

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**EFFECTOS DEL ACOPLAMIENTO TRASLACIONAL
Y EL RUIDO EN SISTEMAS EXTENDIDOS**

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN
CIENCIAS CON MENCIÓN EN FÍSICA

FRANCISCO DANIEL DEL CAMPO ROJAS

PROFESOR GUÍA:
MARCEL CLERC GAVILÁN

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
STEFANIA RESIDORI
ENRIQUE TIRAPEGUI ZURBANO
MARÍA CRISTINA DEPASSIER TERÁN

SANTIAGO DE CHILE
JULIO - 2013

RESUMEN DE LA TESIS
PARA OPTAR AL GRADO DE:
Magíster en Ciencias
con mención en Física.
POR: Francisco Daniel del Campo Rojas
FECHA: 12/07/2013
PROF. GUÍA: Marcel Clerc

EFFECTOS DEL ACOPLAMIENTO TRASLACIONAL Y EL RUIDO EN SISTEMAS EXTENDIDOS

El objetivo de esta tesis fue estudiar y caracterizar los efectos del acoplamiento traslacional y del ruido, sobre estados localizados y soluciones periódicas (o patrones) en sistemas macroscópicos.

En el contexto de un sistema extendido, el acoplamiento traslacional consiste en una auto-interacción que involucra un desplazamiento espacial. La distancia L asociada a este desplazamiento, se denomina parámetro de desplazamiento. Este tipo de acoplamiento ocurre de forma natural en sistemas ópticos auto-acoplados. Para abordar el objetivo, se consideró una variante de la ecuación de Swift-Hohenberg -un modelo minimal para estructuras localizadas y patrones-, añadiendo un acoplamiento traslacional.

Ante parámetros de desplazamiento moderados, las estructuras localizadas se deforman y se propagan a lo largo de la dirección del acoplamiento. Ellas sufren tres clases de inestabilidades: la formación de un patrón propagativo, desaparición por nodo-silla (*saddle-node*) y “radiación” de frentes. Estos resultados teóricos fueron parcialmente confirmados por experimentos realizados por el grupo de óptica no-lineal y cristales líquidos del INLN de la *Université Nice Sophia-Antipolis*, en Francia.

El acoplamiento traslacional, para un rango de valores de L , induce propagación y aumento en la amplitud de los patrones. Para valores más grandes de L , ocurre una inestabilidad de fase que desemboca en un transiente espacio-temporal complejo (metacaos). Cuando se aumenta L en una cantidad determinada, se llega a una transición brusca en que el caos aparece. Se trata de una ruta al caso tipo crisis. El caos corresponde a intermitencia espacio-temporal, puesto que hay una alternancia en el espacio y en el tiempo entre zonas “laminares” y zonas “turbulentas” en un rango amplio de escalas.

Dentro del estudio de los patrones, se desarrolló un formalismo para definir una velocidad local asociada a la propagación de un campo espacio-temporal. Dicha metodología tiene potencialmente una aplicabilidad considerablemente más amplia respecto al uso que se le dió. Si bien la velocidad de fase se asemeja al campo de velocidad local en muchos casos, esta no necesita de una noción de fase y es robusta ante singularidades de fase.

El acoplamiento traslacional induce una deriva, lo cual permite situar el sistema en el régimen convectivo. En ese caso y en la presencia de ruido, se establece un frente fluctuante entre un estado homogéneo y un patrón, el patrón sostenido por ruido. Mediante simulaciones numéricas de la ecuación de Ginzburg-Landau con deriva se estableció que aparecen singularidades de fase en la región de pequeñas amplitudes, donde la dinámica está dominada por el ruido. Esta fenomenología ha sido verificada en un experimento de óptica por el grupo Nonlinear Dynamics of Optical Systems de la *Université des Sciences et Technologies de Lille*, en Francia. Se concluyó que se trata de un fenómeno de ocurrencia genérica en una y dos dimensiones espaciales.

THESIS ABSTRACT

DEGREE: Master of Science in Physics

BY: Francisco Daniel del Campo Rojas

DATE: 12/07/2013

ADVISOR: Marcel Clerc

EFFECTS OF TRASLATIONAL COUPLING AND NOISE IN EXTENDED SYSTEMS

The objective of this Thesis was to study and characterize the effects of traslational coupling and noise, over localized states and periodic solutions (or patterns) in macroscopic systems.

In the context of an extended system, traslational coupling consists of a self-interaction involving a spatial displacement. The distance L associated with this displacement, is called displacement parameter. This kind of coupling occurs naturally in self-coupled optical systems. To tackle the objective, a variant of the Swift-Hohenberg equation -a minimal model for localized structures and patterns- was considered, adding traslational coupling.

For small displacement parameter, localized states deform and become propagative along the direction of the coupling. They undergo three types of destabilization processes: the formation of a propagative pattern, disappearance by saddle-node and front “radiation”. These theoretical results have been partially confirmed by experiments performed by the non-linear optics and liquid crystals group of the INLN at the *Université Nice Sophia-Antipolis*, in France.

Traslational coupling, over a range of L values, induces propagation and increase in amplitude of patterns. For larger values of L , a phase instability occurs which leads to a complex spatio-temporal transient (metachaos). When L is increased in a given quantity, a sharp threshold is reached above which chaos exists. This is a crisis-like route to chaos. In this case, chaos corresponds to spatio-temporal intermittency, because there is an alternation between “laminar” and “turbulent” zones both in space and time over a broad range of scales.

Within the study of patterns, a formalism has been developed to define a local velocity associated to the propagation of a spatio-temporal field. This method potentially has a substantially broader applicability than its use in this thesis. Even if the phase velocity is similar to the local velocity field in many cases, the latter does not need a notion of phase and is robust at phase singularities.

Traslational coupling induces drift, which allows to set the system in the convective regime. In this case and in the presence of noise, a fluctuating front between a homogeneous state and a pattern is established, a noise-sustained pattern. By means of numerical simulations of the drifting Ginzburg-Landau equation it was found that phase singularities appear in the region of small amplitudes, where dynamics is dominated by noise. This phenomenology has been verified in an optics experiment by the Nonlinear Dynamics of Optical Systems group of the *Université des Sciences et Technologies de Lille*, in France. It was concluded that this is a universal phenomenon in one and two spatial dimensions.

*Caída de la rama
regresa una flor
Era una mariposa*

Arakida Moritaké

A mis padres.

Agradecimientos

En primer lugar quiero dar las gracias a mi profesor guía Marcel Clerc, por su apoyo y orientación permanentes, por lo mucho aprendido y por su entusiasmo desbordante. Agradezco a los miembros de la comisión evaluadora Stefania Residori, Enrique Tirapegui y María Cristina Depassier, por la evaluación y corrección de esta tesis, con sus valiosas observaciones. Agradezco a Florence Haudin, Stefania Residori y Humberto Bortolozzo del equipo experimental de óptica no-lineal y cristales líquidos del *Institut Nonlinéaire de Nice* (Francia), al profesor René Rojas de la *Pontificia Universidad Católica de Valparaíso* (Chile) y a mi profesor guía, por la fructífera colaboración en el estudio de estructuras localizadas en la válvula de cristal líquido con retroinyección óptica. Asimismo, agradezco a los profesores Eric Louvergneaux, Majid Taki y Saliya Coulibaly, y al Dr. Mario Wilson del grupo NDOS en la *Université Lille 1 - Sciences et Technologies* (Francia), por su acogedora y atenta recepción y por lo mucho aprendido en mi pasantía¹. Agradezco a mis compañeros y amigos del tercer piso del *dfi*² y a los postdoc Mónica García, Vincent Odent y Nicolas Perinet, por todo lo compartido, y por las interesantes y provechosas discusiones académicas y extra-académicas.

Doy especialmente las gracias a mi familia y mis amigos por su apoyo y cariño durante todo este tiempo.

Agradezco el financiamiento de la Beca de Magíster nacional de Conicyt, así como el financiamiento del proyecto ANR-Conicyt “COLORS” que hizo posible mi pasantía en Lille.

¹También quiero dar las gracias a Nazek, Béatrice, Marie-Hélène, Cyrille, Benoit, Jorge y al profesor B. Pinchemel y familia por lo compartido durante mi estadía en Lille.

²Nicolás Alarcón, Javier Baeza, Karen Barrera, Ignacio Bordeu, Diego Contreras, Cristián Fernández, Jeremías Garay, Francisca Guzmán, Alejandro León, Juan Macías, Ignacio Olavarría, César Parra, Ulises Pereira, Jaime Romero, María José Santander, Roberto Troncoso, Paula Urrutia, Nicolás Verschueren, Estefanía Vidal y Yair Zárate.

Tabla de contenido

1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Objetivos	4
1.2.1. Objetivo general	4
1.2.2. Objetivos específicos	4
1.3. Estructura de la Tesis	4
2. Marco Conceptual	5
2.1. Formación de estructuras localizadas	5
2.2. Modelo de Swift-Hohenberg	6
2.2.1. Bifurcación de pitchfork imperfecta	6
2.2.2. Inestabilidad espacial	7
2.3. Acoplamiento traslacional	7
2.4. Modelo de Ginzburg-Landau	8
2.4.1. Forma normal	9
2.5. Condición de solubilidad	11
2.6. Cristales líquidos	12
2.7. Sistemas dinámicos y caos: nociones relevantes	13
2.7.1. Sistema dinámico	13
2.7.2. Atractor	13
2.7.3. Caos	14
2.7.4. Exponentes de Lyapunov	15
2.7.5. Crisis	15
2.7.6. Mapa logístico	16
2.8. Régimen convectivo y estructuras sostenidas por ruido	18
2.8.1. Clasificación de la dinámica	18
2.8.2. Relación de dispersión e inestabilidad absoluta	19
2.8.3. El método de Cauchy	20
2.8.4. Evaluación a tiempos largos	21
2.8.5. Estructuras sostenidas por ruido	22

3. Estructuras localizadas bajo acoplamiento traslacional	23
3.1. Experimento: montaje y resultados	23
3.2. Propagación y deformación	24
3.3. Mecanismos de desestabilización	26
3.3.1. Nodo-Silla (<i>Saddle-Node</i>)	27
3.3.2. Inestabilidad formadora de patrones	29
3.3.3. Emisión de frentes	32
4. Dinámica de patrones bajo acoplamiento traslacional	34
4.1. Patrones bajo acoplamiento traslacional	34
4.1.1. Ondas viajeras	34
4.1.2. Inestabilidad de fase	35
4.1.3. Caos espacio-temporal	36
5. Singularidades de fase sostenidas por ruido	39
5.1. Modelo de Ginzburg-Landau con deriva	40
5.1.1. Caso unidimensional	41
5.1.2. Caso bidimensional	42
5.1.3. Evidencia experimental preliminar	43
6. Método de velocidad local	46
6.1. Presentación del método	46
6.1.1. Formalismo	46
6.1.2. Promedio localizado: representaciones alternativas	47
6.1.3. Promedio localizado de senoide modulado	49
6.2. Comparación con velocidad de fase	49
6.2.1. Ejemplo experimental	49
6.2.2. Ejemplo analítico	50
6.2.3. Transformada de Hilbert	52
6.2.4. Velocidad de fase	54
7. Conclusiones y perspectivas	55
8. Referencias	56
9. Anexo	60

1. Introducción

1.1. Motivación

Formación de estructuras

Los fenómenos naturales son una fuente inagotable de inspiración y conocimiento. A menudo lo atractivo de su belleza proviene de una cierta organización espacial, de alguna regularidad o irregularidad obvia u oculta, o simplemente de su complejidad. Existen patrones -o estructuras regulares-



Figura 1: Ondulaciones en la arena del desierto en Marruecos (ondulitas eólicas).

que saltan a la vista (ver figura 1), por ejemplo las franjas en las conchas de algunos moluscos, las manchas en la piel de ciertos mamíferos -como jirafas, zebras, leopardos y gatos domésticos-, los patrones de desecación del suelo en zonas áridas, los basaltos columnares o las espirales que se forman en frutos y flores. Hay también geometrías más complejas, como las ramificaciones de los



Figura 2: (izquierda) Tinta cayendo y difundiendo en un volumen de agua. (derecha) Parte de la cuenca de drenaje de un río en Papúa Nueva Guinea.

relámpagos, las formas resultantes de la mezcla de líquidos de distintas densidades (ver figura 2), la cuenca de drenaje de un río (ver figura 2), o la estructura de algunas nubes.

En los sistemas fuera del equilibrio, es decir con inyección y disipación de energía, la formación de estructuras y la auto-organización son de ocurrencia universal, tanto en los seres vivos como en la materia inanimada [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Si bien existe una comprensión sobre la formación de estructuras fuera del equilibrio, ella es parcial e imperfecta.

Estructuras localizadas y acoplamiento traslacional

Parte de esta tesis se concentra en una clase de patrones espaciales, se trata de los estados localizados macroscópicos, también conocidos como *estructuras localizadas* o soluciones tipo partícula. En lo que sigue se usa las siglas *EL* para denotar estructura localizada. Durante los últimos años ellas han concentrado una gran atención, motivada por potenciales aplicaciones como memorias magnéticas u ópticas [7, 8]. Estas estructuras se presentan en diversos campos de la física: materiales magnéticos, cristales líquidos, gases enrarecidos, reacciones químicas, superficie de líquidos forzados y medios granulares fluidizados, convección térmica, medios ópticos no lineales, entre otros. Por lo tanto, existe una universalidad de los estados localizados. En la figura 3, se ilustra una EL observada en un canal forzado verticalmente con agua, denominada solitón hidrodinámico no propagativo [10]. En los últimos años, se ha publicado diversas revisiones del estado del arte de la formación, destrucción, existencia y dinámica de ELs [8, 11, 12]. A pesar de que estas soluciones o estados están espacialmente extendidas presentan propiedades típicamente asociadas a las partículas: se les puede caracterizar con una familia de parámetros continuos, como la posición, amplitud, ancho, carga, etcétera. Éste es el tipo de descripción que se utiliza en teorías físicas como la mecánica cuántica y la física de partículas. Sin embargo, los estados localizados emergentes en sistemas macroscópicos se caracterizan por estar constituidos de un gran número de átomos o moléculas (del orden del número de Avogadro), que se comportan de forma coherente. El ejemplo paradigmático del estado localizado macroscópico son los solitones que se manifiestan en el contexto de la dinámica de fluidos (ver figura 3), la óptica no lineal y ciertos sistemas Hamiltonianos [8, 13].

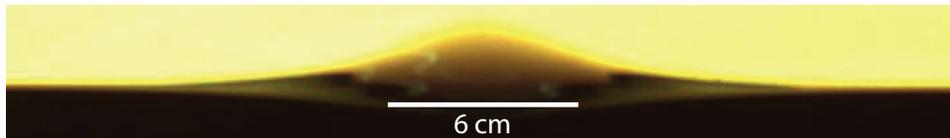


Figura 3: Solitón hidrodinámico en un canal vibrado verticalmente. Imagen tomada de [9].

Recientemente, en colaboración con el grupo experimental de óptica no lineal de Niza, se ha estudiado experimentalmente el comportamiento de ELs en una válvula óptica de cristal líquido con retro-inyección [14]. Es decir, por medio de la retro-inyección de la luz, una EL -que corresponde a una región de mayor luminosidad localizada (ver figura 4)- se auto-induce un voltaje con la forma de la EL pero desplazada en una distancia “ L ” en una dirección determinada. Esto constituye un acoplamiento no-local de tipo traslacional o simplemente *acoplamiento traslacional (AT)*. Como consecuencia de esto las ELs se deforman y se propagan en la dirección del desplazamiento óptico como se ilustra en la figura 4. Para desplazamientos grandes estas ELs emiten pares de vórtices de cargas opuestas en la fase del campo eléctrico [14]. Dicho esto, es directo establecer un símil con la emisión de vórtices debido a un obstáculo en el flujo de un fluido, el conocido callejón de vórtices de von Kármán [16]. Por lo tanto, la emisión de vórtices es un fenómeno más general que aquel observado en los fluidos.

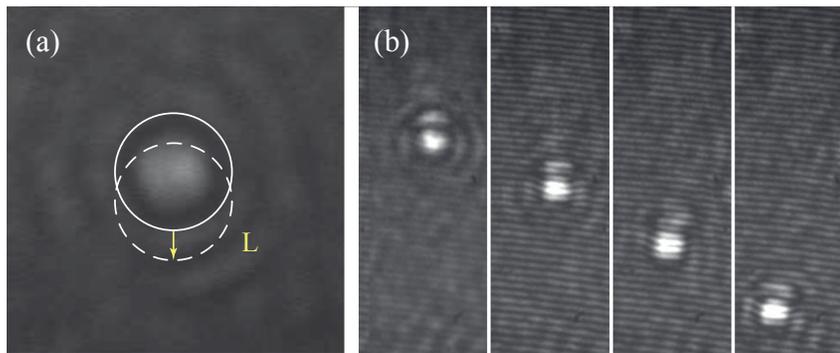


Figura 4: EL en experimento óptico de la válvula de cristal líquido con retro-inyección. Figura modificada de [14] y [15].

Estructuras periódicas bajo acoplamiento traslacional

Adicionalmente, se estudia el efecto del AT sobre estructuras periódicas. Como se menciona anteriormente, los patrones surgen de forma espontánea y universal en una amplia gama de contextos físicos. Por ejemplo en ondas de gravedad en fluidos (ver figura 5), en medios granulares vibrados o sometidos a un flujo (ver figura 1), en materiales magnéticos, en cristales líquidos o en la forma de colonias de organismos como los corales. Los casos de mayor interés para esta tesis se enmarcan en la óptica no-lineal, puesto que el AT ocurre allí naturalmente.



Figura 5: Ondas cnoidales formadas por el viento sobre el mar vistas desde un avión.

En particular, hay un experimento en que se ilumina una capa delgada de cristal líquido con un rayo láser intenso que la atraviesa, rebota en un espejo y vuelve a atravesarla [17]. Dependiendo de parámetros geométricos del montaje óptico, de la inclinación del espejo (que determina el AT) y de la intensidad del láser, emergen distintos tipos de estructuras periódicas bidimensionales: hexágonos, franjas y rectángulos (ver figura 6).

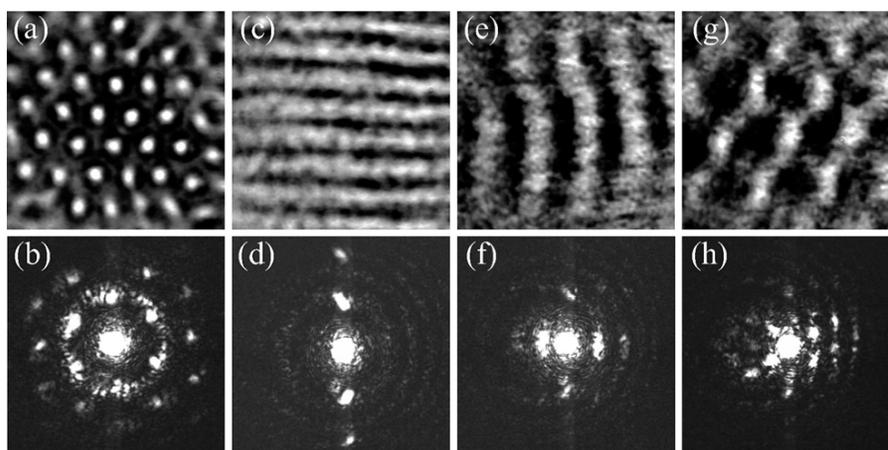


Figura 6: Campo cercano (fila superior) y campo lejano (fila inferior) de patrones bidimensionales observados en experimento óptico [17].

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Estudiar los efectos del acoplamiento traslacional sobre sistemas macroscópicos espacialmente extendidos, concretamente sobre estados localizados y soluciones periódicas.

Explorar la aparición de defectos en patrones sostenidos por ruido.

1.2.2. Objetivos específicos

- Establecer un modelo prototipo de ELs y patrones bajo AT.
- Estudiar analítica y numéricamente la deformación y propagación de ELs debido al AT.
- Caracterizar los mecanismos de desestabilización sufridos por ELs y patrones.
- Estudiar la aparición de defectos en patrones sostenidos por ruido.
- Comparar resultados con observaciones experimentales.

1.3. Estructura de la Tesis

- En el marco teórico, el capítulo 2, se introduce las nociones generales utilizadas en la tesis.
- Los resultados del trabajo de tesis se organizan del siguiente modo.
 Capítulo 3: Estructuras localizadas bajo acoplamiento traslacional.
 Capítulo 4: Dinámica de patrones bajo acoplamiento traslacional.
 Capítulo 5: Singularidades de fase sostenidas por ruido.
 Capítulo 6: Método de velocidad local.
- En el capítulo 7 se presenta las conclusiones.

2. Marco Conceptual

Como se indica en la introducción, esta tesis se enmarca en sistemas fuera del equilibrio, formados por muchos constituyentes elementales. De la cantidad casi inimaginable de grados de libertad de un sistema macroscópico determinado, la gran mayoría relaja al equilibrio rápidamente, mientras que unos pocos evolucionan más lentamente. Esta separación de escalas temporales permite formular una descripción macroscópica. Se identifica a los grados de libertad lentos con las variables macroscópicas relevantes. Ellas deben ser estadísticamente representativas, tales como valores esperados o promedios locales de variables a una escala más pequeña. Por otra parte, es intuitivo pensar que de la inyección y disipación de energía, la agitación molecular y las interacciones microscópicas, emergen de forma espontánea comportamientos macroscópicos coherentes. Por ejemplo: formación de estructuras, propagación de ondas, turbulencia, entre otros. Se debe entonces considerar las posibles inhomogeneidades, incorporando una dependencia espacial en las variables macroscópicas, las que son promovidas a campos espacio-temporales. En consecuencia, el sistema es descrito por ecuaciones a derivadas parciales (EDP). Es importante recordar, sin embargo, que en su versión discretizada dichas ecuaciones corresponden a un sistema dinámico de muchas variables.

En este contexto global, este capítulo revisa los conceptos y las herramientas de mayor relevancia para el desarrollo de la presente tesis.

2.1. Formación de estructuras localizadas

A continuación se explica la teoría cualitativa para soluciones localizadas estables y estacionarias en una dimensión, propuesto por Coulet, Riera y Tresser en [18].

Sea $\partial_t u = F(u, \partial_x)$ una ecuación a derivadas parciales en una dimensión espacial. En [19] Pomeau muestra que si una solución homogénea coexiste con una solución periódica, siendo ambas dinámicamente estables, existe una *familia robusta* de frentes estacionarios entre ambos. Este resultado puede entenderse geoméricamente considerando el sistema espacial equivalente: $F(u, \partial_x) = 0$. Las

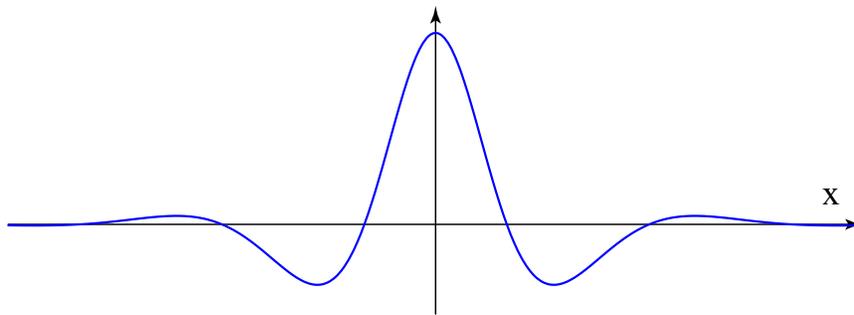


Figura 7: Esquema pictórico de un patrón localizado unidimensional.

soluciones periódicas en los sistemas reversibles³ aparecen en familias, es decir no hay soluciones periódicas aisladas. Luego la conexión heteroclina, que da cuenta del frente, se mueve de forma continua entre estas soluciones cuando se varía los parámetros. En pocas palabras, la robustez consiste en que las soluciones siguen existiendo ante cambios leves en los parámetros. Existe

³Desde luego, la simetría $x \rightarrow -x$ equivale a la reversibilidad.

además una región en el espacio de parámetros delimitada por las transiciones de desbloqueo (“*unpinning*”), donde los frentes existen. Las soluciones localizadas, en este caso patrones localizados, pueden entenderse como una conexión homoclina en el sistema espacial equivalente, que sale del estado homogéneo por una variedad inestable y vuelve a él por una variedad estable (ver figura 7) [20].

2.2. Modelo de Swift-Hohenberg

Hay varios modelos prototipo para soluciones periódicas y también ELs. Por ejemplo, algunas de las ecuaciones más simples que presentan patrones son la ecuación de Swift-Hohenberg, la ecuación de Ginzburg-Landau a coeficientes reales y ecuaciones de reacción-difusión acopladas. La ecuación de Swift-Hohenberg fue introducida originalmente para caracterizar la emergencia de patrones en el contexto de la convección de Rayleigh-Bénard [21]:

$$\partial_t u = \varepsilon u - u^3 - \nu \nabla^2 u - \nabla^4 u. \quad (2.1)$$

En esta tesis se usa una variante de ella, la *ecuación de Swift-Hohenberg generalizada*, dada por

$$\partial_t u = \eta + \varepsilon u - u^3 - \nu \nabla^2 u - \nabla^4 u. \quad (2.2)$$

El parámetro de orden $u(\vec{r}, t)$ describe una bifurcación de pitchfork imperfecta (primeros tres términos), y las derivadas espaciales dan cuenta del proceso de anti-difusión e hiper-difusión. Estas últimas son responsables de la inestabilidad espacial y la saturación de pequeñas longitudes de onda respectivamente, permitiendo la formación de patrones como se explica en la subsección 2.2.2. Mediante el reescalamiento $u \rightarrow \frac{u}{\nu}$, $\vec{r} \rightarrow \vec{r}\sqrt{\nu}$, $t \rightarrow t\nu^2$, $\varepsilon \rightarrow \frac{\varepsilon}{\nu^2}$ y $\eta \rightarrow \frac{\eta}{\nu^3}$, se puede fijar $\nu = 1$. En lo que sigue, a menos que se explicita, se asume que éste es el caso. Notar que esto es posible gracias a que se considera $\nu > 0$ solamente.

2.2.1. Bifurcación de pitchfork imperfecta

La bifurcación de pitchfork imperfecta corresponde a la coexistencia de tres estados homogéneos: dos asimétricos estables y uno inestable. Todas las soluciones de

$$0 = \eta + \varepsilon u - u^3 \quad (2.3)$$

Para encontrar el punto de bifurcación se toma un parámetro en función de u , $\eta(u) = -\varepsilon u + u^3$ y se busca un máximo. $\frac{d\eta}{du}(u_*) = -\varepsilon + 3u_*^2 = 0$, luego $u_* = \pm\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$ y reemplazando en la expresión para η , se encuentra la curva crítica [22]:

$$\eta_c(\varepsilon) = 2\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (2.4)$$

La figura 8 ilustra que esta bifurcación describe un ciclo de histéresis al variar los parámetros (η, ε) .

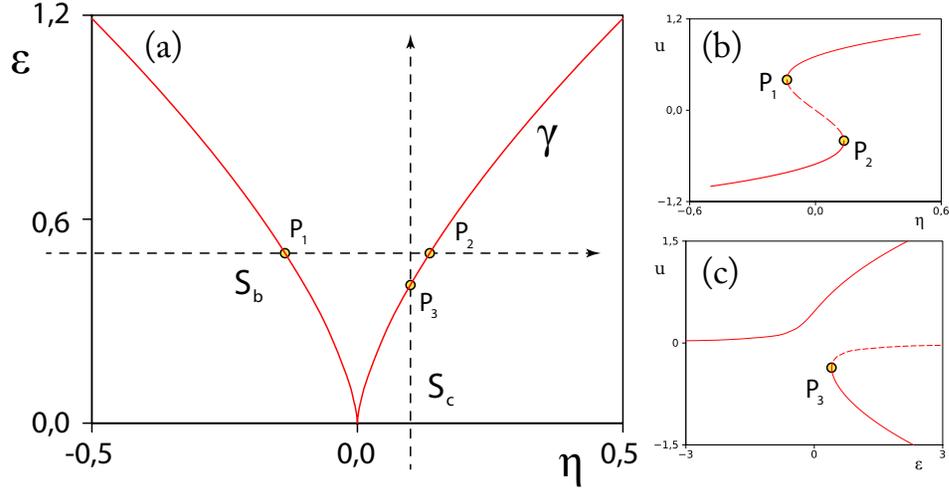


Figura 8: (a) Diagrama de la bifurcación de pitchfork imperfecta, que ocurre en la curva γ , representación gráfica de la ecuación (2.4). Para $\eta \geq \eta_c(\varepsilon)$ hay tres estados coexistiendo, dos estables y uno inestable. En el resto del dominio hay una solución. En (b) y en (c) se muestra, respectivamente, los equilibrios a lo largo de las secciones transversales S_b ($\varepsilon = 0,5$) y S_c ($\eta = 0,1$) mostradas en (a).

2.2.2. Inestabilidad espacial

La inestabilidad espacial de un estado homogéneo es el mecanismo más simple y universal de formación de estructuras periódicas. Sea u_0 solución homogénea de (2.2), su estabilidad lineal puede estudiarse perturbándola con un modo de Fourier $u = u_0 + (we^{ikx + \Lambda(k)t} + c.c.)$, y determinando su tasa de crecimiento $\sigma(k) = \Re(\Lambda(k))$, con \Re la función parte real. Introduciendo este *Ansatz* en la ecuación (2.2), y usando (2.3), resulta

$$\sigma(k) = \varepsilon - 3u_0^2 + k^2 - k^4 \quad (2.5)$$

El modo de Fourier de número de onda k es estable *ssi* $\sigma(k) < 0$. Entonces la inestabilidad ocurrirá cuando $\sigma(k) < 0$ para todos los números de onda, salvo algunos k_j tales que $\sigma(k_j) = 0$. Si la función σ es suave, su derivada debe anularse en los máximos globales k_j . Imponiendo que $\sigma(k_c) = 0$, $\frac{\partial \sigma}{\partial k}(k_c) = 0$, resulta

$$k_c = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2.6)$$

$$\varepsilon - 3u_0^2 = -\frac{1}{4}. \quad (2.7)$$

Combinando esta última expresión con la ecuación (2.3) es directo que

$$\eta_c(\varepsilon) = \pm \sqrt{\frac{1}{3} \left(\varepsilon + \frac{1}{4} \right)} \left(\frac{2}{3} \varepsilon - \frac{1}{12} \right) \quad (2.8)$$

La expresión (2.8) corresponde a la curva azul con forma de pez en la figura 9.

2.3. Acoplamiento traslacional

En la introducción se menciona este concepto, vinculándolo con resultados experimentales encontrados en un sistema bajo AT (o no-local a dos puntos). El forzamiento traslacional consiste en

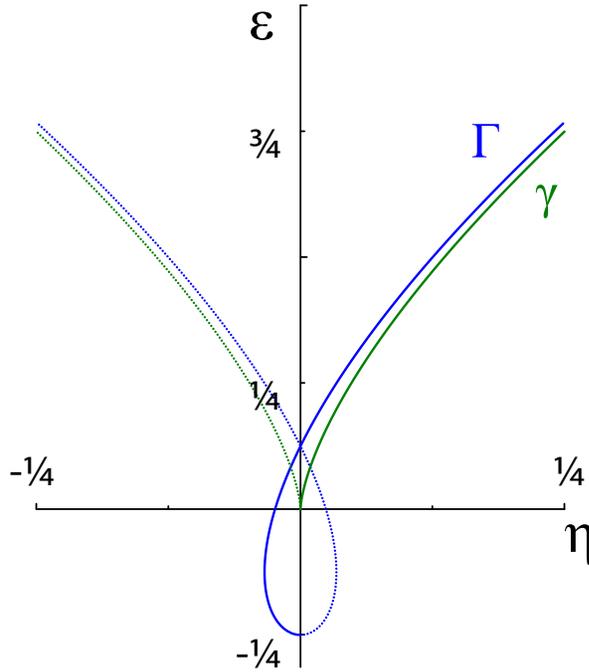


Figura 9: Diagrama de bifurcación para la inestabilidad espacial del estado homogéneo en el modelo de Swift-Hohenberg. La curva crítica es la curva Γ , que grafica la ecuación (2.8). La curva γ grafica la ecuación (2.4) y corresponde a la bifurcación de pitchfork imperfecta.

acoplar una región del espacio con otra mediante la operación de traslación espacial. Es decir, que la dinámica de $u(\vec{r}, t)$ dependa de $u(\vec{r} + \vec{L}, t) = e^{\vec{L} \cdot \nabla} u(\vec{r}, t)$ y sus derivadas. Se asume, sin perder generalidad, que $\vec{L} = L\hat{x}_1$. Para estudiar el efecto de la no-localidad traslacional sobre ELs y estructuras periódicas, se propone una variante de la ecuación (2.2), el *modelo de Swift-Hohenberg traslacional*:

$$\partial_t u(\vec{r}, t) = \eta + \epsilon u(\vec{r} + L\hat{x}_1, t) - u(\vec{r} + L\hat{x}_1, t)^3 - \nabla^2 u(\vec{r}, t) - \nabla^4 u(\vec{r}, t). \quad (2.9)$$

Se podría añadir más términos locales o no-locales, pero la forma simple de la ecuación (2.9) es preferible.

Como se muestra en el capítulo 3, la no-localidad en el término no-lineal resulta ser necesaria para reproducir los comportamientos experimentales de ELs en el sistema de la válvula óptica con retroinyección. En contraste con el AT, una dinámica local depende de las primeras derivadas de $u(\vec{r}, t)$. Esta diferencia radical se refleja en que el AT induce comportamientos complejos, inexistentes en el modelo de Swift-Hohenberg local (que es variacional): ver capítulo 4.

2.4. Modelo de Ginzburg-Landau

El modelo de Ginzburg-Landau es una ecuación para un campo a valores complejos $A(\vec{r}, t)$

$$\partial_t A = A(\mu - |A|^2) + \nabla^2 A \quad (2.10)$$

que describe la amplitud del modo de Fourier dominante en torno de la inestabilidad espacial de un sistema anisótropo.

2.4.1. Forma normal

Una forma normal es un procedimiento analítico que permite estudiar una bifurcación, deduciendo la dinámica dominante cerca de ella⁴. A continuación se presenta el cálculo de la forma normal de la inestabilidad espacial del siguiente modelo⁵.

$$\partial_t u = \eta + \varepsilon u - u^3 + 4q^2 \nabla_{\perp}^2 u - (q^2 + \partial_{xx})^2 u \quad (2.11)$$

donde x es la dirección privilegiada: $\vec{r} = x\hat{x} + \vec{r}_{\perp}$. El resultado final consiste en que la ecuación (2.10), dado el reescalamiento adecuado, es la ecuación de amplitud asociada.

1.- El punto de partida es el cálculo de la inestabilidad espacial, como aquel hecho en 2.2.2. Sea u_0 un equilibrio homogéneo: $\eta + (\varepsilon - q^4)u_0 - u_0^3 = 0$. La relación de dispersión de la ecuación (2.11)

$$\sigma(\vec{k}) = \varepsilon - q^4 - 3u_0^2 - 4q^2 |\vec{k}_{\perp}|^2 + 2q^2 k_x^2 - k_x^4 \quad (2.12)$$

Imponiendo que $\sigma(\vec{k}_c) = 0$, $\frac{\partial \sigma}{\partial \vec{k}}(\vec{k}_c) = \vec{0}$ resulta

$$\vec{k}_c = \pm q\hat{x} \quad (2.13)$$

$$\eta + \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} (\frac{2}{3}\varepsilon - q^4) = 0 \quad (2.14)$$

La ecuación (2.14) es la curva crítica y equivale a $\varepsilon_c = 3u_0^2$.

2.- Ahora se emplea el *Ansatz* $u(\vec{r}, t) = u_0 + A(\vec{r}, t)e^{iqx} + \bar{A}(\vec{r}, t)e^{-iqx} + W_2(\vec{r}, t) + W_3(\vec{r}, t) + \dots$ y la relación formal

$$\partial_t A = f_1(A, \bar{A}) + f_2(A, \bar{A}) + \dots \quad (2.15)$$

donde la corrección $W_n(A, \bar{A}, x)$ y $f_n(A, \bar{A})$ contienen términos proporcionales a $A^s(\bar{A})^{n-s}$, $s = 0, 1, \dots, n$ (monomios de orden n en A, \bar{A}).

Enseguida se reemplaza orden por orden en (2.10), ignorando las derivadas de A , hasta lograr que la ecuación (2.15) sature. En el paso n -ésimo de este proceso ya se ha obtenido $f_j(A, \bar{A})$ y $W_j(A, \bar{A}, x)$ para $j = 1, \dots, n-1$. Al usar esto y las definiciones dadas, resulta una ecuación de la forma

$$\mathcal{L}W_n = \{f_n(A, \bar{A})e^{iqx} + c.c.\} - \sum_{m=0}^n c_m^{(n)} A^m(\bar{A})^{n-m} e^{i(2m-n)qx} \quad (2.16)$$

donde $c_m^{(n)}$ son coeficientes y $\mathcal{L} = \varepsilon - 3u_0^2 + 4q^2 \nabla_{\perp}^2 - (q^2 + \partial_{xx})^2$ es el operador lineal (espacial) asociado a la ecuación de Swift-Hohenberg (2.11). Como se está en la bifurcación, $\varepsilon = \varepsilon_c = 3u_0^2$, luego $\mathcal{L} = 4q^2 \nabla_{\perp}^2 - (q^2 + \partial_{xx})^2$. Incluso en las etapas siguientes éste es el caso porque se debe tomar \mathcal{L} al orden dominante. Ahora se usa la condición de solubilidad (ver 2.5). Dado que $\mathcal{L}^{\dagger} = \mathcal{L}$ y $e^{\pm iqx} \in \text{Ker}(\mathcal{L})$, y teniendo en mente que en esta etapa se trata a A y \bar{A} como constantes en el espacio, se impone que el coeficiente de e^{iqx} al lado derecho de (2.16) sea nulo. Hay dos casos relevantes: n par y n impar. Un análisis directo lleva a concluir

$$f_{2r}(A, \bar{A}) = 0 \quad ; \quad n = 2r \quad (2.17)$$

$$f_{2r-1}(A, \bar{A}) = c_r^{(2r-1)} A |A|^{2(r-1)} \quad ; \quad n = 2r - 1 \quad (2.18)$$

⁴En el libro de Wiggins [23] hay un capítulo dedicado a la teoría de formas normales.

⁵Se escogió este modelo por ser un modelo anisótropo simple.

Resta calcular W_n , que equivale a solucionar (2.16) término a término $\mathcal{L}w_{s,n} = h_{s,n}(A, \bar{A})e^{isqx}$, $s \neq \pm 1$, y sumar $W_n = \sum_s w_{s,n}$. Es directo ver que $\mathcal{L}h(A, \bar{A})e^{isqx} = -q^4 (s^2 - 1)^2 h(A, \bar{A})e^{isqx}$, despreciando las derivadas espaciales de A y \bar{A} . Entonces $W_n(A, \bar{A}, x) = -\sum_{s \neq \pm 1} \frac{1}{q^4 (s^2 - 1)^2} h_{s,n}(A, \bar{A})e^{isqx}$ es solución. Una inspección visual entrega W_n en función de los coeficientes $c_m^{(n)}$ de forma explícita.

$$W_{2r} = \frac{2}{q^4} c_r^{(2r)} |A|^{2r} + \sum_{\ell=1}^r c_{\ell+r}^{(2r)} \frac{1}{q^4 (4\ell^2 - 1)^2} A^{\ell+r} (\bar{A})^{r-\ell} e^{i2\ell qx} + c.c. \quad ; \quad n = 2r \quad (2.19)$$

$$W_{2r-1} = \sum_{\ell=1}^{r-1} c_{\ell+r}^{(2r-1)} \frac{1}{q^4 ((2\ell+1)^2 - 1)^2} A^{\ell+r} (\bar{A})^{r-1-\ell} e^{i(2\ell+1)qx} + c.c. \quad ; \quad n = 2r - 1 \quad (2.20)$$

A continuación se aplica las ecuaciones (2.17), (2.18), (2.19) y (2.20) orden por orden.

$n = 1$

Es fácil ver que $c_0^{(1)} = c_1^{(1)} = 0$, luego $f_1 = 0$

$n = 2$

n es par y se tiene que $c_1^{(2)} = -6u_0$, $c_2^{(2)} = -3u_0$, entonces

$$f_2 = 0 \quad (2.21)$$

$$W_2(A, \bar{A}, x) = -\frac{u_0}{q^4} \left\{ 3|A|^2 + \frac{1}{3}A^2 e^{2iqx} \right\} + c.c. \quad (2.22)$$

$n = 3$

Haciendo los reemplazos pertinentes resulta que $c_2^{(3)} = \frac{38}{q^4} u_0^2 - 3 = \frac{38}{3q^4} \varepsilon - 3$ y $c_3^{(3)} = \frac{2u_0^2}{q^4} - 1 = \frac{2\varepsilon}{3q^4} - 1$, por lo tanto

$$f_3 = \left(\frac{38}{3q^4} \varepsilon - 3 \right) A|A|^2 \quad (2.23)$$

$$W_3(A, \bar{A}, x) = -\frac{1}{64q^4} \left(\frac{2\varepsilon}{3q^4} - 1 \right) A^3 e^{3iqx} + c.c. \quad (2.24)$$

Hasta este punto se ha obtenido la ecuación de amplitud $\partial_t A = \left(\frac{38}{3q^4} \varepsilon - 3 \right) A|A|^2$, la cual satura $ssi \varepsilon < \frac{9q^4}{38}$. Se asume que éste es el caso⁶.

3.- Ahora se considera el parámetro de bifurcación $\Gamma = \varepsilon - 3u_0^2$ y se determina el término de “*unfolding*” (despliegue). Sea $W_{unfolding}$ la corrección de u y sea $f_{unfolding}$ el término de la ecuación de amplitud, asociados a los términos lineales en Γ . Entonces

$$\mathcal{L}W_{unfolding} = \{f_{unfolding} - \Gamma A\} e^{ik_c x} + c.c. \quad (2.25)$$

Sigue que

$$f_{unfolding} = \Gamma A \quad (2.26)$$

$$W_{unfolding} = 0 \quad (2.27)$$

Como $\frac{38}{3q^4} \varepsilon - 3 < 0$, $|A|$ escala como $\sqrt{\Gamma}$ y la ecuación de amplitud escala como $\Gamma^{\frac{3}{2}}$.

⁶De lo contrario sería necesario llegar al orden cuántico al menos. Se trataría del caso subcrítico.

4.- Finalmente se incorpora las derivadas espaciales de A . Sea $W^{[i,j]}$ la corrección de u y sea $f^{[i,j]}$ el término de la ecuación de amplitud, asociados a los términos proporcionales a $A^i \partial_{\vec{r}}^j A$.

$$\mathcal{L}W^{[0,1]} = f^{[0,1]} e^{ik_c x} + c.c. \quad (2.28)$$

$$f^{[0,1]} = \Gamma A \quad (2.29)$$

$$W^{[0,1]} = 0 \quad (2.30)$$

$$\mathcal{L}W^{[1,1]} = f^{[1,1]} e^{iqx} + \frac{48}{3q} u_0 A \partial_x A e^{2iqx} + c.c. \quad (2.31)$$

$$f^{[1,1]} = 0 \quad (2.32)$$

$$W^{[1,1]}(A, \bar{A}, x) = -\frac{48}{27q^5} u_0 A \partial_x A e^{2iqx} + c.c. \quad (2.33)$$

$$\mathcal{L}W^{[0,2]} = f^{[0,2]} e^{iqx} - 4q^2 \partial_{xx} A e^{iqx} - 4q^2 \nabla_{\perp}^2 A e^{iqx} + c.c. \quad (2.34)$$

$$f^{[0,2]} = 4q^2 (\nabla_{\perp}^2 + \partial_{xx}) A = 4q^2 \nabla^2 A \quad (2.35)$$

$$W^{[0,2]}(A, \bar{A}, x) = 0 \quad (2.36)$$

Recapitulando

$$u(\vec{r}, t) = u_0 + A e^{iqx} - \frac{u_0}{q^4} \left\{ 3|A|^2 + \frac{1}{3} \left(A^2 + \frac{48}{9q} i A \partial_x A \right) e^{2iqx} \right\} - \frac{1}{64q^4} \left(\frac{2\varepsilon}{3q^4} - 1 \right) A^3 e^{3iqx} + c.c. \quad (2.37)$$

correcto hasta el orden $\mathcal{O}(\Gamma^2)$. Y la ecuación de amplitud al orden dominante resulta

$$\partial_t A = A \left(\Gamma + \left(\frac{38}{3q^4} \varepsilon - 3 \right) |A|^2 \right) + 4q^2 \nabla^2 A \quad (2.38)$$

Reescalando se obtiene trivialmente la ecuación (2.10).

2.5. Condición de solubilidad

Como su nombre lo indica, la condición de solubilidad es una condición necesaria y suficiente para la solubilidad de ecuaciones lineales. Concretamente para ecuaciones de la forma

$$\mathcal{L}u = b \quad (2.39)$$

donde $\mathcal{L} : U \rightarrow V$ es un operador lineal sobre un espacio vectorial U (por ejemplo funcional) en un espacio vectorial V . Dado un cierto vector $b \in V$ la pregunta es si (2.39) tiene solución.

La *condición de solubilidad* o *alternativa de Fredholm* [5, 27] afirma que la ecuación (2.39) tiene solución ssi

$$\langle c, b \rangle = 0 \quad \forall c \in \ker(\mathcal{L}^\dagger) \quad (2.40)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno.

Para evitar confusiones, es importante tener presente que la alternativa de Fredholm tiene sus orígenes en la matemática. En este contexto es un teorema que tiene una serie de variantes, que no necesariamente se asemejan a la condición de solubilidad recién presentada. Por ejemplo [28]:

Teorema (Alternativa de Fredholm):

Sea T operador lineal compacto sobre el espacio de Banach E . Y sea $\lambda \in \mathbb{C}$ no nulo. Entonces exactamente una de las dos proposiciones siguientes se verifica

1. $\lambda - T$ es invertible
2. $\ker(\lambda - T) \neq \{0\}$

Además, el kernel de $\lambda - T$ tiene dimensión finita, la imagen de $\lambda - T$ es un subespacio cerrado de E de codimensión finita, y se tiene

$$\dim \ker(\lambda - T) = \dim \operatorname{coker}(\lambda - T)$$

2.6. Cristales líquidos

Las primeras observaciones experimentales de cristales líquidos datan de finales del siglo XIX [24]. Pero su descripción física comenzó en la década de 1920 con el célebre cristalógrafo francés Georges Friedel. Este período fue sucedido por casi medio siglo de inactividad. En la década de 1970, particularmente bajo la influencia de P.-G. de Gennes, la física de los CLs se expandió y continuó su desarrollo hasta nuestros días.

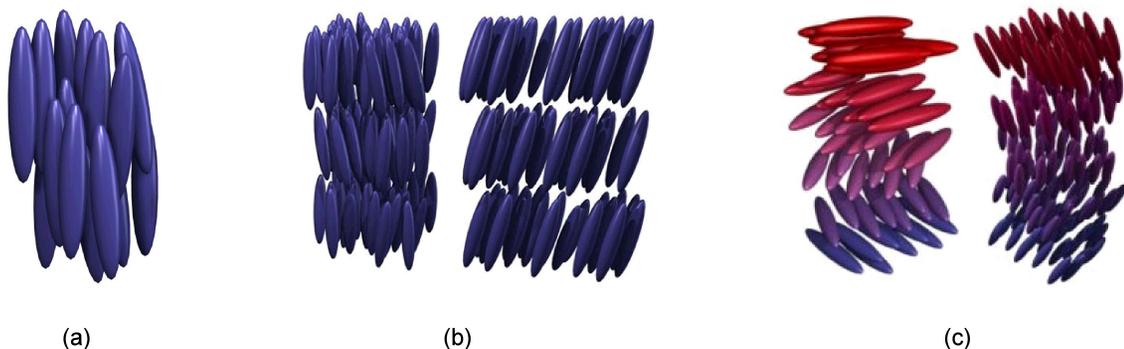


Figura 10: Disposición espacial molecular esquemática en la fase (a) nemática, (b) esméctica y (c) colestérica. Figura tomada del sitio web <http://cnx.org...>

¿Qué son los cristales líquidos?

En el trabajo seminal “*Etats mésomorphes de la matière*” [25], Friedel propone que los CLs son un estado de la materia intermedio entre líquidos isotrópicos y cristales, separado de éstos por fronteras netas (transiciones de fase)⁷. La idea original de G. Friedel, si bien ha sido complementada, está totalmente vigente: un CL es un **compuesto que tiene fases con propiedades intermedias**⁸ **entre un cristal y un líquido isotrópico** [24]. Los CLs presentan *propiedades ópticas anisótropas* (birrefringencia) y mecánicamente se comportan como fluidos con *reologías complejas*.

Los *CLs liotrópicos* son soluciones acuosas de moléculas anfifílicas. Las primeras mesofases fueron descubiertas en este tipo de CLs, concretamente soluciones acuosas de fosfolípidos (lecitina por ejemplo), moléculas orgánicas alargadas. Los *CLs termotrópicos* son aquellos que son sensibles a

⁷Hasta ese entonces, varios científicos habían estudiado estas sustancias, sin percatarse o entender que se trataba de nuevas formas de la materia. Uno de ellos, Otto Lehmann, les llamó “*fließende Kristalle*” o “*flüssige Kristalle*” [26] (hoy “*Flüssigkristalle*”), literalmente “cristales líquidos”. Un nombre inapropiado a la luz del trabajo de Friedel, pero que había sido ampliamente usado durante treinta años y que desde entonces se ha mantenido.

⁸mesofases o “estados de la materia mesomórficos”

la temperatura. Ellos no contienen agua, y tienen propiedades reológicas y ópticas cualitativamente idénticas a los CLs liotrópicos. Los *CLs poliméricos* están formados de polímeros (moléculas formadas por la repetición de una unidad básica), y pueden ser extremadamente viscosos. Los *CLs coloidales* son suspensiones de partículas coloidales (de diámetro entre $1nm$ y $1\mu m$) [24].

De acuerdo a su estructura de orientacional molecular, las fases de un CL se clasifican en dos grupos principales: nemática y esméctica (ver figura 10). En la fase *nemática* las moléculas tienen una orientación local preferencial pero carecen de un orden posicional. En la fase *esmética* las moléculas están ordenadas por capas planares y tienen una orientación local preferencial. Hay un caso particular de fase nemática: la fase *colestérica*, en la cual la orientación local de las moléculas gira a lo largo de una dirección llamada eje helicoidal [24].

2.7. Sistemas dinámicos y caos: nociones relevantes

2.7.1. Sistema dinámico

Un campo vectorial o *sistema dinámico* es un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t; \mu) \quad (2.41)$$

con $x \in U \subset \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $\mu \in V \subset \mathbb{R}^p$ [23]. Tiempo se refiere a la variable t y el símbolo $\dot{x}(t)$ denota $\frac{dx(t)}{dt}$. Las variables μ se llaman *parámetros*. Una solución o *trayectoria* de (2.41) es un mapeo x , de cierto intervalo $I \subset \mathbb{R}$ en \mathbb{R}^n , expresado por

$$\begin{aligned} x: I &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto x(t), \end{aligned} \quad (2.42)$$

tal que $x(t)$ satisface (2.41). El espacio de variables dependientes (i.e. \mathbb{R}^n) recibe el nombre de *espacio de fase*. La solución que pasa por un punto x_0 en el tiempo t_0 se denota por $x(t, t_0, x_0)$. Si además $t_0 = 0$ se simplifica la notación a $x(t, x_0)$. El grafo de $x(t, t_0, x_0)$ sobre t recibe el nombre de *curva integral* y está dado por *grafo* $x(t, t_0, x_0) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x = x(t, t_0, x_0), t \in I\}$. La *órbita a través de* x_0 , denotada por $O(x_0)$, es el conjunto de todos los puntos que están en la trayectoria $x(t, t_0, x_0)$. Es decir, $O(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = x(t, t_0, x_0), t \in I\}$.

Adicionalmente, hay de ecuaciones de la forma

$$x_{m+1} = g(x_m; \mu) \quad (2.43)$$

con $x_n \in U \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, denominados *mapas* o sistemas dinámicos a tiempo discreto. Este tipo de dinámica se puede lograr, por ejemplo, por medio de una observación estroboscópica de un sistema dinámico. Pero, independiente de las ecuaciones diferenciales, este tipo de descripción discreta tiene en sí mismo un valor.

2.7.2. Atractor

Hay discrepancias sobre la definición precisa de atractor, pero de forma gruesa puede decirse que es un conjunto al cual convergen todas las trayectorias cercanas. Más formalmente se define atractor como un conjunto cerrado A que satisface las siguientes propiedades [22].

1. A es un conjunto invariante: toda trayectoria $x(t)$ que parte en A se mantiene en A para todo tiempo.
2. A atrae a un conjunto abierto de condiciones iniciales: existe un conjunto $S \supset A$ tal que si $x(t=0) \in S$, entonces la distancia entre $x(t)$ y A tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$. El mayor de tales conjuntos S se llama *tina de atracción* (“*basin of attraction*“ en inglés).
3. A es mínimo: no existe un subconjunto propio de A que satisfice 1. y 2.

Bajo una dinámica caótica, se denomina *atractor extraño* o atractor caótico. El apelativo *extraño* se debe a que estos objetos comúnmente tienen dimensión fractal. Es decir, la geometría del atractor es compleja. En cambio, los equilibrios estacionarios, las órbitas periódicas y las órbitas cuasi-periódicas corresponden, respectivamente, a puntos, curvas cerradas y toros en el espacio de fase [34].

2.7.3. Caos

Si bien no hay una definición universalmente aceptada para el caos, si hay un consenso general sobre los ingredientes principales que lo caracterizan [22].

Caos : comportamiento dinámico determinista, aperiódico, acotado y permanente, que presenta sensibilidad exponencial a las condiciones iniciales.

1. Determinista se refiere a que no hay elementos ruidosos (aleatorios) en la dinámica o los parámetros del sistema.
2. Un comportamiento aperiódico y permanente significa que hay trayectorias que no convergen a puntos fijos, órbitas periódicas u órbitas cuasi-periódicas. Al ser acotado, se descarta las trayectorias que divergen.
3. La sensibilidad exponencial a las condiciones iniciales significa que dos trayectorias que parten a una distancia muy pequeña se separan exponencialmente en el tiempo. Es decir, dadas dos soluciones $x^{(1)}(t)$ y $x^{(2)}(t)$ de un sistema dinámico, su distancia evoluciona como $|x^{(1)}(t) - x^{(2)}(t)| \sim \delta_0 e^{\lambda t}$ donde $\delta_0 \ll 1$ es la distancia inicial. El factor λ se denomina *exponente de Lyapunov* y para tener caos debe ser positivo. Sin embargo, se trata de un uso totalmente informal del término por dos razones. En primer lugar hay n distintos exponentes de Lyapunov para un sistema dinámico de dimensión n , definidos del siguiente modo. Sea una esfera infinitesimal centrada en un punto $x^{(0)}$. La evolución del sistema deforma la esfera en un elipsoide infinitesimal. Sea $\delta_k(t)$, $k = 1, \dots, n$ la longitud del k -ésimo eje mayor del elipsoide. Entonces $\delta_k(t) = a_0 e^{\lambda_k t}$, donde λ_k son los exponentes de Lyapunov. Para tiempos suficientemente grandes, el diámetro del elipsoide está controlado por el mayor de los λ_k . Entonces λ es el mayor de los exponentes de Lyapunov. En segundo lugar no se ha dado más que una definición vaga de los exponentes de Lyapunov. Enseguida se aborda este punto.

2.7.4. Exponentes de Lyapunov

Se considera la definición dada por Wiggins en [23]. Tomando en cuenta un campo vectorial de la forma $\dot{x}(t) = f(x(t))$, su linealización en torno de $x(t, x_0)$ está dada por

$$\dot{\varepsilon}(t) = Df(x(t, x_0)) \varepsilon(t), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^n \quad (2.44)$$

Sea $Y(t; x(t, x_0))$ la matriz fundamental de soluciones de la ecuación (2.44) y sea $e \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|e\| = 1$. El *exponente de Lyapunov* en la dirección e a lo largo de la trayectoria que pasa por x_0 es

$$\lambda(Y(t; x(t, x_0)), x_0, e) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|Y(t; x(t, x_0)) e\| \quad (2.45)$$

Puede demostrarse que esta cantidad no depende del punto x_0 , sino que depende de la trayectoria escogida. En consecuencia se simplifica la notación de $\lambda(Y(t; x(t, x_0)), x_0, e)$ a $\lambda(e)$. También se puede probar que el conjunto de números $\{\lambda(e)\}_{\|e\|=1}$ toma a lo más $n = \dim \mathbb{R}^n$ valores diferentes, denotados por

$$\lambda_1 > \dots > \lambda_s, \quad 1 \leq s \leq n.$$

Estos son los exponentes de Lyapunov de la trayectoria elegida.

También existe una definición análoga para mapas, pero no tiene relevancia para esta tesis.

2.7.5. Crisis

Los cambios bruscos en un atractor caótico al variar los parámetros reciben el nombre de crisis [35]. Para fijar una notación, se llama γ al parámetro de bifurcación y γ_c al punto de bifurcación. Hay tres tipos de crisis de acuerdo a la naturaleza de las discontinuidades sufridas por el atractor. En el primer tipo el atractor es destruido repentinamente, en el segundo tipo el tamaño del atractor aumenta bruscamente en el espacio de fase, y en el tercer tipo dos o más atractores extraños se funden para formar un solo atractor caótico. La destrucción repentina del atractor ocurre cuando colisiona con una órbita periódica inestable sobre el borde de su tina de atracción, y se llama *crisis de borde* (“*boundary crisis*”). El aumento repentino de tamaño del atractor ocurre cuando la órbita periódica con la cual colisiona está en el interior de la tina de atracción, y se llama *crisis interior* (“*interior crisis*”). En la *crisis de fusión de atractores* (“*attractor merging crisis*”), dos o más atractores caóticos colisionan con una órbita periódica sobre el borde de sus tinajas de atracción.

1. *Crisis de borde*: Para $\gamma > \gamma_c$ el caos ya no existe y es reemplazado por transientes caóticos⁹, denominados *metacaos* [36, 37, 38]. Fijando $\gamma > \gamma_c$ y tomando condiciones iniciales al azar¹⁰, la duración τ de estos transientes siguen una distribución exponencial para τ grande.

$$\mathbb{P}(\tau) \sim e^{-\tau/\langle\tau\rangle} \quad (2.46)$$

donde $\langle\tau\rangle$ es el tiempo de duración típico de los transientes. En una variedad de ejemplos se ha encontrado que $\langle\tau\rangle \sim (\gamma - \gamma_c)^{-\beta}$ cerca de la bifurcación ($\gamma > \gamma_c$), donde $\beta > 0$ se denomina el exponente crítico de la crisis. A modo de ejemplo abajo se estudia la crisis de borde en el mapa logístico $g(x, r) = cx(1 - x)$.

⁹Transientes caóticos en el sentido de que se asemejan mucho al caos.

¹⁰Éstas deben estar dentro de la tina del atractor caótico para un cierto $\gamma' < \gamma_c$.

2. *Intermitencia inducida por crisis*: En vez de tener metacaos como en la crisis de borde, en la crisis interior y la crisis de fusión de atractores se observa un tipo de caos llamado intermitencia inducida por crisis. Esta consiste en una alternancia entre dos variantes caóticas. Esto contrasta con la intermitencia Pomeau-Manneville, que consiste en la alternancia entre caos y fases aproximadamente periódicas. En la intermitencia inducida por crisis los tiempos entre las alternancias también sigue una distribución exponencial para tiempos largos, con un tiempo característico $\langle \tau \rangle$ que diverge cuando $\gamma \rightarrow \gamma_c^+$.

2.7.6. Mapa logístico

El mapa logístico está definido por

$$x_{n+1} = g_{log}(x_n, c) \equiv cx_n(1 - x_n) \quad (2.47)$$

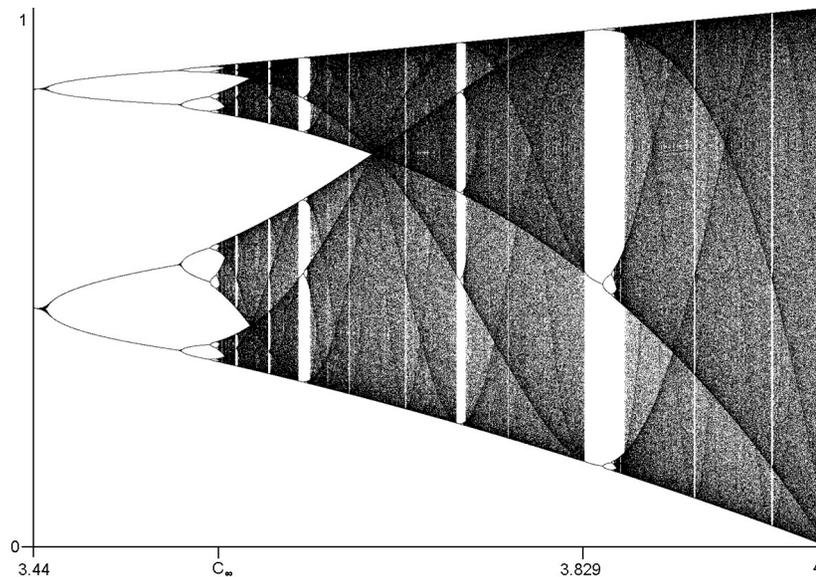


Figura 11: Diagrama de bifurcación del mapa logístico en el intervalo $3,44 \leq c \leq 4$. Figura tomada de <http://welbog...>

Hay abundante literatura, por ejemplo [22, 35], que explica e ilustra el comportamiento del mapa logístico en función del parámetro c . Se podría resumir esto del siguiente modo.

- Para $c < 1$ y para toda condición inicial $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.
- Para $1 < c < 3$ hay un nuevo equilibrio estable. Toda condición inicial no-nula converge a éste, i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 - \frac{1}{c}$.
- Para $c > 3$ el punto de equilibrio pierde su estabilidad y emerge un ciclo límite estable de período 2. Esto forma parte de una secuencia infinita. En el paso m -ésimo aparece un ciclo límite estable de período 2^m , desestabilizándose el ciclo límite de período 2^{m-1} , $m = 2, 3, \dots$. El

valor del parámetro c para el cual aparece el ciclo límite de período 2^m es c_m con $c_m < c_{m+1}$ ($c_0 \equiv 1$). Algunos valores:

c_1	c_2	c_3	c_4	\dots	c_∞
3	3,44949...	3,54409...	3,5644...	\dots	3,56994567...

Esto se conoce como cascada de doblamiento de período.

- En el intervalo $c_\infty < c < 4$ además de haber dinámica caótica, hay rangos estrechos de c donde la órbita atractiva es periódica. Las órbitas periódicas se suceden en cascadas de doblamiento de período. Estas órbitas son densas en el rango caótico, es decir, para un cierto valor c_* que tiene caos y para cualquier $\gamma > 0$ en el intervalo $(c - \gamma, c_* + \gamma)$ hay una órbita periódica.

Pero lo que interesa del mapa logístico es su comportamiento para c en torno de 4, donde se pasa de tener caos ($c < 4$) a transientes caóticos o metacaos ($c > 4$), de forma brusca. Para que la dinámica sature en el caso $c > 4$ se ha hecho una modificación al mapa logístico $x_{n+1} = g(x_n, c)$ en el intervalo $(-\infty, 0)$

$$g(x, c) = \begin{cases} cx(1-x) & , \text{ si } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}cx(1+x) & , \text{ si } x < 0 \end{cases} \quad (2.48)$$

La figura 12 ilustra una trayectoria que durante un tiempo es compleja (parece caótica), pero que finalmente converge a un punto fijo: se trata de metacaos.

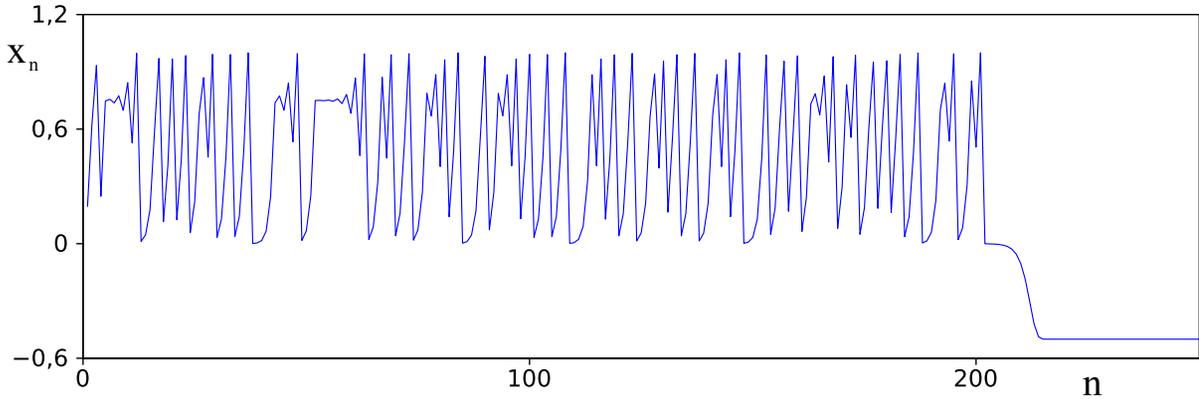


Figura 12: Transiente metacaótico del mapa (2.48) para $c = 4,001$.

Sea $\varepsilon \equiv c - 4 > 0$ el *parámetro de bifurcación* (crisis). Dada una condición inicial $x_1 \in (0, 1)$ se define la *duración del transiente metacaótico* como el entero n^* tal que $x_{n^*+1} = g(x_{n^*}, c) > 1$. La elección de este criterio se entiende al notar que $x_{n^*+2} = g(x_{n^*+1}, c) < 0$. Es directo mostrar que $g(x_1, c) > 1$ equivale a $|x_1 - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}\delta$ con $\delta \equiv \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon/4}}$. Por tanto, dado $x_1 \in (0, 1)$ la probabilidad de que $n^* = 1$ es

$$\mathbb{P}(n^* = 1) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\frac{\varepsilon}{4}}} \quad (2.49)$$

Para un valor de ε fijo generando condiciones iniciales de forma aleatoria (distribución uniforme), se obtiene un histograma como el de la figura 13a. De dicha figura es claro que la distribución de probabilidad de n^* es exponencial, salvo para los primeros valores. Se concluye que

$$\mathbb{P}(n^* = n) \approx \kappa e^{-\alpha n} \quad (2.50)$$

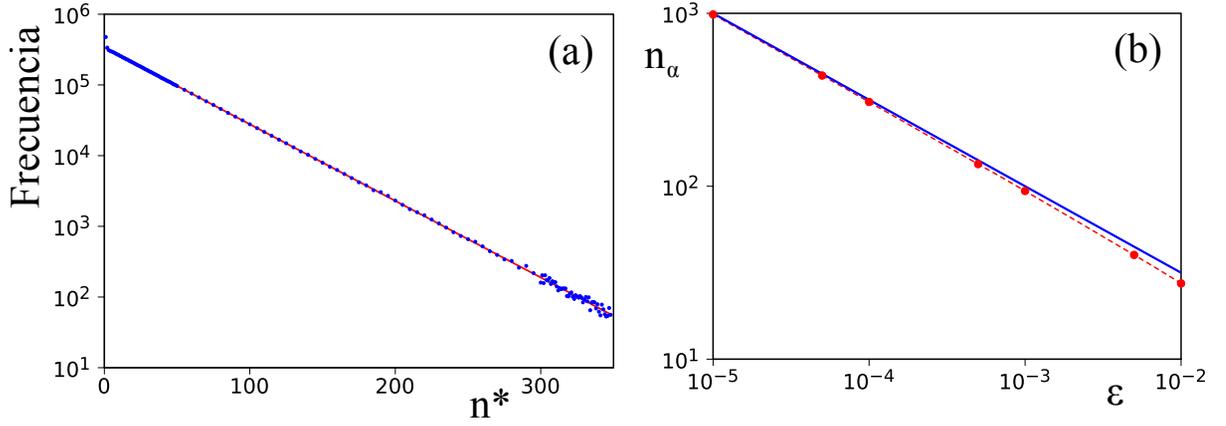


Figura 13: (a) Histograma de la duración de los transientes metacaóticos para $c = 4,005$. Los puntos azules son evaluaciones numéricas de n^* (se muestra uno de cada cinco en el tramo central). La línea roja es un ajuste lineal. (b) n_α en función de ε . Cada punto rojo corresponde al ajuste lineal de un histograma como (a). La línea azul tiene una pendiente de $-\frac{1}{2}$ y es una referencia.

Sigue que $n_\alpha \equiv \alpha^{-1}$ es un valor representativo de la duración de los transientes. En la figura 13b se muestra evaluaciones numéricas de n_α en función de ε . Entonces, el exponente crítico de la bifurcación de crisis en el mapa logístico es $\frac{1}{2}$ aproximadamente, es decir $n_\alpha \propto \varepsilon^{-\beta}$ con $\beta \approx \frac{1}{2}$. Por otro lado, al normalizar la distribución de probabilidad (2.50) se tiene $\kappa = e^\alpha - 1$. Luego $\mathbb{P}(n^* = 1) \approx 1 - e^{-\alpha} \approx \alpha$. Esto sugiere, junto a (2.49), que $n_\alpha \propto \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$. El tiempo de escape del transiente complejo sigue una ley de potencias, lo cual es característico de la crisis de borde.

2.8. Régimen convectivo y estructuras sostenidas por ruido

En esta sección se considera un sistema físico descrito por un campo escalar $u(\vec{r}, t)$ con $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$ y una ecuación de orden (temporal) $m = 1, 2, 3, \dots$. Las inestabilidades espaciales pueden ser estudiadas analíticamente cuando el sistema tiene simetría de traslación y admite una solución homogénea u_0 . Se asume que éste es el caso. Sea $\phi(\vec{r}, t) = u(\vec{r}, t) - u_0$, la idea es calcular su evolución a orden lineal en el límite de tiempos largos dada una condición inicial localizada.

2.8.1. Clasificación de la dinámica

Deissler propuso en [44] una clasificación de acuerdo a los posibles comportamientos de ϕ a tiempos largos. Genéricamente $\phi(\vec{r}, t)$ es una onda cuya *envolvente* $R_\phi(\vec{r}, t)$ crece o decrece (ver figura 14). Por lo tanto, es el comportamiento de R_ϕ el que debe considerarse. Reemplazando R_ϕ por ϕ en la clasificación de Deissler, se obtiene:

- Si $\lim_{t \rightarrow \infty} |R_\phi(\vec{r} + \vec{v}t, t)| = 0 \quad \forall \vec{r} \forall \vec{v}$ el sistema se dice *absolutamente estable*.
- Si $\lim_{t \rightarrow \infty} |R_\phi(\vec{r}, t)| = \infty \quad \forall \vec{r}$ el sistema se dice *absolutamente inestable*.
- Si $\lim_{t \rightarrow \infty} |R_\phi(\vec{r}, t)| = 0 \quad \forall \vec{r}$ y además $\lim_{t \rightarrow \infty} |R_\phi(\vec{r} + \vec{v}t, t)| = \infty \quad \forall \vec{r} \exists \vec{v}$ el sistema se dice *convectivamente estable*. Este es el *régimen convectivo*.

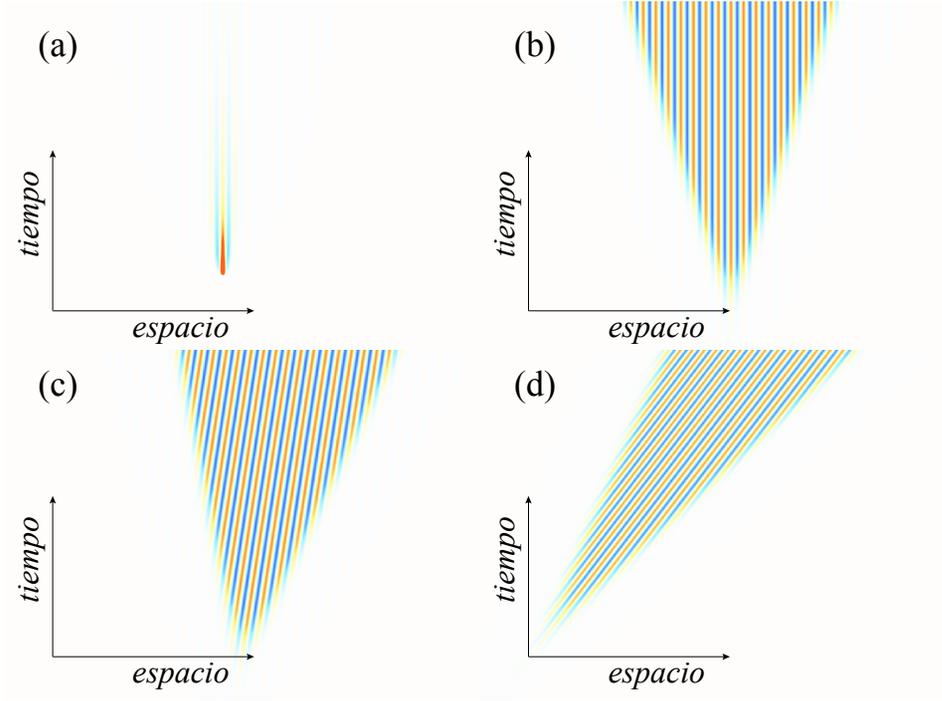


Figura 14: Simulaciones numéricas de la ecuación de Ginzburg-Landau con deriva (5.1) en una dimensión espacial. Cada diagrama espacio-temporal muestra la evolución de la parte real de $A(x, t)e^{ikx}$. (a) ilustra el caso absolutamente estable, (b) y (c) el caso absolutamente inestable, y (d) el régimen convectivo.

La figura 14 ilustra pictóricamente los tres escenarios, con la salvedad de que la dinámica es no-lineal y los modos inestables saturan.

En las subsecciones siguientes se entrega criterios cuantitativos para la clasificación deseada.

2.8.2. Relación de dispersión e inestabilidad absoluta

La dinámica lineal de ϕ la determina un operador lineal con simetría traslacional.

$$D(i\partial_t, -i\nabla)\phi = \left\{ (i\partial_t)^m + g_1(-i\nabla)(i\partial_t)^{m-1} + \dots + g_m(-i\nabla) \right\} \phi = 0 \quad (2.51)$$

Todo operador lineal con simetría traslacional tiene asociada de manera biunívoca una relación de dispersión, que relaciona la frecuencia (compleja) ω con el vector de onda \vec{k} en el modo de Fourier $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\gamma t)}$. Ella se obtiene al tomar la transformada de Fourier en el espacio \mathcal{F} y en el tiempo $\widehat{\cdot}$ en la ecuación (2.51)

$$D(\gamma, \vec{k})\mathcal{F}\widehat{\phi}(\vec{k}, \gamma) = 0 \quad (2.52)$$

que equivale a

$$D(\gamma, \vec{k}) \equiv \gamma^m + g_1(\vec{k})\gamma^{m-1} + \dots + g_m(\vec{k}) = 0 \quad (2.53)$$

Ésta es una ecuación algebraica de grado m en γ con raíces

$$\gamma = \Gamma_j(\vec{k}) \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.54)$$

donde por simplicidad se asume que todas son distintas. Se introduce la cantidad

$$\Lambda(\vec{k}) \equiv \max_j \left\{ \Im \Gamma_j(\vec{k}) \right\}. \quad (2.55)$$

en que \Im representa la función parte imaginaria. Si $\Lambda(\vec{k}) > 0$ para algún \vec{k} real, hay soluciones que crecen exponencialmente y el sistema se dice inestable. Desde luego, la relación de dispersión contiene una dependencia en ciertos parámetros $\{\mu_l\}_{l=1,\dots,p}$. En lo que sigue se considera la cantidad $h = h(\mu_l)$, una función arbitraria de los parámetros: $D = D(\gamma, \vec{k}; h)$, $\Gamma_j = \Gamma_j(\vec{k}; h)$, $\Lambda = \Lambda(\vec{k}; h)$. El umbral de la *inestabilidad absoluta* se determina mediante la condición

$$\max_{\vec{k}} \left\{ \Lambda(\vec{k}; h) \right\} = 0. \quad (2.56)$$

Genéricamente $\Lambda(\vec{k})$ es diferenciable en el(los) punto(s) donde (2.56) se cumple. Entonces (2.56) equivale a

$$\Lambda(\vec{k}; h) = 0 \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial k_i}(\vec{k}; h) = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (2.58)$$

Estas ecuaciones entregan candidatos a valores críticos \vec{k}_c y h_c para la inestabilidad absoluta, de los cuales se elige aquellos que correspondan a un máximo global, es decir $\Lambda(\vec{k}; h_c) \leq 0 \quad \forall \vec{k} \in \mathbb{R}^n$.

2.8.3. El método de Cauchy

Una de las formas de estudiar la inestabilidad convectiva es resolver primero el problema de valores iniciales mediante el método de Cauchy (ver [45], páginas 210-221). Es decir, resolver (2.51) dada una condición inicial localizada en el espacio (de soporte compacto). La condición inicial está dada por

$$\partial_t^\ell \phi(\vec{r}, 0) = \phi^{(\ell)}(\vec{r}) \quad \ell = 0, \dots, m-1 \quad (2.59)$$

Es importante restringirse a aquellas ecuaciones donde el problema de valores iniciales está bien definido (ver pág. 227 de [45]). De la teoría de ecuaciones a derivadas parciales con coeficientes constantes [46], se sabe que el problema de Cauchy está bien definido para ecuaciones de la forma (2.51) *ssi*

$$\Lambda(\vec{k}) \leq \lambda_* \quad \forall \vec{k} \in \mathbb{R}^n \quad (2.60)$$

donde $\lambda_* \in \mathbb{R}$ y $\Lambda(\vec{k})$ está dado por (2.55). Es claro que $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \Gamma_j(\vec{k})t)}$ es solución de la ecuación (2.51), entonces la superposición de ondas planas más general que satisface esta ecuación es

$$\phi(\vec{r}, t) = \sum_{j=1}^m \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} W_j(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \Gamma_j(\vec{k})t)} d^n \vec{k} \quad (2.61)$$

Luego, (2.59) y (2.61) implican

$$\phi^{(\ell)}(\vec{r}) = \partial_t^\ell \phi(\vec{r}, 0) = \sum_{j=1}^m \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} W_j(\vec{k}) \left(-i\Gamma_j(\vec{k}) \right)^\ell e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^n \vec{k} \quad \ell = 0, \dots, m-1 \quad (2.62)$$

Aplicando la transformada de Fourier se obtiene

$$\sum_{j=1}^m W_j(\vec{k}) \left(-i\Gamma_j(\vec{k})\right)^\ell = \mathcal{F}\phi^{(\ell)}(\vec{k}) \quad \ell = 0, \dots, m-1 \quad (2.63)$$

Éste es un sistema lineal de ecuaciones para $\{W_j\}_{j=1}^m$ de $m \times m$ que tiene solución única ssi $\{\Gamma_j\}_{j=1}^m$ son todos distintos¹¹. Salvo en puntos singulares, formalmente se puede escribir

$$W_j(\vec{k}) = \sum_{i=0}^{m-1} G_{ij}(\vec{k}) \mathcal{F}\phi^{(i)}(\vec{k}) \quad (2.64)$$

donde G_{ij} es un tensor característico del medio de propagación¹². Entonces

$$\phi(\vec{r}, t) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=1}^m \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} G_{ij}(\vec{k}) \mathcal{F}\phi^{(i)}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \Gamma_j(\vec{k})t)} d^n \vec{k}. \quad (2.65)$$

Con esto queda resuelto el problema de valores iniciales.

La ecuación (2.61) permite evaluar por separado la influencia de cada término en la suma. Por ejemplo, $W_j(\vec{k}) = \frac{1}{2}a\delta_{pj} \Leftrightarrow \mathcal{F}^{-1}W_j(\vec{r}) = \frac{1}{2}a\delta_{pj}\delta(\vec{r})$ ¹³ es una condición inicial puntual monomodal (sólo el p -ésimo modo es no-nulo). En consecuencia, la respuesta impulsional del p -ésimo modo aislado es

$$\phi_p(\vec{r}, t) = \frac{\frac{1}{2}a}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \Gamma_p(\vec{k})t)} d^n \vec{k} \quad (2.66)$$

2.8.4. Evaluación a tiempos largos

Las integrales (2.65) y (2.66) pueden ser aproximadas para $t \rightarrow \infty$ por métodos analíticos, por ejemplo el método de “*steepest descent*” [47]. Acá se usa una metodología algo diferente, que permite generalizar el mismo resultado a un número arbitrario de dimensiones espaciales. Sean λ y ω las partes real e imaginaria de Γ_p :

$$\Gamma_p(\vec{k}; h) = \lambda(\vec{k}; h) + i\omega(\vec{k}; h) \quad (2.67)$$

Primero se busca el máximo global de $\lambda(\vec{k}; h)$, \vec{k}_0 , a través de las condiciones

$$\partial_{\vec{k}} \lambda(\vec{k}_0; h) = 0 \quad (2.68)$$

$$\lambda(\vec{k}; h) \leq \lambda(\vec{k}_0; h) \quad \forall \vec{k} \quad (2.69)$$

La idea es que para tiempos muy largos, la región que proporcionalmente más aporta a la integral (2.66) está muy concentrada en torno del vector de onda dominante \vec{k}_0 . Con esto en mente, se

¹¹La matriz asociada a este sistema lineal es de Vandermonde, y su determinante es $(-i)^m \prod_{1 \leq i < j \leq m} (\Gamma_j - \Gamma_i)$.

¹² G depende de los Γ_j y por ende de la función D

¹³Esto equivale a $\mathcal{F}\phi^{(\ell)}(\vec{k}) = \frac{1}{2}a \left(-i\Gamma_p(\vec{k})\right)^{\ell+1-m}$

realiza expansiones de Taylor de λ y ω en torno a $\vec{k} = \pm\vec{k}_0$ ¹⁴, y luego de algo de cálculo se obtiene la siguiente aproximación.

$$\phi_p(\vec{r}, t) \approx \frac{a}{\sqrt{\det(E)}t^{\frac{n}{2}}} \cos(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega_0 t) e^{\lambda_0 t - \frac{1}{2t}(\vec{r} - \vec{c}_g t)^T E^{-1}(\vec{r} - \vec{c}_g t)} \quad (2.70)$$

donde λ_0 , ω_0 , \vec{c}_g y E son cantidades asociadas al modo principal:

$\lambda_0 \equiv \lambda(\vec{k}_0; h)$ es la tasa de crecimiento, $\omega_0 \equiv \omega(\vec{k}_0; h)$ es la frecuencia, $\vec{c}_g \equiv \partial_{\vec{k}} \omega(\vec{k}_0; h)$ es la velocidad de grupo, y $E_{ij} \equiv -\frac{\partial^2 \lambda}{\partial k_i \partial k_j}(\vec{k}_0; h)$ son coeficientes de difusividad¹⁵. Es el argumento de la exponencial en (2.70) el que determina si la envolvente de ϕ (R_ϕ) converge a cero o diverge cuando $t \rightarrow \infty$ (obviando las oscilaciones de la onda sinusoidal). Para tiempos largos, dicha cantidad puede aproximarse por $(\lambda_0 - \frac{1}{2}\vec{c}_g^T E^{-1} \vec{c}_g)t$. Se llega finalmente a una condición para el **umbral de la inestabilidad convectiva**:

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}\vec{c}_g^T E^{-1} \vec{c}_g. \quad (2.71)$$

Esto entrega *el valor crítico* h_c del parámetro h . Trivialmente, si $0 < \lambda_0 < \frac{1}{2}\vec{c}_g^T E^{-1} \vec{c}_g$ se está en el régimen convectivo: $\lim_{t \rightarrow \infty} |R_\phi(\vec{r}, t)| = 0 \quad \forall \vec{r}$ pero al mismo tiempo $\lim_{t \rightarrow \infty} |R_\phi(\vec{r} + \vec{c}_g t, t)| = \infty \quad \forall \vec{r}$.

Comentario:

Metodologías distintas pueden encontrarse en [48, 49, 50]. Por ejemplo, Hall y Heckrotte presentan en [50] un formalismo unidimensional que analiza la función $D(\gamma, k)$, tratando a las variables γ y k como números complejos.

2.8.5. Estructuras sostenidas por ruido

En sistemas físicos que admiten una solución homogénea, sometidos a deriva (o advección) y en presencia de ruido, ocurre un fenómeno llamado estructuras sostenidas por ruido. Fue descrito por primera vez por Deissler en [41] y ha sido reportado en estudios experimentales y teóricos en diversos contextos físicos. Por ejemplo en óptica no-lineal [17, 42], en fluidodinámica [51, 52] y en reacciones químicas [43, 53].

En pocas palabras, este fenómeno consiste en un balance entre la excitación por el ruido de modos inestables y la advección de ellos, en el régimen convectivo. En ausencia de ruido, una perturbación puntual excita los modos inestables, que saturan en una estructura espacial. Esta crece en extensión y al mismo tiempo es advectada fuera del sistema. Si hay perturbaciones permanentes tales como ruido, el sistema ya no podrá volver al estado homogéneo. Se establece entonces un frente fluctuante entre el estado homogéneo y la estructura. Este nuevo estado sostenido por las fluctuaciones, se denomina **estado sostenido por ruido** y la estructura subyacente recibe el nombre de **estructura sostenida por ruido** [44].

¹⁴Como ϕ_p es a valores reales, $\lambda(-\vec{k}) = \lambda(\vec{k})$. Luego siendo \vec{k}_0 un máximo de λ , $-\vec{k}_0$ también lo es.

¹⁵Claramente E es una matriz definida positiva pues \vec{k}_0 es máximo de λ .

3. Estructuras localizadas bajo acoplamiento traslacional

En este capítulo se considera el modelo propuesto en la sección 2.3, la ecuación de Swift-Hohenberg traslacional, para estudiar el efecto del acoplamiento traslacional (AT) sobre soluciones localizadas en una y dos dimensiones espaciales. Se recuerda al lector que dicho modelo, dado por (2.9), corresponde a

$$\partial_t u(\vec{r}, t) = \eta + \varepsilon u(\vec{r} + L\hat{x}, t) - u(\vec{r} + L\hat{x}, t)^3 - \nabla^2 u(\vec{r}, t) - \nabla^4 u(\vec{r}, t)$$

Concretamente se estudia las ELs más pequeñas, aquellas de una célula. Esto motivado por los estudios experimentales realizados por el grupo de óptica no-lineal y cristales líquidos del INLN de la *Université de Nice-Sophia Antipolis* en Francia [30]. Sin embargo, uno espera que el comportamiento cualitativo de las ELs más grandes sea similar a aquél de las más pequeñas. Como se muestra en las secciones siguientes, el efecto de considerar un AT, es decir $L > 0$, resulta ser la deformación y la propagación de la solución. La deformación amplifica las oscilaciones en la dirección opuesta a la propagación. Adicionalmente, las soluciones localizadas sufren tres tipos de accidentes o inestabilidades al variar el parámetro L . Estos resultados fueron incorporados a la publicación que se adjunta en el anexo (ver 9).

3.1. Experimento: montaje y resultados

A continuación se presenta el montaje y los resultados de los experimentos realizados por el grupo experimental de óptica no-lineal dirigido por la Profesora Residori en el Instituto no-lineal de Niza. Como ilustra la figura 15, el sistema consiste en una lámina de cristal líquido (CL) de unos $15 \mu m$ de espesor, sobre la cual se hace incidir un rayo láser, que atraviesa el medio dos veces al rebotar en un espejo adosado al CL.

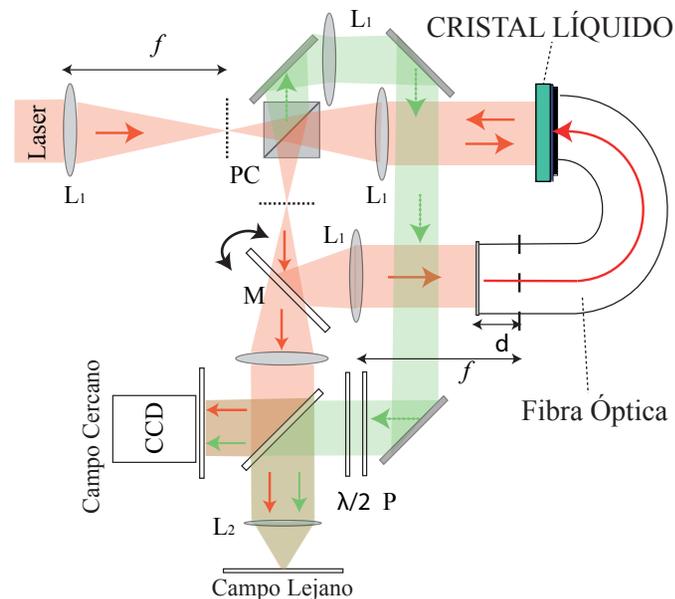


Figura 15: Montaje experimental de la válvula de cristal líquido con retro-inyección óptica [30].

El rayo es reinyectado sobre la cara trasera del espejo, donde hay un material fotoconductor que convierte la intensidad local de la luz en un voltaje entre los extremos de la capa de CL. El campo

eléctrico asociado es capaz de reorientar las moléculas del CL y modificar los índices de refracción del medio¹⁶. Por otra parte, la luz que atraviesa el CL sale modificada en función de estos índices de refracción. En pocas palabras, el sistema está auto-acoplado. El AT surge de forma natural al desplazar la reinyección de la luz, que equivale a desalinear el circuito óptico inclinando uno de sus espejos. Los experimentos muestran que las ELs se propagan a velocidad constante y se deforman

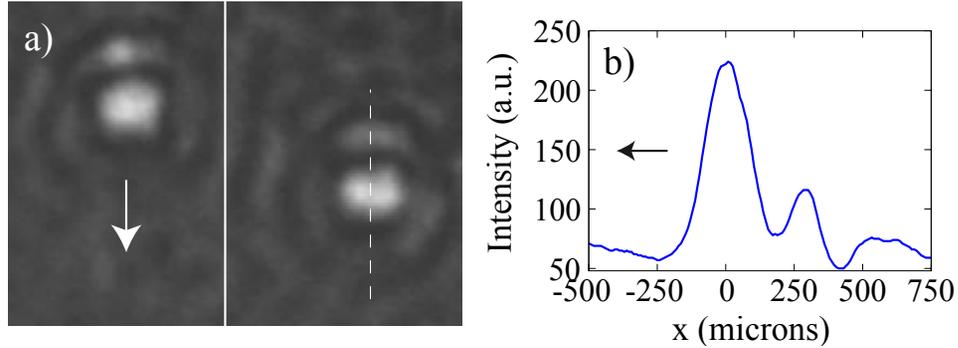


Figura 16: Propagación y deformación de ELs [30]. (a) Intensidad de la luz en el plano en escala de grises. La flecha blanca indica la dirección del AT. (b) Perfil de intensidad a lo largo de la línea segmentada en (a), según la dirección de propagación.

en la dirección del AT. La deformación consiste en oscilaciones espaciales amortiguadas en la dirección opuesta al desplazamiento (ver figura 16).

3.2. Propagación y deformación

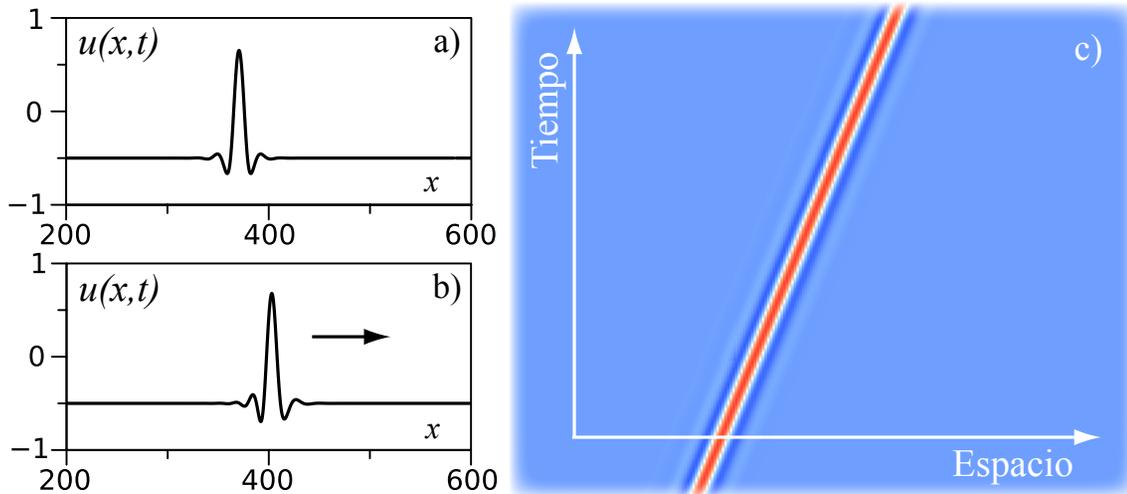


Figura 17: Solución localizada unidimensional observada en el modelo de Swift-Hohenberg traslacional para $(\varepsilon, \eta, \nu) = (0, 17, -0,04, 1)$ y (a) $L = 0$, (b) $L = 0,8$ la propagación es en el sentido de la flecha. (c) Evolución espacio-temporal para $L = 0,8$.

Como se menciona al principio del capítulo, el efecto más obvio del AT sobre las ELs es la propagación y deformación de éstas (ver figura 17). La figura 18a muestra una EL bidimensional

¹⁶Los índices de refracción del medio son determinados por la orientación local promedio de las moléculas del CL.

deformada por el AT. El efecto del AT tanto en una como en dos dimensiones espaciales es cualitativamente idéntico. Sea $f_0(\vec{r})$ una EL de la ecuación (2.9) para $L = 0$, en una o dos dimensiones

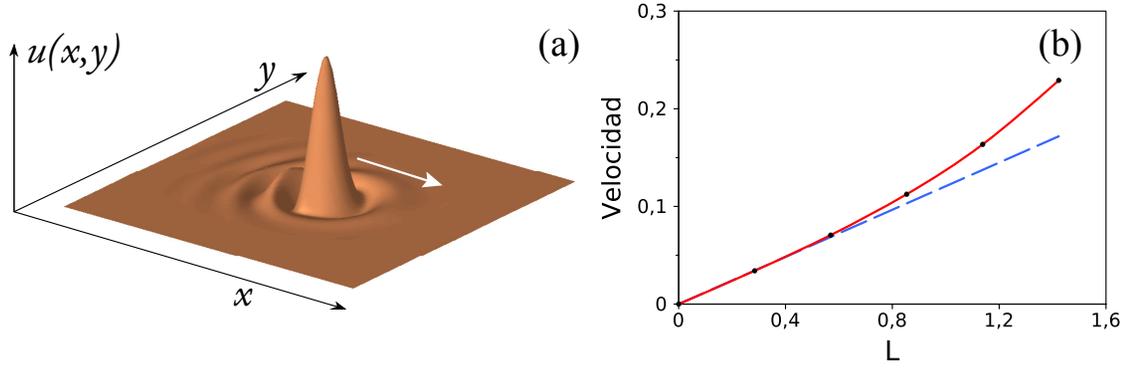


Figura 18: (a) EL bidimensional obtenida a partir del modelo (2.9) para $(\varepsilon, \eta, \nu, L) = (0,5, -0,05, 1, 1,5)$. Notar cómo las oscilaciones traseras están amplificadas. La flecha blanca indica la dirección de propagación. (b) Velocidad de solución localizada bidimensional en función de L , para $(\varepsilon, \eta, \nu) = (0,005, -6 \cdot 10^{-5}, 0,1)$. Los puntos negros son datos numéricos evaluados siguiendo el centro de masa de la EL. La línea segmentada es la predicción lineal (3.2).

espaciales. Para calcular la velocidad inducida al aumentar L , se asume que la solución es de la forma $u(\vec{r}, t) = f_0(\vec{r} - \vec{c}t) + W^{[1]}(\vec{r}, t)$, donde $W^{[1]}$ son correcciones de $\mathcal{O}(L)$ que dan cuenta del auto ajuste de la solución ante el AT. Por simetría la estructura se propaga en la dirección del desplazamiento con una velocidad $\vec{c} = c\hat{x}$. Reemplazando esto en la ecuación (2.9) hasta orden lineal en L , resulta

$$\mathcal{L}W^{[1]} = -\partial_x f_0(c + L(\varepsilon - 3f_0^2)) \quad (3.1)$$

donde $\mathcal{L} = \varepsilon - 3f_0^2 - \nabla^2 - \nabla^4$ es el operador lineal asociado a la solución $f_0(\vec{r})$ a orden cero en L . La invariancia de traslación tiene asociada un modo de valor propio cero, el modo de Goldstone:

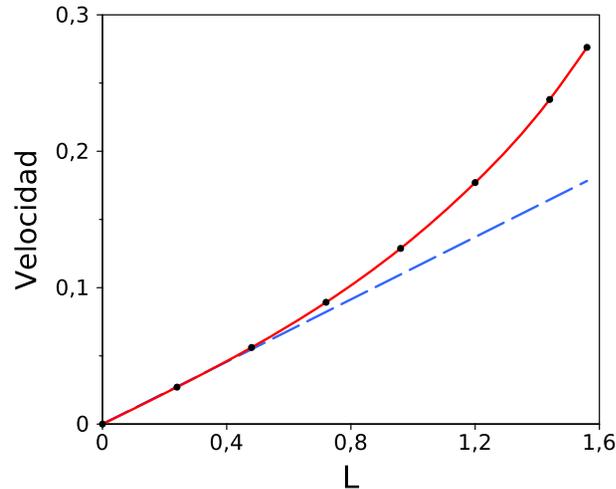


Figura 19: Velocidad de solución localizada unidimensional en función de L para $(\varepsilon, \eta, \nu) = (0,6, -0,04, 1)$. Los puntos negros son datos numéricos evaluados siguiendo el centro de masa de la EL. La línea segmentada es la aproximación lineal (3.2), evaluada numéricamente.

$\partial_x f_0(\vec{r})$ ¹⁷ [5]. Como $\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}$, con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int f^*(\vec{r}) g(\vec{r}) d\vec{r}$, se concluye que $\partial_x f_0$ es un elemento del núcleo (kernel) de \mathcal{L}^\dagger . Usando la condición de solubilidad (ver 2.5), se obtiene

$$c = L \left(3 \frac{\langle f_0^2, (\partial_x f_0)^2 \rangle}{\langle \partial_x f_0, \partial_x f_0 \rangle} - \varepsilon \right) + \mathcal{O}(L^3) \quad (3.2)$$

Los órdenes pares, en particular el cuadrático, no entran porque c es una función impar en L (por isotropía). Notar que esta ecuación es válida en una o más dimensiones espaciales. Esta expresión muestra el rol de los términos traslacionales lineal y no-lineal de la ecuación (2.9) en la velocidad de propagación. Para valores de ε pequeños o negativos, la velocidad es positiva, pero si ε es suficientemente grande, la velocidad cambia de signo. La figura 19 muestra la dependencia de la velocidad en L , así como la aproximación lineal de la ecuación (3.2), en una dimensión espacial. La figura 18b ilustra lo mismo para dos dimensiones espaciales. Por lo tanto, la expresión anterior enseña que el término lineal hace que las estructuras se propaguen en contra del AT (para $\varepsilon > 0$) y los términos no lineales inducen una velocidad en la dirección del AT.

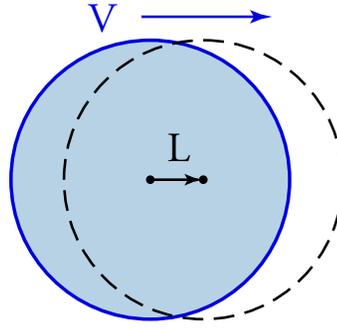


Figura 20: Esquema que representa el AT bajo la forma de una interacción entre ELs, y la velocidad de propagación resultante.

La propagación y deformación pueden entenderse intuitivamente considerando que el AT sería una especie de interacción de la EL con otra EL desplazada en L (ver figura 20). De ser atractiva esta interacción, la EL se mueve en el sentido del desplazamiento. Si es repulsiva, el movimiento es en el sentido opuesto al desplazamiento del AT.

3.3. Mecanismos de desestabilización

En esta sección se presentan los resultados obtenidos sobre las inestabilidades sufridas por las ELs, que resultaron ser de tres tipos:

- nucleación de un patrón ó inestabilidad espacial
- desaparición por nodo-silla (*saddle-node*)
- radiación de frentes¹⁸

En la figura 21, se muestra la región de estabilidad de la solución localizada unidimensional de una célula para $L = 0$ y $L = 0,8$.

¹⁷En realidad la derivada puede tomarse en cualquier dirección.

¹⁸Solamente se observa en una dimensión espacial.

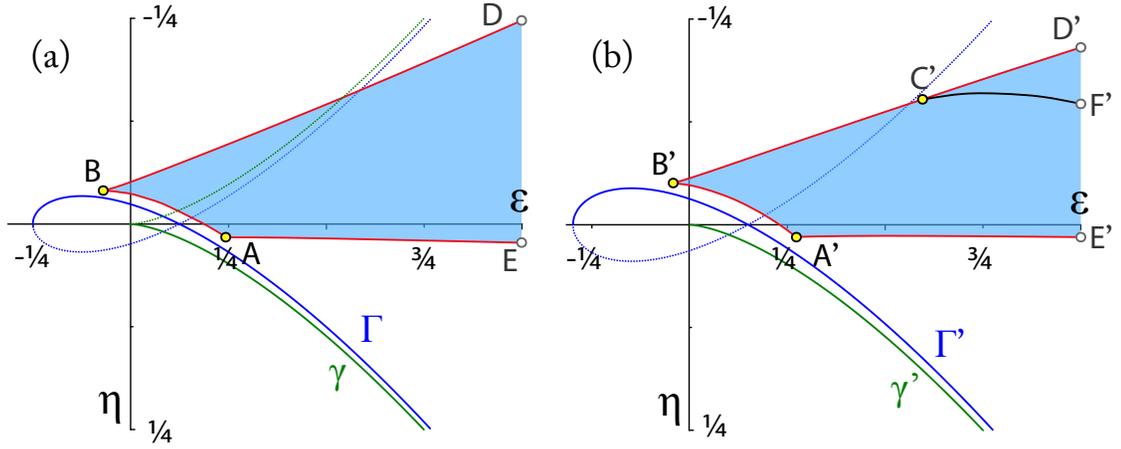


Figura 21: Diagrama de bifurcación en el espacio (ε, η) ($\nu = 1$) de la ecuación de Swift-Hohenberg (a) sin ($L = 0$) y (b) con AT ($L = 0,8$). La curva γ (o γ') separa la región de coexistencia de soluciones uniformes. Bajo esta curva hay un solo estado uniforme, denotado por u_0 . Sobre la curva γ (o γ'), el sistema tiene tres estados uniformes, dos estables y uno inestable. La curva Γ (o Γ') marca la inestabilidad espacial del estado u_0 . En la región sombreada \overline{ABDE} ($\overline{A'B'D'E'}$) la EL unidimensional más pequeña (de una célula) soportada en el estado homogéneo inferior es estable. Para $L = 0,8$, en la región $\overline{C'D'F'}$ la solución localizada se mueve hacia atrás, en el sentido opuesto al acoplamiento.

3.3.1. Nodo-Silla (Saddle-Node)

Cuando se disminuye el parámetro η , el máximo de la EL baja. Este comportamiento continúa hasta que uno encuentra un valor crítico η_c , para el cual la EL se desvanece convergiendo al estado homogéneo subyacente. En este proceso el tamaño de la solución disminuye lentamente hasta que en un momento dado cae abruptamente, como ilustra la figura 22. Para $L=0$ esto puede obtenerse disminuyendo η de modo de cruzar la línea \overline{BD} en la figura 21a, y para $L = 0,8$ cruzando la línea $\overline{B'D'}$ en la figura 21b. Alternativamente esto puede gatillarse aumentando L para ciertos valores de (ε, η) . Para caracterizar este proceso se hizo simulaciones numéricas, considerando la norma relativa de la EL N_{rel} , definida por

$$N_{rel}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u(x,t) - u_0)^2 dx \quad (3.3)$$

donde u_0 denota el estado homogéneo que soporta la EL.

La figura 22 muestra la evolución en el tiempo de N_{rel} de una EL, donde se aprecia que por un largo tiempo $N_{rel}(t)$ disminuyen lentamente -como si fuera a converger a un valor finito-, y luego repentinamente cae hasta cero. El sistema converge finalmente a u_0 . La desaparición repentina de un equilibrio es típico de una bifurcación nodo-silla [31], y se llama *fantasma* o *ruina* [22]. Esta denominación se refiere a un estado marginalmente inestable que permanece por largo tiempo y desaparece bruscamente¹⁹. Comportamientos similares han sido observados en solitones disipativos en sistemas forzados paramétricos: ver [9]. La duración o tiempo de residencia de estos transientes

¹⁹El grupo experimental de Niza reporta el mismo comportamiento cualitativo en las ELs.

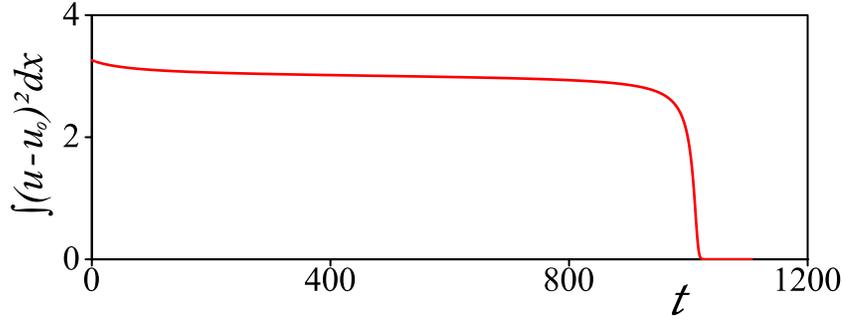


Figura 22: Evolución temporal de la norma relativa de una EL, dada por la ecuación (3.3), para $(\varepsilon, \eta, \nu) = (0, 2, -0, 01, 0, 3)$ y $L\sqrt{\nu} = 0, 458$.

diverge con una ley de potencia $\frac{1}{2}$ al aproximarse al punto de bifurcación [22]. Ahora se explica la estrategia usada para estudiar estos transientes dinámicos de las ELs inestables. Poniendo los parámetros del modelo (2.9) en un punto cercano a la bifurcación ($L > L_c$), se comienza a disminuir el parámetro de desplazamiento L . Para cada valor de L se calcula una cantidad auxiliar, la norma relativa acumulada²⁰:

$$A(L) = \int_{t_0}^{+\infty} N_{rel}(t) dt \quad (3.4)$$

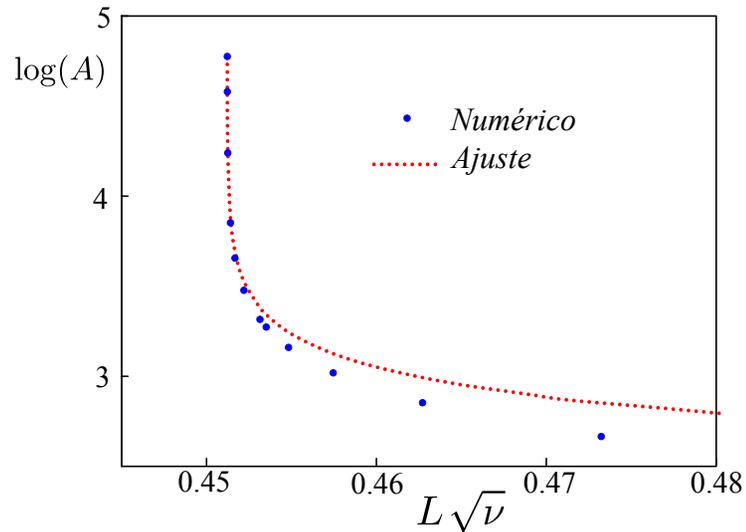


Figura 23: Norma relativa acumulada en función del parámetro de desplazamiento L . Los puntos azules representan valores evaluados numéricamente del modelo (2.9), para $(\varepsilon, \eta, \nu) = (0, 2, -0, 01, 0, 3)$. La curva punteada es un ajuste asintótico de ley de potencia.

Como consecuencia del teorema del valor medio, $A(L)$ es proporcional al tiempo de residencia T cerca de la bifurcación, y por lo tanto también diverge con una ley de potencia $\frac{1}{2}$ cuando L tiende al valor crítico L_c . La figura 23 confirma esta inferencia. En ella se muestra la norma relativa

²⁰Se usa siempre la misma EL propagativa como condición inicial.

acumulada $A(L)$ medida cerca de la bifurcación, y un ajuste numérico hecho del siguiente modo.

$$A(L) = A_0 \left(\frac{L}{L_c} - 1 \right)^\alpha \quad (3.5)$$

Tomado grupos de cuatro puntos contiguos, y haciendo ajustes de mínimos cuadrados para la expresión (3.5), se obtiene valores de A_0 , del exponente α y del punto de bifurcación L_c . Enseguida se hace un ajuste de ley de potencia para obtener los valores asintóticos de α y L_c . El resultado logrado es $\alpha = 0,50003$ y $L_c\sqrt{v} = 0,451220$, para $(\varepsilon, \eta, v) = (0,2, -0,01, 0,3)$.

Lo anterior confirma que se trata de una bifurcación de nodo-silla. Notar que el ajuste solamente es válido cerca de la bifurcación, y que al alejarse la ley de potencia cambia e incluso deja de ser válida.

3.3.2. Inestabilidad formadora de patrones

Al aumentar L y con (ε, η) apropiados, o al aumentar suficientemente η , la amplitud de las oscilaciones espaciales de la cola trasera de la EL propagativa comienza a crecer, dando lugar a un patrón emergente. La figura 24 muestra cómo ocurre este proceso. El crecimiento de las oscilaciones espaciales amortiguadas de la EL, es una señal de que el estado homogéneo que subyace está cerca de volverse inestable. En el mismo sentido, como puede verse en la figura 21, el proceso recién descrito ocurre al cruzar la curva \overline{AB} ($\overline{A'B'}$), la cual esta cerca de la curva Γ (Γ').

A continuación se presenta el cálculo de estabilidad del estado homogéneo u_0 , solución de (3.6), que corresponde a determinar las curvas Γ y Γ' de la figura 21. Esto entrega una cota para la estabilidad de las EL: si la solución u_0 es inestable, ninguna EL puede ser estable.

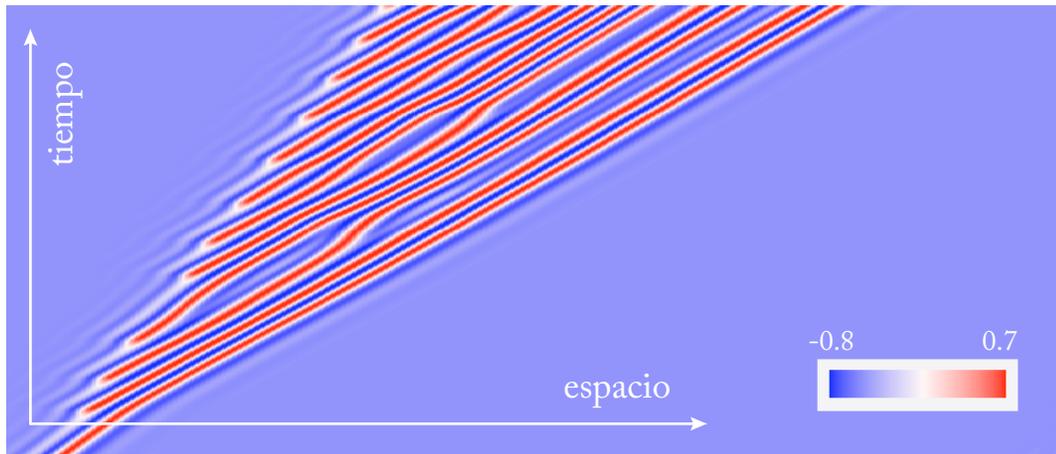


Figura 24: Diagrama espacio temporal que muestra la nucleación de un patrón a partir de EL inestable. $(\varepsilon, \eta, v, L) = (0,18, -0,04, 1,0, 1,2)$.

$$\eta + \varepsilon u_0 - u_0^3 = 0 \quad (3.6)$$

Igual que en la subsección 2.2.2, la estabilidad lineal de u_0 puede estudiarse determinando el crecimiento de los modos de Fourier de una perturbación. Introduciendo el *Ansatz* $u = u_0 + (w e^{tkx + \Lambda(k)t} + c.c.)$ en la ecuación (2.9) y usando (3.6), se obtiene la tasa de crecimiento $\sigma(k) = \Re(\Lambda(k))$

$$\sigma(k) = \chi \cos(kL) + k^2 - k^4 \quad (3.7)$$

donde por comodidad se introdujo el parámetro $\chi = \varepsilon - 3u_0^2 = \chi(\varepsilon, \eta)$. La condición para estar en la inestabilidad espacial, es que el máximo de $\sigma(k)$ toque cero de forma tangente. Esto se traduce en dos ecuaciones.

$$\chi \cos(kL) + k^2 - k^4 = 0 \quad (3.8)$$

$$-\chi L \sin(kL) + 2k - 4k^3 = 0 \quad (3.9)$$

Introduciendo la variable auxiliar

$$\psi = kL \quad (3.10)$$

de forma directa se llega a la siguiente relación trascendental entre ψ y χ

$$\frac{\chi}{2} [\psi \sin \psi + 4 \cos \psi]^2 + \psi \sin \psi + 2 \cos \psi = 0, \quad (3.11)$$

y a una expresión para k_c :

$$k_c = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sqrt{1 - 4\chi \psi \sin \psi}}. \quad (3.12)$$

Una característica importante de la curva de inestabilidad $L_c = L_c(\chi)$ es la existencia de *un único máximo*. En efecto, al derivar implícitamente la ecuación (3.8) con respecto a χ ($L = L(\chi)$, $k = k(\chi)$), y usando la ecuación (3.9), resulta

$$\frac{dL}{d\chi}(\chi) = \frac{\cot(kL)}{k\chi} \quad (3.13)$$

Entonces $\frac{dL}{d\chi}(\chi) = 0$ ssi $\psi = \psi_m = \frac{\pi}{2}(2m+1)$ con $m \in \mathbb{N}$, que equivale a $\chi_m = (-1)^{m+1} \frac{4}{\pi(2m+1)}$. Al evaluar numéricamente la relación (3.11) y combinarla con las ecuaciones (3.10) y (3.12), se obtuvo la curva de inestabilidad, representada por la curva continua de la figura 25. El gráfico aclara que para el primer umbral de inestabilidad, el único valor significativo de m es $m=0$, es decir, $\chi_0 = -\frac{4}{\pi}$, $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$. Reemplazando estos dos valores en (3.12) resulta $k_c^{(0)} = 1$ y luego $L_{max} = \frac{\pi}{2}$.

Antes de continuar, hay un comentario que debe hacerse. De la ecuación (3.11), es directo probar que para $L=0$, $\chi = -\frac{1}{4}$. Por otra parte fijar χ equivale a trazar una curva en el plano (ε, η) dada por

$$\eta_\chi(\varepsilon) = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon - \chi}{3}} \left(\frac{2\varepsilon + \chi}{3} \right) \quad (3.14)$$

Ésta es la curva Γ (Γ') en la figura 21, y tiene la forma de un pez, cuyas dimensiones crecen monotonamente con $-\chi$ ($\chi < 0$). Numéricamente, el estado homogéneo u_0 muestra ser estable para valores de η por sobre $\eta_\chi(\varepsilon)$ donde $\chi < -\frac{1}{4}$ siempre. Esto aclara el rango de valores significativo para χ : $\chi \in]-\infty, -\frac{1}{4}]$.

Para realizar un cálculo analítico aproximado de la relación (3.11), es conveniente entonces introducir el parámetro auxiliar $z = \sqrt{-(\frac{1}{4} + \chi)} > 0$. Realizando una expansión de Taylor de la ecuación (3.11), en el límite $|z| \ll 1$ se obtiene

$$\psi = 2\sqrt{2} \left(z - \frac{7}{6}z^3 \right) + \mathcal{O}(z^5) \quad (3.15)$$

y en el límite $z \gg 1$ se obtiene

$$\psi = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \mathcal{O}(z^{-3}) \quad (3.16)$$

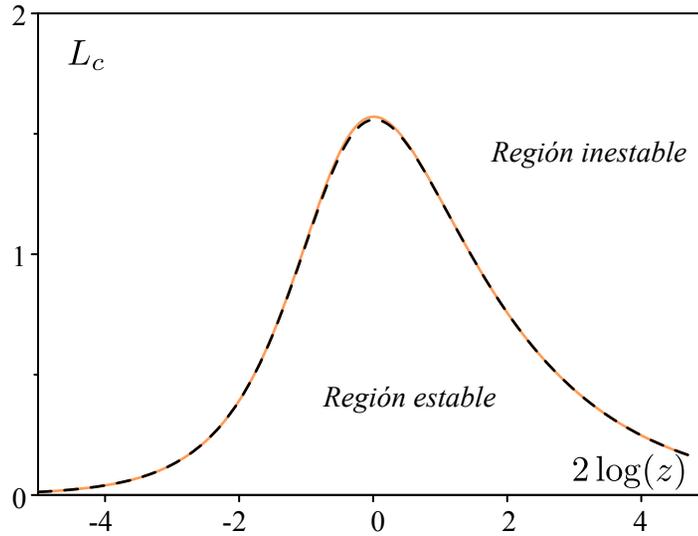


Figura 25: Diagrama de bifurcación para la inestabilidad espacial del estado homogéneo. Aquí los parámetros (η, ε) entran en el parámetro auxiliar $z = \sqrt{-\left(\frac{1}{4} + \chi\right)} > 0$. La curva continua es la evaluación numérica del primer umbral de inestabilidad (ecuaciones (3.10), (3.11) y (3.12)), y la curva punteada es la aproximación por función racional dada por la definición (3.17).

donde

$$\begin{aligned} 0 &= b_0 + 4 \cot b_0 \\ b_0 &= 2.04300861\dots \end{aligned}$$

y las constantes b_1 y b_2 quedan en función de b_0 y $t_0 = -\frac{1}{\cos \psi_0} = 2,19849035\dots$

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{-8}{\sqrt{t_0} b_0 \left(3t_0 + \frac{1}{t_0}\right)} = -0,37458307\dots \\ b_2 &= \frac{-4}{b_0 (3t_0^2 + 1)^2} \left\{ \frac{64}{b_0^2 \left(3t_0 + \frac{1}{t_0}\right)} + t_0 (t_0^2 + 3)^2 \right\} = -0,15806785\dots \end{aligned}$$

Aplicando el formalismo de la función racional, explicado más abajo, se obtiene la siguiente expresión aproximada para $\psi(z)$

$$\psi(z) \approx \psi_r(z) = \frac{c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3}{1 + d_1 z + d_2 z^2 + d_3 z^3} \quad (3.17)$$

donde $c_1 = 2,8284271247\dots$, $c_2 = 7,0190285102\dots$, $c_3 = 8,6007962429\dots$, $d_1 = 2,4816013285\dots$, $d_2 = 4,2075073402\dots$ y $d_3 = 4,2098678343\dots$

Usando la ecuación (3.12) y la aproximación recién encontrada, se graficó la curva punteada de la figura 25. La diferencia relativa entre las áreas bajo la curva punteada y continua (cálculo numérico) es 10^{-7} . Es notable que con una función racional con pocos coeficientes, pueda aproximarse tan bien una función. Se trata por lo tanto de un método muy eficiente y práctico.

Aproximación por función racional Aquí se explica un método para aproximar una función $f(x)$ por otra función racional $f_r(x)$. La función $f_r(x)$ se construye a partir del desarrollo de Taylor de $f(x)$ en $x = 0$ y del comportamiento asintótico de $f(x)$ para $x \rightarrow \infty$ (se asume que esto es posible).

$$f(x) = \begin{cases} a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \mathcal{O}(x^4) & |x| \ll 1 \\ b_0 + b_1x^{-1} + b_2x^{-2} + \mathcal{O}(x^{-3}) & x \gg 1 \end{cases} \quad (3.18)$$

en el caso en que $f(0) \neq 0$ se hace la transformación $f \rightarrow f - f(0)$.

$$f(x) \approx f_r(x) = \frac{c_0 + c_1x + c_3x^3}{1 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3} \quad (3.19)$$

Por simplicidad se corta el desarrollo, de modo de tomar sólo algunos coeficientes, aquí seis. Imponiendo que los primeros tres términos del desarrollo de Taylor de $f_r(x)$ en $x = 0$ coincida con el de $f(x)$, se obtiene

$$c_1 = a_1 \quad (3.20)$$

$$c_2 = a_2 + a_1d_1 \quad (3.21)$$

$$c_3 = a_3 + a_2d_1 + a_1d_2 \quad (3.22)$$

y haciendo lo mismo en $x \rightarrow \infty$ en la variable x^{-1} ,

$$c_1 = b_0d_1 + b_1d_2 + b_2d_3 \quad (3.23)$$

$$c_2 = b_0d_2 + b_1d_3 \quad (3.24)$$

$$c_3 = b_0d_3 \quad (3.25)$$

Igualando (3.20) con (3.23), (3.21) con (3.24) y (3.22) con (3.25), se obtiene tres ecuaciones lineales cuya forma matricial es

$$\begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ -a_1 & b_0 & b_1 \\ -a_2 & -a_1 & b_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Se invierte numéricamente la matriz para obtener d_1 , d_2 y d_3 , y al reemplazar en las ecuaciones (3.20), (3.21) y (3.22), se calcula c_1 , c_2 y c_3 .

La gran ventaja de esta clase de método es que uno obtiene una buena aproximación global y no solamente local. Es importante mencionar que si bien la teoría de aproximaciones de Padé no corresponde con el método recién descrito (ver página 1 de [29]), fue precisamente dicha teoría la que lo inspiró.

3.3.3. Emisión de frentes

Para un parámetro de desplazamiento L fijo, ε grande y positivo, y η negativo y pequeño, se observa otro mecanismo de desestabilización de ELs. El estado localizado se desestabiliza a través de la emisión de dos frentes contra-propagativos. Esto ocurre para cualquier valor de L . Para $L > 0$, debido al AT, mientras el frente de adelante apenas se propaga hacia adelante, el frente trasero se propaga en la dirección opuesta y con velocidad mayor. La figura 26 muestra el diagrama espacio-temporal de este proceso. Esto ocurre al cruzar la curva \overline{AE} ($A'E'$) en el espacio de parámetros de

la figura 21. Estos frentes aparecen porque el estado homogéneo de arriba es más estable que el de abajo. Así, la emisión de un par de frentes permite llegar al estado más estable. La dinámica de frentes en la válvula de cristal líquido con retro-inyección óptica, ha sido caracterizada experimentalmente en [32, 33].

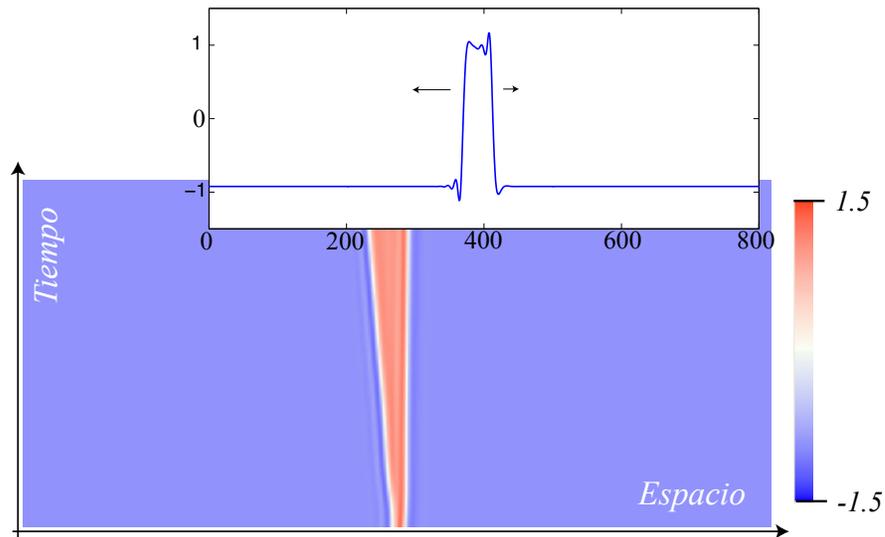


Figura 26: Diagrama espacio-temporal que ilustra la emisión de frentes en el modelo (2.9). Parámetros: $(\varepsilon, \eta, \nu, L) = (0,9, 0,04, 1,0, 0,76)$.

4. Dinámica de patrones bajo acoplamiento traslacional

En este capítulo se considera el modelo propuesto en la sección 2.3, la ecuación de Swift-Hohenberg traslacional, para estudiar el efecto del acoplamiento traslacional (AT) sobre soluciones periódicas en una dimensión espacial y con condición de borde periódica. Se recuerda al lector que dicho modelo, dado por (2.9), tiene la forma

$$\partial_t u(x,t) = \eta + \varepsilon u(x+L,t) - u(x+L,t)^3 - \partial_{xx} u(x,t) - \partial_{xxx} u(x,t) \quad (4.1)$$

La dinámica que presentan las soluciones periódicas incluye comportamientos caóticos espacio-temporales y una ruta al caos análoga a la crisis descrita para sistemas dinámicos de baja dimensión. Estos y otros conceptos de importancia son definidos en la sección 2.7.

4.1. Patrones bajo acoplamiento traslacional

En esta sección se presenta la dinámica de soluciones periódicas de la ecuación (2.9) en una dimensión espacial, así como los cambios y accidentes que ellas experimentan al variar el parámetro de desplazamiento L . Se muestra que los patrones sufren una inestabilidad de fase, llevando a una compleja dinámica de intermitencia espacio-temporal.

4.1.1. Ondas viajeras

Para valores moderados de L los patrones se propagan como ilustra la figura 27a, por lo que devienen en ondas viajeras. Su velocidad y amplitud aumentan con L (ver figura 27b), pero no sufren grandes deformaciones.

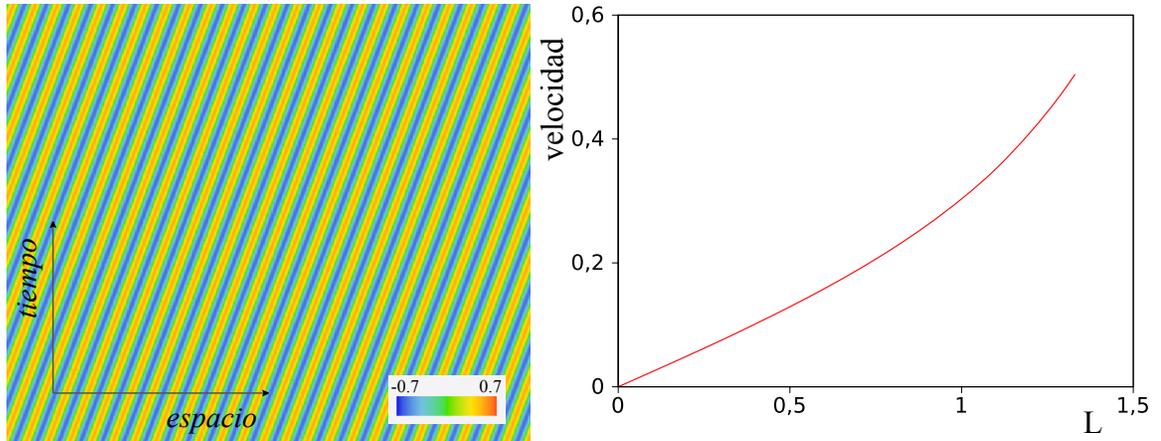


Figura 27: (a) Diagrama espacio-temporal de un patrón propagativo en el modelo (4.1), con $(\varepsilon, \eta, \nu, L) = (-0,08107, -0,01631, 1,0, 0,8)$. (b) Velocidad del patrón para $(\varepsilon, \eta, \nu) = (-0,08107, -0,01631, 1,0)$.

4.1.2. Inestabilidad de fase

Para un valor determinado de L y fijando todos los otros parámetros, el patrón sufre una inestabilidad. En el contexto de ondas viajeras, el modo más “peligroso” es el modo de Goldstone²¹: tiene valor propio temporal nulo. Al escribir la ecuación de fase asociada a la ecuación de amplitud de una onda esto queda en evidencia. Por ejemplo para la ecuación de Ginzburg-Landau (2.10) se obtiene una relación de dispersión de la forma $\sigma_\varphi(k) = -k^2$. La fase no es estructuralmente estable: ante una modificación infinitesimal en la dinámica ella podría desestabilizarse. No así el módulo, cuya relación de dispersión es $\sigma_R(k) = -2\mu - k^2$. Se trata entonces de una inestabilidad de fase.

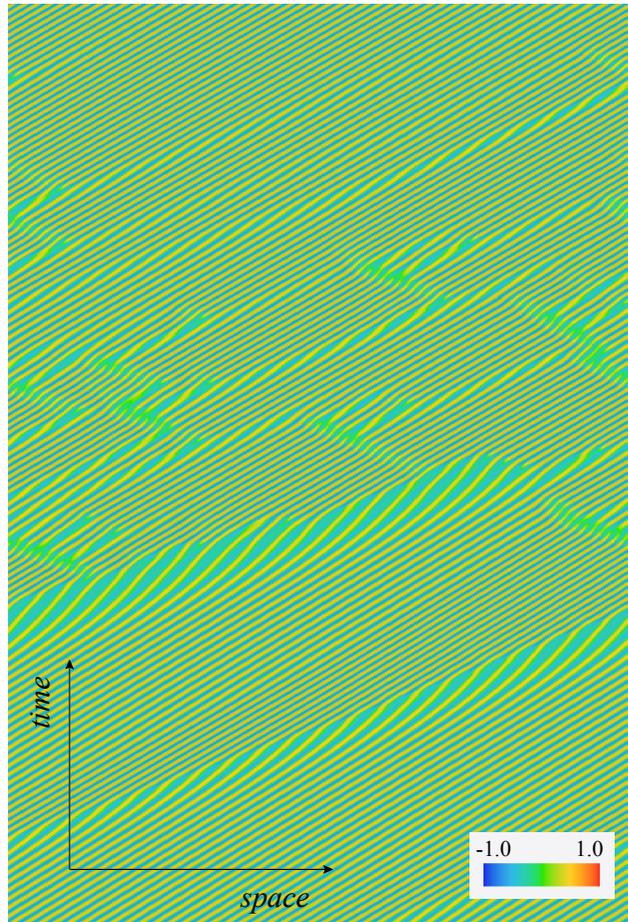


Figura 28: Diagrama espacio-temporal que muestra la desestabilización de un patrón propagativo en el modelo (4.1). Luego de un transiente desordenado, el sistema converge a otro patrón propagativo, esta vez estable. $(\varepsilon, \eta, \nu, L) = (-0,08107, -0,01631, 1,0, 1,32)$

La inestabilidad da lugar a un transiente complejo que evoluciona hacia un patrón propagativo estable y distinto del patrón inicial (ver fig. 28). La duración altamente variable del transiente sugiere la presencia de un atractor caótico hiperbólico (“*chaotic saddle*” en inglés). De hecho, como se muestra a continuación, para L aún mayor se entra en un régimen caótico. La duración típica de los transientes aumenta al acercarse a la inestabilidad, lo que indica que se trata de meta-caos. Para verificar esto, sería necesario realizar una estadística representativa sobre el espacio funcional

²¹Es el modo asociado a la invariancia ante traslaciones espaciales y está dado por $\partial_x u(x, t)$.

de condiciones iniciales, lo cual resulta absolutamente prohibitivo incluso para una discretización espacial modesta²².

4.1.3. Caos espacio-temporal

Para valores de L más grandes que un cierto L_c el comportamiento complejo se vuelve permanente (ver fig. 29). Se trata de caos puesto que el mayor exponente de Lyapunov es estrictamente positivo en esta región, como muestra la figura 30b. Cuando se pasa de $L < L_c$ a $L > L_c$ el atractor hiperbólico se estabiliza dando origen a un régimen de caos espacio-temporal, más concretamente a *intermitencia espacio-temporal*. Tratándose de una dinámica no-variacional (la ecuación (4.1) carece de un funcional de Lyapunov [23]), la emergencia de comportamientos permanentes como el caos era *a priori* una posibilidad.

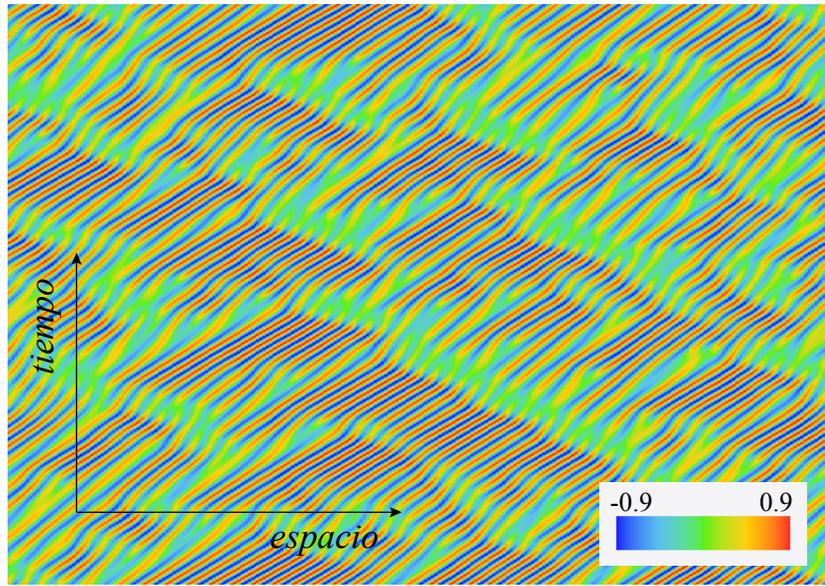


Figura 29: Diagrama espacio-temporal de régimen de intermitencia espacio-temporal de la ecuación (4.1). $(\varepsilon, \eta, \nu, L) = (-0,08107, -0,01631, 1,0, 1,5)$

La intermitencia consiste en una alternancia aperiódica entre orden (comportamiento laminar) y desorden (comportamiento turbulento). Dicha alternancia se manifiesta en un continuo de escalas en el espacio y el tiempo como ilustra la figura 31a, de ahí el nombre intermitencia espacio-temporal. Un comportamiento similar ha sido descrito para la ecuación de Ginzburg-Landau [39]. En dicha ecuación, la inestabilidad de fase de los patrones lleva inmediatamente a intermitencia espacio-temporal mediada por defectos, sin pasar por una fase de meta-caos como en la ecuación (2.9). Para ambas ecuaciones los largos y la duración de las zonas laminares²³ presentan distribuciones

²²Siendo N el número de puntos en la grilla, se desea muestrear el conjunto $\Lambda_N = [a, b]^N \subset \mathbb{R}^N$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Para hacerlo de forma representativa se debe generar $M = m^N$ elementos de Λ_N de manera aleatoria, donde $m \in \mathbb{N}$ es el tamaño de un muestreo representativo de $[a, b]$. Siendo $N = 100$ y $m = 50$ cantidades modestas, se tiene que $M = 10^{100}$. Si el tiempo de cálculo numérico de los transientes complejos es en promedio de ~ 1 s, se necesitaría de $\sim 10^{100} \text{ s} \approx 3,17 \cdot 10^{92} \text{ años}$ para muestrear.

²³El criterio empleado para definir las zonas laminares se basa en el campo de velocidad local (ver capítulo 6) $v(x, t)$ (ver figura 31b): el punto (x, t) está en una zona laminar si $|v(x, t)| > \langle\langle |v| \rangle\rangle$, donde $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ es el promedio espacio-temporal.

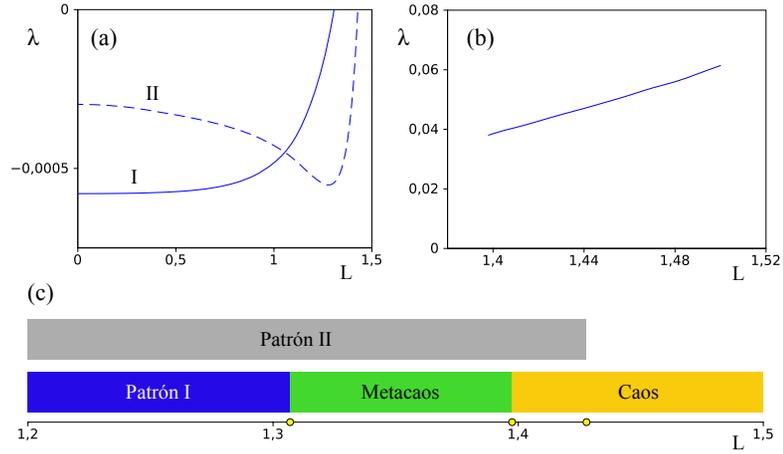


Figura 30: (a) Segundo mayor exponente de Lyapunov para dos patrones propagativos (el mayor es cero: modo de Goldstone) (b) Mayor exponente de Lyapunov del atractor caótico. (c) Regiones de existencia de patrones y de comportamientos espacio-temporales meta-caótico y caótico. Parámetros $(\varepsilon, \eta, \nu) = (-0,08107, -0,01631, 1,0)$

de probabilidad cuyas colas siguen leyes exponenciales (ver figura 32 y [39]). Esto sugiere entonces que existe una fractalidad asociada a la intermitencia.

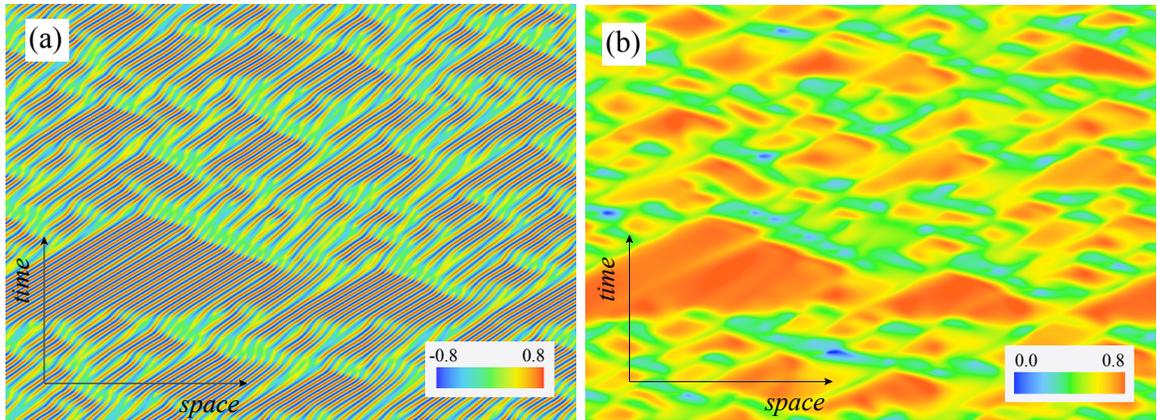


Figura 31: Diagrama espacio-temporal que muestra caos espacio-temporal en el modelo (4.1), (a) campo $u(x,t)$ y (b) la respectiva velocidad local. Parámetros: $(\varepsilon, \eta, \nu, L) = (-0,1, 0,0, 1,0, 1,5)$

Para probar la naturaleza espacio-temporal del caos hace falta considerar discretizaciones espaciales progresivamente más finas. Concretamente, los puntos de la grilla son $x_k = k\Delta x$, $k = 0, \dots, N$ donde $\Delta x = \frac{\ell}{N}$ es el espaciado y ℓ es el largo del sistema. El sistema dinámico tiene $N + 1$ variables. Se debe evaluar todos los exponentes de Lyapunov $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{N+1}$ para una cierta trayectoria en el régimen caótico. Para tener caos espacio-temporal se requiere de cuatro condiciones. Las primeras tres son:

- Conforme $\Delta x \rightarrow 0$ los pares ordenados $(j\frac{\Delta x}{\ell}, \lambda_j) = (\frac{j}{N}, \lambda_j)$ convergen a un grafo $(s, \lambda(s))$ con $s \in [0, 1]$.
- $\lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.

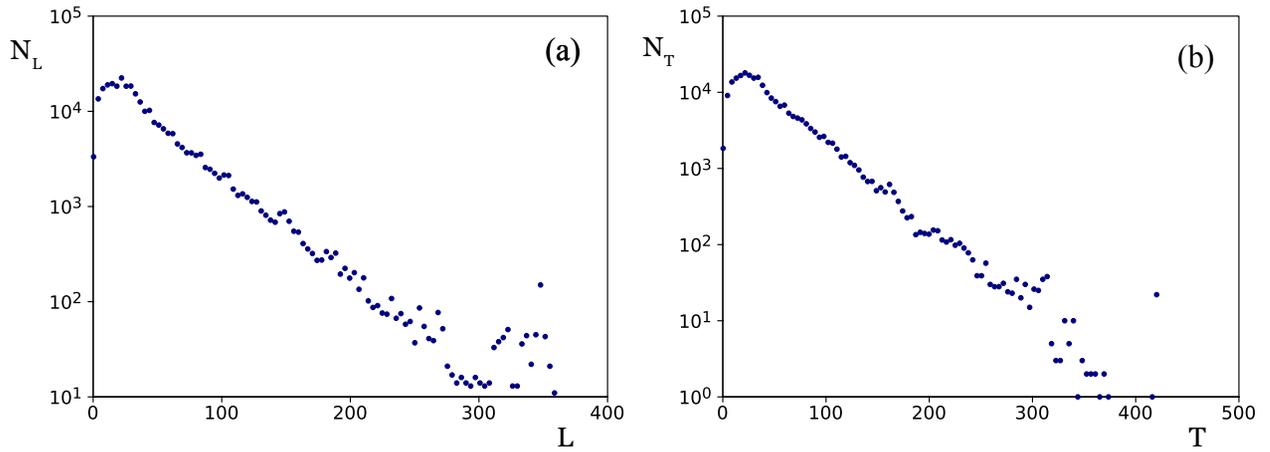


Figura 32: Histogramas de largos (a) y tiempos (b) de las zonas laminares en régimen caótico (escala semilog). Parámetros $(\varepsilon, \eta, \nu, L) = (-0,08107, -0,01631, 1, 0, 1, 4)$

- $\lambda(0) > 0$.

De 2. y 3. se desprende que hay un valor $s_0 > 0$ tal que $\lambda(s) > 0 \quad \forall s \in [0, s_0)$, es decir, hay un *continuo de exponentes de Lyapunov positivos*. En este escenario, se puede emplear la fórmula de Kaplan y Yorke para la dimensión fractal de un atractor [40], dada por

$$D_{KY} = J + \frac{\Lambda_j}{|\lambda_{j+1}|}, \quad (4.2)$$

donde $\Lambda_j \equiv \sum_{i=1}^j \lambda_i$ y J es el valor de j más grande tal que $\Lambda_j > 0$. La cuarta condición para tener caos espacio-temporal es

- Cuando $N \rightarrow \infty$, $\frac{1}{N} D_{KY}$ converge un número real positivo y no-nulo. Es decir, la cantidad D_{KY} diverge como N .

Este procedimiento de cuatro condiciones será incorporado a un artículo a ser sometido.

5. Singularidades de fase sostenidas por ruido

En sistemas físicos sometidos a alguna forma de transporte o deriva y bajo ciertas condiciones (régimen convectivo), ocurre un fenómeno llamado estructuras sostenidas por ruido²⁴ [41]. En este capítulo se muestra que si dichas estructuras son patrones, este fenómeno está acompañado de la creación de singularidades de fase o defectos: *singularidades de fase sostenidas por ruido*. En la figura 33 se observa defectos en un patrón sostenido por ruido en un oscilador óptico paramétrico bajo deriva [42], en el régimen convectivo.

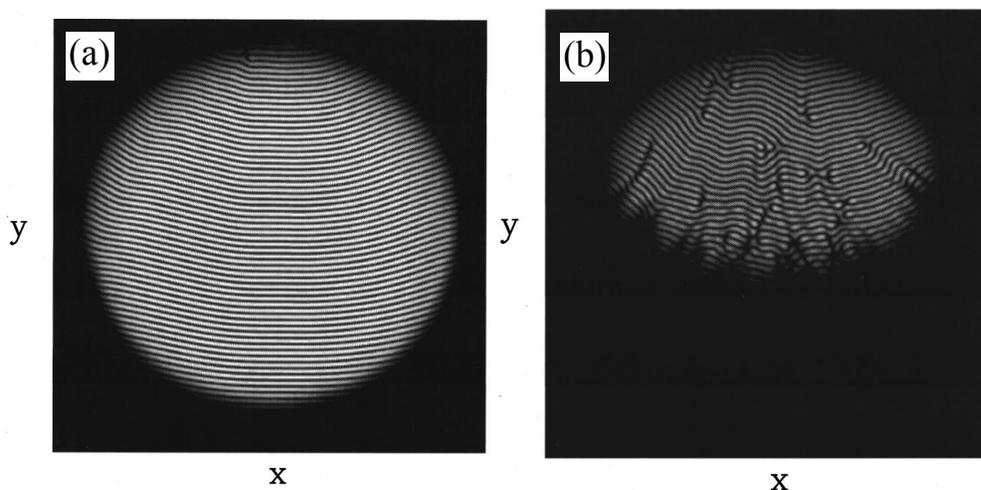


Figura 33: Intensidad luminosa de un oscilador óptico paramétrico bajo deriva (simulación numérica): (a) patrón bidimensional en el régimen absoluto (ver 2.8), (b) patrón sostenido por ruido. La deriva es hacia arriba. Figuras tomadas de [42].

Otro ejemplo corresponde a una reacción química donde uno de los reactantes está sometido a advección, y otro está fijo a un substrato sólido [43]. En la figura 34 se aprecia claramente los defectos.

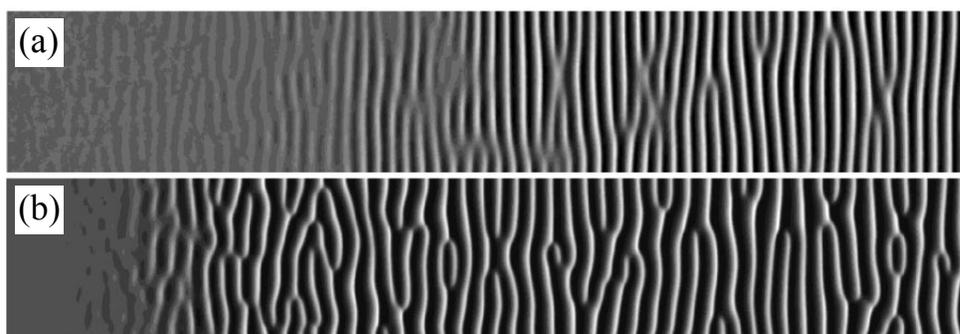


Figura 34: Concentración del reactante sometido a advección en un reactor con cinética autocatalítica (simulación numérica). Vistas instantáneas de patrones bidimensionales sostenidos por ruido para dos conjuntos de parámetros. La deriva es hacia la derecha. Figuras tomadas de [43].

²⁴Se produce un balance entre la advección de las perturbaciones y la permanente presencia de ruido. Esto forma un frente entre un estado homogéneo y una estructura. Ver sección 2.8 para más detalles.

En la sección 2.8 se explica en qué consiste el régimen convectivo, y se entrega una breve reseña del fenómeno de estructuras sostenidas por ruido.

5.1. Modelo de Ginzburg-Landau con deriva

En esta sección se considera un modelo llamado ecuación de Ginzburg-Landau con deriva, que modela la evolución de la envolvente de un patrón sometido a deriva. Esta ecuación está dada por

$$\partial_t A = A (\mu + i\gamma - |A|^2) + \nabla^2 A + \vec{c} \cdot \nabla A + \sqrt{\eta} \zeta(x, t) \quad (5.1)$$

donde el patrón corresponde a $u(\vec{r}, t) = (A(\vec{r}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + c.c.)$ más correcciones de orden superior en la envolvente A y sus derivadas.

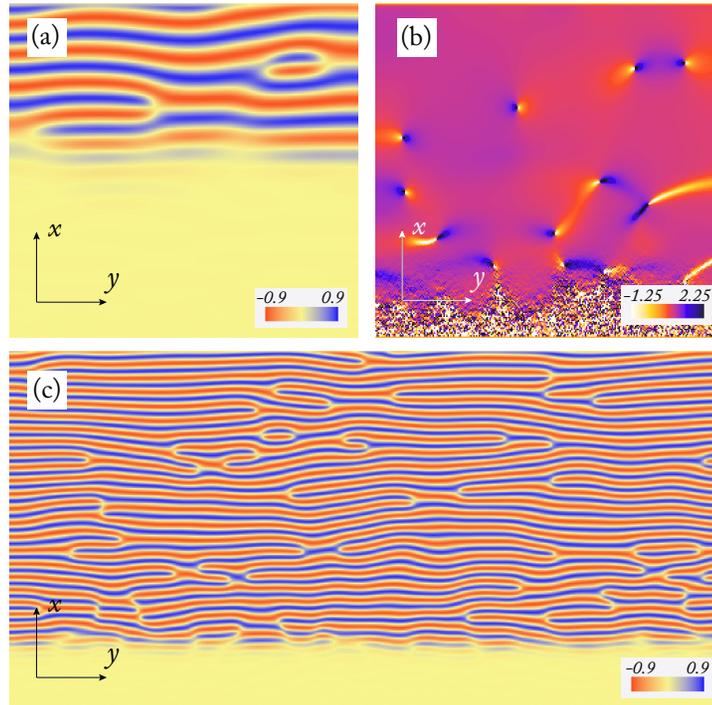


Figura 35: Defectos (dislocaciones) en una simulación de la ecuación de Ginzburg-Landau con deriva (5.1). En (a) y (c) se muestra la parte real de $A(\vec{r}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$, y (b) muestra el gradiente de fase en la misma región que (a). Parámetros: $\mu = 0,7625$, $\gamma = 1,875$, $c = 2,5$, $q = 0,75$, $\eta = 1 \cdot 10^{-8}$

Se observa en una y dos dimensiones que en el régimen convectivo, además de haber un patrón sostenido por ruido, hay singularidades de fase o defectos que viajan con el patrón. Estos defectos aparecen cuando la estructura del patrón comienza a manifestarse por sobre el ruido, o más precisamente cuando las fluctuaciones del gradiente de fase se atenúan. Ese lugar coincide con el bode de la zona donde el ruido predomina la dinámica, y ahí las fluctuaciones pueden “nuclear” singularidades de fase de forma aleatoria sobre el patrón emergente. Este mecanismo de creación de defectos puede pensarse del siguiente modo. En la zona en que el ruido domina la dinámica se están imponiendo condiciones iniciales aleatorias incrementales en cada paso de integración numérica. Aguas abajo, donde el patrón comienza a tomar forma, se recibe el “flujo de condiciones iniciales” del cual emergen defectos. Esto es ilustrado en la figura 35b que muestra el gradiente de fase del patrón bidimensional, cuya amplitud es gobernada por la ecuación (5.1).

5.1.1. Caso unidimensional

En este caso, las singularidades de fase corresponden a “hoyos”, es decir, lugares donde la amplitud se anula. Estos son topológicamente inestables, y en consecuencia corresponden a eventos puntuales en el espacio-tiempo. De hecho, la dinámica en torno de ellos es un “rebote” puntual de la amplitud en el valor cero, con un salto de la fase asociado [54]. La forma intuitiva más simple de entenderlo es considerar la ecuación de Ginzburg-Landau unidimensional que describe la amplitud $A(x,t)$ de la onda $u(x,t) = \frac{1}{2}A(x,t)e^{ikx} + c.c.$. Un cero en la amplitud requiere que tanto la parte real como la parte imaginaria de $A(x,t)$ se anulen en un mismo punto. Se trata de la intersección de dos funciones de una variable real en el valor cero. Una perturbación cualquiera de esta configuración, tal como “mover” alguna de las dos funciones, elimina genéricamente el cero de la amplitud. La figura 36 muestra diagramas espacio-temporales de $u(x,t)$ y $|A(x,t)|$, así como un gráfico de $u(x,t = t_1)$. En este último se aprecia un mínimo de amplitud, que está cerca de tocar el cero y corresponder a una singularidad de fase.

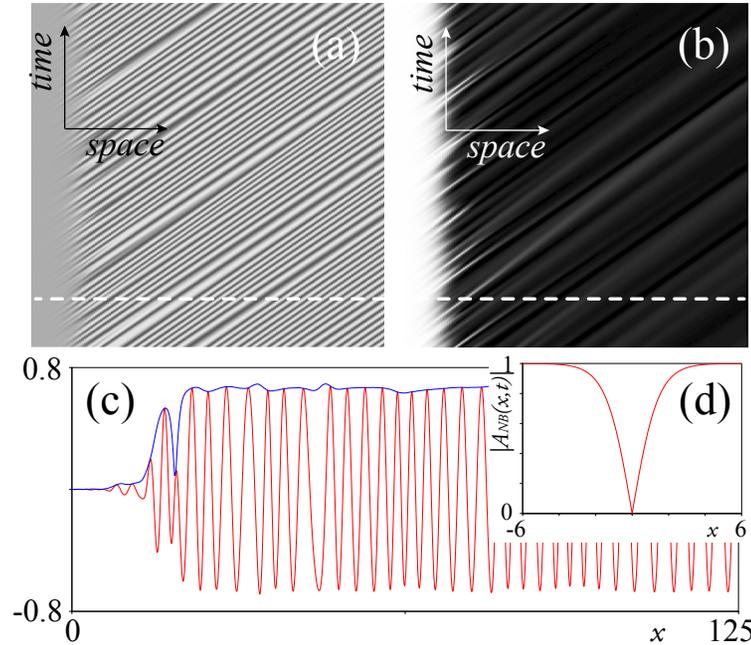


Figura 36: Diagrama espacio-temporal de (a) la parte real y (b) el valor absoluto de $A(x,t)e^{iqx}$. En (c) un perfil de ambos campos para un tiempo fijo (línea punteada en (a) y (b)). Parámetros: $\mu = 0,8$, $\beta = 5,0$, $c = 5,0$, $q = 1,0$, $\eta = 4 \cdot 10^{-4}$. Discretización: $dt = 0,03$, $dx = 0,25$. Las vistas (a) y (b) corresponden a la misma región espacio-temporal: $\Delta t = 4,5$ and $x \in [0, 150]$. La figura (d) muestra el valor absoluto de una solución de Nozaki-Bekki para $\mu = 1$.

Para la ecuación de Ginzburg-Landau, estas singularidades de fase reciben el nombre de *soluciones de Nozaki-Bekki* y tienen expresiones analíticas conocidas [55, 56, 57]. Es fácil ver que la siguiente función es una solución de la ecuación (5.1),

$$A_{NB}(x,t) = \pm\sqrt{\mu} \tanh\left(\sqrt{\frac{\mu}{2}}(x - x_0 - ct)\right) e^{i\eta t}. \quad (5.2)$$

Se trata de una solución de Nozaki-Bekki²⁵, y es directo verificar que tiene un cero en la amplitud

²⁵en el sistema de referencia solidario con la deriva

y un salto de fase de $\pm\pi$ en $x = x_0 + ct$. Ahora se estudia la estabilidad de esta solución. En primer lugar se normaliza la ecuación (5.1) y se escribe en el sistema de referencia móvil. Sean $y \equiv (x - x_0 - ct) / \sqrt{\frac{\mu}{2}}$, $\tau \equiv t\mu$ y $d(y, \tau) \equiv A(x, t) e^{-i\gamma t} / \sqrt{\mu}$. Obviando el ruido, la ecuación (5.1) queda

$$\partial_\tau d = d(1 - |d|^2) + \partial_{yy} d. \quad (5.3)$$

La solución $A_{NB}(x, t)$ corresponde simplemente a $d_{NB}(y, \tau) = \pm \tanh(y)$. Su estabilidad está dada por la dinámica lineal de los campos reales α y β , definidos por $d(y, \tau) = d_{NB}(y, \tau) + \alpha(y, \tau) + i\beta(y, \tau)$. Linealizando (5.3) en α y β , resulta

$$\partial_\tau \alpha(y, \tau) = (-2 + 3\text{sech}^2(y) + \frac{1}{2}\partial_{yy}) \alpha(y, \tau), \quad (5.4)$$

$$\partial_\tau \beta(y, \tau) = (\text{sech}^2(y) + \frac{1}{2}\partial_{yy}) \beta(y, \tau). \quad (5.5)$$

Se busca los autovalores temporales reemplazando $\alpha(y, \tau) = f_\alpha(y) e^{\sigma_\alpha \tau}$ y $\beta(y, \tau) = f_\beta(y) e^{\sigma_\beta \tau}$ en las ecuaciones (5.4) y (5.5), y se obtiene dos ecuaciones de Schrödinger con potenciales de Pöschl-Teller [58].

$$-E\psi(y) = \left(\frac{\ell(\ell+1)}{2} \text{sech}^2(y) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2} \right) \psi(y) \quad (5.6)$$

donde $\ell_\alpha = 2$, $\ell_\beta = 1$, $E_\alpha = -\sigma_\alpha - 2$ y $E_\beta = -\sigma_\beta$. El cambio de variables $z = \tanh(y)$ transforma la ecuación (5.6) en una ecuación asociada de Legendre

$$\frac{d}{dz} \left((1-z^2) \frac{d\psi(z)}{dz} \right) + \left(\frac{\ell(\ell+1)}{2} + \frac{2E}{1-z^2} \right) \psi(z) = 0. \quad (5.7)$$

Para $\ell \in \mathbb{Z}$ esta ecuación tiene un conjunto discreto de soluciones, los polinomios asociados de Legendre $P_\ell^m(z)$ con $m \in \{1, \dots, \ell\}$ y $2E = -m^2$. Sigue que $E_\alpha \in \{0, -\frac{1}{2}, -1\}$, $E_\beta \in \{0, -\frac{1}{2}\}$, luego $\sigma_\alpha \in \{-2, -\frac{3}{2}, -1\}$, $\sigma_\beta \in \{0, \frac{1}{2}\}$. Por lo tanto hay un modo inestable, el modo $m = \ell_\beta = 1$, y *la solución de Nozaki-Bekki es inestable*.

5.1.2. Caso bidimensional

Los patrones bidimensionales presentes en la naturaleza y en el laboratorio presentan una variedad de defectos: dislocaciones, disclinaciones y paredes de dominio (ver figura 37). La emergencia de defectos en patrones a franjas es una consecuencia de la simetría rotacional del sistema. La orientación local de las franjas puede variar de un lugar a otro por condiciones iniciales, condiciones de borde o inhomogeneidades locales. Esa discrepancia es conciliada mediante disclinaciones y paredes de dominio, mientras que las dislocaciones concilian discrepancias entre longitudes de onda locales [5].

Tanto las dislocaciones como las disclinaciones son defectos topológicos de codimensión dos, situados en un punto del plano. Están caracterizados por la circulación al rededor de un camino cerrado que contenga al defecto. Las dislocaciones corresponden a singularidades de la fase. El salto total de fase al recorrer cualquier camino cerrado que contenga la dislocación debe ser un múltiplo de 2π :

$$\oint d\theta = 2n\pi \quad (5.8)$$

donde $n \in \mathbb{N}$ es la *carga topológica* [5]. En la figura 35 se observa defectos con carga $n = \pm 1$. Las cargas topológicas son conservadas a lo largo de la evolución del patrón: la única manera en que

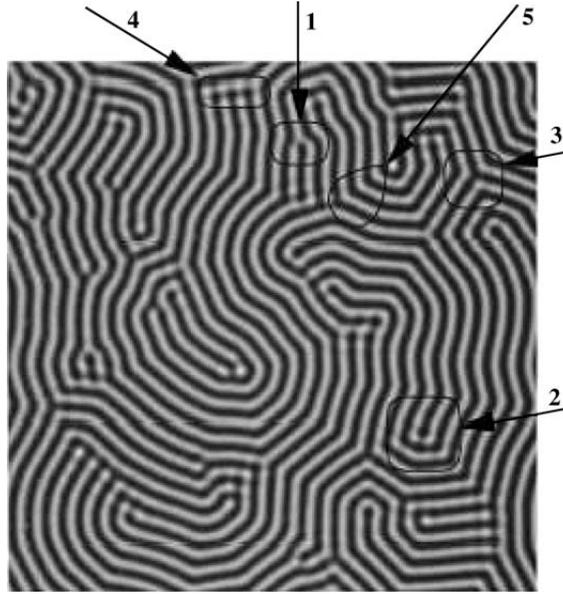


Figura 37: Distintos tipos de defectos bidimensionales. 1- dislocación, 2- disclinación cóncava, 3- disclinación convexa, 4- pared de dominio de amplitud, 5- pared de dominio de fase. Figura tomada de [5], a su vez tomada de [59].

las dislocaciones pueden aparecer o desaparecer es de a pares.²⁶ Los defectos de cargas opuestas se atraen y la dinámica asociada a esta interacción es mucho más lenta que la dinámica del módulo. Para el modelo de Ginzburg-Landau a coeficientes reales (2.10), las ecuaciones para el módulo $\rho = |A|$ y la fase $\varphi = \arg(A)$ son

$$\partial_t \rho = (1 - \rho^2 - |\nabla \varphi|^2) \rho + \nabla^2 \rho \quad (5.9)$$

$$\partial_t \varphi = \nabla^2 \varphi + \frac{2}{\rho} \nabla \rho \cdot \nabla \varphi \quad (5.10)$$

Ahora se busca determinar la forma de un defecto aislado de carga n centrado en el origen. Para ello se introduce el *Ansatz* $\rho(r, \theta) = \rho_n(r)$, $\varphi(r, \theta) = n\theta$ ²⁷, donde (r, θ) son las coordenadas polares [5]. La ecuación (5.10) se satisface automáticamente y la ecuación (5.9) implica

$$\frac{d\rho_n^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\rho_n}{dr} + \left(1 - \rho_n^2 - \left(\frac{n}{r}\right)^2\right) \rho_n = 0. \quad (5.11)$$

Las condiciones de borde propicias son $\rho_n(r=0) = 0$ y $\rho_n(r \rightarrow \infty) \rightarrow 1$. La ecuación (5.11) no puede resolverse analíticamente, pero si de forma numérica.

La figura 38 muestra la forma de la función $\rho_1(r)$, el módulo de la dislocación de carga unitaria.

5.1.3. Evidencia experimental preliminar

En el contexto de una experiencia óptica se ha observado la presencia de singularidades de fase (dislocaciones) sostenidas por ruido. El experimento ha sido llevado a cabo por el Dr. Mario Wilson

²⁶Una forma intuitiva de entenderlo, al igual que en una dimensión, es considerar el modelo de Ginzburg-Landau. Enseguida se puede pensar las dislocaciones como intersecciones de las curvas $\Re A(x, y) = 0$ y $\Im A(x, y) = 0$ en el plano (x, y) . Dichas intersecciones son topológicamente estables: persisten ante pequeños cambios continuos en las curvas.

²⁷De esto se desprende inmediatamente que (5.8) se verifica con $N = n$.

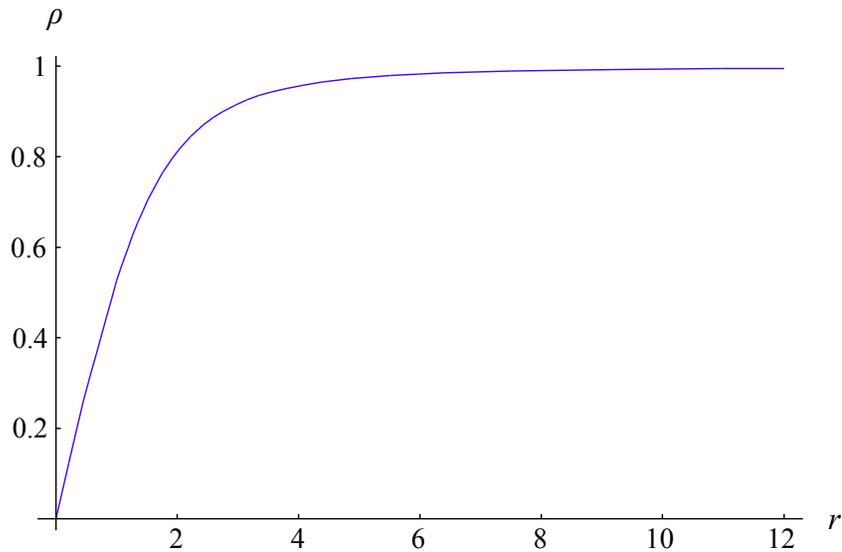


Figura 38: Perfil radial de vórtice con carga topológica $n = 1$. Figura modificada de [5].

y el Prof. Eric Louvergneaux del NDOS (grupo de dinámica no-lineal de sistemas ópticos), de la *Université Lille 1 - Sciences et Technologies* en Francia.

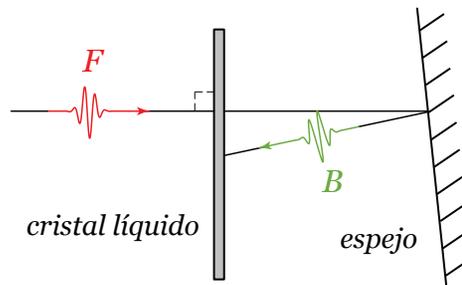


Figura 39: Esquema del montaje experimental de feedback óptico

La figura 39 muestra el montaje experimental. Si bien el experimento es similar al de la válvula de CL, el láser es mucho más potente: es la luz la que se acopla directamente con el medio no-lineal. Por otro lado, la luz es reinyectada mediante una sola reflexión. En la figura 40 se muestra un patrón propagativo con dislocaciones sostenidas por ruido²⁸. Notar que ellas comienzan a aparecer “aguas abajo” del borde, tal como ocurre en la simulación numérica de la ecuación de Ginzburg-Landau con deriva (ver figura 35). Esto es especialmente notorio en la fase: ver figura 40c

²⁸La amplitud está localizada debido a que el haz de luz incidente tiene un perfil gaussiano.

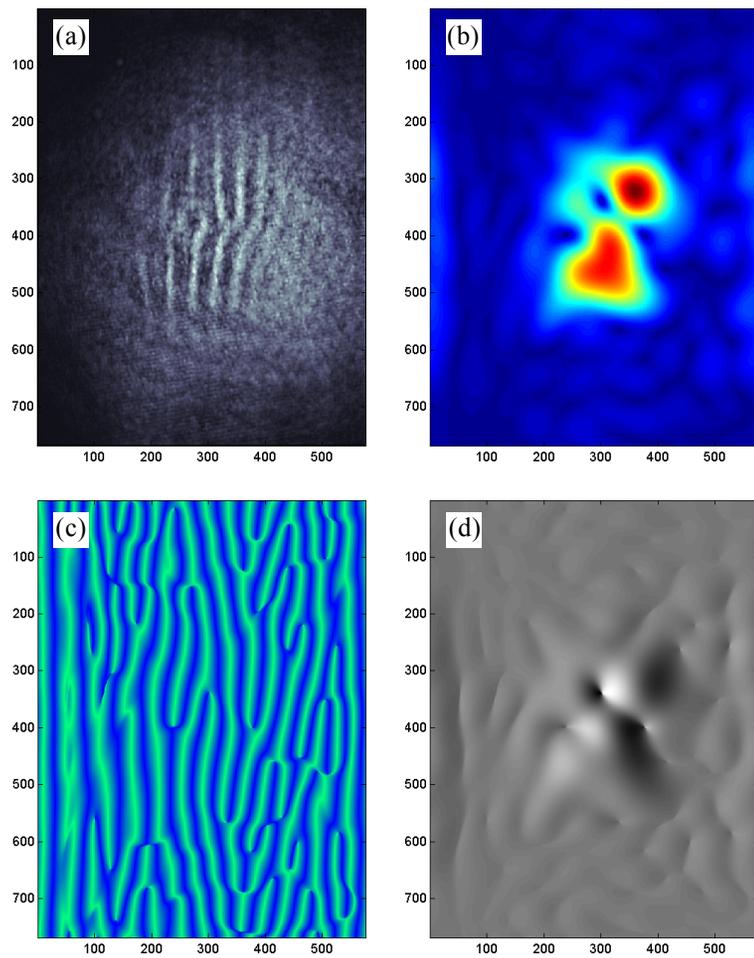


Figura 40: (a) Datos experimentales originales. Luego de un filtrado y una transformada de Hilbert se obtuvo los campos: (b) amplitud, (c) fase y (d) gradiente de fase. La deriva es hacia la derecha.

6. Método de velocidad local

En este capítulo se presenta un método que le asocia una velocidad local de desplazamiento a un campo escalar arbitrario. El método fue desarrollado por el autor de esta tesis con el propósito de caracterizar la desestabilización de ondas propagativas presentada en el capítulo 4. Cuando una función puede ser bien descrita por un paquete de onda (con un intervalo localizado de números de onda), una buena forma de calcular su amplitud y fase es mediante la transformada de Hilbert (ver subsección 6.2.3). En ese escenario se puede definir una velocidad local de fase como el cociente entre las derivadas temporal y espacial de la fase. Sin embargo, cuando la onda está lejos de parecerse a esta idealización, es complejo poder definir una velocidad. Aquí se ofrece una solución a dicho problema, al proponer una forma alternativa de definir la velocidad local.

6.1. Presentación del método

En términos simples, el método que se presenta a continuación se inspira en la idea de traslación rígida de un campo escalar, y emplea una función de peso (gaussiana) centrada en el punto de interés para optimizar el valor de la velocidad. Adicionalmente, este método entrega un campo de atenuación.

6.1.1. Formalismo

En lo que sigue se considera un campo escalar ξ con derivadas continuas: C^1 .

$$\begin{aligned} \xi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{r}, t) &\mapsto \xi(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (6.1)$$

donde $n = 1, 2, 3$ es el número de dimensiones espaciales. Se busca definir una velocidad de propagación de ξ en un punto \vec{r} y a un tiempo t , tomando en cuenta el comportamiento de ξ en las inmediaciones de \vec{r} . La idea del método se basa en el concepto de la traslación de un sólido rígido, es decir la traslación de una forma espacial que no cambia en el tiempo. Localmente en torno de \vec{r}, t se puede pensar que ξ toma la forma $\xi(\vec{r}', t') = a(t')f(\vec{r}' - \vec{\rho}(t'))$, donde $\vec{\rho}(t')$ describe el desplazamiento y $a(t')$ las variaciones de amplitud. Es directo verificar que $\partial_t \xi + \vec{\rho} \cdot \nabla \xi - \frac{\dot{a}}{a} \xi \equiv 0$. Entonces $\vec{c} = \vec{\rho}$ correspondería a la velocidad de desplazamiento y $b = -\frac{\dot{a}}{a}$ a la tasa de atenuación. Sea I la función definida por

$$I(\vec{c}, b; \vec{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t \xi + \vec{c} \cdot \nabla \xi + b \xi)^2(\vec{r}', t) g_n(|\vec{r} - \vec{r}'|) d^n \vec{r}' \quad (6.2)$$

donde $g_n(r)$ es una función de peso. Se define la **velocidad de desplazamiento** \vec{c} y la **tasa de atenuación** b en (\vec{r}, t) como aquellos valores que minimizan $I(\vec{c}, b; \vec{r}, t)$. En la práctica se emplea una función de peso gaussiana

$$g_n(r) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}. \quad (6.3)$$

En la subsección 6.1.2 se explica el porqué de esta elección, pero la función de peso podría cambiarse si el contexto lo amerita. La función $I(\vec{c}, b; \vec{r}, t)$ puede entenderse como un promedio localizado

en torno al punto \vec{r} . En ese sentido es útil introducir la siguiente notación para el *promedio localizado*:

$$\langle \varphi \rangle (\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\vec{r}') g_n(|\vec{r} - \vec{r}'|) d^n \vec{r}'. \quad (6.4)$$

Entonces, dejando implícita la dependencia en el tiempo

$$I(\vec{c}, b; \vec{r}; t) = \left\langle (\partial_t \xi + \vec{c} \cdot \nabla \xi + b \xi)^2 \right\rangle (\vec{r}) \quad (6.5)$$

La condición de extremo es $\partial_{c_j} I = 0$, $j = 1, \dots, n$ y $\partial_b I = 0$. Sigue que

$$\langle \partial_{r_j} \xi \partial_{r_k} \xi \rangle c_k + b \langle \xi \partial_{r_j} \xi \rangle = - \langle \partial_t \xi \partial_{r_j} \xi \rangle \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (6.6)$$

$$\langle \xi \partial_{r_k} \xi \rangle c_k + b \langle \xi^2 \rangle = - \langle \xi \partial_t \xi \rangle \quad (6.7)$$

donde se subentiende la dependencia implícita en \vec{r} y en t .

Definiendo

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{jk} &\equiv \langle \partial_{r_j} \xi \partial_{r_k} \xi \rangle; & n_k &\equiv \langle \xi \partial_{r_k} \xi \rangle; & \ell &\equiv \langle \xi^2 \rangle \\ p_k &\equiv - \langle \partial_t \xi \partial_{r_k} \xi \rangle; & q &\equiv - \langle \xi \partial_t \xi \rangle \end{aligned} \quad (6.8)$$

se puede expresar las ecuaciones (6.6) y (6.7) matricialmente

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \vec{n} \\ \vec{n}^T & \ell \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{c} \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{p} \\ q \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

Este sistema lineal de ecuaciones de $(n+1) \times (n+1)$ permite calcular \vec{c} y b siempre y cuando el determinante de la matriz sea no nulo. En el caso unidimensional \mathbf{M} , \vec{n} , \vec{p} y \vec{c} son números, denotados respectivamente por M , n , p y c . Existe solución ssi $M\ell - n^2 \neq 0$, y de ser así ella está dada por

$$c = \frac{\ell p - nq}{M\ell - n^2}; \quad b = \frac{Mq - np}{M\ell - n^2} \quad (6.10)$$

6.1.2. Promedio localizado: representaciones alternativas

Para resolver 6.9, es necesario evaluar promedios localizados. Al operar con ellos es de gran utilidad conocer dos representaciones alternativas: en forma de operador diferencial y como filtro en el espacio de Fourier. Estas propiedades, en una forma generalizada, se verifican para cualquier operador definido por una convolución, y de hecho provienen del teorema de convolución. Debido a su relevancia particular en este contexto, el teorema es recordado al lector. Dadas dos funciones $a, b : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ (o más en general $a, b : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}$), la definición de convolución es

$$(a * b) (\vec{r}) := \int_{\mathbb{R}^n} a(\vec{r} - \vec{s}) b(\vec{s}) d^n \vec{s}. \quad (6.11)$$

La transformada de Fourier de a evaluada en \vec{k} está dada por

$$\mathcal{F} a(\vec{k}) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} a(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^n \vec{r}. \quad (6.12)$$

El teorema de convolución dice [60]

$$\mathcal{F} \{a * b\} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathcal{F} a \cdot \mathcal{F} b \quad (6.13)$$

$$(2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathcal{F} \{a \cdot b\} = \mathcal{F} a * \mathcal{F} b \quad (6.14)$$

Sea

$$\langle\langle a \rangle\rangle_h(\vec{r}) := \int_{\mathbb{R}^n} h(\vec{r} - \vec{s}) a(\vec{s}) d^n \vec{s} = (h * a)(\vec{r}) \quad (6.15)$$

un operador de convolución, donde h es una función de peso no necesariamente isótropa. De la ecuación (6.13) sigue que

$$\mathcal{F} \langle\langle a \rangle\rangle_h = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathcal{F} h \cdot \mathcal{F} a. \quad (6.16)$$

Aplicando la transformada inversa \mathcal{F}^{-1}

$$\langle\langle a \rangle\rangle_h(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F} h(\vec{k}) \cdot \mathcal{F} a(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^n \vec{k}. \quad (6.17)$$

Esta *representación en el espacio de Fourier* de un promedio tipo convolución (en particular si es localizado), muestra explícitamente que la promediación espacial involucra al mismo tiempo un filtro en el espacio de Fourier. Si $h(\vec{r})$ está localizada en torno del origen con un ancho característico a , entonces $\mathcal{F} h(\vec{k})$ está localizada en torno al origen con un ancho característico del orden de $1/a$. Lo anterior es una explicación cualitativa del principio de incerteza para pares de transformadas de Fourier [60]. Con esto en mente y tomando a lo suficientemente grande, resulta claro que el promedio localizado suaviza la función: las longitudes de onda cortas son atenuadas.

Se puede reemplazar $\mathcal{F} h(\vec{k})$ por $\mathcal{F} h(-i\nabla)$ en (6.17) y sacar este operador fuera de la integral, obteniendo la *representación como operador diferencial* del promedio tipo convolución.

$$\langle\langle a \rangle\rangle_h(\vec{r}) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathcal{F} h(-i\nabla) a(\vec{r}) \quad (6.18)$$

Para funciones de peso isótropas (el caso de interés) $(2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathcal{F} h(\vec{k}) = H(|\vec{k}|^2)$, y luego

$$\langle\langle a \rangle\rangle_h(\vec{r}) = \langle a \rangle(\vec{r}) = H(-\nabla^2) a(\vec{r}) \quad (6.19)$$

En el caso de un promedio localizado con una función de peso gaussiana, dada por (6.3), la ecuación (6.19) queda

$$\langle a \rangle_{\text{gauss}}(\vec{r}) = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 \nabla^2} a(\vec{r}) \quad (6.20)$$

Dada una longitud de onda λ , la amplitud del modo de Fourier asociado es atenuada en un factor $e^{-2(\frac{\pi\sigma}{\lambda})^2}$. En la práctica, esto significa que los modos con longitud de onda por debajo de σ desaparecen. La elección de σ es entonces crucial. Por un lado debe ser suficientemente pequeño para asegurar una resolución espacial satisfactoria. Por otra parte, para una evaluación numérica σ debe además ser suficientemente grande para incorporar una cantidad mínima de datos de la grilla, de modo de evitar artefactos. La naturaleza fuertemente localizada de la función de peso gaussiana, permite obtener resultados numéricos muy precisos truncando la integración hasta $r \leq 6\sigma$ (por ejemplo).

Contrastando con la función de peso gaussiana, una función de peso rectangular tiene como transformada de Fourier un seno cardinal, que es oscilante y decae lentamente ($\propto \sin(ak)/ak$). Este tipo

de funciones de peso es además muy sensible a fluctuaciones en los bordes. Una función exponencial produce un filtro lorentziano en el espacio de Fourier, siendo la supresión de longitudes de onda cortas mucho más débil ($\sim k^{-2}$). En el caso de una secante hiperbólica, el filtro también es una secante hiperbólica ($\sim e^{-ak}$), y suprime las longitudes de onda cortas notablemente mejor que la función de peso exponencial.

6.1.3. Promedio localizado de senoide modulado

Ahora se enuncia una propiedad relativa al promedio localizado de un senoide modulado en amplitud. Ella es de gran utilidad cuando se quiere evaluar la velocidad local de una onda sinusoidal modulada en amplitud, como en la subsección 6.2.2 donde la propiedad es aplicada.

Sea $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función a valores reales y sea $b(\vec{r}) = a(\vec{r})e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}$, donde $q \in \mathbb{R}_+$ es un número de onda. Eligiendo $\sigma = \frac{2\sqrt{2}\pi}{q}$ y suponiendo que

$$|\mathcal{F}a(\vec{k})| \leq \alpha_0 \sigma^n \quad \text{si } k \geq \frac{q}{2} \quad (6.21)$$

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}a(\vec{k})| \leq a_0 \quad (6.22)$$

se tiene que

$$|\langle b \rangle(\vec{r})| \leq \alpha_0 + e^{-\pi^2} a_0 \quad \forall \vec{r}. \quad (6.23)$$

Aquí la idea es que α_0 es una cantidad despreciable, y a_0 es una amplitud de orden uno, de modo tal que se puede despreciar $\langle b \rangle$ con seguridad. Dado que no es esencial en este contexto, no se ofrece una demostración de la desigualdad (6.23).

6.2. Comparación con velocidad de fase

En esta sección se hace una comparación entre la velocidad local definida en 6.1 y una velocidad de fase. En la subsección 6.2.1 se lo hace en el contexto de un experimento, y en la subsección 6.2.2 se presenta un ejemplo analítico. Para establecer este parangón, se requiere de una noción precisa de velocidad de fase dado un campo escalar $\xi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi(x, t)$ con x la coordenada espacial y t el tiempo. Una manera de abordar esto es calcular la fase valiéndose de la transformada de Hilbert (espacial) de ξ , y en base a sus derivadas parciales proponer una definición de velocidad de fase. Esto se explica de forma detallada en las subsecciones 6.2.3 y 6.2.4, dedicadas a la transformada de Hilbert y la velocidad de fase respectivamente. Por su función ilustrativa, se prefirió dar prioridad a los ejemplos, relegando las nociones técnicas al final de esta sección.

6.2.1. Ejemplo experimental

El método de velocidad local ha sido aplicado en datos experimentales dentro de un trabajo a ser sometido [62]. En este experimento, representado en la figura 41a, se vibra una celda cuasi-bidimensional con granos en su interior. Para una frecuencia de forzaje dada que supere un cierto valor crítico, aparecen ondas superficiales paramétricamente amplificadas [63, 64]. Cuando la celda es inclinada estas ondas devienen contrapropagativas.

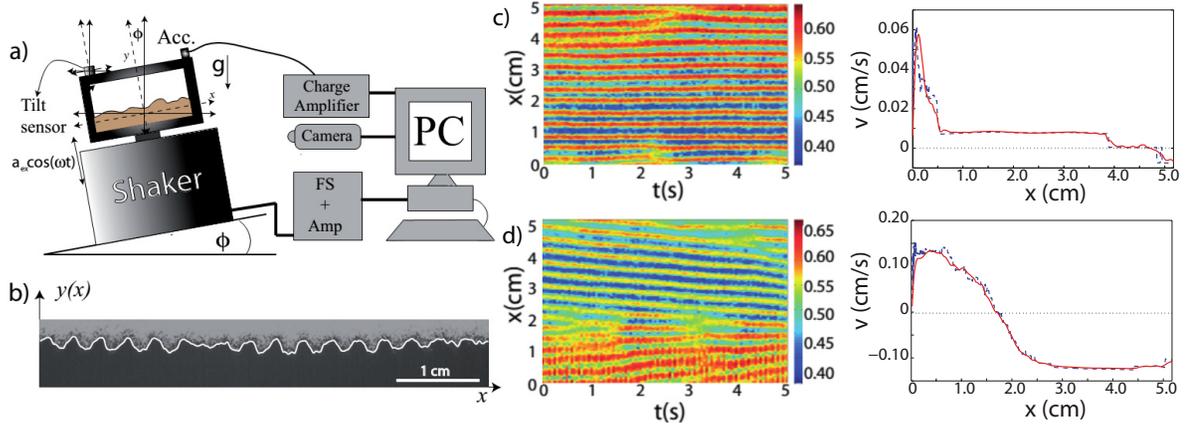


Figura 41: (a) Montaje de experimento de celda de granos vibrados. (b) Fotografía de patrón granular. La línea blanca representa la interfaz granular. Dinámica espacio-temporal estroboscópica de patrones granulares subarmónicos. (c) Izquierda: Patrón propagativo para $\phi = 0,02^\circ$. Derecha: Velocidad local promediada en el tiempo. La línea continua corresponde al método de velocidad local presentado en 6.1, y la línea punteada la velocidad de fase (ver 6.2.4). (d) Exactamente lo mismo que en (c) pero con $\phi = 0,15^\circ$. Figuras modificadas de [62].

En la figura 41 se muestra su evolución espacio-temporal estroboscópica para dos inclinaciones diferentes, así como el perfil de velocidad promedio calculado de dos formas: con el método de velocidad local (ecuaciones (6.10)) y mediante una transformada de Hilbert (ecuación (6.54)). Se observa que ambos métodos coinciden dentro del error experimental, y que el método de velocidad local entrega una curva más suave. En la subsección 6.2.2 se muestra que ambos métodos pueden discrepar, especialmente cerca de singularidades de fase.

6.2.2. Ejemplo analítico

A continuación se aplica el método de velocidad local para el caso de una onda sinusoidal modulada en amplitud, dada por $p(\vec{r}, t) = a(\vec{r}, t) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$. El supuesto básico que se hace es que la envolvente varía “lentamente” en el espacio, es decir que $|\nabla a| \ll k_0$. Más concretamente se exige que $|\mathcal{F} a^2(\vec{q})| \leq \alpha \sigma^n \forall q \geq k$ con $\sigma = \frac{\sqrt{2\pi}}{k}$ y α_0 una cantidad despreciable. Si además se tiene $(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F} u^2(\vec{q})| d^n \vec{q} \leq a_0$, con a_0 una cantidad de orden uno, es posible aplicar la propiedad (6.23) a los campos siguientes: $a^2 C_2$, $u \partial_{r_j} u C_2$, $a \partial_t a C_2$ y $\partial_{r_i} a \partial_{r_j} a C_2$, donde $C_2(\vec{r}, t) \equiv \cos(2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$. Esto permite hacer las siguientes aproximaciones.

$$\langle p^2 \rangle \approx \frac{1}{2} \langle a^2 \rangle \quad (6.24)$$

$$\langle p \frac{\partial p}{\partial r_i} \rangle \approx \frac{1}{2} \langle a \frac{\partial a}{\partial r_i} \rangle \quad (6.25)$$

$$\langle p \frac{\partial p}{\partial t} \rangle \approx \frac{1}{2} \langle a \frac{\partial a}{\partial t} \rangle \quad (6.26)$$

$$\langle \frac{\partial p}{\partial r_i} \frac{\partial p}{\partial t} \rangle \approx -\frac{1}{2} \omega k_i \langle a^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle \frac{\partial a}{\partial r_i} \frac{\partial a}{\partial t} \rangle \quad (6.27)$$

$$\langle \frac{\partial p}{\partial r_i} \frac{\partial p}{\partial r_j} \rangle \approx \frac{1}{2} k_i k_j \langle a^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle \frac{\partial a}{\partial r_i} \frac{\partial a}{\partial r_j} \rangle \quad (6.28)$$

Estas son las cantidades que es preciso evaluar para aplicar el método de velocidad local. Se define algunas cantidades auxiliares adimensionales:

$$d \equiv \frac{\langle a \frac{\partial a}{\partial t} \rangle}{\omega \langle a^2 \rangle} \quad (6.29)$$

$$\vec{e} \equiv \frac{\langle \nabla a \frac{\partial a}{\partial t} \rangle}{\omega k \langle a^2 \rangle} \quad (6.30)$$

$$\vec{g} \equiv \frac{\langle a \nabla a \rangle}{k \langle a^2 \rangle} \quad (6.31)$$

$$H_{ij} \equiv \frac{\langle \frac{\partial a}{\partial r_i} \frac{\partial a}{\partial r_j} \rangle}{k^2 \langle a^2 \rangle} \quad (6.32)$$

Reemplazando las ecuaciones (6.24) a (6.28) en el sistema de ecuaciones (6.9), y usando las cantidades recién introducidas se obtiene:

$$b + k\vec{c} \cdot \vec{g} + \omega d \approx 0 \quad (6.33)$$

$$\left(\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}^T + \mathbf{H} \right) \vec{c} + \frac{1}{k} b \vec{g} \approx \frac{\omega}{k} (\hat{k} - \vec{e}) \quad (6.34)$$

Despejando b en (6.33) y reemplazando en (6.34) resulta

$$\left(\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}^T + \mathbf{H} - \vec{g}\vec{g}^T \right) \vec{c} \approx \frac{\omega}{k} (\hat{k} + d\vec{g} - \vec{e}) \quad (6.35)$$

Proyectando esta ecuación según \hat{k} ,

$$\vec{c} \cdot \hat{k} \approx \frac{\omega}{k} \frac{1 + \hat{k} \cdot (d\vec{g} - \vec{e})}{1 + \hat{k}^T \mathbf{H} \hat{k} - (\vec{g} \cdot \hat{k})^2}. \quad (6.36)$$

Y aproximando un poco más:

$$\vec{c} \cdot \hat{k} \approx \frac{\omega}{k} \left(1 + \hat{k} \cdot (d\vec{g} - \vec{e}) - \hat{k}^T \mathbf{H} \hat{k} + (\vec{g} \cdot \hat{k})^2 \right) \quad (6.37)$$

Aplicación:

Ahora se usa el resultado (6.36) en una dimensión, y en el caso particular

$$p(x, t) = p_0 \cos(kx - \omega t) \cos\left(\frac{\beta}{2} kx\right) \quad (6.38)$$

Es fácil ver que si $\beta < 1$ se satisfacen las hipótesis necesarias. En consecuencia se asume que éste es el caso. Luego de aplicar las propiedades del promedio localizado y de un poco de álgebra, se obtiene

$$c \approx \frac{\omega}{k} \left\{ 1 + \frac{\beta^2}{8} \frac{1 - e^{-\beta^2 \pi^2} \cos(\beta kx) - \frac{1}{2} e^{-2\beta^2 \pi^2} \frac{\sin^2(\beta kx)}{1 + e^{-\beta^2 \pi^2} \cos(\beta kx)}}{1 + e^{-\beta^2 \pi^2} \cos(\beta kx)} \right\}^{-1} \quad (6.39)$$

Por otro lado, de la definición (6.54) se obtiene que la velocidad de fase de la onda es $\frac{\omega}{k}$ si $\beta < 2$. La velocidad de la envolvente es nula. La figura 42 muestra que la velocidad local se aproxima a la velocidad de fase cuando hay una buena separación de escalas. Notar que se grafica en función de la variable reescalada $y = \beta kx$. La velocidad local está entre aquella de la envolvente y la de fase. Los mínimos en la velocidad local corresponden con las singularidades de fase en la onda: ceros de amplitud. En el límite $\beta \rightarrow 0$, para todo $y \neq (2m+1)\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, $c \rightarrow \frac{\omega}{k}$. Y además $\lim_{\beta \rightarrow 0} c\left(\frac{\pi}{\beta k}, t\right) = \frac{\omega}{k} \cdot \kappa$ con $\kappa \equiv \left(1 + \frac{1}{4\pi^2}\right)^{-1} \approx 0,9753$.

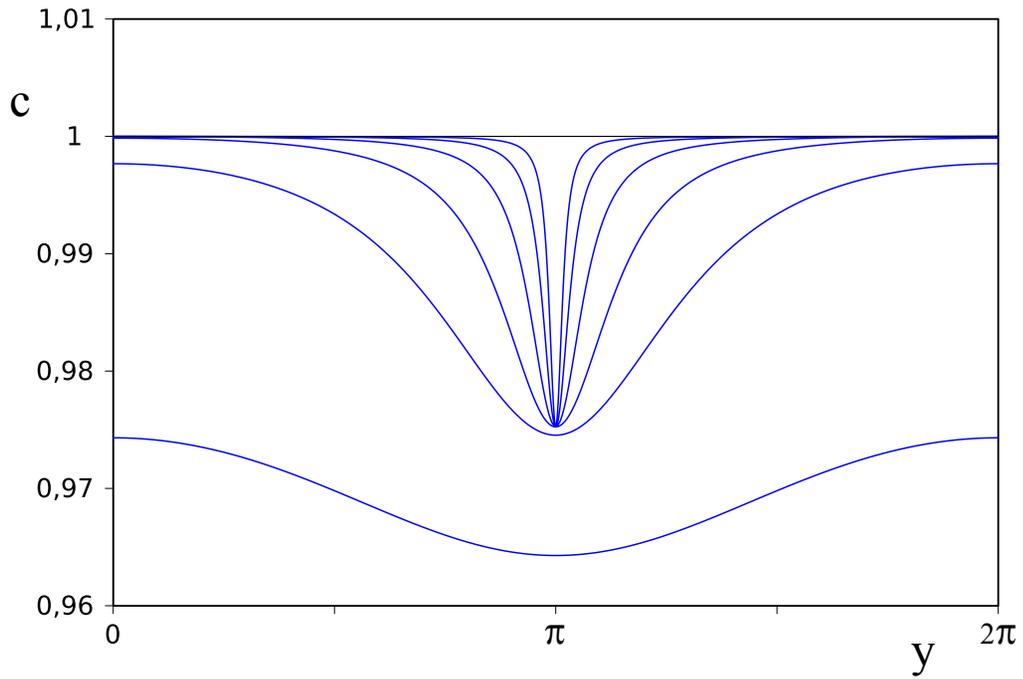


Figura 42: Velocidad local de la onda sinusoidal modulada dada por (6.38), para $\omega = k = 1$. Las curvas de abajo hacia arriba corresponden a $\beta = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$. Se grafica en función de la variable reescalada $y = \beta kx$.

6.2.3. Transformada de Hilbert

A continuación se introduce algunos conceptos básicos relativos a la transformada de Hilbert.

Definición

Muchas de las transformadas integrales comunes se pueden expresar en la forma

$$g(x) = Tf(x) = \int_a^b f(y)k(x,y)dy \quad (6.40)$$

donde la función $k(x,y)$ se denomina el *kernel* o función kernel de la transformada T , y $a, b \in \mathbb{R}$ son los límites de integración (eventualmente $a = -\infty$ o $b = \infty$). Ecuaciones como (6.40) pueden interpretarse también como ecuaciones integrales, al buscar determinar f dada g . Más precisamente se trata de una ecuación de Fredholm del primer tipo [61]. Cuando el kernel tiene una singularidad entre los límites de integración, se puede extender la definición (6.40) apropiadamente en cada caso. A tales ecuaciones se les denomina ecuaciones integrales singulares.

La transformada de Hilbert sobre \mathbb{R} se define por

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x-y} dy, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \quad (6.41)$$

El kernel en este caso es $k(x,y) = \frac{1}{\pi(x-y)}$, que es singular cuando $y = x$. El símbolo $P \int$ representa una extensión de la definición usual de integral llamada *valor principal de Cauchy* [61]. La integral se comporta bien para muchas funciones si se elimina un tramo infinitesimal centrado en la singularidad. Para que la transformada converja, basta con que la función $|f|^2$ sea integrable en $(-\infty, \infty)$.

La transformada de Hilbert es un **operador no-local**: $Hf(x)$ no depende solamente del valor $f(x)$ sino de la función f en todo \mathbb{R} .

Algunas propiedades

Deducciones y demostraciones de las siguientes propiedades pueden encontrarse en [61].

1. Transformada inversa

$$H^{-1} = -H \tag{6.42}$$

es válido sobre $L^p(\mathbb{R})$ con $p > 1$.

2. H conmuta con la complejo-conjugación,

$$(Hf)^* = Hf^* \tag{6.43}$$

Luego si f es a valores reales, Hf también lo es.

3. H conmuta con las operaciones de derivación, traslación y dilatación, y anticonmuta con la operación de reflexión. Sea D el operador diferencial: $Df(x) = \frac{df(x)}{dx}$. Sea τ_a el operador de traslación en a : $\tau_a f(x) = f(x - a)$. Sea S_a el operador de dilatación en a : $S_a f(x) = f(ax)$. Y sea R el operador de reflexión: $Rf(x) = f(-x)$, entonces

$$[H, D] = 0 \tag{6.44}$$

$$[H, \tau_a] = 0 \tag{6.45}$$

$$[H, S_a] = 0 \tag{6.46}$$

$$HR + RH = 0 \tag{6.47}$$

4. Transformada de Fourier de H . Dada una función f en $L^p(\mathbb{R})$ con $1 < p \leq 2$,

$$\mathcal{F}Hf(k) = -i \operatorname{sgn}(k) \mathcal{F}f(k) \tag{6.48}$$

A través de esta ecuación y una transformada de Fourier rápida es posible evaluar la transformada de Hilbert de forma práctica.

Dada una función f , las dos funciones $g(x) = Hf(x)$ y $f(x) = -Hg(x)$ constituyen un **par de transformadas de Hilbert** (“Hilbert transform pair” en inglés). Por ejemplo las funciones $\cos(ax)$ y $\sin(ax)$ son un par de transformadas de Hilbert:

$$\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ay)}{x-y} dy = \sin(ax) \tag{6.49}$$

$$\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ay)}{x-y} dy = -\cos(ax) \tag{6.50}$$

Esto está en estrecha relación con la teoría de funciones analíticas. Dada una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se denomina señal analítica de f a la función a valores complejos $f + iHf$. Claramente la señal analítica de $\cos(ax)$ es e^{tax} .

6.2.4. Velocidad de fase

A modo ilustrativo se considera una onda sinusoidal $\xi_0(x, t) = a_0 \cos(kx - \omega t)$. La señal analítica (espacial) de ξ_0 es $\xi_0 + iH\xi_0 = a_0 e^{i(kx - \omega t)}$, cuya fase es trivialmente $\varphi_0(x, t) = kx - \omega t$. Cuando se tiene un campo ξ que ya no es necesariamente una onda sinusoidal, es posible de todos modos definir la fase y también la amplitud, de forma análoga

$$\xi + iH\xi \equiv R e^{i\varphi}, \quad (6.51)$$

donde R y φ son campos a valores reales²⁹. La velocidad de fase de la onda sinusoidal ξ_0 es $\frac{\omega}{k} = -\frac{\partial_t \varphi_0}{\partial_x \varphi_0}$. Esto se puede generalizar mediante la definición

$$v_\varphi \equiv -\frac{\partial_t \varphi}{\partial_x \varphi} \quad (6.52)$$

A partir de la ecuación (6.51) es directo mostrar que

$$\partial_s \varphi = \frac{\xi H \partial_s \xi - (H\xi) \partial_s \xi}{\xi^2 + (H\xi)^2} \quad (6.53)$$

donde s puede ser x o t . Las ecuaciones (6.52) y (6.53) implican

$$v_\varphi = \frac{(H\xi) \partial_t \xi - \xi H \partial_t \xi}{\xi H \partial_x \xi - (H\xi) \partial_x \xi}. \quad (6.54)$$

Esta relación permite evaluar la *velocidad de fase* de forma práctica.

²⁹De la propiedad 2 de en 6.2.3, $H\xi$ es también a valores reales.

7. Conclusiones y perspectivas

Acoplamiento traslacional en sistemas extendidos

Motivado por la óptica no-lineal, el primero de los objetivos de esta tesis fue dilucidar y caracterizar el efecto del acoplamiento traslacional (AT) sobre sistemas espacialmente extendidos. Más precisamente sobre estructuras localizadas y soluciones periódicas (o patrones). Con ese propósito se usó una ecuación prototipo para patrones y soluciones localizadas, el modelo de Swift-Hohenberg (SH), al cual se le agregó AT. A la nueva ecuación se la llamó modelo de Swift-Hohenberg traslacional (SHT). En contraste con la ecuación de SH, la ecuación de SHT es una ecuación no-variacional en el sentido de que carece de un funcional de Lyapunov. Esto constituye una diferencia radical porque permite la emergencia de comportamientos permanentes, enriqueciendo la dinámica.

A partir del trabajo realizado se concluye que:

- Se determinó que las estructuras localizadas se propagan y deforman bajo el AT, caracterizando analítica- y numéricamente su velocidad en una y dos dimensiones. Por otra parte, el AT induce tres tipos de inestabilidades: inestabilidad espacial, desaparición por nodo-silla (*saddle-node*) y radiación de frentes. Se caracterizó el espacio de fase de la estructura localizada de forma numérica, y analítica donde fue posible.
- Mediante simulaciones numéricas de la ecuación de SHT con condición de borde periódica, se caracterizó la dinámica de las soluciones periódicas unidimensionales bajo AT. Los patrones devienen en ondas propagativas. Conforme crece el desplazamiento del AT los patrones aumentan su amplitud, y para un desplazamiento determinado sufren una inestabilidad de fase. Esta inestabilidad lleva a una dinámica compleja mediada por defectos. Se trata de meta-caos, transientes complejos largos que desembocan en ondas propagativas. Verificar que se trata de una crisis de borde no fue posible: la manera explícita de hacerlo requiere de muestrear el espacio de condiciones iniciales (esto es prohibitivo en la práctica). Para desplazamientos aún mayores se entra en un régimen caótico: intermitencia espacio-temporal.
- En este contexto se desarrolló un método para calcular la velocidad local de propagación de un campo escalar. El método resultó ser una herramienta de interés en sí misma, con una aplicabilidad mucho más amplia que los usos que se le ha dado aquí. Si bien en muchos casos la velocidad local se semeja a la velocidad de fase, difiere de ésta en mayor medida cerca de singularidades de fase. El método no necesita de una noción de fase y es robusto ante singularidades de fase.

Las perspectivas de investigación que surgen a la luz de los resultados son:

- Estudiar la interacción entre estados localizados en modelos con AT.
- En el experimento de la válvula de cristal líquido con retroinyección óptica, resultaría interesante explorar analíticamente la relación entre el AT y el fenómeno de emisión de vórtices.
- Estudiar la(s) inestabilidad(es) de ondas propagativas en otras ecuaciones con AT.
- Explorar regímenes caóticos en otras ecuaciones con AT, para estudiar si en estas condiciones el caos (o la intermitencia) espacio-temporal es genérico(a).

Singularidades de fase sostenidas por ruido

El segundo objetivo de la tesis fue explorar la aparición de defectos en patrones sostenidos por ruido. El fenómeno de las estructuras sostenidas por ruido ocurre en sistemas espacialmente extendidos sometidos a deriva y a fluctuaciones. Para estudiar la aparición de singularidades de fase, se empleó una modificación de la ecuación de Ginzburg-Landau a coeficientes reales, un modelo que describe la amplitud del modo dominante en torno de una inestabilidad espacial anisótropa. Por simplicidad se le agregó deriva, obteniendo el modelo de Ginzburg-Landau con deriva.

En base al trabajo realizado se concluye que:

- A partir de simulaciones numéricas y evidencia experimental, se mostró que la creación de singularidades de fase es permanente, y ocurre de forma estocástica en la región de pequeñas amplitudes. Además constituye un fenómeno genérico en el régimen convectivo en una y dos dimensiones espaciales.

Las perspectivas de investigación son:

- Proponer un modelo cuantitativo minimal para explicar el mecanismo de creación de singularidades de fase, que respalde los argumentos intuitivos presentados en esta tesis.

Referencias

- [1] P. Ball, *The Self-Made Tapestry: Pattern formation in nature*, Oxford University Press, New York, (1999). 2
- [2] M. I. Rabinovich, A. B. Ezersky and Patrick D. Weidman, *The Dynamics of Patterns*, World Scientific publishing (2000). 2
- [3] G. Nicolis and I. Prigogine, *Self organization in nonequilibrium systems: from dissipative Structures to order through fluctuations*, Wiley (1977). 2
- [4] M. C. Cross and P. C. Hohenberg, *Pattern formation outside of equilibrium*, *Rev. Mod. Phys.* 65, 851-1112 (1993). 2
- [5] L. M. Pismen, *Patterns and interfaces in dissipative dynamics*, Springer-Verlag (2006). 2, 11, 26, 42, 43, 44
- [6] M. C. Cross and H. Greenside, *Pattern formation and dynamics in nonequilibrium systems*, Cambridge University Press (2009). 2
- [7] S. Barland et al., *Nature* 419, 699 (2002). 2
- [8] O. Descalzi, M. Clerc, S. Residori, and G. Assanto, Eds., *Localized States in Physics: Solitons and Patterns*, Springer-Verlag (2011). 2
- [9] M. G. Clerc, S. Coulibaly, N. Mujica, R. Navarro, and T. Sauma, *Phil. Trans. R. Soc. A* 367, 3213 (2009). 2, 27
- [10] J. Wu, R. Keolian and I. Rudnick, *Phys. Rev. Lett.* 52, 1421 (1984). 2
- [11] H. G. Purwins, H. U. Bodeker, and Sh. Amiranashvili, *Advances in Physics* 59, 485 (2010). 2
- [12] T. Ackemann, W.J. Firth, and G.L. Oppo, *Adv. At. Mol. Opt. Phys.* 57, 323 (2009). 2
- [13] A. C. Newel, *Solitons in Mathematics and Physics*, SIAM (Philadelphia) (1985). 2
- [14] F. Haudin, R. G. Rojas, M. G. Clerc, U. Bortolozzo and S. Residori, *Phys. Rev. Lett.* 106, 063901 (2011). 2, 3
- [15] F. Haudin, “Fronts et dynamiques spatio-temporelles dans l’expérience de la valve à cristaux liquides : effets de forçages spatiaux et rétroaction optique non locale”, Thèse pour obtenir le titre de Docteur en Sciences de l’Université de Nice Sophia Antipolis, Discipline: Physique (2010). 3
- [16] U. Frisch, *Turbulence: the Legacy of A. N. Kolmogorov*, CUP (1995). 2
- [17] G. Agez, P. Glorieux, M. Taki, and E. Louvergneaux, *Phys. Rev. A* 74, 043814 (2006). 3, 4, 22
- [18] P. Coullet, C. Riera, and C. Tresser, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* 139, 46 (2000). 5

- [19] I. Pomeau, *Physica D* 23, 3 (1986). 5
- [20] P. Couillet, *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.* 12, 2445 (2002). 6
- [21] J. Swift and P. C. Hohenberg, *Phys. Rev. A* 15, 319 (1977). 6
- [22] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*, Addison-Wesley, Reading, MA, (1994). 6, 13, 14, 16, 27, 28
- [23] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, 2nd edition, Springer Verlag (2003). 9, 13, 15, 36
- [24] P. Oswald and P. Pieranski, *Nematic and Cholesteric Liquid Crystals Concepts and Physical Properties*, Taylor & Francis (2005). 12, 13
- [25] G. Friedel, *Annales de Physique* 18, 273 (1922). 12
- [26] O. Lehmann, *Zeitschrift für Physikalische Chemie* 4, 462 (1889). 12
- [27] M. Masujima, *Applied Mathematical Methods in Theoretical Physics*, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim (2005). 11
- [28] W. Arveson, *A short Course on Spectral Theory*, Graduate Texts in Mathematics; 209, Springer Verlag (2002). 11
- [29] G. A. Baker and P. Graves-Morris, *Enc. of Math. and its Applications Vol. 13: Padé Approximants, Part I: Basic Theory*, Addison-Wesley Publishing Co. (1981). 32
- [30] F. del Campo, F. Haudin, R. G. Rojas, U. Bortolozzo, M. G. Clerc, and S. Residori, *Phys. Rev. E* 86, 0362012 (2012). 23, 24
- [31] O. Descalzi, M. Argentina, and E. Tirapegui, *Phys. Rev. E* 67, 015601 (2003). 27
- [32] M. G. Clerc, S. Residori, and C. S. Riera, *Phys. Rev. E* 63, 060701(R) (2001). 33
- [33] M. G. Clerc, T. Nagaya, A. Petrossian, S. Residori, and C. S. Riera, *Eur. Phys. J. D* 28, 435 (2004). 33
- [34] R. H. Abraham and J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Am. Math. Soc. (1978). 14
- [35] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge University Press (1993). 15, 16
- [36] V. S. Afraimovich, V. V. Bykov and L. P. Silnikov, *Sov. Phys. Dokl.* 22, 253 (1977). 15
- [37] J. L. Kaplan and J. A. Yorke, *Comm. Math. Phys.* 67, 93 (1979). 15
- [38] J. A. Yorke and E. D. Yorke, *Journal of Statistical Physics* 21, No. 3 (1979). 15
- [39] H. Chaté, *Nonlinearity* 7, 185 (1994). 36, 37

- [40] J. L. Kaplan and J. A. Yorke, *in* Functional Differential Equations and Approximations of Fixed Points, ed. H.-O. Peitgen and H.-O. Walther, 2049, Springer Verlag, Berlin (1979). 38
- [41] R. J. Deissler, Phys. Lett. 100A, 451 (1984). 22, 39
- [42] M. Santagiustina, P. Colet, M. San Miguel, and D. Walgraef, Phys. Rev. E 58, 3843 (1998). 22, 39
- [43] B. Haefliger and G. Izús, Phys. Rev. E 67, 056207 (2003). 22, 39
- [44] R. J. Deissler, Journal of Statistical Physics 40, 371 (1985). 18, 22
- [45] R. Courant, D. Hilbert, Methods of mathematical Physics vol 2, Wiley (1989). 20
- [46] I. M. Gelfand, G. E. Schilow, Distributionen II. D. V. W. Berlin (1964). 20
- [47] B. R. Kuse and E. A. Westwig, Mathematical Physics, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim (2006) 21
- [48] K. B. Dysthe, Fusion Nuclear 6, 215 (1966). 22
- [49] P. A. Sturrock, Phys. Rev. 112, 1488 (1958). 22
- [50] L. S. Hall and W. Heckrotte, Phys. Rev. 166, 120 (1968). 22
- [51] K. L. Babcock, G. Ahlers, and D. S. Cannell, Phys. Rev. Lett. 67, 3388 (1991). 22
- [52] A. Tsamerev, and V. Steinberg, Phys. Rev. E 49, 1291 (1994). 22
- [53] A. D. Sánchez, G. G. Izús, and R. R. Deza, Physica A 391, 4070 (2012). 22
- [54] J. Lega, Physica D 152–153, 269 (2001). 41
- [55] K. Nozaki and N. Bekki, Phys. Rev. Lett. 51, 2171 (1983). 41
- [56] K. Nozaki and N. Bekki, Journal of the Physical Society of Japan 53, 1581 (1984). 41
- [57] N. Bekki and K. Nozaki, Phys. Lett. 110A, 133 (1985). 41
- [58] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory. Course on Theoretical Physics Vol. 3, Pergamon Press (1977). 42
- [59] C. Bowman, and A.C. Newell, Rev. Mod. Phys. 70, 289 (1998). 43
- [60] T. W. Körner, Fourier Analysis, Cambridge University Press (1988). 48
- [61] F. W. King, Hilbert transforms Vol. 1, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 124, Cambridge University Press (2009). 52, 53
- [62] M. G. Clerc, C. Falcon, M. A. García-Ñustes, V. Odent and I. Ortega, *internal communication* (2013). 49, 50
- [63] M. Faraday, Philos. Trans. R. Soc. London 52, 319 (1831). 49
- [64] Aronson-Tsimring, Granular Patterns, Oxford University Press (2009). 49

9. Anexo

A continuación se incluye una copia del artículo “Effects of translational coupling on dissipative localized states”, el cual contiene los resultados mostrados en el capítulo 3.

F. del Campo, F. Haudin, R. G. Rojas, U. Bortolozzo, M. G. Clerc, and S. Residori, *Phys. Rev. E* 86, 0362012 (2012).

Effects of translational coupling on dissipative localized states

F. del Campo,¹ F. Haudin,² R. G. Rojas,³ U. Bortolozzo,² M. G. Clerc,¹ and S. Residori²

¹*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, Casilla 487-3, Santiago Chile*

²*Institut Nonlinéaire de Nice, Université de Nice-Sophia Antipolis, Centre National de la Recherche Scientifique, 1361 route des Lucioles 06560 Valbonne, France*

³*Instituto de Física, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Casilla 4059, Valparaíso, Chile*

(Received 30 March 2012; published 4 September 2012)

Nonequilibrium localized states under the influence of translational coupling are studied experimentally and theoretically. We show that localized structures are deformed and advected in the direction of the coupling, thus undergoing different instabilities. Experimentally, localized structures are obtained in a light valve with optical feedback. By introducing a tilt of one mirror in the feedback loop, localized structures acquire a translational coupling. To understand the phenomenon in a universal framework we consider a prototypical model of localized states with translational coupling in one and two spatial dimensions. The model allows us to analytically characterize the propagation speed and the deformation exhibited by the localized state profiles as well as to figure out different mechanisms of destabilization of these dissipative structures. The results are in good qualitative agreement with the experimental and numerical observations.

DOI: [10.1103/PhysRevE.86.036201](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.86.036201)

PACS number(s): 05.45.-a, 42.65.-k, 45.70.Qj

I. INTRODUCTION

Nonequilibrium systems, that is, systems with injection and dissipation of energy, are characterized by exhibiting a spontaneous self-structuration in response to the optimization of energy transport [1–3]. Emerging particle-type solutions in macroscopic dissipative systems, also known as localized states or localized structures (LSs), have been observed in different physical contexts such as domains in magnetic materials, chiral bubbles in liquid crystals, current filaments in gas discharge, spots in chemical reactions, localized states in fluid surface waves, oscillons in granular media, isolated states in thermal convection, solitary waves in nonlinear optics, and surface solitons in magnetic fluids (see the reviews in Refs. [4–6] and references therein). These observations give evidence of the universality of these dissipative localized states. Although such states are spatially extended, they exhibit properties typically related to particles. Indeed, one can characterize them as a family of continuous parameters such as position, amplitude, and width. This is the type of description and strategy used in physical theories such as quantum mechanics and particle physics. Localized states emerging in extended dissipative systems are composed of a large number of constituents that behave coherently. Solitons, such as those reported in fluid dynamics, nonlinear optics, and Hamiltonian systems [7,8], are the paradigmatic example of a macroscopic localized state. These solitons arise from a robust balance between dispersion and nonlinearity. The generalization of this concept to dissipative and out of equilibrium systems has led to several studies in the past few decades, in particular to the definition of *localized structures* intended as patterns appearing in a restricted region of space [2,3].

An adequate theoretical description of dissipative localized states has been established in one-dimensional spatial systems based on spatial trajectories connecting a steady state with itself. Then localized states arise as homoclinic orbits from the viewpoint of dynamical systems theory (see the review in Ref. [9] and references therein). Localized patterns can

be understood as homoclinic orbits in the Poincaré section of the corresponding spatial-reversible dynamical system [9–13]. They can also be understood as a consequence of the front interaction with oscillatory tails [14,15]. There is another type of stabilization mechanism that generates LSs without oscillatory tails based on nonvariational effects [16], where front interaction is led by the nonvariational terms [17].

One of the great interests in studying these LSs is their potential use as information storage units, in other words, optical bits [18]. Thus it is relevant to develop control and manipulation methods of localized states. Different methods have been proposed to achieve such control, for example, by applying spatial forcing [19–22]. Another possibility is to induce gradients to the localized state, for example, through the use of a phase or amplitude gradient, which produces drift on dissipative localized structures [23], as well as on cavity solitons [24], or by tilting a vertically driven channel with water generating motion in a hydrodynamic soliton [25]. Alternatively, one can generate motion of the localized state by introducing a delay in the feedback that induces spontaneous motion of cavity solitons [26]. In contrast, we have recently shown that localized states propagate under translational coupling (TC) and that advection introduces different effects such as the deformation of the structure profile and optical vortex emission, i.e., optical phase singularities appear in the wake of the drifting structure [27].

The aim of this study is to characterize qualitatively the effects of TC on the dynamics of LSs. We focus on the deformation and instabilities undergone by the drifting structures. By TC we mean the dynamics of the physical quantities that describe the system at position \vec{r} at a given time t depend on the physical quantities at the position $\vec{r} + \vec{L}$ at the same time t , where \vec{L} is the parameter that characterizes the TC. Theoretically, based on a prototypical model of localized states modified with TC, we show that translational-type coupling modifies these states, which become deformed and propagative, also exhibiting different instabilities. Note that here we do not consider drift instabilities, which emerge

through marginal modes from the spontaneous symmetry breaking of an $x \rightarrow -x$ invariant structure in an $x \rightarrow -x$ invariant system. Indeed, TC cannot induce a drift instability since it breaks the required symmetry.

These theoretical results are compared with those obtained in a liquid crystal light-valve experiment with a mirror tilt in the feedback loop. We characterize analytically and numerically the dynamical behaviors, finding a good qualitative agreement with the experimental observations.

The paper is organized as follows. A description of the experimental setup and the procedures used in the characterization of the localized structure dynamics under TC are presented in Sec. II A. In Sec. II B numerical simulations of the full model for the light valve with TC are analyzed. A linear stability analysis of the model is presented in Sec. II C. In Sec. III we introduce a one-dimensional prototype model, which allows us to highlight the universal nature of the studied phenomenon and permits us to characterize the different mechanisms leading to the destabilization of dissipative localized states under the influence of TC. In Sec. V we extend the model to two space dimensions. Finally, a summary is presented in Sec. VI.

II. LOCALIZED STRUCTURE DYNAMICS IN A LIGHT VALVE UNDER TRANSLATIONAL COUPLING

A. Experimental setup and observations

To study the effect of nonlocal coupling of the translational type on LSs, we consider a liquid crystal light valve (LCLV) inserted in an optical feedback loop [28]. The LCLV consists of a thin film of nematic liquid crystals, $15 \mu\text{m}$ thick, interposed between a glass plate and a photoconductive material over which a dielectric mirror is deposited. The confining surfaces of the cell are treated for a planar anchoring of the liquid crystal molecules (with the nematic director \vec{n} parallel to the walls) [29]. Transparent electrodes deposited over the cell walls allow us to apply an external voltage V_0 across the liquid crystal layer, which is illuminated by an expanded He-Ne laser beam, $\lambda = 632.8 \text{ nm}$, linearly polarized along the vertical direction. Molecules tend to orient along the direction of the applied electric field, which in turn changes locally, and dynamically, by following the illumination distribution present on the photoconductive wall of the cell. When liquid crystal molecules reorient, because of their birefringence, they induce a change of the refractive index [30]. Thus the LCLV acts as a Kerr medium, providing for the reflected beam a phase variation $\varphi = kdn_2I_w$ proportional to the intensity I_w of the beam incoming on its photoconductive side. Here d is the thickness of the nematic layer, $k = 2\pi/\lambda$ is the optical wave number, and n_2 is the equivalent nonlinear coefficient of the LC. Once it passes through the liquid crystal, the beam is reflected back by the dielectric mirror on the rear side of the valve and sent in the feedback loop. An optical fiber bundle is used to close the loop and redirect the beam back to the photoconductive side of the LCLV. The nematic director is oriented at 45° and the polarizing cube splitter introduces polarization interference between the ordinary and extraordinary waves, a condition ensuring the bistability between differently orientated states of the liquid crystal [31].

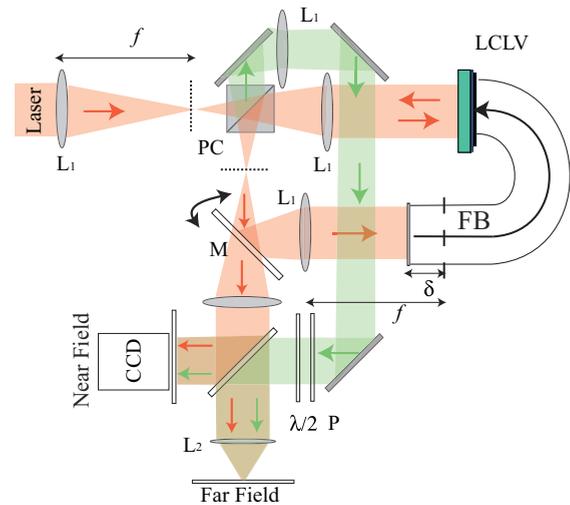


FIG. 1. (Color online) Experimental setup: FB, optical fiber bundle; L_1 and L_2 , lenses; PC, polarizing cube splitter; a partially reflecting mirror deflects part of the beam to the CCD camera for detection; P, polarizer; $\lambda/2$, half-wave plate controls the polarization and intensity of the reference beam (see details in Ref. [27]).

To generate the nonlocal TC we introduce a mirror tilt in the optical feedback loop. That generates an image on the rear side of the LCLV with a displacement \vec{L} . For example, for a mirror tilt of exactly 45° there is no local effect of drift: $\vec{L} = \vec{0}$. Changes to this angle in either direction generate a TC. A schematic diagram of the experiment is displayed in Fig. 1. A reference beam is used to realize a Mach-Zehnder-type interferometer, which allows visualizing the optical phase. More details on the interferometer and phase features can be found in Ref. [27].

Previous studies of translational effects in the LCLV experiment have evidenced secondary instabilities of patterns [32,33] such as transitions from hexagons to stripes and from squares to zigzag [34]. More recently, it has been shown that drifting LSs can be guided by using a spatial light modulator [35]. Recently we reported in Ref. [27] the drift-induced asymmetrical deformation of LSs and the associated emission of vortices. When a translational effect is introduced in the experiment by tilting the mirror at the entrance of the feedback loop, localized states start to drift along the direction of the mirror displacement. The motion of a single LS is shown in Fig. 2, where successive experimental snapshots with interference fringe patterns are displayed with a time separation of 1.07 s. Here the drifting direction x is marked by an arrow. After the initial transient acceleration induced by the mirror tilt, the LS acquires a constant speed, as indicated by the dotted line. During the first stages of the advection, the structure loses its round shape and undergoes an asymmetrical deformation developing a large tail in its wake. The fourth panel of Fig. 2 shows a profile of a moving structure without fringes. The symmetry breaking is accompanied by the emission of pairs of optical vortices, appearing as dislocations in the interference pattern [27].

The inclination of the mirror induces the breakdown of reflection symmetry, favoring one direction, which we have denoted x . Then LSs are deformed and propagate in this

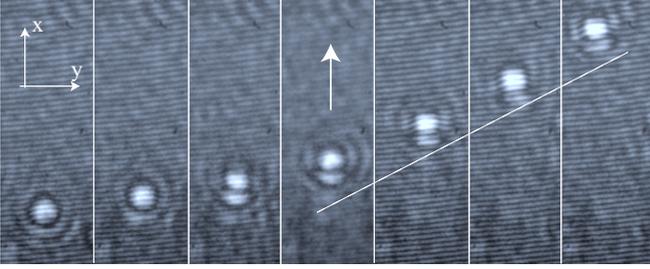


FIG. 2. Successive experimental snapshots (with a time separation of 1.07 s) showing an optical LS drifting along the x direction; the advection occurs after tilting the mirror M at the entrance of the feedback loop.

direction, as illustrated in Fig. 3. The TC induces a hump in the rear zone of the LS [see Figs. 3(a) and 3(b)]. It is important to note that increasing the displacement L increases the height of the hump. As we shall see later, the formation of the hump is a consequence of the translational nonlinear coupling of this system.

B. Numerical simulations of the LCLV model with translational coupling

To confirm the experimental observations we have performed numerical simulations of the full model for the LCLV with displaced optical feedback. The model consists in an equation for the average tilt angle $\theta(\vec{r}, t)$ of the LC molecules [31]

$$\frac{2}{\pi}(\tau \partial_t \theta - l^2 \nabla_{\perp}^2 \theta + \theta) = 1 - \sqrt{\frac{V_{\text{FT}}}{\Gamma V_0 + \alpha I_w(x + L, y)}}, \quad (1)$$

where $\tau = 30$ ms and $l = 30$ μm are the LC response time and electrical coherence length, respectively; ∇_{\perp}^2 is the transverse Laplacian; V_{FT} is the Fréedericksz transition voltage; Γ is the transfer function of the equivalent electric circuit of the LCLV; V_0 is the applied voltage; α is a coefficient accounting for the response of the photoconductor, L is the translation of the feedback beam, which we will call a displacement parameter; and I_w is the intensity on the photoconductor, which has the form

$$I_w(\theta(\vec{r}, t)) = \frac{I_{\text{in}}}{4} \left| e^{i\delta \nabla_{\perp}^2 / 2k} (e^{-i\beta \cos^2 \theta} - 1) \right|^2, \quad (2)$$

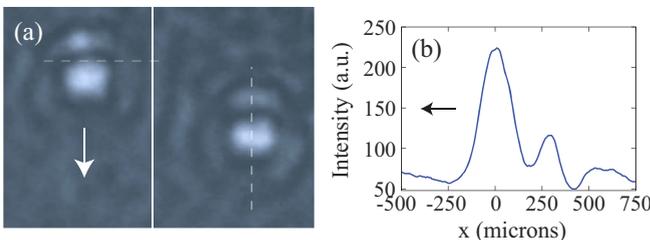


FIG. 3. (Color online) (a) Experimental snapshots of a propagating LS; the dashed line in the right panel shows the location from where the corresponding one-dimensional profile is extracted. This is shown in (b).

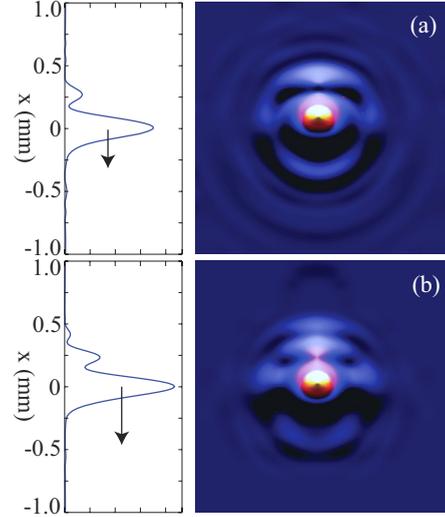


FIG. 4. (Color online) Numerical intensity profiles of a drifting localized structure obtaining from model (1): (a) $L = 126$ μm and (b) $L = 182$ μm ; the corresponding one-dimensional profiles along the advection direction x are shown on the left.

with δ the free propagation length, $k = 2\pi/\lambda$ the optical wave number, and $\beta \cos^2 \theta$ the phase shift acquired by the light when passing through the LC layer; $\beta = 4\pi \Delta n d / \lambda$, $\Delta n = 0.2$ is the LC birefringence, and d is the thickness of the LC layer. The electric field at the exit of the LC layer is $E_{\text{in}}(e^{-i\beta \cos^2 \theta} - 1)$, where E_{in} is the input field and $I_{\text{in}} = |E_{\text{in}}|^2$. Numerical integrations of Eq. (1) are made under periodic boundary conditions and by using a pseudospectral method, for which the spatial derivatives and the diffraction operator are solved in Fourier space, whereas the temporal evolution is calculated with an adaptive Runge-Kutta algorithm. In the bistable regime a single LS is generated by applying a Gaussian pulse inducing a local perturbation and then a translation L of the feedback intensity I_w is introduced.

Figure 4 shows a set of numerical results for the parameters $\delta = -16$ cm, $\alpha I_{\text{in}} = 1.2$, and $V_0 = 12.9$ V, giving LSs with a diameter of $D = 450$ μm . The range of L for which the advection regime exists is in between 30 and 250 μm . The respective numerical intensity profiles show how the initially axisymmetric LS [$L = 0$, Fig. 4(a)] is deformed during the advection. For relatively small translations [$L = 126$ μm , Fig. 4(b)], the profile is slightly deformed, with wavelets visible behind the structure. For larger drifts [$L = 182$ μm , Fig. 4(c)], the deformation becomes more important, with the amplitude of the principal and secondary maxima increasing and a large wake developing behind the structure. Linear intensity profiles along the drift direction are displayed at the left column of Fig. 4.

In addition, we have numerically calculated the speed v_d of LSs as a function of the displacement L . The results are plotted in Fig. 5, where we see that the speed exhibits a linear behavior as a function of the displacement. This behavior is in qualitative agreement with the experimental observations. In the experiment it is difficult to precisely measure the displacement and speed of the LSs because of the mirror tilt procedure that introduces an initial uncertainty

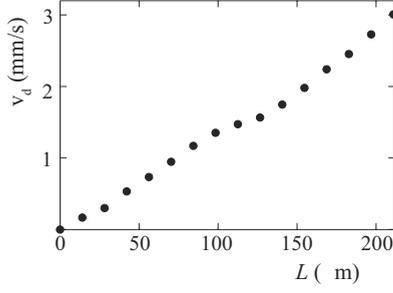


FIG. 5. Numerically calculated localized structure advection velocity v_d vs the translation L ; $\delta = -16$ cm.

on both quantities. The linear behavior of v_d versus L could nevertheless be verified qualitatively by measuring after the early stages of the process the slope of the spatiotemporal plots associated with the LS dynamics.

C. Linear stability analysis of the LCLV model

In order to develop a qualitative insight into the TC induced advection regime, we perform a linear stability analysis of the LCLV model [Eqs. (1) and (2)] for $L \neq 0$. If θ_0 is a homogeneous stationary solution, we take the ansatz $\theta = \theta_0 + \varepsilon\theta_1$, with θ_1 the perturbation satisfying $\partial_t\theta_1 = \sigma t\theta_1$, and $\nabla_{\perp}^2\theta_1 = -q^2\theta_1$, $\varepsilon \ll 1$, and q the wave number describing the spatially periodic perturbation. By substituting the perturbed solution into Eqs. (1) and (2) and by taking, without loss of generality, the displacement in the x direction, we obtain the dispersion relation [36]

$$\sigma = -q^2 - 1 - \chi e^{iq_x L} \cos(\Lambda q^2 + \varphi_0/2), \quad (3)$$

where

$$\chi = -\frac{\pi \alpha I_{\text{in}} \beta A \sqrt{\Gamma V_{\text{FT}}} \sin 2\theta_0}{4 (\Gamma V_0 + \alpha I_{\text{in}} A^2)^{3/2}},$$

with $\beta = 2k(n_e - n_o)d$, where n_e and n_o are, respectively, the extraordinary and ordinary refractive indices of the liquid crystal, $A = \sqrt{(1/2)(1 - \cos \varphi_0)}$, $\varphi_0 = \beta \cos^2 \theta_0$, $\Lambda = -\delta/2kl^2$, $t \rightarrow \tau t$, $x \rightarrow lx$, $y \rightarrow ly$, and $q^2 = q_x^2 + q_y^2$.

Both $\text{Re}(\sigma)$ and $\text{Im}(\sigma)$ have an oscillatory behavior as a function of q . The mode associated with the maximum of $\text{Re}(\sigma) > 0$ defines a critical wave number q_c , whereas the mode corresponding to the maximum of $\text{Im}(\sigma)$ defines a critical frequency Ω_c . In this analysis, one could consider qualitatively that a LS is a small perturbation propagating at the phase velocity of the linear dispersion relation. The phase velocity can then be constructed as $v = \Omega_c/q_c$ and calculated as a function of the displacement L . The result is plotted in Fig. 6, showing a linear behavior of v on a long range of L . While a direct comparison with the LS propagation speed (Fig. 5) cannot be made, Fig. 6 provides a qualitative basis to evaluate the behavior of the velocity at which a small perturbation of the homogeneous state would propagate under the effect of translational coupling.

Figure 5, which illustrates the speed v_d of LS propagation as a function of L , shows a linear behavior for small displacements. However, for large L the LSs undergo secondary instabilities. The derivation of these instabilities from model (1) is a complex task. A simple nonlocal model is proposed in

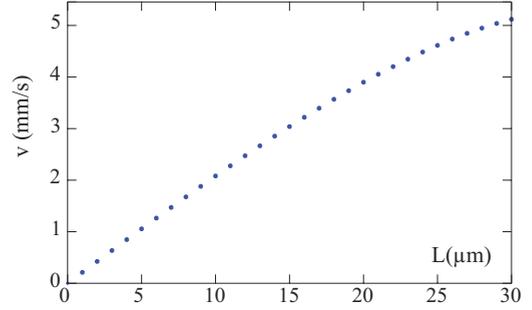


FIG. 6. (Color online) Phase velocity v at which a small perturbation of the homogeneous state would propagate under the effect of translational coupling versus the spatial displacement L .

the following section, which, as we will see, allows us to catch the essential phenomenon of the LS destabilization as well as to calculate analytically the propagation speed.

III. SIMPLE MODEL DESCRIBING TRANSLATIONAL COUPLING IN ONE-DIMENSIONAL SYSTEMS

Numerical simulations using the phenomenological model (1) show quite good agreement with the experimental observations. However, this is an extremely complex model to realize analytical studies that can help us understand the dynamics of LS under the TC. In order to reveal the existence conditions, stability properties, and dynamical evolution of the localized states under the effect of TC, we consider the generalized Swift-Hohenberg model with TC

$$\partial_t u(x,t) = \eta + \epsilon u(x+L,t) - u^3(x+L,t) - v \partial_{xx} u(x,t) - \partial_{xxxx} u(x,t), \quad (4)$$

where $u(x,t)$ is a scalar field corresponding to the order parameter, evaluated at position x and time t , ϵ is the bifurcation parameter, η accounts for the asymmetry between the two stable homogeneous states, v is related to nearest-neighbor coupling [when it is negative (positive) it quantifies the diffusion (antidiffusion) coefficient], and L is the displacement that rules the TC. The generalized Swift-Hohenberg model is here chosen not only because it is the prototypical model for the emergence of stationary patterns and localized structures [2,3] but also because a generalized version including nonvariational terms (Lifshitz normal form) was previously derived for the LCLV system [31]. For the sake of clarity, we consider here the simplest scalar version, which allows us to account for localized structures and translational coupling: It is the minimal scalar model displaying localized structures and it has been derived in different contexts such as fluids, chemical reactions, population dynamics, biological models of neurons, and optical systems [2,3,37]. One of the main ingredients exhibited by the model is the possible coexistence of a pattern and a uniform state, which allows the existence of stable localized structures. This is indeed the case for the LCLV experiment, which shows multistability, a spatial instability giving rise to patterns, localized structures, and homogeneous states.

In the case of $L = \eta = 0$, the Eq. (4) corresponds to the Swift-Hohenberg model [3]. It was introduced to explain the emergence of patterns in one-dimensional nonequilibrium

systems, which was proposed in the context of Rayleigh-Bénard convection [38]. It is worth noting that for $L = 0$, the above model is local, that is, the immediate temporal evolution of the field $u(x,t)$ is determined by itself and its immediate spatial surroundings. In the case $\eta \neq 0$ the model (4) is called *the generalized Swift-Hohenberg equation*. Originally, this model was proposed to explain the appearance of LSs in optical bistability [39]. Subsequently, this model has become the prototypical model to describe the emergence of patterns and localized dissipative states. Here we consider $L \neq 0$. Translational coupling in the LCLV has simultaneously linear and nonlinear effects; for this reason, we have considered the prototypical model (4) with linear and nonlinear TC. The TC favors one direction; consequently, it breaks the reflection (rotational) symmetry of the original one-dimensional (two-dimensional) Swift-Hohenberg equation.

It is well known that for certain values of the parameters, the generalized Swift-Hohenberg equation exhibits localized states [39]. Figure 7 shows the parameter space where the smallest (one-cell) propagative LS is stable in the generalized Swift-Hohenberg equation with TC ($L = 0.8$). It is noteworthy that the motionless localized states for the generalized Swift-Hohenberg equation ($L = 0$) exist in a very similar area in the

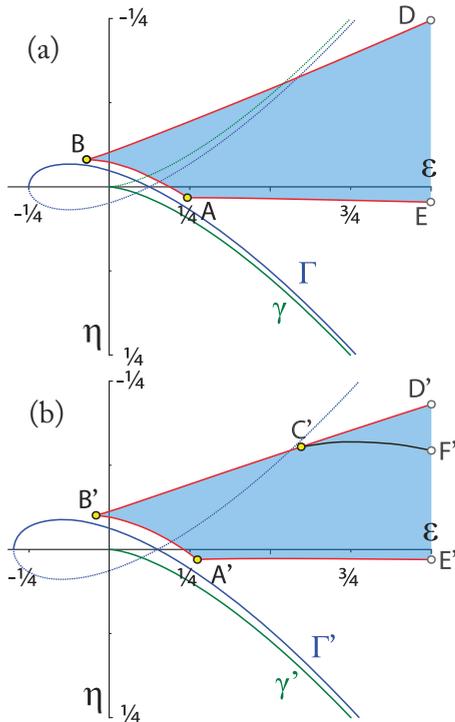


FIG. 7. (Color online) Bifurcation diagram in the $\{\epsilon, \eta\}$ space ($\nu = 1$) of the Swift-Hohenberg equation (a) without ($L = 0.0$) and (b) with TC ($L = 0.8$). The γ (or γ') curve separates the region of coexistence of uniform states. Below this curve there is only one steady state, which we have denoted by u_0 . Above the γ (γ') curve the system exhibits three uniform states, two stable and one unstable. The Γ (or Γ') curve accounts for the spatial instability of the state u_0 . In the shaded region $ABCD$ ($A'B'C'D'$) the smallest (one-cell) localized structure supported on the lower homogeneous state is stable (and propagates). For $L = 0.8$, in the region $C'D'F'$ the localized state moves in the direction opposite to the TC.

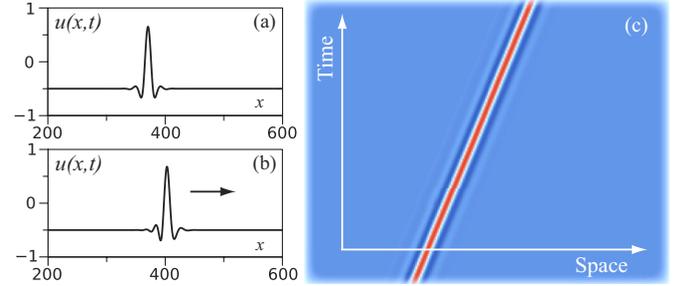


FIG. 8. (Color online) The LSs observed in the Swift-Hohenberg model with translational coupling by $\epsilon = 0.17$, $\eta = -0.04$, and $\nu = 1.00$: (a) $L = 0$ and (b) $L = 0.8$. (c) Spatiotemporal evolution of the LS with $L = 0.8$.

parameter space shown in Fig. 7 [40]. Despite the simplicity of the Swift-Hohenberg equation, analytical expressions of localized states are unknown.

To study Eq. (4) numerically, we have considered a Runge-Kutta scheme of order 4 for the temporal integration and finite differences to compute spatial derivatives over a grid of equally spaced points $\{x_k\}_{k=1}^n$. Since L is a continuous parameter, in order to study bifurcations one needs to evaluate the field u at an arbitrary point $y = x + L$, not necessarily in the grid. To do so, we have interpolated the value of $u(y,t)$ from the nearest five points in the grid by considering a fourth-order polynomial. Numerical simulations of Swift-Hohenberg equation with TC ($L \neq 0$) reveal that the localized states persist in this model. Figure 8 shows the smallest LS in model (4) with translational coupling for $L = 0$ [Fig. 8(a)] and $L = 0.8$ [Fig. 8(b)]. We observe that LSs are deformed and propagate in the direction favored by TC, as illustrated in Fig. 8(c). The deformation of localized states is consistent with experimental observations [cf. Fig. 3(b)], i.e., the rear damped oscillations are amplified in the presence of TC. Note that when the bifurcation parameter ϵ is large enough, the localized state moves backwards for L positive. This occurs more markedly when the TC only affects the linear term; in this case LSs also display an opposite behavior in their deformation. More precisely, the damped oscillations in front, not in the rear, of the localized state are amplified. The above analysis allow us to conclude that in the parameter region studied experimentally, the nonlinear TC terms are essential to explain the observed behavior.

A. Analytical determination of the speed of localized structures

It is straightforward to prove that if $u(x,t)$ is a solution to Eq. (4), then $u(-x,t)$ is a solution to the same equation with $L \rightarrow -L$. Now let us consider any propagative solution $u(x,t) = f(x - c(L)t)$, where $c(L)$ is the velocity of propagation. From the above symmetry property it follows directly that $c(-L) = -c(L)$. Hence, if the speed of such propagative state admits a Taylor expansion around $L = 0$, it can only contain odd terms. We will now deduce the value of the first term of such an expansion for a localized state (the same strategy is also valid in more spatial dimensions).

For $L = 0$ any localized state u_{LS} is static, thus for small L ($L \ll 1/\sqrt{\nu}$) we can consider the effect of TC as a perturbation over such a state. In this limit we can use the approximation

$u(x + L, t) \approx u(x, t) + L\partial_x u(x, t) + O(L^2)$. Equation (4) becomes (the *nonlinear convective Swift-Hohenberg equation*)

$$\begin{aligned} \partial_t u = & \eta + \epsilon u(x, t) - u^3 - v\partial_{xx}u - \partial_{xxxx}u \\ & + L(\epsilon - 3u(x, t)^2)\partial_x u. \end{aligned} \quad (5)$$

To compute the velocity of the LS, we consider the ansatz

$$u(x, t) \equiv u_{LS}(x - x_0(t)) + W(x, x_0), \quad (6)$$

where $u_{LS}(x)$ is any LS of the generalized Swift-Hohenberg equation ($L = 0$), x_0 stands for its position, corresponding to the position of its maximum, and W is a correction function of $O(L)$ that accounts for the deformations suffered by the solution. To account for the drift effect of TC, we have promoted the continuous parameter x_0 to a function of time. In the limit L tending to zero, x_0 becomes a constant and W converges to zero. Introducing the above ansatz in Eq. (5) and linearizing in W we obtain

$$\mathcal{L}W = \dot{x}_0\partial_x u_{LS} + L(\epsilon - 3u_{LS})\partial_x u_{LS}, \quad (7)$$

where \mathcal{L} is a linear operator given by

$$\mathcal{L} = \epsilon - 3u_{LS}^2 - v\partial_{xx} - \partial_{xxxx}.$$

Introducing the inner product

$$\langle f(x)|g(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx, \quad (8)$$

the linear operator \mathcal{L} is self-adjoint. In order to have a solution for the linear equation (7), we apply the solvability condition or Fredholm alternative [2]. Thus we obtain the following relationship for the speed of a LS:

$$\dot{x}_0 = L \left(3 \frac{\langle u_{LS}^2 | (\partial_x u_{LS})^2 \rangle}{\langle \partial_x u_{LS} | \partial_x u_{LS} \rangle} - \epsilon \right) + O(L^3). \quad (9)$$

Therefore, in this approximation, we find that the speed of propagation of the LS is linear with L . Expression (9) helps us understand the role of linear and nonlinear TC. Since the first and second terms on the right-hand side are

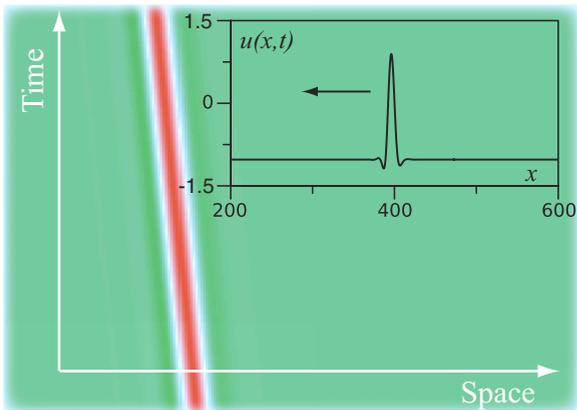


FIG. 9. (Color online) The LS moving in the direction opposite to the displacement, obtained for the Swift-Hohenberg model with translational coupling. Here $\epsilon = 0.85$, $\eta = -0.2$, $v = 1.00$, and $L = 0.8$.

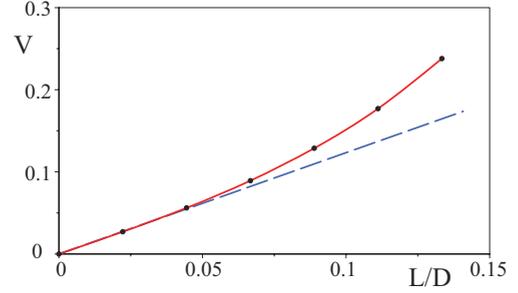


FIG. 10. (Color online) Numerical evaluation of the speed of the smallest localized state in the Swift-Hohenberg model with TC, as a function of L/D , where $D = 10.798$ is the characteristic size of the LS at $L = 0$. Except for L we fix all parameters: $\epsilon = 0.6$, $\eta = -0.04$, and $v = 1.00$. The solid curve was obtained with a spatial discretization step $dx = 0.2$. The dashed curve is the linear theoretical prediction, whose coefficient was numerically evaluated for $dx = 0.1$.

the result of nonlinear and linear TC, respectively, for small ϵ LSs propagate along the direction of displacement and for large enough ϵ they do it in the opposite direction. Figure 9 shows a LS moving in the direction opposite to displacement ($\epsilon = 0.85$). Such backwards propagating states are observed in the $\overline{D'CF'}$ region shown in Fig. 7(b).

We have measured the propagation speed of LSs exhibited by the model numerically (4). Figure 10 depicts this speed as a function of the displacement parameter L . We note that for small displacements compared to the size of the LS the formula (19) consistently describes the observed dynamics (see Fig. 10). However, for larger displacements, the speed is governed by nonlinear corrections in L (cubic, quintic, and so forth). Then the measured speed of the localized state systematically moves away from the theoretical linear prediction. However, both the linear stability analysis and numerical simulations of the LCLV model mainly present a linear regime as a function of L (see Figs. 5 and 6). As we will see later, the linear regime is wider in two dimensions.

Remarkably, the above analysis allows us to recognize, by simply inspecting the direction of the LS advection with respect to the deformation, that the TCs in the experiment are mainly dominated by the nonlinear coupling induced by the optical feedback.

IV. MECHANISMS OF DESTABILIZATION OF PROPAGATIVE LOCALIZED STRUCTURES

When increasing the displacement parameter L , or by changing the parameters $\{\eta, \epsilon\}$ in model (4), LSs lose stability through different processes. In the following sections we discuss the different mechanisms of instability undergone by LSs. A bifurcation diagram is constructed for the smallest localized state (Fig. 7).

A. Saddle-node bifurcation

When one begins to decrease the asymmetry parameter η , the stable LS is modified so that the dominant peak decreases. This dynamical behavior continues until one finds a critical value of η_c , for which the LS vanishes converging

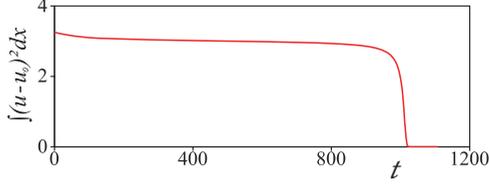


FIG. 11. (Color online) Temporal evolution of the relative norm, formula (11), considering the Swift-Hohenberg model with translational coupling $\epsilon = 0.2$, $\eta = -0.01$, $\nu = 0.3$, and $L\sqrt{\nu} = 0.458$.

to the homogeneous solution. In this process the maximum of the solution initially decays slowly and suddenly drops quickly towards the homogeneous state. For $L = 0$, the process described above occurs when one crosses the segment \overline{BD} in the parameter space shown in Fig. 7(a) [$\overline{B'D'}$ for $L = 0.8$ in Fig. 7(b)]. Alternatively, this can be obtained by increasing L for certain given values of $\{\epsilon, \eta\}$. In order to characterize this process, we consider the relative norm of the LS, N_{rel} , defined as

$$N_{\text{rel}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [u(x, t) - u_0]^2 dx, \quad (10)$$

where u_0 stands for the uniform state that supports the LS. Figure 11 shows the temporal evolution of the relative norm of a LS. Clearly, this graphic shows that for a long time the localized state almost maintains its relative norm, which decreases exponentially, and then it suddenly drops until it vanishes: The system displays the uniform state u_0 as equilibrium. This type of behavior of the sudden disappearance of an equilibrium is typical of a saddle-node bifurcation [41] and is commonly referred to as *ghost* or *ruin* [42], that is, a metastable localized state remains for a long time until it starts to decrease and suddenly disappears. These long transients are characterized by a residence time diverging T with a power law $1/2$ as one approaches the saddle-node bifurcation [42]. We have considered the following strategy to study these dynamical transients exhibited by the unstable localized state. We set all the parameters of the model (4) at a suitable point and begin to decrease the displacement parameter L . For each L we calculate the cumulative relative norm

$$A(L) = \int_{t_0}^{\infty} N_{\text{rel}}(t) dt. \quad (11)$$

As a result of the mean value theorem, A is proportional to the residence time near the bifurcation. Theory shows that this time diverges with a power law $1/2$ near a critical value L_c ; then the cumulative norm A must diverge with the same law. Figure 12 shows the cumulative norm $A(L)$ measured near the bifurcation (4) and the numerical fit considering groups of five points

$$A = A_0 \left(\frac{L}{L_c} - 1 \right)^{\alpha}, \quad (12)$$

where $\alpha = 0.50003$, $L_c\sqrt{\nu} = 0.451220$, and $A_0 = 153.8$ considering the parameters $\eta = -0.01$, $\epsilon = 0.2$, and $\nu = 0.3$. Therefore, the previous result confirms that this bifurcation corresponds to a saddle node. Notice that when considering

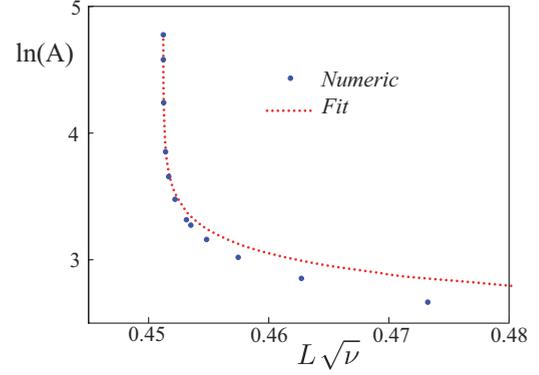


FIG. 12. (Color online) Cumulative area as a function of the displacement parameter L . The dots represent the values obtained numerically from the model (4) for $\epsilon = 0.2$, $\eta = -0.01$, and $\nu = 0.3$. The dashed curve is obtained by using the fitting formula (12) and by considering the first five points.

more distant points the power law changes and even ceases to be a power law because it is only valid for a region near the critical value L_c . Experimentally, we observe qualitatively that the localized states disappear through this mechanism; however, a study to provide a detailed characterization of the process is an experimentally complex task.

B. Pattern formation instability

In contrast, by increasing the displacement parameter L or by increasing η for small ϵ , we observe that the amplitude of spatial oscillations of the rear tail of the smallest propagative LSs (also other LSs) begin to grow, giving rise to the emergence of patterns. Figure 13 depicts the process of the pattern emergence from an unstable localized state. The growth of spatial damped oscillations of the localized state is a signal that the uniform solution that supports the LS is close to becoming unstable. Indeed, as one can see in Fig. 7, the above process occurs when one crosses the \overline{AB} ($\overline{A'B'}$) curve, which runs close and nearly parallel to the Γ (Γ') curve.

To elucidate this mechanism, let us denote by u_0 the homogeneous state towards which the LS converges at infinity; it satisfies the relation

$$0 = \eta + \epsilon u_0 - u_0^3.$$

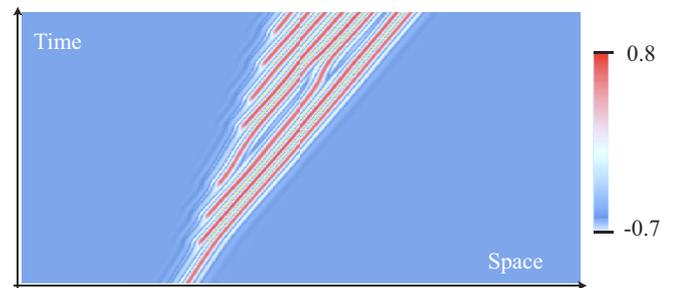


FIG. 13. (Color online) Spatiotemporal diagram showing the evolution of an unstable localized structure that generates the appearance of patterns in the model (4); $\epsilon = 0.18$, $\eta = -0.04$, $\nu = 1.00$, and $L = 1.2$.

To study the stability of u_0 , we introduce the following ansatz $u = u_0 + v e^{\lambda(k)t + ikx}$ in Eq. (4), where v is a small complex number and the real part of $\lambda(k)$ stands for the growth rate of the harmonic mode with wave number k . After straightforward calculations we obtain the relation

$$\lambda = (\epsilon - 3u_0^2) e^{iLk} + vk^2 - k^4. \quad (13)$$

Then, if the real part of λ is positive (negative), the solution u_0 is unstable (stable). Thus the instability curve might be obtained by determining the maxima of λ as a function of k [$k_c(L, \epsilon, \nu, \eta)$] and then by imposing that the real part of λ is equal to zero at these points. This procedure creates a relationship between k_c (critical wave number), L , and the other parameters (ϵ, ν, η), which represents *the instability curve*. Because of the complexity of analytical expressions for u_0 , we introduce the auxiliary parameters

$$\chi \equiv (\epsilon - 3u_0^2)/\nu^2, \quad \psi \equiv Lk, \quad (14)$$

the first representing the control parameter and the second accounting for the length of the translational coupling.

After straightforward calculations we obtain the transcendental relationship

$$\frac{\chi}{2} [\psi \sin(\psi) + 4 \cos(\psi)]^2 = -\psi \sin(\psi) - 2 \cos(\psi), \quad (15)$$

which is plotted in Fig. 14. The solid curve represents the relationship (15) solved for L_c . The top (bottom) of this curve represents the region of parameter space where the uniform state u_0 is unstable (stable). To develop an approximate analytical expression for the instability curve, we can first consider the limits $\chi \rightarrow -\infty$ and $\chi \rightarrow -1/4$. The latter case corresponds to the limit $L \rightarrow 0$. In both limits one can obtain simple analytical expressions. From these expressions and by using the Padé approximant method [43], we can interpolate the transcendental equation (15) and obtain

$$\psi = \frac{c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3}{1 + d_1 z + d_2 z^2 + d_3 z^3}, \quad (16)$$

where $z = \sqrt{-(1/4 + \chi)}$, $c_1 = 2.83$, $c_2 = 7.02$, $c_3 = 8.60$, $d_1 = 2.48$, $d_2 = 4.20$, and $d_3 = 4.20$. Thus the critical wave

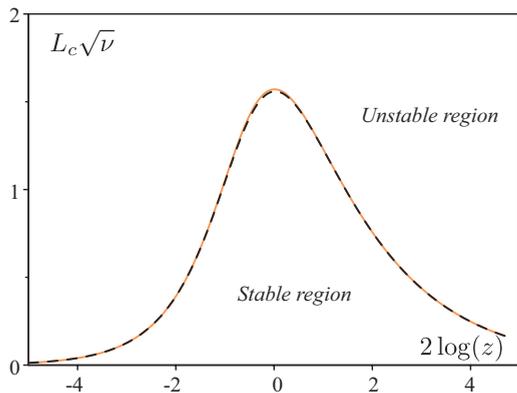


FIG. 14. (Color online) Spatial instability curve for the uniform state u_0 , L versus $2 \ln(z)$, with $z \equiv [-(1/4 + \chi)]^{1/2}$. The solid and dashed curves represent, respectively, the transcendental relation (15) and a Padé approximation (16).

number has the expression

$$k_c = \frac{1}{2} \sqrt{\nu [1 + \sqrt{1 + (1 + 4z^2)\psi \sin \psi}]}. \quad (17)$$

One noteworthy advantage of the Padé approximant method is that it provides simple expressions with which one can perform analytical calculations. In Fig. 14 the dashed line shows the results obtained by using the formula based on the Padé approximant method (16). The relative difference between the areas below the curves obtained using formulas (15) and (16) is $10^{-5}\%$. Therefore, we conclude that the Padé method allows us to have a correct and manipulable approximation for the instability curve, except near its maximum, where it slightly underestimates the value of L_c . It is easy to prove analytically that this maximum occurs exactly at $L = L_c^* \sqrt{\nu} \equiv \pi/2$ and also $\chi = \chi^* \equiv -4/\pi$ and $k_c = k_c^* \equiv 1$. For any value of L above L_c^* , the homogeneous state is spatially unstable and no LS can be stable. Numerical simulations show that when one crosses the instability curve \overline{AB} or $\overline{A'B'}$ (see Fig. 7), the localized state becomes unstable and from it a pattern solution is engendered, as illustrated in Fig. 13.

C. Front emission

For a fixed displacement parameter L , positive and large ϵ , and negative η , we observed a different mechanism of destabilization of the dissipative LSs. The localized state is destabilized through the emission of two counterpropagative fronts. Because of the TC, while the forward front propagates at a speed close to zero, the rear front propagates in the opposite direction and with a higher speed. Figure 15 shows the space-time diagram of this process. The above process occurs when one crosses the \overline{AE} ($\overline{A'E'}$) curve in the space of parameters illustrated in Fig. 7. These fronts appear because the upper homogeneous state is more stable than the lower one. Thus, through the emission of a couple of fronts, the system arrives at the most stable state.

Front dynamics in the LCLV experiment has been previously characterized both for homogenous liquid crystal reorientation [44,45] and in the pinning-depinning regime under spatially periodic forcing [46,47].

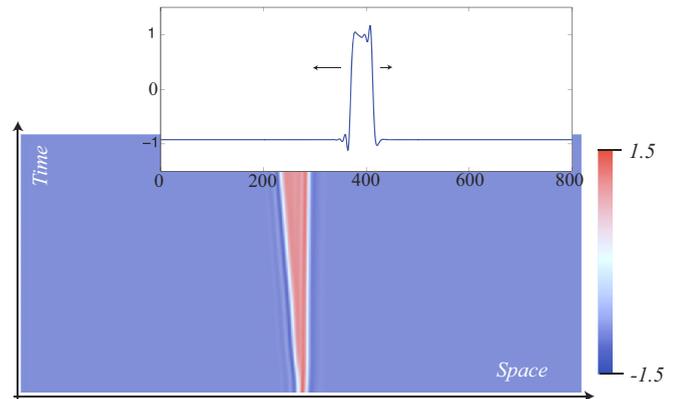


FIG. 15. (Color online) Spatiotemporal diagram showing the front emission: An unstable LS generates the emission of two counterpropagative fronts in the model (4); $\epsilon = 0.9$, $\eta = 0.04$, $\nu = 1.00$, and $L = 0.76$.

V. GENERALIZATION OF THE MODEL TO TWO-DIMENSIONAL EXTENDED SYSTEMS

The one-dimensional model (4) allows us to characterize the universal behavior of the LS under the influence of TC. However, experimental observations are performed in a two-dimensional framework. In order to compare the results of the preceding sections, we consider here a generalization of the model in two space dimensions

$$\partial_t u(\vec{r}, t) = \eta + \epsilon u(\vec{r} + \vec{L}, t) - u^3(\vec{r} + \vec{L}, t) - \nu \nabla^2 u - \nabla^4 u, \quad (17)$$

where $\vec{r}(x, y)$ represents the position vector, \vec{L} stands for the displacement vector, and $\nabla^2 = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ is the Laplacian operator. Henceforth, for the sake of simplicity, we consider $\vec{L} = L_0 \hat{x}$ describing, without loss of generality, the translation in a given direction. For $L_0 = 0$, it is well known that the above model exhibits a LS [39]. When we consider the effect of TC ($L_0 \neq 0$), the localized state is deformed and becomes propagative along the direction of the TC. This deformation is characterized by an amplification of the rear spatial oscillations, accompanied by the loss of rotational symmetry of the solution. Indeed, the LS profile becomes elliptical, favoring the direction of TC, which is consistent with the experimental observations (see Fig. 3). Figure 16(a) illustrates the LS obtained for Eq. (17), which shows good qualitative agreement with those observed experimentally (cf. Fig. 3) and numerically using the LCLV model (1).

By fixing the parameters to constant values and increasing L_0 , we study the speed of propagation of localized states. Figure 16(b) shows this speed as a function of the displacement parameter L_0 . For small L_0 , we note that the speed has a linear behavior in a wider region than in the one-dimensional case. For large L_0 , the speed exhibits a nonlinear behavior,

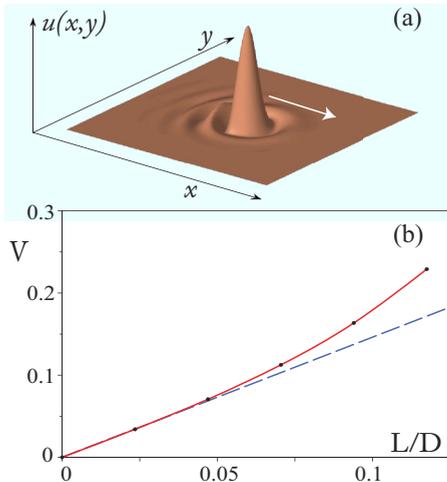


FIG. 16. (Color online) (a) Propagative LSs obtained from the model (17) for $\epsilon = 0.5$, $\eta = -0.05$, $\nu = 1.00$, and $L_0 = 1.5$. Rear oscillations are clearly amplified, breaking the rotational symmetry present in the case $L = 0$. (b) Speed of LSs as a function of L/D , where $D = 12.112$ is the size of the LS at $L = 0$. Except for L we fix all parameters: $\epsilon = 0.005$, $\eta = -6e - 5$, and $\nu = 0.1$. The solid curve represents numerical measurements of the velocity and the dashed line is the linear theoretical prediction.

characterized by a significant increase of its value. In order to study analytically the speed evolution, we can adopt the same strategy as used in Sec. III A, that is, we consider the ansatz

$$u(\vec{r}, t) \equiv u_{\text{LS}}(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) + w(\vec{r}, \vec{r}_0(t)). \quad (18)$$

Introducing this ansatz in Eq. (17) and performing the same procedure as that presented in Sec. III A, we obtain

$$\dot{\vec{r}}_0 \cdot \hat{x} = L \left(3 \frac{\langle\langle u_{\text{LS}}^2 | (\partial_x u_{\text{LS}})^2 \rangle\rangle}{\langle\langle \partial_x u_{\text{LS}} | \partial_x u_{\text{LS}} \rangle\rangle} - \epsilon \right), \quad (19)$$

with

$$\langle\langle f | g \rangle\rangle \equiv \int f(x, y) g(x, y) dx dy.$$

From the above result we can see that the expressions for the speed in one and two dimensions are similar. The solid curve shown in Fig. 16(b) accounts for the above analytical expression, which in the linear regime exhibits good agreement with the numerical findings. This shows that in a large region of parameters one expects to observe a linear behavior of the speed as a function of the displacement parameter L_0 . The result is consistent with the experimental observations and the LCLV model.

VI. CONCLUSION

In past decades scientists have dedicated much attention and effort to understanding LSs, inspired by their potential applications. By using TC, we have presented the possibility of manipulating the dissipative localized states, that is, moving them in a controlled fashion. In a light-valve experiment we have shown that under the influence of this type of coupling, dissipative localized states begin to move with constant speed and are deformed, developing a tail along the direction of coupling.

We expect this type of dynamic behavior to be common to a large class of physical systems. In fact, this is manifested in the present study, where, motivated by the experimental observations, we have considered a prototypical and general model of dissipative localized states with translational coupling. From this model we have been able to capture the main physical features of the phenomenon and to observe both numerically and analytically the same type of dynamical behavior as in the experiment and in the LCLV model.

In particular, we have shown that dissipative localized states in one dimension become unstable by three mechanisms: saddle-node bifurcation, counterpropagative front emission, and spatial instability. In the latter two cases, the disappearance of the localized state is accompanied by the emergence of complex spatiotemporal structures. In two dimensions, dissipative LSs are destabilized by mechanisms similar to those observed in one dimension. Here the emergence of patterns exhibits more complex spatiotemporal dynamics, whose characterization requires further studies.

As an important outcome of the model, we have identified a potential, and efficient, way to control or manipulate dissipative LSs. Indeed, we show that this can be achieved by introducing a time-dependent displacement vector $L(t)$, which enables one to manage and move localized states to the

most appropriate place. A relevant question is the feasibility of generating TC in diverse physical systems. In the framework of mechanical systems (fluid or elastic media), magnetic media, chemical reactions (diffusion reaction) to create, or design, a TC might be a complex task. In contrast, in optical systems TC is naturally present because of the nonlocal nature of diffraction and can be easily amplified by introducing small misalignments of the optical beams. Therefore, the study of the effect of TC for optical systems is quite relevant, although most experimental systems are designed to avoid such effects.

ACKNOWLEDGMENTS

We acknowledge financial support of the Agence Nationale de la Recherche international program, Project No. ANR-2010-INTB-402-02 (ANR-CONICYT 39), COLORS. M.G.C. is grateful for financial support from the Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico through Project No. 1120320 and Anillo Grant ACT127. F.d.C. acknowledges financial support from Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica by *Beca Magister Nacional*.

-
- [1] G. Nicolis and I. Prigogine, *Self-Organization in Nonequilibrium Systems: From Dissipative Structures to Order through Fluctuations* (Wiley, New York, 1977).
- [2] L. M. Pismen, *Patterns and Interfaces in Dissipative Dynamics*, Springer Series in Synergetics (Springer, Berlin, 2006).
- [3] M. C. Cross and P. C. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 851 (1993).
- [4] *Localized States in Physics: Solitons and Patterns*, edited by O. Descalzi, M. Clerc, S. Residori, and G. Assanto (Springer, Berlin, 2010).
- [5] H. G. Purwins, H. U. Bodeker, and Sh. Amiranashvili, *Adv. Phys.* **59**, 485 (2010).
- [6] T. Ackemann, W. J. Firth, and G. L. Oppo, *Adv. At. Mol. Opt. Phys.* **57**, 323 (2009).
- [7] A. C. Newell, *Solitons in Mathematics and Physics* (Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1985).
- [8] M. Remoissenet *Waves Called Solitons: Concepts and Experiments* (Springer, Heidelberg, 1999).
- [9] P. Coullet, *Int. J. Bif. Chaos* **12**, 2445 (2002).
- [10] P. Coullet, C. Riera, and C. Tresser, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3069 (2000).
- [11] W. van Saarloos and P. C. Hohenberg, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 749 (1990).
- [12] P. D. Woods and A. R. Champneys, *Physica D* **129**, 147 (1999).
- [13] G. W. Hunt, G. J. Lord, and A. R. Champneys, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **170**, 239 (1999).
- [14] M. G. Clerc and C. Falcon, *Physica A* **356**, 48 (2005).
- [15] U. Bortolozzo, M. G. Clerc, C. Falcon, S. Residori, and R. Rojas, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 214501 (2006).
- [16] O. Thual and S. Fauve, *J. Phys. (Paris)* **49**, 1829 (1988); S. Fauve and O. Thual, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 282 (1990).
- [17] V. Hakim and Y. Pomeau, *Eur. J. Mech. B Fluids Suppl.* **10**, 137 (1991).
- [18] S. Barland *et al.*, *Nature (London)* **419**, 699 (2002).
- [19] U. Bortolozzo and S. Residori, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 037801 (2006).
- [20] M. G. Clerc, F. Haudin, S. Residori, U. Bortolozzo, and R. G. Rojas, *Eur. Phys. J. D* **59**, 43 (2010).
- [21] F. Haudin, R. G. Rojas, U. Bortolozzo, S. Residori, and M. G. Clerc, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 264101 (2011).
- [22] M. G. Clerc, R. G. Elías, and R. G. Rojas, *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A* **369**, 412 (2011).
- [23] U. Bortolozzo, P. L. Ramazza, and S. Boccaletti, *Chaos* **15**, 013501 (2005).
- [24] E. Caboche, F. Pedaci, P. Genevet, S. Barland, M. Giudici, J. Tredicce, G. Tissoni, and L. A. Lugiato, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 163901 (2009).
- [25] L. Gordillo, T. Sauma, Y. Zarate, I. Espinoza, and N. Mujica, *Eur. Phys. J. D* **62**, 39 (2011).
- [26] M. Tlidi, A. G. Vladimirov, D. Pieroux, and D. Turaev, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 103904 (2009).
- [27] F. Haudin, R. G. Rojas, U. Bortolozzo, M. G. Clerc, and S. Residori, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 063901 (2011).
- [28] S. Residori, *Phys. Rep.* **416**, 201 (2005).
- [29] P. G. de Gennes and J. Prost, *The Physics of Liquid Crystals*, 2nd ed. (Oxford University Press, Oxford, 1993).
- [30] I. C. Khoo, *Liquid Crystals: Physical Properties and Nonlinear Optical Phenomena*, 2nd ed. (Wiley Interscience, New York, 2007).
- [31] M. G. Clerc, A. Petrossian, and S. Residori, *Phys. Rev. E* **71**, 015205 (2005).
- [32] P. L. Ramazza, S. Boccaletti, A. Giaquinta, E. Pampaloni, S. Soria, and F. T. Arecchi, *Phys. Rev. A* **54**, 3473 (1996).
- [33] P. L. Ramazza, S. Boccaletti, A. Giaquinta, E. Pampaloni, S. Soria, and F. T. Arecchi, *Phys. Rev. A* **54**, 3472 (1996).
- [34] P. L. Ramazza, S. Ducci, and F. T. Arecchi, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4128 (1998).
- [35] C. Cleff, B. Gütlich, and C. Denz, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 233902 (2008).
- [36] R. Rojas, Ph.D. thesis, University of Nice-Sophia Antipolis, 2005, <http://tel.archives-ouvertes.fr>.
- [37] G. Kozyreff and M. Tlidi, *Chaos* **17**, 037103 (2007).
- [38] J. Swift and P. C. Hohenberg, *Phys. Rev. A* **15**, 319 (1977).
- [39] M. Tlidi, P. Mandel, and R. Lefever, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 640 (1994).
- [40] P. Coullet, C. Riera, and C. Tresser, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **139**, 46 (2000).
- [41] O. Descalzi, M. Argentina, and E. Tirapegui, *Phys. Rev. E* **67**, 015601 (2003).
- [42] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1994).
- [43] G. A. Jr. Baker, in *Advances in Theoretical Physics*, edited by K. A. Brueckner, Vol. 1 (Academic, New York, 1965).
- [44] M. G. Clerc, S. Residori, and C. S. Riera, *Phys. Rev. E* **63**, 060701(R) (2001).
- [45] M. G. Clerc, T. Nagaya, A. Petrossian, S. Residori, and C. S. Riera, *Eur. Phys. J. D* **28**, 435 (2004).
- [46] F. Haudin, R. G. Elías, R. G. Rojas, U. Bortolozzo, M. G. Clerc, and S. Residori, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 128003 (2009).
- [47] F. Haudin, R. G. Elías, R. G. Rojas, U. Bortolozzo, M. G. Clerc, and S. Residori, *Phys. Rev. E* **81**, 056203 (2010).