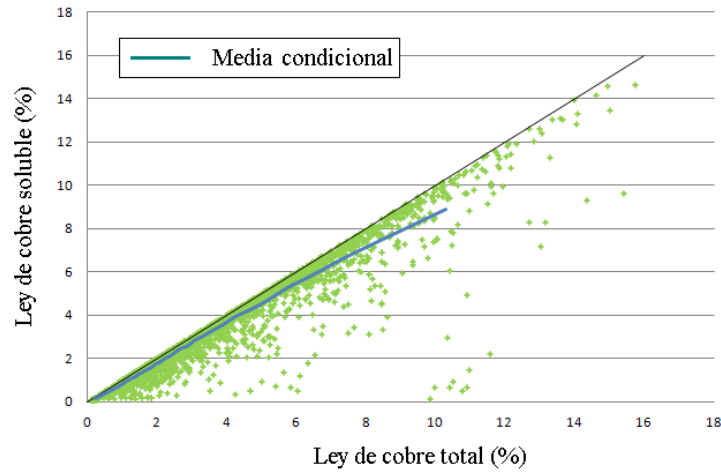
Variable	Nº de datos	Media (%)	Mínimo (%)	Máximo (%)	Desviación Estándar (%)	Varianza	Correlación con Cobre Total
Cobre Total	19.474	1,05	0,05	15,73	1,75	3,07	
Cobre Total (Donde se conoce CuS)	5.773	2,97	0,09	15,73	2,24	5,01	
Cobre Soluble	5.773	2,66	0,08	14,63	2,07	4,30	0,96



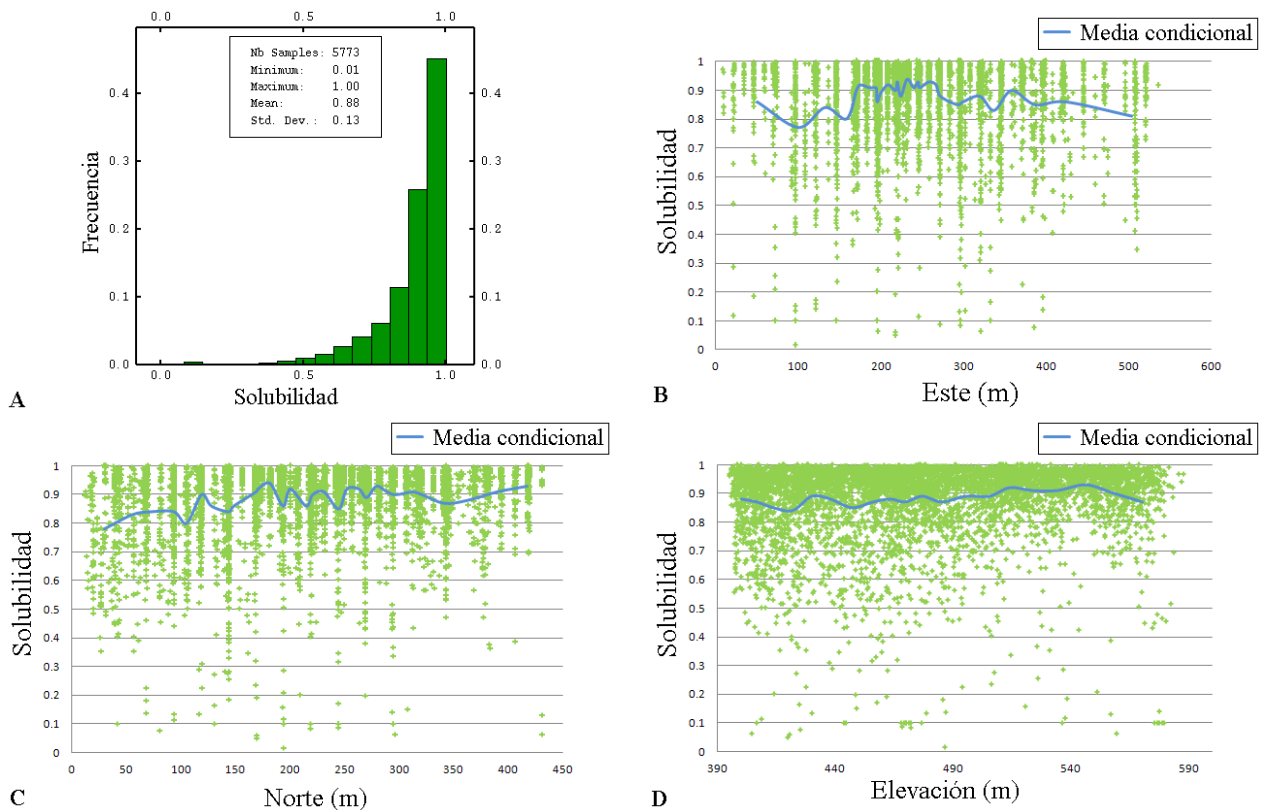
**Figura 19: Histogramas de (A) ley de cobre total y (B) ley de cobre soluble, de datos originales.**

La heterotopía presente en la base de datos corresponde a un 29,64%. En otras palabras, solo un 29,64% de los datos totales poseen información tanto de la ley de cobre total como de la ley de cobre soluble. Sumado a lo anterior, se puede apreciar cómo el muestreo preferencial altera las leyes medias, pues las leyes medias de cobre total aumentan (de 1,05% a 2,97%) al considerar las muestras heterotópicas.

Los datos muestran claramente una fuerte dependencia, en la cual las leyes de cobre soluble no superan las leyes de cobre total, sumado a lo mostrado por el coeficiente de correlación (0,96).



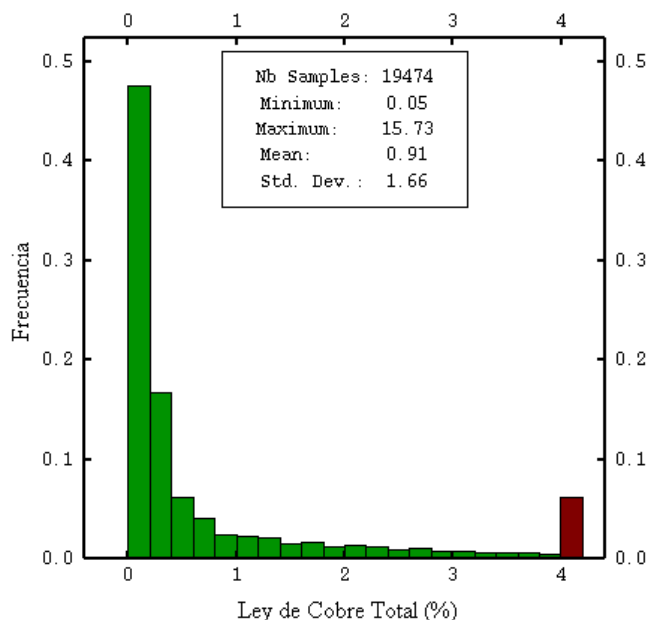
**Figura 20: Diagrama de dispersión entre leyes de cobre total y soluble.**



**Figura 21: (A) Histograma de la razón de solubilidad. (B), (C) y (D) diagramas de dispersión de solubilidad vs coordenadas.**

En la sección de anexos 8.1.2 se pueden ver el comportamiento de las diversas variables en relación a las coordenadas.

Con la finalidad de poder trabajar con datos que no generen problemas de información debido al sobre muestreo en ciertos lugares de mayor interés en la campaña de sondeos, se realiza un desagrupamiento de celdas, para un tamaño de celda de 25 metros, debido a que esta es la distancia de la malla regular en aquellas zonas no sobre muestreadas. En la sección de anexos 8.2 se muestra mayor detalle en relación al desagrupamiento utilizado.



**Figura 22: Histograma desagrupado de leyes de cobre total.**

Se puede observar cómo disminuye la ley media de cobre total, de 1,05% a 0,91%, corroborando que las zonas de altas leyes poseen una mayor densidad de sondeos en relación a las de menores leyes.

## 4.2. Anamorfosis Gamma y modelamiento

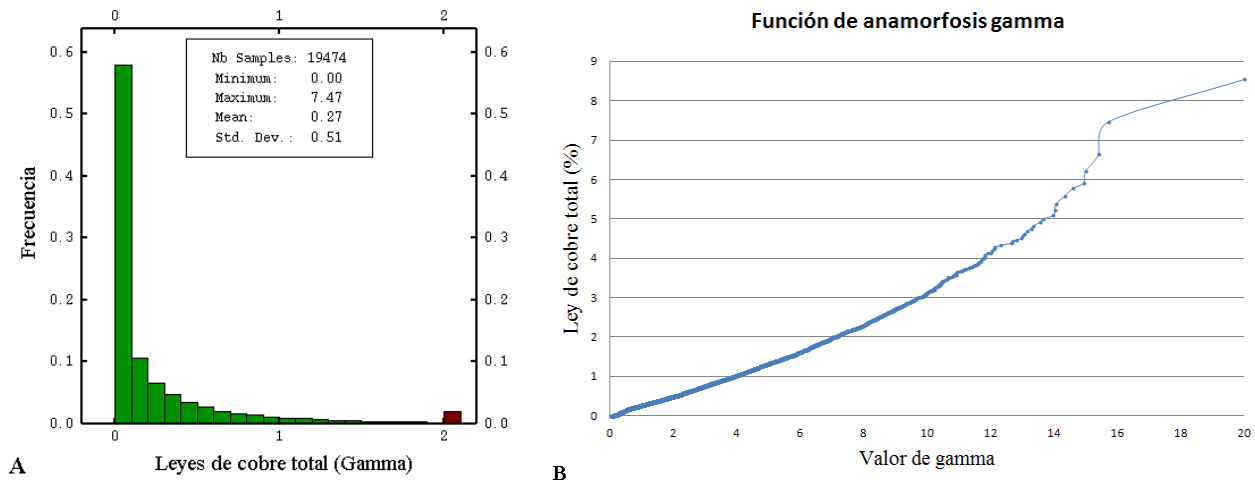
Con la finalidad de representar la solubilidad como una distribución Beta, mediante una anamorfosis las variables originales (ley de cobre total y soluble) se transforman a variables de distribución Gamma. La transformación utilizada, sigue la metodología presentada por Emery (2006), donde a partir de las leyes de cobre total se calcula una tabla de transformación empírica, para luego generar una función de interpolación lineal por trozos ( $\phi_\alpha$ ). Para conocer todos los valores de la anamorfosis Gamma ( $\phi_\alpha$ ) se interpolan los valores intermedios de la tabla generada, mientras que con funciones exponenciales, se extrapolan los valores de cola.

La transformación Gamma requiere un parámetro de forma  $\alpha$  que determina la asimetría de la densidad de probabilidad gamma. Se estudiaron 6 parámetros distintos.

**Tabla 2: Parámetros de forma utilizados en los casos estudiados.**

Casos	$\alpha$
1	4
2	2
3	1
4	0,5
5	0,25
6	0,1

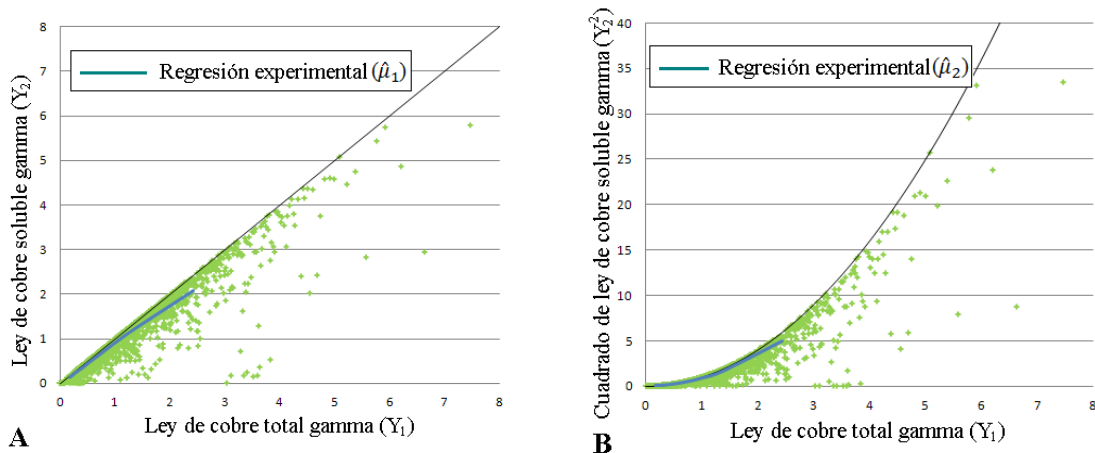
El caso elegido y con el que se continua el estudio, es el caso 5 ( $\alpha = 0,25$ ) debido a que los modelos de forma de la beta obtenidos con los restantes casos, requieren de un modelamiento más complejo. El resto de los casos se ve en la sección de anexos 8.3.



**Figura 23: (A) Distribución de valores de leyes de cobre total transformados en gamma (variable  $Y_1$ ); (B) función de anamorfosis gamma (los puntos son valores experimentales y la línea sólida es la modelada).**

Posteriormente se transforman las leyes de cobre soluble ( $Z_2$ ) en nuevos valores ( $Y_2$ ), por medio de la función generada recientemente. Como la función anamorfosis es siempre creciente, la desigualdad entre las leyes de cobre total y cobre soluble se mantienen ( $Y_1 \geq Y_2$ ). El histograma de la transformada de las leyes de cobre soluble se ve en la sección anexos 8.3

Para determinar los dos primeros momentos ( $\hat{\mu}_1$  y  $\hat{\mu}_2$ ) de  $Y_2$  condicionales a  $Y_1=y_1$ , se obtienen las regresiones experimentales de los diagramas de dispersión de las curvas de  $Y_1$  sobre  $Y_2$  y de  $Y_1$  sobre  $Y_2^2$ , las cuales se ven a continuación:



**Figura 24: Diagrama de dispersión de ley de cobre total gamma ( $\alpha = 0,25$ )  $Y_1$  versus, (A) ley de cobre soluble gamma  $Y_2$  y (B) cuadrado de ley de cobre soluble gamma  $Y_2^2$ .**

Considerando las curvas de regresión obtenidas y lo descrito en la sección 3.2 se pueden obtener los momentos  $\hat{\mu}_1$  y  $\hat{\mu}_2$ , para posteriormente modelar su comportamiento y obtener los parámetros de forma experimentales de la variable Beta ( $h_1$  y  $h_2$ ) que reproduce la solubilidad.

El modelamiento debe cumplir con ciertas restricciones. Como se sabe, los valores que adquieren los parámetros de forma de la beta, generan comportamientos particulares de ésta. Si el primer parámetro de forma “a” toma valores menores a 1, la beta tendrá una forma asintótica en torno a 0, lo cual no es representativo al comportamiento de la solubilidad (Figura 21A).

#### 4.2.1. Modelo sin deriva

Teniendo en consideración las restricciones mencionadas, se realizan los ajustes de los parámetros de forma del modelo sin deriva (modelo donde los parámetros de forma de la beta sólo dependen de la variable primaria, es decir, de la ley de cobre total), el cual es el siguiente.

$$\forall y \in \mathbb{R}_+, \begin{cases} h_1(y_1) = \exp(-1,2474 y_1^2 + 0,2753 y_1 + 1,6842) + 1 \\ h_2(y_1) = \exp(-1,563 y_1 + 0,33904) \end{cases}$$

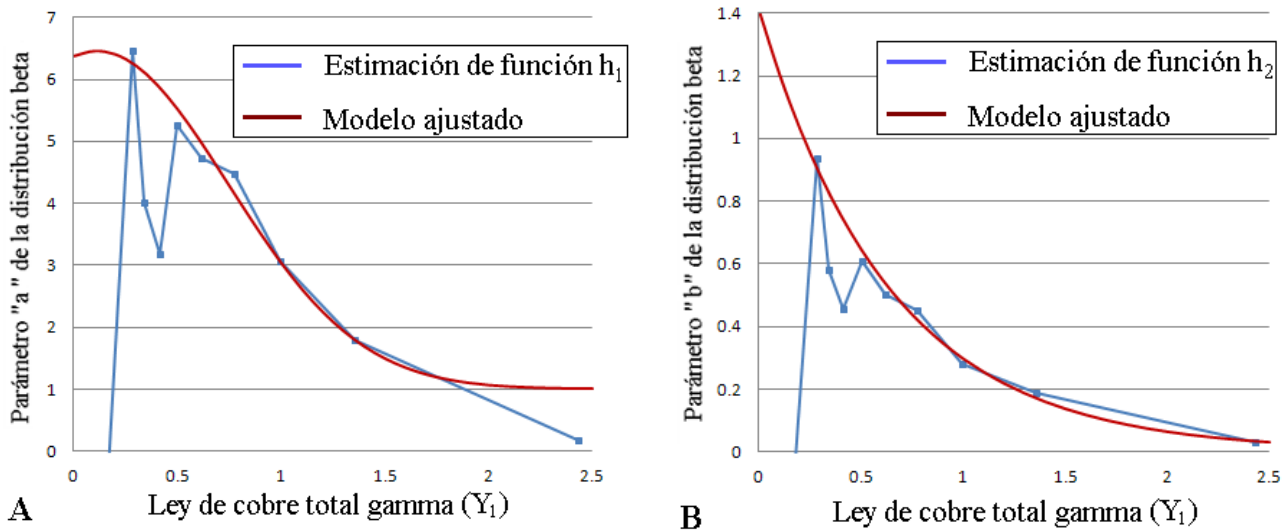


Figura 25: Curvas experimentales y modelos ajustados de: (A) función  $h_1$  y (B) función  $h_2$ .

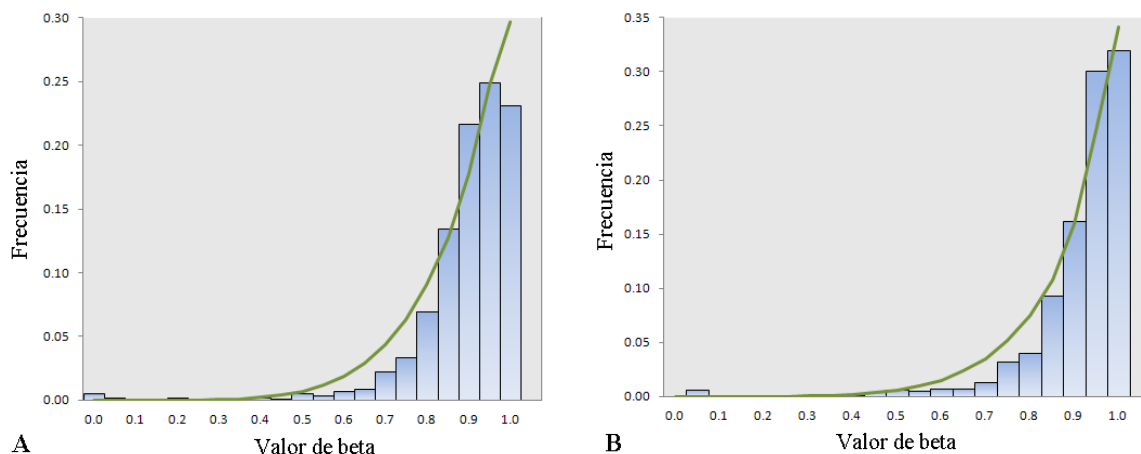
El modelamiento de ambos parámetros omite aquellos valores que se consideren poco representativos (en ambos modelos el primer, tercer y cuarto valor se descartan por considerarse ruido dentro de una tendencia).

Tabla 3: Coefficientes de determinación ( $R^2$ ) de los modelos en relación a valores experimentales.

Modelo	Coefficiente $R^2$	Coefficiente $R^2$ (sin considerar datos despreciados)
$h_1(y_1)$	0.923	0.993
$h_2(y_1)$	0.803	0.996



Con la finalidad de chequear y validar este modelo, se compara la distribución beta de parámetros  $h_1$  y  $h_2$ , con una muestra de datos conocidos de  $\beta = Y_2/Y_1$  condicionado a una cierta ley de cobre total ( $Y_1 = y_1$ ), considerando una holgura en la ley de cobre total, de tal modo de poder contar con una muestra de 1.000 datos y generar una comparación robusta.



**Figura 26: Validaciones de distribución de  $\beta = Y_2/Y_1$  condicionado a: (A)  $Y_1=0,259$  y (B)  $Y_1=0,418$ . Línea verde corresponde a la distribución beta teórica (escalada con un factor de 20).**

Cabe mencionar que las distribuciones teóricas de la figura 26, son reescaladas con un factor de 20 debido a que los histogramas fueron hechos con 20 clases, de este modo, el área abarcada tanto por el histograma como por las curvas es igual a 1.

**Tabla 4: Leyes de cobre total utilizadas para la validación.**

Validación	$y_1$ promedio	$y_1$ menor	$y_1$ mayor	$\Delta y_1$
A	0.259	0.2527	0.3466	0.0939
B	0.418	0.395	0.5555	0.1605

La holgura utilizada para analizar 1.000 datos varía dependiendo de la densidad de datos por sector. En las leyes más bajas (donde se tiene mayor muestras) se utiliza una holgura menor que para leyes de cobre total más altas (donde se tienen menores datos). Las validaciones para leyes más altas se encuentran en la sección de anexos 8.4.

#### 4.2.2. Modelo con deriva

Se considera en esta ocasión, que los parámetros de forma de la distribución beta que reproducen la solubilidad dependen tanto de la ley de cobre total como de la elevación.

Se analizan curvas de regresión (figura 25) con 5, 10 y 20 clases de datos, además de 2 formas de modelamiento para cada clase, con el fin de generar el mejor modelo posible. En el primer modelo (modelo A), se calcula con el método de mínimos cuadrados considerando la dependencia de la ley de cobre total de manera cuadrática (de manera análoga al modelo sin deriva) y la elevación de manera lineal, de modo de generar un modelo como el que se ve a continuación:

$$h_i(y_1, z_h) = \exp(a y_1^2 + b y_1 + c z_h + d) + k$$

Donde  $k$  corresponde a una constante que permite respetar las restricciones de forma de la beta.

El segundo modelo (modelo B) aplica el método de mínimos cuadrados, pero sólo considerando la dependencia de la ley de cobre total, para luego modelar los coeficientes obtenidos en cada nivel de cota (dependiendo del número de clases) con un modelo lineal que dependa de la elevación, como se ve a continuación

$$\begin{aligned} z_{h1}: \quad & h_1(y_1) = \exp(a_1 y_1^2 + b_1 y_1 + c_1) \\ & h_2(y_1) = \exp(d_1 y_1^2 + e_1 y_1 + f_1) \\ \\ z_{h2}: \quad & h_1(y_1) = \exp(a_2 y_1^2 + b_2 y_1 + c_2) \\ & h_2(y_1) = \exp(d_2 y_1^2 + e_2 y_1 + f_2) \\ \\ & \vdots \\ z_{hn}: \quad & h_1(y_1) = \exp(a_n y_1^2 + b_n y_1 + c_n) \\ & h_2(y_1) = \exp(d_n y_1^2 + e_n y_1 + f_n) \end{aligned}$$

Luego se modela cada coeficiente de manera lineal con respecto a la elevación, con lo que permite obtener modelos finales como se ven a continuación:

$$h_i(y_1, z_h) = \exp(a y_1^2 + b y_1 + c y_1^2 z_h + d y_1 z_h + e z_h + f) + k$$

Con lo anterior se generan 6 tipos de modelos, los cuales son los siguientes:

**Tabla 5: Características de modelos generados para el modelamiento con deriva.**

Modelo	Número de clases	Modelamiento
1	5	A
2	5	B
3	10	A
4	10	B
5	20	A
6	20	B

El mecanismo de determinar el modelo con el cual continuar el estudio, corresponde a la selección del modelo que genere una mejor distribución Gaussiana, luego de las transformaciones que conllevan a la co-simulación.

El modelo seleccionado corresponde al modelo 1, es decir, el generado por el mecanismo de mínimos cuadrados considerando la elevación de manera lineal sobre el modelo y no sobre los coeficientes. Los histogramas Gaussianos que permitieron la elección del modelo están en la sección de anexo 8.5.

Finalmente el modelo considerando deriva es el siguiente:

$$\forall y \in \mathbb{R}_+, \begin{cases} h_1(y_1, z_h) = \exp(-2,30356 y_1^2 + 3,48416 y_1 + 0,00141 z_h - 0,70016) + 1 \\ h_2(y_1, z_h) = \exp(-0,16234 y_1^2 - 0,54002 y_1 - 0,00034 z_h - 0,13022) \end{cases}$$

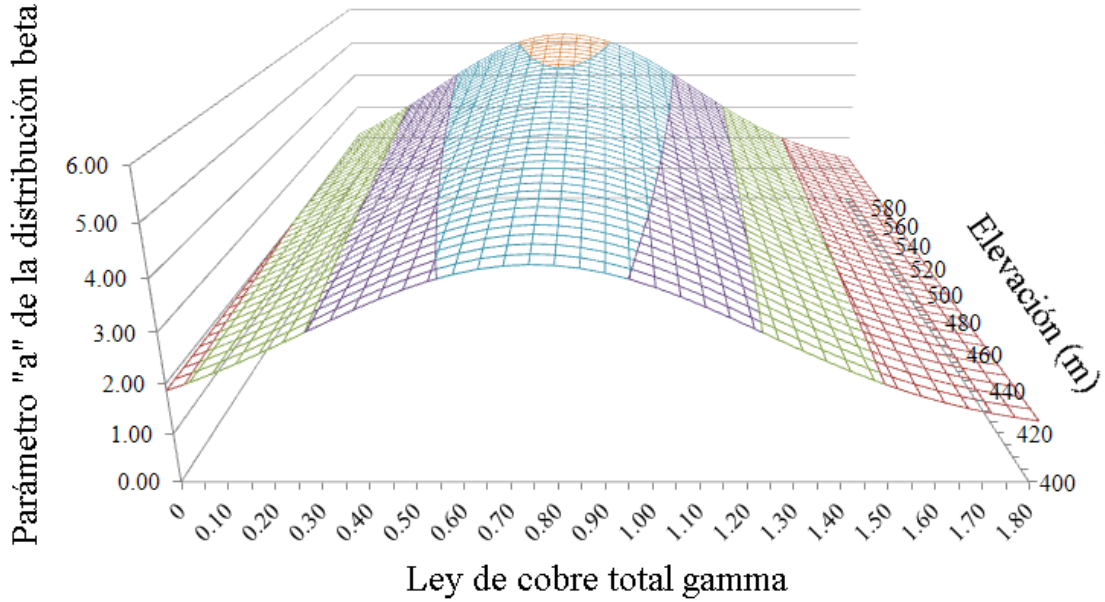


Figura 27: Modelo ajustado de función h1 con deriva vertical.

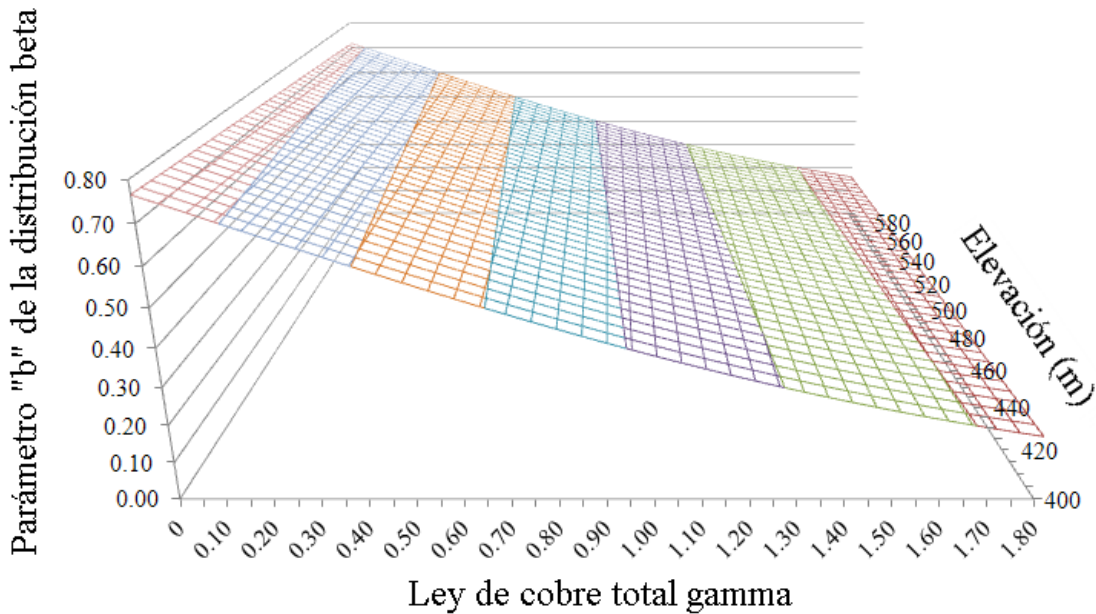
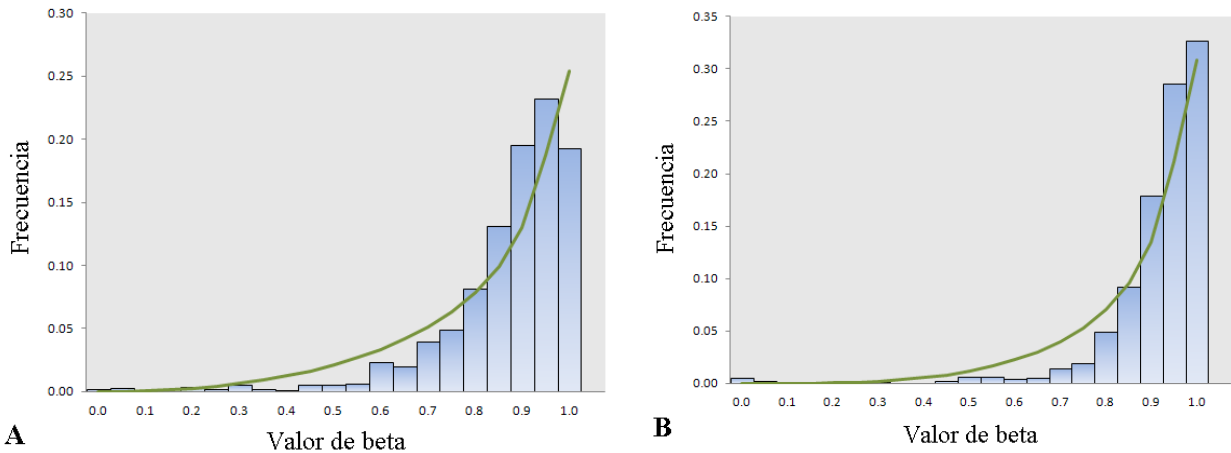


Figura 28: Modelo ajustado de función h2 con deriva vertical.

Finalmente se chequea y valida el modelo comparando la distribución beta de parámetros  $h_1$  y  $h_2$ , con una muestra de datos conocidos de  $\beta = Y_2/Y_1$  condicionado a una cierta ley de cobre total ( $Y_1 = y_1$ ) y a una cota ( $Z_H = z_h$ ), considerando una holgura en la ley de cobre total y en la elevación, de modo de poder contar con una muestra de 1000 datos y generar una comparación robusta.



**Figura 29: Validaciones de distribución de  $\beta = Y_2/Y_1$  condicional a: (A)  $Y_1=0,288$  y  $Z_h=444,60$ , y (B)  $Y_1=0,409$  y  $Z_h=530,26$ . Línea verde corresponde a la distribución beta teórica (escalada con un factor de 20).**

Las distribuciones teóricas de la figura 29, también son reescaladas con un factor de 20, tal como en la validación del modelo sin deriva.

**Tabla 6: Leyes de cobre total y cotas utilizadas para la validación.**

	Validación A	Validación B
$y_1$ promedio	0.288	0.409
$y_1$ menor	0.111	0.3005
$y_1$ mayor	0.3876	0.5447
$\Delta y_1$	0.2766	0.2442
$z_h$ promedio	444.60	530.26
$z_h$ menor	400	600
$z_h$ mayor	500	480
$\Delta z_h$	100	120

La holgura utilizada para analizar 1000 datos es mayor a la las validaciones del modelo sin deriva, debido a que además se debe considerar una holgura con respecto a la elevación. Mientras mayor sea la holgura, menos representativa es la validación, por lo que es de esperarse que el modelo no calce de manera exacta, pero que si muestre la tendencia de manera razonable.

### 4.3. Anamorfosis Gaussiana y estudio variográfico

En el presente capítulo se realizan las anamorfosis Gaussianas de la variable primaria (ley de cobre total gamma) y de la variable beta (solubilidad). Para esto se utiliza el lenguaje de programación MATLAB, transformando en primer lugar los datos en una distribución uniforme, para luego convertirlos en valores Gaussianos. Los histogramas se ven a continuación:

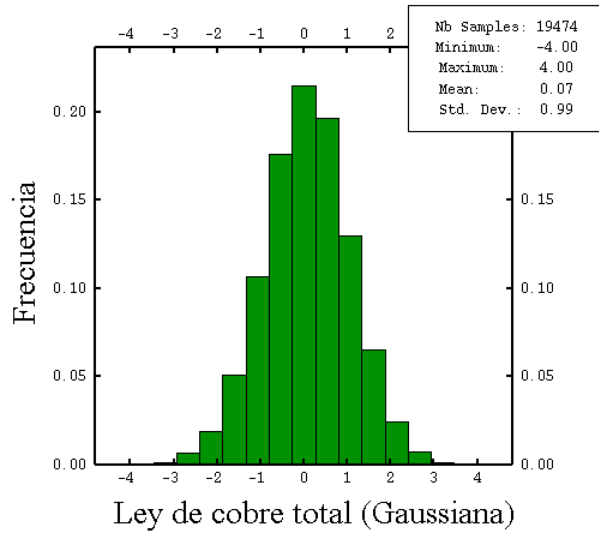
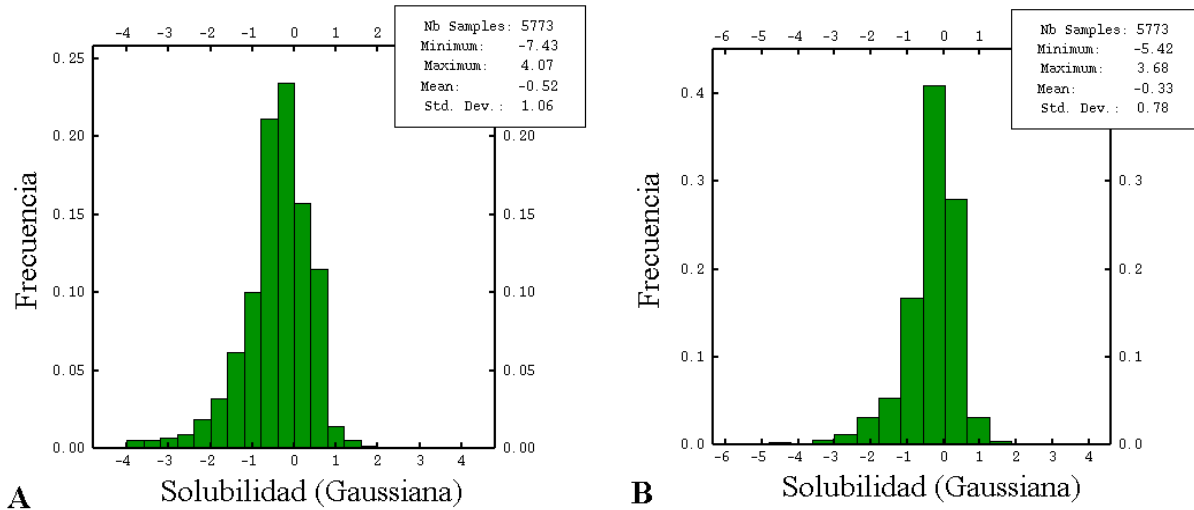


Figura 30: Distribución de valores de leyes de cobre total gaussianos (variable  $T_1$ ).

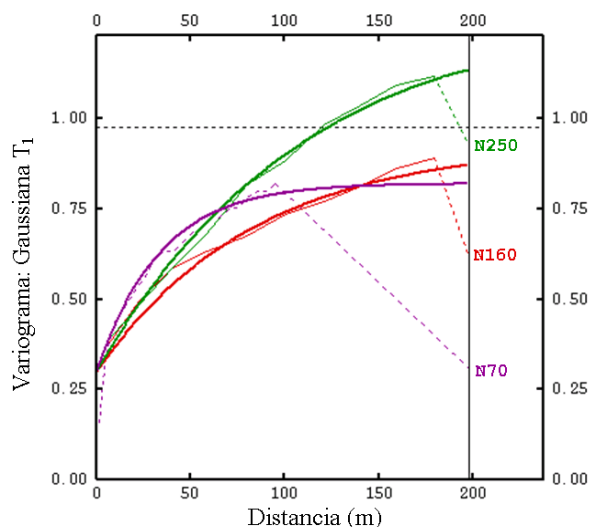


Las distribuciones de la variable  $T_2$  en ambos modelos está cargada ligeramente hacia la izquierda, lo cual se explica debido a los parámetros de forma de la variable beta que reproduce la solubilidad. Las distribuciones beta de los modelos con y sin deriva, tienen una forma asintótica en torno a 1 (debido a que el segundo parámetro de forma,  $h_1$ , es menor a 1).

Se analizan los mapas variográficos con el fin de reconocer las direcciones de anisotropías de los valores de cobre total gaussianos ( $T_1$ ) y para la solubilidad ( $T_{2SD}$  y  $T_{2CD}$ ) de ambos modelos. Los mapas variográficos se ven en la sección de anexos 8.6.1.

Los variogramas experimentales cruzados presentan valores que varían entre -0,15 y 0, lo cual refleja que ambas variables están pobremente correlacionadas, lo que permite continuar el estudio considerando las variables independientes entre sí. Los variogramas cruzados están en la sección de anexos 8.6.2.

En el estudio variográfico de la variable primaria (ley de cobre total Gaussiana  $T_1$ ) se consideran 3 direcciones de análisis, considerando una anisotropía de azimuth N160° y Dip -15°. Se analizan 2 direcciones en el plano rotado y la dirección normal a éste.



**Figura 32: Variograma modelado de leyes de cobre total Gaussianas ( $T_1$ ).**

$$\gamma_{T_1}(h) = 0,3 + 0,52 \exp\left(\frac{250}{250}\right) + 0,11 \exp\left(\frac{250}{\infty}\right) + 0,28 sph\left(\frac{\infty}{250}\right)$$

Para el estudio de la solubilidad modelada sin considerar la deriva ( $T_{2SD}$ ), se considero una rotación de azimut N10°, dip 10° y pitch 90°.

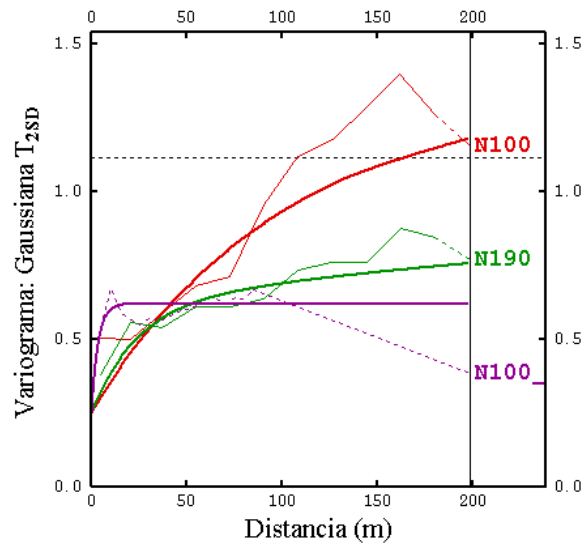


Figura 33: Variograma modelado de solubilidad gaussiana sin deriva ( $T_{2SD}$ ).

$$\gamma_{T_{2SD}}(h) = 0,25 + 0,37 \exp\left(\frac{150}{70}\right) + 0,2 \operatorname{sph}\left(\frac{150}{400}\right) + 0,65 \operatorname{sph}\left(\frac{500}{\infty}\right)$$

El variograma modelado de la solubilidad modelada con la deriva vertical ( $T_{2CD}$ ), presenta una anisotropía de un plano de azimut N10°, dip 15° y pitch 90°.

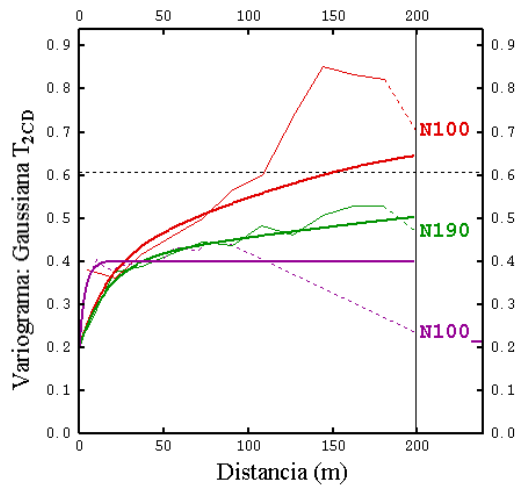


Figura 34: Variograma modelado de solubilidad gaussiana con deriva ( $T_{2CD}$ ).

$$\gamma_{T_{2CD}}(h) = 0,2 + 0,2 \exp\left(\frac{50}{50}\right) + 0,15 \operatorname{sph}\left(\frac{250}{400}\right) + 0,11 \operatorname{sph}\left(\frac{250}{\infty}\right)$$



Con esto se procede a la realización de 100 simulaciones condicionales puntuales para las 3 variables que se están estudiando, utilizando el método de las bandas rotantes (utilizando un número de 1000 bandas rotantes).

Posteriormente se realizan las transformaciones inversas correspondientes, obteniendo las simulaciones de las leyes de cobre total y cobre soluble.

Con la finalidad de realizar una comparación final, se realiza un co-kriging de las variables originales sobre una grilla de bloques de 10 mts x 10 mts x 10 mts, para lo que se realiza un estudio variográfico entre leyes de cobre total y soluble. Se reconoció una anisotropía geométrica en la dirección N150°, por lo que se analiza esa dirección además de la dirección vertical. El modelo de correogionalización se ve a continuación:

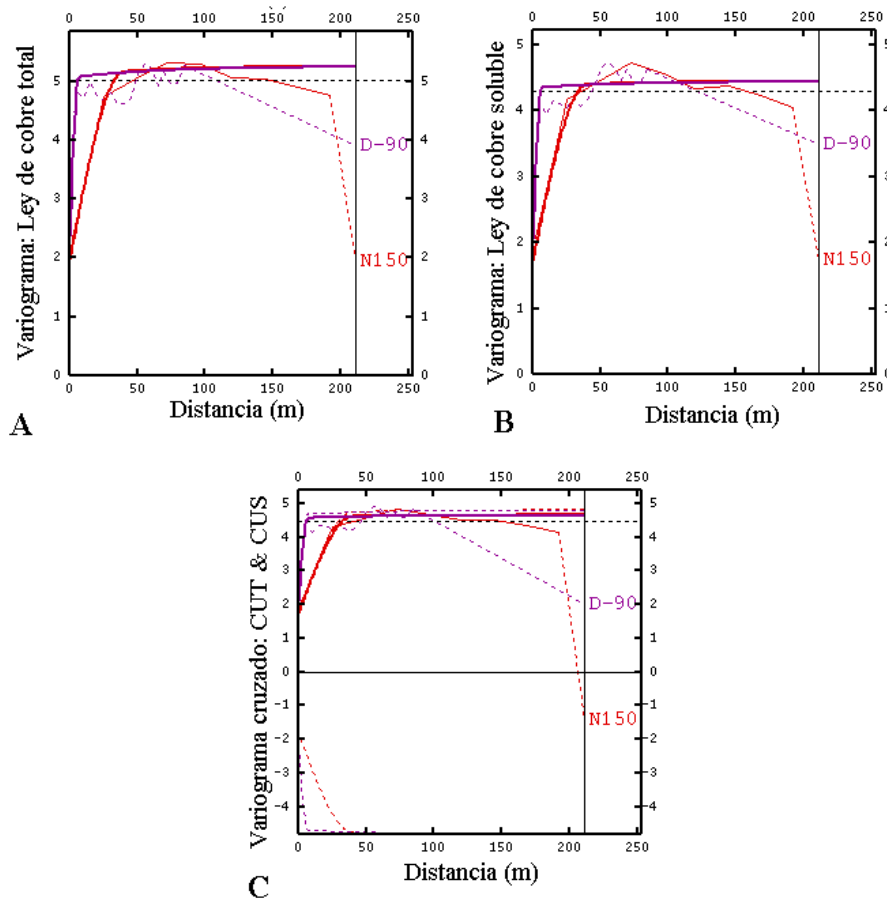


Figura 35: Variogramas, experimentales y modelados de: (A) Ley de cobre total, (B) Ley de cobre soluble y (C) variograma cruzado entre ley de cobre total y soluble.

$$\begin{pmatrix} \gamma_{CUT} & \gamma_{CUT/CUS} \\ \gamma_{CUT/CUS} & \gamma_{CUS} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1,881 & 1,662 \\ 1,662 & 1,643 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3,17 & 2,899 \\ 2,899 & 2,7 \end{bmatrix} sph\left(\frac{40}{7}\right) + \begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 \end{bmatrix} exp\left(\frac{150}{200}\right)$$

Debido al muestreo preferencial, la media de las muestras de ley de cobre soluble no es representativa. Es por esto que se reduce este error usando un co-kriging simple, estableciendo una ley media de cobre soluble de 0,9441%. Para estimar esta ley media se calcula de manera ponderada entre la ley de cobre soluble de la muestra isotópica (donde se conoce) y la heterotópica (donde no se conoce). Para estimar la ley de cobre soluble en las muestras heterotópicas, se considera constante la razón de solubilidad en ambas muestras, es decir:

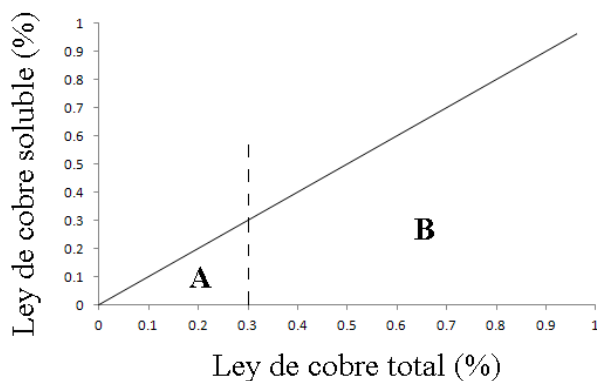


Figura 36: Umbral debido al muestro preferencial.

$$Ley\ media_{CUS} = \frac{A \times Ley\ media_{CUS\_A} + B \times Ley\ media_{CUS\_B}}{A + B}$$

Lo único que se desconoce es  $Ley\ media_{CUS\_A}$ , que se estima considerando la razón CuS/CuT constante tanto en A como en B:

$$\frac{Ley\ media_{CUS\_A}}{Ley\ media_{CUT\_A}} = \frac{Ley\ media_{CUS\_B}}{Ley\ media_{CUT\_B}}$$

$$Ley\ media_{CUS\_A} = \frac{Ley\ media_{CUS\_B}}{Ley\ media_{CUT\_B}} \times Ley\ media_{CUT\_A}$$

$$Ley\ media_{CUS\_A} = 0,8823 \times 0,2487 = 0,2194$$

Por lo tanto:

$$Ley\ media_{CUS} = \frac{13.701 \times 0,2194 + 5.773 \times 2,6639}{19.474}$$

$$Ley\ media_{CUS} = 0,9441 \%$$

Si bien, ésta no representa necesariamente la ley de cobre soluble real, es una aproximación más cercana a la conocida debido al sesgo por el muestreo preferencial.

Luego de realizar el co-kriging las leyes estimadas bajo 0 se consideran 0 y las leyes de cobre soluble que superan la ley de cobre total se disminuyen para ser igual a la ley de cobre total.

## 5. RESULTADOS

En el presente capítulo, se muestran los resultados de las simulaciones condicionales (sobre  $T_1$ ,  $T_{2SD}$  y  $T_{2CD}$ ), la comparación con respecto al método del co-kriging, las validaciones de los modelos utilizados y un reporte final de estimación de los destinos finales de cada bloque generado.

El modo de validación del mecanismo utilizado corresponde a un Jackknife, en el cual de manera aleatoria se dividieron las muestras tanto de las leyes de cobre total como de las solubilidades (reproducidas con y sin deriva), en dos muestras iguales, para luego simular un grupo de las muestras con el restante y verificar la similitud punto a punto.

Se analiza el comportamiento de la solubilidad con respecto a la elevación con los modelos generados y los valores originales. Además, posterior a un rebloqueo, se analizan curvas de inventario para ciertas leyes de corte y de solubilidad con el fin de estimar los destinos óptimos dentro de una planificación minera.

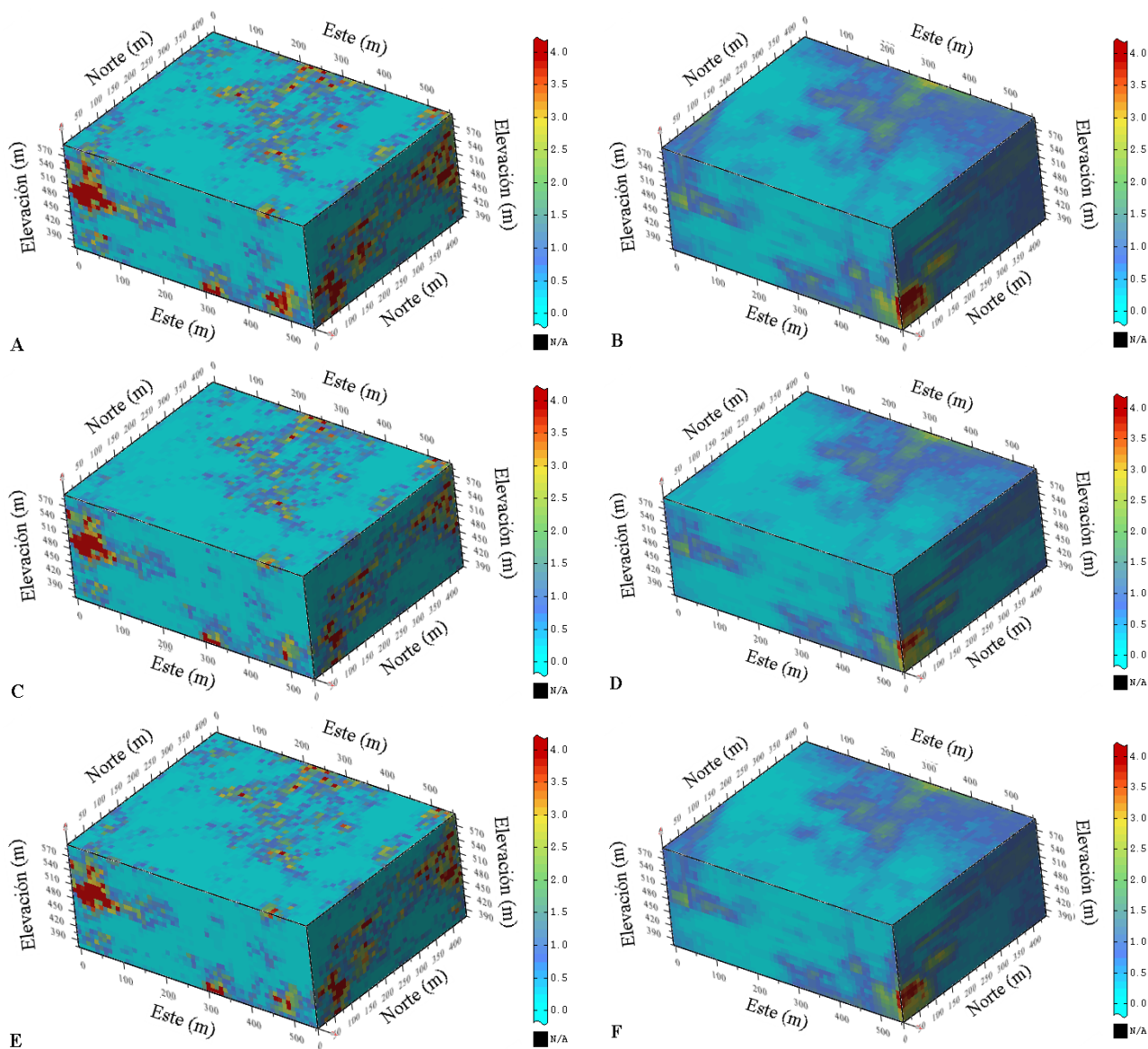
### 5.1. Modelos de bloques generados

Una vez realizados las simulaciones condicionales de manera puntual con el método de las bandas rotantes y las transformaciones inversas correspondientes ( $T_1$  en  $Z_1$ ,  $T_{2SD}$  en  $Z_{2SD}$  y  $T_{2CD}$  en  $Z_{2CD}$ ), se realiza un rebloqueo en una grilla de 560 mts (Este) x 440 mts (Norte) x 220 mts (Elevación), con bloques de 10 mts x 10 mts x 10 mts.

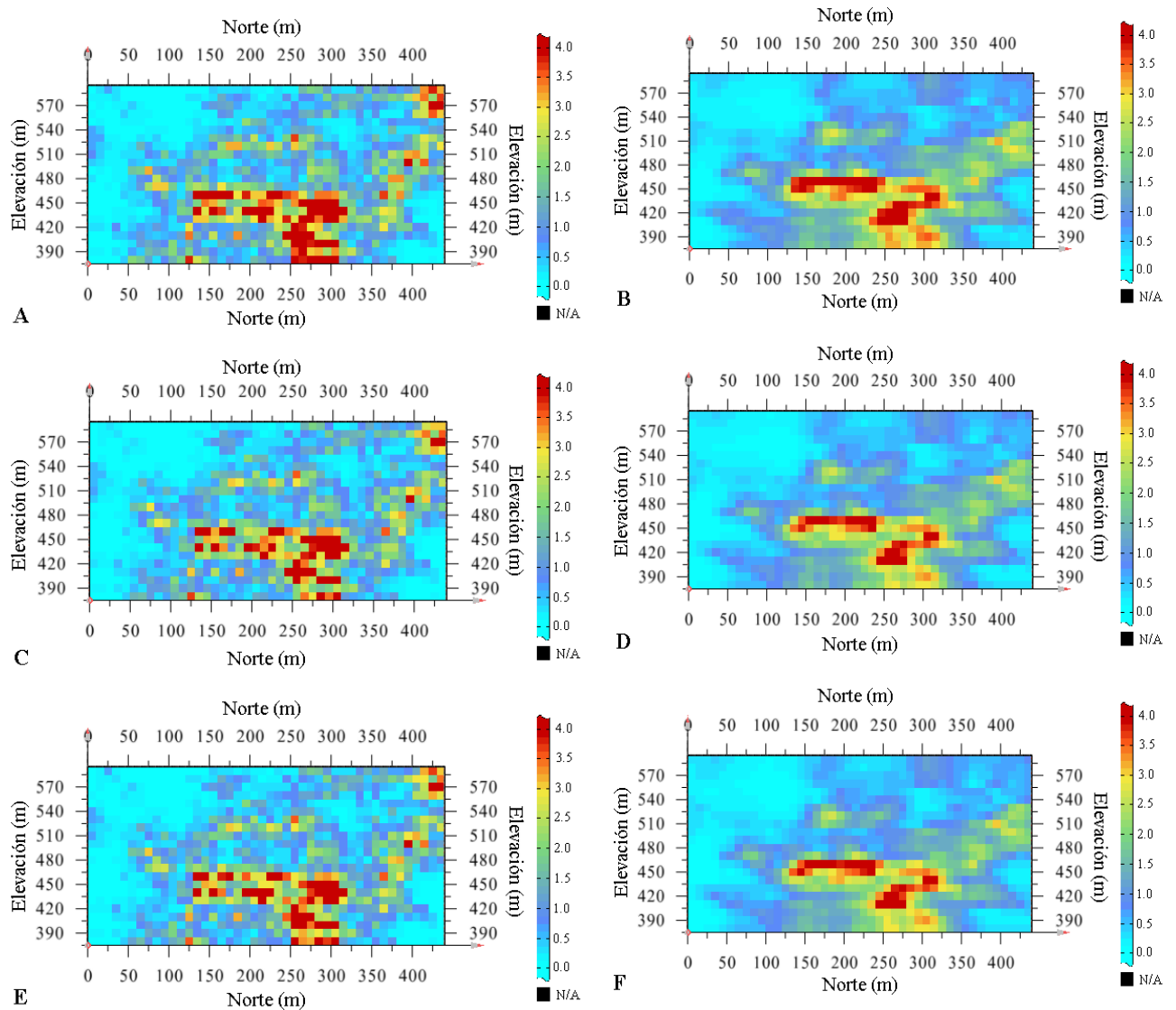
**Tabla 7: Información sobre las simulaciones luego del rebloqueo.**

Número de simulaciones	100
Número de bloques (Este)	56
Número de bloques (Norte)	44
Número de bloques (Cota)	22
Número de bloques en total	54.208

A continuación se ven vistas y perfiles de algunas simulaciones, además del promedio general de las simulaciones. Más perfiles se ven la sección de anexos 8.7.



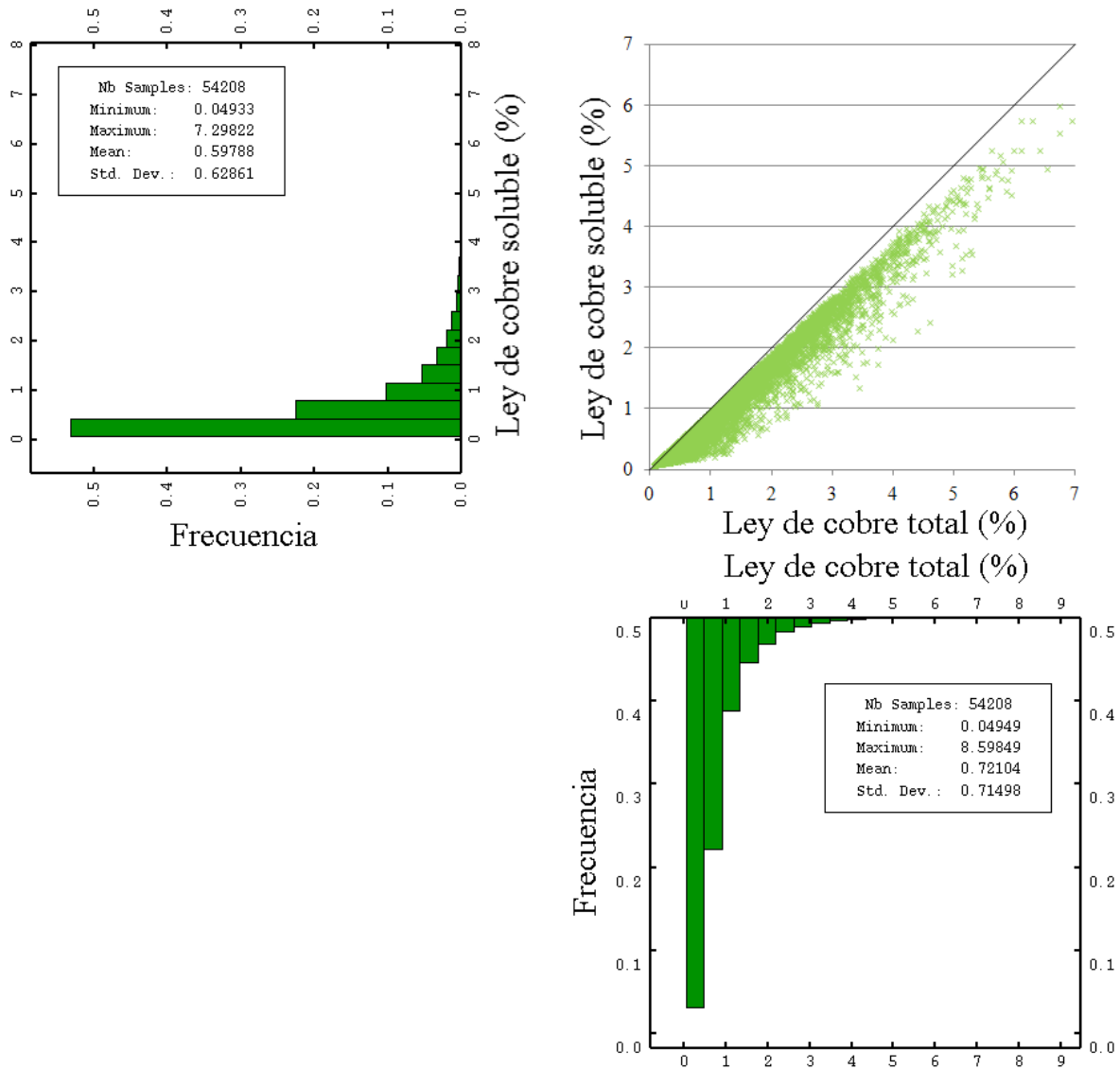
**Figura 37: Vistas isométricas de: (A) Ley de cobre total simulación 87, (B) Media de 100 simulaciones de leyes de cobre total, (C) Ley de cobre soluble simulación 87, (D) Media de 100 simulaciones de leyes de cobre soluble modeladas sin deriva, (E) Ley de cobre soluble simulación 87 y (F) Media de 100 simulaciones de leyes de cobre soluble modeladas con deriva.**



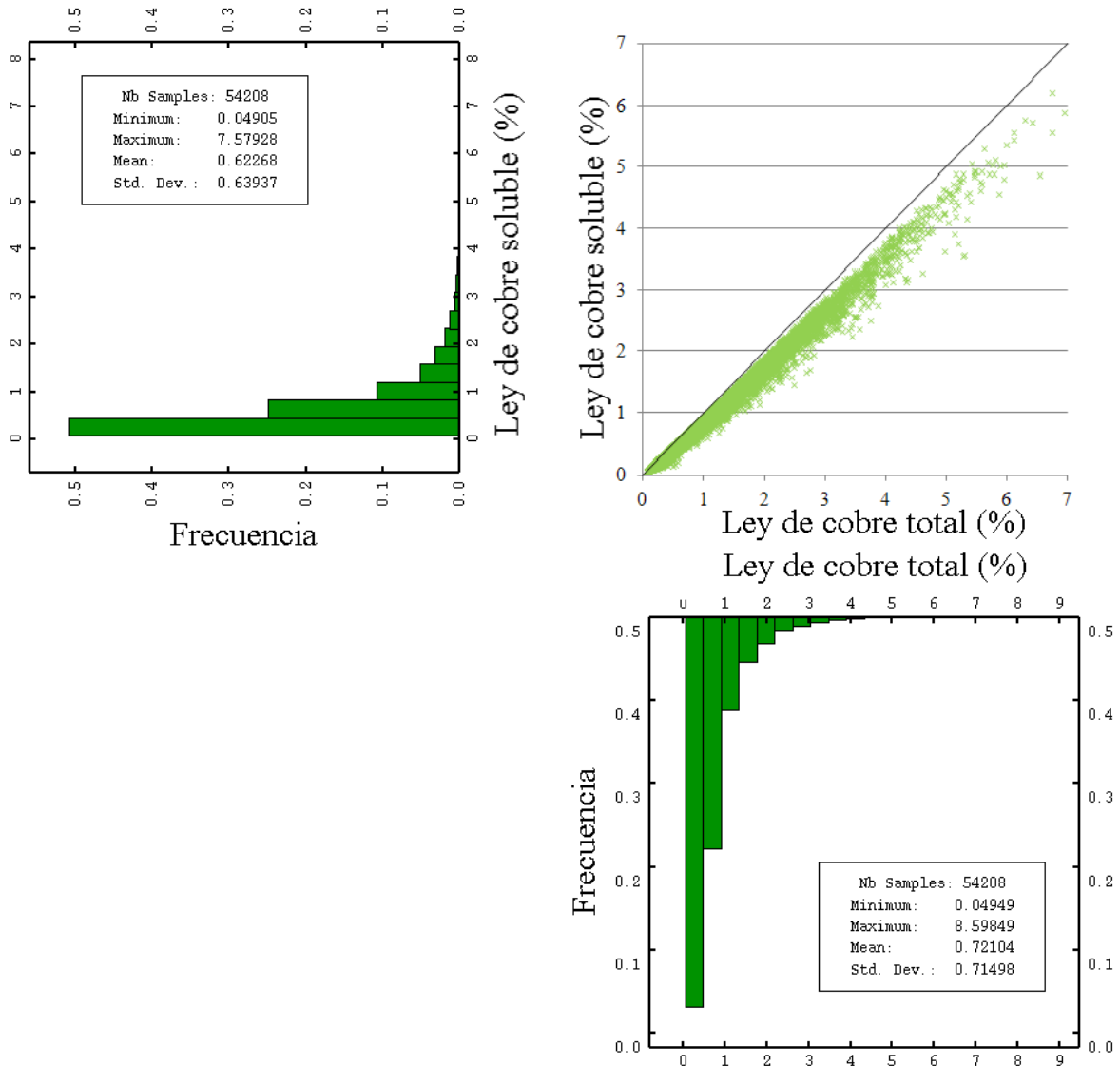
**Figura 38: Perfiles Norte-Elevación de: (A) Ley de cobre total simulación 87, (B) Media de 100 simulaciones de leyes de cobre total, (C) Ley de cobre soluble simulación 87, (D) Media de 100 simulaciones de leyes de cobre soluble modeladas sin deriva, (E) Ley de cobre soluble simulación 87 y (F) Media de 100 simulaciones de leyes de cobre soluble modeladas con deriva.**

Al observar las figuras 37 y 38, se puede apreciar cómo se genera un suavizamiento al promediar las 100 simulaciones. Este efecto puede generar un suavizamiento posterior al momento de generar los análisis de recursos, pero por otro lado, el modelo generado tendría un nivel de incertidumbre menor y de mayor confiabilidad.

A continuación se ven las distribuciones de los histogramas de los bloques generados, además de la comprobación que la desigualdad entre las variables primarias y secundarias se mantiene:



**Figura 39: Histogramas y dispersión entre leyes de cobre total simuladas y leyes de cobre soluble modeladas sin deriva.**



**Figura 40: Histogramas y dispersión entre leyes de cobre total simuladas y leyes de cobre soluble modeladas con deriva.**



## 5.2. Validación de los modelos

Con la finalidad de chequear los modelos generados, se realiza un método de validación denominado Jackknife. Este consiste en dividir la muestra inicial en 2 muestras similares (muestra A y muestra B) de manera aleatoria, para luego a partir de una de las 2 (muestra A), simular la otra (muestra B) utilizando el procedimiento y metodología estudiada.

El Jackknife se aplica para el estudio de la ley de cobre total y para la ley de cobre soluble modelada con y sin deriva. En la siguiente tabla se muestran las muestras utilizadas para el estudio de validación, recordando que a partir de los datos de la muestra A se simulan los valores de la muestra B.

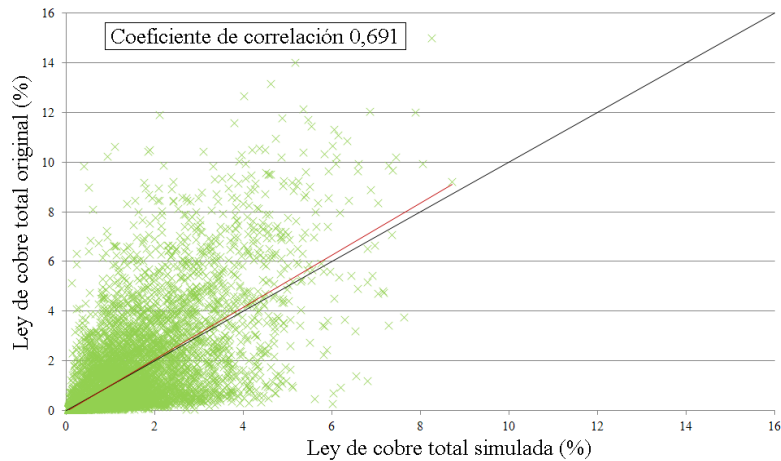
**Tabla 8: Estadísticas de muestras originales utilizadas para Jackknife.**

	Ley de cobre total		Ley de cobre soluble	
	Muestra A	Muestra B	Muestra A	Muestra B
Número de datos	9.737	9.737	2.887	2.886
Máximo (%)	15,73	15,00	14,63	13,48
Mínimo (%)	0,05	0,05	0,08	0,08
Media (%)	1,075	1,034	2,725	2,604
Desviación estándar	1,801	1,702	2,136	2,010

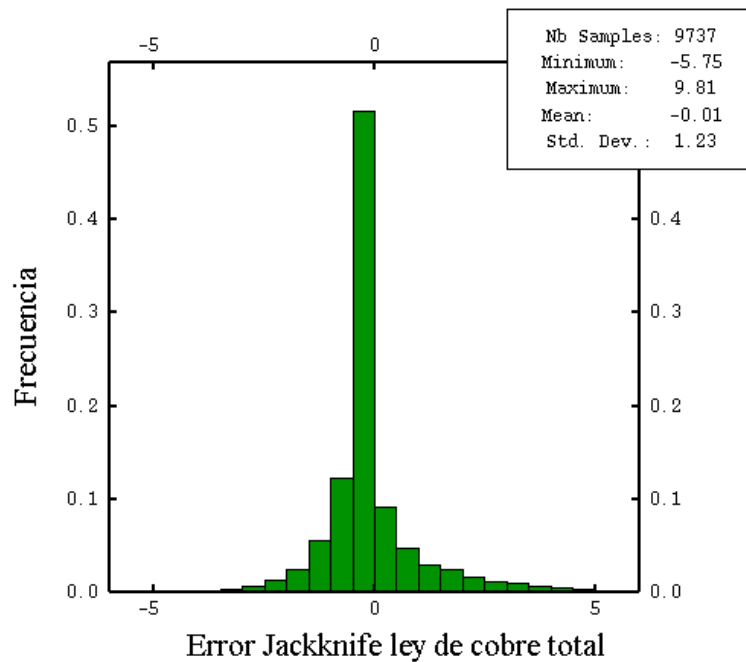
Para las de leyes de cobre total se obtuvieron los siguientes resultados:

**Tabla 9: Estadísticas de muestras de Jackknife de ley de cobre total.**

	Muestra B original	Muestra B generada
Número de datos	9.737	9.737
Máximo (%)	15,000	8,712
Mínimo (%)	0,050	0,048
Media (%)	1,034	1,039
Desviación estándar	1,702	1,116



**Figura 41: Dispersión ley de cobre total original y simulada por Jackknife (La línea roja representa la tendencia lineal, mientras que la línea negra corresponde a la identidad).**

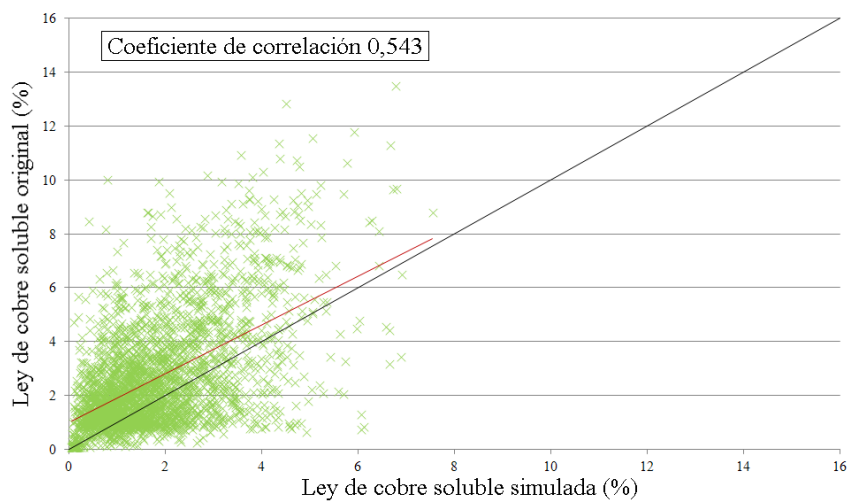


**Figura 42: Histograma del error del Jackknife aplicado a la ley de cobre total.**

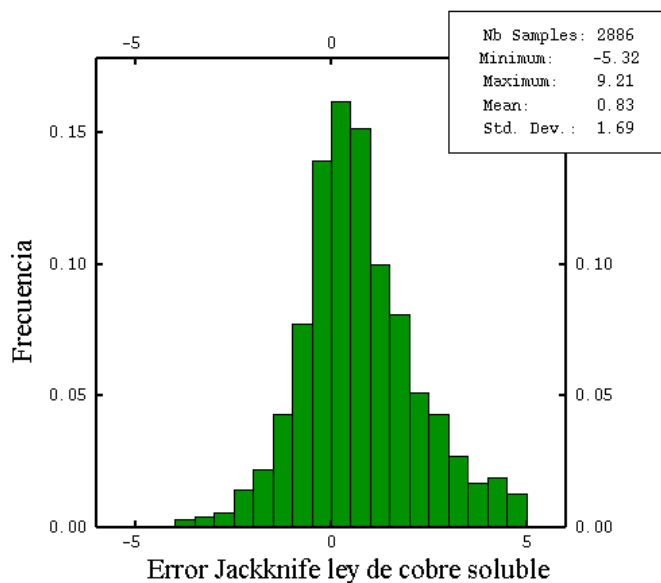
Para las leyes de cobre soluble modeladas sin deriva se obtuvieron los siguientes resultados:

**Tabla 10: Estadísticas de muestras de Jackknife de ley de cobre soluble modelada sin deriva.**

	Muestra B original	Muestra B generada
Número de datos	2.886	2.886
Máximo (%)	13,480	7,547
Mínimo (%)	0,080	0,058
Media (%)	2,604	1,775
Desviación estándar	2,010	1,207



**Figura 43: Dispersión ley de cobre soluble original y simulada por Jackknife modelada sin deriva (La línea roja representa la tendencia lineal, mientras que la línea negra corresponde a la identidad).**

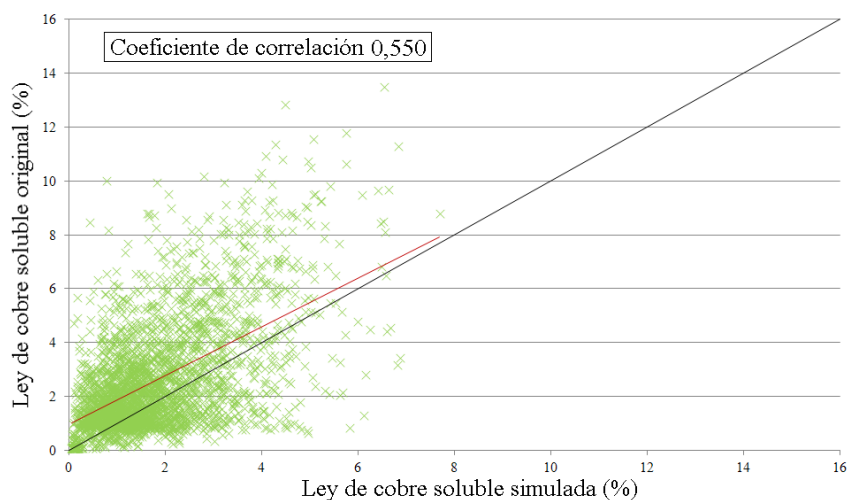


**Figura 44: Histograma del error del Jackknife aplicado a la ley de cobre soluble modelada sin deriva.**

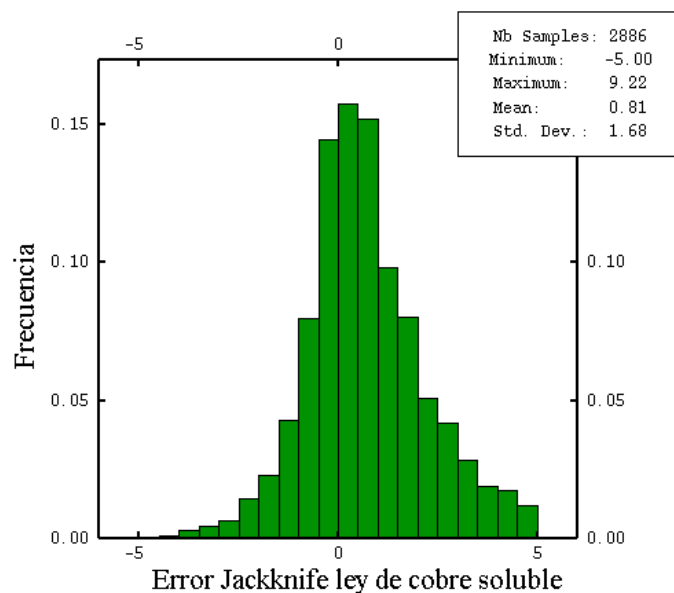
Finalmente, en relación a las leyes de cobre soluble modeladas con deriva se obtuvieron los siguientes resultados:

**Tabla 11: Estadísticas de muestras de Jackknife de ley de cobre soluble modelada con deriva.**

	Muestra B original	Muestra B generada
Número de datos	2.886	2.886
Máximo (%)	13,48	7,695
Mínimo (%)	0,08	0,059
Media (%)	2,604	1,798
Desviación estándar	2,010	1,223



**Figura 45: Dispersión ley de cobre soluble original y simulada por Jackknife modelada con deriva (La línea roja representa la tendencia lineal, mientras que la línea negra corresponde a la identidad).**



**Figura 46: Histograma del error del Jackknife aplicado a la ley de cobre soluble modelada con deriva.**

Los resultados del Jackknife son satisfactorios desde el punto de vista de la reproducción de la media, y en la dispersión de las muestras con la salvedad que los modelos subestiman la ley real, pero dentro de un rango aceptable.

Se puede ver para el caso de la ley de cobre total, se subestima en relación a los valores originales. Brecha que aumenta con la ley, es decir, mientras más alta es la ley de cobre total original, menos certero será el modelo. Pero también se puede ver como la media de los errores baja, lo que entrega una exactitud y precisión al modelo suficiente. La dispersión de este Jackknife se debe en parte a la reproducción de leyes bajo el umbral de muestreo preferencial lo que genera mayores fluctuaciones.

En relación a los modelos que generan las leyes de cobre soluble, se puede apreciar que para el modelo que no considera deriva, se subestima las leyes. Se puede ver como la media del error tiende a 0, lo que entrega un modelo bastante exacto y preciso. Mientras que modelo que considera la deriva, es el modelo más exacto y preciso de los 3 realizados.

Se puede considerar aceptable la validación del modelo, ya que la exactitud y la precisión son aceptables. Cabe mencionar, que el Jackknife muestra fluctuaciones dependiendo de las muestras elegidas, además de la consideración de las estimaciones de las leyes bajo el umbral de leyes generado por el muestreo preferencial.

Considerando lo anterior se realizan otros 2 Jackknife. El primero con una base de datos completada (generando una base isotópica) con leyes simuladas (considerando una simulación al azar y considerando también la media de las 100 simulaciones). Este Jackknife muestra como la dispersión asociada se debe en gran parte al muestreo preferencial (este Jackknife se puede ver en la sección de anexos 8.8.1).

El segundo Jackknife que también se analiza corresponde a uno realizado considerando como base de datos, una base completamente generada mediante simulación (considerando una simulación al azar y otra con la media de las 100 simulaciones). Con lo que se puede determinar que los modelos cumplen con las características necesarias para considerarse válidas (distribución bivariable y multinormalidad de las transformadas). Este Jackknife se puede ver en la sección de anexos 8.8.2.

### 5.3. Reproducción de la solubilidad

Utilizando las medias de las simulaciones, se puede establecer como varía la solubilidad de los modelos generados en el espacio y así determinar si se logra representar al comportamiento original. La comparación se realiza en conjunto con los valores generados por medio de co-kriging.

El comportamiento de la solubilidad con respecto a la elevación se ve a continuación, tanto para los valores originales (los que fueron cambiados a un soporte de bloques para poder hacer la comparación de manera correcta), como para los generados por co-simulación y por co-kriging (soporte de bloque).

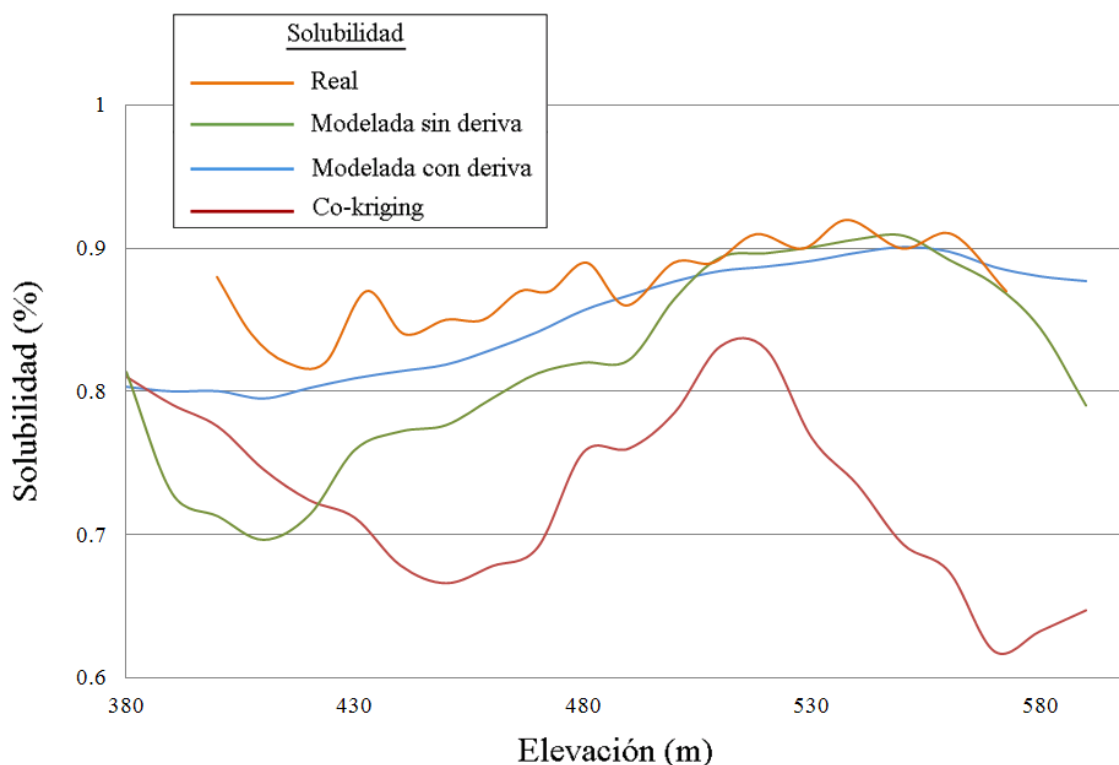


Figura 47: Comportamiento de la solubilidad con respecto a la elevación.

Se puede ver cómo el comportamiento real de la solubilidad es ligeramente creciente: a que a medida que más cerca se está de la superficie, el porcentaje de solubilidad aumenta, ya que el oxígeno presente en la superficie favorece los procesos de oxidación de los minerales de cobre. Si bien estos minerales tienen una génesis ígnea que conllevan generalmente en sulfuros de cobre, el oxígeno de la superficie los altera y transforma en óxidos de cobre (un mecanismo de oxidación común, es el denominado “enriquecimiento secundario”, donde las fallas de la corteza permiten que el efecto del oxígeno repercuta en los minerales a mayor profundidad).

**Tabla 12: Solubilidades medias por cota.**

Cota [m]	Modelo sin deriva [%]	Modelo con deriva [%]	Co-kriging [%]
380	0,814	0,803	0,810
390	0,729	0,800	0,791
400	0,713	0,800	0,776
410	0,697	0,795	0,746
420	0,714	0,803	0,724
430	0,759	0,809	0,712
440	0,772	0,814	0,679
450	0,777	0,819	0,667
460	0,795	0,829	0,678
470	0,813	0,842	0,691
480	0,820	0,856	0,758
490	0,822	0,867	0,760
500	0,865	0,877	0,785
510	0,894	0,884	0,831
520	0,897	0,887	0,829
530	0,901	0,891	0,768
540	0,907	0,897	0,735
550	0,909	0,900	0,694
560	0,892	0,897	0,675
570	0,875	0,887	0,619
580	0,844	0,880	0,633
590	0,791	0,877	0,648
Media global	0,818	0,851	0,728

Los valores de la solubilidad conocida originalmente están disponibles en la sección de anexos 8.1.2.

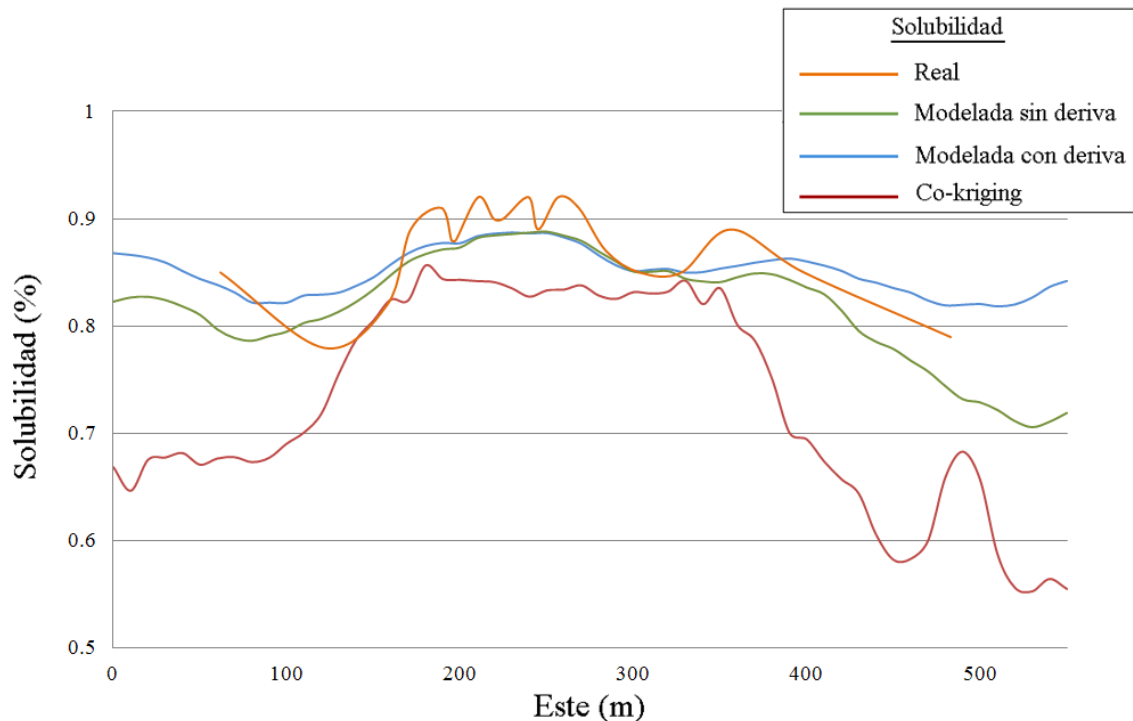
En relación a la tendencia de la solubilidad con respecto a la elevación, se puede apreciar, que el modelo que presenta la tendencia más similar, corresponde al modelo generado considerando la deriva vertical al momento del modelamiento, lo cual resulta lógico y esperable, debido a que los otros modelos no toman énfasis en esta dependencia. La tendencia del modelo con deriva resulta ser más suave que la real, esto se debe a que se conocen menos datos originalmente en comparación a los modelos generados, lo cual establece que la curva que representa la solubilidad real sea más errática y con mayor ruido. Además de lo anterior, el modelo generado considera una dependencia de la elevación mediante un modelo matemático ya suavizado, lo que conlleva a un modelo más suave que el comportamiento real.

El comportamiento representado por el modelo sin deriva se aleja más de la tendencia real, pero presenta una mayor pendiente en relación a los otros modelos. En otras palabras, el modelo sin deriva genera una tendencia marcada entre la solubilidad y la elevación. Esto se puede explicar a que el modelo sólo considera una dependencia con respecto a la ley de cobre total, con lo que no existe un mecanismo de control que busque restringir el comportamiento de la solubilidad a medida que se va descendiendo en la corteza.

La solubilidad representada por el co-kriging resulta ser el más pobre de los modelos, teniendo un comportamiento oscilante que no representa la solubilidad real y que tampoco muestra representar alguna tendencia de por sí. Esta tendencia oscilante se debe a que finalizado el co-kriging, este se debió corregir al generar leyes menores a 0 y leyes de cobre soluble mayores a leyes de cobre total.

Algunos aspectos a destacar, corresponden principalmente a que todos los modelos subestiman al comportamiento real, al generar tendencias desplazadas hacia abajo con respecto a la tendencia real. Esto se explica, para el caso del co-kriging, a que éste por naturaleza suaviza las leyes, sumado a que mayoritariamente estima bloques de leyes bajas, generando el problema de en ocasiones estimar leyes negativas (principalmente las leyes de cobre soluble), las cuales al corregirse generan solubilidades nulas. En relación a los modelos de co-simulación, se debe recordar que se está analizando las medias de las simulaciones, las cuales corresponden a un suavizamiento en sí, al comportamiento entre las 100 simulaciones. Pero también se aprecia que a mayor elevación, mejor es la similitud con el comportamiento real. Esto se debe a que más cerca de la superficie, mayor es la información que se tiene al momento de realizar las co-simulaciones condicionales, mientras que a mayor profundidad, menor es la información que se posee, y menos preciso se vuelven los modelos. Esto último explica que los 3 modelos (modelo sin deriva, con deriva y co-kriging) parecieran nacer de un mismo punto (Figura 47) que corresponde aproximadamente a la solubilidad de 0,81%. Al estar lo más alejado de la superficie, menor información es la que se tiene, lo que conlleva a que los comportamientos tienden a las medias.

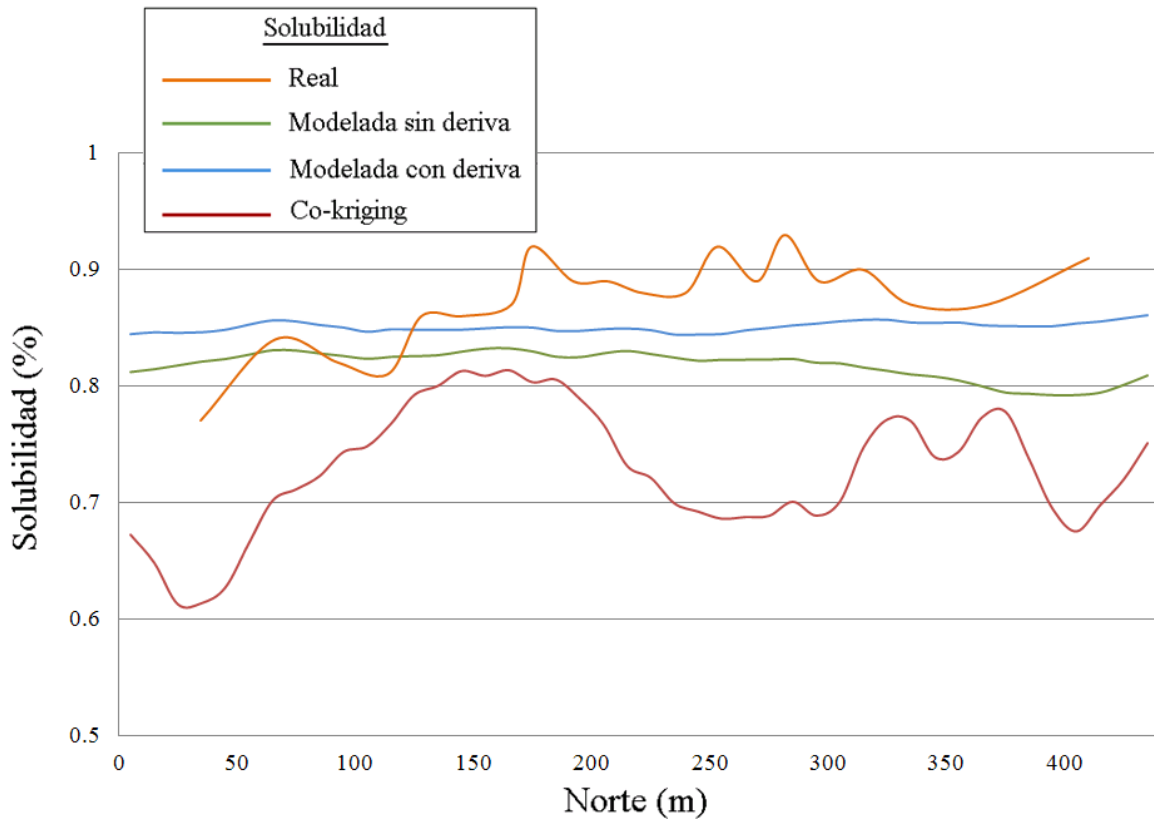




**Figura 48: Comportamiento de la solubilidad con respecto a la dirección Este.**

Con respecto al comportamiento de la solubilidad en relación a la dirección Este, se puede ver cómo la solubilidad no muestra ninguna tendencia marcada en particular. El único comportamiento que muestra la solubilidad real (además del co-kriging de manera más amplificada) corresponde a un aumento de la solubilidad en la zona central del espacio estudiado. Lo anterior se puede deber a que en aquella zona existan mayor cantidad de estructuras geológicas que faciliten el ingreso más profundo del oxígeno. Nuevamente se logra apreciar cómo el comportamiento de la solubilidad de los modelos generados con co-simulación son más suave que el real, debido al ruido proporcionado al conocer sólo ciertas muestras reales dentro del universo de estudio.

Las tendencias de los modelos con y sin deriva se muestran relativamente similares. El comportamiento de la solubilidad dependiendo al eje Este y Norte se puede ver en la sección de anexos 8.9.



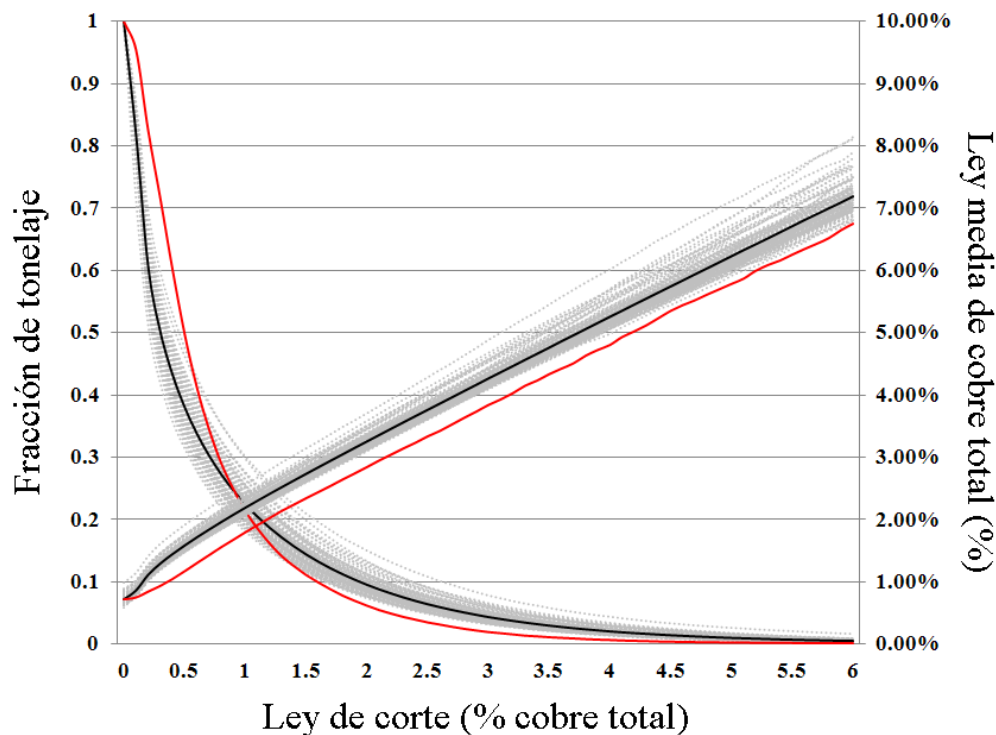
**Figura 49: Comportamiento de la solubilidad con respecto a la dirección Norte.**

En relación al comportamiento de la solubilidad con respecto al eje Norte, se puede apreciar un análisis similar al hecho en relación a la dirección Este. Si bien la solubilidad real muestra una leve tendencia de crecimiento en relación aumenta la coordenada norte, esto se debe a ruido, donde los extremos se disparan en sentidos opuestos, pero cabe mencionar que dichos extremos son los menos confiables debido a la poca densidad de muestras en aquellas zonas.

Si bien el modelo con deriva sólo se diferencia del modelo sin deriva, en considerar el factor de la elevación y no del desplazamiento horizontal, el modelo generado para representar la solubilidad es bastante diferente al modelo que no considera la deriva. Esto se refleja que en las tres direcciones de estudio, la solubilidad modelada con deriva sea generalmente mayor a la modelada sin deriva.

## 5.4. Análisis de resultados

A continuación se ve el gráfico de tonelaje y ley generado con las simulaciones de leyes de cobre total.

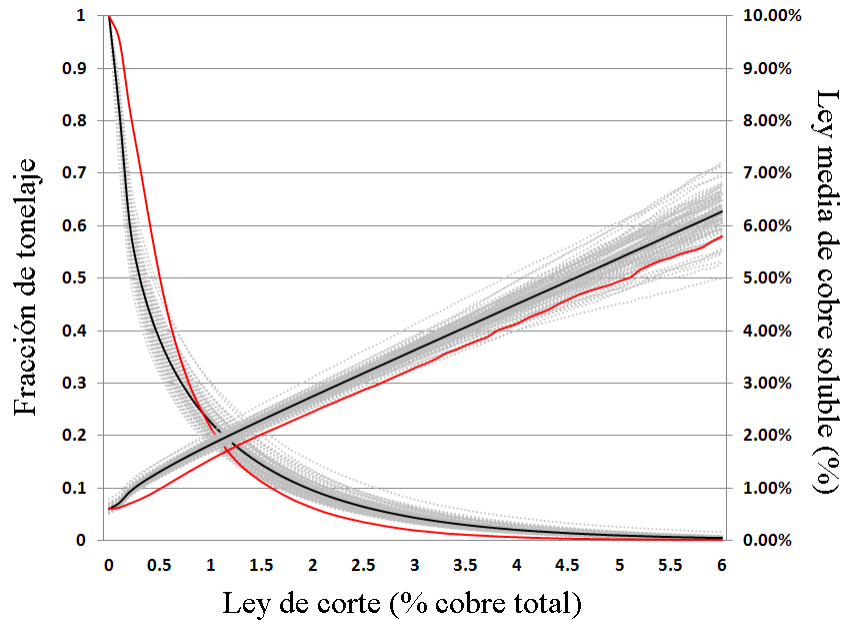


**Figura 50:** Fracción de tonelaje y ley media de cobre total sobre una ley de corte de cobre total calculada para las 100 realizaciones (líneas punteadas), el promedio de las 100 simulaciones (línea negra) y para la curva calculada utilizando las medias de las simulaciones (línea roja).

Se puede apreciar cómo las realizaciones se mueven dentro de un margen variable, que para el caso de la ley media, aumenta a medida que aumenta la ley de corte. En relación a la cantidad de tonelaje, la variabilidad se muestra en la zona donde cambia la pendiente de la curva.

Se puede apreciar lo que se había mencionado anteriormente: el suavizamiento generado al promediar las realizaciones (línea roja) en relación a la curva promedio entre las realizaciones (línea negra). Esto se debe a que al promediar los modelos, se genera un modelo suavizado (con un mayor rango de confiabilidad ante un plan conservador, pero menos realista), mientras que al considerar las realizaciones de manera individual y luego generar un plan promedio, resulta ser un modelo no suavizado que no presenta sesgo (como el que se aprecia en la línea roja).

En relación al modelo de ley de cobre soluble que no considera dentro del modelamiento la dependencia a la elevación, se pueden ver a continuación los recursos recuperables que se obtienen considerando diferentes leyes de corte.

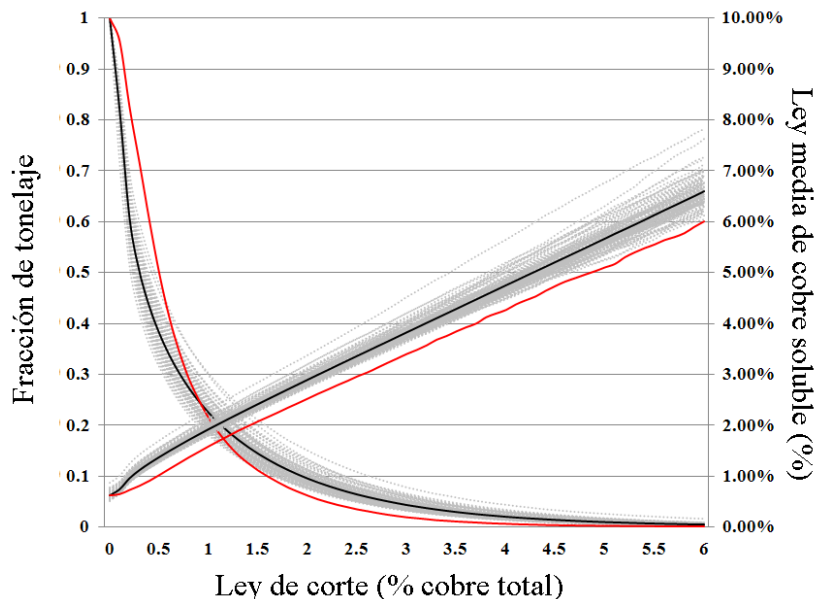


**Figura 51: Fracción de tonelaje y ley media de cobre soluble (modelada sin deriva) sobre una ley de corte de cobre total calculada para las 100 realizaciones (líneas punteadas), el promedio de las 100 simulaciones (línea negra) y para la curva calculada utilizando las medias de las simulaciones (línea roja).**

**Tabla 13: Tonelaje, leyes medias y solubilidad media para distintas leyes de corte de cobre total calculadas para 100 simulaciones condicionales modeladas sin deriva.**

Ley de corte (% de cobre total)	Fracción de tonelaje	Ley media cobre total (%)	Ley media cobre soluble (%)	Solubilidad Media
0.00	1.000	0.007	0.006	0.853
0.50	0.380	0.016	0.013	0.850
1.00	0.224	0.022	0.018	0.854
1.50	0.143	0.027	0.023	0.858
2.00	0.095	0.033	0.027	0.849
2.50	0.063	0.038	0.032	0.824
3.00	0.043	0.043	0.036	0.823
3.50	0.029	0.048	0.041	0.834
4.00	0.020	0.053	0.045	0.842
4.50	0.013	0.057	0.049	0.839
5.00	0.009	0.062	0.054	0.838
5.50	0.006	0.067	0.058	0.817
6.00	0.004	0.072	0.063	0.786

Finalmente, en relación al modelo que considera la dependencia con la elevación, se pueden ver a continuación los recursos recuperables que se obtienen para diferentes leyes de corte.

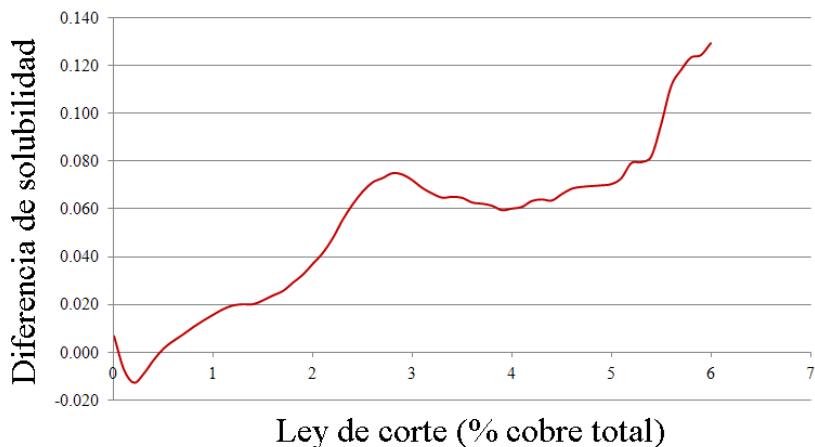


**Figura 52:** Fracción de tonelaje y ley media de cobre soluble (modelada con deriva) sobre una ley de corte de cobre total calculada para las 100 realizaciones (líneas punteadas), el promedio de las 100 simulaciones (línea negra) y para la curva calculada utilizando las medias de las simulaciones (línea roja).

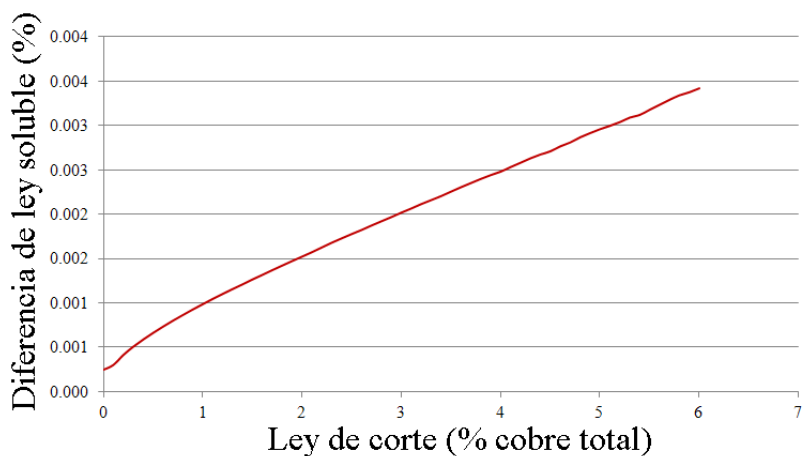
**Tabla 14:** Tonelaje, leyes medias y solubilidad media para distintas leyes de corte de cobre total calculadas para 100 simulaciones condicionales modeladas con deriva.

Ley de corte (% de cobre total)	Fracción de tonelaje	Ley media cobre total (%)	Ley media cobre soluble (%)	Solubilidad Media
0.00	1.000	0.007	0.006	0.860
0.50	0.380	0.016	0.014	0.852
1.00	0.224	0.022	0.019	0.869
1.50	0.143	0.027	0.024	0.879
2.00	0.095	0.033	0.029	0.886
2.50	0.063	0.038	0.034	0.891
3.00	0.043	0.043	0.038	0.895
3.50	0.029	0.048	0.043	0.899
4.00	0.020	0.053	0.048	0.902
4.50	0.013	0.057	0.052	0.905
5.00	0.009	0.062	0.057	0.908
5.50	0.006	0.067	0.061	0.912
6.00	0.004	0.072	0.066	0.916

Al igual que con los recursos recuperables observados para las simulaciones de ley de cobre total, se puede apreciar el suavizamiento y sesgo al calcular las curvas a partir del promedio de las realizaciones. Para evitar este sesgo se considera en los recursos el promedio de las curvas calculadas con cada simulación, con lo que se puede apreciar como el modelo que considera la deriva vertical sobrestima levemente las solubilidades (y por consiguiente las leyes de cobre soluble) en relación al modelo que sólo depende de la variable principal (ley de cobre total).

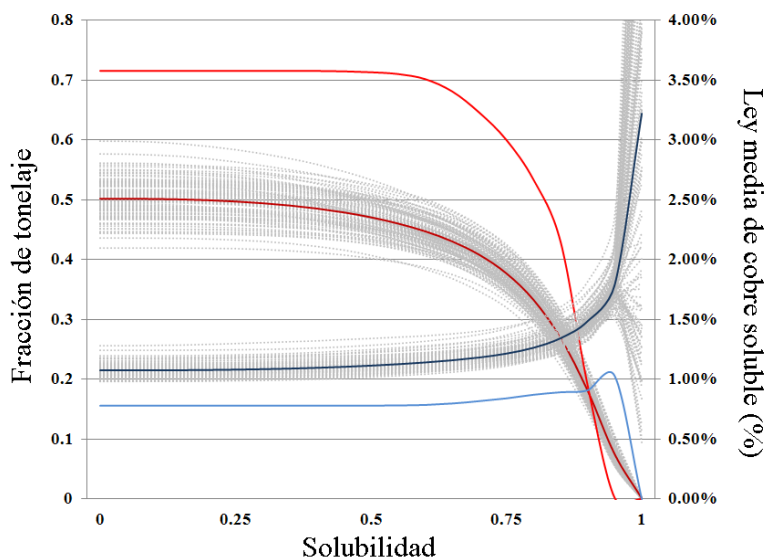


**Figura 53: Diferencia entre solubilidad modelada con deriva y sin deriva (CD-SD).**

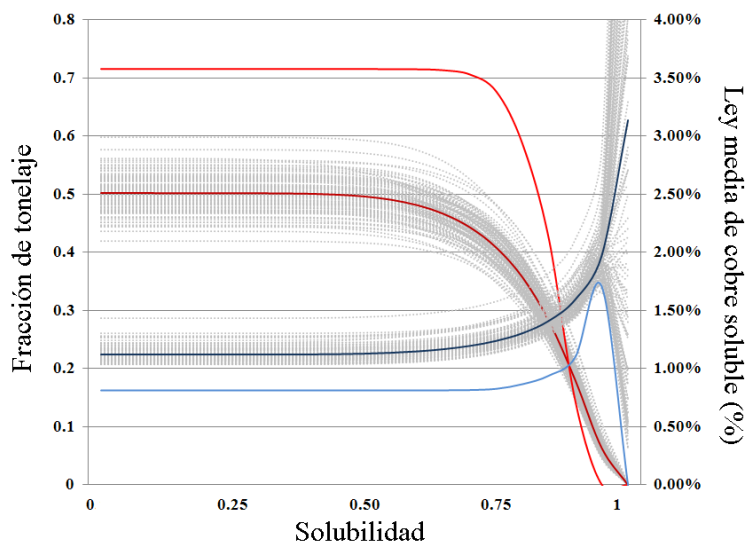


**Figura 54: Diferencia entre ley de cobre soluble modelada con deriva y sin deriva (CD-SD).**

En relación a ciertos procesos metalúrgicos, la variable de corte corresponde a la solubilidad por sobre la ley de cobre total, en particular al momento de decidir si un bloque de mineral debe ser enviado a lixiviación. Por lo mismo, a continuación se muestran curvas de tonelaje y ley media de cobre soluble sobre una solubilidad de corte para los modelos con y sin deriva:



**Figura 55:** Fracción de tonelaje y ley media de cobre soluble (modelada sin deriva) sobre una solubilidad de corte calculada para las 100 realizaciones (líneas punteadas), el promedio de las 100 simulaciones (líneas oscuras) y para la curva calculada utilizando las medias de las simulaciones (línea roja para el tonelaje y línea azul para la ley media de cobre soluble).



**Figura 56:** Fracción de tonelaje y ley media de cobre soluble (modelada con deriva) sobre una solubilidad de corte calculada para las 100 realizaciones (líneas punteadas), el promedio de las 100 simulaciones (líneas oscuras) y para la curva calculada utilizando las medias de las simulaciones (línea roja para el tonelaje y línea azul para la ley media de cobre soluble).

Estableciendo criterios de separación de bloques considerando la ley de cobre total y la solubilidad, se pueden establecer los destinos finales de cada bloque, optimizando la planificación. Los bloques que superen una ley de corte de cobre total se repartirán entre la planta de flotación y de lixiviación, siendo enviados al primer destino aquellos bloques con una solubilidad menor a la de corte establecida por la tecnología de la faena. En cambio, los bloques bajo la ley de corte de cobre total se dividen entre los enviados a botadero y a una pila de baja ley que sirva para generar mezclas dentro de la mina (siendo la solubilidad nuevamente el parámetro de corte).

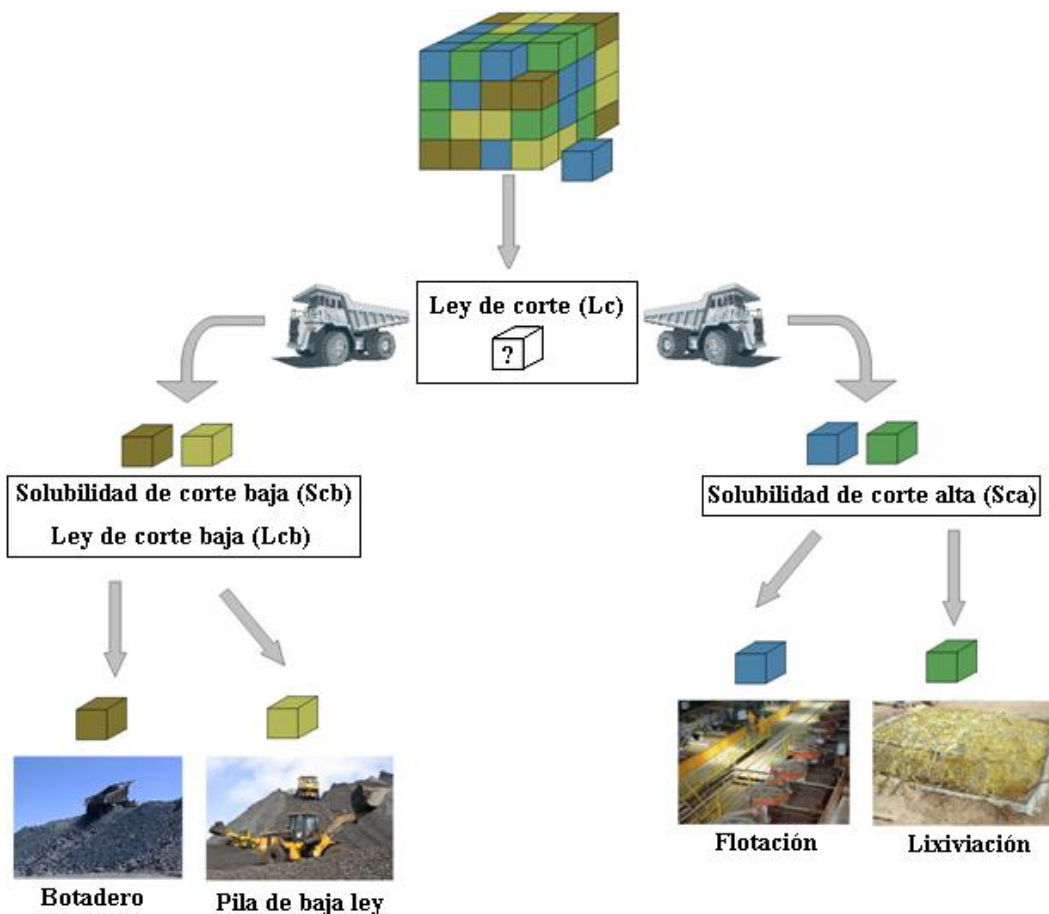


Figura 57: Diagrama de envíos de material desde la mina partir de ciertos parámetros de corte.

Tabla 15: Parámetros de decisión para el destino de cada bloque.

Criterio	Destino
$CuT \geq L_c \text{ \& } Solubilidad \leq S_{ca}$	Flotación
$CuT \geq L_c \text{ \& } Solubilidad > S_{ca}$	Lixiviación
$L_{cb} \leq CuT < L_c \text{ \& } Solubilidad \geq S_{cb}$	Pila de baja ley
$CuT < L_c \text{ \& } Solubilidad < S_{cb}$	Botadero



A continuación se realiza un ejemplo de lo desplegado anteriormente considerando una ley de corte de cobre total de 0,3%, una solubilidad de corta baja ( $S_{cb}$ ) de 75%, una solubilidad de corte alta ( $S_{ca}$ ) de 70% y una ley de corte baja de cobre total de 0,2%. Se aplica el criterio sobre ambos modelos de solubilidad estudiados además se comparará con los resultados generados por co-kriging.

**Tabla 16: Bloques y leyes medias de cobre para cada destino del modelo sin deriva ( $L_c=0,3\%$ ,  $L_{cb}=0,2\%$ ,  $S_{ca}=70\%$  y  $S_{cb}=85\%$ ).**

Destino	Flotación	Lixiviación	Pila de baja ley	Botadero
Número de bloques	5.095	22.085	3.027	24.001
Ley media de cobre total (%)	1,166	1,326	0,243	0,126
Ley media de cobre soluble (%)	0,599	1,179	0,222	0,108

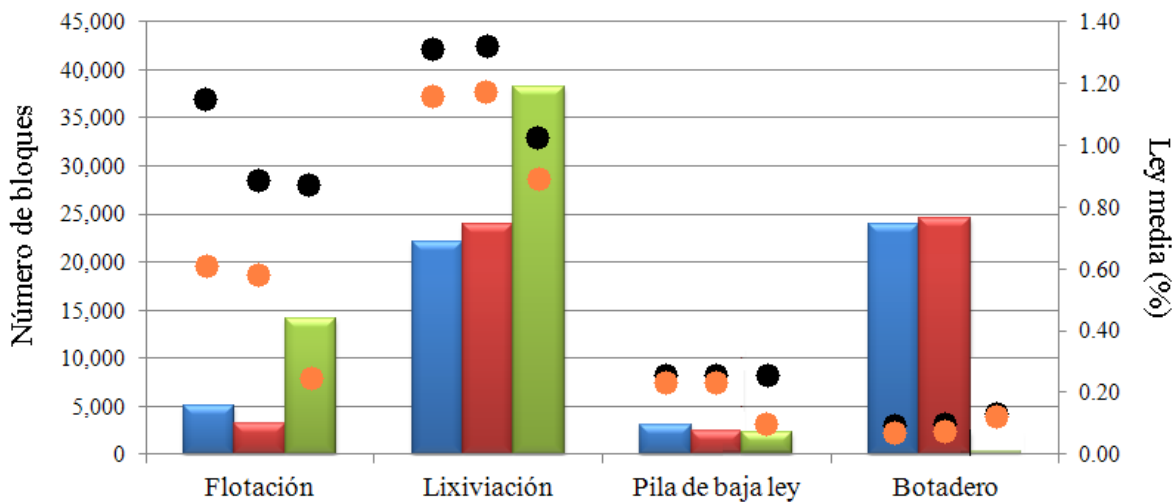
**Tabla 17: Bloques y leyes medias de cobre para cada destino del modelo con deriva ( $L_c=0,3\%$ ,  $L_{cb}=0,2\%$ ,  $S_{ca}=70\%$  y  $S_{cb}=85\%$ ).**

Destino	Flotación	Lixiviación	Pila de baja ley	Botadero
Número de bloques	3.192	23.988	2.467	24.561
Ley media de cobre total (%)	0,911	1,348	0,243	0,129
Ley media de cobre soluble (%)	0,555	1,197	0,220	0,109

Las estadísticas anteriores se calcularon para cada simulación de manera individual, para luego considerar el promedio de los resultados, y no calculándolos con el promedio de las realizaciones, con el fin de evitar sesgo. Las estadísticas generadas al realizar este cuadro resumen considerando las 100 realizaciones de manera independiente se ven en la sección de anexos 8.10.

**Tabla 18: Bloques y leyes medias de cobre para cada destino obtenidos por cokriging ( $L_c=0,3\%$ ,  $L_{cb}=0,2\%$ ,  $S_{ca}=70\%$  y  $S_{cb}=85\%$ ).**

Destino	Flotación	Lixiviación	Pila de baja ley	Botadero
Número de bloques	14.087	38.291	38	2.249
Ley media de cobre total (%)	0,874	1,017	0,179	0,244
Ley media de cobre soluble (%)	0,242	0,920	0,173	0,139



**Figura 58: Comparación de envío de bloques para los modelos sin deriva (Barras azules), con deriva (Barras rojas) y con co-kriging (Barras verdes), considerando sus leyes medias de cobre total (Puntos negros) y cobre soluble (Puntos naranjas)**

Con lo anterior se puede ver cómo es posible generar pilas de baja ley (con media de 0,22%) que pueden ser utilizadas posteriormente para tratar o para hacer mezclas de stocks con el fin de obtener stocks de características específicas.

Se aprecia como los resultados generados con co-kriging tienden a suavizar las leyes de cobre total y soluble, exceptuando las leyes de los bloques enviados a botadero, debido a que muchas leyes estimadas con co-kriging fueron negativas y consideradas igual a 0. Caso similar se representa en los bloques enviados a lixiviación, pues las leyes de cobre soluble que fueron estimadas sobre las leyes de cobre total se consideraron iguales a las leyes de cobre total generando una gran cantidad de bloques con solubilidad igual a 1. Lo anterior muestra como los resultados generados con co-kriging presentan una serie de complicaciones que conllevan en análisis poco representativos, a diferencia de los resultados generados mediante la metodología propuesta.

Si se consideran distintos parámetros de corte tales como una ley de corte de cobre total de 0,45%, una solubilidad de corte alta de 90% (parámetro utilizado con frecuencia en faenas mineras actualmente), una solubilidad de corte baja de 85% y una ley de corte baja de cobre total de 0,2%, se obtiene lo siguiente:

**Tabla 19: Bloques y medias de cobre para cada destino del modelo sin deriva ( $L_c=0,45\%$ ,  $L_{cb}=0,25\%$ ,  $S_{ca}=90\%$  y  $S_{cb}=85\%$ ).**

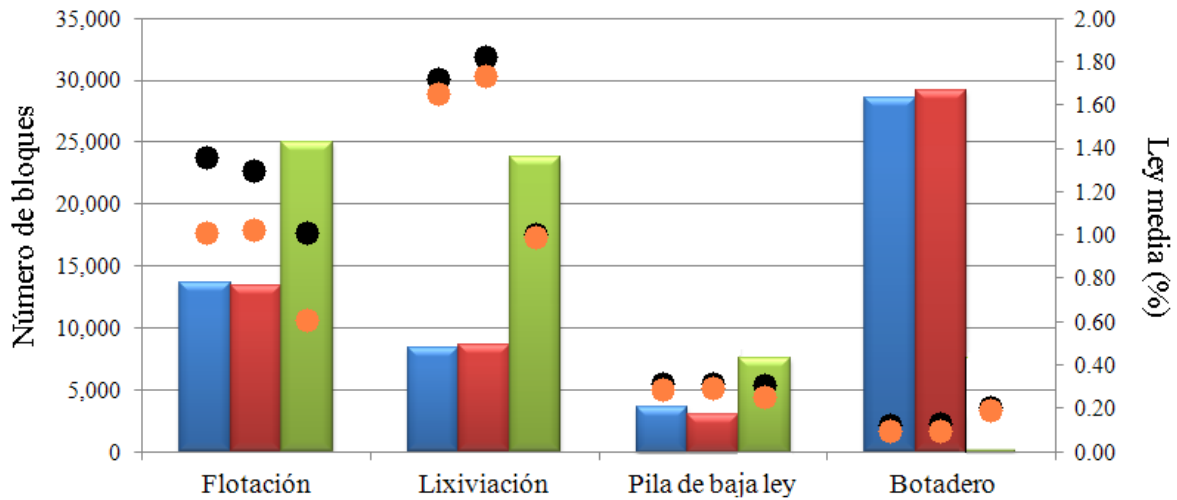
Destino	Flotación	Lixiviación	Pila de baja ley	Botadero
Número de bloques	13.595	8.360	3.625	28.628
Ley media de cobre total (%)	1,366	1,767	0,337	0,156
Ley media de cobre soluble (%)	0,997	1,676	0,307	0,130

**Tabla 20: Bloques y medias de cobre para cada destino del modelo sin deriva ( $L_c=0,45\%$ ,  $L_{cb}=0,2\%$ ,  $S_{ca}=90\%$  y  $S_{cb}=85\%$ ).**

Destino	Flotación	Lixiviación	Pila de baja ley	Botadero
Número de bloques	13.338	8.617	3.102	29.151
Ley media de cobre total (%)	1,296	1,862	0,339	0,159
Ley media de cobre soluble (%)	1,033	1,759	0,308	0,131

**Tabla 21: Bloques y medias de cobre para cada destino obtenido por cokriging ( $L_c=0,45\%$ ,  $L_{cb}=0,2\%$ ,  $S_{ca}=90\%$  y  $S_{cb}=85\%$ ).**

Destino	Flotación	Lixiviación	Pila de baja ley	Botadero
Número de bloques	24.941	23.770	168	7.596
Ley media de cobre total (%)	1,030	1,016	0,218	0,342
Ley media de cobre soluble (%)	0,593	0,963	0,210	0,254



**Figura 59: Comparación de envío de bloques para los modelos sin deriva (Barras azules), con deriva (Barras rojas) y con co-kriging (Barras verdes), considerando sus leyes medias de cobre total (Puntos negros) y cobre soluble (Puntos naranjas)**

Como se puede ver, al ser más restrictivos en consideración a las leyes de corte y a la solubilidad de corte alta, la distribución cambia. Se envían menos bloques a lixiviación y más a flotación, pero aumentando la ley de cobre soluble de las pilas de lixiviación como es de esperar. Los bloques enviados a botaderos y a pilas de baja ley aumentan, al igual que sus leyes medias.

## 6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se logra establecer una metodología válida y reproducible, para el modelamiento y co-simulación de variables ligadas entre sí mediante una desigualdad, específicamente para un yacimiento óxido cuprífero. Con esto es posible generar de manera en conjunto, modelos de bloques con leyes de cobre total y soluble que respetan las restricciones pertinentes y superar las dificultades comunes presentes en muchas faenas actualmente, tales como el muestreo preferencial y las posibles presencias de derivas.

La metodología presentada permite generar modelos con características más detalladas de las variables presentes, tales como la solubilidad bloque a bloque. Esto genera una ayuda importante al área de planificación, la cual con esta herramienta puede optimizar las rutas de envío de material, generando mayor flexibilidad. Esto se debe a que con el conocimiento previo de la solubilidad y la ley de cada bloque, específicamente en aquellas muestras de baja ley no muestreadas (bajo el umbral), es posible generar pilas de baja ley que son utilizadas al momento de hacer mezclas de materiales con el fin de generar stocks de características específicas.

Se puede establecer que los modelos de distribución bivariante generados (modelo con y sin deriva) son satisfactorios. Estos modelos se generan a partir de la relación entre las variables que se ligan entre sí mediante la restricción de acotamiento entre ellas (la ley de cobre soluble no puede ser mayor a la ley de cobre total). La relación entre ambas variables se logra modelar de diversas maneras dependiendo de las variables que determinan su comportamiento, pudiendo ser la ley de cobre total y alguna deriva presente. Este modelamiento, que requirió de algunas transformaciones teóricas (Gamma y Beta), cumplen con dos objetivos primordiales. El primero es el hecho de trabajar con modelos matemáticos que permiten superar el problema debido al muestreo preferencial, en el cual solo se conoce la variable secundaria (ley de cobre soluble) en ciertas muestras y no en todo el universo de muestras con las que se trabajan. El otro objetivo corresponde en lograr independizar las variables estudiadas entre sí, generando modelos de manera más irrestricta.

Se pudo apreciar cómo los modelos generados con esta metodología reproducían de mejor manera variables como la solubilidad, mientras que el co-kriging conlleva a muchos errores al modelo de bloques final, tales como generar leyes negativas (18,96%) o incorrectas (leyes de cobre soluble mayores a leyes de cobre total), las cuales fueron de un 15,27%.

Si bien en el análisis posterior de los resultados se puede apreciar un cierto suavizamiento al trabajar con la media de las realizaciones hechas, este suavizamiento

puede enfrentarse al trabajar con las simulaciones individuales y luego generar un modelo promedio, tal como se pudo ver en las figuras 50, 51 y 52.

Los modelos que reproducen la solubilidad no difieren entre sí mucho, pero se puede ver cómo el modelo que considera deriva logra representar de mejor manera a la solubilidad y generar menor sesgo. Sin embargo, se puede considerar el modelo sin deriva como un modelo sencillo de reproducir que genera resultados satisfactorios.

La metodología propuesta deja la puerta abierta para ser aplicada en otras bases de datos con características similares a la estudiada acá, tales como bases de datos de fierro total y fierro magnético. Además se propone nuevas formas de modelamiento, considerando alguna otra distribución en vez de la Beta o considerar las dependencias utilizadas en este trabajo de manera distinta (o incluso considerando algunas otras), pudiendo ser polinomios en vez de funciones exponenciales, o la incorporación de otras variables, como la calidad física, la densidad e información geológica que permitan de un conocimiento mayor de las posibles derivas presentes.

## 7. BIBLIOGRAFÍA

- [1] CHILÉS J.P., DELFINER P. (1999): *Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty*. John Wiley & Sons, New York, 695 p.
- [2] DEUTSCH C.V., JOURNEL A.G. (1998): *GSLIB: Geostatistical software library and user's guide*. Oxford University Press.
- [3] DIAZ M. (2002): *Apuntes Geoestadística Aplicada*. Instituto de Geofísica y Astronomía. CITMA, Cuba.
- [4] EMERY X. (2000): *Geoestadística lineal*, Universidad de Chile.
- [5] EMERY X. (2009): *Apuntes cátedra: Geoestadística*. Universidad de Chile.
- [6] EMERY X. (2005): *Variograms of order  $\omega$ : a tool to validate a bivariate distribution model*. *Mathematical Geology*, Vol 37, n°2, p. 163-181.
- [7] EMERY X., CARRASCO P., ORTIZ J. (2004): *Modelamiento geoestadístico de la razón de solubilidad en un yacimiento de oxidados de cobre*. In 1st International Conference on Mining Innovation MININ 2004, 18-21 April 2004, E. Magri et al. (eds.), Gecamin Ltda, Santiago, Chile, p. 226-236.
- [8] EMERY X. (2006): *A disjunctive kriging program for assessing point-support conditional distributions*. *Computers & Geosciences* 32 (7), 965-983.
- [9] EMERY X. (2012): *Co-simulating total and soluble copper grades in an oxide ore deposit*. *Mathematical Geosciences*, Vol. 44, n°1, p. 27-46.
- [10] GOOVAERTS P. (1997): *Geostatistics for natural resources evaluation*. New York: Oxford University Press, 480p.
- [11] GOULARD M., VOLTZ M. (1992): *Linear coregionalization model: tools for estimation and choice of cross-variogram matrix*. *Mathematical Geology*, Vol. 24, no. 3, p. 269-286.
- [12] HU L.Y., LANTUÉJOUL C. (1988): *Recherche d'une fonction d'anamorphose pour la mise en œuvre du krigeage disjonctif isofactoriel gamma (Search for an anamorphosis function for the implementation of isofactorial gamma disjunctive kriging)*. *Science de la Terre Série Informatique Géologique* 28, 145-173.
- [13] LANTUÉJOUL C. (2002): *Geostatistical Simulation: Models and Algorithms*. Springer, Berlin, 256.
- [14] LEUANGTHONG O., DEUTSCH C.V. (2003): *Stepwise Conditional Transformation for Simulation of Multiple Variables*. *Mathematical Geology* 35(2) 155-173.

- [15] McKAY A.T. (1934): *Sampling from batches*. Journal of the Royal Statistical Society 1 (Suppl.), 207-216.
- [16] ORTIZ J. (2010): *Apuntes cátedra: Geoestadística Multivariable*. Universidad de Chile.
- [17] PIZARRO S., EMERY X. (2011): *Geostatistical joint modelling of total and soluble copper grades*. In Proceedings of the 2nd International Seminar on Geology for the Mining Industry GEOMIN 2011. J. Beniscelli, R. Kuyvenhoven, K.O. Hoal (eds.), Gecamin Ltda, Santiago, Chile, 9 p.
- [18] PIZARRO S. (2010): *Modelamiento geoestadístico de leyes de cobre total y soluble*. Memoria de título. Universidad de Chile.
- [19] PYRCZ M.J., DEUTSCH C.V. (2003): *Declustering and debiasing*. In. Searston S (ed) Newsletter 19, October 2003. Geostatistical Association of Australasia, Melbourne.
- [20] YEO G.F., MILNE R.K. (1991): *On characterizations of beta and gamma distributions*. Statistics and Probability Letters 11, 239-242.



## 8. ANEXOS

### 8.1. Anexo I: Estudio exploratorio de datos

#### 8.1.1. Despliegue de datos de ley de cobre total

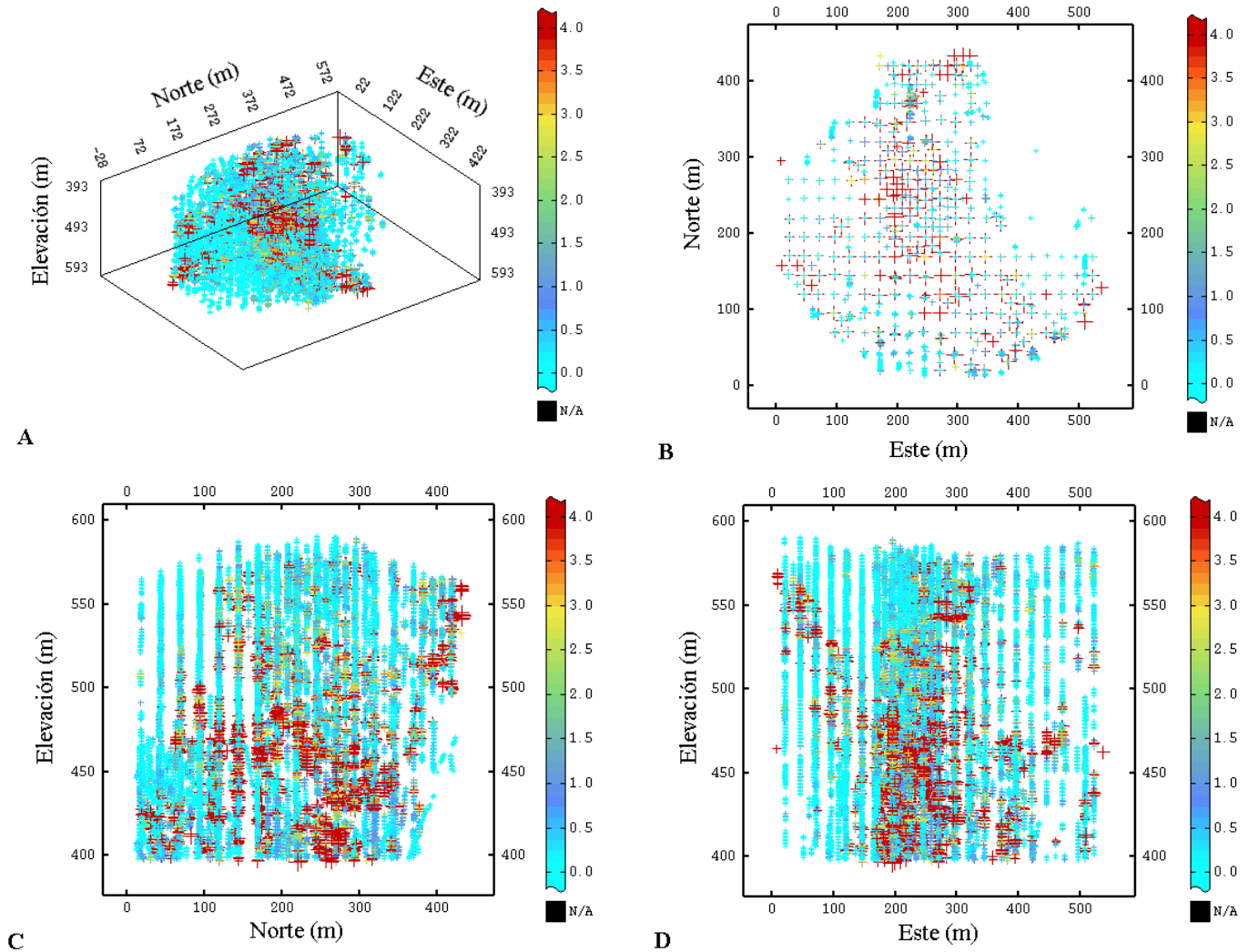
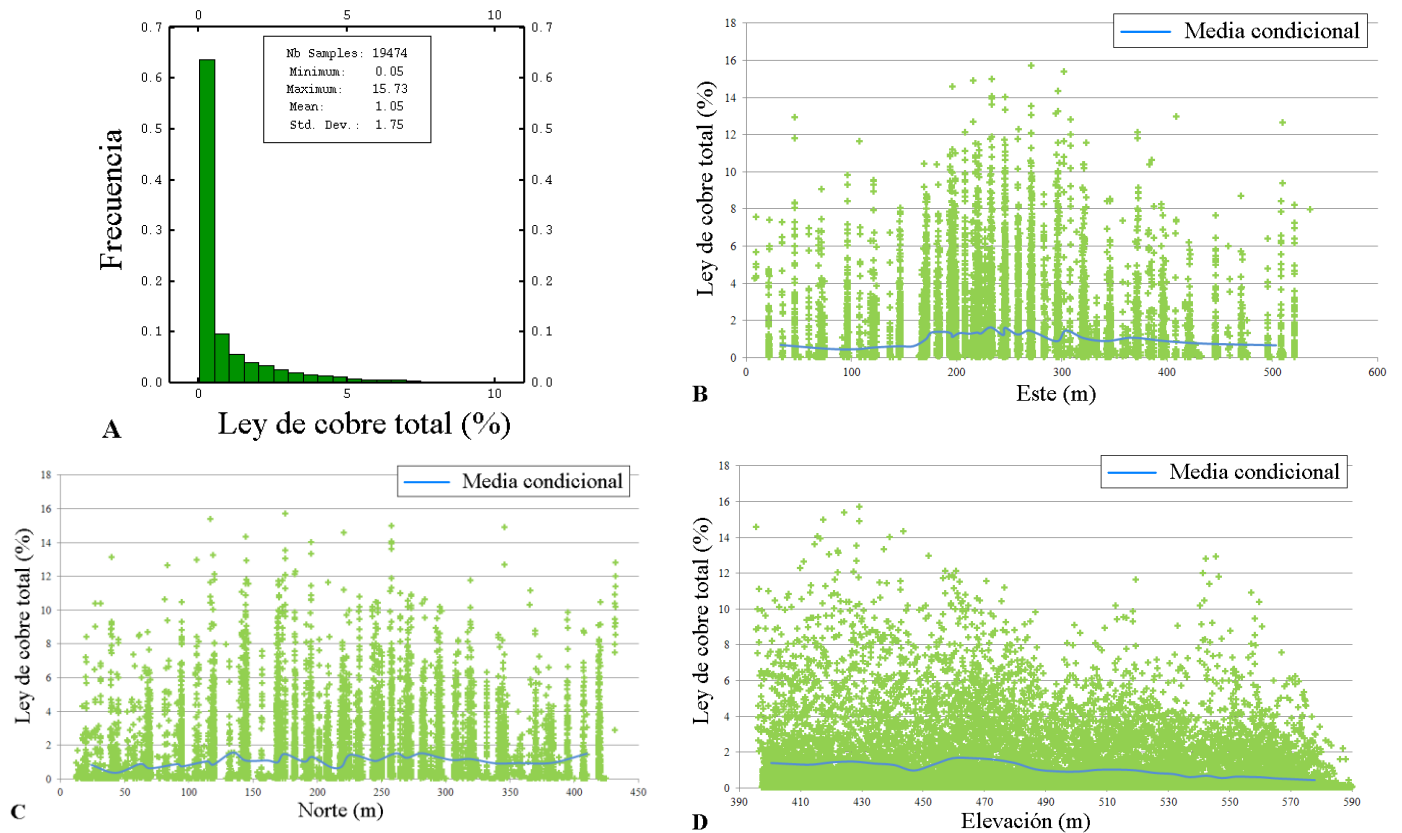


Figura 60: (A) Vista isométrica de sondajes con leyes de cobre total. (B), (C) y (D) perfiles de los sondajes con leyes de cobre total.

### 8.1.2. Dispersión de variables estudiadas

A continuación se ve el comportamiento de las leyes de cobre total y soluble en relación a las distintas direcciones en estudio, además de la solubilidad de los datos originales en relación a la elevación.



**Figura 61: (A) Histograma de leyes de cobre total. (B), (C) y (D) diagramas de dispersión de leyes de cobre total vs coordenadas.**

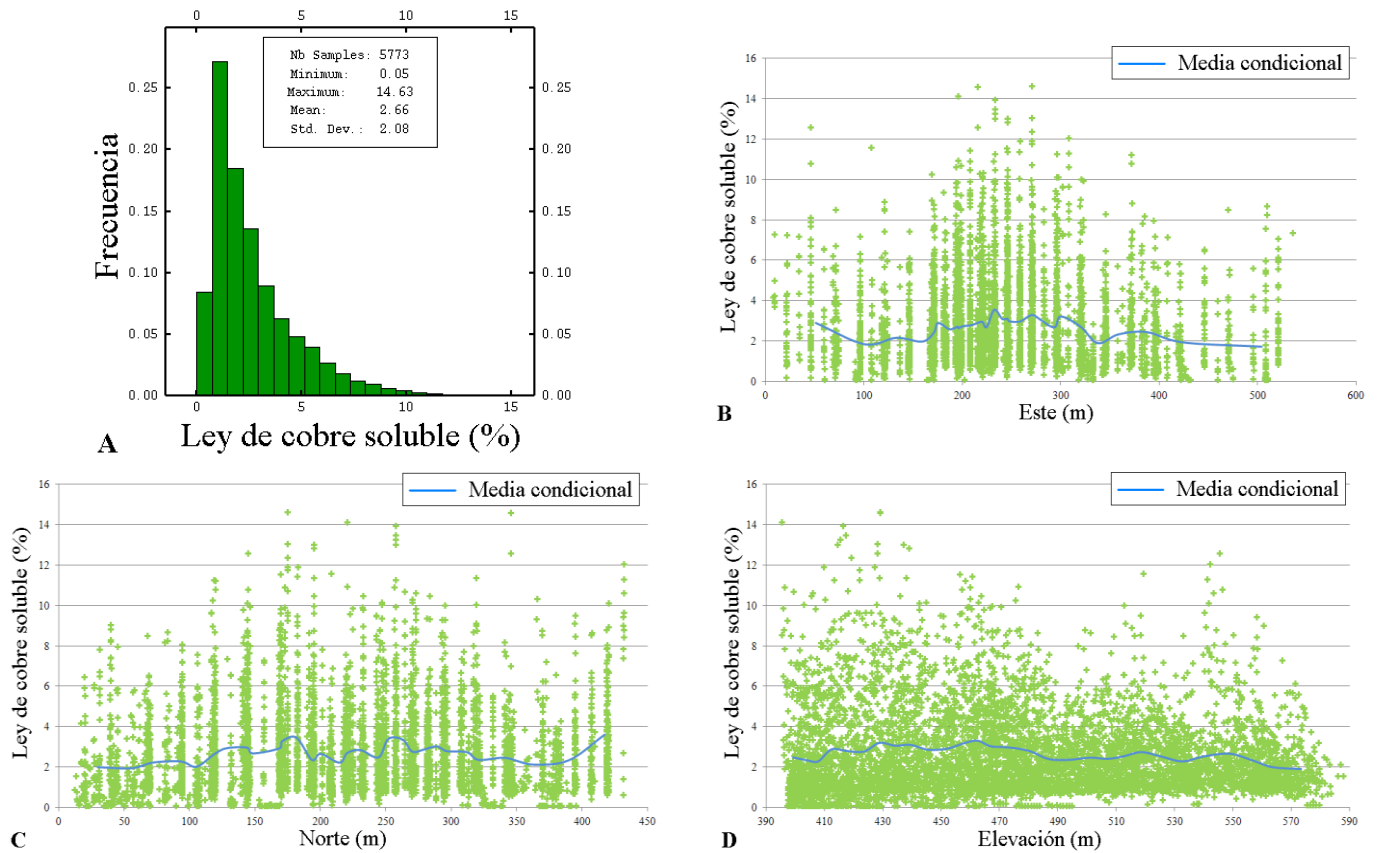


Figura 62: (A) Histograma de leyes de cobre soluble. (B), (C) y (D) diagramas de dispersión de leyes de cobre soluble vs coordenadas.

Tabla 22: Solubilidades a distintas elevaciones (30 clases de 192 puntos aproximadamente)

Elevación	Solubilidad	Elevación	Solubilidad
399,15	0,88	473,36	0,88
403,79	0,86	478,13	0,88
407,49	0,84	483,43	0,88
411,76	0,85	489,44	0,86
417,17	0,84	496,48	0,89
422,54	0,82	503,16	0,90
427,77	0,86	508,81	0,89
432,90	0,90	514,34	0,92
437,89	0,88	520,22	0,92
443,51	0,84	527,43	0,90
450,15	0,85	533,66	0,91
455,60	0,87	541,11	0,92
460,46	0,87	549,85	0,92
464,93	0,87	557,40	0,90
468,85	0,87	563,82	0,91

## 8.2. Anexo II: Desagrupamiento

Se opta por trabajar con una base de datos desagrupada considerando el método de las celdas, manteniendo un tamaño de 25 metros. Esto se debe a que corresponde al tamaño de la celda en el cual se genera un cambio en el comportamiento de la media, como se ve en la figura 63, ya que es en este tamaño donde la dispersión de la media cambia (para celdas de tamaños menores menos dispersión, y para celdas de mayor tamaño se genera mayor dispersión). Además de lo anterior, otro punto a considerar es que la malla que se puede apreciar en aquellas zonas sin sobremuestreo, es una malla pseudo regular de 24 a 25 metros.

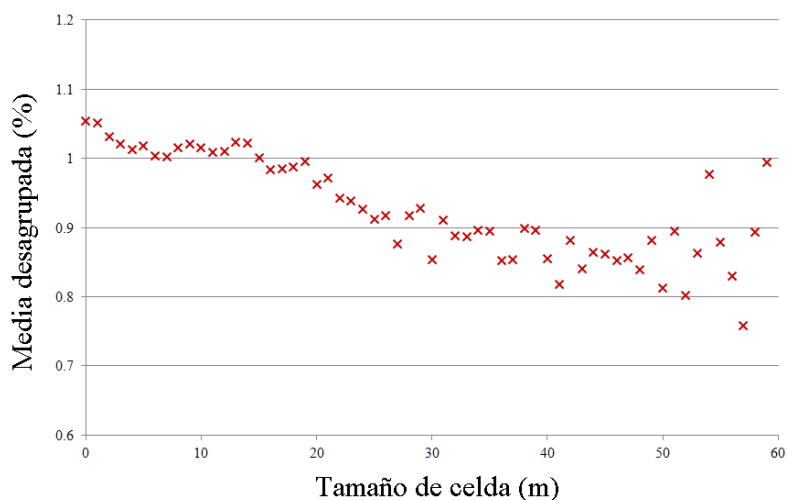


Figura 63: Medias desagrupadas para ley de cobre total a distintos tamaños de celdas.

## 8.3. Anexo III: Anamorfosis gamma

La distribución de valores para la variable secundaria (ley de cobre soluble) una vez realizada la transformación gamma es la siguiente:

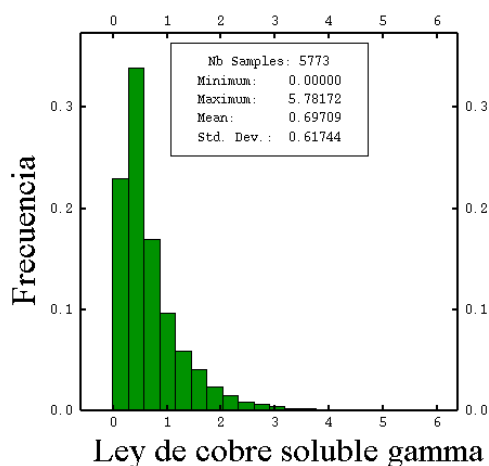
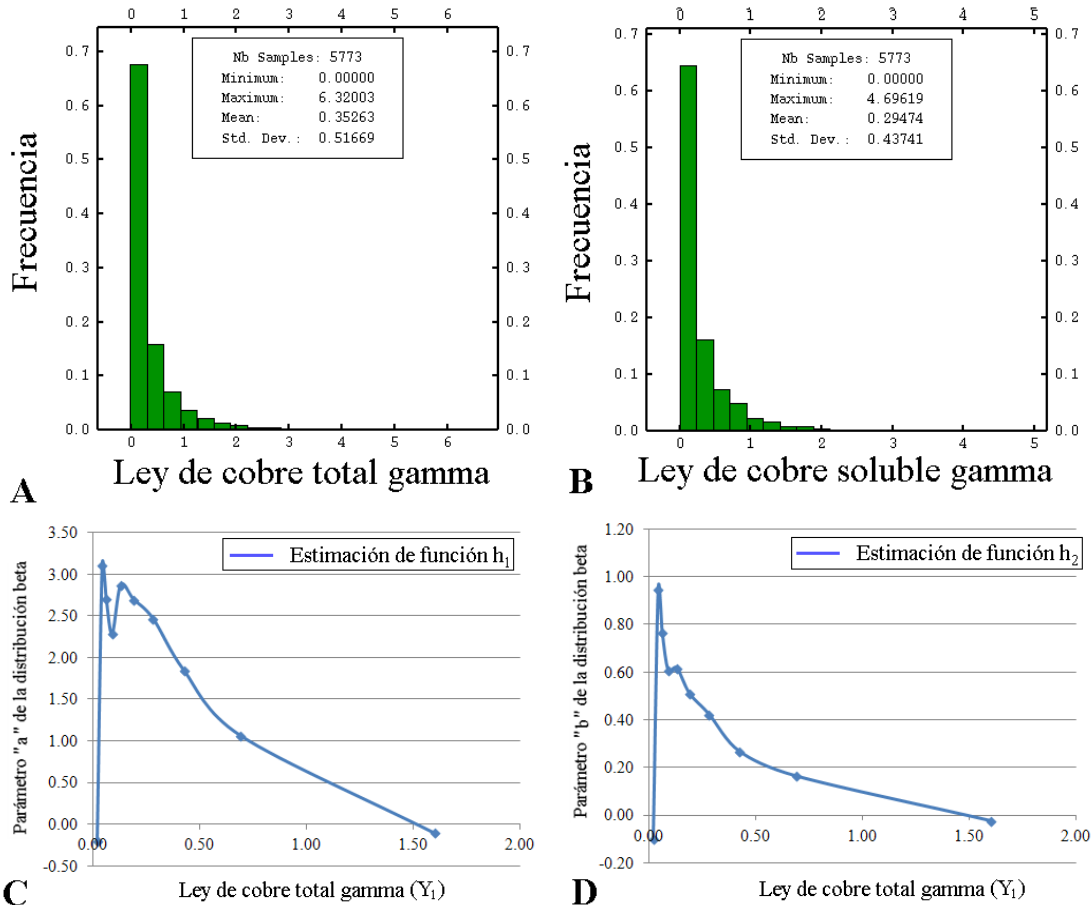


Figura 64: Histograma de ley de cobre total gamma para un parámetro  $\alpha$  de 0,25.

Las siguientes anamorfosis gamma fueron descartadas, debido a que sus curvas experimentales al modelar los parámetros de forma (“a” y “b”) de la distribución beta, generaban modelos menos robustos, que el elegido ( $\alpha = 0,25$  parámetro distribución gamma). Cabe mencionar que este procedimiento en esta etapa es con un mecanismo de prueba y error.

- $\alpha = 0,01$ :



**Figura 65: Histograma de (A) ley de cobre total gamma y (B) ley de cobre soluble gamma. Curvas experimentales de (C) parámetro “a” de beta y (D) parámetro “b” de beta.**

- $\alpha = 0,5$ :

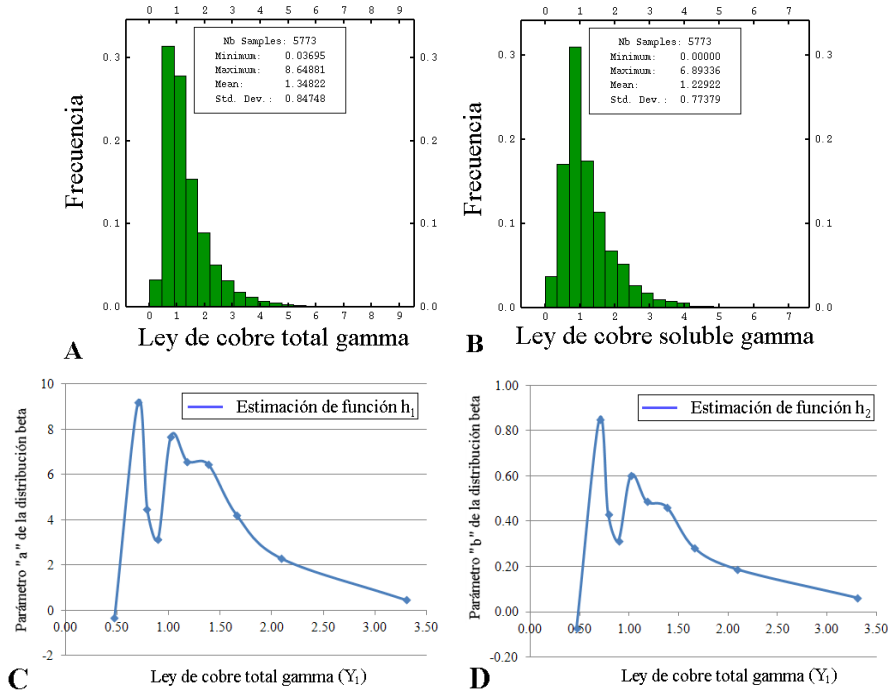


Figura 66: Histograma de (A) ley de cobre total gamma y (B) ley de cobre soluble gamma. Curvas experimentales de (C) parámetro “a” de beta y (D) parámetro “b” de beta.

- $\alpha = 1$ :

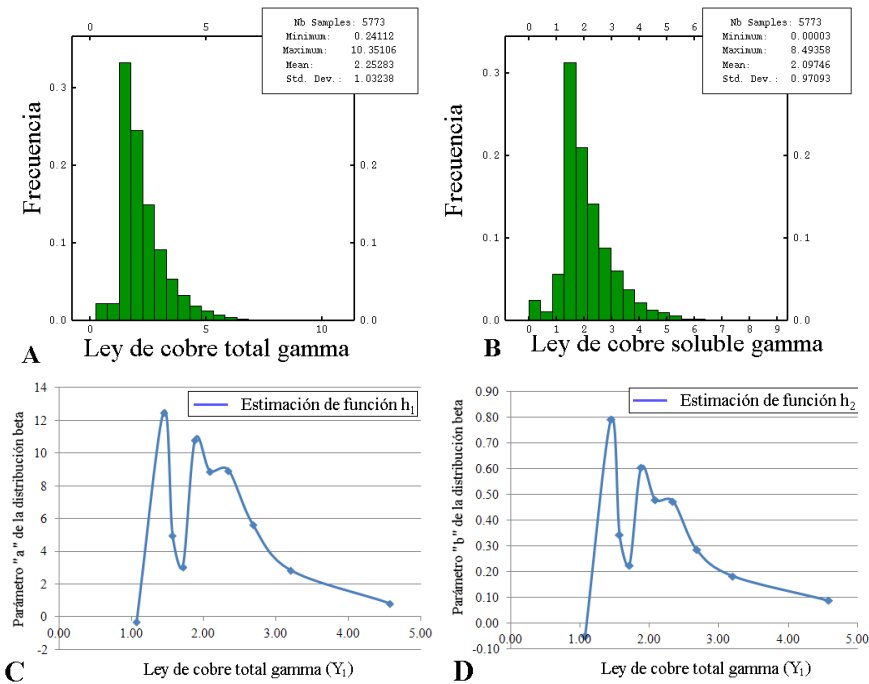


Figura 67: Histograma de (A) ley de cobre total gamma y (B) ley de cobre soluble gamma. Curvas experimentales de (C) parámetro “a” de beta y (D) parámetro “b” de beta.

- $\alpha = 2$ :

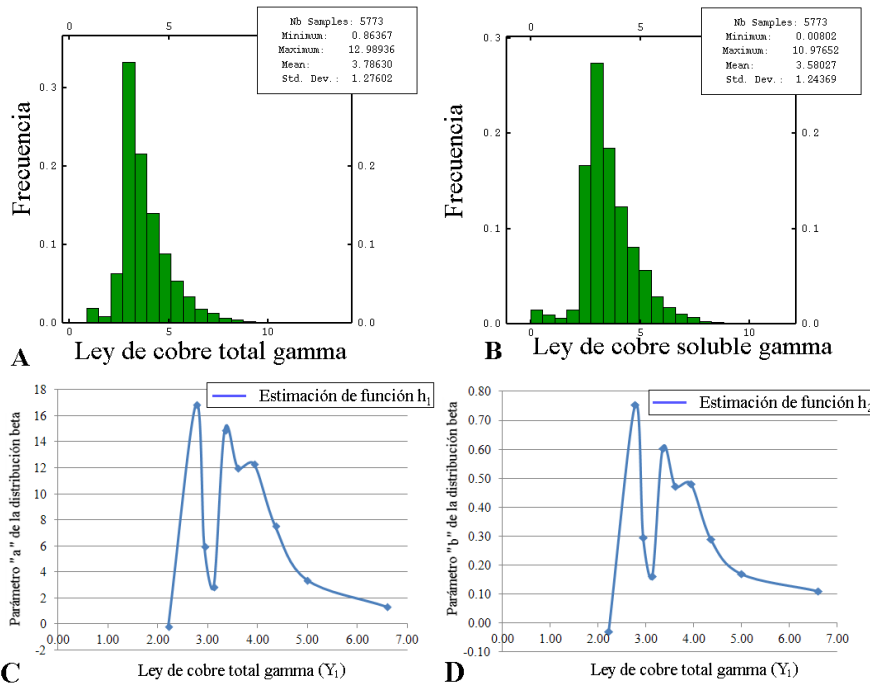


Figura 68: Histograma de (A) ley de cobre total gamma y (B) ley de cobre soluble gamma. Curvas experimentales de (C) parámetro “a” de beta y (D) parámetro “b” de beta.

- $\alpha = 4$ :

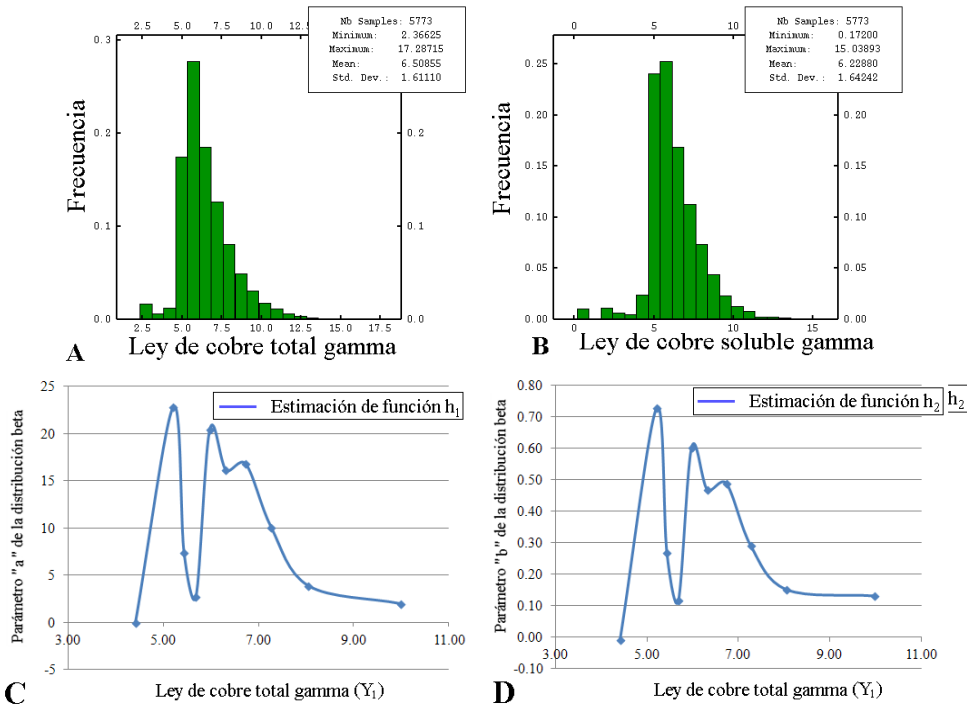
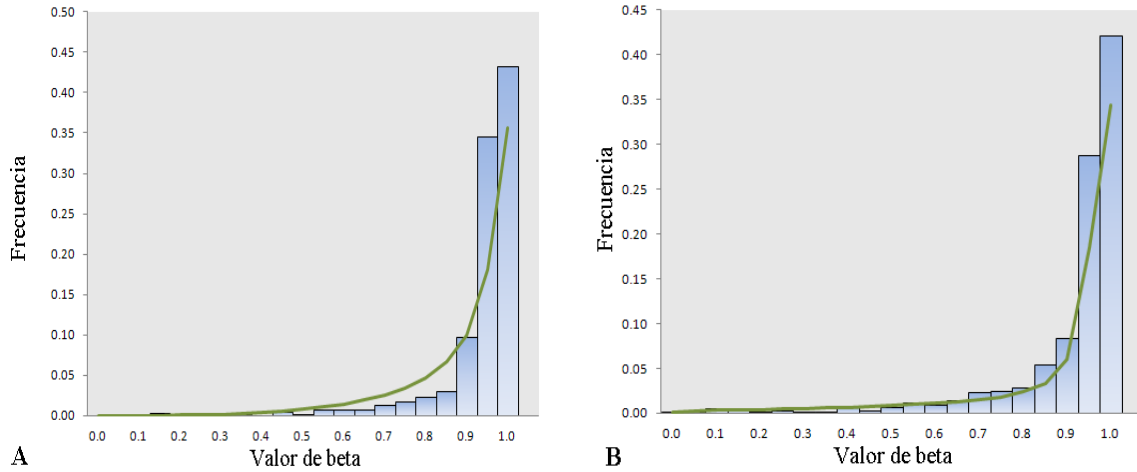


Figura 69: Histograma de (A) ley de cobre total gamma y (B) ley de cobre soluble gamma. Curvas experimentales de (C) parámetro “a” de beta y (D) parámetro “b” de beta.

#### 8.4. Anexo IV: Validaciones modelo sin deriva

La validación para leyes altas del modelo sin deriva se ve a continuación.



**Figura 70: Validaciones de distribución de  $\beta = Y_2/Y_1$  condicional a: (A)  $Y_1=0,898$  y (B)  $Y_1=1,631$ . Línea verde corresponde a la distribución beta teórica (con un factor de 20).**

Cabe mencionar que las distribuciones teóricas son reescaladas con un factor de 20 debido a que los histogramas fueron hechos con 20 clases. De este modo, el área abarcada tanto por el histograma como por las curvas es igual a 1.

**Tabla 23: Leyes de cobre total utilizadas para la validación.**

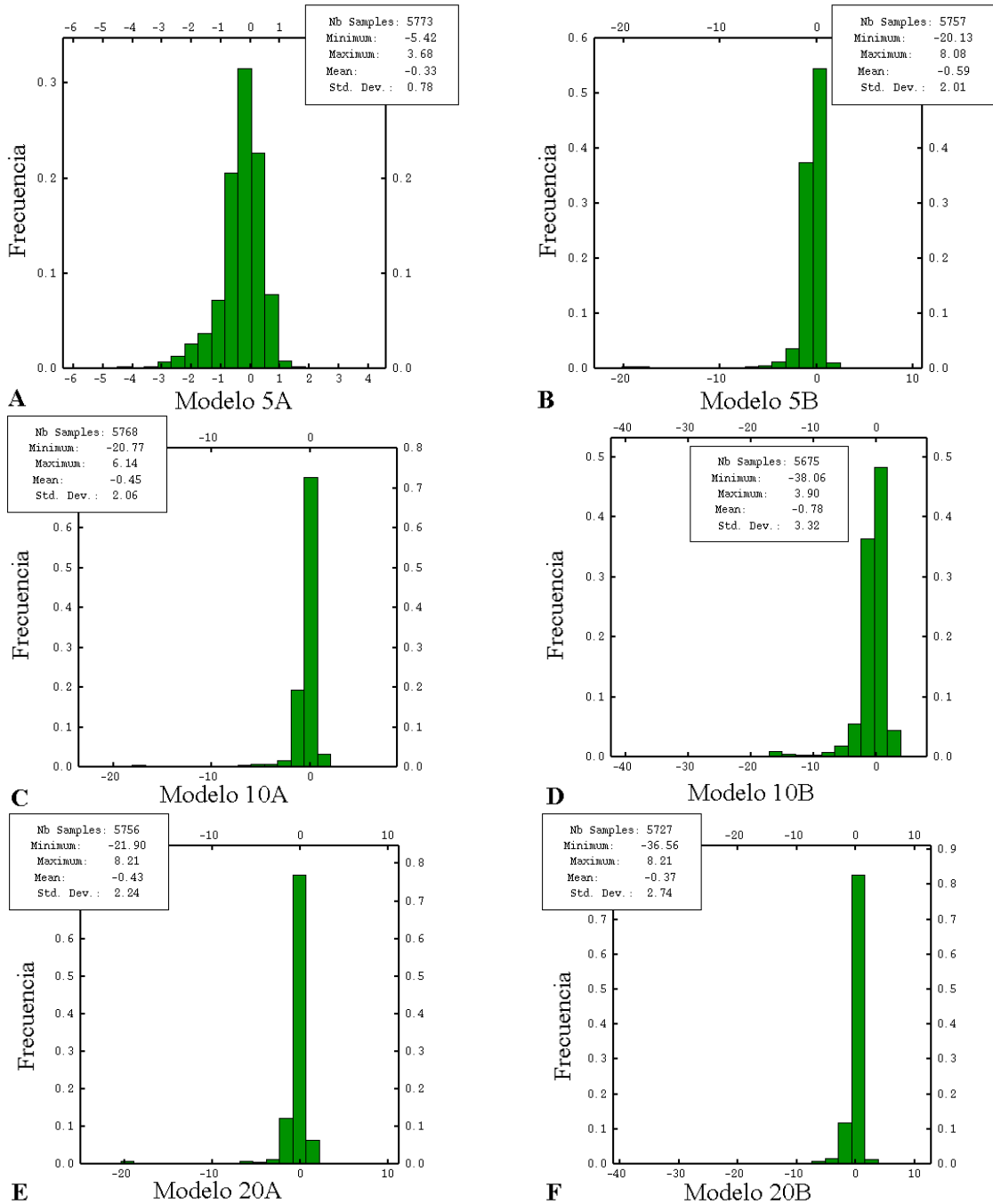
Validación	$y_1$ promedio	$y_1$ menor	$y_1$ mayor	$\Delta y_1$
A	0,898	0,783	1,251	0,468
B	1,631	1,210	3,750	2,540

Las holguras que se consideran para realizar estas validaciones corresponden a márgenes necesarios para considerar 1000 muestras de datos para realizar un histograma robusto.



## 8.5. Anexo V: Histogramas Gaussianos

En la realización del modelo que considera la dependencia de la elevación, se consideraron dos métodos de modelamiento. Mientras uno consideraba un aporte lineal en el modelo exponencial, el otro consideraba un modelo de orden 3 en la exponencial al integrarlo con la dependencia de la ley de cobre total. Sumado a lo anterior, se consideraron diversos números de clases de datos.



**Figura 71: Histogramas de distribuciones gaussianas para (A) Modelo 5A, (B) Modelo 5B, (C) Modelo 10A, (D) Modelo 10B, (D) Modelo 20A y (F) Modelo 20B.**

La elección del modelo considera varios aspectos, tales como que los datos Gaussiano generados tengan una distribución de media tendiendo a 0 y varianza cercana a 1.

El modelo 5A resultó ser el modelo con media más cercana a 0 y con varianza más cercana a 1 (a pesar de los 67 valores que se alejan de la media), en relación al resto de los modelos como se pueden ver en la tabla siguiente:

**Tabla 24: Valores Gaussianos anormales generados por modelo.**

Modelo	valores + infinitos	valores - infinitos	valores infinitos	valores alejados de la campana
5A	0	0	0	67
5B	16	0	16	59
10A	5	0	5	65
10B	0	98	98	349
20A	17	0	17	64
20B	35	11	46	73

Cabe mencionar que los valores infinitos provenían de valores iguales a 1 (o numéricamente muy cercanos a 1) en la distribución uniforme, mientras que los valores no validos correspondían a valores generados por valores de 0 de la distribución uniforme.

## 8.6. Anexo VI: Estudio variográfico

### 8.6.1. Mapas variográficos

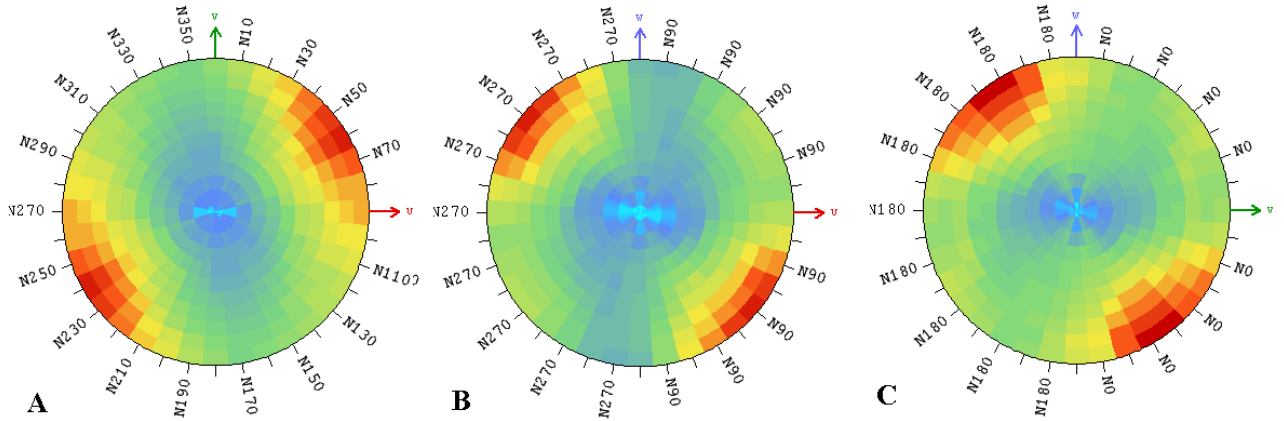


Figura 72: Mapa variográfico de valores gaussianos de ley de cobre total en los planos: (A) Este-Norte, (B) Elevación-Este y (C) Elevación-Norte.

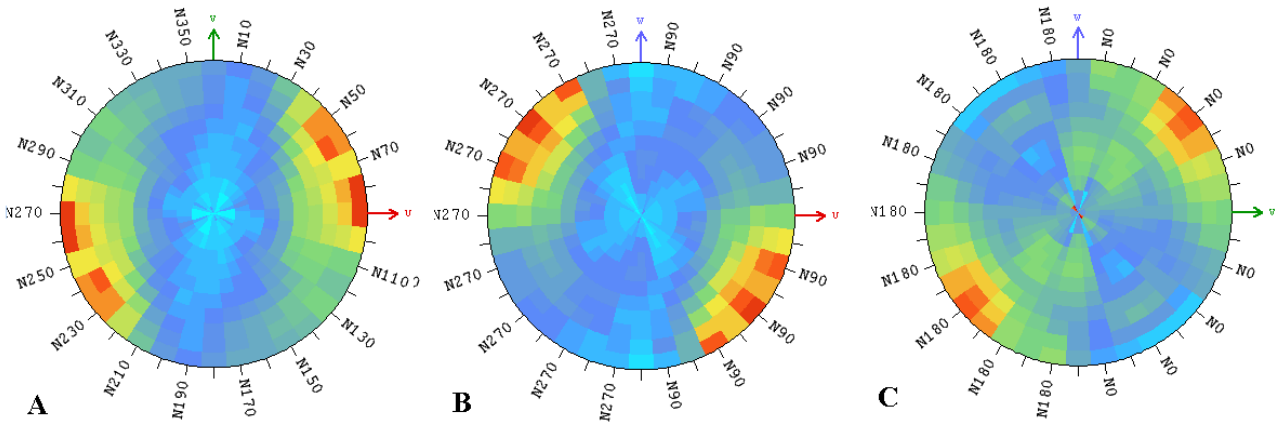


Figura 73: Mapa variográfico de valores gaussianos de ley de cobre soluble (modelo sin deriva) en los planos: (A) Este-Norte, (B) Elevación-Este y (C) Elevación-Norte.

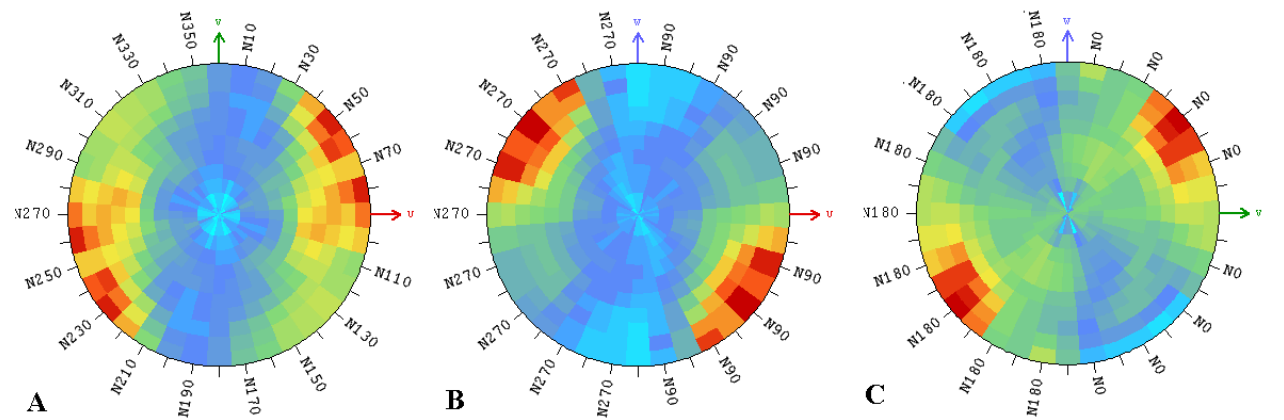
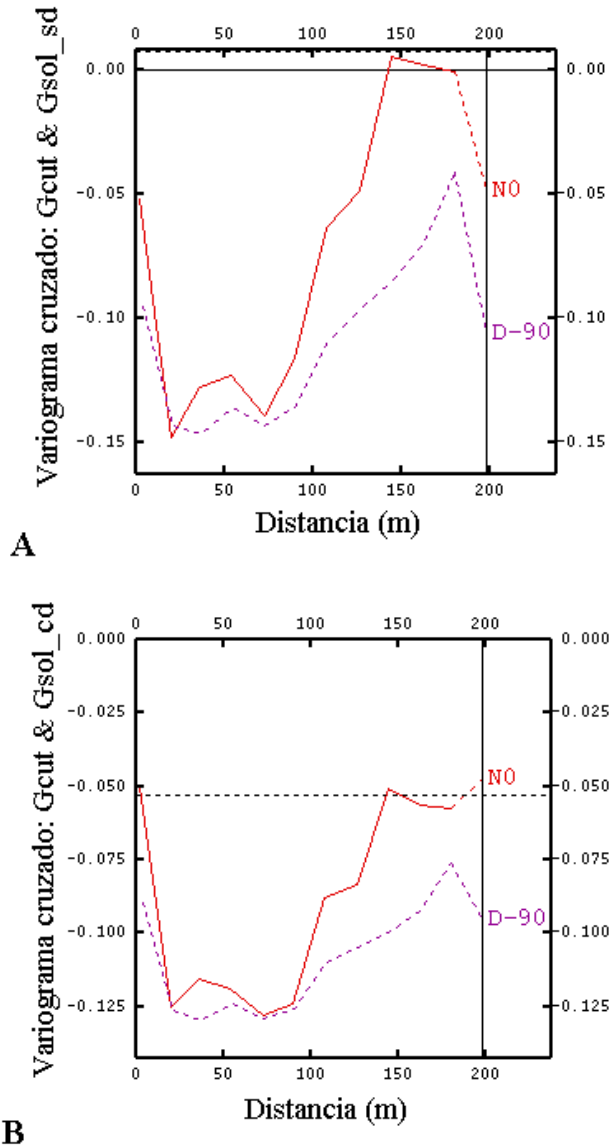


Figura 74: Mapa variográfico de valores gaussianos de ley de cobre soluble (modelo con deriva) en los planos: (A) Este-Norte, (B) Elevación-Este y (C) Elevación-Norte.

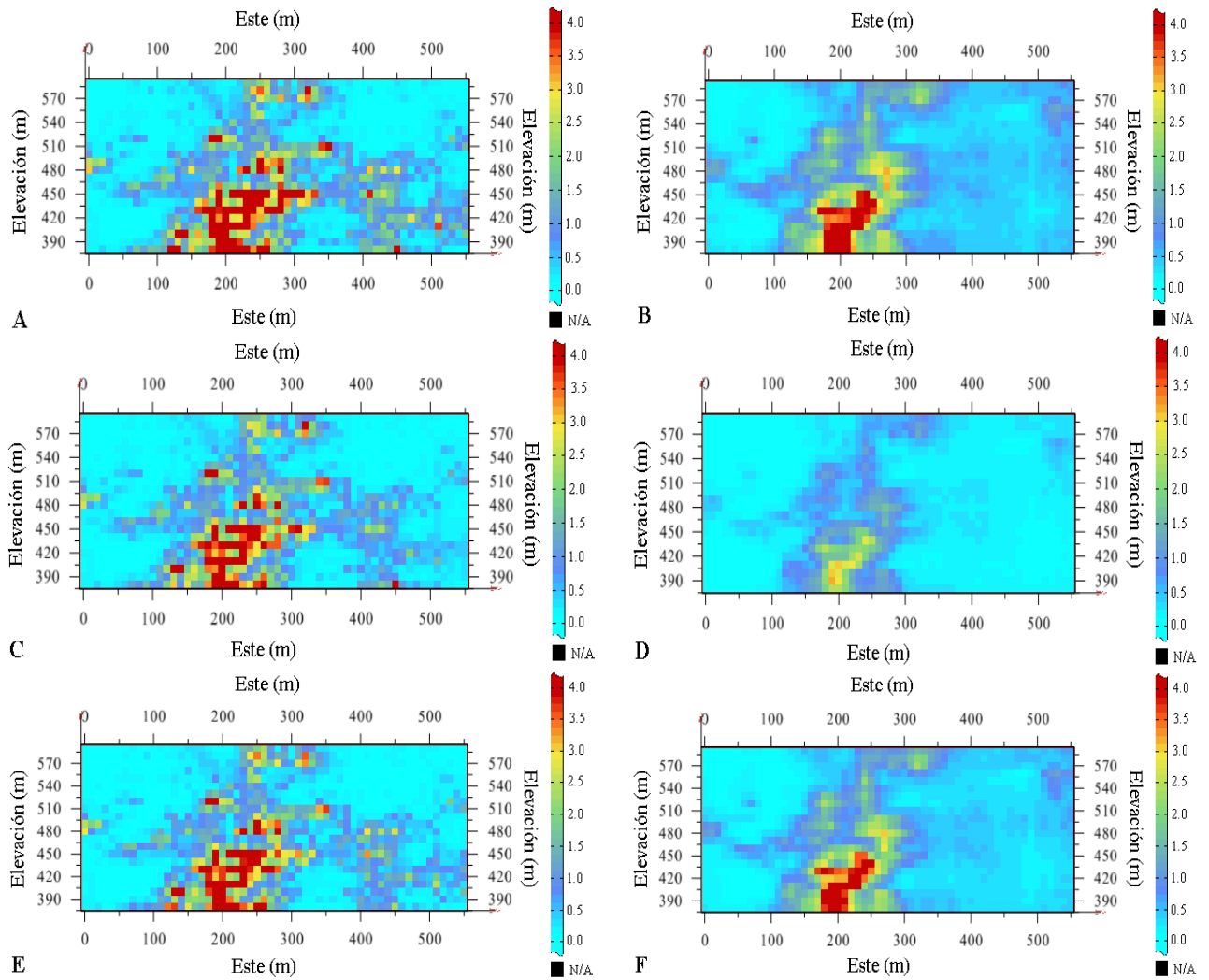
### 8.6.2. Variogramas cruzados

Como se puede ver en la siguiente figura, los variogramas cruzados entre variables Gaussianas pueden considerarse despreciables y trabajar con las variables de manera independiente al ver que para ambos casos, el variograma cruzado no varía más allá de 0,1 en valor absoluto.

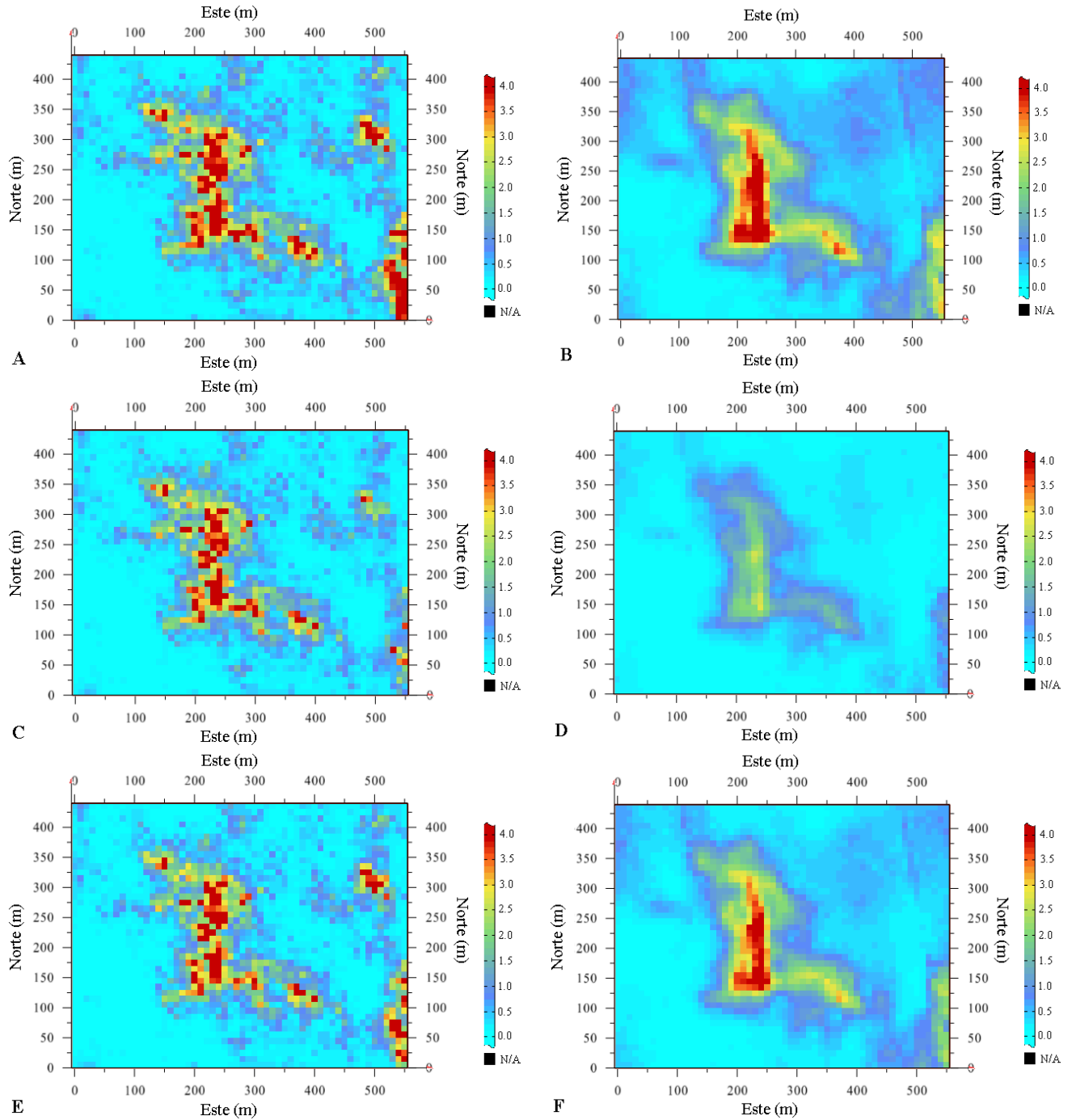


**Figura 75:** Variogramas cruzados entre: (A) transformadas gaussianas de leyes de cobre total y solubilidad (modelo sin deriva) y (B) transformadas gaussianas de leyes de cobre total y solubilidad (modelo con deriva).

## 8.7. Anexo VII: Simulaciones



**Figura 76: Perfiles Este-Elevación de: (A) Ley de cobre total simulación 56, (B) Media de 100 simulaciones de leyes de cobre total, (C) Ley de cobre soluble simulación 56, (D) Media de 100 simulaciones de leyes de cobre soluble (modelo sin deriva), (E) Ley de cobre soluble simulación 56 y (F) Media de 100 simulaciones de leyes de cobre soluble (modelo con deriva).**

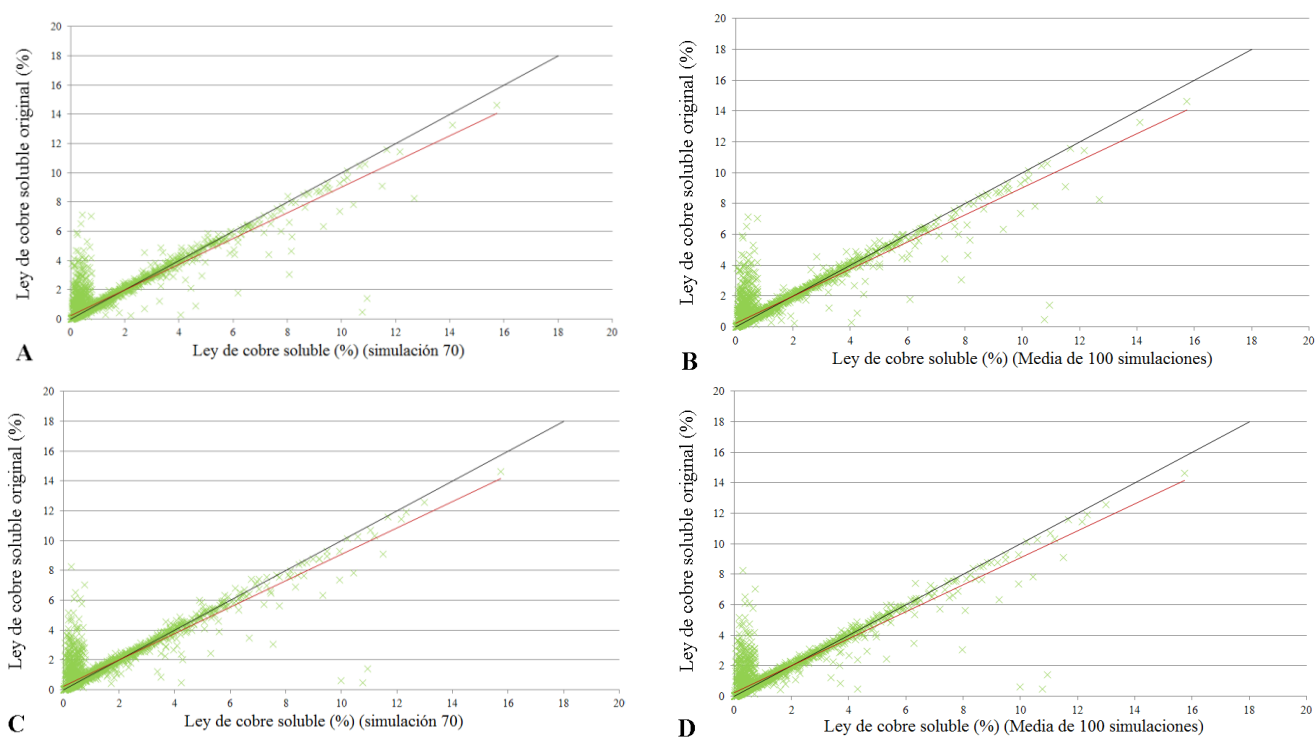


**Figura 77: Perfiles Este-Norte de: (A) Ley de cobre total simulación 74, (B) Media de 100 simulaciones de leyes de cobre total, (C) Ley de cobre soluble simulación 74, (D) Media de 100 simulaciones de leyes de cobre soluble (modelo sin deriva), (E) Ley de cobre soluble simulación 74 y (F) Media de 100 simulaciones de leyes de cobre soluble (modelo con deriva).**

## 8.8. Anexo VIII: Jackknife

### 8.8.1. Base de datos completada

Con el fin de descartar que posibles anomalías en la validación del modelo, sean generadas por el muestreo preferencial, se realiza un Jackknife considerando una base de datos completa (se completan los 13.701 valores de leyes de cobre soluble ausentes), es decir, se completan los datos ausentes del muestreo heterotópico con valores simulados. Para esto se realizaron dos estudios, uno con una base completada con datos de una simulación al azar (simulación 70) y otra con una base completada con la media de 100 simulaciones. En ambos casos, se utiliza un grupo de datos para simular las leyes de otro grupo, luego se comparan las leyes simuladas con las leyes originales. Las estadísticas y comportamientos se ven a continuación.

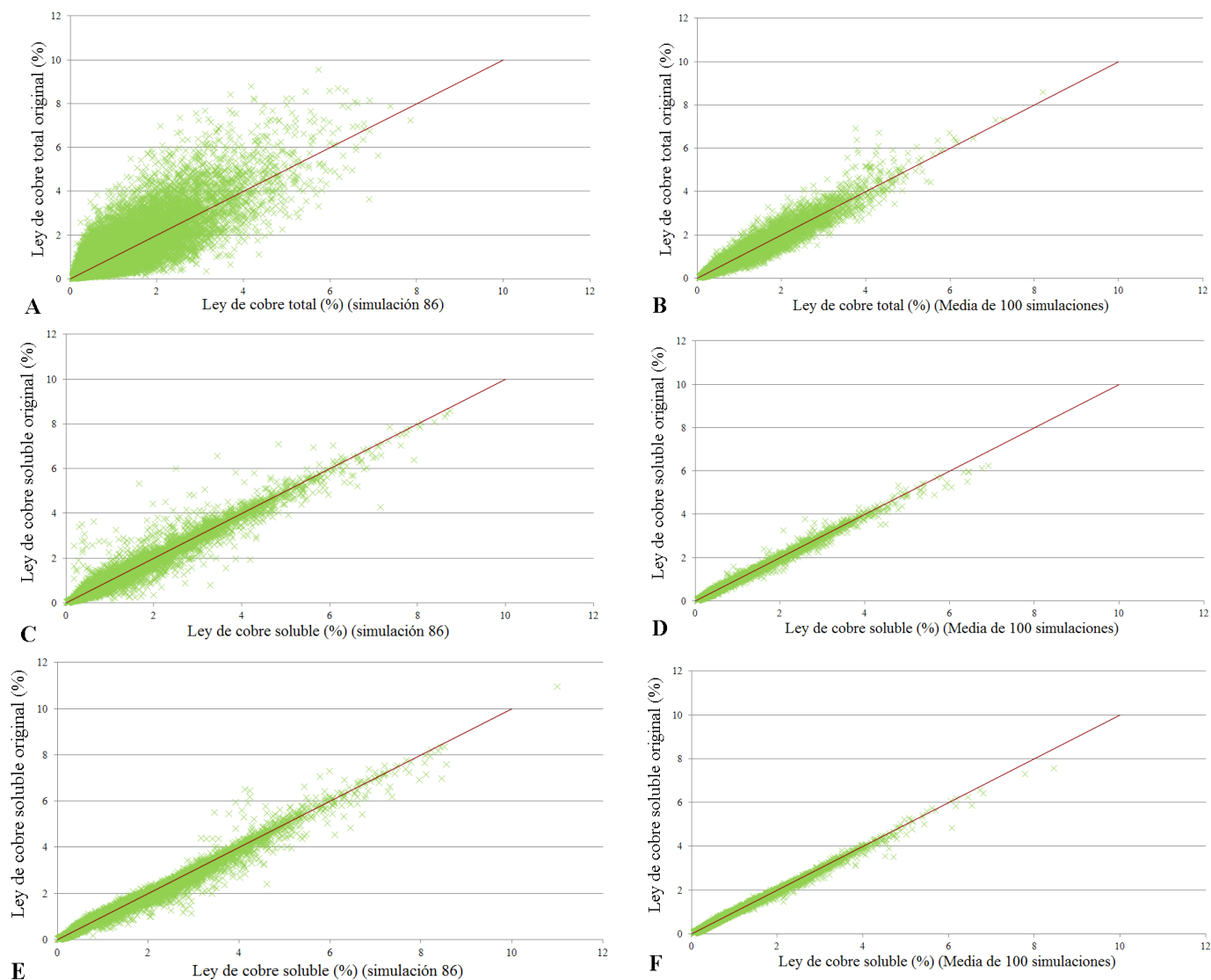


**Figura 78: Jackknife (A) modelo sin deriva con base completada con simulación 70, (B) modelo sin deriva con base completada con media de 100 simulaciones, (C) modelo con deriva con base completada con simulación 70 y (D) modelo con deriva con base completada con media de 100 simulaciones. (Línea roja corresponde a tendencia lineal y línea negra a la identidad).**

Como se puede apreciar, el comportamiento es similar para una simulación como para la media de estas, y efectivamente se ve una alteración generada por el muestreo preferencial en las bajas leyes.

### 8.8.2. Base de datos completamente simulada

Para comprobar que los modelos generados cumplen con las condiciones necesarias, se realizan Jackknifes considerando como base de datos valores generados por simulación. Se estudian dos bases de datos para cada modelo, uno con una base generada con una simulación al azar (simulación 86) y otra con la media de 100 simulaciones.



**Figura 79: Jackknife (A) cobre total con simulación 86, (B) cobre total con media de las simulaciones, (C) modelo sin deriva con simulación 86, (D) modelo sin deriva con media de simulaciones, (E) modelo con deriva con simulación 86 y (F) modelo con deriva con media de simulaciones. (Línea roja corresponde a tendencia lineal y línea negra a la identidad).**



## 8.9. Anexo IX: Reproducción de solubilidad

Tabla 25: Solubilidades medias en dirección Este.

Este [m]	Modelo sin deriva [%]	Modelo con deriva [%]	Co-kriging [%]	Este [m]	Modelo sin deriva [%]	Modelo con deriva [%]	Co-kriging [%]
0	0.823	0.868	0.668	280	0.870	0.866	0.828
10	0.827	0.867	0.646	290	0.860	0.857	0.825
20	0.828	0.864	0.675	300	0.851	0.851	0.831
30	0.824	0.859	0.677	310	0.851	0.853	0.830
40	0.818	0.851	0.681	320	0.852	0.853	0.832
50	0.811	0.844	0.671	330	0.844	0.850	0.842
60	0.797	0.839	0.676	340	0.842	0.851	0.820
70	0.789	0.832	0.678	350	0.841	0.854	0.835
80	0.787	0.822	0.673	360	0.846	0.856	0.801
90	0.791	0.822	0.677	370	0.849	0.859	0.786
100	0.795	0.822	0.690	380	0.849	0.862	0.750
110	0.803	0.829	0.701	390	0.843	0.863	0.700
120	0.807	0.830	0.718	400	0.836	0.860	0.694
130	0.814	0.832	0.755	410	0.830	0.857	0.673
140	0.823	0.838	0.787	420	0.815	0.852	0.657
150	0.834	0.846	0.805	430	0.796	0.844	0.644
160	0.848	0.858	0.824	440	0.786	0.841	0.605
170	0.860	0.868	0.823	450	0.779	0.836	0.582
180	0.867	0.875	0.856	460	0.768	0.832	0.583
190	0.872	0.878	0.843	470	0.758	0.824	0.600
200	0.874	0.877	0.843	480	0.744	0.820	0.659
210	0.882	0.884	0.842	490	0.732	0.820	0.683
220	0.885	0.886	0.840	500	0.729	0.821	0.656
230	0.886	0.887	0.835	510	0.722	0.819	0.587
240	0.888	0.886	0.827	520	0.712	0.821	0.556
250	0.888	0.887	0.833	530	0.706	0.827	0.553
260	0.885	0.883	0.834	540	0.711	0.837	0.564
270	0.880	0.877	0.838	550	0.719	0.842	0.555

**Tabla 26: Solubilidades medias en dirección Norte.**

Norte [m]	Modelo sin deriva [%]	Modelo con deriva [%]	Co-kriging [%]	Norte [m]	Modelo sin deriva [%]	Modelo con deriva [%]	Co-kriging [%]
5	0.812	0.845	0.672	225	0.828	0.848	0.721
15	0.815	0.846	0.648	235	0.825	0.844	0.699
25	0.818	0.846	0.612	245	0.822	0.844	0.692
35	0.821	0.846	0.613	255	0.823	0.845	0.686
45	0.823	0.848	0.627	265	0.823	0.848	0.687
55	0.827	0.853	0.665	275	0.823	0.850	0.688
65	0.831	0.856	0.701	285	0.823	0.852	0.701
75	0.831	0.855	0.711	295	0.820	0.853	0.689
85	0.828	0.852	0.723	305	0.820	0.855	0.701
95	0.826	0.850	0.743	315	0.816	0.857	0.748
105	0.824	0.847	0.748	325	0.813	0.857	0.771
115	0.825	0.849	0.767	335	0.810	0.854	0.770
125	0.826	0.848	0.792	345	0.808	0.854	0.739
135	0.827	0.848	0.800	355	0.805	0.854	0.743
145	0.830	0.848	0.813	365	0.800	0.852	0.773
155	0.832	0.849	0.809	375	0.795	0.851	0.778
165	0.833	0.850	0.814	385	0.794	0.851	0.737
175	0.830	0.850	0.803	395	0.793	0.851	0.694
185	0.825	0.847	0.805	405	0.793	0.854	0.675
195	0.825	0.847	0.789	415	0.795	0.855	0.698
205	0.828	0.849	0.767	425	0.801	0.858	0.720
215	0.830	0.849	0.731	435	0.809	0.861	0.751

## 8.10. Anexo X: Estadísticas de destinos

El cálculo de los destinos de los bloques con sus leyes medias se realiza para cada simulación de manera individual para luego promediar los resultados. A continuación se ven los mínimos y máximos de los resultados presentados en las tablas 16, 17, 18 y 19.

**Tabla 27: Media, mínimo y máximo de simulaciones del modelo sin deriva (Lc=0,3%, Lcb=0,2%, Sca=70% y Scb=85%).**

Destino		Flotación	Lixiviación	Pila de baja ley	Botadero
Número de bloques	Media	5.095	22.085	3.027	24.001
	Mínimo	3.367	18.807	2.537	19.190
	Máximo	8.349	24.751	3.526	28.808
Ley media de cobre total (%)	Media	1,166	1,326	0,243	0,126
	Mínimo	0,958	1,221	0,241	0,111
	Máximo	1,835	1,560	0,244	0,134
Ley media de cobre soluble (%)	Media	0,599	1,179	0,222	0,108
	Mínimo	0,491	1,081	0,219	0,096
	Máximo	0,811	1,399	0,224	0,114

**Tabla 28: Media, mínimo y máximo de simulaciones del modelo con deriva (Lc=0,3%, Lcb=0,2%, Sca=70% y Scb=85%).**

Destino		Flotación	Lixiviación	Pila de baja ley	Botadero
Número de bloques	Media	3.192	23.988	2.467	24.561
	Mínimo	2.169	20.462	2.025	19.591
	Máximo	5.475	28.491	3.216	29.264
Ley media de cobre total (%)	Media	0,911	1,348	0,243	0,129
	Mínimo	0,775	1,239	0,242	0,113
	Máximo	1,152	1,679	0,244	0,137
Ley media de cobre soluble (%)	Media	0,555	1,197	0,220	0,109
	Mínimo	0,475	1,100	0,218	0,098
	Máximo	0,669	1,524	0,222	0,115

**Tabla 29: Media, mínimo y máximo de simulaciones del modelo sin deriva (Lc=0,45%, Lcb=0,25%, Sca=90% y Scb=85%).**

Destino		Flotación	Lixiviación	Pila de baja ley	Botadero
Número de bloques	Media	13.595	8.360	3.625	28.628
	Mínimo	10.850	6.682	2.948	23.710
	Máximo	18.361	10.489	4.304	32.780
Ley media de cobre total (%)	Media	1,366	1,767	0,337	0,156
	Mínimo	1,245	1,600	0,334	0,135
	Máximo	1,736	2,125	0,340	0,168
Ley media de cobre soluble (%)	Media	0,997	1,676	0,307	0,130
	Mínimo	0,909	1,516	0,303	0,114
	Máximo	1,150	2,033	0,312	0,138

**Tabla 30: Media, mínimo y máximo de simulaciones del modelo con deriva (Lc=0,45%, Lcb=0,25%, Sca=90% y Scb=85%).**

Destino		Flotación	Lixiviación	Pila de baja ley	Botadero
Número de bloques	Media	13.338	8.617	3.102	29.151
	Mínimo	10.848	6.882	2.531	24.121
	Máximo	17.348	11.919	3.976	33.224
Ley media de cobre total (%)	Media	1,296	1,862	0,339	0,159
	Mínimo	1,198	1,698	0,336	0,137
	Máximo	1,466	2,380	0,342	0,172
Ley media de cobre soluble (%)	Media	1,033	1,759	0,308	0,131
	Mínimo	0,950	1,601	0,305	0,115
	Máximo	1,134	2,280	0,311	0,140