



UNIVERSIDAD DE CHILE.
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS.
DEPARTAMENTO DE FÍSICA.

“FENÓMENOS NO VARIACIONALES EN
PATRONES.”

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER
EN CIENCIAS, MENCIÓN FÍSICA.

NICOLÁS VERSCHUEREN VAN REES.

PROFESOR GUIA:

DR. MARCEL CLERC.

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:

DR. J. ALEJANDRO VALDIVIA.

DRA. STEFANIA RESIDORI.

DR. MUSTAPHA TLIDI.

DR. DANIEL ESCAFF.

SANTIAGO DE CHILE.

ENERO 2013.

...Dedicado a mi Padre.

Resumen de la Tesis.

Grado al que opta: Magíster en ciencias, mención Física.

Autor: Nicolás Verschueren van Rees.

Fecha: 24/1/13

Director: Dr. Marcel G. Clerc Gavilán.

El objetivo de esta Tesis es dar una descripción sobre los comportamientos no variacionales mostrados por sistemas extendidos que presentan patrones como soluciones de equilibrio. En particular, se estudiaron dos fenómenos presentes en este tipo de sistemas:

- *La transición entre un patrón estático y uno con dinámica permanente, caótica en el espacio y en el tiempo.*

Utilizando el modelo *Forma Normal de Lifshitz*, se encontró y estudió numéricamente, en una dimensión espacial, la transición. En ella se encontraron dos bifurcaciones que fueron estudiadas numéricamente. La transición completa es propuesta como una generalización de la ruta al caos por quasiperiodicidad para sistemas extendidos.

- *La existencia, estabilidad y mecanismo de creación de una solución tipo partícula, constituida por un patrón con dinámica permanente, el cual se encuentra localizado y sostenido sobre un estado homogéneo. Solución a la que llamaremos “Caotición”.*

En el experimento de una válvula de cristal líquido con retro-inyección óptica se encontró experimentalmente la solución “Caotición” y el espacio de parámetros en que existe. La forma normal de *Lifshitz*, que puede ser derivada del modelo teórico de este experimento, se utilizó para estudiar numéricamente las soluciones “Caotición” en una dimensión. Fue encontrada una dependencia entre la talla de la estructura localizada y el máximo exponente de *Lyapunov*, lo que reveló la existencia de una talla crítica a partir de la cual existe dinámica permanente para estas estructuras localizadas. Finalmente, se propuso un modelo fenomenológico que reproduce cualitativamente el “Caotición”. En este modelo, a partir del análisis débilmente no lineal realizado, se obtuvo una descripción de las soluciones “Caotición” como la interacción de dos frentes bloqueados por la presencia de la longitud de onda del patrón e inducidos a una dinámica permanente por los comportamientos no variacionales sobre el patrón.

Abstract of the Thesis.

Degree: Master in Science, Physics Mention.

Author: Nicolás Verschuere van Rees.

Date: 1/24/13

Advisor: Dr. Marcel G. Clerc Gavilán.

The goal of this Thesis is to give a description of the non-variational behavior shown by extended systems which present patterns as equilibrium. In particular, we have studied two phenomena that can be observed in this type of system:

- *The transition between a static pattern and a spatiotemporal chaotic one.*

Using the *Lifshitz normal form* model, we have found and studied numerically, in one spatial dimension, the above transition. In this instability was found two bifurcations, that we were studied numerically. A full transition is proposed as a generalization of the quasiperiodicity route to chaos for extended systems.

- *The existence, stability and mechanism of creation of a particle-type solution, consisting of a pattern endowed of permanent dynamic, which is localized and supported by an homogeneous state. We have termed this solution as “Caoticón”.*

In the experiment of a liquid crystal light valve with optical feedback, we have found one “Caoticón” solution and the parameter values for which this solution exists. The *Lifshitz* normal form, which could be derived from the theoretical model for this experiment, was used in the study of “Caoticón”, in one spatial dimension. It was found one dependence between the maximum Lyapunov exponent and the size of the localized structure, for this type of solutions. This study unveil the existence of a critical size from which a permanent dynamic uprising. Finally, a phenomenological model that reproduces qualitatively the “Caoticón” solution is proposed. In this model, from a weak nonlinear analysis performed, we have obtained a description of the Caoticón state as the interaction of two fronts blocked by the presence of the pattern wavelength. This “Caoticón” shown permanent dynamic behavior as a consequence of the non variational behavior.

Agradecimientos.

En primer lugar, quisiera agradecerle a mi tutor Marcel Clerc, por encaminarme en mi primer paso en el mundo de la investigación, por haber apostado por mí como su discípulo, por compartir conmigo su forma de ver las cosas, en particular en el quehacer intelectual de la Física. Y quizás lo más importante y que él desconoce, por ayudarme a recuperar mi interés por la ciencia. Más que darme conocimiento específico, el profesor Clerc ha tenido la más sincera y constante preocupación por formarme como científico en cada una de las situaciones a las que me he visto sometido a lo largo de este Magíster, por lo que le estoy largamente agradecido.

De entre los académicos del *D.F.I.*, quisiera agradecerle a Claudio Falcón por ser mi amigo y por su incansable y tenaz forma de trabajar, la que estoy seguro es una inspiración para todos los que lo conocemos. Asimismo quisiera agradecerle al Profesor Enrique Tirapegui por su buena voluntad para explicarme y ayudarme.

En tercer lugar quisiera agradecerle a todos los integrantes del *D.F.I.* que hicieron de este periodo de mi vida uno inolvidable, desde los funcionarios que hicieron de este un gran lugar para trabajar, hasta mis compañeros, les agradezco a todos. En particular, quisiera agradecerle a Mónica Garcia y Yair Zarate, por ser mis amigos tanto fuera como dentro de la Universidad. No puedo dejar de destacar a mis otros compañeros: Cristián Fernandez Oto y Francisco del Campo, con quienes compartí muchas situaciones, están presentes en varias hojas de esta tesis.

De mi paso por Niza, le agradezco especialmente a Dra. Stefania Residori, por su buena voluntad, su paciencia y su inspirador gusto por el trabajo experimental. De igual manera agradezco al Dr. Bortolozzo y a R. Barboza por su ayuda, sin la cual no habría conseguido tantos resultados experimentales.

Más allá de la esfera Universitaria debo agradecerle a mis 3 amigos de siempre y a mis 3 amigos de la licenciatura por su preocupación y apoyo. Por otra parte, no puedo dejar de agradecer el imprescindible apoyo de mi familia, especialmente de mi madre, por su eterna paciencia, su comprensión y su complicidad conmigo.

Finalmente le agradezco a todos los miembros de la comisión por interesarse por este trabajo y a los auspiciadores por la ayuda financiera otorgada y haber hecho de este un magíster de dedicación exclusiva: CONICYT contrato 22111114, al D.P.P. de la Universidad por financiar el viaje a Niza.

Índice general

I	introducción	x
1.	Introducción.	1
1.1.	Patrones en la naturaleza.	1
1.1.1.	Estudio de los patrones en la naturaleza.	2
1.2.	Objetivo.	4
1.3.	Revisión de la tesis.	4
II	Revisión conceptual.	7
2.	Fenómenos Robustos y Sistemas dinámicos.	8
2.1.	Una descripción cualitativa de la naturaleza.	8
2.1.1.	Fenómenos Robustos.	8
2.1.2.	Sistemas dinámicos, bifurcaciones y formas normales.	9
2.2.	Ejemplos de sistemas dinámicos.	10
2.2.1.	Ejemplo Unidimensional: Modelo biestable.	11
2.2.2.	2D Ejemplo de Oscilaciones.	17
2.3.	Sistemas extendidos.	23
2.4.	Frentes.	24
2.4.1.	Frentes Normales.	24
2.5.	Patrones.	27
2.6.	Fenómeno de Bloqueo.	30
2.6.1.	Calculo de la velocidad del frente utilizando el método variacional.	30
2.6.2.	Método No Variacional en el calculo de la velocidad de un frente normal.	31
2.6.3.	Velocidad de un Frente de Pomeau.	32
2.6.4.	Modelo de Nagumo.	35
2.7.	Estructuras Localizadas.	38
2.8.	Modelos variacionales.	42

3. Caos.	45
3.1. Ejemplos de sistemas caóticos.	46
3.1.1. Mapa Logístico.	46
3.1.2. Modelo de Lorenz.	50
3.1.3. Ecuación de Kuramoto-Sivashinsky.	52
3.2. Exponentes de Lyapunov.	53
3.2.1. Definición Intuitiva.	53
3.2.2. Calculo Numérico de los exponentes de Lyapunov para diferentes sistemas dinámicos.	56
3.2.3. Calculo del exponente de lyapunov en mapas.	57
3.2.4. Calculo de los exponentes de Lyapunov para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.	58
3.2.5. Calculo del exponente de Lyapunov en sistemas exten- didos.	60
3.3. Rutas al caos.	63
3.3.1. Cuasiperiodicidad.	64
 4. Experimento de L.C.L.V	 67
4.1. Cristales Líquidos.	67
4.1.1. Descripción Macroscópica de los cristales líquidos.	68
4.2. Experimento de una válvula de Cristal líquido con retroinyec- ción óptica.	70
4.2.1. Válvula de Cristal Líquido.	70
4.2.2. Bucle de Retroinyección óptica.	72
4.3. Modelo teórico	75
4.4. Observaciones experimentales.	77
4.4.1. Frentes entre estados homogéneos.	78
4.4.2. Patrones y ramas de estabilidad.	78
4.4.3. Estructuras localizadas.	79
4.4.4. Parámetros extra: rotación y traslación.	80
 III Desarrollo.	 82
 5. Presentación del problema	 83
5.1. Motivación.	83
5.2. Ecuación de Lifshitz.	84
5.3. Preguntas de la Tesis.	86

6. Desarrollo del problema	87
6.1. Ruta al Caos en la ecuación de Lifshitz.	87
6.1.1. Primera Bifurcación $c = c_{AH}$	89
6.1.2. Segunda Bifurcación $c = c_{qp}$	90
6.1.3. Análisis del sistema utilizando la P.O.D.	90
6.2. Observación Experimental del Caoticón en el experimento L.C.L.V.	96
6.3. Teoría del “Caoticón”.	97
6.3.1. Modelo de Nagumo-Kuramoto.	99
6.3.2. Dinámica del frente.	100
6.3.3. Estructuras localizadas.	101
7. Conclusiones	103
7.1. Resumen de los resultados.	103
7.2. Conclusiones.	105
7.3. Investigación futura.	107
Bibliografía	110
IV Apendices	115
A. Calculos en el modelo de nagumo	116
A.1. Modelo de Nagumo.	116
A.1.1. Expresión Analítica para el kink.	117
A.1.2. Dinámica del Core en el modelo de Nagumo perturbado.	118
A.1.3. Interacción de 2 frentes en el modelo de Nagumo per- turbado.	122
B. P.O.D.	136
C. Articulos	140

Le savant n'étudie pas la nature parce que cela est utile; il l'étudie parce qu'il y prend plaisir et il y prend plaisir parce qu'elle est belle. Si la nature n'était pas belle, elle ne vaudrait pas la peine d'être connue, la vie ne vaudrait pas la peine d'être vécue.

Henri Poincaré

Parte I

Introducción y Revisión de la Tesis.

Capítulo 1

Introducción.

1.1. Patrones en la naturaleza.

La materia en el universo que vivimos se encuentra en un constante intercambio de diferentes formas de energía. El intercambio de energía de manera descoordinada conduce, en general, a un desorden estructural de la materia, sin embargo, muchas veces la materia adquiere ciertas estructuras espaciales regulares (o *autorganización*) sorprendentes: son los *patrones*. Los *patrones en la naturaleza* [1] corresponden a un *Fenómeno Robusto*, pues se presentan sistemáticamente a distintas escalas espaciales y en contextos diversos (materia viva e inerte).

Podemos nombrar ejemplos desde escalas pequeñas como: el crecimiento bacteriano, los alveolos pulmonares, las huellas digitales. Pasando por escalas humanas: patrones en las pieles de animales, copos de nieve, patrones en las dunas y nubes. Hasta escalas astronómicas: galaxias en espiral. En la Figura 1.1 se ilustran algunos de estos ejemplos con un *collage* de imágenes.

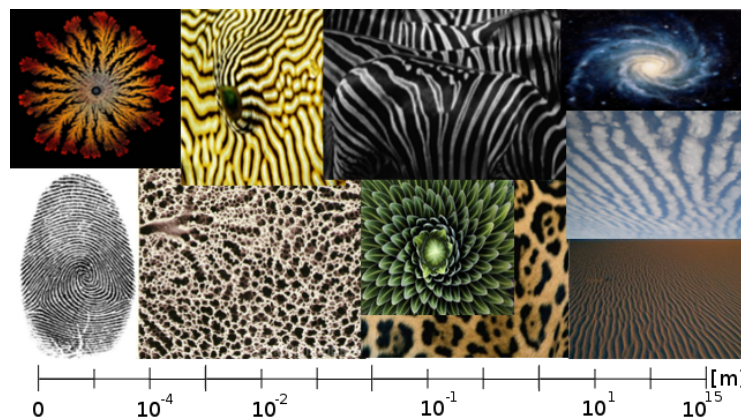


Figura 1.1: patrones en la naturaleza a diferentes escalas.(obtenidas del banco de imagenes Sciencephoto.com)

Las preguntas que emergen en la descripción de los *patrones* son ¿Cómo surgen los patrones en todos estos casos? ¿Cuáles son los mecanismos responsables que hacen que la materia “prefiera” esta estructura sobre otra?

1.1.1. Estudio de los patrones en la naturaleza.

Desde la época de los naturalistas a mediados del siglo XVII, donde se comenzaron a registrar los patrones, hasta nuestros días. Muchos esfuerzos intelectuales se han realizado a fin de intentar responder las dos preguntas recién expuestas [2, 3, 4, 5]. Un trabajo pionero en esta línea fue realizado por Alan Turing [6].

En la segunda mitad del siglo XX, con la aparición de las simulaciones computacionales, se desarrollaron una serie de modelos que permiten a partir de reglas simples, comprender el surgimiento de patrones. Ejemplos de esto lo constituyen, los *autómatas celulares* y los modelos de *sistemas dinámicos* (sistemas de ecuaciones diferenciales), estos últimos han tenido éxito en la descripción de los siguientes fenómenos y experimentos: oscilaciones químicas, anillos de Liesegang, celdas de Bénard, formación de nubes y cristales líquidos [7]. Dentro de estos casos, destacamos las *celdas de Bénard*: Dispositivo experimental que consiste en un recipiente sellado por todos lados, sobre el que se introduce un fluido, el cual es sometido a un *gradiente de temperatura* dando lugar a la *Convección de Rayleigh-Bénard*, lo cual origina estructuras tipo rollos [2]. En la Figura 1.2, presentada a continuación, se esquematiza una celda de Bénard y se ilustran los rollos observados.

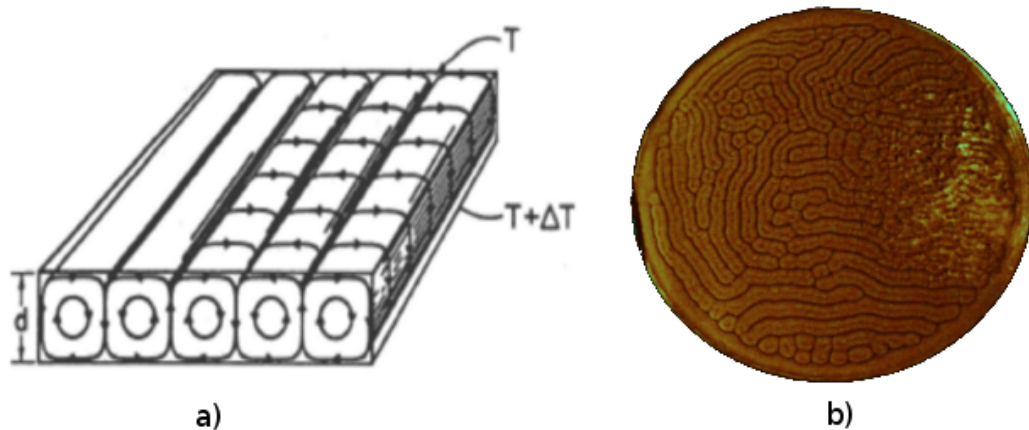


Figura 1.2: a) Esquema del funcionamiento de una celda de Bénard. b) Estructuras tipo rollos vistas experimentalmente en una mezcla de aceite de oliva con con aceite de canola.

A pesar de que este experimento fue realizado a principios del siglo XX, no fue sino hasta finales de la década del 70 que es propuesto un modelo tipo ecuación diferencial no lineal a derivadas parciales: modelo de *Swift-Hohenberg* (S.H), que describe de manera *universal* el surgimiento de patrones. En relación con la *convección de Rayleigh-Bénard*, este modelo da cuenta de los modos transversales de la velocidad y la temperatura. En el lenguaje de los sistemas dinámicos, este modelo es un sistema biestable con una inestabilidad espacial.

Desde la publicación del modelo de *Swift-Hohenberg* [8] hasta hoy, este ha sido utilizado en contextos diversos tales como: cristales líquidos, medios granulares, óptica no lineal [5, 9, 10].

En los últimos años, se han realizado varias observaciones experimentales sobre sistemas ópticos que normalmente eran modelados con la ecuación de *Swift-Hohenberg*, las que han revelado la existencia de una dinámica permanente en estos sistemas [12]. La dinámica permanente observada, no es consistente por lo esperado por el modelo de *Swift-Hohenberg*, ya que este es *variacional*, es decir, su dinámica puede ser entendida como la minimización de un *funcional*, cuyos mínimos corresponden a equilibrios estacionarios que no exhiben dinámica permanente.

A fin de realizar una descripción que dé cuenta de la dinámica permanente observada, se ha propuesto una generalización *no variacional* al modelo de *Swift-Hohenberg*, la cual se obtiene utilizando argumentos de simetría y reglas de *escalamiento*. Este modelo generalizado, al que llamaremos en lo sucesivo *Forma normal de Lifshitz*; presenta tanto los conocidos comportamientos de *Swift-Hohenberg* (patrones, patrones localizados, frentes), como nuevos comportamientos que involucran una dinámica permanente sobre los comportamientos ya conocidos. De esta forma, existen regiones de parámetros donde podemos encontrar: patrones oscilantes con doblamiento de periodo espacial, patrones con caos espacio-temporal sobre él (lo que produce una destrucción parcial del patrón), patrones localizados oscilantes y con caos espacio-temporal, dinámica de frentes caóticas, bloqueo de la dinámica por la aparición de defectos.

Las observaciones numéricas antes descritas, corresponden solamente a los primeros hallazgos en este modelo. La riqueza dinámica de la *forma normal de Lifshitz* aguarda a ser completamente descubierta. Aún así, los comportamientos ya observados, son fenómenos de una gran riqueza dinámica y sobre

los que, hasta el momento de escritura de esta tesis, no existe una descripción satisfactoria.

De todos los comportamientos interesantes observados en la *Forma normal de Lifshitz*, concentraremos nuestra atención en uno particular: el estado de equilibrio dado por un patrón sobre el que existe una dinámica caótica espacio-temporal, el cual coexiste con un estado homogéneo. La caracterización de este fenómeno, además de ser interesante por si sola, permitirá: comprender en un contexto aún más general el fenómeno de *pinning*, presentar un nuevo escenario de generación de estructuras localizadas y tener una descripción cualitativa del surgimiento de la complejidad en un sistema que presente patrones.

1.2. Objetivo.

El objetivo de la presente tesis, será el estudio del fenómeno antes mencionado, este lo realizaremos desde 3 puntos de vista diferentes:

- Numérico: simulaciones del modelo y análisis de los datos de la misma simulación.
- Experimental: Caracterización a partir de mediciones directas de un experimento de valva de cristal líquido con retro-inyección óptica.
- Analítico: Se construye un modelo fenomenológico a partir de los ingredientes dinámicos necesarios para describir cualitativamente el fenómeno en estudio. Adicionalmente, este modelo simplificado nos permite realizar un análisis débilmente no lineal.

1.3. Revisión de la tesis.

La tesis se encuentra dividida en 4 partes:

- I. En la primera parte es introducido el problema partiendo de conceptos generales y se hace una revisión superficial de las partes de la tesis.
- II. En la segunda parte, son revisados brevemente los conceptos y las herramientas necesarias para atacar el problema, los ejemplos y explicaciones tienen como único fin permitir que la tesis sea un documento autónomo, por lo que se han hecho lo más breves posibles. En el Capítulo 2 se revisan

los conceptos de *Fenómenos Robustos, Formas normales y teoría de bifurcaciones en sistemas dinámicos*. Se ilustran brevemente estos conceptos en una y dos dimensiones con ejemplos. A continuación se revisan los *sistemas extendidos* y la fenomenología exhibida por ellos: *Patrones, frentes y estructuras localizadas*. Al final del Capítulo, revisaremos brevemente el concepto de *Modelo variacional*. En el Capítulo 3 definimos el concepto de *caos* e ilustramos nuestra definición con 3 tipos de sistemas dinámicos diferentes: *Mapas, sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias y sistemas extendidos*. Enseguida revisamos una definición geométrica de *exponentes de lyapunov* y vemos como éstos pueden ser calculados de manera efectiva en los 3 tipos de sistemas dinámicos propuestos. El Capítulo 3 finaliza con el concepto de *ruta al caos*, exponiendo ejemplos de las rutas de: *quasiperiodicidad y doblamiento de periodo*. En el Capítulo 4 presentamos brevemente el experimento de una válvula de cristal líquido con retro inyección óptica, para este fin, definimos los cristales líquidos y vemos como puede describirse macroscópicamente su dinámica. Enseguida, describimos el dispositivo experimental: *Válvula Óptica*, para finalmente mostrar el dispositivo experimental completo (el bucle de retro-inyección óptica). A continuación se presenta el modelo teórico que describe el comportamiento del ángulo promedio de las moléculas de cristal líquido presentes en la válvula óptica. El capítulo finaliza con observaciones experimentales, de los comportamientos exhibidos por el experimento para valores significativos de los parámetros.

III. En la tercera parte está contenido todo el desarrollo realizado en esta investigación, consta de tres capítulos.

En el Capítulo 5 es presentado el problema a estudiar. El capítulo comienza con algunas observaciones experimentales que sirven de motivación. Con el fin de modelar estos comportamientos experimentales es introducido el modelo de *Lifshitz*: una generalización del modelo de *Swift-Hohenberg*, la cual respeta las reglas de escalamiento (*scaling*) y simetría del modelo original. Enseguida es discutida la naturaleza *no variacional* de la ecuación de *Lifshitz*, su dinámica permanente es ilustrada con un par observaciones numéricas y un caso particular en que es posible reescribir el modelo de *Lifshitz* como la derivada de un funcional es mostrado. Al final del capítulo se exponen las preguntas que responde esta Tesis.

En el Capítulo 6 es estudiado el problema de los comportamientos *no variacionales*. El capítulo comienza con una caracterización numérica de

los diferentes comportamientos *extendidos* que exhibe este modelo conforme es modificado el valor de uno de los parámetros no variacionales. Enseguida, la existencia de estructuras localizadas caóticas (que llamaremos “Caoticón”), es reportada en el experimento de una válvula de cristal líquido con retro-inyección óptica. El capítulo finaliza con una caracterización de caoticón, utilizando el modelo de *Lifshitz* y el modelo de *Nagumo-Kuramoto*. El modelo de *Lifshitz* posee soluciones Caoticón, las cuales tienen una dinámica permanente a partir de una talla crítica; por su parte, el modelo de *Nagumo-Kuramoto* permite un estudio analítico que predice la existencia de este tipo de soluciones de manera estable. En el Capítulo 7 se resumen los resultados, se exponen las conclusiones y se proponen ideas para una investigación futura.

Parte II
Revisión conceptual.

Capítulo 2

Fenómenos Robustos y Sistemas dinámicos.

En este capítulo y los dos siguientes nos proponemos revisar de manera breve las herramientas y conceptos necesarios para responder las preguntas planteadas en esta tesis.

2.1. Una descripción cualitativa de la naturaleza.

2.1.1. Fenómenos Robustos.

Observando la naturaleza, notamos que existen fenómenos que se repiten en diversos contextos. Éstos, independientes de la *física subyacente*, son conocidos como los *fenómenos robustos*. Ejemplos de esto pueden ser:

- Las ondas, fenómeno que propaga una cantidad física como energía y momentum. Las ondas pueden ser observadas en variados contextos: ondas en superfluidos, ondas de sonido, ondas elásticas, ondas electromagnéticas, ondas gravitacionales, etc.
- la histeresis, debida a la coexistencia de estados de equilibrio.
- los patrones.
- las estructuras localizadas o defectos.
- el caos.

Esta sencilla pero profunda observación sobre nuestro entorno, constituye todo un punto de vista y aproximación al estudio de la naturaleza. Consideramos a *Henri Poincaré* como el pionero de esta visión, pues caracterizó los fenómenos exhibidos por las ecuaciones diferenciales de manera geométrica en

su espacio de fase. A pesar de esto, la primera persona en utilizar el término *fenómenos robustos* fue *Alexander Andronov* [11].

2.1.2. Sistemas dinámicos, bifurcaciones y formas normales.

La forma más idónea para traducir el concepto de *fenómenos robustos* en términos matemáticos, ha sido la *teoría de sistemas dinámicos*. Entenderemos por *sistema dinámico* (o simplemente *sistema*) al modelo simplificado del problema a analizar que, utilizando alguna realización matemática (relaciones de recurrencia, sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales), permite determinar la evolución de una variable *física relevante*, diremos que una variable física es relevante, si esta permite describir el problema en cuestión.

A fin de fijar ideas, supondremos que queremos conocer el devenir temporal de una variable \vec{u} que evoluciona acorde a una regla dada por una función \vec{f} . El sistema puede entonces escribirse de la forma:

$$\partial_t \vec{u} = \vec{f}(\vec{u}, \vec{\lambda}) \quad (2.1)$$

Donde las componentes de $\vec{\lambda}$ corresponden a los *parámetros del sistema*, es decir, todo lo que es *relevante* en la observación del sistema, pero no cambia con la evolución temporal (por ejemplo: masa, viscosidad, ángulo de inclinación, gravedad, etc). Para los ejemplos analizados en esta tesis, \vec{f} no depende explícitamente del tiempo (es un *sistema autónomo*) y depende de manera *no lineal* de \vec{u} . Los sistemas de ecuaciones diferenciales *no lineales*, en general, no pueden resolverse analíticamente, es por esto que recurrimos al estudio de los equilibrios del sistema utilizando el *espacio de fase* como herramienta para caracterizar la dinámica del sistema [13].

Fijados los parámetros, el espacio de fase nos dice cuales son los destinos de las distintas condiciones iniciales, es decir, contiene todas las soluciones del problema en estudio. La pregunta natural es ¿Cómo cambia el espacio de fase conforme son modificados los parámetros? A un cambio *cualitativo* en el espacio de fase lo llamaremos *bifurcación*, siguiendo la caracterización cualitativa propuesta por *Poincaré*. La característica más sorprendente de las *bifurcaciones* es que son *genéricas*, es decir, no dependen del sistema a analizar, pues éstas corresponden a características geométricas del sistema en estudio. A partir de esto, suponiendo que los valores de los parámetros se encuentran en la vecindad de la bifurcación, podemos *derivar* una ecuación

más simple (la que contiene la menor cantidad de términos y parámetros) que dé cuenta de la bifurcación, esta ecuación simplificada recibe el nombre de *forma normal* [14]. Existe una estrecha relación entre *formas normales* y *fenómenos robustos*, en general las formas normales dan cuenta de algún fenómeno robusto; a modo de ejemplo, cualquier sistema escrito de la forma (2.1), que en cierto régimen de parámetros presente oscilaciones, debe poseer una ecuación simplificada que describa la dinámica de dichas oscilaciones, es decir, algo de la forma:

$$\dot{A}(\vec{u}) = i\omega(\vec{\lambda})A(\vec{u}) \quad (\text{con: } u = Ae^{i\omega t} + \bar{A}e^{-i\omega t})$$

Donde A es la amplitud de oscilación. Por descontado está decir que esta ecuación sólo tiene validez en la vecindad de donde se presentan las oscilaciones, conforme se cambian continuamente los valores de los parámetros, continuamente la ecuación anterior deja de ser una descripción efectiva.

Un sistema en estudio puede presentar varias bifurcaciones para distintas combinaciones de valores de los parámetros. Las bifurcaciones caracterizan los distintos comportamientos cualitativos exhibidos por los sistemas bajo estudio. Es por esto de vital importancia estudiar las formas normales por sobre los sistemas particulares. Finalmente remarcamos que *no* siempre es posible escribir una ecuación de la forma (2.1) a partir de primeros principios, no obstante, las *simetrías del sistema*, así como las *bifurcaciones* presentadas por el mismo, dan una intuición sobre que ecuación plantear de manera fenomenológica para describir el sistema. Un ejemplo clásico de este punto de vista, es la explicación de la superconductividad propuesto por *Landau* [15].

En la sección siguiente ilustraremos todos los conceptos antes señalados con ejemplos simples, pero que serán de importancia transversal en la tesis.

2.2. Ejemplos de sistemas dinámicos.

En los ejemplos y en los casos que se verán a lo largo de toda la tesis, estudiaremos fenómenos que ocurren *fuera del equilibrio*, es por esto que los sistemas dinámicos que estudiaremos serán en general *disipativos*, es decir, el teorema de *Liouville* [16] *no* se aplica en estos casos. Las trayectorias en el espacio de fase evolucionan y se concentran sobre un subconjunto del mismo, tal subconjunto se conoce como *atractor*. El subconjunto de los puntos del espacio de fase que evolucionan sobre el *atractor* se llama *tina de atracción*. En un sistema dinámico de dimensión N , si existen 2 o más atractores, sus

tinias de atracción respectivas se encontrarán separadas por una variedad $N-1$ dimensional llamada separatriz, la cual es inestable.

2.2.1. Ejemplo Unidimensional: Modelo biestable.

Consideremos el siguiente sistema dinámico:

$$\partial_t u = \epsilon u - u^3 \quad (2.2)$$

Supongamos que tenemos una solución de la variable dinámica u del sistema, entonces $-u$ es también solución. Decimos en estos casos que el sistema *posee la simetría de reflexión* $u \rightarrow -u$. Este sistema tiene un sólo parámetro ϵ , el cual *no* puede ser eliminado reescalando el tiempo. Cualquier otro parámetro que se le ponga al sistema (sin agregar más términos) puede ser eliminado reescalando el tiempo y redefiniendo ϵ y u . En este sentido decimos que el sistema ha sido llevado a su *forma más simple*.

Dado que no conocemos nada de las magnitudes de u ni del parámetro ϵ y mucho menos de la escala temporal en que varia el modelo (2.2), no sabemos *a priori* si los términos en competencia (los que gobiernan la dinámica) son de la misma magnitud y no se puede asegurar la validez de este modelo. Para que la ecuación tenga validez, deben *balancearse* todos los términos involucrados en ella. La ecuación estará balanceada cuando se haya realizado una regla de escalamiento (o más utilizado *Scaling* del inglés) sobre la misma. Esta regla, en general *no* es única. Para (2.2) podemos hacer la siguiente regla de escalamiento:

$$u^2 \sim \epsilon \rightarrow u \sim \epsilon^{1/2}, \quad \partial_t \sim \epsilon$$

Es decir, *mientras* la escala típica de tiempo sea *de orden* ϵ y la variable dinámica u sea *de orden* $\epsilon^{1/2}$, esta ecuación tiene validez. Los comentarios antes hechos son trivialmente generalizables para los sucesivos sistemas que se revisarán.

Estudiemos el modelo (2.2) de tres formas:

1. **Análisis de estabilidad lineal:** Queremos saber que equilibrios presenta, es decir, que soluciones *independientes del tiempo* tiene este sistema:

$$\partial_t u = 0 = \epsilon u - u^3 = u(\sqrt{\epsilon} - u)(\sqrt{\epsilon} + u) \rightarrow u_0 = 0, \quad u_{\pm} = \pm\sqrt{\epsilon}$$

Esto nos dice que dependiendo del signo de ϵ existen una o tres soluciones de equilibrio. Podemos hacer un *análisis de estabilidad lineal* [13] y calcular los valores propios a fin de averiguar si son *atractores* o *repelores*:

- Si $\epsilon < 0$

$$s = 0 + v(v \ll 1) \quad \partial_t v = \epsilon v \rightarrow v = Ae^{t\epsilon}$$

Por lo tanto, la solución $u_0 = 0$ es un atractor (es *linealmente estable y a su vez asintóticamente estable*).

- Si $\epsilon > 0$

$$s = 0 + v(v \ll 1) \quad \partial_t v = \epsilon v \rightarrow v = Ae^{t\epsilon}$$

$$s = \pm\sqrt{\epsilon} + v(v \ll 1) \quad \partial_t v = \epsilon(\pm\sqrt{\epsilon} + v) - 3\epsilon v \mp \epsilon\sqrt{\epsilon} = -2\epsilon v \rightarrow v = Ae^{-2t\epsilon}$$

Por lo tanto, la solución $u_0 = 0$ es repelora y las soluciones $u_{\pm} = \pm\sqrt{\epsilon}$, son atractores.

Procedemos graficar los valores propios que se obtienen de linealizar las soluciones de equilibrio y ver qué pasa con ellos conforme se mueve el parámetro ϵ , esto permite resumir en una imagen el análisis hecho anteriormente:

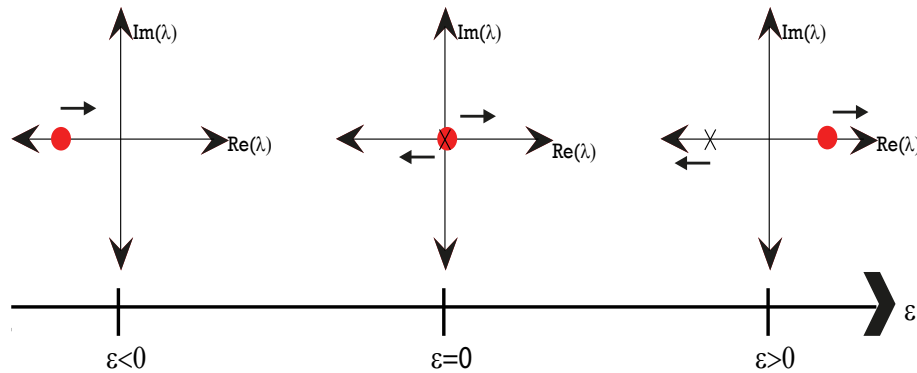


Figura 2.1: Valores propios de la ecuación (2.2) conforme se incrementa el parámetro ϵ , el círculo relleno corresponde al valor propio asociado a la solución de equilibrio $u = 0$, mientras que la cruz a las soluciones $x = \pm\sqrt{\epsilon}$

2. **Espacio de fase:** El espacio de fase para sistemas unidimensionales corresponde a la gráfica de la función que da cuenta de la dinámica (el lado derecho de 2.2) sobre la variable u . Dada una condición inicial u_0 , si la función toma un valor positivo para ese u_0 , entonces la condición inicial será desplazada hacia la derecha; si tiene un valor negativo pasará lo contrario. La dirección en que se mueven las condiciones iniciales para los distintos valores de condición inicial se llama *vector de campo*, el vector de campo está únicamente determinado por la función (lado derecho de 2.2). Si la función tiene un cero para algún valor de u , este corresponde a un punto de equilibrio, observando el vector de campo en la vecindad

de un punto de equilibrio, podemos decidir si este es: atractor, repelente o punto hiperbólico (un punto de equilibrio que atrae en una dirección y repele en otra). En la figura siguiente mostramos todos estos conceptos graficando el espacio de fase para distintos signos de ϵ . Los círculos sobre la horizontal corresponden a puntos de equilibrio, si están rellenos (negros) el equilibrio es estable, si están vacíos (blancos) el equilibrio es inestable. Esta notación para la estabilidad fue introducida por *Strogatz* [13].

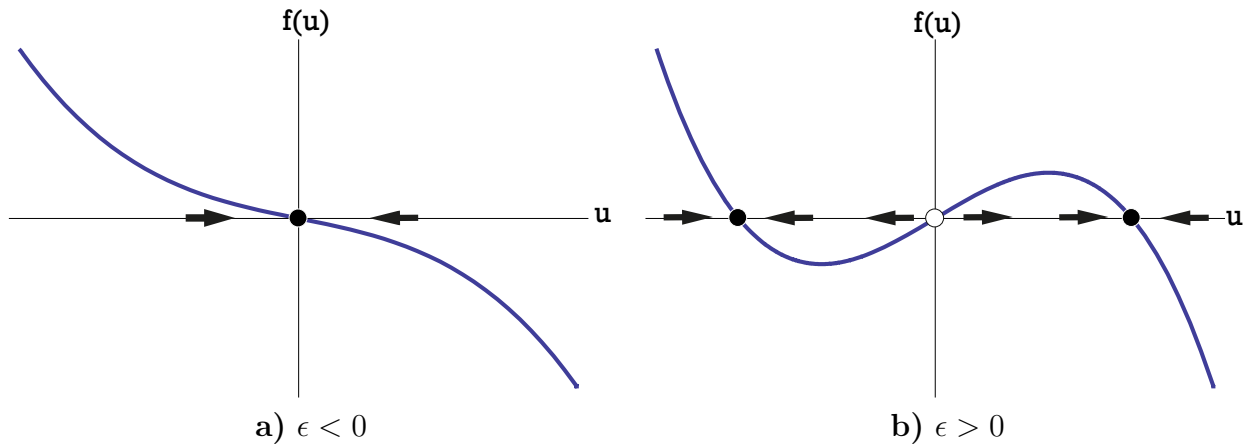


Figura 2.2: Las formas cualitativamente diferentes del espacio de fase según el signo de ϵ ilustradas en **a)** y **b)** respectivamente.

3. **El potencial:** Podemos reescribir (2.2) como la derivada de un potencial:

$$\partial_t u = -\frac{\partial V}{\partial u} \quad \text{Donde } V = -\epsilon \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4}$$

Y mirar como cambia la forma del potencial para los distintos valores del parámetro. Los mínimos del potencial corresponden a los puntos de equilibrio estables y los máximos a los puntos de equilibrio inestables. A continuación graficamos el potencial para distintos valores significativos de ϵ .

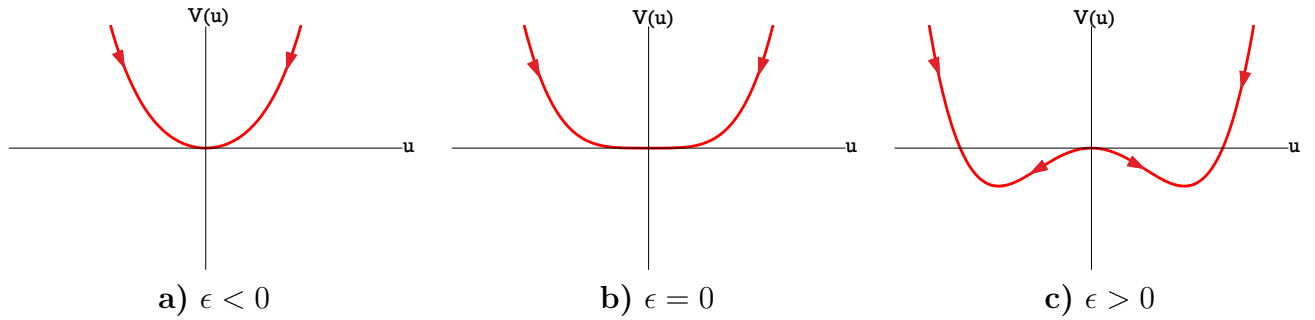


Figura 2.3: Representaciones del potencial conforme se mueve el parámetro, las flechas han sido puestas para enfatizar la dinámica de relajación.

Es importante notar que la posibilidad de reescribir este modelo como la derivada de un potencial es una situación excepcional, los modelos que cumplen con esta condición son llamados *modelos variacionales* y están gobernados por una dinámica de relajación. Una revisión a mayor profundidad de este concepto será realizado en la sección 2.8.

Hemos analizado este sistema de tres perspectivas y nos han ilustrado el mismo resultado de formas diferentes. Al cambiar el signo del parámetro hay un cambio cualitativo en el espacio de fase, es decir, una bifurcación. Esta bifurcación se origina cuando la solución original se vuelve inestable dando aparición a dos nuevas soluciones, este es un ejemplo de *inestabilidad*. Una inestabilidad implica una bifurcación (el converso no es cierto). La forma más simple de ver la aparición de una inestabilidad es observar el espectro (el conjunto de los valores propios) del sistema tal y como lo hicimos en el análisis de estabilidad (Figura 2.1).

Cualquier sistema que presente *simetría de reflexión* ($u \rightarrow -u$) y que moviendo los parámetros presente biestabilidad, puede ser descrito, en la vecindad de la *bifurcación* por la ecuación (2.2). Ejemplos Físicos de esto pueden encontrarse en: Magnetización, Cristales Líquidos (Transición de Fréedericksz).

Podemos resumir todos los resultados anteriores de manera gráfica en un *diagrama de bifurcación*. Graficamos en el eje horizontal los distintos valores del parámetro y en el eje vertical los valores de las diferentes soluciones de equilibrio. Si el equilibrio es estable lo presentamos con una línea continua, si es inestable con una línea discontinua:

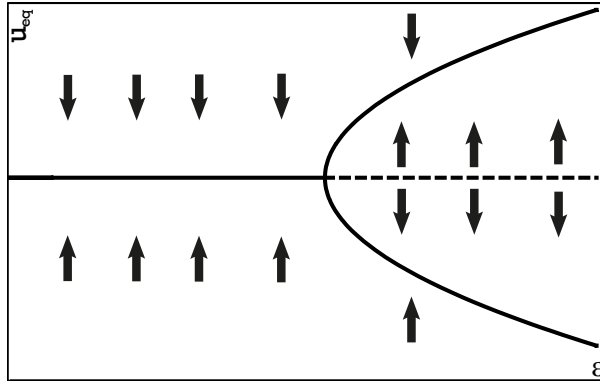


Figura 2.4: Diagrama de bifurcación. Las flechas han sido añadidas para ilustrar las cuencas de atracción de los distintos equilibrios.

Debido a la forma del diagrama de bifurcación, conocemos este modelo minimal como *la forma normal de pitchfork (horquilla o tenedor), súpercrítico*. Podemos generalizar (2.2), quebrando la simetría de reflexión agregando un nuevo término constante y un parámetro (en rojo):

$$\partial_t u = \eta + \epsilon u - u^3 \quad (2.3)$$

Notemos que este nuevo parámetro η no puede eliminarse y un nuevo *Scaling* debe ser llevado a cabo. Al quebrar la simetría de paridad, la bifurcación se llama en este caso *bifurcación de pitchfork imperfecta* y el sistema tiene “preferencia” de un estado sobre el otro, esto queda en evidencia al observar el potencial. Una realización física de esto, viene de considerar la transición *ferromagnética* en presencia de un campo externo.

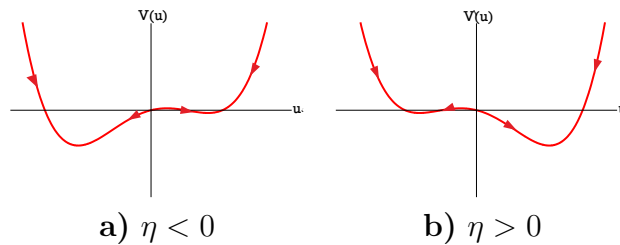


Figura 2.5: Asimetrización del potencial al quebrar la simetría de paridad ($\epsilon > 0$).

Conforme hacemos continuamente $\eta \neq 0$, el diagrama de bifurcación cambia. En la siguiente figura se ilustra el diagrama de bifurcación para $\eta > 0$

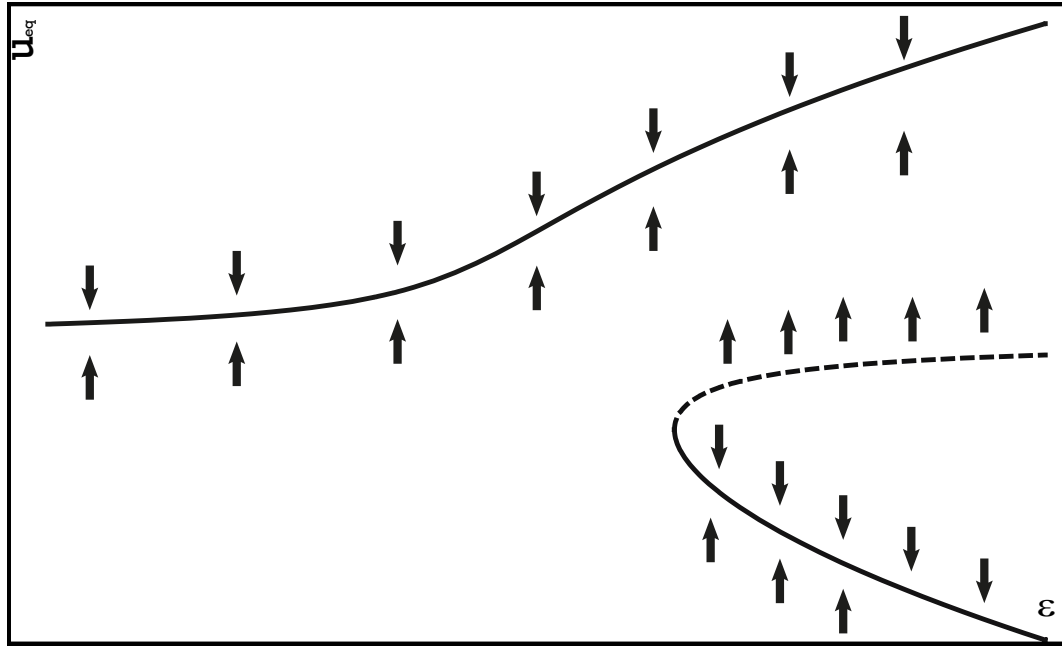


Figura 2.6: Diagrama de la bifurcación *Pitchfork imperfecta*, notamos como las “ramas” de las soluciones se han separado.

Si consideramos todas las combinaciones posibles de los parámetros η y ϵ , solo un subconjunto de ellas nos darán 3 puntos de equilibrio, para conocer cuales, se debe resolver la ecuación cúbica que corresponde al lado derecho de (2.3), sin embargo, podemos conocer la curva donde ocurre esta transición donde pasamos de tener una a dos soluciones estables utilizando un argumento geométrico.

Fijando ϵ y haciendo $\eta = 0$, observamos el espacio de fase y graficamos sobre este la curva horizontal $-\eta = cte$ (Figura 2.7a). Los puntos de equilibrio corresponden a la intersección de esta curva con la curva del lado derecho de (2.3) para el caso $\eta = 0$. El caso límite ocurre cuando el lado derecho de (2.3) con $\eta = 0$, toca con $-\eta = cte$ en un máximo, el punto de equilibrio u_* corresponde al punto que cumple:

$$f'(u_*) = \epsilon - 3u_*^2 = 0 \rightarrow u_*^2 = \frac{\epsilon}{3} \quad \text{y} \quad f(u_*) = -\eta = 2\frac{\epsilon}{3}\sqrt{\frac{\epsilon}{3}} \rightarrow \eta^2 = \frac{4}{27}\epsilon^3$$

A continuación procedemos a graficar esta curva:

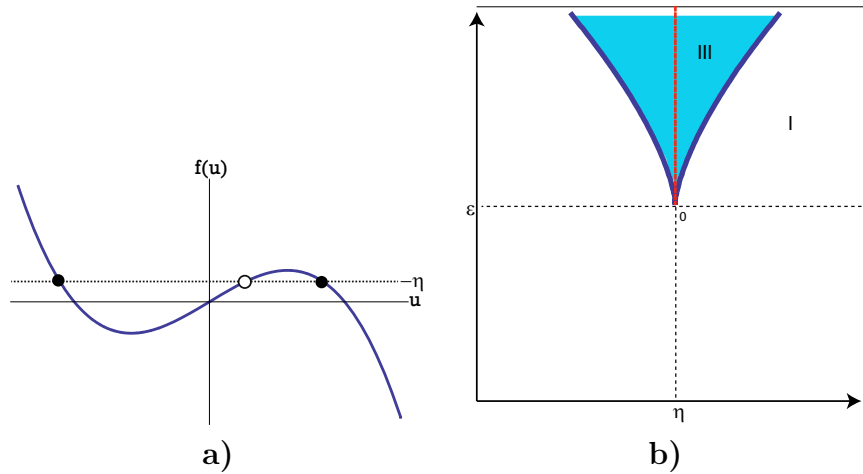


Figura 2.7: **a)** Ilustración del método geométrico para obtener la curva donde ocurre la bifurcación. **b)** Curva de bifurcación en el espacio de parámetros, dentro del área determinada por esta curva (pintada azul claro) existen III soluciones, fuera de ella sólo I.

En la figura 2.7 **b)** la curva línea vertical roja juega un rol importante, es ahí donde se recupera la simetría de paridad y ambas soluciones son *igualmente probables*. A este punto en el espacio de parámetros lo denominaremos punto de *Maxwell*. Este punto es definido como aquel en que la energía de ambos estados es la misma. El punto de Maxwell será de vital importancia en el estudio de las *estructuras localizadas*.

Existen otras bifurcaciones en los sistemas unidimensionales: bifurcación *saddle-node* y bifurcación *transcritica*, ambas asociadas a inestabilidades. Las inestabilidades en una dimensión son *estacionarias*, esto quiere decir que el valor propio que se vuelve inestable posee siempre *parte imaginaria nula*, lo que descarta la existencia de *oscilaciones* en sistemas de una variable. A continuación revisaremos un sistema bidimensional que presenta oscilaciones.

2.2.2. 2D Ejemplo de Oscilaciones.

En los sistemas bidimensionales, tanto los equilibrios (*atractores, repelores y puntos hiperbólicos*) como las bifurcaciones que revisamos en una dimensión persisten. El espacio de fase ahora tiene 2 dimensiones y por lo tanto, el *vector de campo* también. La característica más notable de los sistemas bidimensionales es la existencia de un nuevo atractor: *los ciclos límites*, este tipo de solución corresponde a un conjunto de puntos de equilibrio que forman una curva y tienen dinámica. A continuación un ejemplo de sistema bidimensional que presenta ciclos límites.

Oscilador de van der Pol.

La *ecuación de van der Pol* es un oscilador con disipación *no lineal*. Debe su nombre al ingeniero eléctrico holandés Balthasar van der Pol, quien a finales de las década del veinte se encontraba estudiando las posibilidades que presentaban los *tubos de vacío* en circuitos eléctricos. Los *tubos de vacío* tienen un comportamiento *no ohmico* y por lo tanto al aplicar las leyes de *Kirchoff* se obtendrán términos *no lineales*. La ecuación para la carga en un circuito de *van der Pol* puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x + (\mu - x^2)\dot{x} \quad (2.4)$$

Notemos que es posible simplificar aún más esta ecuación eliminando algún parámetro, por ejemplo ω^2 . Conservaremos ambos parámetros pues nos permitirán tener mayor control sobre el fenómeno de las oscilaciones no lineales.

Si despreciamos la parte *no lineal*, sabemos de los cursos de mecánica que dependiendo del signo del parámetro μ tendremos oscilaciones amortiguadas o crecientes, ya que el término lineal proporcional a \dot{x} juega un rol de disipación ($\mu < 0$) o inyección de energía ($\mu > 0$). La parte no lineal es la responsable de generar un *balance* entre los términos, dando lugar a oscilaciones en sistemas fuera del equilibrio. Resolviendo numéricamente (2.4) para distintos valores significativos de μ , encontramos comportamientos cualitativamente diferentes, resumidos en los planos de fase a continuación:

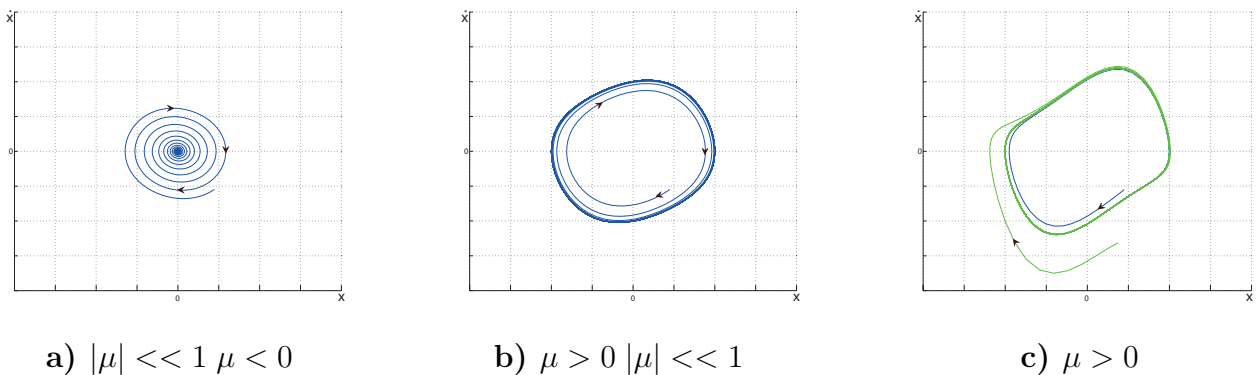


Figura 2.8: Diagramas de fase para distintos valores del parámetro. **a)** Para valores de μ pequeño pero negativo, vemos como el origen es un atractor, al que se dirige haciendo oscilaciones. **b)** Traspasado el valor $\mu = 0$, las oscilaciones se vuelven permanentes y para valores pequeños pero positivos del parámetro, observamos oscilaciones casi circulares. **c)** Conforme se sigue aumentando el valor del parámetro, las oscilaciones van deformándose continuamente, conocidas como *oscilación de relajación*.

De esta simple inspección se observa un cambio cualitativo en la dinámica del sistema, dependiendo del signo de μ , vemos que el atractor pasa de ser un *punto* a un *ciclo límite*, es decir estamos en presencia de una bifurcación. Para entender como ocurre, podemos hacer un análisis de estabilidad lineal, reescribiendo (2.4) como un sistema de primer orden:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= (\mu - x^2)y - \omega^2 x\end{aligned}$$

El punto de equilibrio es:

$$x = 0 \quad y = 0$$

Linealizando el sistema cerca del origen obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Los valores propios del operador lineal son:

$$\lambda_{\pm} = \frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 - \omega^2}$$

Observemos que un cambio de la magnitud de ω no significa un cambio en la estabilidad del punto fijo. Modificando μ , observamos la siguiente inestabilidad:

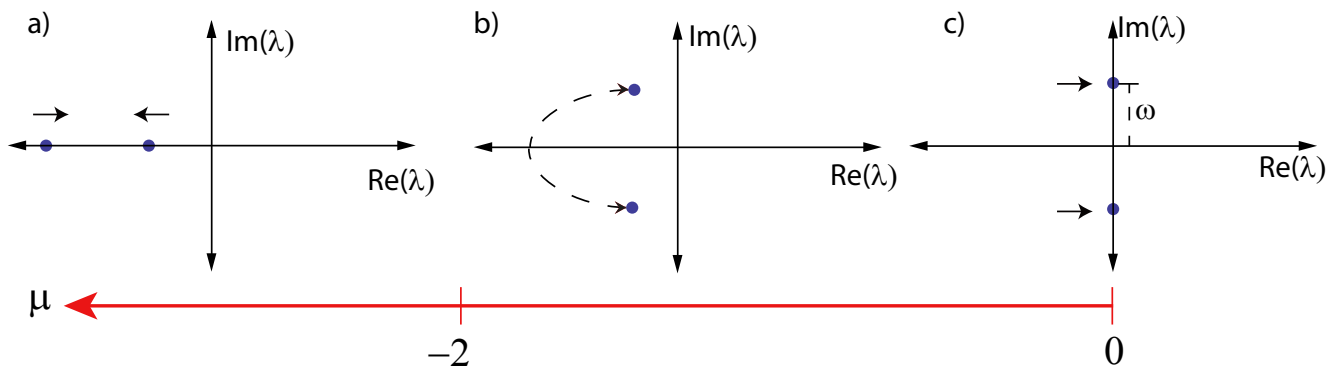


Figura 2.9: Comportamiento de los valores propios del operador lineal del sistema cerca de $\dot{x} = \ddot{x} = 0$ considerando $\omega = 1$. **a)** Para valores de $\mu < -2$ los valores propios tienen parte imaginaria nula y las condiciones iniciales van hacia el origen sin oscilar. **b)** Para $-2 < \mu < 0$ los valores propios pasan a tener parte imaginaria no nula y son complejos conjugados entre sí, mientras se aproximan al eje imaginario. **c)** Inestabilidad que a lugar a la bifurcación de *Andronov-Landau-Hopf*.

La inestabilidad con 2 valores propios complejo conjugados entre sí, es *característica* de una bifurcación donde aparecen oscilaciones: *Bifurcación de Andronov-Hopf* (figura 2.9 c). Cada vez que veamos aparecer oscilaciones de manera continua en un sistema, evaluar los valores propios cerca de la solución nos servirá para identificar si estamos en presencia de una *bifurcación de Andronov-Hopf*.

Hemos visto un sistema dinámico simple que presenta oscilaciones y como podemos detectar el surgimiento de estas mediante un análisis de estabilidad lineal. La pregunta natural que surge es si somos capaces de describir con algún detalle estas oscilaciones. A continuación, utilizaremos el *método de ecuaciones de amplitud*, para dar una descripción del problema no lineal.

Ecuaciones de amplitud.

Consideremos inicialmente el modelo (2.4) para el caso lineal sin disipación ($\mu = 0 = \dot{x}x^2$):

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

Este es un problema lineal y su solución es conocida: una exponencial imaginaria y su complejo conjugado (c.c.).

$$x = Ae^{i\omega t} + c.c.$$

Si consideramos los términos no lineales y la disipación como *perturbativos* (i.e. $|\mu| \ll 1, |\dot{x}x^2| \ll 1$), podemos afirmar que la evolución de la solución $x(t)$, tendrá *dos escalas temporales distintas*: una *rápida* que corresponde a las oscilaciones y otra *lenta* relacionada con los movimientos de la *envolvente* o *amplitud* de las oscilaciones. Podemos reescribir esta afirmación en términos matemáticos como sigue

Para la ecuación (2.4), en el régimen de parámetros dado por

$$\ddot{x} = -\omega^2 x + (\mu - x^2)\dot{x} \quad |\mu| \ll 1$$

Podemos proponer un *Ansatz* de la forma

$$x = A(\tau)e^{i\omega t} + c.c + W(\tau) \quad |W| \ll 1$$

Donde τ es una escala lenta, en la que varia la amplitud y la corrección W a nuestro supuesto inicial, esta corrección será una serie *no lineal* en la amplitud A , si suponemos además que la amplitud es grande, entonces W es una

pequeña corrección no lineal.

Esperamos además que nuestra corrección sea pequeña mientras $|\mu| \ll 1$.

Introduciendo el *Ansatz* en la ecuación, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \ddot{A}e^{i\omega t} + 2i\omega\dot{A}e^{i\omega t} - \omega^2 A e^{i\omega t} + c.c. + \ddot{W} &= -\omega^2 A e^{i\omega t} + c.c. - \omega^2 W \\ &+ \mu(\dot{A}e^{i\omega t} + i\omega A e^{i\omega t} + c.c. + \dot{W}) \\ &- (A^2 e^{2i\omega t} + 2AW e^{i\omega t} + c.c. + W^2 + 2|A|^2)[\\ &(\dot{A}e^{i\omega t} + i\omega A e^{i\omega t} + c.c. + \dot{W})] \end{aligned}$$

Como μ , A son pequeños y A, W son pequeños y varían en una escala lenta, despreciaremos: \ddot{A} , $\mu\dot{A}$, $\mu\dot{W}$, W^2 , $A^2\dot{A}$, AW , $\dot{W}A$.

Con lo que obtenemos la ecuación lineal para W

$$\{\partial_{tt} + \omega^2\}W = \mathcal{L}\vec{W} = (-2i\omega\partial_t A + \mu i\omega A - i\omega|A|^2 A)e^{i\omega t} - i\omega A^3 e^{3i\omega t} + c.c. = \vec{b}$$

$$\mathcal{L}\vec{W} = \vec{b}$$

Este problema, podría ser solucionado invirtiendo el operador lineal \mathcal{L} , sin embargo, para esto es necesario que \mathcal{L} sea invertible. Afortunadamente existe un teorema [7] que da una condición necesaria y suficiente para que este problema tenga solución.

Condición de Solubilidad o Alternativa de Fredholm.

Un problema de la forma:

$$\mathcal{L}\vec{W} = \vec{b}$$

tiene solución si y solo si, al dotar al espacio de un producto escalar se satisface la siguiente condición:

$$\langle \vec{b} | \vec{k} \rangle = 0 \quad \forall \quad \vec{k} \in Ker(\mathcal{L}^\dagger)$$

Para nuestro caso particular, escogiendo el producto escalar:

$$\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} a^*(t)b(t)dt$$

Se tiene que:

$$\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}$$

Por otra parte, el *kernel* del operador son las soluciones del oscilador armónico, por lo tanto, el teorema dice que una condición necesaria y suficiente para que nuestro problema tenga solución es:

$$\langle e^{-i\omega t} | \vec{b} \rangle = 0$$

Esto es:

$$0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [(-2i\omega \partial_t A + \mu i\omega A - i\omega |A|^2 A) e^{i\omega t} - i\omega A^3 e^{3i\omega t} + c.c.] e^{i\omega t} dt \quad (\text{donde } T = \frac{2\pi}{\omega})$$

Finalmente recordando que las potencias enteras de $e^{i\omega t}$ son un conjunto *completo orto-normal* bajo este producto escalar y considerando que la escala en que varia A es mucho más lenta que el periodo tenemos:

$$0 = (-2i\omega \partial_t A + \mu i\omega A - i\omega |A|^2 A) \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-i\omega t} e^{i\omega t} dt$$

$$\boxed{\dot{A} = \frac{\mu}{2} A - \frac{1}{2} A |A|^2}$$

Que corresponde a la ecuación de *Ginzburg-Landau a coeficientes reales sin acoplamiento espacial* [17]. Recordemos que esta ecuación nos describe la dinámica de la amplitud en la vecindad de la bifurcación. Podemos reescribir esta ecuación usando representación polar $A = R e^{i\phi}$, con lo que encontramos:

$$\dot{\phi} = 0$$

$$\dot{R} = \frac{\mu}{2} R - \frac{R^3}{2}$$

La primera ecuación dice que la frecuencia de oscilación es exactamente ω y no una función de ω y μ . La segunda ecuación corresponde a una bifurcación de *pitchfork* para la amplitud, es decir, la amplitud pasa de ser cero (punto fijo) a crecer con una ley cuadrática.

Los ciclos límites son el fenómeno más interesante de los sistemas bidimensionales. Un teorema de gran importancia en sistemas dinámicos, es el teorema de *Poincaré-Bendixon* ([13] y las referencias ahí), el cual asegura que, dada una condición inicial dentro de un subconjunto del plano de fase desprovista de puntos fijos estables; si esa condición inicial nunca escapa del subconjunto, entonces dentro de ese conjunto existe al menos un *ciclo límite*

estable. Este teorema geoméricamente evidente, tiene una consecuencia profunda: Descarta del plano de fase cualquier otro atractor distinto a los puntos fijos y los ciclos límites, esto quiere decir que análogamente a que necesitamos de al menos 2 dimensiones para tener oscilaciones, necesitamos de al menos 3 dimensiones para tener nuevos comportamientos como el *caos*.

2.3. Sistemas extendidos.

Hasta ahora hemos lidiado con sistemas con pocos grados de libertad (a lo más dos), esta es una situación tremendamente simplificada. Cuando intervienen una cantidad grande de variables, la estrategia de trabajo que hemos utilizado hasta ahora se vuelve inaplicable, el problema radica en el acoplamiento entre las diferentes partes del sistema, este puede ser a primeros vecinos (para lo cual ocuparemos operadores de derivadas) o de acoplamiento *no local* (donde se utilizan ecuaciones integro-diferenciales y modelos *no-locales*). Para poder abordar este problema se hace la aproximación de considerar la materia macroscópica como constituida por un continuo de elementos, esto nos lleva a transformar las ecuaciones diferenciales ordinarias en ecuaciones diferenciales parciales. Un ejemplo clásico de esto es la derivación de la ecuación de ondas para una cuerda: Consideramos inicialmente la cuerda como un conjunto discreto y finito de osciladores armónicos idénticos acoplados y luego transformamos la ecuación de movimiento considerando el límite de infinitos osciladores, obteniendo la ecuación de ondas. No siempre es posible derivar un modelo a partir de primeros principios, por ejemplo en los medios granulares o los modelos de dinámica de poblaciones, se proponen modelos que contengan los “ingredientes dinámicos”, que permitan modelar los comportamientos observados. En los casos estudiados en esta tesis, siempre estaremos comparando los resultados analíticos contra las simulaciones numéricas, es por ello que nos restringiremos a un modelo donde la variable que no es el tiempo (en general el espacio), será *finita*.

2.4. Frentes.

2.4.1. Frentes Normales.

Un modelo sencillo con el que podemos ilustrar todo lo dicho anteriormente es el siguiente *sistema extendido*:

$$\partial_t u = \eta + \epsilon u - u^3 + \nabla^2 u$$

Ecuación que puede ser derivada a partir de las ecuaciones constitutivas del cristal líquido (citación requerida). Los *equilibrios homogéneos* de este sistema (i.e. $\partial_t u = 0 = \partial_x^n u$), son la extensión espacial de los equilibrios del ejemplo estudiado en 2.2.1, es decir, estamos considerando un número infinito de copias del sistema 2.3, acoplados a primeros vecinos, donde cada una de las copias presenta *biestabilidad* con un estado “energéticamente” más favorable que el otro. Estos equilibrios heredan la estabilidad del caso cero dimensional (en este caso el modelo 2.3) y corresponden a los equilibrios más sencillos de un sistema extendido. La pregunta natural es si existirá una solución de equilibrio que conecte dos equilibrios homogéneos estables. Para el modelo que estamos estudiando, existe dicha solución: son los *Frentes Normales*.

Si consideramos en el modelo anterior el caso particular $\eta = 0$ y ensayamos un par de condiciones iniciales, encontraremos una solución de equilibrio estable extendido, que conecta los dos estados de equilibrio estables homogéneos del sistema (ver figura 2.10b). El punto donde ocurre la transición entre ambos estados se conoce como *core* (cuesco, corazón o núcleo) del frente. Para el caso particular $\eta = 0$, la solución de equilibrio conecta dos estados simétricos, en cuyo caso el *frente* se conoce como solución tipo *kink*. Cuando consideramos el caso $\eta \neq 0$, la situación cambia y vemos un transiente durante el cual el sistema exhibe un *frente* (las dos soluciones ya no son simétricas), el que se propaga con una velocidad bien definida, terminando en una solución homogénea que corresponde al estado más favorable según lo estudiado en 2.2.1. A continuación una figura que esquematiza la situación observada en el caso *unidimensional*, para distintos valores de η :

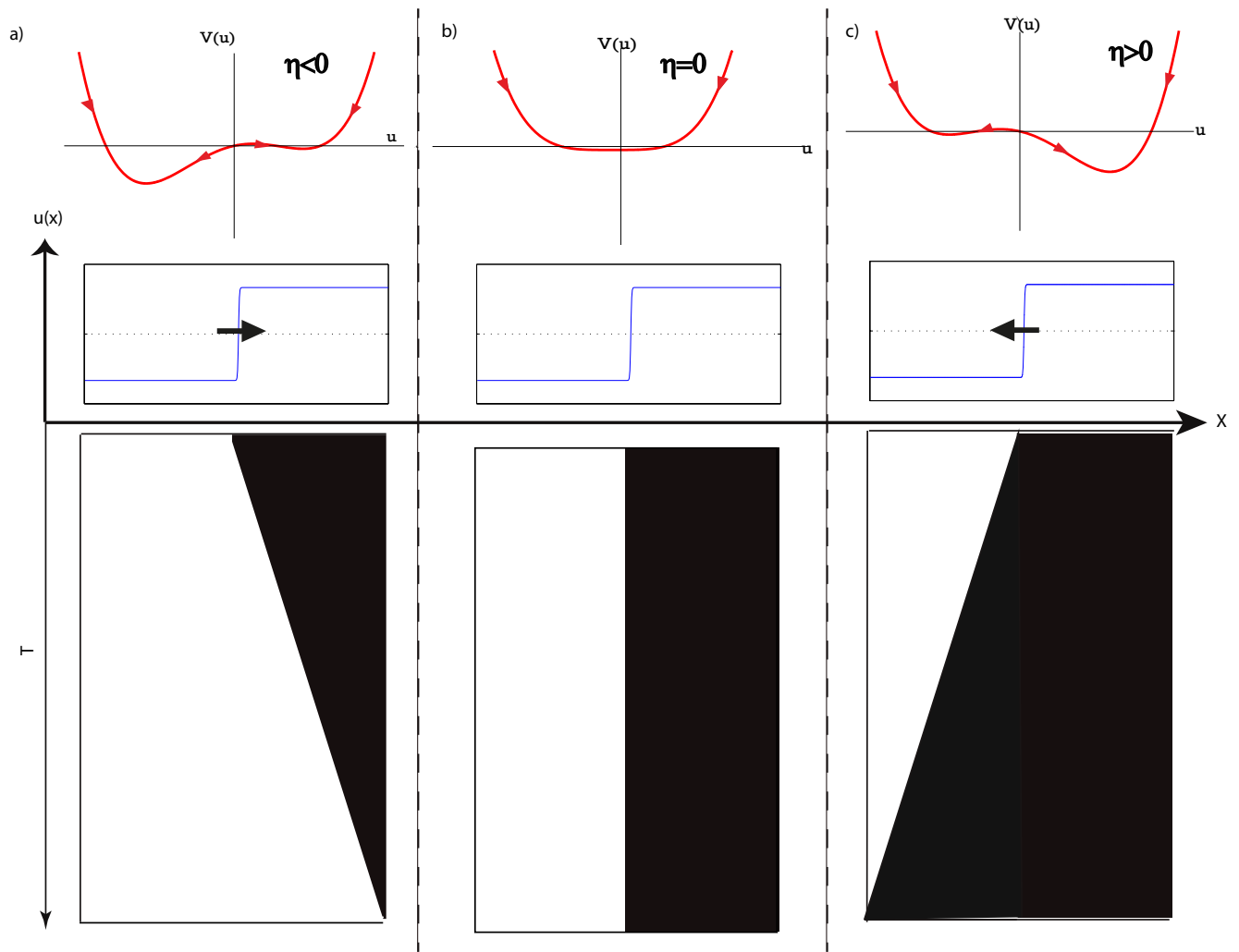


Figura 2.10: Comportamientos de la solución para distintos valores de η , en el renglón superior, se ha puesto la imagen del potencial para el sistema desacoplado. En el renglón intermedio se han graficado las soluciones instantáneas del sistema. El renglón de abajo muestra la evolución espacio temporal del frente el negro corresponde al estado de equilibrio homogéneo $u = \sqrt{\epsilon}$, mientras el blanco a $u = -\sqrt{\epsilon}$. Notemos la velocidad constante de la propagación del frente.

Podemos ir un poco más allá en la comprensión de las soluciones tipo frente normal analizando el sistema dinámico. Los equilibrios de este sistema satisfacen:

$$0 = \eta + \epsilon u - u^3 + \nabla^2 u$$

Restringiéndonos a una dimensión, podemos reescribir esto como una ecuación de *Newton*:

$$\begin{aligned}
u_{xx} &= -\eta + u^3 - \epsilon u = -\frac{dU}{du} \rightarrow u_{xx} + \frac{dU}{du} = 0 \\
u_{xx} + \frac{dU}{du} &= 0 / u_x \rightarrow 0 = \frac{d}{dx} \left[\frac{u_x^2}{2} + U \right] = \frac{dE}{dx} \\
\rightarrow E &= \frac{u_x^2}{2} + U = \frac{u_x^2}{2} - \frac{u^4}{4} + \epsilon \frac{u^2}{2} + \eta u
\end{aligned}$$

Si graficamos esta energía, sus mínimos corresponden a los puntos de equilibrio estable y sus curvas de nivel a las trayectorias posibles del sistema (cf. Figura 2.11), de entre las trayectorias, existe una particularmente importante para el caso $\eta = 0$: la que conecta ambos puntos de equilibrio hiperbólicos, se denomina *heteroclina* (Curva punteada en figura 2.11a).

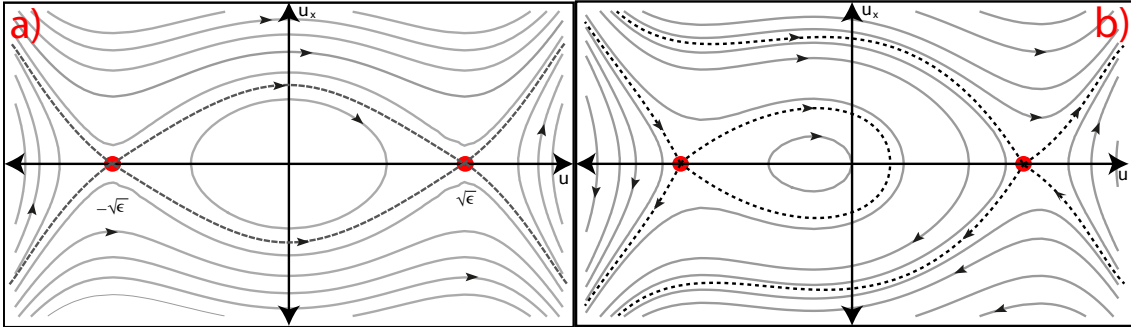


Figura 2.11: Espacio de fase para el sistema extendido para **a)** $\eta = 0$ **b)** $\eta > 0$.

Conforme consideramos $\eta \neq 0$, la imagen anterior se irá modificando continuamente. Es interesante notar que las soluciones heteroclinas que son *inestables* en el *sistema dinámico espacial*, corresponden a soluciones *estables* en el tiempo para el *sistema extendido*.

Hemos mostrado con este ejemplo sencillo, que los sistemas extendidos exhiben soluciones tipo frente y que estas pueden ser estáticas o propagarse. Los frentes pueden ser en general de dos tipos: Los *frentes normales* los cuales conectan dos estados estables (un caso particular de esto son los *kinks*) y los *frentes de Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov (FKPP)* que conectan un estado estable con uno inestable. Los frentes (FKPP) tienen propiedades muy interesantes y su comportamiento es relevante para problemas como: la combustión, dinámica de poblaciones, propagación de enfermedades, etc; sin embargo, para el estudio de esta tesis no presentan mayor relevancia y por lo tanto no serán detallados.

2.5. Patrones.

Un modelo prototipo en la formación de patrones es el *modelo de Swift-Hohenberg súpercrítico* imperfecto [5]:

$$\partial_t u = \eta + \epsilon u - u^3 + \nu \nabla^2 u - \nabla^4 u \quad (2.5)$$

Si buscamos los equilibrios homogéneos en este sistema, la ecuación 2.5 se convierte en el modelo de *pitchfork imperfecto* 2.3 y los estados de equilibrio homogéneo estables u_k corresponden a los estudiados en 2.2.1.

$$u_k = \begin{cases} 0 & \text{si } \epsilon < 0 \\ \pm\sqrt{\epsilon} & \text{si } \epsilon > 0 \end{cases}$$

Estamos interesados en conocer bajo que condiciones las soluciones homogéneas se vuelven inestables y dan lugar a la aparición de soluciones extendidas con una longitud de onda espacial k bien definida. Sumándole a la solución homogénea una corrección con una longitud de onda bien dada:

$$u = u_k + be^{ikx+\lambda t} \quad |b| \ll 1 \quad k \in \mathbb{R}$$

Reemplazando este Ansatz en (2.5) y linealizando en b obtenemos:

$$\lambda be^{ikx+\lambda t} = [\eta + \epsilon u_k - u_k^3] + (\epsilon - 3u_k^2 - \nu k^2 - k^4)be^{ikx+\lambda t}$$

El término entre paréntesis cuadrados se anula pues u_k es solución homogénea del sistema (solución de 2.3), si además $b \neq 0$ y $be^{ikx+\lambda t} \neq 0$, esto es:

$$\lambda = \epsilon - 3u_k^2 - \nu k^2 - k^4 \quad (2.6)$$

Curva que procedemos a graficar:

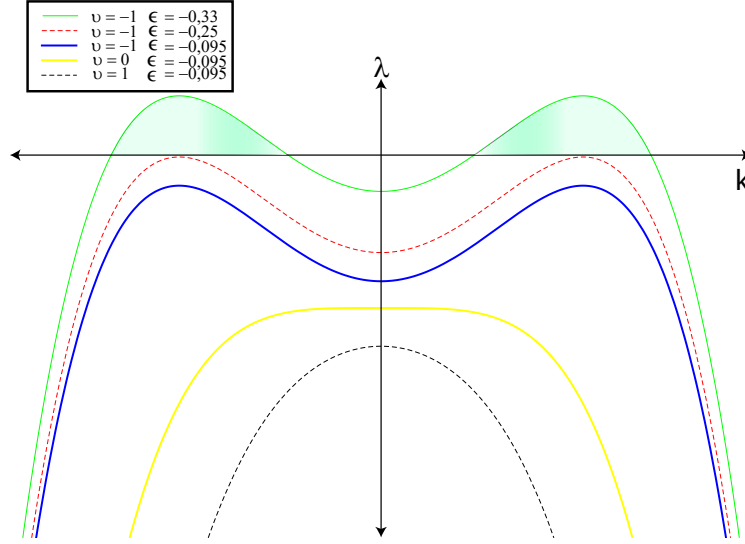


Figura 2.12: Grafico de la curva $\lambda(\epsilon, \nu, k)$ para distintos valores representativos.

A partir del grafico mostrado en la figura 2.12, se puede observar que un cambio de signo de ν induce un cambio de concavidad en la curva ($k = 0$ es un máximo (mínimo) para $\nu > 0$ ($\nu < 0$) (cf. Figura 2.12 curvas amarilla y negra punteada versus las curvas azul y roja punteada). Por otra parte, el parámetro ϵ traslada esta curva verticalmente (cf. Figura 2.12 curvas azul versus curva roja punteada). A partir de estas dos observaciones se concluye existe una región de espacio de parámetros donde existen un continuo de longitudes de onda inestable (cf. Figura 2.12 región coloreada bajo la curva verde). El objetivo es encontrar esta región del espacio de parámetros, el contorno de ésta corresponde a la curva del espacio de parámetros donde los máximos no nulos de la curva $\lambda(\epsilon, nu)$ son exactamente cero (cf. Figura 2.12), buscamos entonces los máximos de (2.6):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial k} &= -2\nu k - 4k^3 = -k(2\nu + 4k^2) = 0 \\ 0 &= k_c(\nu + 2k_c^2) \rightarrow k_c = 0 \vee k_c^2 = -\frac{\nu}{2} \end{aligned}$$

Le imponemos $\lambda(k_c \neq 0) = 0$:

$$0 = \epsilon - 3u_k - \nu \left(\frac{-\nu}{2} \right) - \left(\frac{-\nu}{2} \right)^2 = \epsilon - 3u_k^2 + \frac{\nu^2}{4} \quad (2.7)$$

Multiplicando esta expresión por $-\frac{u_k}{3}$, se obtiene:

$$0 = -\frac{u_k}{3}\epsilon - u_k^3 + \frac{\nu^2}{12}u_k$$

Y por otro lado u_k es solución homogénea del sistema, por lo tanto:

$$\eta + \epsilon u_k - u_k^3 = 0$$

Sumando estas 2 últimas expresiones se obtiene:

$$u_k^2 = \frac{\eta^2}{\left(\frac{\nu^2}{12} - \frac{2\epsilon}{3}\right)}$$

Reemplazando esta expresión en (2.7) se obtiene la curva que corresponde al contorno del espacio de parámetros donde existen patrones:

$$0 = \epsilon - \frac{3\eta^2}{\left(\frac{\nu^2}{12} - \frac{2\epsilon}{3}\right) + \frac{\nu^2}{4}} \quad (\nu < 0)$$

Procedemos a graficar esta curva:

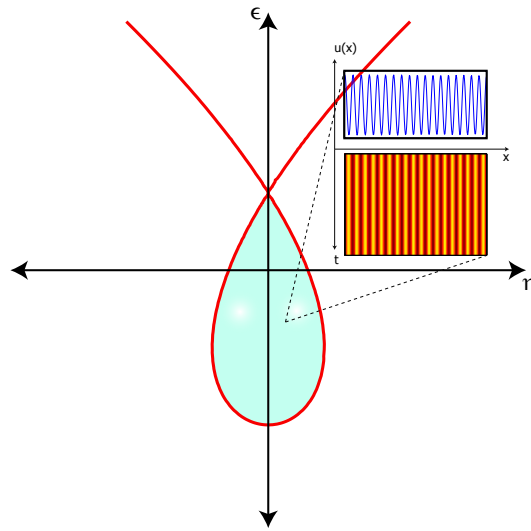


Figura 2.13: Región del espacio de parámetros (en celeste) donde la ecuación de *Swift-Hohenberg* exhibe patrones. El diagrama espacio temporal corresponde a las soluciones tipo patrón encontradas en esa región de parámetros.

La técnica utilizada para determinar la emergencia de patrones y la región de existencia de éstos en el espacio de parámetros, puede ser utilizada en cualquier sistema, no siempre es posible obtener una curva como la mostrada en la Figura 2.13.

2.6. Fenómeno de Bloqueo.

2.6.1. Cálculo de la velocidad del frente utilizando el método variacional.

Hasta ahora hemos ilustrado el fenómeno de los frentes normales con dos ejemplos (cf. 2.4.1 y 2.5). Un siguiente paso en la comprensión de los frentes es conocer ser capaces de predecir su dinámica, la variable dinámica relevante en esta descripción es el *core* o *cuesco* (cf.2.4.1) cuya posición denotaremos por X_0 . Nuestra meta es encontrar un sistema dinámico para la variable x_0 que dependa de los parámetros originales del sistema $\vec{\lambda}$:

$$\dot{x}_0 = f(x_0, \vec{\lambda})$$

En la sección 2.4.1 mostramos que la velocidad del frente es constante y puede ser entendida a partir del potencial como una “preferencia” energética del sistema de un estado de equilibrio estable por sobre el otro. Utilizando este mismo punto de vista, *Pomeau* propuso en 1986 [44] un método para calcular la velocidad del *core*. Ilustraremos este método aplicándolo en el ejemplo ya citado:

$$\partial_t u = \eta + \epsilon u - u^3 + \nabla^2 u = -\frac{\partial U}{\partial u} + \partial_{xx} u \quad (2.8)$$

de la figura 2.10 se ve que la solución frente $u_f(x, t)$ se propaga con una velocidad constante v y por lo tanto puede escribirse:

$$u(x - vt)$$

Reemplazando esto en la ecuación (2.8) tenemos:

$$\begin{aligned} \partial_t u = -v \frac{du}{d\xi} &= \eta + \epsilon u - u^3 + \frac{d^2 u}{d\xi^2} = -\frac{dU}{d\xi} + \frac{d^2 u}{d\xi^2} \Big/ \frac{du}{d\xi} \\ -v \left(\frac{du}{d\xi} \right)^2 &= \frac{d}{d\xi} \left(-U + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\xi} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

Integrado esta solución en todo el espacio:

$$\int_{-\infty}^{\infty} -v \left(\frac{du}{d\xi} \right)^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\xi} \left(-U + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\xi} \right)^2 \right) dx$$

Notando que $dx = d\xi$ y resolviendo para v obtenemos:

$$v = \frac{\left| U - \frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\xi} \right)^2 \right|_{-\infty}^{\infty}}{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{du}{d\xi} \right)^2 d\xi}$$

En el infinito la variación de u respecto a ξ es nula, luego:

$$v = \frac{U(\infty) - U(-\infty)}{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 d\xi}$$

Regla que da buenos resultados en predecir la velocidad del frente en este caso, sin embargo, esta técnica puede utilizarse *solo* en sistemas que puedan ser reescritos como la derivada de un potencial (sistemas variacionales), lo cual es una situación especial. Para un caso general tenemos.

2.6.2. Método No Variacional en el calculo de la velocidad de un frente normal.

Para conocer la dinámica del frente v sin recurrir al potencial, utilizaremos el análisis débilmente no lineal basado en *ecuaciones de amplitud* [7]. Un ejemplo del uso de esta técnica fue hecha en 2.2.2, por lo que aquí no se explicarán de manera exhaustiva los detalles.

Este modelo lo denominaremos *No Variacional*, ya que se aplica de igual forma a casos variacionales y no variacionales. Ilustraremos el uso del *método no variacional* con el modelo (2.8). Observando la Figura 2.10, vemos que la velocidad del frente depende del parámetro η , adicionalmente el método variacional nos mostró que la velocidad posee una dependencia lineal con η . A partir de una solución exacta del frente para $\eta = 0$ (velocidad cero), encontraremos una expresión para la velocidad considerando el parámetro η como perturbativo.

Para $\eta = 0$ en el modelo (2.8) es posible encontrar una solución analítica para el *kink* estacionario dada por:

$$u_k(x) = \sqrt{\epsilon} \tanh\left(\frac{\sqrt{\epsilon}}{2}(x - x_0)\right). \quad (2.9)$$

Si Consideramos $\eta \ll 1$ y dotamos al core del frente de dinámica $x_0 \rightarrow x_0(t)$, la solución (2.9) se convertirá en una nueva solución, la diferencia de esta nueva solución respecto a la original, puede ser expresada como:

$$u(x, t) = u_k(x - x_0(t)) + W(x, x_0, t).$$

Donde W es una corrección la cual será pequeña mientras lo sea η . Reemplazando esta nueva solución en (2.8), linealizando para W y utilizando que u_k es solución cuando $\eta = 0$ obtengo:

$$\mathcal{L}W = \{\epsilon - 3u_k^2 + \partial_{xx}\}W = \dot{x}_0 \partial_x u_k + \eta. \quad (2.10)$$

Si dotamos al espacio de algún producto escalar como por ejemplo:

$$\langle f|g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x)dx.$$

Es posible mostrar que $\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}$ y por lo tanto, es posible utilizar la condición de solubilidad (cf.2.2.2) si conocemos todos los elementos del *kernel* del operador \mathcal{L} . Para encontrar el *kernel*, notemos que la solución *kink* por definición, es una solución del sistema 2.8 para $\eta = 0$:

$$0 = \epsilon u_k - u_k^3 + \partial_{xx} u_k \quad \Big/ \quad \frac{\partial}{\partial x},$$

$$0 = \{\epsilon - 3u_k^2 + \partial_{xx}\}(\partial_x u_k) = \mathcal{L}u_k$$

Con lo que hemos encontrado un elemento del *kernel*, como \mathcal{L} es un operador de *Sturm-Liouville*, éste es el único elemento del *kernel*. La condición de solubilidad es entonces, respecto al lado derecho de (2.10):

$$\eta \langle 1|\partial_x u_k \rangle + \dot{x}_0 \langle \partial_x u_k|\partial_x u_k \rangle = 0,$$

Resolviendo para \dot{x}_0 :

$$\dot{x}_0 = -\frac{\eta \langle 1|\partial_x u_k \rangle}{\langle \partial_x u_k|\partial_x u_k \rangle},$$

Resolviendo las integrales (de manera análoga a como han sido resueltas en el Apéndice A), se obtiene:

$$\boxed{\dot{x}_0 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}\eta} \quad (2.11)$$

Lo cual nos dice que la velocidad es proporcional al valor de η , pero de signo contrario (cf.Figura 2.15 línea azul continua). Esto es consistente con las diferencias de energía observadas en el potencial (cf. sección 2.4.1).

2.6.3. Velocidad de un Frente de Pomeau.

Una situación completamente diferente ocurre al considerar un frente de Pomeau:

Figura 2.14: Frente de Pomeau, en rojo se ha dibujado la envolvente del mismo.

Un modelo que presenta frentes de Pomeau, es el modelo de *Swift-Hohenberg subcritico* [52], dado por la ecuación:

$$\partial_t u = \epsilon u + \nu u^3 - u^5 - (\partial_x^2 + q^2)^2 u \quad (2.12)$$

.Una forma de estudiar la dinámica de este tipo de frentes, es trasladar el problema a uno de frentes homogéneos y utilizar las técnicas recién mencionadas. Para convertir este problema en uno de frentes homogéneos debemos encontrar la ecuación de la *envolvente*, en el caso de la ecuación (2.12), hay que reescribir la solución como una suma de modos espaciales multiplicados por la amplitud, esto es, utilizar el *Ansatz*:

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} (A e^{ijqx} + c.c.) = A e^{iqx} + c.c. + \dots \quad 1 \gg \partial_x A \gg (\partial_x)^n A \quad n \in \mathbb{N}$$

Considerando solamente el el primer modo, reemplazamos en (2.12) esta solución. Reteniendo los términos resonantes [14] (proporcionales a e^{iqx} , despreciando las derivadas espaciales de orden mayor que 2 y efectuando una traslación para eliminar los términos de la primera derivada; es posible llegar a la ecuación:

$$\partial_t A = \epsilon A + 3\nu A|A|^2 - 10|A|^4 A + 4|\epsilon|q^2 \partial_{xx} A \quad (2.13)$$

Si buscamos una regla para la velocidad del frente de la envolvente utilizando el método variacional o no variacional, obtendremos el mismo resultado: la velocidad es proporcional al parámetro η . Este resultado es obvio, pues esta ecuación es casi igual a (2.8). Lo interesante es que si comparamos como se comporta la velocidad del frente conforme movemos el parámetro η , en los casos de la envolvente y del frente de Pomeau directamente del modelo (2.5); encontraremos las siguientes curvas:

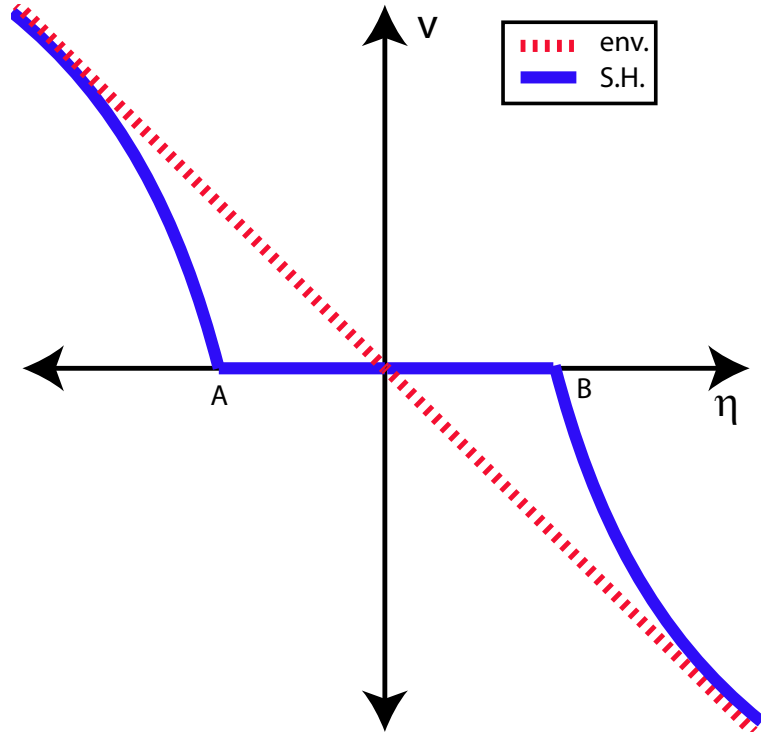


Figura 2.15: Representación esquemática de las curvas de la velocidad en función del parámetro η para el frente de Pomeau obtenido en el modelo de Swift-Hohenberg (línea continua) y la envolvente del modelo de Swift-Hohenberg, ecuación (2.13)

La información expuesta en la figura 2.15, nos indica que aproximar de la dinámica del frente de Pomeau por la dinámica del frente de la envolvente no da buenos resultados. Al utilizar un *Ansatz* que solamente considerara los términos resonantes estamos suponiendo una separación de escala *efectiva*, lo cual no es cierto [44]. Una observación clave en corregir la ecuación para la envolvente es notar que ésta posee más simetrías que el problema original. Existen varios trabajos destinados a “enmendar” las ecuaciones para la envolvente [45], sin embargo, el desacuerdo entre lo predicho por la envolvente y la velocidad del frente de Pomeau introduce un fenómeno nuevo: Existe una región en el espacio de parámetros, donde los frentes de Pomeau se encuentran detenidos. Este fenómeno de *bloqueo* (*pinning* en inglés), contradice nuestra idea de que la única región del espacio de parámetros donde un frente normal se encontrará detenido será cuando ambos estados sean “equienergéticos”, llamado punto de Maxwell cf. 2.2.1 en la figura 2.7.

A fin de dilucidar de que forma el patrón induce una *región de bloqueo* (*pinning range* en inglés) en la dinámica del frente, presentaremos un modelo donde podemos encontrar una transición entre frentes homogéneos y frentes de *Pomeau* mediante un parámetro de control. Hemos escogido este modelo

por sobre otros dada su importancia en los resultados de esta tesis.

2.6.4. Modelo de Nagumo.

Consideremos el Modelo de Nagumo:

$$\partial_t u = u(1-u)(u-\alpha) + \partial_{xx} u \quad (2.14)$$

El cual es relevante en el estudio de dinámica de poblaciones [22, 46]. Este modelo posee un sólo parámetro α , el que da cuenta de la adversidad, es decir, controla la estabilidad relativa de un estado de población y no población. En ausencia de acoplamiento espacial este modelo es un sistema dinámico unidimensional cuyos puntos de equilibrio son:

$$u_0 = 0 \quad u_1 = 1 \quad u_\alpha = \alpha$$

Haciendo un análisis de estabilidad lineal para los distintos valores de $\alpha \in]0 : 1]$ se encuentra que u_1, u_0 son estables, mientras que u_α es inestable. Una propiedad importante de este modelo es que puede ser reescrito como un potencial:

$$\partial_t u = u(1-u)(u-\alpha) = u^2(1+\alpha) - u^3 - \alpha u = -\frac{d}{du} \left(-\frac{u^3}{3}(1+\alpha) + \frac{u^4}{4} + \alpha \frac{u^2}{2} \right) = -\frac{dU}{du}$$

Podemos encontrar la preferencia energética del sistema por los distintos puntos de equilibrio evaluándolos en el potencial:

$$V(0) = 0 \quad V(1) = \frac{\alpha}{6} - \frac{1}{12} \quad V(\alpha) = \frac{\alpha^3}{6} - \frac{\alpha^4}{12}$$

Desde donde notamos que para $\alpha = 1/2$, existe un punto de Maxwell:

$$V(1)|_{\alpha=1/2} = 0 = V(0)$$

Fuera de ese punto, el sistema, que es biestable, preferirá los estados de equilibrio 1 o 0. Si consideramos ahora el acoplamiento espacial (ecuación 2.14 completa), existen frentes normales y el modelo tiene un comportamiento análogo al de (2.8), como podemos ver en la Figura 2.10:

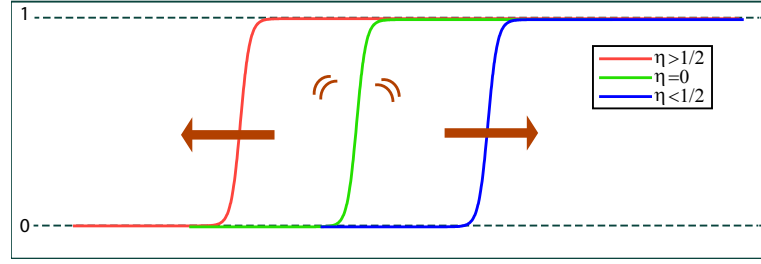


Figura 2.16: Preferencias energéticas de los frentes normales en función del valor del parámetro α para el modelo de Nagumo

En el punto de Maxwell ($\alpha = 1/2$) es posible (ver Apéndice A) encontrar una expresión analítica para el frente:

$$u_{f,\pm}(x) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\sqrt{2}}{4}(x - x_0)\right) \quad (2.15)$$

Los significados de x_0 y \pm se encuentran ilustrados en la siguiente figura:

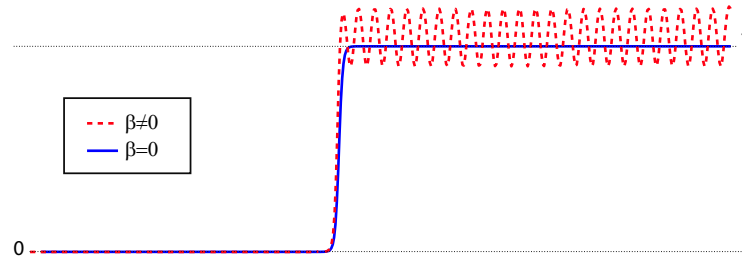


Figura 2.17: Representación de los frentes del modelo de Nagumo y como surgen los frentes de Pomeau (línea roja punteada) sobre el mismo.

Consideremos la siguiente generalización del modelo (2.14):

$$\partial_t u = u(1 - u) \left(u - \left(\frac{1}{2} + \Delta \right) \right) + \partial_{xx} u + \beta u \cos(kx) \quad \beta \ll 1 \quad (2.16)$$

Si consideramos $\beta \neq 0, k > 0$, la solución tipo frente homogéneo se transformará en un frente de Pomeau como se ilustra en la línea roja punteada en la figura 2.17. Utilicemos en método *no variacional* para calcular la dinámica del frente de Pomeau considerando β, Δ perturbativos, lo que es equivalente a considerar el sistema cerca del punto de Maxwell y del nacimiento de los patrones. Análogamente, dotando de dinámica al core $x_0 \rightarrow x_0(t)$, proponemos, para la ecuación (2.16), el siguiente *Ansatz*:

$$u(x, t) = u_f(x - x_0(t)) + W(x_0, t) \quad W \ll 1$$

Introduciendo esta expresión en (2.16), linealizando W y despreciando cualquier producto de él con los términos perturbativos, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\mathcal{L}W = \left\{ \frac{1}{2} + 3u_f^2 - 3u_f - \partial_{xx} \right\} W = \dot{x}_0 \partial_x u_f + \Delta(u_f^2 - u_f) + \beta u_f \cos(kx)$$

Utilizando exactamente los mismos argumentos que en 2.6.2, podemos encontrar *el* elemento del kernel de $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$: $\partial_x u_f$. La condición de solubilidad nos entrega la siguiente ecuación para la dinámica del frente:

$$0 = \dot{x}_0 \langle \partial_x u_f | \partial_x u_f \rangle + \Delta(\langle u_f^2 | \partial_x u_f \rangle - \langle u_f | \partial_x u_f \rangle) + \beta \langle u_f \cos(kx) | \partial_x u_f \rangle$$

Las integrales que resultan de estos productos puntos, han sido resueltas en el Apéndice A:

$$0 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \dot{x}_0 + \Delta \frac{\sqrt{2}}{3} + \beta A \sin(kx_0 + \varphi)$$

Donde:

$$A = \sqrt{(2\sqrt{2}k\pi \operatorname{csch}(\sqrt{2}k\pi))^2 + (4k^2\pi \operatorname{csch}(\sqrt{2}k\pi))^2} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{2k}{\sqrt{2}}\right)$$

Resolviendo para \dot{x}_0 :

$$\boxed{\dot{x}_0 = \frac{1}{2} \left(\Delta - \frac{3\beta A}{\sqrt{2}} \sin(x_0 k + \varphi) \right) = -\frac{\partial U}{\partial x_0}} \quad (2.17)$$

Donde el potencial es:

$$U(x_0) = -\frac{1}{2} \left(\Delta x_0 + \frac{3A}{\sqrt{2}} \frac{\cos(kx_0 + \varphi)}{k} \right)$$

Este potencial tiene la forma:

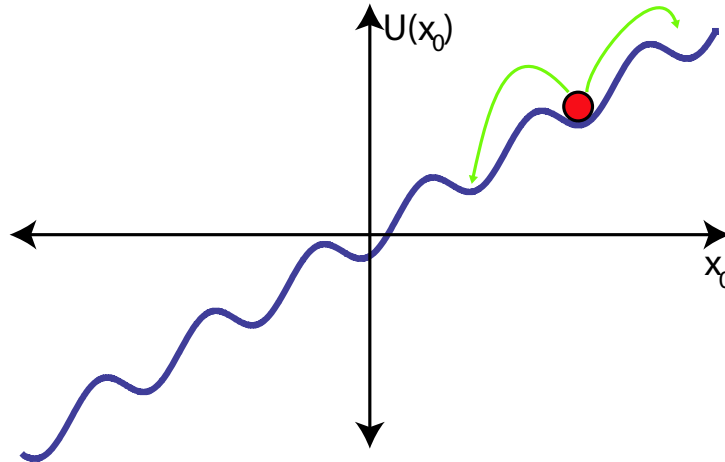


Figura 2.18: Potencial de la dinámica del core. La partícula atrapada en el potencial ha sido dibujada por propósitos pedagógicos.

Este potencial nos muestra que al incluir un término con una longitud de onda definida, los puntos de equilibrio estable del core se discretizan (cf. Figura 2.18 los mínimos. Podemos imaginar la dinámica del core como la de una partícula atrapada en un potencial tipo *Ratchet*. Nuestra partícula, al ganar “energía”, lo que es equivalente en esta analogía a moverse del punto de Maxwell (i.e. mover Δ en este modelo) puede moverse a otro estado de equilibrio o ser capaz de pasarlos todos, cuando el *bloqueo* ya no existe (cf. Figura 2.18). Esta imagen nos permite entender la región de bloqueo (*pinning range*) como el espacio de parámetros alrededor del punto de Maxwell donde la partícula no puede escapar. Diremos que la partícula se encuentra *bloqueada* mientras no tenga la suficiente energía como para poder superar *la barrera de nucleación* impuesta por el potencial. Una buena referencia donde se aplican estas ideas es [52].

2.7. Estructuras Localizadas.

Las estructuras localizadas son un fenómeno robusto. En nuestra cotidianidad no encontramos estructuras localizadas, salvo raras excepciones como por ejemplo el fenómeno de la *morning glory* en Australia [47], las estructuras localizadas son un fenómeno propio de los experimentos fuera del equilibrio. Ejemplos de estructuras localizadas pueden encontrarse en diversos contextos tales como: fluido[48], medios granulares[49] o cristales líquidos[50]. En la siguiente figura se ilustra la existencia experimental de las estructuras localizadas en varios casos.

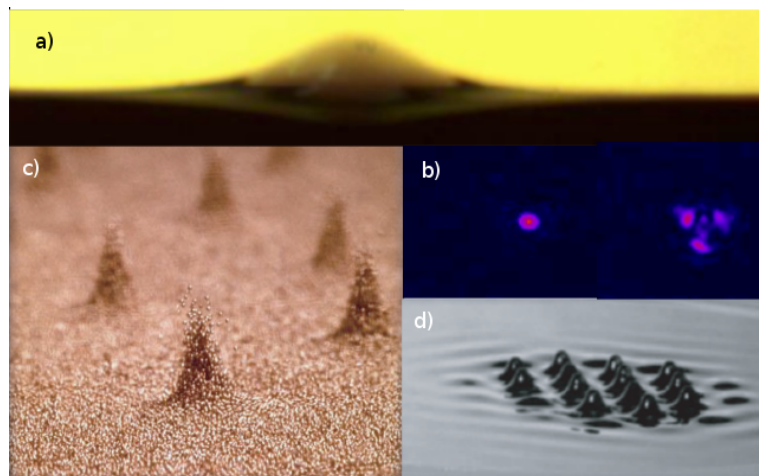


Figura 2.19: .

Los modelos propuestos para la descripción de estos experimentos muestran, entre sus estados de equilibrio, estructuras localizadas. Existe un sinnúmero de modelos de ecuaciones diferenciales parciales donde surgen estructuras localizadas, de entre todos ellos destacamos dos:

- Ecuación de Schrödinger no lineal parametricamente forzada (P.D.N.L.S. por sus siglas en inglés):

$$\partial_t \psi = -i\nu\psi - i|\psi|^2\psi - i\nabla^2\psi - \mu\psi + \gamma\bar{\psi}$$

Esta ecuación exhibe estructuras localizadas (cf. Figura 2.20 a)) y una de sus aplicaciones es describir, al menos cualitativamente el soliton hidrodinámico mostrado en [48]

- Ecuación de Swift Hohenberg:
Ya hemos visto 2 ecuaciones tipo *Swift-Hohenberg*: (2.5) y (2.12, esta última exhibe soluciones tipo patrón localizado (cf. Figura 2.20 b))

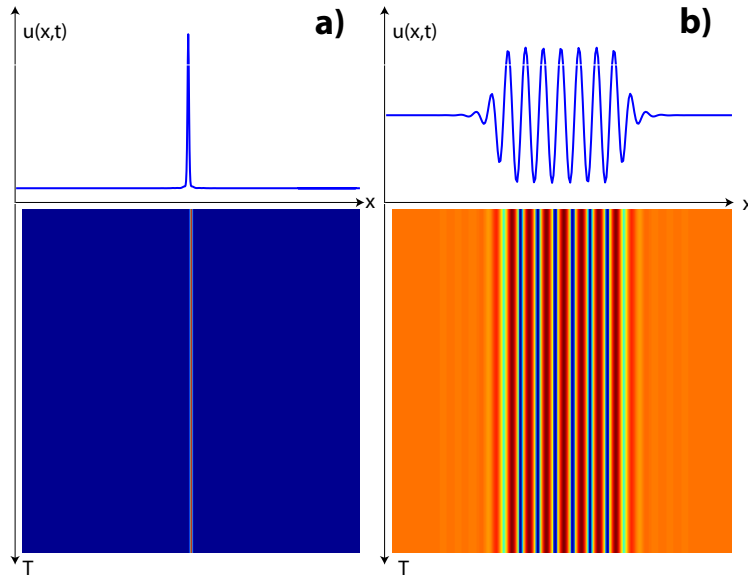


Figura 2.20: a) Estructuras localizadas en la P.D.N.L.S. para los parámetros $\gamma = 0, 18, \nu = -0,3, \mu = 0, 1$ b) Estructuras localizadas en el modelo de 2.12 para los parámetros $\nu = 1, 0, q = 0, 7, \epsilon = -0, 16$.

Existe una diferencia importante entre las dos estructuras localizadas de la figura 2.20: Una tiene posee una longitud de onda característica (Figura 2.20b)) y la otra no.

Ya hemos mostrado en la sección de bloqueo 2.6 como la aparición de un

patrón en el frente da lugar a una *región de bloqueo* (*pinning range* en inglés), fenómeno que puede ser interpretado con la imagen de una partícula atrapada en un potencial 2.6.4. Utilizando la misma estrategia, podemos entender la existencia de estructuras localizadas con patrones como la interacción de 2 frentes de Pomeau.

Apliquemos esta idea a nuestro modelo de Nagumo perturbado 2.16. En él observamos los siguientes comportamientos:

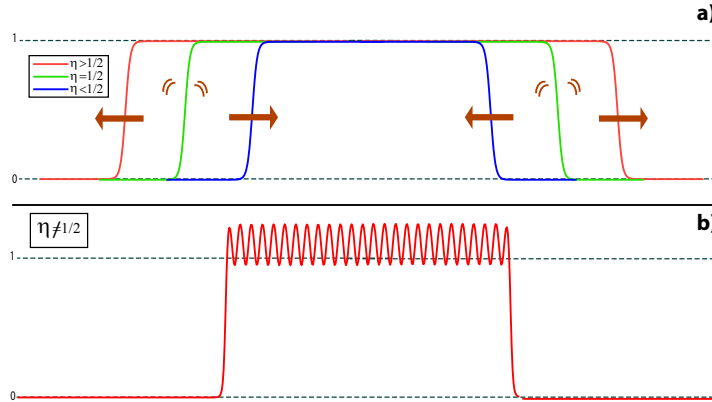


Figura 2.21: Estructuras localizadas en el modelo 2.16 a) Sin patrón solo existen para el punto de Maxwell. b) En la presencia de un patrón las estructuras localizadas existen fuera del punto de Maxwell

Una estrategia para entender las estructuras localizadas, es que podemos imaginarlos como una superposición de soluciones como ilustramos a continuación:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Step 1} \\ + \\ \text{Step 2} \\ - \\ \text{Step 3} \end{array} \right) \beta \cos(kx) = \text{Localized structure with pattern}$$

The equation shows the superposition of three step functions (Step 1, Step 2, Step 3) with a cosine wave $\beta \cos(kx)$ to create a localized structure with an internal oscillatory pattern. The steps are labeled with 0 and 1, and the cosine wave is labeled with $\beta \cos(kx)$.

Figura 2.22: Imagen pedagógica de como se fabrica la solución estructura localizada por medio de la superposición, el patrón es considerado de manera perturbativa $\beta \ll 1$ en rojo a la derecha.

A pesar de que sabemos que esta no puede ser una solución de 2.16, pues los sistemas no lineales no cumplen con el principio de superposición, proponer una solución de esta forma constituye una buena aproximación. Inspirados en la figura 2.22, en el modelo 2.16 para $\Delta = 0 = \beta$, podemos proponer la

siguiente solución tipo estructura localizada:

$$u_{loc}(x) = [u_+(x - \delta_+) + u_-(x - \delta_-) - 1] + W(\delta_+, \delta_-, t) \quad (W \ll 1) \quad (2.18)$$

El término en los paréntesis cuadrados es la estructura localizada, δ_{\pm} son los cores respectivos (cf. Figura 2.22); W la corrección a la superposición. Introduciendo este *Ansatz* en 2.16 para $\beta, \Delta \ll 1$, linealizando para W y despreciando los productos de W por los términos perturbativos:

$$-\dot{\delta}_+ \partial_x u_+ - \dot{\delta}_- \partial_x u_- = \mathcal{L}W - \frac{(u_+ + u_- - 1)}{2} + \frac{3}{2}(u_+ + u_- - 1)^2 - (u_+ + u_- - 1)^3 + \partial_{xx} u_+ + \partial_{xx} u_-$$

Donde:

$$\mathcal{L} = \left(\frac{-1}{2} + 3u_+ - 3u_+^2 + \partial_{xx} \right) + (3 - 6u_+ - 3(u_- - 1))(u_- - 1) = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$$

Si bien $\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}$, no es posible encontrar los elementos del *kernel* fácilmente. Proponiendo $\partial_x u_+$ vemos que:

$$(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) \partial_x u_+ = \mathcal{L}_1 \partial_x u_+ + \mathcal{L}_2 \partial_x u_+ = 0 + \mathcal{L}_2 \partial_x u_+ = \sigma(u_- - 1) \partial_x u_+ \ll 1$$

Por un argumento geométrico puede verse que esto es pequeño mientras $|\delta_+ - \delta_-| \gg 1$ (cf. Figura A.3). Intercambiando $+ \rightarrow -$ podemos hacer el mismo razonamiento y tener así encontrar los *pesudovectores* del *kernel*: $\{\partial_x u_-, \partial_x u_+\}$. La condición de solubilidad engendrará dos ecuaciones de movimiento (una para cada frente), pues el kernel tiene dos elementos. Reescribir las variables dinámicas de la siguiente forma (cf. Figura 2.22 b))

$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{4}(\delta_- - \delta_+) \quad \delta = \frac{\delta_+ + \delta_-}{2}$$

Entrega mayor información sobre la estructura localizada (su ancho y su centro de gravedad). El calculo restante para encontrar las ecuaciones de movimiento de los cores, es un caso particular del calculo realizado en el Apéndice A, sección A.1.3, por lo que los detalles pueden ser mirados allí. Finalmente se llega a las siguientes ecuaciones de movimiento para el ancho y el centro de gravedad de las estructuras localizadas:

$$\dot{\delta} = \beta(A_1 \cos(k\delta) \cos(k\sqrt{2}\xi) + B_1 \sin(k\delta) \sin(k\sqrt{2}\xi)) = -\frac{\partial U}{\partial \delta}$$

$$\dot{\xi} = \eta + be^{-\xi} + \beta(A_2 \cos(k\delta) \cos(k\sqrt{2}\xi) + B_2 \sin(k\delta) \sin(k\sqrt{2}\xi)) = -\frac{\partial V}{\partial \xi}$$

Aquí $B_i, A_i, i = 1, 2$ Se obtienen de manera análoga a lo hecho en el caso del frente (cf. sección 2.6.4). Las graficas de los potenciales son las siguientes (U para ξ fijo y V para δ fijo):

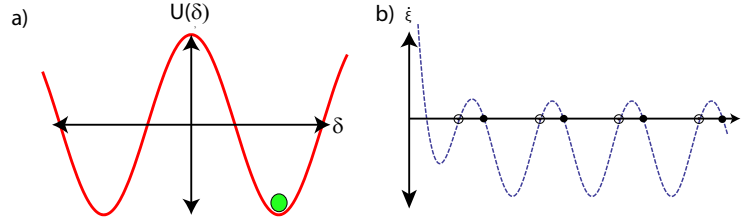


Figura 2.23: **a)** Potencial de para el centro de gravedad δ dado ξ . **b)** Diagrama de fase para ξ dado δ . Hay una familia de estructuras de tallas diversas posibles.

Este análisis nos revela que existe de una familia de soluciones localizadas de talla diversa, las cuales nacen de a pares *estable-inestable* (cf. Figura 2.23b) donde las soluciones estables (inestables) son los puntos rellenos(vacíos)) (mecanismo de *saddle-node* [13]). Asimismo discretiza las posiciones de equilibrio de los centros de gravedad de la estructura localizada.

2.8. Modelos variacionales.

Cada vez que hemos analizado un sistema dinámico en este capítulo, ha sido de gran utilidad poder reescribir *el* sistema dinámico como la derivada de un potencial:

$$\dot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad (2.19)$$

El sistema en estudio está fuera del equilibrio es por esto que hablar de potencial no es correcto, el nombre *función de Lyapunov* es utilizado con frecuencia para denotar a la función U que juega el mismo rol que un potencial.

Ser capaces de hacer esto nos hace entender la dinámica como una de relajación hacia los mínimos del potencial U , que son los equilibrios estables del sistema, es decir, el sistema es de tipo disipativo [25]. Hemos visto que en el caso de los sistemas *extendidos* existen estados de equilibrios estacionarios tales como: estados homogéneos, frentes, patrones, etc. Es posible extender esta idea de la *función de Lyapunov* ha sistemas extendidos utilizando el calculo variacional [51].

$$\partial_t u = f(u, \vec{\lambda}, \partial_x^n) = -\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} \quad (2.20)$$

Donde \mathcal{F} es el *funcional de Lyapunov*. Para ilustrar esto, consideremos una vez más el modelo de *Swift-Hohenberg* (2.5) y veremos que podemos reescribirlo como la derivada de un funcional.

$$\partial_t u = \eta + \epsilon u - u^3 + \nu \partial_{xx} u - \partial_{xxxx} u = -\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u}$$

Donde

$$\mathcal{F} = \int \left[-\eta u - \frac{\epsilon u^2}{2} + \frac{u^4}{4} + \nu \frac{(\partial_x u)^2}{2} + \frac{(\partial_{xx} u)^2}{2} \right] dx$$

Un sistema dinámico que puede ser escrito como un principio de optimización (minimización de un potencial o funcional) recibe el nombre de *modelo variacional*. Si bien los modelos variacionales ofrecen muchas ventajas para su estudio, es imposible encontrar en ellos comportamientos de *dinámica permanente* (caos, oscilaciones, etc.). Esto se debe a que al reescribir el sistema como (2.19) o (2.20), estamos diciendo que sus estados de equilibrio estable serán los extremos de un potencial, en los que no existe dinámica.

Existen algunos casos donde es posible separar la dinámica de un sistema en su parte variacional (dada por un potencial de Lyapunov ϕ) y la dinámica permanente \vec{R} , tal que se cumple la siguiente igualdad:

$$\vec{R} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}} = 0$$

Decimos entonces que el sistema posee un potencial de *no equilibrio* [53]. Estudiemos esto con un ejemplo simple:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \epsilon x - \Omega y - (x^2 + y^2)x \quad (\epsilon > 0) \\ \dot{y} &= \epsilon y + \Omega x - (x^2 + y^2)y \end{aligned}$$

Haciendo $A = x + iy$, el sistema se reduce a:

$$\dot{A} = \epsilon A + \Omega i A - |A|^2 A$$

Reescribiendo $A = R e^{i\theta}$ en su forma polar y suponiendo $R \neq 0$, las ecuaciones quedan:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \epsilon R - R^3 \\ \dot{\theta} &= \Omega \end{aligned}$$

Esto nos dice que el sistema, de manera oscilante, relajará a una órbita circular de radio R y velocidad angular Ω (cf.Figura 2.24a).

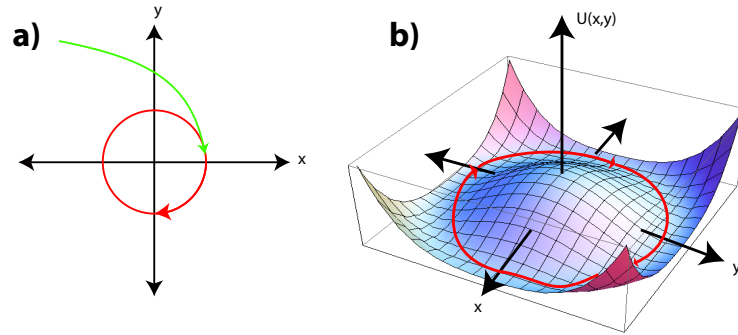


Figura 2.24: a) Dinámica del sistema estudiado. b) Potencial Φ

Podemos reescribir la dinámica del sistema considerando:

$$\Phi = -\frac{\epsilon}{2}(x^2 + y^2) + \frac{(x^2 + y^2)^2}{4}$$

$$\vec{R} = \Omega(-y\hat{x} + x\hat{y})$$

Notemos que el potencial Φ no tiene un mínimo sino un círculo de ellos de radio $R = \sqrt{\epsilon}$, donde tienen lugar las oscilaciones de velocidad angular Ω . Chequeemos que se trata de un potencial de *no equilibrio*

$$\vec{R} \cdot \vec{\nabla}\Phi = R_x \frac{\partial\Phi}{\partial x} + R_y \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0$$

Este ejemplo es muy especial, en la practica es difícil encontrar un potencial de no equilibrio para un sistema dinámico cualquiera, otro ejemplo destacable de este potencial, puede encontrarse en la ecuación de *Ginzburg Landau a coeficientes complejos*, para la que se propuso un potencial de *No Equilibrio* [26].

La información más relevante que puede obtenerse de saber si un sistema es variacional o no, es saber si éste puede presentar dinámica permanente.

Capítulo 3

Caos.

Hasta ahora hemos estudiado una serie de sistemas dinámicos que presentan atractores sencillos (puntos fijos, ciclos límite, patrones, frentes y estructuras localizadas). Este capítulo está dedicado a definir y caracterizar uno de los fenómenos robustos más sorprendentes encontrados en el siglo XX: *el Caos*.

Propuesto por *Poincaré*, quien estaba interesado en entender los mecanismos que rigen la dinámica de los cuerpos celestes a fines del siglo XIX y redescubierto en el siglo XX por el meteorólogo *Lorenz*, quien estaba interesado en predecir la evolución del clima; el caos es un comportamiento determinista pero sensible a las condiciones iniciales. Producto de esta naturaleza, un modelo que presente comportamientos caóticos es inútil para realizar predicciones a largo plazo en la vida real, debido a que las condiciones iniciales se verán siempre afectadas por los errores asociados a las mediciones y a sus fluctuaciones, debido a que las variables consideradas son macroscópicas .

El descubrimiento del caos es especialmente importante en la filosofía de las ciencias, pues redefine la idea de ciencia determinista que puede ser resumida en el pensamiento de Laplace[18]. Particularmente en el control de las condiciones iniciales y su respectivo impacto en la evolución temporal.

Definición.

Entenderemos por *caos* o comportamiento *caótico*, cualquier comportamiento dinámico permanente, aperiódico y caracterizado por una sensibilidad exponencial a las condiciones iniciales[19, 20]. En la práctica, la mayoría de las veces es suficiente para asegurar la existencia de un comportamiento caótico, encontrar los siguientes comportamientos:

1. Sensibilidad exponencial a las condiciones iniciales.

2. Mecanismo de retorno.

Los dos ingredientes necesarios mencionados, serán encontrados en tres ejemplos de sistemas dinámicos diferentes: mapas discretos, sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales.

3.1. Ejemplos de sistemas caóticos.

3.1.1. Mapa Logístico.

Propuesto por Robert May[21] como una versión discreta de la ecuación logística de *Verhulst* [22], es uno de los ejemplos más sorprendentes de como la complejidad puede emerger de modelos simples:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) = f(r, x_n) \quad (3.1)$$

La relación de recurrencia 3.1, puede corresponder a un modelo demográfico discreto de cierta especie, cuya tasa de sobrevivencia viene dada por el parámetro r . La población vendrá dada en forma porcentual según:

- $x = 0$ corresponde a la extinción de la especie.
- Si $x = 1$ la especie puebla todo el ecosistema.

Dado que $x_n \in [0, 1] \forall n$. El parámetro r se encontrará acotado según:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) = r(x_n - x_n^2) < 1$$

Usando el valor máximo de la parábola entre paréntesis:

$$r_{max} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = r_{max} \frac{1}{4} = 1 \rightarrow 0 \leq r \leq 4$$

Podemos buscar los puntos de equilibrio de este sistema:

$$x_{n+1}^* = x_n^* \Leftrightarrow x^* = rx^*(1-x^*) \Leftrightarrow 0 = x^*(r-1-rx^*) \rightarrow x_0^* = 0, \quad x_r^* = \frac{r-1}{r}$$

Y evaluar su estabilidad lineal, usando la siguiente estrategia [27]:

En un mapa de la forma:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Un punto fijo x^* será:

- linealmente estable si $|f'(x^*)| < 1$

- linealmente inestable si $|f'(x^*)| > 1$

Para nuestro caso particular entonces:

$$|f'(0)| = |r| \quad |f'(x_r)| = |2 - r|$$

Por lo tanto podemos distinguir diferentes secciones:

- $r < 1$ El atractor es $x = 0$.
- $1 < r < 3$ El atractor es $x = \frac{r-1}{r}$
- $3 < r < 4$ No existen puntos atractores.

Podemos realizar un diagrama de bifurcación de manera análoga al que hicimos en la figura 2.2.1 y ver la forma del atractor en cada caso. Para llevar esto a cabo, dada una condición inicial x_0 y un valor del parámetro r realizamos un gran número de iteraciones y eliminamos las primeras (el transiente). En la siguiente figura se ilustra el diagrama de bifurcación:

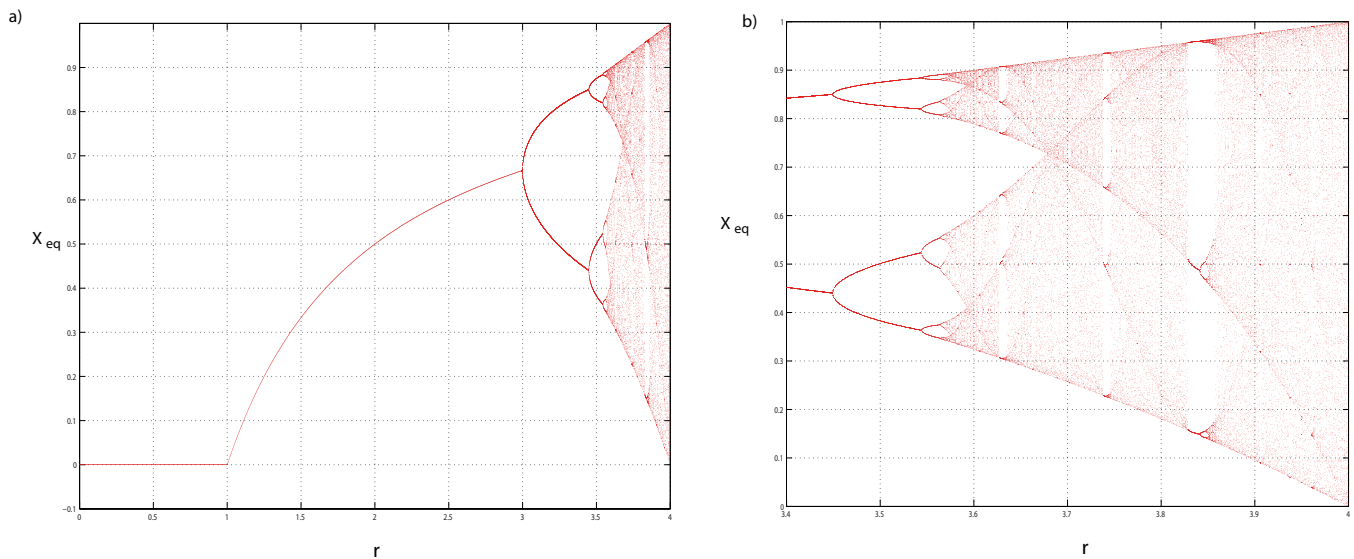


Figura 3.1: Diagrama de bifurcación del mapa logístico. En **a)** vemos las sucesivas bifurcaciones que atraviesa el sistema en el intervalo $0 < r < 4$. **b)** Un zoom nos permite apreciar la complejidad y la autosimilaridad exhibida por el atractor.

A la luz de esta figura se puede ampliar la descripción predicha por el análisis lineal.

- $0 < r < 1$ El único atractor es $x = 0$ como lo predijo la teoría lineal.

- $1 < r < 3$ El único atractor es $x = \frac{r-1}{r}$ como lo predijo la teoría lineal.
- $3 < r < 3,45$ El atractor está compuesto por 2 puntos entre los que el sistema oscila y corresponden a puntos estacionarios del mapa $f \circ f$
- $3,45 < r < 3,54$ El atractor está compuesto por 4 puntos entre los que el sistema oscila y corresponden a puntos estacionarios del mapa $f \circ f \circ f \circ f$
- Sucesivamente ocurre la misma bifurcación (cascada de doblamiento de periodo), donde el mapa pasa de oscilar entre n puntos a $2n$ puntos que corresponden a soluciones del mapa compuesto consigo mismo $2n$ veces.
- $r > 3,57$ Comienza un comportamiento caótico, es decir, a largo plazo el sistema no se estaciona en un conjunto de valores.

Podemos reentender esta imagen utilizando el “diagrama de la telaraña” [27], el cual se construye como sigue:

1. Graficamos la función continua del mapa (el lado derecho de (3.1) en este caso), en conjunto con la función identidad.
2. Escogemos una condición inicial en el eje horizontal x_0 , trazamos una línea vertical hasta que encontremos la imagen de la condición bajo f (la intercepción con la función).
3. Desde el punto $\{x_0, f(x_0)\}$, trazamos una línea horizontal hasta que intercepte la identidad $\{f(x_0), f(x_0)\}$
4. Repetimos 2 y 3 para este nuevo punto.

En la siguiente figura, hemos ilustrado los diagramas de telaraña para distintos valores representativos del parámetro r :

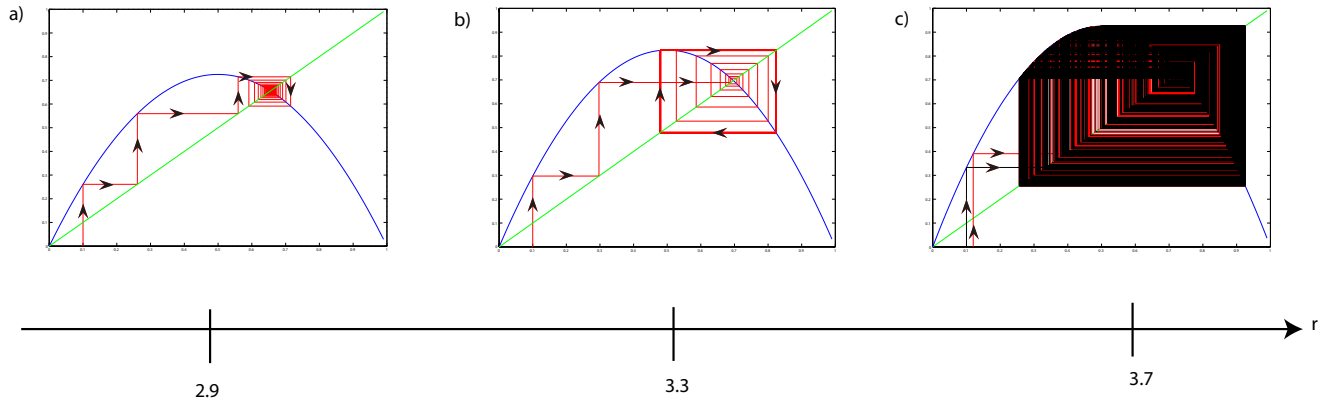


Figura 3.2: Diagrama de telaraña para distintos valores de r . **a)** El atractor es un punto fijo. **b)** El atractor es la oscilación entre dos puntos: un “ciclo límite discreto”. **c)** El sistema no se estaciona nunca, dos condiciones iniciales muy cercanas (rojo y negro) tienen comportamientos muy distintos.

Este análisis permite ilustrar muy bien uno de los dos ingredientes necesarios para tener *caos* puestos en la definición: *el mecanismo de retorno*. Notemos que gracias a que la función tiene un máximo global dentro del intervalo, cualquier condición inicial no se escapará independiente del comportamiento presentado por el sistema.

Para ilustrar la *sensibilidad a las condiciones iniciales*, podemos ver la figura 3.1.1 c, sin embargo es más claro graficar el devenir “temporal” de las dos condiciones iniciales muy cercanas y el valor absoluto de su diferencia:

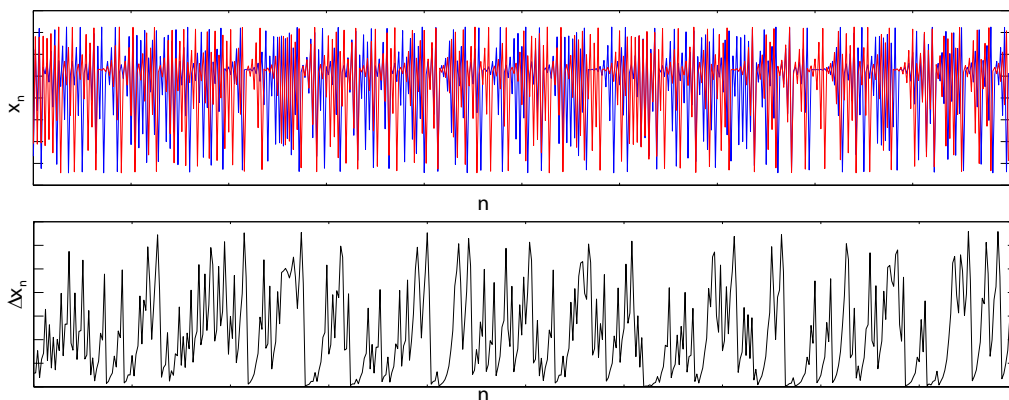


Figura 3.3: **a)** Evolución temporal de 2 condiciones iniciales ligeramente diferentes ($x_{01} = 0,1$ $x_{02} = 0,12$) (rojo y azul) con lo que podemos apreciar los comportamientos diferentes. **b)** Evolución temporal de la diferencia de las dos curvas en **a)**

Hemos revisado este modelo discreto, el que ha presentado características muy similares a los sistemas dinámicos estudiados anteriormente (puntos fijos, ciclos límites y caos). Se ha ilustrado el mecanismo de retorno y la sensibilidad a las condiciones iniciales en el régimen caótico. El hecho de que la sensibilidad es exponencial quedará de manifiesto cuando se calculen los *exponentes de lyapunov* para este modelo en la sección 3.2.

3.1.2. Modelo de Lorenz.

En 1963 E.N. Lorenz publicó un modelo simplificado de un problema hidrodinámico de flujo, este tiene su origen en un sistema de ecuaciones diferenciales de 12 variables utilizadas por un grupo de de meteorología del **M.I.T.**, quienes encontraron soluciones no sólo aperiódicas sino además con una gran sensibilidad a las condiciones iniciales. Este grupo falló en simplificar el problema. Fue Saltzman en 1962 quien estudiando la convección térmica con un sistema de 7 variables, logró reducir la dinámica interesante a un sistema de tan sólo 3 variables: el *modelo de Lorenz*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y \\ \dot{z} &= xy - \beta z.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Existe una gran diversidad de atractores para los distintos valores de los parámetros de este sistema [19] sobre los que no profundizaremos. Para los valores clásicos de los parámetros:

$$\sigma = 16 \quad \beta = 4 \quad \rho = 45,92$$

Encontramos el siguiente atractor:

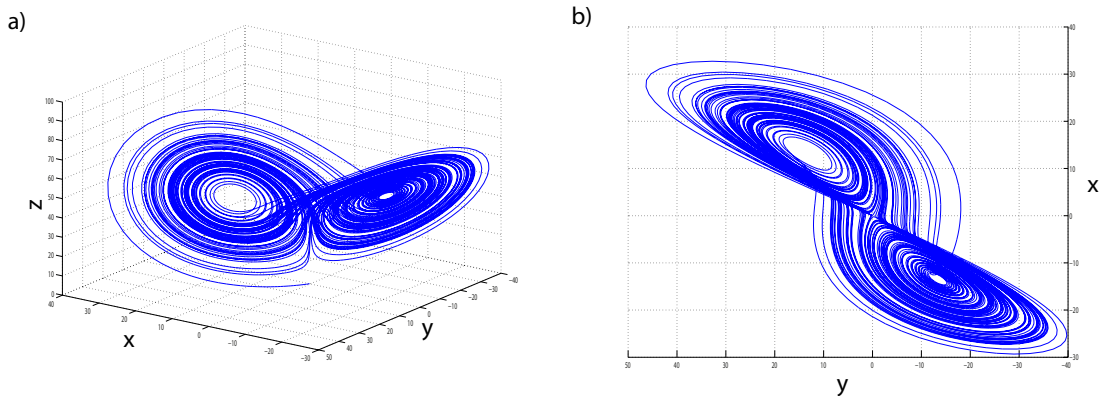


Figura 3.4: Diferentes visiones del atractor de Lorenz, se ha utilizado una sola condición inicial y 14000 iteraciones con una discretización de tiempo de 0.01.

Existe un rasgo común a los sistemas caóticos que puede ser observado tanto en este atractor como en el del mapa logístico: El conjunto que estamos observando no es *denso*, sino que tiene una estructura *fractal*, a causa de esto, una condición inicial recorrerá el atractor sin jamás volver a pasar por el mismo lugar. Este tipo de atractores son conocidos como *atractores extraños* y son característicos de un comportamiento caótico. Los objetos *fractales* deben su nombre al hecho de que la dimensión que utilizan en el espacio es fraccionaria y no entera [13], el calculo de la misma constituye una medida del grado de complejidad del atractor que se está observando.

A partir de las componentes separadas de la solución podemos tener una mejor idea de que está pasando con las órbitas:

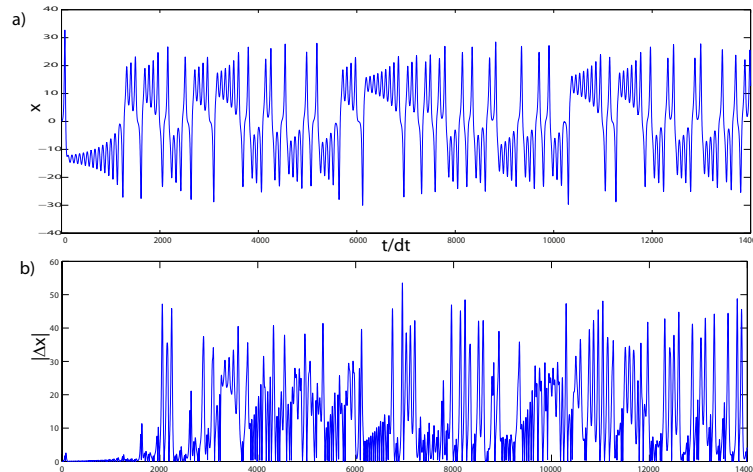


Figura 3.5: **a)** Evolución temporal de la componente x de la solución para una condición inicial arbitraria. **b)** valor absoluto de la diferencia de la componente en x de la evolución temporal de dos condiciones iniciales cercanas.

Observando la señal $x(t)$ (figura 3.5 **a)**), vemos que hay grandes excursiones que, de manera *aperiódica* se acercan y alejan del origen realizando oscilaciones, esto ilustra el *mecanismo de retorno* y define un volumen acotado en el espacio de fase donde existe el atractor. Para mostrar la sensibilidad a las condiciones iniciales grafico la evolución temporal de la diferencia de dos condiciones iniciales cercanas, para la componente x (figura 3.5 **b)**). Esta breve revisión del modelo de Lorenz, ha mostrado su naturaleza caótica y reconocido los dos ingredientes necesarios para nuestra definición, a pesar de que el modelo de Lorenz es relacionado siempre con la predicción del clima,

este puede ser encontrado en una variedad de contextos, un ejemplo simple de esto es el *péndulo de Lorenz* [28].

Finalmente analizaremos un último sistema, esta vez extendido que presenta *caos espacio temporal*.

3.1.3. Ecuación de Kuramoto-Sivashinsky.

La ecuación de Kuramoto-Sivashinsky, es probablemente el modelo más celebre para el estudio del *caos-espacio-temporal*. Esta fue derivada por Kuramoto en el contexto de osciladores acoplados [23] y encontrada por Sivashinsky [24] en su estudio de propagación de la flama. Llevada a su forma más simple la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky (KS) es en una dimensión:

$$\partial_t u = -u \partial_x u + \epsilon \partial_{xx} u - \partial_{xxx} u \quad (3.3)$$

Para el valor $\epsilon = -0,4$ tenemos el siguiente comportamiento espacio temporal

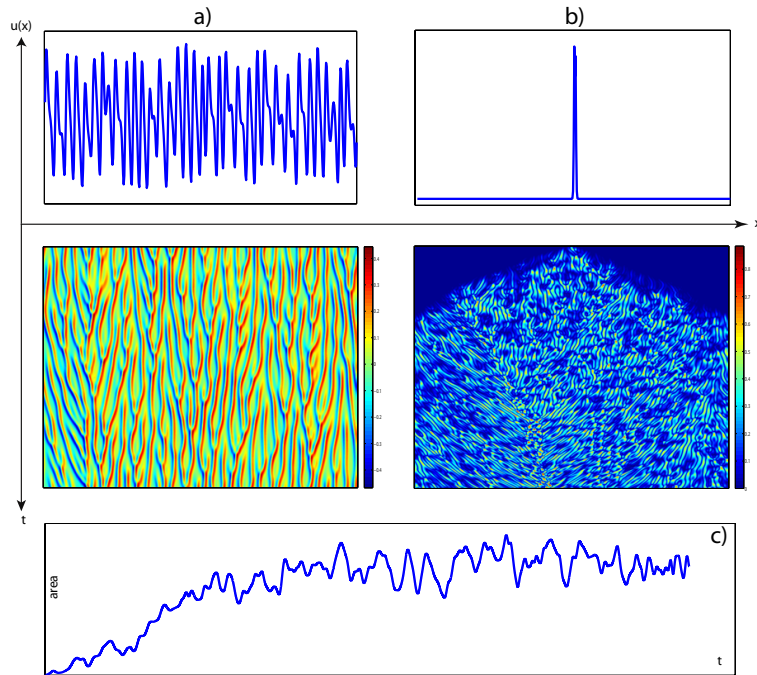


Figura 3.6: **a)Arriba:** Instantánea de la solución espacial. **a)Abajo:** Diagrama espacio temporal de la solución. **b)Arriba:** Perturbación inicial a la solución de a). **b)Abajo:**Diagrama espacio temporal de la perturbación. **c):**Evolución temporal del área de la diferencia para el diagrama espacio temporal exhibido en **b) Abajo**

3.2. Exponentes de Lyapunov.

Los *Exponentes de Lyapunov* son una observable de gran importancia al caracterizar la naturaleza de los distintos atractores presentes en los sistemas dinámicos de *dimensión finita*.

Los exponentes de *Lyapunov* pueden entenderse como una generalización al análisis de estabilidad lineal, es por esto que existen tantos exponentes como dimensiones tiene el sistema en estudio y la magnitud de cada uno de ellos corresponde a la tasa de divergencia de las orbitas cercanas en cada una de las direcciones posibles. Como veremos en las secciones sucesivas, es posible extraer bastante información a partir de los exponentes. Posiblemente la información más *importante* sea saber si el comportamiento en estudio posee *sensibilidad a las condiciones iniciales*. Dado que estudiaremos soluciones de sistemas que ya se encuentran sobre el atractor, el *mecanismo de retorno* está asegurado, pues todos los atractores tienen una talla finita.

En resumen, conocer *los exponentes de Lyapunov* o más precisamente, *conocer el signo del máximo exponente de Lyapunov*, es el indicador más aceptado en la decisión de si un comportamiento es o no *caótico*.

3.2.1. Definición Intuitiva.

La siguiente definición será hecha para sistemas de ecuaciones diferenciales, sin embargo, la versión para *mapas discretos*, es trivial.

Supongamos que estamos estudiando un sistema dinámico de dimensión N , cuya regla de evolución temporal viene dada por :

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) \quad (3.4)$$

El cual posee un atractor dado por la siguiente orbita¹:

$$\vec{x}^*(t)$$

Y nos interesa conocer qué le ocurre a una orbita ligeramente distinta, para esto consideramos una *bola* de radio $\epsilon \ll 1$ (condiciones iniciales ligeramente distintas) la que al evolucionar un tiempo t , de acuerdo al sistema dinámico

¹A pesar de que es característico del caos que el atractor sea extraño y que su trayectoria nunca se cierre, es utilizada indistintamente la palabra *orbita*

dado por (3.4), se convertirá en un elipsoide de semiejes $a_i(t) > \epsilon$ o $b_j(t) > \epsilon$, según las direcciones en que el sistema dinámico *expanda* o *comprima* las condiciones iniciales.

Una imagen pedagógica de este comportamiento para el caso $N = 2$ se encuentra en la siguiente figura:

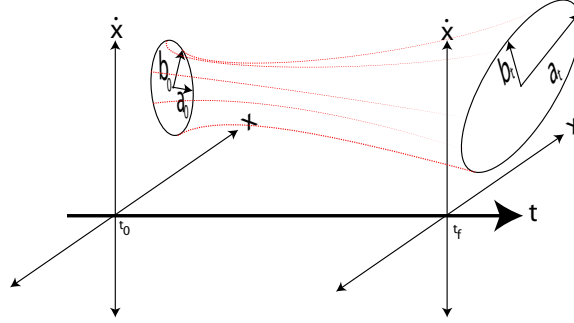


Figura 3.7: Evolución en el sistema dinámico de un disco de condiciones iniciales, durante un tiempo $t = t_f - t_0$. El disco se convierte en una elipse de nuevos semiejes a_{t_f} y b_{t_f}

Inspirados en la Figura 3.7, si suponemos que los semiejes $\{a_i(t)\}_{i=1}^N$ evolucionan exponencialmente, podemos calcular el exponente en cada caso:

$$a_i(t) = a_i(t=0)e^{\Lambda t} \rightarrow \Lambda = \frac{1}{t} \ln \left(\frac{a_i(t)}{a_i(t=0)} \right) \quad (\Lambda \in \mathbb{R})$$

Hasta aquí, tan solo hemos hecho un *análisis de estabilidad lineal para la órbita*. El exponente de *Lyapunov* debe ser independiente del tiempo (y bajo condiciones bien generales, independiente del lugar del espacio de fase que se esté observando). El exponente de *Lyapunov* i -ésimo corresponderá al siguiente límite [27]:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\lim_{a_i(t=0) \rightarrow 0} \Lambda_i \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\lim_{a_i(t=0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{a_i(t)}{a_i(t=0)} \right) \right)$$

Una vez que se haya calculado todo el *espectro de Lyapunov*, podemos ordenarlo:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{N-1} \geq \lambda_N$$

A partir del signo de cada uno de ellos, es posible caracterizar la dinámica existente[27]:

- Si $\lambda_j > 0$, existe una sensibilidad a las condiciones iniciales en esa dirección y por lo tanto el comportamiento del espacio de fase, se encuentra caracterizado por una dinámica caótica.

- Si $\lambda_j = 0$ en una región del espacio de parámetros (no en un sólo punto), existe una dinámica periódica en el sistema. Adicionalmente, si $\lambda_j = 0$ en un solo punto del espacio de parámetros, existe una bifurcación en dicho punto del espacio de parámetros.
- Si $\lambda_j < 0$, el sistema no es sensible a las condiciones iniciales en esa dirección.

Al igual que en el *análisis de estabilidad lineal*, los exponentes de mayor magnitud, serán los más relevantes en la caracterización de la dinámica. La mayoría de las veces, es suficiente calcular el máximo exponente de lyapunov para tener una buena caracterización de la dinámica. El calculo de todo el espectro es considerablemente más difícil desde el punto de vista numérico, sin embargo, posibilita conocer más en profundidad la dinámica, por ejemplo, estimar la dimensión del *atractor* utilizando la.

Conjetura de Yorke-Kaplan.

Esta conjetura, también conocida como *dimensión de Lyapunov* [27], establece una forma de estimar la dimensión de un atractor solamente conociendo su espectro de *lyapunov*. A pesar de dar buenos resultados para los casos conocidos. En general solo puede asegurarse que dará una *cota superior* de la verdadera dimensión del atractor.

Supongamos que conocemos el espectro numérico asociado a un cierto atractor, ordenado según:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{N-1} \geq \lambda_N$$

Entonces la *dimensión de lyapunov* vendrá dada por:

$$d = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}$$

Donde j es el *mayor entero* tal que:

$$\sum_{i=1}^j \lambda_i > 0$$

Más adelante, ilustraremos esta definición con el modelo de Lorenz.

3.2.2. Cálculo Numérico de los exponentes de Lyapunov para diferentes sistemas dinámicos.

En términos prácticos, como se ilustrará en los siguientes casos, el cálculo del máximo exponente de Lyapunov, no requiere grandes esfuerzos, puesto que cualquier pequeña diferencia se alineará rápidamente en la dirección de máximo crecimiento. Esta misma ventaja, es la dificultad más difícil de superar en la obtención del resto de los exponentes, ya que las pequeñas perturbaciones “pierden” rápidamente cualquier proyección en una dirección diferente a la del máximo crecimiento. Para superar este impase, una gran idea fue introducida por *Benettin et al.* [30], donde se utiliza una base del espacio vectorial dinámica, la cual se *ortonormaliza* en conjunto con la evolución del sistema dinámico, evitando el fenómeno antes mencionado. En la sección del cálculo del espectro de Lyapunov en sistemas de ecuaciones diferenciales, aplicaremos una versión mejorada de este mismo método.

Los exponentes de *Lyapunov* son cantidades que pueden ser determinadas *solamente* para sistemas dinámicos de *dimensión finita*. Para el caso de los *sistemas extendidos*, no existe formalmente (al conocimiento del autor de la tesis), ninguna definición análoga; sin embargo, dado que todas las simulaciones de sistemas extendidos discretizan el espacio, estamos lidiando con un sistema dinámico de dimensión finita, pero muy alta. En este sentido autores como [31], estudian la existencia del límite continuo para los exponentes de Lyapunov que pueda llevar a una *densidad de Lyapunov*. En nuestro caso particular, nos conformaremos con calcular el máximo exponente para sistemas extendidos y observar que esta magnitud es independiente del porte de nuestras simulaciones.

3.2.3. Cálculo del exponente de lyapunov en mapas.

Para comenzar, consideremos el caso más simple: Un mapa discreto unidimensional, dado por la relación de recurrencia:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Y queremos estudiar el comportamiento de 2 orbitas, en principio muy cercanas:

$$x_0 = x_{n=0} \quad x_0^1 = x_0 + dx_0$$

Después de n iteraciones la diferencia entre ambas orbitas vendrá dada aproximadamente por:

$$x_n - x_n^1 = dx_n = dx_0 e^{\Lambda n} \rightarrow \Lambda = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{dx_n}{dx_0} \right) \rightarrow \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{dx_0 \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \left(\left| \frac{dx_n}{dx_0} \right| \right) \right] \quad (3.5)$$

Notando que, si las diferencias son pequeñas:

$$\begin{aligned} \frac{dx_n}{dx_0} &= \left(\frac{dx_n}{dx_{n-1}} \right) \left(\frac{dx_{n-1}}{dx_{n-2}} \right) \left(\frac{dx_{n-2}}{dx_{n-3}} \right) \cdots \left(\frac{dx_2}{dx_1} \right) \left(\frac{dx_1}{dx_0} \right) \\ &= f'(x_{n-1}) f'(x_{n-2}) f'(x_{n-3}) \cdots f'(x_1) f'(x_0) \\ &= \prod_{i=1}^N f'(x_{N-i}) \end{aligned}$$

Reemplazando esto en el paréntesis cuadrado de (3.5), obtengo:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{m} \sum_{k=0}^N \ln(|f'(x_k)|) \right]$$

Numéricamente para consideramos suficientes puntos (N lo suficientemente grande, tal que el sistema se encuentre ya sobre el atractor). En la siguiente gráfica se ha puesto simultáneamente el atractor y el valor de *exponente de lyapunov*, para el caso del mapa logístico estudiado en la sección anterior.

A partir de esta figura, es posible apreciar para que valores de r aparece el caos ($\lambda > 0$) y para que valores de r tenemos bifurcaciones ($\lambda = 0$ de manera puntual).

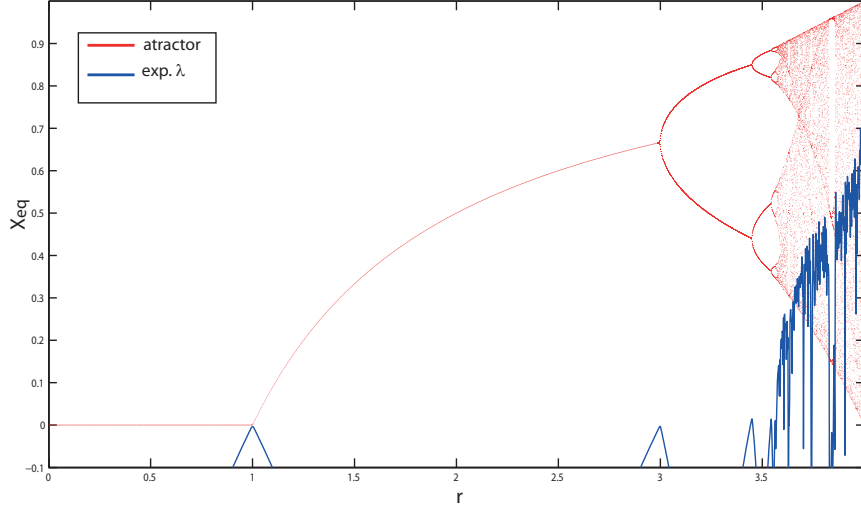


Figura 3.8: Grafico del atractor del mapa logístico (rojo), en conjunto con el exponente de Lyapunov (azul).

Existen maneras análogas para mapas de más de una dimensión, para el lector interesado puede referirse a [27]

3.2.4. Cálculo de los exponentes de Lyapunov para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Existen diversos métodos para calcular numéricamente los exponentes de *Lyapunov* en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Nosotros utilizaremos el algoritmo expuesto en [32]. Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (sistema dinámico) de dimensión d y su matriz *Jacobiana* J (linealización del sistema de ecuaciones diferenciales), dados respectivamente por:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{v}(\vec{x}) \quad J(\vec{x}(t)) = \left[\frac{\partial \vec{v}(\vec{x}(t))}{\partial \vec{x}} \right]$$

El espacio de fase corresponde al espacio vectorial \mathbb{R}^d , del cual consideraremos un subespacio de dimensión $k \leq d$ engendrado por una base ortonormal dinámica definida por:

$$\varepsilon(t) = \{\hat{e}_i(t)\}_{i=1}^k \quad \text{tal que} \quad (\hat{e}_i(t) | \hat{e}_j(t)) = \delta_{ij} \quad \forall t$$

Con estos tres elementos, construimos el siguiente *sistema dinámico aumen-*

tado:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}} &= \vec{v}(\vec{x}) \\ \dot{\hat{e}}_m &= J\hat{e}_m - \sum_{l \leq m} \hat{e}_l L_{lm} \\ \dot{\Lambda}_m &= J_{mm}\end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}m \in \{1, 2, \dots, k \leq d\} \quad J_{lm} &= (\hat{e}_l | J\hat{e}_m) \\ L_{mm} &= J_{mm} + \beta [(\hat{e}_m | \hat{e}_m) - 1] \quad L_{lm} = J_{lm} + J_{ml} + 2\beta(\hat{e}_l | \hat{e}_m) \quad (\beta > 0)\end{aligned}$$

Para la evolución dinámica de este sistema dinámico aumentado, según [32], es posible probar el siguiente:

Teorema:

Sea \vec{x}_0 una condición inicial asociada al espectro de lyapunov $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_d\}$. Escogiendo $\text{vec}\Lambda(t = 0) = \vec{0}$ y un parámetro de estabilidad $\beta > \lambda_k$. Entonces, para casi todo marco inicial $\varepsilon(t = 0)$, la evolución temporal del sistema dinámico aumentado tiene por exponentes de lyapunov:

$$\lambda_m = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \Lambda_m(t) \quad m \in \{1, 2, \dots, k\}$$

La demostración del teorema puede ser encontrada en [32]. Este método nos permite calcular los primeros $k \leq d$ exponentes de lyapunov de mayor magnitud.

Aplicando este método para el sistema de Lorenz (3.2), en la región de parámetros clásicos:

$$\sigma = 10 \quad r = 28 \quad b = \frac{8}{3}$$

Integrando el sistema dinámico aumentado, desde la condición inicial $\vec{x}_0 = (0, 0, 1, 0)$, utilizando un *Runge-Kutta* de cuarto orden con un paso de tiempo $dt = 0,01$. Para $k = 3$ (calculamos todo el espectro de lyapunov) y un parámetro de estabilidad $\beta = 20$, obtenemos los siguientes valores de los exponentes de Lyapunov:

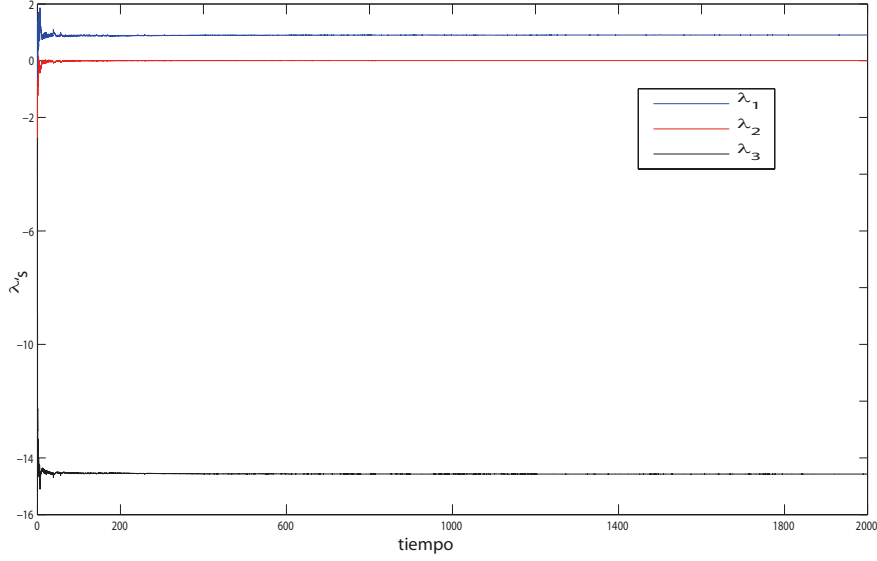


Figura 3.9: Estudio de la convergencia del valor de los exponentes de Lyapunov conforme evoluciona el sistema dinámico aumentado.

$$\lambda_1 = 0,9063 \quad \lambda_2 = 0,0047 \quad \lambda_3 = -14,5728$$

En la figura 3.2.4 se ha ilustrado la convergencia de los valores de los exponentes. Podemos calcular la dimensión de Lyapunov con los valores obtenidos:

$$d = 2 + \frac{(0,09063 + 0,0047)}{|-14,5728|} \approx 2,062513724$$

Lo que está de acuerdo con los valores encontrados en la literatura [19]:

$$\lambda_1 = 0,90563 \quad \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = -14,57219 \quad d = 2,06 \pm 0,01$$

3.2.5. Cálculo del exponente de Lyapunov en sistemas extendidos.

En los sistemas extendidos se puede realizar la medición del *máximo* exponente de *Lyapunov* sin grandes dificultades. Las ideas aquí propuestas pueden ser estudiadas en más profundidad en [29].

Para un sistema extendido:

$$\partial_t u(x, t) = f(u, \partial_x^n u, t) \tag{3.6}$$

Consideramos un régimen donde exista una solución de equilibrio $u_c(x, t)$ y realizamos un análisis de estabilidad lineal sobre ella:

$$u = u_c + \delta u \quad \|\delta u\| \ll \|u_c\|$$

Introduciendo este *Ansatz* en el sistema (3.6), linealizamos para $\delta\vec{u}$:

$$\partial_t \delta u = \mathcal{L}(u_c, \partial_x^n u_c, \partial_x^n) \delta u \quad (3.7)$$

Donde \mathcal{L} es un operador lineal que depende de la solución de equilibrio $u_c(x, t)$ y sus derivadas. Este operador \mathcal{L} aplica de manera *lineal* sobre $\delta u(x, t)$.

Si discretizamos el sistema (3.7) ($\delta u \rightarrow \delta\vec{u}$), lo que corresponde a la situación real para una simulación numérica; el operador lineal \mathcal{L} corresponde a la *matriz jacobiana del sistema*. Si resolvemos este sistema discreto, la solución para $\delta\vec{u}$ a cada instante tiene la forma:

$$\delta\vec{u} = \sum_i \alpha_i \hat{e}_i e^{\lambda_i t}$$

Donde cada uno de los λ_i corresponden a aproximaciones instantáneas de los exponentes de Lyapunov. Como ya señalamos en 3.2.4, a largos tiempos la dinámica de $\delta\vec{u}$ será gobernada por el máximo exponente de Lyapunov, eliminando numéricamente cualquier posibilidad de proyección en otra dirección (para evitar esto fue que en la sección 3.2.4 tuvimos que emplear un esquema de ortonormalización, a fin de poder obtener todos los exponentes de Lyapunov). Una vez que la solución $\delta\vec{u}$ esté en el régimen gobernado por el máximo exponente, observamos un comportamiento exponencial en cualquier punto de la discretización espacial (de exponente λ_{max}), para poder encontrar este exponente es necesario obtener una cantidad escalar, podemos integrar la señal discreta:

$$\zeta(t) = \sum_i |\delta\vec{u}_i|^2 = \delta\vec{u} \cdot \delta\vec{u}$$

Como cualquier otra observable del campo discretizado $\delta\vec{u}$, la función $\zeta(t)$ presenta un comportamiento exponencial:

$$\zeta(t) \approx \|\delta u_0\| e^{2\lambda_{max} t}$$

Donde λ_{max} es el exponente de lyapunov extendido, utilizando el logaritmo:

$$\boxed{\log(\zeta(t)) \approx \log(\|\delta u_0\|) + 2\lambda_{max} t}$$

La estrategia general será obtener numéricamente $\log(\zeta(t))$, sobre el que se realizará un ajuste lineal de mínimos cuadrados, para obtener la mejor pendiente (el mejor valor de λ_{max}) y el mejor intercepto.

Aplicaremos todo lo dicho anteriormente a la ecuación de *Kuramoto-Sivashinsky*, con los datos ilustrados en la figura 3.6. El sistema de de ecuaciones diferenciales acopladas viene dado por

$$\partial_t u_c = -u_c \partial_x u_c + \epsilon \partial_{xx} u_c - \partial_{xxxx} u_c,$$

$$\partial_t \delta u = \mathcal{L} \delta u = \{-\partial_x u_c + \epsilon \partial_{xx} - u_c \partial_x - \partial_{xxxx}\} \delta u.$$

El comportamiento típico de la señal $\zeta(t)$ es presentado a continuación

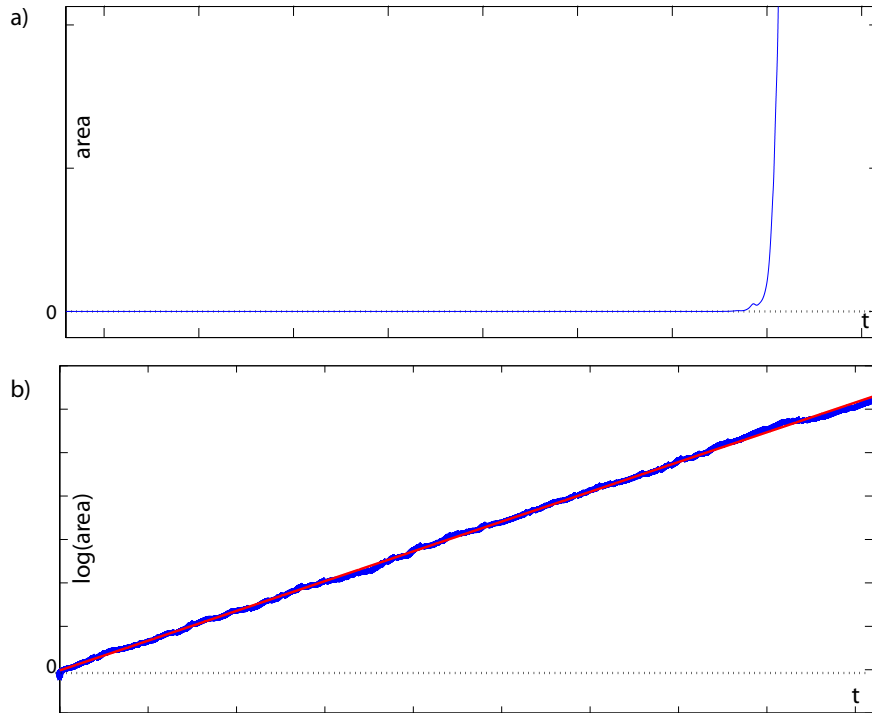


Figura 3.10: Medición del máximo exponente de lyapunov en la ecuación de *Kuramoto-Sivashinsky*. **a)** Evolución temporal típica de la función $\zeta(t)$. **b)** Ajuste lineal sobre los datos en la determinación de λ .

Realizando un ajuste lineal sobre estos datos, se encuentra que

$$\lambda = 0,03428 \pm 10^{-5}$$

Lo cual dice que estamos en presencia de un comportamiento caótico. De entre todos los métodos que existen para la determinación del exponente de *lyapunov*, destacamos este en particular, pues nos dice que tipo de ley existe en la *sensibilidad a las condiciones iniciales* (la forma en que se comporta $\zeta(t)$).

Finalmente, es importante comentar que a pesar de conocer el máximo exponente de *lyapunov* y poder decir si existe o no caos, no podemos decir mucho más. Los sistemas extendidos pueden estar caracterizados por una dinámica compleja tanto en el espacio como en el tiempo. El problema por excelencia en esta dirección es la *turbulencia completamente desarrollada*, donde las propiedades estadísticas de los comportamientos espaciales son calculadas a fin de caracterizar los comportamientos. Al día de hoy, el comportamiento de *caos espacio temporal* no se encuentra bien definido. Preguntas tan sencillas como si la turbulencia es un comportamiento caótico en el espacio y el tiempo son campo de activo trabajo.

3.3. Rutas al caos.

A partir del estudio de los sistemas dinámicos de una y dos dimensiones hecho en el capítulo 2, se mostró que los únicos atractores posibles en dos dimensiones son los *puntos fijos* y los *ciclos límite* (el Teorema de Poincaré-Bendixon descarta cualquier otra posibilidad). Las bifurcaciones en una y dos dimensiones estudiadas, nos enseñaron que los puntos fijos pueden:

- Nacer y/o cambiar su estabilidad (bifurcaciones estacionarias).
- Dar nacimiento a un ciclo límite(bifurcación de Hopf).

Esta última bifurcación muestra como un atractor de dimensión *ceros* (un punto fijo), puede evolucionar a un objeto de dimensión mayor (el ciclo límite tiene dimensión 1).

En contraste con todo lo anterior, en dimensión 3 solamente hemos ilustrado la existencia de atractores extraños. La pregunta natural es: ¿Cuales son los mecanismos mediante los cuales emergen los atractores *extraños*?

Si un atractor extraño existe como consecuencia de una o muchas bifurcaciones, estas bifurcaciones *deben* convertir un atractor sencillo (como un punto fijo o un ciclo límite) en un *atractor extraño* mediante un mecanismo *genérico*. Son estos mecanismos que permiten entender el *nacimiento y desarrollo del caos* los conocidos como *Rutas al caos* o escenarios [41].

En la sección 3.1.1 vimos como, de manera discreta, el atractor comenzaba a tener soluciones “oscilantes” cuyos periodos iban creciendo, duplicando su valor (cf. Figura 3.1.1 y la explicación de esta), fenómeno conocido como *cascada de doblamiento de periodo*. Esta cascada finalizaba cuando el sistema

tenía un comportamiento caótico. La sucesión de bifurcaciones que convierten un punto fijo en oscilaciones de cada vez mayor periodo para terminar en una dinámica caótica es lo que se conoce como *ruta al caos por cascada de doblamiento de periodo*. Es posible hacer un análisis más exhaustivo de esta ruta[41, 27, 13], sin embargo, para nuestros propósitos es suficiente con lo ya presentado.

Otra ruta al caos de gran importancia, tanto histórica como en particular para esta tesis, es la *Cuasiperiodicidad*. La teoría de la *cuasiperiodicidad a tres frecuencias* fue publicada por Ruelle, Takens y Newhouse (R.T.N.) en 1978[42]; en su momento constituyó un gran avance en entender el problema de la *turbulencia*, al cual Landau[43] había dado una interpretación errónea. La teoría de R.T.N. tiene aspectos matemáticos bastante complicados que no abordaremos, limitándonos a una descripción general de la ruta.

3.3.1. Cuasiperiodicidad.

Comportamiento Cuasiperiodico.

Supongamos que tenemos una señal continua $x(t)$, la cual puede corresponder a datos experimentales o bien a una solución de un sistema dinámico. Observando la *transformada de Fourier* de esta señal, encontramos que se encuentra caracterizada por q -frecuencias diferentes: $\{\omega_i = f_i/(2\pi)\}_{i=1}^q$. Si estas frecuencias son *inconmensurables entre sí*, es decir, si la razón entre dos cualesquiera es un número irracional; entonces diremos que la señal $x(t)$ es una señal *cuasiperiodica*. Pongámonos en el caso más simple de dos frecuencias f_1, f_2 y supongamos que la señal $x(t)$ corresponde a la solución de un sistema dinámico de dimensión 3. En el espectro de Fourier se verán 2 *peaks* bien definidos (cf. Figura 3.11a)). Dependiendo si la razón entre las frecuencias es un número racional o irracional, el atractor del sistema dinámico en cada caso será un ciclo límite a dos frecuencias(cf. Figura 3.11b) o un toro denso (cf.Figura 3.11c)) respectivamente.

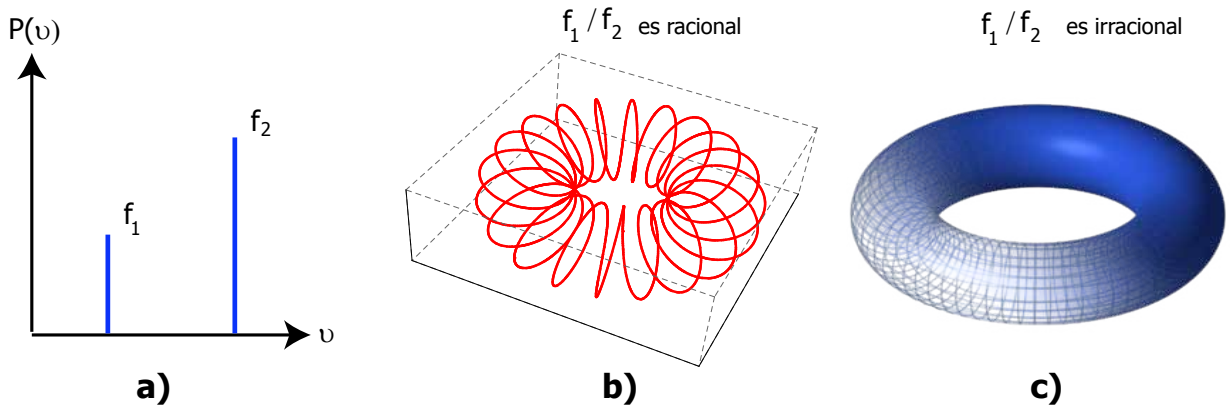


Figura 3.11: a) Espectro de Fourier de una señal con dos frecuencias. b) Atractor cuando las frecuencias son conmensurables. c) Atractor cuando las frecuencias son inconmensurables.

En el caso en que la razón entre las frecuencias sea un número racional:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{f_1}{f_2} \in \mathbb{Q} \quad (n_1, n_2 \in \mathbb{N})$$

Entonces:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{1/f_2}{1/f_1} = \frac{T_2}{T_1} \rightarrow n_1 T_1 = n_2 T_2 = T$$

Donde T es el tiempo que se demora en cerrar el ciclo límite a dos frecuencias. Para el caso en que el cociente es irracional, no es posible encontrar un tiempo T como el caso racional, lo cual hace que el conjunto atractor sea denso (i.e. un toro).

Ruta al caos por Cuasiperiodicidad.

Consideremos un sistema dinámico cuyo atractor corresponde a un punto fijo. Aumentando el valor de un parámetro de control Γ , ocurre una bifurcación de Hopf (cf. Sección 2.2.2), tras la cual el atractor se convierte en un ciclo límite, caracterizado por una frecuencia f_1 . Aumentando más el valor de Γ , ocurre una nueva bifurcación de Hopf, apareciendo una nueva frecuencia f_2 la que es *inconmensurable* con la primera. El comportamiento es *cuasiperiódico* y el atractor corresponde a la superficie de un toro.

Aumentando aún más el valor de Γ vemos una tercera bifurcación de Hopf, dando lugar a una tercera frecuencia f_3 inconmensurable con las anteriores. Inductivamente esperamos que en atractor sea un toro de tres frecuencias, sin embargo, R.T.N. [42] mostraron mediante argumentos matemáticos (que

no explicaremos), que un toro de tres frecuencias es genéricamente *inestable*, dando lugar a un atractor *extraño*. En la siguiente figura se han resumido las etapas y observables importantes en el nacimiento del caos vía cuasiperiodicidad.

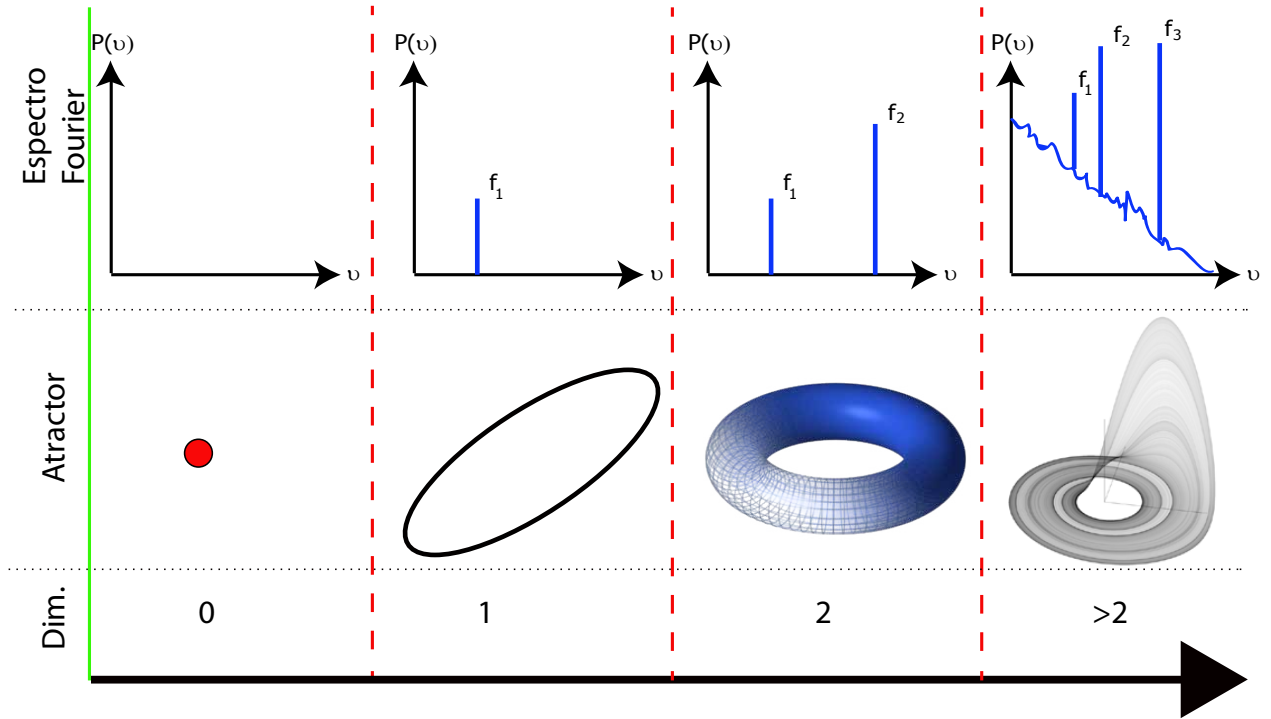


Figura 3.12: **fila superior:** Espectro de Fourier para cada una de las etapas de la ruta por Cuasiperiodicidad.**fila central:** El atractor en cada caso. **fila inferior:** La dimensión del atractor en cada caso.

Notemos que las frecuencias juegan un rol de grados de libertad del sistema, en este sentido nos encontramos nuevamente con que son necesarias al menos 3 frecuencias para obtener caos.

Tanto en la ruta de cuasiperiodicidad, como en la de cascada de doblamiento de periodo; hemos visto como un comportamiento periódico, tras sufrir sucesivas bifurcaciones alcanza un estado caótico. Es importante recalcar que un sistema que efectúe doblamiento de periodo, no necesariamente terminará (tras mover los parámetros) en un comportamiento caótico; análogamente un comportamiento cuasiperiodico no necesariamente evoluciona en el espacio de parámetros hacia un atractor extraño. Las rutas al caos son sólo una posibilidad de como los sistemas pueden evolucionar hacia comportamientos caóticos.

Capítulo 4

Experimento de una válvula de cristal líquido con retro inyección óptica: L.C.L.V.

4.1. Cristales Líquidos.

La materia que constituye nuestro universo, existe en diferentes *estados*. En nuestra vida cotidiana observamos la materia en los estados: sólido, líquido y gaseoso. Existen otros estados de la materia además de los antes nombrados, ejemplos de esto son *el plasma* [33] o los cristales líquidos[34].

Los cristales, caso particular de la materia en estado sólido, están caracterizados por un ordenamiento periódico de sus moléculas tanto a corto, como a largo alcance y por su incapacidad para fluir. En contraste, el estado líquido se caracteriza por la ausencia de cualquier ordenamiento por parte de las moléculas y la capacidad de la materia para fluir.

El término *crystal líquido* se utiliza para denominar a la materia en un estado que tiene características tanto de *crystal* (pues posee un ordenamiento a corto alcance), como de *liquido* (pues las moléculas poseen cierto grado de *fluidéz*). En la figura 4.1 se han esquematizado las moléculas en cada uno de los casos.

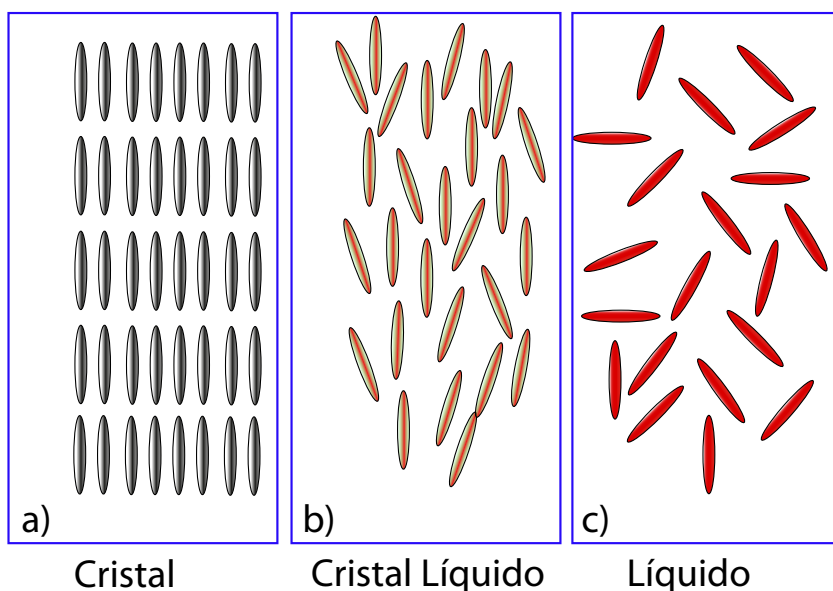


Figura 4.1: Imagen pedagógica para ilustrar los diferentes grados de ordenación entre los diferentes estados de la materia. **a)** En el cristal existe una orientación bien definida de las moléculas y una ordenación entre las mismas. **b)** En el cristal líquido existe orientación, pero no ordenación. **c)** El líquido carece de ordenación de sus moléculas.

4.1.1. Descripción Macroscópica de los cristales líquidos.

Las moléculas de cristal líquido, son moléculas orgánicas caracterizadas por una *alta anisotropía*; éstas moléculas pueden tener diversas formas: alargadas, en forma de disco u otras más complejas. En los sucesivos consideraremos cristales líquidos cuyas moléculas tengan forma de *cilindros alargados*¹, éstos existen en dos fases (o *mesofases*) según el nivel de ordenamiento que presenten:

- **Fase Nemática:** Los centros de gravedad de las moléculas son libres de estar en una posición cualquiera, sin embargo, existe *una dirección de orientación general*. Una clase especial de cristales líquidos nemáticos son los *cristales líquidos colistericos* (o alternativamente *con quiralidad*), sobre el que no profundizaremos.
- **Fase Esméctica:** La palabra “esméctica” deriva del antiguo término griego utilizado para jabón, su origen proviene del hecho que la sustancia densa que encontramos en la parte inferior del jabón es un cristal líquido en fase esméctica. Al igual que en la fase nemática, existe una dirección

¹rods en inglés

de orientación general de las moléculas. La fase esméctica se diferencia de la fase nemática, en que los centros de gravedad de las moléculas se encuentran ordenadas en capas.

En la siguiente figura se han esquematizado las 2 *mesofases* que puede presentar un cristal líquido constituido por moléculas alargadas.

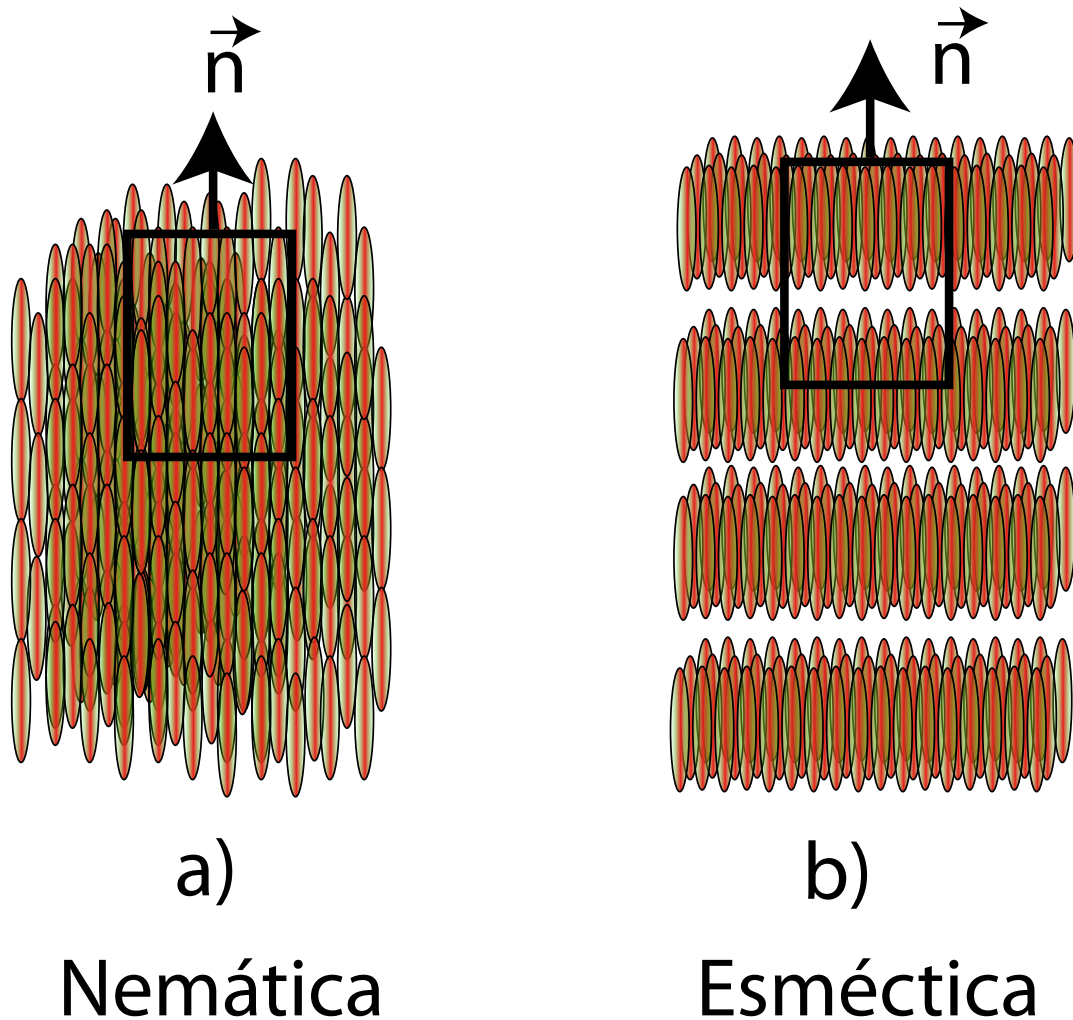


Figura 4.2: a) Fase nemática caracterizada por una orientación promedio \vec{n} . b) Fase Esméctica caracterizada además por un ordenamiento en capas.

Los dispositivos de cristales líquidos nemáticos que estudiaremos contienen una gran cantidad de moléculas, la variable macroscópica de mayor relevancia en la descripción del cristal líquido es el vector de orientación promedio de las moléculas, conocido como *vector director* y denominado por $\vec{n}(\vec{x}, t)$. La dinámica del director depende de las fuerzas a las que se encuentre sometido.

En el experimento que veremos, el cristal líquido se encuentra sometido a un campo eléctrico y a las fuerzas elásticas que se producen entre las moléculas cercanas. Sometido a este par de fuerzas, la dinámica del director puede escribirse como el extremo de un funcional de *Lyapunov* [34].

Finalmente es importante destacar que dada la *anisotropia* de las moléculas del cristal líquido nemático, este tiene un comportamiento fuertemente birrefringente[35], los dos índices de refracción se encuentran en las direcciones del director (índice extraordinario n_e) y en la dirección perpendicular a \vec{n} (índice ordinario n_o).

En esta Tesis se realizó un estudio experimental en el Instituto no lineal de Niza, Francia *I.N.L.N* (por sus siglas en francés). Una breve descripción del experimento y presentación de los resultados son presentados a continuación.

4.2. Experimento de una válvula de Cristal líquido con retroinyección óptica.

El experimento de una válvula de cristal líquido con retroinyección óptica es un dispositivo experimental que ofrece un escenario interesante para estudiar los comportamientos altamente *no lineales* de los cristales líquidos nemáticos. Una completa revisión de este experimento puede ser encontrada en [36], para la revisión del experimento nosotros nos basamos en [37]. El experimento se encuentra compuesto por 2 partes: La válvula de cristal líquido y el bucle de retroinyección óptica, a continuación una revisión de cada uno.

4.2.1. Válvula de Cristal Líquido.

La válvula de cristal líquido es un dispositivo experimental compuesto de una muestra de cristal líquido nemático (de ancho ($d = 15\mu m$), la cual se encuentra encerrada entre un vidrio y un espejo que tiene adherido un fotoductor, una representación esquemática de la válvula óptica se encuentra presentada en la figura 4.3 a). Entre ambos extremos de la válvula existen bornes compuestos de un conductor transparente (Indium tin Oxide: I.T.O.), los cuales permiten aplicar una diferencia de potencial sobre el cristal líquido, el que somete a las moléculas del cristal a un campo eléctrico; a fin de evitar cargas en las paredes del cristal se utiliza un voltaje alterno.

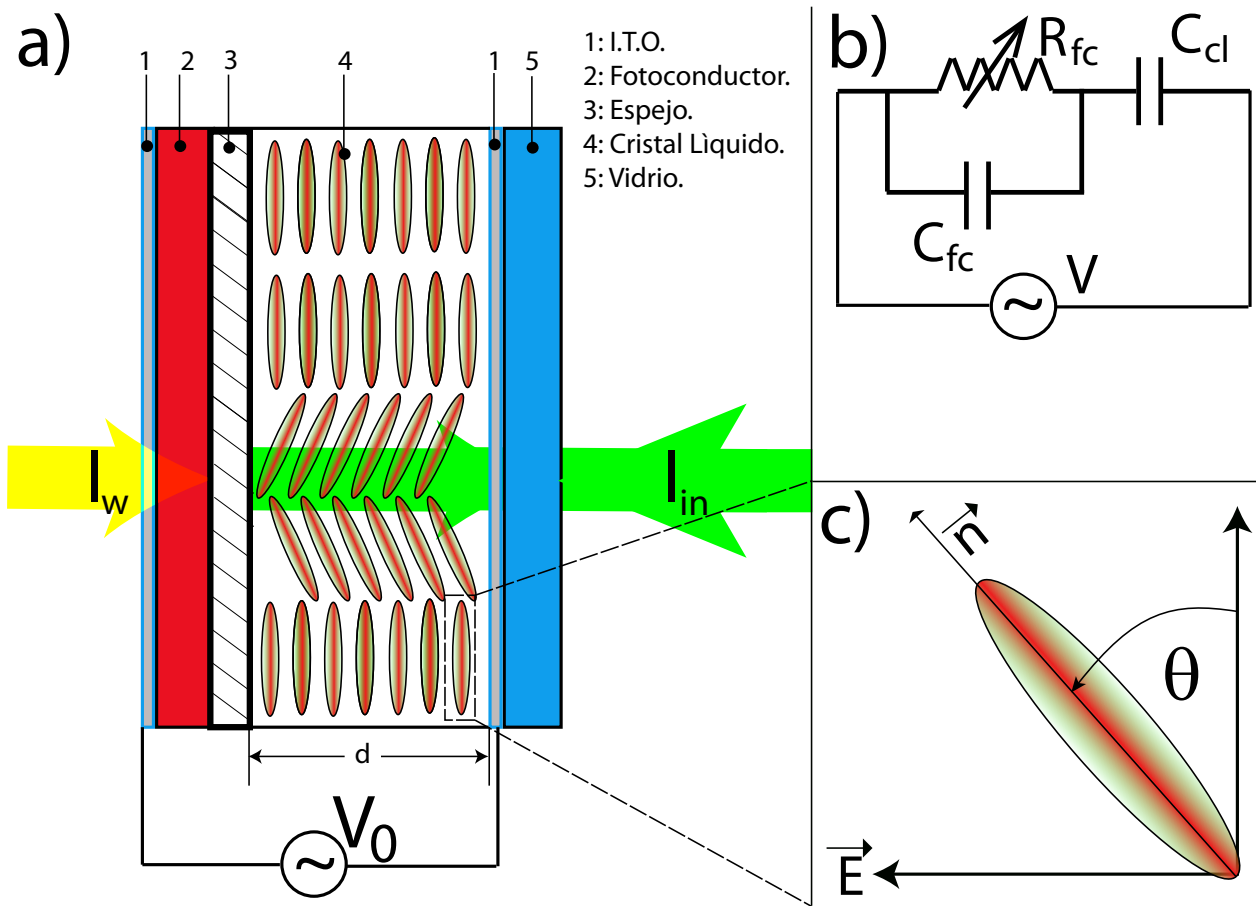


Figura 4.3: a) Esquema de la válvula de cristal líquido. b) Circuito equivalente a la válvula del cristal líquido. c) Definición del ángulo del director respecto a la dirección perpendicular a la que es aplicado el campo eléctrico.

En presencia de una luz incidente sobre el fotoconductor (I_w en figura 4.3 a)), éste se comporta como una resistencia variable, cambiando la diferencia de potencial sobre la muestra de cristal líquido, como consecuencia de lo anterior una reorientación de las moléculas de cristal líquido ocurre, la que depende de la distribución de iluminación sobre el fotoconductor, es por esto que algunos autores le llaman “Intensidad lumínica de escritura” (“writing” en inglés). Por el otro lado de la válvula, un haz de luz incidente (I_{in}), reorienta las moléculas del cristal líquido, se refleja en el espejo para luego ser reinyectado en el fotoconductor utilizando el *bucle de retroinyección óptica* (ver más adelante).

En ausencia de luz externa, la configuración experimental mostrada en la figura 4.3 a), corresponde a un circuito equivalente, ilustrado en la figura 4.3 b). En dicho circuito, al aplicar las leyes de *Kirchhoff* encontramos que, en ausencia de fuentes de luz externas, la diferencia de potencial sobre el cristal

líquido vendrá dada por:

$$V_{CL} = \Gamma V_0 \quad \text{Donde:} \quad \Gamma = \left(1 + \frac{Z_{FC}}{Z_{CL}}\right)^{-1} \quad (4.1)$$

Donde Z_{FC} y Z_{CL} corresponden a las impedancias del fotoconductor (FC) y cristal líquido (CL) respectivamente.

Cuando el cristal líquido es sometido a una diferencia de potencial, podemos observar un cambio en la orientación promedio de sus moléculas. Para medir esta orientación, se define un ángulo promedio de las moléculas respecto a la dirección del campo eléctrico al que se encuentran sometidas, una ilustración de esto se puede encontrar en la Figura 4.3 c). Si se grafica de manera experimental, el ángulo promedio (proporcional a la intensidad luminica), respecto a la intensidad de la diferencia de potencial se observa una bifurcación tipo *pitchfork*, conocida en este contexto como *transición de Fréedericksz* [?].

4.2.2. Bucle de Retroinyección óptica.

Cuando la válvula óptica es excitada con un láser y se permite la retroinyección de la luz incidente sobre el fotoconductor, el comportamiento y por lo tanto la descripción del cristal líquido cambia completamente. La expresión para la diferencia de potencial sobre el cristal líquido (4.1) debe ser corregida según:

$$V_{CL} = \Gamma V_0 + \alpha I_w \quad (\alpha > 0) \quad (4.2)$$

Donde α corresponde a la constante de proporcionalidad (estamos trabajando en un régimen de parámetros donde la tensión es proporcional a la intensidad, para intensidades mayores la tensión alcanza un valor de saturación). Con el fin de explicar de manera satisfactoria el bucle de retroinyección, en la figura 4.4 se muestra un esquema del montaje completo.

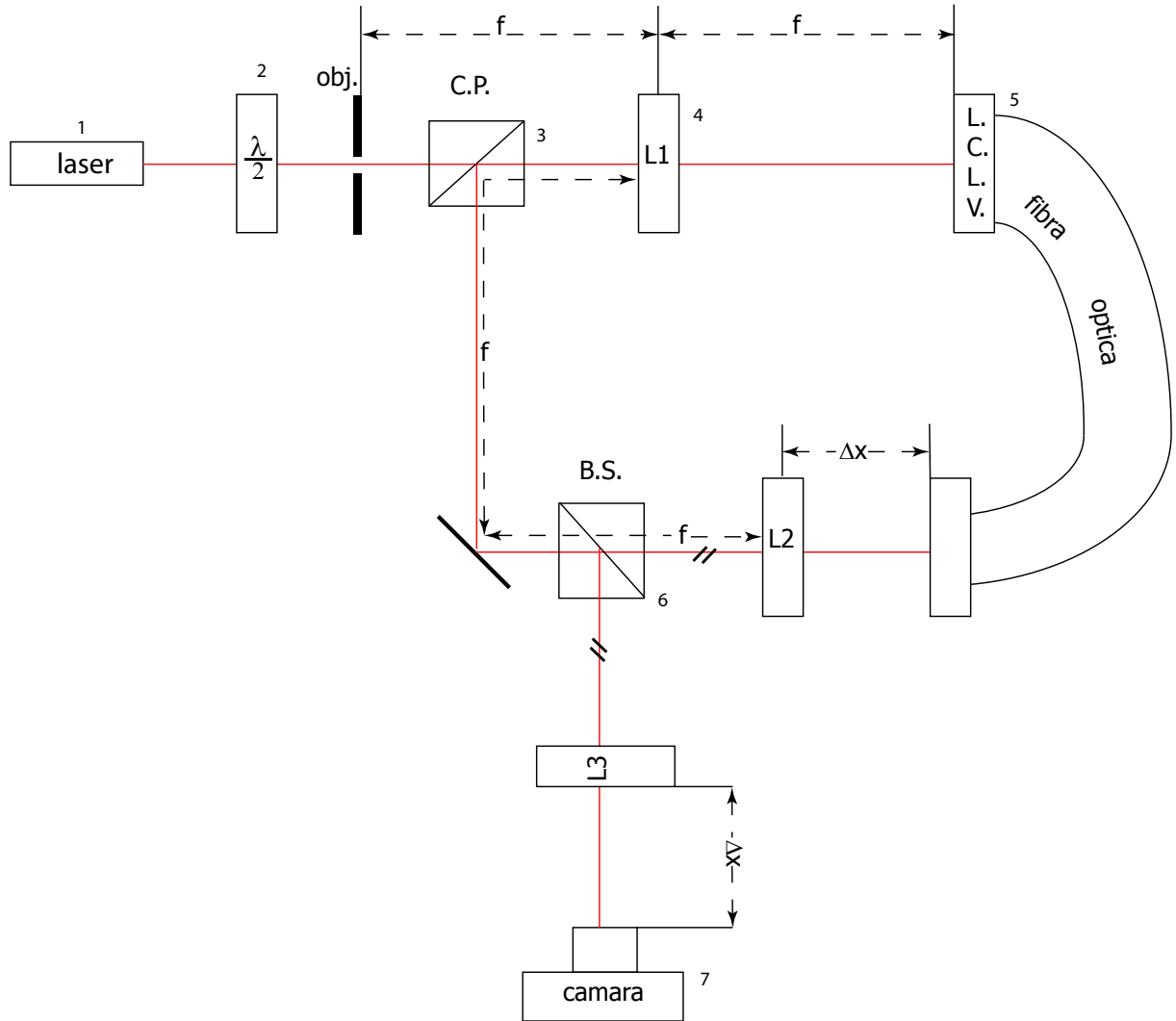


Figura 4.4: Esquema del experimento realizado por el autor entre Abril y Junio de 2012, los detalles de las partes son explicados mas abajo.

Para explicar el funcionamiento y los componentes del experimento, nos referiremos al recorrido que hace la luz utilizando los números que pueden ser observados sobre la figura 4.4.

1. La luz incidente sobre la válvula óptica, proviene de un láser de helio-neón, de longitud de onda $\lambda = 632,8nm$.
2. Tras atravesar un lente “waveplate”, cuyo objetivo es tener un control inicial de la intensidad lumínica incidente; el rayo de luz se abre tras pasar por un objetivo de microscopio (**Obj.** cf. Fig 4.4).
3. Tras pasar por el objetivo de microscopio, el rayo se “abre” , mientras

ocurre esto el rayo atraviesa un *cubo polarizador* (**C.P.** cf. Fig 4.4), el cual en esta dirección de recorrido no realiza ninguna función en el experimento.

4. Tras atravesar el cubo polarizador, el rayo luminoso continua abriéndose hasta alcanzar un lente biconvexo (**L1** cf. Fig 4.4), ubicado a una distancia f del objetivo de microscopio. Esta distancia f corresponde exactamente a la distancia focal del lente. Los rayos provenientes del láser que emergen de este lente lo hacen de manera paralela hasta alcanzar la válvula de cristal líquido (**L.C.L.V.** cf Fig 4.4) a una distancia f del lente.
5. Una vez que el rayo luminosos alcanza la válvula, se reflejará en el espejo ubicado al fondo de la misma (ver Figura 4.3 a)) y realizará el camino de vuelta hasta impactar con el cubo polarizador (ver número 3). A causa del cubo polarizador, el rayo luminoso en retroceso se propagará hacia “abajo” (respecto a la Figura 4.4), atravesando un “Divisor de Rayo”²(ver número 6), una nueva lente biconvexa (**L2** idéntica a **L1**) para finalmente introducirse por la fibra óptica para alcanzar el *fotocconductor* y de esta forma *cerrar el bucle de retro inyección óptica*.
6. La luz proveniente del extremo libre de la fibra óptica (la que no tiene la válvula), recorre una distancia d hasta el lente 2 para luego ser desviada por un “Divisor de rayo” sobre una cámara la cual registra la intensidad de luz del rayo y nos permite estudiar el comportamiento observado en la válvula.
7. La imagen que incide sobre la cámara, es una copia de la imagen que se observa en el extremo libre (y por lo tanto una copia de la imagen sobre la válvula óptica). Para observar esto, basta ver que las distancias y los obstáculos puestos sobre la luz para los segmentos:
 - Extremo libre-Divisor de rayo (**B.S.**)
 - Cámara-Divisor de rayo(**B.S.**).

Son exactamente iguales. Cuando $\Delta x = f$, un plano focal equivalente al del fotoconductor se forma a una distancia f de **L2**. Si $\Delta x \neq f$, aparece un efecto de *difracción* en el sistema. Por razones históricas el parámetro para medir la difracción será: $L = \Delta x - f$ conocido como la *longitud de propagación libre*.

²“Beam Splitter” en inglés

4.3. Modelo teórico

La variable dinámica relevante en la descripción de este experimento es el ángulo promedio de inclinación de las moléculas $\theta(\vec{x}, t)$ (cf. Figura 4.3 c)). Para un punto específico del cristal líquido dado por \vec{x} y en un instante t . La magnitud del ángulo dada por $\theta(\vec{x}, t)$ depende de la interacción de ese punto con las moléculas vecinas y del voltaje sobre el cristal líquido.

El siguiente modelo, introducido en [38], basado en primeros principios de la dinámica de los cristales líquidos y en la fenomenología de la válvula, ha mostrado ser eficaz en la descripción de este sistema, ajustándose a los datos experimentales en varias regiones del espacio parámetros:

$$\tau \partial_t \theta = -(\theta - \theta_0(V_0, I_w)) + l^2 \nabla_{\perp}^2 \theta = -\theta + l^2 \nabla_{\perp}^2 \theta + \left[\frac{\pi}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{V_{FT}}{\Gamma V_0 + \alpha I_w}} \right) \right]$$

Donde $\tau = 30ms$ y $l = 40\mu m$ son las escalas típicas temporales y espaciales respectivamente, las cuales dan cuenta del tiempo de relajación y largo de correlación respectivamente. El término $\nabla_{\perp}^2 \theta$ es el *laplaciano* del ángulo *solamente* en las direcciones perpendiculares al campo eléctrico y modela las interacciones de las moléculas. El término $-\theta$ corresponde al efecto elástico ejercido sobre las moléculas, los cristales líquidos son muy viscosos. Finalmente el término $\theta(V_0, I_w)$ es el ángulo de equilibrio que alcanzan las moléculas del cristal líquido al ser sometidas a una diferencia de potencial:

$$\theta(V_0, I_w) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \sqrt{V_{FT} \Gamma V_0 + \alpha I_w(\vec{x}, t)} \right)$$

Donde el término en el nominador de la raíz cuadrada V_{FT} es el voltaje al cual ocurre la *transición de Fréedericksz* (cf. Figura 4.5 raya roja), mientras que el denominador corresponde a la diferencia de potencial sobre el cristal líquido (expresión 4.1).

Para obtener una expresión de $I_w(\vec{x}, t)$, es decir la Intensidad de corriente que alcanza el fotoconductor, es necesario introducir el efecto de la difracción. Consideremos el campo electromagnético de longitud de numero de onda $k = 2\pi/\lambda$, a una distancia L de la fibra óptica (cf. Figura 4.4). Este campo debe satisfacer la ecuación de ondas:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \right) \vec{E} = 0$$

En la aproximación *escalar* y *par axial* Esta es:

$$\left(\nabla_{\perp}^2 - 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) E = 0$$

Hemos elegido la dirección \hat{z} como aquella ortogonal al plano del cristal líquido (en la que se desplaza el rayo de luz). La solución de esta ecuación es, integrada una distancia L es:

$$E_w = e^{-i\frac{L}{2k}\nabla_{\perp}^2} E_s$$

Donde $E(0)$ corresponde al campo eléctrico antes de recorrer el largo de propagación libre. Este puede escribirse [36] como:

$$E_s = \frac{E_0}{2}(1 + e^{-i\phi}) \quad \text{donde} \quad \phi = \frac{4\pi}{\lambda} d \cos^2 \theta(\vec{x}, t)(n_e - n_o)$$

Aquí ϕ es el desfase de la onda E_s respecto a la onda inicial E_o (Los detalles de la expresión para ϕ pueden ser encontrados en [36]). Finalmente reemplazando E_s en E_w obtenemos una expresión para I_w :

$$I_w = |E_w|^2 = \frac{I_0}{4} |e^{-i\frac{L}{2k}\nabla_{\perp}^2}(1 + e^{-i\phi})|^2 = \frac{I_0}{4} |e^{-i\frac{L}{2k}\nabla_{\perp}^2}(1 + e^{-i\beta \cos^2 \theta})|^2$$

Con lo que se obtiene el modelo para la dinámica del ángulo de las moléculas en toda su complejidad [38]:

$$\tau \partial_t \theta = -\theta + l^2 \nabla_{\perp}^2 \theta + \left[\frac{\pi}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{V_{FT}}{\Gamma V_0 + \alpha \frac{I_0}{4} |e^{-i\frac{L}{2k}\nabla_{\perp}^2}(1 + e^{-i\beta \cos^2 \theta})|^2}} \right) \right] \quad (4.3)$$

Donde el operador diferencial $e^{\frac{-iL\nabla_{\perp}^2}{2k}}$ formalmente es la serie:

$$e^{\frac{-iL\nabla_{\perp}^2}{2k}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{-iL\nabla_{\perp}^2}{2k} \right)^j = 1 + \left(\frac{-iL\nabla_{\perp}^2}{2k} \right) + \dots$$

El modelo 4.3 tiene 6 parámetros ($\{\tau, l, \Gamma V_0, \alpha, I_0, L, \beta\}$), sin embargo,

algunos de ellos ($\{\tau, l, \Gamma, \alpha, \beta\}$) son propiedades del cristal líquido y para el experimento permanecen constantes. En la practica el modelo 4.3 tiene un espacio de parámetros controlables experimentalmente de dimensión 3, dado por:

$$\{L, V_0, I_0\}$$

El paso natural a seguir es encontrar los estados de equilibrio estable que alcanzará este modelo, de entre todos los equilibrios, los homogéneos vendrán dados por:

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{V_{FT}}{\Gamma V_0 + \alpha \frac{I_0}{2} (1 + \cos(\beta \cos^2 \theta))}} \right)$$

Utilizando valores representativos de $\{\Gamma, \alpha, \beta\}$, procedo a graficar los estados de equilibrio en función de V_0 y I_0 :

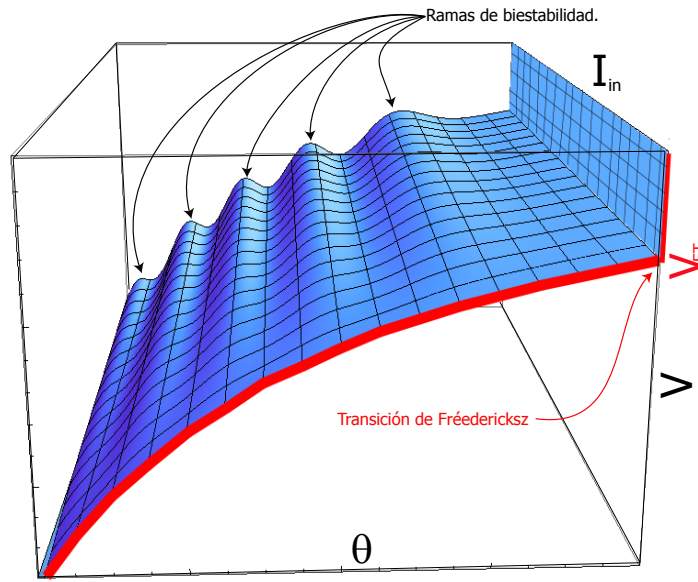


Figura 4.5: Campo escalar dado por las soluciones de equilibrio estable homogéneas $\theta(V_0, I_{in})$ del modelo teórico (4.3). La línea roja ilustra la transición de Fréedericksz, asimismo se han señalado las ramas de biestabilidad.

El modelo 4.3 permite realizar muchos más cálculos, ejemplos de esto son determinar los puntos en el espacio de parámetros donde ocurre una inestabilidad espacial que da lugar a patrones [39] o bien cuales son los puntos de nacimiento de biestabilidad [40], cálculos sobre los que no profundizaremos.

4.4. Observaciones experimentales.

A lo largo de este capítulo se ha introducido y explicado superficialmente el funcionamiento y la teoría detrás del experimento de una válvula de cristal líquido con retroinyección óptica (L.C.L.V). El interés por este experimento sobre otros radica en la cuantiosa fenomenología exhibida por él mismo, algunos ejemplos de esto son: estados homogéneos, patrones, frentes entre

estados homogéneos, frente entre estado homogéneo y patrón, estructuras localizadas, etc. En esta sección se revisarán brevemente sólo algunos de los comportamientos observados en el experimento. Los datos experimentales aquí mostrados corresponden³ a mediciones efectuadas en Abril de 2012 en este experimento en el *I.N.L.N.*, bajo la supervisión de la *Dra. Stefania Residori*.

4.4.1. Frentes entre estados homogéneos.

Para $L = 0$, la dependencia espacial viene dada por el término *laplaciano*, según el modelo 4.3. Experimentalmente puede apreciarse una ausencia de longitud de onda característica sobre el cristal líquido. Por encontrarnos en una región de biestabilidad pueden apreciarse diferentes dominios conectados por frentes o interfaces, un ejemplo de esto es presentado en la siguiente figura:

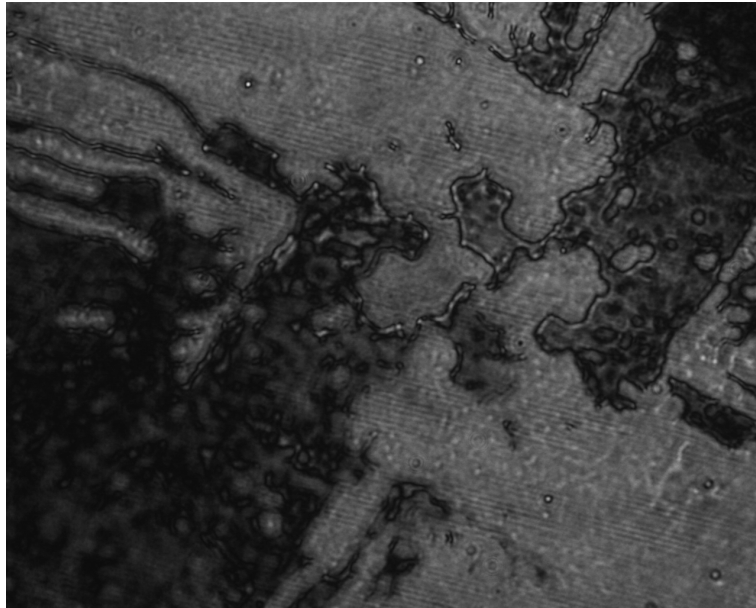


Figura 4.6: Dominios conectados por frentes para la región de parámetros $(V_0, L) = (6, 34[V], 0)$, la intensidad incidente está en su máximo valor.

4.4.2. Patrones y ramas de estabilidad.

Al observar el sistema para $L < 0$, vemos que sobre él aparece una longitud de onda característica, la cual da lugar a una solución tipo *patrón* (cf. Figura 4.7 a)). Si adicionalmente movemos cualquiera de los dos parámetros restantes (el voltaje sobre la válvula o la intensidad lumínica del láser sobre

³a menos que se indique lo contrario

la misma), observaremos que conforme modificamos la diferencia de potencial, el estado de equilibrio que predomina sobre la válvula alterna entre un *estado homogéneo* (cf Figura 4.7 b) y el estado patrón. Este comportamiento corresponde a las ramas de biestabilidad que ya habían sido observadas en los estados de equilibrio homogéneo del modelo 4.3 (cf. Fig 4.5 b)). En la figura 4.7 c) se muestra una medición experimental de la intensidad lumínica promedio en función del valor del voltaje.

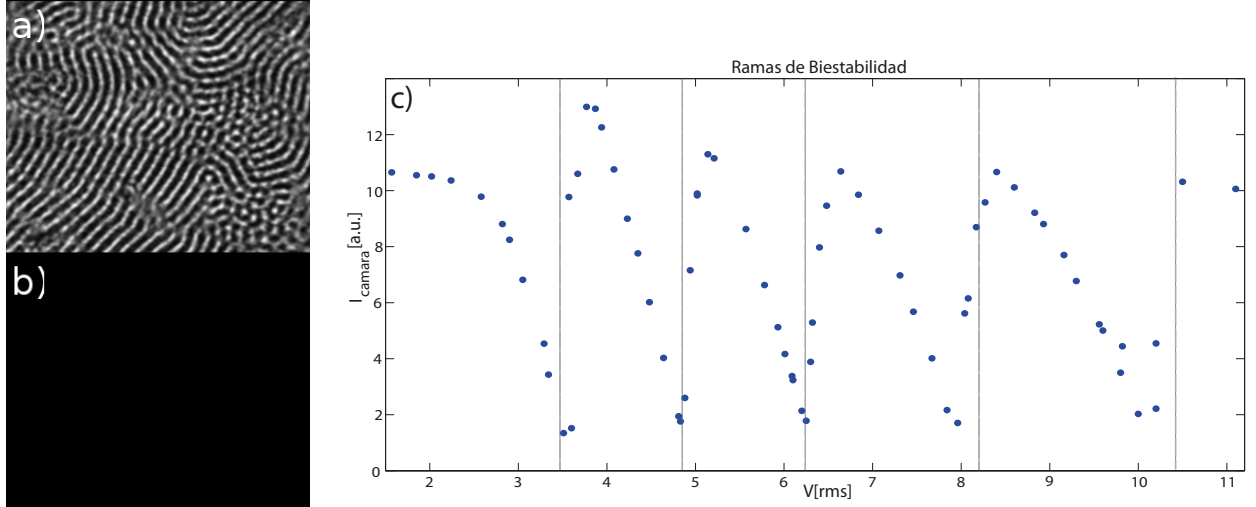


Figura 4.7: Observación experimental de ramas de biestabilidad entre patrones y estados homogéneos para $L = -4,0cm$, la intensidad está en su máximo valor. **a)** Estado patrón. **b)** Estado homogéneo. **c)** Ramas de biestabilidad experimentales.

4.4.3. Estructuras localizadas.

En la vecindad de la transición de las ramas de biestabilidad, los 2 estados tienen posibilidades similares de existir y por lo tanto es donde se espera observar experimentalmente ambas soluciones coexistiendo, ya sea en *frentes* o *estructuras localizadas*. Para lograr esto, fijamos $V_0 = 8,0V[rms]$, cerca del nacimiento de la biestabilidad (cf. Figura 4.7 c) líneas verticales punteadas) y movemos el parámetro I_0 en una pequeña región, lo que nos permite encontrar un intervalo en el espacio de parámetros donde existe biestabilidad como puede apreciarse en la Figura 4.8a). En esa región del espacio de parámetros excitamos el fotoconductor con un puntero láser (lo que equivale a dar diferentes condiciones iniciales para $I_w(\vec{x}, t)$). Algunas posibilidades de la coexistencia de los dos estados en esta región del espacio de parámetros se ilustran en la figura 4.8.

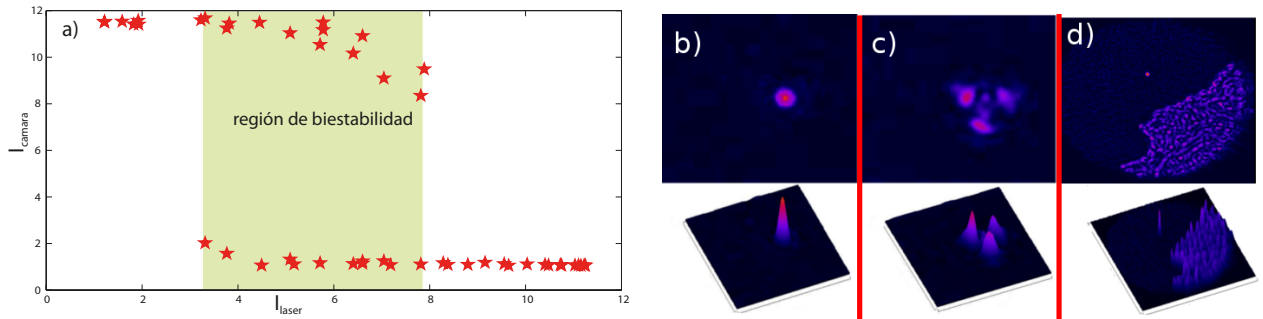


Figura 4.8: **a)** Valor promedio de la intensidad lumínica sobre la cámara en función de la intensidad sobre la válvula de cristal líquido, una región de biestabilidad es apreciada. En esta región pueden ser encontradas los comportamientos ilustrados en **b)**, **c)** y **d)**. **b)** Estructura localizada compuesta por media longitud de onda. **c)** Estructura localizada tipo triángulo. **d)** Frente dinámico que conecta el estado homogéneo con el estado patrón.

La estructura localizada circular (Figura 4.8 **b)**) fue la primera encontrada en este sistema y aparece para un amplio rango de parámetros. En una sub-region de biestabilidad existe la estructura triangular (Figura 4.8 **c)**)(cf. [36] y las referencias ahí). Existe un tercer tipo de estructura, caracterizada por una mayor cantidad de longitudes de onda y por una dinámica permanente; ésta existe en una región del espacio de parámetros aún más pequeña que el triángulo. Esta nueva estructura ha sido encontrada y estudiada por primera vez en esta tesis.

4.4.4. Parámetros extra: rotación y traslación.

En la práctica del experimento, lograr una adecuada calibración de la fibra óptica es una tarea difícil. Normalmente existe un *desplazamiento* y un *ángulo* entre la imagen incidente al fotoconductor y la imagen que incide sobre el cristal líquido. Estos fenómenos introducen un efecto de acoplamiento *no local* en la dinámica del cristal líquido; calibrando correctamente el sistema, el acoplamiento puede ser disminuido hasta volverse casi imperceptibles. Este acoplamiento no local puede ser de dos tipos: *traslación* y *rotación*. Los elementos del experimentos responsables de controlar estos dos efectos juegan un rol de parámetros extra del sistema, gracias a ellos la “zoología” de este experimento es aún más rica. En la siguiente imagen se exponen 2 comportamientos del experimento donde se aprecia sustantivamente la acción de estos fenómenos. Una revisión más completa del rol de estos parámetros puede encontrarse en [37].

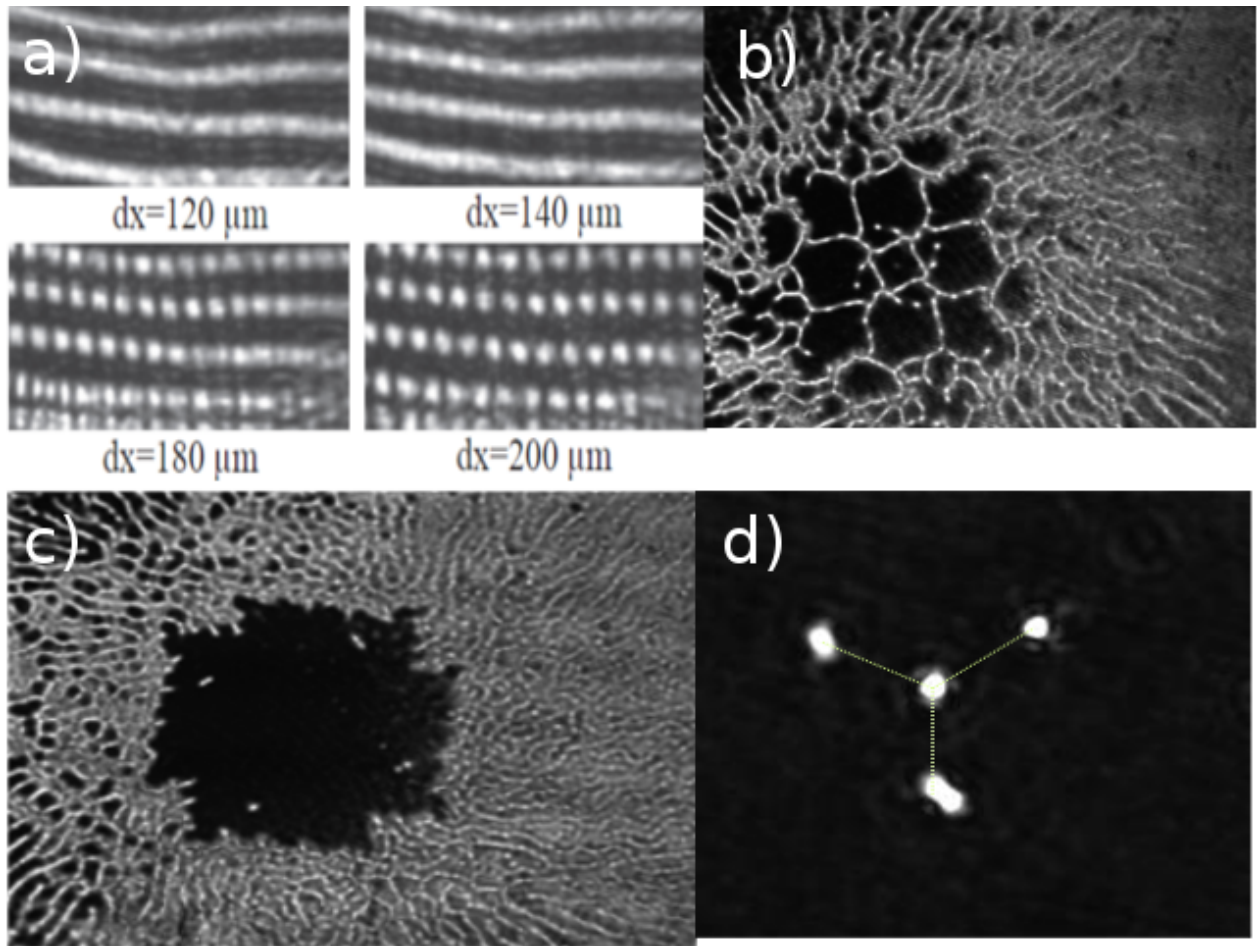


Figura 4.9: **a)** Medición y observación de la traslación (imagen tomada de [37]). **b)** y **c)** Efecto de la rotación en la región de biestabilidad. **d)** Efecto de la rotación en las estructuras localizadas, las líneas amarillas se han dibujado para enfatizar la simetría existente, producto de una rotación en un ángulo $\pi/3$

Parte III
Desarrollo.

Capítulo 5

Presentación del problema.

5.1. Motivación.

La investigación hecha en esta tesis se encuentra motivada por 2 observaciones recientes realizadas en el experimento de la válvula de cristal líquido con retro-inyección óptica **L.C.L.V** (4). Los comportamientos característicos de este experimento son: patrones, estados homogéneos y biestabilidad entre ambos, lo que da lugar a frentes y estructuras localizadas [36]. Si bien el modelo teórico (4.3) es eficaz en reproducir la dinámica, no es práctico desde un punto de vista analítico, debido a su complejidad evidente no lineal y no variacional. En esta dirección se han propuesto modelos más simples que reproduzcan cualitativamente la dinámica, ejemplos de esto son ecuaciones de *Swift-Hohenberg* (2.5),(2.12), las que son capaces de reproducir patrones y estructuras localizadas, pero que fallan en ser deducidos desde (4.3) y en explicar algunos comportamientos tales como:

- **Dinámica permanente sobre el patrón:**

En la observación de patrones en este experimento, siempre se observa una dinámica permanente sobre el mismo, la cual no puede ser explicada a partir solamente del ruido o interacciones no locales o imprecisiones experimentales.

- **Caotición:**

Existe un tipo de estructura localizada estable distinta a las normalmente observadas (cf.Fig 4.8 b),c) y d)), la cual existe en una pequeña región del espacio de parámetros. Esta estructura localizada, que fue observada por primera vez por *Umberto Bortolozzo* y bautizada por el *Dr.Marcel Clerc* como *Caotición*, corresponde a un patrón localizado que exhibe dinámica permanente, posiblemente caótica. En la figura

5.1b) e han puesto varias instantáneas del Caotición observado por el Dr. U. Bortolozzo.

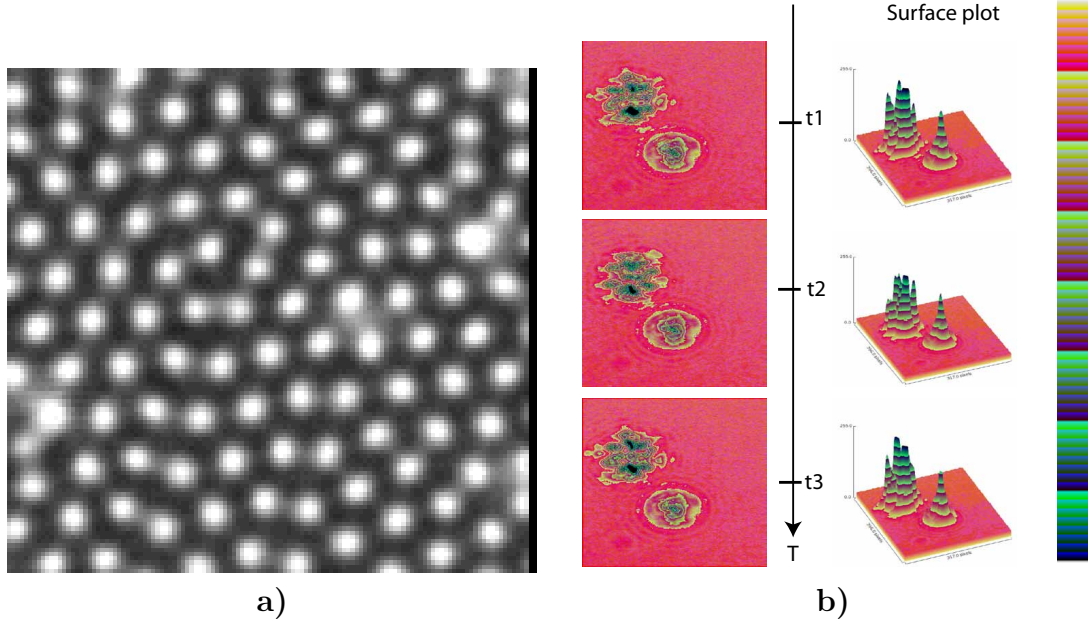


Figura 5.1: Observaciones en el experimento **L.C.L.V** con dinámica permanente. a) Patrón extendido (tomadas de [36]). b) Distintas instantáneas del Caotición.

Estas dos observaciones experimentales son las que motivaron la investigación en esta tesis.

5.2. Ecuación de Lifshitz.

Los ingredientes dinámicos en el experimento **L.C.L.V** son la biestabilidad (cf. 2.2.1) y la inestabilidad espacial (cf. 2.5). Si suponemos que estos ingredientes surgen de manera continua, un modelo que describe cualitativamente la variable dinámica es (2.5):

$$\partial_t u = \eta + \epsilon u - u^3 + \nu \nabla^2 u - \nabla^4 u \quad (|\eta|, |\nu|, |\epsilon| \ll 1)$$

Como vimos en (2.2.1) cuando ϵ se vuelve positivo nace la biestabilidad, análogamente, cuando ν se vuelve negativo en el modelo (2.5) tiene lugar la inestabilidad espacial de la que nacen patrones. A este punto de confluencia del nacimiento de la biestabilidad y la inestabilidad espacial se le conoce con el nombre de *punto de Lifshitz* [54, 5].

Para el modelo (2.5) podemos realizar el siguiente *scaling* (cf. 2.2.1):

$$\partial_t \sim \epsilon, \eta \sim \epsilon^{3/2}, u \sim \epsilon^{1/2}, \partial_x \sim \epsilon^{1/4}, \nu \sim \epsilon^{1/2}$$

Y adicionalmente observar que la ecuación posee una simetría de traslación espacial; por otra parte, en una dimensión, podemos proponer la generalización al modelo (2.5):

$$\boxed{\partial_t u = \eta + \epsilon u - u^3 + \nu \partial_{xx} u - \partial_{xxxx} u + c(\partial_x u)^2 + bu(\partial_{xx} u)} \quad (|\eta|, |\epsilon|, |\nu| \ll 1, b, c \sim O(1)) \quad (5.1)$$

Y observar que tanto el *scaling* como la simetría de traslación espacial se siguen cumpliendo, sin embargo, la introducción de los parámetros c y b , hacen que este nuevo modelo ya no sea *variacional* (cf. 2.8). Los parámetros b, c son parámetros de orden uno, los términos asociados a cada uno de ellos corresponden a una *difusión no lineal* y una *advección no lineal* respectivamente. Notamos que *no* es posible agregar más términos a esta ecuación de tal forma que se siga cumpliendo es *scaling* y la simetría ya mencionada (sin introducir un nuevo parámetro de orden) , en este sentido el modelo (5.1) es el modelo más general en describir un sistema en la vecindad de un punto de *lifshitz*, por lo que ha sido bautizada como *Forma Normal de Lifshitz* (**F.N.L.**). Como es de esperarse, esta ecuación ha sido derivada en variados contextos [55, 12] tales como modelos neuronales, oscilaciones químicas, etc. En particular, el modelo (5.1) puede ser derivada a partir del modelo teórico (4.3) para el experimento **L.C.L.V.** [40].

Como señalamos anteriormente, la **F.N.L.** es en general *no* variacional, una excepción ocurre en el caso particular $b = 2c$ donde podemos escribir el funcional:

$$\mathcal{F} = \int \left(-\eta u - \frac{\epsilon u^2}{2} + \frac{u^4}{4} + \frac{\nu(\partial_x u)^2}{2} + \frac{\partial_{xx} u)^2}{2} + cu(\partial_x u)^2 \right) dx$$

Fuera de este caso particular, la **F.N.L.** es no variacional, lo que significa que *puede* presentar comportamientos permanentes. Investigando numéricamente el espacio de parámetros, vemos que existe una región de parámetros en que la **F.N.L.** presenta patrones extendidos y localizados, sobre los cuales ocurre una dinámica permanente. En la siguiente Figura 5.2 se han ilustrado los comportamientos permanentes para el fenómeno extendido (**a**) y localizado (**b**):

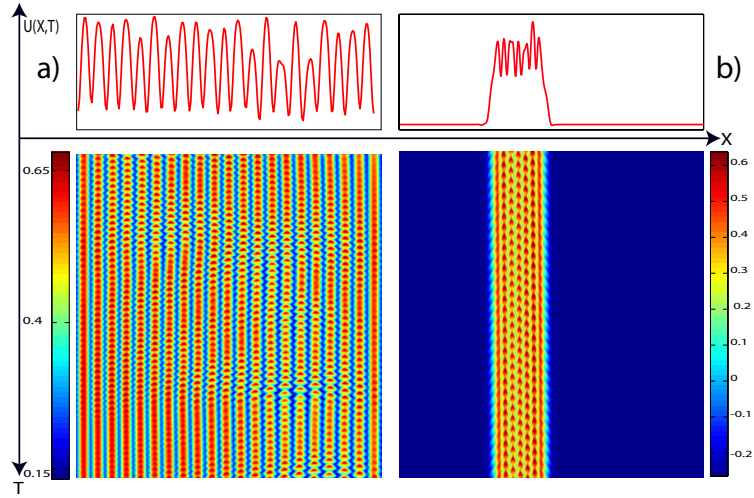


Figura 5.2: Comportamientos permanentes para la F.N.L. para los valores de los parámetros $\eta = -0,04$, $\epsilon = -0,0921$, $\nu = -1$, $c = 10$, $b = -3,0$ a) Estado extendido. b) Estado localizado Caoticoón.

5.3. Preguntas de la Tesis.

A partir de los comportamientos de la experimento L.C.L.V. y las observaciones numéricas de la F.N.L surgen las siguientes preguntas:

1. **¿Dónde existe el Caoticoón?**

A pesar de la observación de *U.Bortolozzo*, desconocemos la región de existencia de esta estructura localizada en el espacio de parámetros.

2. **¿Cómo puede describirse el Caoticoón a partir de un modelo?**

Si bien la F.N.L. presenta comportamientos numéricos como el Caoticoón (cf. Figura 5.2b)) y ella puede ser obtenida a partir del modelo teórico del experimento L.C.L.V. A partir de esta ecuación no es sencillo llevar a cabo ningún análisis que permita mostrar la estabilidad de estas soluciones o su comportamiento dinámico.

3. **¿Cómo surgen los comportamientos complejos en la F.N.L?**

Dado que la F.N.L. aparece en variados contextos, revelar el escenario o ruta que origina el comportamiento caótico visto en ella es de gran interés.

A lo largo de la segunda parte de la tesis, hemos revisado conceptualmente las herramientas y dominios de la física que competen a estas preguntas con el fin de dar sustento teórico, revelar el estado del arte e ilustrar que las preguntas que nos estamos haciendo son interesantes y *no* han sido contestadas.

Capítulo 6

Desarrollo del problema.

6.1. Ruta al Caos en la ecuación de Lifshitz.

El análisis efectuado en esta sección es principalmente numérico, en la integración de la ecuación diferencial parcial dada por el modelo (5.1) se han utilizado diferencias finitas para el espacio con condiciones de borde tipo *flujo nulo* y se ha integrado en el tiempo con un *Runge-Kutta* de cuarto orden.

Nuestra motivación es comprender los mecanismos responsables de desarrollar comportamientos complejos extendidos como los vistos en la figura 5.2 a). Investigando numéricamente el modelo (5.1), observamos que conforme hacemos más pequeño el parámetro no variacional responsable de la advección no lineal c existe un progresivo apaciguamiento de la dinámica permanente hasta obtener un patrón estático. Esta modificación continua del estado del sistema a lo largo de un intervalo $c \in [c_{in} : c_{fin}]$, puede entenderse como una *ruta* al caos (cf. sección 3.3) para sistemas extendidos.

Observando con mayor detalle el comportamiento en el intervalo de c podemos distinguir *tres* zonas de dinámica cualitativamente diferente (cf. Figura 6.1) zonas *I, II* y *III*). Calculando del máximo exponente de *Lyapunov* nos da información relevante sobre el comportamiento del sistema en cada una de las zonas, utilizando las técnicas de la sección 3.2, podemos calcular esta magnitud a lo largo del intervalo en c y comprender la naturaleza de la dinámica en cada caso. En la siguiente figura se presenta una grafica del máximo exponente de *Lyapunov* en función de c , adicionalmente se han superpuesto diagramas espacio temporales y espectros de frecuencias representativos de cada zona:

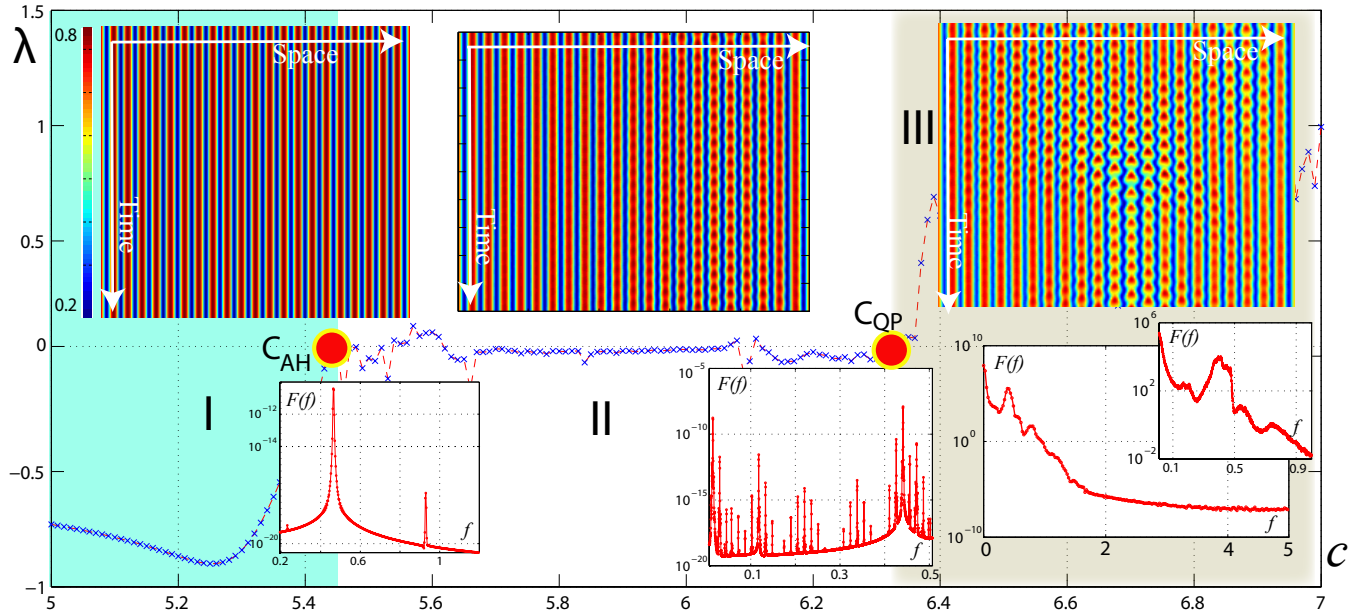


Figura 6.1: **Ruta al caos en la ecuación de Lifshitz.** Calculando el máximo exponente de Lyapunov (línea roja con puntos azules) para las soluciones presentadas, pueden distinguirse 3 Zonas: I,II y III. **Mitad Superior:** Comportamientos típicos del sistema ilustrados con un diagrama espacio temporal en cada caso. **Mitad Inferior:** Espectros de frecuencias de la suma de todos los puntos espaciales de la simulación de cada caso.

A partir del valor del máximo exponente de *Lyapunov*, conforme a lo señalado en la sección 3.2, podemos describir los comportamientos de las diferentes zonas de la ruta como sigue:

- Zona I $c \in [4 : c_{ah}[$
La dinámica está caracterizada por un estado de equilibrio dado por un patrón estacionario, cuyo máximo exponente de *Lyapunov* es negativo.
- Zona II $c \in]c_{ah} : c[$
Tras pasar por el punto de bifurcación c_{ah} , el sistema presenta oscilaciones de frecuencia bien definida, lo que es consistente con un máximo exponente de *Lyapunov* nulo. El sistema oscila entre el estado patrón original y un patrón con el doble de periodo espacial que el original, el cual tiene un perfil gausseano (cf.Figura 6.2 b)).
- Zona III $c \in]c : 10]$
Se observa una dinámica compleja tanto en el espacio como en el tiempo cuantificada por un máximo exponente de *Lyapunov* positivo. Si bien la frecuencia de oscilación y la longitud de onda espacial heredadas de la

Zona II se mantienen como el fenómeno más relevante de la dinámica, existen otras frecuencias de oscilación temporal. El sistema oscila entre el patrón original y patrones localizados con una longitud de onda espacial 2^n respecto a la original, estos patrones pueden desplazarse sobre el patrón.

A partir de este análisis, encontramos 2 bifurcaciones cuyos valores de c son c_{ah} y c_{qp} respectivamente.

6.1.1. Primera Bifurcación $c = c_{AH}$.

Tras sobrepasar el valor c_{ah} , el sistema comienza a oscilar producto de una bifurcación de Andronov-Hopf (cf. sección 2.2.2). Si consideramos el sistema como un sistema discreto (en la simulación numérica esto siempre es así), podemos realizar un análisis de estabilidad lineal para el sistema dinámico de dimensión N (donde N es la cantidad de puntos en la discretización espacial de la simulación). En la Figura 6.2a) se ha ilustrado el espectro numérico de la solución en el punto c_{ah} , en la figura 6.2b) se ha graficado la parte real del vector propio \vec{v}_j asociado al modo que pierde estabilidad lineal (\vec{v}_j tq $Im(\lambda_j) = 0$); la solución patrón estacionario se ha graficado en la Figura 6.2c) para realzar el fenómeno del doblamiento de periodo espacial.

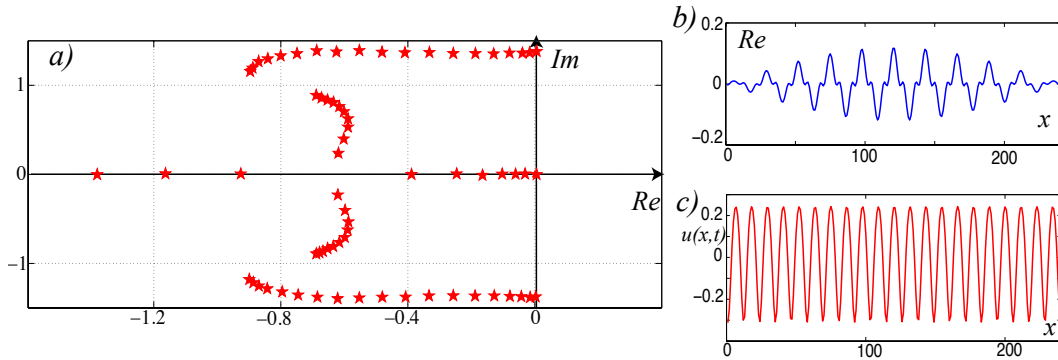


Figura 6.2: **Bifurcación de Andronov-Hopf para $c = c_{AH}$** : **a)** Espectro numérico de la solución tipo patrón. **b)** Parte real del vector propio asociado al modo inestable. **c)** Solución tipo patrón, estable para $c < c_{AH}$.

A lo largo de la Zona II ($c > c_{AH}$), existe una sola frecuencia $\omega(c)$ (cf. Figura 6.1 el primer espectro de izq. a der.). En resumen, la dinámica de esta región está caracterizada por oscilaciones espacio-temporales.

6.1.2. Segunda Bifurcación $c = c_{qp}$.

La bifurcación que ocurre en c_{qp} conecta un estado oscilatorio con un estado caótico espacio-temporal. Si observamos los espectros de frecuencias de las Zonas II y III, vemos entre ellos una diferencia cualitativa. En la Zona II existen varias frecuencias presentes, un análisis más cuidadoso revela que al menos tres de ellas son inconmensurables (linealmente independientes); más importante aún, las frecuencias de oscilación presentes en el sistema *no* son iguales para las evoluciones temporales de los distintos puntos espaciales del sistema.

A la luz de los espectros de frecuencias, es natural pensar que se ha alcanzado un comportamiento caótico vía quasiperiodicidad para sistemas extendidos. Para poder afirmar este supuesto, de acuerdo a lo expuesto en la sección 3.3), debería ser posible encontrar un tercer punto de bifurcación c_{ah2} situado en $c_{ah} < c_{ah2} < c_{qp}$, donde aparezca una segunda frecuencia inconmensurable con la primera. Al momento de escribir esta tesis, los resultados sobre la existencia de esta segunda bifurcación aún no son concluyentes.

6.1.3. Análisis del sistema utilizando la P.O.D.

En nuestro intento por describir la dinámica del sistema a lo largo de la ruta, para estados representativos de cada una de las Zonas podemos realizar una *descomposición propia orto-normal* (**P.O.D.** por sus siglas en inglés). El objetivo de la **P.O.D.** es encontrar, a partir de los datos, la base que minimice la cantidad de modos para reproducir los datos; para una rápida referencia sobre la **P.O.D.** consultar el Apéndice B, para un estudio a profundidad ver [56].

Utilizaremos la **P.O.D.** para analizar los estados representativos de la Figura 6.1 (diagramas $x - t$ de la mitad superior), donde cada muestra de datos tiene los siguientes parámetros en su simulación:

$$X = 256 \times dx \quad (dx = 0,6) \quad T = 1024 \times dt \quad (dt = 0,01)$$

La **P.O.D.** nos permite conocer cuantos modos son necesarios para “atrapar” el 99% de la dinámica en cada una de las Zonas. A continuación una tabla con la cantidad de modos en función del valor del parámetro c :

Zona	c	# modos
I	4,83	1
II	5,62	3
III	10	9

Para cada Zona podemos observar las auto-funciones y los coeficientes responsables de atrapar el 99 % de la dinámica.

- Zona I $c = 4,83$

Para esta Zona, existe un solo modo propio: el patrón. Su dinámica temporal es estacionaria, esta información se encuentra resumida en la siguiente figura.

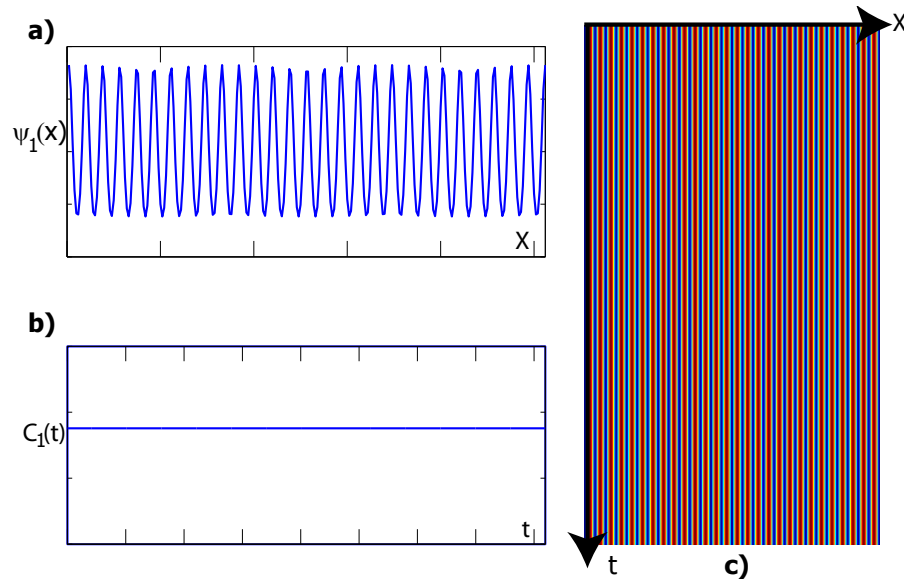


Figura 6.3: **a)** Auto-función $\psi(x)$, **b)** Coeficiente temporal $C(t)$, **c)** Señal reconstruida $u(x,t) = C(t) \cdot \psi(x)$.

- Zona II $c = 5,62$

El análisis del método de la **P.O.D.** nos revela que existen 3 modos necesarios para representar esta dinámica. Al observar las auto-funciones y los coeficientes temporales respectivos (cf. Figura 6.4, estos nos revelan que la dinámica permanente ocurre *sobre* el patrón.

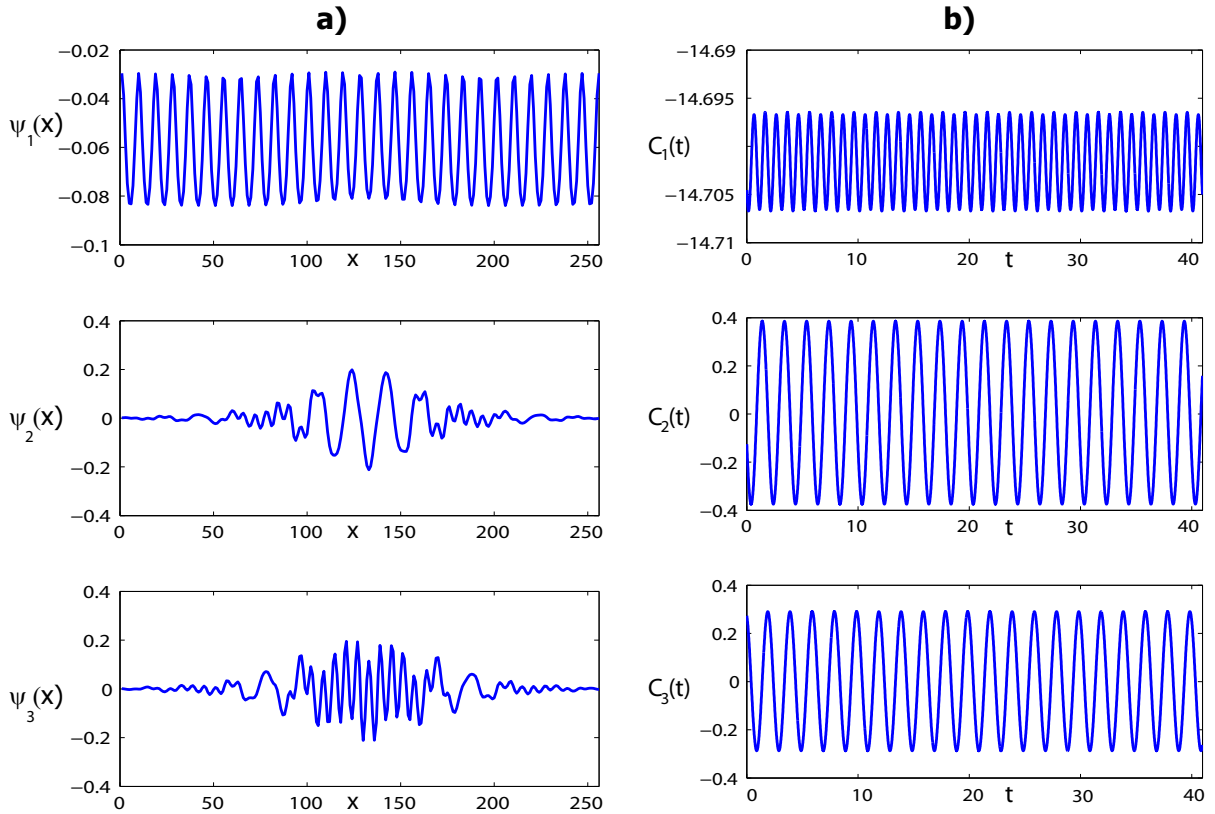


Figura 6.4: Ordenadas por importancia desde arriba hacia abajo **a)** Auto-funciones **b)** Coeficientes.

A partir de la Figura 6.4, observamos que la primera auto-función $\psi_1(x)$ es el patrón, cuya dinámica $C_1(t)$ es despreciable, la segunda auto-función $\psi_2(x)$ es un patrón con amplitud decreciente hacia los extremos, cuya longitud de onda es el doble de la de $\psi_1(x)$; $\psi_2(x)$ oscila con una frecuencia bien definida como puede verse en $C_2(t)$. Finalmente, la tercera auto-función $\psi_3(x)$ es un patrón localizado, cuya longitud de onda es la mitad de la de $\psi_1(x)$, $\psi_3(x)$ oscila con una frecuencia igual a $\psi_2(x)$, esto puede verse comparando $C_2(t)$ y $C_3(t)$.

A partir de este análisis, podemos describir la dinámica de la zona II como una superposición de la reconstrucción de los distintos modos. En la siguiente figura se ha ilustrado la reconstrucción de cada uno de estos modos por separado.

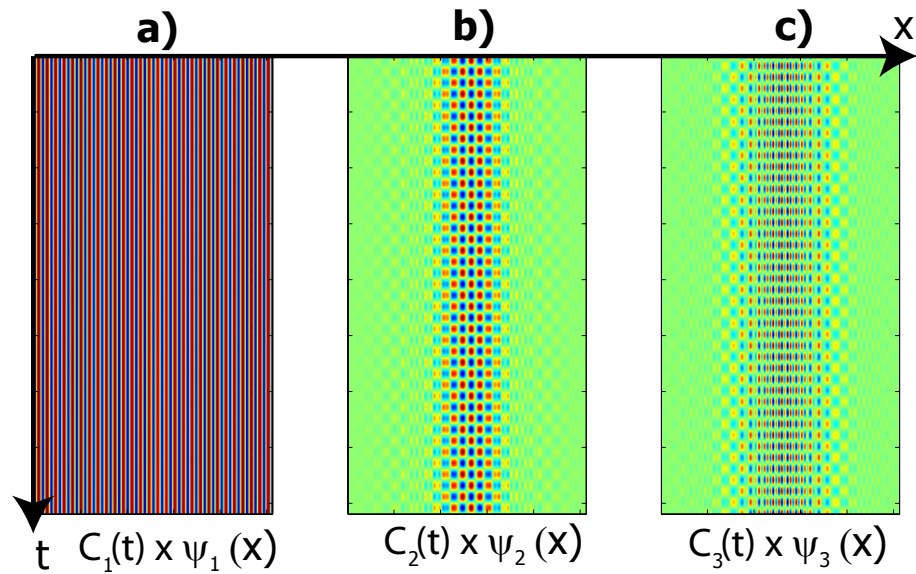


Figura 6.5: Para $c = 10$ **Reconstrucción de la Señal** Usando el primer, segundo y tercer modo, respectivamente a),b),c).

Al sumar estos 3 modos se obtiene la dinámica de la señal original (cf. Figura 6.6 b)).

Dado que la dinámica viene dada por los modos 2 y 3 solamente, podemos *observar el espacio de fase* graficando $C_2(t)v/sC_3(t)$ (ver el Apéndice B).

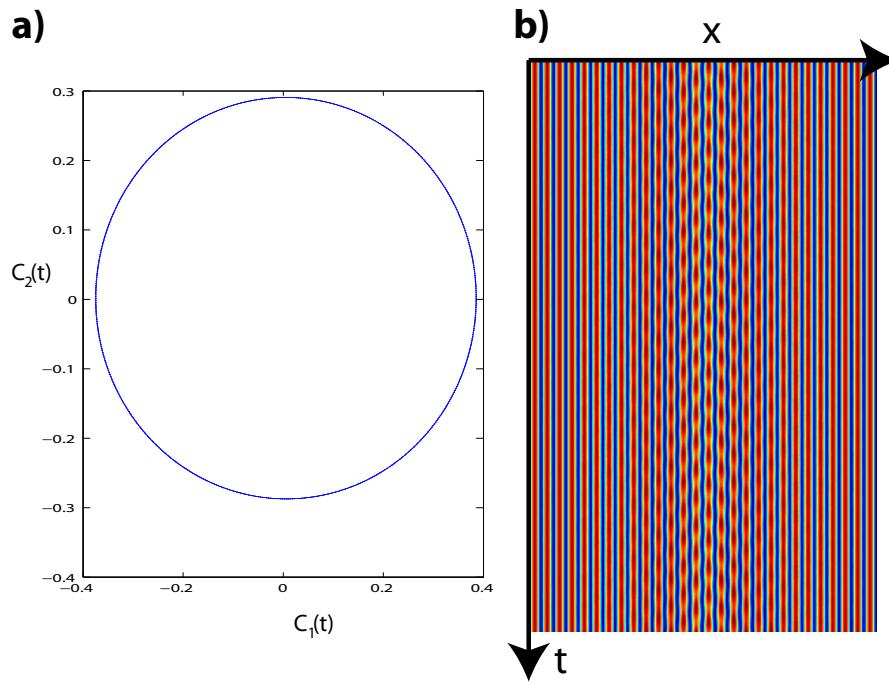


Figura 6.6: **a)**Espacio de fase obtenido al graficar $C_1(t)v/sC_2(t)$.**b)** Señal original.

El gráfico del espacio de fase es presentado en la Figura 6.6 a), a partir de él vemos que la dinámica está gobernada por un ciclo límite.

En resumen, para la Zona II, la dinámica ilustrada en la Figura 6.6b), puede ser entendida como una superposición de un patrón estático (cf. Figura 6.5a)) con dos patrones: uno con el doble (cf. Figura 6.5b)) y otro con la mitad (cf. Figura 6.5c)) de la longitud de onda espacial del patrón original $\psi_1(x)$. Estos patrones $\psi_1(x), \psi_2(x)$, oscilan con una frecuencia bien definida (cf. Figura 6.4b) $C_2(t), C_3(t)$.

■ Zona III $c = 10$

Para esta Zona, son necesarios muchos modos (nueve) para atrapar el 99% de la dinámica. En la siguiente figura presentamos las primeras ocho auto-funciones y sus coeficientes temporales asociados:

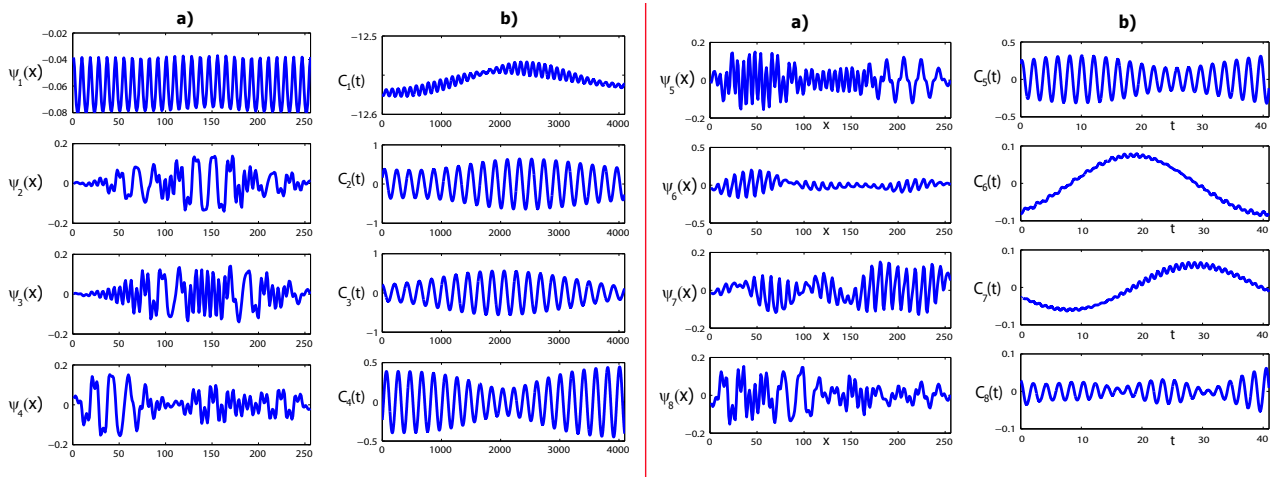


Figura 6.7: a) Auto-funciones 1-8, b) Coeficientes 1-8.

Si bien la cantidad de modos se ha incrementado respecto a la Zona II, podemos notar que, salvo que la longitud de onda para los patrones localizados ya no es tan clara, la base no ha cambiado significativamente. Observando los primeros 3 modos para $c = 10$ (cf. Figura 6.7), vemos que son similares a los 3 modos de la Zona II: el primer modo es un patrón estático de longitud de onda λ , el segundo un patrón localizado con una longitud de onda 2λ y el tercero un patrón localizado de longitud de onda $\lambda/2$. En los coeficientes temporales de estos 3 modos $C(t)$ seguimos viendo una frecuencia bien definida, adicionalmente se puede apreciar la aparición de una nueva frecuencia de oscilación en la envolvente de los coeficientes.

Para el resto de los coeficientes no es simple hacer una interpretación, sin embargo, cualitativamente puede apreciarse que espacialmente todos los modos presentan las longitudes de onda $\lambda, \lambda/2, 2\lambda$; para los coeficientes temporales vemos las mismas dos frecuencias de oscilación que en los 3 primeros modos, con diferente importancia en cada caso (en $C_5(x)$ la envolvente es poco importante, contra $C_6(t)$ y $C_7(t)$ donde la frecuencia “lenta” es la más importante).

Si realizamos una reconstrucción con los modos, para los tres primeros modos obtenemos una imagen cualitativamente equivalente a la presentada en la Figura 6.5. No podemos graficar el atractor con los 8 modos relevantes en la dinámica, para los primeros 3 el atractor ha sido graficado en la Figura 6.8 b); donde si bien no puede distinguirse un atractor extraño, se ve que la dinámica es muy similar a un toro a 3 frecuencias (cf. sección 3.3).

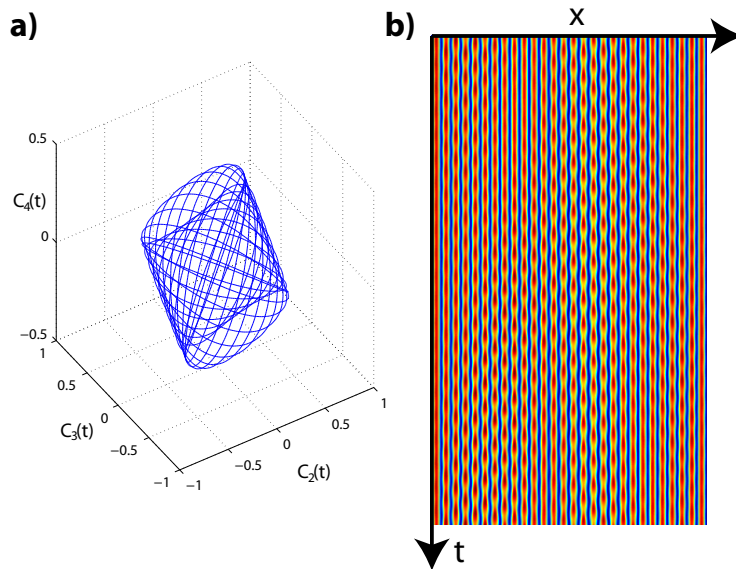


Figura 6.8: **a)** Reconstrucción del espacio de fase con 3 modos más importantes con dinámica $C_2(t) \times C_3(t) \times C_4(t)$. **b)** Señal original.

En resumen, podemos describir la dinámica en esta Zona, como la misma dinámica de la Zona II, donde adicionalmente se han agregado nuevos modos y la inclusión de una nueva frecuencia “lenta”.

6.2. Observación Experimental del Caotícón en el experimento L.C.L.V.

En abril de 2012, realizamos mediciones en el experimento L.C.L.V., en las que encontramos: frentes homogéneos, patrones, estructuras localizadas, etc. En la sección 4.4 del Capítulo 4 se presentan varios de los resultados obtenidos, en particular fuimos capaces de reencontrar las ramas de biestabilidad predecidas por el modelo teórico (4.3) (cf. Figura 4.7 c)).

Con el fin de encontrar experimentalmente el Caotícón, modificamos el montaje experimental esquematizado en la Figura 4.4, agregando un dispositivo experimental llamado “acousto-optic modulator” (también conocido como celda de bragg), el cual nos permitió regular de manera fina el parámetro de la intensidad del láser incidente sobre la válvula, parámetro I_0 . Con este nuevo montaje, nos posicionamos en el espacio de parámetros cercano al nacimiento de la biestabilidad en alguna de las ramas, para luego modificar la intensidad I_0 de manera fina, de esta forma fuimos capaces de encontrar experimentalmente una región de biestabilidad, los datos se encuentran graficados en la Figura 6.9 II).

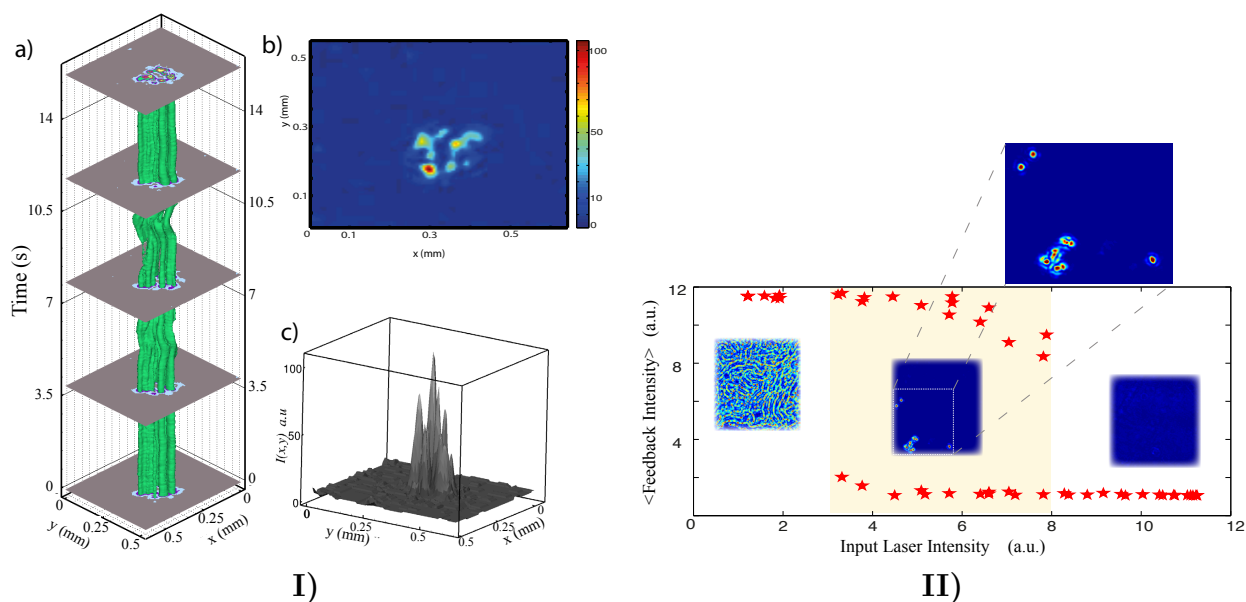


Figura 6.9: I) Observación experimental del Caotícón para los parámetros $L = -4cm, V_0 = 7, 85$ II) Observación experimental de la biestabilidad entre un estado patrón (para una baja intensidad del láser) y un estado homogéneo (para una alta intensidad del láser), en la región intermedia coloreada pueden apreciarse estructuras localizadas. Las estrellas rojas corresponden a la intensidad lumínica promedio sobre la cámara para los distintos valores de I_0 .

Dentro de la región de coexistencia entre estado homogéneo y patrón (zona coloreada “nude” en la Figura 6.9 II)) podemos observar estructuras localizadas de manera persistente y estable. En una subregión es posible encontrar en particular el Caoticón. En la Figura 6.9 I),a) se ha graficado la dinámica temporal de esta estructura localizada, en la parte b) de esta misma Figura, se observa una imagen del Caoticón como se observa experimentalmente para un instante dado, c) es un grafico del campo escalar de la intensidad observada sobre la cámara.

6.3. Teoría del “Caoticón”.

Ahora que se conoce experimentalmente la existencia y región de parámetros donde el Caoticón es estable, el paso siguiente es encontrar un modelo que muestra su existencia. El Caoticón es un fenómeno universal que corresponde a la localización de un patrón caótico, en su coexistencia con un estado homogéneo. A partir de su naturaleza universal es que esperamos encontrarlo en diversos contextos, es en este sentido que utilizar el modelo (4.3) solo mostrara su existencia en el contexto del experimento **L.C.L.V.** Como ya hemos mostrado en el Capítulo anterior, un modelo universal que puede ser derivado en variedad de contextos, en particular a partir del modelo teórico (4.3) del experimento **L.C.L.V.** y que además presenta soluciones Caoticón, es la *Forma Normal de Lifshitz* **F.N.L.** (5.1). En la Figura 6.10 a) se muestra un diagrama espacio temporal de un Caoticón para la **F.N.L.**

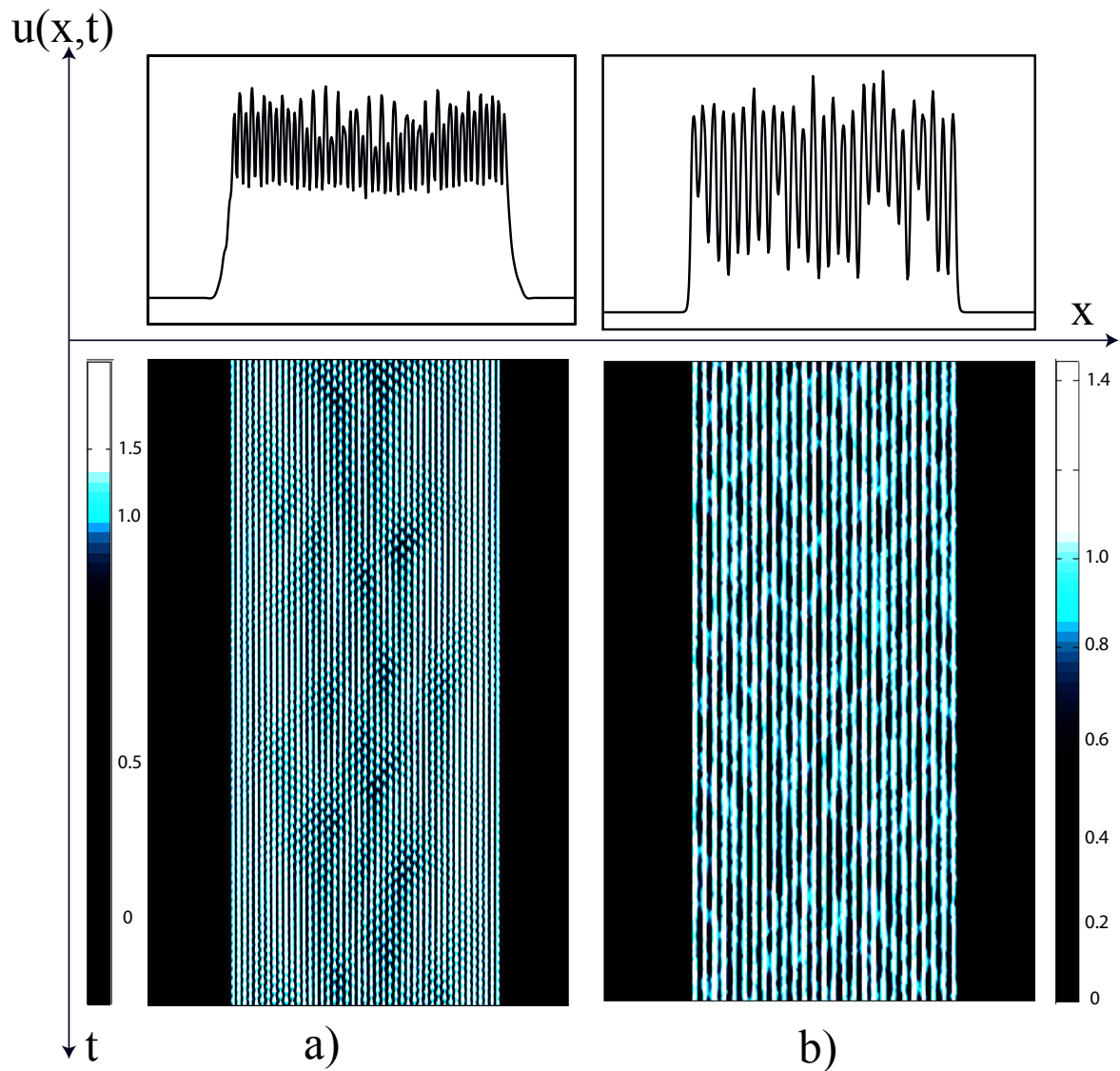


Figura 6.10: **a)** Caotición para el modelo de Lifshitz para los valores de los parámetros $\eta = -0,04$, $\epsilon = -0,0921$, $\nu = -1$, $c = 10$, $b = -3,7$. **b)** Solución Caotición para el modelo de Nagumo-Kuramoto en los valores de los parámetros $\alpha = 0,5$, $\beta = 0,3$, $k = 11$, $\gamma = 0,3$.

A partir de la observación numérica este tipo de estructuras localizadas en la **F.N.L**, podemos medir el máximo exponente de *Lyapunov* con el fin de decidir si se trata de un comportamiento caótico. Para llevar esto a cabo, utilizamos la técnica vista en (3.2.4), preocupándonos de que la perturbación $\delta u(x, t)$ tenga soporte no nulo solamente en la región donde existe el patrón. Realizando este cálculo numérico encontramos que se trata de una partícula cuya dinámica es caótica. Podemos ir más allá y estudiar la dependencia del número de longitudes de onda presentes en el patrón localizado con la magnitud del máximo exponente de Lyapunov, en la Figura 6.11 se han resumido

estas mediciones:

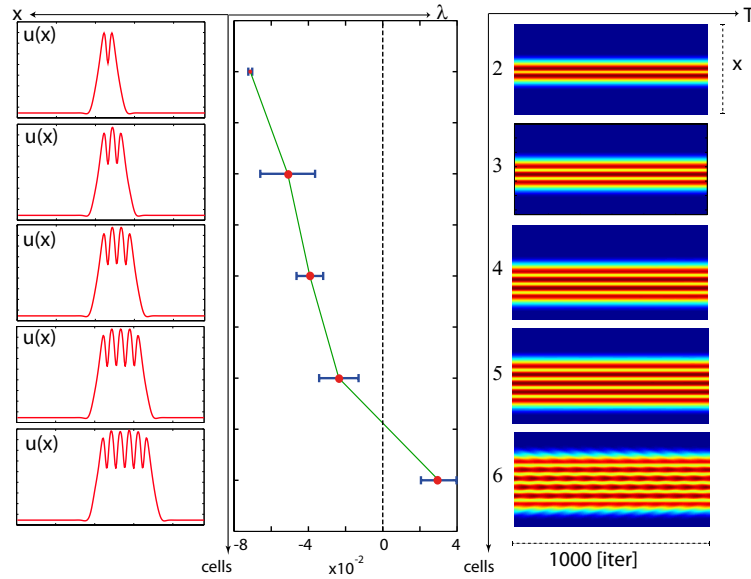


Figura 6.11: **Renglón izquierdo:** Soluciones tipo patrón localizado a tiempo fijo con diferente cantidad de longitudes de onda. **Renglón central** Máximo exponente de Lyapunov para cada caso, con su respectiva barra de error. **Renglón Derecho** Comportamiento espacio temporal para cada una de las soluciones.

Esto indica que existe un número crítico de máximos (o fracción de longitud de onda), presentes en la estructura localizada, necesarios para tener una dinámica permanente. Esta idea fue estudiada por *Kuramoto* [23], quien estudia el problema de la transición al caos mediante una adición de modos. Esto muestra que el caos espacio-temporal solo emerge para un tamaño mínimo.

Si bien la **F.N.L.** presenta numéricamente el Caotición como solución, desconocemos los métodos para realizar cálculos analíticos sobre la misma. Con el fin de entender los mecanismos que dan origen a estas estructuras localizadas vamos a proponer un modelo simple que contiene los ingredientes dinámicos de este problema: biestabilidad de un estado patrón caótico con un estado homogéneo.

6.3.1. Modelo de Nagumo-Kuramoto.

En la sección 2.6.4 se ha introducido el modelo de *Nagmo* para estudiar el fenómeno de *bloqueo*, el modelo de *Nagumo* (2.14) es un modelo simple que consiste en un sistema dinámico con 3 puntos de equilibrios, un sólo parámetros y un termino de difusión espacial. En la sección 2.6.4 realizamos una

modificación del modelo (2.16), creando de esta forma un modelo que presenta biestabilidad entre un estado homogéneo y uno patrón. Esta modificación nos permitió mostrar que al existir una longitud de onda característica en el sistema, aparece un fenómeno de bloqueo. En esta sección haremos una segunda modificación del modelo la que llamaremos *Modelo de Nagumo-Kuramoto*:

$$\partial_t u = u(u - 1)(\alpha - u) + \partial_{xx} u + u \cos(kx) (\beta + \gamma \partial_x \Psi) \quad (\beta, \alpha, \gamma \ll 1) \quad (6.1)$$

$$\partial_t \Psi = (\partial_x \Psi)^2 - \partial_{xx} \Psi - \partial_{xxxx} \Psi, \quad (6.2)$$

La primera ecuación (6.1) corresponde a una variación de (2.16) la cual hemos acoplado con una señal caótica espacio temporal, por simplicidad hemos escogido la ecuación de *Kuramoto-Sivashinsky* (6.2) (cf. sección 3.1.3). De esta manera, este modelo presenta biestabilidad entre un estado homogéneo ($u = 0$) y un estado patrón sobre el cual existe caos espacio-temporal. En la Figura 6.10 b) se ha presentado un diagrama espacio temporal para una solución Caótica en este modelo. Para este modelo podemos hacernos las mismas preguntas que para su versión simplificada (2.16).

6.3.2. Dinámica del frente.

Podemos estudiar la dinámica de un frente y reobtener la imagen de una partícula atrapada en un potencial exactamente de la misma forma que hicimos en la sección 2.6.4, la solución es cualitativamente la misma: una partícula atrapada en un potencial. La diferencia fundamental introducida por el término caótico, radica en que el potencial ahora se mueve en el tiempo de manera caótica. En función del valor de los parámetros de *desbloqueo* $\Delta = \alpha - 1/2$ y la magnitud del caos γ , podemos encontrar regímenes donde el sistema es capaz de hacer transiciones “espontáneas” a distintos mínimos del potencial. Los cálculos del potencial están realizados en detalle en el Apéndice A. En la siguiente Figura se ha puesto una vez más la figura del potencial de 2.6.4:

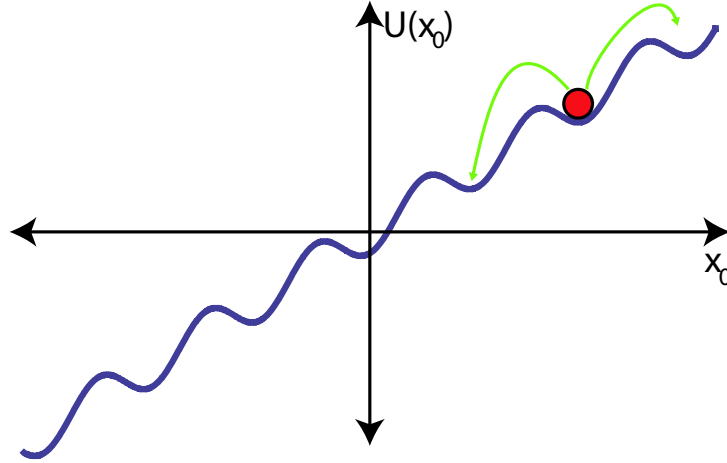


Figura 6.12: Potencial de la dinámica del core. En este caso un movimiento caótico del potencial (o de la partícula si nos ponemos en un sistema solidario al potencial)

6.3.3. Estructuras localizadas.

Siguiendo exactamente la misma estrategia que en la sección ?? podemos estudiar la existencia y estabilidad de las estructuras localizadas proponiendo un *Ansatz* de la forma:

$$u_{loc}(x) = [u_+(x - \delta_+) + u_-(x - \delta_-) - 1] + W(\delta_+, \delta_-, t) \quad (W \ll 1)$$

En el modelo de *Nagumo-Kuramoto*, los resultados obtenidos son análogos al caso anterior $\gamma = 0$, salvo que ahora el potencial del centro de gravedad de la estructura localizada oscila en torno a una posición y puede ser desplazado de manera “espontánea” por una gran excursión del caos.

Análogamente, para el caso de la talla de estructuras localizadas, existe una familia de posibles estructuras localizadas de diferente talla, la estabilidad de las mismas oscila de manera caótica. El sistema dinámico acoplado que da cuenta de la dinámica de la talla $\xi = (\delta_+ - \delta_-)/4$ y la posición del centro de gravedad de la estructura localizada $\chi = \sqrt{2}(\delta_+ + \delta_-)/4$ es, al orden dominante:

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= A_1(t) \cos(k\chi) \cos(k\sqrt{2}\xi) + B_1(t) \sin(k\chi) \sin(k\sqrt{2}\xi), \\ \dot{\xi} &= \frac{\Delta}{2} + be^{-\xi} + A_2(t) \cos(k\chi) \cos(k\sqrt{2}\xi) \\ &\quad + B_2(t) \sin(k\chi) \sin(k\sqrt{2}\xi), \end{aligned} \quad (6.3)$$

Donde $b \equiv 9\sqrt{2}/8$, los términos $\{A_1(t), A_2(t), B_1(t), B_2(t)\}$ corresponden a los productos punto de la solución por la señal espacio temporal caótica del mod-

elo (6.2) y por lo tanto no pueden ser integrados exactamente. En la siguiente Figura se presenta un grafico del plano de fase para el sistema dinámico (6.3) para χ dado y a tiempo fijo (notemos que el sistema ya no es autónomo).

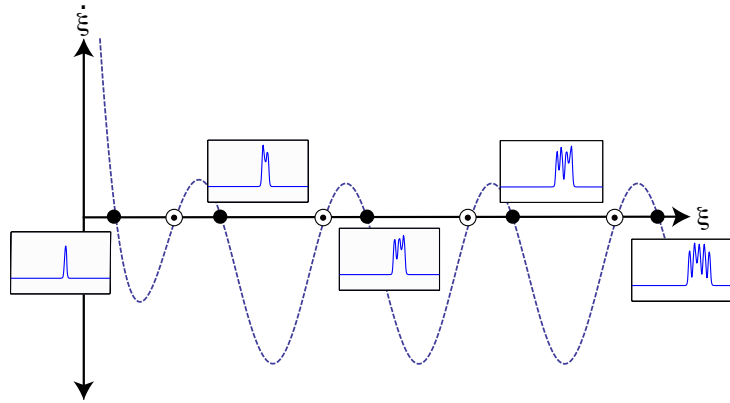


Figura 6.13: Sistema dinámico para las tallas del frente, notemos como las soluciones Caotición nacen de a pares, los círculos llenos (vacíos) representan soluciones estables (inestables).

Los cálculos completos para llegar a la expresión (6.3) son largos, por lo que se han hecho en el Apéndice A.

El modelo propuesto y las conclusiones que de este pueden sacarse, describen de manera cualitativa como pueden existir las soluciones tipo Caotición. Este modelo admite, para cierto régimen de parámetros, la posibilidad de “transiciones espontáneas” tanto para la posición del centro de gravedad de la estructura localizada, como para el porte de la misma.

En resumen, podemos imaginar el Caotición como una interacción entre 2 frentes de Pomeau ligados entre sí, los cuales fluctúan caóticamente.

Capítulo 7

Conclusiones e investigaciones futuras.

En el capítulo anterior, se han estudiado los comportamientos no variacionales en sistemas que presentan patrones, desde un punto de vista experimental, numérico y analítico. Podemos separar los resultados, las conclusiones y las propuestas investigación a futuro; en las tres preguntas realizadas en la sección (5.3).

7.1. Resumen de los resultados.

■ Estudio Experimental del Caotición..

1. En el experimento de una válvula de cristal líquido con retro-inyección óptica (L.C.L.V.) se ha encontrado una nueva solución tipo estructura localizada, la cual presenta comportamientos espacio temporales complejos, posiblemente caóticos. Esta partícula es bautizada como *Caotición* y existe en una pequeña región del espacio de parámetros, la que está contenida en la región de biestabilidad.

■ Estudio Numérico de la Forma Normal de Lifshitz.

1. En el modelo *Forma Normal de Lifshitz*, se observan numéricamente biestabilidad entre comportamientos caóticos espacio temporales sobre un patrón y un estado homogéneo. La localización del patrón con dinámica caótica espacio temporal es una solución estable tipo partícula bautizada como *Caotición*.
2. Es observada una transición entre el patrón con dinámica caótica y un patrón estático en función de uno de los parámetros variacionales.

Esta transición es interpretada como una ruta al caos. Midiendo el máximo exponente de *Lyapunov* a lo largo de esta ruta, son identificados dos puntos de bifurcación: c_{AH} y C_{QP} . Esto permite separar la ruta en 3 Zonas donde se observan comportamientos cualitativamente diferentes. La primera bifurcación es una bifurcación de *Andronov-Hopf*, esta es caracterizada por el espectro numérico del sistema discreto utilizado en la simulación. La segunda bifurcación es caracterizada por las diferencias cualitativas presentadas por los espectros de potencias de la señal temporal obtenida de la integral espacial de la solución del sistema para las distintas Zonas de la ruta.

3. Los 3 comportamientos cualitativamente distintos a lo largo de la ruta son analizados utilizando la descomposición propia ortogonal (**P.O.D.** por sus siglas en inglés). A partir de este análisis se encuentra que:
 - La primera Zona puede describirse a partir de un solo modo: un patrón de longitud de onda λ , carente de dinámica temporal.
 - La segunda Zona puede describirse a partir de tres modos: el patrón estacionario y otros dos modos. Los otros dos modos, espacialmente representados por patrones localizados de longitudes de onda $\lambda/2$ y 2λ , oscilan con la misma frecuencia. El atractor del sistema que consiste en la dinámica de estos dos modos es un ciclo límite.
 - La tercera Zona puede describirse a partir de nueve modos: los 3 de la Zona 2 más otros 7 modos. Los nuevos modos presentes en la dinámica presentan las mismas longitudes de onda espaciales que en la segunda Zona. En la dinámica temporal de los modos responsables de la dinámica se ve aparecer una nueva frecuencia más “lenta” que la que se heredó de la segunda Zona.
4. Es estudiada la dependencia entre el máximo exponente de lyapunov y la cantidad de longitudes de onda presentes en la estructura localizadas, es encontrada una talla critica a partir de la cual comienza la dinámica permanente en las estructuras localizadas.

■ Estudio Analítico del Caotición.

1. Es propuesto el modelo de *Nagumo-Kuramoto*, donde son observados los mismos comportamientos complejos de la *Forma Normal de Lifshitz* que queremos estudiar: caos sobre un patrón extendido y localizado (solución Caotición).
2. En el modelo de *Nagumo-Kuramoto*, proponiendo una solución tipo frente, es realizado un análisis débilmente no lineal, a partir del cual se obtiene una ecuación dinámicas para el cuesco o *core* del frente. Estas ecuaciones puede observarse como una partícula atrapada en un potencial, esto permite tener una descripción cualitativa de la dinámica del frente caótico.
3. En el modelo de *Nagumo-Kuramoto*, proponiendo una solución localizada por superposición, es realizado un análisis débilmente no lineal, a partir del cual se obtienen ecuaciones dinámicas para el centro de gravedad y la talla de las estructura localizadas. Estas ecuaciones revelan la existencia de soluciones tipo patrón localizado caótico (Caotición).

7.2. Conclusiones.

■ Estudio Experimental del Caotición..

1. El experimento de una válvula de cristal líquido con retro-inyección óptica **L.C.L.V**, es el escenario experimental ideal para estudiar diversos comportamientos intrínsecamente *no lineales* como: patrones, frentes, estructuras localizadas.
2. Existe una nueva solución tipo partícula, bautizada Caotición, la cual existe en una pequeña región del espacio de parámetros, cuya dinámica no puede ser explicada solamente por el ruido o las interacciones no locales.

■ Estudio Numérico de la Forma Normal de Lifshitz.

1. La ecuación de Lifshitz es un modelo simple pero de una gran riqueza dinámica, este puede derivarse en una gran diversidad de contextos. En el pueden apreciarse comportamientos no variacionales como los estudiados.
2. La ecuación de Lifshitz es un modelo no variacional, en principio no es claro como realizar cálculos analíticos sobre el mismo.
3. Es posible describir, caracterizar y cuantificar los comportamientos dinámicos de un sistema extendido utilizando herramientas para sistemas de baja dimensionalidad.
4. Es posible generalizar el concepto de *rutas al caos* para sistemas extendidos.

■ Estudio Analítico del Caotición.

1. Los sistemas dinámicos no lineales, entregan una descripción cualitativa de los fenómenos en estudio, en este sentido es una gran idea proponer sistemas simples que describan de manera cualitativa el fenómeno a estudiar y sobre los que puedan utilizarse herramientas analíticas como el análisis débilmente no lineal.
2. Si en el modelo de *Nagumo-Kuramoto* admitimos $\alpha \in \mathbb{R}$, tendremos un sistema donde podemos estudiar todo tipo de frentes: homogéneos, frentes de pomeau, patrones con ruido, patrones con caos, etc. En este sentido, el modelo de *Nagumo-Kuramoto* es el escenario ideal para estudiar el fenómeno de *bloqueo* y el surgimiento de estructuras localizadas en una gran cantidad de casos. Asimismo podemos llevar a cabo el análisis débilmente no lineal en cada uno de estos casos y comprender si es posible tener estructuras localizadas y *bloqueo* en los diferentes casos.
3. Existe una teoría que describe la existencia de las soluciones *Caotición*.

7.3. Investigación futura.

■ Estudio Experimental del Caoticón..

El estado del sistema Caoticón para el experimento, que fue encontrada por primera vez por *U.Bortolozzo*, fue por primera vez caracterizada en el estudio realizado en esta tesis, a partir de este primer estudio, existe una gran cantidad de desafíos a ser resueltos tales como:

- ¿Cuál es la región del espacio de parámetros en que este existe?
- ¿Cómo se comporta esta solución bajo los efectos de interacción no local como la *traslación* y *rotación*?
- ¿Cuál es la interacción que se produce entre un Caoticón y otro estado localizado (otro Caoticón, una estructura circular o una triangular)?
- ¿Cuál es la dependencia que existe entre la dinámica permanente observada en el Caoticón y: el parámetro L , la cantidad de longitudes de onda presentes en él?

Más allá del estudio de la estructura localizada, hay otras interrogantes importantes de ser resueltas en relación con el estado patrón:

- ¿Es el estado patrón sobre el que se observa una dinámica permanente caótica? de ser así ¿Cómo puede cuantificarse este comportamiento y decidir cuanto de la dinámica permanente es debida a las interacciones no locales, cuanto al ruido y cuanto al caos?
- En el estudio de este experimento se encontraron las ramas de biestabilidad para un valor fijo de intensidad I_o (cf. Figura 4.4.2) predichas por el modelo teórico (4.3). Experimentalmente se observa una alternancia en la dinámica del sistema entre un estado patrón, el cual progresivamente comienza a disminuir su intensidad hasta volverse “homogéneo”. En este contexto surge la pregunta ¿Es realmente homogéneo el estado sobre el cual se sostiene esta estructura localizada o es que existe un *precursor* [57] en él?
- Como hemos señalado, la Forma Normal de Lifshitz puede ser derivada en una variedad de contextos, hasta el momento no conocemos reportes de soluciones tipo Caoticón en otros sistemas experimentales.

■ **Estudio Numérico de la Forma Normal de Lifshitz.**

Los desafíos que proponemos en este flanco de nuestra investigación son listados a continuación:

1. Los modelos *Forma Normal de Lifshitz* y *Nagumo-Kuramoto* fueron estudiados en una dimensión espacial. Estos están inspirados en describir los comportamientos observados en el experimento **L.C.L.V.**, los que ocurren en dos dimensiones. El primer desafío es generalizar nuestros resultados al caso bidimensional.
2. Observar la solución Caotición en el modelo teórico (4.3) del experimento **L.C.L.V.**.
3. A pesar de que la Forma Normal de Lifshitz (**F.N.L.**) puede ser derivada en variados contextos[55], debe ser posible encontrar muchos más sistemas que presenten un *Punto de Lifshitz* y por lo tanto ella sea válida.
4. Si bien la **F.N.L.** puede ser derivada del modelo (4.3), no poseemos la relación entre los parámetros de ambos modelos ni el rango de validez de esta aproximación. Conocerlos dará pistas de dónde buscar los comportamientos exhibidos por la **F.N.L.** en el experimento **L.C.L.V.**.
5. Desde que fue propuesta, la investigación numérica solo ha revelado los comportamientos estudiados en esta tesis, los cuales fueron motivados por un experimento. La totalidad de los comportamientos dinámicos que puede exhibir este modelo aguardan a ser descubiertos y caracterizados.

- **Estudio Analítico del Caotición.**

El modelo de *Nagumo-Kuramoto* fue propuesto con el fin de evadir las dificultades de enfrentarnos directamente con un estudio analítico de la *Forma Normal de Lifshitz*, pese a su dificultad, en principio no existe ninguna razón por la que este no puede ser llevado a cabo. Por otra parte, si bien el modelo de *Nagumo-Kuramoto* cumplió con los propósitos para los que fue construido, este no da cuenta de ciertos comportamientos de la solución Caotición en la **F.N.L.**, a modo de ejemplo, la transición observada entre la talla de la estructura localizada y la dinámica permanente (cf. Figura 6.11) no puede ser observada en el modelo de *Nagumo-Kuramoto* pues el acoplamiento del modelo de *Nagumo* con el comportamiento de la ecuación de *Kuramoto-Sivashinsky* no depende de la talla de las estructuras localizadas.

Finalmente, la esta idea de proponer un modelo simple sobre el que se puedan hacer cálculos, si bien no es nueva, no ha sido explotada bastante. Existen una variedad de problemas de gran complejidad que podrían ser comprendidos en función del rol jugado por cada uno de sus ingredientes dinámicos usando esta misma estrategia.

Bibliografía

- [1] Philip Ball. 1999 . The Self-Made Tapestry: Pattern formation in nature. Oxford University Press.
- [2] H. Bénard, Rev. Gen. Sci. Pure Appl. 11, 1261(1900); 1309 (1900); Ann. Chim.Phys. 23, 62 (1901).
- [3] Faraday, M. (1831) .“On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by a group of particles upon vibrating elastic surfaces”, Philosophical Transactions of the Royal Society (London), vol. 121, pages 299–318.
- [4] Taylor, G.I. (1923). ”Stability of a Viscous Liquid contained between Two Rotating Cylinders”. Phil. Trans. Royal Society A223: 289–343.
- [5] M. C. Cross, and P. C. Hohenberg , Rev. Mod. Phys. 65,851 (1993).
- [6] A. M. Turing, The chemical basis of morphogenesis, Phil. R. Society 237, 37 (1952)
- [7] L.M. Pismen, Y. Pomeau. 2005. Patterns and Interfaces in Dissipative Dynamical Systems. Springer-Verlag Berlin
- [8] J. Swift and P.C. Hohenberg, Hydrodynamic fluctuations at the convective instability, Phys. Rev. A 15, 319–328 (1977)
- [9] P.Mandel. Theoretical Problems in Cavity Nonlinear Optics. Cambridge University Press 2005.
- [10] P.K. Jakobsen, J. Lega, Q. Feng, M. Staley, J.V. Moloney, and A.C. Newell, Nonlinear transverse modes of large-aspect-ratio homogeneously broadened lasers: I. Analysis and numerical simulation, Phys. Rev. A 49, 4189-4200 (1994).
- [11] A. Andronov. Theory of Oscillators. 2011 Dover.

- [12] S. Residori, A. Petrossian, T. Nagaya, and M. G. Clerc, *J. Opt. B: Quantum Semiclassical Opt.* 6, S169 (2004). M. G. Clerc, A. Petrossian, and S. Residori, *Phys. Rev. E* 71, 015205R (2005). G. Kozyreff, S. J. Chapman, and M. Tlidi, *Phys. Rev. E* 68, 015201 (2003). C. Durniak, M. Taki, M. Tlidi, P.-L. Ramazza, U. Bortolozzo, and G. Kozyreff, *Phys. Rev. E* 72, 026607(2005).
- [13] Steven H. Strogatz. 1994. *Nonlinear Dynamics And Chaos: With Applications To Physics, Biology, Chemistry, And Engineering*. Massachusetts, Perseus Books.
- [14] Mariana Haragus, Gérard Iooss. 2011. *Local Bifurcations, Center Manifolds, and Normal Forms*. Springer EDP Sciences.
- [15] V. L. Ginzburg and L.D. Landau (1950). "On the theory of superconductivity". *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki* 20: 1064.
- [16] Hebert Goldstein, Safko & Poole. 2001 *Classical Mechanics* . Addison Wesley Longman
- [17] V.L. Ginzburg and L.D. Landau, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 20, 1064 (1950). English translation in: L. D. Landau, *Collected papers* (Oxford: Pergamon Press, 1965) p. 546
- [18] Pierre Simon Laplace, 1814 ,A philosophical essay on probabilities.
- [19] A. Jackson 1989, *Perspectives of nonlinear dynamics* (Cambridge University Press)
- [20] Alwyn Scott. *Encyclopedia of Non Linear Science*. 2005 Routledge.
- [21] R.M. MAY. *Nature* 261, 459 - 467 1976
- [22] J.D. Murray, *Mathematical Biology, An Introduction*, (Springer-Verlag, New York, 2002).
- [23] Y.Kuramoto. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Dover 2003.
- [24] G. I. Sivashinsky, *Acta Astron.* 4, 1177 (1977).
- [25] I. Prigogine, G. Nicolis. *Self-Organization in Nonequilibrium Systems: From Dissipative Structures to Order through Fluctuations*. ISBN-10: 0471024015.

- [26] O Descalzi, R Graham. Gradient expansion of the nonequilibrium potential for the supercritical Ginzburg-Landau equation. *Physics Letters A* 170 (2), 84-90.
- [27] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge University Press, New York, 1993).
- [28] M.G. Clerc, P. Couillet, E. Tirapegui. "The stationary instability in quasi-reversible systems and the Lorenz pendulum". *International Journal of Bifurcation and Chaos* 11, 591-603 (2001).
- [29] Deissler, R. J. (1985). Noise-sustained structure, intermittency, and the Ginzburg-Landau equation. *Journal of Statistical Physics*, 40(3-4), 371-395. doi:10.1007/BF01017180
- [30] Benettin, G., L. Galgani, A. Giorgilli, and J.M. Strelcyn 1980. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. Part 2: Numerical application. *Meccanica* 15:21-30.
- [31] Tomas Bohr, *Dynamical Systems Approach to Turbulence*, Cambridge University Press 1998.
- [32] Christiansen, F.; Rugh, H. H. Computing Lyapunov spectra with continuous Gram - Schmidt orthonormalization. *Nonlinearity*, Volume 10, Issue 5, pp. 1063-1072 (1997).
- [33] Francis F. Chen, *Introduction to plasma physics and controlled fusion*, 2006 Springer.
- [34] S. Chandrasekhar. *Liquid Crystals*, Second Edition Cambridge University Press 1992.
- [35] Grant R. Fowles. *Introduction to Modern Optics*. Second Edition Dover Publications 1975.
- [36] S. Residori, "Patterns, fronts and structures in a Liquid-Crystal -Light-Valve with optical feedback", *Phys. Rep.* **416**, 201 (2005)
- [37] F. Haudin. Thèse de doctorat, "Fronts et dynamiques spatio-temporelles dans l'expérience de la valve à cristaux liquides : effets de forçages spatiaux et rétroaction optique non locale", Université de Nice-Sophia Antipolis. 2010.

- [38] M. G. Clerc, A. Petrossian & S. Residori, "Bouncing Localized Structures in a Liquid-Crystal-Light-Valve Experiment". *Phys.Rev. E*.71, 015205 (R) (2005).
- [39] R.Rojas. Thèse de doctorat,"Sur des Gouttes , Cristaux Liquides et Fronts", Université de Nice-Sophia Antipolis. 2005.
- [40] F. Haudin, R.G.Elías, R.G. Rojas, U.Bortolozzo, M.G. Clerc and S.Residori. "Front dynamics and pinning-depinning phenomenon in spatally periodic media". *Phys. Rev. E*. 81 056203 (2010).
- [41] P. Berge, Y. Pomeau, and C. Vidal, *Order within Chaos: Towards a Deterministic Approach to Turbulence*, (John Wiley & Sons, New York, 1984).
- [42] S.Newhouse, D.Ruelle, F.Takens, Ocurrence of Strange axiom-A attractors near quasi-periodic flows on T^m , $m \geq 3$, *Communications in Mathematical Physics*, 64, p35(1978).
- [43] L. Landau, *C.R. Acad. Sci. USSR* 44 , 311 (1944).
- [44] Y. Pomeau, *Physica D* 23, 3 1986.
- [45] D. Bensimon, B. I. Shraiman, and V. Croquette, *Phys. Rev. A* 38, 5461 1988.
- [46] Analytical studies of fronts, colonies, and patterns: Combination of the Allee effect and nonlocal competition interactions"(M.G.Clerc, D. Escaff and V.M. Kenkre), *Phys. Rev. E* 82, 036210 (2010).
- [47] Linear and weakly nonlinear internal wave theories applied to "morning glory" waves.*Geophy. & Astroph. Fluid Dyn.*33,1-4.1985
- [48] Can non-propagating hydrodynamic solitons be forced to move?"M.G.Clerc,L. Gordillo, T. Sauma, Y. Zarate, I. Espinoza, and N. Mujica),*Eur. Phys. J. D* 62, 39-49 (2011).
- [49] "Onset of patterns in an oscillated granular layer: Continuum and molecular dynamics simulations". J. Bougie, J. Kreft, J. B. Swift, and Harry L. Swinney.*Phys. Rev. E* 71, 021301(2005).
- [50] "Solitary localized structures in a liquid crystal light-valve experiment". M.G.Clerc,U Bortolozzo and S Residori. *New J. Phys.* 11, 093037 (2009).

- [51] Elsgolc, L.E.: Calculus of Variations, Pergamon Press Ltd., 1962.
- [52] “Front propagation sustained by additive noise”. M.G. Clerc, C. Falcon & E. Tirapegui. Phys. Rev. E 74, 011303 (2006)
- [53] Nonequilibrium potential for coexisting attractors. Graham R. & T. Tél. Phys.Rev A 33 1322-1337. (1986).
- [54] R.M. Hornreich and M. Luban, Phys. Rev. Lett. 35 1678 (1975).
- [55] G. Kozyreff and M. Tlidi, Chaos 17, 037103 (2007)
- [56] P.Holmes, J.L.Lumley and G.Berkooz, Turbulence, Choerent Structures, Dynamical systems and symmetry. Cambridge University Press 1998.
- [57] G.Aguéz, M.G. Clerc & E. Louvergneaux. Phys.Rev.E 77, 026218.

Parte IV
Apendices

Apéndice A

Calculos en el modelo de nagumo

En este Apéndice, se estudiará el *Modelo de Nagumo* y se encontrará una expresión para el frente. Se perturbará el modelo, acoplándolo con una señal caótica *espacio temporal*. Finalmente se estudiará la dinámica del frente y la interacción de frentes bajo la perturbación.

A.1. Modelo de Nagumo.

Para todo lo que sigue se estudiará el *modelo de Nagumo*.[\[22\]](#)

$$\partial_t u = u(1 - u)(u - \alpha) + \partial_{xx} u \quad (\text{A.1})$$

Este modelo posee 3 equilibrios homogéneos:

$$u_0 = 0$$

$$u_1 = 1$$

$$u_\alpha = \alpha$$

Si restringimos nuestra atención al espacio de parámetros delimitado por: $\alpha \in]0 : 1]$. El análisis de estabilidad lineal dice lo siguiente:

$$u_0 \text{ (estable)} \quad u_\alpha \text{ (inestable)} \quad u_1 \text{ (estable)}$$

Es decir hay *biestabilidad*, por otro lado, puedo reescribir (A.1) según:

$$\partial_t u = -\frac{\partial}{\partial u} \left(-\frac{u^3}{3}(1 + \alpha) + \alpha \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4} \right) + \partial_{xx} u = -\frac{\partial}{\partial u} (V) + \partial_{xx} u$$

Ya conozco los mínimos de este potencial ¿Existe algún *Punto de Maxwell*? Es decir algún valor de los parámetros, donde ambos estados estables tengan

el mismo valor en el potencial V . Por simple inspección:

$$V|_0 = 0 = -\frac{1}{12} + \frac{\alpha}{6} = V|_1 \rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

Es decir para ese valor del parámetro, existen 2 equilibrios homogéneos estables con la misma energía, luego pueden existir *kinks*, solución que conecta ambos estados. Simulando esta ecuación se puede encontrar fácilmente un *kink* como una solución estacionaria estable:

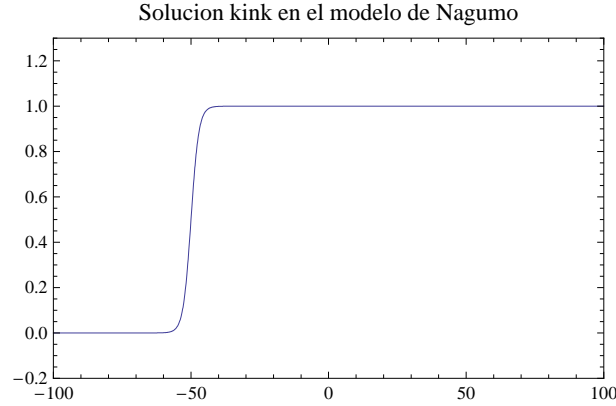


Figura A.1: Solución Tipo Kink en el modelo de Nagumo

A.1.1. Expresión Analítica para el kink.

Posicionándonos en el *Punto de Maxwell* en (A.1):

$$\partial_t u = u(1 - u)\left(u - \frac{1}{2}\right) + \partial_{xx} u$$

Haciendo $u = v + \frac{1}{2}$:

$$\partial_t v = \frac{v}{4} - v^3 + \partial_{xx} v$$

La solución *kink* es un equilibrio estacionario, luego:

$$0 = \frac{v}{4} - v^3 + \partial_{xx} v = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{v^2}{8} - \frac{v^4}{4} \right) + \partial_{xx} v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{8} - \frac{v^4}{4} + \frac{v_x^2}{2} \right) = \frac{d}{dx} (E)$$

La energía corresponde a la energía del sistema, en particular la del estado asintótico:

$$E|_{v=\pm 1/2} = \frac{1}{26}$$

Luego, para el kink:

$$E = 2^{-6} = \frac{v^2}{8} - \frac{v^4}{4} + \frac{v_x^2}{2} \rightarrow \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 = 2 \left(\frac{1}{2^3} - \frac{v^2}{2} \right)^2 \rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{\sqrt{2}}{2^3} (1 - (2v)^2)$$

Haciendo separación de variables, se intenta resolver la ecuación diferencial:

$$\int \frac{dv}{\frac{\sqrt{2}}{2^3} (1 - (2v)^2)} = x$$

Haciendo $u = 2v$ y luego $u = \tanh(s) \rightarrow du = \text{sech}^2(s)ds = (1 - \tanh^2(s))ds$:

$$x = \frac{2^2}{\sqrt{2}} \int \frac{\text{sech}^2(s)ds}{1 - \tanh^2(s)} = \frac{2^2}{\sqrt{2}}s = \frac{2^2}{\sqrt{2}}\text{arctanh}(2v) \rightarrow v = \frac{1}{2}\tanh\left(\frac{\sqrt{2}}{4}x\right)$$

Considerando la constante de integración y notando que $v \rightarrow -v$ también es solución. La solución *kink* más general viene dada por:

$$v_{kink,\pm}(x) = \pm \frac{1}{2}\tanh\left(\frac{\sqrt{2}}{4}(x - C)\right) \rightarrow u_{kink,\pm}(x) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\tanh\left(\frac{\sqrt{2}}{4}(x - C)\right) \quad (\text{A.2})$$

Donde C es el *core* del *kink*

A.1.2. Dinámica del Core en el modelo de Nagumo perturbado.

Habiendo obtenido la solución analítica tipo *kink* (A.2), paso a *promover* el core C a una variable dinámica $C \rightarrow \delta(t)$:

$$u_{kink,\pm}(x) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\tanh\left(\frac{\sqrt{2}}{4}(x - \delta(t))\right)$$

Y el modelo de Nagumo (A.1), es perturbado según:

$$\partial_t u = \left[\frac{3}{2}u^2 - \frac{u}{2} - u^3 + \partial_{xx}u \right] - \Delta u(u - 1) + u\beta \cos(kx)(1 + \gamma\psi) \quad (\text{A.3})$$

Donde:

Δ da cuenta de la perturbación del punto de Maxwell, β de la amplitud del patrón y γ de la amplitud de $\psi(x, t)$: Señal Caótica Espacio Temporal, sobre el patrón. Además:

$$\gamma, \Delta, \beta \ll 1$$

Sabemos que la solución frente es solución estacionaria de (A.1), postulamos como solución del modelo perturbado, la solución estacionaria más un término correctivo que tiene escalas lentas:

$$u(x, t) = u_f(x - \delta(t)) + W \quad (\text{A.4})$$

Introduciendo (A.4) en (A.3):

$$\begin{aligned} \partial_t u = -\dot{\delta}u'_f + \partial_t W &= \left[\frac{3}{2}u_f^2 - \frac{u_f}{2} - u_f^3 + \partial_{xx}u_f \right] + 3u_f W - \frac{W}{2} - 3u_f^2 W + \partial_{xx}W \\ &+ Term.N.L(W) - \Delta(W + u_f)(u_f + W - 1) \\ &+ (W + u_f)\beta \cos(kx)(1 + \gamma\psi(x, t)) \end{aligned} \quad (A.5)$$

El término en el paréntesis cuadrado es cero pues u_f es solución del modelo sin perturbar. W es pequeño y varia en escala lenta, luego los términos no lineales en W , así como su derivada temporal y los términos perturbativos sobre W (tales como βW , ΔW) serán despreciados. El operador que actúa sobre W tiene la forma:

$$\left\{ 3u_f - 3u_f^2 - \frac{1}{2} + \partial_{xx} \right\} W = \mathcal{L}W$$

A fin de utilizar la *condición de solubilidad* para el problema presentado en (A.5), debo caracterizar el kernel de este operador. Utilizando el siguiente producto escalar el operador es *autoadjunto*:

$$(f|g) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x)dx \quad (A.6)$$

Como ya se dijo, el kink es solución de (A.1), es decir:

$$\begin{aligned} \left[\frac{3}{2}u_f^2 - \frac{u_f}{2} - u_f^3 + \partial_{xx}u_f \right] &= 0 \quad / \frac{d}{dx} \\ \left[3u_f - \frac{1}{2} - 3u_f^2 + \partial_{xx} \right] u'_f &= \mathcal{L}u'_f = 0 \end{aligned} \quad (A.7)$$

Es decir, hemos encontrado un elemento del kernel. El hecho de que \mathcal{L} sea un *operador de Sturm-Liouville* asegura que con esto hemos caracterizado todo el *kernel* de \mathcal{L}^\dagger . Reescribo la ecuación (A.5):

$$-\mathcal{L}W = -\Delta u_f(u_f - 1) + u_f \beta \cos(kx)(1 + \gamma\psi) + \dot{\delta}u'_f \rightarrow -\mathcal{L}W = -\vec{b}$$

Procedo entonces a aplicar la condición de solubilidad:

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{b}|u'_f) \\ &= (-\vec{b}|u'_f) \\ &= -\Delta(u_f^2|u'_f) + \Delta(u_f|u'_f) + \beta(u_f \cos(kx)|u'_f) + \beta\gamma(u_f \cos(kx)\psi|u'_f) + \dot{\delta}(u'_f|u'_f) \\ &= I + II + III + IV + V \end{aligned} \quad (A.8)$$

Antes de seguir, tomando:

$$u_f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\sqrt{2}}{4}(x - \delta(t))\right) \rightarrow u'_f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{2}}{4}(x - \delta(t))\right)$$

Es conveniente hacer:

$$z = \frac{\sqrt{2}}{4}(x - \delta) \rightarrow dz = \frac{\sqrt{2}}{4} dx$$

Luego:

$$\begin{aligned} I &= (u_f^2|u'_f) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh(z)\right)^2 \frac{\operatorname{sech}^2(z)}{2} \frac{4}{\sqrt{2}} dz \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(z) + 2\operatorname{sech}^2(z)\tanh(z) + \operatorname{sech}^2(z)\tanh^2(z) dz \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\tanh(z) + \tanh^2(z) + \frac{\tanh^3(z)}{3} \right] = \frac{4}{3\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} II &= (u_f|u'_f) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} + \frac{\tanh}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{4}(x - \delta) \right) \right] \left[\frac{\operatorname{sech}^2}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{4}(x - \delta) \right) \right] dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{sech}^2(z) dz + \tanh(z)\operatorname{sech}^2(z)) dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\tanh(z) + \frac{\tanh^2(z)}{2} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= (u'_f|u'_f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} \operatorname{sech}^4\left(\frac{\sqrt{2}}{4}(x - \delta)\right) dx = \frac{1}{4} \frac{4}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4(z) dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(z)(1 - \tanh^2(z)) dz = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\tanh(z) - \frac{\tanh^3(z)}{3} \right]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Para III y IV Utilizaré:

$$\cos(kx) = \cos\left(k\left(\frac{4}{\sqrt{2}}z + \delta\right)\right) = \cos\left(k\frac{4}{\sqrt{2}}z\right) \cos(k\delta) - \sin\left(k\frac{4}{\sqrt{2}}z\right) \sin(k\delta)$$

Luego:

$$\begin{aligned}
III &= (u_f \cos(kx)|u'_f) \\
&= \frac{4}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} u_f(z)u'_f(z) \left[\cos\left(k\frac{4}{\sqrt{2}}z\right) \cos(k\delta) - \sin\left(k\frac{4}{\sqrt{2}}z\right) \sin(k\delta) \right] dz, \\
&= \frac{4}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} u'_f(x) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tanh(z) \right) \left[\cos\left(k\frac{4}{\sqrt{2}}z\right) \cos(k\delta) - \sin\left(k\frac{4}{\sqrt{2}}z\right) \sin(k\delta) \right] dz, \\
&= \frac{4}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u'_f(x)}{2} \left(\cos\left(\frac{4kz}{\sqrt{2}}\right) \cos(k\delta) - \sin\left(\frac{4kz}{\sqrt{2}}\right) \sin(k\delta) - \tanh(z) \cos(k\delta) \cos\left(\frac{4kz}{\sqrt{2}}\right) \right. \\
&\quad \left. + \tanh(z) \sin\left(\frac{4kz}{\sqrt{2}}\right) \sin(k\delta) \right) dz, \\
&= \frac{4}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u'_f(x)}{2} \left(\cos\left(\frac{4kz}{\sqrt{2}}\right) \cos(k\delta) + \tanh(z) \sin\left(\frac{4kz}{\sqrt{2}}\right) \sin(k\delta) \right) dz, \quad (\text{Por paridad}) \\
&= \frac{\cos(k\delta)}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{4kz}{\sqrt{2}}\right) \text{sech}^2(z) dz + \frac{\sin(k\delta)}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sech}^2(z) \tanh(z) \sin\left(\frac{4kz}{\sqrt{2}}\right) dz, \\
&= \frac{\cos(k\delta)}{\sqrt{2}} \left[2\sqrt{2}k\pi \text{csch}(\sqrt{2}k\pi) \right] + \frac{\sin(k\delta)}{\sqrt{2}} \left[4k^2\pi \text{csch}(\sqrt{2}k\pi) \right], \\
&= A \sin(k\delta + \phi).
\end{aligned}$$

Donde:

$$A = \sqrt{(2\sqrt{2}k\pi \text{csch}(\sqrt{2}k\pi))^2 + (4k^2\pi \text{csch}(\sqrt{2}k\pi))^2} \quad \phi = \arctan\left(\frac{2k}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\begin{aligned}
IV &= (u_f \cos(kx)\psi(x, t)|u'_f) \\
&= \frac{4}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} u'_f(z)u_f(z)\psi(z, t) \left[\cos\left(k\frac{4}{\sqrt{2}}z\right) \cos(k\delta) - \sin\left(k\frac{4}{\sqrt{2}}z\right) \sin(k\delta) \right] dz, \\
&= \frac{4}{\sqrt{2}} \left[\cos(k\delta) \int_{-\infty}^{\infty} u'_f(z)u_f(z)\psi(z, t) \cos\left(k\frac{4}{\sqrt{2}}z\right) dz \right. \\
&\quad \left. - \sin(k\delta) \int_{-\infty}^{\infty} u'_f(z)u_f(z)\psi(z, t) \sin\left(k\frac{4}{\sqrt{2}}z\right) dz \right], \\
&= A_1 \cos(\delta x) + A_2 \sin(\delta x) = B(t) \sin(k\delta + \theta(t)).
\end{aligned}$$

Donde nuevamente:

$$B = \sqrt{A_2^2 + A_1^2} \quad \theta = \arctan\left(\frac{A_1}{A_2}\right)$$

Con estos resultados puedo escribir la ecuación para la dinámica del frente (A.8) según:

$$\dot{\delta} = \Delta \left(\frac{(u_f^2|u'_f) - (u_f|u'_f)}{(u'_f|u'_f)} \right) - \frac{\beta}{(u'_f|u'_f)} \left((u_f \cos(kx)|u'_f) + \gamma(u_f \cos(kx)\psi(x, t)|u'_f) \right)$$

Reemplazando todo lo anterior:

$$\dot{\delta} = \Delta \left(\frac{\frac{4}{3\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}}}{\frac{4}{3\sqrt{2}}} \right) - \frac{\beta}{\frac{4}{3\sqrt{2}}} (A \sin(k\delta + \phi) + \gamma B(t) \sin(k\delta + \theta(t)))$$

$$\dot{\delta} = -\frac{1}{2}\Delta - \frac{3\sqrt{2}}{4}\beta [A \sin(k\delta + \phi) + B(t) \sin(k\delta + \theta(t))] = -\frac{\partial U}{\partial \delta}$$

$$\text{Donde: } U(\delta) = \frac{\Delta \delta}{2} - \frac{3\sqrt{2}\beta}{4k} [B \cos(k\delta + \theta(t)) + A \cos(k\delta + \phi)]$$

Lo que recupera el resultado conocido para el frente (figura a continuación), sin embargo ahora el potencial tiene variaciones temporales:

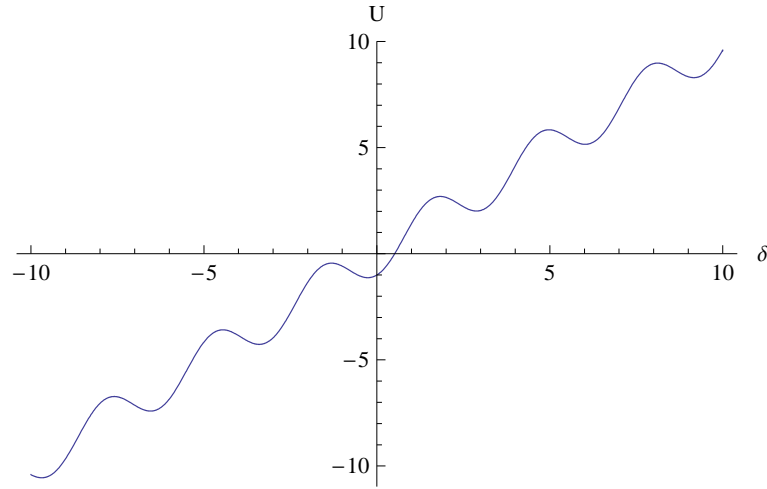


Figura A.2: Ilustración del potencial.

A.1.3. Interacción de 2 frentes en el modelo de Nagumo perturbado.

Volviendo a la ecuación (A.3), esta vez estoy interesado en estudiar el comportamiento de una estructura localizada, objeto observado en las simulaciones numéricas. Para tal fin se propone el siguiente *ansatz*

$$u(x, t) = [u_+(x - \delta_+) + u_-(x - \delta_-) - 1] + W \quad (\text{A.9})$$

Donde, el término entre paréntesis cuadrados, da cuenta de la estructura localizada, W corresponde al error hecho al suponer que el principio de superposición es aplicable. Introduciendo (A.9) en (A.3), linealizando para W y despreciando las variaciones temporales de W , así como cualquier producto de este con los términos perturbativos, obtengo:

$$\begin{aligned} -\dot{\delta}_+ u'_- - \dot{\delta}_- u'_+ &= \mathcal{L}W + \frac{3}{2}(u_+ + u_- - 1)^2 - \frac{1}{2}(u_+ + u_- - 1) - (u_+ + u_- - 1)^3 + \partial_{xx}u_- + \partial_{xx}u_+ \\ &\quad - \Delta(u_+ + u_- - 1)(u_+ - 1 + u_- - 1) + \beta(u_+ + u_- - 1) \cos(kx)(1 + \gamma\psi) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Con:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \left\{ 3(u_+ + u_- - 1) - \frac{1}{2} - 3(u_+ + u_- - 1)^2 + \partial_{xx} \right\} \\ &= \left\{ 3u_+ + \frac{1}{2} - 3u_+^2 + \partial_{xx} \right\} + \{3 - 6u_+ - 3(u_- - 1)\} (u_- - 1) = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2\end{aligned}$$

Si intentamos ver si u'_+ es elemento del *kernel* de \mathcal{L} vemos que \mathcal{L}_1 satisface:

$$\mathcal{L}_1 u'_+ = 0$$

de acuerdo a (A.7). Por otra parte:

$$\mathcal{L}_2 u'_+ = \{3 - 6u_+ - 3(u_- - 1)\} (u_- - 1) u'_+$$

Pero como podemos ver en el siguiente gráfico, mientras $\Delta = |\delta_+ - \delta_-| \gg 1$ (es decir que los frentes estén bien alejados), el producto $(u_- - 1)u'_+$ es muy pequeño:

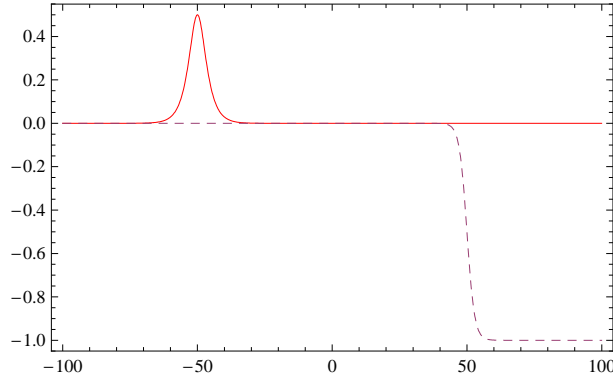


Figura A.3: La curva continua corresponde a u'_+ , la discontinua a $(u_- - 1)$

Luego, asumiré que esa contribución es despreciable, con lo cual tenemos *pseudovectores* propios. Intercambiando en la ecuación $u_+ \rightarrow u_-$, puedo hacer el mismo razonamiento. En resumen, los *pseudovectores* propios \mathcal{L} son $\{u'_+, u'_-\}$. Lo cual engendrará 2 ecuaciones de movimiento (una para cada frente) al aplicar la condición de solubilidad. Puedo reescribir el problema (A.5) según:

$$\begin{aligned}-\dot{\delta}_+ u'_+ - \dot{\delta}_- u'_- - \mathcal{L}W &= \left[\frac{3}{2}u_+^2 - u_+^3 - \frac{u_+}{2} + \partial_{xx}u_+ \right] + \left[\frac{3}{2}u_-^2 - \frac{u_-}{2} - u_-^3 + \partial_{xx}u_- \right] \\ &+ 3(u_- - 1)^2 + 3u_+(u_- - 1)(1 - u_+ - (u_- - 1)) \\ &- \Delta(u_+ + (u_- - 1))((u_- - 1) + (u_+ - 1)) \\ &+ (u_+ + (u_- - 1))\beta \cos(kx)(1 + \gamma\psi(x, t)).\end{aligned}$$

Los términos entre paréntesis cuadrados son cero por (A.7). Puedo reescribir esta última ecuación como:

$$\mathcal{L}\vec{W} = \vec{b}$$

Donde:

$$\begin{aligned} -\vec{b} = & 3(u_- - 1)((u_- - 1) + u_+ - u_+^2 - u_+(u_- - 1)) - \Delta(u_+ + (u_- - 1))((u_- - 1) + (u_+ - 1)) \\ & + (u_+ + (u_- - 1))\beta \cos(kx)(1 + \gamma\psi(x, t)) + \dot{\delta}_+ u'_+ + \dot{\delta}_- u'_- \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

La condición de solubilidad dará en este caso las 2 siguientes ecuaciones (una para la dinámica de cada frente):

$$(\vec{b}|u'_\pm) = 0 = (-\vec{b}|u'_\pm)$$

Al realizar el producto punto $(-\vec{b}|u'_+)$ sobre la ecuación (A.11), aparecerá el término $u'_+(u_- - 1)$ varias veces, el que como ya hemos observado en Figura (A.3) es chico. Sobre esto haremos la siguiente *aproximación*:

$$(u'_+|u_- - 1) \neq 0 \quad (u'_+|(u_- - 1)^{n>1}) = 0$$

Así, al efectuar el producto punto sobre (A.11), solo necesito considerar:

$$\begin{aligned} -\vec{b} = & u_+ u_- (3 - 2\Delta) - 3u_- u_+^2 + u_+ (3\Delta - 3 + \beta \cos(kx)(1 + \gamma\psi)) \\ & + u_+^2 (3 - \Delta) + u_- (\Delta + \beta \cos(kx)(1 + \gamma\psi)) \\ & - \beta \cos(kx)(1 + \gamma\psi) + \dot{\delta}_+ u'_+ + \dot{\delta}_- u'_- \end{aligned}$$

Con lo cual una de las condiciones de solubilidad queda:

$$\begin{aligned} (-b|u'_+) = & (u_+ u_- |u'_+) (3 - 2\Delta) - 3(u_- u_+^2 |u'_+) + (3\Delta - 3)(u_+ |u'_+) + \beta\gamma(u_+ \cos(kx)\psi |u'_+) \\ & + \beta(u_+ \cos(kx) |u'_+) + (u_+^2 |u'_+) (3 - \Delta) + \Delta(u'_+ |u_-) \\ & + \beta(u'_+ |u_- \cos(kx)) + \beta\gamma(u'_+ |u_- \cos(kx)\psi) \\ & - \beta(u'_+ | \cos(kx)) - \beta\gamma(u'_+ | \psi \cos(kx)) + \dot{\delta}_+ (u'_+ |u'_+) - \Delta(u'_+ |1) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Para obtener la otra basta hacer el cambio $+ \rightarrow -$ sobre la ecuación (A.12):

$$\begin{aligned} (-b|u'_-) = & (u_- u_+ |u'_-) (3 - 2\Delta) - 3(u_+ u_-^2 |u'_-) + (3\Delta - 3)(u_- |u'_-) + \beta\gamma(u_- \cos(kx)\psi |u'_-) \\ & + \beta(u_- \cos(kx) |u'_-) + (u_-^2 |u'_-) (3 - \Delta) + \Delta(u'_- |u_+) \\ & + \beta(u'_- |u_+ \cos(kx)) + \beta\gamma(u'_- |u_+ \cos(kx)\psi) \\ & - \beta(u'_- | \cos(kx)) - \beta\gamma(u'_- | \psi \cos(kx)) + \dot{\delta}_- (u'_- |u'_-) - \Delta(u'_- |1) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Para todo lo que sigue:

$$u_\pm(x) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \tanh \left(\frac{\sqrt{2}}{4} (x - \delta_\pm) \right)$$

$$u'_{\pm}(x) = \pm \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{4} (x - \delta_{\pm}) \right)$$

Luego:

$$\begin{aligned} (u_{\pm}|u'_{\pm}) &= \pm \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{4} (x - \delta_{\pm}) \right) \left[1 \pm \tanh \left(\frac{\sqrt{2}}{4} (x - \delta_{\pm}) \right) \right] dx \\ &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(z) (1 \pm \tanh(z)) dz = \pm \frac{2}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

$$(u'_{\pm}|u'_{\pm}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} \operatorname{sech}^4 \left(\frac{\sqrt{2}}{4} (x - \delta_{\pm}) \right) dz = \frac{4}{3\sqrt{2}}$$

$$(u'_{\pm}|1) = \pm \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{4} (x - \delta_{\pm}) \right) dx = \pm \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} (u_{\pm} \cos(kx) \psi(x, t) | u'_{\pm}) &= \pm \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{4} (x - \delta_{\pm}) \right) \psi(x, t) \left[\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \tanh \left(\frac{\sqrt{2}}{4} (x - \delta_{\pm}) \right) \right] \cos(kx) dx, \\ &= \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(z) \psi(z_{\pm}, t) (1 \pm \tanh(z)) \cos \left(k \left(\frac{4}{\sqrt{2}} z + \delta_{\pm} \right) \right) dz, \\ &= \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(z) \psi(z_{\pm}, t) (1 \pm \tanh(z)) \left[\cos \left(k \frac{4}{\sqrt{2}} z \right) \cos(k\delta_{\pm}) \right. \\ &\quad \left. - \sin \left(k \frac{4}{\sqrt{2}} z \right) \sin(k\delta_{\pm}) \right] dz, \\ &= \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} \cos(k\delta_{\pm}) \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(z) \psi(z_{\pm}, t) (1 \pm \tanh(z)) \cos \left(\frac{4kz}{\sqrt{2}} \right) dz, \\ &\quad \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(k\delta_{\pm}) \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(z) \psi(z_{\pm}, t) (1 \pm \tanh(z)) \sin \left(\frac{4kz}{\sqrt{2}} \right) dz, \\ &= A_{\pm} \cos(k\delta_{\pm}) + B_{\pm} \sin(k\delta_{\pm}) = C_{\pm} \sin(k\delta_{\pm} + \phi_{\pm}). \end{aligned}$$

Donde:

$$C_{\pm}^2 = A_{\pm}^2 + B_{\pm}^2 \quad \phi_{\pm} = \arctan \left(\frac{B_{\pm}}{A_{\pm}} \right) \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned} (u_{\pm} \cos(kx) | u'_{\pm}) &= \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} (1 \pm \tanh(z)) \operatorname{sech}^2(z) \left(\cos \left(\frac{4kz}{\sqrt{2}} \right) \cos(k\delta_{\pm}) - \sin \left(\frac{4kz}{\sqrt{2}} \right) \sin(k\delta_{\pm}) \right) dz \\ &= \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} \cos(k\delta_{\pm}) \int_{-\infty}^{\infty} (1 \pm \tanh(z)) \operatorname{sech}^2(z) \cos \left(\frac{4kz}{\sqrt{2}} \right) dz \\ &\quad \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(k\delta_{\pm}) \int_{-\infty}^{\infty} (1 \pm \tanh(z)) \operatorname{sech}^2(z) \sin \left(\frac{4kz}{\sqrt{2}} \right) dz \\ &= \cos(k\delta_{\pm}) (a_1 \pm a_2) + \sin(k\delta_{\pm}) (b_1 \pm b_2) \\ &= A_1 \sin(k\delta_{\pm} + \phi_1) \pm A_2 \sin(k\delta_{\pm} + \phi_2) \end{aligned}$$

$$\text{Donde: } A_1^2 = a_1^2 + b_1^2 \quad A_2^2 = a_2^2 + b_2^2 \quad \phi_1 = \arctan \left(\frac{b_1}{a_1} \right) \quad \phi_2 = \arctan \left(\frac{b_2}{a_2} \right)$$

$$\begin{aligned}
(u_{\pm}^2|u'_{\pm}) &= \pm \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{4} (x - \delta_{\pm}) \right) \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \tanh \left(\frac{\sqrt{2}}{4} (x - \delta_{\pm}) \right) \right)^2 dx \\
&= \frac{\pm 1}{2\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(z) (1 \pm \tanh(z))^2 dz \\
&= \frac{\pm 1}{2\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{sech}^2(z) \pm 2 \tanh(z) \operatorname{sech}^2(z) + \operatorname{sech}^2(z) \tanh^2(z)) dz \\
&= \pm \frac{4}{3\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(u'_{\pm}|\cos(kx)) &= \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(z) \left[\cos \left(\frac{4kz}{\sqrt{2}} \right) \cos(k\delta_{\pm}) - \sin \left(\frac{4kz}{\sqrt{2}} \right) \sin(k\delta_{\pm}) \right] dz \\
&= \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} \cos(k\delta_{\pm}) \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(z) \cos \left(\frac{4kz}{\sqrt{2}} \right) dz \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(k\delta_{\pm}) \int_{-\infty}^{\infty} \sin \left(\frac{4kz}{\sqrt{2}} \right) \operatorname{sech}^2(z) dz \\
&= \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} [A \sin(k\delta_{\pm}) - B \cos(k\delta_{\pm})] = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} C \sin(k\delta_{\pm} + \phi)
\end{aligned}$$

$$\text{Donde: } C^2 = A^2 + B^2 \quad \phi = -\arctan \left(\frac{A}{B} \right)$$

$$\begin{aligned}
(u'_{\pm}|\psi \cos(kx)) &= \pm \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(z) \psi(z_{\pm}, t) \left(\cos \left(\frac{4kz}{\sqrt{2}} \right) \cos(k\delta_{\pm}) - \sin \left(\frac{4kz}{\sqrt{2}} \right) \sin(k\delta_{\pm}) \right) dz \\
&= \pm \sqrt{2} \left[\cos(k\delta_{\pm}) \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(z) \psi(z_{\pm}, t) \cos \left(\frac{4kz}{\sqrt{2}} \right) dz \right. \\
&\quad \left. - \sin(k\delta_{\pm}) \int_{-\infty}^{\infty} \sin \left(\frac{4kz}{\sqrt{2}} \right) \operatorname{sech}^2(z) \psi(z_{\pm}, t) dz \right] \\
&= \sqrt{2} [A_{\pm} \sin(k\delta_{\pm}) - B_{\pm} \cos(k\delta_{\pm})] = \sqrt{2} C_{\pm} \sin(k\delta_{\pm} + \phi_{\pm})
\end{aligned}$$

$$\text{Donde: } C_{\pm}^2 = A_{\pm}^2 + B_{\pm}^2 \quad \phi_{\pm} = -\arctan \left(\frac{A_{\pm}}{B_{\pm}} \right)$$

Ahora los términos de interacción (los de la forma $(f(u_+|g(u_-))$). Para esta parte se utilizará la siguiente notación, inspirada en la figura:

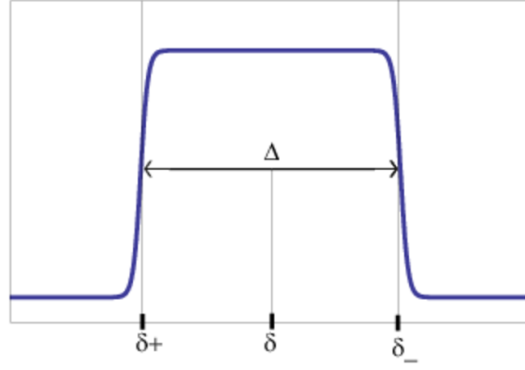


Figura A.4:

$$\Delta = \frac{\sqrt{2}}{4}(\delta_- - \delta_+) \quad \delta = \frac{\delta_+ + \delta_-}{2} \quad (\text{A.15})$$

Adicionalmente, haremos la siguiente aproximación: Si la distancia entre los “core” es grande $\Delta \gg 1$ Puedo reescribir el producto punto s según:

$$(f(u_+) | g(u_-)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u_+)g(u_-) = \int_{-\infty}^0 f(u_+)g(\tilde{u}_-) + \int_0^{\infty} f(\tilde{u}_+)g(u_-)$$

Y aproximar la función con \tilde{u} en ese intervalo, pues ahí no se encuentra el “core” de dicha función y sólo tomaré en cuenta su influencia exponencialmente pequeña.

$$\begin{aligned} (u'_+ | u_-) &= \int_{-\infty}^{\delta} u'_+ \tilde{u}_- + \int_{\delta}^{\infty} \tilde{u}'_+ u_- \\ &= \int_{-\infty}^{\delta} \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{4} (x - \delta_+) \right) \left(1 - e^{\frac{2\sqrt{2}}{4}(x-\delta_-)} \right) dx \\ &\quad + \int_{\delta}^{\infty} 2e^{-\frac{2\sqrt{2}}{4}(x-\delta_+)} \frac{1}{2} \left(1 - \tanh \left(\frac{\sqrt{2}}{4} (x - \delta_-) \right) \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Haciendo los cambios de variable: } z_1 &= \frac{\sqrt{2}}{4}(x - \delta_+) \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}(x - \delta_-) \\ &= \frac{4}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2(z) (1 - e^{2(z-\Delta)}) dz + \frac{4}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\infty} e^{-2(z+\Delta)} (1 - \tanh(z)) dz \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\tanh \left(\frac{\Delta}{2} \right) + 1 \right) + \frac{4}{\sqrt{2}} e^{-2\Delta} \left[e^{\Delta} - 2 \log(1 + e^{\Delta}) - \frac{1}{1 + e^{\Delta}} + 1 \right]. \end{aligned}$$

Analogamente:

$$(u'_-|u_+) = -\frac{2}{\sqrt{2}} \left(\tanh\left(\frac{\Delta}{2}\right) + 1 \right) - \frac{4}{\sqrt{2}} e^{-2\Delta} \left[e^\Delta - 2 \log(1 + e^\Delta) - \frac{1}{1 + e^\Delta} + 1 \right] = -(u'_+|u_-).$$

$$\begin{aligned}
(u'_+|u_-u_+) &= \int_{-\infty}^{\delta} u'_+ u_+ \check{u}_- + \int_{\delta}^{\infty} \check{u}'_+ \check{u}_+ u_- \\
&= \int_{-\infty}^{\delta} \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{4} (x - \delta_+) \right) \left(1 + \tanh \left(\frac{\sqrt{2}}{4} (x - \delta_+) \right) \right) \frac{1}{2} (1 - e^{2\frac{\sqrt{2}}{4}(x-\delta_-)}) dx + \\
&\int_{\delta}^{\infty} \frac{1}{2} \left(1 - \tanh \left(\frac{\sqrt{2}}{4} (x - \delta_-) \right) \right) (1 - e^{-2\frac{\sqrt{2}}{4}(x-\delta_+)}) 2e^{-2\frac{\sqrt{2}}{4}(x-\delta_+)} dx
\end{aligned}$$

Haciendo los cambios de variable: $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}(x - \delta_+)$ $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}(x - \delta_-)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\frac{\Delta}{2}} \operatorname{sech}^2(z) (1 + \tanh(z)) (1 - e^{2(z-\Delta)}) dz \\
&+ \frac{4}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\infty} (1 - \tanh(z)) (1 - e^{-2(z+\Delta)}) e^{-2(z+\Delta)} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\frac{\Delta}{2}} \operatorname{sech}^2(z) (1 - e^{2(z-\Delta)} + \tanh(z) - \tanh(z) e^{2(z-\Delta)}) dz \\
&+ \frac{4e^{-2\Delta}}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\infty} e^{-2z} (1 - e^{-2z} e^{-2\Delta} - \tanh(z) + \tanh(z) e^{-2\Delta} e^{-2z}) dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \tanh \left(\frac{\Delta}{2} \right) + \frac{1}{2} + \frac{\left(\tanh \left(\frac{\Delta}{2} \right) \right)^2}{2} - e^{-2\Delta} \int_{-\infty}^{\frac{\Delta}{2}} e^{2z} \operatorname{sech}^2(z) (1 + \tanh(z)) dz \right\} \\
&+ \frac{4e^{-2\Delta}}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{e^{\Delta}}{2} - \frac{1}{4} - \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\infty} e^{-2z} \tanh(z) dz + e^{-2\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\infty} e^{-4z} \tanh(z) dz \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \tanh \left(\frac{\Delta}{2} \right) + \frac{1}{2} + \frac{\left(\tanh \left(\frac{\Delta}{2} \right) \right)^2}{2} \right. \\
&- e^{-2\Delta} \left[4 - \frac{2}{(1 + e^{2z})^2} + 4 \log(1 + e^{2z}) \right. \\
&- 4 \tanh(z) \Big]_{-\infty}^{\frac{\Delta}{2}} \\
&+ \frac{4e^{-2\Delta}}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{e^{\Delta}}{2} - \frac{1}{4} - \left[\frac{e^{-2z}}{2} - \log(1 + e^{-2z}) \right]_{-\frac{\Delta}{2}}^{\infty} + e^{-2\Delta} \left[\frac{e^{-4z}}{4} - e^{-2z} + \log(1 + e^{-2z}) \right]_{-\frac{\Delta}{2}}^{\infty} \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \tanh \left(\frac{\Delta}{2} \right) + \frac{1}{2} + \frac{\left(\tanh \left(\frac{\Delta}{2} \right) \right)^2}{2} \right. \\
&- e^{-2\Delta} \left[-\frac{2}{(1 + e^{\Delta})^2} + 4 \log(1 + e^{\Delta}) - 4 \tanh \left(\frac{\Delta}{2} \right) + 2 - 4 \right] \Big\} \\
&+ \frac{4e^{-2\Delta}}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{e^{\Delta}}{2} - \frac{1}{4} + \left[\frac{e^{\Delta}}{2} - \log(1 + e^{\Delta}) \right] - e^{-2\Delta} \left[\frac{e^{2\Delta}}{4} - e^{\Delta} + \log(1 + e^{\Delta}) \right] \right\} \\
&= \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\tanh^2 \left(\frac{\Delta}{2} \right)}{2\sqrt{2}} + \frac{\tanh \left(\frac{\Delta}{2} \right)}{\sqrt{2}} \right) + \frac{4}{\sqrt{2}} e^{-\Delta} \\
&+ e^{-2\Delta} \left(\frac{2}{\sqrt{2}(1 + e^{\Delta})^2} - \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}} \tanh \left(\frac{\Delta}{2} \right) \right) + \frac{4}{\sqrt{2}} e^{-3\Delta} - \frac{4}{\sqrt{2}} e^{-4\Delta} (\log(1 + e^{\Delta}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(u_- u_+^2 | u'_+) &= \int_{-\infty}^{\delta} \ddot{u}_- u_+^2 u'_+ + \int_{\delta}^{\infty} u_- \ddot{u}_+^2 \ddot{u}'_+ \\
&= \int_{-\infty}^{\delta} (1 - e^{2\frac{\sqrt{2}}{4}(x-\delta_-)}) \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{2}}{4}(x-\delta_+)\right) \frac{1}{4} \left(1 + \tanh\left(\frac{\sqrt{2}}{4}(x-\delta_+)\right)\right)^2 dx \\
&+ \int_{\delta}^{\infty} \frac{1}{2} \left(1 - \tanh\left(\frac{\sqrt{2}}{4}(x-\delta_-)\right)\right) 2e^{-2\frac{\sqrt{2}}{4}(x-\delta_+)} (1 - 2e^{-2\frac{\sqrt{2}}{4}(x-\delta_+)}) dx
\end{aligned}$$

Haciendo los cambios de variable: $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}(x - \delta_+)$ $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}(x - \delta_-)$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\frac{\Delta}{2}} (1 - e^{2(z-\Delta)}) \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2(z) \frac{1}{4} (1 + \tanh(z))^2 \frac{4}{\sqrt{2}} dz \\
&+ \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\infty} (1 - \tanh(z)) e^{-2(z+\Delta)} (1 - 2e^{-2(z+\Delta)}) \frac{4}{\sqrt{2}} dz \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\frac{\Delta}{2}} \operatorname{sech}^2(z) \left\{ 1 + 2 \tanh(z) + \tanh^2(z) - e^{-2\Delta} e^{2z} (1 + \tanh(z))^2 \right\} dz \\
&+ \frac{4e^{-2\Delta}}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\infty} e^{-2z} (1 - 2e^{-2(z+\Delta)} - \tanh(z) + 2 \tanh(z) e^{-2(z+\Delta)}) dz \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \tanh\left(\frac{\Delta}{2}\right) + \left(\tanh\left(\frac{\Delta}{2}\right)\right)^2 + \frac{\left(\tanh\left(\frac{\Delta}{2}\right)\right)^3}{3} + \frac{1}{3} \right. \\
&\left. - e^{-2\Delta} \int_{-\infty}^{\frac{\Delta}{2}} \operatorname{sech}^2(z) e^{2z} (1 + \tanh(z))^2 dz \right\} \\
&+ \frac{4}{\sqrt{2}} e^{-2\Delta} \left\{ \frac{e^{\Delta}}{2} - \frac{1}{2} - \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\infty} e^{-2z} \tanh(z) dz + 2e^{-2\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\infty} \tanh(z) e^{-4z} dz \right\} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \tanh\left(\frac{\Delta}{2}\right) + \left(\tanh\left(\frac{\Delta}{2}\right)\right)^2 + \frac{\left(\tanh\left(\frac{\Delta}{2}\right)\right)^3}{3} + \frac{1}{3} \right. \\
&\left. - e^{-2\Delta} \left[8 \log(1 + e^{\Delta}) - \frac{4e^{\Delta}(6 + 15e^{\Delta} + 11e^{2\Delta})}{3(1 + e^{\Delta})^3} \right] \right\} \\
&+ \frac{4}{\sqrt{2}} e^{-2\Delta} \left\{ \frac{e^{\Delta}}{2} - \frac{1}{2} + \left[\frac{e^{\Delta}}{2} + \log(1 + e^{\Delta}) \right] + 2e^{-2\Delta} \left[-\frac{e^{2\Delta}}{4} + e^{\Delta} - \log(1 + e^{\Delta}) \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\tanh\left(\frac{\Delta}{2}\right) + \frac{\left(\tanh\left(\frac{\Delta}{2}\right)\right)^2}{2} + \frac{\left(\tanh\left(\frac{\Delta}{2}\right)\right)^3}{3} + \frac{1}{3} \right) + \frac{10}{\sqrt{2}(1 + e^{\Delta})^3} \\
&+ \frac{22e^{\Delta}}{3\sqrt{2}(1 + e^{\Delta})^3} + \left(\frac{4}{\sqrt{2}(1 + e^{\Delta})^3} + \frac{4}{\sqrt{2}} \right) e^{-\Delta} - \frac{4}{\sqrt{2}} e^{-2\Delta} \\
&+ \frac{8}{\sqrt{2}} e^{-3\Delta} - 8 \log(1 + e^{\Delta}) e^{-4\Delta}
\end{aligned}$$

Afirmación:

$$(u'_+ | u_- u_+) = -(u'_- | u_- u_+)$$

Para ilustrar esta afirmación presento esta sucesión de figuras:

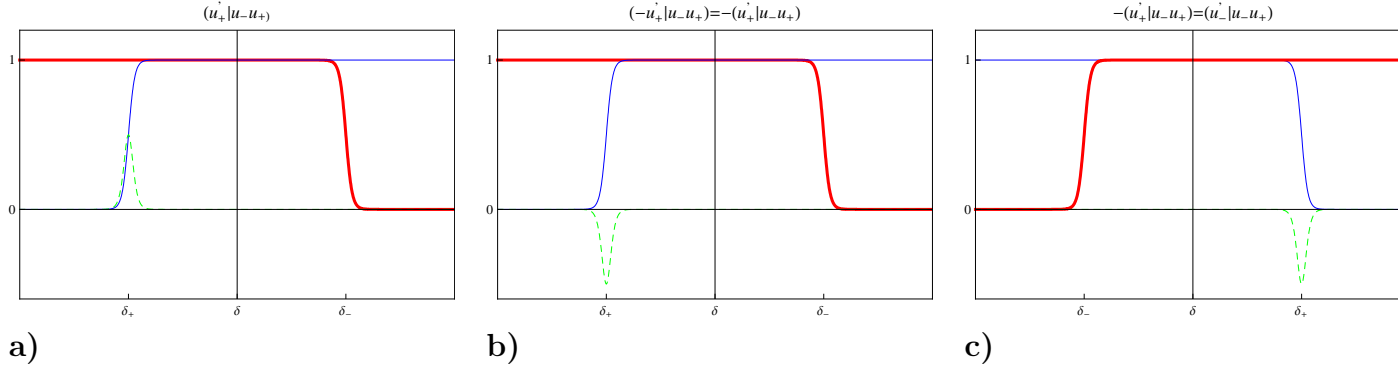


Figura A.5: u_+ en azul delgado, u_- en rojo grueso y u'_+ en verde punteado. **a)** El producto punto corresponde a la integral del producto de las 3 funciones. **b)** Cambiando el signo de u'_+ , cambia el signo del producto punto. **c)** Haciendo una reflexión respecto a la vertical dada por δ el valor del producto punto no cambia respecto a **b)** y coincide con el producto punto $(u'_- | u_- u_+)$

Es posible mostrar de la misma forma:

$$(u'_+ | u_+^2 u_-) = -(u'_- | u_+^2 u_-)$$

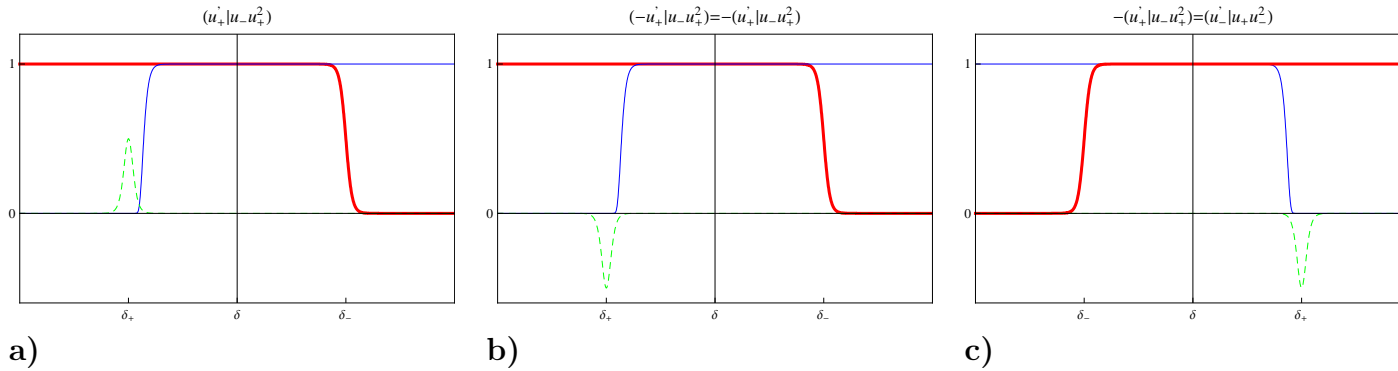


Figura A.6: u_+^2 en azul delgado, u_- en rojo grueso y u'_+ en verde punteado. **a)** El producto punto corresponde a la integral del producto de las 3 funciones. **b)** Cambiando el signo de u'_+ , cambia el signo del producto punto. **c)** Haciendo una reflexión respecto a la vertical dada por δ el valor del producto punto no cambia respecto a **b)** y coincide con el producto punto $(u'_- | u_+^2 u_-)$

Para los productos puntos que faltan calcular de (A.12) y (A.13), no puedo utilizar el mismo truco pues las funciones $\cos(kx)$ y $\psi(x, t)$ rompen cualquier simetría que permita realizar algún truco semejante.

En vista de la observación anterior, solamente ilustraré el resultado general al efectuar los últimos cuatro productos punto que restan de (A.12) y (A.13). Para esto recuerdo una vez más que:

$$\cos(kx) = \cos(k(4/\sqrt{2}z + \delta_{\pm})) = \cos(4kz/\sqrt{2}) \cos(k\delta_{\pm}) - \sin(4kz/\sqrt{2}) \sin(k\delta_{\pm})$$

Luego en los siguientes producto punto podré hacer, de manera análoga a lo efectuado para el frente en (A.1.2)

$$(u'_{\pm}|u_{\mp} \cos(kx)) = A_{\pm',\mp} \sin(k\delta_{+} + \phi_1) + B_{\pm',\mp} \sin(k\delta_{-} + \phi_2) = A_{\pm',\mp} \sin(k\delta + \phi_1) + B_{\pm',\mp} \sin(\bar{k}\Delta - + \phi_2)$$

$$\begin{aligned} (u'_{\pm}|\psi(x, t)u_{\mp} \cos(kx)) &= C_{\pm',\mp}(t) \sin(k\delta_{+} + \phi_1) + G_{\pm',\mp}(t) \sin(k\delta_{-} + \phi_2) \\ &= C_{\pm',\mp}(t) \sin(k\delta + \phi_1) + G_{\pm',\mp}(t) \sin(\bar{k}\Delta + \phi_2) \end{aligned}$$

Lo que puede ser expresado en términos de Δ y δ Usando las relaciones (A.15). Como he escrito a la derecha de las últimas 2 expresiones.

Terminada la parte de los calculos. Podemos volver a las expresiones (A.12) y (A.13) y preguntarnos que ecuación rige el movimiento del centro de gravedad δ y de la talla de la estructura localizada Δ . La ecuación de movimiento para δ_{+} , según (A.12), viene dada por:

$$\begin{aligned} \delta_{+} &= -\frac{(u_{+}u_{-}|u'_{+})}{(u'_{+}|u'_{+})}(3 - 2\Delta) + 3\frac{(u_{-}u_{+}^2|u'_{+})}{(u'_{+}|u'_{+})} - (3\Delta - 3)\frac{(u_{+}|u'_{+})}{(u'_{+}|u'_{+})} - \beta\gamma\frac{(u_{+} \cos(kx)\psi|u'_{+})}{(u'_{+}|u'_{+})} \\ &\quad - \beta\frac{(u_{+} \cos(kx)|u'_{+})}{(u'_{+}|u'_{+})} - \frac{(u_{+}^2|u'_{+})}{(u'_{+}|u'_{+})}(3 - \Delta) - \Delta\frac{(u'_{+}|u_{-})}{(u'_{+}|u'_{+})} \\ &\quad - \beta\frac{(u'_{+}|u_{-} \cos(kx))}{(u'_{+}|u'_{+})} - \beta\gamma\frac{(u'_{+}|u_{-} \cos(kx)\psi)}{(u'_{+}|u'_{+})} + \beta\frac{(u'_{+}|\cos(kx))}{(u'_{+}|u'_{+})} + \beta\gamma\frac{(u'_{+}|\psi \cos(kx))}{(u'_{+}|u'_{+})} + \Delta\frac{(u'_{+}|1)}{(u'_{+}|u'_{+})} \end{aligned}$$

Ahora procederé a reemplazar los valores de los productos puntos, reteniendo en los términos de interacción hasta el orden $e^{-\Delta}$, para tal fin, primero veremos si los términos de las formas $e^{-2\Delta} \log(1 + e^{\Delta})$, $e^{-2\Delta}/(1 + e^{\Delta})^{n=1,2,3}$ son o no más pequeños que $e^{-\Delta}$

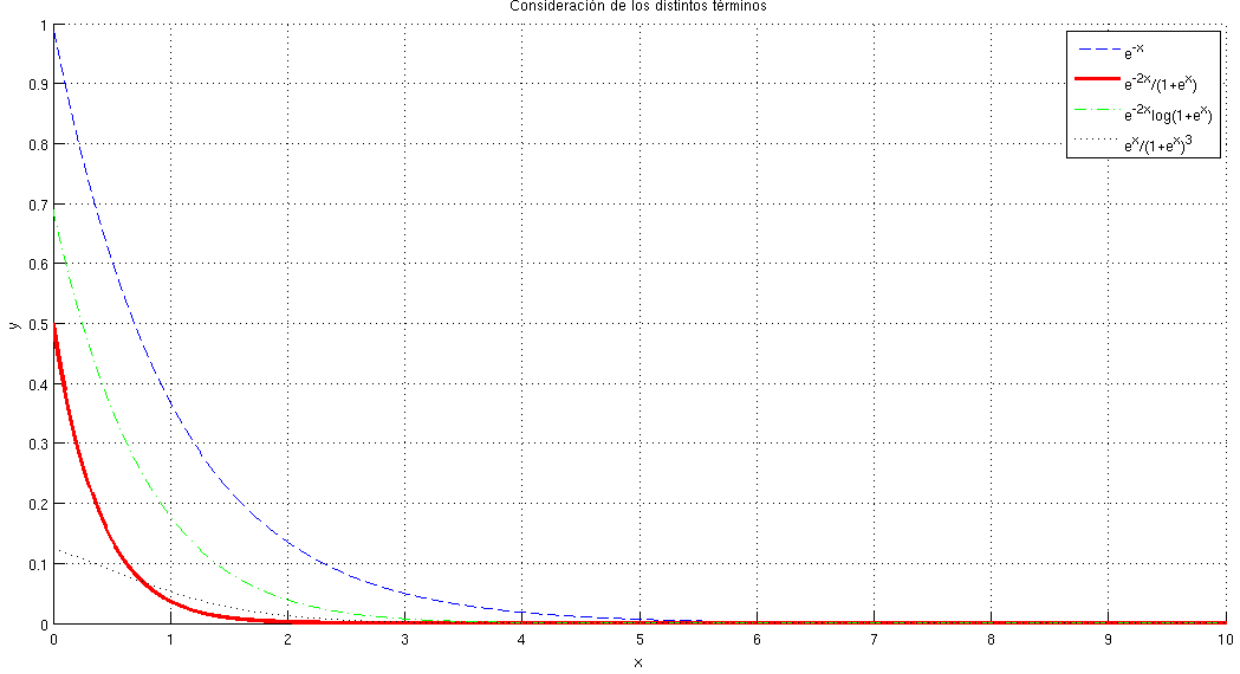


Figura A.7: Muestra gráfica del aporte de los términos exponencialmente pequeños

Ahora reescribo la ecuación de movimiento, de la manera más simple posible, para evitar confusiones en la notación, reemplazaré en (A.12) $\Delta \rightarrow \eta$ a fin de no confundir Δ y \triangle , es decir, η dará cuenta del corrimiento desde el punto de *Maxwell*, mientras que \triangle , de la distancia entre los frentes. La ecuación para cada uno de los frentes, en función de \triangle y δ queda:

$$\dot{\delta}_{\pm} = \pm \frac{9}{44} \mp \frac{\eta}{2} \pm \frac{9}{4} e^{-\Delta} + \frac{3}{4} \beta C_{\pm,1} \sin(k(\delta \mp \sqrt{2}\Delta) + \phi_{\pm,1}) + \frac{3}{4} \beta \gamma C_{\pm,2}(t) \sin(k(\delta \mp \sqrt{2}\Delta) + \phi_{\pm,2}(t))$$

Desde donde inmediatamente puedo obtener las ecuaciones de movimiento para \triangle y δ :

$$\begin{aligned} \dot{\delta} = \frac{1}{2}(\dot{\delta}_+ + \dot{\delta}_-) = \beta \frac{3}{4} \left\{ C_{+,1} \sin(k(\delta - \sqrt{2}\Delta) + \phi_{+,1}) + C_{-,1} \sin(k(\delta + \sqrt{2}\Delta) + \phi_{-,1}) \right. \\ \left. + \gamma \left[C_{+,2}(t) \sin(k(\delta - \sqrt{2}\Delta) + \phi_{+,1}(t)) + C_{-,2}(t) \sin(k(\delta + \sqrt{2}\Delta) + \phi_{-,2}(t)) \right] \right\} \neq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Observemos que la dinámica del centro de gravedad *es debida solo a la exis-*

tencia de la función periódica. Para Δ , tengo entonces:

$$\begin{aligned} \dot{\Delta} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\dot{\delta}_- - \dot{\delta}_+) = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(-2\frac{9}{44} + \eta - 2\frac{9}{4}e^{-\Delta} + \beta\frac{3}{4} \left\{ -C_{+,1} \sin(k(\delta - \sqrt{2}\Delta) + \phi_{+,1}) \right. \right. \\ \left. \left. + C_{-,1} \sin(k(\delta + \sqrt{2}\Delta) + \phi_{-,1}) \right. \right. \\ \left. \left. + \gamma \left[-C_{+,2}(t) \sin(k(\delta - \sqrt{2}\Delta) + \phi_{+,1}(t)) + C_{-,2}(t) \sin(k(\delta + \sqrt{2}\Delta) + \phi_{-,2}(t)) \right] \right\} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Los equilibrios de esta última ecuación corresponden a los *portes permitidos* de la estructura localizada Δ_{eq} , recordemos que este calculo *solo es válido* cuando $\Delta \gg 1$

Solo con el fin de tener más intuición sobre las ecuaciones anteriores, recordando las identidades trigonométricas “paso de producto a suma”, puedo reescribir las ecuaciones anteriores por:

$$\dot{\delta} = \beta(A_1(t) \cos(k\delta) \cos(k\sqrt{2}\Delta) + B_1(t) \sin(k\delta) \sin(k\sqrt{2}\Delta) + h.o.t.)$$

$$\dot{\Delta} = \eta + be^{-\Delta} + \beta(A_2(t) \cos(k\delta) \cos(k\sqrt{2}\Delta) + B_2(t) \sin(k\delta) \sin(k\sqrt{2}\Delta) + h.o.t.)$$

El sistema dinámico dado por estas 2 ecuaciones acopladas (haciendo $\psi = 0$ en principio para tener una imagen mental) tiene el siguiente plano de fase:

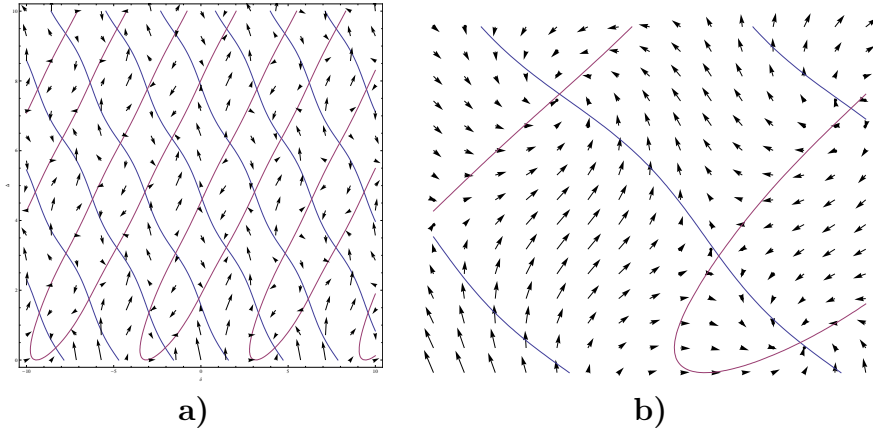


Figura A.8: **a)** Plano de fase donde se ilustran los vectores de campo. La nullclina azul corresponde a $\dot{\delta} = 0$, la violeta a $\dot{\Delta} = 0$. **b)** Zoom de lo anterior lo que da cuenta de la existencia de atractores, repelores y puntos hiperbólicos

Esto puede mirarse de otra forma. El potencial asociado a $\dot{\delta} = -\frac{\partial}{\partial \delta} U(t, \Delta)$ Es una función trigonométrica, que depende del tiempo, y de su acoplamiento, sin embargo, si suponemos que el sistema alcanza un equilibrio estable

asociado a un mínimo de este potencial, cabe preguntarse si existe un equilibrio estable para Δ (la imagen anterior del espacio de fase dice que así es). Procedo a graficar $\dot{\Delta}$ y encuentro que existen equilibrios efectivamente.

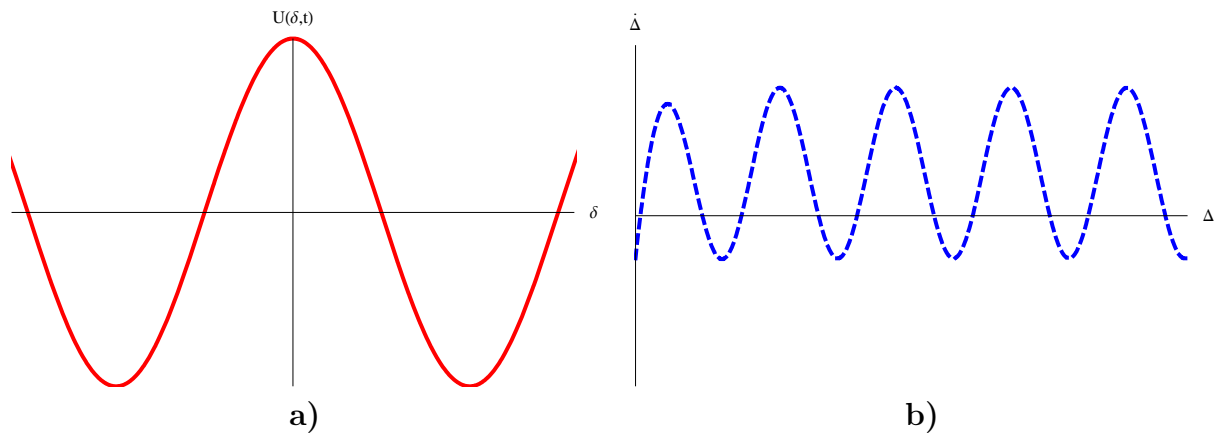


Figura A.9: **a)** Potencial de $\delta = -\partial U/\partial \delta$. **b)** Plano de fase del sistema unidimensional $\dot{\Delta} = f(\Delta)$ suponiéndolo desacoplado. Existen atractores repelores de manera intercalada

Esta imagen mental enseña varias cosas:

- El sistema tiene equilibrios estables debido a la existencia de una longitud de onda característica.
- Existen diferentes portes de equilibrio para la *estructura localizada*. de estabilidad intercalada (inestable, estable, inestable, ...) y aparecen vía *saddle-node*.

Esta imagen se verá modificada por el acoplamiento caótico de la siguiente forma:

- *Si las excursiones son pequeñas*, los frentes se moverán en la vecindad de los puntos estables
- *Si las excursiones no son pequeñas*, los frentes pueden moverse a otro equilibrio, modificando el porte de la estructura localizado.

Lo dicho anteriormente, corresponde exactamente al efecto del ruido en este tipo de sistemas. La diferencia fundamental viene del hecho de que el caos, a diferencia del ruido, tiene eventos que son totalmente improbables. Lo que explica por qué es posible tener el fenómeno de *pinning* en presencia de caos, pero no así en presencia de ruido.

Apéndice B

P.O.D.

En este Apéndice, revisaremos superficialmente la *descomposición propia ortonormal P.O.D.* Para el lector interesado en comprender en mayor profundidad este procedimiento vea [56].

la **P.O.D.** es una herramienta utilizada en el análisis de señales, fue introducida en el contexto de la turbulencia, sin embargo, se utiliza en una gran cantidad de contextos. En la literatura este procedimiento recibe distintos nombres como *descomposición de Karhunen-Loève*, análisis de las componentes principales y descomposición en valores singulares.

El gran éxito de la **P.O.D.** se debe a que a partir de ella podemos reescribir la parte más relevante de un comportamiento (incluso si este es no lineal), como una superposición de la menor cantidad de modos. Estas características la hacen especialmente útil en el análisis de comportamientos espacio temporales complejos, sin embargo, su rango de aplicación se extiende desde la compresión de imágenes hasta la eliminación del ruido.

Estamos interesados en describir un comportamiento espacio temporal $u(\vec{x}, t)$ como una suma de partes:

$$u(\vec{x}, t) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i(t) \psi_i(\vec{x}) \quad (\psi_i | \psi_j) = \delta_{ij} \quad (\text{B.1})$$

De la orto-normalidad de la base $\{\psi_s\}_s$ en (B.1), $C_k(t)$ es:

$$C_k(t) = \langle \psi_k | u \rangle$$

Las bases $\{\psi_s\}_s$ son varias (Funciones de Bessel, Funciones de Legendre, Funciones de Hermite, Base de Fourier, etc) y una buena elección dependerá, en general, del problema a estudiar. De entre todas las bases posibles, buscamos una base donde las auto-funciones $\{\psi_i\}_i$ “atrapen” la mayor cantidad de com-

portamiento del comportamiento original $u(\vec{x}, t)$, es decir:

$$\max \left\{ \psi \in L^2[0 : L] \mid \frac{\langle |u|\psi \rangle_t^2}{\|\psi\|^2} \right\}$$

Podemos reescribir lo anterior como un *funcional*:

$$J[\psi] = \langle |u|\psi \rangle_t^2 - \lambda(\|\psi\|^2 - 1) \quad (\text{B.2})$$

Donde λ es un *multiplicador de Lagrange*. Con el fin de maximizar la proyección de los datos sobre la base, buscamos entonces el extremo del *funcional* [51] (B.2), es decir, ψ tal que $\delta J(\psi) = 0$. Para esto, ponemos la función:

$$\psi = \check{\psi} + a\delta\psi \quad a \in \mathbb{R}$$

Y encontramos la variación de J (en lo sucesivo se $\check{\psi} = \psi$):

$$\begin{aligned} \delta J &= \left. \frac{\partial J(\psi(a))}{\partial a} \right|_{a=0} \\ &= \langle (u|\psi)(\delta\psi|u) + (u|\delta\psi)(\psi|u) \rangle_t - \lambda[(\delta\psi|\psi) + (\psi|\delta\psi)] \\ &= \langle (u|\delta\psi)(\psi|u) + (u|\delta\psi)(\psi|u)^\dagger \rangle_t - \lambda[(\psi|\delta\psi) + (\psi|\delta\psi)^\dagger] \end{aligned}$$

Asumiendo que el promedio temporal y el producto escalar conmutan:

$$\langle () \rangle_t = (\langle \rangle_t)$$

La variación es:

$$\begin{aligned} \delta J &= \langle (u|\delta\psi)(\psi|u) + (u|\delta\psi)(\psi|u)^\dagger \rangle_t - \lambda[(\psi|\delta\psi) + (\psi|\delta\psi)^\dagger] \\ &= 2\text{Re}\{\langle (\psi|u)(u|\delta\psi) \rangle_t - \lambda(\psi|\delta\psi)\} \end{aligned}$$

Extremando y escribiendo explícitamente el producto escalar:

$$\boxed{\int_{\text{soporte } \psi} \psi(\vec{x}') \langle u^\dagger(\vec{x}', t) u(\vec{x}, t) \rangle_t d\vec{x}' = \lambda \psi(\vec{x})}$$

Integral de Fredholm del segundo tipo, es decir, resolver esta integral es encontrar la base “propia”, pues la integral de Fredholm nos entrega la base $\{\psi_i\}_i$, a partir de lo que podemos obtener los coeficientes temporales $\{C_i\}_i$ usando la orto-normalidad de la base.

Los valores de λ dan cuenta de la *importancia* de cada modo en la reconstrucción de la dinámica, de esta forma podemos asociar a cada modo una “energía” dada por:

$$E_i = \lambda / \Sigma_i^\infty \lambda_i$$

Como ilustración del método, utilizaremos los datos de una foto cualquiera en escala de grises y reconstruiremos la “dinámica”. Para llevar a cabo el procedimiento, supondremos que la fotografía es de $X \times T$ pixeles y que el valor en escala de grises del pixel (x_i, t_i) es:

$$u(x_i, t_i)$$

Aplicando la **P.O.D.** a este conjunto de datos, podemos reconstruir la dinámica y ver las diferentes aproximaciones conforme truncamos (B.1) para cierta cantidad de modos.

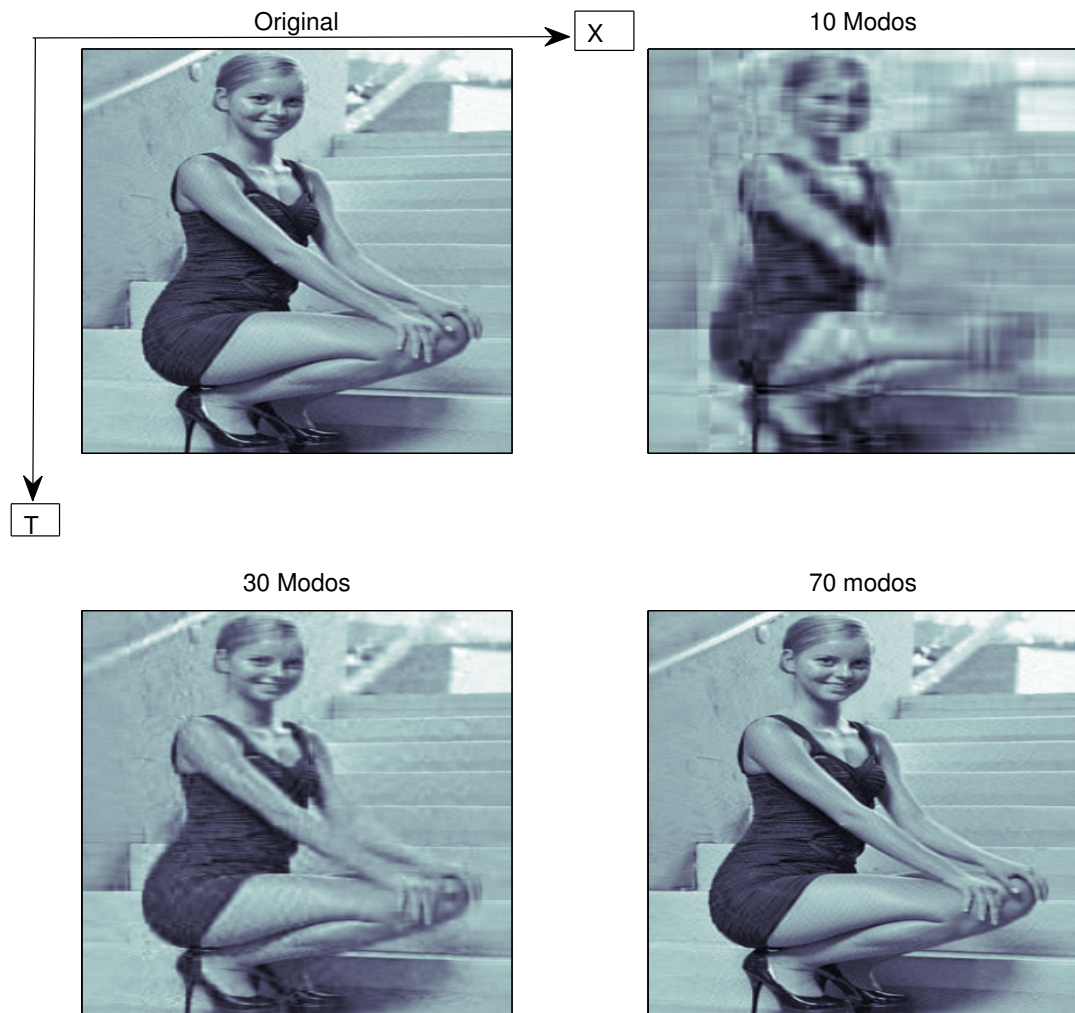


Figura B.1: Reconstrucciones para diferentes cantidades de modos.

En este caso la imagen original tenía 256 pixeles en X , lo cual equivale

a la “dimensión” de nuestro espacio de funciones discretizadas. La cantidad de modos para tener una “buena” reconstrucción de la dinámica depende de la complejidad del comportamiento y de que entendamos por “buena”. Es en este sentido que resulta útil el concepto de “Energía” atrapada por cada modo, pues da una idea porcentual de cuanto de la dinámica se está olvidando al truncar (B.1).

La **P.O.D.** es especialmente importante en el estudio de los comportamientos exhibidos por los sistemas extendidos (cf. sección ??), pues, cambiando con el método de *Galerkin*, permite pasar de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias [56]. A continuación una breve explicación del método de *Garlekin* combinado con la **P.O.D.**, para ecuaciones diferenciales parciales de una sola variable espacial (la generalización para más variables es trivial), supongamos que tenemos nuestro sistema extendido y la ecuación reescrita la **P.O.D.**:

$$\partial_t u = f(u, \partial_x^n u) \quad u = \sum_{i=0}^{\infty} C_i(t) \psi(x)$$

Y reemplazamos la solución u escrita como serie en el sistema:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \dot{C}_i(t) \psi(x) = f\left(\sum_{i=0}^{\infty} C_i(t) \psi(x), \sum_{i=0}^{\infty} C_i(t) \partial_x^n \psi(x)\right)$$

Ahora, supongamos que estamos interesados en obtener un sistema dinámico que dé cuenta de la dinámica entre los primeros k modos (pues según la **P.O.D.** son los más relevantes). Usando la ortonormalidad de la base obtenemos un sistema de k ecuaciones diferenciales acopladas dadas por:

En el Capítulo 6 se ha utilizado la **P.O.D.** para comprender como una suma de partes los complejos comportamientos de la ecuación de Lifshitz (5.1)

Apéndice C

Artículos

Al momento de escritura, el primer artículo presentado se encuentra en proceso de arbitraje en la revista *Physical Review Letters.*, mientras que el segundo es solo un borrador.

Spatiotemporal chaotic localized state in liquid crystal light valve experiments with optical feedback.

N. Verschueren¹, U. Bortolozzo², M.G. Clerc¹, and S. Residori²

¹*Departamento de Física, FCFM, Universidad de Chile, Casilla 487-3, Santiago, Chile and*

²*INLN, Université de Nice-Sophia Antipolis, CNRS, 1361 route des Lucioles 06560 Valbonne, France*

The existence, stability properties, and dynamical evolution of localized spatiotemporal chaos are studied. We provide evidence of spatiotemporal chaotic localized structures in a liquid crystal light valve experiment with optical feedback. The observations are supported by numerical simulations of the Lifshitz model describing the system. This model exhibits coexistence between a uniform state and a spatiotemporal chaotic pattern, which emerge as the necessary ingredients to obtain localized spatiotemporal chaos. In addition, we have derived a simplified model that allows us to unveil the front interaction mechanism at the origin of the localized spatiotemporal chaotic structures.

PACS numbers: 05.45.-a, 89.75.Kd, 05.45.Jn, 05.45.Pq

Macroscopic systems maintained out of equilibrium, under the influence of injection and dissipation of energy and momentum, are characterized by exhibiting self-structuring phenomena [1–3]. In the course of recent decades, much effort has been devoted to the study of pattern formation arising in diverse branches of natural sciences (see, e.g., [4–6] and the references therein). In most of these systems it has been observed the emergence of localized states [7–12]. Although these states are spatially extended, they exhibit properties typically associated with particle-like states, such as position and width. In one-dimensional spatial systems, localized states can be described as spatial trajectories that connect one steady state with itself, which means, they are homoclinic orbits from the point of view of dynamical systems [13]. Particular types of localized states are the localized patterns, which correspond to patterns extended only over a small portion of a spatial system [1, 3]. A geometrical interpretation of the existence, stability properties, and bifurcation diagram of localized patterns in one-dimensional extended systems has been proposed in Refs. [14, 15]. Recently, the existence of localized patterns based on front interaction was developed [16]. Consequently, one could imagine localized states of different types supported by different states, for example, a pattern over a pattern [17], an oscillatory state over a uniform one [18] or a wave over a uniform state [22]. In the case of a localized oscillatory state, it has been shown that if one increases the amplitude of the forcing, the amplitude of the breather undergoes a double-period route to chaos, hence realizing a low dimensional localized chaotic state [18]. A similar route has been observed for discrete breathers in anisotropic Josephson junction ladders [19]. Chaotic localized states have also been reported in model of heterogeneous catalytic reaction in porous particles [20], whereas localized chaotic domains were observed in surface waves experiment as result of the curvature of the container walls [21]. Notwithstanding, the above scenario is incomplete, as one would expect

to find situations where it is possible to obtain localized states characterized by spatiotemporal chaotic dynamics developing over a uniform state. To our knowledge, there is, up to date, no observation or theory of this type of localized state.

The purpose of this letter is to provide evidence of the existence, stability properties, and dynamical evolution of localized spatiotemporal chaos. Experimentally, this type of localized state are observed in a liquid crystal light valve (LCLV) experiment with feedback loop. Figure 1 shows an example of observed spatiotemporal chaotic localized state and its respective spatiotemporal evolution. Close to the nascent of bistability and spatial

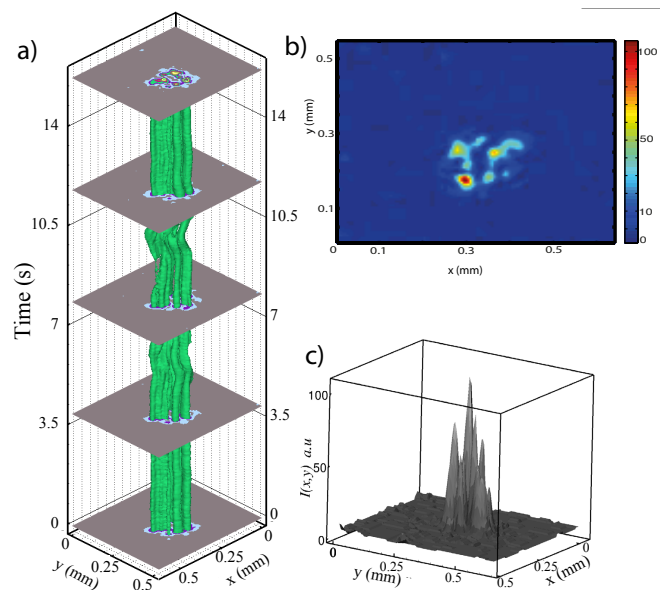


FIG. 1. (color online). Chaoticon structure observed in the LCLV experiment; a) temporal evolution of the light intensity iso-surface; the camera acquisition rate is 30 frames per second; b) instantaneous snapshot; c) surface plot of the light intensity at a given time.

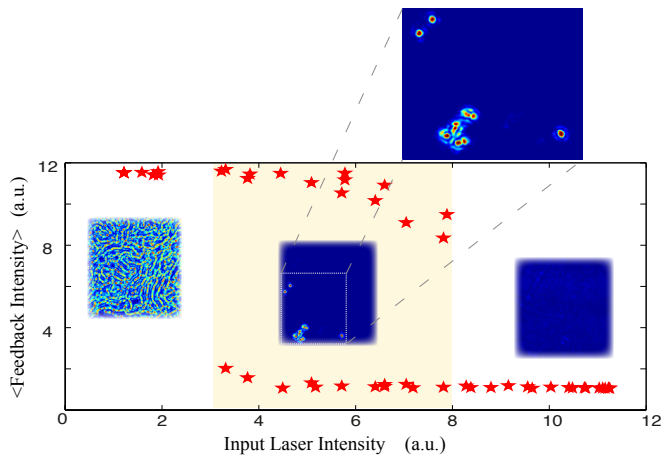


FIG. 2. Bifurcation diagram of extended states observed in the LCLV experiment; the average light intensity on the photoconductor side of the LCLV is plotted versus the input laser intensity; the upper and lower branches correspond to the spatiotemporal chaotic pattern and uniform state, respectively. In the insets are displayed example pictures accounting for the typical observations in the respective regions. The shaded area represents the coexistence region. An enlarged view of the chaotic state is shown in the upper central inset.

bifurcation, *Lifshitz point* [3], a generalization of the variational Swift-Hohenberg equation—the *Lifshitz normal form*—describes this system [23]. For a certain region of parameters, this model exhibits coexistence between a uniform state and a chaotic spatiotemporal pattern, which are the necessary ingredients to have a spatiotemporal chaotic localized state. In this region, we observe spatiotemporal chaotic localized states. We have termed this type of solution as *chaoticons*. When increasing the size of these localized structures, a transition from stationary to spatiotemporal chaotic states is observed. This is consistent with the fact that, indeed, as one increases the size of localized states, additional modes are incorporated in the dynamics. In order to reveal the livelihood mechanism of these states, we consider a prototype bistable model forced with a spatiotemporal chaotic source. This model allows us to analytically characterize the pinning between a front that connects a uniform and a spatiotemporal chaotic state. The Lifshitz normal form shows a good agreement with these analytical predictions for the pinning.

Experimental evidence of chaoticons.— We consider a LCLV experiment, which is composed of a nematic liquid crystal film sandwiched in between a glass and a photoconductive plate over which a dielectric mirror is deposited (for details see, e.g., the review [24]). The liquid crystal film has a planar aligned nematic director \vec{n} parallel to the walls, with a thickness $d = 15 \mu\text{m}$. This liquid crystal is a mixture of cyano-biphenyls (nematic LC-654, produced by NIOPIK), with a dielectric anisotropy $\Delta\epsilon \equiv \epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp} = 10.7$ and optical birefrin-

gence, $\Delta n \equiv n_{\parallel} - n_{\perp} = 0.2$, where ϵ_{\parallel} and ϵ_{\perp} are the dielectric permittivities \parallel and \perp to \vec{n} , respectively, and n_{\parallel} and n_{\perp} are the extraordinary (\parallel to \vec{n}) and ordinary (\perp to \vec{n}) refractive index, respectively. Transparent electrodes over the glass plates permit the application of an electrical voltage across the liquid crystal layer, which allows applying a reference voltage V_0 without feedback. The photoconductor behaves like a variable resistance, decreasing for increasing illumination. The feedback is obtained by sending back onto the photoconductor the light which has passed through the liquid crystal layer and has been reflected by the dielectric mirror [24]. This light beam experiences a phase shift which depends on the liquid crystal reorientation and, on its turn, modulates the effective voltage that locally applies to the liquid crystals. The optical free propagation length in the feedback loop is fixed to $L = -4.0 \text{ cm}$. This parameter, together with the laser wavelength λ , controls the characteristic size of the optical patterns [24].

For a fixed voltage V_0 , by increasing the laser intensity the system presents a bistability between a spatiotemporal complex pattern and a homogeneous state. In order to carefully identify the bistability region, an acousto-optic modulator is placed on the optical path of the input beam and allows changing the intensity of the light impinging onto the LCLV. Figure 2 illustrates the experimental bifurcation diagram obtained by increasing the laser intensity, at a fixed applied voltage $V_0 = 8.12 \text{ V r.m.s.}$ In the coexistence region, by making a local perturbation with a low power external beam, we can induce localized structures from the uniform state. Once created by the external perturbation, the localized structures remain stable when removing the external beam. By changing the position of the initial perturbation, the localized structure can be spatially addressed and generated in any space position over the photoconductor area. An example of induced structures is given in the central inset of Fig. 2. As a first observation, we note that localized structures that are transversally small (composed by 1 or 2 elementary cells) are stationary. When the localized structures become larger (composed at least by 5 or 6 elementary cells), they exhibit a complex spatiotemporal behavior, realizing a chaoticon structure as the one in the example shown in Fig 1.

Theoretical description of chaoticons.— In order to establish a theoretical basis that supports the above observations, we can resort to the one-dimensional *Lifshitz normal form* that describes the system of the LCLV with optical feedback close to the point of nascent bistability and spatial bifurcation [23]

$$\begin{aligned} \partial_t u = & -\eta + \mu u - u^3 + \nu \partial_{xx} u - \partial_{xxxx} u \\ & + b u \partial_{xx} u + c (\partial_x u)^2, \end{aligned} \quad (1)$$

where $u(x, t)$ is a scalar field proportional to the average

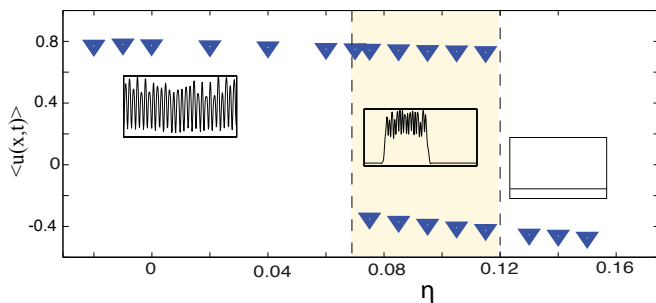


FIG. 3. Bifurcation diagram of the Lifshitz model, Eq.(1), $\mu = -0.09$, $\nu = -1$, $b = -3.5$, $c = 10$. The upper and lower branches correspond to the spatiotemporal chaotic pattern and uniform state, respectively. In the insets are displayed typical pattern profiles obtained in the respective regions. The shaded area represents the coexistence region.

tilt angle of the liquid crystal molecules, μ is the bifurcation parameter, η accounts for the asymmetry between homogeneous states, c is the nonlinear advection coefficient, and $\{\nu, b\}$ are, respectively, the linear and nonlinear diffusion coefficients. The relation of these parameters with the physical parameters is given in Ref. [25]. Model (1) describes a co-dimension 3 bifurcation, where the three small coefficients that control the bifurcation are $\{\eta, \mu, \nu\}$, the parameters $\{b, c\}$ are order one and proportional to free propagation length L in the feedback loop. Note that Eq. (1) has also been derived in the context of biological systems, optical cavities and chemical reactions [26], which emphasizes its universal nature. For $b = c = \eta = 0$ the above equation corresponds to the well-known Swift-Hohenberg (SH) model [3, 5], whose dynamics is characterized by the minimization of a functional energy. Contrarily, Eq.(1) is of non-variational type. Consequently, one expects that model (1) can exhibit permanent dynamics, such as oscillations, propagations, chaos, and spatiotemporal chaos. For negative diffusion ($\nu < 0$), the SH equation exhibits stationary patterns in a wide range of parameters [3, 5]. Contrarily, when increasing c , model (1) exhibits the emergence of permanent dynamical behaviors of the patterns, with a route from stationary to spatiotemporal chaotic patterns [27]. This route is characterized by a maximum Lyapunov exponent changing continuously from negative to positive. Furthermore, the spatiotemporal chaotic patterns have a coexistence region with the uniform state, as it is illustrated in Fig. 3.

Note that the experimental bifurcation diagram (Fig.2) and the one calculated from the model (1) (Fig.3) share the same qualitative behavior. Therefore, in analogy with the experimental observations, we expect to obtain *chaoticons* in the region of coexistence between the uniform state and the spatiotemporal chaotic pattern. Indeed, numerical simulations of model (1) exhibit localized spatiotemporal states that become chaotic when the size

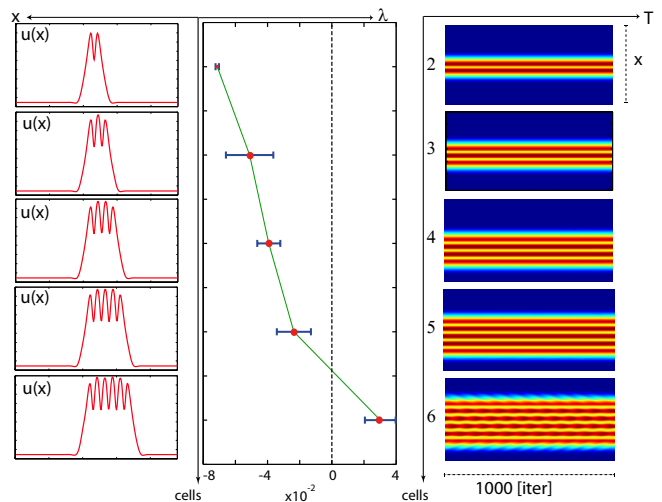


FIG. 4. (Color online) Localized structures of model (1), $\mu = -0.09$, $\nu = -1$, $b = -3.5$, $\eta = 0.04$, $c = 10$. The left, center and right panels illustrates, respectively, the different localized states, their largest Lyapunov exponent and the corresponding spatiotemporal diagrams.

of the structures is large enough. Figure 4 displays localized states with different numbers of cells (left-hand panels). The respective largest Lyapunov exponent, calculated with the method described in Ref.[28], is shown in the central panels of the figure, whereas the corresponding spatiotemporal diagrams are displayed in the right-hand panels. The small localized structures are steady states with negative largest Lyapunov exponent, thus, they do not exhibit permanent dynamics. Then, starting from a critical size, the localized states exhibit complex spatiotemporal dynamics and, eventually, they become characterized by a positive Lyapunov exponent. The spatiotemporal chaos observed for these cases can be understood as a consequence of an increased number of spatial modes participating to form larger structures, the interaction of these modes being responsible for the complex spatiotemporal dynamics. Indeed, if one continues to increase the size of the localized states, the Lyapunov exponent increases slightly while more modes are incorporated into the permanent dynamics. These behaviors are consistent with those characterizing the experimental observations.

In order to shed light into the livelihood mechanism that support the chaoticon structures and, especially, to understand their nature as the result of front interaction [13, 16], we consider a simplified model that contains the minimal ingredients, namely, the coexistence between a uniform state and a chaotic spatiotemporal pattern with controlled amplitude. This allows us to develop analytical calculations otherwise inaccessible in model (1). Let

us consider the *Nagumo-Kuramoto* model

$$\partial_t u = u(u-1)(\alpha-u) + \partial_{xx}u + u \cos(kx) (\beta + \gamma \partial_x \Psi) \quad (2)$$

$$\partial_t \Psi = (\partial_x \Psi)^2 - \partial_{xx} \Psi - \partial_{xxxx} \Psi, \quad (3)$$

which is a set of two coupled equations. For $\beta = \gamma = 0$, the field $u(x, t)$ satisfies the Nagumo model, Eq.(2), used to describe front propagation in population dynamics [29]. Here, α controls the relative stability between the two equilibria ($u = 0$ and $u = 1$), while the term proportional to β is responsible for the change of the uniform state, $u = 1$, into a pattern with wavenumber k and amplitude proportional to β . The other equation, Eq.(3), describes the evolution of an independent field $\Psi(x, t)$, which obeys the prototype model for spatiotemporal chaos, the Kuramoto-Sivashinsky model [2, 3, 5]. The inclusion in Eq.(2) of a term proportional to γ , which couples both equations, causes the pattern to exhibit chaotic spatiotemporal behaviors. The above model presents a similar coexistence to those displayed by the LCLV experiment and the Lifshitz model. Consequently, one expects that the Nagumo-Kuramoto model will show chaotic states. In Fig. 5 we display the chaotic and its respective spatiotemporal diagram obtained in the Lifshitz model (Fig. 5a) and in the Nagumo-Kuramoto model (Fig. 5b). A good qualitative agreement between the two chaotic states can be appreciated.

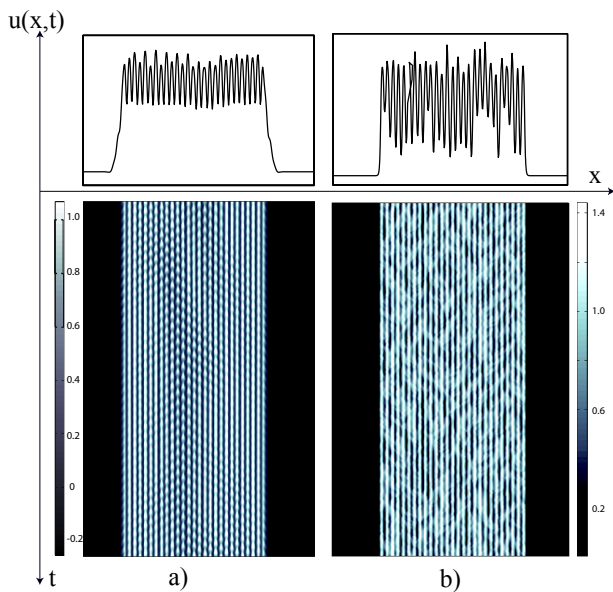


FIG. 5. (Color online) Numerical observations of chaotic structures; spatiotemporal chaotic localized states and spatiotemporal diagrams observed in a) Lifshitz model, Eq.(1), $\mu = -0.09$, $\nu = -1$, $b = -3.5$, $\eta = 0.04$, $c = 10$ and b) Nagumo-Kuramoto model, Eq.(2), $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.3$, $k = 11$, $\gamma = 0.3$.

A great advantage of the Nagumo-Kuramoto model

when compared to Eq.(1) is that the complex patterns are observed for small parameters ($\beta \ll 1$ and $\gamma \ll 1$) and the pattern amplitudes are tunable at will. Therefore, we can study the effect of the terms proportional to β and γ on the interaction of fronts between uniform states, where the upper state becomes spatiotemporally chaotic. Close to the Maxwell point ($\alpha \approx 0.5 + \Delta$), where Δ stands for the detuning from the Maxwell point, the Nagumo-Kuramoto model has motionless front solutions of the form $u_{\pm}(x) = 0.5 \pm 0.5 \tanh(\sqrt{2}(x - \delta_0)/4)$, where δ_0 is the front position. From this solution, one can build up a localized state which accounts for the effect of the spatiotemporal forcing (β and γ) and has the form $u(x, t) \approx [u_+(x - \delta_+(t)) + u_-(x - \delta_-(t)) - 1]$. By introducing the position $\chi \equiv (\delta_+ + \delta_-)/2$ and the width $\xi \equiv \sqrt{2}(\delta_+ - \delta_-)/4$ of the localized state, after straightforward calculations at the dominant order, we obtain

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= A_1(t) \cos(k\chi) \cos(k\sqrt{2}\xi) + B_1(t) \sin(k\chi) \sin(k\sqrt{2}\xi), \\ \dot{\xi} &= \frac{\Delta}{2} + be^{-\xi} + A_2(t) \cos(k\chi) \cos(k\sqrt{2}\xi) \\ &\quad + B_2(t) \sin(k\chi) \sin(k\sqrt{2}\xi), \end{aligned} \quad (4)$$

where $b \equiv 9\sqrt{2}/8$. The full and lengthy expressions of the other coefficients will be reported elsewhere. Briefly, $\{A_1(t), A_2(t), B_1(t), B_2(t)\}$ are formed by two parts, a constant term proportional to β and a chaotic term proportional to γ . The above set of Eqs. (4) allow us to establish the existence, stability properties, and dynamical evolution of chaoticons. The first equation describes the chaoticon position, which evolves chaotically in time around a given space location. From the second equation, we obtain the temporal evolution of the chaoticon width and we can derive the front interaction law. In Fig. 6 the width variation, corresponding to the force for an overdamped system, is plotted versus the width. Equilibrium points can be identified and represent the different chaoticon structures, from the smallest to the largest one. Stable (unstable) points are marked by filled (empty) circles.

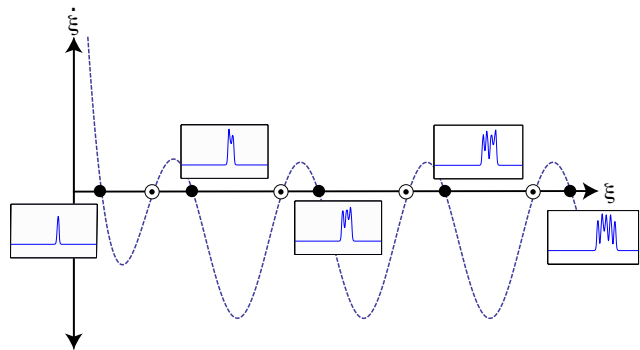


FIG. 6. (color online) Fronts interaction law accounting for the equilibrium chaoticon widths derived from Eq. (4). The filled (empty) circles represents stable (unstable) chaoticons.

The locking mechanism between the uniform state and the spatiotemporal chaotic pattern is due to the spatial periodic structure which induces a nucleation barrier in the front dynamics. Noteworthy, a similar mechanism is observed in localized patterns [16, 17]. The main difference of chaoticons with localized patterns is that the chaoticon interfaces maintain a chaotic dynamics around a given position. The dynamics described by Eqs. (4) qualitatively agree with the dynamics displayed by the Lifshitz model. However, in the Nagumo-Kuramoto model the chaotic behavior characterizes also small localized structures, at variance with those observed in the Lifshitz model and in the experiment.

In conclusion, we have provided evidence of spatiotemporal chaotic localized structures, termed chaoticons. The evidence is supported by experimental observations in a LCLV experiment and numerical simulations of a non-variational model describing the system. In addition, we have developed a simplified model, the Nagumo-Kuramoto model, which allowed us to reveal the livelihood mechanism of these chaotic localized states. We have demonstrated that chaoticons are robust phenomena whenever a coexistence between a uniform state and a spatially complex pattern exists, therefore, we expect these dynamical structures to emerge in different nonequilibrium systems.

We acknowledge financial support of the ANR international program, project ANR-2010-INTB-402-02 (ANR-CONICYT39), "COLORS". M.G.C. thanks the financial support of FONDECYT project 1120320. N.V. thanks the Master fellowship from CONICYT contract 22111114 and the financial support of DPP of the University of Chile.

[1] G. Nicolis and I. Prigogine, *Self-Organization in Non Equilibrium Systems* (J.Wiley & Sons, New York, 1977).
 [2] L. M. Pismen *Patterns and Interfaces in Dissipative Dynamics*, (Springer Series in Synergetics, Berlin Heidelberg 2006).
 [3] M. C. Cross, and P. C. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 851 (1993).
 [4] M. I. Rabinovich, A. B. Ezersky, P. D. Weidman, *The dynamics of patterns* (World Scientific, Singapore, 2000).

[5] M. Cross, H. Greenside, *Pattern Formation and Dynamics in Nonequilibrium Systems*, (Cambridge University Press, New York, 2009).
 [6] P. Ball *The Self-Made Tapestry: Pattern formation in nature*, (Oxford University Press, New York, 1999).
 [7] O. Descalzi, M. Clerc, S. Residori, and G. Assanto, Eds. *Localized States in Physics: Solitons and Patterns*, (Springer, 2010).
 [8] H.G. Purwins, H.U. Bodeker, Sh. Amiranashvili, *Advances in Physics* **59**, 485 (2010).
 [9] P.L. Ramazza, E. Benkler, U. Bortolozzo, S. Boccaletti, S. Ducci, and F. T. Arecchi, *Phys. Rev. E* **65**, 066204 (2002).
 [10] U. Bortolozzo, R. Rojas, and S. Residori, *Phys. Rev. E* **72**, 045201(R) (2005).
 [11] F. Haudin, R. G. Elias, R. G. Rojas, U. Bortolozzo, M. G. Clerc, and S. Residori, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 128003 (2009).
 [12] T. Ackemann, W.J. Firth, G.L. Oppo, *Adv. At. Mol. Opt.*
 [13] P. Couillet, *Int. J. of Bif. Chaos* **12**, 245 (2002). *Phys.* **57**, 323 (2009).
 [14] P. D Woods, A. R Champneys, *Physica D*, **129**, 147 (1999).
 [15] P. Couillet, C. Riera and C. Tresser, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3069 (2000).
 [16] M.G. Clerc and C. Falcon, *Physica A* **356**, 48 (2005).
 [17] U. Bortolozzo, M.G. Clerc, C. Falcon, S. Residori, and R. Rojas, *Phys. Rev. Letts.* **96**, 214501 (2006).
 [18] I. V. Barashenkov, E. V. Zemlyanaya, and T.C. van Heerden, *Phys. Rev. E* **83**, 056609 (2011).
 [19] P.J. Martinez, L.M. Floria, F. Falo, J.J. Mazo, *Europhysics letts.* **45**, 444 (1999).
 [20] N.V. Peskov, *Comput. Math. and Model.*, **10**, 353 (1999).
 [21] A. Kudrolli and J.P. Gollub, *Phys. Rev. E*, **54** R1052 (1996).
 [22] S. Fauve, and O. Thual, *Phys. Rev. Letts.* **64**, 282 (1990); *J. de Physique*, **49**, 1829 (1988).
 [23] M. G. Clerc, A. Petrossian, and S. Residori, *Phys. Rev. E* **71**, 015205R (2005).
 [24] S. Residori, *Phys. Rep.* **416**, 201 (2005).
 [25] F. Haudin, R.G. Elias, R.G. Rojas, U. Bortolozzo, M.G. Clerc and S. Residori, *Phys. Rev. E.* **81**, 056203 (2010).
 [26] G. Kozyreff, and M. Tlidi, *Chaos* **17**, 037103 (2007).
 [27] F. Carbone, M.G. Clerc, and N. Verschueren *in preparation*.
 [28] J. C. Sprott, *Chaos and Time-Series Analysis*, (Oxford University Press, 2003), pp.116-117.
 [29] J.D. Murray, *Mathematical Biology*, (Springer-Verlag, Berlin, 1993).

Spatiotemporal quasi-periodicity route to chaos in one dimensional patterns

MARCEL G. CLERC¹ and NICOLAS VERSCHUEREN¹

¹ *Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, Casilla 487-3, Santiago Chile.*

PACS 05.45.-a – Nonlinear dynamics,
 PACS 89.75.Kd – Pattern formation in complex systems,
 PACS 05.45.Jn – Chaos, High dimensional.

Abstract – A route from stationary patterns to spatiotemporal chaos for a universal model of pattern formation in one-dimension is studied. This route is characterized by two successive bifurcations. Initially the pattern undergoes an Andronov-Hopf bifurcation that leads to spatiotemporal chaotic behavior. Subsequently, a second bifurcation develops an incommensurable frequency with respect to the former. This last bifurcation is responsible of the turbulent-like behavior of patterns, generalizing the quasi-periodicity route of low-dimensional chaos to extended systems. To characterize this route to spatiotemporal chaos, we compute the largest Lyapunov exponent.

Introduction. – Macroscopic systems maintained far from equilibrium exhibit spatially coherent structures, *patterns*, which are ubiquitous in Nature [1]. These appear as a way to optimize energy transport in pattern-forming systems [2, 3, 5]. Non-equilibrium processes often lead to the formation of spatially periodic structures developed from a homogeneous state through a spontaneous breaking of the symmetries present in the system [2]. As the parameters of the system are changed, stationary patterns can become unstable and bifurcate to more complex patterns, even into turbulent-like states [5]. This behavior is characterized by complex spatiotemporal dynamics exhibited by the pattern and a continuous coupling between modes in time and space. However, the above scenario or *route* is not fully understood in the context of extended systems. A route for the transition from order to disorder in the context of wave patterns in two spatial dimension is *defect-mediated turbulence* [6]. This route is characterized by the nucleation of topological defects, which move through the system and break the order established by the wave pattern. Understanding the route of spatiotemporal complexity emergence is one of the great challenges in nonlinear physics. A classic scenario of the emergence of complexity in low dimensional systems is the quasi-periodicity route [7]. By modifying a control parameter, this route shows a transition from a stationary solution to an oscillatory one through an Andronov-Hopf bifurcation. Increasing the pa-

parameter value, the solution displays a second incommensurate frequency with respect to the original one, generating a quasi-periodic behavior. Further modification of the parameter will induce the emergence of temporal chaotic behavior [7, 8].

The aim of this Letter is to study a universal model for pattern formation, a non-variational Swift-Hohenberg equation, which exhibits a novel route from a stationary pattern to spatiotemporal chaos with a turbulent-like behavior by changing a single control parameter. This route is characterized by a spatial period doubling Andronov-Hopf bifurcation which gives rise to the emergence of spatiotemporal chaos. This behavior is dominated by the Andronov-Hopf frequency and its harmonics. As the control parameter is increased a second incommensurable frequency with respect to the former one develops. The pattern shows a more intricate and erratic spatiotemporal behavior. The spatiotemporal evolution of the pattern can be understood by the qualitative difference between power spectrum densities of any relevant physical observable, for different parameter values, as coupled modes appear. We can understand the evolution of the pattern dynamics by computing the largest Lyapunov exponent, which allows to measure how chaotic are the different dynamical regimes.

A prototype model used to explain the emergence of patterns in one dimensional non-equilibrium systems is the Swift-Hohenberg equation, which was proposed in the

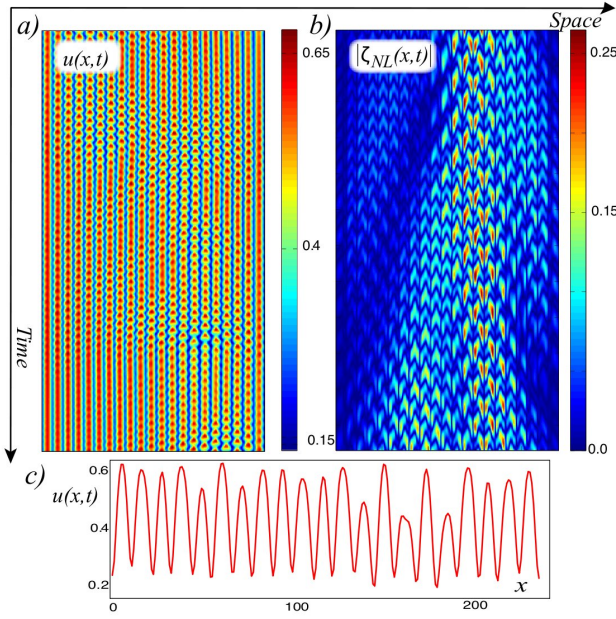


Fig. 1: (color online) a) Spatio-temporal diagram of the field $u(x,t)$ obtained from Eq. (1) for $\eta = -0.020$, $\mu = -0.092$, $\nu = -1.000$ $\kappa = -3.000$ and $c = 10.000$, b) $\zeta(x,t)$ obtained by a small initial difference (cf. Formula 3), and c) illustrates the typical shape of the field $u(x,t)$ at a given time.

context of Rayleigh-Bernard convection [9]. However, this is a variational type equation: the dynamics of this system is characterized by the minimization of a functional and can only exhibit stationary behavior such as patterns and uniform states. Therefore, the appearance of permanent behaviors as oscillations, low-dimensional chaos, or spatiotemporal chaos must be ruled out. On the other hand, from the complex spatiotemporal dynamics observed in several optical systems a non-variational generalization of

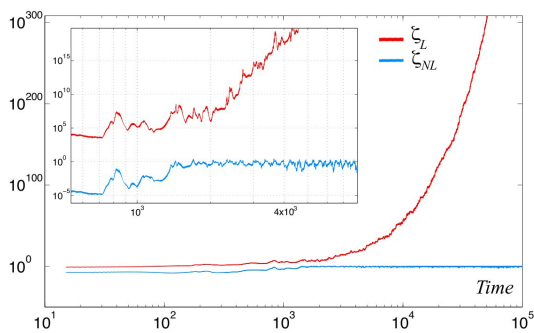


Fig. 2: (color online) Evolution of ζ as a function of time, using the linearized method and nonlinear method for $\eta = -0.020$, $\mu = -0.092$, $\nu = -1.000$ $b = -3.000$ and $c = 8.000$.

Swift-Hohenberg equation has been derived [10–12]. This model has the form (*Lifshitz normal form* [10])

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \eta + \mu u - u^3 + \nu \partial_{xx} u - \partial_{xxxx} u \\ &\quad + bu \partial_{xx} u + c(\partial_x u)^2, \end{aligned} \quad (1)$$

where $u(x,t)$ is a scalar field, μ is the bifurcation parameter, η accounts for the asymmetry between homogeneous states, c is the nonlinear advection coefficient, and $\{\nu, b, \}$ are respectively the linear and nonlinear diffusion coefficients. For the sake of simplicity henceforth, we consider specular boundary conditions. For $b = c = \eta = 0$ the previous equation corresponds to the Swift-Hohenberg model. It is important to note that for $b = 2c$ the above equation is variational. The above model describes the dynamics in the vicinity of a Lifshitz point [5], that is near a bifurcation that simultaneously exhibits nascent bistability and spatial instability. The higher terms are eliminated by considering the following scaling $\mu \ll 1$, $\partial_t \sim \mu$, $\eta \sim \mu^{3/2}$, $u \sim \mu^{1/2}$, $\partial_x \sim \mu^{1/4}$, $\nu \sim \mu^{1/2}$, $b \sim O(1)$ and $c \sim O(1)$. Note that Eq. (1) is temporal and spatial translation invariant, moreover it is invariant under spatial reflection symmetry. Model (1) has also been derived in the context of biological and chemical framework [13], which emphasizes its universal nature.

It is well-known that the Swift-Hohenberg Eq. for negative diffusion ($\nu < 0$, $b = c = 0$) exhibits stationary patterns in a wide range of parameters. The inclusion of non-variational terms allows the emergence of permanent dynamic behavior as equilibrium state, such as oscillations, chaos, spatiotemporal chaos and so on [10]. To study the pattern dynamics arising from Eq. (1), we use the following strategy: we keep constant all the parameters in the pattern region and begin to increase the nonlinear advection parameter c . For small $c < c_{AH} = 5.440 \pm 0.005$, we observe that the pattern is stationary. As we increase c , the pattern exhibit complex spatio-temporal behavior as illustrated in the spatio-temporal diagram showed in Fig. 1a.

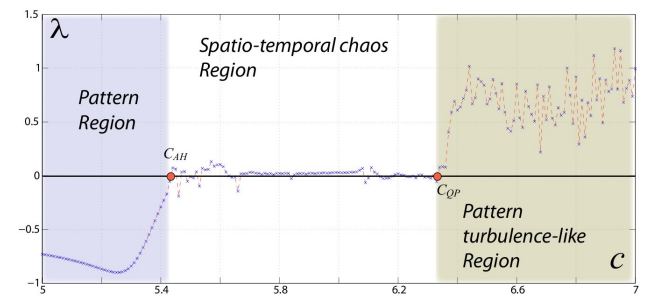


Fig. 3: (color online) Largest Lyapunov exponent of model (1) as a function of the nonlinear advection parameter c for $\eta = -0.020$, $\mu = -0.092$, $\nu = -1.000$ and $b = -3.000$.

In spite of the success of the chaotic characterization in low dimensional system [8], for extended system we lack a

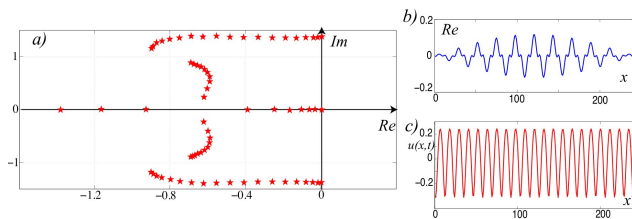


Fig. 4: (color online) Numerical characterization of Andronov-Hopf bifurcation of model (1) with specular boundary condition. a) sets of eigenvalues, b) real part of marginal mode, c) pattern.

characterization of spatiotemporal complex behavior. In order to understand the observed dynamical behavior of model (1), we have to establish an appropriate definition of spatiotemporal chaos. Usually spatiotemporal chaos is defined as a *deterministic permanent dynamic which exhibits aperiodic behavior in time and space in extended system* (see for example [14]). Inspired by this definition, if we considered the extra feature of *the exponential sensitivity to initial conditions*. We can quantify spatiotemporal chaos as this property restricts strongly complex spatiotemporal behavior. Also it will differentiate spatiotemporal chaos from other complex behavior in extended systems, such as turbulent-like states.

The exponential sensitivity of system to initial conditions can be quantified by considering the largest Lyapunov exponent defined by:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \left[\frac{\|u(x, t) - u'(x, t)\|}{\|u(x, t_0) - u'(x, t_0)\|} \right], \quad (2)$$

where $u(x, t)$ and $u'(x, t)$ are two solutions of model (1), $\Delta = \|u(x, t_0) - u'(x, t_0)\|$, and $\|f(x, t)\| \equiv \int |f(x, t)|^2 dx$ is a norm. In order to calculate this exponent, we use the strategy proposed in [15], which is based on studying the linear dynamics around the solution $u(x, t)$. Mainly one studies the evolution of the different initial conditions using

$$\zeta(x, t) \equiv u(x, t) - u'(x, t). \quad (3)$$

where $\zeta(x, t)$ is the difference field between two trajectories of the system. Given a trajectory $u(x, t)$, we can derive an equation for $\zeta(x, t)$. Keeping the linear [15] or non-linear terms in this equation, we can define ζ_L and ζ_{NL} , respectively. Figure 2 depicts the evolution of $\|\zeta_L(t)\|$ and $\|\zeta_{NL}(t)\|$ for Eq. (1). $\|\zeta_L\|$ exhibits an exponential behavior in the entire temporal range. From this we can compute the largest Lyapunov exponent. On the other hand, $\|\zeta_{NL}\|$ initially displays similar behavior as $\|\zeta_L\|$. However, for long times $\|\zeta_{NL}\|$ saturates and fluctuates erratically. This behavior is observed in Figure 1b where the typical spatiotemporal dynamics of $|\zeta_{NL}(x, t)|$ is displayed, emphasizing the rich and complex dynamics behind spatiotemporal chaos. From the temporal trace of

$\|\zeta_{NL}\|$ we can study the spatiotemporal evolution of the dynamical system using the power spectral density $F(f)$.

Figure 3 shows the largest Lyapunov exponent as a function of c for model (1). This Lyapunov exponent allow us distinguish 3 different regimes exhibited by the system. For $c < c_{AH}$, the system exhibits a stable stationary pattern. When c is increased and approaches $c_{AH} = 5.440 \pm 0.005$, the system becomes unstable (zero Lyapunov exponent) through a subcritical Andronov-Hopf bifurcation.

For $c \lesssim c_{AH}$, we have numerically studied the linear dynamics by perturbing the stationary pattern and calculating the set of eigenvalues corresponding to its linear operator (cf. Figure 4). Note that the marginal mode is not uniform and its spatial period is twice the one of the stationary pattern (cf. Fig 4c). On the onset of the bifurcation ($c \gtrsim c_{AH}$), the system is characterized by inhomogeneous spatial oscillations of finite amplitude, which can be decomposed as the superposition of the original pattern and the marginal critical mode. Since the largest Lyapunov exponent is positive the system exhibits spatiotemporal chaos.

Complementary information can be extracted from the power spectrum density $F(f)$ of the temporal trace of $\|\zeta_{NL}(t)\|$. Figure 5 shows the $F(f)$ of $\|\zeta_{NL}\|$ and the spatiotemporal diagram of $u(x, t)$ for different parameters. The power spectrum density can be used to understand how the excited spatiotemporal modes evolve and interact. We note that the dynamics exhibited by the system is dominated by the critical frequency and its harmonics (see lower left-hand inset in Fig. 5). It is important to note that for an extended system that displays an Andronov-Hopf bifurcation, it generically can exhibit spatiotemporal chaotic behavior [16].

Close to the Andronov-Hopf bifurcation, we can introduce the ansatz

$$u(x, t) = u_p(x - x_o(x, t), t) + A(x, t)u_{2p}(x - x_o, t) + h.o.t, \quad (4)$$

where u_p stands for the stationary pattern with spatial period p which undergoes the Andronov-Hopf bifurcation (cf. fig.4c) and u_{2p} stands for the critical marginal mode with spatial period $2p$ (cf. fig.4b), $x_o(x, t)$ stands for the dynamical evolution of the spatially invariant translational mode, A stands for the amplitude of u_{2p} and $h.o.t$ are higher order terms. Following [17], A satisfies the subcritical complex Ginzburg-Landau equation. However, the above model does not explain the intriguing dynamics displayed by model (1). Due to the large hysteresis loop of the bifurcated solutions, this model only describes qualitatively the dynamics around c_{AH} .

For $c_{AH} < c < c_{QP} = 6.350 \pm 0.005$ the dynamics of the pattern does not change. The pattern exhibits spatiotemporal chaos dominated by just one frequency and its harmonics. The parameter region displays a plateau in the largest Lyapunov exponent (see the intermediate region illustrated in Fig. 3 and 5). We have named this region as

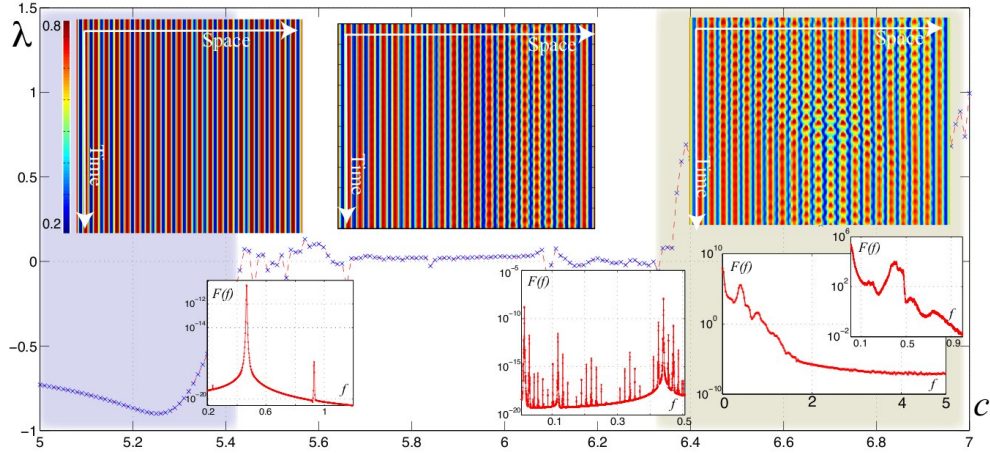


Fig. 5: (color online) Spatiotemporal quasi-periodicity route for pattern of model (1) as function of c by $\eta = -0.020$, $\mu = -0.092$, $\nu = -1.000$, and $b = -3.000$. We show in respective regions typical observed spatiotemporal diagrams (upper) and the frequency power spectrum $F(f)$ of the evolution of $|\zeta_{NL}|$ using acquisition frequency 0.1 (lower). Inset of power spectrum of highest c the acquisition frequency is 1.

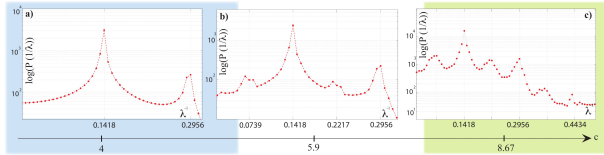


Fig. 6: (color online) Spatial power spectral density for model (1) by $\eta = -0.020$, $\mu = -0.092$, $\nu = -1.000$, $b = -3.000$, a) $c = 4.0$, b) $c = 5.9$, and c) $c = 8.67$.

the *spatiotemporal chaos region*. It is important to note that the $F(f)$ of the evolution of the $|\zeta_{NL}(t)|$ throughout this region has a similar shape, that is the $F(f)$ is governed by the Andronov-Hopf frequency of patterns and its harmonics.

When c exceeds c_{QP} , the largest Lyapunov exponent exhibits a qualitative change in its behavior. As λ starts to increase as shown in Fig. 3. Spatiotemporal diagrams in this region exhibit more complex behavior as illustrated in upper right-hand inset of Fig. 5 and Fig. 1. In order to understand the origin of this complex behavior, for $c_{QP} \lesssim c$, we calculate $F(f)$ of the $|\zeta_{NL}(t)|$ and we observe the emergence of a new incommensurable frequency (see bottom inset on the center Fig 5). After, the discrete $F(f)$ changes towards a continuous power density spectrum (see curve in the bottom inset on the right-hand side in Fig 5). The space-time diagram in Fig. 1 shows the typical intricate dynamics observed in this system. Figure 3 illustrates the region where turbulent-like patterns are observed. Notice that throughout this region ($c > c_{QP}$) the frequency power spectrum is qualitatively similar. To characterize the spatial dynamics of the above scenario, we have calculated the spatial power spectral density in the different regimens (cf. Fig. 6). This spectrum clearly shows a

transition between pattern and spatiotemporal chaos regions. Manifested by the presence of a subharmonic peak (see Figs. 6a and 6b), however, the spatial power spectral density does not show significant difference between the spatiotemporal chaos and pattern turbulence-like regions (see Figs. 6b and 6c). It is important to note that the peaks of spatial power spectral density corresponds to half-integer multiples of the characteristic length of the original pattern. Therefore, the spatial power spectrum is not a suitable tool to characterize the last bifurcation.

In this prototype model (1), by changing a single parameter, we observed a route of a pattern going from a stationary to a turbulent-like behavior. This transition is mediated by an Andronov-Hopf bifurcation that generates spatiotemporal chaotic behavior controlled by a few spatial modes, *low-dimensional chaos*. The afore dynamics persists until the emergence of a second incommensurable frequency with respect to the initial Andronov-Hopf frequency, generating a turbulent-like state. The scenario described above is a natural generalization to extended systems of the well-known quasi-periodicity route of ordinary differential equations. Thus, we have termed this scenario as *the spatiotemporal quasi-periodicity route*, and it is characterized by three typical dynamical regime steady, spatiotemporal chaotic and turbulent-like patterns

In conclusion, following the pioneering line of thought of Landau used to understand Turbulence [18], this intricate dynamics must be a result of a sequence of instabilities. We have presented a simple model where, by modifying a single parameter, a transition from a steady pattern towards a turbulent-like behavior appears. The signature of this route is given by an Andronov-Hopf bifurcation of the stationary pattern accompanied by the emergence of low-dimensional spatiotemporal chaos, to be then replaced by

the final turbulent-like dynamics as a second incommensurate frequency develops.

The route presented shows a complex pattern behavior generated from one type of pattern instability (Andronov-Hopf bifurcation with spatial period doubling). However, a steady pattern can exhibit several types of bifurcations, stationary or oscillatory with zero or nonzero wavenumber [17]. From which, one expects to observe complex spatiotemporal behaviors. The study of these other bifurcations and their possible routes is in progress.

* * *

The authors acknowledge fruitful discussions with C. Falcon and R. Lopez. M.G.C. thanks for the financial support of FONDECYT projects 1090045 and the ANR-CONICYT 39, "Colors". N.V. thanks Master fellowship from CONICYT contract 22111114.

REFERENCES

- [1] BALL P., *The Self-Made Tapestry: Pattern formation in nature*, edited by OXFORD UNIVERSITY PRESS, NEW YORK 1999
- [2] NICOLIS G. and PRIGOGINE I., *Self-Organization in Non Equilibrium Systems*, edited by J.WILEY & SONS, NEW YORK 1977
- [3] PISMEN L.M., *Patterns and Interfaces in Dissipative Dynamics*, edited by SPRINGER SERIES IN SYNERGETICS, BERLIN HEIDELBERG 2006
- [4] CROSS M. and GREENSIDE H., *Pattern Formation and Dynamics in Nonequilibrium Systems*, edited by CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, NEW YORK 2009
- [5] Cross M.C., and Hohenberg P.C., *Rev. Mod. Phys.* **65**, (1993) 851
- [6] Coulet P. and Lega J., *Europhys. Lett.* **7**, 511-516 (1988). Coulet P., Gil L., and Lega J., *Phys. Rev. Lett.* **62**, 1619-1622 (1989). *Physica* **37 D**, 91-103 (1989).
- [7] Ruelle D., and Takens F., *Comm. Math. Phys.* **20**, (1971) 167
- [8] BERGE P. and POMEAU Y. and VIDAL C., *Order within Chaos: Towards a Deterministic Approach to Turbulence*, edited by JOHN WILEY & SONS, NEW YORK 1984
- [9] Swift J., and Hohenberg P.C., *Phys. Rev.* **A 15**, (1977) 319
- [10] Residori S., Petrossian A., Nagaya T., and Clerc M. G., *J. Opt. B: Quantum Semiclassical Opt.* **6**, (2004) S169. Clerc M. G., Petrossian A., and Residori S., *Phys. Rev. E* **71**, (2005) 015205R
- [11] Kozyreff G., Chapman S. J., and Tlidi M., *Phys. Rev. E* **68**, (2003) 015201
- [12] Durniak C., Taki M., Tlidi M., Ramazza P.-L., Bortolozzo U., and Kozyreff G., *Phys. Rev. E* **72**, (2005) 026607
- [13] Kozyreff G., and Tlidi M., *Chaos* **17**, (2007) 037103
- [14] *Encyclopedia of Nonlinear Science*, Edited by A. Scott, (Taylor & Francis Books, New York, 2005)
- [15] Deissler R. and Kaneko K., *Physics Letters* **A, 119**, (1987) 397
- [16] KURAMOTO Y., *Chemical oscillations, waves, and turbulence*, edited by SPRINGER, NEW YORK 1984
- [17] Coulet P., and Iooss G., *Phys. Rev. Letts.* **64**, (1990) 866
- [18] LANDAU L., *C.R. Acad. Sci. USSR*, **44** (1944) 311