



FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA CIVIL INDUSTRIAL
MAGISTER EN ECONOMÍA APLICADA

DISEÑO DE MECANISMOS EN LICITACIONES DONDE EL PRECIO Y LA CALIDAD IMPORTAN

TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGISTER EN ECONOMÍA APLICADA

DANIEL HERMES LILLO EGAÑA

PROFESOR GUÍA:

NICOLAS FIGUEROA GONZÁLEZ

MIEMBROS DE LA COMISION:

JUAN ESCOBAR CASTRO
RONALD FISHER BARKAN
RODRIGO HARRISON VERGARA

SANTIAGO DE CHILE

SEPTIEMBRE 2012

Resumen

En un proceso de licitación existe un principal que está interesado en obtener un producto o servicio, para el cual existen múltiples oferentes que por supuesto poseen información privada respecto a sus capacidades. Con esto en mente, se desea diseñar de la mejor forma posible las reglas del juego, de manera tal de elegir a aquel agente más eficiente y asegurarse un precio que maximice sus utilidades. Cuando el producto está definido solo por el precio el mecanismo a implementar está bien definido, pero no sucede lo mismo cuando se desea modelar un producto compuesto de características más complejas. Asker & Cantillon desarrollan estudios en esta línea, analizando las características que debe poseer el mecanismo de licitación óptimo cuando el producto a licitar está definido por un precio y por una serie de dimensiones de calidad, que por supuesto hacen el problema más complejo y difícil de analizar.

El objetivo del presente trabajo de tesis pretende seguir trabajando en dicha línea, con el fin de analizar las particularidades que posee el mecanismo implementado para un caso particular de mecanismo de licitación. Siguiendo el modelo y la teoría de resolución propuesta por Asker & Cantillon, se propone un tipo de mecanismo basado en una función lineal del tipo *first score auction*, que permite ordenar las diferentes ofertas que proveen los jugadores. Mediante implementación numérica en MatLab se realizan una serie de simulaciones, que buscan analizar las características del mecanismo óptimo a variaciones en las condiciones del proceso, identificando regularidades que den una pauta respecto a la forma genérica en que el mecanismo óptimo se construye. De la misma manera se busca dilucidar la robustez del mecanismo propuesto, a fin de verificar su validez frente a errores en la estimación de ciertos parámetros del modelo.

Los resultados permiten relacionar de buena manera el peso dado a las dimensiones de calidad en la función de utilidad del principal, con aquellos dados en la función *score* del mecanismo propuesto. Se observa que en general la estrategia consiste en distorsionar hacia abajo la verdadera valoración que posee el principal en las calidades, entregándoles a los agentes una información distorsionada vía la función *score* que define al mecanismo. El efecto además disminuye al aumentar el número de jugadores, así como el peso relativo dado a las dimensiones respectivas. Por otro lado el mecanismo para funciones de distribuciones cargadas a los mejores y peores tipos se muestra bastante insensible a cambio en las características de la distribución, lo que se traduce por cierto en una gran robustez del mecanismo estudiado.

Si bien los errores numéricos son un factor a tener cuenta en la interpretación de los resultados, se piensa que las regularidades identificadas son representativas del problema, y permiten una comprensión e interpretación amplia de este y otros problemas relacionados. Sin embargo su aplicabilidad a casos concretos o extensión a otros problemas de mayor complejidad o dimensiones de calidad dependerán de las características de éstos. En base a ello se recomienda extender las pruebas a casos diferentes, modificando las funciones de distribución y primitivas del problema, y validando los resultados en una escala mas amplia.

Agradecimientos

En estas breves líneas quiero agradecer a todos los que me acompañaron en mi época universitaria. A mis amigos de la Escuela, del colegio, y de la vida. Y muy especial a mis padres y familia, que confiaron en mí y me apoyaron en todos mis estudios. Gracias también mi mejor amiga y compañera, Javi, que aguantó todo lo que significó desarrollar y terminar dos trabajos de tesis.

Finalmente, en este trabajo en especial, quiero agradecer a mi profesor guía Nicolas Figueroa. Gracias por la paciencia y facilidades al permitirme conciliar todo esto con mi trabajo, y muchas gracias también por todo lo que esto y sus clases me permitieron aprender.

Índice de Contenidos

| | |
|---|-------------|
| Resumen | ii |
| Agradecimientos | iii |
| | iii |
| Índice de Figuras..... | vii |
| Índice de Tablas..... | viii |
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1 El problema de licitación | 1 |
| 1.1.1 El problema simple de remate | 2 |
| 1.1.2 El problema simple de licitación..... | 5 |
| 1.2 Problemática a abordar..... | 6 |
| 1.3 Modelo general | 8 |
| 1.4 Pregunta a responder..... | 9 |
| 1.5 Objetivos | 10 |
| 1.6 Resultados esperados | 10 |
| 1.7 Alcances y limitaciones del estudio..... | 11 |
| 1.6 Indicaciones sobre la información presentada | 11 |
| 2. Modelo y resolución | 12 |
| 2.1 Modelo de licitación con dimensiones de calidad | 12 |
| 2.1.1 Definición del modelo | 12 |
| 2.1.2 Resolución del modelo | 15 |
| 2.1.3 Utilidad del planificador | 19 |
| 2.1.4 Recapitulando | 21 |
| 3. Resultados y Discusiones | 22 |
| 3.1 Respecto a la abstracción del modelo y a su aplicabilidad en casos reales | 22 |
| 3.2 Resolución del caso particular estudiado..... | 23 |
| 3.2.1 Cálculo de la función de distribución de los pseudotipos | 25 |
| 3.2.2 Caso analítico y numérico | 37 |
| 3.2.3 Distribución de probabilidad marginal..... | 40 |
| 3.3.4 Cálculo de la utilidad del planificador | 41 |
| 3.2.5 Cálculo del mecanismo óptimo | 45 |
| 3.3 Distribuciones a considerar..... | 46 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 3.4 | Respecto a la robustez del mecanismo de licitación..... | 49 |
| 3.5 | Precisión numérica y otros comentarios previos | 50 |
| 3.6 | Organización y descripción de las experiencias | 51 |
| 3.6.1 | Análisis del comportamiento de los agentes..... | 51 |
| 3.6.2 | Análisis de mecanismos óptimos | 52 |
| 3.6.3 | Análisis de robustez del mecanismo | 53 |
| 3.7 | Resultados análisis del comportamiento de los agentes | 53 |
| 3.7.1 | Análisis función de distribución acumulada de los pseudotipos | 53 |
| 3.7.2 | Función de oferta τk | 55 |
| 3.7.3 | Oferta del agente ganador | 57 |
| 3.8 | Resultados análisis de mecanismo óptimo | 59 |
| 3.8.1 | Resultados para distribución uniforme | 59 |
| 3.8.2 | Resultados para distribución cargada hacia los peores tipos..... | 61 |
| 3.8.3 | Resultados para distribución cargada hacia los mejores tipos..... | 64 |
| 3.8.4 | Resultados para distribución triangulares..... | 67 |
| 3.9 | Resultados de robustez | 69 |
| 3.9.1 | Detalles de la experiencia | 69 |
| 3.9.2 | Resultados de robustez | 70 |
| 4. | Conclusiones..... | 76 |
| | Bibliografía..... | 80 |
| | Anexos | 81 |

Índice de Figuras

| | |
|--|----|
| Figura 1: Mapeo en pseudotipos, representación gráfica..... | 16 |
| Figura 2: Curvas de pseudotipos. | 24 |
| Figura 3: Función de oferta τki para diferentes pseudotipos y otros parámetros fijos. | 25 |
| Figura 4: Representación esquemática distribución acumulada de k | 26 |
| Figura 5: Diferentes sectores definidos por las curvas de pseudotipos. Caso simétrico..... | 27 |
| Figura 6: Detalle gráfico cálculo Hk , primer sector. | 28 |
| Figura 7 Detalle gráfico cálculo Hk , segundo sector. | 30 |
| Figura 8: Diferentes sectores definidos por las curvas de pseudotipos. Caso asimétrico..... | 32 |
| Figura 9 Detalle gráfico cálculo Hk , primer sector. | 33 |
| Figura 10 Detalle gráfico cálculo Hk , segundo sector. | 34 |
| Figura 11 Detalle gráfico cálculo Hk , tercer sector. | 35 |
| Figura 12: Diferentes sectores definidos por las curvas de pseudotipos. Caso asimétrico 2..... | 37 |
| Figura 13: Función de distribución acumulada de los pseudotipos. | 40 |
| Figura 14 Función de probabilidad de los pseudotipos..... | 41 |
| Figura 15: Representación gráfica del cálculo de la utilidad esperada del planificador. | 44 |
| Figura 16: Malla ajustada al espacio $\theta 1 - \theta 2$ | 44 |
| Figura 17: Manto de utilidad esperada para diferentes mecanismos..... | 46 |
| Figura 18: Funciones de distribución acumulada, $p > 1$ | 47 |
| Figura 19: Funciones de distribución acumulada, $p < 1$ | 48 |
| Figura 20: Análisis comportamiento de los agentes. | 52 |
| Figura 21: Distribuciones acumuladas de tipos para diferentes $p > 1$ | 54 |
| Figura 22: Distribuciones acumuladas de tipos para diferentes $p < 1$ | 55 |
| Figura 23: Funciones de oferta de los agentes para diferentes N | 56 |
| Figura 24: Función de oferta de agentas para diferentes distribuciones..... | 57 |
| Figura 25: Curvas pseudotipos caso simétrico. | 58 |
| Figura 26: Comportamiento de los agentes para k constante..... | 59 |
| Figura 27: Representación gráfica, mecanismos insensibles a variación en distribución. | 63 |
| Figura 28: Malla de integración..... | 65 |

Índice de Tablas

| | |
|---|----|
| Tabla 1: Resultados mecanismo óptimo para el caso de distribución uniforme..... | 60 |
| Tabla 2: Resultados pesos relativos para caso simétrico. | 60 |
| Tabla 3: Resultados mecanismo óptimo para el caso de distribución triangular..... | 67 |
| Tabla 4: Resultados mecanismo óptimo para el caso de distribución triangular..... | 69 |
| Tabla 5: Familia de distribuciones consideradas..... | 70 |
| Tabla 6: ϵ puntuales considerados..... | 70 |
| Tabla 7: Resultados de robustez. | 71 |
| Tabla 8: Resultados de robustez, mecanismo de Myerson, caso $N = 2$ y $N = 10$ | 75 |
| Tabla 9: Resultados mecanismo óptimo para el caso de distribución cargada, $p > 1$ | 82 |
| Tabla 10: Resultados pesos relativos para función de cargada, $p > 1$ | 84 |
| Tabla 11: Resultados mecanismo óptimo para el caso de distribución cargada, $p > 1$ | 85 |
| Tabla 12: Resultados mecanismo óptimo para el caso de distribución cargada, $p < 1$ | 87 |
| Tabla 13: Resultados mecanismo óptimo para el caso de distribución cargada, $p < 1$ | 88 |

Capítulo 1

Introducción

El presente trabajo de tesis titulado “Diseño de Mecanismos en Licitaciones donde el Precio y la Calidad importan” es un proyecto en el cual se trabajó como parte de los requisitos de titulación para obtener el grado de magister en Economía Aplicada, programa cursado en la Universidad de Chile.

En el se busca analizar los mecanismos utilizados en los procesos de licitación, en particular cuando el problema se torna algo mas complicado que el caso estandar. Es posible aumentar la complejidad del problema en muchas dimensiones, y un caso tipico es cuando se comienza a considerar un producto en donde no solo interesa conocer el precio, si no también alguna dimensión (o dimensiones) que tengan que ver con la calidad del mismo. En dichos casos que mecanismo de licitación utilizar no es claro, por lo que se hace necesario analizar las opciones, y dentro de estas identificar que características son de interés. Quizas interesa un mecanismo que maximize la utilidad esperada del planificador (el comprador en el caso de una licitación), la utilidad social, o simplemente que se muestre robusto frente a una especificación incorrecta de las primitivas del problema. Esto no es trivial, y las complicaciones aumentan a medida que se consieran mas variables o con mayor exactitud el producto a licitar. Sin embargo, en todos los casos es necesario modelar el juego en cuestión, y hacer uso de herramientas computacionales con el fin de generar resultados interpretables.

1.1 El problema de licitacion

Una *licitación* corresponde al proceso en donde un comprador o principal desea adquirir un producto o servicio, para lo cual se citan varios oferentes o vendedores que ofrecen la mejor oferta posible al individuo. El punto principal en este tipo de problemas es que el comprador desconoce completamente (o de forma parcial) la estructura de costos de la empresa, por lo que no es posible conocer de antemano quien posee los costos más bajos (o quien es más eficiente en la producción del producto), o quien es capaz de entregar mejores niveles de calidad. Por supuesto, de conocer esto, lo eficiente sería adjudicarle la producción del producto a la empresa más eficiente, de forma tal de maximizar el excedente del comprador y el social. En el caso real sin embargo, no existe un mercado con competencia e información perfecta, por lo que es necesario el uso de mecanismos que busquen maximizar el objetivo del principal.

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN

Un problema relacionado, es el correspondiente a una subasta o remate. Un remate corresponde al proceso en el cual un principal desea vender un producto o servicio, para el cual existen varios compradores dispuestos a adjudicarlos. A diferencia del problema anterior, en este caso lo desconocido es la disponibilidad a pagar de los oferentes, por lo que también es necesario el uso de mecanismos que permitan al principal tomar una decisión y maximizar su utilidad.

La teoría de juegos es un buen marco para analizar y tratar este tipo de problemas, los cuales pueden ser modelados como problemas del tipo agente principal. De esta manera, es posible aplicar las herramientas conocidas de teoría de juegos para proponer y analizar diferentes mecanismos, y dilucidar las características de cada uno de ellos.

En lo que sigue se describirá detalladamente el problema estándar de remate y licitación con el fin de analizar sus características antes de pasar a un problema más complejo. Sin embargo, el objetivo final es analizar un problema de licitación (aunque algo más complejo), el cual será el marco en el cual se basará el resto de la discusión.

1.1.1 El problema simple de remate

El problema simple de remate consiste en aquel en donde el principal desea ofrecer un producto que está definido únicamente por su precio. Por supuesto, lo ideal sería vendérselo a aquel que posea una mayor valoración, por lo que es necesaria la implementación de algún mecanismo alineado con este objetivo, y que por ende maximice la utilidad del principal. La modelación es simple: existen N posibles rematadores, cada uno con una valoración v_i por el producto, con $i = \{1, \dots, N\}$. Para simplificar, se supondrá que el planificador valora en 0 el producto. De esta manera, siendo p el precio de venta del producto, la utilidad del comprador está dada por:

$$U_p = p$$

En este juego, cada oferente declara un precio p_i que está dispuesto a pagar, y el ganador dependerá de las reglas particulares del juego.

En un mecanismo del tipo *sobre cerrado a primer precio*, cada agente ofrece un precio, siendo el ganador aquel que ofrece la mayor puja, y teniendo que pagar dicha cantidad. En cambio, en uno del tipo *sobre cerrado a segundo precio*, el ganador una vez más será aquel que ofrezca la oferta más alta, pero en este caso estará obligado a pagar la segunda oferta más alta.

Mecanismo sobre cerrado a segundo precio

Analizar este tipo de mecanismo es más sencillo que el de primer precio (a pesar de ser este segundo más intuitivo), por lo que a modo de ejemplo se comenzará con su definición. Se supondrá que la valoración de cada agente por el producto, v_i (que también es lo máximo que cada agentes estaría dispuesto a pagar), es independiente e idénticamente distribuida en un intervalo $[0, v_h]$ de acuerdo a una distribución acumulada F en todo su soporte.

Cada agente i ofrece una oferta p_i , y de esta forma los pagos para cada uno serán:

$$\Pi_i = \begin{cases} v_i - \max_{j \neq i} p_j & \text{si } p_i > \max_{j \neq i} p_j \\ 0 & \text{si } p_i < \max_{j \neq i} p_j \end{cases}$$

Es fácil demostrar que en este caso, una estrategia del tipo $\beta(v_i) = p_i = v_i$ es una estrategia débilmente dominante, por lo que el análisis de este tipo de mecanismos es bastante sencillo. Con esto en mente, es fácil calcular el pago esperado de cada agente dada dicha estrategia, y con esto, la utilidad esperada del principal. Fijando a uno de los rematadores (digamos el número i), es posible definir la variable aleatoria Y_i como la máxima oferta realizada por los demás jugadores. Esto es, $Y_i = \max_{j \neq i} p_j$. De esta manera, es posible definir la utilidad esperada del agente con valoración v_i mediante la siguiente expresión:

$$m^I(v_i) = G(v_i) \cdot E(Y_i \mid v_i > Y_i)$$

, donde $G(v_i)$ es la probabilidad de que la valoración del agente i sea mayor a la del resto de los agentes. Esto debido a que dado la estrategia que domina débilmente el juego, aquel jugador con mayor valoración ganará el remate. De forma trivial, dicha probabilidad está dada por:

$$G(v_i) = \Pr(v_i > Y_i)$$

, que no es más que la probabilidad acumulada de la variable aleatoria definida, Y_i . Y dado que las valoraciones de los agentes son independientes, lo anterior equivale a:

$$\Pr(v_i > Y_i) = \Pr(v_i > v_j \mid \forall j \neq i) = \prod_{j \neq i} \Pr(v_i > v_j) = \prod_{j \neq i} F(v_i) = F(v_i)^{N-1}$$

Mecanismo sobre cerrado a primer precio

El análisis de este tipo de mecanismos es más complejo, dado que en este caso la estrategia de revelar la verdadera valoración (ofrecer una oferta o precio igual a la valoración) no es dominante frente a otras opciones. De hecho, con dicha estrategia tan solo se aseguraría un pago esperado de cero, como se observa en el siguiente esquema de pagos:

$$\Pi_i = \begin{cases} v_i - p_i & \text{si } p_i > \max_{j \neq i} p_j \\ 0 & \text{si } p_i < \max_{j \neq i} p_j \end{cases}$$

Es posible considerar una estrategia para cada jugador, $p_i = \beta_i(v_i)$ (o sea un precio que dependa mediante la función β_i de la valoración personal de cada agente)¹, y a partir de esta derivar la estrategia óptima para este tipo de problema. Dado esto, la probabilidad del agente i de ganar el remate está dada por:

¹ Esta notación será utilizada a lo largo de todo el documento, definiendo a β_i como la función estrategia del agente i , o en otra palabras, aquella que define el comportamiento de los individuos en el juego.

$$\Pr(\text{ganar}) = \Pr(p_i > \beta_j(v_j) \mid j \neq i) = \Pr\left(p_i > \max_{j \neq i} \beta_j(v_j)\right)$$

Dado que β_j debe ser una estrategia creciente², se tiene que:

$$\max_{j \neq i} \beta_j(v_j) = \beta_j\left(\max_{j \neq i} v_j\right) = \beta_j(Y_i)$$

, con Y_i de finida como antes.

Luego, la probabilidad anterior puede reescribirse como:

$$\Pr(p_i > \beta_j(Y_i)) = \Pr(\beta_j^{-1}(p_i) > Y_i)$$

, que corresponde a la probabilidad acumulada de Y_i como antes. De manera similar, dado la independencia de las valoraciones de los jugadores, la expresión anterior puede reescribirse como:

$$\Pr(\beta_j^{-1}(p_i) > Y_i) = G\left(\beta_j^{-1}(p_i)\right)$$

Dado lo anterior, el pago esperado para el jugador i es:

$$m^I(v_i) = (v_i - p_i) \cdot G\left(\beta_j^{-1}(p_i)\right)$$

Si se supone además una estrategia simétrica, tal que $\beta_i(v_i) = \beta(v_i)$ ³, lo anterior equivale a:

$$m^I(v_i) = (v_i - p_i) \cdot G(\beta^{-1}(p_i))$$

Maximizando la expresión anterior respecto a la oferta del jugador i , p_i :

$$-G(\beta^{-1}(p_i)) + (v_i - p_i) \cdot \frac{G'(\beta^{-1}(p_i))}{\beta'(p_i)} = 0$$

, donde $G'(\beta^{-1}(p_i)) = g(\beta^{-1}(p_i))$ es la densidad de Y_i . Además, recordando que $p_i = \beta(v_i)$, se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$-G\left(\beta^{-1}(\beta(v_i))\right) + (v_i - p_i) \cdot \frac{g\left(\beta^{-1}(\beta(v_i))\right)}{\beta'(\beta(v_i))} = 0$$

$$G(v_i)\beta'(v_i) + g(v_i)\beta(v_i) = v_i g(v_i)$$

$$\frac{d}{dx}(G(v_i)\beta(v_i)) = v_i g(v_i)$$

Resolviendo, se obtiene la siguiente estrategia óptima:

$$\beta(v_i) = p_i = \frac{1}{G(v_i)} \int_0^{v_i} y g(y) dy$$

En lo anterior, $G(v_i)$ corresponde a la misma expresión ya derivada, esto es $G(v_i) = F(v_i)^{N-1}$. Así la utilidad esperada que obtiene un agente con valoración v_i es:

$$m^I(v_i) = (v_i - \beta(v_i)) \cdot G(v_i)$$

² En caso contrario no habría relación entre la valoración de los agentes y su disponibilidad a pagar por el producto.

³ La estrategia es en si similar para todos los agentes.

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN

Si bien el desarrollo ha sido extenso, se quiso realizar a modo de destacar la estrategia de resolución de un problema tipo como este. Además la formula derivada será utilizada directamente en la resolución de problema de licitación más complejo definido con posterioridad.

1.1.2 El problema simple de licitación

El problema más simple de licitación es aquel en donde el producto está definido únicamente por su precio de venta. La modelación es simple: existen N posibles oferentes del producto, y cada uno posee una estructura de costos tal que les es posible producirlo invirtiendo c_i , con $i = \{1, \dots, N\}$. El planificador por su parte valora el producto en v . De esta manera, siendo p el precio de venta del producto, la utilidad del comprador está dada por:

$$U_p = v - p$$

En este juego, cada oferente declara un precio p_i , y el ganador será aquel que ofrezca el menor precio en la licitación. Como se aprecia, es un problema análogo al del sobre cerrado a primer precio, y su análisis sigue la misma línea. La estructura de pagos es la siguiente:

$$\Pi_i = \begin{cases} p_i - c_i & \text{si } p_i < \min_{j \neq i} p_j \\ 0 & \text{si } p_i > \min_{j \neq i} p_j \end{cases}$$

Sea una estrategia $\beta_i(c_i) = p_i$, que asigna un precio al costo del agente. La probabilidad de ganar la licitación para un agente con estructuras de costos c_i esta dada por:

$$\Pr(\text{ganar}) = \Pr(p_i < \beta_j(c_j) \mid j \neq i) = \Pr\left(p_i < \min_{j \neq i} \beta_j(c_j)\right)$$

Dado que β_j debe ser una estrategia creciente, se tiene que:

$$\min_{j \neq i} \beta_j(c_j) = \beta_j\left(\min_{j \neq i} c_j\right) = \beta_j(Y_i)$$

, con Y_i de finida en esta ocasión como la variable aleatoria correspondiente al mínimo de los costos de los $N - 1$ jugadores tal que $j \neq i$.

Luego, la probabilidad anterior puede reescribirse como:

$$\Pr(p_i < \beta_j(Y_i)) = \Pr(\beta_j^{-1}(p_i) < Y_i) = 1 - \Pr(\beta_j^{-1}(p_i) > Y_i)$$

, que corresponde a 1 menos la probabilidad acumulada de Y_i . Dada la independencia de las valoraciones de los jugadores, la expresión anterior puede reescribirse como:

$$\Pr(\beta_j^{-1}(p_i) > Y_i) = G\left(\beta_j^{-1}(p_i)\right)$$

Dado lo anterior, el pago esperado para el jugador i es:

$$m^l(c_i) = (p_i - c_i) \cdot \left(1 - G\left(\beta_j^{-1}(p_i)\right)\right)$$

Definiendo:

$$G_2\left(\beta_j^{-1}(p_i)\right) = \left(1 - G\left(\beta_j^{-1}(p_i)\right)\right)$$

Obteniendo la siguiente función a maximizar, similar a la del remate a primer precio, asumiendo una función $\beta_j^{-1}(p_i)$ simétrica:

$$m^l(c_i) = (p_i - c_i) \cdot G_2(\beta^{-1}(p_i))$$

Es posible proceder como antes, y derivar respecto al precio declarado por el jugador i , p_i :

$$G_2(\beta^{-1}(p_i)) + (p_i - c_i) \cdot \frac{G_2'(\beta^{-1}(p_i))}{\beta'(\beta^{-1}(p_i))} = 0$$

Reordenando, es posible obtener la misma ecuación diferencial del punto anterior:

$$-G_2\left(\beta^{-1}(\beta(c_i))\right) + (c_i - p_i) \cdot \frac{g_2\left(\beta^{-1}(\beta(c_i))\right)}{\beta'(\beta(c_i))} = 0$$

$$G_2(c_i)\beta'(c_i) + g_2(c_i)\beta(c_i) = c_i g_2(c_i)$$

$$\frac{d}{dx}(G_2(c_i)\beta(c_i)) = c_i g_2(c_i)$$

Resolviendo, se obtiene la siguiente estrategia óptima, similar a lo expuesto anteriormente.

$$\beta(c_i) = p_i = \frac{1}{G(c_i)} \int_0^{c_i} y g(y) dy$$

1.2 Problemática a abordar

La presencia de asimetrías de información entre oferentes (agentes) y demandantes (principal) de un producto en los procesos de licitaciones es un clásico problema de agente-principal del tipo de selección adversa, en donde los jugadores manejan escasa información respecto a sus contrapartes. Esto trae como consecuencia importantes ineficiencias desde el punto de vista social y privado, por lo que la utilización de mecanismos de licitación (y por supuesto su diseño) que permitan seleccionar de manera adecuada entre los diferentes oferentes de un producto determinado se torna relevante para los intereses del licitador.

Normalmente el producto a licitar queda definido por el precio del mismo, por lo que al principal le gustaría elegir a aquel oferente que tenga menores costos de producción. Por supuesto dicha información no es conocida por el licitador y los agentes tendrán incentivos potentes a declarar precios por sobre sus costos de producción con el fin de conseguir rentas más allá de lo normal en caso de ganar

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN

la subasta. La solución en este caso no es del todo complicada, y se reduce a la creación, por ejemplo, de un sistema de licitación basado en mecanismos del tipo *scoring auctions* que ordene de cierta manera los precios declarados por los agentes, y de acuerdo a alguna regla definida como ya fue visto (first best, second best por ejemplo) escoja al ganador del proceso [1] [2].

Sin embargo, las particularidades de los productos implicados en licitaciones y remates suelen ser bastantes más complejos que la abstracción anterior, e implican además del precio una serie de otras características multidimensionales. La calidad, por ejemplo, es una característica del producto de importante relevancia para el licitador, por lo que debiese estar incluida junto al precio en cualquier mecanismo propuesto. Luego, es natural preguntarse qué mecanismos utilizar cuando ambas cosas (precio y calidad) importan, y en donde las fuentes de asimetría de información dejan de ser unidimensionales (como en el caso del costo de producción). En resumen, al licitador le interesa pagar lo menos posible, pero además se desea un cierto nivel de calidad.

En Asker & Cantillon (2010) [3] se desarrolla una investigación en esta línea, en donde se caracteriza el mecanismo óptimo cuando la información privada respecto a la estructura de costos es bi-dimensional (costo fijo y costo marginal de proveer calidad) y se compara el mismo con mecanismos más simples como *scoring auctions* y *bargaining*⁴, lo que provee un excelente punto de partida para un análisis posterior dada la teoría desarrollada. Por supuesto, cuando la calidad posee más de dos dimensiones el análisis se complica, y no es posible aplicar el enfoque anterior. El mecanismo estudiado se torna en demasía complejo complejo, muy dependiente de las primitivas del problema, y no es posible escalar el análisis a un espacio con más de dos dimensiones o de tipos más rico. Por otra parte, Asker & Cantillon (2008) [4] se desarrolla y estudia un mecanismos de *scoring auctions* en licitaciones cuando importa el precio y otro atributos no monetarios, en particular cuando esta última característica es multidimensional. Se demuestra además que dicho mecanismos domina a otros procedimientos de licitaciones comúnmente utilizados, como son *menú auctions*, *beauty contests* y licitaciones basadas solo en precios con niveles mínimos de calidad. Dichos mecanismos son simples y de fácil aplicación, ya que no es necesario calcular los parámetros óptimos de los mismos.

Pese a que los documentos anteriores entregan importante información respecto al fenómeno en estudio y a la teoría implicada, se trabaja de manera genérica, y se tienen en cuenta más que nada un análisis de comportamiento en equilibrio. Por otra parte, al no existir un análisis basado en tipos de funciones de utilidad particulares de los agentes involucrados, no es posible analizar los mecanismos óptimos, ni su relación con las suposiciones de los diferentes parámetros del modelo (la funciones de distribución de los tipos, por ejemplo).

En lo presente se desea atacar dichos puntos, trabajando en dirección a obtener resultados numéricos y analíticos respecto al comportamiento de los agentes y de sus estrategias óptimas, definiendo de forma precisa el problema. De esta manera se piensa se puede entender de mejor manera la forma en que se comporta este tipo de juegos, y extender el análisis y las conclusiones a otros diferentes.

⁴ A pesar de que *scoring auction* se traduciría como un tipo de remate, se utilizará dicho concepto para englobar a todos los mecanismos de licitación que básicamente ordenan las ofertas de los agentes y escogen al ganador de acuerdo a algún tipo de regla definida.

1.3 Modelo general

Ambiente

En el presente documento se pretende estudiar mecanismos de licitación del tipo *scoring auctions* para un caso particular de funciones de utilidad, en las cuales se ponderan las diferentes características de la calidad y precio mediante una función cuasi lineal. Específicamente, la función de utilidad que maximiza el licitador al intentar proveerse de un producto definido por un vector $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}_+^M$ de $M \geq 1$ atributos no monetarios (diferentes dimensiones de calidad) y su precio p es:

$$U_p(p, \mathbf{Q}) = v(\mathbf{Q}) - p$$

Ecuación 1

Por otra parte, los oferentes (aquellos que puede ofrecer el producto), poseen una utilidad por vender el producto (p, \mathbf{Q}) dada por la siguiente expresión:

$$U_s(p, \mathbf{Q}) = p - c(\mathbf{Q}, \theta_i)$$

Ecuación 2

, donde $\theta_i \in \mathbb{R}_+^K$, $K \geq 1$ corresponde al vector de tipo de los agentes. Los agentes se diferencian únicamente en su tipo particular.

Se asume también que las funciones $v(\cdot)$ y $c(\cdot)$ son dos veces continuas y diferenciables, con $v_{\mathbf{Q}}, c_{\mathbf{Q}} > 0$, $v - c$ acotado y $v_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}}, c_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}}$ definidas negativas. Por último, con el fin de ordenar parcialmente a los tipos, se asume que $c_{\theta_i} > 0$.⁵

Información

Respecto a la información, se asume que las preferencias son conocimiento común entre el comprador y los vendedores, con excepción del tipo de estos θ_i , $i = \{1, \dots, N\}$, que es observado solo de forma privada. El tipo de los vendedores está distribuido de forma independiente de acuerdo a una función de densidad conjunta $f_i(\cdot)$, con soporte en un sub-set acotado y convexo de \mathbb{R}_+^K , con un interior no vacío Θ_i . Estas funciones son conocimiento común.

Además se hace una suposición implícita respecto a las características del producto modelado. En particular, como se deduce del mecanismo, se requiere que la calidad sea observable y verificable. Será discutido luego las implicancias de esto y otros aspectos.

⁵ Dichas condiciones tienen que ver principalmente con la correcta definición del problema y la existencia de solución. Sin embargo, si se analizan con detalla, no violan la intuición económica del asunto.

Mecanismo de asignación

Con el fin de introducir el mecanismo de *scoring auction*, es necesario definir dos conceptos:

Una *scoring rule* (regla de puntaje) es una función $S: \mathbb{R}_+^{M+1} \rightarrow \mathbb{R}: (p, \mathbf{Q}) \rightarrow S(p, \mathbf{Q})$ que asocia un *score* (un puntaje) a cada potencial contrato⁶ que se ofrece, y que representa una relación de preferencia continua sobre las características de los contratos. Dicha función tendrá una forma cuasi-lineal, de forma tal que puede ser escrita de la siguiente manera:

$$S(p, \mathbf{Q}) = \phi(\mathbf{Q}) - p$$

Ecuación 3

Un *scoring auction* es un mecanismo de asignación en donde los agentes ofertan productos del tipo $(p, \mathbf{Q}) \in \mathbb{R}_+^{M+1}$. Dichas ofertas son evaluadas de acuerdo a la función *scoring rule* anterior, en donde el ganador del proceso es aquel agente con mayor puntaje. En estricto rigor, el resultado de un proceso de *scoring auction* es una probabilidad de ganar la licitación x_i para cada oferente, un *score* t_i^W a cumplir cuando el agente gane el proceso, y un pago t_i^L en caso de que no lo haga.

En este estudio en particular, se utilizará un mecanismo *first scoring auction*, en donde el ganador debe implementar un producto con un puntaje tal que $t_i^W = S(p, \mathbf{Q})$, y $t_i^L = 0$, o sea, el producto implementado debe cumplir un *score* similar al con que se ganó, y en caso de no ganar la licitación, no se paga nada.⁷

1.4 Pregunta a responder

La pregunta a trabajar es directa. Como se puede apreciar, la función $\phi(\mathbf{Q})$ define en si la valoración que se le da a la calidad en la función score, y por ende, el puntaje que se le dará a una oferta determinada. ¿Qué forma debe tener dicha función? ¿Se debe relacionar de alguna forma con la función $v(\mathbf{Q})$ mediante la cual se expresa la verdadera valoración del principal por la calidad? ¿Deben ser iguales (revelando así información privada a los agentes, o debe distorsionar de alguna forma la realidad?

Es posible, por ejemplo, dar formas funcionales precisas a dichas funciones. Las siguientes serán las que se utilizarán en el resto del análisis, y serán introducidas con el fin de plantear de manera precisa los objetivos del estudio:

$$v(\mathbf{Q}) = \left[\sum_{m=1}^M \bar{\mu}_m \cdot Q_m \right]$$

Ecuación 4

⁶ En este caso un contrato se entenderá como un compromiso calidad / precio.

⁷ En este punto es necesario destacar que como se mencionó con anterioridad, que con el fin de rankear a los jugadores, es necesario que la calidad sea un componente observable y verificable. Además, como se aprecia en el mecanismo, el ganador de la licitación no está forzado a ofrecerla misma combinación (p, \mathbf{Q}) con la que ganó el proceso, si no cualquiera otra que logre el mismo puntaje.

$$\Phi(Q) = \left[\sum_{m=1}^M \mu_m \cdot Q_m \right]$$

Ecuación 5

En base a lo anterior, ¿cuál sería el mecanismo óptimo? En el caso definido, esto se reduce a definir de manera correcta los ponderadores μ_m 's de la función $\Phi(Q)$. Por supuesto los μ_m 's no tienen que ser iguales a los $\bar{\mu}_m$'s dada la presencia de asimetrías de información. Parte del desarrollo busca comprender hacia donde se deben sesgar los parámetros de mecanismo óptimo. Por otra parte, y como se ha mencionado, el licitador no conoce el tipo de los agentes (sus estructuras de costos), pero siempre es asumido que es conocimiento común la distribución de dicha información. ¿Es aún mucho pedir conocer esto? Si el licitador no conoce las distribuciones de los tipos de agentes, o dicha información no es conocida con certeza, ¿es posible aun implementar un buen mecanismo como el propuesto?

1.5 Objetivos

Los objetivos propuestos en este trabajo son los siguientes:

- Encontrar el mecanismo óptimo de licitación basado en *scoring auctions* (μ_m 's) y analizar sus características, dada una situación particular (distribuciones de los costos de ofrecer calidad, parámetros $\bar{\mu}_m$'s del principal, etc.)
- Analizar las características de robustez de este mecanismo respecto a la distribución de los parámetros de costos de ofrecer calidad de los oferentes.
- Comparar resultados con mecanismos de información completa, en relación al excedente esperado del planificador.

1.6 Resultados esperados

A priori se espera que de alguna manera, los pesos μ_m 's correspondientes a la función *score* del mecanismo distorsionen la información real (la verdadera valoración del principal por las calidades $\bar{\mu}_m$'s), de forma tal que el principal posea un tipo de ventaja de negociación con dicho mecanismo, e incentive a los agentes a autoseleccionar al más eficiente.

Por otra parte se espera un mecanismo no del todo robusto a variaciones en la distribución, dado el gran cambio en el ambiente y en las características del proceso que se esperan producto de esto. Sin embargo, se piensa que la robustez dependerá además de otros parámetros, haciéndose quizás más robusta al considerar un mayor número de jugadores, y por ende, aumentar la competencia existente en el proceso.

1.7 Alcances y limitaciones del estudio

El estudio descrito se limita completamente a estudiar mecanismo en donde la función de *score*, $S(p, \mathbf{Q}) = \emptyset(\mathbf{Q}) - p$, específicamente el término que evalúa el puntaje dado a la calidad ofrecida, es una función lineal, una ponderación de los diferentes niveles de atributos de calidad. Esto será descrito en más detalle en la sección siguiente.

Por otro lado, no se pretende en este estudio ser exhaustivo respecto a de si existen o no otros mecanismos que puedan ser mejores en términos de utilidad para el principal (puede haberlos), sino más bien en analizar el comportamiento del principal, en relación a la implementación del mecanismo cuando este tiene una forma fija y definida.

Por otra parte todo el estudio se basará en simulaciones replicadas en MatLab, con la correspondiente pérdida de exactitud, o consecuencias numéricas que esto pueda acarrear. No se pretende realizar una simulación en extremo rigurosa, que busque minimizar todos los posibles errores, sino más bien, dilucidar en relación a los resultados el comportamiento genérico del principal en relación a cambios en las condiciones de la licitación. De esta forma se pretende analizar la manera en que debiese ser atacado este tipo de juegos, en los cuales, además del precio existen otras características de interés para el licitador.

Finalmente, dada las características del problema y la manera en que se modeló, la aplicabilidad real de la teoría o la extensión a problemas concretos dependerá principalmente de la verificabilidad de los parámetros de calidad, y a su correcta definición en la modelación del problema.

1.6 Indicaciones sobre la información presentada

En los capítulos siguientes se pretende describir secuencialmente lo realizado en este trabajo de tesis. En el Capítulo 2 se describirá con mayor exactitud el modelo utilizado, así como detalles de su resolución e implementación en MatLab. En el Capítulo 3 se describirán y discutirán los resultados obtenidos para la serie de simulaciones y experiencias realizadas. El objetivo es entender la manera en que funciona el proceso a variaciones en los diversos parámetros que lo definen, y comentar lo obtenido respecto al comportamiento del mecanismo óptimo estudiado. Finalmente, en el Capítulo 4 se entregarán conclusiones generales de trabajo, así como recomendaciones y observaciones para futuros trabajos que continúen trabajando en esta línea.

Capítulo 2

Modelo y resolución

2.1 Modelo de licitación con dimensiones de calidad

2.1.1 Definición del modelo

El modelo introducido en esta sección es una versión particular del mostrado brevemente en la sección 1.3 Modelo general. El problema que se intenta analizar corresponde al de un licitador (principal) que necesita de un producto definido por su precio p y por un vector $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}_+^M$ de atributos no monetarios, que puede ser producido por $N \geq 1$ agentes. Se hablará de ahora en adelante de atributos referentes a la calidad del producto en cuestión, con el fin de aterrizar conceptos⁸.

Como ya se introdujo en el capítulo anterior, el modelo estudiado considerará en las preferencias de los agentes funciones de utilidades cuasilineales, de manera tal que el precio entre de manera lineal en las funciones de utilidad del principal y los oferentes. En la Ecuación 1 y la Ecuación 2 solo es necesario parametrizar la forma de las funciones $v(\mathbf{Q})$ y $c(\mathbf{Q})$, que de alguna forma indican la utilidad y el costo asociado a un vector \mathbf{Q} de calidad dado. Una primera aproximación consiste en considerar funciones con ponderaciones para dichas funciones, de manera tal que las diferentes componentes del vector \mathbf{Q} se ponderen con diferentes pesos. Dichas ecuaciones pueden ser escritas entonces de la siguiente manera:

$$U_p(p, \mathbf{Q}) = \left[\sum_{m=1}^M \bar{\mu}_m \cdot Q_m \right] - p$$

Ecuación 6

$$U_s(p, \mathbf{Q}) = p - \left[\sum_{m=1}^M \theta_m \cdot Q_m^2 \right]$$

Ecuación 7

⁸ Por ejemplo, podrían interesar dimensiones de calidad relativas al diseño, color, tamaño, peso, etc.

, en donde θ_m es la componente m del vector de tipo θ^9 , y en donde se supone también que la dimensión de dicho vector es la misma la del vector de calidad Q .¹⁰

De manera similar, la Ecuación 3 puede ser reescrita análogamente:

$$S(p, Q) = \left[\sum_{m=1}^M \mu_m \cdot Q_m \right] - p$$

Ecuación 8

Notar que en este caso, los parámetros por los cuales se ponderan los atributos de calidad en la función de utilidad del principal ($\bar{\mu}_m$) y los que afectan la función $S(p, Q)$ (μ_m) son potencialmente diferentes, pese a tener la mismas forma.

Por otra parte, y con el fin de poder analizar de manera exitosa el problema es necesario especificar el modelo definiendo sus dimensiones. Para el caso analizado se supondrá que $K = M = 2$, por lo que en el resto del desarrollo serán consideradas dos dimensiones de calidad. Así, un producto estará definido por una trio (p, q_1, q_2) que indica su precio y los valores en sus dos dimensiones de calidad. Además se supondrá que el intervalo para los 3 parámetros será $[0, \infty]$.

De esta forma la utilidad del planificador al obtener un producto (p, q_1, q_2) tendrá la siguiente forma lineal, análoga a la Ecuación 6:

$$U_p(p, q_1, q_2) = (\bar{\mu}_1 \cdot q_1 + \bar{\mu}_2 \cdot q_2) - p$$

Ecuación 9

, en donde $\bar{\mu}_1$ y $\bar{\mu}_2$ son parámetros fijos para el principal, los cuales ponderan linealmente las correspondientes dimensiones de calidad del producto.

Por su parte, los N agentes que ofrecen el producto se diferenciarán en una suerte de eficiencia de producir los diferentes niveles de calidad del producto, traducida en diferencias en el costo de producción del mismo. La función de costos genérica, dado parámetros θ_1 y θ_2 de eficiencia en producción de calidad es, para producir un producto con calidades q_1 y q_2 es la siguiente:

$$C(q_1, q_2) = \theta_1 \cdot q_1^2 + \theta_2 \cdot q_2^2$$

Ecuación 10

, que es convexa en ambos niveles de calidad. De esta manera, agentes con menores parámetros θ_1 y θ_2 serán más eficientes (tendrán menos costos) para producir determinados niveles de calidad en el producto.

De esta manera, la utilidad del vendedor en caso de vender el producto (p, q_1, q_2) , está dada por:

$$U_s(p, q_1, q_2) = p - c(q_1, q_2) = p - (\theta_1 \cdot q_1^2 + \theta_2 \cdot q_2^2)$$

Ecuación 11

⁹ El tipo de un agente i se escribirá θ_i , mientras que sus respectivas dimensiones θ_{im} , con $m = \{1, \dots, M\}$.

¹⁰ Esto es, $K = M$, de forma tal que cada componente del vector de un tipo θ , está asociada a una suerte de eficiencia de ofrecer la misma componente de calidad en Q .

CAPÍTULO 2: MODELO Y RESOLUCIÓN

Finalmente es necesario definir las distribuciones para los parámetros que no son conocimiento común (los tipos de los agentes en este caso). Para cada agente i , con $i \in \{1, \dots, N\}$, sus parámetros de costos están distribuidos según una función de distribución acumulada $F_1(\theta_{1i})$ y $F_2(\theta_{2i})$, de manera que:

$$f_j(\theta_{ji}) = F'_j(\theta_{ji}) \quad j \in \{1,2\}$$

Ecuación 12

Las funciones acumuladas se definen en los siguientes intervalos:

$$F_j(\theta_{ji}): [\theta_j^l, \theta_j^h] \rightarrow [0,1] \quad j \in \{1,2\}$$

Ecuación 13

, en donde $[\theta_1^l, \theta_1^h]$ y $[\theta_2^l, \theta_2^h]$ corresponden al espacio en que es plausible encontrar a dichos parámetros.

Por otro lado, definiendo el vector de tipos $\theta_i = (\theta_1, \theta_2)$, y asumiendo que la distribución de ambos parámetros es independiente, se tendrá que la distribución conjunta estará dada por la siguiente expresión:

$$f(\theta_i) = f_1(\theta_1)f_2(\theta_2)$$

Ecuación 14

En general, y al menos que se especifique lo contrario, las funciones de distribución y los intervalos para ambos parámetros de costos serán similares, por lo que se tendrá:

$$\begin{aligned} F_1(\cdot) &= F_2(\cdot) = F(\cdot) \\ \theta_1^l &= \theta_2^l = \theta^l \\ \theta_1^h &= \theta_2^h = \theta^h \end{aligned}$$

Con el fin de analizar el proceso de licitación, es necesario definir con claridad las reglas particulares del mismo, que corresponden a un caso particular de lo ya explicado en la sección anterior. El juego se desarrolla de la siguiente manera:

- Cada uno de los N agentes ofrece un producto (combinación de precio y calidad) dado por el trio (p, q_1, q_2) .
- El principal evalúa las propuestas y las rankea por medio de una función *scoring*, del tipo definida en la Ecuación 8, asignándole un puntaje a cada una.
- El ganador de la licitación es aquel agente que ofrece la propuesta mejor rankeada de acuerdo a la función *scoring* anterior. Dicho agente debe entonces ofrecer una combinación (p, q_1, q_2) que “complete” dicho puntaje ganador. Esto es, una combinación (p, q_1, q_2) que evaluada en la función de la Ecuación 8 entregue el mismo puntaje con el cual se ganó la licitación (no necesariamente el mismo ofrecido anteriormente).

2.1.2 Resolución del modelo

Con el fin de resolver el modelo anterior, se comenzará analizando el problema que enfrenta el agente ganador del proceso de licitación (el agente i por ejemplo). Se supondrá que dicho agente ganó el proceso con un score t_i^w . Dado esto, dicho vendedor resuelve el siguiente problema, con el fin de decidir que producto implementar:

$$\begin{aligned} & \max_{\{p, q_1, q_2\}} p - c(q_1, q_2, \theta_i) \\ & s. t. \quad \emptyset(q_1, q_2) - p = t_i^w \end{aligned}$$

, en donde θ_i en la función $c(q_1, q_2, \theta_i)$, recuerda explícitamente que la función de costos depende del agente (o tipo) particular que se está analizando.

Reemplazando la expresión de p en la restricción se tiene el siguiente problema equivalente:

$$\max_{\{q_1, q_2\}} \emptyset(q_1, q_2) - c(q_1, q_2, \theta_i) - t_i^w$$

Y dado que t_i^w es una constante, el problema se reescribe como

$$\max_{\{q_1, q_2\}} \emptyset(q_1, q_2) - c(q_1, q_2, \theta_i)$$

Ecuación 15

, que es independiente del puntaje con el cual se ganó el proceso de licitación. Luego, los niveles de calidad escogidos son independientes del nivel con el cual se ganó el juego.

Es posible escribir además la siguiente expresión dada por el máximo del problema anterior:

$$k_i = \max_{\{q_1, q_2\}} \emptyset(q_1, q_2) - c(q_1, q_2, \theta_i) = k_i(\theta_i)$$

Ecuación 16

Luego, el máximo del problema es función solamente del tipo del agente ($\theta_i = (\theta_{1i}, \theta_{2i})$). Esto induce un mapeo de los tipos (un espacio bidimensional) en lo que se llamarán pseudotipos (un espacio unidimensional dado por k_i). Lo anterior se representa en la siguiente figura, para el caso general en que los tipos de los agentes es un espacio k -dimensional ($\theta_i \in \mathbb{R}_+^k$)

Notar además que el hecho de que existan dimensiones de calidad que definan el producto, adicionales al precio, es lo que conlleva la aparición de estos pseudotipos. Las dos dimensiones de calidad definen a su vez una bidimensionalidad en las características de los agentes, que mediante el arreglo anterior pueden ser expresadas en un parámetro unidimensional.

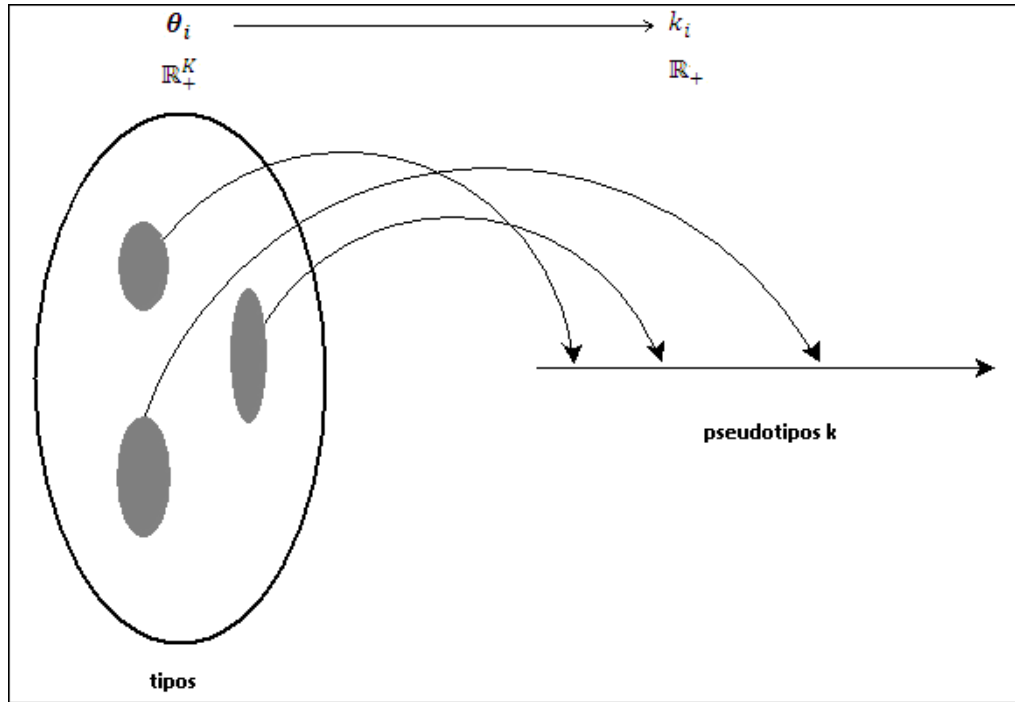


Figura 1: Mapeo en pseudotipos, representación gráfica.

Es importante destacar respecto a lo anterior que muchos tipos θ_i pueden poseer el mismo pseudotipo k_i , y por ende, todos ellos enfrentarán el mismo problema al momento de ofertar en un remate. Esto se aclarará en más detalle posteriormente.

Por otra parte, y dado que se tiene una distribución $F(\theta_i)$ para los tipos, esto induce directamente una distribución $H(k_i)$ sobre los pseudotipos, que es posible calcular directamente como se verá luego. Por el momento se pondrá conocida.

Para el caso descrito, es posible obtener una fórmula directa para calcular los pseudotipos k . Esto es, resolviendo el problema dado por la Ecuación 16, es posible obtener las calidades a implementar una vez ganada la licitación:

$$CPO - q_1: \quad \max_{\{q_1, q_2\}} \phi(q_1, q_2) - c(q_1, q_2, \theta_i)$$

$$\phi_1(q_1^*, q_2) = c_1(q_1^*, q_2, \theta_i)$$

Ecuación 17

$$CPO - q_2: \quad \phi_2(q_1^*, q_2) = c_2(q_1^*, q_2, \theta_i)$$

Ecuación 18

Por otra parte, el precio a implementar viene dado por la restricción del problema inicial. Esto es:

$$p^* = \phi(q_1^*, q_2^*) - t_i^w$$

Ecuación 19

Reemplazando esto en la función objetivo, se obtiene una expresión para el máximo. Dado además que esto está hecho para un θ_i específico para el agente i , dicho máximo corresponderá al pseudotipo k_i . Esto por supuesto, no quiere decir que no haya otros agentes con otras combinaciones de tipos θ_j que posean el mismo máximo, y por ende, pertenezcan al mismo pseudotipo. La ecuación que define a los pseudotipos es entonces:

$$k_i = \Phi(q_1^*, q_2^*) - c(q_1^*, q_2^*, \theta_i)$$

Ecuación 20

Por otra parte, es posible variar el enfoque y analizar el problema que resuelve cada agente ex-ante de conocer si se ganó o no la licitación. De ganar el proceso con un *score* t_i^w , se conoce del análisis anterior de qué manera implementará el producto ex-post. ¿Pero de qué manera se elige ex-ante el t_i (el *score*) a ofertar? En estricto rigor lo que se ofrece antes es una combinación (p, q_1, q_2) , pero dado que esto es rankeado de acuerdo a la función *scoring* que es conocimiento común, y una vez que se gana el proceso, las calidades y precio son escogidas de acuerdo al análisis anterior, el problema equivalente es el de decidir que *score* ofrecer. El problema que resuelve entonces el agente es el siguiente:

$$\begin{aligned} \max_{\{t_i\}} \{ & p(t_i) - c(q_1, q_2, \theta_i) \} \cdot \mathbb{P}(t_i > t_j / \forall j \neq i) \\ \text{s. t. } & \Phi(q_1, q_2) - p(t_i) = t_i \\ & (q_1, q_2) = \text{argmax}[\Phi(q_1, q_2) - c(q_1, q_2, \theta_i)] \end{aligned}$$

, en donde $p(t_i)$ indica la dependencia que el precio final ofrecido tiene respecto al *score* ofrecido, y por ende, al con que se ganaría. Esto es, (q_1, q_2) se escogen de acuerdo al desarrollo anterior (que son las calidades en caso de ganar el proceso, y son independientes del t_i con el cual se ganó), y en donde el termino de probabilidad corresponde a la de declarar un *score* mayor al del resto de los participantes. Por supuesto, se asume que la utilidad es cero en caso de no ganar la licitación¹¹. Es posible reemplazar el precio en la función objetivo y reescribir lo anterior como:

$$\begin{aligned} \max_{\{t_i\}} \{ & \Phi(q_1, q_2) - c(q_1, q_2, \theta_i) - t_i \} \cdot \mathbb{P}(t_i > t_j / \forall j \neq i) \\ \text{s. t. } & (q_1, q_2) = \text{argmax}[\Phi(q_1, q_2) - c(q_1, q_2, \theta_i)] \end{aligned}$$

Pero dada la restricción, los 2 primeros términos de la función objetivo son por definición k_i , por lo que el problema puede ser reescrito como:

¹¹ En estricto rigor, el argumento debería estar multiplicado por x_i , la probabilidad del agente i de ganar la licitación dada su oferta, y sumado a un termino $(1 - x_i) \cdot t^L$. Pero dado que $t^L = 0$, dicho término se anula, y la expresión es equivalente a la ya escrita.

$$\max_{\{t_i\}} (k_i - t_i) \cdot \mathbb{P}(t_i > t_j / \forall j \neq i)$$

Ecuación 21

Este problema es exactamente el mismo que el correspondiente a un remate a sobre cerrado a primer precio, ya discutido con anterioridad¹². Lo que se tiene es una valoración k_i , y se está ofreciendo una apuesta t_i , por lo que el problema es totalmente equivalente y puede ser resuelto de manera análoga.

Luego, se supondrá conocida (luego se deducirá como obtenerla como función de la distribución de los tipos) la distribución de los pseudotipos $H(k_i)$, de forma tal que:

$$H(k_i): [k_l, k_h] \rightarrow [0,1]$$

$$h(k_i) = H'(k_i)$$

Ecuación 22

, en donde $[k_l, k_h]$ corresponde al set al cual pertenecen los pseudotipos. Sea además la estrategia para el agente $\tau(k_i)$, que asigna a cada valoración (o pseudotipo), la subasta óptima en el remate a primer precio dado por el problema de la Ecuación 21. Luego, como ya se vio en la introducción, la estrategia óptima está dada por la siguiente expresión:

$$\tau(k_i) = \frac{1}{G(k_i)} \int_0^{k_i} g(y)y dy$$

Ecuación 23

, donde:

$$G(k_i) = H(k_i)^{N-1}$$

$$g(k_i) = (N - 1)H(k_i)^{N-2} \cdot h(k_i) = G'(k_i)$$

Ecuación 24

En este caso, $G(k_i)$ corresponderá a la probabilidad de que un agente de pseudotipo k_i gane la licitación (o sea, que su *score* declarado dado por $\tau(k_i)$ sea mayor al del resto de los jugadores)¹³.

De esta manera, mediante la función $\tau(k_i)$ descrita por la Ecuación 23, es posible obtener el *score* declarado por cada agente en el proceso de licitación. Como es posible deducir del desarrollo, dicha declaración depende solamente del pseudotipo, por lo que cada agente “calcula” su pseudotipo¹⁴, declara el *score* correspondiente (u ofrece un producto compatible con dicho valor, que en realidad no intervendrá en el problema), y luego, en caso de ganar la licitación, entrega un producto con calidades y precios definidos por la Ecuación 17, Ecuación 18 y Ecuación 19.

¹² Con esto se quiere decir que la forma del problema es similar, ya que esto dista mucho de un problema de remate como el analizado. Luego, dado que matemáticamente se tiene una forma similar, la misma estrategia puede ser aplicada en resolver el problema.

¹³ Esto es, $G(k_i)$ corresponde a la expresión x_i definida con anterioridad, dado que el tipo i , de pseudotipo k_i , oferta un *score* $t_i = \tau(k_i)$.

¹⁴ En realidad no lo hace, pero es para especificar la idea de que el *score* declarado depende solo de esto.

Es posible notar también que la función $\tau(k_i)$ es creciente en k_i , por lo que el mecanismo asegura que aquel agente con mayor pseudotipo (o equivalentemente aquel en promedio más eficiente), es quien gana la licitación (algo clave en este tipo de mecanismos para asegurar la eficiencia).

2.1.3 Utilidad del planificador

Con el fin de analizar las características del mecanismo óptimo, es necesario definir la manera en que se calcula la utilidad del planificador dada una función score fija.

El desarrollo anterior permite, para un mecanismo en específico¹⁵, conocer la forma en que los agentes ofertan su *score*¹⁶, y con esto a su vez, su probabilidad de ganar el remata y el precio y las cantidades ofertadas.

Obtener esto es simple, ya que como se vio anteriormente, todo queda definido de forma directa por el pseudotipo al cual pertenecen los agentes. De manera automática, el jugador i , de tipo $(\theta_{1i}, \theta_{2i})$, conoce cuál es su pseudotipo por medio de la expresión siguiente:

$$k_i = \Phi(q_1^*, q_2^*) - c(q_1^*, q_2^*, \theta_i)$$

Una vez conocido esto, cada jugador conoce además su probabilidad de ganar, y por medio de la Ecuación 23, el *score* a ofertar en la licitación. Esto es:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{ganar}) &= G(k_i) = H(k_i)^{N-1} \\ \tau(k_i) &= \frac{1}{G(k_i)} \int_0^{k_i} g(y) y dy \end{aligned}$$

Finalmente, en caso de ganar, cada jugador sabe además que el producto (p^*, q_1^*, q_2^*) que debe implementar cumple las siguientes ecuaciones:

$$(q_1^*, q_2^*) = \text{argmax}[\Phi(q_1, q_2) - c(q_1, q_2, \theta_i)]$$

$$p^* = \Phi(q_1^*, q_2^*) - t_i^w$$

, donde lógicamente t_i^w es el *score* ofertado por el agente, y con el cual gana.

Pero todo esto es desde el punto de vista del agente, quienes conocen su tipo, y por ende pueden calcular su pseudotipo. Pero el principal no posee dicha información, y más aún, es el quien debe diseñar el mecanismo óptimo para asegurar maximizar sus utilidades.

En este caso, diseñar un mecanismo óptimo significa para el principal escoger de manera adecuada la forma que posee la función *score*, o lo que es equivalente en el caso de funciones lineales, los pesos

¹⁵ Esto es, unos pesos para la función *score* dado, y demás parámetros correctamente definidos (números de jugadores, pesos en la función de utilidad del principal, espacio de los tipos, funciones de distribución, etc.)

¹⁶ O lo que es equivalente como ya se vio, su producto (p, q_1, q_2)

dados a las diferentes dimensiones de calidad en dicha función¹⁷, a fin de incentivar a los agentes a jugar de la forma en que a éste le conviene.

Por supuesto, la utilidad del principal será una expresión en esperanza, dado el escaso conocimiento de los agentes. Pero si bien el principal no conoce a los agentes (y por ende no conoce sus pseudotipos), si conoce la forma en que estos jugarán, y además tienen una distribución de probabilidad de encontrarlos, que es conocimiento común.

La utilidad obtenida por el principal de un ganador de la licitación de tipo (θ_1, θ_2) , asociado a un pseudotipo k es¹⁸:

$$U_p(\theta_1, \theta_2) = v(q_1^*(\theta_1, \theta_2), q_2^*(\theta_1, \theta_2)) - p^*(\theta_1, \theta_2)$$

$$U_p(\theta_1, \theta_2) = v(q_1^*, q_2^*) - (\phi(q_1^*, q_2^*) - t_i^w)$$

$$U_p(\theta_1, \theta_2) = v(q_1^*, q_2^*) - (\phi(q_1^*, q_2^*) - \tau(k_i))$$

Ecuación 25

Como se observa, la expresión es creciente en $\tau(k_i)$, la que a su vez es creciente en k_i . Esto es, el principal obtendrá una utilidad mayor de aquellos agentes con mayor pseudotipo.

Por supuesto la expresión anterior es determinística, en el sentido que se conoce al jugador, y se asume que efectivamente este gana. Podemos relajar esto último, asumiendo que solo conocemos al jugador, pero no si gana o no el proceso. Así, la utilidad esperada dado que se conoce al agente es:

$$E[U_p(\theta_1, \theta_2)/(\theta_1, \theta_2)] = [v(q_1^*, q_2^*) - (\phi(q_1^*, q_2^*) - \tau(k_i))] \cdot \mathbb{P}(ganar)$$

$$E[U_p(\theta_1, \theta_2)/(\theta_1, \theta_2)] = [v(q_1^*, q_2^*) - (\phi(q_1^*, q_2^*) - \tau(k_i))] \cdot H(k)^{N-1}$$

Dado que k_i es función de (θ_1, θ_2) , es posible escribir la expresión anterior como función solo de estos argumentos:

$$E[U_p(\theta_1, \theta_2)/(\theta_1, \theta_2)] = [v(q_1^*, q_2^*) - (\phi(q_1^*, q_2^*) - \tau(k_i(\theta_1, \theta_2)))] \cdot H(k_i(\theta_1, \theta_2))^{N-1}$$

Ecuación 26

Finalmente, la utilidad esperada del principal corresponderá a la siguiente expresión, en donde se integra sobre todo los tipos, y se multiplica por la probabilidad de efectivamente encontrar a dicho tipo¹⁹.

¹⁷ Notar que este es el único grado de acción del principal, ya que todos los demás parámetros vienen definidos por el ambiente.

¹⁸ Esto se conoce de inmediato asumiendo conocido el tipo.

¹⁹ Una suerte de probabilidades totales.

$$E[U_p] = U(S(\cdot)) = N \int_{\theta^l}^{\theta^h} \int_{\theta^l}^{\theta^h} \left(E \left[\frac{U_p(\theta_1, \theta_2)}{\theta_1, \theta_2} \right] \cdot f(\theta_1)f(\theta_2) \right) d\theta_1 d\theta_2$$

Ecuación 27

, en donde $U(S(\cdot))$ hace explícito que la utilidad esperada del planificador depende del tipo de función *score* elegida por el principal.

2.1.4 Recapitulando

El desarrollo anterior permite de una forma secuencial, resolver el problema que enfrenta el principal a la hora de escoger el mecanismo que le asegura maximizar su utilidad. Cuando las diferencias entre los agentes son multidimensionales, es posible mapear dichas características en un pseudotipo k_i de una sola dimensión, y hacer análogo el problema a un remate a primer precio convencional. De esta manera, todos los agentes que posean un mismo pseudotipo ofertaran un *score* similar, de manera que el principal pueda rankearlos de manera precisa. Dicho *score* es una forma de evaluar una combinación de precio y calidades (el producto en sí ofrecido), por lo que si bien, mismos pseudotipos deben ofertar el mismo *score*, la definición del producto en preciso puede ser diferente.

Todo esto es conocimiento común. El agente sabe la manera en que oferta un pseudotipo en particular, pero desconoce a qué tipo de agentes se enfrenta. De esta manera, su utilidad vendrá dada por la esperanza de hallar a los diferentes tipos, al ser la distribución de los mismos conocimientos comunes.

Finalmente tan solo resta evaluar la utilidad esperada obtenida para diferentes mecanismos, y lógicamente, implementar aquel que *ex-ante* ofrezca los mejores resultados. Que tan fácil o difícil es implementar lo anterior dependerá mucho de las primitivas del problema. En la sección siguiente se analizará en extenso un caso particular de funciones, con las cuales es posible realizar un desarrollo analítico y numérico de gran interés.

Capítulo 3

Resultados y Discusiones

3.1 Respecto a la abstracción del modelo y a su aplicabilidad en casos reales

El modelo definido en el capítulo anterior es un punto de partida para comenzar a discutir respecto a los alcances y posibles aplicaciones de los resultados hallados a casos concretos. En primer lugar, como se mencionó en la introducción, el modelo en particular estudiado requiere que la calidad sea observable y verificable, un punto no menor en aplicaciones de licitaciones. Muchos productos licitables pueden tener más bien características de servicios, por lo que el uso de modelos como el descrito en dichos escenarios sería de difícil aplicabilidad. Por otra parte es necesario encontrar una correcta parametrización de los niveles de calidad, que permitan llevar al modelo características reales de posibles productos.

Los dos puntos anteriores limitan en cierto sentido el aplicar la teoría a casos reales, pero no marginan completamente las posibilidades. En casos simples, en donde por ejemplo, el producto puede ser definido fácilmente (o completamente) por dos dimensiones de calidad, el problema se reduciría a la correcta parametrización y definición de escala para los diferentes niveles de calidad. En dicho caso, y luego de una buena estimación de la función de distribución de los tipos de los agentes, sería posible, al menos en teoría aplicar los resultados obtenidos. En casos más complejos, con mayores características definiendo el producto, o incluso un servicio, que por lo general se define por múltiples características de interés, muchas de ellas poco tangibles, el trabajo es más complicado. Pese a esto, siempre es posible abstraer el problema, y definir dimensiones artificiales de calidad que engloben de alguna manera otras características, y se construyan, por ejemplo, ponderando de alguna manera éstas.

Con lo anterior en mente, y con una correcta definición de los alcances y escalas de dichas dimensiones, sería posible aplicar las reglas de los modelos encontrados en un juego real, asumiendo por supuesto que desde un principio los jugadores conocen esta manera de evaluar los productos. En esto, la subjetividad juega también un papel crucial, al hacer difícil la aplicación de un modelo de este tipo. Si no se tiene certeza, o una regla clara respecto a cómo el principal ordenará las calidades de los productos ofrecidas o como se confecciona la escala de calidades, el mecanismo será inútil, al no generar los incentivos adecuados a los jugadores. Luego además de lo anterior, con el fin de abstraer los resultados a casos concretos, sería necesario generar contratos o exigencias que definan la manera en que ciertas

definiciones de las dimensiones de calidad serán ordenadas para generar un valor. Se seguirá esta línea y concluirá en las discusiones posteriores.

3.2 Resolución del caso particular estudiado

En base a todo el desarrollo de la sección anterior, el objetivo de la presente es estudiar un caso particular bien definido, a fin de generar un marco teórico y numérico en el cual sea posible analizar la mejor regla de score que debiese utilizar el principal.

Las expresiones calculadas con anterioridad son genéricas, y es posible reemplazar las parametrizaciones particulares realizadas para obtener expresiones analíticas de las mismas. Así, considerando $K = M = 2$, y las funciones $c(\cdot)$, $v(\cdot)$ y $\phi(\cdot)$ ya descritas (ponderaciones lineales), y recordando que en este caso el vector de tipos es bi-dimensional ($\theta_i = (\theta_{1i}, \theta_{2i})$), se obtiene fácilmente las siguientes expresiones para el problema del agente ganador dado que debe cumplir un *score* t_i^w :

$$q_1^* = \frac{\mu_1}{2\theta_{1i}}$$

$$q_2^* = \frac{\mu_1}{2\theta_{2i}}$$

$$p^* = (\mu_1 q_1^* + \mu_2 q_2^*) - t_i^w$$

Ecuación 28

Por otra parte, dadas las expresiones anteriores, es posible reemplazarlas en el argumento de la función objetivo, obteniendo una expresión para los pseudotipos.

$$k_i = \frac{\mu_1^2}{4\theta_{1i}} + \frac{\mu_2^2}{4\theta_{2i}}$$

Ecuación 29

Es fácil ver que esto define curvas de pseudotipos en el espacio (θ_1, θ_2) , como se muestra en la figura para el caso en que ambos parámetros de tipos pertenecen a $[1,2]$.

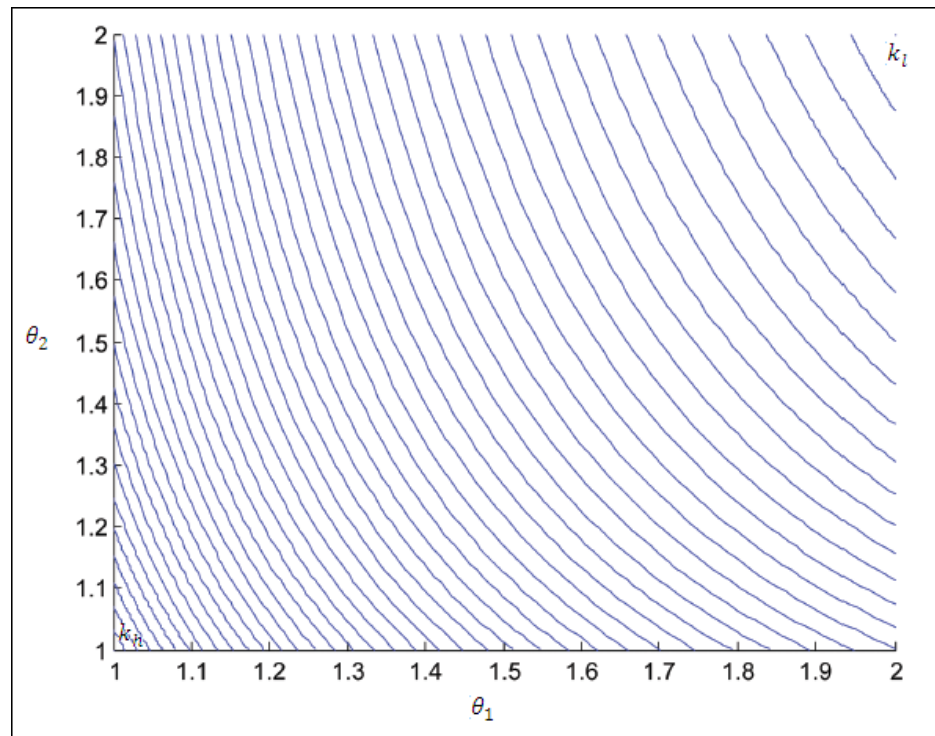


Figura 2: Curvas de pseudotipos.

Es posible apreciar también (del dibujo y de la ecuación) que las curvas de pseudotipos no se cruzan, y que cada curva entrega las combinaciones de (θ_1, θ_2) que corresponden a un mismo valor de k . Además, las curvas de los extremos (que en realidad corresponden a un solo punto) son los mínimos y máximos de los pseudotipos. El pseudotipo menor, k_l es alcanzada por el o los tipos menos eficientes en ambos parámetros de costos (θ_1 y θ_2 igual a su mayor valor posible, 2), mientras que el mayor k_h es alcanzado por aquel agente más eficiente en ambas dimensiones. El resto de los pseudotipos se ubica en dicho intervalo $[k_l, k_h]$, el cual es completado de manera continua. En la figura se observa que partiendo de k_l en el extremo superior derecho, el pseudotipo aumenta a medida que uno se mueve saltando de curva en curva hasta el otro extremo (k_h)²⁰.

Respecto a la función de oferta $\tau(k_i)$ dada por la Ecuación 23, su expresión concreta requiere primero obtener una expresión para la función de distribución de los pseudotipos k_i , lo que será calculado en la siguiente sección. Sin embargo, y a modo de fijar conceptos, en la siguiente figura es posible apreciar gráficamente su forma funcional. Se puede notar que la función $\tau(k_i)$ es creciente en k_i , por lo que el mecanismo asegura que aquel agente con mayor pseudotipo (o equivalentemente aquel en promedio más eficiente), es quien gana la licitación. En la figura siguiente se muestra una gráfica de la función de para el caso de funciones de distribución uniformes para los tipos. Además los otros parámetros tomarán valores estándar.²¹

²⁰ La simetría de las curvas es consecuencia de considerar $\mu_1 = \mu_2$.

²¹ Con valores estándar para el resto de los parámetros, se supondrá que $\mu_1 = \mu_2 = 2$ (caso simétrico), número de jugadores $N = 10$ y espacio para los valores de tipos θ_1 y θ_2 igual a $[1,2]$.

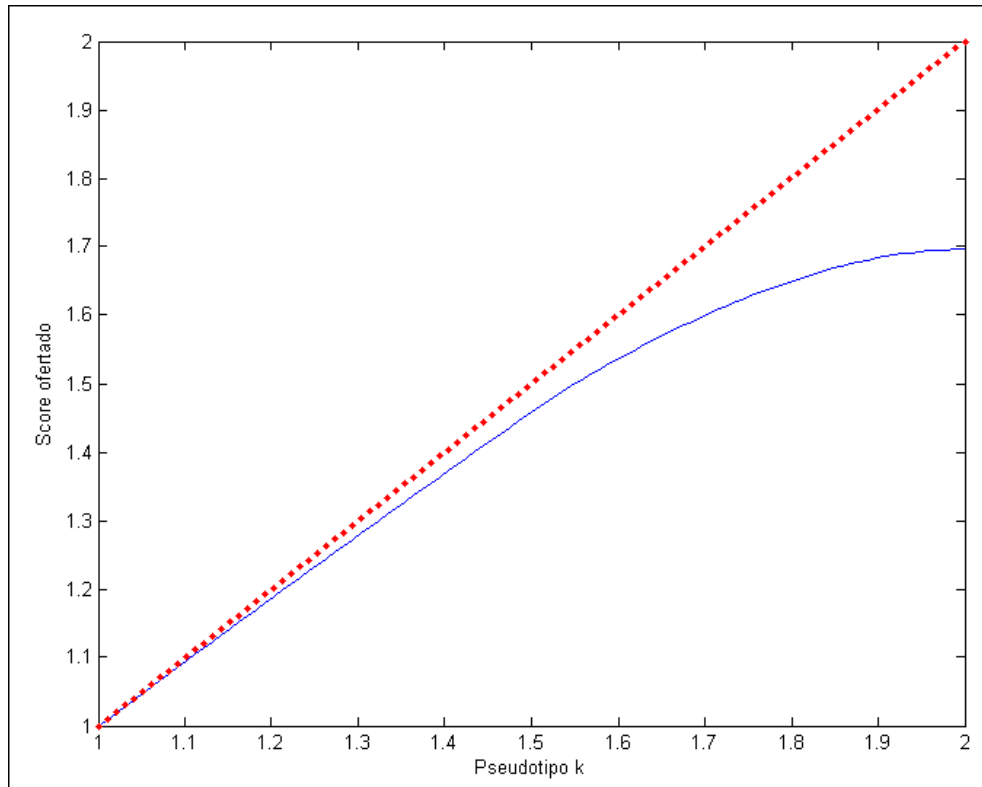


Figura 3: Función de oferta $\tau(k_i)$ para diferentes pseudotipos y otros parámetros fijos.

Además, como es posible observar, la declaración del *score* es siempre menor o igual al pseudotipo, tal cual se da en el caso de un remate a primer precio. Por otra parte, también se tendrá que a medida que aumenta el número de jugadores, la curva se acerca a la línea de 45°, por lo que los agentes tenderán a ofrecer un *score* más cercano a su pseudotipo. Finalmente, aquellos agentes con menor pseudotipo (tipos con valores más altos, o sea menos eficientes) tienen menos margen de acción, y declararán un *score* muy similar a su pseudotipo (o visto desde el punto de vista del remate, oferta una cantidad muy similar a su valoración real).

3.2.1 Cálculo de la función de distribución de los pseudotipos

Dado que los tipos $\theta_i = (\theta_{1i}, \theta_{2i})$, bi-dimensionales, se mapean en pseudotipos k_i unidimensionales, la distribución de los primeros induce una distribución para los segundos. En la figura siguiente se aprecian las curvas para 6 pseudotipos²², en donde lógicamente, $k_l < k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < k_h$. Por definición se tiene lo siguiente:

$$H(k_1) = \int_{k_l}^{k_1} h(k) dk$$

, pero naturalmente la expresión para $h(\cdot)$, la distribución marginal, también es desconocida.

²² En realidad 4 curvas y 2 puntos, que corresponden a k_l y k_h .

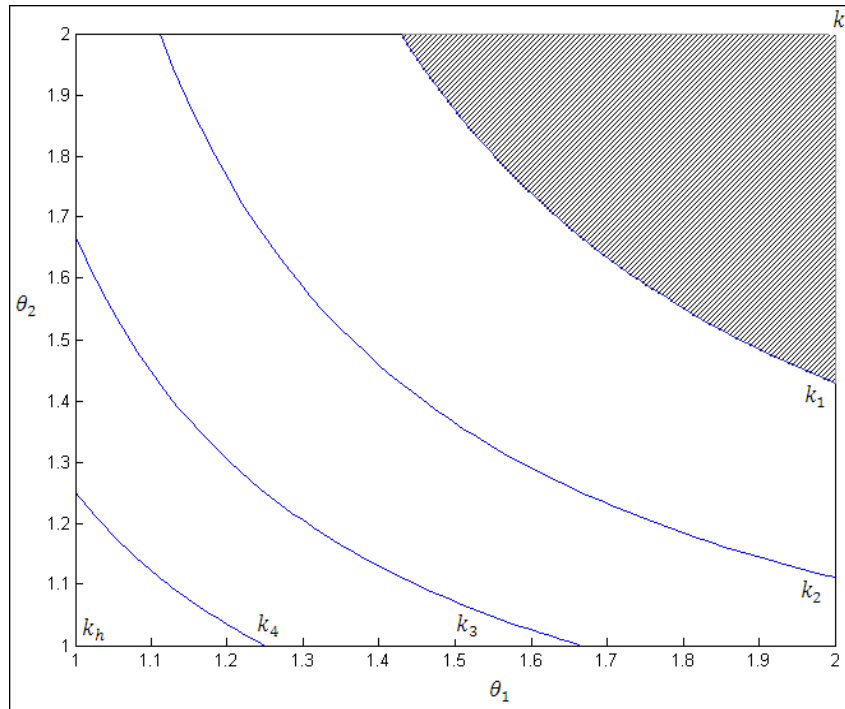


Figura 4: Representación esquemática distribución acumulada de k .

Gráficamente, $H(k_1)$ corresponde a toda la masa de probabilidad achurada en la figura anterior. Esto es a la probabilidad total de obtener cualquiera de los pseudotipos menores a k_1 , y esto a su vez, es equivalente a la probabilidad total de obtener cualquiera de los tipos individuales que pueden generar dichos pseudotipos. Discretamente esto equivale a sumar, para cada curva de pseudotipo, la probabilidad de obtener cada combinación (θ_1, θ_2) sobre dicha curva, y luego sumar esto para cada curva de pseudotipo en $[k_l, k_1]$. Continuamente, esto es algo más simple, y equivale a sumar la probabilidad de encontrar cada combinación (θ_1, θ_2) sobre el área achurada.

Sea θ'_1 la coordenada en θ_1 de la intersección de la curva k_1 con la horizontal, y θ'_2 la coordenada en θ_2 de la intersección de la misma curva con la vertical. Para el caso anterior, la expresión para $H(k_1)$ es la siguiente, en donde la geometría del problema es indispensable para obtener una expresión correcta.

$$H(k_1) = \int_{\theta'_2}^{\theta_h} \int_{\theta'_1}^{\theta_h} (f(\theta_1)f(\theta_2)) d\theta_1 d\theta_2$$

, donde θ_h corresponde al límite superior de los tipos (2 en el caso graficado). Notar que dicha expresión es válida para cualquier curva de pseudotipo que se ubique hacia el lado derecho (mientras la geometría permita dicha expresión para la expresión de la integral), donde tan solo varían $\theta'_1(k)$ y $\theta'_2(k)$ como función del k considerado (la curva corta en diferentes puntos). Para curvas como k_3 o k_4 , la expresión deberá ser modificada respetando la geometría del problema.

Es posible notar también que de acuerdo al análisis anterior, $H(k_l)$ corresponde a la probabilidad de obtener un punto en específico (θ_h, θ_h) , por lo que lógicamente la probabilidad acumulada es cero.

Además $H(k_h)$ equivale a integrar todo el plano encuadrado en la figura, o lo que es equivalente, la probabilidad de obtener cualquier punto que es 1.

En lo siguiente se considerarán diferentes casos (simétricos y asimétricos), y se obtendrán expresiones para $H(k)$ en cada caso.

Caso simétrico ($\mu_1 = \mu_2$)

El problema será simétrico si el peso con el que se pondera cada dimensión de calidad en la función de *scoring* es el mismo. En este caso, las curvas de pseudotipos tendrán la siguiente expresión:

$$k = \frac{\mu^2}{4\theta_1} + \frac{\mu^2}{4\theta_2}$$

Ecuación 30

Luego, las curvas serán simétricas en el plano $(\theta_l, \theta_h) \times (\theta_l, \theta_h)$. En la figura de curvas de pseudotipos siguiente se identifican 2 sectores:

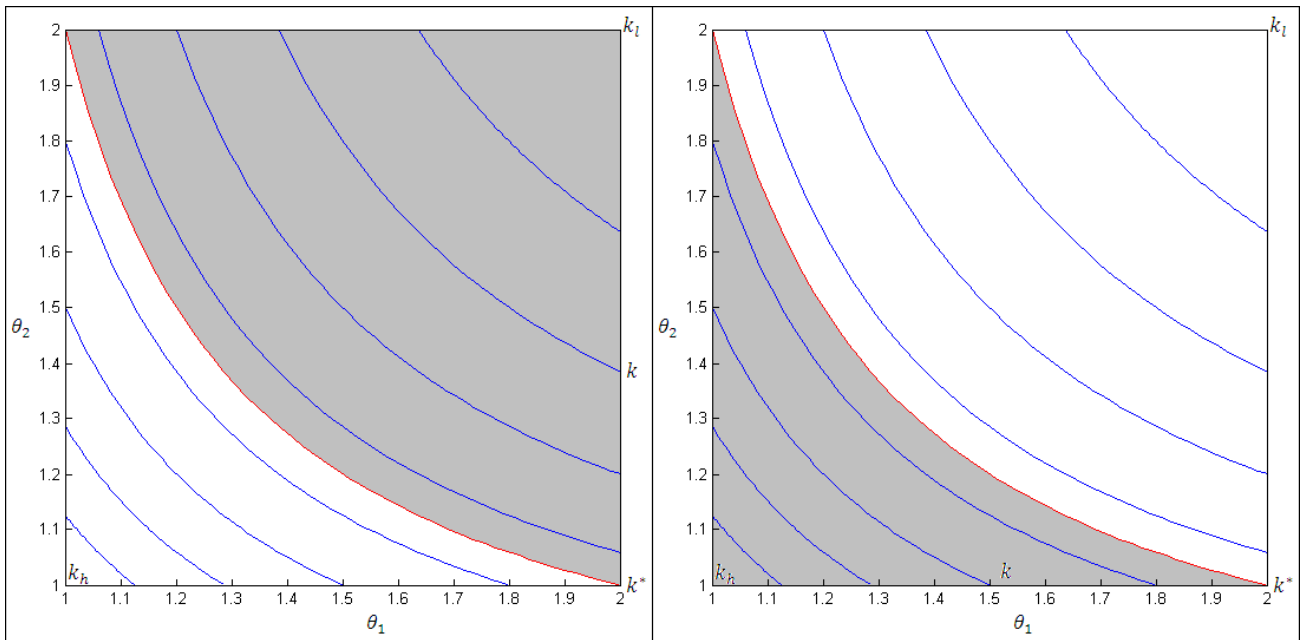


Figura 5: Diferentes sectores definidos por las curvas de pseudotipos. Caso simétrico.

Uno dado por aquellas curvas a la derecha de k^* (curva en rojo), pseudotipos tal que $k < k^*$, y otro dado por aquellas curvas a su izquierda, o sea pseudotipos tal que $k > k^*$.

Es posible notar fácilmente que la expresión para k^* es la siguiente²³:

²³ Esto viene simplemente de notar que dicha curva pasa por el punto (θ_l, θ_h) . También es necesario destacar que k^* es el valor de dicho pseudotipo, o sea, el valor común alcanzado por todo los tipos sobre la misma curva. La descripción de la curva estaría dada por una ecuación del tipo: $k^* = \frac{\mu^2}{4\theta_1} + \frac{\mu^2}{4\theta_2}$.

$$k^* = \frac{\mu^2}{4\theta_h} + \frac{\mu^2}{4\theta_l}$$

Ecuación 31

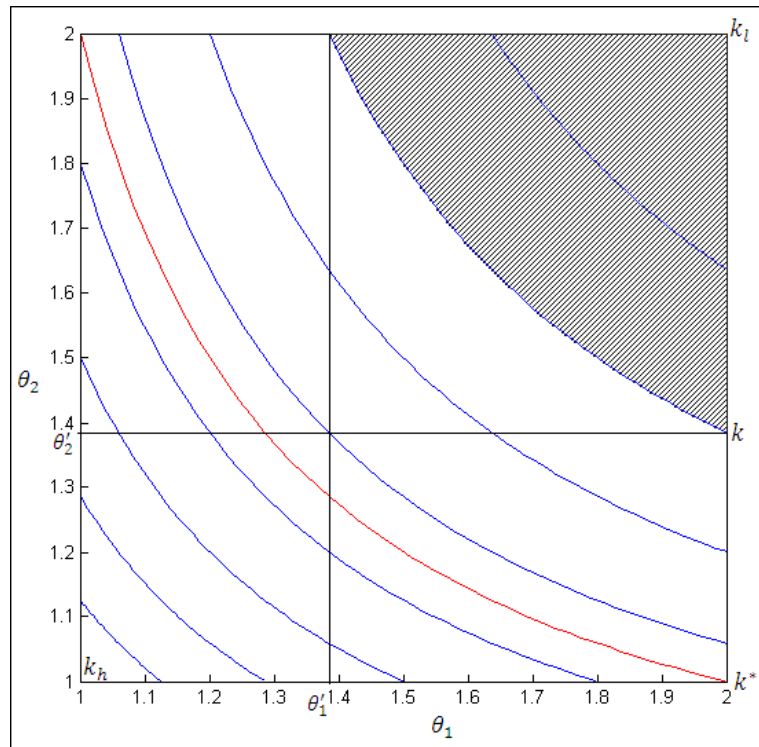


Figura 6: Detalle gráfico cálculo $H(k)$, primer sector.

La expresión para $H(k)$ dependerá de en qué sector se encuentre el k considerado. Observando la figura anterior, si k se encuentra a la derecha de k^* ($k \in [k_l, k^*]$), la expresión será la siguiente:

$$H(k) = \int_{r(\theta_1, k)}^{\theta_h} \int_{\theta'_1(k)}^{\theta_h} (f(\theta_1)f(\theta_2)) d\theta_1 d\theta_2$$

Ecuación 32

, en donde $\theta'_1(k)$ corresponden al punto en el eje θ_1 , destacado en el gráfico y correspondiente al lugar en que la curva considerada corta dicho eje. Por su parte el eje θ_2 se integra entre la curva y θ_h , en donde $r(\theta_1, k)$ representa la curva graficada, y que lógicamente depende del k considerado, y de θ_1 . Dichas expresiones pueden obtenerse de las siguientes formulas²⁴:

$$\theta'_1(k) = \frac{\mu^2 \theta_h}{4k\theta_h - \mu^2}$$

²⁴ Pueden ser obtenidas fácilmente considerando la expresión general para k , y considerando algún punto conocido por donde pase la curva.

$$r(\theta_1, k) = \frac{\mu^2 \theta_1}{4k\theta_1 - \mu^2}$$

Ecuación 33

Utilizando esto, la expresión toma la siguiente forma:

$$H(k) = \int_{\theta_1'(k)}^{\theta_h} f(\theta_1) \left(\int_{l(\theta_1, k)}^{\theta_h} f(\theta_2) d\theta_2 \right) d\theta_1 = \int_{\frac{\mu^2 \theta_h}{4k\theta_h - \mu^2}}^{\theta_h} f(\theta_1) \left(\int_{\frac{\mu^2 \theta_1}{4k\theta_1 - \mu^2}}^{\theta_h} f(\theta_2) d\theta_2 \right) d\theta_1$$

$$H(k) = \int_{\frac{\mu^2 \theta_h}{4k\theta_h - \mu^2}}^{\theta_h} f(\theta_1) \left(F(\theta_h) - F\left(\frac{\mu^2 \theta_1}{4k\theta_1 - \mu^2}\right) \right) d\theta_1$$

$$H(k) = \int_{\frac{\mu^2 \theta_h}{4k\theta_h - \mu^2}}^{\theta_h} f(\theta_1) \left(1 - F\left(\frac{\mu^2 \theta_1}{4k\theta_1 - \mu^2}\right) \right) d\theta_1$$

Ecuación 34

Por otra parte, para aquellos $k > k^*$ ($k \in [k^*, k_h]$), como se muestra en la figura siguiente, la expresión es diferente. Notando que al integrar sobre todo el cuadrado se obtiene 1, es posible definir la distribución acumulada para un k genérico mediante la siguiente expresión:

$$H(k) = 1 - \int_{\theta_l}^{\theta_1'(k)} \left(\int_{\theta_l}^{r(\theta_1, k)} f(\theta_1) f(\theta_2) \right) d\theta_2 d\theta_1$$

Ecuación 35

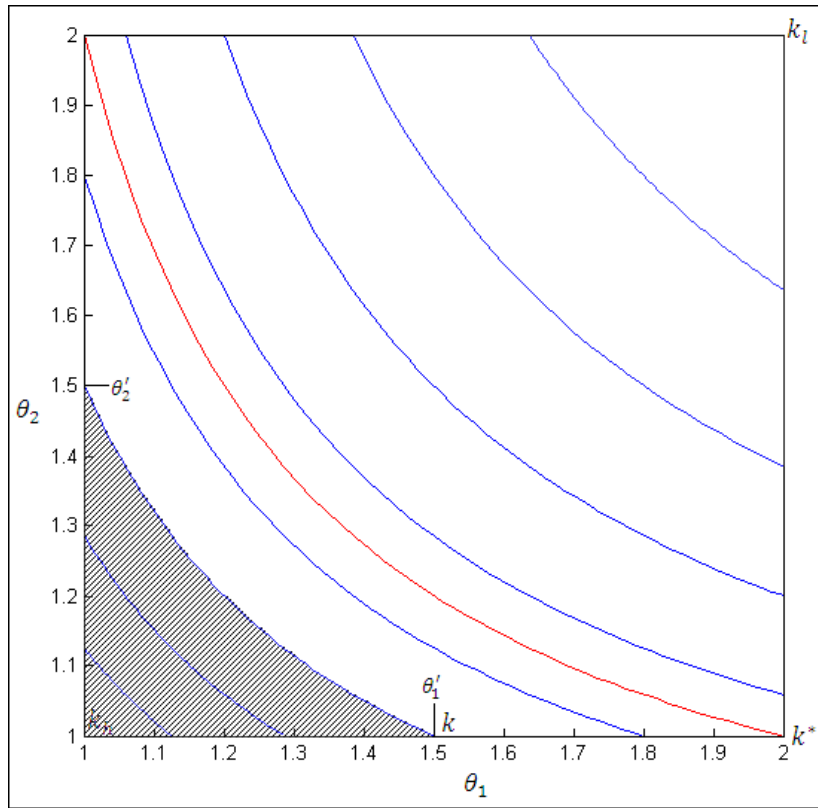


Figura 7 Detalle gráfico cálculo $H(k)$, segundo sector.

, en donde la expresión de las integrales corresponde al área achurada en la figura. Por supuesto, la distribución acumulada para el k considerado es su complemento, el área en blanco. En la expresión se integra θ_1 entre el límite inferior θ_l y $\theta_1'(k)$ (el punto de intersección de la curva en el eje θ_1 , y que lógicamente depende del k considerado), mientras que θ_2 se integra entre θ_l y $r(\theta_1, k)$, que define la curva del pseudotipo k . Dicha curva está definida implícitamente en la Ecuación 30, de la cual es posible despejar directamente la expresión:

$$r(\theta_1, k) = \frac{\mu^2 \theta_1}{4k\theta_1 - \mu^2}$$

Por su parte, en este caso $\theta_1'(k)$ es:

$$\theta_1'(k) = \frac{\mu^2 \theta_l}{4k\theta_l - \mu^2}$$

Ecuación 36

Así, se tiene finalmente la siguiente expresión:

$$H(k) = 1 - \int_{\theta_l}^{\frac{\mu^2 \theta_l}{4k\theta_l - \mu^2}} f(\theta_1) \left(\int_{\theta_l}^{\frac{\mu^2 \theta_1}{4k\theta_1 - \mu^2}} f(\theta_2) d\theta_2 \right) d\theta_1$$

$$H(k) = 1 - \int_{\theta_l}^{\frac{\mu^2\theta_l}{4k\theta_l - \mu^2}} f(\theta_1) \left(F\left(\frac{\mu^2\theta_1}{4k\theta_1 - \mu^2}\right) - F(\theta_1) \right) d\theta_1$$

$$H(k) = 1 - \int_{\theta_l}^{\frac{\mu^2\theta_l}{4k\theta_l - \mu^2}} f(\theta_1) F\left(\frac{\mu^2\theta_1}{4k\theta_1 - \mu^2}\right) d\theta_1$$

Ecuación 37

De esta manera, para el caso simétrico considerado la función de distribución acumulada es la siguiente:

$$H(k): [k_l, k_h] \rightarrow [0,1]$$

$$H(k) = \left\{ \begin{array}{ll} H(k) = \int_{\frac{\mu^2\theta_h}{4k\theta_h - \mu^2}}^{\theta_h} f(\theta_1) \left(1 - F\left(\frac{\mu^2\theta_1}{4k\theta_1 - \mu^2}\right) \right) d\theta_1 & \text{si } k \in [k_l, k^*] \\ 1 - \int_{\theta_l}^{\frac{\mu^2\theta_l}{4k\theta_l - \mu^2}} f(\theta_1) F\left(\frac{\mu^2\theta_1}{4k\theta_1 - \mu^2}\right) d\theta_1 & \text{si } k \in [k^*, k_h] \end{array} \right\}$$

Ecuación 38

Caso asimétrico ($\mu_1 > \mu_2$)

El problema será asimétrico si el peso con el que se pondera cada dimensión de calidad en la función de *scoring* es diferente. En este caso, en la función de *scoring*, se pondera con un mayor peso la primera dimensión de calidad. Como antes, las curvas de pseudotipos tendrán la siguiente expresión:

$$k = \frac{\mu_1^2}{4\theta_1} + \frac{\mu_2^2}{4\theta_2}$$

Ecuación 39

Las curvas serán asimétricas en el plano $(\theta_l, \theta_h) \times (\theta_l, \theta_h)$, como se observa en la figura, en donde se han destacado 3 sectores de las mismas.

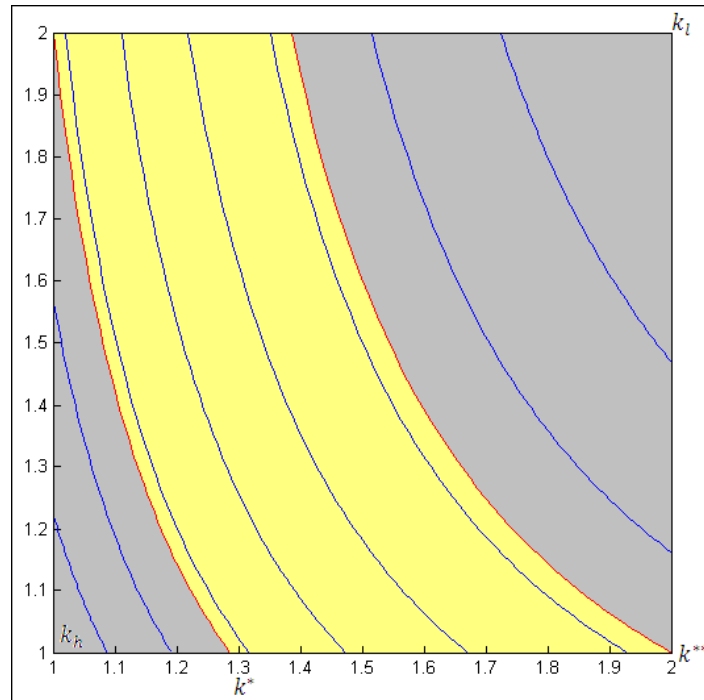


Figura 8: Diferentes sectores definidos por las curvas de pseudotipos. Caso asimétrico.

Como se observa, en este caso existen dos curvas en rojo que definen los diferentes sectores, denominadas k^* y k^{**} . De esta forma, dichos sectores estarán definidos en los siguientes intervalos $k_l < k^{**} < k^* < k_h$. Las expresiones para dichos pseudotipos están dadas por:

$$k^* = \frac{\mu_1^2}{4\theta_l} + \frac{\mu_2^2}{4\theta_h}$$

$$k^{**} = \frac{\mu_1^2}{4\theta_h} + \frac{\mu_2^2}{4\theta_l}$$

Ecuación 40

De forma similar al caso anterior, de acuerdo al sector en donde se ubique él k considerado es la expresión particular de $H(k)$. Si k se encuentra a la derecha de k^{**} ($k \in [k_l, k^{**}]$), la expresión será similar al del caso anterior:

$$H(k) = \int_{r(\theta_1, k)}^{\theta_h} \int_{\theta'_1(k)}^{\theta_h} (f(\theta_1)f(\theta_2)) d\theta_1 d\theta_2$$

Ecuación 41

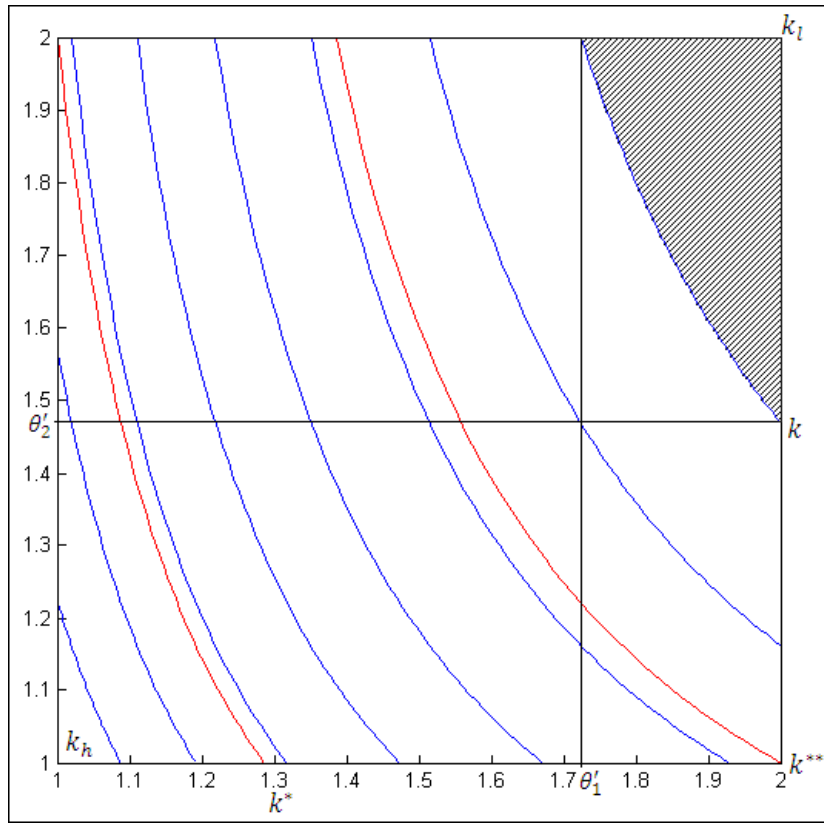


Figura 9 Detalle gráfico cálculo $H(k)$, primer sector.

, en donde $\theta_1'(k)$ y $l(\theta_1, k)$, se definen de forma similar al caso simétrico. Las fórmulas solo son levemente diferentes en este caso:

$$\theta_1'(k) = \frac{\mu_1^2 \theta_h}{4k\theta_h - \mu_2^2}$$

$$r(\theta_1, k) = \frac{\mu_2^2 \theta_1}{4k\theta_1 - \mu_1^2}$$

Ecuación 42

De esta manera:

$$H(k) = \int_{\frac{\mu_1^2 \theta_h}{4k\theta_h - \mu_2^2}}^{\theta_h} f(\theta_1) \left(1 - F\left(\frac{\mu_2^2 \theta_1}{4k\theta_1 - \mu_1^2}\right) \right) d\theta_1$$

Ecuación 43

La expresión también es similar si se considera un k , tal que $k^* < k < k_h$:

$$H(k) = 1 - \int_{\theta_l}^{\theta_1'(k)} \left(\int_{\theta_l}^{r(\theta_1, k)} f(\theta_1) f(\theta_2) \right) d\theta_2 d\theta_1$$

Ecuación 44

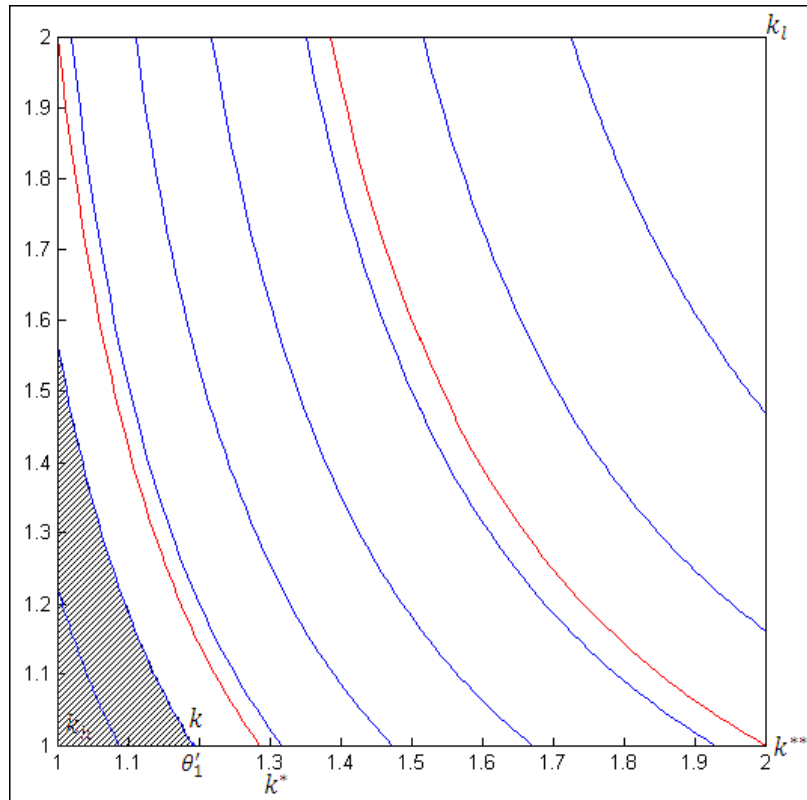


Figura 10 Detalle gráfico cálculo $H(k)$, segundo sector.

En este caso, $\theta_1'(k)$ y $r(\theta_1, k)$ toman la siguiente forma:

$$\theta_1'(k) = \frac{\mu_1^2 \theta_l}{4k\theta_l - \mu_2^2}$$

$$r(\theta_1, k) = \frac{\mu_2^2 \theta_1}{4k\theta_1 - \mu_1^2}$$

Ecuación 45

Finalmente, la expresión buscada es:

$$H(k) = 1 - \int_{\theta_l}^{\frac{\mu_1^2 \theta_l}{4k\theta_l - \mu_2^2}} f(\theta_1) F\left(\frac{\mu_2^2 \theta_1}{4k\theta_1 - \mu_1^2}\right) d\theta_1$$

Ecuación 46

Por otra parte, si $k \in [k^*, k^{**}]$, como en la figura siguiente, el asunto se torna levemente más complicado:

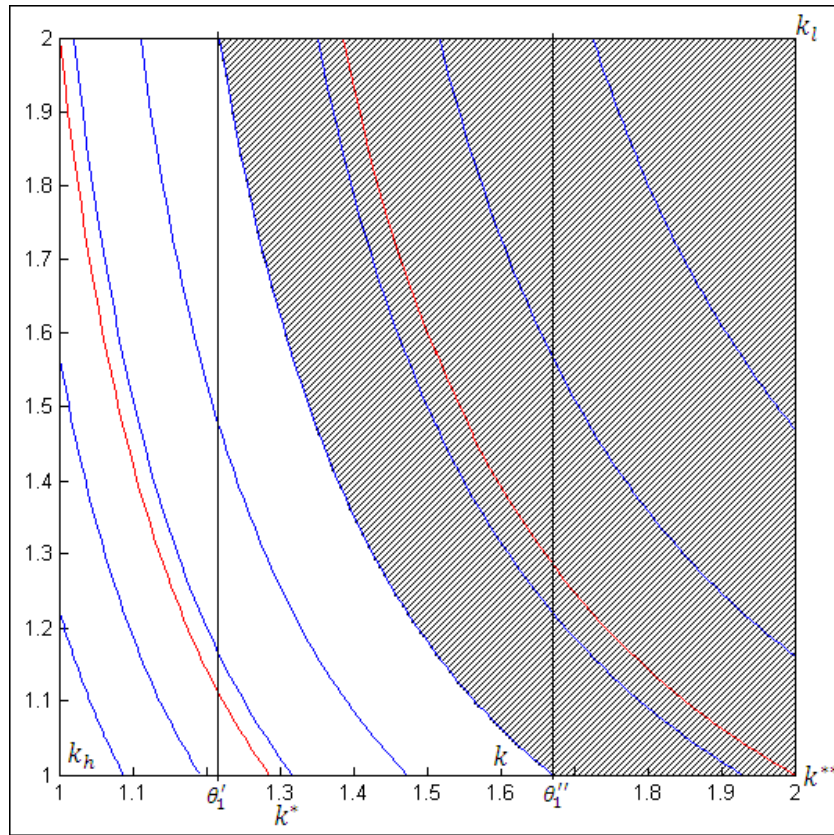


Figura 11 Detalle gráfico cálculo $H(k)$, tercer sector.

Como se ve, es posible dividir en área achurada en dos partes: una rectangular a la izquierda, y otra delimitada por la curva de pseudotipo. De esta manera, la expresión está dada por la suma e ambos sectores:

$$H(k) = \int_{r(\theta_1, k)}^{\theta_h} \int_{\theta_1'(k)}^{\theta_1''(k)} (f(\theta_1)f(\theta_2)) d\theta_1 d\theta_2 + \int_{\theta_l}^{\theta_h} \int_{\theta_1'(k)}^{\theta_h} (f(\theta_1)f(\theta_2)) d\theta_1 d\theta_2$$

Ecuación 47

, en donde como antes:

$$\begin{aligned} \theta_1'(k) &= \frac{\mu_1^2 \theta_h}{4k\theta_h - \mu_2^2} \\ \theta_1''(k) &= \frac{\mu_1^2 \theta_l}{4k\theta_l - \mu_2^2} \\ r(\theta_1, k) &= \frac{\mu_2^2 \theta_1}{4k\theta_1 - \mu_1^2} \end{aligned}$$

Ecuación 48

Reemplazando en la expresión general:

$$\begin{aligned}
 H(k) &= \int_{\frac{\mu_2^2 \theta_1}{4k\theta_1 - \mu_1^2}}^{\theta_h} f(\theta_1) \left(\int_{\frac{\mu_1^2 \theta_h}{4k\theta_h - \mu_2^2}}^{\frac{\mu_1^2 \theta_l}{4k\theta_l - \mu_2^2}} f(\theta_2) d\theta_2 \right) d\theta_1 + \int_{\frac{\mu_1^2 \theta_l}{4k\theta_l - \mu_2^2}}^{\theta_h} f(\theta_1) \left(\int_{\theta_l}^{\theta_h} f(\theta_2) d\theta_2 \right) d\theta_1 \\
 H(k) &= \int_{\frac{\mu_2^2 \theta_1}{4k\theta_1 - \mu_1^2}}^{\theta_h} f(\theta_1) \left(F\left(\frac{\mu_1^2 \theta_l}{4k\theta_l - \mu_2^2}\right) - F\left(\frac{\mu_1^2 \theta_h}{4k\theta_h - \mu_2^2}\right) \right) d\theta_1 + \int_{\frac{\mu_1^2 \theta_l}{4k\theta_l - \mu_2^2}}^{\theta_h} f(\theta_1) (F(\theta_h) - F(\theta_l)) d\theta_1 \\
 H(k) &= \int_{\frac{\mu_2^2 \theta_1}{4k\theta_1 - \mu_1^2}}^{\theta_h} f(\theta_1) \left(F\left(\frac{\mu_1^2 \theta_l}{4k\theta_l - \mu_2^2}\right) - F\left(\frac{\mu_1^2 \theta_h}{4k\theta_h - \mu_2^2}\right) \right) d\theta_1 + \int_{\frac{\mu_1^2 \theta_l}{4k\theta_l - \mu_2^2}}^{\theta_h} f(\theta_1) d\theta_1
 \end{aligned}$$

Ecuación 49

En resumen, la función de distribución acumulada está dada por la siguiente expresión:

$$H(k): [k_l, k_h] \rightarrow [0,1]$$

$$H(k) = \left\{ \begin{array}{l} H(k) = \int_{\frac{\mu_1^2 \theta_h}{4k\theta_h - \mu_2^2}}^{\theta_h} f(\theta_1) \left(1 - F\left(\frac{\mu_2^2 \theta_1}{4k\theta_1 - \mu_1^2}\right) \right) d\theta_1 \quad \text{si } k \in [k_l, k^*] \\ \int_{\frac{\mu_2^2 \theta_1}{4k\theta_1 - \mu_1^2}}^{\theta_h} f(\theta_1) \left(F\left(\frac{\mu_1^2 \theta_l}{4k\theta_l - \mu_2^2}\right) - F\left(\frac{\mu_1^2 \theta_h}{4k\theta_h - \mu_2^2}\right) \right) d\theta_1 + \int_{\frac{\mu_1^2 \theta_l}{4k\theta_l - \mu_2^2}}^{\theta_h} f(\theta_1) d\theta_1 \quad \text{si } k \in [k^{**}, k^*] \\ H(k) = 1 - \int_{\theta_l}^{\frac{\mu_1^2 \theta_l}{4k\theta_l - \mu_2^2}} f(\theta_1) F\left(\frac{\mu_2^2 \theta_1}{4k\theta_1 - \mu_1^2}\right) d\theta_1 \quad \text{si } k \in [k^*, k_h] \end{array} \right.$$

Ecuación 50

Caso asimétrico ($\mu_2 > \mu_1$)

Si bien como se observa en la figura, el caso no es tan diferente al analizado con anterioridad (aunque así pueda parecer).

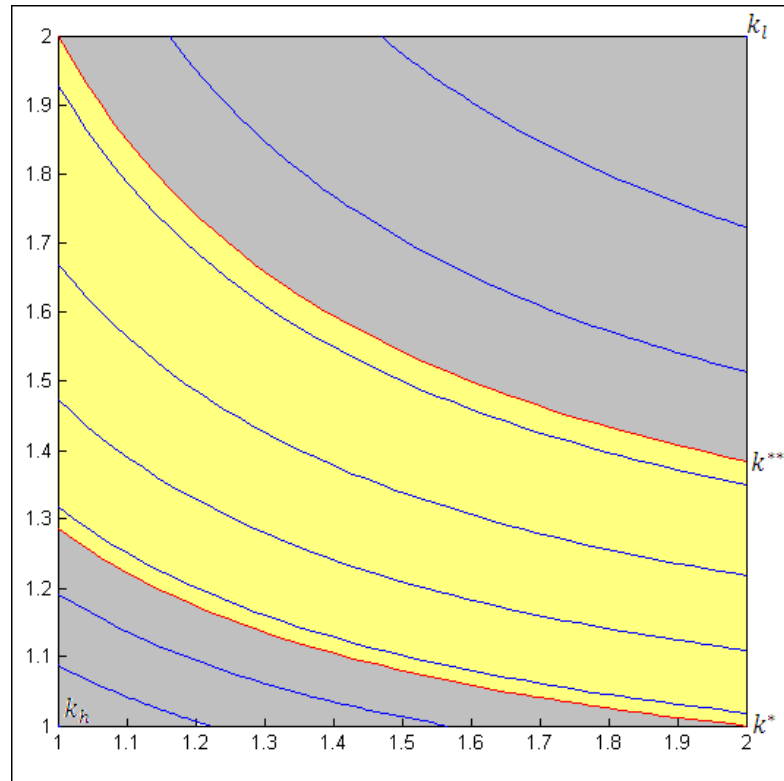


Figura 12: Diferentes sectores definidos por las curvas de pseudotipos. Caso asimétrico 2.

Es posible, para un caso $\mu_2 > \mu_1$ genérico (con dichos parámetros fijos, que corresponden al peso dado a q_2 y q_1 en la función score), construir un caso “artificial”, en el que se le da a la dimensión de calidad q_1 el peso μ_2 y a la dimensión q_2 el peso μ_1 . De esta manera el peso asociado a la primera dimensión es mayor que la segunda, y es posible ocupar las expresiones anteriores sin distinciones. Los resultados son completamente equivalentes, ya que si se observa con cuidado la figura anterior, rotando los ejes se obtienen las mismas curvas del caso ya analizado.

3.2.2 Caso analítico y numérico

Dadas las expresiones genéricas para la función de distribución acumulada de los pseudotipos, definiendo funciones específicas para la distribución de los tipos, $F(\cdot)$, es posible obtener formulas específicas para $H(\cdot)$. Lamentablemente, a menos que la expresión de $F(\cdot)$ sea en extremo simple, las integrales que definen a $H(\cdot)$ no tendrán una expresión analítica, y será necesario utilizar métodos numéricos para aproximarlas.

Por ejemplo es posible asumir que $F(\cdot)$ corresponde a la distribución acumulada de una uniforme en el intervalo considerado:

$$F(\theta): [\theta^l, \theta^h] \rightarrow [0,1]$$

$$F(\theta) = \frac{\theta - \theta^l}{\theta^h - \theta^l}$$

$$f(\theta): [\theta^l, \theta^h] \rightarrow [0,1]$$

$$f(\theta) = \frac{1}{\theta^h - \theta^l}$$

Ecuación 51

Así, la expresión para el caso simétrico corresponde a:

$$H(k): [k_l, k_h] \rightarrow [0,1]$$

$$H(k) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\int_{\frac{\mu^2\theta_h}{4k\theta_h-\mu^2}}^{\theta_h} \frac{1}{\theta^h - \theta^l} \left(1 - \frac{\left(\frac{\mu^2\theta_1}{4k\theta_1 - \mu^2}\right) - \theta^l}{\theta^h - \theta^l} \right) d\theta_1}{\frac{\mu^2\theta_h}{4k\theta_h-\mu^2}} \quad \text{si } k \in [k_l, k^*] \\ 1 - \frac{\int_{\theta_l}^{\frac{\mu^2\theta_l}{4k\theta_l-\mu^2}} \frac{1}{\theta^h - \theta^l} \left(\frac{\left(\frac{\mu^2\theta_1}{4k\theta_1 - \mu^2}\right) - \theta^l}{\theta^h - \theta^l} \right) d\theta_1}{\frac{\mu^2\theta_l}{4k\theta_l-\mu^2}} \quad \text{si } k \in [k^*, k_h] \end{array} \right\}$$

Arreglando dicha expresión se llega a lo siguiente:

$$H(k) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Delta\theta^2} \int_{\frac{\mu^2\theta_h}{4k\theta_h-\mu^2}}^{\theta_h} \left(\frac{(4k\theta^h - \mu^2)\theta_1 - \mu^2\theta^h}{4k\theta_1 - \mu^2} \right) d\theta_1 \quad \text{si } k \in [k_l, k^*] \\ 1 - \frac{1}{\Delta\theta^2} \int_{\theta_l}^{\frac{\mu^2\theta_l}{4k\theta_l-\mu^2}} \left(\frac{(\mu^2 - 4k\theta^l)\theta_1 - \mu^2\theta^l}{4k\theta_1 - \mu^2} \right) d\theta_1 \quad \text{si } k \in [k^*, k_h] \end{array} \right\}$$

$$H(k) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Delta\theta^2} \int_{\frac{\mu^2\theta_h}{4k\theta_h-\mu^2}}^{\theta_h} \left(\frac{a_1\theta_1 - b_1}{c_1\theta_1 - d_1} \right) d\theta_1 \quad \text{si } k \in [k_l, k^*] \\ 1 - \frac{1}{\Delta\theta^2} \int_{\theta_l}^{\frac{\mu^2\theta_l}{4k\theta_l-\mu^2}} \left(\frac{a_2\theta_1 - b_2}{c_2\theta_1 - d_2} \right) d\theta_1 \quad \text{si } k \in [k^*, k_h] \end{array} \right\}$$

Ecuación 52

, con las constantes incluidas definidas como:

$$a_1 = (4k\theta^h - \mu^2) \quad a_2 = (\mu^2 - 4k\theta^l)$$

$$b_1 = \mu^2\theta^h \quad b_2 = \mu^2\theta^l$$

$$\begin{aligned}c_1 &= c_2 = 4k \\d_1 &= d_2 = \mu^2\end{aligned}$$

Dado que las integrales en este caso tienen una forma definida, es posible obtener directamente una expresión analítica para $H(k)$. En efecto, una primitiva para la expresión genética anterior está dada por:

$$\int \left(\frac{a\theta_1 - b}{c\theta_1 - d} \right) = a \left(\frac{\theta_1}{c} + \frac{d}{c^2} \ln \left(\theta_1 - \frac{d}{c} \right) \right) - \frac{b}{c} \ln(c\theta_1 - d) + Cte.$$

Por lo que:

$$\begin{aligned}\int_{\theta_l}^{\frac{\mu^2\theta_l}{4k\theta_l - \mu^2}} \left(\frac{a\theta_1 - b}{c\theta_1 - d} \right) &= \left[a \left(\frac{\theta_1}{c} + \frac{d}{c^2} \ln \left(\theta_1 - \frac{d}{c} \right) \right) - \frac{b}{c} \ln(c\theta_1 - d) \right]_{\theta_l}^{\frac{\mu^2\theta_l}{4k\theta_l - \mu^2}} \\&= \left[a \left(\frac{\frac{\mu^2\theta_l}{4k\theta_l - \mu^2}}{c} + \frac{d}{c^2} \ln \left(\frac{\mu^2\theta_l}{4k\theta_l - \mu^2} - \frac{d}{c} \right) \right) - \frac{b}{c} \ln \left(c \frac{\mu^2\theta_l}{4k\theta_l - \mu^2} - d \right) \right] \\&\quad - \left[a \left(\frac{\theta_l}{c} + \frac{d}{c^2} \ln \left(\theta_l - \frac{d}{c} \right) \right) - \frac{b}{c} \ln(c\theta_l - d) \right]\end{aligned}$$

Esto aplicado a las expresiones anteriores, permite obtener una fórmula analítica para $H(k)$. En la figura siguiente se muestra la forma que tiene dicha distribución para un caso estándar y simétrico, y para un caso asimétrico. El desarrollo anterior es válido también para la fórmula genérica asimétrica, y no presenta mayores dificultades.

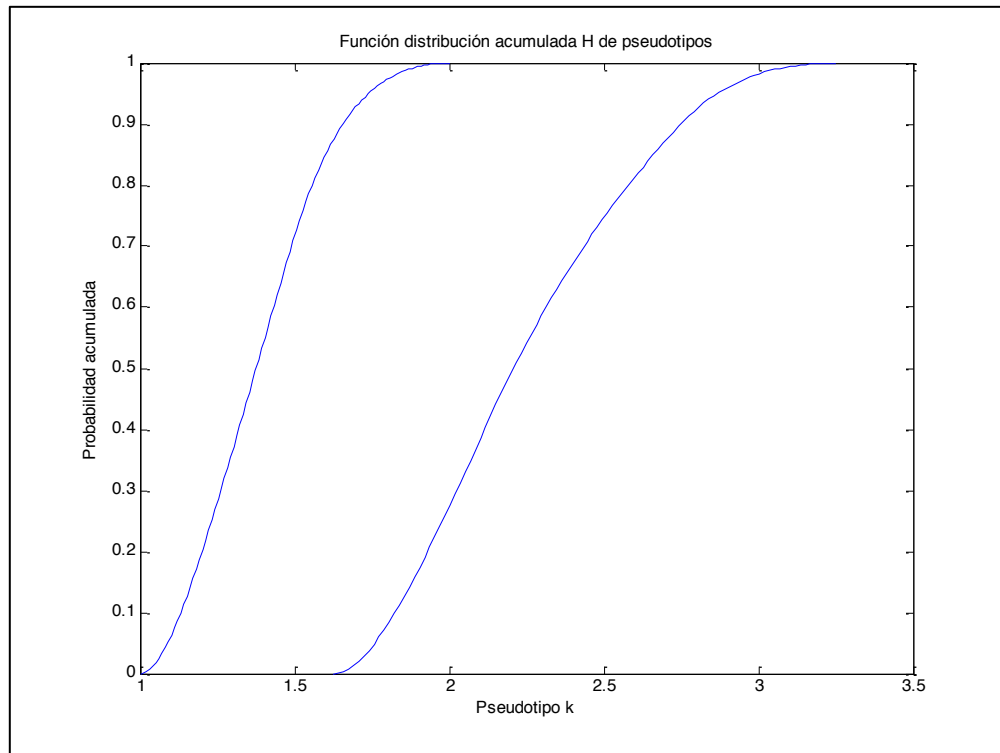


Figura 13: Función de distribución acumulada de los pseudotipos.

Como se observa, la forma estrictamente creciente de las funciones, y el claro recorrido en $[0,1]$ de dicha función, permite comprobar la validez de las expresiones. Se destaca además que el set en el cual se encuentran los k permitidos (el $[k_l, k_h]$ en cada caso), varía aun cuando para ambos casos se consideró un caso estándar con $\theta^l = 1$ y $\theta^h = 2$. Esto debido a que los pesos en la función *score* varían también; en el primer caso (curva de la izquierda) $\mu_1 = \mu_2 = 2$, lo que produce un set para k igual a $[1, 2]$. En la curva de la izquierda en cambio, $\mu_1 = 3$ y $\mu_2 = 2$, lo que hace variar el set a $[1.625, 3.25]$.

En caso de que la función de distribución sea más complicada, es prácticamente imposible obtener expresiones analíticas para las integrales en la expresión de $H(k)$. En este caso la única alternativa es obtener aproximaciones de la integral mediante métodos numéricos. La implementación es simple: con expresiones definidas para $F(\cdot)$ y su derivada $f(\cdot)$ es posible utilizar métodos predefinidos en MatLab, o programar algún algoritmo tipo método del trapecio con el fin de evaluar las integrales. Si bien los algoritmos son más lentos, la precisión es bastante elevada²⁵.

3.2.3 Distribución de probabilidad marginal

La distribución de probabilidad puede, de la misma forma, ser obtenida de dos maneras. Una es derivar directamente la expresión analítica obtenida para $H(k)$, a fin de obtener una expresión para $h(k)$. Sin embargo, aun en el caso “simple” mostrado con anterioridad, la fórmula sería bastante extensa dada la gran cantidad de derivadas implicadas, y poco manejable. La opción que se utiliza en este estudio es la

²⁵ Al graficar la versión numérica de la función analítica anterior de $H(k)$, no se observan diferencias aparentes.

de derivar numéricamente, punto a punto la expresión entregada para $H(k)$. El procedimiento es sencillo, y consiste en calcular una aproximación de la pendiente de la línea tangente a la curva en dicho punto, mediante el cálculo de la misma en una recta que pasa por los puntos $H(k + \varepsilon)$ y $H(k - \varepsilon)$, con ε suficientemente pequeño.

En la figura siguiente se muestra la forma de dicha función para el caso de una distribución uniforme. Se observa que a pesar de que la probabilidad de encontrar a cada tipo es similar (uniforme), la distribución de los pseudotipos dista mucho de serlo. Esto se explica observando la definición de los pseudotipos y sus curvas, donde claramente se aprecia que hay pseudotipos con curvas “más largas”²⁶, y que por ende son producidos por una mayor cantidad de tipos y su probabilidad de existir es mayor.

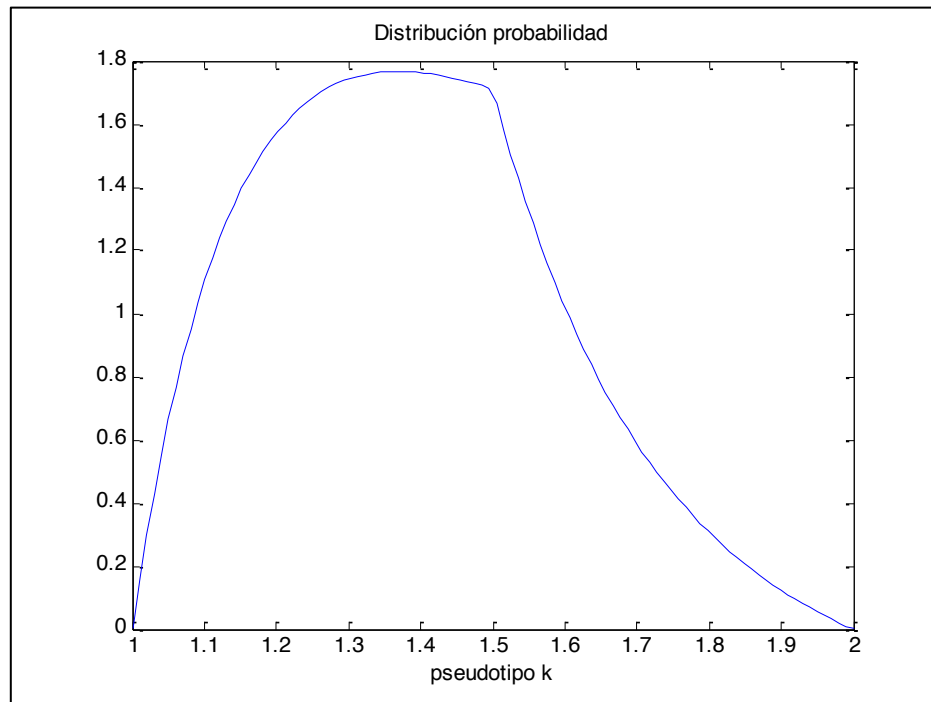


Figura 14 Función de probabilidad de los pseudotipos.

3.3.4 Cálculo de la utilidad del planificador

Siguiendo los pasos de la sección 2.1.3 Utilidad del planificador, dada la parametrización particular para las funciones del problema, es posible escribir la siguiente expresión para un pseudotipo determinado.

²⁶ Que recorren un mayor espacio en el plano $\theta_1 - \theta_2$.

$$k_i = \frac{\mu_1^2}{4\theta_{1i}} + \frac{\mu_2^2}{4\theta_{2i}}$$

Una vez conocido esto, cada jugador conoce además por medio de la Ecuación 24 su probabilidad de ganar, y por medio de la Ecuación 23, el *score* a ofertar en la licitación.

$$\mathbb{P}(\text{ganar}) = G(k_i) = H(k_i)^{N-1}$$

$$\tau(k_i) = \frac{1}{G(k_i)} \int_0^{k_i} g(y)y dy$$

Finalmente, en caso de ganar, cada jugador sabe además que el producto (p^*, q_1^*, q_2^*) que debe implementar cumple las siguientes ecuaciones:

$$q_1^* = \frac{\mu_1}{2\theta_{1i}}$$

$$q_2^* = \frac{\mu_2}{2\theta_{2i}}$$

$$p^* = (\mu_1 q_1^* + \mu_2 q_2^*) - t_i^w$$

, donde lógicamente t_i^w es el *score* ofertado por el agente, y con el cual gana.

Por otra parte, la utilidad obtenida por el principal de un ganador de la licitación de tipo (θ_1, θ_2) , asociado a un pseudotipo k es:

$$\begin{aligned} U_p(\theta_1, \theta_2) &= (\bar{\mu}_1 \cdot q_1^*(\theta_1, \theta_2) + \bar{\mu}_2 \cdot q_2^*(\theta_1, \theta_2)) - p(\theta_1, \theta_2) \\ U_p(\theta_1, \theta_2) &= \left(\bar{\mu}_1 \cdot \frac{\mu_1}{2\theta_1} + \bar{\mu}_2 \cdot \frac{\mu_2}{2\theta_2} \right) - ((\mu_1 q_1^* + \mu_2 q_2^*) - \tau(k_i)) \\ U_p(\theta_1, \theta_2) &= \left(\bar{\mu}_1 \cdot \frac{\mu_1}{2\theta_1} + \bar{\mu}_2 \cdot \frac{\mu_2}{2\theta_2} \right) - \left(\left(\frac{\mu_1^2}{2\theta_1} + \frac{\mu_2^2}{2\theta_2} \right) - \tau(k_i) \right) \end{aligned}$$

Ecuación 53

Similarmente al desarrollo genérico, la utilidad esperada dado que se conoce al agente es:

$$\begin{aligned} E[U_p(\theta_1, \theta_2)/(\theta_1, \theta_2)] &= \left[\left(\bar{\mu}_1 \cdot \frac{\mu_1}{2\theta_1} + \bar{\mu}_2 \cdot \frac{\mu_2}{2\theta_2} \right) - \left(\left(\frac{\mu_1^2}{2\theta_1} + \frac{\mu_2^2}{2\theta_2} \right) - \tau(k_i) \right) \right] \cdot \mathbb{P}(\text{ganar}) \\ E[U_p(\theta_1, \theta_2)/(\theta_1, \theta_2)] &= \left[\left(\bar{\mu}_1 \cdot \frac{\mu_1}{2\theta_1} + \bar{\mu}_2 \cdot \frac{\mu_2}{2\theta_2} \right) - \left(\left(\frac{\mu_1^2}{2\theta_1} + \frac{\mu_2^2}{2\theta_2} \right) - \tau(k_i) \right) \right] \cdot H(k)^{N-1} \end{aligned}$$

Dado que k_i es función de (θ_1, θ_2) , es posible escribir la expresión anterior como función solo de estos argumentos:

$$E[U_p(\theta_1, \theta_2) / (\theta_1, \theta_2)] = \left[\left(\bar{\mu}_1 \cdot \frac{\mu_1}{2\theta_1} + \bar{\mu}_2 \cdot \frac{\mu_2}{2\theta_2} \right) - \left(\left(\frac{\mu_1^2}{2\theta_1} + \frac{\mu_2^2}{2\theta_2} \right) - \tau(k_i(\theta_1, \theta_2)) \right) \right] \cdot H(k_i(\theta_1, \theta_2))^{N-1}$$

Ecuación 54

Finalmente, la utilidad esperada del principal corresponderá a la siguiente expresión:

$$E[U_p] = U(\mu_1, \mu_2) = N \int_{\theta^l}^{\theta^h} \int_{\theta^l}^{\theta^h} \left(E \left[\frac{U_p(\theta_1, \theta_2)}{\theta_1, \theta_2} \right] \cdot f(\theta_1) f(\theta_2) \right) d\theta_1 d\theta_2$$

$$U(\mu_1, \mu_2) = N \int_{\theta^l}^{\theta^h} \int_{\theta^l}^{\theta^h} \left(\left[\left(\bar{\mu}_1 \cdot \frac{\mu_1}{2\theta_1} + \bar{\mu}_2 \cdot \frac{\mu_2}{2\theta_2} \right) - \left(\left(\frac{\mu_1^2}{2\theta_1} + \frac{\mu_2^2}{2\theta_2} \right) - \tau(k_i(\theta_1, \theta_2)) \right) \right] \cdot H(k(\theta_1, \theta_2))^{N-1} \cdot f(\theta_1) f(\theta_2) \right) d\theta_1 d\theta_2$$

Ecuación 55

, en donde $U(\mu_1, \mu_2)$ hace explícito que la utilidad esperada del planificador depende de los parámetros (μ_1, μ_2) que este escoge en el mecanismo²⁷.

La implementación de la expresión anterior solo es posible numéricamente dado la complejidad del argumento. Si se define:

$$J(\theta_1, \theta_2) = \left(\left[\left(\bar{\mu}_1 \cdot \frac{\mu_1}{2\theta_1} + \bar{\mu}_2 \cdot \frac{\mu_2}{2\theta_2} \right) - \left(\left(\frac{\mu_1^2}{2\theta_1} + \frac{\mu_2^2}{2\theta_2} \right) - \tau(k_i(\theta_1, \theta_2)) \right) \right] \cdot H(k(\theta_1, \theta_2))^{N-1} \cdot f(\theta_1) f(\theta_2) \right)$$

, basta crear una malla sobre el espacio $\theta_1 - \theta_2$, y aproximar el volumen bajo la superficie definida por la curva $J(\theta_1, \theta_2)$. En la figura se observa dicha superficie para el caso en que el peso asignado a las calidades es el mismo que posee el principal en su función de utilidad, donde basta aplicar algún algoritmo similar al utilizado en una integración lineal para aproximar el volumen.

²⁷ En estricto rigor esto es lo que controla el principal, al poder escoger diversos mecanismos (en la familia estudiada) que cumplan con sus objetivos.

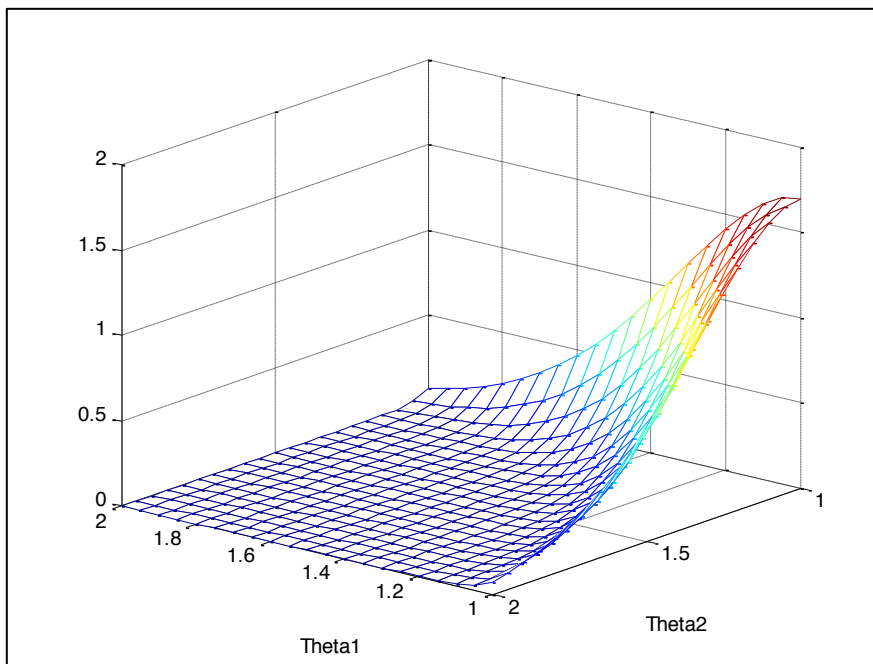


Figura 15: Representación gráfica del cálculo de la utilidad esperada del planificador.

En este caso, la idea es ajustar paralelepípedos bajo la curva, a fin de aproximar dicho volumen. Por ejemplo, considerar la malla de 20x20 para el espacio $\theta_1 - \theta_2$ que se presenta en la siguiente figura:

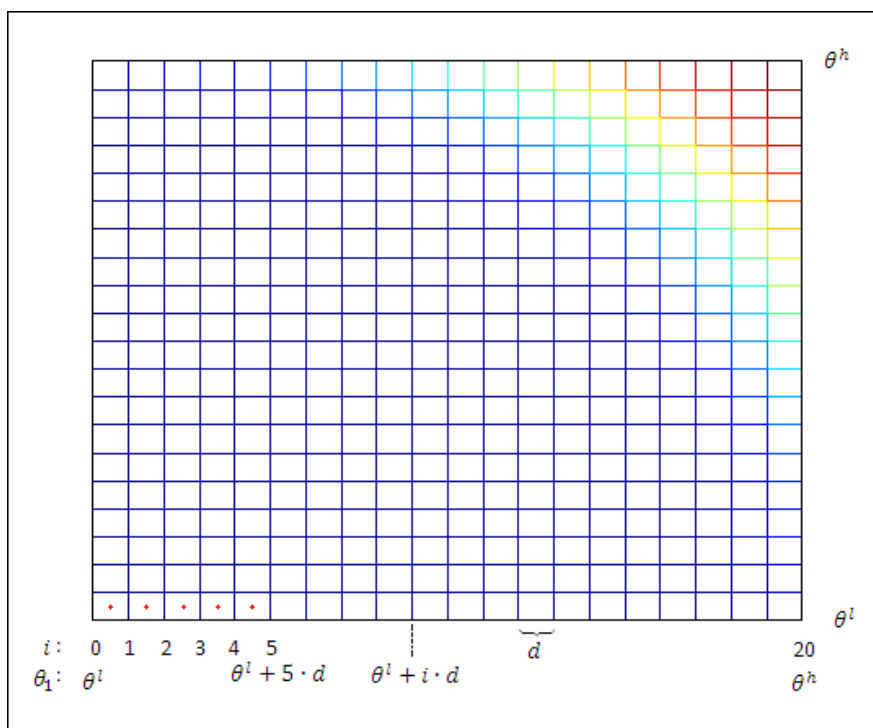


Figura 16: Malla ajustada al espacio $\theta_1 - \theta_2$

Así, la utilidad estaría dada por la siguiente expresión:

$$U(\mu_1, \mu_2) \approx \sum_{i=0}^{20} \sum_{j=0}^{20} L(\theta^{l^*} + i \cdot d, \theta^{l^*} + j \cdot d) \Delta F(\theta^l + i \cdot d) \Delta F(\theta^l + j \cdot d)$$

$$U(\mu_1, \mu_2) \approx \sum_{i=0}^{20} \sum_{j=0}^{20} L(\theta^{l^*} + i \cdot d, \theta^{l^*} + j \cdot d) \left(F(\theta^l + (i+1) \cdot d, \theta^l + (i+1) \cdot d) \right. \\ \left. - F(\theta^l + i \cdot d, \theta^l + i \cdot d) \right) \left(F(\theta^l + (j+1) \cdot d, \theta^l + (j+1) \cdot d) \right. \\ \left. - F(\theta^l + j \cdot d, \theta^l + j \cdot d) \right)$$

, donde:

$$L(\theta_1, \theta_2) = \left[\left(\bar{\mu}_1 \cdot \frac{\mu_1}{2\theta_1} + \bar{\mu}_2 \cdot \frac{\mu_2}{2\theta_2} \right) - \left(\frac{\mu_1^2}{4\theta_1} + \frac{\mu_2^2}{4\theta_2} \right) \right] \cdot H(k(\theta_1, \theta_2))^{N-1}$$

$$\theta^{l^*} = \theta^l + d/2$$

Como se observa en la Figura 15 la mayor parte de la masa a integrar se encuentra cargada a los tipos más bajos. Son estos también los que poseen pseudotipos mayores, y por ende mayor probabilidad de ganar el proceso de licitaciones, y aquellos que ofrecen mayores niveles de calidad (dado sus menores costos). De antemano se puede notar que el mecanismo de asignación privilegia en cierto sentido a aquellos agentes más eficientes, a fin de que sean ellos quienes tengan mayor probabilidad de ganar el proceso al poder ofrecer un mejor producto.

3.2.5 Cálculo del mecanismo óptimo

Como se mencionó con anterioridad, el cálculo realizado asume que el principal ya ha escogido con anterioridad un mecanismo en específico (unos μ_1 y μ_2 determinados). El objetivo último, alineado lógicamente con los objetivos de este estudio, es obtener el mecanismo óptimo que le conviene utilizar al principal, dado todos los otros parámetros fijos. Así, por ejemplo, dado un ambiente con un número de jugadores, distribuciones para los tipos, ponderadores en la función de utilidad del principal fijos, el objetivo es decidir cuál es el (μ_1, μ_2) óptimo que maximiza las utilidades del principal.

El procedimiento consiste en crear una malla en el espacio $\mu_1 - \mu_2$, y calcular para cada combinación (μ_1, μ_2) la utilidad esperada. Punto a punto esto define una superficie regular y continua, de la cual es posible obtener el máximo de la misma. Esto es, punto a punto lo anterior definirá una función $U(\mu_1, \mu_2)$ (un manto) de la cual es posible obtener gráficamente el punto (μ_1^*, μ_2^*) que la maximiza.

En la figura siguiente se aprecia gráficamente lo anterior, para el caso simétrico y demás condiciones estándar. La malla utilizada (como será lo común en lo siguiente), está centrada en los pesos que poseen la calidad en la función de utilidad del principal.

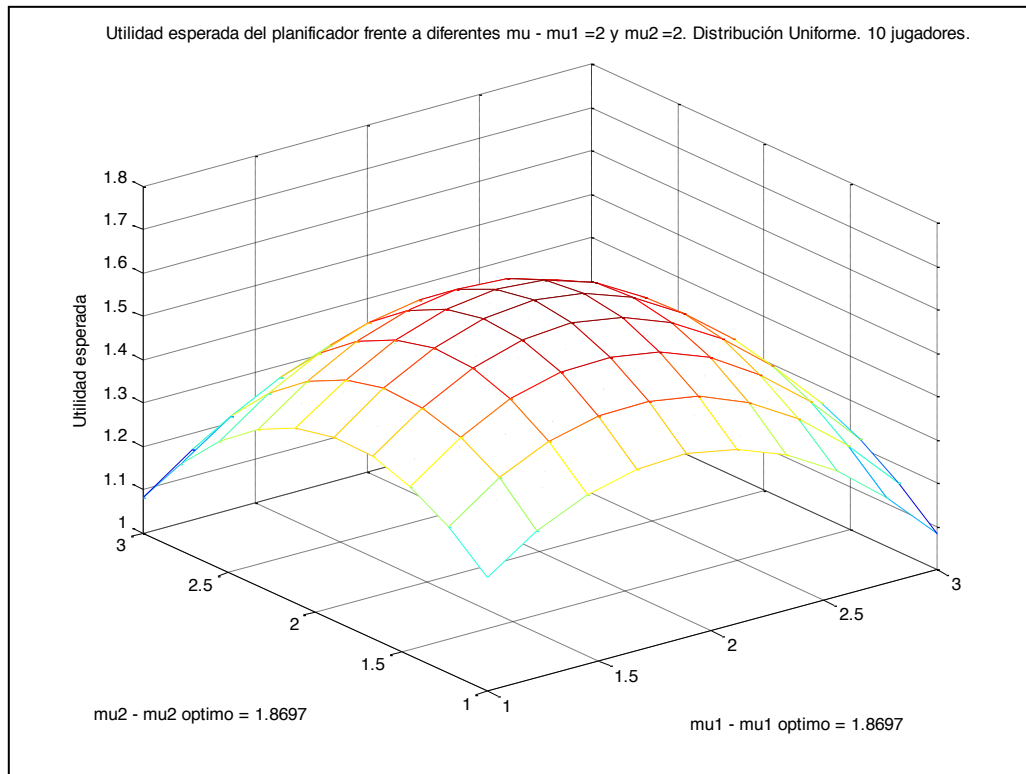


Figura 17: Manto de utilidad esperada para diferentes mecanismos.

El algoritmo implementado ubica el punto (μ_1^*, μ_2^*) correspondiente al máximo de la superficie para una malla dada, para luego realizar un “zoom”, y realizar el mismo cálculo en una nueva malla centrada en el (μ_1^*, μ_2^*) obtenido. El procedimiento es repetido 2 veces, con el fin de mejorar la precisión del cálculo.

La figura correspondiente a un caso simétrico en que $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2 = 2$, mientras que el mecanismo óptimo utiliza en la función *score* $\mu_1 = \mu_2 = 1.8697$. En la función de utilidad, $\bar{\mu}_1$ y $\bar{\mu}_2$ representan que tanto valora las dimensiones de calidad el principal, por lo tanto éste distorsiona hacia abajo sus valoraciones en la función *score*, asociándoles a las calidades un peso menor a la que en realidad él tiene. En los resultados se discutirá en más extenso la implicancia de esto.

3.3 Distribuciones a considerar

En todo el desarrollo previo se ha trabajado considerando una función de distribución uniforme para los tipos considerados. Sin embargo, en los resultados presentados en lo siguiente se trabajará con funciones más genéricas, a fin de interpretar los resultados en función de esto.

La función de distribución que se utilizará en la mayor parte de los resultados es la siguiente, una generalización de la distribución uniforme ya presentada:

$$F(\theta): [\theta^l, \theta^h] \rightarrow [0,1]$$

$$F(\theta) = \left(\frac{\theta - \theta^l}{\theta^h - \theta^l} \right)^p$$

$$f(\theta): [\theta^l, \theta^h] \rightarrow [0, +\infty]$$

$$f(\theta) = p \left(\frac{\theta - \theta^l}{\theta^h - \theta^l} \right)^{p-1}$$

, donde $p \in (0, +\infty]$. De acuerdo al valor que este tome, se tendrán distribuciones de diferentes características. Si $p = 1$, se tiene la distribución uniforme ya discutida, en el que cada tipo (θ_1, θ_2) tiene una probabilidad similar de salir²⁸.

Si p es mayor que 1, se tendrán funciones de distribución acumulada como en la figura siguiente:

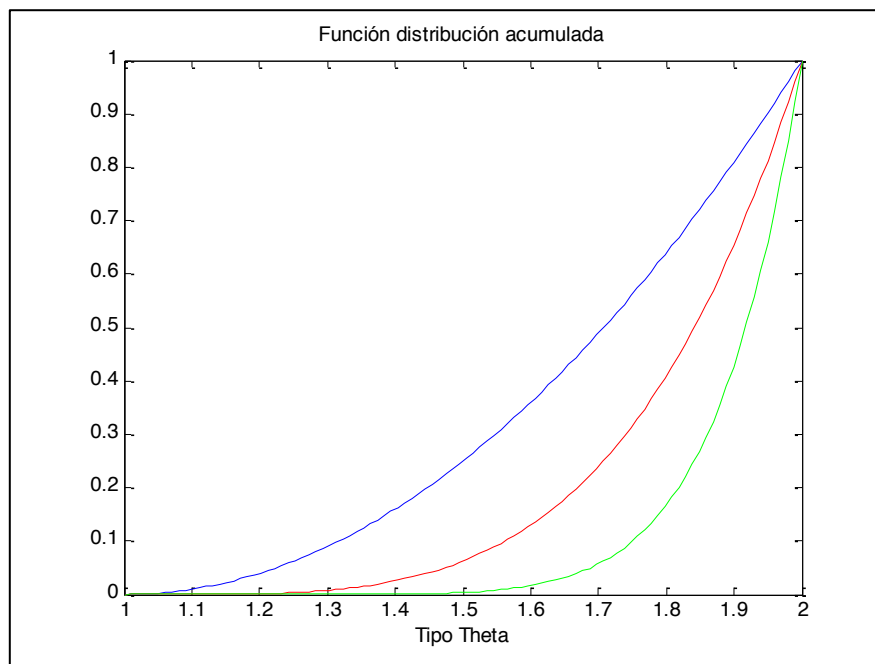


Figura 18: Funciones de distribución acumulada, $p > 1$.

En dicha figura, la curva azul es la que tiene un menor p , mientras que la verde el mayor. Como se observa, a medida que p crecen las distribuciones acumuladas se cargan más hacia la izquierda, o sea, hacia los tipos que poseen θ mayores. Esto es, la mayor parte de la masa de probabilidad está centrada en los tipos menos eficientes, en el sentido de que es mucho más probable obtener de este tipo de agentes. Esto por supuesto afectará directamente la utilidad del principal y el mecanismo que éste utilizará. Como bien se aprecia en la función en verde, con un $p = 8$ es casi improbable obtener tipos menores a 1,5, por lo que la mayor parte de estos estarán ubicados en el intervalo superior.

²⁸ Se recuerda que dado que las distribuciones de los tipos, en ambas dimensiones, se consideran independientes, la probabilidad de obtener a un tipo (θ_1, θ_2) es $f(\theta_1) \cdot f(\theta_2)$. Esto es $\frac{1}{\Delta\theta^2}$ en el caso uniforme.

Si p es menor que 1 y mayor que 0, el efecto es el contrario. Las curvas son como se muestran en la figura siguiente:

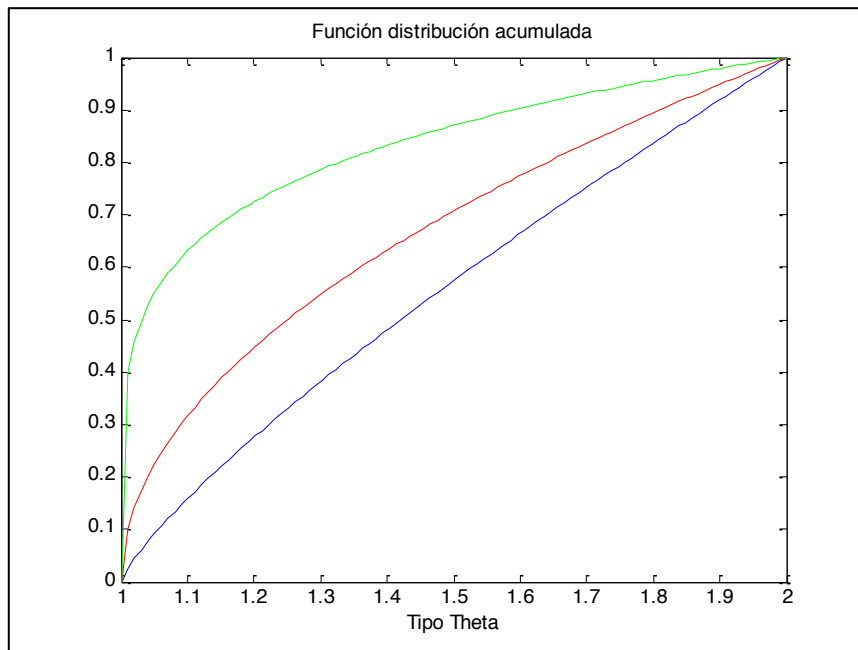


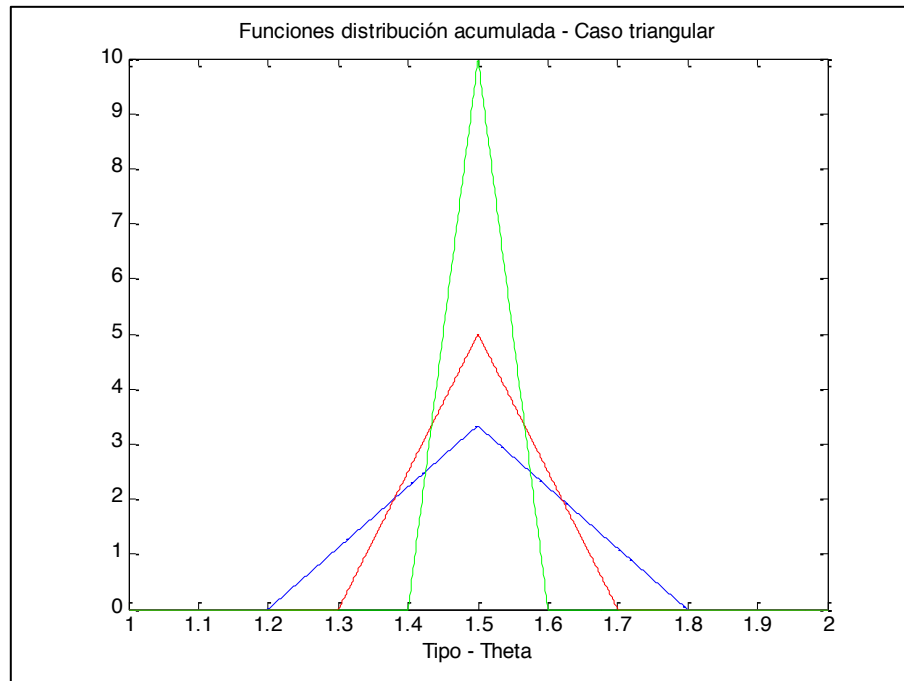
Figura 19: Funciones de distribución acumulada, $p < 1$.

Como se aprecia, a medida que p disminuye las curvas se cargan más hacia los tipos menores, de forma similar a lo que pasaba en el caso anterior.

Es necesario destacar además el doble efecto que las funciones anteriores producen, y que se discutirá posteriormente en los resultados. Si bien este tipo de funciones carga la probabilidad hacia un tipo de agentes, hay otro efecto de relevancia que se aprecia en el caso $p > 1$. A medida que p crece los agentes se hacen en promedio peores²⁹ (menos eficientes), pero también se les conoce con mayor exactitud. Dichos efectos parecieran ser contrarios, pero no es del todo claro a priori.

Con el fin de analizarlo, se propone un nuevo tipo de distribución que mantenga constante uno de dichos factores. La función de distribución triangular cumple dichos objetivos, al mantener constante la media y variar solo el grado de incertidumbre respecto al tipo que se obtendrá (varianza). En la figura siguiente se presentan 3 distribuciones, con media similar, cada una más “ajustada” que la anterior. La distribución verde disminuye bastante la varianza de la distribución, y en el límite, se podría obtener una distribución determinística. La distribución propuesta disminuye el intervalo permitido dando probabilidad cero a ciertos tipos, de modo tal que disminuya también la incerteza.

²⁹ Efectivamente, la esperanza de la distribución aumenta.



3.4 Respecto a la robustez del mecanismo de licitación

Una pregunta que surge naturalmente en este tipo de estudios es respecto a la robustez del mecanismo encontrado. De acuerdo al desarrollo anterior, dada una distribución para los tipos y demás parámetros (particularmente los pesos dados a las calidades en la función de utilidad del principal $\bar{\mu}_1$ y $\bar{\mu}_2$), es posible obtener un mecanismo óptimo de licitación dado por (μ_1^*, μ_2^*) que maximiza la utilidad del planificador. Si F es la distribución considerada, esquemáticamente esto se representa por:

$$[(\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2), F] \rightarrow (\mu_1^*, \mu_2^*) \rightarrow E[U(\mu_1^*, \mu_2^*)]$$

, donde $(\mu_1^*(F), \mu_2^*(F))$ son función de la distribución considerada, y $E[U(\mu_1^*, \mu_2^*)]$ es el nivel de utilidad esperada alcanzada.

Es posible preguntarse que sucede si en realidad la distribución que supuso el principal es errónea, y en cambio la correcta es \bar{F} . En este caso se habrá calculado un mecanismo erróneo y la utilidad que finalmente obtendrá el principal será menor.

Sea $(\mu_1^*(\bar{F}), \mu_2^*(\bar{F}))$ el mecanismo óptimo bajo la distribución correcta. Luego se tendrá que:

$$E[U(\mu_1^*(F), \mu_2^*(F), \bar{F})] \leq E[U(\mu_1^*(\bar{F}), \mu_2^*(\bar{F}), \bar{F})]$$

, donde $E[U(\mu_1^*(F), \mu_2^*(F), \bar{F})]$ es la utilidad esperada obtenida utilizando el mecanismo erróneo calculado bajo la distribución real \bar{F} .³⁰

Lo que interesa finalmente es analizar el siguiente ratio:

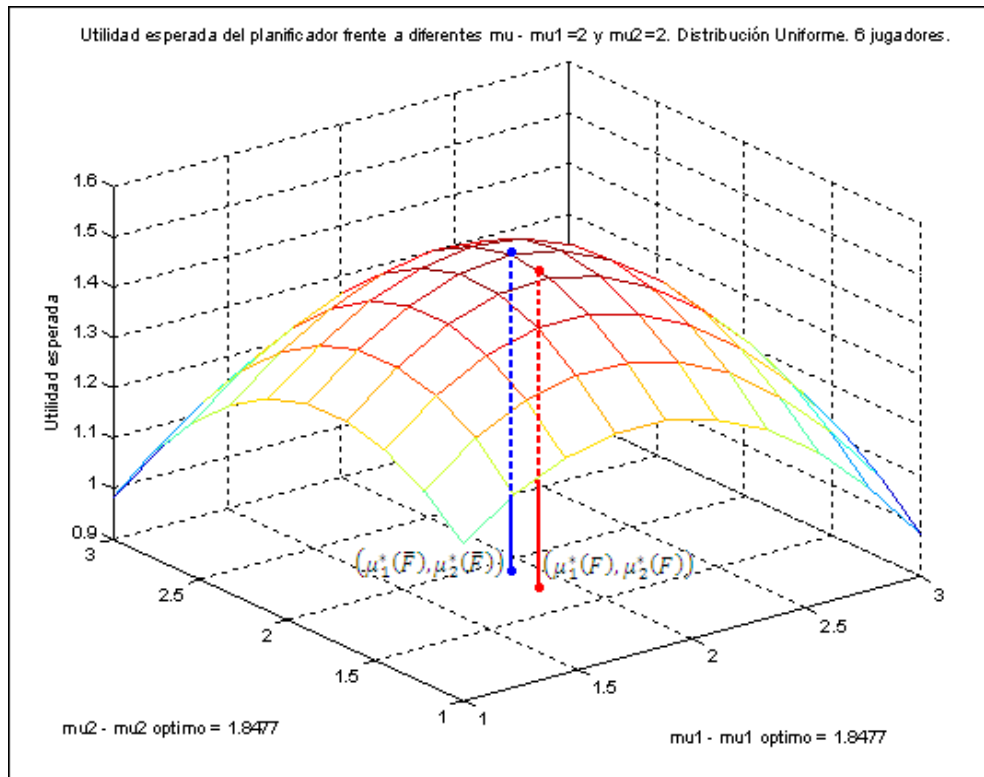
³⁰ Más exactamente, asumiendo que los agentes juegan considerando la distribución correcta.

$$r = \frac{E[U(\mu_1^*(F), \mu_2^*(F), \bar{F})]}{E[U(\mu_1^*(\bar{F}), \mu_2^*(\bar{F}), \bar{F})]}$$

Ecuación 56

, y verificar de acuerdo a las diferencias o similitudes entre F y \bar{F} como varia dicha razón. $r \in [0,1]$, y mientras más pequeña sea dicha razón, menos robusto será el mecanismo. En otras palabras, si el principal comete un error en la distribución, y el mecanismo utilizado en la licitación es poco robusto, dicho error será muy caro en términos de utilidad, la que se verá perjudicada directamente. En el caso contrario de un mecanismo sumamente robusto, los errores que se puedan cometer en la distribución no serán considerables, y pese a utilizar un mecanismo erróneo, esto no se verá traducido de manera importante en el nivel de utilidad.

En la figura se observa gráficamente lo anterior. El punto azul corresponde al mecanismo óptimo bajo información correcta, mientras que el rojo es el calculado por el principal utilizando la distribución F . Como se ve el nivel de utilidad alcanzada es mayor, al corresponder dicho punto a uno más bajo en el manto de utilidad.



3.5 Precisión numérica y otros comentarios previos

Como ya se comentó con anterioridad, la mayor parte de la implementación de la teoría propuesta se debe realizar por medio de procedimientos numéricos en MatLab. Si bien el ajuste no es malo, como se observa particularmente al graficar y comparar los resultados numéricos y analíticos en aquellos casos

simples que lo permiten, existen 2 tipos de problemas que hay que tener en consideración, y que como se mostrará afectaron parcialmente los resultados.

El primero de ellos tiene que ver con la propagación de errores numéricos, que puede afectar la calidad y precisión de los resultados. Dado que al calcular la función $H(k)$ se utilizan aproximaciones numéricas, cualquier otro cálculo numérico que utiliza dicha función, propagará (en incluso intensificará) los posibles errores. Esto ocurre en el cálculo de $h(k)$, y más aún en el de $\tau(k)$, que utiliza ambas funciones previas, y que también es de carácter numérico. Por otra parte el cálculo de la utilidad esperada del principal es numérico también, así como el cálculo del mecanismo óptimo vía la malla de utilidad esperada. En base a esto, el efecto de errores dado la propagación de errores numéricos y de aproximación puede ser considerable y es necesario interpretar los resultados con esto en mente.

Por otro lado, existen problemas puntuales dado un tipo de distribución utilizada en las simulaciones. En específico, a la hora de utilizar la función de distribución cargada hacia los tipos más eficientes (menores θ) hay problemas al aproximarse a θ^l . La formular de la distribución de probabilidad es la siguiente:

$$f(\theta) = p \left(\frac{\theta - \theta^l}{\theta^h - \theta^l} \right)^{p-1}$$

Dado que $p < 1$, el argumento tenderá a infinito cuando θ tienda a θ^l , lo que lógicamente traerá problemas del tipo numérico al aproximarse a dicho punto. El asunto se acentúa más cuando aumenta el número de jugadores, dado que $G(k) = H(k)^{N-1}$ se hace cada vez más pequeño, el cual es un argumento utilizado en el cálculo de la mayoría de las otras funciones (como la de oferta de los pseudotipos, el algoritmo de utilidad esperada, etc.) Esto se apreciará de manera gráfica en los resultados, y se discutirá al respecto.

3.6 Organización y descripción de las experiencias

Lo siguiente pretende describir las experiencias y simulaciones realizadas, y la manera en que estas se organizaron a lo largo del estudio. En cada parte se describen las diferentes pruebas realizadas, y el objetivo particular de las mismas.

3.6.1 Análisis del comportamiento de los agentes

El objetivo de este análisis pretende estudiar la forma en que los agentes se comportan en caso de ganar el remate (la manera en que ofertan la combinación de precio y calidad). Este estudio permitirá interpretar de mejor manera los resultados siguientes, al tener una idea genérica de la forma en que los agentes se comportan.

En primer lugar se analizará para diferentes situaciones la manera en que los pseudotipos ofrecen los productos en caso de ganar. La idea es pararse sobre una curva de pseudotipo particular, y analizar la manera en que los diferentes agentes que la componen varían sus ofertas en dimensiones de calidad y precio. Por ejemplo, en la figura siguiente se presenta unas curvas de pseudotipos genéricos. La idea es

entender como varían las ofertas de los diferentes agentes con un pseudotipo común sobre la curva roja, y generalizar dicho comportamiento. Se pretende variar también el número de jugadores, y la distribución, a fin de verificar el efecto de dichos factores.

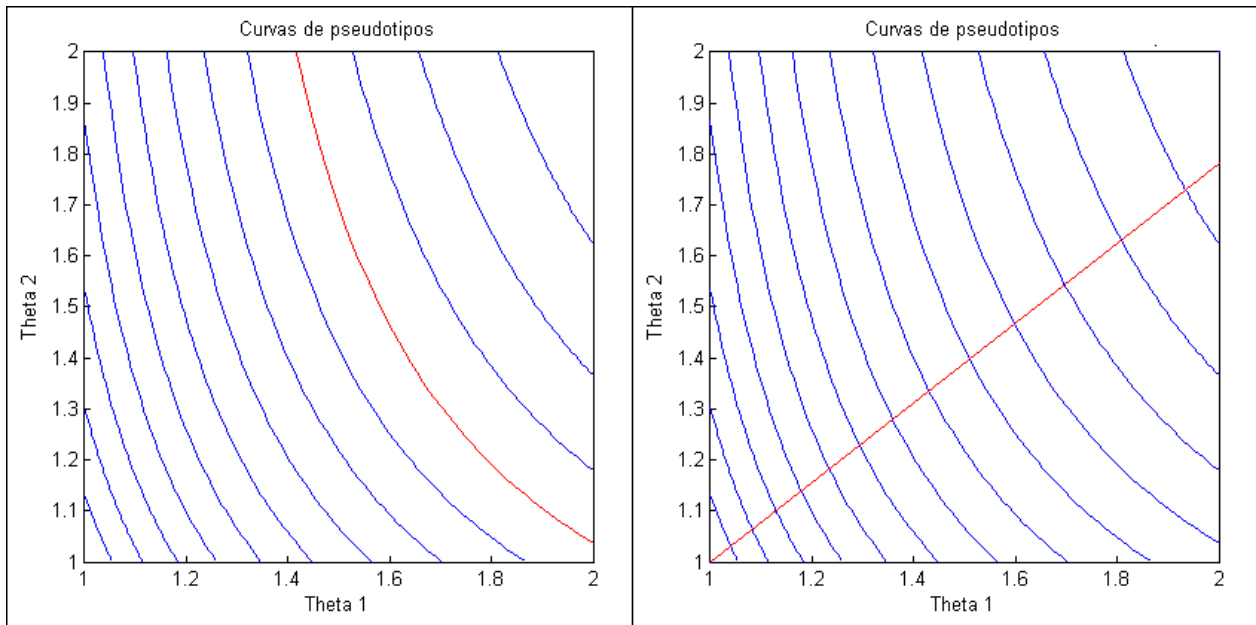


Figura 20: Análisis comportamiento de los agentes.

Por otra parte se desea hacer un análisis similar transversal a los pseudotipos. Esto es, recorriendo un eje como la línea roja del cuadro a la derecha de la figura anterior, se busca verificar la manera en que los diversos agentes ofertan al ganar el proceso de licitación. La idea es variar el ángulo del eje, y recorrer diferentes pseudotipos a su largo.

3.6.2 Análisis de mecanismos óptimos

El segundo set de pruebas pretende analizar el mecanismo óptimo para diferentes condiciones, y desarrollar supuestos o reglas que indiquen la manera óptima en que el principal debe diseñar el proceso de licitación para asegurar maximizar sus utilidades. Las condiciones a variar en el estudio serán las siguientes:

- Número de jugadores: 3, 6 y 10 jugadores, a fin de analizar la dependencia del mecanismo de la cantidad de oferentes en la licitación.
- Simetría en la valoración del producto: Se estudiarán diferentes condiciones respecto a la valoración que el principal tiene por las dimensiones de calidad. Se analizarán casos simétricos, en que $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2$ (q_1 y q_2 son valoradas con el mismo peso), y asimétricos.
- Distribución de los tipos: Se considerará una distribución similar para los tipos, pero se variará el tipo utilizada. Se probarán condiciones con funciones de distribución uniforme, y cargadas a los tipos más y menos eficientes. Además se utilizarán funciones de

distribución triangulares para analizar de manera aislada el efecto en la variación de la incertidumbre.

El objetivo es analizar cuanto se distorsionan las valoraciones reales de las dimensiones de calidad en la función *score*, y verificar la forma en que varían los niveles de utilidad esperada obtenidos.

3.6.3 Análisis de robustez del mecanismo

El análisis de robustez busca estudiar cómo se comporta el mecanismo óptimo y la utilidad esperada que este produce para el principal, bajo errores de información en algún parámetro. Específicamente se estudiará el efecto en el *ratio* de utilidades bajo incertidumbre en la exactitud de la distribución de los tipos supuesta por el principal, suponiendo que la real corresponde a \bar{F} , una distribución uniforme.

Con el fin de analizar lo anterior, se introducirá el concepto de vecindad de una distribución. La vecindad de una distribución corresponderá al conjunto de distribuciones (dentro de una familia con el fin de simplificar) a diferentes distancias. La vecindad de \bar{F} a una distancia ϵ corresponde al siguiente conjunto:

$$F_{\epsilon} = \{F = (1 - \epsilon) \cdot \bar{F} + \epsilon \cdot G \ / \ G \text{ pertenece cierta familia}\}$$

Ecuación 57

, con ϵ pertenece a $[0,1]$ y G una familia en específica. En particular se utilizará la distribución cargada ya descrita anteriormente.

De esta manera, variando el ϵ considerado, se tendrán distribuciones a diferentes distancias de la distribución central. A mayor sea ϵ , mayor será la distancia a la función original, en el sentido de que más diferentes serán.

La robustez a una distancia ϵ^* se definirá como la menor robustez alcanzada al comparar la función central con todas las distribuciones en F_{ϵ} , con $\epsilon < \epsilon^*$. En otras palabras, se deben tomar todas las distribuciones de la familia considerada, y analizar todas las funciones pertenecientes a F_{ϵ} para cada ϵ menor a la distancias considerada, con el fin de comparar la robustez obtenida. Por supuesto la cantidad de distribuciones y distancias son infinitas, por lo que para fines prácticos se considerarán una cantidad de funciones de distribuciones en G fija, y el cálculo se realizará solo para ϵ puntuales.

3.7 Resultados análisis del comportamiento de los agentes

3.7.1 Análisis función de distribución acumulada de los pseudotipos

En el siguiente gráfico se expone la función de distribución acumulada de pseudotipos para un caso de mecanismo simétrico ($\mu_1 = \mu_2$), y diferente tipos de distribuciones

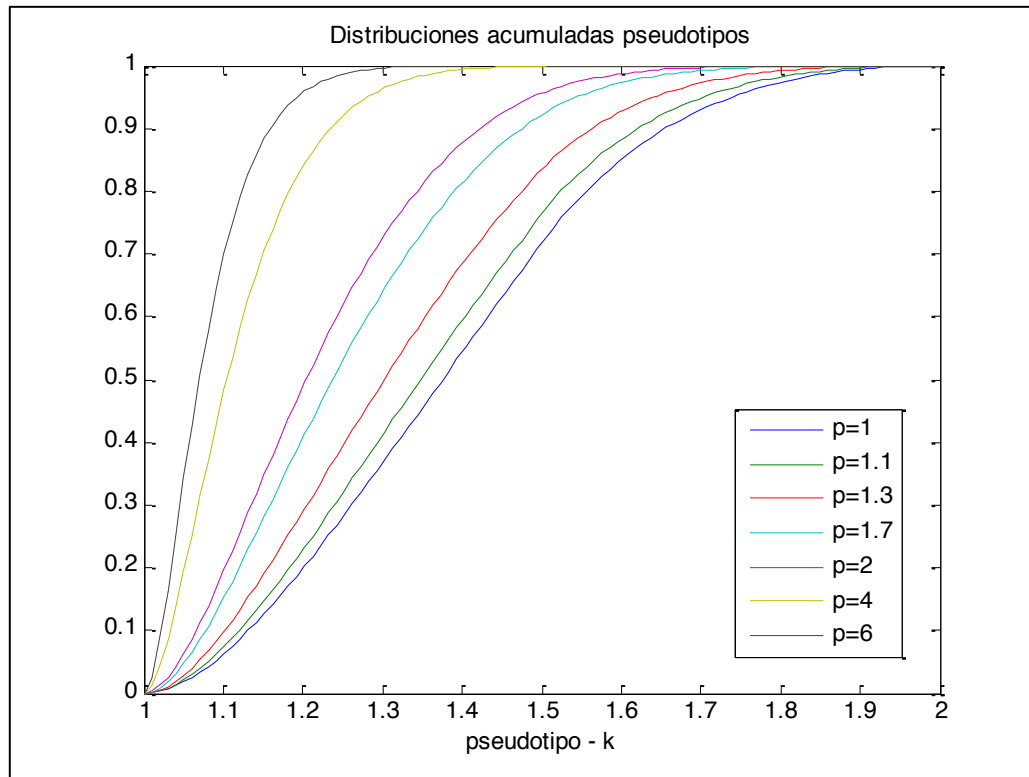


Figura 21: Distribuciones acumuladas de tipos para diferentes $p > 1$.

Como se puede observar, al aumentar p las curvas se cargan hacia la izquierda. Como ya se comenta, un aumento de p se relaciona con funciones de distribución más cargada hacia los tipos altos, que de la misma manera, se asocian a pseudotipos bajos. Luego, las curvas respetan dicha relación. A medida que dicho parámetro aumenta, la probabilidad se carga hacia los tipos más bajos, al punto que con $p = 6$, más del 90% de la masa de probabilidad se ubica entre el pseudotipo 1 y 1.2.

En la siguiente figura se representa lo mismo para casos con $p < 1$, donde el comportamiento es similar.

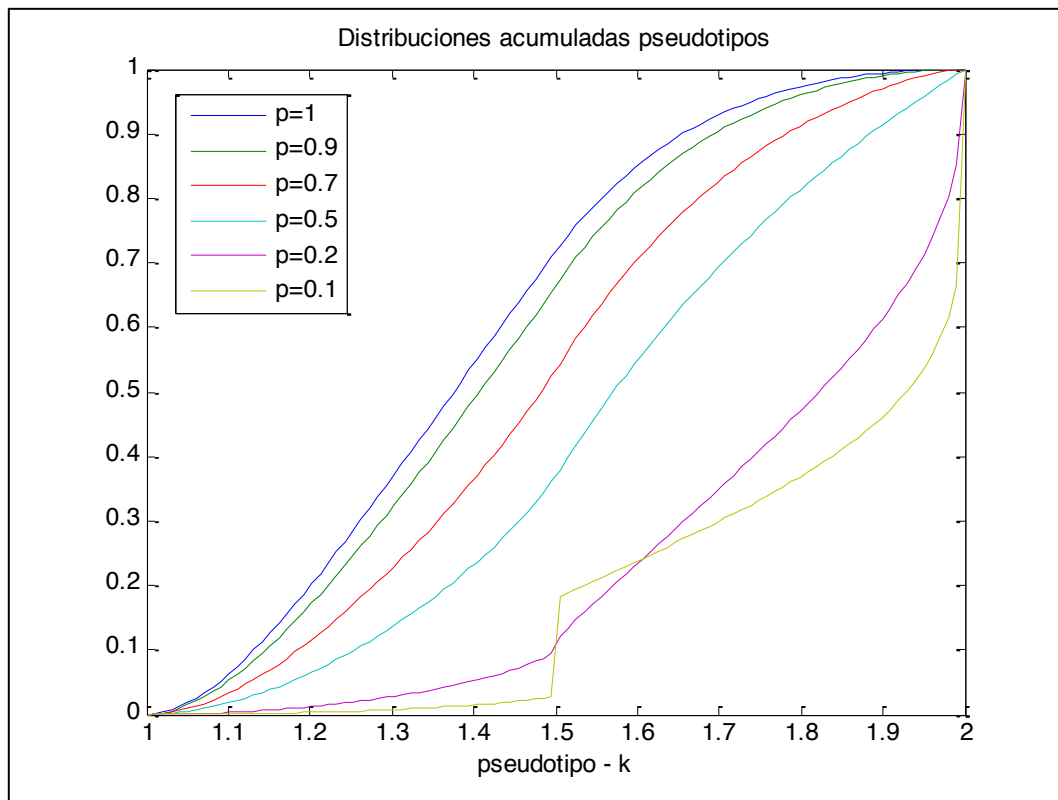


Figura 22: Distribuciones acumuladas de tipos para diferentes $p < 1$.

Las curvas se cargan esta vez hacia la derecha a medida que p disminuye, cargando la masa de probabilidad a los pseudotipos más altos. Se observa también una anomalía en la última curva, correspondiente a $p = 0.1$. Esto es producto del efecto numérico ya comentado en apartados anteriores que se observa en las distribuciones para $p < 1$, que se produce al integrar o realizar cálculos de la función de distribución en puntos cercanos a θ^l . El efecto es menos evidente en p mayores, dado las precauciones tomadas a la hora de programar el método que buscan minimizar dichos problemas. Por supuesto, cuando el parámetro se torna muy pequeño, es necesario ser cada vez más exacto en la manera de trabajar a fin de evitar dicho comportamiento, lo que por supuesto dificulta resultados genéricos³¹. En este sentido, los resultados siguientes serán válidos para parámetros p no demasiados pequeños.

Para un mecanismo asimétrico, lo anterior se mantiene, asociando distribuciones cargadas hacia los pseudotipos menores a medida que p crece.

3.7.2 Función de oferta $\tau(k)$

La función de oferta corresponde al *score* ofertado por los agentes en el proceso de licitación, que además de depender de la distribución de los pseudotipos, está condicionada al número de jugadores en

³¹ En este punto existe un trade-off entre programar métodos en extremo exactos, pero que en contrapartida requieran una cantidad de tiempo y recursos considerables.

el proceso. En la figura siguiente se observan diferentes curvas de oferta para un mecanismo fijo simétrico, distribución uniforme y diferente número de jugadores.

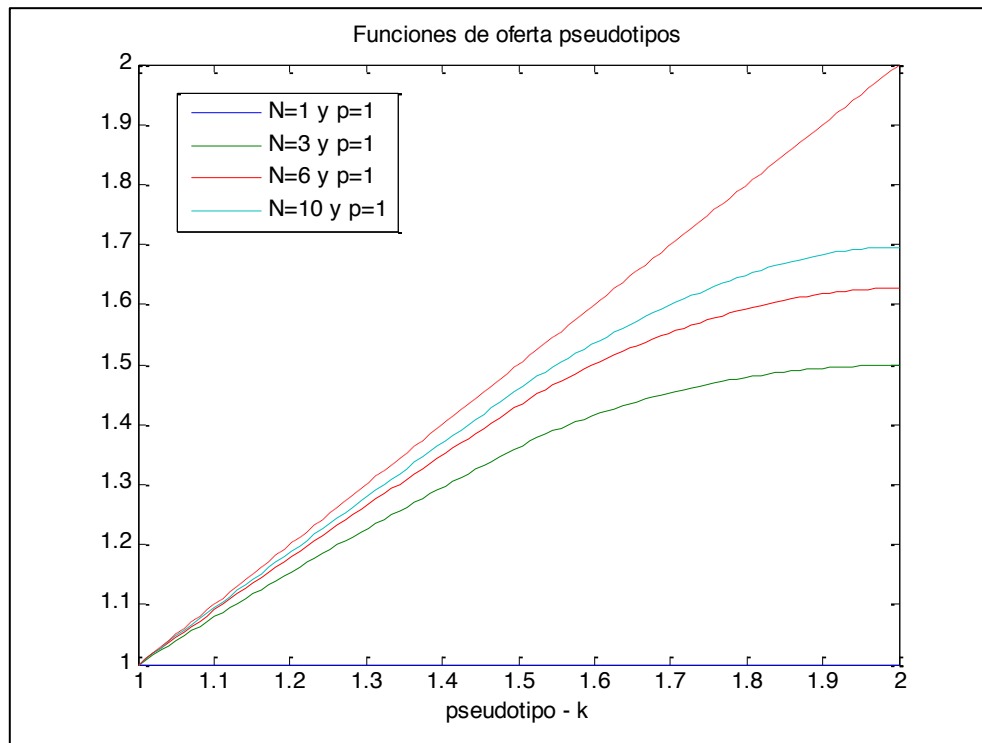


Figura 23: Funciones de oferta de los agentes para diferentes N .

En el gráfico se aprecia que las curvas se acercan a la diagonal a medida que aumenta el número de jugadores en el proceso de licitación, por lo que los agentes tienden a revelar su verdadero pseudotipo. De la misma forma, para una curva fija, aquellos pseudotipos más bajos (asociado a agentes con parámetros de costos mayores, menos eficientes) tienen menos poder de negociación, y tienden a revelar de manera más exacta su pseudotipo por medio de su oferta. Esto no es nuevo, y es similar a lo que sucede en un remate cerrado a primer precio, en el cual la valoración de los jugadores por el producto es información privada. La línea azul corresponde al caso de 1 jugador (un caso límite), en el que dado que no hay competencia para el oferente en el proceso, lo óptimo para el mismo es declarar que es el tipo menos eficiente (costos más altos en ambas dimensiones) y así ofrecer un producto con un precio mayor. En el gráfico se observa claramente que un mayor número de jugadores privilegia los intereses del principal, ya que los agentes en promedio declaran un mayor pseudotipo aumentando la utilidad esperada de éste.

En el siguiente gráfico se aprecia lo mismo, esta vez manteniendo constante el número de jugadores, y variando la distribución. Como se aprecia, a medida que aumenta p las curvas, para un N constante, se alejan de la diagonal. Lo contrario ocurre si p disminuye. En otras palabras, a medida que la distribución se carga más y más hacia los tipos menos eficientes (en promedio la probabilidad de encontrar pseudotipos más altos es menor), por lo que los pocos tipos con pseudotipos alto que existan (y que saben esto por supuesto), tendrán una mayor libertad y distorsionarán en mayor forma su verdadero pseudotipo en el proceso. Se ve claramente que una distribución cargada a tipos poco eficientes va en

contra de los intereses del principal, tal cual es esperable, al obtener una curva de oferta más baja (y que genera menos utilidad por supuesto).

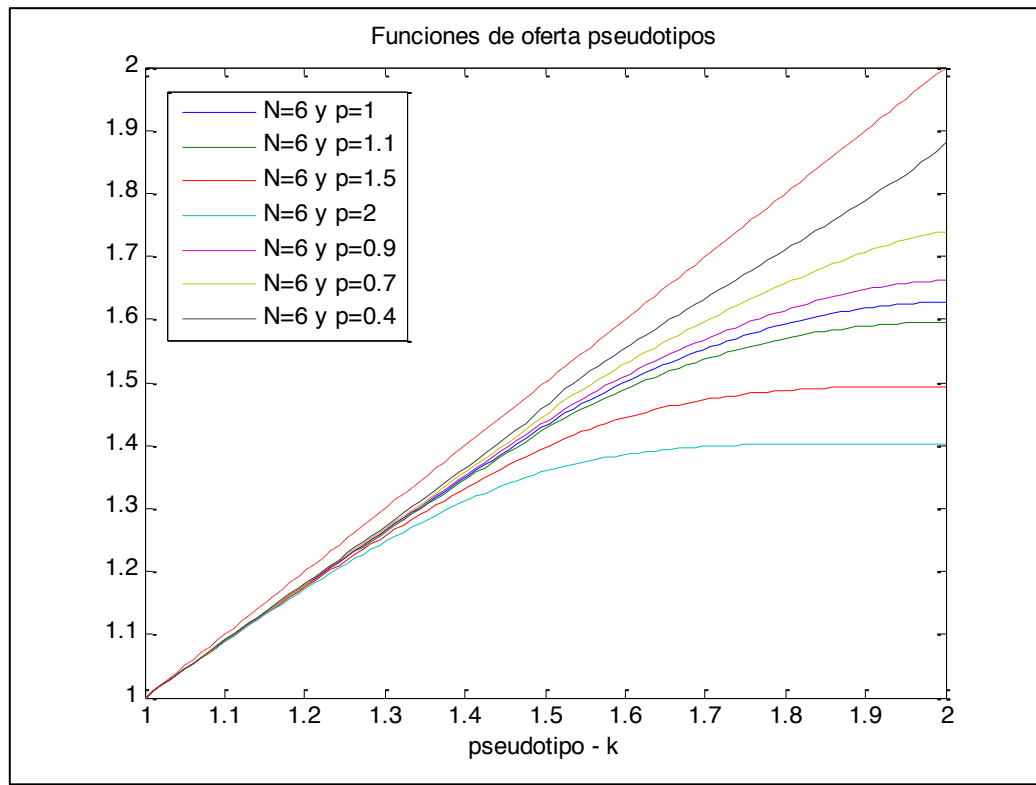


Figura 24: Función de oferta de agentes para diferentes distribuciones.

Lo anterior no cambia en un caso asimétrico, los gráficos son similares, salvo que el espacio de k lógicamente varía.

En la curva correspondiente a $N = 6$ y $p = 0.4$, se aprecia una irregularidad en su forma, algo no observable en el resto de ella. De la misma manera que lo ya discutido para las funciones de distribución acumuladas, dicha irregularidad es producto de problemas numéricos y de aproximación que se acentúan cuando p es pequeño y N grande. De todas formas, en este caso particular el error no es grave, como lo que se apreciaría para $p = 0.1$ por ejemplo.

3.7.3 Oferta del agente ganador

Los agentes, ofertan en dos ocasiones. Una es previo a que se decida el ganador, donde cada uno ofrece un puntaje definido por su pseudotipo. Posteriormente, una vez que el agente que ha ofrecido el máximo *score* gana el proceso, este debe decidir la forma de implementar el producto, ofreciendo una combinación de calidades y precio que cumplan con el puntaje al cual se comprometió.

Notar que dado la forma creciente de la función de oferta, el mecanismo asegura que aquel agente con mayor pseudotipo se aquel que gana el remate. Luego, la probabilidad que tiene cada agente de ganar es simplemente la probabilidad de que este obtenga un pseudotipo mayor a todo el resto de los

jugadores, expresión dada por $G(k)$. Lógicamente ninguno de los jugadores sabe si su pseudotipo es el mayor entre todos, pero el mecanismo le asegura al principal que él que posea el mayor gane, y que además corresponda al más eficiente³².

Por otra parte, asumiendo que un tipo particular gana el proceso (o sea, que ningún otro jugador posee un pseudotipo mayor que él), es interesante analizar la manera en que dicho jugador implementa el producto de interés del principal.

En la figura siguiente se observan las curvas de pseudotipos para un caso simétrico. Es posible analizar con detalle la curva en rojo, que corresponde a un pseudotipo constante (específicamente a $k = 1.5$ para el caso ejemplificado)

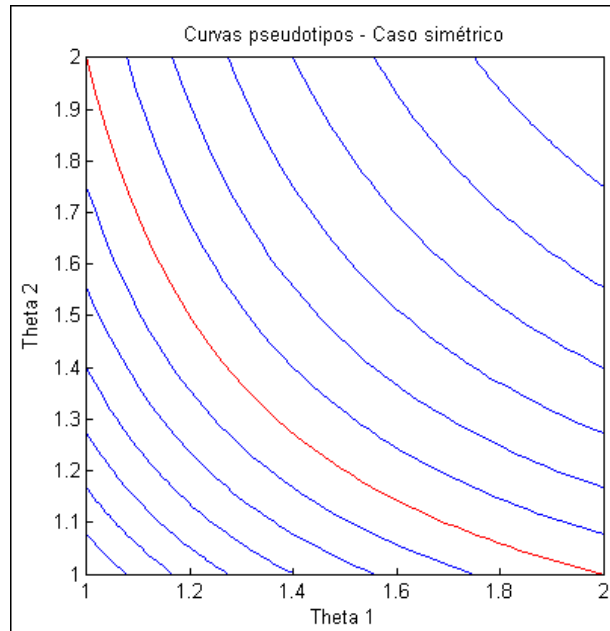


Figura 25: Curvas pseudotipos caso simétrico.

Es directo observar que existen varias combinaciones de tipos (θ_1, θ_2) que pueden corresponder a dicho pseudotipo. Moviéndose por la curva de arriba hacia abajo, los gráficos siguientes muestran la manera en que los diferentes agentes correspondientes a dicho pseudotipo ofertarán. Es intuitivo que agentes con diferentes costos, implementarán productos de diversas características, por lo que no es extraña la forma que poseen los gráficos.

³² Esto dado que aquel pseudotipo mayor ofrece también un score mayor, dadas las características crecientes de la función $\tau(k)$.

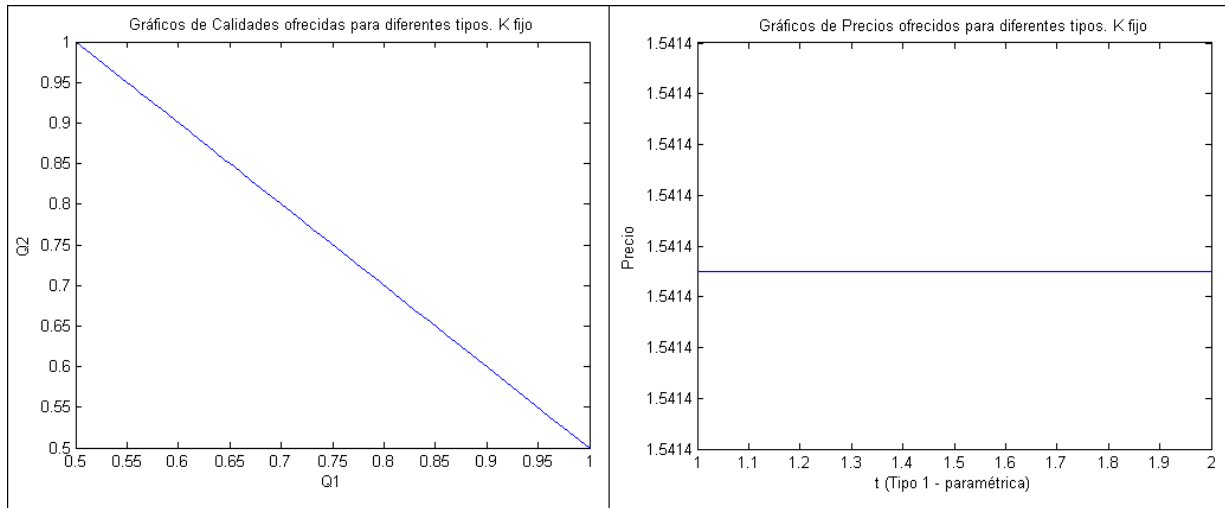


Figura 26: Comportamiento de los agentes para k constante.

La oferta de calidad (q_1, q_2) varía desde $(1, 0.5)$ en el extremo inferior derecho a $(0.5, 1)$ en el superior izquierdo. A medida que se recorre la línea azul desde abajo hacia arriba, el tipo θ_1 aumenta mientras que el θ_2 disminuye. El efecto es lógico. A medida que se recorre la curva de pseudotipo, y se pasa a ser menos eficiente en la primera dimensión y más eficiente en la segunda, existe un trade off entre las dimensiones de calidad ofrecida, de forma tal de ofrecer mayores niveles de calidad cuando es más económico hacerlo. Respecto al precio, se aprecia que es constante a lo largo de toda la curva de pseudotipo. Luego, el precio finalmente ofrecido es independiente del tipo en específico que gane el remate, solo depende del pseudotipo al cual pertenece. Luego, todos los agentes en una misma curva de pseudotipo, ajustan sus ofertas de calidades (de acuerdo a sus costos particulares) con el fin de homogenizar sus costos totales y el precio ofrecido³³.

3.8 Resultados análisis de mecanismo óptimo

En la siguiente sección se pretende describir los resultados principales obtenidos en el análisis del mecanismo óptimo implementado por el principal bajo diferentes condiciones. En cada caso se analizarán los resultados principales, y en ocasiones se repetirán en tablas separadas parcialmente los resultados, a fin de analizar de mejor manera lo obtenido. Las tablas completas pueden ser encontradas en los anexos.

3.8.1 Resultados para distribución uniforme

En la siguiente tabla se observan los resultados para el caso de una distribución uniforme para los tipos. En la primera y segunda columna se presentan los pesos que se le dan a la primera y segunda dimensión de calidad en la función de utilidad del principal, mientras que la tercera y cuarta corresponden a los

³³ Esto también, por cierto, consecuencia de la forma simétrica de la función de costos.

pesos dados a las calidades en la función *score*. N corresponde al número de jugadores (oferentes) en la licitación, y p al tipo de distribución. En este caso $p = 1$ se refiere a una distribución uniforme. Finalmente $E[U]$ es la utilidad esperada alcanzada por el principal utilizando el mecanismo óptimo obtenido.

| $\bar{\mu}_1$ | $\bar{\mu}_2$ | μ_1 | μ_2 | N | p | $E[U]$ |
|---------------|---------------|---------|---------|-----|-----|----------|
| 2 | 2 | 1,7984 | 1,7984 | 3 | 1 | 1,396036 |
| 2 | 2 | 1,8477 | 1,8477 | 6 | 1 | 1,520746 |
| 2 | 2 | 1,8807 | 1,8807 | 10 | 1 | 1,592521 |
| 3 | 2 | 2,6193 | 1,8697 | 3 | 1 | 2,271179 |
| 3 | 2 | 2,7305 | 1,8807 | 6 | 1 | 2,495842 |
| 3 | 2 | 2,8210 | 1,8807 | 10 | 1 | 2,62705 |
| 4 | 2 | 3,4486 | 1,9191 | 3 | 1 | 3,497932 |
| 4 | 2 | 3,6406 | 1,9191 | 6 | 1 | 3,883508 |
| 4 | 2 | 3,7394 | 1,9081 | 10 | 1 | 4,10929 |

Tabla 1: Resultados mecanismo óptimo para el caso de distribución uniforme.

Como se aprecia, la experiencia intenta contrastar la manera en que varía el mecanismo óptimo al variar todos los factores anteriores.

En primer lugar, se prueba variando la simetría en la valoración del principal de las calidades, haciéndola cada vez más asimétrica. Se puede observar de inmediato que cuando la valoración es simétrica, el mecanismo también lo es, en el sentido de que asocia igual peso a ambos niveles de calidades en la función *score*. Por otra parte, si la valoración es asimétrica, el mecanismo también lo es, respetando los pesos absolutos de la función de utilidad. Esto es, si la dimensión 1 es valorada más que la dimensión 2, en la función *score* se asocian pesos que respetan esto. No pasa lo mismo con la valoración relativa, en el sentido que si una dimensión es valorada el doble que la otra, no necesariamente ocurre lo mismo con las valoraciones en el mecanismo óptimo. En la tabla siguiente se observa esto, donde r_1 corresponde a la razón de pesos dada en la función de utilidad, y r_2 la dada en la función *score*. Como se observa, las razones relativas son en general diferentes, pero la diferencia disminuye a medida que se aumentan los jugadores

| N | r_1 | r_2 |
|-----|-------|--------|
| 3 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | 1 |
| 3 | 1,5 | 1,4010 |
| 6 | 1,5 | 1,4519 |
| 10 | 1,5 | 1,5 |
| 3 | 2 | 1,7970 |
| 6 | 2 | 1,8971 |
| 10 | 2 | 1,9597 |

Tabla 2: Resultados pesos relativos para caso simétrico.

Si bien los valores absolutos se aprecian aun diferentes, es interesante notar que se tiende a distorsionar menos la valoración relativa de las calidades a medida que hay más jugadores en el proceso.

Por otro lado, de la Tabla 1 se aprecia también que a medida que aumentan los jugadores (con todo lo demás constante), la utilidad aumenta también, lo que es esperable en un mecanismo que busca hacer competir a los jugadores. Luego, mientras más jugadores hallan en el proceso, el principal obtendrá una utilidad esperada mayor del resultado.

Finalmente es necesario comentar respecto al mecanismo óptimo en sí. Como se observa, en todos los casos el mecanismo escogido distorsiona hacia abajo las verdaderas valoraciones, en el sentido que se declara en la función *score* una valoración inferior a la que realmente se posee. Esto es en sí interesante, ya que el principal tiende a “ocultar” su valoración por los parámetros de su interés (aquellos que definen al producto), como una manera de mejorar el resultado obtenido. Lo anterior puede traer consecuencias también. Si bien el mecanismo es eficiente (por construcción) ex-ante, podría no serlo ex-post una vez realizado el proceso. Es perfectamente posible que el hecho de distorsionar las valoraciones con el fin de mejorar el proceso y la manera de ofertar de los agentes, provoque resultados que vayan en contra de los intereses del principal. Se observó que también se distorsionan las valoraciones relativas, por lo que por ejemplo, al subvalorar en el mecanismo la razón entre el peso que tiene para el principal q_1 versus q_2 (asumiendo el primero es más valorado), se podría obtener un producto que posea un nivel de q_2 (en relación al de q_1) mayores a los que se necesitaban. En otras palabras, es perfectamente posible que el agente valore la primera dimensión de calidad el doble de lo que valora la segunda. Al distorsionar dicha razón en el mecanismo óptimo (algo eficiente ex-ante) hacia abajo, como se observa en los resultados, el resultado ex-post podría no ser eficiente, en el sentido de obtener niveles de calidad q_1 muy bajos.

La distorsión que se observa en los mecanismos tiene dependencia además del número de jugadores participantes en el proceso. Se aprecia de la Tabla 1 que la distorsión disminuye al aumentar el número de jugadores (constante lo demás), lo que una vez más parece ir en privilegio del principal.

3.8.2 Resultados para distribución cargada hacia los peores tipos

En la Tabla 9 de los anexos, se observan los resultados para diferentes tipos de distribuciones, definidas por el parámetro p . Algunos datos serán repetidos en la discusión siguiente, a fin de poder apreciar de mejor forma la dependencia del mecanismo en la variación de parámetros puntuales.

En primer lugar, se puede apreciar que manteniendo constante el tipo de distribución (y mirando los diferentes casos, mecanismos asimétricos, simétricos, etc.), en general se tienen conclusiones similares a las obtenidas para el caso de distribución uniforme con $p = 1$. Esto es a medida que aumentan los jugadores, en todos los casos aumenta la utilidad esperada del principal, consecuencia del efecto que esto tiene en la función de oferta de los agentes, y a que en promedio se obtienen *scores* ofertados más altos. Este efecto es la primera condición que debe cumplir cualquier mecanismo, y una forma de verificar, al menos en una primera instancia la validez de los resultados. En segundo lugar, en la mayor parte de los casos, el mecanismo correspondiente a condiciones simétricas es también simétrico. Esto

CAPÍTULO 3: RESULTADOS Y DISCUSIONES

es, se asigna el mismo peso a ambas dimensiones de calidad en la función *score*, tal cual se hace en la de utilidad. Existe tan solo una excepción, en el mecanismo simétrico con 10 jugadores y $p = 1.1$, lo que lógicamente, y dado el comportamiento de las demás pruebas, se asocia a errores de aproximación o numéricos.

Con respecto al mecanismo y su distorsión, es posible analizar varias cosas. Manteniendo constante la distribución y las valoraciones (simétricas o asimétricas), se distorsiona hacia abajo la valoración de los niveles de calidad existentes en la función de utilidad, y dicha distorsión varía al aumentar el número de jugadores. En cada grupo de datos a medida que aumenta el número de jugadores, la dimensión que es más valorada (en todos los casos, la primera dimensión de calidad), disminuye la distorsión, acercándose su valor cada vez más al real. En cambio el comportamiento de la dimensión menos valorada es más incierto. Lo que se observa es que al pasar de 3 a 6 jugadores, por lo general la distorsión se mantiene, o disminuye tan solo ligeramente, nunca aumenta. En cambio, al pasar de 6 a 10 jugadores, el comportamiento es diferente. El mecanismo se mantiene, o disminuye levemente en la mayor parte de los casos con p pequeño, mientras que en p más grandes, la distorsión disminuye. En resumen pareciera ser que por regla general, al variar N lógicamente el escenario cambia, y el principal actualiza las reglas de juego variando principalmente la distorsión que se aplica a la primera dimensión de calidad. La menos valorada en cambio experimenta menor variación, y no parece existir un efecto importante. Lo anterior se contrarresta en parte al tener distribuciones más cargadas hacia los tipos menos eficientes, en el sentido de que al aumentar los jugadores ambos pesos disminuyen su distorsión en el mecanismo óptimo, lo que pareciera indicar que al tener la certeza de que los tipos en el proceso son con poca probabilidad “buenos”, es necesario utilizar ambas dimensiones para lograr un buen efecto. Más aun, la Tabla 10 del anexo muestra como varían los pesos relativos asignados en el mecanismo, y se ve que en la mayor parte de los casos, a medida que aumenta el número de los jugadores (todo lo demás constante), la distorsión de los pesos relativos disminuye, acercándose a la que posee la función de utilidad. Las anomalías más considerables se aprecian para p grande, donde el efecto consecuencia de la distribución pareciera variar en otro sentido el mecanismo. De hecho, para $p = 5$, el peso relativo disminuye al aumentar los jugadores, lo que podría deberse a un problema numérico (algo poco probable en este caso, dado el buen comportamiento de las funciones para $p > 1$) o a un efecto no predecible de las distribuciones.

Es interesante destacar que al aumentar p se producen 2 efectos, que es bueno discutirlos previo al análisis posterior. En primer lugar, y como ya se mencionó, los tipos se hacen peores en promedio (en efecto, la esperanza de la distribución es afectada directamente), por lo que el principal de antemano sabe que le espera un peor escenario. Pero además a medida que aumenta el parámetro, las distribuciones se hacen más estrechas, por lo que la incertidumbre también disminuye. En cierto sentido disminuye además la varianza de la distribución. Ambos efectos pueden a priori afectar la estrategia del principal de diferentes maneras, provocando efectos contrarios en la especificación del mecanismo óptimo.

Por otra parte, y en relación a lo anterior, los resultados mostrados pueden analizarse considerando el número de jugadores y las valoraciones constantes, analizando como varía el mecanismo al variar

únicamente la distribución. En la del anexo se repiten los resultados anteriores, esta vez en otro orden con el fin de analizar los resultados con mayor facilidad. Se han incluido además los resultados de la distorsión relativa en la misma tabla.

Es posible desprender de la tabla anterior que el mecanismo es relativamente insensible a cambios en la distribución, al menos en un intervalo considerable de p . Esto quiere decir que el mecanismo tiende a mantenerse de un caso a otro, variando solamente el nivel de utilidad. Gráficamente, esto quiere decir que los mantos de utilidad graficados están unos sobre otros, como se representa en la siguiente figura, manteniendo su forma al menos localmente en torno al punto óptimo, y variando únicamente el nivel de utilidad que representan.

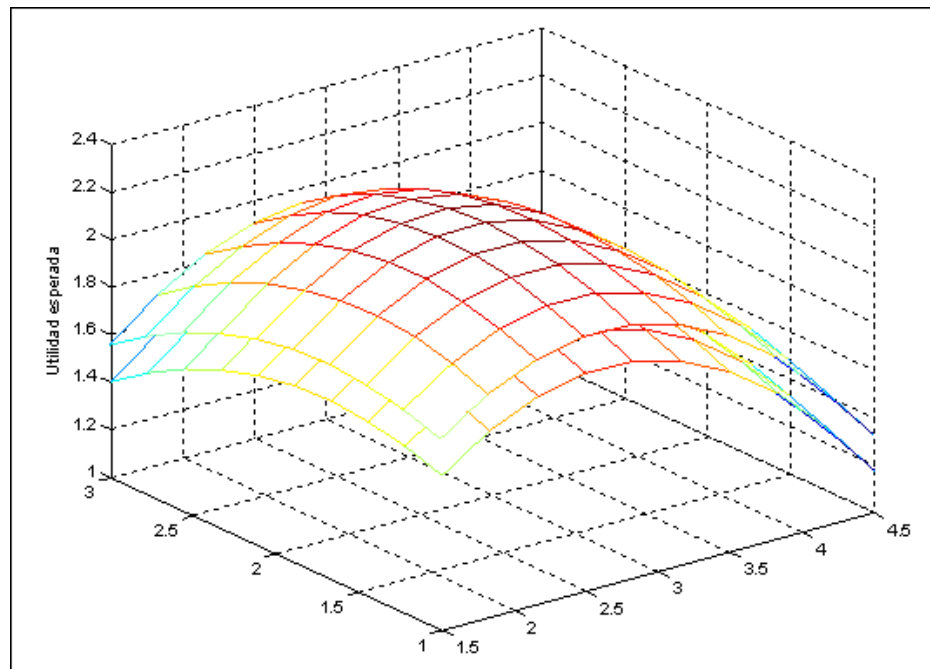


Figura 27: Representación gráfica, mecanismos insensibles a variación en distribución.

Además dicho nivel siempre disminuye al pasar a una distribución cargada a los peores tipos, como se aprecia claramente en la tabla. Por supuesto esto no es más que el efecto antes descrito, que conlleva que al aumentar p los tipos se hacen en promedio peores, y por ende, ofrezca ofertas más bajas traducidas en una utilidad esperada menor. Y por otra parte, esto indica de inmediato que dicho efecto parece dominar al de la disminución de la incerteza, que debiese cooperar positivamente en el nivel de utilidad.

Respecto a la insensibilidad de los mecanismos a la variación de la distribución, el comportamiento general es que para p muy pequeño (1.1 en este caso) el mecanismo es similar al del caso simétrico, y que varía levemente al pasar a p 's más grandes, manteniéndose así en cierto. Se además observa que cuando p crece lo suficiente, dicho efecto desaparece y el mecanismo varía, disminuyendo la distorsión a medida que el parámetro crece. El punto en el cual lo hace depende del ambiente en específico, pero la

mayor parte de los resultados mostraron que el mecanismo comienza a variar sobre $p = 2$. Todo lo anterior podría ser atribuible al segundo efecto producto de disminuir la calidad de los tipos, o a un efecto combinado al hacer demasiada cargada la distribución hacia algunos extremos. Se discutirá más en detalle esto al comparar los resultados con los obtenidos en el caso de funciones de distribución triangulares. Además, el efecto de insensibilidad del mecanismo, o su escaso cambio, tendrá una relevancia crucial en su robustez, como se verá más adelante.

3.8.3 Resultados para distribución cargada hacia los mejores tipos

En la Tabla 12 del anexo se presentan los resultados para distribuciones con $p < 1$.

Lo primero que es posible apreciar de la tabla es que para p muy pequeño los resultados son del todo inválidos. Basta observar el set de datos para $p = 0.1$, y notar que la utilidad esperada del principal disminuye al aumentar el número de jugadores (manteniendo las valoraciones constantes), lo que es absolutamente imposible dada la naturaleza del problema. En efecto, la utilidad esperada para un punto específico de la malla (un μ_1 y μ_2 determinados) está dada por la siguiente ecuación:

$$U(\mu_1, \mu_2) = N \int_{\theta^l}^{\theta^h} \int_{\theta^l}^{\theta^h} \left(\left[\left(\bar{\mu}_1 \cdot \frac{\mu_1}{2\theta_1} + \bar{\mu}_2 \cdot \frac{\mu_2}{2\theta_2} \right) - \left(\left(\frac{\mu_1^2}{2\theta_1} + \frac{\mu_2^2}{2\theta_2} \right) - \tau(k_i(\theta_1, \theta_2)) \right) \right] \cdot H(k(\theta_1, \theta_2))^{N-1} \cdot f(\theta_1) f(\theta_2) \right) d\theta_1 d\theta_2$$

, que lógicamente es creciente en $\tau(k_i)$, función creciente en los pseudotipos. Dado que a menores p se obtienen en promedio tipos más eficientes, el promedio de pseudotipos será más alto, y la función en dicho argumento debiese crecer. Respecto al otro argumento que depende de los pseudotipos, $H(k)^{N-1}$ corresponde a la probabilidad de que un pseudotipo k gane el remate. Lógicamente, a medida que aumenta el número de jugadores dicho argumento disminuye, aunque en la función de utilidad es compensado en parte por el término N que multiplica la integral.

La explicación a dicha anomalía, viene de notar el comportamiento de la función $H(k(\theta_1, \theta_2))^{N-1}$ cuando p es pequeño, o bien, cuando N crece. En ambos casos, la probabilidad de ganar estará concentrada mayormente en los tipos bajos, y escasamente en los tipos altos. Esto visto en el plano $\theta_1 - \theta_2$ de la figura siguiente, significa concentrar la mayor masa en la esquina inferior izquierda, y probabilidad caso cero en los cuadros de la esquina contraria. Numéricamente, como ya se discutió, el problema se ataca resolviendo la integral anterior por medio de métodos computacionales, generando una malla en el espacio de los tipos como la mostrada en la figura.

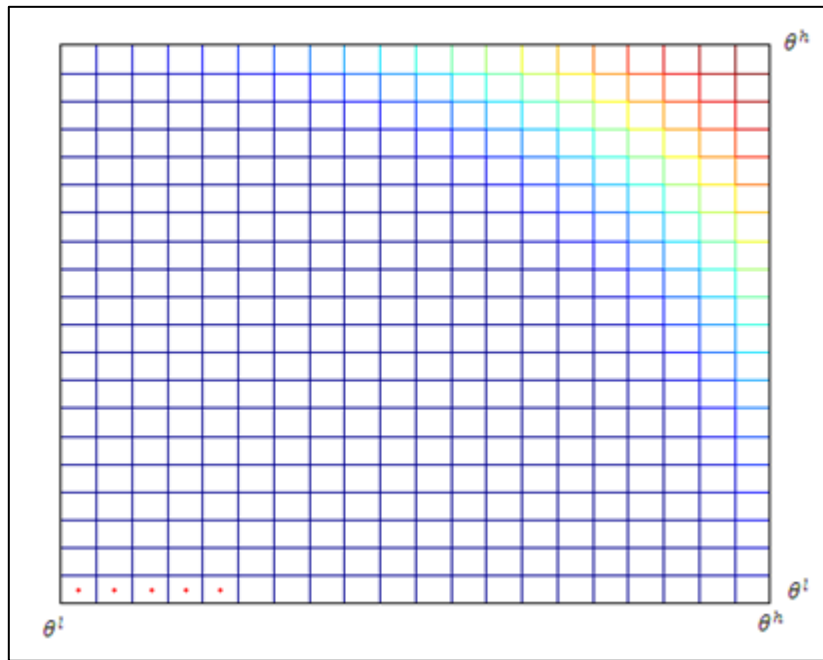


Figura 28: Malla de integración.

La malla anterior presenta un problema, ya que por limitaciones lógicas, no puede ser infinitamente pequeña. Los términos que se añaden numéricamente a la integral se calculan en el centro de cada cuadrado de la malla, por lo que en los sectores donde está la mayor parte de la masa se está perdiendo una parte considerable de los términos que suman a la integral, y en el lado contrario, se están sumando solo valores multiplicados por cero. Luego, dicho efecto subestima de manera considerable la verdadera utilidad esperada. Para distribuciones con p relativamente grandes el problema no existe, dado que la probabilidad se distribuye de manera más homogénea en todo el espacio.

Una solución es crear una malla alternativa más densa en el sector donde se conoce está la mayor parte de la masa, pero los recursos computacionales y el tiempo de procesamiento aumenta de manera exponencial. Más aun, se intentaron realizar algunas pruebas para arreglar el problema con $p = 0.2$, y a pesar de utilizar una malla de densidad 1000×1000 , la precisión no era la suficiente para alcanzar resultados óptimos³⁴. Si bien es posible programar para cada caso una malla que disminuya los problemas, esto se escapa de los objetivos del estudio, y se opta por analizar los resultados para los casos $p = 0.9$, $p = 0.8$ y $p = 0.6$ y obtener conclusiones basadas en dichos resultados.

Para los casos propuestos, el comportamiento sigue la misma lógica que los casos estudiados para $p > 1$. En primer lugar, valoraciones simétricas conllevan mecanismos simétricos, y en todos los casos el mecanismo distorsiona hacia abajo la verdadera valoración de las dimensiones de calidad. En este caso, a diferencia del estudiado con anterioridad, los 2 efectos de variar p apuntan en el mismo sentido. Por una parte disminuye la varianza, haciendo más ajustada la distribución, por lo que se tiene mayor certeza de los tipos existentes, y por otra, la distribución está más cargada hacia los tipos más eficientes, por lo que

³⁴ Y además está decir que con ese tipo de malla, el tiempo de procesamiento aumentaba a más de 5 días para tan solo un mecanismo.

CAPÍTULO 3: RESULTADOS Y DISCUSIONES

en promedio se obtienen mejores resultados. Lo anterior se observa directamente comparando para condiciones similares, los p menores y mayores que 1, donde el primer caso las utilidades son siempre mayores.

Por otra parte, manteniendo todo lo demás constante, al aumentar el número de jugadores el efecto es similar a los demás casos, observándose una disminución en la distorsión. La diferencia es que en estos casos la distorsión disminuye en los pesos dados a ambas dimensiones de calidad, no observándose la aparente insensibilidad en la variación de la calidad de menor valoración como en el caso p mayor que 1. En este caso, al aumentar N ambos parámetros son ajustados, disminuyendo la distorsión respecto a la valoración original. Como es posible apreciar a medida que aumenta dicho parámetro. los pesos convergen a los valores reales en la función de utilidad. En el caso de $p = 0.6$ se observan algunas anomalías, donde la distorsión aplicada en el mecanismo asigna pesos superiores a las valoraciones reales. En el caso asimétrico (3,2), con 10 jugadores se observa que el peso asignado a la segunda dimensión supera levemente al peso real, y en el caso siguiente con pesos reales (4,2) ocurre algo similar para 6 y 10 jugadores. Esto puede deberse a las mismas irregularidades numéricas discutidas con anterioridad, que por supuesto se intensifican al aumentar el número de jugadores. Finalmente, respecto a los pesos relativos el efecto es también similar, convergiendo al real a medida que se aumentan los jugadores. La única excepción ocurre en los casos anómalos discutidos, donde claramente los efectos numéricos alteran los resultados.

En la Tabla 13 de los anexos es posible analizar el efecto a variaciones en la distribución.

Analizando el caso simétrico con 3 jugadores se observa de inmediato algo similar al caso analizado con anterioridad, obteniendo un mecanismo que es bastante insensible al cambio de la distribución. El efecto es similar al considerar escenarios con 6 y 10 jugadores, salvo que los mecanismos empiezan a variar levemente también (al segundo o tercer decimal), disminuyendo en algo la distorsión. Respecto a los mecanismos asimétricos, en escenarios con N bajo se observa una insensibilidad bastante alta, y a medida que dicho parámetro crece se observa como a variaciones en la distribución, el mecanismo experimenta pequeñas variaciones que disminuyen levemente la distorsión. Las únicas anomalías a dicho comportamiento se observan cuando $p = 0.6$, que como se mencionó ya, está en el límite de la confianza numérica de los resultados. Estas pequeñas variaciones se ven también directamente reflejadas en como varía la función de utilidad al cambiar la distribución, que como se puede apreciar, tan solo experimenta pequeños cambios. Una vez más comienza a visualizarse efectos de gran robustez en los mecanismos estudiados.

En resumen, el comportamiento general es similar para el caso $p > 1$, salvo que en el caso comentado ambos pesos parecen ajustarse a medida que se aumenta el número de jugadores manteniendo lo demás constante. La explicación a esto no es clara, pero podría tener que ver con que en estos casos el disminuir p presenta solo un efecto, el de mejorar las posibilidades del agente al aumentar la calidad de los agentes que entran en juego. Luego, puede ser necesario ajustar ambas dimensiones con el fin de lograr resultados óptimos al tener en promedio jugadores con mejores posibilidades.

3.8.4 Resultados para distribución triangulares

El objetivo de trabajar con distribuciones triangulares es el de estudiar el efecto aislado en el mecanismo de una disminución de la incerteza en la distribución. Las distribuciones estudiadas en este caso mantendrán la media constante, equivalente a la mitad del intervalo de tipos considerados ($c = 0.5$), y a medida que los parámetros θ_1 y θ_2 se acercan al punto medio, lógicamente la distribución se hace más ajustada, y disminuye la incerteza de la distribución. Los resultados obtenidos se muestran en la siguiente tabla:

| $\bar{\mu}_1$ | $\bar{\mu}_2$ | μ_1 | μ_2 | N | θ_1 | θ_2 | c | $E[U]$ | r_1 | r_2 |
|---------------|---------------|---------|---------|-----|------------|------------|-----|--------|-------|--------|
| 2 | 2 | 1,8477 | 1,8477 | 3 | 1 | 2 | 0,5 | 1,3646 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,8807 | 1,8807 | 6 | 1 | 2 | 0,5 | 1,4561 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,8971 | 1,8971 | 10 | 1 | 2 | 0,5 | 1,5141 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 2,7140 | 1,8971 | 3 | 1 | 2 | 0,5 | 2,2182 | 1,5 | 1,4306 |
| 3 | 2 | 2,7716 | 1,9300 | 6 | 1 | 2 | 0,5 | 2,3769 | 1,5 | 1,4360 |
| 3 | 2 | 2,8045 | 1,9355 | 10 | 1 | 2 | 0,5 | 2,4795 | 1,5 | 1,4490 |
| 4 | 2 | 3,5967 | 1,9355 | 3 | 1 | 2 | 0,5 | 3,4138 | 2 | 1,8583 |
| 4 | 2 | 3,6845 | 1,9575 | 6 | 1 | 2 | 0,5 | 3,6788 | 2 | 1,8823 |
| 4 | 2 | 3,7174 | 1,9684 | 10 | 1 | 2 | 0,5 | 3,8530 | 2 | 1,8885 |
| 2 | 2 | 1,9081 | 1,9081 | 3 | 1,2 | 1,8 | 0,5 | 1,3451 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,9300 | 1,9300 | 6 | 1,2 | 1,8 | 0,5 | 1,3994 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,9355 | 1,9355 | 10 | 1,2 | 1,8 | 0,5 | 1,4328 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 2,8210 | 1,9465 | 3 | 1,2 | 1,8 | 0,5 | 2,1858 | 1,5 | 1,4493 |
| 3 | 2 | 2,8621 | 1,9575 | 6 | 1,2 | 1,8 | 0,5 | 2,2803 | 1,5 | 1,4622 |
| 3 | 2 | 2,8951 | 1,9684 | 10 | 1,2 | 1,8 | 0,5 | 2,3391 | 1,5 | 1,4707 |
| 4 | 2 | 3,7394 | 1,9684 | 3 | 1,2 | 1,8 | 0,5 | 3,3631 | 2 | 1,8997 |
| 4 | 2 | 3,8162 | 1,9794 | 6 | 1,2 | 1,8 | 0,5 | 3,5211 | 2 | 1,9279 |
| 4 | 2 | 3,8381 | 1,9794 | 10 | 1,2 | 1,8 | 0,5 | 3,6204 | 2 | 1,9390 |
| 2 | 2 | 1,9410 | 1,9410 | 3 | 1,3 | 1,7 | 0,5 | 1,3392 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,9575 | 1,9575 | 6 | 1,3 | 1,7 | 0,5 | 1,3760 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,9575 | 1,9575 | 10 | 1,3 | 1,7 | 0,5 | 1,3985 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 2,8786 | 1,9575 | 3 | 1,3 | 1,7 | 0,5 | 2,1761 | 1,5 | 1,4706 |
| 3 | 2 | 2,9033 | 1,9684 | 6 | 1,3 | 1,7 | 0,5 | 2,2401 | 1,5 | 1,4749 |
| 3 | 2 | 2,9198 | 1,9794 | 10 | 1,3 | 1,7 | 0,5 | 2,2796 | 1,5 | 1,4751 |
| 4 | 2 | 3,8162 | 1,9794 | 3 | 1,3 | 1,7 | 0,5 | 3,3478 | 2 | 1,9279 |
| 4 | 2 | 3,8820 | 1,9794 | 6 | 1,3 | 1,7 | 0,5 | 3,4548 | 2 | 1,9612 |
| 4 | 2 | 3,8930 | 1,9794 | 10 | 1,3 | 1,7 | 0,5 | 3,5211 | 2 | 1,9667 |

Tabla 3: Resultados mecanismo óptimo para el caso de distribución triangular.

CAPÍTULO 3: RESULTADOS Y DISCUSIONES

En primer lugar se analizará el caso base, una distribución triangular con media igual a la mitad del intervalo, y la cual posee la mayor incerteza (todo el intervalo de tipos es posible). De acuerdo a lo esperado a medida que se aumenta el número de jugadores, la utilidad aumenta consecuentemente. Además en este, y en todos los casos, el mecanismo se comporta genéricamente de manera similar, dando pesos distorsionados hacia abajo a la función *score*, y pesos que mantiene la simetría y orden absolutos de la valoración real. Además es posible observar algo que ya se visualizó en los casos anteriores, donde al aumentar el número de jugadores (todo lo otro constante) el mecanismo disminuye su distorsión, convergiendo los pesos al valor real. Además, tal cual el caso con $p < 1$, son ambas dimensiones de calidad las que se ajustan. Por otra lado, los pesos relativos también disminuyen su distorsión en dirección al valor real a medida que aumentan los jugadores, lo que significa que el principal necesita distorsionar de menor manera la información cuando existen un mayor número de participantes en el proceso.

Para el resto de las distribuciones se observa un efecto similar, pero con algunas salvedades. Los mecanismos distorsionan en menor cantidad la verdadera valoración (comparándolo con la distribución anterior, de mayor varianza), y por ende el mecanismo experimenta menor variación al aumentar en número de jugadores. Si bien existe, no es tan significativa como en los casos anteriores, aunque si apreciable como se puede ver en el alza de los niveles de utilidad. Incluso en algunos casos, en especial al analizar la función de distribución más ajustada, el mecanismo mantiene o varía muy levemente el mecanismo la aumentar los jugadores, en especial en los casos asimétricos y en la dimensión de menor valoración. En todos los casos también, los pesos relativos parecen converger a los pesos reales de la función de utilidad.

La siguiente tabla permite analizar de forma más fácil el efecto al variar de una distribución a otra.

| $\bar{\mu}_1$ | $\bar{\mu}_2$ | μ_1 | μ_2 | N | θ_1 | θ_2 | c | $E[U]$ | r_1 | r_2 |
|---------------|---------------|---------|---------|-----|------------|------------|-----|--------|-------|--------|
| 2 | 2 | 1,8477 | 1,8477 | 3 | 1 | 2 | 0,5 | 1,3646 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,9081 | 1,9081 | 3 | 1,2 | 1,8 | 0,5 | 1,3451 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,9410 | 1,9410 | 3 | 1,3 | 1,7 | 0,5 | 1,3392 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,8807 | 1,8807 | 6 | 1 | 2 | 0,5 | 1,4561 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,9300 | 1,9300 | 6 | 1,2 | 1,8 | 0,5 | 1,3994 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,9575 | 1,9575 | 6 | 1,3 | 1,7 | 0,5 | 1,3760 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,8971 | 1,8971 | 10 | 1 | 2 | 0,5 | 1,5141 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,9355 | 1,9355 | 10 | 1,2 | 1,8 | 0,5 | 1,4328 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,9575 | 1,9575 | 10 | 1,3 | 1,7 | 0,5 | 1,3985 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 2,7140 | 1,8971 | 3 | 1 | 2 | 0,5 | 2,2182 | 1,5 | 1,4306 |
| 3 | 2 | 2,8210 | 1,9465 | 3 | 1,2 | 1,8 | 0,5 | 2,1858 | 1,5 | 1,4493 |
| 3 | 2 | 2,8786 | 1,9575 | 3 | 1,3 | 1,7 | 0,5 | 2,1761 | 1,5 | 1,4706 |
| 3 | 2 | 2,7716 | 1,9300 | 6 | 1 | 2 | 0,5 | 2,3769 | 1,5 | 1,4360 |
| 3 | 2 | 2,8621 | 1,9575 | 6 | 1,2 | 1,8 | 0,5 | 2,2803 | 1,5 | 1,4622 |
| 3 | 2 | 2,9033 | 1,9684 | 6 | 1,3 | 1,7 | 0,5 | 2,2401 | 1,5 | 1,4749 |
| 3 | 2 | 2,8045 | 1,9355 | 10 | 1 | 2 | 0,5 | 2,4795 | 1,5 | 1,4490 |
| 3 | 2 | 2,8951 | 1,9684 | 10 | 1,2 | 1,8 | 0,5 | 2,3391 | 1,5 | 1,4707 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|--------|--------|----|-----|-----|-----|--------|-----|--------|
| 3 | 2 | 2,9198 | 1,9794 | 10 | 1,3 | 1,7 | 0,5 | 2,2796 | 1,5 | 1,4751 |
| 4 | 2 | 3,5967 | 1,9355 | 3 | 1 | 2 | 0,5 | 3,4138 | 2 | 1,8583 |
| 4 | 2 | 3,7394 | 1,9684 | 3 | 1,2 | 1,8 | 0,5 | 3,3631 | 2 | 1,8997 |
| 4 | 2 | 3,8162 | 1,9794 | 3 | 1,3 | 1,7 | 0,5 | 3,3478 | 2 | 1,9279 |
| 4 | 2 | 3,6845 | 1,9575 | 6 | 1 | 2 | 0,5 | 3,6788 | 2 | 1,8823 |
| 4 | 2 | 3,8162 | 1,9794 | 6 | 1,2 | 1,8 | 0,5 | 3,5211 | 2 | 1,9279 |
| 4 | 2 | 3,8820 | 1,9794 | 6 | 1,3 | 1,7 | 0,5 | 3,4548 | 2 | 1,9612 |
| 4 | 2 | 3,7174 | 1,9684 | 10 | 1 | 2 | 0,5 | 3,8530 | 2 | 1,8885 |
| 4 | 2 | 3,8381 | 1,9794 | 10 | 1,2 | 1,8 | 0,5 | 3,6204 | 2 | 1,9390 |
| 4 | 2 | 3,8930 | 1,9794 | 10 | 1,3 | 1,7 | 0,5 | 3,5211 | 2 | 1,9667 |

Tabla 4: Resultados mecanismo óptimo para el caso de distribución triangular.

Como se aprecia en estos casos, a diferencia de lo sucedido en lo analizado anteriormente, el mecanismo no se muestra insensible al cambio en las distribuciones, como tampoco el nivel de utilidad alcanzado. En efecto, ambas dimensiones son ajustadas disminuyendo la distorsión, y aparentemente convergiendo a la valoración real. Luego, al aislar solo el efecto de la incertidumbre de la distribución, se aprecia que el resultado es diferente, si bien ambas distribuciones poseen una media similar. La baja en la utilidad es explicable por la forma en que se va haciendo más estrecha la distribución, dando probabilidad cero a los tipos más eficientes (y también a los menos eficientes). El efecto neto por supuesto es de una baja de la utilidad, dado que los tipos más eficiente que son marginados daban en promedio una mayor utilidad que los perores tipos. Por esto mismo el mecanismo necesita ser ajustado para ser óptimo en éste caso, y no se observa la insensibilidad encontrada en los casos anteriores. Es interesante además destacar que en dichos casos, que de alguna forma combinan este efecto y el otro mencionado (el de alterar el promedio hacia arriba o hacia abajo), el mecanismo no experimente una variación relevante. Se observa también, como es de esperar, que el ajuste experimentado por el mecanismo hace disminuir también la distorsión del peso relativo de las calidades.

Finalmente, analizando solo el peso asignado a la segunda dimensión de calidad que posee un peso real común en todas las distribuciones, es posible ver que para diferentes valoraciones (simétricas o asimétricas), manteniendo todo lo demás constante, el peso asignado a ésta dimensión se distorsiona menos. En otras palabras, al variar el peso relativo real, pareciera ser es necesario distorsionar menos la dimensión menos valorada, efecto que también se observa en los demás casos analizados (funciones cargadas y uniforme).

3.9 Resultados de robustez

3.9.1 Detalles de la experiencia

Tal cual se explica en apartados anteriores, el objetivo de esta experiencia es analizar la robustez del mecanismo estudiado a variaciones en la distribución. En otras palabras se desea analizar el costo en que incurre el principal al estima una función de distribución de los tipos cuando en realidad, la correcta era otro.

La idea consiste en suponer una función de distribución errónea (aquella que el principal estimo de alguna manera) y analizar qué tan buena es la robustez frente a distribuciones correctas en su vecindad, definida por el parámetro ϵ . Para un ϵ fijo, se analizan una serie de distribuciones en dicha vecindad, que corresponden a ponderaciones de la distribución central (la supuesta), y otras definidas en una familia específica. El procedimiento se repite para diferentes ϵ , aumentando la distancia desde la distribución central, y por ende, la diferencia entre la distribución supuesta y la real.

La función supuesta que se considera es una distribución uniforme, y la familia de funciones que se comparará corresponderá a las distribuciones cargadas para diferentes valores de p . En la tabla siguiente se resumen la familia de distribuciones consideradas, que barre un espectro amplio de distribuciones.

| p |
|-----|
| 0,5 |
| 0,8 |
| 1,4 |
| 4 |
| 5 |
| 7 |

Tabla 5: Familia de distribuciones consideradas.

Los ϵ particulares considerados son los siguientes:

| ϵ |
|------------|
| 0 |
| 0,2 |
| 0,4 |
| 0,5 |
| 0,7 |
| 0,8 |
| 0,9 |
| 1 |

Tabla 6: ϵ puntuales considerados.

Se recalca una vez más que a medida que ϵ crece, la diferencia entre la distribución supuesta por el principal (la central) y la real aumenta, por lo que la robustez debiese disminuir³⁵.

3.9.2 Resultados de robustez

Los resultados se resumen la siguiente tabla, en donde se han utilizado condiciones estándar en los parámetros no especificados:

³⁵ Asumiendo por supuesto que se está incurriendo en un mayor error al considerar la función de distribución real una uniforme.

CAPÍTULO 3: RESULTADOS Y DISCUSIONES

| p | ϵ | μ_{10} | μ_{12} | U | \bar{U} | U_2 | r | μ_{102} | μ_{202} |
|-----|------------|------------|------------|--------|-----------|--------|--------|-------------|-------------|
| 0,5 | 0 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,5207 | 1,5207 | 1 | 1,8477 | 1,8477 |
| 0,5 | 0,2 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,5497 | 1,5497 | 1 | 1,8477 | 1,8477 |
| 0,5 | 0,4 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,5764 | 1,5764 | 1 | 1,8587 | 1,8587 |
| 0,5 | 0,6 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,5990 | 1,5991 | 1 | 1,8587 | 1,8587 |
| 0,5 | 0,8 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,6146 | 1,6148 | 0,9999 | 1,8697 | 1,8697 |
| 0,5 | 1 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,6198 | 1,6202 | 0,9997 | 1,8807 | 1,8807 |
| 0,8 | 0 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,5207 | 1,5207 | 1 | 1,8477 | 1,8477 |
| 0,8 | 0,1 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,5265 | 1,5265 | 1 | 1,8477 | 1,8477 |
| 0,8 | 0,2 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,5323 | 1,5323 | 1 | 1,8477 | 1,8477 |
| 0,8 | 0,3 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,5380 | 1,5380 | 1 | 1,8477 | 1,8477 |
| 0,8 | 0,5 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,5492 | 1,5492 | 1 | 1,8477 | 1,8477 |
| 0,8 | 0,6 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,5547 | 1,5547 | 1 | 1,8477 | 1,8477 |
| 0,8 | 0,8 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,5656 | 1,5656 | 1 | 1,8587 | 1,8587 |
| 0,8 | 1 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,5762 | 1,5762 | 1 | 1,8587 | 1,8587 |
| 1,4 | 0 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,5207 | 1,5207 | 1 | 1,8477 | 1,8477 |
| 1,4 | 0,3 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,4937 | 1,4937 | 1 | 1,8477 | 1,8477 |
| 1,4 | 0,6 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,4653 | 1,4653 | 1 | 1,8477 | 1,8477 |
| 1,4 | 1 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,4248 | 1,4248 | 1 | 1,8477 | 1,8477 |
| 4 | 0 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,5207 | 1,5207 | 1 | 1,8477 | 1,8477 |
| 4 | 0,1 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,4946 | 1,4946 | 1 | 1,8477 | 1,8477 |
| 4 | 0,2 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,4672 | 1,4673 | 1 | 1,8422 | 1,8422 |
| 4 | 0,3 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,4383 | 1,4383 | 1 | 1,8313 | 1,8313 |
| 4 | 0,5 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,3744 | 1,3746 | 0,9999 | 1,8313 | 1,8313 |
| 4 | 0,6 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,3388 | 1,3390 | 0,9998 | 1,8203 | 1,8203 |
| 4 | 0,8 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,2592 | 1,2593 | 0,9999 | 1,8313 | 1,8313 |
| 4 | 1 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,1771 | 1,1777 | 0,9995 | 1,8861 | 1,8861 |
| 5 | 0 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,5207 | 1,5207 | 1 | 1,8477 | 1,8477 |
| 5 | 0,2 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,4638 | 1,4639 | 1 | 1,8422 | 1,8422 |
| 5 | 0,8 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,2357 | 1,2360 | 0,9998 | 1,8203 | 1,8203 |
| 5 | 1 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,1460 | 1,1470 | 0,9991 | 1,9081 | 1,9081 |
| 7 | 0 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,5207 | 1,5207 | 1 | 1,8477 | 1,8477 |
| 7 | 0,1 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,4915 | 1,4915 | 1 | 1,8477 | 1,8477 |
| 7 | 0,2 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,4604 | 1,4604 | 1 | 1,8313 | 1,8313 |
| 7 | 0,3 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,4273 | 1,4274 | 0,9999 | 1,8313 | 1,8313 |
| 7 | 0,5 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,3529 | 1,3533 | 0,9997 | 1,8203 | 1,8203 |
| 7 | 0,6 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,3099 | 1,3105 | 0,9996 | 1,8093 | 1,8093 |
| 7 | 0,8 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,2096 | 1,2102 | 0,9996 | 1,8093 | 1,8093 |
| 7 | 1 | 1,8477 | 1,8477 | 1,5207 | 1,1129 | 1,1147 | 0,9984 | 1,9300 | 1,9300 |

Tabla 7: Resultados de robustez.

Cada par (p, ϵ) representa un punto de la vecindad de la función uniforme central considerada, con la cual se compara la robustez del método. μ_{10} , μ_{20} y U corresponden a los parámetros del mecanismo óptimo para la función uniforme (como se ve, es común en todas las columnas), o sea, a los parámetros del mecanismo óptimo, y la utilidad esperada alcanzada asumiendo correcta la distribución central (uniforme en éste caso). Asumiendo luego que en realidad el mecanismo correcto es el dado por el punto de la vecindad (p, ϵ) , se calcula el mecanismo correcto y su utilidad asociada, dado por μ_{102} , μ_{202} y U_2 . \bar{U} corresponde a la utilidad alcanzada si el mecanismo calculado con la función central era incorrecto, pero aun así se utilizan dichos parámetros en el proceso. Por supuesto, esto ubica la utilidad del principal en otro punto de la malla de utilidad con la cual se calcula el mecanismo óptimo, y por ende, se obtendrá un nivel de utilidad menor o igual. Finalmente r corresponde a la robustez, dada por la razón entre \bar{U} y U_2 . Mientras mayor sea para cada caso estudiado, mayor es la robustez de mecanismo a equivocaciones dada una distribución de comparación.

Al observar la tabla se aprecia algo ya previsto en los resultados anteriores. El método es extremo robusto, al punto que ninguna robustez disminuye de 0.99. Además, al mirar las vecindades correspondientes a distribuciones específicas, disminuciones (muy leves) en la robustez se asocian siempre a aumentos de la distancia ϵ , lo que es lógico al considerar distribuciones cada vez más diferentes. Además, si se considera $\epsilon = 0$, se reproducen los resultados de la función uniforme, salvo pequeñas diferencias en la utilidad alcanzada producto de aproximaciones numéricas.

Lo anterior, claro está, tiene directa relación con la insensibilidad del mecanismo a variaciones en la distribución, detectadas en pruebas anteriores. Luego, al mostrarse bastante insensible a variaciones en dicho parámetro, errores en la distribución no serían del todo costosos, ya que de todas maneras pese a calcularse el mecanismo mediante una vía errónea, lo obtenido estará muy cerca al valor óptimo real. Luego, la utilidad no es afectada de manera importante. Como se mencionó, gráficamente esto significa que para diferentes distribuciones los mantos de utilidad de los cuales se obtiene el mecanismo óptimo se ubican uno sobre otro de forma más o menos simétrica (al menos localmente en torno al óptimo), por lo que ambos mantos se diferencian localmente solo en el nivel de utilidad.

Si bien lo anterior no da lugar a muchos comentarios, no deja de ser sorprendente la gran robustez detectada en el mecanismo. Esto no es para nada algo común o trivial, más aun considerando que la familia de distribuciones vecinas consideradas es bastante amplia en forma y propiedades.

A modo de ejemplo y comparación analítico, es posible analizar un caso estándar como el mecanismo de Myerson [6] y observar la robustez alcanzada con dicho mecanismo. Según Myerson, el mecanismo óptimo (en el caso simétrico), en términos de utilidad, es equivalente a:

- Un remate a primer precio con precio de reserva.
- El precio de reserva \hat{p} equivale al óptimo para el caso de 1 jugador. Esto es:

$$\hat{p}(F): \hat{p} - \frac{1 - F(\hat{p})}{f(\hat{p})} = 0$$

Ecuación 58

, donde $F(\cdot)$ es la distribución de la valoración de los jugadores.

En este caso de mecanismos, la estrategia de oferta óptima (el precio ofrecido en el remate) para un jugador de valoración x , cuando existen N de estos es:

$$\beta(x, F) = \hat{p} \frac{G(\hat{p})}{G(x)} + \frac{1}{G(x)} \int_{\hat{p}}^x yg(y)dy$$

Ecuación 59

, donde como antes $G(x)$ es la probabilidad de que la valoración x sea la mayor entre la de todos los jugadores, y está dada por:

$$\begin{aligned} G(x) &= F(x)^{N-1} \\ g(x) &= G'(x) \end{aligned}$$

De esta manera, el pago esperado por un oferente de tipo $x \geq \hat{p}$ esta dada por:

$$m(x, \hat{p}, F) = G(x) \cdot \beta(x) = \hat{p}G(\hat{p}) + \int_{\hat{p}}^x yg(y)dy$$

Ecuación 60

Y la utilidad esperada del principal de un jugador, dado el precio de reserva \hat{p} es:

$$E[U_1(\hat{p}, F)] = \int_{\hat{p}}^{x_h} m(x, \hat{p})f(x)dx = \hat{p}G(\hat{p})(1 - F(\hat{p})) + \int_{\hat{p}}^{x_h} y(1 - F(y))g(y)dy$$

Ecuación 61

Y finalmente, la utilidad del principal dado N jugadores (y asumiendo como siempre, valoración 0 por el producto por parte del principal) estada dada por:

$$E[U(\hat{p}, F)] = N \cdot E[U_1(\hat{p})]$$

Ecuación 62

De esta forma, es posible proceder de forma similar a lo ya realizado, y analizar la robustez del mecanismo propuesto (en utilidad, y por ende en robustez equivalente al de Myerson) a variaciones en la distribución. En este caso se considerará que la valoración de los jugadores pertenece al intervalo $[0,1]$, y que la distribución toma la forma:

$$F(x) = x^s$$

Ecuación 63

, con $s \geq 1$.

Fijando el número de jugadores, es posible suponer una distribución (como antes), que será incorrecta. En este caso, una uniforme, con $s = 1$. De esta manera, el precio de reserva optimo (equivalente al mecanismo óptimo de este estudio) estará dado por:

$$\hat{p} - \frac{1 - F(\hat{p})}{f(\hat{p})} = 0$$

$$\hat{p} - (1 - \hat{p}) = 0 \rightarrow \hat{p}(F) = \frac{1}{2}$$

Lógicamente, de haberse tenido la distribución correcta, el precio de reserva óptimo hubiese sido otro. Por ejemplo, si en realidad la distribución correspondía a una con $s = 2$, éste estaría dado por:

$$\hat{p}_2 - \frac{1 - F_2(\hat{p}_2)}{f_2(\hat{p}_2)} = 0$$

$$\hat{p}_2 - \frac{1 - \hat{p}_2^2}{2\hat{p}_2} = 0 \rightarrow \hat{p}_2(F_2) = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,57$$

La utilidad obtenida al utilizar el \hat{p} incorrecto, dado que la verdadera distribución es $F_2(\cdot)$ esta dada por:

$$E[U_1(\hat{p}(F), F_2)] = \hat{p}(F)G_2(\hat{p}(F))\left(1 - F_2(\hat{p}(F))\right) + \int_{\hat{p}(F)}^{x_h} y(1 - F_2(y))g_2(y)dy$$

, donde el subíndice en G_2 se ha puesto solo para especificar que se refiere a la expresión de $G(\cdot)$ que utiliza la función de distribución real $F_2(\cdot)$. Por su parte, la utilidad obtenida si se conoce la distribución correcta es:

$$E[U_1(\hat{p}(F_2), F_2)] = \hat{p}(F_2)G_2(\hat{p}(F_2))\left(1 - F_2(\hat{p}(F_2))\right) + \int_{\hat{p}(F_2)}^{x_h} y(1 - F_2(y))g_2(y)dy$$

, que lógicamente utiliza el precio de reserva óptimo dado que la distribución estimada por el principal es la correcta. Como antes, la robustez de mecanismo dado que la función real es F_2 esta dado por:

$$r = \frac{E[U_1(\hat{p}(F), F_2)]}{E[U_1(\hat{p}(F_2), F_2)]}$$

Programando lo anterior, se pueden obtener los siguientes resultados para $N = 2$ y $N = 10$. Los resultados para los demás casos (número de jugadores) se presentan en los anexos.

| N | s | U | U_2 | r |
|-----|-----|--------|--------|--------|
| 2 | 1 | 0,2083 | 0,2083 | 1 |
| 2 | 2 | 0,2896 | 0,2923 | 0,9906 |
| 2 | 3 | 0,3326 | 0,3383 | 0,9831 |
| 2 | 4 | 0,3607 | 0,3674 | 0,9816 |
| 2 | 5 | 0,3811 | 0,3876 | 0,9832 |
| 2 | 6 | 0,3966 | 0,4024 | 0,9856 |
| 2 | 7 | 0,4087 | 0,4137 | 0,9879 |
| 2 | 8 | 0,4184 | 0,4227 | 0,9898 |
| 2 | 9 | 0,4262 | 0,4299 | 0,9914 |

| | | | | |
|----|----|--------|--------|--------|
| 2 | 10 | 0,4327 | 0,4360 | 0,9926 |
| 2 | 11 | 0,4382 | 0,4410 | 0,9936 |
| 2 | 12 | 0,4428 | 0,4453 | 0,9943 |
| 2 | 13 | 0,4467 | 0,4490 | 0,9949 |
| 2 | 14 | 0,4502 | 0,4523 | 0,9953 |
| 2 | 15 | 0,4532 | 0,4551 | 0,9956 |
| 10 | 1 | 0,0818 | 0,0818 | 1 |
| 10 | 2 | 0,0901 | 0,0902 | 0,9998 |
| 10 | 3 | 0,0931 | 0,0932 | 0,9992 |
| 10 | 4 | 0,0946 | 0,0948 | 0,9982 |
| 10 | 5 | 0,0954 | 0,0957 | 0,9968 |
| 10 | 6 | 0,0959 | 0,0964 | 0,9951 |
| 10 | 7 | 0,0961 | 0,0968 | 0,9929 |
| 10 | 8 | 0,0962 | 0,0971 | 0,9904 |
| 10 | 9 | 0,0962 | 0,0974 | 0,9875 |
| 10 | 10 | 0,0960 | 0,0976 | 0,9842 |
| 10 | 11 | 0,0958 | 0,0977 | 0,9805 |
| 10 | 12 | 0,0956 | 0,0979 | 0,9765 |
| 10 | 13 | 0,0952 | 0,0980 | 0,9721 |
| 10 | 14 | 0,0948 | 0,0980 | 0,9673 |
| 10 | 15 | 0,0944 | 0,0981 | 0,9622 |

Tabla 8: Resultados de robustez, mecanismo de Myerson, caso $N = 2$ y $N = 10$.

La robustez en todos los casos es bastante elevada, pero aun así más baja que en los casos estudiados. Para fines prácticos la robustez del mecanismo de licitación es 1, por lo que relativamente es mucho más robusto que el ejemplo comparativo entregado.

Capítulo 4

Conclusiones

Como se pudo comprobar en los resultados y sus discusiones, el marco teórico y modelo desarrollado ha permitido estudiar con éxito un problema de licitación con una complejidad mayor a la usual, particularmente uno en donde el producto licitado está definido por un precio y dos dimensiones de calidad. Imponer un espacio bidimensional para los atributos de calidad ha permitido resolver con éxito el modelo, encontrando resultados interpretables, y regularidades que pueden ser extendidas a casos reales u a otros problemas similares. La primera pregunta que surge a la luz de los resultados hallados, es la aplicabilidad de los mismos a problemas concretos. Como ya se discutió anteriormente, las características del problema y las reglas del juego analizado requieren que las dimensiones de calidad sean observables y verificables, limitando en cierto sentido la aplicación a productos tangibles. Sin embargo, en el caso de servicios y otros productos más complicados, la clave estaría en definir correctamente los espacios de calidades de interés, y lograr una correcta parametrización y escala de dichas calidades a fin de asegurar una correcta implementación. En caso de tener lo anterior, el problema de la observabilidad se reduciría a verificar que la calidad estudiada respete los niveles deseados, y el de verificabilidad a asegurar mediante algún tipo de contrato su correcta implementación.

¿Y que hay con productos con más de dos niveles de calidad? Si bien todo dependerá del caso correcto, siempre es posible redefinir dos dimensiones de calidad, que de alguna manera engloben a otros diferentes, ponderándolas mediante alguna regla.

Concluyendo respecto a los resultados, es posible destacar que la teoría desarrollada ha permitido encontrar el mecanismo óptimo que debe implementar el principal bajo diferentes condiciones del ambiente (definido por el número de jugadores, asimetrías de valoraciones de calidad y tipo de distribuciones de los agentes), encontrando ciertas regularidades de las cuales es posible desprender reglas respecto las características del mecanismos. En particular, al utilizar un mecanismo que ordena a las ofertas de los agentes mediante una función score que pondera positivamente las dos dimensiones de calidad, el mecanismo implementado siempre distorsiona hacia abajo la verdadera valoración del principal por la calidad. Así, la información entregada a los oferentes por medio de la función score del mecanismo no revelará la verdadera valoración que el principal posee por estos parámetros, distorsionándola de diferentes maneras. De esta manera se obtiene un cierto poder de negociación, que permite obtener niveles de combinación precio / calidad mayor a los normales.

Respecto al primer objetivo, concerniente a encontrar el mecanismo óptimo, se puede observar que éste depende directamente de la mayor parte de las condiciones del problema. Se encontró que de acuerdo a

CAPÍTULO 4: CONCLUSIONES

los parámetros que definen el tipo de juego, el mecanismo que se elige varía, distorsionando en diferentes niveles la información entregada a los jugadores en la función score.

En términos generales, el nivel de utilidad alcanzado con el mecanismo óptimo aumenta siempre que el número de jugadores se incrementa, revelando cierta ventaja para el principal al incluir un mayor número de participantes en el proceso de licitación. Lo anterior es lógico, al considerar un mayor nivel de competencia entre los diferentes oferentes, traducido en que los tipos tienden a revelar su verdadera pseudotipo en su oferta. Respecto al tipo de distribución mediante la cual se distribuyen los tipos de los agentes, al considerarse estos independiente e iguales para ambas dimensiones, el mecanismo se observa insensible a su variación en un amplio espectro, entregando a este tipo de mecanismo una alta robustez en este parámetro. Finalmente, respecto a las valoraciones reales que el principal posee por las dimensiones de calidad, los parámetros correspondientes asociados en la función score del mecanismo óptimo respeta la relación entre ambas, otorgando mayor peso a la misma dimensión de calidad que el agente realmente valoraba más.

En específico, cuando los tipos de los agentes están distribuidos según una función constante, en todos los casos la distorsión asociada es hacia abajo, subestimando en la función score la verdadera valoración del principal por los diferentes niveles de calidad. Además un aumento en el número de jugadores disminuye dicha distorsión, haciendo convergen los parámetros del mecanismos a las de las valoraciones reales en los casos de valoraciones simétricas y asimétricas. En el caso de funciones de distribución con $p > 1$, los resultados son similares, con la salvedad de que los niveles de utilidad alcanzados son inferiores para el resto de los parámetros similares. Además, a medida que p aumenta, el nivel de utilidad disminuye, al igual que la distorsión asignada al parámetro de la dimensión de utilidad más valorada. Esto por supuesto, es debido a que dado la distribución está cargada hacia los tipos menos eficientes (mayores costos), por lo que en promedio la utilidad esperada obtenida por el principal es menor.

Al considerar los casos con $p < 1$ (que carga a los tipos hacia los más eficientes) la situación cambia un poco. Si bien las conclusiones generales son similares, los resultados identificados son extensibles solo parcialmente dado los problemas numéricos que se identificaron con $p < 0.6$. Sin embargo, en el intervalo válido de los resultados, los niveles de utilidad alcanzados fueron mayores al restante de los casos en condiciones similares. Por otra parte, si bien en este caso la distorsión en el mecanismo también disminuye al aumentar el número de jugadores, son ambos parámetros (los de ambas dimensiones de calidad) los ajustados convergiendo hacia el verdadero valor. Lo mismo es válido al aumentar el valor de p . Como se discutió, en este tipo de situaciones es posible observar dos efectos al variar el tipo de distribución. Al considerar $p > 1$, al aumentar el parámetro, por una parte los tipos se hacen en promedio peores (se altera la esperanza de los tipos encontrados), pero además existe una mayor certeza respecto a que tipo se encontrará. Ambos efectos contribuyen en direcciones opuestas, no siendo claro cuál domina globalmente. La utilidad disminuye, pero se observa que solo uno de los parámetros de calidad es ajustado (convergiendo al real, y por ende revelando mayor información), presumiblemente por que no los dos efectos cooperan a disminuir las posibilidades del principal. En el caso $p < 1$, al disminuir el parámetros, ambos efectos contribuyen a aumentar las opciones del principal,

CAPÍTULO 4: CONCLUSIONES

pero también es necesario adaptarse para hacer competir a los tipos con mayores posibilidades, por lo que ambos parámetros son ajustados.

Con el fin de aislar uno de estos dos efectos, se propuso una prueba con una función que mantuviera constante la media, y solo disminuyera la incerteza de los tipos que es posible encontrar en un juego. En este caso se demuestra que al disminuir la incerteza de los tipos, y hacer más ajustado el intervalo en donde es posible encontrarlos, el principal debe ajustar las valoraciones del mecanismo, haciéndolas converger al valor real, efecto apreciable en los dos tipos de distribuciones discutidas ya.

Respecto a los errores numéricos encontrados para los casos muy pequeños del parámetro p , su solución se escapa de los objetivos de este estudio. Si bien se identificó la causa de esto, y se detallaron sus consecuencias, solucionarlos para obtener resultados interpretables en dichas situaciones es en extenso costoso en tiempo y desarrollo, y solo se aconseja seguir esta línea con la intención de validar para casos extremos los resultados ya encontrados.

Respecto al objetivo del análisis de robustez, la conclusión en este caso es la de haber encontrado un tipo de mecanismo en extremo robusto para el tipo de funciones de distribuciones consideradas, algo no común en este tipo de desarrollos. Como se aprecia, esto proviene de la escasa diferencia que poseen los mecanismos al variar el parámetro de distribución, lo que se traduce en una baja sensibilidad a errores en la estimación de este tipo de parámetros (asumiendo siempre que este se encuentra en la familia estudiada). Una extensión interesante consistiría en estudiar la robustez utilizando una familia más general de funciones de distribución, y analizar si la robustez depende de hecho, del tipo de función, o de los mecanismos analizados.

En base a lo anterior, es posible también extender el análisis en futuros estudios a otras condiciones de interés, y que no fueron el foco en esta investigación. Por ejemplo, en todo el análisis se ha supuesto que el espacio de tipos es “cuadrado”, en el sentido de que el espacio para cada uno de los dos tipos es similar. Extender esta condición a un espacio diferente para cada dimensión sería más realista, y aunque complicaría en parte los resultados permitirían su extensión a casos más generales. Lo mismo se aplica a la distribución para estos parámetros, que se ha asumido similar e independiente para todas las dimensiones. Repetir el análisis relajando esta suposición, y por supuesto, utilizando distribuciones más genéricas sería de mucha utilidad interpretativa.

Por supuesto, en las discusiones se identificaron también una serie de resultados que escapan del comportamiento promedio. Si bien las aproximaciones numéricas pueden ser un factor que las explique, sería interesante analizarlas más a fondo con el fin de dilucidar si corresponden a un error, a una regla, o a una excepción no considerada en los resultados ya encontrados.

En otro aspecto, respecto a las regularidades encontradas y resumidas con anterioridad, cabe preguntarse si se pueden asumir como regla para otros casos del mismo tipo no analizados, e incluso para casos más genéricas. Por supuesto todo dependerá del contexto estudiado, y de su similitud con el modelo discutido en este documento. Para casos que se puedan asemejar bastante a lo aquí descrito, los resultados son lo bastante regulares para asumir de manera bastante exacta lo encontrado como una regla, que permitiría predecir cualitativamente la forma que tendrá el mecanismo óptimo, y los noveles

CAPÍTULO 4: CONCLUSIONES

de utilidad que es posible alcanzar relativo a otros casos bases. Sin embargo, en casos más generales, con funciones de distribución diferentes o condiciones más complejas, la aplicabilidad de los resultados no es del todo clara. Es por esto que se recomienda extender el análisis anterior a casos más generales, y comprobar si las regularidades encontradas se mantienen o modifican. A priori estos debiesen mantenerse. Al menos en su estructura general, aunque se prevé que con otro tipo de distribuciones no se identifiquen mecanismos tan robustos como los hallados. Lo mismo respecto a su extensión a problemas reales, que requieran modelar y adaptar la realidad a este tipo de marco. En dichos desarrollos, como ya se discutió, puede haber diferentes maneras de parametrizar los niveles de calidad para hacer compatible el producto o servicio con el modelo propuesto. Cuando esto es posible, y una vez estimada la distribución de las dimensiones de calidad de los agentes, dependerá de esto y de los otros parámetros del problema la aplicabilidad a este tipo de problemas concretos. Luego, se recomienda una vez más la extensión de los resultados y la búsqueda de las mismas regularidades encontradas (u otras diferentes) en casos más genéricos.

Finalmente se quiere destacar la utilidad del marco teórico y modelo desarrollado en el estudio de este tipo de problema. Por una parte es una excelente aproximación de problemas de este tipo, haciendo más real los juegos de licitaciones reales al incluir además del precio, dimensiones de calidad que definan al producto. Esto logra hacer más completo y aplicable el problema, pudiendo representar de manera más exacta la realidad. Si bien en los documentos de Asker & Cantillon se avanza bastante en esta línea, se piensa que el mérito de este estudio consiste en proveer un contexto definido y particular, que permite obtener conclusiones algo más aplicables que en casos meramente teóricos. Poder especificar de manera concreta un tipo de problema, definiendo de manera exacta su dimensión y alcance permitió desarmar y entender completamente el problema, desde las bases a lo más complejo, contribuyendo a su comprensión y a la manera en que se comporta la estrategia óptima frente a cambios del ambiente. El mismo enfoque puede ser, por cierto, aplicado a otros casos más complejos o a como se mencionó, extensiones del problema tratado. Junto a los resultados discutidos se desarrollaron una serie de programas en MatLab, que pueden ser modificados levemente para obtener resultados en otras instancias y situaciones, que pueden contribuir a un mayor entendimiento de este tipo de procesos de licitación.

Bibliografía

- [1] Krishna V. Auction Theory, 2° edn. Elsevier Science, 2002.
- [2] Laffont J, Tirole J. Auctioning Incentive Contracts. Journal of Political Economy 1987;95(1987): 921-937.
- [3] Asker J, Cantillon E. Procurement when price and quality matter. Journal of Economics 2010; 41 (2010): 1-34.
- [4] Asker J, Cantillon E. Properties of scoring auctions. Journal of Economics 2008; 39 (2008): 69-85.
- [5] Laffont J, Tirole J. A Theory of Incentives in Procurement and Regulation. 1993, 704pp.
- [6] Roger B. Myerson. Optimal Auction Design. MATHEMATICS OF OPERATIONS RESEARCH Vol. 6, No. 1, February 1981, pp. 58-73.

Anexos

Tablas de Resultados

| $\bar{\mu}_1$ | $\bar{\mu}_2$ | μ_1 | μ_2 | N | p | $E[U]$ |
|---------------|---------------|---------|---------|-----|-----|--------|
| 2 | 2 | 1,7984 | 1,7984 | 3 | 1 | 1,3960 |
| 2 | 2 | 1,8477 | 1,8477 | 6 | 1 | 1,5207 |
| 2 | 2 | 1,8807 | 1,8807 | 10 | 1 | 1,5925 |
| 3 | 2 | 2,6193 | 1,8697 | 3 | 1 | 2,2712 |
| 3 | 2 | 2,7305 | 1,8807 | 6 | 1 | 2,4958 |
| 3 | 2 | 2,8210 | 1,8807 | 10 | 1 | 2,6270 |
| 4 | 2 | 3,4486 | 1,9191 | 3 | 1 | 3,4979 |
| 4 | 2 | 3,6406 | 1,9191 | 6 | 1 | 3,8835 |
| 4 | 2 | 3,7394 | 1,9081 | 10 | 1 | 4,1093 |
| 2 | 2 | 1,7984 | 1,7984 | 3 | 1,1 | 1,3733 |
| 2 | 2 | 1,8477 | 1,8477 | 6 | 1,1 | 1,5006 |
| 2 | 2 | 1,8697 | 1,8807 | 10 | 1,1 | 1,5773 |
| 3 | 2 | 2,6193 | 1,8697 | 3 | 1,1 | 2,2305 |
| 3 | 2 | 2,7305 | 1,8971 | 6 | 1,1 | 2,4521 |
| 3 | 2 | 2,8045 | 1,8861 | 10 | 1,1 | 2,5891 |
| 4 | 2 | 3,4486 | 1,9191 | 3 | 1,1 | 3,4335 |
| 4 | 2 | 3,6187 | 1,9191 | 6 | 1,1 | 3,8110 |
| 4 | 2 | 3,7174 | 1,9191 | 10 | 1,1 | 4,0465 |
| 2 | 2 | 1,7984 | 1,7984 | 3 | 1,3 | 1,3288 |
| 2 | 2 | 1,8477 | 1,8477 | 6 | 1,3 | 1,4475 |
| 2 | 2 | 1,8697 | 1,8697 | 10 | 1,3 | 1,5210 |
| 3 | 2 | 2,6193 | 1,8697 | 3 | 1,3 | 2,1592 |
| 3 | 2 | 2,7140 | 1,9081 | 6 | 1,3 | 2,3669 |
| 3 | 2 | 2,7716 | 1,9081 | 10 | 1,3 | 2,5008 |
| 4 | 2 | 3,4705 | 1,9191 | 3 | 1,3 | 3,3223 |
| 4 | 2 | 3,5967 | 1,9355 | 6 | 1,3 | 3,6748 |
| 4 | 2 | 3,6955 | 1,9300 | 10 | 1,3 | 3,9082 |
| 2 | 2 | 1,7984 | 1,7984 | 3 | 1,5 | 1,2932 |
| 2 | 2 | 1,8477 | 1,8477 | 6 | 1,5 | 1,4041 |
| 2 | 2 | 1,8697 | 1,8697 | 10 | 1,5 | 1,4743 |
| 3 | 2 | 2,6358 | 1,8807 | 3 | 1,5 | 2,1013 |
| 3 | 2 | 2,7140 | 1,9191 | 6 | 1,5 | 2,2949 |
| 3 | 2 | 2,7716 | 1,9191 | 10 | 1,5 | 2,4230 |
| 4 | 2 | 3,4705 | 1,9300 | 3 | 1,5 | 3,2322 |
| 4 | 2 | 3,5967 | 1,9465 | 6 | 1,5 | 3,5587 |

| | | | | | | |
|---|---|--------|--------|----|-----|--------|
| 4 | 2 | 3,6626 | 1,9465 | 10 | 1,5 | 3,7816 |
| 2 | 2 | 1,8093 | 1,8093 | 3 | 1,7 | 1,2642 |
| 2 | 2 | 1,8477 | 1,8477 | 6 | 1,7 | 1,3677 |
| 2 | 2 | 1,8697 | 1,8697 | 10 | 1,7 | 1,4346 |
| 3 | 2 | 2,6358 | 1,8807 | 3 | 1,7 | 2,0537 |
| 3 | 2 | 2,7140 | 1,9191 | 6 | 1,7 | 2,2339 |
| 3 | 2 | 2,7469 | 1,9300 | 10 | 1,7 | 2,3552 |
| 4 | 2 | 3,4925 | 1,9300 | 3 | 1,7 | 3,1583 |
| 4 | 2 | 3,5748 | 1,9575 | 6 | 1,7 | 3,4608 |
| 4 | 2 | 3,6626 | 1,9575 | 10 | 1,7 | 3,6712 |
| 2 | 2 | 1,8203 | 1,8203 | 3 | 2 | 1,2294 |
| 2 | 2 | 1,8587 | 1,8587 | 6 | 2 | 1,3232 |
| 2 | 2 | 1,8697 | 1,8697 | 10 | 2 | 1,3850 |
| 3 | 2 | 2,6605 | 1,8861 | 3 | 2 | 1,9970 |
| 3 | 2 | 2,7140 | 1,9300 | 6 | 2 | 2,1592 |
| 3 | 2 | 2,7469 | 1,9410 | 10 | 2 | 2,2706 |
| 4 | 2 | 3,5144 | 1,9300 | 3 | 2 | 3,0702 |
| 4 | 2 | 3,5967 | 1,9684 | 6 | 2 | 3,3412 |
| 4 | 2 | 3,6406 | 1,9684 | 10 | 2 | 3,5336 |
| 2 | 2 | 1,8971 | 1,8971 | 3 | 5 | 1,1014 |
| 2 | 2 | 1,9081 | 1,9081 | 6 | 5 | 1,1470 |
| 2 | 2 | 1,9081 | 1,9081 | 10 | 5 | 1,1795 |
| 3 | 2 | 2,7881 | 1,9355 | 3 | 5 | 1,7877 |
| 3 | 2 | 2,8045 | 1,9684 | 6 | 5 | 1,8649 |
| 3 | 2 | 2,8045 | 1,9794 | 10 | 5 | 1,9215 |
| 4 | 2 | 3,6955 | 1,9684 | 3 | 5 | 2,7459 |
| 4 | 2 | 3,7174 | 1,9959 | 6 | 5 | 2,8721 |
| 4 | 2 | 3,7394 | 2,0041 | 10 | 5 | 2,9675 |

Tabla 9: Resultados mecanismo óptimo para el caso de distribución cargada, $p > 1$.

| N | p | r_1 | r_2 |
|-----|-----|-------|--------|
| 3 | 1 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 1,5 | 1,4010 |
| 6 | 1 | 1,5 | 1,4519 |
| 10 | 1 | 1,5 | 1,5 |
| 3 | 1 | 2 | 1,7970 |
| 6 | 1 | 2 | 1,8971 |
| 10 | 1 | 2 | 1,9597 |

| | | | |
|----|-----|-----|--------|
| 3 | 1,1 | 1 | 1 |
| 6 | 1,1 | 1 | 1 |
| 10 | 1,1 | 1 | 0,9942 |
| 3 | 1,1 | 1,5 | 1,4010 |
| 6 | 1,1 | 1,5 | 1,4393 |
| 10 | 1,1 | 1,5 | 1,4869 |
| 3 | 1,1 | 2 | 1,7970 |
| 6 | 1,1 | 2 | 1,8856 |
| 10 | 1,1 | 2 | 1,9371 |
| 3 | 1,3 | 1 | 1 |
| 6 | 1,3 | 1 | 1 |
| 10 | 1,3 | 1 | 1 |
| 3 | 1,3 | 1,5 | 1,4010 |
| 6 | 1,3 | 1,5 | 1,4224 |
| 10 | 1,3 | 1,5 | 1,4526 |
| 3 | 1,3 | 2 | 1,8084 |
| 6 | 1,3 | 2 | 1,8583 |
| 10 | 1,3 | 2 | 1,9147 |
| 3 | 1,5 | 1 | 1 |
| 6 | 1,5 | 1 | 1 |
| 10 | 1,5 | 1 | 1 |
| 3 | 1,5 | 1,5 | 1,4015 |
| 6 | 1,5 | 1,5 | 1,4142 |
| 10 | 1,5 | 1,5 | 1,4442 |
| 3 | 1,5 | 2 | 1,7982 |
| 6 | 1,5 | 2 | 1,8478 |
| 10 | 1,5 | 2 | 1,8816 |
| 3 | 1,7 | 1 | 1 |
| 6 | 1,7 | 1 | 1 |
| 10 | 1,7 | 1 | 1 |
| 3 | 1,7 | 1,5 | 1,4015 |
| 6 | 1,7 | 1,5 | 1,4142 |
| 10 | 1,7 | 1,5 | 1,4232 |
| 3 | 1,7 | 2 | 1,8095 |
| 6 | 1,7 | 2 | 1,8262 |
| 10 | 1,7 | 2 | 1,8711 |
| 3 | 2 | 1 | 1 |
| 6 | 2 | 1 | 1 |
| 10 | 2 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 1,5 | 1,4105 |
| 6 | 2 | 1,5 | 1,4062 |
| 10 | 2 | 1,5 | 1,4152 |

| | | | |
|----|---|-----|--------|
| 3 | 2 | 2 | 1,8209 |
| 6 | 2 | 2 | 1,8272 |
| 10 | 2 | 2 | 1,8495 |
| 3 | 5 | 1 | 1 |
| 6 | 5 | 1 | 1 |
| 10 | 5 | 1 | 1 |
| 3 | 5 | 1,5 | 1,4405 |
| 6 | 5 | 1,5 | 1,4247 |
| 10 | 5 | 1,5 | 1,4168 |
| 3 | 5 | 2 | 1,8774 |
| 6 | 5 | 2 | 1,8625 |
| 10 | 5 | 2 | 1,8658 |

Tabla 10: Resultados pesos relativos para función de cargada, $p > 1$

| $\bar{\mu}_1$ | $\bar{\mu}_2$ | μ_1 | μ_2 | N | p | $E[U]$ | r_1 | r_2 |
|---------------|---------------|---------|---------|-----|-----|--------|-------|--------|
| 2 | 2 | 1,7984 | 1,7984 | 3 | 1 | 1,3960 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,7984 | 1,7984 | 3 | 1,1 | 1,3733 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,7984 | 1,7984 | 3 | 1,3 | 1,3288 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,7984 | 1,7984 | 3 | 1,5 | 1,2932 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,8093 | 1,8093 | 3 | 1,7 | 1,2642 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,8203 | 1,8203 | 3 | 2 | 1,2294 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,8971 | 1,8971 | 3 | 5 | 1,1014 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,8477 | 1,8477 | 6 | 1 | 1,5207 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,8477 | 1,8477 | 6 | 1,1 | 1,5006 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,8477 | 1,8477 | 6 | 1,3 | 1,4475 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,8477 | 1,8477 | 6 | 1,5 | 1,4041 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,8477 | 1,8477 | 6 | 1,7 | 1,3677 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,8587 | 1,8587 | 6 | 2 | 1,3232 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,9081 | 1,9081 | 6 | 5 | 1,1470 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,8807 | 1,8807 | 10 | 1 | 1,5925 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,8697 | 1,8807 | 10 | 1,1 | 1,5773 | 1 | 0,9942 |
| 2 | 2 | 1,8697 | 1,8697 | 10 | 1,3 | 1,5210 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,8697 | 1,8697 | 10 | 1,5 | 1,4743 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,8697 | 1,8697 | 10 | 1,7 | 1,4346 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,8697 | 1,8697 | 10 | 2 | 1,3850 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,9081 | 1,9081 | 10 | 5 | 1,1795 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 2,6193 | 1,8697 | 3 | 1 | 2,2712 | 1,5 | 1,4010 |
| 3 | 2 | 2,6193 | 1,8697 | 3 | 1,1 | 2,2305 | 1,5 | 1,4010 |
| 3 | 2 | 2,6193 | 1,8697 | 3 | 1,3 | 2,1592 | 1,5 | 1,4010 |
| 3 | 2 | 2,6358 | 1,8807 | 3 | 1,5 | 2,1013 | 1,5 | 1,4015 |

| | | | | | | | | |
|---|---|--------|--------|----|-----|--------|-----|----------|
| 3 | 2 | 2,6358 | 1,8807 | 3 | 1,7 | 2,0537 | 1,5 | 1,4015 |
| 3 | 2 | 2,6605 | 1,8861 | 3 | 2 | 1,9970 | 1,5 | 1,4105 |
| 3 | 2 | 2,7881 | 1,9355 | 3 | 5 | 1,7877 | 1,5 | 1,440468 |
| 3 | 2 | 2,7305 | 1,8807 | 6 | 1 | 2,4958 | 1,5 | 1,45186 |
| 3 | 2 | 2,7305 | 1,8971 | 6 | 1,1 | 2,4521 | 1,5 | 1,439262 |
| 3 | 2 | 2,7140 | 1,9081 | 6 | 1,3 | 2,3669 | 1,5 | 1,4224 |
| 3 | 2 | 2,7140 | 1,9191 | 6 | 1,5 | 2,2949 | 1,5 | 1,4142 |
| 3 | 2 | 2,7140 | 1,9191 | 6 | 1,7 | 2,2339 | 1,5 | 1,4142 |
| 3 | 2 | 2,7140 | 1,9300 | 6 | 2 | 2,1592 | 1,5 | 1,4062 |
| 3 | 2 | 2,8045 | 1,9684 | 6 | 5 | 1,8649 | 1,5 | 1,4247 |
| 3 | 2 | 2,8210 | 1,8807 | 10 | 1 | 2,6270 | 1,5 | 1,5000 |
| 3 | 2 | 2,8045 | 1,8861 | 10 | 1,1 | 2,5891 | 1,5 | 1,4869 |
| 3 | 2 | 2,7716 | 1,9081 | 10 | 1,3 | 2,5008 | 1,5 | 1,4526 |
| 3 | 2 | 2,7716 | 1,9191 | 10 | 1,5 | 2,4230 | 1,5 | 1,4442 |
| 3 | 2 | 2,7469 | 1,9300 | 10 | 1,7 | 2,3552 | 1,5 | 1,4232 |
| 3 | 2 | 2,7469 | 1,9410 | 10 | 2 | 2,2706 | 1,5 | 1,4152 |
| 3 | 2 | 2,8045 | 1,9794 | 10 | 5 | 1,9215 | 1,5 | 1,4168 |
| 4 | 2 | 3,4486 | 1,9191 | 3 | 1 | 3,4979 | 2 | 1,7970 |
| 4 | 2 | 3,4486 | 1,9191 | 3 | 1,1 | 3,4335 | 2 | 1,7970 |
| 4 | 2 | 3,4705 | 1,9191 | 3 | 1,3 | 3,3223 | 2 | 1,8084 |
| 4 | 2 | 3,4705 | 1,9300 | 3 | 1,5 | 3,2322 | 2 | 1,7982 |
| 4 | 2 | 3,4925 | 1,9300 | 3 | 1,7 | 3,1583 | 2 | 1,8095 |
| 4 | 2 | 3,5144 | 1,9300 | 3 | 2 | 3,0702 | 2 | 1,8209 |
| 4 | 2 | 3,6955 | 1,9684 | 3 | 5 | 2,7459 | 2 | 1,8774 |
| 4 | 2 | 3,6406 | 1,9191 | 6 | 1 | 3,8835 | 2 | 1,8971 |
| 4 | 2 | 3,6187 | 1,9191 | 6 | 1,1 | 3,8110 | 2 | 1,8856 |
| 4 | 2 | 3,5967 | 1,9355 | 6 | 1,3 | 3,6748 | 2 | 1,8583 |
| 4 | 2 | 3,5967 | 1,9465 | 6 | 1,5 | 3,5587 | 2 | 1,8478 |
| 4 | 2 | 3,5748 | 1,9575 | 6 | 1,7 | 3,4608 | 2 | 1,8262 |
| 4 | 2 | 3,5967 | 1,9684 | 6 | 2 | 3,3412 | 2 | 1,8272 |
| 4 | 2 | 3,7174 | 1,9959 | 6 | 5 | 2,8721 | 2 | 1,8625 |
| 4 | 2 | 3,7394 | 1,9081 | 10 | 1 | 4,1093 | 2 | 1,9597 |
| 4 | 2 | 3,7174 | 1,9191 | 10 | 1,1 | 4,0465 | 2 | 1,9371 |
| 4 | 2 | 3,6955 | 1,9300 | 10 | 1,3 | 3,9082 | 2 | 1,9147 |
| 4 | 2 | 3,6626 | 1,9465 | 10 | 1,5 | 3,7816 | 2 | 1,8816 |
| 4 | 2 | 3,6626 | 1,9575 | 10 | 1,7 | 3,6712 | 2 | 1,8711 |
| 4 | 2 | 3,6406 | 1,9684 | 10 | 2 | 3,5336 | 2 | 1,8495 |
| 4 | 2 | 3,7394 | 2,0041 | 10 | 5 | 2,9675 | 2 | 1,8658 |

Tabla 11: Resultados mecanismo óptimo para el caso de distribución cargada, $p > 1$.

| $\overline{\mu}_1$ | $\overline{\mu}_2$ | μ_1 | μ_2 | N | p | $E[U]$ | r_1 | r_2 |
|--------------------|--------------------|---------|---------|-----|-----|--------|-------|--------|
| 2 | 2 | 1,8313 | 1,8422 | 3 | 0,1 | 1,0955 | 1 | 0,9940 |
| 2 | 2 | 1,9300 | 1,9410 | 6 | 0,1 | 0,3047 | 1 | 0,9943 |
| 2 | 2 | 1,9575 | 1,9575 | 10 | 0,1 | 0,0394 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 2,6440 | 2,0480 | 3 | 0,1 | 1,7546 | 1,5 | 1,2910 |
| 3 | 2 | 2,6193 | 2,2401 | 6 | 0,1 | 0,4833 | 1,5 | 1,1693 |
| 3 | 2 | 2,5864 | 2,3525 | 10 | 0,1 | 0,0621 | 1,5 | 1,0994 |
| 4 | 2 | 3,3937 | 2,3416 | 3 | 0,1 | 2,6308 | 2 | 1,4493 |
| 4 | 2 | 3,3169 | 2,6077 | 6 | 0,1 | 0,7140 | 2 | 1,2720 |
| 4 | 2 | 3,2291 | 2,7641 | 10 | 0,1 | 0,0909 | 2 | 1,1682 |
| 2 | 2 | 1,8477 | 1,8587 | 3 | 0,2 | 1,3678 | 1 | 0,9941 |
| 2 | 2 | 1,9300 | 1,9300 | 6 | 0,2 | 0,7916 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,9575 | 1,9575 | 10 | 0,2 | 0,3023 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 2,6358 | 2,0425 | 3 | 0,2 | 2,1971 | 1,5 | 1,2905 |
| 3 | 2 | 2,6358 | 2,2401 | 6 | 0,2 | 1,2578 | 1,5 | 1,1767 |
| 3 | 2 | 2,6029 | 2,3416 | 10 | 0,2 | 0,4772 | 1,5 | 1,1116 |
| 4 | 2 | 3,4486 | 2,2538 | 3 | 0,2 | 3,3096 | 2 | 1,5301 |
| 4 | 2 | 3,3498 | 2,5967 | 6 | 0,2 | 1,8630 | 2 | 1,2900 |
| 4 | 2 | 3,2510 | 2,7476 | 10 | 0,2 | 0,6996 | 2 | 1,1832 |
| 2 | 2 | 1,8203 | 1,8203 | 3 | 0,4 | 1,5632 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,8971 | 1,8971 | 6 | 0,4 | 1,5494 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,9300 | 1,9300 | 10 | 0,4 | 1,3851 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 2,6770 | 1,8971 | 3 | 0,4 | 2,5420 | 1,5 | 1,4111 |
| 3 | 2 | 2,7305 | 2,0645 | 6 | 0,4 | 2,4982 | 1,5 | 1,3226 |
| 3 | 2 | 2,6975 | 2,1934 | 10 | 0,4 | 2,2118 | 1,5 | 1,2298 |
| 4 | 2 | 3,4925 | 2,0425 | 3 | 0,4 | 3,8940 | 2 | 1,7099 |
| 4 | 2 | 3,5638 | 2,3032 | 6 | 0,4 | 3,7828 | 2 | 1,5473 |
| 4 | 2 | 3,4705 | 2,5034 | 10 | 0,4 | 3,3020 | 2 | 1,3863 |
| 2 | 2 | 1,7984 | 1,7984 | 3 | 0,6 | 1,5170 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,8697 | 1,8697 | 6 | 0,6 | 1,6229 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,8971 | 1,8971 | 10 | 0,6 | 1,6570 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 2,6358 | 1,8587 | 3 | 0,6 | 2,4732 | 1,5 | 1,4181 |
| 3 | 2 | 2,7716 | 1,9300 | 6 | 0,6 | 2,6528 | 1,5 | 1,4360 |
| 3 | 2 | 2,7881 | 2,0206 | 10 | 0,6 | 2,6879 | 1,5 | 1,3798 |
| 4 | 2 | 3,4925 | 1,9191 | 3 | 0,6 | 3,8105 | 2 | 1,8199 |
| 4 | 2 | 3,6845 | 2,0206 | 6 | 0,6 | 4,0948 | 2 | 1,8235 |
| 4 | 2 | 3,6626 | 2,2044 | 10 | 0,6 | 4,1088 | 2 | 1,6615 |
| 2 | 2 | 1,7984 | 1,7984 | 3 | 0,8 | 1,4527 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,8587 | 1,8587 | 6 | 0,8 | 1,5762 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,8807 | 1,8807 | 10 | 0,8 | 1,6426 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 2,6193 | 1,8587 | 3 | 0,8 | 2,3661 | 1,5 | 1,4092 |

| | | | | | | | | |
|---|---|--------|--------|----|-----|--------|-----|--------|
| 3 | 2 | 2,7551 | 1,8807 | 6 | 0,8 | 2,5888 | 1,5 | 1,4650 |
| 3 | 2 | 2,8210 | 1,9081 | 10 | 0,8 | 2,6972 | 1,5 | 1,4784 |
| 4 | 2 | 3,4705 | 1,9081 | 3 | 0,8 | 3,6468 | 2 | 1,8188 |
| 4 | 2 | 3,6626 | 1,9300 | 6 | 0,8 | 4,0263 | 2 | 1,8977 |
| 4 | 2 | 3,7613 | 1,9794 | 10 | 0,8 | 4,1945 | 2 | 1,9002 |
| 2 | 2 | 1,7984 | 1,7984 | 3 | 0,9 | 1,4232 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,8477 | 1,8477 | 6 | 0,9 | 1,5482 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,8807 | 1,8807 | 10 | 0,9 | 1,6184 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 2,6193 | 1,8587 | 3 | 0,9 | 2,3165 | 1,5 | 1,4092 |
| 3 | 2 | 2,7469 | 1,8807 | 6 | 0,9 | 2,5428 | 1,5 | 1,4606 |
| 3 | 2 | 2,8210 | 1,8807 | 10 | 0,9 | 2,6660 | 1,5 | 1,5000 |
| 4 | 2 | 3,4486 | 1,9081 | 3 | 0,9 | 3,5692 | 2 | 1,8073 |
| 4 | 2 | 3,6406 | 1,9191 | 6 | 0,9 | 3,9575 | 2 | 1,8971 |
| 4 | 2 | 3,7613 | 1,9300 | 10 | 0,9 | 4,1630 | 2 | 1,9488 |

Tabla 12: Resultados mecanismo óptimo para el caso de distribución cargada, $p < 1$.

| $\bar{\mu}_1$ | $\bar{\mu}_2$ | μ_1 | μ_2 | N | p | $E[U]$ | r_1 | r_2 |
|---------------|---------------|---------|---------|-----|-----|--------|-------|--------|
| 2 | 2 | 1,7984 | 1,7984 | 3 | 1 | 1,3960 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,7984 | 1,7984 | 3 | 0,9 | 1,4232 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,7984 | 1,7984 | 3 | 0,8 | 1,4527 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,7984 | 1,7984 | 3 | 0,6 | 1,5170 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,8477 | 1,8477 | 6 | 1 | 1,5207 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,8477 | 1,8477 | 6 | 0,9 | 1,5482 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,8587 | 1,8587 | 6 | 0,8 | 1,5762 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,8697 | 1,8697 | 6 | 0,6 | 1,6229 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,8807 | 1,8807 | 10 | 1 | 1,5925 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,8807 | 1,8807 | 10 | 0,9 | 1,6184 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,8807 | 1,8807 | 10 | 0,8 | 1,6426 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1,8971 | 1,8971 | 10 | 0,6 | 1,6570 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 2,6193 | 1,8697 | 3 | 1 | 2,2712 | 1,5 | 1,4010 |
| 3 | 2 | 2,6193 | 1,8587 | 3 | 0,9 | 2,3165 | 1,5 | 1,4092 |
| 3 | 2 | 2,6193 | 1,8587 | 3 | 0,8 | 2,3661 | 1,5 | 1,4092 |
| 3 | 2 | 2,6358 | 1,8587 | 3 | 0,6 | 2,4732 | 1,5 | 1,4181 |
| 3 | 2 | 2,7305 | 1,8807 | 6 | 1 | 2,4958 | 1,5 | 1,4519 |
| 3 | 2 | 2,7469 | 1,8807 | 6 | 0,9 | 2,5428 | 1,5 | 1,4606 |
| 3 | 2 | 2,7551 | 1,8807 | 6 | 0,8 | 2,5888 | 1,5 | 1,4650 |
| 3 | 2 | 2,7716 | 1,9300 | 6 | 0,6 | 2,6528 | 1,5 | 1,4360 |
| 3 | 2 | 2,8210 | 1,8807 | 10 | 1 | 2,6270 | 1,5 | 1,5 |
| 3 | 2 | 2,8210 | 1,8807 | 10 | 0,9 | 2,6660 | 1,5 | 1,5 |
| 3 | 2 | 2,8210 | 1,9081 | 10 | 0,8 | 2,6972 | 1,5 | 1,4784 |

| | | | | | | | | |
|---|---|--------|--------|----|-----|--------|-----|--------|
| 3 | 2 | 2,7881 | 2,0206 | 10 | 0,6 | 2,6879 | 1,5 | 1,3798 |
| 4 | 2 | 3,4486 | 1,9191 | 3 | 1 | 3,4979 | 2 | 1,7970 |
| 4 | 2 | 3,4486 | 1,9081 | 3 | 0,9 | 3,5692 | 2 | 1,8073 |
| 4 | 2 | 3,4705 | 1,9081 | 3 | 0,8 | 3,6468 | 2 | 1,8188 |
| 4 | 2 | 3,4925 | 1,9191 | 3 | 0,6 | 3,8105 | 2 | 1,8199 |
| 4 | 2 | 3,6406 | 1,9191 | 6 | 1 | 3,8835 | 2 | 1,8971 |
| 4 | 2 | 3,6406 | 1,9191 | 6 | 0,9 | 3,9575 | 2 | 1,8971 |
| 4 | 2 | 3,6626 | 1,9300 | 6 | 0,8 | 4,0263 | 2 | 1,8977 |
| 4 | 2 | 3,6845 | 2,0206 | 6 | 0,6 | 4,0948 | 2 | 1,8235 |
| 4 | 2 | 3,7394 | 1,9081 | 10 | 1 | 4,1093 | 2 | 1,9597 |
| 4 | 2 | 3,7613 | 1,9300 | 10 | 0,9 | 4,1630 | 2 | 1,9488 |
| 4 | 2 | 3,7613 | 1,9794 | 10 | 0,8 | 4,1945 | 2 | 1,9002 |
| 4 | 2 | 3,6626 | 2,2044 | 10 | 0,6 | 4,1088 | 2 | 1,6615 |

Tabla 13: Resultados mecanismo óptimo para el caso de distribución cargada, $p < 1$.