



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

**EL PROBLEMA DEL VENDEDOR VIAJERO EN GRAFOS CÚBICOS**

**TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN GESTIÓN DE  
OPERACIONES**

**OMAR ALONSO LARRÉ VARGAS**

PROFESOR GUÍA:  
JOSÉ RAFAEL CORREA HAEUSSLER

PROFESOR CO-GUÍA:  
JOSÉ ANTONIO SOTO SAN MARTÍN

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
DANIEL ALEJANDRO ESPINOZA GONZALEZ  
MARCOS GOYCOOLEA GUZMÁN

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por CONICYT

SANTIAGO DE CHILE  
JUNIO 2012

RESUMEN DE LA TESIS PARA  
OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER  
EN GESTIÓN DE OPERACIONES  
POR: OMAR LARRÉ  
FECHA: 18/06/2012  
PROF. GUÍA: Sr. JOSÉ CORREA

## EL PROBLEMA DEL VENDEDOR VIAJERO EN GRAFOS CÚBICOS

Dada una colección de ciudades y el costo de viajar entre cualquier par de ella, el *problema del vendedor viajero*, que denotaremos como TSP (*traveling salesman problem* en inglés), consiste en encontrar el tour menos costoso que visita todas las ciudades al menos una vez retornando al punto inicial. En su forma métrica este problema es  $NP$ -duro, y por lo tanto no existe un algoritmo en tiempo polinomial que lo resuelva, salvo que  $P = NP$ . Para el caso métrico, Christofides diseñó en el año 1976 un  $3/2$ -algoritmo de aproximación, el cual despertó una gran curiosidad con respecto a la aproximabilidad del problema. Sin embargo, y pese a los grandes esfuerzos efectuados en investigación, el algoritmo de Christofides es el de mejor garantía hasta el día de hoy.

Recientemente han habido varias mejoras importantes con respecto a la aproximabilidad en casos especiales de TSP métrico. En el año 2011 Oveis Gharan et al. diseñaron un  $(3/2 - \epsilon)$ -algoritmo de aproximación para el caso *graph-TSP*, donde la distancia métrica entre cada par de ciudades está dada por el menor número de arcos necesarios para conectarlas por un camino dentro de un grafo sin pesos. En el mismo año Mömke y Svensson mejoran el resultado a 1.461, mientras Mucha en el 2012 mejora la garantía del algoritmo a  $13/9$ . En el caso de que el grafo es cúbico de  $n$  vértices y 2-conexo, el algoritmo de Mömke y Svensson entrega un tour de largo menor a  $(4/3)n$ , resultado obtenido también por Boyd et al. en el año 2011.

En este trabajo estudiamos el problema *graph-TSP* en distintas variantes de grafos cúbicos. Primero estudiamos el caso en que el grafo es planar, cúbico, bipartito y 3-conexo, el cual es un caso interesante desde el punto de vista de teoría de grafos ya que, según la conjetura de Barnette –de hace más de 40 años– estos grafos serían Hamiltonianos. En esta clase de grafos, conocidos como grafos de Barnette, mostramos que en un grafo de  $n$  vértices existe un tour de largo a lo más  $(4/3 - 1/18)n$ . Luego relajamos las condiciones sobre el grafo, quitando la hipótesis de planaridad e imponiendo que sea cúbico, bipartito y 2-conexo, caso en el cual mostramos que existe un tour de largo a lo más  $(4/3 - 1/108)n$ . Finalmente, estudiamos el caso en que el grafo es solamente cúbico y 2-conexo. En este caso nos basamos en las técnicas de Boyd et al. para mostrar que existe un tour de largo a lo más  $(4/3 - 1/61236)n$ . En cada caso mostramos que el tour se puede encontrar en tiempo polinomial, y como  $n$  es naturalmente una cota inferior del valor de *graph-TSP*, cada uno de los resultados obtenidos se traduce en un algoritmo de aproximación. Además, como  $n$  es una cota inferior de la relajación de Held & Karp, que es una conocida formulación para TSP como programa lineal, obtenemos como consecuencia que el gap de integralidad de TSP con respecto a esta relajación es acotado superiormente por  $(4/3 - 1/18)$  para el caso de Barnette,  $(4/3 - 1/108)$  para el caso cúbico, bipartito y 2-conexo, y  $(4/3 - 1/61236)$  para el caso cúbico y 2-conexo.

## THE TRAVELING SALESMAN PROBLEM ON CUBIC GRAPHS

Given a collection of cities and the cost of travel between each pair of them, the *traveling salesman problem*, or TSP for short, is to find the cheapest way of visiting all of the cities and returning to your starting point. The metric version this problem is NP-hard, and therefore there is no polynomial time algorithm which solves it, unless  $P = NP$ . For the metric case, Christofides showed in 1976 a  $3/2$ -approximation algorithm, which attracted much attention about the approximability of the TSP. However, and despite the great efforts, Christofides' algorithm continues to be the current champion.

Very recently there have been several improvements for important special cases of the metric TSP. In 2011 Oveis Gharan et al. design a  $(3/2 - \epsilon)$ -approximation algorithm for the case of *graph-TSP*, that is, when the metric is the length of the shortest path of an undirected graph. In the same year, Mömke and Svensson improve that to 1.461, then Mucha showed that the approximation guarantee of the Mömke and Svensson algorithm is  $13/9$ . For graphs 2-connected and cubic on  $n$  vertices, the Mömke and Svensson algorithm returns a tour of length at most  $(4/3)n$ , same result obtained by Boyd et al. in 2011.

In this work we study the graph-TSP on different classes of graphs. First, we study the case where the graph is planar, cubic, bipartite and 3-connected, which is an interesting case from a graph theoretic viewpoint, since Barnette's conjecture –from more than 40 years ago– states that every graph of this type has a Hamiltonian cycle. In this class of graphs, referred to as Barnette's graphs, we show that for graphs on  $n$  vertices there exists a TSP tours of length at most  $(4/3 - 1/18)n$ . Then we drop the planarity assumption, and we only suppose that the graph is cubic, bipartite and 2-connected, where we show that there exists a TSP tours of length at most  $(4/3 - 1/108)n$ . Finally, we study the case where the graph is only cubic and 2-connected. In this case we base our results on Boyd's techniques, showing that there exists a TSP tours of length at most  $(4/3 - 1/61236)n$ . In every case we show that the tour can be computed in polynomial time, therefore, as  $n$  is a lower bound of the value of graph-TSP, we have that every result implies an approximation algorithm. In addition, as  $n$  is a lower bound of the Held & Karp relaxation, which is a well known linear programming formulation of TSP, we obtain that the integrality gap of the Held-Karp relaxation is at most  $(4/3 - 1/18)$  for the Barnette's case,  $(4/3 - 1/108)$  for the cubic, bipartite and 2-connected case, and  $(4/3 - 1/61236)$  for the cubic and 2-connected case.

*A Carolina y Antonia*

# AGRADECIMIENTOS

Quiero mostrar mi agradecimiento a todos los que formaron parte de este trabajo y a los que me acompañaron durante él:

Agradezco profunda y sinceramente a mi profesor guía José Correa, de quien siempre recibí apoyo y sin el cual no habría realizado este magíster ni mucho menos este trabajo final.

A mi profesor co-guía José Soto, con el cual compartí desde mi estadía en MIT y hasta ahora, ya que sin sus aportes este trabajo no hubiese avanzado como lo hizo. Agradezco también su paciencia para revisar, entender y corregir los borradores.

A los miembros de la comisión Daniel Espinoza y Marcos Goycoolea quienes accedieron cortésmente a ser parte de ella.

A todos mis amigos y compañeros de la universidad, en especial a Gonzalo Ríos, Julio Backhoff y Leonardo Zepeda, por todas las largas conversaciones compartidas. También a mis amigos que conocí durante el periodo dedicado al magíster, como Victor, Jacqueline, Cecilia, Felipe y Mauricio.

A mi familia, mi padre Miguel, mi madre Mónica, mi hermana Pascale y mi hermano Javier, siempre les voy a estar agradecido por todo.

Finalmente agradezco a mis chicas, Carolina y Antonia, por todo su amor y ya que con ellas todo es mejor.

# Índice general

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Introducción</b>  | <b>1</b>  |
| 1.1. Preliminares . . . . .   | 1         |
| 1.1.1. Matchings . . . . .  | 2         |
| 1.1.2. Planaridad . . . . .   | 2         |
| 1.1.3. Coloreo . . . . .  | 3         |
| 1.1.4. Grafos perfectos . . . . .   | 3         |
| 1.2. El problema del vendedor viajero . . . . .                             | 3         |
| 1.2.1. Métodos de solución . . . . .  | 4         |
| 1.2.2. Relajación de Held & Karp . . . . .                                  | 4         |
| 1.2.3. Algoritmos de aproximación para TSP . . . . .                        | 5         |
| 1.2.4. Gap integral . . . . .   | 5         |
| 1.3. Graph-TSP en grafos cúbicos . . . . .                                  | 5         |
| 1.3.1. Relajación de Held & Karp para graph-TSP . . . . .                   | 6         |
| 1.3.2. Grafos de Barnette . . . . .   | 6         |
| 1.3.3. Aproximaciones para graph-TSP . . . . .                              | 7         |
| 1.3.4. Gap integral para graph-TSP . . . . .                                | 9         |
| 1.4. Resumen y estructura de los capítulos . . . . .                        | 11        |
| <b>2. Árboles y matchings de intersección baja</b>                          | <b>12</b> |
| 2.1. Algunas propiedades básicas de grafos cúbicos y 2-conexos . . . . .    | 12        |
| 2.1.1. Matchings perfectos en grafos cúbicos 2-conexos . . . . .            | 12        |
| 2.2. Árboles y matchings de intersección baja . . . . .                     | 13        |
| 2.3. Una $4/3$ aproximación para graph-TSP en el caso cúbico . . . . .      | 14        |
| <b>3. Una <math>(4/3 - d)n</math> cota superior para grafos de Barnette</b> | <b>18</b> |
| 3.1. Algunas propiedades de los grafos de Barnette . . . . .                | 18        |
| 3.2. Graph-TSP en grafos de Barnette . . . . .                              | 19        |
| <b>4. Aproximación para el caso cúbico bipartito</b>                        | <b>24</b> |
| 4.1. Reducción a un caso más simple . . . . .                               | 24        |
| 4.2. Descripción del algoritmo . . . . .                                    | 27        |
| 4.3. Análisis del algoritmo . . . . .                                       | 27        |
| 4.4. Garantía de aproximación . . . . .                                     | 31        |
| 4.5. Gap integral . . . . .   | 32        |

---

|   |           |
|---|-----------|
| <b>5. Una <math>(4/3 - \epsilon)</math> aproximación para el caso general</b> | <b>33</b> |
| 5.1. Fase de reducción del grafo $G$ . . . . .                                | 33        |
| 5.2. Matchings 3-corte perfectos . . . . .                                    | 38        |
| 5.3. Descripción del método de aproximación . . . . .                         | 39        |
| 5.4. Fase del cubrimiento de subgrafos Eulerianos . . . . .                   | 40        |
| 5.5. Garantía de aproximación . . . . .                                       | 42        |
| 5.6. Gap integral . . . . .   | 55        |
| <b>6. Conclusiones</b>  | <b>56</b> |
| <b>Bibliografía</b>   | <b>57</b> |

# Índice de figuras

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 1.1.  | Contraejemplo de Tutte a la conjetura de Tait. . . . .  | 7  |
| 1.2.  | Contraejemplo de Horton a la conjetura de Tutte. . . . .  | 8  |
| 1.3.  | Familia de instancias subcúbicas que tienden a un gap de $4/3$ . . . . .  | 9  |
| 1.4.  | Familia de instancias cúbicas que tienden a un gap de $7/6$ . . . . .   | 9  |
| 1.5.  | Una solución $x_e$ de la relajación de Held & Karp con valor $n$ para la familia de instancias cúbicas que tienden a un gap $7/6$ . . . . .   | 10 |
| 1.6.  | Familia de instancias cúbicas con $OPT(G) = 11n/9 - 8/9$ . . . . .  | 10 |
| 2.1.  | En la figura, en líneas continuas se muestra el árbol DFS y la orientación respectiva desde el vértice raíz $r$ , mientras que con líneas punteadas se grafican los arcos contrarios. . . . . | 15 |
| 2.2.  | En la figura, el árbol $T$ está dibujado en línea continua. En este caso, no hay una forma de definir al menos $n/2$ arcos removibles determinados por $T$ . . . . .                          | 17 |
| 3.1.  | Esquema de la demostración para el Lema 3.2.2. . . . .  | 20 |
| 4.1.  | Grafos cúbicos y bipartitos con $n \leq 8$ . . . . .  | 25 |
| 4.2.  | Hexágono con dos cuerdas cruzadas. . . . .  | 25 |
| 4.3.  | Estructura pseudocubo en un grafo bipartito. . . . .  | 25 |
| 4.4.  | Dos cuadrados adyacentes. . . . .   | 26 |
| 4.5.  | Detalle de la reducción de una estructura de dos cuadrados adyacentes en el caso que $v_1, v_2, v_3, v_4$ y $e_1, e_2, e_3, e_4$ son todos distintos. . . . .                                 | 26 |
| 4.6.  | Reducción de una estructura de cuadrados adyacentes en el caso que $v_1 = v_2$ y $v_3 \neq v_4$ . . . . .   | 26 |
| 4.7.  | Estructura del hexágono $F \in \mathcal{C}(c)$ sin cuerdas, donde todos sus vértices tienen etiquetas $(6, 6, 6)$ . . . . .   | 29 |
| 4.8.  | Hexágono $F \in \mathcal{C}(c)$ sin cuerdas procesado por el Paso 4 del Algoritmo 5. . . . .  | 29 |
| 4.9.  | Estructura del hexágono $F \in \mathcal{C}(c)$ con cuerda, donde todos sus vértices tienen etiquetas $(6, 6, 6)$ . . . . .  | 30 |
| 4.10. | Familia de instancias cúbicas y bipartitas que tienden a un gap de $10/9$ . . . . .   | 32 |
| 4.11. | Una solución $x_e$ de la relajación de Held & Karp con valor $n$ para la familia de instancias cúbicas y bipartitas que tienden a un gap $10/9$ . . . . .                                     | 32 |
| 5.1.  | Un 4-ciclo con una cuerda o <i>diamante</i> . . . . .   | 33 |
| 5.2.  | Reducción en el caso de que tres de los vértices $w_i$ 's son distintos y $\gamma$ tiene una cuerda que une vértices simétricamente opuestos. . . . .   | 34 |
| 5.3.  | Todas las estructuras que se pueden reducir utilizando la Reducción 3. . . . .  | 37 |
| 5.4.  | Operación (U1). . . . .   | 40 |



|   |    |
|---|----|
| 5.5. Esquema de la operación (U3). . . . .  | 42 |
| 5.6. Vértices de un 4-ciclo con una cuerda. . . . .   | 43 |
| 5.7. El 4-ciclo $\gamma$ intersectando un 8-ciclo. . . . .  | 45 |
| 5.8. 6-ciclo $\gamma$ . . . . .   | 47 |
| 5.9. Las diferentes formas de como un matching puede intersectar $\gamma$ . Usamos la misma orientación de la Figura 5.8. . . . . | 48 |
| 5.10. 6-ciclo $\gamma$ para el caso en que $X_2^1, X_2^2$ y $X_2^3$ son no vacíos y no largos. . . . .                            | 52 |
| 5.11. Operación (U1) aplicada a los ciclos en $\mathcal{C}_{i_1}$ , donde $i_1$ es un índice corto de $X_2^1$ . . . . .           | 52 |
| 5.12. 6-ciclo $\gamma$ para el caso en que $X_2^1, Y_2^2, Y_2^3$ son no vacíos y no largos. . . . .                               | 53 |
| 5.13. Operación (U1) aplicada a los ciclos en $\mathcal{C}_{i_1}$ , donde $i_1$ es un índice corto de $X_2^1$ . . . . .           | 53 |
| 5.14. 6-ciclo $\gamma$ para el caso en que $Y_2^1, Y_2^4, Y_2^2, Y_2^5$ son no vacíos y no largos. . . . .                        | 53 |

# Capítulo 1

## Introducción

Dada una colección de ciudades y el costo de viajar entre cualquier par de ellas, el *problema del vendedor viajero*, que denotaremos como *TSP* (*traveling salesman problem* en inglés), consiste en encontrar la forma menos costosa de visitar todas las ciudades y retornar al punto inicial.

El problema del vendedor viajero fue definido en el siglo XIX por el matemático irlandés W. R. Hamilton y por el matemático británico Thomas Kirkman. Como es un problema simple de explicar, a primera vista la complejidad del problema puede parecer engañosamente simple. Sin embargo, TSP es uno de los problemas más intensamente estudiados tanto en ciencias de la computación, investigación de operaciones y en matemáticas, y pese a eso aún no existen métodos computacionalmente efectivos para resolverlo en el caso general. De hecho, la resolución de TSP en tiempo polinomial resolvería el gran problema abierto *P* versus *NP*.

El problema del vendedor viajero aparece en la práctica no solamente en problemas de ruteo, sino que también en varias otras aplicaciones tales como programación de tareas, *clustering*, cableo y reconstrucción de curvas. Aún más importante, TSP suele aparecer como subproblema dentro de algún problema de optimización combinatorial más grande (usualmente en problemas de transporte y logística).

### 1.1. Preliminares

Esta sección estará dedicada a algunas definiciones y resultados preliminares de teoría de grafos. A lo largo de este trabajo  $G = (V, E)$  denotará un grafo con conjunto de vértices  $V$  y de arcos  $E$ . Durante todo este trabajo denotaremos  $n := |V|$ . Un *arco múltiple* son varios arcos con los mismos dos vértices en los extremos. Un *loop* es un arco cuyos extremos son un mismo vértice. Cuando existan arcos múltiple o loops diremos que  $G$  es un *multigrafo*. El *grado* de un vértice en el grafo  $G$  lo denotaremos  $d_G(v)$  o simplemente  $d(v)$ . Un ciclo de largo  $k$  lo llamaremos *k-ciclo*.

**Definición 1.1.1.** Un grafo  $G = (V, E)$  se dice *k-regular* si todos los vértices tienen grado  $k$ .

Si  $G' = (V', E')$  es otro grafo, y  $V' \subset V$  y  $E' \subset E$ , diremos que  $G'$  es un *subgrafo* de  $G$  y lo denotaremos  $G' \subset G$ . Si  $G' \subset G$  y  $G'$  contiene todos los arcos  $vw \in E$  tales que  $v, w \in V'$  diremos que  $G'$  es un subgrafo inducido, y en este caso denotamos  $G' = G[V']$ .

El *complemento*  $\overline{G}$  de  $G = (V, E)$  es el grafo definido en el conjunto de vértices  $V$  con el conjunto de arcos  $V \times V \setminus E$ .

**Definición 1.1.2.** Un grafo  $G = (V, E)$  se dice *k-conexo* si no existe un subconjunto de arcos de tamaño a lo más  $(k-1)$  tal que al removerlos desconecte al grafo  $G$ . Análogamente,  $G = (V, E)$  se dice *k-vértice-conexo* si no existe un subconjunto de vértices de tamaño a lo más  $(k-1)$  tal que al removerlos desconecte al grafo  $G$ .

Sea  $r \in \mathbb{N}$ . Un grafo  $G = (V, E)$  se dice *r-partito* si  $V$  admite una partición de  $r$  clases tal que cada arco tiene sus extremos en distintas clases. Cuando  $r = 2$  diremos que  $G$  es *bipartito*.

**Proposición 1.1.3** ([9]). *Un grafo es bipartito si y sólo si no contiene ciclos impares.*

Un ciclo (o *tour*) se llama *Euleriano* si atraviesa cada arco del grafo exactamente una vez. Un grafo se dirá Euleriano si admite un ciclo Euleriano.

**Proposición 1.1.4** ([9]). *Un grafo conexo es Euleriano si y sólo si todo vértice tiene grado par.*

**Definición 1.1.5.** Un grafo  $G$  se dice *completo* si existe un arco entre cada par de vértices (distintos) de  $G$ . Denotamos  $K_n$  el grafo completo de  $n$  vértices.

### 1.1.1. Matchings

Diremos que  $M \subset E$  es un *matching* si los arcos de  $M$  no comparten vértices comunes. Un subgrafo  $k$ -regular que expande todo  $V$  lo llamamos *k-factor*. Si todo vértice  $v \in V$  está en un extremo de  $M$  diremos que  $M$  es un *matching perfecto*, es decir, un matching perfecto es un 1-factor.

Cuando  $G$  es bipartito y regular se sabe que existen matchings perfectos, como asegura el siguiente resultado.

**Proposición 1.1.6** ([9]). *Sea  $G$  bipartito y  $k$ -regular, con  $k \geq 1$ . Luego  $G$  tiene un 1-factor.*

Con la proposición anterior se deduce lo siguiente.

**Corolario 1.1.7.** *Sea  $G$  bipartito y  $k$ -regular, con  $k \geq 1$ . Luego existen  $k$  matchings perfectos disjuntos  $M_1, M_2, \dots, M_k$  tales que su unión es  $E$ .*

### 1.1.2. Planaridad

Un *grafo planar* es un grafo que puede ser dibujado en el plano  $\mathbb{R}^2$  sin que ninguna arista se intersecte, en este caso se dice que el grafo pueda ser *encajado* en un plano. Un *encajonamiento* (o *embedding*) será una forma de dibujar el grafo en el plano. No existe una única forma de hacerlo.

Cuando  $G$  es planar llamamos a las regiones de  $\mathbb{R}^2 \setminus G$  las *caras* de  $G$ . El conjunto de caras de  $G$  lo denotamos por  $\mathcal{F}$ . Como  $G$  es acotado en el dibujo en el plano, siempre habrá exactamente una cara no acotada.

**Teorema 1.1.8** (Fórmula de Euler [9]). *Sea  $G = (V, E)$  planar, luego  $|V| - |E| + |\mathcal{F}| = 2$ .*

**Definición 1.1.9.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo planar conexo. El *multigrafo dual*  $G^* = (V^*, E^*)$  de  $G$  es un multigrafo que tiene un vértice por cada cara de  $G$  y un arco por cada arco de  $G$  que une dos caras vecinas, para alguna encajonamiento (embedding) de  $G$ .

### 1.1.3. Coloreo

Un *coloreo de vértices* de un grafo  $G = (V, E)$  es una asignación  $c : V \rightarrow S$  tal que  $c(v) \neq c(w)$  si los vértices  $v$  y  $w$  son adyacentes. Análogamente, se define un *coloreo de caras* de  $G$  como una asignación  $c : \mathcal{F} \rightarrow S$  tal que  $c(f) \neq c(f')$  si las caras  $f$  y  $f'$  son adyacentes; también se define un *coloreo de arcos* de  $G$  como una asignación  $c : E \rightarrow S$  tal que  $c(e) \neq c(e')$  si los arcos  $e$  y  $e'$  son adyacentes. El número cromático de  $G$ , designado por  $\chi(G)$ , se define como la menor cardinalidad de  $S$  de modo que existe un coloreo de vértices  $c : V \rightarrow S$ . Si  $\chi(G) \leq k$  diremos que  $G$  es  $k$ -coloreable. Notemos que si  $G$  es  $r$ -partito entonces es  $r$ -coloreable.

**Teorema 1.1.10** (Teorema de los cuatro colores [9]). *Todo grafo planar es 4-coloreable.*

### 1.1.4. Grafos perfectos

Definiremos un par de conceptos en esta sección para luego escribir un resultado que nos será útil en los capítulos posteriores. El mayor entero  $r$  tal que  $K_r \subset G$  es el *número de clique*  $\omega(G)$  del grafo  $G$ , y el mayor entero  $r$  tal que  $\overline{K_r} \subset G$  (inducido) es el *número de independencia*  $\alpha(G)$  de  $G$ .

Un grafo se llama *perfecto* si cualquier subgrafo inducido  $H \subset G$  tiene número cromático  $\chi(H) = \omega(H)$ , es decir, si la cota inferior trivial de  $\omega(H)$  colores siempre es suficiente para colorear los vértices de  $H$ . Un grafo se dice *cordal* si cada ciclo de cuatro o más vértices tiene una *cuerda*, es decir, tiene un arco entre dos vértices que no son adyacentes.

**Proposición 1.1.11** ([9]). *Todo grafo cordal es perfecto.*

## 1.2. El problema del vendedor viajero

Un *ciclo Hamiltoniano* en un grafo  $G = (V, E)$  es un ciclo que recorre exactamente una vez cada vértice de  $V$ . Análogamente, un *camino Hamiltoniano* es un camino que recorre exactamente una vez cada vértice de  $V$ . Si consideramos un grafo completo  $G = (V, E)$  de  $n$  vértices y con costos no-negativos en los arcos  $c \in \mathbb{R}^E$ , entonces el *problema del vendedor viajero* o *TSP* consiste en encontrar un ciclo Hamiltoniano en  $G$  de costo mínimo.

Cuando los costos son simétricos, es decir,  $c_{vw} = c_{wv}$  para cualquier par de vértices  $v, w \in V$ , entonces el problema se llama *TSP simétrico*. En caso contrario, se llamará *TSP asimétrico*. En este trabajo trabajaremos únicamente en el contexto del TSP simétrico. Cuando los costos satisfacen la desigualdad triangular, es decir, cuando  $c_{uv} + c_{vw} \geq c_{uw}$  para todo  $u, v, w \in V$ , el problema se llama *métrico*.

Es bien conocido que el problema de encontrar un ciclo Hamiltoniano es un problema *NP-completo* [13]. De aquí se deduce fácilmente que el TSP es un problema *NP-duro* [25] y por lo tanto no existe ningún algoritmo conocido que lo resuelva en tiempo polinomial.

### 1.2.1. Métodos de solución

El algoritmo de fuerza bruta para resolver el TSP en forma exacta consiste en enumerar todos los ciclos Hamiltonianos posibles y luego elegir el de menor costo. Como hay  $(n-1)!/2$  ciclos Hamiltonianos posibles (en el caso simétrico), este algoritmo tiene una complejidad de  $O(n!/2)$ .

Otra forma de resolver exactamente el TSP es formulando el problema como un *programa lineal mixto* (con variables enteras y no enteras). La formulación más conocida es la de *eliminación de subtours*, también conocida como *formulación de Held & Karp*. Esta formulación se puede resolver utilizando diversas técnicas de programación lineal mixta, tales como *branch and bound* o *branch and cut* [18]. La implementación más eficiente actualmente conocida es CONCORDE, descrito por Applegate, Bixby, Chvátal y Cook [3].

En la práctica también se consideran diversas heurísticas para resolver el TSP, en el caso que se necesiten relativamente buenas soluciones, pero que no sean necesariamente óptimas. Entre estas, son populares las heurísticas *nearest neighbor algorithm* e *insertion algorithm* [18].

### 1.2.2. Relajación de Held & Karp

En el artículo del año 1954 de Dantzig, Fulkerson y Johnson [8] se presenta por primera vez la técnica de planos cortantes, el cual se utiliza para resolver un problema del tipo

$$\text{mín } c^T x \quad \text{sujeto a } x \in S$$

donde  $S = \mathbb{Z}^n \cup P$ , y  $P$  es un poliedro de  $\mathbb{R}^n$ . Con esta técnica Dantzig, Fulkerson y Johnson resuelven una instancia de TSP de 49 ciudades. El programa lineal utilizado para caracterizar el poliedro  $P$  es comúnmente conocido como la relajación de Held & Karp o formulación de eliminación de subtours, cuya programación ha sido bien estudiada y su valor es naturalmente una cota inferior del valor de tour optimal. Esta formulación tiene una variable  $x_{u,v}$  para cada  $u, v \in V$  con  $u \neq v$ , con el significado intuitivo de que  $x_{u,v}$  debiese tomar el valor 1 si el arco  $\{u, v\}$  es usado en el tour y 0 si no. Cuando las variables  $x_{u,v} \in \{0, 1\}$  diremos que la formulación entera de Held–Karp, cuyo valor óptimo entrega la solución del TSP, mientras que si  $x_{u,v} \in [0, 1]$  hablaremos de la relajación de Held–Karp. Dado un grafo completo  $G = (V, E)$  y  $c_{u,v}$  la distancia entre dos vértices  $u$  y  $v$ , la relajación de Held–Karp puede ser formulada como el siguiente problema lineal,

$$\begin{aligned} \text{mín } & \sum_{e \in E} c_e x_e \\ \text{s.a. } & x(\delta(v)) = 2 \text{ para todo } v \in V \\ & x(\delta(S)) \geq 2 \text{ para todo } \emptyset \subsetneq S \subsetneq V \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{RSEP(G)}$$

donde  $\delta(v)$  denota los arcos adyacentes al vértice  $v$ ,  $\delta(S)$  denota el conjunto de arcos que atraviesan el corte  $(S, \bar{S})$  y  $x(F) = \sum_{e \in F} x_e$ , para  $F \subset E$ .

Goemans y Bertsimas [15] probaron que para distancias métricas el problema lineal RSEP(G) tiene exactamente el mismo valor optimal que el programa lineal obtenido por eliminar las restricciones de igualdad.

### 1.2.3. Algoritmos de aproximación para TSP

Otra forma de abordar el TSP es vía un  $\rho$ -algoritmo de aproximación, esto es, un algoritmo que corra en tiempo polinomial y que asegura un tour con costo a lo más  $\rho OPT$ , donde  $OPT$  es el valor óptimo para el TSP.

En 1976 Christofides [7] diseñó un método para encontrar un camino Hamiltoniano de costo bajo en un grafo completo  $G = (V, E)$ . Más específicamente, Christofides diseñó un  $3/2$ -algoritmo de aproximación para el caso de TSP métrico. El método se describe en el Algoritmo 1.

---

#### Algoritmo 1 Algoritmo de Christofides

---

- 1: Determinar un árbol de peso mínimo  $T$  de  $G$ .
  - 2: Sea  $U \subset V$  el conjunto de vértices de grafo impar en  $T$ . Encontrar un matching  $M$  de peso mínimo en el subgrafo inducido por  $U$ .
  - 3: Combinar los arcos de  $T$  y de  $M$  de forma de formar un multigrafo Euleriano  $H$ .
  - 4: Formar un ciclo Euleriano en  $H$ .
  - 5: Transformar el ciclo Euleriano en un circuito Hamiltoniano saltándose los vértices visitados (formando atajos).
- 

**Teorema 1.2.1** ([25]). *El algoritmo de Christofides es una  $\frac{3}{2}$ -aproximación.*

Sorprendentemente, el algoritmo de Christofides es la mejor aproximación conocida para el caso general de TSP métrico por más de 30 años, es decir, aún no existe una aproximación estrictamente menor que  $3/2$  para el caso general. De hecho, la pregunta sobre encontrar una mejor aproximación es uno de los desafíos más grandes en la investigación actual relacionada con optimización combinatorial.

Por otro lado, las aproximaciones no pueden ser hechas con una tolerancia arbitraria, de hecho, se sabe que no existe ningún algoritmo polinomial que aproxime al TSP con una garantía mejor que  $220/219$ , salvo que  $P = NP$  [24].

### 1.2.4. Gap integral

Un concepto importante para estudiar la calidad de la relajación de una formulación entera es el *gap integral*, que se define como el máximo valor que puede tomar la razón entre el valor del problema lineal entero (problema original) y el valor del problema lineal relajado. Claramente, el gap integral es mayor que uno.

Wolsey [31] mostró que el algoritmo de Christofides retorna una solución con costo no solamente menor que  $3/2$  veces la solución óptima de TSP, sino que también menor que  $3/2$  veces el valor óptimo de la relajación de Held–Karp  $RSEP(G)$ . Luego, el gap integral del TSP es lo más  $3/2$ . Por otro lado, se sabe que la mejor cota inferior para el gap integral es (en el caso simétrico) igual a  $4/3$  y de hecho se conjetura que  $4/3$  es *ajustado*, es decir, el valor del gap es acotado superiormente también por  $4/3$  [14].

## 1.3. Graph-TSP en grafos cúbicos

Un caso especial del problema TSP métrico es el problema *graph-TSP*, donde dado un grafo  $G = (V, E)$  simple, no dirigido y sin costos en los arcos, se definen las distancias en el

grafo completo formado por  $V$  definiendo la distancia entre dos vértices cualquiera como el número de arcos en el camino más corto entre ellos (lo que se conoce como la *completación métrica* de  $G$ ). Equivalentemente, el problema de graph-TSP puede ser formulado como encontrar un multigrafo Euleriano dentro de un grafo dado de tal forma de minimizar el número de arcos.

Se sabe bien que el graph-TSP es NP-duro, ya que incluso en el caso en que  $G$  es planar, *cúbico* (es decir, 3-regular) y 2-conexo el problema de encontrar un circuito Hamiltoniano es NP-completo [13]. Además, la mejor cota inferior en el gap de integralidad de la relajación de Held-Karp es  $4/3$  y fue establecida usando una instancia de graph-TSP [14].

### 1.3.1. Relajación de Held & Karp para graph-TSP

Como se mencionó anteriormente, Goemans y Bertsimas [15] probaron que para distancias métricas el problema lineal  $\text{RSEP}(G)$  tiene exactamente el mismo valor optimal que el programa lineal obtenido por eliminar las restricciones de igualdad. Además, cuando consideramos una instancia graph-TSP  $G = (V, E)$  sólo necesitamos considerar las variables  $(x_e)_{e \in E}$ . En efecto, cualquier solución  $x$  de la relajación de Held-Karp sin restricciones de igualdad tal que  $x_{u,v} > 0$  para un par de vértices  $\{u, v\} \notin E$  puede ser transformada en una solución  $x'$  con un costo no peor y tal que  $x'_{u,v} = 0$  definiendo  $x'_e = x_e + x_{u,v}$  para cada arco que se encuentra dentro del camino más corto entre los vértices  $u$  y  $v$ , y  $x'_e = x_e$  para el resto de los otros arcos. Por lo tanto, la relajación de Held-Karp para instancias de graph-TSP en un grafo  $G = (V, E)$  puede ser formulada de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_{e \in E} x_e \\ \text{s.a.} \quad & x(\delta(S)) \geq 2 \text{ para todo } \emptyset \subsetneq S \subsetneq V \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{LP(G)}$$

Denotaremos el valor de la solución óptima de  $(\text{LP}(G))$  como  $\text{OPT}_{LP}(G)$ , mientras que a la solución óptima de graph-TSP la denotaremos  $\text{OPT}(G)$ .

**Observación 1.3.1.** *Es fácil ver que una cota inferior para  $\text{OPT}_{LP}(G)$  es  $n$ .*

### 1.3.2. Grafos de Barnette

En teoría de grafos existe una conocida conjetura, llamada la **conjetura de Barnette**, que establece que todo grafo planar, cúbico, 3-conexo y bipartito es Hamiltoniano. Para no repetir constantemente todas estas características, definiremos la clase de **grafos de Barnette** como todos los grafos que satisfacen estas características. Debido a esta conjetura, esta clase de grafos resulta bastante interesante para estudiar el problema graph-TSP.

Notemos que si  $G = (V, E)$  es 3-conexo, entonces  $x_e = 2/3$  para todo  $e \in E$  es una solución óptima para  $LP(G)$  con valor  $n$ , luego  $\text{OPT}_{LP}(G) = n$  y entonces cualquier aproximación con respecto a  $n$  es equivalentemente una aproximación con respecto a  $\text{OPT}_{LP}(G)$ . Luego, si la conjetura de Barnette es cierta, el gap integral en esta familia de grafos sería igual a uno.

Esta conjetura fue primeramente descrita en [29], y forma parte de una serie de conjeturas que establecen que ciertas clases de grafos contienen ciclos Hamiltonianos. En [26]

Tait conjetura que todos los grafos planares, cúbicos y 3-conexos son Hamiltonianos. La conjetura de Tait fue refutada por Tutte más de 60 años después, quien en [28] construyó el contraejemplo de la Figura 1.1.

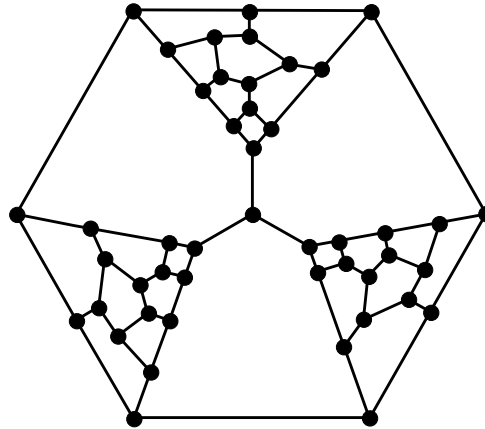


Figura 1.1: Contraejemplo de Tutte a la conjetura de Tait.

En [30] Tutte conjetura que todos los grafos cúbicos, bipartitos y 3-conexos son Hamiltonianos. La conjetura de Tutte se refutó con el contraejemplo de Horton [5], quien construyó el grafo cúbico, bipartito y 3-conexo no Hamiltoniano de la Figura 1.2.

Pese a que ha existido un esfuerzo considerable para probar o refutar la conjetura de Barnette, esta ha permanecido intacta desde su publicación hace alrededor de 40 años. Bastantes resultados relativos a esta conjetura se han publicado, sin embargo permanece abierta su veracidad. Los grafos de Barnette parecen ser una familia ajustada entre el límite de la Hamiltonicidad y la no Hamiltonicidad. Si agregamos algunas otras hipótesis, como 4-conexidad, obtenemos que la familia es Hamiltoniana, de hecho, Tutte muestra que todos los grafos 4-conexos planares son Hamiltonianos [27]. Por otro lado, si se remueven algunas hipótesis, la familia resulta no Hamiltoniana, como muestra el contraejemplo de Tutte o el de Horton. Finalmente, sabemos que el problema de encontrar un ciclo Hamiltoniano permanece  $NP$ -completo incluso en el caso que  $G$  es planar, 2-conexo, cúbico y bipartito [2]. Actualmente no se conoce la complejidad del problema de encontrar un ciclo Hamiltoniano en la clase de grafos de Barnette. Para un resumen de resultados relacionados ver [11, 19].

### 1.3.3. Aproximaciones para graph-TSP

Graph-TSP parece capturar la dificultad de los problemas TSP métricos en el sentido de que el resultado que muestra que no existe ningún algoritmo polinomial (salvo si  $P = NP$ ) que aproxime al TSP métrico con una garantía mejor que  $220/219$  se utiliza una instancia de graph-TSP. Sin embargo, en el caso que  $G$  es planar, se sabe que existe un PTAS para graph-TSP [16], es decir, un esquema de aproximación que asegura que para todo  $\epsilon > 0$  existe un algoritmo en tiempo polinomial (el polinomio puede depender de  $1/\epsilon$ ) que aproxima graph-TSP con garantía  $(1 + \epsilon)$  con respecto a  $OPT(G)$ .

Graph-TSP es un problema que ha ido cobrando interés en los últimos años. En 2005, Gamarnik *et al.* [12] mostraron que para grafos cúbicos 3-conexos existe un  $3/2 - 5/389$  aproximación.



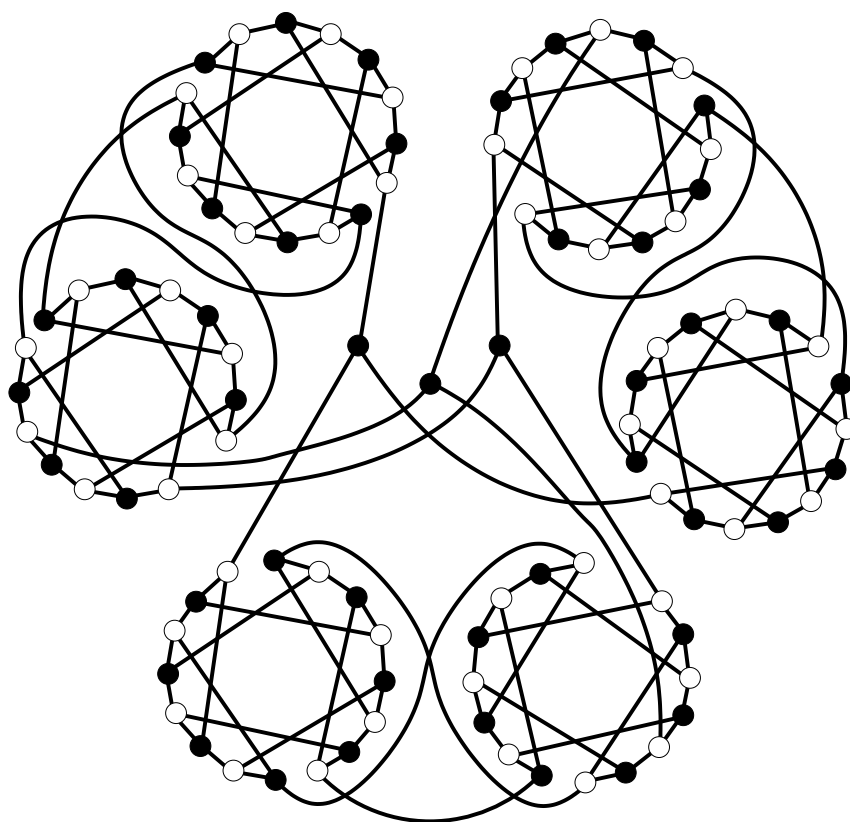


Figura 1.2: Contraejemplo de Horton a la conjetura de Tutte.

En el 2011 Oveis Gharan, Saberi y Singh [23] diseñaron un  $(3/2 - \epsilon)$ -algoritmo de aproximación para graph-TSP, con  $\epsilon = 4 \cdot 10^{-52}$ , lo cual lo convierte en el primer algoritmo con una garantía estrictamente menor que  $3/2$  para el caso general del grafo  $G$ . El enfoque en [23] es similar al de Christofides en el sentido que parten con un árbol de expansión y luego agregan un matching perfecto en los vértices de grado tres de tal forma de formar un multigrafo Euleriano. La principal diferencia es que a diferencia de comenzar con un árbol de peso mínimo, ellos utilizan la solución de la relajación de Held-Karp para *samplear* un árbol de expansión. Pese a que el algoritmo es bastante sencillo, su análisis es bastante técnico.

También en el 2011 Boyd *et al.* [6], obtuvieron una mejor garantía de  $4/3$  con respecto a  $n$  (que es una cota inferior para  $OPT(G)$ ) en el caso cúbico 2-conexo. Aggarwal *et al.* [1] prueban también la cota de  $4/3$  para el caso cúbico 3-conexo. Mömke y Svensson [20] prueban en el año 2011 que existe un algoritmo con cota 1.461 con respecto a  $OPT_{LP}(G)$  para graph-TSP general. Un mejor análisis de algoritmo de Mömke y Svensson hecho por Mucha [21] muestra que entrega una garantía de  $13/9$ . El mismo algoritmo entrega una solución de largo  $4n/3 - 2/3$  para casos en que  $G$  es cúbico y subcúbico (es decir, el grado de los vértices de  $G$  pueden ser menores a 3).

### Aproximaciones vía cubrimiento de ciclos

Una forma estándar de encontrar una solución para graph-TSP es encontrar un *cubrimiento de ciclos* y luego formar un multigrafo Euleriano.

**Definición 1.3.2.** Un *cubrimiento de ciclos* (también llamado *2-matching perfecto*) de  $G = (V, E)$  es un conjunto de ciclos tales que todo vértice  $v \in V$  pertenece a exactamente un ciclo. En otras palabras, un cubrimiento de ciclos es un 2-factor.

Notemos que si tenemos un cubrimiento de ciclos  $\mathcal{C}$  del grafo  $G$ , entonces contrayendo los ciclos, haciendo un doble árbol de expansión en el grafo resultante, y luego desconstruyendo los ciclos obtenemos un ciclo Euleriano en el multigrafo resultante de largo  $n + 2(|\mathcal{C}| - 1)$ . Hemos entonces mostrado el siguiente resultado.

**Proposición 1.3.3.** Si  $\mathcal{C}$  es un cubrimiento de ciclos del grafo  $G$ , entonces existe una solución de graph-TSP de costo  $n + 2(|\mathcal{C}| - 1)$ .

### 1.3.4. Gap integral para graph-TSP

Del resultado de Mömke y Svensson [20] se deduce que el gap integral para graph-TSP (con respecto a la relajación de Held-Karp) es de a lo más  $4/3$  para grafos cúbicos y subcúbicos. De hecho, esta cota es ajustada, la cota por abajo para el gap es obtenida con una familia de instancias en la cual el grafo  $G = (V, E)$  es subcúbico y que consiste en tres caminos de igual largo con puntos terminales  $(s_1, t_1)$ ,  $(s_2, t_2)$ , y  $(s_3, t_3)$  conectados de tal forma que  $\{s_1, s_2, s_3\}$  y  $\{t_1, t_2, t_3\}$  forman dos triángulos, como en la Figura 1.3. Estas instancias hacen tender el gap a  $4/3$ .

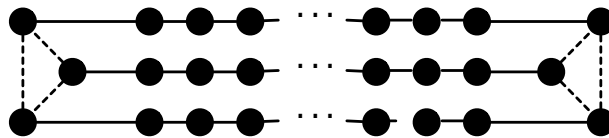


Figura 1.3: Familia de instancias subcúbicas que tienden a un gap de  $4/3$ .

En el caso que  $G$  es cúbico no se conoce una instancia con gap mayor que  $7/6$ . La familia de instancias que tienden a un gap de  $7/6$  se describe en la Figura 1.4. En efecto, la solución para la relajación de Held-Karp está dada en la Figura 1.5 y no es difícil ver que el valor de esta solución es  $\sum_{e \in E} x_e = n$ . Por otro lado, para esta instancia la solución óptima de graph-TSP tiene un valor de  $OPT(G) = 7n/6 - 2$ , y por lo tanto el gap integral con respecto a la relajación de Held-Karp tiende a  $7/6$  (por abajo).

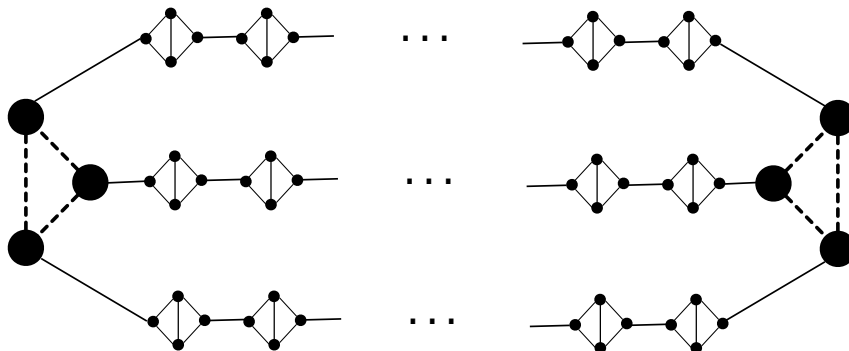


Figura 1.4: Familia de instancias cúbicas que tienden a un gap de  $7/6$ .

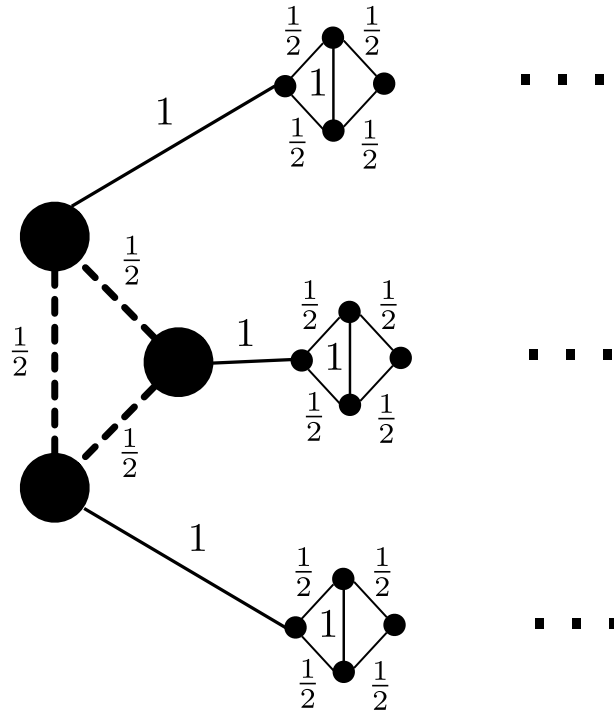


Figura 1.5: Una solución  $x_e$  de la relajación de Held & Karp con valor  $n$  para la familia de instancias cúbicas que tienden a un gap  $7/6$ .

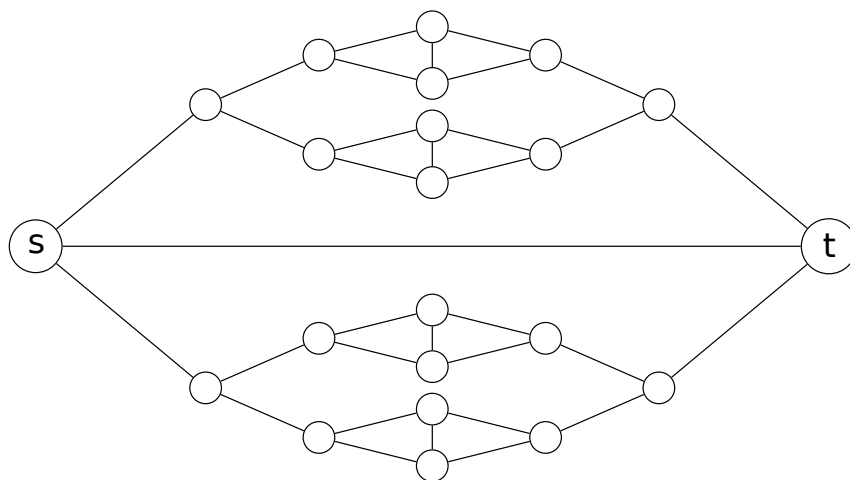


Figura 1.6: Familia de instancias cúbicas con  $OPT(G) = 11n/9 - 8/9$ .

Se sabe también que existe una familia de grafos cúbicos el cual el tour optimal de graph-TSP tiene largo  $11n/9 - 8/9$  [6]. La estructura de esta familia de grafos se muestra en la Figura 1.6.

Finalmente, el Cuadro 1.1 resume todos los resultados conocidos hasta hoy con respecto a las aproximaciones conocidas para graph-TSP [6]. La primera columna (“TSP lb”) corresponde a la mayor cota inferior conocida de graph-TSP en  $n$  vértices, la segunda columna (“TSP ub”) corresponde a la cota superior de graph-TSP en  $n$  vértices, la tercera (“GAP lb”) y la cuarta (“GAP ub”) corresponde a la mayor cota inferior y la cota superior para el gap con respecto a la relajación de Held–Karp, respectivamente. La última columna muestra la cota para la mejor aproximación conocida con respecto al valor óptimo (el desempeño del mejor algoritmo de aproximación conocido). Escribimos un guión si no tenemos resultados conocidos.

|                           | TSP lb        | TSP ub       | GAP lb | GAP ub | Approx.          |
|---------------------------|---------------|--------------|--------|--------|------------------|
| Grafos generales          | $2n - 4$      | $2n - 2$     | $4/3$  | $13/9$ | $13/9$           |
| Grafos subcúbicos         | $4n/3 - 2/3$  | $4n/3 - 2/3$ | $4/3$  | $4/3$  | $4/3$            |
| Grafos cúbicos            | $11n/9 - 8/9$ | $4n/3 - 2$   | $7/6$  | $4/3$  | $4/3$            |
| Grafos cúbicos bipartitos | –             | $4n/3 - 2$   | –      | $4/3$  | $4/3$            |
| Grafos de Barnette        | $n$           | $4n/3 - 2$   | 1      | $4/3$  | $(1 + \epsilon)$ |

Cuadro 1.1: Resumen de cotas inferiores y superiores conocidas para graph-TSP.

## 1.4. Resumen y estructura de los capítulos

En el Capítulo 2 se muestra cómo se puede diseñar un algoritmo de aproximación para graph-TSP basado en encontrar un matching perfecto y un árbol en  $G$  de modo que la intersección sea la menor posible. Probaremos que este problema es  $NP$ -duro e incluso no existe ningún algoritmo polinomial con garantía multiplicativa, salvo que  $P = NP$ . Mediante este enfoque probamos de forma alternativa el resultado de Mömke y Svensson [20] que muestra la existencia de una solución de graph-TSP de largo  $4n/3 - 2/3$  para casos en que  $G$  es cúbico.

En el Capítulo 3 mostramos un algoritmo que asegura una solución de graph-TSP con a lo más  $(4/3 - d)n - 2/3$  arcos en el caso de que  $G$  sea un grafo de Barnette, donde  $d = 1/18$ .

En el Capítulo 4 mostramos que existe un algoritmo que genera una solución de graph-TSP con costo menor a  $(4/3 - \epsilon)n - 2$ , con  $\epsilon = 1/108$ . Este algoritmo se basa en el método de cubrimientos de ciclos, expuesto en la Proposición 1.3.3.

En el Capítulo 5 demostramos el resultado principal de este trabajo, que consiste en mostrar que en todo grafo  $G = (V, E)$  cúbico y 2-conexo posee una solución de graph-TSP de costo a lo más  $(4/3 - \epsilon)n - 2$ , con  $\epsilon = 1/61236$ . El enfoque y la técnica que utilizamos es una refinación de la expuesta en el trabajo de Boyd *et al.* [6].

# Capítulo 2

## Árboles y matchings de intersección baja

En este capítulo veremos cómo se puede diseñar un algoritmo de aproximación para graph-TSP en un grafo cúbico (es decir, 3-regular) y 2-conexo  $G$ . Este tipo de algoritmo está basado en encontrar un matching perfecto  $M$  y un árbol  $T$  en  $G$  de modo que la intersección de  $M$  y de  $T$  sea de la menor cardinalidad posible, ya que la garantía de la aproximación depende del tamaño de  $M \cap T$ . Además, veremos que el problema de minimizar esta intersección es un problema  $NP$ -duro y que incluso no existe ningún algoritmo polinomial con garantía multiplicativa, salvo que  $P = NP$ .

Finalmente, utilizando esta técnica damos una demostración alternativa de la  $4/3$  aproximación de Mömke y Svensson.

### 2.1. Algunas propiedades básicas de grafos cúbicos y 2-conexos

El hecho de que un grafo  $G = (V, E)$  sea 3-regular implica algunas propiedades básicas pero importantes de tener en cuenta. La conocida fórmula de la suma de los grados

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

implica directamente en el caso cúbico que  $|V|$  es par y que  $|E| = 3|V|/2$ .

Otra característica importante de los grafos cúbicos y 2-conexos es la existencia de matchings perfectos, propiedad que trataremos con mayor detalle en la siguiente subsección.

#### 2.1.1. Matchings perfectos en grafos cúbicos 2-conexos

Dado un grafo  $G = (V, E)$ , Edmonds [10] mostró que el siguiente conjunto de igualdades y desigualdades en las variables  $(x_e)_{e \in E}$  determinan el polítopo de matchings perfectos, esto es, todo punto extremo de este polítopo es integral y corresponde a un matching perfecto:

$$\begin{aligned} x(\delta(v)) &= 1 \text{ para todo } v \in V \\ x(\delta(S)) &\geq 1 \text{ para todo } S \subset V \text{ con } |S| \text{ impar} \\ x &\geq 0. \end{aligned} \tag{PM(G)}$$

Esta descripción es bastante útil para entender la estructura de los matchings perfectos. Por ejemplo, Naddef y Pulleyblank [22] probaron es siguiente resultado.

**Lema 2.1.1.** *El vector  $x_e = 1/3$  para todo arco  $e \in E$  define una solución factible de  $PM(G)$  en el caso que  $G$  es cúbico y 2-conexo.*

*Demostración.* Ya que el grafo es cúbico, ambos lados de cualquier 2-corte de un grafo cúbico tienen un número par de vértices. Entonces es fácil verificar que el vector  $x$  es un punto factible de  $PM(G)$ .  $\square$

Como consecuencia inmediata de la factibilidad del polítopo  $PM(G)$ , se deduce que este tipo de grafos siempre tiene un matching perfecto.

Versiones algorítmicas del teorema de Carathéodory (ver por ejemplo Teorema 6.5.11 en [17]) muestran que, en tiempo polinomial uno puede descomponer una solución factible del polítopo  $PM(G)$  en una combinación convexa de de  $k \leq |E| + 1$  matchings perfectos. Combinando estos resultados se obtiene el siguiente lema.

**Lema 2.1.2.** *Dado un grafo  $G$  cúbico 2-conexo, se puede encontrar en tiempo polinomial una distribución sobre un número polinomial de matchings perfectos de tal forma que con probabilidad  $1/3$  un arco pertenece a un matching tomado de esta distribución.*

*Demostración.* Como  $x_e = 1/3$  es una solución factible del polítopo  $PM(G)$ , del Teorema 6.5.11 en [17] sabemos que existen  $k \leq |E| + 1$  vértices  $M_1, \dots, M_k$  del polítopo  $PM(G)$  y números racionales positivos  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  tales que  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$  y

$$(1/3)_{e \in E} = \lambda_1 M_1 + \dots + \lambda_k M_k,$$

donde  $M_1, \dots, M_k$  son matchings perfectos. Tomando la distribución  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  sobre los matchings perfectos  $M_1, \dots, M_k$  se tiene que para cualquier  $e \in E$  y  $M$  escogido de esta distribución

$$\mathbb{P}(e \in M) = \lambda_1 (M_1)_e + \dots + \lambda_k (M_k)_e = 1/3,$$

que es lo que se quería demostrar.  $\square$

## 2.2. Árboles y matchings de intersección baja

En esta sección veremos que una forma de encontrar ciclos Eulerianos de poco tamaño es encontrar un árbol y un matching de intersección baja. Específicamente, supongamos que tenemos un grafo  $G = (V, E)$  cúbico 2-conexo,  $T$  un árbol de  $G$  y  $M$  un matching perfecto de  $G$  tal que  $|M \cap T| \leq \alpha n$ . Entonces, vía el Algoritmo 2 que se detalla a continuación podemos encontrar en tiempo polinomial un ciclo Euleriano con a lo más  $n + 2\alpha n$  arcos.

---

### Algoritmo 2

---

- 1: Duplicar en  $G$  los arcos  $e \in M \cap T$  y eliminar los arcos  $e \in M \setminus T$ .
  - 2: Se retorna un ciclo Euleriano del multigrafo Euleriano resultante.
-

**Proposición 2.2.1.** *Sea  $M$  un matching perfecto de  $G$  y  $T$  un árbol de  $G$  tal que  $|M \cap T| \leq \alpha n$ . Luego, el Algoritmo 2 retorna en tiempo polinomial un ciclo Euleriano en el multigrafo con a lo más  $(n + 2\alpha n)$  arcos.*

*Demostración.* Primero hagamos el análisis de correctitud: en el multigrafo resultante, cada vértice tiene grado 2 o 4. De la 2-conexidad es fácil ver que el multigrafo resultante es conexo. Luego, es Euleriano.

Ahora veamos el análisis de costo:  $G$  tiene  $\frac{3n}{2}$  arcos, se eliminan  $|M| - |M \cap T| = \frac{1}{2}n - |M \cap T|$  arcos y se duplican  $|M \cap T|$  arcos. Luego, el número de arcos del multigrafo Euleriano resultante es

$$|E| + |M \cap T| - \left(\frac{n}{2} - |M \cap T|\right) = \frac{3n}{2} + \alpha n - \left(\frac{n}{2} - \alpha n\right) = n + 2\alpha n.$$

□

Resulta interesante estudiar entonces el siguiente problema: dado un grafo  $G = (V, E)$  cúbico 2-conexo, encontrar un árbol  $T$  y un matching perfecto  $M$  de mínima intersección, esto es,

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & |M \cap T| \\ \text{s.a.} \quad & T \text{ es árbol,} \\ & M \text{ es matching perfecto.} \end{aligned} \tag{TM}$$

Desafortunadamente, el problema TM es intratable en la práctica, como lo muestra la siguiente proposición.

**Proposición 2.2.2.** *No existe ninguna aproximación multiplicativa en tiempo polinomial del problema TM, salvo si  $P = NP$ .*

*Demostración.* El problema TM tiene valor cero si y sólo si existe un matching perfecto  $M$  y un árbol  $T$  que no intersectan. Pero al remover  $M$  resulta un sólo ciclo entre todos los vértices, es decir, resulta un ciclo Hamiltoniano. Esto implica que se puede saber si existe un ciclo Hamiltoniano en un grafo cúbico ssi el valor del problema TM es cero. Pero este problema es un problema NP-completo incluso en el caso en que  $G$  es cúbico y planar [13]. □

## 2.3. Una 4/3 aproximación para graph-TSP en el caso cúbico

En esta sección veremos el algoritmo de de Mömke y Svensson [20] que obtiene la 4/3-aproximación en el caso que la instancia  $G = (V, E)$  de graph-TSP es un grafo cúbico y 2-conexo. El algoritmo de de Mömke y Svensson en este caso en particular se detalla en el Algoritmo 3. Para esto, Mömke y Svensson consideran primeramente un árbol  $T$  de búsqueda en profundidad (que llamaremos simplemente DFS-tree) cualquiera, y luego definen una dirección sobre los arcos  $E$ : a los arcos dentro de  $T$  se les asigna una dirección según como se fueron recorriendo en la búsqueda en profundidad, mientras que a los arcos  $e \in E \setminus T$  se les asigna una dirección contraria (dirección hacia la raíz  $r$ ). A estos últimos arcos los llamaremos *arcos contrarios*. Definimos los *pares removibles* de la siguiente forma: cada arco contrario que apunta a un vértice  $v \neq r$ , es pareado al arco dentro de  $T$  cuya

dirección apunta fuera de  $v$  (como  $G$  es cúbico, hay un único arco de estas características). De la misma forma para  $v = r$  se agrega a lo más un arco contrario (en el caso que  $r$  tenga grado 1 en  $T$ ) a un par removible. Denotemos como  $P$  al conjunto de todos los pares removibles. Los arcos que pertenecen a un par removible los denominamos *arcos removibles*, y el conjunto de todos los arcos removibles lo denominamos  $R$ . Notemos que  $P \subset R \times R$ . La Figura 2.1 muestra el aspecto de los arcos contrarios.

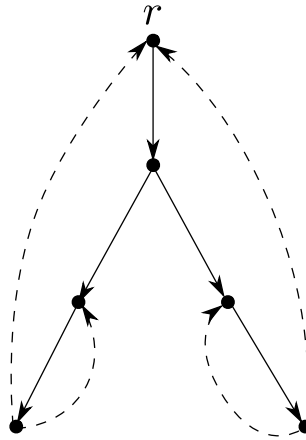


Figura 2.1: En la figura, en líneas continuas se muestra el árbol DFS y la orientación respectiva desde el vértice raíz  $r$ , mientras que con líneas punteadas se grafican los arcos contrarios.

---

**Algoritmo 3** Algoritmo de Mömke & Svensson en el caso que  $G = (V, E)$  es cúbico 2-conexo

---

- 1: Sea  $T$  algún DFS-tree, partiendo desde un vértice raíz  $r \in V$  cualquiera.
  - 2: Sea  $M$  un matching perfecto aleatorio, tal que  $\mathbb{P}(e \in M) = 1/3$ .
  - 3: Cada arco que está en  $M \cap R$  se remueve de  $G$ , mientras que cada arco que está en  $M \setminus R$  se duplica en  $G$ .
  - 4: Se retorna un ciclo Euleriano del multigrafo resultante.
- 

La correctitud y el análisis del Algoritmo 3 se puede revisar en [20]. A continuación veremos una forma alternativa de demostrar la 4/3 aproximación de Mömke y Svensson, mostrando que se puede encontrar en tiempo polinomial un matching y un árbol que intersectan en a lo más  $n/6$  arcos, y por lo tanto, en virtud de la Proposición 2.2.1, se obtiene una solución de graph-TSP de a lo más  $4n/3$  arcos.

**Lema 2.3.1.** *Sea  $G$  un grafo 2-conexo. Luego,*

- a) *se puede encontrar en tiempo polinomial un matching perfecto  $M$  y un árbol  $T_M$  tal que  $|M \cap T_M| \leq \frac{n}{6}$ ,*
- b) *la complejidad necesaria para encontrar un matching perfecto  $M$  y un árbol  $T_M$  tal que  $|M \cap T_M| \leq \frac{n}{6}$  es la misma que la complejidad de calcular un matching perfecto de peso mínimo en  $G$ .*

*Demostración.*



- a) Sea  $T$  un DFS-tree que expande  $G$ . El grafo  $G$  tiene  $3n/2$  arcos, mientras que  $T$  tiene  $n - 1$  arcos. Luego, si definimos los arcos contrarios  $R$  asociados al árbol  $T$ , hay  $3n/2 - (n - 1) = n/2 + 1$  arcos contrarios, de los cuales al menos  $n/2$  son arcos que están en algún par removible, y por lo tanto hay al menos  $n/2$  pares removibles  $P$ , cada par con dos arcos, lo que da un total de al menos  $n$  arcos en  $R$ . Por lo tanto en  $E \setminus R$  hay a lo más  $n/2$  arcos. Sea  $M$  un matching perfecto aleatorio obtenido de la distribución del Lemma 2.1.2, tal que  $\mathbb{P}(e \in M) = 1/3$ . Luego,

$$\mathbb{E}(|E| + |M \setminus R| - |M \cap R|) \leq \frac{3n}{2} + \binom{n}{2} \times \frac{1}{3} - n \times \frac{1}{3} = \frac{4n}{3}, \quad (2.1)$$

lo que implica que basta recorrer  $k \leq |E| + 1 = \frac{3n}{2} + 1$  para determinar un matching  $M$  tal que  $|E| + |M \setminus R| - |M \cap R| \leq 4n/3$ . Para cada arco  $e \in R \cap M \cap T$  consideramos el arco  $e'$  correspondiente al par removible de  $e$ , es decir, el arco  $e' \in R$  tal que  $(e, e') \in P$ . Luego, se elimina de  $T$  el arco  $e$  y se agrega a  $T$  el arco  $e'$ . Repitiendo este procedimiento a todos los arcos de  $R \cap M \cap T$  se obtiene un nuevo árbol  $T_M$  tal que  $|M \cap T_M| = |M \setminus R|$  y  $|M \setminus T_M| = |M \cap R|$ . Luego, como  $|M \setminus T_M| = \frac{n}{2} - |M \cap T_M|$  se tiene que

$$\frac{3n}{2} - \left( \frac{n}{2} - |M \cap T_M| \right) + |M \cap T_M| \leq \frac{4n}{3},$$

lo que implica que  $|M \cap T_M| \leq \frac{n}{6}$ .

- b) Notemos que definiendo los pesos de cada arco en  $R$  igual a uno y el peso de cada arco en  $E \setminus R$  igual a cero, entonces el matching perfecto de peso mínimo  $M^*$  es tal que minimiza  $(|M^* \setminus R| - |M^* \cap R|)$ , de modo que

$$(|M^* \setminus R| - |M^* \cap R|) \leq \mathbb{E}(|E| + |M \setminus R| - |M \cap R|) \leq \frac{4n}{3},$$

y luego se repite el argumento de la demostración de la parte (a.).

□

Como consecuencia del resultado anterior, se obtiene directamente el resultado de Mönke y Svensson.

**Teorema 2.3.2.** *Sea  $G$  un grafo cúbico 2-conexo. Luego, existe un algoritmo polinomial que retorna una solución de graph-TSP con a lo más  $\frac{4n}{3}$  arcos.*

*Demostración.* La Proposición 2.2.1 junto al Lema 2.3.1 implican directamente el resultado. □

**Observación 2.3.3.** *Se podría pensar que si tenemos un árbol cualquiera  $T$  (no necesariamente un DFS-tree) en un grafo  $G$  cúbico y 2-conexo, entonces existe una forma de definir pares removibles de modo tal que hayan al menos  $n/2$  arcos removibles. La respuesta es negativa, como lo muestra la Figura 2.2, en la cual no es posible definir al menos  $n/2$  arcos removibles en el caso que el árbol  $T$  no es un DFS-tree. Esto muestra la importancia que tiene haber elegido un DFS-tree para definir un conjunto de arcos removibles con cardinalidad suficientemente grande.*

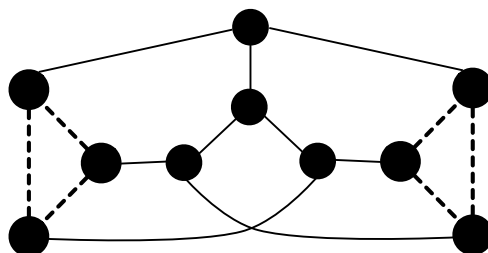


Figura 2.2: En la figura, el árbol  $T$  está dibujado en línea continua. En este caso, no hay una forma de definir al menos  $n/2$  arcos removibles determinados por  $T$ .

# Capítulo 3

## Una $(4/3 - d)n$ cota superior para grafos de Barnette

En este capítulo veremos un algoritmo que asegura una solución de graph-TSP con a lo más  $(4/3 - d)n - 2/3$  arcos en el caso de que  $G$  sea un grafo de Barnette, donde  $d = 1/18$ . Como  $G$  es en particular 3-conexo se tiene que  $OPT_{LP}(G) = n$ , y por lo tanto este resultado asegura que el gap de integralidad con respecto a la relajación de Held–Karp está acotado superiormente por  $(4/3 - d) - 2/3$ , resultado que no se conoce en la literatura hasta el momento.

### 3.1. Algunas propiedades de los grafos de Barnette

Comenzaremos enumerando algunas propiedades simples pero importantes de considerar de los grafos de Barnette:

- El número mínimo de lados de una cara de un grafo de Barnette es 4.
- Un grafo de Barnette tiene un número par de vértices.
- Las biparticiones dentro de un grafo de Barnette son del mismo tamaño.

**Lema 3.1.1.** *Sea  $G^* = (V^*, E^*)$  el dual de un grafo de Barnette  $G = (V, E)$ . Luego  $G^*$  es una triangulación planar euleriana (sin arcos múltiples ni loops) donde cada vértice tiene grado al menos 4.*

*Demostración.* Notemos que como  $G$  es planar bipartito entonces toda cara tiene un número par de lados, luego  $G^*$  es Euleriano.

Por otro lado, el hecho de que  $G$  es 3-conexo implica que  $G^*$  no tiene arcos múltiples ni loops. En efecto, si  $G^*$  tuviese dos arcos  $e_1^*$  y  $e_2^*$  que unen dos vértices, entonces los arcos correspondientes  $e_1$  y  $e_2$  de  $G$  corresponderían a un 2-corte, mientras que si  $G^*$  tuviese un loop, este arco correspondería a un 1-corte en  $G$ .

El hecho de que  $G$  es cúbico implica que  $G^*$  es una triangulación. Finalmente, como  $G$  es un grafo con caras de tamaño al menos 4, entonces el grado de cada vértices en  $G^*$  es al menos 4.  $\square$

**Proposición 3.1.2.** *Las caras de cualquier grafo de Barnette  $G = (V, E)$  se pueden 3-colorear.*

*Demostración.* Basta probar que el dual  $G^* = (V^*, E^*)$  de cualquier grafo de Barnette es 3-coloreable. Para esto, notemos que como  $G^*$  es una triangulación planar, entonces es un grafo cordal y por lo tanto es un grafo perfecto (Proposición 1.1.11), es decir, satisface que el número cromático de cada subgrafo inducido es igual al tamaño del mayor clique de ese subgrafo. Luego, basta mostrar que el tamaño del mayor clique de un subgrafo inducido de  $G^*$  es 3. En efecto, como  $G^*$  es planar es 4-coloreable (Teorema 1.1.10), y entonces no pueden haber cliques inducidos de tamaño 5 o más, y como  $G$  es 2-coloreable, si hubiese un clique inducido en  $G^*$  de tamaño 4, entonces se podrían 2-colorear las caras inducidas por este clique, lo cual es una contradicción.  $\square$

**Observación 3.1.3.** *Notemos que si las caras de  $G = (V, E)$  se pueden 3-colorear, entonces no es difícil encontrar una solución de graph-TSP con a lo más  $4n/3$  arcos. En efecto, de la fórmula de Euler (Teorema 1.1.8) se deduce que el número de caras es  $|\mathcal{F}| = 2 + |E| - |V| = 2 + 3n/2 - n = (n + 4)/2$ , y por lo tanto existe un color que tiene menos de  $(n + 4)/6$  caras. Utilicemos el borde de esas caras como un cubrimiento de ciclos  $\mathcal{C}$ . De la Proposición 1.3.3 se deduce que existe una solución de graph-TSP con a lo más  $n + 2((n + 4)/6 - 1) = 4n/3 - 2/3$  arcos.*

## 3.2. Graph-TSP en grafos de Barnette

Motivados por las diversas propiedades que se conocen en la clase de grafos de Barnette, resulta interesante estudiar el problema graph-TSP sobre esta clase (notemos que si la conjetura de Barnette es cierta, entonces el gap integral de graph-TSP para la clase de grafos de Barnette resulta ser igual a 1). En esta sección mostraremos que si  $G$  es un grafo de Barnette, entonces existe una solución de graph-TSP con a lo más  $(4/3 - d)n - 2/3$  arcos, donde  $d = 1/18$ .

**Definición 3.2.1.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo de Barnette, y sea  $a, b$  y  $c$  tres colores con los cuales se pueden colorear las caras de  $G$ . Para cada color  $h \in \{a, b, c\}$  y para cada  $k \in \mathbb{N}$ , definimos

- $\mathcal{F}$  = conjunto de caras de  $G$ .
- $\mathcal{F}_k$  = conjunto de caras de  $G$  de largo  $k$ .
- $\mathcal{F}(h)$  = conjunto de caras de  $G$  de color  $h$ .
- $\mathcal{F}_k(h)$  = conjunto de caras de  $G$  de color  $h$  y de largo  $k$ .

**Lema 3.2.2.** *Sea  $h \in \{a, b, c\}$  un color y  $\mathcal{C}(h)$  el cubrimiento de ciclos asociado al color  $h$  del Paso 4 del Algoritmo 4. Luego,*

$$|\mathcal{C}(h)| \leq 1 + |\mathcal{F}_6(h)| + |\mathcal{F}_8(h)| + 2|\mathcal{F}_{10}(h)| + 2|\mathcal{F}_{12}(h)| + \dots \quad (3.1)$$

$$= 1 + \sum_{k=3}^{\infty} \lfloor (k-1)/2 \rfloor |\mathcal{F}_{2k}(h)|. \quad (3.2)$$

---

**Algoritmo 4** Algoritmo de aproximación para TSP en el caso en que  $G = (V, E)$  es de Barnette.

---

- 1: Colorear las caras de  $G$  con colores  $a$ ,  $b$  y  $c$ .
  - 2: Para cada color  $h \in \{a, b, c\}$ , contraer las caras de  $\mathcal{F}(h) = \{H_1, H_2, \dots, H_k\}$ , de modo que el grafo reducido resultante es Euleriano. Definir la familia de ciclos  $\mathcal{C}(h)$  como el conjunto que contiene solamente un ciclo Euleriano del grafo reducido.
  - 3: Para cada  $i = \{1, \dots, k\}$ , expandir la cara  $H_i$  y elegir uno de los dos matchings posibles dentro de los arcos del borde de  $H_i$  de tal forma que al agregar ese matching  $\mathcal{C}(h)$  resulte la familia de ciclos de menor número.
  - 4: Cuando ya no quedan más caras de  $\mathcal{F}(h)$  por revisar,  $\mathcal{C}(h)$  es un cubrimiento de ciclos.
  - 5: Definir  $\mathcal{C}$  como el cubrimiento de ciclos de menor cardinalidad dentro de  $\{\mathcal{C}(a), \mathcal{C}(b), \mathcal{C}(c)\}$ .
  - 6: Se retorna la solución de graph-TSP definido por el cubrimiento de ciclos  $\mathcal{C}$ .
- 

*Demostración.* Sea  $H \in \mathcal{F}(h)$  una cara de largo  $2k$ . Como  $G$  es planar, podemos considerar los ciclos que se pueden cerrar eligiendo cualquiera de los dos matchings dentro de los arcos del borde de  $H$  como ciclos que se dibujan en el plano sin intersectarse. Designemos por el signo  $+$  los ciclos que se forman al considerar un matching dentro de los arcos del borde de  $H$ , y con  $-$  los ciclos que se forman al considerar el otro matching, tal como en la Figura 3.1.

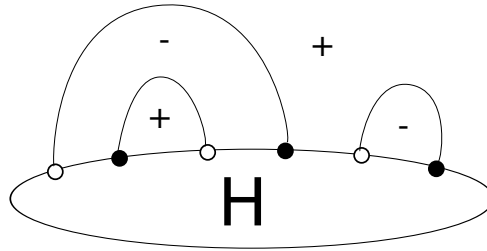


Figura 3.1: Esquema de la demostración para el Lema 3.2.2.

Es claro que el número total de ciclos es  $(k + 1)$ , y por lo tanto existe un matching que cierra a lo más  $\lfloor (k + 1)/2 \rfloor$  ciclos. Luego, el número de ciclos de  $\mathcal{C}(h)$  que intersecta el borde de  $H$  es a lo más  $\lfloor (k + 1)/2 \rfloor$ , y por lo tanto, las componentes conexas en  $\mathcal{C}(h)$  que resultan después de considerar la cara  $H$  en el paso el Paso 3 del Algoritmo 4 aumentan en a lo más  $\lfloor (k + 1)/2 \rfloor - 1 = \lfloor (k - 1)/2 \rfloor$ . Como al principio había una sola componente conexa en  $\mathcal{C}(h)$ , se tiene el resultado pedido.  $\square$

**Corolario 3.2.3.** Sea  $h \in \{a, b, c\}$  un color. Sea  $J \subset \mathcal{C}(h) \times \mathcal{F}(h)$  el conjunto

$$J(h) = \{(C, H) \in \mathcal{C}(h) \times \mathcal{F}(h) : \text{el ciclo } C \text{ intersecta la cara } H\}.$$

Luego,

$$|J(h)| \leq (|\mathcal{F}_4(h)| + 2|\mathcal{F}_6(h)| + 2|\mathcal{F}_8(h)| + 3|\mathcal{F}_{10}(h)| + 3|\mathcal{F}_{12}(h)| + \dots).$$

*Demostración.* Se deduce directamente de la demostración del Lema 3.2.2.  $\square$

**Lema 3.2.4.** *Sea  $\mathcal{C}$  el cubrimiento de ciclos retornado por el Algoritmo 4. Luego,*

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}| &\leq \frac{n}{6} - \frac{1}{6}(|\mathcal{F}_4| + |\mathcal{F}_8| + |\mathcal{F}_{12}| + \dots) + \frac{2}{3} \\ &= \frac{n}{6} - \frac{1}{6} \left( \sum_{k=2}^{\infty} |\mathcal{F}_{4k}| \right) + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

*Demostración.* Promediando la desigualdad (3.2) para los tres colores  $\{a, b, c\}$  se tiene

$$\frac{1}{3}(|\mathcal{C}(a)| + |\mathcal{C}(b)| + |\mathcal{C}(c)|) \leq 1 + \frac{1}{3} \sum_{k=3}^{\infty} [(k-1)/2] |\mathcal{F}_{2k}|. \quad (3.3)$$

De la fórmula de Euler (Teorema 1.1.8) se tiene que

$$|\mathcal{F}| = (|\mathcal{F}_4| + |\mathcal{F}_6| + |\mathcal{F}_8| + |\mathcal{F}_{10}| \dots) = 2 + |E| - |V| = 2 + \frac{3n}{2} - n = \frac{n+4}{2}, \quad (3.4)$$

y además, contando el número de arcos por cada cara se tiene que

$$4|\mathcal{F}_4| + 6|\mathcal{F}_6| + 8|\mathcal{F}_8| + 10|\mathcal{F}_{10}| \dots = 3n. \quad (3.5)$$

Con las dos igualdades anteriores, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sum_{h \in \{a,b,c\}} |\mathcal{C}(h)| &\leq 1 + \frac{1}{12} \sum_{k=3}^{\infty} 4[(k-1)/2] |\mathcal{F}_{2k}| \\ &= 1 + \frac{1}{12} \left( -(n+4) + \sum_{k=2}^{\infty} (4[(k-1)/2] + 2) |\mathcal{F}_{2k}| \right) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{12} \left( -n + \sum_{k=2}^{\infty} 2k |\mathcal{F}_{2k}| - \sum_{k=2}^{\infty} 2 |\mathcal{F}_{4k}| \right) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{12} \left( -n + 3n - \sum_{k=2}^{\infty} 2 |\mathcal{F}_{4k}| \right) \\ &= \frac{n}{6} - \frac{1}{6} \left( \sum_{k=2}^{\infty} |\mathcal{F}_{4k}| \right) + \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

donde la primera igualdad se tiene por la ecuación (3.4) y la tercera se tiene por la ecuación (3.5).  $\square$

Existe una subclase de grafos de Barnette que llamaremos *escaleras cerradas* y que se construyen de la siguiente forma: para cada  $k \in \mathbb{N}$ , tomar dos  $2k$ -ágonos y enumerar cada uno de sus  $2k$  vértices como  $1, 2, \dots, 2k$  para el primero y  $1', 2', \dots, 2k'$  para el segundo, luego unir los vértices  $j$  con los  $j'$  con arcos simples  $\{j, j'\}$ . Es fácil ver que las escaleras cerradas son grafos de Barnette y que además son Hamiltonianos.

**Lema 3.2.5.** *Sea  $\mathcal{C}$  el cubrimiento de ciclos retornado por el Algoritmo 4. Luego,*

$$|\mathcal{C}| \leq \frac{n}{9} + \frac{1}{6} |\mathcal{F}_4| + \frac{1}{9}.$$

*Demostración.* Supongamos que  $G$  no es una escalera cerrada (en cuyo caso el resultado se tiene inmediatamente). Mostremos que para cualquier color  $h \in \{a, b, c\}$  cada ciclo de  $\mathcal{C}(h)$  es o bien un cuadrado vecino de dos caras de  $\mathcal{F}(h)$ , o bien no es un cuadrado y es vecino de al menos tres caras de  $\mathcal{F}(h)$ . En efecto, si  $C \in \mathcal{C}(h)$  es un ciclo de largo al menos seis vecino solamente de dos caras  $H_1, H_2 \in \mathcal{F}(h)$ , entonces al eliminar los vértices que están en el borde de  $H_1, H_2$  y que están en el ciclo  $C$  no pueden quedar otros vértices (si no existiría un 2-corte), y por lo tanto  $G$  es una escalera cerrada. Por otro lado, si  $C \in \mathcal{C}(h)$  es un ciclo de largo cuatro necesariamente es vecino de dos caras de  $\mathcal{F}(h)$ . Definamos el conjunto

$$J(h) = \{(C, H) \in \mathcal{C}(h) \times \mathcal{F}(h) : \text{el ciclo } C \text{ intersecta la cara } H\}$$

como el conjunto de intersecciones entre algún ciclo de  $\mathcal{C}(h)$  y el borde de alguna cara  $H \in \mathcal{F}(h)$ . Concluimos entonces que

$$\begin{aligned} |J(h)| &\geq 2|\{C \in \mathcal{C}(h) : |C| = 4\}| + 3|\{C \in \mathcal{C}(h) : |C| > 4\}| \\ &= 3|\mathcal{C}(h)| - |\{C \in \mathcal{C}(h) : |C| = 4\}|. \end{aligned}$$

Por otro lado, del Corolario 3.2.3 se tiene que

$$|J(h)| \leq |\mathcal{F}_4(h)| + 2|\mathcal{F}_6(h)| + 2|\mathcal{F}_8(h)| + 3|\mathcal{F}_{10}(h)| + 3|\mathcal{F}_{12}(h)| + \dots,$$

y entonces, juntando las últimas dos desigualdades, se obtiene

$$\begin{aligned} 3|\mathcal{C}(h)| &\leq |\{C \in \mathcal{C}(h) : |C| = 4\}| + \\ &|\mathcal{F}_4(h)| + 2|\mathcal{F}_6(h)| + 2|\mathcal{F}_8(h)| + 3|\mathcal{F}_{10}(h)| + 3|\mathcal{F}_{12}(h)| + \dots \end{aligned}$$

Notemos que

$$\sum_{h \in \{a, b, c\}} |\{C \in \mathcal{C}(h) : |C| = 4\}| \leq 2|\mathcal{F}_4|$$

ya que cada ciclo  $C$  de largo cuatro puede estar en a lo más dos cubrimiento de ciclos definido por los colores distintos de la cara definida por  $C$ . Esto, junto a la última desigualdad implica que

$$\begin{aligned} 3 \sum_{h \in \{a, b, c\}} |\mathcal{C}(h)| &\leq 2|\mathcal{F}_4| + |\mathcal{F}_4| + 2|\mathcal{F}_6| + 2|\mathcal{F}_8| + 3|\mathcal{F}_{10}| + 3|\mathcal{F}_{12}| + \dots \\ &= \frac{1}{4}(8|\mathcal{F}_4| + 4|\mathcal{F}_4| + 8|\mathcal{F}_6| + 8|\mathcal{F}_8| + 12|\mathcal{F}_{10}| + 12|\mathcal{F}_{12}| + \dots) \\ &= \frac{1}{4}(3n + 8|\mathcal{F}_4| + 2|\mathcal{F}_6| + 2|\mathcal{F}_{10}| + 2|\mathcal{F}_{14}| + \dots) \\ &= \frac{1}{4}(3n + 8|\mathcal{F}_4| + (n + 4) - 2|\mathcal{F}_4| - 2|\mathcal{F}_8| - 2|\mathcal{F}_{12}| + \dots) \\ &= \frac{1}{4}(4n + 4 + 6|\mathcal{F}_4| - 2|\mathcal{F}_8| - 2|\mathcal{F}_{12}| + \dots) \\ &\leq \frac{1}{4}(4n + 4 + 6|\mathcal{F}_4|), \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se tiene por la ecuación (3.4) y la tercera se tiene por la ecuación (3.5). Se deduce entonces,

$$\frac{1}{3} \sum_{h \in \{a, b, c\}} |\mathcal{C}(h)| \leq \frac{n}{9} + \frac{1}{6}|\mathcal{F}_4| + \frac{1}{9},$$

que es el resultado pedido.  $\square$

**Teorema 3.2.6.** *Si  $G = (V, E)$  es un grafo de Barnette, entonces existe una solución de graph-TSP con a lo más  $(4/3 - d)n - 2/3$  arcos, donde  $d = 1/18$ .*

*Demostración.* Del Lema 3.2.4 se deduce que

$$|\mathcal{C}| \leq \frac{n}{6} - \frac{1}{6}|\mathcal{F}_4| + \frac{2}{3},$$

y del Lema 3.2.5 se tiene que

$$|\mathcal{C}| \leq \frac{n}{9} + \frac{1}{6}|\mathcal{F}_4| + \frac{1}{9}. \quad (3.6)$$

Luego, si llamamos  $\alpha$  a la fracción de  $|\mathcal{F}_4|$  con respecto a  $n$ , i.e.,  $|\mathcal{F}_4| = \alpha n$ , con  $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ , se tiene que existe una solución de graph-TSP de largo  $n + 2(|\mathcal{C}| - 1)$  (Proposición 1.3.3), y entonces

$$\frac{OPT(G)}{n} \leq 1 + 2 \min \left\{ \frac{1}{6} - \frac{\alpha}{6}, \frac{1}{9} + \frac{\alpha}{6} \right\} - \frac{2}{n} + \frac{4}{3n}. \quad (3.7)$$

El mayor valor del lado derecho de la última desigualdad se alcanza cuando  $\alpha = 1/6$ , es decir, cuando el lado derecho toma el valor  $(4/3 - d) - 2/3n$ , donde  $d = 1/18$ .  $\square$

Del resultado anterior, y el hecho de que  $OPT_{LP}(G) = n$ , se deduce directamente el siguiente corolario.

**Corolario 3.2.7.** *Si  $G$  es un grafo de Barnette, entonces el gap integral de graph-TSP con respecto a la relajación de Held-Karp es a lo más  $(4/3 - d)$ , donde  $d = 1/18$ .*



# Capítulo 4

## Aproximación para el caso cúbico bipartito

En este capítulo mostraremos un algoritmo que genera una solución de graph-TSP con costo menor a  $(4/3 - \epsilon)n - 2$ , donde  $\epsilon = 1/108$ , en el caso en que el grafo  $G$  es cúbico, bipartito y 2-conexo. Esto muestra que en particular existe una  $(4/3 - \epsilon)$  aproximación, y como  $n$  es una cota inferior de  $OPT_{LP}(G)$ , muestra también que el gap integral de graph-TSP con respecto a la relajación de Held–Karp es menor a  $(4/3 - \epsilon)$ .

Akiyama *et al.* [2] muestran que el problema de encontrar un ciclo Hamiltoniano permanece *NP*-completo incluso en esta clase de grafos. Como además no existe ningún algoritmo de aproximación conocido con garantía menor que  $4/3$  para esta clase, el problema de estudiar cotas superiores, aproximaciones y el gap integral resulta una pregunta interesante de estudiar.

### 4.1. Reducción a un caso más simple

Antes de introducir el algoritmo, haremos algunos supuestos en torno a la estructura del grafo  $G$ .

Primero supondremos por simplicidad que  $n \geq 10$ . Esto se justifica ya que no existe ningún grafo cúbico y bipartito de menos de 6 vértices, mientras que cuando  $n = 6$  el grafo cúbico y bipartito asociado es claramente Hamiltoniano, como se puede verificar en la Figura 4.1(a). Cuando  $n = 8$  se tiene que  $G$  es un *cubo* como el que se muestra en la Figura 4.1(b), que resulta ser también Hamiltoniano.

Segundo, supondremos que no existen dos cuadrados (inducidos) adyacentes de  $G$  que compartan exactamente un arco, salvo que estos cuadrados pertenezcan a una estructura formada por un 6-ciclo o *hexágono* con dos cuerdas cruzadas, como se muestra en la Figura 4.2, o salvo que estos dos cuadrados formen parte de una estructura de un cuadrado adyacente a tres cuadrados, estructura que se describe en la Figura 4.3 y que llamaremos *pseudocubo*. Pese a que este supuesto suena demasiado fuerte, veremos que si  $G$  no satisface este supuesto, entonces se puede hacer una serie de reducciones de modo de transformar el grafo  $G$  a otro grafo  $G' = (V', E')$  tal que cualquier solución  $T'$  de graph-TSP en  $G'$  se puede extender a una solución  $T$  de graph-TSP en  $G$  con la propiedad de que la proporción  $|T|$  con respecto a  $|V|$  es la misma que la proporción de  $|T'|$  con respecto a  $|V'|$ . Por lo tanto, para encontrar soluciones de bajo costo en  $G$ , basta considerar el

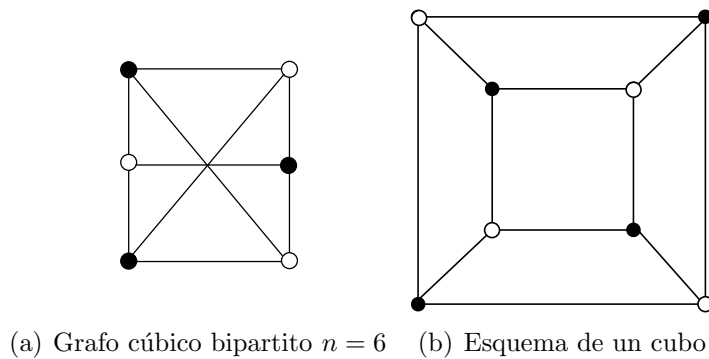


Figura 4.1: Grafos cúbicos y bipartitos con  $n \leq 8$ .

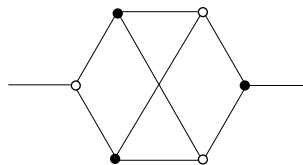


Figura 4.2: Hexágono con dos cuerdas cruzadas.

grafo reducido  $G'$ . A continuación explicaremos porque podemos hacer este supuesto en torno a los cuadrados del grafo  $G$ . En efecto, en caso que no se satisfaga este supuesto, podemos reducir cualquier estructura de dos cuadrados consecutivos del grafo  $G$  de forma de “fusionar” cuadrados sin que se formen ni loops ni multiarcos. Detallaremos como haremos estas reducciones. Supongamos que tenemos dos cuadrados de  $G$  adyacentes (comparten exactamente un arco), como muestra la Figura 4.4. Llamemos  $e_1, e_2, e_3, e_4$  a los cuatro arcos adyacentes a estos dos cuadrados, y  $v_1, v_2, v_3, v_4$  a los cuatro vértices también adyacentes. Supongamos que  $v_1, v_2, v_3, v_4$  y  $e_1, e_2, e_3, e_4$  son todos distintos entre sí. En este caso, podemos reducir estos dos cuadrados uniéndolos, tal como lo muestra la Figura 4.5. Notemos que si  $e_1 = e_3$  entonces los dos cuadrados forman parte de un hexágono con dos cuerdas cruzadas, caso que no es necesario reducir. Notemos además que no existe ningún otro caso posible en que algún par de arcos de  $e_1, e_2, e_3, e_4$  son iguales, y entonces podemos asumir que estos cuatro arcos son distintos. De la bipartición de  $G$  se deduce que  $v_1 \notin \{v_3, v_4\}$  y  $v_2 \notin \{v_3, v_4\}$ . Si  $v_1 = v_2$  y  $v_3 = v_4$  estamos en el caso de un pseudocubo, caso que no es necesario reducir. Luego, el único caso que falta es cuando  $v_1 = v_2$  y  $v_3 \neq v_4$  (o el caso simétrico), en cuyo caso podemos reducir estos dos cuadrados,

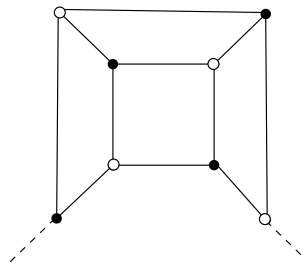


Figura 4.3: Estructura pseudocubo en un grafo bipartito.

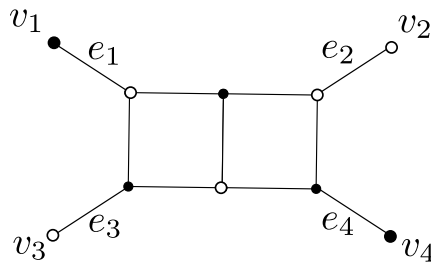


Figura 4.4: Dos cuadrados adyacentes.

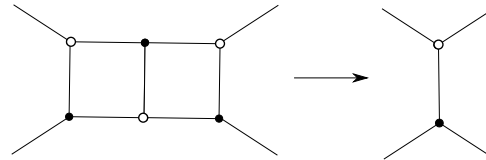


Figura 4.5: Detalle de la reducción de una estructura de dos cuadrados adyacentes en el caso que  $v_1, v_2, v_3, v_4$  y  $e_1, e_2, e_3, e_4$  son todos distintos.

tal como lo muestra la Figura 4.6.

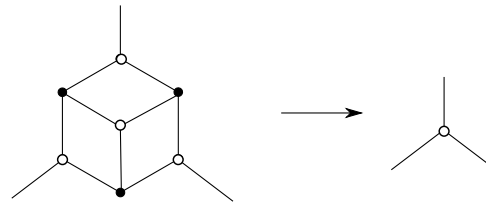


Figura 4.6: Reducción de una estructura de cuadrados adyacentes en el caso que  $v_1 = v_2$  y  $v_3 \neq v_4$ .

La idea es repetir estas reducciones de forma sucesiva y cuantas veces sea necesario hasta formar un grafo reducido  $G' = (V', E')$  que únicamente tendrá cuadrados adyacentes si es que estos forman parte de un pseudocubo o un hexágono con dos cuerdas cruzadas. Notar que estas reducciones mantienen a  $G'$  siendo un grafo (sin multiarcos) cúbico y bipartito. De hecho, como lo muestra la siguiente proposición,  $G'$  es también 2-conexo.

**Proposición 4.1.1.** *Todo grafo conexo, cúbico y bipartito es también 2-conexo.*

*Demostración.* Por contradicción, supongamos que existe un grafo  $G = (V, E)$  cúbico, bipartito y con un corte de tamaño uno, que llamaremos *punte*. Sea  $a$  y  $b$  dos colores con los cuales podemos 2-colorear  $V$ . Definamos  $V_a$  los vértices de color  $a$ , y  $V_b$  los vértices de color  $b$ . Sea  $\{V_1, V_2\}$  la partición de  $V$  que resulta al considerar los vértices que quedan a un lado u otro del puente. Como  $G$  es cúbico,  $|\delta(V_1 \cap V_a)| = 3j$  y  $|\delta(V_1 \cap V_b)| = 3k$  con  $j, k \in \mathbb{N}$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el puente pertenece al corte  $\delta(V_1 \cap V_a)$ , es decir, hay  $3j - 1$  arcos en el corte  $\delta(V_1 \cap V_a)$  y en los arcos inducidos los por nodos  $V_1$ . Entonces, hay  $3j - 1$  arcos inducidos los por nodos  $V_1$ , que no puede coincidir con los  $3k$  arcos que se contabilizan en  $\delta(V_1 \cap V_b)$ , una contradicción.  $\square$

**Observación 4.1.2.** *Luego de esta serie de reducciones  $G'$  permanece siendo un grafo (sin multiarcos) cúbico, bipartito y 2-conexo. Además, cualquier solución  $T'$  de graph-TSP en  $G'$  proveniente de un cubrimiento de ciclos (descrito en la Sección 1.3.3) de costo*

$|T'| \leq (4/3 - \epsilon)|V'| - 2$  se puede extender a una solución de graph-TSP  $T$  en  $G$  con costo  $|T| \leq (4/3 - \epsilon)|V| - 2$ , y por lo tanto este tipo de reducción no altera la garantía de aproximación de una solución.

## 4.2. Descripción del algoritmo

A grandes rasgos, la forma con la cual vamos a construir una solución de graph-TSP será un algoritmo que encuentre un cubrimiento de ciclo de poco tamaño, y luego utilizaremos la Proposición 1.3.3.

Sabemos que si  $G = (V, E)$  es un grafo cúbico y bipartito, entonces existen tres matchings perfectos  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$  tales que su unión es  $E$  (ver Sección 1.3.3 y Corolario 1.1.7). Si asociamos el color  $a$  al matching  $M_1$ , el color  $b$  al matching  $M_2$  y el color  $c$  al matching  $M_3$ , se tiene entonces que los arcos de  $G$  son 3-coloreables. Para cada color  $h \in \{a, b, c\}$ , definimos  $\mathcal{C}(h)$  como el cubrimiento de ciclos que corresponde al eliminar los arcos del color  $h$ . Notar que como  $G$  es bipartito, cada ciclo de  $\mathcal{C}(h)$  es par.

Para cada color  $h \in \{a, b, c\}$  y cada vértice  $v \in V$ , definimos  $\ell_h(v)$  como el largo del ciclo donde se encuentra  $v$  dentro del cubrimiento de ciclo  $\mathcal{C}(h)$ . Definimos además la *contribución de un vértice*  $v \in V$  en el cubrimiento de ciclo  $\mathcal{C}(h)$  como

$$z_h(v) := \frac{(\ell_h(v) + 2)}{\ell_h(v)}.$$

El 2 en el numerador es añadido para contabilizar el costo del doble arco que se utiliza para conectar las componentes de  $\mathcal{C}(h)$  mediante un ciclo Euleriano (ver Sección 1.3.3). La *contribución promedio de un vértice* en este caso se define

$$z(v) := \frac{1}{3} \sum_{h \in \{a, b, c\}} z_h(v),$$

por lo tanto, cuando sumemos  $z(v)$  sobre todos los vértices lo que obtendremos es el largo promedio de las soluciones de graph-TSP asociadas a los cubrimientos de ciclos  $\mathcal{C}(a)$ ,  $\mathcal{C}(b)$  y  $\mathcal{C}(c)$ , más 2. Lo que probaremos es que en otra familia de cubrimientos  $\{\bar{\mathcal{C}}(a), \bar{\mathcal{C}}(b), \bar{\mathcal{C}}(c)\}$ , que corresponden a la salida del Algoritmo 5, provenientes de modificar los cubrimientos  $\{\mathcal{C}(a), \mathcal{C}(b), \mathcal{C}(c)\}$ , se verifica que

$$\sum_{v \in V} z(v) \leq (4/3 - \epsilon)n,$$

con  $\epsilon = 1/108$ , y por lo tanto el Algoritmo 5 entrega una solución de graph-TSP con costo a lo más  $(4/3 - \epsilon)n - 2$  en el caso en que  $G$  es cúbico, 2-conexo y bipartito.

**Observación 4.2.1.** *Los cubrimientos de ciclos  $\{\bar{\mathcal{C}}(a), \bar{\mathcal{C}}(b), \bar{\mathcal{C}}(c)\}$  generados por el Algoritmo 5 no son necesariamente cubrimientos generados por la sustracción de los arcos de una coloración.*

## 4.3. Análisis del algoritmo

En esta sección supondremos que el grafo  $G$  no contiene dos cuadrados adyacentes, salvo que estos cuadrados pertenezcan a un hexágono con dos cuerdas cruzadas (Figura

---

**Algoritmo 5** Algoritmo de aproximación para *TSP* en el caso en que  $G$  es cúbico, 2-conexo y bipartito.

---

- 1: Reducir el grafo  $G$  de modo que no contenga dos cuadrados adyacentes.
  - 2: Colorear los arcos de  $G$  con colores  $a$ ,  $b$  y  $c$ .
  - 3: Etiquetar cada vértice  $v$  con  $(\ell_a(v), \ell_b(v), \ell_c(v))$ .
  - 4: Si existe un hexágono  $F$  en el cubrimiento de ciclos asociado a algún color, digamos  $c$ , cuyos vértices tienen sólo etiquetas  $(6, 6, 6)$ , entonces alternar el color de los arcos del borde de  $F$  (es decir, si el color de un arco en el borde de  $F$  es  $a$  cambiarlo a  $b$ , y si es  $b$  cambiarlo a  $a$ ). Repetir hasta que no existan hexágonos con sólo etiquetas  $(6, 6, 6)$  en los vértices.
  - 5: Para cada color  $h \in \{a, b, c\}$ , si dos ciclos de  $\mathcal{C}(h)$ , digamos,  $C_1$  y  $C_2$  intersectan un ciclo  $C$  de largo 4 (en el grafo original), combinarlos en un ciclo simple en  $V(C_1) \cup V(C_2)$ . Repetir este paso hasta que no existan tales dos ciclos, en este caso llamaremos el cubrimiento de ciclos resultante  $\bar{\mathcal{C}}(h)$ .
  - 6: Redefinir las etiquetas  $(\ell_a(v), \ell_b(v), \ell_c(v))$  de acuerdo a los cubrimientos  $\{\bar{\mathcal{C}}(a), \bar{\mathcal{C}}(b), \bar{\mathcal{C}}(c)\}$ .
  - 7: Definir  $\mathcal{C}$  como el cubrimiento de ciclos de menor cardinalidad dentro de  $\{\bar{\mathcal{C}}(a), \bar{\mathcal{C}}(b), \bar{\mathcal{C}}(c)\}$ .
  - 8: Definir el ciclo Euleriano definido por el cubrimiento de ciclos  $\mathcal{C}$ . Esta es una solución de graph-TSP en el grafo reducido.
  - 9: Extender la solución de graph-TSP al grafo original. Retornar esta solución.
- 

4.2), o salvo que estos dos cuadrados formen parte de un pseudocubo (Figura 4.3). Con este supuesto, probaremos una serie de lemas técnicos que serán útiles para analizar la calidad de la aproximación del Algoritmo 5.

**Lema 4.3.1.** *Sea  $F$  un hexágono procesado por el Paso 4 del Algoritmo 5. Entonces, luego de la modificación, las etiquetas de los vértices de  $F$  cambian a  $(18, 18, 6)$  (o alguna permutación de esta etiqueta). Además, esta modificación no aumenta el número de hexágonos de ningún cubrimiento de ciclos, ni tampoco disminuye el valor del etiquetado de ningún vértice.*

*Demostración.* Sea  $F$  un hexágono en el cubrimiento de ciclos asociado a algún color, digamos  $F \in \mathcal{C}(c)$  (esto es sin pérdida de generalidad). Estudiemos los siguientes dos casos.

- Caso en que  $F \in \mathcal{C}(c)$  es un hexágono sin cuerdas. En este caso, como todos los vértices del hexágono  $F$  tienen etiqueta  $(6, 6, 6)$  necesariamente  $F$  es adyacente a otros 6 hexágonos inducidos (sin cuerdas) en  $G$ , tal como se muestra en la Figura 4.7. Cada uno de los doce vértices de estos hexágonos que no son adyacentes a  $F$  (y que no necesariamente son distintos) los denotamos por  $v_1, v_2, \dots, v_{12}$ . Si rotamos o alternamos el color de los arcos del borde de  $F$ , obtenemos la coloración que se muestra en la Figura 4.8. Notemos que en el caso que los doce vértices  $v_1, v_2, \dots, v_{12}$  son distintos, entonces al alternar los colores de los arcos de  $F$  el ciclo de  $\mathcal{C}(a)$  y de  $\mathcal{C}(b)$  que intersecta a  $F$  es de largo 18, y por lo tanto el nuevo etiquetado de los vértices de  $F$  es  $(18, 18, 6)$ . Hay tres casos en que los vértices  $v_1, v_2, \dots, v_{12}$  no son distintos: el primer caso es en el que (salvo permutación en el nombre de los

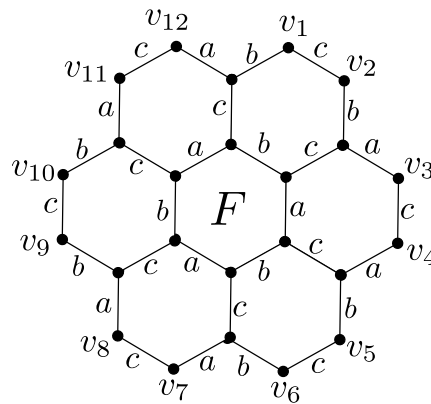


Figura 4.7: Estructura del hexágono  $F \in \mathcal{C}(c)$  sin cuerdas, donde todos sus vértices tienen etiquetas  $(6, 6, 6)$ .

vértices)  $v_1 = v_8$  y  $v_2 = v_7$ ; el segundo caso es en el que  $v_1 = v_8$ ,  $v_2 = v_7$ ,  $v_3 = v_{10}$  y  $v_4 = v_9$ ; y el tercer caso es en el que tres pares de vértices coinciden, en cuyo caso la estructura mencionada es el grafo entero  $G$  con  $n = 18$  vértices (que resulta ser Hamiltoniano). En cualquiera de los tres casos anteriores, se puede ver que el nuevo etiquetado de los vértices de  $F$  es también  $(18, 18, 6)$ .

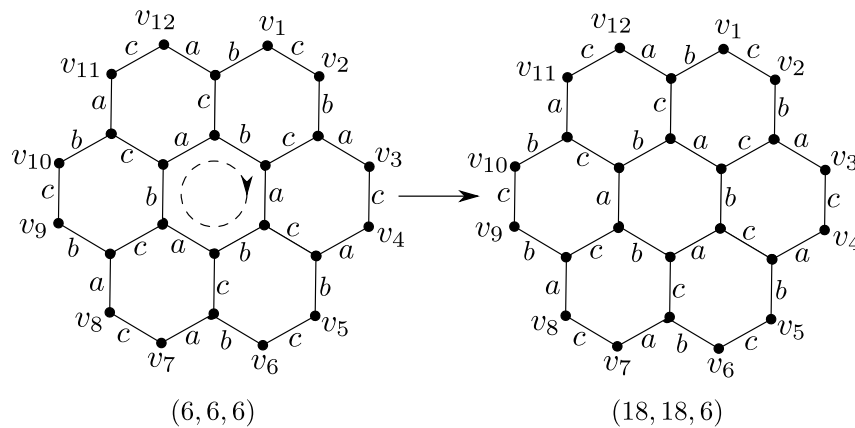


Figura 4.8: Hexágono  $F \in \mathcal{C}(c)$  sin cuerdas procesado por el Paso 4 del Algoritmo 5.

- Caso en que  $F \in \mathcal{C}(c)$  es un hexágono con cuerda. Notemos que si  $F$  tiene tres cuerdas entonces coincide con el grafo entero  $G$ , mientras que si tiene dos cuerdas entonces tanto en  $\mathcal{C}(a)$  como en  $\mathcal{C}(b)$  hay un ciclo de largo al menos 8 que pasa por vértices de  $F$ , lo que contradice que todos los vértices de  $F$  tienen etiquetas  $(6, 6, 6)$ . Luego  $F$  tiene una sola cuerda. Cómo todos los vértices de  $F$  tienen etiquetas  $(6, 6, 6)$ , necesariamente  $F$  es adyacente a un cuadrado de  $\mathcal{C}(a)$  unido a dos arcos de color  $a$  y también adyacente a un cuadrado de  $\mathcal{C}(b)$  unido a dos arcos de color  $b$ , como se muestra en la Figura 4.9. Notemos que esta estructura no puede encontrarse en  $G$  ya que supusimos que  $G$  no posee dos cuadrados (inducidos) unidos de forma consecutiva, salvo que estos dos cuadrados formen parte de un pseudocubo o que formen parte de un hexágono con dos cuerdas cruzadas. En el primer caso, no es difícil verificar que no puede haber un hexágono de un cubrimiento de ciclos

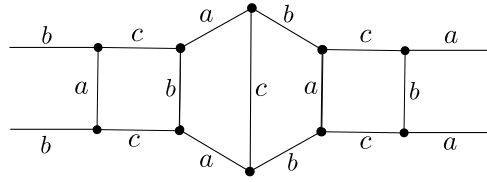


Figura 4.9: Estructura del hexágono  $F \in \mathcal{C}(c)$  con cuerda, donde todos sus vértices tienen etiquetas  $(6, 6, 6)$ .

asociado a un color dentro de un pseudocubo. Por otro lado, es fácil notar que el segundo caso no se verifica. Esto termina la demostración.  $\square$

**Lema 4.3.2.** *Luego del Paso 5 del Algoritmo 5, si existe un vértice que contenga un 4 en su etiquetado, entonces tiene etiqueta  $(4, j, k)$  (o alguna permutación de este etiquetado), con  $j, k \geq 10$ .*

*Demostración.* Supongamos que algún  $v \in V$  tiene un 4 en su etiquetado de acuerdo a los cubrimientos  $\{\bar{\mathcal{C}}(a), \bar{\mathcal{C}}(b), \bar{\mathcal{C}}(c)\}$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $\ell_a(v) = 4$ , es decir, supongamos que  $v$  pertenece a algún cuadrado  $C \in \bar{\mathcal{C}}(a)$ . Entonces  $C$  pertenece también al cubrimiento inicial  $\mathcal{C}(a)$ . Es fácil ver que  $v$  no puede pertenecer a un hexágono con dos cuerdas cruzadas. Por otro lado, después del Paso 5 es imposible que permanezcan ciclos de largo 4 dentro de una estructura de pseudocubo. Entonces  $v$  no pertenece ni a un hexágono con dos cuerdas cruzadas ni a un pseudocubo, y por lo tanto  $v$  no puede pertenecer a un cuadrado adyacente a otro cuadrado, es decir,  $C$  no puede ser adyacente a ningún cuadrado. Por lo tanto, cualquier camino entre dos vértices adyacentes de  $C$  que no intersecta al ciclo tiene largo al menos 4. Además, del hecho de que  $G$  sea bipartito se deduce que cualquier camino entre dos vértices no adyacentes de  $C$  que no intersecta al ciclo tiene largo al menos 4. Por lo tanto, después del Paso 5, los vértices de  $C$  tienen que tener etiquetas  $(4, j, k)$  (o alguna permutación de este etiquetado), con  $j, k \geq 10$ .  $\square$

La siguiente proposición resume el resultados de los últimos dos lemas técnicos y los traduce en un resultado asociado a la contribución de cada vértice.

**Proposición 4.3.3.** *Sea  $v \in V$ , y  $z(v)$  la contribución promedio asociada a los cubrimientos de ciclos  $\{\bar{\mathcal{C}}(a), \bar{\mathcal{C}}(b), \bar{\mathcal{C}}(c)\}$  que corresponden a la salida del Algoritmo 5. Si la etiqueta (asociada a los cubrimientos de ciclos  $\{\bar{\mathcal{C}}(a), \bar{\mathcal{C}}(b), \bar{\mathcal{C}}(c)\}$ ) de  $v$  no es  $(6, 6, 6)$ , entonces  $z(v) \leq 4/3 - 1/36$ .*

*Demostración.* Estudiemos los siguientes casos para  $v$ .

- Supongamos que  $v$  tiene un 4 en su etiquetado. Luego, del Lema 4.3.2 se tiene que para  $k \geq 10$  y  $j \geq 10$ ,

$$\begin{aligned}
 z(v) &= \frac{1}{3} \left( \frac{6}{4} + \frac{j+2}{j} + \frac{k+2}{k} \right) \\
 &\leq \frac{1}{3} \left( \frac{6}{4} + \frac{12}{10} + \frac{12}{10} \right) \\
 &= \frac{13}{10} \\
 &= \frac{4}{3} - \frac{1}{30}
 \end{aligned}$$

- Supongamos que  $v$  no tiene un 4 en su etiquetado. Luego, como no tiene etiqueta  $(6, 6, 6)$ , entonces debe tener un etiquetado  $(i, j, k)$ , con  $i, j, k \geq 6$  y algún  $i, j, k$  mayor estricto que 6. Luego

$$\begin{aligned}
 z(v) &= \frac{1}{3} \left( \frac{i+2}{i} + \frac{j+2}{j} + \frac{k+2}{k} \right) \\
 &\leq \frac{1}{3} \left( \frac{8}{6} + \frac{8}{6} + \frac{10}{8} \right) \\
 &= \frac{47}{36} \\
 &= \frac{4}{3} - \frac{1}{36}
 \end{aligned}$$

□

## 4.4. Garantía de aproximación

Concluimos este capítulo mostrando la garantía de aproximación del algoritmo descrito.

**Teorema 4.4.1.** *El Algoritmo 5 entrega una solución de graph-TSP con costo a lo más  $(4/3 - \epsilon)n - 2$ , con  $\epsilon = 1/108$ .*

*Demostración.* Basta probar que con los cubrimientos de ciclos  $\{\bar{\mathcal{C}}(a), \bar{\mathcal{C}}(b), \bar{\mathcal{C}}(c)\}$  que corresponden al algoritmo se verifica que

$$\sum_{v \in V} z(v) \leq (4/3 - \epsilon)n,$$

con  $\epsilon = 1/108$ .

Definamos

$$V_6 := \{v \in V \mid v \text{ tiene etiqueta } (6, 6, 6)\}.$$

Por el Lema 4.3.1 sabemos que en cada hexágono (correspondiente a cualquier cubrimiento de ciclos) pueden haber a lo más 4 vértices con etiquetas  $(6, 6, 6)$ , de aquí deducimos que

$$|V_6| \leq 4\lfloor n/6 \rfloor.$$

Luego

$$\begin{aligned}
 \sum_{v \in V} z(v) &= \sum_{v \in V_6} z(v) + \sum_{v \in V \setminus V_6} z(v) \\
 &\leq |V_6| \times \frac{4}{3} + |V \setminus V_6| \times \left( \frac{4}{3} - \frac{1}{36} \right) \\
 &\leq \left( \frac{4n}{6} \right) \times \frac{4}{3} + \left( n - \frac{4n}{6} \right) \times \left( \frac{4}{3} - \frac{1}{36} \right) \\
 &\leq \frac{4n}{3} - \left( \frac{n}{108} \right),
 \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se tiene de la Proposición 4.3.3. Esto demuestra el resultado pedido. □



Del resultado anterior se deduce inmediatamente el siguiente resultado.

**Corolario 4.4.2.** *Si  $G$  es un grafo cúbico y bipartito, entonces existe una  $(4/3 - \epsilon) - 2/n$  algoritmo de aproximación, donde  $\epsilon = 1/108$ .*

## 4.5. Gap integral

Del Teorema 4.4.1 y del hecho de que  $n$  es una cota inferior de  $OPT_{LP}(G)$ , se obtiene el siguiente resultado.

**Corolario 4.5.1.** *Si  $G$  es un grafo cúbico y bipartito, entonces el gap integral de graph-TSP con respecto a la relajación de Held-Karp es a lo más  $(4/3 - \epsilon)$ , donde  $\epsilon = 1/108$ .*

La mejor cota inferior que conocemos para el gap integral en el caso cúbico y bipartito es  $10/9$ . Esta cota se obtiene mediante una familia de instancias de grafos en los cuales el gap integral tiende a  $10/9$  por abajo. Esta familia de instancias se describe en la Figura 4.10. En efecto, una solución para la relajación de Held-Karp está dada en la Figura 4.11

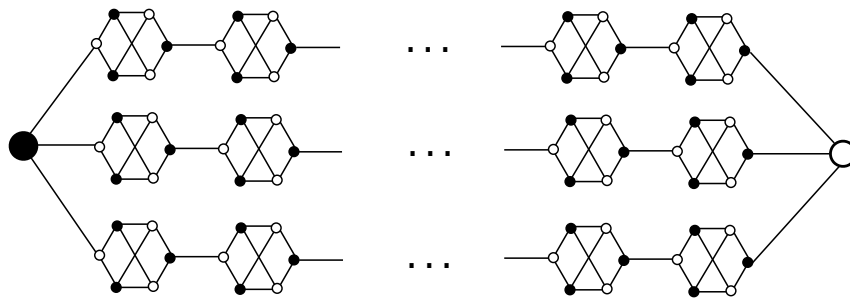


Figura 4.10: Familia de instancias cúbicas y bipartitas que tienden a un gap de  $10/9$ .

y no es difícil ver que el valor de esta solución es  $\sum_{e \in E} x_e = n + 1$ . Por otro lado, para

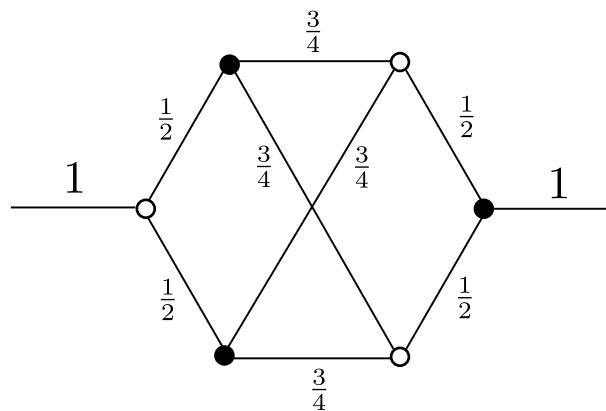


Figura 4.11: Una solución  $x_e$  de la relajación de Held & Karp con valor  $n$  para la familia de instancias cúbicas y bipartitas que tienden a un gap  $10/9$ .

esta instancia la solución óptima de graph-TSP tiene un valor de  $OPT(G) = (10n - 2)/9$ , y por lo tanto el gap integral con respecto a la relajación de Held-Karp tiende a  $10/9$ .

# Capítulo 5

## Una $(4/3 - \epsilon)$ aproximación para el caso general

Boyd *et al.* [6] mostraron que todo grafo  $G = (V, E)$  cúbico y 2-conexo posee una solución de graph-TSP de costo a lo más  $4n/3 - 2$ . En este capítulo extendemos la técnica de Boyd *et al.* y para mostrar que todo grafo  $G = (V, E)$  cúbico y 2-conexo posee una solución de graph-TSP de costo a lo más  $(4/3 - \epsilon)n - 2$ , con  $\epsilon = 1/61236$ . Además, esta solución se puede calcular en tiempo polinomial.

### 5.1. Fase de reducción del grafo $G$

Al igual que en el caso en que  $G$  es bipartito, discutido en el Capítulo 4, vamos a hacer una serie de reducciones del grafo de entrada  $G$  con el fin de obtener un grafo de salida  $H$  el cual no contenga 6-ciclos con una o más cuerdas y que además satisfaga que si  $H$  tiene una solución de graph-TSP de largo a lo más  $(4/3 - \epsilon)|V(H)| - 2$  entonces  $G$  tiene una solución de graph-TSP de largo a lo más  $(4/3 - \epsilon)|V(G)| - 2$ .

**Definición 5.1.1.** Para cada conjunto de arcos  $F \subset E$ , el *vector de incidencia* o *indicatriz* de  $F$  es el vector  $\chi^F \in \{0, 1\}^E$  definido por  $\chi_e^F = 1$  si  $e \in F$  y 0 si no.

El primer paso de la reducción es remover los 6-ciclos con dos cuerdas.

*Reducción 1:* Sea  $\gamma$  un 6-ciclo con dos cuerdas y sea  $G[V(\gamma)]$  el subgrafo inducido por los vértices de  $\gamma$ . Consideremos los dos vértices  $v_1$  y  $v_2$  que conectan  $\gamma$  con el resto de  $G$ . Nuestro procedimiento reemplaza  $G[V(\gamma)]$  por el subgrafo compuesto por un 4-ciclo con una cuerda, estructura que llamamos *diamante* y que se muestra en la Figura 5.1.

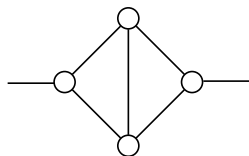


Figura 5.1: Un 4-ciclo con una cuerda o *diamante*.

El segundo paso es reducir los 6-ciclos que tengan exactamente una cuerda. Sea  $\gamma$  tal ciclo y sea  $G[V(\gamma)]$  el subgrafo inducido por los vértices de  $\gamma$ . Consideremos los cuatro

arcos  $e_1, e_2, e_3$  y  $e_4$  que conectan  $\gamma$  al resto de  $G$ . Sea  $w_i$  el vértice al cual incide  $e_i$  fuera de  $\gamma$ . Haremos una serie de reducciones distinguiendo tres tipos de reducciones de acuerdo a tres tipos de casos.

*Reducción 2:* Si sólo dos de los vértices  $w_i$ 's son distintos, procedemos como en la reducción anterior (Reducción 1), es decir, reemplazamos el subgrafo  $G[V(\gamma)]$  por un diamante.

*Reducción 3:* Si tres de los vértices  $w_i$ 's son distintos, reemplazamos la estructura de 7 vértices formada por  $\gamma$  y el vértice  $w_i$  adyacente a dos vértices de  $\gamma$  por un triángulo (3-ciclo), identificando los vértices de grado dos en la estructura con los vértices de los triángulos. La Figura 5.2 muestra un ejemplo de esta reducción en el caso de que  $\gamma$  tiene una cuerda que une vértices simétricamente opuestos.

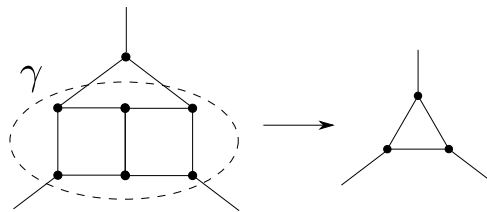


Figura 5.2: Reducción en el caso de que tres de los vértices  $w_i$ 's son distintos y  $\gamma$  tiene una cuerda que une vértices simétricamente opuestos.

*Reducción 4:* El caso final es cuando todos los vértices  $w_i$ 's son distintos. Asumimos sin pérdida de generalidad que los vértices  $w_i$ 's están indexados en el orden cíclico inducido por  $\gamma$ . En este caso reemplazamos  $\gamma$  por un arco  $e$  y luego conectamos  $w_1, w_2$  a un extremo de  $e$  y  $w_3, w_4$  al otro extremo si  $e$ , siempre y cuando  $e$  no forme un puente en el grafo reducido. En el caso que  $e$  forme un puente en el grafo reducido, conectamos  $w_1, w_4$  a un extremo de  $e$  y  $w_2, w_3$  al otro extremo.

**Observación 5.1.2.** Como lo muestra el siguiente resultado, la elección anterior siempre puede ser hecha de tal forma de que  $e$  no forme un puente en el grafo reducido. Esto implica que la Reducción 4 mantiene el grafo cúbico y 2-conexo. Además, es fácil notar que las reducciones 1, 2 y 3 mantienen también el grafo cúbico y 2-conexo. Por lo tanto todas las reducciones que realizamos tienen la propiedad de mantener el grafo cúbico y 2-conexo.

**Lema 5.1.3.** Sea  $\gamma$  un 6-ciclo con exactamente una cuerda, tal que todos los vértices  $w_i$ 's son distintos. Luego, los arcos de  $G[V(\gamma)]$  no pueden contener dos cortes distintos de  $G$  tales que el primer corte separe (en distintos lados del corte) los vértices  $\{w_1, w_2\}$  de  $\{w_3, w_4\}$  y el segundo corte separe (en distintos lados del corte) los vértices  $\{w_2, w_3\}$  de  $\{w_1, w_4\}$ .

*Demostración.* Por contradicción, supongamos que los arcos de  $G[V(\gamma)]$  contienen dos cortes distintos tales que el primer corte separe los vértices  $\{w_1, w_2\}$  de  $\{w_3, w_4\}$  y el segundo corte separe los vértices  $\{w_2, w_3\}$  de  $\{w_1, w_4\}$ . Entonces no podrían existir dos caminos arco-disjuntos que unan los vértices  $w_1$  y  $w_3$ , lo que contradice la 2-conexidad del grafo  $G$ .  $\square$

Denotemos a  $G$  el grafo original y a  $H$  el grafo reducido (por cualquiera de las anteriores reducciones). El siguiente resultado muestra que una solución de graph-TSP en el grafo reducido de largo  $\alpha|V(H)| - 2$  con  $5/4 \leq \alpha \leq 4/3$  puede ser transformada a una solución en el grafo original de largo  $\alpha|V(G)| - 2$ , y por lo tanto la calidad de la aproximación permanece intacta.

**Proposición 5.1.4.** *Sea  $x'$  una solución en el grafo reducido  $H$  de largo a lo más  $\alpha|V(H)| - 2$ , con  $5/4 \leq \alpha \leq 4/3$ . Supongamos que  $x'$  tiene valores en  $\{0, 1, 2\}$ , es decir,  $x'_e \in \{0, 1, 2\}$  para todo  $e \in E(H)$ . Luego, se puede construir una solución  $x$  en el grafo original  $G$  de largo a lo más  $\alpha|V(G)| - 2$ .*

*Demostración.* Vamos a separar en casos, dependiendo de cual reducción fue realizada en el grafo  $G$ .

- Caso Reducción 1 y 2: en este caso el resultado es consecuencia del siguiente lema.

**Lema 5.1.5.** *Sea  $G = (V, E)$  un grafo y  $U \subset V$  tal que el corte  $\delta(U)$  tiene sólo dos elementos, digamos  $\delta(U) = \{e_1, e_2\}$ . Sea  $v, w \in U$  los dos vértices a los cuales inciden  $\{e_1, e_2\}$ . Supongamos que el subgrafo  $G[U]$  es Hamiltoniano y además contiene un camino Hamiltoniano entre  $v$  y  $w$ . Sea  $H$  el grafo resultante de reemplazar el subgrafo  $G[U]$  por un diamante  $D \subset H$  y sea  $x'$  una solución de graph-TSP en  $H$ . Luego existe una solución  $x$  de graph-TSP en el grafo original  $G$  con costo  $|x| \leq |x'| + |U| - 4$ .*

*Demostración (del Lema 5.1.5).* Sea  $\chi^P$  la indicatriz del algún camino Hamiltoniano  $P$  desde  $v$  a  $w$  y  $\chi^C$  la indicatriz de algún ciclo Hamiltoniano  $C$  de  $G[U]$ . Vamos a extender la solución  $x'$  al grafo original dependiendo de los valores de la solución  $x'$  sobre los arcos  $e_1$  y  $e_2$ . Sabemos que  $x'(\{e_1, e_2\}) = x'(e_1) + x'(e_2)$  es un valor par. Como además  $x'$  es representa un tour conexo con valores en  $\{0, 1, 2\}$  tenemos que todos los casos posibles de valores de  $x'(e_1)$  y  $x'(e_2)$  son los de a continuación.

- Caso  $x'(e_1) = 1$  y  $x'(e_2) = 1$ : en este caso hay un camino dentro de  $D$  de largo 3 contenido en la solución  $x'$  que une los vértices  $v$  y  $w$ . Luego, podemos definir la solución  $x$  en  $G$  de la siguiente forma

$$x(e) = \begin{cases} \chi^P(e) & , \text{ si } e \in E(G[U]), \\ x'(e) & , \text{ si } e \in E(G) \setminus E(G[U]). \end{cases}$$

- Caso  $x'(e_1) = 2$  y  $x'(e_2) = 0$  (o el otro caso simétrico): en este caso hay un 4-ciclo dentro de  $D$  contenido en la solución  $x'$ . Luego, podemos definir la solución  $x$  en  $G$  de la siguiente forma

$$x(e) = \begin{cases} \chi^C(e) & , \text{ si } e \in E(G[U]), \\ x'(e) & , \text{ si } e \in E(G) \setminus E(G[U]). \end{cases}$$

- Caso  $x'(e_1) = 2$  y  $x'(e_2) = 2$ : notemos que en este caso podemos redefinir  $x'(e_2) = 0$  y luego definir la solución  $x$  en  $G$  como en el caso anterior.

Concluimos notando que con cualquiera de las construcciones anteriores se tiene que  $x$  es una solución de graph-TSP de  $G$  con costo  $|x| \leq |x'| + |U| - 4$ .  $\square$

Es fácil verificar que tanto la Reducción 1 como la Reducción 2 satisfacen las hipótesis del Lema 5.1.5. En el caso de la Reducción 1, el conjunto de vértices del subgrafo que se reemplaza por un diamante tiene tamaño  $|U| = 6$ , mientras que en el caso de la Reducción 2 el conjunto de vértices del subgrafo que se reemplaza por un diamante tiene tamaño  $|U| = 8$ . Cualquiera sea el caso se tiene que  $|V(G)| = |V(H)| + |U| - 4$ , luego

$$\begin{aligned} |x| &\leq |x'| + |U| - 4 \\ &\leq \alpha|V(H)| - 2 + |U| - 4 \\ &= \alpha|V(G)| - 2 - (\alpha - 1)(|V(G)| - |V(H)|) \\ &\leq \alpha|V(G)| - 2 \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se obtiene aplicando el Lema 5.1.5.

- Caso Reducción 3: en este caso el resultado es consecuencia del siguiente lema.

**Lema 5.1.6.** *Sea  $G = (V, E)$  un grafo y  $U \subset V$  un conjunto tal que  $|U| = 7$  y el corte  $\delta(U)$  tiene sólo 3 elementos, digamos  $\delta(U) = \{e_1, e_2, e_3\}$ . Sea  $v_1, v_2, v_3 \in U$  los tres vértices a los cuales inciden  $e_1, e_2$  y  $e_3$  respectivamente. Supongamos que el subgrafo  $G[U]$  contiene un ciclo  $C$  de largo a lo más 8 que recorre los 7 vértices de  $U$  y además para cada par de vértices  $v, w \in \{v_1, v_2, v_3\}$  existe un camino  $P(v, w)$  de largo a lo más 7 que une  $v$  con  $w$  y recorre los 7 vértices de  $U$ . Sea  $H$  el grafo resultante de reemplazar el subgrafo  $G[U]$  por un triángulo y sea  $x'$  una solución de graph-TSP en  $H$ . Luego existe una solución  $x$  de graph-TSP en el grafo original  $G$  con costo  $|x| \leq |x'| + 5$ .*

*Demostración (del Lema 5.1.6).* Denotemos  $\chi^P(v, w)$  la indicatriz del camino de largo a lo más 7 desde  $v$  a  $w$  que recorre todo  $U$  y  $\chi^C$  la indicatriz del ciclo de largo a lo más 8 dentro de  $G[U]$ . Vamos a extender la solución  $x'$  al grafo original dependiendo de los valores de la solución  $x'$  sobre los arcos  $e_1, e_2$  y  $e_3$ . Sabemos que  $x'(\{e_1, e_2, e_3\}) = x'(e_1) + x'(e_2) + x'(e_3)$  es un valor par. Como además  $x'$  es representa un tour conexo con valores en  $\{0, 1, 2\}$  tenemos que todos los casos posibles de valores de  $x'(e_1), x'(e_2)$  y  $x'(e_3)$  son los de a continuación.

- Caso  $x'(e_1) = 2$  y  $x'(e_2) = x'(e_3) = 0$  (o las otras permutaciones posibles): en este caso podemos definir la solución  $x$  en  $G$  de la siguiente forma

$$x(e) = \begin{cases} \chi^C(e) & , \text{ si } e \in E(G[U]), \\ x'(e) & , \text{ si } e \in E(G) \setminus E(G[U]). \end{cases}$$

- Caso  $x'(e_1) = 2, x'(e_2) \in \{0, 2\}$  y  $x'(e_3) \in \{0, 2\}$  (o las otras permutaciones posibles): primero redefinimos  $x'(e_2) = x'(e_3) = 0$  y luego definimos la solución  $x$  en  $G$  como en el caso anterior.

- Caso  $x'(e_1) = x'(e_2) = 1$  y  $x'(e_3) = 0$  (o las otras permutaciones posibles): en este caso podemos definir la solución  $x$  en  $G$  de la siguiente forma

$$x(e) = \begin{cases} \chi^{P(v_1, v_2)}(e) & , \text{ si } e \in E(G[U]), \\ x'(e) & , \text{ si } e \in E(G) \setminus E(G[U]). \end{cases}$$

- Caso  $x'(e_1) = x'(e_2) = 1$  y  $x'(e_3) = 2$  (o las otras permutaciones posibles): primero redefinimos  $x'(e_3) = 0$  y luego definimos la solución  $x$  en  $G$  como en el caso anterior.

Concluimos notando que con cualquiera de las construcciones anteriores se tiene que  $x$  efectivamente es una solución de graph-TSP de  $G$ . Además, se necesitaron a lo más 5 arcos extras para construir  $x$  con respecto a la solución  $x'$  y por lo tanto  $|x| \leq |x'| + 5$ .  $\square$

Es fácil verificar que las estructuras de 7 vértices que se pueden reducir con la Reducción 3 satisfacen las hipótesis del Lema 5.1.6. Para esto basta encontrar por inspección un ciclo de largo menor o igual a 8 y caminos de largo menor o igual a 7 que recorran todos los vértices dentro de las estructuras de la Figura 5.3, que son exactamente todas las que se pueden reducir con la Reducción 3.

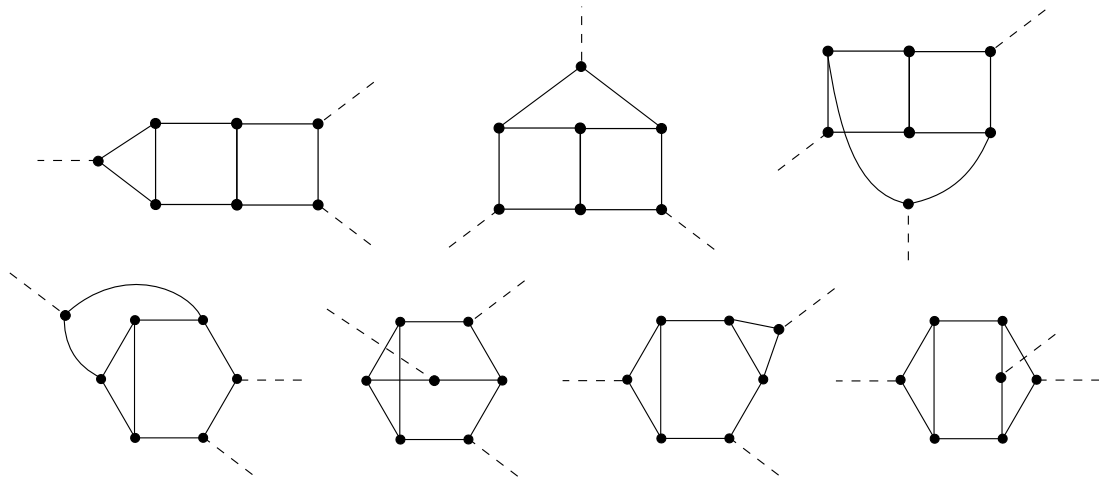


Figura 5.3: Todas las estructuras que se pueden reducir utilizando la Reducción 3.

Con esto tenemos que después al aplicar la Reducción 3 podemos definir una solución  $x$  en el grafo original con costo

$$\begin{aligned} |x| &\leq |x'| + 5 \\ &\leq \alpha|V(H)| - 2 + 5 \\ &= \alpha|V(G)| - 2 + 5 + \alpha(|V(H)| - |V(G)|) \\ &= \alpha|V(G)| - 2 + (5 - \alpha 4) \\ &\leq \alpha|V(G)| - 2 \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se obtiene aplicando el Lema 5.1.6 y la última por el hecho de que  $5/4 \leq \alpha$ .

- Caso Reducción 4: en este caso no es muy complicado construir una solución  $x$  en  $G$  con costo  $|x| \leq |x'| + 4$ . Luego

$$\begin{aligned}
|x| &\leq |x'| + 4 \\
&\leq \alpha|V(H)| - 2 + 4 \\
&= \alpha|V(G)| - 2 + 4 + \alpha(|V(H)| - |V(G)|) \\
&= \alpha|V(G)| - 2 + (4 - \alpha 4) \\
&\leq \alpha|V(G)| - 2
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se tiene por el hecho de que  $\alpha \geq 1$ .

□

En la fase de reducción realizamos todas las reducciones que se puedan. Notemos que cada reducción decrece estrictamente el número de vértices en el grafo y por lo tanto basta realizar un número lineal (con respecto a  $|V|$ ) de reducciones. Además, cada paso se puede ejecutar en tiempo polinomial, no solamente para buscar la estructura deseada, sino que también para recuperar la solución de graph-TSP en el grafo original. Por lo tanto esta fase de simplificación se puede ejecutar en tiempo polinomial.

## 5.2. Matchings 3-corte perfectos

Diremos que un matching es *3-corte perfecto* si es un matching perfecto que interseca a cada 3-corte del grafo en exactamente un arco.

**Lema 5.2.1** ([6]). *Sea  $G = (V, E)$  un grafo cúbico 2-conexo. Luego, el vector  $\frac{1}{3}\chi^E$  puede ser expresado como una combinación convexa de vectores de incidencia de matchings 3-corte perfectos, es decir, existen matchings  $\{M_i\}_{i=1}^k$  3-corte perfectos y números reales positivos  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  tales que*

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \quad (5.1)$$

y

$$\frac{1}{3}\chi^E = \sum_{i=1}^k \lambda_i \chi^{M_i}. \quad (5.2)$$

*Demostración.* El Lema 2.1.1 garantiza que  $\frac{1}{3}\chi^E$  pertenece al polítopo de matchings  $\text{PM}(G)$ . Se sigue que  $\frac{1}{3}\chi^E$  puede ser expresado como una combinación convexa de vectores de incidencia de matchings perfectos  $\{M_i\}_{i=1}^k$ .

Para ver que cada matching perfecto  $M_i$  es 3-corte perfecto, consideremos cualquier 3-corte  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de  $G$ . Ya que cada lado de un 3-corte en un grafo cúbico debe contener un número impar de vértices, entonces cualquier matching perfecto debe contener uno o tres arcos de  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . Sea  $\mathcal{M}_0$  el conjunto de matchings perfectos que contienen los tres arcos del corte, y sea  $\mathcal{M}_j$ , con  $j = 1, 2, 3$ , el conjunto de matchings perfectos que contiene a  $e_j$ . Definamos

$$\alpha_j := \sum_{M_i \in \mathcal{M}_j} \lambda_i,$$

para  $j = 0, 1, 2, 3$ . Luego

$$\begin{aligned}\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 1, \\ \alpha_0 + \alpha_1 &= 1/3, \\ \alpha_0 + \alpha_2 &= 1/3, \\ \alpha_0 + \alpha_3 &= 1/3,\end{aligned}$$

lo que implica que  $\alpha_0 = 0$ . □

**Observación 5.2.2.** *Destacamos que, como muestra Barahona [4], existe un algoritmo para encontrar la combinación convexa en orden de tiempo  $O(n^6)$  y con  $k \leq 7n/2 - 1$ , para cualquier grafo  $G$ .*

### 5.3. Descripción del método de aproximación

Tomando en cuenta que podemos trabajar en el grafo reducido, vamos a considerar grafos  $G = (V, E)$  que sean cúbicos, 2-conexos y que no contengan 6-ciclos con cuerdas. También vamos a asumir que  $n = |V| \geq 10$  ya que es fácil verificar que un grafo  $G$  con estas características de menos de 10 vértices es Hamiltoniano.

El algoritmo que describiremos es una extensión de la técnica de Boyd *et al.* [6], quienes obtuvieron una garantía de  $4/3$  con respecto a  $n$ . La idea es similar a la de la Proposición 1.3.3, donde se obtiene una solución de graph-TSP vía un cubrimiento de ciclos, salvo que en vez de utilizar un cubrimiento de ciclos se utiliza un *cubrimiento de subgrafos Eulerianos* del grafo  $G = (V, E)$ , que definimos como una colección  $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_j\}$  de multigrados Eulerianos conexos de  $G$ , llamados *componentes*, las cuales satisfacen que

- (i) todo vértice de  $G$  es cubierto por exactamente una componente,
- (ii) cada componente es Euleriana y
- (iii) ningún arco aparece más de dos veces en la misma componente.

Cada cubrimiento  $\Gamma$  puede ser transformado en un tour  $T(\Gamma)$  solución de graph-TSP en  $G$  contrayendo cada componente, adicionando un doble árbol de expansión en el grafo contraído (el cual es conexo) y luego descontrayendo las componentes. Boyd *et al.* [6] definieron la *contribución* de un vértice  $v$  en el cubrimiento  $\Gamma$  como  $z_\Gamma(v) = \frac{(\ell+2)}{h}$  donde  $\ell$  y  $h$  son el número de vértices y de arcos de la componente de  $\Gamma$  que contiene al vértice  $v$ . El 2 en el numerador es añadido para contabilizar el costo del doble arco que se utiliza para conectar las componentes de  $\Gamma$  como se explicó anteriormente, de modo que

$$\sum_{v \in V} z_\Gamma(v)$$

es igual al número de arcos de la solución de graph-TSP  $T(\Gamma)$  asociada al cubrimiento  $\Gamma$ , más 2. Sea  $\mathcal{D} = \{(\Gamma_i, \lambda_i)\}_{i=1}^k$  una distribución sobre cubrimientos en un grafo. Esto es, cada  $\Gamma_i$  es un cubrimiento de  $G$  y cada  $\lambda_i$  es un número positivo tal que  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ . La *contribución promedio de un vértice  $v \in V$*  con respecto a la distribución  $\mathcal{D}$  es definida como

$$z_{\mathcal{D}}(v) = \sum_{i=1}^k \lambda_i z_{\Gamma_i}(v),$$



de modo que la suma  $\sum_{v \in V} z_{\mathcal{D}}(v)$  es el largo promedio de las soluciones de graph-TSP asociadas a los  $k$  cubrimientos  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ , más 2. En este capítulo mostraremos que

$$\sum_{v \in V} z_{\mathcal{D}}(v) \leq \left( \frac{4}{3} - \epsilon \right) n, \quad (5.3)$$

con  $\epsilon > 0$ , de modo de concluir que existe una solución de graph-TSP de a lo más  $(4/3 - \epsilon)n - 2$  arcos.

## 5.4. Fase del cubrimiento de subgrafos Eulerianos

Sean  $\{M_i\}_{i=1}^k$  y  $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$  los matchings 3-corte perfectos y los coeficientes garantizados por el Lema 5.2.1. Sea  $\{\mathcal{C}_i\}_{i=1}^k$  la familia de cubrimientos de ciclos asociados a los matchings  $\{M_i\}_{i=1}^k$ , esto es,  $\mathcal{C}_i$  es la colección de ciclos inducidos por  $E \setminus M_i$ . Ya que cada matching  $M_i$  es 3-corte perfecto, el correspondiente cubrimiento de ciclos  $\mathcal{C}_i$  no contiene 3-ciclos. Es más, cada 5-ciclo de  $\mathcal{C}_i$  debe tener una cuerda en  $G$ .

A continuación vamos a definir tres operaciones locales (U1), (U2) y (U3) que serán aplicadas iterativamente a la familia de cubrimientos actual. Cada operación esta dirigida a reducir la contribución de cada componente de la familia. Destacamos que las operaciones (U2) y (U3) son exactamente las utilizadas por Boyd et al. Comenzaremos explicando la operación (U1).

(U1) Consideremos un cubrimiento de ciclos  $\mathcal{C}$  de la familia actual. Si  $C_1, C_2$  y  $C_3$  son tres ciclos disjuntos de  $\mathcal{C}$  que intersectan un mismo 6-ciclo  $C$  de  $G$ , combinamos estos ciclos en el único ciclo obtenido tomando las diferencias simétricas con respecto a  $C$ , esto es, el nuevo ciclo está definido en los vértices  $V(C_1) \cup V(C_2) \cup V(C_3)$  y su conjunto de vértices es  $(E(C_1) \cup E(C_2) \cup E(C_3)) \Delta E(C)$ .

Un ejemplo de la operación (U1) se muestra en la Figura 5.4. Aplicaremos (U1) tantas veces como sea posible para obtener un nuevo cubrimiento de ciclos  $\{\mathcal{C}_i^{U1}\}_{i=1}^k$ . Luego de esto vamos a aplicar la siguiente operación (U2).

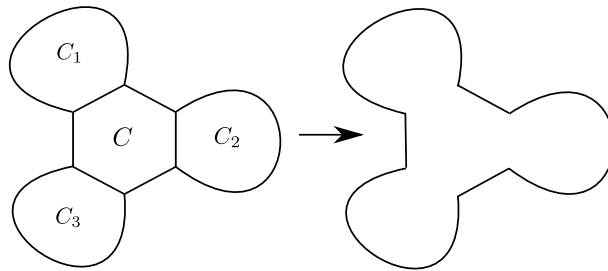


Figura 5.4: Operación (U1).

(U2) Consideremos un cubrimiento de ciclos  $\mathcal{C}$  de la familia actual. Si  $C_1$  y  $C_2$  son dos ciclos disjuntos de  $\mathcal{C}$  que intersectan a un mismo 4-ciclo  $C$  de  $G$ , entonces combinar estos ciclos en un mismo ciclo obtenido tomando las diferencias simétricas con respecto a  $C$ , esto es, el nuevo ciclo está definido en los vértices  $V(C_1) \cup V(C_2)$  y su conjunto de vértices es  $(E(C_1) \cup E(C_2)) \Delta E(C)$ .

Aplicamos la operación (U2) tantas veces sea posible, de modo de obtener un nuevo cubrimiento de ciclos  $\{\mathcal{C}_i^{U2}\}_{i=1}^k$  de  $G$ . La siguiente operación puede transformar un cubrimiento de ciclos  $\mathcal{C}$  de la familia actual en un cubrimiento de subgrafos Eulerianos  $\Gamma$  teniendo componentes que no son necesariamente ciclos.

(U3) Sea  $\Gamma$  un cubrimiento de subgrafos Eulerianos de la familia actual de cubrimientos. Si  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son dos componentes de  $\Gamma$ , cada una de al menos 5 vértices, cuyos conjuntos de vértices intersectan un mismo 5-ciclo  $C$  de  $G$ , entonces combinarlos en una misma componente, añadiendo a lo más 1 arco extra.

Para explicar como combinamos las componentes en la operación (U3) necesitamos dos lemas probados por Boyd *et al.* [6].

**Lema 5.4.1** ([6]). *Sean  $H_1$  y  $H_2$  dos multisubgrafos Eulerianos conexos de un grafo cúbico  $G$  con al menos dos vértices en común, y sea  $H_3$  la suma de  $H_1$  y  $H_2$ , es decir, la unión de sus vértices y la suma de sus arcos (permitiendo múltiples arcos paralelos). Entonces se puede remover al menos dos componentes de  $H_3$  de modo que permanezca conexo y Euleriano.*

*Demostración.* Sea  $u$  y  $v$  dos vértices en  $H_1$  y  $H_2$ . El conjunto de arcos de  $H_3$  puede ser particionado en cuatro  $(u, v)$ -caminos arco-disjuntos  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$ . Ya que  $u$  tiene grado 3 en  $G$  tienen que haber dos arcos paralelos incidentes a  $u$  que están en diferentes caminos, digamos  $e_1 \in P_1$  y  $e_2 \in P_2$ . Si removemos  $e_1$  y  $e_2$  tenemos que el grafo permanece Euleriano y además permanece conexo ya que  $u$  y  $v$  están aun conectados por  $P_3$  y  $P_4$  y cada vértice de  $P_1$  y  $P_2$  está aún conectado a  $u$  y  $v$ .  $\square$

**Lema 5.4.2** ([6]). *Si  $v$  pertenece a una componente  $\gamma$  de alguno de los cubrimientos  $\Gamma$  considerado por el algoritmo, luego al menos 2 de los 3 vecinos están en la misma componente.*

*Demostración.* El resultado se tiene directamente cuando  $\gamma$  es un ciclo. En particular, el resultado se tiene antes de aplicar la operación (U3). Como el conjunto de vértices de una componente creada por la operación (U3) es la unión de los conjuntos de vértices de las 2 componentes previas, entonces el resultado también se tiene después de aplicar la operación (U3).  $\square$

Notar que si  $\gamma$  es una componente de un cubrimiento de la familia actual, y  $C$  es un ciclo arbitrario de  $G$  conteniendo un vértice de  $\gamma$ , entonces dado que  $G$  es cúbico y por el Lema 5.4.2,  $C$  y  $\gamma$  deben compartir al menos dos vértices. En particular, si  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son dos componentes intersectando un 5-ciclo  $C$  considerado por la operación (U3), entonces una de ellas, digamos  $\gamma_1$ , debe contener exactamente dos vértices de  $C$  y la otra debe contener los otros tres vértices (cada una no puede compartir exactamente dos vértices ya que en caso contrario un vértice de  $C$  no estaría incluido en el cubrimiento). Para ejecutar (U3) primero combinamos  $\gamma_1$  y  $C$  usando el Lema 5.4.1 removiendo 2 arcos, y luego combinamos la componente resultante con  $\gamma_2$ , nuevamente removiendo 2 arcos. Con todo lo anterior, añadimos los 5 arcos de  $C$  y removimos 4 arcos. Finalmente, removemos 2 arcos de cada grupo de tripletes o cuadruplas de arcos que puedan quedar, de tal forma que cada arco aparezca a lo más dos veces en cada componente. La Figura 5.5 muestra un ejemplo de (U3).

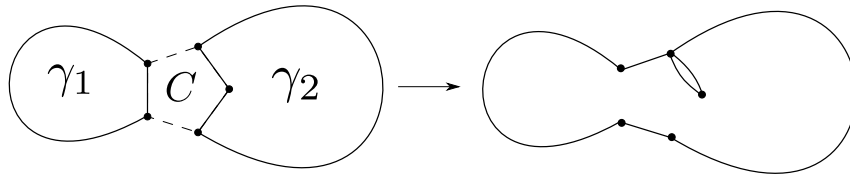


Figura 5.5: Esquema de la operación (U3).

**Observación 5.4.3.** La operación (U3) genera componentes que tienen al menos 10 vértices. Por lo tanto, cualquier componente de 9 o menos vértices tiene que ser un ciclo. Además, todos los ciclos generados por (U1) o (U2) contienen al menos 10 vértices (esto se tiene ya que el grafo  $G$  está reducido, y entonces la operación (U2) siempre involucra dos ciclos de largo al menos 5). De aquí observamos que cualquier componente de 9 o menos vértices tiene que pertenecer a la familia original de cubrimientos de ciclos  $\{\mathcal{C}_i\}_{i=1}^k$ .

## 5.5. Garantía de aproximación

Diremos que un diamante (4-ciclo con una cuerda) es aislado si los dos arcos incidentes a él no son incidentes a otro diamante. A continuación probaremos el siguiente resultado, el cual permite concluir la garantía de aproximación.

**Proposición 5.5.1** (Proposición Principal). Sea  $\{\Gamma_i\}_{i=1}^k$  la familia de cubrimientos de subgrafos Eulerianos que resulta al final del algoritmo, esto es, después de aplicar todas las operaciones. Sea  $z(v) = z_{\mathcal{D}}(v)$  la contribución promedio de la distribución  $\mathcal{D} = \{(\Gamma_i, \lambda_i)\}_{i=1}^k$ . Sea  $\gamma_i$  la componente que contiene  $v$  en  $\Gamma_i$  y  $\Gamma(v) = \{\gamma_i\}_{i=1}^k$ . Tenemos lo siguiente.

- (P1) Si  $v$  está contenido en un diamante aislado de  $G$  entonces  $z(v) \leq 4/3$ .
- (P2) Si  $v$  está contenido en un diamante no aislado de  $G$  entonces  $z(v) \leq 13/10$ .
- (P3) Si no, si  $v$  está contenido en un 4-ciclo  $\gamma \in \Gamma(v)$ , entonces  $z(v) \leq 4/3 - 1/60$ .
- (P4) Si no, si  $v$  está contenido en un 5-ciclo  $\gamma \in \Gamma(v)$ , entonces  $z(v) \leq 4/3 - 1/60$ .
- (P5) Si no, si  $v$  está contenido en un 6-ciclo  $\gamma \in \Gamma(v)$ , entonces  $z(v) \leq 4/3$  y  $\sum_{w \in V(\gamma)} z(w) \leq 6 \cdot (4/3 - 1/729)$ .
- (P6) En cualquier otro caso  $z(v) \leq 13/10$ .

*Demostración.* Comenzaremos la demostración mostrando un resultado cuya demostración es idéntica a la observación de Boyd *et al.* [6, Observation 1].

**Lema 5.5.2.** Para cada vértice  $v \in V$  y cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ , la contribución  $z_i(v) := z_{\Gamma_i}(v)$  es

- (a) a lo más  $\frac{h+2}{h}$ , donde  $h = \min\{t, 10\}$  y  $v$  pertenece a un  $t$ -ciclo de alguno de los cubrimientos de ciclos  $\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_i^{U1}$  o  $\mathcal{C}_i^{U2}$ .
- (b) a lo más  $13/10$  si la operación (U3) modificó la componente que contiene a  $v$ .

*Demostración (del Lema 5.5.2).* Asumamos que  $v$  pertenece a una componente Euleriana  $\gamma \in \Gamma_i$  de  $g$  vértices. Primero probemos (b). Si la operación (U3) fue aplicada a alguna componente que contenía a  $v$ , entonces el vértice  $v$  pertenecía a un ciclo de largo al menos 5 después de la operación (U2). Cada aplicación de (U3) añadía al menos 5 vértices a la componente de  $v$ . Luego, el número de veces que (U3) fue aplicada a la componente de  $v$  fue a lo más  $g/5 - 1$ . Ya que cada aplicación de (U3) añade exactamente un arco, el número de arcos de  $\gamma$  es a lo más  $g + g/5 - 1$ . De aquí

$$z_i(v) \leq \frac{g + g/5 + 1}{g} = \frac{12}{10} + \frac{1}{g} \leq \frac{13}{10}.$$

Para probar (a) utilizaremos un razonamiento análogo. Claramente  $g \geq h$ . Si  $\gamma$  es un ciclo entonces la contribución de  $v$  en  $\Gamma_i$  es  $(g+2)/g \leq (h+2)/h$  y entonces (a) es cierto. Si  $\gamma$  no es un ciclo entonces esta componente se compuso por la operación (U3) aplicada a ciclos, cada uno de largo al menos 5 y una de estas con largo al menos  $h$ . De aquí, el número de estas componentes es a lo más  $1 + (g-h)/5$ . Ya que cada operación de (U3) añade un arco extra, el número de arcos en  $\gamma$  es a lo más  $g + (g-h)/5$ . De aquí, como  $h \leq 10$ ,

$$z_i(v) \leq \frac{g + (g-h)/5 + 2}{g} \leq \frac{g + (g-h)/(h/2) + 2}{g} = \frac{h+2}{h}.$$

□

Usaremos la siguiente notación en esta demostración. Para cualquier subconjunto  $J$  de índices en  $[k] := \{1, \dots, k\}$ , se define  $\lambda(J) := \sum_{i \in J} \lambda_i$ .

### Demostración de la parte (P1).

Sea  $v$  un vértice contenido en un 4-ciclo con una cuerda (diamante)  $C$  con  $V(C) = \{a, b, u_0, v_0\}$  como en la Figura 5.6. Para cada índice  $i$ , sea  $C_i$  el ciclo que contiene a

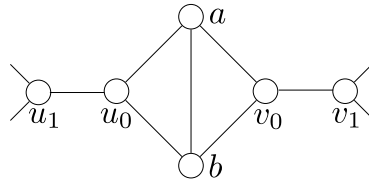


Figura 5.6: Vértices de un 4-ciclo con una cuerda.

$v$  en el cubrimiento inicial  $\mathcal{C}_i$ , y sea  $\mathcal{C}(v) = \{C_i\}_{i=1}^k$ . Consideremos el ciclo  $C' \in \mathcal{C}(v)$ , y recordemos que  $C'$  no puede ser un 3-ciclo. Si  $C'$  no contiene el arco  $u_0u_1$ , entonces  $C' = C$ . Consideremos ahora el caso en que  $C'$  contiene a  $u_0u_1$ . Entonces también se tiene que  $ab \in E(C')$  y  $v_0v_1 \in E(C')$ . Dado que el grafo es reducido,  $v_1u_1 \notin E$  ya que en otro caso  $u_1 - u_0 - a - b - v_0 - v_1$  induciría un 6-ciclo con cuerda. De aquí, el ciclo  $C'$  no puede tener largo 6. Tampoco puede tener largo 7 ya que en ese caso habría un 3 corte contenido en el matching  $M_i$ . Entonces,  $C'$  tiene que tener largo al menos 8. Usando que

$$\sum_{\{i: u_1u_2 \in M_i\}} \lambda_i = \frac{1}{3}$$

y aplicando el Lema 5.5.2, concluimos que  $z(v) \leq (1/3 \cdot 6/4 + 2/3 \cdot 10/8) = 4/3$ .

**Demostración de la parte (P2).**

Sea  $v$  un vértice contenido en un 4-ciclo con una cuerda (diamante) no aislado  $C$  con  $V(C) = \{a, b, u_0, v_0\}$  como en la Figura 5.6, y recordemos que  $v_1 u_1 \notin E$ . Sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $u_1$  está en un 4-ciclo con una cuerda  $D$  diferente de  $C$ . Es más, podemos asumir que  $v_1$  no está conectado por un arco a  $D$ , ya que en caso contrario esto implicaría la existencia de un puente en  $G$ .

Consideremos, como en la demostración de la parte (P1), un ciclo  $C' \in \mathcal{C}(v)$ . Si  $C'$  no contiene el arco  $u_0 u_1$ , entonces  $C' = C$ . Por otro lado, si  $v_0 v_1$  está en  $C'$  entonces  $C'$  debe contener todos los vértices de  $C$  y de  $D$ . También debe contener  $v_1$  y uno de sus vecinos fuera de  $C \cup D$ . En particular,  $C'$  tiene al menos 10 vértices. Luego, por el Lema 5.5.2 tenemos que  $z(v) \leq (1/3 \cdot 6/4 + 2/3 \cdot 12/10) = 13/10$ .

**Demostración de la parte (P3).**

Sea  $\gamma \in \Gamma(v)$  un 4-ciclo que contiene a  $v$ . De la Observación 5.4.3,  $\gamma$  pertenece a algún cubrimiento de ciclos inicial  $\mathcal{C}_i$ . Ya que el ciclo  $\gamma$  no tiene cuerdas, luego los cuatro arcos incidentes a él (i.e. aquellos que comparten un vértice con  $\gamma$ ) pertenecen al matching  $M_i$ . Esta observación se tiene no sólo para  $\gamma$  sino que también para cualquier ciclo  $C^*$  que pertenezca a algún cubrimiento inicial  $\mathcal{C}_i$ , de manera que tenemos la siguiente observación.

**Observación 5.5.3.** *Sea  $P$  un camino que no comparte arcos con un ciclo  $C^*$  que pertenezca a algún cubrimiento de ciclos inicial  $\mathcal{C}_i$ . Si  $P$  conecta dos vértices cualquiera de  $C^*$ , entonces  $P$  tiene largo al menos 3.*

Es más, como el grafo  $G$  es reducido,  $\gamma$  no puede compartir exactamente un arco con cualquier otro 4-ciclo (ya que en caso contrario esto induciría un 6-ciclo con una cuerda en  $G$ ). En otras palabras, tenemos la siguiente propiedad.

**Observación 5.5.4.** *Sea  $P$  un camino que no comparte arcos con  $\gamma$ . Si  $P$  conecta cualquier par de vértices consecutivos de  $\gamma$ , entonces  $P$  tiene largo al menos 4.*

Definimos el conjunto  $X_p = \{i: |C \cap M_i| = p\}$ , para  $p = 0, 1, 2$ . Notemos que  $X_0 \cup X_1 \cup X_2 = [k]$ . Definimos también  $x_p := \lambda(X_p) = \sum_{i \in X_p} \lambda_i$ , para  $p = 0, 1, 2$ .

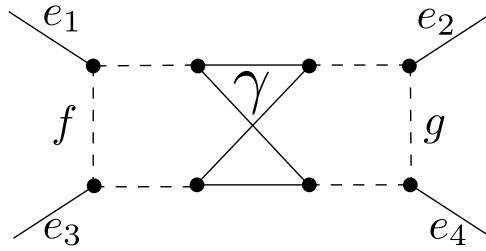
De la ecuación (5.1) tenemos que  $x_0 + x_1 + x_2 = 1$ . Además, aplicando la ecuación (5.2) al conjunto de los 4 arcos incidentes a  $\gamma$  obtenemos  $4x_0 + 2x_1 = 4/3$ , lo cual implica que  $x_0 = 1/3 - x_1/2$ . Finalmente, aplicando (5.2) al conjunto de los 4 arcos de  $\gamma$  obtenemos  $x_1 + 2x_2 = 4/3$ , lo cual implica que  $x_2 = 2/3 - x_1/2$ .

Para cada  $i \in X_0$ , el ciclo que contiene a  $v$  en  $\mathcal{C}_i$  es igual a  $\gamma$ . Por el Lema 5.5.2 obtenemos entonces que  $z_i(v) \leq 6/4 = 3/2$ .

Usando la Observación 5.5.4 deducimos que para cada  $i \in X_1$  el ciclo que contiene a  $v$  en  $\mathcal{C}_i$  tiene largo al menos 7, por lo tanto por el Lema 5.5.2 tenemos que  $z_i(v) \leq 9/7$ .

Consideremos ahora un índice  $i \in X_2$ . Supongamos que  $\gamma$  intersecta dos ciclos diferentes de  $\mathcal{C}_i$ . Como cada uno tiene largo al menos 5 y ambos comparten un arco con un 4-ciclo de  $G$  concluimos que ambos ciclos con modificados por la operación (U1) o (U2). De la Observación 5.4.3 esto implica que  $v$  se encuentra en un ciclo de largo al menos 10 en  $\mathcal{C}_i^{U2}$ . Usando el Lema 5.5.2 tenemos entonces que  $z_i(v) \leq 12/10 = 6/5$ .

El único caso que queda por estudiar es cuando  $\gamma$  es intersectado por un único ciclo  $C$  de  $\mathcal{C}_i$ . Entonces, por la Observación 5.5.4,  $C$  tiene largo al menos 8. Este ciclo tiene largo exactamente 8 si y sólo si  $\gamma$  pertenece a la estructura que se muestra en la Figura 5.7. Asumamos por ahora que ningún 8-ciclo del cubrimiento de ciclos inicial contiene a los

Figura 5.7: El 4-ciclo  $\gamma$  intersectando un 8-ciclo.

cuatro vértices de  $\gamma$ . Luego, el ciclo  $C$  de nuestra discusión previa tiene que tener largo al menos 9, y entonces por el Lema 5.5.2 tenemos que  $z_i(v) \leq \max\{11/9, 6/5\} = 11/9$ . Resumiendo lo anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned}
 z(v) &\leq x_0 3/2 + x_1 9/7 + x_2 11/9 \\
 &= (1/3 - x_1/2) 3/2 + x_1 9/7 + (2/3 - x_1/2) 11/9 \\
 &= 71/54 + x_1(9/7 - 3/4 - 11/18) \\
 &\leq 71/54 = 4/3 - 1/54.
 \end{aligned}$$

Consideremos ahora el caso en que hay un 8-ciclo  $C_j$  de un cubrimiento inicial  $\mathcal{C}_j$  que contiene a los vértices  $V(\gamma)$ . Luego  $v$  pertenece a la estructura de la Figura 5.7, donde  $e_1 \neq e_3$ ,  $e_2 \neq e_4$  y  $e_1, e_2, e_3, e_4$  pertenecen al matching  $M_j$ . Como asumimos que  $|V(G)| \geq 10$ , no podemos tener de forma simultánea que  $e_1 = e_4$  y  $e_2 = e_3$ . Sea  $f$  y  $g$  el arco de más a la izquierda y el de más a la derecha de la figura, respectivamente. Sea  $Y = \{i: f \in M_i\}$  y  $Z = \{i: g \in M_i\}$ . Es fácil de verificar que  $Y \cup Z \subseteq X_2$ . Sea  $i$  un índice  $i \in X_2$ . Si  $i \in Y \cup Z$  (i.e., al menos  $f$  o  $g$  pertenecen a  $M_i$ ), entonces el ciclo que contiene a  $v$  en  $\mathcal{C}_i^{U_2}$  tiene al menos 10 vértices, y entonces por el Lema 5.5.2 se tiene que  $z_i(v) \leq 12/10 = 6/5$ . Si  $i \in X_2 \setminus (Y \cup Z)$  entonces el ciclo que contiene a  $v$  en  $\mathcal{C}_i$  es o el 8-ciclo  $C_j$  de la estructura, o es el 8-ciclo con arcos  $E(C_j) \Delta E(\gamma)$ . En cualquier caso por el Lema 5.5.2 se tiene que  $z_i(v) \leq 10/8 = 5/4$ . Sea  $y_1 = \lambda(Y \cup Z)$  y  $y_2 = \lambda(X_2 \setminus (Y \cup Z))$ , de tal forma que  $y_1 + y_2 = x_2$ . Notar que  $y_1 \geq \lambda(Y) = 1/3$ , y entonces

$$\begin{aligned}
 z(v) &\leq x_0 3/2 + x_1 9/7 + y_1 6/5 + (x_2 - y_1) 5/4 \\
 &= (1/3 - x_1/2) 3/2 + x_1 9/7 + (2/3 - x_1/2) 5/4 + y_1(6/5 - 5/4) \\
 &= 4/3 - x_1(9/7 - 3/4 - 5/8) - y_1/20 \leq 4/3 - 1/60.
 \end{aligned}$$

#### **Demostración de la parte (P4).**

Sea  $\gamma \in \Gamma(v)$  un 5-ciclo que contiene a  $v$ . De la Observación 5.4.3,  $\gamma$  pertenece al cubrimiento de ciclos inicial  $\mathcal{C}_i$ . Podemos asumir que ningún 4-ciclo comparte exactamente un arco con  $\gamma$ , ya que de otro modo la operación (U2), o la operación (U1) antes de esa, habría modificado a  $\gamma$ , y entonces al final del algoritmo  $\gamma$  no sería un 5-ciclo.

La demostración para esta parte es similar a la de la parte (P3). Definamos  $X_p = \{i: |\gamma \cap M_i| = p\}$ , para  $p = 0, 1, 2$ , de tal forma que  $X_0 \cup X_1 \cup X_2 = [k]$ , y sea  $x_p := \lambda(X_p)$ , para  $p = 0, 1, 2$ .

De la ecuación (5.1) tenemos que  $x_0 + x_1 + x_2 = 1$ . Aplicando la ecuación (5.2) a los 5 arcos incidentes a  $\gamma$ , obtenemos  $5x_0 + 3x_1 + x_2 = 5/3$ . Esto implica que  $x_0 = 1/2(1/3 - x_1)$  y  $x_2 = 1/2(5/3 - x_1)$ .

Para cada  $i \in X_0$ ,  $v \in V(\gamma)$  y  $\gamma \in \mathcal{C}_i$ . Por el Lema 5.5.2 se tiene que  $z_i(v) \leq 7/5$ . Para  $i \in X_1$ , el hecho de que  $\gamma$  no comparta un arco con un 4-ciclo implica que  $v$  está en un ciclo de  $\mathcal{C}_i$  que tiene largo al menos 8, y por lo tanto  $z_i(v) \leq 10/8 = 5/4$ .

Para  $i \in X_2$  tenemos dos casos posibles. Si  $\gamma$  es intersectado por un sólo ciclo  $C$  de  $\mathcal{C}_i$ , entonces, por la Observación 5.5.3,  $C$  debe ser de largo al menos 9, y por el Lema 5.5.2 se tiene que  $z_i(v) \leq 11/9$ . El segundo caso es cuando  $\gamma$  es intersectado por dos ciclos de  $\mathcal{C}_i$ . Uno de ellos, digamos  $C'$ , comparte exactamente un arco con  $\gamma$  (y de esta forma  $C'$  no puede ser un 4-ciclo), y el segundo de ellos,  $C''$ , comparte exactamente dos arcos consecutivos con  $\gamma$  (por la Observación 5.5.3,  $C''$  tampoco puede ser un 4-ciclo). Sea  $C \in \{C', C''\}$  el ciclo que contiene al vértice  $v$ . Si  $C$  es combinado con otro ciclo en la operación (U1) o (U2) entonces, de la Observación 5.4.3, el ciclo resultante que contiene a  $v$  en  $\mathcal{C}_i^{U2}$  es de largo al menos 10, y por el Lema 5.5.2 se tiene que  $z_i(v) \leq 12/10$ . Por otro lado, si  $C$  no es modificado ni por (U1) ni por (U2) entonces debe ser modificado por la operación (U3) (esto es porque  $C$  intersecta el 5-ciclo  $\gamma$ , el cual intersecta dos componentes de  $\mathcal{C}_i^{U2}$  de largo al menos 5). Por el Lema 5.5.2 se tiene entonces que  $z_i(v) \leq 13/10$ . Resumiendo, si  $i \in X_2$ , entonces  $z_i(v) \leq \max\{12/10, 11/9, 13/10\} = 13/10$ . Luego

$$\begin{aligned} z(v) &\leq x_0 7/5 + x_1 5/4 + x_2 13/10 \\ &= 1/2(1/3 - x_1) \cdot 7/5 + x_1 5/4 + 1/2(5/3 - x_1) \cdot 13/10 \\ &= 7/30 + 13/12 - x_1/10 \\ &\leq 79/60 = 4/3 - 1/60. \end{aligned}$$

### Demostración de la parte (P5).

Sea  $\gamma \in \Gamma(v)$  un 6-ciclo que contiene a  $v$ . De la Observación 5.4.3,  $\gamma$  pertenece a algún cubrimiento de ciclos inicial  $\mathcal{C}_i$ . Podemos asumir que ningún 4-ciclo comparte exactamente un arco con  $\gamma$ , ya que de otro modo la operación (U1) o la (U2) habrían modificado a  $\gamma$ , y entonces al final del algoritmo  $\gamma$  no sería un 6-ciclo.

Podemos asumir también que  $\gamma$  no intersecta a un 5-ciclo contenido en un cubrimiento de la familia original. En efecto, si este no fuera el caso, definimos

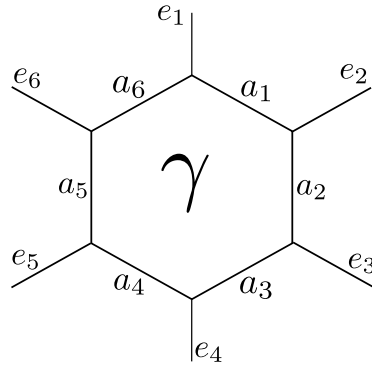
$$S_5 = \{w \in V(\gamma) : w \text{ pertenece a un 5-ciclo } C \text{ de algún cubrimiento inicial}\}.$$

Si  $w \notin S_5$  entonces en cualquier cubrimiento inicial el ciclo que contenga a  $w$  es de largo al menos 6, y entonces usando el Lema 5.5.2, la parte (P5) de la Proposición Principal, y el hecho de que  $S_5 \neq \emptyset$  implica que  $|S_5| \geq 2$ , concluimos que

$$\begin{aligned} \sum_{w \in V(\gamma)} z(w) &\leq |S_5| \left( \frac{4}{3} - \frac{1}{60} \right) + |V(C) \setminus S_5| \frac{4}{3} \\ &\leq 6 \left( \frac{4}{3} - \frac{1}{180} \right). \end{aligned}$$

y también que  $z(w) \leq 4/3$  para todo  $w \in V(\gamma)$ .

Luego, bajo los supuestos antes descritos, todas las componentes que contienen a  $v$  en la familia final de cubrimientos tienen largo al menos 6. Usando el Lema 5.5.2 concluimos no sólo que  $z(v) \leq \max\{13/10, 8/6\} = 4/3$  (que prueba la primera parte de P5), sino que también  $z(w) \leq 4/3$  para los 6 vértices  $w \in V(\gamma)$ .

Figura 5.8: 6-ciclo  $\gamma$ .

Continuemos con la otra parte de la demostración. Denotemos los arcos de  $\gamma$  como  $a_1, \dots, a_6$  y los 6 arcos incidentes a  $\gamma$  como  $e_1, \dots, e_6$ , como se muestra en la Figura 5.8. Ahora definimos ciertos conjuntos de índices de acuerdo a cómo  $\gamma$  intersecta los matchings  $M_1, \dots, M_k$ . Para cada símbolo  $Z \in \{X_0\} \cup \{X_1^q\}_{q=1}^6 \cup \{X_2^q\}_{q=1}^3 \cup \{Y_2^q\}_{q=1}^6 \cup \{X_3^q\}_{q=1}^2$ , definimos  $Z$  como el conjunto de índices  $i$  al cual el matching  $M_i$  contiene los arcos en negrita indicados en la Figura 5.9. Por ejemplo,  $X_0 = \{i: \{e_1, \dots, e_6\} \in M_i\}$ ,  $X_3^1 = \{i: \{a_1, a_3, a_5\} \in M_i\}$ , y así sucesivamente. Definamos también  $x_0 = \lambda(X_0)$ ,  $x_i^q = \lambda(X_i^q)$  y  $y_2^q = \lambda(Y_2^q)$  para cada  $i$  y  $q$ , y definamos

$$x_1 = \sum_{q=1}^6 x_1^q, \quad x_2 = \sum_{q=1}^3 x_2^q, \quad y_2 = \sum_{q=1}^6 y_2^q, \quad x_3 = \sum_{q=1}^2 x_3^q, \quad \bar{x}_2 = x_2 + y_2.$$

La ecuación (5.1) implica que  $x_0 + x_1 + \bar{x}_2 + x_3 = 1$ . La ecuación (5.2) aplicada al conjunto  $\{e_1, \dots, e_6\}$  de arcos incidentes a  $\gamma$  implica que  $6x_0 + 4x_1 + 2\bar{x}_2 = 6/3$ . De aquí tenemos que  $3x_0 + 2x_1 + \bar{x}_2 = 1$ . Se sigue que

$$2x_0 + x_1 = x_3. \quad (5.4)$$

Recordemos que no hay 4-ciclos en  $G$  y no hay 5-ciclos en un cubrimiento inicial que intersecten a  $\gamma$  en exactamente un arco. Consideremos  $w \in V(\gamma)$  y  $i \in [k]$ . Si  $i \in X_0$  (i.e.,  $M_i$  no comparte arcos con  $\gamma$ ) entonces  $w \in V(\gamma)$  y  $\gamma \in \mathcal{C}_i$ . Por el Lema 5.5.2 tenemos que  $z_i(w) \leq 8/6$ . Si  $i \in X_1 := \cup_{q=1}^6 X_1^q$  (i.e.,  $M_i$  contiene exactamente un arco de  $\gamma$ ) entonces, como no hay 4-ciclos que compartan exactamente un arco con  $\gamma$ ,  $w$  debe estar en un ciclo  $C \in \mathcal{C}_i$  de largo al menos 9, y de aquí por el Lema 5.5.2 tenemos que  $z_i(w) \leq 11/9$ . Si  $i \in X_3 := \cup_{q=1}^2 X_3^q$  (i.e.,  $M_i$  contiene tres arcos de  $\gamma$ ) entonces tenemos dos casos posibles. El primer caso es que  $\gamma$  es intersectado por 1 o 3 ciclos de  $\mathcal{C}_i$ . Luego, al final de la operación (U1),  $w$  debe pertenecer a un ciclo de  $\mathcal{C}_i^{U1}$  de largo al menos 9 y por el Lema 5.5.2 tenemos que  $z_i(w) \leq 11/9$ . El segundo caso es que  $\gamma$  es intersectado por 2 ciclos de  $\mathcal{C}_i$ , uno de ellos comparte exactamente 2 arcos con  $\gamma$ , de aquí tiene que tener largo al menos 8. El otro ciclo comparte exactamente un arco con  $\gamma$  y entonces debe tener largo al menos 6. Entonces, por el Lema 5.5.2 tenemos que en este caso 4 de los vértices  $w$  de  $\gamma$  satisfacen  $z_i(w) \leq 10/8$  y el resto de los 2 satisfacen  $z_i(w) \leq 8/6$ .

Aún necesitamos analizar los índices  $i \in X_2 := \cup_{q=1}^3 X_2^q$  y  $i \in Y_2 := \cup_{q=1}^6 Y_2^q$  (i.e., todos aquellos en los cuales  $M_i$  comparte dos arcos con  $\gamma$ ). Sea  $0 < \delta \leq 1$  una constante por determinar. Dividiremos el resto de la demostración en dos escenarios.



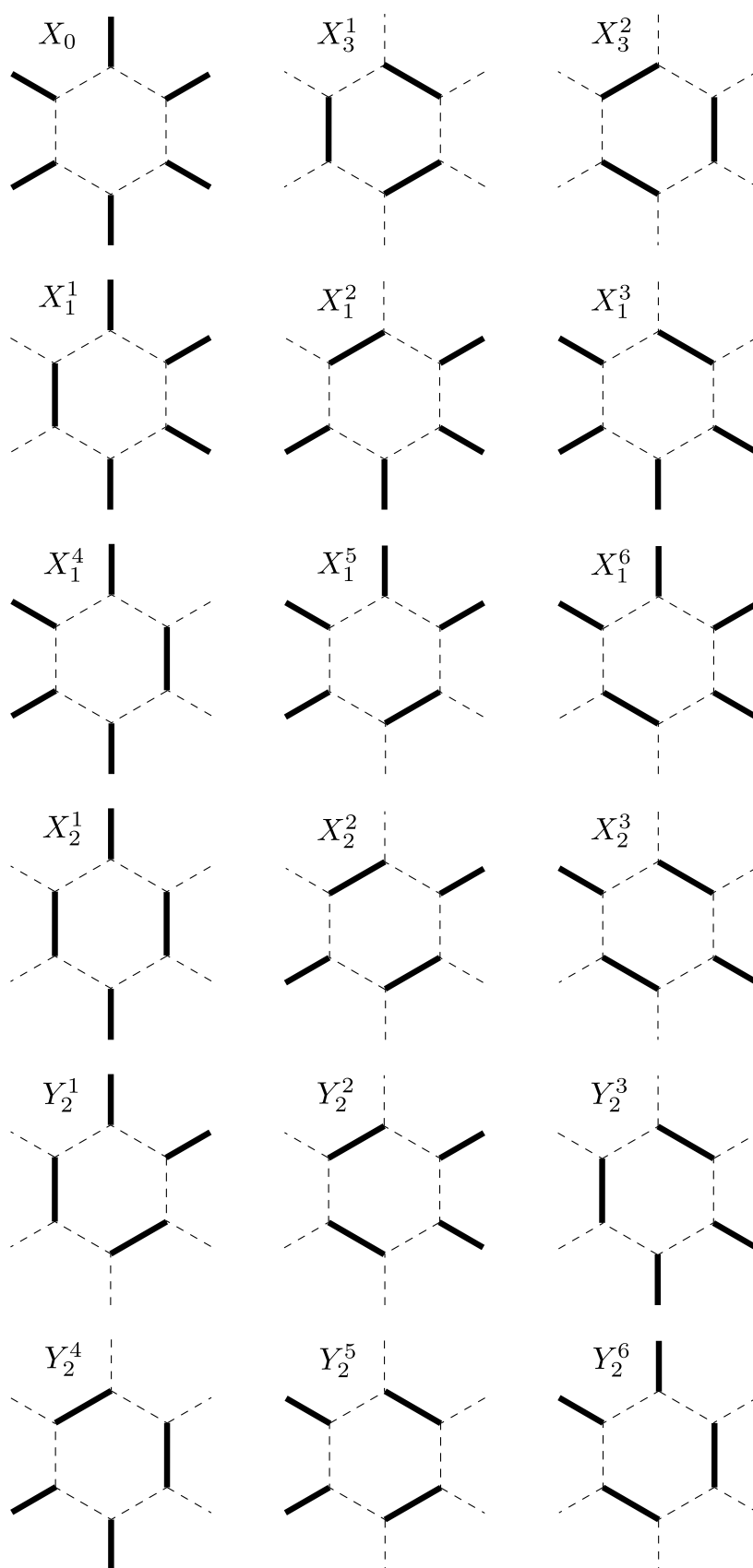


Figura 5.9: Las diferentes formas de como un matching puede intersectar  $\gamma$ . Usamos la misma orientación de la Figura 5.8.

**Escenario 1:** Si  $x_3$  (que es igual a  $\max\{x_0, x_1, x_3\}$  por (5.4)) es al menos  $\delta$ .

Si  $i \in X_2 \cup Y_2$ , entonces cada vértice  $w \in V(\gamma)$  está en un ciclo  $C \in \mathcal{C}_i$  de largo al menos 6, y por el Lema 5.5.2 tenemos  $z_i(w) \leq 8/6$ . Luego

$$\begin{aligned} \sum_{w \in V(\gamma)} z(w) &\leq 6 \cdot (x_0 8/6 + x_1 11/9 + \bar{x}_2 8/6) + x_3 \left( 2 \cdot \frac{8}{6} + 4 \cdot \frac{10}{8} \right) \\ &\leq 6 \cdot \left( (1 - x_3) 4/3 + x_3 \left( \frac{4}{3} - \frac{1}{18} \right) \right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\leq 6 \cdot (4/3 - \delta/18). \quad (5.6)$$

**Escenario 2:** Si  $x_3$  (que es igual a  $\max\{x_0, x_1, x_3\}$  por (5.4)) es a lo más  $\delta$ .

Comenzaremos probando el siguiente lema.

**Lema 5.5.5.** *Definamos  $\beta := 1/9 - \delta$ . Luego, alguno de los siguientes casos se tienen:*

- **Caso 1:**  $x_2^1, x_2^2, x_2^3 \geq \beta$ .
- **Caso 2:**  $x_2^1, y_2^2, y_2^5 \geq \beta$ .
- **Caso 3:**  $x_2^2, y_2^3, y_2^6 \geq \beta$ .
- **Caso 4:**  $x_2^3, y_2^1, y_2^4 \geq \beta$ .
- **Caso 5:**  $y_2^1, y_2^4, y_2^2, y_2^5 \geq \beta$ .
- **Caso 6:**  $y_2^2, y_2^5, y_2^3, y_2^6 \geq \beta$ .
- **Caso 7:**  $y_2^1, y_2^4, y_2^3, y_2^6 \geq \beta$ .

*Demostración (del Lema 5.5.5).* Aplicando la ecuación (5.2) a los arcos  $e_1$  y  $a_2$  respectivamente (ver Figura 5.8) obtenemos

$$x_0 + x_1^1 + x_1^4 + x_1^5 + x_1^6 + x_2^1 + y_2^1 + y_2^6 = \frac{1}{3}. \quad (5.7)$$

$$x_1^4 + x_2^1 + y_2^4 + y_2^6 + x_3^2 = \frac{1}{3}. \quad (5.8)$$

Sustrayendo (5.7) y (5.8), usando que  $\max\{x_0, x_1, x_3\} \leq \delta$  y la ecuación (5.4) obtenemos

$$|y_2^1 - y_2^4| \leq \delta. \quad (5.9)$$

Análogamente, tenemos también

$$|y_2^2 - y_2^5| \leq \delta, \quad (5.10)$$

$$|y_2^3 - y_2^6| \leq \delta. \quad (5.11)$$

Usando una vez más  $\max\{x_0, x_1, x_3\} \leq \delta$ , la ecuación (5.4) y aplicando (5.2) en los arcos  $e_j$ , para  $j \in \{1, \dots, 6\}$  tenemos

$$x_2^1 + y_2^1 + y_2^6 \geq 1/3 - \delta, \quad (5.12)$$

$$x_2^2 + y_2^2 + y_2^5 \geq 1/3 - \delta, \quad (5.13)$$

$$x_2^3 + y_2^3 + y_2^4 \geq 1/3 - \delta, \quad (5.14)$$

$$x_2^1 + y_2^4 + y_2^3 \geq 1/3 - \delta, \quad (5.15)$$

$$x_2^2 + y_2^5 + y_2^6 \geq 1/3 - \delta, \quad (5.16)$$

$$x_2^3 + y_2^6 + y_2^5 \geq 1/3 - \delta, \quad (5.17)$$

Ahora estamos listos para probar el lema. Por contradicción, asumamos que ninguno de los casos del lema se verifican. Como el Caso 1 no se tiene, podemos asumir sin pérdida de generalidad que uno de los siguientes es verdadero.

$$(i) \ x_2^1 < \beta, \ x_2^2, \ x_2^3 \geq \beta,$$

$$(ii) \ x_2^1, \ x_2^2 < \beta, \ x_2^3 \geq \beta,$$

$$(iii) \ x_2^1, \ x_2^2, \ x_2^3 < \beta.$$

Consideremos el caso en que (i) es cierto. Ya que el Caso 3 no es cierto y  $x_2^2 \geq \beta$  concluimos que  $\min\{y_2^3, y_2^6\} < \beta$ . Usando la desigualdad (5.11) tenemos que  $y_2^3, y_2^6 < \beta + \delta$ . Análogamente, ya que el Caso 4 no se tiene y  $x_2^3 \geq \beta$  concluimos que  $\min\{y_2^1, y_2^4\} < \beta$ . Usando la desigualdad (5.9) tenemos que  $y_2^1, y_2^4 < \beta + \delta$ . Esto contradice la desigualdad (5.12).

Consideremos ahora que (ii) es verdadero. Similarmente a lo hecho antes, ya que  $x_2^3 \geq \beta$  y el Caso 4 no se tiene, concluimos que  $y_2^1, y_2^4 < \beta + \delta$ . Es más, usando la desigualdad (5.10) y que el Caso 6 no se tiene, tenemos que al menos una de las siguientes desigualdades se verifican  $y_2^2, y_2^5 < \beta + \delta$  o  $y_2^3, y_2^6 < \beta + \delta$ . Si la primera es cierta entonces

$$x_2^2 + y_2^2 + y_2^1 < 3\beta + 2\delta = 1/3 - \delta,$$

lo que contradice la desigualdad (5.13). Si la segunda es cierta entonces

$$x_2^1 + y_2^2 + y_2^6 < 3\beta + 2\delta = 1/3 - \delta,$$

lo que contradice la desigualdad (5.12).

Finalmente, consideremos el caso en que (iii) es verdadero. Como los Casos 5, 6 y 7 no se verifican, tenemos que  $\min\{y_2^1, y_2^4, y_2^2, y_2^5\} < \beta$ ,  $\min\{y_2^2, y_2^5, y_2^3, y_2^6\} < \beta$  y  $\min\{y_2^1, y_2^4, y_2^3, y_2^6\} < \beta$ . Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $y_2^1, y_2^2 < \beta$ . Usando las desigualdades (5.9) y (5.10) concluimos que  $y_2^1, y_2^4 < \beta + \delta$  y  $y_2^2, y_2^5 < \beta + \delta$ . Por lo tanto

$$x_2^2 + y_2^2 + y_2^1 < 3\beta + 2\delta = 1/3 - \delta,$$

lo que contradice la desigualdad (5.13). Esto concluye la demostración del Lema 5.5.5.  $\square$

Denotaremos un índice  $i \in X_2 \cup Y_2$  como *largo* si hay al menos 2 vértices de  $V(\gamma)$  contenidos en un mismo ciclo de  $\mathcal{C}_i^{U1}$  de largo al menos 7, de otro modo diremos que  $i$  es *corto*. Un conjunto de índices  $Z \subseteq [k]$  es llamado largo si  $Z$  contiene sólo índices largos.

Consideremos un índice corto  $i \in X_2 \cup Y_2$ . Ya que el matching  $M_i$  contiene dos arcos de  $\gamma$ , tenemos que estar en el caso donde  $\gamma$  interseca exactamente dos ciclos de  $\mathcal{C}_i^{U1}$  y ambos son 6-ciclos (asumimos en el comienzo de la demostración de esta parte ningún ciclo en  $\mathcal{C}_i$  de largo a lo más 5 interseca  $\gamma$ ). El siguiente lema complementa lo que pasa en cada uno de los casos introducidos en el Lema 5.5.5.

**Lema 5.5.6.**

(1) Si  $X_2^1, X_2^2$  y  $X_2^3$  son no vacíos, entonces al menos uno de ellos es largo.

(2) Si  $X_2^1, Y_2^2$  y  $Y_2^5$  son no vacíos, entonces al menos uno de ellos es largo.

(3) Si  $X_2^2, Y_2^1$  y  $Y_2^4$  son no vacíos, entonces al menos uno de ellos es largo.

- (4) Si  $X_2^3, Y_2^3$  y  $Y_2^6$  son no vacíos, entonces al menos uno de ellos es largo.
- (5) Si  $Y_2^1, Y_2^4, Y_2^2$  y  $Y_2^5$  son no vacíos, entonces al menos uno de ellos es largo.
- (6) Si  $Y_2^2, Y_2^5, Y_2^3$  y  $Y_2^6$  son no vacíos, entonces al menos uno de ellos es largo.
- (7) Si  $Y_2^1, Y_2^4, Y_2^3$  y  $Y_2^6$  son no vacíos, entonces al menos uno de ellos es largo.

*Demostración (del Lema 5.5.6).* Sólo probaremos los ítems 1, 2 y 5, ya que las demostraciones del resto son análogas.

- (1) Por contradicción, asumamos que hay índices cortos  $i_1 \in X_2^1, i_2 \in X_2^2$  y  $i_3 \in X_3^3$ . En particular, cada vértice de  $\gamma$  está en un 6-ciclo de  $\mathcal{C}_{i_p}^{U1}$  (y de esta forma, de  $\mathcal{C}_{i_p}$ ) para  $p = 1, 2, 3$ . De aquí, deducimos que la vecindad de  $\gamma$  en  $G$  es exactamente como se muestra en la Figura 5.10.

Ahora enfoquémonos en el índice corto  $i_1 \in X_2^1$ . Ya que  $G$  es como en la Figura 5.10, hay tres ciclos de  $\mathcal{C}_{i_1}$  compartiendo cada uno un arco de  $\gamma$  con un 6-ciclo de  $G$ . Pero entonces, como la Figura 5.11 muestra, la operación (U1) los habría mezclado en un único ciclo  $C$  en  $\mathcal{C}_{i_1}^{U1}$  de largo al menos 16, contradiciendo el hecho de que  $i_1$  es corto.

- (2) Asumamos por contradicción que hay índices cortos  $i_1 \in X_2^i, i_2 \in Y_2^2$  y  $i_3 \in Y_2^3$ . En particular, cada vértice de  $\gamma$  está en un 6-ciclo de  $\mathcal{C}_{i_p}^{U1}$  (y de esta forma, de  $\mathcal{C}_{i_p}$ ) para  $p = 1, 2, 3$ . De aquí, deducimos que la vecindad de  $\gamma$  en  $G$  es exactamente como se muestra en la Figura 5.12.

Ahora enfoquémonos en el índice corto  $i_1 \in X_2^1$ . Ya que  $G$  es como en la Figura 5.12, hay tres ciclos de  $\mathcal{C}_{i_1}$  compartiendo cada uno un arco de  $\gamma$  con un 6-ciclo de  $G$ . Pero entonces, como la Figura 5.13 muestra, la operación (U1) los habría mezclado en un único ciclo  $C$  en  $\mathcal{C}_{i_1}^{U1}$  de largo al menos 16, contradiciendo el hecho de que  $i_1$  es corto.

- (5) Asumamos por contradicción que hay índices cortos  $i_1 \in Y_2^1, i_2 \in Y_2^4, i_3 \in Y_2^2$  y  $i_4 \in Y_2^5$ . En particular, cada vértice de  $\gamma$  está en un 6-ciclo de  $\mathcal{C}_{i_p}^{U1}$  (y de esta forma, de  $\mathcal{C}_{i_p}$ ) para  $p = 1, 2, 3, 4$ , exactamente como se muestra en la Figura 5.12. Pero esta estructura muestra una contradicción ya que  $M_{i_1}$  no puede ser completado al resto del grafo.

□

Usando los Lemas 5.5.5 y 5.5.6 concluimos que hay un conjunto de índices largos  $Z \subseteq X_2 \cup Y_2$  para el cual  $\lambda(Z) \geq \beta$ . En particular, usando el Lema 5.5.2, concluimos que para cada  $i \in Z$ , hay dos vértices  $w$  en  $\gamma$  con  $z_i(w) \leq 9/7$ , y para el resto de los cuatro vértices de  $\gamma$ ,  $z_i(w) \leq 4/3$ . Todo esto permite concluir que

$$\begin{aligned}
\sum_{w \in V(\gamma)} z(w) &\leq 6 \cdot \left( x_0 \frac{8}{6} + x_1 \frac{11}{9} + (\bar{x}_2 - \beta) \frac{8}{6} \right) + \beta \left( 2 \cdot \frac{9}{7} + 4 \cdot \frac{8}{6} \right) + x_3 \left( 2 \cdot \frac{8}{6} + 4 \cdot \frac{10}{8} \right) \\
&\leq 6 \cdot (1 - \beta) \frac{4}{3} + \beta \left( 2 \cdot \frac{9}{7} + 4 \cdot \frac{8}{6} \right) \\
&= 6 \cdot \left( \frac{4}{3} - \frac{1/9 - \delta}{63} \right). \tag{5.18}
\end{aligned}$$

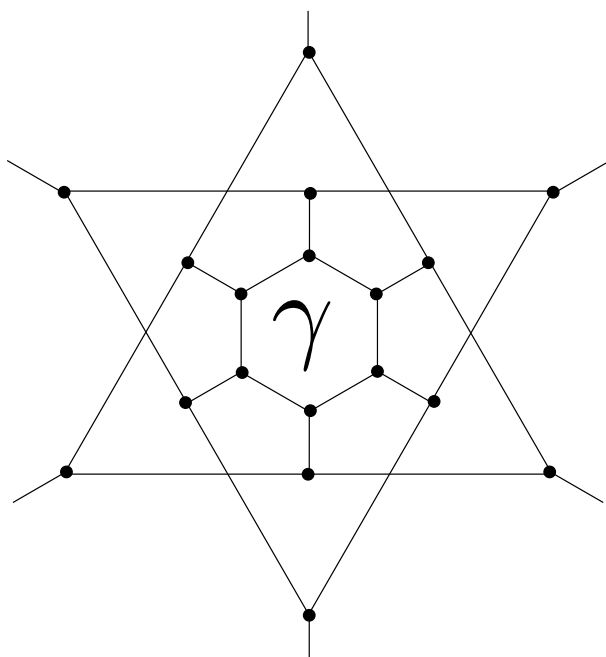


Figura 5.10: 6-ciclo  $\gamma$  para el caso en que  $X_2^1$ ,  $X_2^2$  y  $X_2^3$  son no vacíos y no largos.

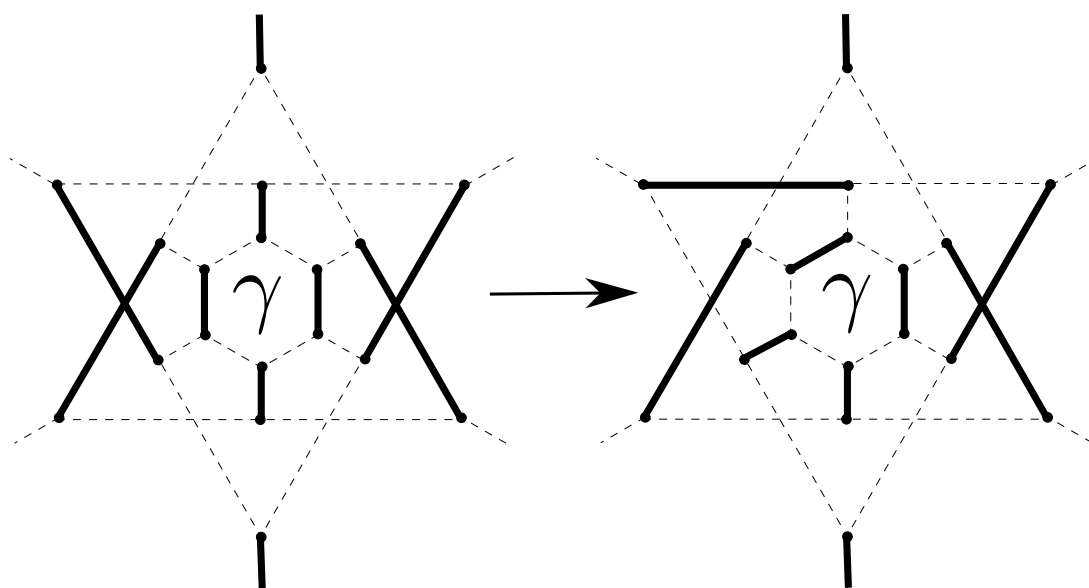


Figura 5.11: Operación (U1) aplicada a los ciclos en  $\mathcal{C}_{i_1}$ , donde  $i_1$  es un índice corto de  $X_2^1$ .

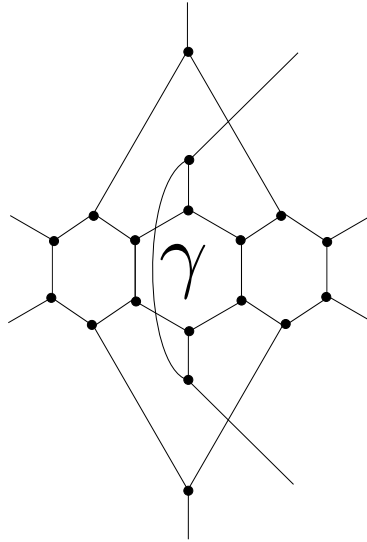


Figura 5.12: 6-ciclo  $\gamma$  para el caso en que  $X_2^1, Y_2^2, Y_2^3$  son no vacíos y no largos.

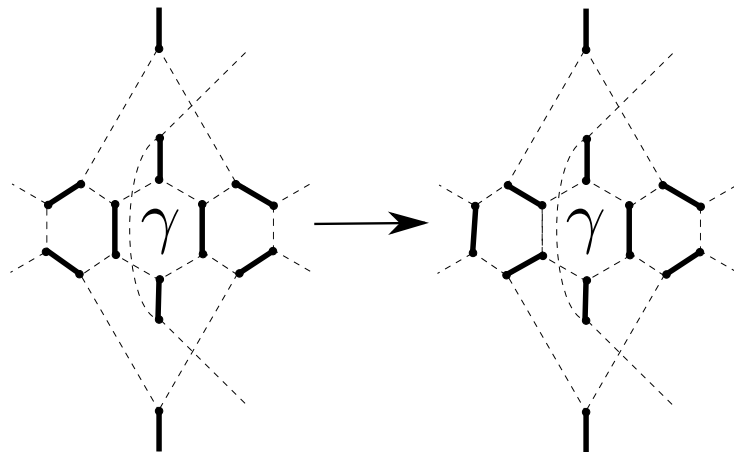


Figura 5.13: Operación (U1) aplicada a los ciclos en  $\mathcal{C}_{i_1}$ , donde  $i_1$  es un índice corto de  $X_2^1$ .

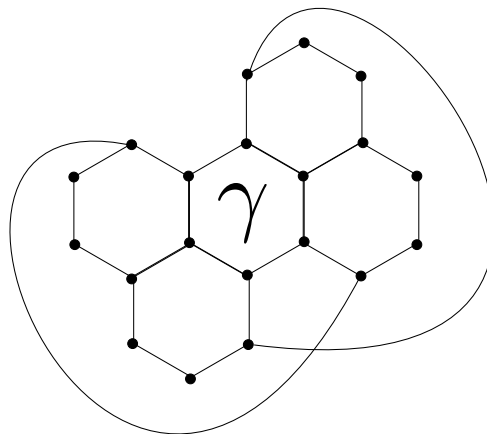


Figura 5.14: 6-ciclo  $\gamma$  para el caso en que  $Y_2^1, Y_2^4, Y_2^2, Y_2^5$  son no vacíos y no largos.

Para el final de la demostración, hacemos  $\delta = 2/81$  de modo que  $(1/9 - \delta)/63 = \delta/18 = 1/729$ . De las desigualdades (5.6) y (5.18) concluimos que en cualquier escenario

$$\sum_{w \in V(\gamma)} z(w) \leq 6 \cdot (4/3 - 1/729). \quad (5.19)$$

### Demostración de la parte (P6).

Si ninguno de los caos indicados en las partes previas se tienen, entonces no existe ningún 4, 5 y 6-ciclo en  $\Gamma(v)$ . En otras palabras, todas las componentes que contienen a  $v$  en la familia final de cubrimientos tienen largo al menos 7. Utilizando el Lema 5.5.2 concluimos que  $z(v) \leq \max\{13/10, 9/7\} = 13/10$ . □

Gracias al resultado anterior podemos demostrar el siguiente resultado, el cual es el principal de este trabajo.

**Teorema 5.5.7.** *Todo grafo  $G = (V, E)$  cúbico y 2-conexo admite una solución de graph-TSP de largo a lo más  $(4/3 - \epsilon)|V| - 2$ , donde  $\epsilon = 1/61236$ . Esta solución puede ser calculada en tiempo polinomial.*

*Demostración.* De la Sección 5.1 podemos asumir que  $G$  es reducido y entonces se tiene la Proposición Principal. Sea  $B$  la unión del conjunto de vértices de todos los diamantes aislados de  $G$ . Diremos que un vértice es *malo* si pertenece a  $B$ , y diremos que es *bueno* en el caso contrario. Afirmamos que la proporción de vértices malos de  $G$  es acotada por  $6/7$ . Para ver esto, construimos el grafo auxiliar  $G'$  tomando  $G$  y luego reemplazando cada diamante aislado por un arco entre sus puntas. Ya que  $G'$  es cúbico, este contiene exactamente  $2|E(G')|/3$  vértices, los cuales son buenos en  $G$ . Esto significa que para cada vértice malo hay al menos  $(1/4) \cdot (2/3) = 1/6$  vértices buenos, lo cual prueba la afirmación.

La Proposición Principal garantiza que cada vértice malo  $v$  contribuye una cantidad  $z(v) \leq 4/3$ . Ahora vamos a mostrar que la contribución promedio de todos los vértices buenos es a lo más  $(4/3 - \delta)$  para algún  $\delta$  a ser determinado. Para hacer esto, definamos

$$\mathcal{H} = \{\gamma \in \Gamma_i : |V(\gamma)| = 6\}$$

como la colección de todos los 6-ciclos que aparecen en algún cubrimiento de la familia final, y sea

$$H = \bigcup_{\gamma \in \mathcal{H}} V(\gamma)$$

el conjunto de vértices incluido en algún 6-ciclo de  $\mathcal{H}$ . Es fácil de verificar que  $B$  y  $H$  son disjuntos. Es más, la Proposición Principal garantiza que si  $v \in V \setminus (B \cap H)$  entonces  $z(v) \leq (4/3 - 1/60)$ , y entonces nos enfocaremos en acotar la contribución de los vértices en  $H$ .

Para cada  $v \in H$ , sea  $f(v)$  el número de 6-ciclos distintos en  $\mathcal{H}$  que contienen a  $v$ . Ya que  $G$  es cúbico, hay una constante  $K$  tal que  $f(v) \leq K$ , con  $K = 12$ . El valor de esta constante se tiene ya que como el grafo es cúbico,  $v$  tiene a lo más 6 vértices a distancia 2, los cuales pueden ser unidos (añadiendo un vértice más) para formar 6-ciclos

en  $\binom{6}{2} = 15$  formas, de las cuales 3 de ellas claramente no crean un 6-ciclo (que son las que corresponden a los dos vértices que están a distancia 2 de  $v$  y que provienen de un mismo vecino de  $v$ ), dando un total de  $15-3=12$  posibles 6 ciclos. De la Proposición Principal  $z(v) \leq 4/3$  para  $v \in H$ , y para cada  $\gamma \in \mathcal{H}$ ,  $\sum_{v \in V(\gamma)} z(v) \leq 6 \cdot (4/3 - \epsilon')$ , donde  $\epsilon' = 1/729$ . Considerando todo lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
K \cdot \sum_{v \in H} \left[ z(v) - \left( \frac{4}{3} - \frac{\epsilon'}{K} \right) \right] &= |H|\epsilon' + K \sum_{v \in H} \left( z(v) - \frac{4}{3} \right) \\
&\leq 6|\mathcal{H}|\epsilon' + \sum_{v \in H} f(v) \left( z(v) - \frac{4}{3} \right) \\
&= 6|\mathcal{H}|\epsilon' + \sum_{\gamma \in \mathcal{H}} \sum_{v \in V(\gamma)} \left( z(v) - \frac{4}{3} \right) \\
&\leq 6|\mathcal{H}|\epsilon' - \sum_{\gamma \in \mathcal{H}} 6\epsilon' \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Se sigue que

$$\frac{1}{|H|} \sum_{v \in H} z(v) \leq (4/3 - \epsilon'/K).$$

Ya que  $\epsilon'/K \leq 1/60$ , tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in V} z(v) &\leq \sum_{v \in B} z(v) + \sum_{v \in H} z(v) + \sum_{v \in V \setminus (B \cup H)} z(v) \\
&\leq \frac{4}{3}|B| + \left( \frac{4}{3} - \frac{\epsilon'}{K} \right) (|V| - |B|) \\
&= |V| \left( \frac{4}{3} - \frac{\epsilon'}{7K} \right).
\end{aligned}$$

Concluimos que existe un índice  $i$  tal que  $\sum_{v \in V} z_i(v) \leq |V| (4/3 - \epsilon'/7K)$ . Añadiendo un doble árbol de expansión de  $G/E(\Gamma_i)$  transformamos  $\Gamma_i$  en una solución de graph-TSP de largo  $|V| (4/3 - \epsilon'/7K) - 2$ . Como  $K = 12$  y  $\epsilon' = 1/729$  obtenemos la cota deseada.  $\square$

Del resultado anterior se deduce inmediatamente el siguiente resultado.

**Corolario 5.5.8.** *Si  $G$  es un grafo cúbico y 2-conexo, entonces existe una  $(4/3 - \epsilon) - 2/n$  algoritmo de aproximación, donde  $\epsilon = 1/61236$ .*

## 5.6. Gap integral

Del Teorema 5.5.7 y del hecho de que  $n$  es una cota inferior de  $OPT_{LP}(G)$ , se obtiene directamente el siguiente resultado.

**Corolario 5.6.1.** *Si  $G$  es un grafo cúbico y 2-conexo, entonces el gap integral de graph-TSP con respecto a la relajación de Held–Karp es a lo más  $(4/3 - \epsilon)$ , donde  $\epsilon = 1/61236$ .*



# Capítulo 6

## Conclusiones

En este trabajo mostramos un conjunto de varios resultados nuevos acerca del problema graph-TSP en grafos cúbicos.

Una pregunta importante que se pretendía resolver era saber si la cota superior de  $4/3$  del gap de integralidad (con respecto a la relajación de Held & Karp) en grafos cúbicos 2-conexos era una cota ajustada o era una cota que se podía mejorar. Esta pregunta se logró responder: la cota se logró reducir, obteniendo una cota superior de  $(4/3 - 1/61236)$  del gap integral. Sin duda un mejor análisis puede mejorar levemente la cota superior obtenida, sin embargo, refinar el análisis no se encuentra dentro de los alcances de este trabajo. Por otro lado, creemos que esta cota se puede mejorar sustancialmente, no necesariamente manteniendo el mismo enfoque expuesto en el trabajo actual. En particular, nosotros conjeturamos lo siguiente.

**Conjetura 6.0.2.** *El gap integral con respecto a la relajación de Held & Karp es  $7/6$  en grafos cúbicos 2-conexos.*

Como resumen de los numerosos resultados obtenidos, se puede hacer una completitud del Cuadro 1.1, agregando los nuevos resultados demostrados en este trabajo, lo que se muestra en el Cuadro 6.1.

|                     | TSP lb        | TSP ub                 | GAP lb | GAP ub          | Approx.          |
|---------------------|---------------|------------------------|--------|-----------------|------------------|
| Grafos generales    | $2n - 4$      | $2n - 2$               | $4/3$  | $13/9$          | $13/9$           |
| Grafos subcúbicos   | $4n/3 - 2/3$  | $4n/3 - 2/3$           | $4/3$  | $4/3$           | $4/3$            |
| Grafos cúbicos      | $11n/9 - 8/9$ | $(4/3 - 1/61236)n - 2$ | $7/6$  | $4/3 - 1/61236$ | $4/3 - 1/61236$  |
| Grafos cúbicos bip. | $(10n - 2)/9$ | $(4/3 - 1/108)n - 2$   | $10/9$ | $4/3 - 1/108$   | $4/3 - 1/108$    |
| Grafos de Barnette  | $n$           | $(4/3 - 1/18)n - 2$    | $1$    | $4/3 - 1/18$    | $(1 + \epsilon)$ |

Cuadro 6.1: Resumen de los resultados obtenidos de cotas inferiores y superiores conocidas para graph-TSP. La primera columna (“TSP lb”) corresponde a la mayor cota inferior conocida de graph-TSP en  $n$  vértices, la segunda columna (“TSP ub”) corresponde a la cota superior de graph-TSP en  $n$  vértices, la tercera (“GAP lb”) y la cuarta (“GAP ub”) corresponde a la mayor cota inferior y la cota superior para el gap con respecto a la relajación de Held–Karp, respectivamente. La última columna muestra la cota para la mejor aproximación conocida con respecto al valor óptimo.

# Bibliografía

- [1] Nishita Aggarwal, Naveen Garg, and Swati Gupta. A  $4/3$ -approximation for tsp on cubic 3-edge-connected graphs. In *Proceedings of CoRR.*, 2011.
- [2] T. Akiyama, T. Nishizeki, and N. Saito. Np-completeness of the hamiltonian cycle problem for bipartite graphs. *Journal of Information Processing*, 3(2):73–76, 1980.
- [3] David Applegate, Robert Bixby, William Cook, and et al. Tsp cuts which do not conform to the template paradigm. In *IN COMPUTATIONAL COMBINATORIAL OPTIMIZATION*, pages 261–303. Springer, 2001.
- [4] F. Barahona. Fractional packing of t-joins. *SIAM J. Disc. Math.*, 17:661–669, 2004.
- [5] J.A. Bondy and U.S.R. Murty. *Graph Theory With Applications*. Macmillan, London, 1976.
- [6] Sylvia Boyd, René Sitters, Suzanne van der Ster, and Leen Stougie. Tsp on cubic and subcubic graphs. In *Proceedings of the 15th international conference on Integer programming and combinatorial optimization, IPCO'11*, pages 65–77, Berlin, Heidelberg, 2011. Springer-Verlag.
- [7] Nicos Christofides. *Worst-case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem*. Technical report, 1976.
- [8] G Dantzig, R Fulkerson, and S Johnson. Solution of a large-scale traveling-salesman problem. *Operations Research*, 2:393–410, 1954.
- [9] Reinhard Diestel. *Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, August 2005.
- [10] Jack Edmonds. Maximum matching and a polyhedron with 0,1 vertices. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 69:125–130, 1965.
- [11] Tomás Feder and Carlos Subi. On barnette’s conjecture, 2008.
- [12] David Gamarnik, Moshe Lewenstein, and Maxim Sviridenko. An improved upper bound for the tsp in cubic 3-edge-connected graphs. *Oper. Res. Lett.*, 33(5):467–474, 2005.
- [13] M. R. Garey, D. S. Johnson, and R. E. Tarjan. The planar hamiltonian circuit problem is np-complete. *SIAM Journal on Computing*, 5:701–714, 1976.

- [14] Michel X. Goemans. Worst-case comparison of valid inequalities for the tsp. *Math. Program.*, 69:335–349, August 1995.
- [15] Michel X. Goemans and Dimitris J. Bertsimas. On the parsimonious property of connectivity problems. In *Proceedings of the 1st Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 388–396, 1990.
- [16] Michelangelo Grigni, Elias Koutsoupias, and Christos H. Papadimitriou. An approximation scheme for planar graph tsp. In *Proceedings of the Twentieth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 640–645, 1995.
- [17] Martin Grötschel, László Lovász, and Alexander Schrijver. *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, volume 2 of *Algorithms and Combinatorics*. Springer, 1988.
- [18] Michael Hahsler, Kurt Hornik, Wirtschaftsuniversität Wien, Michael Hahsler, Kurt Hornik, and Kurt Hornik. Tsp ? infrastructure for the traveling salesperson problem, 2006.
- [19] Alexander Hertel. A survey & strengthening of barnette’s conjecture. Unrefereed paper, 2005.
- [20] Tobias Mömke and Ola Svensson. Approximating graphic tsp by matchings. In *Proceedings of the 52nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 560–569, 2011.
- [21] Marcin Mucha. 13/9-approximation for graphic tsp. In Christoph Dürr and Thomas Wilke, editors, *STACS*, volume 14 of *LIPICs*, pages 30–41. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2012.
- [22] D. Naddef and W. Pulleyblank. Matchings in regular graphs. *Discrete Math*, 34:283–291, 1981.
- [23] Shayan Oveis, Gharan Amin, and Saberi Mohit Singh. A randomized rounding approach to the traveling salesman problem, 2011.
- [24] Christos H. Papadimitriou and Santosh Vempala. On the approximability of the traveling salesman problem (extended abstract). In *Proceedings of the thirty-second annual ACM symposium on Theory of computing*, STOC ’00, pages 126–133, New York, NY, USA, 2000. ACM.
- [25] A. Schrijver. *Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency*. Springer, Berlin, 2003.
- [26] P.G. Tait. Listing’s topologie. *Philosophical Magazine*, 17:30–46, 1884.
- [27] W. T. Tutte. A theorem on planar graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 82:99–116, 1956.
- [28] W.T. Tutte. On hamiltonian circuits. *J. London Math.*, 7:169–176, 1946.

- 
- [29] W.T. Tutte. *Recent progress in combinatorics: proceedings*. Number v. 1968 in Recent Progress in Combinatorics: Proceedings. Academic Press, 1969.
- [30] W.T. Tutte. On the 2-factors of bicubic graphs. *Discrete Mathematics*, 1(2):203–208, 1971.
- [31] Laurence A. Wolsey. Heuristic analysis, linear programming and branch and bound. In V. J. Rayward-Smith, R. W. Cottle, L. C. W. Dixon, B. Korte, M. J. Todd, E. L. Allgower, W. H. Cunningham, J. E. Dennis, B. C. Eaves, R. Fletcher, D. Goldfarb, J.-B. Hiriart-Urruty, M. Iri, R. G. Jeroslow, D. S. Johnson, C. Lemarechal, L. Lovasz, L. McLinden, M. J. D. Powell, W. R. Pulleyblank, A. H. G. Rinnooy Kan, K. Ritter, R. W. H. Sargent, D. F. Shanno, L. E. Trotter, H. Tuy, R. J. B. Wets, E. M. L. Beale, G. B. Dantzig, L. V. Kantorovich, T. C. Koopmans, A. W. Tucker, and P. Wolfe, editors, *Combinatorial Optimization II*, volume 13 of *Mathematical Programming Studies*, pages 121–134. Springer Berlin Heidelberg, 1980. 10.1007/BFb0120913.