



**Universidad de Chile**  
**Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas**  
**Departamento de Física**

*Confinamiento superficial de los efectos del medio  
en colisiones nucleón-núcleo*

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN  
CIENCIAS, MENCIÓN FÍSICA

**Fernando Javier Aguayo Fellay**

Profesor Guía:

Hugo Francisco Arellano Sepúlveda

Miembros de la Comisión:

Francisco Abel Brieva Rodríguez

José Roberto Morales Peña

Iván Eugenio Schmidt Andrade

Claudio Fabián Tenreiro Leiva

Santiago de Chile,

Agosto 2008

# Resumen

Investigamos la separación asintótica del potencial óptico en espacio de momentum para el scattering nucleón-núcleo. En esta separación, el potencial es dividido en una componente que depende de la matriz  $t$  libre y otra que acopla la matriz densidad con el gradiente de la interacción efectiva. Dicha descomposición nos permite identificar claramente el confinamiento, en la superficie del núcleo, de los efectos intrínsecos del medio nuclear. Además, basándonos en esta estructura general para el potencial óptico, somos capaces de incorporar en el cálculo del potencial una descripción de la densidad del estado base del núcleo a través un modelo de capas. Examinamos estas características en el contexto del scattering elástico de un protón por un núcleo a energías bajo los 60 MeV, encontrando que el acoplamiento pn da cuenta de la mayor parte de los efectos introducidos. Los observables de scattering concuerdan con los obtenidos por Arellano, Brieva y Love dentro de un 10 %. También fueron estudiados procesos cuasi-elásticos de intercambio de carga, en los que se encuentra una mayor discrepancia con los datos experimentales, lo que reafirma la necesidad de trabajos futuros en esta área.

Para haces de nucleones bajo los 60 MeV, la manifestación en la superficie de los efectos intrínsecos del medio y el acoplamiento selectivo de protones con neutrones pueden hacer del esquema estudiado una herramienta útil en el estudio de fenómenos sensibles a la estructura periférica de los sistemas nucleares.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>5</b>
2.1. El potencial óptico Nucleón-Núcleo . . . . .	6
2.2. Interacción efectiva de dos cuerpos . . . . .	7
2.3. Modelo de interacción: Matriz $g$ . . . . .	12
2.4. El término dependiente del medio: $U_1$ . . . . .	18
<b>3. Implementación</b>	<b>25</b>
3.1. Cálculo de $\Omega$ . . . . .	25
3.2. Convergencia a ABL . . . . .	26
3.3. Aproximación de conservación de momentum: Revisión Numérica . . . . .	28
<b>4. Aplicaciones</b>	<b>31</b>
4.1. Scattering Elástico . . . . .	32
4.2. Reacciones de intercambio de carga . . . . .	38
<b>5. Discusión y Conclusiones</b>	<b>42</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>44</b>

# 1. Introducción

El estudio microscópico de reacciones nucleares que toman lugar en procesos de scattering presenta un enorme desafío debido a las dificultades inherentes a su naturaleza de muchos cuerpos, mas aún cuando estos son constituyentes cuánticos e indistinguibles. En esta línea, el potencial óptico constituye una de las herramientas más simples, y aún así poderosas, para abordar el problema de las colisiones de un haz de nucleones con un núcleo. A pesar de que en general las interacciones involucradas resultan complicadas y difíciles de tratar, el potencial óptico representa formalmente a un operador de un cuerpo, el cual puede ser calculado, en principio, a partir de la interacción desnuda entre los constituyentes. El desafío se centra entonces en reproducir de buena manera los observables de scattering para procesos elásticos e inelásticos a partir de estos supuestos.

En el caso específico de la interacción nucleón-núcleo ( $NA$ ), nos valdremos de una aproximación la cual supone conocido el estado fundamental del núcleo blanco (estado base) y además de la interacción desnuda entre nucleones. Las correlaciones propias del medio nuclear deben ser incorporadas mediante esquemas que den cuenta de ellas en la mejor forma.

Uno de los modelos pioneros utilizados para describir el scattering de un nucleón por un núcleo es el formulado por Kerman, McManus y Thaler [1]. Allí se encuentra que el acoplamiento proyectil-núcleo puede entenderse como la suma de las interacciones efectivas del proyectil con cada uno de los nucleones que constituyen el blanco. Alejado de la estructura espectral del núcleo, estas interacciones coinciden con la matriz de scattering (matriz  $t$  libre). Esto lleva a que el potencial óptico quede expresado como una convolución del estado base del núcleo con la matriz  $t$  (*full-folding*).

Debido a las complicaciones que surgen al evaluar dichos potenciales, en gran medida dadas por las limitaciones computacionales existentes, se recurre al uso de distintas aproximaciones tanto a nivel de la interacción misma como en la forma de evaluar esta convolución. En el pasado tales simplificaciones dieron paso a potenciales que en espacio de momentum toman la forma ' $t\rho$ ', donde se supone que la dependencia de la interacción en

la energía y en los elementos fuera de la capa de energía (*off-shell*) es suficientemente pequeña como para permitir factorizar los elementos fuera de la convolución. Esquemas como estos han sido estudiados ampliamente, como es el caso de los estudios llevados a cabo por Ray [2] en cálculos no relativistas, en tanto que su extensión relativista ha sido estudiada por otros autores. [3, 4]. Aunque estas aproximaciones tuvieron algunos éxitos, no eran consistentemente adecuados en el rango entre 100 y 500 MeV.

Hacia los años setenta habían señales muy fuertes que validaban el uso de interacciones efectivas dependientes de la densidad. Ello impulsa el desarrollo de esquemas que hacen explícita esta dependencia, con la introducción de uno de los primeros *foldings* publicado por Brieva y Rook [5] casi al mismo tiempo que otro realizado por Jeukenne *et al.* [6]. Este último calculaba una interacción efectiva local haciendo uso del primer término en una expansión a bajas densidades, mientras que en el primero la interacción resultante era no-local, dando cuenta de los observables de forma similar a los modelos fenomenológicos utilizados entonces. Posteriormente von Geramb extiende este esquema parametrizando interacciones efectivas para varias densidades y energías, permitiendo el cálculo de potenciales ópticos hasta energías de 400 MeV [7].

Para finales de los 80 Arellano, Brieva y Love, publican [8] cálculos que incluyen la dependencia intrínseca en la energía de la interacción nucleón-nucleón ( $NN$ ), además de su comportamiento fuera de la capa de energía y antisimetrización, pero aún utilizando la matriz  $t$  libre como el acoplamiento  $NN$ , esto es, sin incorporar el medio dentro de la interacción. Posteriormente se publican otros resultados en la misma línea, como por ejemplo el de Elster *et al.* [9] y Chinn *et al.* [10]. En este último se incluyen algunos efectos del medio en la interacción a segundo orden. Una estrategia más general, también debida a Arellano, Brieva y Love, fue publicada en 1995 [11]. En ella los efectos del medio son incorporados a la interacción efectiva entre los nucleones, manteniendo su forma dependiente de la energía y reteniendo la descripción de los elementos *off-shell*. Luego el *full-folding* en espacio de momentum era generalizado para que estos efectos fueran incluidos en el potencial  $NA$ . De esta manera, la interacción efectiva es identificada como la matriz  $g$  en el medio nuclear. A este esquema le llamaremos ABL.

Otro esquema de características similares a las de von Geramb, ha sido desarrollado por Amos *et al.* [12, 13]. Donde, para generar un potencial en espacio de coordenadas, se usa la interacción de Melbourne, la cual consiste en una expansión de términos tipo Yukawa. Así como estos, existen otros enfoques distintos para abordar el problema de la construcción de la interacción efectiva y también para el modelo de potencial óptico a utilizar.

Hacia el año 2002 el esquema ABL fue extendido a energías de nucleón sobre 350 MeV (hasta 1.5 GeV) para dar cuenta de efectos relativistas cinemáticos y en la interacción [14]. Posteriormente fue adaptado para incorporar procesos de scattering de kaones con núcleos [15]. Con esto se ha logrado un espectro muy amplio cubierto por la teoría, pero aún se evidencian carencias importantes en otros regímenes como bajas energías y canales inelásticos, donde muchas de las aproximaciones usadas llegan a tener una validez discutible.

En particular, la característica que nos atañe en este trabajo es la incorporación de los efectos del medio en la descripción, ya no de la interacción, si no que del *folding* del potencial óptico. Esta es una falencia mostrada por el esquema ABL, particularmente por su manejo aproximado del estado base del núcleo, que resulta importante dilucidar en busca de una mejor descripción de los procesos a bajas energías. Es uno de los objetivos de esta tesis mostrar como sortear este problema zanjando así la discusión, al tiempo que se muestran los primeros resultados de aplicaciones obtenidas utilizando esta nueva versión del potencial óptico, que constituye la forma más completa en espacio de momentum que se haya dado a conocer hasta esta fecha.

Es importante notar que desde las primeras apariciones de los potenciales ópticos microscópicos, el rol jugado por los efectos del medio nuclear ha sido una vertiente importante en el estudio de la dinámica de las colisiones nucleón-núcleo. Hoy en día, este interés por comprender esta importancia e incorporarla en los modelos teóricos sigue vigente. En efecto, actualmente se encuentran en desarrollo u operación preliminar novedosas instalaciones alrededor del mundo [16, 17, 18, 19, 20]. Estas se tratan de aceleradores de haces de iones radiactivos, en donde isótopos de muy corta vida son producidos y acelerados para luego colisionar con el blanco escogido. En un escenario como este, el uso de haces con energía de 500A MeV incidiendo sobre átomos de hidrógeno, es equivalente al scattering de un protón por un núcleo exótico a 500 MeV. Para energías inferiores a 60A MeV dicha correspondencia se produce con un scattering a bajas energías, un régimen en el que se sabe que los efectos del medio podrían jugar un rol importante.

Para estudiar estos sistemas es necesario incorporar completamente los efectos del medio a la descripción teórica. En particular, resulta imperioso establecer cotas en la incerteza debida al tratamiento aproximado del estado base, descrito por la aproximación de Slater, usado en el esquema ABL. En esta línea, recientemente Arellano y Bauge publicaron [21] una generalización del esquema ABL donde es posible incorporar los efectos del medio nuclear en el *folding* para una matriz densidad basada en un modelo de capas. No sólo esto, si no que además se pudo identificar que la contribución del medio proviene de la su-

perficie nuclear, una característica preexistente en la teoría, pero que ahora queda expresada formalmente.

Esta tesis se organiza de la siguiente forma. En el Capítulo 2 introducimos el marco teórico de trabajo, revisamos aspectos específicos del potencial óptico y su relación con interacciones efectivas. Se presenta además la descomposición del potencial óptico en un término no dependiente de la densidad del medio nuclear y otro que si depende de ella. En el Capítulo 3 describimos algunos aspectos de la implementación de los cálculos y pruebas de convergencia. En el Capítulo 4 analizamos aplicaciones del potencial óptico, centrándonos en su comparación con datos experimentales. Abordamos el scattering elástico de protones y procesos de intercambio de carga  $(p, n)$ . Finalmente en el Capítulo 5 presentamos un resumen de este trabajo y sus principales conclusiones.

## 2. Marco Teórico

En el marco no relativista representamos la interacción de un nucleón con un núcleo mediante el potencial óptico  $\hat{U}$ , un operador de un cuerpo responsable del proceso en el canal elástico. Las funciones de onda de scattering  $|\Psi\rangle$  son soluciones de la ecuación de Schrödinger

$$(\hat{K} + \hat{U})|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle, \quad (2.1)$$

donde  $\hat{K}$  representa el operador de energía cinética del movimiento relativo nucleón-núcleo. Sus autovalores  $E_k$  satisfacen

$$E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad (2.2)$$

donde  $m$  corresponde a la masa reducida del sistema  $NA$ . Si representamos por  $|\phi\rangle$  las autofunciones de  $\hat{K}$ , correspondientes a ondas no distorsionadas por el potencial  $\hat{U}$ , entonces una solución formal a la Eq. (2.1) está dada por la ecuación de Lipmann-Schwinger

$$|\Psi\rangle = |\phi\rangle + \frac{1}{E - \hat{K} \pm i\eta} \hat{U}|\Psi\rangle. \quad (2.3)$$

Dado que el potencial óptico es no hermítico, éste permite dar cuenta de pérdida de flujo, lo cual es un resultado natural de la ecuación de continuidad para el flujo  $\mathbf{j}$ . La ilustración más directa de esta propiedad surge si consideramos  $\hat{U}$  local, separado en sus componentes real e imaginaria

$$\langle \mathbf{r}' | U | \mathbf{r} \rangle = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) [V(\mathbf{r}) + iW(\mathbf{r})]. \quad (2.4)$$

Definiendo la densidad de flujo mediante

$$\mathbf{j} = -\frac{i\hbar}{2m} \left( \Psi^\dagger \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^\dagger \right), \quad (2.5)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{j} &= \frac{i}{\hbar} (U^* - U) \rho \\ &= \frac{2}{\hbar} \rho W, \end{aligned} \quad (2.6)$$



donde  $\rho(\mathbf{r}) = |\Psi(\mathbf{r})|^2$ . Claramente, si  $W(\mathbf{r}) < 0$ , el término  $W$  representa un sumidero de densidad de probabilidad. Ahora, si usamos el teorema de la divergencia sobre una superficie que envuelva al núcleo obtenemos

$$\oiint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} = \frac{2}{\hbar} \int \rho(\mathbf{r})W(\mathbf{r})d\mathbf{r} , \quad (2.7)$$

para el flujo neto. Dividiendo por la densidad de probabilidad del flujo incidente (onda plana) surge una expresión simple para la sección eficaz de reacción

$$\sigma_R = -\frac{2}{\hbar v} \int \rho(\mathbf{r})W(\mathbf{r})d\mathbf{r} . \quad (2.8)$$

Esta ecuación establece de forma muy directa la presencia de una parte imaginaria del potencial óptico con las secciones eficaces de reacción, directamente medibles en el proceso de scattering.

En una perspectiva más general, si se considera un núcleo de momentum angular total nulo, colisionando con un nucleón (spin 1/2), la estructura general del potencial óptico contiene una componente central,  $U_c$  y un acoplamiento spin-órbita,  $U_{ls}$  [22]. Así,

$$U = U_c + U_{ls}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}) , \quad (2.9)$$

que en espacio de momentum se representa

$$U(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = U_c(\mathbf{k}', \mathbf{k}) + U_{ls}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}) , \quad (2.10)$$

con

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{k}'}{kk'} ,$$

un vector normal al plano de scattering.

Finalmente es importante notar que el potencial óptico, además de ser no local, depende de la energía del proceso. Tales características emergen en forma natural a partir del desarrollo que mostramos en las secciones mas adelante.

## 2.1. El potencial óptico Nucleón-Núcleo

El potencial óptico para scattering nucleón-núcleo (NA) puede ser derivado de diversas maneras [23, 24, 25, 26, 27]. Aunque ellas difieren en la forma en que se establece el contacto con el potencial desnudo NN, todos se reducen al valor de expectación de una interacción generalizada de dos cuerpos con el estado base del núcleo. Así, una expresión

general del potencial óptico para colisiones entre un nucleón con un núcleo a energía  $E$  queda dada por

$$U(\mathbf{k}', \mathbf{k}; E) = \int d\mathbf{p}' d\mathbf{p} \langle \mathbf{k}' \mathbf{p}' | \hat{T}(E) | \mathbf{k} \mathbf{p} \rangle_{\mathcal{A}} \hat{\rho}(\mathbf{p}', \mathbf{p}), \quad (2.11)$$

donde el subíndice  $\mathcal{A}$  denota antisimetrización y  $\hat{\rho}(\mathbf{p}', \mathbf{p})$  representa la densidad de un cuerpo (*one-body mixed density*) del blanco. En esta representación, la información sobre la estructura del sistema de muchos cuerpos esta contenida en  $\hat{T}$ . Una evaluación cabal del potencial óptico, esto es considerando la totalidad de los elementos de la matriz  $\hat{T}$ , requeriría solucionar un problema de  $(A + 1)$  cuerpos, una tarea que aun hoy en día presenta un reto enorme, por lo demás no resuelto.

Tal dificultad puede ser sorteada simplificando el problema, desacoplando la dependencia de la interacción efectiva de dos cuerpos con la estructura del estado base del blanco. Dicha estrategia es adecuada para energías medias y altas, donde el espectro discreto de la función de Green para muchos cuerpos queda alejado de la energía del proyectil en el continuo. Ello permite el uso de modelos de partícula independiente para describir el estado base del núcleo. La interacción en tanto, es usualmente descrita mediante la matriz de reacción de Brueckner-Bethe-Goldstone (BBG).

## 2.2. Interacción efectiva de dos cuerpos

Este trabajo de tesis es una extensión de resultados recientemente publicados por Arellano y Bauge (ver Ref.[21]), donde se plantea un esquema bastante general para incorporar los efectos del medio nuclear. Siguiendo el procedimiento ahí encontrado, en este capítulo se describen los aspectos relevantes que apuntan a una evaluación aproximada de este potencial óptico, más general que el entregado por el esquema ABL. En particular, se busca un tratamiento detallado de la estructura de la matriz densidad en la construcción del potencial óptico.

Examinemos la estructura de la interacción efectiva. Ya sea en espacio de coordenadas o de momentum, la representación más general del operador de dos cuerpos  $\hat{T}$  queda determinada por cuatro vectores. Denotamos su representación en espacio de coordenadas como

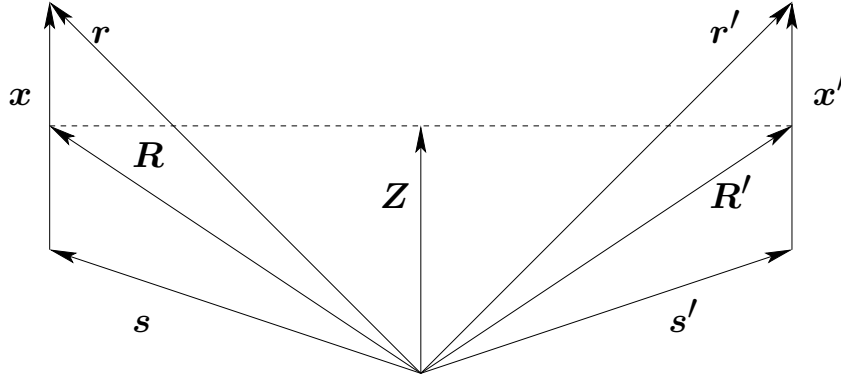
$$\langle \mathbf{r}' \mathbf{s}' | \hat{T} | \mathbf{r} \mathbf{s} \rangle = T(\mathbf{r}' \mathbf{s}'; \mathbf{r} \mathbf{s}), \quad (2.12)$$

donde las coordenadas *previas* (o *pre* colisión) del proyectil y el nucleón ligado están denotadas por  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{s}$  respectivamente. De igual forma,  $\mathbf{r}'$  y  $\mathbf{s}'$  denotan los vectores *post* colisión.

### 2.2.1. Estructura de un operador de dos cuerpos

Es conveniente definir un juego de coordenadas alternativas que representen las coordenadas relativas y de centro de masa del sistema, definido en las Ecs.(2.13) y representado en Fig.(2.1)

$$\begin{aligned} \mathbf{R}' &= (\mathbf{r}' + \mathbf{s}')/2; & \mathbf{x}' &= \mathbf{r}' - \mathbf{s}'; \\ \mathbf{R} &= (\mathbf{r} + \mathbf{s})/2; & \mathbf{x} &= \mathbf{r} - \mathbf{s}; \end{aligned} \quad (2.13)$$



**Figura 2.1:** Representación esquemática de las coordenadas en un operador de dos cuerpos.

Claramente,  $\mathbf{x}(\mathbf{x}')$  corresponde a la coordenada relativa del par, mientras  $\mathbf{R}(\mathbf{R}')$  a la del centro de masas (*c.m.*) para los vectores *pre* (*post*). Con lo anterior, representamos

$$T(\mathbf{r}' \mathbf{s}'; \mathbf{r} \mathbf{s}) = T_{\mathbf{R}'\mathbf{R}}(\mathbf{x}', \mathbf{x}).$$

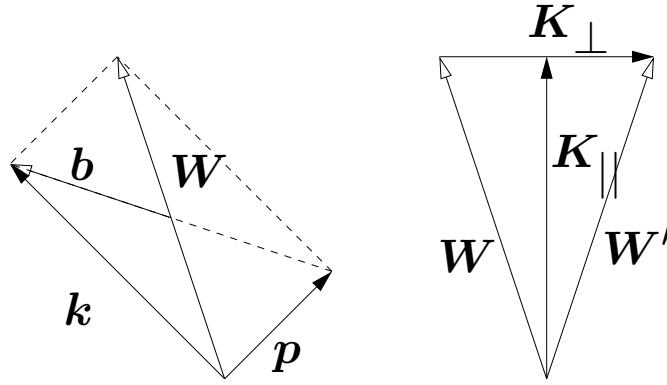
Si ahora denotamos los elementos de matriz de  $\hat{T}$  en espacio de momentum mediante  $\tilde{T} = \langle \mathbf{k}' \mathbf{p}' | \hat{T} | \mathbf{k} \mathbf{p} \rangle$ , entonces

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\mathbf{r}' d\mathbf{s}' d\mathbf{r} d\mathbf{s} \times e^{-i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}' + \mathbf{p}' \cdot \mathbf{s}' - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{s})} T(\mathbf{r}' \mathbf{s}'; \mathbf{r} \mathbf{s}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\mathbf{R}' d\mathbf{R} d\mathbf{x}' d\mathbf{x} \times e^{-i(\mathbf{W}' \cdot \mathbf{R}' + \mathbf{b}' \cdot \mathbf{x}' - \mathbf{W} \cdot \mathbf{R} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{x})} T_{\mathbf{R}'\mathbf{R}}(\mathbf{x}', \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde, al igual que en espacio de coordenadas, se ha definido un nuevo juego de vectores

$$\begin{aligned}
 \mathbf{W} &= \mathbf{p} + \mathbf{k}; & \mathbf{b} &= (\mathbf{k} - \mathbf{p})/2; \\
 \mathbf{W}' &= \mathbf{p}' + \mathbf{k}'; & \mathbf{b}' &= (\mathbf{k}' - \mathbf{p}')/2; \\
 \mathbf{K}_{\parallel} &= (\mathbf{W}' + \mathbf{W})/2; & \mathbf{K}_{\perp} &= \mathbf{W}' - \mathbf{W};
 \end{aligned}
 \tag{2.15}$$

Con esto,  $\mathbf{W}$  representa el momentum del par interactuante, mientras que  $\mathbf{b}$  representa el



**Figura 2.2:** Representación esquemática de las coordenadas en un operador de dos cuerpos en espacio de momentum.

momentum relativo. Nuevamente las primas denotan las coordenadas *post*. Estos vectores son representados en la Fig.(2.2), junto con  $\mathbf{K}_{\parallel}$ , el promedio de los momentos *previo* y *post* totales. El momentum  $\mathbf{K}_{\perp}$  representa una medida del cambio transversal del momentum. La introducción de un nuevo cambio de coordenadas, dado por

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Y} &= \mathbf{R}' - \mathbf{R}; & \mathbf{Z} &= (\mathbf{R}' + \mathbf{R})/2 \\
 & & &= \frac{1}{4}(\mathbf{r} + \mathbf{r}' + \mathbf{s} + \mathbf{s}');
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

permite representar  $\tilde{T}$  de la forma

$$\tilde{T} = \int \frac{d\mathbf{Z}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{Z} \cdot (\mathbf{W}' - \mathbf{W})} g_{\mathbf{Z}}[\frac{1}{2}(\mathbf{W}' + \mathbf{W}); \mathbf{b}', \mathbf{b}],
 \tag{2.17}$$

donde  $g_Z$  es la interacción reducida  $g$  en la coordenada  $Z$ . Dicha interacción queda entonces dada por

$$g_Z(\mathbf{K}_{\parallel}; \mathbf{b}', \mathbf{b}) = \int \frac{d\mathbf{Y}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{Y} \cdot \mathbf{K}_{\parallel}} \int d\mathbf{x}' d\mathbf{x} e^{-i(\mathbf{b}' \cdot \mathbf{x}' - \mathbf{b} \cdot \mathbf{x})} T_{Z+\frac{1}{2}\mathbf{Y}, Z-\frac{1}{2}\mathbf{Y}}(\mathbf{x}', \mathbf{x}). \quad (2.18)$$

Es interesante notar que  $Z$  corresponde al punto medio de las cuatro coordenadas de las dos partículas. Llamamos a esta la *coordenada media*, que corresponde al lugar donde la interacción reducida es evaluada. De esta forma la Ec. (2.17) puede ser reescrita usando cantidades más naturales como

$$\langle \mathbf{k}' \mathbf{p}' | \hat{T} | \mathbf{k} \mathbf{p} \rangle = \int \frac{d\mathbf{Z}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{Z} \cdot (\mathbf{Q} - \mathbf{q})} g_Z(\mathbf{K}_{\parallel}; \mathbf{b}', \mathbf{b}). \quad (2.19)$$

En la Ec. (2.19) podemos identificar  $\mathbf{Q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$  como el retroceso del nucleón golpeado;  $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ , el momentum transferido del proyectil;  $\mathbf{K} = (\mathbf{k} + \mathbf{k}')/2$ , el momentum promedio del proyectil y  $\mathbf{P} = (\mathbf{p}' + \mathbf{p})/2$ , el momentum promedio del nucleón ligado. Con lo anterior reescribimos

$$\begin{aligned} \mathbf{b}' &= \frac{1}{2}(\mathbf{k}' - \mathbf{p}') = \frac{1}{2}[\mathbf{K} - \mathbf{P} - \frac{1}{2}(\mathbf{q} + \mathbf{Q})], \\ \mathbf{b} &= \frac{1}{2}(\mathbf{k} - \mathbf{p}) = \frac{1}{2}[\mathbf{K} - \mathbf{P} + \frac{1}{2}(\mathbf{q} + \mathbf{Q})], \end{aligned} \quad (2.20)$$

los momenta relativos antes y después de la interacción, respectivamente.

Con esta manipulación geométrica hemos obtenido una expresión para los elementos de matriz  $\hat{T}$  en espacio de momentum en términos de una interacción reducida  $g_Z$ , la que resume toda la información física del sistema. Este es un resultado totalmente general, independiente del modelo.

### 2.2.2. Separación asintótica de la interacción efectiva

Es conveniente en este punto introducir información más específica sobre las interacciones que estamos tratando. Una suposición razonable a primer orden, es que  $g_Z$  presenta una simetría esférica en la coordenada local  $Z$ , es decir  $g_Z$  depende sólo de  $Z = |\mathbf{Z}|$ . En este enfoque un requisito natural que debe cumplir  $g_Z$  es que muy lejos del núcleo, donde la densidad del medio es nula, la interacción debería ser la descrita por la matriz  $t$  libre, es decir

$$\lim_{Z \rightarrow \infty} g_Z(\omega) = t(\omega), \quad (2.21)$$

para una energía de partida  $\omega = E + \bar{\epsilon}$ . Haciendo uso de esto, descomponemos  $g_Z = g_{\infty} + (g_Z - g_{\infty}) = t + (g_Z - t)$ . Ello permite que los elementos de matriz  $\tilde{T}$  puedan ser separados

en dos contribuciones, una independiente del medio y otra que porta esa información, es decir

$$\tilde{T} = \delta(\mathbf{Q} - \mathbf{q})t + \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{Z} e^{i\mathbf{Z} \cdot (\mathbf{Q} - \mathbf{q})} (g_Z - t). \quad (2.22)$$

En esta expresión (y las siguientes) se subentiende que las variables vectoriales tanto de  $t$  como de  $g_Z$  son  $(\mathbf{K}_{\parallel}, \mathbf{b}', \mathbf{b})$ . Haciendo uso de la simetría esférica llevamos a cabo la integral angular para obtener

$$\tilde{T} = \delta(\mathbf{Q} - \mathbf{q})t + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dZ Z^2 j_0(Z|\mathbf{Q} - \mathbf{q}|) (g_Z - t). \quad (2.23)$$

Esta última expresión puede ser integrada por partes, conduciendo a la *separación asintótica* [21]

$$\langle \mathbf{k}' \mathbf{p}' | \hat{T} | \mathbf{k} \mathbf{p} \rangle = \delta(\mathbf{Q} - \mathbf{q}) t(\mathbf{K}_{\parallel}; \mathbf{b}', \mathbf{b}) - \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} Z^3 dZ \Phi_1(Z | \mathbf{Q} - \mathbf{q} |) \frac{\partial g_Z}{\partial Z}, \quad (2.24)$$

donde  $\Phi_1(t) = j_1(t)/t$ , con  $j_1$  la función de Bessel esférica de orden 1. Nótese, que la información del medio se expresa como la derivada parcial de  $g_Z$  con respecto a su coordenada media. Esto permite que los términos libres y dependientes del medio queden completamente desacoplados. Además podemos ver que por un lado, el término libre conserva el momentum del par interactuante, como lo indica  $\delta(\mathbf{Q} - \mathbf{q})$ . La conservación de momentum se hace manifiesta si se exige que  $\partial g_Z / \partial Z = 0$ , como ocurre en materia nuclear infinita (invarianza traslacional).

Podemos ahora reemplazar la expresión anterior para  $\tilde{T}$  en la Ec.(2.11) para el potencial óptico. Para eso, primero pasamos de  $\mathbf{p}, \mathbf{p}'$  a  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ , definidas por

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= (\mathbf{p}' + \mathbf{p})/2 \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{p}' - \mathbf{p} \end{aligned} \quad (2.25)$$

de forma que  $d\mathbf{p}' d\mathbf{p} = d\mathbf{Q} d\mathbf{P}$ . Este par de vectores representa el momentum medio y transferido del nucleón ligado, respectivamente. Su integración da cuenta del movimiento de Fermi de los nucleones dentro del núcleo. Con la separación asintótica, el potencial óptico se descompone en

$$U = U_0 + U_1, \quad (2.26)$$

donde

$$U_0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \int d\mathbf{P} \hat{\rho}(\mathbf{q}; \mathbf{P}) t(\mathbf{K}_{\parallel}; \mathbf{b}', \mathbf{b}); \quad (2.27a)$$

$$U_1(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi^2} \int d\mathbf{Q} d\mathbf{P} \hat{\rho}(\mathbf{Q}; \mathbf{P}) \int_0^{\infty} Z^3 dZ \Phi_1(Z|\mathbf{Q} - \mathbf{q}|) \left( -\frac{\partial g_Z}{\partial Z} \right). \quad (2.27b)$$

Al evaluar el potencial  $U = U_0 + U_1$ , la única suposición que se efectúa sobre la dependencia de la interacción efectiva en el medio es la de simetría esférica. Los detalles de su evaluación aproximada serán discutidos en la siguiente sección.

## 2.3. Modelo de interacción: Matriz $g$

Hasta ahora la interacción reducida  $g_Z$  está solamente restringida en su comportamiento asintótico y simetría en la coordenada media  $Z$ . Además la dependencia que tiene la interacción efectiva en el medio es mapeada a través de esta coordenada media. Para representar tal dependencia hemos recurrido a un modelo de materia nuclear infinita, un punto de partida razonable para incorporar las correlaciones de primer orden con el medio nuclear. De esta forma, a cada coordenada  $Z$  se le asocia la densidad iso-escalar

$$\rho(Z) = [\rho_n(Z) + \rho_p(Z)] / 2, \quad (2.28)$$

donde  $\rho_n$  y  $\rho_p$  representan las densidades de neutrones y protones, respectivamente.

A esta densidad calculamos los elementos reducidos  $g_Z$  como la matriz de reacción de BBG en materia nuclear simétrica, a una energía de partida  $\omega$ . Estos están dados por

$$\hat{g}(\omega) = \hat{v} + \hat{v} \frac{\hat{Q}}{\omega + i0^+ - \hat{h}_1 - \hat{h}_2} \hat{g}(\omega). \quad (2.29)$$

Aquí,  $\hat{v}$  denota el potencial  $NN$ ,  $\hat{h}_1$  y  $\hat{h}_2$  las energías de partícula independiente a una cierta densidad del medio dada por Ec.(2.28) y  $\hat{Q}$  el operador de bloqueo de Pauli. Este operador y los campos autoconsistentes son calculados a un momentum de Fermi dado por

$$k_F = (3\pi^2\rho)^{1/3}. \quad (2.30)$$

Hacemos notar que con este modelo para  $g_Z$  se garantiza la condición de núcleo finito dada en Ec. (2.21).

El cálculo de la matriz  $g_Z$  se realiza según las Refs.[8, 11, 28]. En el esquema ABL estos elementos  $g_Z$  son calculados e integrados con la densidad radial para encontrar el potencial óptico. Un análisis más detallado de la relación entre el marco ABL y el presente esquema se realizará en la siguiente subsección.

### 2.3.1. Aproximaciones y contacto con el esquema ABL

La evaluación del potencial descrito por la Ec.(2.27b) para una interacción esféricamente simétrica requiere de la evaluación de una integral en siete dimensiones. Este requerimiento, debido a la naturaleza de los integrandos, se traduce en un cálculo muy demandante desde el punto de vista computacional. Para abordar este problema, simplificamos la integral despreciando la dependencia de  $g$  en  $Q$ , haciendo  $Q \rightarrow q$ , en la interacción. Esto es consistente con dos puntos importantes. Primero,  $\Phi_1(t)$  tiene el máximo global en  $t = 0$ ,

mostrando que este es un valor apropiado para llevar a cabo esta aproximación. Un segundo punto es aportado por la física del proceso puesto que esta suposición favorece la conservación de momentum del par en la interacción. En efecto,  $\mathbf{Q} = \mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{p}' - \mathbf{p} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ , por lo que  $\mathbf{k} + \mathbf{p} = \mathbf{k}' + \mathbf{p}'$ . Dada esta última propiedad, resulta natural referirse a esta como la *Aproximación de Conservación de Momentum* o MCA por sus siglas en inglés, que quedará denotada en las ecuaciones por  $g_Z \rightarrow g_Z^{(0)}$ , donde los argumentos de  $g_Z$  son en este caso

$$\begin{aligned} \mathbf{b}' &= \frac{1}{2}[\mathbf{K} - \mathbf{P} - \mathbf{q}], \\ \mathbf{b} &= \frac{1}{2}[\mathbf{K} - \mathbf{P} + \mathbf{q}]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Así la Ec.(2.27b) queda aproximada por

$$U_1 \approx \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\alpha} \int_0^{\infty} Z^3 dZ \int d\mathbf{P} \Omega_{\alpha}(\mathbf{q}, \mathbf{P}; Z) \left( -\frac{\partial g_Z^{(0)}}{\partial Z} \right), \quad (2.32)$$

con

$$\Omega_{\alpha}(\mathbf{q}, \mathbf{P}; Z) = \int d\mathbf{Q} \hat{\rho}_{\alpha}(\mathbf{Q}; \mathbf{P}) \Phi_1(Z|\mathbf{Q} - \mathbf{q}|).$$

donde  $\rho_{\alpha}$  denota la densidad de una capa  $\alpha$  en un esquema de modelo de capas, *i.e.*

$$\hat{\rho}(\mathbf{Q}; \mathbf{P}) \equiv \sum_{\alpha} \hat{\rho}_{\alpha}(\mathbf{Q}; \mathbf{P}) = \sum_{\alpha} \phi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{p}') \phi_{\alpha}(\mathbf{p}).$$

A esta construcción en términos de las funciones de onda, le llamaremos *full-mixed density* (FMD).

En las discusiones siguientes nos referiremos a este esquema del potencial óptico [cf. Ec (2.32)] como '*integral  $\delta g$* ', en referencia a la dependencia en la derivada de la interacción efectiva que aparece en el potencial. Este aún cuenta con una integral en siete dimensiones, pero cuyos argumentos son más fácilmente manejados, llevando así a una implementación computacional factible. La importancia de este esquema radica en la incorporación de la matriz densidad en el *folding*. Esto permite un tratamiento detallado de las características del estado base del blanco, lo que nos brindará la información necesaria para entender hasta que punto estos procesos dependen de las distribuciones nucleares dentro del núcleo. En el Capítulo 3 se abordan los detalles técnicos involucrados en su cálculo.

La aproximación de conservación de momentum que hemos estado revisando no es de uso exclusivo de la *integral  $\delta g$* . Es más bien un recurso heredado del esquema ABL, donde es introducido con la finalidad de disminuir las dimensiones de la integral de las que depende el potencial óptico. Es más, estrictamente hablando, podemos decir que ABL es un caso particular de la *integral  $\delta g$* . La diferencia entre ambas radica en el tratamiento de



$\hat{\rho}(\mathbf{Q}; \mathbf{P})$  en la Ec.(2.11). Mientras en  $\delta g$  se usa la forma completa que emana de un modelo de capas, en ABL se usa la aproximación de Slater, consistente en escribir la matriz densidad suponiendo que la partícula se propaga como una onda “cuasi-libre” en un medio infinito. Para ilustrar esta aproximación escribimos la matriz densidad, que en espacio de coordenadas está dada por

$$\rho(\mathbf{s}', \mathbf{s}) \equiv \sum_{\alpha} \phi(\mathbf{s}')^* \phi(\mathbf{s}), \quad (2.33)$$

como una superposición de ondas en un medio infinito

$$\rho(\mathbf{s}', \mathbf{s}) \cong \int_{|k| < k_F} d\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s}'}}{\sqrt{8\pi^3}} \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s}}}{\sqrt{8\pi^3}}. \quad (2.34)$$

Ahora, haciendo el cambio

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \frac{1}{2}(\mathbf{s}' + \mathbf{s}) \\ \mathbf{x} &= \frac{1}{2}(\mathbf{s}' - \mathbf{s}), \end{aligned} \quad (2.35)$$

encontramos que esta aproximación nos deja con

$$\rho(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \cong \frac{k_F^3}{6\pi^2} \times \frac{3j_1(\hat{k}_{Xx})}{\hat{k}_{Xx}}. \quad (2.36)$$

Si aquí evaluamos para una densidad puntual, es decir  $\mathbf{x} = \mathbf{s}' - \mathbf{s} = 0$ , encontramos la relación dada por la Ec. (2.30) para  $k_F$  y  $\rho(X)$ , lo que nos lleva a

$$\rho(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \cong \rho(X) \times \frac{3j_1(\hat{k}_{Xx})}{\hat{k}_{Xx}}. \quad (2.37)$$

Esto, en espacio de momentum se traduce a

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(\mathbf{Q}; \mathbf{P}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{X}} e^{-i\mathbf{P} \cdot \mathbf{x}} \rho(\mathbf{X}, \mathbf{x}) d\mathbf{X} d\mathbf{x} \\ &\cong 4\pi \int_0^\infty X^2 dX j_0(QX) \rho(X) S_F(\mathbf{P}; X), \end{aligned} \quad (2.38)$$

donde se ha definido

$$S_F(\mathbf{P}; X) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi \hat{k}_X^3} \Theta(\hat{k}_X - P). \quad (2.39)$$

con  $\hat{k}_X$  dado por el momentum de Fermi para  $\rho(X)$ , expresado en la Ec.(2.30). Reemplazando  $\tilde{\rho}(\mathbf{Q}; \mathbf{P})$  en la Ec.(2.27) para  $U_1$  se obtiene

$$\begin{aligned} U_1 &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty Z^3 dZ \int_0^\infty X^2 dX \rho(X) \int d\mathbf{Q} \Phi_1(Z|\mathbf{Q} - \mathbf{q}|) j_0(QX) \\ &\quad \times \int d\mathbf{P} \frac{\partial g_Z^{(0)}(E)}{\partial Z} S_F(\mathbf{P}; X); \end{aligned} \quad (2.40)$$

La última integral de la derecha no depende de  $\mathbf{Q}$ , por lo que la integral en  $d\mathbf{Q}$  puede ser calculada separadamente obteniendo

$$\int d\mathbf{Q} j_0(QX) \left[ \frac{j_1(Z|\mathbf{Q}-\mathbf{q}|)}{Z|\mathbf{Q}-\mathbf{q}|} \right] = \frac{2\pi^2}{Z^3} j_0(qX) \times \Theta(Z-X),$$

con  $\Theta(Z-X)$  la función escalón. La integral sobre  $Z$  puede ser evaluada fácilmente y además, si usamos que  $g_\infty \rightarrow t$ , obtenemos

$$U_1 = -4\pi \int_0^\infty Z^2 dZ j_0(qZ) \rho(Z) \int d\mathbf{P} S_F(\mathbf{P}; Z) [t(E) - g_Z^{(0)}(E)], \quad (2.41)$$

donde cambiamos  $X \rightarrow Z$ .

La integral del término  $t(E)$  lleva trivialmente a  $U_0$ , mientras que en la que participa  $g_Z$  lleva a la expresión para el potencial ABL  $U_{ABL}$ . Es decir  $U_1 \rightarrow -U_0 + U_{ABL}$  con

$$U_{ABL} = 4\pi \int_0^\infty Z^2 dZ j_0(qZ) \rho(Z) \langle g_Z^{(0)} \rangle, \quad (2.42)$$

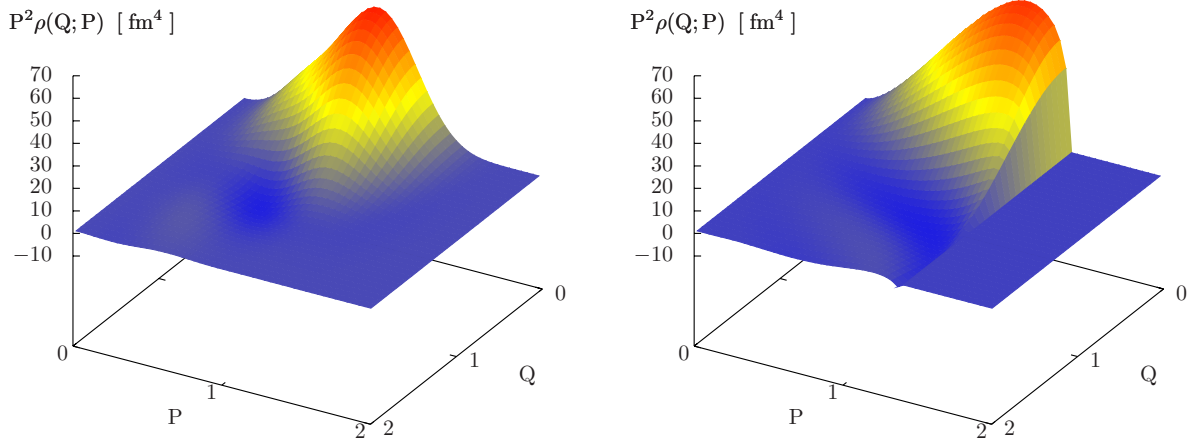
donde  $\langle g_Z^{(0)} \rangle$  denota la integral del movimiento de Fermi

$$\langle g_Z^{(0)} \rangle = \int d\mathbf{P} S_F(\mathbf{P}; Z) g_Z[\mathbf{K}_\parallel; \frac{1}{2}(\mathbf{K} - \mathbf{P} - \mathbf{q}), \frac{1}{2}(\mathbf{K} - \mathbf{P} + \mathbf{q})],$$

Debido a que ambos esquemas son equivalentes, salvo su tratamiento de la densidad del estado base del núcleo, este resultado nos permitirá evaluar la importancia de la incorporación de la densidad total (FMD) en los cálculos. Para tener una idea de la magnitud de los cambios introducidos en el potencial resulta útil evaluar el grado de discrepancia presentado por ambas representaciones de la densidad.

En la Fig. (2.3) se grafican las superficies de nivel de la función  $P^2\rho(\mathbf{Q}; \mathbf{P})$  usando la densidad de neutrones de  $^{90}\text{Zr}$  para  $\mathbf{P}$  paralelo a  $\mathbf{Q}$ . En el marco izquierdo se presenta la FMD mientras que en el derecho la aproximación de Slater. Las diferencias entre ambas representaciones tienen una magnitud moderada en comparación a la densidad total, lo que se condice con el relativo éxito que obtiene ABL en la descripción de los observables.

Aún así, hay características claramente diferentes, en particular la dependencia en  $\mathbf{P}$  basado en la aproximación de Slater muestra que  $\rho(\mathbf{P}; \mathbf{Q})$  es estrictamente nulo desde un cierto valor en adelante, comportamiento que no se da en la FMD. Esto genera una diferencia apreciable en el volumen total, que en este caso llega al 15 % en la distribución de protones y cerca de un 10 % para los neutrones. En general, encontramos que este resultado se repite para otros núcleos, variando el porcentaje de discrepancia entre 10 y 20 %. Estos efectos han sido estudiados previamente en el contexto de la matriz  $t$  libre [29]. Su extensión a interacciones dependientes del medio es uno de los objetivos de este trabajo de tesis.



**Figura 2.3:** Superficie de nivel para la densidades de neutrones de  $^{90}\text{Zr}$ , en sus formas completas (izquierda) y utilizando la aproximación de Slater (derecha), para  $\mathbf{P}$  paralelo a  $\mathbf{Q}$ .

Otro punto importante es que a energías bajas se espera que la interacción efectiva sea más sensible a los cambios del vector  $\mathbf{P}$ . Esto podría traducirse en la necesidad de dar cuenta con mayor precisión de las características del núcleo en espacio de momentum, lo que haría que esta diferencia pudiera cobrar una mayor importancia. Adicionalmente existe una clara ventaja al utilizar la FMD al decaer exponencialmente en  $\mathbf{Q}$ , mientras que para Slater solo se tiene un decaimiento del tipo  $\sim 1/Q^2$ . Esta característica, que si bien es cierto no será aprovechada del todo aquí, podría resultar clave en trabajos que se aparten de la aproximación de conservación de momentum, ya que será el único término que mantenga la convergencia en  $\mathbf{Q}$ , permitiendo así la evaluación del potencial.

### 2.3.2. El problema del Deuterón

En el transcurso de este trabajo, particularmente en colisiones a energías bajo los 50 MeV, nos encontramos con una dificultad previsible pero compleja de tratar. El modelo de la matriz  $g$  para la interacción considera la interacción entre dos cuerpos en medio nuclear infinito de cierta densidad local. En dicho escenario, la creación de un estado ligado entre un protón y un neutrón es posible, particularmente para proyectiles a bajas energías. La presencia del polo del deuterón dentro de los rangos contemplados, introduce una singularidad en la matriz  $g$ .

La Ec. (2.29), para la interacción efectiva  $g_Z$  es resuelta según Ref. [11]. Aquí en-

contramos que el parámetro  $\omega$  esta dado por

$$\omega = E + \varepsilon_\alpha , \quad (2.43)$$

donde  $\varepsilon_\alpha$  es la energía de ligazón de la capa correspondiente del blanco. En nuestros cálculos tomaremos  $\omega = E + \bar{\varepsilon}$ , con  $\bar{\varepsilon}$  el promedio de las energías de los estados de una partícula dentro del núcleo.

Adicionalmente, expresando el denominador del propagador en la Ec. (2.29) en términos de los campos autoconsistentes obtenemos

$$\omega - \frac{K_{\parallel}^2}{4m} - \frac{q^2}{2\mu} - \text{Re} \left[ U_{nm} \left( \frac{1}{2}K_{\parallel} + q, k_F \right) + U_{nm} \left( \frac{1}{2}K_{\parallel} - q, k_F \right) \right] + i0^+ , \quad (2.44)$$

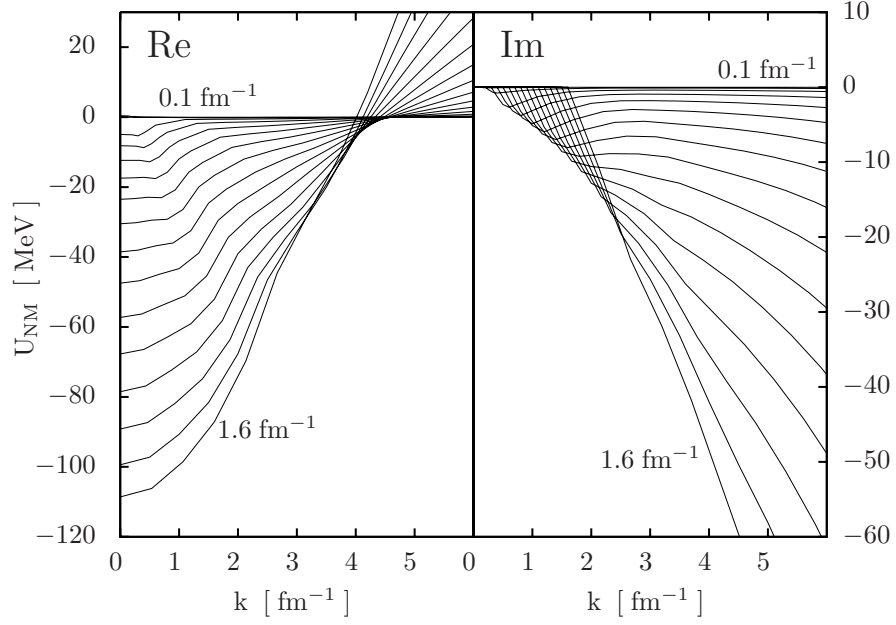
donde  $K_{\parallel}$  es el momentum del par interactuante,  $q$  su momentum relativo y  $\mu$  la masa reducida del par NN. Además  $U_{nm}$  corresponde a los campos autoconsistentes evaluados en un momentum de Fermi  $k_F$  ilustrados en la Fig. (2.4) . Así identificamos la energía del c.m. como  $E_{cm} = \omega - \frac{K_{\parallel}^2}{4m}$ . En el caso  $k_F = 0$ , cuando esta energía se iguala a la energía de ligazón del deuterón (cerca de -2.2 MeV) las interacciones efectivas pasan por un polo asociado al estado ligado, lo que imposibilita su cálculo computacional directo. Su tratamiento exige regularizar esta contribución.

Esta característica de la matriz  $g$  es tratada satisfactoriamente en el marco de ABL mediante una descomposición espectral de la matriz que aísla la energía del deuterón y la trata separadamente [30]. Tal tratamiento no es extensible fácilmente al esquema  $\delta g$  ya que en este último utilizamos la derivada de los elementos de matriz. Por esto, dejamos el tratamiento detallado de estos efectos para trabajos posteriores, pues aunque podría introducir cambios importantes, ello escapa a los objetivos de esta tesis.

Para evitar el paso por el polo del deuterón, en los cálculos presentados en este trabajo limitaremos las dependencias vectoriales más allá de la aproximación. de conservación de momentum. Así restringimos la dependencia de  $\mathbf{K}_{\parallel}$  en  $\mathbf{P}$

$$\mathbf{K}_{\parallel} = \mathbf{K} + \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{K}_0 \quad (2.45)$$

donde  $K_0$  es momentum del proyectil en el c.m. del sistema nucleón-núcleo. Con esto se da cuenta de los términos más significativos de la interacción sin necesidad de regularizarla. Este esquema fue cotejado contra otras prescripciones más completas para cálculos de potenciales ABL arrojando resultados similares, por lo que estimamos que los errores inducidos por esta simplificación siguen siendo pequeños y no afectan mayormente los resultados obtenidos.



**Figura 2.4:** Partes real (izquierda) e imaginaria (derecha) de los campos autoconsistentes para distintos momentums de Fermi  $k_F$ , calculados usando el potencial de París.

La simplificación anterior nos permite explorar rangos de energía desde 30 MeV hacia arriba. Para energías menores los efectos del deuterón se hacen notar en los observables debido a la cercanía de las variables vectoriales a este polo. Debido a esto escogemos esta energía como una cota inferior a la que podremos acceder.

## 2.4. El término dependiente del medio: $U_1$

En esta sección examinaremos más a fondo la estructura y propiedades del potencial  $U_1$ , que resume la información del medio en el potencial óptico. A fin de ilustrar las características importantes, estudiaremos el scattering de un protón por un núcleo.

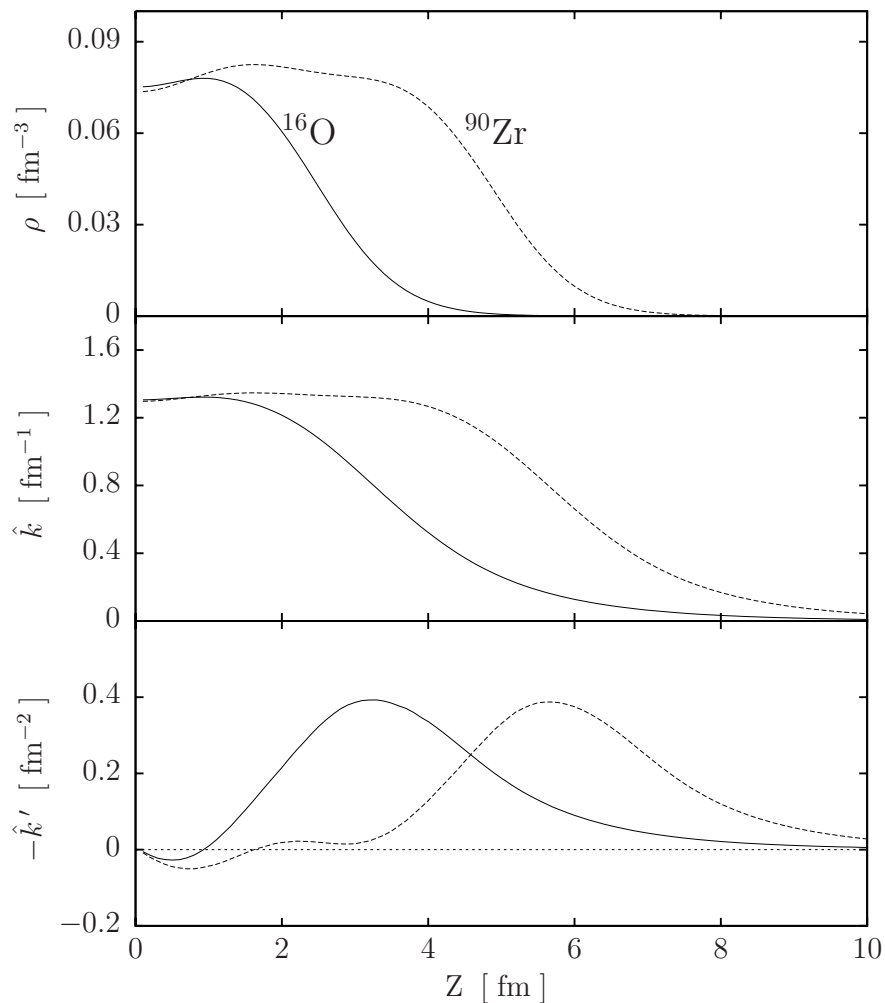
La dependencia de  $g$  en  $Z$  está dada a través del momentum de Fermi, el que a su vez depende de la densidad iso-escalar (2.30 y 2.28). Por tanto podemos escribir

$$\frac{\partial g}{\partial Z} = \left( \frac{\partial g}{\partial k_F} \right) \Big|_{k_F = \hat{k}(Z)} \hat{k}'(Z), \quad (2.46)$$

con

$$\hat{k}'(Z) = \frac{\hat{k}(Z)}{3} \frac{\partial \ln \rho}{\partial Z},$$

vemos claramente que  $U_1$  depende de  $\delta g \equiv \partial g / \partial k_F$  y de  $\hat{k}'_F$ .

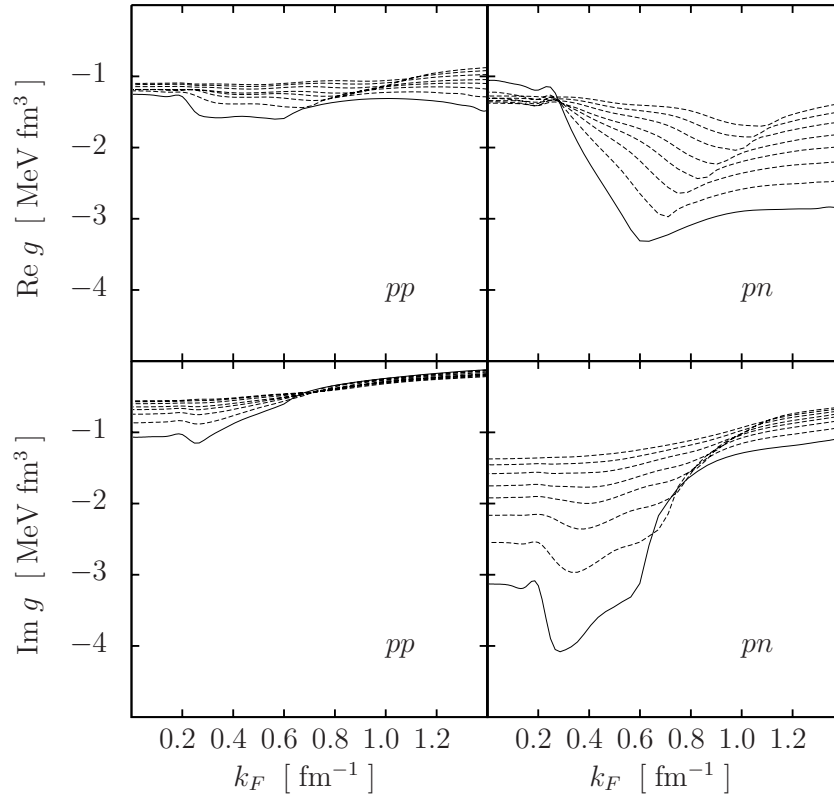


**Figura 2.5:** Dependencia radial de la densidad (marco superior), momento de Fermi local (marco intermedio) y (menos) su derivada (marco inferior) para  $^{16}\text{O}$  y  $^{90}\text{Zr}$ .

En la Fig. (2.5) graficamos la dependencia radial de la densidad  $\rho(Z)$  (marco superior), junto con el momento de Fermi local correspondiente  $\hat{k}(Z)$  (marco intermedio), y la derivada radial (multiplicada por menos uno)  $-\hat{k}'(Z)$  (marco inferior), para  $^{16}\text{O}$  (líneas continuas) y  $^{90}\text{Zr}$  (líneas segmentadas).

La última de ellas exhibe un máximo marcado cerca a los 3 y 6 fm en cada caso, lo

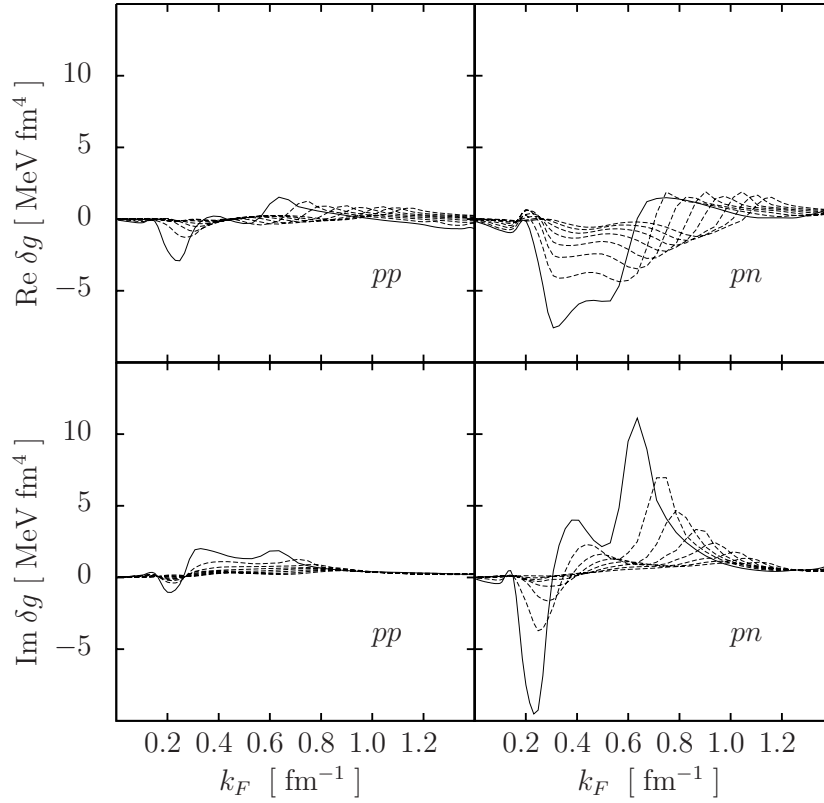
que corresponde a  $\hat{k} \approx 0.6 \text{ fm}^{-1}$ , esto es en la superficie del núcleo. El ancho de los picos es de  $\sim 3 \text{ fm}$ . Este región será la responsable de la mayor contribución a  $U_1$ . Ello permite identificar el intervalo de mayor incidencia en la coordenada  $Z$ , donde el peso de cada contribución estará dictado por la derivada  $\partial g / \partial k_F$ , que depende de la energía  $E$  del proyectil.



**Figura 2.6:** Parte real (arriba) e imaginaria (abajo) de los componentes de la amplitud de la matriz  $g$  en la dirección frontal para los canales  $pp$  (izquierda) y  $pn$  (derecha) como función del momentum de Fermi. Ver el texto para referencias sobre las curvas.

Para tener una idea más clara sobre este punto, en la Fig.(2.6) graficamos las partes reales (marcos superiores) e imaginarias (marcos inferiores) de las amplitudes frontales (*forward*) de la matriz  $g$ , para los canales  $pp$  (marcos izquierdos) y  $pn$  (marcos derechos) como función del momentum de Fermi  $k_F$ . Con frontal nos referimos a los elementos en la capa de energía que satisfacen (vectorialmente)  $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$ , donde  $k = \sqrt{2mE}$ . Las curvas corresponden a diferentes energías del haz de protones, comenzando a 30 MeV (línea continua) hasta 100 MeV, en pasos de 10 MeV (líneas segmentadas).

De esta figura resulta evidente que el acoplamiento en el canal  $pp$  es mucho más dé-



**Figura 2.7:** Igual a la Fig.(2.6) pero para  $\delta g \equiv \partial g / \partial k_F$ .

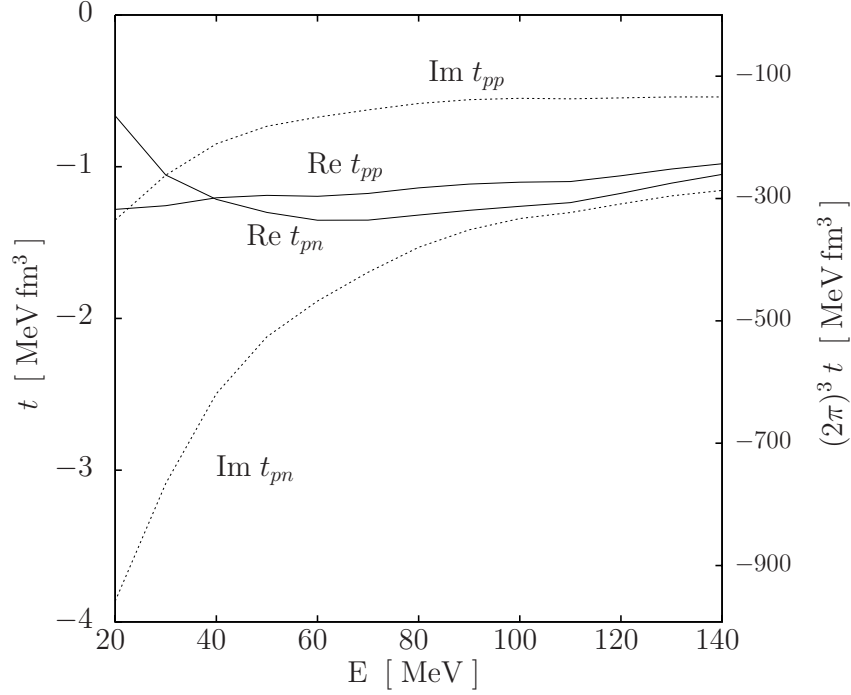
bil que el del canal  $pn$ . En ambos casos la amplitud decrece con la energía. Aun más, las variaciones en la amplitud con respecto a  $k_F$  son más pronunciadas en el caso  $pn$  lo que conlleva un mayor aporte total a  $U_1$ . Esta situación queda representada en la Fig. (2.7), donde se muestra la derivada de la amplitud de  $g$  con respecto a  $k_F$ ,  $\delta g$ , usando convenciones idénticas a las usadas en la Fig. (2.6).

La característica más importante que se observa es la asimetría de las magnitudes, significativamente mayor para el canal  $pn$  que para el  $pp$ , sugiriendo una mayor sensibilidad a la distribución de neutrones cuando se usan como proyectil protones. Esta sensibilidad podría ser útil en el estudio de distribuciones de neutrones, un área de mucho interés en el estudio de núcleos exóticos.

Si nos fijamos en la parte real del acoplamiento  $pn$ , podemos observar que existe una mayor atracción en la región comprendida entre  $0.2 \text{ fm}^{-1} \lesssim k_F \lesssim 0.6 \text{ fm}^{-1}$ , en otras palabras, en la superficie nuclear. Esta característica disminuye con la energía. Así mismo, en la parte imaginaria encontramos que la superficie contribuye con la mayor absorción,



disminuyendo hacia el interior ( $k_F \gtrsim 0.6 \text{ fm}^{-1}$ ).



**Figura 2.8:** Elementos en la capa de energía, frontal, de la matriz  $t$  como función de la energía. Las líneas continua y segmentada corresponden a las amplitudes reales e imaginarias, respectivamente.

Las anteriores contribuciones corresponden a tan sólo una parte del potencial *i.e.* a  $U_1$ , mientras que la contribución dominante proviene del término  $U_0$ , que depende directamente de la matriz  $t$ . Para poner las observaciones en perspectiva graficamos en la Fig. (2.8) los elementos en la capa de energía, en la dirección frontal, como función de la energía  $E$ .

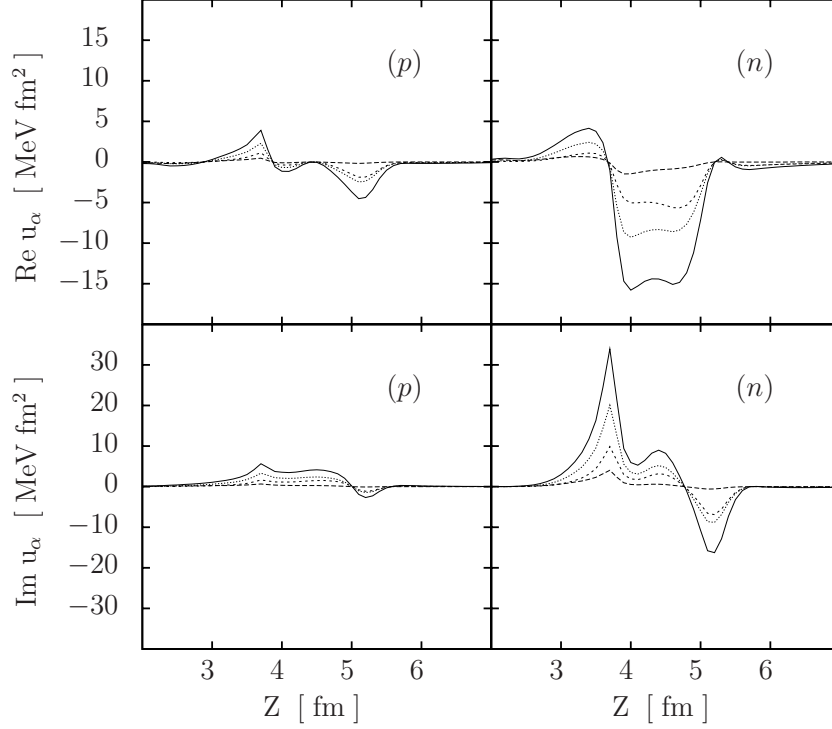
Aquí, las líneas continuas y segmentadas corresponden a las amplitudes reales e imaginarias, respectivamente. El eje derecho está escalado a  $(2\pi)^3 t$  para facilitar su comparación con otras convenciones de normalización. En esta figura apreciamos como la parte de absorción de la componente  $pn$  exhibe una mayor dependencia en la energía, convirtiéndose en la contribución dominante para energías  $\lesssim 80 \text{ MeV}$ .

Para estimar la importancia relativa de  $U_1(\mathbf{k}', \mathbf{k})$  con respecto a  $U_0(\mathbf{k}', \mathbf{k})$  es útil introducir la función radial  $u_\alpha$

$$u_\alpha(Z, \mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{Z^3}{2\pi^2} \int d\mathbf{P} \Omega_\alpha(\mathbf{q}, \mathbf{P}; Z) \frac{\partial g_Z^{(0)}}{\partial Z}, \quad (2.47)$$

de forma que

$$U_1 = \sum_{\alpha} \int_0^{\infty} u_{\alpha}(Z) dZ .$$



**Figura 2.9:** Comportamiento radial de  $u_{\alpha}$  para el acoplamiento  $pp$  (izquierda) y  $pn$  (derecha). Notar que  $\sum_{\alpha} \int u_{\alpha}^{(p,n)}(Z) dZ = U_1^{(p,n)}$ . En el texto se encuentran detalladas las referencias de las las curvas.

En la Fig.(2.9) graficamos las partes real (marcos superiores) e imaginaria (marcos inferiores) de  $u_{\alpha}(Z)$  para  $^{16}\text{O}$  a 30 MeV, evaluadas en  $q = 0$ . Las curvas segmentadas corresponden a las contribuciones de las capas  $1p_{3/2}$  (línea punteada),  $1p_{1/2}$  (línea segmentada) y  $1s_{1/2}$  (línea segmentada larga), mientras que la línea continua representa la suma  $\sum_{\alpha} u_{\alpha}^{(p,n)}$ . Las etiquetas  $(p)$  y  $(n)$  simbolizan las contribuciones de  $\langle \hat{\rho}_p \delta g_{pp} \rangle$  proveniente de la densidad de protones, y de  $\langle \hat{\rho}_n \delta g_{pn} \rangle$ , la debida a los neutrones. Para una mejor presentación la escala de la parte  $Im u_{\alpha}$  dobla a la escala usada para  $Re u_{\alpha}$ .

Esta figura evidencia claramente que la contribución del medio, dada por  $\delta g$ , se manifiesta en la superficie nuclear, estando confinada a la región entre 3 fm y 5.5 fm, con una dominación manifiesta de la distribución de neutrones por sobre la de protones. El término

$Re u_\alpha^{(n)}$  incrementa la atracción provista por el término de mayor contribución  $U_0$ . Podemos estimar este incremento considerando el ancho  $\sim 1.5$  fm y profundidad  $\sim 15$  MeV fm<sup>2</sup>. Por lo tanto el área bajo la curva es gruesamente  $Re U_1^{(n)} \sim -23$  MeV fm<sup>3</sup>. Esto debe ser comparado con  $U_0^{(n)} \approx 8 \times Re t_{pn} \sim -10$  MeV fm<sup>3</sup>, como puede ser leído de la Fig.(2.8). Esta estimación evidencia la importancia de  $\delta g_{pn}$  en la parte real del potencial óptico.

En contraste, la contribución de la parte imaginara aportada por la distribución de neutrones en  $Im U_1$ , es considerablemente menor a la del término libre:  $Im U_0^{(n)} \approx 8 \times Im t_{pn} \sim -24$  MeV fm<sup>3</sup>, esto debido a su estructura oscilante. El alcance de estas características en procesos de colisiones debe ser determinada examinando los observables de scattering obtenidos usando estos potenciales ópticos. Podemos anticipar que estos potenciales serán especialmente sensibles a la descripción del núcleo en su superficie, específicamente a las capas periféricas que concentran la mayor amplitud, haciendo de este un resultado útil para el estudio de modelos de capas en la descripción del núcleo, ayudado por la gran selectividad de la interacción por el canal  $pn$ .

## 3. Implementación

Como vimos en la sección anterior, el cálculo del potencial óptico en el esquema  $\delta g$ , nos lleva a evaluación numérica de una integral en siete dimensiones. El lograrlo en un tiempo computacional razonable manteniendo la precisión numérica requerida constituye una restricción importante. En este capítulo revisaremos las estrategias utilizadas en el tratamiento computacional y la convergencia numérica de los resultados obtenidos.

El primer término del potencial, es decir  $U_0$ , supone un cálculo estándar hoy en día cuyos detalles han sido extensamente estudiados. Debido a esto nos concentraremos en el término dependiente del medio  $U_1$ . Reescribimos la Ec. (2.32) para  $U_1$

$$U_1(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty Z^3 dZ \int d\mathbf{P} \Omega(\mathbf{q}, \mathbf{P}; Z) \left( -\frac{\hat{k}(Z)}{3} \frac{\partial \ln \rho}{\partial Z} \right) \frac{\partial g}{\partial k_F} [\mathbf{K}_0; \mathbf{b}', \mathbf{b}] \Big|_{k_F = \hat{k}(Z)}, \quad (3.1)$$

donde

$$\Omega(\mathbf{q}, \mathbf{P}; Z) = \int d\mathbf{Q} \hat{\rho}(\mathbf{Q}; \mathbf{P}) \Phi_1(Z|\mathbf{Q} - \mathbf{q}|). \quad (3.2)$$

La integral en  $Z$  se lleva a cabo directamente utilizando el método de Simpson, con un paso de 0.1 fm y hasta 10 fm. La integración en  $\mathbf{P}$  se realiza con cuadraturas de Gauss-Legendre, tanto para la parte radial como para las angulares. Para la parte radial se toman 25 puntos entre 0 y un cierto  $P_{max}$  dado por el momentum para el cual la amplitud de  $\hat{\rho}(\mathbf{Q}; \mathbf{P})$  decae a un 1 % con respecto a su valor máximo. Para las partes angulares se usan 10 puntos en  $\theta_P$  y en  $\phi_P$ .

### 3.1. Cálculo de $\Omega$

La integral más interna, en  $\mathbf{Q}$ , debido a que depende de todas las variables del problema requiere una mayor atención. Esta integral comprende el producto  $\Phi_1(Z|\mathbf{Q} - \mathbf{q}|)\rho(\mathbf{Q}; \mathbf{P})$ . En general no se conoce de antemano una expresión analítica para las funciones de onda del estado base, lo que imposibilita la obtención de una forma cerrada para  $\Omega$  en términos de  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{P}$ .

La estrategia elegida para el cálculo eficiente de  $\Omega$  consiste en una descomposición multipolar de sus factores

$$\rho(\mathbf{Q}; \mathbf{P}) = \sum_l \left( \frac{2l+1}{4\pi} \right) P_l(\hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{Q}}) \rho_l(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = \sum_{l,m} \overline{Y}_l^m(\hat{\mathbf{P}}) \rho_l(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) Y_l^m(\hat{\mathbf{Q}}), \quad (3.3)$$

$$\Phi_1(Z, \mathbf{Q}, \mathbf{q}, u) = \sum_l \left( \frac{2l+1}{4\pi} \right) P_l(u) \gamma_l(Z, \mathbf{Q}, \mathbf{q}) = \sum_{l,m} \overline{Y}_l^m(\hat{\mathbf{Q}}) \gamma_l(Z, \mathbf{Q}, \mathbf{q}) Y_l^m(\hat{\mathbf{q}}), \quad (3.4)$$

donde  $u = \hat{\mathbf{Q}} \cdot \hat{\mathbf{q}}$ , el coseno del ángulo entre los vectores  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{q}$ . De esta forma, usando la propiedad de ortogonalidad de los esféricos armónicos ( $Y_l^m$ ) y el hecho de que su suma en  $m$  se relaciona con los polinomios de Legendre, obtenemos una expresión de más fácil manejo computacional

$$\begin{aligned} \Omega(\mathbf{q}, \mathbf{P}; Z) &= \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{2l+1}{4\pi} \right) P_l(\hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{q}}) \Omega_l(\mathbf{q}, \mathbf{P}; Z) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{2l+1}{4\pi} \right) P_l(\hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{q}}) \int Q^2 dQ \rho_l(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \gamma_l(Z, \mathbf{Q}, \mathbf{q}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

La ventaja de esta forma es que nos resta por evaluar una integral radial, que es directa, y hemos cambiado las integrales angulares por una sumatoria que precisa de pocos términos para su evaluación debido a que los coeficientes multipolares de la densidad decaen rápidamente, privilegiando fuertemente los términos pares. Esto último se obtiene del hecho que para descripciones del estado base del núcleo cuya parte radial no depende de la proyección en  $z$  del momentum angular, la densidad  $\rho(\mathbf{p}', \mathbf{p})$  puede ser escrita como una función real. Con esto, haciendo uso de la definición (2.33) para la FMD

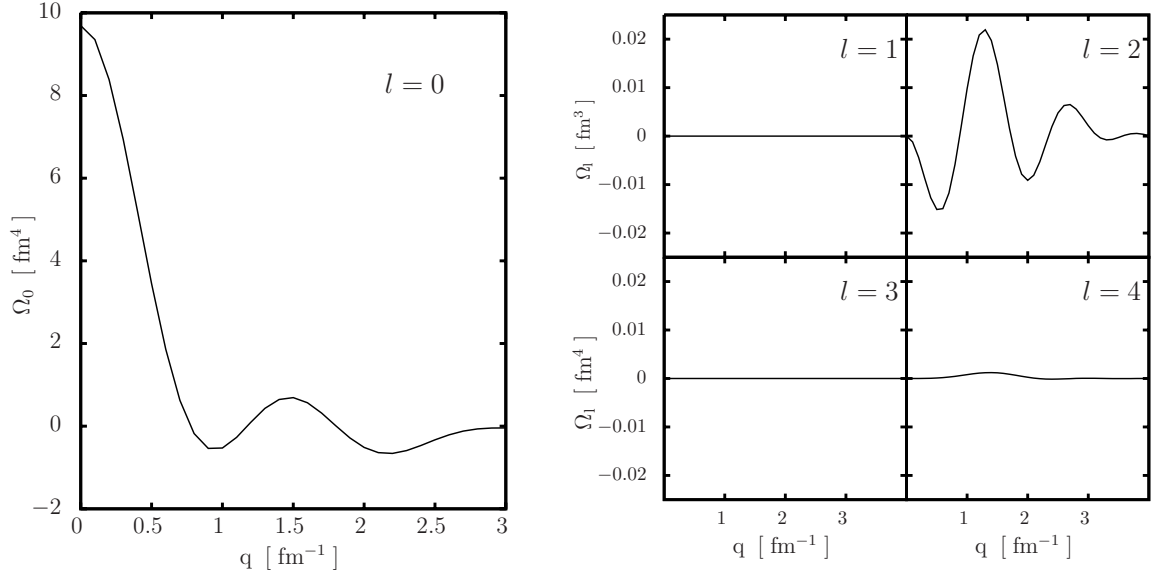
$$\rho(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \rho^*(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \rho(\mathbf{p}, \mathbf{p}'), \quad (3.6)$$

lo que se traduce en que  $\rho(\mathbf{Q}; \mathbf{P}) = \rho(-\mathbf{Q}; \mathbf{P})$ , por lo tanto  $\rho_l(\mathbf{Q}; \mathbf{P}) = (-1)^l \rho_l(\mathbf{Q}; \mathbf{P})$ , debido a la paridad de los polinomios de Legendre. Claramente  $\rho_l = 0$  para  $l$  impar.

En la Fig. (3.1) se observan los gráficos de  $\Omega_l$  en función de  $\mathbf{q}$  para  $l = 0, 1, 2, 3, 4$  usando la densidad de protones de  $^{90}\text{Zr}$ , tomando  $Z = 6$  fm (cerca del máximo de  $k'(Z)$ ) y  $P = 0,3 \text{ fm}^{-1}$  (máximo de la FMD). Se observa que las contribuciones de multipolos impares es prácticamente inexistente, al igual que para los  $l$  mayores a 2. Debido a esto la serie para  $\Omega$  incorpora sólo los términos con  $l = 0, 2$ .

## 3.2. Convergencia a ABL

El cálculo de la *integral*  $\delta g$  conlleva una serie de consideraciones computacionales por lo que resulta crucial contar con una herramienta capaz de estimar el error en su evaluación. En particular la manipulación de  $\partial g / \partial Z$  se lleva a cabo calculando la interacción



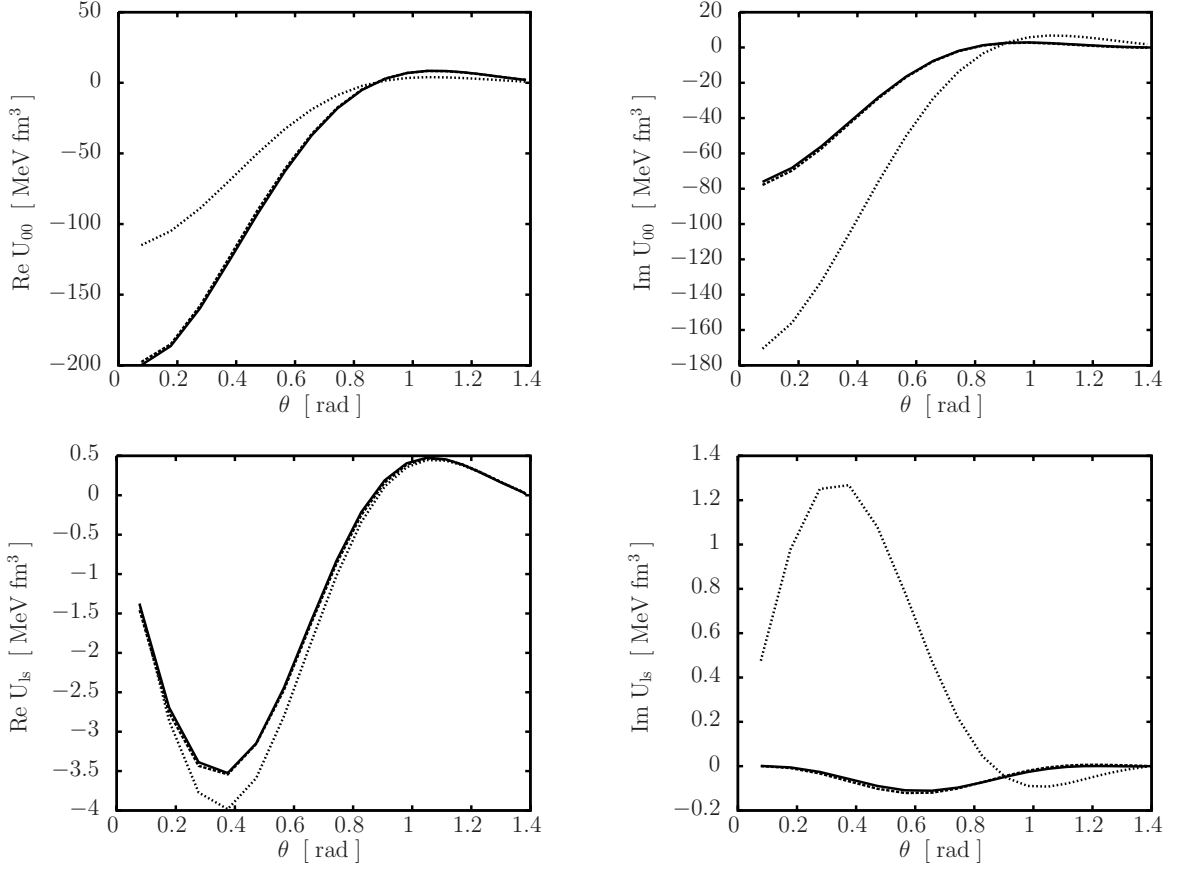
**Figura 3.1:** Gráficos de  $\Omega_l$  en función de  $q$ , para los  $l$  indicados.

efectiva  $g_Z$  para distintos valores de la densidad. El uso de funciones *splines* permite su evaluación en la coordenada media correspondiente.

Verificaremos numéricamente la reproducción de ABL cuando  $\rho(\mathbf{Q}; \mathbf{P})$  es reemplazado por su aproximación de Slater. El nivel de concordancia numérica entre  $U_{ABL}$  y  $U_0 + U_1$  usando esta aproximación será un indicador de qué tan satisfactoria es la evaluación de  $\delta g$ .

En la Fig. (3.2) se muestran los elementos en la capa de energía de los potenciales ópticos obtenidos en tres esquemas a una energía de 40 MeV. En línea punteada se representa  $U_0(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ , es decir el potencial *full-folding* basado en la matriz  $t$  libre. En línea segmentada se presenta  $U_{ABL}$ , utilizando la matriz  $g$ . Finalmente, en línea continua, el potencial  $U_0 + U_1$  usando la aproximación de Slater para  $\hat{\rho}(\mathbf{Q}; \mathbf{P})$ . Se observa que al realizar la sustitución de la FMD por su aproximación de Slater en el esquema  $\delta g$  los potenciales tienden a  $U_{ABL}$ . Tanto las partes reales (superior) como las imaginarias (inferior) tienen un muy buen nivel de concordancia, lo que evidencia una buena consistencia numérica.

Además de esta prueba, el código fue sometido a diversos test de convergencia para todas las variables del problema lo que nos da confianza en que los resultados obtenidos son numéricamente robustos.



**Figura 3.2:** Se muestran las componentes reales (izquierda) e imaginarias (derecha) del potencial óptico para las tres versiones mencionadas:  $U_0$  (línea punteada),  $U_{ABL}$  (segmentada) y  $U_0 + U_1^{(SI)}$  (continua). En la parte superior se ubica la parte central y en la inferior el acoplamiento spin-órbita.

### 3.3. Aproximación de conservación de momentum: Revisión Numérica

Un paso esencial para el desacoplamiento de  $\Omega_l$  con  $\delta g$  fue la utilización de la aproximación de conservación de momentum. Esto es lo único que nos separa del cálculo del potencial completo (o *unabridged*) (2.27b). Sin embargo, un análisis de la dependencia de  $g$  en el momentum relativo  $Q$  no sólo nos ayudará a establecer la validez de esta aproximación, si no que además puede anticipar qué esperar del cálculo completo del potencial. Con este fin examinamos la integral  $\int dQ \delta g_Z(Q^*) \Phi_1(Z|Q - q|) \rho(Q; P)$ .

En el marco de los cálculos del potencial ABL, la MCA surge del hecho que  $g_Z$  tiene una dependencia débil en  $Q$ . Por otro lado, en el esquema  $\delta g$ , la presencia de la función

$\Phi_1(Z|Q - q|)$ , que posee un pico marcado en 0, justifica tomar  $Q \rightarrow q$  en  $g_Z$ . En un intento de retener contribuciones de orden superior podemos expandir  $g$  en torno a un  $Q \rightarrow Q^*$  apropiado. Por ejemplo, podemos intentar escribir la integral

$$\begin{aligned} \int dQ \delta_{g_Z}(Q) \Phi_1(Z|Q - q|) \rho(Q; P) &= \delta_{g_Z|Q^*} \int dQ \Phi_1(Z|Q - q|) \rho(Q; P) \\ &+ \nabla_Q \delta_{g_Z|Q^*} \cdot \int dQ (Q^* - Q) \Phi_1(Z|Q - q|) \rho(Q; P) \\ &+ \frac{1}{2} \int dQ (Q^* - Q) \cdot [(Q^* - Q) \cdot \nabla_Q \nabla_Q \delta_{g_Z|Q^*}] \Phi_1(Z|Q - q|) \rho(Q; P) \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (3.7)$$

Escogemos  $Q^*$  de tal modo que anule al término de primer orden, lo que garantiza la validez de la aproximación hasta segundo orden. Así

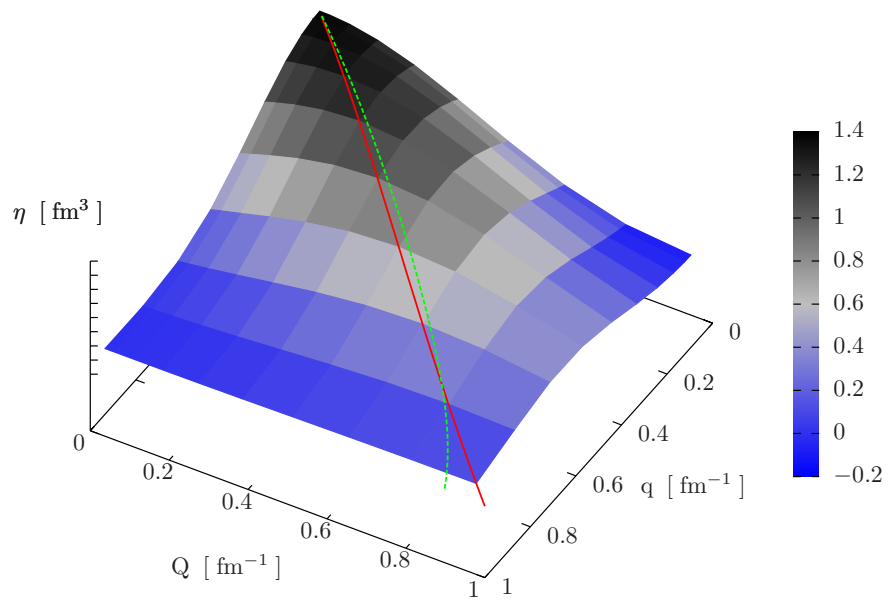
$$Q^* = \frac{\int dQ Q \Phi_1(Z|Q - q|) \rho(Q; P)}{\int dQ \Phi_1(Z|Q - q|) \rho(Q; P)}. \quad (3.8)$$

Debido a que  $\Phi_1(Z|Q - q|) \rho(Q; P)$  no es una buena distribución, pues se hace negativa, la expresión (3.8) no será válida en todo el dominio. En particular, en los puntos donde su integral se anula, la aproximación carecerá de validez pues se necesitará tomar en consideración los términos de orden superior.

En la Fig. (3.3) se muestra una superficie de nivel de  $\eta(Q, q) = \Phi_1(Z|Q - q|) \rho(Q; P)$  para  $^{90}\text{Zr}$  en  $Z = 6$  fm,  $P = 0$ . Además tomamos  $P$ ,  $Q$  y  $q$  paralelos. Sobre ella se representan las dos prescripciones estudiadas,  $Q = q$ , y  $Q = Q^*$ . De aquí se desprende que la elección de conservación de momentum total sigue siendo una aproximación razonable, al evaluar la integral en puntos cercanos a los encontrados por el método descrito.

Otra visión alternativa para esta aproximación es mantener la evaluación de  $\eta(Q, q)$  en  $Q = 0$ , para el cual se encuentra el máximo de la densidad. Estas alternativas fueron exploradas, encontrando sólo pequeñas variaciones a los resultados de los observables de scattering. Esto ratifica que la dependencia de  $g$  en  $Q$  es baja y por esto elegimos mantener la MCA como el estándar usado. Finalmente cabe recalcar que sólo la evaluación del potencial en su forma completa dará mayor claridad sobre si el efecto acumulado de esta dependencia juega un rol importante dentro del potencial total.





**Figura 3.3:** Superficie de  $\eta(Q, q)$  para los valores dados en el texto. La línea roja corresponde a la prescripción  $Q = q$ , mientras la verde a  $Q = Q^*$ .

## 4. Aplicaciones

En esta sección nos focalizamos en los observables de scattering elástico, principalmente en las secciones eficaces diferenciales obtenidas dentro de tres esquemas distintos. En cada aplicación consideramos las siguientes formas del potencial óptico:

- *Integral  $\delta g$* : Genera el potencial más completo de los tres. Aquí, la matriz densidad,  $\rho(\mathbf{Q}; \mathbf{P})$ , es expresada en términos de las funciones de onda de una partícula. Los efectos intrínsecos del medio nuclear son incluidos a través de la matriz  $g$ , antisimetrizada y fuera de la capa de energía.
- *ABL*: Como vimos anteriormente, este esquema se basa en la aproximación de Slater para la densidad mezclada  $\rho(\mathbf{Q}; \mathbf{P})$ . La comparación con ABL nos permite dimensionar la importancia de un tratamiento detallado de  $\rho(\mathbf{Q}; \mathbf{P})$  en la descripción de los observables.
- *Integral  $t$* : Aquí la matriz  $t$  libre es usada para representar la interacción efectiva, mientras se da cuenta del estado base mediante  $\rho(\mathbf{Q}; \mathbf{P})$  expresado en término de las funciones de onda. Este potencial corresponde al término  $U_0$ , lo que permitirá evaluar la importancia del término de medio  $U_1$ .

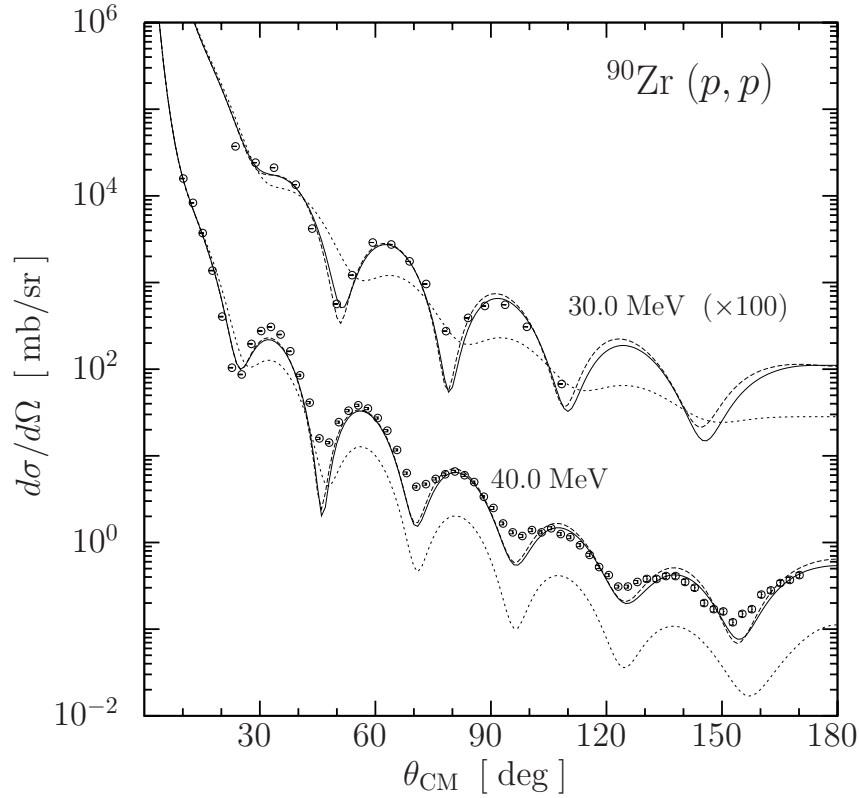
Todos los resultados presentados en este trabajo están basados en el potencial *NN* de París [31]. Aunque en este estudio probamos otros potenciales, se encontraron diferencias marginales en relación a los efectos del medio. Las matrices  $g$  correspondientes fueron calculadas para 30 momenta de Fermi, distribuidos uniformemente entre 0 y  $1.6 \text{ fm}^{-1}$ . Sin embargo, pruebas de convergencia ulteriores indican que 16 puntos conducen a resultados igualmente confiables. Adicionalmente los campos autoconsistentes fueron calculados previos a las corridas. Los detalles del cálculo computacional fueron dados en el Capítulo 3.

Como fue mencionado antes, los potenciales calculados resultan no locales, y son tratados como tales durante todo el proceso. Los observables de scattering son obtenidos resolviendo la ecuación de Schrödinger en presencia del término coulombiano.

## 4.1. Scattering Elástico

Investigamos el scattering elástico de protones por  $^{16}\text{O}$  y  $^{90}\text{Zr}$ , dos núcleos de doble capa cerrada relativamente bien conocidos. Además incluimos una aplicación sobre  $^{10}\text{Be}$  para ilustrar el uso de este esquema en un sistema mas pequeño, y por lo tanto de bastante interés en aplicaciones con isótopos exóticos como las descritas en las Refs.[16, 17, 18, 19, 20]

### 4.1.1. Colisión $p+^{90}\text{Zr}$

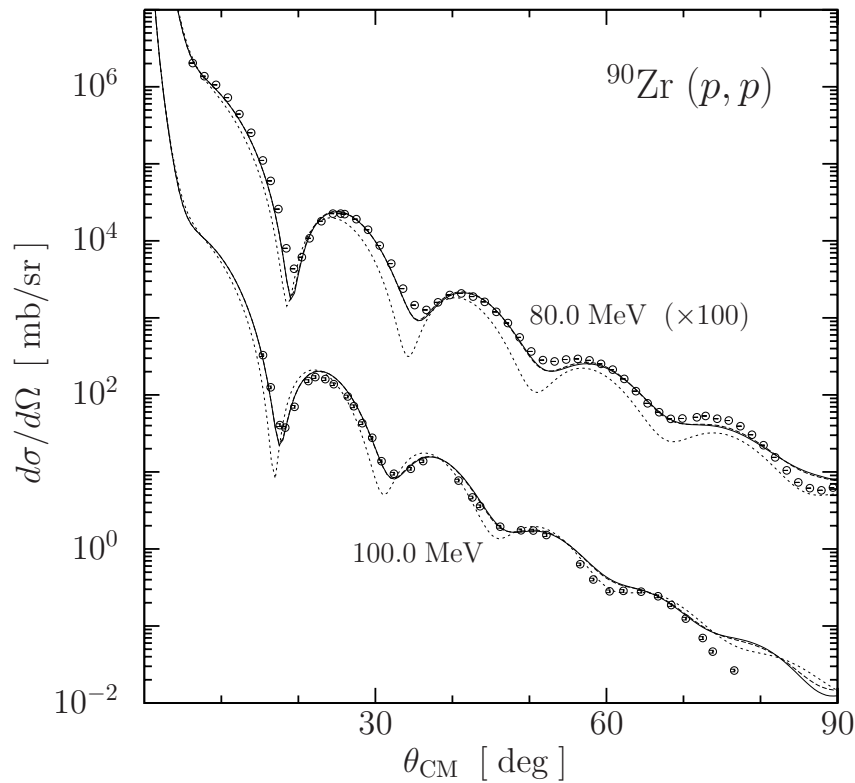


**Figura 4.1:** Sección eficaz diferencial, medida y calculada, para  $^{90}\text{Zr}(p,p)$  a 30.4 y 40 MeV. En el texto se encuentran las referencias a las curvas.

En la Fig. (4.1) se presentan las secciones eficaces diferenciales, medidas y calculadas, como función del ángulo de scattering en el centro de masas,  $\theta_{c.m.}$ , para el proceso  $^{90}\text{Zr}(p,p)$  a 30.4 y 40 MeV. Los datos experimentales fueron obtenidos de las Refs.[32] y [33] respectivamente. En ella, las líneas continuas corresponden a la *integral*  $\delta g$ , las segmentadas a ABL, y la punteada a la *integral*  $t$ . La FMD es construida a partir de funciones de onda de una partícula obtenidas por medio de cálculos tipo Hartree-Fock [34].

Los cálculos basados en la *integral*  $\delta g$  (línea continua) siguen razonablemente bien el patrón difractivo mostrado por los datos experimentales. Los máximos están en fase con las mediciones, aunque los mínimos difractivos tienden a mostrarse más pronunciados. Además encontramos que los resultados de ABL (línea segmentada) siguen muy de cerca a los de  $\delta g$ . Esto sugiere que dentro de la aproximación de conservación de momentum, ABL es una muy buena representación de  $\delta g$  desde el punto de vista de los resultados, aun cuando el tiempo computacional usado por el más completo es mucho mayor (unas 150 veces).

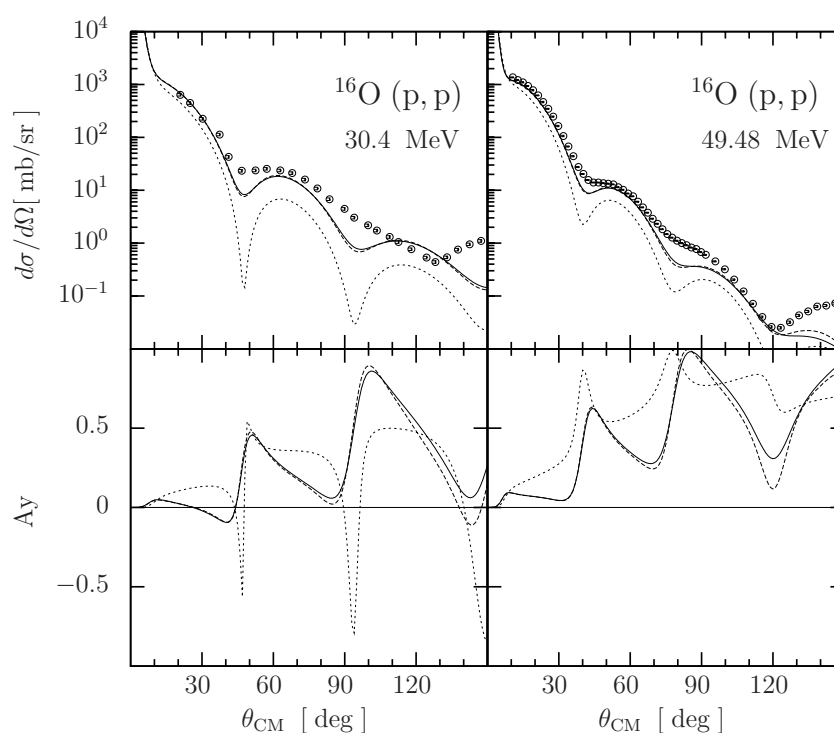
Los resultados basados en la matriz  $t$  libre (líneas punteadas) claramente carecen de la estructura mostrada por los datos. En particular, en ambos casos presentados aquí el primer mínimo difractivo ocurre a un ángulo mayor que los datos, sugiriendo un núcleo de menor tamaño. Esto indica que los efectos del medio aportados por  $U_1$ , localizados principalmente en la superficie nuclear, aportan el tamaño hadrónico del núcleo.



**Figura 4.2:** Sección eficaz diferencial, medida y calculada, para  $^{90}\text{Zr}(p,p)$  a 80 y 100 MeV. En el texto se encuentran las referencias a las curvas.

A medida que se incrementa la energía se espera que los efectos del medio sean menos relevantes en las colisiones. Esta característica se observa claramente en la Fig. (4.2), donde se muestran las secciones eficaces diferenciales, medidas y calculadas, para  $^{90}\text{Zr}$  a 80 y 100 MeV. Los datos experimentales fueron obtenidos de las Refs.[35] y [36] respectivamente. Las curvas siguen las mismas convenciones que en la Fig. (4.1). Podemos ver que la concordancia entre  $\delta g$  y los datos es bastante razonable a través de todo el rango de medición. Adicionalmente, se verifica que la diferencia entre los resultados de la matriz  $t$  y  $\delta g$  han disminuido considerablemente con respecto a los de los casos anteriores. Nuevamente la descripción dada por ABL es comparable a la entregada por  $\delta g$ .

#### 4.1.2. Colisión $p+^{16}\text{O}$ y $^{10}\text{Be}$



**Figura 4.3:** Secciones eficaces diferenciales, medidas y calculadas, para  $^{16}\text{O}(p,p)$  a 30.4 y 49.48 MeV (marco superior), y *analyzing power* (marco inferior). Ver el texto para las descripciones de las curvas.

En la Fig. (4.3) se muestran las secciones eficaces diferenciales (marco superior)

y *analyzing power*  $A_y$ <sup>1</sup> (marco inferior) para el scattering de protones sobre  $^{16}\text{O}$  a 30.4 y 49.48 MeV. Los datos de las secciones eficaces provienen de las Refs.[37] y [38] respectivamente. Apreciamos como la similitud entre ABL y  $\delta g$  se repite también para este caso, tanto en la sección eficaz diferencial como en el  $A_y$ . Así mismo el resultado de la matriz  $t$  libre se ajusta pobremente a los datos como es esperado. Este blanco más liviano evidencia mayores carencias en la descripción que el caso de  $^{90}\text{Zr}$ , particularmente en la profundidad del primer mínimo de la sección eficaz. Ambos esquemas,  $\delta g$  y ABL, fallan en dar cuenta del primer mínimo, bastante menos pronunciado en los datos que lo calculado. Además ambos esquemas dan cuenta de un segundo mínimo, cerca de  $80^\circ$  y  $90^\circ$  respectivamente, inexistente en las mediciones.

Realizamos varias pruebas de sensibilidad y consistencia de los resultados presentados, por ejemplo mediante el uso de funciones de onda de oscilador armónico constreñidas al mismo radio cuadrático medio. En dichos estudios obtuvimos prácticamente los mismo resultados para los observables. Con esto podemos concluir que la dependencia en el modelo específico para representar el estado base es pequeña, aun cuando no descartamos que para otros núcleos, como  $^{11}\text{Be}$  o  $^{11}\text{Li}$ , modelos más sofisticados capaces de reproducir estructuras exóticas -e.g. halos de neutrones- puedan aportar a una mejora en la descripción. Tales construcciones pudieran tener la particularidad de aportar elementos no nulos al gradiente de  $g_Z$  en regiones de la coordenada media  $Z$  que hasta ahora no han sido ponderadas.

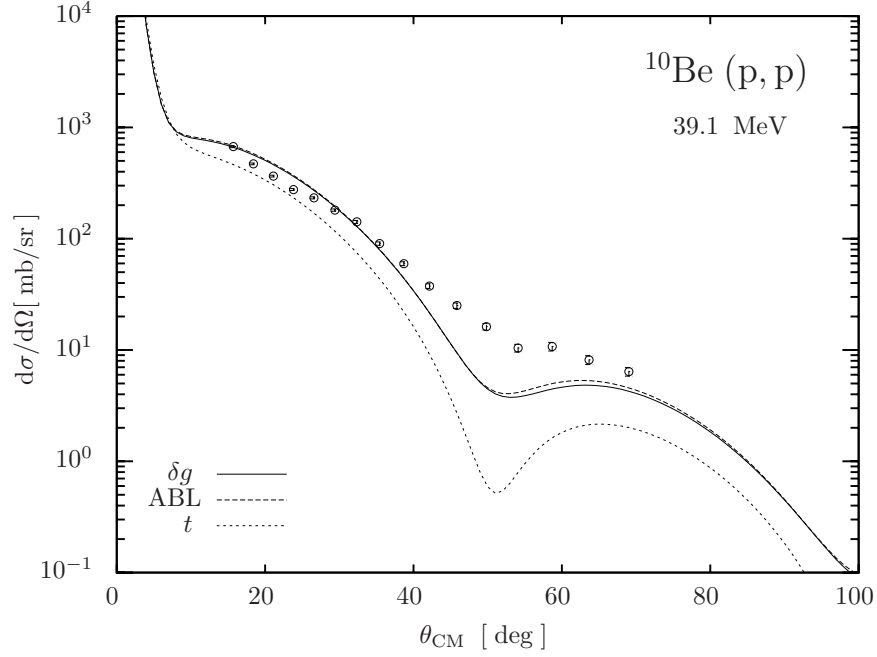
La deficiencia en la descripción de los mínimos difractivos en la sección eficaz es una característica común en los núcleos pequeños. En la Fig. (4.4) se muestran las mediciones y los cálculos de este observable usando las mismas convenciones en las curvas que en las figuras anteriores. Se vuelve a apreciar un primer mínimo más pronunciado que lo descrito por los experimentos, mientras la descripción para ángulos menores a  $40^\circ$  se ajusta de buena manera a los datos. El hecho de que esta deficiencia sea común a los esquemas ABL y  $\delta g$  y que no se presente en núcleos más grandes, como el  $^{90}\text{Zr}$ , sugiere que alguna de las aproximaciones falla o no se considerarán algunos efectos a bajas densidades. En particular podría deberse a la aproximación de conservación de momentum, que desliga a la interacción efectiva del momentum  $Q$ , lo que perjudica la descripción fuera de la dirección frontal. Otro posible punto a revisar es el modelo de interacción efectiva, que podría no incluir efectos relevantes a la interacción a bajas densidades. En esta misma línea, estimamos que la

---

<sup>1</sup>Definido por

$$A_y(\theta) = \frac{\sigma_+(\theta) - \sigma_-(\theta)}{\sigma_+(\theta) + \sigma_-(\theta)},$$

donde  $\sigma_\pm$  corresponde a la sección eficaz diferencial de *scattering* para un haz polarizado de nucleones, con el spin en la dirección  $\pm(\mathbf{k} \times \mathbf{k}')$ .



**Figura 4.4:** Sección eficaz diferencial, medida [39] y calculada, para  $^{10}\text{Be}(p,p)$  a 39.1.

suposición de una interacción esféricamente simétrica podría perder validez para núcleos livianos, pues los detalles de la estructura del núcleo comienzan a ganar importancia dado que se pierde la homogeneidad que se encuentra en los núcleos más pesados.

Aún con las preguntas planteadas, el esquema  $\delta g$  se muestra no solo como la descripción del potencial óptico microscópico más completo hasta ahora, si no que además permite indagar más detalladamente los roles que cada parte cumple en la resultante de la interacción  $NA$ .

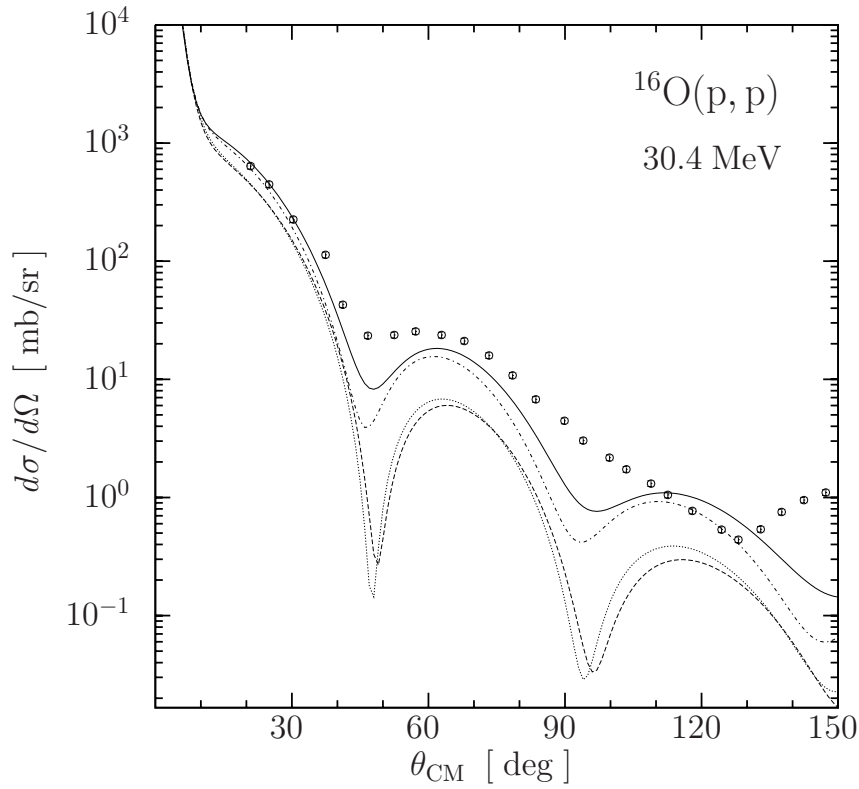
Una ilustración de este punto, es el considerar el aporte que realiza al potencial  $U_1$  el medio nuclear, tomando en forma separada las distribuciones de neutrones y protones. Digamos

$$U_1 = U_1^{(n)} + U_1^{(p)} \quad (4.1)$$

con

$$U_1^{(p,n)} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty Z^3 dZ \int d\mathbf{P} \int d\mathbf{Q} \hat{\rho}_{(p,n)}(\mathbf{Q}; \mathbf{P}) \Phi_1(Z|\mathbf{Q} - \mathbf{q}|) \left( -\frac{\partial g_Z^{(0)}}{\partial Z} \right), \quad (4.2)$$

donde  $\rho_{(p,n)}$  denota la distribución de protones o neutrones respectivamente.



**Figura 4.5:** Sección diferencial para  $\delta g$  (línea continua) y matriz  $t$  libre (línea punteada) para  $^{16}\text{O}(p,p)$  a 30.4 MeV. Los datos son de la referencia Ref.[37]. En el texto se encuentran las referencias a las curvas.

En la Fig. (4.5) examinamos tales contribuciones para la colisión  $^{16}\text{O}(p,p)$  a 30.4 MeV. La línea continua representa los resultados obtenidos usando  $\delta g$ , esto es  $U_0 + U_1$ , mientras la línea punteada los hace para la matriz  $t$  libre, o sea sólo el término  $U_0$ . La línea segmentada larga es el resultado de suprimir selectivamente la densidad de protones en la descripción, por lo tanto  $U_1 = U_1^{(n)}$ . Así mismo, la segmentada corta, corresponde a suprimir la densidad de neutrones, en este caso  $U_1 = U_1^{(p)}$ . Notamos que el rol de  $U_1^{(n)}$  es considerablemente mayor que el de  $U_1^{(p)}$ , lo que se pone de manifiesto al comparar las secciones eficaces. Suprimiendo  $U_1^{(n)}$  se obtienen resultados muy similares a los obtenidos con la matriz  $t$  libre, mientras que en el caso  $U_1 = U_1^{(n)}$  se aprecia una diferencia moderada con respecto a  $\delta g$ . Estas propiedades son consistentes con el análisis efectuado sobre  $u_\alpha(Z)$  en el Capítulo 2, lo que refuerza la importancia de la distribución de neutrones en el potencial óptico a bajas energías.



## 4.2. Reacciones de intercambio de carga

Otras aplicaciones que resultan interesantes de investigar son las reacciones de intercambio de carga, ya que nos permiten indagar en la física detrás de sistemas donde la componente isovectorial cobra importancia. Este es un ámbito que mantiene una deficiencia en la teoría, que resulta incapaz de explicar los observables de forma satisfactoria. Los trabajos que proveen una descripción razonable al fenómeno poseen una fuerte vertiente semi-fenomenológica evidenciando falta de entendimiento del proceso a nivel microscópico.

Un estudio riguroso de procesos de intercambio de carga, desde el punto de vista microscópico, ha sido presentado en Ref.[40]. Allí se realiza un estudio a energías intermedias, mayores a 100 MeV, donde este puede considerarse como un proceso de un solo paso. En él se obtienen descripciones razonables para las secciones eficaces en núcleos pequeños ( $^{14}\text{C}$ ) pero para núcleos mayores ( $^{48}\text{Ca}$  y  $^{90}\text{Zr}$ ) se ven dramáticamente deterioradas. Con la intención de determinar si los efectos del medio son partícipes en las limitaciones de la teoría, realizamos cálculos según el esquema  $\delta g$  en procesos cuasi-elásticos de intercambio de carga.

Podemos resumir el desarrollo teórico mostrado en Ref. [40] para abordar el problema considerando dos canales acoplados

$$\begin{pmatrix} \hat{K}_p + U_{pp}^{(s)} + V_C & U_x \\ U_x & \hat{K}_n + U_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_p \\ \Psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_p \Psi_p \\ E_n \Psi_n \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

donde  $\hat{K}_{(p,n)}$  es el operador de energía cinética, mientras  $U_{nn}$  y  $U_x$  corresponden a los potenciales nucleares de los canales neutrón-neutrón y de intercambio respectivamente. Adicionalmente  $U_{pp}^{(s)}$  corresponde al potencial protón-protón de corto alcance, es decir, restando el potencial de Coulomb para una carga puntual  $V_C = Ze^2/r$ .

Las formas explícitas para las contribuciones hadrónicas de los potenciales nucleares para los canales  $pp$  y  $nn$  pueden escribirse como

$$U_{pp} = \frac{-1}{2\pi^2} \left\{ \left\langle \hat{\rho}_p \frac{\partial g_{pp}^{(0)}}{\partial Z} \right\rangle + \left\langle \hat{\rho}_n \frac{\partial g_{pn}^{(0)}}{\partial Z} \right\rangle \right\} \quad (4.4a)$$

$$U_{nn} = \frac{-1}{2\pi^2} \left\{ \left\langle \hat{\rho}_n \frac{\partial g_{nn}^{(0)}}{\partial Z} \right\rangle + \left\langle \hat{\rho}_p \frac{\partial g_{np}^{(0)}}{\partial Z} \right\rangle \right\} \quad (4.4b)$$

donde los subíndices  $p, n$  en las densidades corresponden a protones y neutrones, respectivamente. Los subíndices que aparecen en la interacción efectiva representan al canal co-

respondiente, donde consideramos  $g_{pp} = g_{nn}$  y  $g_{pn} = g_{np}$ . Los paréntesis  $\langle \dots \rangle$  representan integrales del tipo:

$$\langle F \rangle = \int_0^\infty Z^3 dZ \int d\mathbf{P} \int d\mathbf{Q} \Phi_1(Z|\mathbf{Q} - \mathbf{q}|) F ;$$

Adicionalmente se demuestra que el término de intercambio queda dado por

$$\begin{aligned} U_x &= \frac{1}{2\pi^2\sqrt{N-Z}} \left\{ \left\langle (\hat{\rho}_n - \hat{\rho}_p) \frac{\partial g_{pp}^{(0)}}{\partial Z} \right\rangle - \left\langle (\hat{\rho}_n - \hat{\rho}_p) \frac{\partial g_{pn}^{(0)}}{\partial Z} \right\rangle \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N-Z}} (U_{pp} - U_{nn}) . \end{aligned} \quad (4.5)$$

El sistema (4.3) tiene como solución formal una ecuación del tipo Lippmann-Schwinger con una onda plana de protones  $\Phi_p$  en el canal de entrada

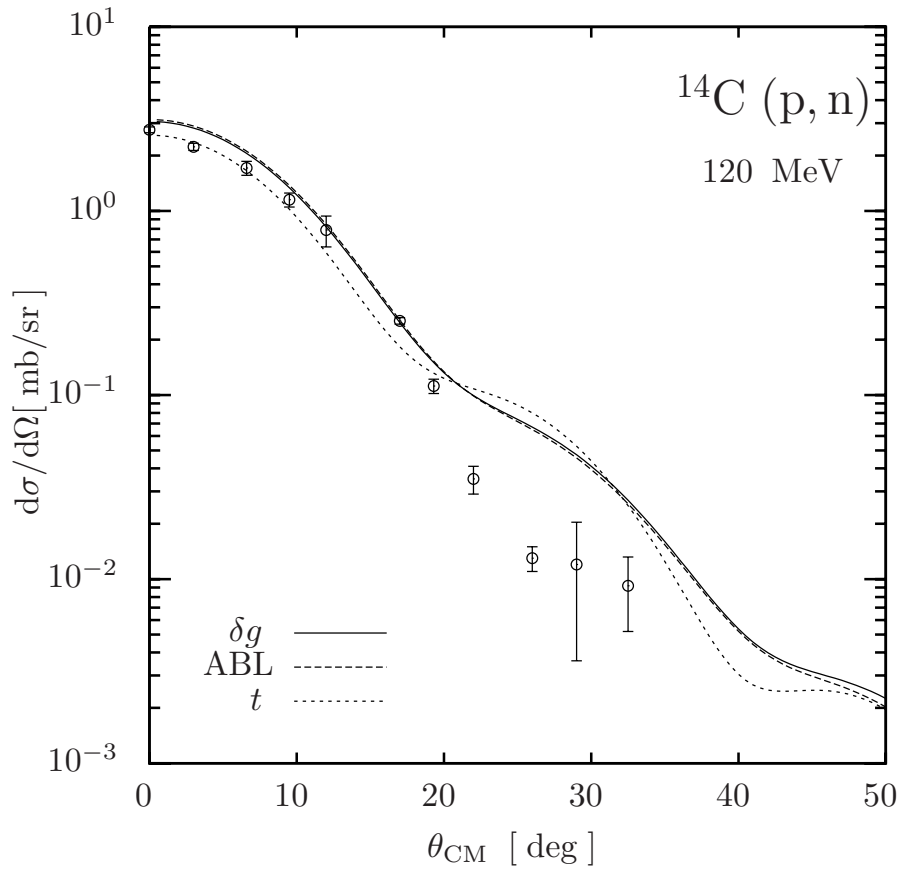
$$\begin{pmatrix} \Psi_p \\ \Psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_p \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{G}_p U_{pp}^{(s)} & \mathcal{G}_p U_x \\ \mathcal{G}_n U_x & \mathcal{G}_n U_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_p \\ \Psi_n \end{pmatrix} , \quad (4.6)$$

donde  $\mathcal{G}_p$  y  $\mathcal{G}_n$  son las funciones de Green para protones y neutrones salientes, respectivamente. Su resolución numérica mediante inversión matricial permite obtener los observables de scattering.

Analizamos los resultados obtenidos de la aplicación del esquema  $\delta g$  para procesos inelásticos de intercambio de carga. Nuevamente nos interesará observar las diferencias entre los esquemas ABL y  $\delta g$  en la reproducción de las secciones eficaces diferenciales. El primer caso estudiado corresponde al proceso  $^{14}\text{C}(p,n)^{14}\text{N}$ , con un proyectil de una energía de 120 MeV y energía de excitación del núcleo resultante de 2.31 MeV [41] con respecto al estado isobárico análogo más bajo (IAS).

En la Fig. (4.6) se muestran las secciones eficaces diferenciales medidas [42] y calculadas. En línea continua se muestra el resultado de  $\delta g$  y en segmentada el de ABL, mientras que para la matriz  $t$  libre se usa línea punteada. Se observa que los tres esquemas para ángulos menores a 20 grados proveen una descripción que logra dar cuenta de buena forma de los datos experimentales, mientras que para transferencias de momentum mayores existe un notable alejamiento de los datos hacia un mayor flujo que el observado, sugiriendo una deficiencia en la teoría.

Al igual que en los casos de scattering elástico vistos anteriormente, existe la tendencia de que al sumar los términos  $U_0$  y  $U_1$ , la sección eficaz diferencial tiende a la dada por  $U_{ABL}$ , aún en este caso donde la diferencia entre la matriz  $t$  libre y las otras descripciones es pequeña. Es más, las tres descripciones se ajustan de una forma similar a los datos,

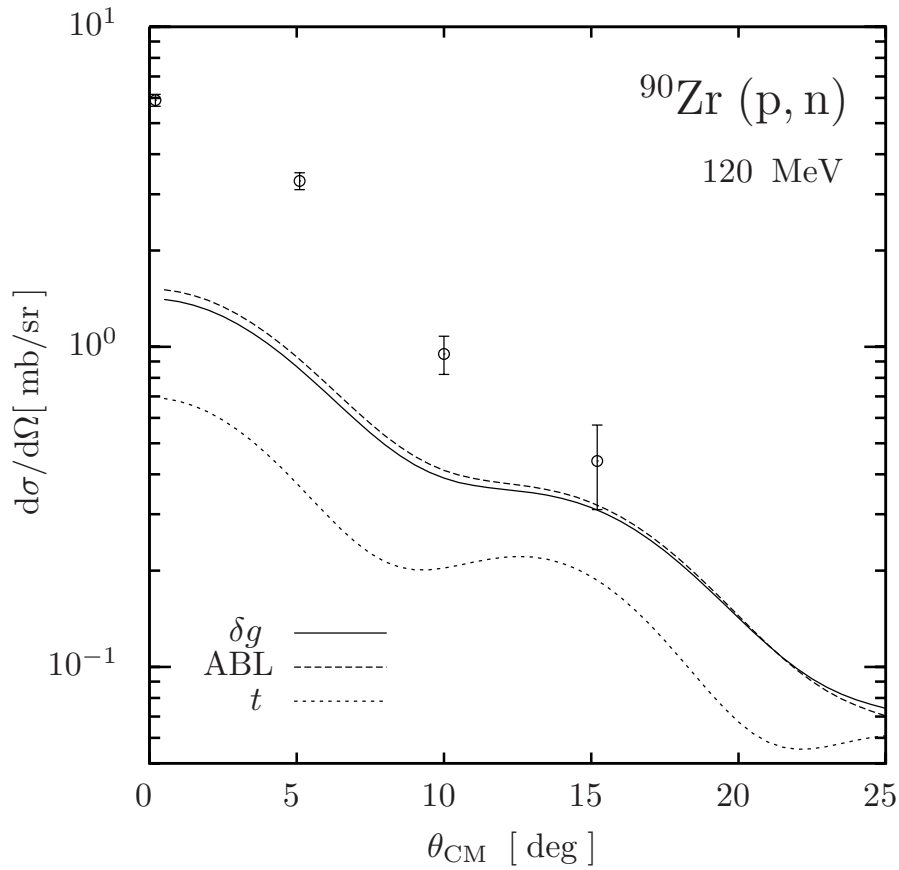


**Figura 4.6:** Secciones eficaces diferenciales medidas y calculadas para el proceso  $^{14}\text{C}(p,n)^{14}\text{N}$  a 120 MeV. Para más detalles ver el texto.

sin dejar entre ver a una de las descripciones como mejor sobre otra. Un análisis estadístico del  $\chi^2$  nos dice que tomando en cuenta los 8 primeros datos, el menor error está dado por la descripción  $\delta g$  ( $\chi^2 = 19,39$ ), seguido por el esquema ABL (con un  $\chi^2 = 21,00$ ), con lo que la matriz  $t$  libre comete el mayor error ( $\chi^2 = 26,32$ ), como era de esperarse. Aún así es notable cómo esta descripción se ajusta a los datos comparativamente de mejor forma que en los casos anteriores.

La mayor discrepancia entre la teoría y las mediciones la encontramos para núcleos más grandes. Consideramos esta vez la reacción  $^{90}\text{Zr}(p,n)^{90}\text{Nb}$ , nuevamente usando una energía del proyectil de 120 MeV. La energía de excitación del núcleo resultante es de 5.1 MeV [43] con respecto al IAS.

En la Fig. (4.7) mostramos las secciones eficaces diferenciales medidas [43] y calculadas usando la misma notación que en la Fig. (4.6). Nuevamente encontramos que las



**Figura 4.7:** Secciones eficaces diferenciales medidas y calculadas para el proceso  $^{90}\text{Zr}(p,n)^{90}\text{Nb}$  a 120 MeV. Para más detalles ver el texto.

diferencias entre los esquemas ABL y  $\delta g$  son poco significativas en comparación con la diferencia a los datos experimentales. En este caso encontramos que las deficiencias de las predicciones teóricas están presentes en todo el rango de ángulos, tendientes a subestimar sustancialmente las secciones eficaces. Esto nos hace pensar que estas falencias tienen orígenes esencialmente distintos, lo que nos dicta la necesidad de explorar en más de un área para encontrar solución ambas deficiencias. Es evidente que la discrepancia entre la teoría y los experimentos persiste, quedando abierto el puzzle de las secciones de Fermi a energías intermedias.

Finalmente podemos concluir que los efectos provenientes de la descripción del medio nuclear por medio de la FMD, aunque tienen impacto, no parece ser la limitación teórica de mayor relevancia en el esquema ABL, dejando abierta la discusión sobre futuras mejoras en otros aspectos a tomar en consideración.

## 5. Discusión y Conclusiones

Hemos estudiado a nivel microscópico el proceso de scattering elástico de protones con núcleos a energías bajo 100 MeV. Este estudio se ha centrado en el cálculo del potencial óptico con énfasis en un tratamiento detallado del estado fundamental del blanco. Para tal efecto se ha partido de la descomposición del potencial óptico en términos de dos componentes, una que acopla las densidades del estado base con la matriz  $t$  libre y otra que acopla la matriz densidad con el gradiente de la interacción efectiva. Esta estructura permite identificar el confinamiento de los efectos intrínsecos del medio nuclear en la superficie del núcleo atómico.

Aplicaciones en colisiones de protones sobre  $^{16}\text{O}$  y  $^{90}\text{Zr}$  demuestran la presencia de una clara atracción  $pn$  en la periferia del núcleo. En el caso particular de  $^{16}\text{O}(p,p)$  a 30.4 MeV se identifica un rol preponderante de la capa periférica  $1p_{3/2}$ , consistente con la estructura del potencial óptico en el esquema  $\delta g$ . Comparaciones de este esquema con el de ABL exhiben diferencias en los observables de scattering de hasta 10 %. Lo anterior en scattering a energías bajo 60 MeV. Este resultado nos permite un enfoque de índole práctica. Por una parte vemos que el esquema ABL es comparable al esquema  $\delta g$ . La menor exigencia computacional de ABL resulta particularmente útil para explorar otros efectos. Una vez afinada esta física exploratoria el esquema  $\delta g$  debiera ser el marco más fidedigno para describir un proceso dado. Estas consideraciones pueden ser particularmente útiles en futuros estudios de colisiones de protones sobre núcleos livianos, a energías bajo 60 MeV. Nuestras aplicaciones para núcleos más pesados indican una concordancia razonable con los datos experimentales.

La aplicación del esquema  $\delta g$  en el estudio de procesos de intercambio de carga a energías intermedias no permite una explicación satisfactoria de las deficiencias teóricas de las secciones eficaces. En efecto, si bien los esquemas ABL y  $\delta g$  resultan similares entre sí, persiste la notable diferencia (del orden de 200 % a 400 %) con las mediciones. Ciertamente este proceso requiere de mayor análisis. En términos generales, las diferencias en los comportamientos de las secciones eficaces que se presentan al comparar colisiones elásticas

e inelásticas se replantea como un tema abierto. El porqué los núcleos pequeños son, con respecto a núcleos más grandes, bien descritos en procesos cuasi-elásticos pero representan la mayor dificultad en eventos elásticos deberá ser respondido cuando mejores descripciones del medio estén disponibles. Ello puede incluir un manejo más detallado de las variables vectoriales en espacio de momentum.

Uno de los méritos de esta tesis [44] es la incorporación del tratamiento detallado de la matriz densidad en el esquema  $\delta g$ . Previo a este trabajo sólo se había utilizado la aproximación de Slater, siempre en el contexto ABL. En esta misma línea los estudios realizados constituyen una base para eventuales extensiones del modelo al cálculo del “unabridged folding model” [40].

La manifestación en la superficie de los efectos intrínsecos del medio pudiera ser de particular interés en el estudio de colisiones nucleares con núcleos exóticos. Se sabe que tales sistemas tienen una estructura poco convencional en su periferia. Las características del acoplamiento selectivo de protones con neutrones en la superficie pueden hacer del esquema discutido en esta tesis de una herramienta potencialmente útil. Estudios en esas líneas serían una extensión natural del trabajo realizado.

# Bibliografía

- [1] A. K. Kerman, H. McManus, y R. M. Thaler, *Ann. Phys. (N.Y.)* 8, 551 (1959).
- [2] L. Ray y W. R. Coker, *Phys. Rev. C* 16, 340 (1977).
- [3] B. C. Clark, S. Hama, R. Mercer, L. Ray y B. D. Serot, *Phys. Rev. Lett.* 50, 21, 1644 (1983).
- [4] N. Ottenstein, S. J. Wallace, and J. A. Tjon *Phys. Rev. C* 38, 2272 (1988).
- [5] F. A. Brieva y J. R. Rook, *Nucl. Phys.* A291, 299 (1977); A291, 317 (1977); A297, 206 (1978); A307, 493 (1978).
- [6] J.-P. Jeukenne, A. Lejeune, y C. Mahaux *Phys. Rev. C* 16, 80 (1977)
- [7] H. V. von Geramb y K. A. Amos *Phys. Rev. C* 41, 1384 (1990)
- [8] H. F. Arellano, F. A. Brieva, and W. G. Love, *Phys. Rev. Lett.* 63, 605 (1989).
- [9] Ch. Elster, Taksu Cheon, Edward F. Redish y P. C. Tandy *Phys. Rev. C* 41, 814 (1990).
- [10] C. R. Chinn, Ch. Elster y R. M. Thaler *Phys. Rev. C* 48, 2956 (1993).
- [11] H. F. Arellano, F. A. Brieva, and W. G. Love, *Phys. Rev. C* 52, 301 (1995).
- [12] S. Karataglidis, P. J. Dortmans, K. Amos y R. de Swiniarski *Phys. Rev. C* 52, 861 (1995).
- [13] K. Amos, P. J. Dortmans, H. V. von Geramb, S. Karataglidis, and J. Raynal, *Adv. in Nucl. Phys.* **25**, 275 (2000).
- [14] H. F. Arellano and H. V. von Geramb, *Phys. Rev. C* 66, 024602 (2002).
- [15] H. F. Arellano and H. V. von Geramb *Phys. Rev. C* 72, 025203 (2005).
- [16] Ver, e.g., <http://www.ganil.fr/eurisol/>

- [17] Ver, e.g., <http://isolde.web.cern.ch/isolde/>
- [18] Ver, e.g., <http://www.ganil.fr/spiral/>
- [19] Ver, e.g., <http://www.rarf.riken.go.jp/Eng/facilities/RIBF.html>
- [20] Ver, e.g., <http://www.nsl.msu.edu/future/isf/>
- [21] H. F. Arellano and E. Bauge, *Phys. Rev. C* **76**, 014613 (2007).
- [22] N. K. Glendenning en *Direct Nuclear Reactions*, (Academic Press, New York, 1983)
- [23] K. M. Watson, *Phys. Rev.* **89**, 575 (1953).
- [24] H. Feshbach, *Ann. Phys. (N.Y.)* **5**, 357 (1958); *ibid.* **19**, 287 (1962).
- [25] A. K. Kerman, H. McManus, and R. M. Thaler, *Ann. Phys.* **8**, 551 (1959).
- [26] A. L. Fetter and K. M. Watson, in *Advances in Theoretical Physics*, Vol. 1, edited by K.A. Brueckner, (Academic Press, New York, 1965)
- [27] F. Villars, in *Fundamentals in Nuclear Theory*, edited by A. de-Shalit and C. Villi, (IAEA, Vienna, 1967).
- [28] H. F. Arellano, F. A. Brieva, and W. G. Love, *Phys. Rev. C* **41**, 2188-2201 (1990)
- [29] H. F. Arellano, F. A. Brieva, and W. G. Love *Phys. Rev. C* **42**, 652 (1990).
- [30] H. F. Arellano, F. A. Brieva, and W. G. Love, *Phys. Rev. C* **50**, 2480 (1994).
- [31] M. Lacombe, B. Loiseau, J. M. Richard, and R. Vinh Mau, J. Côté, P. Pirés and R. de Tourreil, *Phys. Rev. C* **21**, 861 (1980).
- [32] R. de Swiniarski, Dinh-Lien Pham, and G. Bagieu, *Can. J. Phys.* **55**, 43 (1977).
- [33] L. N. Blumberg, E. E. Gross, A. van der Woude, A. Zucker, and R. H. Bassel, *Phys. Rev.* **147**, 812 (1966).
- [34] J. W. Negele, *Phys. Rev. C* **1**, 1260 (1970).
- [35] A. Nadasen, P. Schwandt, P. P. Singh, W. W. Jacobs, A. D. Bacher, P. T. Debevec, M. D. Kaitchuck, and J. T. Meek, *Phys. Rev. C* **23**, 1023 (1981).
- [36] K. Kwiatkowski and N. S. Wall, *Nucl. Phys.* **A301**, 349 (1978).
- [37] P. D. Greaves, V. Hnizdo, J. Lowe and O. Karban, *Nucl. Phys.* **A179**, 1 (1972).



- [38] J. A. Fannon, E. J. Burge, D. A. Smith and N. K. Ganguly, Nucl. Phys. A97, 263 (1967).
- [39] V. Lapoux, N. Alamanos, F. Auger et al. PLB 658, 198 (2008).
- [40] H. F. Arellano and W. G. Love Phys. Rev. C 76, 014616 (2007).
- [41] B. D. Anderson, M. Mostajabodda'vati, C. Lebo, R. J. McCarthy, L. Garcia, J. W. Watson, y R. Madey. Phys. Rev. C 43, 1630 (1991).
- [42] Jacob Rapaport, sin publicar (comunicación privada).
- [43] D. E. Bainum, J. Rapaport, C. D. Goodman, D. J. Horen, C. C. Foster, M. B. Greenfield, y C. A. Goulding. Phys. Rev. Lett. 44, 1751 (1980).
- [44] F. J. Aguayo and H. F. Arellano Phys. Rev. C 78, 014608 (2008).