



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE GEOFÍSICA

MODELAMIENTO FLEXURAL TRIDIMENSIONAL DE LA LITOSFERA OCEÁNICA
DE NAZCA FRENTE A LAS COSTAS DEL NORTE (14°S-23°S) Y CENTRO DE CHILE
(32°S-34°S)

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS, MENCIÓN
GEOFÍSICA

PAULA MARCELA MANRÍQUEZ REVECO

PROFESOR GUÍA:
EDUARDO CONTRERAS REYES

PROFESOR CO-GUÍA:
AXEL OSSES ALVARADO

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
EMILIO VERA SOMMER

SANTIAGO DE CHILE
OCTUBRE 2012

Resumen

El presente trabajo de tesis tiene como primer objetivo el estudiar y comparar diferentes modelos matemáticos basados en ecuaciones diferenciales parciales y métodos numéricos para modelar y calcular la flexura de una placa litosférica oceánica producida por el efecto combinado de una carga batimétrica tridimensional y la flexión producto de la subducción en la fosa. El segundo objetivo es utilizar la modelación para la resolución de algunos problemas inversos relacionados con la estimación de la variación del espesor elástico efectivo de la placa en ciertas zonas estratégicas y en ciertos casos también de las condiciones de borde en la fosa, y a partir de ello, formular hipótesis sobre el debilitamiento o desgaste de la placa.

Inicialmente se aborda el problema de una carga topográfica lejana a una zona de subducción y se encuentra una solución analítica a la ecuación de flexura bidimensional corrigiendo una antigua expresión formulada por primera vez por Hertz [1884] y posteriormente utilizada por varios autores. Luego se aborda el problema donde se combina el efecto de una carga topográfica con el de la subducción para generar un modelo tridimensional. Se proponen dos métodos: el primero resuelve la ecuación del modelo de placa delgada de Kirchhoff-Love (K-L) con espesor elástico constante, y el segundo, resuelve las ecuaciones del modelo Reissner-Mindlin (R-M), ambos mediante el Método de Elementos Finitos (FEM). Para los cálculos se utiliza el programa *FreeFem++* que permite definir el problema de forma variacional y que cuenta con la ventaja de poder refinar la malla utilizada en las zonas en donde se requiere mayor precisión en las soluciones.

Las estimaciones obtenidas usando el modelo de K-L no ajustan apropiadamente los datos gravimétricos dado que en la formulación se considera que la placa posee un espesor elástico constante, una aproximación poco realista. Además, es sabido que los cálculos basados en el modelo de K-L tienden a producir flexiones significativamente inferiores a las esperadas debido a un fenómeno conocido como *shear locking*. El modelo de R-M es un modelo más general que el de K-L y constituye una mejor aproximación a la solución exacta, sobretodo cuando se trabaja con placas delgadas. Utilizando una formulación mixta, incorporando un término adicional, es capaz de evitar el fenómeno antes descrito. Además, su formulación permite trabajar con márgenes con geometrías más complejas e incluir el efecto del cambio de dirección de convergencia de las placas con respecto a la normal a éstas.

Nos enfocamos en el estudio de la flexión de la placa litosférica en dos zonas particulares. La primera corresponde a una zona sobre la placa de Nazca, entre los 72° - 76.5° W y entre los 32° - 34° S donde se ubican dos prominentes domos volcánicos de la cadena montañosa de Juan Fernández: el O'Higgins Guyot y el Monte O'Higgins. En esta zona se busca calcular la flexura producida por la subducción de la placa en la fosa y por el peso de los montes submarinos ya mencionados. La segunda zona de estudio comprende el área entre los 70° - 77° W y los 14° - 23° S comúnmente denominada el Codo de Arica. Su particular geometría hace que sea necesario trabajar la tridimensionalidad del problema. Un modelo unidimensional, como los que comúnmente se han utilizado, podría sobrestimar el valor de la rigidez flexural, parámetro que caracteriza la resistencia de la placa a flectarse bajo la aplicación de esfuerzos.

Del presente estudio se concluye que la edad o el estado termal de la litosfera es sólo uno de los parámetros que influyen en la rigidez flexural, pero no es el más importante. Los resultados indican que la rigidez flexural, y por lo tanto el espesor elástico de la placa, alcanzan valores muy bajos con respecto a lo predicho por un modelo termal en la zona más cercana a la fosa, aquella de mayor edad. Una hipótesis que sería necesario estudiar en mayor profundidad, es que la disminución del espesor elástico podría estar asociado al debilitamiento producto de las deformaciones inelásticas (frágiles o dúctiles) asociadas a la gran magnitud de los esfuerzos involucrados, hidrofracturamiento y con ello aumento de la presión de poros, variación en la composición, fuerzas horizontales o a la gran curvatura.

Summary

This thesis aims mainly to study and compare different mathematical models based on partial differential equations and numerical methods to model and calculate the flexure of an oceanic lithospheric plate produced by the combined effect of a three-dimensional bathymetric load and the bending associated to the subduction in the trench. The second aim of this study is to use the modeling for solving inverse problems related to the estimation of the effective elastic thickness variation of the plate in strategic areas, and in some cases, also the boundary conditions at the trench, and from this, formulate hypotheses about the weakening of the plate.

Initially, the problem of a topographic load far away from a subduction zone is explored and an analytical solution to the two-dimensional flexure equation is found, correcting an old expression first formulated by Hertz [1884] and later used by several authors. Then the problem that combines the effect of a topographic load with the effect of the subduction in the trench is addressed to generate a three-dimensional model. Two methods are proposed: the first one solves the Kirchhoff-Love (K-L) thin plate equation with a constant elastic thickness, and the second one the Reissner-Mindlin (R-M) equations with variable elastic thickness, both using the Finite Element Method (FEM). For calculations the *FreeFem++* software is used which makes it possible to define the problem in its variational weak formulation and has the advantage of being able to refine the FEM mesh in areas where more precision is needed.

The model estimates obtained using the K-L plate model do not fit properly the gravimetric data, because of the unrealistic constant elastic thickness approach in the formulation. It is also known that calculations based on the K-L model tend to produce significantly smaller displacements than they should due to a phenomenon known as *shear locking*. The R-M model involves weaker hypotheses than the K-L plate model and it is a better approximation to the exact solution, especially when working with thin plates. Treating the flexure of the plate as a mixed problem and introducing a penalty term, the previously described phenomenon can be avoided. In addition, its formulation allows to work with margins with more complex geometries and include the effect of changing the convergence direction between plates with respect to their normal vector.

We focus on the study of the lithospheric plate flexure in two particular areas. The first one is an area on the Nazca plate, between 72° - 76.5° W and from 32° - 34° S where two prominent volcanic domes of the Juan Fernández mountain chain are found: the O'Higgins Guyot and the O'Higgins Seamount. In this area it is intended to calculate the flexure caused by the subduction of the plate in the trench and the flexure caused by the weight of the previously mentioned seamounts. The second study area comprises the area between 70° - 77° W and 14° - 23° S commonly known as the Arica Bend. Its unique geometry makes it necessary to work the three-dimensionality of the problem. A one-dimensional model as those commonly used, can overestimate the value of the flexural rigidity, i.e., the parameter characterizing the plate's resistance to deflect under applied stresses.

In this study is concluded that the thermal state (thermotectonic age) of the lithosphere is only one of the properties that determine the value of the flexural rigidity, but not the most important. The flexural rigidity, and thus the elastic thickness of the plate, reach very low values compared to what is expected from a thermal model in the area nearest to the trench, where the incoming oceanic plate is oldest. One hypothesis that should be studied in greater detail, is that the decrease in elastic thickness may be associated to the plate weakening as a consequence of inelastic deformations (brittle or ductile) due to the high magnitude of the involved stresses, hydro-fracturing which increases pore pressure, composition variations, horizontal forces or the large curvature.

Agradecimientos

Agradece a la llama su luz, pero no olvides el pie del candil que, constante y paciente, la sostiene en la sombra.

Rabindranath Tagore

Quiero agradecer a todos los que, activa o silenciosamente, contribuyeron a este trabajo de tesis. En especial a mis profesores, Eduardo, Axel y Emilio por sus valiosos aportes, críticas, comentarios, apoyo y enseñanzas.

Aprovecho de agradecer al profesor Javier Ruiz, por sus múltiples gestiones para que yo pudiera llegar a esta instancia y por la ayuda prestada en algunos cálculos.

También quiero agradecer a mis amigos, en especial a mis compañeros de geofísica: Carolina, Karin, Jorge, Pelao y Andrei; a mis amigos de primer año; a mi familia y a Juan, quienes fueron mi luz y soporte en todo momento.

Finalmente quiero agradecer a la Fcfm de la Universidad de Chile por todo lo que me ha entregado y porque los años que allí pasé fueron los más hermosos de mi vida. Aunque a veces las materias se olvidan, la formación, la experiencia de vida, los recuerdos y los amigos quedan. Como bien dice el dicho: Un profesor sustenta su saber sobre un título académico; un maestro lo hace sobre toda una vida de experiencias y aprendizaje. Gracias a todos los maestros que marcaron mi vida.

Este trabajo se realizó con el apoyo de un proyecto FONDECYT de Iniciación N° 11090009 a través de una beca de Magíster.

Índice de contenido

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Objetivos	3
1.3. Contexto Geodinámico	3
1.3.1. Placa de Nazca	3
1.3.2. Ridge de Juan Fernández	4
1.3.3. Codo de Arica	4
2. Modelos Elásticos	7
2.1. Principios de Elasticidad Lineal	7
2.2. Modelo de Reissner-Mindlin (R-M)	9
2.2.1. Hipótesis	9
2.2.2. Deducción de las ecuaciones fundamentales	10
2.3. Modelo de Kirchhoff-Love (K-L)	16
2.3.1. Hipótesis	16
2.3.2. Deducción de las ecuaciones fundamentales	16
3. Modelo de Densidad para la zona de Juan Fernández	18
4. Resolución analítica del modelo de K-L lejos de una zona de subducción	23
4.1. Introducción	23
4.2. Solución Analítica	24
4.3. Validación de la solución analítica	27
4.4. Cálculo de la flexura perfil P01	28
5. Resolución mediante elementos Finitos	31
5.1. El Método de Elementos Finitos	31
5.2. Modelo de Kirchhoff-Love con $T_e = \text{cte.}$	35
5.2.1. Dominio y condiciones de borde	36
5.2.2. Formulación variacional	37
5.2.3. Validación del modelo	38

5.2.4.	Resultados para la zona de Juan Fernández	40
5.3.	Modelo de Reissner-Mindlin	42
5.3.1.	Dominio y condiciones de borde	43
5.3.2.	Formulación variacional	44
5.3.3.	Validación del modelo	46
5.3.4.	Resultados para la zona de Juan Fernández	48
5.3.5.	Resultados para la zona del Codo de Arica	49
6.	Discusiones y Conclusiones	53
6.1.	Elasticidad lineal y modelo isotrópico	53
6.2.	Modelos empleados y sus alcances	54
6.3.	Espesor elástico	55
6.3.1.	Edad y estado termal	55
6.3.2.	Composición y geometría	55
6.3.3.	Deformación inelástica e hidrofracturamiento	56
6.3.4.	Fuerzas horizontales	57
6.4.	Conclusiones	58
	Bibliografía	59
	A. Convención Algebraica	64

Índice de ilustraciones

1.1. Escenarios en los que se produce flexura.	2
1.2. Ridge de Juan Fernández	5
1.3. Codo de Arica	6
2.1. Vector de esfuerzos	8
3.1. Modelo de velocidades perfil P01	19
3.2. Modelo gravimétrico perfil P01	20
3.3. Modelo gravimétrico perfil P02	21
3.4. Modelo gravimétrico perfil P03	22
4.1. Camino de integración definido en el plano complejo.	26
4.2. Flexura producida por una carga gaussiana	28
4.3. Flexura producida por una carga cuadrada	29
4.4. Cálculo de la flexura mediante solución analítica	29
4.5. Comparación Moho gravimétrico vs. calculado	30
5.1. Ejemplo de malla utilizada para la validación del modelo de K-L $T_e=cte$	36
5.2. Flexura carga unidimensional en el modelo de K-L $T_e=cte$	39
5.3. Flexura carga rectangular en el modelo de K-L $T_e=cte$	39
5.4. Primera área de estudio	40
5.5. Malla usada en la primera zona de estudio, modelo de K-L $T_e=cte$	40
5.6. Batimetría zona de Juan Fernández	41
5.7. Perfiles batimétricos de la zona de Juan Fernández en el modelo de K-L $T_e=cte$	41
5.8. Flexura del Moho bajo los montes submarinos en el modelo de K-L $T_e=cte$	42
5.9. Flexura del Moho perfil P01 en el modelo de K-L $T_e=cte$	42
5.10. Segunda área de estudio	43
5.11. Bending Moment	44
5.12. Flexura para carga 1-D modelo R-M 2D	47
5.13. Flexura para carga cuadrada modelo R-M 2D	48
5.14. Variación de la flexura con el ángulo de convergencia	48

5.15. Flexura en el modelo de R-M T_e =var, primera zona de estudio	49
5.16. Vista 3-D de la flexura en el modelo de R-M T_e =var, primera zona de estudio	49
5.17. Flexura del Moho perfil P01 en el modelo de R-M T_e =var	50
5.18. Cálculo flexura Codo de Arica	51
5.19. Resultado flexura en el Codo de Arica para los 4 perfiles en estudio	52
6.1. Edad de la placa litosférica en las zonas de estudio	56
6.2. Esquema flexura cerca de la fosa	57

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

Las placas tectónicas corresponden a fragmentos de litosfera que se desplazan como bloques rígidos y que interactúan entre ellas a lo largo de sus fronteras produciendo la deformación de éstas, es decir, la litosfera se comporta como una placa delgada cuando se le aplican esfuerzos a lo largo de escalas de tiempo geológicas y es capaz de transmitir esfuerzos por varios cientos de kilómetros. Las principales causas de deformación corresponden al choque de una placa con otra, como es el caso de la cordillera Himalaya, la cual nace de la colisión de la placa India y la placa Euroasiática; el cizalle en bordes transformantes; la subducción de una placa bajo otra, tal como ocurre en el margen chileno; y las deformaciones causadas por cargas dadas por la topografía, en el caso de la litosfera continental, o de la batimetría en la caso de la litosfera oceánica.

En la actualidad existen varios modelos que intentan modelar la flexura de una placa con el fin de poder determinar algunas propiedades físicas de ésta (Contreras-Reyes et al. [2010]; Walcott [1970]; Bodine & Watts [1979]; Watts et al. [1975]; Braitenberg et al. [2002]; Judge & McNutt [1991]; Wessel [1996]). El parámetro que caracteriza la aparente resistencia a la deformación de la litosfera es lo que se conoce como rigidez flexural D , la cual comúnmente se expresa a través del espesor elástico efectivo (T_e) de la litosfera. Este último se define como el espesor de la litosfera que se comporta elásticamente y depende, entre otras cosas, de la composición y geometría de la placa, de las fuerzas externas aplicadas y de su estructura termal [McNutt & Menard, 1982]. Es importante destacar que la geometría y la ubicación de las interfaces reológicas no están sujetas a parámetros predefinidos como ocurre en el caso puramente elástico, sino que evolucionan con la deformación. El comportamiento elástico se asocia con una mayor rigidez. Cuando los esfuerzos de flexión sobre la placa alcanzan el valor límite de elasticidad, aparecen zonas de comportamiento inelástico (frágiles o dúctiles). Esto hará que localmente disminuya el espesor elástico en las zonas de gran curvatura, pudiendo disminuir hasta en un 80% como ocurre debajo del archipiélago de Hawaii [Burov & Diament, 1995].

Actualmente los modelos tridimensionales realistas son escasos debido a que no son capaces de modelar la flexura causada por el efecto combinado de la subducción de una placa con aquella que es producida por una carga dada, como podría ser un monte submarino. Lo anterior se debe principalmente al enorme consumo computacional y a la complejidad matemática asociada. Un modelo interesante corresponde al modelo propuesto por Hertz [1884] y que más tarde fue utilizado en los trabajos de Walcott [1970] y de Watts et al. [1975] entre otros. El modelo propuesto por Hertz corresponde a una solución analítica a la ecuación de flexura, la cual permite calcular la flexión

producida por una carga tridimensional lejos de una zona de subducción. Sin embargo, tal como fue mencionado en el trabajo de Walcott [1970], los resultados en cuanto a la amplitud de la flexura no son los esperados ya que las amplitudes calculadas son menos de la mitad de las observadas, a pesar de que la longitud de onda de la flexura sí entrega valores que concuerdan con las observaciones.

Por otro lado existen modelos capaces de combinar los efectos de la subducción de la placa bajo la fosa con los efectos que causa la existencia de una carga, como podría ser una cadena montañosa. Sin embargo estos modelos poseen importantes limitantes ya que consideran una carga que es infinita en una dirección, es decir, una carga bidimensional. Además consideran que la placa subducta de manera perpendicular a la fosa y que este ángulo no varía (ejemplo: Contreras-Reyes & Osses [2010]), es decir, consideran geometrías muy simples, que en el caso de márgenes como el del Codo de Arica (Figura 1.3) no son capaces de modelar adecuadamente.

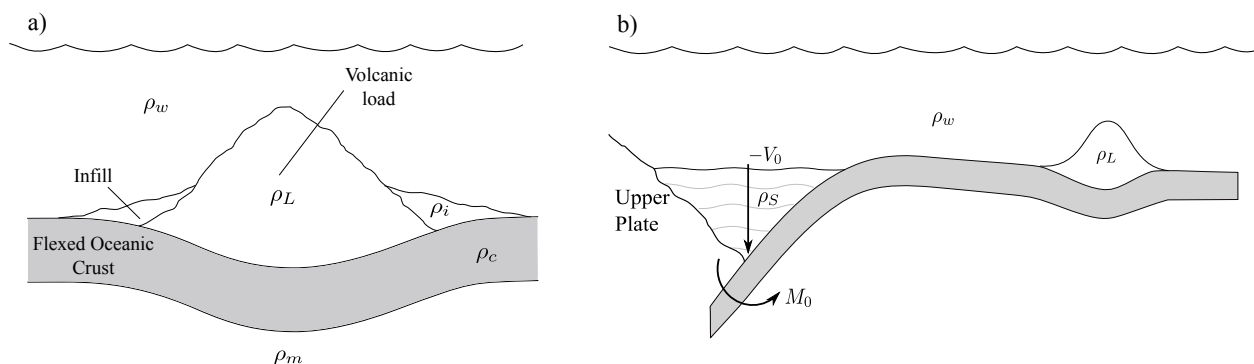


Figura 1.1: a) Esquema de la flexura producida por un monte submarino lejos de una zona de subducción. Aquí ρ_w corresponde a la densidad del agua, ρ_L a la de la carga aplicada (monte submarino), ρ_i a la del material que rellena la cavidad flexural generada, ρ_c a la de la corteza y ρ_m a la densidad del manto. b) Esquema de la flexura producida por el efecto combinado de una carga y de la subducción de la placa en la fosa. ρ_s corresponde a la densidad de los sedimentos acumulados en la fosa, M_0 corresponde al torque de flexión (*bending moment*) y V_0 a la fuerza de cizalle vertical, conceptos que serán explicados en el Capítulo 5.

En esta tesis se estudian dos zonas. La primera corresponde a la placa de Nazca bajo la cadena montañosa de Juan Fernández ubicada a unos 120 km al Oeste de la costa chilena a la misma latitud de Valparaíso (Figura 1.2a). El área de estudio comprende entre los 72°W y los 76.5°W y entre los 32°S y los 34°S . En esta zona se estudia la flexura causada por dos montes submarinos, el Guyot O'Higgins y el Monte O'Higgins, además de la deformación debido a la subducción de la placa de Nazca bajo la placa continental Sudamericana. Lo anterior permite la determinación de la distribución del espesor elástico de la litosfera, el cual es variable. Sin embargo, para poder determinar el espesor elástico, el modelo es restringido con datos reales. Es por ello que también se estudia la estructura de densidad del área de estudio de manera de encontrar el modelo de capas, particularmente la discontinuidad de Mohorovičić o Moho, que ajusta con los datos gravimétricos de la zona. Este modelo gravimétrico se detalla en el Capítulo 3.

La segunda zona de estudio corresponde al área conocida como el Codo de Arica (Figura 1.3), ubicada entre los 70°W y los 77°W y entre los 14°S y los 23°S . La particularidad de esta zona es que la convergencia no es perpendicular a la fosa, además de la fuerte curvatura de ésta. Para esta zona sólo se estudia la flexura a gran escala, es decir, la que es producida por la subducción. Los resultados obtenidos son comparados con la batimetría de la zona. Finalmente se discuten los resultados obtenidos.

1.2. Objetivos

Los principales objetivos de este trabajo de tesis son:

- Crear un modelo tridimensional para modelar la flexión de una placa elástica que sea capaz de reproducir la flexura causada tanto por la subducción de una placa en la fosa como por la aplicación de cargas batimétricas.
- Introducir espesores elásticos variables de manera de tener un modelo más realista.
- Incluir en el modelo geometrías complejas como lo es el margen convergente de la zona del Codo de Arica.
- Encontrar el espesor elástico de la litosfera para ambas zonas de estudio y discutir los resultados.

1.3. Contexto Geodinámico

1.3.1. Placa de Nazca

La placa de Nazca corresponde a una placa tectónica oceánica ubicada en el océano Pacífico oriental, junto a la costa Oeste de América del Sur frente de los países de Chile, Perú, Ecuador y parte de Colombia. La placa de Nazca limita al Sur con la placa Antártica en lo que se conoce como la dorsal de Chile, al Norte con la placa de Cocos y al Oeste con la placa del Pacífico en la dorsal del Pacífico Oriental. El borde Este de la placa de Nazca subducta bajo la placa Sudamericana, lo que ha dado origen a la Cordillera de los Andes y a la fosa peruano-chilena. Actualmente la placa de Nazca subducta bajo la placa Sudamericana a una velocidad de unos 6.5 centímetros al año aproximadamente [Angermann et al., 1999], pero probablemente se movió a una velocidad de 8.5 centímetros al año durante varios millones de años [DeMets et al., 1990].

Una de las zonas de estudio corresponde a una zona ubicada sobre la placa de Nazca, entre los 72°W y los 76.5°W y entre los 32°S y los 34°S (Figura 1.2a). En esta zona la característica más relevante corresponde a la cadena montañosa de Juan Fernández, la cuál será descrita en mayor detalle en la siguiente sección. En el eje de la fosa, el Ridge de Juan Fernández forma una barrera para el transporte de sedimentos desde el Sur hacia el Norte [von Huene et al., 1997]. Debido a lo anterior, los sedimentos se acumulan en la fosa al Sur del ridge alcanzando una profundidad de hasta 2.5 kilómetros [Flueh et al., 1998]. A unos 75 kilómetros al Norte del ridge, el eje de la fosa es más angosto y posee escasos sedimentos.

La placa de Nazca al Norte del ridge de Juan Fernández se formó en el centro de expansión conocido como la dorsal del Pacífico Oriental (*East Pacific Rise*) [Cande & Haxby, 1991], mientras que la parte al Sur del ridge se formó en el centro de expansión Nazca-Antártico, o dorsal de Chile, hace unos 35 millones de años [Herron et al., 1981]. La edad de la placa de Nazca a lo largo de la fosa chileno-peruana aumenta desde los 0 Ma en el punto triple (*Chile Triple Junction*) hasta un máximo de 48 Ma alrededor de los 20°S [Müller et al., 1997]. Hacia el Norte de esta latitud el margen continental cambia su orientación NNE a una NW. A esta característica se le conoce como el Codo de Arica.

1.3.2. Ridge de Juan Fernández

Sobre la placa de Nazca, frente a las costas de Valparaíso se ubica la cadena montañosa de Juan Fernández, la cual es casi ortogonal ($N78.4^{\circ}E$) al margen continental (Figura 1.2). Esta cadena montañosa tiene alrededor de 900 kilómetros de longitud y posee 11 montañas (volcanes extintos) las cuales se extienden desde el *hot spot*, cuyas coordenadas aproximadas son $97.5^{\circ}W/34^{\circ}S$, al Oeste de la isla Alexander Selkirk hasta el monte O'Higgins [von Huene et al., 1997]. La hipótesis de que el ridge de Juan Fernández se formó en el *hot spot* es sostenida por el incremento lineal en la edad a lo largo de la cadena montañosa lo cual fue inferido a partir de datos magnéticos [Yáñez et al., 2001].

Como ya fue mencionado anteriormente, la cadena de Juan Fernández forma una barrera para el transporte de los sedimentos a través de la fosa provenientes desde el Sur. El relleno sedimentario de la fosa entre los 34° y los $45^{\circ}S$ varía entre los 1.5 y 2.5 km de profundidad, mientras que al norte del ridge el relleno alcanza sólo unos 500 metros de espesor [von Huene et al., 1997].

Cerca de la costa se ubican dos prominentes domos volcánicos, ubicados a unos 120 km al Oeste de la fosa frente a Valparaíso denominados O'Higgins Guyot y el Monte O'Higgins. Éstos se encuentran a unos 4 km de profundidad bajo el mar y se elevan a una altura de 3.5 km en el caso del O'Higgins Guyot y 2.9 km en el caso del Monte O'Higgins por encima del piso oceánico que data del Eoceno. La diferencia en tamaño se puede apreciar mejor al comparar sus respectivos volúmenes: El O'Higgins Guyot (diámetro de la base de ~ 27 km) tiene un volumen aproximado de $668 \text{ km}^3 \pm 10\%$, mientras que el Monte O'Higgins (diámetro de la base de ~ 15 km) tiene un volumen estimado en $177 \text{ km}^3 \pm 10\%$ por encima del piso oceánico.

El Monte O'Higgins se formó hace aproximadamente 9 Ma, lo cual ha sido inferido a partir de su señal magnética [Yáñez et al., 2001]. Al Este de la fosa se observa una prominente anomalía magnética ubicada a $72.6^{\circ}W/32.7^{\circ}S$ lo cual indicaría la ubicación del monte Papudo ya subductado [Yáñez et al., 2001].

Otra característica interesante de estos dos montes es que se ha observado que las anomalías gravimétricas no obedecen el típico patrón y esto supone que no existe una gran raíz cortical como existe en los montes ubicados más al Oeste [Kopp et al., 2004] probablemente debido al efecto de la flexura de la placa de Nazca a medida que subducta en la fosa.

1.3.3. Codo de Arica

La segunda zona de estudio de la presente tesis corresponde a parte de lo que se conoce como el Codo de Arica (*Arica Bend*), ubicada entre los $70^{\circ}W$ y los $77^{\circ}W$ y entre los $14^{\circ}S$ y los $23^{\circ}S$ mostrada en la Figura 1.3. Esta zona resulta de gran interés debido a que el margen alrededor de los $18^{\circ}S$ cambia su orientación desde una orientación NNE al Sur a una NW al Norte. Esto implica que la dirección de convergencia pasa de ser casi perpendicular a la fosa a una dirección oblicua. Esta particularidad obliga a plantear un modelo que considere la tridimensionalidad de la geometría. Además en esta zona la edad de la placa Sudamericana aumenta desde los 30 Ma al Norte a los 45 Ma hacia el Sur a lo largo de la fosa.

Existen numerosos estudios paleomagnéticos que señalan que el Codo de Arica se formó debido a rotaciones del margen [Prezzi & Vilas, 1998; Kley, 1999], sin embargo, no hay acuerdo en la mag-

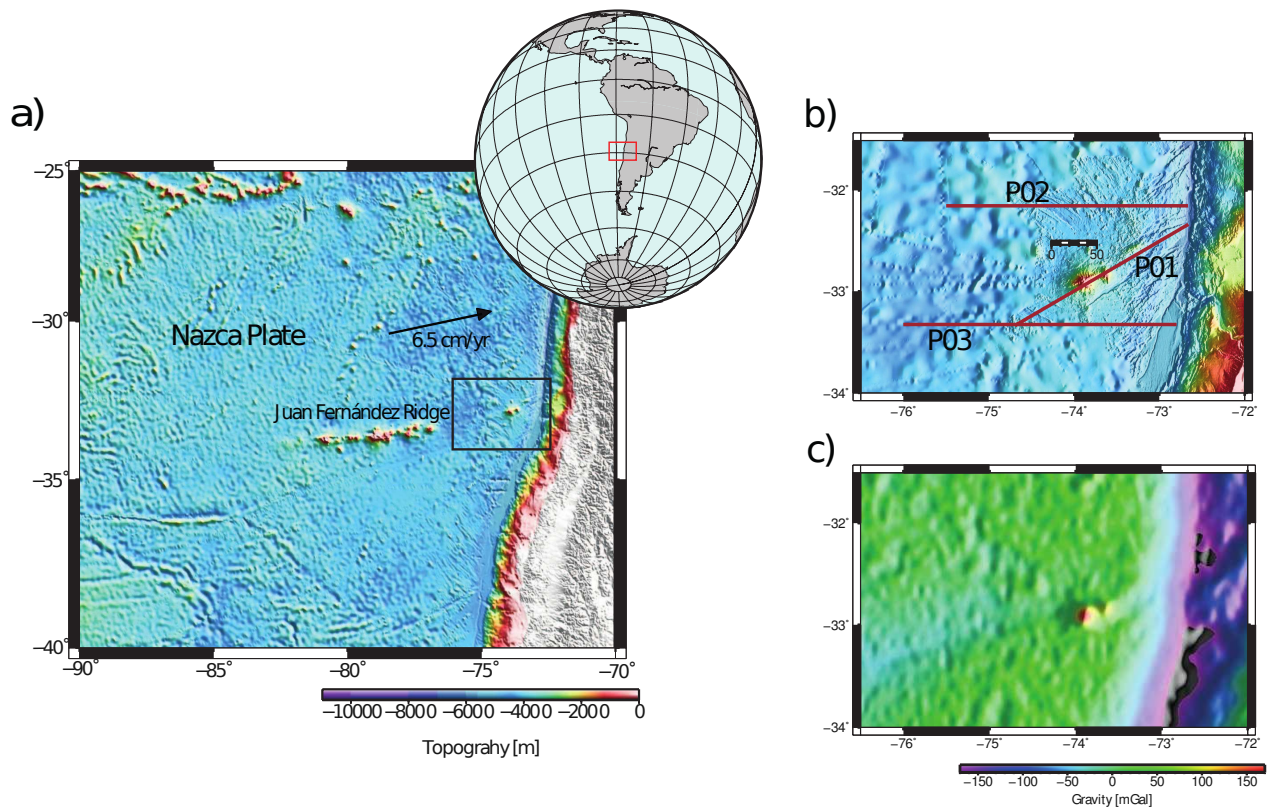


Figura 1.2: Batimetría y anomalía de Bouguer de la primera zona de estudio. Tanto los datos de batimetría como de gravedad fueron obtenidos de datos globales de libre acceso (<http://topex.ucsd.edu/>). a) Ubicación de la primera zona de estudio entre los 32-34°S y los 76.5-72°W al Este de la placa de Nazca. b) Batimetría de alta resolución del área de estudio. Además se muestran los tres perfiles que fueron estudiados en rojo: P01, P02 y P03. c) Anomalía de gravedad expresada en [mGal].

nitud de éstas debido a que las estimaciones del acortamiento cortical producido por una rotación del margen no concuerdan con lo observado.

Otros autores atribuyen la formación del Oroclino Boliviano (Codo de Arica) a la existencia de un periodo de subducción plana entre los 37 y 25 Ma que generó compresiones y así un acortamiento cortical [O'Driscoll et al., 2012]. La formación de la subducción plana es atribuida a un efecto combinado entre la subducción de un fragmento de la meseta boyante Manihiki durante el Eoceno tardío y al efecto de succión debido a la presión que genera el flujo del manto a medida que la placa subduce bajo el Cratón Amazónico [O'Driscoll et al., 2012].

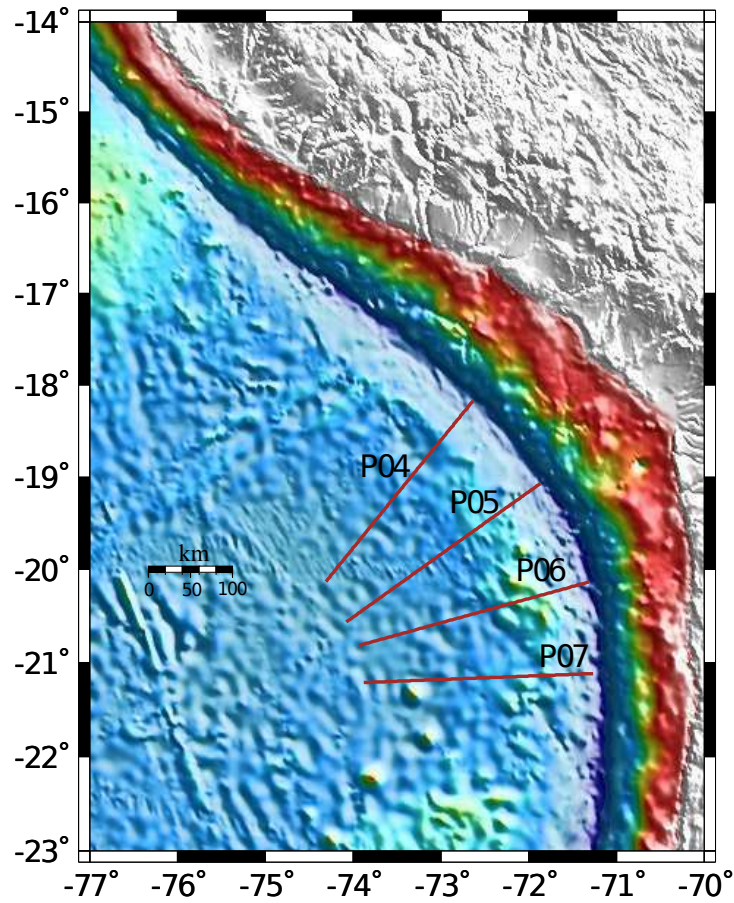


Figura 1.3: Segunda zona de estudio conocida como el Codo de Arica. Además se muestran los cuatro perfiles que fueron estudiados en rojo: P04, P05, P06 y P07. La batimetría fue obtenida de datos globales de libre acceso (<http://topex.ucsd.edu/>).

Capítulo 2

Modelos Elásticos

2.1. Principios de Elasticidad Lineal

Cuando se aplican fuerzas sobre un cuerpo sólido, éste puede presentar algún tipo de deformación, es decir, cambia su forma o volumen. La descripción matemática de la deformación elástica de un sólido se presenta a continuación. La posición de cualquier punto del cuerpo se define por su vector posición \vec{r} (con componentes x_1, x_2 y x_3) en algún sistema coordenado. Cuando un cuerpo se deforma los puntos en él cambian de posición. Consideremos un punto en particular y sea su posición antes de la deformación \vec{r} , y después de la deformación \vec{r}' (con componentes x'_i). El desplazamiento de este punto debido a la deformación está dado por el vector $\vec{r}' - \vec{r}$, el cual se denota como \vec{u} y cuyas componentes están dadas por

$$u_i = x'_i - x_i$$

El vector \vec{u} se llama vector de desplazamiento. Las coordenadas x'_i del punto desplazado son funciones de las coordenadas x_i antes del desplazamiento.

Cuando un cuerpo se deforma, las distancias entre los puntos cambia. Consideremos dos puntos que están muy cerca el uno del otro. Si las componentes del vector que une estos puntos antes de la deformación están dadas por dx_i , las componentes del vector que unirá a los puntos después de la deformación estarán dadas por $dx'_i = dx_i + du_i$. La distancia entre los puntos en cuestión antes de la deformación será $dl = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}$ y $dl' = \sqrt{dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2}$ después de la deformación. En forma abreviada, lo anterior se puede escribir como: $dl'^2 = dx_i'^2$, $dl'^2 = dx_i'^2 = (dx_i + du_i)^2$. Reemplazando $du_i = (\partial u_i / \partial x_j) dx_j$, se puede escribir

$$dl'^2 = dl^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i dx_j + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_j dx_l$$

Dado que la suma se realiza en todos los índices i y j en el segundo término de la derecha, este término puede ser escrito como

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_i dx_j$$

En el tercer término es posible intercambiar los subíndices i y l . Luego dl'^2 tomará la forma final

$$dl'^2 = dl^2 + 2\varepsilon_{ij} dx_i dx_j$$

donde ε_{ij} corresponde al tensor de deformaciones y se define como

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \right)$$

Estas expresiones muestran el cambio en un elemento de largo cuando un cuerpo es deformado.

En el presente trabajo se trabaja bajo los supuestos de la elasticidad lineal, en la cual se desprecian los términos cuadráticos. Así se tiene que el tensor de deformaciones estará dado por el gradiente simetrizado de \vec{u} .

$$\varepsilon_{ij} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.1)$$

Lo anterior también puede ser escrito como $\varepsilon(\vec{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T)$. De esta definición se tiene además que $\text{tr}(\varepsilon(\vec{u})) = \text{div}(\vec{u})$. Es importante notar que el tensor de deformaciones es un tensor simétrico.

Cuando el sólido se encuentra en equilibrio, la suma de todas las fuerzas actuando sobre él debe ser nula. Las fuerzas que actúan sobre un cuerpo Ω pueden ser de cuerpo (proporcionales a la masa, como por ejemplo la fuerza de gravedad) o de superficie. Estas últimas actúan sobre la superficie del sólido y se deben al contacto físico con otro cuerpo. La fuerza resultante sobre una superficie $\partial\Omega$ puede ser expresada como una integral de una función de densidad de fuerza superficial $\vec{T}^{(n)}(x)$, o también conocido como vector de esfuerzos. Así, para un sólido en equilibrio se tendrá:

$$\int_{\Omega} \vec{f}(x) dV + \int_{\partial\Omega} \vec{T}^{(n)}(x) dA = 0 \quad (2.2)$$

El vector de esfuerzos puede ser escrito como la multiplicación del tensor de esfuerzos de Cauchy σ (simétrico) por el vector normal a la superficie sobre la cual actúa el vector de esfuerzos.

$$\vec{T}^{(n)} = \sigma \hat{n} \quad (2.3)$$

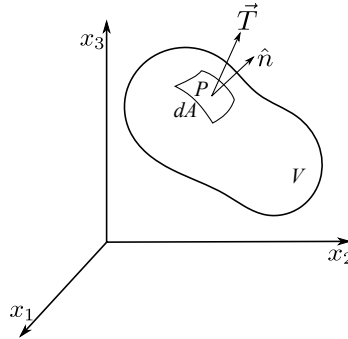


Figura 2.1: Esquema del vector de esfuerzos actuando sobre un sólido tridimensional.

Si se reemplaza la expresión (2.3) en la expresión (2.2) y se aplica el teorema de la divergencia se obtiene

$$\int_{\Omega} \vec{f}(x) dV = - \int_{\partial\Omega} \sigma(x) \hat{n} dA = - \int_{\Omega} \text{div}(\sigma(x)) dV$$

Tras lo cual se obtiene la ecuación de la elasto-estática

$$-\operatorname{div}(\sigma(x)) = \vec{f}(x), \quad x \in \Omega \quad (2.4)$$

Las ecuaciones constitutivas para un sólido lineal elástico relacionan el esfuerzo aplicado con la deformación resultante a través de la expresión

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

la cual se conoce como la ley generalizada de Hooke. El tensor C_{ijkl} posee 81 componentes, sin embargo, usando las propiedades de simetría tanto para σ como para ε , junto a otros argumentos termodinámicos se reduce a 21 componentes. Si además se considera un sólido isótropo la expresión anterior se reduce a

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

donde λ y μ corresponden a los coeficientes de Lamé y $\varepsilon_{kk} = \operatorname{tr}(\varepsilon_{ij})$.

Comúnmente en ingeniería se utilizan los coeficientes E , conocido como el Módulo de Young, y ν , que corresponde a la razón de Poisson. Estos últimos se relacionan con los coeficientes de Lamé mediante las siguientes expresiones:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad E = \frac{(3\lambda + 2\mu)\mu}{\lambda + \mu}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (2.5)$$

Así la ley de Hooke también puede ser expresada en términos de los coeficientes E y ν :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1 + \nu)} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right). \quad (2.6)$$

2.2. Modelo de Reissner-Mindlin (R-M)

2.2.1. Hipótesis

El modelo de Reissner-Mindlin supone una placa delgada cuyo espesor elástico está dado por $T_e(x, y)$ y que es sometida a fuerzas externas ortogonales a la superficie media. Se define la placa $\Omega = \omega \times \left(-\frac{T_e(x, y)}{2}, \frac{T_e(x, y)}{2} \right)$, con $\omega \in \mathbb{R}^2$. Dado que el modelo considera una placa delgada su borde estará dado por $\partial\Omega := \partial\omega \times \left(-\frac{T_e(x, y)}{2}, \frac{T_e(x, y)}{2} \right)$. Además el modelo de Reissner-Mindlin para el cálculo elástico de placas y láminas supone [Braess, 2007]:

- H1. El material de la placa es elástico lineal.
- H2. El desplazamiento vertical para los puntos del plano medio no depende de z : $u_3(x, y, z) = w(x, y)$.
- H3. Los puntos del plano medio sólo sufren desplazamiento vertical: $u_1(x, y, 0) = 0, u_2(x, y, 0) = 0$.
- H4. La tensión perpendicular al plano medio se anula: $\sigma_{33} = 0$.

Las hipótesis H1-H3 indican que los desplazamientos tendrán la forma

$$\begin{aligned} u_i(x, y, z) &= -z\theta_i(x, y), \quad \text{para } i = 1, 2 \\ u_3(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \tag{2.7}$$

donde w es el desplazamiento normal y $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ corresponde a las rotaciones.

2.2.2. Deducción de las ecuaciones fundamentales

Hasta ahora se ha supuesto que la placa está dada por Ω que es un conjunto perteneciente a \mathbb{R}^3 . Además su borde está dado por $\partial\Omega := \partial\omega \times \left(-\frac{T_e(x, y)}{2}, -\frac{T_e(x, y)}{2}\right)$. Sea $\Gamma_0 \subseteq \partial\omega$, uno de los bordes de la placa definida. Se supondrá además que la placa se encuentra fija en el borde Γ_0 , es decir

$$\vec{u}(x, y, z) = 0, \quad \forall (x, y, z) \in \Gamma_0 \times \left(-\frac{T_e(x, y)}{2}, \frac{T_e(x, y)}{2}\right)$$

Se definirá entonces $V = \{(\psi, \alpha) \in (H^1(\omega))^3 \mid \psi_1, \psi_2, \alpha = 0 \text{ en } \Gamma_0\}$ y las funciones afines $(\vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2), \alpha) \in V$ tales que $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ definido como

$$\begin{aligned} v_i(x, y, z) &= -z\psi_i(x, y), \quad i = 1, 2 \\ v_3(x, y, z) &= \alpha(x, y). \end{aligned}$$

satisface la condición de Dirichlet, $\vec{v}|_{\Gamma_0} = 0$, en el borde Γ_0 .

Multiplicando la expresión (2.4) por \vec{v} , e integrando sobre $\Omega = \omega \times \left(-\frac{T_e(x, y)}{2}, \frac{T_e(x, y)}{2}\right)$ por partes se obtiene:

$$\int_{\Omega} \sigma(\vec{u}) : \nabla \vec{v} \, dx dy dz - \int_{\partial\Omega} \sigma(\vec{u}) \hat{n} \cdot \vec{v} \, dx dy dz = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} \, dx dy dz$$

Donde se ha hecho uso del producto interno de matrices cuadradas de dimensión N

$$A : B = \sum_{i,j=1}^N A_{ij} B_{ij}$$

Dado que el tensor de Cauchy es simétrico, es decir $\sigma = \sigma^T$, se cumple que $\sigma : \nabla \vec{u} = \sigma : \varepsilon(\vec{u})$; por lo tanto se tiene

$$\int_{\Omega} \sigma(\vec{u}) : \varepsilon(\vec{v}) \, dx dy dz - \int_{\partial\Omega} \sigma(\vec{u}) \hat{n} \cdot \vec{v} \, dx dy dz = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} \, dx dy dz \tag{2.8}$$

A continuación se desarrolla el producto interno de matrices $\sigma(\vec{u}) : \varepsilon(\vec{v}) = \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}(\vec{u})\varepsilon_{ij}(\vec{v})$.

Haciendo uso de la ley de Hooke dada en la expresión (2.6) y de la hipótesis H4, se obtiene que

$$\begin{aligned}\sigma_{33} &= \frac{E}{(1+\nu)} \left(\varepsilon_{33} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \right) = 0 \\ \Rightarrow \varepsilon_{33} &= -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\end{aligned}\quad (2.9)$$

por lo que las componentes del tensor de esfuerzos resultan las siguientes

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{E}{(1+\nu)} \left(\varepsilon_{11} + \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \right) \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{(1+\nu)} \left(\varepsilon_{22} + \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \right) \\ \sigma_{33} &= 0 \\ \sigma_{ij} &= \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{ij} \quad i \neq j\end{aligned}\quad (2.10)$$

Haciendo uso de la definición del tensor de deformaciones (2.1), de los desplazamientos dados en la ecuación (2.7) y del resultado obtenido en (2.9) se obtienen las componentes del tensor de deformaciones que se muestran a continuación.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ii}(u) &= -z \frac{\partial \theta_i}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2 \\ \varepsilon_{33}(u) &= -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \\ \varepsilon_{ij}(u) &= -\frac{z}{2} \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \theta_j}{\partial x_i} \right), \quad i \neq j \in \{1, 2\} \\ \varepsilon_{i3}(u) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} - \theta_i \right), \quad i = 1, 2\end{aligned}\quad (2.11)$$

Haciendo uso de lo anterior se calcula $\sigma(\vec{u}) : \varepsilon(\vec{v})$.

$$\begin{aligned}\sigma(\vec{u}) : \varepsilon(\vec{v}) &= \sigma_{11}(\vec{u})\varepsilon_{11}(\vec{v}) + \sigma_{12}(\vec{u})\varepsilon_{12}(\vec{v}) + \sigma_{13}(\vec{u})\varepsilon_{13}(\vec{v}) + \sigma_{21}(\vec{u})\varepsilon_{21}(\vec{v}) + \sigma_{22}(\vec{u})\varepsilon_{22}(\vec{v}) \\ &+ \sigma_{23}(\vec{u})\varepsilon_{23}(\vec{v}) + \sigma_{31}(\vec{u})\varepsilon_{31}(\vec{v}) + \sigma_{32}(\vec{u})\varepsilon_{32}(\vec{v}) + \sigma_{33}(\vec{u})\varepsilon_{33}(\vec{v})\end{aligned}$$

Reemplazando las expresiones para σ_{ij} y reordenando se obtiene

$$\begin{aligned}\sigma(\vec{u}) : \varepsilon(\vec{v}) &= \frac{E}{1+\nu} [\varepsilon_{11}(\vec{u})\varepsilon_{11}(\vec{v}) + \varepsilon_{12}(\vec{u})\varepsilon_{12}(\vec{v}) + \varepsilon_{21}(\vec{u})\varepsilon_{21}(\vec{v}) + \varepsilon_{22}(\vec{u})\varepsilon_{22}(\vec{v})] \\ &\quad + \frac{E}{1+\nu} \left[2(\varepsilon_{13}(\vec{u})\varepsilon_{13}(\vec{v}) + \varepsilon_{23}(\vec{u})\varepsilon_{23}(\vec{v})) + \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{11}(\vec{u}) + \varepsilon_{22}(\vec{u})) (\varepsilon_{11}(\vec{v}) + \varepsilon_{22}(\vec{v})) \right]\end{aligned}$$

A continuación se reemplazan las expresiones para ε_{ij}

$$\begin{aligned}\sigma(\vec{u}) : \varepsilon(\vec{v}) &= \frac{E}{1+\nu} \left[z^2 \frac{\partial\theta_1}{\partial x_1} \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \frac{z^2}{2} \left(\frac{\partial\theta_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\theta_2}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} \right) \right] \\ &\quad + \frac{E}{1+\nu} \left[z^2 \frac{\partial\theta_2}{\partial x_2} \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} - \theta_1 \right) \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_1} - \psi_1 \right) \right] \\ &\quad + \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \theta_2 \right) \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_2} - \psi_2 \right) + \frac{\nu z^2}{1-\nu} \left(\frac{\partial\theta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\theta_2}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} \right) \right] \\ &= \frac{Ez^2}{1-\nu^2} \left[(1-\nu)\varepsilon(\vec{\theta}) : \varepsilon(\vec{\psi}) + \nu \operatorname{div}(\vec{\theta}) \operatorname{div}(\vec{\psi}) \right] + \frac{E}{2(1+\nu)} (\nabla w - \vec{\theta}) \cdot (\nabla\alpha - \vec{\psi})\end{aligned}$$

donde $\varepsilon(\vec{\theta}) = \frac{1}{2} \left(\nabla\vec{\theta} + (\nabla\vec{\theta})^T \right)$ y $\varepsilon(\vec{\psi}) = \frac{1}{2} \left(\nabla\vec{\psi} + (\nabla\vec{\psi})^T \right)$.

Ahora se reemplaza lo anterior en la expresión (2.8) y se integra en z entre $\left[-\frac{T_e}{2}, \frac{T_e}{2} \right]$, siendo T_e el espesor elástico de la placa. Además se define la rigidez flexural como:

$$D(x, y) := T_e^3(x, y) \cdot \bar{D}(x, y), \quad \text{con} \quad \bar{D} = \frac{E}{12(1-\nu^2)} \quad (2.12)$$

Así se obtiene:

$$\begin{aligned}\int_{\omega} \bar{D} T_e^3 \left[(1-\nu)\varepsilon(\vec{\theta}) : \varepsilon(\vec{\psi}) + \nu \operatorname{div}(\vec{\theta}) \operatorname{div}(\vec{\psi}) \right] dx dy &+ \int_{\omega} \mu T_e (\nabla w - \vec{\theta}) \cdot (\nabla\alpha - \vec{\psi}) dx dy \\ &- \int_{\partial\Omega} \sigma(\vec{u}) \hat{n} \cdot \vec{v} dx dy dz = \int_{\omega} g\alpha dx dy\end{aligned} \quad (2.13)$$

donde se ha definido

$$g(x, y) := \int_{-\frac{T_e}{2}}^{\frac{T_e}{2}} f_3(x, y, z) dz,$$

con $f = (0, 0, f_3)$ la carga o fuerza vertical experimentada por la placa.
Definiendo

$$\begin{aligned}\sigma(\vec{\theta}) &= \bar{D} \left[(1 - \nu)\varepsilon(\vec{\theta}) + \nu \text{tr}(\varepsilon(\vec{\theta})) I_{2 \times 2} \right] \\ &= \bar{D} \begin{bmatrix} (1 - \nu)\partial_x \theta_1 + \nu(\partial_x \theta_1 + \partial_y \theta_2) & \frac{(1 - \nu)}{2}(\partial_y \theta_1 + \partial_x \theta_2) \\ \frac{(1 - \nu)}{2}(\partial_y \theta_1 + \partial_x \theta_2) & (1 - \nu)\partial_y \theta_2 + \nu(\partial_x \theta_1 + \partial_y \theta_2) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

la expresión dada en (2.13) puede escribirse como

$$\begin{aligned}0 &= \underbrace{\int_{\omega} \left(T_e^3 \sigma(\vec{\theta}) : \varepsilon(\vec{\psi}) - \mu T_e(\nabla w - \vec{\theta}) \cdot \vec{\psi} \right) dx dy}_{I_1} + \underbrace{\int_{\omega} \left(\mu T_e(\nabla w - \vec{\theta}) \cdot \nabla \alpha - g \alpha \right) dx dy}_{I_2} \\ &\quad - \underbrace{\int_{\partial \Omega} \sigma(\vec{u}) \hat{n} \cdot \vec{v} dx dy dz}_{I_3}\end{aligned}\tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_{\omega} \left(T_e^3 \sigma(\vec{\theta}) : \varepsilon(\vec{\psi}) - \mu T_e(\nabla w - \vec{\theta}) \cdot \vec{\psi} \right) dx dy \\ &= - \int_{\omega} \left(\text{div}(T_e^3 \sigma(\vec{\theta})) + \mu T_e(\nabla w - \vec{\theta}) \right) \cdot \vec{\psi} dx dy + \int_{\partial \omega} T_e^3 \sigma(\vec{\theta}) \hat{n} \cdot \vec{\psi} dx dy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_{\omega} \left(\mu T_e(\nabla w - \vec{\theta}) \cdot \nabla \alpha - g \alpha \right) dx dy \\ &= - \int_{\omega} \left(\text{div}(\mu T_e(\nabla w - \vec{\theta})) + g \right) \alpha dx dy + \int_{\partial \omega} \mu T_e(\nabla w - \vec{\theta}) \cdot \hat{n} \alpha dx dy\end{aligned}$$

Ahora se trabajará la tercera integral I_3 .

$$\sigma(\vec{u}) \hat{n} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(\vec{u}) & \sigma_{12}(\vec{u}) & \sigma_{13}(\vec{u}) \\ \sigma_{21}(\vec{u}) & \sigma_{22}(\vec{u}) & \sigma_{23}(\vec{u}) \\ \sigma_{31}(\vec{u}) & \sigma_{32}(\vec{u}) & \sigma_{33}(\vec{u}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -z\psi_1 \\ -z\psi_2 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\sigma(\vec{u})\hat{n} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(\vec{u})n_1 + \sigma_{12}(\vec{u})n_2 + \sigma_{13}(\vec{u})n_3 \\ \sigma_{21}(\vec{u})n_1 + \sigma_{22}(\vec{u})n_2 + \sigma_{23}(\vec{u})n_3 \\ \sigma_{31}(\vec{u})n_1 + \sigma_{32}(\vec{u})n_2 + \sigma_{33}(\vec{u})n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -z\psi_1 \\ -z\psi_2 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el resultado que se obtiene es el siguiente:

$$\begin{aligned} \sigma(\vec{u})\hat{n} \cdot \vec{v} &= -z\psi_1(\sigma_{11}(\vec{u})n_1 + \sigma_{12}(\vec{u})n_2 + \sigma_{13}(\vec{u})n_3) - z\psi_2(\sigma_{21}(\vec{u})n_1 + \sigma_{22}(\vec{u})n_2 + \sigma_{23}(\vec{u})n_3) \\ &\quad + \alpha(\sigma_{31}(\vec{u})n_1 + \sigma_{32}(\vec{u})n_2 + \sigma_{33}(\vec{u})n_3) \end{aligned}$$

Haciendo uso de las expresiones para las componentes de $\sigma(\vec{u})$ y $\varepsilon(\vec{u})$ se tendrá

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(\vec{u}) &= \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_{11}(\vec{u}) + \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{11}(\vec{u}) + \varepsilon_{22}(\vec{u})) \right] \\ &= \frac{E}{1+\nu} \left[-z \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} + \frac{\nu}{1-\nu} \left(-z \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} - z \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} \right) \right] \\ &= \frac{-E \cdot z}{1-\nu^2} \left[(1-\nu) \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} + \nu \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} \right) \right] \\ &= -12\bar{D} \cdot z \left[(1-\nu) \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} + \nu \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} \right) \right] \\ &= -12z\sigma_{11}(\vec{\theta}) \end{aligned}$$

Análogamente se tendrá que:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(\vec{u}) &= -12z\sigma_{11}(\vec{\theta}) \\ \sigma_{22}(\vec{u}) &= -12z\sigma_{22}(\vec{\theta}) \\ \sigma_{33}(\vec{u}) &= 0 \\ \sigma_{12}(\vec{u}) &= \sigma_{21}(\vec{u}) = -12z\sigma_{12}(\vec{\theta}) \\ \sigma_{13}(\vec{u}) &= \sigma_{31}(\vec{u}) = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} - \theta_1 \right) \\ \sigma_{23}(\vec{u}) &= \sigma_{32}(\vec{u}) = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \theta_2 \right) \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\sigma(\vec{u})\hat{n} \cdot \vec{v} &= -z\psi_1 \left[-12z\sigma_{11}(\vec{\theta})n_1 - 12z\sigma_{12}(\vec{\theta})n_2 + \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} - \theta_1 \right) n_3 \right] \\
&\quad - z\psi_1 \left[-12z\sigma_{21}(\vec{\theta})n_1 - 12z\sigma_{22}(\vec{\theta})n_2 + \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \theta_2 \right) n_3 \right] \\
&\quad + \alpha \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} - \theta_1 \right) n_1 + \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \theta_2 \right) n_2 \right] \\
&= 12z^2\psi_1 \left(\sigma_{11}(\vec{\theta})n_1 + \sigma_{12}(\vec{\theta})n_2 \right) - z\psi_1\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} - \theta_1 \right) n_3 \\
&\quad + 12z^2\psi_2 \left(\sigma_{21}(\vec{\theta})n_1 + \sigma_{22}(\vec{\theta})n_2 \right) - z\psi_2\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \theta_2 \right) n_3 \\
&\quad + \alpha\mu(\nabla w - \vec{\theta}) \cdot \hat{n} \\
&= 12z^2\sigma(\vec{\theta})\hat{n} \cdot \vec{\psi} - z\mu(\nabla w - \vec{\theta}) \cdot \vec{\psi} n_3 + \alpha\mu(\nabla w - \vec{\theta}) \cdot \hat{n}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, integrando en z entre $-\frac{T_e}{2}$ y $\frac{T_e}{2}$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{\partial\Omega} \sigma(\vec{u})\hat{n} \cdot \vec{v} = \int_{\partial\omega} \left(\int_{-T_e/2}^{T_e/2} \left[12z^2\sigma(\vec{\theta})\hat{n} \cdot \vec{\psi} - z\mu(\nabla w - \vec{\theta}) \cdot \vec{\psi} n_3 + \alpha\mu(\nabla w - \vec{\theta}) \cdot \hat{n} \right] dz \right) \\
&= \int_{\partial\omega} 12 \left(\frac{z^3}{3} \right) \Big|_{-T_e/2}^{T_e/2} \sigma(\vec{\theta})\hat{n} \cdot \vec{\psi} - \left(\frac{z^2}{2} \right) \Big|_{-T_e/2}^{T_e/2} \mu(\nabla w - \vec{\theta}) \cdot \vec{\psi} n_3 + \alpha\mu(\nabla w - \vec{\theta}) \cdot \hat{n} T_e \\
&= \int_{\partial\omega} \frac{12}{3} \left(\frac{T_e^3}{8} + \frac{T_e^3}{8} \right) \sigma(\vec{\theta})\hat{n} \cdot \vec{\psi} + \mu T_e (\nabla w - \vec{\theta}) \cdot \hat{n} \alpha \\
I_3 &= \int_{\partial\omega} T_e^3 \sigma(\vec{\theta})\hat{n} \cdot \vec{\psi} + \int_{\partial\omega} \mu T_e (\nabla w - \vec{\theta}) \cdot \hat{n} \alpha
\end{aligned}$$

Con todo lo anterior, la formulaci3n variacional, formulaci3n d3bil o forma integral, dada en la expresi3n (2.14), del problema bajo las hip3tesis H1-H4 resulta:

$$0 = - \int_{\omega} \left(\operatorname{div}(T_e^3 \sigma(\vec{\theta})) + \mu T_e (\nabla w - \vec{\theta}) \right) \cdot \vec{\psi} \, dx dy - \int_{\omega} \left(\operatorname{div}(\mu T_e (\nabla w - \vec{\theta})) + g \right) \alpha \, dx dy$$

Por lo tanto $(\vec{\theta}, w)$ es soluci3n d3bil del sistema

$$\begin{aligned}
-\operatorname{div}(T_e^3 \sigma(\vec{\theta})) - \mu T_e (\nabla w - \vec{\theta}) &= 0 \\
-\operatorname{div}(\mu T_e (\nabla w - \vec{\theta})) &= g
\end{aligned}$$

A las dos ecuaciones anteriores se les agrega un factor de correcci3n conocido como factor de cizalle o *shear coefficient* para obtener las ecuaciones de placas del modelo de Reissner-Mindlin.

Este factor de corrección es un parámetro de ajuste que varía dependiendo si se está modelando una placa gruesa, una viga o una membrana, y lo que hace es compensar la distribución de tensión en la sección transversal del objeto [Hull, 2004]. En ocasiones se le denomina coeficiente de cizalle de Timoshenko y corresponde a una función del módulo de Poisson.

Finalmente las ecuaciones del modelo de Reissner-Mindlin para una placa delgada son:

$$-\operatorname{div}(T_e^3 \sigma(\vec{\theta})) - \lambda^* T_e(\nabla w - \vec{\theta}) = 0 \quad (2.15)$$

$$-\operatorname{div}(\lambda^* T_e(\nabla w - \vec{\theta})) = g \quad (2.16)$$

donde $\lambda^* = k \cdot \mu$, con $k = \frac{5}{6 - \nu}$.

2.3. Modelo de Kirchhoff-Love (K-L)

2.3.1. Hipótesis

El modelo de Reissner-Mindlin mostrado en la sección anterior es un modelo general para cualquier tipo de placa delgada. Sin embargo si sólo se consideran deformaciones pequeñas, si el espesor de la placa es suficientemente pequeño en relación a su largo y ancho, y se desprecian las deformaciones de corte, la formulación anterior se puede simplificar agregando una quinta hipótesis al problema. Esta quinta hipótesis se conoce como Hipótesis normal, Hipótesis de Love o Hipótesis de Kirchhoff.

H5. Las deformaciones de los vectores normales a la superficie media serán ortogonales a la superficie media deformada.

La hipótesis normal implicará que las rotaciones ya no serán independientes de las flexiones.

$$\left. \begin{aligned} \theta_i(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x_i} w(x, y), \\ u_i(x, y, z) &= -z \frac{\partial w}{\partial x_i}(x, y), \end{aligned} \right\} i = 1, 2 \quad (2.17)$$

2.3.2. Deducción de las ecuaciones fundamentales

Si tomamos $-\operatorname{div}(2.15) + (2.16)$ se obtiene

$$\operatorname{div}(\operatorname{div}(T_e^3 \sigma(\vec{\theta}))) = g$$

Luego se aplica la condición impuesta por H5 dada en la expresión (2.17) obteniéndose

$$T_e^3 \sigma(\vec{\theta}) = D \begin{bmatrix} \partial_{xx}w + \nu\partial_{yy}w & (1-\nu)\partial_{xy}w \\ (1-\nu)\partial_{xy}w & \nu\partial_{xx}w + \partial_{yy}w \end{bmatrix}$$

Recordando que la divergencia de una matriz o tensor de segundo orden corresponde a un vector cuyas componentes están dadas por: $\text{div}(A_{ij}) = V_j = \sum_i \partial_i A_{ij}$ se obtiene que la ecuación diferencial de la flexura para una placa de espesor elástico variable está dada por:

$$\partial_{xx}(D(\partial_{xx}w + \nu\partial_{yy}w)) + 2\partial_{xy}(D(1-\nu)\partial_{xy}w) + \partial_{yy}(D(\nu\partial_{xx}w + \partial_{yy}w)) = g \quad (2.18)$$

Si adicionalmente se supone que el espesor elástico es constante a lo largo de la placa, la ecuación diferencial anterior se simplifica a:

$$D\nabla^4 w = g$$

En el caso del presente estudio la fuerza neta vertical que experimenta la placa $g(x, y)$ es igual a la suma de una carga impuesta por la batimetría $q(x, y)$ (por ejemplo un monte submarino como el O'Higgins Guyot) menos una fuerza en dirección opuesta. Esta última se debe a que cuando una placa litosférica se flexa, por ejemplo hacia abajo, se genera una cavidad o depresión, la cual generalmente es rellenada por material menos denso que el manto dando origen a una fuerza hidrostática restauradora. Por lo tanto

$$g(x, y) = q(x, y) - (\rho_m - \rho_{infill})gw = q(x, y) - \Delta\rho gw$$

donde ρ_m corresponde a la densidad del manto y ρ_{infill} a la densidad del material que rellena la depresión flexural. Así se obtiene la conocida expresión

$$D\nabla^4 w + (\rho_m - \rho_{infill})gw = q \quad (2.19)$$

En general, cuando se calcula la flexura de la litósfera continental, se asume $\rho_{infill} = \rho_c$, mientras que si se quiere calcular la flexura de una placa oceánica que subducta en una fosa se asume que la depresión flexural será principalmente rellenada por agua, es decir, $\rho_{infill} = \rho_w$. Para el caso particular de un monte submarino lejos de una zona de subducción, la cavidad será rellenada principalmente por el material piroclástico del monte submarino y por ello se considera $\rho_{infill} = \rho_c$.

Capítulo 3

Modelo de Densidad para la zona de Juan Fernández

Para validar los modelos elásticos propuestos para la primera zona de estudio se necesitan datos con los cuales realizar una posterior comparación. Es por ello que se realiza un modelo de capas y densidades basado en el método espectral de [Parker \[1973\]](#) (para más detalles ver [Korenaga et al. \[2001\]](#)). Se propone un modelo de velocidades por capas, luego se calcula el efecto gravimétrico producido por el modelo propuesto, posteriormente se compara con los datos de gravedad observados y se modifica el modelo de manera de minimizar el desajuste o error RMS (*Root Mean Square*) entre la gravedad observada y la calculada. Los datos de gravedad reflejan la anomalía de aire libre sobre los perfiles estudiados y son obtenidos de bases de datos de libre acceso ([Sandwell & Smith \[1997\]](#)).

Se asume una densidad del manto de 3300 kg/m^3 . Inicialmente se propone un modelo de velocidades (V), como el que se muestra en la Figura 3.1, el cual posteriormente se convierte a un modelo de densidades (ρ) mediante las siguientes relaciones:

Relación de [Nafe & Drake \[1963\]](#) para la sección sedimentaria,

$$\rho = 1,75 + 0,16V$$

Relación de [Carlson & Herrick \[1990\]](#) para la corteza superior ígnea,

$$\rho = 3,61 - 6,0/V$$

Ley de [Birch \[1961\]](#) para la plagioclasa y la diorita-gabro eclogita (corteza inferior),

$$\rho = 0,375(1 + V)$$

El error RMS se calcula como se muestra a continuación:

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N (g_i^{obs} - g_i^{calc})^2}$$

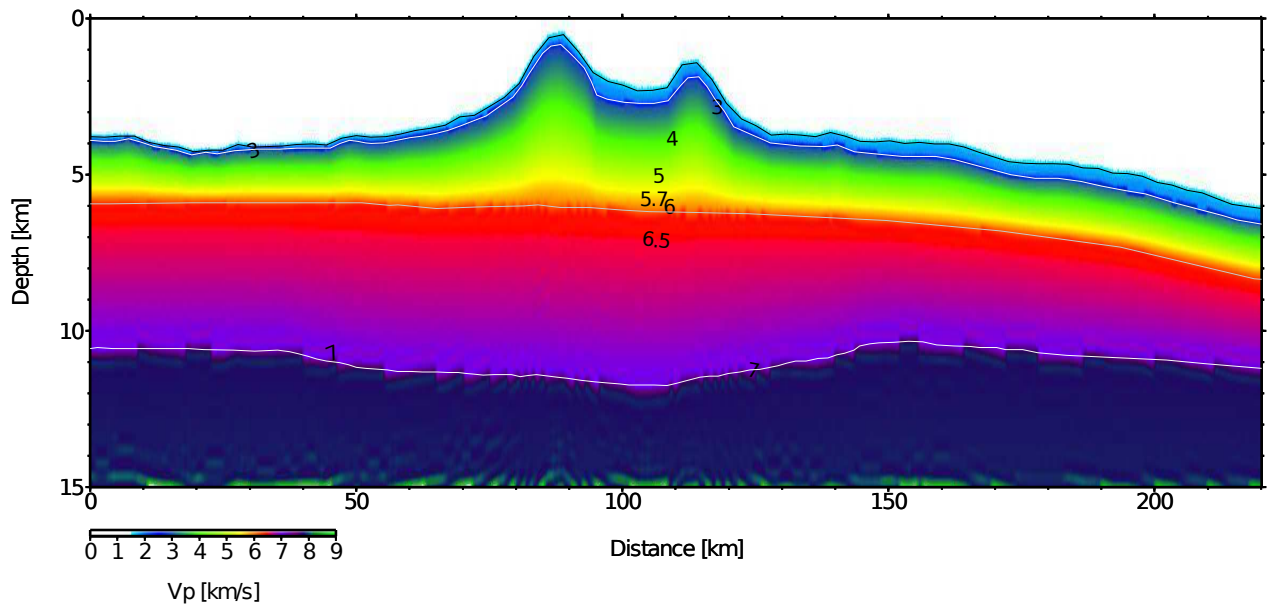


Figura 3.1: Modelo de velocidades propuesto para el perfil P01. Éste se utiliza para calcular la anomalía de gravedad de la zona, la cual posteriormente se contrasta con datos observados. El Moho propuesto se basa en el trabajo de Contreras-Reyes & Sepúlveda [2011].

donde N corresponde al número de puntos a lo largo del perfil, g^{obs} a la gravedad observada (datos) y g^{calc} a la gravedad calculada a través del modelo de densidades propuesto.

La parte superior de la Figura 3.2 muestra la anomalía gravimétrica de aire libre observada (negro) y la obtenida a partir del modelo de densidades (gris) mostrado en la parte inferior de la Figura. La anomalía calculada a partir del modelo de velocidades mostrado en la Figura 3.1 ajusta bien a los datos de gravedad observados y el error RMS asociado al modelo es de ~ 7.6 [mGal].

Con el modelo anterior se obtiene el Moho a lo largo del perfil P01, el que posteriormente se compara con los resultados de los cálculos de flexura de los distintos modelos.

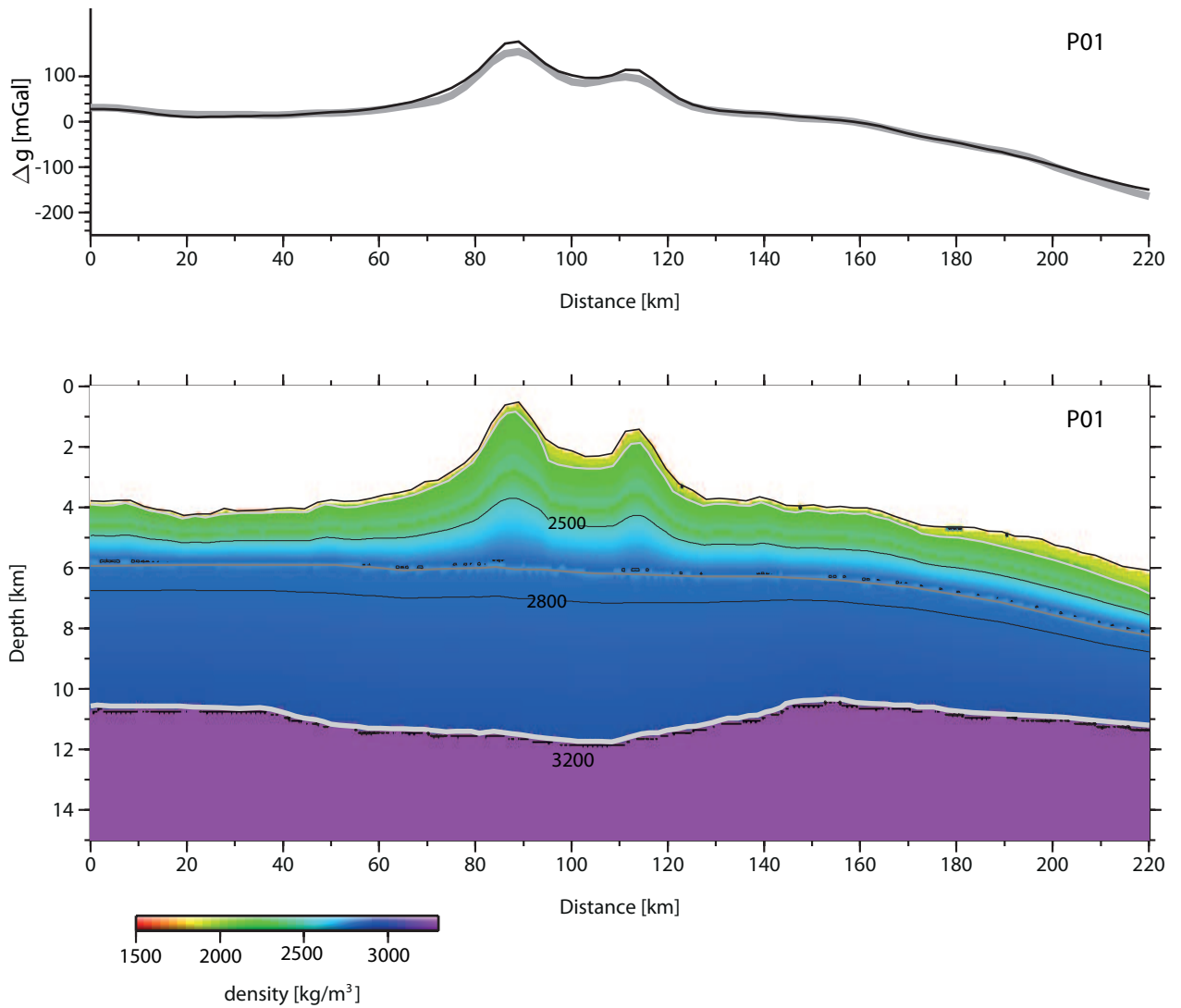


Figura 3.2: (superior) Anomalia de Bouguer (negro) observada sobre el perfil P01 mostrado en la Figura 1.2b y la anomalia de Bouguer calculada (gris) para el modelo de densidades mostrado más abajo. El error RMS es de ~ 7.6 [mGal]. (inferior) Modelo de densidades para el perfil P01.

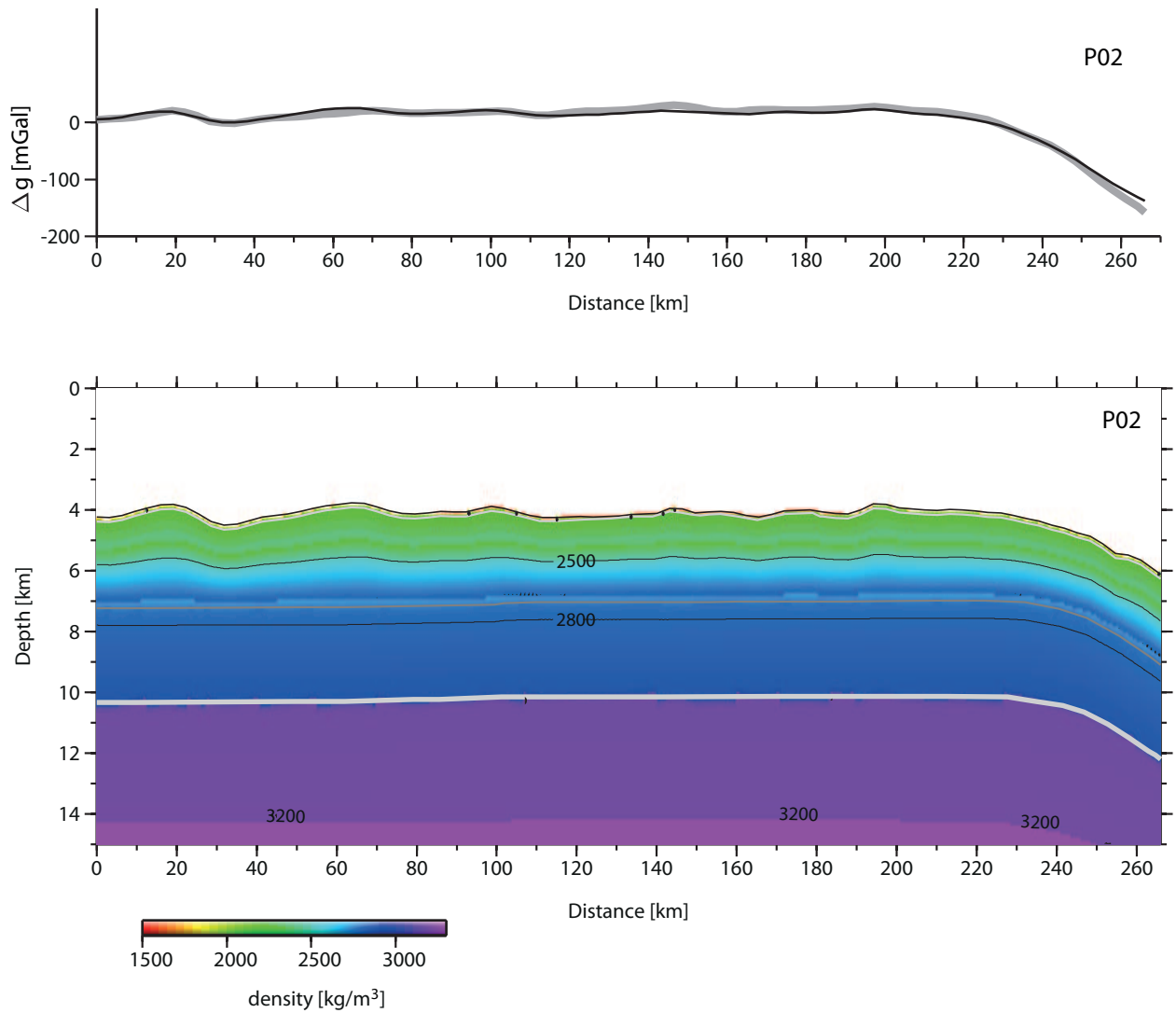


Figura 3.3: (superior) Anomalía de Bouguer (negro) observada sobre el perfil P02 mostrado en la Figura 1.2b y la anomalía de Bouguer calculada (gris) para el modelo de densidades mostrado más abajo. El error RMS es de ~ 5.9 [mGal]. (inferior) Modelo de densidades para el perfil P02.

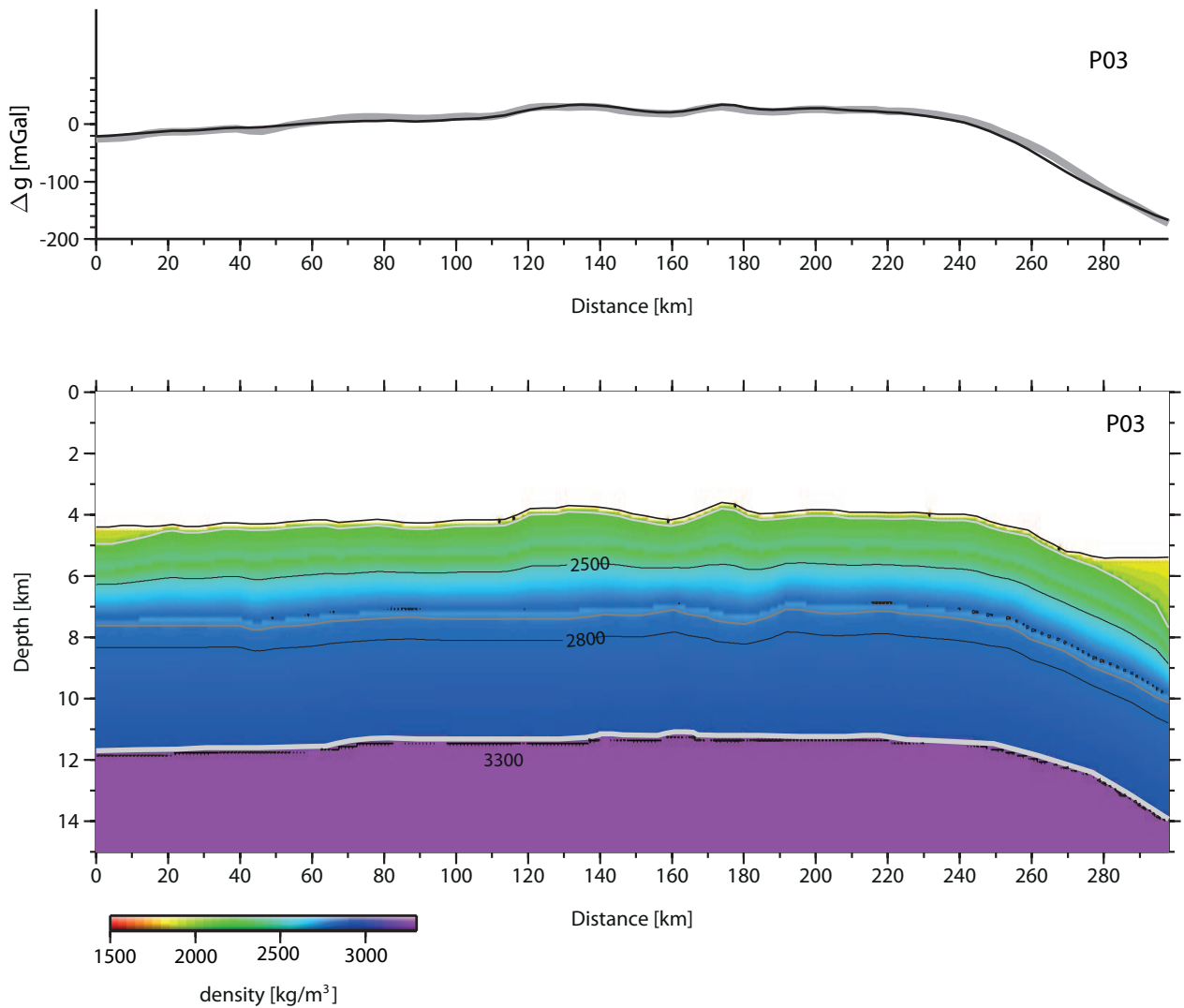


Figura 3.4: (superior) Anomalía de Bouguer (negro) observada sobre el perfil P03 mostrado en la Figura 1.2b y la anomalía de Bouguer calculada (gris) para el modelo de densidades mostrado más abajo. El error RMS es de ~ 5 [mGal]. (inferior) Modelo de densidades para el perfil P03.

Capítulo 4

Resolución analítica del modelo de K-L lejos de una zona de subducción

4.1. Introducción

Uno de los principales objetivos de este trabajo de tesis es crear un modelo tridimensional general realista para la flexión de una placa elástica, capaz de reproducir la flexura causada tanto por la subducción de una placa en la fosa como por la aplicación de cargas batimétricas. Es por ello que es de fundamental importancia contar con las herramientas necesarias para validar los modelos propuestos. Como ya fue mencionado anteriormente, se cuenta con un modelo capaz de calcular la flexión causada por una carga infinita en una dirección (bidimensional) cerca de una zona de subducción considerando un espesor elástico variable, presentado en el trabajo de [Contreras-Reyes & Osses \[2010\]](#). Sin embargo también es necesario contar con una herramienta que permita calcular la flexura producida por una carga finita en todas sus direcciones, como podría ser un monte submarino.

Existen otros métodos, como el propuesto por [Braitenberg et al. \[2002\]](#), donde se trabaja la flexura como un filtro en el espacio que utiliza transformadas de Fourier. En aquel método se debe ser cuidadoso con la resolución de la batimetría y con la frecuencia de Nyquist utilizada para realizar la transformada inversa de Fourier. Sin embargo el método no está exento de errores ya que se debe sacrificar precisión a cambio de optimización en los cálculos debido a la capacidad finita computacional.

Por otro lado, existe una función dentro de la colección de herramientas conocidas como GMT (*Generic Mapping Tools*, [Wessel & Smith \[1998\]](#)) capaz de calcular la flexura producida debido a una carga cualquiera alejada de una zona de subducción. Sin embargo se trata de una herramienta que opera en el dominio de frecuencias, que no ofrece ningún tipo de garantía en sus resultados y sólo pretende ser una herramienta útil en lo cualitativo. Además, cuenta con ciertos parámetros fijos, los cuales podrían no ser los adecuados para determinada zona de estudio. Utiliza un valor fijo para el Módulo de Young de 10^{11} Pa, un valor de 0.25 para la razón de Poisson y una gravedad normal de $9.806199203 \text{ m/s}^2$.

Por todas las razones anteriormente expuestas es que se decide calcular la expresión analítica de la respuesta flexural a una carga puntual, de manera de poder realizar posteriormente una convolución con una distribución de masa cualquiera. Es decir, se busca la función de Green de la ecuación

de flexura dada en (2.19).

4.2. Solución Analítica

El punto de partida del presente desarrollo corresponde a la ecuación (2.19). Debido a que la depresión que se genera producto del peso del monte será principalmente rellenada por material piroclástico del mismo monte submarino, se considera $\rho_{infill} = \rho_c$. Por lo tanto la ecuación a resolver es:

$$D\nabla^4 w + (\rho_m - \rho_c)gw = q$$

Se calcula la solución de la ecuación anterior cuando se tiene una carga puntual en el espacio con valor p , es decir, cuando $q = p \cdot \delta(x)\delta(y)$.

Aplicando una transformada de Fourier en el espacio a la ecuación anterior se obtiene

$$\rightarrow Dk^4 \bar{w} + (\rho_m - \rho_c)g\bar{w} = p$$

donde $\vec{k} = (k_x, k_y)$, es decir, $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. A continuación se despeja \bar{w}

$$\bar{w} = \frac{p}{Dk^4 + (\rho_m - \rho_c)g} = \frac{p}{(\rho_m - \rho_c)g} \cdot \frac{1}{\frac{4Dk^4}{4(\rho_m - \rho_c)g} + 1}$$

Se define el parámetro flexural del modelo α tal que $\alpha^4 = \frac{4D}{(\rho_m - \rho_c)g}$. Este parámetro posee dimensiones de longitud y es un parámetro que determina la amplitud y la longitud de onda de la flexura de la placa. Con lo anterior se tiene que

$$\rightarrow \bar{w} = \frac{p}{(\rho_m - \rho_c)g} \cdot \frac{1}{\frac{\alpha^4 k^4}{4} + 1}$$

Por simplicidad se decide trabajar en coordenadas polares. A continuación se aplica la transformada de Fourier inversa, obteniéndose la siguiente integral

$$w(r, \theta) = \frac{p}{(\rho_m - \rho_c)g} \cdot \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty dk e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \cdot \frac{k}{\frac{\alpha^4 k^4}{4} + 1}$$

donde $\vec{r} = (x, y)$; $\vec{k} = (k_x, k_y)$. El producto interno $\vec{k} \cdot \vec{r}$ puede escribirse como $kr \cos \theta$, donde θ corresponde al ángulo entre los vectores \vec{k} y \vec{r} , por lo tanto

$$w(r, \theta) = \frac{p}{(\rho_m - \rho_c)g} \cdot \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty dk e^{ikr \cos \theta} \cdot \frac{k}{\frac{\alpha^4 k^4}{4} + 1}$$

con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$.

Pero como se muestra en la ecuación 11.30c (página 680) del libro de [Arfken & Weber \[2005\]](#)

$$\int_0^{2\pi} d\theta e^{ikr \cos \theta} = 2\pi J_0(kr)$$

Además si se observa el ejercicio 11.1.9 de la página 688 del mismo libro

$$J_0(kr) = \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{\sin(krv)}{\sqrt{v^2-1}} dv$$

Por lo tanto, continuando con el desarrollo se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} w &= \frac{p}{(\rho_m - \rho_c)g} \cdot \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{k}{\frac{\alpha^4 k^4}{4} + 1} \cdot 2\pi J_0(kr) \\ &= \frac{p}{(\rho_m - \rho_c)g} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk \frac{k}{\frac{\alpha^4 k^4}{4} + 1} \cdot \frac{2}{\pi} \int_1^\infty dv \frac{\sin(krv)}{\sqrt{v^2-1}} \end{aligned}$$

$$\text{Sea } \xi = \frac{\alpha k}{\sqrt{2}} \rightarrow k = \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \xi$$

$$w = \frac{p}{(\rho_m - \rho_c)g} \cdot \frac{1}{\pi^2} \int_1^\infty dv \frac{1}{\sqrt{v^2-1}} \int_0^\infty d\xi \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{\alpha} \xi}{\xi^4 + 1} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{\alpha} \xi rv\right)$$

$$\text{Se calcula primero la integral } I = \int_0^\infty d\xi \frac{\xi}{\xi^4 + 1} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{\alpha} \xi rv\right)$$

$$\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{\alpha} \xi rv\right) = \frac{1}{2i} \left(e^{i\frac{\sqrt{2}}{\alpha} \xi rv} - e^{-i\frac{\sqrt{2}}{\alpha} \xi rv} \right)$$

$$\rightarrow I = \frac{1}{2i} \left(\int_0^\infty d\xi \frac{\xi}{\xi^4 + 1} e^{i\frac{\sqrt{2}}{\alpha} \xi rv} - \int_0^\infty d\xi \frac{\xi}{\xi^4 + 1} e^{-i\frac{\sqrt{2}}{\alpha} \xi rv} \right)$$

Haciendo un cambio de variable $\xi' \rightarrow -\xi$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2i} \left(\int_0^\infty d\xi \frac{\xi}{\xi^4 + 1} e^{i\frac{\sqrt{2}}{\alpha} \xi rv} - \int_0^{-\infty} d\xi' \frac{\xi'}{\xi'^4 + 1} e^{i\frac{\sqrt{2}}{\alpha} \xi' rv} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\int_0^\infty d\xi \frac{\xi}{\xi^4 + 1} e^{i\frac{\sqrt{2}}{\alpha} \xi rv} + \int_{-\infty}^0 d\xi' \frac{\xi'}{\xi'^4 + 1} e^{i\frac{\sqrt{2}}{\alpha} \xi' rv} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^\infty d\xi \frac{\xi}{\xi^4 + 1} e^{i\frac{\sqrt{2}}{\alpha} \xi rv} \end{aligned}$$

Además

$$\frac{\xi}{\xi^4 + 1} = \frac{\xi}{(\xi^2 - i)(\xi^2 + i)} = \frac{\xi}{2i} \left(\frac{1}{\xi^2 - i} - \frac{1}{\xi^2 + i} \right) = \frac{1}{4i} \left(\frac{1}{\xi - \xi_+} + \frac{1}{\xi + \xi_+} - \frac{1}{\xi - \xi_-} - \frac{1}{\xi + \xi_-} \right)$$

donde $\xi_+ = e^{\frac{i\pi}{4}} = \frac{i+1}{\sqrt{2}}$ y $\xi_- = e^{\frac{i3\pi}{4}} = \frac{i-1}{\sqrt{2}}$. Por lo tanto la expresión para w será:

$$w = \frac{p}{(\rho_m - \rho_c)g} \cdot \frac{2}{\pi^2 \alpha^2} \cdot \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{4i} \int_1^\infty dv \frac{1}{\sqrt{v^2-1}} \int_{-\infty}^\infty d\xi e^{i\frac{\sqrt{2}}{\alpha} \xi rv} \left(\frac{1}{\xi - \xi_+} + \frac{1}{\xi + \xi_+} - \frac{1}{\xi - \xi_-} - \frac{1}{\xi + \xi_-} \right)$$

Para realizar la integración en la variable ξ se usará el camino de integración mostrado en la Figura 4.1 en rojo.

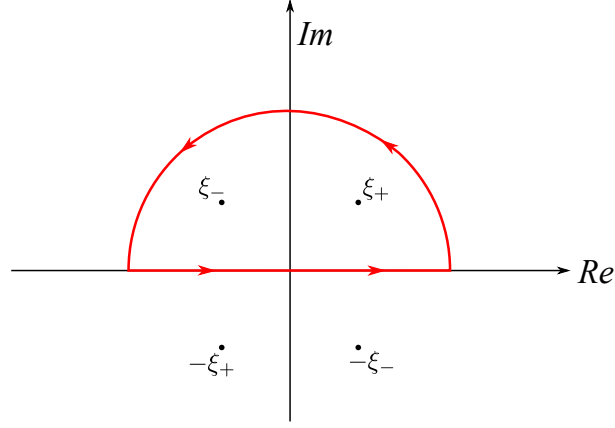


Figura 4.1: Camino de integración definido en el plano complejo.

$$\begin{aligned}
w &= \frac{p}{(\rho_m - \rho_c)g} \cdot \frac{2}{\pi^2 \alpha^2} \cdot \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{4i} \int_1^\infty dv \frac{1}{\sqrt{v^2 - 1}} \cdot 2\pi i \left(e^{i\frac{\sqrt{2}}{\alpha}\xi_+rv} - e^{i\frac{\sqrt{2}}{\alpha}\xi_-rv} \right) \\
&= \frac{p}{(\rho_m - \rho_c)g} \cdot \frac{1}{2i\pi\alpha^2} \int_1^\infty dv \frac{1}{\sqrt{v^2 - 1}} \left(e^{i\frac{\sqrt{2}}{\alpha}\frac{(i+1)}{\sqrt{2}}rv} - e^{i\frac{\sqrt{2}}{\alpha}\frac{(i-1)}{\sqrt{2}}rv} \right) \\
&= \frac{p}{(\rho_m - \rho_c)g} \cdot \frac{1}{2i\pi\alpha^2} \int_1^\infty dv \frac{1}{\sqrt{v^2 - 1}} e^{-\frac{rv}{\alpha}} \left(e^{\frac{irv}{\alpha}} - e^{-\frac{irv}{\alpha}} \right) \\
&= \frac{p}{(\rho_m - \rho_c)g} \cdot \frac{1}{2i\pi\alpha^2} \int_1^\infty dv \frac{1}{\sqrt{v^2 - 1}} e^{-\frac{rv}{\alpha}} \cdot 2i \sin\left(\frac{rv}{\alpha}\right) \\
&= \frac{p}{(\rho_m - \rho_c)g} \cdot \frac{1}{\pi\alpha^2} \int_1^\infty dv \frac{1}{\sqrt{v^2 - 1}} e^{-\frac{rv}{\alpha}} \cdot \sin\left(\frac{rv}{\alpha}\right)
\end{aligned}$$

Sea $a = 1/\alpha$ el inverso del parámetro flexural.

$$w = \frac{pa^2}{(\rho_m - \rho_c)g\pi} \int_1^\infty dv \frac{1}{\sqrt{v^2 - 1}} e^{-rav} \cdot \sin(rav)$$

Esta expresión difiere de la expresión encontrada por [Hertz \[1884\]](#) y posteriormente utilizada por [Watts et al. \[1975\]](#) y por [Walcott \[1970\]](#) en un factor dos. En el trabajo de [Walcott \[1970\]](#) se vislumbra un problema en la amplitud de la flexura calculada, no así en la longitud de onda observada. Incluso se asegura que las amplitudes calculadas son menos de la mitad de las observadas [[Walcott, 1970](#)].

Finalmente cuando $p = 1$ lo que se obtiene es la función de Green de la ecuación diferencial (2.19).

$$G = \frac{a^2}{(\rho_m - \rho_c)g\pi} \int_1^\infty dv \frac{1}{\sqrt{v^2 - 1}} e^{-rav} \cdot \sin(rav)$$

Y como ya fue mencionado, si se hace una convolución de la función de Green con una distribución de masa $M(x, y)$ es posible obtener la flexura producida por esta distribución de masa, es decir

$$w(x, y) = G * M(x, y) \cdot g \quad (4.1)$$

El cálculo de la función de Green y de la convolución (4.1) fue realizada mediante un programa escrito en *Matlab* para calcular la flexura producida por dos montes submarinos del ridge de Juan Fernández, el O'Higgins Guyot y el Monte O'Higgins. La función $M(x, y)$ corresponde a la masa efectiva que producirá flexión, es decir, $M(x, y) = \text{Batimetría} \times (\rho_c - \rho_w)$.

4.3. Validación de la solución analítica

La validación de la solución analítica propuesta se realiza a través de la comparación con la flexura calculada mediante la función `grdfft` de la lista de herramientas GMT (*Generic Mapping Tools*). Para ello se utilizan los parámetros que se listan en la Tabla 4.1

Nombre	Símbolo	Valor	Unidades
Módulo de Young	E	10^{11}	Pa
Aceleración de gravedad	g	9.8	$m s^{-2}$
Razón de Poisson	ν	0.25	
Densidad del manto	ρ_m	3300	$kg \cdot m^{-3}$
Densidad sedimentos	ρ_s	2000	$kg \cdot m^{-3}$
Densidad del agua	ρ_w	1030	$kg \cdot m^{-3}$
Densidad de la corteza	ρ_c	2700	$kg \cdot m^{-3}$

Tabla 4.1: Valores de las constantes utilizadas.

Con los parámetros dados en la Tabla 4.1 se calcula la flexura producida por una carga Gaussiana dada por $z = 5 \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{80} - \frac{y^2}{80}\right)$ [km] (Figura 4.2a) y con un espesor elástico constante $T_e = 1$ km. La flexura resultante se compara con aquella calculada a través de GMT. La comparación se muestra en la Figura 4.2g en la cual se puede apreciar que los resultados son prácticamente idénticos.

A continuación se decide realizar otra prueba de validación introduciendo una carga rectangular de 5 km de altura y de base cuadrada de 20 km de lado para luego comparar con los resultados entregados por GMT. Los parámetros utilizados corresponden a los listados en la Tabla 4.1 y se

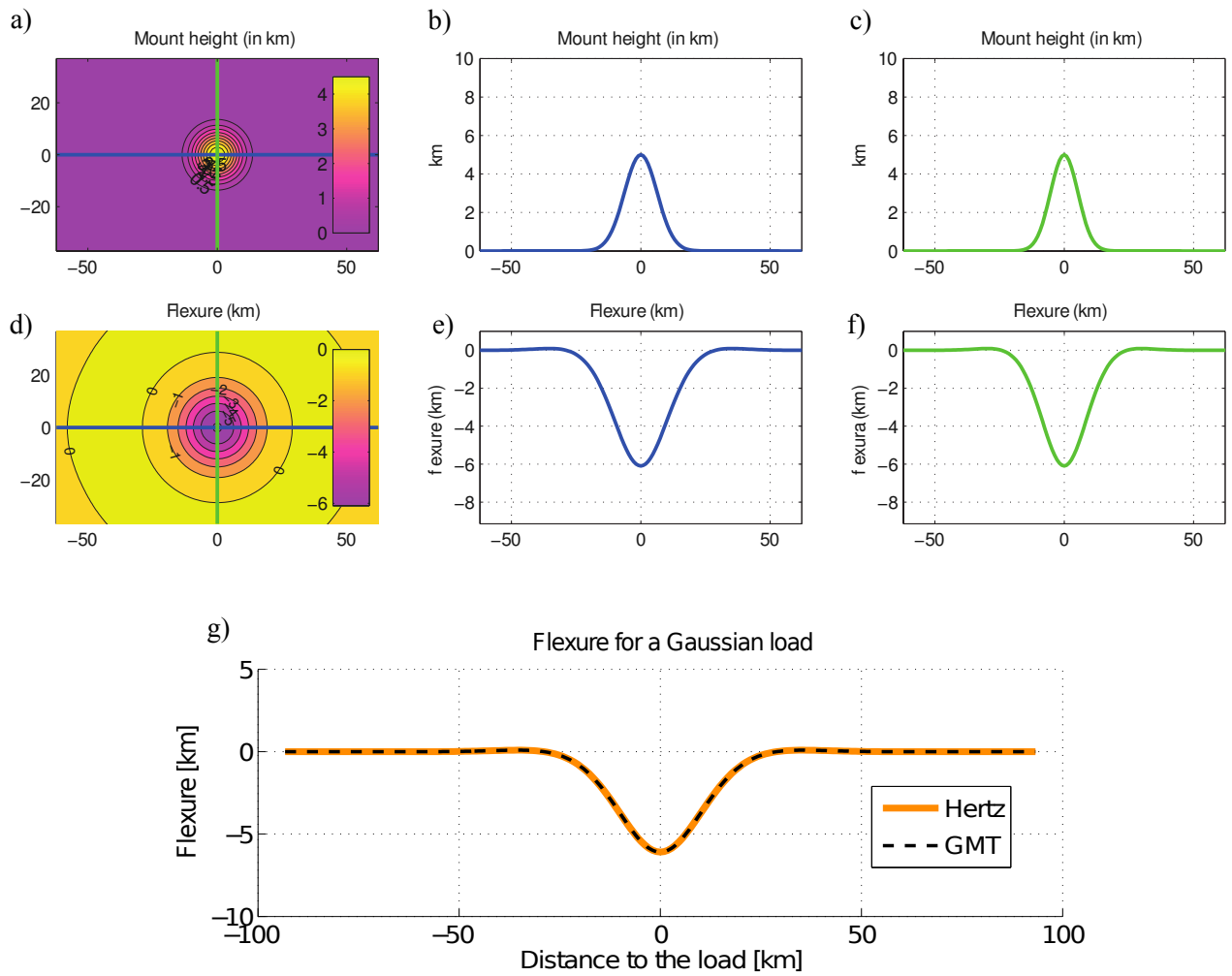


Figura 4.2: a) Carga artificial gaussiana usada para calcular la flexura mediante la expresión dada en (4.1). b) y c) Perfiles verticales en la dirección x e y de la carga respectivamente. d) Flexura resultante calculada a través de la convolución de la función de Green de la ecuación (2.19) con la gaussiana mostrada en a). e) y f) Perfiles verticales en la dirección x e y de la flexura resultante mostrada en d) respectivamente. g) Comparación entre la flexura calculada mediante la solución analítica propuesta (naranja) y la calculada con el uso de GMT (negra punteada).

calcula para un espesor elástico constante $T_e = 1$ km. Al igual que en la prueba anterior, se puede observar que los resultados son idénticos. La comparación de éstos se muestra en la Figura 4.3.

4.4. Cálculo de la flexura perfil P01

Una vez validado el modelo, se procede a calcular la flexura que producen el O'Higgins Guyot y el Monte O'Higgins ubicados en la primera zona de estudio mostrada en la Figura 1.2 de manera de poder encontrar el espesor elástico de la litosfera oceánica en aquella zona. Para ello es necesario contar con datos reales del Moho bajo las montañas submarinas para poder así contrastar con los resultados de los modelos propuestos. Se realizó, como ya fue mencionado anteriormente, un modelo de gravedad como fue mostrado en el Capítulo 3.

La batimetría de la zona de estudio se muestra en la Figura 4.4a. De manera de calcular la flexura producida únicamente por los montes submarinos se procede a remover todo aquello que pertenece

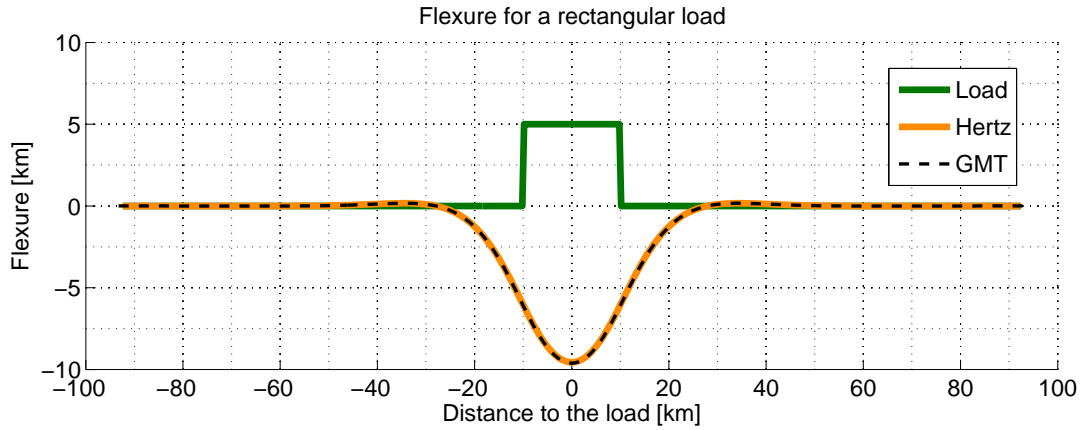


Figura 4.3: Se muestra en verde la carga rectangular utilizada. El resultado entregado por la versión corregida de la solución entregada por Hertz se muestra en color naranja y la flexura calculada a través de GMT se muestra en línea punteada negra.

al continente, por lo que finalmente la carga utilizada en el modelo es aquella que se muestra en la Figura 4.4b. El resultado arrojado por el modelo, utilizando un espesor elástico constante de 12 km, y un módulo de Young de 70×10^9 Pa es el que se muestra en la Figura 4.4c al cual posteriormente se le extrae el perfil P01 y se compara con el Moho gravimétrico encontrado en el Capítulo 3. La comparación del Moho gravimétrico con el Moho calculado a través del modelo analítico propuesto para el perfil P01 se muestra a continuación en la Figura 4.5. Se puede apreciar que el ajuste en cuanto a la amplitud bajo los montes es razonable, sin embargo, la curva calculada no es capaz de ajustar en la zona más próxima a la fosa (lado derecho de la Figura 4.5).

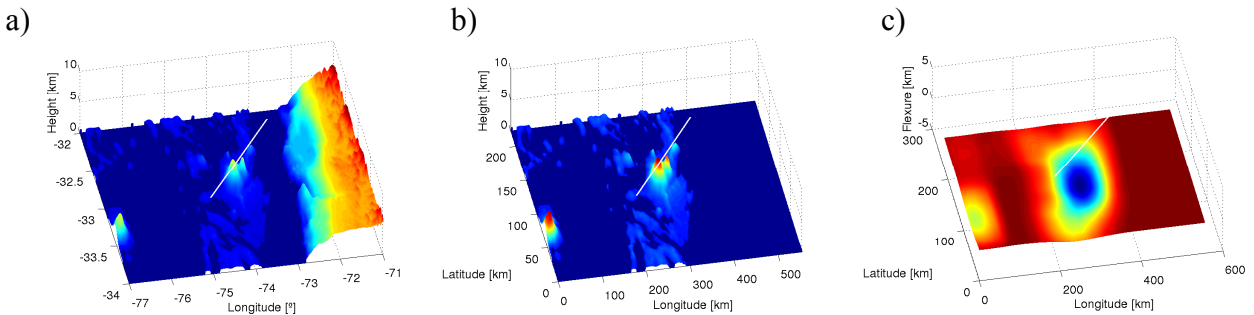


Figura 4.4: a) Batimetría real de la primera zona de estudio en la cual se pueden observar dos montes submarinos. El de mayor tamaño corresponde al O'Higgins Guyot y el de menor tamaño al Monte O'Higgins los cuales también se aprecian en la Figura 1.2b. La línea blanca que se observa corresponde al perfil P01. b) Se remueve la parte continental de la batimetría de manera de no considerarla como parte de la carga sobre la placa oceánica para así calcular la flexura producida únicamente por los montes. c) Flexura resultante usando el modelo analítico que emplea la expresión dada en (4.1) con la función de Green previamente encontrada. Se utiliza un espesor elástico constante $T_e = 12$ km y un módulo de Young de 70×10^9 Pa.

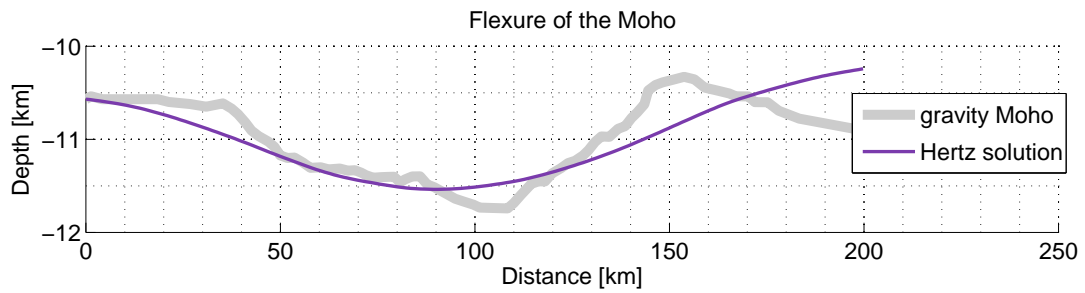


Figura 4.5: Comparación entre el Moho calculado a través de la expresión del modelo corregido de Hertz (morado) y el Moho que ajusta con los datos de gravedad a lo largo del perfil P01 (gris). Los valores de los parámetros utilizados corresponden a los listados en la Tabla 4.1, salvo por el módulo de Young, cuyo valor usado para esta zona es de 70 GPa.

Capítulo 5

Resolución mediante elementos Finitos

5.1. El Método de Elementos Finitos

El Método de Elementos Finitos (FEM) es el método numérico más poderoso que existe hoy en día para resolver problemas de valores iniciales o problemas de valor de frontera caracterizados por ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Es por ello que tiene un gran impacto en prácticamente todas las áreas de la ingeniería y de la ciencia. El desarrollo de la esencia del método se le atribuye principalmente al matemático alemán Richard Courant (1888-1972).

Este método posee dos atributos fundamentales, los cuales han hecho de éste un método tan importante. El primer atributo es que se basa en la idea de dividir un dominio continuo $\Omega \in \mathbb{R}^n$ (sobre el que están definidas las ecuaciones diferenciales que caracterizan el comportamiento físico del problema) en N subdominios pequeños no-intersectantes, los elementos finitos, sobre los cuales las funciones se aproximan por funciones locales, generalmente dadas por polinomios. El conjunto de elementos finitos forma una partición del dominio también denominada discretización. Dentro de cada elemento se distinguen una serie de puntos representativos llamados nodos. Dos nodos son adyacentes si pertenecen al mismo elemento finito; además, un nodo sobre la frontera de un elemento finito puede pertenecer a varios elementos. Al conjunto de nodos, considerando sus relaciones de adyacencia, se le denomina malla. La segunda característica importante es que los problemas de valores iniciales o de valor de frontera a los cuales se les aplica el método, se formulan en lo que se denomina formulación débil o forma integral, de manera que las contribuciones de cada subdominio a las integrales globales se suman hasta producir la integral que caracteriza al problema a lo largo de todo el dominio.

Una propiedad importante del método es la convergencia; si se consideran particiones de elementos finitos sucesivamente más finas, la solución numérica calculada converge rápidamente hacia la solución exacta del sistema de ecuaciones.

Para ilustrar el método de manera simple se hace un ejemplo. Se parte resolviendo una variación de la expresión dada en (2.18) en una dimensión, es decir, se considera una placa infinita en una de sus direcciones. Además, se considera una carga infinita en la misma dirección y por ello no hay variaciones con respecto a una de las coordenadas. En este caso se asume que no hay variaciones en la coordenada y , por lo tanto las derivadas en y desaparecen. Además se ha decidido incluir una

fuerza horizontal F que también podría producir flexión de la placa (ejemplo: [Caldwell et al. \[1976\]](#); [Levitt & Sandwell \[1995\]](#); [Turcotte & Schubert \[2002\]](#)). Sin embargo más tarde se decide hacer esta fuerza nula. La expresión trabajada se muestra a continuación.

$$\nabla^2(D\nabla^2w) + \operatorname{div}(F\nabla w) + \Delta\rho gw = q \quad (5.1)$$

donde q es la carga que actúa sobre la placa dada por la batimetría, $\Delta\rho = \rho_m - \rho_w$, y el torque de flexión (*bending moment*) M y la fuerza de cizalle V están dados respectivamente por: $M = -D\nabla^2w$ y $V = \frac{\partial M}{\partial n} - F\frac{\partial w}{\partial n}$.

Como fue comentado anteriormente, el problema se resuelve en una dimensión, es decir: Dado $q(x) \in L^2(0, L)$, encontrar $w(x) \in C^1(0, L)$ que resuelva:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{xx}(D\partial_{xx}w(x)) + \partial_x(F\partial_xw(x)) + \Delta\rho gw(x) = q(x) \quad , \quad x \in (0, L) \\ \\ M = -D\partial_{xx}w = M_0, \quad V = \partial_xM - F\partial_xw = -V_0 \quad , \quad x = 0 \\ \\ w = 0, \quad \partial_xw = 0 \quad , \quad x = L \end{array} \right. \quad (5.2)$$

A continuación se construye la formulación variacional del problema anterior. Para ello se multiplica el primer término de la expresión (5.2) por la función afín, o también llamada función *test*, $v(x)$ tal que $v(L) = 0$ y $\partial_xv|_{x=L} = 0$ y se integra por partes en $(0, L)$ obteniéndose

$$\int_0^L \partial_{xx}(D\partial_{xx}w) \cdot v dx + \int_0^L \partial_x(F\partial_xw) \cdot v dx + \int_0^L \Delta\rho gw \cdot v dx = \int_0^L q \cdot v dx \quad (5.3)$$

Pero

$$\begin{aligned} \int_0^L \partial_{xx}(D\partial_{xx}w) \cdot v dx &= - \int_0^L \partial_x(D\partial_{xx}w) \cdot \partial_xv dx + [\partial_x(D\partial_{xx}w) \cdot v] \Big|_{x=0}^{x=L} \\ &= \int_0^L D\partial_{xxx}w \cdot \partial_{xx}v dx - [D\partial_{xxx}w \cdot \partial_{xx}v] \Big|_{x=0}^{x=L} + [\partial_x(D\partial_{xx}w) \cdot v] \Big|_{x=0}^{x=L} \end{aligned}$$

Además

$$\int_0^L \partial_x(F\partial_xw) \cdot v dx = - \int_0^L F\partial_{xx}w \cdot \partial_xv dx + [F\partial_xw \cdot v] \Big|_{x=0}^{x=L}$$

Reemplazando las expresiones anteriores en (5.3) y haciendo uso de las expresiones para el *bending moment* y la fuerza de cizalle se obtiene:

$$\begin{aligned}
\int_0^L q \cdot v \, dx &= \int_0^L (D\partial_{xx}w \cdot \partial_{xx}v - F\partial_xw \cdot \partial_xv + \Delta\rho g w v) \, dx \\
&\quad + [(\partial_x(D\partial_{xx}w) + F\partial_xw) \cdot v - D\partial_{xx}w \cdot \partial_xv] \Big|_{x=0}^{x=L} \\
&= \int_0^L (D\partial_{xx}w \cdot \partial_{xx}v - F\partial_xw \cdot \partial_xv + \Delta\rho g w v) \, dx + [(-\partial_xM + F\partial_xw) \cdot v + M \cdot \partial_xv] \Big|_{x=0}^{x=L} \\
&= \int_0^L (D\partial_{xx}w \cdot \partial_{xx}v - F\partial_xw \cdot \partial_xv + \Delta\rho g w v) \, dx + [-V \cdot v + M \cdot \partial_xv] \Big|_{x=0}^{x=L}
\end{aligned}$$

Imponiendo las condiciones de borde

$$\int_0^L q \cdot v \, dx = \int_0^L (D\partial_{xx}w \cdot \partial_{xx}v - F\partial_xw \cdot \partial_xv + \Delta\rho g w v) \, dx - V_0 \cdot v - M_0 \cdot \partial_xv$$

Reordenado se obtiene lo siguiente:

$$\int_0^L (D\partial_{xx}w \cdot \partial_{xx}v - F\partial_xw \cdot \partial_xv + \Delta\rho g w v) \, dx = \int_0^L q \cdot v \, dx + V_0 \cdot v + M_0 \cdot \partial_xv$$

Ahora se realiza la discretización del dominio $[0, L]$ en elementos finitos. Para $N \in \mathbb{N}$, sea $h = L/(N + 1)$. Se considera una malla uniforme definida por los puntos $x_j = jh$, $0 \leq j \leq N + 1$ y los intervalos $K_j = [x_j, x_{j+1}]$, $0 \leq j \leq N$. Sea \mathbb{P}_3 el conjunto de funciones afines globalmente continuas en $[0, L]$ y se introduce el espacio V_h^1 de las funciones continuas en cada intervalo:

$$V_h^1 = \{v_h \in C^1([0, L]), \ v|_{K_j} \in \mathbb{P}_3, \ 0 \leq j \leq N\},$$

y el subespacio de V_h^1 :

$$V_{h,0}^1 = \left\{ v_h \in V_h^1 : v_h(L) = 0, \ \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \right\}.$$

Se consideran funciones de la forma $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq N}$ tales que $\varphi_j \in V_{h,0}^1$ son funciones base de Hermite. Se puede demostrar que las funciones $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq N}$ forman una base de $V_{h,0}^1$. Se desea encontrar una aproximación $w_h \in V_{h,0}^1$ de la función desconocida w , solución del siguiente problema variacional: Encontrar $w_h \in V_{h,0}^1$ tal que

$$\int_0^L (D\partial_{xx}w_h \cdot \partial_{xx}v_h - F\partial_xw_h \cdot \partial_xv_h + \Delta\rho g w_h v_h) \, dx = \int_0^L q \cdot v_h \, dx + V_0 \cdot v_h + M_0 \cdot \partial_xv_h \quad \forall v_h \in V_{h,0}^1$$

Si se considera $w_h(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i(x)$, $v_h(x) = \varphi_j(x)$, al reemplazarlos en la ecuación anterior se obtiene

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \int_0^L (D\varphi_i'' \cdot \varphi_j'' - F\varphi_i' \cdot \varphi_j' + \Delta\rho g\varphi_i\varphi_j) dx = \int_0^L q \cdot \varphi_j dx + V_0 \cdot \varphi_j + M_0 \cdot \varphi_j'$$

$$A \cdot \vec{\alpha} = \vec{b}$$

donde $A_{ij} = A_{ji} = \int_0^L (D\varphi_i'' \cdot \varphi_j'' - F\varphi_i' \cdot \varphi_j' + \Delta\rho g\varphi_i\varphi_j) dx$, $b_j = \int_0^L q \cdot \varphi_j dx + V_0 \cdot \varphi_j + M_0 \cdot \varphi_j'$ y $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$.

Por lo tanto sólo queda invertir la matriz A para así encontrar los coeficientes del vector $\vec{\alpha}$ que determinan la solución aproximada $w_h(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i(x)$.

Como ya fue mencionado anteriormente, las funciones $\varphi_j(x)$ corresponden a funciones base de Hermite, dadas por

$$\varphi_j^+(x) = 1 - \frac{3(x-x_j)^2}{h^2} + \frac{2(x-x_j)^3}{h^3} \quad \varphi_j^-(x) = (x-x_j) - \frac{2(x-x_j)^2}{h} + \frac{(x-x_j)^3}{h^2}$$

Por lo tanto la matriz A será una matriz de $2N \times 2N$ compuesta por cuatro bloques, es decir,

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A^I & A^{II} \\ \hline A^{III} & A^{IV} \end{array} \right)$$

donde

$$A_{ij}^I = \int_0^L \left(D \frac{d^2\varphi_i^+}{dx^2} \cdot \frac{d^2\varphi_j^+}{dx^2} - F \frac{d\varphi_i^+}{dx} \cdot \frac{d\varphi_j^+}{dx} + \Delta\rho g\varphi_i^+ \cdot \varphi_j^+ \right) dx$$

$$A_{ij}^{II} = \int_0^L \left(D \frac{d^2\varphi_i^+}{dx^2} \cdot \frac{d^2\varphi_j^-}{dx^2} - F \frac{d\varphi_i^+}{dx} \cdot \frac{d\varphi_j^-}{dx} + \Delta\rho g\varphi_i^+ \cdot \varphi_j^- \right) dx$$

$$A_{ij}^{III} = \int_0^L \left(D \frac{d^2\varphi_i^-}{dx^2} \cdot \frac{d^2\varphi_j^+}{dx^2} - F \frac{d\varphi_i^-}{dx} \cdot \frac{d\varphi_j^+}{dx} + \Delta\rho g\varphi_i^- \cdot \varphi_j^+ \right) dx$$

$$A_{ij}^{IV} = \int_0^L \left(D \frac{d^2\varphi_i^-}{dx^2} \cdot \frac{d^2\varphi_j^-}{dx^2} - F \frac{d\varphi_i^-}{dx} \cdot \frac{d\varphi_j^-}{dx} + \Delta\rho g\varphi_i^- \cdot \varphi_j^- \right) dx$$

Por lo tanto el vector $\vec{\alpha}$ esta dado por $\vec{\alpha} = (\alpha_1^+, \dots, \alpha_N^+, \alpha_1^-, \dots, \alpha_N^-)$ y el vector \vec{b} por:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \int_0^L q(x) \cdot \varphi_1^+(x) dx + V_0 \cdot \varphi_1^+(0) + M_0 \cdot \left. \frac{d\varphi_1^+(x)}{dx} \right|_{x=0} \\ \int_0^L q(x) \cdot \varphi_2^+(x) dx \\ \vdots \\ \int_0^L q(x) \cdot \varphi_N^+(x) dx \\ \int_0^L q(x) \cdot \varphi_1^-(x) dx + V_0 \cdot \varphi_1^-(0) + M_0 \cdot \left. \frac{d\varphi_1^-(x)}{dx} \right|_{x=0} \\ \int_0^L q(x) \cdot \varphi_2^-(x) dx \\ \vdots \\ \int_0^L q(x) \cdot \varphi_N^-(x) dx \end{pmatrix}$$

Lo anterior se programa en *Matlab* y los resultados obtenidos son idénticos a los que se obtienen utilizando el algoritmo de diferencias finitas presentado en el trabajo de Contreras-Reyes & Osses [2010]. En la práctica, cuando se tienen problemas más complejos que el que se acaba de mostrar, resulta muy difícil armar la matriz A y el vector \vec{b} y por ello existen programas que son capaces de construirlos a partir de la formulación variacional. Es el caso del programa *FreeFem++* (<http://www.freefem.org/ff++/>) que se utiliza en el presente trabajo y que permite resolver problemas en dos y tres dimensiones, además de ser capaz de adaptar la malla y refinarla en los lugares de mayor interés.

A continuación se detalla cómo se realiza el cálculo mediante elementos finitos. En primera instancia se trabaja en la primera zona de estudio, aquella que abarca entre los 32-24°S y los 76.5-72°W mostrada en la Figura 1.2. Se resuelve la ecuación fundamental del modelo de Kirchhoff-Love utilizando un espesor elástico constante, es decir, se resuelve la expresión dada en (2.19). Los resultados no son satisfactorios debido a la utilización de un espesor elástico constante en la formulación del problema. Posteriormente en el trabajo de Palacios [2012] se resuelve la ecuación de flexura para el modelo de Kirchhoff-Love utilizando un espesor elástico variable, es decir, la expresión dada en (2.18). Los resultados obtenidos tampoco son los esperados debido a un fenómeno conocido en ingeniería como *Locking*. Los resultados del trabajo anterior no forman parte del presente trabajo de tesis. Por las razones anteriormente descritas, en este trabajo se decide utilizar el modelo más general de Reissner-Mindlin. Al entregar mejores resultados se adopta este último modelo para calcular la flexión de la placa en la segunda zona de estudio, la que comprende entre los 70-77°W y los 14-23°S y que se muestra en la Figura 1.3.

5.2. Modelo de Kirchhoff-Love con $T_e = \text{cte.}$

Se comienza trabajando con la expresión dada en (5.1) y se calcula la flexura producida por una determinada carga actuando sobre una placa elástica rectangular.

$$\nabla^2(D\nabla^2w) + \text{div}(F\nabla w) + \Delta\rho gw - q = 0$$

donde, como ya fue mencionado, q es la carga que actúa sobre la placa dada por la batimetría, $\Delta\rho = \rho_m - \rho_w$, y el *bending moment* M y la fuerza de cizalle V están dados respectivamente por: $M = -D\nabla^2w$ y $V = \frac{\partial M}{\partial n} - F\frac{\partial w}{\partial n}$.

La metodología consiste en presentar las condiciones de borde impuestas para dar paso a la formulación variacional adecuada. Posteriormente se valida el modelo comparando los resultados obtenidos con aquellos obtenidos mediante la solución analítica del modelo unidimensional, con los obtenidos mediante lo expuesto en la sección anterior o con los obtenidos a través de la convolución de la función de Green con la batimetría en caso de cargas lejanas a una zona de subducción como se expuso en el Capítulo 4 .

Finalmente se modela la flexura de la placa de Nazca entre los 32°-34°S, bajo dos montes submarinos del Ridge de Juan Fernández. En esta zona la placa de Nazca subducta bajo la placa Sudamericana a una velocidad de aproximadamente 65 mm al año [Angermann et al., 1999] casi en forma perpendicular a la fosa (N78.4°E).

5.2.1. Dominio y condiciones de borde

Para la validación del modelo se utiliza un dominio rectangular dividido en tres zonas distintas, como se muestra en la Figura 5.1. Esto permite variar el espesor elástico, forzosamente, a lo largo de la placa. Una vez validado el modelo se calcula la flexura en la primera área de estudio y que se muestra, junto al dominio utilizado, en la Figura 5.4.

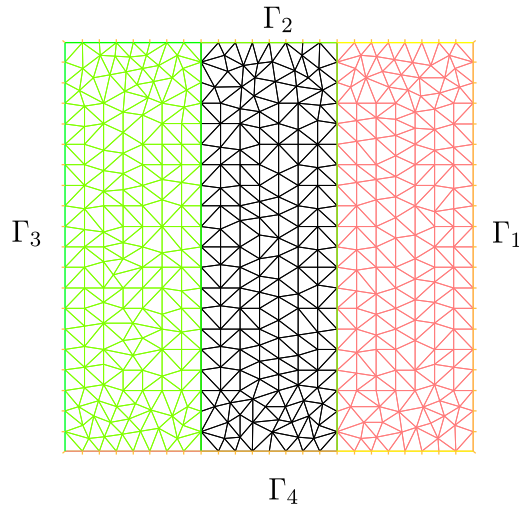


Figura 5.1: Malla utilizada para la validación del modelo de elementos finitos para una formulación de Kirchhoff-Love con espesor elástico constante. Pese a que la formulación supone un espesor elástico constante, se decide dividir el dominio en 3 zonas distintas y utilizar distintos espesores elásticos a modo de aproximación.

Las condiciones de borde que se utilizan para la resolución de este problema son:

$$\Gamma_1: -D\nabla^2w = M = M_0, \quad \frac{\partial M}{\partial n} - F\frac{\partial w}{\partial n} = V = -V_0$$

$$\Gamma_2: \nabla^2 w = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial n} - F \frac{\partial w}{\partial n} = V = 0$$

$$\Gamma_3: w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0$$

$$\Gamma_4: \nabla^2 w = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial n} - F \frac{\partial w}{\partial n} = V = 0$$

Los valores de las constantes utilizadas para modelar numéricamente son las mismas que aquellas que se muestran en la Tabla 4.1.

5.2.2. Formulación variacional

El problema a resolver puede ser abordado como un sistema de ecuaciones. Esto reduce la complejidad del problema y además permite utilizar polinomios de grado 2 en la resolución.

El sistema está compuesto por dos ecuaciones:

$$-\nabla^2 M + \operatorname{div}(F\nabla w) + \Delta \rho g w - q = 0 \quad (5.4)$$

$$M + D\nabla^2 w = 0 \quad (5.5)$$

Se definen los espacios $H_w(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \in \Gamma_3\}$ y $H_M := \{P \in H^1(\Omega) \mid P = M_o \in \Gamma_1, P = 0 \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4\}$. A continuación se multiplica la ecuación (5.4) por $v \in H_w(\Omega)$ y luego se procede a integrar por partes.

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \nabla^2 M \cdot v + \int_{\Omega} \operatorname{div}(F\nabla w) \cdot v + \int_{\Omega} \Delta \rho g w \cdot v - \int_{\Omega} q \cdot v = 0 \\ \int_{\Omega} \nabla M \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial M}{\partial n} \cdot v - \int_{\Omega} F\nabla w \cdot \nabla v + \int_{\partial\Omega} F \frac{\partial w}{\partial n} \cdot v + \int_{\Omega} \Delta \rho g w \cdot v - \int_{\Omega} q \cdot v &= 0 \\ \int_{\Omega} (\nabla M \cdot \nabla v - F\nabla w \cdot \nabla v + \Delta \rho g w v) - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial M}{\partial n} - F \frac{\partial w}{\partial n} \right) \cdot v - \int_{\Omega} q \cdot v &= 0 \\ \int_{\Omega} (\nabla M \cdot \nabla v - F\nabla w \cdot \nabla v + \Delta \rho g w v) - \int_{\partial\Omega} V \cdot v - \int_{\Omega} q \cdot v &= 0 \\ \int_{\Omega} (\nabla M \cdot \nabla v - F\nabla w \cdot \nabla v + \Delta \rho g w v) + \int_{\Gamma_1} V_0 \cdot v - \int_{\Omega} q \cdot v &= 0 \end{aligned}$$

Luego se multiplica la ecuación (5.5) por $P \in H_M(\Omega)$ y se integra por partes.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} M \cdot P + \int_{\Omega} D\nabla^2 w \cdot P &= 0 \\ \int_{\Omega} M \cdot P - D \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla P + D \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial n} \cdot P &= 0 \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} M \cdot P - D \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla P + D \int_{\Gamma_1} \frac{\partial w}{\partial n} \cdot P = 0$$

Por lo tanto la formulación variacional del problema que define a las soluciones débiles del sistema está dada por la resta de las dos expresiones desarrolladas anteriormente:

$$\int_{\Omega} (\nabla M \cdot \nabla v - F \nabla w \cdot \nabla v + \Delta \rho g w v) + \int_{\Gamma_1} V_0 \cdot v - \int_{\Omega} q \cdot v - \int_{\Omega} M \cdot P + D \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla P - D \int_{\Gamma_1} \frac{\partial w}{\partial n} \cdot P = 0 \quad (5.6)$$

Posteriormente la formulación mostrada en (5.6) se programa en *FreeFem++* para ser resuelta. El correspondiente código se muestra a continuación.

```
Vh w,M,v,PP;
problem flexura([w,M],[v,PP])=
int2d(Th)(dx(M)*dx(v) + dy(M)*dy(v))
+int2d(Th)(-F*(dx(w)*dx(v) + dy(w)*dy(v)))
+int2d(Th)(drho*g*w*v)
-int2d(Th)(q*v)
+int2d(Th)(D*(dx(w)*dx(PP) + dy(w)*dy(PP)))
-int2d(Th)(M*PP)
+int1d(Th,Gamma1)(Vo*v)
-int1d(Th,Gamma1)(D*PP*(dx(w)*N.x+dy(w)*N.y))
+on(Gamma3,w=0)
+on(Gamma1,M=Mo);
```

5.2.3. Validación del modelo

La validación del modelo de Kirchhoff-Love con espesor elástico constante se realiza utilizando los parámetros listados en la Tabla 4.1.

Primero se calcula la flexura producida por una carga bidimensional cercana a una zona de subducción, es decir, se utiliza una carga rectangular muy larga en una de sus direcciones. El dominio utilizado corresponde a un dominio cuadrado de 600 km por 600 km, el cual se divide en 3 sectores de idéntico grosor tal como aquel que se muestra en la Figura 5.1. La carga utilizada es de 100 km de ancho, 600 km de largo y 5 km de alto, y se encuentra ubicada al centro del dominio en forma paralela a los distintos sectores de la malla. Pese a que la formulación variacional contempla un espesor elástico constante, se decide variar el espesor elástico en los distintos sectores a modo de aproximación. En el ejemplo de la carga unidimensional se utiliza un espesor elástico de 10 km en el sector más cercano a la fosa, de 12 km en el sector intermedio y de 14 km en el más lejano. Los resultados obtenidos se comparan con aquellos entregados por el modelo de Kirchhoff-Love unidimensional y que fue mostrado en la introducción del presente capítulo en la sección 5.1. La comparación se muestra en la Figura 5.2 y se puede observar que el ajuste es perfecto. Dado que la variación del espesor elástico es pequeña, la curva entregada se ve suave (derivada continua). Sin embargo, cuando las variaciones son más bruscas se observan quiebres, es decir, una curva con derivada discontinua.

A continuación se realiza un ejercicio similar al anterior y se calcula la flexura producida por una carga con forma de ortoedro de base cuadrada de 100 km × 100 km y de 5 km de alto. Para

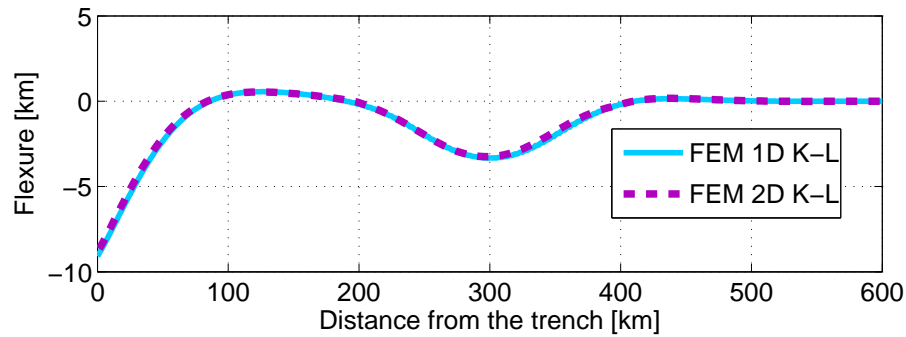


Figura 5.2: Flexura producida por una carga unidimensional cercana a la fosa utilizando el modelo de Kirchhoff-Love con espesor elástico constante. A modo de aproximación se decide variar el espesor elástico de manera forzada, haciendo que éste fuera de 10 km entre los 0 y 200 km de distancia a la fosa, de 12 km entre los 200 y los 400 km y de 14 km a distancias superiores a los 400 km. El resultado del modelo bidimensional se muestra en línea punteada morada, mientras que el entregado por el modelo 1-D se muestra en celeste.

ello se utiliza un dominio cuadrado de $600 \text{ km} \times 600 \text{ km}$ y se mantiene el espesor elástico constante con un valor de 15 km. Además se impone que el momento de flexión y la fuerza de corte son nulas en Γ_1 para así simular un entorno lejos de una zona de subducción. El resto de los parámetros utilizados corresponden a los listados en la Tabla 4.1. Los resultados obtenidos son posteriormente comparados con aquellos que se obtienen utilizando la convolución de la función de Green de la ecuación (2.19) con la carga impuesta, tal como fue explicado en el Capítulo 4. Los resultados se muestran en la Figura 5.3 y dejan en evidencia que el modelo de elementos finitos es capaz de calcular satisfactoriamente la flexura producida por una carga finita en todas sus direcciones lejos de una zona de subducción.

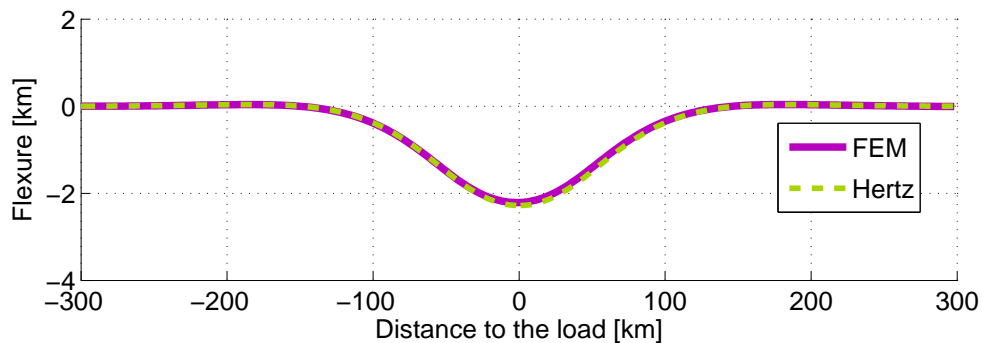


Figura 5.3: Flexura producida por una carga rectangular de base cuadrada de $100 \text{ km} \times 100 \text{ km}$ y de 5 km de alto utilizando el modelo de Kirchhoff-Love con espesor elástico constante de 15 km. El resultado calculado mediante elementos finitos se muestra en morado, mientras que el entregado por el método de convolución, explicado en el Capítulo 4, se muestra en línea punteada verde.

Finalmente se realiza la comprobación utilizando una carga gaussiana de manera muy similar a lo que se hizo con la carga rectangular. Los resultados obtenidos son idénticos a los obtenidos mediante el método de convolución, por lo que se acepta que el modelo de elementos finitos bidimensional funciona tanto para cargas localizadas lejos de una zona de subducción, como para una carga infinita próxima a la fosa.

5.2.4. Resultados para la zona de Juan Fernández

Para el cálculo de la flexura en la primera zona de estudio, comprendida entre los 32°-34°S y los 76.5°-72°W, se considera un dominio trapezoidal como el que se muestra en la Figura 5.4, el cual se divide en tres regiones. En cada una de ellas se asigna un valor constante de espesor elástico, es decir, se considera que el espesor elástico no varía en la dirección paralela a la fosa. La malla utilizada se muestra a continuación en la Figura 5.5.

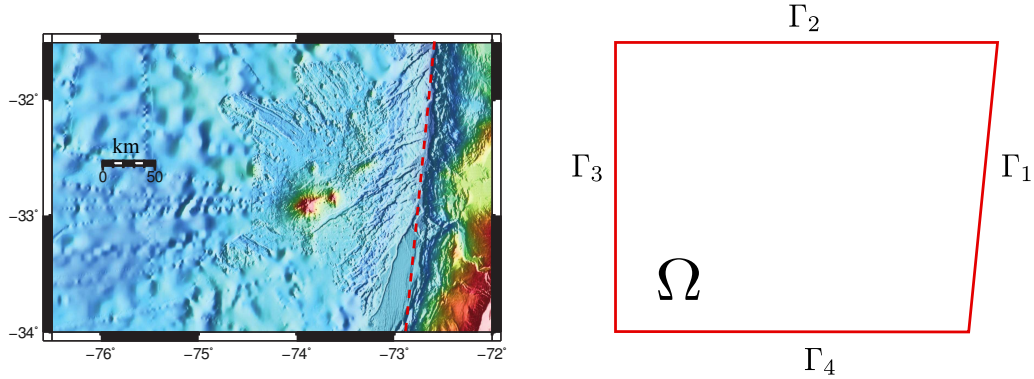


Figura 5.4: Primer dominio utilizado para el cálculo de la flexura mediante elementos finitos.

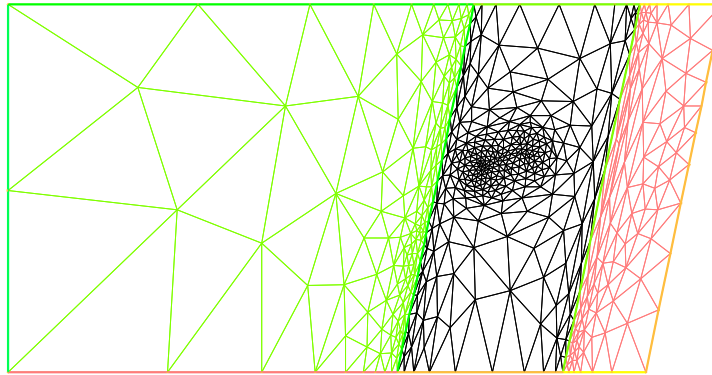


Figura 5.5: Malla utilizada para el cálculo de la flexura mediante el modelo 2-D de Kirchhoff-Love resuelto mediante el método de elementos finitos para un espesor elástico constante. La malla ha sido refinada bajo los montes submarinos de manera que los cálculos sean más precisos en aquella zona. Pese a que la formulación del problema no contempla un espesor elástico variable, se decide, a modo de aproximación, variarlo en tres distintos sectores. El espesor elástico entre los 0 y los 50 km de distancia a la fosa (sector en rosado) es de 14 km, en el sector comprendido entre los 50 y los 150 km de distancia a la fosa (sector en negro) se utilizó un espesor elástico de 7 km y en el sector más lejano a la fosa, a más de 150 km (sector en verde), un espesor de 15 km.

A continuación se carga la batimetría (Figura 5.6), la cual corresponde a la carga utilizada para el cálculo de la flexura. Además de considerar la batimetría, se decide agregar una porción de sedimentos en la parte Sur-Este del dominio. Los sedimentos alcanzan un espesor máximo de 2.5 km y se encuentran distribuidos de manera triangular. En la Figura se destaca con una línea blanca el perfil P01. Las distancias tanto en el eje x como en el eje y están expresadas en kilómetros, al igual que la batimetría en la barra de colores al costado de la Figura.

En la Figura 5.7 se pueden observar tres perfiles. En color rojo se observa el perfil P01 sobre la batimetría. Además en azul se muestra el perfil justo en el borde Sur del dominio, mientras que el

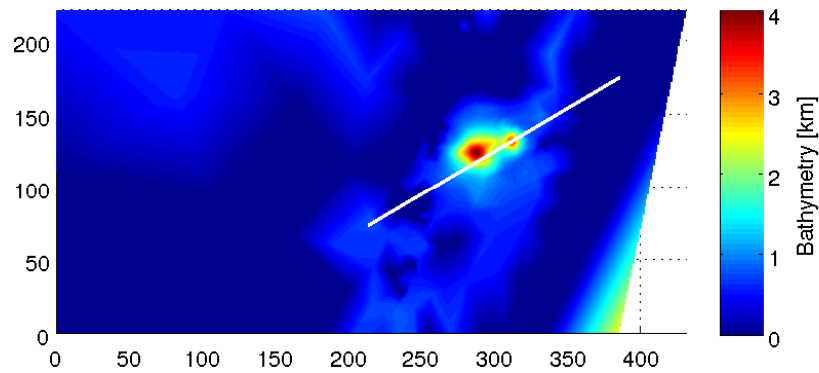


Figura 5.6: Batimetría utilizada como carga para el cálculo de la flexura a través del método de elementos finitos 2-D con espesor elástico constante usando el modelo de Kirchhoff-Love. La línea blanca representa el perfil P01. Las distancias tanto en el eje x como en el eje y están expresadas en kilómetros, al igual que la batimetría. Además de la batimetría, se decide agregar sedimentos, los cuales forman un triángulo en la parte Sur del borde Este. El máximo espesor que alcanzan estos sedimentos es de 2.5 km.

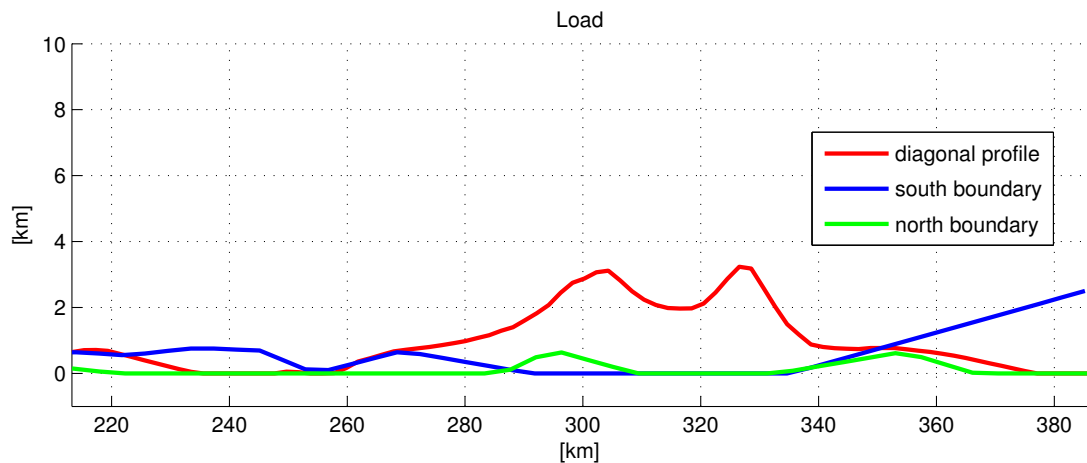


Figura 5.7: Se observan tres perfiles a lo largo de la batimetría utilizada para el cálculo de la flexura mediante el modelo 2-D de elementos finitos. En rojo se muestra el Perfil P01, en verde un perfil sobre el borde Γ_2 , justo en el límite Norte del dominio, y en azul un perfil sobre el borde Γ_4 , en el límite Sur del dominio, en el cual la pendiente que se observa corresponde a los sedimentos agregados artificialmente.

perfil en el límite Norte del dominio se muestra en verde.

El resultado obtenido se muestra en la Figura 5.8, en la cual se aprecia el perfil P01 destacado en blanco. Al igual que en la Figura de la batimetría, las distancias tanto en el eje x como en el eje y están expresadas en kilómetros, al igual que la flexura en la barra de colores al costado de la Figura.

Finalmente se extrae el resultado para el perfil P01 para así ser comparado con el Moho gravimétrico (Figura 5.9). En la figura se muestra el resultado en rojo, mientras que el Moho gravimétrico se muestra en gris. Se puede observar que el ajuste no es muy bueno y se observan quiebres en la curva calculada. Éstos se deben a los fuertes contrastes entre los espesores elásticos de las distintas regiones.

Posteriormente en el trabajo de Palacios [2012] se realiza la formulación variacional considerando un espesor elástico variable en el modelo de Kirchhoff-Love. Sin embargo los resultados, los cuales

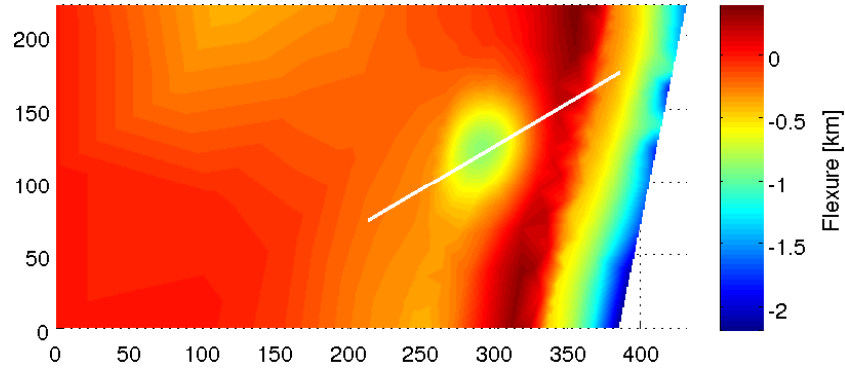


Figura 5.8: Gráfico de colores de la flexura producida por el Guyot O'Higgins y por el Monte O'Higgins, ambos dos muy cercanos a la fosa. Los cálculos fueron realizados utilizando el modelo de Kirchhoff-Love.

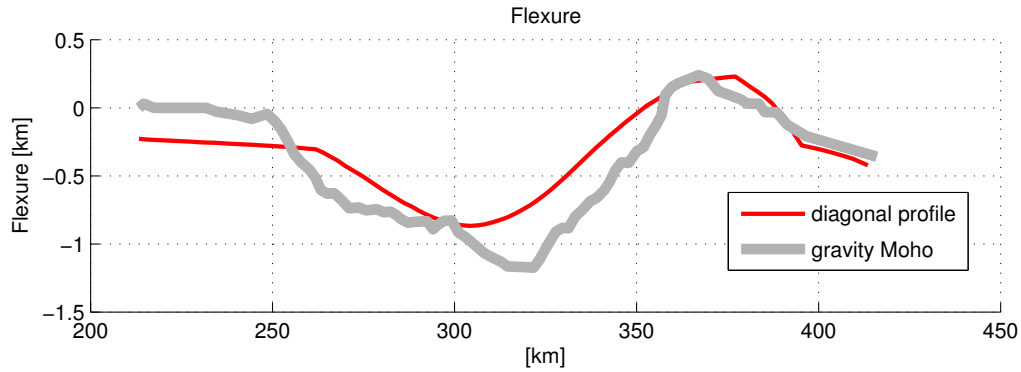


Figura 5.9: En rojo el perfil P01 extraído del resultado mostrado en la Figura 5.8 y en gris el Moho gravimétrico de referencia. Se puede observar que el ajuste es razonable, sin embargo dado el fuerte contraste de espesor elástico en los distintos sectores se observan quiebres en la curva roja.

no forman parte de este trabajo de tesis, no fueron satisfactorios debido a un fenómeno conocido como *locking*. Este concepto es usado frecuentemente en ingeniería para describir el caso en el que el cálculo mediante elementos finitos produce flexiones significativamente menores a las que debería. Ésto ocurre cuando la convergencia de la solución de elementos finitos hacia la verdadera solución no ocurre de manera uniforme a medida que $h \rightarrow 0$ [Braess, 2007]. Debido a lo anteriormente expuesto, en el presente trabajo se decide abordar el problema de manera más general, considerando el modelo de Reissner-Mindlin. Este modelo posee importantes ventajas. Una de ellas es que permite, de manera sencilla, estudiar la influencia de la dirección de convergencia de las placas, además de evitar el fenómeno de *locking*.

5.3. Modelo de Reissner-Mindlin

A continuación se detalla el desarrollo del modelo de Reissner-Mindlin cuyas ecuaciones están dadas por las expresiones (2.15) y (2.16), las cuales fueron deducidas en el Capítulo 2.

$$-\text{div}(T_e^3 \sigma(\vec{\theta})) - \lambda^* T_e (\nabla w - \vec{\theta}) = 0 \quad (2.15)$$

$$-\text{div}(\lambda^* T_e (\nabla w - \vec{\theta})) = g \quad (2.16)$$

Primeramente se fijan las condiciones de borde para el dominio en estudio, posteriormente se realiza la validación del modelo comparando sus resultados con los que se obtienen a partir de modelos conocidos más simples y finalmente se realiza el cálculo para las dos zonas de estudio del presente trabajo.

5.3.1. Dominio y condiciones de borde

Para la validación del modelo se utiliza un dominio rectangular dividido en tres zonas distintas, idéntico al que se muestra en la Figura 5.1, el cual permite variar el espesor elástico a lo largo de la placa. Una vez validado el modelo se calcula la flexura para la zona de Juan Fernández utilizando el dominio de la Figura 5.4. Finalmente se calcula la flexura para la segunda zona de estudio, conocida como el Codo de Arica, utilizando un dominio como el que se muestra en la Figura 5.10.

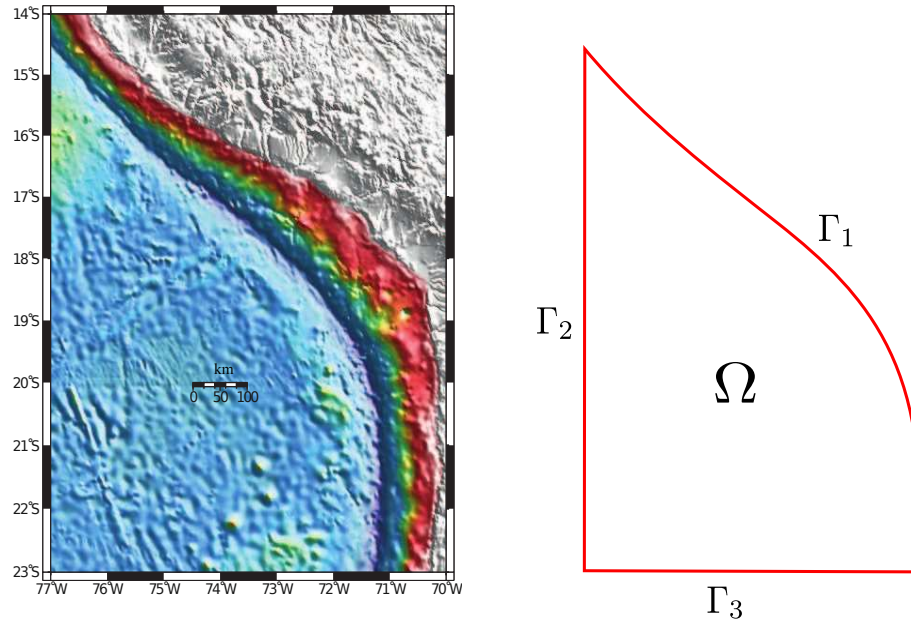


Figura 5.10: Segundo dominio utilizado para el cálculo de la flexura mediante elementos finitos en la zona del Codo de Arica.

Se define la fuerza de cizalle vertical $V = \lambda^* T_e \left(\frac{\partial w}{\partial n} - \vec{\theta} \cdot \hat{n} \right)$ y el torque de flexión (*bending moment*) $\vec{M} = T_e^3 \sigma(\vec{\theta}) \hat{n}$, los cuales en ambos casos, actúan con un valor fijo sobre el borde Γ_1 .

Las condiciones de borde utilizadas para un dominio trapezoidal como el de la Figura 5.1 o el de la Figura 5.4 son:

$$\Gamma_1 : \quad \vec{M} = -\vec{M}_0 = -M_0 \hat{\beta}, \quad V = -V_0$$

$$\Gamma_2 : \quad M = 0, \quad V = 0$$

$$\Gamma_3 : \quad w = 0, \quad \vec{\theta} = 0$$

$$\Gamma_4 : \quad M = 0, \quad V = 0$$

donde $\hat{\beta}$ corresponde al vector unitario en la dirección de convergencia de las placas.

Las condiciones de borde utilizadas para un dominio de tres lados como el de la Figura 5.10 son:

$$\Gamma_1 : \quad \vec{M} = -\vec{M}_0 = -M_0\hat{\beta}, \quad V = -V_0$$

$$\Gamma_2 : \quad w = 0, \quad \vec{\theta} = 0$$

$$\Gamma_3 : \quad M = 0, \quad V = 0$$

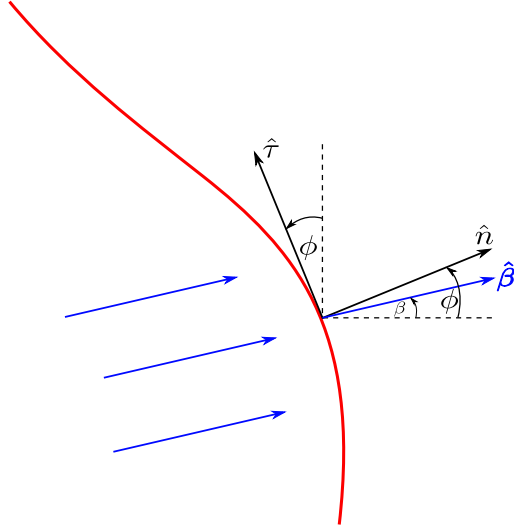


Figura 5.11: Se muestra el borde de la placa Γ_1 para el dominio utilizado para la zona del Codo de Arica en color rojo. La dirección de convergencia se muestra en azul, \hat{n} y $\hat{\tau}$ corresponden a la normal y a la tangente al borde de la placa respectivamente y ϕ corresponde al ángulo entre la normal y la horizontal.

Además, la fuerza vertical neta que experimenta la placa $g(x, y)$ en ambos casos será igual a la suma de una carga impuesta por la batimetría $q(x, y)$ menos una fuerza en dirección opuesta debida al efecto boyante que genera el material menos denso que rellena la depresión flexural. Como en este caso se incluye la flexura de la placa generada por la subducción en la fosa, se considera que la depresión flexural es principalmente rellanada por agua, por lo tanto:

$$g(x, y) = q(x, y) - (\rho_m - \rho_w)gw = q(x, y) - \Delta\rho gw$$

Las constantes utilizadas para la validación del modelo y para el cálculo en las dos zonas de estudio son las que se muestran en la Tabla 4.1, salvo por el módulo de Young, el cual se asume con un valor de 70 GPa.

5.3.2. Formulación variacional

A continuación se multiplica la expresión (2.15) por $\vec{\psi}$ y se integra por partes en Ω .

$$\int_{\Omega} T_e^3 \sigma(\vec{\theta}) : \varepsilon(\vec{\psi}) - \int_{\partial\Omega} T_e^3 \sigma(\vec{\theta}) \hat{n} \cdot \vec{\psi} - \int_{\Omega} \lambda^* T_e(\nabla w - \vec{\theta}) \cdot \vec{\psi} = 0$$

Se reemplaza la expresión para $\sigma(\vec{\theta})$, con lo que se tiene lo siguiente

$$\int_{\Omega} T_e^3 \bar{D}(1 - \nu) \varepsilon(\vec{\theta}) : \varepsilon(\vec{\psi}) + \int_{\Omega} T_e^3 \bar{D} \nu \operatorname{div}(\vec{\theta}) \operatorname{div}(\vec{\psi}) - \int_{\partial\Omega} \underbrace{T_e^3 \sigma(\vec{\theta}) \hat{n} \cdot \vec{\psi}}_M - \int_{\Omega} \lambda^* T_e(\nabla w - \vec{\theta}) \cdot \vec{\psi} = 0$$

Imponiendo las condiciones en los bordes se obtiene

$$\int_{\Omega} D(1-\nu)\varepsilon(\vec{\theta}) : \varepsilon(\vec{\psi}) + \int_{\Omega} D\nu \operatorname{div}(\vec{\theta}) \operatorname{div}(\vec{\psi}) - \int_{\Omega} \lambda^* T_e(\nabla w - \vec{\theta}) \cdot \vec{\psi} + \int_{\Gamma_1} M_0 \hat{\beta} \cdot \vec{\psi} = 0 \quad (5.7)$$

Luego se multiplica la expresión dada en (2.16) por v y se integra en Ω por partes.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \lambda^* T_e(\nabla w - \vec{\theta}) \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} \lambda^* T_e(\nabla w - \vec{\theta}) \cdot \hat{n} v + \int_{\Omega} \Delta \rho g w v &= \int_{\Omega} q v \\ \int_{\Omega} \lambda^* T_e(\nabla w - \vec{\theta}) \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} \underbrace{\lambda^* T_e \left(\frac{\partial w}{\partial n} - \vec{\theta} \cdot \hat{n} \right)}_V v + \int_{\Omega} \Delta \rho g w v &= \int_{\Omega} q v \\ \int_{\Omega} \lambda^* T_e(\nabla w - \vec{\theta}) \cdot \nabla v + \int_{\Omega} \Delta \rho g w v - \int_{\Omega} q v + \int_{\Gamma_1} V_o v &= 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

La formulación variacional mostrada anteriormente en las expresiones (5.7) y (5.8) corresponde a un problema que no converge a la solución exacta del problema a medida que la malla se hace más fina. Esto produce que cuando se tienen valores pequeños de espesores elásticos, los desplazamientos calculados son significativamente menores a los esperados. A este fenómeno se le conoce como *shear locking*. Para evitar esto, se plantea un problema mixto en donde se introduce un nuevo término conocido como 'término de cizalle normal'.

$$\vec{\gamma} := T_e \lambda^*(\nabla w - \vec{\theta})$$

Si se multiplica por una función afín $\vec{\eta} \in H_0(\operatorname{rot}, \Omega)$ donde $H_0(\operatorname{rot}, \Omega) := \{\vec{\eta} \in L_2(\Omega)^2; \operatorname{rot} \vec{\eta} \in L_2(\Omega), \vec{\eta} \cdot \hat{\tau} \text{ en } \partial\Omega\}$, donde $\hat{\tau}$ corresponde al vector tangente al borde, y se integra en Ω se tendrá una tercera integral que conformará el sistema.

$$\int_{\Omega} T_e \lambda^*(\nabla w - \vec{\theta}) \cdot \vec{\eta} - \int_{\Omega} \vec{\gamma} \cdot \vec{\eta} = 0 \quad (5.9)$$

Finalmente se plantea una cuarta ecuación la cual permite calcular de manera más rápida el *bending moment* asociado (de lo contrario habría que derivar el resultado de la flexura encontrada). Esta ecuación está dada por:

$$d = \operatorname{div}(\vec{\theta})$$

Multiplicando la ecuación anterior por la función afín e y por $D\nu$ e integrando en Ω se tiene

$$\int_{\Omega} D\nu \operatorname{div}(\vec{\theta}) e - \int_{\Omega} D\nu d e = 0 \quad (5.10)$$

Por último sumando las ecuaciones (5.7), (5.8), (5.9) y (5.10), se obtiene así la formulación variacional, la cual se programa en *FreeFem++*.

Para efectos de la programación se procede a descomponer \vec{M}_0 en sus componentes normal y tangencial de manera que (ver Figura 5.11)

$$\hat{n} = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y} = (n_x, n_y)$$

$$\hat{\tau} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} = (-n_y, n_x)$$

Así se tiene que

$$\begin{aligned}\vec{M}_0 &= (M_0 \hat{\beta} \cdot \hat{n}) \hat{n} + (M_0 \hat{\beta} \cdot \hat{\tau}) \hat{\tau} \\ &= M_0 (\cos \beta n_x + \sin \beta n_y) \hat{n} + M_0 (-\cos \beta n_y + \sin \beta n_x) \hat{\tau}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\vec{M}_0 \cdot \vec{\psi} = M_0 (\cos \beta n_x + \sin \beta n_y) (\psi_1 n_x + \psi_2 n_y) + M_0 (-\cos \beta n_y + \sin \beta n_x) (-\psi_1 n_y + \psi_2 n_x)$$

El código resultante para un dominio de cuatro lados es el siguiente:

```
problem flexurarm3([th1,th2,w,gam1,gam2,d],[psi1,psi2,v,eta1,eta2,e])=
int2d(Th)(D*(1-nu)*(dx(th1)*dx(psi1)+dy(th2)*dy(psi2)))
+int2d(Th)(D*(1-nu)*0.5*(dy(th1)+dx(th2))*(dy(psi1)+dx(psi2)))
+int2d(Th)(D*nu*(d*(dx(psi1)+dy(psi2))))
+int2d(Th)(D*nu*(dx(th1)+dy(th2))*e)
-int2d(Th)(D*nu*d*e)
+int2d(Th)((dx(v)-psi1)*gam1+(dy(v)-psi2)*gam2)
+int2d(Th)(Te*lambda*(dx(w)-th1)*eta1+(dy(w)-th2)*eta2))
-int2d(Th)(gam1*eta1+gam2*eta2)
-int2d(Th)(F*(dx(w)*dx(v)+dy(w)*dy(v)))
+int2d(Th)(drho*g*w*v)
-int2d(Th)(q*v)
+int1d(Th,Gamma1)(Vo*v)
+int1d(Th,Gamma1)(Mo*(cos(beta)*N.x+sin(beta)*N.y)*(psi1*N.x+psi2*N.y))
+int1d(Th,Gamma1)(Mo*(-cos(beta)*N.y+sin(beta)*N.x)*(-psi1*N.y+psi2*N.x))
+on(Gamma3,th1=0)
+on(Gamma3,th2=0)
+on(Gamma3,w=0);
```

donde $th1=\theta_1$, $th2=\theta_2$, $w = w$, $gam1=\gamma_1$, $gam2=\gamma_2$, $d = d$, $psi1=\psi_1$, $psi2=\psi_2$, $v = v$, $eta1=\eta_1$, $eta2=\eta_2$, $e = e$, $nu = \nu$, y $lambda = \lambda^*$.

5.3.3. Validación del modelo

Al igual que la validación del modelo de Kirchhoff-Love, la validación del modelo de Reissner-Mindlin se realiza utilizando los parámetros listados en la Tabla 4.1, salvo por el módulo de Young el cual se considera con un valor de 70 GPa.

Primero se calcula la flexura producida por una carga rectangular de 5 km de alto, 40 km de ancho y 400 km de largo (carga 1D). La malla utilizada es de 500 km de largo y 400 km de ancho. El espesor elástico se varía a lo largo de la placa y por ello la malla se divide en 3 regiones distintas. La primera abarca desde los 0 km a los 100 km de distancia a la fosa ($T_e = 10$ km), la segunda desde los 100 km a los 200 km de distancia a la fosa ($T_e = 15$ km) y la tercera desde los 200 km a los 500 km ($T_e = 20$ km). En la parte superior de la Figura 5.12 se muestra la variación del

espesor elástico en verde y la carga utilizada en línea punteada azul. Ambas curvas se encuentran expresadas en kilómetros. En la parte inferior de la Figura se muestra en celeste el resultado del modelo de Kirchhoff-Love 1D utilizando un espesor elástico variable, modelo que fue resuelto en la sección 5.1 del presente capítulo. Además se muestra, en línea punteada color morado, el resultado del modelo de Reissner-Mindlin 2D utilizando $\beta=0^\circ$. Se puede observar que el ajuste es muy bueno y sólo existen pequeñas diferencias en la parte del abombamiento a los 50 km de distancia de la fosa.

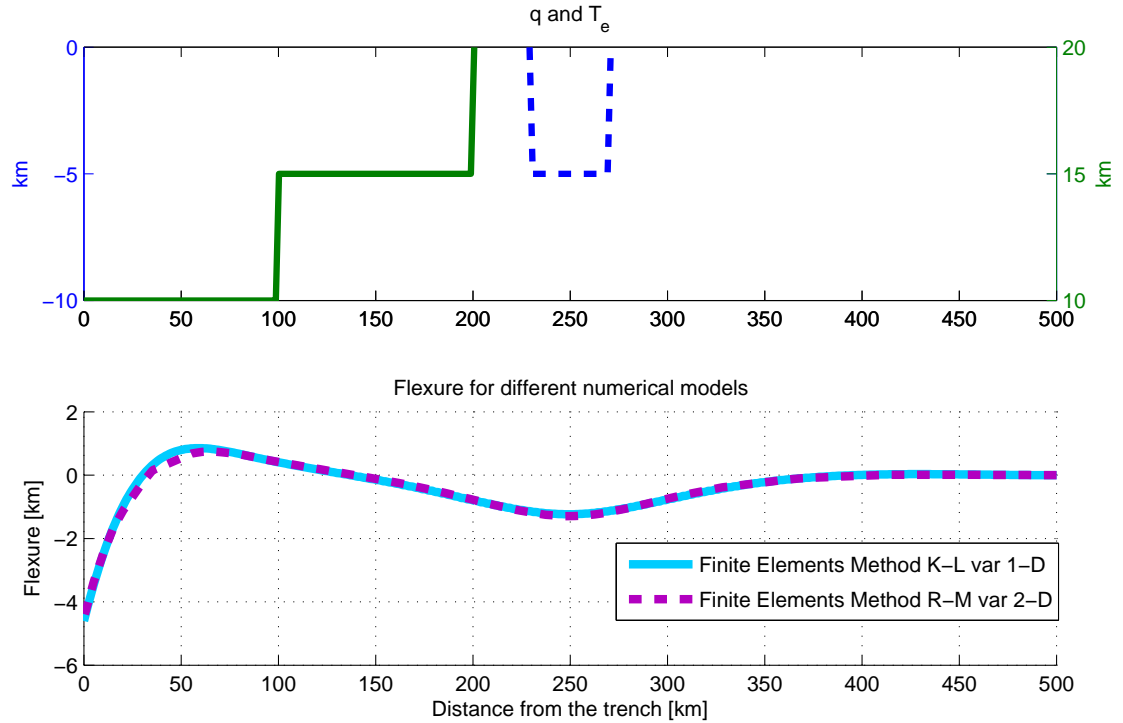


Figura 5.12: Parte superior: variación del espesor elástico a lo largo de la placa (verde) y carga utilizada (punteada azul). Parte inferior: resultado FEM 1D para el modelo de K-L usando un espesor elástico variable (celeste) y resultado FEM 2D para el modelo de R-M con espesor elástico variable.

A continuación se calcula la flexura producida por una carga rectangular de base cuadrada de 100 km de largo, 100 km de ancho y 5 km de alto ubicada al centro de una placa elástica de espesor elástico constante ($T_e = 15$ km) de 1200 km \times 1200 km. Para ello se impone que el momento de flexión y la fuerza de cizalle vertical son nulas en Γ_1 . Los resultados obtenidos son comparados con los obtenidos por el modelo de convolución (Capítulo 4) y con los obtenidos mediante el modelo de Kirchhoff-Love 2D usando un espesor elástico constante (Figura 5.13). De la figura se puede observar que el ajuste es bueno y sólo hay pequeñas diferencias en la amplitud de la flexura justo debajo de la carga.

Como prueba final se decide ver cómo influye la dirección de convergencia de las placas. Por ello se calcula la flexura producida únicamente por el momento de flexión o *bending moment*, sin incluir una fuerza de cizalle vertical ni cargas adicionales. Se utiliza un dominio rectangular de 500 km de largo \times 400 km de ancho. Se decide calcular la flexura cuando el ángulo β (ver Figura 5.11) es igual a 0° , 30° , 50° , 70° y 90° . En la Figura 5.14 se observa que la flexura es máxima cuando la dirección de convergencia es perpendicular al margen, es decir cuando β es igual a cero, y es nula cuando β es igual a 90° (margen transformante).

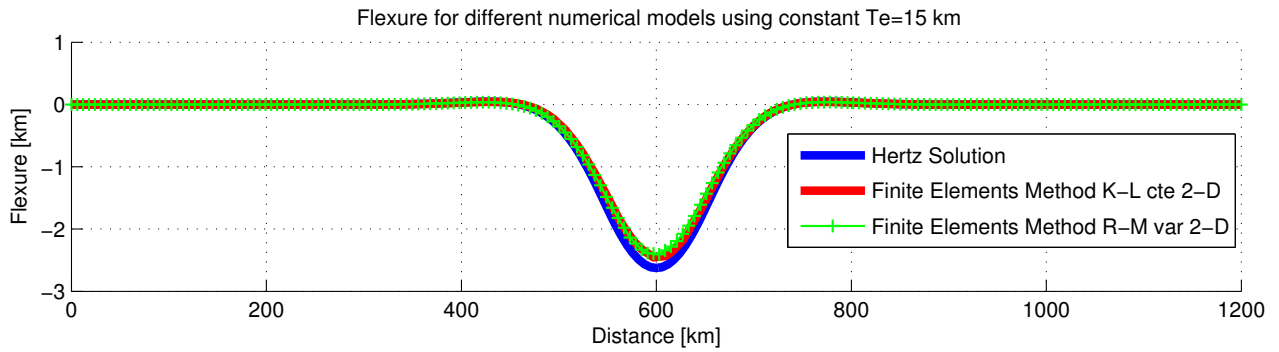


Figura 5.13: Comparación de la flexura resultante para una carga rectangular de base cuadrada calculada a través de tres modelos distintos: Convolución (azul), FEM modelo de K-L 2D con $T_e = \text{cte}$ (rojo) y FEM modelo R-M 2D (verde) con T_e variable.

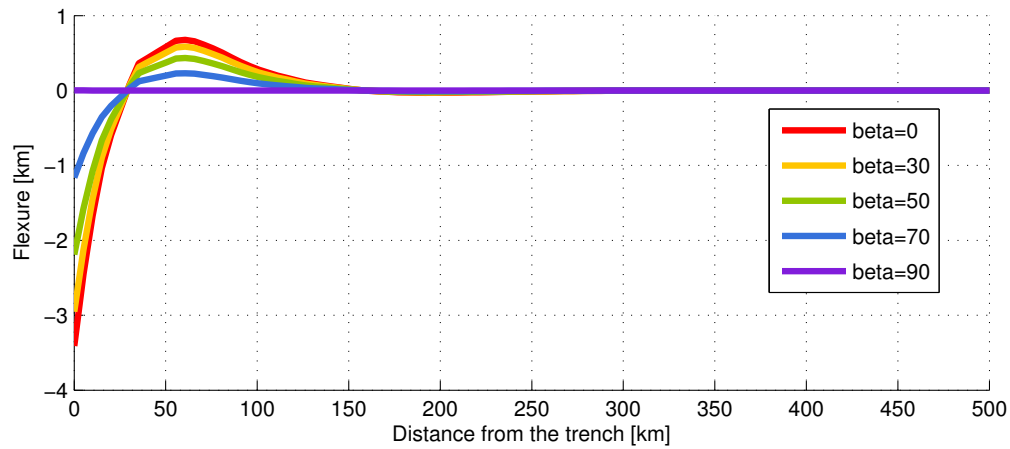


Figura 5.14: En la figura se muestra cómo varía la flexura resultante cuando varía la dirección de convergencia de las placas involucradas. Se puede observar que la flexura es máxima cuando la dirección de convergencia es perpendicular al margen, es decir, cuando $\beta = 0^\circ$ (rojo) y que es nula cuando tenemos un margen transformante, es decir, cuando $\beta = 90^\circ$ (morado).

5.3.4. Resultados para la zona de Juan Fernández

Para calcular la flexura bajo los montes submarinos de Juan Fernández se utiliza una malla como la que se muestra en la Figura 5.5. El sector más cercano a la fosa (S1) abarca desde los 0 km de distancia a la fosa a los 60 km, el segundo sector (S2) desde los 60 km hasta los 200 km y el tercero desde los 200 km hasta el final de la placa (S3). Se utiliza un método de *Monte Carlo* de manera de poder encontrar aquellos valores que reduzcan al máximo la diferencia entre el perfil calculado y el Moho de referencia o gravimétrico. Es por ello que se varía M_0 entre $1,954 \times 10^{15}$ [N] y $1,658 \times 10^{17}$ [N], V_0 entre $1,3 \times 10^{10}$ [N/m] y $1,093 \times 10^{13}$ [N/m], el espesor elástico en el sector S1 entre 10-20 km, en el sector S2 entre 2-10 km y en el sector S3 entre 10-20 km en pasos de 1km. El resto de los parámetros utilizados corresponden a los mostrados en la Tabla 4.1, salvo por el Módulo de Young que se asume para la zona un valor de 70×10^9 Pa. Para cuantificar el error asociado se calcula el error RMS en metros como sigue:

$$RMS = 1000 \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N (Moho_i^{real} - Moho_i^{calculado})^2}$$

donde N corresponde al número de puntos del perfil, $Moho^{real}$ a la coordenada vertical (en km) del Moho gravimétrico de referencia y $Moho^{calculado}$ a la coordenada vertical del Moho calculado mediante elementos finitos.

En esta región de estudio la placa de Nazca converge en una dirección N78.4°E por lo que se decide fijar el ángulo β en 11.6°. A modo de ejemplo se muestra uno de los resultados obtenidos en una vista en planta en la Figura 5.15, donde además se destaca con una línea blanca el perfil P01. En la Figura 5.16 se observa una vista en perspectiva del resultado anterior. Una vez que se tiene la superficie calculada se extraen los datos para el perfil P01 y se comparan con el Moho gravimétrico. Los resultados cuyo error RMS, expresado en metros, es inferior a los 150 metros se muestran en la Figura 5.17. El mínimo valor encontrado para el espesor elástico en la zona S1 es de 10 km, mientras que el máximo es de 18 km. Para el sector S2 el mínimo T_e resulta ser de 4 km y el máximo de 6 km. Para el sector S3, el más lejano a la fosa, el mínimo es de 10 km y el máximo de 20 km. El promedio de los valores obtenidos para el espesor elástico, cuyo RMS no supera los 150 metros son: $T_e^1 \approx 12.8$ km, $T_e^2 \approx 5$ km y $T_e^3 \approx 15.2$ km. La tendencia es que el espesor elástico alcanza su mínimo valor justo por debajo de los montes submarinos y su valor máximo en la zona más alejada de la fosa.

Las curvas resultantes (gris) se ven suaves en comparación a lo obtenido mediante el modelo de Kirchhoff-Love forzando un espesor elástico variable. Sin embargo en algunas zonas el ajuste no parece ser muy bueno. Desafortunadamente los únicos datos del Moho con los que se cuentan son aquellos sacados del modelo de densidades para los perfiles P01, P02 y P03, por lo que evaluar qué tan bueno es el ajuste resulta una tarea difícil.

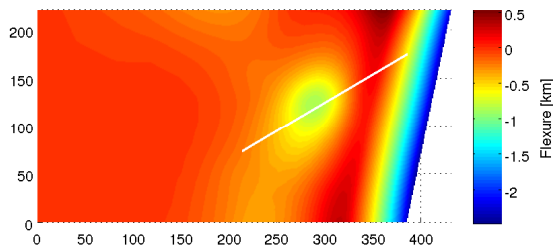


Figura 5.15: Gráfico de colores de la flexura producida por el Guyot O'Higgins y por el Monte O'Higgins, ambos dos muy cercanos a la fosa. Los cálculos se realizan utilizando el modelo de Reissner-Mindlin usando un espesor elástico variable. Además se destaca el perfil P01 con una línea blanca.

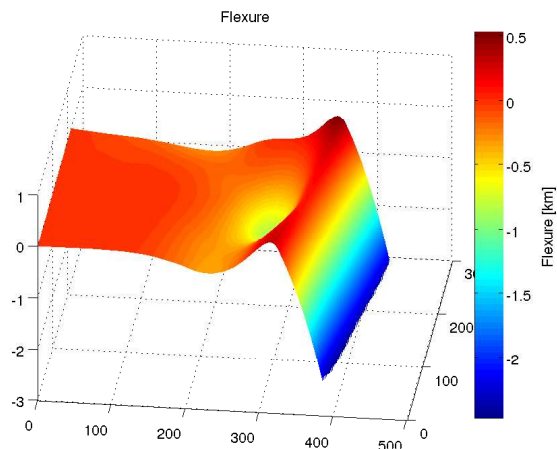


Figura 5.16: Vista 3-D de la flexura del Moho bajo los montes submarinos usando el modelo de R-M $T_e = \text{var.}$

5.3.5. Resultados para la zona del Codo de Arica

La región del Codo de Arica plantea un desafío bastante más interesante que el de la zona de Juan Fernández. Su particular geometría hace que la dirección de convergencia vaya cambiando con respecto a la normal al margen, por lo que el momento de flexión también irá variando. Se escoge una zona muy amplia, de manera de poder estudiar la flexura producida netamente por la subducción y así poder ignorar las pequeñas rugosidades en la placa. La flexura calculada se compara directamente con la batimetría, a la cual se le aplica un filtro adecuado que más tarde será explicado.

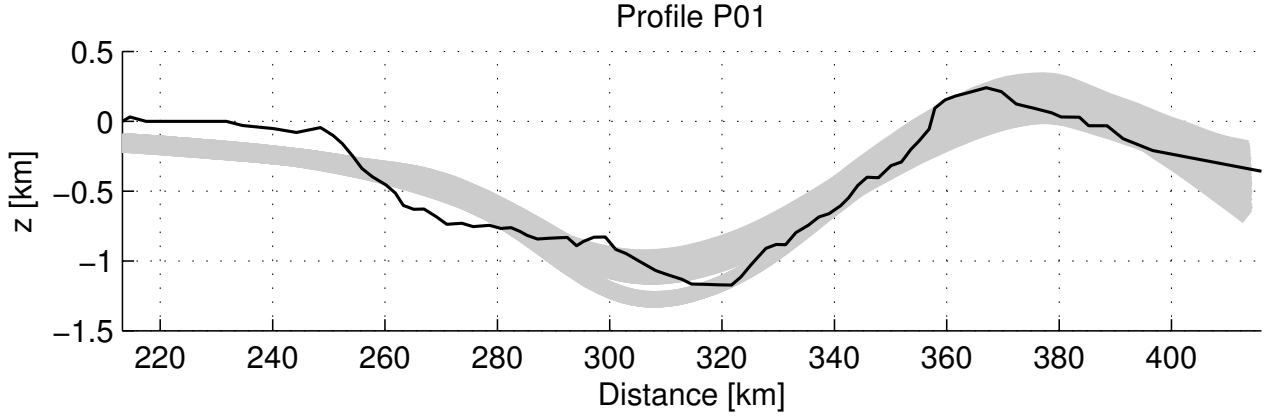


Figura 5.17: En gris se muestran las distintas posibles soluciones para el perfil P01, cuyo error RMS no supera los 150 metros y en negro el Moho gravimétrico de referencia. Estas soluciones son extraídas a partir de las distintas superficies calculadas como aquella mostrada en la Figura 5.15. Se puede observar que el ajuste es bastante razonable. El valor de espesor elástico promedio obtenido para la zona más cercana a la fosa es de ~ 12.8 km, para la zona justo debajo de los montes submarinos de ~ 5 km y para la zona más lejana de ~ 15.2 km.

Para el cálculo de la flexura se divide el dominio en tres regiones distintas (Figura 5.18a), de manera de poder variar el espesor elástico en cada una de éstas usando un método de *Monte Carlo*. La primera región, la más cercana a la fosa (amarilla), tiene un grosor de 80 km aproximadamente. La segunda región, intermedia (negra), también tiene un grosor de aproximadamente 80 km. Finalmente la tercera región es aquella mostrada en rosado que abarca la mayor parte de la placa.

En el método de *Monte Carlo*, se varía M_0 entre $7,7 \times 10^{11}$ [N] y $4,4 \times 10^{14}$ [N], V_0 entre $6,28 \times 10^9$ [N/m] y $1,5 \times 10^{13}$ [N/m], y los espesores elásticos de cada una de las regiones desde los 17 km hasta los 30 km en pasos de 1 km. El resto de los parámetros utilizados corresponden a los mostrados en la Tabla 4.1, salvo por el Módulo de Young que se asume para la zona un valor de 70×10^9 Pa.

Para el cálculo del error RMS asociado al resultado, se decide filtrar la batimetría, para así poder remover defectos que no fuesen producidos por la flexura. El filtro utilizado no es un filtro convencional, sino que se divide el dominio en pequeñas parcelas rectangulares y se toma el mínimo valor en la coordenada z de cada parcela. Luego se hace una interpolación de los mínimos encontrados y así se obtiene una batimetría con menor cantidad de rugosidades. El error RMS (en metros) se calcula de la siguiente manera:

$$RMS = 1000 \sqrt{\frac{\int (err) dx dy}{Area}}$$

donde err corresponde al módulo al cuadrado de la diferencia entre la geometría calculada en *FreeFem++* (Figura 5.18b) y la batimetría filtrada (Figura 5.18c), y $Area$ corresponde al área considerada de la zona de estudio. Dadas las condiciones de borde, sobretodo aquella que hace nula la flexura en el borde Γ_2 se decide calcular el error RMS en un área inferior al área total de la zona, de manera de poder despreciar el error asociado a aquel borde, sobretodo en la parte más al Norte, donde además se encuentran altos batimétricos que no tienen relación con la flexura y que no fueron posibles de filtrar del todo. Por ello se toma un área de menor tamaño que abarca bien los perfiles P04, P05, P06 y P07 (Figura 1.3).

Finalmente se escogen los mejores resultados, aquellos cuyo error RMS no supera los 130 metros y se extraen los perfiles P04, P05, P06 y P07. En la Figura 5.19 se muestran los 270 mejores resultados

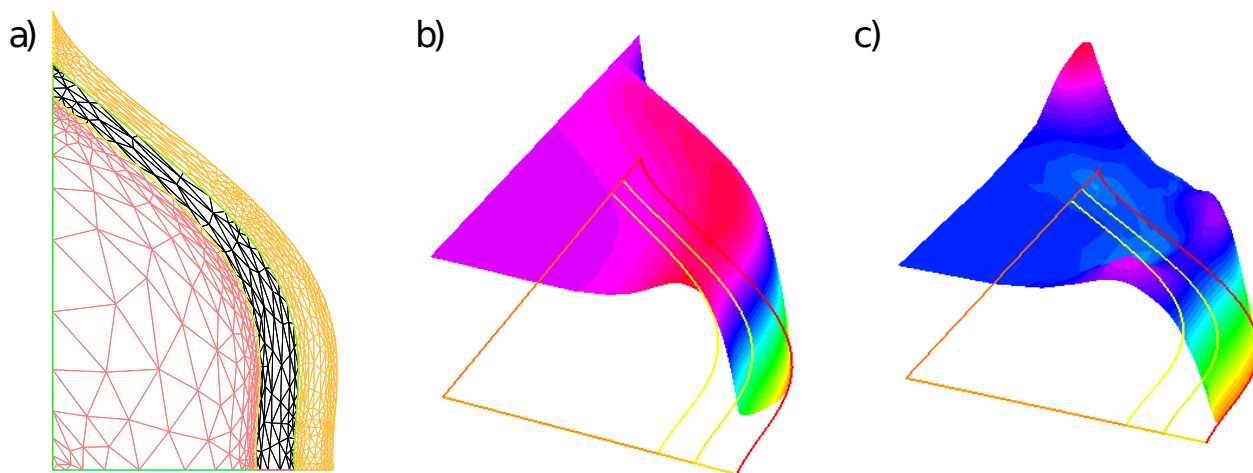


Figura 5.18: a) Malla usada para el cálculo de la flexura mediante elementos finitos en el modelo de Reissner-Mindlin. El dominio se divide en tres regiones distintas en las cuales se varía el espesor elástico usando un método de *Monte Carlo*. La primera región, la más cercana a la fosa (amarilla), tiene un grosor de 80 km aproximadamente. La segunda región, intermedia (negra), también tiene un grosor de aproximadamente 80 km. Finalmente la tercera región es aquella mostrada en rosado que abarca la mayor parte de la placa. b) Ejemplo de imagen tridimensional de la flexura calculada por *FreeFem++*. c) Batimetría filtrada utilizada para el cálculo del error RMS.

para cada uno de los perfiles en color gris, la batimetría real con puntitos negros y la batimetría filtrada con línea continua azul. En el perfil P06 se observa que el filtro efectivamente no es capaz de filtrar un gran alto batimétrico, sin embargo el ajuste es bastante bueno. El mínimo valor, entre los 270 mejores ajustes, para el espesor elástico de la primera región (la más cercana a la fosa) es de 17 km, el máximo de 24 km mientras que el promedio es de ~ 19 km. Para la región intermedia el mínimo es de 17 km, el máximo de 30 km y el promedio de ~ 21 km. Finalmente para la región más alejada de la fosa el mínimo es de 17 km, el máximo de 24 km y el promedio de ~ 20.3 km.

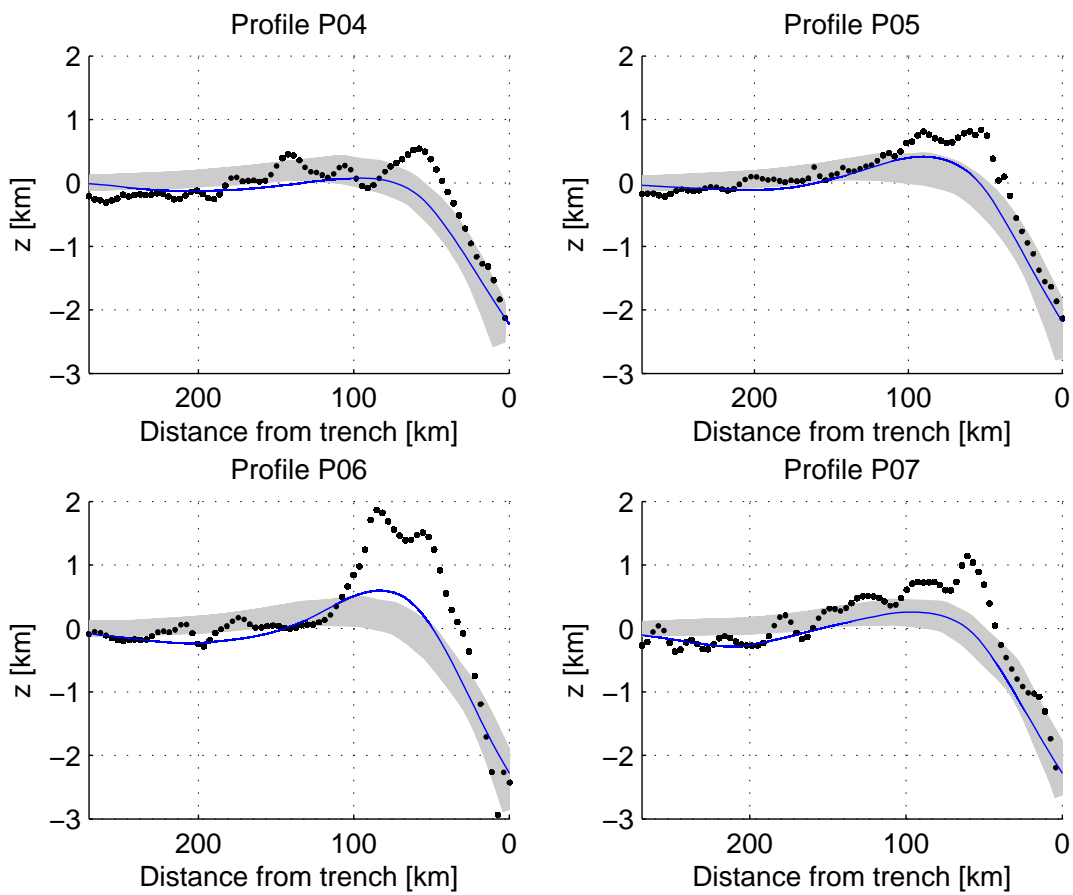


Figura 5.19: La línea punteada representa la batimetría real para cada uno de los perfiles en estudio, la curva continua azul corresponde a la batimetría filtrada y las curvas color gris representan todos los resultados cuyo error RMS es inferior a los 130 metros (270 curvas).

Capítulo 6

Discusiones y Conclusiones

6.1. Elasticidad lineal y modelo isotrópico

Los materiales elásticos son aquellos que se deforman cuando se les aplica una fuerza y vuelven a su forma original cuando la fuerza es removida, es decir, son aquellos sólidos en los cuales las deformaciones son termodinámicamente reversibles.

La elasticidad lineal considera que las deformaciones son en general pequeñas. En la práctica casi todos los materiales sólidos, incluyendo la mayoría de las rocas a relativamente bajas temperaturas y presiones, se comportan elásticamente cuando las fuerzas aplicadas no son demasiado grandes. Un ejemplo clásico es el de una viga larga y delgada. Incluso cuando se tiene una gran flexión, en la cual los extremos de la viga se desplazan una cantidad razonable, las extensiones y compresiones en la viga misma son pequeñas.

Adicionalmente, la deformación de muchas rocas es linealmente proporcional a los esfuerzos aplicados por lo que la aproximación de la elasticidad lineal parece ser razonable. Las ecuaciones de la elasticidad lineal se simplifican muchísimo cuando se considera un sólido isotrópico, es decir, uno en el cual las propiedades elásticas son independientes de la dirección. A pesar de que algunas rocas metamórficas con fuertes foliaciones no son estrictamente isotrópicas, la aproximación isotrópica es usualmente buena para el manto y la corteza terrestre.

Por otro lado, en el presente estudio se consideró tanto el módulo de Young E como la razón de Poisson ν como cantidades constantes. Sin embargo el módulo de Young depende de la densidad de la roca, de la velocidad de la onda P y de la razón de Poisson. La infiltración de fluidos disminuye la velocidad de las ondas sísmicas [Christensen, 1996; Contreras-Reyes et al., 2008], aumenta la razón de Poisson y además disminuye la densidad del manto [Ranero & Sallarès, 2004], lo que hace variar el módulo de Young y así la rigidez flexural. Pese a lo anterior, la rigidez flexural es mucho más sensible a una variación en el espesor elástico que a una variación del módulo de Young por lo que considerar tanto E como ν constantes parece ser una buena aproximación [Contreras-Reyes & Osses, 2010]. Sin embargo, hay que notar que en el modelo de Reissner-Mindlin se hace uso de un coeficiente k conocido como factor de cizalle o *shear coefficient*, el cual es una función del valor de la razón de Poisson ν , por lo que las variaciones de ésta podrían modificar ligeramente los resultados.

6.2. Modelos empleados y sus alcances

Si bien en la naturaleza todas las estructuras son tridimensionales, el análisis exacto de los esfuerzos y deformaciones presenta enormes dificultades. Sin embargo, tal precisión es rara vez necesaria, y por lo tanto injustificada, ya que por lo general, la magnitud y la distribución de la carga, así como la resistencia y la rigidez del material estudiado no se conocen con precisión. Por eso parece adecuado considerar algunas estructuras como si fueran bidimensionales. En una placa por ejemplo, se considera que su espesor es pequeño en comparación con sus otras dimensiones, y por lo tanto puede ser analizado de manera bidimensional, tal como lo propone el modelo de Reissner-Mindlin (se pierde una dimensión del problema). En el trabajo de Comer [1983] se derivan expresiones analíticas para las flexiones y esfuerzos debido a la acción de una carga unidimensional en una placa de espesor arbitrario y posteriormente los resultados se comparan con aquellos que predice la teoría de placas delgadas. Comer [1983] muestra que tanto para cargas pequeñas, tales como montañas submarinas, como para cargas grandes, las soluciones de la teoría de placas gruesas y la teoría de placas delgadas difieren muy poco. Las mayores discrepancias se encuentran en la zona inmediatamente debajo de la carga, donde la teoría de placas delgadas podría subestimar la amplitud de la flexura en un 5 a 10%. Las soluciones propuestas en el trabajo antes mencionado son prácticamente exactas, salvo que fue despreciado el efecto de la gravedad sobre la placa misma. El trabajo de Wolf [1985] concuerda con lo propuesto en el trabajo de Comer [1983] en que para la mayoría de las aplicaciones geológicas, las flexiones y los esfuerzos calculados basándose en la teoría de placas delgadas constituye una buena aproximación. Sin embargo se hicieron algunas correcciones y se incluyó los efectos de las fuerzas gravitacionales de cuerpo de la placa. Lo anterior muestra que las diferencias entre los modelos de placas delgadas y placas gruesas son aún menores que lo deducido por Comer [1983]. El debate no se acabó allí y a pesar de los trabajos que siguieron, hay un consenso de que la teoría de placas delgadas constituye una aproximación satisfactoria.

El modelo de Kirchhoff-Love 2D corresponde a una simplificación del modelo de Reissner-Mindlin, y como ya se vio anteriormente, considera una quinta hipótesis que finalmente se traducirá en que las rotaciones ya no serán independientes de las flexiones. Es decir, se desprecian las deformaciones de cizalle, por lo que las rotaciones en la superficie media se producen únicamente por las variaciones en los desplazamientos verticales. Una consecuencia de esto es que la normal se mantiene ortogonal a la superficie media. Por ello esta hipótesis es adecuada sólo cuando el espesor de la placa es suficientemente pequeño en relación a su largo y ancho, o cuando las deformaciones son suficientemente pequeñas. A pesar de que esta simplificación puede parecer bastante fuerte, los modelos más utilizados incluyen una simplificación más. Y es que consideran un modelo 1D [Bry & White, 2007; Hanks, 1971; Judge & McNutt, 1991; Contreras-Reyes & Osses, 2010; McAdoo et al., 1978; Bodine et al., 1981], es decir un modelo en el que se pierde la tridimensionalidad del problema y no es posible trabajar con cargas localizadas o con margenes con geometrías complejas como la del Codo de Arica.

El modelo presentado en este trabajo de tesis es un modelo general, con pocas simplificaciones, capaz de calcular la flexura de una placa producida por el efecto combinado de cargas tridimensionales y el *bending* asociado a la subducción. Además, es un modelo que de manera sencilla permite trabajar con márgenes con geometrías complejas y que permite la variación del espesor elástico a lo largo de la placa. La variación del espesor elástico permite identificar zonas de debilitamiento de la litosfera que pueden ser resultado de alteraciones termales, de deformación frágil o incluso de alteraciones reológicas como se discute a continuación.

6.3. Espesor elástico

Uno de los objetivos de este trabajo es poder encontrar los espesores elásticos que sean capaces de reproducir la flexura de la litosfera observada. El espesor elástico (T_e) es un parámetro que caracteriza la aparente resistencia de la placa a las deformaciones. Sin embargo hay una serie de factores que influyen en éste. A continuación se explicarán algunos de estos factores.

6.3.1. Edad y estado termal

Trabajos anteriores (ejemplo: [Caldwell & Turcotte \[1979\]](#)) sugieren que para la litosfera oceánica las estimaciones del espesor elástico más o menos obedecen a la profundidad de la isoterma de los 700°C para una placa libre de montes submarinos [[Harris & Chapman, 1994](#)] y de 200°-400°C en el caso de montes submarinos y que a medida que la placa se enfría con el tiempo ésta se vuelve más fuerte y por lo tanto el espesor elástico aumenta [[Caldwell et al., 1976](#)]. Es ampliamente aceptado que las desviaciones significativas de los valores de T_e observados con respecto a los predichos se asocian con anomalías termales [[McNutt & Menard, 1982](#); [Burov & Diament, 1995](#)], como podría ser la acción de un *hot-spot*. Cuando una carga se posiciona sobre una placa, ésta responde casi de manera instantánea [[Bodine et al., 1981](#)], por lo que el valor del espesor elástico inferido para la zona de Juan Fernández sería una cota inferior, es decir, correspondería al valor de T_e en el momento de la aparición del monte submarino. Esto porque al correr el tiempo la placa continuará envejeciendo y volviéndose cada vez más rígida [[Billen & Gurnis, 2005](#)].

Sin embargo se ha demostrado que el estado termal de litosfera es sólo una de a lo menos tres propiedades idénticamente importantes que determinan T_e . Esta dependencia del espesor elástico con la edad no ha estado exenta de discusiones e inconsistencias [[Bry & White, 2007](#)]. De acuerdo con el modelo termal, se esperaría que el espesor elástico para la zona de Juan Fernández fuese de ~ 20 km y para la zona del Codo de Arica de unos ~ 40 km. Los valores encontrados en este trabajo para T_e son muy inferiores a los predichos por un modelo termal, y además en todos los perfiles estudiados se observa una reducción del espesor elástico en las zonas más cercanas a la fosa, las cuales coinciden con las zonas de mayor edad a lo largo de cada perfil (Figura 6.1). Todo lo anterior hace suponer que la edad de la placa no es el factor más determinante del espesor elástico.

6.3.2. Composición y geometría

Otra propiedad importante que determina el espesor elástico corresponde a la composición y geometría de la placa. Hay que notar que existe una contradicción importante entre la asunción de una reología elástica lineal y lo que se sabe sobre las propiedades de las rocas, ya que la elasticidad lineal asume que no existe dependencia alguna entre las tasas de deformación, de esfuerzos y el tiempo. Además, como ya fue mencionado anteriormente, la infiltración de fluidos puede modificar la composición de las rocas y por lo tanto, las propiedades elásticas de éstas.

Por otro lado la geometría del margen en la zona del Codo de Arica hace que la tridimensionalidad del problema aumente la amplitud máxima del *outer rise* ($w_b \sim 650$ m). La suposición de un modelo unidimensional podría sobrestimar el valor de la rigidez flexural [[Watts et al., 1975](#); [Contreras-Reyes & Osses, 2010](#)].

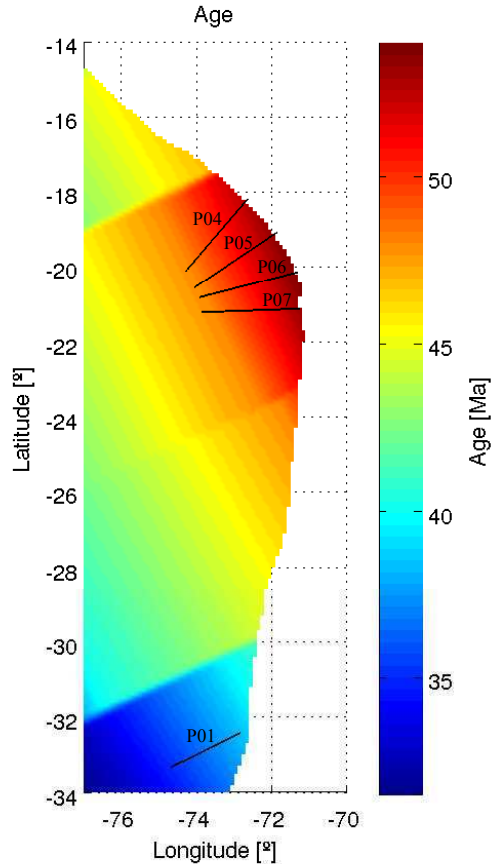


Figura 6.1: Edad de la litosfera en las zonas de estudio. Los perfiles estudiados se muestran con línea continua negra. La edad de la placa aumenta en las proximidades de la fosa por lo que a partir de un modelo termal se esperaría que el espesor elástico fuese aumentando en las cercanías de la fosa. Los datos de la edad del piso oceánico fueron obtenidos de Müller et al. [2008] (http://www.ngdc.noaa.gov/mgg/ocean_age/ocean_age_2008.html).

6.3.3. Deformación inelástica e hidrofracturamiento

Los modelos puramente elásticos de placas que consideran un espesor elástico constante son auto-inconsistentes ya que muchas veces predicen esfuerzos intraplaca lo suficientemente grandes (en algunos casos cercanos a los 500 MPa [McAdoo et al., 1978; Capitanio et al., 2009]) como para producir deformación inelástica (frágil o dúctil). Es por ello que modelos que combinan deformación elástica con deformación plástica han logrado explicar de manera más satisfactoria la amplitud y la longitud de onda del *outer rise* [McAdoo et al., 1978], sin embargo tienden a sobrestimar el espesor elástico [Bodine & Watts, 1979].

La estrategia seguida en este trabajo consistió en utilizar un modelo elástico, pero con un espesor elástico variable (al igual que en los trabajos de Judge & McNutt [1991] y Contreras-Reyes & Osses [2010]) ya que el comportamiento inelástico reduce la resistencia local de la placa [Billen & Gurnis, 2005] y como resultado ésta se flexa como si el espesor elástico efectivo hubiese disminuido en algunas zonas, en especial en aquellas de mayor curvatura [Burov & Diament, 1995; Bodine & Watts, 1979; Bodine et al., 1981].

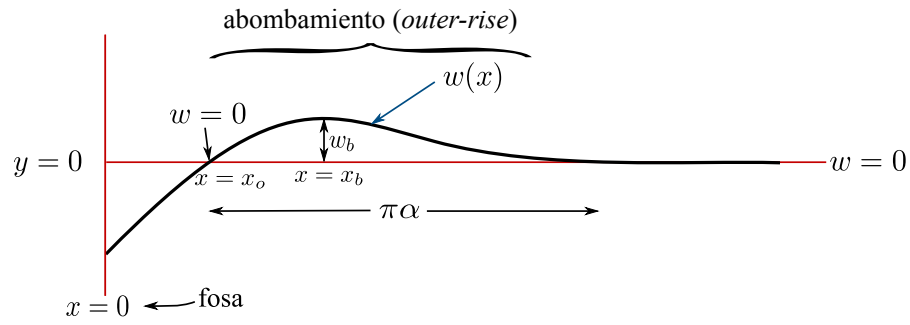


Figura 6.2: En la Figura se muestran los significados de algunos parámetros típicos en la modelación de la flexura de una placa cerca de una zona de subducción.

Teniendo esto en consideración, los resultados obtenidos para el espesor elástico bajo los montes submarinos de Juan Fernández son consistentes ya que existe, por un lado, una anomalía termal (la cual dio origen a los montes) que debilitó la placa, y por otro lado el hecho de que bajo la placa haya una mayor curvatura justifica una reducción del espesor elástico.

En la parte superior del *outer rise* se han observado fallas extensionales asociadas a la flexión de la placa evidenciadas por estructuras del tipo *horst* y *graben* [Ranero et al., 2005] y sismicidad [Christensen & Ruff, 1983]. Estas fallas extensionales permiten la percolación de fluidos dentro de la corteza y parte superior del manto, lo que puede resultar en una serpentinización de este último. La infiltración de agua disminuye la velocidad de propagación de las ondas sísmicas tal como fue observado en los trabajos de Ranero & Sallarès [2004], Kopp et al. [2004], Contreras-Reyes et al. [2008] y Contreras-Reyes et al. [2007]. El aumento de la presión de poros y el fracturamiento son mecanismos que disminuyen considerablemente la resistencia de la roca [Brace & Kohlstedt, 1980].

Dado lo anteriormente expuesto, parece razonable encontrar un menor espesor elástico en la zona del *outer rise* tanto para la zona de Juan Fernández, como para la del Codo de Arica.

6.3.4. Fuerzas horizontales

Finalmente en las zonas donde hay centros de expansión activos o donde hay compresión, la resistencia de la litosfera se ve reducida por los esfuerzos horizontales, por anomalías termales y por posibles heterogeneidades preexistentes. Por ejemplo, en la mayoría de los modelos elásticos, incluyendo el propuesto en este trabajo, se ignora la fuerza tectónica horizontal debido a que diferentes estudios han demostrado que no afecta mayormente las flexiones de la placa elástica a menos que los esfuerzos alcanzaran valores superiores a los 10 kbar [Caldwell et al., 1976]. Sin embargo, si se tiene una placa cuyo comportamiento no es puramente elástico, la fuerza horizontal puede producir fallamiento superficial y así alterar el valor del espesor elástico disminuyendo la rigidez flexural de la placa (Burov & Diament 1995, figura 3c; Bodine et al. 1981, Caldwell et al. 1976). Actualmente no es posible determinar los valores de las fuerzas horizontales involucradas mediante la batimetría por lo que se necesitarían datos adicionales, como podrían ser los mecanismos focales de los hipocentros de los sismos originados cerca de la fosa, así como fue propuesto por Hanks [1971]. Otros autores han propuesto que el valor de la fuerza horizontal puede variar considerablemente según el modelo utilizado [Bodine & Watts, 1979], por lo que su determinación aún es tema de debate.

6.4. Conclusiones

Los resultados antes expuestos muestran que para la zona de Juan Fernández el espesor elástico de la placa disminuye notoriamente bajo los montes submarinos, es decir, en la zona de mayor curvatura. Estos resultados son consistentes con trabajos anteriores [Burov & Diament, 1995; Bry & White, 2007].

En el caso de la zona del Codo de Arica, los resultados muestran que el espesor tiende a disminuir en la sección más cercana a la fosa, lo cual puede ser interpretado como una disminución del espesor elástico producto del debilitamiento de la placa debido a los esfuerzos de *bending*, extensivos o incluso horizontales que ésta experimentó producto de la subducción.

Los resultados no avalan una relación simple entre el espesor elástico y la edad de la placa. La resistencia de la placa ante las deformaciones probablemente se encuentra fuertemente dominada por los esfuerzos involucrados, los cuales podrían producir deformación inelástica y así disminuir el espesor elástico efectivo; por cambios en el espesor de la litosfera; por anomalías termales o por cambios reológicos.

A diferencia de este modelo, estudios previos sólo consideran geometrías simples y cargas unidimensionales por lo que el modelo presentado en este trabajo es un modelo más general que permite trabajar con márgenes complejos y cargas tridimensionales. Sin embargo, este modelo trabaja bajo los supuestos de la elasticidad lineal, una aproximación cuya validez está sujeta a discusión.

Bibliografía

- Angermann, D., Klotz, J., and Reigber, C. Space-geodetic estimation of the Nazca-South America Euler vector. *Earth and Planetary Science Letters*, 171(3):329–334, 1999. doi: 10.1016/S0012-821X(99)00173-9.
- Arfken, G. and Weber, H.J. *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier Academic Press, sexta edición, 2005. ISBN 0-12-088584-0.
- Billen, M.I. and Gurnis, M. Constraints on subducting plate strength within the Kermadec trench. *Journal of Geophysical Research*, 110(B5):B05407, Mayo 2005. doi: 10.1029/2004JB003308.
- Birch, F. The Velocity of Compressional Waves in Rocks to 10 Kilobars, Part 2. *Journal of Geophysical Research*, 66(7):2199–2224, 1961. doi: 10.1029/JZ066i007p02199.
- Bodine, J.H. and Watts, A.B. On lithospheric flexure seaward of the Bonin and Mariana trenches. *Earth and Planetary Science Letters*, 43(1):132–148, 1979. ISSN 0012-821X. doi: 10.1016/0012-821X(79)90162-6.
- Bodine, J.H., Steckler, M.S., and Watts, A.B. Observations of Flexure and the Rheology of the Oceanic Lithosphere. *Journal of Geophysical Research*, 86(B5):3695–3707, 1981. doi: 10.1029/JB086iB05p03695.
- Brace, W.F. and Kohlstedt, D.L. Limits on Lithospheric Stress Imposed by Laboratory Experiments. *Journal of Geophysical Research*, 85(B11):6248–6252, 1980. doi: 10.1029/JB085iB11p06248.
- Braess, D. *Finite Elements: Theory, Fast Solvers, and Applications in Elasticity Theory*. Cambridge University Press, third edition, 2007.
- Braitenberg, C., Ebbing, J., and Gotze, H. Inverse modelling of elastic thickness by convolution method - the eastern Alps as a case example. *Earth and Planetary Science Letters*, 202(2): 387–404, Septiembre 2002.
- Bry, M. and White, N. Reappraising elastic thickness variation at oceanic trenches. *Journal of Geophysical Research*, 112(B08414), Agosto 2007. doi: 10.1029/2005JB004190.
- Burov, E.B. and Diament, M. The effective elastic thickness (t_e) of continental lithosphere: What does it really mean? *Journal of Geophysical Research*, 100(B3):3905–3927, 1995.
- Caldwell, J.G. and Turcotte, D.L. Dependence of the thickness of the elastic oceanic lithosphere on age. *Journal of Geophysical Research*, 84(B13):7572–7576, Diciembre 1979.
- Caldwell, J.G., Haxby, W.F., Karig, D.E., and Turcotte, D.L. On the applicability of a universal elastic trench profile. *Earth and Planetary Science Letters*, 31(2):239–246, 1976. ISSN 0012-821X. doi: 10.1016/0012-821X(76)90215-6.

- Cande, S.C. and Haxby, W.F. Eocene Propagating Rifts in the Southwest Pacific and Their Conjugate Features on the Nazca Plate. *Journal of Geophysical Research*, 96(B12):19609–19622, 1991. doi: 10.1029/91JB01991.
- Capitanio, F.A., Morra, G., and Goes, S. Dynamics of plate bending at the trench and slab-plate coupling. *Geochemistry Geophysics Geosystems*, 10(4):Q04002, Abril 2009. doi: 10.1029/2008GC002348.
- Carlson, R.L. and Herrick, C.N. Densities and Porosities in the Oceanic Crust and Their Variations With Depth and Age. *Journal of Geophysical Research*, 95(B6):9153–9170, 1990. doi: 10.1029/JB095iB06p09153.
- Cazenave, A., Lago, B., Dominh, K., and Lambeck, K. On the response of the ocean lithosphere to sea-mount loads from geos 3 satellite radar altimeter observations. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 63(1):233–252, 1980. ISSN 1365-246X. doi: 10.1111/j.1365-246X.1980.tb02618.x.
- Christensen, D.H. and Ruff, L.J. Outer-rise earthquakes and seismic coupling. *Geophysical Research Letters*, 10(8):697–700, 1983. doi: 10.1029/GL010i008p00697.
- Christensen, N.I. Poisson’s ratio and crustal seismology. *Journal of Geophysical Research*, 101(B2): 3139–3156, 1996. doi: 10.1029/95JB03446.
- Comer, R.P. Thick plate flexure. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 72(1): 101–113, 1983. ISSN 1365-246X. doi: 10.1111/j.1365-246X.1983.tb02807.x.
- Contreras-Reyes, E. and Osses, A. Lithospheric flexure modelling seaward of the Chile trench: implications for oceanic plate weakening in the Trench Outer Rise region. *Geophysical Journal International*, 182(1):97–112, 2010.
- Contreras-Reyes, E. and Sepúlveda, J. Magmatic processes beneath the Louisville and Juan Fernández hotspot tracks from wide angle seismic data. Poster at the American Geophysical Union Chapman Conference, Puerto Ayora, Galápagos, Ecuador, July 2011.
- Contreras-Reyes, E., Grevemeyer, I., Flueh, E.R., Scherwath, M., and Heesemann, M. Alteration of the subducting oceanic lithosphere at the southern central Chile trench-outer rise. *Geochemistry Geophysics Geosystems*, 8(7):Q07003, Julio 2007. doi: 10.1029/2007GC001632.
- Contreras-Reyes, E., Grevemeyer, I., Flueh, E.R., and Reichert, C. Upper lithospheric structure of the subduction zone offshore of southern Arauco peninsula, Chile, at $\sim 38^\circ\text{S}$. *Journal of Geophysical Research*, 113(B7):B07303, Julio 2008. doi: 10.1029/2007JB005569.
- Contreras-Reyes, E., Grevemeyer, I., Watts, A.B., Planert, L., Flueh, E.R., and Peirce, C. Crustal intrusion beneath the Louisville hotspot track. *Earth and Planetary Science Letters*, 289(3-4): 323–333, 2010. doi: 10.1016/j.epsl.2009.11.020.
- DeMets, C., Gordon, R.G., Argus, D.F., and Stein, S. Current plate motions. *Geophysical Journal International*, 101(2):425–478, 1990. doi: 10.1111/j.1365-246X.1990.tb06579.x.
- Flores, A. Caracterización de la subducción de montes submarinos en el margen de Chile Central: Efectos sobre el campo de esfuerzo. Master’s thesis, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y matemáticas, Departamento de Geofísica, 2007.
- Flueh, E.R., Vidal, N., Ranero, C.R., Hojka, A., Huene, R.von, Bialas, J., Hinz, K., Cordoba, D., Dañobeitia, J.J., and Zelt, C. Seismic investigation of the continental margin off- and onshore Valparaiso, Chile. *Tectonophysics*, 288(1-4):251–263, 1998. doi: 10.1016/S0040-1951(97)00299-0.

- Flueh, E.R., Kopp, H., and Schreckenberger, B., editors. *Subduction Processes Off Chile*. Cruise Report. GEOMAR, 2002.
- Fuenzalida, A., Pardo, M., Cisternas, A., Dorbath, L., Dorbath, C., Comte, D., and Kausel, E. On the geometry of the Nazca Plate subducted under Central Chile (32–34.5°S) as inferred from microseismic data. *Tectonophysics*, 205(1–3):1–11, 1992. doi: 10.1016/0040-1951(92)90413-Z.
- Hanks, T.C. The Kuril Trench - Hokkaido Rise System: Large Shallow Earthquakes and Simple Models of Deformation. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 23(2):173–189, 1971. doi: 10.1111/j.1365-246X.1971.tb01811.x.
- Harris, R.N. and Chapman, D.S. A comparison of mechanical thickness estimates from trough and seamount loading in the southeastern Gulf of Alaska. *Journal of Geophysical Research*, 99(B5): 9297–9317, 1994. doi: 10.1029/93JB03285.
- Herron, E.M., Cande, S.C., and Hall, B.R. *Nazca Plate: Crustal formation and Andean convergence*, volume 154 of *Memoir (Geological Society of America)*, chapter An active spreading center collides with a subduction zone, a geophysical survey of the Chile margin triple junction, pages 683–701. Geological Society of America, 1981.
- Hertz, H. On the Equilibrium of Floating Elastic Plates. *Wiedemann's Annalen*, 22:449–455, 1884.
- Huene, R.von , Corvalán, J., Flueh, E.R., Hinz, K., Korstgard, J., Ranero, C.R., Weinrebe, W., and CONDOR SCIENTISTS, the . Tectonic control of the subducting Juan Fernández Ridge on the Andean margin near Valparaiso, Chile. *Tectonics*, 16(3):474–488, Enero 1997.
- Hull, A.J. An Exact Analytical Expression of the Shear Coefficient in the Mindlin Plate Equation. Technical report, Naval Undersea Warfare Center Division, Newport, Rhode Island, Octubre 2004.
- Jordan, T., Isacs, B., Allmendinger, R., Brewer, J., Ramos, V., and Ando, C. Andean tectonics related to geometry of subducted Nazca Plate. *Geological Study of America Bulletin*, 94:341–361, Marzo 1983.
- Judge, A. and McNutt, M. The Relationship Between Plate Curvature and Elastic Plate Thickness: A Study of the Peru-Chile Trench. *Journal of Geophysical Research*, 96(B10):16625–16639, Septiembre 1991. doi: 10.1029/90JB01772.
- Kley, J. Geologic and geometric constraints on a kinematic model of the Bolivian orocline. *Journal of South American Earth Sciences*, 12(2):221 – 235, 1999. doi: 10.1016/S0895-9811(99)00015-2.
- Kopp, H., Flueh, E.R., Papenberg, C., and Klaeschen, D. Seismic investigations of the O'Higgins Seamount Group and Juan Fernández Ridge: Aseismic ridge emplacement and lithosphere hydration. *Tectonics*, 23(2), Marzo 2004. doi: 10.1029/2003TC001590.
- Korenaga, Jun, Holbrook, W.S., Detrick, R.S., and Kelemen, P.B. Gravity anomalies and crustal structure at the southeast Greenland margin. *Journal of Geophysical Research*, 106(B5):8853–8870, 2001.
- Landau, L.D. and Lifshitz, E.M. *Theory of Elasticity*. Butterworth-Heinemann, third edition, 1986.
- Lawrie, A. and Hey, R. *Nazca Plate: Crustal Formation and Andean Convergence*, volume 154 of *Memoir (Geological Society of America)*, chapter Geological and geophysical variations along the western margin of Chile near lat 33° to 36°S and their relation to Nazca plate subduction, pages 741–754. Geological Society of America, 1981.

- Levitt, D.A. and Sandwell, D.T. Lithospheric bending at subduction zones based on depth soundings and satellite gravity. *Journal of Geophysical Research*, 100(B1):379–400, 1995. doi: 10.1029/94JB02468.
- McAdoo, D.C., Caldwell, J.G., and Turcotte, D.L. On the elastic-perfectly plastic bending of the lithosphere under generalized loading with application to the Kuril Trench. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 54(1):11–26, 1978. doi: 10.1111/j.1365-246X.1978.tb06753.x.
- McNutt, M.K. and Menard, H.V. Constraints on yield strength in the oceanic lithosphere derived from observations of flexure. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 71:363–394, 1982.
- Müller, R.D., Roest, W.R., Royer, J., Gahagan, L.M., and Sclater, J.G. Digital isochrons of the world’s ocean floor. *Journal of Geophysical Research*, 102(B2):3211–3214, 1997. doi: 10.1029/96JB01781.
- Müller, R.D., Sdrolias, M., Gaina, C., and Roest, W.R. Age, spreading rates, and spreading asymmetry of the world’s ocean crust. *Geochemistry Geophysics Geosystems*, 9(4):Q04006, 2008. doi: 10.1029/2007GC001743.
- Nafe, J.E. and Drake, C.L. *The sea: ideas and observations on progress in the study of the seas*, volume 3, chapter Physical properties of marine sediments, pages 794–815. Interscience Publishers, 1963.
- O’Driscoll, L., Richards, M., and Humphreys, E. Nazca-South America interactions and the late Eocene-late Oligocene flat-slab episode in the central Andes. *Tectonics*, 31(2), 2012. doi: 10.1029/2011TC003036.
- Palacios, B. Implementación del modelo de flexura de placas Kirchhoff-Love. Informe de Práctica 3, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Departamento de Geofísica, 2012.
- Parker, R.L. The Rapid Calculation of Potential Anomalies. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 31(4):447–455, 1973. ISSN 1365-246X. doi: 10.1111/j.1365-246X.1973.tb06513.x.
- Prezzi, C. and Vilas, J. New evidence of clockwise vertical axis rotations south of the Arica elbow (Argentine Puna). *Tectonophysics*, 292(1–2):85–100, 1998. doi: 10.1016/S0040-1951(98)00058-4.
- Ranero, C.R. and Sallarès, V. Geophysical evidence for alteration of the crust and mantle of the Nazca Plate during bending at the north Chile trench. *Geology*, 32(7):549–552, 2004.
- Ranero, C.R., Villaseñor, A., Phipps Morgan, J., and Weinrebe, W. Relationship between bend-faulting at trenches and intermediate-depth seismicity. *Geochemistry Geophysics Geosystems*, 6(12):Q12002, Diciembre 2005. doi: 10.1029/2005GC000997.
- Sandwell, D. and Smith, W. Marine gravity anomaly from Geosat and ERS 1 satellite altimetry. *Journal of Geophysical Research*, 102(B5):10039–10054, Mayo 1997.
- Schweller, W.L., Kulm, L.D., and Prince, R.A. *Nazca Plate: Crustal formation and Andean convergence*, volume 154 of *Memoir (Geological Society of America)*, chapter Tectonics, structure, and sedimentary framework of the Perú-Chile Trench, pages 323–349. Geological Society of America, 1981.

- Tebbens, S.F., Cande, S.C., Kovacs, L., Parra, J.C., LaBrecque, J.L., and Vergara, H. The Chile ridge: A tectonic framework. *Journal of Geophysical Research*, 102(B6):12035–12059, June 1997.
- Turcotte, D.L. and Schubert, G. *Geodynamics*. Cambridge University Press, 2002. ISBN 9780521666244.
- Walcott, R.I. Flexure of the Lithosphere at Hawaii. *Tectonophysics*, 9(5):435–446, Mayo 1970.
- Watts, A.B. *Isostasy and Flexure of the Lithosphere*. Cambridge University Press, 2001. ISBN 0521006007.
- Watts, A.B., Cochran, J.R., and Selzer, G. Gravity Anomalies and Flexure of the Lithosphere: Three-Dimensional Study of the Great Meteor Seamount, Northeast Atlantic. *Journal of Geophysical Research*, 80(11):1391–1398, Abril 1975.
- Wessel, P. Analytical solutions for 3-D flexural deformation of semi-infinite elastic plates. *Geophysical Journal International*, 124(3):907–918, 1996. ISSN 1365-246X. doi: 10.1111/j.1365-246X.1996.tb05644.x.
- Wessel, P. and Smith, W. New, improved version of generic mapping tools released. *Eos, Transactions American Geophysical Union*, 79(47):579, 1998. doi: 10.1029/98EO00426.
- Wolf, D. Thick-plate flexure re-examined. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 80(1):265–273, 1985. ISSN 1365-246X. doi: 10.1111/j.1365-246X.1985.tb05090.x.
- Yáñez, G., Ranero, C., Huene, R.von , and Díaz, J. Magnetic anomaly interpretation across the southern central Andes (32°-34°S): The role of the Juan Fernández Ridge in the late Tertiary evolution of the margin. *Journal of Geophysical Research*, 106(B4):6325–6345, 2001. doi: 10.1029/2000JB900337.

Apéndice A

Convención Algebraica

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\operatorname{div}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\partial_j \text{ derivada parcial } \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$A : B$ Sean A y B matrices tales que $A, B \in M_N(\mathbb{R})$. Se define el producto interno de matrices

$$A : B = \sum_{i,j=1}^N A_{ij} B_{ij}$$

Ω conjunto abierto en \mathbb{R}^n

$$\Gamma = \partial\Omega$$

$L^2(\Omega)$ espacio de las funciones cuadrado integrables sobre Ω , es decir, un espacio donde viven las funciones f tales que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$

$C^k(\Omega)$ conjunto de funciones con derivadas continuas en Ω de orden k

\mathbb{P}_3 conjunto de polinomios de grado 3

$\operatorname{tr}(A)$ Sea A una matriz cuadrada $A \in M_N(\mathbb{R})$. Se define su traza $\operatorname{tr}(A)$ como la suma de los elementos de su diagonal principal

$H^1(\Omega)$ espacio de Sobolev de funciones L^2 con derivadas cuadrado integrables hasta de orden 1