



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

MODELOS DE CRIMINALIDAD BASADOS EN ECUACIONES DIFERENCIALES

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

SEBASTIÁN ALEXIS REYES RIFFO

PROFESOR GUÍA:  
RAÚL MANÁSEVICH TOLOSA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
JAIME ORTEGA PALMA  
MANUEL ELGUETA DEDES

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por CONICYT  
a través del Programa Anillo de Investigación ACT-87

SANTIAGO DE CHILE  
OCTUBRE 2013

RESUMEN DE LA MEMORIA  
PARA OPTAR AL TÍTULO DE  
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO  
POR: SEBASTIÁN REYES RIFFO  
FECHA: OCTUBRE 2013  
PROF. GUÍA: RAÚL MANÁSEVICH TOLOSA

## MODELOS DE CRIMINALIDAD BASADOS EN ECUACIONES DIFERENCIALES

La presente memoria busca ser un aporte en el estudio matemático de las ecuaciones de Pitcher, cuya finalidad es predecir la dinámica delictual asociada a robos residenciales. Los supuestos involucrados en su formulación muestran que este modelo constituye una aproximación en el análisis de esta realidad, lejos aún de reflejar a cabalidad su naturaleza.

En el modelo están involucradas dos variables. La primera hace referencia a la atractividad de la región, mientras la segunda es la densidad de población criminal presente en el medio. La interacción entre ambas es gobernada por un sistema de ecuaciones diferenciales parabólicas del tipo reacción-difusión, que incluyen términos no lineales. Pitcher también propone incluir como una tercera variable al efecto disuasivo que produce la presencia de una fuerza policial en el medio, pero tal situación no se considerará debido a los alcances de este trabajo.

Entender como se comportan las soluciones asociadas a las ecuaciones de Pitcher es fundamental por varios motivos, entre los cuales está situar los focos delictivos (*hot spots*) dentro de una región. Por ello, dotando al problema de condiciones de borde Neumann, la motivación central de esta memoria es contribuir a un estudio riguroso de la existencia de soluciones no constantes en el caso estacionario.

El primer capítulo consta de una revisión y análisis de los modelos de Short et al. [11], Pitcher, y Jones, Brantingham y Chayes [5], donde se establecen sus principales similitudes y diferencias. A continuación, en el segundo capítulo se presentan y demuestran los dos resultados centrales obtenidos en este trabajo: la existencia de ramas de bifurcación, que dependen tanto de los valores propios simples y positivos del operador  $-\Delta$  como de los parámetros del problema; y la estabilidad de tales ramas. Ambos resultados se derivan del uso de la teoría de bifurcaciones desarrollada por Shi y Wang [10] y los teoremas clásicos de estabilidad de Crandall y Rabinowitz [2], y en conjunto proveen mayor información respecto al uso de inestabilidades de Turing en el caso no estacionario. Finalmente, se incluyen algunas simulaciones numéricas que, usando el método de elementos finitos y un algoritmo de punto fijo alternante, permiten visualizar el origen de tales ramas.

*Nunca el hombre está vencido, su derrota es siempre breve.*  
Inti-Ilumani, "Vuelvo".

# Agradecimientos

Sería injusto afirmar que esta memoria me pertenece, ya que no habría resultado sin el apoyo constante de mis padres, hermanos, polola, amigos y profesores. Todos, en algún orden según las circunstancias, han posibilitado su avance y buen término. Quisiera agradecerles mediante las próximas líneas, que he intentado redactar en innumerables ocasiones.

A mis padres Magdalena y Alexis, pues admiro su compromiso y convicción al llevar a cabo nuestra crianza. Les doy gracias por todo, lo cual es un cliché, mas resulta difícil precisar cuánto han hecho por mi. Pienso que este trabajo se los debo en gran medida. A mis hermanos Daniela, Benjamín y Alexis, pues gracias a ustedes la palabra familia cobra sentido.

A Paula, por su amor, comprensión y paciencia en estos ya cuatro años. Gracias por abrirme nuevos horizontes y alentar siempre mis expectativas, por acompañarme durante todo este proceso y en cada momento crucial.

A mis amigos, por ser un gran cable a tierra y dar rienda suelta a todas mis locuras, por sus certeros consejos en momentos inesperados, la grata compañía, amistad e incondicionalidad. Que este sea uno más entre los muchos buenos momentos que nos esperan. Agradezco especialmente a mis también compañeros de ingeniería matemática: Sandra, Pedro, Javiera, Mónica, Pancho Plana, Johan, Abelino, Valentina, Emilio, Chiri y Gonzalo, pues mi paso por la carrera habría sido muy distinto sin ustedes. A Ale Misad, Indira, Seba Marchi, Mary, Camilo, Moisés, Pablo y nuevamente a Javiera y Gonzalo, porque con ustedes viví Plan Común y veo que ha sido una larga y entretenida travesía llegar juntos hasta acá. Agradezco además a Coni Sadino y Felipe Smith, a las amistades que hice en Casa Central, Escuela de Verano, la política beauchefiana, la 437, Semanas Culturales y tantas otras instancias que considero significativas o al menos, las recuerdo con mucha simpatía. También a quienes he logrado conservar durante mi paso por la universidad, entre ellos Juan Carlos, Diego, Felipe C. y los demás amigos del colegio, queridos hermanos a estas alturas.

Agradezco a la Universidad de Chile por ser la institución donde me he formado como ciudadano y estudiante, junto con financiar parte de mi educación superior. A la FCFM por su formación -académica- de excelencia y ser un lugar donde pude desarrollar mis intereses a plenitud. A los profesores del DIM que marcaron mi forma de pensar la matemática, y a los funcionarios del departamento por la labor colosal que realizan día a día.

Finalmente, esta memoria no hubiera sido posible sin el apoyo de CEAMOS y el profesor Raúl Manásevich, a quién agradezco su paciencia e interés en mi formación como matemático, las fructíferas discusiones tras cada uno de mis cuestionamientos y su apoyo en este primer trabajo de investigación, que me ha motivado a seguir dicho camino. Asimismo saludo a los profesores Jaime Ortega y Manuel Elgueta por aceptar ser parte de la Comisión, y al profesor Axel Osses por su constante interés en este trabajo.

# Tabla de Contenido

<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>1. Modelos de Criminalidad</b>	<b>5</b>
1.1. Short et al. (2008)	5
1.2. Pitcher (2010)	12
1.3. Jones, Brantingham y Chayes (2010)	16
1.4. Presencia policial	18
1.4.1. Disuasión dinámica en las ecuaciones de Pitcher	18
1.4.2. Nuevas estrategias	20
1.5. Comentarios y aplicaciones	23
<b>2. Formación de patrones en las ecuaciones de Pitcher</b>	<b>25</b>
2.1. Preliminares	25
2.2. Inestabilidades de Turing	28
2.3. Soluciones no constantes en el caso estacionario	31
2.3.1. Lemas importantes y demostración	34
2.3.2. Estabilidad de ramas de bifurcación	43
2.3.3. Discusión	47
2.4. Algunas simulaciones numéricas	53
<b>Conclusión</b>	<b>57</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>58</b>

# Índice de figuras

2.1.	Valores de $\tilde{A}$ , $\psi$ y $\mu$ donde se cumple el Teorema 2.1, para $\eta = 0.001$ , $\omega = 1$ . . . . .	49
2.2.	Valores admisibles de $\psi$ , $\tilde{A}$ y $\mu$ para las hipótesis (C1) y (C2) del Teorema 2.4 en $[0, \pi]$ , con respecto a distintos valores de $\eta$ y $\omega$ . . . . .	50
2.3.	Valores admisibles de $\psi$ , $\tilde{A}$ y $\mu$ para la hipótesis (C3) del Teorema 2.4 en $[0, \pi]$ , con respecto a $\eta = 0.001$ y $\omega = 1$ . . . . .	51
2.4.	Valores admisibles de $\psi$ , $\tilde{A}$ y $\mu$ para la hipótesis (C3) del Teorema 2.4 en $[0, \pi]$ , con respecto a $\eta = 0.01$ y $\omega = 10$ . . . . .	52
2.5.	Surgimiento de la rama de bifurcación asociada a $\psi_0 = 0.86651$ . . . . .	55
2.6.	Formación de patrones asociada a $\psi_0 = 0.86651$ . . . . .	55
2.7.	Formación de patrones asociada a $\psi_0 = 1.13722$ . . . . .	56

# Introducción

La presencia del crimen es un tema de larga data, en el cual el uso de las matemáticas en su estudio no es reciente. Por ejemplo, Poisson estudió en “*Recherches sur la probabilité des jugements en matières criminelles et matière civile*” (1837) la probabilidad de cometer un error al momento de entablar una acción en el sistema judicial, para así garantizar juicios justos. Un fruto importante de tal trabajo es la distribución que lleva su nombre, la cual juega un rol esencial en diversos procesos, entre ellos la formulación de modelos estadísticos en ciencias sociales.

La situación adecuada para modelar matemáticamente el crimen es a nivel colectivo, ya que este es un buen escenario para estudiar y comprender las interacciones entre individuos, con tal de predecir la dinámica criminal y mitigar futuros sucesos, prevenir situaciones de riesgo para la ciudadanía y distribuir recursos adecuadamente. Esto pues a nivel individual el fenómeno resulta impredecible, debido a que las motivaciones de cada individuo son propias de su voluntad, e intentar modelar la conducta humana se enfrenta a ello.

Es un hecho que dentro de la ciudad existen áreas más seguras que otras, lo cual da pie a la creencia de que el crimen no se distribuye de forma uniforme, tanto a nivel espacial como temporal. No obstante, al momento de ocurrir un delito hay una afinidad entre estas variables, ya que es frecuente que las víctimas de un robo sean atacadas en forma reiterada durante un corto tiempo. A las regiones donde se da esta fuerte correlación se les denomina *hot spots* y desde un punto de vista matemático, para modelar la dinámica criminal basta entender como surgen tales zonas, algo esencial puesto que representan los focos delictivos dentro de un territorio. Este problema es de gran magnitud ya que en él intervienen diversos factores relacionados con el entorno y lógicamente la naturaleza del crimen.

La publicación de Short et al. [11] es pionera en la comprensión de los robos residenciales, debido a que logra formalizar en términos matemáticos conceptos sociológicos subyacentes a esta clase de delitos; e innovadora pues plantea estudiar la formación de *hot spots* en forma determinista, mediante un sistema de ecuaciones diferenciales parabólicas y no lineales del tipo reacción-difusión. A partir de esto, Pitcher [8] extiende esta idea considerando supuestos más cercanos a la realidad, lo cual da pie a una nueva formulación que ha sido escasamente investigada.

El presente trabajo estudia la formación de patrones en este último problema. Es en el capítulo 1 donde se discuten similitudes y diferencias entre las hipótesis de los modelos de Short et al.,

Pitcher, y Jones, Brantingham y Chayes, junto con la expresión de éstos supuestos en un modelo basado en agentes y la posterior derivación de cada modelo en el continuo; además de revisar como incorporar la presencia policial en todos ellos.

A continuación, en el capítulo 2 se estudia la formación de patrones en las ecuaciones de Pitcher. El proceder usual, abordado en la sección 2.2, consta del uso de inestabilidades de Turing; pero en busca de una caracterización más rigurosa de estos patrones, se estudia el problema estacionario mediante teoría de bifurcaciones. De este último análisis surgen los dos resultados centrales de esta memoria, que se establecen en la sección 2.3: el primero es la existencia de una rama de bifurcación, que explica la presencia de patrones espacialmente heterogéneos en el problema; mientras el segundo corresponde a la estabilidad de tales patrones, vistos como un equilibrio del problema no estacionario. Finalmente, en la sección 2.4 se realizan algunas simulaciones que buscan visualizar como se origina la rama de bifurcación.

# Capítulo 1

## Modelos de Criminalidad

El siguiente capítulo tiene por finalidad explicar los conceptos y motivaciones presentes en el trabajo desarrollado por Short et al. [11], cuyos principios básicos se extienden naturalmente a todos los modelos que han surgido a partir de él. Esto permite entender lo planteado por Pitcher [8] y el porqué detrás de su formulación, la cual incorpora a la dinámica delictual ciertos fenómenos que las ecuaciones de Short et al. no pueden describir, y lo realizado por Jones, Brantingham y Chayes [5], quienes buscan incluir la presencia policial como un factor disuasivo mediante distintas estrategias. En este trabajo, llamaremos por modelos de criminalidad a todos los modelos que se basan en el trabajo de Short et al.

### 1.1. Short et al. (2008)

La actividad criminal es amplia, en el sentido de que existen distintas clases de delitos que poseen características, motivaciones y objetivos propios. Bajo este contexto, los autores de [11] optan por precisar la dinámica asociada a robos residenciales, pues afirman que existe documentación suficiente que evidencia su forma de operar.

A partir de esto, el objetivo de los modelos de criminalidad es, dada una región, determinar como evolucionan a lo largo del tiempo los patrones de actividad criminal. Para ello se estudia la relación entre dos variables relevantes: *densidad de población criminal presente* y *atractividad* del medio, que corresponde a una valorización del entorno desde la perspectiva criminal.

Para explicar la dinámica asociada a esta clase de delitos, Short et al. [11] señalan dos situaciones a considerar. El primero está vinculado al medio y se conoce como *riesgo heterogéneo*, el cual plantea que es posible diferenciar entre vecindarios debido a características propias de su entorno y hogares que lo conforman. Esto trae por consecuencia que aquellos sectores propensos al crimen terminen bajo el estigma de ser tolerantes y amparen el surgimiento de nuevas actividades de esta índole. El segundo otorga al delincuente y su aprendizaje un rol central, que se manifiesta

al cometer un crimen: si el primer robo fue fácil y atractivo, el riesgo de que tanto la casa asaltada como sus vecinas sean atacadas nuevamente se incrementa, pues comparten características similares (riqueza, arquitectura, vías de escape, entre otros). Hablaremos de *revictimización* para referirnos al riesgo sobre la casa asaltada, y de *victimización cercana* cuando se trata de sus vecinos.

Un primer paso para concretar este modelo consiste en estudiar el caso discreto. Escogiendo un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , se usa una grilla rectangular 2-dimensional sobre la cual las casas están distribuidas de forma uniforme, emplazadas en el centro de un terreno de tamaño  $l^2$  y separadas entre si por un espaciado de largo  $l$ . La posición de cada vivienda es descrita por un nodo  $s = (i, j)$ , que tiene asociado un variable aleatoria  $A_s^t$  correspondiente a su atractividad en un tiempo  $t$ , discretizado en intervalos de largo  $\Delta t$ . Esta variable, cuya esperanza tomará valores estrictamente positivos, es la suma de dos términos

$$A_s^t = \tilde{A}_s + B_s^t,$$

donde  $\tilde{A}_s$  corresponde a la componente estática de la atractividad, una medida del riesgo heterogéneo; y  $B_s^t$  representa la componente dinámica, asociada a revictimización y victimización cercana.

La atractividad sesga el actuar criminal, pues un sujeto situado en la posición  $s$  presenta dos posibles comportamientos durante el intervalo  $(t, t + \Delta t]$ : cometer un robo según la probabilidad

$$p_s^t = 1 - e^{-\mathbb{E}(A_s^t)\Delta t},$$

y luego ser removido de la grilla, o bien moverse a uno de los nodos adyacentes. Esta probabilidad corresponde a un proceso de Poisson estándar, e indica que el criminal sólo puede atacar un lugar en  $(t, t + \Delta t]$ . Para simular su retorno a un estado activo, los ladrones son generados en todo el dominio a una tasa constante diaria  $\Gamma$ .

Al ocurrir un crimen en un nodo  $s$  y tiempo  $t$ , su atractividad dinámica se ve afectada. En efecto, la revictimización indica que aquel lugar será vulnerable en  $(t, t + \Delta t]$  producto del número de robos que ocurren en tal intervalo, denotado por  $S_s^t$ . Por otro lado, la victimización cercana permite afirmar que los nodos adyacentes, denotados por  $s' \circ s$  y cuyo número es  $z = 4$ , también corren riesgo de ser asaltados. Recíprocamente, lo que ocurre sobre ellos también afecta a  $s$ . Suponiendo que  $\eta \in [0, 1]$  es una medida de la extensión espacial de la atractividad dinámica, y que se distribuye uniformemente entre sus vecinos, tiene sentido modelar esta variable mediante la expresión

$$B_s^{t+\Delta t} = \left( (1 - \eta)B_s^t + \frac{\eta}{z} \sum_{s' \circ s} B_{s'}^t \right) (1 - \omega_1 \Delta t) + \frac{\theta}{\Delta t} S_s^t$$

donde  $\omega_1$  corresponde al decaimiento característico de la atractividad, que se justifica pues el peligro a ser asaltado nuevamente es algo transitorio;  $\theta$  es una constante que muestra el impacto sobre una casa cuando es robada, mientras el factor  $\frac{1}{\Delta t}$  indica la relevancia de este hecho en

función del tiempo. Utilizando la notación del Laplaciano Discreto<sup>1</sup>  $\Delta B_s^t = \frac{1}{l^2} (\sum_{s' \circ s} B_{s'}^t - z B_s^t)$  la última ecuación se reescribe como

$$B_s^{t+\Delta t} = \left( B_s^t + \frac{\eta l^2}{z} \Delta B_s^t \right) (1 - \omega_1 \Delta t) + \frac{\theta}{\Delta t} S_s^t. \quad (1.1)$$

Sea  $X_i \sim \text{Bernoulli}(p_s^t)$  la variable que indica cuando el  $i$ -ésimo criminal presente en  $s$  cometió un robo exitosamente, y  $N_s^t$  el número de delincuentes en tal posición y tiempo  $t$ . Entonces  $S_s^t$  corresponde a

$$S_s^t = \sum_{i=1}^{N_s^t} X_i$$

que es una suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Por el Teorema de Wald [13], su esperanza es

$$\mathbb{E}(S_s^t) = \mathbb{E}(N_s^t) \cdot \mathbb{E}(X_i) = n_s^t \cdot p_s^t$$

con  $n_s^t$  el número esperado de delincuentes en la posición  $s$  y tiempo  $t$ . Entonces la ecuación (1.1) se escribe en términos de su valor esperado por

$$B_s^{t+\Delta t} = \left( B_s^t + \frac{\eta l^2}{z} \Delta B_s^t \right) (1 - \omega_1 \Delta t) + \frac{\theta}{\Delta t} n_s^t p_s^t. \quad (1.2)$$

El abuso de notación será frecuente al deducir este tipo de ecuaciones. Al momento de plantear los supuestos del modelo,  $A_s^t, B_s^t$  son variables aleatorias, pero al obtener las ecuaciones discretas en términos de sus valores esperados, estas variables pasan a representar *atractividad esperada* y *atractividad dinámica esperada*, respectivamente.

La dinámica asociada a  $n_s^t$  tiene directa relación con las reglas que rigen el desplazamiento de los delincuentes en  $(t, t + \Delta t]$ . Dado un nodo  $s$ , en tal intervalo de tiempo los criminales sólo tienen la opción de moverse a los nodos vecinos o cometer un crimen, con la consecuencia de ser removidos de la grilla, por lo que en el instante  $t + \Delta t$  ninguno de los delincuentes que estaba originalmente se mantiene allí. Luego el número esperado de delincuentes presentes en aquel instante está compuesto exclusivamente de quienes retornan al estado activo -a una tasa  $\Gamma l^2 \Delta t$ - y aquellos que provienen de los nodos adyacentes  $s'$ .

Para explicar este último punto, el número esperado de delincuentes que no comete un delito en  $s'$  está dado por  $n_{s'}^t (1 - p_{s'}^t)$ , pero no es claro que proporción de ellos llega a  $s$ . Al considerar  $T_{s'}^t = \sum_{s'' \circ s'} A_{s''}^t$  la atractividad esperada de todos sus nodos adyacentes,  $\frac{A_s^t}{T_{s'}^t}$  es la probabilidad de

<sup>1</sup>La motivación para emplearla viene de la aproximación del Laplaciano continuo en una grilla uniforme.

desplazarse a  $s$  y por consiguiente, el número esperado de delincuentes que llegan a tal nodo es

$$\frac{A_s^t}{T_{s'}^t} \cdot n_{s'}^t (1 - p_{s'}^t)$$

por lo tanto, observando a todos los vecinos de  $s$  se obtiene

$$n_s^{t+\Delta t} = A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t (1 - p_{s'}^t)}{T_{s'}^t} + \Gamma l^2 \Delta t. \quad (1.3)$$

Se concluye entonces que la dinámica discreta del modelo de Short et al. está dada por (1.2) y (1.3).

A continuación, un paso crucial es encontrar una forma análoga para estas ecuaciones en el continuo, pues mediante ello se explica el fenómeno a nivel macroscópico. Al restar  $B_s^t$  en (1.2) y dividir por  $\Delta t$  resulta

$$\frac{B_s^{t+\Delta t} - B_s^t}{\Delta t} = \frac{\eta l^2}{z \Delta t} \Delta B_s^t (1 - \omega_1 \Delta t) - B_s^t \omega_1 + \frac{\theta}{\Delta t} n_s^t \frac{p_s^t}{\Delta t}.$$

Sea  $\mathbb{D} = \lim_{l^2, \Delta t \rightarrow 0} \frac{l^2}{\Delta t}$  constante de difusión. Del hecho que

$$\lim_{l^2, \Delta t \rightarrow 0} \frac{p_s^t}{\Delta t} = \lim_{l^2, \Delta t \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-A_s^t \Delta t}}{\Delta t}$$

y definiendo

$$\lim_{l^2, \Delta t \rightarrow 0} A_s^t = A, \quad \lim_{l^2, \Delta t \rightarrow 0} B_s^t = B, \quad \lim_{l^2, \Delta t \rightarrow 0} \frac{n_s^t}{l^2} = N$$

queda la expresión

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\eta \mathbb{D}}{z} \Delta B - \omega_1 B + \theta \mathbb{D} N A. \quad (1.4)$$

En este contexto,  $A$  y  $B$  son las versiones continuas de la atractividad esperada y la atractividad dinámica esperada, mientras  $N$  representa la densidad de criminales presentes en  $\Omega$ .

Para la ecuación en  $n_s^t$ , dados  $\Delta t$ ,  $l$  suficientemente pequeños, se consideran las relaciones

$$1 - p_s^t = 1 - A_s^t \Delta t + C \cdot (A_s^t \Delta t)^2 \quad (1.5)$$

$$\frac{1}{T_{s'}^t} = \frac{1}{z A_{s'}^t} \left( 1 - \frac{l^2 \Delta A_{s'}^t}{z A_{s'}^t} \right) + \tilde{C} \cdot (l^2 \Delta A_{s'}^t)^2 \quad (1.6)$$

con  $C, \tilde{C}$  constantes. La primera se deriva del desarrollo de Taylor en torno a 0 de  $\exp(-x)$ ,

evaluado en  $A_s^t \Delta t$ ; mientras que la segunda surge de expandir en torno a  $x_0 > 0$  la función

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0^2}(x - x_0) + \tilde{C} \cdot (x - x_0)^2 = \frac{1}{x_0} \left(1 - \frac{x - x_0}{x_0}\right) + \tilde{C} \cdot (x - x_0)^2$$

evaluar en  $x = T_{s'}^t$  y considerar  $x_0 = zA_{s'}^t$ , notando además que  $T_{s'}^t - zA_{s'}^t = l^2 \Delta A_{s'}^t$ . Al reemplazar estos términos en (1.3) se obtiene

$$\begin{aligned} n_s^{t+\Delta t} &= A_s^t \sum_{s' \circ s} n_{s'}^t \left( \frac{1}{zA_{s'}^t} \left(1 - \frac{l^2 \Delta A_{s'}^t}{zA_{s'}^t}\right) + \tilde{C} \cdot (l^2 \Delta A_{s'}^t)^2 \right) (1 - A_{s'}^t \Delta t + C \cdot (A_{s'}^t \Delta t)^2) + \Gamma l^2 \Delta t \\ &= A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{zA_{s'}^t} \left(1 - \frac{l^2 \Delta A_{s'}^t}{zA_{s'}^t}\right) (1 - A_{s'}^t \Delta t) + \Gamma l^2 \Delta t + R \\ &= A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{zA_{s'}^t} (1 - A_{s'}^t \Delta t) - A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{zA_{s'}^t} \frac{l^2 \Delta A_{s'}^t}{zA_{s'}^t} (1 - A_{s'}^t \Delta t) + \Gamma l^2 \Delta t + R \end{aligned}$$

donde  $R = R(A_s^t, n_{s'}^t, l^2, \Delta t)$  corresponde a una suma de términos proveniente de las aproximaciones. Luego de restar  $n_s^t$  y dividir por  $\Delta t$  se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{n_s^{t+\Delta t} - n_s^t}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t} \left( A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{zA_{s'}^t} (1 - A_{s'}^t \Delta t) - n_s^t \right) - \frac{A_s^t}{\Delta t} \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{zA_{s'}^t} \frac{l^2 \Delta A_{s'}^t}{zA_{s'}^t} (1 - A_{s'}^t \Delta t) + \Gamma l^2 + \frac{R}{\Delta t} \\ &= \frac{l^2}{z \Delta t} A_s^t \cdot \frac{1}{l^2} \left( \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{A_{s'}^t} - z \frac{n_s^t}{A_s^t} \right) - A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{z} - \frac{l^2}{z \Delta t} A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{A_{s'}^t} \frac{\Delta A_{s'}^t}{zA_{s'}^t} (1 - A_{s'}^t \Delta t) + \Gamma l^2 + \frac{R}{\Delta t} \\ &= \frac{l^2}{z \Delta t} A_s^t \Delta \left( \frac{n_s^t}{A_s^t} \right) - \frac{l^2}{z \Delta t} A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{A_{s'}^t} \frac{\Delta A_{s'}^t}{zA_{s'}^t} (1 - A_{s'}^t \Delta t) - A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{z} + \Gamma l^2 + \frac{R}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

y ya que explícitamente  $\frac{R}{l^2 \Delta t}$  tiene la forma

$$\begin{aligned} \frac{R}{l^2 \Delta t} &= C \left( \frac{A_s^t}{z} \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{l^2} A_{s'}^t \left(1 - \frac{l^2 \Delta A_{s'}^t}{zA_{s'}^t}\right) \right) \cdot \Delta t + \tilde{C} \left( A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{l^2} (1 - A_{s'}^t \Delta t) (\Delta A_{s'}^t)^2 \right) \frac{l^2}{\Delta t} \cdot l^2 \\ &\quad + C \tilde{C} \left( A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{l^2} (\Delta A_{s'}^t)^2 (A_{s'}^t)^2 \right) \cdot l^4 \Delta t, \end{aligned}$$

al tomar  $l^2, \Delta t \rightarrow 0$  del mismo modo que antes, el límite de cada uno de los términos que acompaña a las potencias de estas variables está bien definido, y en consecuencia

$$\lim_{l^2, \Delta t \rightarrow 0} \frac{R(A_s^t, n_{s'}^t, l^2, \Delta t)}{l^2 \Delta t} = 0.$$

Por lo tanto, de dividir (1.7) por  $l^2$  y tomar límite resulta

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\mathbb{D}}{z} \left[ A \Delta \left( \frac{N}{A} \right) - \frac{N}{A} \Delta A \right] - NA + \Gamma$$

y la identidad

$$A \Delta \left( \frac{N}{A} \right) = \Delta N - 2 \nabla A \cdot \nabla \left( \frac{N}{A} \right) - \frac{N}{A} \Delta A$$

permite reescribir la expresión como

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\mathbb{D}}{z} \Delta N - \frac{2\mathbb{D}}{z} \nabla \cdot \left( \frac{N}{A} \nabla A \right) - NA + \Gamma. \quad (1.8)$$

Considerando  $\tilde{A}$  constante, las ecuaciones (1.4) y (1.8) quedan

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\eta \mathbb{D}}{z} \Delta A - \omega_1 (A - \tilde{A}) + \theta \mathbb{D} N A \\ \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\mathbb{D}}{z} \Delta N - \frac{2\mathbb{D}}{z} \nabla \cdot \left( \frac{N}{A} \nabla A \right) - NA + \Gamma \end{cases} \quad (1.9)$$

y corresponden al modelo de Short et al. en el continuo, las cuales requieren condiciones iniciales y de borde. Estas últimas buscan recrear un dominio largo (periódicas) o ausencia de flujo (Neumann).

Para finalizar, el término  $\frac{\eta \mathbb{D}}{z} \Delta A$  de la primera ecuación muestra que la atractividad se difunde a las áreas vecinas luego de ocurrir un crimen, y la efectividad de esto depende principalmente de  $\eta$ . La expresión  $-\omega_1 (A - \tilde{A})$  indica que la parte dinámica de esta variable decae a una tasa constante  $\omega_1$ , lo cual da relevancia a los crímenes más recientes en desmedro de los ocurridos con anterioridad, mientras  $\theta \mathbb{D} N A$  refleja que un alza temporal de la atractividad esta sujeta tanto al éxito de los crímenes previos (fenómeno que se refleja en el valor tal variable) como por la densidad criminal. Una consecuencia de esto es el surgimiento de nuevos crímenes.

La ecuación en  $N$  señala que los delincuentes que no cometen crímenes se mueven de forma aleatoria hacia las regiones aledañas, lo cual está dado por  $\frac{\mathbb{D}}{z} \Delta N$ . A su vez, el término advectivo  $-\frac{2\mathbb{D}}{z} \nabla \cdot \left( \frac{N}{A} \nabla A \right)$  caracteriza el movimiento de esta población, cuya velocidad es  $\nabla \log A$  y en consecuencia, las regiones que poseen una alta atractividad presentan baja movilidad hacia las áreas adyacentes, es decir, quienes ingresan a ellas permanecen por más tiempo.  $\Gamma$  cumple el mismo rol de fuente que en el modelo discreto y  $-NA$  reduce la densidad criminal de forma proporcional a la atractividad, por lo que valores altos de esta última variable aumentan las posibilidades de cometer un crimen en vez de moverse a otras áreas.

**Adimensionalización** Consideramos los cambios de variables

$$t = \frac{1}{\omega_1} t', \quad x = \sqrt{\frac{\mathbb{D}}{z\omega_1}} x', \quad \tilde{A} = \omega_1 \tilde{A}', \quad A = \omega_1 A', \quad N = \frac{\omega_1}{\theta \mathbb{D}} N'$$

con  $x$  una variable espacial cualquiera. Usando la regla de la cadena, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial A'}{\partial t'} &= \frac{1}{\omega_1^2} \cdot \frac{\partial A}{\partial t} & \frac{\partial N'}{\partial t'} &= \frac{\theta \mathbb{D}}{\omega_1^2} \cdot \frac{\partial N}{\partial t} \\ \frac{\partial A'}{\partial x'} &= \frac{1}{\omega_1} \sqrt{\frac{\mathbb{D}}{z\omega_1}} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} & \frac{\partial N'}{\partial x'} &= \frac{\theta \mathbb{D}}{\omega_1} \sqrt{\frac{\mathbb{D}}{z\omega_1}} \cdot \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 A'}{\partial x'^2} &= \frac{\mathbb{D}}{z\omega_1^2} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N'}{\partial x'^2} &= \frac{\theta \mathbb{D}^2}{z\omega_1^2} \cdot \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Una consecuencia de esto es

$$\Delta_{x'} A' = \frac{\mathbb{D}}{z\omega_1^2} \Delta A, \quad \Delta_{x'} N' = \frac{\theta \mathbb{D}^2}{z\omega_1^2} \Delta N, \quad (1.10)$$

donde  $\Delta_{x'}$  se refiere al laplaciano respecto a las nuevas variables espaciales.

Al dividir por  $\omega_1^2$  la ecuación en  $A$ , y usando (1.10) resulta

$$\frac{\partial A'}{\partial t'} = \eta \Delta_{x'} A' - (A' - \tilde{A}') + N' A'. \quad (1.11)$$

Para la ecuación en  $N$ , mediante la identidad

$$\frac{\mathbb{D}}{z} \nabla \cdot \left( \frac{N}{A} \nabla A \right) = \frac{\mathbb{D}}{z} \frac{1}{A} \left[ \left( \nabla N - \frac{N}{A} \nabla A \right) \cdot \nabla A + N \Delta A \right] \quad (1.12)$$

el término advectivo se puede reescribir en términos de  $A'$  y  $N'$  de la forma

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{D}}{z} \nabla \cdot \left( \frac{N}{A} \nabla A \right) &= \frac{1}{\theta z} \frac{1}{A'} \left[ \left( \frac{\theta \mathbb{D}}{\omega_1} \nabla N - \frac{N'}{A'} \frac{1}{\omega_1} \nabla A \right) \cdot \nabla A + N' \cdot \Delta A \right] \\ &= \frac{\omega_1^2}{\theta \mathbb{D}} \frac{1}{A'} \left[ \left( \frac{\theta \mathbb{D}}{\omega_1} \sqrt{\frac{\mathbb{D}}{z\omega_1}} \nabla N - \frac{N'}{A'} \frac{1}{\omega_1} \sqrt{\frac{\mathbb{D}}{z\omega_1}} \nabla A \right) \cdot \frac{1}{\omega_1} \sqrt{\frac{\mathbb{D}}{z\omega_1}} \nabla A + N' \cdot \frac{\mathbb{D}}{z\omega_1^2} \Delta A \right] \\ &= \frac{\omega_1^2}{\theta \mathbb{D}} \frac{1}{A'} \left[ \left( \nabla_{x'} N' - \frac{N'}{A'} \nabla_{x'} A' \right) \cdot \nabla_{x'} A' + N' \cdot \Delta_{x'} A \right] \\ &= \frac{\omega_1^2}{\theta \mathbb{D}} \nabla_{x'} \cdot \left( \frac{N'}{A'} \nabla_{x'} A' \right) \end{aligned}$$

luego, al multiplicar por  $\frac{\theta D}{\omega_1^2}$  la ecuación (1.8), reemplazar la última expresión, usar (1.10) y la definición de las derivadas respecto a las nuevas variables, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\theta D}{\omega_1^2} \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\theta D^2}{z \omega_1} \Delta N - \frac{\theta D}{\omega_1^2} \frac{2D}{z} \nabla \cdot \left( \frac{N}{A} \nabla A \right) - \frac{\theta D}{\omega_1} N \cdot \frac{1}{\omega_1} A + \frac{\theta D \Gamma}{\omega_1^2} \\ \frac{\partial N'}{\partial t'} &= \Delta_{x'} N' - 2 \nabla_{x'} \cdot \left( \frac{N'}{A'} \nabla_{x'} A' \right) - N' A' + \bar{B}\end{aligned}\quad (1.13)$$

con  $B := \frac{\theta D \Gamma}{\omega_1^2}$ .

Borrando primas en (1.11) y (1.13), resulta

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} = \eta \Delta A - (A - \tilde{A}) + NA \\ \frac{\partial N}{\partial t} = \Delta N - 2 \nabla \cdot \left( \frac{N}{A} \nabla A \right) - NA + \bar{B} \end{cases}$$

## 1.2. Pitcher (2010)

Una inquietud natural es saber como se comporta el modelo anterior cuando la atractividad alcanza valores extremos: si es suficientemente pequeña, el número esperado de delitos disminuye dada la probabilidad de cometer un crimen, y es de esperar que los delincuentes abandonen el área en cuestión por otras de mayor interés. Sin embargo, la ecuación (1.3) no es capaz de predecir lo último, pues el número esperado de criminales presentes en la grilla se incrementa al no existir oportunidades atractivas y por ende no ser removidos, además de considerar a quienes retornan al estado activo. Por lo tanto, en esta situación el medio se satura de criminales, lo cual no se condice con la realidad.

Para revertir esta situación, Pitcher propone en [8] cambiar el término  $(1 - p_{s'}^t)$  en (1.3) por  $(1 - \omega_2 \Delta t)$ , con tal de incorporar fatiga en los delincuentes a una tasa  $\omega_2$  constante. Esto significa que quienes cometieron un crimen ya no son removidos inmediatamente de la grilla, sino que siguen en búsqueda de nuevas oportunidades moviéndose a alguno de los nodos adyacentes, es decir, todos los delincuentes están buscando oportunidades favorables hasta que deciden retirarse. Con esto, la ecuación que explica el número esperado de delincuentes queda de la forma

$$n_s^{t+\Delta t} = A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t (1 - \omega_2 \Delta t)}{T_{s'}^t} + \Gamma l^2 \Delta t. \quad (1.14)$$

Por otro lado, un sector que posee valores altos en su atractividad tendrá en consecuencia un mayor número de delitos, que deben decaer en algún momento pues tal situación es insostenible en el

tiempo. La ecuación (1.2) no es capaz de recrear bien este escenario ya que el número esperado de crímenes, dado por  $n_s^t p_s^t$ , aumenta con la atractividad, lo cual se corrige cambiando dicho término por uno de naturaleza logística como  $n_s^t p_s^t \left(1 - \frac{A_s^t}{\kappa}\right)$ , donde  $\kappa$  es una constante que indica el valor máximo que puede tomar  $A_s^t$  antes de decaer. Esto da por resultado la ecuación

$$B_s^{t+\Delta t} = \left( B_s^t + \frac{\eta l^2}{z} \Delta B_s^t \right) (1 - \omega_1 \Delta t) + \frac{\theta}{\Delta t} n_s^t p_s^t \left( 1 - \frac{A_s^t}{\kappa} \right) \quad (1.15)$$

y en caso que  $B_s^{t+\Delta t} < 0$ , se fija  $A_s^{t+\Delta t} = 0$ .

La manera de encontrar las ecuaciones en el continuo es similar a lo hecho en el modelo anterior. En efecto, al restar  $B_s^t$  en (1.15), dividir por  $\Delta t$  y proceder en forma análoga, resulta

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\eta \mathbb{D}}{z} \Delta B - \omega_1 B + \theta \mathbb{D} N A \left( 1 - \frac{A}{\kappa} \right)$$

La deducción de la segunda ecuación amerita mayor detalle. Al reemplazar (1.6) en (1.14) se obtiene

$$\begin{aligned} n_s^{t+\Delta t} &= A_s^t \sum_{s' \circ s} n_{s'}^t \left( \frac{1}{z A_{s'}^t} \left( 1 - \frac{l^2 \Delta A_{s'}^t}{z A_{s'}^t} \right) + \tilde{C} \cdot (l^2 \Delta A_{s'}^t)^2 \right) (1 - \omega_2 \Delta t) + \Gamma l^2 \Delta t \\ &= A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{z A_{s'}^t} \left( 1 - \frac{l^2 \Delta A_{s'}^t}{z A_{s'}^t} \right) (1 - \omega_2 \Delta t) + \Gamma l^2 \Delta t + \underbrace{\left( \tilde{C} A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{z A_{s'}^t} (\Delta A_{s'}^t)^2 (1 - \omega_2 \Delta t) \right)}_{R'} \cdot l^4 \\ &= A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{z A_{s'}^t} \left( 1 - \frac{l^2 \Delta A_{s'}^t}{z A_{s'}^t} \right) - \omega_2 \Delta t A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{z A_{s'}^t} \left( 1 - \frac{l^2 \Delta A_{s'}^t}{z A_{s'}^t} \right) + \Gamma l^2 \Delta t + R' \end{aligned}$$

siendo el orden de los términos algo útil para deducir la expresión en el continuo. Luego de restar  $n_s^t$  y dividir por  $\Delta t$

$$\begin{aligned} \frac{n_s^{t+\Delta t} - n_s^t}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t} \left( A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{z A_{s'}^t} - n_s^t \right) - \frac{A_s^t}{\Delta t} \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{z A_{s'}^t} \frac{l^2 \Delta A_{s'}^t}{z A_{s'}^t} \\ &\quad - \omega_2 A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{z A_{s'}^t} \left( 1 - \frac{l^2 \Delta A_{s'}^t}{z A_{s'}^t} \right) + \Gamma l^2 + \frac{R'}{\Delta t} \\ &= \frac{l^2}{z \Delta t} A_s^t \cdot \frac{1}{l^2} \left( \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{A_{s'}^t} - z \frac{n_s^t}{A_s^t} \right) - \frac{l^2}{z \Delta t} A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{A_{s'}^t} \frac{\Delta A_{s'}^t}{z A_{s'}^t} \\ &\quad - \omega_2 A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{z A_{s'}^t} \left( 1 - \frac{l^2 \Delta A_{s'}^t}{z A_{s'}^t} \right) + \Gamma l^2 + \frac{R'}{\Delta t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{n_s^{t+\Delta t} - n_s^t}{\Delta t} &= \frac{l^2}{z\Delta t} A_s^t \cdot \Delta \left( \frac{n_s^t}{A_s^t} \right) - \frac{l^2}{z\Delta t} A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{A_{s'}^t} \frac{\Delta A_{s'}^t}{z A_{s'}^t} \\ &\quad - \omega_2 A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{z A_{s'}^t} \left( 1 - l^2 \frac{\Delta A_{s'}^t}{z A_{s'}^t} \right) + \Gamma l^2 + \frac{R'}{\Delta t} \end{aligned}$$

y notando que

$$\lim_{l^2, \Delta t \rightarrow 0} \frac{R'}{l^2 \Delta t} = \lim_{l^2, \Delta t \rightarrow 0} \left( \tilde{C} A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{l^2} \frac{(\Delta A_{s'}^t)^2}{z A_{s'}^t} (1 - \omega_2 \Delta t) \right) \frac{l^2}{\Delta t} \cdot l^2 = 0,$$

se tiene que al dividir por  $l^2$  y tomar  $l^2, \Delta t \rightarrow 0$  en la última ecuación, se obtiene

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\mathbb{D}}{z} \Delta N - \frac{2\mathbb{D}}{z} \nabla \cdot \left( \frac{N}{A} \nabla A \right) - \omega_2 N + \Gamma. \quad (1.16)$$

En resumen, este proceder entrega el sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\eta \mathbb{D}}{z} \Delta A - \omega_1 (A - \tilde{A}) + \theta \mathbb{D} N A \left( 1 - \frac{A}{\kappa} \right) \\ \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\mathbb{D}}{z} \Delta N - \frac{2\mathbb{D}}{z} \nabla \cdot \left( \frac{N}{A} \nabla A \right) - \omega_2 N + \Gamma \end{cases} \quad (1.17)$$

Se observa que difiere de las ecuaciones de Short et al. pues el término  $\theta \mathbb{D} N A \left( 1 - \frac{A}{\kappa} \right)$  reemplaza a  $\theta \mathbb{D} N A$ , explicitando que el alza temporal en la atractividad tiene una cota superior dada por  $\kappa$ ; y  $-\omega_2 N$  aparece en vez de  $-NA$ , refiriéndose a que en este modelo los criminales son removidos del sistema a tasa constante producto de su fatiga, no de forma proporcional a la atractividad.

**Adimensionalización** Con el objeto de disminuir el número de parámetros involucrados y facilitar futuros análisis, se adimensionaliza (1.17) mediante

$$t = \frac{1}{\omega_1} t', \quad x = \sqrt{\frac{\mathbb{D}}{z\omega_1}} x', \quad \tilde{A} = \kappa \tilde{A}', \quad A = \kappa A', \quad N = \frac{\Gamma}{\omega_2} N'$$

donde  $x$  representa una variable espacial cualquiera. También se definen los nuevos parámetros

$$\psi := \frac{\theta \mathbb{D} \Gamma}{\omega_1 \omega_2}, \quad \omega := \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Usando la regla de la cadena, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial A'}{\partial t'} &= \frac{1}{\kappa \omega_1} \cdot \frac{\partial A}{\partial t} & \frac{\partial N'}{\partial t'} &= \frac{\omega_2}{\Gamma \omega_1} \cdot \frac{\partial N}{\partial t} \\ \frac{\partial A'}{\partial x'} &= \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\mathbb{D}}{z \omega_1}} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} & \frac{\partial N'}{\partial x'} &= \frac{\omega_2}{\Gamma} \sqrt{\frac{\mathbb{D}}{z \omega_1}} \cdot \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 A'}{\partial x'^2} &= \frac{1}{\kappa} \frac{\mathbb{D}}{z \omega_1} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N'}{\partial x'^2} &= \frac{\omega_2}{\Gamma} \frac{\mathbb{D}}{z \omega_1} \cdot \frac{\partial^2 N}{\partial x^2}\end{aligned}$$

y en términos de las nuevas variables

$$\Delta_{x'} A' = \frac{1}{\kappa} \frac{\mathbb{D}}{z \omega_1} \Delta A, \quad \Delta_{x'} N' = \frac{\omega_2}{\Gamma} \frac{\mathbb{D}}{z \omega_1} \Delta N.$$

Al dividir por  $\kappa \omega_1$  la ecuación en  $A$  y usar lo anterior, resulta

$$\frac{\partial A'}{\partial t'} = \eta \Delta_{x'} A' - (A' - \tilde{A}') + \psi N' A' (1 - A'). \quad (1.18)$$

Para la ecuación en  $N$ , de la identidad (1.12) y procediendo en forma similar a lo hecho en las ecuaciones de Short, el término advectivo se reescribe en función de  $A'$  y  $N'$  por

$$\frac{\mathbb{D}}{z} \nabla \cdot \left( \frac{N}{A} \nabla A \right) = \frac{\Gamma \omega_1}{\omega_2} \nabla_{x'} \cdot \left( \frac{N'}{A'} \nabla_{x'} A' \right),$$

luego, al multiplicar (1.16) por  $\frac{\omega_2}{\Gamma \omega_1}$  y usar lo anterior, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\omega_2}{\Gamma \omega_1} \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\omega_2}{\Gamma} \frac{\mathbb{D}}{z \omega_1} \Delta N - 2 \frac{\omega_2}{\Gamma \omega_1} \frac{\mathbb{D}}{z} \nabla \cdot \left( \frac{N}{A} \nabla A \right) - \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot \frac{\omega_2}{\Gamma} N + \frac{\omega_2}{\omega_1} \\ \frac{\partial N'}{\partial t'} &= \Delta_{x'} N' - 2 \nabla_{x'} \cdot \left( \frac{N'}{A'} \nabla_{x'} A' \right) - \omega N' + \omega\end{aligned} \quad (1.19)$$

Finalmente, borrando primas en (1.18) y (1.19) surge el sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} = \eta \Delta A - (A - \tilde{A}) + \psi N A (1 - A) \\ \frac{\partial N}{\partial t} = \Delta N - 2 \nabla \cdot \left( \frac{N}{A} \nabla A \right) - \omega N + \omega \end{cases}$$

que dotado de condiciones de borde Neumann, se estudiará en el proximo capítulo.

### 1.3. Jones, Brantingham y Chayes (2010)

A diferencia del modelo de Pitcher, los autores de [5] incorporan a la dinámica fenómenos cotidianos que las ecuaciones de Short et al. no pueden explicar apropiadamente. El primer foco de atención corresponde a ver que tan eficaz es la atractividad al sesgar el actuar criminal, para lo cual se propone cambiar la probabilidad de cometer un crimen a

$$p_s^t = \frac{\varepsilon \mathbb{E}(A_s^t) \Delta t}{1 + \varepsilon \mathbb{E}(A_s^t) \Delta t}$$

donde  $\varepsilon > 0$  es un coeficiente que cuantifica tal eficiencia.

La hipótesis de que los criminales no reinciden inmediatamente se mantiene, pero se aborda su remoción al no haber cometido delito alguno, introduciendo una tasa  $\Lambda$  para este fin. Este efecto se ve reflejado al modificar (1.3) por

$$n_s^{t+\Delta t} = (1 - \Lambda \Delta t) A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t (1 - p_{s'}^t)}{T_{s'}^t} + \Gamma l^2 \Delta t \quad (1.20)$$

mientras que la ecuación (1.2) mantiene su estructura. En la formulación del modelo discreto los autores consideran  $l^2 = \Delta t = 1$ , lo cual no se ha hecho en esta sección para así establecer una comparación directa con los modelos anteriores.

Cambiar la probabilidad  $p_s^t$  no altera la derivación de las ecuaciones en el continuo. En efecto, debido a que

$$\lim_{l^2, \Delta t \rightarrow 0} \frac{p_s^t}{\Delta t} = \lim_{l^2, \Delta t \rightarrow 0} \frac{\varepsilon A_s^t}{1 + \varepsilon A_s^t \Delta t} = \varepsilon A$$

la deducción de una expresión en el continuo para (1.2) es semejante a lo hecho en el modelo de Short et al., obteniéndose

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\eta \mathbb{D}}{z} \Delta B - \omega_1 B + \varepsilon \theta \mathbb{D} N A.$$

Respecto a (1.20), la dificultad entre este caso y el modelo citado radica en dos cosas: la relación (1.6) no es válida en este contexto y el factor  $(1 - \Lambda \Delta t)$  afecta la forma de tomar límite, pues deja de ser análoga a lo hecho en el modelo de Short et al. Lo primero se resuelve mediante

$$1 - p_s^t = 1 - \varepsilon A_s^t \Delta t + \tilde{C} \cdot (\varepsilon A_s^t \Delta t)^2 \quad (1.21)$$

con  $\tilde{C}$  constante, relación que proviene del desarrollo de Taylor en torno a 0 de la función  $\frac{1}{1+x}$  y

es similar a (1.6); mientras que para lo segundo se estudia

$$\begin{aligned}
n_s^{t+\Delta t} &= (1 - \Lambda \Delta t) A_s^t \sum_{s' \circ s} n_{s'}^t \left( \frac{1}{z A_{s'}^t} \left( 1 - \frac{l^2 \Delta A_{s'}^t}{z A_{s'}^t} \right) + \tilde{C} \cdot (l^2 \Delta A_{s'}^t)^2 \right) \left( 1 - \varepsilon A_{s'}^t \Delta t + \tilde{C} \cdot (\varepsilon A_{s'}^t \Delta t)^2 \right) \\
&\quad + \Gamma l^2 \Delta t \\
&= A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{z A_{s'}^t} (1 - \varepsilon A_{s'}^t \Delta t) - A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{z A_{s'}^t} \frac{l^2 \Delta A_{s'}^t}{z A_{s'}^t} (1 - \varepsilon A_{s'}^t \Delta t) \\
&\quad - \Lambda \Delta t \cdot A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{z A_{s'}^t} \left( 1 - l^2 \frac{\Delta A_{s'}^t}{z A_{s'}^t} \right) (1 - \varepsilon A_{s'}^t \Delta t) + \Gamma l^2 \Delta t + (1 - \Lambda \Delta t) R
\end{aligned}$$

donde  $R = R(A_s^t, n_{s'}^t, l^2, \Delta t)$  se explicita mas adelante. De restar  $n_s^t$  y dividir por  $\Delta t$  resulta

$$\begin{aligned}
\frac{n_s^{t+\Delta t} - n_s^t}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t} \left( A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{z A_{s'}^t} (1 - \varepsilon A_{s'}^t \Delta t) - n_s^t \right) - \frac{A_s^t}{\Delta t} \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{z A_{s'}^t} \frac{l^2 \Delta A_{s'}^t}{z A_{s'}^t} (1 - \varepsilon A_{s'}^t \Delta t) \\
&\quad - \Lambda \cdot A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{z A_{s'}^t} \left( 1 - l^2 \frac{\Delta A_{s'}^t}{z A_{s'}^t} \right) (1 - \varepsilon A_{s'}^t \Delta t) + \Gamma l^2 + \frac{1 - \Lambda \Delta t}{\Delta t} R \\
&= \frac{l^2}{z \Delta t} A_s^t \cdot \frac{1}{l^2} \left( \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{A_{s'}^t} - z \frac{n_s^t}{A_s^t} \right) - \varepsilon A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{z} - \frac{l^2}{z \Delta t} A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{A_{s'}^t} \frac{\Delta A_{s'}^t}{z A_{s'}^t} (1 - \varepsilon A_{s'}^t \Delta t) \\
&\quad - \Lambda \cdot A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{z A_{s'}^t} \left( 1 - l^2 \frac{\Delta A_{s'}^t}{z A_{s'}^t} \right) (1 - \varepsilon A_{s'}^t \Delta t) + \Gamma l^2 + \frac{1 - \Lambda \Delta t}{\Delta t} R \\
&= \frac{l^2}{z \Delta t} A_s^t \Delta \left( \frac{n_s^t}{A_s^t} \right) - \frac{l^2}{z \Delta t} A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{A_{s'}^t} \frac{\Delta A_{s'}^t}{z A_{s'}^t} (1 - \varepsilon A_{s'}^t \Delta t) - \varepsilon A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{z} \\
&\quad - \Lambda \cdot A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t}{z A_{s'}^t} \left( 1 - l^2 \frac{\Delta A_{s'}^t}{z A_{s'}^t} \right) (1 - \varepsilon A_{s'}^t \Delta t) + \Gamma l^2 + \frac{1 - \Lambda \Delta t}{\Delta t} R.
\end{aligned}$$

Al igual que en el modelo de Short et al., se tiene

$$\begin{aligned}
R &= \tilde{C} \varepsilon \left( \frac{A_s^t}{z} \sum_{s' \circ s} n_{s'}^t A_{s'}^t \left( 1 - \frac{l^2 \Delta A_{s'}^t}{z A_{s'}^t} \right) \right) \cdot (\Delta t)^2 + \tilde{C} \left( A_s^t \sum_{s' \circ s} n_{s'}^t (1 - \varepsilon A_{s'}^t \Delta t) (\Delta A_{s'}^t)^2 \right) \cdot l^4 \\
&\quad + \tilde{C} \tilde{C} \varepsilon \left( A_s^t \sum_{s' \circ s} n_{s'}^t (\Delta A_{s'}^t)^2 (A_{s'}^t)^2 \right) \cdot l^4 (\Delta t)^2,
\end{aligned}$$

y debido a que el límite de cada uno de los términos que acompaña a las potencias de  $l^2$  y  $\Delta t$  está

bien definido, sumado al hecho que  $\mathbb{D} = \lim_{l^2, \Delta t \rightarrow 0} \frac{l^2}{\Delta t}$ , se obtiene

$$\lim_{l^2, \Delta t \rightarrow 0} \frac{1 - \Lambda \Delta t}{l^2 \Delta t} R = 0.$$

Se concluye que en términos de  $A$ , el modelo de Jones, Brantingham y Chayes es descrito por el sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\eta \mathbb{D}}{z} \Delta A - \omega_1 (A - \tilde{A}) + \varepsilon \theta \mathbb{D} N A \\ \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\mathbb{D}}{z} \Delta N - \frac{2\mathbb{D}}{z} \nabla \cdot \left( \frac{N}{A} \nabla A \right) - \varepsilon N A - \Lambda N + \Gamma \end{cases} \quad (1.22)$$

en el cual la constante  $\varepsilon$  acentúa o atenúa la influencia de  $NA$  en ambas ecuaciones, pues valores altos de ella indican que la probabilidad de cometer un crimen es más alta y por consiguiente, aumenta la atractividad de los lugares robados y disminuye la población criminal; en cambio el término  $-\Lambda N$  representa a los delincuentes que se retiran después de un tiempo sin incurrir en delito alguno.

## 1.4. Presencia policial

### 1.4.1. Disuasión dinámica en las ecuaciones de Pitcher

En cada uno de los modelos ha surgido la pregunta de como incorporar la dinámica policial al sistema. Pitcher fija en [8] un precedente para el desarrollo de estrategias en este sentido, pues incluye una nueva variable aleatoria denominada *disuasión dinámica esperada*, denotada por  $D_s^t$ , que explicita el porcentaje en que disminuye la atractividad cuando la fuerza policial está en el sistema. Esto afecta directamente la probabilidad de cometer un crimen, la cual cambia por

$$p_s^t = 1 - e^{-\mathbb{E}(A_s^t)(1 - \mathbb{E}(D_s^t))^+ \Delta t}.$$

donde la parte positiva se agrega para considerar valores de la disuasión no más grandes que 1.

Bajo este contexto, las ecuaciones (1.15) y (1.14) se reescriben como

$$\begin{aligned} B_s^{t+\Delta t} &= \left( B_s^t + \frac{\eta l^2}{z} \Delta B_s^t \right) (1 - \omega_1 \Delta t) + \frac{\theta}{\Delta t} n_s^t A_s^t (1 - D_s^t)^+ \left( 1 - \frac{A_s^t}{\kappa} \right) \\ n_s^{t+\Delta t} &= A_s^t (1 - D_s^t)^+ \sum_{s' \in \mathcal{O}_s} \frac{n_{s'}^t (1 - \omega_2 \Delta t)}{T_{s'}^t} + \Gamma l^2 \Delta t \end{aligned}$$

$$\text{con } T_{s'}^t = \sum_{s'' \circ s'} A_{s''}^t (1 - D_{s''}^t)^+.$$

La fuerza policial participa indirectamente en el modelo discreto, al añadirse una nueva variable que representa el *número esperado de policías* en la región, denotada por  $k_s^t$ . Esta fuerza policial se caracteriza por ser constante en tiempo, al asumir que existe un número de oficiales disponibles que no entran ni salen del sistema, mediante la restricción

$$(\forall t > 0) \quad P = \frac{1}{l^2} \sum_s k_s^t$$

donde  $P$  es una constante. Consideramos también como supuesto que un delincuente no comete robos residenciales en presencia de policías, por lo que el actuar de éstos últimos se entiende como un factor disuasivo en el comportamiento criminal, es decir, no aprehenden criminales in situ. Dado un nodo  $s$ , el rol disuasivo de la policía tiene un impacto directo sobre él y sus vecinos, siendo además transitorio, por lo que el planteamiento de la ecuación discreta asociada es similar a la deducción de (1.15) y resulta

$$D_s^{t+\Delta t} = \left( (1 - \zeta) D_s^t + \frac{\zeta}{z} \sum_{s' \circ s} D_{s'}^t \right) (1 - \omega_3 \Delta t) + \xi k_s^t$$

con  $\zeta$  medida de tal impacto,  $\omega_3$  su tasa natural de decaimiento y  $\xi$  un factor que representa un efecto inmediato producto de la presencia policial. Se observa que en este modelo, la variable  $k_s^t$  participa como una restricción del problema, a diferencia de la disuación, que cumple un rol central pues se plantea como una variable dotada de dinámica propia.

La forma de encontrar las ecuaciones en el continuo es análogo a lo hecho en la sección 1.2, y resulta finalmente

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\eta \mathbb{D}}{z} \Delta A - \omega_1 (A - \tilde{A}) + \theta N A \mathbb{D} (1 - D)^+ \left( 1 - \frac{A}{\kappa} \right) \\ \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\mathbb{D}}{z} \Delta N - \frac{2\mathbb{D}}{z} \nabla \cdot (N \nabla \ln (A(1 - D)^+)) - \omega_2 N + \Gamma \\ \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\zeta \mathbb{D}}{z} \Delta D - \omega_3 D + \xi \mathbb{D} K \end{cases} \quad (1.23)$$

donde  $K$  es la función que define la densidad de policías presentes en la región. Por ello, la última ecuación está sujeta a la restricción

$$(\forall t > 0) \quad P = \int_{\Omega} K dx. \quad (1.24)$$

### 1.4.2. Nuevas estrategias

Jones, Brantingham y Chayes proponen en [5] estudiar como influye la presencia policial en el entorno, en vez del efecto disuasivo que ellos generan. Para ello plantean varias estrategias sobre el modelo (1.22), que están centradas en la distribución de la dotación policial y se agrupan en dos clases, dependiendo de si la asignación de efectivos es conocida o si ésta es una nueva variable del sistema y posee dinámica propia.

Lo que viene a continuación es una revisión de tales tentativas, que se aplican de forma análoga al modelo de Short et al.

#### Cambios en el actuar del delincuente

En primera instancia, los autores plantean formas de disuadir la actividad delictual de modo tal que las ecuaciones de (1.22) se vean levemente modificadas, sin incluir una nueva ecuación a dicho sistema, pero considerando  $k_s^t$  como dato conocido en el modelo discreto (e igualmente a  $K$  en el mmodelo continuo). Con este fin elaboran dos estrategias, que están centradas en el criminal y en la forma que su interacción con el medio altera sus acciones.

**Modificación de la percepción** Debido a que la atractividad corresponde a una valorización del entorno desde la perspectiva criminal, es de esperar que la presencia policial la afecte. Con este fin, se define la *atractividad esperada en presencia policial* por

$$\hat{A}_s^t = \exp\left(-\chi \frac{k_s^t}{l^2}\right) \cdot A_s^t,$$

donde  $\chi$  es una constante positiva que representa el impacto de la dotación policial  $k_s^t$ . Cuando  $k_s^t = 0$ , esta noción de coincide con la usual. Jones, Brantingham y Chayes señalan que tal cambio se justifica pues la atractividad juega un rol esencial en el actuar criminal, al estar involucrada tanto en la probabilidad  $p_s^t$  de cometer un delito como en la ecuación discreta asociada al número esperado de delincuentes presentes en la región.

La forma en que se construyen las ecuaciones discretas de la sección 1.3 no varía, ya que los supuestos involucrados no cambian. Luego, las ecuaciones en el continuo corresponden a

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} = \frac{\eta \mathbb{D}}{z} \Delta \hat{A} - \omega_1 (\hat{A} - \tilde{A}) + \varepsilon \theta \mathbb{D} N \hat{A} \\ \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\mathbb{D}}{z} \Delta N - \frac{2\mathbb{D}}{z} \nabla \cdot \left( \frac{N}{\hat{A}} \nabla \hat{A} \right) - \varepsilon N \hat{A} - \Lambda N + \Gamma \end{cases}$$

las cuales son formalmente similares a (1.22) salvo por la modificación de la atractividad, razón por la que ambos sistemas no exhiben la misma conducta.

**Modificación del comportamiento** Otro modo de alterar las acciones de un criminal consiste en desalentarlo directamente, mediante su encuentro con policías en una posición  $s$  y tiempo  $t$ . Cuando esta situación ocurre, los autores de [5] plantean que el delincuente permanece en estado activo según la probabilidad

$$\frac{1}{1 + J\Delta t \cdot (k_s^t/l^2)},$$

con  $J$  una constante positiva.

Si  $s'$  es un nodo adyacente a  $s$ , el número esperado de delincuentes que se desplazan a  $s$  en  $t + \Delta t$  luego de no cometer delitos en  $s'$  y tiempo  $t$  cambia por

$$\frac{1}{1 + J\Delta t \cdot (k_s^t/l^2)} \cdot (1 - \Lambda\Delta t) \cdot \frac{A_s^t}{T_{s'}^t} n_{s'}^t (1 - p_{s'}^t),$$

pues algunos son removidos por el efecto disuasivo de la policía y otros al no cometer delito alguno. Por consiguiente, (1.20) incorpora un nuevo factor

$$n_s^{t+\Delta t} = (1 - \Lambda\Delta t) A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{1}{1 + J\Delta t \cdot (k_s^t/l^2)} \frac{n_{s'}^t (1 - p_{s'}^t)}{T_{s'}^t} + \Gamma l^2 \Delta t,$$

y se descompone en la forma

$$\begin{aligned} n_s^{t+\Delta t} &= (1 - \Lambda\Delta t) A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{n_{s'}^t (1 - p_{s'}^t)}{T_{s'}^t} + \Gamma l^2 \Delta t \\ &\quad - J\Delta t (1 - \Lambda\Delta t) \cdot A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{k_{s'}^t}{l^2} \frac{1}{1 + J\Delta t \cdot (k_s^t/l^2)} \frac{n_{s'}^t (1 - p_{s'}^t)}{T_{s'}^t}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

que a excepción del último término, coincide con (1.20). Esto es útil pues al derivar su expresión en el continuo, sólo es necesario estudiar como se comporta el nuevo término involucrado.

Por medio de la aproximación (1.6) se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{s' \circ s} \frac{k_{s'}^t}{l^2} \frac{1}{1 + J\Delta t \cdot (k_s^t/l^2)} \frac{n_{s'}^t (1 - p_{s'}^t)}{T_{s'}^t} &= \sum_{s' \circ s} \frac{k_{s'}^t}{l^2} \frac{1}{1 + J\Delta t \cdot (k_s^t/l^2)} \frac{n_{s'}^t}{1 + \varepsilon A_{s'}^t \Delta t} \cdot \frac{1}{z A_{s'}^t} \left(1 - l^2 \frac{\Delta A_{s'}^t}{z A_{s'}^t}\right) \\ &\quad + \sum_{s' \circ s} \frac{k_{s'}^t}{l^2} \frac{1}{1 + J\Delta t \cdot (k_s^t/l^2)} \frac{n_{s'}^t}{1 + \varepsilon A_{s'}^t \Delta t} \cdot \tilde{C} (l^2 \Delta A_{s'}^t)^2 \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\lim_{l^2, \Delta t \rightarrow 0} J(1 - \Lambda\Delta t) \cdot A_s^t \sum_{s' \circ s} \frac{k_{s'}^t}{l^2} \frac{1}{1 + J\Delta t (k_s^t/l^2)} \frac{n_{s'}^t (1 - p_{s'}^t)}{l^2 T_{s'}^t} = JKN$$

Por lo tanto, al restar  $n_s^t$  en (1.25), dividir por  $\Delta t$ ,  $l^2$ , y tomar límite resulta

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\mathbb{D}}{z} \Delta N - \frac{2\mathbb{D}}{z} \nabla \cdot \left( \frac{N}{A} \nabla A \right) - \epsilon N A - \Lambda N - JKN + \Gamma$$

y  $-JKN$  indica que la densidad criminal se reduce en forma proporcional a la densidad de policías.

### Influencia del actuar policial en el entorno

Pitcher sienta un precedente incluyendo la disuasión dinámica en [8], al tratar de cuantificar la incidencia del número esperado de policías en el crecimiento de la población criminal. Sin embargo, una forma directa de hacer esto es dotar a la fuerza policial  $k_s^t$  de una dinámica propia, cuya estructura dependa de la forma en que se custodia la grilla. Jones, Brantingham y Chayes distinguen tres estrategias, que buscan complementar al sistema (1.22).

**Paseo aleatorio** Consta de patrullar la grilla sin vigilar lugares particulares. Esto implica que dado un nodo  $s$  y tiempo  $t$ , los policías presentes en él se distribuyen entre los vecinos de forma equitativa, por lo que la ecuación discreta asociada es

$$k_s^{t+\Delta t} = \frac{1}{z} \sum_{s' \circ s} k_{s'}^t = k_s^t + \frac{l^2}{z} \Delta k_s^t$$

y su expresión en el continuo corresponde a

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{\mathbb{D}}{z} \Delta K.$$

La consecuencia de no vincularse de modo efectivo con las otras variables es que la fuerza policial se reparte uniformemente, siendo una política de nulo impacto en la disminución del crimen.

**Cops on the dots** Notando que la acción criminal tiene por objetivo dirigirse a las regiones de mayor atraktividad, Jones, Brantingham y Chayes proponen situar la vigilancia policial sobre aquellos sectores.

La forma en que la fuerza policial se desplaza a medida que avanza el tiempo es similar a lo hecho en (1.3). En efecto, dado un nodo  $s$ , la probabilidad de que la población  $k_{s'}^t$  se desplace a él es  $\frac{A_s^t}{T_{s'}^t}$  y entonces

$$k_s^{t+\Delta t} = \sum_{s' \circ s} k_{s'}^t \cdot \frac{A_s^t}{T_{s'}^t}$$

Luego de usar la aproximación (1.6), restar  $k_s^t$ , dividir por  $\Delta t$  y efectuar algunos cálculos resulta

$$\frac{k_s^{t+\Delta t} - k_s^t}{\Delta t} = \frac{l^2}{z\Delta t} A_s^t \cdot \Delta \left( \frac{k_s^t}{A_s^t} \right) - \frac{l^2}{\Delta t} \cdot A_s^t \sum_{s' \circ s} k_{s'}^t \frac{\Delta A_{s'}^t}{z A_{s'}^t} + \left( \frac{l^2}{\Delta t} \cdot \tilde{C} A_s^t \sum_{s' \circ s} k_{s'}^t \Delta A_{s'}^t \right) \cdot l^2$$

Dividiendo por  $l^2$ , y al tomar  $l^2, \Delta t \rightarrow 0$  se obtiene

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{\mathbb{D}}{z} \Delta K - \frac{2\mathbb{D}}{z} \nabla \cdot \left( \frac{K}{A} \nabla A \right) \quad (1.26)$$

que expresa la naturaleza difusiva y advectiva del fenómeno.

En esta estrategia no está claro si la dotación policial es limitada. Integrando sobre  $\Omega$  y usando el Teorema de la Divergencia resulta

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} K dx \right) = \frac{\mathbb{D}}{z} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial K}{\partial n} ds - \frac{2\mathbb{D}}{z} \int_{\partial\Omega} \frac{K}{A} \frac{\partial A}{\partial n} ds,$$

por lo tanto, al imponer por condición de borde

$$\frac{\partial K}{\partial n} - 2 \frac{K}{A} \frac{\partial A}{\partial n} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega$$

se tiene que  $\int_{\Omega} K dx$  es constante respecto al tiempo, y esto es consistente con la restricción (1.24) propuesta por Pitcher.

**Prohibición periférica** El término advectivo de (1.26) muestra que la fuerza policial tiende a concentrarse en las regiones de mayor atractividad a una velocidad  $\nabla \log A$ , por lo que su movilidad es menor. Si se cuenta con un contingente limitado, los autores de [5] afirman que distribuirlos alrededor de las regiones de mayor atractividad es más eficiente que hacerlo sobre toda la grilla, puesto que el área crece cuadráticamente y el perímetro a ritmo lineal. Sin embargo, señalan también que esta estrategia es difícil de plantear pues ya que se desconoce donde estarán ubicadas tales regiones, por lo que establecer reglas en el modelo discreto se torna complejo, y en el continuo aún más.

## 1.5. Comentarios y aplicaciones

El presente capítulo pretende ser útil como insumo en la discusión de los modelos de criminalidad, puesto que reúne y analiza gran parte de las tentativas desarrolladas con respecto al tema; además de uniformizar su deducción, pues cada autor procede en forma diferente.

Los modelos expuestos en esta sección tienen en común que los criminales no cometen dos crímenes a la vez ni presentan asociación entre sí. La atractividad es determinante en su actuar, pues se refleja en la probabilidad de cometer un crimen y la forma en que los delincuentes recorren la región, ya que buscan siempre las oportunidades más atractivas. En cuanto a esta variable, su comportamiento tiene que ver totalmente con los asaltos reiterados, salvo para Pitcher, quién además la limita con tal de evitar que el sistema se sature de criminales.

La principal diferencia entre cada uno de ellos tienen que ver con como se comportan los delincuentes a medida que avanza el tiempo. Short et al. postulan que todo criminal abandona el sistema luego de delinquir, deambulando por él en caso contrario; Pitcher sostiene que cometer un crimen no es motivo suficiente para retirarse o permanecer en el sistema, proponiendo su abandono a una tasa constante; mientras Jones, Brantingham y Chayes complementan lo planteado por Short et al., al proponer una tasa de remoción para quienes no han cometido delito. Además, estos autores cambian la probabilidad asociada a cometer un delito, para manipular la relevancia de la atractividad en el actuar criminal.

Finalmente, tanto Pitcher como Jones et al. buscan incorporar la presencia policial al sistema, pero difieren en sus mecanismos. Pitcher lo hace en forma indirecta, al estudiar una variable que mide el impacto generado la fuerza policial en el entorno, mientras Jones se orienta a dotar de dinámica propia a la fuerza policial y abordar diversas estrategias al momento de patrullar la región. Se observa que *cops in the dots* presenta múltiples ventajas respecto a las otras estrategias, siempre que se consideren condiciones de borde Neumann. Esto debido a que se vincula efectivamente con la dinámica por medio de la atractividad, no depende de observaciones explícitas en cierto tiempo ni de información sobre la dotación policial en cada instante, como es el caso de *prohibición periférica* y las estrategias basadas en *cambios en el actuar del delincuente*, respectivamente; y tampoco presenta posibles indeterminaciones, a diferencia de lo planteado por Pitcher.

# Capítulo 2

## Formación de patrones en las ecuaciones de Pitcher

### 2.1. Preliminares

La formación de patrones es un fenómeno que aparece frecuentemente en biología, en situaciones tan disímiles como el estudio de la distribución de bacterias en una placa de Petri o la forma que adoptan las manchas de un tigre. A menudo las causas subyacentes a cada situación son desconocidas, siendo un desafío explicar las circunstancias que las desencadenan.

Un ejemplo emblemático es el proceso de la morfogénesis [7], etapa en que se realiza la formación de órganos en el embrión. Wolpert sugiere un concepto llamado *información posicional*, en el cual cada célula se diferencia según la concentración de químicos presentes (morfógenos) en su entorno, siendo un problema relevante la forma en que se distribuyen espacialmente tales concentraciones, pues determina por completo el proceso. Las reacciones involucradas se rigen por un sistema de reacción-difusión, cuya forma general es

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} = d_A \Delta A + F(A, N) \\ \frac{\partial N}{\partial t} = d_N \Delta N + G(A, N) \end{cases} \quad (2.1)$$

donde  $d_A, d_N$  son los coeficientes de difusión y  $F, G$  corresponden a las cinéticas de reacción, que generalmente son no lineales.

En este contexto Turing [12] plantea una idea que va en contra de toda intuición, y es que en presencia de un término difusivo, pequeñas perturbaciones sobre el equilibrio del sistema pueden dar origen a patrones espaciales heterogéneos, mecanismo que se conoce como *inestabilidades de Turing* o *inestabilidades por difusión*. Formalmente,

**Teorema 2.1.** [3, pp.172] *El sistema (2.1) presenta inestabilidades de Turing si el equilibrio es*

- (i) *estable bajo pequeñas perturbaciones en ausencia de difusión,*
- (ii) *e inestable bajo pequeñas perturbaciones cuando la difusión está presente.*

Esta herramienta es imprescindible al momento de estudiar sistemas de reacción-difusión, y con ella Short et al. y Pitcher probaron que sus respectivos modelos son susceptibles a la formación de patrones bajo ciertas condiciones, algo central para la validación de modelos de criminalidad pues señala la posible presencia de *hot spots*, lugares donde se da una fuerte correlación espacial y temporal en la ocurrencia de delitos. Sin embargo, el uso de inestabilidades de Turing tiene una limitación, y es que sólo indica que la manifestación de estos patrones es admisible.

En busca de una caracterización más rigurosa, Cantrell, Cosner y Manásevich [1] demostraron mediante el uso de *teoría de bifurcaciones* que el caso estacionario de las ecuaciones de Short et al. exhibe formación de patrones. El presente trabajo busca extender sus resultados al caso estacionario de las ecuaciones de Pitcher con condiciones de borde Neumann, siguiendo un procedimiento similar que se explicará a continuación.

En términos generales, dados  $\mathcal{Y}$ ,  $\mathcal{Z}$  espacios de Banach,  $\mathcal{V}$  abierto no vacío en  $\mathbb{R} \times \mathcal{Y}$ ,  $\mathcal{F} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{Z}$  función dos veces diferenciable y  $\lambda$  un parámetro, la teoría de bifurcaciones tiene por finalidad estudiar las soluciones del problema

$$\mathcal{F}(\lambda, y) = 0, \quad (2.2)$$

es decir, ver como es  $\mathcal{F}^{-1}(\{0\})$ . Suponemos que existe  $\mathcal{D} = \{(\lambda, y(\lambda)) : \mathcal{F}(\lambda, y(\lambda)) = 0\}$  y que  $(\lambda_0, y_0) = (\lambda_0, y(\lambda_0))$  es un punto interior tal que cada vecindad de él contiene ceros de  $\mathcal{F}$  que no pertenecen a  $\mathcal{D}$ . Entonces  $(\lambda_0, y_0)$  es llamado un *punto de bifurcación*, y los ceros mencionados que sean cercanos al punto y no estén en  $\mathcal{D}$  se conocen como *soluciones de bifurcación* o *conjunto de bifurcación*.

Para problemas del tipo

$$y = \mathcal{K}(\lambda, y),$$

donde  $\mathcal{K}$  es un operador continuo y compacto, Crandall y Rabinowitz [2] probaron que parte del conjunto de bifurcación es una curva localmente continua y diferenciable, denominada *rama de bifurcación*. Luego, una forma común de abordar el estudio de (2.2) es escribirla en forma integral, como una perturbación compacta de la identidad.

Sin embargo, la estrategia anterior se torna compleja cuando  $\mathcal{F}$  es un operador elíptico tal que su parte principal es no lineal. Para operadores elípticos cuasi-lineales, Shi y Wang [10] proponen una extensión del clásico resultado de Crandall y Rabinowitz que permite estudiar el problema (2.2) directamente, además de obtener la globalidad de la rama de bifurcación mediante teoría de operadores de Fredholm. El resultado citado corresponde al siguiente teorema:

**Teorema 2.2.** [10, Teorema 4.3] Sean  $\mathcal{Y}$ ,  $\mathcal{Z}$  espacios de Banach y  $\mathcal{V}$  abierto en  $\mathbb{R} \times \mathcal{Y}$  tal que  $(\lambda_0, y_0) \in \mathcal{V}$ . Sea

$$\mathcal{F} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{Z}$$

función dos veces diferenciable que satisfice

- (a) para cualquier  $(\lambda, y_0) \in \mathcal{V}$  se cumple  $\mathcal{F}(\lambda, y_0) = 0$ ,
- (b) las derivadas parciales  $D\mathcal{F}_\lambda(\lambda, y)$ ,  $D\mathcal{F}_y(\lambda, y)$  y  $D\mathcal{F}_{\lambda y}(\lambda, y)$  existen y son continuas,
- (c) para algún  $(\lambda_0, y_0) \in \mathcal{V}$ ,  $\mathbb{R}(D\mathcal{F}_y(\lambda_0, y_0))$  es cerrado,  $\dim \ker(D\mathcal{F}_y(\lambda_0, y_0)) = 1$  y  $\text{codim} \mathbb{R}(D\mathcal{F}_y(\lambda_0, y_0)) = 1$ ,
- (d) dado  $\bar{y}$  generador de  $\ker(D\mathcal{F}_y(\lambda_0, y_0))$ , se tiene  $D\mathcal{F}_{\lambda y}(\lambda_0, y_0)\bar{y} \notin \mathbb{R}(D\mathcal{F}_y(\lambda_0, y_0))$ .

Sea  $\mathcal{W} \subset \mathcal{Y}$  un complemento cerrado de  $\ker(D\mathcal{F}_y(\lambda_0, y_0))$ . Entonces existe un intervalo abierto  $I_0 = (-\delta, \delta)$  y funciones de derivada continua  $\lambda : I_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $\xi : I_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ , que satisfacen  $\lambda(0) = \lambda_0$ ,  $\xi(0) = 0$ ,  $\xi \in \mathcal{W}$ , tales que

$$\mathcal{F}(\lambda(s), y_0 + s\bar{y} + s\xi(s)) = 0 \quad \forall s \in I_0.$$

Además, para cualquier vecindad suficientemente pequeña de  $(\lambda_0, y_0) \in \mathcal{V}$ , el conjunto solución de  $\mathcal{F}(\lambda, y) = 0$  es la línea  $(\lambda, y_0)$  y la curva  $(\lambda(s), y_0 + s\bar{y} + s\xi(s))$ . Más aún, si

- (e)  $D\mathcal{F}_y(\lambda, y)$  es un operador de Fredholm para cualquier  $(\lambda, y) \in \mathcal{V}$ ,

entonces la rama de bifurcación es global.

De este modo, al reescribir (2.1) de la forma

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \mathcal{F}(\lambda, y) \tag{2.3}$$

y estudiar el caso estacionario, bajo las hipótesis del teorema anterior se tiene que las ramas de bifurcación describen la formación de patrones en el problema (2.2), para valores suficientemente cercanos a  $\lambda_0$ .

Finalmente, el presente capítulo se divide en tres secciones: la primera tiene un carácter introductorio, al exponer y profundizar el uso de inestabilidades de Turing (Teorema 2.3) realizado en [8].

A continuación, es en la segunda donde se estudia la formación de patrones en el caso estacionario de las ecuaciones de Pitcher con condiciones de borde Neumann. Se formulan y demuestran los dos resultados cruciales de esta memoria, que corresponden a la existencia global

(Teorema 2.4) y estabilidad local (Teorema 2.5) de una rama de bifurcación en torno al punto de bifurcación del sistema. La última sección tiene for finalidad mostrar como se origina la rama.

Dado  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  dominio acotado, la familia de valores y funciones propias del problema

$$\begin{cases} \Delta\phi + \mu\phi = 0 & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{LN})$$

es fundamental en la obtención de nuestros resultados, pues destacan las siguientes propiedades [4]:

- (i) los valores propios  $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$  son reales, siendo cero o positivos, además de aislados,
- (ii) la sucesión  $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$  es creciente y diverge a  $+\infty$ ,
- (iii) la familia de funciones propias  $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$  forma una base de Hilbert en  $L^2(\Omega)$ .

## 2.2. Inestabilidades de Turing

La versión adimensional de las ecuaciones de Pitcher, dotada de condiciones de borde Neumann, corresponde a

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} = \eta\Delta A - (A - \tilde{A}) + \psi NA(1 - A) & \text{en } \Omega \times (0, T], \\ \frac{\partial N}{\partial t} = \Delta N - 2\nabla \cdot \left( \frac{N}{A} \nabla A \right) - \omega N + \omega & \text{en } \Omega \times (0, T], \\ \frac{\partial A}{\partial n} = 0, \frac{\partial N}{\partial n} = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, T]. \end{cases} \quad (2.4)$$

donde  $\Omega$  y  $(0, T]$  hacen referencia al dominio espacial y temporal, respectivamente. Ya que  $\tilde{A}$  es constante, se obtienen los equilibrios (o soluciones constantes)

$$(A_{\pm}^*, N^*) = \left( \frac{\psi - 1 \pm \sqrt{(\psi - 1)^2 + 4\tilde{A}\psi}}{2\psi}, 1 \right),$$

y debido a que  $\tilde{A}$  y  $\psi$  son positivos, sólo es admisible escoger la raíz positiva de  $A_{\pm}^*$ , denotada por  $A^*$ .

De acuerdo al Teorema 2.1, el sistema (2.4) podría presentar formación de patrones. El próximo resultado explicita cuando ocurre esta situación.

**Teorema 2.3.** Sean  $\eta, \omega, \tilde{A}$  y  $\psi$  tales que satisfacen la condición

$$4\eta\omega(1 - \psi + 2\psi A^*) < (1 - 3\psi + 4\psi A^* + \eta\omega)^2, \quad (2.5)$$

y  $\mu_-, \mu_+$  raíces reales y distintas de

$$\eta\mu^2 + (1 - 3\psi + 4\psi A^* + \eta\omega)\mu + \omega(1 - \psi + 2\psi A^*) = 0. \quad (2.6)$$

Si  $\mu$  es un valor propio de (LN) tal que está en  $(\mu_-, \mu_+)$ , entonces el sistema (2.4) presenta formación de patrones en una vecindad de  $(A^*, N^*)$ .

*Demostración.* Para que (2.4) admita inestabilidades de Turing, requiere cumplir las condiciones del Teorema 2.1. Escrita matricialmente, la linealización del problema en torno a  $(A^*, N^*)$  es

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} A - A^* \\ N - 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \eta & 0 \\ -\frac{2}{A^*} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta A \\ \Delta N \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \psi - 1 - 2\psi A^* & \psi A^*(1 - A^*) \\ 0 & -\omega \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A - A^* \\ N - 1 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

En ausencia del término difusivo, se obtiene el sistema de EDOs

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} A - A^* \\ N - 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \psi - 1 - 2\psi A^* & \psi A^*(1 - A^*) \\ 0 & -\omega \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A - A^* \\ N - 1 \end{pmatrix}$$

y denotamos por  $M$  a la matriz del lado derecho. Notando que

$$\psi - 1 - 2\psi A^* = \psi - 1 - 2\psi \cdot \left( \frac{\psi - 1 + \sqrt{(\psi - 1)^2 + 4\tilde{A}\psi}}{2\psi} \right) = -\sqrt{(\psi - 1)^2 + 4\tilde{A}\psi}$$

resulta que el equilibrio  $(A^*, N^*)$  es estable pues

$$\text{tr}(M) = -\sqrt{(\psi - 1)^2 + 4\tilde{A}\psi} - \omega < 0$$

$$\det(M) = \omega\sqrt{(\psi - 1)^2 + 4\tilde{A}\psi} > 0$$

es decir, los valores propios de  $M$  son siempre negativos.

Cuando la difusión está involucrada, el método de separación de variables [3, pp.167] permite resolver (2.7) pues las condiciones de borde son Neumann y el problema es lineal. La solución propuesta es

$$\begin{pmatrix} A - A^* \\ N - 1 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{+\infty} \vec{c}_k e^{\lambda_k t} \phi_k(x) \quad (2.8)$$

donde  $\phi_k(x)$  es la función propia de (LN) asociada al valor propio  $\mu_k$  y  $\vec{c}_k$  constantes, que se determinan al reemplazar la serie en el sistema y expandir las condiciones iniciales en términos

de las funciones propias. Esta solución será inestable si

$$(\exists k \in \mathbb{N}^*) \operatorname{Re}(\lambda_k) > 0 \quad (2.9)$$

pues así al menos un término de (2.8) crecerá exponencialmente en tiempo.

Del hecho que las funciones propias son ortogonales, a partir de (2.8) se obtiene para cada  $k$  la relación

$$\lambda \vec{c} = (M - \mu D) \vec{c},$$

donde los sub-índices han sido omitidos para evitar recargar la notación. Ya que se busca una solución no trivial, la constante  $\vec{c}$  debe ser no nula. Luego se requiere estudiar la ecuación característica en  $\lambda$

$$\lambda^2 + (\omega + \mu(1 + \eta) + 1 - \psi + 2\psi A^*)\lambda + h(\mu) = 0 \quad (2.10)$$

con

$$h(\mu) = \eta\mu^2 + (1 - 3\psi + 4\psi A^* + \eta\omega)\mu + \omega(1 - \psi + 2\psi A^*).$$

Debido a que

$$\omega + \mu(1 + \eta) + 1 - \psi + 2\psi A^* = \mu(1 + \eta) - \underbrace{(\psi - 1 - 2\psi A^* - \omega)}_{\operatorname{tr}(M)} > 0,$$

la única posibilidad de que se cumpla (2.9) es  $h(\mu) < 0$ , y esto se tiene cuando el mínimo de  $h$

$$h_{min} = \omega(1 - \psi + 2\psi A^*) - \frac{(1 - 3\psi + 4\psi A^* + \eta\omega)^2}{4\eta},$$

es negativo, y si además  $\mu \in (\mu_-, \mu_+)$ , con  $\mu_-, \mu_+$  raíces de  $h(\mu)$ . En consecuencia, el sistema (2.4) presenta formación de patrones en una vecindad de  $(A^*, N^*)$ .  $\square$

La formación de patrones ocurrirá si los parámetros  $\eta, \omega, \tilde{A}$  y  $\psi$  cumplen (2.5) y si además existe  $\mu$  valor propio de (LN) tal que  $\mu \in (\mu_-, \mu_+)$ . La figura 2.1 muestra que esto efectivamente ocurre, pues la superficie presente en la figura 2.1a corresponde a la solución positiva de (2.6), mientras que la figura 2.1b muestra la existencia de una región donde  $\eta, \omega, \tilde{A}$  y  $\psi$  satisfacen (2.5).

De la demostración, se aprecia que es posible caracterizar a las soluciones inestables de (2.4) en torno a  $(A^*, N^*)$ , lo cual se establece en el próximo corolario.

**Corolario 2.1.** *Sea*

$$\begin{pmatrix} A \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^* \\ N^* \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{+\infty} \vec{c}_k e^{\lambda_k t} \phi_k(x) \quad (2.11)$$

*solución del problema (2.4) en una vecindad de  $(A^*, N^*)$ , donde  $\phi_k(x)$  es función propia del problema (LN) asociada al valor propio  $\mu_k$ ,  $\vec{c}_k$  una familia de constantes y  $\lambda_k$  es raíz de (2.10).*

Sean  $k_-, k_+$  tales que los valores propios  $\mu_{k_-}, \mu_{k_+}$  cumplen

$$\begin{aligned}\mu_{k_-} &= \min_{k \in \mathbb{N}^*} \{\mu_k : \mu_k > \mu_-\} \\ \mu_{k_+} &= \min_{k \in \mathbb{N}^*} \{\mu_k : \mu_k < \mu_+\}\end{aligned}$$

con  $\mu_-, \mu_+$  dados por

$$\mu_{\pm} = \frac{-(1 - 3\psi + 4\psi A^* + \eta\omega) \pm \sqrt{(1 - 3\psi + 4\psi A^* + \eta\omega)^2 - 4\eta\omega(1 - \psi + 2\psi A^*)}}{2\eta}.$$

Entonces, la solución (2.11) será inestable si  $(\exists k \in \{k_-, \dots, k_+\}) \vec{c}_k \neq 0$ .

Este resultado induce a pensar que la solución (2.11) crece cuando  $t \rightarrow +\infty$ , lo cual no tiene relación con la existencia de patrones espacialmente heterogéneos. Tal razonamiento es erróneo pues el corolario se deriva del estudio de la linealización del sistema en presencia de difusión, siendo válido sólo en una vecindad pequeña del equilibrio. Además no es posible determinar a cabalidad la forma de tales patrones.

## 2.3. Soluciones no constantes en el caso estacionario

El sistema parabólico (2.4) es el punto de partida de este trabajo, que tiene por objetivo obtener una caracterización rigurosa de la formación de patrones en el sistema

$$\begin{cases} \eta \Delta A - (A - \tilde{A}) + \psi N A (1 - A) = 0 & \text{en } \Omega \\ \Delta N - 2\nabla \cdot \left( \frac{N}{A} \nabla A \right) - \omega N + \omega = 0 & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial A}{\partial n} = 0, \frac{\partial N}{\partial n} = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.12)$$

donde  $\Omega$  es un dominio acotado de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$ , y  $(A^*, N^*)$  equilibrio de este problema.

Encontrar una rama de bifurcación permite hallar una familia de soluciones no constantes en función de un parámetro del problema 2.12. El siguiente resultado da cuenta de esto.

**Teorema 2.4.** Sea  $\psi_0$  solución de

$$\eta\mu^2 + \mu + \mu\psi(4A^* - 3) + \omega(\eta\mu + 1 - \psi(1 - 2A^*)) = 0,$$

$\mu$  valor propio simple del problema (LN) y  $\eta, \omega, \tilde{A}$  parámetros tales que se satisfacen las siguientes condiciones

$$(C1) \quad \tilde{A} < \frac{\mu^2(1 - \eta(\omega + \mu)) + (\omega + 2\mu)^2}{2(\omega + 2\mu)^2}$$

$$(C2) \quad 1 < \frac{\left( (\omega + 2\mu)^2(2\tilde{A} - 1) + \mu^2(\eta(\omega + \mu) - 1) \right)^2}{(\omega + \mu)^2(\omega + 3\mu)(1 + \eta\mu)(\omega + 3\mu - \eta\mu(\omega + \mu))}$$

$$(C3) \quad \frac{\omega}{\eta\mu}(1 - \psi_0(1 - 2A_0^*)) \text{ no es un valor propio de (LN)}$$

con  $A_0^* := A^*(\psi_0)$ .

Entonces existe una rama de bifurcación global del problema (2.12), cuyo origen es el punto de bifurcación  $(\psi_0, A_0^*, N^*)$ . Dada  $\phi$  función propia normalizada asociada a  $\mu$ , la rama de bifurcación se puede parametrizar en una vecindad de  $(\psi_0, A_0^*, N^*)$  de la forma

$$(\psi, A, N) = \left( \psi(s), A_0^* + s(\omega + \mu)\phi + s\xi_1(s), N^* + \frac{2\mu}{A_0^*}\phi + s\xi_2(s) \right) \quad \forall s \in I_0 = (-\delta, \delta) \quad (2.13)$$

con  $\psi, \xi_1, \xi_2 : I_0 \rightarrow \mathbb{R}$  funciones de derivada continua que satisfacen  $\psi(0) = \psi_0$ ,  $\xi_1(0) = 0$  y  $\xi_2(0) = 0$ .

La figura 2.2 muestra que para distintos valores de  $\mu, \eta, \omega, \tilde{A}$  y  $\psi$  existe una región factible donde las condiciones (C1) y (C2) se cumplen. Fijando  $\eta$  y  $\omega$ , en cada uno de los casos expuestos las curvas presentes corresponden a curvas de nivel de la región factible, sobre las cuales  $\mu$  se escoge como un valor propio simple de (LN). Como se verá en la demostración, estas condiciones son necesarias pero no suficientes para la existencia del punto de bifurcación  $(\psi_0, 0, 0)$ , por lo que resta ver cuando se satisface también (C3). En las figuras 2.3 y 2.4 se estudian dos de los casos presentes en la figura 2.2: las curvas en azul corresponden a algunas curvas de nivel proyectadas sobre el plano  $\psi - \tilde{A}$ , mientras el color rojo indica donde  $\frac{\omega}{\eta\mu}(1 - \psi_0(1 - 2A_0^*))$  es un valor propio de (LN).

Mediante el cambio de variables  $\bar{A} = A - A^*$ ,  $\bar{N} = N - N^*$ , y luego de reemplazar  $A$  por  $\bar{A}$  y  $N$  por  $\bar{N}$ , de (2.12) se obtiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta \Delta A - A + \psi N A^*(1 - A^*) + \psi(N + 1)A(1 - A - 2A^*) = 0 \quad \text{en } \Omega \\ \Delta N - 2\nabla \cdot \left( \frac{N + 1}{A + A^*} \nabla A \right) - \omega N = 0 \quad \text{en } \Omega \\ \frac{\partial A}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial n} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (2.14)$$

que tiene por equilibrio a  $(A, N) = (0, 0)$ .

En lo que sigue, escogemos  $p > n$ . Siguiendo lo hecho en [1], se consideran los espacios

$$\begin{aligned} Y &= \left\{ (A, N) \in \left( W^{2,p}(\Omega) \right)^2 : \frac{\partial A}{\partial n} = \frac{\partial N}{\partial n} = 0 \text{ en } \partial\Omega \right\}, \\ Z &= \left( L^p(\Omega) \right)^2, \\ V &= \left\{ (\psi, A, N) \in \mathbb{R}^+ \times Y : \psi > \varepsilon, A > -A^* + \varepsilon, N > -1 \right\}. \end{aligned}$$

Para  $\varepsilon > 0$  pequeño,  $V$  es abierto en  $\mathbb{R}^+ \times Y$ ; y se tiene que en  $Y$  las derivadas normales se entienden en el sentido usual, pues  $W^{2,p}(\Omega)$  se inyecta en  $C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$ .

Definimos la función  $F : V \rightarrow Z$  por

$$F(\psi, A, N) := \begin{bmatrix} \eta \Delta A - A + \psi N A^* (1 - A^*) + \psi (N + 1) A (1 - A - 2A^*) \\ \Delta N - 2\nabla \cdot \left( \frac{N + 1}{A + A^*} \nabla A \right) - \omega N \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

entonces (2.14) toma la forma

$$F(\psi, A, N) = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (2.16)$$

y esto motiva a considerar  $\psi \in \mathbb{R}^+$  como parámetro de bifurcación, pues para cualquier valor de éste se cumple que  $(\psi, 0, 0)$  es solución.

Se tiene que las soluciones de (2.16) cumplen lo siguiente.

**Lema 2.1.** *Sea  $(A, N)$  solución de (2.16). Entonces  $A, N \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ .*

*Demostración.* Ya que  $W^{2,p}(\Omega)$  se inyecta en  $C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$ , si  $(A, N)$  es solución de (2.16), entonces  $A, N \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$ . Luego, el lado derecho de la ecuación

$$\eta \Delta A = A - \psi N A^* (1 - A^*) - \psi (N + 1) A (1 - A - 2A^*)$$

está en  $C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$ . Debido a esto, a que la condición de borde es Neumann y  $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$ , por el Teorema 3.2 de [6] se tiene que  $A \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ . Para la ecuación en  $N$ , el lado derecho de

$$\Delta N - \frac{2\nabla N \cdot \nabla A}{A + A^*} = 2 \frac{N + 1}{A + A^*} \left( \Delta A - \frac{|\nabla A|^2}{A + A^*} \right) + \omega N$$

está en  $C^\alpha(\overline{\Omega})$ , mientras que el operador del lado izquierdo tiene coeficientes al menos en  $C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$ . Nuevamente por el Teorema 3.2 de [6], resulta que  $N \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ .

Se concluye entonces que  $A, N \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ .

□

### 2.3.1. Lemas importantes y demostración

La presente subsección consta de la demostración del Teorema 2.4, siendo central el uso del Teorema 2.2. Se probarán una serie lemas que indican cuando las condiciones de dicho teorema se cumplen en el problema (2.16).

De (2.15) se puede demostrar que  $F$  es Fréchet-diferenciable, por lo que su derivada parcial está dada por

$$DF_{(A,N)}(\psi, A, N)[u, v] = \begin{bmatrix} \eta \Delta u - u + \psi(N+1)(1-2A-2A^*)u \\ + \psi A^*(1-A^*)u + \psi A(1-A-2A^*)v \\ -2\nabla \cdot \left( (N+1) \left[ \frac{\nabla u}{A+A^*} - \frac{u \nabla A}{(A+A^*)^2} \right] \right) \\ + \Delta v - 2\nabla \cdot \left( \frac{v \Delta A}{A+A^*} \right) - \omega v \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

y es continua respecto a  $\psi$ ,  $A$  y  $N$  en  $V$ . Además, las derivadas  $DF_{\psi}(\psi, A, N)$  y  $DF_{\psi(A,N)}(\psi, A, N)$  existen y son continuas, por lo que la condición (b) se tiene.

Para abordar las condiciones restantes, es menester estudiar

$$DF_{(A,N)}(\psi, 0, 0)[u, v] = \begin{bmatrix} \eta \Delta u - u + \psi(1-2A^*)u + \psi A^*(1-A^*)v \\ -\frac{2}{A^*} \Delta u + \Delta v - \omega v \end{bmatrix}.$$

#### En busca del punto de bifurcación

Para encontrar bifurcaciones (en un valor particular de  $\psi$ , denotado por  $\psi_0$ ) es necesario que falle el Teorema de la Función Implícita, es decir, que  $\ker (DF_{(A,N)}(\psi_0, 0, 0))$  sea no trivial. Con el objeto de determinar  $\psi_0$ , sea  $(u, v) \in Y$  tal que

$$\begin{cases} \eta \Delta u - u + \psi(1-2A^*)u + \psi A^*(1-A^*)v = 0 & \text{en } \Omega \\ -\frac{2}{A^*} \Delta u + \Delta v - \omega v = 0 & \text{en } \Omega \end{cases} \quad (2.18)$$

Se sabe que  $u$  y  $v$  se puedan escribir en términos de las funciones propias del problema (LN), ponderados por ciertas constantes. En base a ello,  $\ker (DF_{(A,N)}(\psi, 0, 0))$  será no trivial si al menos una de esas constantes es no nula: basta suponer que  $\phi$  es la función propia acompañada de dicho término, normalizada por

$$\int_{\Omega} \phi^2 dx = 1$$

y  $\mu$  es su valor propio -simple y positivo- asociado.

Definimos  $U = \int_{\Omega} u\phi dx$  y  $V = \int_{\Omega} v\phi dx$ . Integrando por partes dos veces, usando que  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  y que  $\phi$  es función propia de (LN),

$$\int_{\Omega} \Delta u \phi dx = -\mu \int_{\Omega} u \phi dx = -\mu U$$

y esto es análogo para  $v$ .

Al multiplicar ambas ecuaciones de (2.18) por  $\phi$  e integrar sobre  $\Omega$ , se obtiene el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} -(\eta\mu + 1) + \psi(1 - 2A^*) & \psi A^*(1 - A^*) \\ \frac{2\mu}{A^*} & -(\mu + \omega) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = 0$$

que se puede reescribir en la forma

$$(M - \mu D) \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = 0 \quad (2.19)$$

donde  $M$  y  $D$  son las matrices de la sección 2.2. Las soluciones  $(U, V)$  no triviales de este problema surgen de imponer  $\det(M - \mu D) = 0$ , obteniéndose la ecuación

$$\eta\mu^2 + \mu + \mu\psi(4A^* - 3) + \omega(\eta\mu + 1 - \psi(1 - 2A^*)) = 0. \quad (2.20)$$

Usando la definición de  $A^*$  en (2.20) se tiene

$$\begin{aligned} \psi(1 - 2A^*) &= 1 - \sqrt{(\psi - 1)^2 + 4\tilde{A}\psi} \\ \psi(4A^* - 3) &= 2\sqrt{(\psi - 1)^2 + 4\tilde{A}\psi} - (\psi + 2) \end{aligned}$$

y reemplazando estos términos en (2.20) para eliminar  $A^*$ , queda la siguiente ecuación para  $\psi$

$$p(\psi) := \eta\mu^2 + \mu + \mu \left( 2\sqrt{(\psi - 1)^2 + 4\tilde{A}\psi} - (\psi + 2) \right) + \omega(\eta\mu + 1) - \omega \left( 1 - \sqrt{(\psi - 1)^2 + 4\tilde{A}\psi} \right),$$

que se simplifica a

$$p(\psi) = \eta\mu(\mu + \omega) - \mu + (\omega + 2\mu)\sqrt{(\psi - 1)^2 + 4\tilde{A}\psi} - \mu\psi. \quad (2.21)$$

Por lo tanto, para encontrar  $(U, V)$  no trivial en (2.19) nos basta determinar  $\psi_0$  positivo tal que  $p(\psi_0) = 0$ . Esto es encontrar  $\psi_0$  tal que

$$\eta\mu(\mu + \omega) - \mu + (\omega + 2\mu)\sqrt{(\psi - 1)^2 + 4\tilde{A}\psi} - \mu\psi = 0,$$

que escribimos como

$$\mu(\eta(\mu + \omega) - 1) - \mu\psi = -(\omega + 2\mu)\sqrt{(\psi - 1)^2 + 4\tilde{A}\psi}. \quad (2.22)$$

Elevando al cuadrado, se tiene

$$\mu^2\psi^2 - 2\mu^2(\eta(\mu + \omega) - 1)\psi + \mu^2(\eta(\mu + \omega) - 1)^2 = (\omega + 2\mu)^2(\psi^2 + 2(2\tilde{A} - 1)\psi + 1),$$

y reagrupando términos según las potencias de  $\psi$ , se llega a la expresión

$$\begin{aligned} & \left( (\omega + 2\mu)^2 - \mu^2 \right) \psi^2 + 2 \left( (\omega + 2\mu)^2 (2\tilde{A} - 1) + \mu^2 (\eta(\omega + \mu) - 1) \right) \psi \\ & + \left( (\omega + 2\mu)^2 - \mu^2 (\eta(\mu + \omega) - 1)^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Notando que el término libre y el que acompaña a  $\psi^2$  son sumas por diferencia

$$\begin{aligned} (\omega + 2\mu)^2 - \mu^2 &= (\omega + \mu)(\omega + 3\mu) \\ (\omega + 2\mu)^2 - \mu^2 (\eta(\mu + \omega) - 1)^2 &= \left( (\omega + 2\mu) - \mu(\eta(\mu + \omega) - 1) \right) \cdot \left( (\omega + 2\mu) + \mu(\eta(\mu + \omega) - 1) \right) \\ &= \left( \omega + 3\mu - \mu(\eta(\mu + \omega)) \right) \cdot (\omega + \mu)(1 + \eta\mu) \end{aligned}$$

se obtiene la ecuación cuadrática

$$\begin{aligned} & (\omega + \mu)(\omega + 3\mu)\psi^2 + 2 \left( (\omega + 2\mu)^2 (2\tilde{A} - 1) + \mu^2 (\eta(\omega + \mu) - 1) \right) \psi \\ & + (\omega + \mu)(1 + \eta\mu) \left( \omega + 3\mu - \eta\mu(\omega + \mu) \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.23)$$

que admite al menos una solución positiva  $\psi_0$  si el término que acompaña a  $\psi$  sea negativo y si el discriminante de la ecuación es positivo o cero. Álgebraicamente, las condiciones mencionadas corresponden a

$$\begin{aligned} \tilde{A} &< \frac{\mu^2 \left( 1 - \eta(\omega + \mu) \right) + (\omega + 2\mu)^2}{2(\omega + 2\mu)^2}, \\ 1 &\leq \frac{\left( (\omega + 2\mu)^2 (2\tilde{A} - 1) + \mu^2 (\eta(\omega + \mu) - 1) \right)^2}{(\omega + \mu)^2 (\omega + 3\mu) (1 + \eta\mu) \left( \omega + 3\mu - \eta\mu(\omega + \mu) \right)}. \end{aligned}$$

Se concluye que bajo estas condiciones, al existir  $\psi_0$  el problema (2.19) tiene solución no nula y en consecuencia  $\ker \left( DF_{(A,N)}(\psi_0, 0, 0) \right)$  será no trivial.

Por otro lado, ya que  $\psi_0$  es raíz de  $p(\psi)$ , por (2.22) se tiene

$$\sqrt{(\psi_0 - 1)^2 + 4\tilde{A}\psi_0} = \frac{\mu(\psi_0 + 1 - \eta(\omega + \mu))}{(\omega + 2\mu)}$$

y usando esto se calcula

$$\begin{aligned} \left. \frac{dp}{d\psi} \right|_{\psi_0} &= (\omega + 2\mu) \frac{(\psi_0 - 1) + 2\tilde{A}}{\sqrt{(\psi_0 - 1)^2 + 4\tilde{A}\psi_0}} - \mu \\ \left. \frac{dp}{d\psi} \right|_{\psi_0} &= (\omega + 2\mu)^2 \frac{(\psi_0 - 1) + 2\tilde{A}}{\mu(\psi_0 + 1 - \eta(\omega + \mu))} - \mu. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Más adelante se verá que esta derivada sea distinta de cero cumple un rol relevante en que  $(\psi_0, 0, 0)$  sea un punto de bifurcación del sistema (2.14). Veamos cuando es no nula.

Si  $\left. \frac{dp}{d\psi} \right|_{\psi_0} = 0$ , de (2.24) podemos despejar  $\psi_0$  obteniendo

$$\psi_0 = - \frac{(\omega + 2\mu)^2(2\tilde{A} - 1) + \mu^2(\eta(\omega + \mu) - 1)}{(\omega + \mu)(\omega + 3\mu)}.$$

Observamos que esta expresión corresponde a la solución de (2.23) cuando el discriminante es nulo. Luego, al imponer

$$1 < \frac{\left( (\omega + 2\mu)^2(2\tilde{A} - 1) + \mu^2(\eta(\omega + \mu) - 1) \right)^2}{(\omega + \mu)^2(\omega + 3\mu)(1 + \eta\mu)(\omega + 3\mu - \eta\mu(\omega + \mu))},$$

la ecuación (2.23) tendrá dos soluciones y en consecuencia  $\left. \frac{dp}{d\psi} \right|_{\psi_0} \neq 0$ .

A modo de resumen, se tiene: *Sea  $\mu$  valor propio del problema (LN) y  $\eta, \omega, \tilde{A}$  parámetros tales que se cumplen las siguientes condiciones*

$$(C1) \quad \tilde{A} < \frac{\mu^2(1 - \eta(\omega + \mu)) + (\omega + 2\mu)^2}{2(\omega + 2\mu)^2}$$

$$(C2) \quad 1 < \frac{\left( (\omega + 2\mu)^2(2\tilde{A} - 1) + \mu^2(\eta(\omega + \mu) - 1) \right)^2}{(\omega + \mu)^2(\omega + 3\mu)(1 + \eta\mu)(\omega + 3\mu - \eta\mu(\omega + \mu))}.$$

Entonces  $(\psi_0, 0, 0)$  es un candidato a punto de bifurcación del problema (2.14), y  $\psi_0$  además

satisface

$$p(\psi_0) = 0, \quad \left. \frac{dp}{d\psi} \right|_{\psi_0} \neq 0.$$

### Estudio de $DF_{(A,N)}(\psi_0, 0, 0)$

**Definición 2.1.** Sean  $E, F$  espacios de Banach. Un operador  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  se dirá Fredholm si

$$n = \dim \ker(T) < \infty, \quad r = \text{codim} \text{R}(T) < \infty$$

y su índice se define por  $\text{ind}(T) = n - r$ .

En lo que sigue, sea  $\psi = \psi_0$  y  $A_0^* := A^*(\psi_0)$ . Los próximos dos lemas mostrarán en conjunto que el operador elíptico  $T = DF_{(A,N)}(\psi_0, 0, 0)$  satisface la condición (c) del Teorema 2.2, siendo Fredholm de índice 0.

**Lema 2.2.** Si  $\frac{\omega}{\eta\mu}(1 - \psi_0(1 - 2A_0^*)) > 0$  no es valor propio de (LN),  $\dim(\ker DF_{(A,N)}(\psi_0, 0, 0)) = 1$ .

*Demostración.* Al premultiplicar (2.18) por  $D^{-1}$  resulta

$$\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} + D^{-1}M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0. \quad (2.25)$$

Los valores propios de  $\Lambda := D^{-1}M$  están dados por

$$\det(\Lambda - \sigma I) = \det(D^{-1}) \cdot \det(M - \sigma D) = 0$$

y de (2.19), se deduce que  $\sigma_1 = \mu$  es uno de ellos. Para encontrar el otro, se estudia

$$\begin{aligned} \text{tr } \Lambda &= \text{tr} \left( \frac{1}{\eta} \begin{bmatrix} \psi_0(1 - 2A_0^*) - 1 & \psi_0 A_0^*(1 - A_0^*) \\ \frac{2}{A_0^*}(\psi_0(1 - 2A_0^*) - 1) & 2\psi_0(1 - A_0^*) - \eta\omega \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{\eta} \left( \psi_0(1 - 2A_0^*) - 1 + 2\psi_0(1 - A_0^*) - \eta\omega \right) \\ &= -\frac{1}{\eta\mu} \underbrace{\left( \eta\mu^2 + (1 - \psi_0(3 - 4A_0^*) + \eta\omega)\mu + \omega(1 - \psi_0(1 - 2A_0^*)) \right)}_{p(\psi_0)} + \frac{1}{\eta\mu} \left( \eta\mu^2 + \omega(1 - \psi_0(1 - 2A_0^*)) \right) \\ &= \mu + \frac{\omega}{\eta\mu} (1 - \psi_0(1 - 2A_0^*)) \end{aligned}$$

y entonces  $\sigma_2 = \frac{\omega}{\eta\mu}(1 - \psi_0(1 - 2A_0^*))$  es el valor propio buscado. Cabe mencionar que este valor

también es positivo, pues

$$\frac{\omega}{\eta\mu}(1 - \psi_0(1 - 2A_0^*)) = \frac{\omega}{\eta\mu}\sqrt{(\psi_0 - 1)^2 + 4\tilde{A}\psi_0} > 0.$$

Ya que  $\sigma_2$  no es valor propio de (LN),  $\Lambda$  posee dos valores propios reales y distintos, siendo diagonalizable. Esto último permite desacoplar (2.25) usando el cambio de variable

$$\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = K^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

donde  $K$  es la matriz cuyas columnas son los vectores propios asociados a  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , y se obtiene

$$\begin{pmatrix} \Delta r \\ \Delta s \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = 0$$

La ecuación en  $r$  tiene por solución a  $r = C\phi$ , con  $C$  constante, mientras que  $s$  es trivial. Esto significa que

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \phi$$

con  $C_1$  y  $C_2$  constantes, por lo tanto  $\dim(\ker DF_{(A,N)}(\psi_0, 0, 0)) = 1$ .  $\square$

**Lema 2.3.** *Bajo las condiciones del lema 2.2, se cumple que  $\mathbf{R}(DF_{(A,N)}(\psi_0, 0, 0))$  es cerrado y  $\text{codim}(\mathbf{R}(DF_{(A,N)}(\psi_0, 0, 0))) = 1$ .*

*Demostración.* Dado  $(f_1, f_2) \in \mathbf{R}(DF_{(A,N)}(\psi_0, 0, 0))$ , existe  $(u, v)$  tal que

$$DF_{(A,N)}(\psi_0, 0, 0)[u, v] = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Al considerar los supuestos del lema 2.2, este sistema se puede desacoplar de la forma

$$\begin{pmatrix} \Delta r \\ \Delta s \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}f_1 + a_{12}f_2 \\ a_{21}f_1 + a_{22}f_2 \end{pmatrix}$$

con  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$  constantes. Más aún, la ecuación en  $s$  tiene solución única, mientras que en virtud de la Alternativa de Fredholm [3, pp.725],  $r$  será no trivial si y sólo  $(f_1, f_2)$  satisfice

$$\begin{aligned} a_{11}f_1 + a_{12}f_2 \in (\ker(\Delta + \sigma_1 I))^\perp &\iff \langle a_{11}f_1 + a_{12}f_2, \phi \rangle = 0 \\ &\iff a_{11} \int_{\Omega} f_1 \phi dx + a_{12} \int_{\Omega} f_2 \phi dx = 0. \end{aligned}$$

luego  $(f_1, f_2)^t$  está sometido a una única restricción lineal, por lo que  $\mathbf{R}(DF_{(A,N)}(\psi_0, 0, 0))$  tiene codimensión 1 y además  $\mathbf{R}(DF_{(A,N)}(\psi_0, 0, 0))$  es cerrado.  $\square$

**Condición de transversalidad**

Sea  $\bar{y} = \left( (\omega + \mu), \frac{2\mu}{A_0^*} \right) \phi$  generador de  $\ker(DF_{(A,N)}(\psi_0, 0, 0))$ , el cual se obtiene a partir de la ecuación (2.19). La condición (d) del Teorema 2.2

$$DF_{\Psi(A,N)}(\psi_0, 0, 0)\bar{y} \notin R(DF_{(A,N)}(\psi_0, 0, 0)) \quad (2.27)$$

se conoce como *condición de transversalidad*. La probaremos por contradicción, suponiendo que existe  $(u, v)$  tal que

$$DF_{\Psi(A,N)}(\psi_0, 0, 0)\bar{y} = DF_{(A,N)}(\psi_0, 0, 0)[u, v]. \quad (2.28)$$

De (2.15) es posible calcular

$$DF_{\Psi(A,N)}(\psi_0, 0, 0)\bar{y} = \left[ \begin{array}{c} \omega \left( 1 - 2A_0^* - 2\psi_0 \frac{dA^*}{d\psi} \Big|_{\psi_0} \right) + \mu \left( (3 - 4A_0^*) + 2\psi_0 \frac{dA^*}{d\psi} \Big|_{\psi_0} \left( \frac{1}{A_0^*} - 3 \right) \right) \\ - \frac{2}{(A_0^*)^2} \frac{dA^*}{d\psi} \Big|_{\psi_0} \mu(\omega + \mu) \end{array} \right] \phi$$

y por ende (2.28) es equivalente a

$$\begin{aligned} \eta \Delta u - u + \psi_0(1 - 2A_0^*)u + \psi_0 A_0^*(1 - A_0^*)v &= \omega \left( 1 - 2A_0^* - 2\psi_0 \frac{dA^*}{d\psi} \Big|_{\psi_0} \right) \phi \\ &\quad + \mu \left( (3 - 4A_0^*) + 2\psi_0 \frac{dA^*}{d\psi} \Big|_{\psi_0} \left( \frac{1}{A_0^*} - 3 \right) \right) \phi \\ - \frac{2}{A_0^*} \Delta u + \Delta v - \omega v &= - \frac{2}{(A_0^*)^2} \frac{dA^*}{d\psi} \Big|_{\psi_0} \mu(\omega + \mu) \phi. \end{aligned}$$

Usar  $U$  y  $V$  como antes entrega el sistema

$$(M - \mu D) \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \left[ \begin{array}{c} \mu \left( (3 - 4A_0^*) + 2\psi_0 \frac{dA^*}{d\psi} \Big|_{\psi_0} \left( \frac{1}{A_0^*} - 3 \right) \right) + \omega \left( 1 - 2A_0^* - 2\psi_0 \frac{dA^*}{d\psi} \Big|_{\psi_0} \right) \\ - \frac{2}{(A_0^*)^2} \frac{dA^*}{d\psi} \Big|_{\psi_0} \mu(\omega + \mu) \end{array} \right].$$

que tendrá solución si y sólo si se satisface la condición

$$\psi_0 \frac{2(1-A_0^*)}{A_0^*} \frac{dA^*}{d\psi} \Big|_{\psi_0} \mu = \omega \left( 1 - 2A_0^* - 2\psi_0 \frac{dA^*}{d\psi} \Big|_{\psi_0} \right) + \mu \left( (3 - 4A_0^*) + 2\psi_0 \frac{dA^*}{d\psi} \Big|_{\psi_0} \left( \frac{1}{A_0^*} - 3 \right) \right)$$

puesto que  $M - \mu D$  no es invertible. Luego de algunos cálculos, la expresión se reduce a

$$\mu \left( (4A_0^* - 3) + 4\psi \frac{dA^*}{d\psi} \Big|_{\psi_0} \right) - \omega \left( 1 - 2A_0^* - 2\psi_0 \frac{dA^*}{d\psi} \Big|_{\psi_0} \right) = 0$$

$$\frac{dp}{d\psi} \Big|_{\psi_0} = 0$$

lo cual representa una contradicción. En consecuencia,

**Lema 2.4.** Sea  $\bar{y} = \left( (\mu + \omega), \frac{2\mu}{A_0^*} \right) \phi$  generador de  $\ker(DF_{(A,N)}(\psi_0, 0, 0))$ . Entonces se cumple la condición de transversalidad

$$DF_{\psi(A,N)}(\psi_0, 0, 0)\bar{y} \notin \mathbf{R}(DF_{(A,N)}(\psi_0, 0, 0)).$$

### Estudio de $DF_{(A,N)}(\psi, A, N)$

De (2.17),  $DF_{(A,N)}(\psi, A, N)$  se puede descomponer como

$$DF_{(A,N)}(\psi, A, N)[u, v] = \underbrace{\begin{bmatrix} \eta & 0 \\ -2\frac{N+1}{A+A^*} & 1 \end{bmatrix}}_{A_1(\psi, A, N)} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} + g(\psi, A, N)[u, v] \quad (2.29)$$

donde  $A_1(\psi, A, N)$  se denomina la parte principal del operador, y  $g(\psi, A, N)$  representa los términos con derivadas de orden menor en  $(u, v)$ , es decir

$$g(\psi, A, N)[u, v] = \begin{bmatrix} -u + \psi(N+1)(1-2A-2A^*)u + \psi A^*(1-A^*)v + \psi A(1-A-2A^*)v \\ -2\nabla \left( \frac{N+1}{A+A^*} \right) \cdot \nabla u + 2\nabla \cdot \left( u \nabla A \frac{N+1}{(A+A^*)^2} \right) - 2\nabla \cdot \left( \frac{v \Delta A}{A+A^*} \right) - \omega v \end{bmatrix}.$$

En virtud del Teorema 3.3 y el remark 2.5 (caso 3) de [10], si  $\sigma$  es tal que  $\sigma = 0$  o  $\arg \sigma \in [-\pi/2, \pi/2]$ , basta que  $A_1(\psi, A, N)$  satisfaga la condición

$$\forall (\psi, A, N) \in V \quad \det(A_1(\psi, A, N) + \sigma I) \neq 0 \quad (2.30)$$

para que  $DF_{(A,N)}(\psi, A, N)$  sea un operador Fredholm de índice 0 en  $V$ .

En efecto, la condicion (2.30) se cumple pues

$$\det(A_1(\psi, A, N) + \sigma I) = (\eta + \sigma)(1 + \sigma)$$

es no nulo para cualquier  $\sigma \in \{\mathbb{C} : \sigma = 0 \wedge \arg \sigma \in [-\pi/2, \pi/2]\}$  y  $(\psi, A, N) \in V$ . Por lo tanto, se tiene el siguiente lema.

**Lema 2.5.**  $DF_{(A,N)}(\psi, A, N)$  es un operador Fredholm de índice 0 para todo  $(\psi, A, N) \in V$ .

En este punto estamos en condiciones de probar el Teorema 2.4.

**Demostración del Teorema 2.4.** Para  $F$  definida por (2.15), el problema (2.14) se puede reescribir en la forma

$$F(\psi, A, N) = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Se tiene también que  $F$  es Frechét-diferenciable, y sus derivadas  $DF_{(A,N)}(\psi, A, N)$ ,  $DF_{\psi}(\psi, A, N)$  y  $DF_{\psi(A,N)}(\psi, A, N)$  existen y son continuas respecto a  $\psi$ ,  $A$  y  $N$  en  $V$ .

Para  $\mu$  valor propio del problema (LN) y  $\eta, \omega, \tilde{A}$  parámetros que cumplen las condiciones (C1) y (C2), existe  $(\psi_0, 0, 0)$  tal que  $\ker(DF_{(A,N)}(\psi_0, 0, 0))$  es no trivial. Si suponemos además que  $\frac{\omega}{\eta\mu}(1 - \psi_0(1 - 2A_0^*)) > 0$  no es valor propio de (LN), de los lemas 2.2 y 2.3 se tiene que este kernel es unidimensional, que  $\mathbf{R}(DF_{(A,N)}(\psi_0, 0, 0))$  es cerrado y tiene codimensión 1. Además, el lema 2.4 indica que el operador  $DF_{(A,N)}(\psi_0, 0, 0)$  satisface la condición de transversalidad (2.27).

Por lo tanto,  $F$  satisface las condiciones del Teorema 2.2, y en consecuencia existen una rama de bifurcación para el sistema (2.14), cuyo origen es  $(\psi_0, 0, 0)$ , y se puede parametrizar en una vecindad del punto de bifurcación mediante

$$(\psi, A, N) = \left( \psi(s), s(\omega + \mu)\phi + s\xi_1(s), \frac{2\mu}{A_0^*}\phi + s\xi_2(s) \right) \quad \forall s \in I_0 = (-\delta, \delta)$$

donde  $\phi$  es la función propia normalizada asociada a  $\mu$ , y  $\psi, \xi_1, \xi_2 : I_0 \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones de derivada continua que satisfacen  $\psi(0) = \psi_0$ ,  $\xi_1(0) = 0$  y  $\xi_2(0) = 0$ . Esta rama es global pues por el lema 2.5,  $DF_{(A,N)}(\psi, A, N)$  es un operador de Fredholm de índice 0 en  $V$ .

Al trasladar el sistema (2.14) en  $(A_0^*, N^*)$ , se concluye el teorema 2.4. □

### 2.3.2. Estabilidad de ramas de bifurcación

La noción de estabilidad a la cual nos referiremos en esta subsección corresponde a que los patrones espacialmente heterogéneos provistos por la rama de bifurcación (2.13) sean equilibrios del problema (2.4).

Para estudiar la estabilidad de una rama de bifurcación, usaremos los clásicos resultados de estabilidad de Crandall y Rabinowitz [2] en conjunto con un análisis del espectro del operador  $DF_{(A,N)}(\psi_0, 0, 0)$ . A partir de esto, probaremos que en cierta vecindad de 0, la rama es estable para valores de  $s$  a un lado de 0.

El siguiente teorema indica bajo que condiciones ocurre esto.

**Teorema 2.5.** *Sea  $\mu$  valor propio de (LN) que cumple las condiciones del Teorema 2.4, y  $\phi$  su función propia asociada. Bajo las condiciones  $\int_{\Omega} \phi^3 dx \neq 0$ ,  $\mu - \frac{A_0^* \omega}{1 - 2A_0^*} \neq 0$ , y suponiendo que ningún otro valor propio de (LN) se encuentra entre  $\mu$  y  $\frac{\omega}{\eta\mu}(1 - \psi_0(1 - 2A_0^*))$ , entonces la rama de bifurcación (2.13) es estable en el intervalo comprendido entre 0 y  $\tilde{s}$ , siendo  $\tilde{s}$  positivo o negativo y suficientemente pequeño.*

Para probarlo, el próximo lema cumple un rol esencial.

**Lema 2.6.** *Suponiendo que  $\int_{\Omega} \phi^3 dx \neq 0$  y  $\mu - \frac{A_0^* \omega}{1 - 2A_0^*} \neq 0$ , se tiene entonces que  $\psi'(0) \neq 0$ .*

*Demostración.* Al derivar dos veces respecto a  $s$  la primera ecuación de (2.14), efectuar algunos cálculos y evaluar en  $s = 0$ , se obtiene

$$\eta \Delta A''(0) + (\psi_0(1 - 2A_0^*) - 1)A''(0) + \psi_0 A_0^*(1 - A_0^*)N''(0) = s_1 \quad (2.31)$$

con

$$\begin{aligned} s_1 = & -2\psi'(0)N'(0) \left[ A_0^*(1 - A_0^*) + \psi_0 \frac{dA^*}{d\psi} \Big|_{\psi_0} (1 - 2A_0^*) \right] \\ & + 2\psi_0 \left[ A'(0) \left( A'(0) + 2 \frac{dA^*}{d\psi} \Big|_{\psi_0} \psi'(0) \right) \right] - 2(\psi'(0) + \psi_0 N'(0))A'(0)(1 - 2A_0^*). \end{aligned}$$

En forma análoga, de la segunda ecuación de (2.14) resulta

$$\Delta N''(0) - \omega N''(0) - \frac{2}{A^*} \Delta A''(0) = s_2. \quad (2.32)$$

$$\text{donde } s_2 = \frac{4}{(A_0^*)^2} \nabla \cdot \left[ \left( A_0^* N'(0) - A'(0) - \frac{dA^*}{d\psi} \Big|_{\psi_0} \psi'(0) \right) \nabla A'(0) \right].$$

Al multiplicar (2.31) y (2.32) por  $\phi$  e integrar sobre  $\Omega$ , se llega a la expresión

$$\begin{bmatrix} -(\eta\mu + 1) + \psi_0(1 - 2A_0^*) & \psi_0 A_0^*(1 - A_0^*) \\ \frac{2\mu}{A_0^*} & -(\mu + \omega) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \int_{\Omega} A''(0)\phi dx \\ \int_{\Omega} N''(0)\phi dx \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_{\Omega} s_1\phi dx \\ \int_{\Omega} s_2\phi dx \end{pmatrix} = 0.$$

La matriz presente corresponde a  $M - \mu D$ , luego por (2.20) sigue que  $(\mu + \omega, \psi_0 A_0^*(1 - A_0^*))$  es vector propio por la izquierda de esta matriz, asociado al valor propio 0. Al premultiplicar la última expresión por este vector resulta

$$(\mu + \omega, \psi_0 A_0^*(1 - A_0^*)) \begin{pmatrix} \int_{\Omega} s_1\phi dx \\ \int_{\Omega} s_2\phi dx \end{pmatrix} = 0$$

que explícitamente corresponde a

$$\begin{aligned} & (\mu + \omega) \left[ A_0^*(1 - A_0^*) + \psi_0 \frac{dA^*}{d\psi} \Big|_{\psi_0} (1 - 2A_0^*) \right] \psi'(0) \int_{\Omega} N'(0)\phi dx \\ & + (\mu + \omega) \left[ (1 - 2A_0^*) - 2 \frac{dA^*}{d\psi} \Big|_{\psi_0} \right] \psi'(0) \int_{\Omega} A'(0)\phi dx \\ & + (\mu + \omega) \psi_0 \int_{\Omega} [(1 - 2A_0^*)N'(0)A'(0) - A'(0)^2] \phi dx \\ & - \frac{2\psi_0(1 - A_0^*)}{A_0^*} \int_{\Omega} \nabla \cdot \left[ \left( A_0^* N'(0) - A'(0) - \frac{dA^*}{d\psi} \Big|_{\psi_0} \psi'(0) \right) \nabla A'(0) \right] \phi dx = 0. \end{aligned}$$

De (2.13), se tiene  $A'(0) = (\mu + \omega)\phi$ ,  $N'(0) = \frac{2\mu}{A_0^*}\phi$ . Reemplazando esto, y usando el hecho que  $\int_{\Omega} \phi^2 dx = 1$ , se llega a

$$\begin{aligned} & \left[ \left( A_0^*(1 - A_0^*) + \psi_0 \frac{dA^*}{d\psi} \Big|_{\psi_0} (1 - 2A_0^*) \right) \frac{2\mu}{A_0^*} + \left( (1 - 2A_0^*) - 2 \frac{dA^*}{d\psi} \Big|_{\psi_0} \right) (\mu + \omega) \right] \psi'(0) \\ & + \psi_0 \left[ (1 - 2A_0^*) \frac{2\mu}{A_0^*} (\mu + \omega) - (\mu + \omega)^2 \right] \int_{\Omega} \phi^3 dx \quad (2.33) \\ & - \frac{2\psi_0(1 - A_0^*)}{A_0^*} (\mu - \omega) \left( \int_{\Omega} \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) \phi dx - \frac{dA^*}{d\psi} \Big|_{\psi_0} \psi'(0) \int_{\Omega} \Delta \phi \cdot \phi dx \right) = 0. \end{aligned}$$

La identidad

$$\int_{\Omega} \phi |\nabla \phi|^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla (\phi^2) dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \phi^2 \Delta \phi dx = \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} \phi^3 dx$$

y el problema (LN) permiten simplificar el trabajo con las integrales, pues surgen las igualdades

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) dx &= \int_{\Omega} \phi^2 \Delta \phi dx + \int_{\Omega} \phi |\nabla \phi|^2 dx = -\frac{\mu}{2} \int_{\Omega} \phi^3 dx \\ \int_{\Omega} \Delta \phi \cdot \phi dx &= -\mu\end{aligned}$$

que al reemplazarlas en (2.33), y luego de algunos cálculos resulta

$$\begin{aligned}-\left[ \mu \left( 4A_0^* - 3 + 4\psi_0 \frac{dA^*}{d\psi} \Big|_{\psi_0} \right) - \omega \left( 1 - 2A_0^* - 2\psi_0 \frac{dA^*}{d\psi} \Big|_{\psi_0} \right) \right] \psi'(0) \\ = \left[ \psi_0 \left( (\mu + \omega)^2 - \frac{1 - 2A_0^*}{A_0^*} 2\mu(\mu + \omega) \right) + (\omega - \mu) \psi_0 \frac{1 - A_0^*}{A_0^*} \mu \right] \int_{\Omega} \phi^3 dx\end{aligned}$$

El término que acompaña a  $\psi'(0)$  corresponde a  $-\frac{dp}{d\psi} \Big|_{\psi_0}$ , que es no nulo. Imponiendo que  $\int_{\Omega} \phi^3 dx \neq 0$  y desarrollando la expresión que lo acompaña

$$\begin{aligned}\left[ \psi_0 \left( (\mu + \omega)^2 - \frac{1 - 2A_0^*}{A_0^*} 2\mu(\mu + \omega) \right) + (\omega - \mu) \psi_0 \frac{1 - A_0^*}{A_0^*} \mu \right] \\ = \psi_0 \left[ (\mu + \omega)^2 + \frac{\mu}{A_0^*} \left( (1 - A_0^*)(\omega - \mu) - 2(1 - 2A_0^*)(\mu + \omega) \right) \right] \\ = \frac{\psi_0}{A_0^*} \left( \mu^2(6A_0^* - 3) + \mu(5A_0^* - 1)\omega + \omega^2 A_0^* \right) \\ = \frac{3\psi_0(2A_0^* - 1)}{A_0^*} \left( \mu + \frac{\omega}{3} \right) \left( \mu - \frac{A_0^* \omega}{1 - 2A_0^*} \right)\end{aligned}$$

se tiene que  $\psi'(0)$  será no nulo si además  $\mu - \frac{A_0^* \omega}{1 - 2A_0^*} \neq 0$ .  $\square$

La condición  $\dim(\ker DF_{(A,N)}(\psi_0, 0, 0)) = 1$  parece algo técnico al momento de probar la existencia de una rama de bifurcación, pero es sumamente relevante en lo que respecta a estudiar su estabilidad. Esto debido a que Crandall y Rabinowitz probaron en [2] que si 0 es un valor propio simple de  $DF_{(A,N)}(\psi_0, 0, 0)$ , entonces existe en una vecindad de  $s = 0$  un valor propio de  $DF_{(A,N)}(\psi(s), A(s), N(s))$ , denotado por  $\sigma(s)$ . Más aún, es posible extraer información sobre su comportamiento, siendo esto clave a la hora de establecer donde la rama de bifurcación es estable. Teniendo esto en mente, se procede a demostrar el Teorema 2.5.

**Demostración del Teorema 2.5.** Bajo las hipótesis del Teorema 2.4 se tiene que 0 es un valor propio simple de  $DF_{(A,N)}(\psi_0, 0, 0)$ . En virtud del Corolario 1.13 de [2, pp.165], existen vecindades  $\Lambda, \Sigma$  de  $\psi_0$  y 0 respectivamente, y funciones de derivada continua  $\gamma : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\sigma : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$u : \Lambda \rightarrow Y$  y  $w : \Sigma \rightarrow Y$  tales que satisfacen

$$\begin{aligned} DF_{(A,N)}(\psi, 0, 0)u(\psi) &= \gamma(\psi)u(\psi) \quad \forall \psi \in \Lambda \\ DF_{(A,N)}(\psi(s), A(s), N(s))w(s) &= \sigma(s)w(s) \quad \forall s \in \Sigma \end{aligned}$$

y además se cumple  $\gamma(\psi_0) = \sigma(0) = 0$ ,  $u(\psi_0) = w(0) = \bar{y}$ . Es decir,  $\sigma(s)$  es un valor propio que se manifiesta sobre la rama de bifurcación. Bajo las mismas hipótesis es posible deducir cual es su signo cerca de 0, pues el Teorema 1.16 de [2, pp.165] establece que las funciones  $\gamma(\psi)$  y  $\sigma(s)$  se relacionan mediante

$$\lim_{s \rightarrow 0, \sigma(s) \neq 0} \frac{-s\psi'(s)\gamma'(\psi_0)}{\sigma(s)} = 1$$

con  $\gamma'(\psi_0) \neq 0$ .

Un corolario de esto es que las funciones  $\sigma(s)$  y  $-s\psi'(s)\gamma'(\psi_0)$  poseen los mismos ceros, y el mismo signo cuando  $\sigma(s) \neq 0$ . Bajo los supuestos del lema 2.6 se tiene  $\psi'(0) \neq 0$  y puesto que  $\psi$  es una función de derivada continua, existe una vecindad de 0 que se caracteriza por

$$\mathcal{U} = \{s \in (-s_u, s_u) \subseteq \Sigma : \text{sgn}(\psi'(s)) = \text{sgn}(\psi'(0))\}.$$

Por lo tanto  $-s\psi'(s)\gamma'(\psi_0)$  cambia de signo en 0, y en consecuencia  $\sigma(s)$  también.

Es en este punto donde se pueden vislumbrar condiciones respecto a la estabilidad de parte de la rama de bifurcación. Si  $\sigma(0)$  domina a todos los valores propios de  $DF_{(A,N)}(\psi_0, 0, 0)$ , entonces por continuidad existe una vecindad de 0, que denotamos por  $\mathcal{V}$ , en la cual  $\sigma(s)$  domina a los valores propios de  $DF_{(A,N)}(\psi(s), A(s), N(s))$ . Luego, si  $\sigma(s)$  es negativo en un intervalo de  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$  (sea  $(-\tilde{s}, 0)$  o  $(0, \tilde{s})$ ), entonces la rama es estable en esa región. Queda probar que esto efectivamente pasa, viendo como se comportan los valores propios de  $DF_{(A,N)}(\psi_0, 0, 0)$ , dados por el problema

$$\sigma_0 \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = DF_{(A,N)}(\psi_0, 0, 0)[u, v].$$

Al descomponer  $u, v$  en términos de las funciones propias de (LN), resulta

$$\sigma_0 \sum_{k=1}^{+\infty} \begin{pmatrix} U_k \\ V_k \end{pmatrix} \phi_k = \sum_{k=1}^{+\infty} (M - \mu_k D) \cdot \begin{pmatrix} U_k \\ V_k \end{pmatrix} \phi_k$$

luego, si  $\sigma_0$  es un valor propio del operador, al menos la  $i$ -ésima constante de tal descomposición es no nula. Por ortogonalidad, se tiene

$$\sigma_0 \begin{pmatrix} U_i \\ V_i \end{pmatrix} = (M - \mu_i D) \begin{pmatrix} U_i \\ V_i \end{pmatrix}$$

y en consecuencia,  $\sigma_0$  es un valor propio de la matriz  $M - \mu_i D$ . De igual manera, cada valor propio de (LN) genera a lo más dos valores propios del operador.

Sea  $\sigma_0$  valor propio cualquiera asociado a  $\mu$ . Usando  $U$  y  $V$  como en la subsección anterior, se obtiene el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} -(\eta\mu + 1) + \psi_0(1 - 2A_0^*) & \psi_0 A_0^*(1 - A_0^*) \\ \frac{2\mu}{A_0^*} & -(\mu + \omega) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \sigma_0 \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

y entonces la ecuación

$$\sigma_0^2 + \left( (\eta\mu + 1) - \psi_0(1 - 2A_0^*) + (\omega + \mu) \right) \sigma_0 + C(\mu) = 0 \quad (2.34)$$

permite determinar los dos valores propios del operador  $DF_{(A,N)}(\psi_0, 0, 0)$  asociados a  $\mu$ , donde

$$C(\mu) = \eta\mu^2 + \left( 1 - \psi_0(3 - 4A_0^*) + \eta\omega \right) \mu + \omega(1 - \psi_0(1 - 2A_0^*)).$$

Si  $\mu_j$  es tal que cumple las condiciones del Teorema 2.4, entonces necesariamente  $C(\mu_j) = 0$ , pues  $\sigma(0) = 0$  es un valor propio de  $DF_{(A,N)}(\psi_0, 0, 0)$ . Pensando en  $C(\mu)$  como un polinomio y  $\mu_j$  como una raíz de él, su factorización es

$$C(\mu) = \eta(\mu - \mu_j) \left( \mu + \frac{1}{\eta} (1 - \psi_0(3 - 4A_0^*)) + (\omega + \mu_j) \right).$$

y por (2.21),  $\frac{1}{\eta} (1 - \psi_0(3 - 4A_0^*)) + (\omega + \mu_j) = -\frac{\omega}{\eta\mu_j} (1 - \psi_0(1 - 2A_0^*))$ . Finalmente (2.34) se reescribe en la forma

$$\sigma_0^2 + \left( (\eta\mu + 1) - \psi_0(1 - 2A_0^*) + (\omega + \mu) \right) \sigma_0 + \eta(\mu - \mu_j) \left( \mu - \frac{\omega}{\eta\mu_j} (1 - \psi_0(1 - 2A_0^*)) \right) = 0.$$

Debido a que el término que acompaña a  $\sigma_0$  es positivo, se concluye que si  $\mu$  es un valor propio cualquiera de (LN) tal que no está en el intervalo comprendido entre  $\mu_j$  y  $\frac{\omega}{\eta\mu_j} (1 - \psi_0(1 - 2A_0^*))$ , entonces los valores propios  $\sigma_0$  asociados a él son estrictamente negativos. Por lo tanto,  $\sigma(0) = 0$  es el valor propio más grande del operador  $DF_{(A,N)}(\psi_0, 0, 0)$ , además del único positivo.  $\square$

### 2.3.3. Discusión

Entender como se comportan las soluciones de (2.4) sigue siendo un problema abierto. No obstante, cuando las hipótesis de los teoremas 2.4 y 2.5 se cumplen, podemos afirmar que para valores de  $\psi$  suficientemente cercanos a  $\psi_0$  se manifiestan patrones en el caso no estacionario, y más aún, es posible caracterizarlos.

Ya sea en el estudio del caso estacionario o de inestabilidades de Turing, la ecuación

$$\eta\mu^2 + \mu + \mu\psi(4A^* - 3) + \omega(\eta\mu + 1 - \psi(1 - 2A^*)) = 0$$

resulta relevante. En nuestros resultados da origen al polinomio  $p(\psi)$ , cuyas raíces son los candidatos a puntos de bifurcación; pero vista como una ecuación cuadrática en  $\mu$ , los valores propios de (LN) comprendidos entre sus raíces  $\mu_-$  y  $\mu_+$  son los que generan inestabilidades de Turing en el problema (2.4). Esto último pues dado  $\mu \in (\mu_-, \mu_+)$ , la ecuación

$$\lambda^2 + (\omega + \mu(1 + \eta) + 1 - \psi + 2\psi A^*)\lambda + h(\mu) = 0$$

permite determinar  $\lambda$  tal que vuelve inestable a la solución (2.8) propuesta para la linealización de (2.4) en presencia de difusión. Sin embargo, esta última expresión también surge al estudiar la estabilidad de la rama de bifurcación, sólo que toma la forma

$$\sigma_0^2 + \left( (\eta\mu + 1) - \psi_0(1 - 2A_0^*) + (\omega + \mu) \right) \sigma_0 + C(\mu) = 0$$

y de ella se obtienen los dos valores propios  $\sigma_0$  del operador  $DF_{(A,N)}(\psi_0, 0, 0)$  asociados a  $\mu$ .

Una pregunta importante en este trabajo es si la ecuación posee al menos una raíz positiva. Para el caso  $\Omega = [0, \pi]^2$  se tiene que esto efectivamente ocurre pues la figura 2.2 da cuenta de esta situación. Considerando  $\eta$  y  $\omega$  fijos, las curvas de nivel son con respecto a cada  $\mu$  valor propio simple de (LN). Fijando  $\tilde{A}$ , los valores de  $\psi$  sobre cada curva corresponden a raíces de  $p(\psi)$ , que llamamos  $\psi_0$ . Notamos también que el número de curvas de nivel se incrementa a medida que  $\eta$  es más pequeño.

No obstante, que las condiciones (C1) y (C2) se cumplan es insuficiente para la existencia de una rama de bifurcación, pues se requiere también que  $\frac{\omega}{\eta\mu}(1 - \psi_0(1 - 2A_0^*))$  no sea un valor propio de (LN). Las figuras 2.3 y 2.4 muestran en azul algunas curvas de nivel proyectadas sobre el plano  $\psi - \tilde{A}$ , y las curvas en rojo señalan cuando no se cumple (C3).

Cuando se satisfacen las tres condiciones, en virtud del Teorema 2.4 existen soluciones no constantes de (2.12) en una vecindad de  $(\psi_0, A_0^*, N^*)$ , dadas por la rama de bifurcación (2.13). Se infiere que para valores muy cercanos al punto de bifurcación, el patrón está dominado por la función propia  $\phi$  asociada al valor propio simple y positivo  $\mu$  del problema (LN) que satisface las condiciones del teorema. Sin embargo, esto no es claro a medida que se avanza en la rama de bifurcación, pues los términos  $\xi_1(s)$  y  $\xi_2(s)$  inducen una deformación de esta función, y la única información sobre ellos es que  $(\xi_1, \xi_2) \in W$ , con  $W$  complemento cerrado de  $\ker(DF_{(A,N)}(\psi_0, 0, 0))$  en  $Y$ .

Como se afirmó anteriormente, la estabilidad de una rama de bifurcación es crucial para relacionarla con la formación de patrones espacialmente heterogéneos en el caso no estacionario. Un detalle importante es que los valores y funciones propias de (LN) dependen de  $\Omega$ , luego no es

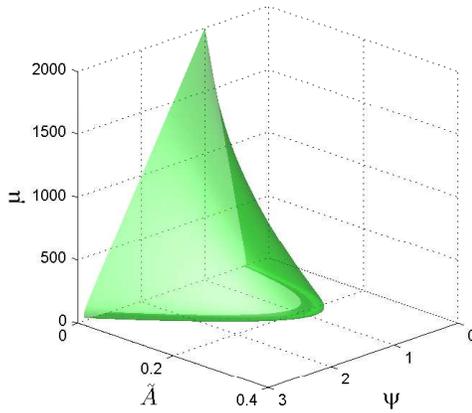
claro que la condición  $\int_{\Omega} \phi^3 dx \neq 0$  se satisfaga siempre. Por ejemplo, al considerar  $\Omega = [0, L]^2$  y usar variables separables en (LN) se obtienen los valores y funciones propias

$$(j, k \in \mathbb{N}, j \geq k) \quad \begin{cases} \mu_{j,k} = \frac{\pi^2}{L^2}(j^2 + k^2) \\ \phi_{j,k}(x, y) = \frac{2}{L} \cos\left(\frac{j\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{k\pi}{L}y\right) \end{cases}$$

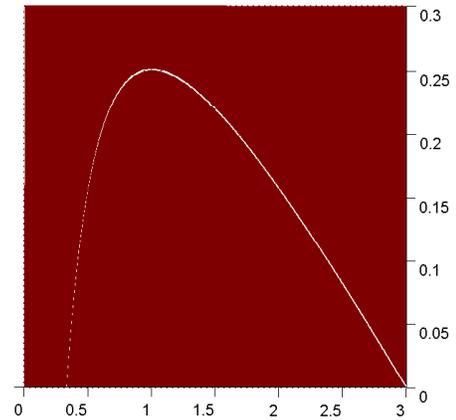
y en este caso  $\int_{\Omega} \phi_{j,k}^3 dx = 0$ , por lo que el resultado de estabilidad no es aplicable, excepto si el primer valor propio (cuya función propia es estrictamente positiva en  $\Omega$  [4]) tiene asociada una rama de bifurcación. Esto también sucede en el caso  $\Omega = B(0, R)$ ,  $R > 0$ , pues mediante el mismo proceder resulta

$$(j, k \in \mathbb{N}, k > j) \quad \begin{cases} \mu_{j,k} = \left(\frac{\beta_{j,k}}{R}\right)^2 \\ \phi_{j,k}(r, \theta) = J_j\left(\frac{\beta_{j,k}}{R}r\right) \cos(j\theta) \end{cases}$$

con  $J_j$  función de Bessel de primera especie y  $\{\beta_{j,k}\}_{k \geq 1}$  es la familia de raíces (ordenadas) de  $J_j$ .

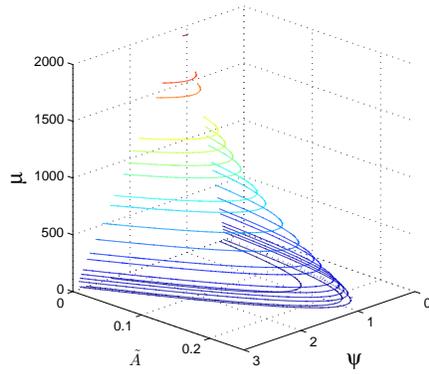


(a) Solución positiva de (2.6)

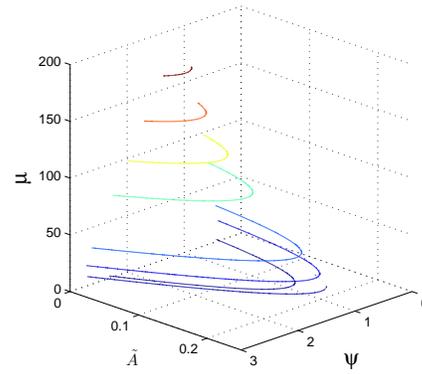


(b) Región donde se cumple la condición (2.5)

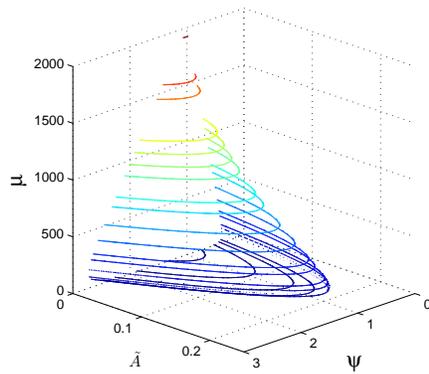
Figura 2.1: Valores de  $\tilde{A}$ ,  $\psi$  y  $\mu$  donde se cumple el Teorema 2.1, para  $\eta = 0.001$ ,  $\omega = 1$ .



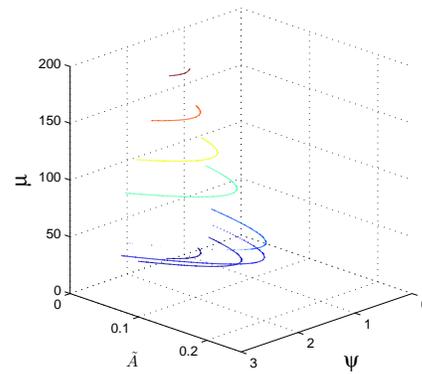
(a)  $\eta = 0.001, \omega = 1$



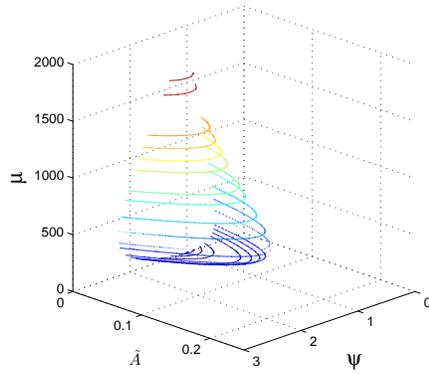
(b)  $\eta = 0.01, \omega = 1$



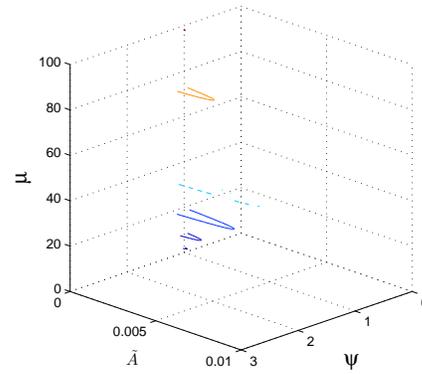
(c)  $\eta = 0.001, \omega = 10$



(d)  $\eta = 0.01, \omega = 10$

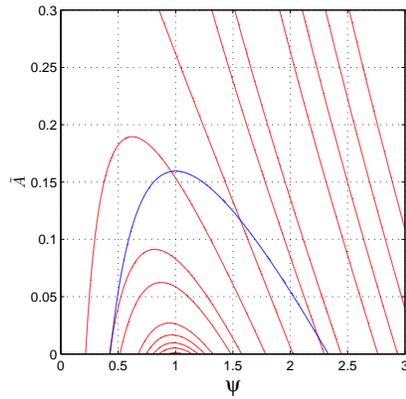


(e)  $\eta = 0.001, \omega = 100$

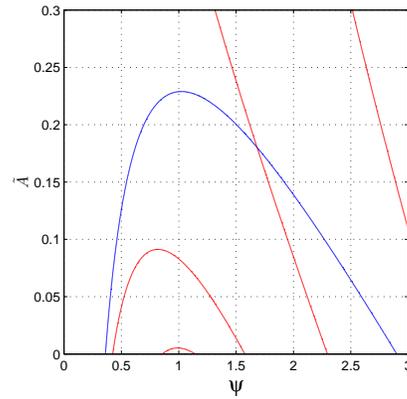


(f)  $\eta = 0.01, \omega = 100$

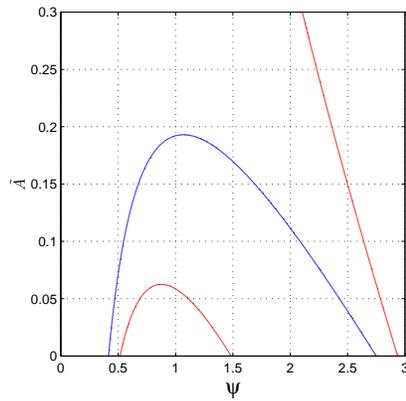
Figura 2.2: Valores admisibles de  $\psi, \tilde{A}$  y  $\mu$  para las hipótesis (C1) y (C2) del Teorema 2.4 en  $[0, \pi]$ , con respecto a distintos valores de  $\eta$  y  $\omega$ .



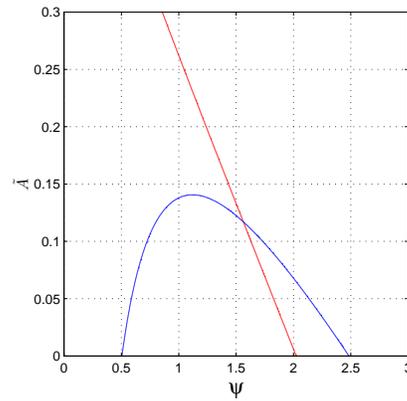
(a)  $\mu = 2$



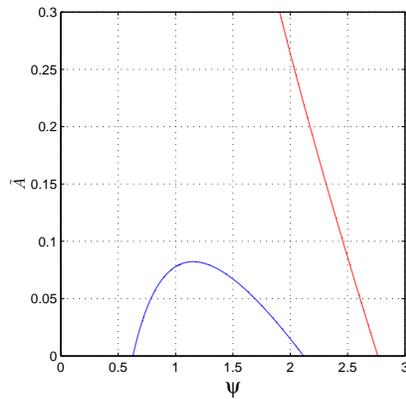
(b)  $\mu = 72$



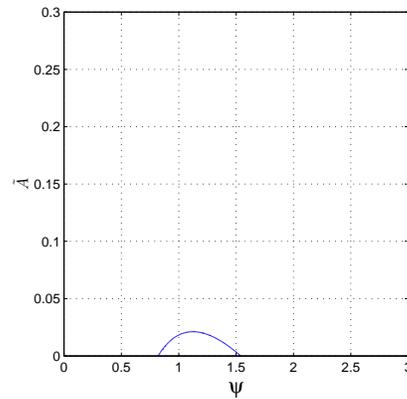
(c)  $\mu = 242$



(d)  $\mu = 512$

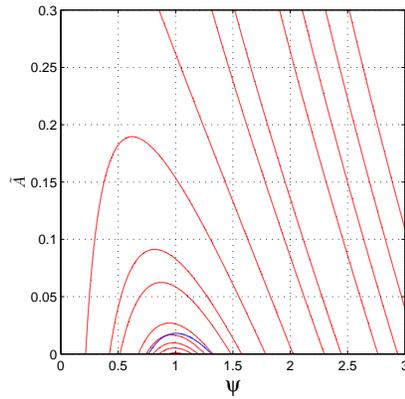


(e)  $\mu = 882$

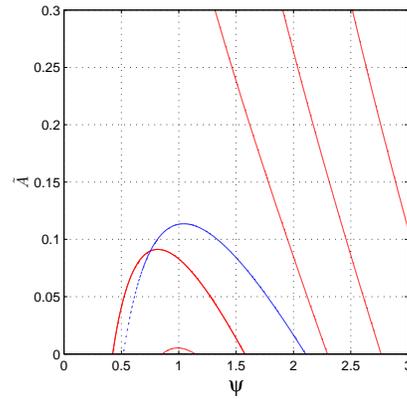


(f)  $\mu = 1458$

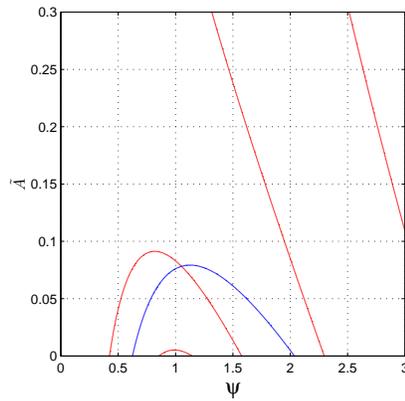
Figura 2.3: Valores admisibles de  $\psi, \tilde{A}$  y  $\mu$  para la hipótesis (C3) del Teorema 2.4 en  $[0, \pi]$ , con respecto a  $\eta = 0.001$  y  $\omega = 1$ .



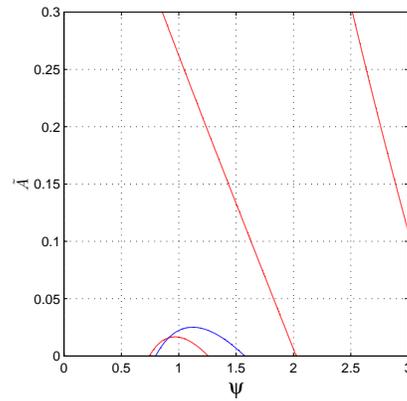
(a)  $\mu = 2$



(b)  $\mu = 18$



(c)  $\mu = 72$



(d)  $\mu = 128$

Figura 2.4: Valores admisibles de  $\psi, \tilde{A}$  y  $\mu$  para la hipótesis (C3) del Teorema 2.4 en  $[0, \pi]$ , con respecto a  $\eta = 0.01$  y  $\omega = 10$ .

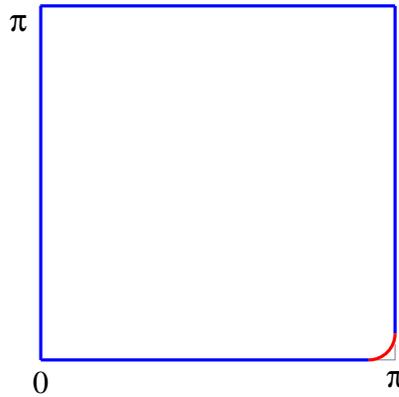
## 2.4. Algunas simulaciones numéricas

La presencia de simulaciones en este trabajo busca mostrar como se originan las ramas de bifurcación provistas por el Teorema 2.4 en el caso 2-dimensional. Dado  $\mu$  valor propio simple de (LN) que cumple las condiciones de dicho teorema, mediante el uso del método de elementos finitos y un algoritmo de punto fijo alternante se desarrolló un programa capaz de resolver el caso estacionario (2.12) partiendo de un punto próximo a la rama de bifurcación (2.13), siempre que  $s$  sea próximo a 0. La razón porque abordamos sólo esta situación es debido a lo complejo que resulta estudiar el problema numérico en su totalidad.

Sabemos que  $\psi$  depende continuamente de  $s$  para valores suficientemente cercanos a  $\psi_0$ , pero esta relación no es explícita. Debido a que el programa requiere conocerla, se propone usar un desarrollo de Taylor en torno a  $s = 0$  y despreciar los términos de orden superior para obtener

$$\psi(s) \approx \psi_0 + s\psi'(0)$$

Tal estimación es válida bajo las condiciones del lema 2.6, que no se cumple en dominios simétricos como rectángulos o circunferencias. Por ello, se optó por realizar las simulaciones en una perturbación de  $\Omega = [0, \pi]$ , que denotaremos por  $\Omega'$ , cuya forma es



y consideramos los parámetros

$$\eta = 0.001, \omega = 84, \tilde{A} = 0.1,$$

que coinciden con los escogidos por Pitcher en [8].

Mediante el uso del software FreeFem++ se escogieron dos valores propios simples de (LN) en  $\Omega'$ , tales que satisfacen las condiciones del Teorema 2.4 y del lema 2.6. Por ejemplo,  $\mu = 32.0506$ ,  $\mu = 392.332$  y sus respectivas funciones propias. Se optó por estos valores pues en el caso de  $\Omega$ , 32 y 392 son valores propios simples que cumplen el Teorema 2.4.

Para ambos valores propios, se tiene que  $\psi(s)$  vale

$s$	$\psi(s)$
$-5 \cdot 10^{-3}$	0.863805
$-4 \cdot 10^{-3}$	0.864346
$-2 \cdot 10^{-3}$	0.865428
0	0.86651
$10^{-5}$	0.866515
$10^{-4}$	0.866564
$10^{-3}$	0.867051
$1.25 \cdot 10^{-3}$	0.867186
$1.28 \cdot 10^{-3}$	0.867282
$1.29 \cdot 10^{-3}$	0.869215

(a)  $\mu = 32.0506$ 

$s$	$\psi(s)$
$-1.15 \cdot 10^{-3}$	1.09479
$-10^{-3}$	1.10894
$-5 \cdot 10^{-4}$	1.12308
$-10^{-4}$	1.13439
0	1.13722
$10^{-4}$	1.14005
$5 \cdot 10^{-4}$	1.15136
$10^{-3}$	1.16550
$1.15 \cdot 10^{-3}$	1.17966

(b)  $\mu = 392.332$ Tabla 2.1: Valores de  $\psi(s)$  cercanos a  $\psi_0$ 

Respecto a las simulaciones en la variable atractividad (cuyo comportamiento es análogo para la densidad de criminales), se observa que para valores cercanos a 0, la forma del patrón es similar a la función propia  $\phi$  asociada a  $\mu$ . A medida que  $s$  se distancia, los valores máximos y mínimos de la función sufren un leve incremento, pero también surgen nuevas protuberancias en torno a las regiones donde  $\phi$  alcanza su máximo. Sin embargo, a partir de cierto valor esta situación cambia abruptamente, formándose un nuevo patrón cuya forma difiere de  $\phi$ . La figura 2.5 muestra esta situación para  $\mu = 32.0506$  y  $s$  positivo, que ocurre de igual modo cuando  $s$  es negativo.

No obstante, luego de formarse el nuevo patrón y a medida que  $s$  se sigue alejando de 0, su forma depende del signo de  $s$ , pues en el caso positivo se mantiene invariante, mientras que en el caso negativo los *peaks* se redistribuyen, tal como se aprecia en la figura 2.6. En cambio, para  $\mu = 392.332$ , la figura 2.7 indica un reordenamiento de los *peaks* que varía según el signo de  $s$ .

Finalmente, las simulaciones muestran que sería interesante saber determinar el valor de  $s$  donde el patrón cambia, y también establecer su forma a medida que se sigue la parametrización.

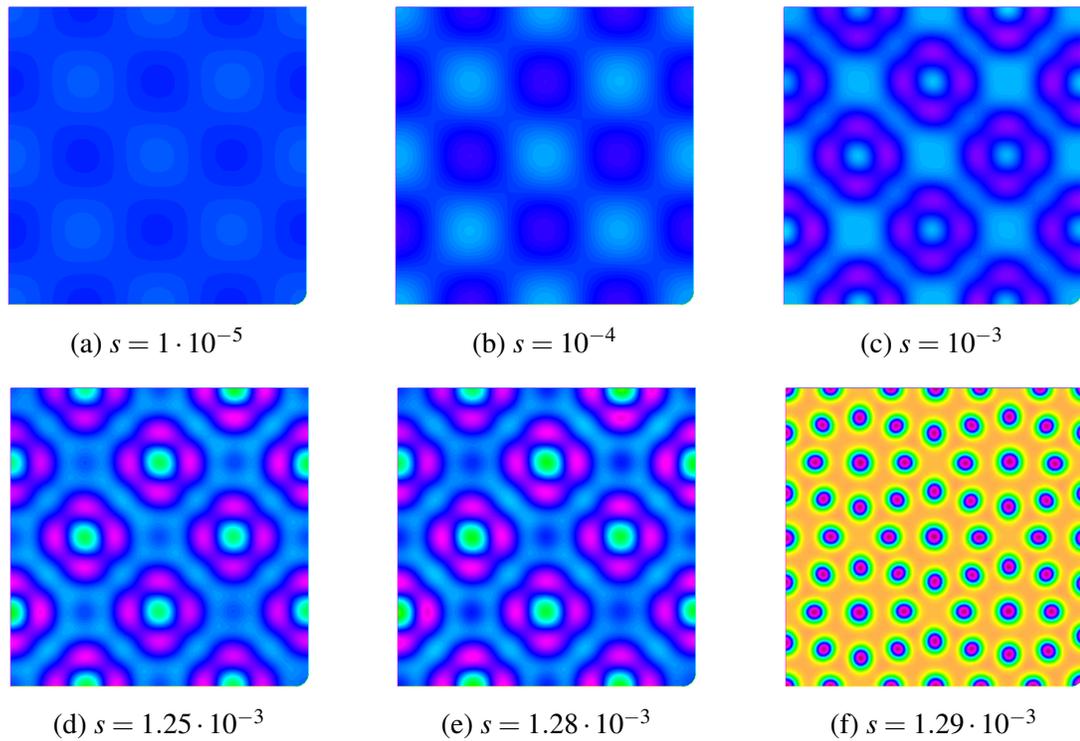


Figura 2.5: Surgimiento de la rama de bifurcación asociada a  $\psi_0 = 0.86651$

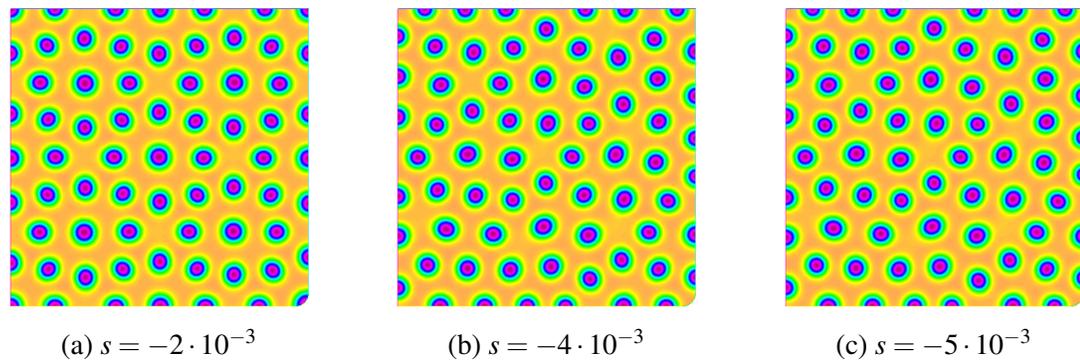
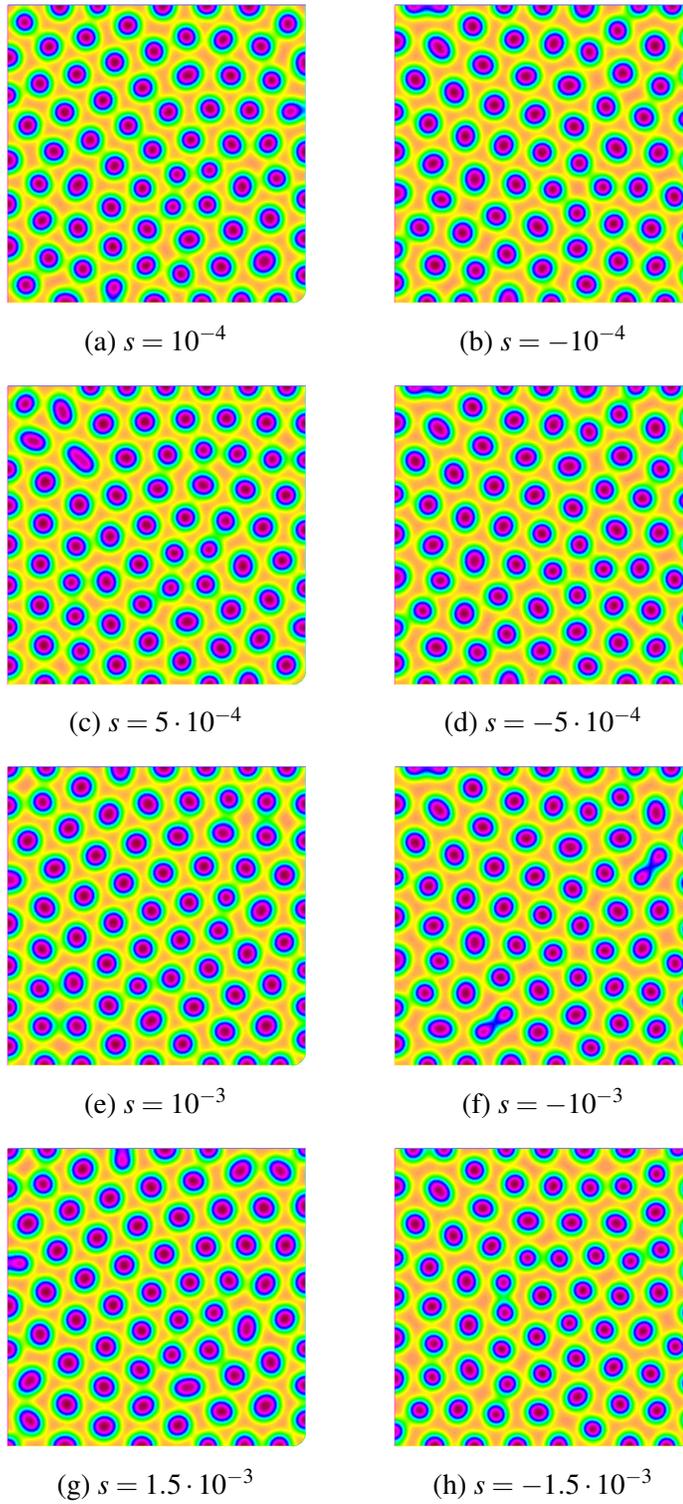


Figura 2.6: Formación de patrones asociada a  $\psi_0 = 0.86651$ , para valores de  $s$  negativos

Las subfiguras de 2.6 y (2.5f) tienen valores mínimos (amarillo) y máximos (violeta) cercanos a 0.15 y 0.7 respectivamente. El resto de ellas toman valores en  $[0.265, 0.275]$ , bajo la misma escala de colores.

Figura 2.7: Formación de patrones asociada a  $\psi_0 = 1.13722$ 

La atractividad toma valores mínimos (amarillo) y máximos (violeta) cercanos a 0.2 y 0.7 respectivamente.

# Conclusión

En el presente trabajo se determinó que el caso estacionario de las ecuaciones de Pitcher exhibe formación de patrones. Bajo ciertas condiciones, el Teorema 2.4 establece que tal sistema posee soluciones no constantes, que se manifiestan como parte de una rama de bifurcación que surge desde el equilibrio, de la cual se conoce una parametrización en una vecindad del punto de bifurcación y cuyo carácter es global. Se infiere que muy cerca del punto de bifurcación es la función propia asociada a tal teorema quién dicta la forma de tales patrones, pero a medida que se recorre la parametrización esto deja de ser claro. En efecto, las simulaciones realizadas sugieren un cambio abrupto en los patrones formados a partir de cierto punto. Del Teorema 2.5 se advierte que la geometría de la región es relevante al momento de estudiar cuando parte de la rama de bifurcación es estable.

Este problema presenta posibles extensiones. La primera es ver como cambian estos resultados en la medida que se incorpora la dinámica policial al sistema, por ejemplo mediante la estrategia *cops in the dots*. Otro problema abierto es ver que ocurre con las ecuaciones de Pitcher al agregar nuevos supuestos, tales como los propuestos por Jones et. sobre remover criminales que no han cometido delito alguno, en vez de considerar una tasa de deserción general. Una tercera sería estudiar la resolución numérica del sistema (2.12), problema que debido a su dificultad no hubo tiempo para considerarlo en este trabajo.

# Bibliografía

- [1] R.S. Cantrell, C. Cosner, R. Manásevich. Global bifurcation of solutions for crime modeling equations, *SIAM, Journal on Mathematical Analysis*, 44 (2012), pp. 1340-1358.
- [2] M.G. Crandall and P.H. Rabinowitz. Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues and linearized stability, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 52 (1973), pp. 161-180.
- [3] L.C. Evans. *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, 2nd. edition, 2010.
- [4] D. Gilbarg and N.S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, Berlin, 3rd. edition, 2001.
- [5] P.A. Jones, P.J. Brantingham and L.R. Chayes. Statistical models of criminal behavior: the effects of law enforcement actions, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 20 (2010), pp. 1397-1423.
- [6] O.A. Ladyzhenskaya and N. U. Ural'tseva. *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, Academic Press, 1968.
- [7] J.D. Murray. *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications*, Springer, Berlin, 3rd. edition, 2003.
- [8] A.B. Pitcher. Adding police to a mathematical model of burglary, *European Journal of Mathematical Analysis*, 21 (2010), pp. 401-419.
- [9] P.H. Rabinowitz. Some global results for nonlinear eigenvalue problems, *Journal of Functional Analysis*, 7 (1971), pp. 487-513.
- [10] J. Shi and X. Wang. On global bifurcation for quasilinear elliptic systems on bounded domains, *Journal of Differential Equations*, 7 (2009), pp. 2788-2812.
- [11] M.B. Short, M.R D'Orsogna, V.B. Pasour, G.E. Tita, P.J. Brantingham, A.L. Bertozzi and L.B. Chayes. A statistical model of criminal behavior, *Math Models and Methods in Applied Sciences*, 18 (2008), pp. 1249-1267.

- 
- [12] A.M. Turing. The chemical basis of morphogenesis, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences*, 237 (1952), pp. 37-72.
- [13] A. Wald. On cumulative sum of random variables. *The Annals of Mathematical Statistics*, 15 (1944), pp. 283-296.