



**UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA**

**APLICACION DE SERIES DE FOURIER A LA RESOLUCION DE PROBLEMAS
DE CAPA LIMITE CON TRANSFERENCIA DE CALOR Y MASA**

**TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS DE
LA INGENIERIA MENCION FLUIDODINAMICA**

MARCO ANTONIO ROSALES VERA

SANTIAGO DE CHILE
2012



**UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA**

**APLICACION DE SERIES DE FOURIER A LA RESOLUCION DE PROBLEMAS
DE CAPA LIMITE CON TRANSFERENCIA DE CALOR Y MASA**

**TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS DE
LA INGENIERIA MENCION FLUIDODINAMICA**

MARCO ANTONIO ROSALES VERA

**PROFESOR GUIA:
ALVARO VALENCIA MUSALEN**

**MIEMBROS DE LA COMISION:
YARKO NIÑO CAMPOS
RAMÓN FREDERICK GONZALEZ
ANTONIO SANCHEZ PEREZ
RAMON FUENTES AGUILAR**

**SANTIAGO DE CHILE
JULIO 2012**

RESUMEN

Esta tesis comprende el estudio matemático de las ecuaciones de Capa Límite mediante series de Fourier. Las ecuaciones de Capa Límite son una simplificación de las ecuaciones de Navier-Stokes, el carácter elíptico de las ecuaciones de Navier-Stokes es eliminado mediante una aproximación en términos del número de Reynolds, de esta forma las ecuaciones toman un carácter parabólico lo que permite resolverlas avanzando con la integración en la dirección del flujo sin necesidad de retroceder en la integración numérica, esto lleva consigo la simplificación del algoritmo de resolución y ahorro de tiempo de cálculo.

Las ecuaciones de Capa Límite fueron introducidas por primera vez por L. Prandtl en 1904 y desde entonces son ocupadas extensamente por investigadores e ingenieros, debido principalmente a su simplicidad y buenos resultados que entregan, además, por su forma simplificada respecto de las ecuaciones de Navier-Stokes, las ecuaciones de Capa Límite permiten obtener una visión conceptual clara de los fenómenos que son descritos mediante éstas ecuaciones.

En muchos flujos de interés en ingeniería como por ejemplo: chorros, plumas, flujos en canales a superficie libre, transferencia de calor y masa en una placa plana, pueden ser aplicadas las ecuaciones de Capa Límite y estas entregan resultados que andan en muy buen acuerdo con los resultados obtenidos con las ecuaciones completas de Navier-Stokes.

En este trabajo se resuelven problemas del tipo Capa Límite como los mencionados anteriormente, mediante el uso de Series de Fourier. De esta forma, se construyó un algoritmo en el cual las únicas variables de entrada sean los perfiles iniciales de velocidad, temperatura, concentración, etc.

El método consiste esencialmente en transformar las ecuaciones de la capa límite en un set infinito de ecuaciones diferenciales ordinarias en la variable x mediante las Series de Fourier. Entonces se toma como aproximación del continuo, un número N de las ecuaciones anteriores y se resuelven por medio de los métodos estándar de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias. El número N de ecuaciones diferenciales ordinarias consideradas es tal que la solución no difiera de la solución con $N-1$ ecuaciones.

Esta Tesis muestra que el método propuesto es una eficiente alternativa para el estudio de las ecuaciones de Capa Límite, donde los resultados numéricos entregados por esta metodología compiten bastante bien con los métodos clásicos establecidos como diferencias finitas el método de disparo y elementos finitos. Este trabajo dio como fruto la publicación de varios artículos en revistas especializadas en transferencia de calor y matemáticas aplicadas.

ABSTRACT

This thesis includes the mathematical study of the boundary layer equations using Fourier series. The boundary layer equations are a simplification of the Navier-Stokes equations, the elliptical character of the Navier-Stokes equations is removed by an approximation in terms of the Reynolds number, thus the parabolic equations take a character which allows resolve to move forward with integration in the direction of flow without falling back on the numerical integration, this involves simplifying the resolution algorithm and saving computation time.

The boundary layer equations were first introduced by L. Prandtl in 1904 and since then are employed extensively by researchers and engineers, mainly due to its simplicity and good results they deliver, in addition, a simplified form for the Navier-Stokes equations, the boundary layer equations allow to obtain a conceptual view clear phenomena are described by these equations.

In many flows of interest in engineering such as: jets, plumes, flows in channels with free surface, heat and mass transfer in a flat plate, can be applied boundary layer equations and these deliver results that go in very good agreement with the results obtained with the complete equations of Navier-Stokes equations.

In this paper we solve problems such as the Boundary Layer above, by using Fourier series. Thus, an algorithm was constructed in which the only input variables are the initial profiles of velocity, temperature, concentration, etc.

The method is essentially to transform the boundary layer equations into a system of ordinary differential equations in the variable x using the Fourier series. Then taken as an approximation of the continuum, a number N of the above equations and solved by standard methods to ordinary system of differential equations. The number N of ordinary differential equations is considered such that the solution does not differ from the solution with $N-1$ equations.

This thesis shows that the proposed method is an efficient alternative for the study of boundary layer equations, where the numerical results provided by this methodology compete quite well with established classical methods such as finite difference method and finite-element shot. This work has resulted in the publication of several articles in professional journals in heat transfer and applied mathematics.

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi agradecimiento a todas las personas que contribuyeron a la realización y desarrollo de este estudio. En especial:

A mi profesor guía el Dr. Alvaro Valencia, a mis profesores de comisión, el Dr. Ramón Fuentes, Dr. Ramón Frederick, Dr. Yarko Niño y el Dr. Antonio Sánchez, por la infinidad de conocimientos que me han entregado a lo largo de todos estos años.

A CODELCO CHILE y su filial IM2, por el patrocinio de este trabajo, en el marco de su programa de Investigación e Innovación Tecnológica.

INDICE

1. Introducción	1
1.1 Motivación	1
1.2 Objetivos	2
1.3 Organización de la tesis	
2. Antecedentes generales	3
2.1 Ecuaciones de Capa Límite	3
2.2 Series de Fourier	6
3. Formulación del problema	10
3.1 Representación del campo de velocidad y temperatura en series de Fourier	9
3.2 Método numérico	12
4. Aplicación de las series de Fourier a las ecuaciones de capa límite con similitud	15
4.1 Introducción	15
4.2 Análisis	17
4.3 Método Numérico	18
4.4 Análisis asintótico	19
4.5 Resultados	21
4.6 Conclusiones	26
5. Problema de Graetz	27
5.1 Introducción	27
5.2 Planteamiento del problema	28
5.3 Análisis	29
5.4 Resultados	30
5.5 Conclusiones	33
6. Aplicación de las series de Fourier a flujos no desarrollados en ductos	34
6.1 Transferencia de Calor en la entrada de un ducto	34
6.1.1 Flujo en la entrada de un canal	35
6.1.2 Método Numérico	41
6.1.3. Resultados	44
6.1.4 Análisis Asintótico	50
6.2 Transferencia de Calor en un canal plano con una expansión brusca	51

6.3 Conclusiones	55
7. Aplicación de las series de Fourier a flujos tipo chorros	56
7.1 Introducción	56
7.2 Planteamiento del problema	58
7.3 Método Numérico	60
7.4 Resultados	61
7.4.1 Chorro Libre	61
7.4.2 Chorro vertical con flotación	63
7.4.3 Chorro conductor y con flotabilidad	65
7.5 Conclusiones	72
8. Conclusiones generales	73
9. Referencias	74

1. INTRODUCCION

1.1 Motivación

A cien años de la introducción de las ecuaciones de Capa Límite por Prandtl, aún hoy se siguen ocupando en forma recurrente por los investigadores e ingenieros, debido principalmente a su simplicidad y buenos resultados que entregan, además, por su forma simplificada respecto de las ecuaciones de Navier-Stokes. Las ecuaciones de Capa Límite permiten obtener una visión conceptual clara de los fenómenos que son descritos mediante éstas ecuaciones.

Las ecuaciones de Capa Límite son una simplificación de las ecuaciones de Navier-Stokes. El carácter elíptico de las ecuaciones de Navier-Stokes es eliminado mediante una aproximación en términos del número de Reynolds. De esta forma las ecuaciones toman un carácter parabólico, lo que permite resolverlas avanzando con la integración en la dirección del flujo sin necesidad de retroceder. Esto lleva consigo la simplificación del algoritmo de resolución y ahorro de tiempo de cálculo.

En muchos flujos de interés en ingeniería, como por ejemplo: chorros, plumas, flujos en canales a superficie libre, transferencia de calor y masa en una placa plana, pueden ser aplicadas las ecuaciones de Capa Límite y estas entregan resultados que andan en muy buen acuerdo con los resultados obtenidos con las ecuaciones completas de Navier-Stokes.

En este trabajo, la motivación está en resolver problemas del tipo Capa Límite como los mencionados anteriormente, mediante el uso de Series de Fourier. De esta forma, se construirá un algoritmo en el cual las únicas variables de entrada sean los perfiles iniciales de velocidad, temperatura, concentración, etc.

Las Series de Fourier pueden representar soluciones complejas a las ecuaciones de Capa Límite, como por ejemplo, aquellos casos en que las ecuaciones de Capa Límite no presentan una solución autosimilar. Además, este método permite predecir sin mayores problemas las zonas de flujo inverso, entregando soluciones adecuadas a problemas donde la geometría presenta expansiones bruscas que dan origen a zonas de recirculación.

El método consiste esencialmente en transformar las ecuaciones de la Capa Límite en un set infinito de ecuaciones diferenciales ordinarias en la variable x mediante las Series de Fourier. Entonces se toma como aproximación del continuo, un número N de las ecuaciones anteriores y se resuelven por medio de los métodos estándar de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias. El número N de ecuaciones diferenciales ordinarias consideradas es tal que la solución no difiera de la solución con $N-1$ ecuaciones.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivos generales

El principal objetivo de este trabajo es resolver las ecuaciones de Capa Límite Laminar, incluyendo transferencia de calor o masa para diversas aplicaciones ocupando Series de Fourier, como por ejemplo: Transferencia de Calor en un ducto plano, Expansiones Bruscas y Chorros Libres, además de incursionar en problemas más complejos como son la Convección Natural y la Combustión.

De esta forma se pretende establecer claramente que las Series de Fourier es un método viable para resolver problemas de transferencia de calor y masa capaz de competir con los métodos establecidos como por ejemplo diferencias finitas, volúmenes de control entre otros.

1.2.2 Objetivos específicos

Como objetivos específicos de este trabajo, se tienen:

- La aplicación de series de Fourier a problemas de Capa Límite que tienen soluciones de similitud.
- La aplicación de las series de Fourier al problema de Graetz.
- La aplicación de las series de Fourier a problemas transferencia de calor en ductos
- La aplicación de las series de Fourier a flujos tipo chorros

1.3 Organización de la tesis

Esta Tesis está organizada de la siguiente forma, a partir de una breve introducción sobre las ecuaciones de Capa Límite y las series de Fourier, se hace un análisis teórico de la aplicación de estas series en la resolución de las ecuaciones de Capa Límite, para posteriormente, hacer aplicaciones específicas en los problemas planteados en los objetivos.

2. ANTECEDENTES GENERALES

2.1 Ecuaciones de Capa Límite

Las ecuaciones de Capa Límite son una simplificación de las ecuaciones de Navier-Stokes. El carácter elíptico de las ecuaciones de Navier-Stokes es eliminado mediante una aproximación en términos del número de Reynolds. De esta forma las ecuaciones toman un carácter parabólico, lo que permite resolverlas avanzando con la integración en la dirección del flujo sin necesidad de retroceder. Esto lleva consigo la simplificación del algoritmo de resolución y ahorro de tiempo de cálculo.

En muchos flujos de interés en ingeniería como por ejemplo: chorros, plumas, flujos en canales a superficie libre, transferencia de calor y masa en una placa plana, etc. pueden ser aplicadas las ecuaciones de Capa Límite y estas entregan resultados que andan en muy buen acuerdo con los resultados obtenidos con las ecuaciones completas de Navier-Stokes.

En este trabajo se pretende resolver problemas del tipo Capa Límite como los mencionados anteriormente, mediante el uso de Series de Fourier. De esta forma se construirá un algoritmo en el cual las únicas variables de entrada sean los perfiles iniciales de velocidad, temperatura y concentración. Este enfoque permite transformar las ecuaciones a derivadas parciales en un set de ecuaciones diferenciales ordinarias, cuya resolución es más simple y se puede tratar de forma modular, en general estos métodos son conocidos como métodos espectrales.

En cuanto a la precisión numérica de los métodos espectrales, en la literatura existen ejemplos donde los métodos espectrales entregan mejor precisión que los métodos de diferencias finitas [1]. Incluso en problemas clásicos, como el flujo a lo largo de una placa plana, los resultados numéricos con diferencias finitas presentan diferencias significativas con respecto a la solución exacta de Blasius debido a los fuertes gradientes que existen en la punta de la placa [2]. La Figura 2.1 muestra un ejemplo de las diferencias numéricas obtenidas para el flujo sobre una placa plana.

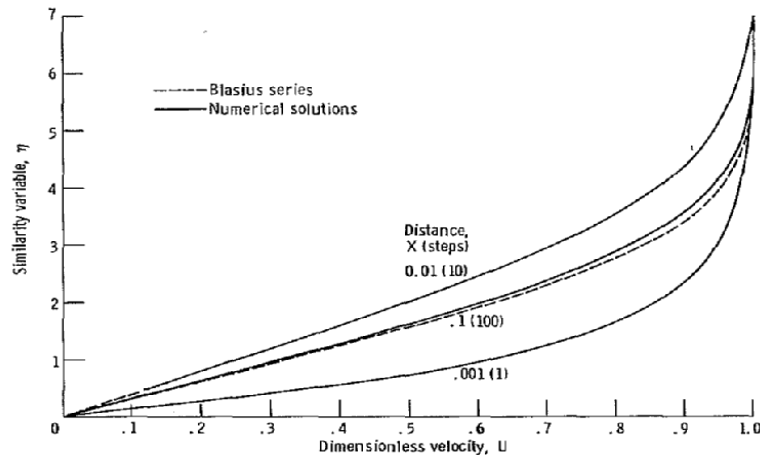


Figura 2.1. Diferencias numéricas entre la solución de Blasius y diferencias finitas para el flujo sobre una placa plana.

Las ecuaciones de Navier-Stokes y de Energía en dos dimensiones están dadas por:

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (2.1)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) \quad (2.2)$$

$$U \frac{\partial T}{\partial X} + V \frac{\partial T}{\partial Y} = \frac{k}{\rho C_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \right) \quad (2.3)$$

Definiendo las coordenadas adimensionales:

$$y = \frac{Y}{a} \quad x = \frac{X}{Re a} \quad u = \frac{U}{U_o} \quad v = Re \frac{V}{U_o} \quad p = \frac{P}{\rho U_o^2} \quad T = \frac{t - t_w}{t_o - t_w}$$

donde

U_o y a son una velocidad característica y una distancia característica del problema,

ρ es la densidad del fluido,

μ es la viscosidad del fluido,

donde el número de Reynolds está dado por: $Re = \frac{\rho U_o a}{\mu}$,

Adimensionalizando las ecuaciones de Navier-Stokes con estas variables, se obtiene:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.4)$$

$$\frac{1}{Re^2} u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{Re^2} v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re^4} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (2.5)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr Re^2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.6)$$

donde

$Pr = \frac{\mu C_p}{k}$ es el número de Prandtl.

En el límite cuando $Re \rightarrow \infty$, las ecuaciones anteriores se reducen a:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.7)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.8)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.9)$$

Una importante simplificación que se obtiene de la ecuación (2.8) es que indica que la presión es solo función de la variable x, es decir, $p=p(x)$. Estas ecuaciones son conocidas como Ecuaciones de Capa Límite para un flujo laminar y bidimensional y fueron postuladas por Ludwin Prandtl en 1904. Considerando también la ecuación de continuidad, se tiene el siguiente set de ecuaciones para describir un fluido laminar e incompresible bajo la aproximación de Capa Límite:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.10)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.11)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.12)$$

Estas ecuaciones han sido resueltas intensivamente en la literatura ([2], [3]). Uno de los casos más famosos es el paper de Blasius, alumno de Prandtl, que resolvió el problema del flujo pasando sobre una placa plana.

Milos y Acrivos [3] han demostrado que el set de ecuaciones de Capa Límite pueden también describir zonas de recirculación como en una expansión brusca. Sin embargo todos estos estudios numéricos han sido desarrollados mediante la técnica de diferencias finitas.

Plotkin [4], en 1982, introduce por primera las series de Fourier en la resolución de las ecuaciones de Capa Límite y realiza algunas aplicaciones a flujos con separación. Sin embargo, no se abordan problemas de transferencia de calor y masa.

En el presente trabajo se pretende resolver problemas del tipo Capa Límite como los mencionados anteriormente, mediante el uso de Series de Fourier. De esta forma, se construirá un algoritmo en el cual las únicas variables de entrada sean los perfiles iniciales de velocidad, temperatura y concentración.

2.2 Series de Fourier

Hay antecedentes de la noción de series de Fourier en la obra de Euler y D. Bernoulli en los primeros trabajos sobre cuerdas vibrantes, pero la teoría sistemática de las series de Fourier comenzó con el estudio realizado por Fourier en la teoría de la conducción de calor a comienzos del siglo XIX. Fourier aborda el problema de describir la evolución de la temperatura $T(x,t)$ de un alambre delgado de longitud π , sujeto a las condiciones de borde $T(0,t) = 0$ y $T(\pi,t) = 0$ y con la condición inicial de temperatura $T(x,0) = f(x)$, donde él propone que la condición inicial anterior puede ser expandida en series de la siguiente forma:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (2.2.1)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{x=0}^{x=\pi} f(x) \sin nx dx$$

A pesar de que Fourier no dio una prueba convincente de la convergencia de la serie (2.2.1), él plantea la conjetura de que la convergencia de la serie es válida para una función $f(x)$ arbitraria en el dominio. Trabajos posteriores de Dirichlet, Riemann, Lebesgue, y otros, a lo largo de 200 años, serían necesarios para robustecer la teoría y delimitar con mayor precisión que funciones son expandibles en series trigonométricas.

A continuación se enuncian los principales teoremas relacionados con las series de Fourier que permiten su aplicación a problemas de Capa Límite.

Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo $] -L, L[$ y fuera de este intervalo por $f(x+2L) = f(x)$, es decir, la función $f(x)$ tiene periodo $2L$. La serie de Fourier o desarrollo de Fourier de la función $f(x)$ se define por:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (2.2.2)$$

donde los coeficientes de Fourier a_n y b_n están dados por

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$
$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sen \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

donde n toma valores enteros $n=0, 1, 2, \dots$

Entonces si la función $f(x)$ tiene periodo $2L$, los coeficientes a_n y b_n se pueden determinar también con las expresiones:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$$

donde c es un número real arbitrario.

2.2.1 Condiciones de Dirichlet

Suponiendo que:

- $f(x)$ está bien definida y es continua excepto en un número finito de puntos del intervalo $] -L, L[$.
- $f(x)$ es periódica fuera del intervalo $] -L, L[$ con periodo $2L$.
- $f(x)$ y $f'(x)$ son cuasi-continuas en el intervalo $] -L, L[$.

Entonces, la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

Converge a:

$f(x)$ si la función es continua en x .

$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$ si x es un punto de discontinuidad en la función.

2.2.3 Series de Fourier en senos o cosenos

En el caso en que se desee tener una serie sólo en senos o cosenos, la función $f(x)$ por lo general está definida en el intervalo $]0,L[$; es decir, la mitad del intervalo $] -L,L[$. Por esta razón, se suele decir que la serie es de medio intervalo, y además, si la función es par o impar, queda claramente definida la otra mitad de la función en cada caso. Entonces se tiene que:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \quad \text{si } f(x) \text{ es par}$$

y

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \text{si } f(x) \text{ es impar}$$

2.2.4 Identidad de Parseval

La identidad de Parseval está dada por:

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

3. FORMULACION DEL PROBLEMA

3.1 Representación del campo de velocidad y temperatura en series de Fourier

En este capítulo se ejemplificará el método de solución de las ecuaciones de Capa Límite mediante series de Fourier. En los capítulos posteriores se verán métodos particulares de solución dependiendo del problema abordado.

Asumiendo que el campo de velocidades y temperaturas se puede expresar en series de Fourier de la siguiente forma:

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \cos(k_i y) \quad (3.1)$$

$$v(x, y) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k_i} f_i'(x) \sin(k_i y) \quad (3.2)$$

$$T(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x) \cos(k_i y) \quad (3.3)$$

donde $k_i = \frac{\pi}{2L}(2i-1)$.

Los flujos descritos por este desarrollo son necesariamente simétricos respecto de $y=0$. La expresión (3.2) para la velocidad v satisface automáticamente la ecuación de continuidad. Recordando que la base escogida forma una base ortogonal, se tiene:

$$\int_0^L \cos(k_i y) \cos(k_j y) dy = \frac{L}{2} \delta_{ij} \quad (3.4)$$

Reemplazando (3.1) y (3.2) en (2.11) se obtiene (por ahora se asume que el gradiente de presión es nulo):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \cos(k_i y) \sum_{j=1}^{\infty} f_j'(x) \cos(k_j y) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k_i} f_i'(x) \sin(k_i y) \sum_{j=1}^{\infty} k_j f_j(x) \sin(k_j y) \\ = -\sum_{i=1}^{\infty} k_i^2 f_i(x) \cos(k_i y) \end{aligned}$$

Reordenando la ecuación anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\infty} (f_i(x)f_j'(x) - \frac{k_j}{k_i} f_i'(x)f_j(x)) \cos((k_i + k_j)y) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\infty} (f_i(x)f_j'(x) + \frac{k_j}{k_i} f_i'(x)f_j(x)) \cos((k_i - k_j)y) = \\ = - \sum_{i=1}^{\infty} k_i^2 f_i(x) \cos(k_i y) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Multiplicando la ecuación (3.5) by $\cos(k_p y)$ e integrando desde $y = 0$ hasta $y = L$, se obtiene el siguiente set de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\infty} (f_i(x)f_j'(x) - \frac{k_j}{k_i} f_i'(x)f_j(x)) I_{ij}^p + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\infty} (f_i(x)f_j'(x) + \frac{k_j}{k_i} f_i'(x)f_j(x)) J_{ij}^p = \\ = - \frac{L}{2} \sum_{i=1}^{\infty} k_i^2 f_i(x) \delta_{ip} \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde:

$$I_{ij}^p = -\sin(k_p L) \cos((k_i + k_j)L) \frac{k_p}{(k_i + k_j)^2 - k_p^2} \quad (3.7)$$

$$J_{ij}^p = -\sin(k_p L) \cos((k_i - k_j)L) \frac{k_p}{(k_i - k_j)^2 - k_p^2} \quad (3.8)$$

de esta forma se obtiene la siguiente ecuación p-ésima:

$$\frac{1}{2} \vec{f}^T (A + B + D - C) \vec{f}' = - \frac{L}{2} k_p^2 f_p(x) \quad (3.9)$$

donde:

$$A_{ij}^p = I_{ij}^p$$

$$B_{ij}^p = I_{ij}^p$$

$$C_{ij}^p = I_{ij}^p \frac{k_i}{k_j}$$

$$D_{ij}^p = J_{ij}^p \frac{k_i}{k_j}$$

La ecuación (3.9) representa un set de ecuaciones diferenciales de primer orden no lineal. Además, la ecuación (4.9) se puede escribir en forma matricial, adoptando la siguiente forma:

$$M(\vec{f}) \cdot \vec{f}' = K \vec{f} \quad (3.10)$$

donde:

$$M(\vec{f}) = M_{pj} = \sum_{i=1}^{\infty} f_i (A_{ij}^p + B_{ij}^p + D_{ij}^p - C_{ij}^p)$$

$$K_{pj} = -\frac{L}{2} k_p^2 \delta_{pj}$$

Para el campo de temperaturas, se realiza un análisis similar, reemplazando (3.3) en (2.12), se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \cos(k_i y) \sum_{j=1}^{\infty} g_j'(x) \cos(k_j y) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k_i} f_i'(x) \sin(k_i y) \sum_{j=1}^{\infty} k_j g_j(x) \sin(k_j y)$$

$$= -\frac{1}{Pr} \sum_{i=1}^{\infty} k_i^2 g_i(x) \cos(k_i y) \quad (3.11)$$

Reordenando la ecuación se obtiene:

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\infty} (f_i(x) g_j'(x) - \frac{k_j}{k_i} f_i'(x) g_j(x)) \cos((k_i + k_j)y) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\infty} (f_i(x) g_j'(x) + \frac{k_j}{k_i} f_i'(x) g_j(x)) \cos((k_i - k_j)y) =$$

$$= -\frac{1}{Pr} \sum_{i=1}^{\infty} k_i^2 g_i(x) \cos(k_i y) \quad (3.12)$$

Multiplicando la ecuación (3.12) por $\cos(k_p y)$ e integrando desde $y = 0$ a L uno obtiene el siguiente set de ecuaciones:

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\infty} (f_i(x) g_j'(x) - \frac{k_j}{k_i} f_i'(x) g_j(x)) I_{ij}^p + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\infty} (f_i(x) g_j'(x) + \frac{k_j}{k_i} f_i'(x) g_j(x)) J_{ij}^p =$$

$$= -\frac{L}{2} \sum_{i=1}^{\infty} k_i^2 g_i(x) \delta_{ip} \quad (3.13)$$

de esta forma se obtiene la siguiente ecuación p-ésima

$$\frac{1}{2} \vec{f}^T (A+B) \vec{g}' + \frac{1}{2} \vec{g}^T (D-C) \vec{f}' = -\frac{L}{2} k_p^2 g_p(x)$$

Finalmente se puede escribir la siguiente ecuación matricial para \vec{g} :

$$M_1(\vec{f}) \cdot \vec{g}' + M_2 = K \vec{g} \quad (3.14)$$

donde

$$M_1(\vec{f}) = M_{1pj} = \sum_{i=1}^{\infty} f_i (A_{ij}^p + B_{ij}^p)$$

$$M_2 = M_{2p} = \sum_{i=1}^{\infty} g_i (D_{ij}^p - C_{ij}^p) f_j'$$

En definitiva, el problema se reduce a resolver dos ecuaciones matriciales:

$$M(\vec{f}) \cdot \vec{f}' = K \vec{f}$$

$$M_1(\vec{f}) \cdot \vec{g}' + M_2 = K \vec{g}$$

donde

$$M(\vec{f}) = M_{pj} = \sum_{i=1}^{\infty} f_i (A_{ij}^p + B_{ij}^p + D_{ij}^p - C_{ij}^p)$$

$$K_{pj} = -\frac{L}{2} k_p^2 \delta_{pj}$$

$$M_1(\vec{f}) = M_{1pj} = \sum_{i=1}^{\infty} f_i (A_{ij}^p + B_{ij}^p)$$

$$M_2 = M_{2p} = \sum_{i=1}^{\infty} g_i (D_{ij}^p - C_{ij}^p) f_j'$$

De esta forma el problema de resolver el set de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales (2.10), (2.11) y (2.12) se reduce a resolver un set de ecuaciones diferenciales ordinarias modular, que es mucho mas simple que el problema original.

3.2. Método Numérico

Como ya se mencionó en la sección anterior, el resolver un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden es más simple que resolver un sistema de ecuaciones a derivadas parciales, como el problema se ha reducido a resolver ecuaciones que solo dependen de la variable x, la variable x se discretizará de la siguiente forma:

$$x = j \cdot \Delta x$$

Además se ocupará un esquema de diferencias finitas hacia atrás, es decir, la derivada del vector $\vec{f}(x)$ estará dada por:

$$\vec{f}' = \frac{d\vec{f}}{dx} = \frac{\vec{f}^j - \vec{f}^{j-1}}{\Delta x} \quad (3.15)$$

De esta forma la ecuación (3.10) se puede escribir de la siguiente manera:

$$M(\vec{f}^j) \cdot \frac{\vec{f}^j - \vec{f}^{j-1}}{\Delta x} = K \vec{f}^j \quad (3.16)$$

$$(M(\vec{f}^j) - \Delta x K) \vec{f}^j = M(\vec{f}^j) \vec{f}^{j-1} \quad (3.17)$$

De esta última ecuación se puede despejar sin dificultad el valor del vector \vec{f}^j en función del vector \vec{f}^{j-1} , esto es:

$$\vec{f}^j = (M(\vec{f}^j) - \Delta x K)^{-1} M(\vec{f}^j) \vec{f}^{j-1} \quad (3.18)$$

En la ecuación anterior, la matriz M debe ser evaluada con el vector \vec{f}^j , entonces se debe recurrir a un método iterativo, para corregir la matriz $M(\vec{f}^j)$. Es decir, se escoge inicialmente \vec{f}^{j-1} para evaluar la matriz M, esto es $M(\vec{f}^{j-1})$, entonces se calcula \vec{f}^j a partir de la expresión (3.18), luego se vuelve a evaluar M pero ahora con el vector corregido \vec{f}^j , es decir $M(\vec{f}^j)$, este proceso se vuelve a repetir sucesivamente hasta encontrar el vector solución \vec{f}^j . Matemáticamente este proceso de aproximaciones sucesivas se puede escribir como:

$$\vec{f}^{j(k+1)} = (M(\vec{f}^{j(k)}) - \Delta x K)^{-1} M(\vec{f}^{j(k)}) \vec{f}^{j-1} \quad (3.19)$$

Donde $\vec{f}^{j(k+1)}$ es el valor de \vec{f}^j en la iteración (k+1) y $\vec{f}^{j(k)}$ es el valor de \vec{f}^j en la iteración (k) donde M es calculada con este vector, es decir $M(\vec{f}^{j(k)})$, este proceso iterativo se repite hasta que la nueva solución satisfaga algún criterio de convergencia. El criterio de convergencia que se utilizará es el siguiente:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (f_{i(k+1)}^j - f_{i(k)}^j)^2 \leq \varepsilon$$

donde $\varepsilon = 10^{-4}$. En la práctica, la convergencia se alcanza muy rápidamente en no mas de 10 iteraciones.

La ecuación (4.14) para el campo de temperaturas se resuelve mediante el mismo método, al discretizar la ecuación queda:

$$M_1(\vec{f}^j) \cdot \left(\frac{\vec{g}^j - \vec{g}^{j-1}}{\Delta x} \right) + M_2(\vec{f}^j, \vec{g}^j) = K \vec{g}^j$$

Despejando \vec{g}^j , se obtiene:

$$\vec{g}^j = \vec{g}^{j-1} + \Delta x M_1(\vec{f}^j)^{-1} (K \vec{g}^j - M_2(\vec{f}^j, \vec{g}^j)) \quad (3.20)$$

4. APLICACIÓN DE LAS SERIES DE FOURIER A LAS ECUACIONES DE CAPA LÍMITE CON SIMILITUD

4.1 Introducción

En este capítulo se estudiarán soluciones de las ecuaciones de capa límite en el caso en que estas aceptan soluciones de similitud, históricamente hablando la primera ecuación de este tipo es la célebre ecuación de Blasius, resuelta por el mismo Blasius en 1904 mediante la unión de soluciones asintóticas, una en series de potencia cerca del origen y la otra válida muy lejos del origen. Posteriormente, esta ecuación ha sido estudiada por muchos investigadores a modo de validación de los algoritmos numéricos desarrollados por ellos.

Una ecuación mas general que la de Blasius es la también conocida ecuación de Falkner-Skan.

Cuando un fluido incompresible pasa en las cercanías de los límites de un cuerpo sólido, como se vio en el capítulo anterior, las ecuaciones de Navier-Stokes se pueden reducir drásticamente en las ecuaciones de capa límite:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.3)$$

donde $U_e(x)$ es la velocidad del fluido lejos del cuerpo sólido, u y v son los componentes de la velocidad en x e y , respectivamente, y ν es la viscosidad cinemática. En el caso particular de las dos dimensiones, el flujo incompresible de la capa límite sobre una cuña, cuando la velocidad de flujo libre es de la forma $U_e(x) = Kx^m$, es posible hacer la siguiente transformación de similitud:

$$u(x, y) = U_e(x) f'(\eta), \quad \eta = y \sqrt{\frac{(m+1)K}{2\nu}} x^{\frac{m-1}{2}}, \quad \vartheta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}$$

que transforman las ecuaciones (4.1) y (4.2) en la conocida ecuación de Falkner-Skan [5]:

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} + f \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \beta \left(1 - \left(\frac{df}{d\eta}\right)^2\right) = 0 \quad (4.4)$$

sujeta a las condiciones de borde:

$$f(\eta = 0) = 0 \quad (4.5a)$$

$$f'(\eta = 0) = 0 \quad (4.5b)$$

$$f'(\eta \rightarrow \infty) = 1 \quad (4.5c)$$

La ecuación (4.3) es transformada en:

$$\frac{d^2 \vartheta}{d\eta^2} + \text{Pr} f \frac{d\vartheta}{d\eta} = 0 \quad (4.6)$$

sujeta a las condiciones de borde:

$$\vartheta(\eta = 0) = 1 \quad (4.7a)$$

$$\vartheta(\eta \rightarrow \infty) = 0 \quad (4.7b)$$

La ecuación de Falkner-Skan constituye una ecuación diferencial de tercer orden y no tiene solución analítica exacta conocida. En el caso cuando $\beta=0$, se obtiene la ecuación de Blasius. Esta ecuación es quizás una de las ecuaciones más famosas de la dinámica de fluidos y representa el problema de un fluido incompresible que pasa sobre una placa plana semi-infinita. En el caso de flujos acelerados ($\beta > 0$), los perfiles de velocidad no presentan puntos de inflexión, a diferencia de los casos de flujo desacelerado ($\beta < 0$) donde si los hay. Soluciones físicamente aceptables sólo existen para $-0.19884 < \beta \leq 2$.

Las soluciones de la ecuación de Falkner-Skan fueron estudiadas numéricamente por primera vez por Hartree [6], encontrando que para valores de $\beta > 0$, los valores de $f''(\eta = 0)$ requeridos para satisfacer las condiciones de borde (4.5) son únicos. Sin embargo, para $\beta < 0$ la ecuación de Falkner-Skan tiene múltiples soluciones. Otros autores [7-8] han estudiado esta ecuación mediante el método de disparo, técnica en la que una sucesión de valores de $f''(\eta = 0)$ son probados para que se cumpla la condición de borde $f'(\eta \rightarrow \infty) = 1$. Por otra parte, Meksyn [9] resolvió la ecuación de Falkner-Skan a través de aproximaciones analíticas. Soluciones numéricas con alta precisión usando diferencias finitas, se pueden encontrar en [10-12]. Más recientemente, Shi-Jun Liao [13] aplica el análisis de homotopía para resolver la ecuación de Falkner-Skan.

En cuanto a la aplicación de métodos espectrales para problemas de capa límite, Khabibrakhmanov et al. [14] resolvió la ecuación de Blasius, utilizando un método espectral con polinomios de Laguerre generalizados. Ma et al. [15] desarrollaron un método espectral para ecuaciones de capa límite usando polinomios de Hermite. Una revisión completa de los métodos espectrales aplicados a la dinámica de fluidos se encuentra en [1].

A pesar de la abundante literatura sobre la ecuación de Falkner-Skan, no hay informes sobre las soluciones a través de series de Fourier clásicas. En este trabajo, se resuelve la ecuación de Falkner-Skan a través de una expansión de la clásica serie de Fourier.

4.2. Análisis

Postulamos la siguiente solución para $f(\eta)$:

$$f(\eta) = a_o + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{k_i} \cos(k_i \eta) \quad (4.8)$$

donde el número de onda está dada por $k_i = \frac{\pi}{2L} (2i-1)$.

Las condiciones de frontera (4.5) se convierten en:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin(k_i L) = -1, \quad a_o + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{k_i} = 0 \quad (4.9)$$

La sustitución de (4.8) en (4.4) entrega la siguiente ecuación:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i k_i^2 \sin(k_i \eta) - (a_o + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{k_i} \cos(k_i \eta)) \sum_{i=1}^{\infty} a_i k_i \cos(k_i \eta) + \beta (1 - \sum_{i,j=1}^{\infty} a_i a_j \sin(k_i \eta) \sin(k_j \eta)) = 0 \quad (4.10)$$

Multiplicando la ecuación (4.10) $\sin(k_p \eta)$ e integrando desde $\eta = 0$ hasta L , se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas no lineales para los coeficientes a_p :

$$k_p^2 a_p \frac{L}{2} - (a_o \sum_{i=1}^{\infty} a_i A_{ip} + \sum_{i,j=1}^{\infty} a_i a_j B_{ij}^p) + \beta (\frac{1}{k_p} - \sum_{i,j=1}^{\infty} a_i a_j C_{ij}^p) = 0 \quad (4.11)$$

donde:

$$A_{ip} = k_i \int_0^L \cos(k_i \eta) \sin(k_p \eta) d\eta = \begin{cases} \frac{1}{2} & i = p \\ \frac{k_i}{k_i + k_p} & i + p \text{ par} \\ \frac{-k_i}{k_i - k_p} & i + p \text{ impar} \end{cases}$$

$$B_{ij}^p = \frac{k_j}{k_i} \int_0^L \cos(k_i \eta) \cos(k_j \eta) \sin(k_p \eta) d\eta = -\frac{k_j k_p}{2k_i} \left(\frac{1}{(k_i - k_j)^2 - k_p^2} + \frac{1}{(k_i + k_j)^2 - k_p^2} \right)$$

$$C_{ij}^p = \int_0^L \sin(k_i \eta) \sin(k_j \eta) \sin(k_p \eta) d\eta = -\frac{k_p}{2} \left(\frac{1}{(k_i - k_j)^2 - k_p^2} - \frac{1}{(k_i + k_j)^2 - k_p^2} \right)$$

Por último, las condiciones de contorno (4.9) y el conjunto de ecuaciones (4.11) con $p = 1, \dots, N-2$, forman un conjunto de N ecuaciones algebraicas no lineales de los coeficientes de las series de Fourier.

Para el campo de temperatura, la siguiente solución es postulada:

$$\vartheta(\eta) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \sin(k_i \eta) \quad (4.12)$$

Las condiciones de frontera (4.7) se escriben como,

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i \sin(k_i L) = -1 \quad (4.13)$$

La sustitución (4.12) en (4.6) entrega la siguiente ecuación:

$$-\sum_{i=1}^{\infty} k_i^2 b_i \sin(k_i \eta) + Pr(a_o + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{k_i} \cos(k_i \eta)) \sum_{i=1}^{\infty} k_i b_i \cos(k_i \eta) = 0 \quad (4.14)$$

Multiplicando la ecuación (5.14) por $\sin(k_p \eta)$ e integrando desde $\eta = 0$ hasta L , se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas no lineales para los coeficientes

$$-\frac{L}{2} k_p^2 b_p + Pr a_o \sum_{i=1}^{\infty} b_i A_{ip} + Pr \sum_{i,j=1}^{\infty} a_i b_j B_{ij}^p = 0 \quad (4.15)$$

Por último, la condición de borde (4.13) y el conjunto de ecuaciones (4.15) con $p=1, \dots, N-1$, forman un conjunto de N ecuaciones algebraicas no lineales para los coeficientes b_p de la serie de Fourier.

5.3. Método Numérico

El campo de velocidades es obtenido por medio de la integración numérica de los sistemas de ecuaciones (4.9) y (4.11). Este set de ecuaciones es aproximado a un número finito de N ecuaciones, entonces, este set de ecuaciones es resuelto con el conocido método de Newton-Raphson. La condición de borde para $\eta \rightarrow \infty$ es impuesta en $L=7$. De esta forma la solución es encontrada mediante iteraciones sucesivas para los coeficientes de la serie de Fourier. Definiendo los vectores $\vec{a}^T = [a_o, a_1, \dots, a_N]$ y $\vec{G}^T = [G_o, G_1, \dots, G_N]$, donde:

$$G_o = a_o + \sum_{i=1}^N \frac{a_i}{k_i} \quad (4.16)$$

$$G_1 = 1 + \sum_{i=1}^N a_i \sin(k_i L) \quad (4.17)$$

$$G_p = k_{p-2}^2 a_{p-2} \frac{L}{2} - (a_o \sum_{i=1}^N a_i A_{ip-2} + \sum_{i,j=1}^N a_i a_j B_{ij}^{p-2}) + \beta \left(\frac{1}{k_{p-2}} - \sum_{i,j=1}^N a_i a_j C_{ij}^{p-2} \right) \quad p = 3, \dots, N \quad (4.18)$$

Entonces, los coeficientes a_i pueden ser obtenidos por iteración a partir de la siguiente ecuación:

$$\vec{a}^{(n+1)} = \vec{a}^{(n)} - J^{-1}(\vec{a}^{(n)}) \vec{G}(\vec{a}^{(n)}) \quad (4.19)$$

donde J representa la matriz Jacobiana de G , $J_{ij} = \frac{\partial G_i}{\partial a_j}$ y $\vec{a}^{(n+1)}$ representa el valor del vector \vec{a} en la iteración $n+1$. Las iteraciones para $\vec{a}^{(n+1)}$ en la ecuación (4.19) pueden ser repetidas hasta que se cumpla $\|\vec{a}^{(n+1)} - \vec{a}^{(n)}\| \leq \varepsilon$, para algún valor de tolerancia ε .

Los elementos de la matriz Jacobiana están dados por:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{k_N} \\ 0 & \sin(k_1 L) & \cdot & \cdot & \cdot & \sin(k_N L) \\ \sum_{i=1}^{\infty} a_i A_{i1} & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdot & \cdot & \gamma_{1N-1} \\ \sum_{i=1}^{\infty} a_i A_{i2} & \gamma_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_{i=1}^{\infty} a_i A_{iN} & \gamma_{N-2,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \gamma_{N-2,N-1} \end{bmatrix}$$

donde:

$$\gamma_{pr} = k_p^2 a_p \frac{L}{2} \delta_{pr} - (a_o A_{rp} + \sum_{j=1}^N a_j B_{rj}^p + \sum_{i=1}^N a_i B_{ir}^p) - \beta \left(\sum_{i=1}^N a_i C_{ir}^p + \sum_{j=1}^N a_j C_{rj}^p \right) \quad (4.20)$$

Con el propósito de verificar la precisión del método propuesto para el cálculo del campo de velocidades, de los resultados obtenidos se calculó la pendiente de la velocidad $f''(0) = -\sum_{i=1}^N a_i k_i$ en la pared. Una simple inspección de la ecuación (4.11) muestra que

cuando $p \gg 1$, el término $\frac{\beta}{k_p}$ decae lentamente cuando $p \rightarrow \infty$. Esto implica que un gran

número de términos en la expresión $f''(0) = -\sum_{i=1}^N a_i k_i$ serán requeridos para que esta converja al valor correcto. La manera de enfrentar esto fue realizando un análisis asintótico para el sistema de ecuaciones (5.11) cuando $p \gg 1$.

5.4. Análisis asintótico

Considerando la ecuación (4.11), cuando $p > N$, donde N es el número de términos considerados en la serie de Fourier, la ecuación para el coeficiente a_p , queda dada por:

$$a_p = \frac{2}{Lk_p^2} \left(a_o \sum_{i=1}^N a_i A_{ip} + \sum_{i,j=1}^N a_i a_j B_{ij}^p + \beta \sum_{i,j=1}^N a_i a_j C_{ij}^p \right) - \frac{2\beta}{L} \frac{1}{k_p^3} \quad p > N \quad (4.21)$$

Es claro que la sumatoria de términos que aparece en la ecuación anterior está aproximado por la suma hasta N , donde si N es grande, es de esperar que las sumatorias converjan a un valor constante. Para grandes valores de p , se pueden ocupar expresiones asintóticas para los coeficientes A_{ip} , B_{ij}^p and C_{ij}^p cuando $p \gg 1$. Estas expresiones asintóticas están dadas por:

$$A_{ip} = k_i \int_0^L \cos(k_i \eta) \sin(k_p \eta) d\eta = \begin{cases} \frac{k_i}{k_p} (1 - \frac{k_i}{k_p} + \dots) & i + p \text{ par} \\ \frac{k_i}{k_p} (1 + \frac{k_i}{k_p} + \dots) & i + p \text{ impar} \end{cases} \quad (4.22)$$

$$B_{ij}^p \approx \frac{k_j}{2k_i k_p} \left(2 + \frac{1}{k_p^2} ((k_i - k_j)^2 + (k_i + k_j)^2) + \frac{1}{k_p^4} ((k_i - k_j)^4 + (k_i + k_j)^4) + \dots \right) \quad (4.23)$$

$$C_{ij}^p \approx \frac{1}{2k_p^3} \left(-(k_i - k_j)^2 + (k_i + k_j)^2 + \frac{1}{k_p^2} (-(k_i - k_j)^4 + (k_i + k_j)^4) + \dots \right) \quad (4.24)$$

Introduciendo estas aproximaciones en la ecuación (5.11), se obtiene la siguiente expresión asintótica para los coeficientes a_p ($p > N$):

$$a_p \approx \frac{2}{Lk_p^2} \left(a_o \sum_{i=1}^N a_i \frac{k_i}{k_p} + a_o \sum_{i=1}^N (-1)^{2p+1} a_i \left(\frac{k_i}{k_p} \right)^2 + \sum_{i,j=1}^N a_i a_j \frac{k_j}{k_i k_p} \left(1 + \frac{1}{2k_p^2} ((k_i - k_j)^2 + (k_i + k_j)^2) \right) \right. \\ \left. + \beta \sum_{i,j=1}^N a_i a_j \frac{1}{2k_p^3} (-(k_i - k_j)^2 + (k_i + k_j)^2) \right) - \frac{2\beta}{L} \frac{1}{k_p^3} \quad p > N \quad (4.25)$$

Es fácil mostrar la siguiente identidad: $\sum_{i,j=1}^N a_i a_j \frac{k_j}{k_i k_p} = -a_o \sum_{i=1}^N a_i \frac{k_i}{k_p}$. Usando esta identidad,

se puede obtener la siguiente expresión para los coeficientes a_p :

$$a_p \approx -\frac{2\beta}{L} \frac{1}{k_p^3} + \frac{2a_o}{Lk_p^4} \sum_{i=1}^N (-1)^{2p+1} a_i k_i^2 - \frac{1}{Lk_p^5} \sum_{i,j=1}^N a_i a_j \left(\left(\frac{k_j}{k_i} + 1 \right) (k_i + k_j)^2 + \left(\frac{k_j}{k_i} - 1 \right) (k_i - k_j)^2 \right) + O\left(\frac{1}{k_p^7}\right) \quad (4.26)$$

El resultado anterior muestra que para valores de $\beta \neq 0$, los coeficientes a_p tiende a cero como k_p^{-3} cuando $p \gg 1$. Sin embargo en el caso de la ecuación de Blasius ($\beta = 0$), los coeficientes a_p tiendan a cero mas rápido como k_p^{-4} . Esto explica la lenta convergencia de los coeficientes a_p en el caso $\beta \neq 0$.

Por otra parte, las correcciones a las condiciones de borde (5.7) quedan:

$$\sum_{i=1}^N a_i \sin(k_i L) - \frac{2\beta}{L} \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{k_i^3} \sin(k_i L) = -1 \quad (4.27)$$

$$a_o + \sum_{i=1}^N \frac{a_i}{k_i} - \frac{2\beta}{L} \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{k_i^4} = 0 \quad (4.28)$$

Se puede ver que la corrección en la ecuación (4.27) es de orden $O(N^{-3})$, muy pequeña cuando $N \gg 1$, es decir, las ecuaciones (4.27) y (4.28) son correctas a orden $O(N^{-1})$ simplemente eliminando las correcciones, ya que son muy pequeñas. La expresión corregida para $f(\eta)$ está dada por:

$$f(\eta) = a_o + \sum_{i=1}^N \frac{a_i}{k_i} \cos(k_i \eta) + \sum_{i=N+1}^M \frac{a_i}{k_i} \cos(k_i \eta) \quad (4.29)$$

donde los coeficientes a_p $1 \leq p \leq N$, son determinados por medio del algoritmo presentado previamente (ecuación (4.19)) y los coeficientes a_p $N+1 \leq p \leq M$ son determinados mediante la ecuación (4.26).

De esta forma se tiene que la pendiente inicial de la velocidad $f''(0)$ se puede aproximar por la siguiente expresión:

$$f''(0) = -\sum_{i=1}^N a_i k_i - \sum_{i=N+1}^{\infty} a_i k_i \quad (4.30)$$

La expresión $\sum_{i=1}^N a_i k_i$ es calculada a partir del sistema de ecuaciones (4.19) y la sumatoria

$\sum_{i=N+1}^{\infty} a_i k_i$ es determinada mediante la solución asintótica (4.26), con lo que se obtiene:

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} a_i k_i = -\frac{2\beta}{L} \sum_{p=N+1}^{\infty} \frac{1}{k_p^2} + \frac{2a_o}{L} \sum_{i=1}^N (-1)^{2i+1} a_i k_i^2 \sum_{p=N+1}^{\infty} \frac{1}{k_p^3} + \dots \quad (4.31)$$

Reteniendo en la ecuación (4.31) términos hasta un orden k_p^{-2} y haciendo uso de la aproximación de Euler para la sumatoria,

$$\sum_{i=n}^m F(i) = \int_n^m F(k) dk - \frac{1}{2}(F(n) - F(m)) + \frac{1}{12}(F'(n) - F'(m)) + \dots, \text{ se obtiene la siguiente}$$

aproximación para la expresión $\sum_{i=N+1}^{\infty} a_i k_i$:

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} a_i k_i = -\frac{8\beta L}{\pi^2} \sum_{p=N+1}^{\infty} \frac{1}{(2p-1)^2} = -\frac{4\beta L}{\pi^2(2N+1)} \left(1 + \frac{1}{(2N+1)}\right) \quad (4.32)$$

Finalmente, se obtiene la siguiente expresión para $f''(0)$:

$$f''(0) = -\sum_{i=1}^N a_i k_i + \frac{4\beta L}{\pi^2(2N+1)} \left(1 + \frac{1}{(2N+1)}\right) \quad (4.33)$$

El campo de temperaturas es obtenido por medio de la resolución numérica del sistema de ecuaciones (4.13) y (4.15), cuya solución para los coeficientes \vec{b} está dados por:

$$\vec{b} = M^{-1} \vec{z}$$

donde $\vec{b}^T = [b_1 \dots b_N]$,

$$M = \begin{bmatrix} \sin(k_1 L) & \sin(k_2 L) & \cdot & \cdot & \cdot & \sin(k_N L) \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{1N} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdot & \cdot & \alpha_{2N} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{N-1,1} & \alpha_{N-1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{N-1,N} \end{bmatrix} \quad \vec{z}^T = [-1 \ 0 \dots 0]$$

$$\alpha_{pr} = -k_p^2 a_p \frac{L}{2} \delta_{pr} + Pr a_o A_{rp} + Pr \sum_{j=1}^{\infty} a_j B_{rj}^p$$

4.5. Resultados

La Tabla 4.1 muestra el valor inicial $f''(0)$ obtenido por la expansión en series de Fourier para diferentes valores del parámetro β y diferentes valores del número de términos N

considerados en la serie, los valores obtenidos son comparados con valores numéricos encontrados en la literatura.

$$f''(0) = -\sum_{i=1}^N a_i k_i, \quad L=7$$

β	Ref. [9]	N=20	N=50	N=100	N=200	N=300
2	1.687222	1.541791	1.630250	1.658820	1.673029	1.677760
1	1.232589	1.160790	1.204162	1.218395	1.225494	1.227859
0.5	0.927682	0.892036	0.913483	0.920586	0.924133	0.925315
0	0.469601	0.469682	0.469605	0.469601	0.469600	0.469600
-0.1	0.319270	0.326431	0.322111	0.320688	0.319979	0.319742
-0.12	0.281762	0.290342	0.285169	0.283463	0.282612	0.282327
-0.15	0.216360	0.227074	0.220621	0.218489	0.217425	0.217071
-0.18	0.128637	0.141495	0.133748	0.131190	0.129912	0.129487
-0.1988	0.005218	0.020590	0.010950	0.008047	0.006625	0.006154

Tabla 4.1. $f''(0)$ obtenido mediante la expansión en series de Fourier para diferentes valores del parámetro β .

Se puede apreciar que el caso de $\beta = 0$, $f''(0)$ converge rápidamente al valor 0.469600 que aparece en la literatura [16], sin embargo para el caso $\beta \neq 0$, los resultados de la Tabla 4.1 muestran que $f''(0)$ converge lentamente con el incremento de N al valor encontrado en la literatura por diferencias finitas.

La Tabla 4.2 muestra el valor de $f''(0)$ obtenido con el método mejorado por el análisis asintótico (Ec. (4.33)), considerando correcciones a orden $\frac{1}{N^2}$ para la expansión en series de Fourier y considerando diferentes valores para el parámetro β , resultados que son comparados con valores reportados en la literatura.

$$f''(0) = -\sum_{i=1}^N a_i k_i + \frac{4\beta L}{\pi^2(2N+1)} \left(1 + \frac{1}{(2N+1)}\right), \quad L=7$$

β	Ref. [9]	N=20	N=50	N=100	N=200	N=300
2	1.687222	1.683556	1.686984	1.687189	1.687214	1.687217
1	1.232589	1.231673	1.232529	1.232580	1.232587	1.232587
0.5	0.927682	0.927477	0.927667	0.927678	0.927680	0.927680
-0.1	0.319270	0.319343	0.319274	0.319270	0.319270	0.319270
-0.12	0.281762	0.281836	0.281765	0.281761	0.281761	0.281761
-0.15	0.216360	0.216442	0.216366	0.216362	0.216361	0.216361
-0.18	0.128637	0.128736	0.128642	0.128636	0.128636	0.128636
-0.1988	0.005218	0.006499	0.005311	0.005227	0.005216	0.005215

Tabla 4.2. $f''(0)$ obtenido mediante la expansión en series de Fourier para diferentes valores del parámetro β considerando correcciones a orden N^{-2} .

La Tabla 4.2 muestra que la corrección asintótica efectivamente mejora la convergencia para el valor de $f''(0)$ obtenido con las series de Fourier series para diferentes valores del parámetro β .

Con el propósito de analizar la precisión del presente método para diferentes valores de la dimensión del dominio L , se realizaron cálculos para el valor de $f''(0)$ para $L=8$ y se compararon con los resultados de [12]. Estos resultados son mostrados en la Tabla 4.3, se puede apreciar que los valores no difieren entre $N=300$ y $N=400$ y que a su vez son similares para con los resultados de $L=7$. Esto muestra que los resultados ya están convergidos al valor correcto y que $L=7$ era un buen valor para las dimensiones del dominio.

β	$f''(0), L=8$		
	Ref. [9]	N=300	N=400
2	1.687222	1.687217	1.687218
1	1.232589	1.232587	1.232587
0.5	0.927682	0.927680	0.927680
-0.1	0.319270	0.319270	0.319270
-0.12	0.281762	0.281761	0.281761
-0.15	0.216360	0.216361	0.216361
-0.18	0.128637	0.128636	0.128636
-0.1988	0.005218	0.005218	0.005218

Tabla 4.3. $f''(0)$ obtenido mediante la expansión en series de Fourier para diferentes valores del parámetro β con $L=8$.

En la Tabla 4.4, se muestra un benchmarking para $f''(0)$ con resultados entregados por diferentes autores, el benchmarking muestra que el presente método entrega muy buenos resultados y que junto con el análisis asintótico son una buena opción numérica para resolver este tipo de problemas, compitiendo en buena forma con el método de diferencias finitas, elementos finitos y shooting.

β	$f''(0)$					
	Hartree [3]	Asaithambi [9]	Asaithambi [8]	Salama [21]	Zhang et al. [20]	Presente trabajo
2	1,687	1.687222	1.687218	1.687218	1.687218	1.687218
1	1.233	1.232589	1.232588	1.232588	1.232587	1.232587
0.5	0.927	0.927682	0.927680	0.927680	0.927680	0.927680
-0.1	0.319	0.319270	0.319270	0.319270	0.319270	0.319270
-0.12	-	0.281762	0.281761	0.281761	-	0.281761
-0.15	-	0.216360	0.216362	0.216362	0.216362	0.216361
-0.18	0.128	0.128637	0.128636	0.128638	0.128636	0.128636
-0.1988	0	0.005218	0.005216	0.005226	0.005222	0.005218

Tabla 4.4 $f''(0)$ obtenido mediante la expansión en series de Fourier para diferentes valores del parámetro β .

La Figura 4.1 muestra los perfiles de velocidad $f'(\eta)$ como función de la variable de similitud η para diferentes valores del parámetro β obtenidos mediante las series de Fourier.

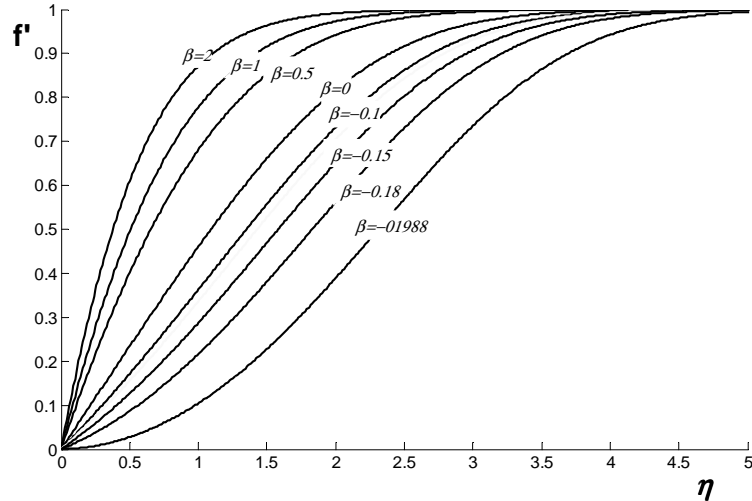


Figura 5.1. Función $f'(\eta)$ para diferentes valores del parámetro β .

Para evaluar la exactitud del presente método para la solución del campo de temperaturas, se compararon los resultados de este trabajo para $-\vartheta'(0) = -\sum_{i=1}^N b_i k_i$ con los resultados reportados por los autores [19-20]. La comparación muestra que los resultados entregados por el presente método están en muy buen acuerdo con los reportados por los autores [19-20], ver Tabla 4.5.

$$-\vartheta'(0) = -\sum_{i=1}^N b_i k_i \quad L=7$$

β	Pr=0.72	Pr=6	Pr=10
0	0.418077	0.867288	1.029768
	0.417860 ^[22]	0.867280 ^[22]	1.029740 ^[22]
	0.418090 ^[23]	0.867280 ^[23]	0.993973 ^[23]
0.3	0.459547	0.987282	1.179161
	0.459290 ^[22]	0.981270 ^[22]	1.179100 ^[22]
	0.459550 ^[23]	0.987270 ^[23]	1.179090 ^[23]
1	0.501432	1.114707	1.338841
	0.501130 ^[22]	1.114700 ^[22]	1.338800 ^[22]
	0.501437 ^[23]	1.114660 ^[23]	1.338800 ^[23]

Tabla 4.5. $-\vartheta'(0)$ obtenido mediante la expansión en series de Fourier para diferentes valores del parámetro β y números de Prandtl.

4.6. Conclusiones

Los resultados muestran que la clásica expansión en series de Fourier junto con la incorporación de un análisis asintótico para los coeficientes de la serie entregan una solución con alta precisión y rápida convergencia para la ecuación de Falkner-Skan incluyendo transferencia de calor. El presente método puede ser fácilmente aplicado a flujos con características más complejas, como por ejemplo, problemas de capa límite que incluyan transferencia de masa, problemas de combustión, problemas de transferencia de calor conjugados y también a casos mas generales de capas límites donde no exista solución de similitud. Este tipo de problemas serán abordados en el siguiente capítulo.

4.7 Nomenclatura

α	Coefficiente difusión térmica
Pr	Número de Prandtl
ν	Viscosidad cinemática
T	Temperatura
T_w	Temperatura de pared
T_∞	Temperatura ambiente
u, v	Campo de velocidades
$U_e(x)$	Velocidad fuera de la capa límite
x, y	Coordenadas
η	Variable de similitud
$f(\eta)$	Función corriente
k_i	Número de onda
β	Parámetro en la ecuación de Falkner-Skan
$\vartheta(\eta)$	Temperatura adimensional
a_i	Coefficientes de la serie de Fourier para la velocidad
b_i	Coefficientes de la serie de Fourier para la temperatura

Capítulo V

PROBLEMA DE GRAETZ

5.1. Introducción

El clásico problema de Graetz ha sido ampliamente estudiado en los últimos 120 años. En el caso bidimensional, este consiste en un líquido de propiedades físicas constantes que fluye en régimen laminar desarrollado a través de un canal de placas paralelas separadas una cierta distancia. A partir de la posición axial $x = 0$, el flujo con el campo de velocidad desarrollado entra con una temperatura inicial T_0 , en una región donde la temperatura de las paredes del canal es constante e igual a T_w . El calor se transfiere al líquido, aumentando la temperatura de éste. El número de Nusselt local es muy alto en $x = 0$, y comienza a disminuir con x , llegando a un valor asintótico constante para el campo lejano a la entrada. A pesar de la simplicidad de su formulación, el problema ha planteado siempre un verdadero desafío para los métodos analíticos y numéricos de solución debido a la singularidad que se presenta en $x=0$.

Los métodos de diferencias finitas pueden ser lo suficientemente precisas para obtener el número de Nusselt a lo largo de la progresión de la coordenada axial, así como el número de Nusselt asintótico. En valores pequeños de la coordenada axial, sin embargo, se requiere una malla muy fina para obtener valores confiables del número de Nusselt local. Las soluciones analíticas obtenidas para este problema mediante series de potencias sufren el mismo inconveniente, porque las funciones Graetz deben ser evaluadas con un gran número de términos para las regiones donde $x \ll 1$, y los términos de orden superior tienden a diverger. Las soluciones basadas en las funciones Graetz para el problema de placas paralelas se han sido tratadas entre otros, por Sellars et al [21], Arpaci [22], y muy recientemente por Nickolay y Martin [23]. En [23], los autores proponen una correlación para el número de Nusselt local, que cubre el intervalo de un alto número de Graetz al estado asintótico.

En este trabajo se propone un enfoque diferente para el problema bidimensional de Graetz para una temperatura de pared uniforme, lo que se pretende obtener valores muy precisos de número local de Nusselt muy cerca de la posición $x = 0$. El actual enfoque postula una expansión en series de Fourier del campo de temperatura, sobre la base de una separación de la influencia de la coordenada axial (x) y la coordenadas transversal (y). La dependencia en la coordenada y se basa en las funciones coseno con el fin de satisfacer las condiciones de contorno en la pared y en el plano de simetría. La dependencia de la temperatura en la coordenada axial x se expresa en términos de combinaciones lineales de funciones $\psi_i(x)$ desconocidas que se deben determinar. El número local de Nusselt obtenido por el método propuesto en la región de entrada se utiliza para construir una nueva correlación, que se compara con las correlaciones anteriores propuestas en la literatura.

5.2 Planteamiento del problema

Considérese el flujo laminar estacionario de un fluido con propiedades constantes a través de un canal de placas paralelas, para lo cual la separación de las placas es $2h$. Asumiendo un perfil de velocidad completamente desarrollado, con velocidad axial promedio V . La temperatura de entrada uniforme T_0 y denominando a las coordenadas axial y transversal x

e y respectivamente, tal que la coordenada y , es medida desde el eje del canal. La ecuación de la energía adimensional para el flujo con perfil de velocidad parabólico queda dada por:

$$\frac{3}{2}(1-\eta^2)\frac{\partial\psi}{\partial\xi} = \frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} \quad (5.1)$$

donde las coordenadas adimensionales quedan definidas por $\eta=y/h$, $\xi= x/(Re Pr h)$. Esta última coordenada es el recíproco del número de Graetz, Gz . El número de Reynolds viene dado por $Re = Vh/\nu$. Esta formulación permite obtener una solución general, independientemente de los números de Reynolds y Prandtl. En la ecuación (5.1) la conducción axial y términos de disipación viscosa se han despreciado. La temperatura de la pared es T_w y la temperatura adimensional se define como $\psi = (T_w - T(x,y))/(T_w - T_o)$. Las condiciones de contorno están dadas por:

$$\psi(0,\eta) = 1, \quad \frac{\partial\psi(\xi,0)}{\partial\eta} = 0, \quad \psi(\xi,1) = 0, \quad (5.2)$$

El número de Nusselt local está dado por $Nu = \frac{-\partial\psi/\partial\eta|_{\eta=1}}{\psi_b}$, donde la temperatura adimensional de la mezcla se define como:

$$\psi_b = \frac{3}{2} \int_0^1 (1-\eta^2)\psi(\xi,\eta)d\eta$$

5.3 Análisis

Suponiendo la siguiente solución para el campo de temperaturas

$$\psi(\xi,\eta) = \sum_{i=0}^{\infty} Y_i(\eta)f_i(\xi) \quad (5.3)$$

donde $Y_i(\eta) = \sqrt{2} \cos(k_i\eta)$ y $k_i = \frac{\pi}{2}(2i+1)$.

La dependencia de η se basa en las funciones coseno que automáticamente satisfacen las condiciones de borde en la pared y en el plano de simetría. Estas funciones forman una base

ortonormal, como $\int_0^1 Y_i(\eta)Y_j(\eta)d\eta = \delta_{ij}$.

Reemplazando la solución (5.3) en la ecuación (5.1) se obtiene:

$$\frac{3}{2} \sum_{i=0}^{\infty} (1-\eta^2)Y_i(\eta)f_i'(\xi) = - \sum_{i=0}^{\infty} k_i^2 Y_i(\eta)f_i(\xi) \quad (5.4)$$

Multiplicando la ecuación (5.4) por $Y_j(\eta)$ e integrando en η entre 0 y 1 se obtiene el siguiente set de ecuaciones

$$f_j'(\xi) - 2 \sum_{i=0}^{\infty} I_{ij} f_i'(\xi) = - \frac{2}{3} k_i^2 f_j(\xi) \quad (5.5)$$

donde

$$I_{ij} = \begin{cases} \frac{\cos(k_i+k_j)}{(k_i+k_j)^2} + \frac{\cos(k_i-k_j)}{(k_i-k_j)^2} & i \neq j \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{\cos(2k_i)}{2k_i^2} \right) & i = j \end{cases} \quad (5.6)$$

El set de ecuaciones (5.5) representa un sistema lineal de primer orden y coeficientes constantes. Escribiendo en forma matricial el sistema (5.5) se tiene:

$$[M] \vec{f}' = -K \vec{f} \quad (5.7)$$

donde

$$K_{ij} = \frac{2}{3} k_i^2 \delta_{ij} \quad (5.8)$$

$$M_{ij} = \begin{cases} -2I_{ij} & i \neq j \\ 1 - 2I_{ij} & i = j \end{cases} \quad (5.9)$$

Formalmente la solución del sistema de ecuaciones es:

$$\vec{f} = e^{-A\xi} \vec{f}_o \quad (5.10)$$

con $A = M^{-1}K$

Donde f_o se calcula a partir de la condición de borde a la entrada dada por:

$$\psi(0, \eta) = \sum_{i=0}^{\infty} Y_i(\eta) f_i(0) = 1 \quad (5.11)$$

de esta forma se obtiene que

$$f_i(0) = \int_0^1 Y_i(\eta) d\eta = \sqrt{2} \frac{\sin(k_i)}{k_i} \quad (5.12)$$

El número de Nusselt se calcula como $Nu = \frac{-\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1}}{\psi_b}$

donde

$$\psi_b = \frac{3}{2} \int_0^1 (1 - \eta^2) \psi(\xi, \eta) d\eta$$

$$\psi_b = \frac{3}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^1 (1 - \eta^2) Y_i(\eta) f_i(\xi) d\eta$$

$$\psi_b = \frac{3}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i f_i(\xi)$$

$$\gamma_i = \int_0^1 (1 - \eta^2) Y_i(\eta) d\eta = 2 \frac{\sin(k_i)}{k_i^3} \quad (5.13)$$

Para calcular el término $\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1}$ no conviene derivar directamente la solución debido a que

por lo general las derivadas de una serie de Fourier no converge. El cálculo alternativo es ocupar la ecuación (5.1), es decir

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} &= \frac{3}{2} \int_0^1 (1-\eta^2) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} d\eta \\
\left. \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} &= \frac{3}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^1 (1-\eta^2) Y_i(\eta) f_i'(\xi) d\eta \\
\left. \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} &= \frac{3}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i f_i'(\xi) \\
Nu(\xi) &= - \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i f_i'(\xi)}{\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i f_i(\xi)} \tag{5.14}
\end{aligned}$$

De la ecuación (5.14) se tiene que el número local de Nusselt se puede evaluar en cualquier posición axial ξ , especialmente para valores muy pequeños de ξ cuando las soluciones tradicionales presentan poca exactitud, donde son necesarios muchos términos en la serie de Graetz para el cálculo.

5.4 Resultados

El método descrito anteriormente entrega soluciones muy precisas para el problema de Graetz. En la implementación de la solución, la precisión en la evaluación del número de Nusselt depende del número de términos considerados en la serie de Fourier. Para cada valor de ξ , se realizaron corridas numéricas considerando diferentes números de términos para analizar la exactitud del método para el número local de Nusselt. Un valor suficientemente preciso de Nu se encontró cuando el incremento del número de términos ya no produce cambios en el valor del número de Nusselt local. Se encontró que 3.500 términos (que dan una matriz con elementos de 3500x3500) eran suficientes para garantizar la convergencia de la serie, estos resultados son válidos para valores de ξ tan pequeños como $\xi = 10^{-9}$. El aumento en el número de términos no produjo cambios de importancia en el número de Nusselt para valores muy cerca de la entrada, dados por este valor de ξ . Por lo tanto se cree que los números de Nusselt informo un alto grado de precisión.

El número de Nusselt asintótico previsto por el presente método es 1.885175 para la temperatura de pared uniforme, mientras que el valor aceptado actualmente de la mayoría de las fuentes es 1,88525. Se debe tener en cuenta que estos números de Nusselt se basan en la separación entre la placa de la mitad, h, en lugar de el diámetro hidráulico dado por 4h, con la que el valor asintótico predicho por el presente método se convierte en 7,5407. También el número de Graetz como se define en este estudio es 16 veces menor que en la definición dada en [23]. En la región de entrada se obtuvieron los siguientes números de Nusselt local (Figura 5.1):

ξ	Number of terms used	Nu
10^{-9}	3500	776.6043
10^{-8}	1900	360.3133
10^{-7}	1700	167.1875
10^{-6}	1500	77.5549
10^{-5}	1500	35.9588
10^{-4}	500	16.6687
10^{-3}	200	7.7513
10^{-2}	200	3.6934
10^{-1}	200	2.04782
10^0	200	1.88517

TABLA 5.1. Números de Nusselt local obtenido por aplicación del presente método

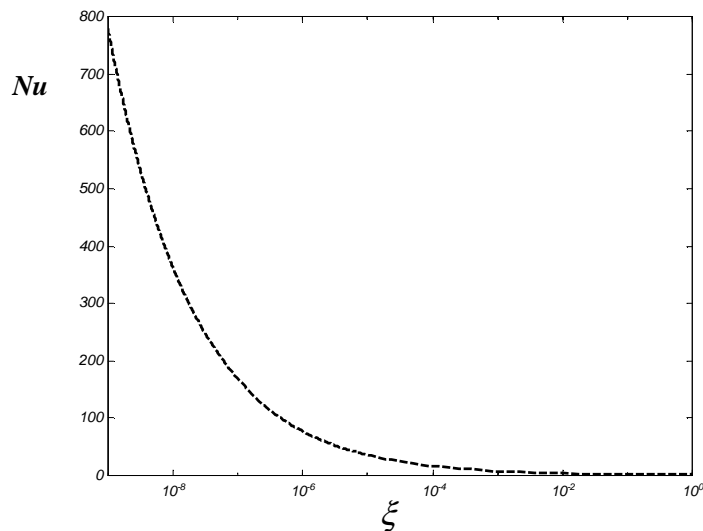


Figura 5.1. Número local de Nusselt cerca de la entrada del canal

La Figura 5.2 muestra los perfiles de Temperatura obtenidos en función de la coordenada adimensional transversal η , para diferentes valores de la coordenada ξ . Se puede apreciar que para valores pequeños de ξ las soluciones encontradas para los perfiles de temperatura funcionan muy bien, donde no aparecen las típicas oscilaciones que se dan en esta región, ocupando los algoritmos clásicos para la resolución de este problema.

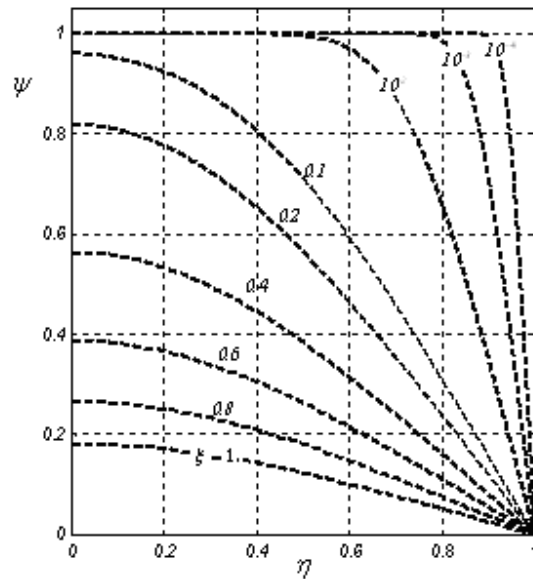


Figura 5.2. Perfiles de temperatura en la región de entrada.

Los datos en la Figura 5.1 y Tabla 5.1, sugieren que Nu tiene un comportamiento de ley de potencia en la región $10^{-9} \leq \xi \leq 10^{-3}$, para luego progresivamente ir cambiando hasta llegar al valor clásico constante de 1,885175. Sin embargo, una expresión de la ley de potencias simple no es suficiente para proporcionar el mismo nivel de precisión en el rango de ξ propuesto, por lo que se debe utilizar un factor de corrección. Por lo tanto Nu se propone la siguiente expresión para un alto número de Graetz:

$$Nu(\xi) = a \xi^{-1/3} (1 - b \xi^{1/4} e^{-c\xi}) \quad 10^{-9} \leq \xi \leq 10^{-3} \quad (5.15)$$

donde $a = 0,7766$, $b = 0,0442$ y $c = 1422$. Tomando los valores para Nu producidos por la ecuación (5.14), es posible evaluar la precisión de las diferentes correlaciones encontradas en la literatura y la propuesta por el presente trabajo. Esto se muestra en la Figura 5.3, donde el error porcentual de las diferentes correlaciones se grafica en el rango del número de Graetz utilizados en este estudio.

La ecuación (5.15) describe los resultados de (5.14) con gran precisión, ya que los valores de Nu calculados a partir de (5.15) no difieren en más del 0,02% de los predichos por (5.14) a lo largo de toda la gama de valores de Gz . En la Figura 5.3 se puede apreciar que la correlación de Shah y Londres tiende a predecir mejor los números de Nusselt local muy cerca de la entrada, mientras que la correlación de Nickolay y Martin da una mejor concordancia con los nuestros en el extremo inferior del rango de Gz .

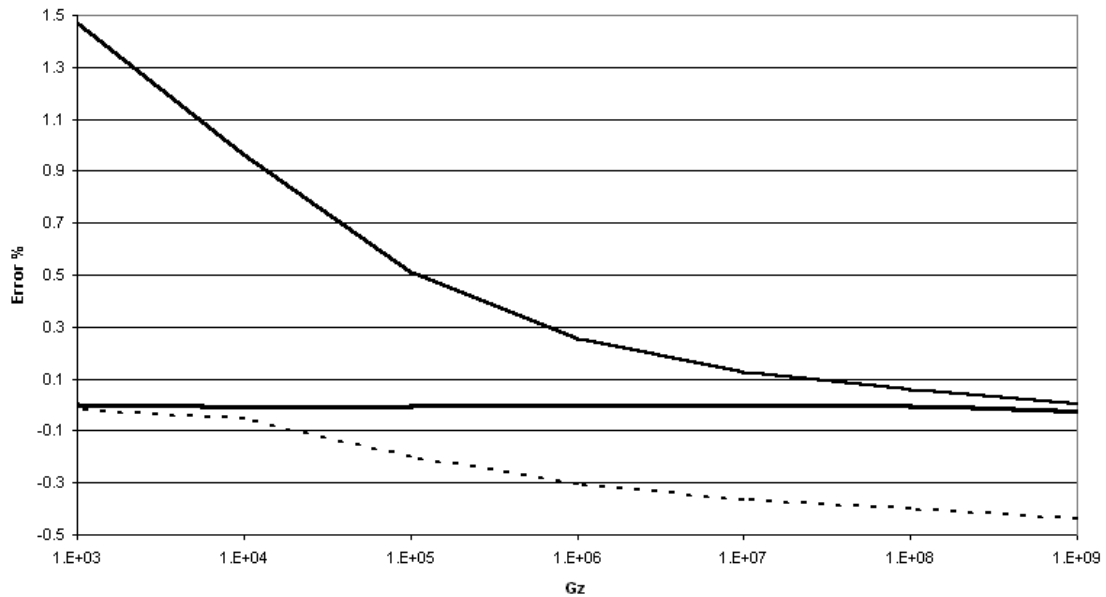


Figura 5.3. Comparación de errores para las diferentes correlaciones. Las curvas, en orden descendente son: la correlación de Shah y Londres, la correlación presente y la de Nickolay y Martin.

5.5 Conclusiones

En este capítulo se realizaron cálculos directos mediante series de Fourier para el problema de Graetz.

Los valores del número de Nusselt se analizaron para regiones cercanas a la entrada del canal. El rango de números de Graetz para los que se hicieron cálculos directos se han ampliado considerablemente hasta un valor de 10^9 . Cálculos anteriores en la literatura, al parecer, no exceden de un valor de $Gz = 10^5$, sobre la base de nuestra definición del número de Graetz.

Con base en el enfoque matemático y su implementación numérica, los valores locales de Nu producido por el método se cree que son de alta precisión. Se utilizan para producir una expresión analítica para la correlación (5.15), que muestra una precisión casi uniforme en toda la gama de valores para Gz investigados. Este hecho sugiere que la ecuación (5.15) es correcta para producir valores extrapolables de Nu en un rango de Gz que exceda el límite de 10^9 usado en este estudio.

6. PROBLEMAS DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN DUCTOS

Los problemas de flujo en ductos son de gran importancia en ingeniería, el transporte de diferentes materiales en tuberías por ejemplo, hace que el estudio de los fenómenos de transporte haya sido estudiado en forma intensiva a lo largo de la historia. En este capítulo se analizarán mediante series de Fourier algunos problemas clásicos de transferencia de calor en ductos.

6.1. Transferencia de Calor en un ducto con flujo no desarrollado

6.1.1 Flujo en la entrada de un canal

En este caso se estudiará la transferencia de calor experimentada por un fluido que entra en un canal plano de ancho $2L$, el perfil de velocidad a la entrada del canal es plano, las paredes del canal están a temperatura constante t_w . La Figura 6.1 muestra un esquema del problema planteado.

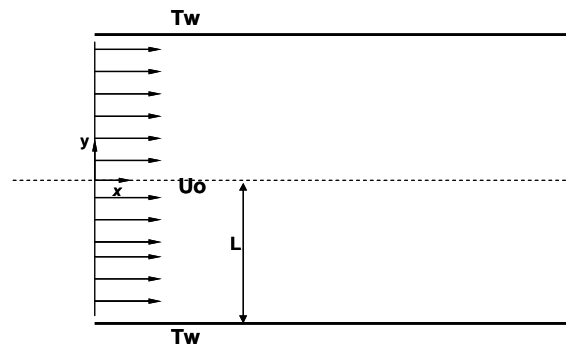


Figura 6.1 Esquema de la entrada de un flujo en un canal.

Las ecuaciones a resolver en este caso son:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (6.2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (6.3)$$

donde las coordenadas adimensionales están definidas por:

$$y = \frac{Y}{L} \quad x = \frac{X}{Re L} \quad u = \frac{U}{U_o} \quad v = Re \frac{V}{U_o} \quad T = \frac{t - t_w}{t_o - t_w} \quad (6.4)$$

El número de Reynolds está dado por $Re = \frac{\rho U_o L}{\mu}$,

- U_o : Velocidad inicial del fluido en $x = 0$
 t_o : Temperatura inicial del fluido en $x = 0$
 t_w : Temperatura de pared
 t : Temperatura del fluido

Las condiciones de borde están dadas por:

$$u(0, y) = 1 \quad u(x, 1) = 0 \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (6.5)$$

$$T(0, y) = 1 \quad T(x, 1) = 0 \quad \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (6.6)$$

El campo de velocidades y temperatura se expresa en función de series de Fourier, quedando de la forma:

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \cos(k_i y) \quad (6.7)$$

$$v(x, y) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k_i} f_i'(x) \sin(k_i y) \quad (6.8)$$

$$T(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x) \cos(k_i y) \quad (6.9)$$

con $k_i = \frac{\pi}{2L} (2i - 1)$.

Los flujos descritos por este desarrollo son necesariamente simétricos respecto de $y=0$.

La expresión (6.8) para la velocidad v satisface automáticamente la ecuación de continuidad. Recordando que la base escogida forma una base ortogonal, se tiene:

$$\int_0^L \cos(k_i y) \cos(k_j y) dy = \frac{L}{2} \delta_{ij} \quad (6.10)$$

Reemplazando las ecuaciones (6.7), (6.8) y (6.9) en (6.2) se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \cos(k_i y) \sum_{j=1}^{\infty} f_j'(x) \cos(k_j y) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k_i} f_i'(x) \sin(k_i y) \sum_{j=1}^{\infty} k_j f_j(x) \sin(k_j y) \\ = -\frac{dp}{dx} - \sum_{i=1}^{\infty} k_i^2 f_i(x) \cos(k_i y) \end{aligned} \quad (6.11)$$

Es conveniente reordenar la ecuación (6.11) de la siguiente forma:

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\infty} (f_i(x)f_j'(x) - \frac{k_j}{k_i} f_i'(x)f_j(x)) \cos((k_i + k_j)y) + \quad (6.12)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\infty} (f_i(x)f_j'(x) + \frac{k_j}{k_i} f_i'(x)f_j(x)) \cos((k_i - k_j)y) = -\frac{dp}{dx} - \sum_{i=1}^{\infty} k_i^2 f_i(x) \cos(k_i y)$$

Multiplicando la ecuación (6.12) por $\cos(k_p y)$ e integrándola desde $y = 0$ hasta $y = L$, se obtiene el siguiente set de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\infty} (f_i(x)f_j'(x) - \frac{k_j}{k_i} f_i'(x)f_j(x)) I_{ij}^p + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\infty} (f_i(x)f_j'(x) + \frac{k_j}{k_i} f_i'(x)f_j(x)) J_{i,j}^p \\ = -\frac{dp}{dx} \frac{\sin(k_p L)}{k_p} - \frac{L}{2} \sum_{i=1}^{\infty} k_i^2 f_i(x) \delta_{ip} \end{aligned} \quad (6.13)$$

Donde los coeficientes que aparecen en (6.13) están definidos por:

$$I_{ij}^p = -\sin(k_p L) \cos((k_i + k_j)L) \frac{k_p}{(k_i + k_j)^2 - k_p^2} \quad (6.14)$$

$$J_{ij}^p = -\sin(k_p L) \cos((k_i - k_j)L) \frac{k_p}{(k_i - k_j)^2 - k_p^2} \quad (6.15)$$

El sistema de ecuaciones (6.12) representa un set de ecuaciones para cada valor entero del número p . En principio p puede tomar infinitos valores, la manera de hacer resoluble este sistema de ecuaciones es tomar un número finito de valores para p , donde se está truncando la solución y se asume que si se consideran un número grande de términos, la solución finita es una buena aproximación para del sistema de ecuaciones (6.13).

Es conveniente reescribir (6.13), en la siguiente representación para la ecuación p -ésima:

$$\frac{1}{2} \vec{f}^T (A + B + D - C) \vec{f}' = -\frac{dp}{dx} \frac{\sin(k_p L)}{k_p} - \frac{L}{2} k_p^2 f_p(x) \quad (6.16)$$

donde

$$\begin{aligned} A_{ij}^p &= I_{ij}^p \\ B_{ij}^p &= J_{ij}^p \\ C_{ij}^p &= I_{ij}^p \frac{k_i}{k_j} \\ D_{ij}^p &= J_{ij}^p \frac{k_i}{k_j} \end{aligned}$$

La ecuación (6.16) representa un set de ecuaciones diferenciales de primer orden no lineal, resolver esta ecuación es en principio, más simple que resolver las ecuaciones originales a derivadas parciales, además, esta ecuación se puede escribir en forma matricial, adoptando la siguiente forma:

$$M(\vec{f}) \cdot \vec{f}' = -\frac{dp}{dx} \vec{\xi} + K \vec{f} \quad (6.17)$$

donde:

$$M(\vec{f}) = M_{pj} = \sum_{i=1}^{\infty} f_i (A_{ij}^p + B_{ij}^p + D_{ij}^p - C_{ij}^p) \quad (6.18)$$

$$K_{pj} = -\frac{L}{2} k_p^2 \delta_{pj}, \quad \vec{\xi} = \frac{\sin(k_p L)}{k_p} \quad (6.19)$$

Para el campo de temperaturas, se realiza un análisis similar, reemplazando (6.9) en (6.3), se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \cos(k_i y) \sum_{j=1}^{\infty} g_j'(x) \cos(k_j y) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k_i} f_i'(x) \sin(k_i y) \sum_{j=1}^{\infty} k_j g_j(x) \sin(k_j y) \\ = -\frac{1}{Pr} \sum_{i=1}^{\infty} k_i^2 g_i(x) \cos(k_i y) \end{aligned} \quad (6.20)$$

reordenando la ecuación (6.20) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\infty} (f_i(x) g_j'(x) - \frac{k_j}{k_i} f_i'(x) g_j(x)) \cos((k_i + k_j)y) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\infty} (f_i(x) g_j'(x) + \frac{k_j}{k_i} f_i'(x) g_j(x)) \cos((k_i - k_j)y) = \\ = -\frac{1}{Pr} \sum_{i=1}^{\infty} k_i^2 g_i(x) \cos(k_i y) \end{aligned} \quad (6.21)$$

Multiplicando la ecuación (6.21) por $\cos(k_p y)$ e integrando desde $y = 0$ hasta $y=L$, se obtiene el siguiente set de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\infty} (f_i(x) g_j'(x) - \frac{k_j}{k_i} f_i'(x) g_j(x)) I_{ij}^p + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\infty} (f_i(x) g_j'(x) + \frac{k_j}{k_i} f_i'(x) g_j(x)) J_{i,j}^p = \\ = -\frac{L}{2Pr} \sum_{i=1}^{\infty} k_i^2 g_i(x) \delta_{ip} \end{aligned} \quad (6.22)$$

de esta forma se obtiene la siguiente ecuación p-ésima:

$$\frac{1}{2} \vec{f}^T (A + B) \vec{g}' + \frac{1}{2} \vec{g}^T (D - C) \vec{f}' = -\frac{L}{2Pr} k_p^2 g_p(x) \quad (6.23)$$

Finalmente se puede escribir la siguiente ecuación matricial para el vector \mathbf{g} :

$$M_1(\vec{f}) \cdot \vec{g}' + M_2 = \frac{K}{Pr} \vec{g} \quad (6.24)$$

donde

$$M_1(\vec{f}) = M_{1pj} = \sum_{i=1}^{\infty} f_i (A_{ij}^p + B_{ij}^p) \quad (6.25)$$

$$M_2 = M_{2p} = \sum_{i=1}^{\infty} g_i (D_{ij}^p - C_{ij}^p) f_j' \quad (6.26)$$

En definitiva, a modo de resumen, el problema planteado se reduce a resolver dos ecuaciones matriciales, esto es:

$$M(\vec{f}) \cdot \vec{f}' = -\frac{dp}{dx} \vec{\xi} + K \vec{f}$$

$$M_1(\vec{f}) \cdot \vec{g}' + M_2 = \frac{K}{Pr} \vec{g}$$

donde

$$M(\vec{f}) = M_{pj} = \sum_{i=1}^{\infty} f_i (A_{ij}^p + B_{ij}^p + D_{ij}^p - C_{ij}^p)$$

$$K_{pj} = -\frac{L}{2} k_p^2 \delta_{pj}$$

$$M_1(\vec{f}) = M_{1pj} = \sum_{i=1}^{\infty} f_i (A_{ij}^p + B_{ij}^p)$$

$$M_2 = M_{2p} = \sum_{i=1}^{\infty} g_i (D_{ij}^p - C_{ij}^p) f_j'$$

De esta forma el problema de resolver el set de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales (6.1) , (6.2) y (6.3) se reduce a resolver un set de ecuaciones diferenciales ordinarias modular, que es mucho mas simple que el problema original.

6.1.2. Método Numérico

Como el problema se de resolver ecuaciones a derivadas parciales se ha reducido a resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias que solo dependen de la variable x , se procederá a discretizar la coordenada x de la siguiente forma:

$$x = j \cdot \Delta x \quad (6.27)$$

Además se ocupará un esquema de diferencias finitas hacia atrás, es decir, la derivada del vector $\vec{f}(x)$ estará dada por:

$$\vec{f}' = \frac{d\vec{f}}{dx} = \frac{\vec{f}^j - \vec{f}^{j-1}}{\Delta x} \quad (6.28)$$

De esta forma la ecuación (6.17) se puede escribir de la siguiente manera

$$M(\vec{f}^j) \cdot \frac{\vec{f}^j - \vec{f}^{j-1}}{\Delta x} = -\frac{dp}{dx} \vec{\xi} + K \vec{f}^j \quad (6.29)$$

Considerando el hecho de que el gradiente de presiones $\frac{dp}{dx} = \lambda(x)$ es una función que depende de la coordenada x , el sistema de ecuaciones anterior se puede escribir como:

$$M(\vec{f}^j) \cdot \frac{\vec{f}^j - \vec{f}^{j-1}}{\Delta x} = -\lambda^j \vec{\xi} + K \vec{f}^j \quad (6.30)$$

de la ecuación (6.30) se puede despejar sin dificultad el valor del vector \vec{f}^j en función del vector \vec{f}^{j-1} , esto es:

$$\vec{f}^j = (M(\vec{f}^j) - \Delta x K)^{-1} (M(\vec{f}^j) \vec{f}^{j-1} - \Delta x \lambda^j \vec{\xi}) \quad (6.31)$$

En el caso de flujos en canales, debe satisfacerse la conservación de la masa, es decir la integral de la densidad por la velocidad en cualquier sección transversal del canal debe permanecer constante. Es decir:

$$\int_0^L \rho u(x, y) dy = Cte. \quad (6.32)$$

Para un fluido incompresible, la ecuación anterior se reduce a:

$$\int_0^L u(x, y) dy = Cte. \quad (6.33)$$

Expresando el campo de velocidades $u(x,y)$ en series de Fourier, la integral anterior queda como:

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \int_0^L \cos(k_i y) dy = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \frac{\sin(k_i L)}{k_i} = Cte \quad (6.34)$$

Derivando la expresión anterior, se obtiene que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i'(x) \frac{\sin(k_i L)}{k_i} = 0 \quad (6.35)$$

Expresando esta última ecuación en forma vectorial se tiene que $\vec{f}' \cdot \vec{\xi} = 0$.

Por lo tanto el vector \vec{f}' debe ser ortogonal al vector $\vec{\xi}$. Esta propiedad puede ser usada en la ecuación (6.17), despejando \vec{f}' se obtiene

$$\vec{f}' = -\frac{dp}{dx} M^{-1} \vec{\xi} + M^{-1} K \vec{f} \quad (6.36)$$

Haciendo producto punto con $\vec{\xi}$ en ambos lados de la ecuación anterior, se obtiene que:

$$0 = -\frac{dp}{dx} (M^{-1} \vec{\xi}) \cdot \vec{\xi} + (M^{-1} K \vec{f}) \cdot \vec{\xi} \quad (6.37)$$

De esta última expresión se puede despejar el gradiente de presión, es decir:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{(M^{-1} K \vec{f}) \cdot \vec{\xi}}{(M^{-1} \vec{\xi}) \cdot \vec{\xi}} \quad (6.38)$$

Insertando la expresión (6.38) en la ecuación (6.31) se obtiene la siguiente ecuación:

$$\vec{f}^j = (M(\vec{f}^j) - \Delta x K)^{-1} (M(\vec{f}^j) \vec{f}^{j-1} - \Delta x \frac{(M^{-1} K \vec{f}) \cdot \vec{\xi}}{(M^{-1} \vec{\xi}) \cdot \vec{\xi}} \vec{\xi}) \quad (6.39)$$

Al igual que en el caso en que el gradiente de presión es cero, esta ecuación para \vec{f}^j debe resolverse en forma iterativa pues la matriz M debe ser calculada a partir de \vec{f}^j .

El proceso de aproximaciones sucesivas para este caso queda como:

$$\vec{f}^j_{(k+1)} = (M(\vec{f}^j_{(k)}) - \Delta x K)^{-1} (M(\vec{f}^j_{(k)}) \vec{f}^j_{(k)} - \Delta x \frac{(M(\vec{f}^j_{(k)})^{-1} K \vec{f}^j_{(k)}) \cdot \vec{\xi}}{(M(\vec{f}^j_{(k)})^{-1} \vec{\xi}) \cdot \vec{\xi}} \vec{\xi}) \quad (6.40)$$

donde $\vec{f}^j_{(k+1)}$ es el valor de \vec{f}^j en la iteración (k+1) y $\vec{f}^j_{(k)}$ es el valor de \vec{f}^j en la iteración (k) donde M es calculada con este vector, es decir $M(\vec{f}^j_{(k)})$. Este proceso iterativo se repite hasta que la nueva solución satisfaga algún criterio de convergencia. El criterio de convergencia que se utilizará es el mismo que en el caso sin gradiente de presión.

La ecuación (6.24) para el campo de temperatura resuelve mediante el mismo método de discretización, la ecuación que se obtiene es:

$$M_1(\vec{f}^j) \cdot \left(\frac{\bar{g}^j - \bar{g}^{j-1}}{\Delta x} \right) + M_2(\vec{f}^j, \bar{g}^j) = \frac{K}{Pr} \bar{g}^j \quad (6.41)$$

Despejando \bar{g}^j de la ecuación anterior, se tiene:

$$\bar{g}^j = \bar{g}^{j-1} + \Delta x M_1(\vec{f}^j)^{-1} \left(\frac{K}{Pr} \bar{g}^j - M_2(\vec{f}^j, \bar{g}^j) \right) \quad (6.42)$$

Las condiciones de borde para el problema en $x=0$, son un perfil inicial uniforme de velocidad, esto es $u(x=0, y) = 1$, en el espacio de Fourier, el vector inicial $f_i(x=0)$, es obtenido desde la condición:

$$f_i(0) = \frac{2}{L} \int_0^L u(0, y) \cos k_i y dy = \frac{2 \sin(k_i L)}{L k_i} \quad (6.43)$$

6.1.3. Resultados

A continuación se muestran los resultados obtenidos a partir de la integración numérica de las ecuaciones (6.17) y (6.24), con la condición inicial (6.43) para $L=1$.

La Figura 6.2 muestra los perfiles de velocidad obtenidos a lo largo del canal.

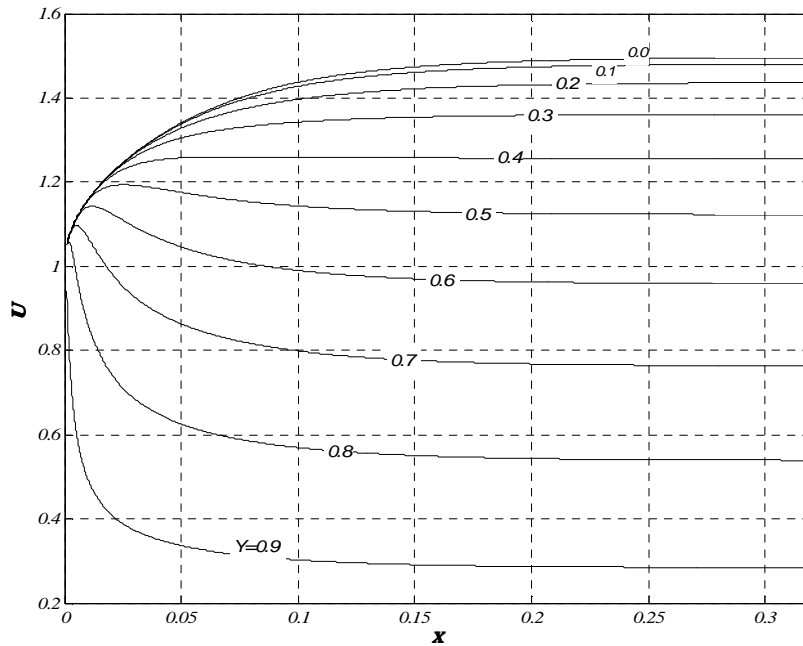


Figura 6.2. Perfiles de velocidad obtenidos a lo largo del canal.

La Figura 6.3 muestra los perfiles transversales de velocidad para diferentes valores de x . De ambas figuras (6.2 y 6.3) se puede apreciar claramente como el flujo alcanza su perfil

desarrollado $u(y) = \frac{3}{2}(1 - y^2)$ aproximadamente en $x = 0.3$, que concuerda muy bien con el clásico trabajo de Schlichting [16]. De esta forma se obtiene la siguiente expresión para la longitud de entrada en el canal L_e :

$$L_e = 0.3 L Re \quad (7.45)$$

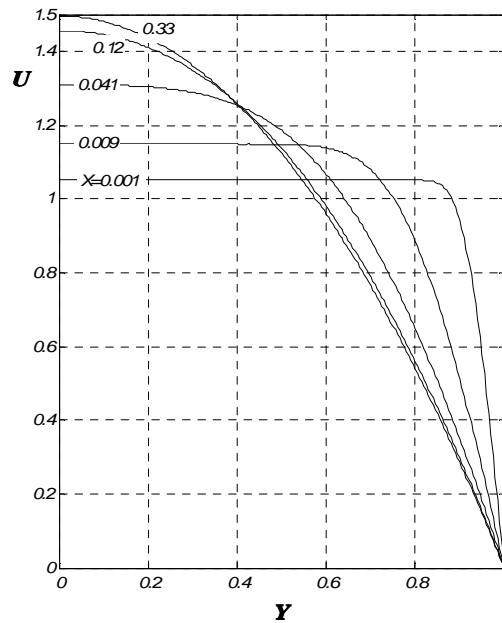


Figura 6.3 Perfiles transversales de velocidad para diferentes valores de x .

La Figura 6.4 muestra la comparación entre los resultados encontrados en este trabajo y los reportados por Hornberck [2] ocupando diferencias finitas. Se puede apreciar claramente el acuerdo entre los resultados obtenidos en este trabajo y los resultados obtenidos ocupando diferencias finitas.

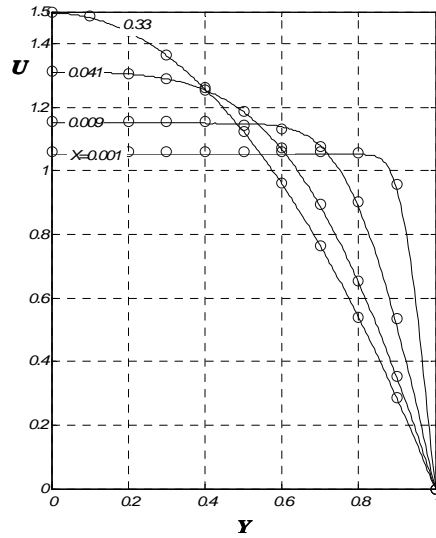


Figura 6.4 Comparación entre los resultados encontrados en este trabajo (—) y los reportados por Hornberck [2] ocupando diferencias finitas (o).

La Figura 6.5 muestra los perfiles transversales de temperatura T para diferentes valores de la coordenada x y para $Pr=1$. En ella se puede apreciar como la temperatura se va desarrollando y como en la región cercana a la entrada del canal, la temperatura central ($y=0$) permanece constante hasta un valor de x cercano a 0.04. Esto se ve mas claramente en la Figura 6.6 donde se grafica la temperatura del fluido en el centro del canal y como función de la coordenada x .

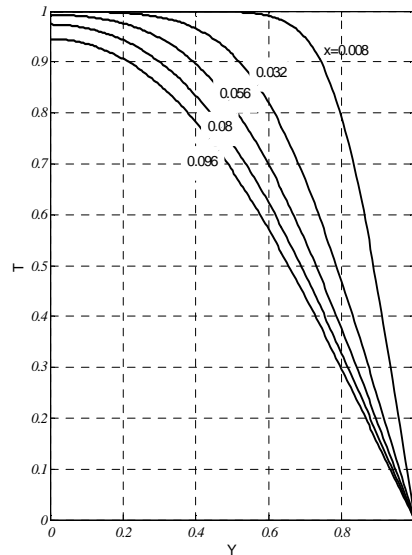


Figura 6.5. Perfiles transversales de temperatura T para diferentes valores de la coordenada x y para $Pr=1$.

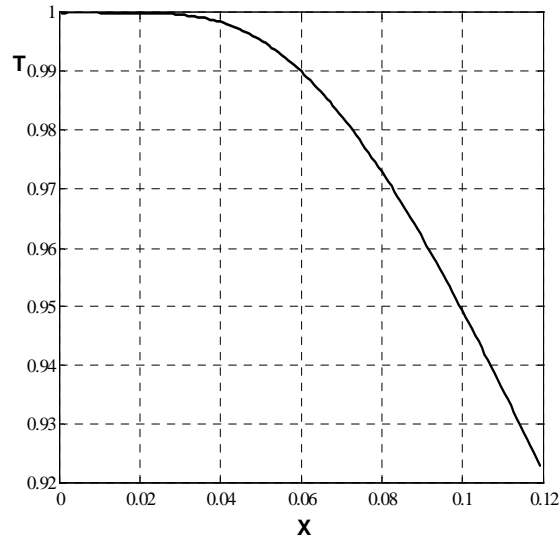


Figura 6.6. Temperatura del fluido en el centro del canal y como función de la coordenada x y para $Pr=1$.

La Figura 6.7 muestra la distribución de temperatura obtenida en el canal como función de las coordenadas x e y, para $Pr=1$, donde se puede apreciar claramente el desarrollo de la capa límite térmica a lo largo de la pared.

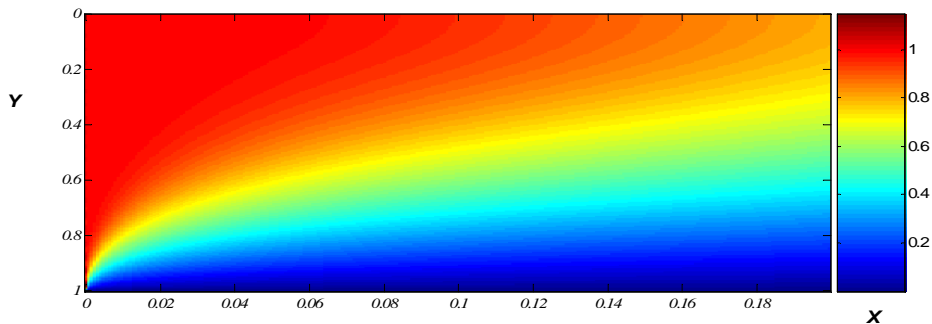


Figura 6.7 Distribución de temperatura obtenida en el canal como función de las coordenadas x e y, para $Pr=1$.

Un parámetro clave en la teoría de transferencia de calor es el Número de Nusselt, Nu , que es un número adimensional que mide el aumento de la transmisión de calor desde una superficie por la que un fluido discurre (transferencia de calor por convección) comparada con la transferencia de calor si ésta ocurriera solamente por conducción.

El número de Nusselt se determina con la siguiente expresión:

$$Nu = \frac{-\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=1}}{T_b - T_w} \cdot L \quad (6.46)$$

donde

$T_b = \frac{\int_0^L u(x, y)T(x, y)dy}{\int_0^L u(x, y)dy}$, expresando esta última expresión en series de Fourier se obtiene:

$$\int_0^L u(x, y)T(x, y)dy = \sum_{i,j=1}^{\infty} g_i(x)f_j(x) \int_0^L \cos(k_i y) \cos(k_j y) dy$$

$$\int_0^L u(x, y)T(x, y)dy = \sum_{i,j=1}^{\infty} g_i(x)f_j(x) \frac{L}{2} \delta_{ij}$$

$$\int_0^L u(x, y)T(x, y)dy = \frac{L}{2} g_i(x)f_i(x)$$

$$\int_0^L u(x, y)dy = \int_0^L \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \cos(k_i y) dy$$

$$\int_0^L u(x, y)dy = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \frac{\sin(k_i L)}{k_i} = 1$$

Finalmente para nuestro caso en que $L=1$, se obtiene

$$T_b = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)f_i(x) \quad (6.47)$$

Introduciendo (6.47) en (6.46), la siguiente expresión para el número de Nusselt es obtenida:

$$Nu = 2 \frac{\sum_{i=1}^{\infty} k_i g_i(x) \sin(k_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)f_i(x)} \quad (6.48)$$

La Figura 6.8 muestra el comportamiento del Número de Nusselt como función de la coordenada x (para $Pr=1$), obtenido en el presente trabajo y se compara con resultados obtenidos con diferencias finitas. Se puede apreciar que mientras más cerca del origen ($x = 0$), el número de Nusselt crece muy rápidamente, esto es debido a los grandes gradientes de temperatura producidos en esta región. También se puede apreciar que cuando $x \ll 1$ los resultados obtenidos ocupando diferencias finitas subestiman el valor del número de Nusselt, esto es debido a que el paso Δx ocupado en el algoritmo numérico de diferencias finitas fue $dx=0.01$, que es inadecuado en esta región. Para valores de x relativamente grandes $x > .18$, el Número de Nusselt tiende a su valor constante 1.885.

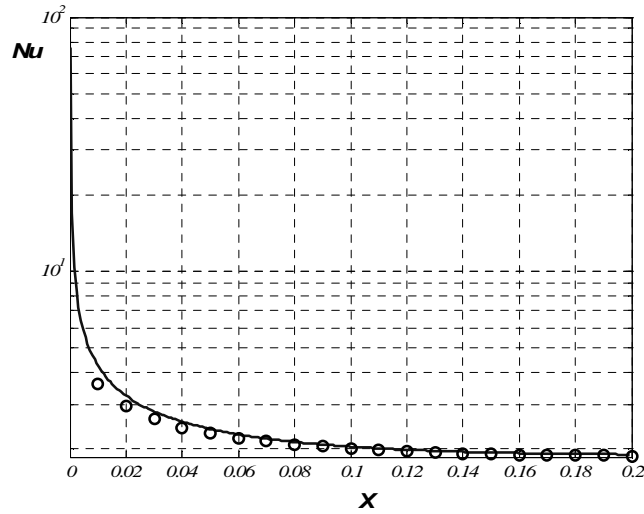


Figura 6.8 Número de Nusselt como función de la coordenada x, para $Pr=1$.

6.1.4 Análisis Asintótico

Cuando se analiza el problema aguas abajo, es decir, cuando $x \gg 1$, se puede suponer que la solución para el vector $\vec{f}(x)$ tiene la siguiente forma:

$$\vec{f} = \vec{f}_\infty + \vec{f}_1(x) \quad (6.48)$$

Donde el vector \vec{f}_∞ es el valor asintótico de $\vec{f}(x)$ cuando x tiende a infinito. Insertando esta expresión en la ecuación de movimiento:

$$M(\vec{f}) \cdot \vec{f}' = -\frac{dp}{dx} \vec{\xi} + K \vec{f}$$

se obtiene

$$M(\vec{f}_\infty + \vec{f}_1) \cdot \vec{f}_1' = -\frac{dp}{dx} \vec{\xi} + K(\vec{f}_\infty + \vec{f}_1) \quad (6.49)$$

Además, el gradiente de presión tendrá la siguiente forma asintótica:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp_\infty}{dx} + \frac{dp_1(x)}{dx} \quad (6.50)$$

Reemplazando (6.50) en (6.49), se obtiene la siguiente ecuación:

$$M(\vec{f}_\infty) \vec{f}_1' + M(\vec{f}_1) \cdot \vec{f}_1' = -\frac{dp_\infty}{dx} \vec{\xi} - \frac{dp_1(x)}{dx} \vec{\xi} + K(\vec{f}_\infty + \vec{f}_1) \quad (6.51)$$

De la ecuación anterior es evidente que: $0 = -\frac{dp_\infty}{dx} \vec{\xi} + K \vec{f}_\infty$, ya que el gradiente de presión es constante cuando x tiende a ∞ , con esto se obtiene el siguiente valor para \vec{f}_∞

$$\vec{f}_\infty = \frac{dp_\infty}{dx} K^{-1} \vec{\xi} \quad (6.52)$$

El valor constante de $\frac{dp_\infty}{dx}$, se determina por la condición de conservación de la masa, esto es:

$$\vec{f} \cdot \vec{\xi} = Cte = 1 \quad (6.53)$$

La ecuación anterior implica que $(\vec{f}_\infty + \vec{f}_1(x)) \cdot \vec{\xi} = 1$, con lo que se obtiene el siguiente resultado, $\vec{f}_\infty \cdot \vec{\xi} = 1$ y $\vec{f}_1(x) \cdot \vec{\xi} = 0$, este resultado es inevitable, pues, $\vec{f}_1(x \rightarrow \infty) = 0$ y \vec{f}_∞ es constante para todo x.

De esta forma, realizando el producto punto por $\vec{\xi}$ en la ecuación (6.52), se obtiene que:

$$\frac{dp_\infty}{dx} = \frac{(\vec{f}_\infty \cdot \vec{\xi})}{(K^{-1}\vec{\xi}) \cdot \vec{\xi}} = \frac{1}{(K^{-1}\vec{\xi}) \cdot \vec{\xi}} \quad (6.54)$$

y

$$\vec{f}_\infty = \frac{1}{(K^{-1}\vec{\xi}) \cdot \vec{\xi}} K^{-1}\vec{\xi} \quad (6.55)$$

El vector \vec{f}_∞ corresponde a los coeficientes de la serie de Fourier para un perfil parabólico desarrollado dentro del canal, dado por $u(y) = \frac{3}{2}(1 - (\frac{y}{L})^2)$.

Para encontrar el campo de velocidades en todo valor de x, se debe resolver la ecuación diferencial para \vec{f}_1 , esto es:

$$M(\vec{f}_\infty)\vec{f}_1' + M(\vec{f}_1)\vec{f}_1' = -\frac{dp_1(x)}{dx}\vec{\xi} + K\vec{f}_1 \quad (6.56)$$

Como primera aproximación, se puede omitir el término cuadrático de la ecuación anterior, entonces el problema se reduce a resolver un sistema lineal de ecuaciones dado por:

$$M(\vec{f}_\infty)\vec{f}_1' = -\frac{dp_1(x)}{dx}\vec{\xi} + K\vec{f}_1 \quad (7.57)$$

Como el sistema de ecuaciones diferenciales es lineal, se puede asumir que el gradiente de presión y el vector \vec{f}_1 tienen la siguiente forma:

$$-\frac{dp_1(x)}{dx} = \alpha e^{-\lambda x} \quad (6.58)$$

$$\vec{f}_1 = \vec{b} e^{-\lambda x} \quad (6.59)$$

Reemplazando las expresiones (6.58) y (6.59) en la ecuación (6.57), se obtiene:

$$-\lambda M(\vec{f}_\infty) \cdot \vec{b} = K\vec{b} + \alpha\vec{\xi} \quad (6.60)$$

También debe considerarse la conservación de masa en el canal, $\vec{f}_1(x) \cdot \vec{\xi} = 0$, con lo que se obtiene la siguiente restricción:

$$\vec{b} \cdot \vec{\xi} = 0 \quad (6.61)$$

Las ecuaciones (6.60) y (6.61) representan un problema de valores propios para el vector \vec{b} y los escalares α y λ , para llevarlo a un problema estandar de valores propios, es conveniente realizar las siguientes transformaciones:

Sea

$$\vec{b}_* = \begin{bmatrix} \vec{b} \\ \alpha \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} K & \vec{g} \\ \vec{g}^T & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.62)$$

Mediante las transformaciones (6.62), las ecuaciones (6.60) y (6.61) se convierten en el siguiente problema de valores propios:

$$-\lambda B \cdot \vec{b}_* = A \vec{b}_* \quad (6.63)$$

Que se puede escribir como:

$$A^{-1}B \cdot \vec{b}_* = -\frac{1}{\lambda} \vec{b}_* \quad (6.64)$$

Es decir: $D \cdot \vec{z} = \mu \vec{z}$, que es un problema clásico de valores propios, donde los vectores propios están dados por \vec{z} y los valores propios por μ , con $D = A^{-1}B$, $\mu = -\frac{1}{\lambda}$ y $\vec{z} = \vec{b}_*$.

Las soluciones de la ecuación (6.64), entregan un set de valores propios λ_i asociados a un set de vectores propios \vec{b}_i . De esta forma, la solución para $\vec{f}_1(x)$ se puede expresar como una superposición de los vectores propios, es decir:

$$\vec{f}_1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \vec{b}_i e^{-\lambda_i x} \quad (6.65)$$

Finalmente, se obtiene que:

$$\vec{f}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \vec{b}_i e^{-\lambda_i x} + \vec{f}_{\infty} \quad (6.66)$$

La Tabla 6.1 muestra comparaciones entre los 5 primeros valores propios obtenidos por el presente trabajo y los obtenidos por Kumar *et al* [24], en un estudio en el cual resuelven aguas abajo el desarrollo de un fluido que ingresa en un canal.

i	Kumar <i>et al.</i> λ_i	Presente trabajo λ_i
1	18.81	18.8139
2	57.52	57.5229
3	117.30	117.2912
4	198.26	198.2332
5	300.50	300.4007

Tabla 6.1. Valores propios obtenidos por el presente trabajo y los obtenidos por Kumar *et al*.

De la Tabla 6.1 se puede apreciar que los valores coinciden bastante bien con los reportados por Kumar *et al* [24].

Los coeficientes a_i son determinados a partir de las condiciones iniciales, $\vec{f}(x=0) = \vec{f}_0$, con esto se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones para los coeficientes a_i :

$$\vec{f}_0 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \vec{b}_i e^{-\lambda_i x} + \vec{f}_{\infty} \quad (6.67)$$

$$[\vec{b}] \vec{a} = \vec{f}_0 - \vec{f}_{\infty} \quad (6.68)$$

$$\vec{a} = [\vec{b}]^{-1} (\vec{f}_0 - \vec{f}_{\infty}) \quad (6.69)$$

donde, la matriz $[\vec{b}]$ es la matriz compuesta por los vectores columna \vec{b}_i , y en el espacio de Fourier, el vector inicial $f_i(x=0)$, es obtenido desde la condición anterior:

$$f_i(0) = \frac{2}{L} \int_0^L u(0, y) \cos k_i y dy = \frac{2}{L} \frac{\sin(k_i L)}{k_i}$$

Las Figuras 6.9 (a) y 6.9 (b) muestran los perfiles transversales de velocidad U para diferentes valores de x y a lo largo del canal para diferentes valores de la coordenada Y , obtenidos mediante esta aproximación asintótica y la solución numérica exacta de las ecuaciones, claramente se puede ver que la aproximación entrega una buena aproximación, especialmente para valores de x relativamente grande ($x > 0.1$).

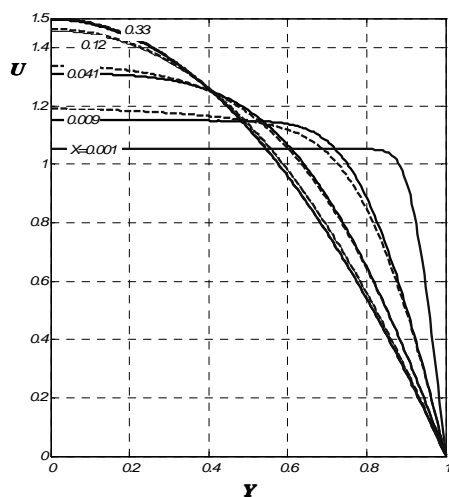


Figura 6.9 (a). Perfiles transversales de velocidad U para diferentes valores de x , aproximación asintótica (---), solución numérica (—) para $L=1$.

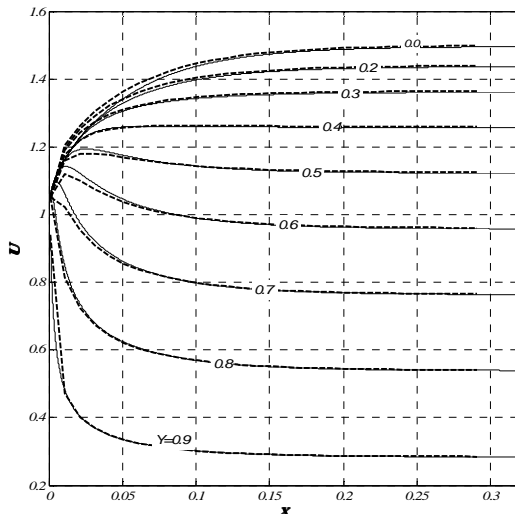


Figura 6.9 (b). Velocidad U a lo largo del canal para diferentes valores de Y , aproximación asintótica (---), numérica (—) para $L=1$.

En cuanto a la transferencia de calor, la ecuación $M_1(\vec{f}) \cdot \vec{g}' + M_2 = \frac{1}{Pr} K \vec{g}$, puede ser simplificada mediante la introducción de $\vec{f} = \vec{f}_\infty + \vec{f}_1(x)$, entonces en primera aproximación, se tiene que:

$$M_1(\bar{f}_\infty) \cdot \bar{g}' = \frac{1}{Pr} K \bar{g}$$

Este problema corresponde exactamente al problema de Graetz estudiado en el capítulo anterior, que consiste en la transferencia de calor que experimenta un flujo desarrollado. Es decir, un perfil parabólico, que ingresa a un canal, tal que la temperatura de las paredes es T_w y la temperatura del fluido a la entrada del canal es T_o .

En general la expansión para el desarrollo asintótico del campo de velocidades se puede llevar hasta cualquier nivel. Para realizar esto es conveniente expresar la función $\bar{f}(x)$ de la siguiente forma:

$$\bar{f} = \bar{f}_\infty + \varepsilon \bar{f}_1(x) + \varepsilon^2 \bar{f}_2(x) + \dots$$

donde se ha introducido un parámetro virtual ε pequeño para poder ordenar correctamente los ordenes de magnitud. Introduciendo esta expresión para \bar{f} en la ecuación (6.17) y ordenando términos según la potencia de ε , se obtiene el siguiente set de ecuaciones:

Orden ε^0 :

$$0 = -\frac{dp_\infty}{dx} \bar{\xi} + K \bar{f}_\infty$$

Orden ε^1 :

$$M(\bar{f}_\infty) \bar{f}_1' = -\frac{dp_1(x)}{dx} \bar{\xi} + K \bar{f}_1$$

Orden ε^2 :

$$M(\bar{f}_\infty) \bar{f}_2' = -\frac{dp_2(x)}{dx} \bar{\xi} + K \bar{f}_2 - M(\bar{f}_1) \bar{f}_1' \quad (6.70)$$

Los ordenes de ε^0 y ε^1 ya fueron resueltos en las aplicaciones anteriores, si se quiere encontrar la solución a orden ε^2 , se debe resolver la ecuación (6.70). Es claro que la solución a orden ε^1 funciona muy bien para el problema de la entrada de un fluido en un canal, queda pendiente encontrar las soluciones a ordenes superiores, tanto para el campo de velocidades como también para el campo de temperaturas.

6.2 Canal Plano con una expansión brusca simétrica.

El problema de una expansión brusca en un canal plano es un problema clásico en la literatura sobre fluidodinámica. Varios autores han estudiado este problema, ya sea, resolviendo las ecuaciones completas de Navier Stokes (Durts et al [25]), como también ocupando las ecuaciones de capa límite (Kumar et al [24], Kwon et al [26], Plotkin et al [4] y Acrivos et al [3]).

La Figura 6.10 muestra un canal que experimenta una expansión brusca simétrica, donde el ancho del canal varía de $2h$ a $2L$, a la entrada se ha superpuesto un perfil de velocidad parabólico para el flujo.

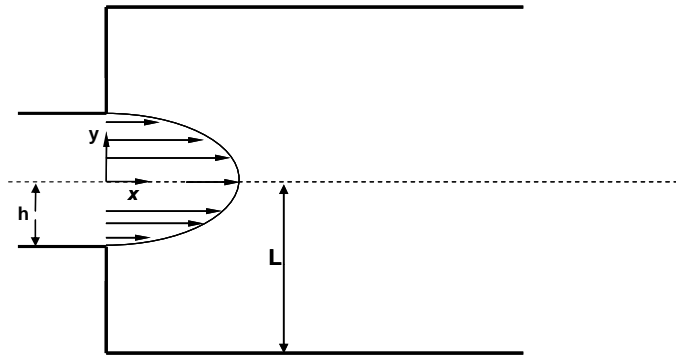


Figura 6.10. Canal con expansión brusca y perfil de velocidad parabólico en la entrada.

En este caso la condición inicial en $x = 0$ es un perfil parabólico de velocidad, es decir:

$$u(0, y) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2 & 0 \leq y \leq h \\ 0 & h < y \leq L \end{cases} \quad (6.71)$$

En el espacio de Fourier, el vector inicial $f_i(x = 0)$, es obtenido desde la condición anterior:

$$f_i(0) = \frac{2}{L} \int_0^L u(0, y) \cos k_i y \, dy = \frac{4}{Lk_i} \left(\frac{\sin k_i h}{h^2 k_i^2} - \frac{1}{hk_i} \cos k_i h \right) \quad (6.72)$$

La Figura 6.11 muestra el campo de velocidades u obtenido para $\frac{h}{L} = \frac{1}{3}$, y se compara con resultados experimentales obtenidos por Durts et al. [25].

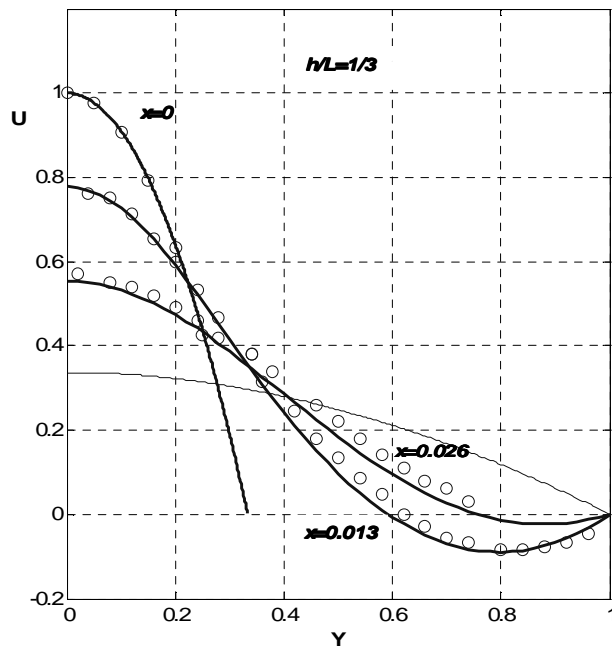


Figura 6.11. Canal con expansión brusca y perfil de velocidad parabólico en la entrada.

La Figura 6.12 muestra las líneas de corriente obtenidas para el caso $\frac{h}{L} = \frac{1}{3}$, la zona de recirculación predicha por el modelo concuerda bastante bien con los resultados conocidos en la literatura [26].

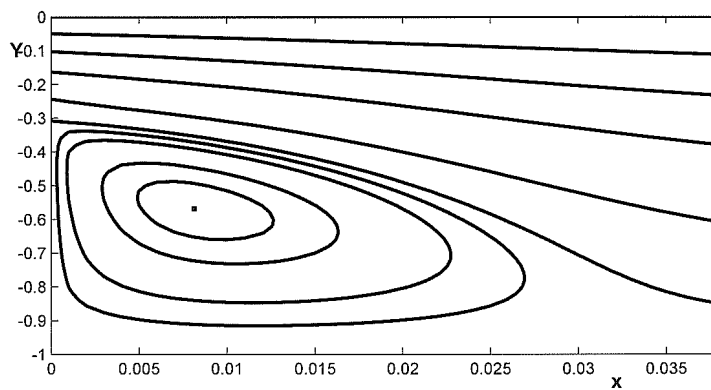


Figura 6.12 Líneas de corriente obtenidas para el caso $\frac{h}{L} = \frac{1}{3}$.

El punto donde el fluido vuelve a encontrarse con la pared, (reattachment point) L_R , obtenido en el presente trabajo es cercano a $x_0 = 0.031$, con lo que se obtiene el siguiente valor dimensional para esa posición:

$$L_R = 0.031 L Re \quad (6.73)$$

Para realizar la comparación con resultados existentes en la literatura para L_R , es necesario expresar el Número de Reynolds de la siguiente forma:

$$Re_{L-h} = \frac{\rho U_{ave}(L-h)}{\mu} \quad (6.74)$$

La velocidad promedio U_{ave} se determina con la expresión $U_{ave} = \frac{1}{h} \int_0^h (1 - (\frac{y}{h})^2) dy = \frac{2}{3}$,

entonces, el número de Reynolds que:

$$Re = \frac{\rho U_o L}{\mu} = \frac{3}{2} \frac{L}{L-h} \frac{\rho U_{ave}(L-h)}{\mu} = \frac{3}{2} \frac{L}{L-h} Re_{L-h} \quad (6.75)$$

Para el caso particular $\frac{h}{L} = \frac{1}{3}$, se obtiene:

$$Re = \frac{9}{4} Re_{L-h} \quad (6.76)$$

Obteniéndose la siguiente expresión para L_R :

$$L_R = 0.032 (L-h) \frac{9}{4} Re_{L-h} \quad (6.77)$$

que también puede ser expresada como $L_R = 0.137 h Re_{L-h}$.

Otro parámetro de interés en una expansión brusca es la posición del centro de la recirculación respecto del salto L_e , que para el caso en particular $\frac{h}{L} = \frac{1}{3}$, se obtiene:

$$L_e = 0.0065 L Re = 0.029 \cdot h \cdot Re_{L-h} \quad (6.78)$$

La Figura 6.13 muestra las líneas de corriente obtenidas para el caso $\frac{h}{L} = \frac{1}{2}$, la zona de recirculación predicha por el modelo es $L_R = 0.025 L Re$, que concuerda bastante bien con los resultados conocidos en la literatura [26].

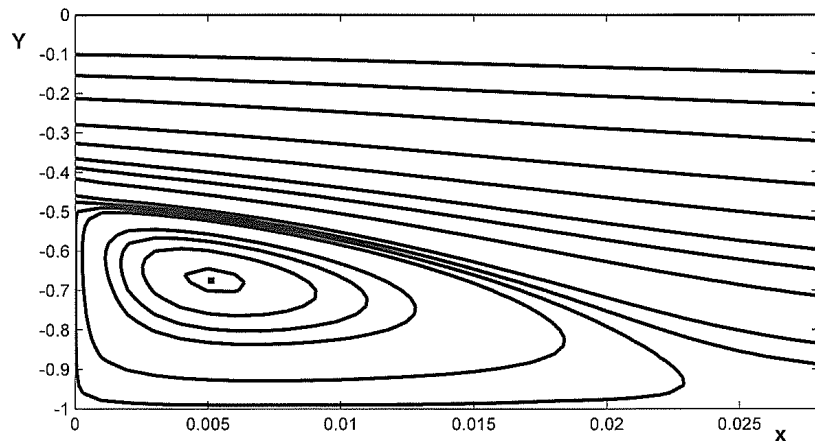


Figura 6.13. Líneas de corriente obtenidas para el caso $\frac{h}{L} = \frac{1}{2}$.

La Tabla 6.2 muestra comparaciones entre los valores para L_R y L_e reportados en la literatura y los encontrados en el presente trabajo para $\frac{h}{L} = \frac{1}{3}$.

Investigador	Ecuaciones resueltas	$\frac{L_R}{h \cdot Re_{L-h}}$	$\frac{L_e}{h \cdot Re_{L-h}}$	Re_{L-h}
Hung	Navier-Stokes	0.132	0.032	46.6
Agarwal	Navier-Stokes	0.136	0.032	46.6
Kumar <i>et al</i>	Boundary Layer	0.128	0.028	
Kwon <i>et al</i>	Boundary Layer	0.138	0.026	
Presente trabajo	Boundary Layer	0.137	0.029	

Tabla 6.2 Valores para L_R y L_e reportados en la literatura y el presente trabajo para $\frac{h}{L} = \frac{1}{3}$.

En cuanto a la transferencia de calor en el ducto con una expansión $\frac{h}{L} = \frac{1}{2}$, la Figura 6.14 muestra las líneas de corriente (cuadro superior) y el campo de temperaturas obtenido (cuadro inferior) para el caso $Pr=1$.

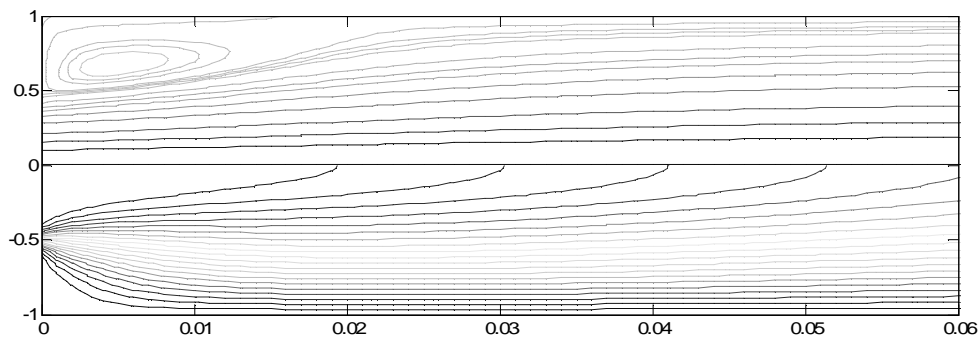


Figura 6.14. Líneas de corriente (cuadro superior) y el campo de temperaturas obtenido (cuadro inferior).

La Figura 6.15 muestra el número de Nusselt, en este caso definido como: $Nu = \frac{-\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=1} L}{T_o - T_w}$, para distintos números de Reynolds en función de X/h para $Pr=1$.

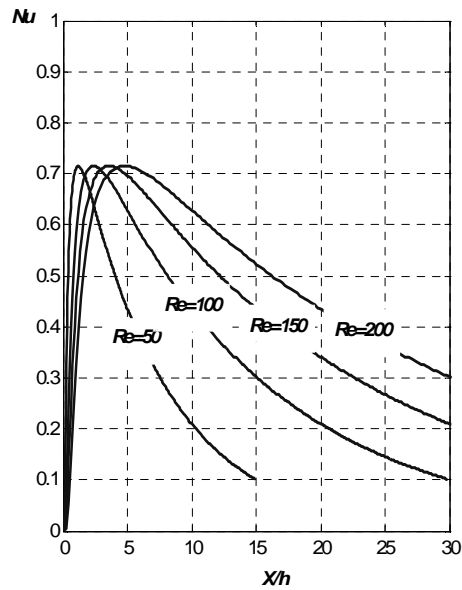


Figura 6.15. Número de Nusselt, para distintos números de Reynolds en función de X/h para $\frac{h}{L} = \frac{1}{3}$ y $Pr=1$.

6.3 Conclusiones

En este capítulo se ha estudiado el flujo y la transferencia de calor en canales planos mediante las ecuaciones de Capa Límite. El método de solución expuesto ha sido el de desarrollar el campo de velocidades y temperaturas en series de Fourier. Los resultados muestran que este tipo de soluciones entregan soluciones correctas, con alta precisión y que concuerdan bastante bien con los resultados entregados por otros investigadores ocupando diferencias finitas.

7. APLICACIÓN DE LAS SERIES DE FOURIER A FLUJOS TIPO CHORROS

En este capítulo se estudiarán problemas de flujos que involucren chorros planos, la motivación de esto es demostrar que las series de Fourier también son factibles de aplicar a este tipo de flujos, sobre todo considerando la importancia que tienen los chorros en la ingeniería.

7.1 Introducción

El comportamiento de chorro plano que emana desde un orificio a un fluido en reposo es de mucho interés en fluido mecánica por razones teóricas como también prácticas, ya este tipo de flujos tiene muchas aplicaciones en el área de la ingeniería.

Numerosos autores han aplicado la teoría de capa límite a la resolución de flujos tipo chorro, considerándose entre los pioneros de estos estudios a Bickley [27] y Schlichting [16]. Las soluciones encontradas por estos autores consideran que el ancho de boquilla es infinitamente pequeña, esto les permite encontrar soluciones analíticas exactas al problema mediante ecuaciones de similitud. Crane extiende el problema a chorros en una atmósfera de diferente densidad y aplica teoría de perturbaciones para encontrar una solución analítica aproximada [28, 29]. Pozzi et al. [30] introduce la aproximación de Padé para estudiar flujos tipo chorros planos. Revuelta et al. [31] analiza la idea del origen virtual de un chorro como una corrección a primer orden en la descripción del campo lejano, con la idea de encontrar una mejor solución en el campo medio para las soluciones encontradas por [16, 27] cuando las dimensiones de la boquilla son finitas.

Más recientemente, Astin and Wilks [32, 33] estudian el desarrollo de un chorro que emana de una boquilla con dimensiones muy pequeñas y que descarga en una corriente no uniforme de diferente densidad, Brand y Lahey [34] ocupando soluciones de similitud para las ecuaciones de Capa Límite, estudian el efecto de la flotabilidad en chorros axisimétricos y planos. Sánchez-Sanz et al. [35] ocupando análisis asintótico, estudiaron chorros láminares con elevada temperatura descargando en atmósferas frías. Martynenko et al. [36] realizaron un análisis de los efectos de la flotabilidad sobre el momentum y transferencia de calor en chorros y plumas verticales.

Los trabajos anteriormente mencionados están basados en soluciones de similitud para las ecuaciones de Capa Límite. Estas transformaciones de similitud convierten las ecuaciones de la Capa Límite en ecuaciones diferenciales ordinarias; esa es su virtud, lo que permite encontrar soluciones más precisas y en algunas ocasiones soluciones analíticas exactas. Cuando las dimensiones de la boquilla son finitas, generalmente no es posible encontrar una solución auto-similar para las ecuaciones de Capa Límite. En estos casos se debe recurrir a soluciones enteramente numéricas [37-38]. En 1992 Yu et al. [39] llevaron a

cabo un estudio numérico de chorros planos con flotación, tanto para el chorro libre como para un chorro paralelo a una pared. Más recientemente Aissia et al. [40] resuelven numéricamente las ecuaciones de Capa Límite para un chorro axisimétrico vertical dotado de flotabilidad. En 2007 Ali et al. [41] entregan un detallado estudio numérico de la influencia del número de Prandtl sobre el comportamiento en la hidrodinámica y transferencia de calor para un chorro laminar dotado de flotación. El caso de un chorro plano conductor bajo la acción de un campo magnético transversal fue estudiado por Moreau [42], encontrando soluciones de similitud para el campo de velocidades muy lejos de la boquilla.

Con relación a la aplicación de métodos espectrales para la resolución de las ecuaciones de Capa Límite, Kumar and Yajnik [24] estudiaron el flujo en canales incluyendo una expansión brusca, usando una expansión auto-funciones basadas en el flujo de Poiseuille. De esta forma el problema es reducido a resolver un sistema de ecuaciones diferenciales no-lineales de primer orden acoplado. En la práctica este sistema de ecuaciones tiende a desacoplarse en la medida que se avanza en la integración en la dirección del flujo. En 1982 Plotkin [4] resuelve el mismo problema, aplicando específicamente series de Fourier, encontrando soluciones para la expansión brusca, y otras aplicaciones, como el flujo en un canal suavemente divergente, encontrando que este tipo de desarrollos entregan resultados que concuerdan bastante bien con los resultados encontrados por otros investigadores ocupando diferencias finitas y otros métodos numéricos. Más recientemente, Figueira et al. [43] resuelve el flujo en la entrada de un canal aplicando la técnica de transformaciones integrales a las ecuaciones de Capa Límite. Khabibrakhmanov et al. [14] resuelve la ecuación de Blasius, haciendo uso de un método espectral con los polinomios de Laguerre generalizados.

En 2004, Rosales and Frederick [44] resolvieron el clásico problema de Graetz mediante la aplicación de las series de Fourier. Esta solución tiene la virtud de que entrega valores numéricos muy precisos para el número de Nusselt en la zona cerca a la entrada al canal. Ma et al. [15] desarrollaron un método espectral basado en las funciones de Hermite para ecuaciones diferenciales parabólicas en dominios no acotados. Recientemente, Rosales and Valencia [45] estudiaron la ecuación de Blasius mediante series de Fourier, encontrando una solución con una alta precisión. Los mismos autores aplicaron la misma técnica para resolver la ecuación de Falkner-Skan [46]. Los resultados en general muestran que los métodos pseudo-espectrales son capaces de entregar soluciones numéricas con alta precisión. Una completa revisión de los métodos espectrales aplicados a la mecánica de fluidos puede ser encontrada en [1]. Respecto a la aplicación de métodos espectrales a flujos tipo jet, Rosales and Valencia [47] aplicaron series de Fourier series para estudiar la fluido-dinámica de un chorro libre y plano.

A continuación se aplicará el método espectral usando una expansión en series de Fourier para estudiar un chorro vertical hidromagnético con flotación que emana de un orificio cuyas dimensiones son finitas.

7.2 Planteamiento del problema

Si se considera un flujo en régimen permanente y laminar de fluido hidromagnético combinado con la transferencia de calor por convección natural de un chorro vertical, donde un campo magnético uniforme de intensidad B_o es aplicado en la dirección y que es perpendicular a la dirección axial del chorro.

En este caso las ecuaciones diferenciales que gobiernan el chorro hidromagnético derivadas a partir de la aproximación de Capa Límite están dadas por:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{Gr}{Re} \vartheta - M^2 u \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (7.2)$$

$$u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \quad (7.3)$$

Donde las coordenadas adimensionales están dadas por:

$$y = \frac{Y}{a}, \quad x = \frac{X}{Re a}, \quad u = \frac{U}{U_o}, \quad v = Re \frac{V}{U_o}, \quad \vartheta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \quad (7.4)$$

a es el ancho de la boquilla, U_o es la velocidad del flujo en la boquilla. El número de Reynolds está dado por $Re = \frac{\rho U_o a}{\mu}$, $M = \frac{B_o a \sqrt{\sigma}}{\sqrt{\mu}}$ es el número de Hartmann. Las condiciones de borde están dadas por:

$$u(0, y) = u_o(y) \quad u(x, y \rightarrow \infty) = 0 \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (7.5)$$

Suponiendo una solución para el campo de velocidades y de temperatura de la forma:

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \cos(k_i y) \quad (7.6)$$

$$v(x, y) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k_i} f_i'(x) \sin(k_i y) \quad (7.7)$$

$$\vartheta(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x) \cos(k_i y) \quad (7.8)$$

donde el número de onda k_i está dado por $k_i = \frac{\pi}{2L} (2i - 1)$.

La dependencia en la función coseno para el campo de velocidades u , satisface automáticamente las condiciones de borde en $x=L$ y en eje de simetría para la velocidad u . Además, la ecuación de continuidad (7.2) queda automáticamente satisfecha.

Las funciones $\cos(k_j y)$ forman una base ortogonal de forma que:

$$\int_0^L \cos(k_i y) \cos(k_j y) dy = \frac{L}{2} \delta_{ij}$$

Reemplazando (7.4) y (7.5) en (7.1), se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{\infty} f_i(x) f_j'(x) \cos(k_i y) \cos(k_j y) + \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{k_j}{k_i} f_i'(x) f_j(x) \sin(k_i y) \sin(k_j y) = \\ - \sum_{i=1}^{\infty} k_i^2 f_i(x) \cos(k_i y) + \frac{Gr}{Pr} \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x) \cos(k_i y) - M^2 \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \cos(k_i y) \end{aligned} \quad (7.9)$$

Multiplicando la ecuación (7.9) por $\cos(k_p y)$ e integrándola desde $y = 0$ hasta $y = L$ se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\infty} (f_i(x) f_j'(x) - \frac{k_j}{k_i} f_i'(x) f_j(x)) I_{ij}^p + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\infty} (f_i(x) f_j'(x) + \frac{k_j}{k_i} f_i'(x) f_j(x)) J_{ij}^p = \\ - \frac{L}{2} \sum_{i=1}^{\infty} k_i^2 f_i(x) \delta_{ip} + \frac{L Gr}{2 Re} g_i(x) \delta_{ip} - M^2 \frac{L}{2} \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \delta_{ip} \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$\text{donde } I_{ij}^p = (-1)^{i+j+p+1} \frac{k_p}{(k_i + k_j)^2 - k_p^2} \quad \text{y} \quad J_{ij}^p = (-1)^{i+j+p} \frac{k_p}{(k_i - k_j)^2 - k_p^2} \quad (7.11)$$

De esta forma se obtiene un sistema de N ecuaciones ($p=1, \dots, N$), donde N es el número de ecuaciones usado para aproximar la solución con un número finito de términos en la serie de Fourier, la ecuación (8.10) puede ser expresada como:

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N f_i (A_{ij}^p + B_{ij}^p + D_{ij}^p - C_{ij}^p) f_j' = - \frac{L}{2} k_p^2 f_p(x) + \frac{L Gr}{2 Re} g_p(x) - M^2 \frac{L}{2} f_p(x) \quad (p=1, \dots, N) \quad (7.12)$$

$$\text{donde } A_{ij}^p = I_{ij}^p \quad B_{ij}^p = J_{ij}^p \quad C_{ij}^p = I_{ij}^p \frac{k_i}{k_j} \quad D_{ij}^p = J_{ij}^p \frac{k_i}{k_j} \quad (7.13)$$

Realizando un análisis similar con la ecuación (7.3), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones para el campo de temperatura:

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N f_i (A_{ij}^p + B_{ij}^p) g_j' + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N g_i (D_{ij}^p - C_{ij}^p) f_j' = - \frac{1}{Pr} \frac{L}{2} k_p^2 g_p(x) \quad (p=1, \dots, N) \quad (7.14)$$

Las ecuaciones (7.12) y (7.14) representan un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden. Las funciones f y g, que representan la dependencia axial de la velocidad y la temperatura respectivamente, pueden ser determinadas por el siguiente método numérico.

7.3 Método Numérico

Las ecuaciones (7.12) y (7.14) son discretizadas en la variable x , dando origen a los siguiente sistemas de ecuaciones algebraicas:

$$\sum_{i,j=1}^N f_i(x) M_{ij}^p (f_j(x) - f_j(x - \Delta x)) + (k_p^2 f_p(x) - \frac{Gr}{Re} g_p(x) + M^2 f_p(x)) L \Delta x = 0 \quad (7.15)$$

$$\sum_{i,j=1}^N f_i F_{ij}^p (g_j(x) - g_j(x - \Delta x)) + \sum_{i,j=1}^N g_i H_{ij}^p (f_j(x) - f_j(x - \Delta x)) + \frac{L}{Pr} k_p^2 g_p(x) \Delta x = 0 \quad (7.16)$$

La solución numérica de los sistemas (7.12) y (7.13) se realiza para cada estación x , de esta forma se encuentran las soluciones para los coeficientes $f_p(x)$ y $g_p(x)$, donde los valores de los coeficientes $f_p(x - \Delta x)$ y $g_p(x - \Delta x)$ son conocidos desde la estación $(x - \Delta x)$. De esta forma, la solución necesita ser encontrada mediante un método iterativo para los coeficientes debido al carácter no lineal de los sistemas de ecuaciones en cuestión.

Definiendo los vectores:

$$G_p^{(1)}(\vec{f}(x), \vec{g}(x)) = \sum_{i,j=1}^N f_i(x) M_{ij}^p (f_j(x) - f_j(x - \Delta x)) + (k_p^2 f_p(x) - \frac{Gr}{Re} g_p(x) + M^2 f_p(x)) L \Delta x \quad (7.17)$$

$$G_p^{(2)}(\vec{f}(x), \vec{g}(x)) = \sum_{i,j=1}^N f_i F_{ij}^p (g_j(x) - g_j(x - \Delta x)) + \sum_{i,j=1}^N g_i H_{ij}^p (f_j(x) - f_j(x - \Delta x)) + \frac{L}{Pr} k_p^2 g_p(x) \Delta x \quad (7.18)$$

Se tiene que los coeficientes $f_i(x)$ y $g_i(x)$ de la series de Fourier pueden ser determinados en forma recursivamente mediante las siguientes ecuaciones:

$$\vec{f}^{(n+1)} = \vec{f}^{(n)} - [J^{(1)}(\vec{f}^{(n)})]^{-1} \vec{G}^{(1)}(\vec{f}^{(n)}, \vec{g}^{(n)}) \quad (7.19)$$

$$\vec{g}^{(n+1)} = \vec{g}^{(n)} - [J^{(2)}(\vec{g}^{(n)})]^{-1} \vec{G}^{(2)}(\vec{f}^{(n)}, \vec{g}^{(n)}) \quad (7.20)$$

donde las matrices Jacobianas para cada sistema de ecuaciones están dadas por:

$$J_{pj}^{(1)} = \frac{\partial G_p^{(1)}}{\partial f_j} = \sum_{i=1}^N f_i(x) M_{ij}^p + \sum_{i=1}^N M_{ji}^p (f_i(x) - f_i(x - \Delta x)) + (k_p^2 + M^2) L \Delta x \delta_{pj} \quad (7.21)$$

$$J_{pj}^{(2)} = \frac{\partial G_p^{(2)}}{\partial g_j} = \sum_{i=1}^N f_i F_{ij}^p + \sum_{i=1}^N H_{ji}^p (f_i(x) - f_i(x - \Delta x)) + \frac{L}{Pr} k_p^2 \Delta x \delta_{pj} \quad (7.22)$$

Los vectores $\vec{f}^{(n)}, \vec{g}^{(n)}$ representan los valores de \vec{f}, \vec{g} en la iteración enésima. Las iteraciones para $\vec{f}^{(n)}, \vec{g}^{(n)}$ en las ecuaciones (7.19) y (7.20) pueden ser repetidas hasta alcanzar una precisión tal que $\|\vec{a}^{(n+1)} - \vec{a}^{(n)}\| \leq \varepsilon$, para algún valor dado de tolerancia ε .

Las condiciones de borde en $x = 0$, que se consideraron para el perfil de velocidades son un perfil uniforme y un perfil parabólico.

En el caso de un perfil inicial uniforme para la velocidad, se tiene que:

$$u(0, y) = \begin{cases} 1 & 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} < y \leq L \end{cases}, \quad \vartheta(0, y) = \begin{cases} 1 & 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} < y \leq L \end{cases}$$

Estas condiciones en el espacio de Fourier se representan por los vectores $f_i(x=0)$ y $g_i(x=0)$, que son obtenidos mediante la condición:

$$f_i(0) = \frac{2}{L} \int_0^L u(0, y) \cos(k_i y) dy = \frac{2}{L} \frac{\sin \frac{k_i}{2}}{k_i}; \quad g_i(0) = \frac{2}{L} \int_0^L \vartheta(0, y) \cos(k_i y) dy = \frac{2}{L} \frac{\sin \frac{k_i}{2}}{k_i}$$

En el caso de un perfil inicial de velocidad parabólico, se tiene que:

$$u(0, y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{15}{8}}(1 - (2y)^2) & 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} < y \leq L \end{cases}, \quad \vartheta(0, y) = \begin{cases} 1 & 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} < y \leq L \end{cases}$$

En el espacio de Fourier los vectores $f_i(x=0)$ y $g_i(x=0)$ quedan dados por:

$$f_i(0) = \frac{2}{L} \int_0^{\frac{1}{2}} u(0, y) \cos(k_i y) dy = \frac{4}{L k_i} \left(\frac{\sin k_i}{k_i^2} - \frac{1}{k_i} \cos k_i \right)$$

7.4 Resultados

7.4.1 Chorro Libre

El caso del chorro plano se obtiene cuando el número Magnético $M = 0$, el número de Richardson $Ri = 0$ y el número de Prandtl $Pr \neq 0$. La Figura 7.1 muestra el campo de velocidades u para diferentes valores de la coordenada x , obtenido para un perfil inicial de

velocidad uniforme. Se puede apreciar el comportamiento característico de un chorro libre en que los perfiles de velocidad se van ensanchando a medida que x crece. Esto producto del decrecimiento de la velocidad central del chorro y la incorporación al chorro del fluido circundante, tal que el momentum del chorro permanece constante.

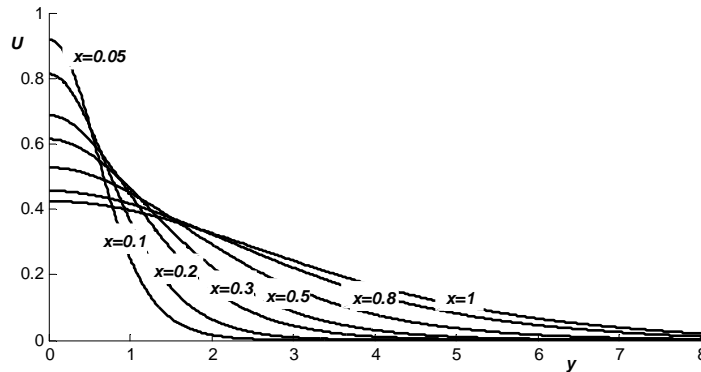


Figura 7.1. Campo de velocidades en un chorro libre con perfil inicial de velocidad plano.

En este caso el campo de velocidades queda desacoplado del campo de temperatura, en el campo lejano. La velocidad U adquiere una solución de autosemejanza encontrada por Bickley, donde la velocidad central del chorro decae con la distancia x

como $u_c(x) = \frac{C}{x^{1/3}}$, donde $C=0.4543$ para un perfil inicial uniforme (ver la Figura 7.1 con

$Ri=0$). En el caso de un perfil inicial parabólico para la velocidad, la Figura 7.2 muestra los perfiles de velocidad obtenidos para diferentes valores de la coordenada x .

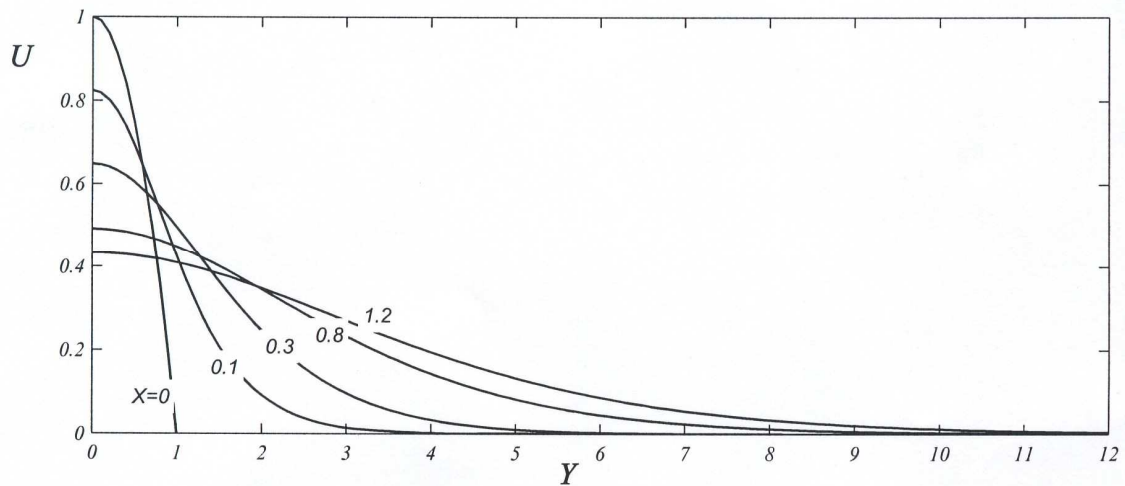


Figura 7.2. Campo de velocidades en un chorro libre con perfil inicial de velocidad parabólico.

Para analizar la confiabilidad del método numérico, se compararon los resultados para el chorro parabólico obtenidos por [2], con los resultados obtenidos en este trabajo (Figura 7.3).

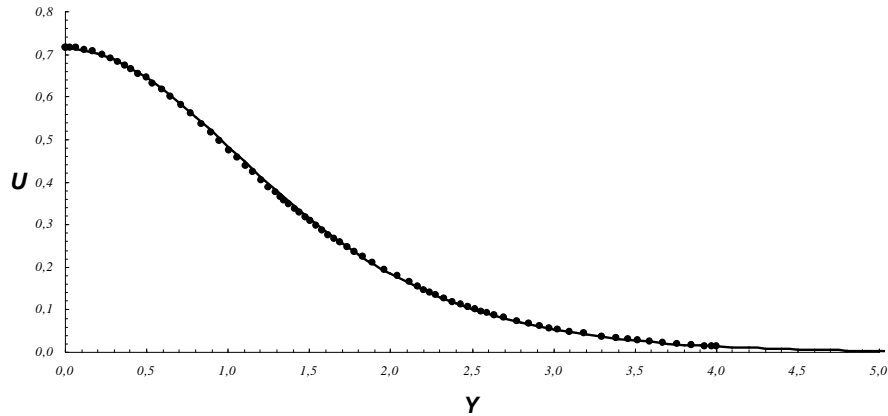


Figura 7.3. Perfil de velocidades en $x=0.3$ de un chorro libre con perfil inicial de velocidad parabólico, línea continua (presente trabajo), puntos ref. [47]

De la Figura 7.3 se puede apreciar que los resultados concuerdan bastante bien con los obtenidos mediante diferencias finitas.

7.4.2 Chorro vertical con flotación

El caso de un chorro laminar bidimensional con flotación se obtiene cuando $M = 0$, $Ri \neq 0$ y $Pr \neq 0$. La Figura 7.4 muestra la evolución de la velocidad central del chorro como función de la distancia x desde la boquilla del chorro. Las diferentes curvas corresponden a diferentes valores del número de Richardson. El perfil inicial de velocidad en todos estos casos corresponde a un perfil uniforme de velocidad. La línea continua representa los perfiles obtenidos con el método de las series de Fourier y los puntos representan soluciones encontradas con diferencias finitas [41]. Se puede apreciar que los resultados coinciden bastante bien, validando el actual algoritmo.

En las regiones cercanas a la salida del chorro, se tiene que la velocidad central del chorro permanece constante e igual al valor de la salida. Esta zona representa la región denominada solución de potencial, donde el fluido se comporta como un fluido no viscoso. Para números de Richardson menores a $\sim 10^{-3}$, la longitud de la zona no viscosa es del orden de $x \sim 10 Re 2h$. Cuando el número de Richardson satisface que $Ri > 10^{-3}$, la longitud del núcleo de potencial es drásticamente reducido. En este caso el efecto de la flotabilidad o convección natural se hace evidente a partir de distancias del orden de $x \sim 0.1 Re 2h$, muy cercana a la salida del jet.

La Figura 7.5 muestra la evolución de la temperatura adimensional en el centro del chorro como función de la distancia x , desde la salida del chorro, para diferentes valores del número de Richardson y para $Pr=0.71$, $Re=1250$. En el campo cercano a la salida del chorro, la temperatura central del chorro permanece constante e igual a la temperatura de salida del chorro. Esta región representa la longitud del núcleo de potencial de temperatura y se puede apreciar que no depende del número Richardson, la longitud de esta zona está dada aproximadamente por $x \sim 10 Re 2h$.

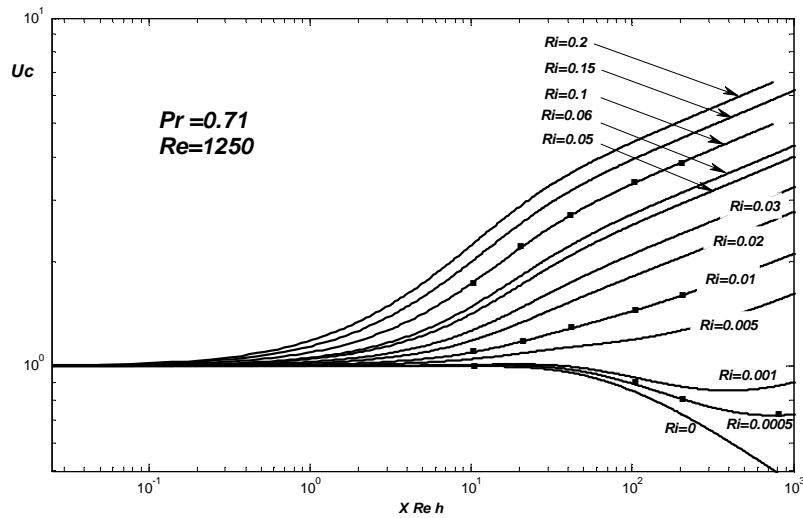


Figura 7.4. Velocidad central del chorro como función de la coordenada axial x , para diferentes valores del número de Richardson con un perfil inicial de velocidad uniforme, series de Fourier (línea continua), diferencias finitas (puntos) [41].

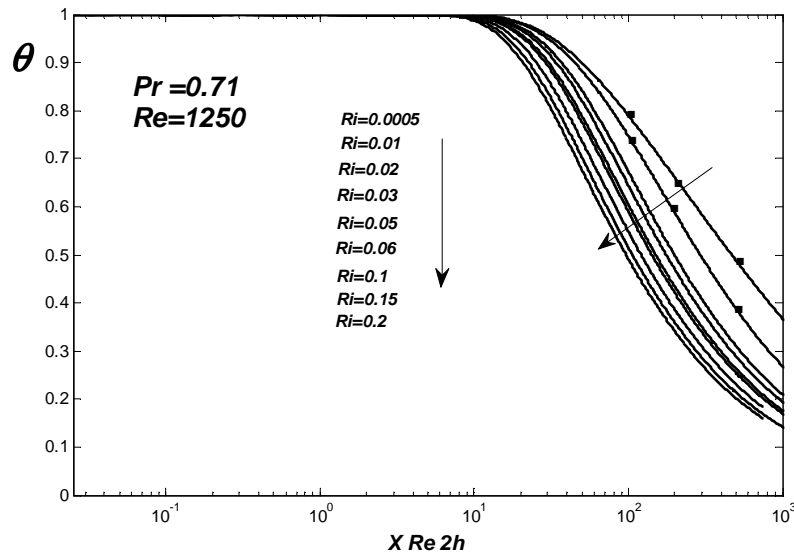


Figura 7.5. Temperatura central del chorro como función de la coordenada axial x para diferentes valores del número de Richardson, series de Fourier (línea continua), diferencias finitas (puntos) [41].

La Figura 7.5 muestra que cuando se incrementa el número de Richardson, la temperatura central del chorro tiende a decaer más rápido. Esto se explica por el hecho de que al incrementar el número de Richardson, la velocidad central del chorro tiende a incrementarse, de esta forma el núcleo caliente del chorro, va encontrando fluido más frío aumentando la transferencia de calor entre el chorro y el medio, enfriándose más rápidamente el chorro.

Más resultados y análisis sobre el chorro con convección natural incluyendo un perfil inicial de velocidad puede ser encontrado en [41]. En general se puede decir que el comportamiento anteriormente descrito del chorro con convección natural, no depende del perfil inicial de velocidad del chorro.

7.4.3 Chorro conductor y con flotabilidad

El caso de un chorro conductor con flotabilidad se obtiene cuando $M \neq 0$, $Ri \neq 0$ y $Pr \neq 0$. El caso cuando no hay convección natural ($Ri = 0$) fue estudiado por Moreau [29], mediante el método de soluciones autosimilares encontró expresiones analíticas para el campo de velocidades válidas lejos de la salida del chorro. Un estudio numérico del chorro en el caso $Ri = 0$ fue llevado a cabo por Vlachopoulos [48].

La Figura 7.6 muestra la evolución de la velocidad central del chorro como función de la variable x , $Ri = 0.01$ y diferentes valores del número de Hartmann, para un perfil inicial de velocidad uniforme. Los resultados muestran que al igual que en el caso de un chorro con flotabilidad solamente, en el campo cercano, la velocidad central del chorro permanece constante. Sin embargo, como la distancia x se incrementa, la velocidad central del chorro es considerablemente reducida con el incremento del número de Hartmann. Los efectos del campo magnético se hacen evidentes a partir de distancias del orden $x \sim Re2h$. La desaceleración del chorro causa que el decrecimiento de la temperatura en el eje del chorro sea más suave, disminuyendo la transferencia de calor entre el chorro caliente y el medio más frío (Figura 5), sin embargo, el efecto del campo magnético sobre el campo de temperaturas del fluido es menos evidente e intenso que en el campo de velocidades.

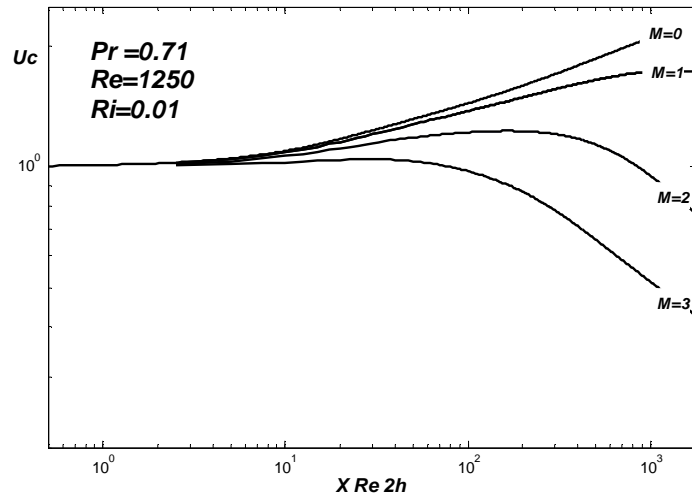


Figura 7.6. Velocidad central del chorro como función de la coordenada axial x para diferentes números de Hartmann y con un perfil inicial de velocidad uniforme.

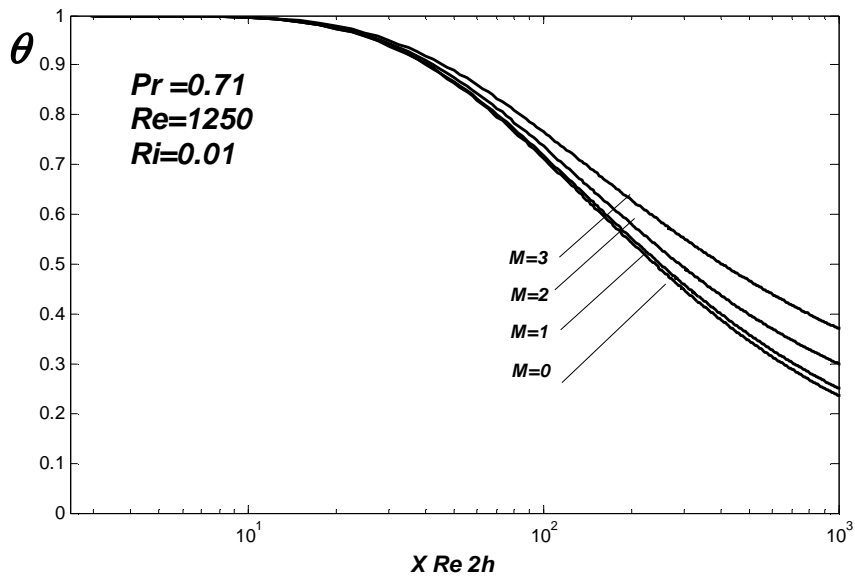


Figura 7.7. Temperatura central del chorro como función de la coordenada axial x para diferentes números de Hartmann y con un perfil inicial de velocidad uniforme.

La Figura 7.8 muestra los efectos del campo magnético sobre el campo de velocidades a una distancia $x=0.8$ (campo lejano), para diferentes valores del número de Hartmann. En la medida que el número de Hartmann se intensifica, la velocidad central del chorro va decreciendo haciendo que el perfil de velocidades sea mas ancho. Entonces, llega un punto en que el campo magnético anula los efectos de la flotabilidad del chorro, este fenómeno ocurre debido a que el número de Hartmann adquiere valores cercanos al orden de

$M^2 \sim \frac{Gr}{Re}$. Si consideramos además el caso particular cuando el número de Prandtl es cercano a la unidad ($Pr \approx 1$), es fácil ver que en estas condiciones, las ecuaciones (7.1)-(7.3), con la condición inicial (7.5), tienen como solución la de un chorro libre y además se tiene que $u(x, y) = \theta(x, y)$. Entonces en este caso el campo magnético y la flotabilidad del chorro se anulan exactamente para dar lugar a un chorro libre. Este fenómeno es mostrado en la Figura 7.8, donde la línea segmentada representa el perfil de un chorro libre, se puede ver que este perfil es muy similar con el perfil del campo de velocidades cuando $M = 3$, donde se cumple que $M^2 \sim \frac{Gr}{Re}$.

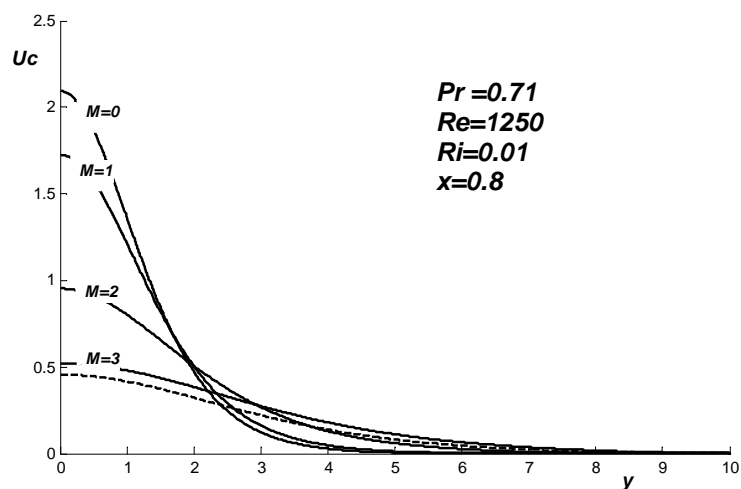


Figura 7.8. Efecto del número Hartmann sobre el campo de velocidades en $x=0.8$ (Campo lejano), para un perfil de velocidad inicial uniforme.

La Figura 7.9 muestra el efecto del campo magnético en los perfiles de temperatura para $x = 0.8$. Se puede apreciar que cuando el campo magnético se intensifica, los perfiles de temperatura se hacen más anchos y la temperatura central del chorro se incrementa. De esta forma, el campo de temperaturas se hace más homogéneo y el enfriamiento del chorro se hace más lento.

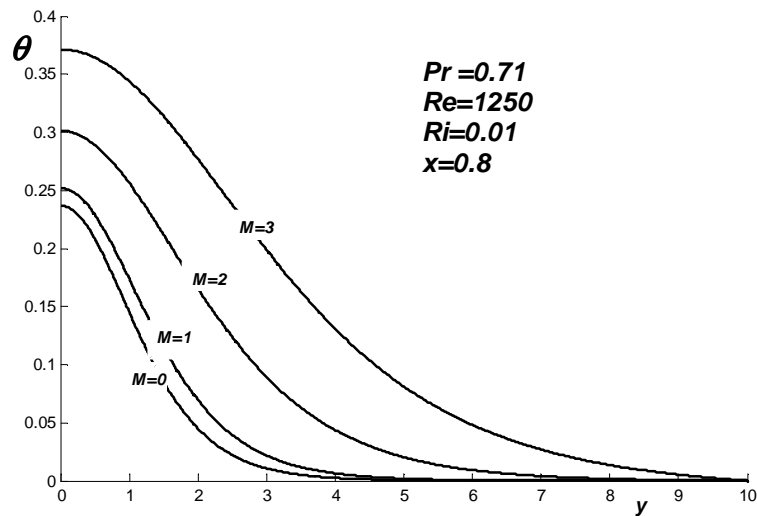


Figura 7.9. Efecto del número Hartmann sobre el campo de temperaturas en $x=0.8$ (Campo lejano), para un perfil de velocidad inicial uniforme.

Los resultados obtenidos anteriormente siguen siendo válidos para otros números de Richardson. La Figura 7.10 muestra la evolución de la velocidad central del chorro como función de x para $Ri = 0.1$ y se comparan con los resultados de $Ri = 0.01$. La línea continua representa los resultados considerando un perfil de velocidad uniforme en $x=0$ y la línea segmentada representa el caso de un perfil de velocidad parabólico en la condición de entrada. Se puede apreciar que al incrementar el número de Richardson, la velocidad central del chorro se incrementa, esto, debido al incremento en la flotabilidad del chorro.

Sin embargo, la velocidad central del chorro se ve disminuida cuando el campo magnético se intensifica, reduciendo los efectos de la flotación del chorro.

Respecto a la influencia del perfil inicial del campo de velocidades sobre el desarrollo de la velocidad central del chorro, la Figura 7.8 muestra que existen diferencias solo en regiones muy cercanas a la salida del chorro, donde posteriormente la velocidad adquiere un comportamiento similar para ambos perfiles (plano y parabólico), donde el campo de velocidades converge a la solución asintótica correspondiente al campo lejano. En esta región el perfil inicial ya no tiene influencia.

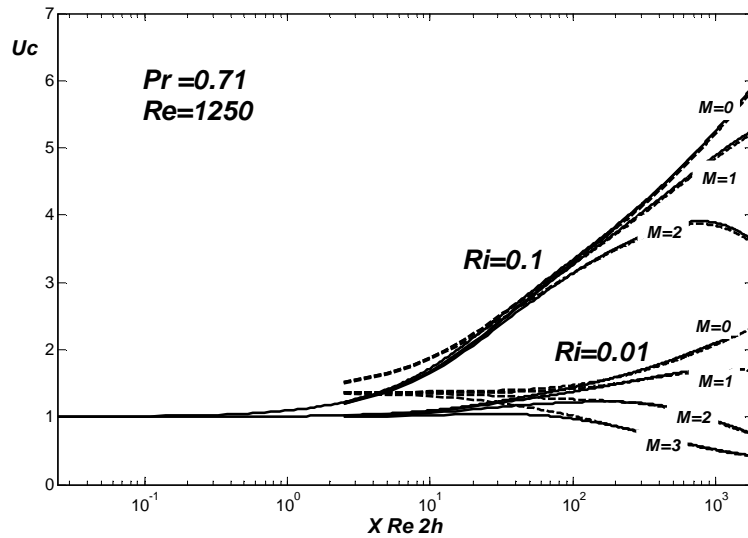


Figura 7.10. Velocidad central del chorro como función de la distancia axial x para distintos números de Hartmann y números de Richardson 0.1 y 0.01, la línea continua corresponde a un perfil inicial de velocidad uniforme, la línea segmentada corresponde a un perfil inicial de velocidad parabólico.

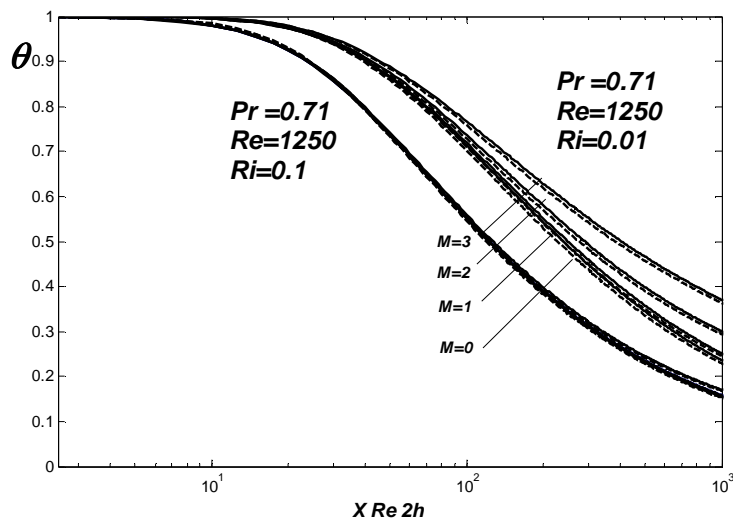


Figure 7.11. Temperatura central del chorro como función de la distancia axial x para distintos números de Hartmann y números de Richardson 0.1 y 0.01, la línea continua corresponde a un perfil inicial de velocidad uniforme, la línea segmentada corresponde a un perfil inicial de velocidad parabólico.

La Figura 7.11 muestra que las condiciones de velocidad a la salida del chorro tiene un efecto débil sobre la temperatura central del chorro, tanto para el campo cercano y el campo lejano. Respecto de la influencia del campo magnético sobre la temperatura central del chorro, los resultados son similares a los mostrados por la Figura 7.11. Es decir, cuando el número de Hartmann se incrementa, la temperatura tiende a caer mas lentamente como función de x , haciéndose mas lento el enfriamiento del chorro. Este efecto es disminuido

cuando el número de Richardson es incrementado, por ejemplo para $Ri=0.1$. El efecto del campo magnético es mucho menos importante que en el caso cuando $Ri=0.01$. Cuando el número de Richardson es 0.1, la temperatura central del chorro permanece prácticamente inalterada cuando se incrementa el número de Hartmann.

La Figura 7.12 muestra la evolución de la velocidad central del chorro como función de la coordenada x para valores del número de Richardson de $Ri = 0.1$ y 0.01 . En ambos caso el número Prandtl fue $Pr = 9$. En líneas generales, la Figura 7.13 muestra un comportamiento similar al obtenido con $Pr=0.71$ (Fig. 7.11). Esto muestra que el número de Prandtl tiene un pequeño efecto sobre la velocidad central del chorro. Sin embargo, esto no es cierto para el campo de temperaturas. La Figura 7.13 muestra los perfiles de temperatura en la coordenada axial $x = 0.8$ para un valor del número de Richardson de 0.01 y números de Prandtl de $Pr = 0.71$ y 9 . Como era de esperarse, el número de Prandtl tiene gran influencia sobre la distribución de temperaturas en el chorro. Cuando el número de Prandtl se incrementa, el perfil de velocidades se hace más estrecho y la temperatura central del chorro decae más lentamente. De esta forma el chorro mantiene su temperatura central por más tiempo, enfriándose más lentamente y de esta forma el efecto de flotación se mantiene por mas tiempo también, haciendo que la velocidad central del chorro se incremente levemente.

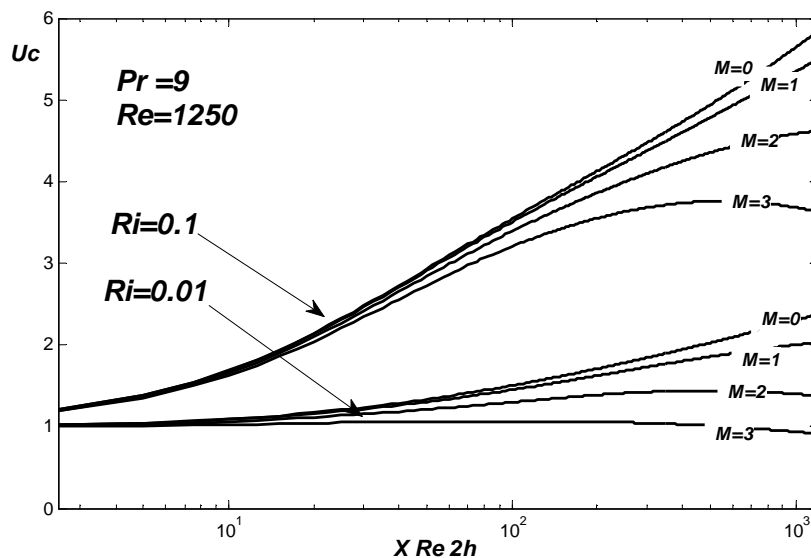


Figura 7.12. Velocidad central del chorro como función de la coordenada axial x para distintos números de Hartmann, numeros de Richardson 0.1 y 0.01 y $Pr=9$.

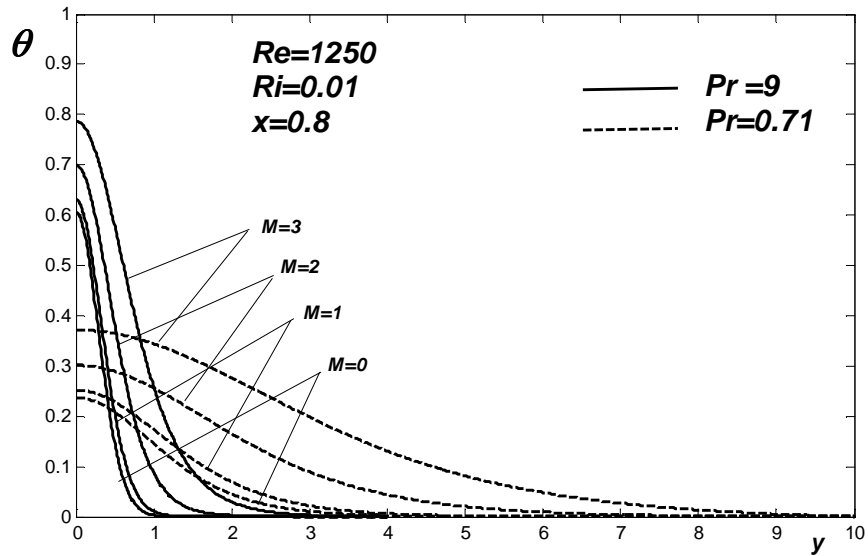


Figura 7.13. Efecto del número de Hartmann en los perfiles de temperatura en $x=0.8$ (Campo lejano), para un perfil de velocidad inicial uniforme y números de Prandtl $Pr=0.71$ and $Pr=9$.

La Figura 7.14 muestra la evolución de la temperatura central del chorro como una función de la coordenada axial x para números de Richardson $Ri = 0.01$ y 0.1 . Los resultados muestran un comportamiento similar con los resultados obtenidos en la Figura 7.11. Cuando el número de Hartman es incrementado, la temperatura decae más lentamente, lo que hace que el enfriamiento del chorro sea más lento. Este efecto es disminuido con el incremento del número de Richardson. Por ejemplo, para un número de Richardson de 0.1 , el efecto del campo magnético es mucho menos importante que en el caso cuando $Ri=0.01$.

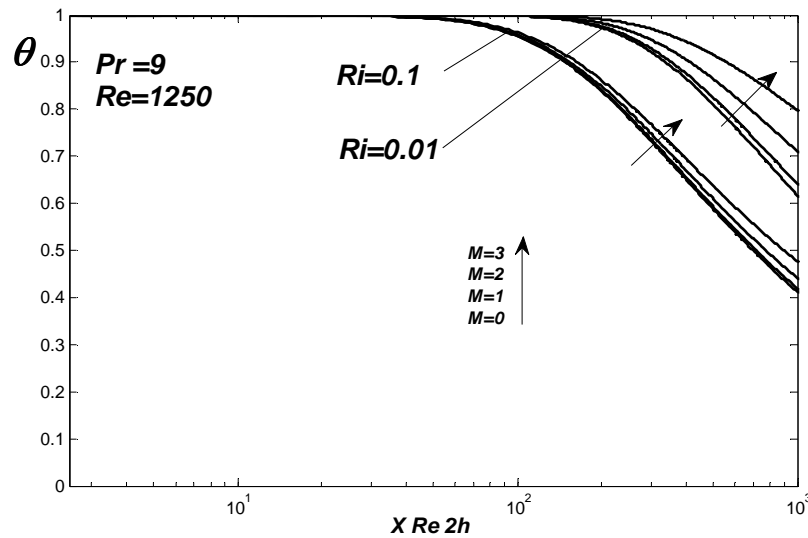


Figura 7.14. Temperatura central del chorro como función de la coordenada axial x para diferentes números de Hartmann, números de Richardson 0.1 and 0.01 , $Pr=9$.

7.5 Conclusiones

En este capítulo se demuestra que las series de Fourier es un método que puede ser aplicado a flujos tipo chorros que son descritos por las ecuaciones de capa límite. Los resultados entregados por el método propuesto muestran una alta precisión al ser comparados con los métodos tradicionales como diferencias finitas.

La extensión del método a otros problemas que involucren flujos tipo chorros es directa, como por ejemplo incluir flujos multi-fásicos, transferencia de calor y problemas de combustión.

La extensión a problemas de simetría axial también es posible, solo habría que considerar como base de las series, las funciones de Bessel. De esta forma el planteamiento del problema es absolutamente similar al ya expuesto.

8. CONCLUSIONES GENERALES

Como conclusión general del trabajo desarrollado en esta tesis se puede decir que:

Para un amplio espectro de problemas fluido-dinámicos que pueden ser descritos mediante las ecuaciones de Capa Límite, la solución mediante series de Fourier de estos es perfectamente factible, además, éstas soluciones tienen una alta precisión y son igualmente eficientes que los métodos tradicionales numéricos como diferencias finitas, elementos finitos y métodos variacionales numéricos.

En el caso de soluciones de similitud para las ecuaciones de Capa Límite, este estudio muestra que la clásica expansión en series de Fourier junto con la incorporación de un análisis asintótico para los coeficientes de la serie entregan una solución con alta precisión y rápida convergencia para la ecuación de Falkner-Skan incluyendo transferencia de calor. El presente método puede ser fácilmente aplicado a flujos con características más complejas que permitan transformaciones de similitud.

En el caso del problema de Graetz, se estudió una solución en series de Fourier, los resultados muestran que los valores encontrados por este método para el número de Nusselt a la entrada del canal concuerdan muy bien con otros valores citados en la literatura. El rango de números de Graetz para los que se hicieron cálculos directos se ha ampliado considerablemente hasta un valor de 10^9 . Cálculos anteriores al parecer no excedan de un valor de $Gz = 10^5$, sobre la base de nuestra definición del número de Graetz.

Respecto del flujo y transferencia de calor en canales planos mediante las ecuaciones de Capa Límite, el método de solución expuesto mediante el desarrollo del campo de velocidades y temperaturas en series de Fourier, muestra que este tipo de soluciones entregan soluciones correctas, con alta precisión y que concuerdan bastante bien con los resultados entregados por otros investigadores ocupando diferencias finitas.

En relación a flujos tipo chorro, se demostró que las series de Fourier es un método que puede ser aplicado a este tipo de flujos que son descritos por las ecuaciones de Capa Límite. Los resultados entregados por el método propuesto muestran una alta precisión al ser comparados con los métodos tradicionales como diferencias finitas.

La extensión del método a otros problemas que involucren flujos tipo chorros es directa, como por ejemplo incluir flujos multi-fásicos, transferencia de calor y problemas de combustión.

En general, la extensión a problemas de simetría axial también es posible, solo habría que considerar como base de las series, las funciones de Bessel, de esta forma el planteamiento del problema es absolutamente similar al ya expuesto.

Otro punto importante es la posibilidad de realizar un análisis asintótico a las ecuaciones que entrega el desarrollo en series, permitiendo hacer un análisis híbrido entre soluciones numéricas y soluciones analíticas asintóticas, potenciando el método en cuanto a su precisión.

9. REFERENCIAS

- [1] Canuto, C., Hussaini, M., Quarteroni, A. and Zang, S.A., Spectral Methods Evolution to Complex Geometries and Applications to Fluid Dynamics. Springer-Verlag. 2007.
- [2] Hornbeck, R., Numerical Marching Techniques for Fluid Flows with Heat Transfer, National Aeronautics and Space Administration Washington, D.C. 1973.
- [3] Acrivos, A., Milos, F., Steady flow past sudden expansions at large Reynolds number, Phys. Fluids 29 (5), 1986.
- [4] Plotkin, A., Spectral Method Solutions for some laminar Channel Flow with Separation, AIAA 20th Aerospace Sciences Meeting, 1982.
- [5] Falkner, V.M., Skan, S.W., Some approximate solutions of the boundary layer equations, Philos. Mag. 12. 1931.
- [6] Hartree, D.R., On an equation occurring in Falkner and Skan's approximate treatment of the equations boundary layer. Proc. Camb. Philos. Soc. 33, 1921.
- [7] Smith, A.M.O., Improved solutions of the Falkner and Skan boundary-layer equation. J. Aero. Sci. 1954.
- [8] Cebeci, T., Kelle, H.B., Shooting and parallel shooting methods for solving the Falkner–Skan boundary-layer equation. J. Comp. Phys. 7, 1971.
- [9] Meksyn, D., New methods in laminar boundary-layer theory. Pergamon Press. 1961.
- [10] Asaithambi, A., Numerical solution of the Falkner–Skan equation using piecewise linear functions, Appl. Math. Comput. 159, 2004.
- [11] Asaithambi, N.S., A numerical method for the solution of the Falkner–Skan equation. Appl. Math. Comput. 81, 1997.
- [12] Asaithambi, A., A finite-difference method for the solution of the Falkner–Skan equation. Appl. Math. Comput. 92, 1998.
- [13] Liao, S., A uniformly valid analytic solution of two-dimensional viscous flow over a semi-infinite flat plate, J. Fluid Mech., vol. 385, pp. 101-128, 1999.
- [14] Khabibrakhmanov, I. K. and Summers, D., The use of generalized Laguerre polynomials in spectral methods for nonlinear differential equations. Computers & Mathematics with Applications. Volume 36. Issue 2. July 1998.

- [15] Ma, H., Sun, W., Tang, T., Hermite spectral methods with a time-dependent scaling for parabolic equations in unbounded domains. *SIAM J. Numer. Anal.* 43, 2005.
- [16] Schlichting, H., *Boundary-layer theory*, Springer, 2000.
- [17] Zhang, J., Chen, B., An iterative method for solving the Falkner–Skan equation. *Appl. Math. Comput.* 210, 2009.
- [18] Salama, A., Higher-Order Method For Solving Free Boundary-Value Problems, *Numerical Heat Transfer, Part B*, 45, 385–394, 2004.
- [19] Frank, M., *Viscous Fluid Flow*, second ed., McGraw-Hill, New York, 1991.
- [20] Elbashbeshy, E., Dimian, M., Effect Of Radiation On The Flow And Heat Transfer Over A Wedge With Variable Viscosity, *Appl. Math. and Comput.* 132, 2002.
- [21] Sellars, S.R., Tribus, M. and Klein, J.S., *Trans. ASME*, 78, pp. 441, 1956.
- [22] Arpaci, V.S., *Conduction Heat Transfer*, p. 203, Addison-Wesley, 1966.
- [23] Nickolay, M. and Martin, H., *Int. J. Heat and Mass Transfer* 45, 2002.
- [24] Kumar, A. and Yajnik, K.S., Internal Separated Flows at Large Reynolds Number, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 97, P t . 1, 1980, pp. 27-51.
- [25] Durst, A., Low Reynolds number flow over a plane symmetric sudden expansion, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 64, 1974.
- [26] Kwon, O. K., Pletcher, R. H., Prediction of sudden expansion flows using the boundary-layer equations, *Journal of Fluid Engineering*, Vol. 106, 1984.
- [27] Bickley, W. G., The plane jet, *Philos. Mag.* 23, 1937.
- [28] Crane, L. J., The mixing of a jet of gas with an atmosphere of a different gas at large distances, part I: The plane jet. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 14, 1961.
- [29] Crane, L. J., The mixing of a jet of gas with an atmosphere of a different gas at large distances, part II: The round jet. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 14, 1961.
- [30] Pozzi, A. and Bassano, E., Application of Padé approximants to the study of plane jets, *Computers & Mathematics with Applications*, Volume 30, Issue 11, December 1995.
- [31] Revuelta, A., Sanchez, A.L., Liñan, A., The virtual origin as a first-order correction for the far-field description of laminar jets. *Phys Fluids*, 14, 2002.

- [32] Astin, P. and Wilks, G., Laminar Jet Assimilation into Non-Uniform Flows, Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, Vol. 453, 593-606, 1997.
- [33] Astin, P. and Wilks, G., The flow of pre-heated, two-dimensional laminar jet issuing into an aligned uniform stream. *Z. Angew. Math. Phys.* 53, No.2, 308-322, 2002 .
- [34] Brand, R.S., Lahey, F.J., The heated laminar vertical jet. *J Fluid Mech*, 29, 1967.
- [35] Sanchez-Sanz, M., Sanchez, A.L., Liñán, A., Fronts in high-temperature laminar gas jets *J. Fluid Mech*, 547, 257-266, 2006.
- [36] Martynenko, O.G., Korovkin, V.N., Sokovishin, Y., The class of selfsimilar solutions for laminar buoyant jets. *Int J Heat Mass Trans.*, 32, 1989.
- [37] Tannehill, J. C., Anderson, D., Pletcher, R., Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, Second Edition, Taylor & Francis, 1997
- [38] Noskov, M., Benzi, M. and Smooke, M., An implicit compact scheme solver for two-dimensional multicomponent flows, *Comput Fluids* 36, 2007.
- [39] Yu, W., Lin, H., Shih, H., Rigorous numerical solutions and correlations for two-dimensional laminar buoyant jets. *Int. J. Heat Mass Trans.* 35, 1992.
- [40] Ben Aissia, H., Zaouali, Y., El Golli, S., Numerical study of the influence of dynamic and thermal exit conditions on axisymmetric laminar buoyant jet. *Numer. Heat Transfer, Part A*, 42, 2002.
- [41] Ali, A., Kechiche, N., Ben Aissia, H., Prandtl-number effects on vertical buoyant jets in forced and mixed convection regimes. *Energy Conversion and Management*, 48, 2007.
- [42] Moreau, R., Jet Libre Plan Laminaire, d'un Fluide Incompressible en Presence d'un Champ Magnetique Transversal, *Comptes Rendus*, 256, 1963.
- [43] Figueira da Silva, E. and Cotta, R.M., Benchmark results for internal forced convection through integral transformation, *Int. Comm. in Heat and Mass Transfer*, Vol. 23, Issue 7, November 1996.
- [44] Rosales, M., Frederick, R.L., Semi Analytic Solution to the Cartesian Graetz Problem: Results for the Entrance Region. *Int. Comm. in Heat and Mass Transfer*. Vol. 31. No. 5, 2004.
- [45] Rosales, M. and Valencia, A., A note on solution of Blasius equation by Fourier series, *Adv. Appl. Fluid Mech.* 6, 2009.

- [46] Rosales-Vera, M. and Valencia, A., Solutions of Falkner–Skan equation with heat transfer by Fourier series, *Int. Comm. Heat Mass Transf.*, Vol. 37, 2010.
- [47] Rosales-Vera, M. and Valencia, A., A note on Fourier series solution to the plane jet, *Far East Journal of Applied Mathematics*, Volume 37, Issue 1, 2009.
- [48] Vlachopoulos, J., A numerical study of laminar magnetohydrodynamic free jets, *Computers & Fluids*, volume 2, Issues 3-4, 1974.