



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

**UN MODELO MATEMÁTICO PARA EL DISEÑO DE
TERRITORIOS BASADO EN EL PLAN CUADRANTE DE
SEGURIDAD PREVENTIVA DE CARABINEROS DE CHILE**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL

TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO DE
MAGISTER EN GESTIÓN DE OPERACIONES

VÍCTOR BUCAREY LÓPEZ

PROFESOR GUÍA:
FERNANDO ORDOÑEZ PIZARRO

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
VLADIMIR MARIANOV KLUGE
RICHARD WEBER HAAS
ENRIQUE BASSALETTI RIESS

SANTIAGO DE CHILE
ENERO 2014

RESUMEN DE LA MEMORIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL
POR: VÍCTOR BUCAREY LÓPEZ
FECHA: ENERO 2014
PROF. GUÍA: FERNANDO ORDOÑEZ PIZARRO

UN MODELO MATEMÁTICO PARA EL DISEÑO DE TERRITORIOS
BASADO EN EL PLAN CUADRANTE DE SEGURIDAD PREVENTIVA DE
CARABINEROS DE CHILE

Resumen

En este trabajo se desarrolla una metodología basada en un modelo de programación lineal entera mixta para la el diseño de cuadrantes, en el contexto del Plan Cuadrante de Seguridad Preventiva (PCSP) de Carabineros de Chile. El modelo presentado en este trabajo es una extensión del modelo de P-medianas con restricciones de equidad en la demanda por recursos policiales entre cada uno de los cuadrantes. Este último modelo arroja formas que no son del todo deseable, incluso creando cuadrantes inconexos. Por eso en este trabajo se incorpora una penalización en el tamaño de la frontera de cada distrito.

Por otra parte, Carabineros de Chile se enfrenta a una demanda de recursos policiales cuya unidad de medición es denominada Unidad de Vigilancia Equivalente (U.V.E.). Esta demanda está dividida en dos componentes: una de reacción que es fija para cada subsector geográfico; y otra de prevención que depende del máximo de tres factores (nivel de delito, población, kilómetros viáles). La primera componente de la demanda es sometida a restricciones de equidad, y la segunda al depender de la forma en que se divide la comuna, es penalizada en la función objetivo.

El modelo propuesto que resuelve el diseño óptimo de cuadrantes resulta ser difícil de resolver para instancias superiores a los 100 bloques. Por este motivo se desarrollan varias reglas para disminuir el tamaño del problema para finalmente utilizar una heurística tipo Localización-Asignación, en la cual se divide el problema original en dos problemas, uno en el cual se determina el centro geométrico de los cuadrantes y otro en el que se le asignan a cada centro los bloques. Esta heurística fue implementada de dos maneras. En una se resolvía el problema de asignación a optimalidad, y en la otra se resolvía la relajación lineal y se utiliza alguna regla de aproximación sacrificando algunas veces factibilidad.

Estos métodos fueron aplicados a la comuna de Ñuñoa cuya instancia sobrepasa los 400 bloques. Los resultados de la heurística fueron satisfactorios, encontrando muchas soluciones factibles y de mejor calidad que las que pueden ser obtenidas a través de los métodos de optimización implementados en CPLEX. El desarrollo de esta metodología permite encontrar muchas soluciones factibles con garantías de equidad, lo cual es bueno para tener los tomadores de decisiones, que pueden a posteriori tener otras consideraciones en el diseño de cuadrantes.

*Dedicado a Pablo Bucarey,
mi hijo y mi motivo.*

Agradecimientos

Es muy difícil enumerar a todas las personas que debería agradecer por el gran apoyo brindado en estos años, sin embargo, dentro de estas mi familia es sin duda la más importante. En especial quisiera agradecer a mi madre, que ha sido una verdadera fuente de inspiración y fuerza para luchar día a día. También debo a agradecer a Juan, mi padre, a mi querida abuela, a Cristian, mi hermano, a mi tía Amelia, y en general a toda la familia que se la ha jugado y han puesto toda la confianza en mi. Espero haber cumplido con sus expectativas. Además no puedo dejar de agradecer a Dana, porque fue una gran compañera y un gran apoyo todos estos años. Este trabajo se debe en gran parte a su ayuda, consejos y cariño.

Se hace imperante también agradecer a los grandes maestros con los cuales tuve el honor de compartir en la Universidad. En especial con Fernando Ordoñez, que ha tenido una paciencia infinita, que ha sido un gran consejero y por supuesto un gran amigo durante este periodo. También debo agradecer a Richard Weber que ha puesto mucha confianza en mi, que ha valorado mi trabajo y mis intereses, y que por supuesto ha aportado a mi crecimiento personal. Esta lista sería inmensa, pero en especial también debo agradecer a los profesores Roberto Cominetti, Andres Weintraub y Daniel Espinoza que han aportado mucho en mi desarrollo profesional.

Además debo agradecer a mis pares que siempre han valorado mi trabajo y han sido fuentes de una grata y nutritiva conversación en estos años. En esta lista se encuentra Paz, Renaud, Nicolás, Jaime, Nicole, Alejandro, Juan, Daniel, Alfonso. De ellos aprendí mucho.

Por supuesto quiero agradecer al Centro de Análisis y Modelamiento en Seguridad (CEAMOS)¹ por financiar este trabajo de tesis. Además agradecer al Departamento de Ingeniería Industrial, por dejarme desarrollar una de las labores que más disfruto haciendo, que es el de enseñar, sin duda en el DII me siento como en casa.

Por último, quiero agradecer también a Comunidad Ingenio, que ha contribuido al desarrollo de una de mis pasiones que es la Educación. Sin duda Comunidad Ingenio me abrió la oportunidad de poder trabajar con jóvenes, ampliar mis herramientas pedagógicas y sobretodo la oportunidad de crear cosas.

¹ICM: P-05-004-F, CONICYT: FBO16; www.isci.cl. Proyecto Anillo ACT87 Métodos cuantitativos en seguridad” (www.ceamos.cl)

Tabla de contenido

1. Introducción	8
1.1. Motivación	8
1.2. Objetivos	11
1.2.1. Objetivo General	11
1.2.2. Objetivos Específicos	11
1.3. Alcances y Limitaciones	11
1.4. Estructura de la Tesis	12
2. Antecedentes y Marco Teórico	14
2.1. Introducción	14
2.2. Plan Cuadrante de Seguridad Preventiva	14
2.2.1. Cuadrantes	15
2.2.2. Unidad de Vigilancia Equivalente	16
2.2.3. Oferta de Recursos Policiales	17
2.2.4. Demanda de Recursos Policiales	17
2.2.5. Índice de Cobertura Policial	18
2.3. Modelos de Localización	19
2.3.1. Modelos Discretos de Localización y su clasificación	19
2.3.2. Modelos de Localización en Diseño de Territorios	20
2.3.3. Modelos de Localización y Diseño de Territorios Aplicados a Seguridad	23
2.4. Métodos de Resolución para el problema de Diseño de Territorios	24
2.4.1. Métodos Exactos	24

2.4.2. Métodos Heurísticos	25
3. Descripción del Modelo	30
3.1. Introducción	30
3.2. Modelo General	32
3.3. Otras Consideraciones	34
3.4. Modelo Lineal por partes	36
4. Métodos de Resolución	39
4.1. Introducción	39
4.2. Disminución de las variables relevantes	40
4.2.1. Radio de Alcance	40
4.2.2. Candidatos a Centros	41
4.3. Heurística Localización y Asignación	41
4.3.1. Problema de Localización	41
4.3.2. Problema de asignación	42
4.3.3. Heurística	45
4.3.4. Generación de Centros	46
5. Resultados	51
5.1. Caso de Estudio: Comuna de Ñuñoa	51
5.1.1. Introducción	51
5.1.2. Heurística Localización y Asignación	55
5.2. Performance de la Heurística	64
5.2.1. Experimento	64
5.2.2. Análisis	66
6. Conclusiones	72
6.1. Conclusiones Generales	72
6.2. Sobre el modelo y los métodos de resolución	73
6.3. Implementación y utilidad de la metodología	74
6.4. Trabajos Futuros	74

6.4.1. Sobre el PCSP	74
6.4.2. Metodología de Diseño de Territorios	75
Bibliografía	76
A. Contraejemplo a la optimalidad de la regla de asignación de radio de alcance	I

Índice de figuras

1.1. Cuadrantes de la Comuna de Peñalolen. Fuente: Página web Municipalidad Peñalolen	9
1.2. Diferencias en la distribución de zonas para cada cuadrante. La demanda viene dada por $D_P = \max\{\sum_{l \in P} i_l, \sum_{l \in P} j_l, \sum_{l \in P} k_l\}$. Elaboración Propia	10
2.1. Distrito con forma de salamandra que da origen al término “Gerry- mandering”. Originalmente publicada en <i>Boston Centinel</i> , 1812.	21
3.1. Ejemplo de forma no deseable solución del modelo de P-medianas con equidad en una instancia ficticia . Fuente: Elaboración Propia.	32
3.2. Ejemplo de adyacencia fuerte. Los bloques A,C,G e I no son adyacentes bajo este concepto. Fuente: Mapcity	33
3.3. Ejemplo de aproximación cuando $\beta = 2$. Fuente: Elaboración Propia.	37
4.1. Radio de alcance dado un centro. Fuente: Elaboración Propia.	40
5.1. Caso de Ñuñoa: Diseño de Cuadrantes mediante un modelo de P- medianas. Fuente: Elaboración Propia.	53
5.2. Caso de Ñuñoa: Diseño de Cuadrantes mediante un modelo de P- medianas con equidad ($\alpha = 0.05$). Fuente: Elaboración Propia.	53
5.3. Caso de Ñuñoa: Modelo Completo con un $\alpha = 0.05$ obtenido tras 12 horas de resolución. Fuente: Elaboración Propia.	54
5.4. Caso de Ñuñoa: Tamaño del problema en relación al factor δ . Arriba el número de restricciones versus el factor δ y abajo el número de variables. Fuente: Elaboración Propia.	55
5.5. Caso de Ñuñoa: Número de Splits Promedio v/s Tiempo de iteración para el Algoritmo 4 en cada experimento. Fuente: Elaboración Propia.	57

5.6. Caso de Ñuñoa: Distribución de los resultados para el Algoritmo 4 en cuanto a la desviación con respecto al promedio y el valor de la función objetivo para el experimento 11. Fuente: Elaboración Propia.	58
5.7. Caso de Ñuñoa: Mapas generados para la mejor solución encontrada en cuanto a función objetivo (a) y para la con menor desviación (b) para el Algoritmo 4 en el experimento 19. La desviación obtenida para (a) fue de un 58 %. Fuente: Elaboración Propia.	59
5.8. Caso de Ñuñoa: Mapas generados para la mejor solución encontrada en cuanto a función objetivo (a) y para la con menor desviación (b) para el Algoritmo 4 en el experimento 20. Fuente: Elaboración Propia.	59
5.9. Caso de Ñuñoa: Diseño de Cuadrantes mediante el modelo propuesto en este trabajo mediante el Algoritmo 3 para el experimento 10. ($\alpha = 0.05$). Fuente: Elaboración Propia.	61
5.10. Caso de Ñuñoa: Comparación de los distintos resultados de los distintos experimentos del Algoritmo 3 con el parámetro $\beta = 3$ fijo y $\alpha = 0.05$. Fuente: Elaboración Propia.	63
5.11. Gráfico Tamaño de instancia versus MIP % y HE % para el caso base. Fuente: Elaboración Propia.	66
5.12. Gráfico Tamaño de instancia versus tiempo de resolución para el problema completo PDT y la aplicación del Algoritmo 3 para el caso base. Fuente: Elaboración Propia.	67
5.13. Gráficos Tamaño de instancia versus tiempo de resolución para el problema completo PDT para los casos base, P-1 y P+1. Fuente: Elaboración Propia.	67
5.14. Gráficos Tamaño de instancia versus tiempo de resolución para la aplicación del Algoritmo 3 para los casos base, P-1 y P+1. Fuente: Elaboración Propia.	68
5.15. Comparación del indicador $MIP\%$ para los casos base, P-1 y P+1. Fuente: Elaboración Propia.	69
5.16. Comparación del indicador $HE\%$ para los casos base, P-1 y P+1. Fuente: Elaboración Propia.	69
5.17. Gráfico Tamaño de instancia versus MIP % y HE % para el caso $\alpha_1 = 5\%$. Fuente: Elaboración Propia.	70
5.18. Gráfico Tamaño de instancia versus MIP % y HE % para el caso $\alpha_2 = 15\%$. Fuente: Elaboración Propia.	70
6.1. Alcances y limitaciones del Trabajo de Tesis. Elaboración Propia .	75

A.1. Contraejemplo: Grafo generado por la disposición de los bloques. Elaboración Propia	I
A.2. Contraejemplo: Demanda tipo reacción. Elaboración Propia	II
A.3. Contraejemplo: Las tres componentes de la demanda tipo prevención. (a) Kilometros Lineales (b) Población (c) Nivel de Delito. Elaboración Propia	II

Índice de tablas

2.1. Tipos de vigilancia y su capacidad de vigilancia. Fuente: Nuevo Manual Operativo del Plan Cuadrante de Seguridad Preventiva, Carabineros de Chile [18]	16
5.1. Demandas para la solución de P-medias y su desviación con respecto al promedio. Fuente: Elaboración Propia	52
5.2. Distintos estadísticos del Algoritmo 4 para 20 experimentos diferentes. Fuente: Elaboración Propia	56
5.3. Distintas estadísticas para el Algoritmo 3 en 20 experimentos diferentes. Fuente: Elaboración Propia	60
5.4. Tiempos de resolución promedio para distintos valores de los parámetros de la función objetivo. Fuente: Elaboración Propia	61
5.5. Parámetros utilizados como caso base. Fuente: Elaboración Propia	64
5.6. Distribución de los parámetros aleatorios. Fuente: Elaboración Propia	65
A.1. Cálculo de las demandas tipo prevención para este ejemplo. Fuente: Elaboración Propia	III
A.2. Cálculo de las demandas tipo prevención para este ejemplo con la nueva asignación. Fuente: Elaboración Propia	III

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Carabineros de Chile, fundado en el año 1927, es la institución encargada de “dar eficacia al derecho, garantizar el orden público y la seguridad pública interior, en todo el territorio de la República” [12].

Estas labores mencionadas en la Constitución hacen alusión a las actividades desarrolladas por Carabineros, es decir, la de tener un rol fiscalizador en el cumplimiento de leyes, atender a operaciones en las cuales las funciones policiales deban estar al servicio, y realizar prevención situacional. Para ello se necesita una alineación entre la visión y misión institucional, con una estrategia operativa que este acorde a esta compleja labor.

Es en ese contexto que nace en el año 1998 el Plan Cuadrante de Seguridad Preventiva (PSCP) como respuesta a un alza sostenida en los índices de criminalidad y niveles de violencia de los delitos cometidos, tratando de empoderar a la ciudadanía en la seguridad. El PCSP se define, según [18], como:

La estrategia operativa definida por la Institución, para enfrentar las demandas siempre crecientes por servicios policiales de vigilancia y seguridad que requiere la ciudadanía y, que Carabineros de Chile entrega en forma permanente las 24 horas, todos los días del año y en todo el territorio de la República, en el contexto urbano.

La idea de fondo de este plan es reconfigurar sectores territoriales en unidades más pequeñas denominados cuadrantes, donde cada uno de estos es responsabilidad de alguna unidad policial. Actualmente los cuadrantes se configuran tomando en cuenta 4 consideraciones [18]:

- **Restricciones de los medios:** Un radiopatrulla en un turno de 8 horas puede recorrer 82 kilómetros lineales, por este motivo, en una comuna el número de cuadrantes queda determinado por el cociente de kilómetros lineales de una comuna y 82.

- **Consideraciones de diseño vial y accidentes geográficos:** Se busca evitar que los cuadrantes queden divididos por avenidas, carreteras, líneas férreas, ríos, cerros, quebradas, o cualquier otro elemento que dificulte el desplazamiento de los dispositivos policiales al interior de cada cuadrante.
- **Consideraciones de organización de las actividades:** Este aspecto es menos restrictivo que el anterior y guarda relación con establecer los cuadrantes en concordancia con las actividades productivas, comerciales, de vivienda, de gobierno y otras.
- **Diseño radial concéntrico:** En lo posible los cuadrantes deberán ser determinados tomando en consideración una distribución concéntrica de los mismos, que vayan anexándose desde el "cuadrante cívico", hacia la periferia del sector de la Unidad.

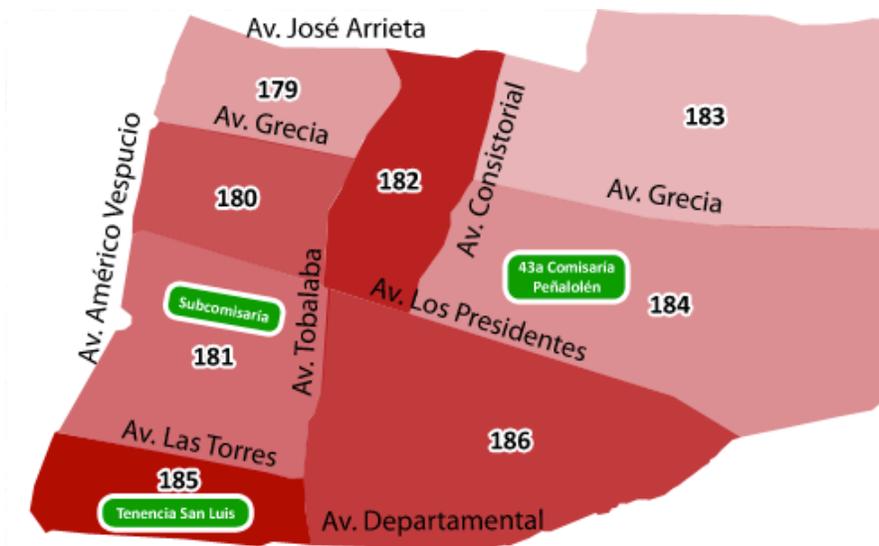


Figura 1.1: Cuadrantes de la Comuna de Peñalolén. Fuente: Página web Municipalidad Peñalolén

Por otra parte, las zonas geográficas generan una demanda de recursos policiales la cuál es cuantificada por Carabineros de Chile usando una metodología explicada en [17]. Esta metodología determina la demanda de recursos policiales para un conjunto de cuadrantes dados está demanda compuesta por una de tipo preventiva, cuantificada por el máximo entre nivel de delincuencia de cada zona, población y kilómetros lineales; y otra de tipo reactiva, conformada y cuantificada por los procedimientos de cada zona, la fiscalizaciones, ordenes judiciales y servicios extraordinarios que cada zona tiene.

Al ser la demanda del tipo preventiva el máximo de tres ítems la forma de los cuadrantes también influye en el valor de esta componente en una zona. Por ejemplo en la Figura 1.2 se puede ver que dependiendo de la forma de la distribución de cada cuadrante esta demanda puede ser de distinta magnitud.

Cada cuadrícula representa una zona específica de una comuna, por ejemplo, una manzana o bloque censal, y cada uno de los números dentro de esta cuadrícula

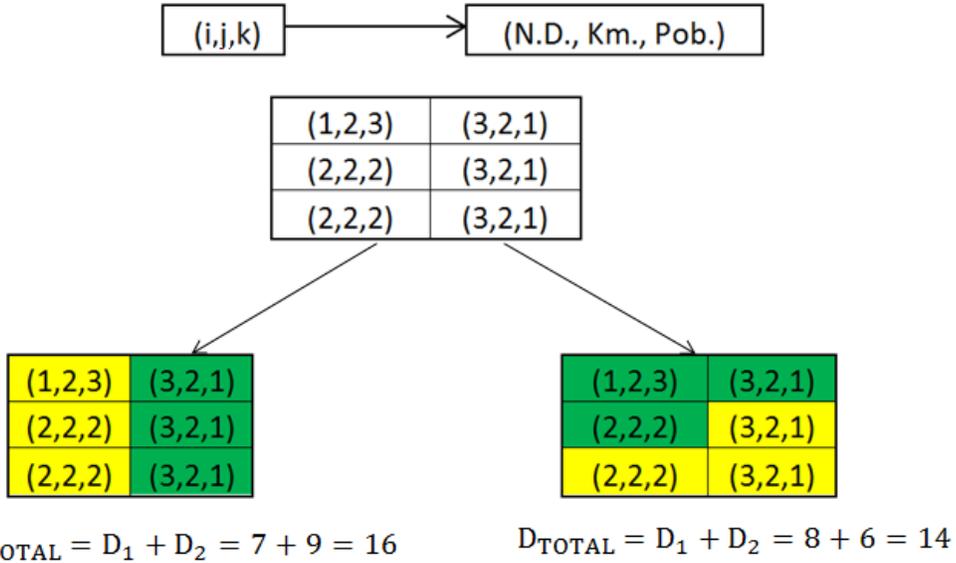


Figura 1.2: Diferencias en la distribución de zonas para cada cuadrante. La demanda viene dada por $D_P = \max\{\sum_{l \in P} i_l, \sum_{l \in P} j_l, \sum_{l \in P} k_l\}$. Elaboración Propia

representa respectivamente el nivel de delito, los kilómetros lineales y la población, todos estos normalizados para que puedan ser comparables. Estos seis bloques los dividiremos en dos cuadrantes que llamaremos cuadrante verde y amarillo respectivamente.

Primero observamos el diseño de la izquierda. La cantidad de recursos policiales debido al nivel de delito del cuadrante amarillo es de 5, debido a los kilómetros lineales da un número de 6, y debido a la población es de 7. En cambio, para el cuadrante verde tenemos que el nivel de delito es 9, los kilómetros lineales da 6 y la población da un total de 3. Tomando el máximo de estos indicadores para cada cuadrante da una demanda de recursos policiales desde el ítem prevención de 7 y 9 respectivamente, lo que en total da 16. Si se observa el segundo diseño, repitiendo el mismo procedimiento, el cuadrante amarillo tiene un nivel de demanda por prevención de 8, y el cuadrante verde tiene un nivel de 6. En total, por el diseño se baja de 16 a 14. Este ejemplo muestra que la forma de los cuadrantes influye la demanda total en una área, lo que es objeto de estudio.

Un aspecto de la construcción de cuadrantes, que si bien no aparece de forma explícita en la metodología de Carabineros, es necesaria para lograr niveles de gestión y eficiencia homogéneos, es que los tamaños de los cuadrantes deben ser comparables en cuanto a carga entre cada uno de estos en el nivel de demanda por recursos policiales que cada uno enfrenta.

La desventaja de agregar consideraciones del tipo equidad y considerar la demanda de tipo prevención en el diseño de cada cuadrante es que como resultado se pueden obtener formas no compactas o con concavidades las cuales son no

deseables.

Con este trabajo se pretende dar una metodología basada en modelos matemáticos de localización para el diseño de cada cuadrante que respeten por un lado, restricciones de equidad de carga en cada cuadrante, y por otro lado, que penalizen las formas que podemos llamar no deseables, y además que consideren el cambio en la demanda producida por el diseño.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo General

Desarrollar una metodología basada en modelos de localización para el análisis y evaluación del Plan Cuadrante de Seguridad Preventiva de Carabineros de Chile en cuanto al diseño de los cuadrantes.

1.2.2. Objetivos Específicos

1. Establecer y comparar modelos matemáticos basados en programación lineal entera para el problema de diseño de cuadrantes para el PCSP.
2. Construir heurísticas y/o métodos exactos para la resolución de problemas a gran escala.
3. Realizar un análisis de sensibilidad de los parámetros del modelo para ver la robustez de este.

1.3. Alcances y Limitaciones

Tal como fue descrito en las secciones 1.1 y 1.2 este trabajo desarrolla una metodología basada en modelos de localización para el diseño geográfico de los cuadrantes del Plan Cuadrante de Seguridad Preventiva de Carabineros de Chile. Este trabajo se hace cargo de casi todas las condiciones establecidas en el Nuevo Manual Operativo del Plan Cuadrante de Seguridad Preventiva [18] publicado en septiembre del año 2010, en particular de las restricciones de medios, consideraciones de tipo vial y geográfico, aspectos de forma de cada cuadrante y la inclusión del efecto de la demanda tipo prevención en el diseño. Además esta metodología se hará cargo de consideraciones de igualdad en la carga de demanda de cada cuadrante.

Este trabajo tiene ciertas limitaciones y simplificaciones las cuales son nombradas a continuación:

- A pesar de que es utilizado como un input, no es de incumbencia de este trabajo hacer un análisis en el cálculo de las demandas, como se cuantifica

cada factor, ni los factores de normalización, ni conceptualización de estas. Se utilizará la forma de calcular demandas establecida por Carabineros de Chile y que será explicitada en los capítulos posteriores.

- Este problema tiene una aleatoriedad intrínseca proveniente de varios factores. Entre ellos están los errores de medición en cada uno de los parámetros, las proyecciones de demanda, los cambios en la población, etc. Si bien el análisis de sensibilidad ayuda a estudiar el efecto de la incertidumbre, este trabajo no se hará cargo de manera más profunda, se deja este tema como una línea de investigación futura.
- A pesar de ser un modelo muy ligado a este, el modelo de diseño de territorios no se hace cargo de la asignación en detalle de recursos policiales. Sin embargo este tema es tocado tangencialmente a través de la asignación equitativa de zonas, con su respectiva demanda, a cada uno de los cuadrantes.

1.4. Estructura de la Tesis

La estructura utilizada en este documento para exponer el trabajo realizado es la siguiente:

- **Capítulo 2. Antecedentes y Marco Teórico:** Corresponde a la revisión bibliográfica o antecedentes. En este capítulo se explican los conceptos necesarios para la comprensión y contextualización del trabajo, abordando la literatura de modelos de localización, diseño de territorios, aplicaciones en el ámbito de seguridad y los métodos de resolución.
- **Capítulo 3. Descripción del Modelo:** Corresponde a la explicación del modelo basado en programación entera mixta. Primero se hablará de un modelo anterior basado en el trabajo de S. Bustamante [10], del cuál este trabajo es una extensión. Luego se mostrará el modelo general del cuál es motivo este trabajo, discutiendo su alcance y otras consideraciones que podrían ser agregadas. Luego se muestra la linealización por partes de este problema, sobre la cuál se trabajará.
- **Capítulo 4. Métodos de Resolución:** Corresponde al preproceso, heurísticas y algoritmos que son utilizados en este problema. Primero se hablará de como reducir el número de variables para este problema a través de un preproceso de los datos y de condiciones que a priori son subóptimas. Luego se propone una heurística basada en la separación del problema en uno de asignación y localización. Finalmente se muestran técnicas para romper simetrías en el problema de asignación, y así obtener respuestas de manera más eficiente.
- **Capítulo 5. Resultados:** Corresponde a los resultados obtenidos para las heurísticas y modelos obtenidos. En primer lugar, se muestran los resultados y performance de los métodos de resolución obtenidos para la comuna de

Ñuñoa. Luego se realiza una evaluación de las heurísticas expuestas en comparación con el resultado óptimo de manera experimental.

- **Capítulo 6. Conclusiones:** Se presentan las discusiones, conclusiones y posibles trabajos futuros que nacen de los modelos y métodos propuestos, y resultados obtenidos en este trabajo.

Capítulo 2

Antecedentes y Marco Teórico

2.1. Introducción

En este capítulo se entrega la contextualización y conceptos relacionados con el problema de localización con que se representa el problema de diseño de cuadrantes. Primero se realizará una revisión de los aspectos más relevantes del Plan Cuadrante de Seguridad Preventiva, como la definición de los cuadrantes, y la determinación de ofertas y demandas por recursos policiales. En segundo lugar, se muestra una revisión de los modelos clásicos de Localización con sus aplicaciones. En particular, se pondrá énfasis en problemas y modelos relacionados con el diseño de territorios discutiendo los criterios más relevantes mencionados en la literatura. En particular se revisarán el uso de criterios de equidad y geometría en modelos de localización en el ámbito policial como en otras aplicaciones. Por último se hará una revisión a las técnicas de resolución de problemas de diseño de territorios, sobretodo los que representan un input importante para este trabajo.

2.2. Plan Cuadrante de Seguridad Preventiva

El Plan Cuadrante de Seguridad Preventiva (PCSP) se constituye como la estrategia operativa de Carabineros de Chile para zonas urbanas en todo el país. En la práctica este se establece como una modalidad de trabajo policial que logra una gestión operativa informada y focalizada, facilitando el conocimiento de cada sector en específico y propiciando la prevención.

Los orígenes del PCSP se remontan al año 1997 en donde Carabineros de Chile, institución inmersa un proceso de modernización, conforma un equipo para desarrollar una nueva modalidad de servicios policiales. Algunas de las ideas principales eran generar un cambio en los procesos operativos de las Unidades y Destacamentos, y para ello se surgieron ideas como la división territorial de los sectores jurisdiccionales en Cuadrantes, la orientación de la labor policial a las necesidades de la comunidad, la incorporación de técnicas modernas de gestión, el énfasis en actividades preventivas, entre otras, todas en pro de la idea de una

policía comunitaria.

Ya en el primer semestre del año 1998, las Unidades y Destacamentos localizadas en el sector urbano de la Prefectura de Carabineros “Santiago Sur” utilizaban esta nueva modalidad de trabajo. Actualmente, la cobertura del PCSP según el reporte de Carabineros de Chile, [19], se extiende a 137 comunas al año 2012, obteniéndose 621 cuadrantes, incluyendo comunas que en total contienen un 86 % de la población nacional. A continuación se describen algunos elementos relevantes de la definición de cuadrantes para el desarrollo de esta tesis.

2.2.1. Cuadrantes

Un concepto fundamental de este trabajo es el de Cuadrante, y por esto se tomará la definición que utiliza Carabineros de Chile [18]:

subsector de responsabilidad de naturaleza variable, parametrizado de acuerdo a criterios pre-establecidos, en el cual se administran y/o ejecutan acciones programadas de vigilancia policial preventiva y de reacción operativa

La división de las comunas, o sectores jurisdiccionales, en Cuadrantes se realizó sobre la base de Juicio de Expertos (Comisarios) y teniendo como base fundamental la división territorial que mantenía la institución hasta esa fecha, además de los siguientes criterios:

- **Restricciones de los medios:** Un radiopatrulla en un turno de 8 horas de vigilancia preventiva, puede recorrer 82 kilómetros. Por este motivo, en una comuna el número de cuadrantes debe ser al menos el cociente de kilómetros lineales de una comuna y 82.
- **Consideraciones de diseño vial y accidentes geográficos:** Se busca evitar que los cuadrantes queden divididos por avenidas, carreteras, líneas férreas, ríos, cerros, quebradas, o cualquier otro elemento que dificulte el desplazamiento de los dispositivos policiales al interior de cada cuadrante.
- **Consideraciones de organización de las actividades:** Este aspecto es menos restrictivo que el anterior y guarda relación con establecer los cuadrantes en concordancia con las actividades productivas, comerciales, de vivienda, de gobierno y otras.
- **Diseño radial concéntrico:** En lo posible los cuadrantes deberán ser determinados tomando en consideración una distribución concéntrica de los mismos, que vayan anexándose desde el “cuadrante cívico”, hacia la periferia del sector de la Unidad.

Además los cuadrantes son caracterizados a través de dos perfiles: uno permanente y otro dinámico. El primero de ellos contempla información de

carácter poco variable como por ejemplo, los Kms Lineales, Población Residente, Cantidad Colegios, Juntas Vecinales, Locales con licencia para el expendio de alcohol, entre otros. El perfil dinámico posee información variable que permite tomar decisiones a nivel operativo, y recoge información de los eventos que van sucediendo dentro del cuadrante.

2.2.2. Unidad de Vigilancia Equivalente

Para poder tener una evaluación del nivel de recursos de Carabineros de Chile y los requerimientos de la población, Carabineros ha definido una unidad de medida de recursos policiales llamada Unidad de Vigilancia Equivalente (U.V.E.). Esta unidad permite hacer una comparación entre las capacidades de vigilancia que poseen los distintos dispositivos policiales, y comparar estos, con los requerimientos de la población.

Las equivalencias entre medios de vigilancias son determinadas por Carabineros a través de dos métodos: Uno **global**, que es basada en el juicio experto de Prefectos y Comisarios, en donde se les pregunta directamente la equivalencia entre dos dispositivos policiales; Y uno basado en el cálculo de un **Índice de Equivalencia**, que cuantifica la capacidad relativa de vigilancia entre distintos dispositivos policiales. Este índice se calcula tomando en cuenta dos dimensiones: La cobertura de cada dispositivo y la calidad de la vigilancia de este.

Cabe mencionar, que es considerado como medio de vigilancia el efecto que causa tener un cuartel policial fijo. Esto es denominado Efecto Cuartel fijo, y es proporcional a la fuerza policial presente en el cuartel.

Finalmente, fue definido por Carabineros que 1 U.V.E. equivaldría a la vigilancia que otorga una radiopatrulla con tres funcionarios de la institución las 24 horas del día. En la tabla 2.1 se muestran las equivalencias de los niveles de vigilancia para cada recurso policial:

Tipo de Vigilancia	Capacidad de Vigilancia (UVE)
Radiopatrulla (3 PNI)	1.00
Radiopatrulla (2 PNI)	0.80
Furgón Z (3PNI)	1.00
Moto todo terreno	0.45
Carabinero a Pie	0.20
Retén Móvil (3 PNI)	1.20
Retén Móvil Compuesto (3 PNI + 2 MTT)	1.20
Carabinero servicio tránsito	0.15
Punto fijo	0.10
Efecto Cuartel fijo	Fuerza Efectiva · 0.008

Tabla 2.1: Tipos de vigilancia y su capacidad de vigilancia. Fuente: Nuevo Manual Operativo del Plan Cuadrante de Seguridad Preventiva, Carabineros de Chile [18]

2.2.3. Oferta de Recursos Policiales

Se considera como Oferta de recursos policiales a todos los recursos de personal y vehículos disponibles en cada Comisaría más el efecto de vigilancia o de cuartel fijo respectivo a cada cuartel, medidos en unidades de vigilancia equivalentes.

Para el cálculo de esta oferta se consideran los siguientes elementos:

1. La dotación total de cada cuartel policial, con detalle de los recursos que cumplen servicios en la población y servicios dentro del cuartel.
2. Un Coeficiente de Respaldo para vehículos policiales que captura el hecho de que para mantener que un móvil funcionando las 24 horas del día en turnos de 8 horas, son necesarios 3 móviles, por lo que este coeficiente es de $\frac{1}{3}$.
3. Para el personal se considera un Coeficiente de Dotación que es equivalente a $\frac{1}{4}$. Esto proviene de que para mantener la dotación de 1 carabinero las 24 horas del día los 365 días del año, se necesitan 3 turnos de 8 horas más un turno franco.
4. Para el Efecto Vigilancia Cuartel Fijo (EVCF) se considera la vigilancia de cada Carabinero infante en los desplazamientos que realiza al llegar y cuando se retira del cartel. Este valor equivale a la fuerza efectiva del cuartel (la cantidad de funcionarios de Carabineros que permanece en el cuartel) multiplicado por el coeficiente 0.008.

Con la suma de estos factores se tiene la cantidad de U.V.E. que representa la oferta de recursos policiales.

2.2.4. Demanda de Recursos Policiales

La demanda por servicios policiales se define como el conjunto de prestaciones que Carabineros de Chile debe entregar para satisfacer las necesidades básicas de seguridad. Los recursos para satisfacer esta demanda, ya sean físicos y humanos, se expresarán en UVEs. Esta demanda puede ser agrupada en dos grandes componentes, una de prevención y otra de reacción.

La componente de prevención cuantifica los recursos necesarios para realizar las labores preventivas en cada sector. Son tres los factores que determinan la demanda preventiva por recursos policiales en un cuadrante: La extensión geográfica medida en kilómetros lineales, la población, y el nivel de delito, todos estos expresados en U.V.E. Cada uno de estos factores es convertido a U.V.E., con un factor de normalización. Estos coeficientes han sido determinados por Carabineros por una metodología descrita en [17]. Por ejemplo el factor de normalización en el caso de los kilómetros lineales, este es medido en cuantos kilómetros puede recorrer una radiopatrulla en un turno de 8 horas manteniendo una velocidad de $13.67 \frac{km}{hr}$ estando detenida un cuarto del tiempo: $(1 - \frac{1}{4}) \cdot 8hr \cdot$

$13.67 \frac{km}{hr} = 82.02km$. Para ello se determina en cada cuadrante cual de los factores es más relevante. Luego, la componente prevención se calcula como:

$$(2.1) \quad Demanda_{PREVENCIÓN} = \max\left(\frac{KM \text{ Lineales}}{82km}, \frac{Nivel \text{ Delito}}{23.500}, \frac{Población}{50.000 \text{ personas}}\right)$$

La componente de reacción cuantifica los recursos necesarios por cuadrante para satisfacer todos los procedimientos y otras funciones operativas que debe cumplir la institución. Estas son divididas en cuatro factores:

- Procedimiento: Corresponden a todos los recursos que se necesitan para atender procedimientos tales como robos, lesiones, daños, ley de alcoholes, desorden en la vía pública, drogas, accidentes del tránsito
- Ordenes Judiciales: Estas incluyen arrestos, detenciones, notificaciones, citaciones, clausuras, medidas cautelares, medidas precautorias, desalojos, otras.
- Fiscalización: Corresponden a los recursos necesarios para la fiscalización selectiva de establecimientos tales como botillerías, restaurantes, centros de enseñanza y práctica de artes marciales, bancos, financieras y establecimientos del mercado de capitales en general, entidades con guardias de seguridad, servicentros y locales que con más de 500 UF en caja, prostíbulos, ferias libres, entre otros.
- Servicios Extraordinarios: Son originados por la ocurrencia de eventos acotados espacial y temporalmente, que generan concentraciones significativas de población en espacios públicos. Entre estos se consideran eventos deportivos, conciertos o festivales musicales, visitas de autoridades u otros dignatarios extranjeros, manifestaciones.

Los primeros dos factores se calculan con datos históricos para cada cuadrante, el tercero se calcula con la composición cívico comercial de la comuna para cada cuadrante, mientras el último se calcula con proyecciones a nivel agregado. Por último, la demanda de esta componente de reacción se resume como la suma de los recursos necesarios para estos cuatro factores sobre cada cuadrante.

2.2.5. Índice de Cobertura Policial

Con la metodología hasta acá descrita es posible obtener la cantidad de recursos necesarios (demanda) y disponibles (oferta) representada en la misma unidad de medida UVE, lo que permite tener dos cantidades comparables.

En esa línea, es que se define el Índice de Cobertura Policial (IDCP) como la razón entre oferta y demanda, que permite saber que proporción de la demanda

por recursos policiales está siendo cubierta por la oferta de recursos policiales existentes. Este indicador es utilizado para determinar cuantitativamente donde hacen falta más recursos.

Los cálculos de demanda y oferta se hacen con el diseño de los cuadrantes fijos. Una de las ideas de esta tesis es mirar que la demanda por recursos policiales está en función del diseño de cada cuadrante y finalmente minimizar esta suma manteniendo formas deseables de estos mismos.

2.3. Modelos de Localización

Para introducir los conceptos fundamentales de los modelos de diseño de territorios se hace necesario contextualizar estos dentro de los modelos de localización, dado que dan una buena aproximación tanto en aspectos de modelación, como en estructura para el desarrollo de algoritmos. En general, los modelos de localización buscan encontrar la respuesta de donde ubicar puntos en el espacio, los cuales llamaremos centros, con algún objetivo en particular. A menudo, en el espacio se encuentra algún tipo de demanda que debe ser satisfecha. Para tener una contextualización de modelos de localización tomaremos la taxonomía utilizada en [16]. En ese artículo se separan los modelos de localización en cuatro tipos:

- Modelos Analíticos: Este tipo de modelo es el más simple de todos, y toma como supuesto que la demanda está bajo una distribución de densidad conocida. Los centros pueden ser instalados en cualquier punto del espacio. Para su resolución se utilizan regularmente herramientas de cálculo elemental.
- Modelos Continuos: Para estos modelos, a diferencia de los modelos analíticos, la demanda recae en lugares discretos del espacio, y los centros pueden ser colocados en todo el espacio.
- Modelos en Redes: En estos modelos la demanda y los centros están localizados sobre una red compuesta por nodos y arcos.
- Modelos Discretos: En estos, las demandas generalmente se encuentran en nodos, y los candidatos a centros están en un conjunto acotado de lugares.

A continuación se profundizará la contextualización de modelos discretos, pues el modelo propuesto en este trabajo cae en esta clasificación.

2.3.1. Modelos Discretos de Localización y su clasificación

Dentro de los modelos de localización discretos existen varios tipos de submodelos, que responden a distintos requerimientos y contextos. Los dos principales modelos existentes en la literatura son los tipos *covering* y los tipo *p-median*.

Los modelos tipo *covering* se basan en una distancia crítica de cobertura, o tiempo de respuesta, para el cual un centro puede cubrir la demanda o “servir adecuadamente”. Dentro de estos se distinguen siguiendo la taxonomía utilizada [16] los siguientes modelos:

- Set Covering: Busca el mínimo de centros que logra satisfacer toda la demanda.
- Max Covering: Dado un número de centros, busca la localización de estos que cubre la mayor demanda.
- P- Center: Busca la distancia mínima de *covering* que es necesaria para cubrir toda la demanda, buscando la localización de un número fijo de centros.

Los problemas tipo *p-median* buscan minimizar la distancia promedio (costo o tiempos promedio) de cada nodo al centro al cual es asignado. Se distinguen dos tipos de modelos:

- P-medianas: En este problema se quieren localizar P centros dentro del conjunto de candidatos, y asignar la demanda a cada uno de estos P centros, para minimizar la distancia promedio de cada nodo a su centro.
- UFCL¹: En este problema se deben decidir cuantos y en que lugar se deben instalar los centros además de la asignación de las demandas a cada centro instalado.

Existen otros modelos discretos de localización que no caben dentro de estas dos categorías, como lo son los modelos de dispersión, que buscan maximizar la mínima distancia cada par de centros [34].

En [45] se hace una extensa revisión de aplicaciones de estos modelos en el ámbito del servicio público las cuales van desde localización de servicios de emergencia hasta diseño de territorios. En la próxima sección se hace una revisión de los modelos de localización aplicado diseño de territorios, tema central de este trabajo.

2.3.2. Modelos de Localización en Diseño de Territorios

El problema de diseño de territorios puede ser visto como el problema de agrupar pequeñas áreas geográficas (bloques) en unidades más grandes [32]. Las dos principales aplicaciones de este problema son la de Distritación Política [28], [21], [29] y Diseño de Territorios para ventas y servicios [27]. Otras aplicaciones son reasignación en escuelas [11], distritación para energía eléctrica [5], rediseño de “áreas de respuesta primarias” para ambulancias [3].

¹Por sus siglas en ingles Uncapacitated fixed charge location

En relación directa con estos los criterios de balance y de formas geográficas se encuentra la práctica del “Gerry-mandering”, que nace conceptualmente a principios del siglo diecinueve en Massachusetts, bajo el gobierno estatal de Elbridge Gerry. Bajo el mandato de Gerry se propuso un distrito con forma de salamandra tal como se muestra en la figura 2.1, con el objetivo de obtener ventajas electorales [20] [48]. En [37] se hace una discusión de como la forma afecta, ligando directamente la compacidad de los distritos con la ausencia/presencia de esta práctica. Gracias al surgimiento de esta problemática es que el problema de Diseño de territorios sea un problema tratado desde distintos puntos de vista tales como Ciencias Políticas, Sociología, Computación e Investigación de Operaciones [42].



Figura 2.1: Distrito con forma de salamandra que da origen al término “Gerry-mandering”. Originalmente publicada en *Boston Centinel*, 1812.

Una completa taxonomía de los criterios utilizados en los problemas de diseño de territorio es presentada en [32] siendo los más importantes los siguientes:

Criterios Geográficos

Los criterios geográficos más utilizados en la literatura son el de compacidad y contigüidad. Estos criterios tienen que ver con la forma geográfica de cada distrito o cuadrante. El primero de ellos tiene que ver con que se prefieren formas redondeadas y no distorsionadas. El segundo es decir que los territorios deben ser conexos geográficamente y es utilizado principalmente por razones administrativas. Otras consideraciones geográficas utilizadas en el problema de

diseño de territorio son los accidentes geográficos, ríos, carreteras y que cada unidad territorial básica (bloques) no pueden ser divididos por dos distritos (Integralidad).

En [37] se presenta una discusión de cómo la compacidad afecta a la discriminación racial y político partidista, en el contexto del problema de distribución política, además de una clasificación e identificación de varias medidas de compacidad. Se describe la compacidad como multidimensional, debido a que tiene al menos dos componentes que son el perímetro y la dispersión del distrito. Además discute la inclusión de una tercera dimensión la dispersión geográfica de la población. En cuanto a las medidas de dispersión se mencionan medidas similares a las utilizadas en [29]. En ese trabajo se utiliza el indicador $\sum_{i=1}^P |L_i - W_i|$, en donde L_i y W_i son el máximo largo y ancho de cada distrito respectivamente. Además se incluyen otras como $\frac{L_i}{W_i}$, o comparaciones del área del distrito con respecto a las áreas de distritos que se podrían considerar compactos (con forma circular, cuadrados y/o hexágonos), o medidas basadas en el momento de inercia, por ejemplo la distancia promedio de cada bloque al centro de gravedad del distrito. En medidas basadas en perímetros, este mismo artículo menciona dos tipos de medidas, la primera es la minimización de las fronteras de los distritos, es decir, minimizar su perímetro; la segunda se basa en comparar el perímetro y el perímetro de una circunferencia de igual área, o reversamente, comparar el área de cada distrito con la circunferencia de igual perímetro. En cuanto a medidas que consideren a la población como factor de la compacidad se encuentran el momento de inercia de la población, es decir la suma ponderada por la población de la distancia de cada bloque al centro, el ratio entre la población del distrito y la población que existe en la figura convexa de menor tamaño o el ratio entre la población del distrito y la población que hay en la circunferencia de menor tamaño que circunscribe al distrito. Otras medidas para medir compacidad propuestas en la literatura son desviación absoluta con respecto al área promedio [46] y suma de todos los pares de distancias de centros a los bloques ponderados por la población de cada subunidad [39].

En [49] se presentan ocho medidas diferentes para analizar la compacidad, las que van desde la inspección visual y otras similares a las mencionadas anteriormente. Finalmente realiza una discusión de las propiedades deseables para las medidas de compacidad. En [30] utilizan como medida de compacidad la suma ponderada del perímetro de cada distrito para problemas de distribución electoral. En [15] utilizan el concepto de convexidad la cual tiene que ver con la ausencia de indentaciones y protuberancias en las formas de los cuadrantes.

Como conclusión se puede ver que no existe una única manera de medir compacidad y cualquier medición aceptable de esta es multidimensional, lo que transforma el problema de conseguir figuras compactas y contiguas es un problema multiobjetivo.

Criterios Demográficos y Relacionados a la Actividad

Uno de los criterios más utilizados en el diseño de territorios es el que todos los distritos tengan algún sentido de equidad ya sea en la población total, o la demanda por algún servicio en cada distrito algún otro indicador. Esta equidad es representada ya sea como la restricción de no estar desviado más de cierto porcentaje de la media de aquel atributo, o minimizando la desviación del valor del atributo en cada distrito con respecto a la media. Por ejemplo, en [10] la medida de equidad que se utiliza es el de demanda de recursos policiales de tipo reacción.

En [8] se discuten además terminos de igualdad de votantes para el problema de distritación política para representar el hecho de un hombre un voto, además de homogeneidad socioeconómica. Por otra parte, en este problema en específico también son comunes criterios que apunten a la representación de minorías [40]. Además, como se mencionó anteriormente, en [20] [48] muestran como la practica de Gerrymandering es utilizada para lograr inequidades en alguna característica de la población y así lograr ventajas políticas.

2.3.3. Modelos de Localización y Diseño de Territorios Aplicados a Seguridad

La localización de recursos y el diseño de territorios en el ámbito de la seguridad resulta ser una problemática que sale de manera natural. Sin embargo, el juicio experto y métodos no necesariamente rigurosos fueron predominantes en el problema del diseño de territorios. En [9] se menciona este hecho nombrando la metodología utilizada para definir los distritos o cuadrantes policiales como “Bud-Shell” haciendo referencia a una marca de cervezas y a una bencinera. En esta metodología el oficial de policia dividía la región marcando con un lápiz sobre las arterias principales, sin importar la carga de cada cuadrante, es decir se centraban en la forma de los cuadrantes sin considerar aspectos de equidad en la demanda u otro tipo de homogeneidad. En general, los modelos aplicados a seguridad toman en cuenta de una u otra forma las formas geográficas y consideraciones de equidad de carga entre distritos.

En [33] se menciona como la inequidad entre cuadrantes es perjudicial para la gestión de policial. Entre ellas menciona desbalance del personal en cada cuadrante, problemas morales, ausencia de indicadores para comparar gestión. Además expone una medida para cuantificar la carga policial que incluye el número de llamadas históricas, tiempos de respuesta promedio históricos, largo total de todas las calles dentro del cuadrante (concepto similar a los kilómetros lineales), area del cuadrante, población del cuadrante.

En [44] se muestra un caso aplicado de reconfiguración de distritos en el Departamento de Policía de Buffalo (BPD), Nueva York. Esa ciudad está dividida en cinco distritos, los cuales están divididos en cuatro sectores, lo que resulta en 20 sectores en total para la ciudad. Además, estos sectores son divididos cada uno en 400 divisiones más pequeñas llamdos distritos de reportes llamados *R Districts*.

El modelo propuesto en este trabajo se utiliza para encontrar R *districts* que respeten la forma de los 5 distritos de la ciudad utilizando requerimientos tales como homogeneidad en terminos de población y área, contigüidad y compacidad. En un primer enfoque se plantea un modelo de *Set Partitioning* que no logra resolver por un alto costo computacional. En un segundo enfoque se muestra que los bloques censales son un buena aproximación para los requerimientos de la BPD.

En [15] consideran el problema de distritación policial como un problema de partición de un grafo restringido sujeto a restricciones de compacidad, contigüidad, convexidad y tamaño. Además considera como restricción que el promedio de los tiempos de respuestas en cada distrito no debe exceder un límite superior. El mismo modelo es resuelto en [50]- [51] a través de un modelo de *Set Partitioning* y evaluado utilizando modelos de simulación basado en agentes.

En [47] se utilizan Teselaciones de Voronoi (también conocidos como Polígonos de Thiessen o Teselaciones de Dirichlet) para diseñar las zonas de patrullaje con medidas de equidad en las cargas, restricciones en las formas geográficas tomando en cuenta accidentes geográficos.

En [14], a diferencia de los modelos mencionados en esta sección, se realiza en primera instancia un modelo de *Max Covering* para determinar las áreas de patrullaje. Luego, determina un conjunto de opciones con *Backup Coverage*, es decir maximizando la cantidad de puntos sean cubiertos 2 o más veces por los centros policiales, sin considerar mayormente la equidad entre las distintas áreas.

2.4. Métodos de Resolución para el problema de Diseño de Territorios

Las primeros modelos y métodos de resolución del problema de Diseño de territorios aparecen en los 60's, teniendo completas revisiones tanto de los modelos y métodos de resolución aplicados en [32], [43] y [42]. A continuación se hace una revisión de métodos exactos y heurísticos para la resolución del problema de diseño de territorios:

2.4.1. Métodos Exactos

Aproximaciones exactas al problema de diseño de territorios nacen de manera natural al establecerse como un problema de programación lineal entera, como lo es el modelo propuesto en [28]). En ese trabajo se plantea un modelo con n^2 variables binarias, donde n es la cantidad de bloques del distrito. Se minimiza la distancia de cada bloque a su centro al cuadrado ponderado por la población de cada bloque (inercia total o dispersión ponderada) sujeto a la restricción de que cada nodo debe ser asignado a un centro, se deben asignar p centros y un límite superior e inferior de cada demanda (consideraciones de equidad). Este trabajo no considera aspectos de contigüidad.

Este tipo de problema en general puede ser resuelto con herramientas más generales de optimización basadas en enumeración explícita (fuerza bruta) o enumeración implícita. Dentro de la primera categoría aparece en la literatura una primera aproximación exacta para el problema en [22], en donde se realiza una enumeración explícita de todos los posibles distritos sujeto a restricciones de contiguidad, compacidad y equidad poblacional para luego plantear un problema de *Set Partitioning* que minimiza la desviación estandar de la población de cada distrito con respecto al promedio. Un método similar es utilizado en [38].

En enumeración implícita para problemas de programación entera existen varios métodos:

- Cortes de Gomory: Este método ocupa la resolución de relajaciones lineales sucesivas mediante el algoritmo SIMPLEX, y mediante el principio de planos cortantes se agregan restricciones que eliminen soluciones fraccionarias óptimas para la relajación lineal, y que no eliminen soluciones factibles enteras [25].
- Branch and Bound: Este método consiste en resolver la relajación lineal del problema entero, y posteriormente, para alguna variable fraccionaria óptima del problema lineal, crear dos problemas, acotando esa variable por su cajón inferior y por su cajón superior. Este algoritmo crea un árbol de sub problemas, y se sigue ramificando cada hoja hasta conseguir alguna solución entera, una solución infactible o que la solución conseguida no sea mejor que alguna de las ya conseguida anteriormente [36].
- Branch and Cut: Es una generalización de Branch and Bound, en donde se aumenta la formulación de cada subproblema con cortes adicionales, para así poder obtener mejores cotas de las relajaciones lineales [6].
- Branch and Price: Este método sigue una filosofía similar a la de Branch and Cut, pero en vez de generar restricciones (filas), genera variables que van ingresando a la relajación lineal (columnas) [4].

En la practica, estos métodos pueden tener una mala performance debido a la simetría inherente a las formulaciones. En [24] muestran como agregando restricciones adicionales a estos problemas o perturbando la función objetivo se pueden tener resultados de manera más eficiente.

En [35] se propone un modelo no lineal para resolver el problema de distritación política. Primero se presenta una formulación en un grafo completo que tiene pesos tanto como en los nodos (la población de cada bloque), como en los arcos (la distancia entre el bloques). El objetivo de este trabajo es minimizar la suma de los pesos ponderados por la poblacion de todos los arcos sea la mínima.

2.4.2. Métodos Heurísticos

Este problema en general es difícil de resolver en términos computacionales para instancias grandes ya sea por la cantidad de memoria necesaria requerida

para resolverlos, o porque encontrar la solución óptima dentro del conjunto de soluciones factibles demanda tiempo elevadísimo. Por este motivo, existen varios métodos heurísticos que no necesariamente entregan soluciones óptimas, pero sí en la mayoría de los casos entregan buenas aproximaciones. A continuación se enumeran los principales algoritmos heurísticos para el problema de distribución política:

Crecimiento de Múltiples Núcleos

La primera aproximación es el enfoque de crecimiento de múltiples núcleos (*multi-kernel growth*). Una primera aproximación es realizada en [48] donde el problema se resuelve utilizando un enfoque de crecimiento de múltiples núcleos (*multi-kernel growth*). En este enfoque el problema se resuelve con un conjunto de potenciales centros o núcleos a los cuales se les van anexando bloques vecinos en orden de distancia hasta que se llegue a algún nivel dado de población (*population quota*). En este trabajo se utilizaron criterios de contiguidad, equidad de población, compacidad y respetar límites administrativos para el crecimiento de cada distrito. Lo interesante de esta aproximación es que la manera en que son agregados los nodos a cada distrito (el más cercano a los centros) provoca que los distritos generados sean compactos.

Utilizando una aproximación similar [7] modela el problema como un grafo $G = (V, A)$ dirigido con pesos asociados a los arcos. En este trabajo es donde por primera vez se utiliza un grafo de contiguidad, en el cual cada nodo representa una unidad elemental de territorio y hay un arco entre cada par de nodos cuyos bloques compartan una porción de su frontera (este concepto es llamado también adyacencia fuerte [26]). Comenzando con k nodos de centros, el problema es encontrar k árboles asignando los nodos no asignados al centro que mejor mantenga la equidad de población entre distritos. En este trabajo se utilizan también búsquedas locales para mejorar el balance de población en los distritos. Esta aproximación, dada su construcción no necesariamente genera zonas compactas.

Heurística de Localización Asignación

Una segunda aproximación se aprovecha de la estructura del modelo de programación lineal entera propuesto en [28], separando la decisión de donde colocar los centros de cada distrito, con el de asignar bloques a estos. El funcionamiento de la heurística puede ser resumida en 4 pasos:

1. Comenzar con un conjunto de centros aleatorios.
2. Fase de Asignación: Resolver el problema de transporte, en el cual se asigna cada uno de los bloques a los centros respetando capacidades inferiores y superiores (restricciones de equidad).

3. Resolución de Splits: Para cada bloque que no respete la integralidad asignar a un distrito bajo alguna regla de decisión.
4. Fase de Localización: Para cada distrito formado encontrar el mejor centro resolviendo el problema de la 1-mediana.

La heurística repite los pasos 2,3 y 4 hasta que los centros convergen, es decir, no cambian en 2 iteraciones consecutivas. Para la resolución del paso 2 de la heurística se pueden utilizar algoritmos especializados en Flujo costo mínimo o algún otro algoritmo de programación lineal como SIMPLEX y sus variaciones [6].

El problema de Resolución de Splits ha sido resuelto de varias maneras. Por ejemplo, en [27] utilizan la regla de asignación *AssignMAX* en la cual se redondea cada variable de asignación, asignando ese bloque al distrito donde la variable tenga más valor. Otro enfoque es el de *AllocMinDist* en la cual se asigna el bloque al de menor distancia [31]. La gran ventaja de estos dos métodos es la rapidez computacional que se adquiera, a expensas muchas veces de violar las restricciones de equidad. Un tercer enfoque es resolver el problema de asignación y de resolución de Splits en un solo problema de optimización entera, que tiene la ventaja de conseguir soluciones factibles en cada iteración a expensas de tiempo computacional. En [29] se tiene una idea similar, salvo algunas diferencias. Se propone un problema lineal binario mixto, en donde se decide binariamente que bloques son los centros (n variables) y que fracción de la población es asignado a cada centro (n^2 variables). Primero, los centros son determinados solo una vez a través de Relajación lagrangeana utilizando el método del gradiente y se quedan fijos durante el resto de la resolución. Luego se resuelve el problema de transporte obteniendo zonas divididas en varios distritos (splits), los cuales enfrenta a través de resolver consecutivamente varios problemas de transporte con capacidad sin garantías de resolver todas las zonas divididas. Otra aproximación aparece en [23], en donde se utiliza para resolver el problema de asignación modelos de optimización de flujos en redes.

Busqueda Local

Los algoritmos heurísticos de búsqueda local tienen como insumo un problema de optimización cuya función objetivo f debe ser minimizada, y alguna solución s a este problema (en general una solución factible) no necesariamente óptima. Estas heurísticas utilizan el concepto de soluciones vecinas a la solución s , $N(s)$, el cual será explorado en búsqueda de mejores soluciones. Dependiendo de como sea formado y explorado $N(s)$ las heurísticas de búsqueda local obtienen distintos rendimientos [1]. Dependiendo de como se explore el conjunto de soluciones vecinas se puede caer en mínimos locales de mal desempeño, por lo que muchas implementaciones de estas heurísticas utilizan distintos puntos de partida para obtener mejores resultados [43]. A continuación se muestran ejemplos de estas heurísticas y aplicaciones al problema de diseño de territorios:

- Búsqueda Tabú: Esta heurística combina una búsqueda entre soluciones de mejor costo con la posibilidad de explorar vecinos con peor costo para no

caer en óptimos locales. El conjunto $N(s)$ es restringido en cada iteración para prevenir el volver a soluciones de recientemente visitadas y provocar *loops*. En [8] se muestra una búsqueda tabú para resolver el problema de distritación política.

- **Enfriamiento Simulado o *Simulated Annealing***: Esta heurística se basa en el proceso físico de templado de metales. Dada una solución s se selecciona una solución $s' \in N(s)$ de manera aleatoria. Si esta solución es mejor se acepta, en caso contrario, si la solución tiene peor costo, se acepta con cierta probabilidad. La probabilidad de aceptar peores soluciones es decreciente conforme avanza el algoritmo, como un proceso de enfriamiento en la analogía del templado de metales. En [5] y [15] implementan *simulated annealing* para resolver el problema de distritación de redes eléctricas y distritación policial respectivamente.
- **Algoritmos Genéticos o Evolutivos**: Esta heurística realiza una búsqueda utilizando conceptos del estudio de la evolución y la genética. Inicialmente se comienza con una “población” de n soluciones las cuales son mejoradas a través de búsquedas locales simples. Posterior a eso se “recombinan” estas soluciones para encontrar soluciones “hijas” las cuales son mejoradas a través de búsquedas locales simples. Luego se reduce la población nuevamente a la n mejores soluciones y se repite el procedimiento hasta que se cumpla algún criterio de convergencia. Aplicaciones de estas búsquedas al problema de diseño de territorios se pueden encontrar en [2] y [13].
- ***GRASP* (también conocido como *Old Bachelor Acceptance*)**: Esta heurística recorre de una solución s a una dentro de su vecindario $N(s)$, seleccionada aleatoriamente, la cual puede mejorar o empeorar el valor de la función objetivo dentro de un rango o umbral, el cual puede ir aumentado (si la solución empeora) o decreciendo (en caso contrario). Con esto se evita caer prematuramente en óptimos locales. En [43] se encuentra una aplicación de esta heurística en el problema de distritación política.

Heurísticas basadas en geometría

Un último enfoque trata de sacar provecho de la dimensión espacial del problema de diseño de territorios. Existen dos principales tipos de heurísticas basadas en geometría, las basadas en teselaciones de Voronoi y una propuesta por [32] que se basa en sucesivas búsquedas dicotómicas.

Las heurísticas basadas en teselaciones de Voronoi se dividen en dos etapas: La primera se localizan P centros que representarán a cada distrito en un grafo de contiguidad; En una segunda etapa a través de teselaciones Voronoi con las distancias de cada uno de los nodos. Estas distancias son ponderadas en las siguientes iteraciones por algún peso que dependa de la población de cada distrito entre otras cosas, para así mantener equidad entre distritos. Aplicaciones de estas heurísticas se pueden encontrar en [41] y [47], para problemas de distritación política y policial.

La estrategia propuesta en [32] es comenzar con el conjunto completo de bloques, realizar particiones dibujando una línea recta, y dividiendo en dos subconjuntos de bloques. La heurística consiste en realizar este procedimiento en forma iterada, generando una búsqueda en un árbol, en donde la raíz es el conjunto de todos los nodos (el problema original), mientras los nodos son cada uno de los subproblemas generados por las particiones. Luego realizando un proceso denominado *backtracking* encuentran soluciones que cumplen con equidad de cargas, contiguidad y compacidad.

Capítulo 3

Descripción del Modelo

3.1. Introducción

En este capítulo presentamos un modelo de optimización que determina los cuadrantes utilizados en el PCSP de Carabineros de Chile, para optimizar los recursos policiales. Primero se describirá un modelo anterior utilizado desarrollado en el trabajo de S. Bustamante [10], para luego mostrar las extensiones a este modelo. Posterior a eso, se presentan consideraciones adicionales que no son tratadas de mayor forma en este trabajo. El modelo propuesto en esta tesis resulta ser no lineal, por lo que al finalizar el capítulo se muestra una linealización por partes de la componente no lineal.

El modelo propuesto en [10] consistió en una aplicación del modelo de p -medianas con restricciones de equidad en la demanda de recursos policiales con el objetivo de minimizar la distancia total de los bloques a su centro respectivo, esto es, minimizando su momento de inercia. Por lo tanto, si una comuna tiene 9 cuadrantes, el modelo se representó y resolvió como una 9-mediana con restricciones de equidad.

Para esto se toma un conjunto I de bloques o manzanas que deben ser asignado a cada cuadrante, y un conjunto $J \subseteq I$ de posibles centros ficticios. Con esto se definen las siguientes variables:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si el bloque } j \text{ es un centro ,} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el bloque } i \text{ es asignado al centro } j, \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Además se tienen como parámetros de este problema la distancia entre cada bloque (d_{ij}), la cantidad de cuadrantes que requiere cada comuna (P), las demandas por recursos policiales de cada bloque (dem_i), y las capacidades inferiores y superiores (L y U). Estas capacidades son calculadas como una

desviación de un porcentaje α con respecto a la demanda promedio, es decir $L = (1 - \alpha) \frac{\sum_i dem_i}{P}$ y $U = (1 + \alpha) \frac{\sum_i dem_i}{P}$. Con esto se busca que la cantidad demandada por recursos policiales en cada cuadrante sea balanceada.

La demanda por recursos policiales se pueden calcular bajo la metodología establecida por Carabineros de Chile según lo indica su Manual del Plan Cuadrante [18]. La demanda considerada en este modelo es el de tipo reacción, que se calcula básicamente con datos estadísticos.

El problema binario que minimiza la distancia de los bloques a sus centros, manteniendo la equidad entre cuadrantes se representa a continuación:

$$(3.1) \quad \text{mín} \sum_{i \in I, j \in J} d_{ij} y_{ij}$$

$$(3.2) \quad \sum_{j \in J} x_j = P$$

$$(3.3) \quad x_j \geq y_{ij} \quad \forall i \in I, j \in J$$

$$(3.4) \quad \sum_{j \in J} y_{ij} = 1 \quad \forall i \in I$$

$$(3.5) \quad x_j L \leq \sum_{i \in I} y_{ij} dem_i \quad \forall j \in J$$

$$(3.6) \quad x_j U \geq \sum_{i \in I} y_{ij} dem_i \quad \forall j \in J$$

$$(3.7) \quad x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J$$

$$(3.8) \quad y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, j \in J$$

La expresión (3.1) minimiza la distancia total de cada bloque a su respectivo centro.¹ La idea de esta función objetivo es obtener figuras lo más compactas posibles en el sentido de dispersión.

En la ecuación (3.2) se busca que el número de centros ficticios instalados sea igual al número de cuadrantes, la desigualdad (3.3) prohíbe la asignación de un bloque a un centro no instalado. La ecuación (3.4) obliga a todos los bloques a ser asignados a algún centro. Estas ecuaciones, junto a las de naturaleza de las variables x e y ((3.7) y (3.8) respectivamente), son las restricciones del problema de las P-mediana.

Las desigualdades (3.5) y (3.6) restringen que la carga de cada cuadrante este dentro de las capacidades inferiores y superiores establecidas.

Este modelo, a pesar de ser una muy buena aproximación, tiene dos problemas:

1. Puede generar zonas no conexas. Esto es debido a la restricciones de capacidad, para poder ser satisfechas, anexan a un cuadrante algún bloque que no está dentro de su frontera. Este hecho no es un problema inherente

¹Esto es equivalente a minimizar la distancia promedio que recorre la demanda en cada cuadrante.

al modelo de P-medianas, sino que a la incorporación de las desigualdades (3.5) y (3.6).

Por ejemplo en la Figura 3.1 se representa una comuna ficticia, cuadrada, dividida en 9 cuadrantes representados en cada color. Los bloques encerrados en color rojo son bloques que están fuera de la frontera cada cuadrante.

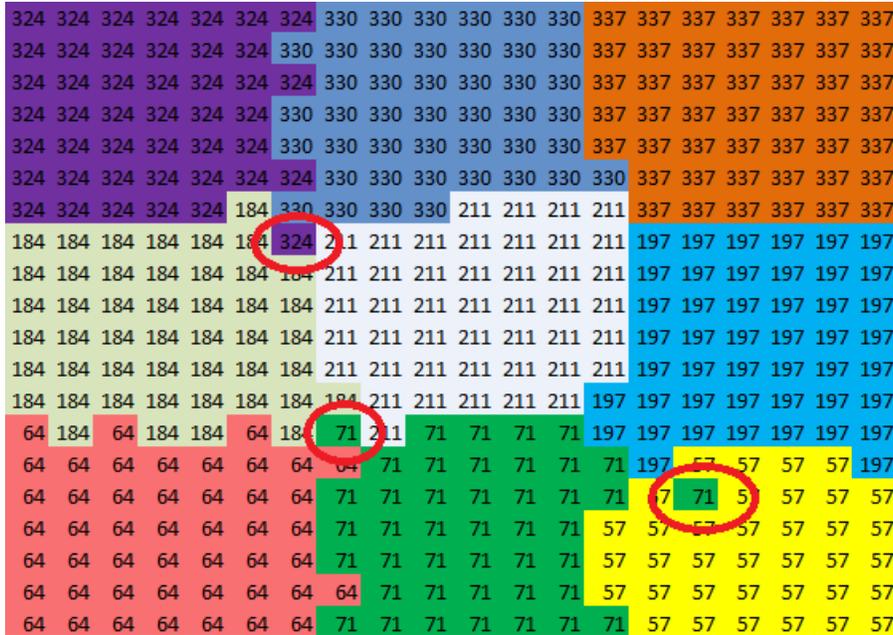


Figura 3.1: Ejemplo de forma no deseable solución del modelo de P-medianas con equidad en una instancia ficticia . Fuente: Elaboración Propia.

2. No considera aspectos relevantes del PCSP, como por ejemplo, la demanda del tipo prevención.

A continuación se presenta la extensión del modelo de [10] el cual es el centro de este trabajo.

3.2. Modelo General

El modelo presentado en este trabajo aborda los siguientes aspectos:

1. Considera el efecto de la demanda tipo prevención. Esta demanda está compuesta por el máximo entre un factor de delincuencia, un factor de kilómetros lineales y un factor de nivel de delito.

Explícitamente, definiendo la demanda por nivel prevención del cuadrante j como γ_j :

$$\gamma_j = \max\{f_{pob}(\text{Población})_j, f_{km}(\text{Cant. Kilometros Lineales})_j, f_{nd}(\text{Nivel de delito})_j\}$$

Donde f_{pob} , f_{km} , f_{nd} son factores de normalización definida según la metodología de Carabineros de Chile [18].

2. Considera aspectos de geometría, y para esto se penaliza la cantidad de bloques distintos vecinos a cada bloque. Con esto se busca dos cosas:
 - a) Compacidad: Que las formas de los cuadrantes sean lo más compactas posibles, es decir, se deseable formas convexas no tan alargadas.
 - b) Contigüidad: Que las formas de los cuadrantes sean conexas, es decir, evitando formas similares a las presentadas en la Figura 3.1.
3. Considera además, a pesar de que no son estudiadas a fondo, restricciones geográficas que prohíben que cada cuadrante este dividido por vías estructurales y restricciones locales que hagan que los sectores comerciales y/o hotspots de delincuencia queden separados por los cuadrantes.

Para modelar las consideraciones 2 y 3, definimos adyacencia fuerte se entiende que ocurre cuando el nodo vecino comparte una cara (o una sección de ella). Se define $N(i)$ como el conjunto de nodos vecinos con adyacencia fuerte del nodo i . En la figura 3.2 en verde se ve la Plaza de Armas de Santiago de Chile. Las manzanas B,D,E,F y H son manzanas adyacentes a la Plaza de Armas, sin embargo, las manzanas A,C,G e I no son adyacentes bajo el concepto de adyacencia fuerte, dado que no comparten algún segmento de cara. Cabe mencionar que existen otras definiciones de vecindad que pueden ser utilizadas dependiendo de las consideraciones locales.



Figura 3.2: Ejemplo de adyacencia fuerte. Los bloques A,C,G e I no son adyacentes bajo este concepto. Fuente: Mapcity

Además este modelo utiliza información adicional. Los kilómetros lineales (km_i), el nivel de población (pob_i) y el nivel de delito (nd_i) desagregado para cada manzana. Los dos primeros son conseguidos de los distintos censos demográficos

e información cartográfica, y el tercero puede ser calculado a través de la metodología que tiene Carabineros de Chile especificada en su Manual del Plan Cuadrante [18].

- La distancia promedio cada manzana a su centro. Esta parte de la función objetivo conduce a obtener formas de cuadrantes más compactos en cuanto a dispersión.
- La suma de todos los vecinos que son diferentes (es decir que pertenecen a cuadrantes distintos) elevado a un factor $\beta > 1$, para de esta forma penalizar de mayor manera los nodos que tengan más nodos vecinos diferentes.
- Minimizar la demanda total por prevención.

$$(3.9) \quad \text{mín} \quad \theta_1 \sum_{(i,j) \in A} d_{ij} y_{ij} + \theta_2 \sum_{i \in I} (\sum_{k \in N(i)} z_{ik})^\beta + \theta_3 \sum_{j \in J} \gamma_j$$

sujeto a Ecuaciones (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), (3.7), (3.8)

$$(3.10) \quad \gamma_j \geq f_{pob} \sum_{i \in I} y_{ij} pob_i \quad \forall j \in J$$

$$(3.11) \quad \gamma_j \geq f_{km} \sum_{i \in I} y_{ij} km_i \quad \forall j \in J$$

$$(3.12) \quad \gamma_j \geq f_{nd} \sum_{i \in I} y_{ij} nd_i \quad \forall j \in J$$

$$(3.13) \quad z_{ik} \geq y_{ij} - y_{kj} \quad \forall i \in I, \forall k \in N(i), \forall j \in J$$

$$(3.14) \quad z_{ik} \geq -y_{ij} + y_{kj} \quad \forall i \in I, \forall k \in N(i), \forall j \in J$$

$$(3.15) \quad z_{ik} \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall k \in N(i)$$

$$(3.16) \quad \gamma_j \geq 0 \quad \forall j \in J$$

Las variables γ_j indican la demanda de tipo prevención en el subsector de centro j , y las variables z_{ik} indica si los nodos vecinos i y k pertenecen a distintos cuadrantes. Las desigualdades (3.10), (3.11) y (3.12) caracterizan la demanda tipo prevención, que es el máximo de las tres componentes mencionadas anteriormente. Las ecuaciones (3.13), (3.14) y (3.15) modelan el valor absoluto de la diferencia de asignación entre dos nodos vecinos. La idea del modelo es contar cuantos nodos vecinos son distintos para cada bloque y penalizar la suma de estos. Las ecuaciones (3.16) y (3.15) indican la naturaleza de cada conjunto de variables. La ecuación (3.9) muestra la función objetivo que penaliza los tres factores discutidos anteriormente. Los coeficientes $\theta_i, i = 1, 2, 3$ representa los distintos pesos de la función objetivo.

3.3. Otras Consideraciones

Para completar los requerimientos se pueden agregar otros dos conjuntos de restricciones. El primero de ellos, es que un cuadrante no debe dividir, o debe

encapsular, a sectores con similar actividad productiva o que sean una población con alto nivel delictivo. Para esto se pueden definir los siguientes elementos:

- H : Conjunto de areas productivas y hotspots de delincuencia. Notar que este es un conjunto de subconjuntos de I ($H \subseteq 2^I$)
- $B(h) \subseteq I$: Conjuntos de manzanas perteneciente a cada uno de estos sectores, $h \in H$

Con esto se pueden dar dos alternativas: o se restringe a soluciones que obliguen que los bloques del conjunto h pertenezcan al mismo cuadrante como se representa en la ecuación (3.17):

$$(3.17) \quad y_{ij} - y_{kj} = 0 \quad \forall i, k \in h, \forall h \in H, \forall j \in J$$

o se penaliza por cada vez que esto no se cumple, como en la expresión (3.18):

$$(3.18) \quad r_{ik} \geq |y_{ij} - y_{kj}| \quad \forall i, k \in h, \forall h \in H, \forall j \in J$$

y agregando un término en la función objetivo del tipo: $\sum_{h \in H} \sum_{i, k \in h} r_{ik}$.

La segunda consideración trata de aspectos viales que dicen que un cuadrante no puede ser dividido por un rio, una vía principal o enlace vial, para la eficiencia en su patrullaje. Esta puede ser considerada con la restricción (3.19), la cual prohíbe que dos bloques i y k que estan separados por algunos de los elementos anteriormente mencionados, sean asignados al mismo cuadrante:

$$(3.19) \quad y_{ij} + y_{kj} \leq 1 \quad \forall i \in A_1(e), \forall k \in A_2(e), \forall e \in E, \forall j \in J$$

En donde se definió:

- E : Conjunto de vías estructurales, principales y enlaces viales.
- $A_1(e)$: Conjuntos de bloques ubicados al NorEste de la vía $e \in E$
- $A_2(e)$: Conjuntos de bloques ubicados al SurOeste de la vía $e \in E$

Otra manera de modelar este aspecto, que resulta ser más eficiente en termino de memoria, es no definir las variables y_{ij} en las que i y j esten separados por alguno de los elementos en cuestión, es decir que $i \in A_1(e)$ y $j \in A_2(e)$ o viceversa.

El modelo presentado en este capítulo es un modelo no lineal. A continuación se discutirá una versión lineal de este modelo y los métodos de resolución de este se discutirán en el siguiente capitulo.

3.4. Modelo Lineal por partes

Para poder utilizar todas las herramientas y algoritmos provenientes de la teoría de la programación lineal entera, y entera mixta, es necesario linealizar este modelo, específicamente la componente de minimización de la frontera de cada distrito. Para esta componente no lineal de la función objetivo dada por $(\sum_{k \in N(i)} z_{ik})^\beta$ se aprovecha la convexidad de su forma para $\beta > 1$. Para eso se agrega la variable u_{im} que indica si el nodo i tiene entre $m - 1$ y m vecinos distintos. Con esto se agregan las siguientes restricciones:

$$(3.20) \quad u_{im} \leq 1 \quad \forall i \in I, \forall m \in \{1, \dots, |N(i)|\}$$

$$(3.21) \quad \sum_{m=1}^{|N(i)|} u_{im} \geq \sum_{k \in N(i)} z_{ik} \quad \forall i \in I$$

Así la función objetivo queda:

$$(3.22) \quad \min \quad \theta_1 \sum_{(i,j) \in A} d_{ij} y_{ij} + \theta_2 \sum_{i \in I} \sum_{m=1}^{|N(i)|} \kappa_m u_{im} + \theta_3 \sum_{j \in J} \gamma_j$$

Donde los κ_m son calculados de acuerdo al parámetro β como sigue:

$$(3.23) \quad \kappa_1 = 1$$

$$(3.24) \quad \kappa_m = m^\beta - (m-1)^\beta \quad m > 2$$

Como ejemplo, en la figura 3.3, se muestra como la función $f(z) = z^2$ es aproximada por trazos lineales en el intervalo $[0, 6]$. Notar que como las variables z_{ik} toman valores en $\{0, 1\}$, las variables u_{im} también toman valores en $\{0, 1\}$. Luego, si en el óptimo para algún i se tiene que $\sum_{k \in N(i)} z_{ik}^* = 3$, las variables $u_{i1}^* = u_{i2}^* = u_{i3}^* = 1$ y $u_{im}^* = 0$ para todo $m > 3$. La penalización por la frontera asociada al bloque i será de $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = 1 + 3 + 5 = 9 = (\sum_{k \in N(i)} z_{ik}^*)^2$.

Lo importante de esta aproximación es que la función z^β es solo evaluada en puntos enteros, por lo que, dada la construcción de esta aproximación, el error es cero.

Dado esto, definiremos como *PDT* el modelo de optimización lineal entero mixto que resuelve el problema de diseño e cuadrantes y que será resuelto en este trabajo de tesis es el siguiente:

$$(PDT) := \min C = \theta_1 \sum_{(i,j) \in \bar{A}} d_{ij} y_{ij} + \theta_2 \sum_{i \in I} \sum_{m=1}^{|N(i)|} \kappa_m u_{im} + \theta_3 \sum_{j \in J} \gamma_j$$

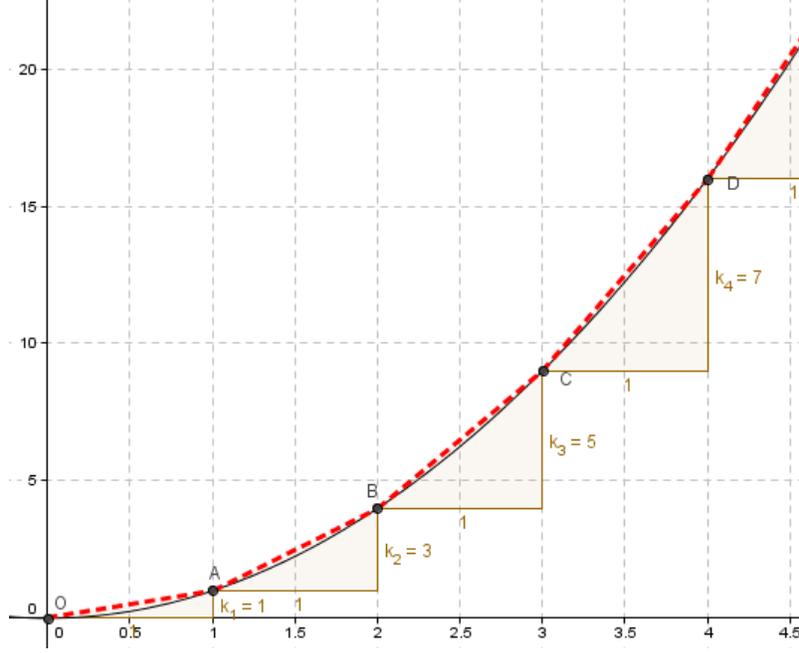


Figura 3.3: Ejemplo de aproximación cuando $\beta = 2$. Fuente: Elaboración Propia.

$$\begin{aligned}
 \sum_{j \in J} x_j &= P \\
 x_j &\geq y_{ij} && \forall i \in I, j \in J \\
 \sum_{j \in \bar{J}} y_{ij} &= 1 && \forall i \in I \\
 x_j L &\leq \sum_{i \in I} y_{ij} dem_i && \forall j \in J \\
 x_j U &\geq \sum_{i \in I} y_{ij} dem_i && \forall j \in J \\
 \gamma_j &\geq f_{pob} \sum_{i \in I} y_{ij} pob_i && \forall j \in J \\
 \gamma_j &\geq f_{km} \sum_{i \in I} y_{ij} km_i && \forall j \in J \\
 \gamma_j &\geq f_{nd} \sum_{i \in I} y_{ij} nd_i && \forall j \in J \\
 z_{ik} &\geq y_{ij} - y_{kj} && \forall i \in I, \forall k \in N(i), \forall j \in J \\
 z_{ik} &\geq -y_{ij} + y_{kj} && \forall i \in I, \forall k \in N(i), \forall j \in J \\
 u_{im} &\leq a_m - a_{m-1} && \forall i \in I, \forall m \in \{2, \dots, |N(i)|\} \\
 \sum_{m=1}^{|N(i)|} u_{im} &\geq \sum_{k \in N(i)} z_{ik} && \forall i \in I \\
 x_j &\in \{0, 1\} \\
 y_{ij} &\in \{0, 1\} && \forall i \in I, j \in J \\
 z_{ik} &\geq 0 && \forall i \in I, \forall k \in N(i) \\
 \gamma_j &\geq 0 && \forall j \in J \\
 u_{im} &\geq 0 && i \in I, m \in \{1, \dots, |N(i)|\}
 \end{aligned}$$

Este modelo puede ser resuelto con los métodos tradicionales de optimización lineal y entera para instancias pequeñas, con algoritmos implementados en paquetes de optimización como CPLEX. Sin embargo, para instancias de tamaños realistas (sobre los 400 bloques), los métodos tradicionales no son suficientes para la resolución a optimalidad, inclusive para encontrar soluciones factibles.

En el próximo capítulo se discuten diversas estrategias para la resolución de este problema para instancias de tamaño real.

Capítulo 4

Métodos de Resolución

4.1. Introducción

El problema presentado en el capítulo anterior es difícil de resolver inclusive para instancias pequeñas, por ello en este capítulo se discuten técnicas para resolverlo de manera eficiente. Los métodos de resolución expuestos en este capítulo tratan de tomar ventaja en el hecho de que solo son una pequeña cantidad de variables toman valores distintos de cero. Esto surge del motivo que solo P variables $x_j, j \in J$ toman el valor 1, y por ende, existen $(|I| - P)|I|$ variables y_{ij} que valdrían cero si se toma el conjunto de candidatos a centros como el conjunto de todos los bloques disponibles ($I = J$).

Es basado en este hecho que este capítulo trata de elegir este conjunto J de una manera inteligente, para así resolver este problema para instancias grandes. Es necesario decir en este punto, que consideramos instancias grandes como instancias de tamaño, por ejemplo, la Comuna de Ñuñoa en Santiago de Chile. Esta instancia posee 1266 bloques, y tras una clusterización tal como se hizo en [10] se pudo disminuir a 408, número que sigue siendo difícil de resolver en un computador convencional (Intel Core i5, 3 GB de memoria ram, con AMPL-CPLEX 12). Esta dificultad radica en la cantidad de memoria requerida para elaborar los árboles necesarios para los métodos de resolución de programación entera, y por otra parte los tiempos de convergencia pueden ser demasiado lentos, principalmente por las simetrías inherentes a este tipo de formulaciones.

En este capítulo se discute una manera de disminuir el número de variables, para posteriormente discutir heurísticas tipo Localización y Asignación (*Location-Allocation*) para la resolución de este problema. Por otra parte, se presenta un conjunto de restricciones adicionales que se utilizan para la resolución de estos problemas cuando presentan muchas simetrías y la resolución del problema entero es muy lenta. También se muestra una manera de alternativa de resolver el problema de asignación a través de la resolución de la relajación lineal del problema y posterior aproximación de variables fraccionarias.

4.2. Disminución de las variables relevantes

Para cualquier instancia de este problema, el número de variables puede ser elevado en comparación con el número de variables que toman valores distinto de cero. Si se considera el conjunto de candidatos a centros posibles J igual al número de bloques I , muchas de las variables para el óptimo se hacen cero. Solo considerando las variables binarias y_{ij} y x_j se tienen en total $|J| + |I||J|$ pero el número de variables en total que toman el valor 1 en estas dos variables es de $P + |I|$. Este análisis se torna más relevante cuando la memoria del computador es el factor limitante, y el aporte en memoria de las variables z_{ik} y γ_j es importante.

Para disminuir el número de variables, y no considerar variables que no serán parte de la solución óptima, se discuten los siguientes criterios para resolver este problema disminuyendo su tamaño:

4.2.1. Radio de Alcance

La primera regla que se utilizará para disminuir el número de variables nace del hecho intuitivo de que bloques no serán asignados a centros muy lejanos.

Para cada candidato a centro $j \in J$ se definirán las variables y_{ij} que estén a una distancia menor que R . Esto es equivalente a definir las variables y_{ij} en el conjunto $\{(i, j) \in I \times J : d_{ij} \leq R\}$. En este trabajo definiremos a $R = \delta \cdot \text{MaxDist}$ donde $\delta \in [0, 1]$ es un parámetro dado, y el diámetro del grafo $\text{MaxDist} = \max_{i \in I, j \in I} d_{ij}$. Notar que para δ cercano a cero el problema se torna infactible debido a que no habría forma de elegir P centros y cubrir todos los bloques. Por otra parte, si se toma $\delta = 1$ se recupera el problema original.

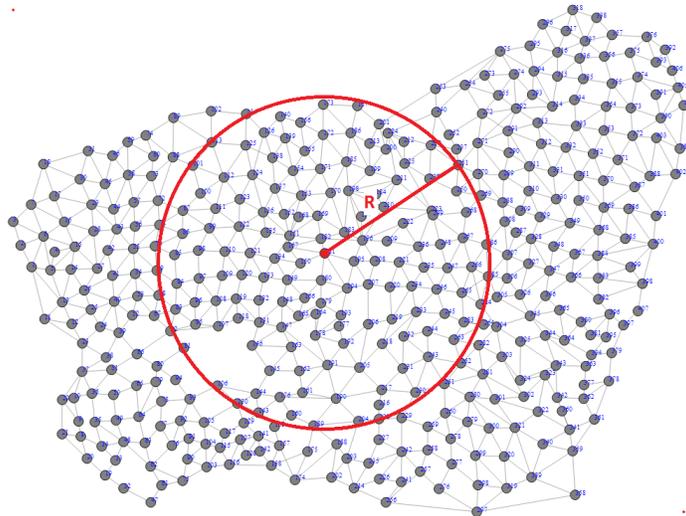


Figura 4.1: Radio de alcance dado un centro. Fuente: Elaboración Propia.

Definamos como $C(\delta)$ el valor de la función objetivo del problema en función de δ . Dada la solución óptima del problema dado un valor de δ cumple que para

todo (i, j) tal que $y_{ij} = 1$ se tiene que $d_{ij} < R$ para el problema de la P-mediana, en la que la función objetivo es minimizar el momento de inercia de los cuadrantes se tiene que $C(\delta) = C(1) = C^*$. Sin embargo, para el problema de este trabajo no es cierta esta afirmación. Eso se debe por la componente de minimización de la demanda de tipo prevención. En el Apéndice A se describe una instancia que muestra un contraejemplo a la afirmación anterior para el problema multiobjetivo.

Esta regla por otra parte favorece formar cuadrantes que sean compactos en cuanto a dispersión, dado que tienden a estar circunscritos por este radio de alcance en torno al centro.

4.2.2. Candidatos a Centros

En un principio el conjunto de candidatos a centros es exactamente el de bloques disponibles, es decir $I = J$. Es más, la importancia del conjunto J radica en que su tamaño afecta directamente al valor de la función objetivo en su componente $\theta_1 \sum_{(i,j) \in A} d_{ij} y_{ij}$. Es más, dada la estructura del problema teniendo P candidatos a centro, i.e. $|J| = P$, se puede obtener una solución factible.

Existen varias opciones que se pueden ir descartando en un principio, por ejemplo, bloques que esten en sectores extremos del mapa¹. Otra manera de disminuir el tamaño del conjunto J es tomando un subconjunto de bloques en el que cada elemento no este a menos de una cierta distancia mínima.

Tomando este hecho en cuenta se propone una heurística para la resolución del problema de diseño de territorios para el PCSP.

4.3. Heurística Localización y Asignación

En esta sección describimos una heurística de tipo Localización y Asignación la cuál se basa en el hecho de que el problema descrito en el capítulo anterior se puede descomponer en dos subproblemas independientes: uno de **localización**, en el cual se decide que centros van a ser utilizados para cada cuadrante; y otro de **asignación**, en el cual dado los centros establecidos, se decide cual bloque asignar a cada uno de estos. Ejemplos de la implementación de esta heurística se pueden encontrar en [27], [31], [29].

4.3.1. Problema de Localización

Dada una asignación de bloques a cuadrantes el conjunto I queda particionado en P subconjuntos $\{I_p\}_{p=1}^P$, en donde $\bigcup_{p=1}^P I_p = I$ y $I_p \cap I_q = \emptyset$ para todo par $p, q \in \{1 \dots P\}$ con $p \neq q$. Dado esto el problema de localización

¹Entendemos como sectores extremos las ‘‘orillas’’ del mapa’, es decir bloques que pertenezcan al vecindario de bloques de otras comunas

se reduce a encontrar el mejor centro para cada uno de estos P subconjuntos, lo que es equivalente a resolver P problemas del tipo 1-mediana:

$$\begin{aligned}
(4.1) \quad & (\text{P-Loc}(I_p)) \quad \text{mín} \sum_{j \in I_p} \sum_{i \in I_p} d_{ij} x_j \\
(4.2) \quad & \sum_{j \in I_p} x_j = 1 \\
(4.3) \quad & x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in I_p
\end{aligned}$$

En donde x_j con $j \in I_p, p \in \{1, \dots, P\}$ vale 1 si el se asigna como centro el bloque j . La expresión (4.1) representa la minimización del momento de inercia y la ecuación (4.2) indica que solo un centro es asignado.

4.3.2. Problema de asignación

Dado un conjunto de centros \bar{J} de tamaño P el problema de asignación resuelve la mejor asignación del conjunto de bloques I a cada uno de los centros. El problema queda descrito a continuación:

$$\begin{aligned}
(4.4) \quad & (\text{P-As}(\bar{J})) \quad \text{mín} C = \theta_1 \sum_{(i,j) \in \bar{A}} d_{ij} y_{ij} + \theta_2 \sum_{i \in I} \sum_{m=1}^{|N(i)|} \kappa_m u_{im} + \theta_3 \sum_{j \in \bar{J}} \gamma_j \\
(4.5) \quad & \sum_{j \in \bar{J}} y_{ij} = 1 \quad \forall i \in I \\
(4.6) \quad & L \leq \sum_{i \in I} y_{ij} dem_i \quad \forall j \in \bar{J} \\
(4.7) \quad & U \geq \sum_{i \in I} y_{ij} dem_i \quad \forall j \in \bar{J} \\
(4.8) \quad & \gamma_j \geq f_{pob} \sum_{i \in I} y_{ij} pob_i \quad \forall j \in \bar{J} \\
(4.9) \quad & \gamma_j \geq f_{km} \sum_{i \in I} y_{ij} km_i \quad \forall j \in \bar{J} \\
(4.10) \quad & \gamma_j \geq f_{nd} \sum_{i \in I} y_{ij} nd_i \quad \forall j \in \bar{J} \\
(4.11) \quad & z_{ik} \geq y_{ij} - y_{kj} \quad \forall i \in I, \forall k \in N(i), \forall j \in \bar{J} \\
(4.12) \quad & z_{ik} \geq -y_{ij} + y_{kj} \quad \forall i \in I, \forall k \in N(i), \forall j \in \bar{J} \\
(4.13) \quad & u_{im} \leq a_m - a_{m-1} \quad \forall i \in I, \forall m \in \{2, \dots, |N(i)|\} \\
(4.14) \quad & \sum_{m=1}^{|N(i)|} u_{im} \geq \sum_{k \in N(i)} z_{ik} \quad \forall i \in I \\
(4.15) \quad & z_{ik} \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall k \in N(i) \\
(4.16) \quad & \gamma_j \geq 0 \quad \forall j \in \bar{J} \\
(4.17) \quad & y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, j \in \bar{J}
\end{aligned}$$

En donde las variables y ecuaciones son análogas a las descritas en la sección 3.2 y 3.4. Este problema posee bastante menos variables y restricciones que el problema original, sin embargo su resolución presenta dificultades debido a que pueden llegar a existir muchas soluciones con costo similar, por ejemplo haciendo intercambio de los valores de las variables z_{ik} e y_{ij} .

Para resolver este problema se proponen dos métodos: resolver el problema binario de asignación con las técnicas tradicionales de optimización; o resolver la relajación lineal y formar soluciones a partir de la obtenida como solución de esta relajación.

Resolución del problema de asignación a optimalidad

Una vía para resolver el problema de asignación es el resolver mediante las herramientas y algoritmos clásicos de optimización, es decir, SIMPLEX en cualquiera de sus versiones más algoritmos de Ramificación y acotamiento (*Branch & Bound*). El principal problema de realizar esto de manera iterativa, es que en cada iteración del problema de asignación existen muchas simetrías que hacen que la resolución del MIP se haga muy pesada. Las principales simetrías se presentan por la presencia de las variables de asignación (y_{ij}) y las que contabilizan las frontera de cada cuadrante (z_{ik}), provocando un árbol del algoritmo Branch and Bound con muchas factibles con costos similares, haciendo la búsqueda de la solución optimalidad lenta. Los árboles con estas características nos referiremos que son árboles anchos.

Para hacer estas iteraciones más livianas en términos computacionales se proponen un conjunto de restricciones que rompen esta simetría en el problema de asignación. Estas restricciones están basadas en el concepto de restricciones jerárquicas [24], en el cual, dadas un conjunto de funciones $F_i(x, y, \gamma, z, u)$, se imponen restricciones del tipo:

$$(4.18) \quad F_1 \geq F_2 \geq \dots \geq F_P$$

En donde asignaremos funciones de jerarquización para cada centro asignado en el problema de localización. En este proceso se proponen cuatro funciones las cuales son descritas a continuación:

- **Tipo 1:** $F_j^1 = \gamma_j$
- **Tipo 2:** $F_j^2 = \sum_{i \in I: (i,j) \in A} dem_i y_{ij}$
- **Tipo 3:** $F_j^3 = \gamma_j + \sum_{i \in I: (i,j) \in A} dem_i y_{ij}$
- **Tipo 4:** $F_j^4 = \sum_{i \in I: (i,j) \in A} \sum_m (u_{im} \kappa_m - \frac{1}{|i \in I: (i,j) \in A|} (1 - y_{ij}) \kappa_m)$

Para la jerarquización se propone el siguiente criterio. Se le asigna menor valor de la función F_j^k , $k = 1, \dots, 4$ siempre al cuadrante que esté ubicado en el centro con respecto a los otros centros. Es decir, se calcula el centro geométrico de la comuna, y se van asignando según la distancia de cada centro al centro de la comuna, en caso de empate se asigna lexicográficamente.

Algoritmo 1 ORDENAR_CENTROS

Hacer $\bar{J} = J$ y considerar un arreglo ordenado $\bar{j} = (\bar{j}_1, \dots, \bar{j}_P)$
for $i = 1, \dots, P$ **do**
 Calcular $\bar{X} = \frac{\sum_{j \in \bar{J}} X_j}{P}$ y $\bar{Y} = \frac{\sum_{j \in \bar{J}} Y_j}{P}$, es decir el centro de gravedad de los P centros.
 Para cada $j \in \bar{J}$ calcular $\|(X_j, Y_j) - (\bar{X}, \bar{Y})\|$, es decir la distancia de cada centro al centro de gravedad.
 Elegir el centro $j^* \in \bar{J}$ de menor distancia al centro de gravedad. En caso de empate asignar lexicográficamente.
 Hacer $\bar{J} = \bar{J} - \{j^*\}$ y $\bar{j}_i = j^*$
end for
return \bar{j}

Por otra parte se utilizan restricciones adicionales como cortes para este problema que tienen que ver con la calidad de la solución que se quiere. Por ejemplo los cortes establecidos en (4.19) y (4.20) imponen contiguidad de los bloques y reducen el tamaño del conjunto de soluciones factibles, mejorando los tiempos de resolución.

$$(4.19) \quad \sum_{k \in N(i)} z_{ik} \leq |N(i)| - 1 \quad \forall i \in I$$

$$(4.20) \quad u_{i|N(i)} = 0 \quad \forall i \in I$$

Los cortes mencionados anteriormente imponen que cada bloque debe ser vecino deal menos a un bloque asignado al mismo centro.

La ventaja de resolver bajo este método es que en cada iteración se consiguen soluciones factibles para el problema original a expensas de iteraciones costosas en términos computacionales. En adelante la implementación de la heurística de Localización y Asignación con la metodología de resolver el problema de Asignación con las técnicas de optimización entera será referida como implementación AllocMIP.

Resolución de la relajación Lineal

La resolución de la relajación lineal de este problema es liviana en términos computacionales. Dado esto, una manera de resolver el problema de asignación es, primero resolver su relajación lineal, es decir, cambiar la restricción $y_{ij} \in \{0, 1\}$ por $0 \leq y_{ij} \leq 1$, y las variables que tomen un valor fraccionario aproximarlas a 0 o 1 según alguna regla.

Este método tiene ciertas desventajas como por ejemplo que en cada iteración no produce necesariamente soluciones factibles violando, por ejemplo, restricciones de equidad. Por otra parte, según la regla de asignación que se escoja, los cuadrantes resultantes podrían resultar no contiguos, y con figuras menos compactas de lo deseable. Por este motivo, la regla de asignación para

este problema escogida es la de *AllocMinDist* que para cada variable con valor fraccionario es asignada al centro geográficamente más cercano. Con esto se favorece a las medidas de compacidad, en desmedro de no favorecer otros criterios, y violar las restricciones de equidad.

La implementación de *AllocMinDist* se realiza de la siguiente manera:

Algoritmo 2 ALLOCMINDIST

- 1: Resolver la relajación lineal de P-As(\bar{J}) con $\alpha = 0$.
 - 2: Definir el conjunto SPLIT := $\{i \in I \mid 0 < y_{ij} < 1 \forall i \in \bar{J}\}$
 - 3: Asignar para todo $i \in$ SPLIT el valor de $y_{ij^*} = 1$ para $j^* \in \bar{J}$ el centro más cercano a i
 - 4: Para las variables y_{ij} con $i \in I \setminus$ SPLIT los valores obtenidos en 1.
 - 5: **return** Asignación de bloques I a centros \bar{J} .
-

Con esto se obtiene una asignación de bloques a centros dada por las variables y_{ij} que inducen una partición. Con esto es posible calcular el resto de las variables z, u, γ y el costo de la función objetivo correspondiente. Lo bueno de esta metodología es que es computacionalmente barata en términos de tiempos y de memoria. El problema de la variabilidad de la demanda entre cuadrantes con respecto al promedio, se puede afrontar guardando configuraciones de cuadrantes con baja desviación.

4.3.3. Heurística

La heurística de Localización - Asignación que se expone a continuación parte con un conjunto de centros, es decir \bar{J} que puede ser obtenido ya sea aleatoriamente, resolviendo el problema de las p-medianas o resolviendo el problema de las p-medianas con restricciones de equidad, los cuales son fáciles de resolver inclusive para instancias grandes. Posterior a eso, se resuelve el problema de Asignación tomando como input este conjunto \bar{J} . A continuación presentamos dos implementaciones de la heurística, cuya principal diferencia radica en como se resuelve el problema de asignación:

Algoritmo 3 LOCATION_ALLOCATION_HEURISTIC_MIP

- 1: Conseguir un conjunto de centros \bar{J} tal que $|\bar{J}| = P$, ya sea aleatoriamente o resolviendo el problema de las P-medianas o P-medianas con restricciones de equidad.
 - 2: **while** CRITERIO DE CONVERGENCIA **do**
 - 3: Resolver P-As(\bar{J}) a optimalidad, o dentro de un gap de integralidad determinado. Obtener C costo óptimo de esta solución;
 - 4: Para cada cuadrante obtenido en el paso anterior, encontrar el mejor centro geométrico.
 - 5: Evaluar CRITERIO DE CONVERGENCIA.
 - 6: **end while**
 - 7: **return** Asignación con mejor costo objetivo.
-

Algoritmo 4 LOCATION_ALLOCATION_HEURISTIC_MINDIST

- 1: Conseguir un conjunto de centros \bar{J} tal que $|\bar{J}| = P$, ya sea aleatoriamente o resolviendo el problema de las P-medianas o P-medianas con restricciones de equidad.
 - 2: **while** CRITERIO DE CONVERGENCIA **do**
 - 3: Resolver P-As(\bar{J}) con el Algoritmo 2 obtener C costo de la solución generada y la máxima desviación de la demanda de los cuadrantes;
 - 4: Para cada cuadrante obtenido en el paso anterior, encontrar el mejor centro geométrico.
 - 5: Evaluar CRITERIO DE CONVERGENCIA.
 - 6: **end while**
 - 7: **return** Asignación con mejor costo objetivo y la asignación con mejor equidad.
-

En cuanto a los criterios de convergencia se proponen los siguientes:

- Si en dos iteraciones consecutivas los centros no cambian
- Si pasada algún número fijo de iteraciones la función objetivo de cada asignación no mejora.

Por otra parte, la finalización de la heurística puede ser mejorada cuando se resuelve con la relajación lineal y posterior criterio *AllocMinDist*. Esto es, dado que la solución no es necesariamente factible, se puede utilizar el conjunto de centros finales y resolver el problema de asignación a optimalidad, obteniendo una solución factible para el problema original.

A continuación se discute una manera de resolver el problema de las P-medianas con restricciones de equidad basado en el método de generación de columnas.

4.3.4. Generación de Centros

Un input importante de la heurística descrita en la sección anterior es el de un conjunto de centros iniciales, los cuales pueden ser conseguidos aleatoriamente, o resolviendo un problema más fácil de resolver, por ejemplo, el de las p-medianas o las p-medianas con restricciones de equidad.

En esta sección se muestra un método basado en generación de columnas (generación de variables) para su resolución. Este método empieza con un conjunto de centros arbitrarios, y se van agregando centros que aporten a la función objetivo, es decir que el costo reducido sea negativo, hasta encontrar elementos del conjunto J que no aportan valor a la función objetivo.

El problema de la P mediana con restricciones de equidad es presentado a continuación, y es el mismo expuesto en [10], donde en rojo aparecen las variables duales asociadas a cada restricción:

$$(4.21) \quad (PM - EQ) \quad \min \sum_{i \in I, j \in J} d_{ij} y_{ij}$$

$$(4.22) \quad (\Theta) \quad \sum_{j \in J} x_j = P$$

$$(4.23) \quad (\Delta_{ij}) \quad x_j \geq y_{ij} \quad \forall i \in I, j \in J$$

$$(4.24) \quad (\Lambda_j) \quad \sum_{j \in J} y_{ij} = 1 \quad \forall i \in I$$

$$(4.25) \quad (\xi_j^L) \quad x_j L \leq \sum_{i \in I} y_{ij} dem_i \quad \forall j \in J$$

$$(4.26) \quad (\xi_j^U) \quad x_j U \geq \sum_{i \in I} y_{ij} dem_i \quad \forall j \in J$$

$$(4.27) \quad y_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in I, j \in J$$

$$(4.28) \quad x_j \geq 0 \quad \forall j \in J$$

A diferencia del método de generación de columna tradicional (ver [6]) en el que se van agregando de una variable la cual posea un costo reducido negativo al problema, en este método ingresa un conjunto de variables conformados por la variable x_j asociada a ese centro y todas las variables de asignación y_{ij} con $i \in I$ asociadas al centro en particular.

A continuación presentamos una proposición que será útil para el desarrollo de este método de generación de centros:

PROPOSICIÓN 1 *Sea $\bar{x} = (x_B, x_N)$ una solución de un problema de optimización de la forma:*

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Donde \bar{x}_B representa el vector de soluciones básicas y \bar{x}_N el vector de no básicas. Luego el beneficio marginal (costo reducido) de ingresar un conjunto \bar{N} de variables no básicas a la base es la suma del beneficio marginal (costos reducidos) de cada una de las variables.

DEMOSTRACIÓN 1 *El vector $\bar{x} = (\bar{x}_B, \bar{x}_N)$, al ser B una base factible para este problema cumple con:*

- $x_B = A_B^{-1} b \geq 0$
- $x_N = 0$

La definición de costo reducido de alguna dirección factible viene dada por $\bar{c} = c^T d$, donde d cumple con $Ad = 0$. Tomamos una dirección en que un conjunto $\bar{N} \subseteq N$ deja de ser cero. Esta dirección luego cumple con:

$$Ad = A(d_B, \mathbb{1}_{\bar{N}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad Ad_B + \sum_{i \in \bar{N}} A_i = 0 \quad \Rightarrow \quad d_B = -A_B^{-1} \left(\sum_{i \in \bar{N}} A_i \right)$$

Luego el costo de moverse en esa dirección es:

$$\begin{aligned} c^T d &= c^T(d_B, \mathbb{1}_{\bar{N}}) \\ &= c^T(-A_B^{-1}(\sum_{i \in \bar{N}} A_i), \mathbb{1}_{\bar{N}}) \\ &= \sum_{i \in \bar{N}} c_i - c_B^T A_B^{-1}(\sum_{i \in \bar{N}} A_i) \\ &= \sum_{i \in \bar{N}} c_i - c_B^T A_B^{-1} A_i \\ &= \sum_{i \in \bar{N}} \bar{c}_i \end{aligned}$$

Es decir, el beneficio del ingreso de un subconjunto de variables a la base es equivalente a la suma del beneficio marginal de cada una de las variables como si entraran cada una por separado ■

Luego utilizando la proposición, el costo reducido o beneficio marginal de la variable x_j viene dado por:

$$(4.29) \quad \bar{c}_{x_j} = 0 - \Theta - \sum_{i \in I} \Delta_{ij} + L\xi_j^L - U\xi_j^U$$

y el de la las variables y_{ij} está dado por:

$$(4.30) \quad \bar{c}_{y_{ij}} = d_{ij} + \Delta_{ij} - \Lambda_j + (\xi_j^U - \xi_j^L) dem_i$$

Luego el beneficio neto de agregar un nuevo centro y que $K \subseteq I$ estén asociados a este centro es:

$$(4.31) \quad \bar{c}_j = \sum_{k \in K} d_{kj} + \sum_{k \in K} \Delta_{kj} - \sum_{k \in K} \Lambda_k - \Theta - \sum_{i \in I} \Delta_{ij} + \xi_j^L \left(\sum_{k \in K} dem_k - L \right) + \xi_j^U \left(U - \sum_{k \in K} dem_k \right)$$

Un aspecto importante a considerar es que se está calculando costos reducidos utilizando valores de las variables duales óptimas para variables que no han sido

definidas en el problema. Específicamente no se puede obtener el valor óptimo de las variables duales Δ_{ij} y ξ_j para centros j que no han sido incluidos en la resolución del problema. Sin embargo, a continuación se muestra que estas no son relevantes para el análisis de los costos:

- $\sum_{i \in I} \Delta_{ij} = \sum_{k \in K} \Delta_{kj}$: Notar que para los centros no considerados se pueden dar dos casos. El primero de ellos es que la variable y_{ij} valga 1, es decir, que sea asignada al centro, en ese sentido se cumple que $i \in K$. Ahora para un bloque $i \notin K$ se tiene que $y_{ij} = 0$, luego la restricción asociada es inactiva, por ende, al considerar variables duales y primales óptimas, se tiene que la variable dual asociada $\Delta_{ij} = 0$.
- $\xi_j^L (\sum_{k \in K} dem_k - L) = 0$: Si $\sum_k dem_k - L$ entonces el término se anula. En caso contrario, si $\sum_k dem_k < L$ se tiene que al tomar variables duales óptimas, estas cumplen holgura complementaria, por lo que $\xi_j^L = 0$. Por lo tanto, si ξ_j es óptimo el término se anula. Por argumento similar se tiene que $\xi_j^U (U - \sum_{k \in K} dem_k) = 0$.

Con esto se tiene que el costo reducido de ingresar un nuevo centro es:

$$(4.32) \quad \bar{c}_j = \sum_{k \in K} d_{kj} - \sum_{k \in K} \Lambda_k - \Theta$$

Con esto podemos tener el problema generador de centros para el problema de las p medianas con capacidades superiores e inferiores:

$$(4.33) \quad (GC) \text{ mín } w = \sum_{k \in K, j \in I} d_{kj} y_{kj} - \sum_{k \in K} \Lambda_k \sum_{j \in I} y_{kj} - \Theta$$

s.a.

$$(4.34) \quad y_{kj} \leq \delta_j \quad \forall j \in I, k \in K$$

$$(4.35) \quad \sum_{j \in J} \delta_j = 1$$

$$(4.36) \quad \delta_j L \leq \sum_{k \in K} y_{kj} dem_k \quad \forall j \in I$$

$$(4.37) \quad \delta_j U \geq \sum_{k \in K} y_{kj} dem_k \quad \forall j \in I$$

$$(4.38) \quad \delta_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in I$$

$$(4.39) \quad y_{kj} \in \{0, 1\} \quad \forall j \in I, \forall k \in K$$

Luego el método generador de centros es el siguiente:

Algoritmo 5 GENERADOR DE CENTROS

- 1: Iniciar con un conjunto \bar{J} tal que $|\bar{J}| = P$ aleatoriamente.
 - 2: **while** $w < 0$ **do**
 - 3: Resolver relajación lineal de (PM-EQ) con el conjunto de centros \bar{J} .
 Obtener variables duales óptimas ;
 - 4: Resolver (GC) y agregar nuevo centro a \bar{J} .
 - 5: **end while**
 - 6: Resolver (PM-EQ) a optimalidad utilizando \bar{J} .
 - 7: **return** Conjunto de centros óptimos de (PM-EQ).
-

En el próximo capítulo se presentan los principales resultados de los métodos de resolución expuestos en este capítulo.

Capítulo 5

Resultados

En este capítulo se muestran los principales resultados obtenidos en el problema de diseño de cuadrantes. En una primera parte se muestran los resultados para el caso de la comuna de Ñuñoa de Santiago de Chile, cuyo tamaño es de 407 bloques los cuales deben ser particionados en $P = 9$ cuadrantes. Se muestra una comparación de los resultados obtenidos aplicando un modelo de P-medianas con capacidades y las diferencias con la resolución del modelo propuesto en el capítulo 3 con los distintos parámetros del modelo, poniendo énfasis en las diferencias de los distintos pesos de la función objetivo.

Posteriormente se muestra el desempeño de la heurística para instancias de distintos tamaños. Los resultados fueron obtenidos en un pc con un procesador Intel(R) Core(TM) i5 2.67 GHz con 3 MB de memoria ram. Todas las rutinas, códigos y/o heurísticas fueron implementadas en AMPL y resueltos con CPLEX en su versión 12.5.

5.1. Caso de Estudio: Comuna de Ñuñoa

5.1.1. Introducción

En esta sección se discute el rendimiento de los métodos de resolución del problema de diseño de cuadrantes para la comuna de Ñuñoa. Dado el enfoque de este trabajo, la exposición de resultados y sus análisis correspondientes tendrán una mirada cualitativa, dada por la calidad de las formas, y otra cuantitativa, dado principalmente por el valor de la función objetivo, la distribución de las demandas entre cuadrantes y por los tiempos de resolución.

La instancia resuelta es la misma que fue utilizada en [10]. La idea de ocupar la misma comuna y los mismos datos, es de poder establecer una comparación de los modelos propuestos tanto como en su trabajo como en el presente. Los datos fueron recopilados a través de Censos demográficos nacionales y comunales, datos históricos de Carabineros de Chile. Además se definieron los conjuntos $N(i)$ con $i \in I$ a través de una matriz de precesión de caminos mínimos. Es decir,

un bloque k pertenece al conjunto $N(i)$ si este era predecesor del bloque i en el camino mínimo que une k a i . Con esto es posible conseguir un grafo en el cual se expondran los resultados.

Antes de comenzar a mostrar los resultados generales de las heurísticas y modelos propuestos en los capítulos 3 y 4, se muestra la importancia del desarrollo de estos a través de los datos de la comuna de Ñuñoa. En las figuras (5.1), (5.2) y (5.9) se muestran los resultados de hacer el diseño de territorios mediante un modelo de P-medias, P-medias con restricciones de equidad (como el modelo propuesto en [10]), y el resultado del modelo propuesto en este trabajo resuelto a través de la heurística Localización y Asignación, tal como lo describe el Algoritmo 3. Dada la dificultad de definir el concepto de “buenas figuras”, nos limitaremos a hablar de figuras contiguas en un primer término, y en su preferencia figuras compactas (con bajo momento de inercia y bajo largo de la frontera), sin embargo la aprobación de la inspección visual es la mejor aproximación de una medida de una buena figura.

La Figura (5.1) muestra como el modelo de la P-mediana forma cuadrantes compactos para la instancia de Ñuñoa. Sin embargo, el desviación en la demanda de los cuadrantes formados bajo esta metodología llega a un 70% tal como se muestra en la tabla 5.1.

Cuadrante	Demanda Reacción [U.V.E]	Desviación c.r. Promedio
1	2.51	70 %
2	0.95	-36 %
3	0.87	-41 %
4	2.33	58 %
5	1.69	14 %
6	0.87	-41 %
7	1.79	21 %
8	0.86	42 %
9	1.44	-3 %

Tabla 5.1: Demandas para la solución de P-medias y su desviación con respecto al promedio. Fuente: Elaboración Propia

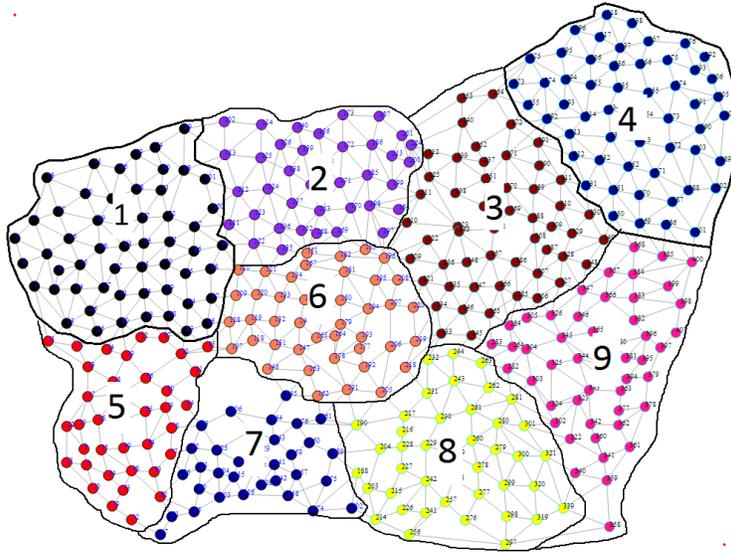


Figura 5.1: Caso de Ñuñoa: Diseño de Cuadrantes mediante un modelo de P- medianas. Fuente: Elaboración Propia.

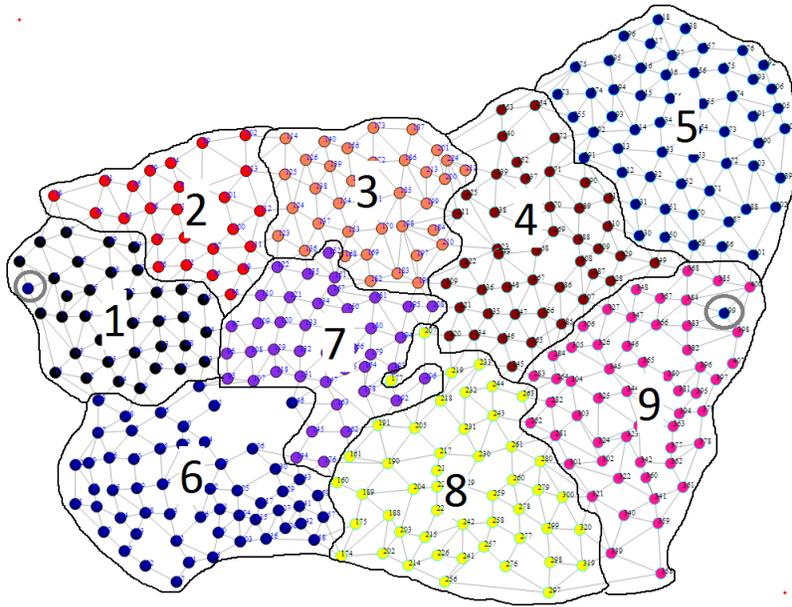


Figura 5.2: Caso de Ñuñoa: Diseño de Cuadrantes mediante un modelo de P- medianas con equidad ($\alpha = 0.05$). Fuente: Elaboración Propia.

Para el modelo propuesto en [10] se muestra en la Figura (5.2) la resolución a optimalidad para la instancia de Ñuñoa con una desviación al promedio máxima permitida de 5%. Se observan dos aspectos importantes y negativos de estas figuras. El primero de ellos es que las figuras no son conexas, encerradas se observan dos bloques que debiesen ser asignados a los cuadrantes 1 y 9 respectivamente, sin embargo para cumplir las restricciones de equidad

de demanda estas son asignados a distritos adyacentes. El segundo problema que surge vía inspección visual son las irregularidades en las fronteras de los cuadrantes. En específico el cuadrante 8 ubicado en la parte inferior del mapa tiene irregularidades como “dendritas” en la frontera con el cuadrante vecino en su parte superior. Luego, se muestra que para este caso es relevante considerar, además de aspectos de justicia, aspectos geométricos que aborden la forma que tienen estos cuadrantes, tal como se hace en el modelo propuesto por este trabajo.

Lamentablemente el modelo completo es difícil de resolver. Aplicando un radio de alcance con un factor mayor a $\bar{\delta} = 0.4$ un computador con las consideraciones mencionadas anteriormente en CPLEX versión 12 no alcanza a generar el problema por falta de memoria. Para radios de alcance entre $\underline{\delta} = 0.25$ y $\bar{\delta} = 0.39$ el problema puede ser generado por CPLEX, sin embargo tras 12 horas no encuentra resultados óptimos, llegando a soluciones a un 30% del óptimo. En la figura (5.3) se muestra el grafo solución obtenido a ese nivel de optimalidad.

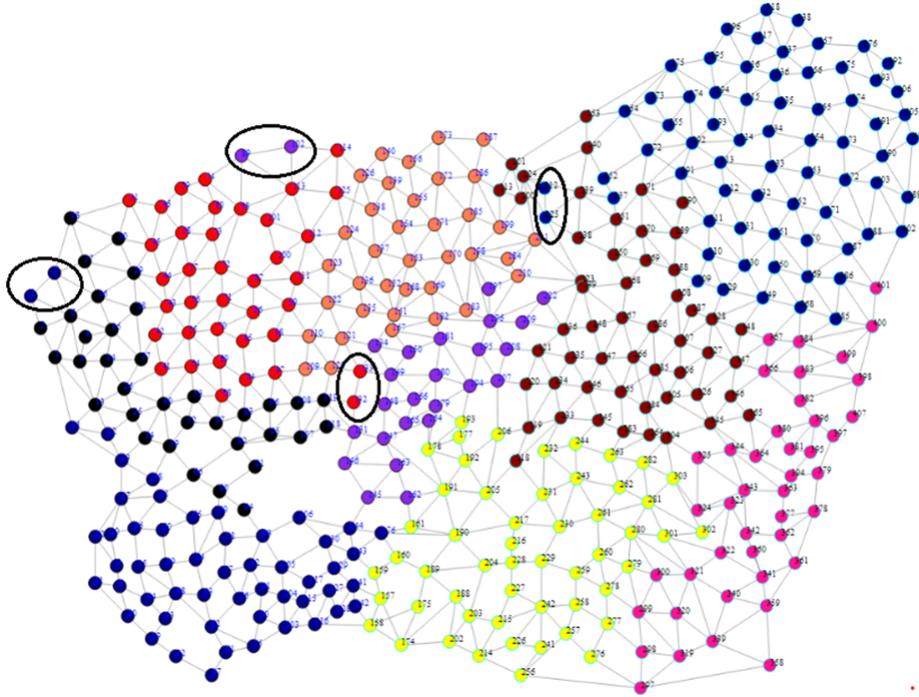


Figura 5.3: Caso de Ñuñoa: Modelo Completo con un $\alpha = 0.05$ obtenido tras 12 horas de resolución. Fuente: Elaboración Propia.

Es posible ver que ese grafo no genera una distritación de la comuna, dado que posee varios bloques discontinuos. En la figura (5.4) se muestra como crece el problema en función del factor δ . Además se muestra el rango para el factor δ en el cuál el problema puede ser generado en memoria y a la vez sea factible.

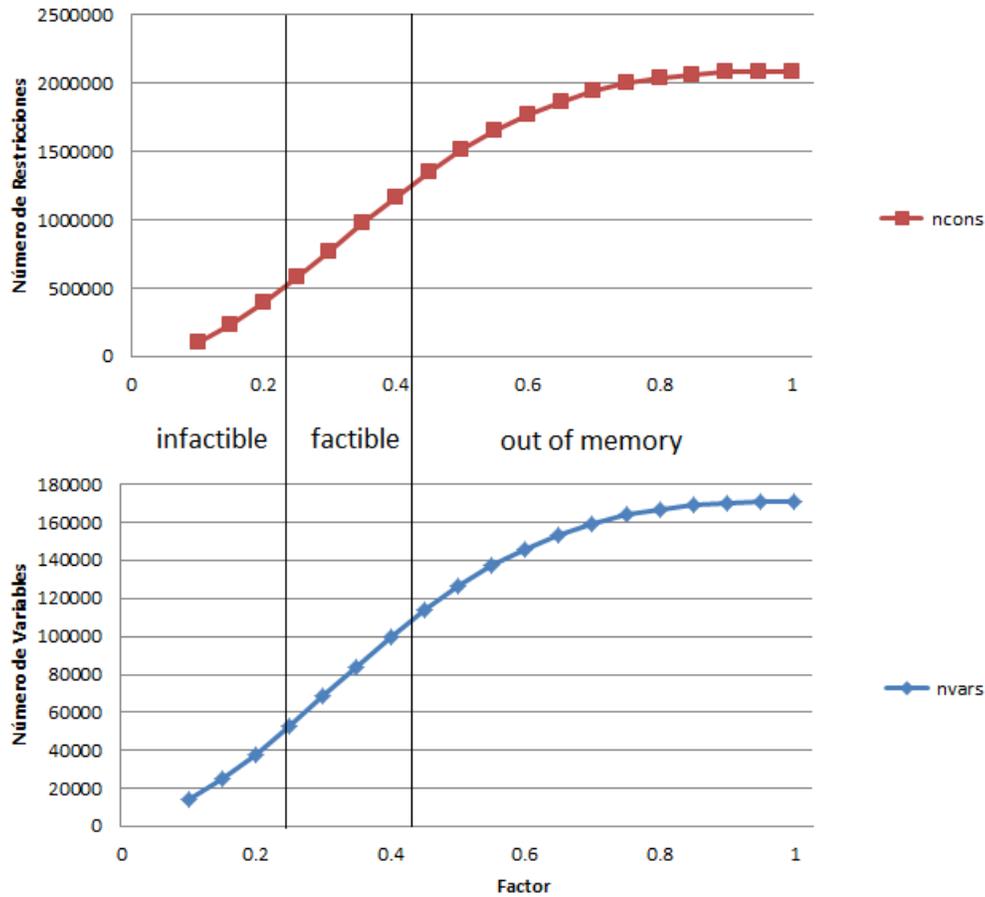


Figura 5.4: Caso de Ñuñoa: Tamaño del problema en relación al factor δ . Arriba el número de restricciones versus el factor δ y abajo el número de variables. Fuente: Elaboración Propia.

5.1.2. Heurística Localización y Asignación

Implementación *AllocMinDist*.

En esta sección discutiremos para el caso de Ñuñoa la performance del Algoritmo 4 que corresponde a la implementación de la heurística de Localización y Asignación cuando el problema de asignación se resuelve con la regla *AllocMinDist*. Primero hay que recalcar que por construcción esta versión puede que no entregue ninguna solución factible debido a que no necesariamente respetaría la restricción de equidad de demanda entre cuadrantes.

En la tabla 5.2 se muestran distintas estadísticas que describen el rendimiento del Algoritmo 4 para distintos valores de los parámetros de la función objetivo $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \beta)$. Estas estadísticas fueron obtenidas a través de 100 iteraciones para cada experimento. Si la heurística convergía al encontrar los mismos centros en dos iteraciones consecutivas se comenzaba en otros centros escogidos aleatoriamente hasta completar las 100 iteraciones. En esta tabla se indica primero los parámetros

de la función objetivo utilizados, el valor más pequeño de la función objetivo en todas las iteraciones, la mínima máxima desviación de la demanda de los cuadrantes con respecto a la demanda promedio, el tiempo promedio de cada iteración y el número de splits que se resuelven en promedio por cada iteración.

El primer hecho que es posible observar que solo en un experimento se encuentra una solución con una desviación máxima con respecto al promedio menor a un 10% (experimento 10). En otras palabras, si el problema tiene un $\alpha < 0.09$, no se hubiesen encontrado soluciones factibles en ninguna de las 20000 iteraciones que se corrieron en total entre todos los experimentos.

Experimento	Parametros ($\theta_1, \theta_2, \theta_3, \beta$)	Min desv.	Tiempo Promedio [segundos]	Splits Promedio
1	(1,1,1,1)	0.20	15.2	38.6
2	(100,1,1,1)	0.29	11.0	17.6
3	(1,100,1,1)	0.31	61.7	278.9
4	(1,1,100,1)	0.20	13.6	37.1
5	(100,100,1,1)	0.32	12.9	38.1
6	(1,1,1,2)	0.36	13.6	45.7
7	(100,1,1,2)	0.09	10.7	16.1
8	(1,100,1,2)	0.41	61.6	272.7
9	(1,1,100,2)	0.30	12.8	40.3
10	(100,100,1,2)	0.22	12.3	37.1
11	(1,1,1,3)	0.26	13.3	39.0
12	(100,1,1,3)	0.23	9.4	19.2
13	(1,100,1,3)	0.41	63.8	282.5
14	(1,1,100,3)	0.25	12.4	37.6
15	(100,100,1,3)	0.40	12.8	41.4
16	(1,1,1,4)	0.29	14.1	42.5
17	(100,1,1,4)	0.22	10.6	17.8
18	(1,100,1,4)	0.48	63.4	280.4
19	(1,1,100,4)	0.29	11.8	39.3
20	(100,100,1,4)	0.24	12.9	36.8

Tabla 5.2: Distintos estadísticos del Algoritmo 4 para 20 experimentos diferentes. Fuente: Elaboración Propia

Otro aspecto interesante, es que los tiempos promedio de resolución de cada iteración tienen correlación con el peso de la función objetivo. Los experimentos que mayor tiempo de resolución tuvieron en promedio resultaron ser cuando el mayor de los pesos fue asignado a la componente θ_2 (experimentos 3, 8, 13, 18), que es la que pondera el tamaño de la frontera. Relacionado también con esto, para estos experimentos, el número de splits (número de variables y fraccionarias a aproximar) en promedio resultó ser considerablemente mayor. Por otra parte, los experimentos más livianos en términos computacionales fueron en los que se ponderaba de mayor forma el momento de inercia de los cuadrantes, dado por el parámetro θ_1 , además estos también resultaron ser los con menor cantidad

de splits en promedio a resolver. Se aprecia una posible relación directa entre el tiempo promedio de cada iteración y el número de splits que se resuelven (Figura 5.5).

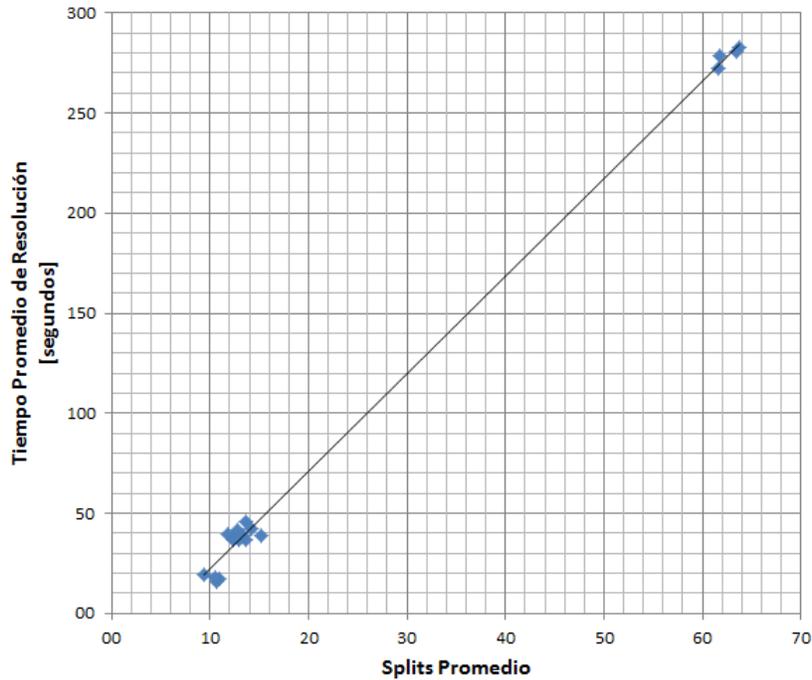


Figura 5.5: Caso de Ñuñoa: Número de Splits Promedio v/s Tiempo de iteración para el Algoritmo 4 en cada experimento. Fuente: Elaboración Propia.

A pesar de que la calidad de las soluciones del Algoritmo 4 no es muy buena por la alta desviación, el tiempo en que se genera cada solución es aceptable, inclusive en el peor de los casos (alrededor de un minuto). Por esto, una manera de elegir una buena solución es construir un gráfico de dispersión de algún parámetro de la solución, versus su máxima desviación. Por ejemplo, la Figura 5.6 muestra el gráfico de dispersión para el experimento 11 $((\theta_1, \theta_2, \theta_3, \beta) = (1, 1, 1, 3))$ en donde en el eje vertical se utiliza como parámetro de calidad de la solución el valor de la función objetivo generada por la asignación.

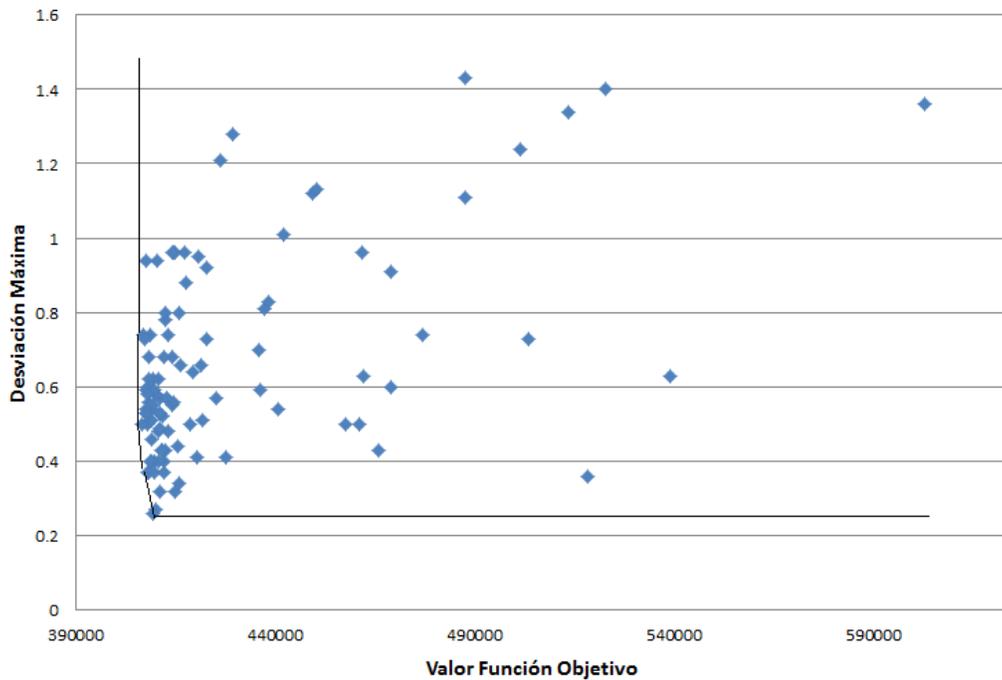


Figura 5.6: Caso de Ñuñoa: Distribución de los resultados para el Algoritmo 4 en cuanto a la desviación con respecto al promedio y el valor de la función objetivo para el experimento 11. Fuente: Elaboración Propia.

En general, el Algoritmo 4 genera zonas conexas. En las figuras 5.7 - 5.8 se muestran los mapas generados para los resultados con menor valor objetivo y menor desviación con respecto al promedio para los experimentos 19 y 20. En el experimento 19, se privilegia claramente la minimización de la demanda tipo prevención cuando se resuelve la relajación lineal, y en los 39 bloques en promedio que quedan “repartidos” entre los cuadrantes, se asigna al cuadrante cuyo centro sea más cercano. Para el experimento 20 (Figura 5.8), en donde se privilegian las formas, se muestra que las formas generadas son conexas. La menor desviación obtenida fue de un 24 %. La solución con mejor valor objetivo obtuvo una desviación de 66 %.

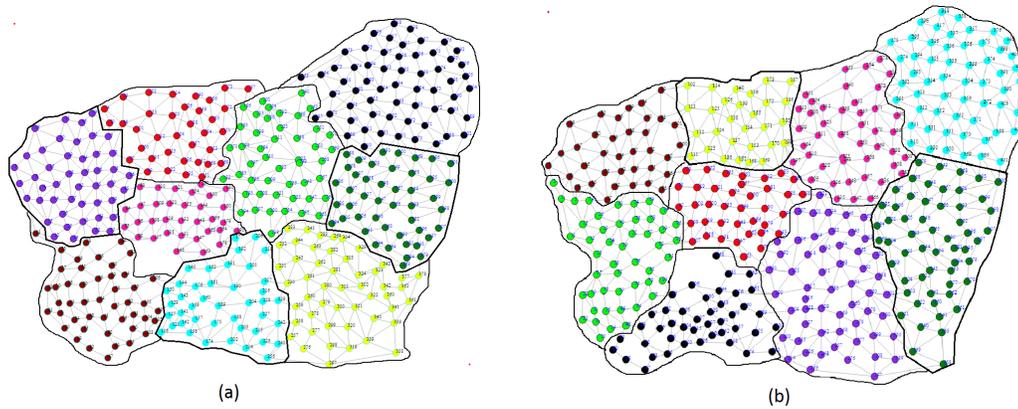


Figura 5.7: Caso de Ñuñoa: Mapas generados para la mejor solución encontrada en cuanto a función objetivo (a) y para la con menor desviación (b) para el Algoritmo 4 en el experimento 19. La desviación obtenida para (a) fue de un 58 %. Fuente: Elaboración Propia.

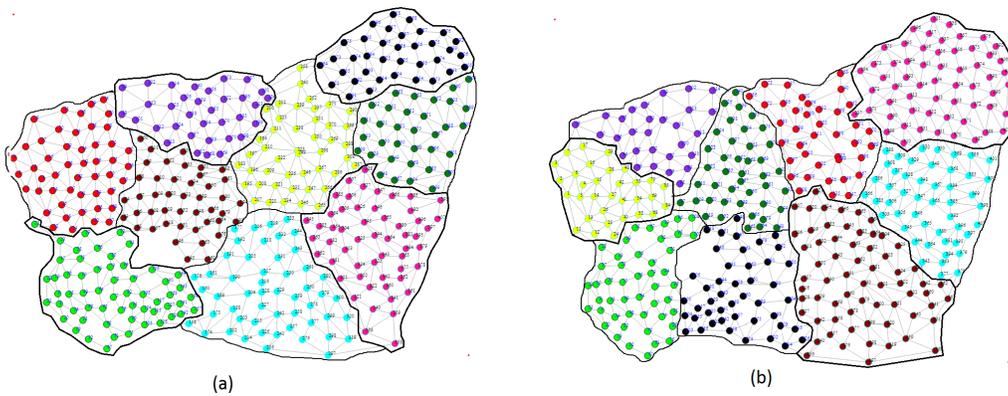


Figura 5.8: Caso de Ñuñoa: Mapas generados para la mejor solución encontrada en cuanto a función objetivo (a) y para la con menor desviación (b) para el Algoritmo 4 en el experimento 20. Fuente: Elaboración Propia.

Implementación *AllocMIP*

En general el Algoritmo 3 logra buenas figuras, las cuales son conexas. Para determinar el rendimiento de esta implementación en la instancia de Ñuñoa se tomaron los mismos 20 experimentos de la subsección anterior, y se aplicó la heurística con dos diferencias. Dado que cada iteración es más pesada en términos computacionales (altos tiempos de resolución) debido a que requiere la solución de un problema de optimización con variables enteras, se impuso que en cada iteración del problema de asignación no tuviera más de 30 minutos en su resolución. Por otra parte, en esta misma línea, se utilizó como input los centros obtenidos con la resolución del problema de las P-medianas con restricciones de equidad, para así comenzar de una buena solución aproximada.

En la tabla 5.3 se muestran las principales estadísticas para esta implementación en el caso de Ñuñoa:

Experimento	Parámetros ($\theta_1, \theta_2, \theta_3, \beta$)	Tiempo Resolución [segundos]	Demanda Prevención	No iteraciones
1	(1,1,1,1)	158.9	116003	4
2	(100,1,1,1)	0.91	220538.6	3
3	(1,100,1,1)	1800	24880	3
4	(1,1,100,1)	10.8	114518	12
5	(100,100,1,1)	2.01	232070.6	3
6	(1,1,1,2)	153.77	116003	7
7	(100,1,1,2)	0.94	220538.6	3
8	(1,100,1,2)	1800	24880	3
9	(1,1,100,2)	42.49	114518	12
10	(100,100,1,2)	1.79	232070.56	3
11	(1,1,1,3)	101.74	116003	5
12	(100,1,1,3)	1	220538.6	3
13	(1,100,1,3)	1800	24880	3
14	(1,1,100,3)	12.15	114518	12
15	(100,100,1,3)	1.95	232070.6	3
16	(1,1,1,4)	158.04	116003	5
17	(100,1,1,4)	1.09	220538.6	3
18	(1,100,1,4)	1800	24880	3
19	(1,1,100,4)	22.36	114518	12
20	(100,100,1,4)	1.93	232070.6	3

Tabla 5.3: Distintas estadísticas para el Algoritmo 3 en 20 experimentos diferentes. Fuente: Elaboración Propia

En la figura (5.9) se muestra el resultado para la instancia de Ñuñoa con el Algoritmo 3 de la heurística de Localización y Asignación. Se pueden ver que las formas de los distritos son mejores que las obtenidas en la Figura (5.2), pero no mejores que las obtenidas en Figura (5.1). Sin embargo, esta configuración es factible para el problema original y para el propuesto en [10], es decir cumple con las restricciones de equidad.

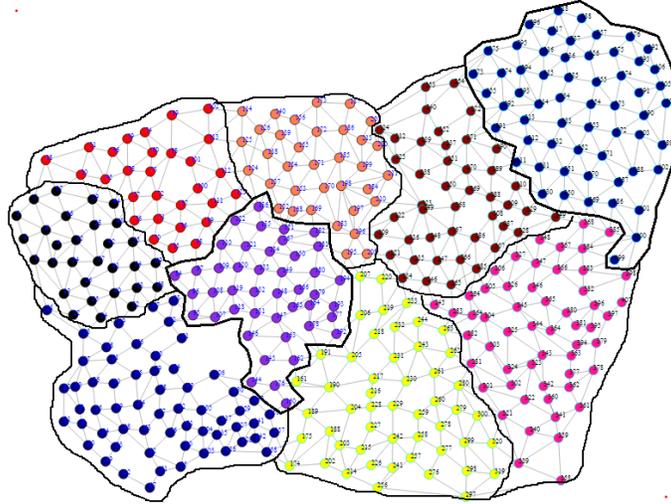


Figura 5.9: Caso de Ñuñoa: Diseño de Cuadrantes mediante el modelo propuesto en este trabajo mediante el Algoritmo 3 para el experimento 10. ($\alpha = 0.05$). Fuente: Elaboración Propia.

Es decir, con el modelo propuesto, resuelto mediante la heurística, se pueden obtener cuadrantes con demandas equilibradas y que geoméricamente son contiguos y más compactos que los obtenidos solo considerando restricciones de equidad. Además existe la ventaja con respecto al Algoritmo 4 de que esta implementación si permite encontrar soluciones con formas deseables y con una garantía de equidad de un $\alpha\%$.

Los tiempos de resolución resultan ser sensibles a los valores de los parámetros. La tabla 5.4 muestra los tiempos de resolución promedio agrupados para la implementación *AllocMIP* de la heurística (Algoritmo 3) a distintos valores de los parámetros de la función objetivo.

Experimento Grupo	Parámetros	Tiempo de Resolución [s]
1	$\theta_1 = 1, \theta_2 = 1, \theta_3 = 1$	143.11
2	$\theta_1 = 100, \theta_2 = 1, \theta_3 = 1$	0.99
3	$\theta_1 = 1, \theta_2 = 100, \theta_3 = 1$	1800.00
4	$\theta_1 = 1, \theta_2 = 1, \theta_3 = 100$	21.95
5	$\theta_1 = 100, \theta_2 = 100, \theta_3 = 1$	1.92

Tabla 5.4: Tiempos de resolución promedio para distintos valores de los parámetros de la función objetivo. Fuente: Elaboración Propia

Se puede notar que cuando solo se considera de igual importancia cada uno de los factores de la función objetivo (experimento 1), las iteraciones alcanzan en promedio de 143 segundos. Si se considera con mayor importancia el momento de inercia como en el experimento 2 ($\theta_1 = 100$), las iteraciones bajan en términos de tiempo a menos de 1 segundo. Esto se debe a que con mayor consideración de este

parámetro el modelo se parece al de P-medianas con equidades, el cual es fácil de resolver, mucho más cuando el número de centros está fijo.

Para el experimento 3, el tiempo de resolución de cada iteración alcanza el tiempo límite de 30 minutos y solo alcanzando un 30% de gap de optimalidad. Esto se debe a la gran simetría que presentan las soluciones si solo se considera la frontera ($\theta_2 \gg \theta_1, \theta_3$), lo que hace las iteraciones muy pesadas.

Para el experimento 4, en donde se le da mayor peso a la minimización de la demanda de prevención, los tiempos de resolución de cada iteración llegan a 21.95 segundos en promedio. en el experimento 5 se le da mayor importancia a las formas en general, y los tiempos de resolución en promedio no alcanzan los 2 segundos. Esto se debe a que los objetivos de minimizar el momento de inercia y el largo de la frontera están coordinados, por lo que al contrario del experimento 3, en el cual había una gran simetría esta se rompe con el mayor peso de θ_1 .

Notar que estos tiempos de resolución son mucho más sensibles a los parámetros de la función objetivo que los generados por el el Algoritmo 4, inclusive obteniendo mejor performance para cuando se coloca mayor peso al momento de inercia de los cuadrantes.

En cuanto a la calidad de las formas de las soluciones obtenidas, se puede apreciar en la Figura 5.10 que los parámetros de la función objetivo influyen los diseños de los territorios. En este sentido, solo el experimento 15, cuando se pondera con mayor peso el momento de inercia de los distritos y la frontera, se consiguen distritos contiguos y con formas visualmente aceptables. Notar que cuando se pondera con mayor peso el momento de inercia por separado (experimento 12), los distritos generados a pesar de ser conexos forman “dendritas”, las cuales no son visualmente aceptables. Cuando se pondera por si solo la componente de frontera de la función objetivo (Experimento 13), ninguna iteración se alcanza a resolver a optimalidad y el diseño de territorios forma distritos desconexos, formando pequeños cumulos separados, como se puede apreciar en la figura. En el Experimento 14, la mayor ponderación es asignada a la demanda de prevención. Se puede apreciar que la forma generada en este experimento contiene pares de bloques desconexos.

En general, los bloques desconexos se dan a pares dada la restricción $\sum_{k \in N(i)} z_{ik} \leq |N(i)| - 1$ que prohíbe que algún bloque $i \in I$ quede desconectado del resto.

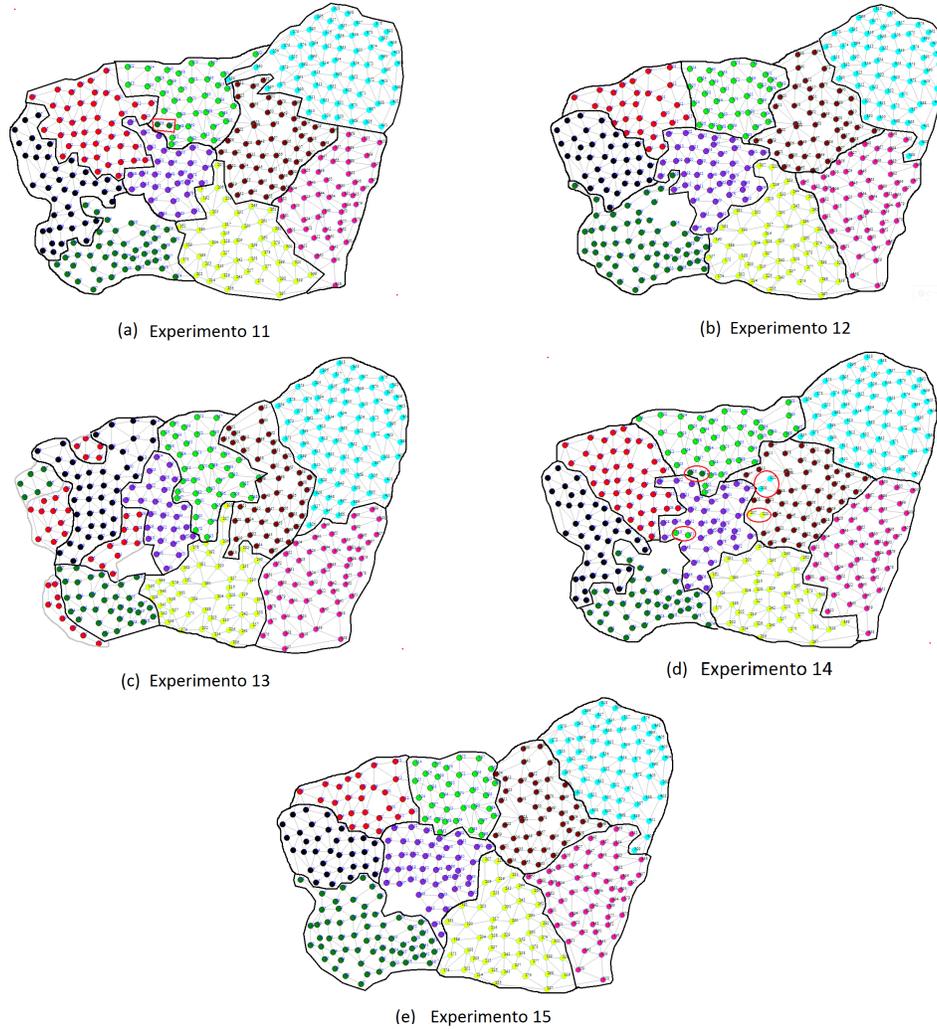


Figura 5.10: Caso de Ñuñoa: Comparación de los distintos resultados de los distintos experimentos del Algoritmo 3 con el parámetro $\beta = 3$ fijo y $\alpha = 0.05$. Fuente: Elaboración Propia.

La discusión desarrollada hasta este momento indicaría que existen mejores parámetros para la función objetivo, en cuanto a la calidad de las soluciones que sería colocar mayor peso en los aspectos geométricos de la función objetivo. Sin embargo, esto no es del todo cierto si el factor de la función objetivo relacionado a la demanda de tipo prevención se descontrola. Un buen indicador de cuanto se pierde sería la desviación porcentual de la demanda tipo 1 con respecto a γ_{min} que sería la solución del problema completo con los parámetros de la función objetivo $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \beta) = (0, 0, 1, 0)$. Para la instancia de Ñuñoa este valor alcanza los $\gamma_{min} = 185895$. Por ejemplo, para el experimento 15, el resultado con mejor función objetivo alcanza una demanda de tipo prevención de 314223.31, esto es una desviación del 70 %.

Lo interesante de los resultados y discusiones expuestas en estas dos últimas

secciones, es que más allá de los tiempos de resolución en si, se puede lograr un equilibrio entre los valores de los parámetros que generen buenas soluciones de poco tiempo, y con esto, obtener un conjunto de soluciones buenas, para someterlos a otro tipo de inspecciones que no podrían ser considerados por este modelo, pero si por los tomadores de decisiones (en este caso Carabineros de Chile), tal como es discutido en [13].

Dados los resultados expuestos en esta subsección se recomienda momento de implementar este modelo para definir el diseño de cuadrantes, en conjunto con sus métodos de resolución, utilizar la heurística en su versión *AllocMIP* y poner mayor ponderación en las componentes geométricas de la función objetivo. Con esto se pueden generar una gran cantidad de soluciones factibles y elegir la mejor según algún otro parámetro, por ejemplo el nivel de demanda de prevención.

5.2. Performance de la Heurística

5.2.1. Experimento

En esta sección se discute cuan buenas son las soluciones entregadas por la heurística en su implementación *AllocMIP* descrita en el Algoritmo 3, con respecto a la solución óptima. Para esto, se utilizaron instancias de pequeño tamaño aleatorias, que representan grillas rectangulares de tamaño fijo las cuales pueden ser resueltas a optimalidad. Las instancias puestas a prueba son de tamaño de 30, 36, 42, 49, 56, 64, 81, 90 bloques. Otro resultado que discutiremos es como este rendimiento es afectado principalmente por la cantidad de cuadrantes requeridos (P) y la desviación de la demanda con respecto al promedio (α). Para este efecto definiremos el caso base establecido en la Tabla 5.5, en donde fueron fijados los parámetros de la función objetivo a los valores con mejor rendimiento para el Caso de Ñuñoa. Hay que notar que el parámetro P no se mantiene constante para cada tamaño de las instancias, sino que es representado como un porcentaje de la cantidad de bloques, y tratamos de que esa proporción se mantenga constante aproximando al entero más cercano la fracción $\frac{N}{P}$.

Parámetros	Valor
θ_1	100
θ_2	100
θ_3	1
β	3
α	0.1
P	$\approx 0.1 \cdot N$

Tabla 5.5: Parámetros utilizados como caso base. Fuente: Elaboración Propia

Estas instancias fueron resueltas con CPLEX 12.5 e implementados en AMPL. Los parámetros aleatorios fueron generados también con AMPL. Las distribuciones utilizadas fueron basadas en los valores del Caso Ñuñoa, en donde

se calculó el promedio de cada parámetro y su desviación estandar, y luego se asumió una distribución normal truncada en cero con los datos obtenidos. Estos valores se muestran en la Tabla 5.6

Parámetros	Distribución
dem_i	$max\{\mathcal{N}(0.033, 0.057), 0\}$
pob_i	$max\{\mathcal{N}(456.75, 538.75), 0\}$
km_i	$max\{\mathcal{N}(273.29, 181.48), 0\}$
nd_i	$max\{\mathcal{N}(209.35, 220), 0\}$

Tabla 5.6: Distribución de los parámetros aleatorios. Fuente: Elaboración Propia

Los experimentos se llevaron a cabo primero resolviendo el problema completo descrito en la capítulo 3 (PDT) con un tiempo límite de 30 minutos. Terminado este tiempo se rescataran la mejor solución obtenida hasta ese instante y la mejor cota proveniente del proceso de *Branch & Bound*. Posterior a eso se aplicará el Algoritmo 3 comenzando con los centros provenientes de resolver el problema de p-medianas con restricciones de equidad. Para cada tamaño de instancia se ejecutaron 10 instancias aleatorias y se calcularon los siguientes indicadores:

$$(5.1) MIP \% = \frac{\text{Valor mejor solución entera conseguida hasta el momento}}{\text{Valor mejor cota inferior obtenida}}$$

$$(5.2) HE \% = \frac{\text{Valor mejor solución conseguida con la heurística}}{\text{Valor mejor cota inferior obtenida}}$$

Estos indicadores serán los que evaluarán el rendimiento de la heurística. Se espera que $MIP\%$ sea mayor que $HE\%$, y que la diferencia sea creciente en el tamaño de la instancia. Además evaluaremos cuanto se demora en converger la heurística y el problema completo, utilizando como cota superior 1800 segundos. También se espera que el tiempo de la heurística sea menor que el tiempo utilizado para resolver el problema completo, y que ambos tiempos sean crecientes en el tamaño de la instancia. Con esto se busca tener indicadores que muestren que tan buena es la heurística encontrando buenas soluciones en cuanto a costo objetivo, y que tan pesados computacionalmente son los algoritmos conforme crece el problema.

Dado que la heurística genera soluciones factibles para PDT en todo momento y que la función objetivo es positiva, ambos indicadores toman un valor mayor o igual que 1 y mientras más cercanos a ese valor se supone un mejor rendimiento del método para esa instancia. Para cada tamaño de instancia N se promediaron cada uno de los experimentos para obtener cada uno de los indicadores relevantes. Además se utilizó un factor del radio de alcance $\delta = 1$ por dos motivos: 1) Obtener una referencia del rendimiento en el peor de los casos (obtener una cota superior de $HE\%$); 2) Evitar infactibilidades en cada uno de los experimentos.

5.2.2. Análisis

Dado los parámetros explicados en la subsección anterior se puede ver que en la Figura (5.11) para el caso base la heurística consigue mejores soluciones en promedio para todos los tamaños. No se observa alguna tendencia clara para el indicador MIP %, aunque dado el crecimiento del problema en cuanto a restricciones y variables, se intuye que este indicador debiera ser creciente para valores más grandes de N . Para el indicador HE % se observa mayor estabilidad, manteniéndose siempre por debajo del indicador MIP %, es decir, la heurística, con el mismo límite de tiempo siempre encuentra mejores soluciones que el solver CPLEX aplicado al problema completo.

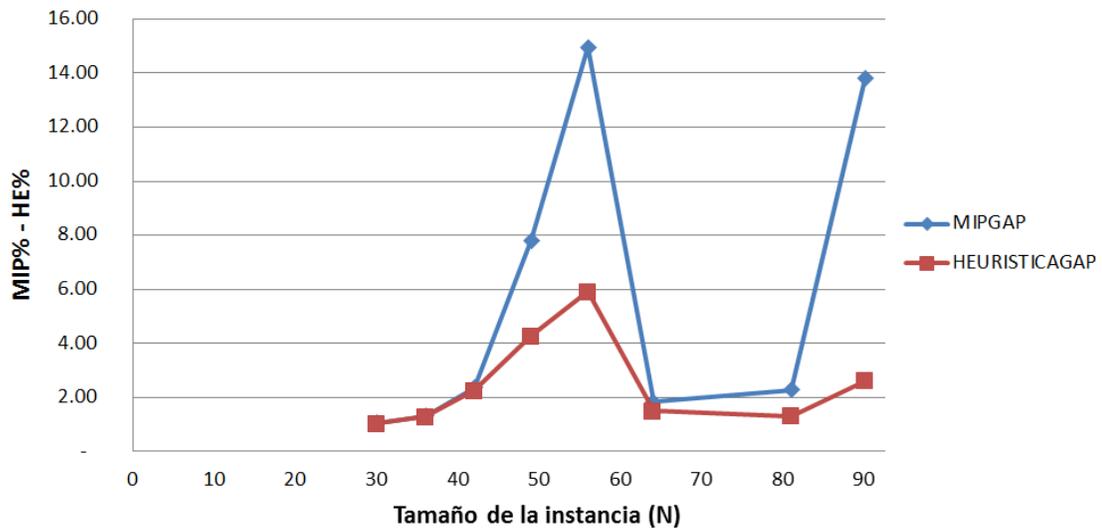


Figura 5.11: Gráfico Tamaño de instancia versus MIP % y HE % para el caso base. Fuente: Elaboración Propia.

Otro dato interesante responde a la pregunta de cuánto más rápido es la heurística en entregar esos resultados. En la Figura (5.12) se observa que el problema es resuelto en menos tiempo para instancias menores a los 50 nodos para este experimento. Para instancias mayores a 50 nodos el problema de asignación solo en el 12% de los casos es resuelto al menos una vez a optimalidad. Lo interesante, sin embargo, es que se obtienen mejores soluciones a pesar de que el problema de asignación no es resuelto a optimalidad.

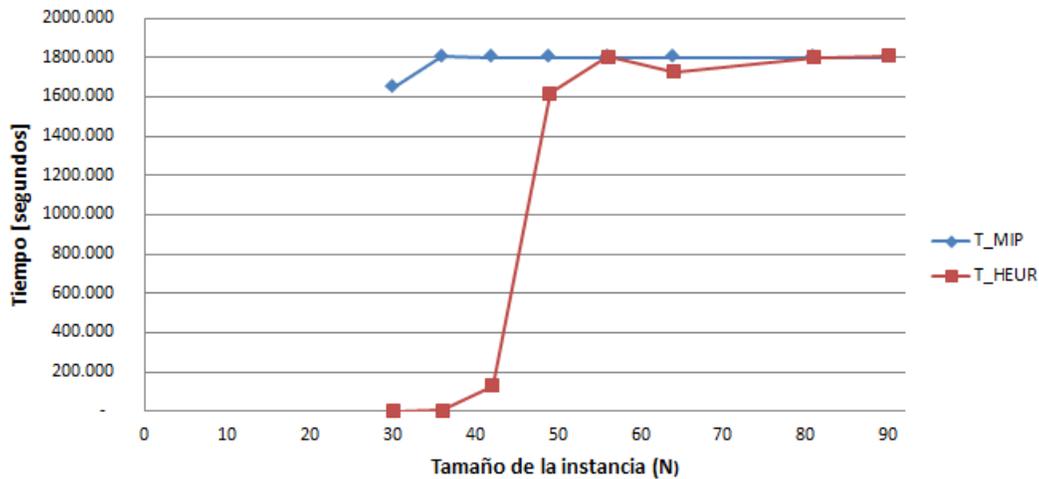


Figura 5.12: Gráfico Tamaño de instancia versus tiempo de resolución para el problema completo PDT y la aplicación del Algoritmo 3 para el caso base. Fuente: Elaboración Propia.

Sensibilidad con respecto a P

Tomando como base, para cada tamaño de instancia el factor $\frac{N}{P} \approx 0.1$ constante, se hizo un análisis de sensibilidad, corriendo la misma cantidad de experimentos aleatorios, aumentando y disminuyendo un P . A estos casos los llamaremos “caso P-1” y “caso P+1”. En la Figura (5.13) se puede apreciar como varían los tiempos de resolución.

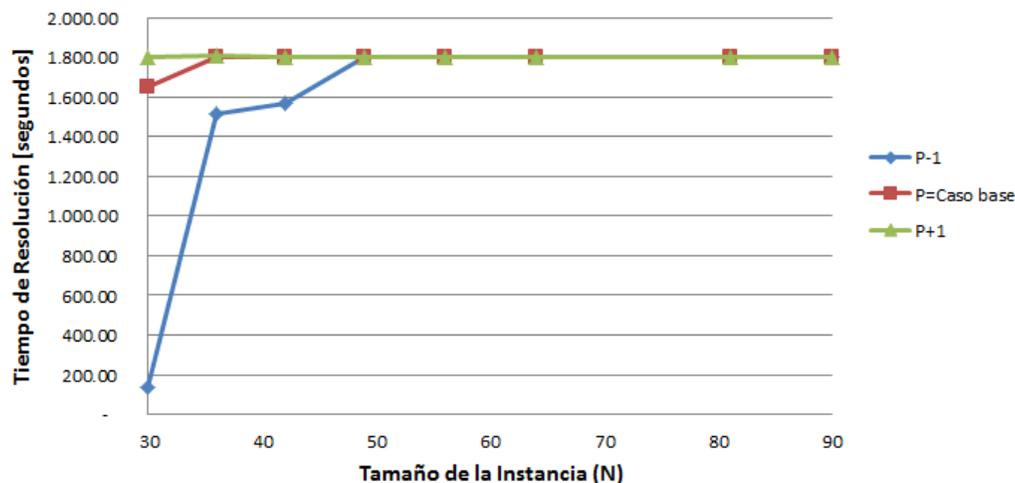


Figura 5.13: Gráficos Tamaño de instancia versus tiempo de resolución para el problema completo PDT para los casos base, P-1 y P+1. Fuente: Elaboración Propia.

Lo primero que se observa es que los tiempos de resolución para el problema completo son menores cuando se tienen menos centros para instancias de menos

de 49 nodos. Es decir, se puede intuir que dado el caso base escogido en la subsección anterior, el tiempo de resolución del problema completo aumenta conforme aumenta P . Hay que mencionar que esto no es completamente cierto para cualquier elección de P . Por ejemplo, si se tuviese como caso base $P = N$, la solución es única (si se cumple la restricción de equidad de demanda), y el tiempo de resolución sería mínimo. Caso similar sería si $P = 1$.

Para el tiempo en que se toma la heurística en resolver el problema, en la Figura (5.14) se puede ver también cierta tendencia a que estos tiempos sean crecientes conforme crece P (en la vecindad del caso base), sobretodo porque el caso $P-1$ consigue menores tiempos en general. Comparando el caso base con el caso $P+1$ no es muy claro que uno tenga menores tiempos que el otro.

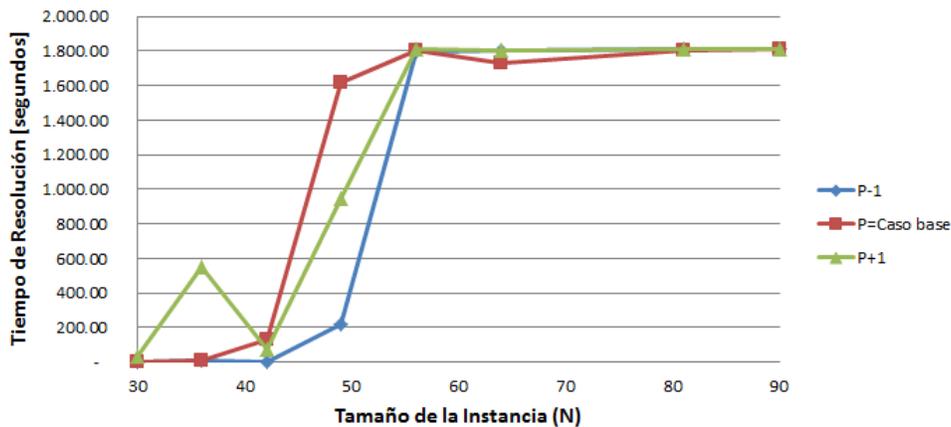


Figura 5.14: Gráficos Tamaño de instancia versus tiempo de resolución para la aplicación del Algoritmo 3 para los casos base, P-1 y P+1. Fuente: Elaboración Propia.

Ahora en cuanto al rendimiento, las Figuras (5.15) y (5.16) muestran que no existe una clara relación entre tener más o menos centros y obtener mejores indicadores $MIP\%$ y $HE\%$.

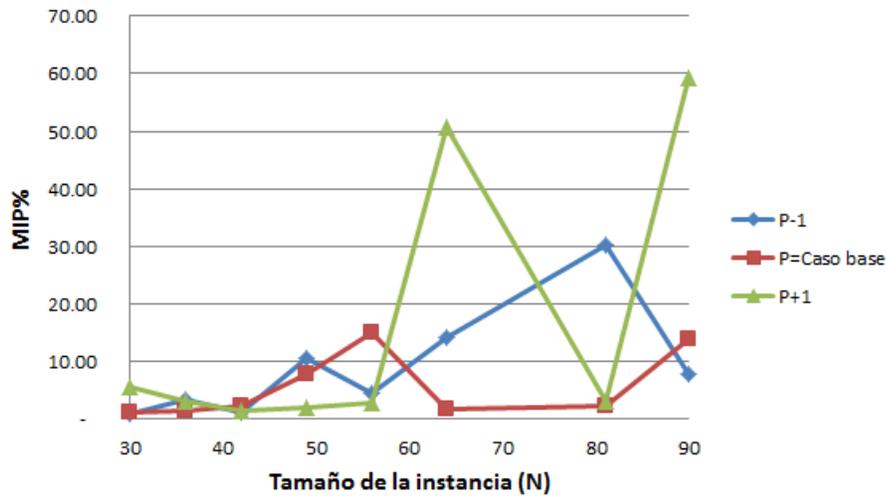


Figura 5.15: Comparación del indicador $MIP\%$ para los casos base, P-1 y P+1. Fuente: Elaboración Propia.

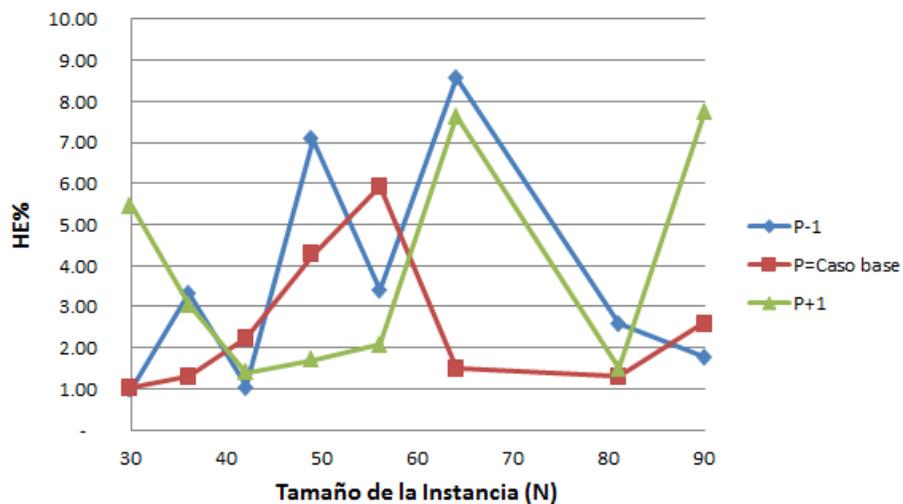


Figura 5.16: Comparación del indicador $HE\%$ para los casos base, P-1 y P+1. Fuente: Elaboración Propia.

Dos conclusiones importantes de esta parte:

- No se puede decir con gran certeza si el colocar más o menos centros para este problema los tiempos de resolución y las calidades de las soluciones obtenidas a un tiempo fijo mejoran.
- Si se puede afirmar que variando la cantidad de centro, el Algoritmo 3 encuentra siempre mejores soluciones para todo tamaño de instancia.

Sensibilidad con respecto a α

En esta subsección se intenta responder la pregunta si es que el parámetro α influye en el rendimiento de la heurística. Para esto se toma el caso base $\bar{\alpha} = 0.1$ y se compara el rendimiento promedio con los experimentos utilizando $\alpha_1 = 0.05$ y $\alpha_2 = 0.15$. En las Figuras (5.17) y (5.18) se muestra que en general la heurística sigue teniendo un comportamiento más estable y con mejores garantías de cercanía a la solución óptima que el problema completo ejecutado en CPLEX. Sin embargo, no se encuentran mayor diferencia entre los tiempos de solución, ni de calidad de soluciones de las instancias para los distintos valores de α .

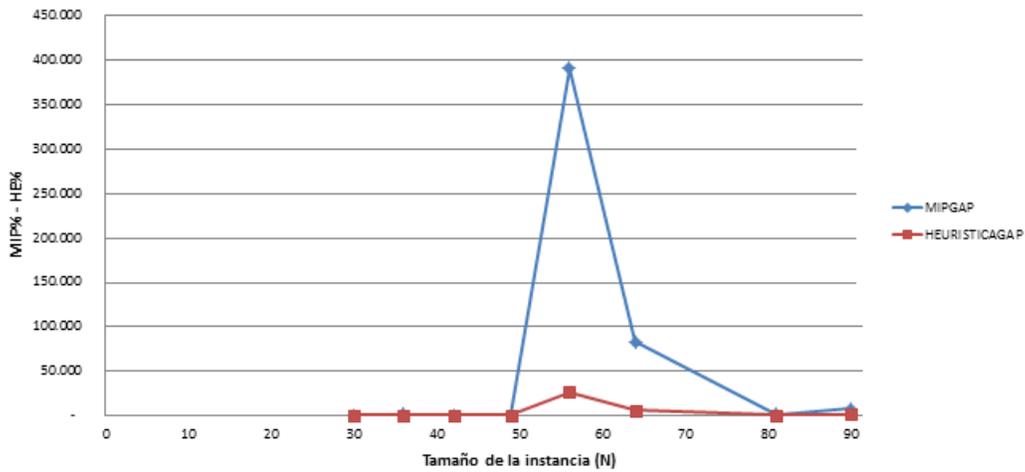


Figura 5.17: Gráfico Tamaño de instancia versus MIP % y HE % para el caso $\alpha_1 = 5\%$. Fuente: Elaboración Propia.

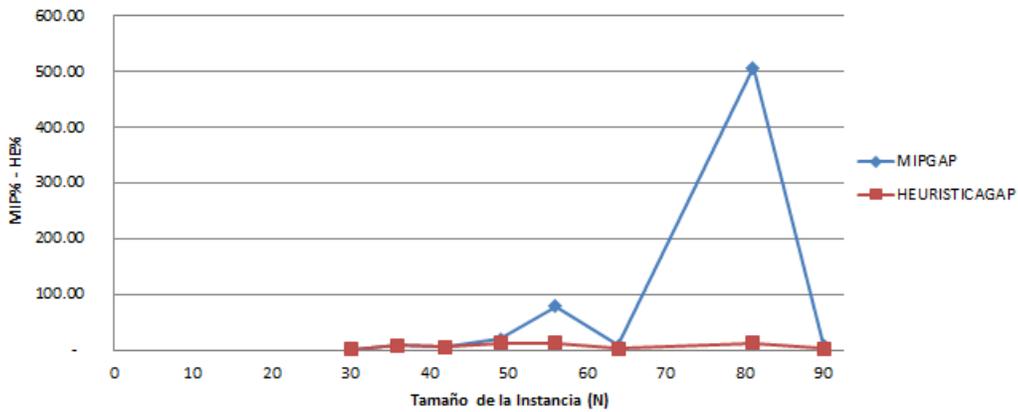


Figura 5.18: Gráfico Tamaño de instancia versus MIP % y HE % para el caso $\alpha_2 = 15\%$. Fuente: Elaboración Propia.

En conclusión la heurística encuentra soluciones mejores que CPLEX para los tamaños de instancias en que pueden ser comparados, y esto es robusto a los

valores de los parámetros P y α . Un hecho interesante y no discutido en este trabajo, son los peaks encontrados para los indicadores $MIP\%$ y $HE\%$. Por ejemplo en la Figura (5.17) el peak es alcanzado en la instancia de 56 bloques, en cambio para la Figura (5.18) esta es alcanzada para la instancia de 81 nodos. Similar situación se observa aunque con menor intensidad en la Figura (5.11) (instancias de 56 y 90 nodos).

Capítulo 6

Conclusiones

En este capítulo se presentan las principales discusiones, conclusiones y posibles trabajos futuros que nacen de los modelos y métodos propuestos, y resultados obtenidos en este trabajo.

6.1. Conclusiones Generales

En este trabajo se logra obtener una conceptualización basada en un modelo matemático para el diseño de territorios del Plan Cuadrante de Seguridad Preventiva de Carabineros de Chile, en el cual se consideran aspectos tales como equidad en la demanda por recursos policiales entre los distritos generados, aspectos de formas de los distritos, y aspectos de gestión de los recursos a través de la minimización de la componente de demanda recursos policiales en la componente de prevención.

La conceptualización matemática de este problema fue realizada a través de un modelo de programación lineal entera mixta. El principal aporte de este modelo es la introducción a través de un problema de optimización de la minimización del largo de la frontera de cada distrito, entendido como parte de una medida de compacidad bi dimensional, en donde además de esta, importa el momento de inercia del distrito.

Este problema resultó difícil de resolver en términos computacionales para instancias de tamaño similares a Ñuñoa. Por lo mismo se desarrollaron métodos heurísticos para la resolución aproximada de este. La heurística desarrollada en este problema es la de Localización y Asignación con dos implementaciones distintas. Una en que se resuelve el problema de Asignación a optimalidad y otra en que se resuelve una aproximación utilizando la solución óptima de la relajación lineal.

Como conclusión importante de este trabajo es que el modelo con sus métodos de resolución entregan un conjunto de asignaciones con indicadores de la calidad de cada uno de estos. Estos indicadores se basan en la desviación de la demanda

por recursos policiales con respecto al promedio de cada uno de los distritos, el largo de la frontera de cada distrito, el momento de inercia, la cantidad de recursos policiales necesarios para la componente de prevención de esta demanda. Por otra parte, otro manera de evaluar estas consideraciones es a través de inspección visual de los cuadrantes formados. Esto permite a los tomadores de decisiones encontrar dentro de un conjunto de posibles distritaciones cual es la mejor manera de dividir una comuna con datos cuantitativos.

Los cuadrantes obtenidos por el modelo logran una mayor equidad en la demanda de recursos, por lo que a posteriori, se puede lograr una asignación eficiente más equitativa de estos.

Además se pudo ver que en al cuantificación de la demanda por recursos policiales por tipo prevención puede ser disminuida por las formas de los cuadrantes, tomando ventaja de la forma en que esta es cuantificada. Además estas formas cumplen con ser compactas.

6.2. Sobre el modelo y los métodos de resolución

Tal como se mencionó anteriormente, este trabajo presenta un modelo de programación lineal entera mixta que es difícil de resolver. El problema en general crece de tamaño significativamente conforme crece el tamaño de la instancia. Por otra parte existe el hecho de solo muy pocas variables en el problema entero toman valores no nulos, por lo que se utilizan reglas para disminuir el número de variables. Una de esas reglas es la de no considerar asignaciones de bloques a cuadrantes que no esten a más de una cierta distancia fija. Esta regla, además de la disminución de variables y restricciones, ayuda a la conformación de cuadrantes con menos momento de inercia, y a posteriori los hace más compactos.

Se presenta una heurística en donde el problema de diseño de territorios es resuelto en dos problemas interrelacionados, uno de Localización y de Asignación. Esta heurística fue implementada de dos maneras distintas dada la dificultad inherente a la resolución del problema de asignación. La primera resuelve el problema de Asignación a optimalidad y la segunda resuelve la relajación lineal de este, y apróxima las variables fraccionarias según la regla *AllocMindist*.

La implementación de la heurística *AllocMindist* en la instancia de Ñuñoa produce mapas de cuadrantes en un tiempo de entre 10 y 60 segundos en promedio dependiendo principalmente de los valores de la función objetivo. La calidad de estos resulta la mayoría de las veces ser buena en los aspectos geométricos y/o visuales, sin embargo las desviaciones de la demanda de estas que representan la equidad de esta demanda entre cuadrantes no baja de los 9%.

La implementación *AllocMIP* genera mapas factibles para cualquier desviación de la demanda impuesto como máximo que genere un problema factible. Estos mapas son generados desde 1 segundo hasta sobre los 30 minutos en promedio. Estos tiempos resultaron ser muy sensibles a los parámetros de la función objetivo.

Se realizó una comparación entre el rendimiento de la heurística en su implementación *AllocMIP* con respecto a resolver el problema completo con el paquete computacional CPLEX en su versión 12.5. La heurística consigue soluciones factibles con mejor costo objetivo que el modelo completo para cualquier instancia en las cuales fueron comparadas. Además la heurística mostró la ventaja de resolver problemas de mayor tamaño en donde el problema completo no pudo ser resuelto por errores del tipo “*out of memory*” de CPLEX.

6.3. Implementación y utilidad de la metodología

La implementación de los resultados obtenidos con esta metodología dependen de principalmente dos factores. El primero de ello es que la implementación está directamente ligado a una herramienta computacional que facilite el estudio y planificación de los cuadrantes. Esta herramienta debe tener implementada los métodos de resolución propuesto este modelo, y además dar la facilidad a los tomadores de decisión de poder ingresar nuevas consideraciones como las discutidas en el capítulo 3.3.

El segundo factor relevante es la dificultad en la adopción por Carabineros de Chile de este rediseño. Existe un trade off entre el costo-beneficio de hacer un cambio en el PCSP. Los beneficios son asociados a los conceptos de los cuales esta metodología se hace cargo, es decir, de la disminución en la demanda de prevención, los beneficios obtenidos por tener una equidad en las cargas de trabajo, los beneficios de obtener cuadrantes compactos. Alguno de los costos vienen dado por la readaptación de la ciudadanía al nuevo Plan, costos institucionales inherentes a la implementación de dicha metodología (tecnología y capacitación).

6.4. Trabajos Futuros

6.4.1. Sobre el PCSP

Para entender el marco del trabajo, en la Figura (6.1) se muestra un esquema de los límites e inputs del trabajo. En azul se muestran distintas temáticas que son inherentes al desarrollo del PCSP que no son abordados en esta tesis. El primero de ellos es la metodología para estimar datos, tanto de Carabineros de Chile, como los datos poblacionales dado por los censos aplicados a nivel nacional como comunal. Otro tema es la cuantificación de la demanda, el cual representa un insumo de este trabajo. Vale preguntarse que tan sensible son los resultados de esta metodología a las demandas utilizadas.

Este trabajo a la vez dentro del esquema se ve representado como input de un modelo más general de asignación de recursos. Luego de una distribución equitativa de la demanda entre cuadrantes, la distribución de recursos policiales entre estos esta sujeta a menos cuestionamientos por la inequidad de la entrega de recursos. Una posible línea de investigación sería el desarrollo de estos modelos de

asignación de recursos una vez que los cuadrantes están formados, o algún modelo que integre estos dos aspectos.

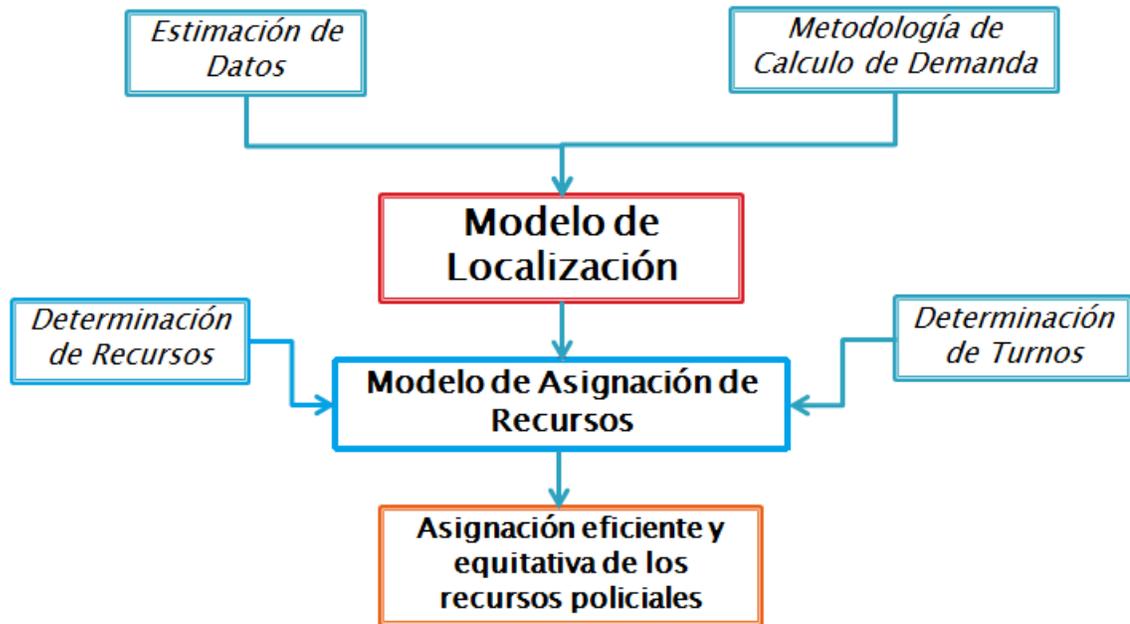


Figura 6.1: Alcances y limitaciones del Trabajo de Tesis. Elaboración Propia

6.4.2. Metodología de Diseño de Territorios

El input principal de este modelo es la demanda por recursos policiales, las cuales son calculadas en base a datos estadísticos, los cuales tienen un error asociado. Un posible línea de investigación sería agregar componentes aleatoriedad a este problema para ser enfrentados ya sea con herramientas de optimización estocástica o de optimización robusta.

Otra posible investigación futura sería ver el impacto en los índices delictuales o de otro estilo de cada una de las distribuciones, esto ya sea a través de métodos de simulación o algún otro método. Se hace relevante en este sentido integrar los resultados y análisis de estos modelos con algún Sistema de Información Geográfico (GIS).

Bibliografía

- [1] AARTS, E. E. H., AND LENSTRA, J. K. *Local search in combinatorial optimization*. Princeton University Press, 1997.
- [2] BAÇÃO, F., LOBO, V., AND PAINHO, M. Applying genetic algorithms to zone design. *Soft Computing* 9, 5 (2005), 341–348.
- [3] BAKER, J. R., CLAYTON, E. R., AND MOORE, L. J. Redesign of primary response areas for county ambulance services. *European journal of operational research* 41, 1 (1989), 23–32.
- [4] BARNHART, C., JOHNSON, E. L., NEMHAUSER, G. L., SAVELSBERGH, M. W., AND VANCE, P. H. Branch-and-price: Column generation for solving huge integer programs. *Operations research* 46, 3 (1998), 316–329.
- [5] BERGEY, P. K., RAGSDALE, C. T., AND HOSKOTE, M. A simulated annealing genetic algorithm for the electrical power districting problem. *Annals of Operations Research* 121, 1-4 (2003), 33–55.
- [6] BERTSIMAS, D., AND TSITSIKLIS, J. N. *Introduction to linear optimization*. Athena Scientific Belmont, 1997.
- [7] BODIN, L. D. A districting experiment with a clustering algorithm. *Annals of the New York Academy of Sciences* 219, 1 (1973), 209–214.
- [8] BOZKAYA, B., ERKUT, E., AND LAPORTE, G. A tabu search heuristic and adaptive memory procedure for political districting. *European Journal of Operational Research* 144, 1 (2003), 12–26.
- [9] BRUCE, C. Districting and resource allocation: A question of balance. *Geography & Public Safety* 1, 4 (2009), 1–3.
- [10] BUSTAMANTE MOSQUERA, S. Metodología para el rediseño de los cuadrantes utilizados por carabineros de Chile en el plan cuadrante de seguridad preventiva. Memoria (título ingeniero civil industrial), Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
- [11] CARO, F., SHIRABE, T., GUIGNARD, M., AND WEINTRAUB, A. School redistricting: Embedding gis tools with integer programming. *Journal of the Operational Research Society* 55, 8 (2004), 836–849.
- [12] CHILE. *Constitución Política de La República de Chile 1980*. 2012, ch. XI.

- [13] CHOU, C., KIMBROUGH, S., SULLIVAN-FEDOCK, J., WOODARD, C. J., AND MURPHY, F. H. Using interactive evolutionary computation (iec) with validated surrogate fitness functions for redistricting. In *Proceedings of the fourteenth international conference on Genetic and evolutionary computation conference* (2012), ACM, pp. 1071–1078.
- [14] CURTIN, K. M., HAYSLETT-MCCALL, K., AND QIU, F. Determining optimal police patrol areas with maximal covering and backup covering location models. *Networks and Spatial Economics* 10, 1 (2010), 125–145.
- [15] D’AMICO, S. J., WANG, S.-J., BATTÀ, R., AND RUMP, C. M. A simulated annealing approach to police district design. *Computers & Operations Research* 29, 6 (2002), 667–684.
- [16] DASKIN, M. S. What you should know about location modeling. *Naval Research Logistics (NRL)* 55, 4 (2008), 283–294.
- [17] DE CARABINEROS DE CHILE, D. G. *Metodología de Preparación y Evaluación de Proyectos de Vigilancia Policial*. Santiago, Chile, Diciembre 2007.
- [18] DE CARABINEROS DE CHILE, D. G. *Nuevo Manual Operativo del Plan Cuadrante de Seguridad Preventiva*. Santiago, Chile, 2010.
- [19] DE CHILE, C. Carabineros en cifras año 2012, 2013.
- [20] ERIKSON, R. S. Malapportionment, gerrymandering, and party fortunes in congressional elections. *The American Political Science Review* 66, 4 (1972), 1234–1245.
- [21] FLEISCHMANN, B., AND PARASCHIS, J. N. Solving a large scale districting problem: a case report. *Computers & Operations Research* 15, 6 (1988), 521–533.
- [22] GARFINKEL, R. S., AND NEMHAUSER, G. L. Optimal political districting by implicit enumeration techniques. *Management Science* 16, 8 (1970), B–495.
- [23] GEORGE, J. A., LAMAR, B. W., AND WALLACE, C. A. Political district determination using large-scale network optimization. *Socio-Economic Planning Sciences* 31, 1 (1997), 11–28.
- [24] GHONIEM, A., AND SHERALI, H. D. Defeating symmetry in combinatorial optimization via objective perturbations and hierarchical constraints. *IIE Transactions* 43, 8 (2011), 575–588.
- [25] GOMORY, R. E. Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs. *Bulletin of the American Mathematical Society* 64, 5 (1958), 275–278.
- [26] GOYCOOLEA, M., MURRAY, A. T., BARAHONA, F., EPSTEIN, R., AND WEINTRAUB, A. Harvest scheduling subject to maximum area restrictions: exploring exact approaches. *Operations Research* 53, 3 (2005), 490–500.

- [27] HESS, S. W., AND SAMUELS, S. A. Experiences with a sales districting model: criteria and implementation. *Management Science* (1971), P41–P54.
- [28] HESS, S. W., WEAVER, J., SIEGFELDT, H., WHELAN, J., AND ZITLAU, P. Nonpartisan political redistricting by computer. *Operations Research* 13, 6 (1965), 998–1006.
- [29] HOJATI, M. Optimal political districting. *Computers & Operations Research* 23, 12 (1996), 1147–1161.
- [30] HORN, M. E. Solution techniques for large regional partitioning problems. *Geographical Analysis* 27, 3 (1995), 230–248.
- [31] KALCSICS, J., MELO, T., NICKEL, S., AND GÜNDRA, H. Planning sales territories—a facility location approach. In *Operations Research Proceedings 2001* (2002), Springer, pp. 141–148.
- [32] KALCSICS, J., NICKEL, S., AND SCHRÖDER, M. Towards a unified territorial design approach—applications, algorithms and gis integration. *Top* 13, 1 (2005), 1–56.
- [33] KISTLER, A. Tucson police officers redraw division boundaries to balance their workload. *Geogr Public Saf* 1, 4 (2009), 3–5.
- [34] KUBY, M. J. Programming models for facility dispersion: The p-dispersion and maxisum dispersion problems. *Geographical Analysis* 19, 4 (1987), 315–329.
- [35] LI, Z., WANG, R.-S., AND WANG, Y. A quadratic programming model for political districting problem. Citeseer.
- [36] NEMHAUSER, G. L., AND WOLSEY, L. A. *Integer and combinatorial optimization*, vol. 18. Wiley New York, 1988.
- [37] NIEMI, R. G., GROFMAN, B., CARLUCCI, C., AND HOFELLER, T. Measuring compactness and the role of a compactness standard in a test for partisan and racial gerrymandering. *The Journal of Politics* 52, 04 (1990), 1155–1181.
- [38] NYGREEN, B. European assembly constituencies for wales - comparing of methods for solving a political districting problem. *Mathematical Programming* 42, 1-3 (1988), 159–169.
- [39] PAPAYANOPOULOS, L. Quantitative principles underlying apportionment methods. *Annals of the New York Academy of Sciences* 219, 1 (1973), 181–191.
- [40] PARKER, F. R. *Black votes count*. Univ of North Carolina Press, 1990.
- [41] RICCA, F., SCOZZARI, A., AND SIMEONE, B. Weighted voronoi region algorithms for political districting. *Mathematical and Computer Modelling* 48, 9–10 (2008), 1468 – 1477.

- [42] RICCA, F., SCOZZARI, A., AND SIMEONE, B. Political districting: from classical models to recent approaches. *4OR* 9, 3 (2011), 223–254.
- [43] RICCA, F., AND SIMEONE, B. Local search algorithms for political districting. *European Journal of Operational Research* 189, 3 (2008), 1409–1426.
- [44] SARAC, A., BATTÀ, R., BHADBURY, J., AND RUMP, C. Reconfiguring police reporting districts in the city of buffalo. *OR INSIGHT* 12 (1999), 16–24.
- [45] SERRA, D., AND MARIANOV, V. New trends in public facility location modeling. *UPF Economics and Business Working Paper*, 755 (2004).
- [46] THEOBALD, H. R. Equal representation: A study of legislative and congressional appointment in wisconsin. *The State of Wisconsin Blue Book* (1970), 71–260.
- [47] VERMA, A., RAMYAA, R., MARRU, S., FAN, Y., AND SINGH, R. Rationalizing police patrol beats using voronoi tessellations. In *Intelligence and Security Informatics (ISI), 2010 IEEE International Conference on* (2010), pp. 165–167.
- [48] VICKREY, W. On the prevention of gerrymandering. *Political Science Quarterly* 76, 1 (1961), 105–110.
- [49] YOUNG, H. P. Measuring the compactness of legislative districts. *Legislative Studies Quarterly* (1988), 105–115.
- [50] ZHANG, Y., AND BROWN, D. E. Police patrol district design using agent-based simulation and gis. In *Intelligence and Security Informatics (ISI), 2012 IEEE International Conference on* (2012), IEEE, pp. 54–59.
- [51] ZHANG, Y., AND BROWN, D. E. Police patrol districting method and simulation evaluation using agent-based model & gis. *Security Informatics* 2, 1 (2013), 7.

Apéndice A

Contraejemplo a la optimalidad de la regla de asignación de radio de alcance

En esta sección se describe una instancia en la que la regla de radio de alcance R cumple que para todo (i, j) tal que $y_{ij} = 1$ se tiene que $d_{ij} < R$ y sin embargo, no es el óptimo para el problema original. Consideramos como contraejemplo una instancia representada por una grilla cuadrada tal como lo indica la Figura (A.1), en donde dos celdas adyacentes están a distancia 1, es decir $d_{ik} = 1 \forall i \in I, k \in N(i)$. Además se tomará la desviación máxima de la demanda de un 10 %, es decir $\alpha = 0.1$, y que se quieren formar cuatro cuadrantes ($P = 4$).

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
M	N	O	P

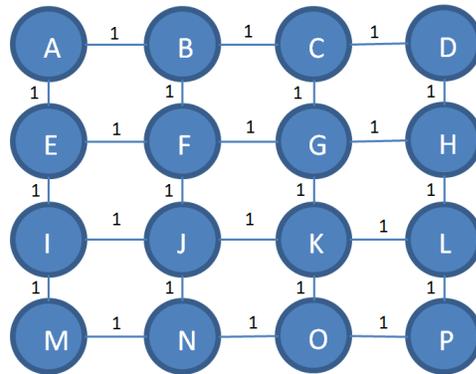


Figura A.1: Contraejemplo: Grafo generado por la disposición de los bloques. Elaboración Propia

La demanda está especificada en la Figura (A.2) y supondremos un radio de alcance máximo de $R = \sqrt{2} + \epsilon$ con algún $\epsilon \in (0, 2 - \sqrt{2})$. En la misma figura se muestra una distribución factible, pues cumple la restricción de equidad y además todos los bloques asignados cumplen que $d_{ij} < R$ para todos los (i, j) tal que $y_{ij} = 1$. Además esta solución al ser la única factible es la óptima. La idea

es mostrar que para ciertos valores de los parámetros $(\{\theta_i\}_{i=1}^3, \beta)$ de la función objetivo levantar la restricción de radio de alcance esta solución deja de ser óptima.

0	10	10	5
10	10	10	10
5	10	10	10
10	13	10	0

Figura A.2: Contraejemplo: Demanda tipo reacción. Elaboración Propia

En la Figura (A.3) se muestran las componentes de la demanda de prevención, en donde suponemos que $\lambda > 1$ es un parámetro conocido. Con esto es posible calcular los costos de la asignación en función de los parámetros. El costo total de esta distribución se calcula como sigue:

$$(A.1) \quad \begin{aligned} C_1 &= \theta_1 \cdot (9 + 3\sqrt{2}) \\ &+ \theta_2 \cdot (7 + 4 \cdot 2^\beta + 3^\beta) \\ &+ \theta_3 \cdot (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) \end{aligned}$$

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
λ	1	1	1

(a)

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	λ

(b)

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

(c)

Figura A.3: Contraejemplo: Las tres componentes de la demanda tipo prevención. (a) Kilómetros Lineales (b) Población (c) Nivel de Delito. Elaboración Propia

Los valores de $\{\gamma_p\}_{p=1}^4$ se calculan como el máximo de la suma de los 3 componentes de la demanda preventiva. El cálculo se detalla en la Tabla A.1:

Cuadrante	KM	Población	Nivel de Delito	γ_p
1	5	5	5	$\text{máx}\{5, 5, 5\} = 5$
2	4	4	4	$\text{máx}\{4, 4, 4\} = 4$
3	$2 + \lambda$	3	3	$\text{máx}\{2 + \lambda, 3, 3\} = 2 + \lambda$
4	4	$3 + \lambda$	4	$\text{máx}\{4, 3 + \lambda, 4\} = 3 + \lambda$

Tabla A.1: Cálculo de las demandas tipo prevención para este ejemplo. Fuente: Elaboración Propia

Con esto reemplazando en la ecuación (A.1), el costo total del cuadrante viene dado por:

$$(A.2) \quad C_1 = \theta_1 \cdot (9 + 3\sqrt{2}) + \theta_2 \cdot (7 + 4 \cdot 2^\beta + 3^\beta) + \theta_3 \cdot (14 + 2 \cdot \lambda)$$

Ahora consideramos la solución que es inducida por cambiar el bloque P al cuadrante 3. Esta solución sigue respetando la restricción de equidad en la demanda, sin embargo no respeta la restricción de radio de alcance R . En la tabla A.2 se muestran los valores de $\{\gamma_p\}_{p=1}^4$ para esta solución:

Cuadrante	KM	Población	Nivel de Delito	γ_p
1	5	5	5	$\text{máx}\{5, 5, 5\} = 5$
2	4	4	4	$\text{máx}\{4, 4, 4\} = 4$
3	$3 + \lambda$	$3 + \lambda$	3	$\text{máx}\{3 + \lambda, 3 + \lambda, 3\} = 3 + \lambda$
4	3	3	3	$\text{máx}\{3, 3, 3\} = 3$

Tabla A.2: Cálculo de las demandas tipo prevención para este ejemplo con la nueva asignación. Fuente: Elaboración Propia

Con esto el valor de esta nueva solución en función de los parámetros del problema sería:

$$(A.3) \quad C_2 = \theta_1 \cdot (11 + 2\sqrt{2}) + \theta_2 \cdot (5 + 7 \cdot 2^\beta + 3^\beta) + \theta_3 \cdot (15 + \lambda)$$

Ahora tomando por ejemplo $\theta_i = 1, \forall i = 1, 2, 3$, $\beta = 2$ y $\lambda = 15$ se tiene que el costo de las soluciones son $C_1 \approx 89.24$ y $C_2 \approx 85.83$. Por lo que, la solución deja de ser óptima, por lo que encontramos un ejemplo en donde las soluciones cumplan con holgura las restricciones de alcance, y sin embargo al levantar esta restricción la solución dejaba de ser óptima.

Lo acá discutido muestra un aspecto relevante de esta restricción de radio de alcance. A pesar de que esta regla estaba omitiendo una solución óptima, esta solución generaba una partición de los bloques que no necesariamente es una distribución, es decir, que los bloques de una misma partición no eran contiguos. Acá se eliminó una solución de cierto modo costo eficiente, pero desde el punto de vista geométrico del problema era una mala solución.