UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

PRECIO DE LA ANARQUÍA EN MECANISMOS DE ASIGNACIÓN DE RECURSOS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

PABLO ALEJANDRO KOCH KAKARIEKA

PROFESOR GUÍA:
JOSÉ CORREA HAEUSSLER

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JOSÉ CORREA HAEUSSLER
HECTOR RAMÍREZ CABRERA
MARIO BRAVO GONZÁLEZ

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por Nucleo Milenio Información y Coordinación en Redes ICM/FIC P10-024F, y por Proyecto FONDECYT 1130671.

SANTIAGO DE CHILE
ENERO 2014

Resumen

En esta memoria estudiaremos el problema de asignar un recurso divisible a un conjunto de n jugadores cuyas valoraciones por el recurso o una fracción de este son desconocidas. Kelly (1997) propuso el mecanismo de asignación proporcional en que los jugadores ofrecen cierta cantidad, y reciben una fracción del bien proporcional a su oferta. Johari y Tsitsiklis en 2004 demuestran que este mecanismo entrega siempre soluciones cuya utilidad social es al menos un 75 % de la óptima. En esta memoria estudiaremos una extensión de este mecanismo. En ella, se consideran dos etapas y en cada una de ellas se utiliza el mecanismo proporcional, con la salvedad que en la segunda etapa los jugadores tienen dotaciones iniciales del recurso. Este juego es bastante mas complejo pues en particular requiere que los jugadores anticipen el resultado de la segunda etapa para determinar sus ofertas óptimas en la primera. Esto nos lleva al concepto de equilibrio perfecto en subjuegos. Nuestro principal resultado es un teorema de existencia de equilibrio en estrategias mixtas para este juego. Observamos que esto no se deduce del teorema de Nash pues el conjunto de estrategias puras en nuestro caso no es finito. Luego demostramos que en el caso de dos jugadores y funciones de utilidad lineal el juego posee un equilibrio en estrategias puras. Finalmente demostramos que el precio de la anarquía, que cuantifica la ineficiencia de los equilibrios con respecto a la solución socialmente óptima es a lo más $2\sqrt{2}-2$, complementando un resultado de Prakash Azad y Musacchio. En el camino demostramos numerosas propiedades estructurales de los equilibrios en nuestro juego.

Familia y amistades

Agradecimientos

A la tía Elena por pagarme la U. A José Correa y a Andres Perlroth por la disposición a ayudar en este trabajo. Al tío Alejandro, la Elena y al Freddy por los buenos momentos (lease, copete). A mis amistades y mi familia en general. A la Chacra (rama de ajedrez). A quien lea los agradecimientos.

Tabla de contenido

Índice de figuras

Introducción

En esta memoria, vamos a estudiar un mecanismo de asignación de un recurso divisible. En este mecanismo, hay un administrador del recurso, y un número finito de usuarios, los cuales compiten entre si para obtener una fracción del recurso. El administrador le debe entregar una fracción del recurso a cada usuario, de tal manera que entre todos los usuarios se lleven el recurso. Para poder modelar este problema, asumiremos que los usuarios tienen una función de utilidad que es al menos creciente en la fracción del recurso que reciben.

Una forma de asignar el recurso entre los usuarios, es el mecanismo de asignación proporcional, el cual es estudiado por Kelly [10] y Johari y Tsitsiklis [7]. Este mecanismo consiste en que los usuarios le ofrecen al administrador un cierto valor, y el administrador les asigna una fracción del recurso proporcional a sus ofertas. En esta memoria estudiamos una versión en dos etapas de este mecanismo, la cual es estudiadada también por Azad y Musacchio [1]. En la primera etapa del mecanismo a dos etapas, el administrador le pregunta a los usuarios sus valoraciones del recurso, estos le ofrecen al administrador un cierto valor, y el administrador les asigna una fracción del recurso proporcional a sus ofertas. En la segunda etapa, el administrador le vuelve a preguntar a los usuarios sus valoraciones del recurso, y ellos vuelven a ofrecerle al administrador un cierto valor. Con esto se fija el precio unitario del recurso como la suma de las ofertas en la segunda etapa. Posteriormente, los jugadores le venden al administrador su fracción original del recurso, al precio fijado en la segunda etapa, y finalmente reciben la fracción del recurso proporcional a sus apuestas de la segunda etapa. Si asumimos de que los usuarios son racionales y egoístas, este mecanismo define un juego entre los usuarios. La noción de equilibrio que usamos para analizar este mecanismo es conocida como equilibrio perfecto en subjuegos, que denotaremos SPE. Un perfil de estrategias es un SPE si genera un equilibrio de Nash (lo cual denotaremos NE) en cada subjuego del juego original. Acá, el juego será el dado por el mecanismo de asignación proporcional en dos etapas.

Las aplicaciones de este tipo de mecanismo se dan por ejemplo en las redes de comunicación tales como internet en banda ancha. Los mecanismos de asignación en 2 etapas, son usados en el mercado de la electricidad. Acá el recurso divisible es la electricidad producida por los generadores. El “administrador” son los generadores de electricidad, mientras que los “usuarios” son las empresas que usan dicha electricidad. En este contexto, los mercados a 2 etapas se conocen como mercados “forward-spot”. Los mercados “forward” (lo que podemos traducir como mercados de antemano) le permiten a los consumidores (empresas) y productores (generadores) planificar el consumo y producción del recurso (como la electricidad) de antemano. Sin embargo entre el momento en que el mercado “forward” es ejecutado, y el momento en que el servicio (como la electricidad) es entregado, pueden ocurrir eventos inesperados, que afectan el costo de entregar y/o recibir el recurso. Por lo tanto también hay un mercado "spot" (lo que podemos traducir como mercado "en el momento"), en el cual los consumidores y productores puedan actuar despues de suceder los eventos inesperados.

En esta memoria mostramos existencia de un equilibrio perfecto en el subjuego, en estrategias mixtas, usando un resultado de Maskin-Dasgupta [13]. Notamos que no podemos usar directamente el teorema de existencia de equilibrios en estrategias mixtas de Nash, pues en este juego los espacios de estrategias de los jugadores no son finitos. También mostramos de que en un par de instancias particulares, obtenemos una noción mas fuerte de equilibrio entre los usuarios. Prakash Azad y Musacchio también mostraron que, cuando los usuarios poseen utilidades lineales, la peor ineficiencia de un equilibrio perfecto del subjuego, conocida como precio de la anarquía, no puede ser peor que $2\sqrt{2}-2$. Acá mostramos que hay una familia de instancias del juego, donde la ineficiencia del equilibrio con utilidades lineales llega a ser $2\sqrt{2}-2$. Esto es relevante porque muestra que en el caso en que las utilidades sean lineales, la mejor cota inferior de la ineficiencia de los equilibrios es $2\sqrt{2}-2$.

Capítulo 1

Algunos resultados útiles sobre existencia de equilibrios

En esta sección revisaremos algunos resultados que nos serán de utilidad para estudiar juegos, donde los conjuntos de estrategias puras de los jugadores son infinitos.

Definición 1.1 *[Juego en forma estratégica]*

Definimos un juego en forma estratégica por $J = (I, (S_i)_{i \in I}, (u_i)_{i \in I})$, *donde*

- I *es el conjunto (finito) de jugadores,*
- *para cada* $i \in I$, S_i *es el espacio de estrategias puras del i-ésimo jugador,*
- *para cada* $i \in I$, $u_i : S_i \mapsto \mathbb{R}$ *es la función de pago del i-ésimo jugador.*

El teorema de Nash [12] dice que todo juego finito (es decir, un juego de la forma $J = (I, (S_i)_{i \in I}, (u_i)_{i \in I})$, donde para cada $i \in I$, S_i es un conjunto finito) posee un equilibrio de Nash en estrategias mixtas. Sin embargo este teorema no se aplica en el caso de que el juego no sea finito, es decir, en el caso en que exista un $i \in I$ tal que S_i sea un conjunto infinito.

1.1. Definiciones

Definición 1.2 *[Estrategias puras]*

Sea S_i *el espacio de estrategias del jugador* $i \in I$. *Una estrategia pura del jugador* $i \in I$, *es un elemento* $s_i \in S_i$. *Denotamos por* $s = (s_i, s_{-i}) \in S = \Pi_{i \in I} S_i$ *a un perfil de estrategias de todos los jugadores, y* $s_{-i} \in S_{-i} = \Pi_{j \neq i} S_j$ *al perfil de estrategias de todos los jugadores salvo el i-ésimo.*

Para la siguiente definición, supongamos que para cada $i \in I$, S_i es un convexo compacto.

Definición 1.3 *[Estrategias mixtas]*

Sea $i \in I$ y sea $X_i = (C(S_i;\mathbb{R}))^*$ el dual topológico de las funciones continuas a soporte compacto, que van de S_i a $\mathbb{R}$. Decimos que μ_i es una estrategia mixta del jugador $i \in I$ si

- *$\mu_i \in X_i$ (ie, es una medida de radón),*
- *$\mu_i(S_i) = 1$,*
- *μ_i es una medida positiva, regular.*

Decimos que el conjunto $T_i = \{\mu_i \in X_i / \mu_i(S_i) = 1, \mu_i \geq 0\}$ es el espacio de estrategias mixtas del jugador $i \in I$.

Definición 1.4 *[Equilibrio de Nash en estrategias puras]*

Decimos que $s^* = (s_i^*)_{i\in I} \in S = \Pi_{i\in I} S_i$ es un equilibrio de Nash en estrategias puras del juego si y solo si para cada jugador $i \in I$ y para cada $s_i \in S_i$ tenemos que

$$u_i(s_i, s_{-i}^*) \leq u_i(s^*)$$

Es decir, si a ningún jugador le conviene jugar individualmente algo distinto a s_i^* cuando los demás juegan s_{-i}^*.

Definición 1.5 *[Equilibrio de Nash en estrategias mixtas]*

Sea, para cada $i \in I$, S_i un convexo compacto. Decimos que $\mu^* = (\mu_1^*, ..., \mu_N^*)$ es un NE en estrategias mixtas para el juego $J = (I, (S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I})$, donde u_i son las funciones (continuas) de pago de cada jugador, S_i sus espacios de estrategias, si es que para todo $i \in I$ tenemos que μ_i^* maximiza

$$\bar{u}_i(\mu_i, \mu_{-i}^*) = \int_{S_1\times\ldots\times S_N} u_i(s_i, s_{-i}) d\mu_i(s_i) d\mu_{-i}^*(s_{-i})$$

sobre T_i.

Definición 1.6 *[Semi-continuidad superior e inferior de funciones]*

Sea A un espacio de Banach. Decimos que $f : C \subseteq A \mapsto \mathbb{R}$ es semi-continua superior en $c \in C$ (como función), si para toda sucesión $(c_n)_n \in C$ tal que $c_n \to c$, tenemos que

$$f(c) \geq \limsup_{n\to\infty} f(c_n)$$

Decimos que f es semi-continua inferior en $c \in C$ si $-f$ es semi-continua superior en c.

Además, f es semi-continua superior en C si lo es para todo $c \in C$. Y es semi-continua inferior en C si $-f$ es semi-continua superior en C.

A continuación vamos a ver una noción que extiende la noción de función.

Definición 1.7 *[Multi-función]*

Sean A, B conjuntos. Decimos que F es una multi-función de A en B, y lo denotamos $F : A \rightrightarrows B$ cuando, para cada $a \in A$, tenemos que $F(a) \subseteq B$.

Definición 1.8 *[Semi-continuidades de multi-funciones]*

Decimos que $F : X \rightrightarrows Y$ es semi continua superior en x_0 si para todo abierto G, tal que $F(x_0) \subseteq G$, existe una vecindad U de x_0 tal que $x \in U \Rightarrow F(x) \subseteq G$.

Decimos que $F : X \rightrightarrows Y$ es cerrada si el grafo de F, es decir, el conjunto $grafo(F) = \{(x, y) \in X \times Y / y \in F(x)\}$ es cerrado en la topología producto de $X \times Y$.

Definición 1.9 *Decimos que $f : X \to \mathbb{R}$ es cuasi-convexa si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{f(x) \leq \alpha\}$ es convexo. Similarmente, decimos que f es cuasi-cóncava si $-f$ es quasi-convexa.*

Definición 1.10 *[Multi-función de mejor respuesta]*

Definimos la multi-función de mejor respuesta por la multi-función $BR : S \rightrightarrows S$ tal que, para todo $s \in S = \Pi_{i \in I} S_i$ y para todo $i \in I$ tenemos que

$$BR_i(s_{-i}) = \arg\max_{s \in S_i} u_i(s, s_{-i})$$

Es decir, para todo jugador i, $BR_i(s_{-i}) \subseteq S_i$ es el conjunto de las mejores estrategias del jugador i cuando los demas jugadores han jugado s_{-i}

Decimos que $s \in S$ es un punto fijo de BR si es que $s \in BR(s)$. Es fácil notar que s es un NE de (J) si y solo si s es un punto fijo de BR. En efecto, si $s \in S$ es un NE del juego entonces tenemos que para todo $i \in I$, $s_i \in BR_i(s_{-i})$ de donde se concluye que $s \in BR(s)$. Recíprocamente, si $s \in BR(s)$ entonces para todo $i \in I$, $s_i \in S_i$ maximiza $u_i(\cdot, s_{-i})$, por lo que se concluye que s es un NE del juego.

1.2. Existencia de equilibrios de Nash en estrategias puras

1.2.1. Teorema de Debreu-Glicksberg-Fan

Para buscar puntos fijos de multi-funciones, vamos a intentar generalizar a multi-funciones el siguiente teorema.

Teorema 1.11 *[2]Teorema del punto fijo de Brower*

Sea $f : K \mapsto K$ una función continua, donde K es un subconjunto convexo y compacto de $\mathbb{R}^N$. Entonces existe $x \in K$ tal que $x = f(x)$

El siguiente teorema, es una extensión del resultado previo, al caso de multi-funciones

Teorema 1.12 *[9](Teorema del punto fijo de Kakutani)*

Sea K un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y $F : K \rightrightarrows K$ una multifunción semi-continua superior con valores no vacíos, compactos y convexos. Entonces existe $x \in K$ tal que $x \in F(x)$

Este teorema lo podemos aplicar para encontrar equilibrios de Nash. Una aplicación en ese sentido, es el siguiente teorema de Debreu, Glicksberg y Fan.

Teorema 1.13 *[3](Teorema de Debreu-Glicksberg-Fan)*

Consideremos un juego en forma estratégica $J = (I, (S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I})$, tal que para cada $i \in I$,

- *S_i is compacto y convexo,*
- *$u_i(s_i, s_{-i})$ es continua en s,*
- *$u_i(s_i, s_{-i})$ es quasi-cóncava en s_i.*

Entonces el juego posee un equilibrio en estrategias puras.

Observemos que podemos obtener un resultado levemente más general que éste con una demostración muy similar:

Corolario 1.14 *Consideremos un juego en forma estratégica dado por $(I, (S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I})$, tal que para cada $i \in I$,*

- *S_i is compacto y convexo,*
- *$u_i(s_i, s_{-i})$ es continua en s,*
- *para todo $s_{-i} \in S_{-i}$ existe un $\alpha_0 \leq \max_{s\in S_i} u_i(s, s_{-i})$ tal que para todo $\alpha \geq \alpha_0$, tenemos que el conjunto $\{s \in S_i / u_i(s, s_{-i}) \geq \alpha\}$ es convexo.*

Entonces el juego posee un equilibrio en estrategias puras

1.2.2. Extensiones

En esta sección mostraremos extensiones del teorema de Debreu-Glicksberg-Fan al caso donde las funciones de utilidad de los jugadores, u_i, no son continuas. También se puede extender este teorema cuando las funciones $u_i(\cdot, s_{-i})$ no son quasi-concavas, ver por ejemplo [15], [20], [11].

Mostraremos algunas nociones débiles de continuidad, que son útiles a la hora de mostrar teoremas de existencia de equilibrio en estrategias puras. Además, mostraremos las relaciones que existen entre estas nociones. Para ver más de estas nociones, se pueden consultar [15].

Definición 1.15 *Definimos la función de utilidad agregada* $U : S \times S \mapsto \mathbb{R}$ *por*

$$U(s,t) = \sum_{i=1}^{N} u_i(t_i, s_{-i})$$

para todo $(s,t) \in S \times S$

Sea $\Gamma = \{(s,u) \in S \times \mathbb{R}^n / u_i(s) = u_i \forall i \in \{1,...,N\}\}$ el grafo del juego. Denotemos por $cl(\Gamma)$ a la clausura del grafo del juego, y por $Fr(\Gamma)$ a su frontera.

Definición 1.16 *[15]*

Un juego $J = (I, (S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I})$ *tiene seguridad de mejor respuesta si para todo* $(s^*, u^*) \in cl(\Gamma)$*, y si* s^* *no es un equilibrio, entonces hay un jugador* i *y una estrategia* $\bar{s}_i \in S_i$ *tal que* $u_i(\bar{s}_i, t_{-i}) \geq u_i^*$ *para todo* t_{-i} *en una vecindad abierta de* s^*_{-i}*.*

Observación Sea $(s,u) \in cl(\Gamma)$. Si s no es un equilibrio, existe un $i \in I$ y un $\bar{s}_i \in S_i$ tal que $u_i(\bar{s}_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$. Si para todo i los u_i son continuos entonces tenemos que existe una vecindad abierta de s_{-i} tal que para todo t_{-i} en esa vecindad, $u_i(\bar{s}_i, t_{-i}) \geq u_i(s_i, t_{-i})$. Para concluir, notamos que como los u_i son continuos, entonces tenemos que $cl(\Gamma) = \Gamma$, con lo que concluimos. Por lo tanto el juego $J = (I, (S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I})$ verifica seguridad de mejor respuesta.

Observación Esta noción nos dice que, cuando s no es un equilibrio, (ie, si hay un jugador i y un $\bar{s}_i \in S_i$ tal que $u_i(\bar{s}_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$), entonces, de hecho, $\bar{s}_i$ no solo es mejor respuesta que s_i para el jugador i cuando los demás juegan s_{-i}, sino que lo es también cuando los demás juegan algún t_{-i} cercano a s_{-i}.

Definición 1.17 *[15]*

Un juego es débilmente de transferencia cuasi-continuo si, cuando $s \in S$ *no es un equilibrio, entonces existe un perfil de estrategias* $t \in S$ *y una vecindad* $V(s)$ *de* s *tal que para todo* $s' \in V(s)$ *tenemos que existe un* i *tal que* $u_i(t_i, s'_{-i}) > u_i(s')$

Ahora mostraremos la relación mas importante entre estas nociones débiles de continuidad (ver [15], [20])

Teorema 1.18 *[15]*

Si un juego $(I, (S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I})$ *verifica seguridad de mejor respuesta, entonces el juego es debilmente de transferencia cuasi-continuo*

En el teorema de Debreu-Glicksberg-Fan, el requerimiento de que las funciones de pago sean continuas y cuasi-cóncavas puede resultar demasiado restrictivo. En muchos problemas, tenemos de que las funciones de pago resultan no ser continuas. En este trabajo tampoco pudimos mostrar de que las funciones de pago fueran cuasi-cóncavas. Por esto, nos preguntamos si podemos relajar las condiciones sobre las funciones de pago, y aún así garantizar existencia de NE.

En este trabajo, usaremos el siguiente teorema (ver [15], [20]). Para ver mas extensiones, se puede consultar [15], [20], [11]

Teorema 1.19 *Si el juego* $(I, (S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I})$ *es tal que:*

- *para todo* $i \in I$*,* S_i *es compacto convexo,*
- *las funciones* u_i *son acotadas*
- *el juego es débilmente cuasi-continuo de transferencia y cuasi-cóncavo*

Entonces el juego posee un NE en estrategias puras

1.3. Existencia de NE en estrategias mixtas

Para poder mostrar la existencia de un NE en estrategias mixtas, necesitamos el siguiente teorema de glicksberg, que es una extensión de Kakutani (ver [4]) :

Teorema 1.20 *[4][Extensión de Kakutani]*

Sea X *un espacio topológico, lineal, convexo y Haussdorff, y* $S \subset X$ *un convexo compacto. Luego, si* $F : S \rightrightarrows S$ *es una multifunción cerrada y a valores convexos, existe un* x *tal que* $x \in F(x)$*.*

Luego, del teorema de glicksberg podemos deducir el siguiente corolario ([4])

Teorema 1.21 *[4][Teorema de existencia de Glicksberg]*

Consideremos un juego donde los espacios de estrategias son convexos compactos, y las funciones de utilidad son continuas. Entonces, el juego posee un NE en estrategias mixtas

Ahora, buscamos generalizar el teorema de Glicksberg para garantizar existencia de NE en estrategias mixtas cuando las funciones no son continuas.

Mostraremos un teorema, conocido como el teorema de Dasgupta-Maskin, que generaliza el teorema de Glicksberg, al establecer que un juego cuyos espacios de estrategias sean compactos y convexos de $\mathbb{R}^N$ posee un NE si es que las funciones de pago de los jugadores verifican cierta forma de semi-continuidad superior y semi-continuidad inferior.

Fijemos un juego de la forma $(I, (S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I})$ donde $S_i \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo cerrado, e $I = \{1, .., N\}$ con $N \in \mathbb{N}$. Ademas, las discontinuidades de u_i están restringidas a un subconjunto de una subvariedad continua de dimensión menor que N.

Para enunciar el teorema necesitamos las siguientes definiciones (ver [13]).

Para cada $i, j \in \{1, .., N\}$, sea $D(i) \in \mathbb{N}$ y para cada $d \in \{1, .., D(i)\}$, sea $f_{ij}^d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una biyección continua. Finalmente, para cada i, definamos

$$S^*(i) = \{(s_1, ..., s_N) \in S / \exists j \neq i, \exists d, 1 \leq d \leq D(i) \text{ tal que } s_j = f_{ij}^d(s_i)\},$$

el cual es el conjunto de posibles discontinuidades de la función u_i. Es decir, asumimos que las discontinuidades de u_i están restringidas a un subconjunto $S^{**}(i)$ de $S^*(i)$. Notemos que $S^*(i)$ es de medida de Lebesgue nula (ver [13]).

Tambien, definamos para todo $s_i \in S_i$,

$$S_{-i}^*(s_i) = \{s_{-i} \in S_{-i} / (s_i, s_{-i}) \in S^*(i)\},$$

y

$$S_{-i}^{**}(s_i) = \{s_{-i} \in S_{-i} / (s_i, s_{-i}) \in S^{**}(i)\}.$$

Ahora, hagamos la siguiente definición (ver [13])

Definición 1.22 *Sea $S_i^{**}(i)$ la proyección de $S^{**}(i)$ sobre S_i, es decir, $S_i^{**}(i) = \{s_i \in S_i / S_{-i}^{**}(s_{-i}) \neq \phi\}$. La función $u_i(s_i, s_{-i})$ es debilmente semi-continua inferior en s_i si para todo $\bar{s}_i \in S_i^{**}(i)$ existe un $\lambda \in [0,1]$ tal que para todo $s_{-i} \in S_{-i}^{**}(\bar{s}_i)$ tengo que*

$$\lambda \liminf_{s_i \to \bar{s}_i^-} u_i(s_i, s_{-i}) + (1-\lambda) \liminf_{s_i \to \bar{s}_i^+} u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(\bar{s}_i, s_{-i})$$

Con esto, tenemos el teorema de Dasgupta-Maskin

Teorema 1.23 *[13][Teorema de Dasgupta-Maskin]*

Sea $S_i \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo cerrado para todo $i \in I$ y sea $u_i : S_i \mapsto \mathbb{R}$ continua salvo en un subconjunto $S^{**}(i)$ de $S^*(i)$. Supongamos tambien que $\sum_j u_j(s)$ es semi-continua superior en S y que $u_i(s_i, s_{-i})$ es acotada, y débilmente semi-continua inferior en s_i. Entonces el juego posee un NE en estrategias mixtas

Capítulo 2

Mecanismos de asignación proporcional

Consideremos un administrador de un recurso divisible, y N usuarios. El i-ésimo usuario valora en $U_i(y)$ poseer una fración y del recurso, donde $U_i : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es una función 2 veces derivable, cóncava y estrictamente creciente. El administrador busca alguna forma de repartir dicho recurso.

Kelly [10] propone el siguiente mecanismo para que el administrador del recurso lo asigne entre los jugadores:

- Primero, todos los jugadores le hacen una oferta $v_i \geq 0$ al administrador, con $i \in \{1, .., N\}$.
- Posteriormente el administrador, le asigna al i-ésimo jugador una fracción $y_i = v_i/\rho$ del recurso, donde $\rho = \sum_{i=1}^{N} v_i$ es el precio unitario del recurso.

Asi, definimos el juego a una etapa $(J) = (I$, donde el objetivo del i-ésimo jugador es elegir $v_i \geq 0$ de tal forma de maximizar su pago total dado por

$$J_i(v_i, v_{-i}) = U_i(y_i) - v_i.$$

Definición 2.1 *Estrategia pura*

Una estrategia pura para el jugador i es un valor $v_i \geq 0$

A continuación vamos a definir la noción de equilibrio de Nash de este juego.

Definición 2.2 *Equilibrio de Nash*

Decimos que $v^* \in \mathbb{R}_+^N$ es un NE de este juego si para todo i y para todo $v_i \geq 0$ tenemos que

$$J_i(v_i^*, v_{-i}^*) \geq J_i(v_i, v_{-i}^*).$$

Definición 2.3 *Definimos el N-simplex por el conjunto $\Delta \subseteq \mathbb{R}^N$ tal que*

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^N_+ / x \geq 0, \sum_{i=1}^{N} x_i = 1\}.$$

También, definimos el conjunto Δ_0 como el simplex menos la base canónica de $\mathbb{R}^N_+$, es decir

$$\Delta_0 = \Delta \setminus \{e_1, ..., e_N\}.$$

Definición 2.4 *Utilidad social*

Sea $y \in \Delta$ tal que para cada jugador, su asignación es y_i. Entonces la utilidad social viene dada por

$$U(y) := \sum_i U_i(y_i).$$

Sea $y^{SO} = (y_1^{SO}, ..., y_N^{SO})$ la asignación socialmente eficiente, i.e., la que maximiza la cantidad anterior.

Tambien denotemos por $y^* = (y_1^*, ..., y_N^*)$ la asignación que es generada a partir de un NE del juego (el cual siempre existe [8], [16]), es decir, si v^* es un NE del juego, entonces y^* viene dada por

$$y_i^* = \frac{v_i^*}{\sum_{j=1}^{N} v_j^*}$$

Definición 2.5 *Eficiencia del NE y PoA*

La eficiencia del equilibrio se define como

$$E = \frac{U(y^*)}{U(y^{SO})}$$

Por último se define el precio de la anarquía del juego como la peor eficiencia alcanzada por un NE. Formalmente, sea

$$\Omega = \{U / U : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}, U \text{ es cóncava, 2 veces derivable y estrictamente creciente}\}$$

Entonces el precio de la anarquía del juego viene dado por

$$PoA = \inf_{\substack{N \in \mathbb{N} \\ (U_1, .., U_N) \in \Omega^N}} \frac{U(y^*)}{U(y^{SO})}$$

En este juego, sabemos que siempre existe un único NE. Además, sabemos que el precio de la anaquía es $3/4$. (ver [8], [16])

Esto nos motiva a preguntarnos si existen mecanismos similares a este que permitan llegar a equilibrios más eficientes. En particular, si al agregar algunas rondas, mejorar la eficiencia de los equilibrios. Esto es lo que hemos investigado en esta memoria.

El mecanismo que estudiaremos, consiste en una versión de dos rondas del mecanismo original. Este mecanismo fué propuesto y estudiado en [1].

El nuevo mecanismo que usa el administrador del recurso para asignarlo entre los jugadores, es el siguiente:

- En la primera etapa, los jugadores le ofrecen al administrador un valor $w_i \geq 0$ por el recurso, con $i \in \{1, ..., N\}$.
- Posteriormente el administrador, le asigna al jugador i-ésimo una fracción $x_i = w_i/\mu$ del recurso, donde $\mu = \sum_{i=1}^{N} w_i$ es el precio unitario del recurso en la primera etapa.
- Con esto los jugadores saben cuales son las asignaciones x.
- En la segunda etapa, los jugadores le ofrecen al administrador un valor $v_i \geq 0$ por el recurso, con $\{i \in \{1, ..., N\}$.
- Posteriormente, cada jugador vende la fracción del recurso que le habían asignado, x_i a un precio ρx_i y recibe una fracción $y_i = w_i/\rho$ del recurso, donde $\rho = \sum_{i=1}^{N} v_i$ es el precio unitario del recurso en la segunda etapa.

Es decir, se define un juego (J) entre los jugadores, donde el jugador i-ésimo escoge sus apuestas w_i de la primera etapa y v_i de la segunda etapa, de forma de maximizar

$$L_i(w, v) = U_i(y_i) - v_i + \rho x_i - w_i$$

A continuación vamos a definir

Definición 2.6 *Estrategia pura*

Una estrategia pura para el jugador i es un par $(w_i, v_i(\cdot) : \mathbb{R}_+^n \mapsto \mathbb{R}_+)$, donde, v_i es función del perfil $w = (w_1, ..., w_N)$ de estrategias de los jugadores en la primera etapa.

A continuación vamos a definir la noción de equilibrio de Nash de este juego, que se conoce como un SPE (subgame perfect equilibrium).

Definición 2.7 *SPE en estrategias puras*

Un SPE en estrategias puras es un par $(w^*, v^*(\cdot))$, donde $v^* : \Delta \mapsto \mathbb{R}_+^N$, que verifica que para cada jugador i, se tiene que

$$\begin{aligned} v_i^*(w^*) &\in \arg\max_{v_i \in \mathbb{R}_+} L_i(w^*, \{v_{-i}^*, v_i\}) \\ w_i^* &\in \arg\max_{w_i \in \mathbb{R}_+} L_i(\{w_{-i}^*, w_i\}, v^*(\{w_{-i}^*, w_i\})) \end{aligned}$$

Es decir, dado $w \in \mathbb{R}_+^N$ (que interpretamos como las estrategias de la primera etapa), obtenemos x tal que para todo i, $x_i = w_i / \sum_{j=1}^N w_j$. Así, definimos el subjuego $(SJ2)_x$ en el cual el pago del i-ésimo jugador viene dado por

$$K_{i,x}(v_i, v_{-i}) = \begin{cases} U_i\left(\frac{v_i}{\sum_{j=1}^N v_j}\right) - v_i + \left(\sum_{j=1}^N v_j\right) x_i & \text{si } v_i > 0, \\ U_i(0) + \left(\sum_{j\neq i} v_j\right) x_i & \text{si } v_i = 0. \end{cases}$$

Decimos que v^* es un NE de $(SJ2)_x$ si es que para todo i y para todo $v_i \geq 0$ tenemos que

$$K_{i,x}(v_i^*, v_{-i}^*) \geq K_{i,x}(v_i, v_{-i}^*).$$

Si es que para todo x tenemos que existe un único NE del subjuego $(SJ2)_x$, el cual denotamos v_x^*, entonces podemos definir la función $v^* : \Delta \mapsto \mathbb{R}_+^N$ por $v^*(x) = v_x^*$.

A continuación definimos el subjuego correspondiente a la primera etapa, $(SJ1)$ en el cual el pago del i-ésimo jugador viene dado por

$$J_i(w_i, w_{-i}) = U_i\left(\frac{v_i^*(x)}{\sum_{j=1}^N v_j^*(x)}\right) - v_i^*(x) + \left(\sum_{j=1}^N v_j^*(x)\right) x_i - w_i.$$

Decimos que w^* es un NE de $(SJ1)$ si es que para todo i y para todo $w_i \geq 0$ tenemos que

$$J_i(w_i^*, w_{-i}^*) \geq J_i(w_i, w_{-i}^*).$$

De esta manera, un SPE es un par $(w^*, v^*(\cdot))$ que verifica que

- w^* es un NE en estrategias puras de $(SJ1)$
- Para todo $x \in \Delta$ tenemos que $v^*(x)$ es el NE en estrategias puras de $(SJ2)_x$.

Definición 2.8 *SPE en estrategias mixtas*

Un SPE en estrategias mixtas es un par $(\mu^*, v^*(\cdot))$, donde $v^* : \Delta \mapsto \mathbb{R}_+^N$, que verifica que para cada jugador i, se tiene que

$$\begin{aligned} v_i^*(w) &\in \arg\max_{v_i \in \mathbb{R}_+} L_i(w, \{v_{-i}^*, v_i\}) \text{ para todo } w \in [0,\infty)^N \\ {\mu_i}^* &\in \arg\max_{w_i \in \mathbb{R}_+} \mathbb{E}\left[L_i(\cdot, \mu_{-i})\right] \end{aligned}$$

Sea μ una medida de radón positiva sobre $\mathbb{R}_+^N$. Entonces, definimos

$$\begin{aligned} \tilde{J}_i(\mu_i, \mu_{-i}) &= \mathbb{E}_\mu\left[J_i\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^N} J_i(w) d\mu(w) \end{aligned}$$

Decimos que μ^* es un NE en estrategias mixtas de $(SJ1)$ si es que para todo i y para toda medida de radón μ_i positiva sobre $\mathbb{R}_+$ tenemos que

$$\tilde{J}_i(\mu_i^*, \mu_{-i}^*) \geq J_i(\mu_i, \mu_{-i}^*)$$

De esta manera, un SPE en estrategias mixtas es un par $(\mu^*, v^*(\cdot))$ que verifica que

- μ^* es un NE en estrategias mixtas de $(SJ1)$
- Para todo $x \in \Delta$ tenemos que $v^*(x)$ es el NE en estrategias puras de $(SJ2)_x$.

Definición 2.9 *Utilidad social*

Sea $y \in \Delta$ tal que para cada jugador, su asignación es y_i. Entonces la utilidad social viene dada por

$$\sum_i U_i(y_i).$$

i.e. es simplemente la suma de las utilidades de cada jugador

A continuación, denotemos $y^{SO} = (y_1^{SO}, ..., y_N^{SO})$ la asignación socialmente eficiente, ie, la que maximiza la cantidad anterior.

Tambien denotemos $y^* = (y_1^*, ..., y_N^*)$ la asignación que viene del SPE $(w^*, v^*(w^*))$, ie, $y_i^* = v_i^* / \sum_j v_j^*$

Definición 2.10 *Eficiencia del SPE y PoA*

Dadas las definiciones anteriores, la eficiencia del equilibrio viene dada por

$$E = \frac{\sum_i U_i(y_i^*)}{\sum_i U_i(y_i^{SO})}$$

Por último se define el precio de la anarquía del juego como la peor eficiencia alcanzada por un SPE

Para el caso de utilidades lineales, en [1] muestran que el precio de la anarquía no puede ser peor a $2\sqrt{2}-2$. Sin embargo, no muestran la existencia de un SPE. La principal contribución de esta memoria consiste en demostrar que este juego siempre admite un SPE en estrategias mixtas.

Capítulo 3

Estudio de la segunda etapa del juego

En esta sección vamos a estudiar la existencia de equilibrio de los subjuegos $(SJ2)_x$ para todo $x \in \Delta$. En la primera subsección vamos a obtener la caracterización de dichos equilibrios, a través de las condiciones de primer orden de las funciones de pago del subjuego $(SJ2)_x$.

3.1. Equilibrio de la segunda etapa

En [1] mostraron que el subjuego $(SJ2_x)$ siempre posee un único equilibrio. Acá daremos una demostración formal de esto.

Recordemos que, dado un vector $(w, v) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^N_+$, tenemos que el pago de un jugador viene dado por

$$\begin{aligned} L_i(w, v) &= U_i(y_i) - v_i + \rho x_i - w_i \\ &= U_i\left(\frac{v_i}{\sum_j v_j}\right) - v_i + \left(\sum_j v_j\right)\frac{w_i}{\sum_j w_j} - w_i \end{aligned}$$

Sea $y_i = \frac{v_i}{\sum_{j=1}^N v_j} = \frac{v_i}{\rho}$ donde $\rho = \sum_{j=1}^N v_j$ con $v \in \mathbb{R}^N_+$. Sea $w \in \mathbb{R}^N_+$. Luego, definamos $K_i : \mathbb{R}^N_+ \mapsto \mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned} K_i(v_i, v_{-i}) &= L_i(w, (v_i, v_{-i})) \\ &= U_i(y_i) - v_i + \rho x_i - w_i \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $x_i = w_i / \sum_{j=1}^N w_j$.

Derivando esta función con respecto a v_i obtenemos la siguiente proposición

Proposición 3.1 *Sea $v \in \mathbb{R}^N_+$, y sea $i \in \{1, ..., N\}$. Entonces tenemos que:*

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial K_i(v_i, v_{-i})}{\partial v_i} &= U_i'(y_i)\frac{(1-y_i)}{\rho} - (1-x_i) \\
\frac{\partial^2 K_i}{\partial v_i^2}(v_i, v_{-i}) &= \frac{(1-y_i)}{\rho^2}\left[U_i''(y_i)(1-y_i) - 2U_i'(y_I)\right]
\end{aligned}
$$

Demostración. Notemos que $y_i = y_i(v_i, v_{-i}) = \frac{v_i}{\sum_{j=1}^N v_j}$. Entonces derivando con respecto a v_i tenemos que

$$
\frac{\partial y_i(v_i, v_{-i})}{\partial v_i} = \frac{1}{\sum_{j=1}^N v_j}\left(1 - \frac{v_i}{\sum_{j=1}^N v_j}\right) = \frac{1}{\rho}(1-y_i)
$$

Usando esto, tenemos que

$$
\frac{\partial K_i(v_i, v_{-i})}{\partial v_i} = U_i'(y_i)\frac{\partial y_i}{\partial v_i} - (1-x_i) = U_i'(y_i)\frac{(1-y_i)}{\rho} - (1-x_i)
$$

Derivando por segunda vez esta expresión con respecto a v_i tenemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 K_i}{\partial v_i^2}(v_i, v_{-i}) &= U_i''(y_i)\frac{(1-y_i)^2}{\rho^2} - U_i'(y_i)\frac{\partial}{\partial v_i}\left[\frac{1}{\rho}(1-y_i)\right] \\
&= U_i''(y_i)\frac{(1-y_i)^2}{\rho^2} - U_i'(y_i)\left[-\frac{1}{\rho^2}(1-y_i) + \frac{1}{\rho}\left(-\frac{(1-y_i)}{\rho}\right)\right] \\
&= U_i''(y_i)\frac{(1-y_i)^2}{\rho^2} + 2U_i'(y_i)\frac{(1-y_i)}{\rho^2}
\end{aligned}
$$

□

Con esto podemos concluir que la función $K_i(\cdot, v_{-i})$ es estrictamente cóncava en $[0, \infty)$ para todo $v_{-i} \in \Pi_{j\neq i}\mathbb{R}_+$

Usando esta propiedad, tenemos la siguiente proposición que nos permite caracterizar al equilibrio de Nash del subjuego $(SJ2)_x$

Proposición 3.2 *[Condiciones de primer orden]*

Las condiciones de primer orden de la segunda etapa son

$$
\begin{aligned}
U_i'(y_i)(1-y_i) &= \rho(1-x_i) \text{ si } y_i > 0 \quad (3.2)\\
U_i'(0) &\leq \rho(1-x_i) \text{ si } y_i = 0 \quad (3.3)
\end{aligned}
$$

donde $y_i = v_i/\rho$ y $\rho = \sum_{j=1}^N v_j$. Además, v es solución de las condiciones de primer orden de la segunda etapa si y solo si v es un NE del subjuego $(SJ2)_x$.

Demostración. Sea $i \in \{1, ..., N\}$ y $v_{-i} \in \Pi_{j \neq i}[0, \infty)$. Dada la proposición 3.2, podemos decir inmediatamente que, si $\frac{\partial K_i}{\partial v_i}(0, v_{-i}) = U_i'(0)/\rho - (1 - x_i) \leq 0$ entonces $\frac{\partial K_i}{\partial v_i}(v_i, v_{-i}) \leq 0$ para todo v_i, por lo cual $K_i(v_i, v_{-i}) \leq K_i(0, v_{-i})$. Es decir, que 0 maximiza a $K_i(\cdot, v_{-i})$.

Procedamos a calcular el limite $\lim_{v \to \infty} \frac{\partial K_i}{\partial v_i}(v, v_{-i})$

Recordamos que la función U_i es estrictamente creciente. Luego, tenemos que $U_i' > 0$ Además, U_i es concava, 2 veces derivable, luego U_i' es decreciente en $[0, \infty)$. De esto deducimos que $0 < U_i'(1) \leq U_i'(y_i) \leq U_i'(0)$ para todo $v_i \geq 0$. Además, tenemos que $\rho = \sum_{j \neq i} v_j + v_i \to \infty$ cuando $v_i \to \infty$. Además, $1 - y_i(v) = 1 - \frac{v}{\rho(v)} = 1 - \frac{v_i}{\sum_{j \neq i} v_j + v}$ lo que tiende a 0 cuando v_i tiende a ∞.

De todo esto, tenemos que

$$0 < U_i'(y_i)\frac{(1 - y_i)}{\rho} \leq U_i'(0)\frac{(1 - y_i)}{\rho} \to 0$$

cuando $v_i \to \infty$. Luego,

$$\lim_{v \to \infty} U_i'(y_i)\frac{(1 - y_i)}{\rho} = 0.$$

De lo que obtenemos

$$\lim_{v \to \infty} \frac{\partial K_i}{\partial v_i}(v_i, v_{-i}) = -(1 - x_i) \leq 0.$$

Luego tenemos que si $\frac{\partial K_i}{\partial v_i}(0, v_{-i}) > 0$, y $x_i < 1$ entonces, existe un $v_i^* > 0$ tal que $\frac{\partial K_i}{\partial v_i}(v_i^*, v_{-i}) = 0$. Además, en ese caso tenemos que $U_i'(y_i)(1-y_i) = \rho(1-x_i)$. Y por concavidad de $K_i(\cdot, v_{-i})$ concluimos que v_i^* maximiza a $K_i(\cdot, v_{-i})$.

Si en cambio $x_i = 1$ entonces para todo $v \geq 0$, tenemos que $\frac{\partial K_i}{\partial v_i}(v_i, v_{-i}) > 0$ luego concluimos que $K_i(\cdot, v_{-i})$ se maximiza en $v = \infty$

□

Con esto hemos obtenido la caracterización de la segunda etapa del SPE. En la siguiente subsección vamos a probar que, efectivamente, cada subjuego $(SJ2)_x$ posee un único equilibrio.

3.2. Existencia y unicidad del equilibrio en la segunda etapa

Dado $x \in \Delta$, (que interpretaremos como las asignaciones de la primera etapa en el juego de dos etapas), consideremos el siguiente subjuego $(SJ2)_x$, el cual es la segunda etapa del juego de dos etapas, dadas las asignaciones x de la primera etapa:

Acá, el pago total del i-ésimo jugador, $K_i(v)$, viene dado por

$$K_i(v_i, v_{-i}) = \begin{cases} U_i\left(\frac{v_i}{\sum_j v_j}\right) - v_i + \left(\sum_j v_j\right) x_i & \text{si } v_i > 0, \\ U_i(0) + \left(\sum_j v_j\right) x_i & \text{si } v_i = 0. \end{cases}$$

Si existe un i tal que $x_i = 1$, podemos probar la siguiente proposición que nos asegura que existe el NE en este caso, obteniendo una caracterización de éste.

Proposición 3.3 *Sea $x = e_i$ alguno de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^N_+$. Entonces la asignación de la segunda etapa es $y = e_i$*

Si para todo $j \neq i$ tenemos que $U'_j(0) < +\infty$ entonces todo v que sea NE del juego es de la forma $v_i \geq \max_i U'_i(0)$, $v_{-i} = 0$. Si en cambio existe un $j \neq i$ tal que $U'_j(0) = \infty$ entonces el único NE del juego es de la forma $v_i = \infty$, $v_{-i} = 0$.

Demostración. Observemos que

$$K_i(v_i, v_{-i}) = \begin{cases} U_i\left(\frac{v_i}{\sum_j v_j}\right) + \left(\sum_{j\neq i} v_j\right) & \text{si } v_i > 0, v_{-i} \neq 0 \\ U_i(1) & \text{si } v_i > 0, v_{-i} = 0 \\ U_i(0) + \sum_{j\neq i} v_j & \text{si } v_i = 0, v_{-i} \neq 0 \\ U_i(0) & \text{si } v_i = 0, v_{-i} = 0 \end{cases}$$

y

$$K_j(v_j, v_{-j}) = \begin{cases} U_j\left(\frac{v_j}{\sum_l v_l}\right) - v_j & \text{si } v_j > 0 \\ U_j(0) & \text{si } v_j = 0 \end{cases}$$

cuando $j \neq i$

Notemos que si al menos algún jugador $j \neq i$ hace una apuesta $v_j > 0$ en la segunda etapa, entonces, la mejor apuesta del jugador i-ésimo es $v_i = \infty$. Además, cuando el i-ésimo jugador juega $v_i = \infty$, entonces, para todo $v_j < \infty$ tenemos que $y_j = v_j/(\sum_{l=1}^N v_l) = v_j/\infty = 0$ por lo tanto tenemos que $K_j(v_j, v_{-j}) = U_j(0) - v_j$ que se maximiza en 0 y por lo tanto tenemos que $(v_i, v_{-i}) = (\infty, 0)$ es un NE del subjuego $(SJ2)_x$. Por lo tanto las asignaciones de la segunda etapa son $y_i = 1$, $y_j = 0$ para $j \neq i$.

$\square$

Ahora vamos a mostrar que para todo $x \in \Delta$, el juego $(SJ2)_x$ posee un único equilibrio de Nash. Esto en particular nos permite definir la función $v : \Delta \mapsto \mathbb{R}^N_+$ tal que para todo x, $v(x)$ sea el único NE de $(SJ2)_x$.

Dado x, definamos un problema de optimización que tendrá una única solución, que caracterizará las asignaciones y_i correspondientes a un equilibrio del juego $(SJ2)_x$. Y como la solución de dicho problema de optimización será único, eso nos ayudará a concluir que el juego $(SJ2)_x$ posee un único NE.

Para $x \in \Delta_0$, definamos la función

$$\tilde{U_x}(y) = \sum_j \left[\frac{(1-y_j)U_j(y_j) + \int_0^{y_i} U_i(\tau)d\tau}{1-x_j} \right]$$

Derivando esta función tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{U}_x}{\partial y_i} &= \frac{(1-y_i)U_i'(y_i)}{1-x_i} && (3.4) \\ \frac{\partial^2 \tilde{U}_x}{\partial y_i^2} &= \frac{(1-y_i)U_i''(y_i) - U_i'(y_i)}{1-x_i} < 0 && (3.5) \\ \frac{\partial^2 \tilde{U}_x}{\partial y_i \partial y_j} &= 0 && (3.6) \end{aligned}$$

La desigualdad en la ecuación (3.5) la tenemos pues U_i es estrictamente creciente (i.e., $U_i' > 0$) y concava (i.e., $U_i'' \leq 0$)

Ahora, consideremos el siguiente problema de optimización:

$$(P_x) \qquad \begin{array}{c} \text{máx}_y \, \tilde{U}_x(y) \\ y \in \Delta \end{array} .$$

Queremos obtener las condiciones de optimalidad del problema. Con este objetivo, sea $h(y) = \sum_j y_j - 1$ y $g(y) = (g_1(y), ..., g_N(y)) = (y_1, ..., y_N)$ y luego definamos el lagrangeano del problema:

$$L(y, \lambda, \theta) = \tilde{U_x}(y) - \lambda h(y) - \theta^t g(y)$$

Derivando y usando la ecuación (3.4), tenemos que

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = -\frac{(1-y_i)U_i'(y_i)}{1-x_i} - \lambda(1-x_i) - \theta_i$$

Las condiciones de optimalidad del problema, son que, para un $\bar{y}$ factible del problema, existan $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ y $\bar{\theta} \in \mathbb{R}^N$ tales que

- $\bar{\theta} \geq 0$
- $\nabla_y L(\bar{y}, \bar{\lambda}, \bar{\theta}) = 0$
- para todo i, $\bar{\theta}_i g_i(\bar{y}) = 0$

Luego:

- para todo i, tenemos que

$$(1-\bar{y}_i)U_i'(\bar{y}_i) + \bar{\theta}_i = \bar{\lambda}(1-x_i) \tag{3.7}$$

- Si $\bar{y}_i > 0$, entonces $\bar{\lambda}_i = 0$. Luego tenemos que

$$\frac{(1-\bar{y}_i)U_i'(\bar{y}_i)}{(1-x_i)} = \bar{\lambda} \tag{3.8}$$

- Si $\bar{y}_i = 0$, entonces tenemos que

$$\frac{U_i'(0)}{1-x_i} \leq \bar{\lambda} \tag{3.9}$$

El resultado que buscamos, es el siguiente teorema:

Teorema 3.4 *[Existencia y unicidad de equilibrios]*

Dado x existe un único equilibrio de Nash del juego $(SJ2_x)$

Para hacer la demostración de este teorema primero necesitaremos el siguiente lema:

Lema 3.5 *Sea x, tal que para todo i, $x_i < 1$. Entonces el problema P_x posee una única solución $y \in \Delta$.*

Demostración. Dado que la función $\tilde{U}_x$ es de clase C^1 y que la región factible del problema es compacta, concluimos que existe una solución y del problema (P_x). Además, como la función $\tilde{U}_x$ es estrictamente concava (pues su hessiano es definido negativo) concluimos que esta solución es única.

□

Ahora mostraremos el teorema.

Demostración. [del Teorema3.4]

Por la proposición 3.3, solo nos basta probar la existencia en el caso en que para todo i tenemos que $x_i < 1$.

Consideremos un x tal que para todo i, $x_i < 1$. Sabemos que v^* es un NE del juego $(SJ2)_x$ si y solo si verifica las condiciones de primer orden de la segunda etapa (ecuación (3.3)) dadas por

$$\begin{array}{rcl} U_i'(y_i)(1-y_i) & = & \rho(1-x_i) \text{ si } y_i > 0 \\ U_i'(0) & \leq & \rho(1-x_i) \text{ si } y_i = 0 \end{array}$$

con $\rho = \sum_j v_j$.

Sea y^* del Lema 3.5, luego y^* verifica las condiciones de optimalidad del problema P_x, por lo cual si definimos $v = \lambda y^*$, tenemos que por las condiciones de optimalidad,

$$\begin{array}{rcl} U_i'(y_i)(1-y_i) & = & \lambda(1-x_i) \text{ si } y_i > 0 \\ U_i'(0) & \leq & \lambda(1-x_i) \text{ si } y_i = 0 \end{array}$$

Con esto concluimos que λy^* es un NE del juego $(SJ2)_x$.

Ahora veamos que es único:

Como todo v^* que es un NE del juego $(SJ2)_x$ verifica las condiciones de primer orden de la segunda etapa, es decir,

$$\begin{aligned} U_i'(y_i)(1-y_i) &= \rho(1-x_i) \text{ si } y_i > 0 \\ U_i'(0) &\leq \rho(1-x_I) \text{ si } y_i = 0 \end{aligned}$$

Pero esto es equivalente a decir que

$$U_i'(y_i)(1-y_i) = \rho(1-x_i)$$

cuando $y_i > 0$ y

$$U_i'(0) \leq \rho(1-x_i)$$

cuando $y_i = 0$, lo que equivale a decir que

$$\theta_i = \rho(1-x_i) - U_i'(0) \geq 0$$

Así, usando las ecuaciones (3.7)-(3.9), resulta que y es solución del problema P_x con multiplicador de lagrange (ρ, θ). Sabemos que y es a su vez la única solución de dicho problema por lo cual concluimos que todo NE del juego es de la forma $v = \rho y$, con $\rho \geq 0$

Para concluir la unicidad, hay que notar que, si existe $\rho \neq \lambda$ tal que $v = \rho y$ es un NE, entonces tambien tenemos que, para i tal que $v_i^* > 0$,

$$U_i'(y_i)(1-y_i) = \rho(1-x_i) \neq \lambda(1-x_i),$$

lo que no puede ser. Con lo cual concluimos que v^* es el único NE del juego.

□

Además, podemos hacer la siguiente observación

Observación Si x es tal que para todo i $x_i < 1$ entonces v_x^* posee al menos dos componentes positivas.

En efecto:

Como $v_x^* \geq 0$ es el equilirio de nash del juego con las funciones de utilidad K_i, tenemos que

$$K_i(v_{i,x}^*, v_{-i,x}^*) \geq K_i(v_i, v_{-i,x}^*) \text{ para todo } i \text{ y para todo } v_i \geq 0 \tag{3.10}$$

Asumamos primero que $v_x^* = 0$. Luego, la relación (3.10) dice que para todo i y para todo $v_i > 0$

$$K_i(0) = K_i(0, v_{-i,x}^*) \geq K_i(v_i, v_{-i,x}^*) = U_i\left(\frac{v_i}{v_i}\right) - v_i(1 - x_i) = U_i(1) - v_i(1 - x_i)$$

Equivalentemente,

$$U_i(0) + v_i(1 - x_i) \geq U_i(1)$$

Sea i tal $x_i < 1$. Luego, por lo anterior, concluimos que

$$U_i(0) \geq U_i(1)$$

Sin embargo esto no puede ser, ya que U_i es estrictamente creciente. De esto, deducimos que v_x^* no puede ser el vector 0.

Además, si para todo i tenemos que $x_i < 1$ tenemos que el equilibrio tiene al menos 2 componentes estrictamente positivas.

En efecto, veamos ahora el caso en que hay un único i, tal que $v_{i,x}^* > 0$.

Si $x_i < 1$, entonces la funcion $K_{i,x}$ viene dada por

$$K_i(v_i, v_{-i,x}^*) = \begin{cases} U_i\,(1) - v_i(1 - x_i) & \text{si } v_i > 0 \\ U_i(0) & \text{si } v_i = 0 \end{cases}$$

Se sabe que $v_i^* > 0$. Además, por ser un equilibrio de Nash, se tiene que

$$U_i(1) - v_{i,x}^*(1 - x_i) = K_i(v_{i,x}^*, v_{-i,x}^*) \geq K_i(v_i, v_{-i,x}^*) = U_i(1) - v_i(1 - x_i)$$

Es decir

$$v_i(1 - x_i) \geq v_{i,x}^*(1 - x_i) \text{ para todo } v_i > 0$$

Luego $v_{i,x}^* = 0$, lo que es una contradicción.

Capítulo 4

Existencia de NE en estrategias mixtas en el caso general

Acá probaremos que el juego posee un SPE en estrategias mixtas en el caso general, usando el teorema de Dasgupta-Maskin (ver teorema 1.23 en el primer capítulo). Mostraremos este resultado estudiando primero el caso donde las utilidades son lineales con un numero arbitrario de jugadores. Luego nos enfocaremos a mostrar el caso general. La razón de esta separación radica en que en el caso lineal, resulta más fácil mostrar que podemos reducirnos al caso en que los espacios de estrategias de los jugadores son convexos compactos.

Debido a que ya sabemos que el subjuego de la segunda etapa siempre posee solución, para concluir la existencia del SPE debemos mostrar que el subjuego de la primera etapa definido en el capítulo 2, posee un equilibrio en estrategias mixtas.

4.1. Caso lineal

Partamos mostrando el resultado en el caso lineal, donde las utilidades de los jugadores, vienen dadas por $U_i(x) = a_i x$, donde sin perdida de generalidad $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_N$.

Primero, obtendremos una expresión para el precio de la segunda etapa en función de las asignaciones de la primera etapa.

Sea $w = (w_1, ..., w_N) \in \mathbb{R}_+^N$. Definamos $x(w) \in \mathbb{R}_+^N$ por

$$x_i(w) = \frac{w_i}{\sum_j w_j}$$

Recordemos las condiciones de primer orden de la segunda etapa:

$$U_i'(y_i)(1 - y_i) = \rho(1 - x_i) \text{ si } y_i > 0 \tag{4.1}$$
$$U_i'(0) \leq \rho(1 - x_I) \text{ si } y_i = 0 \tag{4.2}$$

con $\rho = \sum_j v_j$.

En este caso, estas condiciones se escriben:

$$\begin{aligned} a_i(1-y_i) &= \rho(1-x_i) \text{ si } y_i > 0, && (4.3)\\ a_i &\leq \rho(1-x_I) \text{ si } y_i = 0. && (4.4) \end{aligned}$$

En particular, tenemos que

$$1 - y_i = \rho\frac{(1-x_i)}{a_i},$$

para todo i tal que $y_i > 0$. Sumando en todos los i tales que $y_i > 0$ obtenemos que

$$\rho(x) = \frac{1}{\sum_{i;y_i>0}\frac{(1-x_i)}{a_i}}\left(\sum_{i,y_i>0}(1-y_i)\right)$$

Dado $x \in \Delta$, definamos $P(x) = \{i \in \{1, ..., N\}/y_i(x) > 0\}$. Luego, obtenemos que

$$\rho(x) = \frac{|P|-1}{\sum_{i\in P(x)}\frac{(1-x_i)}{a_i}} \tag{4.5}$$

Con esta expresión podemos probar el siguiente resultado.

Proposición 4.1 *Sea $w \in \mathbb{R}^N_+$. Entonces tenemos que*

1. $\rho \leq a_1$, *y si w tiene al menos 2 componentes > 0 la desigualdad es estricta*
2. $\rho \geq \max\{a_j/j \notin P(x)\}$
3. $\rho > a_N$

Demostración. 1. Por la ecuación (4.5), tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \frac{\sum_{j\in P}\frac{1}{a_j}(1-x_j)}{|P|-1},\\ &\geq \frac{a_1^{-1}\sum_{j\in P}(1-x_j)}{|P|-1},\\ &= \frac{1}{a_1}\frac{|P|-\sum_{j\in P}x_j}{|P|-1},\\ &\geq \frac{1}{a_1}, \end{aligned}$$

con lo que concluimos que $\rho \leq a_1$. Si w tiene al menos 2 elementos estrictamente positivos entonces x tiene al menos 2 elementos estrictamente positivos, luego la desigualdad es estricta.

2. La ecuación (4.4) implica que para todo $j \notin P$, $a_j \leq \rho(1 - x_j) \leq \rho$, en particular deducimos la propiedad.
3. Lo primero es mostrar que siempre tenemos que $a_N \leq \rho$. Si $N \notin P$ entonces por lo que probamos en 2, tenemos que $a_N \leq \rho$. Si $N \in P$ hay 2 posibilidades. Primero, si existe $k < n$ tal que $k \notin P(x)$ entonces $a_N \leq a_k \leq \rho$. En el otro caso tenemos que $P(x) = \{1, ..., N\}$ por lo cual

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sum_j x_{-j}/a_j}{N-1} \in (1/a_N, 1/a_1)$$

y entonces $a_N \leq \rho$.

□

Sin embargo, debemos observar que no es necesariamente cierto que $\rho \geq \text{mín}\{a_j/j \in P(x)\}$, salvo en el caso en que $\text{máx}\{a_j/j \notin P(x)\} \geq \text{mín}\{a_j/j \in P(x)\}$. Un contraejemplo es $N = 3$, $a_1 = 3, a_2 = 2, a_1 = 1$, $x = (1/3, 1/3, 1/3)$, pues en este caso $P = \{1, 2\}$ (se puede chequear) y además

$$\rho = 1{,}8 < 2 = a_2$$

En particular, ahora conocemos la relación entre a_i y ρ. Además, recordemos que

$$\begin{aligned} J_i(w_i, w_{-i}) &= a_i y_i - v_i + \rho x_i - w_i \\ &= a_i y_i + \rho(x_i - y_i) - w_i \\ &= (a_i - \rho) y_i + \rho x_i - w_i, \end{aligned} \tag{4.6}$$

donde definimos

$$y_i = \frac{v_i}{\rho}.$$

Ahora, podemos establecer que podemos reducirnos al caso en que los espacios de estrategias de cada jugador son convexos compactos.

Proposición 4.2 *[Espacios de estrategias compactos]*

Si $i \in \{1, .., N\}$ entonces tenemos que para todo $w = (w_1, ..., w_2) \in \mathbb{R}_+^N$, $J_i(w_i, w_{-i}) \leq a_1 - w_i$. Luego, los espacios de estrategias de todos los jugadores están dados por $[0, a_1]$

Demostración. Si $i \notin P(x)$, entonces por (4.6) $J_i(w_i, w_{-i}) = \rho x_i - w_i \leq a_1 - w_i$.

Si $i \in P(x)$, entonces:

Si $a_i \leq \rho$ entonces por (4.6) $J_i(w_i, w_{-i}) = (a_i - \rho) y_i + \rho x_i - w_I \leq \rho x_i - w_i \leq a_1 - w_i$.

Sino, entonces por la ecuación (4.4), $a_i(1 - y_i) = \rho(1 - x_i) > \rho(1 - y_i)$ por lo cual tenemos que $y_i > x_i$. Asi, $J_i(w_i, w_{-i}) = a_i y_i + \rho(x_i - y_i) - w_i < a_i y_i - w_i < a_1 - w_i$.

□

Con esto, tambien podemos probar lo siguiente:

Proposición 4.3 *La función $v(x)$ es continua en Δ.*

DEMOSTRACIÓN. Sea x_k una sucesión en Δ tal que converge a un $\bar{x} \in \Delta$. Debemos mostrar que $v(x_k) \to v(\bar{x})$.

Primero, notemos que $v(x) \in [0, a_1]^N$ para todo $x \in \Delta$. Por lo tanto, sabemos que la sucesión $v(x_k)$ posee un punto de acumulación $v \in [0, a_1]^N$. Además, si v es un punto de acumulación de $v(x_k)$, entonces existe una subsucesión x_{k_n} tal que $v(x_{k_n}) = v_{k_n} \to v$.

Por las condiciones de primer orden de la segunda etapa (i.e., la ecuación (4.4)), tenemos que para todo n,

$$\begin{array}{rcl} a_i(1 - y_{i,k_n}) & = & \rho(x_{k_n})(1 - x_{i,k_n}) \text{ si } y_i > 0, \\ a_i & \leq & \rho(x_{k_n})(1 - x_{i,k_n}) \text{ si } y_i = 0, \end{array}$$

tomando límites a ambos lados, obtenemos que, si $\rho = \sum_i v_i$ entonces

$$\begin{array}{rcl} a_i(1 - y_i) & = & \rho(1 - \bar{x}_i) \text{ si } y_i > 0, \\ a_i & \leq & \rho(1 - \bar{x}_i) \text{ si } y_i = 0. \end{array}$$

Pero, usando esto, concluimos que de hecho todo punto de acumulación v es solución de las condiciones de primer orden de la segunda etapa. Por lo tanto, es la solución del subjuego $(SJ2)_{\bar{x}}$. Sin embargo, este subjuego posee una única solución, por lo que concluimos que la sucesión $v(x_k)$ posee un único punto de acumulación, el cual es $v(\bar{x})$. Luego $v(x_k) \to v(\bar{x})$.

□

Con esta propiedad, nos resulta fácil probar el siguiente corolario:

Lema 4.4 *Sea $i \in \{1, ..., N\}$ y sea $w = (w_1 ..., w_N) \in [0, a_1]^N$. Entonces las funciones J_i son continuas en $[0, a_1]^N \backslash \{0\}$*

DEMOSTRACIÓN. Sea $w \in [0, a_1]^N \setminus \{0\}$. Entonces, si definimos $x(w) \in \Delta$ por

$$x_i(w) = \frac{w_i}{\sum_j w_j},$$

para todo $i \in \{1, ..., N\}$. Además, $x(w)$ es continua en w. Sabemos que $v(\cdot)$, $\rho(\cdot)$ e $y(\cdot)$ son continuas en Δ. Luego

$$J_i(w) = a_i y_i(x(w)) - v_i(x(w)) + \rho(x(w)) x_i(w) - w_i$$

es continua en w.

□

Observación Las funciones J_i son irreparablemente discontinuas en 0. Sea $i \in \{1,..,N\}$. Consideremos primero la sucesión $w_n = (1/n)e_i$. Entonces, tenemos que las asignaciones correspondientes en la primera etapa son $x_n = e_i$. Sabemos que en este caso las asignaciones correspondientes de la segunda etapa son $y_n = e_i$. Por lo tanto las funciones de pago valen $J_i(w_n) = a_i - 1/n$ y $J_l(w_n) = 0$ si $l \neq i$. Por lo tanto, en el limite tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} J_i(w_n) &= a_i \\ \lim_{n\to\infty} J_l(w_n) &= 0 \end{aligned}$$

Por otro lado, si escogemos $w_n = (1/n)e_l$ con $l \neq i$ Entonces, tenemos que las asignaciones correspondientes en la primera etapa son $x_n = e_l$. Sabemos que en este caso las asignaciones correspondientes de la segunda etapa son $y_n = e_l$. Por lo tanto las funciones de pago valen $J_l(w_n) = a_l - 1/n$ y $J_i(w_n) = 0$. Por lo tanto, en el limite tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} J_i(w_n) &= 0 \\ \lim_{n\to\infty} J_l(w_n) &= a_l \end{aligned}$$

Con lo que concluimos que J_i son discontinuas en 0.

Por lo tanto, no podemos aplicar el teorema de Glicksberg en este caso. Para poder aplicar el teorema de Dasgupta-Maskin ([13]), necesitamos definir convenientemente las funciones J_i en 0. y demostrar que el conjunto de discontinuidades (es decir, $\{0\}$) verifica las hipótesis de dicho teorema.

Recordemos que por Dasgupta-Maskin, lo único que nos falta para establecer la existencia de NE es que los J_i verifiquen que:

- La suma $\sum_{i=1}^N J_i(w)$ sea semi-continua superior en $[0, a_1]^N$
- Para cada i y para cada w_{-i} las funciones $J_i(\cdot, w_{-i})$ sean al menos débilmente semi-continuas inferiormente.

Sabemos por lo anterior que los J_i son continuos salvo en 0 por lo cual en particular van a verificar las 2 condiciones mencionadas arriba. Lo único que nos falta es definir convenientemente las funciones J_i en 0. Para esto, notemos lo siguiente: Sea $w \in [0, a_1]^N \backslash \{0\}$ entonces para todo i tenemos que

$$J_i(w) = a_i y_i + \rho(x_i - y_i) - w_i,$$

Sumando sobre todos los i obtenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N J_i(w) &= \sum_{i=1}^N a_i y_i + \rho \sum_{i=1}^N (x_i - y_i) - \sum_{i=1}^N w_i \\ &= \sum_{i=1}^N a_i y_i - \sum_{i=1}^N w_i \\ &\leq a_1 - \sum_{i=1}^N w_i \end{aligned}$$

Por lo tanto, definimos J_i en 0 por

$$J_i(0,0) = \begin{cases} a_1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Con esto, tenemos que para todo $w \neq 0$

$$\sum_{i=1}^{N} J_i(0) = a_1 \geq \sum_{i=1}^{N} J_i(w)$$

Con lo cual, en particular tenemos la semi-continuidad superior de $\sum_{i=1}^{N} J_i(w)$.

Ahora, veamos que tenemos la otra propiedad. En efecto, sea i y sea $w_{-i} = 0 \in \mathbb{R}_+^{N-1}$. Entonces, si $w_i > 0$ entonces

$$J_i(w_i, w_{-i}) = a_i - w_i$$

lo que converge a a_i cuando $w_i \to 0$. En cambio, en $w_i = 0$ obtenemos que

$$\begin{aligned} J_i(0,0) &= \begin{cases} a_1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \sim \end{cases} \\ &\leq a_i \\ &= \lim_{w_i \to 0} J_i(w_i, w_{-i}) \end{aligned}$$

Con lo que concluimos que las funciones $J_i(\cdot, w_{-i})$ son semi-continuas inferiormente. Finalmente, notemos que, dados $i, j \in \{1, ..., N\}$, si definimos $D = 1$ y $f_{ij} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dada por $f_{ij}(x) = 2x$, entonces, tenemos que $\{0\}$es de la forma $S^*(i)$ del teorema de Dasgupta-Maskin (ver la sección 1.3) es $S^*(i) = \{0\}$. Por lo tanto, tenemos el teorema de Dasgupta-Maskin. lo que nos garantiza que el subjuego $(SJ1)$ posea NE en estrategias mixtas.

4.2. Caso general

4.2.1. Regularidad de las apuestas de la segunda etapa

A priori, no podemos decir mucho acerca de la regularidad de las apuestas de la segunda etapa, puesto que no tenemos una expresión explicita para $v^*(x)$. Sin embargo, gracias a las condiciones de primer orden de la segunda etapa, vamos a probar que estas apuestas son continuas en las asignaciones x de la primera etapa.

Primero, probaremos algunas propiedades del precio unitario de la 2° etapa, ρ.

Proposición 4.5 *Sea $x \in [0,1]^N$ las asignaciones de la primera etapa, y sea $v(x)$ el vector con las apuestas de los jugadores en el equilibrio de la segunda etapa. Sea $\rho(x) = \sum_{j=1}^{N} v_j(x)$ entonces:*

1. $\rho(x) \geq \text{mín}_j\, U_j'(1) > 0$

2. $\rho(x) \leq \text{máx}_j\, U_j'(0)$ *(podría ser* ∞ *eventualmente)*

3. $\rho(x) - \text{máx}_i\, v_i(x) \leq \sum_{j=1}^{N} \{U_j(1) - U_j(0)\} < \infty$

Demostración. Para hacer la demostración conviene recordar, por la ecuación 4.2, que dado x tenemos que $v(x)$ es solución de

$$\begin{array}{rcl} U_j'(y_j)(1-y_j) & = & \rho(1-x_j) \text{ si } y_j > 0 \\ U_j'(0) & \leq & \rho(1-x_j) \text{ si } y_j = 0 \end{array}$$

1. Sabemos que si $y_j > 0$ entonces

$$\rho(x) = U_j'(y_j)\frac{(1-y_j)}{(1-x_j)} \geq U_j'(1)\frac{(1-y_j)}{(1-x_j)} \geq \min_{k \in \{1,..,N\}} U_k'(1)\frac{(1-y_j)}{(1-x_j)}$$

   Además, como $\sum_j y_j = \sum_j x_j = 1$ entonces existe un j tal que $y_j \leq x_j$ por lo cual tenemos que $1 - y_j \geq 1 - x_j$. Con esto concluimos que $\rho(x) \geq \text{mín}\, U_j'(1)$

2. Sabemos que existe un j tal que $y_j < 1$, por lo tanto

$$\rho(x) = U_j'(y_j)\frac{(1-y_j)}{(1-x_j)} \leq U_j'(0)\frac{(1-y_j)}{(1-x_j)} \leq \max_{k \in \{1,..,N\}} U_k'(0)\frac{(1-y_j)}{(1-x_j)}$$

   Además, como $\sum_j y_j = \sum_j x_j = 1$ entonces existe un j tal que $x_j \leq y_j$ por lo cual tenemos que $1 - y_j \leq 1 - x_j$. Con esto concluimos que $\rho(x) \leq \text{máx}_j\, U_j'(0)$

3. Sabemos que, dado x, los $v_J(x)$ maximizan el valor de $U_j(y_j) - v_j(1-x_j)$. Luego, para todo j,

$$U_j(y_j) - v_j + v_j x_j \geq U_j(0).$$

   Sumando todas estas desigualdades tenemos que

$$\rho - \sum_j x_j v_j \leq \sum_j \{U_j(y_j) - U_j(0)\} \leq \sum_j \{U_j(1) - U_j(0)\}$$

   También podemos ver que

$$\sum_j v_j x_j \leq \max_i v_i(x)$$

   de lo que deducimos que

$$\rho - \max_i v_i(x) \leq \sum_j \{U_j(1) - U_j(0)\} \tag{4.7}$$

□

Teorema 4.6 *La función* $v(x)$ *es continua en* Δ_0

Para demostrar esto, debemos probar los siguientes resultados preliminares.

Lema 4.7 *Para todo* $\varepsilon > 0$*, sea* $\Delta_\varepsilon = \{x \geq 0 / \sum_{i=1}^{N} x_i = 1, x_j \leq 1 - \varepsilon \text{ para todo } j\}$*. Entonces, para todo* $x \in \Delta_\varepsilon$*,* $\rho(x) < \infty$

Demostración. Sea $x \in \Delta_\varepsilon$. Sabemos que $\rho(x) - \text{máx}_i\, v_i(x) \leq \sum_{j=1}^{N}\{U_j(1) - U_j(0)\} < \infty$. Por lo tanto, solo nos queda demostrar que $\text{máx}_i\, v_i(x) < \infty$.

Sea j tal que $v_j(x) = \text{máx}_i\, v_i(x)$, entonces, si $v_i(x) = \infty$, entonces las asignaciones de la segunda etapa son

$$y_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Sin embargo, dado que $x \in \Delta_\varepsilon$, $x_i \leq 1 - \varepsilon$. Además, por (4.2), tenemos que

$$U_i'(y_i)(1 - y_i) = \rho(1 - x_i).$$

Sabemos que $y_i = 1$ luego $U_i'(1) \cdot 0 = 0 = \rho(1 - x_i)$. Por otro lado $1 - x_i \geq \varepsilon > 0$ y entonces $0 = \rho(1 - x_i) \geq \rho\varepsilon \Rightarrow \rho = 0$. Lo que contradice que $\rho = \infty$.

$\square$

Lema 4.8 *Para todo $\varepsilon > 0$, la función ρ es acotada en Δ_ε*

Demostración. Por contradicción, asumamos que ρ no es acotada en Δ_ε. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un $x_n \in \Delta_\varepsilon$ tal que $n < \rho(x_n) < \infty$. Debido a que tanto x_n como $y(x_n)$ están en Δ, entonces la sucesión $(x_n, y(x_n))_n \in \Delta \times \Delta$ el cual es un compacto de $\mathbb{R}_+^{2N}$, luego existe una subsucesión x_{k_n} tal que $(x_{k_n}, y(x_{k_n})) \to (\bar{x}, \bar{y})$. Además, sabemos que $\rho(x_{k_n}) > k_n$ por lo cual $\rho(x_{k_n}) \to \infty$.

Además, sabemos que para todo n, $\rho(x_{k_n}) - \text{máx}_i\, v_i(x_{k_n}) \leq \sum_{j=1}^{N}\{U_j(1) - U_j(0)\} < \infty$, por lo que concluimos que $\text{máx}_i\, v_i(x_{k_n}) > k_n - \sum_{j=1}^{N}\{U_j(1) - U_j(0)\} \to \infty$. Además, para todo n,

$$y_i(x_{k_n}) = \frac{v_i(x_{k_n})}{\sum_j v_j(x_{k_n})}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} 1 \geq \max_i y_i(x_{k_n}) &= \frac{\text{máx}_i\, v_i(x_{k_n})}{\rho - \text{máx}_i\, v_i(x_{k_n}) + \text{máx}_i\, v_i(x_{k_n})}, \\ &\geq \frac{\text{máx}_i\, v_i(x_{k_n})}{\sum_j\{U_j(1) - U_j(0)\} + \text{máx}_i\, v_i(x_{k_n})} \to 1 \end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$.

Por lo tanto, $dist(y(k_n), \{e_1, ..., e_n\}) \to 0$, y luego $\bar{y}$ está en la base canónica (sin perdida de generalidad, $\bar{y} = e_i$ para algún i). Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$U_i'(y_i(x_{k_n})(1 - y_i(x_{k_n})) \to U_i'(1) \cdot 0 = 0,$$

mientras que $\rho(x_{k_n})(1 - x_{i,k_n}) \geq k_n(1 - x_{i,k_n})$.

Dado que para todo n, $x_{k_n} \in \Delta_\varepsilon$, sigue que $x_{i,k_n} \leq 1-\varepsilon$, luego

$$\rho(x_{k_n})(1-x_{i,k_n}) \geq k_n(1-x_{i,k_n}) \geq k_n\varepsilon \to \infty,$$

cuando $n \to \infty$. Finalmente, por las condiciones de primer orden de la segunda etapa,

$$U_i'(y_i(x_{k_n}))(1-y_i(x_{k_n})) = \rho(x_{k_n})(1-x_{i,k_n}) \geq k_n\varepsilon,$$

lo que es una contradicción pues el lado izquierdo converge a 0.

□

DEMOSTRACIÓN. [Del Teorema 4.6]

Sea $x_n \to x$, tal que para todo $j \in \{1,..,N\}$, $x_j < 1$. Podemos entonces decir sin pérdida de generalidad que existe un $\varepsilon > 0$ tal que la sucesión x_n y x están en Δ_ε.

Por lo tanto sabemos que existe un $M_2 > 0$ tal que $\rho(x_n), \rho(x) \leq M_2$. Eso también implica que $v \in [0, M_2]^N$. Precisamente esto mas la unicidad de la solución de las ecuaciones de primer orden de la segunda etapa es lo que nos permite concluir que $v(x)$ es continua. En efecto, sabemos que $v(x_n)$ es sucesión en un compacto y por lo tanto tiene un punto de acumulación, llamado $\bar{v} \in [0, M_2]^N$. Notamos además que tenemos lo siguiente:

- $v(x_{k_n}) \to \bar{v}$
- $y(x_{k_n}) \to \bar{y}$
- $\rho(x_{k_n}) \to \bar{\rho}$

(para la subsucesión que converge a $\bar{v}$). Así, por la ecuación (4.2), tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} U_i'(\bar{y})(1-\bar{y}_i) &= \bar{\rho}(1-x_i) \text{ si } y_i > 0, \\ U_i'(0) &\leq \bar{\rho}(1-x_i) \text{ si } y_i = 0. \end{aligned}$$

Esto significa que $\bar{v}$ es un NE de la segunda etapa para x. Como ese equilibrio es único concluimos que $\bar{v} = v(x)$ es el único punto de acumulación de $v(x_n)$ en $[0, M_2]^{\mathrm{N}}$ el cual es compacto. Por lo tanto $v(x_n) \to v(x)$ y luego la función v es continua.

□

Definamos $y : \Delta \mapsto \Delta$ por

$$y_i(x) = \frac{v_i(x)}{\rho(x)}$$

Entonces tenemos que

Proposición 4.9 *La función y es continua en Δ*

Demostración. Por lo anterior sabemos que es continua en Δ_0.

Sabemos que la función $v : \Delta \mapsto \mathbb{R}_+^N$ es continua. Sea x_n una sucesión tal que converge a algún e_i un vector de la base canónica. Quieremos probar que $y(x_n) \to e_i = y(e_i)$.

Como la sucesión $y(x_n)$ es acotada, posee un punto de acumulación en $[0,1]^N$ al que llamaremos $\bar{y}$. Ademas, para todo n tenemos que $\sum_j y_j(x_{k_n}) = 1$ por lo cual concluimos que $\sum_j \bar{y}_j = 1$.

También sabemos que $v(x_{k_n})$ converge a $v(e_i) = \bar{v}$ con $\bar{v}_j = 0$ si $j \neq i$ y $\bar{v}_i = \max_{j\neq i} U_j'(0)$.

Entonces, podemos ver que si $j \neq i$ entonces $y_j(x_{k_n}) \to 0$, y luego $\bar{y}_j = 0$.

□

Observación Con esto, tenemos que, para todo $\varepsilon > 0$, $y(\Delta_\varepsilon)$ es un conjunto cerrado en Δ. En particular, existe un $\delta > 0$ tal que $y(\Delta_\varepsilon) \subseteq \Delta_\delta$.

De no ser así, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un $x_n \in \Delta_\varepsilon$ tal que $\max_i y_i(x_n) > 1 - 1/n$. Por lo cual, tenemos que $d(y(x_n), \{e_1, ..., e_N\}) \to 0$. Nuevamente, como $(x_n, y(x_n))_n$ es una sucesión en $\Delta \times \Delta$, por lo que existe una subsucesión x_{k_n} tal que $(x_{k_n}, y(x_{k_n})) \to (\bar{x}, y(\bar{x})) \in \Delta \times \Delta$. Ya que $d(y(x_n), \{e_1, ..., e_N\}) \to 0$, tenemos que $y(\bar{x}) \in \{e_1, .., e_N\}$. Sin perdida de generalidad, tenemos que $y(\bar{x}) = e_i$ para algún i. Pero en tal caso, tenemos que $\bar{x} = e_i$, pues, sabemos que si $\bar{x} \in \Delta_0$ entonces $y(\bar{x}) \in \Delta_0$. Lo que es imposible, pues $\bar{x} \in \Delta_\varepsilon$.

Proposición 4.10 *Sea $i \in \{1, ..., N\}$ y $x \in \Delta_0$ tal que $x_i = \max_j x_j$. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que si $x_i - 1 < \varepsilon$, entonces $y_i = \max_j y_j$. Entonces podemos concluir que existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $i \in \{1, ..., N\}$ y $x \in \Delta_0$, si $x_i = \max_j x_j$ y $x_i - 1 < \varepsilon$, entonces $y_i = \max_j y_j$*

Demostración. Por contradicción, supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un $x_n \in \Delta_0$ tal que $x_{i,n} - 1 < 1/n$ y existe un $j_n \in \{1, ..., N\}$ tal que $y_{i,n} < y_{j_n,n}$. Observemos que la sucesión $(x_n, y_n)_n \in \Delta^2$ está en un compacto y por lo tanto posee una subsucesión convergente $(x_{k_n}, y_{k_n})_n \to (e_i, e_i)$. Esto contradice la definición de las sucesiones $(x_{k_n})_n$ e $(y_{k_n})_n$.

□

En la siguiente propiedad vamos a establecer que el NE del subjuego $(SJ1)$, de existir, debe estar en un compacto, de la forma $[0, C]^N$ donde C depende de las funciones U_i.

Proposición 4.11 *Existe un $C > 0$ tal que para todo i y para todo w_{-i}, $J_i(w_i, w_{-i}) < C - w_i$. En particular, esto implica que, dado $w \geq 0$, si para todo i $J_i(w_i, w_{-i}) \geq 0$ entonces $w \in [0, C]^N$.*

Definamos primero la función $F_i : \Delta \mapsto \mathbb{R}$ por

$$F_i(x) = U_i(y_i(x)) - v_i(x) + \rho(x)x_i,$$

y luego claramente

$$J_i(w_i, w_{-i}) = F_i(x) - w_i. \tag{4.8}$$

Demostración. Observamos que, si $x = e_i$ (algún vector de la base canónica) entonces $y = e_i$. Así tenemos que $F_i(e_i) = U_i(1)$, $F_j(e_i) = U_j(0)$ para $j \neq i$. Además, sabemos que $U_i(y_i(x)) \leq U_i(1)$ (pues las funciones U_i son crecientes). Entonces lo que necesitamos acotar es la cantidad $\rho(x)x_i - v_i(x)$ cuando $x \in \Delta_0$. Asumamos sin pérdida de generalidad que $x_i = \max_j x_j$.

Para esto hagamos 2 observaciones

La primera es que ya sabemos, por (4.7), que $\rho(x) - \max v_i(x) \leq \sum_{j=1}^N \{U_j(1) - U_j(0)\}$.

La segunda, es que, podemos obtener mas información de la ecuación $U_i'(y_i)(1 - y_i) = \rho(1 - x_i)$ de tal manera de poder concluir que si x está suficientemente cerca de algún e_i entonces para todo $j \neq i$ tenemos que $\rho(x)x_j$ esta suficientemente cerca de cero.

Partamos recordando que si $x \to e_i$ entonces $y(x) \to e_i$

Definamos la función $g_i : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ por $g_i(y) = U_i'(y)(1-y)$. Observamos que esta función es continua, monótona estrictamente decreciente, y que $g_i(0) = U_i'(0)$, mientras que $g_i(1) = 0$. Esto implica que la función $y(x) \to e_i$ si $x \to e_i$, entonces podemos concluir que si $x \to e_i$ entonces tenemos que

$$\rho(1 - x_i) = \rho \sum_{j \neq i} x_j = g_i(y_i) \to 0$$

En particular, tomando $\varepsilon > 0$ dado por 4.10 tenemos que si $\|x - e_i\| < \varepsilon$, entonces hay un $\delta > 0$ tal que

$$\rho(1 - x_i) = \rho \sum_{j \neq i} x_j = g_i(y_i) < \delta.$$

Por lo tanto en este caso podemos concluir que$\rho(x)x_j - v_j \leq \delta$ cuando $j \neq i$. Además, sabemos que $\rho(x) - v_i(x) \leq \sum_{j=1}^N \{U_j(1) - U_j(0)\}$.

Por otro lado, si $\|x - e_i\| \geq \varepsilon$ sea $\lambda = \frac{1}{N^N}$. Si i no es tal que $v_i = \max_j v_j$ entonces existe un $l \neq i$ tal que $v_l = \max_j v_j$. Observemos que $1 = \sum_{j=1}^N y_j$, luego $1 - y_l = \sum_{j \neq l} y_j$. Luego $\|y - e_l\|_\infty = 1 - y_l$. Tenemos 2 casos:

- Si x es tal que $\|y - e_l\|_\infty \geq \lambda$ entonces $\|y - e_l\|_\infty = 1 - y_l = \sum_{j \neq l} y_j \geq \lambda$. Por lo tanto existe un $j \neq l$ tal que $y_j \geq \lambda/(N - 1)$. Luego

$$\rho = U_j'(y_j)\frac{(1 - y_j)}{(1 - x_j)} \leq U_j'\left(\frac{\lambda}{N - 1}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{N - 1}\right)\left(\frac{1}{1 - x_j}\right).$$

  Pero como $1 - x_j \geq 1 - x_i = \|e_i - x\|_\infty \geq \varepsilon$, entonces

$$\rho = U_j'(y_j)\frac{(1 - y_j)}{(1 - x_j)} \leq \frac{U_j'(y_j)(1 - y_j)}{\varepsilon} \leq \frac{U_j'\left(\frac{\lambda}{N-1}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{N-1}\right)}{\varepsilon}$$

Llamemos

$$\tilde{C} := \max_j \frac{U_j'\left(\frac{\delta}{N-1}\right)\left(1-\frac{\delta}{N-1}\right)}{\varepsilon}$$

Con esto, probemos que los F_i son acotados: en efecto.

$$\begin{aligned} F_i(x) &= U_i(y_i(x)) - v_i(x) + \rho(x)x_i \\ &\leq U_i(1) + \rho(x) \\ &\leq U_i(1) + \tilde{C} \\ &\leq \tilde{C} + \max_j U_j(1) \end{aligned}$$

- En el caso en que $\|e_l - y\|_\infty \leq \lambda$ esto implica $1 - y_l \leq \lambda$. Es decir, $y_l \geq 1 - \lambda$. Por lo que concluimos que

  $$\rho(x) \sum_{j \neq l} x_j = \rho(x)(1 - x_l) = g_l(y_l) \leq g_l(1-\lambda) = \bar{C}$$

  De lo que deducimos que

  $$\begin{aligned} F_i(x) &= U_i(y_i(x)) - v_i(x) + \rho(x)x_i \\ &\leq U_i(1) + \rho(x)x_i \\ &\leq U_i(1) + \bar{C} \\ &\leq \bar{C} + \max_j U_j(1) \end{aligned}$$

  Llamemos $C = \max\{\bar{C} + \max_j U_j(1), \tilde{C} + \max_j U_j(1)\}$, entonces tenemos que

  $$F_i(x) \leq C$$

Ahora, si i es tal que $v_i(x) = \max_j v_j(x)$ entonces tenemos que

$$\begin{aligned} F_i(x) &= U_i(y_i(x)) - v_i(x) + \rho(x)x_i \\ &\leq U_i(1) - v_i(x) + \rho(x) \\ &\leq U_i(1) + \sum_j \{U_j(1) - U_j(0)\} \\ &\leq \bar{C} + \max_j U_j(1) \end{aligned}$$

con lo que concluimos la propiedad

$\square$

Con esto, obtenemos que

Proposición 4.12 *Espacios de estrategias compactos*

Si $i \in \{1, .., N\}$ entonces tenemos que para todo $w = (w_1, ..., w_N) \in \mathbb{R}_+^N$, $J_i(w_i, w_{-i}) \leq C - w_i$. Luego, nos podemos reducir a que los espacios de estrategias de todos los jugadores vienen dados por $[0, C]$

Otra consecuencia del resultado previo, es el siguiente:

Lema 4.13 *Sea $i \in \{1,..,N\}$ y sea $F_i : \Delta \mapsto \mathbb{R}_+$ dada por*

$$F_i(x) = U_i(y_i(x)) - v_i(x) + \rho(x)x_i.$$

Sean $j \in \{1,...,N\}$, y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a e_j. Entonces tenemos que:

1. *Si $j \neq i$ entonces $F_i(x) \to U_i(0) = F_i(e_j)$*
2. *Si $j = i$ entonces $F_i(x) \to U_i(1) = F_i(e_j)$*

Demostración. Sea $(x_n)_n \in \Delta_0$ tal que $x_n \to e_j$. Entonces, por la propiedad previa, tenemos que para todo $i \in 1,..,N$, $n \in \mathbb{N}$, $F_i(x_n) < C$. En particular, $F(x_n) = (F_1(x_n),...,F_N(x_n)) \in [0,C]^N$ para todo n. Entonces, x_n posee una subsucesión x_{n_K} tal que $F(x_{n_k}) \to F \in [0,C]^N$.

Tambien sabemos que $y(x)$ es continua, y por lo tanto

$$y(x_{k_n}) \to y(e_j) = e_j,$$

con lo que tenemos que

$$U_l(y_l(x_{k_n})) \to \begin{cases} U_l(0) & \text{si } l \neq j \\ U_j(1) & l = j \end{cases}$$

Por la ecuación (4.2), tenemos que, si $x_{j,k_n} \leq y_{j,k_n}$ entonces

$$0 \leq \rho\,|y_j - x_j| \leq \rho(1-x_j) = U_j'(y_j)(1-y_j) \to 0,$$

por lo que tenemos que

$$F_j(x) \to U_j(1) = F_j(e_j).$$

Por otra parte,

$$\rho\left|\sum_{i\neq j}(y_i - x_i)\right| = \rho\,|x_j - y_j| \to 0.$$

Además, por la ecuación (4.2),

$$\rho\sum_{i\neq j} x_i = \rho(1-x_j) = U_j'(y_j)(1-y_j) \to 0.$$

Por lo cual tambien tenemos que

$$0 \leq \rho\sum_{i\neq j} y_i = \rho\left|\sum_{i\neq j} y_i\right| \leq \rho\left|\sum_{i\neq j}(y_i - x_i)\right| + \rho\left|\sum_{i\neq j} x_i\right| = \rho\left|\sum_{i\neq j}(y_i - x_i)\right| + \rho\sum_{i\neq j} x_i,$$

lo cual tiende a 0 cuando $x \to e_j$. Con esto, finalmente podemos ver que para todo $i \neq j$

$$0 \leq \rho\,|x_i - y_i| \leq \rho\left(\sum_{i\neq j}(x_i + y_i)\right) \to 0,$$

por lo cual, si $i \neq j$ entonces

$$F_i(x) \to U_i(0) = F_i(0).$$

Por otro lado, si $x_{j,k_n} > y_{j,k_n}$, ya sabemos por la proposición previa que $\rho(x_j - y_j) = \rho x_j - v_j$ está acotado. Sabemos también que para todo $j \neq i$

$$\rho\sum_{i\neq j} x_i = \rho(1 - x_j) = U_j'(y_j)(1 - y_j) \to 0,$$

y que $v_i \to 0$ para todo $i \neq j$, luego

$$\rho\,|x_j - y_j| = \rho\left|\sum_{i\neq j}(y_i - x_i)\right| = \sum_{i\neq j} v_i - \rho\sum_{j\neq i} x_i \to 0,$$

lo que nos permite concluir

□

Con esto podemos probar lo siguiente

Proposición 4.14 *Las funciones J_i son continuas en $[0, C]^N \backslash \{0\}$*

Demostración. Ya sabemos que $J_i(w) \to J_i(Ce_i)$ cuando $w \to Ce_i$ con algún $C > 0$. Además, si $w \to \bar{w}$ con $\bar{w}$ que tienen al menos 2 componentes > 0, entonces $x(w) \to x(\bar{w}) \in \Delta_0$ y sabemos que $v(x) \to v(\bar{x})$, por lo tanto $J_i(w) = U_i(y_i(x(w))) + \rho(x(w))(x_i(w) - y_i(x(w))) - w$ converge a $J_i(\bar{w}) = U_i(y_i(x(\bar{w}))) + \rho(x(\bar{w}))(x_i(\bar{w}) - y_i(x(\bar{w}))) - \bar{w}$.

□

Con este lema, tenemos que las funciones J_i son continuas en $[0, C]^N \backslash \{0\}$ pero tambien tenemos que J_i son discontinuas en 0. Por lo cual vemos que no podemos usar el teorema de Glicksberg, y nuevamente, necesitamos ver si podemos usar Dasgupta-Maskin.

Recordemos que por Dasgupta-Maskin, lo único que nos falta para establecer la existencia de NE es que los J_i verifiquen que:

- La suma $\sum_{i=1}^{N} J_i(w)$ sea semi-continua superior en $[0, C]^N$
- Para cada i y para cada w_{-i} las funciones $J_i(\cdot, w_{-i})$ sean al menos débilmente semi-continuas inferiormente.

Sabemos por lo anterior que los J_i son continuos salvo en 0 por lo cual en particular van a verificar las 2 condiciones mencionadas arriba. Lo único que nos falta es definir convenientemente a las funciones J_i en 0. Para esto, partamos notando que la función $U := \sum_{j=1}^{N} U_j : \Delta \mapsto \mathbb{R}_+$ tal que a $y \in \Delta$ le asigna $U(y) = \sum_{j=1}^{N} U_j(y_j)$ es continua en Δ, el cual es compacto. Por lo tanto, existe un $\bar{y} \in \Delta$ que maximiza a dicha función.

Ahora, notemos lo siguiente: Sea $w \in [0, C]^N \backslash \{0\}$ entonces para todo i tenemos que

$$J_i(w) = U_i(y_i) + \rho(x_i - y_i) - w_i$$

Sumando sobre todos los i tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} J_i(w) &= \sum_{i=1}^{N} U_i(y_i) + \rho \sum_{i=1}^{N}(x_i - y_i) - \sum_{i=1}^{N} w_i \\ &= \sum_{i=1}^{N} U_i(y_i) - \sum_{i=1}^{N} w_i \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} U_i(\bar{y}_i) - \sum_{i=1}^{N} w_i \end{aligned}$$

Por lo tanto, definimos J_i en 0 por

$$J_i(0,0) = U_i(\bar{y}_i)$$

Con esto, tenemos que para todo $w \neq 0$

$$\sum_{i=1}^{N} J_i(0) = \sum_{i=1}^{N} U_i(\bar{y}_i) \geq \sum_{i=1}^{N} J_i(w)$$

Con lo cual, en particular tenemos la semi-continuidad superior de $\sum_{i=1}^{N} J_i(w)$.

Ahora, veamos que tenemos la otra propiedad. En efecto, sea i y sea $w_{-i} = 0 \in \mathbb{R}_+^{N-1}$. Entonces, si $w_i > 0$ entonces

$$J_i(w_i, w_{-i}) = U_i(1) - w_i$$

lo que converge a $U_i(1)$ cuando $w_i \to 0$. En cambio, en $w_i = 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} J_i(0,0) &= U_i(\bar{y}_i) \\ &\leq U_i(1) \\ &= \lim_{w_i \to 0} J_i(w_i, w_{-i}) \end{aligned}$$

Con lo que concluimos que las funciones $J_i(\cdot, w_{-i})$ son semi-continuas inferiormente. Finalmente, notemos que, dados $i, j \in \{1, ..., N\}$, si definimos $D = 1$ y $f_{ij} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dada por $f_{ij}(x) = 2x$, entonces, tenemos que $\{0\}$es de la forma $S^*(i)$ del teorema de Dasgupta-Maskin (ver la sección 1.3) es $S^*(i) = \{0\}$. Por lo tanto, tenemos el teorema de Dasgupta-Maskin. Lo que nos garantiza que el subjuego $(SJ1)$ posea NE en estrategias mixtas.

Capítulo 5

Existencia de NE en estrategias puras, para 2 jugadores, con utilidades lineales

Partiremos analizando esta instancia del juego, en la cual las funciones de utilidad de ambos jugadores, vienen dadas por $U_i(x) = a_i x$. Acá, spg, $a_1 \geq a_2$.

Debido a que ya sabemos que el subjuego de la segunda etapa siempre posee solución, para concluir la existencia del SPE debemos mostrar que el subjuego de la primera etapa $(SJ1)$ definido en la descripcion del juego, posee un equilibrio.

Partamos recordando las condiciones de primer orden de la segunda etapa:

$$\begin{aligned} U_i'(y_i)(1-y_i) &= \rho(1-x_i) \text{ si } y_i > 0 \\ U_i'(0) &\leq \rho(1-x_i) \text{ si } y_i = 0 \end{aligned}$$

con $\rho = \sum_j v_j$.

En este caso, estas condiciones se escriben así:

$$a_i(1-y_i) = \rho(1-x_i) \text{ si } y_i > 0 \tag{5.1}$$

$$a_i \leq \rho(1-x_i) \text{ si } y_i = 0 \tag{5.2}$$

Además, nos conviene recordar que cuando $x \in \Delta_0$ entonces $y(x)$ tiene al menos 2 componentes positivas. En este caso en particular, esto quiere decir que, dado $x \in \Delta$, entonces tenemos que $x \in \Delta_0 \Leftrightarrow y(x) \in \Delta_0$. Esto implica que en este caso las condiciones de primer orden se escriben por

$$a_i(1-y_i) = \rho(1-x_i) \tag{5.3}$$

para $i = 1, 2$.

En particular, tenemos que

$$1 - y_i = \rho\frac{(1-x_i)}{a_i}$$

Sumando en $i = 1, 2$ tenemos que

$$\rho(x) = \frac{1}{\frac{(1-x_1)}{a_1} + \frac{(1-x_2)}{a_2}} \tag{5.4}$$

Equivalentemente podemos escribir ρ como

$$\rho(x_1) = \frac{1}{\frac{(1-x_1)}{a_1} + \frac{x_1}{a_2}}$$

Como $x_1 \in [0, 1]$ esto nos permite concluir que

$$a_2 \leq \rho \leq a_1$$

Además, recordemos que

$$\begin{aligned} J_i(w_i, w_{-i}) &= a_i y_i - v_i + \rho x_i - w_i \\ &= a_i y_i + \rho(x_i - y_i) - w_i \\ &= (a_i - \rho) y_i + \rho x_i - w_i \end{aligned} \tag{5.5}$$

Notando esto, podemos probar la siguiente propiedad

Proposición 5.1 *Para todo $i = \{1, 2\}$, tenemos que*

$$J_i(w_i, w_{-i}) \leq a_1 - w_i$$

independiente del valor de $w_{-i} \geq 0$

Observación Con esto, tenemos que los espacios de estrategia de cada jugador, vienen dados por $[0, a_1]$, (que es un convexo compacto)

DEMOSTRACIÓN. En efecto:

Por la ecuación 5.5, si $i = 1$ entonces

$$\begin{aligned} J_1(w_1, w_2) &= a_1 y_1 + \rho(x_1 - y_1) - w_1 \\ &\leq a_1 + \rho(x_1 - y_1) - w_1 \end{aligned}$$

Pero, por las condiciones de primer orden de la segunda etapa (ie, por la ecuación 5.3), tenemos que

$$a_1(1 - y_1) = \rho(1 - x_1)$$

Como $a_1 \geq \rho$ entonces $(1 - y_1) \leq (1 - x_1)$ por lo cual $x_1 \leq y_1$ por lo cual, usando la desigualdad previa, concluimos que

$$J_1(w_1, w_2) \leq a_1 - w_1$$

Si $i = 2$ entonces

$$\begin{aligned} J_2(w_2, w_1) &= (a_2 - \rho)y_2 + \rho x_2 - w_2 \\ &\leq a_1 + (a_2 - \rho) - w_1 \end{aligned}$$

Pero, como $a_2 \leq \rho$ entonces, con la desigualdad previa, concluimos que

$$J_2(w_2, w_1) \leq a_1 - w_2$$

$\square$

Segundo, vamos a establecer la continuidad de las funciones de pago J_i. Para esto, vamos a encontrar una expresión explicita para estas funciones. Sabemos, por 5.4 que

$$\rho(x) = \frac{1}{\frac{(1-x_1)}{a_1} + \frac{(1-x_2)}{a_2}}$$

Además, sabemos que, cuando $(w_1, w_2) \neq (0, 0)$ tenemos que $x_1 = w_1/(w_1 + w_2)$ y que $x_2 = w_2/(w_1 + w_2)$. Entonces tenemos que

$$\rho(w) = \frac{w_1 + w_2}{w_1/a_2 + w_2/a_1}$$

Por su parte, sabemos que

$$1 - y_i = \rho\frac{(1 - x_i)}{a_i}$$

Por lo tanto

$$y_1(w) = \frac{\frac{1-x_1}{a_1} + \frac{1-x_2}{a_2} - \frac{1-x_1}{a_1}}{\frac{1-x_1}{a_1} + \frac{1-x_2}{a_2}} = \frac{w_1/a_2}{w_1/a_2 + w_2/a_1}$$

y

$$y_2(w) = \frac{w_2/a_1}{w_1/a_2 + w_2/a_1}$$

Finalmente, tenemos que

$$v_1 = \rho y_1 = \frac{w_1}{a_2}\frac{(w_1 + w_2)}{(w_1/a_2 + w_2/a_1)^2}$$

y

$$v_2 = \frac{w_2}{a_1}\frac{(w_1 + w_2)}{(w_1/a_2 + w_2/a_1)^2}$$

Finalmente, tenemos que

$$\begin{aligned}
J_1 &= a_1y_1 - v_1 + \rho x_1 - w_1 \\
&= \frac{a_1w_1/a_2}{(w_1/a_2 + w_2/a_1)} - \frac{w_1}{a_2}\frac{(w_1+w_2)}{(w_1/a_2+w_2/a_1)^2} + \frac{w_1}{(w_1/a_2+w_2/a_1)} - w_1 \\
&= \frac{1}{(w_1/a_2+w_2/a_1)^2}\left(\frac{a_1w_1}{a_2}\left(\frac{w_1}{a_2}+\frac{w_2}{a_1}\right) - \frac{w_1}{a_2}(w_1+w_2) + w_1\left(\frac{w_1}{a_2}+\frac{w_2}{a_1}\right)\right) - w_1 \\
&= \frac{1}{(w_1/a_2+w_2/a_1)^2}\left(\frac{a_1w_1^2}{a_2^2} + \frac{w_1w_2}{a_2} - \frac{w_1^2}{a_2} - \frac{w_1w_2}{a_2} + \frac{w_1^2}{a_2} + \frac{w_1w_2}{a_1}\right) - w_1 \\
&= \frac{1}{(w_1/a_2+w_2/a_1)^2}\left(\frac{a_1w_1^2}{a_2^2} + \frac{w_1w_2}{a_1}\right) - w_1 \qquad (5.6)
\end{aligned}$$

Un desarrollo análogo nos da que

$$J_2 = \frac{1}{(w_1/a_2+w_2/a_1)^2}\left(\frac{a_2w_2^2}{a_1^2} + \frac{w_1w_2}{a_2}\right) - w_2 \qquad (5.7)$$

Esto nos permite, en particular, concluir la siguiente propiedad

Proposición 5.2 *Sea $i = 1, 2$. entonces, la funcion J_i es continua en $[0, a_1]^2\backslash\{0\}$.*

Observación Las funciones J_i son irreparablemente discontinuas en 0. En efecto:

Consideremos primero la sucesión $w_n = (1/n, 0)$. Entonces, tenemos que las asignaciones correspondientes en la primera etapa son $x_n = e_1 = (1, 0)$. Sabemos que en este caso las asignaciones correspondientes de la segunda etapa son $y_n = e_1$. Por lo tanto las funciones de pago valen $J_1(w_n) = a_1 - 1/n$ y $J_2(w_n) = 0$. Por lo tanto, en el limite tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} J_1(w_n) &= a_1 \\
\lim_{n\to\infty} J_2(w_n) &= 0
\end{aligned}$$

Por otro lado, si escogemos $w_n = (0, 1/n)$ Entonces, tenemos que las asignaciones correspondientes en la primera etapa son $x_n = e_2 = (0, 1)$. Sabemos que en este caso las asignaciones correspondientes de la segunda etapa son $y_n = e_2$. Por lo tanto las funciones de pago valen $J_2(w_n) = a_2 - 1/n$ y $J_1(w_n) = 0$. Por lo tanto, en el limite tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} J_1(w_n) &= 0 \\
\lim_{n\to\infty} J_2(w_n) &= a_2
\end{aligned}$$

Con lo que concluimos que J_i son discontinuas en 0.

Por lo tanto, no podemos usar el teorema de Debreu-Glicksberg-Fan [3] para probar la existencia de NE para el subjuego $(SJ1)$. Por lo tanto, necesitamos teoremas que, con hipótesis mas débiles que continuidad, permitan asegurar que existe un NE en estrategias puras.

Para esto, recordemos las siguientes definiciones

Definición 5.3 *Grafo del juego*

Sea $\Gamma = \{(w,u) \in W \times W/$ para $i = 1, 2$ tenemos que $J_i(w) = u_i\}$, donde W es el espacio de estrategias puras de los jugadores. También denotamos la clausura de Γ por $cl(\Gamma)$, y la frontera de Γ por $Fr(\Gamma)$

A continuación recordemos las siguiente nociones de la revisión bibliográfica (ver también [15])

Definición 5.4 *Seguridad de mejor respuesta*

Si $(w, u^*) \in cl(\Gamma)$ es tal que w no es un equilibrio del juego, entonces hay un jugador i y una estrategia $\bar{w}_i$ tal que $J_i(\bar{w}_i, t_{-i}) > u_i^*$ si t_{-i} está en una vecindad abierta de w_{-i}

Definición 5.5 *Un juego es débilmente quasi-continuo de transferencia si, cuando $w \in W$ no es un equilibrio, entonces existe un perfil de estrategias $v \in W$ y una vecindad $V(w)$ de w tal que para todo $w' \in W$ tenemos que existe un i tal que $J_i(v_i, w'_{-i}) > J_i(w')$*

A continuación caracterizamos la clausura del grafo del juego, para este caso específico:

Proposición 5.6 *Sea $(w, u) \in cl(\Gamma)$. Luego*

1. *Si $w \in (0, a_1]^2$ entonces $u_i = J_i(w)$ para $i = 1, 2$*
2. *Si $w = 0$ entonces u es tal que $(w, u) \in cl(\Gamma)$ si y solo si existe $x \in \Delta$ tal que para todo i, $u_i^* = U_i(y_i(x)) + \rho(x)(x_i - y_i(x))$*

Demostración. En efecto:

$\Leftarrow$: sea $x \in \Delta$ tal que para todo i, $u_i^* = U_i(y_i(x)) + \rho(x)(x_i - y_i(x))$, y sea $w_n = x/n$. Tenemos que si n es suficientemente grande, entonces $w_n \in [0, C]^N$. Además, $w_n \to 0$, mientras que por otro lado, tenemos que para todo n y para todo i,

$$J_i(w_n) = U_i(y_i(x)) + \rho(x)(x_i - y_i(x)) - \frac{x_i}{n} \to u_i^*$$

Con lo que tenemos que $(0, u^*) \in cl(\Gamma)$.

$\Rightarrow$: Sea $w_n \to 0$ tal que existe u^*tal que $(w_n, J(w_n)) \to (0, u^*)$. Es decir, para todo i, tenemos que

$$J_i(w_n) = U_i(y_i(x(w_n))) + \rho(x(w_n))(x_i(w_n) - y_i(x(w_n))) - w_n \to u_i^*$$

Pero, sabemos que para todo n, $x(w_n) \in \Delta$ que es un compacto, por lo cual dicha sucesión posee un punto de acumulación $\bar{x} \in \Delta$. Es decir, existe una subsucesión $x(w_{k_n}) \to \bar{x}$. Por lo que tenemos que para todo i,

$$\begin{aligned} J_i(w_{k_n}) &= U_i(y_i(x(w_{k_n}))) + \rho(x(w_{k_N}))(x_i(w_{k_n}) - y_i(x(w_{k_N}))) - w_{k_n} \\ &\to U_i(y_i(\bar{x})) + \rho(\bar{x})(\bar{x}_i - y_i(\bar{x})) = u_i^* \end{aligned}$$

debido a que $y : \Delta \mapsto \Delta$ y $\rho : \Delta \mapsto \mathbb{R}_+$ son continuas.

□

Proposición 5.7 *El juego verifica seguridad de mejor respuesta*

Demostración. Notemos que, si $w \in [0, a_1]^2/\{0\}$ no es un equilibrio del juego, y $u^* = J(w)$, entonces hay un jugador i y una estrategia $\bar{w}_i$ tal que $J_i(\bar{w}_i, t_{-i}) > u_i^*$ si t_{-i} está en una vecindad abierta de w_{-i}. Esto es directo del hecho de que J_i son continuas en w.

Ahora, nos queda probar esa propiedad si $(0, u) \in cl(\Gamma)$.

Si $u = (a_1, 0)$ tomemos $i = 2$ y $\varepsilon > 0$ suficientemente chico. Entonces $J_2(\varepsilon, 0) = a_2 - \varepsilon > 10a_2/11 > 0$. Además, para todo $w_1 < \varepsilon$ entonces $J_2(\varepsilon, w_1) = a_2 y_2(x) + \rho(x_2 - y_2(x)) - \varepsilon > a_2 y_2(x) - \varepsilon > 0$.

Si $u = (a_1 y_1(x), a_2 y_2(x))$ tomemos $i = 1$ y de nuevo $\varepsilon > 0$ suficientemente chico, entonces $J_1(\varepsilon, 0) = a_1 - \varepsilon > a_1 y_1(x)$. Además, para todo $w_2 < C\varepsilon$ tal que $\varepsilon(1/(C+1)) > x_1$ entonces $J_1(\varepsilon, w_2) = a_1 y_1(x(w, \varepsilon)) + \rho(x_1 - y_1(x(w, \varepsilon))) - \varepsilon > a_1 y_1(x) - \varepsilon > 0$ con lo que tenemos que el juego verifica seguridad de mejor respuesta.

□

Proposición 5.8 *Si un juego verifica seguridad de mejor respuesta entonces es débilmente quasi-continuo de transferencia*

Ahora, por la ecuación 5.6, queremos establecer la quasi-concavidad de las funciones $J_i(\cdot, w_{-i})$. Derivando, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_1}{\partial w_1} &= \frac{1}{(w_1/a_2 + w_2/a_1)^2}\left[2a_1\frac{w_1}{a_2^2} + \frac{w_2}{a_1}\right] - \frac{1}{(w_1/a_2 + w_2/a_1)^3}\left[\frac{2a_1 w_1^2}{a_2^2} + \frac{2w_1 w_2}{a_1}\right] - 1 \\
&= \frac{1}{(w_1/a_2 + w_2/a_1)^3}\left[\frac{2a_1 w_1^2}{a_2^3} + \frac{2w_1 w_2}{a_2^2} + \frac{w_1 w_2}{a_2 a_1} + \frac{w_2^2}{a_1^2} - \frac{2a_1 w_1^2}{a_2^3} - \frac{2w_1 w_2}{a_1 a_2}\right] - 1 \\
&= \frac{1}{(w_1/a_2 + w_2/a_1)^3}\left[\frac{w_2^2}{a_1^2} + \frac{w_1 w_2}{a_2}\left(\frac{2}{a_2} - \frac{1}{a_1}\right)\right] - 1 \qquad (5.8)
\end{aligned}$$

Un desarrollo análogo nos da que

$$\frac{\partial J_2}{\partial w_2} = \frac{1}{(w_1/a_2 + w_2/a_1)^3}\left[\frac{w_1^2}{a_2^2} + \frac{w_1 w_2}{a_1}\left(\frac{2}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right)\right] - 1 \qquad (5.9)$$

Derivando por segunda vez obtenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 J_1}{\partial w_1^2} &= \frac{1}{(w_1/a_2+w_2/a_1)^3}\left[\frac{w_2}{a_2}\left(\frac{2}{a_2}-\frac{1}{a_1}\right)\right] - \frac{3/a_2}{(w_1/a_2+w_2/a_1)^4}\left[\frac{w_2^2}{a_1^2}+\frac{w_1w_2}{a_2}\left(\frac{2}{a_2}-\frac{1}{a_1}\right)\right] \\
&= \frac{1}{(w_1/a_2+w_2/a_1)^4}\left[\frac{w_2}{a_2}\left(\frac{2}{a_2}-\frac{1}{a_1}\right)\left(\frac{w_1}{a_2}+\frac{w_2}{a_1}\right)-\frac{3w_2^2}{a_1^2a_2}-\frac{3w_1w_2}{a_2^2}\left(\frac{2}{a_2}-\frac{1}{a_1}\right)\right] \\
&= \frac{1}{(w_1/a_2+w_2/a_1)^4}\left[\frac{2w_1w_2}{a_2^3}+\frac{2w_2^2}{a_1a_2^2}-\frac{w_1w_2}{a_1a_2^2}-\frac{w_2^2}{a_1^2a_2}-\frac{3w_2^2}{a_1^2a_2}-\frac{6w_1w_2}{a_2^3}+\frac{3w_1w_2}{a_1a_2^2}\right] \\
&= \frac{1}{(w_1/a_2+w_2/a_1)^4}\left[\frac{2w_2^2}{a_1a_2}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{2}{a_1}\right)+\frac{2w_1w_2}{a_2^2}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{2}{a_2}\right)\right] \\
&= \frac{2w_2}{a_2(w_1/a_2+w_2/a_1)^4}\left[\frac{w_2}{a_1}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{2}{a_1}\right)+\frac{w_1}{a_2}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{2}{a_2}\right)\right] \qquad (5.10)
\end{aligned}$$

Un desarrollo análogo nos da que

$$\frac{\partial^2 J_2}{\partial w_2^2} = \frac{2w_1}{a_1(w_1/a_2+w_2/a_1)^4}\left[\frac{w_1}{a_2}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{2}{a_2}\right)+\frac{w_2}{a_1}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{2}{a_1}\right)\right]-1 \qquad (5.11)$$

Teorema 5.9 *Las funciones $J_i(\cdot, w_{-i})$ son quasi-concavas para todo $w_{-i} \in [0, a_1]$. Más aun, tenemos que*

1. *Si $a_1 \leq 2a_2$ entonces las funciones J_1 y J_2 son cóncavas*
2. *Si $a_1 > 2a_2$ entonces las funciones J_1 y J_2 son quasi-concavas*

Demostración. Partamos notando lo siguiente

Sabemos que

$$a_2 \leq a_1 \Rightarrow a_2 > 2a_1 \Leftrightarrow \frac{1}{a_1} < \frac{2}{a_2}$$

Por otro lado, tenemos que

$$a_1 \leq 2a_2 \Leftrightarrow \frac{1}{a_2} \leq \frac{2}{a_1}$$

por lo tanto, con la ecuación 5.10 y 5.11, tenemos que cuando $a_1 \leq 2a_2$, $J_1(\cdot, w_2)$ y $J_2(\cdot, w_1)$ son cóncavas, para todo $w_1, w_2 \in [0, a_!]$.

Por otro lado, cuando $a_1 > 2a_2$ entonces tenemos lo siguiente:

- Para el segundo jugador, por la ecuación 5.9 tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_2}{\partial w_2} &= \frac{1}{(w_1/a_2+w_2/a_1)^3}\left[\frac{w_1^2}{a_2^2}+\frac{w_1w_2}{a_1}\left(\frac{2}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)\right]-1 \\
&= \frac{p_1(w_2)}{p_2(w_2)}-1
\end{aligned}$$

donde

$$p_1(w_2) = w_2\frac{w_1}{a_1}\left(\frac{2}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\frac{w_1^2}{a_2^2}$$

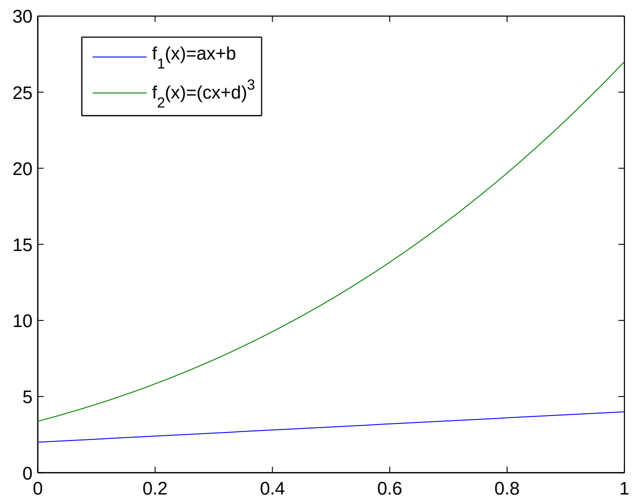

Figura 5.1: Caso (C1)

y

$$p_2(w_2) = \left(\frac{w_1}{a_2} + \frac{w_2}{a_1}\right)^3$$

Notemos que, por regla de l'hôpital, tenemos que

$$\lim_{w_2 \to \infty} \frac{p_1(w_2)}{p_2(w_2)} = \lim_{w_2 \to \infty} \frac{p_1'(w_2)}{p_2'(w_2)} = 0$$

Por lo tanto, $\frac{\partial J_2(\cdot,w_1)}{\partial w_2} \to -1$. Notemos además que p_2 de la forma $p_2(x) = (cd+d)^3$ con $c, d > 0$. Por lo tanto podemos ver geométricamente que hay 3 casos posibles (ver figura 5.1):

- si $p_1 \leq p_2$ en todo $w_2 \geq 0$. En este caso tenemos que $\frac{\partial J_2(w_2,w_1)}{\partial w_2} \leq 0$, por lo tanto $J_2(\cdot, w_1)$ es siempre decreciente y por lo tanto quasi-concava (C1)
- si existe un w_2^0 tal que $p_1 > p_2$ hasta w_2^0, y después sea menor. En este caso $\frac{\partial J_2(w_2,w_1)}{\partial w_2} \geq 0$ hasta w_2^0 y después $\frac{\partial J_2(w_2,w_1)}{\partial w_2} \leq 0$. Es decir, $J_2(\cdot, w_1)$ es primero creciente y después decreciente, y por lo tanto quasi-concava.(C2)
- si existen $0 < w_2^0 < w_2^1$ tales que $p_1 < p_2$ en $[0, w_2^0] \cup [w_2^1, \infty)$ y $p_1 > p_2$ en $[w_2^0, w_2^1]$. En este caso $\frac{\partial J_2(w_2,w_1)}{\partial w_2} \leq 0$ hasta w_2^0, despues $\frac{\partial J_2(w_2,w_1)}{\partial w_2} \geq 0$ hasta w_2^1, y después $\frac{\partial J_2(w_2,w_1)}{\partial w_2} \leq 0$. Es decir, $J_2(\cdot, w_1)$ no es cuasi-concava (C3)

- Además, como $\frac{2}{a_1} - \frac{1}{a_2} < 0$ tenemos que $p_1(w_2)$ es decreciente. Por lo tanto estamos en el caso (C1) o (C2), y por lo tanto $J_2(\cdot, w_1)$ es quasi-concava.

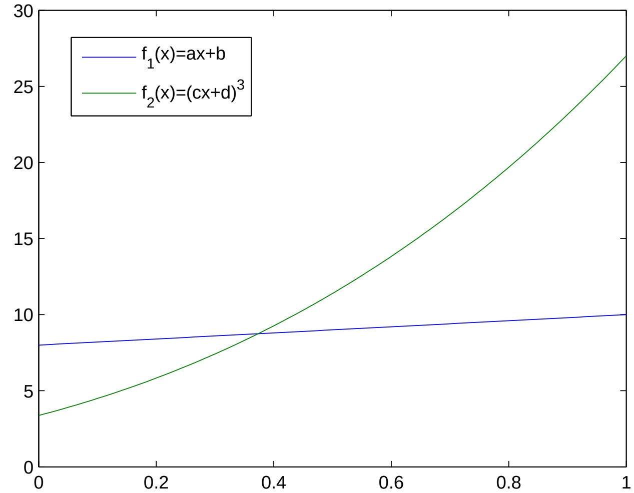

Figura 5.2: Caso (C2)

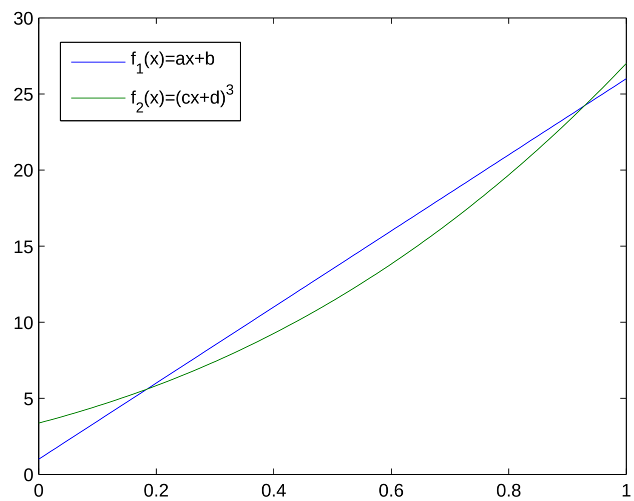

Figura 5.3: Caso (C3)

- Para el primer jugador, por la ecuación 5.8, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_1}{\partial w_1}(0,w_2) &= \frac{1}{(w_1/a_2+w_2/a_1)^3}\left[\frac{w_2^2}{a_1^2}+\frac{w_1w_2}{a_2}\left(\frac{2}{a_2}-\frac{1}{a_1}\right)\right]-1\\ &= \frac{(w_2/a_1)^2}{(w_2/a_1)^3}-1\\ &= \frac{a_1}{w_2}-1\\ &\geq 0\end{aligned}$$

  Además, acá también podemos decir que
  - si $p_1 \leq p_2$ en todo $w_1 \geq 0$. En este caso tenemos que $\frac{\partial J_1(w_1,w_2)}{\partial w_1} \leq 0$, por lo tanto $J_1(\cdot, w_2)$ es siempre decreciente y por lo tanto quasi-concava (C1)
  - si existe un w_1^0 tal que $p_1 > p_2$ hasta w_1^0, y después sea menor. En este caso $\frac{\partial J_1(w_1,w_2)}{\partial w_1} \geq 0$ hasta w_1^0 y después $\frac{\partial J_1(w_1,w_2)}{\partial w_1} \leq 0$. Es decir, $J_1(\cdot, w_2)$ es primero creciente y después decreciente, y por lo tanto quasi-concava.(C2)
  - si existen $0 < w_1^0 < w_1^1$ tales que $p_1 < p_2$ en $[0, w_1^0] \cup [w_1^1, \infty)$ y $p_1 > p_2$ en (w_1^0, w_1^1). En este caso $\frac{\partial J_1(w_2,w_1)}{\partial w_1} \leq 0$ hasta w_1^0, despues $\frac{\partial J_1(w_1,w_2)}{\partial w_1} \geq 0$ hasta w_1^1, y después $\frac{\partial J_1(w_1,w_2)}{\partial w_1} \leq 0$. Es decir, $J_1(\cdot, w_2)$ no es cuasi-concava (C3)
- Y como $\frac{\partial J_1(0,w_2)}{\partial w_1} \geq 0$ entonces estamos en (C2) y por lo tanto concluimos que J_1 es siempre quasi-concava.

□

Por este teorema en particular podemos deducir la siguiente proposición

Proposición 5.10 *Si $a_1 \geq 2a_2$ entonces el subjuego $(SJ1)$ solo admite NE en estrategias puras.*

Demostración. De la proposición 5.9 tenemos que si $a_1 \leq 2a_2$ entonces J_1 y J_2 son estrictamente concavas. En particular, para toda medida de radón probabilista μ_2 sobre el espacio de estrategias del segundo jugador, la función

$$\tilde{J}_1(w_1 : \mu_2) = \int_0^{a_1} J_1(w_1, w_2) d\mu_2$$

es estrictamente cóncava en $[0, a_1]$. Por lo tanto existe un único $w_1 \in [0, a_1]$ que maximiza a $\tilde{J}_1(\cdot : \mu_2)$. Con lo que concluimos que $BR_1(\mu_2) = \{w_1\}$ (ie, la delta de dirac concentrada en w_1). Esto nos permite concluir que, todo equilibrio del juego con 2 jugadores y utilidades lineales, es un equilibrio en estrategias puras.

□

Finalmente, recordemos el siguiente teorema (ver [15])

Teorema 5.11 *Si el juego $G = (I, W_i, J_i)$, donde W_i es el espacio de estrategias puras del i-ésimo jugador y J_i su función de pago, es tal que:*

- *para todo i, W_i es compacto convexo,*
- *las funciones J_i son acotadas*
- *el juego es débilmente quasi-continuo de transferencia y quasi-concavo (es decir, las funciones $J_i(\cdot, w_{-i})$ son quasi-cóncavas para todo $w_{-i} \in W_{-i}$*

Entonces el juego posee un NE en estrategias puras

Teorema 5.12 *Existencia de NE en estrategias puras*

El subjuego $(SJ1)$, con 2 jugadores y utilidades lineales, posee un NE en estrategias puras. Por lo tanto el juego (J) con 2 jugadores y utilidades lineales posee un SPE en estrategias puras

Capítulo 6

Precio de la anarquía

Acá vamos a estudiar el precio de la anarquía del juego. Por simplicidad nos vamos a restringir al caso en que las utilidades de los jugadores sean lineales. En este caso, tenemos el siguiente resultado

Teorema 6.1 *[1]*

El precio de la anarquía del juego, cuando los jugadores tienen utilidades lineales, es acotado inferiormente por $2\sqrt{2}-2$

Acá mostraremos una secuencia de instancias de la forma $U_1(x) = x$, $U_i(x) = ax$ con $a \in [0,1]$ para todo $i > 1$, con las cuales se alcanza que la eficiencia del SPE sea $2\sqrt{2}-2$. En particular, concluimos que el valor encontrado por [1] es óptimo y no se puede mejorar.

Primero (en la sección 6.1), vamos a caracterizar las condiciones de primer orden del subjuego $(SJ1)$ cuando las funciones de utilidad de los jugadores sean lineales. Posteriormente, nos enfocaremos en instancias de la forma $U_1(x) = x$, $U_i(x) = ax$ con $a \in [0,1]$ para todo $i > 1$. Para comenzar, mostraremos el siguiente teorema, que nos da explicitamente la solución de las condiciones de primer orden de $(SJ1)$ en función de $a \in [0,1]$ y de $N \in \mathbb{N}$.

Proposición 6.2 *Supongamos que* $a_1 = 1$, $a_i = a \in [0,1]$ *para todo* $i \in \{2, ..., N\}$. *Entonces, si* $N \in \mathbb{N}$ *es suficientemente grande, existe una única solución* w *a las condiciones de primer orden de la primera etapa, tal que además* $w_2 = ... = w_N$. *y* $P(w) = [n]$, *la cual viene dada por*

$$\begin{aligned} w_1 &= c_N w_2 \\ w_2 &= \frac{(N-1)((c_N + N - 2)(\frac{2}{a} - 1) + a)}{a\left(1 + \frac{(c_N+N-2)}{a}\right)^3} \end{aligned}$$

donde

$$
\begin{aligned}
c_N &= \frac{-b(N) + \sqrt{b(N)^2 - 4c(N)/a}}{2/a} \\
b(N) &= N - \left(\frac{4}{a} - 2\right) - \frac{2}{N-1}\left(2 - a - \frac{1}{a}\right) \\
c(N) &= N^2\left(1 - \frac{1}{a}\right) - aN + \left(3a - 8 + \frac{6}{a}\right) - \frac{2\left(a - 2 + \frac{1}{a}\right)}{N-1}
\end{aligned}
$$

Además, hay un $N_0 > 0$ tal que para todo $N \geq N_0$ tenemos que $b(N), c_N > 0$ y $c(N) < 0$.

Denotemos al perfil de estrategias w de la propiedad anterior por w^{NE}. Entonces, mostraremos el siguiente teorema.

Teorema 6.3 *Sea $a \in [0,1]$, $N \in \mathbb{N}$ y $w^{NE} = (w_1^{NE}, w_2^{NE}, .., w_2^{NE})$ con w_1^{NE}, w_2^{NE} dados por 6.6 y 6.7. Entonces, las funciones $J_i(\cdot, w_{-i}^{NE})$ son quasi-cóncavas para todo $i \in \{1, .., N\}$ y se maximizan en w_i^{NE}. Por lo tanto w^{NE} es un NE del subjuego $(SJ1)$.*

Finalmente, denotemos por $E_N(a)$ la eficiencia social del SPE dado por $(w^{NE}, v(\cdot))$ donde a cada $w \in [0,1]^N$ tenemos que $v(x)$ es el NE del subjuego $(SJ2)_x$ con $x = w/\mu$. Entonces, para concluir mostraremos la siguiente proposición, que nos dice que el precio de la anarquía del juego, cuando los jugadores tienen utilidades lineales, debe ser menor o igual a $2\sqrt{2} - 2$. Y, usando el teorema 6.1 podemos concluir que el precio de la anarquía, cuando los jugadores tienen utilidades lineales, debe ser $2\sqrt{2} - 2$

Teorema 6.4 *Sea $a = 2 - \sqrt{2}$ y $N \in \mathbb{N}$. Si denotamos por $E_N(a)$ la eficiencia social del SPE dado por w^{NE}, entonces tenemos que*

$$\lim_{N \to \infty} E_N(a) = 2\sqrt{2} - 2$$

6.1. Condiciones de primer orden del subjuego $SJ1$

A continuación vamos a encontrar un perfil de estrategias $w = (w_1, .., w_N) \in [0,1]^N$ tal que verifica:

- $\frac{\partial J_i}{\partial w_i}(w) = 0$,
- $w_i = w_j$ si $i, j > 1$,
- $P(w) = [n]$ (es decir, que todos los jugadores hacen apuestas > 0 en la segunda etapa).

A este perfil lo denotamos $w^{NE} = (w_1^{NE}, .., w_N^{NE}) = (w_1^{NE}, w_2^{NE}, ..., w_2^{NE})$. En la siguiente sección probaremos que este es efectivamente un equilibrio en estrategias puras del subjuego de la primera etapa $(SJ1)$. Y por lo tanto, si $v^*(w^{NE})$ denota las asignaciones en la segunda etapa del subjuego $(SJ2)_x$ concluimos que $(w^{NE}, v^*(w^{NE}))$ sería un SPE.

Sea $v : \Delta \mapsto \mathbb{R}^N$ la función que, a cada asignación $x \in \Delta$ de la primera etapa, entrega el equilibrio del subjuego $(SJ2)_x$. Sea $w_{-i} \in \Pi_{j \neq i}[0, a_1]$ y definamos para todo $i \in \{1, .., N\}$ la función $\Psi_i : [0, a_1]^N \mapsto \mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned}\Psi_i(w_i) &= J_i((w_{-i}, w_i), v((w^*_{-i}, w_i))) \\ &= a_i \frac{v_i}{\sum_j v_j} - v_i + \left(\sum_j v_j\right) \frac{w_i}{\sum_{j \neq i} w_j + w_i} - w_i\end{aligned}$$

Denotando $\rho = \rho(w_i) = \sum_j v_j(w_i)$, $\mu = \mu(w_i) = \sum_{j \neq i} w_j + w_i$, $x_i = x_i(w_i) = \frac{w_i}{\mu}$ y $y_i = y_i(w_i) = \frac{v_i(w_i)}{\rho(w_i)}$ tenemos que

$$\Psi_i(w_i) = a_i y_i - v_i + \rho x_i - w_i$$

A contiuación vamos a asumir que $P(w) = [n]$, es decir, que todos los jugadores tienen una asignación positiva en la segunda etapa. Con esto, las condiciones de primer orden de la segunda etapa vienen dadas por

$$a_i(1 - y_i) = \rho(1 - x_i) \tag{6.1}$$

Reordenando obtenemos que

$$(1 - y_i) = \frac{(1 - x_i)}{a_i} \rho$$

Sumando estas expresiones, se obtiene que

$$\begin{aligned}N - 1 &= \sum_j (1 - y_i) \\ &= \rho \sum_j \frac{(1 - x_j)}{a_j}\end{aligned}$$

Con lo que concluimos que

$$\rho(w) = \frac{N - 1}{\sum_j \frac{(1 - x_j)}{a_j}} \tag{6.2}$$

Proposición 6.5 *Asumamos que $P(w) = [n]$. Si denotamos*

$$H_i = \frac{\sum_{j \neq i} \frac{1}{a_j}}{N - 1}$$

entonces tenemos que

$$\frac{\partial \rho}{\partial w_i} = \frac{\rho}{\mu} (1 - \rho H_i) \tag{6.3}$$

Demostración. Ahora se va a obtener $\frac{\partial \rho}{\partial w_i}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial w_i} &= (N - 1) \frac{\partial}{\partial w_i} \left(\sum_j \frac{1}{a_j} (1 - x_j)\right)^{-1} \\ &= -\frac{(N - 1)}{\left(\sum_j \frac{1}{a_j} (1 - x_j)\right)^2} \left(\sum_j -\frac{1}{a_j} \frac{dx_j}{dw_i}\right) \\ &= -\frac{(N - 1)}{\left(\sum_j \frac{1}{a_j} (1 - x_j)\right)^2} \left(\sum_{j \neq i} \left[\frac{1}{a_j} \frac{w_j}{\mu^2}\right] - \frac{1}{a_i} \left(\frac{1}{\mu} - \frac{w_i}{\mu^2}\right)\right)\end{aligned}$$

Desarrollando esta expresión, podemos mostrar que

$$\frac{d\rho}{dw_i} = \frac{\rho}{\mu}\left(1-\rho\frac{\sum_{j\neq i}\frac{1}{a_j}}{N-1}\right)$$

Con esto, se concluye que

$$\frac{\partial\rho}{\partial w_i} = \frac{\rho}{\mu}\left(1-\rho H_i\right)$$

□

Lema 6.6 *Condiciones de primer orden de la primera etapa*

Si asumimos que $P(w) = [n]$, entonces las condiciones de primer orden de la primera etapa vienen dadas por

$$\frac{\mu}{\rho} = 2\rho H_i\left(y_i - x_i\right) + 1 - y_i \tag{6.4}$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_i}{\partial w_i} &= \frac{\partial}{\partial w_i}\left(\frac{w_i}{\sum_{j=1}^N w_j}\right) \\
&= \frac{\sum_{j\neq i} w_j}{\left(\sum_j w_j\right)^2} \\
&= \frac{1}{\mu}\left(\frac{\mu - w_i}{\mu}\right) \\
&= \frac{1}{\mu}(1-x_i)
\end{aligned}$$

Además, cuando $j \neq i$

$$\begin{aligned}
\frac{dx_j}{dw_i} &= \frac{\partial}{\partial w_i}\left(\frac{w_j}{\sum_{j=1}^N w_j}\right) \\
&= -\frac{w_j}{\left(\sum_{j=1}^N w_j\right)^2} \\
&= -\frac{x_j}{\mu}
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y_i}{\partial w_i} &= \frac{\partial}{\partial w_i}\left(\frac{v_i}{\rho}\right) \\
&= \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_i}{\partial w_i} - \frac{v_i}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial w_i}
\end{aligned}$$

Usando estas ecuaciones podemos mostrar que, al derivar Ψ_i obtenemos que

$$\begin{aligned}
\Psi_i' &= a_i \frac{\partial y_i}{\partial w_i} - \frac{\partial v_i}{\partial w_i} + \frac{\partial}{\partial w_i}(\rho x_i) - 1 \\
&= a_i \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_i}{\partial w_i} - a_i \frac{v_i}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial w_i} - \frac{\partial v_i}{\partial w_i} + \frac{\partial \rho}{\partial w_i} x_i + \rho\left(\frac{1}{\mu^2} - \frac{x_i}{\mu}\right) - 1 \\
&= \frac{\partial v_i}{\partial w_i}\left(\frac{a_i}{\rho} - 1\right) + \frac{\partial \rho}{\partial w_i}\left(x_i - \frac{a_i y_i}{\rho}\right) + \frac{\rho}{\mu}(1 - x_i) - 1
\end{aligned}$$

Igualando esta expresión a 0 obtenemos las condiciones de primer orden, las cuales vienen dadas por

$$1 = \frac{\partial v_i}{\partial w_i}\left(\frac{a_i}{\rho} - 1\right) + \frac{\partial \rho}{\partial w_i}\left(x_i - \frac{a_i y_i}{\rho}\right) + \frac{\rho}{\mu}(1 - x_i) \tag{6.5}$$

Notar que, despejando en la relación 6.1 y usando que $y_i = v_i/\rho$ obtenemos que.

$$v_i = \rho - \frac{(1 - x_i)}{a_i}\rho^2$$

Luego, derivando con respecto a w_i se obtiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_i}{\partial w_i} &= \frac{\partial \rho}{\partial w_i} - \frac{\partial}{\partial w_i}\left(\frac{(1 - x_i)}{a_i}\rho^2\right) \\
&= \frac{\partial \rho}{\partial w_i} - 2\rho\frac{(1 - x_i)}{a_i}\frac{\partial \rho}{\partial w_i} - \frac{\rho^2}{a_i}\frac{\partial}{\partial w_i}(1 - x_i) \\
&= \frac{\partial \rho}{\partial w_i}\left(1 - \frac{2\rho(1 - x_i)}{a_i}\right) - \frac{\rho^2(1 - x_i)}{a_i \mu}
\end{aligned}$$

Luego por 6.5, y usando las relaciones 6.3 y desarrollando, obtenemos que

$$\begin{aligned}
1 &= \left(\frac{a_i}{\rho} - 1\right)\frac{\partial v_i}{\partial w_i} + \left(x_i - \frac{a_i y_i}{\rho}\right)\frac{\partial \rho}{\partial w_i} + \frac{\rho(1 - x_i)}{\mu} \\
&= \frac{\rho}{\mu}\left(2\rho H_i\left(y_i - x_i\right) + (1 - y_i)\right)
\end{aligned}$$

Despejando, se obtiene la expresión

$$\frac{\mu}{\rho} = 2\rho H_i\left(y_i - x_i\right) + 1 - y_i$$

□

6.2. Instancias de la forma $a_1 = 1, a_i = a, i \in 2, ..., N$

6.2.1. Solución de las condiciones de primer orden

A continuación vamos a obtener el candidato a NE del subjuego $(SJ1)$ para instancias de la forma $a_1 = 1$, $a_i = a \in [0, 1]$ para todo $i \in \{2, ..., N\}$. Primero introduciremos algo de notación

Definición 6.7 *Sea $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Decimos que $f(z) = o(z^k)$ si $\lim_{z\to 0} f(z^k)/z^k = 0$ para algún $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.*

Definición 6.8 *Sea $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$. Decimos que $f(n) = O(n^k)$ si existe un $C > 0$ y un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ tenemos que $f(n) \leq Cn^k$ para algún $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.*

Proposición 6.9 *Supongamos que $a_1 = 1$, $a_i = a \in [0, 1]$ para todo $i \in \{2, ..., N\}$. Entonces, asintóticamente en N, existe una única solución w a las condiciones de primer orden de la primera etapa, tal que además $w_2 = ... = w_N$. y $P(w) = [n]$, la cual viene dada por*

$$
\begin{aligned}
w_1 &= c_N w_2 && (6.6) \\
w_2 &= \frac{(N-1)((c_N + N - 2)(\frac{2}{a} - 1) + a)}{a\left(1 + \frac{(c_N+N-2)}{a}\right)^3} && (6.7)
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
c_N &= \frac{-b(N) + \sqrt{b(N)^2 - 4c(N)/a}}{2/a} && (6.8) \\
b(N) &= N - \left(\frac{4}{a} - 2\right) - \frac{2}{N-1}\left(2 - a - \frac{1}{a}\right) && (6.9) \\
c(N) &= N^2\left(1 - \frac{1}{a}\right) - aN + \left(3a - 8 + \frac{6}{a}\right) - \frac{2\left(a - 2 + \frac{1}{a}\right)}{N-1} && (6.10)
\end{aligned}
$$

Además, hay un $N_0 > 0$ tal que para todo $N \geq N_0$ tenemos que $b(N), c_N > 0$ y $c(N) < 0$.

Demostración. Asumamos que $w_2 = ... = w_N$. Por la relación 6.5, tenemos que

$$
\frac{\mu}{\rho} = 2\rho H_1 (y_1 - x_1) - y_1 = 2\rho H_2 (y_2 - x_2) - y_2 \qquad (6.11)
$$

Notemos que

$$
H_1 = \frac{\sum_{j\neq 1} \frac{1}{a_j}}{N-1} = \frac{\frac{(N-1)}{a}}{(N-1)} = \frac{1}{a} \qquad (6.12)
$$

y

$$
H_2 = \frac{\sum_{j\neq 2} \frac{1}{a_j}}{N-1} = \frac{1 + \frac{N-2}{a}}{(N-1)} \qquad (6.13)
$$

Por otro lado, se sabe que

$$
x_i(w) = \frac{w_i}{\sum_j w_j}
$$

por lo cual se tiene que

$$
1 - x_i = \frac{\sum_{j\neq i} w_j}{\sum_j w_j}
$$

En este caso en particular, se tiene que

$$1 - x_1 = \frac{(N-1)w_2}{w_1 + (N-1)w_2} \tag{6.14}$$

y

$$1 - x_2 = \frac{w_1 + (N-2)w_2}{w_1 + (N-1)w_2} \tag{6.15}$$

Además, usando la ecuación 6.2 tenemos que

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{N-1}{(1-x_1) + \sum_{j>1} \frac{(1-x_{j:})}{a}} \\
&= \frac{N-1}{1 - x_1 + \frac{(N-1)(1-x_2)}{a}} \\
&= \frac{N-1}{\frac{(N-1)w_2}{w_1+(N-1)w_2} + \frac{(N-1)}{a}\frac{w_1+(N-2)}{w_1+(N-1)w_2}} \\
&= \frac{w_1 + (N-1)w_2}{w_2 + \frac{1}{a}(w_1 + (N-2)w_2)} \qquad (6.16)
\end{aligned}$$

Usando las relaciones 6.14 y 6.16, se tiene que

$$\begin{aligned}
1 - y_1 &= \rho(1 - x_1) \\
&= \frac{(N-1)w_2}{w_2 + \frac{1}{a}(w_1 + (N-2)w_2)} \qquad (6.17)
\end{aligned}$$

mientras que por las relaciones 6.15 y 6.16,

$$\begin{aligned}
1 - y_2 &= \frac{\rho}{a}(1 - x_2) \\
&= \frac{w_1 + (N-2)w_2}{aw_2 + (w_1 + (N-2)w_2)} \qquad (6.18)
\end{aligned}$$

Usando estas ecuaciones y haciendo el desarrollo podemos mostrar que

$$\begin{aligned}
y_1 - x_1 &= (N-1)w_2\left(\frac{1}{w_1 + (N-1)w_2} - \frac{1}{w_2 + \frac{1}{a}(w_1 + (N-2)w_2)}\right) \\
&= \frac{(N-1)w_2(\frac{1}{a} - 1)(w_1 + (N-2)w_2)}{(w_1 + (N-1)w_2)(w_2 + \frac{1}{a}(w_1 + (N-2)w_2))} \qquad (6.19)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
y_2 - x_2 &= (w_1 + (N-2)w_2)\left(\frac{1}{w_1 + (N-1)w_2} - \frac{1}{aw_2 + (w_1 + (N-2)w_2)}\right) \\
&= \frac{(w_1 + (N-2)w_2)w_2(a-1)}{a(w_1 + (N-1)w_2)(w_2 + \frac{1}{a}(w_1 + (N-2)w_2))} \qquad (6.20)
\end{aligned}$$

Usando las relaciones 6.12, 6.17, 6.19 y haciendo el desarrollo algebraico, se obtiene que

$$\begin{aligned}
2\rho H_1(y_1 - x_1) + 1 - y_1 &= \frac{2\rho(y_1 - x_1)}{a} + 1 - y_1 \\
&= \frac{1}{w_2 + \frac{1}{a}(w_1 + (N-2)w_2)}\left(\frac{2(w_1 + (N-1)w_2)(x_{-1} - y_{-1})}{a} + (N-1)w_2\right)
\end{aligned}$$

Desarrollando usando las ecuaciones 6.14 y 6.17 y desarrollando la expresión previa, se obtiene que

$$2\rho H_1(y_1-x_1)+(1-y_1)=\frac{(N-1)w_2}{w_2+\frac{1}{a}(w_1+(N-2)w_2)}\left(\frac{2(\frac{1}{a}-1)(w_1+(N-2)w_2)}{a(w_2+\frac{1}{a}(w_1+(N-2)w_2))}+1\right)$$

Análogamente, usando las relaciones 6.13, 6.18, 6.20, se obtiene que

$$\begin{aligned}2\rho H_2(y_2-x_2)+1-y_2 &= 2\left(\frac{1+\frac{(N-2)}{a}}{N-1}\right)\rho(x_{-2}-y_{-2})+1-y_2\\ &= \frac{2\left(1+\frac{(N-2)}{a}\right)(w_1+(N-1)w_2)(x_{-2}-y_{-2})}{(N-1)(w_2+\frac{1}{a}(w_1+(N-2)w_2))}+\frac{(w_1+(N-2)w_2)}{a\left(w_2+\frac{1}{a}(w_1+(N-2)w_2)\right)}\end{aligned}$$

Desarrollando la expresión previa, y usando las expresiones 6.15 y 6.18 se obtiene que

$$2\rho H_2(y_2-x_2)+(1-y_2) = \frac{w_1+(N-2)w_2}{a\left(w_2+\frac{1}{a}(w_1+(N-2)w_2)\right)}\left(\frac{2(a-1)w_2\left(\frac{1+(N-2)/a}{(N-1)}\right)}{(w_2+\frac{1}{a}(w_1+(N-2)w_2))}+1\right)$$

En sintesis:

$$2\rho H_1(y_1-x_1)+1-y_1 = \frac{(N-1)w_2}{\left(w_2+\frac{1}{a}(w_1+(N-2)w_2)\right)}\left[\frac{2(\frac{1}{a}-1)(w_1+(N-2)w_2)}{a\left(w_2+\frac{1}{a}(w_1+(N-2)w_2\right)}+1\right] \quad (6.21)$$

$$2\rho H_2(y_2-x_2)+1-y_2 = \frac{w_1+(N-2)w_2}{a\left(w_2+\frac{1}{a}\left(w_1+(N-2)w_2\right)\right)}\left[\frac{2(a-1)w_2\left(\frac{1+(N-2)/a}{(N-1)}\right)}{\left(w_2+\frac{1}{a}\left(w_1+(N-2)w_2\right)\right)}+1\right] \quad (6.22)$$

Por la relación 6.11, se igualan las relaciones 6.21 y 6.22, de lo que se deduce que

$$(N-1)w_2\left[\frac{2(\frac{1}{a}-1)(w_1+(N-2)w_2)}{a\left(w_2+\frac{1}{a}(w_1+(N-2)w_2)\right)}+1\right]=\frac{w_1+(N-2)w_2}{a}\left[\frac{2(a-1)w_2\left(\frac{1+(N-2)/a}{(N-1)}\right)}{\left(w_2+\frac{1}{a}(w_1+(N-2)w_2\right)}+1\right]$$

Reordenando términos en esta ecuación, se obtiene que

$$2w_2(w_1+(N-2)w_2)\left[(N-1)\left(\frac{1}{a}-1\right)-\frac{\left(1+\frac{(N-2)}{a}\right)(a-1)}{(N-1)}\right]=$$
$$(w_1+(a+(N-2))w_2)\left[\frac{w_1+(N-2)w_2}{a}-(N-1)w_2\right]$$

Desarrollando el lado izquierdo, se obtiene que

$$\begin{aligned}&(2w_2(w_1+(N-2)w_2))\left[(N-1)\left(\frac{1}{a}-1\right)-\frac{\left(1+\frac{(N-2)}{a}\right)(a-1)}{(N-1)}\right]\\ &=2w_1w_2\left[(N-1)\left(\frac{1}{a}-1\right)-\frac{\left(1+\frac{(N-2)}{a}\right)(a-1)}{(N-1)}\right]+\\ &2w_2^2(N-2)\left[(N-1)\left(\frac{1}{a}-1\right)-\frac{\left(1+\frac{(N-2)}{a}\right)(a-1)}{(N-1)}\right] \quad (6.23)\end{aligned}$$

Por su parte, desarrollando el lado derecho, se obtiene que

$$
\begin{aligned}
&(w_1 + (a + N - 2)w_2)\left[\frac{w_1 + (N-2)w_2}{a} - (N-1)w_2\right] \\
&= \frac{w_1^2}{a} + w_1 w_2 (N-2)\left(\frac{2}{a} - 1\right) + w_2^2 (a + N - 2)\left[\frac{(N-2)}{a} - (N-1)\right]
\end{aligned} \tag{6.24}
$$

Igualando las expresiones 6.23 y 6.24, se obtiene que

$$0 = \frac{w_1^2}{a} + w_1 w_2 b(N) + w_2^2 c(N)$$

Donde podemos mostrar que

$$b(N) = (N-2)\left(\frac{2}{a} - 1\right) - 2\left[(N-1)\left(\frac{1}{a} - 1\right) - \frac{\left(1 + \frac{(N-2)}{a}\right)(a-1)}{(N-1)}\right]$$

y

$$c(N) = (a+N-2)\left(\frac{(N-2)}{a} - (N-1)\right) - 2(N-2)\left[(N-1)\left(\frac{1}{a} - 1\right) - \frac{\left(1 + \frac{(N-2)}{a}\right)(a-1)}{(N-1)}\right]$$

Desarrollando $b(N)$ se obtiene

$$
\begin{aligned}
b(N) &= (N-2)\left(\frac{2}{a} - 1\right) - 2\left[(N-1)\left(\frac{1}{a} - 1\right) - \frac{\left(1 + \frac{(N-2)}{a}\right)(a-1)}{(N-1)}\right] \\
&= N + 2 - \frac{4}{a} + \frac{2}{N-1}\left(a - 2 + \frac{1}{a}\right)
\end{aligned}
$$

lo cual es > 0 a partir de un N_0

Desarrollando $c(N)$ y agrupando términos, se obtiene

$$
\begin{aligned}
c(N) &= (a + N - 2)\left(\frac{(N-2)}{a} - (N-1)\right) - 2(N-2)\left[(N-1)\left(\frac{1}{a} - 1\right) - \frac{\left(1 + \frac{(N-2)}{a}\right)(a-1)}{(N-1)}\right] \\
&= N^2\left(1 - \frac{1}{a}\right) - aN + 3a - 8 + \frac{6}{a} - \frac{2}{(N-1)}\left(a - 2 + \frac{1}{a}\right)
\end{aligned}
$$

lo que resulta menor que 0 a partir de un N_1

Luego, dividiendo por w_2^2, tenemos que, si $x = w_1/w_2$, entonces

$$x^2/a + xb(N) + c(N) = 0$$

Con lo cual se obtiene que

$$x = \frac{-b(N) \pm \sqrt{b(N)^2 - 4c(N)/a}}{2/a}$$

Notamos que a partir de $N_2 = \text{máx}\{N_0, N_1\}$, tenemos que:

- $b(N) > 0$
- $c(N) < 0$
- $b^2(N) - 4c(N)/a > 0$

Por lo cual, se concluye que a partir de N_2,

$$x = \frac{-b(N) + \sqrt{b(N)^2 - 4c(N)/a}}{2/a} := \frac{C(N)}{2/a} := c_N > 0$$

Recordando que $x = w_1/w_2$, tenemos que

$$w_1(w_2) = c_N w_2$$

Notar que, de la relación

$$\frac{\mu}{\rho} = 2\rho H_1(y_1 - x_1) + (1 - y_1)$$

y usando las relaciones 6.16 y 6.22 y haciendo el desarrollo algrbraico, obtenemos que

$$\left(w_2 + \frac{1}{a}(w_1 + (N-2)w_2)\right) = \frac{(N-1)w_2}{\left(w_2 + \frac{1}{a}(w_1 + (N-2)w_2)\right)} \left[\frac{2(\frac{1}{a} - 1)(w_1 + (N-2)w_2)}{a\left(w_2 + \frac{1}{a}(w_1 + (N-2)w_2\right)} + 1\right]$$

Desarrollando esta expresión tenemos que

$$\left(w_2 + \frac{1}{a}(w_1 + (N-2)w_2)\right) = \frac{(N-1)w_2}{a\left(w_2 + \frac{1}{a}(w_1 + (N-2)w_2)\right)^2} \left((w_1 + (N-2)w_2)\left(\frac{2}{a} - 1\right) + aw_2\right)$$

Como $w_1 = c_N w_2$, obtenemos que

$$w_2\left(1 + \frac{c_N + N - 2}{a}\right) \quad = \quad \frac{(N-1)w_2^2}{aw_2^2\left(1 + \frac{1}{a}(c_N + N - 2)\right)^2} \left((c_N + N - 2)\left(\frac{2}{a} - 1\right) + a\right)$$

Por lo tanto obtenemos que

$$w_2 = \frac{(N-1)\left((c_N + (N-2))(\frac{2}{a} - 1) + a\right)}{a\left(1 + \frac{1}{a}(c_N + (N-2))\right)^3} := w_2^{NE} > 0$$

$\square$

Proposición 6.10 *Sea $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una función derivable, de la forma*

$$f(z) = \sqrt{1 + dz + o(z)}$$

Entonces la expansión de Taylor de primer orden de f en torno a 0 es de la forma

$$f(z) = 1 + \frac{d}{2}z + o(z) \tag{6.25}$$

Demostración. Expandiendo f en torno a 0 en su desarrollo de Taylor de primer orden se tiene que

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + o(z)$$

En este caso en particular, se tiene que

$$f'(z) = \frac{1}{2\sqrt{1 + dz + o(z)}}(d + o'(z))$$

En particular, por la definición de $o(z)$, se tiene que

$$f'(0) = \frac{d + o'(0)}{2} = \frac{d}{2}$$

De lo que se deduce que

$$f(z) = 1 + \frac{d}{2}z + o(z^2)$$

$\square$

Proposición 6.11 *Sea* $f : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = \frac{a}{2}\left(-b(x) + \sqrt{b(x)^2 - \frac{4c(x)}{a}}\right)$$

Sean

$$\begin{aligned} m &= 1 - a \\ n &= -3a + \frac{4}{(2 - a)} \end{aligned}$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} &= m \\ \lim_{x \to \infty} f(x) - mx &= n \end{aligned}$$

En otras palabras, la recta $mx + n$ *es una asintota de* $f(x)$

Observación En particular, notemos que $c_N = f(N)$, por lo que concluimos que $\frac{c_N}{N} \to m = 1 - a$ y que $c_N - (1 - a)N \to n = -3a + \frac{4}{2-a}$ cuando $N \to \infty$. Es decir, $c_N \sim mN + n$.

Demostración. Recordando las expresiones para $b(\cdot)$ y $c(\cdot)$ dadas en 6.9 y 6.10, y desarrollando, se tiene que

$$b(x)^2 - 4c(x)/a = \left[x + \left(2 - \frac{4}{a} + \frac{2}{x-1}\left(a - 2 + \frac{1}{a}\right)\right)\right]^2 -$$
$$\frac{4}{a}\left[x^2\left(1-\frac{1}{a}\right) - ax + \left(3a - 8 + \frac{6}{a}\right) - \frac{2}{x-1}\left(a-2+\frac{1}{a}\right)\right]$$
$$= x^2 + 4x\left(1 - \frac{2}{a} + \frac{2}{x-1}\left(a-2+\frac{1}{a}\right)\right) +$$
$$4\left(1 - \frac{2}{a} + \frac{2}{x-1}\left(a-2+\frac{1}{a}\right)\right)^2 - x^2\left(\frac{4}{a}\left(1-\frac{1}{a}\right)\right) + 4x-$$
$$\frac{4}{a}\left[\left(3a-8+\frac{6}{a}\right) - \frac{2}{x-1}\left(a-2+\frac{1}{a}\right)\right]$$

Agrupando términos, obtenemos que

$$b(x)^2 - 4c(x)/a \quad = \quad x^2\left(1 - \frac{4}{a}\left(1-\frac{1}{a}\right)\right) + 8x\left(1-\frac{1}{a}\right) + O(1) \tag{6.26}$$

Luego, se tiene que

$$\frac{b(x)}{x} = 1 + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

y

$$\frac{b(x)^2 - 4c(x)/a}{x^2} = 1 - \frac{4}{a}\left(1-\frac{1}{a}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

Usando esto, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} &= \frac{a}{2}\left(-\frac{b(x)}{x} + \sqrt{\frac{b(x)^2-4c(x)/a}{x^2}}\right) \\
&= \frac{a}{2}\left(-1 + O(1/x) + \sqrt{1 - \frac{4}{a}\left(1-\frac{1}{a}\right) + O(1/x)}\right) \\
&\to \frac{a}{2}\left(-1 + \sqrt{1-\frac{4}{a}\left(1-\frac{1}{a}\right)}\right) := m^*
\end{aligned}$$

cuando $x \to \infty$.

Desarrollando obtenemos que

$$m^* = 1 - a = m$$

Como se busca entender el comportamiento asintótico de $f(x)$, se va a estudiar el límite

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - mx$$

Usando las ecuaciones 6.9 y 6.26 y haciendo el desarrollo obtenemos que

$$f(x) - mx = \frac{a}{2}\left(-b(x) + \sqrt{b(x)^2 - 4c(x)/a} - mx\right)$$
$$= \frac{a}{2}\left(-2 + \frac{4}{a} + x\left(\frac{1}{a}(2-a)\left[\sqrt{1 + \frac{8\left(1-\frac{1}{a}\right)}{\left(1-\frac{4}{a}\left(1-\frac{1}{a}\right)\right)}\frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)} - 1\right]\right) + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) \tag{6.27}$$

Sea

$$d = \frac{8\left(1-\frac{1}{a}\right)}{\left(1-\frac{4}{a}\left(1-\frac{1}{a}\right)\right)}$$

Haciendo esta identificación, y tambien haciendo el cambio de variable

$$z = \frac{1}{x}$$

se ve que se puede hacer la identificación

$$\sqrt{1+\frac{8\left(1-\frac{1}{a}\right)}{\left(1-\frac{4}{a}\left(1-\frac{1}{a}\right)\right)}\frac{1}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \sqrt{1+dz+o(z)} = g(z)$$

Luego, usando la propiedad 6.10 la relación y 6.27 y desarrollando, se deduce que

$$\begin{aligned} f(x)-mx &= \frac{a}{2}\left(-2+\frac{4}{a}+x\left(\frac{1}{a}(2-a)\left[1+\frac{d}{2x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)-1\right]\right)+O\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \frac{a}{2}\left(-2+\frac{4}{a}+\frac{8(1-\frac{1}{a})(2-a)}{2a\left(1-\frac{4}{a}\left(1-\frac{1}{a}\right)\right)}+O\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &\to \frac{a}{2}\left(-2+\frac{4}{a}+\frac{4}{a}\frac{\left(1-\frac{1}{a}\right)(2-a)}{\left(1-\frac{4}{a}\left(1-\frac{1}{a}\right)\right)}\right) := n^* \end{aligned}$$

cuando $x \to \infty$.

Notar que

$$\begin{aligned} n^* &= \frac{a}{2}\left(-2+\frac{4}{a}+\frac{4}{a}\frac{\left(1-\frac{1}{a}\right)(2-a)}{\left(1-\frac{4}{a}\left(1-\frac{1}{a}\right)\right)}\right) \\ &= \frac{a}{2}\left(-2+\frac{4}{a}+4\frac{(a-1)}{(2-a)}\right) \end{aligned}$$

Por otro lado, notar que

$$\begin{aligned} \frac{(a-1)}{(2-a)} &= -\frac{(a-1)}{(a-2)} \\ &= -\frac{(a-2+1)}{(a-2)} \\ &= -\left(1+\frac{1}{a-2}\right) \end{aligned}$$

Usando esto en la expresión para n^* y haciendo el desarrollo podemos concluir que

$$n^* = -3a + \frac{4}{a(2-a)} = n$$

□

Sean

$$\begin{aligned}
g_1 &= (m+1)\left(\frac{2}{a}-1\right)\\
g_2 &= (n-m-3)\left(\frac{2}{a}-1\right)+a\\
&= \left(-2a+\frac{4}{2-a}-4\right)\left(\frac{2}{a}-1\right)+a\\
&= 3a-\frac{8}{a}\left(\frac{1-a}{2-a}\right)-\frac{4}{2-a}\\
g_3 &= a\left(\frac{2-a}{a}\right)^3\\
g_4 &= 3a\left(\frac{m+1}{a}\right)^2\left(\frac{n-2}{a}+1\right)\\
&= 3\left(\frac{2-a}{a}\right)^2\left(-2a-2+\frac{4}{2-a}\right)\\
&= 6\left(\frac{2-a}{a}\right)^2\left(\frac{2}{2-a}-a-1\right)
\end{aligned}$$

Usando la ecuación 6.7 y el hecho de que $c_N = mN + n + o(1)$ podemos mostrar que

$$w_2^{NE}(N) = \frac{g_1\frac{1}{N} + g_2\frac{1}{N^2} + o(\frac{1}{N^2})}{g_3 + g_4\frac{1}{N} + o(x)}$$

Proposición 6.12 *Sea* $f_2 : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ *dada por*

$$f_2(x) = \frac{ax + bx^2 + o(x^2)}{c + dx + o(x)}$$

Entonces, la expansión en serie de Taylor de orden 2 en torno a cero de f_2 *es*

$$f_2(x) = \frac{ax}{c} + \frac{(bc-ad)x^2}{c^2} + o(x^2)$$

Demostración. En efecto, derivando, podemos mostrar que

$$f_2'(x) = \frac{ac + 2bcx + o(x)}{(c + dx + o(x))^2}$$

y que

$$f_2''(x) = \frac{2(bc^2 - acd) + o(1)}{(c + dx + o(x))^3}$$

Sabemos que el polinomio de Taylor de orden 2 de f_2 en torno a 0 viene dado por

$$f_2(x) = f_2(0) + f_2'(0)x + \frac{f_2''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$$

Con lo que podemos concluir la propiedad

□

En particular, con esto podemos mostrar que

$$w_2^{NE} = \frac{a}{2-2}\frac{1}{N} + g(a)\frac{1}{N^2} + o\left(\frac{1}{N^2}\right) \tag{6.28}$$

En efecto, sabemos que

$$w_2^{NE}(N) = \frac{g_1\frac{1}{N} + g_2\frac{1}{N^2} + o(\frac{1}{N^2})}{g_3 + g_4\frac{1}{N} + o(\frac{1}{N})}$$

Definiendo $x = 1/N$ y expandiendo $w_2^{NE}(x)$ en serie de taylor en torno a 0 podemos mostrar, usando la propiedad 6.12 que

$$w_2^{NE}(x) = \frac{g_1}{g_3}x + \left(\frac{(g_2g_3 - g_1g_4)}{g_3^2}\right)x^2 + o\left(x^2\right)$$

Usando las expresiones y haciendo el desarrollo podemos mostrar que

$$\frac{g_1}{g_3} = \frac{a}{2-a}$$

y que

$$\left(\frac{g_2g_3 - g_1g_4}{g_3^2}\right) = \frac{3a^4 - 12a^3 + 16a^2 - 8a}{(2-a)^4} := g(a)$$

6.2.2. Demostración de que es SPE

Ahora, mostraremos que el candidato a NE w^{NE} que encontramos en la sección previa es efectivamente un NE. Es decir, necesitamos probar lo siguiente:

- Para todo $w_1 \in [0,1]$ tenemos que $J_1(w_1, w_{-1}^{NE}) \leq J_1(w_1^{NE}, w_{-1}^{NE})$
- Para cualquier $i \in [n] - \{1\}$ (spg, $i = 2$), y para todo $w_2 \in [0,1]$, tenemos que $J_2(w_2, w_{-2}^{NE}) \leq J_2(w_2^{NE}, w_{-2}^{NE})$

En esta parte, necesitaremos usar frecuentemente el siguiente resultado

Proposición 6.13 *Sea $f : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ tal que*

$$f'(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} - 1$$

con $f_1(x) = ax + b$, $f_2(x) = (cx+d)^3$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. con $c, d > 0$. Entonces, las siguientes condiciones son suficientes para que f sea quasi-concava:

1. *$b/d^3 > 1$*
2. *$b/d^3 < 1$ y $a < 3cd^2$.*

Demostración. 1. En efecto, si $b/d^3 > 1$ entonces $f_1(0) > f_2(0)$. Además, por l'hôpital podemos mostrar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0$$

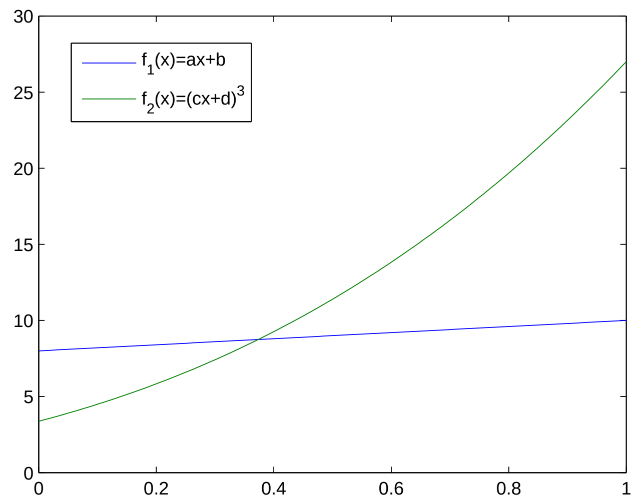

Figura 6.1: Caso $b > d^3$

Por teorema del valor intermedio existe un $x_0 > 0$ tal que $f_1(x_0) = f_2(x_0)$. Podemos mostrar que ese x_0 es único, que si $x < x_0$ entonces $f_1(x) > f_2(x)$ y que si $x > x_0$ entonces $f_1(x) < f_2(x)$ (ver figura 6.1). Por lo tanto, $f'(x) > 0$ si $x < x_0$ y $f'(x) < 0$ si $x > x_0$. Por lo tanto tenemos que f parte creciente y despues es decreciente, por lo tanto es quasi-concava.

2. Acá, si $b < d^3$ entonces $f_1(0) < f_2(0)$ y por lo tanto $f'(0) < 0$. Notemos que $f_1'(x) = a$ mientras que $f_2'(x) = 3c(cx+d)^2 > 3cd^2 = f_2'(0)$. Por lo tanto $f_1'(x) - f_2'(x) < a - 3cd^2 = f_1'(0) - f_2'(0) < 0$, por lo tanto $f_1(x) < f_2(x)$ para todo x (ver figura 6.2) , por lo tanto $f'(x) < 0$ para todo x y por lo tanto f es decreciente y por lo tanto quasi-concava.

□

Observación Para todo $w_1 \geq 0$ tenemos que $P(w_1, w_{-1}^{NE}) = [n]$.

Demostración. En efecto, notemos que para todo $i, j > 1$ tenemos que $w_i^{NE} = w_j^{NE} = w_2^{NE} > 0$. Por lo tanto, dado w_1, tenemos que $x_i = \frac{w_2^{NE}}{w_1 + (N-1)w_2^{NE}} = x_j$ por lo tanto, tambien tenemos que $y_i = y_j$. Además, por las condiciones de primer orden de la segunda etapa, sabemos que

$$(1 - y_1) = \rho(1 - x_1) \leq \rho < 1$$

Por lo tanto $y_1 > 0$, ie, $1 \in P(w_1, w_{-1}^{NE})$ siempre. Además, $\left|P(w_1, w_{-1}^{NE})\right| \geq 2$, por lo tanto existe un $i > 1$ tal que $y_i > 0$. Por lo tanto $P(w_1, w_{-1}^{NE}) = [n]$.

□

Observación Tenemos que $P(0, w_{-2}^{NE}) = [n] - \{2\}$.

Demostración. En efecto, notemos que para todo $i, j \in [n] - \{1, 2\}$ tenemos que $w_i^{NE} = w_j^{NE} = w_2^{NE} > 0$. Por lo tanto, dado w_1, tenemos que $x_i = \frac{w_2^{NE}}{w_1 + (N-1)w_2^{NE}} = x_j$ por lo

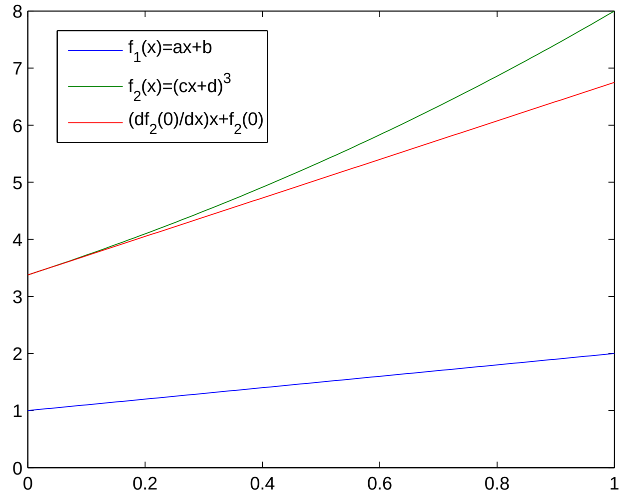

Figura 6.2: Caso $b < d^3$ y $a < 3cd^2$

tanto, tambien tenemos que $y_i = y_j$. Tambien sabemos que $1 \in P(0, w_{-2}^{NE})$. Además, por las condiciones de primer orden de la segunda etapa, sabemos que

$$\rho(1 - x_2) = \rho > a$$

Por lo tanto $y_2 = 0$, ie, $2 \notin P(0, w_{-2}^{NE})$ siempre. Además, $\left|P(0, w_{-2}^{NE})\right| \geq 2$, por lo tanto existe un $i > 2$ tal que $y_i > 0$. Por lo tanto $P(0, w_{-2}^{NE}) = [n] - \{2\}$.

$\square$

Tenemos el siguiente teorema

Teorema 6.14 *Sea $a \in [0,1]$, $N \in \mathbb{N}$ y $w^{NE} = (w_1^{NE}, w_2^{NE}, .., w_2^{NE})$ con w_1^{NE}, w_2^{NE} dados por 6.6 y 6.7. Entonces, las funciones $J_i(\cdot, w_{-i}^{NE})$ son quasi-cóncavas para todo $i \in \{1, .., N\}$ y se maximizan en w_i^{NE}. Por lo tanto w^{NE} es un NE del subjuego $(SJ1)$.*

Para poder probar el teorema necesitamos los siguientes lemas.

Lema 6.15 *Dado $a \in [0,1]$ tenemos que*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\partial J_1}{\partial w_1}(0, w_{-1}^{NE}) = (2-a)^2 - 1$$

Demostración. Para hacer esta demostración, primero, recordemos de que dado $w_{-1} = w_{-1}^{NE}$, tenemos que para todo w_1, $P(w_1, w_{-1}^{NE}) = [n]$. Además, recordemos que

$$\rho = \frac{|P| - 1}{\sum_{i \in P} \frac{(1-x_i)}{a_i}}$$

y que

$$1 = x_1 + (N-1)x_3$$

con

$$x_3 = \frac{w_2^{NE}}{(N-1)w_2^{NE} + w_1}$$

En este caso esto se escribe

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{N-1}{\sum_i \frac{(1-x_i)}{a_i}} \\
&= \frac{N-1}{(1-x_1) + \frac{1}{a}\sum_{i>1}(1-x_j)} \\
&= \frac{1}{\frac{x_1}{a} + x_3\left(1 + \frac{N-2}{a}\right)}
\end{aligned}$$

Además, sabemos que

$$1 - y_1 = \rho(1 - x_1)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
y_1 &= 1 - \rho(1 - x_1) \\
&= \frac{\frac{x_1}{a} + x_3(N-1)\left(\frac{1}{a} - 1\right)}{\frac{x_1}{a} + x_3\left(1 + \frac{N-2}{a}\right)}
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
v_1 &= \rho y_1 \\
&= \frac{\frac{x_1}{a} + x_3(N-1)\left(\frac{1}{a} - 1\right)}{\left(\frac{x_1}{a} + x_3\left(1 + \frac{N-2}{a}\right)\right)^2}
\end{aligned}$$

Definamos

$$\begin{aligned}
T_1(N) &= (N-1)\left(\frac{1}{a} - 1\right) \\
T_2(N) &= 1 + \frac{N-2}{a}
\end{aligned}$$

Con esto, y recordando que $x_i = w_i/\mu$ con $\mu = \sum_j w_j = w_1 + (N-1)w_2^{NE}$

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{1}{\frac{x_1}{a} + x_3 T_2(N)} \\
&= \frac{\mu}{\frac{w_1}{a} + w_2^{NE} T_2(N)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{\frac{x_1}{a} + x_3 T_1(N)}{\frac{x_1}{a} + x_3 T_2(N)} \\
&= \frac{\frac{w_1}{a} + w_2^{NE} T_1(N)}{\frac{w_1}{a} + w_2^{NE} T_2(N)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \frac{\frac{x_1}{a} + x_3(N-1)\left(\frac{1}{a}-1\right)}{\left(\frac{x_1}{a} + x_3\left(1+\frac{N-2}{a}\right)\right)^2} \\
&= \frac{\mu\left(\frac{w_1}{a} + w_2^{NE}T_1(N)\right)}{\left(\frac{w_1}{a} + w_2^{NE}T_2(N)\right)^2} \\
&= \frac{(w_1 + (N-1)w_2^{NE})(\frac{w_1}{a} + w_2^{NE}T_1(N))}{\left(\frac{w_1}{a} + w_2^{NE}T_2(N)\right)^2}
\end{aligned}
$$

Además, sabemos que

$$
J_1(w_1, w_{-1}^{NE}) = y_1 - v_1 + \rho x_1 - w_1
$$

Usando las expresiones para ρ, x_1, y_1 y v_1 y haciendo el desarrollo algebraico, llegamos a que

$$
\begin{aligned}
J_1(w_1, w_{-1}^{NE}) &= \frac{\frac{w_1}{a} + w_2^{NE}T_1(N)}{\frac{w_1}{a} + w_2^{NE}T_2(N)} - \frac{\left(\frac{w_1}{a} + w_2^{NE}T_1(N)\right)\left(w_1 + (N-1)w_2^{NE}\right)}{\left(\frac{w_1}{a} + w_2^{NE}T_2(N)\right)^2} + \frac{w_1}{\frac{w_1}{a} + w_2^{NE}T_2(N)} - w_1 \\
&= \frac{\frac{w_1^2}{a^2} + w_1 w_2^{NE}A(N) + \left(w_2^{NE}\right)^2 B(N)}{\left(\frac{w_1}{a} + w_2^{NE}C(N)\right)^2} - w_1
\end{aligned}
$$

Donde

$$
\begin{aligned}
A(N) &= T_2(N)\left(\frac{1}{a}+1\right) - \frac{(N-1)}{a} + \left(\frac{1}{a}-1\right)T_1(N) \\
&= N\left(\frac{2}{a^2} - \frac{2}{a} + 1\right) + O(1) \\
B(N) &= T_1(N)(T_2(N) - (N-1)) \\
&= N^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{2}{a} + 1\right) + O(N) \\
C(N) &= T_2(N) \\
&= 1 + \frac{N-2}{a}
\end{aligned}
$$

Derivando, podemos mostrar que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J_1(w_1, w_{-1}^{NE})}{\partial w_1} &= \frac{\frac{2w_1}{a^2} + w_2^{NE}A(N)}{\left(\frac{w_1}{a} + w_2^{NE}C(N)\right)^2} - \frac{\frac{2}{a}\left(\frac{w_1^2}{a^2} + w_1 w_2^{NE}A(N) + \left(w_2^{NE}\right)^2 B(N)\right)}{\left(\frac{w_1}{a} + w_2^{NE}C(N)\right)^3} - 1 \\
&= \frac{w_1 w_2^{NE}\frac{1}{a}(2C(N) - A(N)) + \left(w_2^{NE}\right)^2\left(A(N)C(N) - \frac{2B(N)}{a}\right)}{\left(\frac{w_1}{a} + w_2^{NE}C(N)\right)^3} - 1
\end{aligned}
$$

por lo tanto, si reemplazamos las expresiones de $A(N)$, $B(N)$, $C(N)$ y usamos la expresión de w_2^{NE} dada en 6.28, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_1(0,w_{-1}^{NE})}{\partial w_1} &= \frac{(A(N)C(N)-\frac{2B(N)}{a})}{w_2^{NE}C(N)^3}-1\\
&= \frac{N^2\left(\frac{2}{a^2}-\frac{1}{a}\right)+O\left(N\right)}{\left(\frac{a}{2-a}\frac{1}{N}+O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right)\left(\frac{N}{a}+O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right)^3}-1\\
&= \frac{\left(\frac{2}{a^2}-\frac{1}{a}\right)N^2+O(N)}{\left(\frac{1}{a^2(2-a)}\right)N^2+O(N)}-1\\
&= \frac{\frac{1}{a^2}(2-a)+O\left(\frac{1}{N}\right)}{\frac{1}{a^2(2-a)}+O\left(\frac{1}{N}\right)}-1\\
&\to (2-a)^2-1
\end{aligned}$$

□

Veamos ahora para la función $J_2(\cdot, w_{-2}^{NE})$

Primero, tenemos lo siguiente

Proposición 6.16 *El valor w_2^0 en el cual el conjunto P pasa de ser $[n]-\{2\}$ a ser $[n]$ viene dado por*

$$w_2^0 = w_2^{NE}\frac{(1-a)(N-2)}{(a+N-2)}$$

Es directo notar que $w_2^0 < w_2^{NE}$, a menos que $a=0$

Demostración. Por las condiciones de primer orden del subjuego $(SJ2)_x$ necesitamos encontrar el w_2 tal que $a=\rho(1-x_2)$. Sabemos que

$$\rho = \frac{|P|-1}{\sum_{i\in P}\frac{(1-x_i)}{a_i}}$$

y que $P(w)=[n]-\{2\}$, por lo tanto

$$\rho = \frac{N-2}{(1-x_1)+\frac{(N-2)(1-x_2)}{a}}$$

Además, por 6.6 tenemos que $x_1 = c_N x_3$, por lo tanto tenemos que

$$1=\sum_{i=1}^{N}x_i = x_1+x_2+(N-2)x_3 = x_2+(c_N+N-2)x_3$$

Usando esto, tenemos que

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{N-2}{(1-x_1) + \frac{(N-2)(1-x_2)}{a}} \\
&= \frac{N-2}{x_2 + (N-2)x_3 + \frac{(N-2)(x_2+(c_N+N-3)x_3)}{a}} \\
&= \frac{N-2}{x_2\left(1+\frac{N-2}{a}\right) + x_3\left(\frac{c_N(N-2)+(N-2)(N-3)}{a} + N-2\right)}
\end{aligned}$$

Por otra parte tenemos que

$$\frac{a}{1-x_2} = \frac{a}{(c_N+N-2)x_3}$$

Sea w_2 tal que $a = \rho(1-x_2)$, entonces podemos deducir que

$$\frac{a}{(c_N+N-2)x_3} = \frac{N-2}{x_2\left(1+\frac{N-2}{a}\right) + x_3\left(\frac{c_N(N-2)+(N-2)(N-3)}{a} + N-2\right)}$$

Reordenando términos podemos mostrar que

$$ax_2\left(1+\frac{N-2}{a}\right) + ax_3\left(\frac{(c_N+N-3)(N-2)}{a} + N-2\right) = (N-2)(c_N+N-3)x_3$$

De lo que podemos obtener que

$$x_2(a+N-2) + a(N-2)x_3 = (N-2)x_3$$

por lo tanto

$$x_2(a+N-2) = x_3(N-2)(1-a) \tag{6.29}$$

Recordemos que

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{w_2}{w_2 + (c_N+N-2)w_2^{NE}} \\
x_3 &= \frac{w_2^{NE}}{w_2 + (c_N+N-2)w_2^{NE}}
\end{aligned}$$

Luego, por la ecuación 6.29 concluimos que el w_2 en el cual $a = \rho(1-x_2)$ viene dado por

$$w_2 = w_2^0 = w_2^{NE}\frac{(1-a)(N-2)}{(a+N-2)}$$

$\square$

Segundo, tenemos lo siguiente

Proposición 6.17 *El valor w_2^1 en el cual el conjunto P pasa de ser $[n]$ a ser $\{1,2\}$ es*

$$w_2^1 = w_2^{NE}\frac{(1+a(N-2))}{(1-a)}$$

Asintóticamente en N, este valor es mas grande que w_2^{NE}

Demostración. Por las condiciones de primer orden del subjuego $(SJ2)_x$ necesitamos encontrar el w_2 tal que $a = \rho(1-x_3)$. Sabemos que

$$\rho = \frac{|P|-1}{\sum_{i\in P}\frac{(1-x_i)}{a_i}}$$

y que $P(w) = [n]$, por lo tanto

$$\rho = \frac{N-1}{(1-x_1)+\frac{(1-x_2)}{a}+\frac{(N-2)(1-x_2)}{a}}$$

Además, por 6.6 tenemos que $x_1 = c_N x_3$, por lo tanto tenemos que

$$1 = \sum_{i=1}^{N} x_i = x_1 + x_2 + (N-2)x_3 = x_2 + (c_N + N - 2)x_3$$

Usando esto, tenemos que

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{N-1}{\sum_{i\neq 2}\frac{(1-x_i)}{a_i}} \\
&= \frac{N-1}{(1-x_1)+\frac{1-x_2}{a}+\frac{(N-2)(1-x_3)}{a}} \\
&= \frac{N-1}{x_2\left(1+\frac{N-2}{a}\right)+x_3\left(\frac{c_N}{a}(N-1)+\frac{1}{a}(N-2)^2+(N-2)\right)}
\end{aligned} \tag{6.30}$$

Por otra parte tenemos que

$$\frac{a}{1-x_3} = \frac{a}{x_2+(c_N+N-3)x_3}$$

Sea w_2 tal que $a = \rho(1-x_2)$, entonces podemos deducir que

$$\frac{a}{x_2+(c_N+N-3)x_3} = \frac{N-2}{x_2\left(1+\frac{N-2}{a}\right)+x_3\left(\frac{c_N(N-1)+(N-2)^2}{a}+N-2\right)}$$

Reordenando términos podemos mostrar que

$$ax_2\left(1+\frac{N-2}{a}\right)+ax_3\left(\frac{c_N(N-1)+(N-2)^2}{a}+N-2\right)=x_2(N-1)+(N-1)(c_N+N-3)x_3$$

De lo que podemos obtener que

$$\begin{aligned} x_2(a-1)+a(N-2)x_3 &= x_3((N-3)(N-1)-(N-2)^2) \\ &= -x_3 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$x_2(1-a)=x_3(1+a(N-2)) \tag{6.31}$$

Recordemos que

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{w_2}{w_2+(c_N+N-2)w_2^{NE}} \\ x_3 &= \frac{w_2^{NE}}{w_2+(c_N+N-2)w_2^{NE}} \end{aligned}$$

Luego, por la ecuación 6.31 concluimos que el w_2 en el cual $a=\rho(1-x_3)$ viene dado por

$$w_2=w_2^1=w_2^{NE}\frac{(1+a(N-2))}{(1-a)}$$

□

Definamos la función $J_2^{[n]-\{2\}}(\cdot):[0,1]\mapsto\mathbb{R}$ como la extensión a $[0,1]$ de la función $J_2(\cdot,w_{-2}^{NE})$ definida en $[0,w_2^0]$

Definamos la función $J_2^{[n]}(\cdot):[0,1]\mapsto\mathbb{R}$ como la extensión a $[0,1]$ de la función $J_2(\cdot,w_{-2}^{NE})$ definida en $[w_2^0,w_2^1]$

Definamos la función $J_2^{\{1,2\}}(\cdot):[0,1]\mapsto\mathbb{R}$ como la extensión a $[0,1]$ de la función $J_2(\cdot,w_{-2}^{NE})$ definida en $[w_2^1,1]$

Tenemos lo siguiente

Lema 6.18 *La función $J_2^{[n]-\{2\}}$ es concava y parte creciente. Además, alcanza el máximo despues de w_2^0 cuando N es suficientemente grande*

Demostración. Para hacer esta demostración, primero, recordemos de que dado $w_{-2}=w_{-2}^{NE}$, tenemos que para todo $w_2\in[0,w_2^0]$, $P(w_1,w_{-1}^{NE})=[n]-\{2\}$. Además, recordemos de que

$$\rho=\frac{|P|-1}{\sum_{i\in P}\frac{(1-x_i)}{a_i}}$$

y que

$$\begin{aligned} 1 &= x_1 + x_2 + (N-2)x_3 \\ &= (c_N + N - 2)x_3 + x_2 \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{w_2}{(c_N + N - 2)w_2^{NE} + w_2} \\ x_3 &= \frac{w_2^{NE}}{(c_N + N - 2)w_2^{NE} + w_2} \end{aligned}$$

Usando las expresiones y desarrollando obtenemos que

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{N-2}{\sum_{i\neq 2} \frac{(1-x_i)}{a_i}} \\ &= \frac{N-1}{(1-x_1) + \frac{1}{a}\sum_{i>2}(1-x_j)} \\ &= \frac{a}{x_2\left(\frac{a}{N-2}+1\right) + x_3\left(a + c_N + N - 3\right)} \end{aligned} \tag{6.32}$$

Con esto, y recordando que $x_i = w_i/\mu$ con $\mu = \sum_j w_j = (c_N + N - 2)w_2^{NE} + w_2$ tenemos que

$$\rho = \frac{a}{x_2\left(\frac{a}{N-2}+1\right) + x_3\left(a + c_N + N - 3\right)} \tag{6.33}$$

$$= \frac{a((c_N + N - 2)w_2^{NE} + w_2)}{w_2\left(\frac{a}{N-2}+1\right) + w_3\left(a + c_N + N - 3\right)} \tag{6.34}$$

Además, sabemos que acá $y_2 = v_2 = 0$ y por lo tanto

$$J_2^{[n]-\{2\}}(w_2) = ay_2 - v_2 + \rho x_2 - w_2 = \rho x_2 - w_2$$

Usando las expresiones y haciendo el desarrollo algebraico podemos mostrar que

$$J_2^{[n]-\{2\}}(w_2) = \frac{aw_2}{w_2 D(N) + w_2^{NE} E(N)} - w_2$$

Donde

$$\begin{aligned} D(N) &= 1 + \frac{a}{N-2} \\ E(N) &= (c_N + N - 3 + a) \end{aligned}$$

Derivando, podemos mostrar que

$$\frac{dJ_2^{[n]-\{2\}}(w_2)}{dw_2} = \frac{aw_2^{NE} E(N)}{(w_2 D(N) + w_2^{NE} E(N))^2} - 1$$

por lo tanto el valor w_2 tal que $\frac{\partial J_2}{\partial w_2}(w_2, w_{-2}^{NE}) = 0$ es

$$w = \frac{-w_2^{NE}E(N) + \sqrt{aw_2^{NE}E(N)}}{D(N)} \tag{6.35}$$

Mostraremos que $w > w_2^{NE}$. Tenemos que

$$w_2^{NE} = \frac{a}{2-a}\frac{1}{N} + g(a)\frac{1}{N^2} + o\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

Recordando que $c_N = mN + n + o(1)$ con $m = 1 - a$ y $n = -3a + \frac{4}{2-a}$ y desarrollando obtenemos que

$$\begin{aligned} w_2^{NE}E(N) &= \left(\frac{a}{2-a}\frac{1}{N} + g(a)\frac{1}{N^2} + o\left(\frac{1}{N^2}\right)\right)(c_N + N - 3 + a) \\ &= a + h(a)\frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N^2}\right) \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} h(a) &= \left(\frac{a}{2-a}\right)(n - 3 + a) + g(a)(2-a) \\ &= \left(\frac{a}{2-a}\right)\left(-2a + \frac{4}{2-a} - 3\right) + g(a)(2-a) \end{aligned}$$

Usando la expresión de $g(a)$ y haciendo el desarrollo algebraico podemos mostrar que

$$h(a) = \frac{a^4 - 7a^3 + 16a^2 - 12a}{(2-a)^3}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \sqrt{aw_2^{NE}E(N)} &= \sqrt{a^2 + ah(a)\frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N^2}\right)} \\ &= a\sqrt{1 + \frac{h(a)}{a}\frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)} \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $z = 1/N$ vemos que $\sqrt{aw_2^{NE}E(N)}$ lo podemos escribir de la forma $af(z)$ con

$$f(z) = \sqrt{1 + dz + o(z)}$$

De la propiedad 6.10 el desarrollo de Taylor de orden 2 de g es de la forma

$$g(z) = 1 + \frac{d}{2}z + O(z^2) \tag{6.36}$$

Por lo tanto

$$\sqrt{aw_2^{NE}E(N)} = a + \frac{h(a)}{2}\frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right)$$

Tambien, tenemos que

$$D(N) = 1 + \frac{a}{N-2}$$

Hagamos $x = 1/N$ entonces, buscamos una expansión polinomial para

$$\begin{aligned} d(x) &= 1 + \frac{a}{1/x - 2} \\ &= 1 + \frac{ax}{1-2x} \end{aligned}$$

Derivando, tenemos que

$$\begin{aligned} d'(x) &= \frac{a}{1-2x} - \frac{(-2)ax}{(1-2x)^2} \\ &= \frac{a - 2ax + 2ax}{(1-2x)^2} \\ &= \frac{a}{(1-2x)^2} \end{aligned}$$

Derivando por segunda vez tenemos que

$$d''(x) = \frac{4a}{(1-2x)^3}$$

Por lo tanto

$$d(x) = 1 + ax + 2ax^2 + o(x^2)$$

Por lo tanto, usando la ecuación 6.35 tenemos que

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{-a - h(a)x + a + \frac{h(a)}{2}x + o(x)}{1 + ax + 2ax^2 + o(x^2)} \\ &= \frac{\frac{-h(a)x}{2} + o(x)}{1 + ax + 2ax^2 + o(x^2)} \end{aligned}$$

Derivando tenemos que

$$\begin{aligned} w'(x) &= \frac{-\frac{h(a)}{2} + o(1)}{(1 + ax + o(x))} - \frac{(a + o(1))\left(-\frac{h(a)}{2}x + o(x)\right)}{(1 + ax + o(x))^2} \\ &= \frac{-\frac{h(a)}{2} + o(x)}{(1 + ax + o(x))^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, y recordando que $x = 1/N$, tenemos que

$$\begin{aligned} w(x) &= w(0) + w'(0)x + o(x) \\ &= -\frac{h(a)}{2}\frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que

$$w - w_2^{NE} = \left(-\frac{h(a)}{2} - \frac{a}{2-a}\right)\frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right)$$

A continuación mostraremos que $t : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$, dada por

$$t(a) = -\frac{h(a)}{2} - \frac{a}{2-a}$$

es estrictamente positiva en $(0,1)$ y vale 0 en $\{0,1\}$. En efecto, podemos mostrar que

$$t(a) = \frac{-0{,}5a^4 + 2{,}5a^3 - 4a^2 + 2a}{(2-a)^3}$$

Sea $p_3 : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ dado por

$$p_3(a) = -0{,}5a^4 + 2{,}5a^3 - 4a^2 + 2a$$

Veamos que $p_3(a) \geq 0$ en $[0,1]$. En efecto,

$$\begin{aligned} p_3'(a) &= -2a^3 + 7{,}5a^2 - 8a + 2 \\ p_3''(a) &= -6a^2 + 15a - 10 \end{aligned}$$

Las raices de la cuadrática $6a^2 - 15a + 10$ vienen dadas por

$$a_{\pm} = \frac{15 \pm \sqrt{-15}}{12} = \frac{15 \pm i\sqrt{15}}{12}$$

las cuales no están en $\mathbb{R}$ Es decir la ecuación $p_3''(a) = 0$ no tiene soluciones en $\mathbb{R}$. Además, tenemos que $p_3''(0) < 0$ Por lo tanto, tenemos que p_3'' es ≤ 0 en $[0,1]$. Es decir, p_3' es decreciente en $[0,1]$. Pero $p_3'(1) = -0{,}5$ y $p_3'(0) = 2$ por lo tanto por teorema del valor intermedio existe un $a_0 \in (0,1)$ tal que $p_3'(a_0) = 0$. Por lo tanto p_3' es ≥ 0 en $[0, a_0]$ y ≤ 0 en $[a_0, 1]$. Finalmente notamos que $p_3(0) = p_3(1) = 0$ con lo que conluimos que $p_3 > 0$ en $(0,1)$.

Por lo tanto tenemos que asintóticamente, $w > w_2^{NE} > w_2^0$ lo que concluye la demostración

□

Lema 6.19 *La función $J_2^{[n]}$ es quasi-concava y parte creciente. Además, alcanza el máximo en w_2^{NE}*

Para mostrar este lema necesitamos la siguiente proposición

Proposición 6.20 *Sea $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de la forma*

$$F(x) = \frac{a + bx + o_1(x)}{c + dx + o_2(x)} - 1$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Entonces la expansión de Taylor de primer orden de F en torno a 0 viene dada por

$$F(x) = \frac{a}{c} - 1 + \left(\frac{bc - ad}{b^2}\right) x + o(x)$$

Demostración. En efecto, derivando esta función obtenemos que

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{b+o_1'(x)}{c+dx+o_2(x)} - \frac{(d+o_2'(x))(a+dx+o_1(x))}{(c+dx+o_2(x))^2} \\
&= \frac{bc+bdx+o_3(x)-ad-bdx+o_4(x)}{(c+dx+o_2(x))^2} \\
&= \frac{bc-ad+o(x)}{(c+dx+o_2(x))^2}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, al expandir F en serie de Taylor en torno al cero, tenemos que

$$
\begin{aligned}
F(x) &= F(0)+xF'(0)+o(x) \\
&= \frac{a}{c}-1+\left(\frac{bc-ad}{b^2}\right)x+o(x)
\end{aligned}
$$

$\square$

Demostración. Para hacer esta demostración, primero, recordemos de que dado $w_{-2}=w_{-2}^{NE}$, tenemos que para todo $w_2 \in [w_2^0, w_2^1]$, $P(w_2, w_{-2}^{NE})=[n]$. Además, recordemos de que

$$\rho = \frac{|P|-1}{\sum_{i\in P}\frac{(1-x_i)}{a_i}}$$

y que

$$
\begin{aligned}
1 &= x_1+x_2+(N-2)x_3 \\
&= x_2+x_3(c_N+N-2)
\end{aligned}
$$

con

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{w_2}{(c_N+N-2)w_2^{NE}+w_2} \\
x_3 &= \frac{w_2^{NE}}{(c_N+N-2)w_2^{NE}+w_2}
\end{aligned}
$$

Usando las ecuaciones *** y desarrollando podemos obtener que

$$
\begin{aligned}
\rho &= \frac{N-1}{\sum_{i\neq 2}\frac{(1-x_i)}{a_i}} \\
&= \frac{N-1}{(1-x_1)+\frac{1-x_2}{a}+\frac{1}{a}\sum_{i>2}(1-x_j)} \\
&= \frac{N-1}{x_2\left(1+\frac{N-2}{a}\right)+x_3\left(\frac{c_N}{a}(N-1)+\frac{1}{a}(N-2)^2+(N-2)\right)} \qquad (6.37)
\end{aligned}
$$

Además, sabemos que

$$a(1-y_2)=\rho(1-x_2)$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
y_2 &= 1-\rho(1-x_2)/a \\
&= 1-\frac{x_3(N-1)(c_N+N-2)/a}{x_2\left(1+\frac{N-2}{a}\right)+x_3\left(\frac{c_N}{a}(N-1)+\frac{1}{a}(N-2)^2+(N-2)\right)} \\
&= \frac{x_2\left(1+\frac{N-2}{a}\right)-x_3\frac{N-2}{a}}{x_2\left(1+\frac{N-2}{a}\right)+x_3\left(\frac{c_N}{a}(N-1)+\frac{1}{a}(N-2)^2+(N-2)\right)} \qquad (6.38)
\end{aligned}
$$

Además,

$$
\begin{aligned}
v_2 &= \rho y_2 \\
&= \frac{(N-1)\left(x_2\left(1+\frac{N-2}{a}\right)-x_3\frac{N-2}{a}\right)}{\left(x_2\left(1+\frac{N-2}{a}\right)+x_3\left(\frac{c_N}{a}(N-1)+\frac{1}{a}(N-2)^2+N-2\right)\right)^2} \qquad (6.39)
\end{aligned}
$$

Sean

$$
\begin{aligned}
T_1(N) &= (N-2)\left(1-\frac{1}{a}\right) \\
T_2(N) &= 1+\frac{N-2}{a} \\
T_3(N) &= \left(\frac{c_N(N-1)+(N-2)^2}{a}+N-2\right)
\end{aligned}
$$

Con esto, y recordando que $x_i = w_i/\mu$ con $\mu = \sum_j w_j = w_2 + (c_N+N-2)w_2^{NE}$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\rho &= \frac{N-1}{x_2T_2(N)+x_3T_3(N)} \\
&= \frac{(N-1)\mu}{w_wT_2(N)+w_2^{NE}T_2(N)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_2 &= \frac{x_2T_2(N)+x_3T_1(N)}{x_2T_2(N)+x_3T_3(N)} \\
&= \frac{w_2T_2(N)+w_2^{NE}T_1(N)}{w_2T_2(N)+w_2^{NE}T_3(N)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_2 &= \frac{(N-1)(x_2T_2(N)+x_3T_1(N))}{(x_2T_2(N)+x_3T_3(N))^2} \\
&= \frac{(w_2+(c_N+N-2)w_2^{NE})(N-1)(w_2T_2(N)+w_2^{NE}T_1(N))}{(w_2T_2(N)+w_2^{NE}T_3(N))^2} \\
&= \frac{w_2^2T_2(N)+w_2w_2^{NE}(N-1)((c_N+N-2)T_2(N)+T_1(N))+\left(w_2^{NE}\right)^2(N-1)(c_N+N-2)T_1(N)}{(w_2T_2(N)+w_2^{NE}T_3(N))^2}
\end{aligned}
$$

Además, sabemos que

$$J_2(w_2, w_{-2}^{NE}) = ay_2 - v_2 + \rho x_2 - w_2$$

Usando las expresiones 6.8, 6.38 y 6.37 y haciendo el desarrollo llegamos a que

$$J_2^{[n]}(w_2) = \frac{w_2^2 F(N) + w_2 w_3^{NE} G(N) + \left(w_3^{NE}\right)^2 H(N)}{\left(w_2 I(N) + w_2^{NE} J(N)\right)^2} - w_1$$

Donde

$$\begin{aligned}
F(N) &= aT_2(N)^2 \\
&= a\left(1 + \frac{N-2}{a}\right)^2 \\
G(N) &= aT_2(N)(T_1(N) + T_3(N)) + (N-1)(T_3(N) - (c_N + N - 2)T_2(N) - T_1(N)) \\
&= N^3\left(\frac{m+1}{a}\right) + N^2\left(\frac{n-2m-6}{a} + 2\right) + O(N) \\
H(N) &= aT_1(N)T_3(N) - (N-1)(c_N + N - 2)T_1(N) \\
&= N^2\left((1-a)\left(1 - \frac{1}{a}\right)\right) + O(N) \\
I(N) &= T_2(N) \\
&= 1 + \frac{N-2}{a} \\
J(N) &= \frac{c_N(N-1) + (N-2)^2}{a} + N - 2 \\
&= N^2\left(\frac{2-a}{a}\right) + N\left(\frac{n-m-4}{a} + 1\right) + O(1)
\end{aligned}$$

Derivando, podemos mostrar que

$$\frac{dJ_2^{[n]}(w_2)}{dw_2} = \frac{w_2 w_2^{NE}(2F(N)J(N) - G(N)I(N)) + \left(w_2^{NE}\right)^2 (G(N)J(N) - 2I(N)H(N))}{\left(w_2 I(N) + w_2^{NE} M(N)\right)^3} - 1$$

Definamos $x = 1/N$, entonces, podemos escribir $\frac{dJ_2^{[n]}}{dw_2}(0) = F(x)$ con $F : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ de la forma

$$F(x) = \frac{a_0 + a_1 x + o_1(x)}{b_0 + b_1 x + o_2(x)} - 1$$

donde podemos mostrar que

$$\begin{aligned}
a_0 &= \left(\frac{2-a}{a}\right)^2 \\
a_1 &= \left(\frac{2-a}{a}\right)\left(\frac{2n-3m-10}{a} + 3\right) \\
b_0 &= \left(\frac{2-a}{a}\right)^2 \\
b_1 &= 3\left(\frac{2-a}{a}\right)\left(\frac{n-m-4}{a} + 1\right) + g(a)\left(\frac{2-a}{a}\right)^3
\end{aligned}$$

Desarrollando podemos mostrar que

$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & \dfrac{-13a^2+44a-36}{a^2(2-a)} \\ b_1 & = & \dfrac{a^3-18a^2+54a-44}{a^2(2-a)} \end{array}$$

Con lo que podemos concluir que

$$y(a) = \frac{2a^2-8a+8}{(2-a)^3}$$

Veamos que esta función es positiva en $[0,1]$. En efecto, definamos $p_1 : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$, por

$$p_1(a) = 2a^2 - 8a + 8$$

Derivando tenemos que

$$\begin{array}{rcl} p_1'(a) & = & 4a-8 \\ & \leq & 0 \end{array}$$

Por lo tanto tenemos que p_1 es decreciente en $[0,1]$, y que $p_1(a) = 2$, por lo tanto concluimos que $p_1 > 0$ en $[0,1]$, con lo que concluimos que $y(a) > 0$ en $[0,1]$. Por lo tanto, si $N \gg 1$, entonces $x = \frac{1}{N} \ll 1$ y por lo tanto, tenemos que

$$\frac{dJ_2^{[n]}(0)}{dw_2} = y(a)\frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) > 0$$

Por lo tanto si N es suficientemente grande, sabemos que la función $J_2^{[n]}$ parte creciente, y por lo tanto, por la propiedad 6.13 es quasi-concava, además se maximiza en w_2^{NE}.

□

Y lo siguiente

Lema 6.21 *La función* $J_2^{\{1,2\}}$ *es decreciente. Además, asintóticamente, tenemos que*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{dJ_2^{\{1,2\}}}{dw_2}(0) = \frac{(2-a)^2(1+a^2)}{4} - 1 := q(a)$$

Demostración. Para hacer esta demostración, primero, recordemos de que dado $w_{-2} = w_{-2}^{NE}$, tenemos que para todo $w_2 \in [w_2^1, 1]$, $P(w_1, w_{-1}^{NE}) = \{1,2\}$. Además, recordemos de que

$$\rho = \frac{|P|-1}{\sum_{i\in P} \frac{(1-x_i)}{a_i}}$$

y que

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & x_1 + x_2 + (N-2)x_3 \\ & = & x_2 + (c_N + N - 2)x_3 \end{array}$$

con

$$x_3 = \frac{w_2^{NE}}{(c_N + N - 2)w_2^{NE} + w_2}$$

En este caso esto se escribe

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{1}{\sum_{i\neq 2} \frac{(1-x_i)}{a_i}} \\
&= \frac{1}{(1-x_1) + \frac{(1-x_2)}{a}} \\
&= \frac{1}{x_2 + (N-2)x_3 + \frac{(c_N+N-2)x_3}{a}} \\
&= \frac{1}{x_2 + x_3\left(\frac{c_N+N-2}{a} + N - 2\right)} \qquad (6.40)
\end{aligned}$$

Además, sabemos que

$$a(1-y_2) = \rho(1-x_2)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
y_2 &= 1 - \rho(1-x_2)/a \\
&= \frac{(1-x_1)}{(1-x_1) + \frac{(1-x_2)}{a}} \\
&= \frac{x_2 + (N-2)x_3}{x_2 + x_3\left(\frac{c_N+N-2}{a} + N - 2\right)} \qquad (6.41)
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
v_2 &= \rho y_2 \\
&= \frac{x_2 + (N-2)x_3}{\left(x_2 + x_3\left(\frac{c_N+N-2}{a} + N - 2\right)\right)^2} \qquad (6.42)
\end{aligned}$$

Con esto, y recordando que $x_i = w_i/\mu$ con $\mu = \sum_j w_j = w_2 + (c_N + N - 2)w_2^{NE}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{1}{x_2 + x_3 T_1(N)} \\
&= \frac{\mu}{w_2 + w_2^{NE} T_1(N)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2 &= \frac{x_2 + x_3(N-2)}{x_2 + x_3 T_1(N)} \\
&= \frac{w_2 + w_2^{NE}(N-2)}{w_2 + w_2^{NE} T_1(N)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
v_2 &= \frac{(x_2 + x_3(N-2))}{(x_2 + x_3 T_1(N))^2} \\
&= \frac{(w_2 + (c_N + N - 2)w_2^{NE})(w_2 + w_2^{NE}(N-2))}{(w_2 + w_2^{NE} T_1(N))^2} \\
&= \frac{w_2^2 + w_2 w_2^{NE} T_2(N) + \left(w_2^{NE}\right)^2 T_3(N))}{(w_2 + w_2^{NE} T_1(N))^2}
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
T_1(N) &= \left(\frac{c_N + N - 2}{a} + N - 2\right) \\
T_2(N) &= c_N + 2(N-2) \\
T_3(N) &= (N-2)(c_N + N - 2)
\end{aligned}
$$

Además, sabemos que

$$
J_2(w_2, w_{-2}^{NE}) = a y_2 - v_2 + \rho x_2 - w_2
$$

Usando las expresiones 6.8, 6.41 y 6.37 y haciendo el desarrollo llegamos a que

$$
J_2^{\{1,2\}}(w_2) = \frac{a w_2^2 + w_2 w_3^{NE} K(N) + \left(w_3^{NE}\right)^2 L(N)}{(w_2 + w_2^{NE} M(N))^2} - w_1
$$

Donde

$$
\begin{aligned}
K(N) &= a(N-2)T_1(N) - T_2(N) + T_1(N) \\
&= c_N/a + (N-2)(2a + 1/a) \\
&= N(2a + \frac{2-a}{a}) + O(1) \\
L(N) &= a T_1(N)(N-2) - T_3(N) \\
&= a(N-2)^2 \\
&= aN^2 + O(N) \\
M(N) &= \frac{c_N + N - 2}{a} + N - 2 \\
&= \frac{2}{a} N + O(1)
\end{aligned}
$$

Derivando, podemos mostrar que

$$
\frac{dJ_2^{\{1,2\}}(w_2)}{dw_2} = \frac{w_2 w_2^{NE}(2aM(N) - K(N)) + \left(w_2^{NE}\right)^2 (M(N)K(N) - 2L(N))}{(w_2 + w_2^{NE} M(N))^3} - 1
$$

por lo tanto, usando las expresiones previas y de w_2^{NE} en 6.28 podemos mostrar que

$$\begin{aligned}
\frac{dJ_2^{\{1,2\}}(0)}{dw_2} &= \frac{(M(N)K(N)-2L(N))}{w_2^{NE}M(N)^3}-1\\
&= \frac{\left(\frac{2}{a}N+O(1)\right)\left(\left(2a+\frac{2-a}{a}\right)N+O(1)\right)-2(aN^2+O(N)}{\left(\frac{a}{2-a}\frac{1}{N}+o\left(\frac{1}{N^2}\right)\right)\left(\frac{2N}{a}+O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right)^3}-1\\
&= \frac{\left(\frac{2}{a}\left(2a+\frac{2-a}{a}\right)-2a\right)N^2+O(N)}{\left(\frac{a}{2-a}\frac{1}{N}+O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right)\left(\frac{8N^3}{a^3}+O(N^2)\right)}-1\\
&= \frac{2\left(\frac{2}{a^2}-\frac{1}{a}+2-a\right)N^2+O(N)}{\frac{8}{a^2(2-a)}N^2+O(N)}-1
\end{aligned}$$

Por l'hôpital, podemos concluir que

$$\frac{dJ_2^{\{1,2\}}(0)}{dw_2} \to \frac{(2-a)^2(a^2+1)}{4}-1$$

Notemos que

$$\frac{dJ_2^{\{1,2\}}(w_2)}{\partial w_2} = \frac{p_1(w_2)}{p_2(w_2)}-1$$

Donde

$$\begin{aligned}
p_1(w_2) &= w_2w_2^{NE}(2aM(N)-K(N))+\left(w_2^{NE}\right)^2(M(N)K(N)-2L(N))\\
p_2(w_2) &= \left(w_2+w_2^{NE}L(N)\right)^3
\end{aligned}$$

Sabemos que

$$\frac{dJ_2^{\{1,2\}}(0)}{dw_2}=\frac{p_1(0)}{p_2(0)}-1<0$$

con $p_1:[0,\infty)\mapsto\mathbb{R}$ de la forma $p_1(x)=c_0x+c_1$, con $c_0=w_2^{NE}(2aM(N)-K(N))$ y $c_1=\left(w_2^{NE}\right)^2(MN)K(N)-2L(N))$, mientras que $p_2:[0,\infty)\mapsto\mathbb{R}$ de la forma $p_2(x)=(c_2x+c_3)^3$, con $c_2=1>0$ y $c_3=L(N)=N/a+O(1)>0$ si N es suficientemente grande. Por lo tanto, por la proposición 6.13, solo nos falta mostrar que $p_1'(0)<p_2'(0)$ para establecer que $J_2^{\{1,2\}}$ es decreciente y quasi-concava.

Sabemos que

$$\begin{aligned}
p_1'(0) &= w_2^{NE}(2aM(N)-L(N))\\
&= w_2^{NE}\left(2a\left(\frac{2}{a}N+O(1)\right)-\left(2a+\frac{2}{a}-1\right)N+O(1)\right)\\
&= w_2^{NE}\left(\left(5-\frac{2}{a}-2a\right)N+O(1)\right)
\end{aligned}$$

Mientras que

$$\begin{aligned}
p_2'(0) &= 3\left(w_2^{NE}M(N)\right)^2\\
&= 3\left(w_2^{NE}\right)^2\left(\frac{2N}{a}+O(1)\right)^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\frac{p_1'(0)}{p_2'(0)} &= \frac{\left(5-\frac{2}{a}-2a\right)N+O(1)}{3w_2^{NE}\left(\frac{2N}{a}+O(1)\right)^2} \\
&= \frac{(5-\frac{2}{a}-2a)N+O(1)}{3\left(\frac{a}{2-a}\frac{1}{N}+O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right)\left(\frac{4N^2}{a^2}+O(N)\right)} \\
&= \frac{\left(5-\frac{2}{a}-2a\right)N+O(1)}{\left(\frac{12N}{a(2-a)}+O(1)\right)}
\end{aligned}
$$

Por l'hôpital, podemos concluir que, cuando $N \to \infty$,

$$
\frac{p_1'(0)}{p_2'(0)} \to \frac{\left(5-\frac{2}{a}-2a\right)}{\frac{12}{a(2-a)}}
$$

Pero, podemos mostrar que $5-\frac{2}{a}-2a$ es creciente en $[0,1]$ y vale 1 en $a=1$, mientras que $\frac{12}{a(2-a)}$ es decreciente en $[0,1]$ y vale 12 en $a=1$, por lo que concluimos que asintóticamente $p_1'(0) < p_2'(0)$ por lo que conluimos que $p_1 < p_2$ por lo que concluimos que $J_2^{\{1,2\}}$ es siempre decreciente.

□

Definamos la función $q[0,1] \mapsto \mathbb{R}$ por

$$
\frac{(2-a)^2(1+a^2)}{4} - 1 = q(a)
$$

Tenemos la siguiente proposición

Proposición 6.22 *La función q es decreciente y negativa en* $[0,1]$

Demostración. En efecto.

$$
\begin{aligned}
q(a) &= \frac{(2-a)^2(1+a^2)}{4} - 1 \\
&= \frac{(4-4a+a^2)(1+a^2)}{4} - 1 \\
&= \frac{4-4a+5a^2-4a^3+a^4}{4} - 1
\end{aligned}
$$

Derivando tenemos que

$$
\begin{aligned}
q'(a) &= \frac{4a^3-12a^2+10a-4}{4} \\
&= \frac{2a^3-6a^2+5a}{2} - 1
\end{aligned}
$$

Derivando por segunda vez tenemos que

$$
q''(a) = \frac{6a^2-12a+5}{2}
$$

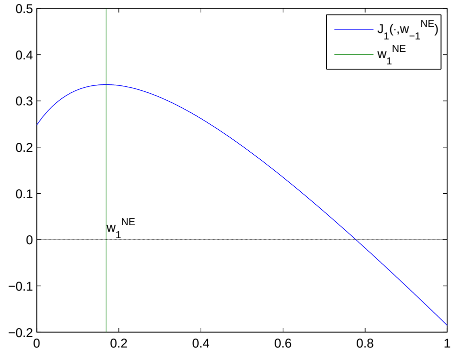

Figura 6.3: Acá $a = 0{,}5$ y $N = 100$

Las raíces de la cuadrática, son

$$a = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 120}}{12} = \frac{6 \pm \sqrt{6}}{6} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Entonces, q' se maximiza en $a_0 = 1 - 1/\sqrt{6}$. Pero

$$\begin{aligned}
q'(a_0) &= \frac{2a^3 - 6a^2 + 5a}{2} - 1 \\
&= \frac{2(1-6^{-1/2})^3 - 6(1-6^{-1/2})^2 + 5(1-6^{-1/2})}{2} - 1 \\
&= \frac{1 + 6^{-1/2}(1-6^{-1})}{2} - 1 \\
&= \frac{6^{-1/2}(1-6^{-1}) - 1}{2} \\
&< 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto $q' < 0$ en $[0,1]$. Por lo tanto q es decreciente en $[0,1]$. Además $q(0) = 4/4 - 1 = 0$

□

Demostración. Teorema

Sea $a \in [0,1)$. Por el lema 6.15, tenemos que a partir de un N suficientemente grande,

$$\frac{\partial J_1}{\partial w_1}(0, w_{-1}^{NE}) \sim 3 - 4a + a^2 = (2-a)^2 - 1 > 0$$

por lo tanto por la propiedad 6.13, tenemos que $J_1(\cdot, w_{-1}^{NE})$ es quasi-concava y parte creciente. Además, sabemos que $\frac{\partial J_1}{\partial w_1}(w_1^{NE}, w_{-1}^{NE}) = 0$ y por lo tanto $J_1(\cdot, w_{-1}^{NE})$ se maximiza en w_1^{NE}. (ver figura 6.3)

Por el lema 6.18 tenemos que $J_2(\cdot, w_2^{NE})$ es creciente entre $[0, w_2^0]$ con $w_2^0 < w_2^{NE}$ (ver figura 6.4). Por el lema 6.19 tenemos que $J_2^{[n]}(\cdot)$ es quasi-cóncava y se maximiza en w_2^{NE}. Además, tenemos que $J_2(\cdot, w_2^{NE}) = J_2^{[n]}(\cdot)$ en $[w_2^0, w_2^1] \ni w_2^{NE}$. Por lo tanto $J_2(\cdot, w_2^{NE})$ es creciente en

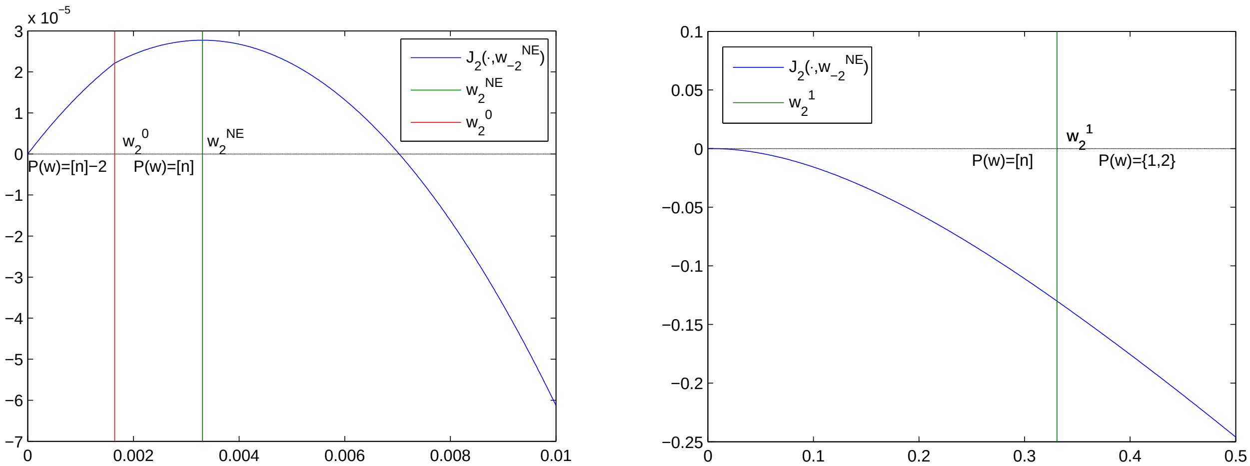

Figura 6.4: Acá $a = 0{,}5$ y $N = 100$.

$[w_2^0, w_2^{NE}]$ y despues es decreciente (ver figura 6.4). Finalmente, por el lema 6.21 tenemos que $J_2^{\{1,2\}}(\cdot)$ es decreciente, además tenemos que $J_2(\cdot, w_2^{NE}) = J_2^{\{1,2\}}(\cdot)$ en $[w_2^1, 1]$. Por lo tanto $J_2(\cdot, w_2^{NE})$ es decreciente en $[w_2^1, 1]$ (ver figura 6.4), y por lo tanto tenemos que $J_2(\cdot, w_2^{NE})$ es quasi-cóncava y se maximiza en w_2^{NE}.

□

Con esto concluimos que $J_2(\cdot, w_{-2}^{NE})$ se maximiza en w_2^{NE}. Por simetria, concluimos que, para todo $i > 1$, tenemos que $J_i(\cdot, w_{-i}^{NE})$ se maximiza en $w_i^{NE} = w_2^{NE}$, con lo que concluimos que w^{NE} es un NE en estrategias puras del subjuego $(SJ1)$ con lo que concluimos que $(w^{NE}, v(w^{NE}))$ es un SPE en estrategias puras del juego (J).

6.2.3. Eficiencia social de la familia de instancias

Recordemos que la eficiencia de un SPE en estrategias puras viene dada por

$$E = \frac{U(y^{SPE})}{U(y^{SO})}$$

donde y^{SPE} es la asginación en la segunda etapa correspondiente a un SPE $(w, v(\cdot))$ del juego, $y^{SO} \in \Delta$ maximiza la función agregada U. En el caso de utilidades $U_i(x)$ lineales, donde spg tenemos que $a_1 \geq a_i$, tenemos que

$$U(y) = \sum_{i=1}^{N} a_i y_i$$

Es evidente que el $y \in \Delta$ que maximiza a U es $y = e_1$. Por lo tanto, acá la eficiencia de un SPE verifica

$$E = \frac{\sum_{i=1}^{N} a_i y_i^{SPE}}{a_1}$$

Tomando en cuenta que $a_1 = 1$ y $a_i = a \in [0,1]$ si $i > 1$, la eficiencia del SPE viene dada por

$$E = y_1 + (N-1)ay_2$$

(recordando que en este caso, $w_2 = ... = w_N$, $v_2 = ... = v_N$)

Por su parte, recordando las definiciones de $1-x_1$, $1-x_2$, $1-y_2$ y $1-y_1$ dadas en 6.14, 6.15, 6.17 y 6.18, usando que $x_i = 1-(1-x_i)$ y $y_i = 1-(1-y_i)$, tenemos que

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 - \frac{(N-1)w_2}{w_2 + \frac{1}{a}(w_1 + (N-2)w_2)} \\ y_2 &= 1 - \frac{(w_1 + (N-2)w_2)}{w_2 + \frac{1}{a}(w_1 + (N-2)w_2)} \end{aligned}$$

Usando estas relaciones, se puede escribir la eficiencia del equilibrio en terminos de w_1 y w_2. En efecto, desarrollando la expresión de la eficiencia obtenida previamente, se obtiene que

$$\begin{aligned} E &= y_1 + (N-1)ay_2 \\ &= 1 - \frac{(N-1)w_2}{w_2 + \frac{1}{a}(w_1 + (N-2)w_2)} + a(N-1)\left(1 - \frac{(w_1 + (N-2)w_2)}{w_2 + \frac{1}{a}(w_1 + (N-2)w_2)}\right) \\ &= 1 + \frac{(N-1)w_2(a-1)}{w_2 + \frac{1}{a}(w_1 + (N-2)w_2)} \end{aligned}$$

En síntesis, la expresión de la eficiencia en función de w_1 y w_2 viene dada por

$$E = 1 + \frac{w_2(N-1)(a-1)}{w_2 + \frac{1}{a}(w_1 + (N-2)w_2)} \tag{6.43}$$

Sin embargo, se puede escribir la eficiencia en función unicamente de a y N. En efecto, recordemos que

$$w_1 = c_N w_2$$

Usando esto en la expresión 6.43, se obtiene que

$$\begin{aligned} E &= 1 + \frac{(N-1)(a-1)}{1 + \frac{1}{a}(c_N + (N-2))} \\ &= 1 + \frac{a(a-1)(N-1)}{a + c_N + (N-2)} \end{aligned}$$

Definamos entonces la sucesión de funciones $E_N : [0,1] \to \mathbb{R}$, dada por

$$\begin{aligned} E_N(a) &= 1 + \frac{a(a-1)(N-1)}{a + c_N + (N-2)} \\ &= 1 + \frac{a(a-1)(1-\frac{1}{N})}{\frac{c_N}{N} + 1 + \frac{(2-a)}{N}} \end{aligned} \tag{6.44}$$

Usando la propiedad 6.2.1, tenemos que cuando $N \to \infty$,

$$\begin{aligned} \frac{c_N}{N} &= \frac{mN+n}{N} \\ &\to m = 1-a \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que tomando limite cuando $N \to \infty$ en la ecuacion 6.44, tenemos que

$$\begin{aligned} E_N(a) &= 1 + \frac{a(a-1)(1-\frac{1}{N})}{\frac{c_N}{N} + 1 + \frac{(2-a)}{N}} \\ &\to 1 + \frac{a(a-1)}{2-a} := E(a) \end{aligned}$$

Por otro lado, tambien se tiene que

$$\begin{aligned} E'(a) &= \frac{2a-1}{2-a} + \frac{(a^2-a)}{(2-a)^2} \\ &= \frac{1}{(2-a)^2}\big((2a-1)(2-a) + a^2 - a\big) \\ &= \frac{1}{(2-a)^2}\big(4a - 2a^2 - 2 + a + a^2 - a\big) \\ &= \frac{1}{(2-a)^2}\big(4a - a^2 - 2\big) \end{aligned}$$

Luego,

$$E'(a) = 0 \Leftrightarrow p(a) := -a^2 + 4a - 2 = 0$$

Las raices del polinomio $p(a)$ vienen dadas por

$$a_{\pm} = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

Con lo cual, el único a en $[0,1]$ tal que $E'(a) = 0$ es $a = a_-$ Además, tenemos que

$$\begin{aligned} a \in [0, a_-] &\Rightarrow p(a) < 0 \\ a \in [a_-, 1] &\Rightarrow p(a) > 0 \end{aligned}$$

Lo cual muestra que a_- minimiza a E en $[0,1]$. Además, tenemos que

$$E(a_-) = 1 + \frac{a_-(a_- - 1)}{2 - a_-}$$

Recordando que $a_- = 2\sqrt{2} - 2$ concluimos que $E(a_-) = 2\sqrt{2} - 2$ que era la cota inferior para el precio de la anarquía obtenido en [1]

Con esto hemos probado el siguiente resultado

Teorema 6.23 *Sea $a = 2 - \sqrt{2}$ y $N \in \mathbb{N}$. Si denotamos por $E(N)$ la eficiencia social del SPE dado por w^{NE}, entonces tenemos que*

$$\lim_{N\to\infty} E(N) = 2\sqrt{2} - 2$$

Conclusión

En esta memoria, estudiamos una version de 2 etapas del mecanismo proporcional para el problema de asignación de recursos. Obtuvimos que en este mecanismo, siempre existe un SPE en estrategias mixtas. Además, para el caso utilidades lineales, pudimos mostrar la existencia de SPE en estrategias puras para el caso de 2 jugadores con utilidades $U_i(x) = a_i x$, y el caso en que hay N jugadores, con utilidades $U_1(x) = x$, $U_i(x) = ax$ con $a \in [0, 1]$. También probamos que el precio de la anarquia en estrategias puras, para el caso de utilidades lineales, es $2\sqrt{2} - 2$, que es mejor al precio de la anarquia del juego asociado al mecanismo de una etapa, y encontramos una familia de instancias de la forma $U_1(x) = x$, $U_i(x) = ax$ para $i \in \{1, .., N\}$ con $a = 2 - \sqrt{2}$ y $N \in \mathbb{N}$, tal que la eficiencia de un SPE de esas instancias, converge a $2\sqrt{2} - 2$.

Sin embargo, quedan algunas preguntas abiertas en este tema. La primera, es si podemos mostrar la existencia de SPE en estrategias puras en más instancias. En particular, si podemos mostrar que, al menos cuando las funciones de utilidad de los usuarios son lineales, es decir, de la forma $U_i(x) = a_i x$, podemos mostrar la existencia de SPE en estrategias puras.

La segunda pregunta abierta, consiste en caracterizar a los soportes de los SPE en estrategias mixtas. Ya sabemos que al menos en el caso de 2 jugadores con utilidades lineales, si $a_1 > 2a_2$ tenemos que todo SPE es en estrategias puras. Una posibilidad es que esto sea así siempre que las funciones de utilidad de los jugadores sean lineales. En caso de no ser así, podemos intentar obtener una caracterización de cuales son las instancias en las cuales existe un SPE en estrategias mixtas (que no lo sea en estrategias puras), y poder mostrar un ejemplo de tal SPE en estrategias mixtas, o al menos, poder caracterizar el soporte del SPE en estrategias mixtas.

La tercera pregunta abierta que queda, es, cual sería el precio de la anarquía en estrategias mixtas.

La cuarta pregunta abierta, consiste en saber si, al extender este mecanismo a tres etapas, podemos mostrar si posee un SPE en estrategias puras o mixtas. Un SPE en este juego, consistiría en un NE en el subjuego asociado a cada etapa, donde además, los subjuegos asociados a la segunda y tercera etapa deben ser únicos, dadas las estrategias jugadas por los jugadores en la primera, y en la primera y segunda etapa, respectivamente. La principal dificultad acá consiste en poder mostrar que el subjuego de la segunda etapa posee un único NE. Y en caso de ser posible definir el SPE en este juego, es interesante poder obtener el precio de la anarquía en este nuevo juego, y compararlo con el mecanismo de 2 etapas.

Bibliografía

[1] John Musacchio Amar Prakash Azad. Efficiency of a two-stage market for a fixed-capacity divisible resource.

[2] L.E.J. Brouwer. Über abbildung von mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, 1912.

[3] Gerald Debreu. A social equilibrium existence theorem. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 38:886–893, 1952.

[4] I. L. Glicksberg. A further generalization of the kakutani fixed point theorem, with application to nash equilibria. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 3:170–174, 1952.

[5] Hélène Frankowska Jean Pierre Aubin. *Set Valued Analysis*. Birkhäuser, 1990.

[6] Goong Chen Jianxin Zhou. Diagonal convexity conditions for problems in convex analysis and quasi-variational inequalities. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 132:213–225, 1988.

[7] Ramesh Johari. *Eficiency Loss in Market Mechanisms for Resource Allocation*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2004.

[8] Ramesh Johari. *Algorithmic Game Theory*, chapter 21, pages 543–567. Cambridge university press, 2007.

[9] Shizuo Kakutani. A generalization of brouwer's fixed point theorem. *Duke Mathematical Journal*, 8:457–459, 1941.

[10] F.P. Kelly. Charging and rate control for elastic traffic. *Euro. Trans. Telecommun.*, 8:33–37, 1997.

[11] Jianxin Zhou Michael R. Baye, Guoqiang Tian. Characterizations of the existence of equilibria in games with discontinuous and non-quasiconcave payoffs. *The Review of Economic Studies*, 60:935–948, 1993.

[12] John Nash. Non cooperative games. *The Annals of Mathematics*, 54:286–295, 1951.

[13] Eric Maskin Partha Dasgupta. The existence of equilibrium in discontinuous economic games, i: Theory. *The Review of Economic Studies*, 53:1–26, 1986.

[14] Rida Laraki Philippe Bich. A unified approach to equilibrium existence in discontinuous strategic games. 2012.

[15] Guoqiang Tian Rabia Nessah. Existence of equilibria in discontinuous and nonconvex games. 2009.

[16] John N. Tsitsiklis Ramesh Johari. Efficiency loss in a network resource allocation game. *Mathematics of Operations Research*, 29:407–435, 2004.

[17] Philip J. Reny. On the existence of pure and mixed strategy nash equiliequi in discontinuousous games. *Econometrica*, Vol. 67, No. 5:1029–1056, 1999.

[18] Philip J. Reny. Non-cooperative games: Equilibrium existence. 2005.

[19] Philip J. Reny. Further results on the existence of nash equilibria in discontinuous games. 2009.

[20] Guoqiang Tian. The existence of equilibria in games with arbitrary strategy spaces and payoffs: A full characterization. 2009.