



**UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL**

**SOSTENIBILIDAD DE COLUSION TACITA, BAJO LA ELECCION DE DOS
VARIABLES**

**TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN
ECONOMIA APLICADA**

CRISTIAN PATRICIO MANSILLA IBAÑEZ

**SANTIAGO DE CHILE
MARZO 2012**



**UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL**

**SOSTENIBILIDAD DE COLUSION TACITA, BAJO LA ELECCION DE DOS
VARIABLES**

**TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN
ECONOMIA APLICADA**

CRISTIAN PATRICIO MANSILLA IBAÑEZ

**PROFESOR GUIA:
LEONARDO BASSO SOTZ**

**MIEMBROS DE LA COMISION:
NICOLAS FIGUEROA GONZALEZ
RONALD FISCHER BARKAN
EDUARDO SAAVEDRA PARRA**

**SANTIAGO DE CHILE
MARZO 2012**

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR AL GRADO
DE MAGISTER EN ECONOMIA APLICADA
POR: CRISTIAN MANSILLA IBAÑEZ
FECHA: MARZO 2012
PROFESOR GUIA: LEONARDO BASSO S.

SOSTENIBILIDAD DE COLUSION TACITA, BAJO LA ELECCION DE DOS VARIABLES

Teóricamente un duopolio de firmas que compiten en precio obtendrá utilidades iguales a cero si fijan sus precios de manera simultánea, presentan costos marginales y costos medios constantes e iguales entre sí, no tienen costos fijos y ofertan un producto homogéneo. Este resultado variará si el juego puede extenderse por varios períodos, ya que para las firmas proyectar una futura “guerra de precios” propicia que estas busquen sostener precios altos (mayores al costo marginal) lo que naturalmente implicaría desempeñarse bajo un esquema colusivo. Probablemente esta colusión sea del tipo tácito, debido principalmente a que la mayoría de los mercados están suscritos a leyes anti monopólicas que penalizan a aquellas firmas que cooperativamente se cartelizan para abordar un mercado.

La literatura asociada al tema asume y calcula factores de descuento δ para un esquema colusivo tácito que sólo se da en la variable precio. Sin embargo, en la realidad muchas firmas que compiten en un mercado, no sólo elijen su estrategia de precios, sino que también los distintos niveles de calidad asociados a su oferta. En este sentido, en este trabajo se construye un modelo que se evalúa en dos “*súper juegos*” (simultáneo y consecutivo) donde se representan todos los esquemas en las que dos firmas compiten y se coluden tácitamente en las variables precio y calidad, sobre la base de dos bienes diferenciados horizontalmente.

Los resultados principales apuntan a que: (i) el “*timing*” de los juegos determina distintas conclusiones sobre la sostenibilidad de los acuerdos colusivos y (ii) bajo un juego simultáneo nunca se verá un cartel en precio.

Tabla Contenido

Capítulo 1: Introducción	5
Capítulo 2: Marco Teórico	9
2.1. La “Paradoja de Bertrand”, el factor de descuento y el concepto de colusión tácita.	9
2.2. Diferenciación horizontal, diferenciación vertical y su participación en la colusión tácita.	13
2.3. Multimarket Contact (<i>MMC</i>)	15
2.4. Colusión tácita en dos variable y <i>Multimarket Contact (MMC)</i> .	17
Capítulo 3: “Súper Juego” Simultáneo.	20
3.1. Presentación del Modelo	20
3.2. Colusión Total y Parcial: Cartel en Precio y Calidad, Cartel sólo en Precio y Cartel sólo en Calidad.	24
3.2.1 Cartel en Precio y Calidad	24
3.2.2 Cartel en Precio – Competencia en Calidad	29
3.2.3 Cartel en Calidad – Competencia en Precio	33
3.3. Caracterización de los Carteles	39
3.3.1 Comparación de Calidades	40
3.3.2 Comparación de Precios	42
3.3.3 Comparación de Utilidades	44
3.3.4 Comparación de los Factores de Descuento (Estabilidad de carteles)	45
3.3.5 Análisis sobre esquemas de colusiones factibles y rentables.	46

Capítulo 4: “<i>Súper Juego</i>” Consecutivo.	48
4.1. Presentación del Modelo	48
4.2. Colusión Total y Parcial: Cartel en Precio y Calidad, Cartel sólo en Precio y Cartel sólo en Calidad.	49
4.2.1 Cartel en Precio y Calidad	51
4.2.2 Cartel en Precio – Competencia en Calidad	56
4.2.3 Cartel en Calidad – Competencia en Precio	59
4.3. Caracterización de los Carteles	63
4.3.1 Comparación de Calidades.	64
4.3.2 Comparación de Precios	65
4.3.3 Comparación de Utilidades	66
4.3.4 Comparación de los Factores de Descuento (Estabilidad de carteles)	72
4.3.5 Análisis sobre esquemas de colusiones factibles y rentables.	72
Capítulo 5: Conclusiones	74
Referencias	79
Anexo 1	81
Anexo 2: Códigos Wolfram Mathematica 7.0	91

Capítulo 1: Introducción

La teoría señala que un duopolio de firmas que compiten en precio, obtendrán rentas nulas y cobrarán precio marginal si: compiten en un solo período, fijan sus precios de manera simultánea, presentan costos marginales y costos medios constantes e iguales entre sí, no tienen costos fijos y ofertan un producto homogéneo. Este resultado, conocido como la *Paradoja de Bertrand*, muestra que dos firmas serían suficientes para acabar con el poder de mercado.

Sin embargo, la “*paradoja de Bertrand*” puede desaparecer cuando la competencia de las firmas se extiende por varios períodos, situación que estaría explicada por la existencia de una *colusión tácita* entre las firmas competidoras. Este escenario colusivo les permitiría a las firmas mantener un precio mayor al de competencia por medio de la amenaza de una “*guerra de precios*” a futuro. Ahora bien, cuán efectiva resulte la amenaza de “*guerra de precios*” depende directamente de la valorización que las firmas tienen del futuro lo que en la literatura queda capturado en el factor de descuento (δ) que está entre 0 y 1 (Rothschild, 1997). Este factor de descuento representa la magnitud a la que las firmas descuentan el flujo futuro de utilidades. Es decir, representa el factor por el cual transforman el valor futuro de las utilidades en su valor presente. Por tal motivo, se ve que entre el factor de descuento y la valorización del futuro existe un vínculo positivo donde mayor factor implicará mayor valorización por el futuro o dicho de manera inversa, menor valorización por el presente.

En este contexto, se esperaría que cuando las firmas presentan altos valores del factor de descuento estas tiendan a respetar en el presente los carteles tácitos que conforman, evitando así una “*guerra de precios*” que terminaría eliminando posibles utilidades futuras a cambio de una baja utilidad presente.

Así como está definido, el valor del factor de descuento determinaría el grado de sostenibilidad de un cartel. De lo anterior, se esperaría encontrar un nivel de factor, dentro del intervalo $[0,1]$, donde la firma estaría indiferente entre romper o respetar la colusión, tal valor crítico se define como (δ^*) .

Otro modo de interpretar el factor de descuento y su valor crítico como medida de sostenibilidad de un cartel, es pensarlo como la probabilidad de que un cartel se sostenga. Así mientras más alto sea el valor de δ^* menos probable es la subsistencia del cartel dada la baja probabilidad de que la valorización del futuro de una firma cartelizada este entre δ^* y 1; de manera inversa, para valores bajos de δ^* será más probable la existencia de acuerdos colusivos.

Existe una amplia literatura, tanto empírica como teórica, que analiza el efecto de diferentes aspectos de la competencia en el valor del factor de descuento crítico como medida de la sostenibilidad del cartel; por ejemplo, ha habido mucho interés en qué estrategias de las firmas –en el sentido de teoría de juegos– lleva a una mayor estabilidad (e.g. Axelrod, 1981). O cuál es el efecto de la diferenciación de los productos en la sostenibilidad del acuerdo en precio: Ross (1992) y Jehiel (1992), por ejemplo, muestran que puede existir una relación no monótona entre ambos, es decir, que la diferenciación horizontal no hace necesariamente más difícil la colusión. Estos resultados son contrarios a algunos estudios empíricos (Symeonidis, 1998a) y a lo usualmente descrito en textos de “*antitrust*” que sostienen que en la medida que los productos se encuentran muy diferenciados, la colusión es menos probable dado que cada firma podrá obtener las rentas monopólicas asociadas al mercado particular de su bien. Otro aspecto que ha sido reconocido como importante es el *multimarket contact*; Bermheim & Whinston (1990) y Evans & Kessides (1994) estudian si, el hecho de que conglomerados económicos se encuentren en más de industria incrementa o no la posibilidad de *colusión tácita*.

Toda la literatura expuesta en el párrafo anterior se basa en el nivel de factor de descuento bajo colusión en precio. Sin embargo, en la realidad muchas firmas que compiten en un mercado determinado no sólo eligen su estrategia de precios, sino que también los distintos niveles de calidad asociados a sus productos. Un ejemplo concreto es el mercado aeronáutico donde las firmas no sólo eligen precio sino también frecuencia, lo que afecta directamente la utilidad de los pasajeros a través de los tiempos de espera. Resulta interesante, por lo tanto, preguntarse si, por una parte, al considerar calidad como parte de las variables estratégicas de las firmas aumentará o disminuirá la sustentabilidad de la colusión; por otro lado, parece importante investigar qué formas podría tomar dicha colusión: ¿En precio? ¿En calidad? ¿En ambas? Estas observaciones, que son las que motivan esta tesis, tienen que ver entonces con la sostenibilidad de la *colusión tácita* cuando las firmas deciden dos variables estratégicas.

En este contexto, la literatura referida es más bien escasa. De ella destaca el trabajo teórico de Häckner (1995), quien analizó la sostenibilidad de acuerdos colusivos en un modelo espacial (Hotelling 1929), basado en la elección de precio y un nivel de diferenciación horizontal óptima, concluyendo que una mayor diferenciación relaja la competencia y facilita la colusión.

De la misma manera destacan los trabajos empíricos de Prince & Simon (2008) y Bilotkach (2010), los cuales añadiendo *multimarket contact* al esquema competitivo de la industria aeronáutica, estudian cómo afecta éste a la competencia entre firmas que definen características del producto no asociadas a su precio. De esta forma, obtienen que la colusión vía *multimarket contact* afecta directamente los tiempos de espera y la frecuencia, respectivamente, ambas medidas de calidad de la industria.

Esta tesis pretende entregar múltiples resultados derivados principalmente de la caracterización de los distintos tipos de carteles tácitos que pueden

componerse a través de la endogenización de las variables precio y calidad para bienes con diferenciación horizontal, bajo “*súper juegos*” simultáneos y consecutivos. Adicionalmente se expondrán las condiciones de sostenibilidad y la comparación de los distintos niveles del factor de descuento (δ), utilidad, precios y calidad que se obtendrán del desarrollo de cada “*súper juegos*”.

Capítulo 2: Marco Teórico

2.1. La “Paradoja de Bertrand”, el factor de descuento y el concepto de colusión tácita.

Con objeto de crear un marco teórico robusto que de contexto al modelo y a sus resultados, se describirá a continuación los trabajos expuestos en la introducción y aquella literatura relevante analizada durante el proceso de investigación de este trabajo.

En primer lugar se conoce como un juego de Bertrand al juego que deriva de la competencia sólo en precio de dos firmas rivales. De él se espera como resultado que ambas firmas obtengan utilidades iguales a cero, producto de la “*guerra de precios*” que desencadenan en busca de abarcar la totalidad del mercado. Dicho final es previsible bajo condiciones específicas las cuales dicen relación a que ambas firmas deberán fijar sus precios en forma simultánea, deberán presentar costos marginales y costos medios constantes e iguales entre sí, no deberán tener costos fijos y por último, ofertarán un producto homogéneo.

El esquema descrito, conocido también como la “*Paradoja de Bertrand*”, tiene la particularidad de que no arroja el mismo resultado cuando el juego se repite en un número de períodos que tiende a infinito. Cuando este sea el caso, no será necesariamente cierto que ambas firmas obtendrán rentas nulas, ya que se hace más probable que cada firma decida mantener un precio distinto a su costo marginal que las lleve a maximizar sus utilidades conjuntas. Este hecho representaría una especie “pacto de no agresión” que les permitiría obtener rentas mayores a cero. El grado de formalización de este pacto está sin duda determinado por la existencia y aplicación de leyes anti monopólicas que suscriben la mayor parte de los mercados del mundo, por tal motivo será

posible encontrar carteles donde no existe una celebración contractual del acuerdo, por tanto la coordinación entre firmas estará dada por las creencias, señalizaciones, supuestos, entre otras formas, que use cada una para elegir la estrategia de precio o la variables en la cual se basa la cartelización. En tal caso se estará frente de una Colusión Tácita que bajo el prisma de la teoría de juegos correspondería a un juego repetido, no cooperativo y que sólo se sustenta por la amenaza creíble de castigo hecha por las firmas, donde para el caso de un acuerdo en precio se asocia a la obtención de utilidades nulas, producto de la *“guerra de precios”* del juego de Bertrand, a partir del período de desvío hasta el infinito. Dicho sea de paso y como se deja entrever en el punto anterior, el desconocimiento por parte de las firmas del período de término del juego ayudaría a mantener el acuerdo colusivo evitando el desvío unilateral.

La literatura referida por lo general denota como δ (Delta), valor perteneciente al intervalo $[0,1]$, a la valorización que tienen las firmas del futuro. Se estima que todas las firmas pueden determinar un punto crítico de esta valorización, conocido como (δ^*) . Este punto representa el límite donde la firma está indiferente entre *“traicionar”* o *“respetar”* el acuerdo o desde otra perspectiva, muestra la probabilidad de mantener el acuerdo o su grado de sostenibilidad, tal como fue descrito en la introducción. Así para valores de δ^* muy altos, existirá una baja probabilidad de mantener el acuerdo, dada la dificultad que exista un $\delta > \delta^*$ y lo contrario podrá decirse para valores bajos de δ^* .

El factor crítico puede verse afectado por la valorización que cada firma tiene respecto del flujo de utilidades futuras, las que como se mencionó pueden disminuir a cero ante el desvío que derivará en una *“guerra de precios”*. Este hecho se verá siempre y cuando la firma *“traicionada”* aplique una estrategia *“gatillo”*, la cual generalmente estará asociada a la baja verificabilidad que se tenga del valor de la variable base de la colusión. Sin embargo, existen otras

estrategias de castigo que no son tan drásticas para la firma que desvía y que dicen relación, por ejemplo, a aplicar la competencia en precio (y/o calidad) sólo por algunos períodos a partir del desvío y no desde este período hasta el infinito. Esta estrategia aumentaría el factor crítico de descuento δ^* de una firma permitiendo que la colusión existente sea más estable que la que se enfrentaría bajo una estrategia “gatillo”.

Esta descripción puede verse reflejada en el siguiente ejemplo que parte con una matriz de pagos cualquiera que se acoja a la *Paradoja de Bertrand* como la que se muestra a continuación en relación a la fijación de precios Altos y Bajos:

	BAJO	ALTO
BAJO	1;1	0;5
ALTO	5;0	4;4

Donde para calcular δ^* se necesita comparar la utilidad percibida dentro del cartel y la utilidad derivada del desvío más aquella la de competencia a partir del período de desvío. De manera general se puede expresar que para respetar el acuerdo se necesita que $Utilidad^{Cooperar} > Utilidad^{Traicionar}$, lo que según la tabla anterior podría representarse como:

$$\sum_{t=0}^{\infty} 4 \delta^t > 5 + \sum_{t=1}^T 1 \delta^t$$

Resolviendo la inecuación se obtiene:

$$\frac{4}{(1-\delta)} > 5 + \frac{\delta}{(1-\delta)}$$

$$\delta^* > \frac{1}{4}$$

Este resultado muestra que para cualquier valor de δ menor a $\frac{1}{4}$ el cartel se traicionará con alta probabilidad bajo una estrategia “gatillo”, por tanto podría considerarse que este cartel sería más bien del tipo estable. Sin embargo, para el ejemplo de una estrategia de castigo basada en competir sólo en algunos períodos y luego volver a colusión, se encuentra que este cartel será más estable que bajo estrategia “gatillo”, tal cual lo demuestra la resolución de la siguiente inecuación basada en los mismos criterios ($Utilidad^{Cooperar} > Utilidad^{Traicionar}$) y valores de la matriz de pago descrita:

$$\sum_{t=0}^{\infty} 4 \delta^t > 5 + \sum_{t=1}^T 1 \delta^t + \sum_{t=T+1}^{\infty} 4 \delta^t$$

Resolviendo la inecuación se obtiene:

$$\frac{4}{(1-\delta)} > 5 + \frac{\delta(1-\delta^T)}{(1-\delta)} + \frac{4\delta^{T+1}}{(1-\delta)}$$

$$\delta^* > -\frac{1}{(3\delta^T - 4)}$$

Si $T \rightarrow 0$; entonces $\delta^* \rightarrow 1$, evidenciando que mientras menor sea el tiempo de competencia el cartel que presente esta estrategia de castigo (competencia transitoria) sería más estable que el cartel que se basa en una estrategia “gatillo”.

2.2. Diferenciación horizontal, diferenciación vertical y su participación en la colusión tácita.

Uno de los supuestos fundamentales en los que se basa la “Paradoja de Bertrand” es la homogeneidad que presentan los productos que se ofertan, es decir, serían entre sí perfectos sustitutos. Esto es lo que evitaría que cualquiera de las firmas fijara un precio mayor a su costo marginal, sin perder por completo el mercado de su producto.

Sin embargo, en la realidad esta situación no es común. En la realidad las firmas si obtienen utilidades positivas y también se ve la existencia de diferencias entre los productos ofrecidos, ya sea por alguna identificación de marcas, distintas calidades de fabricación, múltiples diseños por producto, entre otras. A grandes rasgos, estas y otras diferencias se pueden dividir en dos tipos: Diferenciación Horizontal y Diferenciación Vertical.

La diferenciación horizontal de bienes se puede reconocer cuando dos o más bienes son ofrecidos a un mismo precio y no existe claridad por parte de los consumidores de alguna preferencia particular por alguno de ellos, es decir, existen grupos de consumidores que demandarán indistintamente cada uno de los bienes. En un mercado real, el diseño y/o las marcas asociadas a los bienes podrían determinar que exista demanda para los distintos tipos de productos, considerando precios iguales para ellos. Por otro lado, la diferenciación vertical se reconoce si cuando dos o más productos son ofrecidos al mismo precio todos los consumidores prefieren el mismo producto. Se trata de diferencias en calidad donde el producto de baja calidad es consumido sólo porque, dicho de alguna manera, es compensado con un precio bajo.

Es importante mencionar para la posterior revisión de la literatura que, generalmente en los modelos que analizan los casos de diferenciación

horizontal lo hacen bajo “modelos espaciales” (Hotelling, 1929) donde el nivel de diferenciación se ve reflejado en función de la “locación” que eligen las firmas que compiten dentro de una “ciudad lineal”. En estos casos, usualmente, los consumidores están distribuidos uniformemente y tienen densidad 1.

Por último, considerando el rol que tienen estos tipos de diferenciación sobre la facilidad que tienen las firmas de constituir y mantener un acuerdo colusivo tácito, se podría intuir que a medida que una firma se acerca al caso de diferenciación horizontal extrema, existiría cada vez menos riesgo de una existencia de cartel, ya que cada competidor podría convertirse en un monopolio con su marca, diseño o locación. Este hecho maximizaría las utilidades individuales por la vía del completo dominio de su mercado. Lo mismo se esperaría en el caso de la diferenciación vertical, donde por cada nivel de – por ejemplo – calidad, existiría un precio y una demanda asociada, por lo que aquellas firmas de calidades y precios superiores no tendrían incentivos a compartir sus utilidades con aquellas de calidades y precios más bajos, minimizando el riesgo de colusión. Esto siempre que los distintos tipos de valoraciones por calidad asociados a cada individuo, tengan una distribución uniformemente en los distintos niveles de calidad.

Esta característica se deriva de la intuición tras la literatura de “*antitrust*” donde se presume que mientras mayor sea la diferenciación entre bienes menores serán las posibilidades que las firmas que los proveen puedan articular una colusión, ya que cada uno podrá tener para sí una cuota de mercado “exclusiva” que demandará sólo su producto y que finalmente representaría un monopolio más rentable que el que podría darse en conjunto. La mayor conveniencia vendría dada porque para el caso de una demanda exclusiva si sería posible cobrar el precio monopólico; precio que no se daría para el caso de la maximización conjunta, donde se esperaría obtener un precio superior al de competencia pero menor al de monopolio. Sin embargo esta intuición pareciera

no darse en la realidad ni en los modelos teóricos, principalmente porque la maximización conjunta de las utilidades y su posterior repartición, bajo diferenciación horizontal y vertical, entregaría niveles de utilidad mayores que las derivadas de la situación monopólica individual.

Ross (1992) y Jehiel (1992), toman la variable precio y desarrollan su análisis bajo distintos niveles de diferenciación horizontal. Concretamente Ross (1992) considera dos modelos para demostrar que grandes homogeneidades entre productos pueden reducir la estabilidad del cartel. Bajo su primer modelo de utilidad cuadrática, una relación de sustitución entre los bienes del modelo representada por $r = b/c$, donde $r = 1$ representa la perfecta sustitución y $r = 0$ es la heterogeneidad máxima, demuestra que para los rangos superiores de esta relación ($r \in [0,73, 1]$) el factor de descuento δ^* toma sus valores mínimos, evidenciando que mientras más homogéneos sean los bienes más inestable es el cartel.

Asimismo su modelo espacial con costos de transporte, donde el nivel de diferenciación de los bienes esta dado por la localización de las firmas en una “ciudad lineal” y donde esta vez el δ^* está en función del ratio entre la valorización de reserva (v) y costo de transporte (t), concluye que para altos niveles de homogenización, representado por altos de niveles de la valorización de reserva, el δ^* tenderá a infinito y nuevamente estaría siendo demostrado que carteles con mayores diferencias son más estables.

2.3. Multimarket Contact (MMC)

Dentro del contexto de la literatura relacionada a colusión tácita en una variable es importante considerar estudios empíricos y teóricos que se enmarcan en un esquema competitivo especial y que se le conoce como “*Multimarket Contact (MMC)*”. Este esquema está caracterizado no sólo por el grado de

diferenciación entre productos sino que además, por el número de veces que las empresas compiten en distintos mercados, generalmente asociados a mercados geográficamente diferentes.

En este sentido el trabajo Bermheim & Whinston (1990) considera al *MMC* para desarrollar un modelo que busca determinar el grado de cooperación entre firmas. El análisis se centra en tres escenarios distintos y relacionados con las características de las firmas y los mercados donde se topaban y competían, los cuales son: (i) firmas y mercados iguales con rendimientos a escala constantes, (ii) firmas distintas bajo estructuras de costo distintas, mercados iguales y rendimientos constantes a escala y (iii) productos diferenciados, mercados iguales y firmas distintas.

Los resultados de este análisis fueron en la misma orientación que los trabajos descritos anteriormente, esto es que bajo el escenario (i) *MMC* no sustenta acuerdos colusivos, se replican las ganancias de los mercados individuales, por tanto compitiendo a precio igual costo marginal. Bajo el escenario (ii) *MMC* permitiría sostener acuerdos colusivos en uno de los mercados, puntualmente en aquel donde exista mayor número de competidores. Esto podría mantenerse en el caso en que existen distintos factores de descuento entre mercados. Por último, bajo el escenario (iii), si cada firma tiene ventaja en costo en alguno de los 2 mercados, cada cual “entrega” parte de su renta superior en el mercado que tiene ventaja, a la firma no ventajosa y viceversa. De esta forma, la colusión es sustentada en la llamada “esferas de influencia”.

Evans y Kessides (1994) desarrollaron un estudio empírico con *MMC* donde concluían acerca de la “regla de oro” en el mercado aeronáutico estadounidense. Dicha regla proclama: “...no entres con una estrategia de precios agresiva a una ruta, si no estás dispuesto a que en otra ruta tengan una actitud agresiva de precios contigo...”.

2.4. Colusión tácita en dos variable y *Multimarket Contact (MMC)*.

En este punto sólo existe el trabajo de Häckner (1995) como literatura teórica que hace referencia a colusión tácita en dos variables endógenas. Este trabajo está basado en un modelo que analiza, en un juego repetido, el incentivo a diferenciar horizontalmente los productos cuando alterar este grado de diferenciación no tiene costo. Para ello el autor también desarrolla un esquema de Hotelling (1929) con dos variables, precio y diseño, ambas endógenas del modelo. Las características del juego que modela se basan en un tiempo infinito y un “*timing*” donde en el período actual (t) las firmas anuncian el nivel de precio para (t) y el diseño (diferenciación) que implementarán en el período siguiente ($t + 1$), es decir, definen el diseño con un período de anticipación. Aquí la estrategia “*gatillo*” es usada para el desvío en precio o diseño, aplicando precios competitivos desde el período del desvío hacia el futuro.

Los resultados de Häckner apuntan a que mientras el producto tenga mayores sustitutos, es decir bajo nivel de diferenciación, la estrategia dominante para las firmas será el desvío haciendo más inestable mantener el cartel. Además encuentra que desviaciones en diseño son menos rentables que las desviaciones en precio, considerando que la variable diseño en su grado óptimo (igual a $\frac{1}{4}$) permitirá que se establezca el precio monopólico. Adicionalmente el autor encuentra una relación inversa entre el factor de descuento y el nivel de diferenciación, punto que hace referencia a la relación entre factor de descuento y sostenibilidad del cartel.

Por otra parte y desde la perspectiva empírica, existen los trabajos de Prince & Simon (2008) y de Bilotkach (2010). Ambos estudios analizan la colusión tácita bajo el escenario de *Multimarket Contact* en la industria aeronáutica estadounidense, medida sobre las variables de precio y calidad.

El primero de ellos aplica una metodología que considera dos medidas de *MMC*: el número de rutas donde las aerolíneas compiten (medida no ponderada, que entregaría el mismo nivel de *MMC* para todas las firmas) y medidas ponderadas por el *índice de Herfindahl*². Sus resultados son bastante concluyentes, mostrando que el *MMC* no afecta el tiempo en vuelo y por tanto, no afecta la inversión en capacidad. Sin embargo, tiene directa incidencia en los servicios fuera de vuelo, es decir, tiempo de embarque, manejo de equipaje, mantención, etc., todas estas medidas de calidad. Además examinaron dos medidas de calidad adicionales, frecuencia y cancelaciones, concluyendo que el *MMC* tiene efectos sobre las cancelaciones, pero no sobre la frecuencia. En conclusión, *MMC* provee menor calidad general, desde la perspectiva horaria.

Por su parte el trabajo de Bilotkach (2010), que entre otras cosas, refuta la conclusión de Prince & Simon (2008) respecto a que el *MMC* no tiene incidencia en la frecuencia, considerando que hacen un análisis estático. Se centra en el análisis de dos variables; frecuencia y tamaño, también reconocidas como variables de calidad en la industria. Pero además realiza el análisis desde la perspectiva de la fusión entre dos compañías competidoras. Metodológicamente, el tamaño de una aerolínea es medido por la división entre el número total de asientos y el número de salidas. Mientras que la frecuencia es tomada bajo el número de salidas en un lapso de tiempo definido.

Centrándose sólo en el análisis de fusión de firmas, lo observado tiene relación a que luego de esta, la concentración aumenta y por tanto el *MMC* suaviza la competencia, pero sólo en el corto plazo. Además se observa luego de la fusión que la frecuencia tiende a ser más importante en rutas no monopolizadas, mientras que el tamaño es más incidente en las rutas monopolizadas.

² El índice de Herfindahl es una medida de concentración de mercado. A mayor valor del índice, menor grado de competencia.

En general, bajo la mirada del *MMC*, este trabajo destaca que el efecto que tiene sobre la capacidad puede verse como un símil del efecto que tiene sobre el precio, ello a través de la incidencia sobre la disminución de costos. Se observó además que el *MMC* tiene efectos negativos sobre la frecuencia y positivos sobre el tamaño de la flota. Aumentaron los asientos y disminuyeron los retrasos. Sin embargo, la relación de largo plazo entre capacidad ofrecida y *MMC* entrega los mismo efectos de la relación *MMC* y precio.

Finalmente este estudio concluye que el *MMC* entrega altos precios y baja calidad, destacando que, estos efectos son mayores en el corto plazo que en el largo plazo.

En este punto es importante destacar que de toda la literatura antes expuesta ninguna considera el análisis de la colusión tácita bajo la regla que las firmas elijan endógenamente dos variables, en este caso: precio y calidad. No existen trabajos que de manera empírica o teórica aborden esta característica de los acuerdos colusivos tácitos que sin duda tiene altas probabilidades de existir en los mercados reales, donde por ejemplo en la industria aeronáutica las compañías no sólo elijen sus estrategias de precios sino que también elijen los niveles de frecuencia ofrecida por ruta, servicio de abordó, tiempos de espera, etc., todas ellas medidas de calidad. Por tanto nada podría asegurar que de momento no exista entre ellas alguna medida de colusión tácita en ambas variables o alguna combinación parcial entre ellas, tema que a través de la modelación de “*súper juegos*” simultáneos y consecutivos y con bienes con diferenciación horizontal, pretendo evidenciar.

Capítulo 3: “Súper Juego” Simultáneo.

3.1. Presentación del Modelo

Al tratarse de un estudio de colusión tácita, el modelo caracterizará un juego simultáneo, no cooperativo y con información completa y perfecta, a través del cual se analizarán los esquemas de colusión, total y parcial, que firmas competidoras pueden alcanzar al hacer endógena la elección, en un mismo período, de las dos variables: precio y calidad.

Las firmas i y j se considerarán simétricas y ofrecerán bienes diferenciados horizontalmente de manera exógena, parámetro sobre el cual la calidad no influiría. Por ejemplo para el caso de las compañías aeronáuticas, dos compañías competidoras podrán ofrecer frecuencias de vuelo distintas (una medida de calidad) donde un tipo de diferenciación podría ser los distintos planes de viajero frecuente que apunten a la fidelidad de la demanda.

Concretamente considera un “*Full Price*”. Este precio generalizado está en función del precio del bien ($Pp_{i,j}$) y el nivel de calidad ($S_{i,j}$) que corresponden a las variables endógenas del modelo, como sigue:

$$\rho_i = Pp_i - \alpha S_i$$

$$\rho_j = Pp_j - \alpha S_j$$

De esta forma las funciones de demanda serán $[Q_i(\rho_i, \rho_j); Q_j(\rho_i, \rho_j)]$, donde

$\left| \frac{\partial Q_i}{\partial \rho_i} \right| > \left| \frac{\partial Q_i}{\partial \rho_j} \right|$, lo que representa que los bienes en cuestión están diferenciados.

Los precios generalizados $[\rho_i; \rho_j]$ de la función de demanda determinan el grado de influencia que tendrán las variaciones del precio y calidad de un bien respecto de la demanda del otro bien que también se verá afectada por la sensibilidad que esta tenga a las variaciones de calidad, representadas por el parámetro α .

Otro ejemplo que es bien capturado por este modelo es el de los platos que ofrecen dos restaurantes que están distanciados geográficamente y donde la baja calidad de los ingredientes de uno haría aumentar el precio generalizado incentivando a la demanda a recurrir a la competencia.

Para simplificar, se asumirán demandas lineales en el precio generalizado, las que vienen dadas por:

$$Q_i(Pp_i, Pp_j, S_i, S_j) = a - bPp_i + \alpha bS_i + cPp_j - \alpha cS_j \quad (3.1.1)$$

$$Q_j(Pp_i, Pp_j, S_i, S_j) = a - bPp_j + \alpha bS_j + cPp_i - \alpha cS_i \quad (3.1.2)$$

Sobre la base de las funciones de demandas descritas el primer supuesto que se establece es que siempre $b > c$, lo que habla de que los bienes son sustitutos imperfectos.

Desde la perspectiva de las funciones de costo ambas firmas muestran funciones con rendimientos constantes a escala en producción y costos marginales constantes e iguales entre ellas, tal como lo muestran las funciones (3.1.3) y (3.1.4):

$$C_i(Pp_i, Pp_j, S_i, S_j) = AQ_i(Pp_i, Pp_j, S_i, S_j) + BS_i + FS_i^2 \quad (3.1.3)$$

$$C_j(Pp_i, Pp_j, S_i, S_j) = AQ_j(Pp_i, Pp_j, S_i, S_j) + BS_j + FS_j^2 \quad (3.1.4)$$

Las funciones de costo descritas demuestran la existencia de un costo marginal constante e igual entre ellas (A) y dan paso al segundo supuesto que dice relación a que las funciones de costo consideran que el costo total de producción crece en mayor medida cada vez que las firmas aumentan la calidad ofrecida, a través del término FS_j^2 . Las firmas necesitan invertir para lograr mayores niveles de calidad, pero esto sin afectar el costo marginal de producción.

Otro supuesto general del modelo es que los bienes ofrecidos por las firmas no están perfectamente diferenciados, lo que equivale a decir que siempre $c > 0$. En otras palabras, existirá siempre algún grado de sustitución entre bienes, hecho que puede verse representado en el primer supuesto ($b > c$) y en la estructura de la función de demanda, donde precio y calidad del bien j influyen sobre la cantidad demandada del bien i y viceversa.

Habiendo definido la estructura general del juego, es importante notar que pueden existir 4 distintos niveles de competencia (o colusión) sobre las variables precio y calidad: (i) competencia en ambas variables, (ii) colusión en ambas variables (colusión completa), (iii) colusión en precio y competencia en calidad o (iv) colusión en calidad y competencia en precio. Estas últimas hacen referencia a esquemas de colusión parcial y la importancia de estudiarlas radica en primera instancia en que la existencia de dos variables de colusión amplía las posibilidades de las firmas para coludirse y conseguir utilidades quizás menores a las monopólicas³ pero mayores a las de competencia y por tanto, incidir finalmente en la estabilidad que cada esquema de cartelización tenga.

³ Se espera que las rentas monopólicas deriven de esquemas colusivos completos, en este caso colusión en precio y calidad. Teóricamente esto debe ratificarse a través de las condiciones de segundo orden del proceso de maximización conjunta, ya que puede existir la posibilidad de que se obtengan “soluciones esquina” que no garanticen que la maximización conjunta (colusión total) convenga a ambas firmas

La metodología que se usará para la construcción de este trabajo contempla el desarrollo y análisis de los distintos esquemas propuestos los que permitirán entregar:

1. Los distintos niveles de utilidad derivados de los problemas de maximización conjunta e individual, según sea el caso de competencia o colusión total o parcial analizado.
2. Los distintos niveles del factor de descuento crítico (δ^*) asociados a cada esquema y que serán obtenidos a través de la relación de las utilidades de competencia, utilidades de cartel (total y parcial según corresponda) y utilidades de desvío, siendo esta última obtenida por medio de la aplicación de la estrategia “gatillo”, donde se aplicarán como castigo los niveles de precio y calidad de competencia desde el período de castigo hasta el infinito.
3. Los distintos niveles de precio que entrega cada esquema competitivo (colusivo), donde destacan los niveles de precio de competencia, colusión total o parcial y de desvío.
4. Los distintos niveles de calidad que entrega cada esquema competitivo (colusivo), donde destacan los niveles de calidad de competencia, colusión total o parcial y de desvío.
5. Por último, se establecerán órdenes de magnitud y las intuiciones asociadas a los distintos resultados obtenidos de los puntos anteriores para lograr establecer algún criterio de sostenibilidad de los tipos de cartel.

coludidas, lo que podría dar cabida a una colusión parcial que entregue utilidades menores a las monopólicas pero mayores a las de competencia.

3.2. Colusión Total y Parcial: Cartel en Precio y Calidad, Cartel sólo en Precio y Cartel sólo en Calidad.

Bajo las funciones simétricas de costo y demanda que enfrenta cada firma, las que fueron descritas en las funciones (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3) y (3.1.4), ahora se desarrollarán los esquemas de colusión totales y parciales, todas de manera tácita, bajo los cuales las firmas tienen la posibilidad de actuar.

Para ello se resolverán los problemas conjuntos de maximización que identificarán las cartelizaciones y las maximizaciones individuales que representan las condiciones de competencia y de desvío. Con esto se obtendrán los distintos niveles de precio, calidad, así como también las distintas utilidades que serán el input para determinar el factor de descuento crítico (δ^*) en cada caso.

Para el caso particular de la obtención del factor de descuento crítico, para cada esquema colusivo se utilizará una ecuación estándar, descrita por (3.2.1), que caracteriza la razón de diferencias entre la utilidad de desvío ($UtD_{i,j}$) y cartel ($UtM_{i,j}$) y las utilidades de desvío y competencia ($UtBN_{i,j}$).

$$\delta SSD = (UtD_{i,j} - UtM_{i,j}) / (UtD_{i,j} - UtBN_{i,j}) \quad (3.2.1)$$

3.2.1 Cartel en Precio y Calidad

El primer problema que debe resolverse es aquel donde las empresas compiten tanto en precio como en calidad, para lo cual las firmas maximizan sus funciones de utilidad individuales para así determinar la estrategia de precios y de calidad que ofrecerán en un período dado, dicho problema es reflejado por la expresión (3.2.2):

$$\max_{(Pp_i, S_i) > 0} \{UtBN_{i,j}[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j]\} = Pp_{i,j} * Q_{i,j}[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j] - C_{i,j}[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j] \quad (3.2.2)$$

Las condiciones de primer orden para cada firma llevan a las siguientes funciones de reacción:

$$Pp_i = \frac{a + Ab + cPp_j + bSi\alpha - cSj\alpha}{2b} \quad (3.2.3)$$

$$S_i = -\frac{B + b(A - Pp_i)\alpha}{2F} \quad (3.2.4)$$

$$Pp_j = \frac{a + Ab + cPp_i - cSi\alpha + bSj\alpha}{2b} \quad (3.2.5)$$

$$S_j = -\frac{B + b(A - Pp_j)\alpha}{2F} \quad (3.2.6)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, el valor de las variables es:

$$S_i = \frac{2bB - Bc + Ab^2\alpha - b(a + Ac)\alpha}{2(-2b + c)F + b(b - c)\alpha^2} \quad (3.2.7)$$

$$Pp_i = \frac{B(b - c)\alpha + Ab(b - c)\alpha^2 - 2(a + Ab)F}{2(-2b + c)F + b(b - c)\alpha^2} \quad (3.2.8)$$

$$S_j = \frac{2bB - Bc + Ab^2\alpha - b(a + Ac)\alpha}{2(-2b + c)F + b(b - c)\alpha^2} \quad (3.2.9)$$

$$Pp_j = \frac{B(b - c)\alpha + Ab(b - c)\alpha^2 - 2(a + Ab)F}{2(-2b + c)F + b(b - c)\alpha^2} \quad (3.2.10)$$

Con los valores de las variables descritos entre (3.2.7) y (3.2.10) y sustituyendo en la función de utilidad cada firma, éstas obtienen la siguiente utilidad final por competencia:

$$UtBN_{i,j} = \frac{1}{(2(-2b+c)F+b(b-c)\alpha^2)^2} (F(B^2(-2b+c)^2 + 4b(a+A(-b+c))^2F) - 4bB(b-c)(a+A(-b+c))F\alpha - b^2(B^2(b-c) + (a+A(-b+c))^2F)\alpha^2 + b^2B(b-c)(a+A(-b+c))\alpha^3) \quad (3.2.11)$$

Para continuar será necesario ahora determinar la utilidad del cartel total (en precio y calidad), así ambas firmas resolverán por separado el siguiente problema de optimización:

$$\max_{(Pp_i, Pp_j, S_i, S_j) > 0} \{UtMsp[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j]\} = \quad (3.2.12)$$

$$(Pp_i * Q_i[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j] - C_i[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j]) + (Pp_j * Q_j[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j] - C_j[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j])$$

De la maximización conjunta (3.2.12) se obtendrán las funciones de mejor respuesta del cartel, simétricas para la firma i y la j , en precio y calidad. Estas se detallan en el punto (3.2.13) del Anexo 1. Luego de resuelto el sistema de ecuaciones, las variables quedan definidas según los siguientes resultados:

$$S_i = \frac{2B - (a + A(-b + c))\alpha}{-4F + (b - c)\alpha^2} \quad (3.2.14)$$

$$Pp_i = A + \frac{(b - c)(2AF + B\alpha) - 2aF}{(b - c)(-4F + (b - c)\alpha^2)} \quad (3.2.15)$$

$$Pp_j = A + \frac{(b-c)(2AF + B\alpha) - 2aF}{(b-c)(-4F + (b-c)\alpha^2)} \quad (3.2.16)$$

$$S_j = \frac{2B - (a + A(-b + c))\alpha}{-4F + (b-c)\alpha^2} \quad (3.2.17)$$

Tomando las ecuaciones (3.2.14) a la (3.2.17) y sustituyendo en la función de utilidad de la firma, la cual tiene la siguiente forma funcional:

$$UtM_{sp_{i,j}}[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j] = \quad (3.2.18)$$

$$(Pp_{i,j} * Q_{i,j}[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j] - C_{i,j}[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j])$$

Se obtiene la utilidad individual derivada del cartel en precio y calidad que está dada por:

$$UtM_{sp_{i,j}} = - \frac{\alpha^2 F + (b-c)(B^2 + A(-2a + A(b-c))F - B(a + A(-b+c))\alpha)}{(b-c)(-4F + (b-c)\alpha^2)} \quad (3.2.19)$$

Un aspecto importante derivado de la resolución del problema de maximización conjunta para el cartel total (3.2.12) son las condiciones de segundo orden, las que permiten comprobar la convexidad de las soluciones del problema y encontrar las condiciones para que exista una solución interior. Las condiciones de segundo orden del problema se detallan en el *punto (3.2.20) del Anexo 1*, pero se resumen en las siguientes condiciones:

$$0 < b \leq 2F/\alpha^2$$

$$F > 0$$

$$0 \leq \alpha \leq 1.$$

Tal como lo señala la expresión (3.2.1) respecto del cálculo del factor de descuento crítico, sólo queda por determinar la utilidad de desvío ($UtDsp_{i,j}$). Intuitivamente para calcular esta utilidad se debe considerar que existe una desviación unilateral de parte de una de las firmas, aquí supondremos que es la firma j la que “traiciona” al cartel. Para esto, la firma j asume que la firma i mantiene el precio y calidad de cartel, es decir, (3.2.14) y (3.2.15), en base de esto recalcula los nuevos valores de precio y calidad que ella usará para “traicionar” el cartel, los que quedan representados por el par [$Sdsp; Ppdsp$]. Tanto $Sdsp$ como $Ppdsp$ vienen dados como resultado del sistema de ecuaciones que considera, precio y calidad de cartel que mantiene la firma i y las funciones de mejor respuesta de la maximización individual de la firma j , señaladas en (3.2.5) y (3.2.6).

Para esclarecer este punto, diremos que el sistema de ecuaciones desde donde se determinan [$Sdsp; Ppdsp$], está conformado por:

$$\left[\begin{array}{l} S_i = \frac{2B - (a + A(-b + c))\alpha}{-4F + (b - c)\alpha^2} \\ Pp_i = A + \frac{(b - c)(2AF + B\alpha) - 2aF}{(b - c)(-4F + (b - c)\alpha^2)} \end{array} \right]$$

Y

$$\left[\begin{array}{l} Sdsp = -\frac{B + b(A - Ppdsp)\alpha}{2F} \\ Ppdsp = \frac{a + Ab + cPp_i - cS_i\alpha + bSdsp\alpha}{2b} \end{array} \right]$$

Al resolver el sistema de ecuaciones descrito se obtienen los valores finales de [$Sdsp; Ppdsp$], los cuales están descritos en el *punto (3.2.21) del Anexo 1*, que luego son reemplazados en la función de utilidad de la firma j para así obtener finalmente la utilidad de desvío ($UtDsp_{i,j}$), descrita por:

(3.2.22)

$$UtDsp_{i,j} = \frac{(2(-2b+c)F+b(b-c)\alpha^2)^2(-2aF+(b-c)(2AF+B\alpha))^2}{b(b-c)^2(-4F+b\alpha^2)^2(4F+(-b+c)\alpha^2)^2} - \frac{1}{2}B\left(\frac{2bB-2Bc+Ab^2\alpha-b(a+Ac)\alpha}{(b-c)(-4F+b\alpha^2)} + \frac{2B-(a+A(-b+c))\alpha}{-4F+(b-c)\alpha^2}\right) - \frac{1}{4}F\left(\frac{2bB-2Bc+Ab^2\alpha-b(a+Ac)\alpha}{(b-c)(-4F+b\alpha^2)} + \frac{2B-(a+A(-b+c))\alpha}{-4F+(b-c)\alpha^2}\right)^2$$

Finalmente el valor crítico resultante de la forma general (3.2.1), derivado de las utilidades de competencia (3.2.11), utilidad de cartel (3.2.19) y la utilidad de desvío (3.2.22), para el cartel en precio y calidad es:

$$\delta SD_{sp} = \frac{(2(-2b+c)F+b(b-c)\alpha^2)^2}{4(8b^2-8bc+c^2)F^2-8b(2b^2-3bc+c^2)F\alpha^2+2b^2(b-c)^2\alpha^4} \quad (3.2.23)$$

3.2.2 Cartel en Precio – Competencia en Calidad

Después de ver que el primer caso posible de colusión que está dado por la cartelización en precio y calidad, ahora se describirá otro caso posible donde las empresas pueden coludirse tácitamente para formar un cartel sólo en la variable precio y competir en calidad. En este formato las firmas maximizarán sus utilidades conjuntas sólo sobre las variables Pp_i y Pp_j , según muestra la expresión (3.1.18). De esta manera se obtendrán los niveles de precios monopólicos ofrecidos por el cartel.

$$\max_{(Pp_i, Pp_j) > 0} \{UtMp[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j]\} = \quad (3.2.24)$$

$$(Pp_i * Q_i[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j] - C_i[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j]) + (Pp_j * Q_j[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j] - C_j[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j])$$

De la maximización anterior se obtendrán las funciones de mejor respuesta en precio, las cuales están descritas en el punto (3.2.25) del Anexo 1.

Para determinar el nivel de calidad que entregará el cartel en precio, se debe construir un sistema de ecuaciones conformado por las funciones de mejor respuesta en precio de la maximización conjunta, punto (3.2.25) del Anexo 1 y las funciones de mejor respuesta en calidad, par $[S_i, S_j]$, del problema de maximización individual, es decir (3.2.4) y (3.2.6). En resumen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left[\begin{array}{l} Pp_i = \frac{a + Ab - Ac + 2cPp_j + bS_i\alpha - cS_j\alpha}{2b} \\ Pp_j = \frac{a + Ab - Ac + 2cPp_i - cS_i\alpha + bS_j\alpha}{2b} \\ S_i = -\frac{B + b(A - Pp_i)\alpha}{2F} \\ S_j = -\frac{B + b(A - Pp_j)\alpha}{2F} \end{array} \right]$$

Al resolver se obtienen los valores finales de las variables, de acuerdo al siguiente detalle:

$$Pp_i = \frac{-2aF + (b - c)(-2AF + B\alpha + Ab\alpha^2)}{(b - c)(-4F + b\alpha^2)} \quad (3.2.26)$$

$$S_i = \frac{2bB - 2Bc + Ab^2\alpha - b(a + Ac)\alpha}{(b - c)(-4F + b\alpha^2)} \quad (3.2.27)$$

$$Pp_j = \frac{-2aF + (b - c)(-2AF + B\alpha + Ab\alpha^2)}{(b - c)(-4F + b\alpha^2)} \quad (3.2.28)$$

$$S_j = \frac{2bB - 2Bc + Ab^2\alpha - b(a + Ac)\alpha}{(b - c)(-4F + b\alpha^2)} \quad (3.2.29)$$

La forma funcional de la utilidad del cartel en precio $UtMp_{i,j}$ es igual a la de la utilidad en precio y calidad $UtMsp_{i,j}$ de la ecuación (3.2.18), por tanto al reemplazar en esta las variables de (3.2.26) a (3.2.29), determina que el valor final de la utilidad del cartel en precio para la firma i es:

$$UtMp_{i,j} = \frac{1}{(b-c)^2(-4F+b\alpha^2)^2} (4(b-c)F(B^2(b-c) + (a + A(-b + c))^2F) - 4B(b-c)^2(a + A(-b + c))F\alpha - (B^2(b-c)^2(b+c) + b^2(a + A(-b + c))^2F)\alpha^2 + b^2B(b-c)(a + A(-b + c))\alpha^3) \quad (3.2.30)$$

Así mismo que para el cartel en precio y calidad, ahora es necesario el cálculo de la utilidad de desvío ($UtDp_{i,j}$) para luego estar en condiciones de calcular el δ crítico (δ^*).

Si suponemos nuevamente que será la firma j la que desviará del cartel en precio, entonces esta nuevamente asumirá que la firma i se mantendrá jugando el precio de cartel y su calidad de competencia, vale decir (3.2.26) y (3.2.27). Aquí sin embargo, no es esperable que para este caso la firma j también mantenga su calidad de competencia y sólo varíe el precio para traicionar el cartel, ya que cuando se traiciona el precio este se baja respecto al precio de cartel y si sólo eso ocurriera, posiblemente la firma que desvía obtendrá una utilidad menor a la de cartel, por tanto necesariamente la calidad debe también cambiar (bajar), así se estará asegurando obtener mayor utilidad por el desvío.

De acuerdo al párrafo anterior, para este caso la firma j deberá recalcular los valores de precio y calidad, el par $[S_i, S_j]$, de la misma manera que lo hizo para

el cartel en precio y calidad. Para ello, resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left[\begin{array}{l} Pp_i = \frac{-2aF + (b-c)(-2AF + B\alpha + Ab\alpha^2)}{(b-c)(-4F + b\alpha^2)} \\ S_i = \frac{2bB - 2Bc + Ab^2\alpha - b(a + Ac)\alpha}{(b-c)(-4F + b\alpha^2)} \\ Sdp = -\frac{B + b(A - Ppdp)\alpha}{2F} \\ Ppdp = \frac{a + Ab + cPp_i - cS_i\alpha + bSdp\alpha}{2b} \end{array} \right]$$

El valor del par $[Sdp; Ppdp]$ perteneciente al sistema de ecuaciones anterior está detallado en el *punto (3.2.31) del Anexo 1*. Finalmente al resolver el sistema de ecuaciones anterior se obtiene la utilidad de desvío del cartel en precio ($UtDp_{i,j}$), descrita por

(3.2.32)

$$UtDp_{i,j} = \frac{1}{b(b-c)^2(-4F+b\alpha^2)^3} (4F^2(-4bB^2(b-c)^2 - (-2b+c)^2(a+A(-b+c))^2F) + 4B(b-c)(-2b+c)^2(a+A(-b+c))F^2\alpha + F(B^2(b-c)^2(8b^2+4bc-c^2) + 4b^2(2b-c)(a+A(-b+c))^2F)\alpha^2 - 4b^2B(2b^2-3bc+c^2)(a+A(-b+c))F\alpha^3 - b^2(B^2(b-c)^2(b+c) + b^2(a+A(-b+c))^2F)\alpha^4 + b^4B(b-c)(a+A(-b+c))\alpha^5)$$

De esta manera el δ^* de Bertrand – Nash en el “*súper juego*” simultáneo para el cartel sólo en precio está dado por:

$$\delta SD_p = -\frac{F(2(-2b+c)F+b(b-c)\alpha^2)^2}{(-2F+b\alpha^2)(2(8b^2-8bc+c^2)F^2-b(8b^2-8bc+c^2)F\alpha^2+b^3(b-c)\alpha^4)} \quad (3.2.33)$$

3.2.3 Cartel en Calidad – Competencia en Precio

Por último, sólo queda por describir la única forma restante mediante la cual las firmas podrían coludirse tácitamente, esto es, fijar conjuntamente un nivel de calidad y competir en precio. En este contexto las firmas maximizarán las utilidades conjuntas sólo sobre las variables S_i y S_j , según muestra la expresión (3.2.34).

$$\begin{aligned} \max_{(S_i, S_j) > 0} \{UtMs [Pp_i, Pp_j, S_i, S_j]\} = & \quad (3.2.34) \\ (Pp_i * Q_i[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j] - C_i[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j]) + (Pp_j * Q_j[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j] - & \\ C_j[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j]) & \end{aligned}$$

De la maximización anterior y las condiciones de primer orden, se obtienen las funciones de mejor respuesta para las calidades de cartel en función de los precios, tal como aparecen en el punto (3.2.35) del Anexo 1. Entre las funciones de mejor respuesta de calidad y las funciones de mejor respuesta en precio de la maximización individual (ver punto (3.2.3) y (3.2.5)) se calcula un sistema de ecuaciones que finalmente entregan los precios y calidades que el cartel en calidad anuncia, estos valores se muestran a continuación:

$$S_i = \frac{B(2b - c) - (b - c)(a + A(-b + c))\alpha}{2(-2b + c)F + (b - c)^2\alpha^2} \quad (3.2.35)$$

$$Pp_i = \frac{-2(a + Ab)F + B(b - c)\alpha + A(b - c)^2\alpha^2}{2(-2b + c)F + (b - c)^2\alpha^2} \quad (3.2.36)$$

$$Pp_j = \frac{-2(a + Ab)F + B(b - c)\alpha + A(b - c)^2\alpha^2}{2(-2b + c)F + (b - c)^2\alpha^2} \quad (3.2.37)$$

$$S_j = \frac{B(2b - c) - (b - c)(a + A(-b + c))\alpha}{2(-2b + c)F + (b - c)^2\alpha^2} \quad (3.2.38)$$

Con los resultados de (3.2.35) a (3.2.38) obtenemos la utilidad para la firma i del cartel en calidad.

$$UtMs_{i,j} = \frac{1}{(2(-2b+c)F+(b-c)^2\alpha^2)^2} (F(B^2(-2b+c)^2 + 4b(a + A(-b + c))^2F) - 4bB(b-c)(a + A(-b + c))F\alpha - (b-c)^2(B^2(b-c) + (a + A(-b + c))^2F)\alpha^2 + B(b-c)^3(a + A(-b + c))\alpha^3) \quad (3.2.39)$$

Tal como en los dos casos anteriores, necesitamos calcular el valor de la utilidad de desvío del cartel en calidad ($UtDs_{i,j}$) para posteriormente obtener el δ crítico (δ^*). Así como para los casos anteriores, el desvío en calidad también se traduce en un desvío en precio, por las mismas razones antes mencionadas. Al igual que para el cartel en precio, el mecanismo de desvío en este caso es a través de ofrecer unilateralmente una calidad distinta a la fijada por cartel, la cual maximiza la utilidad individual asumiendo que la otra firma mantiene la calidad de cartel. Para esto se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left[\begin{array}{l} Pp_i = \frac{B(b-c)\alpha + A(b-c)^2\alpha^2 - 2(a + Ab)F}{2(-2b+c)F + (b-c)^2\alpha^2} \\ S_i = \frac{B(2b-c) - (b-c)(a + A(-b+c))\alpha}{2(-2b+c)F + (b-c)^2\alpha^2} \\ Sds = -\frac{B + b(A - Ppds)\alpha}{2F} \\ Ppds = \frac{a + Ab + cPp_i - cS_i\alpha + bSds\alpha}{2b} \end{array} \right]$$

El valor del par $[Sds; Ppds]$ perteneciente al sistema de ecuaciones anterior está detallado en el *punto (3.2.40) del Anexo 1*. Al resolver el sistema de ecuaciones anterior se obtiene la utilidad de desvío del cartel en precio ($UtDs_{i,j}$), descrita por:

(3.2.41)

$$UtDs_{i,j} = \frac{-(4F^2(B^2(-2b+c)^2 + 4b(a+A(-b+c))^2F) - 16bB(b-c)(a + A(-b+c))F^2\alpha + F(B^2(-8b^3 + 16b^2c - 13bc^2 + 4c^3) - 8b(b-c)(a + A(-b+c)2F)\alpha^2 + 8bBb - c^2(a+A(-b+c))F\alpha^3 + b - c^2(B^2(b^2 - bc + c^2) + ba + A(-b+c)2F)\alpha^4 - bB(b-c)^3(a+A(-b+c))\alpha^5)/((-4F + b\alpha^2)(2(-2b+c)F + (b-c)2\alpha^2)2)}{}$$

De esta manera el δ^* de Bertrand – Nash en el “*súper juego*” simultáneo para el cartel sólo en calidad está dado por:

$$\delta SD_s = \frac{(2(-2b+c)F + b(b-c)\alpha^2)^2}{b(8(2b-c)F^2 + (-8b^2 + 10bc - 3c^2)F\alpha^2 + b(b-c)^2\alpha^4)} \quad (3.2.42)$$

Con la descripción de los tres esquemas de cartelización posibles y en último lugar antes de pasar a los análisis y comparaciones, es importante derivar de los resultados anteriores ciertas condiciones a los parámetros, adicionales a las condiciones de segundo orden de (3.2.20) que tratan sobre b, c, F y α , que permitirán llegar a resultados y análisis concretos, principalmente en el análisis de utilidades. Existen otras condiciones que serán utilizadas y que están definidas según criterios que aseguran que tanto precios como cantidades ofrecidas nunca sean negativas. Éstas tienen relación con los parámetros B, A y α , definiendo que: $a > \frac{2AF+2B\alpha}{\alpha^2} > \frac{2B}{\alpha} > A > 0$ y $B > 0$.

Antes de continuar con la subsección que trata la caracterización carteles es importante definir los niveles de precio y calidad que alcanzaría un planificador central, en otras palabras, los niveles del “*First Best*”. Con esto será posible realizar una comparación, “*Benchmark*”, entre niveles óptimos del planificador y los obtenidos de los esquemas de cartelización obtenidos con anterioridad.

Para este análisis es necesario comenzar con la función objetivo que maximiza el planificador central y que está determinada por:

(3.2.43)

$$\max_{(Pp_i, Pp_j, S_i, S_j) > 0} \{Ut_{FB}[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j]\} = \Pi_i[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j] + \Pi_j[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j] + \lambda Ut_c[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j]$$

$\Pi_i[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j]$: es la utilidad de la firma i

$\Pi_j[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j]$: es la utilidad de firma j

$Ut_c[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j]$: es el excedente de los consumidores

Tanto Π_i como Π_j ya están calculadas con anterioridad y corresponden a las utilidades de las firmas i y j obtenidas del proceso de maximización individual de principios de capítulo y que se encuentran representadas por Ut_{BN_i} y Ut_{BN_j} , respectivamente. Sin embargo, Ut_c no ha sido descrito hasta este punto, ya que sólo se asume la participación de los consumidores a través de las funciones de demanda que enfrentan las firmas y las que a su vez están en función de los “*Full Price*”, lo que se refleja en:

$$Q_i(\rho_i, \rho_j) = a - b\rho_i + c\rho_j$$

$$Q_j(\rho_i, \rho_j) = a - b\rho_j + c\rho_i$$

Donde:

$$\rho_i = Pp_i - \alpha S_i$$

$$\rho_j = Pp_j - \alpha S_j$$

En este sentido, como Ut_c representará al excedente del consumidor (CS por sus siglas en inglés), para obtenerlo será necesario primero invertir las funciones de demanda $[Q_i(\rho_i, \rho_j); Q_j(\rho_i, \rho_j)]$ (demandas directas), definiendo que:

$$\rho_i = A - Bq_i - Cq_j$$

$$\rho_j = A - Bq_j - Cq_i$$

Donde:

$$A = \frac{a}{b - c}$$

$$B = \frac{b}{(b^2 - c^2)}$$

$$C = \frac{c}{(b^2 - c^2)}$$

Además de invertir las funciones de demanda, se debe considerar que⁴:

$$CS = \int_p^a \sum_i q_i(p) dp_i = \left(\frac{b}{2}\right) \sum_k q_k^2 + e \sum_{k=2}^n \sum_{j=1}^{k-1} q_k q_j$$

Donde;

$$a = \frac{A}{B - (n - 1)E}$$

⁴ Según queda demostrado en Basso (2010): On Input Market Surplus and its Relation to the Downstream Market Game, donde se calcula esta integral de línea.

$$b = \frac{B - (n - 2)E}{(B - (n - 1)E)(B + E)}$$

$$e = \frac{E}{(B - (n - 1)E)(B + E)}$$

Así y definiendo la función CS en términos de las funciones de demanda inversa expuestas, se obtiene que:

$$CS = \int_{\vec{p}}^{\vec{A}} \sum_i q_i(\vec{p}) d\rho_i = \frac{b(q_i^2 + q_j^2) + cq_i q_j}{(b^2 - c^2)}$$

Finalmente la función objetivo que debe maximizar el planificador central queda definida por:

(3.2.44)

$$\begin{aligned} & \max_{(Pp_i, Pp_j, S_i, S_j) > 0} \{UtFB[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j]\} = \\ & Pp_i * Qi[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j] - Ci[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j] + Pp_j * Qj[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j] - \\ & Cj[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j] + (\lambda / ((b - c) * (b + c))) * (b * (Qi[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j]^2 + \\ & Qj[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j]^2) + (c * Qi[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j] * Qj[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j]) \end{aligned}$$

Las calidades y precios derivados las condiciones de primer orden son:

(3.2.45)

$$\begin{aligned} & Pp_i \\ & = \frac{(b + c)(-2aF + (b - c)(-2AF + B\alpha + A(b - c)\alpha^2)) + (2b + c)(2aF + B(-b + c)\alpha)\lambda}{(b - c)((b + c)(-4F + (b - c)\alpha^2) + 2(2b + c)F\lambda)} \end{aligned}$$

(3.2.46)

$$\begin{aligned} & Pp_j \\ & = \frac{(b + c)(-2aF + (b - c)(-2AF + B\alpha + A(b - c)\alpha^2)) + (2b + c)(2aF + B(-b + c)\alpha)\lambda}{(b - c)((b + c)(-4F + (b - c)\alpha^2) + 2(2b + c)F\lambda)} \end{aligned}$$

$$S_i = \frac{(b+c)(2B - (a + A(-b+c))\alpha) - B(2b+c)\lambda}{(b+c)(-4F + (b-c)\alpha^2) + 2(2b+c)F\lambda} \quad (3.2.47)$$

$$S_j = \frac{(b+c)(2B - (a + A(-b+c))\alpha) - B(2b+c)\lambda}{(b+c)(-4F + (b-c)\alpha^2) + 2(2b+c)F\lambda} \quad (3.2.48)$$

Las condiciones sobre los parámetros son las mismas utilizadas hasta el momento, las que aseguran la no negatividad de precios y calidades y que se cumplan las condiciones de segundo orden.

Con estos precios y calidades de “*First Best*” ya están las condiciones para realizar a continuación la caracterización de los carteles antes desarrollados.

3.3. Caracterización de los Carteles

Para entregar un ordenamiento y análisis más detallado y claro esta sección estará compuesta por cinco sub secciones que describirán cada una lo siguiente:

- 3.3.1 Comparación de Calidades.
- 3.3.2 Comparación de Precios
- 3.3.3 Comparación de Utilidades
- 3.3.4 Comparación de los Factores de Descuento (estabilidad de carteles)
- 3.3.5 Análisis sobre esquemas de colusiones factibles y rentables.

Es importante señalar que para el análisis siguiente se mantienen los supuestos del modelo, descritos con anterioridad y además se mantienen las condiciones sobre los parámetros derivados de las condiciones de segundo orden de los problemas de maximización desarrollados en la sección anterior, para lo cual remitirse al *punto (3.2.20) del Anexo 1*.

3.3.1 Comparación de Calidades

Según los resultados obtenidos en la sección anterior y las condiciones a los parámetros impuestas podemos describir a continuación el orden de magnitud que tienen las cantidades ofrecidas por los distintos esquemas de colusión, la calidad de competencia y las calidades de desvío.

En este sentido el orden que se presenta es:

$$S_iMp > S_dMsp > S_dMp > S_dMs > S_iC > S_iMsp > S_iMs \quad (3.3.1.1)$$

Donde:

S_iMp : es la calidad ofrecida por la firma i en el cartel en precio,

S_iMsp : es la calidad ofrecida por la firma i en el cartel en precio y calidad,

S_iMs : es la calidad ofrecida por la firma i en el cartel en calidad,

S_dMp : es la calidad de desvío en el cartel en precio,

S_dMsp : es la calidad de desvío en el cartel en precio y calidad,

S_dMs : es la calidad de desvío en el cartel en calidad, y

S_iC : es la calidad ofrecida por la firma i en competencia.

Intuitivamente, el nivel de calidad ofrecida por el cartel en calidad (S_iMs) es el menor de todos los niveles de calidad; esta situación puede darse porque este esquema presenta los mismos niveles de precio que la competencia (los más bajos dentro del grupo) por tanto la utilidad dada para este cartel ($UtMs_i$) es producto de los menores costos que enfrenta atribuidos a los bajos niveles de calidad que ofrece.

Le sigue el nivel de calidad que ofrece el cartel en precio y calidad (S_iMsp) el cual al tener la opción de elegir los niveles de precio y calidad de cartel es el

que mayormente maximiza rentas. Así es como eleva el precio por sobre el nivel de competencia y conjuntamente reduce la calidad a un nivel menor que el de competencia.

En el otro extremo, se ve que el cartel en precio ofrece los niveles más altos de calidad, dado que por tener precios altos la competencia se realiza en calidad.

Todas las calidades de desvío, bajo cualquier esquema colusivo, son mayores al nivel de calidad que ofrece la competencia y el propio cartel del que vienen dados inicialmente. Estos resultados parecen ser consistentes con la teoría, ya que donde existe la posibilidad de traición sólo se tomará en busca de ganancias mayores, por tanto ya sea para precios colusivos o de competencia, la traición del cartel en calidad se evidencia en una mayor oferta de calidad proveniente del aumento en la demanda derivada de esta acción a precios dados. En resumen, cualquier cartelización en calidad entrega bajos niveles de calidad.

Es importante volver a hacer mención de dos casos importantes que se desprenden del análisis y que fueron explicados con anterioridad. El primero tiene que ver con el cartel en precio y calidad, donde el desvío siempre ocurre en ambas variables a la vez. En otras palabras, para la firma que desvía, sería sub-óptimo traicionar el acuerdo en sólo una de las variables. Por esta razón puede verse en (3.3.1.1) que, siempre bajo el prisma del nivel de calidad ofrecido, este casi alcanza los valores de calidad del cartel en precio, esto a raíz de que traiciona bajando el precio y aumentando la calidad.

El otro caso importante y que se asemeja al racionamiento anterior, es la existencia de un nivel de calidad de desvío asociada al cartel en precio (S_dMp). Como el nivel de calidad en este tipo de cartel es definido en competencia, se debiera esperar que el nivel ofrecido no cambie cuando se trata de una colusión sólo en precio. Sin embargo, como se explicó anteriormente, traición en precio lleva necesariamente a cambiar los niveles ofrecidos de calidad. Si obviamos las razones funcionales y lo vemos desde el punto de vista del desarrollo del

juego, la conjetura inicial de la firma que traicionará en precio es que deberá ofrecer una calidad menor una vez que haya bajado el precio. Sólo así podrá obtener mayores utilidades, que las propias del cartel.

Por último, se puede inferir que las calidades de “*First Best*” no toman una posición única en el orden definido, sino que su posición depende del valor de parámetros del modelo. Por tanto, se hace imposible comparar los distintos niveles calidad obtenidos por el planificador central con los niveles de cartel total y parcial y competencia. En otras palabras, los niveles de “*First Best*” no permiten realizar un “*Benchmark*” adecuado, ya que su posición está determinada por el valor de los parámetros, siempre dentro del espacio de condiciones enunciadas.

Lo anterior no es sorprendente y así lo demuestra Spence (1975) quien determinó que la calidad y también precio de un monopolista podían ser mayores o menores que los del “*First Best*”, dependiendo de la forma en que la demanda y los costos responden ante incrementos en la calidad. Los resultados obtenidos, se extienden para los casos de competencia espacial y por cierto, al de colusión tácita.

3.3.2 Comparación de Precios

De acuerdo a los resultados de la sección anterior, supuestos y condiciones a los parámetros, se detallará a continuación el orden de magnitud que tienen los precios en relación a los distintos esquemas de colusión, así como los precios de competencia y desvío.

Así el orden de precios es:

$$Pp_iMp > Pp_iMsp > Pp_dsp > Pp_dp > Pp_ds > Pp_iC > Pp_iMs \quad (3.3.2.1)$$

Donde:

Pp_iMp : es el precio de la firma i en el cartel en precio,

Pp_iMsp : es el precio de la firma i en el cartel en precio y calidad,

Pp_dsp : es el precio de desvío en el cartel en calidad,

Pp_dap : es el precio de desvío en el cartel en precio,

Pp_das : es el precio de desvío en el cartel en calidad,

Pp_iC : es el precio de la firma i en competencia, y

Pp_iMs : es el precio de la firma i en el cartel en calidad

Como primera observación general es que todos los precios, salvo en de cartel en calidad (Pp_iMs), son mayores a los de competencia. Este hecho parece ser consecuente con la teoría monopólica. Sin embargo, ver que el precio del cartel en calidad sea menor al de competencia es menos esperado. La razón está dada porque las empresas en este tipo de cartelización compiten en calidad, por tanto y como se corrobora en la anterior sub sección, este cartel es el de menor calidad presionando a las firmas a disminuir sus precios en relación a la calidad que ofrecen, de lo contrario se arriesgarían a perder parte de la demanda. Por tal motivo, cuando una firma decide desviarse de este cartel, necesariamente debe hacerlo también en calidad (aumentándola respecto de la calidad de competencia), hecho que fue explicado anteriormente y se evidencia en la expresión (3.3.1.1).

Otro punto, es que todos los precios de desvío, salvo el del cartel en calidad, son menores al precio del cartel al cual corresponden. Esto puede entenderse fácilmente al reconocer que la utilidad de desvío debe compensar la “traición” a través de captar más demanda y reducir los costo por medio de disminuir la calidad, como lo es para el caso del cartel en precio.

Para el caso del cartel en precio y calidad, la combinación original es precio alto y calidad baja (menor que la de competencia). Cuando una firma se desvía (en ambas variables) baja el precio en menor medida de lo que lo hace el cartel en precio pero a su vez sube la calidad, de esta manera asegura la mayor utilidad de todos los esquemas colusivos.

Tal cual como fue expuesto en la subsección anterior sobre la comparación de calidades, los precios del planificador central no tienen una posición determinada de orden de magnitud, ya que su posición está en función de los valores de los parámetros del modelo.

3.3.3 Comparación de Utilidades

Ahora bien, dada entonces las condiciones sobre los parámetros enunciadas, el orden de magnitud que describen las utilidades asociadas a cada formato de cartel es:

$$UtM_{sp_{i,j}} > UtM_{p_{i,j}} > UtM_{s_{i,j}} \quad (3.3.3.1)$$

Del ordenamiento anterior, podemos decir que la razón por la cual la utilidad asociada al cartel de precio y calidad es la mayor, se debe a que éste tiene dos variables de optimización (precio y calidad) por sobre los demás carteles, que sólo lo hacen sobre una de ellas. Por otra parte, la razón por la cual la utilidad del cartel sólo en precio es mayor a la utilidad del cartel de calidad, es debido a que por un lado se da que $\frac{\partial S_{i,j}}{\partial P_{p_{i,j}}} > 0$, lo que implica que a mayor calidad ofrecida; mayor precio. Adicionalmente, las funciones de mejor respuesta en ambos casos, sólo dependen de los precios y al ser los precios de cartel mayores a los precios de competencia, el orden de utilidades se da como muestra (3.3.3.1).

Es importante recalcar que las utilidades así como se encuentran ordenadas en (3.3.3.1) se refieren al “atractivo” del cartel y no necesariamente a su estabilidad. No puede inferirse directamente que, por ejemplo, el cartel más rentable es el más estable, para lo cual se requiere analizar los distintos factores de descuento.

3.3.4 Comparación de Factores de Descuento (estabilidad de carteles)

Para poder determinar la sostenibilidad de un cartel, bajo cualquier esquema presentando, será importante realizar una comparación de los tres δ (δSD_{sp} , δSD_p , δSD_s) encontrados en la sub-sección anterior. Así es como en esta sub-sección se definirá un orden de magnitud de los δ , que junto al análisis de utilidades, permitirán entregar los análisis de factibilidad correspondientes (*sub sección 3.3.5*).

Según los resultados expuestos en la sección anterior, las condiciones de segundo orden y las condiciones de no negatividad de precios y cantidades, podemos concluir que el único orden de δ que se puede asegurar para el “*súper juego*” simultáneo es:

$$\delta SD_p > \delta SD_{sp} \tag{3.3.4.1}$$

El factor de descuento del cartel en calidad (δSD_s) no tiene una posición determinada, este puede tomar cualquier posición en la desigualdad (3.3.4.1), según cambien los valores de parámetros.

Este hecho podría adelantar, sólo desde la perspectiva del análisis de δ , que el cartel en precio podría ser más inestable que el cartel en precio y calidad.

3.3.5 Análisis sobre esquemas de colusiones factibles y rentables.

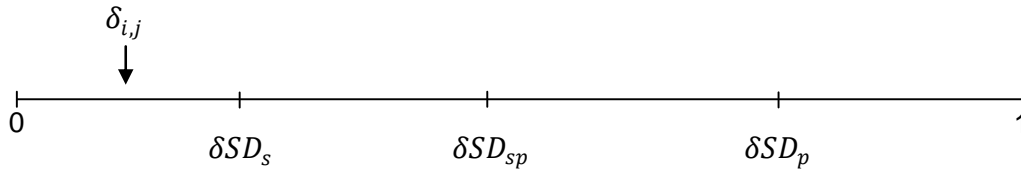
Hasta ahora se han entregado los principales resultados del juego simultáneo, los cuales tienen que ver con el ordenamiento de δ , utilidades, precios y cantidades. Además se han expuesto las intuiciones económicas tras cada resultado. Sin embargo, el principal resultado de esta sección tiene que ver cuando el análisis se hace con el cruce de la información de ordenamiento de δ y las utilidades de los distintos carteles.

En la sub-sección 3.3.4 se dijo que el orden presentado podría variar según el valor que tomen los parámetros del modelo, pero que nunca se observaría que $\delta SD_{sp} > \delta SD_p$. Y si además de esto consideramos el ordenamiento de las utilidades del cartel (3.3.3.1), donde UtM_{sp_i} es la mayor de todas, nos llevaría a concluir que en un juego simultáneo, dada las funciones de costo y demanda expuestas, nunca se observará una colusión sólo en precio. Este resultado es independiente del δ - valorización del futuro - que presente cada firma. Para ellas siempre será deseable alcanzar la utilidad que proporciona el cartel en precio y calidad y será factible en la medida que el factor de descuento de la firma este por sobre el valor crítico δSD_{sp} .

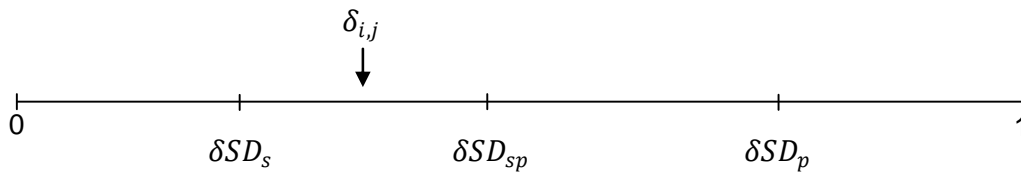
Viendo estos resultados por los distintos tramos de desigualdades expuestas el Esquema N° 1 podrá mostrar la existencia de los distintos carteles dependiendo del valor de $\delta_{i,j}$. Para ello se definirá un orden, de varios que pueden darse, que respete el resultado de que siempre $\delta SD_p > \delta SD_{sp}$ y que incluya al factor de descuento crítico del cartel sólo en calidad (δSD_s). El orden dado no hace perder generalidad al resultado, ya que el criterio es el mismo aún cuando el δSD_p tome cualquier posición.

Esquema N°1: Existencia de carteles según valores de $\delta_{i,j}$

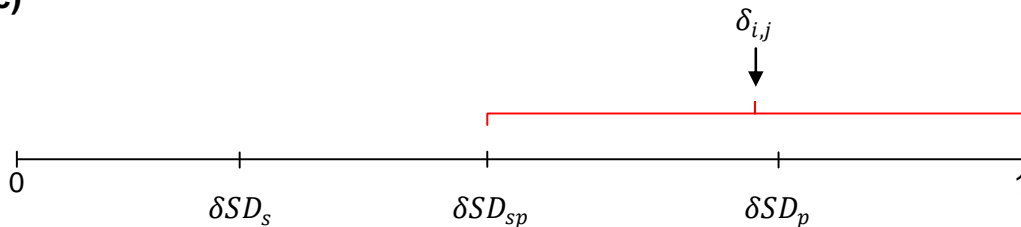
(a)



(b)



(c)



Lo primero que puede concluirse del Esquema N°1 es que si $\delta_{i,j} < \delta SSD_s$ (parte (a)) evidencia un baja valorización del futuro lo que se significa que no existirá colusión sostenible y por tanto las firmas elegirán competir. Luego en la parte (b) se muestra que si $\delta_{i,j} \in [\delta SSD_s; \delta SSD_{sp}]$ sólo se podrá observar colusión tácita en calidad. Y por último, para cualquier valor de $\delta_{i,j} \in [\delta SSD_{sp}; \delta SSD_p]$ sólo se verá colusión en precio y calidad aún cuando $\delta_{i,j} > \delta SSD_p$ (caso de mayor estabilidad), ya que la colusión en precio y calidad es el esquema colusivo más rentable y por tanto, más deseable por las firmas.

Como fue mencionado, si δSSD_s toma otra posición, al cambiar los valores de los parámetros, el resultado asociado a no encontrar un cartel sólo en precio es robusto.

Capítulo 4: “*Súper Juego*” Consecutivo.

Este capítulo apunta al desarrollo de un “*súper juego*” consecutivo el cual tiene como fin determinar en primera instancia si el cambio de “*timing*” del esquema consecutivo, donde las firmas elijen sus estrategias de precio y calidad, entrega otros resultados a los obtenidos del juegos simultáneo. Y en segundo lugar de existir tal diferencia, definir cuáles.

4.1. Presentación del Modelo

Dado los objetivos planteados se mantendrán las características del juego simultáneo, es decir, será un “*súper juego*” no cooperativo, con información completa y perfecta. Así también se mantendrán las funciones de demanda y de costos iniciales, descritas desde la (3.1.1) a la (3.1.4). Así mismo y con el fin de que los resultados de los juegos simultáneo y consecutivo sean comparables, se verán en esta sección los mismos esquemas competitivos (o colusivos) descritos anteriormente, esto es: competencia, cartel en precio y calidad, cartel sólo precio y cartel sólo calidad.

Antes de comenzar con la descripción de esquemas, diremos que el “*timing*” del “*stage game*” será que en $t = 1$ las firmas elijen la calidad y en $t = 2$, anunciar los precios. Por otra parte, la modalidad de resolución de las firmas en este juego será por “*backward induction*”, es decir, cada una determinará lo óptimo en $t = 2$, ya sea si compite o se colude y resolverá en $t = 1$ dado lo que resolvió en $t = 2$.

4.2. Colusión Total y Parcial: Cartel en Precio y Calidad, Cartel sólo en Precio y Cartel sólo en Calidad.

Al igual que para el caso simultáneo se resolverá el problema de competencia total entre las firmas. Para esto, las firmas simétricas maximizarán su función de utilidad individual, descrita por (4.2.1) sobre la variable precio. Con las condiciones de primer orden de ambas firmas, se resuelve el sistema de ecuaciones que determina finalmente las funciones de mejor respuesta en función de las calidades, dichas funciones podrán verse en el punto (4.2.2) del Anexo 1.

$$\max_{(Pp_{i,j}) > 0} \{UtBN_{i,j}[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j]\} = \quad (4.2.1)$$

$$Pp_{i,j} * Q_{i,j}[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j] - C_{i,j}[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j]$$

Dadas las funciones de mejor respuesta para el precio en $t = 2$ de (4.2.2), las firmas resuelven en $t = 1$ la maximización de (4.2.1) sobre calidad, obteniendo los siguientes niveles de calidad:

$$S_i = \frac{B(-2b + c)^2(2b + c) - 2b(2b^2 - c^2)(a + A(-b + c))\alpha}{-2(-2b + c)^2(2b + c)F + 2b(b - c)(2b^2 - c^2)\alpha^2} \quad (4.2.3)$$

$$S_j = \frac{B(-2b + c)^2(2b + c) - 2b(2b^2 - c^2)(a + A(-b + c))\alpha}{-2(-2b + c)^2(2b + c)F + 2b(b - c)(2b^2 - c^2)\alpha^2} \quad (4.2.4)$$

De los resultados anteriores y sustituyendo en las funciones de mejor respuesta en precio de (4.2.2), se determinan los siguientes precios de competencia:

$$Pp_i = \frac{-2(a + Ab)(4b^2 - c^2)F + B(b - c)(2b - c)(2b + c)\alpha + 2Ab(b - c)(2b^2 - c^2)\alpha^2}{-2(-2b + c)^2(2b + c)F + 2b(b - c)(2b^2 - c^2)\alpha^2} \quad (4.2.5)$$

$$Pp_j = \frac{-2(a+Ab)(4b^2-c^2)F+B(b-c)(2b-c)(2b+c)\alpha+2Ab(b-c)(2b^2-c^2)\alpha^2}{-2(-2b+c)^2(2b+c)F+2b(b-c)(2b^2-c^2)\alpha^2} \quad (4.2.6)$$

Finalmente, sustituyendo (4.2.3), (4.2.4), (4.2.5) y (4.2.6) en (4.2.1) obtenemos la siguiente utilidad de competencia para cada una de las firmas.

(4.2.7)

$$UtBN_{i,j} = \left[(64b^6B^2F - 64b^5B^2cF - 16b^4B^2c^2F + 32b^3B^2c^3F - 4b^2B^2c^4F - 4bB^2c^5F + B^2c^6F + 64a^2b^5F^2 - 128aAb^6F^2 + 64A^2b^7F^2 + 128aAb^5cF^2 - 128A^2b^6cF^2 - 32a^2b^3c^2F^2 + 64aAb^4c^2F^2 + 32A^2b^5c^2F^2 - 64aAb^3c^3F^2 + 64A^2b^4c^3F^2 + 4a^2bc^4F^2 - 8aAb^2c^4F^2 - 28A^2b^3c^4F^2 + 8aAbc^5F^2 - 8A^2b^2c^5F^2 + 4A^2bc^6F^2 - 4bB(b-c)(-4b^2+c^2)^2(a+A(-b+c))F\alpha + b(-B^2(b-c)(2b-c)^3(b+c)(2b+c) - 4b(-2b^2+c^2)^2(a+A(-b+c))^2F)\alpha^2 + 4b^2B(b-c)(-2b^2+c^2)^2(a+A(-b+c))\alpha^3) \right] / (4((-2b+c)^2(2b+c)F - b(b-c)(2b^2-c^2)\alpha^2)^2);$$

Una vez que ya está descrito el juego consecutivo en el esquema competitivo en ambas variables, pasaremos a describir los mismo tipos de acuerdo colusivos que se analizarón en el juego simultáneo. De la misma manera, se determinarán distintos niveles de utilidades, utilidades de desvío y calidad ofrecida, lo que en función de sus δ , finalmente entregarán los distintos grados de sostenibilidad bajo un “*súper juego*” consecutivo.

Este modelo agrega un supuesto adicional a los considerados en el juego simultáneo, el cual tiene que ver con la verificabilidad que permite el “*timing*” del “*stage game*” sobre los anuncios hechos por las firmas tanto en $t = 1$ como en $t = 2$, esta característica evitaría a las firmas poder desviarse en precio y calidad a la vez.

4.2.1 Cartel en Precio y Calidad

De la misma manera que fue resuelto el juego consecutivo para la competencia, ahora se resolverá el problema de las firmas cuando ambas elijan precio y calidad de manera conjunta y tácitamente. Así y también por “*backward induction*” en $t = 2$, las firmas maximizarán la siguiente función de utilidad conjunta (4.2.8), sobre la variable precio.

$$\begin{aligned} \max_{(Pp_i, Pp_j) > 0} \{UtM_{sp_{i,j}}[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j]\} = & \quad (4.2.8) \\ (Pp_i * Q_i[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j] - C_i[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j]) + (Pp_j * Q_j[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j] - & \\ C_j[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j]) & \end{aligned}$$

De la maximización y luego de resolver el sistema de ecuaciones, se obtienen las funciones de mejor respuesta descritas en el punto (4.2.9) del Anexo 1. Luego las firmas en $t = 1$ resuelven el nivel que ofrecerán de calidad, dado que en $t = 2$, tendrán los niveles de precio descritos en (4.2.9). De esta forma se obtienen las siguientes calidades derivadas del correspondiente sistema de ecuaciones:

$$S_i = \frac{2B - (a + A(-b + c))\alpha}{-4F + (b - c)\alpha^2} \quad (4.2.10)$$

$$S_j = \frac{2B - (a + A(-b + c))\alpha}{-4F + (b - c)\alpha^2} \quad (4.2.11)$$

Por último, dado (4.2.10) y (4.2.11), los valores finales de los precios de cartel en ambas variables son:

$$Pp_i = A + \frac{-2aF + (b - c)(2AF + B\alpha)}{(b - c)(-4F + (b - c)\alpha^2)} \quad (4.2.12)$$

$$Pp_j = A + \frac{-2aF + (b - c)(2AF + B\alpha)}{(b - c)(-4F + (b - c)\alpha^2)} \quad (4.2.13)$$

Sustituyendo desde (4.2.10) hasta (4.2.13) en (4.2.14) del Anexo 1, obtenemos:

$$UtM_{sp_{i,j}} = \frac{3B^2(-b + c) - 3(a + A(-b + c))^2F + 3B(b - c)(a + A(-b + c))\alpha}{2(b - c)(-4F + (b - c)\alpha^2)} \quad (4.2.15)$$

Es importante señalar precios, cantidades y utilidad del cartel en precio y calidad son los mismos para tanto para el juego simultáneo como para el consecutivo, es decir, estos resultados son independientes del “*timing*”.

Ahora bien, para calcular las utilidades de desvío, requeridas para determinar los factores de descuento, será necesario describir el mecanismo de desvío que, nuevamente a causa del “*timing*”, resulta complejo describir. En el primer caso, cuando una de las firmas desvía en calidad, asumirá inicialmente que la otra firma mantendrá los niveles de precio y calidad de monopolio. Sin embargo, al resolver su anuncio de calidad en $t = 1$ por “*backward induction*” verá que apenas anuncie un nivel distinto de calidad de cartel, verificable por la firma “traicionada” en $t = 2$, esta última aplicará “precios de castigo”, menores a los de monopolio, a partir de ese momento. Por tal razón, la firma que pretenda desviar en calidad deberá maximizar su utilidad individual en $t = 1$, con

respecto a la calidad de desvío (S_d), sabiendo que esta utilidad estará en función del nivel de calidad de cartel de la firma “traicionada” (en este caso S_i) y los precios de castigo [Pp_iC, Pp_jC], además de S_d . Dicho problema de maximización está descrito a continuación:

$$\begin{aligned} \max_{(S_d) > 0} \{UtBN_d[Pp_iC, Pp_jC, S_i, S_d]\} & \quad (4.2.16) \\ & = Pp_jC * Qj[Pp_iC, Pp_jC, S_i, S_d] - Cj[Pp_iC, Pp_jC, S_i, S_d] \end{aligned}$$

Donde:

$$S_i = \frac{2B - (a + A(-b + c))\alpha}{-4F + (b - c)\alpha^2}$$

$$Pp_iC = \frac{(a + Ab)(2b + c) + (2b^2Si - c^2Si - bcSd)\alpha}{4b^2 - c^2}$$

$$Pp_jC = \frac{(a + Ab)(2b + c) + (-bcSi + 2b^2Sd - c^2Sd)\alpha}{4b^2 - c^2}$$

Al resolver el problema anterior, se obtiene el nivel de calidad de desvío (S_d) que maximiza la utilidad de la firma que “traiciona”. Además los precios finales de castigo [Pp_iC, Pp_jC]. Ambos resultados están descritos en el punto (4.2.17) del Anexo 1. Finalmente la utilidad de desvío en calidad del cartel de precio y calidad $UtDsMsp_{i,j}$ queda definida según se muestra en la expresión (4.2.18) del Anexo 1. Ya con las utilidades necesarias, se ha calculado en valor final de $\delta BNCDsMsp$, pero dada la complejidad final de la expresión y considerando que no entrega ninguna posibilidad de análisis directo, se ha decidido no describirla en este documento ni en el Anexo 1.

Ahora bien tal como para el juego simultáneo será necesario calcular la utilidad de desvío para el cartel en precio y calidad con el fin de determinar el δ crítico (δ^*), según la misma relación usada anteriormente (ver (3.2.1)). Sin embargo,

por la particularidad del “*timing*” asociado al juego consecutivo, el cartel en precio y calidad aquí tiene dos desvíos posibles, uno referente al desvío en calidad ($UtDsMsp_{i,j}$) y el otro derivado del desvío en precio ($UtDpMsp_{i,j}$). Por esta razón, este esquema de colusión entregará dos distintos δ críticos (δ^*), $\delta CD_s M_{sp}$ y $\delta CD_p M_{sp}$, para lo cual se utilizan las dos relaciones siguientes respectivamente:

$$\delta CD_s M_{sp} = (UtDsMsp_{i,j} - UtMsp_{i,j}) / (UtDsMsp_{i,j} - UtBN_{i,j}) \quad (4.2.19)$$

$$\delta CD_p M_{sp} = (UtDpMsp_{i,j} - UtMsp_{i,j}) / (UtDpMsp_{i,j} - UtBN_{i,j}) \quad (4.2.20)$$

Del párrafo anterior se desprende una de las diferencias importantes que arroja el juego consecutivo respecto del simultáneo, la cual dice relación a que el “*timing*” inhabilita la posibilidad de que las firmas puedan desviar en ambas variables a la vez, lo que implicaría que este esquema de cartel sería más estable en el modelo consecutivo que en el simultáneo, ya que utilidad de traición debiera ser menor. La razón deriva del supuesto de verificabilidad que tienen los desvíos, esto es que los anuncios de calidad que hace cada firma en $t = 1$, son verificables por ambas en $t = 2$ y por lo cual, permitiría a cualquier firma que sea “traicionada” poder anunciar “precios de castigo”⁵ que se harán efectivos desde ese momento en adelante. Para el caso de desvío en precio en $t = 2$, esta será igualmente verificada y sólo castigada en la repetición del juego, ya que la firma que pretenda desviarse en precio no puede señalar esta intención en $t = 1$ variando la calidad porque se le aplicaría “precios de castigo” antes de que pudiera desviarse.

⁵ Los precios de castigo [PpC_i, PpC_j] que cualquiera de las firmas puede anunciar en $t = 2$ al verse “traicionada” se relacionan a las funciones de mejor respuesta en precio, del problema individual de competencia (3.2.1), pero ahora determinadas por la nueva calidad observada; la de desvío (S_d).

El caso de determinar la utilidad de desvío en precio del cartel en precio y calidad, es más simple que para el caso de desvío en calidad descrito principalmente desde la perspectiva del racionamiento, ya que como se explicó anteriormente, el desvío al ocurrir en $t = 2$, sólo queda la posibilidad de que la firma “traicionada” aplique castigo cuando el juego se vuelva a repetir. Por tal motivo, el mecanismo sólo queda reducido a que la firma que pretende desviar maximiza su utilidad individual respecto al precio de desvío⁶ (Pp_d), considerando que la utilidad estará en función de las calidades de cartel anunciadas por ambas firmas en $t = 1$ (en este caso S_i, S_j) y que la firma “traicionada” mantendrá el precio de cartel (Pp_i), determinado por las calidades enunciadas. El problema descrito queda definido según la siguiente expresión:

(4.2.21)

$$\max_{(Pp_d) > 0} \{UtBN_d[Pp_i, Pp_d, S_i, S_j]\} = Pp_d * Q_{i,j}[Pp_i, Pp_d, S_i, S_j] - C_{i,j}[Pp_i, Pp_d, S_i, S_j]$$

Donde;

$$S_i = \frac{2B - (a + A(-b + c))\alpha}{-4F + (b - c)\alpha^2}$$

$$S_j = \frac{2B - (a + A(-b + c))\alpha}{-4F + (b - c)\alpha^2}$$

$$Pp_i = A + \frac{-2aF + (b - c)(2AF + B\alpha)}{(b - c)(-4F + (b - c)\alpha^2)}$$

Al resolver el problema planteado (4.2.21), se determina que el precio de desvío que maximiza la utilidad individual está definido de la siguiente manera:

⁶ El precio de desvío (Pp_d) viene dado por la función de mejor respuesta en precio del problema individual de competencia (4.2.1).

(4.2.22)

$$Pp_a = \frac{2a(-2b + c)F + (b - c)(-2A(2b + c)F + B(2b - c)\alpha + 2Ab(b - c)\alpha^2)}{2b(b - c)(-4F + (b - c)\alpha^2)}$$

A su vez la utilidad derivada del desvío en precio en el cartel de precio y calidad es:

(4.2.23)

$$UtDpM_{sp_{i,j}} = \frac{1}{4b(b-c)^2(4F+(-b+c)\alpha^2)^2} (4F(-4bB^2(b-c)^2 + (-2b+c)^2(a+A(-b+c))^2F) - 4B(b-c)(-2b+c)^2(a+A(-b+c))F\alpha + (b-c)^2(B^2(12b^2 - 12bc + c^2) + 4b(a+A(-b+c))^2F)\alpha^2 - 4bB(b-c)^3(a+A(-b+c))\alpha^3)$$

Al igual que para el caso del desvío en calidad, en este caso la expresión asociada a $\delta CD_p M_{sp}$ no tiene relevancia analítica y dada su extensión será omitida de este documento. Sin embargo, si se expondrán los análisis derivados de esta, así como los análisis comparativos respecto los δ de desvío del juego simultáneo. Por tanto ahora daremos paso a la descripción del cartel sólo en precio bajo el juego consecutivo.

4.2.2 Cartel en Precio – Competencia en Calidad

Según el “*timing*” descrito para el juego consecutivo, el cartel el precio debiera materializarse en $t = 2$, momento en que las firmas anunciarán los precios de cartel. En este sentido, cada firma resolverá su problema de maximización sobre la utilidad conjunta basada en precios, de la forma siguiente:

$$\max_{(Pp_i, Pp_j) > 0} \{UtM_{p_{i,j}}[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j]\} = \quad (4.2.24)$$

$$(Pp_i * Q_i[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j] - C_i[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j]) + (Pp_j * Q_j[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j] - C_j[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j])$$

De las condiciones de primer orden y posterior sistema de ecuaciones, se definen las funciones de mejor respuesta para los precios de cartel, las que están descritas en el *punto (4.2.25) del Anexo 1*.

Con las funciones de mejor respuesta en precios dados por (4.2.25), ahora en $t = 1$, las firmas deben anunciar su nivel de calidad de competencia. Por tanto, cada una de ellas maximizará la función de utilidad (4.2.26) (*ver Anexo 1*) respecto a $S_{i,j}$ para definir el nivel de calidad que ofrecerá, esto posteriormente, entregará el nivel de precios de cartel, tal como se ve a continuación.

$$S_i = \frac{4B(b-c) - (2b-c)(a + A(-b+c))\alpha}{(b-c)(-8F + (2b-c)\alpha^2)} \quad (4.2.27)$$

$$S_j = \frac{4B(b-c) - (2b-c)(a + A(-b+c))\alpha}{(b-c)(-8F + (2b-c)\alpha^2)} \quad (4.2.28)$$

Por último, dado (4.2.27) y (4.2.28), los valores finales de los precios de cartel en precio son:

$$Pp_i = A + \frac{-4aF + 2(b-c)(2AF + B\alpha)}{(b-c)(-8F + (2b-c)\alpha^2)} \quad (4.2.29)$$

$$Pp_j = A + \frac{-4aF + 2(b-c)(2AF + B\alpha)}{(b-c)(-8F + (2b-c)\alpha^2)} \quad (4.2.30)$$

Sustituyendo con (4.2.27) hasta (4.2.30) en la función de utilidad de cada firma, obtenemos la utilidad que deriva del cartel en precio, la cual está descrita por:

(4.2.31)

$$UtMp_{i,j} = (16(b-c)F(B^2(b-c) + (a + A(-b+c))^2F) - 16B(b-c)^2(a + A(-b+c))F\alpha - (4bB^2(b-c)^2 + (-2b+c)^2(a + A(-b+c))^2F)\alpha^2 + B(b-c)(-2b+c)^2(a + A(-b+c))\alpha^3)/((b-c)^2(8F + (-2b+c)\alpha^2)^2)$$

Utilizando la misma estructura (4.2.16) pero esta vez describiendo los términos para calcular el δ crítico (δ^*) del cartel en precio ($\delta CD_p M_p$), queda por determinar la utilidad de desvío en precio, la que estará dada por el problema de maximización de la utilidad individual de desvío en precio, definida por (4.2.32).

(4.2.32)

$$\max_{(Ppd)>0} \{UtBN_d[PP_i, Pp_d, S_i, S_j]\} = Pp_d * Q_{i,j}[PP_i, Pp_d, S_i, S_j] - C_{i,j}[PP_i, Pp_d, S_i, S_j]$$

Dicha utilidad toma como dado que la firma “traicionada” mantiene los valores ofertados de calidad y precio, descritos por (3.2.27) y (3.2.29), respectivamente. Así también considera que la misma firma que desvía mantiene el nivel de calidad (S_j) descrito por (3.2.28) y anunciado en $t = 1$. Así el precio de desvío queda dado por:

(4.2.33)

$$Pp_d = \frac{2a(-2b+c)F + (b-c)(-2A(2b+c)F + B(2b-c)\alpha + Ab(2b-c)\alpha^2)}{b(b-c)(-8F + (2b-c)\alpha^2)}$$

Determinando junto a (3.2.27), (3.2.29) y (3.2.28), la siguiente utilidad de desvío del cartel en precio:

(4.2.34)

$$UtDpMp_{i,j} = \frac{1}{b(b-c)^2(8F+(-2b+c)\alpha^2)^2} (4F(-4bB^2(b-c)^2 + (-2b+c)^2(a+A(-b+c))^2F) - 4B(b-c)(-2b+c)^2(a+A(-b+c))F\alpha + (2b-c)(B^2(b-c)^2(6b-c) + b(2b-c)(a+A(-b+c))^2F)\alpha^2 - bB(b-c)(-2b+c)^2(a+A(-b+c))\alpha^3)$$

Es importante resaltar que la razón por la cual en este esquema de cartelización la firma que desvía en precio no lo hace también en calidad, está dada por el “*timing*”, ya que si la firma “traidora” sabe que desviará en precio en $t = 2$ y de acuerdo a esto, varia el nivel de calidad anunciado en $t = 1$, estaría revelando su estrategia, produciendo que la otra firma aplique “precios de castigo” al verificar en $t = 2$ que la calidad es distinta a la anunciada.

Con las utilidades del cartel en precio (4.2.31), la utilidad de competencia (4.2.15) y la utilidad de desvío en precio (4.2.34) ya se puede entregar el δ crítico de este esquema competitivo. Pero al igual que para el caso de los demás δ del juego consecutivo, la expresión asociada a $\delta CD_p M_p$ no tiene relevancia analítica y dada su extensión, será intencionalmente omitida de este documento. Sin embargo, si se expondrán los análisis derivados de esta, así como los análisis comparativos respecto los δ de desvío del juego simultáneo.

4.2.3 Cartel en Calidad – Competencia en Precio

Queda por detallar el esquema de cartelización que tiene referencia a cuando las firmas se coluden en calidad $t = 1$ y compiten en precio en $t = 2$. Según esto y mediante “*backward induction*”, las firmas anunciarán su calidad de cartel, dado los precios de competencia de $t = 2$. Para ello, primero calcularán dichos precios a través de la maximización individual respecto al precio, tal como lo muestra (4.2.35):

(4.2.35)

$$\max_{(Pp_i, Pp_j) > 0} \{UtBN_{i,j}[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j]\} =$$

$$Pp_{i,j} * Q_{i,j}[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j] - C_{i,j}[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j]$$

Del problema de maximización (4.2.35) se obtienen las condiciones de primer orden y un sistema de ecuaciones con las funciones de precios, que determinan finalmente las funciones de mejor respuesta para los precios, descritas en el punto (4.2.36) del Anexo 1.

Luego las firmas, en $t = 1$, anunciarán sus niveles de calidad de cartel, derivados de la maximización conjunta respecto a $S_{i,j}$ y tomando como dadas las funciones de mejor respuesta para los precios en $t = 2$ y que están definidas en (4.2.36). Así las firmas resolverán el siguiente problema en $t = 1$:

$$\max_{(S_i, S_j) > 0} \{UtMs_{i,j}[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j]\} = \quad (4.2.37)$$

$$(Pp_i * Q_i[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j] - C_i[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j]) + (Pp_j * Q_j[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j] - C_j[Pp_i, Pp_j, S_i, S_j])$$

De las condiciones de primer orden del problema anterior y luego de resolver el sistema de ecuaciones asociado a este, se obtienen los siguientes valores para calidades y precios que ofrecerá el cartel en $t = 1$ y la competencia en $t = 2$, respectivamente.

$$S_i = \frac{B(-2b + c)^2 - 2b(b - c)(a + A(-b + c))\alpha}{-2(-2b + c)^2F + 2b(b - c)^2\alpha^2} \quad (4.2.38)$$

$$S_j = \frac{B(-2b + c)^2 - 2b(b - c)(a + A(-b + c))\alpha}{-2(-2b + c)^2F + 2b(b - c)^2\alpha^2} \quad (4.2.39)$$

Dado (4.2.38) y (4.2.39), los valores finales de los precios de competencia serán:

$$Pp_i = \frac{-2(a + Ab)(2b - c)F + B(2b^2 - 3bc + c^2)\alpha + 2Ab(b - c)^2\alpha^2}{-2(-2b + c)^2F + 2b(b - c)^2\alpha^2} \quad (4.2.40)$$

$$Pp_j = \frac{-2(a + Ab)(2b - c)F + B(2b^2 - 3bc + c^2)\alpha + 2Ab(b - c)^2\alpha^2}{-2(-2b + c)^2F + 2b(b - c)^2\alpha^2} \quad (4.2.41)$$

Sustituyendo con (4.2.38) hasta (4.2.41) en la función de utilidad de cada firma, obtenemos la utilidad del cartel en calidad, la cual está representada por:

$$(4.2.42)$$

$$UtMs_{i,j} = -B^2c^2 - 4Ab^3(AF + B\alpha) - 4b(-B^2c + (a + Ac)^2F + Bc(a + Ac)\alpha) + b^2(-4B^2 + 8A(a + Ac)F + 4B(a + 2Ac)\alpha)/(-4(-2b + c)^2F + 4b(b - c)^2\alpha^2)$$

Tal como en los casos anterior, es necesario ahora calcular la utilidad de desvío en calidad para posteriormente obtener el δ crítico del juego consecutivo para cuando las firmas se coluden sólo en calidad ($\delta CD_s M_s$). Para esto la firma que desvía maximiza nuevamente su utilidad individual respecto a la calidad de desvío (S_d), considerando como dado que la otra firma mantendrá su calidad de cartel (4.2.38), pero que aplicará “precios de castigo” al verificar en $t = 2$ que la calidad ofrecida por la firma “traidora” será distinta a la declarada en $t = 1$. Tales “precios de castigo” son representados por el par $[Pp_iC, Pp_jC]$ y corresponden a las funciones de mejor respuesta en precios de competencia obtenidos en $t = 2$, los cuales están descritos en el *punto (4.2.43) del Anexo 1*,

De acuerdo al párrafo anterior, la firma que desvía resolverá el siguiente problema de maximización (4.2.44) para determinar el nivel de calidad de desvío:

$$\max_{(S_d) > 0} \{ UtBN_d [Pp_i C, Pp_j C, S_i, S_d] \} = Pp_{i,j} C * Q_{i,j} [Pp_i C, Pp_j C, S_i, S_d] - C_{i,j} [Pp_i C, Pp_j C, S_i, S_d] \quad (4.2.44)$$

Así la calidad de desvío queda definida por:

$$S_d = \frac{(-B(-2b + c)^4(2b + c)^2 F + 2b(-2b + c)^2(2b + c)(2b^2 - c^2)(a + A(-b + c))F\alpha + bB(-2b + c)^2(4b^4 - 2b^3c - 3b^2c^2 + bc^3 + c^4)\alpha^2 - 2b^2(b - c)(-2b^2 + c^2)^2(a + A(-b + c))\alpha^3) / (2(-(-2b + c)^2 F + b(b - c)^2 \alpha^2)(-(-4b^2 + c^2)^2 F + b(-2b^2 + c^2)^2 \alpha^2))}{(4.2.45)}$$

La expresión (4.2.45) determina a su vez los “precios de castigo” del *punto (4.2.43) del Anexo 1* y estos junto a (S_i) de cartel (ver (4.2.38)), definen finalmente la utilidad de desvío. Los valores finales de los “precios de castigo” y la utilidad de desvío en calidad ($UtDsMs_{i,j}$) están descritos, por su extensión, en el *punto (4.2.46) del Anexo 1*.

Con las utilidades del cartel en calidad (4.2.42), la utilidad de competencia (4.2.15) y la utilidad de desvío en precio (4.2.46) es posible determinar el δ crítico de este esquema colusivo en calidad. Al igual que para el caso de los demás δ del juego consecutivo, la expresión asociada a $\delta CD_s M_s$ no tiene relevancia analítica y dada su extensión, será omitida de este documento. Sin embargo, si se expondrán los análisis derivados de esta, así como los análisis comparativos respecto los δ de desvío del juego simultáneo.

Antes de pasar a la siguiente sección, es importante mencionar aquí que fueron deducidas nuevas condiciones a los parámetros⁷, consistentes con las condiciones de segundo orden (3.2.20) del Anexo 1 y sobre la base del mismo criterio que fueron obtenidas estas mismas condiciones sobre los parámetros B, A y a , en el juego simultáneo. Dichas condiciones son: $a > \frac{2AF+2B\alpha}{\alpha^2} > \frac{B}{\alpha} > A > 0$ y $B > 0$.

4.3. Caracterización de los Carteles

Al igual que para el caso simultáneo para entregar un ordenamiento y análisis más detallado y claro esta sección estará compuesta por cinco sub secciones que describirán cada una lo siguiente:

- 4.3.1 Comparación de Calidades
- 4.3.2 Comparación de Precios
- 4.3.3 Comparación de Utilidades
- 4.3.4 Comparación de los Factores de Descuento (estabilidad de carteles)
- 4.3.5 Análisis sobre esquemas de colusiones factibles y rentables.

Antes de comenzar con el análisis se recuerda que se mantendrán los supuestos del modelo, descritos con anterioridad. Además se mantienen las condiciones sobre los parámetros derivados de las condiciones de segundo orden de los problemas de maximización desarrollados en la sección anterior, para lo cual remitirse al *punto (3.2.20) del Anexo 1*.

⁷ Las restricciones sobre estos últimos parámetros están dadas según criterios que aseguran que tanto precios como cantidades ofrecidas nunca sean negativas.

4.3.1 Comparación de Calidades.

En esta sub-sección se expondrán los distintos niveles de calidad que ofrecen las firmas bajo los distintos esquemas de colusión en el juego consecutivo, a la vez también se entregarán las principales diferencias que existen en el orden que tienen estas en el juego simultáneo.

Según los mismos supuestos y restricciones a los parámetros expuestos, al inicio de la sub-sección anterior, que son los mismos que fueron considerados para el juego simultáneo, podemos describir a continuación, en (4.3.1.1), el orden de magnitud que tienen las cantidades ofrecidas por los distintos esquemas de colusión, la calidad de competencia y las calidades de desvío.

$$S_iMp > S_dMs > S_dMsp > S_iBN > S_iMsp > S_iMs \quad (4.3.1.1)$$

Donde:

S_iMp : es la calidad ofrecida por la firma i en el cartel en precio,

S_iMsp : es la calidad ofrecida por la firma i en el cartel en precio y calidad,

S_iMs : es la calidad ofrecida por la firma i en el cartel en calidad,

S_dMsp : es la calidad de desvío en el cartel en precio y calidad,

S_dMs : es la calidad de desvío en el cartel en calidad, y

S_iBN : es la calidad ofrecida por la firma i en competencia.

Si comparamos (4.3.1.1) con (3.3.1.1) que es el orden de calidad que entregan las firmas en el juego simultáneo, podemos ver que la única diferencia es que (4.3.1.1) no presenta la calidad de desvío del cartel en precio (S_iMp), esto se debe a que el “*timing*” consecutivo impide que las firmas desvíen del acuerdo en calidad, dada la verificabilidad del nivel anunciado en $t = 1$, tal como fue

explicado con anterioridad. Todo lo demás, incluyendo la intuición que explicaría el orden, es exactamente igual que para el caso del juego simultáneo.

Por lo tanto, se concluye que el orden de los niveles de calidad es igual al del juego simultáneo, evidenciando que el comportamiento de los distintos tipos de cartel y la intuición económica tras este resultado, son independientes del “*timing*” del juego.

4.3.2 Comparación de Precios

Los precios obtenidos de juego consecutivo a través del análisis de los distintos esquemas colusivos, totales y parciales, pueden ordenarse según la siguiente expresión:

$$Pp_iMp > Pp_iMsp > Pp_dp > Pp_dsp > Pp_iC > Pp_iMs \quad (4.3.2.1)$$

Donde:

Pp_iMp : es el precio de la firma i en el cartel en precio,

Pp_iMsp : es el precio de la firma i en el cartel en precio y calidad,

Pp_dsp : es el precio de desvío en el cartel en calidad,

Pp_dp : es el precio de desvío en el cartel en precio,

Pp_iC : es el precio de la firma i en competencia, y

Pp_iMs : es el precio de la firma i en el cartel en calidad

Si se comparan las expresiones que describen el ordenamiento de precios para los casos de un “*timing*” simultáneo y consecutivo, es decir comparar las expresiones (4.3.2.1) y (3.3.2.1), veremos que existen dos diferencias. La primera tiene que ver con que en el juego consecutivo no existe valor para

Pp_{ds} , ya que en el caso del cartel sólo en calidad no existe desvío en precio además del desvío en calidad propio del cartel como en el caso simultáneo, la razón es la verificabilidad antes descrita. La segunda diferencia es que existe un cambio de orden entre los precios de desvío del cartel en precio y calidad y del cartel sólo precio. Para este un “*timing*” simultáneo se da que $Pp_{dsp} > Pp_{dp}$, mientras que para el caso consecutivo la desigualdad es inversa.

El motivo de este cambio de orden asociado al “*timing*” podría tener que ver más con un cambio en el cartel en precio y calidad que en el cartel en precio, debido a que ante la imposibilidad de desviar en precio y calidad a la vez, necesitaría una baja de precio mayor, que para el caso simultáneo, para atraer mayor demanda y así generar una utilidad superior a la que le ofrece el cartel y valide el desvío. Esta explicación puede aplicarse también al caso del cartel sólo en precio, ya que como se ha señalado, en el juego simultáneo, la firma al desviar en precio lo hace también en calidad. Como en el juego consecutivo esta alternativa está bloqueada por la verificabilidad que ofrece el “*timing*” no queda otra opción más que desviar sólo en precio pero en una magnitud mayor. Ahora bien, como se demuestra en (4.3.2.1), la magnitud de la disminución en precio será mayor para el cartel en precio y calidad que para el cartel sólo en precio.

Todos los otros aspectos relacionados con los precios son iguales entre ambos “*súper juegos*”. Lo mismo pasa con las intuiciones que hay detrás de los ordenes descritos en (4.3.2.1) y (3.3.2.1).

4.3.3 Comparación de Utilidades

Al realizar el análisis bajo las condiciones sobre los parámetros enunciados, se puede concluir que para el juego consecutivo pueden existir dos órdenes para

las utilidades derivadas de cada modalidad de cartel, los cuales aparecen descritos a continuación:

$$UtM_{sp_{i,j}} > UtM_{p_{i,j}} > UtM_{s_{i,j}} \quad (4.3.3.1)$$

y

$$UtM_{sp_{i,j}} > UtM_{s_{i,j}} > UtM_{p_{i,j}}$$

Este resultado es consistente con el orden descrito para el juego simultáneo en cuanto a que la utilidad que entrega el cartel en precio y calidad ($UtM_{sp_{i,j}}$) es mayor a todas las demás utilidades asociadas a las otras formas de colusión. La razón es la misma, las firmas tienen dos variables de optimización en vez de una, para maximizar sus utilidades. Por otra parte, se ve que el “*timing*” del juego consecutivo produce que no exista definición sobre el orden de magnitud de la utilidad del cartel en precio ($UtM_{p_{i,j}}$) y la utilidad del cartel en calidad ($UtM_{s_{i,j}}$)⁸.

Por ejemplo para los siguientes valores de los parámetros: $b = \frac{169}{1024}$, $c = \frac{1}{8}$, $F = \frac{1}{32}$, $a = 5$, $A = \frac{3}{2}$, $B = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$, se cumple que: $UtM_{p_{i,j}} > UtM_{s_{i,j}}$, pero en cambio, para otros valores de parámetros, tales como: $b = \frac{169}{1024}$, $c = \frac{1}{8}$, $F = \frac{3}{128}$, $a = 5$, $A = \frac{3}{2}$, $B = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$, se cumplirá que: $UtM_{s_{i,j}} > UtM_{p_{i,j}}$. Como se puede ver manteniendo fijos b, c, a, A, B y α y sólo dándole valores muy bajas a F se puede invertir el orden de estas utilidades.

⁸ Según los cálculos efectuados a través de la función “*FindInstance*” (función que determina si existen o no valores para los distintos parámetros de tal forma se cumplan las condiciones que se imponen) del programa “*Wolfram Mathematica 7.0*”, siempre existirán valores para los parámetros del modelo que, dada las condiciones de los párrafos anteriores, impidan determinar cuál de las utilidades es mayor. La aplicación de la función descrita puede verse en el *punto (4.3.48) del Anexo 1*.

Ahora bien, como el objetivo de definir un juego consecutivo era evaluar si el “*timing*” descrito podía modificar los resultados obtenidos en el juego simultáneo, entonces lo importante será encontrar en este momento, contraejemplos asociados al juego consecutivo que entreguen resultados diferentes y que finalmente, permitan concluir algo respecto. Para ello y dada la complejidad y extensión de las expresiones con que se está trabajando, se hará un análisis gráfico tridimensional el cual permita visualizar los contraejemplos que se buscan.

Por lo tanto, habrá que demostrar que existe a lo menos una configuración de orden sobre las utilidades y los δ^* que permitan ver una colusión sólo en precio en el juego consecutivo. En concreto, se buscará demostrar gráficamente que existe una porción en el espacio de parámetros donde: $UtMp_{i,j} > UtMs_{i,j}$, $\delta CD_p M_{sp} > \delta CD_p M_p$ y $\delta CD_s M_{sp} > \delta CD_p M_p$. Esto bastará para concluir que el “*timing*” del juego puede alterar los resultados vistos en el juego simultáneo, ya que si los δ^* pueden estar ordenados según: $\delta CD_{s,p} M_{sp} > \delta CD_p M_p > \delta CD_s M_s$ y las utilidades se ordenan así: $UtM_{sp_{i,j}} > UtMp_{i,j} > UtMs_{i,j}$, a las firmas les convendrá cartelizarse en precio por sobre calidad ante la imposibilidad de hacerlo en ambas variables.

En primer lugar se mantendrán los supuestos y condiciones antes mencionadas. Lo segundo es que dado que se trabajará sobre gráficos de tres variables (cubos), se establecerá que los ejes estarán identificados por los parámetros b, c y F , los que tienen los mayores efectos sobre los resultados de ambos juegos, ya que miden la incidencia que tiene el bien alternativo, bajo diferenciación horizontal, sobre la demanda y la función de costos que cada firma enfrenta. De una de las condiciones sobre los parámetros ya establecidas al comienzo de esta sub-sección, se deriva otra relación de parámetros que será la nueva condición para la obtención de los gráficos. Así de la condición:

$0 < b \leq 2F/\alpha^2$, reordenándola diremos que: $\alpha < 2\sqrt{\frac{F}{b}}$, a la cual se le añadirá la condición de que: $0 < c < \frac{2b}{3}$, que se desprende de los resultados arrojados por la función “Reduce”⁹ utilizada para conocer la suficiencia de las condiciones que se deben cumplir para mantener el orden de los δ^* del juego simultáneo, representadas por el punto (3.1.37).

Por último, se usarán valores fijos para los parámetros no considerados en los ejes del gráfico (a, A, B y α) y son los mismos que se encontraron para que se cumpla que: $UtMp_{i,j} > UtMs_{i,j}$. Dichos valores son: $a = 5$, $A = \frac{3}{2}$, $B = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$.

La serie de gráficos 3D del punto *Gráfico N°1* descrito a continuación, muestran distintas vistas del área que se determina al aplicar la función “RegionPlot3D”¹⁰ la cual evidencia que existe un área no vacía donde se cumplen las condiciones: $UtMpi > UtMsi$, $\delta CD_p M_{sp} > \delta CD_p M_p$ y $\delta CD_s M_{sp} > \delta CD_p M_p$, por tanto muestra que efectivamente hay valores de b, c y F que, dada las condiciones, permitirían que existiese un cartel en precio determinado por el “timing” del juego. Explicado en otras palabras, el área de gráfico confirma la existencia de un contraejemplo para la conclusión del juego simultáneo, que se basa principalmente en una situación donde se da que $UtMp_{i,j} > UtMs_{i,j}$, $\delta CD_p M_{sp} > \delta CD_p M_p$ y $\delta CD_s M_{sp} > \delta CD_p M_p$, hecho que fue demostrado como no factible en el juego simultáneo, debido a que no puede darse que $\delta SD_{sp} > \delta SD_p$.

Una consideración relevante para la correcta lectura de los gráficos 3D descritos a continuación es que la región del cubo que debe considerarse para

⁹ La función “Reduce”, del programa “Wolfram Mathematica 7.0”, permite determinar la suficiencia de las condiciones sobre los parámetros que permiten que se de un resultado determinado. Si la función considera que no existe suficiencia, entonces propone otras condiciones necesarias.

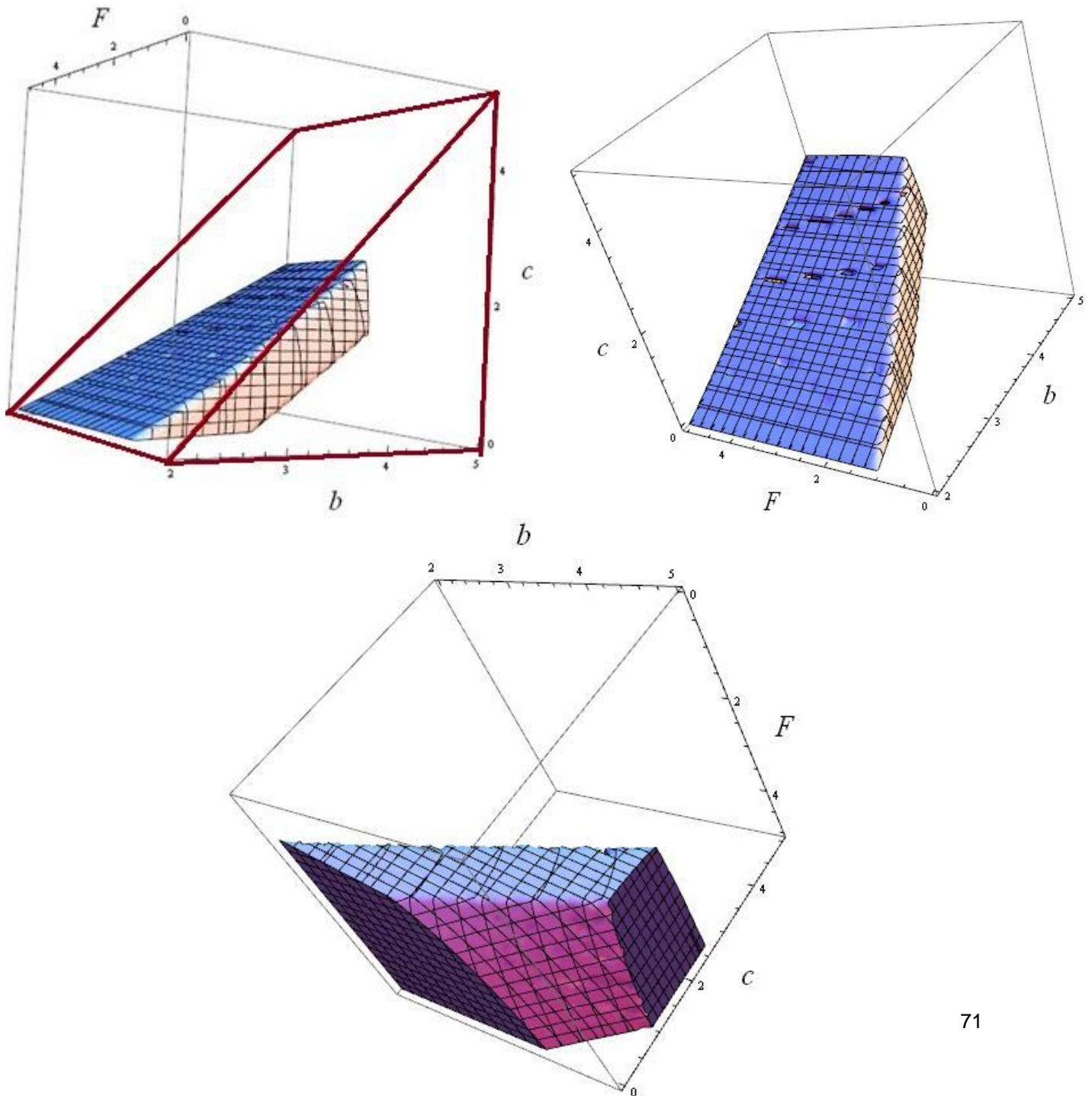
¹⁰ La función “RegionPlot3D”, del programa “Wolfram Mathematica 7.0”, gráfica en una región cúbica la interacción de las tres variables asociadas, esto bajo distintas condiciones que se impongan.

el análisis será la mitad inferior descrita después de un corte diagonal del cubo (como lo señala la línea en rojo en la primera figura), hecho que es explicado por el supuesto inicial del modelo de que siempre: $b > c$.

Por último, desde la perspectiva del resultado del análisis gráfico se puede decir que región resultante muestra las distintas combinaciones de los parámetros donde se cumple con el contraejemplo descrito buscado para el caso simultáneo. De manera contraria puede decirse que el área vacía entre la región resultante y la sección diagonal del cubo corresponderían a los casos donde la combinación de parámetros entrega los mismos resultados que el juego simultáneo.

Para revisar la aplicación de la función “*RegionPlot3D*”, revisar el *punto (4.3.3.2) del Anexo 1*.

Gráfico N°1: Área de valores de b, c y F donde se cumple que la utilidad del cartel en precio es mayor a la utilidad del cartel en calidad y los factores de descuento del cartel en precio y calidad $[\delta CD_p M_{sp}; \delta CD_s M_{sp}]$ son mayores al factor de descuento del cartel en precio $[\delta CD_p M_p]$.



4.3.4 Sobre los Factores de Descuento (estabilidad de carteles)

Al igual que el caso del juego simultáneo, para poder determinar la sostenibilidad de un cartel, bajo cualquier esquema presentando, será importante realizar una comparación de los cuatro δ ($\delta CD_p M_{sp}$, $\delta CD_s M_{sp}$, $\delta CD_p M_p$, $\delta CD_s M_s$) encontrados en la sección anterior. Pero dada la complejidad y extensión de las expresiones asociadas a los diferentes δ críticos obtenidos para cada esquema colusivo descrito, se hace imposible lograr un ordenamiento que permita concluir, sólo desde el análisis de δ , el grado de sostenibilidad que cada acuerdo colusivo tácito pueda tener.

4.3.5 Análisis sobre esquemas de colusiones factibles y rentables.

En base a todo el desarrollo hecho hasta acá del juego consecutivo como alternativa comparativa de los resultados del juego simultáneo y respecto al orden de los δ^* , el orden de utilidades derivadas de cada esquema colusivo y los niveles de calidad que ofrecen las firmas, se pueden destacar que el principal resultado de esta sección radica en que el “*timing*” del juego consecutivo si puede variar las conclusiones del juego simultáneo, como quedó demostrado en los gráficos expuestos donde es posible encontrar valores para los parámetros de tal modo incidan en que pueda existir un cartel en precio aún cuando las firmas prefieran coludirse en ambas variables. Esto quedará de manifiesto cuando los $\delta_{i,j} \in [\delta CD_p M_p, \delta CD_{s,p} M_{sp}]$ ¹¹ y $UtMp_{i,j} > UtMs_{i,j}$, ya que de lo contrario, al cumplirse la condición sobre los δ^* pero la relación de utilidades se invierte ($UtMs_{i,j} > UtMp_{i,j}$), será sostenible para las firmas sólo coludirse en calidad.

¹¹ Existen dos δ^* asociados al cartel precio y calidad, uno es el $\delta CD_p M_{sp}$ y el otro el $\delta CD_s M_{sp}$, por simplicidad de la explicación se acuñó el término $\delta CD_{s,p} M_{sp}$, para agrupar a ambos δ^* del cartel en cuestión.

Por último es importante resaltar que en esta sección es imposible identificar cual es el esquema de cartelización que se presenta más seguro para las firmas, ya que tanto δ^* como utilidades pueden tomar cualquier orden según sean los valores que tomen los parámetros del modelo. Sólo se puede establecer que la utilidad de cartel en precio y calidad será siempre la mayor a todas, al igual que para el caso simultáneo, por tanto se espera que este cartel sea el más estable en la medida que el δ^* asociado a este ($\delta CD_{s,p} M_{sp}$) se encuentre cerca de 1.

Capítulo 5: Conclusiones

Haciendo referencia a los resultados obtenidos, se puede decir que el más evidente tiene que ver con que un cartel tácito en precio y calidad será siempre, independiente del “*timing*” del juego, el más rentable y deseable para las firmas. Por tanto, al añadir una nueva variable (calidad) al análisis de alguna manera cambia las preferencias de las firmas hacia la cartelización sólo en precio, mostrando que la colusión total parece ser siempre más atractiva que la parcial. Ahora bien, se tendrá que ver la factibilidad de que las firmas puedan alcanzarla y sostenerla, lo que dependerá de los factores de descuento particulares de cada una y el factor de descuento crítico del cartel.

Desde la perspectiva de la sostenibilidad los tipos de carteles vistos no pueden jerarquizarse, ya que según sean los valores de los parámetros del modelo, estos podrá ser más o menos sólidos que sus alternativas, independiente del “*timing*” del juego. Sin embargo, si puede concluirse algo respecto al cartel en precio y calidad y es que dada su rentabilidad tiene la posibilidad de ser más estable bajo un “*timing*” consecutivo que bajo una simultáneo. La razón puede darse por dos características del juego consecutivo, primero es que en éste juego si puede darse que los factores de descuento del cartel en precio y calidad (factor de desvío en precio y factor de desvío en calidad) sean mayores al factor del cartel en precio, ya que el orden de los factores no viene determinado. Y segundo, como no existe un factor de descuento único de desvío en ambas variables los desvíos serán parciales, haciéndose menos atractiva la “traición”.

Además puede concluirse que el cartel en precio y calidad es más estables que el cartel en precio en el juego simultáneo, ya que como se demostró nunca podrá darse el factor de descuento crítico del cartel en precio y calidad sea superior al del cartel en precio.

Otra observación que dice relación con las características de los dos “*súper juegos*” advierte que un “*timing*” simultáneo en el cual aún cuando se trate de carteles parciales (sólo en precio o sólo en calidad) la firma que desvía lo hace en ambas variables siempre y con mayor razón cuando se trata del cartel en precio y calidad. Mientras que un “*timing*” consecutivo sólo permite desviaciones parciales. La razón tiene que ver con la verificabilidad que define el “*timing*” consecutivo, ya que luego del desvío en una de las variables, la aplicación del castigo se aplica desde el período siguiente.

Como se explicó en los capítulos anteriores, la firma que desvía en precio o calidad, bajo cualquier esquema colusivo, le resultaría sub – óptimo no desviar en ambas, ya que desvío en precio implicaría menor precio a costos iguales y desvío en calidad significaría mayor calidad a igual precio. Ambos casos no entregarían mayores utilidades que las derivadas del cartel, por tanto no tendría sentido alguno el desvío.

En líneas generales quizás el resultado más importante de este trabajo tiene que ver con dos puntos relacionados:

- (i) Bajo un “*súper juego*” simultáneo nunca podrá observarse en la realidad un acuerdo colusivo sólo en precio, ya que nunca se dará que $\delta SD_{sp} > \delta SD_p$ y que $UtMp_{i,j} > UtMsp_{i,j}$. En otras palabras se podrán encontrar carteles sólo en calidad o en ambas variables, dependiendo de la valorización de las firmas respecto del futuro.
- (ii) Desde el punto de vista metodológico, el “*timing*” de un “*súper juego*” consecutivo no es consistente con el resultado anterior.

En relación a las conclusiones que tienen que ver con los niveles de calidad y precio que ofrece cada tipo de cartel (parcial o total) en cada “*timing*” de juego, se puede decir que:

- (i) Desde la perspectiva de la relación de precios y calidad, en el juego simultáneo y consecutivo, siempre existe nexo entre precio alto y calidad baja y viceversa. Por tanto la manera que las firmas tienen de obtener ganancias mayores a través del desvío, es por la baja de precio o aumento de calidad y sólo serán ambas estrategias para el caso del cartel en precio y calidad. En resumen, el *“timing”* del juego no incide en el ordenamiento de precios y calidades, ni tampoco en los mecanismos de desvío para cada tipo cartel.

- (ii) Respecto a la calidad para ambos *“super juegos”*, los niveles que anuncian las firmas bajo cartel en precio representan el mayor nivel de todos los esquemas colusivos, ya que los niveles de calidad de los carteles en precio y calidad y sólo calidad, están por debajo del nivel ofrecido por la competencia. Además todos los niveles de calidad de desvío están por sobre el nivel de competencia.

- (iii) En relación a los precios estos presentan un mismo orden e intuición tanto para el juego simultáneo y consecutivo, salvo en los precios de desvío del cartel en precio y calidad y cartel sólo en precio. La razón tiene que ver con la imposibilidad de *“traicionar”* en precio y calidad a la vez, por tanto la baja de precio debe ser lo suficientemente importante para contrarrestar el efecto del desvío en calidad como mecanismo de atracción de la demanda, necesaria para que la utilidad resultante de desvío sea mayor a la del cartel.

Al hacer referencia a temas que quedaron fuera de esta tesis y que sería de relevancia estudiar cabría mencionar dos puntos que podrían influir en la completitud de análisis y en la robustez de los resultados obtenidos. Estos aspectos dicen relación al modelamiento de carteles tácitos bajo diferenciación

vertical y la verificación de resultados bajo otras formas funcionales, principalmente de costos.

Variar las funciones de costos, manteniendo los criterios de rendimientos constantes a escala y costos marginales constantes, iguales entre firmas y superiores a los costos medios, darían la consistencia necesaria para validar los resultados obtenidos. Cabe señalar que la robustez del estudio no viene dada por la forma de las funciones de demanda, ya que tal como están expuestas representan bien el grado de diferenciación y sustitución de los dos bienes.

El caso del modelamiento con diferenciación vertical, el cual se refiere - por ejemplo - a los distintos grados de calidad que puede presentar un bien cualquiera, aún cuando presentaría los mismos esquemas de colusión completa o parcial tratados en este trabajo, podría enriquecerse el análisis a través de la presentación de distintos esquemas de acuerdo entre las firmas. Por ejemplo, ofrecer al mercado sólo dos niveles de calidad, uno alto y otro bajo y donde se define un traspaso de utilidades de una firma a otra a modo de compensación. O bien casos donde las firmas deciden entregar sólo un nivel de calidad en función de la distribución de la valorización de la demanda respecto a la calidad y donde sólo una de ellas produce para el total del mercado (la de menor estructura de costos) y la otra sólo percibe traspasos de utilidad.

Por último, el modelo desarrollado y los resultados que de él derivaron revisten de importancia en el contexto de la literatura que hasta la fecha se han desarrollado. Los análisis de colusión tácita en dos variables, desarrollados en este trabajo, entregan intuiciones complementarias a los resultados de los trabajos teóricos de colusión tácita en una y dos variables. En este contexto, ratifica los resultados de Häckner (1995), Ross (1992) y Jehiel (1992) respecto a que a mayor grado de diferenciación horizontal existe mayor probabilidad de colusión por parte de las firmas, contrario al fundamento base de la literatura "*antitrust*" (Symeonidis, 1998a). Además, hace un aporte por medio de establecer grados de sostenibilidad de los acuerdos colusivos bajo distintos

esquemas a través de los cuales estos se presentan, temas que han no han sido abordados por la literatura.

Finalmente creo necesario comentar que este trabajo buscó avanzar un paso en la caracterización de carteles tácitos. Buscó mayor fidelidad con los mercados reales donde las firmas no sólo elijen precios, sino también calidad.

Referencias

- [1] Axelrod, R. (1981) “The Emergence of Cooperation among Egoists”, **The American Political Science Review**, 75(2), pp. 306-318.

- [2] Bernheim & Whinston (1990), “Multimarket Contact and Collusive Behavior”, **RAND Journal of economics**, 21(1), pp. 01-26.

- [3] Bilotkach, V. (2010), “Multimarket Contact and Intensity of Competition: Evidence from Airline Merger”, **Working Paper**.

- [4] Evans & Kessides (1994), “Mutual Forbearance in Experimental Conglomerate Markets”, **Quarterly Journal of Economics**, 109 (2), pp. 341-366.

- [5] Häckner, J. (1995), “Endogenous Product Design in an Infinitely Repeated Game”, **International Journal of Industrial Organization**, 13(2), pp. 277-299.

- [6] Jehiel, P. (1992), “Product Differentiation and Price Collusion”, **International Journal of Industrial Organization**, 10(4), pp. 633-641.

- [7] Prince & Simon (2009), “Multimarket Contact and Service Quality: Evidence from On-Time Performance in the US Airline Industry”, **The Academy of Management Journal**, 52(2), pp.336-354.

- [8] Ross, T. (1992), “Cartel Stability and Product Differentiation”, **International Journal of Industrial Organization**, 10(1), pp. 01-13.

- [9] Symeonidis, G. (1999), “Cartel Stability in advertising-intensive and R&D-intensive Industries”, **Economics Letters**, 62(1), pp.121-129.
- [10] Tirole, J. (1988), “The Theory of Industrial Organization”, **Book, MIT Press**, seventh printing 1994, cap.5, pp 209-211
- [11] Basso, L. (2010) “On Input Market Surplus and its Relation to the Downstream Market Game”.
- [12] Spence, M. (1975) “Monopoly, Quality and Regulation”, **The Bell Journal of Economics**, vol. 6, N° 2 (Autumn, 1975), 417 – 419.

Anexo 1

Capítulo 3.2.

(3.2.13)

$$P_{pi} = \frac{a + Ab - Ac + 2cP_{pj} + bSi\alpha - cSj\alpha}{2b}$$

$$Si = -\frac{B + (A(b - c) - bP_{pi} + cP_{pj})\alpha}{2F}$$

$$P_{pj} = \frac{a + Ab - Ac + 2cP_{pi} - cSi\alpha + bSj\alpha}{2b}$$

$$Sj = -\frac{B + (A(b - c) + cP_{pi} - bP_{pj})\alpha}{2F}$$

(3.2.20)

Condiciones de segundo orden del problema de maximización conjunta para el cartel en precio y calidad. Para lo cual se utiliza la “*Matriz Hessiana*”¹² y la función “*MatrixForm*” y “*Reduce*” del *Wolfram Mathematica 7.0*.

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} -2b & 2c & b\alpha & -c\alpha \\ 2c & -2b & -c\alpha & b\alpha \\ b\alpha & -c\alpha & -2F & 0 \\ -c\alpha & b\alpha & 0 & -2F \end{bmatrix}$$

Reduce[{ $b > 0, c > 0, F > 0, b > c, 0 \leq \alpha \leq$

$$1, \text{PositiveDefiniteMatrixQ} \left[\begin{bmatrix} -2b & 2c & b\alpha & -c\alpha \\ 2c & -2b & -c\alpha & b\alpha \\ b\alpha & -c\alpha & -2F & 0 \\ -c\alpha & b\alpha & 0 & -2F \end{bmatrix} \right], \{b, c\}]$$

False

¹² Es una matriz cuadrada de $n \times n$ que permite determinar la concavidad/convexidad de las soluciones de un problema de maximización a través de las segundas derivadas parciales del problema. Así para determinar la existencia de un máximo se utilizó el criterio de: “Función es Concava/Convexa si y solo si la *Matriz Hessiana* es semidefinida negativa/positiva”.

De esta definición de las condiciones de segundo orden descrito se derivan condiciones sobre los parámetros que permiten mantener el hecho que los problemas de maximización sean realmente convenientes para ambas firmas.

(3.2.21)

Precio y calidad de desvío del cartel en precio y calidad.

$$Sdsp = \frac{1}{2} \left(\frac{2bB - 2Bc + Ab^2\alpha - b(a + Ac)\alpha}{(b - c)(-4F + b\alpha^2)} + \frac{2B - (a + A(-b + c))\alpha}{-4F + (b - c)\alpha^2} \right)$$

$$Ppdsp = A + \frac{-2aF + (b - c)(2AF + B\alpha)}{2(b - c)(-4F + b\alpha^2)} + \frac{-2aF + (b - c)(2AF + B\alpha)}{-8bF + 2b(b - c)\alpha^2}$$

(3.2.25)

Funciones de mejor respuesta de la maximización conjunta sólo sobre los precios:

$$Ppi = \frac{a + Ab - Ac + 2cPpj + bSi\alpha - cSj\alpha}{2b}$$

$$Ppj = \frac{a + Ab - Ac + 2cPpi - cSi\alpha + bSj\alpha}{2b}$$

Funciones de mejor respuesta en calidad provenientes de la maximización individual en competencia en ambas variables:

$$Si = -\frac{B + b(A - Ppi)\alpha}{2F}$$

$$Sj = -\frac{B + b(A - Ppj)\alpha}{2F}$$

(3.2.31)

Precio y calidad de desvío en el cartel sólo en precio:

$$Sdp = \frac{8B(-b+c)F+2(2b-c)(a+A(-b+c))F\alpha+B(b-c)(2b+c)\alpha^2+b^2(-a+A(b-c))\alpha^3}{(b-c)(-4F+b\alpha^2)^2}$$

$$Ppdp = \frac{2aF(4bF-2cF-b^2\alpha^2)+(b-c)(4A(2b+c)F^2+2B(-2b+c)F\alpha-6Ab^2F\alpha^2+b^2B\alpha^3+Ab^3\alpha^4)}{b(b-c)(-4F+b\alpha^2)^2}$$

(3.2.35)

Funciones de mejor respuesta de la maximización conjunta en el cartel sólo en calidad:

$$Si = -\frac{B + (A(b - c) - bPpi + cPpj)\alpha}{2F}$$

$$Sj = -\frac{B + (A(b - c) + cPpi - bPpj)\alpha}{2F}$$

(3.2.40)

Precio y calidad de desvío en el cartel sólo en calidad:

$$Sds = \frac{4B(-2b+c)F+4b(a+A(-b+c))F\alpha+B(2b^2-3bc+2c^2)\alpha^2-b(b-c)(a+A(-b+c))\alpha^3}{(-4F+b\alpha^2)(2(-2b+c)F+(b-c)^2\alpha^2)}$$

$$PpDs = \frac{8(a+Ab)F^2+4B(-b+c)F\alpha-2(b(a+3Ab)-(a+3Ab)c+Ac^2)F\alpha^2+B(b-c)^2\alpha^3+Ab(b-c)^2\alpha^4}{(-4F+b\alpha^2)(2(-2b+c)F+(b-c)^2\alpha^2)}$$

Capítulo 4.2

(4.2.2)

De la maximización individual en $t = 2$, de competencia se obtienen las siguientes condiciones de primer orden:

$$P_{pi} = \frac{a + Ab + cP_{pj} + bSi\alpha - cSj\alpha}{2b}$$

$$P_{pj} = \frac{a + Ab + cP_{pi} - cSi\alpha + bSj\alpha}{2b}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtienen las funciones de mejor respuesta en función de la calidad, dadas por:

$$P_{pi} = \frac{(a + Ab)(2b + c) + (2b^2Si - c^2Si - bcSj)\alpha}{4b^2 - c^2}$$

$$P_{pj} = \frac{(a + Ab)(2b + c) + (-bcSi + 2b^2Sj - c^2Sj)\alpha}{4b^2 - c^2}$$

(4.2.9)

De la maximización individual en $t = 2$, del cartel en precio y calidad se obtienen las siguientes condiciones de primer orden:

$$P_{pi} = \frac{a + Ab - Ac + 2cP_{pj} + bSi\alpha - cSj\alpha}{2b}$$

$$P_{pj} = \frac{a + Ab - Ac + 2cP_{pi} - cSi\alpha + bSj\alpha}{2b}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtienen las funciones de mejor respuesta en función de la calidad, dadas por:

$$P_{pi} = \frac{a + (b - c)(A + Si\alpha)}{2(b - c)}$$

$$P_{pj} = \frac{a + (b - c)(A + Sj\alpha)}{2(b - c)}$$

(4.2.14)

Función de utilidad de la firma i, j

$$Ut_{Msp_{i,j}}[P_{pi}, P_{pj}, Si, Sj] = (P_{pi,j} * Q_{i,j}[P_{pi}, P_{pj}, Si, Sj] - C_{i,j}[P_{pi}, P_{pj}, Si, Sj])$$

(4.2.17)

Calidad de desvío en el cartel en precio y calidad

$$S_d = \left[-4B(-4b^2 + c^2)^2F + 8b(2b + c)(2b^2 - c^2)(a + A(-b + c))F\alpha + B(16b^5 - 8b^4c - 8b^3c^2 + 4b^2c^3 + bc^4 - c^5)\alpha^2 - 2b(-2b^2 + c^2)^2(a + A(-b + c))\alpha^3 \right] / [2(4F + (-b + c)\alpha^2)((-4b^2 + c^2)^2F - b(-2b^2 + c^2)^2\alpha^2)]$$

Precios de castigo del cartel en precio y calidad, dada la calidad de desvío:

$$P_{piC} = (8(a + Ab)(2b - c)(2b + c)^2F^2 - 4B(2b + c)^2(2b^2 - 3bc + c^2)F\alpha + 2(-8b^4(a + 3Ab) - 4b^3(a - 3Ab)c + 4b^2(a + 4Ab)c^2 + b(3a - 7Ab)c^3 - 2Abc^4 + Ac^5)F\alpha^2 + bB(b - c)(8b^3 + 4b^2c - 4bc^2 - 3c^3)\alpha^3 + 2Ab(b - c)(-2b^2 + c^2)^2\alpha^4) / ((2(4F + (-b + c)\alpha^2)((-4b^2 + c^2)^2F - b(-2b^2 + c^2)^2\alpha^2)))$$

$$Pp_j C = (8(a + Ab)(2b - c)(2b + c)^2 F^2 - 4B(2b + c)^2(2b^2 - 3bc + c^2)F\alpha + 2(-8b^4(a + 3Ab) - 4b^3(a - 3Ab)c + 4b^2(a + 4Ab)c^2 + b(3a - 7Ab)c^3 - 2Abc^4 + Ac^5)F\alpha^2 + bB(b - c)(8b^3 + 4b^2c - 4bc^2 - 3c^3)\alpha^3 + 2Ab(b - c)(-2b^2 + c^2)^2\alpha^4)/((2(4F + (-b + c)\alpha^2)((-4b^2 + c^2)^2F - b(-2b^2 + c^2)^2\alpha^2)))$$

(4.2.18)

Utilidad de desvío en calidad del cartel de precio y calidad:

$$UtDsMsp = \frac{1}{4(4F + (-b + c)\alpha^2)^2} \left(\frac{1}{(-4b^2 + c^2)^2 F - b(-2b^2 + c^2)^2 \alpha^2} 2B(4F + (-b + c)\alpha^2)(-4B(-4b^2 + c^2)^2 F + 8b(2b + c)(2b^2 - c^2)(a + A(-b + c))F\alpha + B(16b^5 - 8b^4c - 8b^3c^2 + 4b^2c^3 + bc^4 - c^5)\alpha^2 - 2b(-2b^2 + c^2)^2(a + A(-b + c))\alpha^3) + (F(-4B(-4b^2 + c^2)^2 F + 8b(2b + c)(2b^2 - c^2)(a + A(-b + c))F\alpha + B(16b^5 - 8b^4c - 8b^3c^2 + 4b^2c^3 + bc^4 - c^5)\alpha^2 - 2b(-2b^2 + c^2)^2(a + A(-b + c))\alpha^3) + \frac{2Ab(4b^2 - c^2)(-4F + (b - c)\alpha^2)(-4(2b + c)F + (2b^2 - c^2)\alpha^2)(-2aF + (b - c)(2AF + B\alpha))}{-(-4b^2 + c^2)^2 F + b(-2b^2 + c^2)^2 \alpha^2} + \frac{1}{((-4b^2 + c^2)^2 F - b(-2b^2 + c^2)^2 \alpha^2)^2} b(4b^2 - c^2)(-4(2b + c)F + (2b^2 - c^2)\alpha^2)(8(a + Ab)(2b - c)(2b + c)^2 F^2 - 4B(2b + c)^2(2b^2 - 3bc + c^2)F\alpha - 2(8b^4(a + 3Ab) - 8Ab^4c - 6b^2(a + 3Ab)c^2 + 2Ab^2c^3 + (a + 4Ab)c^4)F\alpha^2 + B(b - c)(2b - c)(2b + c)(2b^2 - c^2)\alpha^3 + 2Ab(b - c)(-2b^2 + c^2)^2\alpha^4)(-2aF + (b - c)(2AF + B\alpha)) \right)$$

(4.2.25)

De la maximización individual de la utilidad conjunta en $t = 2$, del cartel en precio, se obtienen las siguientes condiciones de primer orden:

$$Ppi = \frac{a + Ab - Ac + 2cPpj + bSia - cSja}{2b}$$

$$Ppj = \frac{a + Ab - Ac + 2cPpi - cSia + bSja}{2b}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtienen las funciones de mejor respuesta en función de la calidad, dadas por:

$$P_{pi} = \frac{a + (b - c)(A + S_i\alpha)}{2(b - c)}$$

$$P_{pj} = \frac{a + (b - c)(A + S_j\alpha)}{2(b - c)}$$

(4.2.26)

Función de utilidad para la competencia en calidad, del cartel en precios:

$$U_{tBN_{i,j}}[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j] = P_{pi,j} * Q_{i,j}[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j] - C_{i,j}[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j]$$

(4.2.36)

De la maximización individual de la utilidad individual en $t = 2$, del cartel en calidad, se obtienen las siguientes condiciones de primer orden:

$$P_{pi} = \frac{a + Ab + cP_{pj} + bS_i\alpha - cS_j\alpha}{2b}$$

$$P_{pj} = \frac{a + Ab + cP_{pi} - cS_i\alpha + bS_j\alpha}{2b}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtienen las funciones de mejor respuesta en función de la calidad, dadas por:

$$P_{pi} = \frac{(a + Ab)(2b + c) + (2b^2Si - c^2Si - bcSj)\alpha}{4b^2 - c^2}$$

$$P_{pj} = \frac{(a + Ab)(2b + c) + (-bcSi + 2b^2Sj - c^2Sj)\alpha}{4b^2 - c^2}$$

(4.2.43)

Funciones de mejor respuesta en precio de competencia que determinarán los “precios de castigo” para el desvío del cartel en calidad.

$$P_{piC} = \frac{(a + Ab)(2b + c) + (2b^2Si - c^2Si - bcSd)\alpha}{4b^2 - c^2}$$

$$P_{pjC} = \frac{(a + Ab)(2b + c) + (-bcSi + 2b^2Sd - c^2Sd)\alpha}{4b^2 - c^2}$$

(4.2.46)

Precios de castigo finales dado $[S_i, S_d]$:

$$P_{piC} = \frac{1}{4b^2 - c^2} ((a + Ab)(2b + c) + \alpha(2b^2Si - c^2Si - (bc(-B(-2b + c)^4(2b + c)^2F + 2b(-2b + c)^2(2b + c)(2b^2 - c^2)(a + A(-b + c))F\alpha + bB(-2b + c)^2(4b^4 - 2b^3c - 3b^2c^2 + bc^3 + c^4)\alpha^2 - 2b^2(b - c)(-2b^2 + c^2)^2(a + A(-b + c))\alpha^3)))/(2(-(-2b + c)^2F + b(b - c)^2\alpha^2)(-(-4b^2 + c^2)^2F + b(-2b^2 + c^2)^2\alpha^2))))$$

$$P_{pjC} = \frac{1}{4b^2 - c^2} ((a + Ab)(2b + c) + (\alpha(-(-2b + c)^4(2b + c)^2F(2b^2B - Bc^2 + 2bcFSi) + 2b(-2b + c)^2(2b + c)(-2b^2 + c^2)^2(a + A(-b + c))F\alpha + b(-2b + c)^2(B(2b^2 - c^2)(4b^4 - 2b^3c - 3b^2c^2 + bc^3 + c^4) + 2bc(8b^4 - 4b^3c - 7b^2c^2 +$$

$$2bc^3 + 2c^4)FSi)\alpha^2 - 2b^2(b - c)(2b^2 - c^2)^3(a + A(-b + c))\alpha^3 - 2b^3(b - c)^2c(-2b^2 + c^2)^2Si\alpha^4)/((2(-(-2b + c)^2F + b(b - c)^2\alpha^2)(-(-4b^2 + c^2)^2F + b(-2b^2 + c^2)^2\alpha^2)))$$

Utilidad de desvío en calidad:

$$UtDsMs =$$

$$\begin{aligned} & -(4096b^{12}B^2F^3 - 8192b^{11}B^2cF^3 + 2048b^{10}B^2c^2F^3 + 6144b^9B^2c^3F^3 - \\ & 4352b^8B^2c^4F^3 - 1024b^7B^2c^5F^3 + 1792b^6B^2c^6F^3 - 256b^5B^2c^7F^3 - \\ & 272b^4B^2c^8F^3 + 96b^3B^2c^9F^3 + 8b^2B^2c^{10}F^3 - 8bB^2c^{11}F^3 + B^2c^{12}F^3 - \\ & 4096a^2b^{11}F^4 + 8192aAb^{12}F^4 - 4096A^2b^{13}F^4 + 4096a^2b^{10}cF^4 - \\ & 16384aAb^{11}cF^4 + 12288A^2b^{12}cF^4 + 3072a^2b^9c^2F^4 + 2048aAb^{10}c^2F^4 - \\ & 9216A^2b^{11}c^2F^4 - 4096a^2b^8c^3F^4 + 14336aAb^9c^3F^4 - 6144A^2b^{10}c^3F^4 - \\ & 512a^2b^7c^4F^4 - 7168aAb^8c^4F^4 + 10752A^2b^9c^4F^4 + 1536a^2b^6c^5F^4 - \\ & 4096aAb^7c^5F^4 - 1536A^2b^8c^5F^4 - 128a^2b^5c^6F^4 + 3328aAb^6c^6F^4 - \\ & 3712A^2b^7c^6F^4 - 256a^2b^4c^7F^4 + 256aAb^5c^7F^4 + 1536A^2b^6c^7F^4 + 48a^2b^3c^8F^4 - \\ & 608aAb^4c^8F^4 + 432A^2b^5c^8F^4 + 16a^2b^2c^9F^4 + 64aAb^3c^9F^4 - 336A^2b^4c^9F^4 - \\ & 4a^2bc^{10}F^4 + 40aAb^2c^{10}F^4 + 12A^2b^3c^{10}F^4 - 8aAbc^{11}F^4 + 24A^2b^2c^{11}F^4 - \\ & 4A^2bc^{12}F^4 + 4bB(b - c)(-2b + c)^6(2b + c)^4(a + A(-b + c))F^3\alpha + b(-2b + \\ & c)^4(2b + c)^2F^2(-B^2(-2b + c)^2(20b^4 - 12b^3c - 17b^2c^2 + 6bc^3 + 5c^4) + \\ & 4b(2b^2 - c^2)(2b^2 - 2bc - c^2)(a + A(-b + c))^2F)\alpha^2 - 4b^2B(-2b + c)^4(2b + \\ & c)^2(4b^5 - 8b^4c + 6b^2c^3 - bc^4 - c^5)(a + A(-b + c))F^2\alpha^3 + \\ & b^2(2b - c)^3F(B^2(224b^9 - 368b^8c - 200b^7c^2 + 524b^6c^3 + 38b^5c^4 - 289b^4c^5 + \\ & 8b^3c^6 + 73b^2c^7 - 2bc^8 - 7c^9) + 4b(b - c)(b + c)(2b + c)(-2b^2 + c^2)^2(a + \\ & A(-b + c))^2F)\alpha^4 - 4b^3B(b - c)^2(2b - c)^3(b + c)(2b + c)(-2b^2 + c^2)^2(a + \\ & A(-b + c))F\alpha^5 - b^3(b - c)^2(-2b^2 + c^2)^2(B^2(-2b + c)^2(12b^4 - 8b^3c - 9b^2c^2 + \\ & 4bc^3 + 3c^4) + 4b(-2b^2 + c^2)^2(a + A(-b + c))^2F)\alpha^6 + 4b^4B(b - c)^3(-2b^2 + \end{aligned}$$

$$c^2)^4(a + A(-b + c))\alpha^7)/(4((-2b + c)^2F - b(b - c)^2\alpha^2)^2((-4b^2 + c^2)^2F - b(-2b^2 + c^2)^2\alpha^2)^2)$$

(4.3.48)

Aplicación de la función “*FindInstance*” para la determinación del orden de las utilidades.

$$\text{FindInstance}[\{b > c > 0, 0 < b \leq 2F/\alpha^2, F > 0, B > 0, a > \frac{2AF+2B\alpha}{\alpha^2} > \frac{B}{\alpha} > A > 0, 0 \leq \alpha \leq 1, (UtMpi - UtMsi) > 0\}, \{b, c, F, a, A, B, \alpha\}]$$

$$\{\{b \rightarrow \frac{169}{1024}, c \rightarrow \frac{1}{8}, F \rightarrow \frac{1}{32}, a \rightarrow 5, A \rightarrow \frac{3}{2}, B \rightarrow 1, \alpha \rightarrow \frac{1}{2}\}\}$$

$$\text{FindInstance}[\{b > c > 0, 0 < b \leq 2F/\alpha^2, F > 0, B > 0, a > \frac{2AF+2B\alpha}{\alpha^2} > \frac{B}{\alpha} > A > 0, 0 \leq \alpha \leq 1, (UtMpi - UtMsi) < 0\}, \{b, c, F, a, A, B, \alpha\}]$$

$$\{\{b \rightarrow \frac{169}{1024}, c \rightarrow \frac{1}{8}, F \rightarrow \frac{3}{128}, a \rightarrow 5, A \rightarrow \frac{3}{2}, B \rightarrow 1, \alpha \rightarrow \frac{1}{2}\}\}$$

(4.3.3.2)

Si $a = 5$, $A = \frac{3}{2}$, $B = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$, entonces la función “*RegionPlot3D*” queda definida por:

$$\text{RegionPlot3D}[UtMpi > UtMsi \&\& \delta BNCDpMsp > \delta BNCDpMp \&\& \delta BNCDsMsp > \delta BNCDpMp \&\& 0 < c < \frac{2b}{3} \&\& F > 0 \&\& \alpha < 2\sqrt{\frac{F}{b}}, \{c, 1/100, 5\}, \{b, c, 5\}, \{F, 1/100, 5\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{\text{Style}[c, \text{Large}], \text{Style}[b, \text{Large}], \text{Style}[F, \text{Large}]\}, \text{PlotPoints} \rightarrow 60]$$

Anexo 2: Códigos de “Wolfram Mathematica 7.0”

Parte 1: Juego Simultáneo

```
Qi[Ppi_,Ppj_,Si_,Sj_]:=a-b*Ppi+α*b*Si+c*Ppj-α*c*Sj;  
Qj[Ppi_,Ppj_,Si_,Sj_]:=a-b*Ppj+α*b*Sj+c*Ppi-α*c*Si;  
Ci[Ppi_,Ppj_,Si_,Sj_]:=A*Qi[Ppi,Ppj,Si,Sj]+B*Si+F*(Si^2);  
Cj[Ppi_,Ppj_,Si_,Sj_]:=A*Qj[Ppi,Ppj,Si,Sj]+B*Sj+F*(Sj^2);
```

Competencia

```
UtBNi[Ppi_,Ppj_,Si_,Sj_]:=Ppi*Qi[Ppi,Ppj,Si,Sj]- Ci[Ppi,Ppj,Si,Sj]
```

```
FullSimplify[Solve[{D[UtBNi[Ppi,Ppj,Si,Sj],Si]==0}, {Si}]]  
FullSimplify[Solve[{D[UtBNi[Ppi,Ppj,Si,Sj],Ppi]==0}, {Ppi}]]
```

```
UtBNj[Ppi_,Ppj_,Si_,Sj_]:=Ppj*Qj[Ppi,Ppj,Si,Sj]- Cj[Ppi,Ppj,Si,Sj]
```

```
FullSimplify[Solve[{D[UtBNj[Ppi,Ppj,Si,Sj],Sj]==0}, {Sj}]]  
FullSimplify[Solve[{D[UtBNj[Ppi,Ppj,Si,Sj],Ppj]==0}, {Ppj}]]
```

```
sol= FullSimplify[Solve[{Si==-(B+b (A-Ppi) α)/(2 F)), Ppi==(a+A b+c Ppj+b Si α-c Sj  
α)/(2 b), Sj==-(B+b (A-Ppj) α)/(2 F)),Ppj==(a+A b+c Ppi-c Si α+b Sj α)/(2 b)  
}, {Si,Ppi,Sj,Ppj}]]
```

```
FullSimplify[UtBNi=(Ppi-A)*(a-b*Ppi+α*b*Si+c*Ppj-α*c*Sj)-B*Si-F*(Si^2)]  
FullSimplify[UtBNj=(Ppj-A)*(a-b*Ppj+α*b*Sj+c*Ppi-α*c*Si)-B*Sj-F*(Sj^2)]
```

Cartel Precio y Calidad

```
UtMsp[Ppi_,Ppj_,Si_,Sj_]:= (Ppi*Qi[Ppi,Ppj,Si,Sj]-  
Ci[Ppi,Ppj,Si,Sj])+(Ppj*Qj[Ppi,Ppj,Si,Sj]- Cj[Ppi,Ppj,Si,Sj])
```

```
FullSimplify[Solve[{D[UtMsp[Ppi,Ppj,Si,Sj],Ppi]==0}, {Ppi}]]  
FullSimplify[Solve[{D[UtMsp[Ppi,Ppj,Si,Sj],Si]==0}, {Si}]]  
FullSimplify[Solve[{D[UtMsp[Ppi,Ppj,Si,Sj],Ppj]==0}, {Ppj}]]  
FullSimplify[Solve[{D[UtMsp[Ppi,Ppj,Si,Sj],Sj]==0}, {Sj}]]
```

```
sol= FullSimplify[Solve[{Ppi==(a+A b-A c+2 c Ppj+b Si α-c Sj α)/(2 b),Si==-(B+(A  
(b-c)-b Ppi+c Ppj) α)/(2 F)),Ppj==(a+A b-A c+2 c Ppi-c Si α+b Sj α)/(2 b),Sj==-(B+(A  
(b-c)+c Ppi-b Ppj) α)/(2 F))}, {Ppi,Si,Ppj,Sj}]]
```

```
FullSimplify[UtMsp=Ppi*Qi[Ppi,Ppj,Si,Sj]- Ci[Ppi,Ppj,Si,Sj]]
```

Desvío en precio y calidad

$$\text{sol} = \text{FullSimplify}[\text{Solve}\left\{\left\{\text{Sdsp} == -\frac{B+b(A-\text{PpDsp})\alpha}{2F}, \text{PpDsp} == \frac{\alpha+Ab+c\text{Ppi}-c\text{Si}\alpha+b\text{Sdsp}\alpha}{2b}\right\}, \{\text{Sdsp}, \text{PpDsp}\}\right\}]$$

$$\text{FullSimplify}[\text{UtDsp} = (\text{PpDsp} - A) * (a - b * \text{PpDsp} + \alpha * b * \text{Sdsp} + c * \text{Ppi} - \alpha * c * \text{Si}) - B * \text{Sdsp} - F * (\text{Sdsp}^2)]$$

Delta Crítico precio y calidad

$$\text{FullSimplify}[\delta\text{BNSDsp} = (\text{UtDsp} - \text{UtMsp})/(\text{UtDsp} - \text{UtBNi})]$$

Cartel sólo en Precio

$$\text{UtMp}[\text{Ppi}_-, \text{Ppj}_-, \text{Si}_-, \text{Sj}_-] := (\text{Ppi} * \text{Qi}[\text{Ppi}, \text{Ppj}, \text{Si}, \text{Sj}] - \text{Ci}[\text{Ppi}, \text{Ppj}, \text{Si}, \text{Sj}]) + (\text{Ppj} * \text{Qj}[\text{Ppi}, \text{Ppj}, \text{Si}, \text{Sj}] - \text{Cj}[\text{Ppi}, \text{Ppj}, \text{Si}, \text{Sj}])$$

$$\text{FullSimplify}[\text{Solve}\left\{\left\{\text{D}[\text{UtMp}[\text{Ppi}, \text{Ppj}, \text{Si}, \text{Sj}], \text{Ppi}] \square 0\right\}, \{\text{Ppi}\}\right\}]$$

$$\text{FullSimplify}[\text{Solve}\left\{\left\{\text{D}[\text{UtMp}[\text{Ppi}, \text{Ppj}, \text{Si}, \text{Sj}], \text{Ppj}] \square 0\right\}, \{\text{Ppj}\}\right\}]$$

$$\text{sol} = \text{FullSimplify}[\text{Solve}\left\{\left\{\text{Ppi} == \frac{\alpha+Ab-Ac+2c\text{Ppj}+b\text{Si}\alpha-c\text{Sj}\alpha}{2b}, \text{Si} == -\frac{B+b(A-\text{Ppi})\alpha}{2F}, \text{Ppj} == \frac{\alpha+Ab-Ac+2c\text{Ppi}-c\text{Si}\alpha+b\text{Sj}\alpha}{2b}, \text{Sj} == -\frac{B+b(A-\text{Ppj})\alpha}{2F}\right\}, \{\text{Ppi}, \text{Si}, \text{Ppj}, \text{Sj}\}\right\}]$$

$$\text{FullSimplify}[\text{UtMpi} = \text{Ppi} * \text{Qi}[\text{Ppi}, \text{Ppj}, \text{Si}, \text{Sj}] - \text{Ci}[\text{Ppi}, \text{Ppj}, \text{Si}, \text{Sj}]]$$

Desvío en precio y calidad

$$\text{sol} = \text{FullSimplify}[\text{Solve}\left\{\left\{\text{Sdsp} == -\frac{B+b(A-\text{PpDsp})\alpha}{2F}, \text{PpDsp} == \frac{\alpha+Ab+c\text{Ppi}-c\text{Si}\alpha+b\text{Sdsp}\alpha}{2b}\right\}, \{\text{Sdsp}, \text{PpDsp}\}\right\}]$$

$$\text{FullSimplify}[\text{UtDp} = (\text{PpDp} - A) * (a - b * \text{PpDp} + \alpha * b * \text{Sdp} + c * \text{Ppi} - \alpha * c * \text{Si}) - B * \text{Sdp} - F * (\text{Sdp}^2)]$$

Delta Crítico en precio

$$\text{FullSimplify}[\delta\text{BNSDp} = (\text{UtDp} - \text{UtMpi})/(\text{UtDp} - \text{UtBNi})]$$

Cartel sólo en Calidad

$$UtMs[Ppi_ , Ppj_ , Si_ , Sj_] := (Ppi * Qi[Ppi, Ppj, Si, Sj] - Ci[Ppi, Ppj, Si, Sj]) + (Ppj * Qj[Ppi, Ppj, Si, Sj] - Cj[Ppi, Ppj, Si, Sj])$$

$$\text{FullSimplify[Solve[\{D[UtMs[Ppi, Ppj, Si, Sj], Si] \square 0\}, \{Si\}]]$$

$$\text{FullSimplify[Solve[\{D[UtMs[Ppi, Ppj, Si, Sj], Sj] \square 0\}, \{Sj\}]]$$

$$\text{sol} = \text{FullSimplify[Solve[\{Ppi == \frac{a+Ab+cPpj+bSi\alpha-cSj\alpha}{2b}, Si == -\frac{B+(A(b-c)-bPpi+cPpj)\alpha}{2F}, Ppj == \frac{a+Ab+cPpi-cSi\alpha+bSj\alpha}{2b}, Sj == -\frac{B+(A(b-c)+cPpi-bPpj)\alpha}{2F}\}, \{Ppi, Si, Ppj, Sj\}]]$$

$$\text{FullSimplify[UtMsi = Ppi * Qi[Ppi, Ppj, Si, Sj] - Ci[Ppi, Ppj, Si, Sj]]$$

Desvío en calidad

$$\text{sol} = \text{FullSimplify[Solve[\{Sds == -\frac{B+b(A-PpDs)\alpha}{2F}, PpDs == \frac{a+Ab+cPpi-cSi\alpha+bSds\alpha}{2b}\}, \{Sds, PpDs\}]]$$

$$\text{FullSimplify[UtDs = (PpDs - A) * (a - b * PpDs + \alpha * b * Sds + c * Ppi - \alpha * c * Si) - B * Sds - F * (Sds^2)]$$

Delta Crítico en precio

$$\text{FullSimplify}[\delta\text{BNSDs} = (\text{UtDs} - \text{UtMsi}) / (\text{UtDs} - \text{UtBni})]$$

ANALISIS VARIOS

Comparación y Análisis de Deltas Críticos

$$\text{FullSimplify}[\delta\text{BNSDp} / \delta\text{BNSDsp}]$$

$$\text{Reduce}[\{b > c > 0, F > 0, 0 < b \leq 2F / \alpha^2, 0 \leq \alpha \leq 1, 1 < -((F(4(8b^2 - 8bc + c^2)F^2 - 8b(2b^2 - 3bc + c^2)F\alpha^2 + 2b^2(b-c)^2\alpha^4)) / ((-2F + b\alpha^2)(2(8b^2 - 8bc + c^2)F^2 - b(8b^2 - 8bc + c^2)F\alpha^2 + b^3(b-c)\alpha^4)))\}, \{b, c\}]$$

$$\text{FullSimplify}[\delta\text{BNSDs} / \delta\text{BNSDsp}]$$

Reduce[{b>c>0, 0<b≤2F/α^2, F>0, 0≤α≤1, 1> ((4 (8 b^2-8 b c+c^2) F^2-8 b (2 b^2-3 b c+c^2) F α^2+2 b^2 (b-c)^2 α^4)/(b (8 (2 b-c) F^2+(-8 b^2+10 b c-3 c^2) F α^2+b (b-c)^2 α^4))}], {b,c}]

FullSimplify[δBNSDp/δBNSDs]

Reduce[{b>c>0, 0<b≤2F/α^2, F>0, 0≤α≤1, 1<((b (8 (2 b-c) F^2-4 (2 b^2-3 b c+c^2) F α^2+b (b-c)^2 α^4))/(4 (8 b^2-8 b c+c^2) F^2-4 b (7 b^2-7 b c+c^2) F α^2+b^2 (5 b^2-6 b c+c^2) α^4))}], {b,c}]

FindInstance[{b>c>0, F>0, 0≤α, 0<δBNSDp<δBNSDsp<1}], {b,c,F,α}]

FindInstance[{b>c>0, F>0, 0≤α, 0<δBNSDs<δBNSDsp<1}], {b,c,F,α}]

FindInstance[{b>c>0, F>0, 0≤α, 0<δBNSDsp<δBNSDs<1}], {b,c,F,α}]

Reduce[{b>c>0, F>0, 0≤α, 0<δBNSDs<δBNSDsp<1}], {b,c,F,α}]

Reduce[{b>c>0, F>0, 0≤α, 0<δBNSDsp<δBNSDs<1}], {b,c,F,α}]

FindInstance[{b>c>0, F>0, 0≤α≤1, b<(2 F)/α^2, 0<δBNSDs<δBNSDp<δBNSDsp<1}], {b,c,F,α}]

FindInstance[{b>c>0, F>0, 0≤α≤1, b<(2 F)/α^2, 0<δBNSDp<δBNSDs<δBNSDsp<1}], {b,c,F,α}]

FindInstance[{b>c>0, F>0, 0≤α≤1, b<(2 F)/α^2, 0<δBNSDs<δBNSDsp<δBNSDp<1}], {b,c,F,α}]

FindInstance[{b>c>0, F>0, 0≤α≤1, b<(2 F)/α^2, 0<δBNSDsp<δBNSDs<δBNSDp<1}], {b,c,F,α}]

FindInstance[{b>c>0, F>0, 0≤α≤1, b<(2 F)/α^2, 0<δBNSDsp<δBNSDp<δBNSDs<1}], {b,c,F,α}]

FindInstance[{b>c>0, F>0, 0≤α≤1, b<(2 F)/α^2, 0<δBNSDp<δBNSDsp<δBNSDs<1}], {b,c,F,α}]

Buscando Condiciones (condiciones de segundo orden)

UtM[Ppi_, Ppj_, Si_, Sj_] := (Ppi*Qi[Ppi, Ppj, Si, Sj] - Ci[Ppi, Ppj, Si, Sj]) + (Ppj*Qj[Ppi, Ppj, Si, Sj] - Cj[Ppi, Ppj, Si, Sj])

Table[{ { FullSimplify[D[D[UtM[Ppi, Ppj, Si, Sj], Ppi], Ppi], FullSimplify[D[D[UtM[Ppi, Ppj, Si, Sj], Ppi], Ppj]], FullSimplify[D[D[UtM[Ppi, Ppj, Si, Sj], Ppi], Si]], FullSimplify[D[D[UtM[Ppi, Ppj, Si, Sj], Ppi], Sj]] }, { FullSimplify[D[D[UtM[Ppi, Ppj, Si, Sj], Ppj], Ppi], FullSimpli

```

fy[D[D[UtM[Ppi,Ppj,Si,Sj],Ppj],Ppj]],FullSimplify[D[D[UtM[Ppi,Ppj,Si,Sj],Ppj],Si]],FullSimplify[D[D[UtM[Ppi,Ppj,Si,Sj],Ppj],Sj]],{FullSimplify[D[D[UtM[Ppi,Ppj,Si,Sj],Si],Ppi]],FullSimplify[D[D[UtM[Ppi,Ppj,Si,Sj],Si],Ppj]],FullSimplify[D[D[UtM[Ppi,Ppj,Si,Sj],Si],Sj]],{FullSimplify[D[D[UtM[Ppi,Ppj,Si,Sj],Sj],Ppi]],FullSimplify[D[D[UtM[Ppi,Ppj,Si,Sj],Sj],Ppj]],FullSimplify[D[D[UtM[Ppi,Ppj,Si,Sj],Sj],Si]],FullSimplify[D[D[UtM[Ppi,Ppj,Si,Sj],Sj],Sj]]}}]

```

```

MatrixForm[{{-2 b, 2 c, b α, -c α}, {2 c, -2 b, -c α, b α}, {b α, -c α, -2 F, 0}, {-c α, b α, 0, -2 F}}]

```

```

(\[NoBreak]{
  {-2 b, 2 c, b α, -c α},
  {2 c, -2 b, -c α, b α},
  {b α, -c α, -2 F, 0},
  {-c α, b α, 0, -2 F}
}\[NoBreak]);

```

```

Reduce[{b>0, c>0,F>0,b>c,0<=α<=1,PositiveDefiniteMatrixQ[{\[NoBreak]{
  {-2 b, 2 c, b α, -c α},
  {2 c, -2 b, -c α, b α},
  {b α, -c α, -2 F, 0},
  {-c α, b α, 0, -2 F}
}\[NoBreak]}}],{b,c}]

```

```

Reduce[{F>0,b>c>0,0<α<1,(\[NoBreak]-2 b\[NoBreak])<0 },{b,c}]

```

```

Reduce[{F>0,b>c>0,0<α<1,Det[({
  {-2 b, 2 c},
  {2 c, -2 b}
}\[NoBreak])>0 },{b,c}]

```

```

Reduce[{F>0,b>c>0,0<α<1,Det[{\[NoBreak]{
  {-2 b, 2 c, b α},
  {2 c, -2 b, -c α},
  {b α, -c α, -2 F}
}\[NoBreak]})<0 },{b,c}]

```

```

Reduce[{F>0,b>c>0,0<α<1,Det[{\[NoBreak]{
  {-2 b, 2 c, b α, -c α},
  {2 c, -2 b, -c α, b α},
  {b α, -c α, -2 F, 0},
  {-c α, b α, 0, -2 F}
}\[NoBreak]})>0 },{b,c}]

```


Buscando Condiciones (no negatividad)

Reduce[$\{b > c > 0, 0 < b \leq 2F/\alpha^2, F > 0, B > 0, a > (2A F + 2B \alpha)/\alpha^2 > (2B)/\alpha > A > 0, 0 \leq \alpha \leq 1, 0 < ((2b - B - Bc + Ab^2 \alpha - b(a + A c) \alpha)/(2(-2b + c)F + b(b - c)\alpha^2))\}, \{b, c\}$]

Reduce[$\{b > c > 0, 0 < b \leq 2F/\alpha^2, F > 0, B > 0, a > (2A F + 2B \alpha)/\alpha^2 > (2B)/\alpha > A > 0, 0 \leq \alpha \leq 1, 0 < ((2B - (a + A(-b + c))\alpha)/(-4F + (b - c)\alpha^2))\}, \{b, c\}$]

Reduce[$\{b > c > 0, 0 < b \leq 2F/\alpha^2, F > 0, B > 0, a > (2A F + 2B \alpha)/\alpha^2 > (2B)/\alpha > A > 0, 0 \leq \alpha \leq 1, 0 < ((2b - B - 2Bc + Ab^2 \alpha - b(a + A c) \alpha)/((b - c)(-4F + b\alpha^2)))\}, \{b, c\}$]

Reduce[$\{b > c > 0, 0 < b \leq 2F/\alpha^2, F > 0, B > 0, a > (2A F + 2B \alpha)/\alpha^2 > (2B)/\alpha > A > 0, 0 \leq \alpha \leq 1, 0 < ((B(2b - c) - (b - c)(a + A(-b + c))\alpha)/(2(-2b + c)F + (b - c)^2 \alpha^2))\}, \{b, c\}$]

Reduce[$\{b > c > 0, 0 < b \leq 2F/\alpha^2, F > 0, B > 0, a > (2A F + 2B \alpha)/\alpha^2 > (2B)/\alpha > A > 0, 0 \leq \alpha \leq 1, 0 < (1/2((2b - B - 2Bc + Ab^2 \alpha - b(a + A c) \alpha)/((b - c)(-4F + b\alpha^2)) + (2B - (a + A(-b + c))\alpha)/(-4F + (b - c)\alpha^2))\}, \{b, c\}$]

Reduce[$\{b > c > 0, 0 < b \leq 2F/\alpha^2, F > 0, B > 0, a > (2A F + 2B \alpha)/\alpha^2 > (2B)/\alpha > A > 0, 0 \leq \alpha \leq 1, 0 < ((2B(-2b + c)F + 2b(a + A(-b + c))F \alpha + Bc(-b + c)\alpha^2)/(4(2b - c)F^2 - 2(b - c)^2 F \alpha^2))\}, \{b, c\}$]

Reduce[$\{b > c > 0, 0 < b \leq 2F/\alpha^2, F > 0, B > 0, a > (2A F + 2B \alpha)/\alpha^2 > (2B)/\alpha > A > 0, 0 \leq \alpha \leq 1, 0 < ((B(2b - c) - (b - c)(a + A(-b + c))\alpha)/(2(-2b + c)F + (b - c)^2 \alpha^2))\}, \{b, c\}$]

Reduce[$\{b > c > 0, 0 < b \leq 2F/\alpha^2, F > 0, B > 0, a > (2A F + 2B \alpha)/\alpha^2 > (2B)/\alpha > A > 0, 0 \leq \alpha \leq 1, 0 < (A + (-2aF + (b - c)(2A F + B \alpha))/(2(b - c)(-4F + b\alpha^2)) + (-2aF + (b - c)(2A F + B \alpha))/(-8bF + 2b(b - c)\alpha^2))\}, \{b, c\}$]

Comparación de Niveles de Calidad

FullSimplify[SiC-SiMsp]

Reduce[$\{b > c > 0, 0 < b \leq 2F/\alpha^2, F > 0, B > 0, a > (2A F + 2B \alpha)/\alpha^2 > (2B)/\alpha > A > 0, 0 \leq \alpha \leq 1, 0 > ((c \alpha (2aF - (b - c)(2A F + B \alpha)))/((4bF - 2cF - b^2 \alpha^2 + b c \alpha^2)(4F + (-b + c)\alpha^2)))\}, \{b, c\}$]

FullSimplify[SiC-SiMp]

Reduce[$\{b > c > 0, 0 < b \leq 2F/\alpha^2, F > 0, B > 0, a > (2A F + 2B \alpha)/\alpha^2 > (2B)/\alpha > A > 0, 0 \leq \alpha \leq 1, 0 < ((b c \alpha (-2aF + (b - c)(2A F + B \alpha)))/((b - c)(-4F + b\alpha^2)(2(-2b + c)F + b(b - c)\alpha^2)))\}, \{b, c\}$]

FullSimplify[SiMp-SiMs]

Reduce[{{b>c>0,0<b≤2F/α^2,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α2>(2 B)/α>A>0,0≤α≤1, 0>(-
 (((3 b-2 c) c α (-2 a F+(b-c) (2 A F+B α)))/((b-c) (-4 F+b α2) (2 (-2 b+c) F+(b-c)^2
 α2))}}, {b,c}]

FullSimplify[SiC-SiMs]

Reduce[{{b>c>0,0<b≤2F/α^2,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α2>(2 B)/α>A>0,0≤α≤1, 0>(-
 (((2 b-c) c α (-2 a F+(b-c) (2 A F+B α)))/(4 (-2 b+c)^2 F^2-2 (b-c) (-2 b+c)^2 F α2+b (b-c)^3
 α4))}}, {b,c}]

FullSimplify[SiMsp-SiMs]

Reduce[{{b>c>0,0<b≤2F/α^2,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α2>(2 B)/α>A>0,0≤α≤1,
 0>((c α (-2 a F+(b-c) (2 A F+B α)))/(8 (-2 b+c) F^2+2 (4 b-3 c) (b-c) F α2-(b-c)^3
 α4))}}, {b,c}]

FullSimplify[SiC-Sdsp]

Reduce[{{b>c>0,0<b≤2F/α^2,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α2>(2 B)/α>A>0,0≤α≤1,
 0<((2 c^2 F α (2 a F-(b-c) (2 A F+B α)))/((b-c) (4 F-b α2) (2 (-2 b+c) F+b (b-c) α2) (4
 F+(-b+c) α2))}}, {b,c}]

FullSimplify[Sdsp-Sds]

Reduce[{{b>c>0,0<b≤2F/α^2,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α2>(2 B)/α>A>0,0≤α≤1, 0>(-
 ((c^2 α (2 F+(-b+c) α2) (2 a F-(b-c) (2 A F+B α)))/((b-c) (4 F-b α2) (2 (-2 b+c) F+(b-c)^2
 α2) (4 F+(-b+c) α2))}}, {b,c}]

FullSimplify[SiC-Sds]

Reduce[{{b>c>0,0<b≤2F/α^2,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α2>(2 B)/α>A>0,0≤α≤1,
 0<((b c^2 α3 (2 a F-(b-c) (2 A F+B α)))/((-4 F+b α2) (2 (-2 b+c) F+b (b-c) α2) (2 (-2
 b+c) F+(b-c)^2 α2))}}, {b,c}]

FullSimplify[Sdsp-Sdp]

Reduce[{{b>c>0,0<b≤2F/α^2,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α2>(2 B)/α>A>0,0≤α≤1,
 0<((c^2 α3 (2 a F-(b-c) (2 A F+B α)))/((b-c) (-4 F+b α^2)^2 (4 F+(-b+c) α2))}}, {b,c}]

FullSimplify[Sds-Sdp]

Reduce[{{b>c>0,0<b≤2F/α^2,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α2>(2 B)/α>A>0,0≤α≤1,
 0>((c^2 α (2 F+(-2 b+c) α2) (2 a F-(b-c) (2 A F+B α)))/((b-c) (-4 F+b α^2)^2 (2 (-2 b+c)
 F+(b-c)^2 α2))}}, {b,c}]

FullSimplify[SiMp-Sdsp]

Reduce[{{b>c>0,0<b≤2F/α^2,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α2>(2 B)/α>A>0,0≤α≤1,
 0>((c α (2 a F-(b-c) (2 A F+B α)))/((b-c) (-4 F+b α2) (-4 F+(b-c) α2))}}, {b,c}]

Comparación de Precios

FullSimplify[PpiC-PpiMsp]

Reduce[{{b>c>0, 0<b≤2F/α², F>0, B>0, a>(2 A F+2 B α)/α²>(2 B)/α>A>0, 0≤α≤1, 0<(-((c (2 F+(-b+c) α²) (2 a F-(b-c) (2 A F+B α)))/((b-c) (-4 F+(b-c) α²) (2 (-2 b+c) F+b (b-c) α²))))}}, {b,c}]

FullSimplify[PpiMsp-PpiMp]

Reduce[{{b>c>0, 0<b≤2F/α², F>0, B>0, a>(2 A F+2 B α)/α²>(2 B)/α>A>0, 0≤α≤1, 0<((c α² (-2 a F+(b-c) (2 A F+B α)))/((b-c) (-4 F+b α²) (-4 F+(b-c) α²)))}}, {b,c}]

FullSimplify[PpiMsp-PpiMs]

Reduce[{{b>c>0, 0<b≤2F/α², F>0, B>0, a>(2 A F+2 B α)/α²>(2 B)/α>A>0, 0≤α≤1, 0>((2 c F (2 a F-(b-c) (2 A F+B α)))/(8 (2 b²-3 b c+c²) F²-2 (4 b-3 c) (b-c)² F α²+ (b-c)⁴ α⁴))}}, {b,c}]

FullSimplify[PpiC-PpiMs]

Reduce[{{b>c>0, 0<b≤2F/α², F>0, B>0, a>(2 A F+2 B α)/α²>(2 B)/α>A>0, 0≤α≤1, 0>(((b-c) c α² (-2 a F+(b-c) (2 A F+B α)))/(4 (-2 b+c)² F²-2 (b-c) (-2 b+c)² F α²+b (b-c)³ α⁴))}}, {b,c}]

FullSimplify[PpiMsp-PpDsp]

Reduce[{{b>c>0, 0<b≤2F/α², F>0, B>0, a>(2 A F+2 B α)/α²>(2 B)/α>A>0, 0≤α≤1, 0>((c (2 F-b α²) (2 a F-(b-c) (2 A F+B α)))/(b (b-c) (-4 F+b α²) (-4 F+(b-c) α²))}}, {b,c}]

FullSimplify[PpiC-PpDsp]

Reduce[{{b>c>0, 0<b≤2F/α², F>0, B>0, a>(2 A F+2 B α)/α²>(2 B)/α>A>0, 0≤α≤1, 0<((4 c² F² (2 a F-(b-c) (2 A F+B α)))/(b (b-c) (4 F-b α²) (2 (-2 b+c) F+b (b-c) α²) (4 F+(-b+c) α²))}}, {b,c}]

FullSimplify[PpDp-PpDsp]

Reduce[{{b>c>0, 0<b≤2F/α², F>0, B>0, a>(2 A F+2 B α)/α²>(2 B)/α>A>0, 0≤α≤1, 0<((-2 c² F α² (2 a F-(b-c) (2 A F+B α)))/(b (b-c) (-4 F+b α²)² (4 F+(-b+c) α²))}}, {b,c}]

FullSimplify[PpDp-PpDs]

Reduce[{{b>c>0, 0<b≤2F/α², F>0, B>0, a>(2 A F+2 B α)/α²>(2 B)/α>A>0, 0≤α≤1, 0<((-2 c² F (2 F+(-2 b+c) α²) (2 a F-(b-c) (2 A F+B α)))/(b (b-c) (-4 F+b α²)² (2 (-2 b+c) F+(b-c)² α²))}}, {b,c}]

FullSimplify[PpiC-PpDs]

Reduce[{{b>c>0, 0<b≤2F/α², F>0, B>0, a>(2 A F+2 B α)/α²>(2 B)/α>A>0, 0≤α≤1, 0<((2 c² F α² (2 a F-(b-c) (2 A F+B α)))/((-4 F+b α²) (2 (-2 b+c) F+b (b-c) α²) (2 (-2 b+c) F+(b-c)² α²))}}, {b,c}]

Comparación de Utilidades

FullSimplify[UtMpi-UtMsi]

Reduce[{b>c>0, 0<b≤ 2F/α², F>0, B>0, a>(2 A F+2 B α)/α²>(2 B)/α>A>0, 0≤α≤1, 0<(((4 (b-c) F²+b (-5 b+4 c) F α²+(b-c)³ α⁴) (-2 a c F+(b-c) c (2 A F+B α))²)/((b-c)² (-4 F+b α²)² (2 (-2 b+c) F+(b-c)² α²)))]}, {b,c}]

FullSimplify[UtMspi-UtMpi]

Reduce[{b>c>0, 0<b≤ 2F/α², F>0, B>0, a>(2 A F+2 B α)/α²>(2 B)/α>A>0, 0≤α≤1, 0>(-((c² α² (-2 a F+(b-c) (2 A F+B α))²)/((b-c)² (-4 F+b α²)² (-4 F+(b-c) α²)))]}, {b,c}]

Parte 2: Juego Consecutivo

$$\begin{aligned} Q_i[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j] &:= a - b * P_{pi} + \alpha * b * S_i + c * P_{pj} - \alpha * c * S_j; \\ Q_j[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j] &:= a - b * P_{pj} + \alpha * b * S_j + c * P_{pi} - \alpha * c * S_i; \\ C_i[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j] &:= A * Q_i[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j] + B * S_i + F * (S_i^2); \\ C_j[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j] &:= A * Q_j[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j] + B * S_j + F * (S_j^2); \end{aligned}$$

Competencia

$$\begin{aligned} UtBN_i[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j] &:= P_{pi} * Q_i[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j] - C_i[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j] \\ FullSimplify[Solve[\{D[UtBN_i[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j], P_{pi}] = 0\}, \{P_{pi}\}]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} UtBN_j[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j] &:= P_{pj} * Q_j[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j] - C_j[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j] \\ FullSimplify[Solve[\{D[UtBN_j[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j], P_{pj}] = 0\}, \{P_{pj}\}]] \end{aligned}$$

$$sol = FullSimplify[Solve[\{P_{pi} = (a + A b + c P_{pj} + b S_i - \alpha c S_j) / (2 b), P_{pj} = (a + A b + c P_{pi} - c S_i + b S_j - \alpha) / (2 b)\}, \{P_{pi}, P_{pj}\}]]$$

$$\begin{aligned} UtBN_i[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j] &:= P_{pi} * Q_i[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j] - C_i[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j] \\ FullSimplify[Solve[\{D[UtBN_i[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j], S_i] = 0\}, \{S_i\}]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} UtBN_j[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j] &:= P_{pj} * Q_j[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j] - C_j[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j] \\ FullSimplify[Solve[\{D[UtBN_j[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j], S_j] = 0\}, \{S_j\}]] \end{aligned}$$

$$sol = FullSimplify[Solve[\{S_i = (B (-4 b^2 + c^2)^2 - 2 b (2 b + c) (2 b^2 - c^2) (a + A (-b + c)) \alpha + 2 b^2 (2 b^2 - c^2) S_j - \alpha) / (-2 (-4 b^2 + c^2)^2 F + 2 b (-2 b^2 + c^2)^2 \alpha), S_j = (B (-4 b^2 + c^2)^2 - 2 b (2 b + c) (2 b^2 - c^2) (a + A (-b + c)) \alpha + 2 b^2 (2 b^2 - c^2) S_i - \alpha) / (-2 (-4 b^2 + c^2)^2 F + 2 b (-2 b^2 + c^2)^2 \alpha)\}, \{S_i, S_j\}]]$$

$$\begin{aligned} FullSimplify[P_{pi} = ((a + A b) (2 b + c) + (2 b^2 S_i - c^2 S_i - b c S_j - \alpha) / (4 b^2 - c^2))] \\ FullSimplify[P_{pj} = ((a + A b) (2 b + c) + (2 b^2 S_j - b c S_i - c^2 S_j - \alpha) / (4 b^2 - c^2))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} FullSimplify[UtBN_i = P_{pi} * Q_i[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j] - C_i[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j]] \\ FullSimplify[UtBN_j = P_{pj} * Q_j[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j] - C_j[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j]] \end{aligned}$$

Cartel Precio y Calidad

$$UtM_{sp}[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j] := (P_{pi} * Q_i[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j] - C_i[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j]) + (P_{pj} * Q_j[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j] - C_j[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j])$$

$$\begin{aligned} FullSimplify[Solve[\{D[UtM_{sp}[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j], P_{pi}] = 0\}, \{P_{pi}\}]] \\ FullSimplify[Solve[\{D[UtM_{sp}[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j], P_{pj}] = 0\}, \{P_{pj}\}]] \end{aligned}$$

sol= FullSimplify[Solve[{Ppi==(a+A b-A c+2 c Ppj+b Si α -c Sj α)/(2 b),Ppj==(a+A b-A c+2 c Ppi-c Si α +b Sj α)/(2 b)},{Ppi,Ppj}]]

UtMsp[Ppi_,Ppj_,Si_,Sj_]:= (Ppi*Qi[Ppi,Ppj,Si,Sj]- Ci[Ppi,Ppj,Si,Sj])+(Ppj*Qj[Ppi,Ppj,Si,Sj]- Cj[Ppi,Ppj,Si,Sj])

FullSimplify[Solve[{D[UtMsp[Ppi,Ppj,Si,Sj],Si]==0},{Si}]]
FullSimplify[Solve[{D[UtMsp[Ppi,Ppj,Si,Sj],Sj]==0},{Sj}]]

sol= FullSimplify[Solve[{Si==(2 B+ α (-a+A b-A c+c Sj α)/(-4 F+b α 2),Sj==(2 B+ α (-a+A b-A c+c Si α)/(-4 F+b α 2)},{Si,Sj}]]

FullSimplify[Ppi=(a+(b-c) (A+Si α))/(2 (b-c))]
FullSimplify[Ppj=(a+(b-c) (A+Sj α))/(2 (b-c))]

FullSimplify[UtMspi=(1/2*(Ppi*Qi[Ppi,Ppj,Si,Sj]- Ci[Ppi,Ppj,Si,Sj])+(Ppj*Qj[Ppi,Ppj,Si,Sj]- Cj[Ppi,Ppj,Si,Sj]))]

Desvío en calidad y no precio

Qi[PpiC_,PpjC_,Si_,Sd_]:=a-b*PpiC+ α *b*Si+c*PpjC- α *c*Sd;
Qj[PpiC_,PpjC_,Si_,Sd_]:=a-b*PpjC+ α *b*Sd+c*PpiC- α *c*Si;
Ci[PpiC_,PpjC_,Si_,Sd_]:=A*Qi[PpiC,PpjC,Si,Sd]+B*Si+F*(Si^2);
Cj[PpiC_,PpjC_,Si_,Sd_]:=A*Qj[PpiC,PpjC,Si,Sd]+B*Sd+F*(Sd^2);

UtBNd[PpiC_,PpjC_,Si_,Sd_]:=PpjC*Qj[PpiC,PpjC,Si,Sd]- Cj[PpiC,PpjC,Si,Sd]
FullSimplify[Solve[{D[UtBNd[PpiC,PpjC,Si,Sd],Sd]==0},{Sd}]]

FullSimplify[Ppi=((a+A b) (2 b+c)+(2 b^2 Si-c^2 Si-b c Sd) α)/(4 b^2-c^2)]
FullSimplify[Ppj=((a+A b) (2 b+c)+(-b c Si+2 b^2 Sd-c^2 Sd) α)/(4 b^2-c^2)]

FullSimplify[UtDsMsp=(PpjC*(a-b*PpjC+ α *b*Sd+c*PpiC- α *c*Si)-A*(a-b*PpjC+ α *b*Sd+c*PpiC- α *c*Si)+B*Sd+F*(Sd^2))]

Desvío en precio y no calidad

sol=FullSimplify[Solve[{Ppd==(a+A b+c Ppi-c Si α +b Sj α)/(2 b)},{Ppd}]]
{ {Ppd=(2 a (-2 b+c) F+(b-c) (-2 A (2 b+c) F+B (2 b-c) α +2 A b (b-c) α 2))/(2 b (b-c) (-4 F+(b-c) α 2))} };

FullSimplify[UtDpMsp=(Ppd*(a-b*Ppd+ α *b*Sj+c*Ppi- α *c*Si)-A*(a-b*Ppd+ α *b*Sj+c*Ppi- α *c*Si)+B*Sj+F*(Sj^2))]

Delta Crítico precio y calidad, desvío en precio

$$\text{FullSimplify}[\delta\text{BNCDpMsp} = (\text{UtDpMsp} - \text{UtMsp})/(\text{UtDpMsp} - \text{UtBNi})]$$

Delta Crítico precio y calidad, desvío en calidad

$$\text{FullSimplify}[\delta\text{BNCDsMsp} = (\text{UtDsMsp} - \text{UtMsp})/(\text{UtDsMsp} - \text{UtBNi})]$$

Cartel sólo en Precio

$$\begin{aligned} \text{UtMp}[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j] &:= (P_{pi} * Q_i[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j] - \\ & C_i[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j]) + (P_{pj} * Q_j[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j] - \\ & C_j[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j]) \\ \text{FullSimplify}[\text{Solve}[\{D[\text{UtMp}[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j], P_{pi}] == 0\}, \{P_{pi}\}]] \\ \text{FullSimplify}[\text{Solve}[\{D[\text{UtMp}[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j], P_{pj}] == 0\}, \{P_{pj}\}]] \end{aligned}$$

$$\text{sol} = \text{FullSimplify}[\text{Solve}[\{P_{pi} == (a + A b - A c + 2 c P_{pj} + b S_i \alpha - c S_j \alpha) / (2 b), P_{pj} == (a + A b - A c + 2 c P_{pi} - c S_i \alpha + b S_j \alpha) / (2 b)\}, \{P_{pi}, P_{pj}\}]]$$

$$\begin{aligned} \text{UtBNi}[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j] &:= P_{pi} * Q_i[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j] - C_i[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j] \\ \text{FullSimplify}[\text{Solve}[\{D[\text{UtBNi}[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j], S_i] == 0\}, \{S_i\}]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{UtBNj}[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j] &:= P_{pj} * Q_j[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j] - C_j[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j] \\ \text{FullSimplify}[\text{Solve}[\{D[\text{UtBNj}[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j], S_j] == 0\}, \{S_j\}]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sol} = \text{FullSimplify}[\text{Solve}[\{S_i == (4 B (b-c) - (2 b-c) (a+A (-b+c)) \alpha + (b-c) c S_j \alpha^2) / (2 (b-c) (-4 F + b \alpha^2)), \\ S_j == (4 B (b-c) - (2 b-c) (a+A (-b+c)) \alpha + (b-c) c S_i \alpha^2) / (2 (b-c) (-4 F + b \alpha^2))\}, \{S_i, S_j\}]] \end{aligned}$$

$$\text{FullSimplify}[P_{pi} = (a + (b-c) (A + S_i \alpha)) / (2 (b-c))]$$

$$\text{FullSimplify}[P_{pj} = (a + (b-c) (A + S_j \alpha)) / (2 (b-c))]$$

$$\text{FullSimplify}[\text{UtMpi} = P_{pi} * Q_i[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j] - C_i[P_{pi}, P_{pj}, S_i, S_j]]$$

Desvío en precio

$$\text{sol} = \text{FullSimplify}[\text{Solve}[\{P_{pd} == (a + A b + c P_{pi} - c S_i \alpha + b S_j \alpha) / (2 b)\}, \{P_{pd}\}]]$$

FullSimplify[UtDpMp=(Ppd*(a-b*Ppd+α*b*Sj+c*Ppi-α*c*Si)-A*(a-b*Ppd+α*b*Sj+c*Ppi-α*c*Si)+B*Sj+F*(Sj^2))]

Delta Crítico en precio

FullSimplify[δBNCDpMp = (UtDpMp – UtMpi)/(UtDpMp – UtBNi)]

Cartel sólo en Calidad

UtBNi[Ppi_,Ppj_,Si_,Sj_] := (Ppi*Qi[Ppi,Ppj,Si,Sj]- Ci[Ppi,Ppj,Si,Sj])
FullSimplify[Solve[{D[UtBNi[Ppi,Ppj,Si,Sj],Ppi]==0}, {Ppi}]]

UtBNj[Ppi_,Ppj_,Si_,Sj_] := (Ppj*Qj[Ppi,Ppj,Si,Sj]- Cj[Ppi,Ppj,Si,Sj])
FullSimplify[Solve[{D[UtBNj[Ppi,Ppj,Si,Sj],Ppj]==0}, {Ppj}]]

sol= FullSimplify[Solve[{Ppi==(a+A b+c Ppj+b Si α-c Sj α)/(2 b),Ppj==(a+A b+c Ppi-c Si α+b Sj α)/(2 b) },{Ppi,Ppj}]]

UtMs[Ppi_,Ppj_,Si_,Sj_] := (Ppi*Qi[Ppi,Ppj,Si,Sj]- Ci[Ppi,Ppj,Si,Sj])+(Ppj*Qj[Ppi,Ppj,Si,Sj]- Cj[Ppi,Ppj,Si,Sj])
FullSimplify[Solve[{D[UtMs[Ppi,Ppj,Si,Sj],Si]==0}, {Si}]]
FullSimplify[Solve[{D[UtMs[Ppi,Ppj,Si,Sj],Sj]==0}, {Sj}]]

sol= FullSimplify[Solve[{Si==(B (-4 b^2+c^2)^2-2 b (b-c) (2 b+c)^2 (a+A (-b+c)) α+4 b^2 (2 b^2 c-c^3) Sj α2)/(-2 (-4 b^2+c^2)^2 F+2 b (4 b^4-3 b^2 c^2+c^4) α2),Sj==(B (-4 b^2+c^2)^2-2 b (b-c) (2 b+c)^2 (a+A (-b+c)) α+4 b^2 (2 b^2 c-c^3) Si α2)/(-2 (-4 b^2+c^2)^2 F+2 b (4 b^4-3 b^2 c^2+c^4) α2) },{Si,Sj}]]

FullSimplify[Ppi=((a+A b) (2 b+c)+(2 b^2 Si-c^2 Si-b c Sj) α)/(4 b^2-c^2)]
FullSimplify[Ppj=((a+A b) (2 b+c)+(-b c Si+2 b^2 Sj-c^2 Sj) α)/(4 b^2-c^2)]

FullSimplify[UtMsi=Ppi*Qi[Ppi,Ppj,Si,Sj]- Ci[Ppi,Ppj,Si,Sj]]

Desvío en calidad

Qi[PpiC_,PpjC_,Si_,Sd_] := a-b*PpiC+□*b*Si+c*PpjC-□*c*Sd;
Qj[PpiC_,PpjC_,Si_,Sd_] := a-b*PpjC+□*b*Sd+c*PpiC-□*c*Si;
Ci[PpiC_,PpjC_,Si_,Sd_] := A*Qi[PpiC,PpjC,Si,Sd]+B*Si+F*(Si^2);
Cj[PpiC_,PpjC_,Si_,Sd_] := A*Qj[PpiC,PpjC,Si,Sd]+B*Sd+F*(Sd^2);

UtMds[PpiC_,PpjC_,Si_,Sd_]:= (PpjC*Qj[PpiC,PpjC,Si,Sd]- Cj[PpiC,PpjC,Si,Sd])
 FullSimplify[Solve[{D[UtMds[PpiC,PpjC,Si,Sd],Sd]==0}, {Sd}]]

FullSimplify[PpiC==((a+A b) (2 b+c)+(2 b^2 Si-c^2 Si-b c Sd) α)/(4 b^2-c^2)]
 FullSimplify[PpjC==((a+A b) (2 b+c)+(-b c Si+2 b^2 Sd-c^2 Sd) α)/(4 b^2-c^2)]

FullSimplify[UtDsMs=(PpjC*(a-b*PpjC+α*b*Sd+c*PpiC-α*c*Si)-A*(a-b*PpjC+α*b*Sd+c*PpiC-α*c*Si)+B*Sd+F*(Sd^2))]

Delta Crítico en calidad

FullSimplify[δBNCDsMs = (UtDsMs – UtMsi)/(UtDsMs – UtBNi)]

ANALISIS VARIOS

Buscando Condiciones (condiciones de segundo orden)

UtM[Ppi_,Ppj_,Si_,Sj_]:= (Ppi*Qi[Ppi,Ppj,Si,Sj]-
 Ci[Ppi,Ppj,Si,Sj])+(Ppj*Qj[Ppi,Ppj,Si,Sj]- Cj[Ppi,Ppj,Si,Sj])

Table[{ { FullSimplify[D[D[UtM[Ppi,Ppj,Si,Sj],Ppi],Ppi]],FullSimplify[D[D[UtM[Ppi,Ppj,Si,Sj],Ppi],Ppj]],FullSimplify[D[D[UtM[Ppi,Ppj,Si,Sj],Ppi],Si]],FullSimplify[D[D[UtM[Ppi,Ppj,Si,Sj],Ppi],Sj]]}, { FullSimplify[D[D[UtM[Ppi,Ppj,Si,Sj],Ppj],Ppi]],FullSimplify[D[D[UtM[Ppi,Ppj,Si,Sj],Ppj],Ppj]],FullSimplify[D[D[UtM[Ppi,Ppj,Si,Sj],Ppj],Si]],FullSimplify[D[D[UtM[Ppi,Ppj,Si,Sj],Ppj],Sj]]}, { FullSimplify[D[D[UtM[Ppi,Ppj,Si,Sj],Si],Ppi]],FullSimplify[D[D[UtM[Ppi,Ppj,Si,Sj],Si],Ppj]],FullSimplify[D[D[UtM[Ppi,Ppj,Si,Sj],Si],Sj]],FullSimplify[D[D[UtM[Ppi,Ppj,Si,Sj],Si],Si]],FullSimplify[D[D[UtM[Ppi,Ppj,Si,Sj],Si],Sj]]}, { FullSimplify[D[D[UtM[Ppi,Ppj,Si,Sj],Sj],Ppi]],FullSimplify[D[D[UtM[Ppi,Ppj,Si,Sj],Sj],Ppj]],FullSimplify[D[D[UtM[Ppi,Ppj,Si,Sj],Sj],Si]],FullSimplify[D[D[UtM[Ppi,Ppj,Si,Sj],Sj],Sj]]} } }

MatrixForm[{{ -2 b, 2 c, b α, -c α}, { 2 c, -2 b, -c α, b α}, { b α, -c α, -2 F, 0}, {-c α, b α, 0, -2 F}}]

(\[NoBreak]{
 {-2 b, 2 c, b α, -c α},
 {2 c, -2 b, -c α, b α},
 {b α, -c α, -2 F, 0},
 {-c α, b α, 0, -2 F}
 }\[NoBreak]);

Reduce[{b>0, c>0,F>0,b>c,0≤α≤1,PositiveDefiniteMatrixQ((\[NoBreak]{
 {-2 b, 2 c, b α, -c α},

$$\{2c, -2b, -c\alpha, b\alpha\},$$

$$\{b\alpha, -c\alpha, -2F, 0\},$$

$$\{-c\alpha, b\alpha, 0, -2F\}$$

$$\}\backslash[\text{NoBreak}]]\}, \{b, c\}$$

$$\text{Reduce}[\{F>0, b>c>0, 0<\alpha<1, (\backslash[\text{NoBreak}]-2b\backslash[\text{NoBreak}])<0\}, \{b, c\}]$$

$$\text{Reduce}[\{F>0, b>c>0, 0<\alpha<1, \text{Det}[(\{$$

$$\{-2b, 2c\},$$

$$\{2c, -2b\}$$

$$\}\backslash[\text{NoBreak}])>0\}, \{b, c\}]$$

$$\text{Reduce}[\{F>0, b>c>0, 0<\alpha<1, \text{Det}[(\backslash[\text{NoBreak}]\{$$

$$\{-2b, 2c, b\alpha\},$$

$$\{2c, -2b, -c\alpha\},$$

$$\{b\alpha, -c\alpha, -2F\}$$

$$\}\backslash[\text{NoBreak}])<0\}, \{b, c\}]$$

$$\text{Reduce}[\{F>0, b>c>0, 0<\alpha<1, \text{Det}[(\backslash[\text{NoBreak}]\{$$

$$\{-2b, 2c, b\alpha, -c\alpha\},$$

$$\{2c, -2b, -c\alpha, b\alpha\},$$

$$\{b\alpha, -c\alpha, -2F, 0\},$$

$$\{-c\alpha, b\alpha, 0, -2F\}$$

$$\}\backslash[\text{NoBreak}])>0\}, \{b, c\}]$$

Buscando Condiciones (no negatividad)

$$\text{Reduce}[\{b>c>0, 0<b\leq 2F/\alpha^2, F>0, B>0, a>(2A F+2B\alpha)/\alpha^2>B/\alpha>A>0, 0\leq\alpha\leq 1,$$

$$0<(A+(-2a F+(b-c)(2A F+B\alpha))/((b-c)(-4F+(b-c)\alpha^2)))\}, \{b, c\}]$$

$$\text{Reduce}[\{b>c>0, 0<b\leq 2F/\alpha^2, F>0, B>0, a>(2A F+2B\alpha)/\alpha^2>B/\alpha>A>0, 0\leq\alpha\leq 1, 0<((4B$$

$$(b-c)-(2b-c)(a+A(-b+c))\alpha)/((b-c)(-8F+(2b-c)\alpha^2)))\}, \{b, c\}]$$

$$\text{Reduce}[\{b>c>0, 0<b\leq 2F/\alpha^2, F>0, B>0, a>(2A F+2B\alpha)/\alpha^2>B/\alpha>A>0, 0\leq\alpha\leq 1, 0<((2a$$

$$(-2b+c)F+(b-c)(-2A(2b+c)F+B(2b-c)\alpha+2Ab(b-c)\alpha^2))/(2b(b-c)(-4F+(b-c)$$

$$\alpha^2)))\}, \{b, c\}]$$

$$\text{Reduce}[\{b>c>0, 0<b\leq 2F/\alpha^2, F>0, B>0, a>(2A F+2B\alpha)/\alpha^2>B/\alpha>A>0, 0\leq\alpha\leq 1,$$

$$0<(U\text{tMpi})\}, \{b, c\}]$$

Comparación de Niveles de Calidad

$$\text{FullSimplify}[\text{SiC-SiMsp}]$$

Reduce[{{b>c>0,0<b≤2F/α^2,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α2>B/α>A>0,0≤α≤1, 0>(-(c^2 (-4 b^2+2 b c+c^2) α (2 a F-(b-c) (2 A F+B α)))/(2 (4 F+(-b+c) α2) ((-2 b+c)^2 (2 b+c) F-b (b-c) (2 b^2-c^2) α2))}}, {b,c}]

FullSimplify[SiC-SiMp]

Reduce[{{b>c>0,0<b≤2F/α^2,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α2>B/α>A>0,0≤α≤1, 0<((c^2 (-8 b^2+4 b c+c^2) α (2 a F-(b-c) (2 A F+B α)))/(2 (b-c) (-8 F+(2 b-c) α2) (-(-2 b+c)^2 (2 b+c) F+b (b-c) (2 b^2-c^2) α2))}}, {b,c}]

FullSimplify[SiMp-SiMs]

Reduce[{{b>c>0,0<b≤2F/α^2,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α2>B/α>A>0,0≤α≤1, 0>(-(c^2 (-4 b^2+2 b c+c^2) α (2 a F-(b-c) (2 A F+B α)))/(2 (b-c) (-(-2 b+c)^2 F+b (b-c)^2 α2) (-8 F+(2 b-c) α2))}}, {b,c}]

FullSimplify[SiC-SiMs]

Reduce[{{b>c>0,0<b≤2F/α^2,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α2>B/α>A>0,0≤α≤1, 0>((b^2 c (-2 b+c)^2 α (2 a F-(b-c) (2 A F+B α)))/(2 (-2 b+c)^4 (2 b+c) F^2-2 b (b-c) (-2 b+c)^2 (4 b^2-b c-2 c^2) F α2+2 b^2 (b-c)^3 (2 b^2-c^2) α4))}}, {b,c}]

FullSimplify[SiMsp-SiMs]

Reduce[{{b>c>0,0<b≤2F/α^2,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α2>B/α>A>0,0≤α≤1, 0>((c^2 α (2 a F-(b-c) (2 A F+B α)))/(8 (-2 b+c)^2 F^2-2 (b-c) (8 b^2-8 b c+c^2) F α2+2 b (b-c)^3 α4))}}, {b,c}]

FullSimplify[SiC-SdMsp]

Reduce[{{b>c>0,0<b≤2F/α^2,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α2>B/α>A>0,0≤α≤1, 0<(b^2 c^2 (2 b^2-c^2) (4 b^2-2 b c-c^2) α3 (-2 a F+(b-c) (2 A F+B α))}}, {b,c}]
Reduce[{{b>c>0,0<b≤2F/α^2,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α2>B/α>A>0,0≤α≤1, 0>(2 (4 F+(-b+c) α2) ((-2 b+c)^2 (2 b+c) F-b (b-c) (2 b^2-c^2) α2) ((-4 b^2+c^2)^2 F-b (-2 b^2+c^2)^2 α2))}}, {b,c}]

FullSimplify[SdMsp-SdMs]

Reduce[{{b>c>0,0<b≤2F/α^2,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α2>B/α>A>0,0≤α≤1, 0>(b^2 c^3 (2 b^2-c^2) α3 (2 a F-(b-c) (2 A F+B α))}}, {b,c}]
Reduce[{{b>c>0,0<b≤2F/α^2,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α2>B/α>A>0,0≤α≤1, 0<(2 (-4 b^2+c^2)^2 F+b (-2 b^2+c^2)^2 α2) (4 (-2 b+c)^2 F^2-(b-c) (8 b^2-8 b c+c^2) F α2+b (b-c)^3 α4))}}, {b,c}]

FullSimplify[SiC-SdMs]

Reduce[{{b>c>0,0<b≤2F/α^2,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α2>B/α>A>0,0≤α≤1, 0<(b^4 c^2 (-2 b+c)^2 (2 b^2-c^2) α3 (-2 a F+(b-c) (2 A F+B α))}}, {b,c}]
Reduce[{{b>c>0,0<b≤2F/α^2,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α2>B/α>A>0,0≤α≤1, 0>(-2 (-2 b+c)^2 F+b (b-c)^2 α2) (-(-2 b+c)^2 (2 b+c) F+b (b-c) (2 b^2-c^2) α2) (-(-4 b^2+c^2)^2 F+b (-2 b^2+c^2)^2 α2))}}, {b,c}]

FullSimplify[SiMp-SdMs]

Reduce[{b>c>0, 0<b≤2F/α², F>0, B>0, a>(2 A F+2 B α)/α²>B/α>A>0, 0≤α≤1, ((-(-2 b+c)² (16 b³-6 b c²-c³) F>b (24 b⁵-36 b⁴ c+4 b³ c²+13 b² c³-3 b c⁴-c⁵) α²))}, {b,c}]

Reduce[{b>c>0, 0<b≤2F/α², F>0, B>0, a>(2 A F+2 B α)/α²>B/α>A>0, 0≤α≤1, 0>(b (24 b⁵-36 b⁴ c+4 b³ c²+13 b² c³-3 b c⁴-c⁵) α²)}, {b,c}]

Reduce[{b>c>0, 0<b≤2F/α², F>0, B>0, a>(2 A F+2 B α)/α²>B/α>A>0, 0≤α≤1, 0>((2 a F-(b-c) (2 A F+B α)))}, {b,c}]

Reduce[{b>c>0, 0<b≤2F/α², F>0, B>0, a>(2 A F+2 B α)/α²>B/α>A>0, 0≤α≤1, 0<((2 (b-c) ((-2 b+c)² F-b (b-c)² α²) (8 F+(-2 b+c) α²) (-(-4 b²+c²)² F+b (-2 b²+c²)² α²)))}, {b,c}]

Comparación de Precios

FullSimplify[PpiC-PpiMsp]

Reduce[{b>c>0, 0<b≤2F/α², F>0, B>0, a>(2 A F+2 B α)/α²>B/α>A>0, 0≤α≤1, 0<((c (2 (-4 b²+c²) F+(4 b³-5 b² c+c³) α²) (2 a F-(b-c) (2 A F+B α)))/(2 (b-c) (-4 F+(b-c) α²) (-(-2 b+c)² (2 b+c) F+b (b-c) (2 b²-c²) α²)))}, {b,c}]

FullSimplify[PpiMsp-PpiMp]

Reduce[{b>c>0, 0<b≤2F/α², F>0, B>0, a>(2 A F+2 B α)/α²>B/α>A>0, 0≤α≤1, 0<((c α² (-2 a F+(b-c) (2 A F+B α)))/((b-c) (8 F+(-2 b+c) α²) (4 F+(-b+c) α²)))}, {b,c}]

FullSimplify[PpiMsp-PpiMs]

Reduce[{b>c>0, 0<b≤2F/α², F>0, B>0, a>(2 A F+2 B α)/α²>B/α>A>0, 0≤α≤1, 0>(A-(-2 (a+A b) (2 b-c) F+B (2 b²-3 b c+c²) α²+2 A b (b-c)² α²)/(-2 (-2 b+c)² F+2 b (b-c)² α²)+(-2 a F+(b-c) (2 A F+B α)))/((b-c) (-4 F+(b-c) α²)))}, {b,c}]

FullSimplify[PpiC-PpiMs]

Reduce[{b>c>0, 0<b≤2F/α², F>0, B>0, a>(2 A F+2 B α)/α²>B/α>A>0, 0≤α≤1, 0>((b² c (2 b²-3 b c+c²) α² (2 a F-(b-c) (2 A F+B α)))/(2 (-2 b+c)⁴ (2 b+c) F²-2 b (b-c) (-2 b+c)² (4 b²-b c-2 c²) F α²+2 b² (b-c)³ (2 b²-c²) α⁴)))}, {b,c}]

FullSimplify[PpiMsp-PpDsp]

Reduce[{b>c>0, 0<b≤2F/α², F>0, B>0, a>(2 A F+2 B α)/α²>(2 B)/α>A>0, 0≤α≤1, 0>((c (2 F-b α²) (2 a F-(b-c) (2 A F+B α)))/(b (b-c) (-4 F+b α²) (-4 F+(b-c) α²)))}, {b,c}]

FullSimplify[PpiC-PpDsp]

Reduce[{b>c>0, 0<b≤2F/α², F>0, B>0, a>(2 A F+2 B α)/α²>(2 B)/α>A>0, 0≤α≤1, 0<(-A+(-2 (a+A b) (4 b²-c²) F+B (b-c) (2 b-c) (2 b+c) α²+2 A b (b-c) (2 b²-c²) α²)/(-2 (-2

$$b+c)^2 (2 b+c) F+2 b (b-c) (2 b^2-c^2) \alpha^2)+(2 a F-(b-c) (2 A F+B \alpha))/(-8 b F+2 b (b-c) \alpha^2)-(-2 a F+(b-c) (2 A F+B \alpha))/(2 (b-c) (-4 F+b \alpha^2))),\{b,c\}]$$

FullSimplify[PpDp-PpDsp]

$$\text{Reduce}[\{b>c>0, 0<b\leq 2F/\alpha^2, F>0, B>0, a>(2 A F+2 B \alpha)/\alpha^2>(2 B)/\alpha>A>0, 0\leq\alpha\leq 1, 0>(-((2 b-c) c \alpha^2 (-2 a F+(b-c) (2 A F+B \alpha)))/(2 b (b-c) (8 F+(-2 b+c) \alpha^2) (4 F+(-b+c) \alpha^2))))\},\{b,c\}]$$

FullSimplify[PpDp-PpiCMs]

$$\text{Reduce}[\{b>c>0, 0<b\leq 2F/\alpha^2, F>0, B>0, a>(2 A F+2 B \alpha)/\alpha^2> B/\alpha>A>0, 0\leq\alpha\leq 1, 0<((2 a (-2 b+c) F+(b-c) (-2 A (2 b+c) F+B (2 b-c) \alpha+A b (2 b-c) \alpha^2))/(b (b-c) (-8 F+(2 b-c) \alpha^2))-1/(4 b^2-c^2) ((a+A b) (2 b+c)+\alpha (2 b^2 Si-c^2 Si-(b c (-B (-2 b+c)^4 (2 b+c)^2 F+2 b (-2 b+c)^2 (2 b+c) (2 b^2-c^2) (a+A (-b+c)) F \alpha+b B (-2 b+c)^2 (4 b^4-2 b^3 c-3 b^2 c^2+b c^3+c^4) \alpha^2-2 b^2 (b-c) (-2 b^2+c^2)^2 (a+A (-b+c) \alpha^3)))/(2 (-(-2 b+c)^2 F+b (b-c)^2 \alpha^2) (-(-4 b^2+c^2)^2 F+b (-2 b^2+c^2)^2 \alpha^2))))\},\{b,c\}]$$

FullSimplify[PpCMsp-PpiC]

$$\text{Reduce}[\{b>c>0, 0<b\leq 2F/\alpha^2, F>0, B>0, a>(2 A F+2 B \alpha)/\alpha^2> B/\alpha>A>0, 0\leq\alpha\leq 1, 0<(((a+A b) (2 b+c)+(-b c Sd+2 b^2 Si-c^2 Si) \alpha)/(4 b^2-c^2)-(-2 (a+A b) (4 b^2-c^2) F+B (b-c) (2 b-c) (2 b+c) \alpha+2 A b (b-c) (2 b^2-c^2) \alpha^2))/(-2 (-2 b+c)^2 (2 b+c) F+2 b (b-c) (2 b^2-c^2) \alpha^2))\},\{b,c\}]$$

FullSimplify[PpCMsp/PpiCMs]

$$\text{Reduce}[\{b>c>0, 0<b\leq 2F/\alpha^2, F>0, B>0, a>(2 A F+2 B \alpha)/\alpha^2> B/\alpha>A>0, 0\leq\alpha\leq 1, 1<(((a+A b) (2 b+c)+(-b c Sd+2 b^2 Si-c^2 Si) \alpha)/((a+A b) (2 b+c)+\alpha (2 b^2 Si-c^2 Si-(b c (-B (-2 b+c)^4 (2 b+c)^2 F+2 b (-2 b+c)^2 (2 b+c) (2 b^2-c^2) (a+A (-b+c)) F \alpha+b B (-2 b+c)^2 (4 b^4-2 b^3 c-3 b^2 c^2+b c^3+c^4) \alpha^2-2 b^2 (b-c) (-2 b^2+c^2)^2 (a+A (-b+c) \alpha^3)))/(2 (-(-2 b+c)^2 F+b (b-c)^2 \alpha^2) (-(-4 b^2+c^2)^2 F+b (-2 b^2+c^2)^2 \alpha^2))))\},\{b,c\}]$$

Comparación de Utilidades

FullSimplify[UtMpi-UtMsi]

$$\text{Reduce}[\{b>c>0, 0<b\leq 2F/\alpha^2, F>0, B>0, a>(2 A F+2 B \alpha)/\alpha^2>B/\alpha>A>0, 0\leq\alpha\leq 1, 0>(((16 (-b+c) F+(8 b^2-8 b c+c^2) \alpha^2) (2 a c F+c (-b+c) (2 A F+B \alpha))^2)/(4 (b-c)^2 (-(-2 b+c)^2 F+b (b-c)^2 \alpha^2) (8 F+(-2 b+c) \alpha^2)^2))\},\{b,c\}]$$

FullSimplify[UtMsp-i-UtMpi]

$$\text{Reduce}[\{b>c>0, 0<b\leq 2F/\alpha^2, F>0, B>0, a>(2 A F+2 B \alpha)/\alpha^2>B/\alpha>A>0, 0\leq\alpha\leq 1, 0>((3 (b-c) (B^2 (-b+c)-(a+A (-b+c))^2 F+B (b-c) (a+A (-b+c) \alpha))/(-4 F+(b-c) \alpha^2))\},\{b,c\}]$$

$$\text{Reduce}[\{b>c>0, 0<b\leq 2F/\alpha^2, F>0, B>0, a>(2 A F+2 B \alpha)/\alpha^2>B/\alpha>A>0, 0\leq\alpha\leq 1, 0>(16 (b-c) F (B^2 (b-c)+(a+A (-b+c))^2 F))\},\{b,c\}]$$

$$\text{Reduce}[\{b>c>0, 0<b\leq 2F/\alpha^2, F>0, B>0, a>(2 A F+2 B \alpha)/\alpha^2>B/\alpha>A>0, 0\leq\alpha\leq 1, 0<-(16 B (b-c)^2 (a+A (-b+c)) F \alpha)\},\{b,c\}]$$

```

Reduce[{b>c>0,0<b<=2F/α^2,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α2>B/α>A>0,0<α<=1, 0<(-4
b B^2 (b-c)^2+(-2 b+c)^2 (a+A (-b+c))^2 F) α2)}, {b,c}]
Reduce[{b>c>0,0<b<=2F/α^2,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α2>B/α>A>0,0<α<=1, 0<(-
(+B (b-c) (-2 b+c)^2 (a+A (-b+c)) α3))}, {b,c}]
Reduce[{b>c>0,0<b<=2F/α^2,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α2>B/α>A>0,0<α<=1, ((3 (b-
c) (B^2 (-b+c)-(a+A (-b+c))^2 F+B (b-c) (a+A (-b+c)) α)/(-4 F+(b-c) α2)>1/(8 F+(-2 b+c)
α^2)^2 2 (16 (b-c) F (B^2 (b-c)+(a+A (-b+c))^2 F)))}, {b,c}]

```

```
FullSimplify[UtMspi/UtMpi]
```

```

Reduce[{b>c>0,0<b<=2F/α^2,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α2>B/α>A>0,0<α<=1, 1<(((b-
c) (3 B^2 (-b+c)-3 (a+A (-b+c))^2 F+3 B (b-c) (a+A (-b+c)) α) (8 F+(-2 b+c) α^2)^2)/(2 (-4
F+(b-c) α2) (16 (b-c) F (B^2 (b-c)+(a+A (-b+c))^2 F)-16 B (b-c)^2 (a+A (-b+c)) F α-(4 b B^2
(b-c)^2+(-2 b+c)^2 (a+A (-b+c))^2 F) α2+B (b-c) (-2 b+c)^2 (a+A (-b+c)) α3))}, {b,c}]

```

Parte 3: Otros Códigos

Gráficos Varios

```

FindInstance[{b>c>0,0<b<=2F/α^2,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α2>(2
B)/α>A>0,0<α<=1, 0>(-((c^2 α2 (-2 a F+(b-c) (2 A F+B α))^2)/((b-c)^2 (-4 F+b α^2)^2 (-4
F+(b-c) α2))))}, {b,c,F,a,A,B,α}]

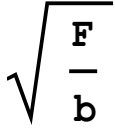
```

```

FindInstance[{b>c>0,0<b<=2F/α^2,F>0,B>0,a>A>0,0<α, 0>(-((c^2 α2 (-2 a F+(b-c) (2
A F+B α))^2)/((b-c)^2 (-4 F+b α^2)^2 (-4 F+(b-c) α2))))}, {b,c,F,a,A,B,α}]
Simplify[(F (2 (-2 b+c) F+b (b-c) α^2)^2)/((-2 F+b α2) (2 (8 b^2-8 b c+c^2) F^2-b (8 b^2-8 b
c+c^2) F α2+b^3 (b-c) α4))-(F c c (2 (-2 b/c+1) F+b (b/c-1) α^2)^2)/((-2 F+b α2) (2 (8 b^2-8
b c+c^2) F^2-b (8 b^2-8 b c+c^2) F α2+b^3 (b-c) α4))]

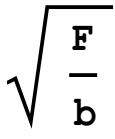
```

```

RegionPlot3D[0<c<=(2 b)/3&&F>0&&1<2 , {c,1,3}, {b,c,3}, {F,1,3} ,
AxesLabel->{Style[c, Large], Style[b, Large], Style[F, Large]}
, PlotPoints->120]

```

```

RegionPlot3D[0<c<=(2 b)/3&&F>0&&0.5<2 , {c,1,20}, {b,c,20}, {F,1,20} ,
AxesLabel->{Style[c, Large], Style[b, Large], Style[F, Large]}
, PlotPoints->60]

```

$\sqrt{\frac{F}{b}}$
 RegionPlot3D[0<c<=(2 b)/3&&F>0&&1<2 ,{c,1,20},{b,c,20},{F,1,20} ,
 AxesLabel->{Style[c, Large] , Style [b, Large] , Style[F, Large] }
 , PlotPoints->60]

$\sqrt{\frac{F}{b}}$
 RegionPlot3D[0<c<=(2 b)/3&&F>0&&3<2 ,{c,1,20},{b,c,20},{F,1,20} ,
 AxesLabel->{Style[c, Large] , Style [b, Large] , Style[F, Large] }
 , PlotPoints->60]

Gráficos de Búsqueda de Contraejemplo

$\sqrt{\frac{F}{b}}$
 RegionPlot3D[0<c<(2 b)/3&&F>0&&1<2
 ,{c,1/100,20},{b,c,20},{F,1/100,20} ,
 AxesLabel->{Style[c, Large] , Style [b, Large] , Style[F, Large] }
 , PlotPoints->60]

$\sqrt{\frac{F}{b}}$
 RegionPlot3D[UtMpi>UtMsi>0&&0<c<(2 b)/3&&F>0&&1<2
 ,{c,1/100,20},{b,c,20},{F,1/100,20} ,
 AxesLabel->{Style[c, Large] , Style [b, Large] , Style[F, Large] }
 , PlotPoints->60]

Por tanto demostrar que: $UtMp > UtMs$ y $\delta BNSDsp > \delta BNSDp$. Por FindIntance, los valores de las demás variables que hacen que la primera condición se cumpla, son:

$\sqrt{\frac{F}{b}}$
 RegionPlot3D[UtMpi>UtMsi&&0<c<(2 b)/3&&F>0&&\alpha<2
 ,{c,1/100,5},{b,c,5},{F,1/100,5} ,
 AxesLabel->{Style[c, Large] , Style [b, Large] , Style[F, Large] }
 , PlotPoints->60]

$\sqrt{\frac{F}{b}}$
 RegionPlot3D[UtMpi>UtMsi&&0<c<(2 b)/3&&F>0&& α <2
 ,{c,1/100,5},{b,c,5},{F,1/100,5} ,
 AxesLabel->{Style[c, Large] , Style [b, Large] , Style [F, Large] }
 , PlotPoints->60]

$\sqrt{\frac{F}{b}}$
 RegionPlot3D[UtMpi>UtMsi&& δ BNCDpMsp> δ BNCDpMp&&0<c<(2
 b)/3&&F>0&& α <2 ,{c,1/100,5},{b,c,5},{F,1/100,5} ,
 AxesLabel->{Style[c, Large] , Style [b, Large] , Style [F, Large] }
 , PlotPoints->60]

$\sqrt{\frac{F}{b}}$
 RegionPlot3D[UtMpi>UtMsi&& δ BNCDpMsp> δ BNCDpMp&& δ BNCDsMsp> δ BNC
 DpMp&&0<c<(2 b)/3&&F>0&& α <2 ,{c,1/100,5},{b,c,5},{F,1/100,5} ,
 AxesLabel->{Style[c, Large] , Style [b, Large] , Style [F, Large] }
 , PlotPoints->60]

$\sqrt{\frac{F}{b}}$
 RegionPlot3D[UtMpi>UtMspi&&0<c<(2 b)/3&&F>0&& α <2
 ,{c,1/100,5},{b,c,5},{F,1/100,5} ,
 AxesLabel->{Style[c, Large] , Style [b, Large] , Style [F, Large] }
 , PlotPoints->60]

Búsqueda de Contraejemplo a través de análisis de orden.

FindInstance[{b>c>0,0<b≤2F/α²,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α²>
 B/α>A>0,0≤α≤1,(UtMpi-UtMsi)>0},{b,c,F,a,A,B,α}]

FindInstance[{b>c>0,0<b≤2F/α²,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α²>
 B/α>A>0,0≤α≤1,(UtMpi-UtMsi)<0},{b,c,F,a,A,B,α}]

FindInstance[{b>c>0,0<b≤2F/α²,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α²>
 B/α>A>0,0≤α≤1,(UtMsi-UtBNi)<0},{b,c,F,a,A,B,α}]

FindInstance[{b>c>0,0<b≤2F/α²,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α2>B/α>A>0,0≤α≤1,(UtMpi-UtBNi)<0},{b,c,F,a,A,B,α}]

FindInstance[{b>c>0,0<b≤2F/α²,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α2>B/α>A>0,0≤α≤1,(UtMpi-UtBNi)>0},{b,c,F,a,A,B,α}]

FindInstance[{b>c>0,0<b≤2F/α²,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α2>B/α>A>0,0≤α≤1,UtBNi>UtMpi>0},{b,c,F,a,A,B,α}]

FindInstance[{b>c>0,0<b≤2F/α²,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α2>B/α>A>0,0≤α≤1,(UtMspi-UtMpi)<0},{b,c,F,a,A,B,α}]

FindInstance[{b>c>0,0<b≤2F/α²,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α2>B/α>A>0,0≤α≤1,UtMpi<0},{b,c,F,a,A,B,α}]

FindInstance[{b>c>0,0<b≤2F/α²,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α2>B/α>A>0,0≤α≤1,UtBNi<0},{b,c,F,a,A,B,α}]

FindInstance[{b>c>0,0<b≤2F/α²,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α2>B/α>A>0,0≤α≤1,UtBNi>UtMpi>0},{b,c,F,a,A,B,α}]

FindInstance[{b>c>0,0<b≤2F/α²,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α2>B/α>A>0,0≤α≤1,UtBNi>UtMpi>0},{b,c,F,a,A,B,α}]

FindInstance[{b>c>0,0<b≤2F/α²,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α2>B/α>A>0,0≤α≤1,δBNCDpMsp>δBNCDpMp},{b,c,F,a,A,B,α}]

FindInstance[{b>c>0,0<b≤2F/α²,F>0,B>0,a>(2 A F+2 B α)/α2>B/α>A>0,0≤α≤1,δBNCDsMsp>δBNCDpMp},{b,c,F,a,A,B,α}]

Funciones de Costo Alternativas para los “Súper Juegos”

Qi[Ppi_,Ppj_,Si_,Sj_]:=a-b*Ppi+□*b*Si+c*Ppj-□*c*Sj;
 Ci[Si_]:=Si/2;
 Qj[Ppi_,Ppj_,Si_,Sj_]:=a-b*Ppj+□*b*Sj+c*Ppi-□*c*Si;
 Cj[Sj_]:=Sj/2;

Qi[Ppi_,Ppj_]:=a-b*Ppi+□*b*Si+c*Ppj-□*c*Sj;
 Ci[Ppi_,Ppj_]:=d*(1+Si)*Qi[Ppi,Ppj];
 Qj[Ppi_,Ppj_]:=a-b*Ppj+□*b*Sj+c*Ppi-□*c*Si;
 Cj[Ppi_,Ppj_]:=d*(1+Sj)*Qj[Ppi,Ppj];