



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

EQUILIBRIO AUTOCONFIRMANTE EN UN MODELO DE K-RACIONALIDAD

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN ECONOMÍA APLICADA

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL

CLAUDIO ANTONIO PALOMINOS FLORES

PROFESOR GUÍA:
JUAN ESCOBAR CASTRO

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
CARLOS NOTON NORAMBUENA
NICOLÁS FIGUEROA GONZÁLEZ

SANTIAGO DE CHILE
DICIEMBRE 2013

Resumen

En este trabajo se define un concepto de equilibrio en juegos, bajo cierto tipo de racionalidad limitada (se hablará de k -racionalidad), definida por las creencias que los jugadores tienen respecto de la racionalidad de los demás. La evidencia experimental estudiada por los modelos de nivel k (Stahl & Wilson, 1994; Nagel, 1995) y de jerarquías cognitivas (Camerer, Ho, Chong, 2004) indica que, en general, los jugadores no asumen conocimiento común de la racionalidad, sino que eligen sus estrategias óptimas de acuerdo a la predicción que hacen del comportamiento de los demás.

Este trabajo parte de estos supuestos, a través de un modelo de k -racionalidad que reemplaza el conocimiento común de la racionalidad por una regla de decisión que indica cómo eligen sus estrategias los jugadores a partir de las predicciones que hacen. Se propone un equilibrio k -autoconfirmante para juegos estáticos y dinámicos (tomando el concepto de Fudenberg & Levine (1993)) en este modelo, correspondiente a un perfil de estrategias y niveles de racionalidad tales, que una vez realizado el juego, los jugadores no pueden rechazar sus creencias dado que sus predicciones son correctas y que no hay incentivos a desviarse de este perfil. A lo largo de este trabajo se considerará que las creencias son un tipo que viene dado para los jugadores, sin capacidad de modificarlo; esto evita preocuparse por la formación de creencias y centra la discusión en las situaciones de equilibrio.

Un primer resultado para juegos estáticos es que un perfil de estrategias en equilibrio k -autoconfirmante también corresponde a un equilibrio de Nash para el mismo juego sin considerar creencias, esto permitiría usar el modelo para seleccionar equilibrios. Además, se muestra que uno de los ejemplos paradigmáticos en la literatura experimental - el juego del *Beauty Contest* - no tiene equilibrio k -autoconfirmante, lo que podría explicar el sesgo por estudiar situaciones fuera de equilibrio.

La verdadera riqueza del modelo, sin embargo, está en juegos dinámicos; al aplicar esta definición de equilibrio a juegos de negociación secuencial, el modelo entrega un contexto explicativo a situaciones en las que existe *delay*. Más importante, si la negociación secuencial es suficientemente larga, se prueba la existencia de múltiples equilibrios k -autoconfirmantes que tienen como resultado una negociación que se acaba en el primer período (es decir, sin *delay*) y que no corresponden al equilibrio perfecto en subjuegos. Esto entregaría nuevas perspectivas a la discusión respecto de la pertinencia de incorporar a la teoría supuestos traídos de la economía del comportamiento.

A Melinka

Agradecimientos

Luego de un largo proceso aprendizaje y trabajo, desde la carrera de ingeniería hasta el programa de magíster en economía aplicada, que se resume en un sólo producto de investigación original, me es muy significativo agradecer a todos aquellos que de una u otra forma ayudaron o estuvieron presentes durante este tiempo.

Quisiera agradecer a mi familia: a mis padres y a Ignacio, mi hermano, por apoyarme incondicionalmente y por creer en mi. A Melinka, a quien dedico este trabajo, por escucharme y estar presente, por compartir todos los días con cariño y darme ánimo cuando lo necesitaba.

Debo agradecer de manera muy particular a mi profesor guía, Juan Escobar, por conducirme con disposición, darme la libertad para desarrollar un tema de mi interés y cuestionar el fondo de las ideas, dándole profundidad a las discusiones. Agradezco también a los miembros de la comisión, Nicolás Figueroa, por darme valiosas recomendaciones en cuanto a forma y contenido, y a Carlos Noton, por las sugerencias, el tiempo y parte importante del financiamiento del programa.

Quisiera mencionar y agradecer a los compañeros del magcea, a todos los se juntan en la sala de postgrado a estudiar y compartir, en particular a Carlos Lizama, Pablo Cuéllar y Vicente Céspedes, a quienes debo parte del crédito por terminar este trabajo, porque siempre es alentador saber que hay personas que creen en lo que estás haciendo.

Muchas gracias por la amistad y la buena onda a los amigos y compañeros que conocí, en especial a Roberto Castillo, Carlos Chacón y Eric Contreras (quien me ayudó como *coach* personal), presentes desde el primer año.

Por último, gracias a Takashi Tezuka y a Hideo Kojima por brindarme los momentos de ocio necesarios para terminar de escribir.

Tabla de contenido

Introducción	1
Motivación	1
Revisión bibliográfica	3
Racionalidad limitada	3
Equilibrios autoconfirmantes	6
1. k-racionalidad en juegos estáticos	8
1.1. Modelo básico	8
1.2. Modelo k-racional	8
1.3. Juego del Concurso de belleza	13
2. k-racionalidad en juegos dinámicos	15
2.1. Modelo k-racional	15
3. Negociación secuencial	19
3.1. Modelos de negociación secuencial	20
3.2. Ejemplo de negociación con k-racionalidad	21
3.3. Resultados: k-racionalidad en el modelo de negociación secuencial	23
3.3.1. Equilibrios k-autoconfirmantes	36
3.3.2. Dinámica del juego repetido	39
Conclusión	41
Bibliografía	44
Anexo A	45
Anexo B	47
Anexo C	48

Índice de figuras

1.	Matriz de pagos del <i>continental divide</i>	4
2.	Ejemplo de <i>self-confirming equilibrium</i>	6
2.1.	Juego del ciempiés	17
3.1.	Juego de negociación secuencial con tres períodos	22
3.2.	Función $h(t, \delta)$ para distintos períodos, con $n = 13$	27
3.3.	Ofertas de indiferencia, $x_1(k)$, en el período 1	35
3.4.	Ofertas del EPS en el período 1, para distintos valores de n	38
3.5.	Comparación de ofertas de indiferencia, $x_1(k)$, en el período 1	39
3.6.	Juego de negociación secuencial con tres períodos	46

Introducción

Explanations of human behavior are always grounded in the belief of the person we are trying to understand -**Roger Schanck**¹

Once you become predictable, no one's interested anymore. -**Chet Atkins**

Motivación

Uno de los supuestos más importante en la teoría microeconómica es el de racionalidad de los agentes. Sin embargo, lejos de ser una descripción del mundo, lo que esta simplificación busca es formalizar modelos matemáticos que permitan entender ciertos fenómenos económicos. Los problemas de interacción estratégica, por ejemplo, se estudian en teoría de juegos utilizando diversos conceptos de equilibrio, tales como el equilibrio de Nash (y posteriores refinamientos), concepto que estos conceptos se basan en la racionalidad de los agentes y en el *conocimiento común* de esta racionalidad (vale decir, cada jugador sabe que los demás jugadores son racionales, además sabe que ellos saben que él es racional, además sabe que ellos saben que el sabe que ellos son racionales, y así *ad infinitum*).

En muchos casos, los equilibrios que resultan como solución a un problema entregan *insights* interesantes y aproximaciones al comportamiento observado, aunque en tantos otros, en determinados experimentos de laboratorio, por ejemplo, el comportamiento de los individuos se aleja de lo que predice la teoría. Ante esto, o ante la necesidad de una teoría de juegos predictiva, Fudenberg (2010) ha señalado que una agenda de investigación en esta dirección debería combinar la comprensión que se tiene de la economía del comportamiento y la psicología con herramientas formales de modelamiento de la economía y la computación.

En particular, los distintos conceptos de equilibrio en teoría de juegos parecen exigir demasiado de las habilidades humanas. En este sentido, algunos modelos de racionalidad limitada ofrecen una explicación alternativa al comportamiento «fuera de equilibrio» de los agentes. Por ejemplo, los modelos de *nivel k* (Nagel (1995), Stahl & Wilson (1995)), Costa-Gomes, Crawford & Broseta (2001)) o jerarquías cognitivas (Camerer, Ho & Chong (2004)) tienen

¹Dynamic Memory Revisited. Cambridge University Press, 1999. Print.

por objetivo determinar cómo se desvían los jugadores del equilibrio de Nash al suponer que éstos no poseen conocimiento común de racionalidad, aplicando, en cambio, una regla de eliminación de un número finito de estrategias estrictamente dominadas, bajo el supuesto de que los jugadores creen que los demás eliminan un número menor de estrategias estrictamente dominadas. Como se observa, no se trata de un concepto de equilibrio, sino de una caracterización que busca explicar por qué los jugadores se alejan de éste.

Tanto al considerar supuestos de racionalidad como de racionalidad limitada, existe cierto acuerdo respecto del significado de equilibrio como el resultado de una historia de aprendizaje. ¿Ocurre lo mismo en los modelos de k -level? Es decir, ¿es cierto que, luego de alguna historia de aprendizaje, los jugadores eligen estrategias como las prescribe el equilibrio de Nash, también en este contexto? Ho & Su (2013) sugieren una respuesta afirmativa para juegos secuenciales con un nivel de racionalidad k dinámico, que se modifica a través del aprendizaje. En particular, el modelo siempre converge a la solución de inducción reversa y con él explican las violaciones sistemáticas a la inducción reversa en juegos de negociación secuencial.

Aunque sin alejarse del marco teórico de jugadores racionales, en Fudenberg & Levine (1993), se busca capturar las implicancias del aprendizaje cuando los jugadores no experimentan demasiado en juegos consecutivos, es decir, investigar qué tipo de equilibrios resultan cuando las creencias de los jugadores se ven confirmadas a través de la repitición. Esta aproximación sería reveladora en el caso de los modelos de nivel k , pues suponiendo que la capacidad para jugar estratégicamente depende de una cierta capacidad cognitiva limitada, es coherente que los jugadores no modifiquen sus creencias una vez que estas no se contradicen mientras juegan óptimamente de acuerdo a ellas.

Este trabajo parte de los supuestos encontrados experimentalmente, reemplazando el conocimiento común de la racionalidad por la k -racionalidad, una regla de decisión racional que define el comportamiento de los jugadores. Esta regla asigna a los jugadores un conjunto de estrategias óptimas, dada la predicción que hacen del comportamiento de los demás. Una vez realizado el juego, si las predicciones son correctas y los jugadores no pueden rechazar sus creencias, se podría sugerir que los jugadores se encuentran en un equilibrio tal que no tienen incentivos a modificar su estrategia ni a rechazar las creencias que indujeron aquel comportamiento. Tomando la idea de Fudenberg & Levine para el modelo de k -racionalidad, se propone un equilibrio k -autoconfirmante. A lo largo de este trabajo se considera que las creencias son exógenas; esto, pues el objetivo es observar lo que ocurre en este equilibrio y sus diferencias con los conceptos tradicionales de equilibrio, sin preocuparse de la formación de estas creencias.

En el capítulo 1 se define el modelo de k -racionalidad para juegos estáticos, usando algunos ejemplos ilustrativos. Un primer resultado evidente es que un perfil de estrategias en equilibrio k -autoconfirmante también corresponde a un equilibrio de Nash para el mismo juego sin creencias, lo que permitiría seleccionar equilibrios, en caso de que existan. Además, se observa que el ejemplo paradigmático de la literatura experimental, el juego del *Beauty Contest*, no tiene equilibrio k -autoconfirmante, lo que podría sugerir, erróneamente, que el contexto k -racional no tiene efectos significativos en el comportamiento de equilibrio. En el capítulo 2 se define el modelo de k -racionalidad para juegos dinámicos, donde se encuentra la verdadera riqueza de este modelo, pues bajo ciertas creencias, aún si son erróneas, el con-

junto de estrategias óptimas podría inducir caminos de equilibrio tales que los conjuntos de información alcanzados no rechacen estas creencias. En el capítulo 3 se aborda el modelo de negociación secuencial en tiempo discreto (Stahl, (1967, 1972, 1988), Rubinstein, 1982), como ejemplo aplicado de k-racionalidad en juegos dinámicos; la elección de este modelo no es trivial, pues responde a la búsqueda de modelos alternativos que expliquen los resultados experimentales en los que los individuos se comportan fuera del equilibrio perfecto en subjuegos, tales como el *delay* en las negociaciones y divisiones distintas a las que predice el equilibrio. Por último, en este mismo capítulo se entregan los resultados más importantes del modelo de k-racionalidad aplicado a negociación secuencial: se demuestra la existencia de múltiples equilibrios k-autoconfirmantes distintos al equilibrio perfecto en subjuegos, entre ellos, equilibrios que tienen como resultado que la negociación se termina en la primera etapa (incluyéndose entre estos al equilibrio perfecto en subjuegos). Estos resultados entregarían nuevas perspectivas a la discusión respecto de la pertinencia de incorporar a la teoría supuestos traídos de la economía del comportamiento en la búsqueda de una teoría de juegos más predictiva.

Revisión bibliográfica

Racionalidad limitada

The natural way of looking at game situations (...) is not based on circular concepts but rather on a step by step reasoning procedure (Selten, 1998)

El concepto de «racionalidad limitada» fue acuñado y propuesto por Herbert A. Simon (1957) como una manera de complementar los supuestos de racionalidad económica, entendida como la racionalidad efectivamente exhibida por los individuos en situaciones reales o de laboratorio. De acuerdo a Selten (1998), habría al menos tres tipos diferentes de procesos mentales interactuando en las bases del comportamiento económico:

1. Motivación (i.e. fuerzas relacionadas con los objetivos de los individuos)
2. Adaptación (i.e. el aprendizaje de ciertas rutinas de comportamiento, sin razonamiento ulterior)
3. Cognición (i.e., razonamiento, independiente de si es conciente o no)

A partir de esta clasificación, se debe mencionar que los supuestos utilizados en este trabajo se relacionan con los procesos mentales de cognición, por lo que se deja de lado una revisión bibliográfica que atienda a los otros dos. Lo que interesa es entender ciertos procesos cognitivos en situaciones de interacción estratégica.

El diseño de varios juegos permite observar experimentalmente cómo los individuos convergen a los equilibrios predichos por la teoría, lo que sugiere dos cosas, que lo relevante en estos casos sería el largo plazo y que no habría necesidad de entender los procesos mentales del pensamiento estratégico de los jugadores. Sin embargo, se ha demostrado que bajo ciertos diseños, la selección de equilibrios es sensible a la historia de aprendizaje de los jugadores, por

ejemplo, en el juego de coordinación *Continental Divide* (Van Huyck, Battalio & Cook, 1997) siete jugadores eligen simultáneamente un número entero entre 1 y 14, los pagos dependen del número elegido y de la media resultante de la elección de todos los jugadores de acuerdo a la siguiente matriz de la figura 1.

Continental divide game payoffs

your choice	Median Choice													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	45	49	52	55	56	55	46	-59	-88	-105	-117	-127	-135	-142
2	48	53	58	62	65	66	61	-27	-52	-67	-77	-86	-92	-98
3	48	54	60	66	70	74	72	1	-20	-32	-41	-48	-53	-58
4	43	51	58	65	71	77	80	26	8	-2	-9	-14	-19	-22
5	35	44	52	60	69	77	83	46	32	25	19	15	12	10
6	23	33	42	52	62	72	82	62	53	47	43	41	39	38
7	7	18	28	40	51	64	78	75	69	66	64	63	62	62
8	-13	-1	11	23	37	51	69	83	81	80	80	80	81	82
9	-37	-24	-11	3	18	35	57	88	89	91	92	94	96	98
10	-65	-51	-37	-21	-4	15	40	89	94	98	101	104	107	110
11	-97	-82	-66	-49	-31	-9	20	85	94	100	105	110	114	119
12	-133	-117	-100	-82	-61	-37	-5	78	91	99	106	112	118	123
13	-173	-156	-137	-118	-96	-69	-33	67	83	94	103	110	117	123
14	-217	-198	-179	-158	-134	-105	-65	52	72	85	95	104	112	120

Figura 1: Matriz de pagos del *continental divide*

Es fácil ver que existen sólo dos equilibrios de Nash en estrategias puras, en uno de ellos, todos los jugadores eligen $n = 3$, en el otro todos eligen $n = 12$. En el diseño experimental de este juego, luego de realizados los pagos el juego se repite diez veces, los individuos eligen una estrategia, luego se anuncia públicamente el resultado de la media, se realizan los pagos y vuelven a escoger. Además, a los individuos se les separó en dos grupos, aquellos que eligieron en la primera etapa un promedio mayor o igual a 8, y a aquellos que eligieron en la primera etapa un promedio menor o igual a 7. Lo que se observó es que el primer grupo convergió al equilibrio $n_i = 12$ y el segundo al equilibrio $n_i = 3$. Este ejemplo sencillo da cuenta de la existencia de un proceso mediante el cual los jugadores eligen estratégicamente de acuerdo a creencias dadas por lo observado.

Junto con el ejemplo anterior, la economía del comportamiento ha entregado evidencia importante mostrando cómo el comportamiento de los individuos se aleja de los supuestos racionalidad usados en la teoría económica, justificando las teorías de racionalidad limitada. Parte importante de esta literatura se ha dedicado a investigar qué rol juegan estas limitaciones en situaciones de interacción estratégica, la pregunta tiene sentido y la utilización estos conceptos «es plausible porque el cerebro tiene límites (como la memoria de trabajo en el razonamiento en juegos complejos)» (Camerer, Ho, Chong, 2004).

Un ejemplo paradigmático, largamente utilizado en la investigación de racionalidad limi-

tada en contextos de interacción estratégica, corresponde al juego del concurso de belleza (*Beauty Contest*). El juego está inspirado en una cita de Keynes (1936) en la que describe cuál sería el proceso mental de cierto número de jugadores que deben elegir, simultáneamente, las seis caras más lindas de un grupo de cien fotografías, si quieren ganar un premio entregado a aquel que se acerque al promedio de las preferencias de todos los competidores. En ese caso, cada jugador debería elegir no las caras que él encontrara más lindas, sino aquellas que probablemente los demás encontrarían más lindas, quienes también podrían estar pensando de la misma manera. El concepto clave en este caso es la anticipación de las estrategias de los demás. La adaptación de este ejemplo considera que un número finito de jugadores n debe elegir de manera simultánea un número en el intervalo $[0, 100]$, ganando una utilidad mayor que cero aquel que escoja el número más cercano al promedio multiplicado por un parámetro p .

La estructura del juego del concurso de belleza (*Beauty Contest*) repetido permite investigar si, y cómo, los procesos mentales de los jugadores incorporan el comportamiento de los demás a través de un razonamiento conciente (Nagel, 1995). En Nagel (1995), el juego se repite cuatro veces. En el primer periodo, los jugadores no tienen información del comportamiento de los demás, sino que deben formarse creencias al respecto. En los periodos siguientes, los jugadores obtienen información acerca del verdadero comportamiento de los demás y de su éxito en los periodos anteriores. Los resultados muestran que en el primer periodo, el comportamiento se desvía fuertemente del equilibrio de Nash, más aún la distribución de los números elegidos en el intervalo $[0, 100]$ depende significativamente del parámetro p . En particular, en las iteraciones 1 y 2, la mayoría de las observaciones son cercanas a $50p$ y $50p^2$, independiente del parámetro p , es decir los comportamiento correspondientes a niveles de racionalidad 1 y 2.

Los resultados de Stahl & Wilson (1995), Bosch-Domenech et al. (2002), Camerer et al. (2004), Costa-Gomes & Crawford (2006) para el juego del concurso de belleza confirman la idea de los jugadores se comportan eligiendo mejores respuestas de manera iterada, usando la estrategia $n = 50$ como punto de partida para su razonamiento, en el proceso los jugadores no habrían eliminado estrategias dominadas, sino que habrían jugado, efectivamente, mejores respuestas relativas a sus predicciones.

Coricelli y Nagel (2009) muestran además, usando imágenes de resonancia magnética funcional (fMRI) en participantes del juego del concurso de belleza, que la tendencia a usar estrategias racionalmente limitadas tiene una correlación con la actividad neuronal en sustratos neuronales especializados, como el cortex prefrontal medio. La hipótesis que buscan comprobar es que tal pensamiento estratégico dependería de un mecanismo de la Teoría de la Mente² de cada persona.

²Por Teoría de la Mente se conoce la habilidad cognitiva de las personas de atribuir a otros ciertos estados mentales, tales como creencias o intenciones. Se le denomina «teoría» porque tales estados no serían directamente observables, sirviendo sin embargo para hacer predicciones respecto del comportamiento de los demás

Equilibrios autoconfirmantes

La idea de equilibrios autoconfirmantes es original de Fudenberg & Levine (1993) (*Self-confirming equilibrium*). En su trabajo, los autores se preocupan por los equilibrios existentes en juegos dinámicos como producto de algún proceso de aprendizaje subyacente. La noción de equilibrio (o sus refinamientos) para juegos extensivos requiere que las creencias de los jugadores sean correctas, tanto fuera como en el camino de equilibrio. El concepto de equilibrio autoconfirmante exige un poco menos, bastan con que las creencias sean correctas en el camino de equilibrio.

Este equilibrio está motivado por la idea de que cuando un juego se repite, los jugadores observan las acciones de los demás, pero no las acciones que habrían elegido en conjuntos de información no alcanzados. El equilibrio es autoconfirmante en el sentido de que es consistente con la evidencia recolectada por los jugadores cuando no «experimentan» al elegir sus estrategias (esto no maximizaría necesariamente la utilidad esperada en un período dado), Fudenberg & Kreps (1988) proveen un ejemplo en el que esto ocurre, bajo un proceso de aprendizaje que converge a un resultado que no es un equilibrio de Nash. Fudenberg & Levine formalizan esta noción de equilibrio autoconfirmante y estudian sus características más importantes.

El ejemplo de la figura 2 (Fudenberg & Kreps (1988), Fudenberg & Levine (1993)) es ilustrativo. En este juego, el jugador 1 juega primero, si juega A_1 , a continuación elige el jugador 2, si juega D_1 , entonces a continuación elige el jugador 3. Cuando le toca elegir al jugador 2, puede jugar A_2 , finalizando el juego, o jugar D_2 , en cuyo caso elige a continuación el jugador 3. Notar que cuando elige el jugar 3, no sabe si anteriormente jugó el jugador 1 o el 2, pero además se encuentra indiferente entre sus acciones. Supongamos ahora que el jugador 1 cree que el jugador 3 escogería R y el jugador 2 cree que el jugador 3 escogería L , dadas estas creencias, es óptimo para el jugador 1 jugar A_1 y para el jugador 2 jugar A_2 , resultando los pagos $(1, 1, 1)$. (A_1, A_2) es un equilibrio autoconfirmante, nótese además que no es un equilibrio de Nash, para esto se requiere que los jugadores 1 y 2 tengan las mismas creencias respecto de lo que jugaría el jugador 3 y además ser correctas, por lo tanto en un equilibrio de Nash, al menos uno de los jugadores tendría que elegir D_i .

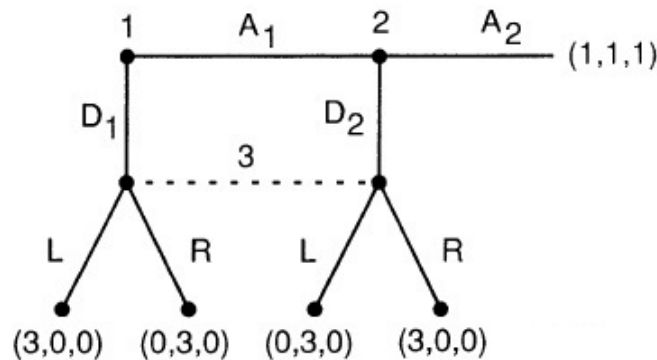


Figura 2: Ejemplo de *self-confirming equilibrium*

La diferencia fundamental del equilibrio autonconfirmante de Fudenberg & Levine con el

equilibrio que se propone en el desarrollo del presente trabajo se encuentra en el reemplazo de un contexto tradicional de conocimiento común de racionalidad por un modelo en el que los jugadores tienen limitaciones en su racionalidad. Así, mientras que en el modelo de Fudenberg & Levine las creencias de los jugadores son importantes cuando un jugador está indiferente entre varias acciones, en el modelo k-racional, las creencias van a inducir un comportamiento no necesariamente racional bajo supuestos de conocimiento común de la racionalidad. Para diferenciar ambos equilibrios, a este se le llamará equilibrio k-autoconfirmante, denotando su validez exclusivamente en un contexto k-racional.

Capítulo 1

k-racionalidad en juegos estáticos

1.1. Modelo básico

Sea el juego estático en forma normal $G = \langle I, (S_i), (u_i) \rangle$, con I el conjunto de jugadores, S_i el espacio de estrategias del jugador i y u_i su función de utilidad para cada perfil de estrategias $s = (s_1, \dots, s_I) \in S = \times_i S_i$. Una estrategia mixta σ_i es una distribución de probabilidad sobre las estrategias puras $s_i \in S_i$. Los pagos para el jugador i bajo el perfil de estrategias mixtas $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_I)$ son

$$u_i(\sigma) = \sum_{s \in S} \left(\prod_{j=1}^I \sigma_j(s, j) \right) u_i(s)$$

Un equilibrio de Nash es un perfil de estrategias tal que la estrategia de cada jugador es una mejor respuesta a las estrategias de los demás.

Definición 1.1 *Un perfil de estrategias mixtas σ^* es un equilibrio de Nash ssi para todo jugador i*

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(s_i, \sigma_{-i}^*) \quad \forall s_i \in S_i$$

Definición 1.2 *Un perfil de estrategias s^* es un equilibrio de Nash en estrategias puras ssi para todo jugador i*

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \quad \forall s_i \in S_i$$

1.2. Modelo k-racional

El modelo que se propone a continuación parte del modelo básico para juegos estáticos, añadiendo un vector de tipos $k = (k_1, \dots, k_I)$ que representa el nivel de racionalidad de los jugadores, a la vez que una creencia sobre el nivel de racionalidad de los demás. Este

vector reemplaza el conocimiento común de la racionalidad. El objetivo de esto es dotar de estructura suficiente a los supuestos de racionalidad limitada estudiados principalmente en los modelos de Stahl & Wilson (1994, 1995) y Nagel (1995), para así definir un equilibrio k -autoconfirmante en función de las estrategias elegidas por los jugadores y los tipos dados.

Sea el juego estático en forma normal $G' = \langle I, (S_i), (u_i), (k_i) \rangle$, es decir, se trata de una extensión del juego G , que resulta de agregar un tipo $k_i \in \mathbb{N}$, privado para cada jugador, este tipo (diremos que i es k_i -racional) corresponderá a la creencia del jugador i sobre el valor k_{-i} (es decir, del tipo de los demás) y va a determinar una regla de decisión racional indicandi a cada jugador un conjunto de estrategias óptimas. Hay que destacar que el tipo k_i de cada jugador quedará determinado exógenamente, este valor debe interpretarse en sus dos sentidos: como un creencia respecto del tipo de los demás jugadores y como una regla de decisión a partir de esas creencias. Si los jugadores son k -racionales, van a jugar óptimamente de acuerdo a esto.

Notación: A lo largo de este trabajo se usará la notación $k = (k_1, \dots, k_I)$ para designar al vector de niveles de racionalidad de cada jugador. Sea una constante $c \in \mathbb{N}$, se dirá que $k \geq c$ si para todo i se tiene $k_i \geq c$. Se dirá que $k > c$ si para todo i se tiene que $k_i \geq c$ y además existe algún j tal que $k_j > c$.

Definición 1.3 *Definimos la función de predicción $p_{i,j}$ de la siguiente forma:*

$$\begin{aligned} p_{i,j} : \mathbb{N} \setminus \{1\} &\longrightarrow S_j \\ k &\longmapsto p_{i,j}(k) = s \subseteq S_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{i,j}(k) &= \arg \max u_j(\cdot, p_{-j}(k-1)) \\ p_{-j}(k) &= (p_{j,1}(k), \dots, p_{j,j-1}(k), p_{j,j+1}(k), \dots, p_{j,I}(k)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{i,j}(1) &\in \Delta(S_j) \\ p_{i,j}(1) &\sim U(S_j) \end{aligned}$$

La función $p_{i,j}(k)$ corresponde a la predicción que hace el jugador i respecto de j , dado que la regla de decisión racional del jugador i es k (es decir, está en la creencia del jugador i , k -racional, que el jugador j eligirá alguna estrategia en $p_{i,j}(k)$). Notemos a continuación que $p_{-j}(k)$ indica la predicción que j haría de los demás jugadores si efectivamente fuese k -racional. La definición es recursiva, vale decir, cuando el jugador i se encuentra bajo una regla de decisión k , su predicción respecto al jugador j es que éste último escogerá una estrategia que maximice su utilidad dando por supuesto que el jugador j es $(k-1)$ -racional. En este sentido, no es una regla sofisticada, pues los jugadores «asumen» que un jugador k -racional cree que todos los demás son $(k-1)$ -racionales. Luego, este regla (o k -racionalidad) no permite heterogeneidad en las creencias aunque exista heterogeneidad en k .

Ejemplo Consideremos el siguiente juego estático en forma normal:

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
<i>A</i>	5, 4	3, 3	7, 0
<i>B</i>	1, -1	4, 5	5, -2
<i>C</i>	1, 2	2, 2	6, 1

Supongamos que el nivel de racionalidad de los jugadores está dado por $k = (k_1, k_2) = (2, 2)$. Podemos calcular la predicción que hace cada jugador:

$$p_{1,2}(2) = \arg \max u_2(\cdot, p_1(1))$$

$$p_{2,1}(2) = \arg \max u_1(\cdot, p_2(1))$$

Como se trata de sólo dos jugadores, $p_1(1) = p_{1,2}(1) = \{A, B, C\}$ y también $p_2(1) = p_{2,1}(1) = \{A, B, C\}$ (además, A, B, C son elegidas con la misma probabilidad). Entonces

$$p_{1,2}(2) = \arg \max \mathbb{E}[u_2(\cdot, p_{1,2}(1))]$$

$$p_{2,1}(2) = \arg \max \mathbb{E}[u_1(\cdot, p_{2,1}(1))]$$

Es decir,

$$p_{1,2}(2) = B$$

$$p_{2,1}(2) = A$$

Esto se lee de la siguiente manera: dado que el jugador 1 es 2-racional, su predicción (y creencia) es que el jugador 2 escogerá la estrategia B , pues así maximizaría el jugador 2 su pago esperado de ser 1-racional (pues creería que el jugador 1 elige aleatoriamente). De la misma forma, como el jugador 2 es 2-racional, su predicción es que el jugador 1 escogerá la estrategia A .

Por lo tanto, si los jugadores son racionales en este sentido (con $k = (2, 2)$), usarán la estrategia que les entregue una mayor utilidad. El perfil de mejor respuesta a estas predicciones es (B, A) . Paradójicamente, eligen el perfil de estrategias con el menor beneficio social. Sin embargo, lo interesante es notar que luego de observado este resultado, los jugadores pueden rechazar las creencias que tenían y, seguramente, jugarían de otra forma si repitieran el juego. En caso contrario, es decir, si los jugadores no tuvieran forma de contradecir sus creencias, se esperaría que no modificaran su estrategia si repitieran el juego, este es el sentido de la siguiente definición.

Definición 1.4 *Sea el juego G' . Decimos que (s^*, k^*) es un equilibrio k -autoconfirmante ssi dado el vector $k^* = (k_1^*, \dots, k_i^*, \dots, k_I^*)$, $\forall i$ se cumple que:*

$$s_i^* \in \arg \max u_i(\cdot, p_{-i}(k_i^*))$$

$$s_i^* \in p_{j,i}(k_j^*) \forall j \neq i$$

La primera condición equivale a que los jugadores eligen su estrategia entre aquellas prescritas por su regla de decisión racional. La segunda condición indica que la estrategia de cada jugador debe estar en el conjunto que resulta de la intersección de la predicción de todos los demás. Es decir, los jugadores eligen una estrategia de mejor respuesta dadas sus creencias, sin que éstas puedan rechazarse a posteriori.

Proposición 1.5 *Si un juego estático $G = \langle I, (S_i), (u_i) \rangle$ tiene un único equilibrio de Nash en estrategias puras, s^* , entonces (s^*, k^*) es un equilibrio k -autoconfirmante para algún $k^* \geq 1$ del juego $G' = \langle I, (S_i), (u_i), (k_i) \rangle$.*

Sin embargo, cuando existen múltiples equilibrios de Nash, no se puede asegurar que todos sean k -autoconfirmantes del juego G' . En el siguiente ejemplo se muestra esta situación.

Ejemplo Consideremos el siguiente juego estático en forma normal:

	A	B
A	2, 2	0, 0
B	0, 0	3, 3

Sabemos, por definición, que un jugador 0-racional elige aleatoriamente entre A y B , luego la predicción de jugadores que son 1-racionales es:

$$p_{1,2}(1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$p_{2,1}(1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

y por construcción,

$$p_{-1}(2) = p_{1,2}(1)$$

$$p_{-2}(2) = p_{2,1}(1)$$

Así $p_{1,2}(2) = \arg \max u_2(\cdot, p_{-2}(1)) = B$. Es decir que si el jugador 1 es 2-racional, su predicción es que el jugador 2 jugará B (pues está en la creencia de 1 que el jugador 2 elige como 1-racional y, por lo tanto, creería que 1 escoge aleatoriamente). De la misma manera, $p_{2,1}(2) = B$. Dadas estas predicciones, jugadores que son 1 y 2-racionales eligen B , más aún, si los jugadores 1 y 2 son k_1 -racional y k_2 -racional, respectivamente, siempre escogen B para todo $k_1, k_2 \geq 1$. Es decir, (B, B) es un equilibrio k -autoconfirmante para todo $k \geq 1$. Por otro lado, sabemos que $NE = \left\{ (A, A), (B, B), \left(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right) \right\}$. Esto sugiere la posibilidad de que la noción de equilibrio k -autoconfirmante sirva para seleccionar equilibrios del conjunto NE .

Sin embargo, al modificar el juego de la siguiente manera

	A	B
A	$2, 2$	$0, 0$
B	$0, 0$	$2, 2$

resulta que $(A, A), (A, B), (B, A), (B, B)$ son todos equilibrios k -autoconfirmantes para todo $k \geq 1$, pues bajo cualquier nivel k de racionalidad, a ambos jugadores les conviene randomizar igualmente entre A y B , luego tampoco se pueden contradecir las creencias de los jugadores. Notemos que esto significa que los equilibrios k -autoconfirmantes no son un subconjunto de los equilibrios de Nash. Como en la Proposición 1, es necesaria una condición adicional.

Definición 1.6 *Definimos las creencias k -racionales por:*

$$\begin{aligned} \mu_{i,j} : \mathbb{N} \times S_j &\longrightarrow [0, 1] \\ (k_i, s_j) &\longmapsto \mu_{i,j}(k_i, s_j) \in [0, 1] \end{aligned}$$

$\mu_{i,j}(k_i, s_j)$ es la probabilidad con la que i cree que j jugará s_j , dado que i es k_i -racional.

Definición 1.7 *Sea el juego G . Decimos que (s^*, k^*) es un equilibrio k -autoconfirmante fuerte (de aquí en adelante, k -ACF) ssi dado el vector $k^* = (k_1, \dots, k_i, \dots, k_I)$, $\forall i$ se cumple que:*

$$\begin{aligned} s_i^* &\in \arg \max u_i(\cdot, p_{-i}(k_i)) \\ s_i^* &\in p_{j,i}(k_j) \quad \forall j \neq i \\ \mu_{j,i}(k_j, s_i^*) &= 1 \quad \forall j \neq i \end{aligned}$$

Observación Se puede describir la definición de la siguiente manera: (s^*, k^*) es un equilibrio k -ACF ssi (s^*, k^*) es un equilibrio k -autoconfirmante y $\forall i$ se cumple que $\mu_{j,i}(k_j, s_i^*) = 1 \quad \forall j \neq i$.

La siguiente proposición muestra que un conjunto de equilibrios k -ACF es subconjunto del que contiene a todos los equilibrios de Nash.

Proposición 1.8 *Si (s^*, k^*) es un equilibrio k -ACF del juego G' , entonces s^* es un equilibrio de Nash del juego G .*

DEMOSTRACIÓN. (s^*, k^*) es un equilibrio k -ACF. Sabemos que para cualquier j se cumple que $\mu_{i,j}(k_i^*, s_j^*) = 1 \quad \forall i \neq j$, entonces $p_{i,j}(k_i) = s_j^*$ (pues i sólo le asigna probabilidad positiva a s_j^*). Luego, la predicción que hace i respecto de los demás jugadores es

$$p_{-i}(k_i) = (p_{i,1}(k_i), \dots, p_{i,i-1}(k_i), p_{i,i+1}(k_i), \dots, p_{i,I}(k_i))$$

Pero como $p_{i,j}(k_i) = s_j^*$, $p_{-i}(k_i) = (s_1^*, \dots, s_{j-1}^*, s_{j+1}^*, \dots, s_I^*) = s_{-i}^*$. Y dado que s^* es k -ACF,

$$\forall i : s_i^* \in \arg \max u_i(\cdot, p_{-i}(k_i))$$

$$\forall i : s_i^* \in \arg \max u_i(\cdot, s_{-i}^*)$$

Es decir, s^* es equilibrio de Nash ($k\text{-ACF} \subseteq EN$). □

Esto quiere decir que si las creencias μ se modifican luego de alguna historia de aprendizaje (sea cual sea el modelo que esté detrás de este proceso), la convergencia a un equilibrio $k\text{-ACF}$, implicaría la convergencia a un equilibrio de Nash. En otras palabras, la definición de equilibrio $k\text{-ACF}$ en juegos estáticos permitiría seleccionar equilibrios, así como se han utilizado para esto los conceptos de risk dominance, payoff dominance y puntos focales, entre otros. Hay juegos, sin embargo, que no tendrían equilibrio $k\text{-ACF}$, es decir que no son capaces de sostener ninguna creencia, en el sentido $k\text{-racional}$, como es el caso del juego del «concurso de belleza» (*Beauty Contest*)

1.3. Juego del Concurso de belleza

El juego del «concurso de belleza» es relevante pues es un ejemplo paradigmático de la literatura experimental de racionalidad de nivel k y jerarquías cognitivas. El juego se define de la siguiente forma: n jugadores deben elegir un número s_i en el intervalo $[0, 100]$. El ganador es aquel que escoja el número más cercano a la media multiplicada por un parámetro $p \in [0, 1]$ que es de conocimiento común. El pago se divide equitativamente en caso de empate. Los demás jugadores obtienen pagos 0.

Se sabe que cuando $p < 1$ el juego tiene un único equilibrio de Nash, el que corresponde a jugar $s_i = 0$, se procede eliminando estrategias estrictamente dominadas, en efecto, se sabe que $s_i > 100p$ es una estrategia estrictamente dominada (el máximo promedio posible es 100), luego, dado que los jugadores son racionales y saben que los demás lo son, eliminan todas las estrategias $s_i > 100$, acotando el espacio de estrategias, con esto se tiene que las estrategias $s_i > 100p^2$ son estrictamente dominadas. Bajo conocimiento común de la racionalidad, se puede llevar este procedimiento al infinito, la única estrategia que sobrevive es $s_i = 0$, pues $0 < 100p^n$ para todo n . Ahora, si todos juegan $s_i = 0$, ningún jugador tiene incentivos a modificar su estrategia. Si $p = 1$, el juego es un juego de coordinación con infinitos equilibrios de Nash en estrategias puras en los que todos los jugadores eligen el mismo número.

Por otro lado, un jugador 1-racional siempre juega $s_i = p50$, pues al creer que los demás juegan aleatoriamente según una distribución uniforme entre 0 y 100, su mejor respuesta es jugar $s_i = p50$, de la misma forma, un jugador $k\text{-racional}$ juega $s_i(k) = p^k 50$.

Proposición 1.9 *El juego del «concurso de belleza» con n jugadores no tiene equilibrio $k\text{-ACF}$ para ningún valor de $p < 1$. Si $p = 1$, hay múltiples equilibrios $k\text{-ACF}$ de la forma (s^*, k^*) , donde s^* es el perfil de estrategias con $s_i = 50 \forall i$ y para todo valor de $k \geq 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Notar que en el juego del concurso de belleza un jugador i que es $k\text{-racional}$ juega como mejor respuesta a sus creencias, $s_i(k) = p^k 50 > 0, \forall k \geq 1$. Es fácil ver que

si $p = 1$, entonces $s_i(k) = 50$ para todo valor de k , lo que muestra la segunda parte de la proposición.

Si $p < 1$, se argumenta por contradicción, supongamos que (s^*, k^*) es un equilibrio k-ACF, luego, de la proposición 1.8, s^* debe ser un equilibrio de Nash, pero el único equilibrio de Nash es $s_i = 0, \forall i$, entonces el equilibrio (s^*, k^*) exige que $s_i = 0$, lo que implica una contradicción. Es decir que no existe un valor para $k \in \mathbb{N}$ que pueda inducir un equilibrio k-ACF en este juego. \square

La discusión respecto de este juego y la (no) existencia de equilibrios es relevante, pues corresponde a uno de los ejemplos paradigmáticos en la literatura de racionalidad limitada. Lo que se observa en situaciones de laboratorio es que los sujetos, efectivamente, se desvían considerablemente del equilibrio de Nash (replicando niveles de racionalidad más bien bajos), pero a medida que se repite el juego, tienden a elegir números más cercanos a cero. Como consecuencia, el ejemplo induce a pensar que esta clase de limitaciones a la racionalidad sólo tendría como efecto demorar la convergencia al equilibrio, sin que éste se vea afectado. Lo que se propone en capítulos siguientes es que, para juegos dinámicos, la k-racionalidad podría originar equilibrios distintos a los usuales, como el equilibrio perfecto en subjuegos.

Capítulo 2

k-racionalidad en juegos dinámicos

2.1. Modelo k-racional

En juegos dinámicos emerge el concepto de credibilidad de las estrategias, pues, en general, los múltiples equilibrios de Nash no resultan intuitivos y coherentes con el comportamiento racional de los individuos. Es decir, un perfil de estrategias podría constituir un equilibrio de Nash pero, al mismo tiempo, no ser creíble. Como solución, Selten (1965) propuso el equilibrio perfecto en subjuegos (EPS), basado en el *principio de racionalidad secuencial*, esto es, que cada jugador tendría un comportamiento racional (o maximizador) en cada nodo de decisión.

Para definir el equilibrio k-autoconfirmante en juegos dinámicos, se debe notar que los jugadores observan las estrategias de comportamiento y no necesariamente la estrategia contingente, pues si no se alcanzan todos los nodos de decisión (es decir, los conjuntos de información), esta estrategia nunca es revelada. Así, la predicción que un jugador hace sobre las acciones de otro debe estar definida para cada nodo. Para adaptar las definiciones anteriores a juegos dinámicos se debe recurrir a la inducción inversa, es decir que en cada subjuego, el jugador i debe ser k_i -racional. Esto permite conservar el concepto de racionalidad limitada de los jugadores y dar una interpretación de k como una medida de cuánto puede «adelantarse» un jugador a subjuegos más lejanos. Como en el capítulo anterior, las definiciones siguientes corresponden a una extensión de los modelos tradicionales; nuevamente se incorpora el vector $k = (k_1, \dots, k_I)$ para representar la racionalidad de los jugadores como un tipo privado que, a su vez, indica las creencias que tienen un jugador con respecto al tipo de los demás.

Sea el juego dinámico G con I jugadores en forma extensiva con memoria perfecta. El juego queda descrito por el árbol X con nodos $x \in X$. Los nodos terminales $z \in Z \subset X$ determinan los pagos de los jugadores. La función de pagos del jugador i se describe por $u_i : Z \rightarrow \mathbb{R}$. Los conjuntos de información $h \in H$ son una partición de $X \setminus Z$. Los conjuntos de información donde el jugador i elige una acción son $H_i \subset H$ ($H_{-i} = H \setminus H_i$ son los conjuntos de información para los demás jugadores). $A(h_i)$ representa las acciones factibles para un conjunto de información $h_i \in H$ dado.

Una estrategia pura para el jugador i , s_i , es una estrategia contingente que en cada conjunto

de información del jugador i prescribe una acción factible para él, es decir, $s_i(h_i) \in A(h_i)$.

Definición 2.1 *Definimos las estrategias de comportamiento k -racional por $\pi_i(h_i, k_i) \in \Delta(A(h_i))$ para el jugador i que es k_i -racional que elige una acción a_i en el conjunto de información h_i .*

Definición 2.2 *Definimos las funciones de predicción para cada conjunto de información por*

$$\begin{aligned}
p_{i,j}(h_j) &: \mathbb{N} \longrightarrow \Delta(A(h_j)) \\
k &\longmapsto p_{i,j}(k, h_j) = \Pi_j(k, h_j) \subseteq \Delta(A(h_j)) \\
p_{i,j}(k, h_j) &= \arg \max_{\pi_j(h_j)} \mathbb{E}[u_j(\cdot, p_{-j}(k-1)) \mid h_j] \\
p_{-j}(k) &= (\Pi_{j,1}(k), \dots, \Pi_{j,j-1}(k), \Pi_{j,j+1}(k), \dots, \Pi_{j,I}(k)) \\
\text{donde } \Pi_{j,i}(k) &= \times_{h_i \in H_i} \Pi_i(k, h_i) \\
p_{i,j}(1, h_j) &= \pi_j(h_j) \sim U(A_j(h_j)) \quad \forall j \neq i \text{ y } h_j \in H
\end{aligned}$$

La función $p_{i,j}(k, h_j)$ corresponde a la predicción que hace el jugador i respecto de j , en el conjunto de información h_j , dado que i es k -racional (es decir, cuál es la estrategia de comportamiento que usará j cuando se encuentre en h_j , de acuerdo a las creencias de i). Se sabe, además, que un jugador 1-racional cree que los demás eligen aleatoriamente entre sus acciones factibles, $A_j(h_j)$, de acuerdo a una distribución uniforme, cualquiera sea el conjunto h_j . Sea $\overline{H}(\sigma)$ el conjunto de todos los conjuntos de información alcanzables con alguna probabilidad si se juega la estrategia mixta σ .

Definición 2.3 *Decimos que (σ^*, k^*) es un equilibrio k -autoconfirmante ssi dado el vector $k^* = (k_1^*, \dots, k_i^*, \dots, k_I^*)$, $\overline{H}(\sigma^*)$ los conjuntos de información alcanzables bajo σ^* y $\pi_i^*(h_i)$ las estrategias de comportamiento inducidas por σ^* , $\forall i$ se cumple que:*

$$\begin{aligned}
\sigma_i^* &\in \operatorname{argmax} u_i(\cdot, p_{-i}(k_i^*)) \\
\pi_i^*(h_i) &\in p_{j,i}(k_j^*, h_i) \quad \forall j \neq i \text{ y } h_i \in \overline{H}(\sigma^*)
\end{aligned}$$

Bajo esta definición, se considerará equilibrio cualquier perfil que maximice la utilidad de los jugadores dada las creencias respecto de la racionalidad de los demás, estas creencias inducirán predicciones, las cuales sólo requieren ser ciertas en los conjuntos de información que podrían alcanzarse en equilibrio. Es decir, basta con que las creencias no puedan rechazarse en los conjuntos de información alcanzables. Será importante, entonces, determinar si un jugador revela o no su racionalidad en cada conjunto de información en el que debe jugar.

Ejemplo Consideremos el juego del ciempiés (Rosenthal, 1981) siguiente, con jugadores 1 y 2 con niveles de racionalidad k_1 y k_2 , respectivamente, quienes en cada conjunto de información pueden elegir, de manera alternada, tomar lo que hay (T) o pasar (P):

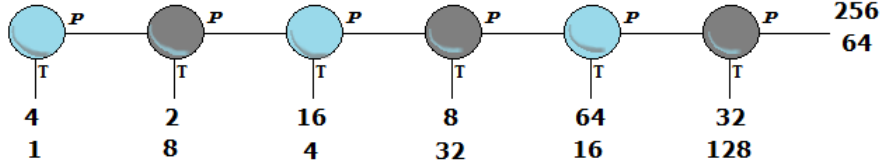


Figura 2.1: Juego del ciempiés

Supongamos que $k_1 = 1$. Para resolver este juego mediante k -racionalidad, se procede desde el final. En la quinta etapa, el jugador 1 cree que el jugador 2 elige uniformemente entre P y T en la última etapa, por lo tanto, su pago esperado por «pasar» en la etapa 5 es $u_1^5(P) = 144$, su pago por «tomar» es $u_1^5(T) = 64$. Luego, su mejor respuesta en la etapa 5, dada la predicción que hace, será P , es decir, $\pi_1^5 = P$. Hacia atrás, en la etapa 4, el jugador 1 espera que el jugador 2 también elija uniformemente, como en la etapa 3 el jugador 1 se adelanta a su propia jugada $\pi_1^5 = P$ y conoce el pago esperado de esta acción, sabe que el pago esperado por «pasar» en la etapa 3 es $u_1^3(P) = 76$, el pago por «tomar» es $u_1^3(T) = 16$, luego $\pi_1^3 = P$. Repitiendo esto para el primer período, $u_1^1(P) = 39$, $u_1^1(T) = 4$ y $\pi_1^1 = P$. Esto significa que la estrategia de un jugador 1, 1-racional, es «pasar» cada vez que tiene la oportunidad, pues espera mejores pagos al hacerlo.

Si el juego se realiza una sola vez, cualquiera sea la estrategia del jugador 2, el jugador 1 no observará jugadas que contradigan sus creencias (salvo en el largo plazo). Lo mismo sucederá con el jugador 2 si es 1-racional.

Proposición 2.4 *Si (s^*, k^*) es un equilibrio k -autoconfirmante, o bien el juego se detiene en la primera etapa (el jugador 1 juega T) o bien $k^* = (1, 1)$.*

DEMOSTRACIÓN. En general, el caso $k^* = (1, 1)$ no es interesante, pues, al menos en el corto plazo, ningún jugador puede rechazar estas creencias. Sea $k^* > 1$ y supongamos que el juego se detiene en la etapa t posterior a la primera. Como ambos jugadores están maximizando su pago en función de sus creencias, esto sólo puede ocurrir porque el jugador que elige T o P en $(t - 1)$ cree que el jugador de la etapa t escogerá P (independiente de sus creencias con respecto a lo que pase después), pero lo que en realidad ocurre es que el jugador en t elige T , con lo que las creencias del jugador en $(t - 1)$ se ven rechazadas, cualquiera sean. Por lo tanto, si el juego se detiene en la etapa t las creencias de al menos un jugador no se confirman, lo que significa que un equilibrio k -autoconfirmante no puede terminar después de la primera etapa. Supongamos ahora que bajo el perfil (s^*, k^*) el juego se detiene en la primera etapa, luego, cualquiera sea la creencias del jugador 1, ésta no podrá ser rechazada pues el jugador 2 no alcanzará a revelar su nivel k_2 (dado que no elige), además esto lo hará inducido por su nivel de racionalidad k_1 ; si con esto el jugador 1 revela su racionalidad, entonces $k_2 = k_1 + 1$ confirma creencias para el jugador 2 y el equilibrio k -autoconfirmante existe; si en cambio no se revela la racionalidad del jugador 1 cualquiera sea k_2 , no puede rechazar su creencia. \square

Esto último es coherente con la idea de que los jugadores convergen a un equilibrio de Nash en el largo plazo, al jugar repetidas veces, ajustándose a los resultados de Ho & Su (2013), en

particular al principio que denominan *repetition unraveling*, bajo el cual se observan menos violaciones a la inducción inversa a medida que el juego se repite en múltiples rondas. Sin embargo, este constituiría un caso particular del equilibrio k-autoconfirmante válido en el juego del ciempiés, aunque no necesariamente en toda clase de juegos secuenciales.

Capítulo 3

Negociación secuencial

En este capítulo se aborda el modelo de negociación secuencial en tiempo discreto (Stahl, (1967, 1972, 1988), Rubinstein, 1982), para ser estudiado posteriormente en el contexto de k -racionalidad. Este modelo tiene la ventaja de constituir un clásico de la teoría y poseer resultados conocidos, a la vez que sigue abriendo la discusión a nuevas preguntas, por ejemplo, se ha discutido la necesidad de modelos alternativos que expliquen el comportamiento real de las personas en situaciones de negociación (o en contextos de laboratorio), pues muchas veces los individuos se comportan fuera del equilibrio perfecto en subjuegos, con divisiones distintas a las predichas teóricamente, o con *delay* en las negociaciones.

En este mismo capítulo se entregan los resultados más importantes del modelo de k -racionalidad aplicado a un juego de negociación secuencial. Principalmente se demuestra la existencia de un conjunto de múltiples equilibrios k -autoconfirmantes, estos equilibrios tienen como resultado que el juego se acaba necesariamente en el primer período de la negociación (se incluye en este conjunto al equilibrio perfecto en subjuegos). Estos equilibrios corresponden a tres categorías determinados por el nivel de racionalidad del jugador 1, k_1 , y por el número n de etapas de la negociación: (a) equilibrios con k_1 par, (b) equilibrios con $k_1 = n$, (c) equilibrios con $k_1 > n$ (equivalente al equilibrio perfecto en subjuegos). Los equilibrios de tipo (a) son beneficiosos para el jugador 2, los de tipo (b) lo son ligeramente más para el jugador 1, pero tienden a ser equitativos si los jugadores son pacientes, y los de tipo (c), ya conocidos, son mucho más beneficiosos para el jugador 1 que el 2. Lo más importante es que esta diversidad de equilibrios ocurre en horizonte finito e infinito, en particular, el resultado de Rubinstein (1982) con $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ que resuelve una división $((1/(1 + \delta), \delta/(1 + \delta)))$ se recupera para el horizonte finito en la clase de equilibrios del tipo (b).

Estos resultados entregarían nuevas perspectivas a la discusión respecto de la pertinencia de incorporar a la teoría supuestos traídos de la economía del comportamiento, en la búsqueda de una teoría de juegos más predictiva.

3.1. Modelos de negociación secuencial

La formulación más sencilla del problema de negociación consiste en la división de una renta entre dos jugadores (*dividing the dollar*), pero es adaptable a una gran cantidad de situaciones. El acuerdo entre ambos jugadores es problemático pues éstos tienen preferencias opuestas respecto de la división final. Un modelo de negociación secuencial intenta resolver esto proponiendo una secuencia de ofertas y contraofertas.

Las primeras investigaciones del procedimiento de ofertas alternadas las hizo Stahl (1967, 1972, 1988), estudiando los equilibrios perfectos en subjuegos, usando inducción inversa en modelos con horizonte finito. Para el horizonte infinito Rubinstein (1982) modeló el problema como un juego extensivo con información completa, usando ciertas hipótesis demostró la existencia de un único equilibrio perfecto en subjuegos.

El modelo básico que se extenderá para el contexto k -racional corresponde a los modelos de Stahl (1972) y Rubinstein (1981) y se formaliza de la siguiente manera: Dos jugadores deben llegar a un acuerdo respecto de la división de una torta de tamaño 1, para esto hacen ofertas alternadas en períodos discretos ($t = 1, 2, \dots$). En el primer periodo, el jugador 1 hace una oferta $x_1 \in [0, 1]$, correspondiente a una división $(x_1, 1 - x_1)$ que el jugador 2 puede aceptar, en cuyo caso el juego termina y ambos consumen la torta de acuerdo a la división propuesta, o rechazar, en cuyo caso el juego continua en el periodo $t = 2$, en este período, ahora es el jugador 2 quien hace una oferta $x_2 \in [0, 1]$ y es el jugador 1 quien debe aceptar o rechazar. Esta alternancia se repite hasta el periodo $t = n$, en este periodo si el jugador que debe aceptar o rechazar la oferta elige rechazar, ambos terminan con nada, es decir con pagos $(0, 0)$. Además, se debe asumir que ambos jugadores prefieren una mayor cantidad de la torta que una menor, y que para una misma división final, prefieren demorarse menos que más tiempo, es decir, si el acuerdo se logra en el periodo t , los pagos finales son $u_1 = \delta_1^{t-1}x_t$ para el jugador 1 y $u_2 = \delta_2^{t-1}(1 - x_t)$ para el jugador 2. La siguiente proposición es conocida:

Proposición 3.1 *Si $n = 2$, el único equilibrio perfecto en subjuegos se alcanza con una división $(1 - \delta_2, \delta_2)$*

DEMOSTRACIÓN. Dado que en el período 2, el jugador 2 anticipa que el jugador 1 prefiere debilmente cualquier oferta x_2 (en cualquier caso, salvo en $x_2 = 0$ su pago final es $\delta_1 x_2$), su mejor respuesta en este subjuego es $x_2 = 0$ (que lo dejaría con un pago δ_2). Pero en el período 1 el jugador 1 anticipa x_2 , por lo tanto hace una oferta x_1 que deje indiferente al jugador 2, dejando para sí un pago $u_1 \geq 0$, es decir $x_1 = 1 - \delta_2$, generando una división $(1 - \delta_2, \delta_2)$ \square

Este ejemplo muestra cómo los jugadores anticipan las jugadas del otro jugador en cada subjuego. Estas predicciones del comportamiento de los demás serán aún más relevantes en el modelo de k -racionalidad, pues la capacidad de anticiparse con precisión al comportamiento futuro estará determinado por su nivel k de racionalidad. El resultado anterior puede extenderse para un número arbitrario de períodos.

Proposición 3.2 *Sea el juego de negociación secuencial con n períodos. Si $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, la*

oferta que hace el jugador 1 en el periodo t (con t impar) es

$$x_t = \sum_{j=0}^{\left(\frac{n-t}{2}\right)-1} (\delta^{2j} - \delta^{2j+1}) + \delta^{n-t} = 1 - \delta + \delta^2 - \dots - \delta^{n-t-1} + \delta^{n-t}$$

Corolario 3.3 Si en el juego de negociación secuencial $n \rightarrow \infty$ y $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, la oferta que hace el jugador 1 en el período 1 es

$$x_1 = \frac{1}{1 + \delta}$$

Los pagos finales son, por lo tanto

$$\left(\frac{1}{1 + \delta}, \frac{\delta}{1 + \delta} \right)$$

Este resultado es equivalente al del modelo de Rubinstein (1982) con horizonte infinito, en cuyo caso el jugador 1 hace una oferta en el primer período que el jugador 2 no rechaza, con pagos finales

$$\left(\frac{1 - \delta_2}{1 - \delta_1 \delta_2}, \frac{\delta_1(1 - \delta_2)}{1 - \delta_1 \delta_2} \right)$$

3.2. Ejemplo de negociación con k -racionalidad

Even von Neumann and Morgenstern (1944) suggested that the bargaining outcome would necessarily be determined by unmodeled psychological properties of the players. Nash (1950, 1953) broke away from this tradition. His agents are fully rational. (Binmore, Osborne & Rubinstein, (1992))

Aunque este modelo no considera la psicología de los jugadores en el sentido sugerido por von Neumann y Morgenstern, al introducir k -racionalidad en juegos de negociación secuencial se recupera, en algún sentido, la idea de que los jugadores tienen creencias respecto de la habilidad para negociar de los demás. Si estas creencias son consistentes, es decir, si los jugadores no pueden rechazarlas (aún si son erróneas) el resultado de la interacción correspondería a un equilibrio k -autoconfirmante, pero no necesariamente a un equilibrio perfecto en subjuegos. Esto podría entregar una justificación teórica al comportamiento observado por los individuos en experimentos de laboratorio, en los cuales se desvían consistentemente del equilibrio perfecto en subjuegos.

En lo que sigue se supondrá que los valores de k_1 y k_2 vienen dados para los jugadores y no se pueden modificar a lo largo de un mismo juego. Lo que se busca responder es si un determinado perfil (s^*, k^*) corresponde o no a un equilibrio k -autoconfirmante. Como los jugadores no aprenden la racionalidad de su rival durante un mismo juego, tiene sentido suponer que no modifican su comportamiento a lo largo del juego, es decir, aún si un jugador que es k_i -racional observa un comportamiento que rechaza su creencia, se mantendrá jugando hasta el final del juego como si fuera k_i -racional.

Ejemplo Consideremos el juego de negociación secuencial con tres períodos y con un factor de descuento δ para ambos jugadores. Sea $k = (2, 2)$.

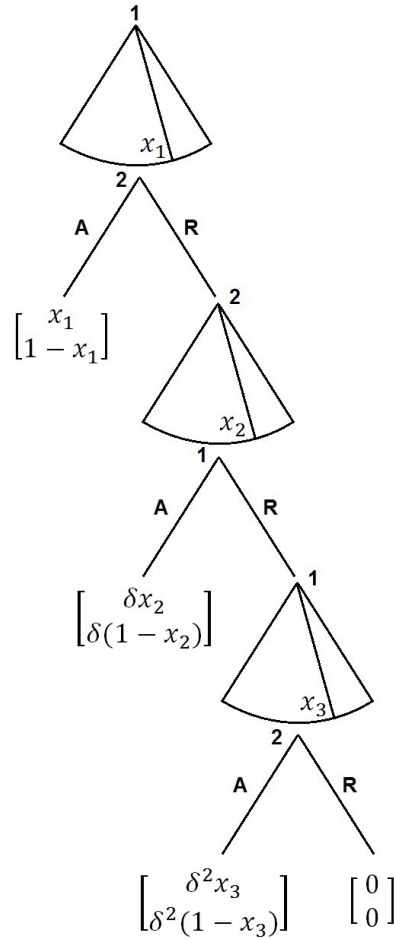


Figura 3.1: Juego de negociación secuencial con tres períodos

Los resultados¹ para ambos jugadores en el primer periodo son:

$$\pi_2 = \begin{cases} A & \text{si } x_1 \leq 1 - \delta + \delta^2/2 \\ R & \text{si } x_1 > 1 - \delta + \delta^2/2 \end{cases}$$

$$\pi_1 = \begin{cases} \bar{x}_1 = 1 - \delta & \text{si } \bar{x}_1 \geq \delta^2 \\ x_1 > \bar{x}_1 & \text{si } \bar{x}_1 < \delta^2 \end{cases}$$

La razón de esto es que dado que ambos jugadores son 2-racionales. En la primera etapa, el jugador 2 sabe que en la siguiente va a jugar $x_2 = \frac{\delta}{2}$ y su ganancia esperada será $\delta - \frac{\delta^2}{2}$. Sin embargo, el jugador 1 cree que el jugador 2 es 1-racional (esto es, el jugador 2 creería

¹ver el Anexo A para la resolución del ejemplo.

que el jugador 1 es 0-racional). Esto induce al jugador 1 a estimar erróneamente lo que debe ofrecer al jugador 2.

Dada la estrategia del jugador 1 en la primera etapa ($x_1 = \bar{x}_1$ si $\bar{x}_1 \geq \delta^2$), se tiene que $x_1 = \bar{x}_1$ ssi $\delta \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$. Por otro lado, el jugador 2 acepta en la primera etapa cualquier oferta $x_1 \leq 1 - \delta + \frac{\delta^2}{2}$. Como $\bar{x}_1 = 1 - \delta < 1 - \delta + \frac{\delta^2}{2}$, si el jugador 1 hace la oferta $x_1 = \bar{x}_1$, el jugador 2 acepta. De este análisis, se desprenden tres casos posibles:

1. $\delta \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$: El jugador 1 elige $x_1 = \bar{x}_1 = 1 - \delta$ y el jugador 2 acepta la oferta.
2. $\delta > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$:
 - (a) El jugador 1 elige $x_1 > \bar{x}_1$, con $x_1 \in (\bar{x}_1, \bar{x}_1 + \varepsilon]$, donde $\varepsilon = \frac{\delta^2}{2}$: El jugador 1 hace una oferta, esperando que el jugador 2 la rechace, pero éste acepta.
 - (b) El jugador 1 elige $x_1 > \bar{x}_1$, con $x_1 > \bar{x}_1 + \varepsilon$, donde $\varepsilon = \frac{\delta^2}{2}$: El jugador hace una oferta que el jugador 2 rechaza, en la siguiente etapa el jugador 2 hace una oferta $x_2 = \delta/2$, el jugador 1 la rechaza y finalmente, en la tercera etapa, el jugador 1 hace una oferta $x_3 = 1$ que el jugador 2 acepta, resultando los pagos $(\delta^2, 0)$.

A partir de ejemplo se pueden desprender algunas ideas:

1. Aunque en el primer caso el jugador 2 habría aceptado todavía si $x_1 > \bar{x}_1$ (mientras $x_1 \leq 1 - \delta + \frac{\delta^2}{2}$), el jugador 1 no puede rechazar la creencia de que el jugador 2 es 1-racional cuando acepta pues, de hecho, cree que \bar{x}_1 es la oferta que lo deja indiferente. Es decir, las creencias erróneas pueden inducir a los jugadores a estimar mal cuánto deben ofrecer en cada etapa. Hay que notar que al jugador 1 le convendría conocer k_2 , no hacerlo le cuesta $\delta^2/2$.
2. En general se asume que δ es grande, por lo que es más apropiado pensar en los casos con $\delta > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Aún en estos casos, el resultado es sensible a δ . Si x_1 es suficientemente grande ($x_1 > 1 - \delta + \frac{\delta^2}{2}$), habrá *delay* en la negociación, un resultado que no es deseable para ninguno de los jugadores.

3.3. Resultados: k-racionalidad en el modelo de negociación secuencial

En esta sección se muestran los resultados de aplicar el modelo de k-racionalidad al juego de negociación secuencial definido al comienzo del capítulo. El objetivo de estos resultados es entender la dinámica del juego y caracterizar los equilibrios k-autoconfirmantes para así observar las diferencias de este equilibrio con el equilibrio perfecto en subjuegos tradicionalmente utilizado. El análisis se hace tanto para el juego de horizonte finito como infinito. En el caso finito se considera que la negociación secuencial se realiza en n períodos, con n impar (es decir, el jugador 1 hace la primera y la última oferta). Debe entenderse que este es sólo un requisito técnico para resolver el juego y que los resultados generales no sufren modificaciones importantes al considerar n par.

Los resultados muestran la existencia de múltiples equilibrios k -autoconfirmantes, entre los que se incluye al equilibrio perfecto en subjuegos. Todos estos equilibrios tienen como consecuencia que la negociación se realiza en el primer período. Será interesante notar que los equilibrios k -autoconfirmantes se puede clasificar en distintas familias dependiendo de la paridad de los niveles de racionalidad k . Una de estas clases de equilibrio entrega una división del total de la torta cercana a la equitativa a medida que δ se acerca a 1, a diferencia del modelo de Rubinstein, esto también ocurrirá considerando un horizonte finito.

Al final de esta sección se extiende el modelo de k -racionalidad al juego de negociación secuencial repetido con un proceso de aprendizaje sencillo aplicable a este juego y en este contexto. Este proceso actualiza el tipo k de los jugadores a partir del comportamiento observado, la actualización es automática y no responde a una elección óptima de los jugadores. Lo que se observa es una convergencia a los equilibrios k -autoconfirmantes encontrados teóricamente. Es interesante notar el equilibrio al que convergen los jugadores depende de la paridad de sus niveles de racionalidad. En particular, si el juego es de horizonte finito, la convergencia al equilibrio está asegurada en un tiempo finito; en horizonte infinito, se puede observar una tendencia hacia un equilibrio k -autoconfirmante que entrega pagos que se acercan a la división equitativa a medida que δ se acerca a 1.

Definición 3.4 *Definimos las estrategias de comportamiento k -racional por $\pi_i^t(k_i) \in [0, 1]$ cuando el jugador i que es k_i -racional deba hacer una oferta x_t en el período t y $\pi_i^t(k_i) \in \{\text{Aceptar}, \text{Rechazar}\}$ cuando el jugador i que es k_i -racional deba aceptar o rechazar la oferta realizada por el otro jugador en el período t .*

Para la resolución de este juego bajo las reglas de decisión k -racional, sólo se pondrá atención a las estrategias de comportamiento del tipo $\pi_i^t(k_i) \in [0, 1]$. Como se verá más adelante, bajo ciertas condiciones, aceptar o rechazar una oferta dependerá del valor que tome $\pi_i^t(k_i)$

Definición 3.5 *Sea el período t en que el jugador i debe hacer una oferta $x_t \in [0, 1]$. Definimos la utilidad esperada del jugador i cuando es k_i -racional en el período t por*

$$U_i^t(k_i) = \mathbb{E}_t[u_i(x_t)|k_i]$$

donde x_t es la estrategia de comportamiento elegida por el jugador que hace la oferta en el período t . Para el jugador que hace la oferta, esta utilidad corresponde al valor esperado de utilidades futuras dado que se comporta «óptimamente» de acuerdo a sus creencias.

Observación Un jugador 1-racional hace una oferta en la que se lleva todo el pago disponible para ese período, pues al creer que el otro jugador acepta o rechaza la oferta aleatoriamente, sin consideraciones estratégicas, su mejor respuesta es siempre $x_t = 1$, si se trata del jugador 1 ($x_t = 0$, si se trata del jugador 2). Es decir:

$$\begin{aligned}\pi_1^t(1) &= x_t = 1 \quad \forall t \text{ (t impar)} \\ \pi_2^t(1) &= x_t = 0 \quad \forall t \text{ (t par)}\end{aligned}$$

Considerando la observación, y dado que un jugador 1-racional cree que el otro elige

aleatoriamente aceptar o rechazar,

$$U_i^t(1) = \frac{1}{2}\delta^{t-1} + \frac{1}{2}\mathbb{E}_t \left[\max \left\{ \delta^t x_{t+1}, v_1^{t+2} \right\} \right]$$

donde $v_i^t \equiv U_i^t(1)$, $v_1^n = \frac{1}{2}\delta^{n-1}$ y $v_2^{n-1} = \frac{1}{2}\delta^{n-2} + \frac{1}{4}\delta^{n-1}$. El valor de v_1^n proviene de la última etapa, donde la utilidad esperada por el jugador 1-racional es $\mathbb{E}[u_1(x_n = 1)] = \frac{1}{2} \cdot \delta^{n-1} + \frac{1}{2} \cdot 0$. Para el jugador 2, la utilidad esperada en el período $(n - 1)$ es $\mathbb{E}[u_1(x_{n-1} = 0)] = \frac{1}{2} \cdot \delta^{n-2} + \frac{1}{2}\mathbb{E}[x_n \delta^{n-1}] = \frac{1}{2}\delta^{n-2} + \frac{1}{4}\delta^{n-1}$, pues el jugador 2 que es 1-racional cree que el jugador 1 toma x_n de una distribución uniforme en $[0, 1]$. Es importante notar que v_1^t representa un pago esperado de continuación para un jugador 1 que es 1-racional. Además, el jugador 2 siempre acepta la última oferta cuando su racionalidad es $k_2 \geq 1$, por lo tanto el jugador 1 siempre hace una oferta $x_n = 1$ en la última etapa, cualquiera sea su nivel de racionalidad k_1 .

Observación Notemos que $U_1^t(1) = v_1^t$ puede escribirse

$$v_1^t = \frac{1}{2}\delta^{t-1} + \frac{1}{4}\delta^t \left[1 + \left(\frac{v_1^{t+2}}{\delta^t} \right)^2 \right]$$

En efecto, dado que en el período $(n - 2)$, el argumento al interior de la esperanza es $\max \{ \delta^{n-2} x_{n-1}, v_1^n \}$, y como v_1^n es una constante conocida, se puede usar

$$\mathbb{E}[\max \{x, c\}] = \mathbb{E}[x|x \geq c] \cdot \mathbb{P}[x \geq c] + c \cdot \mathbb{P}[x < c]$$

Donde x es una variable aleatoria y c es una constante conocida. A partir de v^n conocido se puede calcular v^{n-2} . Retrocediendo en t , se puede escribir en general:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_t \left[\max \left\{ \delta^t x_{t+1}, v_1^{t+2} \right\} \right] \\ &= \mathbb{E}_t \left[\delta^t x_{t+1} | \delta^t x_{t+1} \geq v_1^{t+2} \right] \cdot \mathbb{P} \left[\delta^t x_{t+1} \geq v_1^{t+2} \right] + v_1^{t+2} \cdot \mathbb{P} \left[\delta^t x_{t+1} < v_1^{t+2} \right] \\ &= \frac{\delta^t + v_1^{t+2}}{2} \left(\frac{\delta^t - v_1^{t+2}}{\delta^t} \right) + \frac{(v_1^{t+2})^2}{\delta^t} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(\delta^t)^2 + (v_1^{t+2})^2}{\delta^t} \\ &= \frac{1}{2} \delta^t \left[1 + \left(\frac{v_1^{t+2}}{\delta^t} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

El valor $\frac{v_1^{t+2}}{\delta^t}$ que aparece en la fórmula para calcular v_1^t es el pago esperado en dos períodos más como si se descontara un sólo período.

Proposición 3.6 Sean $h_1(t, \delta) = \frac{v_1^{t+2}}{\delta^t}$, $h_2(t, \delta) = \frac{v_2^{t+2}}{\delta^t}$ entonces $\forall t \leq n - 2$

$$h_1(t - 2, \delta) \geq h_1(t, \delta)$$

$$\begin{aligned}
h_2(t-2, \delta) &\geq h_2(t, \delta) \\
\frac{\partial h_1(t-2, \delta)}{\partial \delta} &\geq \frac{\partial h_1(t, \delta)}{\partial \delta} \\
\frac{\partial h_2(t-2, \delta)}{\partial \delta} &\geq \frac{\partial h_2(t, \delta)}{\partial \delta}
\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. ver el apéndice □

Dado que el jugador 1 (1-racional) hace una oferta $x_t = 1$ y cree que el jugador 2 acepta o rechaza aleatoriamente, el pago de continuación esperado sin descontar cuando el jugador 2 rechaza la oferta es decreciente, pues la probabilidad de que el jugador 2 acepte en alguna ronda futura es cada vez menor, a medida que se acerca el final del juego.

Proposición 3.7 *Para todo $t \leq n - 2$ se cumple que*

$$\frac{\delta}{2} \leq \frac{v_1^{t+2}}{\delta^t} < 1$$

DEMOSTRACIÓN. ver el apéndice □

De las proposiciones 3.6 y 3.7 se puede obtener una cota máximas para las derivadas de h_1 y h_2 , respecto de δ (nótese que esta cota es la misma para ambas funciones, aunque t es necesariamente distinto). Este es un aspecto técnico que será útil en demostraciones siguientes:

Corolario 3.8 *Para $i = 1, 2$*

$$\frac{\partial h_i(t, \delta)}{\partial \delta} \leq \frac{1 + 2\delta}{2 - \delta^2}$$

DEMOSTRACIÓN. ver el apéndice □

La figura 3.2 permite entender gráficamente los resultados anteriores.

Proposición 3.9 *Los pagos de continuación para jugadores 1-racionales, $v_1^t = v_1^t(t, n, \delta)$ y $v_2^t = v_2^t(t, n, \delta)$, son crecientes en n y en δ y decrecientes en t .*

DEMOSTRACIÓN. ver el apéndice □

La relación entre n y t es esta: una mayor diferencia ($n - t$) sólo puede incrementar el pago esperado v_1^t por un jugador 1-racional, pues en un horizonte de tiempo más largo aumenta la probabilidad de que un jugador 0-racional acepte la oferta $\pi_1 = 1$. Esto quiere decir que un jugador 2-racional tendrá que hacer una oferta muy agresiva (es decir, dejarse poco para sí mismo en la división) si falta mucho para finalizar el juego.

A partir de v_1^t y v_2^t es posible calcular las estrategias de comportamiento para todo período t y para cualquier nivel de racionalidad de los jugadores. Es fácil ver que un jugador 2 que es

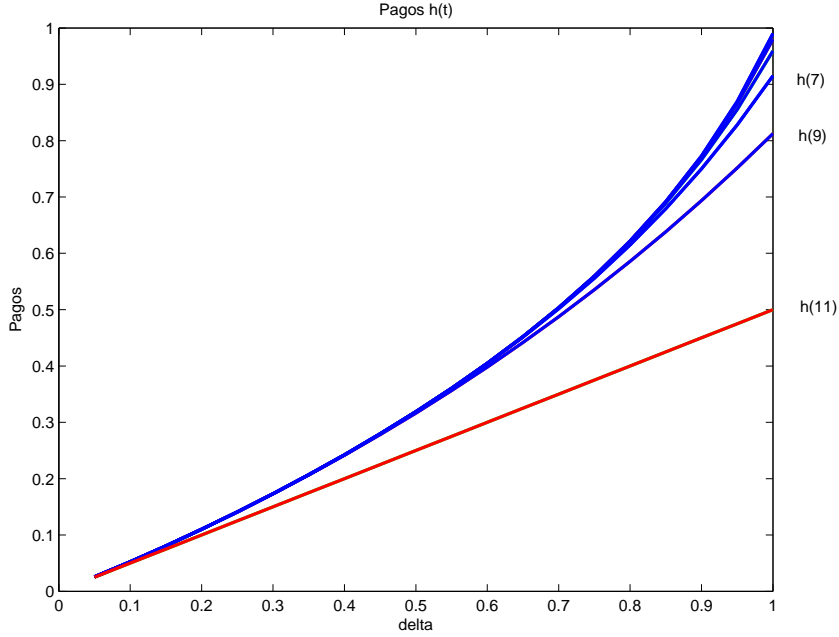


Figura 3.2: Función $h(t, \delta)$ para distintos periodos, con $n = 13$

2-racional hará una oferta v_1^{t+1}/δ^{t-1} (condición de indiferencia del jugador 1) en la etapa t , pues de otra forma el jugador 1 rechazaría, previendo que cualquier oferta futura del jugador 1 será $x_t = 1$. Sin embargo, para $k \geq 2$, los jugadores no siempre querrán dejar indiferente al adversario (esto dependerá de los valores que tomen (δ, t, n) , pues los pagos que deberá ofrecer un jugador k_i -racional para dejar indiferente a un jugador $(k_i - 1)$ -racional podrían dejar peor al jugador que hace la oferta que su pago esperado por esperar).

Definición 3.10 *Definimos la oferta de indiferencia por $\bar{x}_i^t(k_i, \delta)$, valor que corresponde a la oferta que debe hacer el jugador i que es k_i -racional en el período t para dejar indiferente a un jugador $(k_i - 1)$ -racional.*

Se debe advertir que este valor no existe para $\bar{x}_1^t(1, \delta)$ o $\bar{x}_2^t(1, \delta)$ (no hay condición de indiferencia para un jugador 0-racional). Los valores para $\bar{x}_i^t(k_i, \delta)$ se construyen recursivamente.

Proposición 3.11 *Si $k > n - t + 1$, entonces, cuando t es impar,*

$$\pi_1^t(k) = \bar{x}_1^t(k, \delta) = \sum_{j=0}^{\binom{n-t}{2}-1} (\delta^{2j} - \delta^{2j+1}) + \delta^{n-t} = 1 - \delta + \delta^2 - \dots - \delta^{n-t-1} + \delta^{n-t}$$

DEMOSTRACIÓN. ver el apéndice □

Este último valor corresponde a la estrategia de comportamiento habitual para el equilibrio perfecto en subjuegos bajo conocimiento común de racionalidad como en la proposición 3.2.

Lema 3.12 *Sea $1 \leq t + k - 1 \leq n$.*

Si k es par y $(1 - h_2(t + k - 3, \delta)) \geq \delta^{n-t-k+2}$, entonces:

$$\bar{x}_1^t(k, \delta) = 1 - \delta + \delta^2 - \delta^3 + \dots + \delta^{k-2} - \frac{v_2^{t+k-1}}{\delta^{t-1}}$$

Si k es impar, entonces:

$$\bar{x}_1^t(k, \delta) = 1 - \delta + \delta^2 - \delta^3 + \dots + \delta^{k-3} - \delta^{k-2} + \frac{v_1^{t+k-1}}{\delta^{t-1}}$$

DEMOSTRACIÓN. ver el apéndice □

Aunque no es importante para el resto del análisis, las ofertas de indiferencia para el jugador 2 son complementarias a las del jugador 1. En general, si k es par:

$$\bar{x}_2^t(k) = \delta - \delta^2 + \dots + \delta^{k-3} - \delta^{k-2} + \frac{v_1^{t+k-1}}{\delta^{t-1}}$$

Lo que está detrás de las ofertas de indiferencia es cómo elige un jugador 1 que es k -racional en el período t una mejor respuesta ante lo que pueda hacer un jugador 2 ($k-1$)-racional en el período $(t+1)$. Este jugador 2 ($k-1$)-racional es un jugador ficticio² que en el período $(t+1)$ juega contra un jugador 1 ficticio que es $(k-2)$ -racional, y así sucesivamente hasta llegar a un jugador 2-racional que elige una mejor respuesta antes un jugador 1-racional (ambos ficticios).

Como existe alternancia en las ofertas, si el jugador 1 es k -racional y k es par, este proceso de introspección en el que los jugadores responden iterativamente a jugadores ficticios debe concluir con un jugador 1 2-racional que elige una mejor respuesta ante un jugador 2 1-racional, sin embargo es óptimo para el jugador 1-racional hacer una oferta en la que se queda con toda la torta esperando que sea aceptada en algún momento futuro (pues asume que la aceptación es aleatoria). Este jugador 1 (ficticio) tendrá dos opciones, o bien hacer una oferta que deje indiferente al jugador 2, o bien hacer una oferta que el jugador 2 rechace con tal de esperar hasta el final del juego donde espera un pago esperado de δ^n . Aquí es donde tiene sentido la condición $(1 - h_2(t + k - 3, \delta)) \geq \delta^{n-t-k+2}$; para que el jugador 1 quiera dejar indiferente al jugador 2 en este período, su pago esperado debe ser mayor al pago por esperar hasta el final, es decir, se exige que la «distancia» entre el período t y el final del juego, n , sea lo suficientemente grande. En particular, en un horizonte infinito, $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta^{n-t-k+2} = 0$, la condición se cumple trivialmente pues, $(1 - h_2(t + k - 3, \delta)) > 0$.

Además, usando el mismo argumento de alternancia en las ofertas, si el jugador 1 es k -racional y k es impar, este proceso de introspección en el que los jugadores responden iterativamente a jugadores ficticios debe concluir con un jugador 2 2-racional que elige una mejor respuestas ante un jugador 1 1-racional, sin embargo es óptimo para el jugador 1-racional hacer una oferta en la que se queda con toda la torta, esperando que sea aceptada en algún momento futuro (pues asume que la aceptación es aleatoria). Este jugador 2 (ficticio)

²Se le llama así para denotar el proceso introspectivo que hace un jugador al calcular su mejor respuesta

tendrá que hacer una oferta que será más o menos agresiva (es decir, dejándose una menor o una mayor parte de la división, respectivamente), dependiendo del valor de δ ; en efecto, si δ es grande, entonces el jugador 1 1-racional es paciente y la oferta que debe hacer el jugador 2 es agresiva, si δ es pequeño, el jugador 1 1-racional es impaciente y la oferta que debe hacer el jugador 2 es menos agresiva (nótese que el jugador 2 no tiene ningún incentivo a hacer ofertas que el jugador 1 pueda rechazar, pues su pago esperado en el último período es 0). Esto es importante, pues tiene consecuencias en el proceso instrospectivo (hacia períodos anteriores), es decir, la oferta que haga el jugador 1 k -racional, en el período t , dependerá de la oferta que haría un jugador 2 2-racional en el período $(t + k - 2)$. Una intuición de lo que debería suceder es que si δ es suficientemente grande, las ofertas son crecientes en los niveles de racionalidad, amplificando el efecto de la oferta agresiva del jugador 2, a esto se le puede llamar «efecto paciencia»; por el contrario, si δ es pequeño, las ofertas son decrecientes en los niveles de racionalidad, amplificando el efecto contrario («efecto impaciencia»). La intuición tiene sentido, pues si un jugador 2 2-racional hace una oferta agresiva, la oferta que debe hacer un jugador 1 3-racional y que deja indiferente al jugador 2, deja con una mayor parte de la división al jugador 1, y así hacia atrás hasta el período t , el efecto es amplificador a medida que el descuento es menor al acercarse a t .

El siguiente lema muestra que para el horizonte infinito, existe un valor para δ tal que los efectos «paciencia» e «impaciencia» se anulan, es decir que las ofertas de indiferencia son iguales para cualquier nivel de racionalidad.

Lema 3.13 *Si $n \rightarrow \infty$, entonces $\exists! \bar{\delta}$ tal que $\bar{x}_1^t(k, \delta) = x_i^*$, $\forall k$, para algún x_i^* . Más aún, $\bar{\delta}$ es la solución real a la ecuación $2\delta^3 + 4\delta^2 + \delta - 2 = 0$*

$$\bar{\delta} = \frac{1}{6} \left[-4 + \sqrt[3]{80 - 30\sqrt{6}} + \sqrt[3]{80 + 30\sqrt{6}} \right] \approx 0,53697$$

DEMOSTRACIÓN. Sea k impar, entonces

$$\bar{x}_1^t(k, \delta) = 1 - \delta + \delta^2 - \delta^3 + \dots + \delta^{k-3} - \delta^{k-2} + \frac{v_1^{t+k-1}}{\delta^{t-1}}$$

Sea $k^* = k + 2$, entonces

$$\bar{x}_1^t(k^*) = \bar{x}_1^t(k+2) = 1 - \delta + \delta^2 - \delta^3 + \dots + \delta^{k-3} - \delta^{k-2} + \delta^{k-1} - \delta^k + \frac{v_1^{t+k-1}}{\delta^{t-1}}$$

Luego $\bar{x}_1^t(k, \delta) = \bar{x}_1^t(k^*, \delta)$ ssi $\frac{v_1^{t+k-1}}{\delta^{t-1}} = \delta^{k-1}(1 - \delta) + \frac{v_1^{t+k-1}}{\delta^{t-1}}$. Es decir,

$$v_1^{t+k-1} - v_1^{t+k+1} = \delta^{t+k-2}(1 - \delta) \quad (3.1)$$

Si definimos $\phi^t = v_1^{t+k-1}$, podemos reescribir (3.1) como $\phi^t - \phi^{t+2} = \delta^{t+k-2}(1 - \delta)$. De aquí resulta que

$$\phi^t = \phi^{t+2} + \delta^{t+k-2}(1 - \delta)$$

Como $n \rightarrow \infty$, ϕ^t está definido para todo t . La recurrencia anterior tiene como resultado

$$\begin{aligned}\phi^t &= (1 - \delta)\delta^{t+k-2} \sum_{i=0}^{\infty} (\delta^2)^i \\ \phi^t &= (1 - \delta)\delta^{t+k-2} \frac{1}{1 - \delta^2} \\ \phi^t &= \frac{1}{1 + \delta} \delta^{t+k-2}\end{aligned}\tag{3.2}$$

Esto significa que $\bar{x}_1^t(k, \delta) = \bar{x}_1^t(k^*, \delta)$ ssi $v_1^{t+k-1} = \frac{1}{1+\delta} \delta^{t+k-2}$. Pero

$$v_1^{t+k-1} = \frac{1}{2} \delta^{t+k-2} + \frac{1}{4} \delta^{t+k-1} \left[1 + \left(\frac{v_1^{t+k+1}}{\delta^{t+k-1}} \right)^2 \right]\tag{3.3}$$

reemplazando 3.2 en 3.3, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\delta^{t+k-2}}{1 + \delta} &= \frac{1}{2} \delta^{t+k-2} + \frac{1}{4} \delta^{t+k-1} \left[1 + \left(\frac{v_1^{t+k+1}}{\delta^{t+k-1}} \right)^2 \right] \\ \frac{1}{1 + \delta} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \delta \left[1 + \left(\frac{\delta}{1 + \delta} \right)^2 \right] \\ \frac{1}{1 + \delta} &= \frac{2(1 + \delta)^2 + \delta(1 + \delta)^2 + \delta^3}{4(1 + \delta)^2} \\ 4 + 4\delta &= 2(1 + 2\delta + \delta^2) + \delta(1 + 2\delta + \delta^2) + \delta^3 \\ 2\delta^3 + 4\delta^2 + \delta - 2 &= 0\end{aligned}\tag{3.4}$$

Pero 3.4 tiene una única solución real,

$$\bar{\delta} = \frac{1}{6} \left[-4 + \sqrt[3]{80 - 30\sqrt{6}} + \sqrt[3]{80 + 30\sqrt{6}} \right] \approx 0,53697$$

Luego $\bar{x}_1^t(k, \delta) = \bar{x}_1^t(k^*, \delta)$ ssi $\delta = \bar{\delta}$. Como la solución es única y k es cualquier impar, $\bar{x}_1^t(k) = \bar{x}_1^t(k + 2) = x^*$ para algún x^*

Para k , par, el procedimiento es análogo. Sea k par, entonces

$$\bar{x}_1^t(k, \delta) = 1 - \delta + \delta^2 - \delta^3 + \dots + \delta^{k-4} - \delta^{k-3} + \delta^{k-2} - \frac{v_2^{t+k-1}}{\delta^{t-1}}$$

Sea $k^* = k + 2$, entonces

$$\bar{x}_1^t(k^*, \delta) = \bar{x}_1^t(k + 2) = 1 - \delta + \delta^2 - \delta^3 + \dots + \delta^{k-2} - \delta^{k-1} + \delta^k - \frac{v_2^{t+k+1}}{\delta^{t-1}}$$

Luego $\bar{x}_1^t(k, \delta) = \bar{x}_1^t(k^*, \delta)$ ssi

$$v_2^{t+k-1} - v_2^{t+k-1} = \delta^{t+k-2}(1 - \delta)$$

Como antes, esto es cierto ssi $v_2^{t+k-1} = \frac{1}{1+\delta}\delta^{t+k-2}$. Como v_2^t se define igual que v_1^t (el pago esperado de un jugador 1-racional en el período t no depende de si se trata del jugador 1 o el 2, porque $n \rightarrow \infty$). Es decir, que $\bar{x}_1^t(k, \delta) = \bar{x}_1^t(k^*, \delta)$ ssi $\delta = \bar{\delta}$. Como este valor no depende de k par o impar, queda demostrado el lema. \square

No sólo se ha demostrado la existencia de un δ que anula los efectos paciencia e impaciencia, además su valor es $\bar{\delta} \approx 0,53697$. Con este valor, se pueden calcular los pagos para cada jugador. Para el período 1, y para un juego de negociación secuencial de 9 períodos, por ejemplo, $x_t^* = x_1^* \approx 0,6506$ (nótese que a partir del lema, este valor se puede calcular utilizando cualquier k en $\bar{x}_1^1(k, \bar{\delta})$, y los pagos aproximados son (0,6506; 0,3494). Esto ocurre en el horizonte infinito, pero en el horizonte finito ocurre algo similar. En el siguiente teorema se demuestra que las ofertas de indiferencia son single crossing para distintos niveles de racionalidad y se prueba la intuición respecto de los efectos paciencia e impaciencia.

Teorema 3.14 $\forall k > 1, \exists! \delta^*$ tal que $\bar{x}_1^t(k, \delta^*) = \bar{x}_1^t(k + 2, \delta^*)$. Además, si k es impar, $\bar{x}_1^t(k, \delta) > \bar{x}_1^t(k + 2, \delta)$ ssi $\delta > \delta^*$. Si k es par, $\bar{x}_1^t(k, \delta) < \bar{x}_1^t(k + 2, \delta)$ ssi $\delta > \delta^*$.

DEMOSTRACIÓN. Se demuestra para el caso k impar y luego para k par, aunque el procedimiento es análogo.

Sea k impar, entonces

$$\bar{x}_1^t(k, \delta) = 1 - \delta + \delta^2 - \delta^3 + \dots + \delta^{k-3} - \delta^{k-2} + \frac{v_1^{t+k-1}}{\delta^{t-1}}$$

Sea $k^* = k + 2$, entonces

$$\bar{x}_1^t(k^*, \delta) = \bar{x}_1^t(k + 2, \delta) = 1 - \delta + \delta^2 - \delta^3 + \dots + \delta^{k-3} - \delta^{k-2} + \delta^{k-1} - \delta^k + \frac{v_1^{t+k-1}}{\delta^{t-1}}$$

Luego $\bar{x}_1^t(k, \delta) = \bar{x}_1^t(k^*, \delta)$ ssi $\frac{v_1^{t+k-1}}{\delta^{t-1}} = \delta^{k-1}(1 - \delta) + \frac{v_1^{t+k-1}}{\delta^{t-1}}$. Es decir,

$$\frac{v_1^{t+k-1} - v_1^{t+k+1}}{\delta^{t+k-2}} = (1 - \delta) \quad (3.5)$$

Usando la definición de v_1^t en 3.5 se tiene que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta^{t+k-2}} \left(\frac{1}{2} \delta^{t+k-2} + \frac{1}{4} \delta^{t+k-1} \left[1 + \left(\frac{v_1^{t+k+1}}{\delta^{t+k-1}} \right)^2 \right] \right) \\ & - \frac{1}{\delta^{t+k-2}} \left(\frac{1}{2} \delta^{t+k} + \frac{1}{4} \delta^{t+k+1} \left[1 + \left(\frac{v_1^{t+k+3}}{\delta^{t+k+1}} \right)^2 \right] \right) = (1 - \delta) \end{aligned}$$

Es decir,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \delta \left[1 + \left(\frac{v_1^{t+k+1}}{\delta^{t+k-1}} \right)^2 \right] - \left(\frac{1}{2} \delta^2 + \frac{1}{4} \delta^3 \left[1 + \left(\frac{v_1^{t+k+3}}{\delta^{t+k+1}} \right)^2 \right] \right) = (1 - \delta)$$

Nótese que esta última expresión se puede escribir de manera más sencilla usando la definición de $h(t, \delta) = \frac{v_1^{t+2}}{\delta^t}$:

$$\frac{1}{\delta} h(t+k-3, \delta) - \delta h(t+k-1, \delta) = 1 - \delta \quad (3.6)$$

Pero

$$h(t+k-3, \delta) = \frac{v_1^{t+k-1}}{\delta^{t+k-3}} = \frac{1}{2} \delta + \frac{1}{4} \delta^2 \left[1 + (h(t+k-1, \delta))^2 \right]$$

Llamando X a $h(t+k-3, \delta)$ e Y a $h(t+k-1, \delta)$,

$$X = \frac{1}{2} \delta + \frac{1}{4} \delta^2 (1 + Y^2) \quad (3.7)$$

Reemplazando 3.7 en 3.6

$$\frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{2} \delta + \frac{1}{4} \delta^2 (1 + Y^2) \right) - \delta Y = 1 - \delta$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \delta + \frac{1}{4} \delta Y^2 - \delta Y - 1 + \delta = 0$$

$$(Y^2 - 4Y + 5)\delta - 2 = 0$$

Como $Y = Y(\delta)$, $\bar{x}_1^t(k, \delta) = \bar{x}_1^t(k^*, \delta)$ ssi \exists un punto fijo δ^* tal que

$$\delta^* = \frac{2}{Y^2(\delta^*) - 4Y(\delta^*) + 5} \quad (3.8)$$

Observación Notemos que la función de la derecha, dado que $\frac{\delta}{2} \leq Y < 1$, es creciente en los Y permitidos. Pero además, Y es creciente en n y decreciente en t (con δ fijo). Por lo tanto, el valor máximo para esta función se encuentra con $n \rightarrow \infty$. Como el lema anterior demuestra la existencia de un valor $\bar{\delta}$ para el que $\bar{x}_1^t(k, \delta) = \bar{x}_1^t(k+1, \delta)$ para todo k , se puede asegurar que en la ecuación 3.8, si existe algún punto fijo δ^* , éste debe estar acotado por $\bar{\delta}$, es decir $\delta^* < \bar{\delta}$.

Ahora, definiendo $f(\delta) = \delta$ y $g(\delta) = 2/(Y^2(\delta^*) - 4Y(\delta^*) + 5)$, basta demostrar que estas funciones cumplen la condición de *Single Crossing*. Para esto, supongamos que existe δ^* tal que $f(\delta^*) = g(\delta^*)$ y demostremos que $g'(\delta^*) < f'(\delta^*)$, es decir, $g'(\delta^*) < 1$.

$$g'(\delta) = \frac{2}{(Y^2 - 4Y + 5)^2} (-2YY' - 4Y')$$

$$g'(\delta) = \frac{2 \cdot 2}{(Y^2 - 4Y + 5)^2} \frac{4Y' - 2YY'}{2}$$

$$g'(\delta) = g^2(\delta)Y'(2 - Y)$$

Como $Y = h(t + k + 1, \delta) \geq \delta/2$, se tiene que $(2 - Y) \leq (4 - \delta)/2$, entonces

$$g'(\delta) \leq g^2(\delta) \frac{4 - \delta}{2} Y' \quad (3.9)$$

Luego, para probar single crossing, es suficiente mostrar que

$$\left(\frac{4 - \delta^*}{2}\right) g(\delta^*)Y'(\delta^*) = \left(\frac{4 - \delta^*}{2}\right) (\delta^*)^2 Y'(\delta^*) < 1$$

Pero como $Y'(\delta) < \frac{1+2\delta}{2-\delta^2}$, lo que se debe demostrar es que

$$(\delta^*)^2 \left(\frac{4 - \delta^*}{2}\right) \left(\frac{1 + 2\delta^*}{2 - (\delta^*)^2} + 1\right) < 1$$

Es decir,

$$\frac{-2(\delta^*)^4 + 7(\delta^*)^3 + 4(\delta^*)^2}{4 - (\delta^*)^2} < 1$$

Equivalentemente,

$$-2(\delta^*)^4 + 7(\delta^*)^3 + 5(\delta^*)^2 - 4 < 0$$

Ahora bien, la ecuación cuadrática tiene dos soluciones, una de ellas es $\delta' \approx 0,6739$ y negativa para todo $\delta < \delta'$, como $\delta^* < \bar{\delta} \approx 0,537$, la inecuación se cumple. Con esto se demuestra que $g'(\delta^*) < f'(\delta^*)$, por lo que se puede afirmar que $\delta = g(\delta)$ tiene un único punto fijo δ^* ; más aún, para $\delta > \delta^*$, $1 > g'(\delta)$. En otras palabras, existe δ^* tal que $\bar{x}_1^t(k, \delta^*) = \bar{x}_1^t(k^*, \delta^*)$ y $\bar{x}_1^t(k, \delta^*) > \bar{x}_1^t(k^*, \delta^*)$ para todo $\delta > \delta^*$.

□

A partir del teorema 3.14 no sólo se encuentra que para cada par de ofertas de indiferencia par-consecutivas o impar-consecutivas existe un δ en el que se anulan los efectos paciencia e impaciencia, también se ha encontrado un intervalo cercano a $\delta = 0,5$ en el que esto ocurre. Lo más relevante, sin embargo, es que estas ofertas son *single crossing* y que a partir de $\delta > \bar{\delta}$ es posible ordenarlas y se diferencian claramente. Así, si un jugador pudiera observar ofertas, podría inferir el nivel de racionalidad de quién las hace.

Ejemplo En el siguiente gráfico se pueden observar las ofertas de indiferencia (cuando las hay) del jugador 1 en el primer período, para distintos niveles de racionalidad k_1 , en función de δ para un juego de negociación secuencial de 9 períodos. Nótese que aunque cada par de ofertas se cruzan en un único δ^* , no necesariamente es el mismo para todos ellos (aunque gráficamente sean puntos cercanos). Se muestran las ofertas de indiferencia para el primer periodo, pues son las que realmente importan. Como se verá en los siguientes resultados, en equilibrio k-autoconfirmante sólo puede ocurrir que el jugador 2 acepte la oferta del jugador 1, si no lo hiciera, no se confirmarían las creencias del jugador 1. Por lo tanto, las ofertas en el primer periodo representan también un conjunto de posibles pagos para ambos jugadores en equilibrio, es decir, $(x_1^1(k, \delta), 1 - x_1^1(k, \delta))$

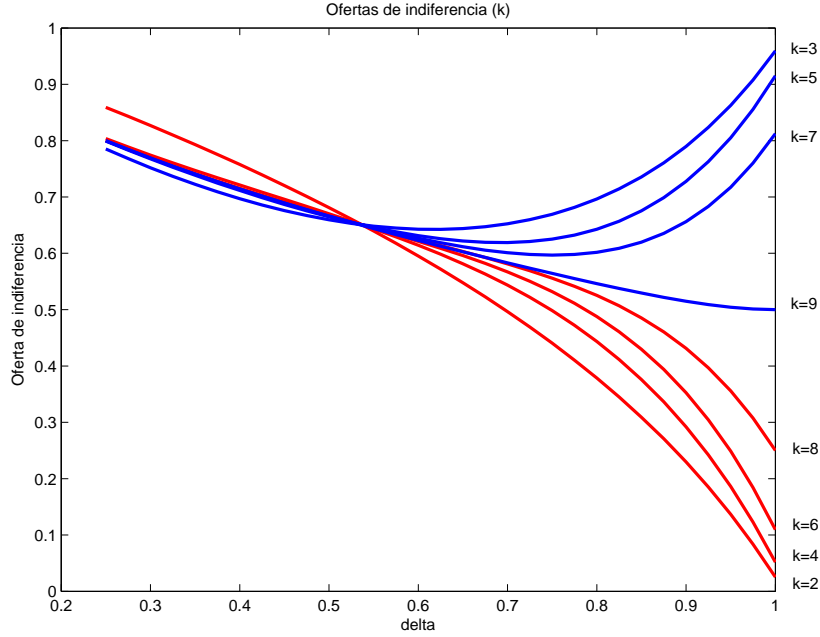


Figura 3.3: Ofertas de indiferencia, $x_1(k)$, en el período 1

El lema 3.13 y el teorema 3.14 explican lo que se observa en la figura 3.4. Es decir, en $\bar{\delta}$ se anulan los efectos paciencia e impaciencia cuando $n \rightarrow \infty$; como v_1^T no puede ser más grande (y esto es para cualquier período T , pues v_1^T es creciente en n), para todo $\delta > \bar{\delta}$ gana el efecto paciencia. El gráfico muestra además cómo los efectos paciencia e impaciencia son distintos para k par e impar.

Corolario 3.15 Sea $\delta > \bar{\delta}$.

Si k es impar, entonces:

$$\bar{x}_1^t(k, \delta) > \bar{x}_1^t(k+2, \delta)$$

Si k es par, entonces:

$$\bar{x}_1^t(k, \delta) < \bar{x}_1^t(k+2, \delta)$$

Si además $\delta > \frac{2}{3}$, si k^* es impar y k^{**} es par, entonces

$$\bar{x}_1^t(k^*, \delta) > \bar{x}_1^t(k^{**}, \delta)$$

DEMOSTRACIÓN. ver el apéndice □

El corolario dice que cuando $\delta > \bar{\delta}$ las ofertas de indiferencia se pueden ordenar, tanto para niveles de racionalidad par como impar (si $\delta > \frac{2}{3}$ se pueden comparar también las ofertas con valores k pares e impares entre sí). Como las diferencias son estrictas, se puede decir que cada vez que el jugador 1 hace su oferta al jugador 2, está revelando su tipo k (a menos que sea 0-racional). Por lo tanto, si se dan las condiciones para ordenar las ofertas, el jugador 2 puede rechazar o confirmar sus creencias; naturalmente, cuando $\delta > \frac{2}{3}$ una condición necesaria para que un (s^*, k^*) sea un equilibrio k -autoconfirmante es que $k_2^* = k_1^* + 1$

3.3.1. Equilibrios k-autoconfirmantes

A partir de las ofertas de indiferencia encontradas, se pueden determinar los equilibrios k-autoconfirmantes. Se debe recordar que un equilibrio k-autoconfirmante debe satisfacer dos cosas: (i) los jugadores eligen sus estrategias como una mejor respuesta a la predicción que hacen del comportamiento de los demás, en base a sus creencias, (ii) las creencias de los jugadores no deben rechazarse en ninguno de los conjuntos de información alcanzables. Las ofertas de indiferencia son importantes porque tienen la capacidad de revelar el nivel de racionalidad de quién las hace, esto significa que ya en el primer período de negociación, el jugador 2 podría confirmar o rechazar sus creencias; por otro lado, si el juego es suficientemente largo, el jugador 1 hace en el primer período una oferta para dejar indiferente al jugador 2, esperando que acepte. Si el jugador 2 acepta la oferta en el primer período (y esto es independiente de si rechaza o confirma sus creencias), el jugador 1 no puede rechazar sus creencias (el jugador 2 acepta, tal como se esperaba), pero si el jugador 2 rechaza la oferta realizada en el primer período, las creencias del jugador 1 se ven inmediatamente rechazadas. Esto simplemente quiere decir que cualquier equilibrio k-autoconfirmante de este modelo, para el juego de negociación secuencial, corresponde a una negociación en la que se llega a acuerdo en la primera etapa.

A continuación se caracterizan los equilibrios k-autoconfirmantes del modelo, todos ellos concluyen la negociación en el primer período. Estos equilibrio entregan comportamientos que difieren de los resultados del equilibrio perfecto en subjuegos en cuanto a la división final.

Proposición 3.16 *Si $\delta = \bar{\delta}$, entonces (s^*, k^*) es un equilibrio k-autoconfirmante $\forall k^*$ en el juego de negociación secuencial de horizonte infinito. Además, bajo este equilibrio, el juego termina en la primera etapa de negociación, con pagos $(x^*, 1-x^*)$, donde $x^* = \left(\frac{1}{1+\delta}\right) \approx 0,6506$*

DEMOSTRACIÓN. ver el apéndice □

Aunque la proposición 3.16 entrega un equilibrio k-autoconfirmante que vale la pena mirar, los equilibrios más interesantes se encuentran para valores de $\delta > \bar{\delta}$. La siguiente proposición permite incluir al equilibrio perfecto en subjuegos del modelo tradicional en el conjunto de los equilibrios k-autoconfirmantes del modelo de k-racionalidad para el juego de negociación secuencial.

Proposición 3.17 *Sea k^* con $k_1^* > n$, $k_2^* > n + 1$ y s^* tal que para $i = 1, 2$, $s_i^* \in \operatorname{argmax} u_i(\cdot, p_{-i}(k_i^*))$*

Entonces (s^, k^*) es un equilibrio k-autoconfirmante equivalente al equilibrio perfecto en subjuegos, para todo k^* , con pagos $(\bar{x}(\delta), 1 - \bar{x}(\delta))$, donde*

$$\bar{x}(\delta) = \sum_{j=0}^{\left(\frac{n-1}{2}\right)-1} (\delta^{2j} - \delta^{2j+1}) + \delta^{n-1} = 1 - \delta + \delta^2 - \dots - \delta^{n-2} + \delta^{n-1}$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos que la condición respecto de s_i^* es simplemente la definición de

equilibrio k-autoconfirmante, que exige que estrategias sean una mejor respuesta ante la predicción que hacen de los demás. Si los jugadores juegan de acuerdo a lo que dicen las ofertas de indiferencia, es decir si s^* es el inducido con un comportamiento k-racional, este se cumple trivialmente. Es fácil ver que si $k_1^* > n$ y $k_1^* > n + 1$, la oferta de indiferencia $\bar{x}(\delta)$ está correcta, cualquiera sea el nivel de racionalidad de los jugadores, el jugador 2 acepta en el primer período (por lo tanto el jugador 1 confirma su creencia) y el jugador 1 revela con esto que $k_1^* \geq n$, por lo tanto se confirma cualquier creencia $k_2^* \geq n + 1$. Como las ofertas de indiferencia son, en efecto, una mejor respuesta, (s^*, k^*) es un equilibrio k-autoconfirmante. \square

Observación Se puede comprobar fácilmente que cuando $k_1^* \leq n$ y $\delta > \bar{\delta}$, un perfil (s^*, k^*) confirma las creencias del jugador 1 ssi s^* es tal que para $i = 1, 2$, $s_i^* \in \operatorname{argmax} u_i(\cdot, p_{-i}(k_i^*))$ y

1. k_1^* es par y k_2^* es par, o bien,
2. k_1^* es par, k_2^* es impar y $k_2^* \geq (k_1^* - 1)$, o bien,
3. k_1^* es impar, k_2^* es par y $k_2^* \leq (k_1^* - 1)$

Para esto basta ver que las ofertas de indiferencia están ordenadas para $\delta > \bar{\delta}$

Con esta observación, usando la definición de equilibrio k-autoconfirmante y los resultados anteriores se pueden encontrar casi todos los equilibrios k-autoconfirmantes del modelo.

Teorema 3.18 *Sea $k_1^* \leq n$ y $\delta > \bar{\delta}$. Si se cumple alguna de las siguientes condiciones*

1. k_1^* es par y $k_2^* = k_1^* + 1$
2. $k_1^* = n$ y $k_2^* = k_1^* + 1$

y es s^ tal que para $i = 1, 2$, $s_i^* \in \operatorname{argmax} u_i(\cdot, p_{-i}(k_i^*))$*

Entonces (s^, k^*) es un equilibrio k-autoconfirmante*

DEMOSTRACIÓN. Hay que notar, en primer lugar que la condición sobre s^* exige los jugadores se comporten óptimamente de acuerdo a sus creencias, esto está dado por las ofertas de indiferencia. Es decir, dadas las creencias, las ofertas de indiferencia cumplen con el requisito para s^* .

Veamos primero que si k_1^* es par, como el jugador 1 revela su tipo cuando hace una oferta, el equilibrio k-autoconfirmante exige que $k_2^* = k_1^* + 1$, además, dado que $k_2^* = k_1^* + 1 > (k_1^* - 1)$ se tiene, a partir de la observación, que si el jugador 1 juega de acuerdo hace la oferta que prescribe k_1 , el jugador 2 acepta y se ven confirmadas las creencias del jugador 1.

Veamos ahora que sucede si $k_1^* = n$. Como el jugador 1 revela su tipo cuando hace una oferta, el equilibrio k-autoconfirmante exige que $k_2^* = n + 1$. Si el jugador 2 acepta, las creencias del jugador 1 se verán confirmadas. Basta ver, entonces, que el jugador 2 acepta la oferta. Como s^* se juega óptimamente, la oferta que hace el jugador 1 en el primer período es, por el lema 3.12, $\pi(n) = 1 - \delta + \delta^2 - \delta^3 + \dots + \delta^{n-3} - \delta^{n-2} + v_1^n$. Por otro lado, dado que

$k_2^* = n + 1$, la oferta que debería hacer el jugador 1 para dejar indiferente al jugador 2 es, por la proposición 3.11, $\bar{\pi}(n) = 1 - \delta + \delta^2 - \delta^3 + \dots + \delta^{n-3} - \delta^{n-2} + \delta^{n-1}$. De aquí, es fácil ver que $\bar{\pi}(n) > \pi(n)$, pues $v^{n-1} = \frac{\delta^{n-1}}{2} < \delta^{n-1}$. Luego, esto quiere decir que la oferta que deja indiferente al jugador 2 es $\bar{\pi}(n)$, pero el jugador 1 hace una oferta $\pi(n)$, que deja mejor al jugador 2, por lo tanto acepta. De esta manera, la creencia errónea del jugador 1 no se ve rechazada y el resultado constituye un equilibrio k-autoconfirmante. \square

Notemos que esta teorema caracteriza múltiples equilibrios k-autoconfirmantes con resultados que son distintos a los del equilibrio perfecto en subjuegos. Además, los equilibrios son diferentes dependiendo de la paridad de k_1 y k_2 . Descontando los equilibrios mostrados en las proposiciones 3.16 y 3.17, el teorema 3.18 entrega dos familias distintas de equilibrios, a saber, (a) aquellos en los que k_1 es par, (b) aquellos en los que $k_1 = n$. Nótese que en el caso (a) el jugador 1 siempre termina con pagos menores que en el caso (b), esto se debe al efecto paciencia, además es fácil verlo porque los pagos quedan ordenados de tal manera que un equilibrio con k_1 impar es mejor para el jugador 1 que un equilibrio con k_1 par. Pero además, a medida que δ se acerca a 1, los pagos para el jugador 1 en el caso (b) se acercan a $1/2$, por lo tanto, para δ cercanos a 1, los equilibrios del caso (a) dejan al jugador 1 con un pago menor que el jugador 2, es decir que en estos equilibrios, la estructura del juego favorece al jugador 2.

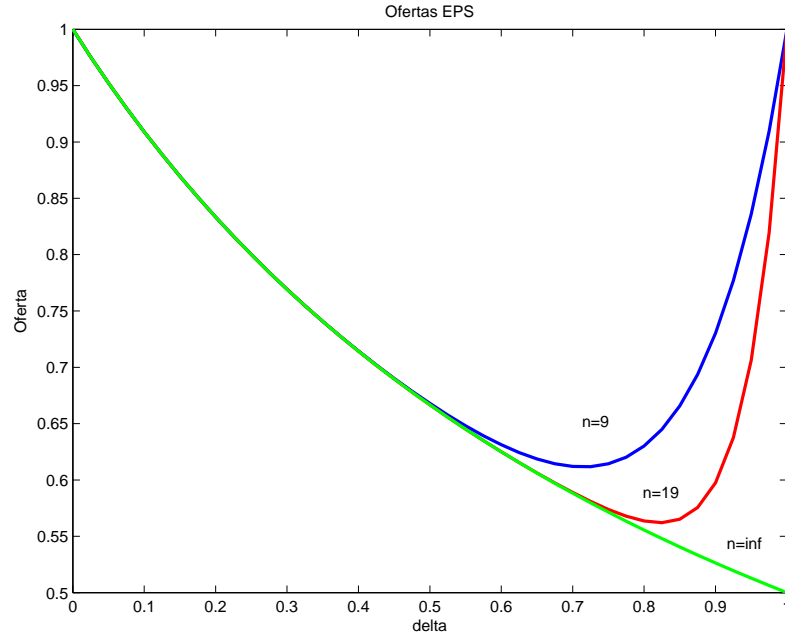


Figura 3.4: Ofertas del EPS en el período 1, para distintos valores de n

Observemos, por último, que si la negociación secuencial tiene n etapas, la oferta que hace el jugador 1 en el primer período es $\bar{x}_1^1(k', \delta) = 1 - \delta + \delta^2 - \delta^3 + \dots + \delta^{n-3} - \delta^{n-2} + \delta^{n-1}$, cuando $k' > n$ y $\bar{x}_1^1(k'', \delta) = 1 - \delta + \delta^2 - \delta^3 + \dots + \delta^{n-3} - \delta^{n-3} + v_1^n$ cuando $k'' = n$. Como $v_1^n = \delta^{n-1}/2$, es directo que $\bar{x}_1^1(k', \delta) > \bar{x}_1^1(k'', \delta)$. Nótese que a medida que crece n , $\bar{x}_1^1(k', \delta)$ y $\bar{x}_1^1(k'', \delta)$ se parecen cada vez más (ver la figura 3.4). Como a partir de $\delta = 2/3$, las ofertas de indiferencia están ordenadas, esto significa que la oferta que hace el jugador 1 en el primer período cuando es k' -racional es mayor a las ofertas que haría si fuera k -racional, con k par;

pero esto no dice nada respecto a cómo se compara $\bar{x}_1^1(k', \delta)$ con las ofertas de indiferencia de un jugador k -racional con k impar. En la figura 3.5 se pueden comparar estas ofertas, $\bar{x}_1^1(k', \delta)$ en rojo y $\bar{x}_1^1(k'', \delta)$ en azul para distintos valores de k'' .

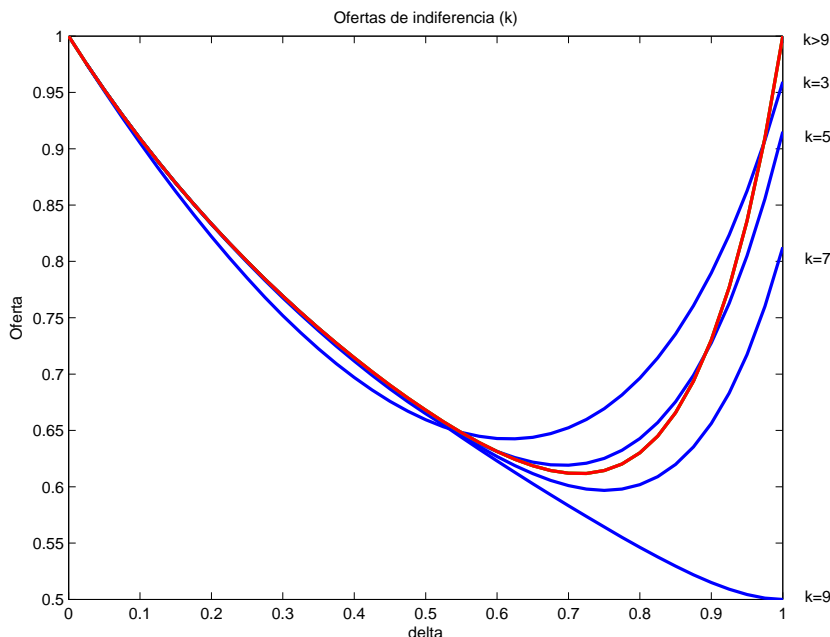


Figura 3.5: Comparación de ofertas de indiferencia, $x_1(k)$, en el período 1

A partir del gráfico se puede intuir que la comparación entre $\bar{x}_1^1(k', \delta)$ y $\bar{x}_1^1(k'', \delta)$ no es trivial y que, al parecer, a partir de $\delta > 2/3$, estas ofertas se cruzan en un sólo punto (aunque para $\delta \leq 2/3$ puedan haberse cruzado).

Estos resultados entregan una nueva perspectiva respecto de la utilidad de incorporar supuestos de racionalidad limitada, no sólo para seleccionar equilibrios (como en el caso de juegos estáticos), sino también para sugerir resultados predictivos, suponiendo que el modelo k -racional caracteriza adecuadamente el comportamiento de los individuos.

3.3.2. Dinámica del juego repetido

Aunque la principal preocupación de este trabajo ha sido caracterizar los equilibrios k -autoconfirmantes, es válido preguntarse por la dinámica de un juego como este en el contexto k -racional, cuando el juego se repite un cierto número de veces. Para hacer esto se extenderá el modelo anterior permitiendo la actualización de las creencias de los jugadores, es decir del nivel de racionalidad k . Para el caso particular del juego de negociación secuencial, es posible proponer una regla de actualización sencilla basada en el hecho de que los jugadores pueden estar revelando su tipo cuando hacen una oferta. Para que esto tenga sentido, se asumirá que los jugadores no tienen un comportamiento estratégico respecto de k , es decir que no lo eligen óptimamente, sino que es modificado automáticamente. En esta sección se define esta regla de aprendizaje y se muestra un ejemplo de la dinámica del juego repetido, esta dinámica converge en tiempo finito a un equilibrio k -autoconfirmante.

Definición 3.19 Sea el juego de negociación secuencial del modelo k -racional con n etapas. Se define $k_T = (k_{1,T}; k_{2,T})$ al vector de creencias de cada jugador en cada repetición del juego. En cada repetición, el nivel de racionalidad de cada jugador es $k_{i,T}$ y los jugadores eligen sus estrategias óptimamente de acuerdo a su nivel de racionalidad.

Definición 3.20 Diremos que un jugador i sigue una regla de actualización simple ssi

$$k_{i,T} = \begin{cases} k_{i,T-1} & \text{si el jugador } j \text{ no revela su tipo en } T-1 \\ k_{j,T-1} + 1 & \text{si el jugador } j \text{ revela su tipo en } T-1 \end{cases}$$

De acuerdo a esta definición, los jugadores sólo actualizan sus creencias acabado el juego. De esta manera, si los jugadores siguen una regla de actualización simple, los resultados antes obtenidos no se ven modificados para el juego en una repetición cualquiera.

Ejemplo Sea el juego de negociación secuencial con 9 etapas. Es decir que las ofertas de indiferencia en el período 1 son las de la figura 3.4. Supongamos que ambos jugadores siguen una regla de actualización simple, $\delta = 0,9$, $k_{1,0} = 5$ y $k_{2,0} = 4$. La dinámica se resumen en la tabla 3.1. Se muestra para cada período T en el que se repite el juego, los niveles $k_{1,T}$, $k_{2,T}$, la oferta aproximada que hace el jugador 1, la respuesta del jugador 2, la oferta del jugador 2 en caso de que rechace, la respuesta del jugador 1 y los pagos finales. En el período $T = 0$, las creencias del jugador 1 son correctas, hace una oferta que revela su tipo, el jugador 2 acepta y, entonces el jugador 2 actualiza sus creencias para la siguiente repetición, en $T = 1$ el jugador no aceptar la oferta, pero conociendo el tipo del jugador 1, hace una oferta x_2 que no pueda rechazar. De esta manera, ahora es el jugador 1 quien actualiza sus creencias. Este proceso de actualización se detiene cuando $k_1 = 9$, pues cuando $k_2 = 10$, está en la conveniencia del jugador 2 aceptar. De esta forma, los jugadores convergen a un equilibrio k -autoconfirmante. Este ejemplo muestra, además, que aunque puede existir *delay* en la negociación, se corrige si los jugadores aprenden de la racionalidad de los demás. El equilibrio es interesante, la división es casi equitativa.

Período	$k_{1,0}$	$k_{1,0}$	x_1	J2 acepta	x_2	J1 acepta	Pagos
0	5	4	0.7277	sí	-	-	(0,73; 0,27)
1	5	6	0.7277	no	0.6179	sí	(0,56; 0,34)
2	7	6	0.6561	sí	-	-	(0,66; 0,44)
3	7	8	0.6561	no	0.4611	sí	(0,41; 0,49)
4	9	8	0.5150	sí	-	-	(0,52; 0,48)
5	9	10	0.5150	sí	-	-	(0,52; 0,48)
6	9	10	0.5150	sí	-	-	(0,52; 0,48)

Tabla 3.1: Dinámica del juego de negociación secuencial repetido

El objetivo de esta breve extensión ha sido mostrar, a través de un ejemplo, que los equilibrios k -autoconfirmantes también pueden ser producto de un aprendizaje y que los efectos del modelo k -racional son más amplios que una mera desviación transitoria en el camino al equilibrio perfecto en subjuegos. Estos equilibrios prueban ser válidos debido a

que la incorporación de supuestos de racionalidad limitada no eliminan el comportamiento estratégico de los jugadores, sino que le dan una cierta estructura a la habilidades cognitivas de los distintos jugadores.

Conclusión

A higher level of reasoning indicates more strategic behaviour paired with the belief that the other players are also more strategic (Camerer, Ho, & Chong, 2004)

Como sugieren Camerer, Ho & Chong (2004), una regla de decisión que involucra un mayor número de pasos o iteraciones en el razonamiento tiene un mayor gasto cognitivo. Esto, junto a las limitaciones propias de los individuos y la tendencia de creer que los demás poseen menores habilidades, justifican esta clase particular de modelos de racionalidad limitada. Aunque el objetivo de los modelos de racionalidad limitada ha sido por lo general caracterizar las diferencias con respecto al equilibrio de Nash, tiene sentido pensar que en determinados juegos, las creencias sobre la racionalidad pueden verse confirmadas (o no rechazarse) al observar que el comportamiento efectivo de los jugadores no las contradicen; esto es particularmente válido en juegos dinámicos, donde las estrategias de los jugadores determinan los conjuntos de información alcanzables. Si en estos conjuntos de información no se observa una contradicción con las creencias, ¿por qué los jugadores querrían experimentar a costa de sus pagos actuales o comprobar sus creencias fuera del camino jugado si un mayor nivel de razonamiento tiene algún costo cognitivo?

A partir del modelo de equilibrio autoconfirmante de Fudenberg & Levine (1993), se definió un equilibrio k -autoconfirmante en un contexto en el que los jugadores no tienen conocimiento común de la racionalidad. Los resultados más importantes de este modelo se encuentran en su aplicación a juegos de negociación secuencial, donde se muestra la existencia de múltiples equilibrios k -autoconfirmantes (entre ellos el equilibrio perfecto en subjuegos del modelo tradicional). Principalmente, se ha demostrado que existen efectos importantes de la k -racionalidad sobre los resultados del juego y que es válido considerarlos, no sólo porque esto explica cómo los jugadores se alejan de los conceptos de equilibrio tradicionales, sino también por la convergencia a distintas clases de equilibrio k -autoconfirmante que podrían dar una justificación teórica al comportamiento observado de los individuos en situaciones reales o de laboratorio. Para esto se han relajado algunos supuestos, a saber, el de conocimiento común de la racionalidad y el de las creencias correctas fuera y en el equilibrio, sin embargo los argumentos han sido los convencionales de la teoría.

Para el juego de negociación secuencial, el modelo predice *delay* para determinados niveles de racionalidad k , esto ocurrirá cuando los jugadores hagan ofertas erróneas basadas en sus creencias, estas creencias no se verán confirmadas cuando vean que su oferta no es aceptada. Por lo tanto, cualquier equilibrio autoconfirmante de un juego suficientemente largo debe terminar necesariamente en el primer período (si el jugador 2 rechazara la oferta del jugador

1, éste no vería confirmadas sus creencias). Esto coincide con los resultados tradicionales de negociación secuencial que indican que en equilibrio la negociación debe terminar en el primer período, sin embargo la división de la torta difiere de los resultados clásicos. En particular, para un horizonte infinito, el juego de negociación secuencial en el modelo de k -racionalidad tiene infinitos equilibrios autoconfirmantes.

Además de los equilibrios k -autoconfirmantes triviales, se han clasificado los demás en tres clases de ellos, (a) equilibrios con k_1 par, (b) equilibrios con $k_1 = n$, (c) equilibrios con $k_1 > n$. Los equilibrios de tipo (a) son más beneficiosos para el jugador 2 que para el jugador 1, los de tipo (b) lo son ligeramente más para el jugador 1, pero tienden a ser equitativos si los jugadores son pacientes, y los de tipo (c) corresponden al conocido equilibrio perfecto en subjuegos. Lo relevante de esta diversidad de equilibrios es que ocurren en horizonte finito, en particular, el resultado de Rubinstein (1982) con $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ que resuelve una división $((1/(1 + \delta), \delta/(1 + \delta)))$ se recupera para el horizonte finito en la clase de equilibrios del tipo (b).

Extensiones

Una extensión natural a este modelo se propone al final del capítulo 3: el juego de negociación secuencial repetido. Claramente, no se ha justificado que los jugadores siga reglas de actualización simple, y una regla más sofisticada podría determinar que los jugadores modifican su nivel k a lo largo de un mismo juego, dando lugar a otras dinámicas; por ejemplo, si esta regla fuera de conocimiento común, no es tan claro cómo actualizaría un jugador sus creencias si sabe que al mismo tiempo las puede actualizar el otro jugador, ¿habría que aplicar, por ejemplo, la k -racionalidad a las creencias sobre el tipo de actualización? Para juegos dinámicos en general esto es menos evidente aún. Una discusión al respecto es ¿qué tan válido resulta un modelo en el que los jugadores deciden estratégicamente su tipo k ? Si se piensa que estos supuestos caracterizan un comportamiento de racionalidad limitada, quizás tendría sentido introducir un costo (privado para cada jugador) en esta decisión, después de todo, significa hacer un mayor número de iteraciones en aquellos procesos cognitivos que son recursivos del pensamiento estratégico, tal costo debería probarse heterogéneo en la población y sería interesante cuantificarlo experimentalmente. Piénsese en los jugadores profesionales de ajedrez, go o backgammon: dado el nivel de experiencia con estos juegos, parece razonable que su costo por aumentar su nivel de racionalidad, es decir, «mirar hacia adelante en el juego», fuera menor al de los no profesionales.

Otro aspecto interesante es que en el modelo tradicional el EPS del juego de negociación secuencial no se modifica si al agregar una ronda de *cheap talk* antes de comenzar el juego. Sin embargo, en un modelo de k -racionalidad, una conversación previa podría modificar las creencias iniciales; por ejemplo, en una conversación previa el jugador 2 podría sugerirle al jugador 1 que hiciera una determinada oferta, si esta oferta resulta más conveniente para el jugador 1 que la oferta que óptima que debe hacer dado su nivel de racionalidad, tendría entonces razones para modificarlo.

Bibliografía

- [1] Aumann and Hart. *Handbook of Game Theory*, volume 1. Elsevier Science Publishers, 1992.
- [2] Colin Camerer, Teck-Hua Ho, and Juin-Kuan Chong. A cognitive hierarchy model of games. *The Quarterly Journal of Economics*, pages 861–898, 2004.
- [3] Giorgio Coricelli and Rosemarie Nagel. Neural correlates of depth of strategic reasoning in medial prefrontal cortex. *PNAS*, 106(23):9163–9168, 2009.
- [4] Giovanna Devetag and Massimo Warglien. Games and phone numbers: Do short-term memory bounds affect strategic behavior? *Journal of Economics Psychology*, 24(2):189–202, 2003.
- [5] Johannes Hewig et al. Why humans deviate from rational choice. *Psychophysiology*, 1:1–8, 2010.
- [6] Drew Fudenberg. Predictive game theory. *American Economic Association, Ten Years and Beyond: Economists Answer NSF’s Call for Long-Term Research Agendas*, 2010.
- [7] Drew Fudenberg and David K. Levine. Self-confirming equilibrium. *Econometrica*, 61(3):523–545, 1993.
- [8] David Gill and Victoria Prowse. Cognitive ability and learning to play equilibrium: A level-k analysis. *MPRA Paper, University Library of Munich*, 2012.
- [9] Olga Gorelkina. Implementation in k-level thinking environment. *Working paper*, 2007.
- [10] Faruk Gul and Wolfgang Pesendorfer. The case for mindless economics. *Princeton University*, 2005.
- [11] Teck-Hua Ho and Xuanming Su. A dynamic level-k model in sequential games. *Management Science*, 59(2):452–469, 2013.
- [12] John Maynard Keynes. *The General Theory of Employment, Interest and Money*. New York: Harcourt Brace and Co., 1936.
- [13] Richard McKelvey and Thomas Palfrey. An experimental study of the centipede game. *Econometrica*, 60(4):803–836, 1992.

- [14] Rosemarie Nagel. Unraveling in guessing games: An experimental study. *The American Economic Review*, 85(5):1313–1326, 1995.
- [15] Ariel Rubinstein. Perfect equilibrium in a bargaining model. *Econometrica*, 50(1):97–109, 1982.
- [16] Reinhard Selten. Features of experimentally observed bounded rationality. *European Economic Review*, 42:413–436, 1998.
- [17] Herbert A. Simon. *Models of Man: Social and Rational*. Wiley, New York, 1957.
- [18] Muhamet Yildiz. Bargaining without a common prior: An immediate agreement theorem. *Econometrica*, 71(3):793–811, 2003.

Anexo A

Juego de negociación secuencial con tres períodos

Consideremos el juego del ultimátum en tres etapas con un factor de descuento δ para ambos jugadores. Sea $k = (2, 2)$.

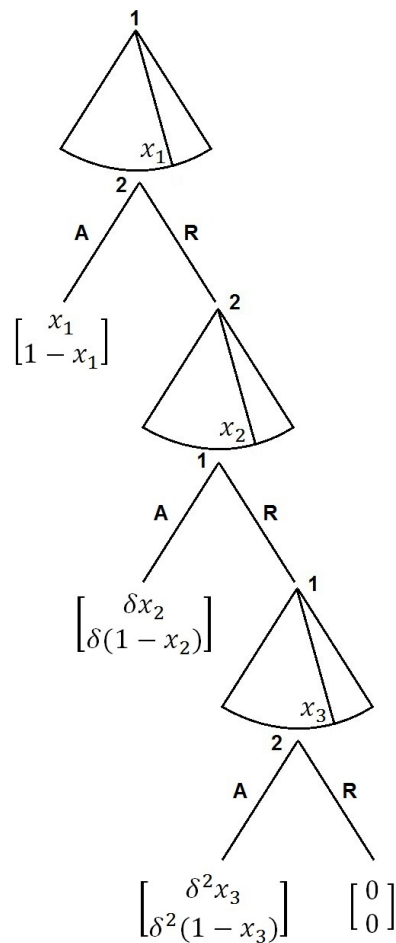


Figura 3.6: Juego de negociación secuencial con tres períodos

Suponemos que ambos jugadores tienen memoria perfecta, pero no aprenden durante un mismo juego. Es decir, si un jugador es k -racional, lo es en cada nodo en el que le toca jugar.

Suponemos, además, que cualquier jugador k -racional, con $k \geq 1$, maximiza su utilidad si está en el último nodo del juego. Por inducción reversa, en la tercera etapa las estrategias de los jugadores son:

$$\begin{aligned}\pi_2 &= A \\ \pi_1 &= x_3 = 1\end{aligned}$$

El jugador 2, acepta cualquier oferta y el jugador 1 no ofrece nada al jugador 2 (nótese que esto es independiente de las creencias que ambos tengan). En la segunda etapa las estrategias son:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \begin{cases} A & \text{si } x_2 \geq \delta \\ R & \text{si } x_2 < \delta \end{cases} \\ \pi_2 &= x_2 = \frac{\delta}{2}\end{aligned}$$

Es decir, dado que el jugador 1 anticipa su propia jugada en la tercera etapa, sabe que sólo le conviene aceptar un pago mayor a δ . Por otro lado, dado que el jugador 2 es 2-racional, cree que el jugador 1 escogerá $x_3 = 1$ en la siguiente etapa (basta con que sea 1-racional), por lo tanto le conviene elegir $x_2 = \frac{\delta}{2}$ para dejar indiferente al jugador 1 y obtener utilidad mayor a cero. En la primera etapa:

$$\begin{aligned}\pi_2 &= \begin{cases} A & \text{si } x_1 \leq 1 - \delta + \delta^2/2 \\ R & \text{si } x_1 > 1 - \delta + \delta^2/2 \end{cases} \\ \pi_1 &= \begin{cases} \bar{x}_1 = 1 - \delta & \text{si } \bar{x}_1 \geq \delta^2 \\ x_1 > \bar{x}_1 & \text{si } \bar{x}_1 < \delta^2 \end{cases}\end{aligned}$$

Anexo B

Código para el cálculo de v_1^t con MATLAB

```
1 % Función de valor para el jugador i 1-racional
2 % delta debe estar contenido entre 0 y 1
3 % El juego debe tener n etapas
4
5 function v = valorv(i,t,n,delta)
6
7 v=zeros(size(delta));
8 vfinal=zeros(size(delta));
9 d=size(delta,2);
10
11 for k=1:d
12
13     if i==1
14         vfinal(1,k)=(1/2)*delta(1,k).^(n-1);
15     else
16         vfinal(1,k)=(1/2)*delta(1,k).^(n-2)+(1/4)*delta(1,k).^(n-1);
17     end
18
19
20     if t==n || t==n-1
21         v=vfinal;
22     else
23         if i==1
24             vaux=valorv(1,t+2,n,delta);
25             v(1,k)=(1/2)*delta(1,k).^(t-1)+(1/4)*((delta(1,k).^t).^2+(vaux(1,k).^2))/(delta(1,k).^t);
26         else
27             vaux=valorv(2,t+2,n,delta);
28             v(1,k)=(1/2)*delta(1,k).^(t-1)+(1/4)*((delta(1,k).^t).^2+(vaux(1,k).^2))/(delta(1,k).^t);
29         end
30     end
31 end
32 end
```

Anexo C

Demstraciones

Proposición 3.6

DEMOSTRACIÓN. La demostración es inductiva para h_1 y h_2 . Se demuestra para h_1 y se observa que para h_2 es equivalente (modificando sólo el caso inicial). Sea $h_1(t, \delta) = \frac{v_1^{t+2}}{\delta^t}$. Asumiendo que $t \geq 1$, se quiere ver que dado cualquier $t \leq (n - 2)$, $H(t, \delta) = h_1(t - 2, \delta) - h_1(t, \delta) \geq 0$. El caso inicial es $t = n - 2$: Se sabe que

$$h_1(n - 4, \delta) = \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{4}\delta^2 \left[1 + (h_1(n - 2, \delta))^2 \right] \geq \frac{\delta}{2} = h_1(n - 2, \delta)$$

Por lo tanto, $h_1(n - 4, \delta) \geq h_1(n - 2, \delta)$.

Inducción: sea $H(t, \delta) \geq 0$, hay que demostrar que $H(t - 2, \delta) \geq 0$.

$$H(t - 2, \delta) = h_1(t - 4, \delta) - h_1(t - 2, \delta)$$

Se sabe que $h_1(t - 4, \delta) = \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{4}\delta^2 \left[1 + (h_1(t - 2, \delta))^2 \right]$, pero como $H(t, \delta) \geq 0$, se tiene que $h_1(t - 2, \delta) \geq h_1(t, \delta)$, por lo tanto

$$h_1(t - 4, \delta) = \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{4}\delta^2 \left[1 + (h_1(t - 2, \delta))^2 \right] \geq \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{4}\delta^2 \left[1 + (h_1(t, \delta))^2 \right] = h_1(t - 2, \delta)$$

Entonces $h_1(t - 4, \delta) \geq h_1(t - 2, \delta)$

Nótese que aunque para h_2 , t debe ser par, la inducción es la misma, sólo queda demostrar el caso inicial. Sea $t = n - 3$, hay que mostrar que $h_2(n - 3, \delta) - h_2(n - 1, \delta) \geq 0$. En efecto, se sabe que

$$h_2(n - 3, \delta) = \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{4}\delta^2 \left[1 + (h_2(n - 1, \delta))^2 \right] \geq \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{4}\delta^2 = h_2(n - 1, \delta)$$

□

Proposición 3.7

DEMOSTRACIÓN. La demostración es inductiva. Dado que v_1^t se define a partir de v_1^{t+2} , el caso inicial es $h(n-2, \delta) = \frac{v_1^n}{\delta^{n-2}}$

$$\text{Caso inicial: } h(n-2, \delta) = \frac{v_1^n}{\delta^{n-2}} = \frac{1}{2\delta^{n-2}}\delta^{n-1} = \frac{\delta}{2} < 1$$

Inducción: Supongamos que $h(t, \delta) < 1$. Veamos que $h(t-2, \delta) < 1$:

$$h(t-2, \delta) = \frac{v_1^t}{\delta^{t-2}} = \frac{1}{\delta^{t-2}} \left\{ \frac{1}{2}\delta^{t-1} + \frac{1}{4}\delta^t \left[1 + \left(\frac{v_1^{t+2}}{\delta^t} \right)^2 \right] \right\}$$

Es decir,

$$h(t-2, \delta) = \frac{1}{\delta^{t-2}} \left\{ \frac{1}{2}\delta^{t-1} + \frac{1}{4}\delta^t [1 + (h(t, \delta))^2] \right\}$$

Como $h(t, \delta) < 1$,

$$h(t-2, \delta) = \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{4}\delta^2 [1 + h(t, \delta)^2] < \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta^2$$

Si definimos $g(\delta) = \frac{1}{2}\delta(1 + \delta)$, $h(t-2, \delta) < g(\delta)$. Pero $g(\delta)$ es una función creciente para $\delta > -\frac{1}{2}$, cuyo máximo se encuentra $\delta = 1$ si $\delta \in [0, 1]$. Como $g(1) = 1$, $h(t-2, \delta) < 1$. Dado que $h(t, \delta)$ es decreciente en t , el menor valor que puede tomar es $h(n-2, \delta) = \frac{v_1^n}{\delta^{n-2}} = \frac{1}{\delta^{n-2}}\frac{\delta^{n-1}}{2} = \frac{\delta}{2}$

□

Corolario 3.8

DEMOSTRACIÓN. Se sabe que para $i = 1, 2$, por definición

$$h_i(t, \delta) = \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{4}\delta^2 + \frac{1}{4}\delta^2 (h_i(t+2, \delta))^2$$

Derivando con respecto a δ

$$\begin{aligned} & \frac{\partial h_i(t, \delta)}{\partial \delta} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta (h_i(t+2, \delta))^2 + \frac{1}{2}\delta^2 h_i(t+2, \delta) \frac{\partial h_i(t+2, \delta)}{\partial \delta} \\ &\leq \frac{1}{2} + \delta + \frac{1}{2}\delta^2 \frac{\partial h_i(t+2, \delta)}{\partial \delta} \\ &\leq \frac{1}{2} + \delta + \frac{1}{2}\delta^2 \frac{\partial h_i(t, \delta)}{\partial \delta} \end{aligned}$$

Las últimas inecuaciones se deben a la proposición 3.6. Luego,

$$\frac{\partial h_i(t, \delta)}{\partial \delta} \left(\frac{2 - \delta^2}{2} \right) \leq \frac{1 + 2\delta}{2}$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial h_i(t, \delta)}{\partial \delta} \leq \frac{1 + 2\delta}{2 - \delta^2}$$

□

Proposición 3.9

DEMOSTRACIÓN. Como la definición es equivalente para v_1^t y v_2^t , basta con demostrarlo para v_1^t . Sabemos que $v_1^t = \frac{1}{2}\delta^{t-1} + \frac{1}{4}\delta^t \left[1 + \left(\frac{v_1^{t+2}}{\delta^t} \right)^2 \right]$. Esto se puede reescribir

$$v_1^t = \frac{1}{2}\delta^{t-1} + \frac{1}{4}\delta^t + \frac{1}{4}\delta^{-t} (v_1^{t+2})^2$$

Derivando v_1^t con respecto a δ y considerando v_1^{t+2} constante:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1^t}{\partial \delta} &= \frac{1}{2}(t-1)\delta^{t-2} + \frac{1}{4}t\delta^{t-1} + \frac{1}{4} \left[-t\delta^{-t-1}(v_1^{t+2})^2 \right] \\ \frac{\partial v_1^t}{\partial \delta} &= \frac{1}{2}(t-1)\delta^{t-2} + \frac{1}{4} \left[t\delta^{t-1} - t\delta^{t-1} \left(\frac{v_1^{t+2}}{\delta^t} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Como $\frac{v_1^{t+2}}{\delta^t} < 1$, por el lema 3.7, $\left[t\delta^{t-1} - t\delta^{t-1} \left(\frac{v_1^{t+2}}{\delta^t} \right)^2 \right] > 0$. Luego, $\frac{\partial v_1^t}{\partial \delta} > 0$

Para demostrar crecimiento en n , basta comparar $v_1^t(n, \delta)$ con $v_1^t(n^*, \delta)$, con $n^* \geq n + 2$. Sabemos que

$$v_1^{n-2}(n, \delta) = \frac{1}{2}\delta^{n-3} + \frac{1}{4}\delta^n \left[1 + \left(\frac{v_1^n}{\delta^{n-2}} \right)^2 \right]$$

donde $v_1^n(n, \delta) = \frac{1}{2}\delta^{n-1}$, pero $v_1^n(n^*, \delta) = \frac{1}{2}\delta^{n-1} + \frac{1}{4} \left[1 + \left(\frac{v_1^{n+2}}{\delta^n} \right)^2 \right]$. Esto significa que $v_1^n(n^*, \delta) > v_1^n(n, \delta)$, por lo tanto

$$v_1^{n-2}(n^*, \delta) = \frac{1}{2}\delta^{n-3} + \frac{1}{4}\delta^n \left[1 + \left(\frac{v_1^n(n^*, \delta)}{\delta^{n-2}} \right)^2 \right] > v_1^{n-2}(n, \delta)$$

Esto significa que $v_1^t(n, \delta) < v_1^t(n^*, \delta)$. Es fácil ver esto, pues v_1^t crece cuando aumenta v_1^{t+2} ; el efecto $v_1^{n-2}(n^*, \delta) > v_1^{n-2}(n, \delta)$ se arrastra hasta t .

Usando 3.6 es fácil ver que, fijando δ y n , v_1^t es decreciente en t , en efecto:

$$v_1^t = h(t-2, \delta)\delta^{t-2} \geq h(t, \delta)\delta^{t-2} \geq h(t, \delta)\delta^t = v_1^{t+2}$$

□

Proposición 3.11

DEMOSTRACIÓN. Nótese que en el período t el jugador 1 debe hacer una oferta $\bar{x}_1^t(k_1)$ que deje indiferente a un jugador 2 $(k_1 - 1)$ -racional, a su vez, predice que este jugador hará un oferta en el periodo $t + 1$ como mejor respuesta ante un jugador 1 «ficticio» que es $(k_1 - 2)$ -racional. De modo general, en el período $t + a - 1$ (con a par) un jugador 2 «ficticio» hará una oferta para dejar indiferente a un jugador 1 $(k_1 - a)$ -racional. Con esto, en el período n , el jugador 1 ficticio será \bar{k}_1 -racional, con $\bar{k}_1 > 1$, esto quiere decir que su creencia es que el jugador 2 aceptará (sea cual sea su nivel de racionalidad, necesariamente mayor o igual a 1), reproduciéndose el resultado por inducción inversa para el juego sin consideraciones respecto de la racionalidad. \square

Proposición 3.15

DEMOSTRACIÓN. Las primeras dos consecuencias provienen directamente del teorema anterior, falta probar que dados k^* impar y k^{**} par, $\bar{x}_1^t(k^*, \delta) > \bar{x}_1^t(k^{**}, \delta)$. Para esto se toma $x^I = \min_{k \text{ impar}} \bar{x}_1^t(k, \delta)$ y se compara con $x^P = \max_{k \text{ par}} \bar{x}_1^t(k, \delta)$

$$x^I = 1 - \delta + \delta^2 - \delta^3 + \dots + \delta^{n-t-2} - \delta^{n-t-1} + \frac{v_1^n}{\delta^{t-1}}$$

$$x^P = 1 - \delta + \delta^2 - \delta^3 + \dots + \delta^{n-t-2} - \frac{v_2^{n-1}}{\delta^{t-1}}$$

Luego $x^I > x^P$ ssi

$$-\delta^{n-t-1} + \frac{v_1^n}{\delta^{t-1}} > -\frac{v_1^{n-1}}{\delta^{t-1}}$$

\Leftrightarrow

$$\delta^{n-t-1} \left(\frac{\delta}{2} - 1 \right) > -\delta^{n-t-1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\delta \right)$$

\Leftrightarrow

$$1 - \frac{\delta}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\delta$$

\Leftrightarrow

$$\delta > \frac{2}{3}$$

□

Proposición 3.16

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia directa del lema 3.13. Dado que en δ todas las ofertas de indiferencia son iguales para cualquier k , cuando el jugador 1 hace su oferta, el jugador 2 acepta inmediatamente, con esto las creencias del jugador 1 no se ven rechazadas (el jugador 1 predice este comportamiento del jugador 2), y tampoco las del jugador 2 (no puede discriminar distintos niveles de racionalidad). Como la oferta de indiferencia es la estrategia óptima del jugador 1, dadas sus creencias, y «Aceptar» es óptimo para el jugador 2, el perfil es un equilibrio k -autoconfirmante. Como el juego termina en el primer período, los pagos, x^* son se pueden calcular usando cualquier k en $\bar{x}_1^1(k, \bar{\delta})$. □