



**UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA**

**ESTIMACIÓN DE CAVE BACK,
MEDIANTE MÉTODO DE ELEMENTOS DISCRETOS (DEM)
BASADA EN INFORMACIÓN DE PRODUCCIÓN**

**TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN
CIENCIAS DE LA INGENIERÍA MENCIÓN MECÁNICA**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MECÁNICO

DANIEL ENRIQUE MORALES MOLINA

**PROFESOR GUÍA:
ÁLVARO VALENCIA MUSALEM**

**MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
ROGER BUSTAMANTE PLAZA
WILLIAMS CALDERON MUÑOZ
SERGIO GAETE BECERRA**

**SANTIAGO DE CHILE
17 de junio de 2012**

Uno de los problemas más importantes de la minería es la estimación de la estabilidad estructural de la mina, a lo largo de su vida útil. Para estimar la estabilidad estructural, se requiere conocer el campo de esfuerzos, y considerar un criterio de falla del material rocoso. El campo de esfuerzo depende de la geometría del macizo rocoso y de su evolución. El criterio de falla depende de conocer en detalle la composición y comportamiento del macizo rocoso.

Una gran dificultad de los métodos de explotación subterránea basados en el Caving ¹ es que no se conoce la geometría ni las fases del material con la precisión deseada. Tampoco se conoce la evolución desde material competente a material extraído. De esta manera, no se pueden estimar los esfuerzos ni establecer la estabilidad de la mina, con la precisión deseada.

Para estimar la geometría y las fases del material, se desarrolló e implementó un modelo dinámico 3D, de elementos discretos. En un comienzo, estos elementos discretos, están unidos por resortes representando la roca competente. Estos resortes se pueden romper como efecto de cargas superiores a su límite de ruptura, tal cual lo establece el criterio de falla de Mohr-Coulomb.

De esta manera, los elementos unidos por los resortes representan la roca en estado competente, y los elementos que cuentan con suficientes resortes rotos, representan el material conminuído que se extrae por las bateas. Esta cantidad de material esta determinado por la información de extracción. La información de extracción es una fuente de información abundante y valorada.

Dado que se cuenta con la cantidad de material extraído por cada batea y parámetros de roca se puede modelar el comportamiento del material en función de extracción. Conocido este comportamiento, se puede estimar la geometría de la mina.

Los resultados obtenidos muestran la evolución de la cavidad, Cave Back, al interior de un macizo rocoso explotado por el método de Block Caving.

¹Métodos en que la fragmentación y desprendimiento de roca se produce principalmente por efectos gravitacionales.

One of the most important issues in mining is the estimate of the structural stability of the mine throughout its lifespan. To estimate the structural stability, it is required the stress field and a failure criterion for rock material. Stress field depend on the geometry of the rock mass and its evolution. The failure criterion depends on knowing in detail the composition and behavior of rock mass.

A major difficulty of underground mining methods based on caving, is that the geometry and material phases, are not known with the accuracy desired. Neither the material development from its competent state to bulk state is known. In this way, is not possible to estimate the field stress and establish the stability of the mine, with the desired accuracy.

To estimate the geometry and the phases of the material a 3D dynamic model of discrete elements was developed and implemented. At the beginning, these individual elements are bonded together by springs, which represent the competent rock. These springs may break under the effects of loads exceeding their limit of rupture, as it is set by the Mohr-Coulomb criterion failure.

Thus, the elements together by springs represents the competent rock state, and the elements that have enough broken springs, represents the material that is extracted through draw points. This amount of material is determined by the information extraction. This information is well known.

Since the quantity of extracted material per draw point is known and considering other rock parameters, the behavior of the material according to extraction can be modeled. With this behavior modeled, the geometry of the cavity can be estimated.

The results shows the evolution of a cavity, inside a mine operated by Block Caving mining method.

A mi familia. Para que alguna vez, volvamos a estar todos juntos en una mesa.

Agradecimientos

Realizar este trabajo de tesis fue un placer para mí. Es la primera vez que me enfrento a un problema real y cuento con los recursos necesarios para modelar un problema y entregar una solución satisfactoria. Estos recursos fueron entregados por el Laboratorio de Modelamiento Matemático para Geomecánica (MMGeo) del Centro de Modelamiento Matemático (CMM) de la Universidad de Chile, y por la división El Teniente de Codelco. Este trabajo no hubiera sido posible sin el apoyo de Sergio Gaete, y sin la asistencia computacional de Matías Valdenegro.

Este placer no hubiera sido posible sin la confianza entregada por mis padres, Héctor S. Morales P. y María B. Molina S. Ambos me han dado la libertad y el respaldo necesario para enfrentar cualquier tipo de problema en la vida. No me cabe duda que el problema más grande que me ha tocado vivir, ha sido la universidad y la vida durante ésta. Con el respaldo de mis padres, enfrentar este problema se convirtió en una aventura.

En esta aventura, y como toda buena aventura, me encontré con personas que se convirtieron en personajes e hicieron la aventura feliz y memorable. Entre ellos se encuentran mis amigos de universidad que conozco hace ocho años y sigo visitando frecuentemente: Javiera Broussain, Maximiliano Díaz y Oscar Garay. Tengo el placer de vivir con este último.

Al avanzar la aventura en la escuela, otros personajes hicieron la convirtieron en algo memorable y noble. Me refiero a la fundación del grupo de ayuda a los animales ACCAN ². Estoy agradecido de haber vivido las recordadas aventuras con Andrés Rogers y Sebastián Carmona. Este último se ha convertido en otro hermano mayor a quien admirar.

Poco después de decidir estudiar mecánica, conocí a más aventureros que enriquecieron la historia. May, Moncho, Kim, Xavier, Benja, Felipe, Panchito, Jorge, Fraespin, Juan y Camila. Estoy seguro que con ellos, la aventura recién comienza.

Tampoco puedo dejar de agradecer a Nati y su familia, por dejarme vivir con ellos.

En definitiva, la Escuela me ha permitido conocer a personas excepcionales y disfrutar de ellas. La aventura termina con una Estrella, y mi vida en ella.

²Acción Animal

Índice General

Índice de Figuras	IV
Índice de Tablas	VIII
I Tesis	1
1. Introducción	2
1.1. Descripción del Problema	3
1.2. Objetivos	5
1.2.1. General	5
1.2.2. Especificos	5
1.3. Metodología	5
1.4. Resultados Esperados	6
2. Antecedentes	7
2.1. Método de Elementos Discretos (DEM)	7
2.1.1. Métodos Numéricos Basados en el Continuo y Homogeneización	7
2.1.2. Características Básicas de los Métodos de Elementos Discretos para los Medios Discontinuos.	11
2.1.3. Ecuaciones Gobernantes para el Movimiento y Deformación de Sistemas de Bloques	16
2.1.4. Ecuaciones de Newton del Movimiento de Partículas	16
2.1.5. Ecuaciones de Movimiento de Newton-Euler de Cuerpos Rígidos	17
2.1.6. Momentos y Productos de Inercia	18
2.1.7. Ecuaciones de Movimiento de Newton para Traslaciones de Cuerpo Rígido . .	19

2.1.8.	Ecuaciones de Euler del Movimiento Rotacional.	20
2.1.9.	Ecuaciones de Movimiento de Cauchy para cuerpos Deformables	22
2.1.10.	Amortiguamiento (<i>Damping</i>)	25
2.1.11.	Interacción entre Partículas	28
2.1.12.	Consideraciones de Estabilidad	31
2.1.13.	Aspectos Computacionales	31
2.2.	Mecánica de rocas	33
2.2.1.	Block Caving	34
2.2.2.	Modelos Constitutivos de Fracturas de Rocas y Macizos Rocosos	38
2.3.	Antecedente de estimación del Cave Back	39
2.3.1.	Predicting Rock Mass Cavability in Block Caving Mines, Clare Mawdesley, 2002 [16]	39
3.	Desarrollo	43
3.1.	Etapas I: Análisis y Valoración de Información Disponible por Parte de la Minería.	43
3.1.1.	Análisis Sísmico	44
3.1.2.	Información de Producción	45
3.1.3.	Parámetros de Validación	46
3.2.	Determinación de las Consideraciones a Implementar en el Modelo DEM	48
3.3.	Implementación de Modelo en Softwares Disponibles	51
3.3.1.	Modelo Computacional del proceso de Extracción	52
3.3.2.	Creación de la Geometría	53
3.3.3.	Configuración de Motores	55
3.3.4.	Configuración Especifica al Modelo de Extracción	55
3.4.	Estimación de Superficie	58
3.4.1.	Geometría	58
3.4.2.	Valores Utilizados	58
3.4.3.	Resultados	59
3.4.4.	Criterio: Material Extraído	60
3.5.	Optimización	67
3.5.1.	Empaquetamiento	67

3.5.2. Desempeño Multi-núcleo	69
3.5.3. Sensibilidad de E	71
4. Observaciones y Discusiones.	74
4.1. Respecto al Dominio, Cantidad y Tamaño de Elementos.	74
4.2. Respecto a la Sensibilidad de E	75
5. Conclusiones	76
6. Avances Futuros Propuestos	77
Bibliografía	79
II Apéndices	81
A. Triangulación de Delaunay	82
B. Criterio de falla de Mohr-Coulomb	84

Índice de Figuras

1.1. Esquema 2D del proceso Cave Back. Corte vertical del macizo rocoso. Las imágenes están ordenadas según orden temporal. Las líneas negras corresponden a discontinuidades dentro del macizo rocoso. Figura modificada de [13]	3
1.2. Esquema 2D del estado Cave Back. Se muestran zonas identificables en el proceso de Cave Back. Fuente [5]	4
2.1. Deformaciones no admisibles en mecánica de medios continuos. Figura tomada de [15].	7
2.2. Medio fracturado, REV y continuo equivalente. Figura modificada de [2]	9
2.3. REV para medio poroso fracturado. 2.3a) Un medio poroso fracturado; 2.3b) Rangos de REV expresados como propiedades constitutivas n_{pm} y n_{fr} v/s tamaños de REV. R_p es el rango de REV para un medio solamente poroso. R_f es el rango de REV para un medio solamente fracturado. R_{fp} es el rango de REV para un medio poroso fracturado. Figura modificada de [2]	10
2.4. Representación de un macizo rocoso fracturado por distintos métodos. Figura modificada de [2]	12
2.5. Modelo híbrido Discreto-Continuo. Continuo para el campo lejano, discreto para el campo cercano. Figura modificada de [2].	14
2.6. Movimiento de una partícula en un dos sistemas de coordenadas. Figura modificada de [2]	17
2.7. Momentos de inercia de un sólido rígido respecto a un eje arbitrario OB . Figura modificada de [2]	18
2.8. Rotación y ángulos de Euler para un cuerpo rígido. Figura modificada de [2]	20
2.9. Configuraciones de un cuerpo durante deformación. Figura modificada de [2]	22
2.10. Movimiento armónico simple amortiguado. Figura obtenida de [17]	25
2.11. Movimiento armónico simple amortiguado. Figura obtenida de [17]	26
2.12. Resortes representando la rigidez normal del contacto entre 2 esferas. Figura obtenida de [17]	28
2.13. Grados de libertad (DoFs) en la configuración de 2 esferas. Figura modificada de [17].	29

2.14. Geometría del contacto entre 2 esferas. Figura modificada de [17].	29
2.15. Ejemplo de Block Caving con cargadores frontales. Figura modificada de [1]	34
2.16. Zonas de Caving y sus esfuerzos principales correspondientes en cada zona. También se modela el comportamiento del material en cada zona (líneas de colores). Figura modificada de [12].	37
2.17. Relación entre la roca intacta, perturbada y cavada en relación a su resistencia para el Modelo 2. Figura modificada de [16]	41
2.18. Resultado gráfico del Modelo 2. Se muestran las alturas finales obtenidas para mallas con tamaño de elementos de 10 y 11 metros. La zona azul es la zona de undercut, y la roja corresponde a los elementos cavados. Figura modificada de [16].	42
3.1. Perfiles de información. Fuente [5]	43
3.2. Eventos Sísmicos y Deformación. Fuente [5]	44
3.3. Alturas de Extracción en distintos perfiles verticales. La línea verde estima la zona de fracturamiento. Fuente [5]	45
3.4. Monitoreo a través de TDR. Fuente [5]	46
3.5. Monitoreo de Subsistencia. Fuente [5]	47
3.6. Esquema del proceso de caving modelado por DEM. Por simplicidad, los resortes no se dibujan. Fuente: Elaboración Propia.	49
3.7. Continuación de Figura 3.6	50
3.8. Geometría de una simulación . Fuente: Elaboración propia.	53
3.9. Geometría de las Murallas	54
3.10. Geometría de las Bateas (Perspectiva, Lado y Planta)	54
3.11. Condiciones de Frontera	57
3.12. Aplicación de las condiciones de frontera. Las cargas se introducen al modelo a través del desplazamiento de las paredes.	57
3.13. Tamaño de casos estudiados. 3.13a) caso <i>pequeño</i> : cubo de 50 m de lado, 8 bateas y 20.580 esferas. 3.13b) caso <i>grande</i> : cubo de 100 m de lado, 32 bateas y 48.760 esferas. El tiempo de cómputo corresponde a 1 día para el caso <i>pequeño</i> y 2,5 días para el caso <i>grande</i>	58
3.14. Evolución de los campos determinados por la posición inicial de las esferas retiradas, a distintos tiempos de simulación, para los 2 casos: a la izquierda el caso pequeño, a la derecha el caso grande. Los pequeños puntos azules representan la posición inicial de todas las esferas. Las esferas coloreadas representan la posición inicial de las esferas retiradas.	60
3.15. Continuación de 3.14	61

3.16. Continuación de 3.16. Las imágenes 3.16e y 3.16f corresponden a la situación en la que se han completado las capacidades de las bateas. Esta información de extracción es distinta entre los 2 casos.	62
3.17. Construcción de una superficie contenedora de un campo de puntos. A la izquierda el campo de puntos. A la derecha la superficie construída a partir de este campo de puntos.	63
3.18. Continuación de Figura 3.17	64
3.19. Construcción de una superficie contenedora de varios campos de puntos, implementada en el caso pequeño. A la izquierda el campo de puntos. A la derecha la superficie construída a partir de este campo de puntos.	65
3.20. Continuación de Figura 3.17. En este caso, se observa que la superficie contiene zonas que no han sido consideradas en los campos de puntos; es decir, no es ajustada al campo de puntos. Esto es así debido a la triangulación (Apéndice A) seleccionada.	66
3.21. Empaquetamiento hexagonal compacto. 3.21a muestra una vista en planta junto con el respectivo orden de apilamiento. 3.21b muestra una vista de la celda hexagonal definida por el empaquetamiento. Fuente: Elaboración propia.	68
3.22. Desempeño en función de la cantidad de núcleos. Los casos <i>Pequeño</i> y <i>Grande</i> corresponden a los descritos en la Sección 3.4.4. La máquina utilizada cuenta con un procesador <i>Intel core i7 930, 2,8GHz, 4 núcleos con HT</i>	69
3.23. Sensibilidad de E	72
3.24. Continuación de Figura 3.23.	73
6.1. Material extraído y fuerzas de corte para el caso pequeño, para un mismo instante. 6.1a muestra los campos determinados por la extracción de cada batea. 6.1b es un corte del dominio. Los colores representan muestra la magnitud de la suma de fuerzas de corte para cada esfera. La escala es logarítmica y las unidades en [N]. Se observa una concetración de esfuerzos de corte en las alrededor de la zona de extracción. La direccionalidad de la distribución de fuerzas se atribuye a lo discutido en 3.5. Fuente: Elaboración propia.	77
6.2. Material extraído y fuerzas normales para el caso pequeño, para un mismo instante. 6.2a muestra los campos determinados por la extracción de cada batea. 6.2b muestra el vector que es suma de fuerzas normales para cada esfera. La escala es logarítmica y las unidades están en [N]. Se observa un arqueamiento de las fuerzas normales alrededor de la zona de extracción. Fuente: Elaboración propia.	78
A.1. Triangulación de Delaunay. A.1a se muestran las circunferencias utilizadas en el método. A.1b muestra una triangularización de 100 puntos en un plano.	82
B.1. Falla por corte en un plano ab . Figura modificada de [1].	84

B.2. Envolvente de resistencia de Coulomb en términos de: B.2a) esfuerzo normal y de corte, B.2b) esfuerzos principales. Figura modificada de [1].	85
B.3. Criterio de falla de Coulomb en términos de: B.2a) esfuerzo normal y de corte, B.2b) esfuerzos principales. Figura modificada de [1].	86

Índice de Tablas

3.1. Valores utilizados	58
-----------------------------------	----

Parte I

Tesis

Capítulo 1

Introducción

Uno de los problemas más importantes de la minería es la estimación de estabilidad estructural de la mina. Es un problema, porque las minas están constituidas por macizos rocosos, que son materiales geológicos compuestos de rocas y discontinuidades, por lo cual, son materiales muy complejos. Es importante, ya que sobre las restricciones impuestas por la estimación de estabilidad estructural¹, se puede desarrollar las obras civiles o de explotación que permitan el funcionamiento de la mina.

Si se considera que el comportamiento dinámico del macizo rocoso depende de un 70 % de las discontinuidades², se hace evidente conocer estas discontinuidades. Rápidamente nos damos cuenta que conocer estas discontinuidades no es fácil, ya que se debe conocer su distribución espacial, orientación y tamaño. Dada la envergadura de una gran mina, solo existen métodos estadísticos, no determinísticos. Estas características hacen que la estimación del comportamiento del macizo sea muy difícil.

Para estimar la estabilidad, se requiere conocer los esfuerzos y considerar un criterio de falla del material. Los esfuerzos dependen de la geometría del macizo rocoso. El criterio de falla depende de conocer en detalle la composición y comportamiento del material del macizo rocoso. La roca es un material geológico natural, por lo cual, sus propiedades físicas e ingenieriles no pueden ser establecidas o definidas a través de un proceso de manufactura tal como se hace para metales y plásticos.

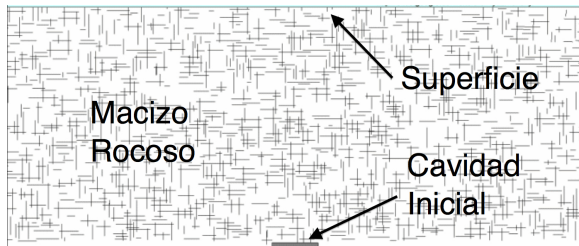
Un método de explotación de minas subterráneas es la de Block Caving. El método consiste en la realización de una cavidad dentro de un macizo rocoso, que cuente con las características necesarias para que esta cavidad sea inestable y se pueda propagar a través del macizo por medio de fracturas y posterior desprendimiento del material. Este proceso inestable puede presentar explosión de rocas alrededor de la base de extracción, producido por una gran acumulación de esfuerzos y superficies libres.

¹Se considera *estabilidad estructural* como la capacidad de una estructura de alcanzar un estado de equilibrio mecánico para un período de tiempo, cuando esta estructura esta sometida a un campo de fuerzas o esfuerzos.

²Basado en sistemas de clasificación del macizo rocoso RMR_B .

1.1. Descripción del Problema

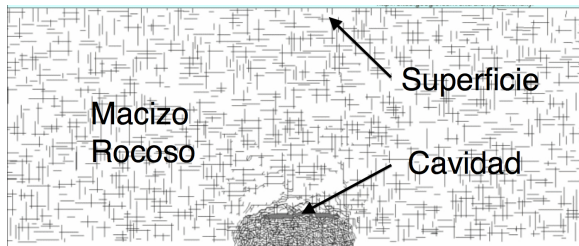
Una situación no ideal en el Block Caving es la formación de una cavidad estable, el cual es un arco estructural auto-soportado, que detiene el proceso de *caving*. Este evento afecta eventualmente los costos, producción, y principalmente, la seguridad de la mina. Para reanudar el proceso de caving, usualmente se requiere del uso de explosivos, lo cual, es siempre peligroso. Para evitar estas cavidades estables, es necesario estimar la geometría de la zona de quiebre y su evolución temporal. Este problema se denomina estimación del Cave Back, ver Figura 1.1.



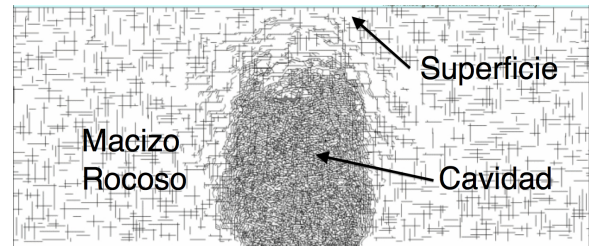
(a) Cavidad inicial producida a través de explosivos.



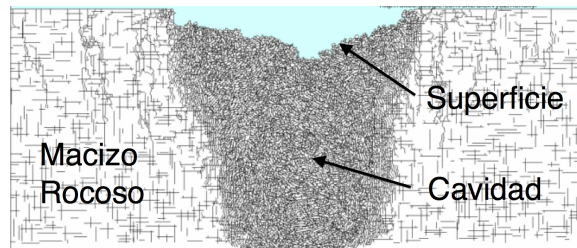
(b) Cavidad inestable. Fracturamiento y desprendimiento de material del macizo rocoso.



(c) Avance de Cave Back.



(d) Avance de Cave Back.



(e) El proceso iniciado con la cavidad inicial (Figura 1.1a) se manifiesta en la superficie superior como subsidencia.

Figura 1.1: Esquema 2D del proceso Cave Back. Corte vertical del macizo rocoso. Las imágenes están ordenadas según orden temporal. Las líneas negras corresponden a discontinuidades dentro del macizo rocoso. Figura modificada de [13]

Una determinación precisa de la zona de quiebre parece ser un problema bastante difícil, sino imposible. Estudios preliminares realizados en la mina El Teniente, permiten distinguir, en forma

simplificada, algunas zonas que son indicadas en la Figura 1.2:

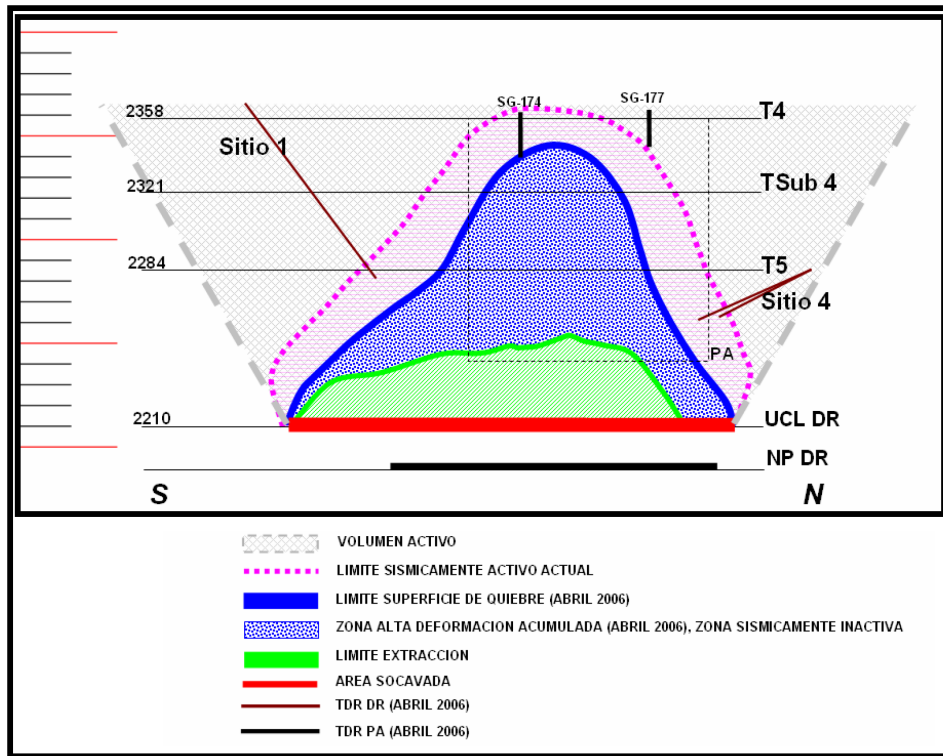


Figura 1.2: Esquema 2D del estado Cave Back. Se muestran zonas identificables en el proceso de Cave Back. Fuente [5]

El macizo rocoso se puede considerar como un material discontinuo, inhomogéneo, anisotrópico y no elástico (DIANE) [2], por lo cual, cualquier modelo que pretenda representar su comportamiento debe considerar estas características. En particular el modelo debe permitir considerar fracturas y/o sistemas de bloques.

Una manera de modelar el comportamiento de un material rocoso es a través de los Métodos de Elementos Discretos, DEM's ³. El concepto clave de los métodos DEM es que el dominio de interés es tratado como un ensamble de elementos rígidos donde, los contactos entre éstos son representados por resortes y necesitan ser identificados y actualizados continuamente durante el proceso de deformación a través de un modelo constitutivo.

Los elementos unidos por resortes representan la roca en estado competente, en tanto que los elementos que cuenten con suficientes resortes rotos, representan el material fragmentado que sale por puntos de extracción. La cantidad de material que sale por los puntos de extracción, es cuantificada y se tiene registro (cada 8 hrs.) de ésta.

³Discrete Element Method

Se pretende estudiar la relación entre el material retirado y la cavidad resultante.

Algunas consideraciones de los métodos DEM son las siguientes:

1. Se calculan las fuerzas en los contactos y el desplazamiento de los elementos.
2. La interacción de cada elemento es solamente con los que establece contacto.
3. Los cambios de forma de los elementos son despreciables.
4. La velocidad de propagación es una función de las propiedades físicas del medio discreto.
5. Los disturbios no se propagan de un elemento más allá que sus vecinos cercanos.
6. Los pasos de tiempo son tales que las aceleraciones se asumen constantes.
7. Criterio de falla: Mohr-Coulomb.

Trabajos realizados por otros investigadores ([6]- [11]) muestran resultados satisfactorios de manera cualitativa en el modelamiento de geomateriales,

1.2. Objetivos

1.2.1. General

Entregar una geometría, en un formato computacional, que estime la zona de fracturamiento y/o quiebre del macizo rocoso, producida por la minería de tipo Block Caving, en base a información disponible de la minería.

1.2.2. Especificos

1. Proponer modelo, basado en DEM, que represente el comportamiento del macizo rocoso.
2. Implementar modelo en software y/o paquete computacional disponible, que permita resolver el modelo DEM y visualizar los resultados. ⁴

1.3. Metodología

- **Análisis y valoración de información disponible por parte de la minería.** Existen varios parámetros de control del comportamiento del macizo rocoso, que determinan fuentes

⁴Estos softwares podrían ser: Paraview, Yade, LIGGGHTS, ESyS-Particle. Estos softwares permiten: resolver un modelo DEM, crear y manipular la geometría propuesta.

de información [5], tales como: análisis sísmico, información de producción, perfiles geológico-estructurales y monitoreo de subsidencia. Se debe analizar la cantidad y confiabilidad de cada perfil para establecer información para validación. Es por esto que es importante que la estimación sea en base, al menos, de alguna de estas fuentes de información.

- **Determinación de las consideraciones a implementar en el modelo DEM.** Debido a que los métodos DEM requieren de una gran capacidad de procesamiento computacional (Ver [4]), se impondrán simplificaciones para realizar las simulaciones en un tiempo razonable. Además de esto, existen varias consideraciones a realizar para mejorar el resultado de las simulaciones y/o hacerlas factibles. Estas pueden ser: disipación en los contactos, aglomeración de elementos, simplificación de geometría, uso de elementos no esféricos, etc.
- **Implementación de modelo en softwares disponibles.** Se deberá investigar sobre los paquetes computacionales disponibles y eficientes en el método DEM, analizar su capacidad de modificación y la calidad de sus resultados.
- **Selección de parámetros del modelo.** De los parámetros disponibles (Ver [5]), se deben seleccionar aquellos que permitan desarrollar el modelo de manera eficaz, eficiente y fehaciente.
- **Análisis de resultados para caso de estudio** Se deben discutir la calidad de los resultados obtenidos el modelo desarrollado para la estimación de la forma de la cavidad.

1.4. Resultados Esperados

Se espera que se pueda obtener estimación de una zona de fracturamiento y/o desprendimiento de material. Este producto debe corresponder a una geometría computacional en 3D, en algún formato que facilite el intercambio y estudio.

Capítulo 2

Antecedentes

2.1. Método de Elementos Discretos (DEM)

2.1.1. Métodos Numéricos Basados en el Continuo y Homogeneización

Los métodos numéricos más comunes para los sistemas continuos son:

- Método de Diferencias Finitas, FDM.
- Método de Elementos Finitos, FEM.
- Método de Volúmenes Finitos, FVM.
- Método de Elementos de Frontera, BEM.

El supuesto básico en éstos método numéricos es que las propiedades físicas de los materiales considerados son continuas. Este supuesto de continuidad implica que en todos los puntos del dominio del problema, el material no puede estar abierto o en piezas, tal como se muestra en la Figura 2.1. Todos los puntos originalmente en la cercanía de un punto se deben mantener en la misma vecindad a través del proceso físico/mecánico.

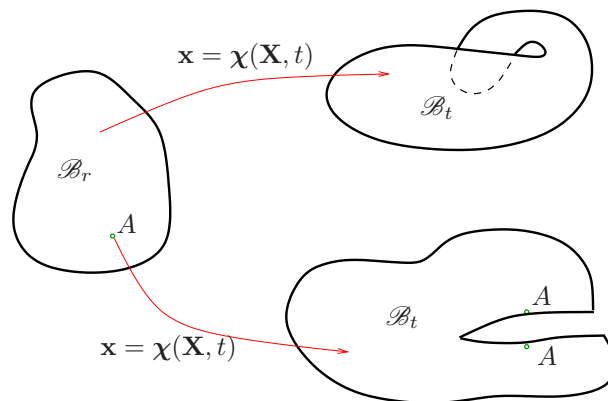


Figura 2.1: Deformaciones no admisibles en mecánica de medios continuos. Figura tomada de [15].

En el caso de presencia de fracturas en materiales, el supuesto de continuidad significa que la deformación a lo largo o a través de las fracturas tiene el mismo orden de magnitud que el de la matriz sólida cerca de las fracturas, por lo cual no puede haber desplazamiento o abertura de gran escala. Existen algoritmos especiales (Ver [2]) desarrollados, pero tienen limitaciones, tales como:

1. Para mantener la continuidad microscópica del material, no se admiten elementos de desplazamientos o de abertura de gran escala,
2. La cantidad de elementos de fractura deben mantenerse relativamente pequeños para que la matriz de rigidez global pueda mantenerse bien condicionada, y no causar inestabilidades numéricas.
3. No se permiten desprendimientos totales y/o rotación de elementos o grupos de elementos como consecuencia de deformaciones.

Estas limitaciones hacen a los métodos basados en el continuo más apropiados para problemas donde no se presentan fracturas o existen un pequeño número de fracturas en pequeñas deformaciones. También se han desarrollado y aplicado algoritmos especiales de integración o formulaciones constitutivas para enfrentar problemas de deformaciones finitas y materiales con comportamiento no lineal. Los métodos numéricos basados en el continuo han sido más efectivos para tratar problemas con deformaciones pequeñas con materiales con comportamiento lineal (Ver [2]).

Cuando se aplican métodos basados en el continuo a problemas esencialmente de medios discontinuos, como un cuerpo rocoso fracturado que contiene fracturas a varias escalas, se aplica el supuesto que los medios discontinuos se comportan a nivel macrosópico, y de una manera estadística, como un equivalente continuo. Es importante formular los modelos continuos de tal manera que los efectos de las discontinuidades puedan ser representados en las propiedades del material equivalente, definidos en modelos constitutivos respectivos del continuo asumido. Este proceso se llama usualmente **homogenización**. La homogenización solo puede validarse de una manera estadística a través de un operador promediante y sobre una cierto volumen de muestra llamado **REV**¹, ver Figura 2.2.

El REV es un cierto volumen sobre el cual se puede establecer una equivalencia estadística entre los parámetros constitutivos del equivalente continuo y del discontinuo original, en términos del proceso físico concerniente (deformación mecánica, flujo de fluido, transferencia de calor). De cualquier forma, no existe garantía que exista un REV en todos los casos, especialmente para un macizo rocoso fracturado en varios tamaños y formas. (Ver 3.5.1.4 en [2] para mayor discusión). Por lo cual, los principios de la mecánica de medios continuos no se pueden aplicar, y se debe usar el *enfoque discreto* para intentar resolver el problema, al considerar el macizo rocoso fracturado como un sistema discreto constituido por bloques y fracturas. Los bloques individuales pueden ser tratados como cuerpos rígidos (si los esfuerzos son bajos y las deformaciones son despreciables) o como cuerpos continuos deformables con comportamiento constitutivo apropiado (cuerpos linealmente elásticos). Este enfoque provee una representación más directa de la roca fracturada, pero tiene una

¹Volumen **R**epresentativo **E**lemental

metodología y algoritmos totalmente diferentes, comparado con los métodos numéricos basados en el continuo.

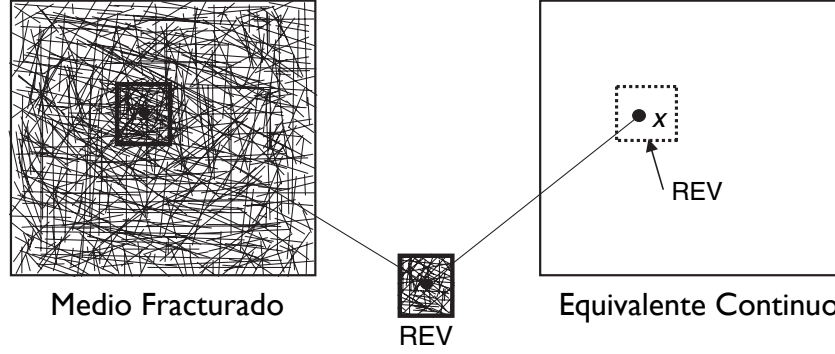


Figura 2.2: Medio fracturado, REV y continuo equivalente. Figura modificada de [2]

Para un macizo rocoso fracturado se consideran los siguientes tensores macroscópicos para un continuo equivalente:

- $\bar{\sigma}_{ij}$: Tensor de esfuerzos macroscópico.
- $\bar{\epsilon}_{ij}$: Tensor de deformaciones macroscópicas.

Por otro lado, para el mismo macizo rocoso fracturado se consideran los siguientes tensores microscópicos del mismo continuo equivalente:

- σ_{ij} : Tensor de esfuerzos microscópicos.
- ϵ_{ij} : Tensor de deformaciones microscópicas.

Luego, la homogenización es la transición de las relaciones constitutivas desde el nivel microscópico al nivel macroscópico, cumpliendo un operador promediante dado por:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V_R} \int_{V_R} \sigma_{ij} dv = \langle \sigma_{ij} \rangle \quad (2.1)$$

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{V_R} \int_{V_R} \epsilon_{ij} dv = \langle \epsilon_{ij} \rangle \quad (2.2)$$

con

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{k}_{ijkl} \bar{\epsilon}_{kl} \quad (2.3)$$

donde:

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{V_R} \int_{V_R} (\cdot) dv \quad (2.4)$$

es el operador promediante sobre un volumen V_R , el cual es igual al REV del medio fracturado. El tensor de rigidez $\bar{k}_{kl ij}$, del medio continuo asumido es una función de ambos: las propiedades mecánicas de la matriz rocosa y las características geométricas de las discontinuidades contenidas en el REV. La validez de una homogenización depende de la validez del REV.

La homogenización no es solo un proceso promediante. Debe ser realizado con los requerimientos que no solo la regla de transición micro-macro muestra en las relaciones 2.1 y 2.2 , sino también se deben satisfacer todas las leyes físicas básicas.

La Figura 2.3 ilustra la definición del REV para un medio fracturado poroso (Ver [2]). El dominio puede ser descompuesto en un medio poroso y un sistema de fracturas.

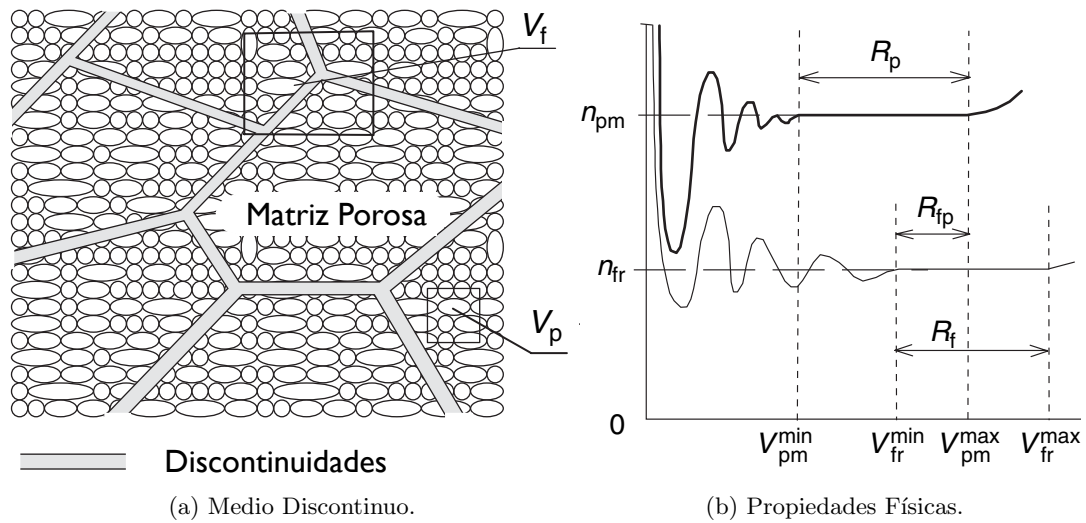


Figura 2.3: REV para medio poroso fracturado. 2.3a) Un medio poroso fracturado; 2.3b) Rangos de REV expresados como propiedades constitutivas n_{pm} y n_{fr} v/s tamaños de REV. R_p es el rango de REV para un medio solamente poroso. R_f es el rango de REV para un medio solamente fracturado. R_{frp} es el rango de REV para un medio poroso fracturado. Figura modificada de [2]

En la figura:

- n_{pm} : Parámetro constitutivo que describe el proceso físico para el medio poroso.
- n_{fr} : Parámetros constitutivos que describen el proceso físico para el sistema de fracturas.
- V_p : Volúmen de muestra para el medio poroso.
- V_f : Volúmen de muestra para el sistema de fracturas.

- $R_p = [V_{pm}^{max}, V_{pm}^{min}]$: Zona en la cual n_{pm} es estable.
- $R_f = [V_{fr}^{max}, V_{fr}^{min}]$: Zona en la cual n_{fr} es estable.
- R_{fp} : Zona en que R_p y R_f son estables.

Para encontrar el REV apropiado para cada sistema, se consideran una serie de volúmenes de muestra, V_p para el medio poroso y V_f para el sistema de fracturas, de tamaños crecientes y a ubicaciones al azar dentro del dominio. Se evalúan n_{pm} y n_{fr} aplicando los operadores promediantes sobre los volúmenes V_p y V_f respectivamente. Al variar los valores de n_{pm} y n_{fr} v/s los tamaños de los volúmenes de muestra (Ver Figura 2.3b), respectivamente, se pueden identificar 2 regiones estables para n_{pm} y n_{fr} , definidas por $R_p = [V_{pm}^{max}, V_{pm}^{min}]$ y $R_f = [V_{fr}^{max}, V_{fr}^{min}]$, respectivamente. En estas regiones, n_{pm} y n_{fr} son constantes. Fuera de estas regiones, los valores de n_{pm} y n_{fr} pueden tener grandes variaciones con poco cambio en los volúmenes de muestra.

La explicación física para estas ondulaciones es que fuera de la región R_p , el volumen es:

- Muy pequeño, entonces los bordes de grano del material poroso puede tener un efecto significativo.
- Muy grande, por lo cual las fracturas juegan un rol significativo.

Explicaciones similares se pueden dar para n_{fr} . Por lo tanto, para un medio poroso, cualquier volumen dentro del intervalo cerrado $R_p = [V_{pm}^{max}, V_{pm}^{min}]$, puede ser elegido como REV válido. De manera similar, para un sistema fracturado, cualquier volumen dentro del intervalo cerrado $R_f = [V_{fr}^{max}, V_{fr}^{min}]$, puede ser elegido como REV válido. La práctica usual es elegir los límites inferiores V_{pm}^{min} y V_{fr}^{min} , como REV's respectivos.

Para un medio poroso fracturado, su REV puede estar en la intersección de las regiones estables, $[V_{pm}^{max}, V_{pm}^{min}] \cap [V_{fr}^{max}, V_{fr}^{min}]$ si es que existe la intersección. En la práctica esa intersección no existe, pero el REV para las fracturas es usualmente más grande que el de la matriz porosa. En este caso, se puede elegir el límite inferior del sistema fracturado V_{fr}^{min} como REV para el medio poroso fracturado.

2.1.2. Características Básicas de los Métodos de Elementos Discretos para los Medios Discontinuos.

El término de *Método de Elementos Discretos (DEM)* se usa para los métodos numéricos aplicados a sistemas discretos. DEM incluye a todos los métodos numéricos que tratan el dominio del problema como un ensamble de unidades independientes. El método es aplicado principalmente a problemas de rocas fracturadas, medios granulares y sistemas de múltiples cuerpos en ingeniería mecánica. También se han desarrollado métodos DEM para mecánica de fluidos. Las unidades individuales pueden ser bloques de rocas, partículas sólidas para materiales granulares o elementos estructurales para sistemas de múltiples cuerpos. Para análisis mecánicos, la formulación del DEM está basado en los contactos entre los miembros individuales, su cinemática y sus mecanismos de deformación.

Para los problemas de ingeniería de rocas, los bloques rocosos se definen por la intersección de fracturas, en las que su ubicación, orientación y dimensiones son requeridas para la determinación de la geometría del problema. Fracturas individuales o segmentos no persistentes de fracturas son generalmente descartadas porque la iniciación y propagación en la punta de las fracturas no pueden ser simuladas de manera efectiva en el actual desarrollo de los métodos DEM.

La Figura 2.4 muestra la representación de un macizo rocoso fracturado por los métodos FEM, BEM y DEM. Para materiales granulares, las partículas sólidas se modelan con esferas o de manera irregular, dependiendo de los requerimientos de caracterización del material. Desde un punto de vista geométrico, la representación DEM es más natural, y por lo tanto, puede ser más realista en la representación de macizos rocosos fracturados.

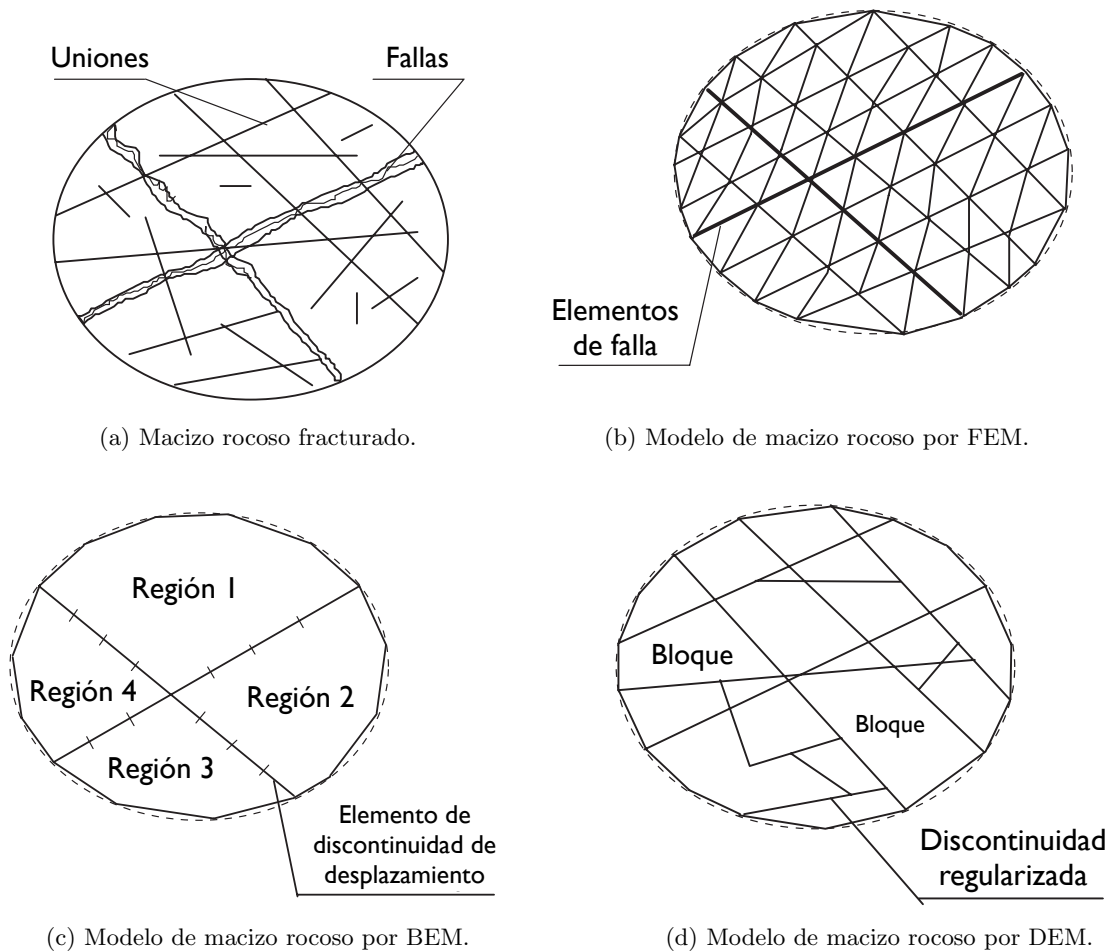


Figura 2.4: Representación de un macizo rocoso fracturado por distintos métodos. Figura modificada de [2]

Ambos métodos numéricos, los continuos y los discretos tienen sus propias ventajas y desventajas,

sujetas al problema específico de ingeniería de rocas.

La mayor desventaja del DEM para los problemas de mecánica de rocas es que la ubicación, orientación y dimensiones de las fracturas que pueden ser caracterizados de manera determinística son mayormente desconocidas (excepto por algunas características principales como grandes fracturas o fallas) antes de la configuración del problema e incluso después de la solución del problema, por lo cual la solución del problema contiene una incertidumbre desconocida sobre la geometría del sistema de fracturas.

La técnica más usada para obtener un modelo de las fracturas que están distribuidas dentro del macizo rocoso, es hacer un análisis estadístico para la población de fracturas. Se asume que las fracturas existen en sets con diferentes orientaciones (ángulos y direcciones de inclinación), en regiones estadísticamente homogéneas (o sub-regiones). La distribución de estos sets de parámetros de orientación, junto con la distribución de otros parámetros, tales como el tamaño y la apertura (que es difícil de medir), son estimados usando información de un número limitado de perforaciones (con sus respectivos testigos) y/o de mapeo de fracturas de un número limitado de exposiciones. De esta manera se obtiene una red de fracturas de las funciones de distribución de estos parámetros a través de un proceso inverso, usando generación de números semi-aleatorios de acuerdo a los parámetros de las funciones de distribución. Esta red de fracturas obtenida no es de ninguna manera la red de fracturas real en el macizo rocoso considerado, pero es un modelo parcialmente equivalente en un sentido estadístico. Este modelo equivalente, a veces llamado *realización*, no es único, de todas maneras, considerando que existirá un número infinito de estos modelos estadísticos equivalentes a la red de fracturas real generados usando las mismas funciones de distribución de parámetros. Por lo tanto se requieren la generación y análisis de múltiples *realizaciones* para obtener un espectro de soluciones, las cuales, su comportamiento colectivo, uno espera, pueda proveer un comportamiento más representativo del sistema real. La confiabilidad de esta técnica varía considerablemente con la calidad y cantidad de la información de mapeo de fracturas .

Para un sistema de bloques empaquetados de manera compacta, como un macizo rocoso fracturado, la respuesta general de los esfuerzos y deformaciones de los modelos equivalentes pueden aproximar al del macizo rocoso fracturado si la dimensión del problema, las propiedades del material y las condiciones de borde son definidos de manera correcto.

Incluso con esta gran desventaja, el DEM aun aparece como uno de los métodos más atractivos para resolver problemas de ingeniería o problemas generales de geomecánica gracias a sus ventajas únicas para trabajar con fracturas. En modelamiento numérico para rocoso macizo fracturado, usar un continuo o un sistema discreto para un problema práctico no siempre depende solo en la geometría del problema o la geología sola. También depende en gran medida en el tamaño del problema, dimensión del área o volumen de interés, el número de unidades discretas, la capacidad computacional y el proceso de conceptualización.

A menudo es útil combinar el uso de ambas técnicas, con DEM representando el campo cercano del problema con elementos discretos y fracturas y una representación continua para la parte de campo

lejano. Así las ventajas de ambas técnicas, DEM y continuo puede ser utilizado a escalas apropiadas.

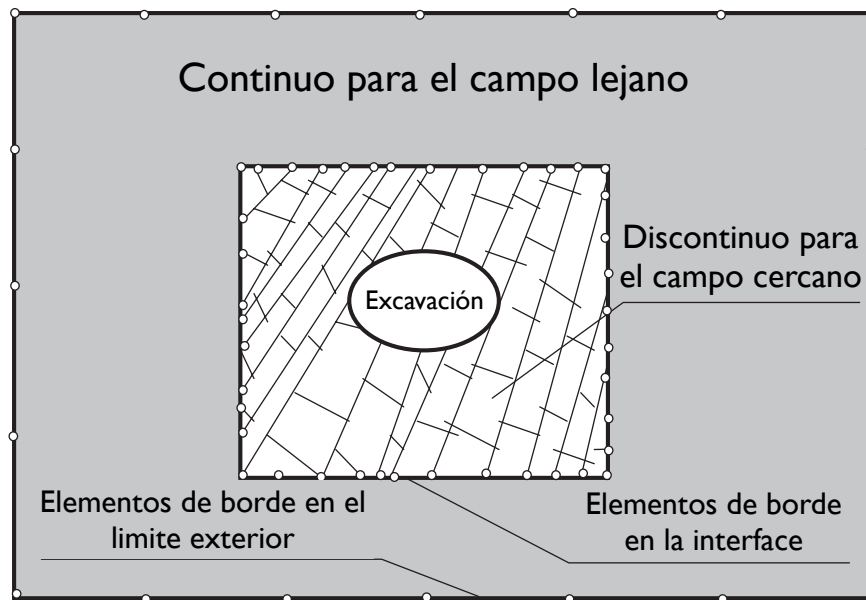


Figura 2.5: Modelo híbrido Discreto-Continuo. Continuo para el campo lejano, discreto para el campo cercano.

Figura modificada de [2].

Otra diferencia básica entre el enfoque continuo y el discreto es como tratar con el movimiento rígido de un cuerpo. El movimiento de cuerpo rígido es usualmente el modo de deformación dominante de un sistema discreto cuando ocurren situaciones de grandes desplazamientos y las deformaciones de los bloques de material son generalmente mucho menores en magnitud, especialmente para rocas duras.

Un ejemplo típico son los problemas de deslizamiento de rocas en un pendiente. Esta situación es contraria a los métodos basados en el continuo en los cuales el movimiento rígido de desplazamiento es generalmente eliminado porque no produce deformación en los elementos. Esta diferencia refleja el diferente enfoque de la conceptualización física concerniente. En un sistema discreto, los unidades individuales (elementos) son independientes de moverse según las restricciones de fuerza en sus superficies y otras cargas externas de acuerdo a las ecuaciones de movimiento. El movimiento rígido de un elemento, por lo tanto, puede ser liberado de otros elementos. Para los métodos basados en el continuo, los elementos no son libres de movimiento, son mantenidos dentro de la misma vecindad de otros elementos por las restricciones de compatibilidad de desplazamiento debido al supuesto de continuidad impuesto. El movimiento de estos elementos no es independiente sino restringido por otros elementos vecinos conectados por sus límites.

La conectividad (o contactos) de un elemento con otros es fijado durante el curso del cómputo. Por lo tanto, un sistema continuo refleja más la *deformación del material* del sistema y el sistema discreto refleja más *movimiento del elemento* del sistema. El desacople completo del modo de movimiento de cuerpo rígido y la deformación continua del modo de unidad individual es adoptado en DEM. El movimiento de cuerpo rígido no produce deformación dentro de los elementos en DEM, pero

produce desplazamiento de elemento, generalmente, a gran escala.

Características principales

1. Identificación de la unidad del sistema de topología (definición de elementos: bloques de rocas, material particulado, partes mecánicas de sistemas fracturados).
2. Formulación y solución de las ecuaciones de movimiento de unidades individuales. Consideración o exclusión de deformación de los elementos.
3. Detección y actualización de contactos entre elementos como consecuencia de su movimiento y/o deformaciones . **La diferencia básica entre los métodos DEM y los métodos numéricos basados en el continuo** es que la topología del sistema, i.e, los patrones de contacto/conectividad entre los elementos del sistema, es el aspecto computacional central, el cual, cambia con el tiempo y con los procesos de deformación. Esta condición es inicial para enfoques continuos.

Las estrategias de solución son diferentes para diferentes formulaciones DEM. La diferencia básica está relacionada al tratamiento de la deformabilidad del material.

- Para análisis de cuerpo rígido, es común usar un esquema *time marching* utilizando diferencias finitas para resolver las ecuaciones dinámicas de movimiento de un sistema de cuerpo rígido.
- Para análisis de cuerpo deformable, existen 2 esquemas:
 1. Una solución **explícita** con discretización de **diferencias finitas** al interior de cada elemento. No se necesita sistemas matriciales en general. Este método se conoce [2] como *DEM representado por el método de elementos distintos*. Los códigos más representativos son UDEC y 3DEC, para problemas de 2D y 3D de sistemas de bloques, y PFC2D y PFC3D para flujo particulado para materiales granulares.
 2. Una solución **implícita** con discretización de **elementos finitos** al interior de cada elemento. Se requiere sistema matricial para ambos: la representación del movimiento y la deformación de los elementos. Este método se conoce [2] como *DEM representado por el análisis de deformación discontinua (DDA²)*. El uso de FEM en un sistema DEM de bloques se puede lograr a través de la inserción de una formulación FEM dentro de los bloques definidos por DEM. De esta manera, la matriz de rigidez ya no es la misma utilizada que la utilizada para el análisis de los medios continuos, sino una matriz con diferentes rigideces de contactos entre varios cuerpos y rigideces de deformación debido a las deformación de los cuerpos. La matriz de ecuaciones producidas por esta formulación cambia con los patrones de contacto de los cuerpos. Estos patrones cambian con el tiempo. Es por esto que se necesita un resolvidor de ecuaciones eficiente para alcanzar una computación global eficiente. Por otro lado, debido al esquema implícito utilizado, se

²Discontinuous Deformation Analysis

puede utilizar un paso de tiempo mayor comparado con la formulación explícita de DEM.

De esta manera, se pueden analizar de manera sencilla sistemas de grandes desplazamientos, ya que el movimiento de cuerpo rígido puede ser completamente representado y desacoplado de la deformación.

2.1.3. Ecuaciones Gobernantes para el Movimiento y Deformación de Sistemas de Bloques

En un principio las técnicas en DEM fueron desarrolladas para los procesos de movimiento y deformación de un sistema de partículas o ensamble de bloques. Las ecuaciones gobernantes son las ecuaciones de movimiento de sistemas de cuerpos rígidos o deformables, o de partículas. Las ecuaciones generales en mecánica de medios continuos de conservación de masa, momento y energía son los principios guías del desarrollo de los métodos DEM.

Las ecuaciones gobernantes principales son:

1. Para el movimiento de sólidos rígidos: Ecuaciones de Newton-Euler.
2. Para el movimiento de cuerpos deformables: Ecuaciones de Cauchy.

2.1.4. Ecuaciones de Newton del Movimiento de Partículas

Una partícula es definida como un cuerpo con masa constante m , donde su volumen y forma son despreciables en el comportamiento dinámico. El *momento lineal* de una partícula p_i se puede denotar según lo establecido por la relación 2.5,

$$p_i = mv_i \quad (2.5)$$

donde v_i es la componente i -ésima de su velocidad. La Segunda Ley de Newton establece que la fuerza resultante que actúa sobre una partícula y causa su movimiento es igual a la variación de su momento lineal, como se establece en las relaciones en 2.6,

$$f_i = \dot{p}_i = \frac{dp}{dt} = m\dot{v}_i = \frac{d(mv_i)}{dt} \quad (2.6)$$

si se considera que la masa de una partícula se mantiene constante durante su movimiento,

$$f_i = \frac{dp}{dt} = m\dot{v}_i = m\frac{d(v_i)}{dt} = m\frac{d^2(u_i)}{dt^2} = ma_i \quad (2.7)$$

donde u_i y a_i son componentes del desplazamiento y de la aceleración de la partícula, respectivamente.

Las ecuaciones de movimiento de Newton 2.7 consideran son el movimiento translacional de una partícula, ya que la rotación de la partícula es despreciada debido a que no se considera la forma

ni el volumen de la partícula. Las relaciones anteriormente consideradas son válidas cuando el movimiento de la partícula se representa en un sistema único de referencia inercial fijo.

Si la partícula es fijada en un sistema en movimiento arbitrario (traslación y rotación) $o - xyz$ relativo a un sistema inercial fijo $O - XYZ$, con componentes de velocidad angular $(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ (respecto al sistema fijo), y definido por los ángulos de Euler (θ, ψ, ϕ) (ver 2.6), las expresiones para el vector de aceleración de partículas en un espacio inercial son las que se encuentran en 2.8

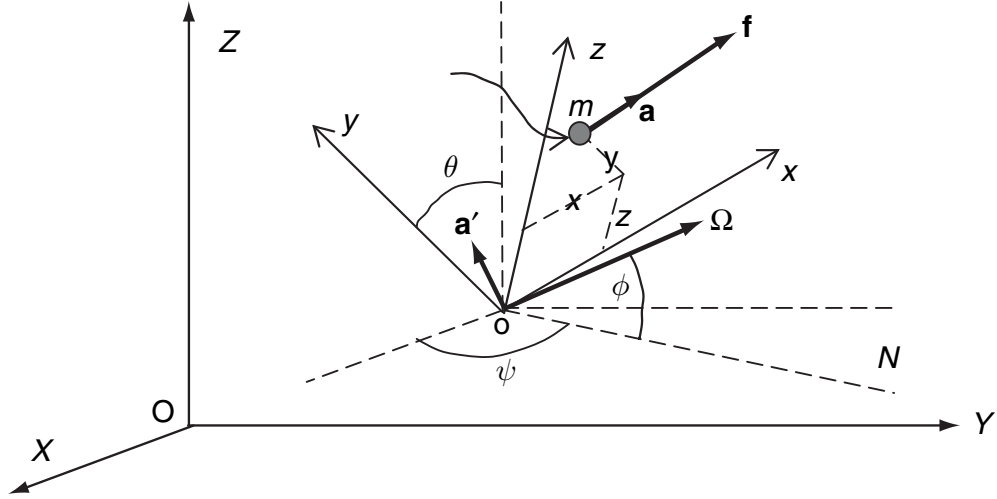


Figura 2.6: Movimiento de una partícula en un dos sistemas de coordenadas. Figura modificada de [2]

$$\begin{cases} a_x = a'_x + \ddot{x} - x(\Omega_y^2 + \Omega_z^2) + y(\Omega_x\Omega_y - \dot{\Omega}_z) + z(\Omega_x\Omega_z + \dot{\Omega}_y) + 2(\dot{z}\Omega_y - \dot{y}\Omega_z) \\ a_y = a'_y + \ddot{y} + x(\Omega_x\Omega_y + \dot{\Omega}_z) - y(\Omega_x^2 + \Omega_z^2) + z(\Omega_y\Omega_z - \dot{\Omega}_x) + 2(\dot{x}\Omega_z - \dot{z}\Omega_x) \\ a_z = a'_z + \ddot{z} + x(\Omega_x\Omega_z - \dot{\Omega}_y) + y(\Omega_y\Omega_z + \dot{\Omega}_x) - z(\Omega_x^2 + \Omega_y^2) + 2(\dot{y}\Omega_x - \dot{x}\Omega_y) \end{cases} \quad (2.8)$$

donde (a'_x, a'_y, a'_z) son las aceleraciones traslacionales del origen o del sistema $o - xyz$ relativo al sistema fijo inercial $O - XYZ$, y las velocidades angulares están dadas por:

$$\begin{cases} \Omega_x = \dot{\Psi} \sin\theta \sin\phi + \dot{\theta} \cos\phi \\ \Omega_y = \dot{\Psi} \sin\theta \cos\phi - \dot{\theta} \sin\phi \\ \Omega_z = \dot{\phi} + \dot{\Psi} \cos\theta \end{cases} \quad (2.9)$$

2.1.5. Ecuaciones de Movimiento de Newton-Euler de Cuerpos Rígidos

Un cuerpo rígido está caracterizado por un dominio Ω de volumen constante V y masa M que no se deforma. La distancia entre dos puntos cualesquiera en un cuerpo rígido permanece constante. Un cuerpo rígido desprecia la deformación de los cuerpos sujetos a fuerzas externas. Esta simplificación es aceptable en varios problemas de ingeniería de rocas; especialmente en el movimiento de bloques de gran escala, sometido a condiciones de bajo esfuerzos. La dinámica de cuerpo rígido se puede

entender a través de las ecuaciones de movimiento de Newton y las de rotación de cuerpos rígidos de Euler.

2.1.6. Momentos y Productos de Inercia

En la dinámica de cuerpo rígido, se debe considerar las rotaciones del cuerpo, i.e, se debe considerar el volumen y la forma del cuerpo. Considerando dm como la masa de un elemento diferencial en el cuerpo rígido (ver Figura 2.7), $dm = \rho dV = \rho dx dy dz$. La posición de dm está representada por un vector $r = (x, y, z)$, y su distancia perpendicular a una línea arbitraria en el origen OB es d . La proyección del eje OB en los respectivos ejes del sistema son $(l, m, n) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. El momento de inercia del elemento respecto al eje OB es:

$$dI_{OB} = dm(d^2) = \rho[(r)^2 - (OP)^2]dV = \rho[(x^2 + y^2 + z^2) - (lx + my + nz)^2]dV \quad (2.10)$$

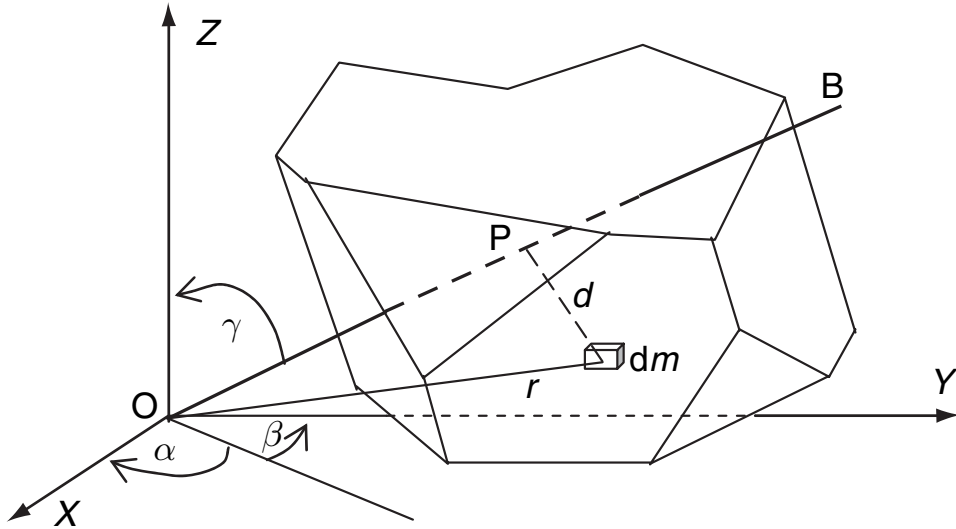


Figura 2.7: Momentos de inercia de un sólido rígido respecto a un eje arbitrario OB . Figura modificada de [2]

Si se considera $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, la relación 2.10 se puede reescribir:

$$dI_{OB} = \rho[(x^2 + y^2 + z^2)(l^2 + m^2 + n^2) - (lx + my + nz)^2]dV \quad (2.11)$$

$$= \rho[l^2(y^2 + z^2) + m^2(x^2 + z^2) + n^2(x^2 + y^2) - 2lm(xy) - 2ln(xz) - 2mn(yz)]dV \quad (2.12)$$

Luego, los momentos de inercia del cuerpo completo se puede escribir como:

$$I_{OB} = \int_V \rho[l^2(y^2 + z^2) + m^2(x^2 + z^2) + n^2(x^2 + y^2) - 2lm(xy) - 2ln(xz) - 2mn(yz)]dV \quad (2.13)$$

$$= \rho[l^2I_{xx} + m^2I_{yy} + n^2I_{zz} - 2lmI_{xy} - 2lnI_{xz} - 2mnI_{yz}] \quad (2.14)$$

Donde,

$$\begin{cases} I_{xx} = \int_V (y^2 + z^2) dV \\ I_{yy} = \int_V (x^2 + z^2) dV \\ I_{zz} = \int_V (x^2 + y^2) dV \end{cases} \quad (2.15)$$

son los **momentos de inercia** respecto a los ejes, y

$$\begin{cases} I_{xy} = \int_V xy dV \\ I_{xz} = \int_V xz dV \\ I_{yz} = \int_V yz dV \end{cases} \quad (2.16)$$

son los **productos de inercia** del cuerpo. Los productos de inercia son simétricos, i.e, $I_{xy} = I_{yx}$, $I_{xz} = I_{zx}$, $I_{yz} = I_{zy}$. Los momentos y productos de inercia de un cuerpo rígido se puede representar por un tensor dado por:

$$I_{ij} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Los tres momentos de inercia principales I_x^p, I_y^p, I_z^p , y las tres direcciones principales de inercia se obtienen de los valores y vectores propios de I_{ij} , respectivamente.

2.1.7. Ecuaciones de Movimiento de Newton para Traslaciones de Cuerpo Rígido

Sea f_i el vector de fuerza resultante para un set de fuerzas externas actuando sobre un cuerpo rígido de masa M . El principio de conservación de momento lineal se expresa como:

$$\frac{dp_i}{dt} = f_i \quad (2.17)$$

o también como:

$$M \frac{dv_i^c}{dt} = M a_i^c = f_i \quad (2.18)$$

donde:

- a_i^c : es el vector de aceleración del centro de masa del cuerpo rígido.
- f_i : es el conjunto de fuerzas externas que pueden producir torque en el cuerpo. Este torque puede producir movimiento rotacional en el cuerpo.

Las relaciones 2.35 y 2.18 son válidas sin importar las rotaciones que se describirán en la siguientes ecuaciones.

2.1.8. Ecuaciones de Euler del Movimiento Rotacional.

Para un elemento diferencial representativo de masa dm en un cuerpo rígido con un sistema de coordenadas adjunto $o - xyz$ (ver Figura 2.8), su vector de aceleración general puede ser deducido de la ecuación 2.8 teniendo en consideración las siguientes simplificaciones de cuerpo rígido:

1. x, y, z son constantes (cuerpo indeformable)
2. $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = \ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0$

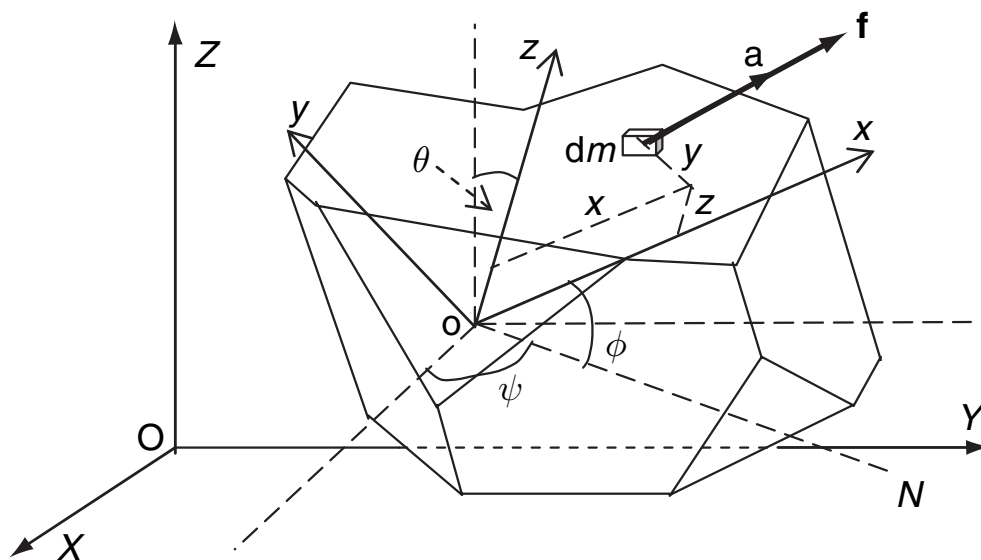


Figura 2.8: Rotación y ángulos de Euler para un cuerpo rígido. Figura modificada de [2]

Las velocidades angulares $(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ de la referencia móvil, son ahora las velocidades angulares $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ del sistema adjunto al cuerpo $o - xyz$, relativo al sistema inercial $O - XYZ$. La aceleración del elemento es,

$$\begin{cases} a_x = \dot{a}_x - x(\omega_y^2 + \omega_z^2) + y(\omega_x\omega_y - \dot{\omega}_z) + z(\omega_x\omega_z + \dot{\omega}_y) \\ a_y = \dot{a}_y + x(\omega_x\omega_y + \dot{\omega}_z) - y(\omega_x^2 + \omega_z^2) + z(\omega_y\omega_z - \dot{\omega}_x) \\ a_z = \dot{a}_z + x(\omega_x\omega_z - \dot{\omega}_y) + y(\omega_y\omega_z + \dot{\omega}_x) - z(\omega_x^2 + \omega_y^2) \end{cases} \quad (2.19)$$

Para el elemento de volumen diferencial dm , en un cuerpo rígido, con aceleración a_i y con fuerza resultante f_i , las ecuaciones para partícula libre son:

$$(dm)a_i = f_i \quad (2.20)$$

con $i = (x, y, z)$ y los momentos de fuerza \mathbf{f} sobre el sistema adjunto al cuerpo:

$$\begin{cases} dm(a_z y - a_y z) = f_z y - f_y z = dT_x \\ dm(a_x z - a_z x) = f_x z - f_z x = dT_y \\ dm(a_y x - a_x y) = f_y x - f_x y = dT_z \end{cases} \quad (2.21)$$

La integración respecto a todo el cuerpo lleva a

$$\begin{cases} \int_V \rho(a_z y - a_y z) dV = \int_V (f_z y - f_y z) = T_x \\ \int_V \rho(a_x z - a_z x) dV = \int_V (f_x z - f_z x) = T_y \\ \int_V \rho(a_y x - a_x y) dV = \int_V (f_y x - f_x y) = T_z \end{cases} \quad (2.22)$$

Las relaciones 2.22 son la forma básica de las ecuaciones de movimiento rotacional. Sustituyendo 2.19 en 2.22, se obtiene la forma general de las ecuaciones de movimiento de Euler para la rotación de un sólido rígido,

$$\begin{cases} M(\dot{a}_z y_c - \dot{a}_y z_c) + I_{xx} \dot{\omega}_x + (I_{zz} - I_{yy}) \omega_y \omega_z + I_{xy} (\omega_x \omega_z - \dot{\omega}_y) + I_{xz} (\omega_x \omega_y + \dot{\omega}_z) + I_{yz} (\omega_z^2 - \omega_y^2) = T_x \\ M(\dot{a}_x z_c - \dot{a}_z x_c) + I_{yy} \dot{\omega}_y + (I_{xx} - I_{zz}) \omega_x \omega_z + I_{yz} (\omega_y \omega_x - \dot{\omega}_z) + I_{xy} (\omega_y \omega_z + \dot{\omega}_x) + I_{xz} (\omega_x^2 - \omega_z^2) = T_y \\ M(\dot{a}_y x_c - \dot{a}_x z_c) + I_{zz} \dot{\omega}_z + (I_{yy} - I_{xx}) \omega_x \omega_y + I_{xz} (\omega_z \omega_y - \dot{\omega}_x) + I_{yz} (\omega_x \omega_z + \dot{\omega}_y) + I_{xy} (\omega_y^2 - \omega_x^2) = T_z \end{cases} \quad (2.23)$$

donde (x_c, y_c, z_c) son las coordenadas del centro de masa del cuerpo rígido. El lado izquierdo de las ecuaciones 2.23 es la suma de los momentos de inercia respecto al eje coordenado. El lado derecho de las ecuaciones 2.23 son la suma de los momentos de las fuerzas aplicadas respecto al eje coordenado. Las ecuaciones 2.23 son expresiones del *principio de conservación de momentos*. Las relaciones 2.18 y 2.23 determinan completamente el movimiento de un cuerpo rígido, con origen en el sistema adjunto al cuerpo. Los momentos resultantes de las fuerzas $T = (T_x, T_y, T_z)$ pueden ser calculados en el sistema de referencia global por las fuerzas externas aplicadas,

$$\begin{cases} T_x = \sum (f_z Y - f_y Z) \\ T_y = \sum (f_x Z - f_z X) \\ T_z = \sum (f_y X - f_x Y) \end{cases} \quad (2.24)$$

Si se consiera que el origen o del cuerpo está fijado en el centro de masa, y el sistema adjunto al cuerpo esta orientado según los momentos de inercia principales, las ecuaciones 2.23 puede ser simplificado a

$$\begin{cases} I_x^p \dot{\omega}_x + (I_z^p - I_y^p) \omega_y \omega_z = T_x \\ I_y^p \dot{\omega}_y + (I_x^p - I_z^p) \omega_x \omega_z = T_y \\ I_z^p \dot{\omega}_z + (I_y^p - I_x^p) \omega_x \omega_y = T_z \end{cases} \quad (2.25)$$

donde (I_x^p, I_y^p, I_z^p) son los momentos principales de inercia a lo largo de los ejes principales (x^p, y^p, z^p) .

Las integrales $\int x^m y^n dV$, $\int y^m z^n dV$, $\int z^m x^n dV$ ($m, n = 0, 1, 2$) son términos de las propiedades integrales de un cuerpo rígido y puede ser evaluados analíticamente para cuerpo poligonales en 2 dimensiones usando integración simple, cuando se conocen las coordenadas de los vértices. Durante el movimiento, estas coordenadas cambian, por lo que se necesita recalcular la posición a cada paso de tiempo. Este cálculo es costoso. Esta es la razón por la cual se consideran cuerpos esféricos y se puede ocupar las ecuaciones 2.25.

2.1.9. Ecuaciones de Movimiento de Cauchy para cuerpos Deformables

Distinto a un cuerpo rígido, un cuerpo deformable puede trasladarse, rotar y deformarse, i.e., el cuerpo cambia de una configuración a otra. Se considera un cuerpo continuo Ω con un volumen V , y superficie S sometido a movimientos rotacionales y traslacionales bajo la fuerza resultante f_i y momento resultante sobre el origen de un sistema de referencia inercial, l_i . Las coordenadas de un punto x en el cuerpo en la *configuración de referencia* ($t = 0$) se denota como a_i . En un momento después el punto se mueve a otra posición x_i referido en el mismo sistema de referencia como se muestra en la Figura 2.9. Esta nueva configuración del cuerpo se conoce como *configuración actual* ($t = t$). Por lo cual, el enlace entra la configuración de referencia y la configuración actual es la relación establecida por 2.26.

$$x_i = \hat{x}_i(a_i, t) \quad (2.26)$$

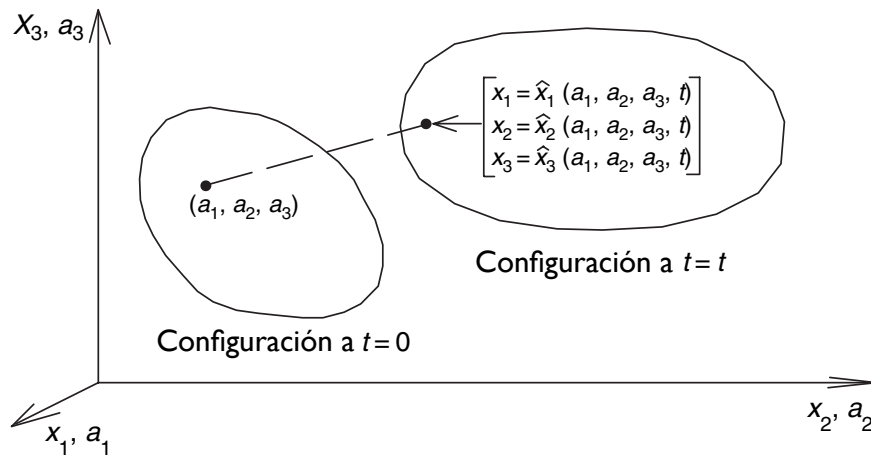


Figura 2.9: Configuraciones de un cuerpo durante deformación. Figura modificada de [2]

La función $\hat{x}_i(a_i, t)$ es conocida como *función de deformación*.

Cuando se consideran a_i y t como variables independientes, la relación 2.26 entrega la posición de la partícula x a cada instante, por lo tanto se conoce la configuración instantánea del cuerpo a diferentes instantes de tiempo t . La descripción de la evolución mecánica se conoce como *descripción Lagrangeana*³.

Si la locación espacial x_i y el tiempo t son tomadas como variables independientes para describir el proceso de deformación, la descripción se conoce como *descripción Euleriana*⁴.

En la representación Lagrangeana, la velocidad v_i en el punto a_i se define como:

$$v_i(a_i, t) = \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (2.27)$$

manteniendo a_i constante. El *gradiente de deformación* del cuerpo, f_{ij} puede expresarse como:

$$f_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \quad (2.28)$$

Si se considera que el volumen finito de un cuerpo no puede anularse, ni tienen sentido las transformaciones que lleven a una *deformación negativa*, entonces,

$$\det(f_{ij}) > 0 \quad (2.29)$$

manteniendo el tiempo t constante. En la descripción espacial, la velocidad es descrita por:

$$v_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t} = \frac{Dx_i}{Dt} \quad (2.30)$$

El gradiente de deformación, los campos de velocidad y la aceleración son las cantidades cinemáticas básicas de movimiento de un cuerpo continuo. Otras cantidades cinemáticas como el momento y energía, pueden ser definidas desde estas cantidades básicas.

La *ecuación de continuidad*, se puede escribir en su forma integral,

$$\frac{DM}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_V \rho d\Omega = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega + \int \rho v_i n_i dS = 0 \quad (2.31)$$

donde S es la superficie representativa del volumen diferencia del continuo y n_i , el vector unitario normal a la superficie S . La forma diferencial de 2.31 se escribe como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.32)$$

³Una descripción Lagrangeana, o del material, sigue el movimiento de una partícula. Esta descripción es comúnmente usada para mecánica de sólidos.

⁴Una descripción Euleriana, o espacial, interpreta los eventos mecánicos que ocurren en ciertos lugares. Esta descripción es comúnmente usada para mecánica de fluidos.

la cual es una expresión para el *principio de conservación de masa*.

El balance de momento agular y lineal se puede escribir como:

$$\frac{Dp_i}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_V \rho v_i d\Omega = f_i \quad (2.33)$$

$$\frac{Dh_i}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_V e_{ijk} x_j v_k d\Omega = l_i \quad (2.34)$$

La fuerza y momento resultante del cuerpo respecto al origen del sistema de referencia inercial puede ser expresado como

$$f_i = \int_S t_i dS + \int_V b_i d\Omega \quad (2.35)$$

$$l_i = \int_S e_{ijk} x_j t_k dS + \int_V e_{ijk} x_j b_k d\Omega \quad (2.36)$$

donde t_i son la fuerzas de superficie, b_i las fuerzas de cuerpo, e_{ijk} el tensor de permutación de Levi-Civita ⁵. Aplicando el teorema de la divergencia ⁶, y la relación de esfuerzos de Cauchy,

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (2.37)$$

donde σ_{ij} denota los componentes del tensor de esfuerzos de Cauchy, actuando sobre un área elemental el cuerpo deformado, las relaciones 2.35, 2.36 se convierten en,

$$f_i = \int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i \right) d\Omega \quad (2.38)$$

$$l_i = \int_V e_{ijk} x_j \left(\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + b_k \right) d\Omega \quad (2.39)$$

Reemplazando 2.38 y 2.39 en 2.33 y 2.34, y usando 2.31, se obtienen las ecuaciones de movimiento para cuerpos continuos;

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho v_i d\Omega = \int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i \right) d\Omega \quad (2.40)$$

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho e_{ijk} x_j v_k d\Omega = \int_V e_{ijk} x_j \left(\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + b_k \right) d\Omega \quad (2.41)$$

Estas ecuaciones se pueden escribir en su forma diferencial como,

⁵ e_{ijk} es 1 si (i, j, k) es una permutación par de $(1, 2, 3)$, -1 si es una permutación impar, y 0 si algún índice está repetido.

⁶Teorema de Gauss

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i \quad (2.42)$$

$$e_{ijk} \sigma_{jk} = 0 \quad (2.43)$$

Las ecuaciones 2.42 y 2.43 son conocidas como las *ecuaciones de movimiento de Cauchy*.

2.1.10. Amortiguamiento (*Damping*)

En muchas aplicaciones para análisis dinámicos o cuasi-estáticos de bloques, el amortiguamiento es usualmente usado para describir los efectos resistivos al movimiento por fluidos viscosos. La formulación más usual es asumir que el amortiguamiento es proporcional a la velocidad de movimiento, con lo cual, modificando la ecuación de movimiento de Cauchy 2.42 se tiene,

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} + cv_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i \quad (2.44)$$

donde c es el coeficiente de amortiguamiento que debe ser determinado. Determinar este factor puede ser muy difícil para estructuras que contienen muchos cuerpos deformables.

Amortiguamiento en 1D.

El caso más sencillo de amortiguamiento corresponde al movimiento armónico simple amortiguado en una dimensión, el cual se visualiza en la Figura 2.10

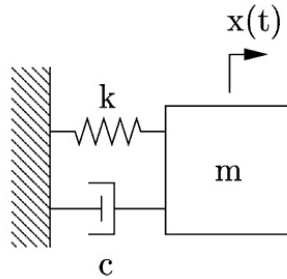


Figura 2.10: Movimiento armónico simple amortiguado. Figura obtenida de [17]

Donde c es el coeficiente de amortiguamiento, k la constante del resorte y $x(t)$ es la posición del cuerpo de masa m . De la configuración en la Figura 2.10, y considerando la segunda Ley de Newton, se tiene la ecuación diferencial:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (2.45)$$

que se puede reordenar en

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (2.46)$$

Luego, se pueden definir los parámetros: ω_0 frecuencia natural del sistema no amortiguado, dado por:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

y el parámetro λ ,

$$\lambda = \frac{c}{2m}$$

De esta manera, la ecuación 2.46 se puede reescribir como:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.47)$$

La cual tiene como ecuación auxiliar:

$$\gamma^2 + 2\gamma m + \omega_0^2 = 0 \quad (2.48)$$

con sus respectivas raíces

$$\gamma_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

$$\gamma_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

Luego, definiendo ζ como la relación de amortiguamiento

$$\zeta^2 = \frac{\lambda^2}{\omega_0^2} \quad (2.49)$$

Se tienen 3 casos:

1. $\zeta \leq 1$: movimiento subamortiguado.
2. $\zeta = 1$: movimiento críticamente amortiguado.
3. $\zeta \geq 1$: movimiento sobreamortiguado.

Estos casos se muestran en la Figura 2.11

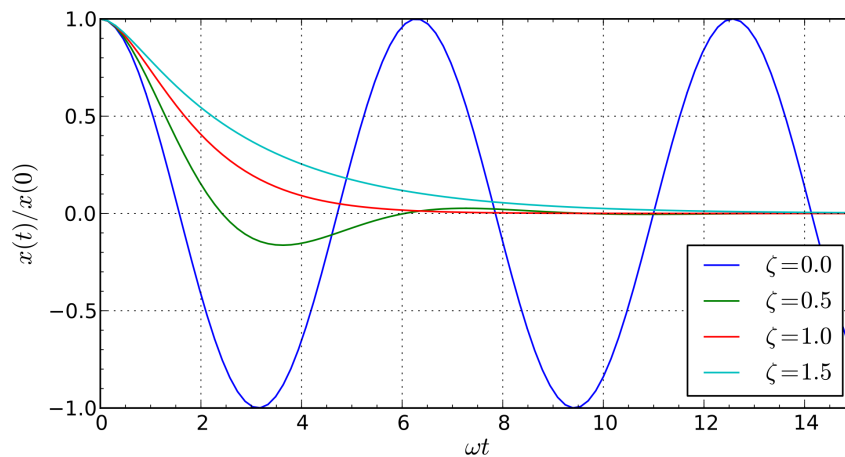


Figura 2.11: Movimiento armónico simple amortiguado. Figura obtenida de [17]

El amortiguamiento sirve como un término de fuerza artificial aplicado para alcanzar soluciones de estado estacionario para las ecuaciones dinámicas de movimiento. El término de amortiguamiento en estos casos, se convierte en un factor para obtener una solución numérica, más que un mecanismo con significado físico; por lo tanto se puede usar un procedimiento de *intento y error* para alcanzar un coeficiente de amortiguamiento apropiado. El coeficiente de amortiguamiento juega un rol de un parámetro artificial para la convergencia de problemas cuasiestáticos en DEM.

En el modelo desarrollado en este trabajo, se utilizó el valor arbitrario de $c = 0,7$.

2.1.11. Interacción entre Partículas

Rigidez

La interacción básica de DEM define dos términos de rigidez: Rigidez normal K_N y rigidez de corte (tangencial) K_T . Es deseable que K_N este relacionado al Modulo de Young de las partículas, mientras K_T se determina como una fracción de K_N . La razón $\frac{K_T}{K_N}$ determina la razón macroscópica de Poisson, y el Modulo de Young es proporcional a K_N , así como afectado por $\frac{K_T}{K_N}$.

Este análisis es altamente simplificado y no considera la distribución de radios de las partículas, la configuración del empaquetamiento y otros posibles parámetros.

Rigidez Normal

El algoritmo usado en Yade para calcular la rigidez debido a interacciones normales usa dos resortes en serie con largos iguales al radio de las esferas. Esto se puede ver en la Figura 2.12.

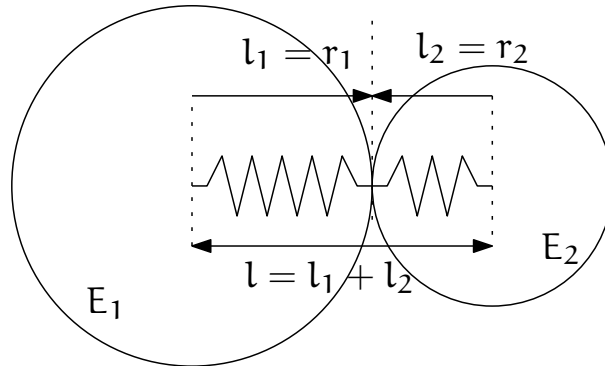


Figura 2.12: Resortes representando la rigidez normal del contacto entre 2 esferas. Figura obtenida de [17]

Dada esta configuración, se puede derivar K_N :

$$K_N = \frac{E_1 l_1 E_2 l_2}{E_1 l_1 + E_2 l_2}$$

En el caso de esferas idénticas, se obtiene:

$$K_N = \frac{Er}{2} \tag{2.50}$$

Evaluación de la Deformación

En el caso general, la configuración mutua de 2 partículas tiene 6 grados de libertad. Ambas partículas tienen 6 grados de libertad cada una, pero la interacción en si es libre para moverse

y rotar en el espacio teniendo 6 grados de libertad por si misma. Esto se puede ver en la Figura 2.13.

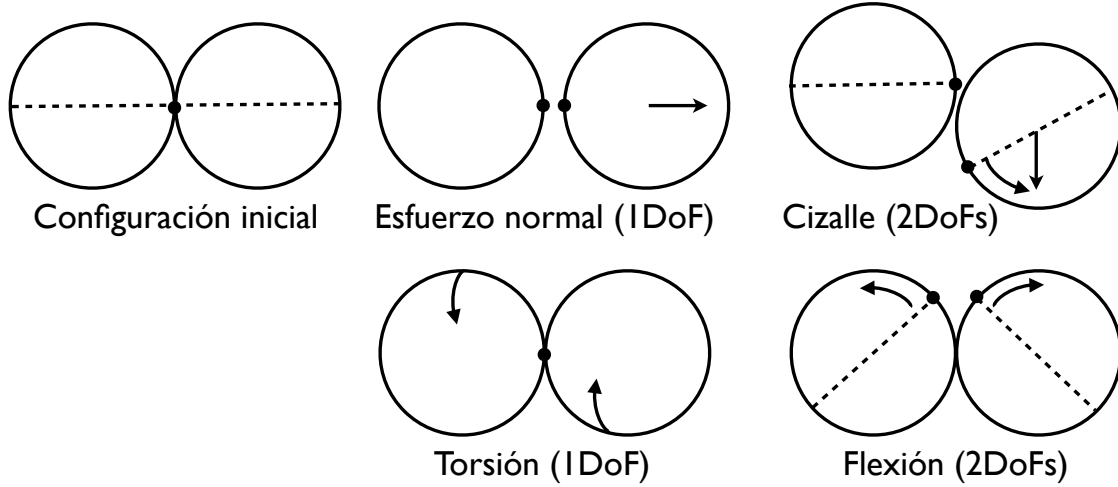


Figura 2.13: Grados de libertad (DoFs) en la configuración de 2 esferas. Figura modificada de [17].

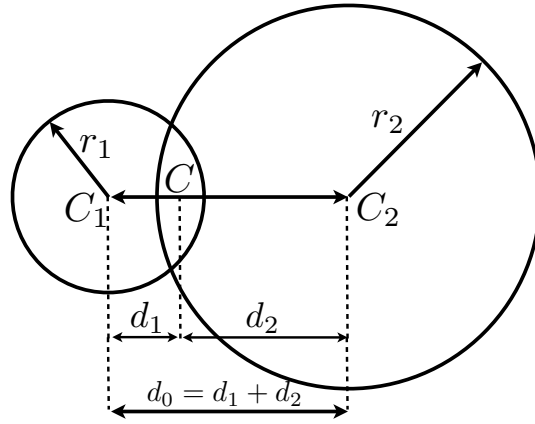


Figura 2.14: Geometría del contacto entre 2 esferas. Figura modificada de [17].

La geometría de los contactos se puede ver en la Figura 2.14. Para evaluar la deformación normal se usa la siguiente formula (Ver [17]):

$$\varepsilon_N = \begin{cases} \log\left(\frac{|C_2 - C_1|}{d_0}\right) & \text{si } |C_2 - C_1| < d_0 \\ \frac{|C_2 - C_1|}{d_0} - 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para evaluar la deformación de corte, se usa la siguiente formula:

$$\varepsilon_T = \frac{u_T}{d_0}$$

Para calcular el desplazamiento tangencial, u_T , se debe mantener la consistencia de este valor con respecto al movimiento de las esferas en contacto. Para esto existen varios métodos que varían según la precisión requerida (Ver [17]).

Ejemplo de Evaluación de Esfuerzos

Una vez que la deformación ha sido calculada, puede ser usada para calcular esfuerzos y fuerzas actuando en ambas esferas. La ley constitutiva presentada aquí es la más usada en DEM, y fue originalmente propuesta por Cundall (Ver [10]).

En cada paso de tiempo, se calculan las fuerzas normales y de corte a partir de los desplazamientos normales u_N y de corte u_T . Si $u_N > 0$, el contacto se elimina sin generar fuerzas.

$$F_N = K_N u_N, \quad F_T^t = K_T u_T$$

Donde F_N es la fuerza normal y F_T^t es la fuerza de corte de prueba. Para calcular la fuerza de corte final, se usa la siguiente formula:

$$F_T = \begin{cases} F_T^t \frac{|F_N| \tan \varphi}{|F_T^t|} & \text{si } |F_T^t| > |F_N| \tan \varphi \\ F_T^t & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La fuerza total $F = F_N + F_T$ es aplicada a ambos elementos. Cada elemento acumula fuerzas y torques actuando en ellas durante cada paso.

Integración del Movimiento

Cada elemento acumula las fuerzas generalizadas (fuerzas y torques) de los contactos en los que participa. Estas fuerzas son usadas para integrar las ecuaciones de movimiento para cada elemento en forma separada. Se usa integración de Verlet (Ver [17]) para calcular las velocidades v y posiciones x , usando las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) &= x(t) + v(t)\Delta t + \frac{1}{2}a(t)\Delta t^2 \\ v(t + \Delta t) &= v(t) + \frac{a(t) + a(t + \Delta t)}{2}\Delta t \end{aligned}$$

Donde $a(t)$ es la aceleración en el tiempo t y se calcula como $a(t) = \frac{F}{m}$. La razón por la cual se usa Integración de Verlet es que el error local de $x(t + \Delta t)$ es del orden $O(\Delta t^4)$, mientras que el error global de la misma expresión es $O(\Delta t^2)$.

2.1.12. Consideraciones de Estabilidad

Para asegurar la estabilidad numérica del integrador numérico, se impone un límite superior en Δt , que corresponde a la mínima frecuencia de muestreo de Nyquist:

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_{max}} \quad (2.51)$$

Donde ω_{max} es la máxima frecuencia propia del sistema. Esta frecuencia propia se puede determinar para los siguientes casos:

- Sistema masa-resorte único: $\omega_{max} = \sqrt{\frac{K}{m}}$.
- Sistema general de masa-resorte: $\omega_{max} = \max_i \sqrt{\frac{K_i}{m_i}}$.

Estas ecuaciones pueden ser usadas para 6 grados de libertad, considerando matrices generalizadas de masa M y rigidez K , y reemplazando las fracciones $\frac{K}{M}$ por los valores propios de KM^{-1} . El paso de tiempo crítico se obtiene con modo propio con la mayor frecuencia:

$$\Delta t_{cr} = \min_i \Delta t_i$$

2.1.13. Aspectos Computacionales

Costo

El cálculo de DEM usando un esquema de integración explícito requiere un gran número de pasos (iteraciones) durante la simulación. El tiempo de computo Z abarcando T segundos de tiempo simulado, conteniendo N partículas de volumen V depende (Ver [17]):

- Linealmente con la cantidad de pasos $i = \frac{T}{S_t \Delta t_{cr}}$, donde S_t es un factor de seguridad para el paso de tiempo, Δt_{cr} es el paso de tiempo obtenido desde la velocidad de la onda P , calculado como:

$$\Delta t_{cr} = \min R_i \sqrt{\frac{E_i}{\rho_i}} \quad (2.52)$$

Donde R_i es el radio de la esfera i -ésima, ρ_i es la densidad del material de la esfera i -ésima, y E_i es el módulo de Young de la esfera i -ésima .

- El número de partículas N :

$$N = p \frac{V}{\frac{4}{3}\pi r^3} \quad (2.53)$$

Donde r es el radio de las esferas y p es la porosidad del empaquetamiento de esferas.

- La cantidad de núcleos computacionales N_{cpu} , en el caso ideal de que el código fuera 100 % paralelo, pero en realidad es aproximadamente un 80 %.

Por ende, el tiempo de ejecución es:

$$Z \propto \frac{iN}{N_{cpu}} = \frac{T}{S_t r} \sqrt{\frac{E}{\rho}} p^{\frac{4}{3}} \frac{V}{\pi r^3} \frac{1}{N_{cpu}}$$

$$Z \propto \frac{1}{r^4}$$

Indeterminación de resultados

Es natural esperar que al ejecutar la misma simulación varias veces, se generen exactamente los mismos resultados. A pesar de que el computo se realiza con una precisión finita, los errores de redondeo y truncado serían determinísticamente los mismos en cada ejecución. Esto es cierto para ejecuciones no paralelas (usando un solo hilo o *thread*), pero no lo es para ejecuciones paralelas.

La manera mas directa de implementar el calculo paralelo es tratar las interacciones en un orden arbitrario, evaluando esfuerzos y deformaciones independientemente, pero las fuerzas de cada interacción deben ser sumadas. Si el orden de adición es arbitrario, entonces los resultados pueden variar levemente, por ejemplo:

$$(1/10.) + (1/13.) + (1/17.) = 0,23574660633484162$$

$$(1/17.) + (1/13.) + (1/10.) = 0,23574660633484165$$

Esto se debe a que el orden de ejecución de cada hilo es decidido por el planificador de procesos del sistema operativo, en un orden que no es controlable por el usuario y/o programador, y por ende se considera no determinístico.

2.2. Mecánica de rocas

Los macizos rocosos se pueden caracterizar por los siguientes aspectos:

- Son un material natural DIANE ⁷.
- Están pre-cargados, i.e, están bajo esfuerzos que son continuamente afectados por movimiento dinámicos en la corteza superior de la Tierra.
- Son un medio poroso fracturado que contienen fluidos bajo condiciones complejas de esfuerzos y temperaturas.

La combinación de sus constituyentes y su larga historia de formación hace a los macizos rocosos materiales complejos para su modelamiento matemático, por lo cual, el modelamiento numérico es inevitable para el diseño y la valoración de desempeño de proyectos de ingeniería de rocas. Para capturar adecuadamente los complejos aspectos físicos y/o geomecánicos de rocas fracturadas y de los efectos de las perturbaciones introducidas por la ingeniería, un método numéricos debe tener la capacidad de:

- Representar un sistema geométrico; especialmente el sistema de fracturas o sus efectos.
- Implementar condiciones de borde, y condiciones iniciales.
- Implementar cargas naturales e inducidas.
- Mantener historial de perturbaciones.
- Incorporar leyes constitutivas adecuadas para ambos: la matriz rocosa y las fracturas.
- Considerar el efecto escala y tiempo.

Hoy en día, no existe un modelo numérico que abarque todos estos aspectos. Esto es así, básicamente por el limitado conocimiento actual concerniente al comportamiento físico de las fracturas en las rocas y de los macizos rocoso fracturados; lo cual se debe a nuestros medios limitados para representar la geometría y evolución de complejos sistemas rocoso. Además, contamos con capacidad computacional limitada.

Para muchos problemas prácticos, con condiciones estructurales complejas, el modelamiento numérico es todavía una herramienta ampliamente utilizada para un entendimiento conceptual, entregando ideas guías para el diseño y operación de estructuras de ingeniería donde hay una gran cantidad de grados de incertidumbre envueltos.

Los métodos numéricos y técnicas computacionales se han convertido en herramientas adecuadas y eficientes para formular y probar modelos conceptuales y teorías matemáticas que pueden integrar información diversa respecto a geología, física, técnicas de construcción, economía, impacto ambiental y sus interacciones en un modelo compacto y plataforma de toma de decisiones (Fuente [2]).

⁷Discontinuo, Inhomogéneo, Anisotrópico, No Elástico

2.2.1. Block Caving

La Figura 2.15 muestra las características generales del método de explotación minera Block Caving. En este método se realiza extracción de material en la base de un bloque (en el nivel de *socavación*)⁸ equidimensional, o al cuerpo mineral completo, para iniciar el proceso de *caving*. La base es perforada y destruída progresivamente. El mineral quebrado es extraído para crear una cavidad que se puede propagar de manera ascendente. Mientras mayor cantidad de mineral es extraído, la cavidad se propaga hacia arriba a través del macizo rocoso (bloque de cuerpo mineral) hasta que la roca superior es cavada. Este proceso se manifiesta en la superficie como subsidencia ⁹ en la superficie .

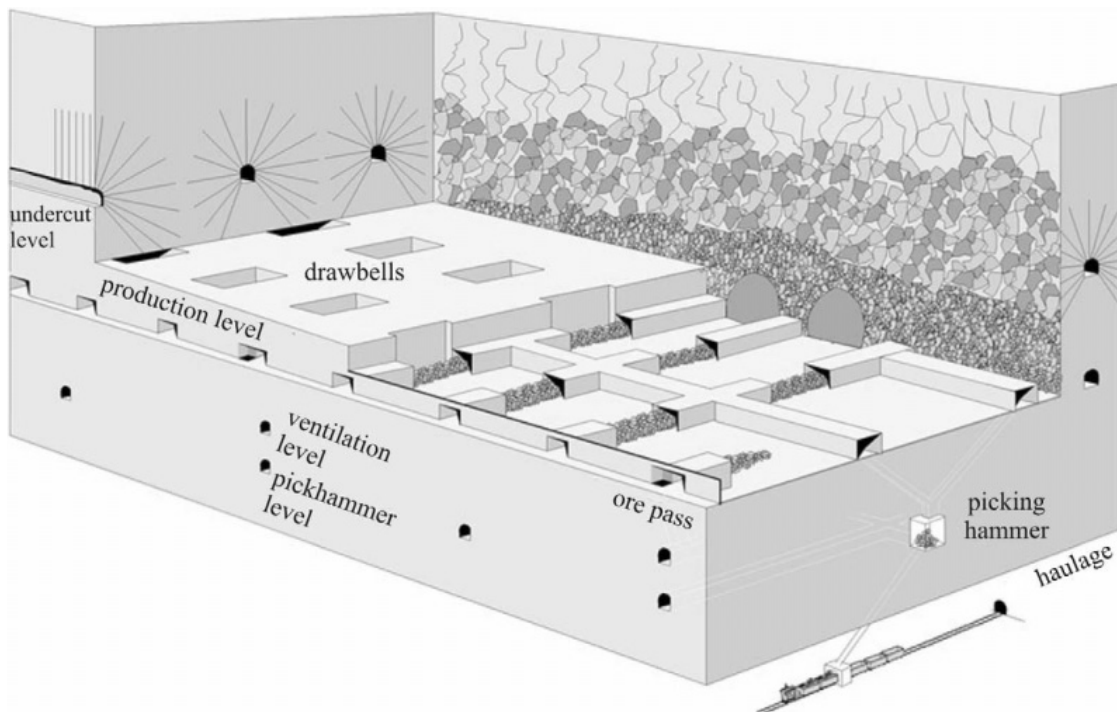


Figura 2.15: Ejemplo de Block Caving con cargadores frontales. Figura modificada de [1]

El material fragmentado es removido a través de el *nivel de producción*, bajo el *nivel de socavación*. Estos niveles se conectan por bateas, en el cual el material se mueve, por acción de la gravedad, a puntos de extracción en el *nivel de extracción*. Desde este punto, el material se remueve, generalmente, con el uso de cargadores frontales (LHD¹⁰). Desde el nivel de extracción, el material es transportado al *nivel de acarreo*, y luego fuera de la mina. A veces, se requiere un chancado al interior de la mina.

El método de Block Caving fue diseñado inicialmente para macizos rocosos poco competentes (de

⁸ *Undercut Level* en la Figura 2.15.

⁹ La subsidencia corresponde al campo de desplazamiento del material producido por una excavación subterránea.

¹⁰ Load Haul Dump.

baja resistencia), de baja ley y con mucha capacidad de fragmentación fina. Es un método de minería de bajo costo, en el cual se puede establecer un alto grado de automatización. Por otro lado, es un método intensivo en capital de trabajo, y requiere de una gran inversión en infraestructura y desarrollo antes de que se pueda comenzar la producción.

Existe una tendencia para utilizar el método en macizos rocoso más competentes, los cuales producen una fragmentación más gruesa que las aplicaciones anteriores. Esto requiere espaciamentos mayores entre los puntos de extracción y equipamiento más grande. Las etapas geomecánicas principales del Block Caving son la *iniciación* y *propagación* de los límites de la cavidad a través del macizo rocoso. Las etapas de desarrollo y producción del Block Caving, se pueden resumir en:

1. A una altura particular en un yacimiento, se desarrolla un diseño de extracción, bajo un bloque de mineral que tiene dimensiones en planta y vertical, adecuados para la formación de una cavidad y su propagación.
2. Se desarrolla un nivel de socavación sobre el nivel de extracción
3. Cuando los pilares temporales remanentes en el nivel de socavación son removidos, ocurre falla y colapso progresivo de la corona de la socavación.
4. La masa de mineral se expande cuando falla, llenando la cavidad.
5. La remoción del material fragmentado en el nivel de producción induce flujo en el material cavado y pérdida de soporte desde la corona de la cavidad.
6. La roca que forma el límite de la cavidad es sometida, por ella misma, a falla y desplazamiento.
7. El progreso vertical del límite de la cavidad, esta relacionado directamente con: la extracción de mineral fragmentado y con la expansion del mineral en el proceso de desintegración y hundimiento.
8. Durante el flujo vertical de la roca, ocurre la reduccion de tamaño de los fragmentos.

El aspecto más importante que debe abordarse al examinar el uso de Block Caving es la *cavabilidad* del yacimiento y la roca de desecho. La cavabilidad es una función de las propiedades geomecánicas del macizo rocoso y de los esfuerzos *in-situ* y de los inducidos. La roca de desecho corresponde a material de muy baja (o nula) ley. Se debe controlar la roca de desecho extraída para mejorar la producción de la mina.

El diseño de una mina por Block Caving envuelve importantes consideraciones geomecánicas, tales como:

1. Dimensiones del Bloque
2. Elección de un sistema de extracción.
3. Determinación de los tamaños de las bateas y de su espaciamento.

4. Diseño del traspaso de material desde el nivel de producción a su extracción fuera de la mina.
5. La programación de operaciones de desarrollo y producción.

Finalmente, los resultados obtenidos desde las operaciones del Block Caving diseñado, depende de la fragmentación y de la tasa de extracción alcanzada.

Mecánica del Block Caving

Se puede esperar que en cualquier macizo rocoso sin soporte se pueda producir una cavidad si la base de socavación¹¹ es suficientemente grande. El caving ocurre como resultado de la influencia de dos aspectos principales: la gravedad y los esfuerzos inducidos en la corona de la cavidad. El mecanismo por el cual el caving ocurre, dependerá de la relación entre los esfuerzos inducidos, la resistencia del macizo rocoso, la geometría, y la resistencia de las discontinuidades del macizo rocoso.

Algunas de las características que benefician el caving (buena iniciación y propagación) son la presencia de conjuntos de discontinuidades bien desarrolladas y poco inclinadas.

En el caving, se pueden identificar tres situaciones principales (Ver [1]),

1. Si los esfuerzos tangenciales y compresivos inducidos en la corona de la base de socavación o cavidad son bajos, o tienden a ser de tensión, los bloques podrían caer bajo la influencia de la gravedad o deslizar sobre discontinuidades inclinadas. Estas condiciones podrían ocurrir cuando los esfuerzos in-situ horizontales son bajos o cuando los esfuerzos han sido aliviados por minería previa, por lo cual los esfuerzos son redistribuidos. Incluso bajo estas circunstancias, es posible que se forme un arco auto-soportante en la corona de la cavidad, especialmente cuando no existe una estrategia de extracción adecuada.
2. Por otro lado, si los esfuerzos tangenciales inducidos son altos comparados con la resistencia a la compresión del macizo rocoso y con la resistencia al corte de las discontinuidades, la falla puede ocurrir cerca del límite del macizo rocoso, y los bloques pueden caer bajo influencia de la gravedad. Bajo estas circunstancias, el mecanismo de falla dominante es la fractura frágil de la roca intacta y deslizamiento en las discontinuidades, especialmente, de las que son planas. A esta forma de caving se le conoce como caving por esfuerzos¹².
3. Si los esfuerzos in-situ horizontales y los esfuerzos tangenciales inducidos en la corona de la base de socavación son los suficientemente altos para desarrollar fuerzas de sujeción, las cuales inhiben el caving por gravedad, pero no son lo suficientemente altos comparados con la resistencia a la compresión del macizo rocoso, se produce un arco auto-sustentable. En este caso el caving se detiene y no hay desprendimiento temporal de roca desde el macizo rocoso, luego la producción cesa. Existe un alto riesgo de que esta situación cambie de manera

¹¹Undercut.

¹²Strees Caving

catastrófica a través de *estallido de roca*¹³ o *ráfaga de aire*¹⁴. También puede suceder que las acciones necesarias para reactivar el caving sean económicamente inviables y/o poco seguras.

Un modelo de las fases distinguidas en el caving (Ver [1]) se muestra en la Figura 2.16:

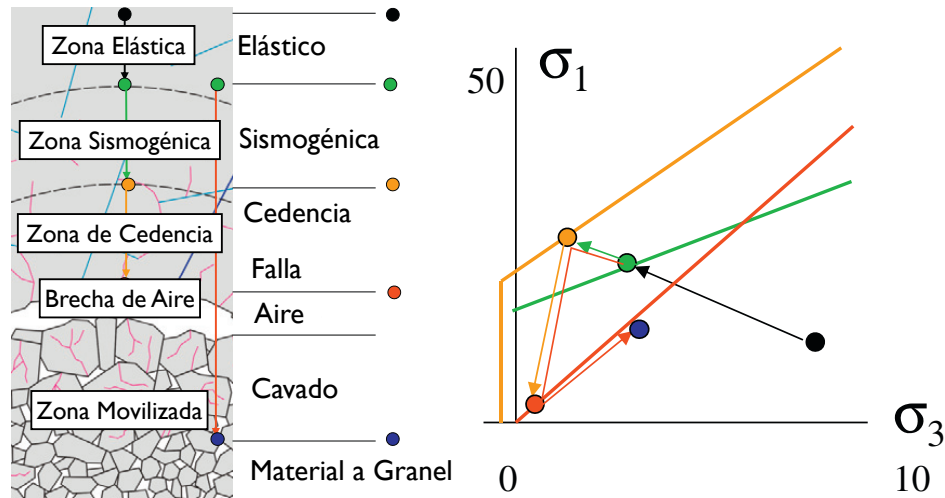


Figura 2.16: Zonas de Caving y sus esfuerzos principales correspondientes en cada zona. También se modela el comportamiento del material en cada zona (líneas de colores). Figura modificada de [12].

1. *Zona Elástica*.¹⁵ Solo ocurre deformación elástica. Corresponde al macizo rocoso intacto, previo a ser afectado por minería.
2. *Zona Sismogénica*. Corresponde a un frente sísmico, producido por el deslizamiento del macizo rocoso sobre discontinuidades, o por fractura frágil. Este comportamiento es debido a las condiciones de esfuerzo cambiantes, causadas por el avance de la base de socavación y por el progreso de la cavidad.
3. *Zona de Cedencia*.¹⁶ Esta zona no provee soporte al macizo rocoso superior. Ocurren grandes desplazamientos de roca dentro de esta zona, la cual corresponde a la desitengración del macizo rocoso. Esta zona se extiende alrededor de 15m (Ver [1]) fuera del límite de la corona de la cavidad.
4. *Brecha de Aire*.¹⁷ Corresponde a una fase de aire entre el material que ha caído (Zona Movilizada) y el que no ha caído. El tamaño de esta zona se considera como función de la tasa de extracción.
5. *Zona Movilizada*.¹⁸ Esta zona está conformada por material que ha caído. El material de esta zona provee soporte a las paredes de la cavidad.

¹³También conocido como *Rock Burst*.

¹⁴También conocido como *Air Blast*.

¹⁵También conocida como *Surrounding Rock Mass*.

¹⁶También conocida como *Zone Of Discontinuous Deformation*.

¹⁷También conocido como *Air gap*.

¹⁸También conocido como *Caved Zone*.

2.2.2. Modelos Constitutivos de Fracturas de Rocas y Macizos Rocosos

Los modelos constitutivos de fractura de rocas y macizos rocosos son los componentes claves para el modelamiento numérico del comportamiento físico de rocas fracturadas. El desarrollo de estos modelos deben poder:

1. Capturar el comportamiento conceptual del comportamiento de rocas. Este comportamiento es el observado en experimentos en laboratorio y/o observaciones de campo de tolerancia aceptable para el análisis cuantitativo de deformaciones de roca y esfuerzos.
2. Simular el comportamiento de rocas y fracturas bajo condiciones generales de carga y las curvas asociadas de esfuerzo y deformación, sin violar la segunda ley de la termodinámica.

Se debe notar que los modelos constitutivos son aproximaciones teóricas de los fenómenos que se observan en la realidad. Estas aproximaciones están basadas en ciertas suposiciones de acuerdo a diferentes principios teóricos y logros matemáticos adoptados.

Debido a la complejidad extrema del comportamiento mecánico de las fracturas de rocas y rocas fracturadas y la limitación de las herramientas matemáticas disponibles y métodos computacionales, no es posible simular cada aspecto de comportamiento físico por modelos matemáticos. Solo los aspectos más importantes del comportamiento son considerados en el desarrollo de modelos constitutivos.

Los componentes más importantes en los Métodos de Elementos Discretos son:

1. Conservación de la masa.
2. Conservación del momentum.
3. Conservación de la energía.
4. Algoritmos de detección de contactos.
5. Modelos constitutivos para fractura de rocas y macizos rocosos.

2.3. Antecedente de estimación del Cave Back

Existen trabajos previos¹⁹ que estudian el Cave Back de manera indirecta. De los disponibles, no se encuentra alguno que haya realizado la estimación en base a la información de producción, tal como se presenta en este trabajo. De estos, el trabajo de Clare Mawdesley, *Predicting Rock Mass Cavability in Block Caving Mines*, es el que se presenta como antecedente más relevante. A continuación un resumen de este trabajo.

2.3.1. Predicting Rock Mass Cavability in Block Caving Mines, Clare Mawdesley, 2002 [16]

Clare identificó los modelos de Block Caving incorporados en el software FLAC3D de Itasca, como los modelos numéricos más avanzados a la fecha para la determinación de la cavabilidad. Los resultados fueron comparados con información de la mina Northparkes E26, de USA.

Para el 2002, Itasca había desarrollado dos modelos. Estos dos modelos fueron implementados en el software FLAC3D. Estos modelos se resuelven por el método de diferencias finitas.

- El Modelo 1 se refiere a un modelos elástico.
- El Modelo 2, se refiere a un modelo con pseudo-ablandamiento en función de la deformación.

En ambos modelos, se usó el criterio de falla de Mohr-Coulomb, que requirió la determinación de la cohesión, ángulo de fricción y resistencia a la tensión del macizo rocoso. Estos valores fueron obtenidos a través de una aproximación lineal del criterio de Hoek-Brown.

El primer paso para ambos modelos, es simular la extracción de la base de socavación, conocida como *undercut*, visible en la Figura 2.18 . Esto se hace en varias etapas.

1. Los elementos en la zona de undercut simulan ser extraídos por minería a través de su eliminación.
2. Luego, son reemplazados por *elementos extraídos*; los cuales son elementos con propiedades de roca cavada y capaces de un comportamiento elastoplástico.
3. Los esfuerzos aplicados a los elementos extraídos son impuestos en cero, y el modelo corre hacia un equilibrio cuasiestático.
4. Los esfuerzos soportados por el undercut extraído son redistribuídos al macizo rocoso que rodea la zona del undercut. En esta etapa los esfuerzos sobre el material cavado son pequeños y se deben solo a la gravedad.
5. Las zonas de diferencias finitas sobre el undercut son revisados para determinar si fallan según el criterio de Mohr-Coulomb.

¹⁹De manera disponible y a la fecha de realizar este trabajo de Tesis.

6. Los elementos que fallan, se asumen cavados, por lo que sus propiedades se reasignan como tales y los esfuerzos en estos se inicializan en cero.
7. El modelo luego es corrido para determinar la redistribución de esfuerzos sobre la cavidad. Solo los elementos directamente sobre la cavidad son permitidos para fallar.
8. Los elementos en los lados de la cavidad son mantenidos con comportamiento elástico.

Este ciclo de cálculo es repetido hasta que el macizo rocoso alcanza el equilibrio y se desarrolla un arco estable en la parte superior de la cavidad. También puede ocurrir que no se forme el arco estable, y la cavidad se sigue propagando. Si se forma el arco estable, entonces se aumenta la zona de undercut y el proceso se repite hasta que se ha extraído la totalidad del undercut.

En el Modelo 2, se incluyó una zona perturbada para acomodar la transición desde roca intacta a material extraído, para reflejar la zona de fracturas extendidas y el desprendimiento de bloques sobre la zona de cave back. En este modelo, los elementos que han fallado sobre la zona de undercut, son asignados con propiedades mecánicas reducidas con el objetivo de simular el debilitamiento progresivo del macizo rocoso a través de la propagación de grietas y el movimiento de bloques inmediatamente detrás del frente de caving.

Las propiedades de resistencia y deformabilidad prescritas para los elementos que han fallado sobre la zona del undercut, son arbitrariamente asignados como la mitad de aquellos no fallados.

Uno de las características más importantes de los modelos nombrados anteriormente es el tratamiento del material cavado. Los bloques cavados no son anulados, pero son reasignados con propiedades mecánicas más débiles y son usados para llenar las cavidades formadas por la deformación. Los elementos cavados son asignados con baja resistencia y alta deformabilidad que pueden realizar de manera elasto-plástica. Esto significa que en el modelo, el material cavado esta en contacto continuo con el macizo rocoso (no se forma *airgap*).

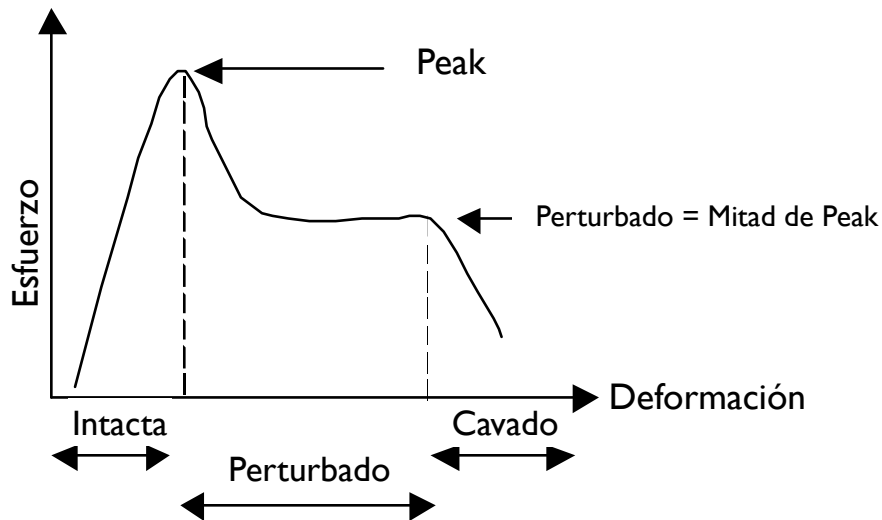


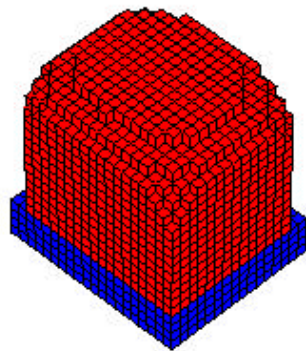
Figura 2.17: Relación entre la roca intacta, perturbada y cavada en relación a su resistencia para el Modelo 2. Figura modificada de [16]

Se investigó la sensibilidad de los modelos de caving respecto a los cambios de malla y a los cambios de magnitud de las propiedades perturbadas. Pequeños cambios incrementales en los valores de las propiedades perturbadas o tamaño de malla, resultan en resultados de cavabilidad muy distintos. Los dos modelos numéricos revisados resultan tener una habilidad limitada para predecir la cavabilidad del macizo rocoso. Ninguno de los modelos pudo ser validado, y se han encontrado algunas sensibilidades, con lo cual, se recomienda suspender el uso de estos modelos para predecir las dimensiones de las zonas afectadas por extracción.

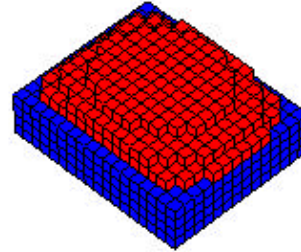
Sensibilidad de Malla.

Se han documentado problemas con la fuerte dependencia a la malla en los modelos continuos con ablandamiento en función de la deformación. Si bien los modelos en FLAC3D no son modelos de ablandamiento a la deformación completos, lo hacen de manera simplificada.

Esta sensibilidad disminuye con la disminución del tamaño de malla. Para disminuir esta sensibilidad, se recomienda usar mallas más finas.



Malla con elementos
de 10 m.



Malla con elementos
de 11 m.

Figura 2.18: Resultado gráfico del Modelo 2. Se muestran las alturas finales obtenidas para mallas con tamaño de elementos de 10 y 11 metros. La zona azul es la zona de undercut, y la roja corresponde a los elementos cavados.

Figura modificada de [16].

Sensibilidad de Propiedades.

La sensibilidad del Modelo 2 a pequeños cambios en las propiedades asignadas a la zona perturbada dificulta la justificación confiable y validación del modelo para la estimación del cave back. Los modelos numéricos muestran una fuerte sensibilidad a la deformación crítica, el cual es muy difícil de determinar de manera precisa en la práctica. Los intentos de Itasca para desarrollar un modelo de caving lo han llevado a desarrollar modelos discontinuos implementados en el software PFC3D.

Conclusiones

- Los modelos continuos implementados en FLAC3D, desarrollado por Itasca para valorizar la cavabilidad, mostraron ser muy sensibles a las propiedades del material y al tamaño de malla. Pequeños cambios en cualquiera de estos, su combinación o por separados, llevan a resultados de cavabilidad muy diferentes.
- La determinación apropiada de las propiedades post-peak, sigue siendo un problema.
- Los modelos numéricos existentes actuales (2002), tienen un poder limitado en la capacidad en la valoración de la cavabilidad del macizo rocoso. En esta etapa, los modelos numéricos actuales no parecen lo suficientemente robustos en la simulación del proceso de caving, para ser usados con confianza como una herramienta predictiva para la valoración de la cavabilidad.

Capítulo 3

Desarrollo

Al igual que otros modelos numéricos, DEM permiten hacer una valoración más rigurosa del estudio de la cavabilidad, que el otorgado por métodos empíricos [1]. Además, pueden permitir estudiar casos en los cuales no se tenga experiencia previa respecto a las características del macizo rocoso.

3.1. Etapa I: Análisis y Valoración de Información Disponible por Parte de la Minería.

Para el monitoreo del cave back, existen (Ver [5]) ciertos métodos que conforman distintas fuentes y métodos de tratamiento de información. Algunos métodos usados se muestran en la Figura 3.1

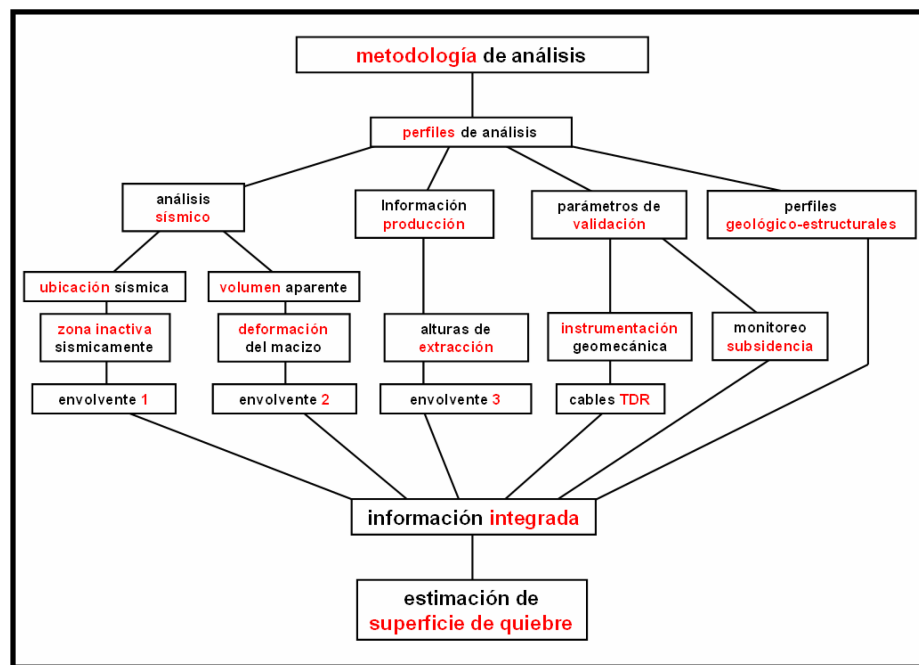


Figura 3.1: Perfiles de información. Fuente [5]

3.1.1. Análisis Sísmico

El método se basa en que cada vez que existe la creación de una grieta, fractura o desplazamiento de un cuerpo rocoso; se produce una onda de desplazamiento que se propaga en el macizo rocoso. Algunas minas subterráneas cuentan con redes de geófonos que detectan tal propagación de onda. Luego, se *estima* el origen de tal onda. Por otro lado, está la observación empírica y la justificación teórica ¹ que nota una concentración de los eventos sísmicos y de su intensidad en la zona de transición entre la zona de quiebre y el macizo rocoso intacto. Esta relación se muestra en la Figura 3.3, en la cual se muestra la relación entre los eventos sísmicos (puntos) y la deformación del macizo rocoso (colores).

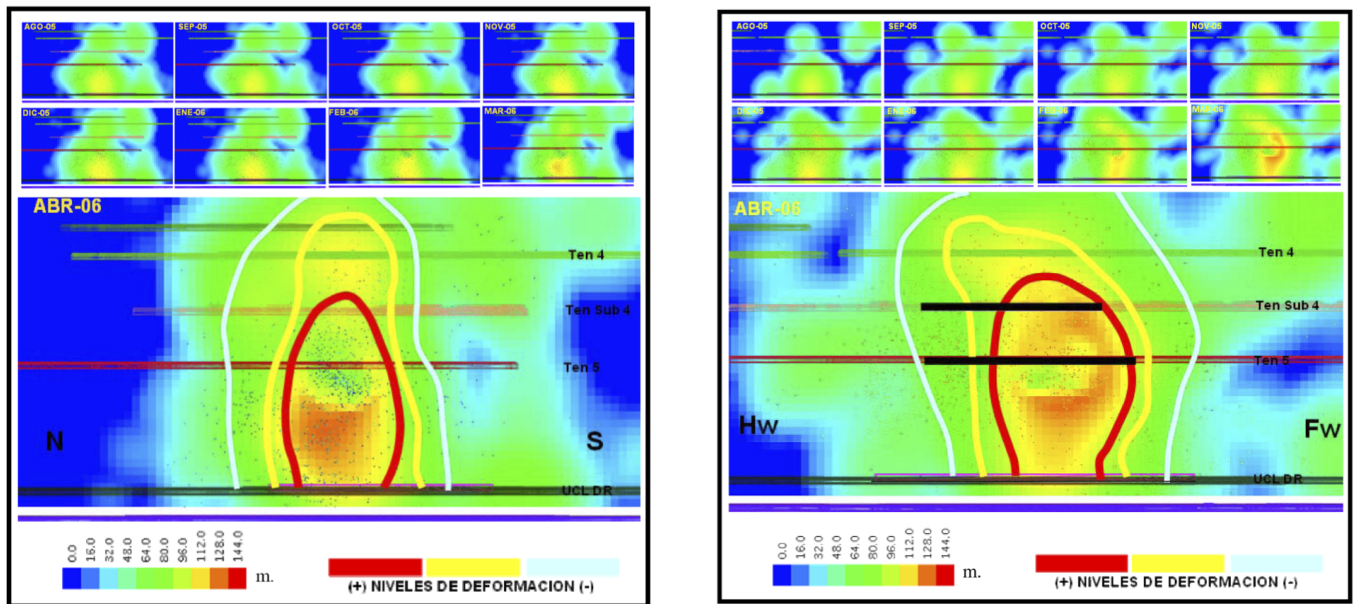


Figura 3.2: Eventos Sísmicos y Deformación. Fuente [5]

¹Los eventos sísmicos ocurren en zonas de concentración de esfuerzos. Existe una concentración de esfuerzos en los alrededores de una cavidad dentro de un macizo rocoso. Ver [14].

3.1.2. Información de Producción

La información de producción corresponde a la cantidad de material extraído por cada batea en función del tiempo, expresada en $\frac{\text{masa}}{\text{tiempo}}$ ². Esta información es abundante e importante; por factores económicos y operacionales.

Con esta información, se grafica la cantidad extraída en cada batea, en su ubicación, para un tiempo considerado. Se representa en columnas con base en las coordenadas de las bateas. La altura de las columnas son proporcionales a la cantidad extraída en cada una de ellas.

Con estas columnas graficadas, se estima la zona de quiebre del macizo rocoso como la aproximación obtenida al unir, a mano alzada, la parte superior de las columnas. La experiencia indica que el avance de la cavidad se encuentra aproximadamente a 3 veces la altura definida por las columnas de extracción.

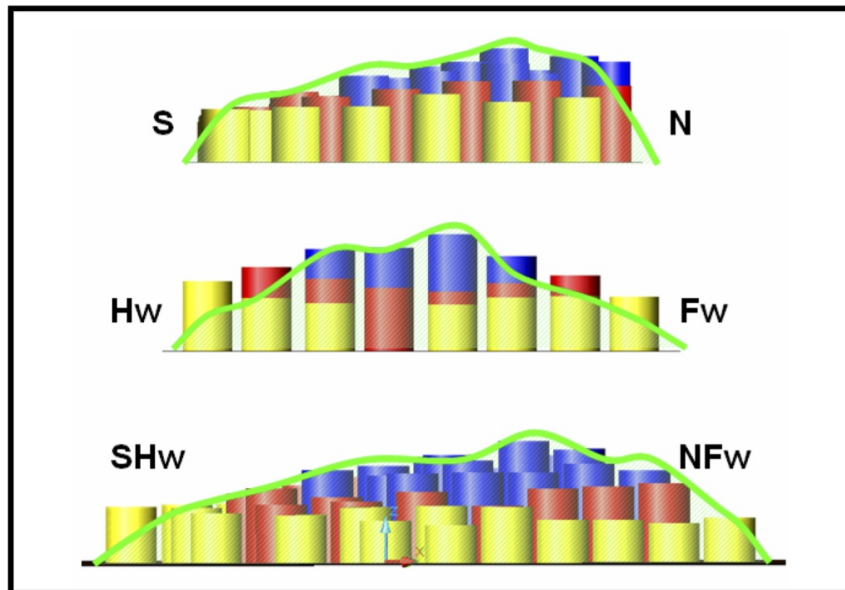


Figura 3.3: Alturas de Extracción en distintos perfiles verticales. La línea verde estima la zona de fracturamiento.

Fuente [5]

Esta estimación de los perfiles de cavidad presenta las siguientes desventajas:

- Supone que el material que se extrae por cada batea proviene de la zona creada por la proyección vertical de la base de la batea. Es decir, no considera el desplazamiento horizontal del material desde su ubicación inicial hasta su extracción.
- Considera la subjetividad del dibujante que realice esta labor; por lo cual no hay control respecto a este aspecto.

²La cantidad más precisa está expresada en $\frac{\text{ton}}{\text{sh}}$.

3.1.3. Parámetros de Validación

Cables TDR

Una instrumentación TDR es usada para caracterizar y localizar fallas en cables coaxiales. Se utiliza introduciendo de manera ajustada, cables coaxiales en perforaciones ³ en el macizo rocoso. De esta manera, cuando existe desplazamiento significativo en el macizo rocoso, suficiente para provocar desplazamiento de la perforación, se provoca daño en el cable coaxial. La instrumentación TDR puede localizar el daño en el cable. Con esta localización del daño, se reconstruye una zona de gran desplazamiento que se atribuye a la zona de quiebre.

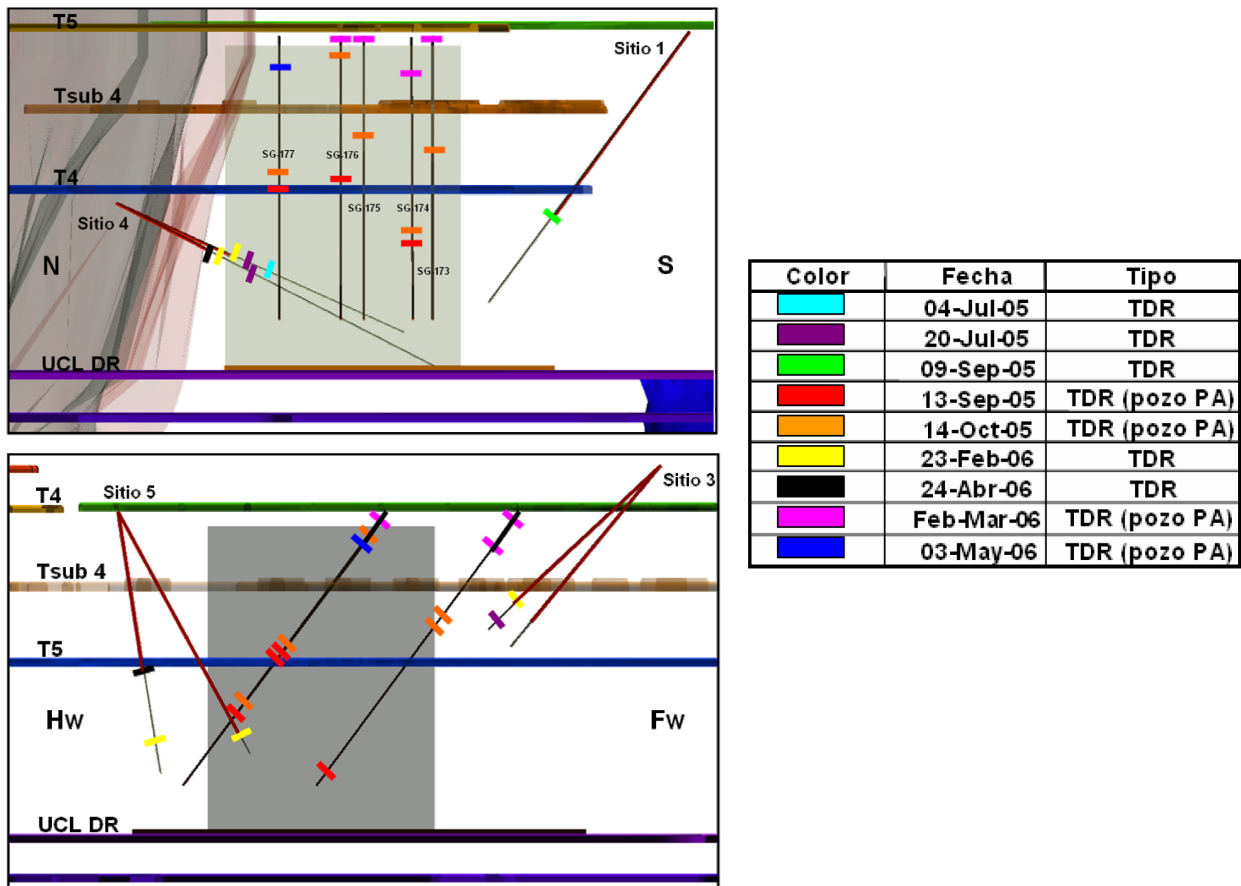


Figura 3.4: Monitoreo a través de TDR. Fuente [5]

³Tiros

Subsidencia

Si se considera la subsidencia como el campo de desplazamiento del material producido por una excavación subterránea bajo este, se puede medir la zona de subsidencia a través del desplazamiento. De manera práctica esto se hace de manera manual. La medición de la subsidencia se realiza recorriendo los túneles interiores de la mina. Cuando se observa un deterioro indiscutido del túnel por efecto del desplazamiento de material, se registra la posición. De esta manera, al haber realizado un registro alrededor de la mina, se puede medir el deterioro del macizo rocoso debido a actividades de explotación. La medición de la subsidencia es la información más confiable y directa del estado del macizo rocoso.

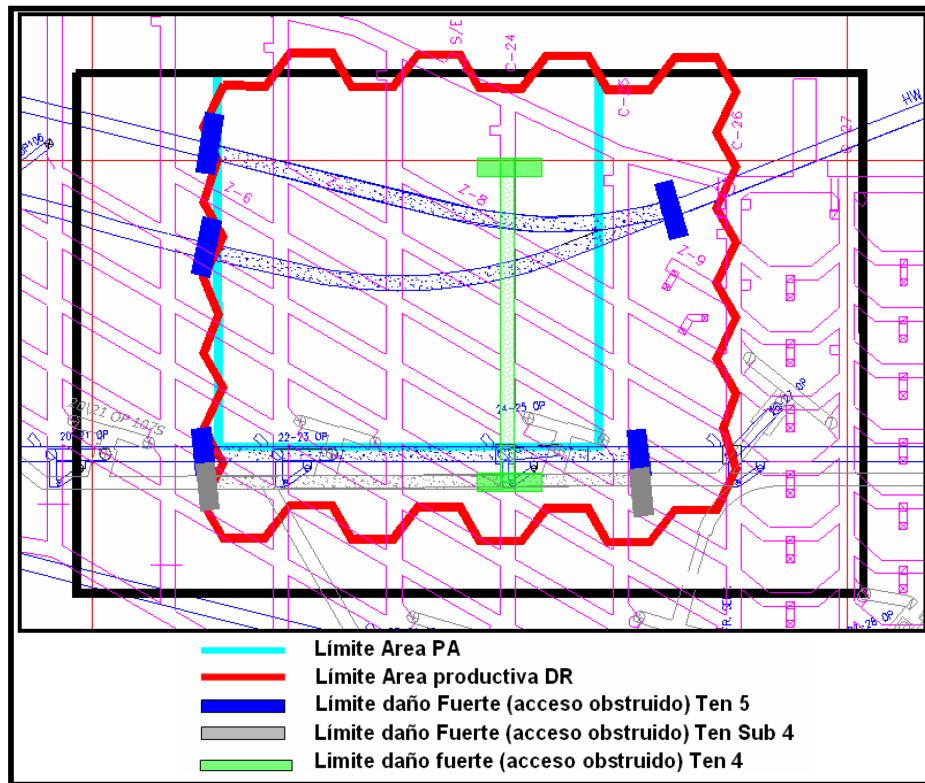


Figura 3.5: Monitoreo de Subsidencia. Fuente [5]

3.2. Determinación de las Consideraciones a Implementar en el Modelo DEM

Trabajos realizados anteriormente por otros investigadores sugieren que es posible modelar el comportamiento de grandes macizos rocosos a través del Método de Elementos Discretos ([6]- [11]). En los modelos DEM, los elementos están unidos por resortes (representando la roca competente), que se pueden romper como efecto de cargas superiores a su límite de ruptura, tal cual lo establece el criterio de falla (en este caso, se ocupará el criterio de falla de Mohr-Coulomb).

El concepto clave del método DEM es que el dominio de interés es tratado como un ensamble de elementos rígidos en el cual, los contactos entre éstos necesitan ser identificados y actualizados continuamente durante el proceso de deformación a través de un modelo constitutivo [2]. De esta manera, los elementos unidos por los resortes representarían la roca en estado competente, y los elementos que cuenten con suficientes resortes rotos, representen el material conminuído que sale por las bateas. Esta cantidad de material esta determinado por las alturas de extracción.

Dado que se cuenta con la cantidad de material extraído por cada batea (información de extracción) y algunos parámetros geomecánicos (Tabla 3.1), se pretende determinar la forma de la superficie de la cavidad resultante. Este proceso se muestra esquemáticamente⁴ en la Figura 3.6 y 3.7.

⁴Por simplicidad se muestran en 2D, pero la implementación del modelo y sus resultados son en 3D.

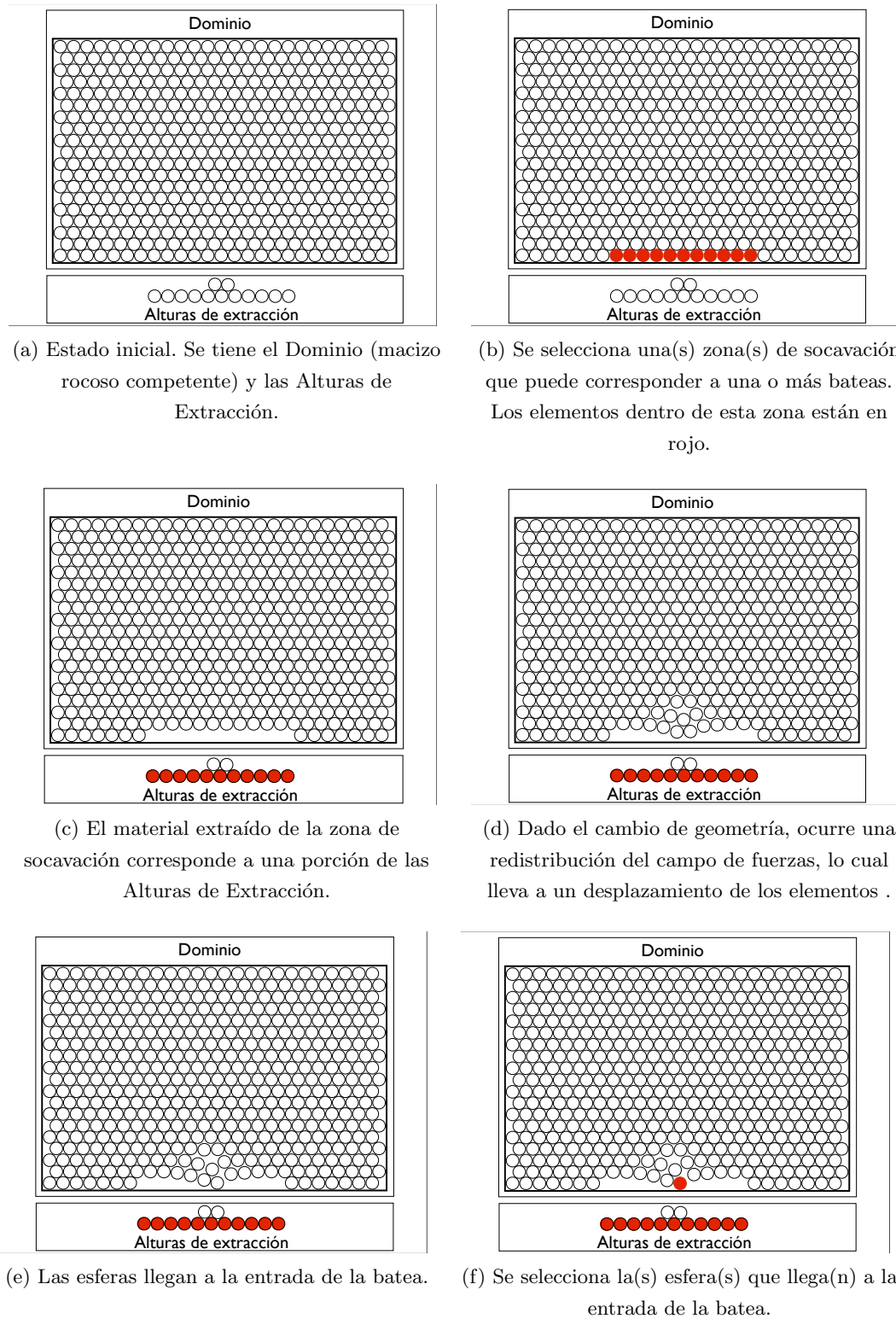
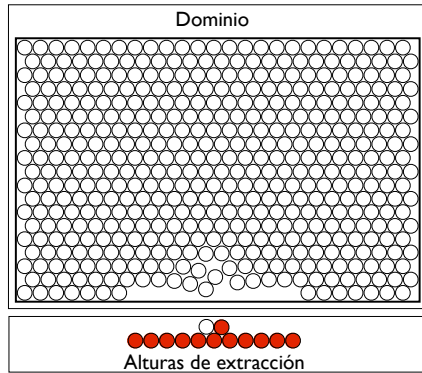
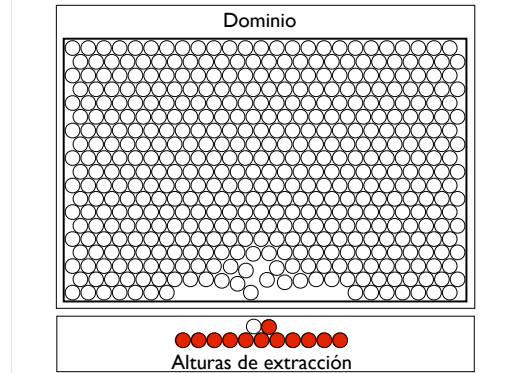


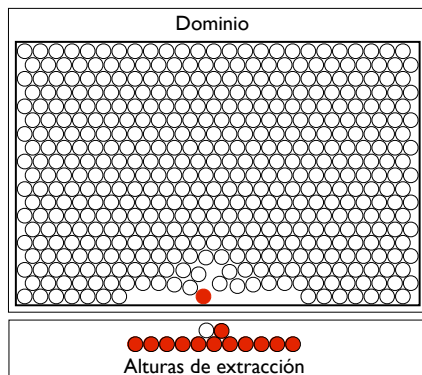
Figura 3.6: Esquema del proceso de caving modelado por DEM. Por simplicidad, los resortes no se dibujan. Fuente: Elaboración Propia.



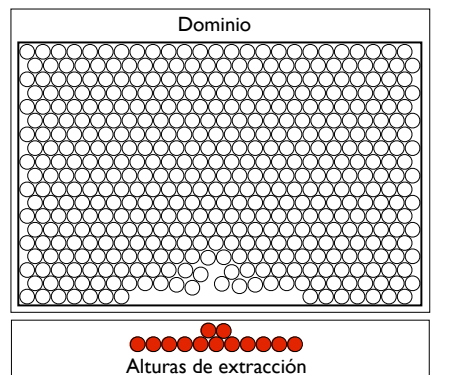
(a) Se retira la(s) esfera(s) que llego/llegaron a la entrada de la batea.



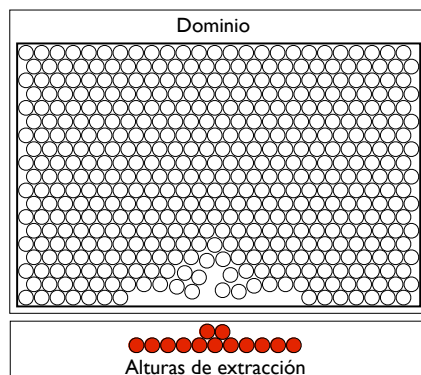
(b) Continúa la deformación.



(c) Otra esfera llega a la entrada de la batea y es seleccionada para su extracción.



(d) La extracción se detiene hasta que la cantidad de material extraído corresponda a la cantidad indicada por las Alturas de Extracción.



(e) El proceso finaliza cuando no se realiza más extracción. De esta forma, la geometría de la cavidad resultante se obtiene de manera explícita.

Figura 3.7: Continuación de Figura 3.6

Algunas consideraciones del método, son las siguientes:

1. La interacción de cada elemento es solamente con los que establece contacto.
2. Los cambios de forma de los elementos (esferas) son despreciables.
3. Se calculan las fuerzas en los contactos y el desplazamiento de los elementos.
4. La velocidad de propagación es una función de las propiedades físicas del medio discreto (E , ρ).
5. Los disturbios no se propagan de un elemento más allá que sus vecinos cercanos.
6. Los pasos de tiempo son tal que las aceleraciones se asumen constantes.
7. Todos los análisis son para ensamblajes secos.
8. El desplazamiento de los elementos que representan el macizo rocoso intacto, se considera despreciable.
9. Criterio de falla: Mohr-Coulomb.

3.3. Implementación de Modelo en Softwares Disponibles

Para la implementación computacional, se selecciono el software Yade⁵, el cual es un framework open source para la simulación de modelos de elementos discretos. Yade esta escrito en C++, y provee un API en el lenguaje Python con el fin de que el usuario combine y configure los diferentes componentes de Yade para ejecutar la simulación.

Una simulación en Yade se ejecuta como un ciclo de eventos, con un paso de tiempo predeterminado en cada iteración. El ciclo de eventos es:

- Inicializar.
- Ejecutar N veces.
 - Detectar colisión y generar contactos.
 - Calcular e integrar fuerzas.
 - Aplicar leyes físicas.
 - Ejecutar código específico del usuario.
- Finalizar.

Para inicializar una simulación, Yade requiere lo siguiente:

⁵<https://yade-dem.org/wiki/Yade>

1. Creación de la Geometría estática, y los paquetes de esferas.
2. Configuración de los motores de simulación y las leyes físicas.
3. Configuración del visualizador de la simulación.
4. Inicio de la simulación.

3.3.1. Modelo Computacional del proceso de Extracción

La extracción de mineral en la mina El Teniente se realiza con el método de Block y Panel Caving, en el cual el material cae por gravedad en unos sectores creados para este fin, llamados Bateas, donde son extraídos para su posterior procesamiento por maquinas excavadoras.

Con el fin de modelar la cavidad que se forma naturalmente por el proceso de extracción, se modela el macizo rocoso y el proceso de extracción, y luego se simula la caída de material. Cada batea posee una capacidad máxima, la cual corresponde al volumen de material extraído en cada batea durante una cierta cantidad de tiempo, dependiendo de la frecuencia de la simulación.

La idea central del modelamiento de la cavidad es que la cavidad tiene una relación con la cantidad de material extraído en las bateas, por lo cual simulando el comportamiento del material rocoso, es posible estimar la superficie de quiebre.

El modelo computacional simula el material rocoso primario de la mina usando esferas, las cuales poseen ciertas propiedades mecánicas, y están cohesionadas unas con otras. Yade simula la parte mecánica del modelo, aplicando un criterio de fractura a los resortes que representan la cohesión entre esferas, y cuando una esfera pierde sus resortes, esta cae por efecto de la gravedad.

El material rocoso esta delimitado por una cierta geometría estática, la cual es usada para evitar que las esferas se muevan, y para aplicar condiciones de frontera que simulen el peso del material hacia arriba, y el material que existe hacia los lados.

Las bateas se modelan como paralelepípedos rectángulos bajo la zona de caving, por las cuales caen las esferas y son removidas al alcanzar la zona inferior de cada batea. Una geometría de ejemplo se puede ver en la Figura 3.8.

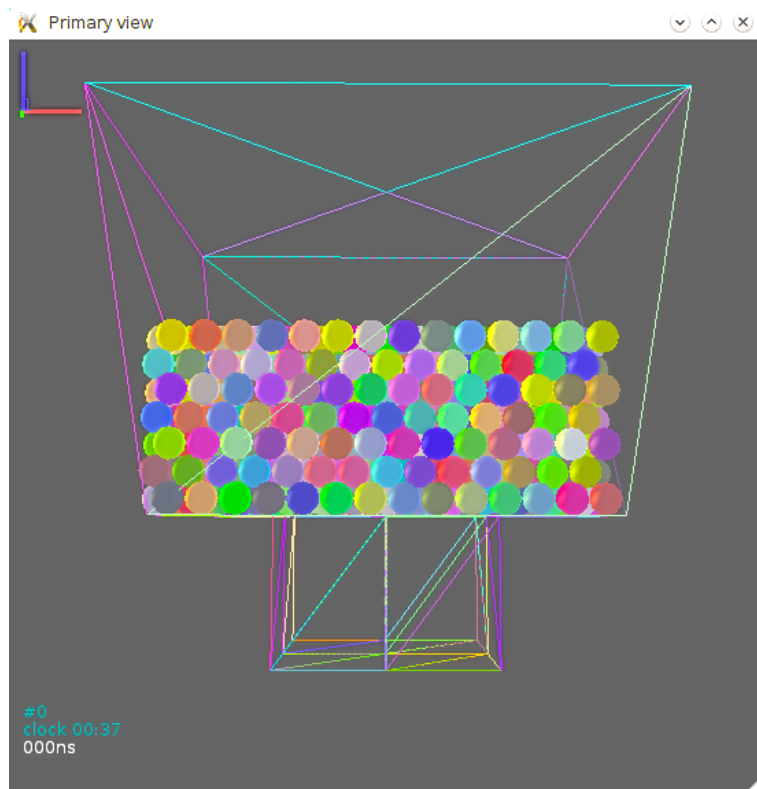


Figura 3.8: Geometría de una simulación . Fuente: Elaboración propia.

3.3.2. Creación de la Geometría

Yade permite importar geometría desde diferentes formatos, los cuales son representados como triángulos (Facets según terminología usada en Yade). Esta geometría no posee masa y solo puede moverse bajo la influencia del usuario, no por influencia de un *motor de física*⁶.

Las esferas representan la geometría dinámica, la cual puede ser influenciada por el motor de física de Yade. Es posible crear empaquetamientos de esferas que aproximen una cierta geometría, o con formas geométricas básicas (Cubos, Esferas, Cilindros, Conos, etc). Las esferas tienen masa, propiedades físicas y representan generalmente el material en estudio.

La geometría estática usada en la simulación corresponde a:

Murallas Corresponden a los límites de la zona de caving, las cuales están inclinadas ligeramente con respecto a la vertical, con el fin de aplicar condiciones de frontera. Las murallas se pueden ver en la Figura 3.9.

Techo Corresponde al techo límite de la zona de caving.

⁶Los Motores de Física, se refieren a las funciones iterantes que permiten el funcionamiento del software.

Piso Corresponde al piso de la zona de caving. El piso posee un agujero rectangular por el cual las esferas pueden pasar hacia las Bateas.

Bateas Corresponden a las zonas donde se extrae el material, y son paralelepípedos rectangulares por donde las esferas caen. No existen espacios entre cada Batea, solo se separan por una muralla. Las bateas se pueden ver en la Figura 3.10.

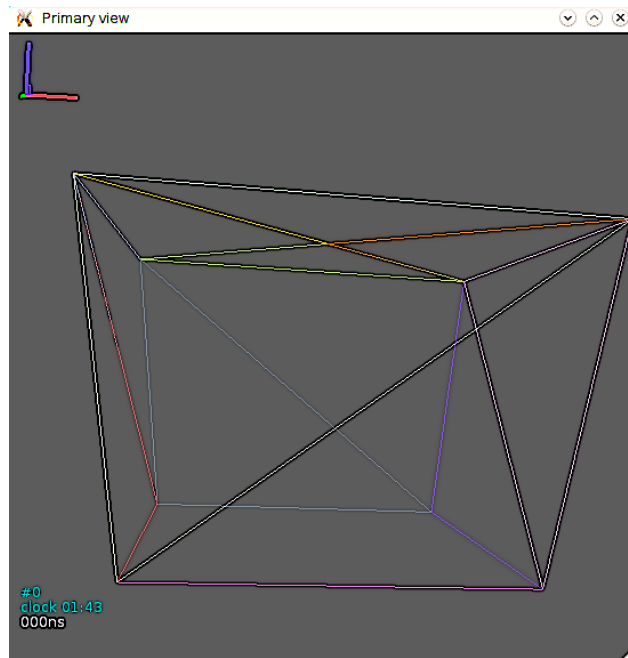


Figura 3.9: Geometría de las Murallas

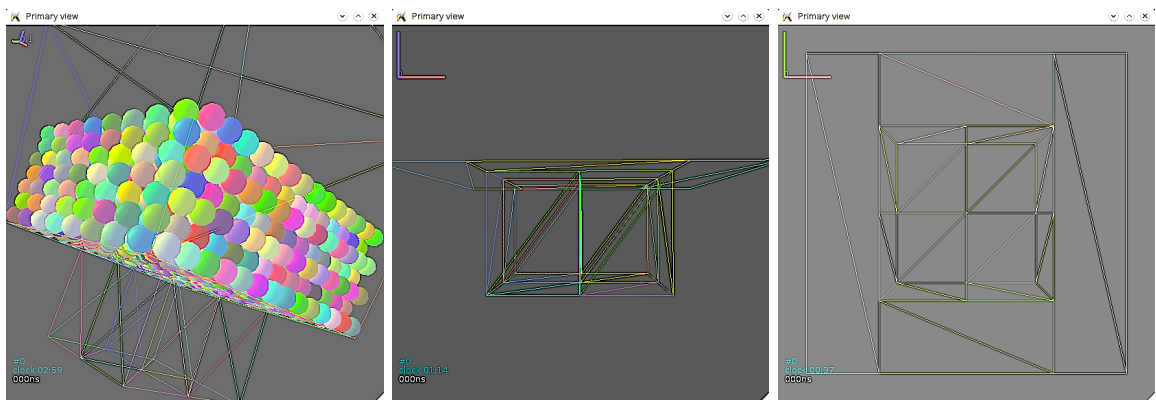


Figura 3.10: Geometría de las Bateas (Perspectiva, Lado y Planta)

3.3.3. Configuración de Motores

Los motores son el núcleo del comportamiento de la simulación, ejecutando una porción específica de la simulación en cada paso de tiempo de esta:

- Resetear los contadores de fuerzas.
- Detectar colisión entre objetos.
- Ciclo de interacción y aplicación de leyes físicas.
- Aplicación de fuerzas, entre ellas, la fuerza de gravedad.
- Calcular las nuevas posiciones de cada objeto dinámico, usando un integrador de Newton.
- Finalmente, ejecutar cualquier código que el usuario requiera, con fines que este estime conveniente.

3.3.4. Configuración Específica al Modelo de Extracción

Para implementar el Modelo de Extracción, se requiere cierta funcionalidad que no está implementada por defecto en Yade: El método de extracción de material, y las condiciones de frontera.

Extracción de Material

La simulación de extracción de material se efectúa con el algoritmo de extracción siguiente.

Para cada batea B

1. Almacenar en S las esferas que estén dentro de B.
2. Mientras la Batea B este abierta y $S \neq \emptyset$
 - Seleccionar la esfera E en S con posición y menor.
 - Remover E de S y de la simulación.
 - Incrementar el contador de volumen de material caído en B en $\frac{4}{3}\pi r^3$, donde r es el radio de la esfera.
 - Si el contador de material caído es mayor a la capacidad de la Batea B, cerrar la Batea B.

Este algoritmo considera:

- Para cada batea, existe un contador que almacena el volumen de material caído, así como una variable que contiene la capacidad de la batea (Volumen de material a extraer durante esta simulación).
- Cuando el volumen extraído de una batea alcanza o supera la capacidad de la batea, la batea se cierra.
- Las bateas cerradas no extraen material, y el material se acumula naturalmente en la batea (La cual físicamente esta cerrada).
- Inicialmente todas las bateas están abiertas, pero esto es configurable según los requisitos de la simulación.

En cada iteración de la simulación, se ejecuta el algoritmo de extracción. Una vez que todas las bateas se han cerrado, la simulación se detiene.

Registro de Resultados

Para estimar la superficie de quiebre, se requieren ciertos datos que son proveídos por la simulación usando Yade. Estos datos son almacenados en archivos CSV desde la simulación, y consideran:

Posición Se exporta la posición de cada esfera en la simulación, en cada iteración.

Extracción Se exporta una lista de esferas extraídas de la simulación, así como un ID que indica por que batea fueron extraídas. Esto se hace por cada iteración.

Condiciones de Frontera

Para obtener resultados representativos, es necesario agregarle al modelo la presión ejercida por el material que no esta representado en el, como el material rocoso hacia los lados de la zona de caving, y el material que esta arriba de la zona de caving.

Con este fin, se agregaron condiciones de frontera a los lados y arriba de la zona de caving. Dado que Yade no posee una implementación de condiciones de frontera, se simularon con murallas que ejercen una cierta fuerza a través de un desplazamiento dado a cada muralla. Las condiciones de frontera se pueden ver en la Figura 3.11, y una simulación con las murallas ya desplazadas, aplicando las condiciones de frontera deseadas se puede ver en la Figura 3.12.

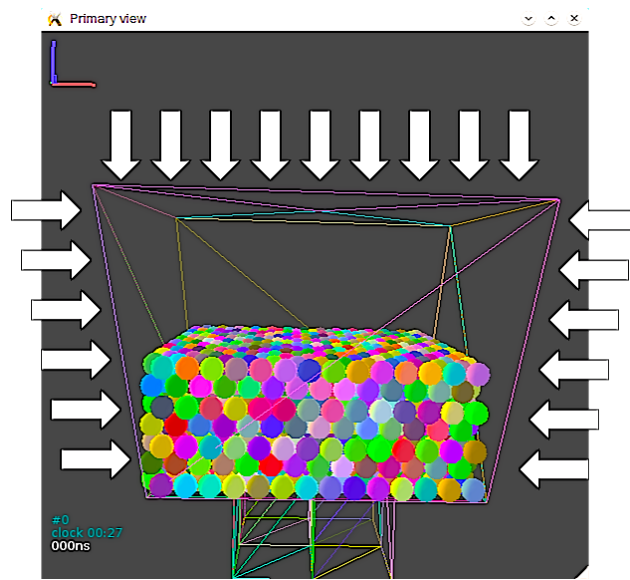


Figura 3.11: Condiciones de Frontera

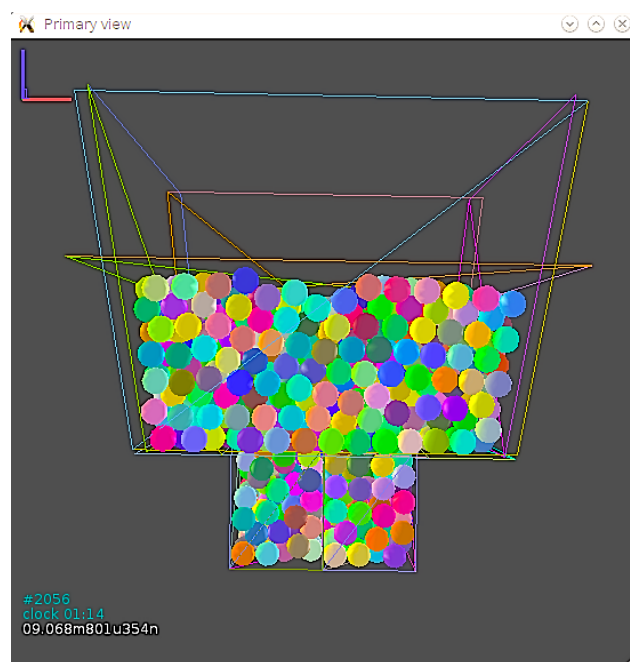


Figura 3.12: Aplicación de las condiciones de frontera. Las cargas se introducen al modelo a través del desplazamiento de las paredes.

3.4. Estimación de Superficie

3.4.1. Geometría

Se ha trabajado con 2 dimensiones de bloques: uno *pequeño*, para un rápido ajuste del modelo y uno *grande* para estudiar la aplicabilidad del software en casos más reales. La situación inicial de los 2 tipos de simulaciones ejecutadas se puede observar en la Figura A.1.

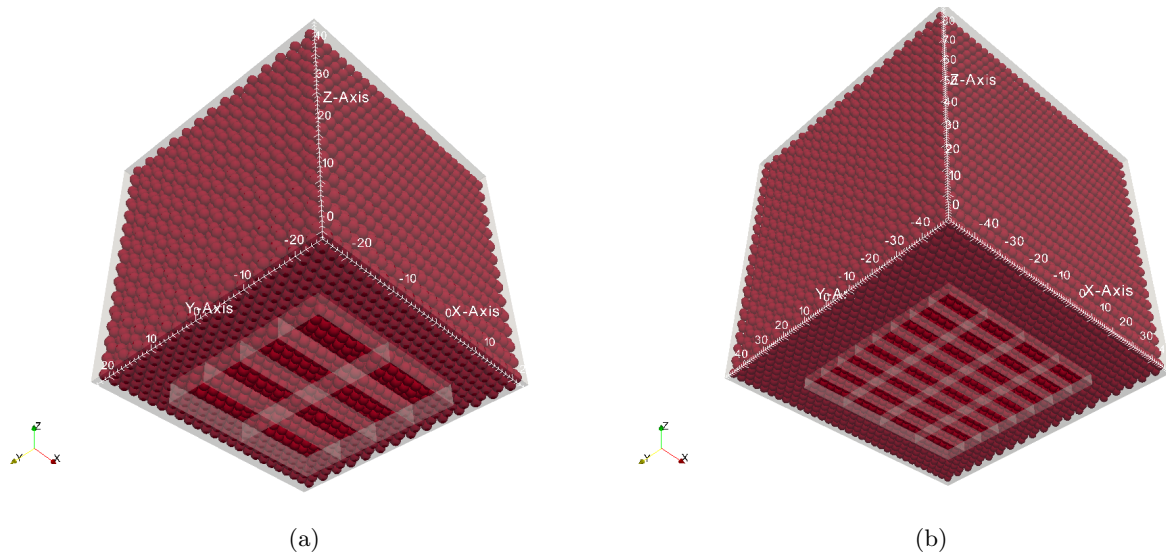


Figura 3.13: Tamaño de casos estudiados. 3.13a) caso *pequeño*: cubo de 50 m de lado, 8 bateas y 20.580 esferas. 3.13b) caso *grande*: cubo de 100 m de lado, 32 bateas y 48.760 esferas. El tiempo de cómputo corresponde a 1 día para el caso *pequeño* y 2,5 días para el caso *grande*

3.4.2. Valores Utilizados

Tabla 3.1: Valores utilizados

Parámetros de Roca	Caso Pequeño	Caso Grande
Modulo de Young, E	30e9 [Pa]	30e9 [Pa]
ν	0,2	0,2
ρ	2.700 $[\frac{kg}{m^3}]$	2.700 $[\frac{kg}{m^3}]$
ϕ	40	40
Máximo corte	5e5 [Pa]	5e5 [Pa]
Máxima tensión	5e2 [Pa]	5e2 [Pa]
Radio de Esferas, r	1 [m]	1,5 [m]

Las características principales del computador utilizado corresponden a un procesador Intel core i7 930, 2,8GHz, 4 núcleos con HT y 6 Gb de RAM.

3.4.3. Resultados

Los resultados otorgados por Yade son:

1. Posición de las esferas y de las paredes.
2. Velocidad lineal y angular de las esferas (como vectores y su magnitud).
3. Fuerzas normales y de corte de las esferas y de las paredes (como vectores y su magnitud).

Para el post-procesado de los datos se utiliza Paraview⁷, y Matlab⁸.

⁷www.paraview.org

⁸www.mathworks.com/products/matlab/

3.4.4. Criterio: Material Extraído

Un primer intento para determinar una cavidad, es mostrar la posición inicial del material extraído, junto con la identificación de su batea de extracción.

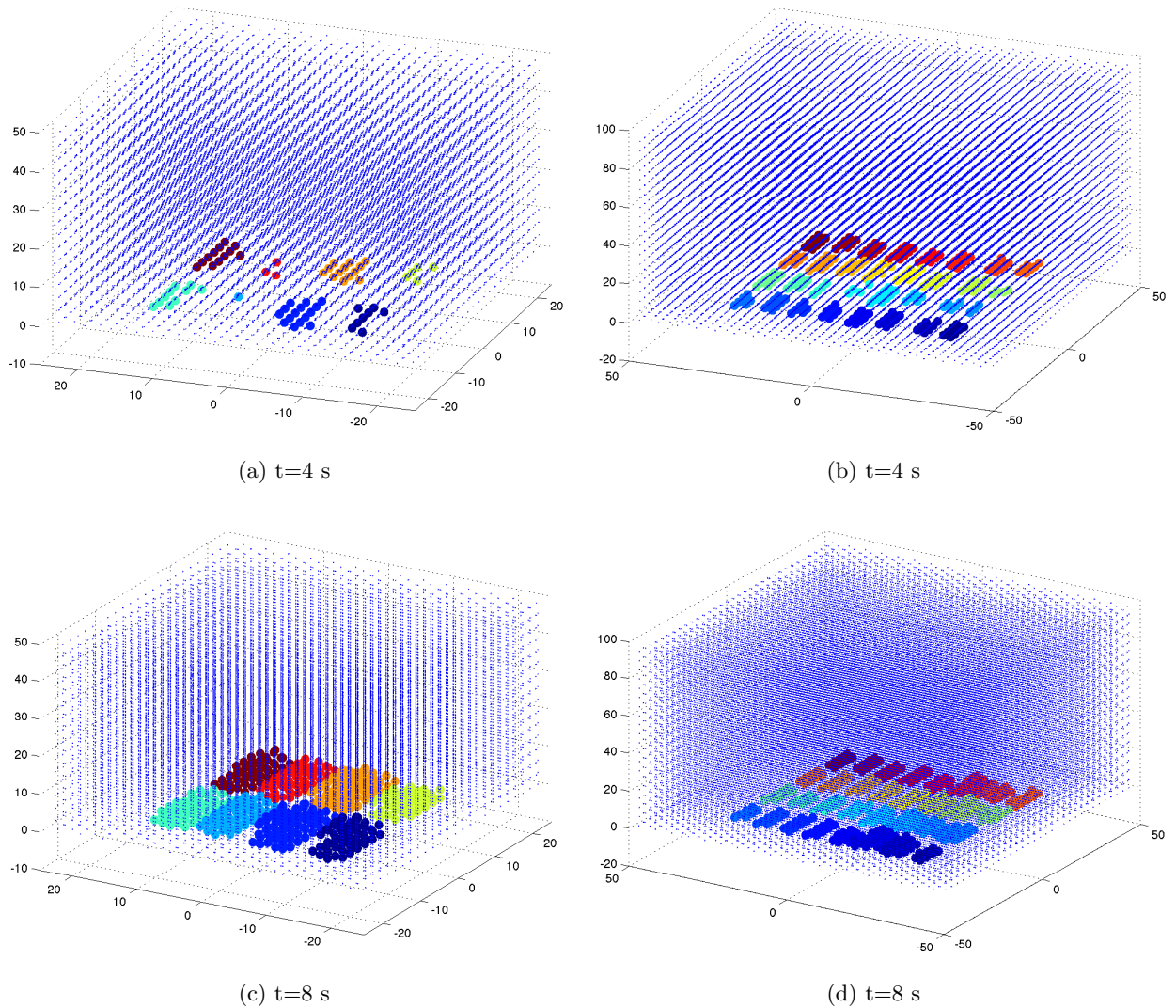
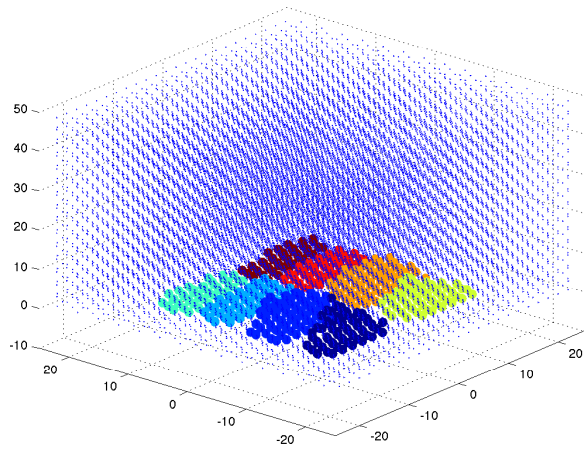
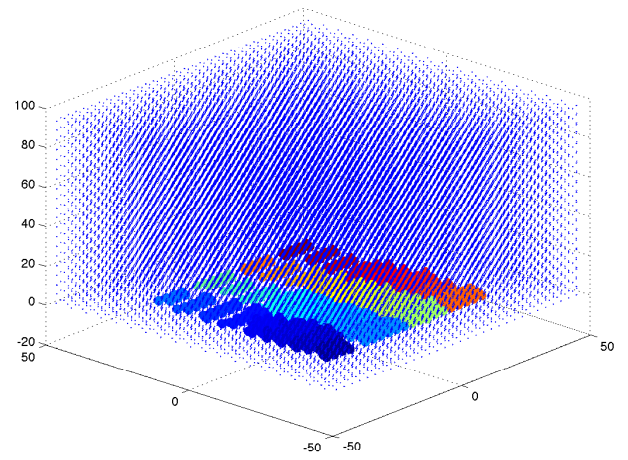


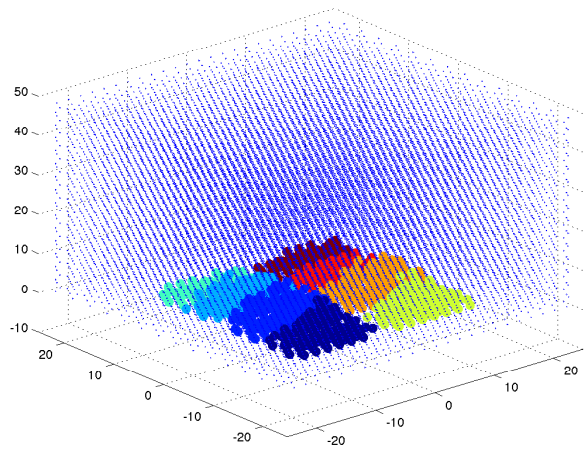
Figura 3.14: Evolución de los campos determinados por la posición inicial de las esferas retiradas, a distintos tiempos de simulación, para los 2 casos: a la izquierda el caso pequeño, a la derecha el caso grande. Los pequeños puntos azules representan la posición inicial de todas las esferas. Las esferas coloreadas representan la posición inicial de las esferas retiradas.



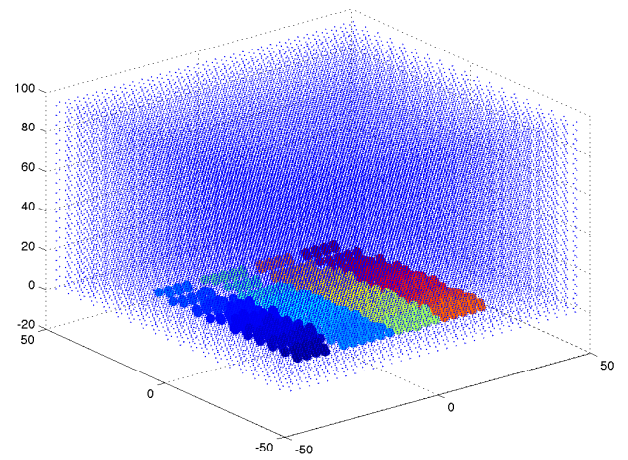
(a) $t=12$ s



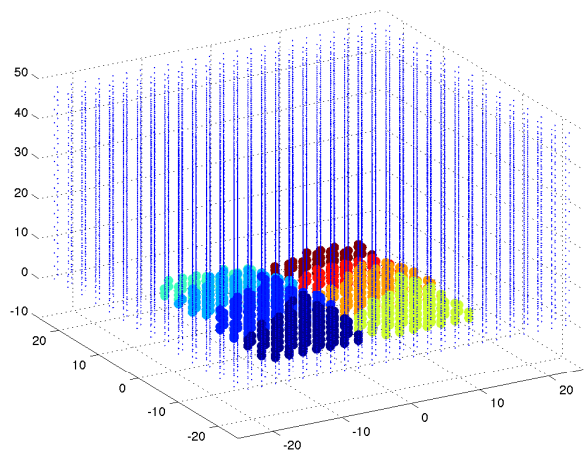
(b) $t=12$ s



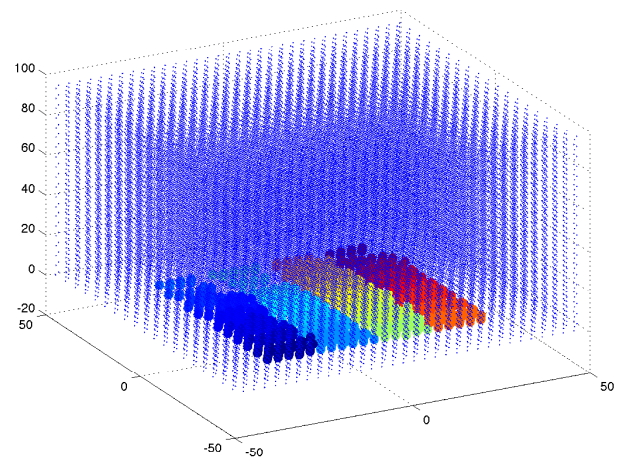
(c) $t=16$ s



(d) $t=16$ s

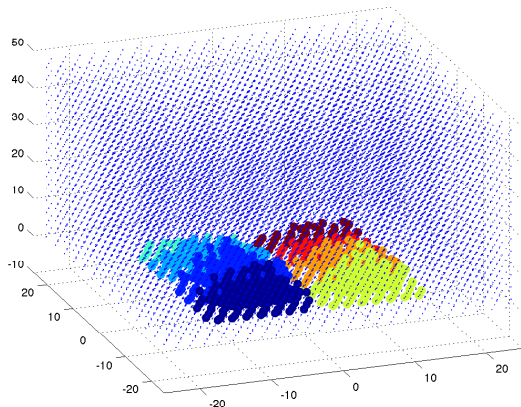


(e) $t=20$ s

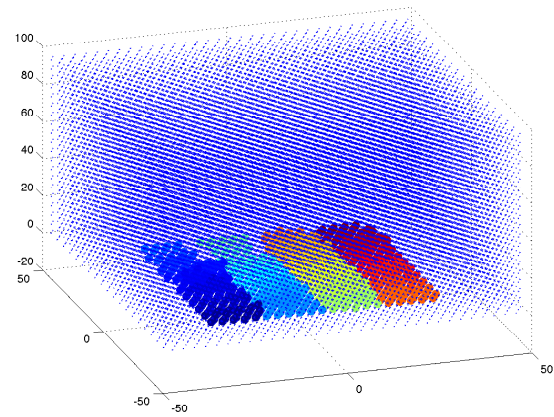


(f) $t=20$ s

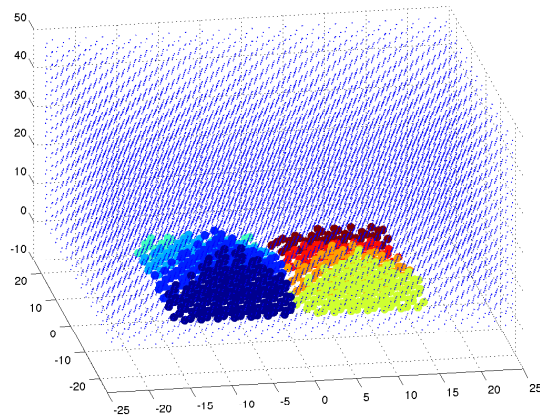
Figura 3.15: Continuación de 3.14



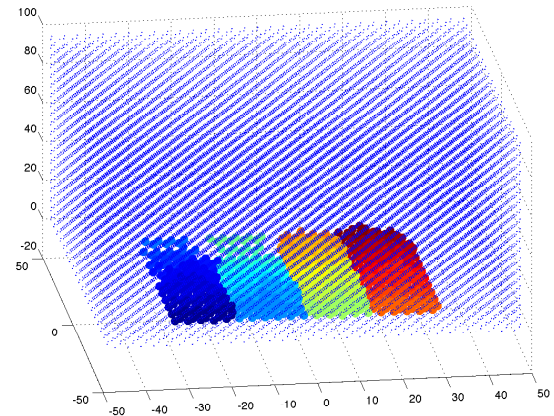
(a) $t=24$ s



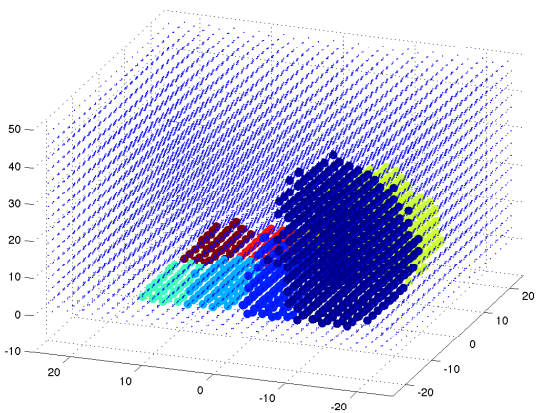
(b) $t=24$ s



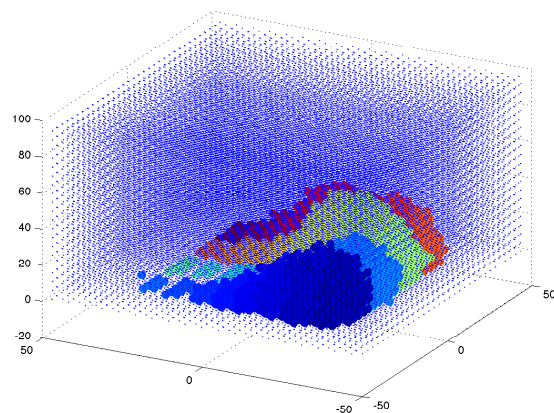
(c) $t=28$ s



(d) $t=28$ s



(e) $t=150$ s



(f) $t=150$ s

Figura 3.16: Continuación de 3.16. Las imágenes 3.16e y 3.16f corresponden a la situación en la que se han completado las capacidades de las bateas. Esta información de extracción es distinta entre los 2 casos.

Para cada *nube de puntos* se puede construir una superficie que las contenga. Tal como se muestra en la Figura 3.17 y 3.18. Esta superficie se contruyó con los comandos *DelaunayTri* y *tetramesh* de Matlab. *DelaunayTri* esta basado en la triangulación de Dalaunay (Apéndice A). La superficie construída es la envolvente convexa del conjunto de puntos.

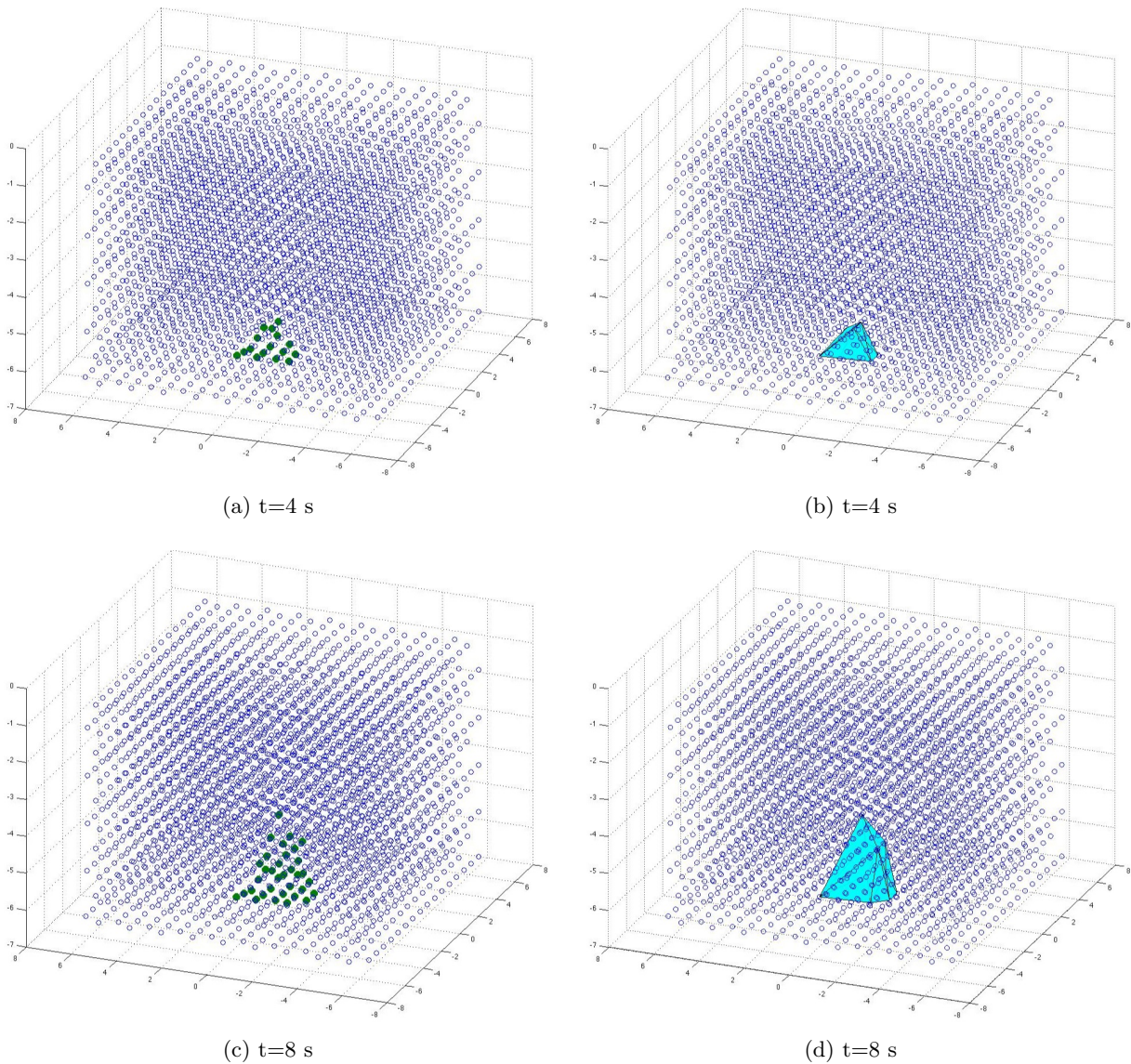
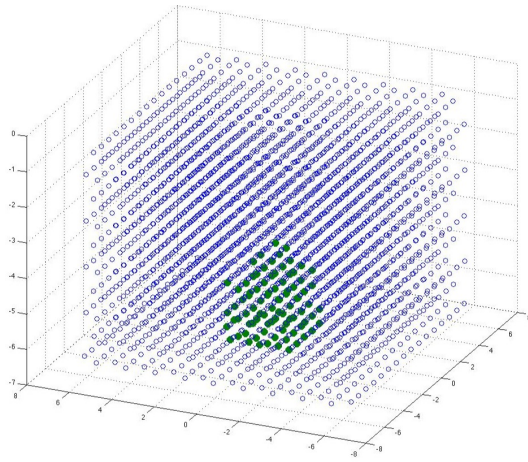
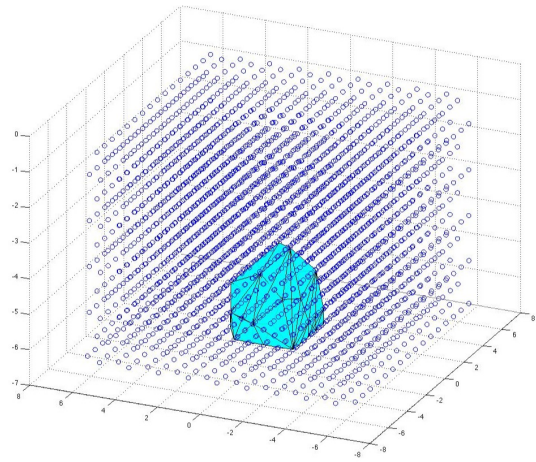


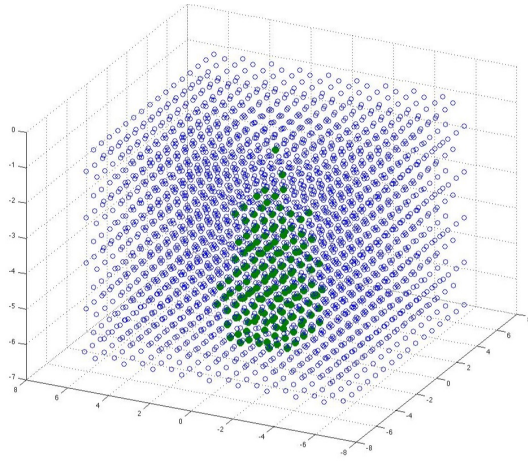
Figura 3.17: Construcción de una superficie contenedora de un campo de puntos. A la izquierda el campo de puntos. A la derecha la superficie construída a partir de este campo de puntos.



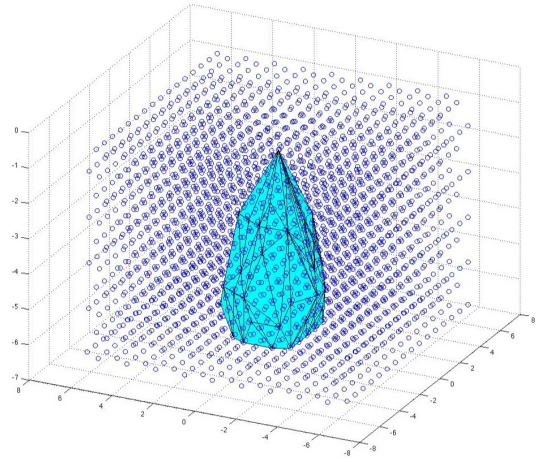
(a) $t=12$ s



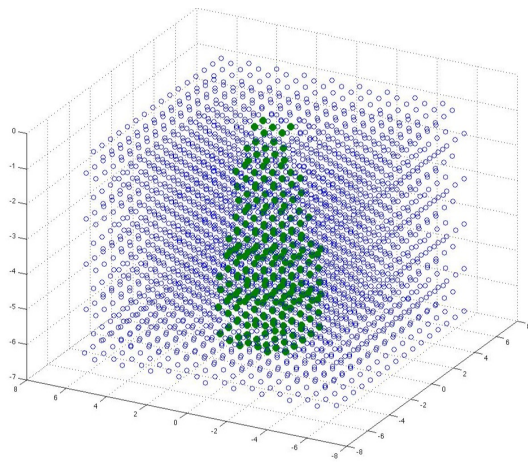
(b) $t=12$ s



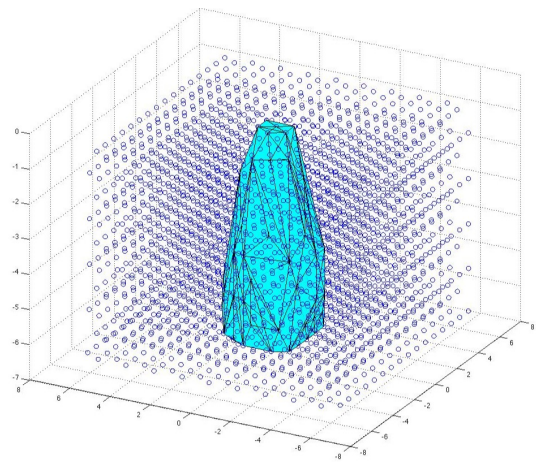
(c) $t=16$ s



(d) $t=16$ s

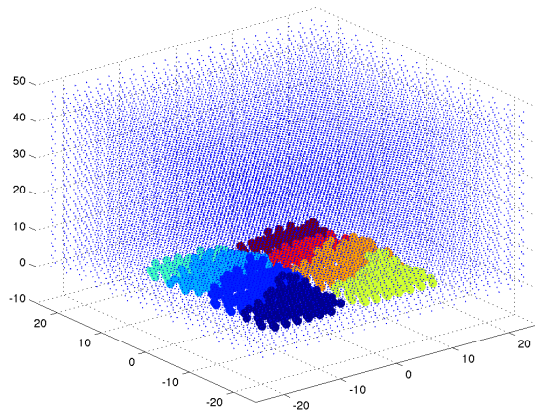


(e) $t=20$ s

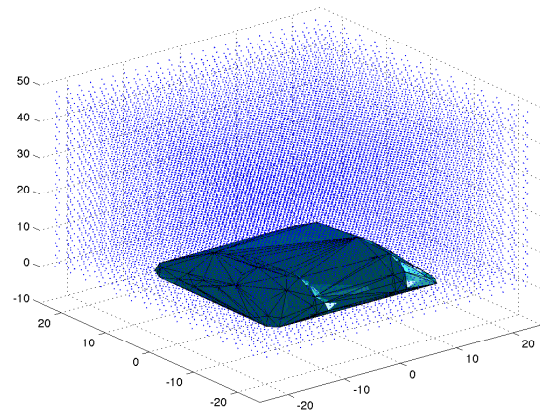


(f) $t=20$ s

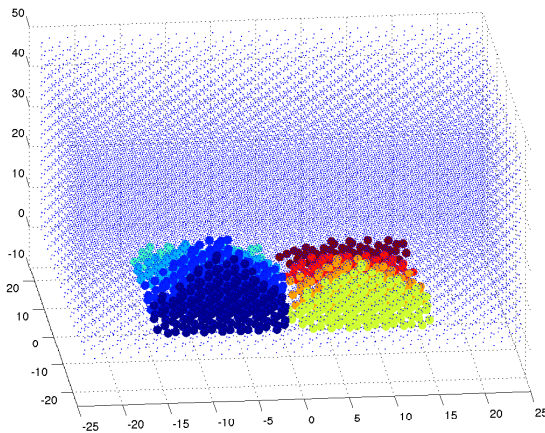
Figura 3.18: Continuación de Figura 3.17



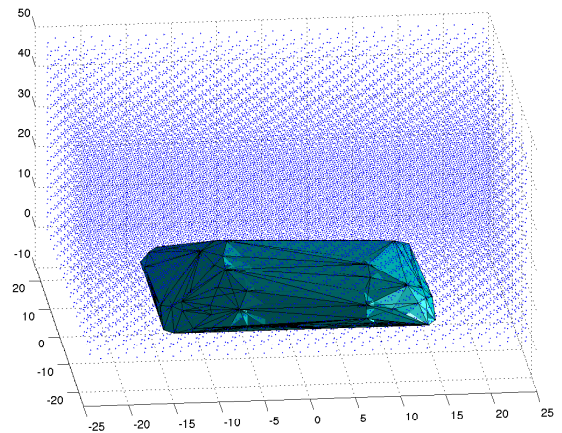
(a) $t=16$ s



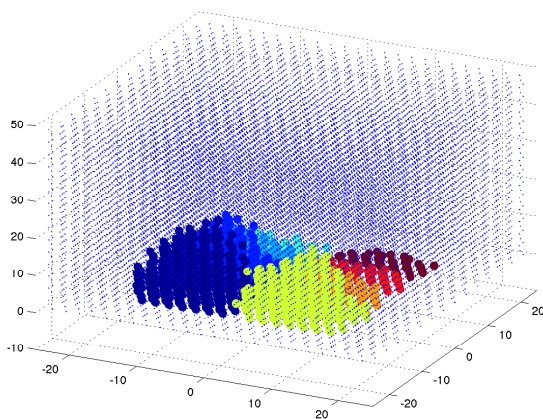
(b) $t=16$ s



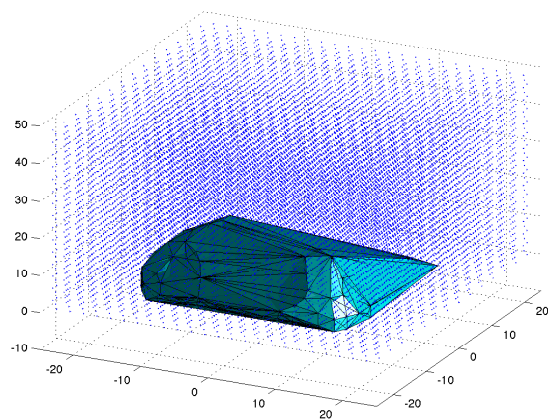
(c) $t=32$ s



(d) $t=32$ s



(e) $t=40$ s



(f) $t=40$ s

Figura 3.19: Construcción de una superficie contenedora de varios campos de puntos, implementada en el caso pequeño. A la izquierda el campo de puntos. A la derecha la superficie construida a partir de este campo de puntos.

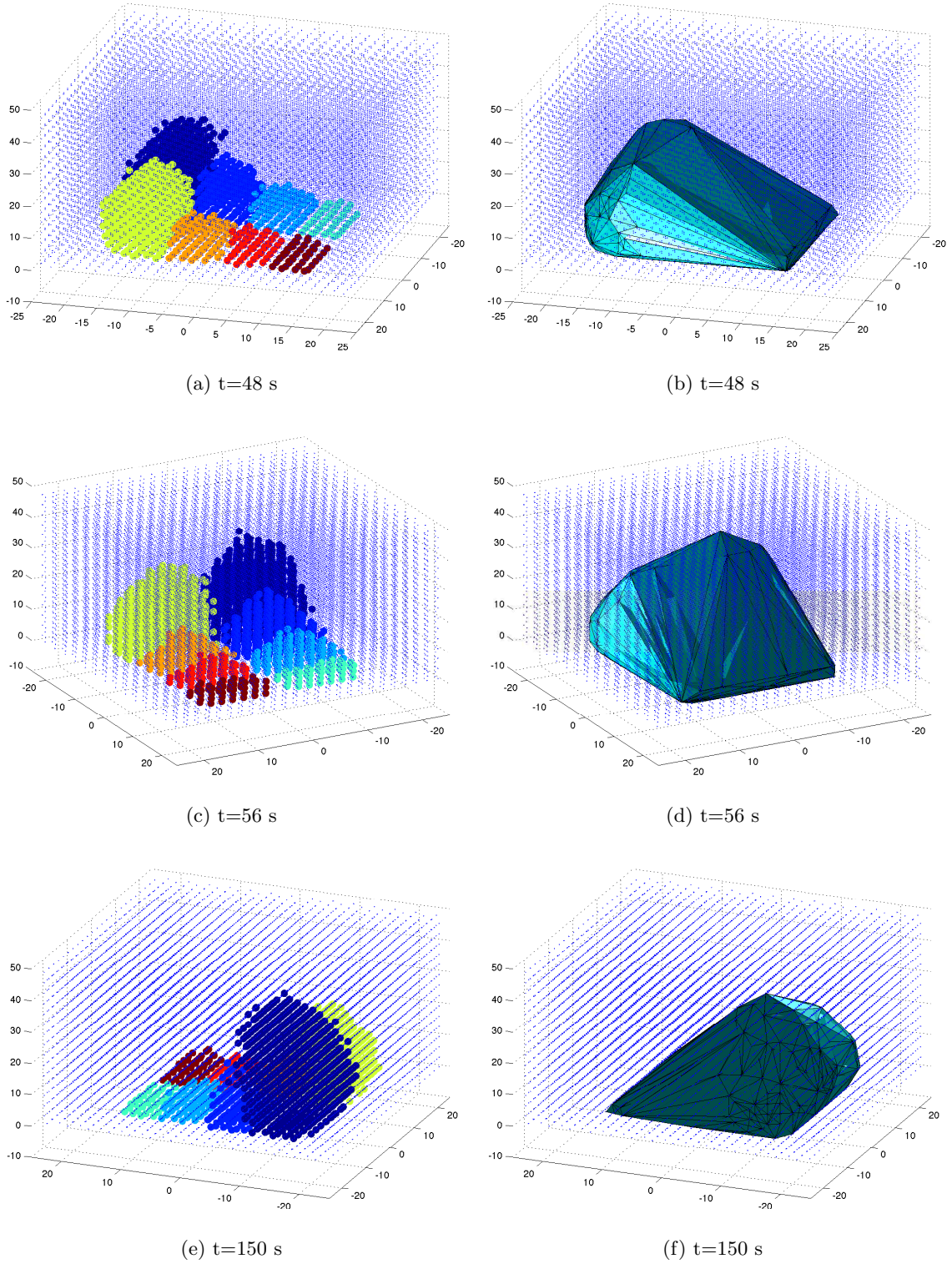


Figura 3.20: Continuación de Figura 3.17. En este caso, se observa que la superficie contiene zonas que no han sido consideradas en los campos de puntos; es decir, no es ajustada al campo de puntos. Esto es así debido a la triangulación (Apéndice A) seleccionada.

3.5. Optimización

Una de las principales debilidades del método DEM es el tiempo requerido en el cómputo para un sistema con gran cantidad de elementos⁹. Este tiempo es afectado por dos factores principales: El paso de tiempo y la cantidad de elementos.

Tal como se mostró en la relación 2.52, el paso de tiempo es proporcional a E , e inversamente proporcional a la densidad ρ del material elegido. De esta manera, reduciendo el valor de E y/o aumentando ρ se logra aumentar el paso de tiempo. Con el aumento del paso de tiempo, se requiere una menor cantidad de iteraciones para alcanzar un desplazamiento dado. Esta disminución de cantidad de iteraciones se relaciona directamente con la disminución del tiempo de cómputo total. Por otro lado, se debe estudiar el cambio de los resultados al cambiar estos parámetros con el objetivo de estudiar la sensibilidad del modelo respecto a los valores de E y ρ .

En lo siguiente se presentan el estudio de algunas medidas con el objetivo de reducir el tiempo de cómputo de los modelos.

3.5.1. Empaquetamiento

Las simulaciones DEM, requieren de una determinación inicial de los tamaños y las posiciones de las esferas.

La posición de las esferas se conoce como empaquetamiento. Por simplicidad, se consideran los tamaños de las esferas iguales, ya que *a priori* no se conoce el efecto de la distribución de tamaños en los resultados. Dada esta simplificación, solo queda determinar el empaquetamiento.

Una opción para no perder generalidad y considerar el macizo rocoso como un material isotrópico, sería un empaquetamiento con posiciones aleatorias. En la práctica Yade hace esto, seguido de una compactación triaxial; lo cual consume un tiempo considerable. Es por esto que en función de minimizar el tiempo de computación, se considera un empaquetamiento hexagonal compacto de las esferas (Figura 3.21). Dada esta simplificación, se puede esperar comportamiento no isotrópico del macizo rocoso en función de las fuerzas y/o desplazamientos. Esto es debido a la presencia de planos preferenciales de desplazamiento producto de este empaquetamiento.

⁹Los resultados obtenidos demoraron 1 día para el caso *pequeño*, 20.580 esferas, y 2,5 días para el caso *grande*, 48.760 esferas.

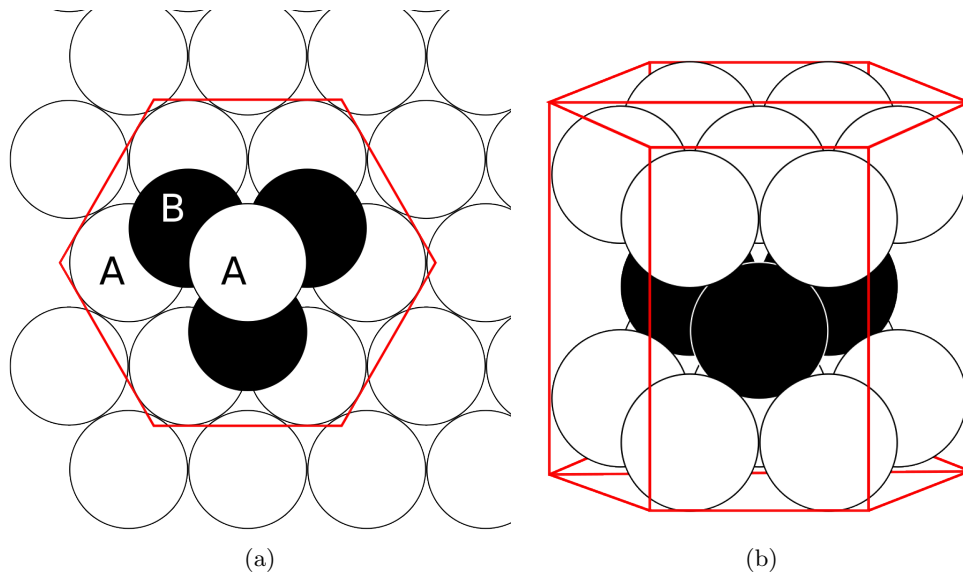


Figura 3.21: Empaquetamiento hexagonal compacto. 3.21a muestra una vista en planta junto con el respectivo orden de apilamiento. 3.21b muestra una vista de la celda hexagonal definida por el empaquetamiento. Fuente: Elaboración propia.

3.5.2. Desempeño Multi-núcleo

Yade puede ser corrido en máquinas con múltiples núcleos¹⁰. Esta característica permite realizar los cálculos en menor tiempo. Esto se debe a que Yade puede subdividir el dominio y asignar núcleos a estos subdominios. Los resultados de los cálculos para cada paso de tiempo se re-ensamblan al final de los pasos de tiempo para obtener una solución del dominio completo.

Para cuantificar el desempeño, se consideró la variable *speedup* (s.u. en la Figura 3.22). El speedup corresponde a la cantidad adimensional correspondiente a la relación:

$$speedup = \frac{t_s}{t_m} \quad (3.1)$$

Donde:

- t_s : tiempo que tarda la máquina en computar un caso en un núcleo.
- t_m : tiempo que tarda la máquina en computar un caso (el mismo caso que para un núcleo), en múltiples núcleos.

Teniendo lo anterior en consideración, se puede calcular el speedup para diferentes núcleos. Solo se considerarán cantidades de núcleos impares. Los resultados se muestran en la Figura 3.22

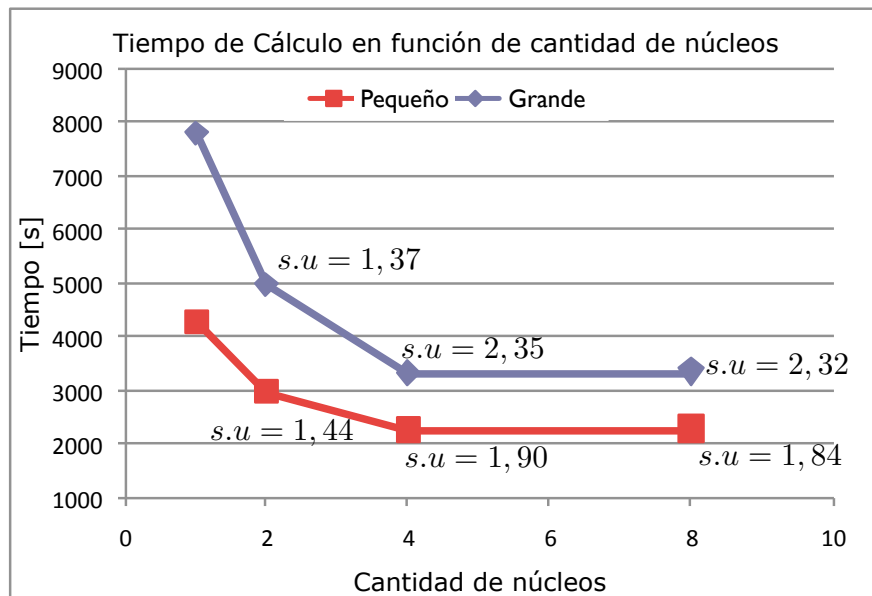


Figura 3.22: Desempeño en función de la cantidad de núcleos. Los casos *Pequeño* y *Grande* corresponden a los descritos en la Sección 3.4.4. La máquina utilizada cuenta con un procesador *Intel core i7 930*, 2,8GHz, 4 núcleos con HT.

¹⁰Estos núcleos se refieren a la cantidad de procesador físicos.

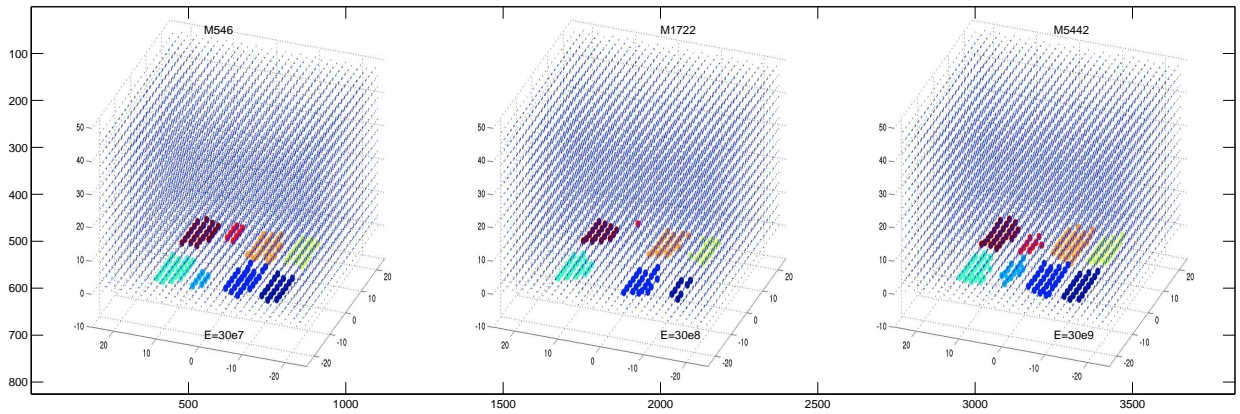
De la Figura 3.22, se obtiene que el mayor speedup obtenido para una máquina con 4 núcleos físicos es de 2,35. No se observan mejoras al ocupar la capacidad de núcleos virtuales, ofrecido por el procesador.

3.5.3. Sensibilidad de E

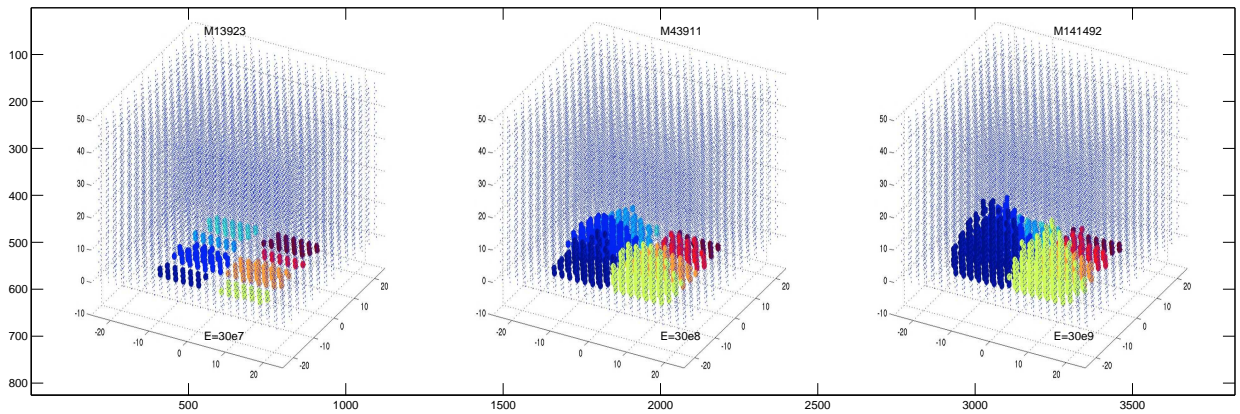
Al aumentar E , aumenta la velocidad del sonido en el material. Al aumentar la velocidad del sonido, el tiempo necesario para la propagación de una onda es menor. Dado que uno de los supuestos básicos del método DEM es que en un paso de tiempo, las perturbaciones de un elemento solo afecta a los elementos vecinos; se desprende que el paso de tiempo, al aumentar E , es menor. Con pasos de tiempo menores, aumenta la cantidad de iteraciones necesarias para calcular un mismo *tiempo virtual*¹¹.

En lo siguiente se muestran los resultados para tres magnitudes de E para el caso pequeño. En cada imagen se muestran, para el mismo *tiempo virtual*, el comportamiento para tres E de distinto ordenes de magnitud. La imagen de la izquierda corresponde a $E = 30e7 Pa$, la del centro corresponde a $E = 30e8 Pa$, la de la derecha a $E = 30e9 Pa$. Los tres casos cuentan con la misma información de extracción.

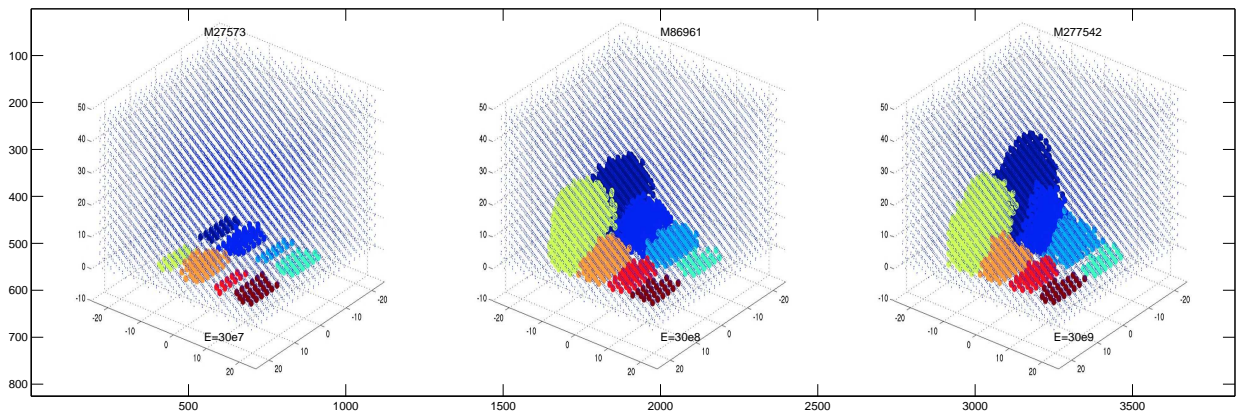
¹¹En Yade se distinguen dos tipos de tiempos. El *tiempo real* corresponde al tiempo que tarda el caso en correr. El *tiempo virtual* corresponde al tiempo calculado numéricamente para alcanzar un estado.



(a) $t=2$ s

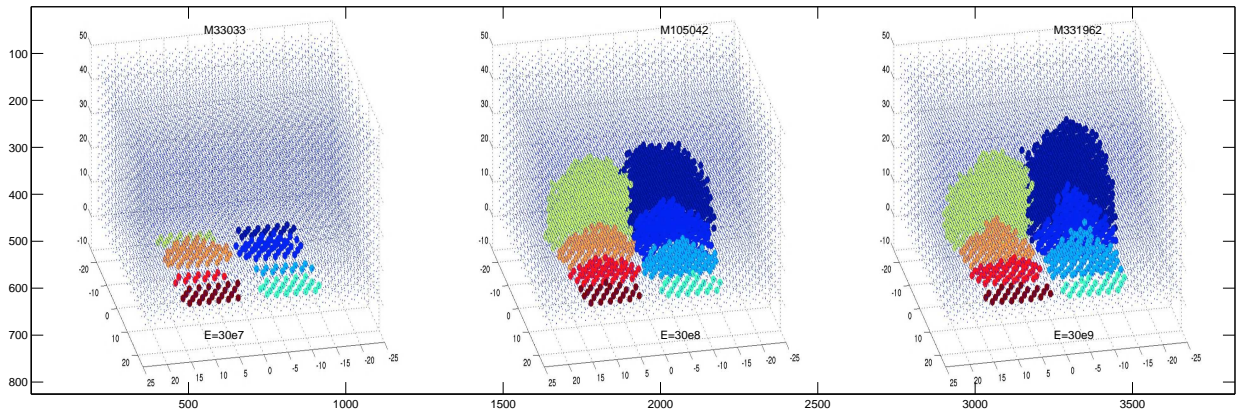


(b) $t=100$ s

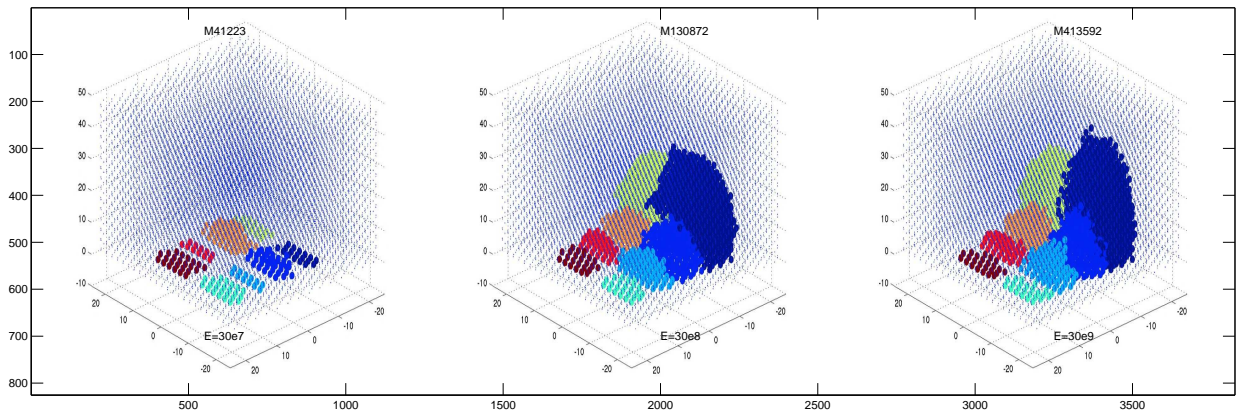


(c) $t=200$ s

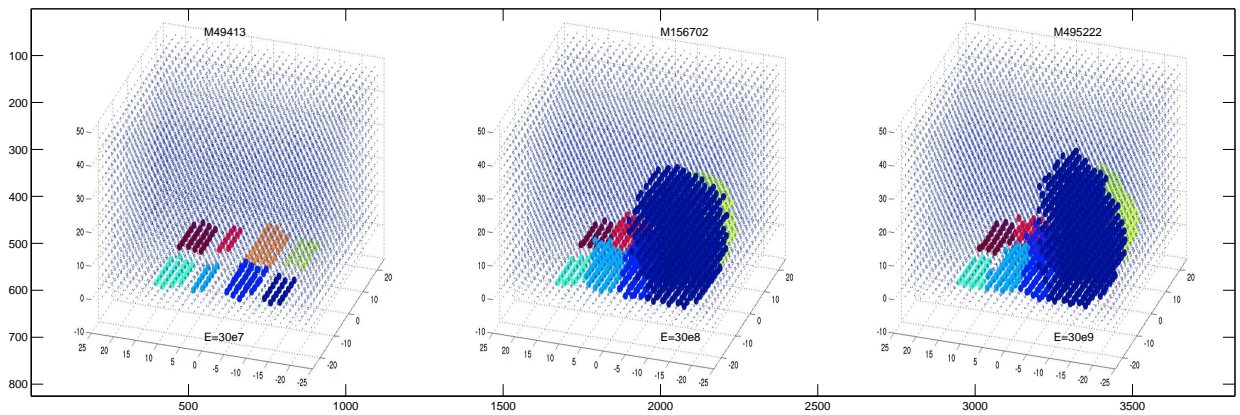
Figura 3.23: Sensibilidad de E .



(a) $t=240$ s



(b) $t=300$ s



(c) $t=360$ s

Figura 3.24: Continuación de Figura 3.23.

Capítulo 4

Observaciones y Discusiones.

4.1. Respecto al Dominio, Cantidad y Tamaño de Elementos.

- Si se considera que cada faena minera es distinta, se debe entender que el método de Block Caving es distinto para cada caso. En particular, el dominio de estudio debe cambiar de dimensiones para cada faena minera. En una primera instancia, se puede considerar que las dimensiones del dominio deben ser *al menos*, del tamaño del bloque considerado por el método de extracción Block Caving. Por otro lado, existen restricciones prácticas respecto a la cantidad y tamaño de elementos considerados. Si considerando estas restricciones no se puede implementar el tamaño de dominio deseado, se debe considerar escalar el tamaño, junto con escalar las propiedades geomecánicas.
- Para un dominio de un tamaño constante dado, la calidad de los resultados mejorarán su modelación con la disminución del tamaño de los elementos. Con la disminución del tamaño de los elementos, aumenta la cantidad éstos. Con el aumento de la cantidad de elementos, aumente el tiempo de cómputo. Es por esto que se debe considerar un tamaño de dominio, modelado con elementos de cierto tamaño que permitan obtener resultados factibles de analizar.
- Para el tamaño de elementos se debe considerar la precisión de los fenómenos geomecánicos y actividades operacionales que se quiere representar.

Los fenómenos geomecánicos son fuertemente afectados por las discontinuidades. Las discontinuidades en el macizo rocoso determinan bloques. Si se quiere representar un cierto tipo de discontinuidades presentes en el macizo rocoso de manera explícita, los elementos deben ser de un tamaño menor a los bloques definidos por las discontinuidades.

La actividad operacional relevante en el modelo es la información de producción. La información de producción se puede considerar en varios niveles temporales: anual, mensual, semanal, diario o por turnos. Estos niveles determinan la cantidad a extraer por cada batea. A mayor nivel temporal, mayor será la extracción realizada por cada batea. El tamaño de los elementos debe disminuir con la disminución de la cantidad a extraer por cada batea, con el fin de tener una diferencia menor entre la cantidad de material exigido por la información de extracción y la efectivamente extraída por esa batea. De esta manera el tamaño de los elementos debe ser directamente proporcional con el nivel temporal elegido.

4.2. Respecto a la Sensibilidad de E .

- Para el caso con $E = 30e7$ Pa, los elementos caen hasta que se forma una situación estable, y no siguen cayendo.
- No existe gran diferencia en la cantidad extraída entre el caso de $E = 30e8$ y $E = 30e9$. Existe una diferencia notable en la forma del material extraído. En el caso de mayor E , el material extraído tiene una forma puntiaguda en su parte superior. Esta forma esta dada por el empaquetamiento hexagonal compacto.
- Al aumentar E en un orden de magnitud, la cantidad de iteraciones aumenta tres veces. Al aumentar E en dos ordenes de magnitud, la cantidad de iteraciones aumenta diez veces.

Capítulo 5

Conclusiones

1. Se ha presentado un modelo completamente nuevo para estimar el Cave Back en minas subterráneas basadas en el Caving. Este considera la información de producción como dato de entrada principal. De esta manera se puede establecer distintas estrategias de extracción de material, y estudiar los efectos de estas estrategias en el Cave Back. Así se obtiene mayor control sobre este fenómeno, y se minimiza el riesgo de desastres tales como el Air Blast y el Rock Burst.
2. El modelo propuesto presenta ventajas a los métodos actuales de estimación del Cave Back. No está restringido por la simplificación que el material extraído por cada batea proviene de la zona superior a esta (3.1.2 y 2.3.1). También descarta el error en la estimación de los perfiles de Cave Back realizados a mano alzada (3.1.2).
3. Este modelo propuesto e implementado es altamente versátil, y permite la estimación de campos esfuerzos, desplazamiento, velocidad. De esta manera se puede realizar mayores estudios para la comprensión del fenómeno de Cave Back.
4. El modelo implementado en los softwares Yade y Matlab a sido capaz de reproducir el esquema propuesto en las figuras 3.6 y 3.7.
5. Los factores determinantes en el tiempo de computación son: la capacidad de máquina, el tamaño del modelo (cantidad de elementos), y el módulo de Young E . Los resultados obtenidos demoraron aproximadamente 1 día para el caso *pequeño*, y 2,5 días para el caso *grande*.
6. Yade no ha presentado algún impedimento mayor en el trabajo realizado. Además presenta la ventaja de ser compilado a través de su código fuente, el cual es libre y gratis.

Capítulo 6

Avances Futuros Propuestos

Los siguientes aspectos, corresponden a los avances necesarios para un modelamiento más completo del macizo rocoso, del *Cave Back* y su comportamiento a través de DEM.

- Se debe estudiar la relación entre el material retirado y el efecto (fuerzas y/o desplazamiento) de este en el resto del dominio, tal como se muestra en la figuras 6.1 y 6.2.

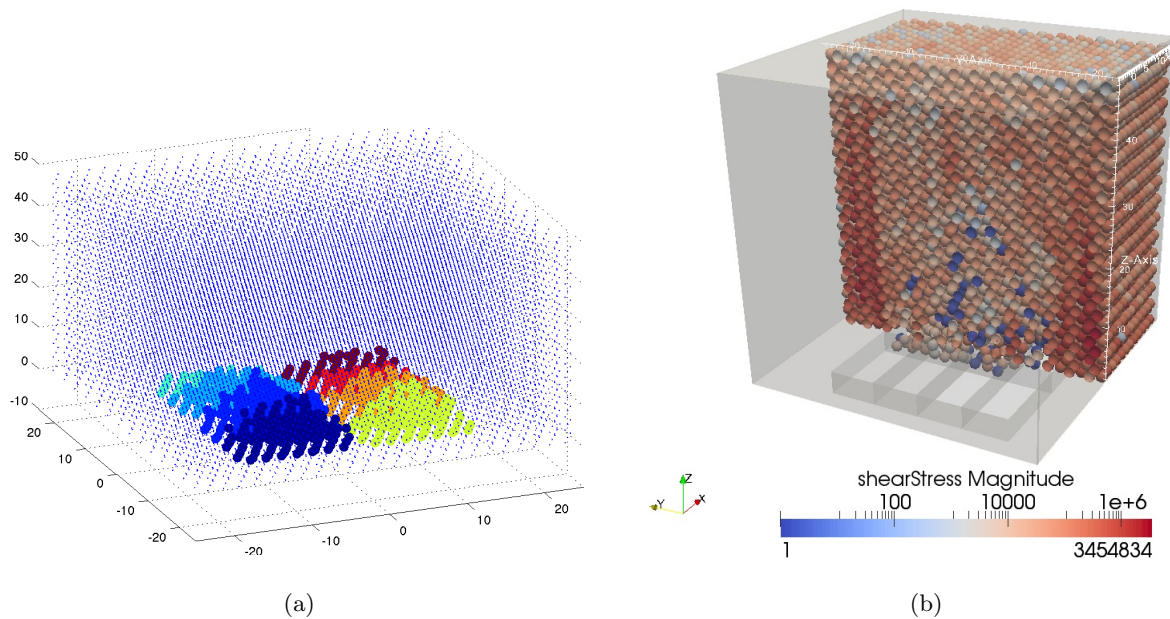


Figura 6.1: Material extraído y fuerzas de corte para el caso pequeño, para un mismo instante. 6.1a muestra los campos determinados por la extracción de cada batea. 6.1b es un corte del dominio. Los colores representan muestra la magnitud de la suma de fuerzas de corte para cada esfera. La escala es logarítmica y las unidades en [N]. Se observa una concentración de esfuerzos de corte en las alrededor de la zona de extracción. La direccionalidad de la distribución de fuerzas se atribuye a lo discutido en 3.5. Fuente: Elaboración propia.

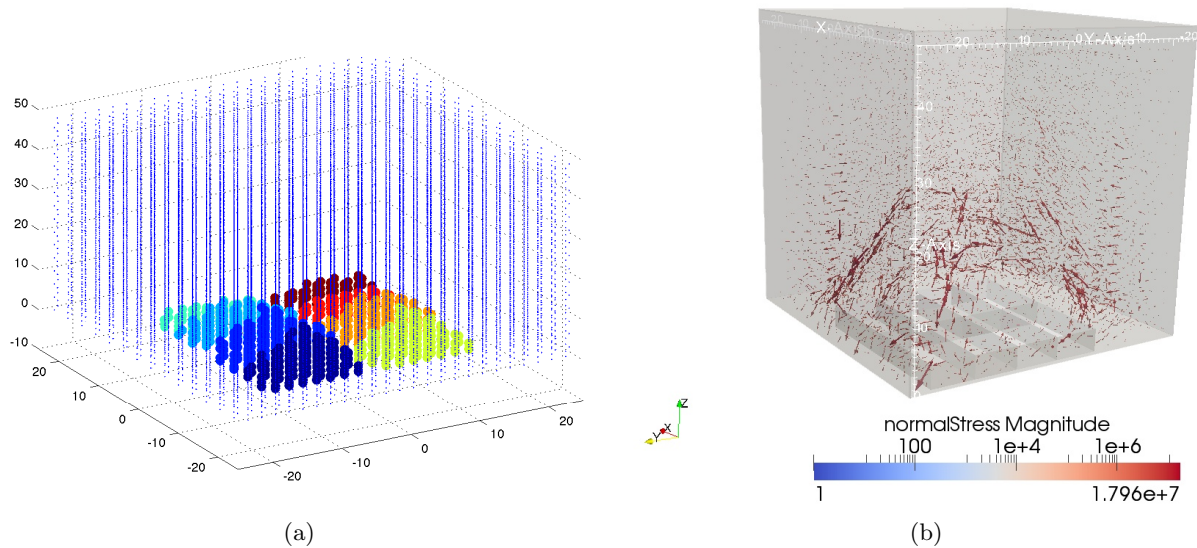


Figura 6.2: Material extraído y fuerzas normales para el caso pequeño, para un mismo instante. 6.2a muestra los campos determinados por la extracción de cada batea. 6.2b muestra el vector que es suma de fuerzas normales para cada esfera. La escala es logarítmica y las unidades están en [N]. Se observa un arqueamiento de las fuerzas normales alrededor de la zona de extracción. Fuente: Elaboración propia.

- Cuantificación de las condiciones de borde en fuerza, dado un desplazamiento de las caras .
- Introducción de geometría y de información de extracción real. Esto requiere de un escalamiento del tiempo de la extracción a la simulación.
- Determinación de una superficie *ajustada* a las esferas seleccionadas.
- Implementación de red de fracturas discretas (Discrete Fracture Network, DFN), que permita la introducción de discontinuidades dentro del macizo rocoso seleccionado.

Bibliografía

- [1] E.T. Brown. *Block Caving Geomechanics*. 2003.
- [2] L. Jing, O. Stephansson. *Fundamentals of Discrete Element Methods for Rock Engineering, Theory and Applications*. Developments in Geotechnical Engineering, 85. 2007.
- [3] L. Jing, J. A. Hudson. *Numerical methods in rocks mechanics* . International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, p. 409-427, Jul. 2002.
- [4] L. Jing. *A review of techniques, advances and outstanding issues in numerical modeling for rock mechanics and rock engineering*, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences 40 (2003) 283-353.
- [5] Superintendencia de Geomecánica TTE-GRMD. Modelo para monitoreo de Caving. Noviembre 2010.
- [6] D.O Potyondy, P.A Cundall, *A bonded-particle model for rock*, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences 41 (2004) 1329-1364.
- [7] Cai, M., Kaiser, P., Morioka, H., Minami, M., Maejima, T., Tasaka, Y., Kurose, H. (2007). FLAC/PFC coupled numerical simulation of AE in large-scale underground excavations. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 44(4), 550-564.
- [8] Cundall, P.A. *Formulation of a Three-dimensional Distinct Element Model- Part II. Mechanical Calculations for Motion and Interaction of a System Composed of Many Polyhedral Blocks*.
- [9] Chareyre, B. and Villard, P. *Dynamic Spar Elements and Discrete Element Methods in Two Dimensions for the Modeling of Soil-Inclusion Problems*. Journal Of Engineering Mechanics.p 689-697, Jul. 2005.
- [10] P.A. Cundall, O.D. Strack, A discrete numerical model for granular assemblies, Geotechnique 29 (1979) 47-65.
- [11] F. Donzé, L. Scholtes, J. Read. *Large open Pit Project*. CSIRO. 2011.
- [12] D.M. Ivars, M. E. Pierce, C. Darcel, J. Reyes-Montes, D. O Potyondy, R. P. Young, & P. A Cundall. *The synthetic rock mass approach for jointed rock mass modelling*. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 48(2), (2011), 219-244.

- [13] A. Vyazmensky. *Numerical Modelling Of Surface Subsidence Associated With Block Cave Mining Using A Finite Element / Discrete Element Approach*. Thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of doctor of philosophy, Simon Fraser University, 2008.
- [14] L. Saavedra. *Diseño Óptimo de Experimentos para Estimar el Campo de Esfuerzos en el Macizo Rocoso en Torno al Frente de Avance de una Cavidad Minera*. Memoria para optar al título de Ingeniero Civil Matemático, Universidad de Chile, 2007.
- [15] R. Bustamante. *Mecánica de Medios Continuos*. Apunte del curso del mismo nombre, Universidad de Chile, 2011.
- [16] C. Mawdesley. *Predicting Rock Mass Cavability in Block Caving Mines*. Thesis submitted in fulfillment of the requirements for the Degree of Doctor of Philosophy, University of Queensland, 2002.
- [17] V. Šmilauer and E. Catalano and B. Chareyre and S. Dorofenko and J. Duriez and A. Gladky and J. Kozicki and C. Modenese and L. Scholtès and L. Sibille and J. Stránský and K. Thoeni. *Yade Documentation b3r2866*. The Yade Project, 2010.

Parte II

Apéndices

Anexo A

Triangulación de Delaunay

La triangulación Delaunay de un conjunto de puntos P en el plano, es una triangulación $DT(P)$ en el cual ningún punto de P está dentro de la circunferencia circunscrita de cualquier triángulo en $DT(P)$. La triangulación Delaunay maximiza el mínimo ángulo de todos los ángulos de los triángulos, intentando evitar triángulos delgados.

Para un conjunto de puntos en una misma línea, no hay triangulación de Delaunay. Para cuatro o mas puntos en el mismo círculo (por ejemplo, los vértices de un rectángulo) , la triangulación de Delaunay no es única : cada una de las 2 posibles triangulaciones que divide el cuadrilátero en dos triángulos satisface la condición de Delaunay, i.e, el requisito de que el circunferencias circunscritas de todos los triángulos tienen interiores vacíos.

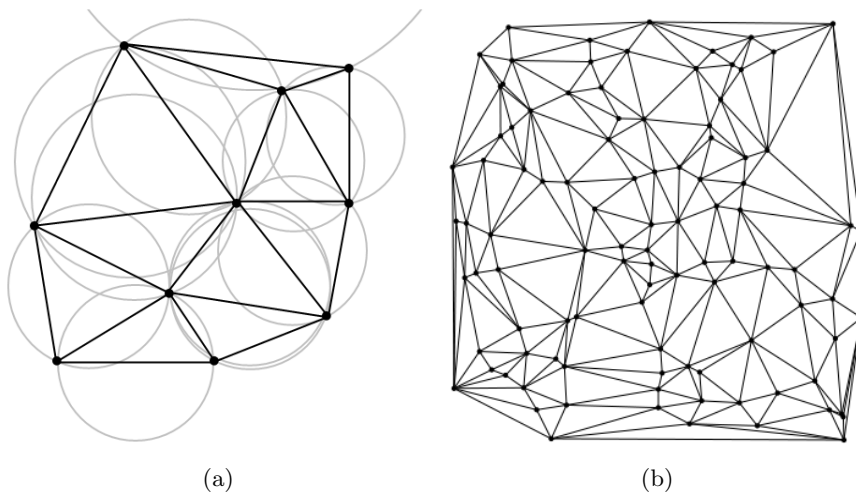


Figura A.1: Triangulación de Delaunay. A.1a se muestran las circunferencias utilizadas en el método. A.1b muestra una triangularización de 100 puntos en un plano.

Sea n el número de puntos y d el número de dimensiones.

- La unión de todos símlices ¹ en la triangulación es la envolvente convexa de los puntos.
- La triangulación de Delaunay contiene $O(n^{\frac{d}{2}})$ símlices.
- En el plano ($d = 2$), si hay b vértices en la envolvente convexa, entonces, cualquier triangulación de los puntos tiene a lo más $2n - 2 - b$ triángulos, más una cara exterior.
- En el plano, cada vértice tiene un promedio de seis triángulos que lo rodean.
- En el plano, la triangulación de Delaunay maximiza el ángulo mínimo. En comparación con cualquier otra triangulación de los puntos, el ángulo más pequeño en la triangulación de Delaunay es al menos tan grande como el ángulo más pequeño en cualquier otra. Sin embargo, la triangulación de Delaunay no necesariamente minimiza el ángulo máximo.
- Un círculo que circunscribe un triángulo de Delaunay no contiene puntos de entrada de otros en su interior.
- Si un círculo que pasa a través de dos de los puntos de entrada no contiene ningún otro de ellos en su interior, el segmento que conecta los dos puntos es una arista de una triangulación de Delaunay de los puntos dados.
- La triangulación de Delaunay de un conjunto de puntos en espacios de dimensión d es la proyección de los puntos de la envolvente convexa en un $(d + 1)$ – *dimensional* paraboloides.
- El vecino B más cercano cualquier punto P está en un borde PB en la triangulación de Delaunay ya que el grafo del vecino más cercano es un subgrafo de la triangulación de Delaunay.

¹generalización de mayor dimensión de un triángulo

Anexo B

Criterio de falla de Mohr-Coulomb

En 1776 Coulomb postuló (Ver [1]) que la resistencia a corte de una roca o suelo, esta compuesto de dos partes. Esta resistencia se puede escribir como:

$$s = c + \sigma_n \tan \phi \quad (\text{B.1})$$

Donde (Ver Figura B.1):

- s : Fuerza de corte máximo admisible.
- c : Cohesión.
- σ_n : Fuerza normal aplicada.
- ϕ : ángulo de fricción interna.

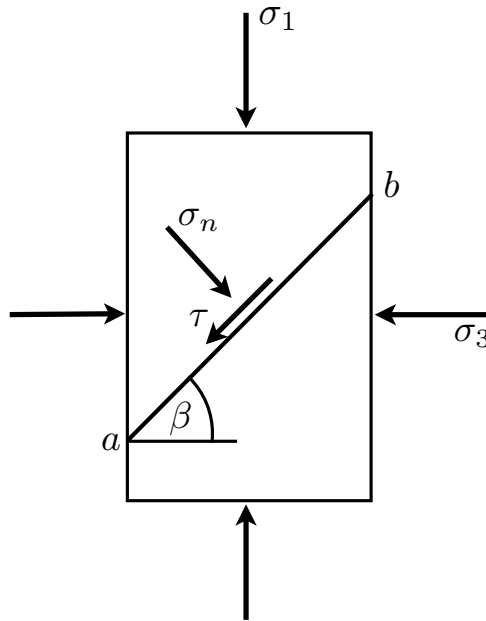


Figura B.1: Falla por corte en un plano ab . Figura modificada de [1].

Escribiendo la relación B.1 en función del esfuerzo normal σ_n y el esfuerzo de corte τ , se obtienen las relaciones:

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\cos 2\beta \quad (\text{B.2})$$

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\sin 2\beta \quad (\text{B.3})$$

De esta manera, las relaciones B.1, B.2 y B.3 se expresan de manera gráfica en las figuras B.2a y B.2b

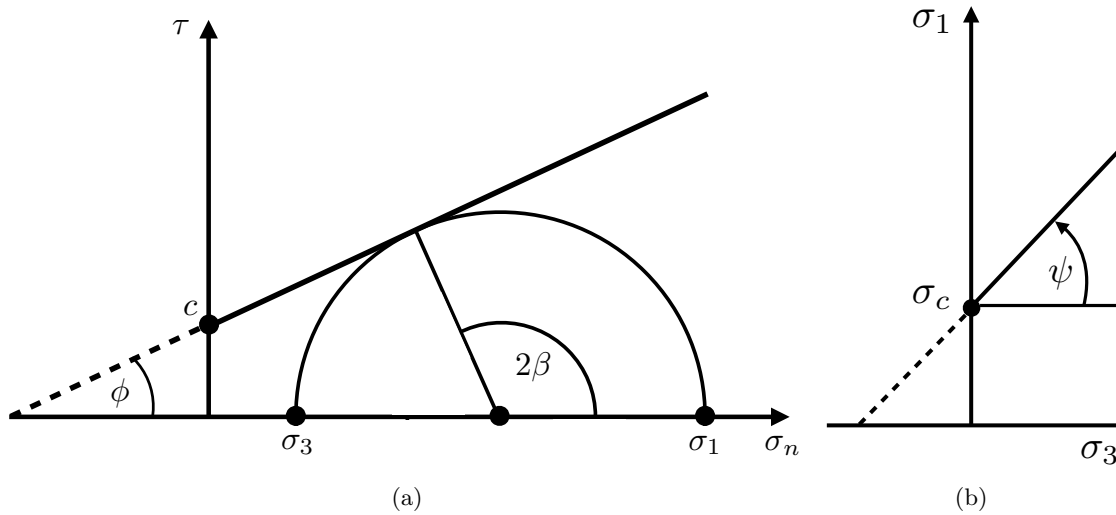


Figura B.2: Envolvente de resistencia de Coulomb en términos de: B.2a) esfuerzo normal y de corte, B.2b) esfuerzos principales. Figura modificada de [1].

Si la envolvente de Coulomb mostrada en la Figura B.2a es extrapolada a $\sigma_1 = 0$, se intersectará con el eje de σ_3 un valor aparente de resistencia de tensión uniaxial del material, dado por:

$$\sigma_T = \frac{scos\phi}{1 + sin\phi} \quad (\text{B.4})$$

Si se pudiera medir esta medida, los valores serían más bajos que los predecidos por la relación B.4. Es por esto que se aplica un valor de corte de la tensión, T_0 . Por razones prácticas, se usa $T_0 = 0$.

De esta manera se considera el criterio de falla tal como se muestra en la Figura B.3

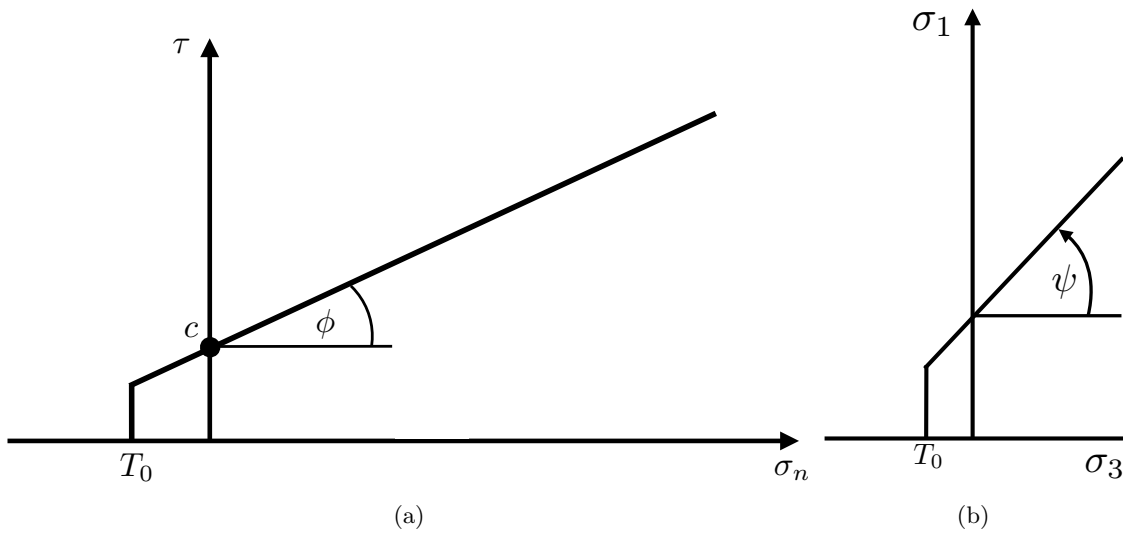


Figura B.3: Criterio de falla de Coulomb en términos de: B.2a) esfuerzo normal y de corte, B.2b) esfuerzos principales. Figura modificada de [1].

Si bien el criterio de Coulomb es ampliamente usado (Ver [1]), tiene algunas deficiencias para predecir el comportamiento de roca intacta; tales como:

- El criterio implica que las fracturas por corte existen mayormente en la resistencia peak.
- También implica una dirección de falla por corte que no siempre es la observada en la práctica.
- Las envolventes de las resistencias peak, son generalmente no lineales. Solo se pueden considerar de esta manera para valores acotados de σ_n o σ_3 .