



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

SINCRONIZACIÓN ADAPTABLE DE SISTEMAS TIPO LORENZ DE ORDEN
FRACCIONARIO

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGISTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, MENCIÓN ELÉCTRICA

EFREDY DELGADO AGUILERA

PROFESOR GUÍA:

MANUEL DUARTE MERMOUD

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:

RICARDO PEREZ CORREA

NICOLÁS BELTRAN MATURANA

SANTIAGO, CHILE

OCTUBRE 2012

Resumen

La sincronización de sistemas dinámicos consiste en lograr que dos o más sistemas, que evolucionan en forma independiente, converjan hacia una trayectoria común, mediante la aplicación de señales externas adecuadas sobre uno de los sistemas.

Como ejemplos de aplicaciones reales, donde la sincronización juega un rol importante, podemos citar el proceso de modificación del ciclo respiratorio de pacientes sometidos a anestesia general por medio de ventiladores mecánicos y la emisión de luz de manera coordinada de las luciérnagas en los periodos de apareamiento. En sistemas complejos de ingeniería, la sincronización se manifiesta en problemas donde se busca unificar el comportamiento de muchos sistemas individuales (sistemas multiagente), mediante la modificación del comportamiento de cada agente.

En el estudio de la sincronización de sistemas dinámicos, es posible afirmar que los mayores aportes realizados por los investigadores corresponden a problemas de sincronización de sistemas de orden entero (sistemas con derivadas de orden entero), tanto para el caso de parámetros conocidos (sincronización no adaptable) como para el caso en que dichos parámetros no se conocen (sincronización adaptable). Menos abundantes son los trabajos relacionados con la sincronización no adaptable de sistemas de orden fraccionario (sistemas con derivadas de orden fraccionario) y prácticamente no existen, hasta el momento, soluciones teóricas completas para el caso de la sincronización adaptable de sistemas de orden fraccionario. En este último caso, sólo se pueden encontrar intentos aislados basados en simulaciones que buscan entender esta problemática.

La presente Tesis, tiene por objetivo justamente plantear, diseñar y estudiar nuevas metodologías que permitan llevar a cabo la sincronización de dos sistemas no lineales del tipo Lorenz, de orden fraccionario y de parámetros desconocidos, que evolucionan en forma separada.

La hipótesis de trabajo que se desea demostrar en esta investigación, postula que es posible realizar la sincronización de esta clase de sistemas, a pesar del desconocimiento que se tenga de sus parámetros. Este proceso de sincronización será llevado a cabo mediante el empleo de controladores basados en parámetros, empleando un proceso de identificación paramétrica del sistema (técnica indirecta) o bien sin un esquema de identificación paramétrica (técnica directa).

La solución propuesta para el problema de sincronización se enfoca desde la perspectiva del control adaptable y del diseño de observadores adaptables (estado y parámetros). Esto permite diseñar leyes de control adecuadas, que sincronizan ambos sistemas, incluso empleando una sola señal de control. Para ello, se utilizarán técnicas de cálculo fraccionario y metodologías para el análisis de estabilidad de sistemas enteros y fraccionarios, entre otras.

Las estrategias de sincronización desarrolladas en este trabajo y validadas mediante simulaciones, muestran ventajas con respecto a esquemas de sincronización actualmente utilizados (fraccionarios o no fraccionarios). Para ello, se ha realizado un estudio comparativo, a nivel de simulaciones, de los métodos de sincronización propuestos, con aquellos más relevantes existentes en la literatura técnica.

Summary

The phenomenon of synchronization of dynamical systems, consists of achieving a common path for two or more systems, having particular and independent evolutions separately, by applying an external control signal over one or more systems.

As examples of real applications where synchronization plays a central role, we can cite the modification of the respiratory cycle in patients under general anesthesia using mechanical ventilators and the coordinated light emission of fireflies in the periods of mating. In engineering complex systems, synchronization appears in problems where a unified behavior of many individual systems (multi-agent system) is desired, by modifying the behavior of each agent.

In the area of synchronization of dynamical systems, the majority of the contributions reported in the literature have been made for synchronizing integer order systems (with integer-order derivatives), both for the case of known parameters (non-adaptive synchronization) and for the case where the parameters are unknown (adaptive synchronization). Less abundant are the works related to non-adaptive synchronization of fractional order systems (with fractional order derivatives) and practically does not exist, so far, theoretical works reporting complete solutions for the case of adaptive synchronization of fractional order systems. In the latter case, only isolated attempts based on simulations can be found seeking to understand this problem.

This thesis aims to design and develop new methodologies to carry out the synchronization of two nonlinear systems of fractional order and unknown parameters of the Lorenz type, which evolve separately.

The working hypothesis to be proved in this research postulates that it is possible to synchronize this kind of systems, despite the lack of knowledge on system parameters. This synchronization process will be carried out by mean of parameter based controllers using a parametric identification process (indirect technique) or without a parametric identification scheme (direct technique).

The proposed solution for the synchronization problem is approached from the point of view of adaptive control and adaptive observers design (state and parameters). This allows designing appropriate control laws which synchronize both systems, even using a single control signal. To this extent fractional calculus techniques and methodologies for stability analysis of integer and fractional systems are employed.

The synchronization strategies developed and designed in this study, validated by simulations, show advantages over other synchronization schemes currently being used (integer or fractional). For this purpose, a comparative study has been performed, at simulation level, between the proposed techniques and the most relevant techniques existing in the literature.

Dedicatorias

Como el todo, soy la suma de las partes, soy la suma de mi nacionalidad, soy la suma de la historia y geografía, la suma de mis abuelos, la suma de la dedicación y preocupación de mis padres, Ricardo y Briceida.

Soy la suma de los abrazos de unos ojos verdes llamados María Fernanda, la suma de los colores de Alicia, la suma de las deliciosas maledicencias de Juliana, la suma de los “sí” de la reservada nightingale Luz de todos los días.

Soy y seré la suma de todo el pasado y de lo que comienza y, seré sumando de otras vidas.

Agradecimientos

Esta Tesis ha sido desarrollada gracias al apoyo de CONICYT-Chile, a través del Proyecto Fondecyt 1090208 y del Programa de Financiamiento Basal “Centro de Tecnología para la Minería” FB0809.

Al profesor Manuel Duarte por su apoyo y aporte en la realización de esta Tesis.

Tabla de contenido

1	Introducción	11
1.1	Motivación	11
1.2	¿Por qué usar ecuaciones de orden fraccionario?	14
1.3	Planteamiento e importancia del problema a resolver	17
1.4	Objetivos de la Tesis	17
1.5	Soluciones propuestas en la literatura y contribuciones de esta Tesis.....	18
2	Fundamentos y Conceptos Básicos	32
2.1	Aspectos básicos de cálculo y control fraccionario	32
2.2	Conceptos relacionados con sincronización de sistemas	36
2.3	Sincronización de sistemas tipo Lorenz de orden entero y parámetros conocidos.....	39
2.4	Sincronización adaptable de sistemas tipo Lorenz de orden entero	41
2.5	Sincronización no adaptable de sistemas tipo Lorenz de orden fraccionario	44
3	Análisis de la sincronización adaptable de sistemas tipo Lorenz de orden fraccionario	47
3.1	Estudio del sistema de Lorenz fraccionario aislado.....	47
3.2	Sincronización adaptable indirecta de sistemas tipo Lorenz de orden fraccionario	52
4	Sincronización mínima de sistemas tipo Lorenz.....	73
4.1	Sincronización adaptable mínima de sistemas tipo Lorenz de orden entero	73
4.2	Sincronización no adaptable mínima de sistemas tipo Lorenz de orden fraccionario....	83
4.3	Sincronización adaptable mínima de sistemas tipo Lorenz de orden fraccionario	91
5	Conclusiones y trabajo futuro	111
6	Referencias	113

Tabla de figuras

Figura 1 Esquema general del experimento de Huygens, usando relojes de péndulo. [2]	13
Figura 2 Salida de la planta y error de control para diferentes valores de q , $0.6 < q \leq 1.0$	16
Figura 3 Salida de la planta y error de control para diferentes valores de q , $q > 1.0$	16
Figura 4 Esquema general de sincronización para sistemas dinámicos.	19
Figura 5 Esquema general del método para la sincronización de sistemas dinámicos de orden entero con parámetros desconocidos y leyes adaptables enteras.	21
Figura 6 Esquema general del método para la sincronización de sistemas de orden fraccionario con parámetros conocidos.	23
Figura 7 Esquema general del método planteado para la sincronización de sistemas de orden fraccionario con parámetros desconocidos. (Metodología indirecta).	26
Figura 8 Esquema general del método planteado para la sincronización de sistemas de orden fraccionario con parámetros desconocidos. (Metodología directa).	26
Figura 9 Esquema general del método planteado para la sincronización de sistemas de orden fraccionario con parámetros desconocidos. (Metodología directa).	29
Figura 10 Región de estabilidad para sistemas dinámicos lineales e invariantes de orden fraccionario,.....	35
Figura 11 Error de sincronización de sistemas Lorenz de orden fraccionario tipo Lorenz con $q_s=0.9$ no adaptable	46
Figura 12 Esfuerzo de control para sincronización de sistemas de orden fraccionario tipo Lorenz con $q_s=0.9$, no adaptable.	46
Figura 13 Comportamiento de un sistema tipo Lorenz fraccionario aislado para $q_s=0.98$	48
Figura 14 Comportamiento del un sistema tipo Lorenz fraccionario aislado para $q_s=1.17$	48
Figura 15 Comportamiento de un sistema tipo Lorenz fraccionario aislado para $q_s=1.18$	49
Figura 16 Sistema de Lorenz Entero $q_s=1$	49
Figura 17 Sistema Lorenz fraccionario $q_s = 0.2$	50
Figura 18 Sistema de Lorenz fraccionario con $q_s=0.5$	50
Figura 19 Sistemas de Lorenz $q_s=0.7$	51
Figura 20 Sistema de Lorenz fraccionario, $q_s = 0.9$	51
Figura 21 Sistema de Lorenz fraccionario $q_s = 0.99$	52
Figura 22 Evolución del error de sincronización de sistemas Lorenz de orden fraccionario con $q_s=0.2$ y leyes de ajuste de orden fraccionario con $q_a=0.2$	57
Figura 23 Evolución del error de sincronización de sistemas Lorenz de orden fraccionario con $q_s=0.2$ y leyes de ajuste de orden fraccionario con $q_a=0.5$	57
Figura 24 Evolución del error de sincronización de sistemas Lorenz de orden fraccionario con $q_s=0.2$ y leyes de ajuste de orden fraccionario con $q_a=0.9$	58
Figura 25 Error de sincronización de sistemas Lorenz de orden fraccionario con $q_s=0.5$ y leyes de ajuste de orden fraccionario con $q_a=0.2$	58
Figura 26 Error de sincronización de sistemas Lorenz de orden fraccionario con $q_s=0.5$ y leyes de ajuste de orden fraccionario con $q_a=0.5$	59

Figura 27 Error de sincronización de sistemas Lorenz de orden fraccionario con $q_s=0.5$ y leyes de ajuste de orden fraccionario con $q_a=0.9$	59
Figura 28 Error de sincronización de sistemas tipo Lorenz orden fraccionario $q_s=0.9$, con ajuste de orden fraccionario con $q_a=0.2$	60
Figura 29 Error de sincronización de sistemas tipo Lorenz orden fraccionario $q_s=0.9$, con ajuste de orden fraccionario con $q_a=0.5$	60
Figura 30 Error de sincronización de sistemas tipo Lorenz orden fraccionario $q_s=0.9$, con ajuste de orden fraccionario con $q_a=0.9$	61
Figura 31 Evolución del error de sincronización para sistemas fraccionario con $q_s=0.9$ mediante esquema directo de ajuste entero.....	63
Figura 32 Esfuerzo de control señales U_1 , U_2 , U_3 , para la sincronización de sistemas fraccionarios con ajuste de un parámetro adaptable de orden entero.....	64
Figura 33 Error de sincronización de sistemas fraccionarios con $q_s=0.9$, con parámetro ajustable en forma fraccionaria con $q_a=0.9$	64
Figura 34 Esfuerzo de control en la sincronización de sistemas Lorenz de orden fraccionario con $q_s=0.9$ y ajuste de un parámetro fraccionario con $q_a=0.9$	65
Figura 35 Error de sincronización de sistemas de sistemas fraccionarios con $q_s=0.9$, con un parámetro ajustable en forma fraccionaria con $q_a=0.5$	65
Figura 36 Señal de control en la sincronización de sistemas Lorenz de orden fraccionario con $q_s=0.9$ y ajuste de parámetro fraccionario con $q_a=0.5$	66
Figura 37 Error de sincronización de sistemas de sistemas fraccionarios con $q_s=0.9$, con parámetro ajustable en forma fraccionaria con $q_a=0.2$	66
Figura 38 Esfuerzo de control sincronización de sistemas de orden fraccionario $q_s=0.9$ y ajuste de parámetro con $q_a=0.2$	67
Figura 39 Error de sincronización de sistemas Lorenz de orden fraccionario con $q_s=0.2$ y ajuste de un parámetro fraccionario con $q_a=0.9$	67
Figura 40 Esfuerzo de control sincronización de sistemas de orden fraccionario $q_s=0.2$ y ajuste de parámetro con $q_a=0.9$	68
Figura 41 Error de sincronización de sistemas Lorenz de orden fraccionario con $q_s=0.2$ y ajuste de parámetro fraccionario con $q_a=0.5$	68
Figura 42 Esfuerzo de control sincronización de sistemas de orden fraccionario $q_s=0.2$ y ajuste de parámetro con $q_a=0.5$	69
Figura 43 Error de sincronización directa de sistemas Lorenz fraccionario con $q_s=0.9$ y señales U_2 y U_3 ajuste de parámetro de orden entero	69
Figura 44 Esfuerzo de control sincronización directa de sistemas Lorenz fraccionario con $q=0.9$ y señales U_2 y U_3 ajuste de parámetro de orden entero.....	70
Figura 45 Error de sincronización directa de sistemas Lorenz fraccionario con $q_s=0.2$ y señales U_2 y U_3 ajuste de parámetro de orden fraccionario con $q_a=0.2$	70
Figura 46 Señales de control U_2 y U_3 para sincronización de sistemas Lorenz fraccionarios con $q=0.2$, con dos parámetros adaptables fraccionarios con $q=0.2$	71
Figura 47 Error de sincronización de sistemas Lorenz de orden fraccionario con $q_s=0.5$ con señales U_2 U_3 con dos parámetros de adaptación fraccionarios con $q_a=0.2$	71

Figura 48 Señales de control U_2 U_3 para la sincronización de sistemas Lorenz fraccionario con $q_s = 0.5$ y ajuste de dos parámetros fraccionarios con $q_a = 0.2$	71
Figura 49 Evolución del error de sincronización para sistemas Lorenz de orden fraccionario con $q_s = 0.99$ y ajuste fraccionario con $q_a = 0.8$	72
Figura 50 Proyección de la sincronización en los ejes x, y, z con una señal U_2	75
Figura 51 Evolución del error de sincronización con U_2 adaptable y un parámetro a estimar	76
Figura 52 Error de sincronización con señales U_2 y U_3 adaptable y un parámetro a estimar	78
Figura 53 Evolución de las trayectorias de los sistemas maestro y esclavo y su proyección en los ejes x, y, z	78
Figura 54 Sincronización de dos sistemas tipo Lorenz entero con dos señales de control y un parámetro a estimar	80
Figura 55 Evolución del error de sincronización de sistemas de tipo Lorenz con dos señales de control y dos parámetros a estimar	81
Figura 56 Sincronización adaptable, con dos parámetros desconocidos, usando las mismas señales U_1 y U_2 con $\alpha = 1$ y un parámetro desconocido. Arriba, la evolución del error de sincronización. Abajo, la proyección de las trayectorias sobre los ejes x, y, z de los sistemas maestro y esclavo.	83
Figura 57 Sincronización de sistemas de Lorenz fraccionario con $q_s = 0.2$ y ajuste paramétrico fraccionario con $q_a = 0.9$, empleando solo la señal de control U_1 , con $\delta = 0.1$	92
Figura 58 Señal de control U_1 para la sincronización de sistemas Lorenz fraccionarios con $q_s = 0.2$ y ajuste paramétrico fraccionario con $q_a = 0.9$, con $\delta = 0.1$	92
Figura 59 Error de sincronización de sistemas Lorenz fraccionario con $q_s = 0.9$ y ley de ajuste adaptable fraccionario con $q_a = 0.9$ y ganancia adaptable = 100	93
Figura 60 Señal de control U_1 en la sincronización de sistemas Lorenz fraccionario con $q_s = 0.9$ y ley de adaptación fraccionaria con $q_a = 0.9$ y ganancia adaptable 100.	93
Figura 61 Error de sincronización de sistemas Lorenz fraccionarios con $q_s = 0.2$ y ajuste adaptable con $q_a = 0.2$ con una señal de control U_2	94
Figura 62 Señal de control U_2 en la sincronización de sistemas Lorenz fraccionario con $q_s = 0.2$ y ajuste paramétrico adaptable fraccionario con $q_a = 0.2$	94
Figura 63 Error de sincronización de sistemas tipo Lorenz fraccionario $q_s = 0.5$ y ajuste paramétrico fraccionario $q_a = 0.9$	95
Figura 64 Señal de control U_2 para el caso de sincronización mínima adaptable	95
Figura 65 Evolución del parámetro ajustable	96
Figura 66 Error de sincronización con solo señal U_2 sistema fraccionario $q_s = 0.5$ y parámetro adaptable $q_a = 0.5$	96
Figura 67 Señal de control U_2 sistema fraccionario $q_s = 0.5$ y parámetro adaptable $q_a = 0.5$	97
Figura 68 Error de sincronización de sistemas Lorenz fraccionario con $q_s = 0.9$ y señal U_2 parámetro adaptable fraccionario con $q_a = 0.2$	97
Figura 69 Señal U_2 en la sincronización de sistemas Lorenz fraccionario con $q_s = 0.9$ parámetro adaptable fraccionario con $q_a = 0.2$	98
Figura 70 Error de sincronización de sistemas de orden fraccionario con $q_s = 0.9$, ley de ajuste de orden fraccionario con $q_a = 0.9$ y ganancia adaptable 0.1	99

Figura 71 Error de sincronización sistemas de orden fraccionario con $q_s=0.9$, ley de ajuste fraccionario $q_a=0.5$ y ganancia adaptable =100	99
Figura 72 Error de sincronización para sistemas Lorenz fraccionario con $q_s=0.5$, señal U_3 y ley de ajuste entera.....	100
Figura 73 Error de sincronización de sistemas de Lorenz fraccionarios $q_s=0.5$ y ajuste fraccionario con $q_a=0.9$ para una señal U_3	100
Figura 74 Error de sincronización para sistemas de Lorenz orden fraccionario $q_s=0.2$, ley ajuste fraccionario $q_a=0.9$ y ganancia adaptable 0.1.....	101
Figura 75 Error de sincronización de sistemas de orden fraccionario tipo Lorenz con $q_s=0.2$ y ajuste fraccionario de parámetro con $q_a=0.2$	102
Figura 76 Esfuerzo en la sincronización de sistemas de orden fraccionario tipo Lorenz con $q_s=0.2$ y ajuste fraccionario de parámetro con $q_a=0.2$	102
Figura 77 Error de sincronización sistemas tipo Lorenz de orden fraccionario $q_s=0.5$ con ajuste fraccionario de orden fraccionario con $q_a=0.5$	103
Figura 78 Error de sincronización de sistemas de orden fraccionario $q_s=0.9$ con dos señales de control y parámetros ajustables con $q_a=0.9$	103
Figura 79 Señales de control para sincronización de sistemas de orden fraccionario con $q_s=0.9$ con dos señales adaptables con $q_a=0.9$	104
Figura 80 Error de sincronización de sistemas tipo Lorenz fraccionario con $q_s=0.9$ y ajuste paramétrico fraccionario con $q_a=0.5$	105
Figura 81 Señales de control en la sincronización de sistemas Lorenz fraccionario con $q_s=0.9$ y ajuste paramétrico fraccionario con $q_a=0.5$	105
Figura 82 Error de sincronización sistemas Lorenz de orden fraccionario con $q_s=0.9$ con señales de alimentación U_1 y U_2 y ajuste de orden fraccionario $q_a=0.9$	106
Figura 83 Señales de control de sincronización sistemas Lorenz de orden fraccionario con $q_s=0.9$ con señales de alimentación U_1 y U_2 y ajuste de orden fraccionario $q_a=0.9$	107
Figura 84 Error de sincronización sistemas Lorenz de orden fraccionario $q_s=0.2$ con señal de control U_1 U_2 con ajuste fraccionario con $q_a=0.9$	107
Figura 85 Señales de control U_1 U_2 para la sincronización de sistemas Lorenz fraccionarios con $q_s=0.2$ y ajuste paramétrico fraccionario con $q_a=0.9$	108
Figura 86 Error de sincronización de sistemas Lorenz de orden fraccionario con $q_s=0.9$ y leyes de adaptación paramétricas fraccionarias con $q_a=0.9$ con una ganancia adaptable 100 con señales de entrada U_1 y U_3	109
Figura 87 Esfuerzo de control para señales de control U_1 y U_3 fraccionaria en la sincronización de sistemas de Lorenz fraccionario con $q_s=0.9$, ajuste fraccionario $q_a=0.9$	109
Figura 88 Error de sincronización de sistemas Lorenz fraccionario con $q_s=0.2$ y ajuste fraccionario $q_a=0.9$ con señales de entrada U_1 y U_3 ganancia 0.1.....	110
Figura 89 Señales de control para la sincronización de sistemas Lorenz de orden fraccionario $q_s=0.2$ y ajuste $q_a=0.9$ con entradas U_1 y U_3 con ganancia 0.1	110

Capítulo 1

Introducción

El fenómeno de sincronización de sistemas dinámicos es un proceso que se produce en diferentes ambientes, tanto de la vida cotidiana como en fenómenos físicos presentados vistos en ciencias e ingeniería. En este capítulo se mostrará en qué consiste este fenómeno, además haciendo un recorrido histórico por los desarrollos de sincronización y sus aplicaciones en algunos campos de la ingeniería y las ciencias sociales. Posteriormente se presenta el planteamiento del problema a resolver, estableciendo los objetivos de esta Tesis. Finalmente, se presenta un estado del arte del fenómeno de sincronización de sistemas tipo Lorenz enteros, con parámetros desconocidos, y además, se revisa el estado del arte para sistemas tipo Lorenz de orden fraccionario con parámetros conocidos y desconocidos.

1.1 Motivación

En esta sección, se hace un recorrido histórico sobre el surgimiento y consolidación del estudio de la sincronización de sistemas dinámicos, realizando una breve reseña sobre algunos temas de proyección y aprovechamiento del fenómeno de sincronización en áreas como ciencias, ingeniería y ciencias sociales.

El concepto de sincronización significa poner en sincronía o hacer coincidir en el tiempo, por lo menos dos hechos, de modo que ellos sucedan al mismo tiempo desde un cierto momento en adelante. El término sincronización o sincronizado se refiere a una variedad de fenómenos de ocurrencia frecuente en una gran variedad de campos del saber, y que están relacionados mediante modelos matemáticos, en los cuales la evolución de sus variables depende, en algunos casos, de sus condiciones iniciales y de los valores de sus parámetros.

En la actualidad, algunos investigadores se enfocan hacia los sistemas biológicos, donde el proceso de sincronización se presenta en diferentes ámbitos. Por ejemplo, la variación sincronizada de los núcleos celulares, el disparo sincrónico de neuronas, el ajuste de la frecuencia cardíaca y diferentes formas de comportamiento cooperativo de ciertas especies de insectos, entre otros aspectos biológicos. Usualmente, los sistemas dinámicos mencionados no se encuentran aislados de su medio ambiente sino que interactúan con otros sistemas dinámicos, es decir son abiertos. Por ejemplo, el reloj biológico que gobierna los ciclos diarios de un organismo puede estar sujeto a las variaciones estacionales de iluminación y temperatura. Las interacciones pueden ser débiles y en algunos casos casi imperceptibles. Sin embargo, frecuentemente se produce un salto cualitativo de transición y un objeto ajusta su ritmo conforme con los ritmos de otros objetos o sistemas. Resultado de esto es la manera en que los violinistas tocan al unísono y los

insectos emiten pulsos acústicos o luminosos en forma mancomunada. El ajuste de los ritmos, debido a una interacción, es la esencia de la sincronización.

El propósito de la sincronización es hacer que al menos dos sistemas dinámicos coincidan en una trayectoria o evolución común a partir de un instante determinado. Sin embargo, en sistemas complejos el número de sistemas puede ser mayor que 2. La evolución hacia una nueva trayectoria se hace mediante la incorporación de señales adecuadas que alteran la evolución de uno o más de los sistemas.

La sincronización de oscilaciones estables es un fenómeno no lineal bien conocido frecuentemente encontrado en la naturaleza y ampliamente utilizado en la tecnología. Bajo el concepto de sincronización, por lo general, se entiende la capacidad de acoplamiento de los osciladores para cambiar de un régimen independiente de oscilación, a un régimen estable asociado o único, donde este nuevo régimen de oscilación se caracteriza por tener frecuencias idénticas cuando la constante de acoplamiento aumenta [1].

El problema de la sincronización se remonta al siglo XVII, cuando el conocido maestro relojero y constructor de telescopios, Christian Huygens, reportó el fenómeno de sincronización de dos relojes de péndulo suspendidos de una base común [2]. Huygens ubicó dos relojes que se encontraban suspendidos de un mismo soporte y observó que al pasar un determinado tiempo sus oscilaciones coincidían. En palabras del propio Huygens:

“Vale la pena señalar que cuando se suspendieron dos relojes contruidos y suspendidos de dos ganchos incrustados en la misma pieza de madera, los movimientos de cada péndulo en cambios de frente se ponen de acuerdo y el sonido de cada uno se escuchó siempre de forma simultánea. Además, si este acuerdo fue perturbado por alguna interferencia, éste se restableció en poco tiempo. Durante mucho tiempo me sorprendió este resultado inesperado, pero después de un examen cuidadoso finalmente encontré que la causa de esto se debe al movimiento de la viga, a pesar de que esto es apenas perceptible”. (Ver Figura 1).

Las observaciones de Huygens respecto al fenómeno no solo fueron buenas descripciones respecto al mismo, sino que plantearon las bases para el entendimiento de la sincronización mutua.

A mediados del siglo XIX, William Strutt en su tratado, “The Theory of Sound” [3], describió la sincronización de sistemas acústicos. Observó el efecto de la sincronización al hacer sonar dos tubos de similares características, además de que sonaban al unísono, también descubrió el efecto de extinción, es decir, el cese de las oscilaciones como consecuencia de la supresión en la interacción de los dos sistemas.

La sincronización fue entendida solamente a partir de 1920, cuando Edward Appleton y Balthasar Van der Pol [4], en forma sistemática, teórica y experimentalmente, estudiaron la sincronización generada por un tríodo (válvula al vacío que produce una corriente eléctrica en forma periódica). Appleton y Van der Pol, replicando los experimentos realizados por William Henry Eccles y J. H. Vincent [2, 5, 6], lograron acoplar dos generadores con dos frecuencias ligeramente diferentes y analizaron el efecto que esto producía en sistemas que forzosamente vibraban con una sola frecuencia común. Según las observaciones, la frecuencia de esta oscilación se encuentra determinada por los parámetros del circuito, en este caso de la capacitancia.

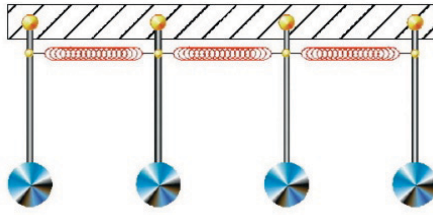


Figura 1 Esquema general del experimento de Huygens, usando relojes de péndulo. [2]

A partir de 1990 se establecieron las bases teóricas de la sincronización en el trabajo de Pecora y Carroll para sistemas caóticos [7]. Sin embargo, el mismo fenómeno de sincronización en sistemas oscilatorios, fue observado por Kapitaniak [8]. Con las bases del fenómeno de sincronización planteadas, los autores concentraron su atención en la teoría del fenómeno, surgiendo diferentes definiciones de sincronización para sistemas dinámicos incluso con comportamiento caótico, tales como las presentadas en [9]. Una de las definiciones más comunes es la sincronización idéntica o perfecta, donde el estado del sistema esclavo converge asintóticamente al estado del sistema maestro. Posteriormente, se han incorporado nuevas definiciones como el caso de la sincronización generalizada [10], la sincronización en fase o la sincronización por retardo [11], entre otras.

Recientemente se han planteado aplicaciones en relación a modelos de sincronización que tienen que ver con oferta y demanda en mercados, diseño de vehículos eléctricos y aplicaciones en ciencias sociales y sociología, entre otras.

En cuanto a las perspectivas e impacto futuro de la sincronización, muchos de los modelos que actualmente se utilizan en los análisis de oferta y demanda en sistemas de energía eléctrica, se podrían tratar bajo el concepto de sincronización. Este puede ser aplicado para estudiar las interacciones entre agentes de demanda energética y los paquetes de energía a negociar que se trasladan desde diferentes puntos geográficos, para satisfacer la demanda energética. Por lo tanto, es una nueva forma de entender el intercambio y las relaciones comerciales en un posible marco de bolsa cambiaria energética [12].

Una interesante aplicación futura del proceso de sincronización se puede encontrar en el caso del diseño de vehículos eléctricos. Los fabricantes deben garantizar un máximo de confiabilidad de la fuente eléctrica que suministra la energía al vehículo, para diferentes condiciones de operación. La condición de operación más crítica se produce en el arranque del vehículo y está determinada por la disponibilidad de energía en las baterías. El comportamiento de la batería se ha venido estudiando mediante un modelo de ecuaciones diferenciales de orden entero, sin embargo, en el último tiempo se ha propuesto desarrollar modelos basados en ecuaciones de orden fraccionario, los cuales han resultado ser más apropiados para describir los principales parámetros asociados al funcionamiento de la batería, tales como el estado de salud (SOH) y el estado de carga (SOC). El modelo de disponibilidad (carga y descarga) de la batería y el modelo de arranque del vehículo pueden ser mejor interpretados como un fenómeno de sincronización, con el fin de que ambos sistemas evolucionen en forma coordinada, optimizando el uso de la energía acumulada en las baterías [13].

En las ciencias sociales, fenómenos psicológicos como la felicidad, la tristeza o la ira, son manifestaciones emocionales que pueden ser formuladas mediante modelos dinámicos. La

felicidad, como emoción, puede responder a entradas externas que han sido modeladas bajo la perspectiva de ecuaciones diferenciales de orden entero [14]. Sin embargo, este tipo de modelo tiene limitaciones ya que la felicidad de las personas está determinada por la información histórica, situación que no es convenientemente considerada por modelos de orden entero, ya que en estos casos la memoria se concentra en las condiciones iniciales. En cambio, en los modelos de orden fraccionario, las respuestas obtenidas dependen de información pasada (memoria) y por lo tanto ofrecen una perspectiva más amplia para el análisis de modelos dinámicos en psicología y ciencias sociales. El proceso de sincronización puede ser visto aquí, como un mecanismo mediante el cual un individuo con una emoción de felicidad (o tristeza) puede contagiar a otros, modificando su estado anímico. Esta influencia puede verse como la sincronización de emociones y debe conocerse los detonantes externos que permitan reforzar en el individuo la emoción de felicidad. Además, en el tratamiento grupal (terapia de grupo), mediante diferentes estimulaciones se podría llevar a experimentar a dos grupos separados de personas, sensaciones parecidas, por medio de una sicoterapia dirigida [15].

Los casos enunciados anteriormente de proyecciones futuras de la sincronización sirven como ejemplo de algunos impactos que la investigación de esta Tesis podría tener, además de proponer una alternativa de solución para el problema de sincronización de dos sistemas dinámicos de orden fraccionario, cuando se desconocen sus parámetros.

1.2 ¿Por qué usar ecuaciones de orden fraccionario?

En esta sección se presentan algunas razones por las cuales se prefiere el uso del cálculo de orden fraccionario en modelado de sistemas y cuál es el efecto de su uso en un sistema de control de una planta y un modelo de referencia, con ajuste paramétrico de orden fraccionario.

Una de las ventajas que tiene el uso de derivadas de orden fraccionario en modelos que representen un fenómeno físico, es la mejor correspondencia del modelo con los hechos físicos que pretenden ser modelados, respecto a los modelos representados por medio de ecuaciones diferenciales de orden entero. Un ejemplo de esta diferencia y eventual ventaja del uso de modelos de orden fraccionario, se puede evidenciar en Westerlund et al. [16], quienes propusieron un nuevo modelo lineal para el condensador basado en las leyes empíricas definidas por Curie en 1889, las cuales establecen que la corriente a través del condensador está dada por

$$I(t) = C \frac{V_0}{h_1 t^q}$$

donde h_1 y q son constantes, V_0 es el voltaje DC aplicado en $t=0$, y $0 < q < 1$, ($q \in R$).

Para un voltaje de entrada general $V(t)$ la corriente es

$$I(t) = C \frac{d^q V(t)}{dt^q} \equiv C_0 D_t^q V(t)$$

donde C es la capacitancia del condensador. Westernlund menciona en su trabajo que este nuevo modelo tiene una mejor correspondencia con los datos experimentales, obtenidos por Curie y

comprobados por él mismo, logrando así una ventaja sobre el modelo usado convencionalmente que considera $q=1$.

El anterior es apenas un ejemplo de las múltiples aplicaciones que actualmente hacen uso del cálculo fraccionario para obtener mejores modelos, los que, gracias a la aplicación de cálculo fraccionario, guardan mayor correspondencia con los datos experimentales y ofrecen una mejor comprensión de los fenómenos físicos reales, comparados con los modelos tradicionales que hacen uso de derivadas enteras.

Respecto a las ventajas que posee el cálculo fraccionario frente al cálculo de orden entero, dentro del control adaptable se puede analizar el caso en que se toma una planta con un modelo de referencia y se plantea un ajuste paramétrico de orden fraccionario para los parámetros del controlador. Consideremos la siguiente situación

Planta

$$G_p(s) = \frac{y_p(s)}{u(s)} = \frac{b_p}{s + a_p} = \frac{1}{s - 1}$$

Modelo de Referencia

$$G_m(s) = \frac{y_m(s)}{r(s)} = \frac{b_m}{s + a_m} = \frac{1}{s + 1}$$

Ley de Control

$$u(t) = \theta(t)y_p(t) + k(t)r(t)$$

Leyes de Ajuste

$$D^q \theta(t) = -\text{sgn}(b_p)y_p(t)e_c(t)$$

$$D^q k(t) = -\text{sgn}(b_p)r(t)e_c(t)$$

donde q es el orden de la derivada.

Las condiciones iniciales de las simulaciones realizadas son todas nulas excepto $y_p(0)=1$ y la referencia considerada que corresponde a una señal escalón unitario.

En la Figura 2, se observa la salida de la planta y el error de control, para diferentes valores de q que satisfacen $0.6 < q \leq 1.0$. De la Figura 2 se puede ver que empleando ajustes de orden fraccionario con $0.6 < q < 1.0$ es posible reducir la amplitud de los transitorios así como el tiempo de convergencia del error de control, con respecto al caso $q=1$.

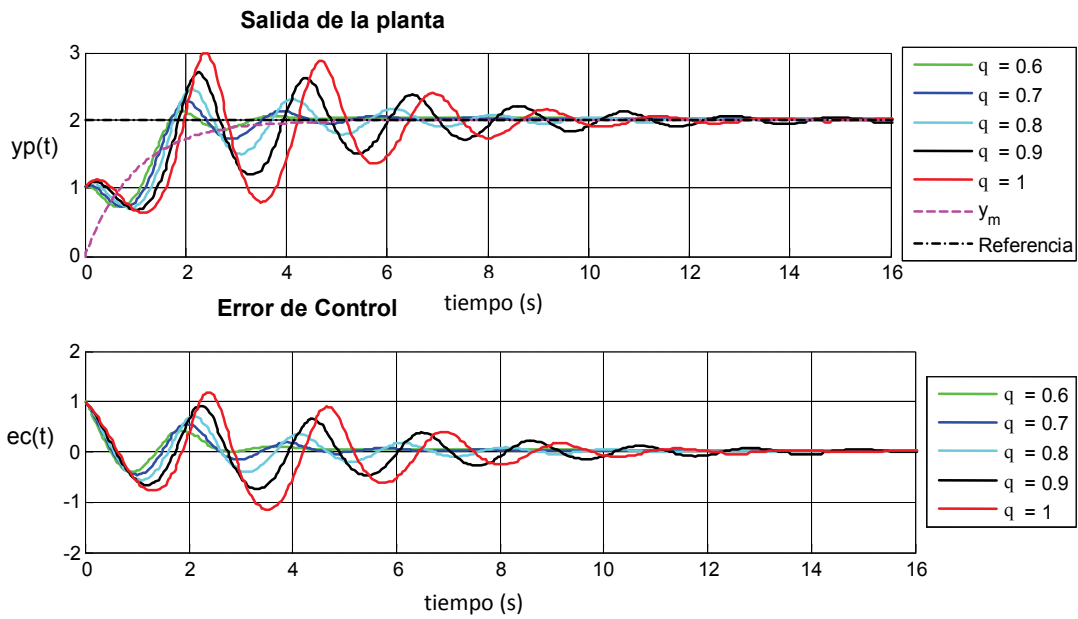


Figura 2 Salida de la planta y error de control para diferentes valores de q , $0.6 < q \leq 1.0$.

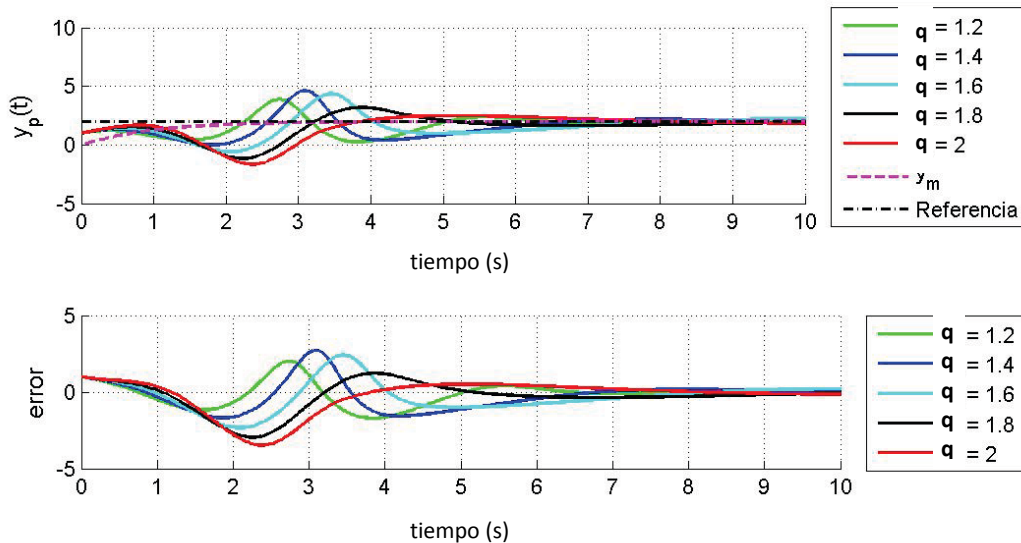


Figura 3 Salida de la planta y error de control para diferentes valores de q , $q > 1.0$

En la Figura 3 se muestra la evolución de la salida de la planta y del error de control con un ajuste de parámetros de orden fraccionario, con $1 < q \leq 2$. En este caso la situación resultante es peor que para el caso $q=1$.

Esto implica que al usar el cálculo fraccionario en el estudio de control adaptable, se pueden obtener las ventajas ya mencionadas y que estos resultados comparativamente son mejores respecto de aquellas obtenidas usando cálculo de orden entero.

1.3 Planteamiento e importancia del problema a resolver

El problema central de esta Tesis consiste en desarrollar metodologías de sincronización de sistemas que tengan como objetivo que dos sistemas dinámicos no lineales de parámetros desconocidos, que evolucionan en forma aislada, lo hagan en forma única y coordinada a partir de un cierto tiempo en adelante. Los modelos matemáticos que describen los dos sistemas son idénticos y sin ninguna interrelación. El objetivo es diseñar una señal de control que permita que uno de los sistemas (esclavo) modifique su comportamiento y copie la trayectoria del otro sistema (maestro), sin que ésta modificación afecte la evolución del modelo que se toma como referencia.

Los modelos matemáticos que son usados para definir los dos sistemas, se expresan con derivadas de orden fraccionario y se supone que los sistemas tienen parámetros desconocidos. Mediante técnicas de control se quiere diseñar observadores de estado y de parámetros, junto con definir leyes adaptables de orden fraccionario o entero, lo cual haga posible la sincronización ya sea con la estimación de todos los parámetros del sistema o solo con la estimación de unos pocos parámetros. También se emplearán técnicas de control directo, las cuales no requieren de la identificación de los parámetros de la planta.

En las soluciones se incluye una justificación teórica y un análisis mediante simulaciones, que comprueban que la metodología propuesta es mejor, en algún sentido, que otras alternativas de solución existentes para este tipo de problema. De no existir una justificación teórica, se plantearán algunas hipótesis para su solución futura.

Este trabajo pretende llenar un vacío existente hasta el momento, puesto que no existen soluciones teóricas a este problema y constituirá un novedoso aporte inicial a la comprensión de la sincronización adaptiva de orden fraccionario.

Además, se quiere contribuir a otras áreas del conocimiento que no estén directamente vinculadas con la sincronización adaptable, tales como es el caso de control de caos en sistemas de orden fraccionario, o incluso en el diseño de observadores de orden fraccionario.

1.4 Objetivos de la Tesis

Objetivo General:

Desarrollar estrategias que permitan sincronizar dos sistemas dinámicos no lineales de orden fraccionario, cuyos parámetros son desconocidos, mediante aplicación de técnicas de control adaptable directo e indirecto.

Objetivos específicos:

- Analizar en forma aislada el comportamiento de sistemas tipo Lorenz con derivadas de orden fraccionario, por medio de simulaciones. Detectar condiciones para comportamientos caóticos y no caóticos.

- Desarrollar estrategias de sincronización adaptable indirectas para dos sistemas de orden fraccionario del tipo Lorenz, definiendo convenientemente las señales de control a ser aplicadas al sistema esclavo y las leyes adaptativas necesarias.
- Analizar, por medio de simulaciones, la sincronización de dos sistemas de orden fraccionario del tipo Lorenz, empleando las estrategias indirectas desarrolladas.
- Desarrollar estrategias de sincronización adaptable directas para sistemas tipo Lorenz de orden fraccionario, mediante el ajuste de un solo parámetro y un mínimo número de señales de control (estrategias mínimas).
- Analizar, por medio de simulaciones, la sincronización de dos sistemas de orden fraccionario del tipo Lorenz, empleando las estrategias mínimas desarrolladas.
- Demostrar en forma teórica la convergencia del error de sincronización para dos sistemas de orden fraccionario del tipo Lorenz empleando estrategias mínimas no adaptables.
- Realizar un análisis comparativo del comportamiento dinámico de sistemas de orden fraccionario sincronizados adaptivamente, usando leyes adaptativas enteras y fraccionarias. Analizar los casos de estrategias mínimas y no mínimas.
- Realizar un análisis comparativo del comportamiento dinámico de sistemas de orden entero sincronizados adaptivamente, usando leyes adaptativas enteras y fraccionarias. Analizar los casos de estrategias mínimas y no mínimas.

1.5 Soluciones propuestas en la literatura y contribuciones de esta Tesis

El problema de la sincronización de sistemas se ha abordado de diferentes maneras y por muchos autores, por lo que aquí se presenta un análisis de un conjunto de trabajos que contribuyen a entregar una visión general del tópico de sincronización de sistemas y que ha permitido dar forma a la idea central de la investigación que se formula en esta Tesis. La revisión hace un recorrido por los trabajos y contribuciones de diversos autores que de alguna manera han hecho un aporte al conocimiento de la sincronización de sistemas dinámicos. Esta búsqueda fue realizada en diversas bases de datos y aquí se presenta una descripción general de cada una de ellas y comentarios generales acerca de sus aportes, similitudes respecto a otros trabajos y su contribución sobre el tema central de la investigación.

En la búsqueda de las contribuciones más importantes en la sincronización de sistemas dinámicos se ha seguido la ruta mostrada en la Figura 4. En el primer bloque, se encuentra el proceso de sincronización propiamente, eje de la propuesta, proceso que se aplica a sistemas dinámicos cuyos parámetros son desconocidos (sincronización adaptable) o conocidos (sincronización no adaptable). Tal como se indica en el tercer bloque de la Figura 4, la clase de sistemas que se usa en la sincronización, puede ser de orden entero o fraccionario. Así, la sincronización puede ser efectuada con sistemas de parámetros desconocidos pero que sean de orden entero o fraccionario, o bien con sistemas cuyos parámetros sean conocidos y que sean de orden fraccionario o entero. El último bloque de la Figura 4 corresponde al tipo de ajuste de los parámetros que se realiza en el caso adaptable, el cual puede ser de orden fraccionario o entero.

La situación en la que los parámetros del sistema son desconocidos y los sistemas de orden entero, ha sido ampliamente estudiada en la literatura técnica y existe abundante bibliografía al

respecto que muestran diferentes metodologías para lograr la sincronización (ver [17],[18],[19]). La sincronización de sistemas de orden fraccionario con parámetros conocidos, tiene un desarrollo menos amplio que el caso anterior pero aun así, existe una gran cantidad de referencias bibliográficas que muestran diferentes enfoques para lograr el objetivo de sincronización [20], [21]. No sucede lo mismo con los sistemas de orden fraccionario de parámetros desconocidos, con ajuste entero o fraccionario, ya que en este caso existen reportes que básicamente presentan simulaciones que muestran el logro de la sincronización [22], pero en la actualidad no existe una solución teórica completa para este caso. Los casos de interés de esta propuesta de investigación, son aquellas que se encuentran con líneas punteadas, según se muestra en la Figura 4 y son las que serán estudiadas desde el punto de vista de simulaciones, pero sin dejar de lado algunos aspectos teóricos.

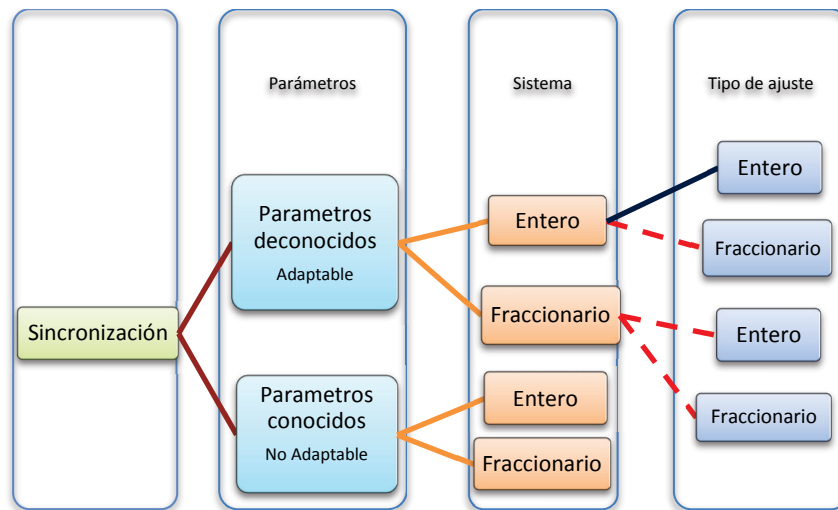


Figura 4 Esquema general de sincronización para sistemas dinámicos.

Algunos de los sistemas dinámicos que han sido estudiados con mayor énfasis desde el punto de vista de sincronización, son los que poseen comportamiento caótico. Entre ellos se puede citar el sistema de Lorenz, reportado en 1963 [23], el de Rössler, mencionado en 1976 [24], el de Chen en 1999 [25] y el de Lü de aparición más reciente en 2002[26]. Será el sistema de Lorenz entero y fraccionario, el que principalmente se analizará en este estudio, aunque en algunos casos se tomará como ejemplos otros sistemas caóticos como los mencionados.

La etapa inicial de la búsqueda bibliográfica realizada, que sirve solo como referencia ya que es un caso completamente resuelto, es la sincronización de sistemas dinámicos de orden entero de parámetros conocidos. Aquí se presentará el método general seguido por buena parte de los investigadores que han informado resultados en este ámbito.

Para comenzar, existe un trabajo de Pecora y Carroll [7] que marcó un hito en el proceso de sincronización de sistemas dinámicos de orden entero, sentando las bases teóricas de análisis. Los autores mostraron que dos sistemas dinámicos caóticos idénticos, de parámetros conocidos, pueden llegar a sincronizar sus comportamientos si se acoplan en forma adecuada. La idea central es usar una señal de control que se aplica sobre uno de los sistemas, la cual tiene una estructura variable no lineal, de modo que pueda influenciar dicho sistema, sin afectar al otro sistema, logrando así la sincronización. (Ver Figura 6). De acuerdo a la página de internet de la base de

datos ISI WEB OF KNOWLEDGE consultada en septiembre de 2011, desde 1990, el trabajo de Pecora y Carroll se ha referenciado 3508 veces en Science Citation Index Expanded (SCIE), Social Science Citation Index (SSCI), and Arts & Humanities Citation Index (A&HCI), 754 veces en Conference Proceedings Citation Index - Science (CPCI-S); Conference Proceedings Citation Index - Social Science & Humanities (CPCI-SSH) y 750 veces en el Chinese Science Citation Database. Esto muestra la gran cantidad de trabajos sobre temas de sincronización de sistemas dinámicos con comportamiento caótico asociados de alguna forma a este trabajo seminal.

Es así como aparecen diferentes conceptos de sincronización, tal como el de sincronización generalizada dada por Rulkov [10], en donde enuncia que una transformación de estados $\varphi(\cdot) : R^n \rightarrow R^n$, que puede ser lineal o no, permite sincronizar los sistemas dinámicos maestro $X_m \in R^n$ y esclavo $X_s \in R^n$, definiendo el error como $e = X_m - \varphi(X_s)$. Otro concepto es la sincronización proyectiva, reportada por Mainieri y Rehacek [27], quienes toman como factor de escala una matriz de funciones suaves, las cuales se cambian por escalares (constantes) como lo plantean Li y Xu [28]. Otro concepto discutido en la literatura, es la sincronización proyectiva generalizada (GPS) en este caso [29], se define un error de sincronización como $e = X_m - \alpha X_s$, en donde existe una igualdad entre los estados del maestro $X_m \in R^n$ y del esclavo $X_s \in R^n$, salvo por un factor de escala $\alpha \in R$ constante. La sincronización proyectiva modificada (MPS) en Li [30] toma esa transformación de estados, mencionada por Rulkov, definiendo el error como $e = X_m - AX_s$, siendo $A \in R^{n \times n}$ con valores constantes $\alpha_{ii} \in R$. La sincronización proyectiva con función modificada (MFPS), concepto reportado por Zeng [31], en donde la transformación $\Lambda(t) \in R^{n \times n}$, tiene estructura matricial cuyos elementos $\alpha_{ii}(t) \in R$ son variantes en el tiempo y define un error de sincronización como $e = X_m - \Lambda(t)X_s$.

Como el caso de la sincronización no adaptativa no es el centro de esta propuesta, ésta se menciona a modo de referencia como base para el problema que se quiere abordar (sincronización fraccionaria adaptable).

1.5.1 Sincronización de sistemas dinámicos no lineales de orden entero con parámetros desconocidos

En este caso los sistemas dinámicos están descritos por ecuaciones diferenciales de orden entero y sobre el sistema esclavo se introduce una señal externa, de tal forma que cancele las no linealidades, a la vez que haga que la evolución resultante para el error de sincronización sea lineal. Como los parámetros del sistema son desconocidos, se diseña un observador de estados y parámetros basado en la información del sistema esclavo y luego se definen leyes de ajuste apropiadas para los parámetros estimados (Ver Figura 5).

A partir de allí existen algunas variaciones en cuanto al tipo de sistemas que se desea sincronizar, la definición del error de estado o el tipo de sincronización que se busca. A continuación se mencionan algunos trabajos relacionados con el desarrollo de la sincronización en sistemas dinámicos con parámetros desconocidos y de orden entero. El esquema general se puede ver en la Figura 5.

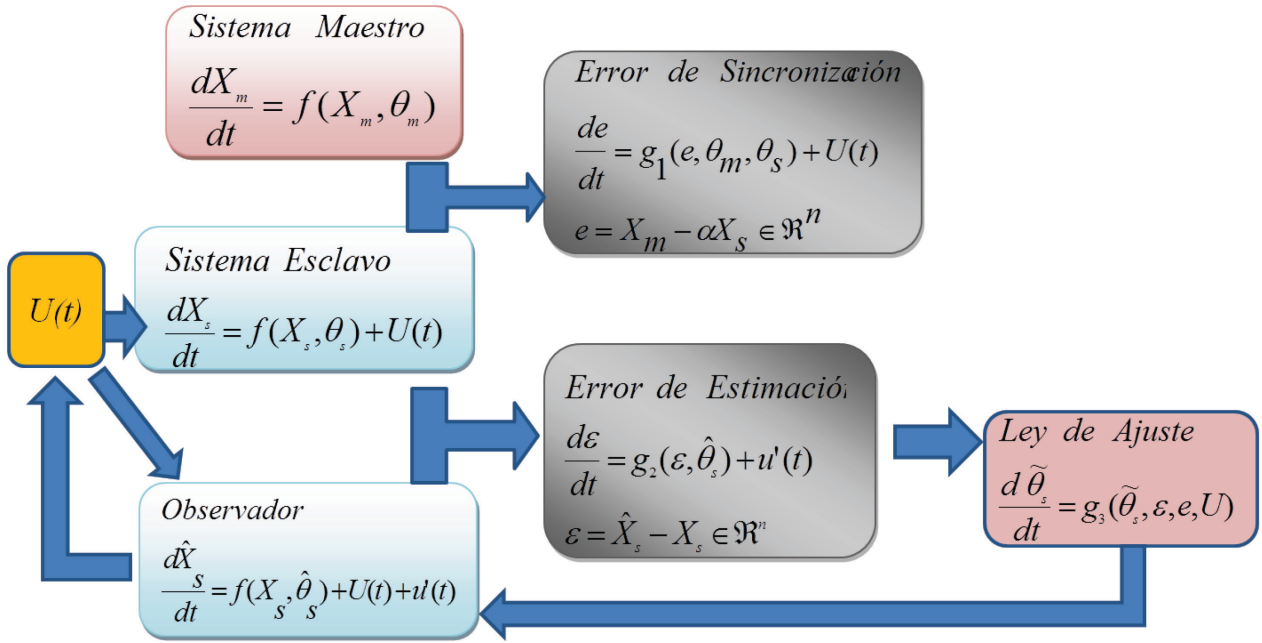


Figura 5 Esquema general del método para la sincronización de sistemas dinámicos de orden entero con parámetros desconocidos y leyes adaptables enteras.

Basados en la metodología mencionada anteriormente, existen numerosos trabajos que toman definiciones específicas del error de sincronización. Por ejemplo, Du et. al.[17], desarrollan en forma detallada el procedimiento de sincronización para sistemas de tres variables de estado, con parámetros desconocidos, usando la definición de sincronización proyectiva y dos variables de estado para la sincronización. Según sus autores, se sincronizan con éxito sistemas de diferente dimensión como un Lorenz y un Newton – Leipnik. Para el mismo tipo de sincronización, Park [18] lo hace con sistemas dinámicos de tipo hipercaótico. Un esquema de sincronización denominada híbrida proyectiva adaptativa de estado completo, es reportado por Hu et al. [19], en el cual se toma una matriz constante que modifica las variables de estado de los sistemas dinámicos a sincronizar. Una sincronización denominada función proyectiva modificada conmutable (SMFPS), que usa una matriz variante en el tiempo como una función de transformación entre el estado del maestro y el estado del esclavo, es realizada por Sudheer y Sabir [32], y lo aplican a dos sistemas tipo Qi. Con el mismo método, Ho [33] y Al-sawalha et. al. [34] sincronizan sistemas con tres y cuatro variables de estado; sin embargo, el último de los trabajos mencionados se concentra en la anti sincronización. Estos trabajos [32]-[34] poseen características similares en cuanto a la metodología y la diferencia entre ellos, radica en la definición del tipo de sincronización que usan. Además, los sistemas dinámicos objetivo de la sincronización tienen diversas características: pueden ser del mismo orden, de orden diferente, con un parámetro a ser ajustado para sincronizar o con igual número de señales de control que de variables de estado de los sistemas dinámicos.

Una modificación del método general enunciado al inicio de esta sección (Figura 5), tiene que ver con los parámetros del sistema. Cuando éstos son variantes en el tiempo, Salarieh y Alasty [35], realizan la sincronización para sistemas diferentes a los sistemas de Lorenz, como en el caso de sistemas de Chua con parámetros ruidosos. Dicha variación es modelada por ruido blanco Gaussiano y se muestra que el error cuadrático medio de sincronización, converge a un límite

pequeño alrededor de cero. Este límite depende de la ganancia del controlador de realimentación, el cual converge a cero gracias a la ley de ajuste que se diseña. El mismo autor en [36], presenta un trabajo donde es posible estimar los parámetros del sistema cuando éstos tengan variaciones acotadas. Otro trabajo que realiza una sincronización bajo la óptica de perturbaciones acotadas, es el de Lin [37], que con realimentación de estado y un sólo parámetro ajustable logra la sincronización. [18]-[37] son trabajos similares, que se desarrollan con pequeñas modificaciones uno respecto del otro y lo importante es que entregan una metodología para sincronizar en forma adaptable sistemas de orden entero ante las variaciones de los parámetros y perturbaciones externas acotadas.

También, se han usado diferentes formas de denotar los sistemas que se sincronizan, modificando la forma de escribirlos lo que permite analizar en forma más sintética, genérica y más compacta varias clases de sistemas, aplicando la metodología ya descrita para el proceso de sincronización. La sincronización presentada en [38], usa la descripción de los sistemas hecha en [39], que generaliza los términos que tienen los sistemas dinámicos caóticos para convertirlos en sistemas tipo Lorenz, o tipo Chen, o tipo Lü. Similarmente, Feki [40] plantea una separación lineal y una no lineal en los sistemas dinámicos para analizar su estabilidad. En [41] se define y desarrolla la sincronización de dos sistemas de Lorenz y dos sistemas de Rossler con un solo parámetro desconocido. El trabajo de Elabbasy et al. [42], así como el de Gao [43] sincronizan dos sistemas hipercaóticos con cinco parámetros desconocidos y aplican leyes de ajuste derivadas del criterio de estabilidad de Lyapunov. El planteamiento hecho por Fotsin y Woafu [44, 45] toma un par de sistemas de Van der Pol-Duffing y Van der Pol, respectivamente. Delshad et al.[46] hace lo propio para un par de sistemas dinámicos de comportamiento caótico. Los resultados aquí mencionados no tienen mayores aportes en cuanto a lo metodológico, ya que utilizan básicamente un controlador por realimentación de estado (error de sincronización) con parámetros ajustables y solo realizan un tratamiento unificado de los sistemas a sincronizar pudiendo ser aplicados en sistemas como Lorenz, Chen, Lü, Van der Pol y Chua, entre otros.

Al revisar la literatura sobre sincronización adaptiva de sistemas de orden entero, existen trabajos que recurren a otros métodos para la resolución del problema, diferentes del método general explicado al comienzo de ésta sección. Ahn [47] y Asheghan [48], mediante una metodología basada en LMI (Linear Matrix Inequality), sincronizan dos sistemas dinámicos con parámetros desconocidos, teniendo en cuenta perturbaciones externas. Logran la sincronización mediante tres señales de control de realimentación del estado y el ajuste de un parámetro. Chiang [49], usa la técnica de control por modo deslizante que elimina posibles perturbaciones externas acotadas. Yau [50] toma el método de control por modo deslizante y lo combina con lógica difusa, para sincronizar un sistema Duffing-Holmes. Zhao [51] presenta una sincronización adaptiva tipo Q-S para dos sistemas idénticos, con parámetros desconocidos. ($Q(x)$ y $S(x)$ son las variables observables del sistema maestro y esclavo respectivamente). Este esquema, descrito primero por Yan [52], es un método basado en técnicas de backstepping y en la teoría de estabilidad de Lyapunov. Las técnicas recién descritas, modifican y combinan metodologías que se han desarrollado previamente en forma separada para otros fines. Aún cuando estas técnicas se apartan un poco de las técnicas de control adaptable tradicionales, se cimentan en teoría de estabilidad de Lyapunov. Son técnicas interesantes que han sido aplicadas a sistemas enteros y podrían ser utilizadas para fines comparativos con técnicas de sincronización de sistemas fraccionarios, cosa que por ahora no resulta de interés para el presente estudio, debido a que el objetivo de esta investigación es buscar soluciones mediante técnicas de control adaptable estándar.

1.5.2 Sincronización de sistemas dinámicos no lineales de orden fraccionario con parámetros conocidos

Como uno de los puntos que se desarrollará en esta propuesta, tiene que ver con los sistemas dinámicos de orden fraccionarios, es decir, cuando los modelos matemáticos están representados por derivadas e integrales de orden fraccionaria, comenzaremos revisando lo que se ha hecho en sincronización de sistemas fraccionarios con parámetros conocidos. De acuerdo a la literatura revisada sobre sincronización de orden fraccionario, existen diversos estudios sobre el comportamiento aislado de sistemas dinámicos con diferentes ordenes y condiciones iniciales, tanto para sistemas que poseen comportamiento caótico como hipercaótico, como es el caso del sistema Chua [53], el sistema de Rössler [54], el sistema de Duffing modificado de orden fraccionario, el sistema de Chen [55], el sistema de Lü [56] y el sistema de Volta de orden fraccionario [57]. Estos reportes han sido fundamentados esencialmente sobre simulaciones y se han enfocado hacia la exploración del comportamiento de dichos sistemas en forma aislada, con el fin de estudiar, bajo otra óptica, aplicaciones a modelos físicos, biológicos y sociales.

El esquema general de sincronización de sistemas de orden fraccionario con parámetros conocidos, tiene la estructura mostrada en la Figura 6. Los dos sistemas dinámicos a sincronizar, además de tener orden fraccionario, pueden ser escritos como un modelo con una parte lineal y una no lineal. Al sistema esclavo se le incorpora una señal de control adecuada, $U(t) \in R^n$, para que la evolución del error de sincronización $e(t) \in R^n$ resulte descrita por un sistema lineal. Luego, imponiendo condiciones de estabilidad para sistemas lineales invariantes fraccionarios [58], se determinan los parámetros y señales necesarias a ser usadas. En algunos casos la señal externa no elimina totalmente las no linealidades de la dinámica resultante para el error de sincronización. No obstante, en [59] se emplean técnicas lineales (Transformada de Laplace y Teorema del valor final) y los autores aseguran convergencia del error de sincronización.

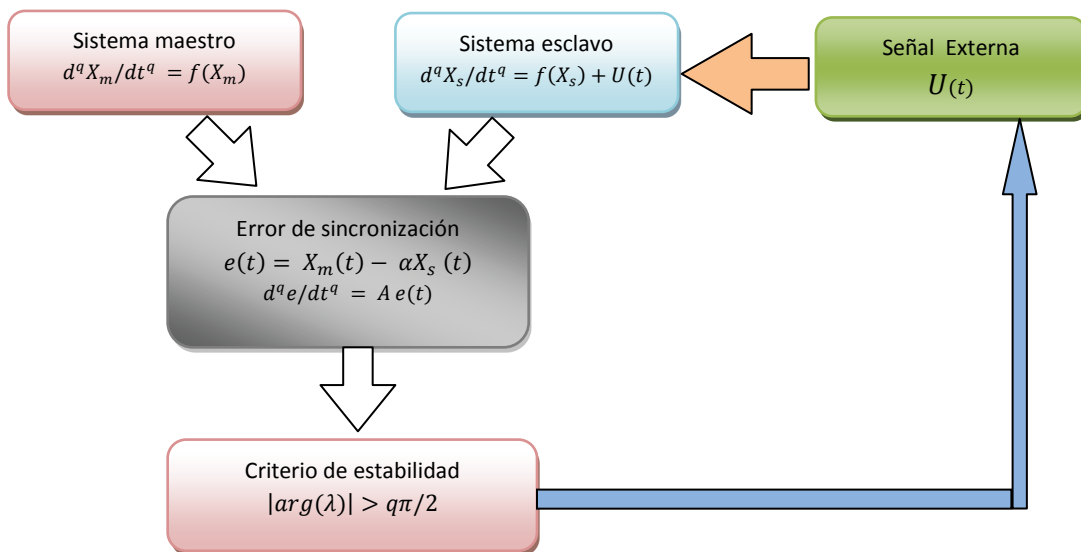


Figura 6 Esquema general del método para la sincronización de sistemas de orden fraccionario con parámetros conocidos.

En la mayoría de los trabajos informados en esta área, además del análisis teórico se incluyen simulaciones numéricas del fenómeno de sincronización, con el fin de conocer la evolución de las señales que indica que la estabilidad se logra si los valores propios de la matriz de evolución A poseen argumentos mayores que $q\pi/2$, donde q es el orden de la derivada fraccionaria. Los trabajos en su mayoría se basan en el criterio de estabilidad de sistemas lineales invariantes de orden fraccionario descrito anteriormente. Algunos de estos resultados se presentan en trabajos como el de Zhu [20] y Odibat [21]. Este último, presenta la sincronización de dos sistemas dinámicos de comportamiento caótico y de orden fraccionario, cada uno con diferentes ordenes fraccionarios, aplicados a sistemas tipo Chen y de Rössler, usando el método general descrito al inicio de esta sección, prevaleciendo las simulaciones sobre el trabajo teórico. En Li y Yan [60], el método general de sincronización es aplicado a pares de sistemas Chua, sistemas Lorenz, y sistemas Chen. Sin embargo, aunque la descripción del artículo da a entender la sincronización de los tres sistemas al tiempo, este trabajo no tiene mayor contribución, ya que la sincronización mostrada se desarrolla en la forma estándar para sistemas dinámicos idénticos y es replicada para los tres casos particulares.

También es interesante mencionar los artículos de Pan et al. [61, 62]. En el primero [61], se presenta el proceso de anti sincronización y sincronización de dos sistemas dinámicos de orden fraccionario del tipo Lorenz con perturbaciones. La técnica se desarrolla mediante control por realimentación del estado y se demuestra que la sincronización es robusta a pesar de la perturbación incluida. En el segundo trabajo [62], se muestra el caso de la sincronización de dos sistemas dinámicos de orden fraccionario hipercaóticos. Se realiza un control por realimentación del estado y se aplica a sistemas Chen modificado y Lü modificado. En forma similar Odibat et al. [63], realizan la sincronización de sistemas dinámicos de comportamiento caótico en sistemas modificados de Chen, Rössler y Chua, mediante control por realimentación por estado. Lo mismo ocurre para Bhalekar [64] y Matouk [65],[66]. En el primer trabajo, se aplica la metodología general descrita a dos sistemas del tipo Lorenz con control por realimentación de estado, mientras que el segundo trabajo, toma dos sistemas del tipo Van der Pol-Duffing. En ambos casos plantea la misma realimentación de estado con dos parámetros que se ajustan para lograr la sincronización. Xin et al. [67], toma dos sistemas WINDMI (solar wind driven magnetosphere ionosphere), modelo que representa la dinámica de los vientos solares impulsados por la ionosfera y magnetosfera, y logra la sincronización mediante control por realimentación de estado. Asheghan et al. [68], presentan la sincronización robusta de dos sistemas fraccionarios tipo Chen. Los sistemas maestro y esclavo son afectados por una señal externa acotada y el método garantiza la sincronización a pesar de la perturbación. Los trabajos descritos en este apartado, emplean procedimientos que no difieren mayormente con el método genérico ya explicado. Las principales diferencias entre ellos radican en la elección de los sistemas que van a ser sincronizados. El procedimiento es similar salvo para aquellos casos, como el último planteado, que requieren de ciertas condiciones para asegurar que la sincronización se logre. En todas estas propuestas se aplica el mismo criterio de estabilidad de tipo lineal.

Así como existen diferentes tipos de sincronización usadas en sistemas de orden entero, ellas también han sido estudiadas por algunos autores y muestran sus propiedades para el caso fraccionario. En el trabajo de Zhang et al. [69], se usa el concepto de sincronización generalizada y en Zhou et al. [70] emplean la sincronización proyectiva generalizada de orden fraccionario, que es aplicada a sistemas tipo Chen. Xinguang [71] analiza la sincronización proyectiva modificada para sistemas de orden fraccionario tipo Chen, Lü, y Lorenz. La sincronización proyectiva híbrida es estudiada por Zhou y Cheng [72]. La definición de sincronización

proyectiva generalizada, es aplicada a sistemas del tipo Lorenz – Stenflo de orden fraccionarios en [73]. En este grupo de trabajos se aplican diferentes definiciones para el error de sincronización, pero en esencia, el método aplicado es el mismo que se ha mencionado en el inicio de esta sección.

La sincronización en su forma genérica implica la interacción de al menos dos sistemas dinámicos. Sin embargo, hay estudios que analizan el acoplamiento de tres sistemas de orden entero. A partir de eso, con las condiciones necesarias dadas en [74] se logra la sincronización de tres sistemas de Lorenz de orden fraccionario, a los que se adiciona un parámetro de acoplamiento que depende de las variables de estado. No hay realimentación de estado y con las condiciones necesarias ya mencionadas, se aplica el teorema de Laplace sobre la dinámica del error de sincronización, con los inconvenientes ya mencionados al inicio de la presente sección, es decir cuando el sistema es no lineal, fraccionario y variante. Obtener el error de sincronización implica incluir más de seis variables del error con lo cual el análisis crece en complejidad. Además implica conocer tanto las condiciones iniciales de los tres sistemas, como los valores asociados a los parámetros de acoplamiento, que en la mayoría de casos no se encuentran disponibles o son difíciles de conocer.

1.5.3 Sincronización de sistemas dinámicos de orden fraccionario con parámetros desconocidos

Hasta el momento se han revisado técnicas de sincronización de sistemas dinámicos de orden entero con parámetros conocidos y desconocidos y también se analizaron los trabajos relacionados con la sincronización de sistemas de orden fraccionario con parámetros conocidos. Corresponde ahora revisar lo que se ha realizado en sincronización adaptable de sistemas de orden fraccionario con ajuste fraccionario (o ajuste entero). Este tipo de sincronización es el tema central de la investigación planteada en esta Tesis. En este último caso no existe una metodología establecida, ya que las soluciones propuestas mayoritariamente corresponden a trabajos que mediante simulaciones de sistemas de diferente tipo, muestran que la sincronización es posible lograrla pero no existe el respaldo teórico que fundamente estos resultados.

En este trabajo de investigación se propone un esquema de sincronización, como el que muestra la Figura 7. En ella, como primer paso se diseña un observador del estado y parámetros, fundamentado en la estructura del sistema esclavo (esquema indirecto). A partir de allí se construyen los errores de sincronización, como la diferencia entre los estados del sistema maestro y esclavo; el error de estimación estado, como la diferencia entre los estados del esclavo y del observador; y el error paramétrico, como la diferencia entre los parámetros reales y los estimados. Mediante un apropiado criterio de estabilidad se diseñan las leyes de ajuste paramétricas. En esta sección se presentan los trabajos encontrados y analizados que guardan relación con la sincronización adaptable de sistemas de orden fraccionario.

Otro esquema de sincronización propuesto para este trabajo, se muestra en la Figura 8. En él no se requiere la estimación de estados ni parámetros y se proponen unas leyes de ajuste de parámetros del controlador definidas a partir de los errores de sincronización (esquema directo).

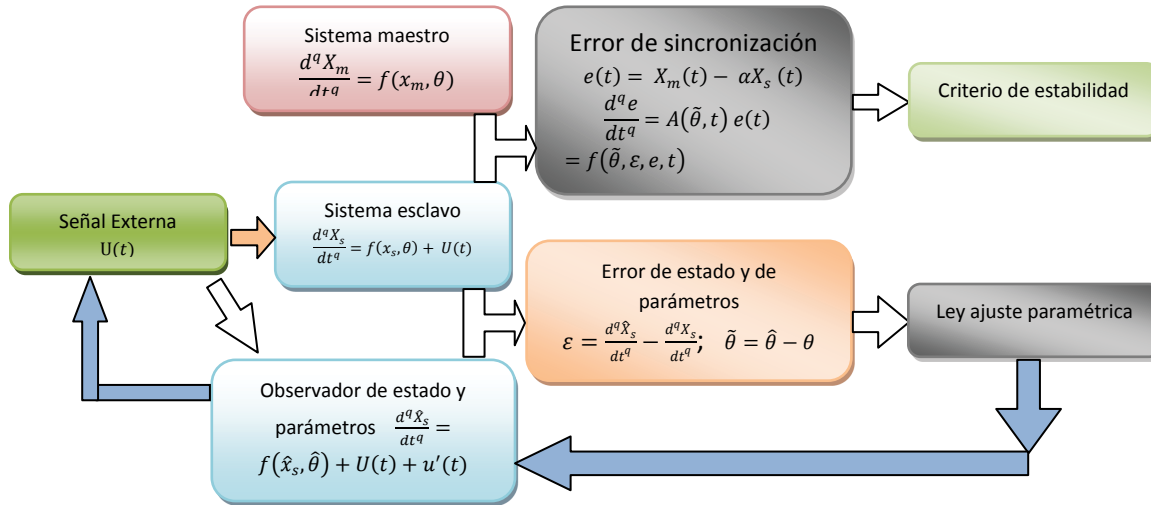


Figura 7 Esquema general del método planteado para la sincronización de sistemas de orden fraccionario con parámetros desconocidos. (Metodología indirecta).

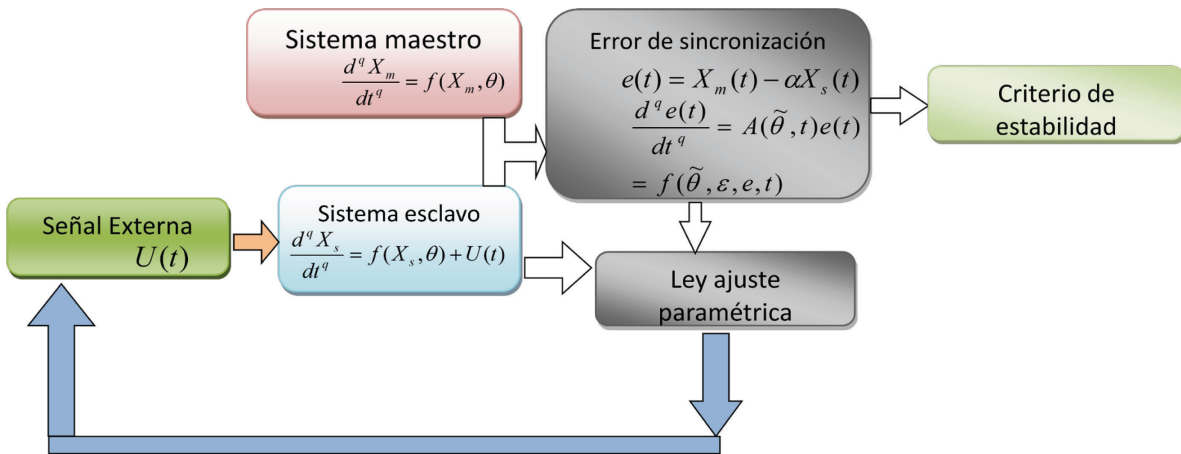


Figura 8 Esquema general del método planteado para la sincronización de sistemas de orden fraccionario con parámetros desconocidos. (Metodología directa).

En la revisión de la literatura sobre este tipo de sincronización fraccionaria con parámetros desconocidos, se encuentran los trabajos que se comentan a continuación. Yin y Chu [75] proponen la sincronización de dos sistemas dinámicos de evolución caótica de diferente tipo (sistema Chen y sistema Financiero [76]) de orden fraccionario, con tres variables de estado y con parámetros desconocidos. El método consiste en aplicar señales de realimentación del estado introducidas al sistema esclavo, incorporando parámetros de ajuste que son actualizados usando

leyes adaptables de orden fraccionario. La elección de las tres señales de entrada deben ser tales que la evolución del error de sincronización, junto a las leyes de ajuste, conformen una matriz simétrica con seis variables: tres de estado y tres de parámetros. Con esta matriz, los autores proponen encontrar una matriz semidefinida positiva Q que cumpla la ecuación de Lyapunov $-\Lambda = QA + A^T Q$, con lo cual se garantiza que el error de sincronización converja a cero en forma asintótica. El procedimiento muestra que se puede sincronizar los sistemas y estimar los parámetros del sistema maestro. Se basa en una hipótesis de estabilidad que se fundamenta en una matriz del error de sincronización establecida como invariante en el tiempo, concepto que se traslada a la misma matriz a pesar de ser variante en el tiempo. Como ventaja se puede ver que el proceso de sincronización y el de identificación de parámetros son logrados en forma simultánea.

En un trabajo realizado por Yuan y Yang [77], proponen como tema de investigación la identificación de parámetros de los sistemas dinámicos tipo Lorenz y Chen. Para ello la investigación se centra en la identificación paramétrica usando un algoritmo de PSO (Particle Swarm Optimization). Mediante la aplicación de dicho algoritmo el autor propone que usando los resultados de la identificación paramétrica es posible lograr la sincronización de los sistemas antes mencionados. Para tal fin usa el método convencional de un control por realimentación del estado, para obtener un sistema de tipo lineal, que permite aplicar un criterio de estabilidad de sistemas lineales de orden fraccionario. Para este caso, una de las ventajas en la utilización de PSO, es evitar el diseño de leyes de ajuste paramétricas cuando se desconocen los parámetros del sistema, sin embargo, a continuación el proceso no exige mayor novedad ya que usa el método tradicional de realimentación de estado para lograr la sincronización.

En uno de los trabajos de Odibat [78] se presenta un esquema de tipo adaptable para sistemas de orden fraccionario tipo Chen. El método presentado toma tres señales de control, cuya estructura básica se ha diseñado para cancelar las no linealidades del sistema e imponer una ganancia con una realimentación del estado, de tipo lineal. Sobre dichas ganancias se impone unas cotas. Se aplica la transformada de Laplace, tanto a los sistemas maestro y esclavo aislados como a las señales de control. A la evolución del error de sincronización se le aplica el Jacobiano, con el fin de encontrar la ecuación característica del sistema, lo cual permite encontrar las cotas para dichas ganancias. Este método lo hace extensible a sistemas tipo Rössler. El autor muestra que logra la sincronización de sistemas con diferentes órdenes de derivada fraccionaria en los sistemas maestros o esclavo y de acuerdo al criterio de sistemas de orden fraccionario se puede elegir el valor de la ganancia para que los sistemas estén en la región de estabilidad. En algunos documentos en los cuales la Transformada de Laplace ha sido aplicada, se hace bajo el hecho de que la trayectoria del sistema está acotada, con lo cual algunos autores justifican su aplicación a expresiones no lineales.

En Zhang y Yang [79] se propone un método para la sincronización de dos sistemas pertenecientes a una clase reducida de sistemas de orden fraccionario de tres variables de estado y parámetros desconocidos, basada en la técnica de control adaptable por modo deslizante. El controlador propuesto posee un solo parámetro adaptable y define una superficie deslizante del tipo integral fraccionaria. El método se basa en la hipótesis de que puede ser aplicado a sistemas dinámicos en el que el error de sincronización de orden fraccionario se pueda separar en dos subsistemas y que uno de ellos sea asintóticamente estable cerca del origen. La estabilidad del sistema se demuestra mediante una apropiada función de Lyapunov. Al igual que en caso anterior, la ventaja es que emplea un solo parámetro adaptable, pero la metodología es aplicable a una clase muy reducida de sistemas de orden fraccionario.

En otros dos artículos, Zhang y Yang [80] proponen un método para la sincronización de sistemas dinámicos tipo Rössler y tipo Chen, en forma separada. Y se trabaja bajo la hipótesis de que la parte no lineal del error de sincronización, sea acotado, además de suponer que existe una señal de control por realimentación de estado con una ganancia del tipo $u(t) = -k(t)e$, la cual hace que el sistema sea asintóticamente estable. Así mismo, supone que el ajuste sobre esta ganancia k , es del tipo cuadrática. Según los autores, para un sistema dinámico de tres variables solo es necesario usar una señal de control, mientras que para sistemas con cuatro variables, la sincronización se efectúa con dos señales de control. Bajo este mismo esquema, Zhang y Yang [81] reportan la sincronización por retraso, de sistemas tipo Lü con parámetros desconocidos los cuales son ajustados, junto a la ganancia, mediante cuatro leyes de ajuste paramétricas y sólo una señal de control como la del método anterior. La ventaja de esta metodología es la forma sencilla como se diseña el controlador, aunque requiere conocer algunas condiciones del sistema. La desventaja está en la hipótesis sobre la existencia de cotas sobre variables de los sistemas a sincronizar, fundamentales para asegurar estabilidad asintótica. El procedimiento no tiene un criterio elaborado sobre la estabilidad del sistema, lo que pone en dudas la efectividad teórica del mismo ya que, su propuesta está sustentada en la simulación de los resultados de la sincronización.

En el reporte hecho por Hu et. al [82], se presenta la sincronización de dos sistemas de tipo Lorenz comenzando con la sincronización de orden entero y luego la de orden fraccionario. Mediante el uso de una señal de control apropiadamente seleccionada, establecen un sistema lineal de orden entero al que se le aplican los criterios conocidos de estabilidad. En el mismo sentido, los autores toman el mismo desarrollo y lo aplican a sistemas de orden fraccionario y de parámetros desconocidos, aun cuando en dicho caso aparece una matriz de 6 variables; tres variables del error de sincronización y otra tres para el error de estimación paramétrico. Según los autores, esta matriz con términos variantes en el tiempo, logra converger a cero en el caso del error, mediante los criterios expuestos en el caso de sistemas invariantes en el tiempo y de orden entero. La convergencia paramétrica no se estipula cómo se alcanza sin la debida excitación persistente, lo que constituye un error. Así mismo, la matriz resultante posee tanto elementos variantes como invariantes en el tiempo, a la cual se le aplican criterios de estabilidad apropiados para sistemas invariantes.

Otros métodos que solucionan el caso de la sincronización adaptable de orden fraccionaria, pero que toman otras metodologías diferentes a las de control tradicional, es el planteado por ejemplo en Lin y Lee [83], en donde se propone como metodología para la sincronización de dos sistemas de diferente dimensión de orden fraccionario, el uso de un control por modo deslizante difuso. Como el Objetivo de esta Tesis no es explorar este tipo de métodos, que combinan técnicas heurísticas y de computación evolutiva, solo se mencionan como un elemento de referencia, ya que el objeto de la investigación aquí presentada se enfoca al control adaptable convencional para sistemas de orden fraccionario con parámetros desconocidos.

1.5.4 Sincronización mínima de sistemas dinámicos y aportes

El proceso de sincronización entre los dos sistemas dinámicos tipo Lorenz, se puede lograr con el uso de todas las señales de control o con el mínimo número de estas señales. A esta forma de sincronización, mediante el menor número de señales sobre el sistema esclavo, se le ha denominado sincronización mínima. El esquema general de desarrollo se basa en las cotas que tienen los sistemas caóticos una vez que están en su estado estable. El esquema de sincronización de sistemas de tipo Lorenz de orden entero se visualiza en la Figura 9.

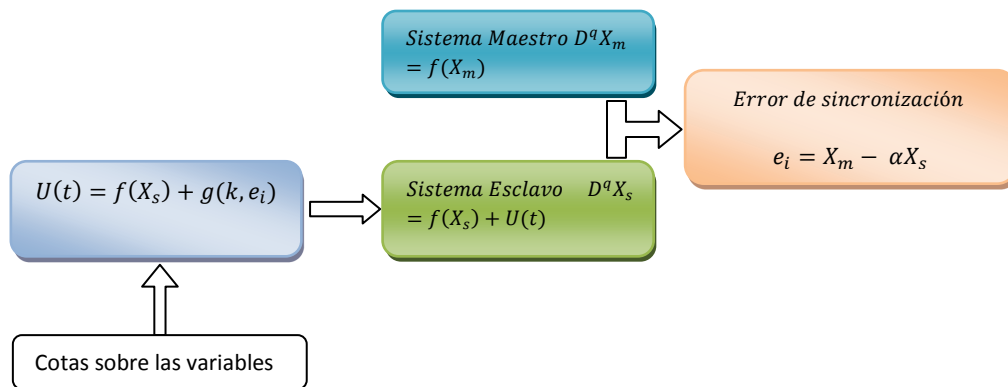


Figura 9 Esquema general del método planteado para la sincronización de sistemas de orden fraccionario con parámetros desconocidos. (Metodología directa).

Uno de esos desarrollos es el que presenta Oancea et al. [84] quienes proponen que para sincronizar dos sistemas de tipo Lorenz con parámetros conocidos, se puede introducir una sola señal sobre el sistema esclavo, con una estructura no lineal en adición con una parte lineal. En la parte lineal, compuesta por una variable del error y una constante, dicha constante es determinada mediante la función candidata de Lyapunov bajo el supuesto que las variables de estado involucradas en la determinación de dicha ganancia están acotadas. De acuerdo a los autores, el sistema está acotado por la misma evolución que poseen los sistemas caóticos, especialmente el sistema de Lorenz de orden entero. Las demás soluciones tienen esa misma estructura, y se fundamentan en la estabilidad de evolución del sistema caótico. Sin embargo, como solución no puede ser aplicada a sistemas de orden fraccionario, ya que estos evolucionan en forma dependiente tanto de las condiciones iniciales del sistema como del orden de la derivada fraccionaria. A su vez es una solución particularizada a sistemas de tipo Lorenz de orden entero y posee algunas fallas en la determinación en la estabilidad mediante Lyapunov, en los que asegura que la derivada de la función candidata propuesta por los autores es definida negativa, cuando en realidad es semidefinida negativa. Al margen de estas situaciones el autor plantea unas soluciones interesantes usando las tres señales de control en forma independiente, sin embargo esta Tesis analizó dichas soluciones sin la hipótesis de acotamiento de las variables de estado, y se llegó a la conclusión que es posible lograr la sincronización, con U_1, U_2 , en forma independiente.

Al tenor de los sistemas enteros tipo Lorenz, Chen et. al [85] plantean un desarrollo fundamentado en backstepping, con una señal de control. Dicha señal de control es introducida en la segunda ecuación del sistema esclavo de Lorenz, señal que tiene dos posibilidades de ser construida. Por un lado se eliminan las no linealidades para que el sistema tenga una estabilización asintótica y mediante un segundo esquema de sincronización, este es basado en una variable de estado realimentada con una ganancia lo suficientemente grande, la cual se determina mediante la hipótesis de existencia de una cota sobre dos de las tres variables de estado del sistema original. Este método tiene algunas restricciones para el caso de sistemas de orden fraccionario, que por sus características dependen en su evolución del orden de la derivada fraccionaria, y su evolución no necesariamente puede tener trayectorias acotadas.

Con una estrategia diferente, Zhang et al. [86] muestran un procedimiento en forma reducida, con unos sistemas de Lorenz generalizados. Para ello, los autores proponen un observador de estado reducido, es decir el observador se construye solo con dos de las tres variables de estado. Sin embargo, el tratamiento matemático y de variables no es muy simple de seguir. Además plantean que el error de sincronización está definido como la diferencia de la evolución entre el estado del sistema y el observador, lo que es un error, ya que la sincronización se usa en términos de la diferencia de estados del sistema esclavo y maestro. Tampoco se menciona que el sistema a ser observado sea un sistema maestro o esclavo. De acuerdo a los autores, es una forma de no recurrir a acotar variables de estado del sistema, con todo esto se incurre en el error ya mencionado.

La revisión de la literatura sobre sistemas tipo Lorenz entero mediante señales de control reducido o mínimo no es muy abundante, pero la bibliografía existente redundante en el uso de cotas sobre las variables del sistema, aplicados a sistemas de diferente índole, como los presentados a continuación. Si bien estos no son de completo interés de esta Tesis, si vale la pena mencionar su aplicación en sistemas distintos a los de Lorenz de orden entero.

En el caso de Wang et. al [87], proponen que para un sistema de dinámica caótica general con una incertidumbre sobre los parámetros del sistema. Dicha incertidumbre es descrita con un rango muy pequeño. El procedimiento muestra la síntesis que debe hacerse para un sistema de tres ecuaciones, y convertirlas en un sistema no lineal de dos ecuaciones de estado. Para lograr estabilidad en la sincronización, la matriz de evolución de estado, debe cumplir con ciertas condiciones dependientes de la existencia de cotas superiores sobre las variables del sistema, lo que hace que no sea aplicable a sistemas que no sean de orden entero ya que su evolución podría no ser caótica.

Por otra parte, Yang [88] propone una sincronización de dos sistemas tipo Li de orden entero, mediante una sola señal de control. Así mismo, otros aportes enfocados a otros tipos de sistemas, como por ejemplo sistemas hipercaóticos como lo expone Guo [89], en donde hace uso de un controlador con una ganancia ajustable por realimentación de estado. Como ejemplo, el autor describe este método aplicado a sistemas Rikitake con dos señales de control. Otras aplicaciones en diferentes tipos de sistemas, como por ejemplo en sistemas hipercaóticos o tipo casi-Lorenz, se presentan en Chen et. al [90], Wang et. al [91], y Xiao et. al [92]

En general no existe hasta el momento un trabajo que posea una línea de pensamiento diferente al hecho de usar cotas sobre las variables de estado de los sistemas dinámicos caóticos. Así mismo, cuando se hace mención a una sincronización en forma reducida o con menor número de señales de control y de tipo adaptable, ésta siempre hace referencia a una ganancia ajustable o con una ganancia con realimentación de estado.

El aporte de la Tesis apunta a desarrollar una solución en el ámbito de la sincronización mínima de orden fraccionario, basado en la aplicación del criterio de estabilidad de Routh Hurwitz, extendido al caso fraccionario, solución que parte del estudio de sistema, de orden entero, y que integra el concepto de un control activo, sin que sea necesario apoyarse en la hipótesis de existencia de cotas sobre las variables del sistema caótico en su estado estable.

De los trabajos sobre sincronización adaptable de sistemas de orden fraccionario revisados anteriormente, podemos concluir que el tema central de la Tesis sigue siendo un problema

abierto, dado que las soluciones planteadas abordan o resuelven solo parcialmente el problema que se desea analizar en esta Tesis. El trabajo planteado en esta Tesis y descrito en los Capítulos 3 y 4, pretende aportar al conocimiento de este tema, desarrollando procedimientos de sincronización mínima y no mínima, para sistemas fraccionarios, que constituyan un camino para encontrar una solución completa de tipo teórica para una clase de sistemas no lineales lo más amplia posible.

El trabajo presentado en esta Tesis está distribuido de la siguiente forma en el Capítulo 2 se explicarán los conceptos básicos y fundamentos teóricos usados en la investigación. En el Capítulo 3, se presenta un análisis de sincronización adaptable de sistemas dinámicos tipo Lorenz, en el Capítulo 4 se presenta la sincronización mínima de sistemas tipo Lorenz. Finalmente en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones de este trabajo.

Capítulo 2

Fundamentos y Conceptos Básicos

En el desarrollo de esta Tesis, se hace necesario estipular algunos conceptos de cálculo y control fraccionario y de sincronización de sistemas, los cuales más adelante servirán de base para entender los desarrollos realizados. Primero se mostrarán algunas definiciones sobre cálculo fraccionario y definiciones que se usarán a lo largo de la Tesis. Posteriormente se introducirán conceptos relacionados con control fraccionario en particular aquellos utilizados en estabilidad de sistemas de orden fraccionario lineales e invariantes en el tiempo. Finalmente se presentan los conceptos básicos de sincronización de sistemas.

2.1 Aspectos básicos de cálculo y control fraccionario

Desde la perspectiva histórica, los antecedentes del cálculo fraccionario se remontan a 1695 cuando L'Hopital, en una comunicación con Leibnitz, le hizo una pregunta relacionada con las derivadas, planteando “¿qué ocurre si el orden es un medio?”. En su respuesta de septiembre 30 de 1695, Leibnitz respondió, “De esta paradoja se extraerán, algún día, consecuencias muy útiles” [93]. Existen muy pocos trabajos en este campo desde 1695 hasta 1974, fecha en la cual se publicó el primer texto dedicado al cálculo fraccionario por Oldham y Spanier [94]. Así mismo, otros autores que han contribuido al cálculo fraccionario son Lagrange, Laplace, de Morgan, Heaveside, Riesz, Weyl [95]. En la actualidad existe una extensa literatura sobre el tema del cálculo fraccionario, en donde se muestran las más amplias aplicaciones que abarcan la reología, electroquímica, teoría de la dispersión, difusión, teoría del transporte, probabilidad y estadística, teoría del potencial, elasticidad y viscosidad, entre otras.

El cálculo fraccionario es una rama del análisis matemático que estudia la posibilidad y consecuencias de dar valores reales o complejos al siguiente operador general

$$D^n = \frac{d^n}{dt^n}$$

En el caso entero, el índice del operador se refiere a las aplicaciones sucesivas que se realizan del operador sobre una función $f(x)$. Es así como podemos tener

$$D^0 f(x) = f(x), \quad D^1 f(x) = D(f(x)), \quad D^2 f(x) = D(D(f(x))), \quad D^3 f(x) = D(D(D(f(x))))$$

En el caso general la derivada en forma iterativa se puede expresar como

$$D^n f(x) = DD \dots Df(x) = \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} \dots \frac{d}{dt} f(x) = \frac{d^n}{dt^n} f(x)$$

Tomando lo anterior se puede plantear la pregunta relacionada con la utilización de un valor de n que no sea entero. El cálculo fraccionario se ocupa del estudio de los llamados operadores de integración y derivación fraccionarios sobre dominios reales o complejos.

El operador Integro-diferencial, denotado mediante D_t^q , es un operador que combina la integración y la diferenciación en un solo operador. Este operador ha sido comúnmente usado en cálculo fraccionario y se define de la siguiente manera [96]

$$D_t^q = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{d^q}{dt^q} & q > 0, \text{ derivada fraccionaria} \\ 1 & q = 0, \text{ operador neutro} \\ I^q = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (x-t)^{q-1} f(t) dt & q < 0, \text{ integral fraccionaria} \end{array} \right.$$

Hay varias definiciones para este operador integro-diferencial y las más comúnmente usadas son las de Grunwald-Letnikov, Riemann-Liouville y Caputo [97]. La definición de Grunwald-Letnikov (GL) del operador diferencial está descrita de la siguiente manera

$${}_0D_t^p f(t) = \frac{d^p f(t)}{d(t-a)^p} = \frac{\sum_{k=0}^m f^k(a) (t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{m+1}(\tau) d\tau$$

Esta definición es obtenida bajo la suposición que las derivadas $f^k(t)$, ($k = 1, 2 \dots m+1$) son continuas en un intervalo cerrado $[a, t]$ y m es un número entero que satisface la condición $m > p - 1$. La función gama, $\Gamma(z)$ está definido por la integral [98]

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

La definición de Riemann-Liouville (RL) del operador diferencial es la más simple y la más fácil. Su definición corresponde a [98]

$${}_0D_t^p f(t) = \frac{d^{m+1}}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f(\tau) d\tau,$$

donde m es el entero que satisface $m \leq p < m+1$

La definición según Caputo [98], es una de las más usada debido a la interpretación de las condiciones iniciales y está dada por:

$${}_a^c D_t^p f(t) = \frac{d^p f(t)}{dt^p} = \frac{1}{\Gamma(p-m)} \int_a^t \frac{f^m(\tau)}{(t-\tau)^{p+1-m}} d\tau \quad (1)$$

donde m es el entero que satisface $m-1 \leq p < m$. Las definiciones dadas aquí corresponden a derivadas cuando $p > 0$, y a definiciones de integrales cuando $p < 0$ [96].

La definición de Caputo tiene la ventaja de tratar adecuadamente el problema de las condiciones iniciales, las cuales están dadas en términos de las derivadas de orden entero, caso que se da en la mayoría de los fenómenos físicos. Esta definición será la utilizada en esta Tesis.

El objetivo de incorporar parte de la teoría de cálculo fraccionario es usarla como herramienta para la sincronización de sistemas dadas las ventajas observadas en el control adaptable fraccionario.

Dentro de los desarrollos que se plantearán para la sincronización de sistemas de orden fraccionario, no solamente tiene como objetivo que se logre modificar la trayectoria de uno de los dos sistemas y que compartan una trayectoria común, sino que esa respuesta en el tiempo esté fundamentada en la teoría de estabilidad correspondiente al sistema bajo análisis. Por ello, a continuación se plantean algunos criterios que permiten darle una solución a la estabilidad de sistemas lineales e invariantes en el tiempo de orden fraccionario.

Para sistemas dinámicos lineales e invariantes en el tiempo de orden fraccionario, el criterio de estabilidad presentado en [58], enuncia que la estabilidad de un sistema definido por

$$[x_1^{q_1}, x_2^{q_2}, \dots, x_n^{q_n}]^T = A[x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

$$X \in R^n, A \in R^{n \times n}$$

queda garantizada si las raíces del polinomio característico (los valores propios de la matriz de evolución del sistema o bien los polos de la función de transferencia) se encuentran fuera del sector determinado por la condición

$$|\arg(\lambda_i)| > q\pi/2 \quad (2)$$

donde $q = \max(q_1, q_2, \dots, q_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$ es el orden fraccionario del sistema y λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ son los valores propios del sistema.

Observando este criterio es posible variar la frontera de estabilidad que se tiene para los sistemas tradicionales de orden entero. Usando cálculo fraccionario se puede prolongar la región de estabilidad a lugares en los cuales el sistema entero resulta inestable. Con esto se gana una mayor flexibilidad a la hora de establecer puntos de trabajo de un sistema dinámico. La región de estabilidad se muestra en la Figura 10.

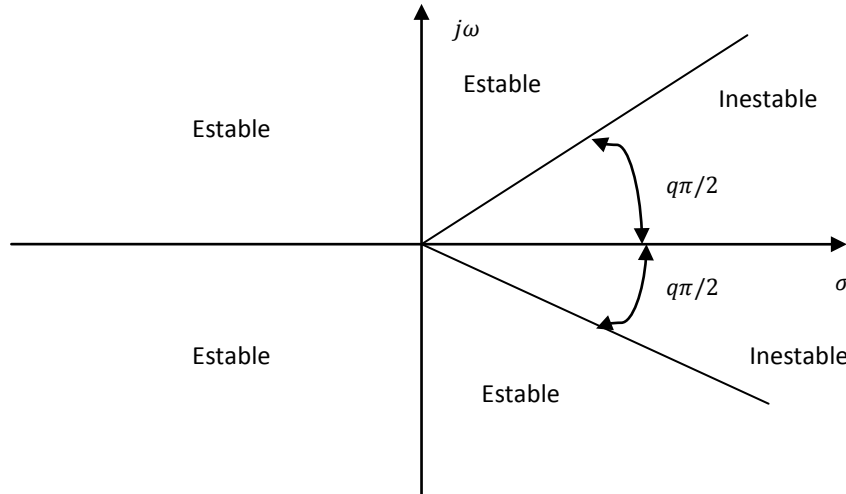


Figura 10 Región de estabilidad para sistemas dinámicos lineales e invariantes de orden fraccionario,

Otro criterio disponible en la literatura y que guarda relación con la estabilidad de sistemas para sistemas lineales e invariantes en el tiempo de orden fraccionario, con derivadas en el sentido de Caputo, corresponde a una extensión del criterio de Routh –Hurwitz usado para sistemas de orden entero desarrollado por Ahmed et. al [99]. A partir del criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz estándar, basado en el caso de $q=1$, las condiciones enunciadas por Mishina y Proskuryakov [100], para el caso de $q \in [0,1)$ resultan ser suficientes pero no necesarias.

Usando los resultados de Mishina y Proskuryakov, y tomando la definición de discriminante de un polinomio, para uno de orden 3, ya que nos interesan los sistemas tipo Lorenz, como se explica en [99].

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$$

si el discriminante ($D(P) > 0$) es positivo implica que todas las raíces son reales y cuando el discriminante es negativo ($D(P) < 0$) implica que existe solamente una raíz real y un par de raíces complejas conjugadas. Cuando el polinomio tiene orden $n=3$, el discriminante de $P(\lambda)$ tiene una expresión como la siguiente

$$D(P) = 18a_1a_2a_3 + (a_1a_2)^2 - 4a_3(a_1)^3 - 4(a_2)^3 - 27(a_3)^2$$

Para este caso particular, si el discriminante es positivo, las condiciones de Routh-Hurwitz son necesarios y suficientes para (2), y resultan ser

$$\text{si } D(P) > 0 \text{ y } a_1 > 0; a_3 > 0; a_1a_2 > a_3$$

Por otro lado, cuando el discriminante es negativo, las condiciones son

$$\text{si } D(P) < 0 \text{ y } a_1 > 0; a_2 > 0; a_1a_2 = a_3$$

entonces se satisface (2) para todo $q \in [0,1)$.

Basado en este criterio, se mostrarán sus aplicaciones en el estudio relacionado con la sincronización mínima de sistemas de orden fraccionario con parámetros conocidos e invariantes en el tiempo.

2.2 Conceptos relacionados con sincronización de sistemas

La definición de sincronización en su forma más genérica puede ser vista como un fenómeno donde existe una interacción de al menos dos sistemas dinámicos. En esta sección se mostrarán los diferentes tipos de sincronización de sistemas dinámicos que se han planteado en la literatura técnica.

Una definición más elaborada de sincronización de sistemas dinámicos consiste en lograr que dos o más sistemas, que evolucionan en forma independiente, converjan hacia una trayectoria común, mediante la aplicación de señales externas adecuadas sobre uno de los sistemas.

El concepto general de sincronización se definió en la Sección 1.5, sin embargo aquí se explican otras formas de sincronizar dos sistemas dinámicos, así como otras conceptualizaciones hechas por diferentes autores.

La Sincronización por Fase (PS, Phase Synchronization), se usa en sistemas de osciladores no idénticos o sistemas rotatorios, que pueden alcanzar un régimen intermedio donde se produce una mancomunidad de las fases, mientras que la correlación entre las amplitudes permanece débil (amplitudes no correlacionadas o caóticas) [11].

La Sincronización por Retardo (LS, Lag Synchronization) es un paso intermedio entre la sincronización de fase y la sincronización completa. En este tipo de sincronización y en forma asintótica, se logra que las fases y las amplitudes de las variables de ambos sistemas permanezcan unidas, pero con la presencia de un tiempo de retardo [11].

La Sincronización de Retardo Intermitente (ILS: Intermittent Lag Synchronization) produce que los sistemas, en la mayor parte del tiempo, verifican la sincronización de fase, pero existen estallidos intermitentes de comportamiento no sincronizados, debido a que la trayectoria pasa por una región del atractor donde el exponente local de Lyapunov se acorta en alguna dirección y se vuelve positivo [101].

Además de la metodología general explicada en la Sección 1.5, existen otros métodos y técnicas para manejar y controlar sistemas dinámicos con comportamiento caótico y para sistemas que se desea sincronizar. Entre ellos podemos citar el método OGY[102] en el que, la existencia de un número infinito de orbitas periódicas inestables, es aprovechado para introducir pequeñas perturbaciones, para que la trayectoria caótica siga una trayectoria periódica seleccionada. Otros métodos usan un enfoque que emplea retardo de tiempo [103] y un diseño por backstepping [104], sólo por nombrar algunos.

En términos generales, en el proceso de sincronización se consideran dos sistemas dinámicos (con comportamiento caótico o no). Uno de esos sistemas se denomina maestro y el otro sistema esclavo, identificados con unos subíndices m y s respectivamente, y con vectores de estado $X_m, X_s \in R^n$. La evolución del vector de estado de los sistemas está descrita, por las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} (\text{Maestro}) \quad \dot{X}_m &= f(X_m), & X_m(0) &= X_{m0} \\ (\text{Esclavo}) \quad \dot{X}_s &= f(X_s) + U(t), & X_s(0) &= X_{s0} \end{aligned} \quad (3)$$

$f: R^n \rightarrow R^n$ es una función no lineal y $U(t)$ es el vector de control que se usará para sincronizar ambos sistemas. En general, se introduce la señal $U(t)$ sobre el sistema esclavo, de manera que cancele los términos no lineales y genere dinámicas deseadas, preferentemente lineales.

Se define el error de sincronización $e(t) \in R^n$ como la diferencia entre los estados del sistema maestro y del sistema esclavo, excepto por un factor de escala

$$e(t) = X_m(t) - \alpha X_s(t) \quad (4)$$

donde $\alpha \in R$ es el factor de escala.

A continuación, se escoge la señal $U(t)$ de manera que la dinámica del error de sincronización esté regida por un sistema lineal de la forma

$$\dot{e}(t) = f(X_m) - \alpha(f(X_s) + U(t)) = Ae(t) \quad (5)$$

De este modo los valores propios de A (polos del sistema (5)), determinan la convergencia del error de sincronización, lográndose con ello que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|X_m - \alpha X_s\| = 0 \quad (6)$$

Esto hace que el estado del sistema esclavo sea igual al estado del sistema maestro, excepto por el factor de escala α .

Los pasos descritos anteriormente son los usados en la metodología general para resolver el problema de sincronización de sistemas dinámicos con parámetros conocidos. En la literatura técnica se hace referencia a casos específicos de sincronización cuyas diferencias con el caso general ya explicado, corresponden a la forma como se define el error de sincronización.

Por otra parte, cuando en los sistemas que se sincronizan existe un desconocimiento de los parámetros, se diseña un observador de estados y parámetros basado en la información del sistema esclavo y luego se definen leyes de ajuste apropiadas para los parámetros estimados, tal como se muestra en la Figura 5.

Considerando la ecuación (3) que define los sistemas maestro y esclavo, se diseña el observador de estado basado en el sistema esclavo de la siguiente manera

$$\dot{\hat{X}}_s = f(\hat{X}_s) + U(t) + u'(t), \quad \hat{X}_s(0) = \hat{X}_{s0} \quad (7)$$

donde $\hat{X}_s(t) \in R^n$ es el estimado del estado $X_s(t) \in R^n$ en el instante t .

Aquí se debe mencionar que la señal externa $U(t) \in R^n$, está compuesta por las señales del controlador que eliminan las no linealidades del sistema y permiten generar una dinámica lineal y además se adicionan señales de excitación persistente $u'(t) \in R^n$, necesarias para que puedan ser estimados correctamente todos los parámetros y estados.

En forma general las señales externas tienen la forma

$$U(t) = \zeta(t) + kv(t); \quad u'(t) = E.P \quad (8)$$

donde $u'(t) \in R^n$ es la señal de excitación persistente, la cual tiene por objetivo proveer las condiciones para encontrar convergencia paramétrica del observador o del identificador. Por su parte $U(t)$ es la señal de control para la sincronización formado por $\zeta(t) \in R^n$ que es la parte no lineal, $v(t) \in R^n$ es la señal externa de realimentación del estado para mejorar el control sobre la sincronización, y $k \in R$ es una constante.

La diferencia entre el estado del sistema esclavo $X_s(t)$ y su estimado $\hat{X}_s(t)$ define el error de estimación del estado $\varepsilon(t) \in R^n$, de la siguiente manera

$$\varepsilon(t) = \hat{X}_s(t) - X_s(t) \quad (9)$$

Si definimos $\theta \in R^p$ como el vector de parámetros reales del sistema y $\hat{\theta}(t) \in R^p$ su estimado en el instante t , el error de la estimación de los parámetros $\tilde{\theta}(t) \in R^p$ queda dado por

$$\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta \quad (10)$$

Para encontrar la ley de ajuste de los parámetros estimados $\hat{\theta}(t)$ se plantea una función candidata de Lyapunov, que sea función del error de estado $\varepsilon(t)$ y del error paramétrico $\tilde{\theta}(t)$

$$V(\varepsilon, \tilde{\theta}) > 0 \quad (11)$$

de tal forma que

$$\dot{V}(\varepsilon, \tilde{\theta}) \leq 0 \quad (12)$$

La ley de adaptación para los parámetros estimados en forma genérica está dada por

$$\dot{\tilde{\theta}} = g(\varepsilon, X_s) \quad (13)$$

donde $g(\dots)$ es una función a ser definida de manera que se satisfagan (11) y (12). Como los sistemas son de orden entero, la ley de adaptación es también entera (13), este caso corresponde al método estándar de estimación. A partir de allí existen algunas variantes en cuanto al tipo de sistemas que se desea sincronizar, la definición del error de sincronización o el tipo de

sincronización que se busca. A continuación se mencionan algunos trabajos relacionados con el desarrollo de la sincronización en sistemas dinámicos con parámetros desconocidos y de orden entero. El esquema de este procedimiento se puede ver en la Figura 5.

En este trabajo, el sistema maestro a analizar será un sistema de Lorenz, el cual está descrito en forma general por la ecuación (14).

2.3 Sincronización de sistemas tipo Lorenz de orden entero y parámetros conocidos

En esta sección se detalla el procedimiento de sincronización de sistemas tipo Lorenz de orden entero con parámetros conocidos, que si bien no es el eje central de la Tesis, sirve de base para extender el método para sincronización de sistemas de orden fraccionario de parámetros conocidos y desconocidos. En este desarrollo se centrará la atención en las señales de control que van a permitir convertir el sistema de error de sincronización no lineales a sistemas lineales.

En principio, se toma en forma extendida el sistema Lorenz que se escribe como

$$\begin{aligned}\dot{x}_m &= \sigma(y_m - x_m) \\ \dot{y}_m &= \gamma x_m - x_m z_m - y_m \\ \dot{z}_m &= x_m y_m - \beta z_m\end{aligned}\tag{14}$$

donde los parámetros σ , γ y β son constantes. Para ciertos valores de ellos el sistema presenta comportamiento caótico ($\gamma=28$, $\beta=2.66$ y $\sigma=10$), mientras que para otros conjuntos de valores este comportamiento caótico desaparece.

A su vez, el sistema esclavo tiene una estructura similar a la del sistema maestro, con la salvedad de que se le han agregado las tres señales de control $U(t) = (U_1, U_2, U_3)^T \in R^3$, las cuales serán definidas más adelante. Será justamente a través de estas variables de control que se logrará la sincronización de ambos sistemas. El sistema esclavo se define mediante el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x}_s &= \sigma(y_s - x_s) + U_1 \\ \dot{y}_s &= \gamma x_s - x_s z_s - y_s + U_2 \\ \dot{z}_s &= x_s y_s - \beta z_s + U_3\end{aligned}\tag{15}$$

Se define el error de sincronización de la siguiente forma

$$\begin{aligned}e_1 &= x_m - \alpha x_s \\ e_2 &= y_m - \alpha y_s \\ e_3 &= z_m - \alpha z_s\end{aligned}\tag{16}$$

donde $\alpha \in R$ es un factor de escala.

A partir de (14), (15) y (16) se puede ver que la evolución del error de sincronización queda descrita, en forma extendida, por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= \sigma(e_2 - e_1) - \alpha U_1 \\
\dot{e}_2 &= \gamma e_1 - e_2 - x_m z_m + (x_m - e_1)(z_m - e_3)/\alpha - \alpha U_2 \\
\dot{e}_3 &= x_m y_m - (x_m - e_1)(y_m - e_2)/\alpha - \beta e_3 - \alpha U_3
\end{aligned} \tag{17}$$

Una forma de conseguir la sincronización es definiendo las señales de control como sigue

$$\begin{aligned}
U_1 &= -v_1/\alpha \\
U_2 &= -x_m z_m/\alpha + (x_m - e_1)(z_m - e_3)/\alpha^2 - v_2/\alpha \\
U_3 &= +x_m y_m/\alpha - (x_m - e_1)(y_m - e_2)/\alpha^2 - v_3/\alpha
\end{aligned} \tag{18}$$

Esta elección de las señales de control, que ciertamente no es la única, se realiza con el fin de cancelar los términos no lineales en la dinámica resultante para el error de sincronización. Tal como se dijo anteriormente estas señales de control tienen la forma general $U(t) = \zeta(t) + kv(t)$, donde $\zeta(t) \in R^n$ es la parte no lineal, k es una constante que considera el factor de escala y $v(t) \in R^n$ es una señal externa de realimentación del estado definida de manera que genere una dinámica del error de sincronización que sea lineal y conveniente.

Reemplazando los controles definidos por las ecuaciones (18) en la ecuación (17), se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= \sigma(e_2 - e_1) + v_1 \\
\dot{e}_2 &= \gamma e_1 - e_2 + v_2 \\
\dot{e}_3 &= -\beta e_3 + v_3
\end{aligned} \tag{19}$$

El sistema presentado en (19) es un sistema lineal, con una señal de control de entrada

$$v = [v_1 \ v_2 \ v_3]^T$$

el cual se puede escribir en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \gamma & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \tag{20}$$

Existen diferentes maneras de escoger el vector v . Una forma sencilla (pero no la única) es definiendo el vector de entradas externas de la siguiente forma, tal como lo realizó Li [29]

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \tag{21}$$

con lo cual (20) se convierte en sistema lineal autónomo que describe la dinámica del error de sincronización de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \tag{22}$$

De esta manera, la convergencia está determinada por la ubicación en el semi plano complejo izquierdo de los valores propios de la matriz de evolución.

El problema que se busca resolver en esta Tesis, es la sincronización de sistemas de orden fraccionario tipo Lorenz, que toma elementos de la sincronización de sistemas de orden entero, por ello se considera relevante mostrar algunos detalles de la metodología usada en ese objetivo. Consideremos dos sistemas dinámicos no lineales de orden fraccionario de comportamiento eventualmente caótico del tipo Lorenz, cuyos parámetros son desconocidos y que denominaremos maestro y esclavo. Cada sistema describe trayectorias individuales definidas por las ecuaciones para el maestro y el esclavo cuya evolución es caótica (o no) descritas en (14) y (15). En las siguientes secciones se mostrará el esquema seguido para el caso de la sincronización de sistemas de orden fraccionario, tanto mínimo como no mínimo, y en forma adaptable y no adaptable.

2.4 Sincronización adaptable de sistemas tipo Lorenz de orden entero

En el caso de la sincronización no adaptable de sistemas tipo Lorenz, se puede hacer uso del conocimiento de los parámetros del sistema. Sin embargo, cuando éstos no se conocen, se deben estimar cada uno de los parámetros del sistema, para hacer una estimación completa de los mismos. De no seguir esta idea, se puede generar una metodología directa para lograr la sincronización de los dos sistemas.

El sistema observador es derivado del sistema esclavo (15), incorporando escalares $a_m > 0$, $b_m > 0$, $c_m > 0$, y toma la forma

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_s &= -a_m \hat{x}_s + (a_m - \hat{\sigma})x_s + \hat{\sigma}y_s + U_1 + u_1'(t) \\ \dot{\hat{y}}_s &= -b_m \hat{y}_s - \hat{y}_s + b_m y_s + \hat{\gamma}x_s - x_s z_s + U_2 + u_2'(t) \\ \dot{\hat{z}}_s &= -c_m \hat{z}_s + (c_m - \hat{\beta})z_s + x_s y_s + U_3 + u_3'(t)\end{aligned}\quad (23)$$

Para las ecuaciones (23) se introducen las señales $u_1'(t)$ $u_2'(t)$ $u_3'(t)$ de excitación persistente que permiten la identificación paramétrica. Como son tres parámetros a identificar, se usan tres señales de excitación persistente, se han elegido de la siguiente manera, no siendo esta la única forma: $u_1'(t) = \sin(wt)$, $u_2'(t) = 2 \sin(2wt)$, $u_3'(t) = 3 \sin(3wt)$.

La diferencia entre la variable de estado estimada y la variable de estado genera el vector de errores de estimación de los estados, compuesto por $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$, $\varepsilon_3(t)$ y definidos por

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(t) &= \hat{x}_s(t) - x_s(t) \\ \varepsilon_2(t) &= \hat{y}_s(t) - y_s(t) \\ \varepsilon_3(t) &= \hat{z}_s(t) - z_s(t)\end{aligned}\quad (24)$$

La dinámica del error de estimación de estados se obtiene al reemplazar (15) y (23) en (24) obteniéndose

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_1 &= -a_m \varepsilon_1 + \tilde{\sigma} x_s - \tilde{\sigma} y_s \\
\dot{\varepsilon}_2 &= -\varepsilon_2(1 + b_m) - \tilde{\gamma} x_s \\
\dot{\varepsilon}_3 &= -\varepsilon_3 c_m + \tilde{\beta} z_s
\end{aligned} \tag{25}$$

Se define el error de estimación de los parámetros como la diferencia entre el valor estimado y el valor real del parámetro cuya forma es la siguiente

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}(t) &= \hat{\sigma}(t) - \sigma \\
\tilde{\gamma}(t) &= \hat{\gamma}(t) - \gamma \\
\tilde{\beta}(t) &= \hat{\beta}(t) - \beta
\end{aligned} \tag{26}$$

Con una adecuada elección para la función candidata de Lyapunov que cumpla con el criterio de estabilidad, podemos llegar a definir leyes de ajuste para cada uno de los parámetros estimados, en este caso se escogen las siguientes leyes adaptables

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\sigma}} &= \dot{\hat{\sigma}} = -\delta_1 \varepsilon_1 (x_s - y_s) \\
\dot{\hat{\gamma}} &= \dot{\hat{\gamma}} = -\delta_2 \varepsilon_2 x_s \\
\dot{\hat{\beta}} &= \dot{\hat{\beta}} = -\delta_3 \varepsilon_3 z_s
\end{aligned} \tag{27}$$

de donde $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, son las ganancias adaptables, que permitirán un manejo de la velocidad de convergencia del error paramétrico.

Si ahora escogemos en (18) v_1, v_2, v_3 , de la forma como lo hace Li [29] para el caso no adaptable ver ecuación (21), pero usando los estimados en lugar de los valores reales se tiene

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{\sigma} & 0 \\ -\hat{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \tag{28}$$

El error de sincronización, obtenido de (14) (15) (18) y (28) tiene ahora la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & -\tilde{\sigma} & 0 \\ -\tilde{\gamma} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \tag{29}$$

Nótese la diferencia entre (22) y (29).

De acuerdo a lo anterior, el error de sincronización, el error de estimación de estado y el error de estimación de parámetros, quedan expresados por las ecuaciones (25),(27) y (29)

Con estas ecuaciones, la sincronización adaptable de sistemas Lorenz de orden entero tendrá tres componentes del error de sincronización, tres del error de estimación de estado y tres del error de estimación de parámetros. En total 9 variables, que definen el proceso de observación del estado (25), la estimación paramétrica (27) y el error de sincronización (29). Bajo esta situación el sistema a resolver es grande por el número de elementos a trabajar, no lineal y variante en el tiempo, pero que tiene solución completa ya que es un sistema de orden entero.

Otra manera de lograr la sincronización sin el conocimiento de los parámetros, puede ser realizada mediante un ajuste de alta ganancia. Bajo esta estrategia, se pretende lograr la sincronización mediante la adición de las señales de control similares a las mostradas en (18) y con el ajuste de una ganancia $k_i, i = 1,2,3$, que se modifica de acuerdo a una ley de adaptación (definida en forma cuadrática a partir del error de sincronización) de acuerdo a Chen et. al [105] y a los desarrollos de Vaidyanathan [106]. Las señales de control se definen ahora como

$$U_1 = \frac{\hat{\sigma}(e_2 - e_1) + k_1 e_1}{\alpha}$$

$$U_2 = \frac{\hat{\gamma}e_1 - x_m z_m - \alpha x_s z_s - e_2 + k_2 e_2}{\alpha}$$

$$U_3 = \frac{\hat{\beta}e_3 + x_m y_m - \alpha x_s y_s + k_3 e_3}{\alpha}$$

siendo $\hat{\sigma}, \hat{\gamma}, \hat{\beta}$ estimados de los parámetros del sistema, k_1, k_2, k_3 ganancias ajustables

Luego el error de sincronización queda definido

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -\tilde{\sigma}(e_2 - e_1) - k_1 e_1 \\ \dot{e}_2 &= \tilde{\gamma}e_1 - k_2 e_2 \\ \dot{e}_3 &= \tilde{\beta}e_3 - k_3 e_3 \end{aligned}$$

donde $\tilde{\sigma} = \hat{\sigma} - \sigma$; $\tilde{\gamma} = \hat{\gamma} - \gamma$; $\tilde{\beta} = \hat{\beta} - \beta$.

A partir de los criterios de estabilidad de Lyapunov, se encuentran las siguientes leyes de ajuste para la estimación de parámetros

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\sigma}} &= -(e_1^2 - e_1 e_2 + k_4 \tilde{\sigma}) \\ \dot{\tilde{\gamma}} &= -(e_1 e_2 + k_5 \tilde{\gamma}) \\ \dot{\tilde{\beta}} &= -(e_3^2 + k_6 \tilde{\beta}) \end{aligned}$$

donde $k_4, k_5, k_6 > 0$ constantes arbitrarias.

Esta solución solo requiere manejar un número reducido de variables, entre las que se encuentran tres variables del error de sincronización y tres de ajuste paramétrico. Mientras que la solución para la sincronización adaptable indirecta, requiere de nueve variables que fueron mencionadas anteriormente.

2.5 Sincronización no adaptable de sistemas tipo Lorenz de orden fraccionario

En la Sección 2.3 se mostraba el esquema de sincronización de sistemas enteros con parámetros conocidos, cuya intención es generar un sistema lineal e invariante a partir de un sistema no lineal y variante en el tiempo. Basados en esa idea se realiza, en esta sección, un tratamiento similar al caso entero, aplicando los criterios de estabilidad apropiados.

La descripción del sistema de Lorenz fraccionario tiene la siguiente ecuación general tanto para el sistema maestro como esclavo

$$\begin{aligned}\frac{d^{q_s} X_m}{dt^{q_s}} &= f(X_m); & X_m(0) &= X_{m0} \\ \frac{d^{q_s} X_s}{dt^{q_s}} &= f(X_s) + U(t); & X_s(0) &= X_{s0}\end{aligned}\quad (30)$$

donde q_s es el orden de la derivada fraccionaria de los sistemas, $X_m, X_s \in R^3$ son los estados del sistema maestro y del sistema esclavo, respectivamente. $f: R^3 \rightarrow R^3$ es un campo vectorial suave y $U(t) \in R^3$ son las señales de control a definir. En forma explícita el sistema de Lorenz maestro de orden fraccionario, es descrito de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\frac{d^{q_s} x_m}{dt^{q_s}} &= \sigma(y_m - x_m) \\ \frac{d^{q_s} y_m}{dt^{q_s}} &= \gamma x_m - x_m z_m - y_m \\ \frac{d^{q_s} z_m}{dt^{q_s}} &= x_m y_m - \beta z_m\end{aligned}\quad (31)$$

Se ha observado, mediante simulaciones, que para valores de los parámetros $\gamma = 28$, $\beta = 8/3$ y $\sigma = 10$, el sistema presenta un comportamiento caótico cuando $0.99 \leq q_s \leq 1.17$. Para otros valores de $q_s \in (0,2)$, y de acuerdo a las simulaciones, no se ha encontrado comportamiento caótico lo cual ameritaría un estudio analítico más detallado, para el caso del sistema de Lorenz de orden fraccionario.

El sistema esclavo tiene una estructura igual a la del sistema maestro, además de las señales adicionales para lograr la sincronización y adopta la forma

$$\begin{aligned}\frac{d^{q_s} x_s}{dt^{q_s}} &= -\sigma x_s + \sigma y_s + U_1 \\ \frac{d^{q_s} y_s}{dt^{q_s}} &= -y_s + \gamma x_s - x_s z_s + U_2 \\ \frac{d^{q_s} z_s}{dt^{q_s}} &= -\beta z_s + x_s y_s + U_3\end{aligned}\quad (32)$$

De las ecuaciones (31) y (32), la evolución del error de sincronización de orden fraccionario está dada por

$$\begin{aligned}
\frac{d^{q_s} e_1}{dt^{q_s}} &= \sigma(e_2 - e_1) - \alpha U_1 \\
\frac{d^{q_s} e_2}{dt^{q_s}} &= \gamma e_1 - e_2 - x_m z_m + (x_m - e_1)(z_m - e_3)/\alpha - \alpha U_2 \\
\frac{d^{q_s} e_3}{dt^{q_s}} &= x_m y_m - (x_m - e_1)(y_m - e_2)/\alpha - \beta e_3 - \alpha U_3
\end{aligned} \tag{33}$$

donde $e_1 = x_m - \alpha x_s$; $e_2 = y_m - \alpha y_s$; $e_3 = z_m - \alpha z_s$.

Una forma de escoger las señales de control en este caso sería similar a la mostrada en la ecuación (18) para sistemas de orden entero. Las ecuaciones dinámicas del error de sincronización quedan ahora como

$$\begin{aligned}
\frac{d^{q_s} e_1}{dt^{q_s}} &= \sigma(e_2 - e_1) + v_1 \\
\frac{d^{q_s} e_2}{dt^{q_s}} &= \gamma e_1 - e_2 + v_2 \\
\frac{d^{q_s} e_3}{dt^{q_s}} &= -\beta e_3 + v_3
\end{aligned} \tag{34}$$

Escogiendo adecuadamente el vector externo v , tal como se hizo en el caso entero (ver ecuación (21)) el error de sincronización (34) queda dado por el siguiente sistema lineal e invariante en el tiempo

$$\begin{bmatrix} \frac{d^{q_s} e_1}{dt^{q_s}} \\ \frac{d^{q_s} e_2}{dt^{q_s}} \\ \frac{d^{q_s} e_3}{dt^{q_s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \tag{35}$$

Para sistemas dinámicos lineales e invariantes en el tiempo de orden fraccionario, el criterio de estabilidad presentado en [58], enuncia que la estabilidad queda garantizada si las raíces del polinomio característico (los valores propios de la matriz de evolución del sistema o bien los polos de la función de transferencia) se encuentran fuera del sector determinado por la condición definida en (2), condición que en este caso se satisface ya que σ y β son positivos para el sistema de Lorenz.

En la Figura 11, se muestra la evolución del error de sincronización con parámetros conocidos de sistemas de orden fraccionario con $q_s=0.9$, en el que se puede apreciar la lentitud de una de las señales del error e_2 , siendo éste, el que tiene una menor magnitud dentro de todos los valores propios del sistema.

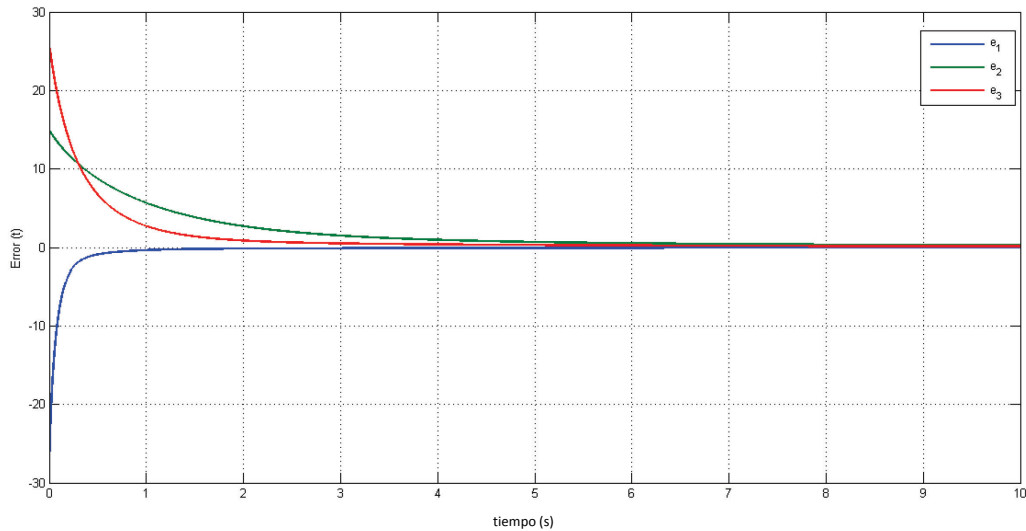


Figura 11 Error de sincronización de sistemas Lorenz de orden fraccionario tipo Lorenz con $q_s=0.9$ no adaptable

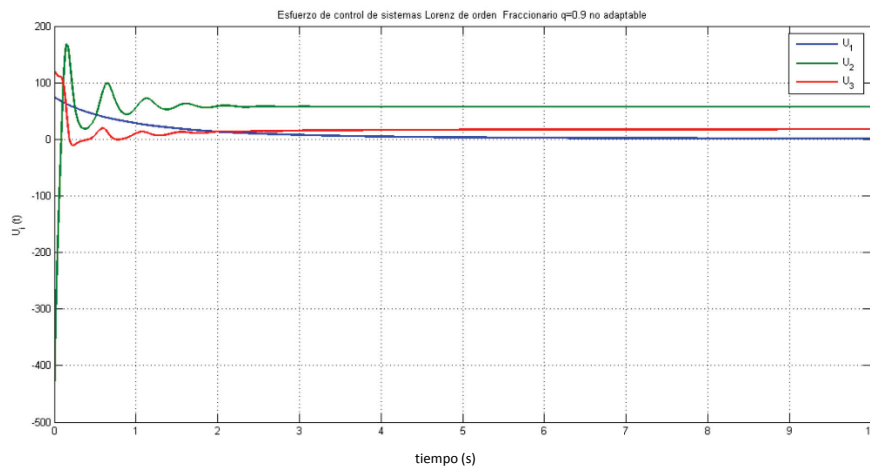


Figura 12 Esfuerzo de control para sincronización de sistemas de orden fraccionario tipo Lorenz con $q_s=0.9$, no adaptable.

En la Figura 12 se muestra el esfuerzo de control que incluye las entradas externas v_1, v_2, v_3 .

Al igual que se hace en el caso de orden entero, es posible obtener diferentes expresiones para la ecuación (35), que permitirán obtener una mejora en la velocidad de convergencia de los errores de sincronización. Esto se logra modificando las señales de entrada externas v_1, v_2, v_3 para obtener por ejemplo una matriz triangular superior o inferior que garantice el criterio de estabilidad para sistemas de orden fraccionario lineales e invariantes. Cambiando el orden de la derivada fraccionaria, se ha encontrado que mientras más se aleje de la unidad, es decir si el orden es mayor que cero y menor a uno, la convergencia se hace más lenta.

Capítulo 3

Análisis de la sincronización adaptable de sistemas tipo Lorenz de orden fraccionario

En este capítulo se hace primeramente un análisis del comportamiento para un sistema de Lorenz fraccionario aislado. Posteriormente se proponen desarrollos para la sincronización de sistemas de orden fraccionario tipo Lorenz con parámetros desconocidos tanto empleando técnicas directas como indirectas.

3.1 Estudio del sistema de Lorenz fraccionario aislado

Para introducirnos en el tema de la sincronización adaptable de sistemas de orden fraccionario, en esta sección se presenta un análisis bajo la óptica de simulaciones del sistema de Lorenz de orden fraccionario aislado. Esto con el objeto de tener la idea completa del comportamiento y su evolución, definiendo convergencia y comportamiento caótico, entre otros, y analizando la influencia del orden de la derivada fraccionaria y de las condiciones iniciales sobre el comportamiento del sistema.

Para ello, se realizaron simulaciones del sistema de Lorenz fraccionario con diferentes ordenes de la derivada (valores de q_s) desde $q_s=0.2$, hasta $q_s=1.18$. En particular se tomaron los valores 0.2, 0.5, 0.9, 1, 1.1, 1.18 y las condiciones iniciales $x(0) = 8$; $y(0) = -5$; $z(0) = -6$. El sistema se simuló en forma aislada, como se mencionaba antes, para conocer la evolución natural del sistema Lorenz fraccionario, con diferentes valores de q_s .

Un objetivo particular de este estudio es analizar el comportamiento aislado de un sistema fraccionario del tipo Lorenz, con el fin de observar el tipo de evolución que presenta con respecto al caso de sistemas de Lorenz ($q=1$).

A partir de las simulaciones realizadas para el sistema fraccionario tipo Lorenz aislado, se observó que el comportamiento caótico se presenta cuando se modifica el orden de la derivada fraccionaria que tiene el sistema. En el momento en que no existe caos, las condiciones iniciales definen hacia qué atractor evolucionará el sistema. Es así como se obtiene un comportamiento caótico cuando el orden de las derivadas fraccionarias satisface $0.99 \leq q_s \leq 1.17$ (Ver Figura 14). A partir de $q_s=1.18$ el sistema presenta un comportamiento inestable (Ver Figura 15). Para valores $q_s < 0.98$ los sistemas tienden asintóticamente a uno de los atractores del sistemas original

de Lorenz ($q_s=1$), Figura 16 dependiendo de las condiciones iniciales que posea el sistema(Ver Figura 13, Figura 17, Figura 18, Figura 19 y Figura 20). Los rangos de comportamiento del sistema serán diferentes, en cuanto cambien los parámetros del sistema,

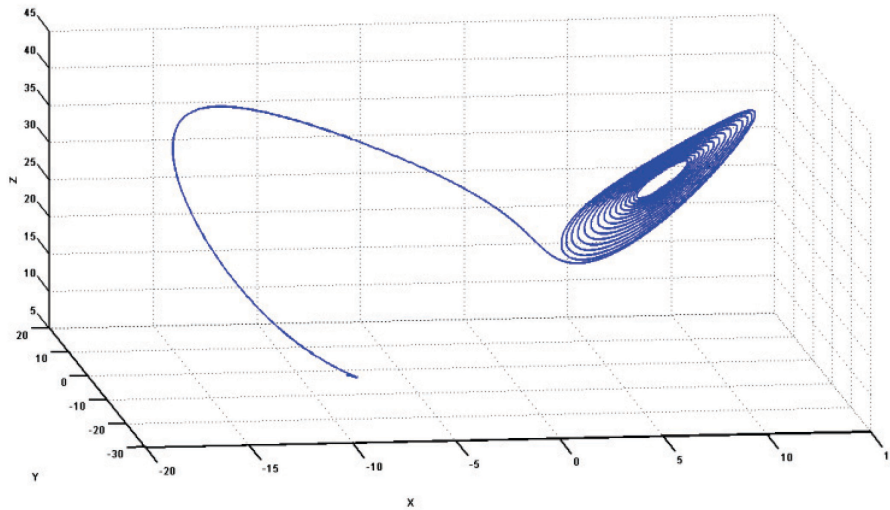


Figura 13 Comportamiento de un sistema tipo Lorenz fraccionario aislado para $q_s=0.98$.

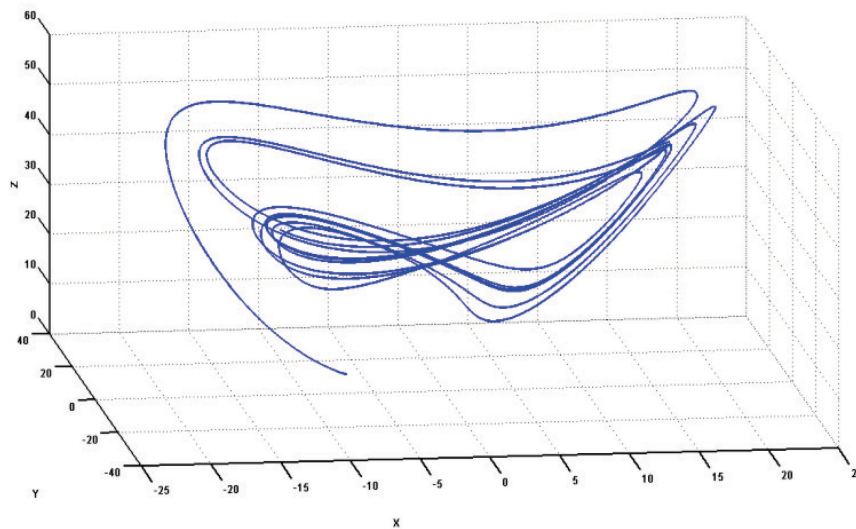


Figura 14 Comportamiento del un sistema tipo Lorenz fraccionario aislado para $q_s=1.17$.

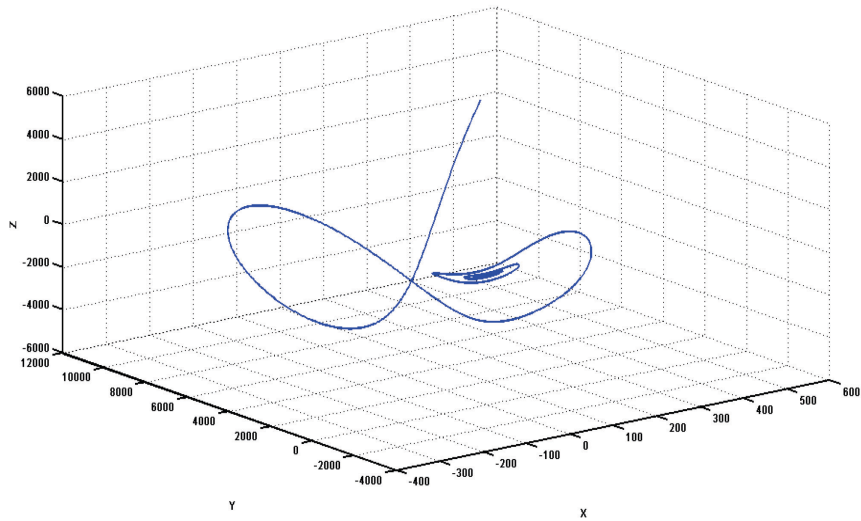


Figura 15 Comportamiento de un sistema tipo Lorenz fraccionario aislado para $q_s=1.18$.

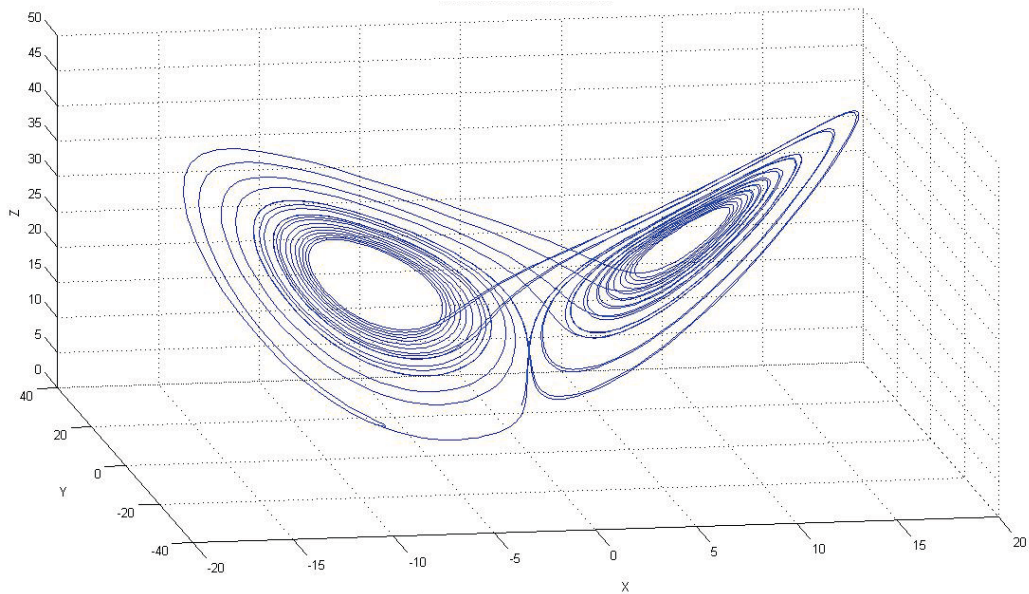


Figura 16 Sistema de Lorenz Entero $q_s=1$

Extendiendo el análisis del sistema aislado, el sistema (31) se simuló dentro del rango correspondiente a $0 < q_s \leq 0,98$ en ausencia de caos. Para el caso de $q_s = 0.2$ (valor que tiene interés ya que es cercano a cero) los resultados se muestran en la Figura 17. También se hicieron simulaciones con valores $q_s = 0.1$ (no mostradas en esta sección), y se observó que tiene la dificultad de que la sincronización es muy lenta respecto al caso $q_s = 0.2$.

De igual manera, se simuló el sistema de Lorenz y se simuló con $q_s = 0.5$, y según la Figura 18, la convergencia a unos de los puntos de equilibrio del sistema original de Lorenz es más rápida ya que no posee una trayectoria tan larga como se muestra cuando $q_s = 0.2$. (Figura 17)

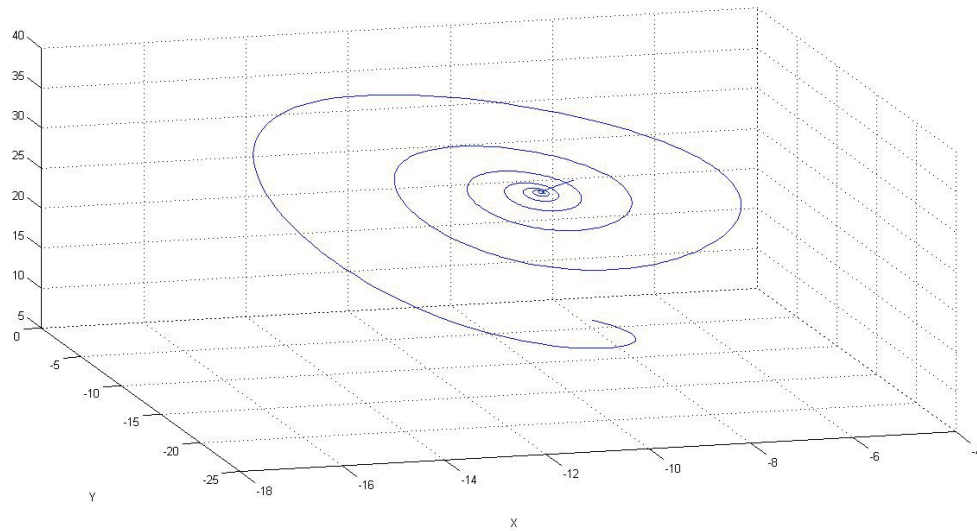


Figura 17 Sistema Lorenz fraccionario $q_s = 0.2$

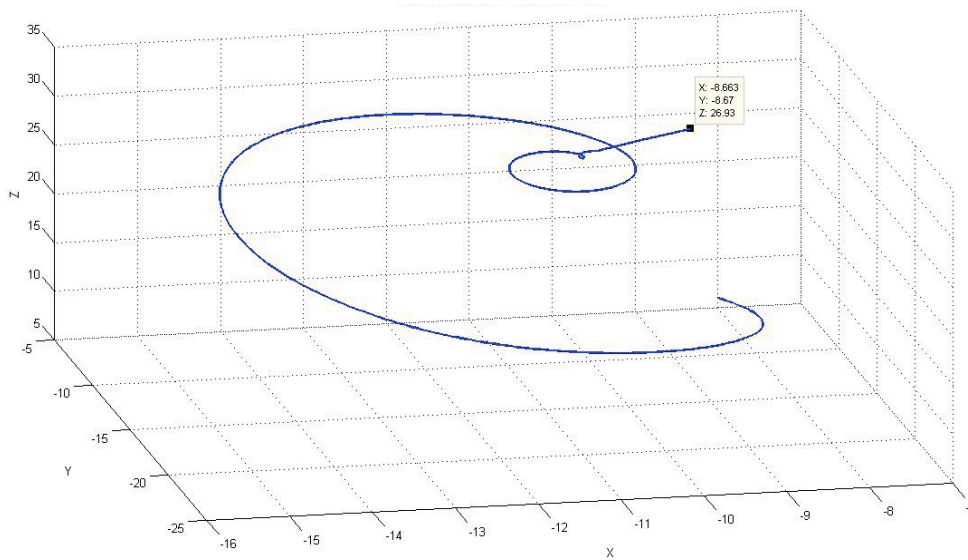


Figura 18 Sistema de Lorenz fraccionario con $q_s=0.5$

En la Figura 19 se muestra la evolución del sistema de Lorenz fraccionario con orden $q_s = 0.7$, Mientras que en la Figura 20 se hace lo propio para un orden de $q_s = 0.9$. En éste último caso la evolución del sistema de Lorenz es muy parecida al caso cuando $q_s = 0.2$,

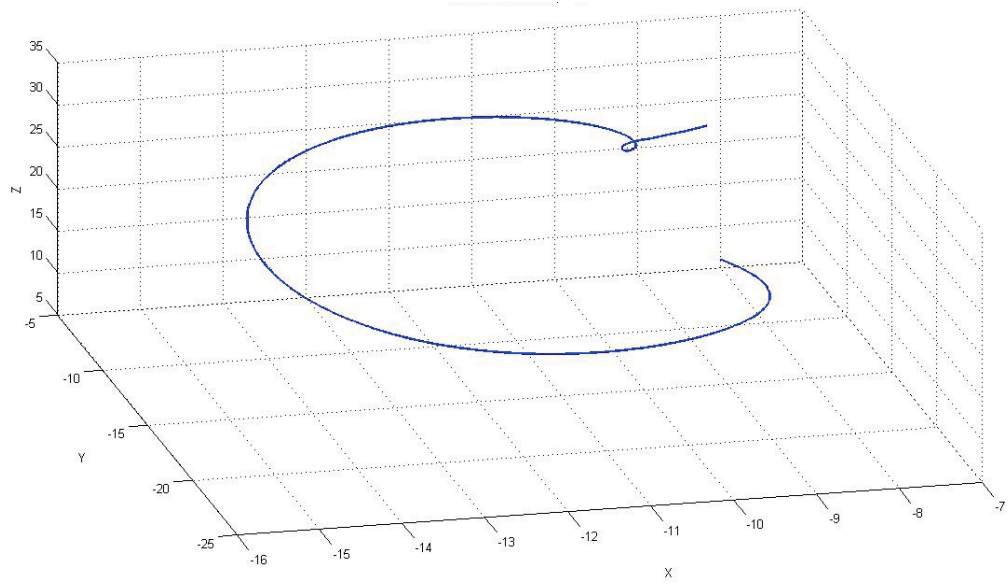


Figura 19 Sistemas de Lorenz $q_s=0.7$

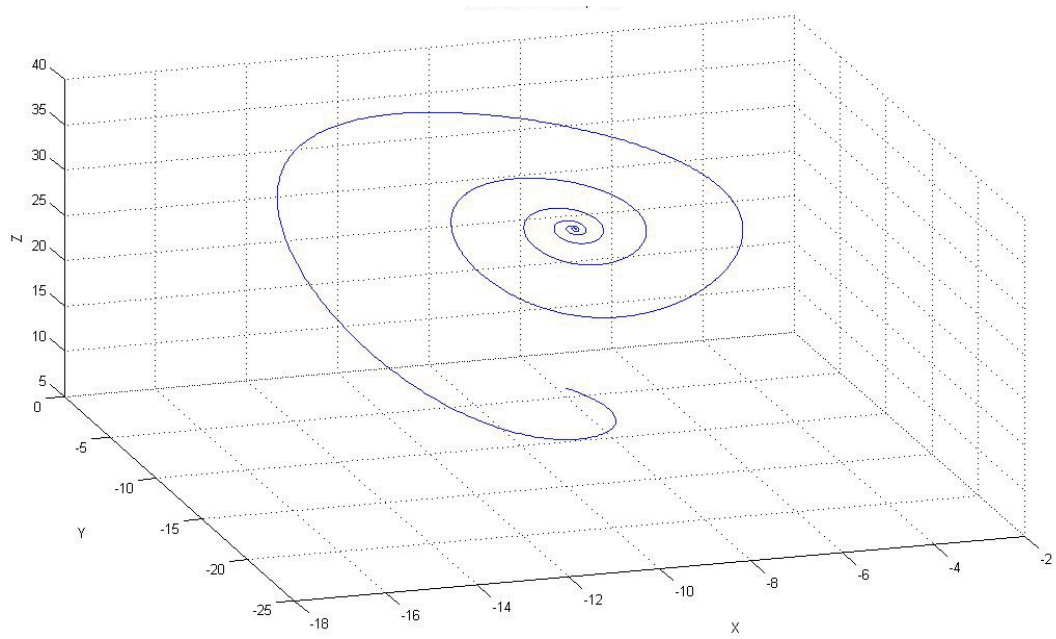


Figura 20 Sistema de Lorenz fraccionario, $q_s = 0.9$

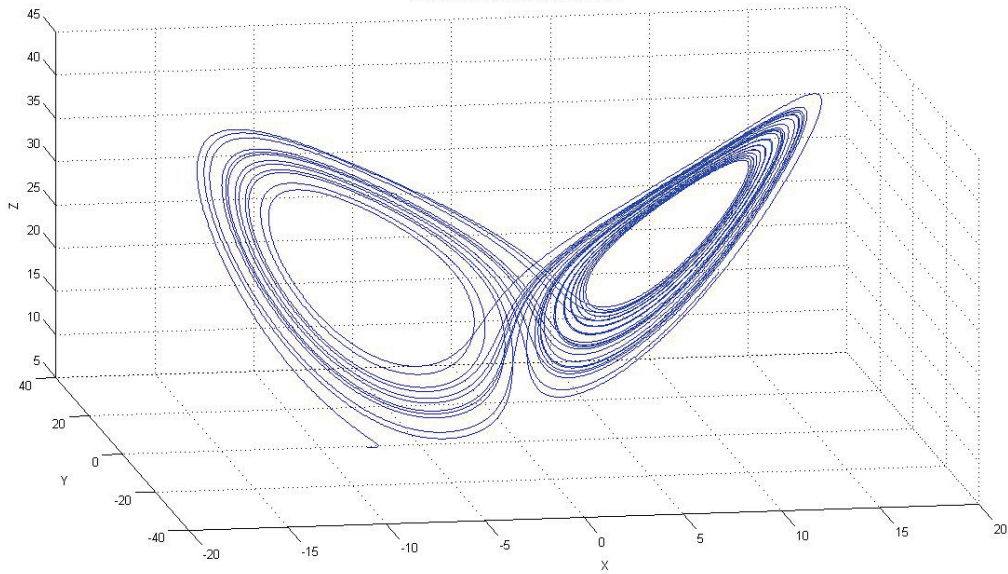


Figura 21 Sistema de Lorenz fraccionario $q_s = 0.99$

Cuando el sistema tiene un orden $q_s = 0.99$ (ver Figura 21) el comportamiento del sistema es caótico. Sin embargo aún se percibe la diferencia de trayectorias con respecto al sistema entero que se muestra en la Figura 16.

Resumiendo, el conjunto de simulaciones para el sistema de Lorenz fraccionario aislado con parámetros $\sigma=10$, $\delta=28$, $\beta=2,66$, muestra un comportamiento caótico cuando el orden de las derivadas fraccionarias satisface $0.99 \leq q_s \leq 1.17$. A partir de $q_s = 1.18$ el sistema presenta un comportamiento inestable. Para valores $0 < q_s < 0.98$ los sistemas tienden asintóticamente a uno de los atractores del sistemas original de Lorenz, dependiendo de las condiciones iniciales que se escojan.

Analizando el comportamiento del sistema Lorenz fraccionario en forma aislada, en las Secciones 3.2 y 3.3 se mostrará cómo se desarrolla la sincronización generalizada adaptable de dos sistemas de orden fraccionario de Lorenz, tanto en forma indirecta como directa.

3.2 Sincronización adaptable indirecta de sistemas tipo Lorenz de orden fraccionario

En esta sección se muestra un proceso de sincronización de sistemas de orden fraccionario del tipo Lorenz con parámetros desconocidos, mediante el diseño de un observador de estado, el cual copia la estructura del sistema esclavo. Este observador está basado en el observador estándar de Luenberger. A partir de esta estructura, se derivan las leyes de ajuste de parámetros a estimar. Para ello, se toman tanto las ideas como las metodologías desarrolladas para el caso de la sincronización de sistemas de orden entero y se hacen extensivas al caso fraccionario.

3.2.1 Solución propuesta

Para lograr la sincronización de sistemas dinámicos tipo Lorenz con parámetros desconocidos y aplicar el método indirecto, se procede de la misma manera que para el caso en el que se aborda el tema de estimación y sincronización de sistemas de orden entero con parámetros desconocidos. Se realiza una estimación de los parámetros y del estado empleando un observador como el mencionado en (23), pero ahora de orden fraccionario.

Para la estimación de los parámetros se define un observador de orden fraccionario, incorporando escalares

$$a_m > 0, \quad b_m > 0, \quad c_m > 0 \in R$$

de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{d^{q_s} \hat{x}_s}{dt^{q_s}} &= -a_m \hat{x}_s + (a_m - \hat{\sigma})x_s + \hat{\sigma}y_s + U_1 + u'_1(t); & \hat{x}_s(0) &= \hat{x}_{s0} \\ \frac{d^{q_s} \hat{y}_s}{dt^{q_s}} &= -y_s - b_m(\hat{y}_s - y_s) + \hat{\gamma}x_s - x_s z_s + U_2 + u'_2(t); & \hat{y}_s(0) &= \hat{y}_{s0} \\ \frac{d^{q_s} \hat{z}_s}{dt^{q_s}} &= -c_m \hat{z}_s + (c_m - \hat{\beta})z_s + x_s y_s + U_3 + u'_3(t); & \hat{z}_s(0) &= \hat{z}_{s0} \end{aligned} \quad (36)$$

donde los U_i se escogen tal como se indicó anteriormente, los u'_i son las señales de excitación persistente incorporadas para estimar en forma adecuada, los parámetros desconocidos, tal como se mostraron en la Sección 2.4.

Definiendo en forma vectorial la derivada del estado estimado, se tiene $\frac{d^{q_s} \hat{X}_s}{dt^{q_s}} = [\frac{d^{q_s} \hat{x}_s}{dt^{q_s}}, \frac{d^{q_s} \hat{y}_s}{dt^{q_s}}, \frac{d^{q_s} \hat{z}_s}{dt^{q_s}}]^T \in R^3$ y el error de estimación de las variables de estado, expresado en forma vectorial se expresa como

$$\varepsilon = [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3]^T = \hat{X}_s - X_s \in R^3 \quad (37)$$

donde

$$\varepsilon_1 = \hat{x}_s - x_s \in R, \quad \varepsilon_2 = \hat{y}_s - y_s \in R, \quad \varepsilon_3 = \hat{z}_s - z_s \in R.$$

A partir de (32) y (36) se obtiene que la evolución del error de estimación de estado en forma extendida tenga la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{d^{q_s} \varepsilon_1}{dt^{q_s}} &= -a_m \hat{x}_s + (a_m - \hat{\sigma})x_s + \hat{\sigma}y_s + U_1 + u'_1 - (-\sigma x_s + \sigma y_s + U_1) \\ \frac{d^{q_s} \varepsilon_2}{dt^{q_s}} &= -y_s - b_m(\hat{y}_s - y_s) + \hat{\gamma}x_s - x_s z_s + U_2 + u'_2 - (-y_s + \gamma x_s - x_s z_s + U_2) \\ \frac{d^{q_s} \varepsilon_3}{dt^{q_s}} &= -c_m \hat{z}_s + (c_m - \hat{\beta})z_s + x_s y_s + U_3 + u'_3 - (-\beta z_s + x_s y_s + U_3) \end{aligned} \quad (38)$$

Luego de operaciones matemáticas simples, la ecuación (38) se puede expresar como

$$\begin{aligned}
\frac{d^{q_s} \varepsilon_1}{dt^{q_s}} &= -a_m \varepsilon_1 + (y_s - x_s) \tilde{\sigma} \\
\frac{d^{q_s} \varepsilon_2}{dt^{q_s}} &= -b_m \varepsilon_2 + \tilde{\gamma} x_s \\
\frac{d^{q_s} \varepsilon_3}{dt^{q_s}} &= -c_m \varepsilon_3 - z_s \tilde{\beta}
\end{aligned} \tag{39}$$

donde el error de estimación de los parámetros $\tilde{\theta} \in R^3$ se ha definido como la diferencia entre el valor estimado de los parámetros $\hat{\theta} = [\hat{\sigma} \ \hat{\gamma} \ \hat{\beta}]^T \in R^3$ y el valor real de los parámetros $\theta = [\sigma \ \gamma \ \beta]^T \in R^3$. En forma vectorial tenemos

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta \in R^3 \tag{40}$$

donde

$$\tilde{\theta} = [\tilde{\sigma} \ \tilde{\gamma} \ \tilde{\beta}]^T = [(\hat{\sigma} - \sigma)(\hat{\gamma} - \gamma)(\hat{\beta} - \beta)]^T \in R^3.$$

En forma matricial la evolución del error de estimación está dada por

$$\begin{bmatrix} \frac{d^{q_s} \varepsilon_1}{dt^{q_s}} \\ \frac{d^{q_s} \varepsilon_2}{dt^{q_s}} \\ \frac{d^{q_s} \varepsilon_3}{dt^{q_s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_m & 0 & 0 \\ 0 & -b_m & 0 \\ 0 & 0 & -c_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (y_s - x_s) & 0 & 0 \\ 0 & x_s & 0 \\ 0 & 0 & -z_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\sigma} \\ \tilde{\gamma} \\ \tilde{\beta} \end{bmatrix} \tag{41}$$

Nótese que en el caso que los parámetros sean conocidos se tiene $\tilde{\sigma} = \tilde{\gamma} = \tilde{\beta} = 0$ y la evolución del error de sincronización de orden fraccionaria es perfectamente lineal e invariante.

La ley de ajuste de los parámetros se toma de la misma forma en la que se hace para los sistemas de orden entero ($q_s = 1$) (ver ecuación (27)).

Para el caso de sistemas de orden fraccionario ($q \neq 1$) las leyes adaptables se escogen por extensión de aquellas obtenidas para el caso del orden entero (27), es decir

$$\begin{aligned}
\frac{d^{q_a} \tilde{\sigma}}{dt^{q_a}} &= -\delta_1 \varepsilon_1 (y_s - x_s) \\
\frac{d^{q_a} \tilde{\gamma}}{dt^{q_a}} &= -\delta_2 \varepsilon_2 x_s \\
\frac{d^{q_a} \tilde{\beta}}{dt^{q_a}} &= -\delta_3 \varepsilon_3 z_s
\end{aligned} \tag{42}$$

En forma matricial dichas leyes de ajuste se pueden escribir como

$$\begin{bmatrix} \frac{d^{q_a} \tilde{\sigma}}{dt^{q_a}} \\ \frac{d^{q_a} \tilde{\gamma}}{dt^{q_a}} \\ \frac{d^{q_a} \tilde{\beta}}{dt^{q_a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(y_s - x_s) & 0 & 0 \\ 0 & -x_s & 0 \\ 0 & 0 & -z_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Nótese que el orden de las derivadas para las leyes de ajuste, q_a , no necesariamente tiene que ser igual al orden de la derivada del sistema, q_s .

Siguiendo el mismo razonamiento usado en el caso entero no adaptable (ver ecuación (18)) para definir las señales de control $U(t) \in R^3$, se llega a una ecuación similar a (19) pero de tipo fraccionaria, de la forma

$$\begin{aligned} \frac{d^{q_s} e_1}{dt^{q_s}} &= \sigma(e_2 - e_1) + v_1 \\ \frac{d^{q_s} e_2}{dt^{q_s}} &= \gamma e_1 - e_2 + v_2 \\ \frac{d^{q_s} e_3}{dt^{q_s}} &= -\beta e_3 + v_3 \end{aligned} \quad (44)$$

Si ahora escogemos v_1, v_2, v_3 , de la forma como lo hace Li [29] para el caso no adaptable (ver ecuación (21)), pero usando los estimados en lugar de los parámetros reales tenemos

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{\sigma} & 0 \\ -\hat{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad (45)$$

De acuerdo a lo anterior, el error de sincronización, el error de estimación de estado y el error de estimación de parámetros, quedan expresados por el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \frac{d^{q_s} e_1}{dt^{q_s}} \\ \frac{d^{q_s} e_2}{dt^{q_s}} \\ \frac{d^{q_s} e_3}{dt^{q_s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & -\tilde{\sigma} & 0 \\ -\tilde{\gamma} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d^{q_s} \varepsilon_1}{dt^{q_s}} \\ \frac{d^{q_s} \varepsilon_2}{dt^{q_s}} \\ \frac{d^{q_s} \varepsilon_3}{dt^{q_s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_m & 0 & 0 \\ 0 & -b_m & 0 \\ 0 & 0 & -c_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (y_s - x_s) & 0 & 0 \\ 0 & x_s & 0 \\ 0 & 0 & -z_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\sigma} \\ \tilde{\gamma} \\ \tilde{\beta} \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d^{q_a} \tilde{\sigma}}{dt^{q_a}} \\ \frac{d^{q_a} \tilde{\gamma}}{dt^{q_a}} \\ \frac{d^{q_a} \tilde{\beta}}{dt^{q_a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(x_s - y_s) & 0 & 0 \\ 0 & -x_s & 0 \\ 0 & 0 & z_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (48)$$

El sistema resumen se puede ver en la siguiente estructura matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{d^{q_s} e_1}{dt^{q_s}} \\ \frac{d^{q_s} e_2}{dt^{q_s}} \\ \frac{d^{q_s} e_3}{dt^{q_s}} \\ \frac{d^{q_s} \varepsilon_1}{dt^{q_s}} \\ \frac{d^{q_s} \varepsilon_2}{dt^{q_s}} \\ \frac{d^{q_s} \varepsilon_3}{dt^{q_s}} \\ \frac{d^{q_a} \tilde{\sigma}}{dt^{q_a}} \\ \frac{d^{q_a} \tilde{\gamma}}{dt^{q_a}} \\ \frac{d^{q_a} \tilde{\beta}}{dt^{q_a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & -\tilde{\sigma} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{\gamma} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_m & 0 & 0 & y_s - x_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_m & 0 & 0 & x_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_m & 0 & 0 & -z_s \\ 0 & 0 & 0 & -(y_s - x_s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z_s & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \tilde{\sigma} \\ \tilde{\gamma} \\ \tilde{\beta} \end{bmatrix} \quad (49)$$

De las ecuaciones (46) - (48) se puede observar que la sincronización adaptable de sistemas de orden fraccionario con leyes de adaptación de orden fraccionario, involucra manejar un total de nueve variables. Esta situación aumenta notablemente el grado de dificultad del análisis con respecto al caso de la sincronización no adaptable, que sólo maneja tres variables. El sistema adaptable resultante (49), se caracteriza por su no linealidad, además de ser variante en el tiempo. La solución analítica de este problema aún no cuenta con resultados conocidos, por ello se plantea primero una exploración vía simulaciones, como base para el análisis teórico del procedimiento sugerido.

3.2.2 Resultados numéricos

Para ilustrar el comportamiento del sistema adaptable resultante (49), se realizaron diferentes simulaciones en las que se han mantenido las mismas condiciones iniciales es decir (8, -5, -6) para el sistema maestro, y (10, -10,-10) para el sistema esclavo. En dichas simulaciones se modifica además el orden de la ley de juste paramétrica q_a . Se analiza parte de un sistema de orden fraccionario con órdenes $q_s = 0.2, 0.5, 0.9$, con ajuste entero y fraccionario. Esta última,

con variaciones que toman valores $q_a = 0.2, 0.5, 0.9$. Se escogieron estos valores debido a que interesa estudiar el comportamiento que presenta el sistema dinámico para derivadas entre 0 y 1.

En la Figura 22, se muestra el sistema de orden fraccionario $q_s = 0.2$ con ajuste fraccionario con $q_a = 0.2$; la Figura 23 muestra el sistema de orden fraccionario $q_s = 0.2$ con ajuste fraccionario con $q_a = 0.5$; y la Figura 24, muestra el sistema de orden fraccionario $q_s = 0.2$ con ajuste fraccionario con $q_a = 0.9$.

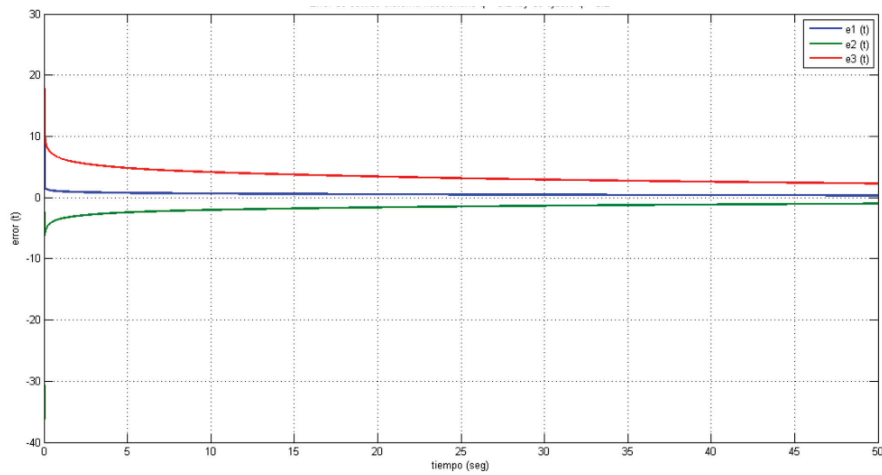


Figura 22 Evolución del error de sincronización de sistemas Lorenz de orden fraccionario con $q_s = 0.2$ y leyes de ajuste de orden fraccionario con $q_a = 0.2$

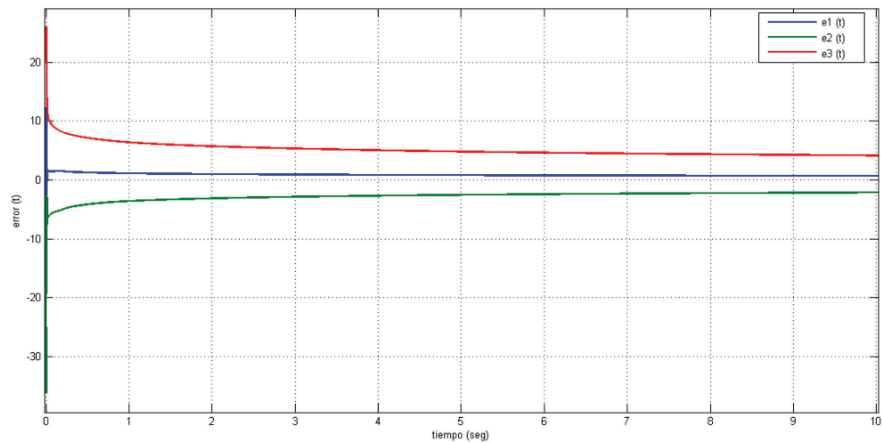


Figura 23 Evolución del error de sincronización de sistemas Lorenz de orden fraccionario con $q_s = 0.2$ y leyes de ajuste de orden fraccionario con $q_a = 0.5$

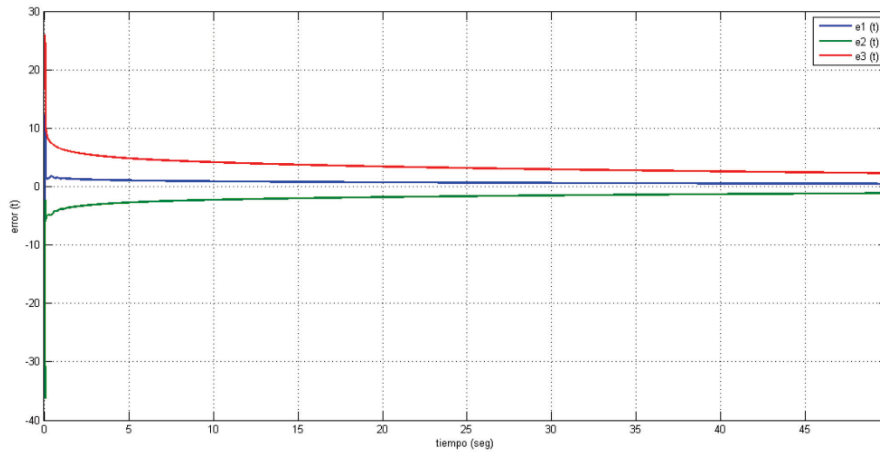


Figura 24 Evolución del error de sincronización de sistemas Lorenz de orden fraccionario con $q_s=0.2$ y leyes de ajuste de orden fraccionario con $q_a=0.9$

Con la misma idea de mostrar cada uno de los efectos que existen en la evolución del error de sincronización y de las señales involucradas, se han elegido otros valores del orden de las derivadas, tanto para el sistema como para el ajuste de las leyes de adaptación propuestas. De esta manera, en la Figura 25 se muestra el sistema con $q_s=0.5$ y las leyes de ajuste de orden fraccionario, con $q_a=0.2$; en la Figura 26 se presenta el caso con leyes de ajuste $q_a=0.5$ y finalmente en la Figura 27 con leyes de ajuste $q_a=0.9$.

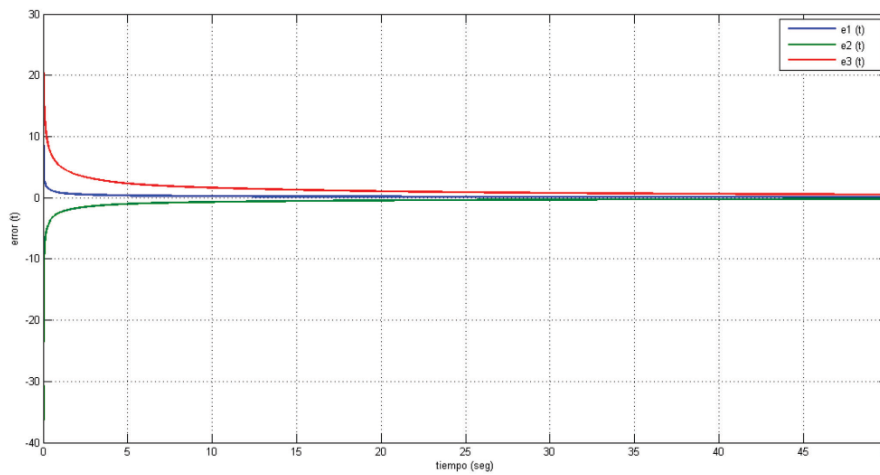


Figura 25 Error de sincronización de sistemas Lorenz de orden fraccionario con $q_s=0.5$ y leyes de ajuste de orden fraccionario con $q_a=0.2$

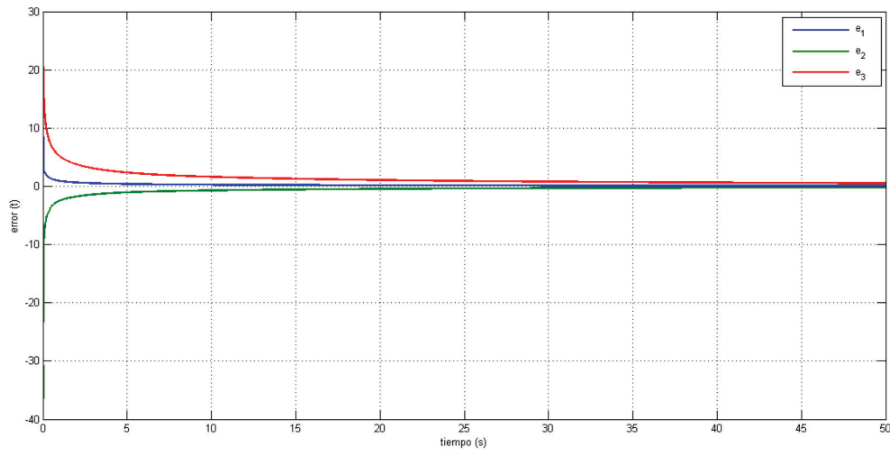


Figura 26 Error de sincronización de sistemas Lorenz de orden fraccionario con $q_s=0.5$ y leyes de ajuste de orden fraccionario con $q_a=0.5$

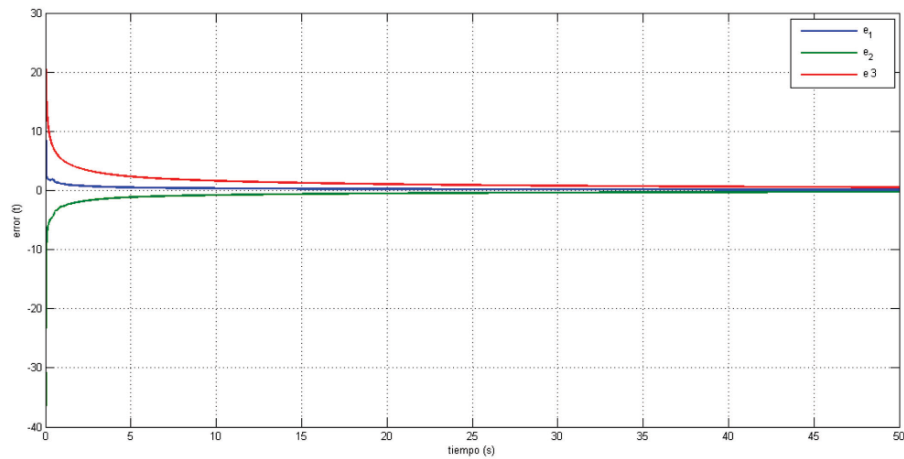


Figura 27 Error de sincronización de sistemas Lorenz de orden fraccionario con $q_s=0.5$ y leyes de ajuste de orden fraccionario con $q_a=0.9$

En cada una de las simulaciones presentadas, el sistema muestra una tendencia a la convergencia del error de sincronización, que es relativamente lenta cuando q_s es más cercano a cero, pero es más rápida para valores cercanos a uno para cada uno de los ajustes fraccionarios. No se aprecia una diferencia radical en la velocidad de convergencia.

En las Figuras 27, 28, 29 y 30, se pueden apreciar las evoluciones de error de sincronización de los sistemas tipo Lorenz de orden fraccionario, para $q_s=0.9$, con ajuste paramétrico cuyos órdenes corresponden a $q_a=0.9, 0.5, 0.2$. En cualquiera de estos últimos casos se puede ver que la señal que más tarda en converger a cero es la correspondiente a e_3 . Esta señal, está vinculado con el menor de los parámetros del sistema, es decir β .

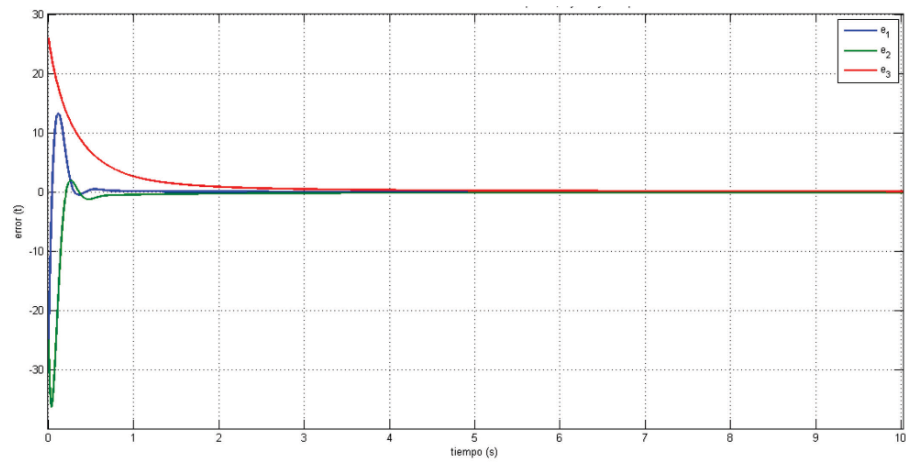


Figura 28 Error de sincronización de sistemas tipo Lorenz orden fraccionario $q_s=0.9$, con ajuste de orden fraccionario con $q_a=0.2$

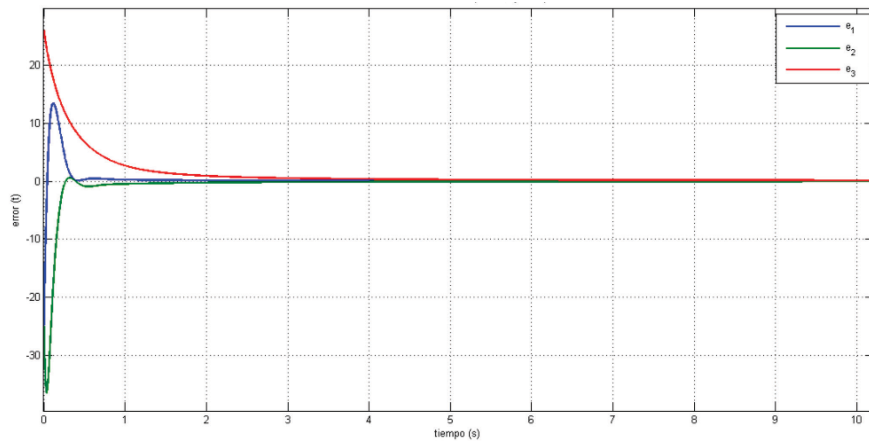


Figura 29 Error de sincronización de sistemas tipo Lorenz orden fraccionario $q_s=0.9$, con ajuste de orden fraccionario con $q_a=0.5$

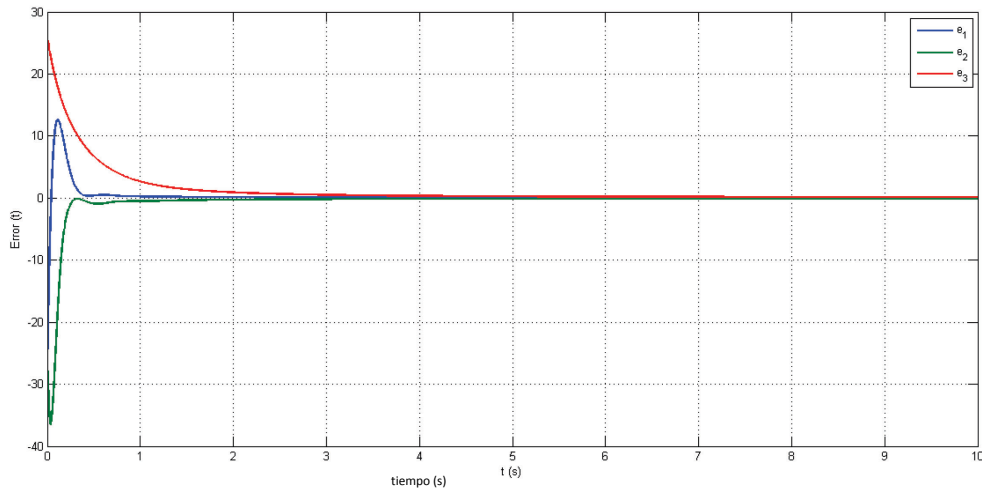


Figura 30 Error de sincronización de sistemas tipo Lorenz orden fraccionario $q_s=0.9$, con ajuste de orden fraccionario con $q_a=0.9$

3.3 Sincronización adaptable directa de sistemas dinámicos tipo Lorenz de orden fraccionario

En esta sección se presenta el caso de la sincronización de sistemas tipo Lorenz de orden fraccionario y parámetros desconocidos. Para ello se introduce una ganancia adaptable en una o en todas las señales de control, y una ley de ajuste para la misma, sin identificación de los parámetros. Se presentan dos propuestas de solución; la primera, con dos señales y una ganancia ajustable, y la segunda, con dos señales de entrada y dos ganancias.

3.3.1 Solución propuesta

En esta sección se propone usar dos señales de control, U_2 y U_3 , con una ganancia que se ajusta de acuerdo a una ley de adaptación, la cual es derivada del procedimiento realizado para el caso de sistemas dinámicos de orden entero y conocido como alta ganancia.

También es necesario mencionar que se han probado diferentes señales de control únicas, así como mezclas entre las mismas, cuyo objetivo particular es cancelar las no linealidades del sistema del error de sincronización. En esta selección de señales de control, se probaron señales como por ejemplo U_1 , e introduciendo una ganancia adaptable sobre ésta, pero los sistemas no se sincronizan. De la misma forma se estableció que al usar la señal de control U_3 definida en (50), la simulación permite ver una tendencia a la sincronización de los errores e_1 y e_2 que no llega a cero, mientras que el error e_3 converge rápidamente a cero.

Para la sincronización propuesta en esta sección, lograr la sincronización directa de sistemas de orden fraccionario tipo Lorenz se usa el concepto de alta ganancia, la cual se ajusta con una ley adaptable sin necesidad de estimación de parámetros, usando las señales de entrada descritas a continuación

$$\begin{aligned}
U_1 &= 0 \\
U_2 &= ((x_m - e_1)(z_m - e_3) - x_m z_m - k(t)e_2)/\alpha \\
U_3 &= ((x_m - e_1)(y_m - e_2) + x_m y_m)/\alpha
\end{aligned} \tag{50}$$

Este estudio se basa en [89]. En este trabajo la ley de ajuste para el parámetro $k(t)$ de la señal de control, es de orden entero y toma la forma.

$$\dot{\tilde{k}}(t) = -\delta e_2^2 \tag{51}$$

donde δ es una ganancia adaptable.

La solución propuesta aquí tiene como objetivo suprimir las no linealidades del sistema de errores de sincronización, y modificar la dinámica del error e_2 . La ley de adaptación tiene ahora la siguiente forma

$$\frac{d^{qa}\tilde{k}(t)}{dt^{qa}} = -\delta e_2^2 \tag{52}$$

Como en el caso entero, esta ley tiene una ganancia adaptable δ , con la cual se puede tener un manejo sobre la velocidad de convergencia del error de sincronización. Lo interesante, es que todas señales de control no requieren de la estimación de parámetros del sistema, sino que se ajusta uno solo parámetro.

Una segunda propuesta de solución para la sincronización fraccionaria directa, consiste en introducir dos señales de control U_2 y U_3 con dos parámetros adaptables k_1 y k_2 . Las señales, tal como se puede apreciar en (53), poseen términos no lineales para suprimir los que existen en el sistema que describe la evolución del error de sincronización.

$$\begin{aligned}
U_1 &= 0 \\
U_2 &= ((x_m - e_1)(z_m - e_3) - x_m z_m - k_1(t)e_2) / \alpha \\
U_3 &= ((x_m - e_1)(y_m - e_2) + x_m y_m - k_2(t)e_3)/\alpha
\end{aligned} \tag{53}$$

Las leyes de adaptación se derivan del caso entero al fraccionario. Las leyes de adaptación de orden fraccionario se escogen en este caso

$$\begin{aligned}
\frac{d^{qa}\tilde{k}_1(t)}{dt^{qa}} &= -\delta_1 e_2^2 \\
\frac{d^{qa}\tilde{k}_2(t)}{dt^{qa}} &= -\delta_2 e_3^2
\end{aligned} \tag{54}$$

donde $\delta_1 \delta_2$ son las ganancias de adaptación, estas van a ayudar a mejorar la velocidad de la convergencia al valor del parámetro ajustado.

3.3.2 Resultados por simulación

En esta sección se presentan las simulaciones para la sincronización directa de sistemas tipo Lorenz de orden fraccionario, con ajuste tanto entero como fraccionario, usando las señales de

control sugeridas en (50) y (53). Las simulaciones muestran la evolución del error de sincronización con ajustes de los parámetros del controlador en forma entera y en forma fraccionaria.

Primeramente se muestra el caso en que se usan dos de las tres señales de control y un parámetro adaptable (ecuación (50) y (52)). Se puede ver en la Figura 31 el error de sincronización bajo este esquema para $q_s = 0.9$, $q_a = 1$ y $\delta = 0.1$.

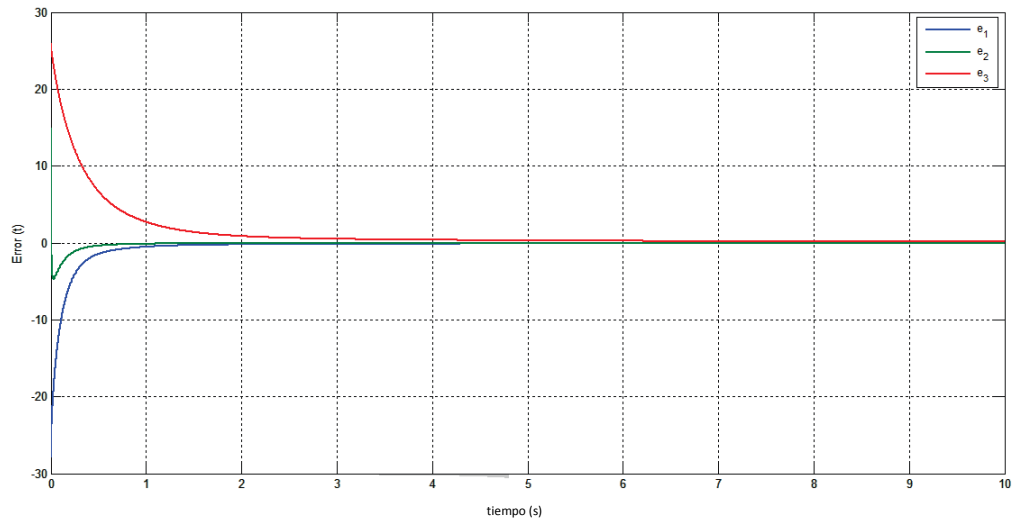


Figura 31 Evolución del error de sincronización para sistemas fraccionario con $q_s=0.9$ mediante esquema directo de ajuste entero.

La evolución muestra que la señal que más tarda en converger a cero es la relacionada con el parámetro β asociada a e_3 , ya que es el menor de los parámetros del sistema que describe la evolución del error de sincronización.

Las señales de control se muestran en la Figura 32. Allí, dos de las señales usadas, U_2 , y U_3 , poseen máximos valores en -300 y 150 antes de decaer a cero, mientras que la señal U_1 es cero.

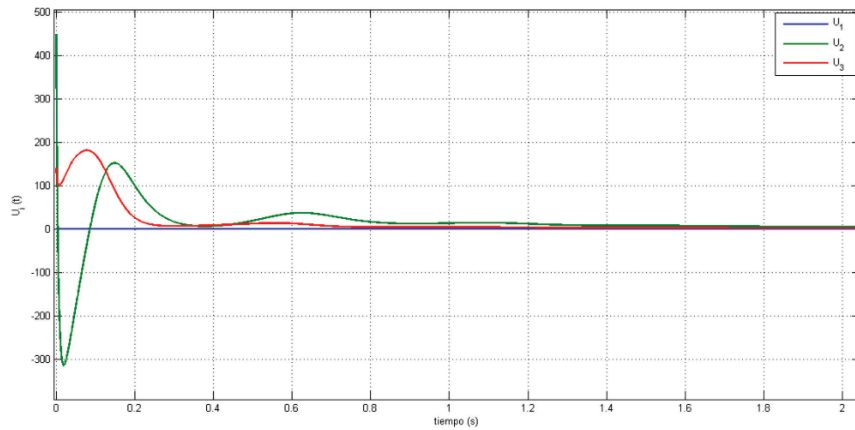


Figura 32 Esfuerzo de control señales U_1 , U_2 , U_3 , para la sincronización de sistemas fraccionarios con ajuste de un parámetro adaptable de orden entero.

Las simulaciones correspondientes a la sincronización de sistemas de orden fraccionario con ajuste de un parámetro adaptable en forma fraccionaria, fueron simuladas con diferentes valores, tanto para el orden del sistema (q_s) como para el orden de la ley de ajuste (q_a).

En el primer caso simulado, se le asigna un valor de orden fraccionario al sistema $q_s=0.9$, la ley de ajuste emplea $q_a=0.9$. La evolución del error de sincronización se muestra en la Figura 33.

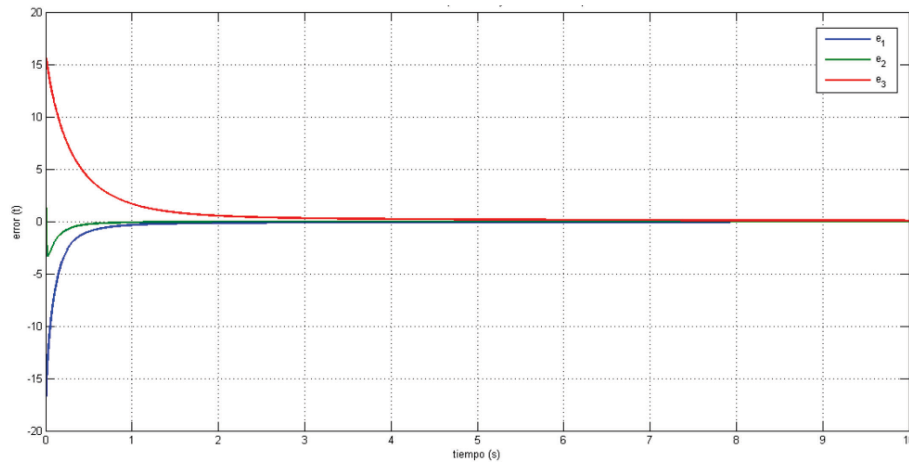


Figura 33 Error de sincronización de sistemas fraccionarios con $q_s=0.9$, con parámetro ajustable en forma fraccionaria con $q_a=0.9$.

En la Figura 34, se muestra el esfuerzo de control para el caso entero donde se aprecia, que la evolución de las señales es similar al caso entero.

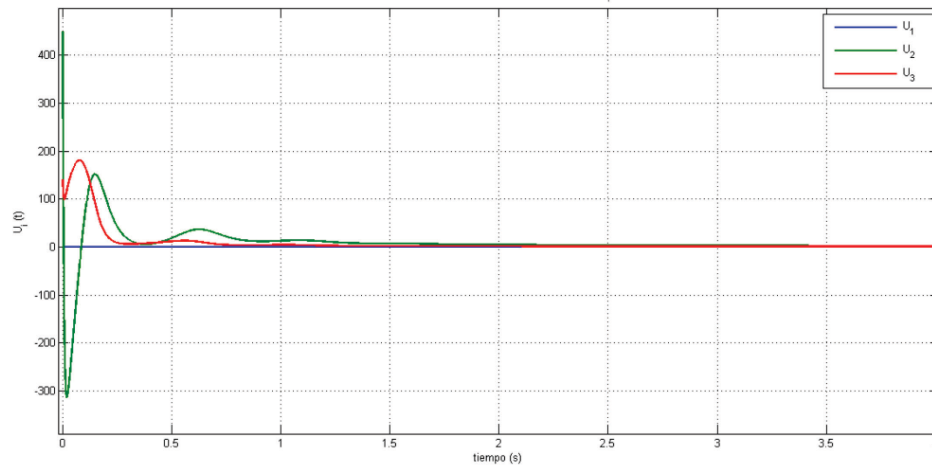


Figura 34 Esfuerzo de control en la sincronización de sistemas Lorenz de orden fraccionario con $q_s=0.9$ y ajuste de un parámetro fraccionario con $q_a=0.9$

En las Figuras 35 y 37 se muestran la evolución del error de sincronización de sistemas de orden fraccionario con $q_s=0.9$ y ajuste en su parámetro adaptable fraccionario con $q_a=0.5$ y 0.2 , respectivamente. En ellas, no existe gran diferencia con los resultados del ajuste fraccionario del parámetro $k(t)$ con $q_a=0.9$. En la Figura 36 y en la Figura 38 se muestran las señales de control para los dos casos descritos anteriormente. Se puede observar que para $q_a=0.5$ la convergencia de la sincronización se logra antes de los 5 segundos, cosa que no se logra cuando el sistema tiene un orden $q_s=0.2$.

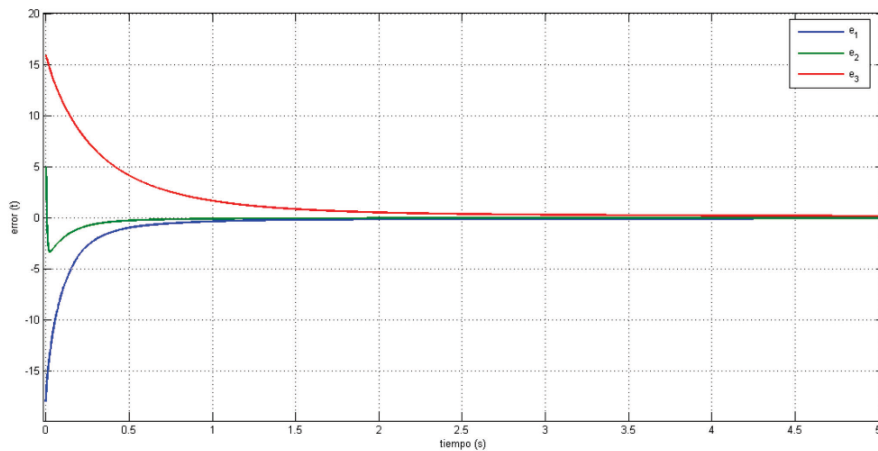


Figura 35 Error de sincronización de sistemas de sistemas fraccionarios con $q_s=0.9$, con un parámetro ajustable en forma fraccionaria con $q_a=0.5$

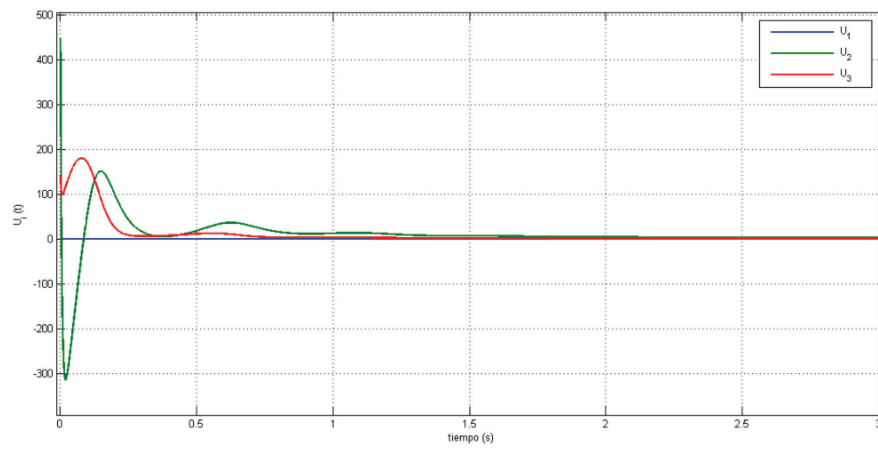


Figura 36 Señal de control en la sincronización de sistemas Lorenz de orden fraccionario con $q_s=0.9$ y ajuste de parámetro fraccionario con $q_a=0.5$

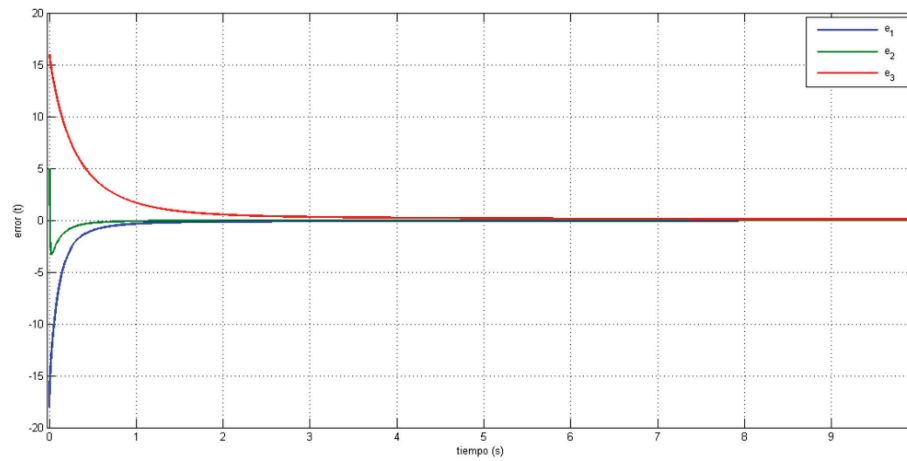


Figura 37 Error de sincronización de sistemas de sistemas fraccionarios con $q_s=0.9$, con parámetro ajustable en forma fraccionaria con $q_a=0.2$

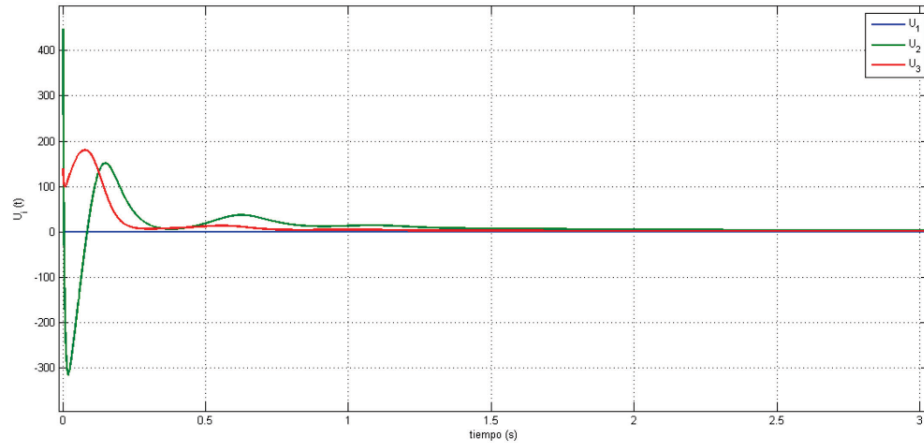


Figura 38 Esfuerzo de control sincronización de sistemas de orden fraccionario $q_s=0.9$ y ajuste de parámetro con $q_a=0.2$

En las Figuras 39 a la 42 se muestra, la evolución del error de sincronización de sistemas Lorenz de orden fraccionario con $q_s=0.2$, así como el esfuerzo hecho por las señales de control usadas en la sincronización, con orden del parámetro ajustable $q_a=0.9$ y 0.5 .

Se puede observar la lentitud de la evolución del error de sincronización, para el caso $q_s=0.2$ comparado con otros valores, por ejemplo $q_s=0.5$. Además, no hay una variación (o una reducción) en la velocidad de convergencia, cuando se modifica el orden de la ley de ajuste.

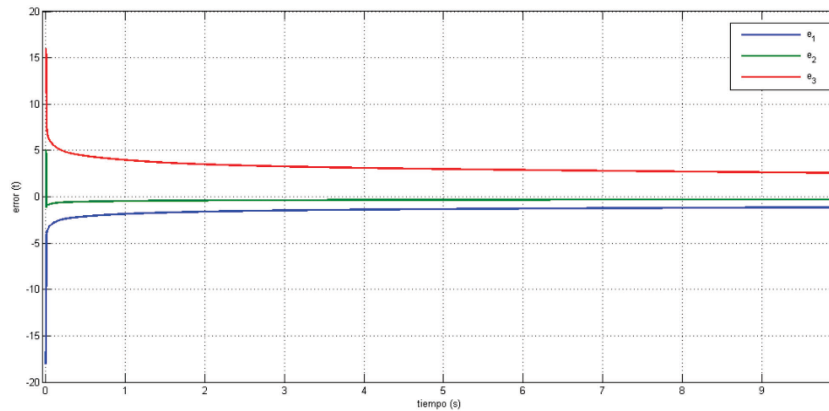


Figura 39 Error de sincronización de sistemas Lorenz de orden fraccionario con $q_s=0.2$ y ajuste de un parámetro fraccionario con $q_a=0.9$

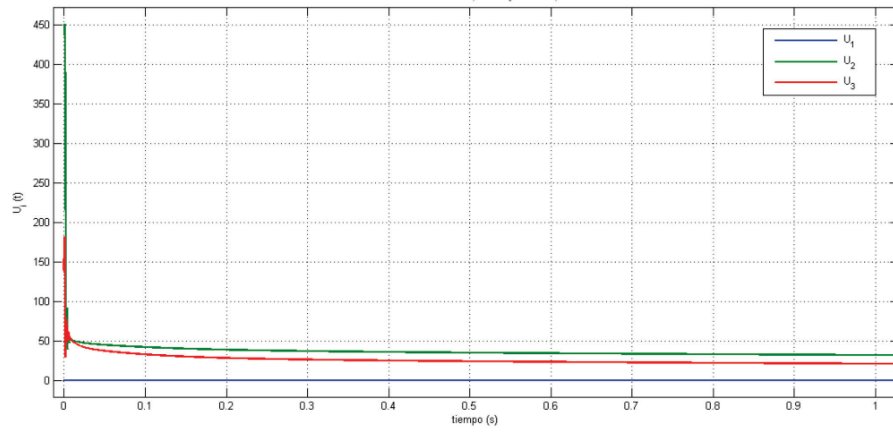


Figura 40 Esfuerzo de control sincronización de sistemas de orden fraccionario $q_s=0.2$ y ajuste de parámetro con $q_a=0.9$

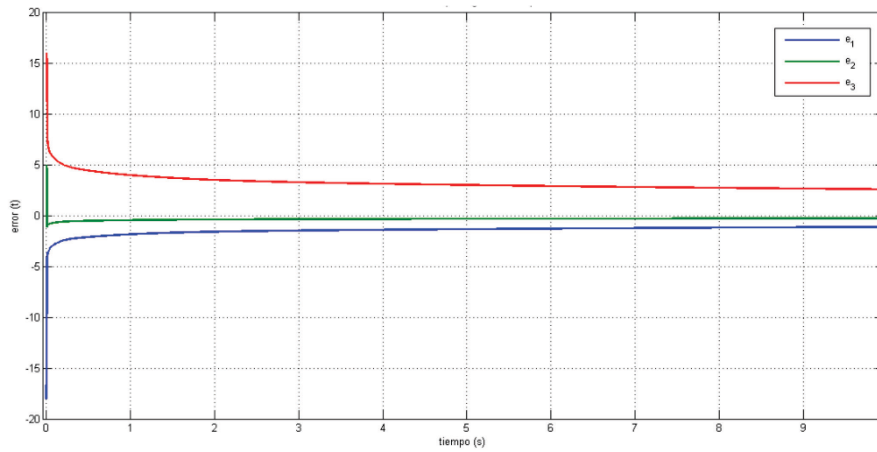


Figura 41 Error de sincronización de sistemas Lorenz de orden fraccionario con $q_s=0.2$ y ajuste de parámetro fraccionario con $q_a=0.5$

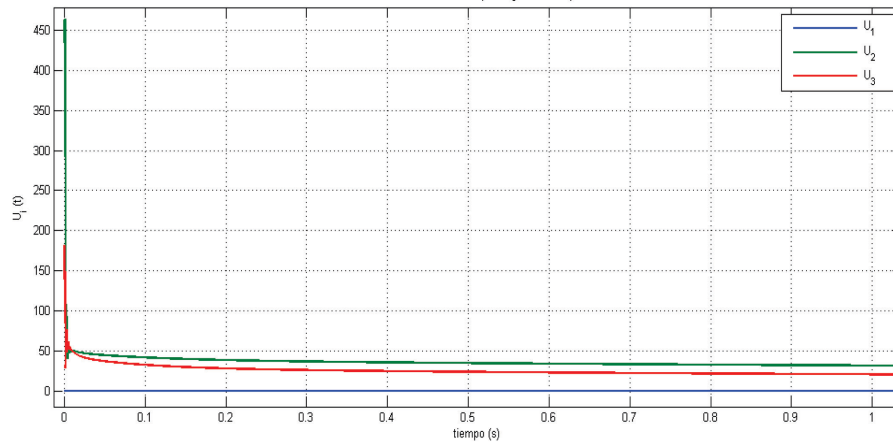


Figura 42 Esfuerzo de control sincronización de sistemas de orden fraccionario $q_s=0.2$ y ajuste de parámetro con $q_a=0.5$

En general, se observa que no hay cambios importantes en la evolución de la sincronización de sistemas de orden fraccionario cuando se hacen cambios en el orden de la derivada fraccionaria de la ley de ajuste. La velocidad de convergencia depende en buena parte del orden del propio sistema a sincronizar.

Ahora se mostrarán algunas simulaciones en las cuales se logra la sincronización directa de sistemas de orden fraccionario con dos señales de control y dos parámetros adaptables las cuales se ajustan usando orden entero y fraccionario.

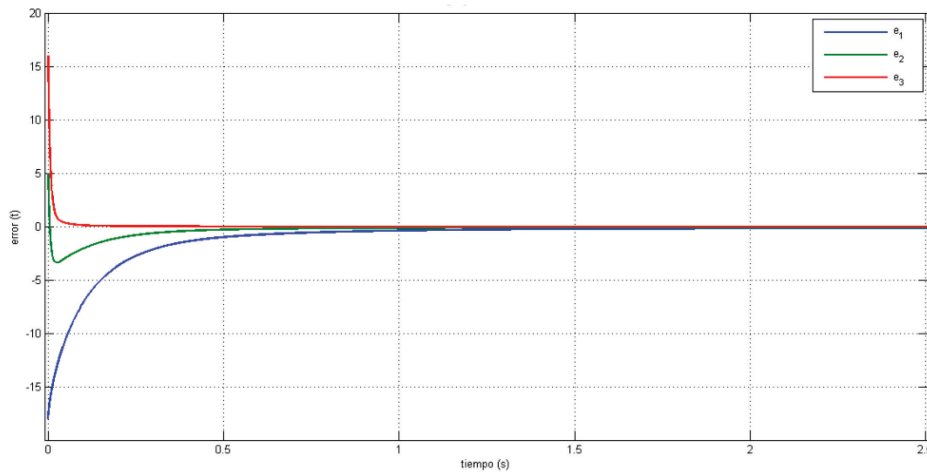


Figura 43 Error de sincronización directa de sistemas Lorenz fraccionario con $q_s=0.9$ y señales U_2 y U_3 ajuste de parámetro de orden entero

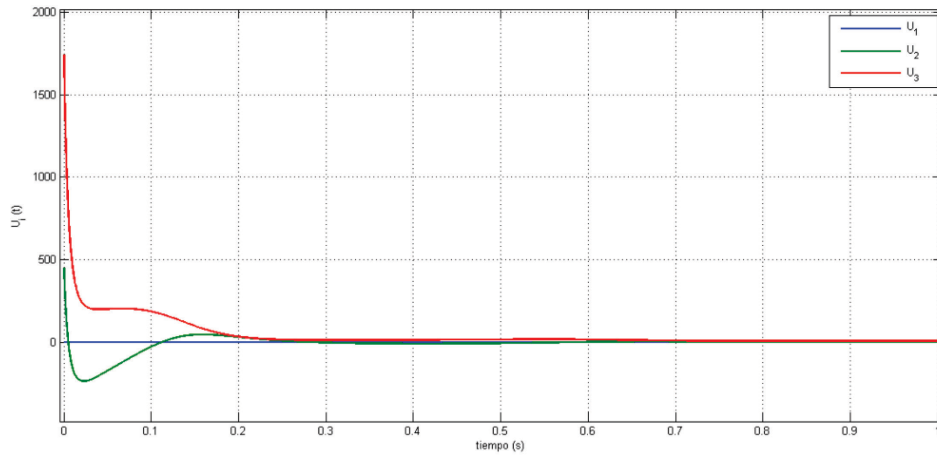


Figura 44 Esfuerzo de control sincronización directa de sistemas Lorenz fraccionario con $q=0.9$ y señales U_2 y U_3 ajuste de parámetro de orden entero

Se usaron las señales U_2 y U_3 definidas en (53) en las que se introducen términos no lineales que permiten obtener un sistema de errores de sincronización de tipo lineal las leyes de ajuste están dadas por (54). En las Figura 43 y 44 se presentan las evoluciones del error de sincronización y el esfuerzo de control para sistemas de orden fraccionario con $q_s=0.9$ y $q_a=1$. En estos casos se usó una ganancia adaptable $\delta_1, \delta_2 = 0.1$.

En tanto, en la Figura 45, se muestra el caso de sistemas Lorenz de orden fraccionario con $q_s=0.2$, con ajuste fraccionario con $q_a=0.2$, mientras en la Figura 46, se muestra las correspondientes señales de control.

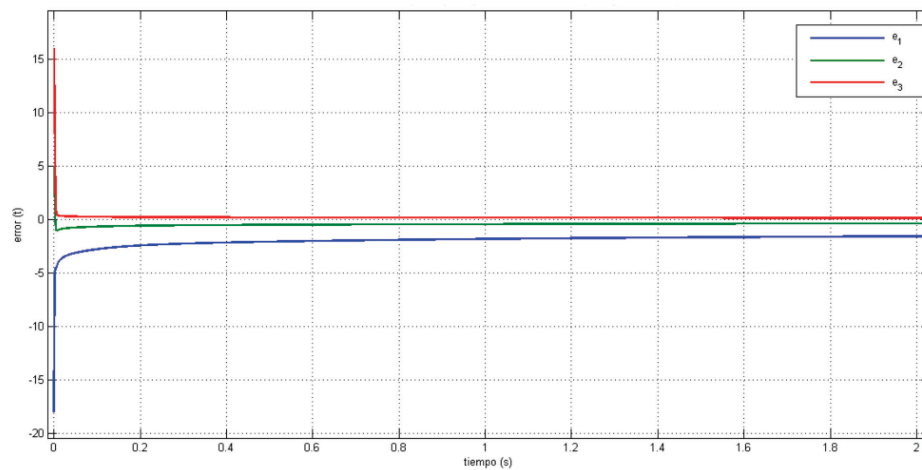


Figura 45 Error de sincronización directa de sistemas Lorenz fraccionario con $q_s=0.2$ y señales U_2 y U_3 ajuste de parámetro de orden fraccionario con $q_a=0.2$

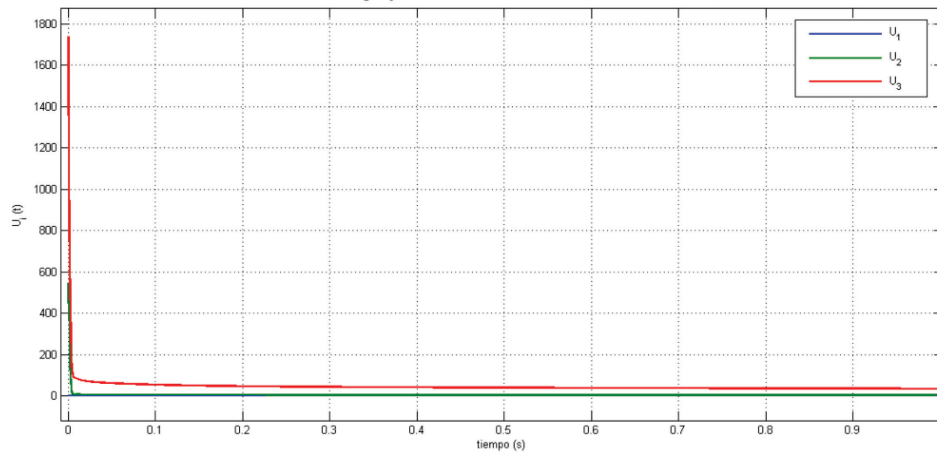


Figura 46 Señales de control U_2 y U_3 para sincronización de sistemas Lorenz fraccionarios con $q=0.2$, con dos parámetros adaptables fraccionarios con $q=0.2$

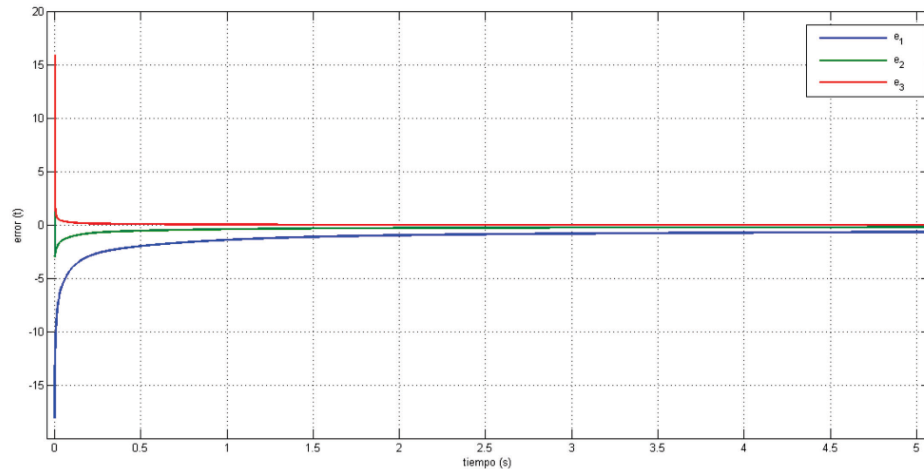


Figura 47 Error de sincronización de sistemas Lorenz de orden fraccionario con $q_s=0.5$ con señales U_2 U_3 con dos parámetros de adaptación fraccionarios con $q_a=0.2$

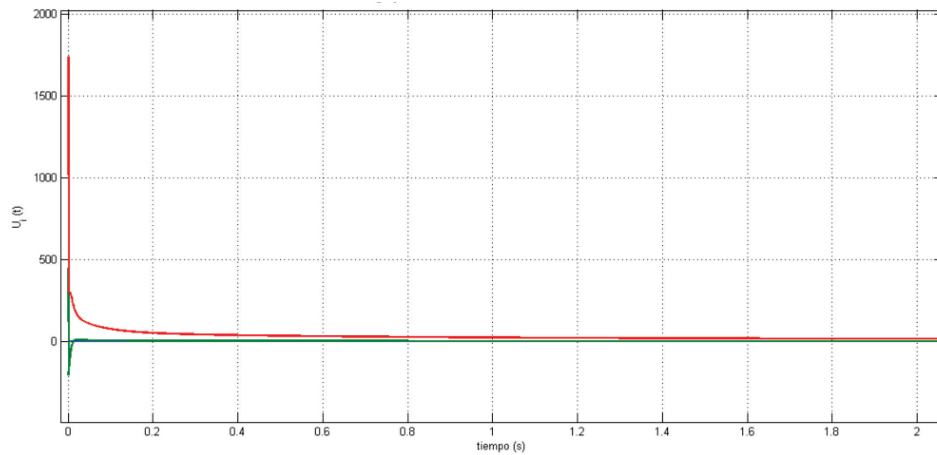


Figura 48 Señales de control U_2 U_3 para la sincronización de sistemas Lorenz fraccionario con $q_s=0.5$ y ajuste de dos parámetros fraccionarios con $q_a=0.2$

En la Figura 47, se muestra el error de sincronización cuando el sistema Lorenz de orden fraccionario tiene una derivada de orden $q_s=0.5$ y ajuste de los dos parámetros fraccionarios con $q_a=0.2$. A su vez, la Figura 48, muestra el esfuerzo de las dos señales usadas en las condiciones antes mencionadas.

Finalmente, en la Figura 49 se muestra la evolución del error de sincronización para dos sistemas de Lorenz de orden $q_s=0.99$. Para este caso, el sistema muestra un comportamiento caótico, de acuerdo a lo mencionado en la Sección 3.1. Las simulaciones utilizan leyes de ajuste de orden $q_a=0.8$ y las condiciones iniciales corresponden a las aquellas mencionadas al comienzo de la Sección 3.1.

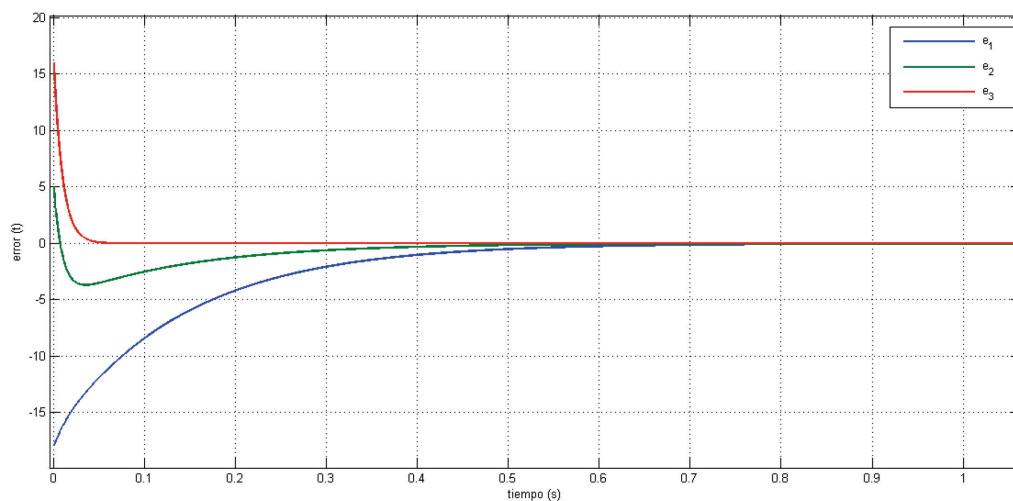


Figura 49 Evolución del error de sincronización para sistemas Lorenz de orden fraccionario con $q_s=0.99$ y ajuste fraccionario con $q_a=0.8$

De la Figura 49 se aprecia que, a pesar de que el sistema presenta un comportamiento caótico, el esquema de sincronización propuesto resulta ser tan efectivo como en los casos en que los sistemas originales no presentan comportamiento caótico.

Capítulo 4

Sincronización mínima de sistemas tipo Lorenz

El proceso de sincronización se realiza en general empleando todas las señales de control que se introducen apropiadamente, para que modifique la evolución del sistema esclavo y pueda copiar la evolución del sistema maestro. Sin embargo un problema más desafiante ocurre cuando se intenta usar un número menor de entradas. Es por ello que en este estudio se aborda el caso en el cual se busca la sincronización con un número reducido de señales de control que contengan, a su vez, un número reducido de parámetros y de estados del sistema.

4.1 Sincronización adaptable mínima de sistemas tipo Lorenz de orden entero

En esta sección se presentará el caso de la sincronización de sistemas tipo Lorenz de orden entero con un mínimo número de señales de control. Además, estas señales tendrán como novedad el hecho de que usan un estimador para determinar el valor de un parámetro desconocido. Se menciona la novedad, debido a que en la literatura se hace referencia a una sola señal siempre que existan cotas superiores de algunos parámetros del sistema, aspecto que aquí no se hace necesario. Se dividirá la sección en subsecciones de acuerdo a las señales usadas. Se plantea una solución usando solo la señal U_2 , basada en el análisis de controlabilidad hecho previamente sobre el sistema [106], que descarta la probabilidad de usar solo U_1 y solo U_3 como señales que permitan realizar la sincronización del sistema de error.

4.1.1 Sincronización mínima de un sistema tipo Lorenz entero con única señal (U_2)

En esta subsección se plantea el uso de una sola señal y el ajuste de un parámetro, para llevar adelante la sincronización. La metodología propuesta no se encuentra reportada en la literatura, de manera que además de no haber referencia alguna actualmente, y dado que mediante simulaciones realizadas en esta Tesis, se ha logrado comprender mejor los fenómenos involucrados.

Consideremos el problema de la sincronización de los sistemas (14) y (15). Escojamos las siguientes señales de control

$$U_1 = 0$$

$$U_2 = (\theta e_1 + z_s e_1 - x_m e_3)/\alpha$$

$$U_3 = 0$$

de donde θ es un parámetro que se ajustará a lo largo del tiempo, el factor de escala $\alpha = 1$.

El error de sincronización queda dado por

$$\begin{aligned}\frac{de_1}{dt} &= \sigma(e_2 - e_1) \\ \frac{de_2}{dt} &= \gamma e_1 - e_2 - z_m x_m + \alpha z_s x_s - \alpha(\theta e_1 + z_s e_1 - x_m e_3)/\alpha \\ \frac{de_3}{dt} &= -\beta e_3 + x_m y_m - \alpha x_s y_s\end{aligned}$$

el cual se puede reescribir como

$$\begin{aligned}\frac{de_1}{dt} &= \sigma(e_2 - e_1) \\ \frac{de_2}{dt} &= (\gamma - \theta)e_1 - e_2 \\ \frac{de_3}{dt} &= -\beta e_3 + x_m y_m - \alpha x_s y_s\end{aligned}$$

Definiendo:

$$\varphi = \gamma - \theta$$

Las ecuaciones del error de sincronización son ahora

$$\begin{aligned}\frac{de_1}{dt} &= \sigma(e_2 - e_1) \\ \frac{de_2}{dt} &= \varphi e_1 - e_2 \\ \frac{de_3}{dt} &= -\beta e_3 + x_m y_m - \alpha x_s y_s\end{aligned} \tag{55}$$

Para el análisis de estabilidad se propone una función candidata de Lyapunov $V(e_1, e_2, e_3, \varphi) > 0$ definida como

$$V(e_1, e_2, e_3, \varphi) = 1/2\left(\frac{1}{\sigma}(e_1)^2 + e_2^2 + e_3^2 + \varphi^2\right)$$

Al derivar la función candidata de Lyapunov a lo largo de las trayectorias del sistema (55)

$$\dot{V} = \frac{1}{\sigma} e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 + \varphi \dot{\varphi}$$

$$\dot{V} = e_1[(e_2 - e_1)] + e_2[\varphi e_1 - e_2] + e_3[-\beta e_3 + x_m y_m - \alpha x_s y_s] + \varphi \dot{\varphi}$$

$$\dot{V} = e_1 e_2 - e_1^2 + \varphi e_1 e_2 - e_2^2 - \beta e_3^2 + e_3 x_m y_m - \alpha e_3 x_s y_s + \varphi \dot{\varphi}$$

$$\dot{V} = \varphi(e_1 e_2 + \dot{\varphi}) - \frac{(e_1 - e_2)^2}{2} - \frac{1e_1^2}{2} - \frac{1e_2^2}{2} - \beta e_3^2 + e_3 x_m y_m - \alpha e_3 x_s y_s$$

A partir de esta función se tiene la ley de ajuste paramétrica

$$\dot{\varphi} = -e_1 e_2$$

Sin embargo, el signo de la función \dot{V} no se puede catalogar como semidefinida negativa, debido a que los dos últimos términos no tienen un signo definido. A pesar de ello, en Figura 50 se muestra la simulación de la sincronización del sistema maestro y esclavo y su proyección en los ejes x, y, z con una sola señal y ajuste de un parámetro. Además en la Figura 51 se puede ver la evolución del error de sincronización.

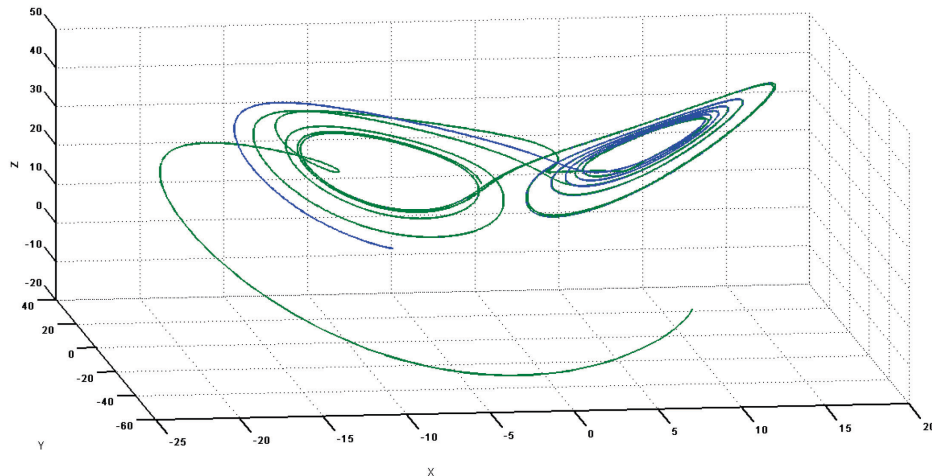


Figura 50 Proyección de la sincronización en los ejes x, y, z con una señal U_2

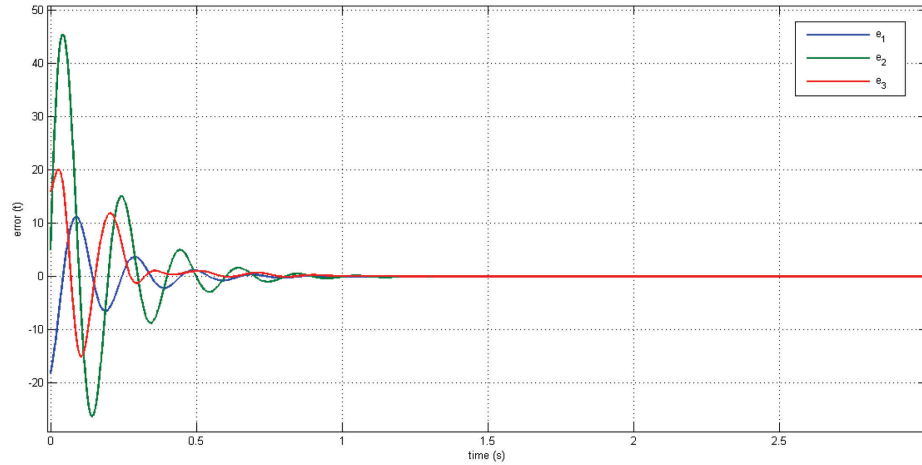


Figura 51 Evolución del error de sincronización con U_2 adaptable y un parámetro a estimar

De la Figura 50 y 51 se aprecia que la sincronización se obtiene sin problemas.

4.1.2 Sincronización mínima adaptable sistema Lorenz entero con dos señales U_2 y U_3 , un parámetro ajustable

En esta sección se logra la sincronización de sistemas enteros tipo Lorenz con dos señales de control U_2 y U_3 y un parámetro a ajustar (θ). En este caso, las señales de control son las siguientes

$$\begin{aligned} U_1 &= 0 \\ U_2 &= (\theta e_1 + z_s e_1 - x_m e_3)/\alpha \\ U_3 &= (x_m y_m - \alpha x_s y_s)/\alpha \end{aligned}$$

Las ecuaciones del error de sincronización quedan dados por

$$\begin{aligned} \frac{de_1}{dt} &= \sigma(e_2 - e_1) \\ \frac{de_2}{dt} &= \gamma e_1 - e_2 - z_m x_m + \alpha z_s x_s - \alpha[\theta e_1 + z_s e_1 - x_m e_3]/\alpha \\ \frac{de_3}{dt} &= -\beta e_3 + x_m y_m - \alpha x_s y_s - \alpha[(x_m y_m - \alpha x_s y_s)/\alpha] \end{aligned}$$

Las ecuaciones de error en forma sintética quedan con $\alpha = 1$

$$\begin{aligned} \frac{de_1}{dt} &= \sigma(e_2 - e_1) \\ \frac{de_2}{dt} &= (\gamma - \theta)e_1 - e_2 \\ \frac{de_3}{dt} &= -\beta e_3 \end{aligned}$$

Como en el anterior caso, se hace: $\varphi(t) = \gamma - \theta(t)$ con lo cual se puede reescribir

$$\begin{aligned}\frac{de_1}{dt} &= \sigma(e_2 - e_1) \\ \frac{de_2}{dt} &= \varphi e_1 - e_2 \\ \frac{de_3}{dt} &= -\beta e_3\end{aligned}\tag{56}$$

Para el análisis de estabilidad se propone una función candidata de Lyapunov $V(e_1, e_2, e_3, \varphi) > 0$ de la forma

$$V(e_1, e_2, e_3, \varphi) = 1/2\left(\frac{1}{\sigma}(e_1)^2 + e_2^2 + e_3^2 + \varphi^2\right)$$

La derivada temporal tendrá a lo largo de las trayectorias del sistema (56) es

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \sigma e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 + \varphi \dot{\varphi} \\ \dot{V} &= e_1[(e_2 - e_1)] + e_2[\varphi e_1 - e_2] + e_3[-\beta e_3] + \varphi \dot{\varphi} \\ \dot{V} &= e_1 e_2 - e_1^2 + \varphi e_1 e_2 - e_2^2 - \beta e_3^2 + \varphi \dot{\varphi}\end{aligned}$$

Escogiendo la ley de ajuste

$$\dot{\varphi} = -e_1 e_2$$

Se tiene

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\frac{(e_1 - e_2)^2}{2} - \beta e_3^2 - \left(\frac{1}{2}\right) e_1^2 - \left(\frac{1}{2}\right) e_2^2 \\ \dot{V} &\leq 0\end{aligned}$$

Para este caso, se puede ver que se cumple el criterio de Lyapunov, y se puede demostrar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e_3(t) = 0$$

En la Figura 52 se presenta el error de sincronización para dos sistemas tipo Lorenz de orden entero con $\alpha = 1$ y en la Figura 53 la proyección sobre los ejes x, y, z de las trayectorias del sistema maestro y esclavo, en ambos casos la ganancia adaptable es 0.1.

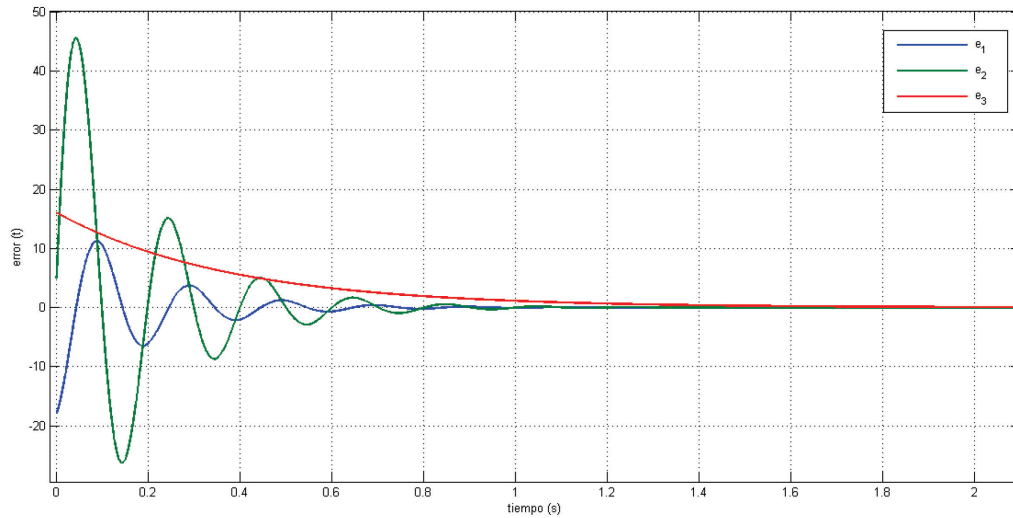


Figura 52 Error de sincronización con señales U_2 y U_3 adaptable y un parámetro a estimar

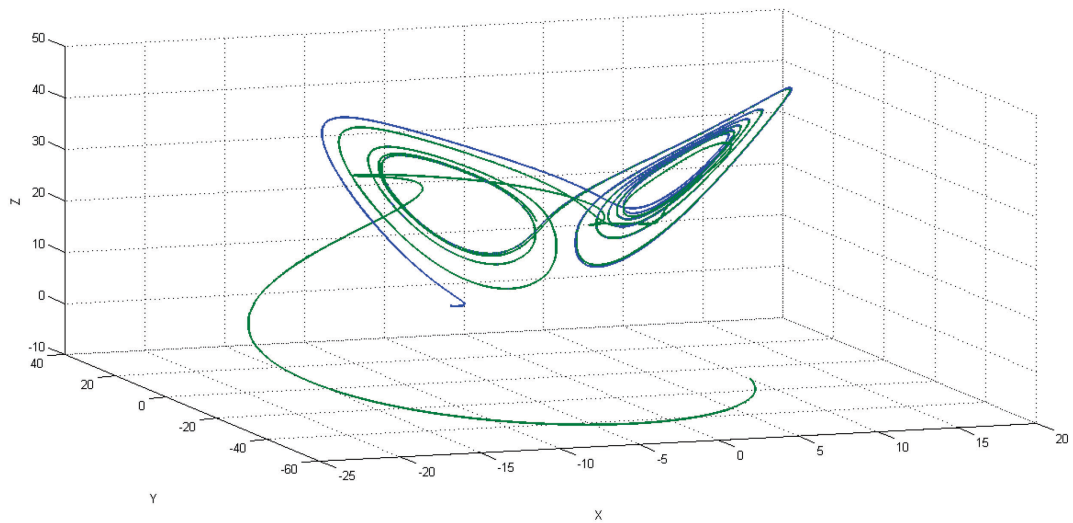


Figura 53 Evolución de las trayectorias de los sistemas maestro y esclavo y su proyección en los ejes x, y, z

De estas figuras se observa que la sincronización se logra exitosamente.

4.1.3 Sincronización mínima de sistemas Lorenz de orden entero con dos señales U_2 y U_3 con dos parámetros ajustables

En esta sección se presenta una solución para la sincronización de sistemas Lorenz de orden entero, usando dos señales de control (U_2 y U_3), con dos parámetros ajustables (θ_1 θ_2).

Para este caso se plantea el uso de dos señales con dos parámetros a ajustar, tal como se indica a continuación

$$\begin{aligned} U_1 &= 0 \\ U_2 &= (\theta_1 e_1 + z_s e_1 - x_m e_3)/\alpha \\ U_3 &= (-\theta_2 e_3 + x_m y_m - \alpha x_s y_s)/\alpha \end{aligned}$$

Estas señales se introducen en el sistema esclavo y se llega a que los errores de sincronización tiene la forma (con $\alpha = 1$),

$$\begin{aligned} \frac{de_1}{dt} &= \sigma(e_2 - e_1) \\ \frac{de_2}{dt} &= \gamma e_1 - e_2 - z_m x_m + \alpha z_s x_s - \alpha[\theta_1 e_1 + z_s e_1 - x_m e_3]/\alpha \\ \frac{de_3}{dt} &= -\beta e_3 + x_m y_m - \alpha x_s y_s - \alpha[(-\theta_2 e_3 + x_m y_m - \alpha x_s y_s)/\alpha] \end{aligned}$$

El error de sincronización en forma resumida es

$$\begin{aligned} \frac{de_1}{dt} &= \sigma(e_2 - e_1) \\ \frac{de_2}{dt} &= (\gamma - \theta_1)e_1 - e_2 \\ \frac{de_3}{dt} &= (-\beta + \theta_2)e_3 \end{aligned}$$

Definiendo: $\varphi_1(t) = \gamma - \theta_1(t)$; $\varphi_2(t) = -\beta + \theta_2(t)$, se puede escribir

$$\begin{aligned} \frac{de_1}{dt} &= \sigma(e_2 - e_1) \\ \frac{de_2}{dt} &= \varphi_1 e_1 - e_2 \\ \frac{de_3}{dt} &= \varphi_2 e_3 \end{aligned}$$

Para el análisis de estabilidad se propone una función candidata de Lyapunov $V(e_1, e_2, e_3, \varphi_1, \varphi_2) > 0$ de la forma

$$V(e_1, e_2, e_3, \varphi_1, \varphi_2) = 1/2 \left(\frac{1}{\sigma} (e_1)^2 + e_2^2 + e_3^2 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2 \right)$$

Al derivar la función candidata de Lyapunov a lo largo de la trayectoria del sistema, se pueden encontrar las leyes de ajuste de los parámetros θ_1 y θ_2 se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sigma e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 + \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + \varphi_2 \dot{\varphi}_2 \\ \dot{V} &= e_1[(e_2 - e_1)] + e_2[\varphi_1 e_1 - e_2] + e_3[\varphi_2 e_3] + \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + \varphi_2 \dot{\varphi}_2 \end{aligned}$$

$$\dot{V} = e_1 e_2 - e_1^2 + \varphi_1 e_1 e_2 - e_2^2 + \varphi_2 e_3^2 + \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + \varphi_2 \dot{\varphi}_2$$

Se escogen las leyes de ajuste como

$$\dot{\varphi}_1 = -e_1 e_2$$

$$\dot{\varphi}_2 = -e_3^2$$

Con lo cual la función derivada de Lyapunov tiene la forma

$$\dot{V} = -\frac{(e_1 - e_2)^2}{2} - \beta e_3^2 - \left(\frac{1}{2}\right) e_1^2 - \left(\frac{1}{2}\right) e_2^2$$

La función es semidefinida negativa definida, es decir

$$\dot{V} \leq 0$$

lo cual garantiza la estabilidad del sistema

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e_3(t) = 0$$

En las Figuras 54 y 55 se puede ver la sincronización de los dos sistemas maestro y esclavo y la evolución del error de sincronización, respectivamente, para $\alpha=1$ y las ganancias adaptables con un valor de 0.1.

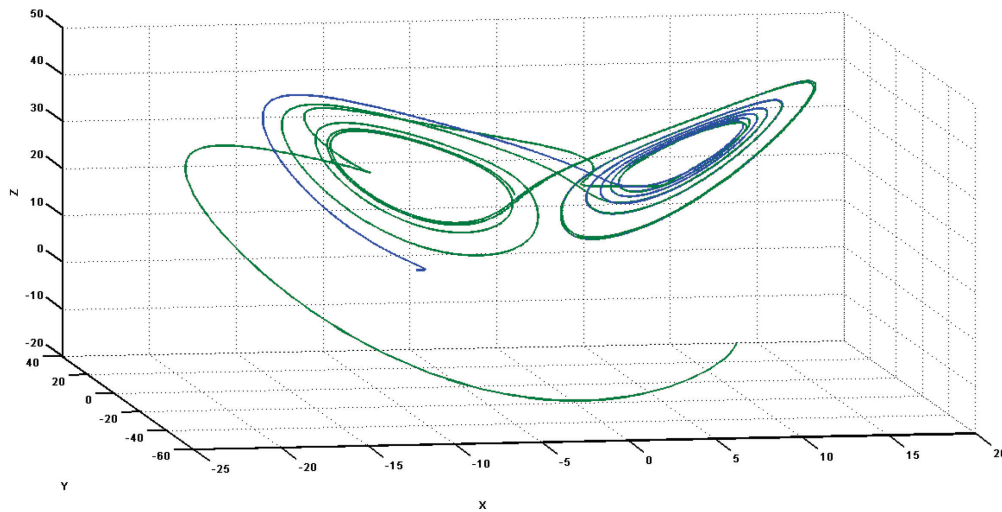


Figura 54 Sincronización de dos sistemas tipo Lorenz entero con dos señales de control y un parámetro a estimar

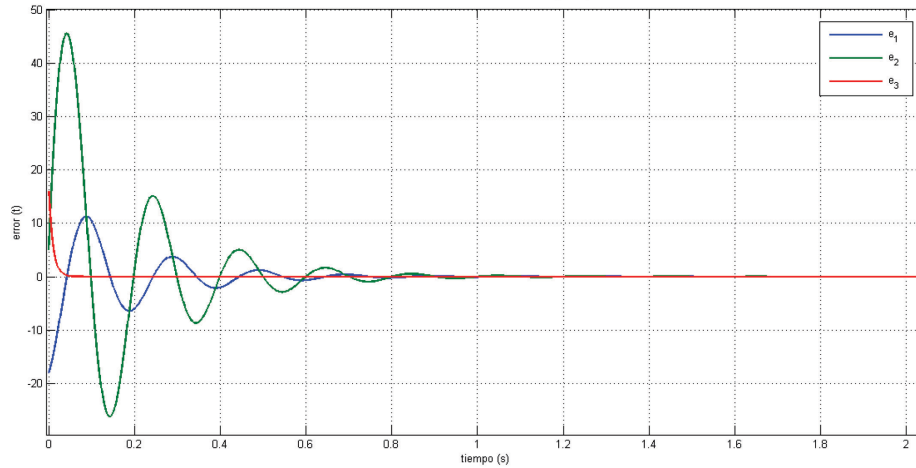


Figura 55 Evolución del error de sincronización de sistemas de tipo Lorenz con dos señales de control y dos parámetros a estimar

En este caso se puede apreciar que con las señales U_2 y U_3 se puede lograr una sincronización con una velocidad de convergencia mayor a la que se logra con una sola señal ver Figura 55.

4.1.4 Sincronización mínima adaptable de sistemas tipo Lorenz de orden entero con U_1 y U_2 con dos parámetros (uno conocido y el otro desconocido)

En esta sección se presenta la sincronización de sistemas tipo Lorenz de orden entero usando dos señales de control (U_1 y U_2), y un parámetro ajustable, en esta solución se utiliza el parámetro σ del sistema maestro. El caso presentado en esta sección, se muestran dos señales una de ellas compuesta de términos no lineales que permiten cancelar las no linealidades en las ecuaciones de error de sincronización, mientras que la otra solo está compuesta por una ecuación lineal en los parámetros. Las señales usadas son las siguientes

$$\begin{aligned} U_1 &= -\sigma e_2 \\ U_2 &= (\theta_1 e_1 + z_s e_1 - x_m e_3) / \alpha \\ U_3 &= 0 \end{aligned}$$

Las ecuaciones del error de sincronización quedan dadas para $\alpha=1$

$$\begin{aligned} \frac{de_1}{dt} &= -\sigma e_1 \\ \frac{de_2}{dt} &= \gamma e_1 - \theta_1 e_1 - e_2 \\ \frac{de_3}{dt} &= -\beta e_3 + x_m y_m - \alpha x_s y_s \end{aligned}$$

El error de sincronización en forma resumida es

$$\begin{aligned}\frac{de_1}{dt} &= -\sigma e_1 \\ \frac{de_2}{dt} &= (\gamma - \theta)e_1 - e_2 \\ \frac{de_3}{dt} &= -\beta e_3 + x_m y_m - \alpha x_s y_s\end{aligned}$$

Definiendo $\varphi(t) = \gamma - \theta(t)$ se tiene

$$\begin{aligned}\frac{de_1}{dt} &= -\sigma e_1 \\ \frac{de_2}{dt} &= \varphi e_1 - e_2 \\ \frac{de_3}{dt} &= -\beta e_3 + x_m y_m - \alpha x_s y_s\end{aligned} \tag{57}$$

La función candidata de Lyapunov escogida en este caso es

$$V(e_1, e_2, e_3, \varphi) = 1/2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + \varphi^2)$$

La derivada de la función resulta ser

$$\dot{V} = \sigma e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 + \varphi \dot{\varphi}$$

o bien

$$\dot{V} = e_1[-\sigma e_1] + e_2[\varphi e_1 - e_2] + e_3[-\beta e_3 + x_m y_m - \alpha x_s y_s] + \varphi \dot{\varphi}$$

$$\dot{V} = -\sigma e_1^2 + \varphi e_1 e_2 - e_2^2 - \beta e_3^2 + e_3 x_m y_m - \alpha e_3 x_s y_s + \varphi \dot{\varphi}$$

Asociando términos similares:

$$\dot{V} = \varphi(e_1 e_2 + \dot{\varphi}) - \sigma e_1^2 - \beta e_3^2 - e_2^2 + e_3 x_m y_m - \alpha e_3 x_s y_s$$

se escoge la ley de ajuste como

$$\dot{\varphi} = -e_1 e_2$$

Sin embargo no se puede asignar a la función de Lyapunov \dot{V} un signo determinado, por que los dos últimos sumandos de \dot{V} , no tienen un signo definido.

Sin embargo, simulaciones indican que la estabilidad del sistema se logra. En la simulación la Figura 56, se muestra la evolución del error de sincronización y la proyección de la evolución de los dos sistemas maestro y esclavo en los ejes x, y, z. En ambas figuras se aprecia que la sincronización se logra con éxito.

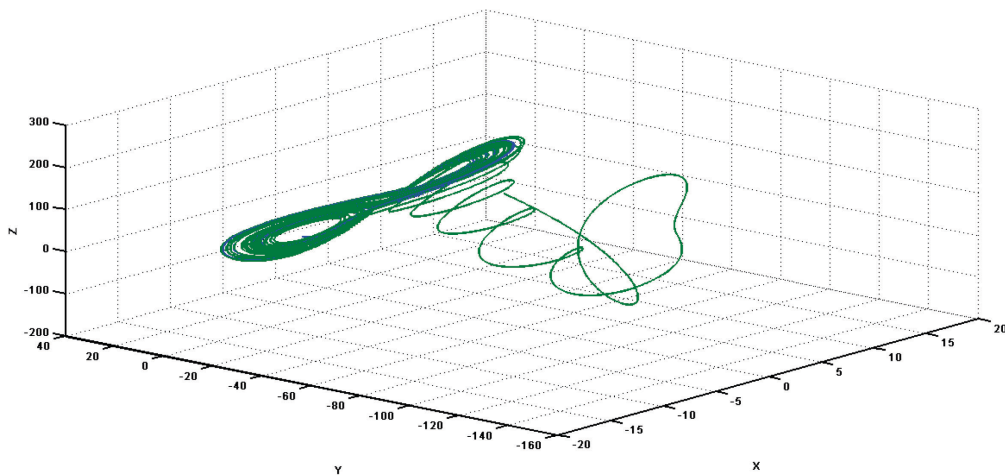
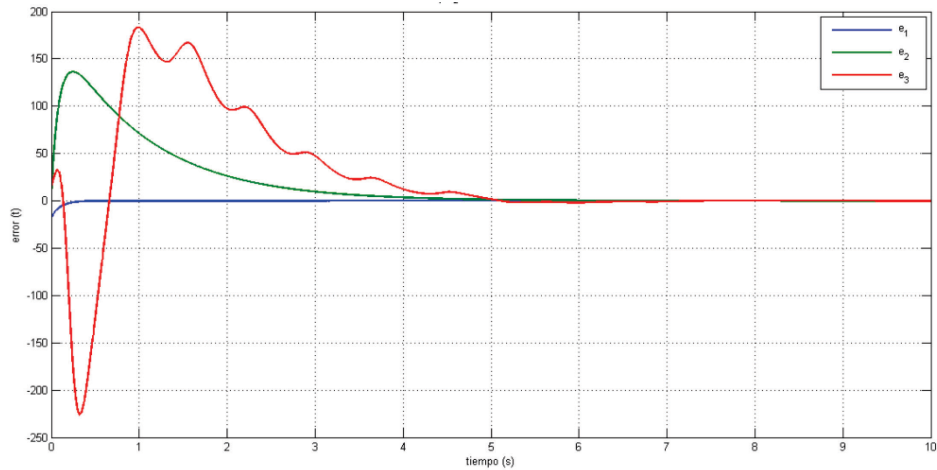


Figura 56 Sincronización adaptable, con dos parámetros desconocidos, usando las mismas señales U_1 y U_2 con $\alpha=1$ y un parámetro desconocido. Arriba, la evolución del error de sincronización. Abajo, la proyección de las trayectorias sobre los ejes x , y , z de los sistemas maestro y esclavo.

En este esquema de sincronización se usaron dos de las tres señales de control y un parámetro ajustable. Se puede ver que la evolución del error de sincronización es lenta para el error e_3 , por el parámetro asociado a ese error, también porque existe un factor de dos variables de estado del sistema original, que son dependientes de los errores e_1 y e_2 (Ver ecuación (57)).

4.2 Sincronización no adaptable mínima de sistemas tipo Lorenz de orden fraccionario

En esta sección se toman los fundamentos presentados en la Sección 2.1, donde se explica el criterio de Routh Hurwitz para la estabilidad de sistemas de orden fraccionario y de sus condiciones suficientes, con el fin de aplicarlos a sistemas fraccionarios lineales e invariantes en

el tiempo. Para ello, se toma la ecuación (20) y se propone que las entradas externas sean una combinación lineal con componentes constantes A, B, C, D, E, F, G, H, I tal como se muestra en (58).

En forma explícita se puede ver el sistema de entradas externas v_i , como una combinación lineal de los errores de sincronización e_1, e_2, e_3 . Se define entonces la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} v_1 &= Ae_1 + Be_2 + Ce_3 \\ v_2 &= De_1 + Ee_2 + Fe_3 \\ v_3 &= Ge_1 + He_2 + Ie_3 \end{aligned} \quad (58)$$

La combinación lineal propuesta, sirve para imponer un comportamiento lineal al sistema dinámico del error de sincronización, cuyos elementos no lineales han sido suprimidos por las señales de control, que más adelante se muestran en (60). La entrada externa en forma matricial tiene la forma

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad (59)$$

Con esta entrada externa, se desea tener algún grado de modificación sobre los parámetros del sistema. Esta entrada es adicionada a las señales de control U_1, U_2, U_3 , las cuales deben tener la siguiente estructura,

$$\begin{aligned} U_1 &= v_1/\alpha \\ U_2 &= (-e_1z_m - e_3x_s) + v_2/\alpha \\ U_3 &= (e_1y_m + e_2x_s) + v_3/\alpha \end{aligned} \quad (60)$$

de manera que el sistema se convierta en un sistema lineal. Luego se procede a experimentar qué pasa cuando se elige sólo una señal de control de las tres antes mencionadas (sincronización mínima). En esta experimentación y haciendo diferentes elecciones, se puede afirmar que los parámetros de la entrada externa C, F, G, H no aportan o no son significativos cuando sólo introducimos una señal al sistema, por lo que esos parámetros no serán tenidos en cuenta en las señales que a continuación se presentan.

Las señales de control quedan definidas de la siguiente forma

$$\begin{aligned} U_1 &= (Ae_1 + Be_2 + Ce_3)/\alpha \\ U_2 &= (-e_1z_m - e_3x_s + Ae_1 + Ee_2 + Fe_3)/\alpha \\ U_3 &= (e_1y_m + e_2x_s + Ge_1 + He_2 + Ie_3)/\alpha \end{aligned} \quad (61)$$

Incorporando estas entradas al sistema esclavo (32) el error de sincronización tiene la forma

$$\begin{aligned} \frac{de_1^q}{dt^q} &= \sigma(e_2 - e_1) - \alpha \left[\frac{Ae_1 + Be_2 + Ce_3}{\alpha} \right] \\ \frac{de_2^q}{dt^q} &= \gamma e_1 - e_2 - e_1z_m - e_3x_s - \alpha [(-e_1z_m - e_3x_s + Ae_1 + Ee_2 + Fe_3)/\alpha] \end{aligned}$$

$$\frac{de_3^q}{dt^q} = -\beta e_3 + e_1 y_m + e_2 x_s - \alpha[(e_1 y_m + e_2 x_s + G e_1 + H e_2 + I e_3)/\alpha]$$

o bien

$$\begin{aligned}\frac{de_1^q}{dt^q} &= \sigma(e_2 - e_1) - A e_1 - B e_2 - C e_3 \\ \frac{de_2^q}{dt^q} &= \gamma e_1 - e_2 - D e_1 - E e_2 - F e_3 \\ \frac{de_3^q}{dt^q} &= -\beta e_3 - G e_1 - H e_2 - I e_3\end{aligned}$$

En forma matricial, la dinámica del error de sincronización es

$$\begin{bmatrix} \frac{de_1^{qs}}{dt^{qs}} \\ \frac{de_2^{qs}}{dt^{qs}} \\ \frac{de_3^{qs}}{dt^{qs}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \gamma & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A & -B & -C \\ -D & -E & -F \\ -G & -H & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{de_1^{qs}}{dt^{qs}} \\ \frac{de_2^{qs}}{dt^{qs}} \\ \frac{de_3^{qs}}{dt^{qs}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma - A & \sigma - B & -C \\ \gamma - D & -1 - E & -F \\ -G & -H & -\beta - I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad (63)$$

Como este sistema es fraccionario lineal e invariante, podemos buscar la ubicación de los polos del sistema para analizar la estabilidad.

El polinomio característico (de tercer orden) tiene la siguiente estructura

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3$$

$$\begin{aligned}P(\lambda) &= \lambda^3 + \lambda^2(1 + \beta + \sigma + E + A + I) + \lambda(D\sigma + E\sigma + I\sigma + \beta\sigma - \gamma\sigma + A\beta + E\beta + B\gamma + A\sigma + I\sigma + \\ &\sigma s + \beta s + AI - FH + EI) + (A\beta + \beta\sigma - CG + AI - AFH + BFG + CDH - CEG + AEI - BDI + \\ &AE\beta - BD\beta - CH\gamma + BI\gamma - FG\sigma + AEs - BDS + DI\sigma - FH\sigma + EI\sigma - CGs + B\beta\gamma + D\beta\sigma + E\beta\sigma - \\ &I\gamma\sigma - \beta\gamma\sigma)\end{aligned} \quad (64)$$

en donde

$$a_1 = A + E + I + \beta + \sigma + 1 \quad (65)$$

$$a_2 = (A + I + \beta + \sigma + A\beta + E\beta + B\gamma + D\sigma + E\sigma + I\sigma + \beta\sigma - \gamma\sigma + AE - CG + AI - FH + EI) \quad (66)$$

$$a_3 = A\beta + I\sigma + \beta\sigma - CG + AI - AFH + BFG + CDH - CEG + AEI - BDI + AEB - BD\beta - CH\gamma + BI\gamma - FG\sigma + DI\sigma - FH\sigma + EI\sigma + B\beta\gamma + D\beta\sigma + E\beta\sigma - I\gamma\sigma - \beta\gamma\sigma \quad (67)$$

Basados en el criterio de Routh Hurwitz para sistemas de orden fraccionario lineales e invariantes en el tiempo (ver Sección 2.1) e imponiendo condiciones sobre los parámetros del polinomio característico, determinamos cuales términos de (59) son relevantes en la elección de una sola señal de control y que permita obtener la sincronización de los sistemas de Lorenz fraccionarios.

4.2.1 Sincronización mínima no adaptable con una sola señal de entrada U_1

En esta subsección se toma solo una señal de control de las definidas en (61), y se determinan los valores de los parámetros de la entrada externa con los cuales se satisfacen los criterios de estabilidad según Routh Hurwitz y por ende se logra la sincronización de los sistemas de orden fraccionario tipo Lorenz.

Comenzamos eligiendo la señal de control U_1 con términos $A, B \neq 0$ y hacemos ceros los demás parámetros, pero conservando las señales no lineales de U_2 y U_3 . La señal $U_1 = Ae_1 + Be_2$, es analizada bajo el criterio de Routh- Hurwitz de orden fraccionario, cuyas condiciones para un polinomio característico de orden $n=3$ son las siguientes, (ver [99]),

$$D(P) < 0$$

$$a_1 > 0$$

$$a_2 > 0$$

$$a_1 a_2 = a_3$$

El caso en el cual $D(P) > 0$, se analizó en extensión pero los resultados no son mostrados por corresponder al criterio estándar de análisis de la estabilidad para sistemas dinámicos de orden entero.

A partir del polinomio característico (64), en este caso particular (A y $B \neq 0$) el coeficiente a_1 está dado por

$$a_1 = A + \beta + \sigma + 1 \quad (68)$$

Como el criterio dice que el termino a_1 debe ser positivo se puede hallar una cota para el parametro A la cual es

$$A > -(\beta + \sigma + 1)$$

y reemplazando los valores del sistema de Lorenz se tiene la condición

$$A > -13.66 \quad (69)$$

De acuerdo a esto debe A ser mayor que -13,66

Tomando el término a_2 del polinomio, con A y B distintos de cero, se tiene

$$a_2 = (A + \beta + \sigma + A\beta + B\gamma + \beta\sigma - \gamma\sigma) \quad (70)$$

Para el cual se debe cumplir

$$a_2 > 0$$

es decir

$$(A + \beta + \sigma + A\beta + B\gamma + \beta\sigma - \gamma\sigma) > 0$$

$$(A(1 + \beta) + B\gamma + \beta\sigma - \gamma\sigma + \beta + \sigma) > 0$$

$$A(1 + \beta) + B\gamma > -(\beta\sigma - \gamma\sigma + \beta + \sigma)$$

Reemplazando los valores de los parámetros del sistema de Lorenz

$$3.66 A + 28 B > 240.74$$

Con lo cual se tiene que

$$B > 8.5978 - 0.1371 A \quad (71)$$

De (69), se puede elegir $A = -11$, con la cual de (71) B debe satisfacer

$$B > 10.0357\overline{142857}$$

Por lo tanto, cuando se elige $A = -11$, que cumple con la primera condición, genera una cota para B mayor a 10.0357.

Analizando el tercer coeficiente del polinomio característico con A y B diferente de cero, se tiene

$$a_3 = A\beta + \beta\sigma + B\beta\gamma - \beta\gamma\sigma \quad (72)$$

Considerando ahora la condición de igualdad con (68), (70) y (72) se tiene

$$a_1 a_2 = a_3$$

Con lo cual se debe satisfacer que

$$A^2 + A^2\beta + A + 2A\beta + 2A\sigma + A\beta^2 + AB\gamma + 2A\beta\sigma - A\gamma\sigma + B\gamma + B\gamma\sigma + \beta + \sigma + 2\beta\sigma - \gamma\sigma + \beta\sigma^2 + \beta^2\sigma - \gamma\sigma^2 + \beta^2 + \sigma^2 = 0$$

Reemplazando los valores de los parámetros para el sistema de Lorenz de llega a

$$B = (-3.66A^2 + 193.40A + 2570.30)/(28A + 308) \quad (73)$$

Entonces en el caso que $D(P) < 0$ los valores de A y B se escogen de modo de satisfacer las condiciones (69), (71) y (73).

A continuación, consideramos la condición que tiene que ver con el discriminante negativo, la cual se enuncia de la siguiente manera

$$D(P) < 0 \Rightarrow 18 a_1 a_2 a_3 + (a_1 a_2)^2 - 4a_3(a_1)^3 - 4(a_2)^3 - 27(a_3)^2 < 0$$

o bien

$$D(P) < 0 \Rightarrow 18 a_1 a_2 a_3 + (a_1 a_2)^2 < 4a_3(a_1)^3 + 4(a_2)^3 + 27(a_3)^2$$

Reemplazando $a_1 a_2 a_3$ de (68), (70) y (72), respectivamente, la condición se puede escribir como

$$(A^2 + 18A - 112B + 1201) < 0$$

o bien en forma equivalente

$$B > (A^2 + 18A + 1201)/112$$

En forma resumida se plantean a continuación las cuatro condiciones que deben satisfacerse

$$a_1 > 0 \Rightarrow A > -(13.66)$$

Si se elige $A = -13$

$$a_2 > 0 \Rightarrow B > -(-8.5978 + 0.1371A)$$

$$B > 10.38$$

$$a_1 a_2 = a_3 \Rightarrow B = 10.04$$

$$D(P) < 0 \Rightarrow B > 10.14$$

4.2.2 Sincronización mínima no adaptable usando una señal de control U_2

Así como se desarrolló el procedimiento para el caso de la señal U_1 solamente, se procede ahora para el caso de usar sólo la señal U_2 . Al usar U_2 con términos $D, E \neq 0$, la señal a usar es $U_2 = D e_1 + E e_2$. En este caso, se analiza nuevamente el criterio de Routh Hurwitz extendido para los sistemas fraccionarios lineales e invariantes en el tiempo.

El primer término del polinomio característico (65) cuando D y E son diferentes de cero, resulta ser ahora

$$a_1 = E + \beta + \sigma + 1$$

y la condición $a_1 > 0$ se traduce en

$$E > -13.66$$

Tomando el segundo término (66) del polinomio característico con D, E $\neq 0$ resulta ser

$$a_2 = (\beta + \sigma + E\beta + D\sigma + E\sigma + \beta\sigma - \gamma\sigma)$$

La condición para el segundo término $a_2 > 0$ se traduce en

$$D > (240.74 - 12.66 E)/10$$

Considerando ahora el tercer término a_3 dado por (67) cuando D y E son diferentes de cero se puede escribir

$$a_3 = \beta\sigma + D\beta\sigma + E\beta\sigma - \beta\gamma\sigma$$

La siguiente condición de igualdad $a_1 a_2 = a_3$ conduce a la solución

$$(12.66)E^2 - 94.40E + 110D + 10 DE - 2570.30 = 0$$

Con esta ecuación cuadrática, se puede definir un valor para el parámetro E y establecer el valor para el parámetro D, es decir

$$D = \frac{-E^2(12.66) + E(94.40) + 2570.30}{(110 + 10E)}$$

La condición correspondiente al discriminante tiene

$$-18E + E^2 - 40D + 1201 < 0$$

con lo cual se puede escribir

$$D > (-18E + E^2 + 1201)/40$$

Para establecer el valor de D, se puede definir un valor de E que satisfaga la cota determinada por la primera condición.

En forma resumida las condiciones que se requieren en este caso son

$$a_1 > 0 \Rightarrow E > -(13.66)$$

$$a_2 > 0 \Rightarrow D > -(-240.74 - 12.66 E)/10$$

$$a_1 a_2 = a_3 \Rightarrow D = \frac{-(12.66E^2) + (94.40E) + 2570.30}{(110 + 10E)}$$

$$D(P) < 0 \Rightarrow -(18E - E^2 + 40D - 1201) < 0$$

De todo lo observado bajo el criterio de Routh Hurwitz extendido a sistemas de orden fraccionario lineales e invariantes en el tiempo, no es posible lograr la sincronización cuando se usa solo una señal como $U_1 = Ae_1 + Be_2$; y $U_2 = -e_1z_m - e_3x_s$; y $U_3 = e_1y_m + e_2x_s$; (no cumple la condición del discriminante negativo), sin embargo cuando se usan las señales $U_1 = 0$; y $U_2 = -e_1z_m - e_3x_s + De_1 + Ee_2$; y $U_3 = e_1y_m + e_2x_s$, es posible lograr la sincronización para un rango $-13,66 < E < -11$, en la Figura 57 se aprecia la sincronización de sistemas Lorenz fraccionarios con $q=0.9$; en este caso la derivada de orden fraccionario nos lleva a tener las siguientes raíces y su frontera de estabilidad,

$E=-13.6$; $D=139.540523$; raíces: $1, 30+31,43i$; $1, 30-31,43i$; $-2, 66$; $q < 0,973$

$E=-11.2$; $D=1550.5452$; raíces: $0,101+122,97i$; $0,101-122,97i$; $-2,66$ $q < 0,999$

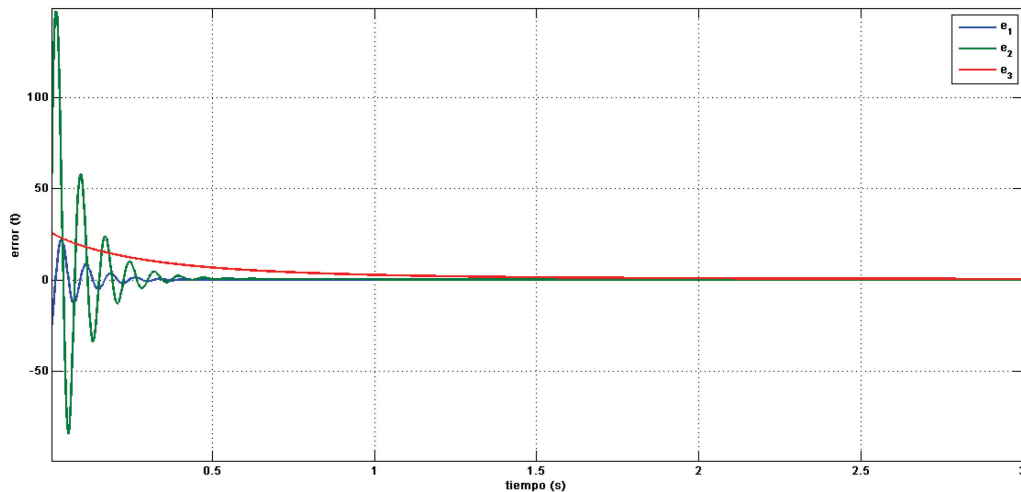


Figura 57 Evolución del error de sincronización para sistemas de Lorenz de orden fraccionario con $q_s=0.9$ con parámetros $D=326,054$ y $E=-12$

En el caso de usar los criterios asociados al discriminante positivo y cuando se usa $U_1 = Ae_1 + Be_2$; $U_2 = -e_1z_m - e_3x_s$; $U_3 = e_1y_m + e_2x_s$; cumple condiciones con discriminante positivo y se logra la sincronización, para valores $A > -11$, mientras que con $-13.6 < A \leq -11$ no se logra sincronizar.

Cuando se usa U_2 con D y $E \neq 0$ y $A, B, I = 0$ cumple condiciones relacionadas con el discriminante positivo, se logra la sincronización con $E > -11$, mientras que en $-13.6 < E < -11$ no se logra la sincronización. En los puntos en que se logra la sincronización, la convergencia es más rápida cuando se acerca a la cota superior.

Finalmente, se puede resumir esta sección que, la sincronización se puede lograr con dos señales de control, las cuales tienen un componente no lineal y uno lineal con parámetros que se pueden modificar dentro de cierto rango, como se ha mostrado a lo largo de esta sección.

4.3 Sincronización adaptable mínima de sistemas tipo Lorenz de orden fraccionario

El esquema definido como sincronización mínima, corresponde a utilizar la menor cantidad de señales y de estados, para lograr la sincronización. En esta sección, se muestra el uso de señales de control con ajuste de orden fraccionario de uno o varios parámetros.

El esquema de sincronización mínima de tipo adaptable propuesto, no se encuentra apoyado en un desarrollo teórico completo, por lo cual se muestran algunas simulaciones que determinan el comportamiento bajo el planteamiento de una sincronización mínima y con ajuste adaptable.

4.3.1 Sincronización adaptable mínima de sistemas de orden fraccionario usando señales como U_1

En esta sección se presenta la sincronización de sistemas de orden fraccionario tipo Lorenz, haciendo un ajuste de un sólo parámetro del controlador. En este caso la ley de ajuste se toma de la propuesta en el caso adaptable de orden entero, con una ganancia de adaptación que permita manejar la velocidad de convergencia del error de sincronización.

Para este caso se usa la señal U_1 con un parámetro θ a ajustar

$$\begin{aligned}U_1 &= \theta e_2 / \alpha \\U_2 &= 0 \\U_3 &= 0\end{aligned}\tag{74}$$

La ley de ajuste es la misma que se tomó para el caso entero y tiene la forma

$$\frac{d^{q_a} \varphi}{dt^{q_a}} = -\delta e_1 e_2\tag{75}$$

donde δ es la ganancia de adaptación, φ es la diferencia entre el parámetro real y su estimación $\varphi = (\sigma - \theta)$.

Con esta configuración se simuló la sincronización de sistemas Lorenz fraccionario con $q_s=0.2$ y la ley de ajuste fraccionaria con $q_a=0.9$, cuyo resultado se muestra en la Figura 58, mientras que en la Figura 59, se observa la señal de control U_1 que fue empleada. Los valores usados en estas simulaciones para la ganancia adaptable es $\delta = 0,1$.

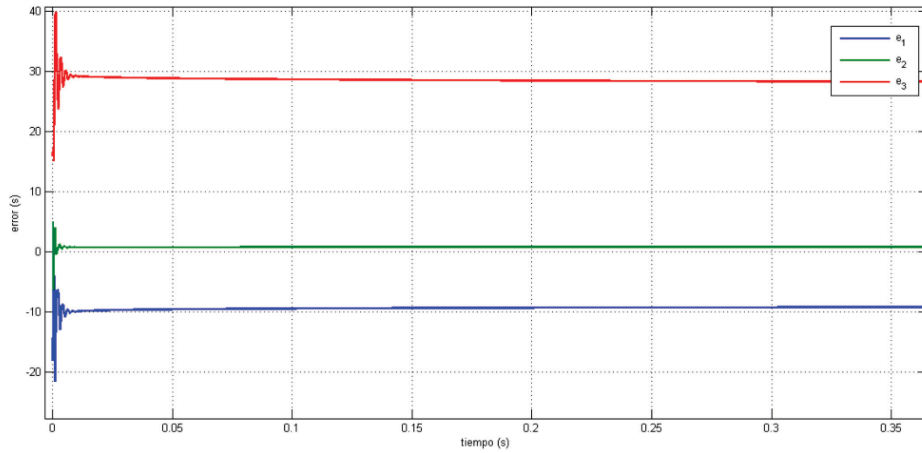


Figura 58 Sincronización de sistemas de Lorenz fraccionario con $q_s=0.2$ y ajuste paramétrico fraccionario con $q_a=0.9$, empleando solo la señal de control U_1 con $\delta=0.1$

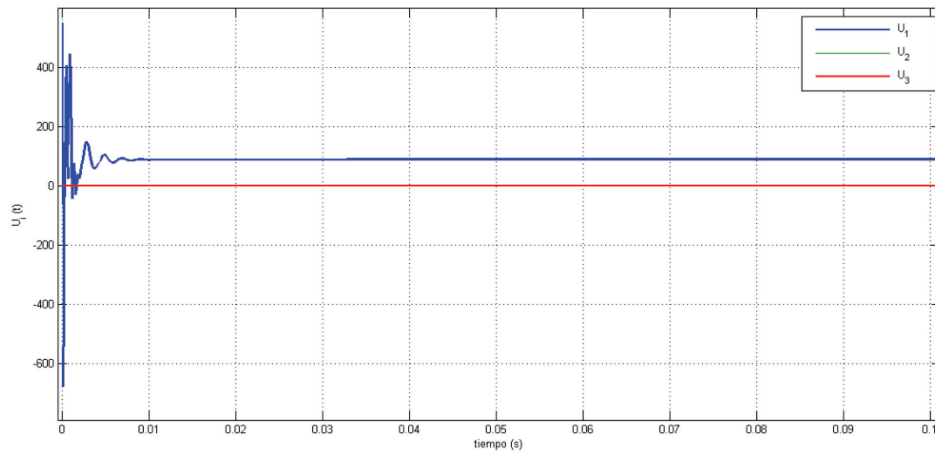


Figura 59 Señal de control U_1 para la sincronización de sistemas Lorenz fraccionarios con $q_s=0.2$ y ajuste paramétrico fraccionario con $q_a=0.9$, con $\delta=0.1$

En la Figura 60, se aprecia el error de sincronización de sistemas Lorenz fraccionario con $q_s=0.9$ y ley de adaptación paramétrica fraccionaria con $q_a=0.9$, al que se le ha modificado la ganancia adaptable estableciéndola en 100. En la Figura 61, se muestra la señal de control U_1 que se usa en este caso, ambas simulaciones usan una ganancia adaptable $\delta=100$.

Mediante simulaciones extensivas a varios casos más y que no han sido adicionados a los que muestran en esta sección, por cuestión de espacio, se pudo observar que la convergencia más lenta se presenta cuando el sistema tiene un orden de derivada pequeño, sin importar el valor del orden de ajuste. Además la velocidad de convergencia del error de sincronización se puede modificar mediante la elección de valores adecuados para la ganancia adaptable.

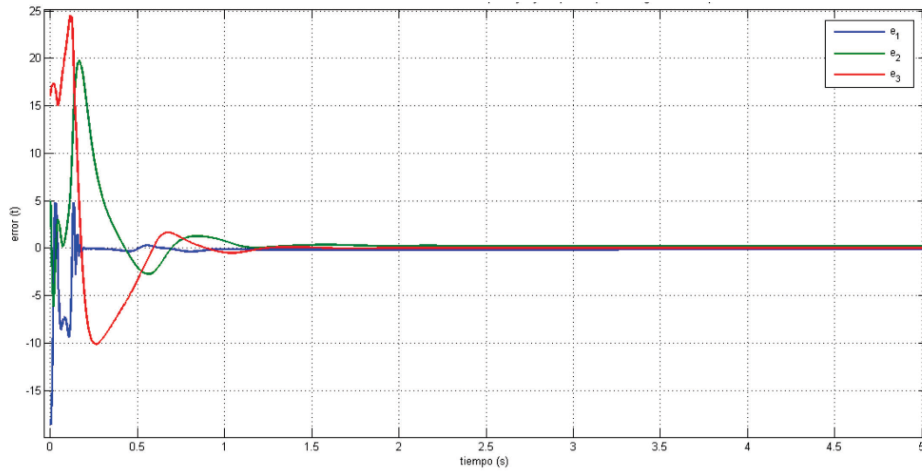


Figura 60 Error de sincronización de sistemas Lorenz fraccionario con $q_s=0.9$ y ley de ajuste adaptable fraccionario con $q_a=0.9$ y ganancia adaptable =100

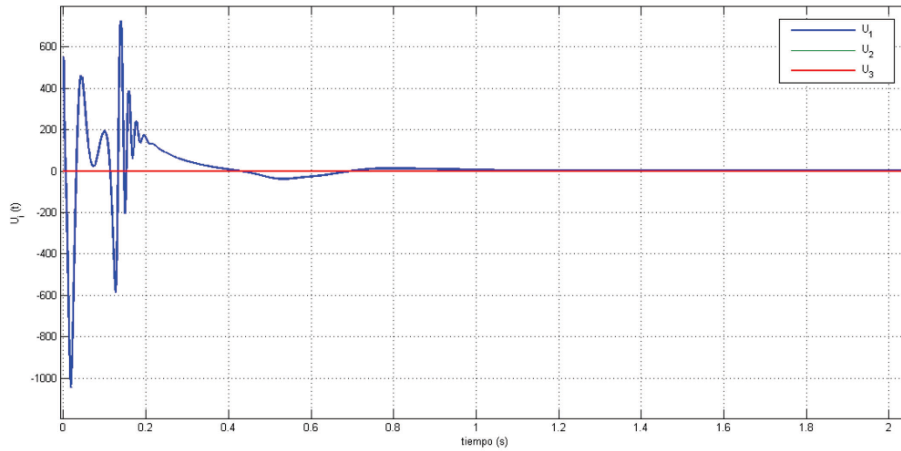


Figura 61 Señal de control U_1 en la sincronización de sistemas Lorenz fraccionario con $q_s=0.9$ y ley de adaptación fraccionaria con $q_a=0.9$ y ganancia adaptable 100.

4.3.2 Sincronización adaptable mínima de sistemas de orden fraccionario con una sola señal (U_2)

En esta sección, se muestra cómo con solamente la señal U_2 , y un parámetro ajustable, es posible lograr la sincronización. Se ha tomado una ley de adaptación en donde hay factores de los dos primeros errores de estado e_1 y e_2 y existe una ganancia adaptable δ .

En este caso, las señales de control usadas son

$$\begin{aligned} U_1 &= 0 \\ U_2 &= (\theta e_1 + z_s e_1 - x_m e_3) / \alpha \\ U_3 &= 0 \end{aligned} \tag{76}$$

Se propone usar una ley adaptable como la siguiente

$$\frac{d^{q_a} \varphi}{dt^{q_a}} = -\delta e_1 e_2 \quad (77)$$

El sistema tipo Lorenz fraccionario se analizó bajo diferentes órdenes fraccionarios con $q_s=0.2$, 0.5, 0.9, y ley de adaptación paramétrica con $q_a=0.2$, 0.5, 0.9. Se debe aclarar que el ajuste cuando $q_a=1$, corresponde al caso entero, obtenido como un caso particular del fraccionario.

La primer simulación se hace con sistemas tipo Lorenz de orden fraccionario con $q_s=0.2$ y ley de ajuste con orden $q_a=0.2$. En las Figuras 62 y 63, se puede ver tanto el error de sincronización como el esfuerzo de control de la señal aplicada al sistema, con valor de $\delta=0.1$.

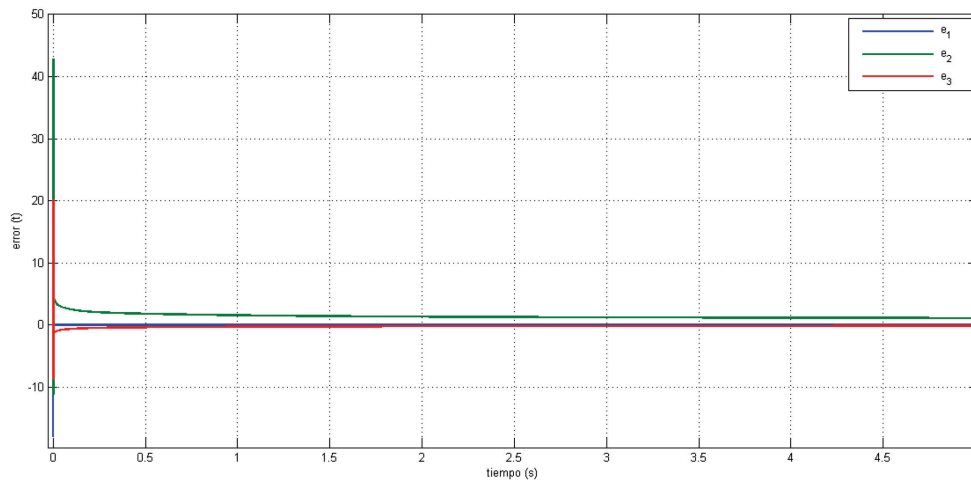


Figura 62 Error de sincronización de sistemas Lorenz fraccionarios con $q_s=0.2$ y ajuste adaptable con $q_a=0.2$ con una señal de control U_2

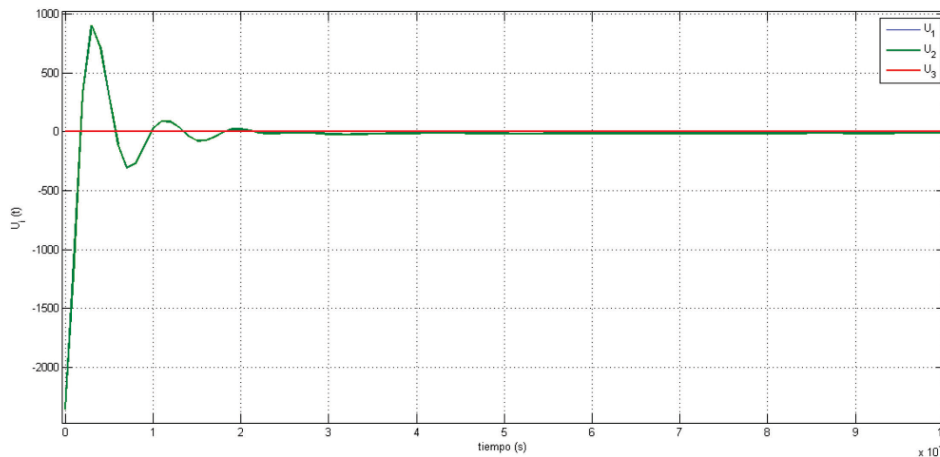


Figura 63 Señal de control U_2 en la sincronización de sistemas Lorenz fraccionario con $q_s=0.2$ y ajuste paramétrico adaptable fraccionario con $q_a=0.2$

Así mismo, se simuló el comportamiento del error de sincronización entre sistemas tipo Lorenz de orden fraccionario con $q_s=0.5$, y ajuste de orden fraccionario con $q_a=0.9$, el que se puede ver en la Figura 64, la simulaciones se hicieron con un valor de $\delta=0.1$.

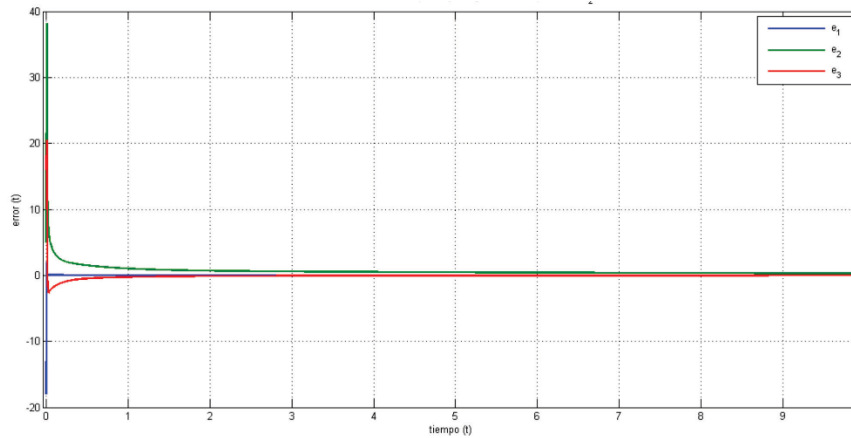


Figura 64 Error de sincronización de sistemas tipo Lorenz fraccionario $q_s=0.5$ y ajuste paramétrico fraccionario $q_a=0.9$

El esfuerzo de control se puede observar en la Figura 65. El esfuerzo se concentra en apenas unas centésimas de segundo, y parte desde una magnitud de -3000, para decaer a cero. Mientras que la evolución del parámetro ajustable se muestra en la Figura 66.

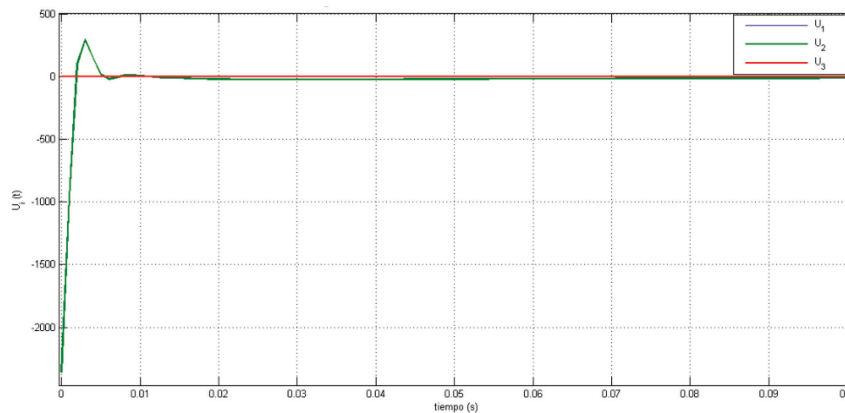


Figura 65 Señal de control U_2 para el caso de sincronización mínima adaptable

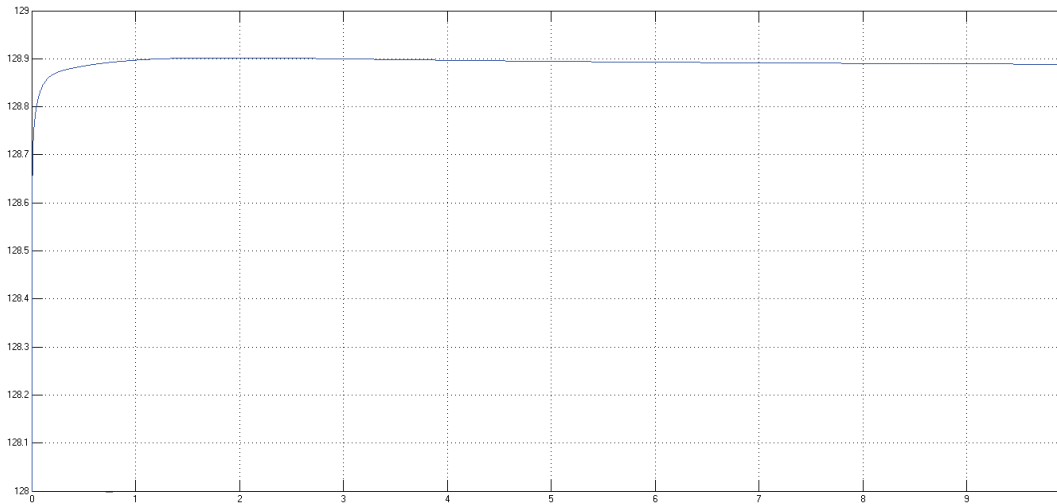


Figura 66 Evolución del parámetro ajustable

Por otra parte, en la Figura 67 se puede ver la evolución del error de sincronización de sistemas Lorenz de orden fraccionario con $q_s = 0.5$ y ajuste de orden fraccionario $q_a = 0.5$. No es significativo el cambio que se observa respecto al primer caso mostrado ($q_s = 0.5$ $q_a = 0.9$).

El esfuerzo de control se muestra en la Figura 68.

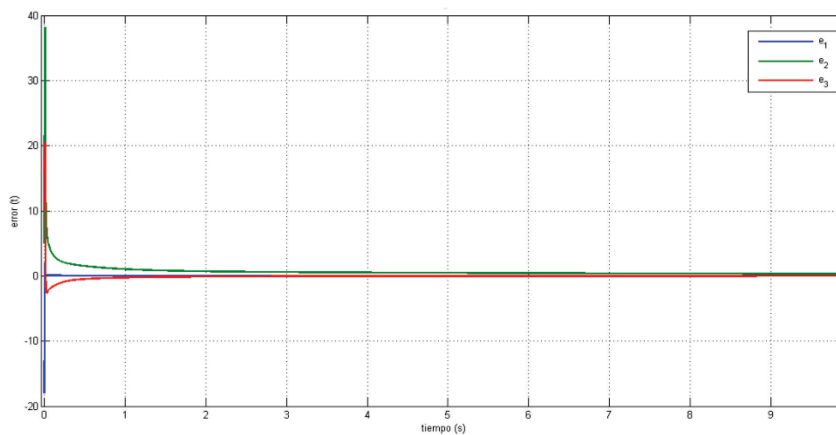


Figura 67 Error de sincronización con solo señal U_2 sistema fraccionario $q_s=0.5$ y parámetro adaptable $q_a=0.5$

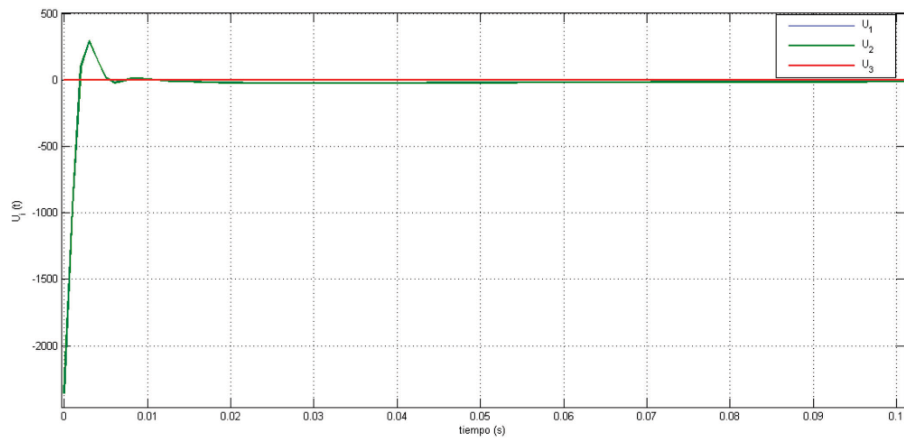


Figura 68 Señal de control U_2 sistema fraccionario $q_s=0.5$ y parámetro adaptable $q_a=0.5$

En el caso de usar una ley adaptable fraccionaria con $q_a=0.2$ y manteniendo el sistema fraccionario con $q_s=0.5$, el comportamiento del error de sincronización es el mismo y no presenta grande variaciones con respecto al caso anterior.

Para el caso de los sistemas de orden fraccionario con $q_s=0.9$ y en la ley de adaptación de orden fraccionaria con $q_a=0.2$, en la Figura 69 y en la Figura 70, se muestra la evolución del error de sincronización y el esfuerzo de control, respectivamente.

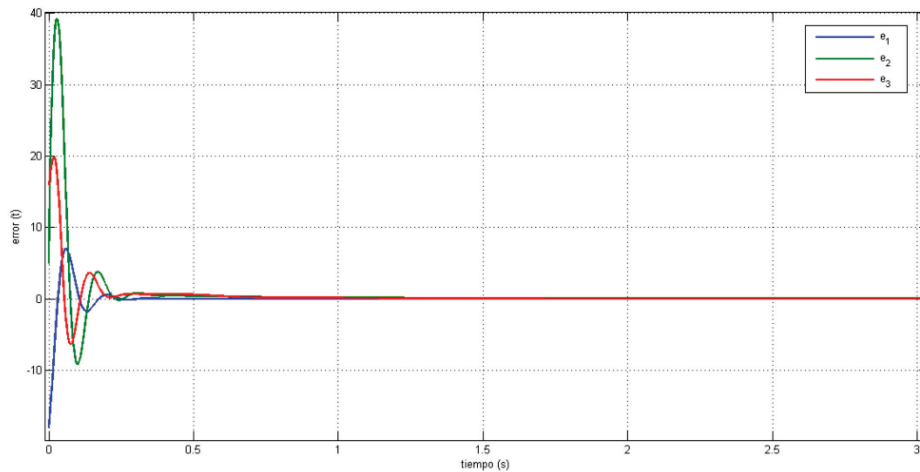


Figura 69 Error de sincronización de sistemas Lorenz fraccionario con $q_s=0.9$ y señal U_2 parámetro adaptable fraccionario con $q_a=0.2$.

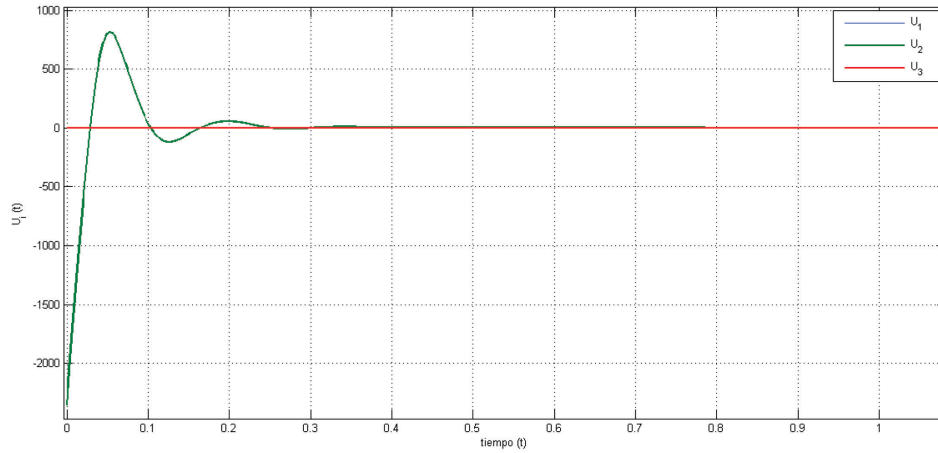


Figura 70 Señal U_2 en la sincronización de sistemas Lorenz fraccionario con $q_s=0.9$ parámetro adaptable fraccionario con $q_a=0.2$

En el caso de modificar el orden de la ley de ajuste fraccionaria del parámetro ajustable, éste no impone ningún cambio en la evolución del error de sincronización para sistemas de orden fraccionario, como tampoco se modifica la señal del error de control.

Esto se probó en simulaciones para diferentes órdenes de la derivada fraccionaria correspondientes al sistema como $q_s=0.9, 0.5, 0.2$, con estos valores se han propuesto otros para la ley de adaptación q_a , lo que mostró es que no hay mayores diferencias en la convergencia del error de sincronización, al momento de escoger órdenes en la derivada fraccionaria de la ley de ajuste, por el contrario esta convergencia se ve alterada por los órdenes de la derivada de los sistemas a sincronizar.

4.3.3 Sincronización mínima adaptable de sistemas de orden fraccionario tipo Lorenz con única señal (U_3)

Siguiendo con la idea de sincronizar dos sistemas de orden fraccionario con un mínimo de señales de control, se propone el uso de una sola señal, U_3 y el ajuste de un parámetro. Además se eliminan las no linealidades presentes en la tercera ecuación de error de sincronización.

Para este caso las señales elegidas como control son las siguientes

$$\begin{aligned}
 U_1 &= 0 \\
 U_2 &= 0 \\
 U_3 &= (\theta e_3 + x_m y_m - \alpha x_s y_s) / \alpha
 \end{aligned} \tag{78}$$

La ley de adaptación elegida tiene la particularidad de ser cuadrática respecto al error de sincronización e_3 y con el fin de darle mayor velocidad a la convergencia se introduce la ganancia adaptiva δ .

$$\frac{d^{q_a} \varphi}{dt^{q_a}} = -\delta e_3^2 \quad (79)$$

La evolución del error de sincronización está mostrada en Figura 71 en donde, el orden de la derivada fraccionaria de los sistemas es $q_s = 0.9$, con una ley de ajuste de orden fraccionario $q_a = 0.9$ con un valor de la ganancia adaptable $\delta = 0.1$.

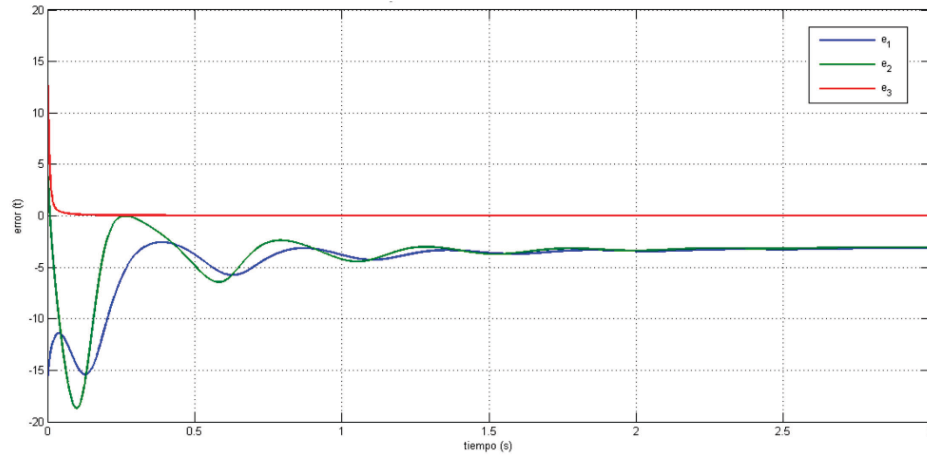


Figura 71 Error de sincronización de sistemas de orden fraccionario con $q_s = 0.9$, ley de ajuste de orden fraccionario con $q_a = 0.9$ y ganancia adaptable 0.1

En la Figura 72, se muestra el error de sincronización para el caso de sistemas con $q_s = 0.9$ y ajuste fraccionario con $q_a = 0.5$, y una ganancia adaptable $\delta = 100$. Esto permite visualizar, por lo menos en la ventana de tiempo usada, la convergencia del error de sincronización.

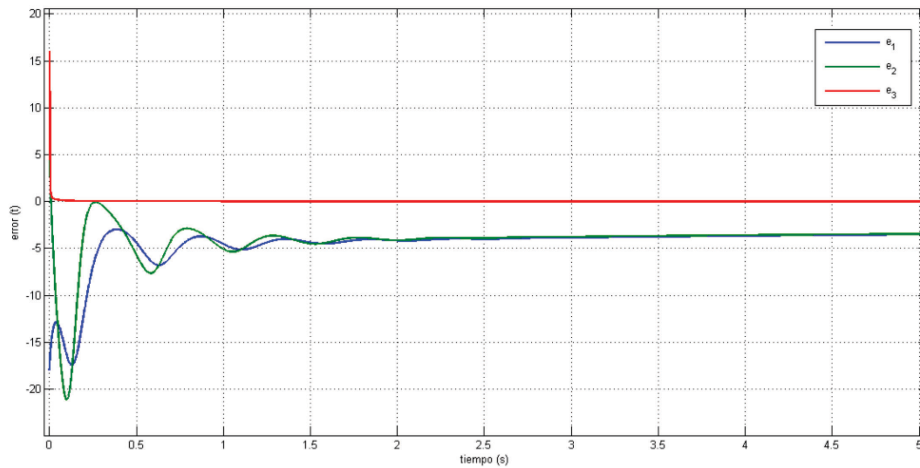


Figura 72 Error de sincronización sistemas de orden fraccionario con $q_s = 0.9$, ley de ajuste fraccionario $q_a = 0.5$ y ganancia adaptable =100

En la Figura 73, se muestra la evolución del error de sincronización al usar sólo la señal U_3 como en (78), para sistemas fraccionarios con $q_s=0.5$ y ley de ajuste entero $q_a=1$ usando la ecuación (79), con una ganancia de adaptación $\delta=0.1$

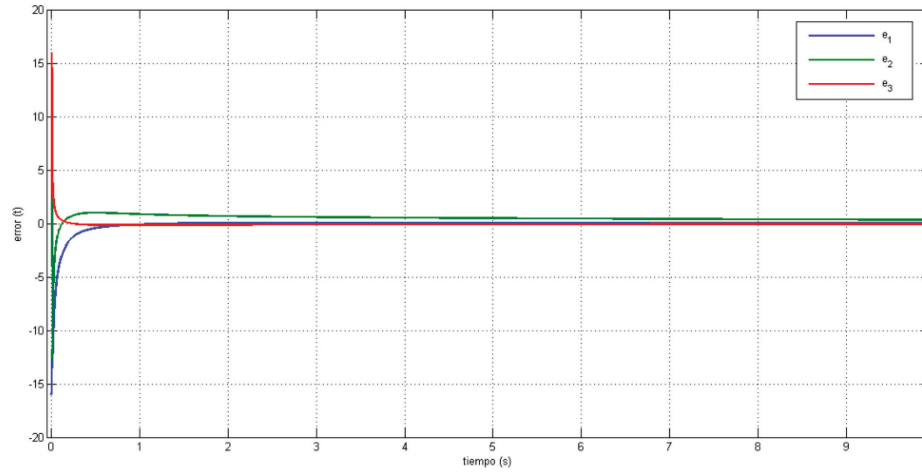


Figura 73 Error de sincronización para sistemas Lorentz fraccionario con $q_s=0.5$, señal U_3 y ley de ajuste entera.

En una tercera simulación, se tomaron valores para la derivada fraccionaria de los sistemas a sincronizar $q_s=0.5$ y la ley de ajuste fraccionario con $q_a=0.9$ y usando una sola señal U_3 . Los resultados se muestran en la Figura 74, con un valor de la ganancia adaptable de $\delta=0.1$.

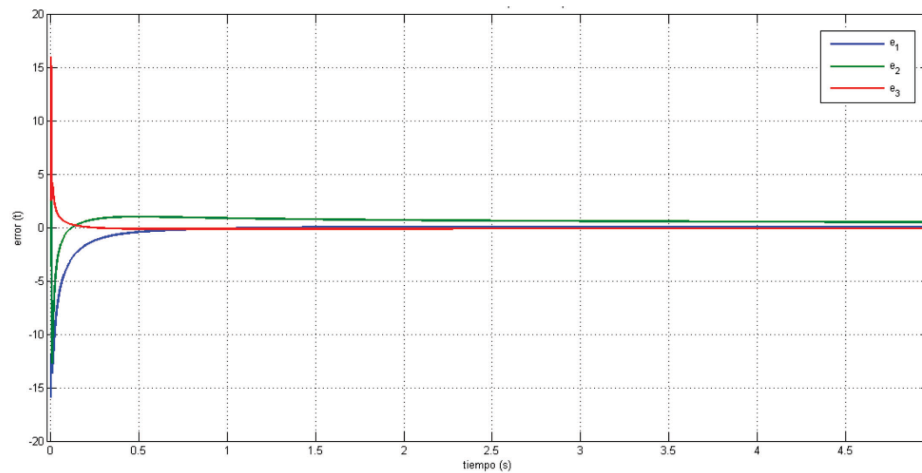


Figura 74 Error de sincronización de sistemas de Lorentz fraccionarios $q_s=0.5$ y ajuste fraccionario con $q_a=0.9$ para una señal U_3

En la Figura 75, se muestra el error de sincronización con valores de orden fraccionario para el sistema, de $q_s=0.2$ y ajuste fraccionario $q_a=0.9$, usando una ganancia adaptable igual a 0.1. Aquí se puede ver la lentitud de convergencia de la señal correspondiente a e_2 respecto a la evolución de

las otras señales del error. Esta evolución está dada por la poca influencia que tiene la señal introducida por U_3 sobre la evolución de dicho error.

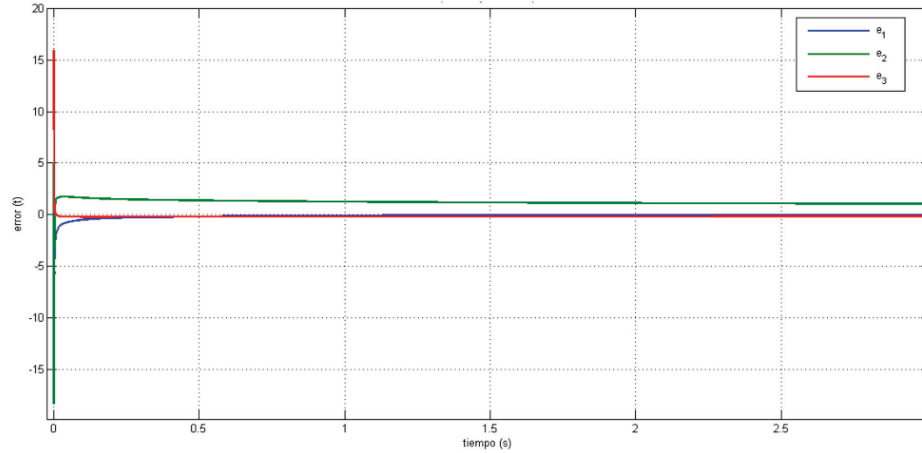


Figura 75 Error de sincronización para sistemas de Lorenz orden fraccionario $q_s=0.2$, ley ajuste fraccionario $q_a=0.9$ y ganancia adaptable 0.1.

4.3.4 Sincronización adaptable mínima de sistemas de orden fraccionario tipo Lorenz con dos señales (U_2 y U_3)

El planteamiento en esta sección se basa en el uso de dos señales de control con un sólo parámetro ajustable. Las dos señales además tienen incorporados términos no lineales, con el fin de llevar el sistema de errores, a una forma lineal e invariante en el tiempo.

Para este caso se usan dos señales de control como las descritas a continuación

$$\begin{aligned} U_1 &= 0 \\ U_2 &= (\theta e_1 + z_s e_1 - x_m e_3) / \alpha \\ U_3 &= x_m y_m - \alpha x_s y_s \end{aligned} \quad (80)$$

La ley de ajuste fraccionaria es similar a la descrita para el caso entero, donde las variables de estado usadas son los errores e_1 y e_2 .

$$\frac{d^{q_a} \varphi}{dt^{q_a}} = -\delta e_1 e_2 \quad (81)$$

En este caso, al usar dos señales de control, se aprecia que en el caso del error e_3 , la convergencia tiene una velocidad menor y está asociado al parámetro más pequeño que posee el sistema. Esto se muestra en la Figura 76, donde el sistema tiene un orden con $q_s=0.2$ y ajuste con $q_a=0.2$ y ganancia adaptiva $\delta=0.1$. Entre tanto, en la Figura 77 se muestra el esfuerzo de control donde se aprecia que el esfuerzo máximo está concentrado en la señal U_2 .

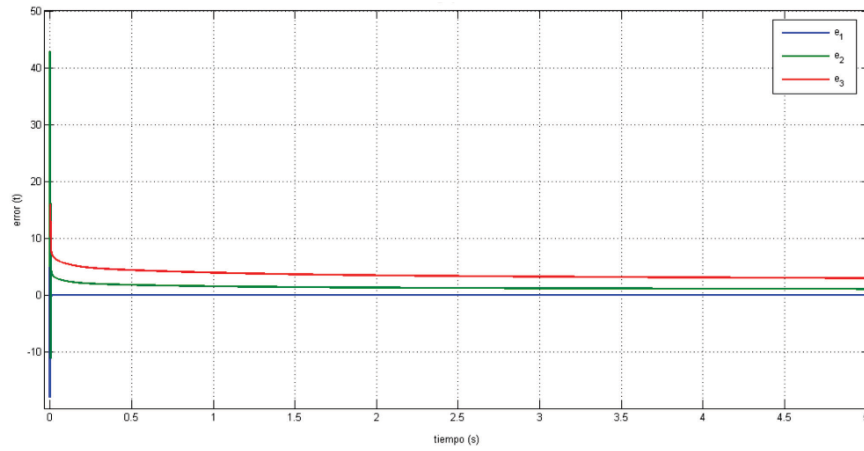


Figura 76 Error de sincronización de sistemas de orden fraccionario tipo Lorenz con $q_s=0.2$ y ajuste fraccionario de parámetro con $q_a=0.2$

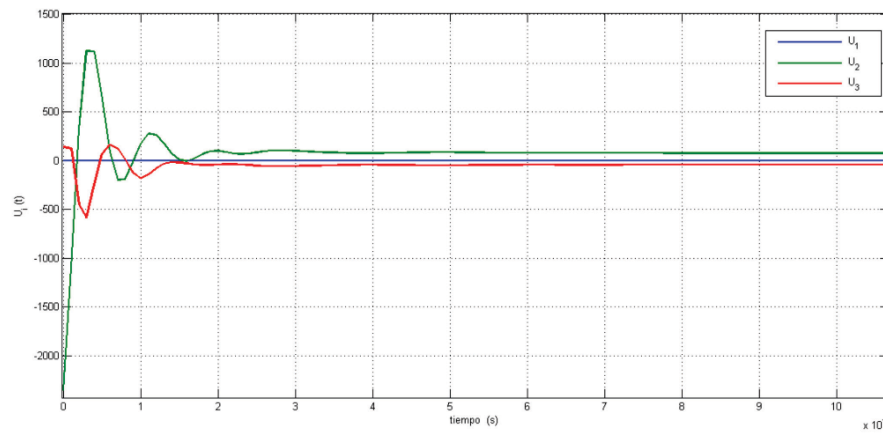


Figura 77 Esfuerzo en la sincronización de sistemas de orden fraccionario tipo Lorenz con $q_s=0.2$ y ajuste fraccionario de parámetro con $q_a=0.2$

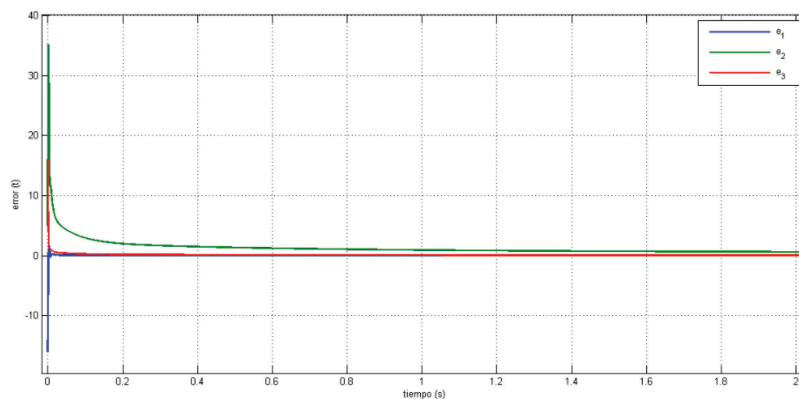


Figura 78 Error de sincronización sistemas tipo Lorenz de orden fraccionario $q_s=0.5$ con ajuste fraccionario de orden fraccionario con $q_a=0.5$

En la Figura 78 se muestra el error de sincronización cuando el sistema tipo Lorenz de orden fraccionario con $q_s=0.5$ y ajuste fraccionario con $q_a=0.5$, se usó un valor de ganancia adaptable $\delta = 0.1$.

En la Figura 79, se presenta la evolución del error de sincronización cuando el sistema es fraccionario tipo Lorenz con $q_s=0.9$ y ley de adaptación fraccionaria con $q_a=0.9$. Aquí se aprecia que los errores convergen rápidamente antes del primer segundo de su evolución. Bajo las mismas condiciones, en la Figura 80 se muestra el esfuerzo de control. Para las dos señales usadas, su evolución decae después de tener un transitorio muy alto ± 1500 y llega a cero en menos de 0.4 seg.

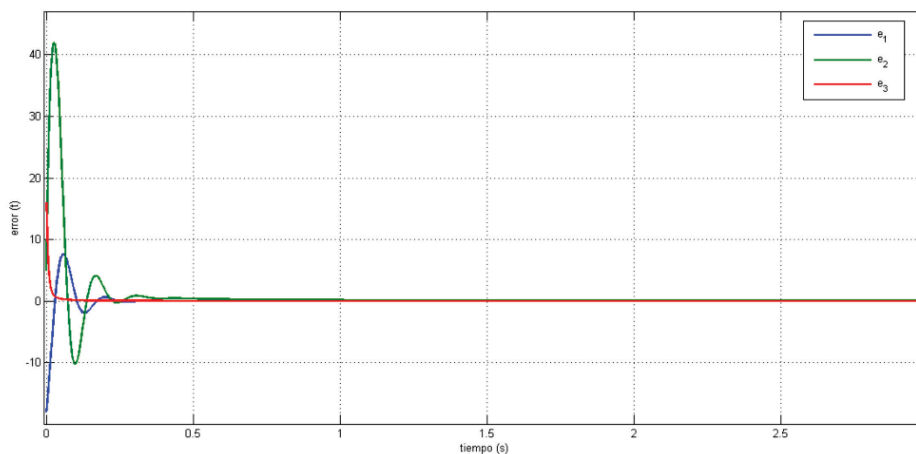


Figura 79 Error de sincronización de sistemas de orden fraccionario $q_s=0.9$ con dos señales de control y parámetros ajustables con $q_a=0.9$

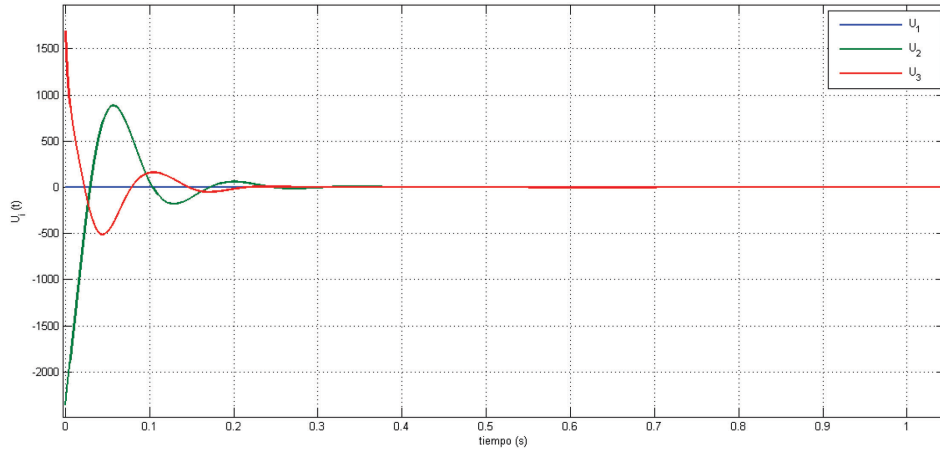


Figura 80 Señales de control para sincronización de sistemas de orden fraccionario con $q_s=0.9$ con dos señales adaptables con $q_a=0.9$

En cada uno de los casos estudiados el error de sincronización no tiene cambios cuando se modifica el orden de ajuste del parámetro adaptable. Se puede apreciar que al usar las dos señales de control, la señal del error más lenta es la que corresponde al error e_3 .

La sincronización se hace más rápida en la medida que el orden de la derivada fraccionaria de los sistemas sea cercana a la unidad. Además, el esfuerzo de control no tiene cambio alguno cuando se modifica el orden fraccionario de la ley de ajuste paramétrica.

4.3.5 Sincronización mínima de sistemas de orden fraccionario tipo Lorenz con dos señales (U_2 y U_3)

En esta sección se presenta el uso de dos señales para lograr la sincronización de dos sistemas de orden fraccionario tipo Lorenz, cada una con un parámetro ajustable, que son ajustados mediante sendas leyes de adaptación.

Para este caso, las señales descritas a ser usadas son U_2 y U_3 . Lo particular es que cada señal tiene un parámetro a ajustar. Las señales son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 U_1 &= 0 \\
 U_2 &= (\theta_1 e_1 + z_s e_1 - x_m e_3) / \alpha \\
 U_3 &= (\theta_2 e_3 + x_m y_m - \alpha x_s y_s) / \alpha
 \end{aligned}
 \tag{82}$$

Las leyes de ajuste de los parámetros están dadas por

$$\begin{aligned}\frac{d^{q_a} \varphi_1}{dt^{q_a}} &= -\delta e_1 e_2 \\ \frac{d^{q_a} \varphi_2}{dt^{q_a}} &= -\delta e_3^2\end{aligned}\quad (83)$$

donde δ es la ganancia adaptable.

Con estas dos leyes de adaptación se realizaron las simulaciones para diferentes órdenes de la derivada fraccionaria tanto del sistema de Lorenz fraccionario como de las leyes de ajuste. En la Figura 81 se muestra la sincronización de sistemas fraccionarios tipo Lorenz de orden $q_s=0.9$, con un ajuste fraccionario con $q_a=0.5$. En la Figura 82 se presenta la evolución de las señales de control correspondientes con valores de ganancias adaptativas $\delta=0.1$.

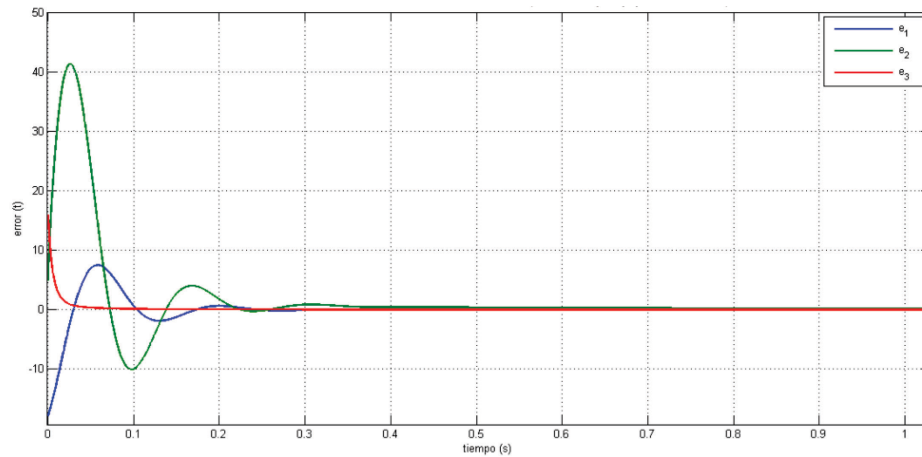


Figura 81 Error de sincronización de sistemas tipo Lorenz fraccionario con $q_s=0.9$ y ajuste paramétrico fraccionario con $q_a=0.5$

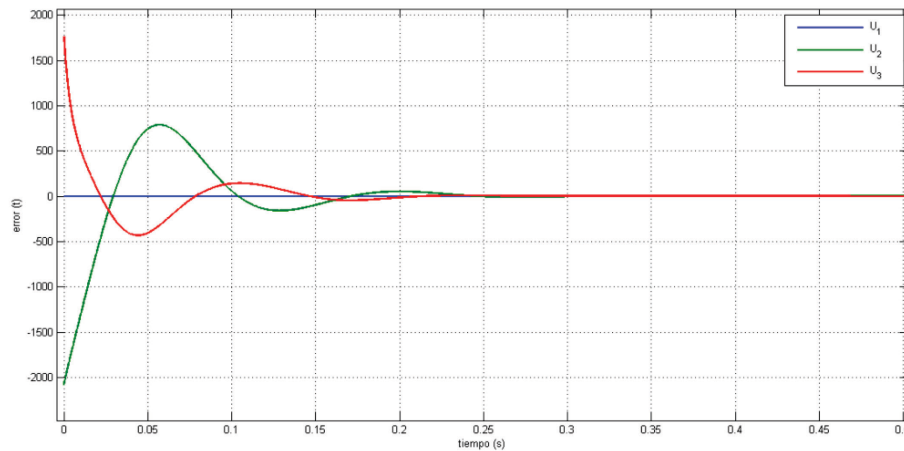


Figura 82 Señales de control en la sincronización de sistemas Lorenz fraccionario con $q_s=0.9$ y ajuste paramétrico fraccionario con $q_a=0.5$

Al cambiar el orden de la derivada fraccionaria en las leyes de ajuste, se aprecia una reducción en el error e_2 , ya que con un orden de $q_a=0.5$, éste sobre pasa el valor de 40 unidades en su amplitud, pero con $q_a=0.2$, éste error se reduce por debajo de la mencionada amplitud. Los demás errores permanecen sin modificación en su evolución.

4.3.6 Sincronización adaptable mínima de sistemas de orden fraccionario tipo Lorenz con señales U_1 y U_2

En esta sección se presenta la sincronización de sistemas de orden fraccionario con solo dos señales de control (U_1 y U_2) y con ajuste de dos parámetros. En este caso se usan dos señales como las descritas a continuación

$$\begin{aligned} U_1 &= \theta_1 e_2 / \alpha \\ U_2 &= (\theta_2 e_1 + z_s e_1 - x_m e_3) / \alpha \\ U_3 &= 0 \end{aligned} \quad (84)$$

Las leyes de ajuste que han sido elegidas son las siguientes, las cuales han sido derivadas del caso entero,

$$\begin{aligned} \frac{d^{q_a} \varphi_1}{dt^{q_a}} &= -\delta e_1 e_2 \\ \frac{d^{q_a} \varphi_2}{dt^{q_a}} &= -\delta e^2_2 \end{aligned} \quad (85)$$

donde δ es la ganancia adaptable de la ley de adaptación. En este caso se elige un sólo valor para las dos leyes de ajuste igual a 0.1.

Para este caso, se simuló los sistemas de Lorenz de orden fraccionario con $q_s=0.9$ y leyes de ajuste fraccionario con $q_a=0.9$, en la Figura 83 se muestra la evolución para el error de sincronización y en la Figura 84 se obtienen las correspondientes señales de control.

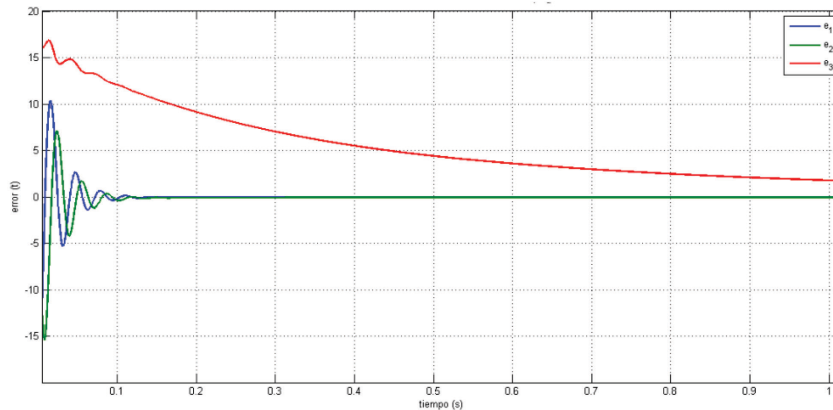


Figura 83 Error de sincronización sistemas Lorenz de orden fraccionario con $q_s=0.9$ con señales de alimentación U_1 y U_2 y ajuste de orden fraccionario $q_a=0.9$

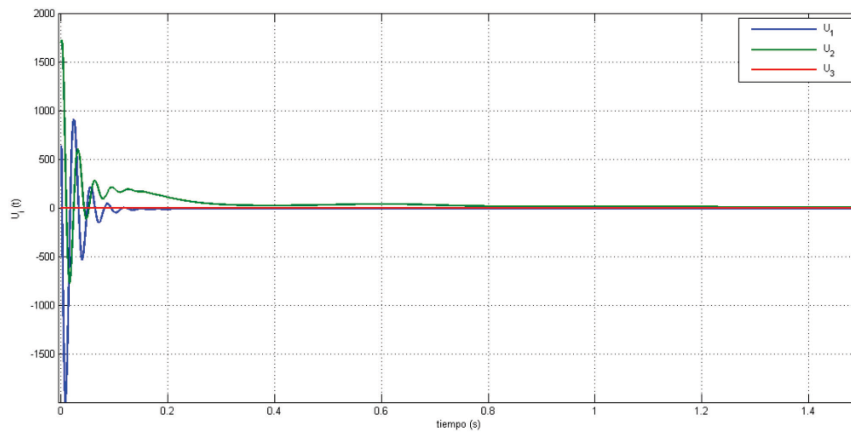


Figura 84 Señales de control de sincronización sistemas Lorenz de orden fraccionario con $q_s=0.9$ con señales de alimentación U_1 y U_2 y ajuste de orden fraccionario $q_a=0.9$

Cuando el sistema a sincronizar tiene orden $q_s=0.2$ y ajuste adaptable con $q_a=0.9$, la evolución del error de sincronización se muestra en la Figura 85, mientras que en la Figura 86 se presenta el esfuerzo de control. En la evolución del error es muy lenta respecto a otros sistemas de orden fraccionario estudiados. El esfuerzo de control para las señales U_1 y U_2 , toman valores iniciales muy grandes, pero se estabilizan en niveles cercanos a 100 y -100 decayendo muy lentamente a cero, los valores usados para las ganancias adaptables es de 0.1 para cada una.

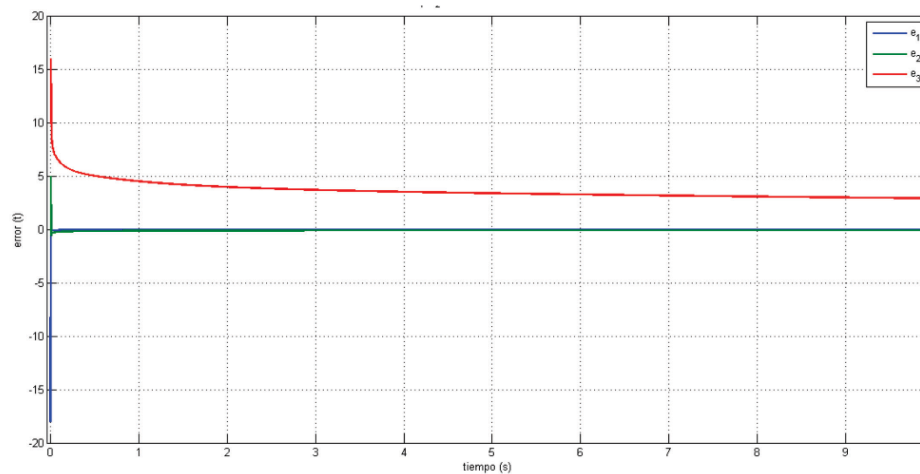


Figura 85 Error de sincronización sistemas Lorenz de orden fraccionario $q_s=0.2$ con señal de control U_1 U_2 con ajuste fraccionario con $q_a=0.9$

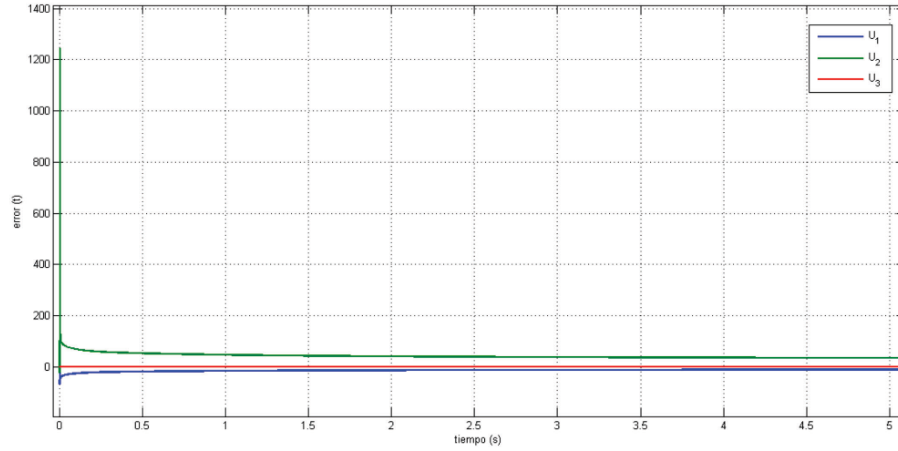


Figura 86 Señales de control U_1 U_2 para la sincronización de sistemas Lorenz fraccionarios con $q_s=0.2$ y ajuste paramétrico fraccionario con $q_a=0.9$

En todos los casos revisados en esta parte, se muestra que las señales de control usadas logran la sincronización y además que la convergencia está determinada por el orden elegido para el sistema. Si se eligen diferentes valores para el orden de las leyes adaptables esto no tiene mayor influencia en dicha convergencia. La única forma de darle celeridad a la convergencia del error de sincronización es modificando la ganancia adaptable en las de ajuste paramétrica.

4.3.7 Sincronización adaptable mínima de sistemas de orden fraccionario tipo Lorenz usando dos señales (U_1 y U_3)

En esta sección se presenta la sincronización de sistemas de orden fraccionario, usando las señales U_1 y U_3 , con el ajuste de dos parámetros. Para este caso las señales de control se escogen como sigue

$$\begin{aligned} U_1 &= \theta_1 e_2 / \alpha \\ U_2 &= 0 \\ U_3 &= (\theta_2 e_3 + x_m y_m - \alpha x_s y_s) / \alpha \end{aligned}$$

Las leyes de ajuste empleadas son

$$\begin{aligned} \frac{d^{q_a} \varphi_1}{dt^{q_a}} &= -\delta e_1 e_2 \\ \frac{d^{q_a} \varphi_2}{dt^{q_a}} &= -\delta e^2_3 \end{aligned}$$

donde δ es la ganancia de adaptación. Los errores entre el parámetro real y el estimado se definen como $\varphi_1 = \sigma - \theta_1$; $\varphi_2 = \gamma - \theta_2$

El comportamiento del error de sincronización y el esfuerzo de control para el caso de la sincronización con órdenes de sistema con $q_s = 0.9$ y orden de la ley de ajuste con $q_a = 0.9$, con una ganancia adaptable $\delta = 100$, se presentan en la Figura 87 y en la Figura 88, respectivamente.

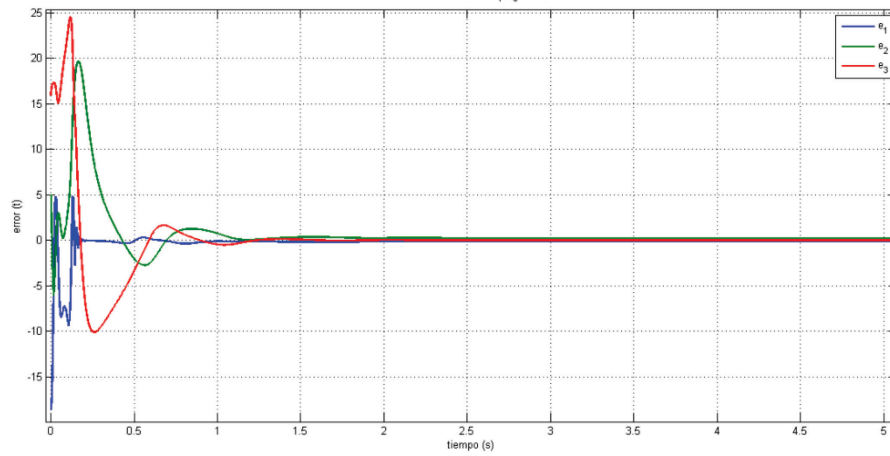


Figura 87 Error de sincronización de sistemas Lorenz de orden fraccionario con $q_s = 0.9$ y leyes de adaptación paramétricas fraccionarias con $q_a = 0.9$ con una ganancia adaptable 100 con señales de entrada U_1 y U_3

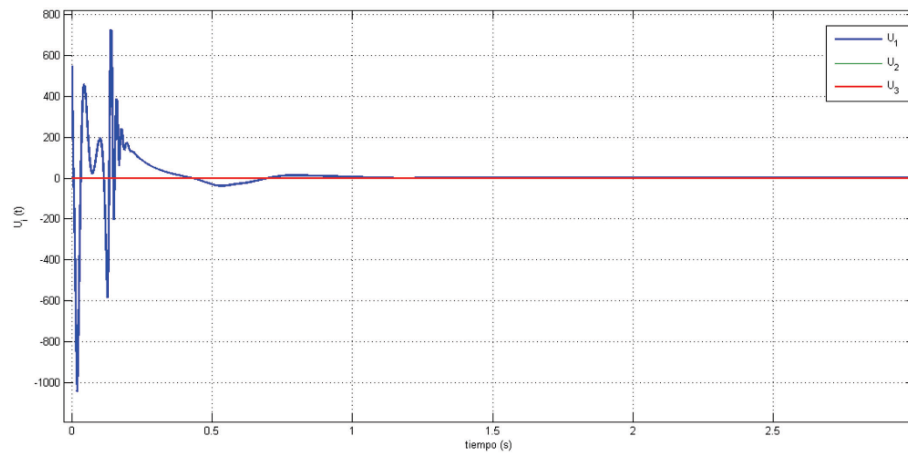


Figura 88 Esfuerzo de control para señales de control U_1 y U_3 fraccionaria en la sincronización de sistemas de Lorenz fraccionario con $q_s = 0.9$, ajuste fraccionario $q_a = 0.9$

Para este caso se hicieron cambios de la ganancia adaptable que varía de un valor de 100 a 0.1. Esto tiene como consecuencia que los transitorios tengan menor amplitud en el mismo lapso de tiempo.

Al cambiar el orden de los sistemas y usan, con valores $q_s = 0.2$, con ajuste paramétrico fraccionario $q_a = 0.9$ y ganancia adaptable 0.1, se puede ver la evolución del error de sincronización en la Figura 89, donde los errores e_3 y e_2 convergen a cero muy rápidamente, por debajo de 0.1 seg, mientras el error e_1 tiene la evolución más lenta de todos los errores. El esfuerzo de control para este caso se muestra en la Figura 90.

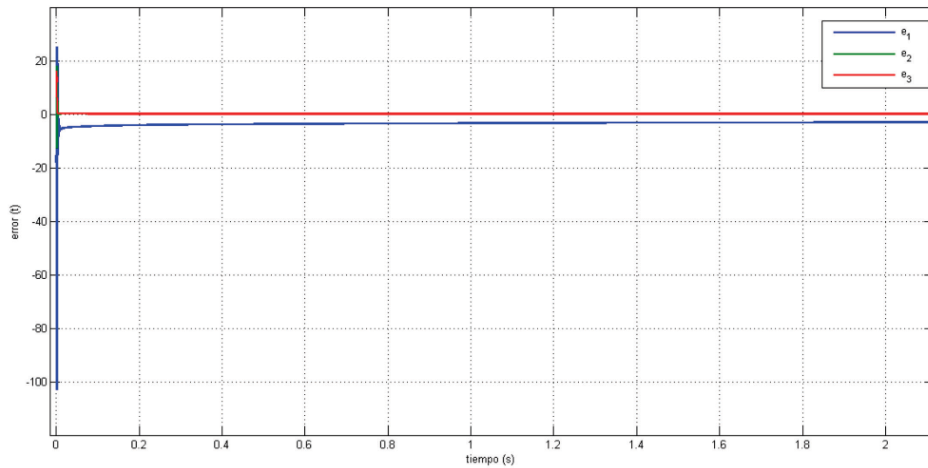


Figura 89 Error de sincronización de sistemas Lorenz fraccionario con $q_s=0.2$ y ajuste fraccionario $q_a=0.9$ con señales de entrada U_1 y U_3 ganancia 0.1

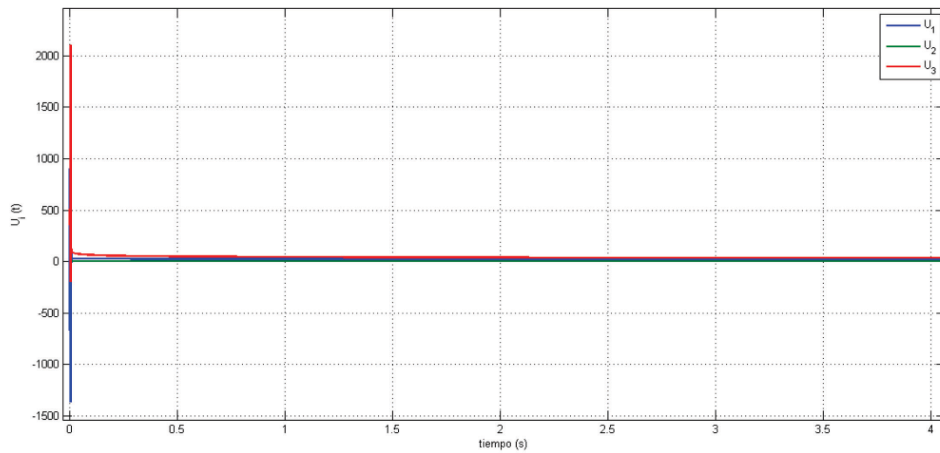


Figura 90 Señales de control para la sincronización de sistemas Lorenz de orden fraccionario $q_s=0.2$ y ajuste $q_a=0.9$ con entradas U_1 y U_3 con ganancia 0.1

Luego, por experimentación, se probaron diferentes valores del orden de la derivada fraccionaria en las leyes de ajuste, sin embargo no se consigue cambios sustanciales en la evolución del error de sincronización.

En general, de las simulaciones realizadas con sistemas de orden fraccionario del tipo Lorenz se observó que la evolución del error de sincronización es más lento cuanto menor sea el orden de la derivada fraccionaria del sistema. Sin embargo los ordenes cercanos a 0.9 tienen mayor velocidad de convergencia. Se destaca el hecho de que es posible lograr la sincronización con una sola señal de control, como las descritas en esta sección. Además se muestran combinaciones entre dos señales de control que permiten sincronizar los sistemas, denominado como sincronización mínima. Por último, los esfuerzos de control usando dos de tres señales, tienen mayores amplitudes en sus transitorios, que cuando se usa una señal de control.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

El trabajo de investigación presentado en esta Tesis se enfocó hacia el estudio de la sincronización de sistemas tipo Lorenz de orden fraccionario con parámetros desconocidos, problema para el cual aún no se ha encontrado una solución teórica completa. Debido a la complejidad de análisis, el estudio se realizó principalmente mediante simulaciones, gracias a esto, se ha logrado comprender mejor los fenómenos involucrados en el proceso de sincronización y ello permitirá desarrollos posteriores que apunten a soluciones teóricas completas para este problema.

Dentro de las estrategias estudiadas en esta Tesis, la sincronización mínima, tanto aplicada a los sistemas tipo Lorenz de orden entero como de orden fraccionario, posee ventajas con respecto a esquemas de sincronización actualmente utilizados y reportados en la literatura técnica, debido a que utiliza un mínimo número de señales tanto de control como de estados del sistema. Además, en el esquema de sincronización mínima propuesta, el esfuerzo de control resulta ser menor que en las estrategias existentes. Ello se desprende del estudio comparativo, principalmente por simulaciones pero también teórico, realizado entre las estrategias propuestas y los métodos de sincronización existentes.

Con la investigación iniciada en esta Tesis, se espera contribuir al conocimiento en esta área, en cuanto a metodologías de sincronización adaptable de sistemas fraccionarios, permitiendo extender el abanico de posibilidades en el estudio de sincronización de sistemas dinámicos con parámetros desconocidos.

Respecto a las simulaciones del sistema de Lorenz aislado, de orden fraccionario, éste presenta tres tipos de comportamiento; uno convergente hacia uno de los puntos de equilibrio del sistema original ($q < 0.98$), otro caótico ($0.99 \leq q \leq 1.17$) y un último divergente ($q > 1.17$). En el primer caso esta convergencia depende de las condiciones iniciales del sistema fraccionario.

Por otra parte, se logró demostrar que es posible la sincronización de dos sistemas dinámicos de Lorenz de orden fraccionario y entero, por medio de una estrategia indirecta que hace uso de un observador adaptable y de tres señales de control basadas en el observador. Con lo cual, el problema de sincronización involucra 9 variables de estado (tres errores de sincronización, tres errores de estimación de estado y tres errores de estimación de parámetros), que lo convierte en un problema complejo y con características especiales (no lineal y variante en el tiempo).

En cuanto a la sincronización adaptable directa de sistemas de orden entero, se verificó que con dos señales de control, convenientemente elegidas, y con una o dos ganancias adaptables, se logra la sincronización de ambos sistemas sin necesidad de una identificación paramétrica.

En relación al proceso de sincronización mínima adaptable de sistemas tipo Lorenz de orden entero, se logró comprobar, mediante simulaciones junto a una demostración teórica que fundamenta el método de sincronización, que es posible lograr la sincronización con un número reducido de señales de entrada y leyes de ajuste de uno o dos parámetros del controlador.

También se demostró que la sincronización mínima de sistemas tipo Lorenz de orden fraccionario no adaptable, se puede lograr mediante un procedimiento novedoso con la incorporación del criterio de Routh Hurwitz extendido a sistemas fraccionarios, empleando solamente dos señales de control convenientemente elegidas.

Finalmente, mediante simulaciones se comprobó que se logra la sincronización adaptable mínima de sistemas tipo Lorenz de orden fraccionario, ajustando uno o dos parámetros y empleando un número reducido de señales de control (una o dos). En este punto, se sugiere a futuro realizar estudios que conduzcan a obtener una fundamentación teórica, que explique adecuadamente el fenómeno de sincronización mínima reportado en esta Tesis.

Como el fenómeno de sincronización de dos o más sistemas no es un problema exclusivo del área de control de sistemas en el ámbito de la ingeniería, se espera que los resultados obtenidos puedan trasladarse como una metodología estándar hacia aplicaciones tan diversas como oferta y demanda en economía, o relaciones humanas en sociología, entre otros temas, penetrando otras áreas del conocimiento.

Como trabajo futuro y teniendo en cuenta los resultados contenidos en este trabajo, se propone iniciar un estudio teórico que sea capaz de explicar los resultados obtenidos mediante simulaciones. De igual forma, resulta conveniente hacer extensivo el método de sincronización mínimo y no mínimo para sistemas de orden fraccionario diferentes al de tipo Lorenz estudiado en esta Tesis.

Referencias

- [1] Y. Bolotin, A. Tur, y V. Yanovsky, *Chaos: concepts, control and constructive use*. Berlin, 2009.
- [2] A. Pikovsky, M. Roseblum, K. Jürgen, *Synchronization: a universal concept in non linear sciences*. Postdam: Cambridge, 2001.
- [3] J. W. Strutt, *The theory of sound* vol. 1. New York: Dover Publications, 1945.
- [4] E. Appleton, "The automatic synchronization of triode oscillator," *Proceeding Cambridge Philosophie Society. (Mathematics and Physical Science)*, vol. 21, pp. 231-248, 1922.
- [5] W. Eccles and J. Vincent, 1920.
- [6] W. Eccles and J. Vincent, "On the variations of wave-length of the oscillations generated by three-electrode thermionic tubes due to changes in filament current, plate voltage, grid voltage, or coupling," *Proceedings of the Royal Society of London Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 96, pp. 455-465, 1920.
- [7] L. Pecora and T. Carroll, "Synchronization in chaotic systems," *The american physical society*, vol. 64, 1990.
- [8] T. Kapitaniak and L. O. Chua, "Locally-intermingled basins of attraction in coupled Chua's," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 9, pp. 271-282, 1996.
- [9] R. Femat and G. Solis-Perales, *Robust synchronization of chaotic systems via feedback*: Springer, 2008.
- [10] N. F. Rulkov, "Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems," *Physical Review*, vol. 51, pp. 980-994, 1995.
- [11] M. G. Roseblum and A. S. Pikovsky, "Phase synchronization of chaotic oscillators," *Physics Review Letters*, vol. 76, p. 1804, 1996.
- [12] B. Xin, T. Chen, Y. Liu, "Projective synchronization of chaotic fractional -order energy resources demand-supply systems via linear control," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011.
- [13] J. Sabatier, M. Cugnet, S. Laurelle, S. Grugeon, I. Chanteau, B. Sahut, A. Oustalop, J.M. Tarascon, "A fractional order for lead-acid battery crankability estimation," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 15, pp. 1308 - 1317, 2010.
- [14] J. C. Sprott, "Dynamical models of happiness," *Nonlinear Dynamics Psychology and Life Sciences*, vol. 9, pp. 23-36, 2005.
- [15] L. Song, S. Xu, J. Yang, "Dynamical models of hapiness with fractional order," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 15, pp. 616-628, 2010.
- [16] S. Westerlund and L. Ekstam, "Capacitor Theory," *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, vol. 1, pp. 826-839, 1994.
- [17] H. Du, Q. Zeng, C. Wang, "Function projective synchronization of different chaotic systems with uncertain parameters," *Physics Letters A*, pp. 5402-5410, 2008.
- [18] J. H. Park, "Adaptive control for modified projective synchronization of a four dimensional chaotic system with uncertain parameters," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 213, pp. 288-293, 2008.

- [19] M. Hu, Z. Xu, R. Zhang, A. Hu, "Parameters identification and adaptive full state hybrid projective synchronization of chaotic (hyper-chaotic) systems," *Physics Letters A*, vol. 361, pp. 231-237, 2007.
- [20] H. Zhu, S. Zhou, Z. He, "Chaos and synchronization of the fractional-order Chua's systems," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 39, pp. 1595-1603, 2009.
- [21] Z. M. Odibat, "Adaptive feedback control and synchronization of non-identical chaotic fractional order systems," *Nonlinear dynamics*, vol. 60, pp. 479-487, 2010.
- [22] M. Reza Faieghi and H. Delavari, "Chaos in fractional-order Genesio-Tesi system and its synchronization," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 17, pp. 731-741, 2012.
- [23] E. Lorenz, "Deterministic nonperiodic flow," *Journal of the Atmospheric Sciences*, vol. 20, pp. 130-141, 1963.
- [24] O. E. RöSSLer, "An equation for continuous chaos," *Physics Letter A*, vol. 57, pp. 397-398, 1976.
- [25] G. Chen and T. Ueta, "Yet another chaotic attractor," *International Journal of Bifurcations and Chaos*, vol. 9, pp. 1465-1466, 1999.
- [26] J. Lü and G. Chen, "A new chaotic attractor coined," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 12, pp. 659-661, 2002.
- [27] R. Mainieri and J. Rehacek, "Projective synchronization In three-dimensional chaotic systems," *Physical Review Letters*, vol. 82, pp. 3042-3045, 1999.
- [28] Z. Li and D. Xu, "Stability criterion for projective synchronization in three-dimensional chaotic systems," *Physics Letters A*, vol. 282, pp. 175-179, 2001.
- [29] G. H. Li, "Generalized projective synchronization of two chaotic systems by using active control," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 30, pp. 77-82, 2006.
- [30] G. H. Li, "Modified projective synchronization of chaotic system," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 32, pp. 1786-1790, 2007.
- [31] Q. Zeng, H. Du, C. Wang, "Modified function projective synchronization of chaotic system," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 42, pp. 2399-2404, 2009.
- [32] S. Sudheer and M. Sabir, "Switched modified function projective synchronization of hyperchaotic Qi systems with uncertain parameters," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 15, pp. 4058-4064, 2010.
- [33] M. C. Ho, Y.C. Hung, Z.C. Liu, I.M. Jiang, "Reduced-order synchronization of chaotic systems with parameters unknown," *Physics Letters A*, vol. 348, pp. 251-259, 2006.
- [34] M. M. Al-sawalha and M. S. M. Noorami, "Adaptive reduced-order antisynchronization of chaotic systems with fully unknown parameters," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 15, pp. 3022-3034, 2010.
- [35] H. Salarieh and A. Alasty, "Adaptive chaos synchronization in Chua's systems with noisy parameters," *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 79, pp. 233-241, 2008.
- [36] H. Salarieh and M. Shahrokhi, "Adaptive synchronization of two different chaotic systems with time varying unknown parameters," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 37, pp. 125-136, 2008.
- [37] M. Lin, J. Cai, Z. Yuan, "Adaptive synchronization between two different chaotic systems with uncertainties," in *2009 International Workshop on chaos-fractals Theories and applications*, 2009.
- [38] L. Zhang, "Adaptive synchronization of generalized Lorenz systems with unknown parameters," in *Asia Pacific Conference Wearable Computing Systems*, 2010, pp. 28-31.
- [39] G. Celikovskiy and G. Chen, "On a generalized Lorenz canonical form of chaotic systems," *Journal Bifurcation Chaos*, vol 12, pp. 1789-1812, 2002.

- [40] M. Feki, "An adaptive chaos synchronization scheme applied to secure communication," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 18, pp. 141-148, 2003.
- [41] X. Mu and L. Pei, "Synchronization of near-identical chaotic systems with the known parameters," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 34, pp. 1788-1797, 2010.
- [42] E. M. Elabbasy, H.N. Agiza, M.M. El-Dessoky, "Adaptive synchronization of Lü system with uncertain parameters," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 21, pp. 657-667, 2004.
- [43] T. Gao, Z.Chen, Z. Yuan, D.Yu, "Adaptive synchronization of a new hyperchaotic system with uncertain parameters," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 33, pp. 922-928, 2007.
- [44] H. Fotsin and P. Wofo, "Adaptive synchronization of a modified and uncertain chaotic Van der Pol-Duffing oscillator based on parameter identification," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 24, pp. 1363-1371, 2005.
- [45] H. Fotsin and S. Bowong, "Adaptive control and synchronization of chaotic systems consisting of Van der Pol oscillators coupled to linear oscillators," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 27, pp. 822-835, 2006.
- [46] S. S. Delshad, A. Abolmasoumi, M.Hamidi, "Adaptive synchronic of uncertain hyperchaotic Lorenz systems based on parameter identification," in *7th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE 2010)*, Tuxtla Gutierrez, Chiapas Mexico, 2010, pp. 6-9.
- [47] C. K. Ahn, "Adaptive H_∞ chaos antisynchronization," *Chinese Physics Letter*, vol. 27, pp. 1- 4, 2010.
- [48] M. M. Asheghan and M. T. H. Beheshti, "An LMI approach to robust synchronization of a class of chaotic systems with gain," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 42, pp. 1106 - 1111, 2009.
- [49] T. Y. Chiang, J.S.Lin, T.L. Liao, J.J. Yan, "Anti-synchronization of uncertain chaotic systems with dead zone nonlinearity," *Nonlinear Analysis*, vol. 68, pp. 2629 - 2637, 2008.
- [50] H. T. Yau and C. L. Kuo, "Fuzzy sliding mode control for a class of chaos synchronization with uncertainties," *International Journal Of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, vol. 7, pp. 333 - 338, 2006.
- [51] J. Zhao and K. Zhang, "Adaptive function Q-S synchronization of chaotic systems with unknown parameters," *International Journal Of adaptive control and signal processing*, vol. 24, pp. 675-686, 2010.
- [52] Z. Yan, "Chaos Q-S synchronization between Rössler system and the new unified chaotic system," *Physics Letters A*, vol. 334, pp. 406-412, 2005.
- [53] T. Matsumoto, "A chaotic attractor from Chua's circuit," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 31, pp. 1055-1058, 1984.
- [54] C. Li and G. Chen, "Chaos and hyperchaos in the fractional-order Rössler equations," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 341, pp. 55-61, 2004.
- [55] Z. M. Ge and C. Y. Ou, "Chaos synchronization of fractional order modified duffing systems with parameters excited by a chaotic signal," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 4, pp. 705-717, 2008.
- [56] K. Sun, X.Wang, J.C. Sprott, "Bifurcations and chaos in fractional-order simplified Lorenz system," *International Journal of Bifurcations and chaos*, vol. 20, pp. 1209-1219, 2010.
- [57] I. Petras, "Chaos in the fractional-order Volta's systems: modelling and simulation," *Nonlinear Dynamics*, vol. 57, pp. 157 - 170, 2009.
- [58] D. Matignon, "Stability properties for generalized fractional differential systems," *ESAIM: Proceedings, Fractional Differential Systems: Models, Methods and Applications.*, vol. 5, pp. 145-158, 1998.

- [59] L. Shan, Z. Liu, J. Li, Z. Wang, "A new fractional-order chaotic systems and its synchronization control," presented at the Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese control Conference, Shanghai, P.R.China, 2009.
- [60] C. Li and J. Yan, "The synchronization of three fractional differential systems," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 32, pp. 751-757, 2007.
- [61] L. Pan, W. Zhou, J. Fang, D. Li, "Synchronization and anti-synchronization of new uncertain fractional-order modified unified chaotic systems via novel active pinning control," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 15, pp. 3754-3762, 2010.
- [62] L. Pan, W. Zhou, L. Zhou, K. Sun, "Chaos Synchronization between two different fractional-order hyperchaotic systems," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, pp. 2628-2640, 2011.
- [63] Z. Odibat, N. Corson, M. Aziz-Alaoui, "Synchronization of chaotic fractional-order systems via linear control," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 20, pp. 1-15, 2010.
- [64] S. Bhalekar and V. Daftardar Gejji, "Synchronization of different fractional order chaotic systems using active control," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 15, pp. 3536-3546, 2010.
- [65] A. Matouk, "Chaos, Feedback control and Synchronization of a fractional-order modified autonomous Van der Pol-Duffing circuit," *Communication Nonlinear Science Numerical Circuit*, vol. 16, pp. 975-986, 2011.
- [66] A. Matouk, "Chaos synchronization between two different fractional Systems of Lorenz family," *Mathematical Problems in Engineering*, pp. 1-11, 2009.
- [67] B. Xin, T. Chen, Y. Liu, "Synchronization of chaotic fractional-order WINDMI Systems via linear state error feedback control," *Mathematical Problems in Engineering*, pp. 1-10, 2010.
- [68] M. M. Asheghan, M.T.H. Behesthi, M. S. Tavazoei, "Robust synchronization of perturbed Chen's fractional-order chaotic systems," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010.
- [69] X. D. Zhang, P. D. Zhao, A. H. Li, "Construction of a new fractional chaotic system and generalized synchronization," *Communication Theory Physics*, vol. 53, pp. 1105-1110, 2010.
- [70] P. Zhou, F. Kuang, Y.M. Cheng, "Generalized projective synchronization for fractional order chaotic systems," *Chinese Journal Of Physics*, pp. 49-56, 2010.
- [71] Xingyuan, "Projective synchronization of fractional order chaotic system based on linear separation," *Physics Letters A*, vol. 372, pp. 435-441, 2008.
- [72] P. Zhou and Y. M. Cheng, "One specific state Variable for a class of fractional-order chaotic system and Its Application," *Chinese Physics Letter*, vol. 12, pp. 1-4, 2009.
- [73] L. Shan, Z. Liu, J. Li, Z. Wang, "A new fractional-order chaotic systems and it's synchronization control," in *Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference*, Shanghai, 2009, pp. 5918-5922.
- [74] Y. Yongguang, H. X. Li, Y. Su, "The synchronization of three chaotic fractional -order Lorenz systems with birectional coupling," *Journal of Physics: conference Series 96*, pp. 1-8, 2008.
- [75] K. Yin and Y. Chu, "Adaptive synchronization of the fractional-order chaotic systems with unknown parameters," in *International Conference on Electrical and Control Engineering*, 2010, pp. 351-355.

- [76] J. H. Ma and Y. S. Chen, "Study for the bifurcation topological structure and the global compliates character of a kind of nonlinear finance systems," *Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 22, pp. 1375-1382, 2001.
- [77] L. G. Yuan and Q. G. Yang, "Parameter identification and synchronization of fractional-order chaotic systems," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 17, pp. 305-316, 2011.
- [78] Z. Odibat, "Adaptive feedback control and synchronization of non-identical chaotic fractional order systems," *Nonlinear dynamics*, vol. 60, pp. 479-487, 2010.
- [79] R. X. Zhang and S. P. Yang, "Adaptive synchronization of fractional-order chaotic systems via a single driving variable," *Nonlinear Dynamics*, 2011.
- [80] R. X. Zhang and S. P. Yang, "Adaptive synchronization of fractional-order chaotic systems," *Chinese Physics B*, vol. 19, pp. 1-8, 2010.
- [81] R. X. Zhang and S. P. Yang, "Adaptive lag synchronization and parameter identification of fractional order chaotic systems," *Chinese Physics B*, vol. 20, pp. 1-4, 2011.
- [82] J. Hu, Y. Han, L. Zhao, "Synchronizing chaotic systems using control based on a special matrix structure and extending chaotic systems," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 15, pp. 115-123, 2010.
- [83] T. C. Lin and T. Y. Lee, "Chaos synchronization of uncertain fractional-order chaotic systems with time delay based on adaptive fuzzy sliding mode control," *IEEE Transactions on fuzzy systems*, vol. 19, pp. 623-635, 2011.
- [84] S. Oancea, F. Grosu, A. Lazar, I. Grosu, "Master-slave synchronization of Lorenz systems using a single controller," *Chaos, Solitons and Fractals* vol. 41, pp. 2575-2580, 2009.
- [85] S. Chen, F. Wang, C. Wang, "Synchronizing strict-feedback and general strict-feedback chaotic systems via a single controller " *Chaos Solitons and fractals*, vol. 20, pp. 235-243, 2004.
- [86] Z. Zhang, H. Shao, Z. Wang, H. Shen, "Reduced-order observer design for the synchronization of the generalized Lorenz chaotic systems," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 218, pp. 7614-7621, 2012.
- [87] Y.-W. Wang, C. Wen, M. Yang, J.W. Xiao, "Adaptive control and synchronization for chaotic systems with parametric uncertainties," *Physics Letters A* vol. 372, pp. 2409-2414, 2008.
- [88] C.-C. Yang, "Adaptive control and synchronization of identical new chaotic flows with unknown parameters via single input," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 216, pp. 1316-1324, 2010.
- [89] R. Guo, "A simple adaptive controller for chaos and hyperchaos synchronization," *Physics Letters A*, vol. 372, pp. 5593-5597, 2008.
- [90] F. Chen, C. Zhang, G. Ji, S. Zhou, "Lu System Chaos Synchronization Using Single Variable Feedback," presented at the Proceedings of the 29th Chinese Control Conference, Beijing, 2011.
- [91] Y.-W. Wang, C. Wen, S. Y. Chai, J. W. Xiao, "Adaptive control and synchronization for a class of nonlinear chaotic systems using partial system states," *Physics Letters A*, vol. 351, pp. 79-84, 2006.
- [92] J.-W. Xiao, J. Gao, Y. Huang, Y. W. Wang, "Reduced-order adaptive control design for the stabilization and synchronization of a class of nonlinear chaotic systems," *Chaos, Solitons and Fractals* vol. 42, pp. 1156-1162, 2009.
- [93] S. Das, *Functional fractional calculus for system identification and controls*. Mumbai, 2008.

- [94] K. Oldham and J. Spanier, *The fractional calculus* vol. 1. New York: Academic Press, 1974.
- [95] K. Oldham and J. Spanier, *The fractional calculus: theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*. Mineola, New York, 2002.
- [96] L. Vazquez and M. P. Velasco, "El calculo fraccionario como instrumento de modelización," in *Prepublicaciones del departamento de matemática aplicada*, Madrid, 2011.
- [97] A. Kilbas, H. Srivastava, J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*. Amsterdam: Elsevier, 2006.
- [98] I. Podlubny, *Fractional differential equations*, vol. 198. San Diego: Academic Press, 2000.
- [99] E. Ahmed, A.M.A El-Sayed, H. A.A. El-Saka, "On some Routh-Hurwitz conditions for fractional order differential equations and their applications in Lorenz, Rössler, Chua and Chen systems.," *Physics Letter A*, vol. 358, pp. 1-4, 2006.
- [100] A. P. Mishina and I. V. Proskuryakov, *Higher Algebra*. Nauka-moscow, 1965.
- [101] A. N. Pisarchik and R. Jaimes-Reategui, "Intermittent lag synchronization in a nonautonomous system of coupled oscillators," *Physics Letter A*, vol. 338, pp. 141- 149, 2005.
- [102] E. Ott, C. Grebogi, J.Yorke, "Controlling chaos," *Physics Review Letter*, pp. 1196-1199, 1990.
- [103] H. Park and O. M. Kwon, "A novel criterion for delayed feedback control of time-delay chaotic systems," *Chaotic, Solitons and Fractals*, pp. 495-501, 2005.
- [104] W. Xiao-Qun and L. Jun-An, "Parameter identification and backstepping control of uncertain Lü system," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 18, pp. 721-729, 2003.
- [105] L. Chen, S. Wei, Y. Chai, R. Wu, "Adaptive projective synchronization between two different fractional-order chaotic systems with fully unknown parameters," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2012, pp. 1-16, 2012.
- [106] F. Amaya, "Informe de avance memoria Ingeniería Civil Eléctrica," Departamento Ingeniería Eléctrica, Universidad de Chile, Santiago, Chile, 2011.