



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO DE VALORES PROPIOS EN SISTEMAS DE BRATTELI-VERSHIK DE RANGO FINITO

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
MENCIÓN MODELACIÓN MATEMÁTICA

ALEXANDER LEBERECHE FRANK MARAMBIO

PROFESOR GUÍA:
ALEJANDRO MAASS SEPÚLVEDA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
SERVET MARTÍNEZ AGUILERA
FABIEN DURAND
MARÍA ISABEL CORTEZ MUÑOZ

Este trabajo ha sido financiado con apoyo
del proyecto Mecesus UCH 0607, beca CMM y proyecto Fondap 15090007.

SANTIAGO DE CHILE
MAYO 2014

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR AL
GRADO DE: Doctor en Ciencias de la Ingeniería
mención Modelación Matemática.
POR: Alexander Leberecht Frank Marambio.
FECHA: 07/05/2014
PROFESOR GUÍA: Alejandro Maass Sepúlveda.

Contribución al estudio de valores propios en sistemas de Bratteli-Vershik de rango finito

El objetivo de esta tesis es presentar condiciones para analizar la existencia de valores propios en algunas familias de sistemas de Bratteli-Vershik minimales. Ésto expande los resultados obtenidos hasta el día de hoy en ciertas familias de sistemas de Bratteli-Vershik minimales de rango finito, como son los sistemas estacionarios, linealmente recurrentes y Toeplitz.

En los primeros dos capítulos de la tesis se presentan estos resultados preliminares, junto con construcciones relevantes, varias de ellas mencionadas en la literatura, pero nunca escritas formalmente. Al hacer esto aparecen un par de ejemplos y métodos particulares, que se adjuntan pretendiendo aportar un poco más al entendimiento de los sistemas de Bratteli-Vershik.

En el tercer capítulo se presenta una caracterización de la ocurrencia de un valor propio en un sistema de Bratteli-Vershik minimal de rango finito general, sin distinguir entre valores propios continuos y no-continuos. Esta caracterización tiene la ventaja de estar expresada en términos de elementos combinatoriales relacionados naturalmente a un diagrama de Bratteli, como son sus matrices de incidencia, su orden, y las alturas de las torres de Kakutani-Rokhlin asociadas.

En el último capítulo se analizan los valores propios de los sistemas de Toeplitz minimales de rango finito. A partir del ajuste natural de la condición general para sistemas de rango finito, y del análisis de la subfamilia de diagramas esencialmente cíclicos, se establece una caracterización de la ocurrencia de valores propios no-continuos en los sistemas Toeplitz minimales de rango finito, desde diferentes puntos de vista. Por ejemplo, se establece que los únicos sistemas de Toeplitz que poseen valores propios no-continuos son, salvo conjugación, los que provienen de diagramas esencialmente cíclicos. Finalmente se establece una relación entre los valores propios no-continuos de un sistema Toeplitz minimal de rango finito, y la cantidad de medidas ergódicas que dicho sistema posee.

Agradecimientos

Agradezco a mi profesor guía, Alejandro Maass, por su paciencia, apoyo y motivación; desde el principio sentí su confianza en que podría desempeñarme de buena manera durante este postgrado. También agradezco su esfuerzo en enseñarme a ver con perspectiva el trabajo matemático, y a valorar los detalles en la manera de comunicarlo.

Agradezco también a Fabien Durand, sobre todo por su hospitalidad en mi corta estadía en Amiens. Su preocupación en los grandes y pequeños detalles hizo que la estadía fuera muy grata.

También me siento agradecido y honrado de que los profesores Servet Martínez y María Isabel Cortez hayan aceptado ser parte de la comisión evaluadora de esta tesis.

Hubo mucha gente que participó en este proceso directa e indirectamente, quisiera dejar escrito acá que también siento el deber de agradecer a todos, los profesores, compañeros, secretarías, funcionarios; el trabajo que han realizado no pasó desapercibido para mí, y es seguro que recibí de ellos mucho más de lo que puedo dimensionar en estos momentos.

Quisiera especialmente agradecer a Carolina, quien estuvo conmigo desde el principio de esta aventura, porque no hubiera dado siquiera el primer paso si no hubiera sido por su constante apoyo. Debo reconocer que me entregó toda su paciencia, confianza y fortaleza, siempre con mucho cariño. Incluyo a nuestros hijos Gabriela e Ítalo, pues siempre son una fuente muy grande de motivación y alegría, y porque aunque es uno el que debe cumplir el papel de educador, gracias a ellos he sido yo quien ha aprendido mucho.

Agradezco finalmente a todos mis familiares, mis padres y hermanas, y los que llegaron a mi vida por medio de Carolina, mis suegros, cuñados y la Aurita. He sentido siempre la confianza que tienen en mí, y sé que comparten la alegría que siento al finalizar esta etapa.

Tabla de Contenido

Introducción	1
1. Sistemas de Bratteli-Vershik	6
1.1. Preliminares dinámicos	6
1.2. Diagramas de Bratteli	10
1.3. Aplicación de Vershik	12
1.4. Elementos combinatoriales y sus propiedades	14
1.4.1. Notación para los elementos básicos	14
1.4.2. Isomorfismo	17
1.4.3. Contracción, interpolación y equivalencia	18
1.4.4. Diagramas inicialmente nivelados	21
1.4.5. División de vértices	22
1.5. Diagramas de Bratteli y sistemas de Cantor	27
2. Medidas invariantes en sistemas de Bratteli-Vershik	30
2.1. Vectores de medidas	30
2.2. Geometría de las medidas	32
2.3. Subdiagramas, extensiones y restricciones	35
2.4. Diagramas depurados	39
3. Valores propios en sistemas de Bratteli-Vershik	45
3.1. Valores propios en sistemas dinámicos	45
3.2. Resultados históricos para valores propios continuos y no-continuos	47
3.2.1. Resultados generales	48
3.2.2. Sistemas linealmente recurrentes	50
3.3. Una caracterización para sistemas de rango finito	53
3.3.1. Enunciado de la condición	54
3.3.2. Demostración de la necesidad	56
3.3.3. Demostración de la suficiencia	58

4. Valores propios en sistemas Toeplitz de rango finito	67
4.1. Introducción a los sistemas Toeplitz	67
4.2. Diagramas Toeplitz esencialmente cíclicos	69
4.2.1. Construcciones y definiciones	70
4.2.2. Medidas invariantes en diagramas esencialmente cíclicos	73
4.2.3. Algunas propiedades interesantes	82
4.3. Sistemas Toeplitz. Análisis general	87
4.3.1. Versión adaptada del Teorema 3.13	87
4.3.2. Valores propios en Toeplitz esencialmente cíclicos	88
4.3.3. Algunos lemas	89
4.3.4. Resultado general	95
Conclusión	103
Bibliografía	105

Introducción

Esta tesis continúa el desarrollo de un trabajo que se ha venido realizando en los últimos años, enfocado en el análisis de los valores propios de clases de sistemas de Bratteli-Vershik minimales de rango finito, cuyo objetivo es el de generalizar los resultados obtenidos en la familia de sistemas sustitutivos. Se está haciendo referencia a los resultados para sistemas de Bratteli-Vershik minimales linealmente recurrentes en [CDHM03] y [BDM05], y además a las condiciones generales para diagramas de rango finito minimales y análisis de sistemas Toeplitz minimales de rango finito, presentadas en [BDM10].

Antes de introducir los resultados de este documento, se hará un pequeño recorrido por el marco teórico e histórico en el cual se encuentran insertos.

Sistemas de Cantor

Un sistema de Cantor es un par (X, T) , donde X es un conjunto de Cantor, y T un homeomorfismo. Hay un resultado clásico que dice que, por ser X un espacio métrico compacto, necesariamente tiene medidas invariantes.

Consideremos, dado esto, una medida invariante μ para el sistema. Estudiar los valores propios del sistema, es estudiar el espectro del siguiente operador unitario

$$\begin{aligned} U_T : L^2(X, \mathcal{F}, \mu) &\rightarrow L^2(X, \mathcal{F}, \mu) \\ f &\mapsto f \circ T, \end{aligned}$$

es decir, se buscan los valores complejos λ , tales que $f(T(x)) = \lambda f(x)$, μ -casi seguramente, para $f \in L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$. Analizar el espectro del operador U_T va acompañado de resultados clásicos, como por ejemplo, la caracterización de las mezclas débiles, o la caracterización de Halmos y von Neumann para las transformaciones conjugadas de espectro discreto.

Una familia de sistemas de Cantor bien conocida es la de los sistemas sustitutivos. Para esta familia, primero F. M. Dekking y después B. Host (ver [Dek78] y [Hos86]), analizaron propiedades sobre sus valores propios. En el Capítulo 3 de esta tesis, se mencionará el resultado de B. Host y su impacto en el estudio de los valores propios para otros sistemas de Cantor minimales, pero por el momento cabe mencionar que resalta otro tema importante asociado a los valores propios: su clasificación en continuos y

no-continuos. Simplemente, esta clasificación tiene que ver con las funciones propias asociadas, y su continuidad. Por ejemplo se concluye en los trabajos mencionados, que los sistemas sustitutivos sólo poseen valores propios continuos.

Otra familia de sistemas de Cantor para mencionar, es la que se conoce como sistemas de Bratteli-Vershik. En estos sistemas el espacio de fase está constituido por los caminos infinitos que se pueden construir sobre un diagrama de Bratteli, y su transformación T , conocida como la aplicación de Vershik, es aquella que aprovecha del orden asociado al diagrama para enviar, por así decirlo, cada camino infinito en su sucesor. Un importante resultado fue el de R. Herman, I. Putnam y C. Skau (ver [HPS92]), que dentro de otras cosas, dice que cada sistema de Cantor minimal es isomorfo a un sistema de Bratteli-Vershik. Por ejemplo, en [For97] y [DHS99], se ve que los sistemas sustitutivos mencionados más arriba corresponden a una familia particular de sistema de Bratteli-Vershik minimal, conocida como sistemas estacionarios.

Uno puede preguntarse cuanto será necesario alejarse de la familia de sistemas estacionarios para que el sistema de Bratteli-Vershik comience a tener valores propios no-continuos. En realidad no hubo necesidad de alejarse mucho, fue en los sistemas linealmente recurrentes donde aparecieron los primeros valores propios no-continuos en sistemas de Cantor minimales. Las publicaciones [CDHM03] y [BDM05], además de mostrar condiciones diferentes que caracterizan la existencia de valores propios continuos y no-continuos en sistemas linealmente recurrentes, presentan un ejemplo concreto. Cabe mencionar, que los sistemas linealmente recurrentes básicamente se construyen sobre sistemas de Bratteli-Vershik que poseen un número finito de matrices de incidencia, que es muy poca diferencia con los sistemas estacionarios, los cuales se construyen sobre diagramas con una única matriz de incidencia.

Sistemas de rango finito

En la publicación [BDM10] se muestran propiedades para una familia de sistemas de Bratteli-Vershik que naturalmente contiene a sistemas estacionarios y linealmente recurrentes. Esta familia se conoce bajo el nombre de sistemas de rango finito, la cual, hablando en líneas generales, es la que se construye sobre diagramas donde el orden de las matrices está acotado. Evidentemente contiene a las familias mencionadas anteriormente, de sistemas estacionarios y linealmente recurrentes. Las generalizaciones de los resultados para linealmente recurrentes no han sido “tan directas” como se esperaba. Esto porque en las propiedades que fueron apareciendo, se instalaban fuertemente las características asociadas al orden de los diagramas, situación que no ocurría en los sistemas anteriores. Esto especialmente cuando se buscaban propiedades en torno a los valores propios no-continuos de los sistemas.

En esta tesis se presentará una caracterización de la ocurrencia de un valor propio en un sistema de rango finito. Al igual que en resultados anteriores, el orden de los diagramas es un factor clave. Otra cosa que vale la pena mencionar es que los resultados para valores propios no-continuos en sistemas de rango finito son difíciles de verificar. Por ejemplo, está la caracterización presentada [BDM05] que tiene que ver con la convergencia puntual

μ -casi segura de la sucesión

$$(\lambda^{r_n + \rho_n \circ \tau_n})_{n \geq 1},$$

que está basada en la existencia teórica de una sucesión de funciones $(\rho_n)_{n \geq 1}$, que toman valores en los vértices del diagrama. En la condición presentada en esta tesis (Teorema 3.13), aparecen elementos combinatoriales naturales asociados al sistema, como son sus matrices de incidencias, sus funciones sufixo y la altura de las torres asociadas al diagrama. A pesar de que tampoco es una condición fácil de verificar, se acerca un poco más a cumplir este cometido. Además ayuda a descartar efectivamente algunos candidatos a ser valores propios, a entender mejor la naturaleza de las funciones ρ_n mencionadas más arriba y, quizá lo más relevante, podría ser mucho más efectiva en sistemas en los cuales hay mayor conocimiento de su estructura combinatorial, como por ejemplo en sistemas de cambio de intervalos.

Sistemas de Toeplitz de rango finito

También en la publicación [BDM10], como parte de uno de sus ejemplos, se presenta un análisis de una clase particular de sistemas de rango finito, conocida como sistemas de Toeplitz de rango finito.

Los sistemas de Toeplitz (o flujos de Toeplitz) son un sistema simbólico, del cual se conocen bastante bien sus propiedades espectrales. La más relevante, presentada en [Iwa96] y [DL96], es la que dice que, dado un subgrupo del círculo unitario complejo que contenga infinitos racionales, existe un sistema de Toeplitz cuyo espectro es exactamente el subgrupo dado.

La representación de estos sistemas por medio de diagramas de Bratteli-Vershik, fue dada por R. Gjerde y Ø. Johansen en la publicación [GJ00], donde se muestra que los diagramas correspondientes tienen, en cada nivel, el mismo número de arcos llegando a cada vértice.

Con la representación por medio de diagramas de Bratteli, se puede ahora hablar de sistemas de Toeplitz de rango finito, de la manera natural. En [BDM10] se muestran propiedades interesantes sobre estos sistemas. La que resalta más, es la que dice que estos sistemas solamente tienen valores propios racionales (es decir, que generan un grupo cíclico en el círculo unitario complejo), característica que muestra bastante contraste con los resultados de A. Iwanik y T. Downarowicz. Otra cosa importante es que se establece una condición necesaria para tener un valor propio no-continuo, y por lo tanto, en esta clase se pueden diferenciar los valores propios continuos de los que no lo son.

En esta tesis se presenta un análisis bastante completo sobre las propiedades asociadas a los valores propios no-continuos en los sistemas Toeplitz de rango finito, entre ellas, que todos los valores dados por la condición necesaria que aparece en [BDM10], son realizables en una familia de sistemas Toeplitz de rango finito, construida a partir de una familia de diagramas que en este documento se llamaron diagramas esencialmente cíclicos. Lo interesante es que la caracterización dada por el Teorema 3.13 para el caso general de rango finito, se hace mucho más “verificable” cuando nos restringimos a la sub-familia de sistemas Toeplitz. Esto entrega una cierta esperanza de que el Teorema

3.13 muestre más de lo que ha mostrado hasta ahora, y permita entender aun mejor la ocurrencia de valores propios en estos sistemas.

Breve descripción de los contenidos

Primer capítulo. En el primer capítulo se revisa la notación y definiciones asociadas a los sistemas de Bratteli-Vershik. También se presentan algunos resultados conocidos. Éstos se intentan presentar de una manera coordinada, para resaltar las relaciones entre los diferentes elementos de los diagramas de Bratteli. Dentro de los aspectos resaltados, hay una variación de un método conocido como separación de vértices, y se utiliza para demostrar que todo diagrama linealmente recurrente es equivalente a un diagrama de rango uniforme, sin perder la propiedad de poseer finitas matrices de incidencia (en general, aplicando contracciones al diagrama se perdía esta propiedad, pero combinándolas con el método de separación de vértices se logra el objetivo sin problemas).

También en el primer capítulo hay una descripción del importante resultado de R. Herman, I. Putnam y C. Skau que aparece en [HPS92], y que establece la fuerte conexión conocida hoy entre sistemas de Cantor minimales y sistemas de Bratteli-Vershik.

Segundo capítulo. En el segundo capítulo se desarrollan los conocimientos sobre las medidas invariantes en diagramas de Bratteli de rango finito presentadas en [BKMS13]. Se presenta un desarrollo de las extensiones y restricciones de medidas, basado preferentemente en los elementos del diagrama, más que la relación de equivalencia proveniente del concepto de cofinalidad, como se hace en la publicación mencionada.

Se desarrollan los resultados con el objetivo de resaltar las relaciones entre los diferentes elementos, junto por supuesto con presentar las propiedades fundamentales, que serán de utilidad a la hora de analizar los valores propios asociados a algún sistema de Bratteli-Vershik.

Se introduce también la noción de diagrama depurado, a partir de un resultado de S. Bezuglyi, J. Kwiatkowski, K. Medynets y B. Solomyak que describe las medidas de probabilidad invariantes en un diagrama de rango finito, a partir de extensiones de las medidas de sus subdiagramas. Se demuestra, en estos diagramas depurados, un resultado sobre la homogeneidad del comportamiento de las matrices de incidencia (con sus coeficientes normalizados), que en esta tesis se muestra de mucha utilidad, sobre todo para relacionar el comportamiento de las matrices con los posibles valores propios asociados a los sistemas construidos sobre el diagrama, y con las medidas invariantes de éste.

Tercer capítulo. En este capítulo se comienza mostrando, de manera breve, los diferentes elementos y resultados asociados a los valores propios en sistemas de Cantor, y también en el caso particular de sistemas de Bratteli-Vershik. Se enuncian, por tanto, los resultados encontrados en los últimos años en sistemas estacionarios, linealmente recurrentes, Toeplitz, y de rango finito en general, junto con algunas aplicaciones de éstos. Se aprovecha de mostrar, por ejemplo, una familia de sistemas linealmente recurrentes, que generalizan en cierto sentido a la sustitución de Chacón, y que mezclan débilmente,

pero que las diferencias entre las alturas de las torres de cada nivel no está acotada uniformemente.

Pero el objetivo del capítulo es mostrar una caracterización de la ocurrencia de un valor propio, en un sistema de Bratteli-Vershik de rango finito. Las condiciones que se presentan, se describen en términos de elementos naturales a los diagramas de Bratteli, y por lo tanto se acercan un poco más al objetivo de encontrar una condición, que sea más sencilla de verificar en una amplia gama de familias de diagramas de rango finito. La demostración de las condiciones se hace en secciones separadas, una para demostrar la necesidad de éstas, y la otra para mostrar su suficiencia, que es la demostración más técnica.

Cabe mencionar que esta caracterización general, al menos hasta ahora, no entrega información sobre la clasificación de los valores propios en continuos y no-continuos.

Cuarto capítulo. Este capítulo está dedicado a los sistemas Toeplitz de rango finito. Primero se muestra un poco de la historia de los resultados asociados a los sistemas de Toeplitz, para luego presentar una familia de diagramas Toeplitz, denominados esencialmente cíclicos, donde naturalmente aparecen valores propios no-continuos. Esta familia de diagramas se analiza con detalle, ya que como se mostrará después, sus elementos son (salvo operaciones que preservan la equivalencia de los sistemas) los únicos diagramas que poseen este tipo de valores propios.

La caracterización para sistemas de rango finito presentada en el tercer capítulo, se escribe ahora en términos de diagramas Toeplitz, y además se analizan variados aspectos de su demostración. Esto permite generar una caracterización bastante completa para este caso particular de sistema de rango finito. La caracterización incluye varios puntos entre los cuales, como ya se ha mencionado, está el hecho de que los diagramas con valores propios no-continuos, son equivalentes a diagramas esencialmente cíclicos.

Finalmente se muestra una relación entre los valores propios no-continuos que posee un sistema de Toeplitz de rango finito, y el número de medidas ergódicas que puede poseer dicho sistema. Hay casos en que la ocurrencia de un valor propio no-continuo fuerza que el sistema sea únicamente ergódico.

Capítulo 1

Sistemas de Bratteli-Vershik

1.1. Preliminares dinámicos

Se le llama *sistema dinámico* al par (X, \mathcal{G}) donde X es un conjunto, también conocido como *espacio de fase*, y \mathcal{G} es un grupo que actúa sobre X (un semigrupo también es admitido). Para $\alpha \in \mathcal{G}$ se denotará su acción sobre un elemento $x \in X$ por αx . El grupo \mathcal{G} suele preservar propiedades del espacio de fase. Por ejemplo, si X es un espacio con medida, métrico compacto, diferenciable o complejo, entonces \mathcal{G} está formado por funciones medibles (que preservan la medida de X), continuas, diferenciables u holomorfas respectivamente actuando sobre X , en estos casos el sistema dinámico recibe la denominación adicional de *medible*, *topológico*, *diferenciable* o *complejo* respectivamente. Referimos al lector a [Wal82], [Pet91] y [BS02], por mencionar algunos, para obtener una descripción más detallada de los tópicos cubiertos en esta sección.

Una mención especial requieren los *sistemas ergódicos* y los *sistemas topológicos*.

Sistemas ergódicos

Los sistemas ergódicos se sitúan en el contexto de los sistemas medibles, es decir, $X = (X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio con medida μ definida sobre la σ -álgebra \mathcal{F} . En este caso todo elemento α en el grupo \mathcal{G} es una función medible que satisface la igualdad $\mu(\alpha A) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{F}$. Un elemento $\alpha \in \mathcal{G}$ se llamará *transformación ergódica* si para todo $A \in \mathcal{F}$, $\mu(\alpha^{-1}A \Delta A) = 0$ implica $\mu(A) \in \{0, 1\}$. Un sistema $(X, \mathcal{F}, \mu, \mathcal{G})$ se dirá ergódico si además \mathcal{G} está formado solamente por transformaciones ergódicas.

Se tiene el siguiente resultado, en el cual \mathcal{G} está generado por una única la función T . En este caso anotaremos $\mathcal{G} = \langle T \rangle$.

Teorema 1.1. *Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida, y sea $T : X \rightarrow X$ es una transformación medible que preserva la medida μ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (E1) *El sistema $(X, \mathcal{F}, \mu, \langle T \rangle)$ es ergódico.*
- (E2) *Toda función medible $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, tal que $f = f \circ T$, es constante μ -c.s.*

(E3) Para toda función $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ integrable se cumple:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int f \, d\mu$$

(E4) Para todo par de conjuntos medibles F_1 y F_2

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu(T^{-n}F_1 \cap F_2) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mu(F_1)\mu(F_2)$$

La transformación T del teorema anterior podría tener propiedades más fuertes, destacamos dos, ser *mezcla débil* y ser *mezcla fuerte*. Ambas implican que T es una transformación ergódica, pues se definen a base de propiedades más fuertes que (E4).

Definición 1.2. Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida, y sea $T : X \rightarrow X$ es una transformación medible que preserve la medida μ .

- T se dice mezcla débil, si para todo par de conjuntos medibles F_1 y F_2

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\mu(T^{-n}F_1 \cap F_2) - \mu(F_1)\mu(F_2)| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

- T se dice mezcla fuerte, si para todo par de conjuntos medibles F_1 y F_2

$$\mu(T^{-n}F_1 \cap F_2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(F_1)\mu(F_2).$$

Sistemas topológicos

El sistema (X, \mathcal{G}) tiene a X como un espacio métrico compacto, y a \mathcal{G} como un grupo de homeomorfismos que actúan sobre X . El sistema se dirá además *minimal* si X es la clausura del conjunto $\mathcal{G}x$ para cualquier $x \in X$. Equivalentemente se puede decir que el sistema es minimal si los únicos conjuntos cerrados *invariantes* (es decir, conjuntos $A \subseteq X$ cerrados tales que $\mathcal{G}A = A$) son X y \emptyset .

Dado un $x \in X$, al conjunto $\mathcal{G}x$ se le llamará *órbita* del punto x y se anotará comúnmente como $\text{Orb}_{\mathcal{G}}(x)$. En el caso, bastante común en la literatura, que $\mathcal{G} = \langle T \rangle$ para un cierto homeomorfismo $T : X \rightarrow X$, se distinguen las órbitas *hacia adelante* y *hacia atrás*, $\text{Orb}_T^+(x) = \{T^n x \mid n > 0\}$ y $\text{Orb}_T^-(x) = \{T^n x \mid n < 0\}$ respectivamente.

Dado que es bastante recurrente el caso en que $\mathcal{G} = \langle T \rangle$ (y no solamente con T un homeomorfismo), introduciremos un pequeño abuso de notación, que se transformará en la regla usual: escribiremos el sistema dinámico $(X, \langle T \rangle)$ simplemente como (X, T) .

Dado dos sistemas topológicos (X, \mathcal{G}) y (Y, \mathcal{G}) , diremos que Y es un *factor* de X , si existe una función $h : X \rightarrow Y$ continua sobreyectiva, tal que $h(\alpha x) = \alpha h(x)$, para cada $\alpha \in \mathcal{G}$. En este caso diremos que X es una *extensión* de Y . Si además h es una biyección,

ambos sistemas se dirán (*topológicamente*) *conjugados*, y a la función h se le llamará una *conjugación*¹.

En un sistema topológico (X, T) , donde $T : X \rightarrow X$ es un homeomorfismo, se puede construir la σ -álgebra de Borel \mathcal{B} , generada por los abiertos de la topología. En este caso se puede asegurar la existencia de medidas invariantes para el sistema (X, T) , el siguiente teorema muestra eso y un poco más.

Teorema 1.3. *Si $T : X \rightarrow X$ es una función continua en el espacio métrico compacto X , entonces el conjunto de las medidas invariantes en X para T (que denominaremos en lo sucesivo como $\mathcal{M}(X, T)$, o $\mathcal{M}(T)$, en el contexto en que se entienda quién es X), tiene al menos un elemento (es decir, $\mathcal{M}(X, T) \neq \emptyset$). Además*

- (1) $\mathcal{M}(X, T)$ es un conjunto convexo.
- (2) μ es un punto extremo de $\mathcal{M}(X, T)$, si y sólo si T es ergódica.
- (3) Si dos medidas $\mu, \nu \in \mathcal{M}(X, T)$ son ergódicas y diferentes, entonces son singulares entre sí.

Un sistema topológico (X, T) se llama *únicamente ergódico* (el término también se aplica para la función T) si $\mathcal{M}(X, T)$ es un singleton. Se tienen las siguientes equivalencias

Teorema 1.4. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1) (X, T) es *únicamente ergódico*.
- (2) Para toda $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ continua

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n(x)$$

converge uniformemente a una constante.

- (3) Existe una medida invariante μ , tal que para toda función $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ continua, y todo $x \in X$,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int f \, d\mu.$$

Sistemas de Cantor

Haremos mención especial a los *sistemas de Cantor* que son un caso particular de sistema dinámico topológico. Acá X es un así llamado *conjunto de Cantor* (o simplemente *Cantor*), definido por las propiedades de tener una base numerable para su topología formada por conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados (también conocidos como

¹Existen las definiciones análogas de factor, extensión y conjugación para sistemas medibles, en ese caso h debe ser una función medible, y cada relación se debe cumplir excepto en un conjunto de medida cero, con respecto a la medida del sistema.

clopen),² y de no poseer puntos aislados. Por su parte \mathcal{G} , como es natural, está formado por homeomorfismos del espacio de fase en sí mismo. En general tiene más sentido estudiar los sistemas de Cantor cuando son además minimales.

Un ejemplo famoso de sistema de Cantor son los llamados *sistemas de shift*. En este caso X es el conjunto de sucesiones bi-infinitas $x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in A^{\mathbb{Z}}$ donde A es un conjunto finito también llamado alfabeto. El grupo \mathcal{G} está formado por transformaciones σ_n , $n \in \mathbb{Z}$ definidas de la siguiente manera: para $x \in X$, la k -ésima coordenada está dada por la fórmula $\sigma_n(x)_k = x_{k+n}$. Notar que la definición anterior se puede hacer utilizando \mathbb{Z}^d en lugar de \mathbb{Z} , lo que da lugar a los llamados *sistemas de shift d -dimensionales*.

En todos los casos $\mathcal{G} \cong \mathbb{Z}^d$ y, si además $d = 1$ se puede observar que $\mathcal{G} = \langle \sigma_1 \rangle$. A la transformación σ_1 se la llama *transformación shift* o simplemente *shift*; lo que hace es mover las coordenadas de un elemento de $A^{\mathbb{Z}}$ un lugar a la derecha.

Torres de Kakutani-Rokhlin³

Siguiendo [HPS92], comenzaremos con la definición de sistema *esencialmente minimal*.

Definición 1.5. Sea (X, T) un sistema topológico. El sistema se dice esencialmente minimal con respecto a un elemento $y \in X$, si se cumplen en él cualquiera de las siguientes afirmaciones equivalentes:

- (1) Para todo $x \in X$, $y \in \overline{\text{Orb}_T^+(x)}$.
- (2) Para todo $x \in X$, $y \in \overline{\text{Orb}_T^-(x)}$.
- (3) Dada una vecindad U de y se tiene

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} T^k(U) = X.$$

- (4) X tiene un único subconjunto minimal, que contiene a y .

La demostración de la equivalencia de las afirmaciones se puede encontrar en [HPS92, § 1]. Se puede ver que si un sistema topológico (X, T) es minimal, entonces es esencialmente minimal con respecto a cualquier elemento.

Definición 1.6. Una *partición de Kakutani-Rokhlin* (PKR) es una partición \mathcal{P} de X de la siguiente forma

$$\mathcal{P} = \{T^{-\ell}B_k \mid 1 \leq k \leq c, 0 \leq \ell < a_k\},$$

donde c, a_1, a_2, \dots, a_c son enteros positivos, y todos los B_k son conjuntos clopen, para $k = 1, 2, \dots, c$.

²Acá se mantendrá la denominación en inglés, por lo que si un conjunto A es abierto y cerrado, se dirá que A es *clopen*.

³En algunas publicaciones, el apellido Rokhlin aparece escrito como Rohlin, pero se hace referencia al mismo matemático ruso Vladimir Abramovich Rokhlin.

1.2. Diagramas de Bratteli

Para $1 \leq k \leq c$, se llamará k -ésima *torre* de la partición, al subconjunto

$$\{T^{-\ell}B_k \mid 0 \leq \ell < a_k\}.$$

Además llamaremos *altura* (de la k -ésima torre) al respectivo entero positivo a_k , y *base* (de la k -ésima torre) al respectivo conjunto clopen B_k .

Se llamará *base de la partición* al conjunto clopen $B = B_1 \sqcup B_2 \sqcup \cdots \sqcup B_c$.

Consideramos ahora una sucesión de PKR $(\mathcal{P}(n))_{n \in \mathbb{N}}$, tal que $\mathcal{P}(0) = X$ y para el resto de los naturales n ,

$$\mathcal{P}(n) = \{T^{-\ell}B_k(n) \mid 1 \leq k \leq c(n), 0 \leq \ell < a_k(n)\}.$$

Diremos que está *encajonada* si cada partición es más fina que la anterior y además sus bases forman una sucesión encajonada de conjuntos.

Teorema 1.7 ([HPS92], Teorema 4.2). *Si (X, T) es un sistema de Cantor esencialmente minimal con respecto a x , entonces existe una sucesión de PKR encajonada que además satisface*

(KR1) *El límite de la sucesión encajonada de las bases, $\bigcap_{n \geq 0} B(n)$, es igual a $\{x\}$.*

(KR2) *La reunión de todas las particiones $\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{P}(n)$ genera la topología de X .*

Además se puede pedir que

(KR3) $B(n+1) \subset B_1(n)$, para $n \geq 1$.

Otro ejemplo de sistemas de Cantor son los llamados *sistemas de Bratteli-Vershik*. El espacio de fase para este caso se construye a partir de los llamados *diagramas de Bratteli*, y el grupo, que es isomorfo a \mathbb{Z} , es generado por la llamada *aplicación de Vershik*. A continuación entraremos en los detalles que corresponden a estos objetos. Cabe mencionar que los sistemas de Bratteli-Vershik son el objeto principal de estudio en este documento. Su construcción y propiedades quedarán a cargo de las próximas secciones.

1.2. Diagramas de Bratteli

Consideremos un grafo infinito donde el conjunto de vértices V tiene asociado una partición en subconjuntos finitos no vacíos $\{V_0, V_1, \cdots\}$, y lo mismo sucede con el conjunto E de arcos del grafo, partición que anotamos como $\{E_1, E_2, \cdots\}$.

Un diagrama de Bratteli es un grafo dirigido que posee las características mencionada anteriormente en conjunto con las siguientes condiciones:

(B1) V_0 es un singleton. Su único elemento se denotará por v_0 .

1.2. Diagramas de Bratteli

- (B2) Para cada $k = 1, 2, \dots$, E_k está formado por arcos que comienzan en vértices en V_{k-1} y terminan en vértices de V_k .
- (B3) Sea $n \geq 0$. Para cada vértice $v \in V_n$, $i^{-1}(v) \neq \emptyset$, y para cada vértice $v' \in V_{n+1}$, $f^{-1}(v') \neq \emptyset$. Donde, para un cierto arco x , $i(x)$ (resp. $f(x)$) corresponde al vértice donde comienza (resp. termina) x .

Para $k \geq 1$, al conjunto $V_k \cup E_k$ se le llamará k -ésimo *nivel* del diagrama. Notar que, por lo tanto, en un diagrama de Bratteli no hay arcos conectando vértices de niveles que no sean consecutivos.

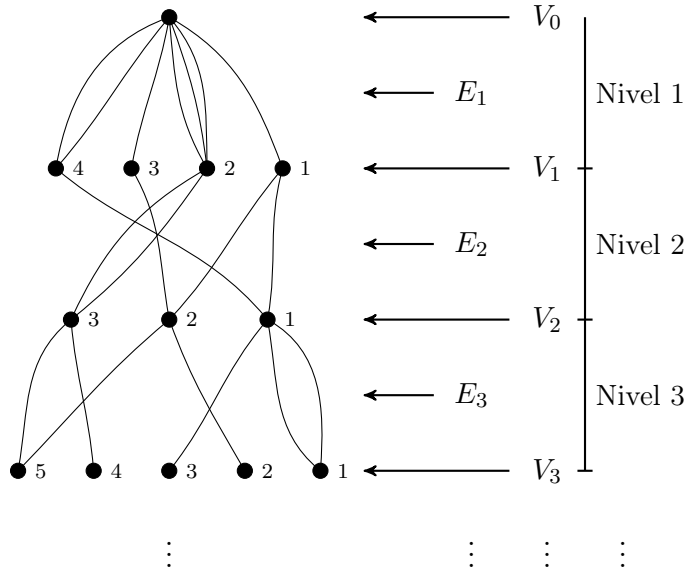


Figura 1.1: Primeros tres niveles de un diagrama de Bratteli.

Si $\ell > k \geq 0$ entonces se define $E_{k,\ell}$ como el conjunto de todos los caminos en el diagrama que conectan vértices de V_k con vértices de V_ℓ , formalmente,

$$E_{k,\ell} = \{(x_1, x_2, \dots, x_{\ell-k}) \mid x_i \in V_{i+k}, 1 \leq i \leq \ell - k \text{ and } f(x_i) = i(x_{i+1}), 1 \leq i < \ell - k\}.$$

Por ejemplo se tiene que $E_{k,k+1}$ coincide con E_{k+1} .

Espacio de fase

Asociado a un diagrama de Bratteli B se tiene el conjunto X_B de todos los caminos infinitos que se puedan leer en el diagrama partiendo de V_0 , es decir,

$$X_B = \{(x_1, x_2, x_3, \dots) \mid \forall k \geq 1 (x_k \in E_k \wedge f(x_k) = i(x_{k+1}))\}.$$

Sea $\alpha = (y_1, y_2, \dots, y_k) \in E_{0,k}$, se define el conjunto

$$[\alpha] = \{(x_1, x_2, x_3, \dots) \in X_B \mid x_i = y_i, 1 \leq i \leq k\}.$$

1.3. Aplicación de Vershik

Todos los conjuntos $[\alpha]$, con $\alpha \in E_{0,k}$ y $k \geq 1$, forman una base con la que definimos una topología para el conjunto X_B , con la cual trabajaremos en el resto de este documento. El complemento de cada elemento base es una unión finita de elementos base, por lo tanto estamos en presencia de una base numerable de conjuntos clopen.

Es perfectamente posible que X_B no sea un conjunto de Cantor (ver Figura 1.2), incluso puede ser vacío.

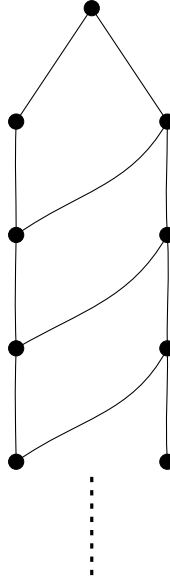


Figura 1.2: Diagrama de Bratteli B tal que X_B tiene infinitos puntos aislados.

Una modo pedestre de asegurar que X_B sea un conjunto de Cantor, es pedir una condición adicional

(B4) Para cada $k \geq 1$ y $\alpha \in E_{0,k}$, $[\alpha]$ contiene infinitos elementos.

1.3. Aplicación de Vershik

Definición 1.8. Un diagrama de Bratteli se dice *ordenado* si existe un orden para el conjunto de los arcos E donde dos arcos $x, y \in E$ son comparables si y sólo si $f(x) = f(y)$.

De esto se puede deducir que, en un diagrama de Bratteli ordenado, para $k \geq 1$ y para cualquier $t \in V_k$, el conjunto $f^{-1}(t)$ está totalmente ordenado.

En un diagrama de Bratteli ordenado se induce también un orden natural para los elementos de $E_{k,\ell}$, con $\ell > k \geq 0$, que es el orden lexicográfico leído de derecha a izquierda (o de abajo hacia arriba, al ver los caminos en el diagrama), es decir,

$$(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_\ell) < (y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_\ell)$$

1.3. Aplicación de Vershik

si y sólo si existe un índice i , con $k < i \leq \ell$, tal que $x_i < y_i$ y que además si $j > i$, entonces $x_j = y_j$. Notar que dos elementos de $E_{k,\ell}$ resultan ser comparables si y sólo si son caminos que terminan en el mismo elemento de V_k . Notar también que un elemento es maximal en $E_{k,\ell}$ si y sólo si todas sus coordenadas son maximales.

Definición 1.9. Un diagrama de Bratteli B se dice *esencialmente simple* si existe un único elemento en X_B formado por arcos maximales, y un único formado por arcos minimales. Estos elementos se denotarán por x_{\max} y x_{\min} respectivamente.

Definición 1.10 (Aplicación de Vershik). Para un diagrama de Bratteli ordenado esencialmente simple B , se define la aplicación de Vershik $T_B : X_B \rightarrow X_B$ como aquella que cumple:

$$(V1) \quad T_B(x_{\max}) = x_{\min}$$

(V2) Para $x \neq x_{\max}$, digamos $x = (x_1, x_2, \dots)$, tomemos el menor $k \geq 1$ tal que x_k no es maximal. Sea (y_1, y_2, \dots, y_k) el sucesor de (x_1, x_2, \dots, x_k) de acuerdo al orden inducido en $E_{0,k}$. Entonces

$$T_B(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots) = (y_1, y_2, \dots, y_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots).$$

Se puede ver que la transformación está bien definida, es decir, $T_B(x) \in X_B$. En efecto, el sucesor de (x_1, \dots, x_k) tiene que terminar en el mismo vértice de V_k , tal como se había notado anteriormente. Esto asegura que $i(x_{k+1}) = f(y_k)$ y por lo tanto que la aplicación de Vershik está bien definida.

Explícitamente (y_1, \dots, y_k) se calcula de la siguiente manera: y_k se toma como el sucesor de x_k y las coordenadas del camino $(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})$ se escogen todas minimales. No es difícil chequear que hay una sola manera de escoger este camino.

Notar que si en (V2) se elige k de modo que (x_1, \dots, x_k) tenga al menos una coordenada no maximal, obtenemos una definición equivalente de la aplicación de Vershik.

La siguiente es una propiedad importante que puede ser verificada directamente. Para una demostración podemos remitir al lector a [HPS92, § 3].

Proposición 1.11. *La aplicación de Vershik $T_B : X_B \rightarrow X_B$ es un homeomorfismo.*

Definición 1.12. Dado un diagrama de Bratteli B esencialmente simple, al par (X_B, T_B) se le llamará *sistema de Bratteli-Vershik*.

Para ser consistentes con la notación de sistemas dinámicos, se usará en lo sucesivo $T_B x$ en vez de $T_B(x)$, para $x \in X_B$.

La siguiente proposición conecta el concepto de esencialmente simple con el de esencialmente minimal, la demostración también se puede encontrar en [HPS92, § 3].

Proposición 1.13. *El sistema (X_B, T_B) es esencialmente minimal con respecto a x_{\max} .*

Para que el sistema (X_B, T_B) sea minimal, se debe pedir un poco más al diagrama.

Definición 1.14. Un diagrama de Bratteli esencialmente simple B se dice *propriadamente ordenado*⁴ si, para cada nivel n , y para cada vértice v de nivel n , existe $m > n$ de modo que todos los vértices de nivel m están conectados con v por caminos en $E_{n,m}$.

Notemos que, en un diagrama propriadamente ordenado, si un vértice v de nivel n está conectado con todos los vértices de un cierto nivel $m > n$, entonces cumple esta misma propiedad para todos los niveles mayores que m .

Proposición 1.15. Si B es un diagrama de Bratteli propriadamente ordenado, entonces el sistema (X_B, T_B) es minimal.

Demostración. Consideremos dos elementos en X_B

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \dots) \\ y &= (y_1, y_2, \dots) \end{aligned}$$

y consideremos la vecindad $U = [y_1, y_2, \dots, y_k]$ de y , para algún k . Basta probar que existe un entero $\ell > 0$ tal que $T_B^\ell x \in U$. Sea $x_{\min} = (z_1, z_2, \dots)$.

Por ser B propriadamente ordenado, hay un nivel $m > k$ tal que $f(y_k)$ está conectado con todos los vértices de tal nivel m , en particular, está conectado con $f(z_m)$, digamos por el arco $(\nu_{k+1}, \dots, \nu_m)$. Se tiene entonces que:

$$(z_1, z_2, \dots, z_m) \leq (y_1, y_2, \dots, y_k, \nu_{k+1}, \dots, \nu_m),$$

y supongamos además que el arco de la derecha es el i -ésimo sucesor del arco de la izquierda, para un cierto $i \geq 0$. Se deduce que $T_B^i x_{\min} \in U$.

Como (X_B, T_B) es esencialmente minimal con respecto a x_{\max} , y $T_B^{-i-1}U$ es una vecindad de x_{\max} , entonces existe un entero $j > 0$ tal que $T_B^j x \in T_B^{-i-1}U$, es decir, $T_B^{i+j+1}x \in U$. \square

1.4. Elementos combinatoriales y sus propiedades

En esta sección se mostrarán algunos de los elementos más relevantes en un diagrama de Bratteli. Son relevantes básicamente por el uso que se le dará en este documento, o por la importancia que hayan tenido durante el desarrollo histórico de los diagramas de Bratteli. Muchas construcciones se mencionan en la literatura, pero nunca se han escrito formalmente.

1.4.1. Notación para los elementos básicos

Vértices Los vértices del diagrama de Bratteli en V_n se denotarán indistintamente del nivel por $1, 2, \dots, |V_n|$, y de acuerdo al contexto quedará claro con que nivel del diagrama se está trabajando.

⁴Del inglés *properly ordered*, término que fue introducido en [DHS99, § 1] para el mismo concepto definido anteriormente, bajo el nombre de *simple*, en [GPS95, § 3] para diagramas ordenados.

Matrices de incidencia La cantidad de arcos de nivel n que conectan un cierto vértice $k \in V_{n-1}$ con uno $\ell \in V_n$, se guardarán en la ℓ, k posición de una matriz de orden $|V_n| \times |V_{n-1}|$, que llamaremos *matriz de incidencia* del nivel correspondiente, y que denotaremos por $M(n) = (M_{ij}(n))$.

Del mismo modo, para $n < m$, se denotará $M(n, m) = M_{ij}(n, m)$ a la matriz que guarda en su posición ℓ, k la cantidad de caminos en $E_{n,m}$ que conectan los vértices $k \in V_n$ y $\ell \in V_m$. Se tienen las igualdades $M(n) = M(n-1, n)$ y que $M(n, m) = M(m)M(m-1) \cdots M(n+1)$.

Alturas Para $n \geq 1$, la matriz $M(0, n)$ es de orden $|V_n| \times 1$, es decir, un vector columna. En una cierta posición k guarda la cantidad de caminos que unen el gorro con el vértice $k \in V_n$. Denotaremos especialmente a este vector, que llamaremos *vector de alturas* por $H(n)$, y a su coordenada k -ésima por $h_k(n)$.

Arcos La cantidad de arcos de E_n que terminan en un cierto vértice $i \in V_n$, que en total son $\sum_{k=1}^{|V_n|} M_{ik}(n)$, se guardará en la i -ésima coordenada de un vector en $\mathbb{N}^{|V_n|}$ que denotaremos por $Q(n)$. Para $n < m$, se denotará por $Q(n, m)$ al vector que guarda en su coordenada i , para $1 \leq i \leq |V_m|$, la cantidad de caminos en $E_{n,m}$ que terminan en el vértice $i \in V_m$. Si denotamos por $\mathbf{1}_{|V_n|}$ al vector en $\mathbb{N}^{|V_n|}$ cuyas coordenadas son todas iguales a 1, entonces se tiene la relación $Q(n, m) = M(n, m)\mathbf{1}_{|V_n|}$. Notar también que $Q(n) = Q(n-1, n)$, y que $Q(0, n)$ es otra manera de ver al vector de alturas $H(n)$.

Función proyección Ahora consideremos $x = (x_1, x_2, \dots)$ en X_B .

La coordenada k -ésima de x la denotaremos generalmente por x_k , pero también puede ser descrita en términos de proyecciones, es decir, se definen funciones $\pi_n : X_B \rightarrow E_n$, para cada nivel n , de modo que $\pi_n(x) = x_n$. Análogamente definimos, para $1 \leq n < m$, funciones $\pi_{n,m} : X_B \rightarrow E_{n,m}$ de modo que $\pi_{n,m}(x) = (x_{n+1}, \dots, x_m)$, camino en $E_{n,m}$ por el que pasa x .

Función vértices (o torres) Al vértice de V_n por donde pasa x (es decir, $f(x_n)$) se le denotará por $\tau_n(x)$. Dicho de otro modo, para cada nivel n definimos una función $\tau_n : X_B \rightarrow V_n$ de manera que $\tau_n(x) = f(x_n)$.

Función retorno A la cantidad de caminos en $E_{0,n}$, para un cierto $n \geq 1$, que terminan en $\tau_n(x)$ y que son estrictamente mayores que (x_1, \dots, x_n) (según el orden inducido en $E_{0,n}$) se la denotará por $r_n(x)$. Esto también define una función $r_n : X_B \rightarrow \mathbb{N}$ para cada nivel n que llamaremos *función retorno* del nivel correspondiente. Hay una relación directa entre esta función y la aplicación de Vershik, a saber, si consideramos el conjunto $\mathcal{C} = \{T_B x, T_B^2 x, \dots, T_B^{r_n(x)} x\}$, notamos que su proyección sobre las primeras n coordenadas $\pi_{0,n}(\mathcal{C})$ es exactamente el conjunto de caminos estrictamente mayores que (x_1, \dots, x_n) , y además $\pi_{0,n}(T_B^k x) < \pi_{0,n}(T_B^\ell x)$ si y sólo si $k < \ell$, con $1 \leq k, \ell \leq r_n(x)$ (para el caso en que $r_n(x) \neq 0$, o equivalentemente, $\pi_{0,n}(\mathcal{C}) \neq \emptyset$). En definitiva se puede

1.4. Elementos combinatoriales y sus propiedades

decir que $r_n(x)$ cuenta el mínimo de iteraciones, que T_B debe hacer sobre x , para que el camino formado por los primeros n arcos resultante, sea maximal.

Función sufijo Podemos definir ahora la llamada *función sufijo*, que cuenta la cantidad de vértices de un cierto nivel n que x visitará bajo aplicaciones iterativas de T_B . Formalmente, primero se cuenta el número, digamos s , de arcos que comienzan en un cierto vértice k de V_n estrictamente mayores que x_{n+1} . Ahora se utiliza esta cantidad para definir, para $n \geq 0$, la función sufijo $s_n : X_B \rightarrow \mathbb{N}^{|V_n|}$, de modo que sea la k -ésima coordenada de $s_n(x)$. Esta misma construcción se puede hacer para distintos niveles $0 \leq n < m$, es decir, se puede definir una función $s_{n,m} : X_B \rightarrow \mathbb{N}^{|V_n|}$ de manera que la coordenada k -ésima de $s_{n,m}(x)$ sea la cantidad de caminos estrictamente mayores que (x_{n+1}, \dots, x_m) en $E_{n,m}$, y que comienzan en el vértice k de V_n . Por último se definen las funciones \bar{s}_n y $\bar{s}_{n,m} : X_B \rightarrow \mathbb{N}$ de manera que para todo $x \in X_B$, $\bar{s}_n(x) = \sum_{k=1}^{|V_n|} s_n(x)_k$ y $\bar{s}_{n,m}(x) = \sum_{k=1}^{|V_n|} s_{n,m}(x)_k$. Como se puede ver, estas funciones cuentan la cantidad de arcos (resp. caminos) en E_{n+1} (resp. $E_{n,m}$) que son estrictamente mayores que x_{n+1} (resp. (x_{n+1}, \dots, x_m)).

Se tienen las siguientes relaciones:

$$s_{n,n+1} = s_n, r_n = \bar{s}_{0,n}, s_0 = r_1, \quad (1.4.1)$$

$$\begin{aligned} r_n &= r_{n-1} + \langle s_{n-1}, H(n-1) \rangle \\ &= s_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \langle s_k, H(k) \rangle, \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

Para $m > n \geq 1$,

$$r_m = r_n + \sum_{k=n}^{m-1} \langle s_k, H(k) \rangle. \quad (1.4.3)$$

$$r_m = r_n + \langle s_{n,m}, H(n) \rangle. \quad (1.4.4)$$

$$\bar{s}_{n,m} = \bar{s}_{n,m-1} + \langle s_{n-1}, Q(n, m-1) \rangle \quad (1.4.5)$$

$$= \bar{s}_n + \sum_{k=n+1}^{m-1} \langle s_k, Q(n, k) \rangle \quad (1.4.6)$$

$$= \bar{s}_n + \langle s_{n+1,m}, Q(n+1) \rangle. \quad (1.4.7)$$

Si consideramos $k \in V_n$ y $\ell \in V_m$, para $0 \leq n < m$, se definirán los conjuntos

$$\begin{aligned} S_{n,m}(k, \ell) &= \{s_{n,m}(x) \mid \tau_n(x) = k \quad \text{y} \quad \tau_m(x) = \ell\} \quad \text{y} \\ \bar{S}_{n,m}(k, \ell) &= \{\bar{s}_{n,m}(x) \mid \tau_n(x) = k \quad \text{y} \quad \tau_m(x) = \ell\}. \end{aligned}$$

Anotaremos $S_n(k, \ell)$ y $\bar{S}_n(k, \ell)$ cuando $m = n + 1$. Cabe recordar que $\#S_{n,m}(k, \ell) = \#\bar{S}_{n,m}(k, \ell) = M_{\ell,k}(n, m)$.

1.4. Elementos combinatoriales y sus propiedades

Funciones de orden Vamos a introducir una notación para el orden de los arcos (en un diagrama de Bratteli). Consideremos un nivel n en el diagrama y un elemento $k \in V_n$. Ordenamos, de menor a mayor, los $Q_k(n)$ arcos de E_n que terminan en k

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_{Q_k(n)}.$$

Establecemos, con esta información, la palabra en V_{n-1}^* ,

$$\theta_n(k) = i(\alpha_1) i(\alpha_2) \cdots i(\alpha_{Q_k(n)}).$$

Por lo tanto se tiene una función $\theta_n : V_n \rightarrow V_{n-1}$, que llamaremos *función de orden* de nivel n .

Notar que $s \in \bar{S}_n(k, \ell)$ si y sólo si $\theta_{n+1}(\ell)$ tiene a k como su $(Q_\ell(n+1) - s)$ -ésima letra.

Algunos tipos de diagramas Antes de continuar se definirán algunos tipos de diagramas de Bratteli.

- Un diagrama se dice de *rango finito* si existe una cota M tal que $|V_n| \leq M$, para todo nivel n ; es decir, el número de vértices por nivel está acotado. Los diagramas que no son de rango finito, se llamarán de *rango infinito*.
- Entre los diagramas de rango finito podemos destacar los que son *linealmente recurrentes*, que son aquellos diagramas donde el conjunto de las matrices de incidencia es finito, con entradas estrictamente positivas cada una de ellas; y los diagramas *estacionarios*, que son el caso particular de diagramas linealmente recurrentes donde las matrices de incidencia $M(n)$, para $n \geq 2$, son todas iguales.
- Si para un diagrama de rango finito la sucesión $(|V_n|)_{n \geq 1}$ es una constante, digamos igual a d , este diagrama se llamará de *rango finito uniforme* d .
- Otro tipo de diagrama, que después estudiaremos con más detalle en el transcurso de esta tesis, es el diagrama *Toeplitz*. Este diagrama, también llamado diagrama con la *propiedad de igual número de caminos* (ver [GJ00, § 2]), se caracteriza por tener, para cada $n \geq 1$, todas las entradas del vector de alturas $H(n)$ iguales.

Hay algunas operaciones sobre los diagramas de Bratteli que han despertado particular interés, por la utilidad de ellos en diferentes contextos. A continuación se mencionarán algunas, mostrando sus propiedades más inmediatas.

Consideraremos en lo sucesivo sólo diagramas de Bratteli esencialmente simples.

1.4.2. Isomorfismo

Definición 1.16. Dos diagramas de Bratteli B y B' se dicen isomorfos si cumplen las siguientes condiciones:

1.4. Elementos combinatoriales y sus propiedades

- (IB1) Existe un isomorfismo de grafos dirigidos $\gamma : B \rightarrow B'$.
- (IB2) Si $a < b$ entonces $\gamma(a) < \gamma(b)$, donde a y b son arcos de B y los órdenes son los respectivos.

En este caso se dice que γ es un isomorfismo (entre diagramas de Bratteli).

Proposición 1.17. *Con la sucesión de funciones de orden $(\theta_n)_{n \geq 1}$ se puede reconstruir el diagrama de Bratteli salvo isomorfismo.*

Demostración. Supongamos primero que se tiene la sucesión de funciones de orden $(\theta_n)_{n \geq 1}$, y además la sucesión de matrices $(M_n)_{n \geq 1}$. Con la sucesión de matrices de incidencia se puede saber el número de vértices por nivel y la cantidad de arcos que unen los vértices de niveles sucesivos. Con esto tenemos construido el (no ordenado hasta el momento) diagrama de Bratteli. Ahora tenemos el inconveniente de que diferentes órdenes para el diagrama construido con las matrices de incidencia, tienen asociada la misma función de orden. Dado un vértice v de un cierto nivel n , podríamos tener un diagrama B con el vector ordenado de arcos que llegan a v $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{Q_v(n)})$, y otro diagrama B' , idéntico a B excepto por el orden, con el vector $(\alpha_{\sigma(1)}, \alpha_{\sigma(2)}, \dots, \alpha_{\sigma(Q_v(n))})$, donde σ es una permutación; pero con $i(\alpha_{\sigma(k)}) = i(\alpha_k)$, para cada k entre 1 y $Q_v(n)$. Esto quiere decir que σ permuta un arco con otro sólo si comienzan ambos en el mismo vértice. Entonces se puede construir una función de B a B' que es la identidad en los vértices, y que para el vértice v envía cada arco α_k en el arco $\alpha_{\sigma(k)}$, comportándose de manera análoga para los otros vértices. Es directo chequear que esto construye un isomorfismo de B en B' .

Sólo falta entonces deshacernos de las matrices de incidencia. Esto es sencillo, para cada $k \in V_n$ consideramos $\theta_n(k)$. Con esto podemos construir la fila k de la matriz $M(n)$, colocando en la coordenada (k, j) -ésima la cantidad de apariciones de $j \in V_{n-1}$ en la palabra $\theta_n(k)$. \square

1.4.3. Contracción, interpolación y equivalencia

Consideramos una sucesión creciente de números enteros $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ y construimos un diagrama de Bratteli B' con el conjunto de vértices $V' = \bigsqcup_{k \geq 0} V_{n_k}$; y el conjunto de arcos, actuales caminos del diagrama original, $E' = \bigsqcup_{k \geq 0} E_{n_k, n_{k+1}}$. El diagrama B' decimos que es una *contracción* o *entresacado*⁵ del diagrama B . El diagrama B' hereda el orden inducido en los caminos a partir del orden de B , y por lo tanto es un diagrama ordenado. La operación inversa de contraer la denominaremos *interpolar* o *entreverar*⁶; el diagrama original B es un interpolado del diagrama B' .

Definición 1.18. Dos diagramas de Bratteli B, B' se dicen equivalentes si el diagrama B' se puede obtener a partir del diagrama B mediante una serie finita de operaciones, entre las que sólo se consideran contracciones, interpolaciones e isomorfismos.

⁵Esta operación es conocida en inglés como *contraction* (ver por ejemplo [HPS92, § 2]) o *telescoping* (ver por ejemplo [GPS95, § 1]).

⁶En inglés a esta operación se le ha llamado generalmente *microscoping* (ver [GPS95, § 3])

1.4. Elementos combinatoriales y sus propiedades

Se puede ver que la noción de “ser equivalentes” es precisamente una relación de equivalencia. Otra cosa relevante es que si un diagrama es esencialmente simple, toda su clase también lo es [HPS92, Proposición 2.7], y por lo tanto es posible definir la aplicación de Vershik $T_{B'}$ en el conjunto $X_{B'}$ de caminos infinitos que se leen en el diagrama B' . Pero quizá lo más importante es la relación que existe entre los sistemas de Bratteli-Vershik (X_B, T_B) y $(X_{B'}, T_{B'})$, para diagramas equivalentes B y B' .

Teorema 1.19. *Si dos diagramas de Bratteli B y B' son equivalentes, entonces los sistemas de Bratteli-Vershik asociados, (X_B, T_B) y $(X_{B'}, T_{B'})$, son topológicamente conjugados, y además la conjugación lleva $x_{\max} \in X_B$ en $x'_{\max} \in X_{B'}$.*

Demostración. Sean B y B' los diagramas equivalentes. Es suficiente suponer que existe un isomorfismo $\gamma : B \rightarrow B'$, o bien, B' es una contracción de B . En el primer caso, en que ambos son isomorfos, la conjugación se obtiene directamente considerando la extensión de γ a elementos de X_B (es decir, $\gamma(x_1, x_2, \dots) = (\gamma(x_1), \gamma(x_2), \dots)$).

Si suponemos que B' es una contracción de B , asociada a la sucesión creciente (n_k) , entonces se puede verificar que la función $\varphi : B \rightarrow B'$, tal que $\varphi(x) = (\pi_{n_0, n_1}(x), \pi_{n_1, n_2}(x), \dots)$, es una conjugación. \square

Algo de notación Sea $\ell > m$ dos niveles de un cierto diagrama B , se dirá “hacer una contracción entre los niveles m y ℓ ” para indicar que se construye la contracción B' asociada a la sucesión específica $n_k = k$, para $k < m$, $n_m = \ell$ y $n_{m+k} = \ell + k$, para $k \geq 1$. De modo similar, si se dice “hacer una interpolación en el nivel n ” de un cierto diagrama B , se referirá a construir un diagrama B'' , del cual, al contraer sus dos niveles consecutivos n y $n+1$ (en el sentido recién expuesto), se obtiene el diagrama B . Además:

- Una contracción se llamará *periódica* si la sucesión asociada es $n_0 = 0, n_1 = 1$ y $n_k = 1 + pk$, para $k > 1$, donde $p > 1$ es un entero que se denominará el período de la contracción.
- Una contracción se llamará *acotada* si existe un entero $K > 0$ tal que $|n_k - n_\ell| \leq K$ para todo $k, \ell \geq 0$, donde naturalmente $(n_k)_{k \geq 1}$ es la sucesión asociada a la contracción. Como se puede notar, una contracción periódica es acotada.

A continuación se mostrarán algunos resultados, asociados a la noción de contracción, y que han mostrado cierto nivel de relevancia técnica.

Lema 1.20 ([HPS92], Proposición 2.8). *Todo diagrama de Bratteli B , salvo contracción, cumple la siguiente propiedad:*

Si α β son dos arcos consecutivos (es decir, $i(\beta) = f(\alpha)$) maximales (resp. minimales), entonces α es un arco de x_{\max} (resp. x_{\min}).

Corolario 1.21. *Dado un diagrama de Bratteli B , existe una contracción, salvo isomorfismo, de modo que cada arco maximal de un cierto nivel n , comience en el primer vértice de nivel $n-1$, para $n \geq 1$.*

1.4. Elementos combinatoriales y sus propiedades

Demostración. Consideramos una función que permuta cada vértice por donde pasa x_{\max} por el primer vértice del nivel correspondiente, y notamos que puede ser extendida naturalmente a un isomorfismo entre diagramas ordenados. Contraemos el diagrama, de modo que se cumpla la propiedad del Lema 1.20, y consideramos un arco η maximal en un cierto nivel n , $n \geq 1$. Por el Lema 1.20, el único arco de nivel $n - 1$ que puede ser maximal y estar conectado con η , tiene que ser $\pi_{n-1}(x_{\max})$; y por lo tanto η comienza en el primer vértice de V_{n-1} . \square

Proposición 1.22. *Un diagrama de Bratteli B es propiamente ordenado si y sólo si, existe una contracción de B tal que todas sus matrices de incidencia tienen coeficientes positivos.*

Demostración. Supongamos que B es propiamente ordenado. Sea $n_0 = 0$, definimos n_{k+1} a partir de n_k , con $k \geq 1$, como el nivel tal que cada vértice de nivel n_k está conectado con todos los vértices de nivel n_{k+1} . Esto es posible por la finitud de $|V_{n_k}|$ (ver también la discusión inmediatamente posterior a la definición de propiamente ordenado). Al hacer la contracción asociada a la sucesión (n_k) , obtenemos un diagrama con todas sus matrices de transición cumpliendo la propiedad deseada.

La demostración en sentido contrario es directa. \square

Matrices y funciones de orden de una contracción Notar que si $(M(n))_{n \geq 1}$ es la sucesión de matrices de incidencia asociada con un cierto diagrama de Bratteli B , y B' es una contracción de B con respecto a sucesión $0 = n_0 < n_1 < \dots$, entonces las matrices de incidencia de B' son precisamente $(M(n_k, n_{k+1}))_{k \geq 0}$. En este caso también se pueden calcular las funciones de orden $(\theta'_n)_{n \geq 1}$ para B' a partir de las funciones de orden $(\theta_n)_{n \geq 1}$ asociadas a B por un proceso iterativo de sustituciones. Para calcular θ'_k , con $k \geq 1$, que guarda la información del orden de los caminos en E_{n_{k-1}, n_k} del diagrama original B , consideramos una sucesión de funciones $\vartheta_1 = \theta_{n_k}, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n_k - n_{k-1}}$, construidas de la siguiente manera, para $\ell \in V_{n_k}$:

$$\begin{aligned} \vartheta_1(\ell) &= a_{1\ell}^{(1)} a_{2\ell}^{(1)} \cdots a_{Q_\ell(n_k)\ell}^{(1)} \in V_{n_{k-1}}^* \\ \vartheta_2(\ell) &= \theta_{n_{k-1}}(a_{1\ell}^{(1)}) \theta_{n_{k-1}}(a_{2\ell}^{(1)}) \cdots \theta_{n_{k-1}}(a_{Q_\ell(n_k)\ell}^{(1)}) \\ &= a_{1\ell}^{(2)} a_{2\ell}^{(2)} \cdots a_{Q_\ell(n_{k-2}, n_k)\ell}^{(2)} \in V_{n_{k-2}}^* \\ &\vdots \\ \vartheta_{n_k - n_{k-1}}(\ell) &= \theta_{n_{k-1}+1}(a_{1\ell}^{(n_k - n_{k-1} - 1)}) \theta_{n_{k-1}+1}(a_{2\ell}^{(n_k - n_{k-1} - 1)}) \cdots \theta_{n_{k-1}+1}(a_{Q_\ell(n_{k-1}+1, n_k)\ell}^{(n_k - n_{k-1} - 1)}) \\ &= a_{1\ell}^{(n_k - n_{k-1})} a_{2\ell}^{(n_k - n_{k-1})} \cdots a_{Q_\ell(n_{k-1}, n_k)\ell}^{(n_k - n_{k-1})} \in V_{n_{k-1}}^* \end{aligned}$$

entonces la función θ'_k buscada es igual a $\vartheta_{n_k - n_{k-1}}$.

Observación 1.1. Supongamos que A es la matriz de incidencia para un cierto nivel n en un diagrama de Bratteli, no basta con encontrar una factorización $A = M_1 M_2$, donde M_1, M_2 carecen de filas o columnas nulas, para establecer una interpolación del nivel n del diagrama; también hay que considerar el orden. Puede suceder que el orden del nivel

1.4. Elementos combinatoriales y sus propiedades

n del diagrama de Bratteli original no se pueda recuperar al contraer el diagrama donde M_1 y M_2 son las matrices de incidencia sucesivas. Un ejemplo de esta situación se puede ver en la Figura 1.3.

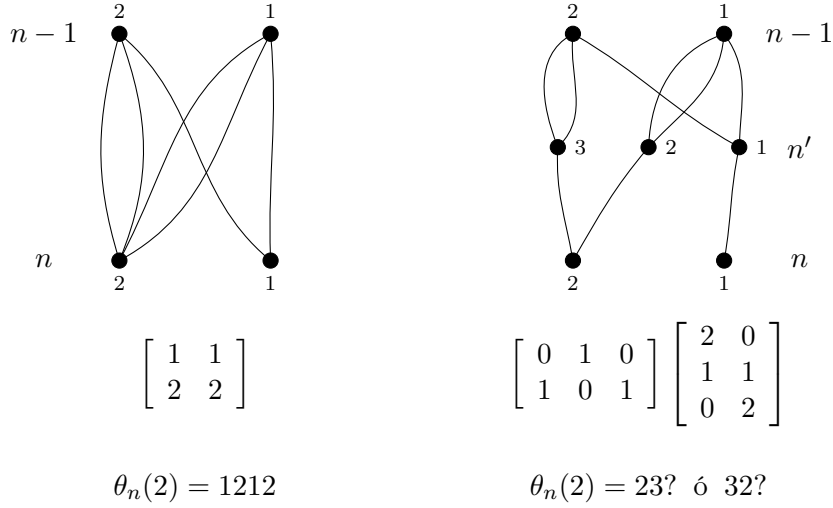


Figura 1.3: Ejemplo en el que se interpola un nivel, basándose en la factorización de la matriz de incidencia, pero que no es una interpolación propiamente tal pues con la contracción no recupera el diagrama original.

1.4.4. Diagramas inicialmente nivelados

Nivelar inicialmente un diagrama B , significará encontrar un diagrama equivalente B' tal que su vector de alturas en el primer nivel cumple $H'(1) = \mathbf{1}_{|V'_1|}$, es decir, no hay arcos múltiples desde V_0 a los vértices de V_1 . Una manera sencilla de lograr esto es encontrar una matriz A tal que $H(1) = A\mathbf{1}_\ell$, $\ell > 1$, y luego hacer $M'(2) = A$ y $M'(k) = M(k-1)$. El diagrama B' que tiene matrices de incidencia $(M'(n))_{n \geq 1}$ es una interpolación del diagrama original salvo isomorfismo, donde el orden en su segundo nivel se define de manera arbitraria. Es directo ver que B' es equivalente al diagrama original, y por tanto obtenemos la simplificación del nivel 1. El único cuidado que hay que tener, es que la matriz A (hay muchas maneras de encontrar esta matriz) no tenga ninguna columna o fila nulas.

Lema 1.23. *Se puede encontrar una matriz A de $|V_1| \times \ell$, sin filas ni columnas nulas, y tal que $H(1) = A\mathbf{1}_\ell$ si y sólo si $\ell \leq |E_1|$.*

Demostración. Supongamos primero que $\ell > |E_1|$ y tenemos A sin filas ni columnas nulas cumpliendo la igualdad $H(1) = A\mathbf{1}_\ell$. Para $k = 1, 2, \dots, |V_1|$, la fila k -ésima de la matriz A tiene, a lo más, $Q_k(1)$ entradas no nulas; y por lo tanto la matriz A tiene a lo más $\sum_{k=1}^{|V_1|} Q_k(1) = |E_1| < \ell$ entradas no nulas. Esto implica que A tiene por lo menos una columna vacía lo cual es contradictorio.

1.4. Elementos combinatoriales y sus propiedades

Supongamos ahora que $\ell \leq |E_1|$. Para $k = 1, 2, \dots, |V_1|$, podemos construir A tal que su fila k -ésima tenga exactamente $Q_k(1)$ entradas no nulas, todas iguales a 1. Como $\sum_{k=1}^{|V_1|} Q_k(1) = |E_1| \geq \ell$ entonces podemos repartir estas entradas de manera que no quede ninguna columna vacía. Por la construcción se tiene la igualdad $H(1) = A\mathbf{1}_\ell$. \square

De este resultado deducimos que siempre es posible simplificar el primer nivel de cualquier diagrama de Bratteli.

En la Figura 1.4 se puede ver un ejemplo en el que se aplica este método de nivelación del primer nivel.

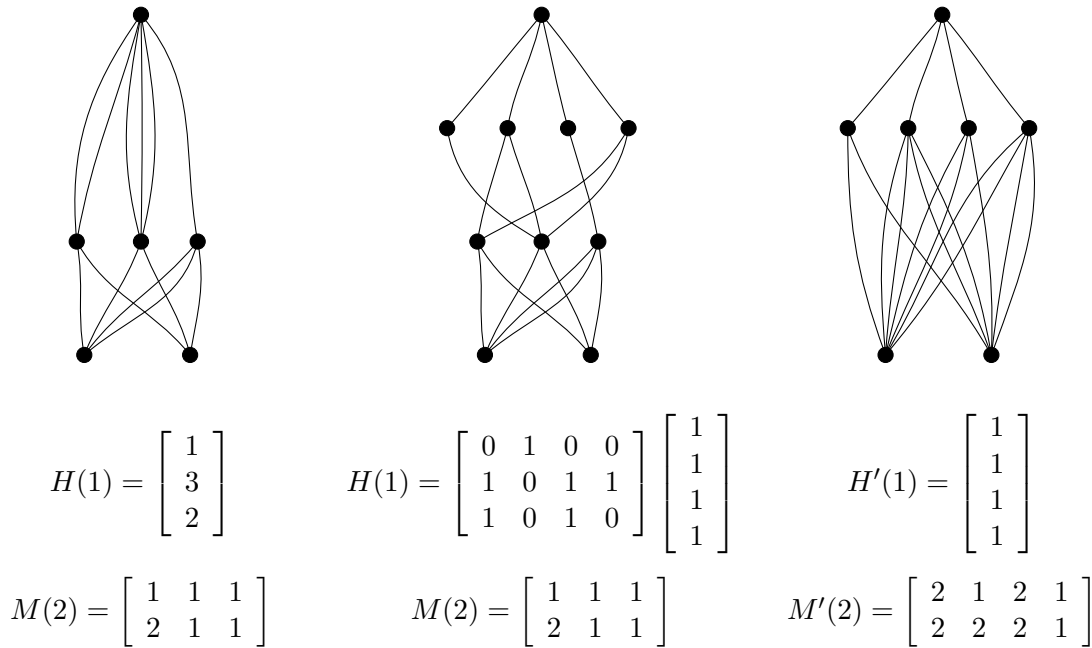


Figura 1.4: Ejemplo de como nivelar el nivel inicial, con una contracción adicional al final. En este caso $\ell = 4 \leq |E_1| = 6$. Los órdenes se preservan naturalmente.

1.4.5. División de vértices

Como se había notado anteriormente, la factorización de una matriz de incidencia no da lugar necesariamente a un interpolación. El método que se describe a continuación genera una interpolación a partir de una factorización muy particular de matrices. Se puede decir que este método es una variación del *symbol splitting* introducido en [HPS92, § 3] (ver también [GPS95, § 3]) muy similar a la hecha en [For97, Lema 15].

Consideremos un nivel n de un cierto diagrama de Bratteli ordenado B , y un vértice $v \in V_{n-1}$. Tómese un número entero $k > 0$, no mayor que $|i^{-1}(v)|$, el número de arcos de E_n que comienzan en v . Sea $M = M(n)$, al vértice v le corresponde la columna v -ésima de la matriz M . Construyamos una matriz M_1 a partir de M de la siguiente manera: la

1.4. Elementos combinatoriales y sus propiedades

columna v -ésima de M se reemplaza por k columnas que sumadas dan la original, esto se puede hacer de modo que ninguna columna sea nula ya que $k \geq |i^{-1}(v)|$. Ahora se construye la matriz M_2 : se toma la matriz identidad de $|V_{n-1}| \times |V_{n-1}|$ y su v -ésima fila se reemplaza por k copias de ella misma. Es directo chequear que $M = M_1 M_2$. Este proceso inserta un nuevo conjunto de vértices V' entre V_{n-1} y V_n que es como una copia de V_{n-1} donde el vértice v ha sido reemplazado por k vértices, que denotaremos por v_1, v_2, \dots, v_k . No es necesario preocuparse por el orden de los arcos entre V_{n-1} y V' , ya que a cada elemento de V' llega sólo un arco. Por otra parte, a cada elemento de V_n llega la misma cantidad de arcos original. El orden de los arcos que terminan en un cierto vértice $u \in V_n$ a partir de V' lo denotaremos por $\vartheta(u)$ y, a pesar de que hay muchas maneras de definirlo de modo de recuperar el orden $\theta_n(u)$ original, todas ellas constan de reemplazar en $\theta_n(u)$ las ocurrencias de v por las correspondientes ocurrencias de v_1, v_2, \dots, v_k .

Ejemplo de división de vértices Supongamos que la siguiente matriz M es la matriz de incidencia de un cierto nivel n , de un cierto diagrama de Bratteli B :

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Supongamos que la función de orden para este nivel n es:

$$\theta_n(k) = \begin{cases} 13412 & \text{si } k = 1 \\ 1324 & \text{si } k = 2 \\ 12324 & \text{si } k = 3 \end{cases}$$

Vamos a aplicar el método de división de vértices de manera simultánea al segundo y cuarto vértice, el segundo vértice lo dividiremos en tres vértices, y el cuarto en dos vértices. Según este método, se construye una matriz M_1 a partir de M separando sus columnas 2da y 4ta, y una matriz M_2 a partir de la identidad de 4×4 copiando sus filas 2da y 4ta. Por ejemplo,

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Id}_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notar que $M = M_1 M_2$. En la Figura 1.5 se muestra la división en el nivel n del diagrama B de los vértices 2 y 4, en $\{u_1, u_2, u_3\}$ y $\{v_1, v_2\}$ respectivamente.

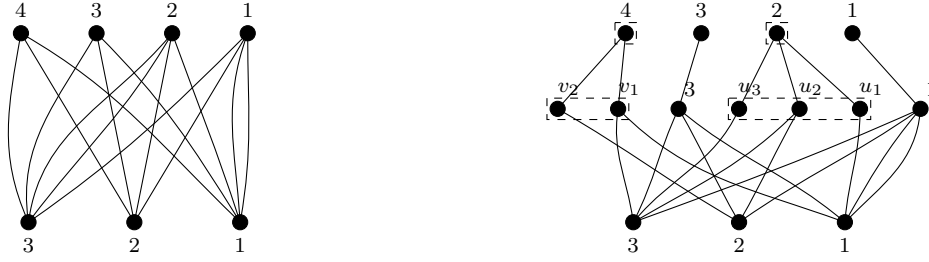


Figura 1.5: Ejemplo del método de división de vértices, donde simultáneamente se han dividido el segundo y cuarto vértices de V_{n-1} .

Para finalizar con este ejemplo, una de las maneras en que el orden ϑ se puede definir, es la siguiente (notar que hay dos opciones posibles para $\vartheta(3)$):

$$\vartheta(k) = \begin{cases} 13v_11u_1 & \text{si } k = 1 \\ 13u_2v_2 & \text{si } k = 2 \\ 1u_23u_3v_1 & \text{si } k = 3 \end{cases}$$

Para cierto tipo de diagramas de Bratteli, es posible encontrar, en la clase de equivalencia a la que pertenece, algún representante especial con el cual es, digámoslo así, más fácil trabajar. Terminaremos esta sección con resultados relacionados con esta idea. Cabe recordar que estamos asumiendo que todos los diagramas considerados son esencialmente simples.

Proposición 1.24. *Sea B un diagrama de rango finito. B es equivalente a un diagrama B' con las siguientes características:*

- (RF1) B' está inicialmente nivelado.
- (RF2) B' es de rango finito uniforme d , para un cierto entero $d > 0$.
- (RF3) Si B es propiamente ordenado, entonces B' puede ser elegido tal que todas sus matrices de transición, tengan entradas estrictamente positivas.
- (RF4) B' puede ser elegido de modo que, todo arco maximal comience en el primer vértice de nivel n , independiente de n , para $n \geq 1$.

Demostración. Como B es de rango finito, entonces existe una sucesión $(n_k)_{k \geq 0}$ tal que $|V_{n_k}| = d$ para todo $k \geq 1$. Elegimos $n_0 = 0$ y hacemos la contracción asociada a esta sucesión y obtenemos un nuevo diagrama de rango finito uniforme d . Si B es simple, previo al proceso anterior se puede hacer una contracción, de modo que las matrices de transición resultantes tengan todas sus entradas positivas.

Podemos suponer ahora que la cantidad de arcos, en el primer nivel del diagrama resultante, es mayor que d ; si no, podemos aplicar una contracción entre el nivel 1 y un nivel mayor de tal modo de obtener esta propiedad. Como $|E_1| > d$, aplicamos el procedimiento del Lema 1.23 para obtener una matriz A tal que $M(1) = A\mathbf{1}_d$. Ahora volvemos

a aplicar una contracción, de modo que la nueva segunda matriz de transición sea $M(2)A$ (notar que si $M(2)$ tiene sus entradas estrictamente positivas, entonces también las tiene así $M(2)A$). Esto prueba (RF1)–(RF3).

Finalmente consideremos el único camino infinito maximal de B , x_{\max} , la propiedad (RF4) es precisamente la enunciada en el Corolario 1.21. \square

Definición 1.25. A un diagrama de Bratteli B' como al que hace referencia la proposición anterior, equivalente a un diagrama B propiamente ordenado, se le dirá diagrama *propio*. Es decir, un diagrama es propio si y solamente si es propiamente ordenado, inicialmente nivelado, tiene todos los coeficientes de sus matrices positivos, de rango finito uniforme, y todos sus arcos maximales comienzan en el primer vértice del nivel que corresponda.

Observación 1.2. Notar que si un diagrama B en la Proposición 1.24 es, por ejemplo, estacionario o linealmente recurrente, dicha propiedad no se preserva dentro de su clase de equivalencia. En este caso, el diagrama equivalente B' al que hace mención el resultado, podría no ser estacionario o linealmente recurrente. Lo que se puede ver sin mayor dificultad, es que la propiedad de ser Toeplitz se preserva bajo contracciones, y por lo tanto si el diagrama B tiene esta propiedad, también la tendrá el diagrama B' .

No obstante la observación anterior, adecuando la metodología se pueden obtener resultados similares con otras clases de diagramas de Bratteli de rango finito. Un ejemplo es el siguiente resultado de Forrest (ver [For97] y [DHS99, § 1]).

Proposición 1.26 ([For97] Lema 15). *Sea B un diagrama estacionario propiamente ordenado, entonces existe un diagrama B' , también estacionario propiamente ordenado, equivalente a B , pero que además está inicialmente nivelado.*

Hay que notar que, por la construcción propuesta en [For97], el orden de la matriz cuadrada A ($= M(2) = M(3) = \dots$) asociada al diagrama estacionario B , no supera al orden de la matriz A' asociada al diagrama B' .

Trabajando un poco más, usando el método de división de vértices, se obtiene el siguiente análogo de la Proposición 1.26, pero en este caso para diagramas linealmente recurrentes.

Proposición 1.27. *Dado un diagrama B linealmente recurrente con matrices de incidencia positivas, existe un diagrama B' , linealmente recurrente, equivalente a B , inicialmente nivelado, con todas sus matrices de incidencia positivas, y de rango finito uniforme.*

Demostración. Primero hay que notar que una contracción acotada de B , es también un diagrama linealmente recurrente. En toda esta demostración, se puede verificar siempre que las contracciones son de este tipo.

Como $(|V_n|)_{n \geq 1}$ es una sucesión de una cantidad finita de elementos, hay algunos que aparecen infinitas veces; sea K el mayor de ellos. Contraemos la parte inicial del diagrama hasta un cierto nivel ℓ de modo que $|V_\ell| = K$, $|V_n| \leq K$ para $n > \ell$, y la

1.4. Elementos combinatoriales y sus propiedades

cantidad de arcos que salen de V_0 sea mayor que K . Con esto primero podemos nivelar inicialmente el diagrama de acuerdo al Lema 1.23, y contraemos de modo que la matriz de transición del segundo nivel tenga todos sus coeficientes positivos, al igual que en la demostración de la Proposición 1.24.

Supongamos que el menor de los $(|V_n|)_{n \geq 1}$ que quedan es igual a b , y definamos $k = \lceil K/b \rceil$, el entero inmediatamente mayor o igual que K/b . Salvo una contracción periódica, se puede suponer que el diagrama tiene los coeficientes de sus matrices de transición, desde segundo nivel en adelante, todos acotados inferiormente por k . Llamemos F_1, F_2, \dots, F_m a las finitas matrices de transición que aparecen en el diagrama. Supongamos una de estas matrices, digamos F_i , es tal que su orden $a_i \times b_i$ cumple que $a_i, b_i < K$. Aplicamos el método de división de vértices, para vértices simultáneos, donde cada vértice se reemplaza por, a lo más, k vértices nuevos. Esto genera una factorización $F_i = M_{1i}M_{2i}$ donde M_{1i} se puede elegir de orden $a_i \times K$ y con todos sus coeficientes positivos. Si hacemos esto con todas las matrices de incidencia (algunas no será necesario factorizarlas, en el caso que el número de filas o columnas sea igual a K) habremos generado una interpolación del diagrama con un número finito de matrices de incidencia, donde las únicas matrices que tienen algún coeficiente nulo son las del tipo M_{2i} . éstas se encuentran siempre entre dos matrices de coeficientes positivos, o dicho de otro modo, no aparecen dos de ellas consecutivamente. Ahora basta hacer una contracción (donde no se contraen más de dos niveles consecutivos) para obtener un diagrama con finitas matrices de incidencia, todas de coeficientes positivos y de orden $K \times K$, excepto en el primer nivel, donde la matriz de incidencia es $\mathbf{1}_K$. \square

Ejemplo del método de la Proposición 1.27 El siguiente ejemplo, además de mostrar el funcionamiento del método presentado en la proposición, intentará clarificar un poco más la idea detrás del método de división de vértices.

Supongamos que en un cierto diagrama de Bratteli B , sus matrices de incidencia $M(2), M(3), M(4)$ y $M(5)$ son:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

respectivamente. Según la proposición, basta con factorizar $M(3)$ y $M(4)$ siguiendo el método de división de vértices, que sabemos genera una legítima interpolación, y que haremos paso a paso. La matriz $M(3)$ se escribe como producto de dos matrices, digamos A y B , que son

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.5. Diagramas de Bratteli y sistemas de Cantor

respectivamente. Lo propio se hace con $M(4)$, y las matrices C y D que la factorizan son

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

respectivamente. Finalmente se hace una contracción, que en este caso genera tres matrices $M'(2) = BM(2)$, $M'(3) = DA$ y $M'(4) = M(5)C$, todas de coeficientes estrictamente positivos. Notar que la contracción nunca abarca más de dos niveles en cada caso (notar además, que no era posible aplicar el método de división de vértices a $M(5)$ sin dejar coeficientes nulos). En la figura 1.6 se muestra este proceso en el diagrama.

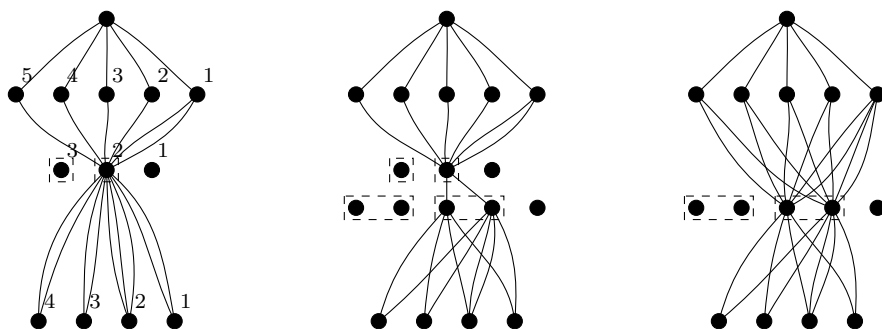


Figura 1.6: Construcción de la matriz $M'(2)$ del ejemplo. En esta figura se muestran, por razones de claridad, solamente los caminos que pasan por el segundo vértice del nivel 2. Notar que hay una manera directa de pasar del primer al tercer diagrama, que muestra el funcionamiento detrás del método de división de vértices.

Observación 1.3. Cabe notar que al mirar en este ejemplo el producto final del método de división de vértices (al pasar del primer diagrama al tercero), éste se puede presentar como una operación en sí misma, sin hacer referencia a los conceptos de interpolación y contracción. Esta operación se podría parafrasear de la siguiente manera “se divide un vértice en un número de partes; cada parte es un nuevo vértice del correspondiente nivel; a cada parte llegan exactamente los mismos arcos que llegaban al vértice original y en el mismo orden; y con respecto a los arcos que salían del vértice original, éstos se reparten entre los nuevos vértices generados”. Como la operación así descrita, se puede expresar en términos de interpolaciones y contracciones, entonces estamos seguros de que genera diagramas en la misma clase de equivalencia del diagrama al cual se aplique.

1.5. Diagramas de Bratteli y sistemas de Cantor

Sabemos que, dado un diagrama de Bratteli, el sistema (X_B, T_B) es un sistema de Cantor esencialmente minimal (minimal en el caso de que el diagrama sea propiamente

1.5. Diagramas de Bratteli y sistemas de Cantor

ordenado). Cada sistema de Cantor, como este, tiene asociada una sucesión encajonada de particiones de Kakutani-Rokhlin gracias al Teorema 1.7. En el caso de un sistema de Bratteli-Vershik se puede construir esta sucesión de manera natural: definimos $\mathcal{P}(0) = X_B$, y para cada $n \geq 1$ definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(n) &= \{[\alpha] \mid \alpha \in E_{0,n}\} \\ &= \{T_B^{-\ell}[\alpha_k] \mid 1 \leq k \leq C_n, 0 \leq \ell \leq h_k(n), \alpha_k \text{ es maximal y } f(\alpha_k) = k \in V_n\} \end{aligned}$$

Notamos que se tiene, para cada $n \geq 0$, una partición de Kakutani-Rokhlin con $|V_n|$ torres, tal que $B_k(n) = [\alpha_k]$, y la k -ésima torre tiene altura $h_k(n)$, para cada $1 \leq k \leq |V_n|$. A esta sucesión (encajonada) de particiones la llamaremos la *sucesión canónica de PKR* asociada al sistema (X_B, T_B) .

Se puede ver que si consideramos $x \in X_B$, entonces $T_B^{r_n(x)}(x)$ pertenece a la base de la partición, específicamente, a la base de $\tau_n(x)$.

Lo interesante es que, gracias al Teorema 1.7, para cada sistema de Cantor esencialmente minimal, se puede encontrar un diagrama de Bratteli esencialmente simple, tal que los sistemas, de Cantor y Bratteli-Vershik, son topológicamente conjugados. Para una construcción del diagrama de Bratteli a partir del sistema de Cantor, el lector puede mirar [HPS92, § 4]. De todos modos, se mostrará una construcción acá por medio de funciones de orden.

Construcción del diagrama a partir del sistema de Cantor: Supongamos que se tiene un sistema de Cantor (X, T) esencialmente minimal con respecto a x , y una sucesión de PKR encajonada como en Teorema 1.7 ($\mathcal{P}(n)$). Sea $n \geq 1$ y k cualquier entero positivo no mayor que el número de torres de $\mathcal{P}(n)$. Se construirá una palabra $\theta_n(k)$, de largo K , igual a la cardinalidad del conjunto

$$F = \{i \geq 0 \mid T^{-i}B_k(n) \subseteq B(n-1)\}.$$

Para esto consideremos $e(1) > e(2) > \dots > e(K)$, todos los elementos de F . Entonces la j -ésima letra de la palabra $\theta_k(n)$ se establece igual a ℓ si $T^{-e(j)}B_k(n) \subseteq B_\ell(n-1)$. Es decir, $\theta_k(n)$ es una palabra que guarda la información ordenada de las torres de $\mathcal{P}(n-1)$, que debería recorrer un cierto $x \in X$, si x está en la k -ésima torre de $\mathcal{P}(n)$. Esto define una sucesión de funciones $(\theta_n)_{n \geq 1}$, con dominio respectivo en las torres de $\mathcal{P}(n)$, que entregan palabras en las torres de $\mathcal{P}(n-1)$, también respectivamente. Por la Proposición 1.17, esto nos permite construir un diagrama de Bratteli. El diagrama construido es esencialmente simple, y diferentes sucesiones de PKR para (X, T) dan lugar a diagramas posiblemente diferentes, pero todos equivalentes entre sí ([HPS92, Teorema 4.4]).

Notar que, gracias a Teorema 1.7(KR3), esta construcción permite obtener un diagrama que cumple con las condiciones mencionadas en el Corolario 1.21.

Proposición 1.28 ([HPS92], Teorema 4.6). *Sea (X, T) un sistema de Cantor esencialmente minimal con respecto a x . Sea B un diagrama ordenado de Bratteli construido por el método antes mencionado. Entonces (X, T) y (X_B, T_B) son conjugados, y la conjugación envía $x \in X$ en x_{\max} .*

Lo propio se tiene para sistemas de Cantor minimales.

Proposición 1.29. *Sea (X, T) un sistema de Cantor minimal. Un diagrama de Bratteli ordenado B , construido por el método antes mencionado es propiamente ordenado.*

Demostración. El sistema (X_B, T_B) es minimal, incluso si cambiamos B por cualquier diagrama equivalente. Podemos, por tanto, suponer que B cumple con las condiciones del Lema 1.20. Sea v un vértice de nivel n , para un cierto $n \geq 1$, y sea $x \in X_B$ tal que $f(\pi_n(x)) = v$. Dada la vecindad $U = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ de x , por la minimalidad de (X_B, T_B) , existe $i \geq 0$ tal que $T^i x_{\min} \in U$. Por otra parte notemos que existe un nivel m , que se puede elegir mayor que n , tal que $\pi_m(T^i x_{\min}) = \pi_m(x_{\min})$. Del Lema 1.20 se puede deducir que todos los vértices de nivel $m + 1$ están conectados con $f(\pi_m(x_{\min}))$ por los arcos minimales que terminan en cada de ellos. Esto permite construir un camino entre v y cualquier vértice de nivel $m + 1$, usando los primeros m arcos de $T^i x_{\min}$, y adjuntando el arco minimal correspondiente de nivel $m + 1$. \square

El siguiente teorema resume lo expuesto anteriormente, tanto en los resultados de esta sección, como las propiedades de los sistemas de Bratteli-Vershik expuestas en las secciones anteriores.

Teorema 1.30 ([HPS92], Teorema 4.7). *Existe, en base a las construcciones anteriores, una correspondencia entre las clases de equivalencia de diagramas de Bratteli esencialmente simple, y la clase de sistemas de Cantor esencialmente minimales, conjugados, y que la conjugación preserva los puntos con respecto a los cuales los sistemas son esencialmente minimales.*

Se obtiene una correspondencia análoga, al reemplazar esencialmente simple por propiamente ordenado en las clases de diagramas de Bratteli, y reemplazar esencialmente minimal por minimal en las clases de sistemas de Cantor.

Capítulo 2

Medidas invariantes en sistemas de Bratteli-Vershik

En esta sección trabajaremos básicamente con un diagrama de Bratteli propiamente ordenado B , y por lo tanto con el sistema de Cantor minimal (X_B, T_B) . Se expondrán algunas de las propiedades de las medidas invariantes del sistema, desarrollando el planteamiento dado en [BKMS13]. De ahora en adelante escribiremos T , en lugar de T_B , y X en lugar de X_B , excepto cuando sea necesario ser más específico.

2.1. Vectores de medidas

Por el Teorema 1.3 sobre existencia de medidas invariantes, sabemos que $\mathcal{M}(T)$ no es vacío. Recordar que $\mathcal{M}(T)$ es el conjunto de medidas de probabilidad invariantes del sistema (X, T) . Se denotará, de manera adicional, por $\mathcal{M}^*(T)$ al conjunto de todas las medidas invariantes, finitas o infinitas, del sistema.

Sucesión de vectores para una medida invariante μ . Sea $\mu \in \mathcal{M}^*(T)$, notamos que el conjunto de todos los $[\alpha]$, con $\alpha \in E_{0,k}$, para todo $k \geq 1$, forman una semi-álgebra. Por lo tanto el valor de μ queda completamente definido por su valor sobre ellos. Más aun, si se tiene $n \geq 1$ y $v \in V_n$, basta conocer el valor de μ sobre $B_v(n)$ para conocer su valor en $[\alpha]$, donde α es cualquier camino en $E_{0,n}$ que termine en el vértice v . Definamos, en este espíritu y para cada $n \geq 1$, el vector en $\mathbb{R}_+^{C_n}$, $\mu(n) = (\mu(B_1(n)), \dots, \mu(B_{c_n}(n)))$, que guarda las medidas de las bases de cada torre de nivel n , en la sucesión de PKR canónicas. Es importante notar que $\mu(n)$ puede ser definido reemplazando cada $B_k(n)$ por cualquier $[\alpha_k]$, donde $\alpha_k \in E_{0,n}$ termina en el k -ésimo vértice de V_n .

Definición de medida invariante asociada a un diagrama de Bratteli. Para motivar la siguiente definición, supongamos que B' es otro diagrama de Bratteli propiamente ordenado, con la misma sucesión de matrices de incidencia que B , que difiere de B solamente en el orden del diagrama. Es directo notar que $\mathcal{M}^*(T_B) = \mathcal{M}^*(T_{B'})$, y por

2.1. Vectores de medidas

lo tanto vemos que las medidas invariantes asociadas a un sistema de Bratteli-Vershik, no necesitan depender de la aplicación de Vershik (o del orden local). Con esto en mente se extenderá la noción de medida invariante (ver [BKMS13, § 2] y [BKMS10, § 2]):

Definición 2.1. Sea B un diagrama de Bratteli (no es necesario que sea propiamente ordenado). Diremos que μ es una medida invariante (finita o infinita) de X_B (y del diagrama B) si, para todo par $\alpha, \beta \in E_{0,k}$, $k \geq 1$, que terminen en el mismo vértice de nivel k ; se tiene $\mu([\alpha]) = \mu([\beta])$. Al conjunto de medidas que satisfacen esta condición se las denotará por $\mathcal{M}^*(B)$, mientras que $\mathcal{M}(B)$ se usará para denotar las medidas invariantes de probabilidad.

Esta es realmente una extensión de la definición de medida invariante, aun en el caso de que el diagrama B no sea propiamente ordenado. Esto libera el concepto de medida invariante de la existencia de una aplicación de Vershik sobre el diagrama, pero sin embargo, la medida será invariante con cualquier aplicación de Vershik que se defina sobre el diagrama.

Ecuación para la sucesión de vectores de medida $(\mu(n))_{n \in \mathbb{N}}$. Ahora, sea $m > n$, y $\alpha \in E_{0,n}$ tal que, digamos, $f(\alpha) = \ell \in V_n$. Consideremos el conjunto F de todos los caminos en $E_{0,m}$ que son idénticos a α en sus primeras n coordenadas. Tenemos entonces las identidades

$$\begin{aligned} [\alpha] &= \bigsqcup_{\beta \in F} [\beta] \\ &= \bigsqcup_{k \in V_m} \bigsqcup_{\substack{\beta \in F \\ f(\beta)=k}} [\beta], \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \mu_\ell(n) = \mu([\alpha]) &= \sum_{k \in V_m} \sum_{\substack{\beta \in F \\ f(\beta)=k}} \mu([\beta]) \\ &= \sum_{k \in V_m} M_{k\ell}(n, m) \mu_k(m). \end{aligned}$$

Notar que, en términos vectoriales, la ecuación es equivalente a

$$\mu(n) = M(n, m)^T \mu(m),$$

donde la “ T ” en este caso, indica trasposición de matrices. Se tiene el siguiente recíproco:

Proposición 2.2. Para cada sucesión $(p(n) \in \mathbb{R}^{|V_n|})_{n \geq 1}$ de vectores que satisface

$$p(n) = M(n, m)^T p(m), \quad \text{para } m > n. \quad (2.1.1)$$

existe una medida $\mu \in \mathcal{M}^*(B)$ tal que su sucesión de vectores asociada es igual a $(p(n))_{n \geq 1}$.

Demostración. Consideremos la semi-álgebra \mathfrak{S} de todos los conjuntos $[\alpha]$, para $\alpha \in E_{0,n}$, $n \geq 1$ (y \emptyset obviamente). Definamos la función $\rho : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}_+$, tal que, si $\alpha \in E_{0,n}$ y $f(\alpha) = k$, $n \geq 1$ y $1 \leq k \leq |V_n|$, entonces $\rho([\alpha]) = p(n)_k$, la k -ésima coordenada del vector $p(n)$. Se ve que ρ se puede extender a una medida σ -aditiva en los borelianos de X , que además, por definición es invariante. Concluimos que cualquier sucesión de vectores como la de arriba, que cumpla (2.1.1), define una medida en $\mathcal{M}^*(B)$. \square

2.2. Geometría de las medidas

Los elementos geométricos que se definen a continuación, nos ayudarán a entender un poco mejor estas sucesiones $(p(n))_{n \geq 1}$ descritas más arriba, y por lo tanto, a las medidas invariantes.

Definición 2.3. Un conjunto \mathcal{K} en algún \mathbb{R}^N , se llamará *cono*, si para $u, v \in \mathcal{K}$ y a, b reales no negativos, la combinación lineal (positiva) $au + bv \in \mathcal{K}$.

Un cono $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}$ se dirá que es una *cara* del cono \mathcal{K} si $u \in \mathcal{K}'$, $v \in \mathcal{K}$ y $u - v \in \mathcal{K}$ implican $v \in \mathcal{K}'$.

Una cara \mathcal{K}' se llamará *arista* si \mathcal{K}' es un rayo, es decir, está formado sólo por múltiplos positivos de un cierto $v \in \mathcal{K}$. A cualquier v como el anterior, se le llamará un *generador* de la arista.

Un cono \mathcal{K} se dirá *finitamente generado* si posee finitas aristas, y se llamará *simplicial*, si la cantidad de aristas que posee es igual a la dimensión del espacio vectorial generado por el cono. En estos casos, al número de arista del cono \mathcal{K} se le llamará *tamaño* del cono, y se anotará como $\text{tam}(\mathcal{K})$.

A continuación se enunciarán algunas propiedades de conos que pueden sernos útiles. Para mayor detalle el lector puede ir a ver a [Pul71, § 2].

Proposición 2.4. *Se tienen las siguientes propiedades en los conos.*

- (1) Sea $L : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ una transformación lineal, y \mathcal{K} un cono de \mathbb{R}^N . Entonces:
 - (a) $L(\mathcal{K})$ es un cono en \mathbb{R}^M .
 - (b) Si \mathcal{H} es una cara de \mathcal{K} , entonces $L(\mathcal{H})$ es una cara de $L(\mathcal{K})$.
 - (c) Si \mathcal{K} es finitamente generado, entonces $L(\mathcal{K})$ también es finitamente generado y $\text{tam}(L(\mathcal{K})) \leq \text{tam}(\mathcal{K})$.
- (2) Sea $(\mathcal{K}_n)_{n \geq 1}$ una sucesión encajonada de conos finitamente generados. Si $(\text{tam}(\mathcal{K}_n))_{n \geq 1}$ está uniformemente acotada por un cierto natural J , entonces $\mathcal{K} = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{K}_n$ es un cono finitamente generado y $\text{tam}(\mathcal{K}) \leq J$.

Algunos elementos geométricos

Dada una medida $\mu \in \mathcal{M}^*(B)$ y $n \geq 1$, se verá que $\mu(n)$ pertenece a un cierto cono en $\mathbb{R}^{|V_n|}$. Si además μ es de probabilidad, tiene que pertenecer a un cierto plano en el mismo espacio. Estos dos elementos se definirán a continuación, y se verá algunas de sus propiedades más directas.

Conos de medidas asociados a un diagrama. Consideremos un nivel $n \geq 1$. Notemos que, para cada $m > n$, $M(n, m)^T(\mathbb{R}_+^{|V|^m})$ es un cono finitamente generado (estamos identificando a la matriz con la transformación lineal que corresponde a ella), y además

$$M(n, m+1)^T(\mathbb{R}_+^{|V|^{m+1}}) \subseteq M(n, m)^T(\mathbb{R}_+^{|V|^m}).$$

Se define entonces el cono, asociado al nivel n , para cada $n \geq 1$

$$\mathcal{K}_n = \bigcap_{m=n+1}^{\infty} M(n, m)^T(\mathbb{R}_+^{|V|^m}).$$

Lema 2.5. *Sea $n \geq 1$, entonces se tiene la igualdad*

$$M(n+1)^T(\mathcal{K}_{n+1}) = \mathcal{K}_n.$$

Si además el diagrama B es de rango finito, y $\text{tam}(\mathcal{K}_{n+1}) = \text{tam}(\mathcal{K}_n)$, para un cierto $n \geq 1$ entonces la función lineal $M(n+1)^T : \mathcal{K}_{n+1} \rightarrow \mathcal{K}_n$ es una biyección.

Demostración. La inclusión $M(n+1)^T(\mathcal{K}_{n+1}) \subseteq \mathcal{K}_n$ es directa. Para demostrar la inclusión contraria, nos damos cuenta de que $M(n+1)^T$ actúa sobre el conjunto de los rayos del cono $M(n+1, n+2)^T(\mathbb{R}_+^{|V|^{n+2}})$, que es un conjunto compacto (en la topología de los rayos de $\mathbb{R}^{|V^{n+1}|}$, que los identifica con la respectiva esfera unitaria), pues el cono es finitamente generado. Sea \mathcal{H} un rayo en \mathcal{K}_n , entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\in M(n, k)^T(\mathbb{R}^{|V^k|}) \quad \text{para todo } k > n+1 \\ &= M(n+1)^T M(n+1, k)^T(\mathbb{R}^{|V^k|}) \quad \text{para todo } k > n+1. \end{aligned}$$

Podemos escoger rayos $\mathcal{R}_k \in M(n+1, k)^T(\mathbb{R}^{|V^k|})$, tales que $\mathcal{H} = M(n+1)^T \mathcal{R}_k$, $k > n+1$. Por la compacidad de cada $M(n+1, k)^T(\mathbb{R}^{|V^k|})$ y la continuidad de $M(n+1)^T$, existe $\mathcal{R} \in \bigcap_{k>n+1} M(n+1, k)^T(\mathbb{R}^{|V^k|}) = \mathcal{K}_{n+1}$, tal que $\mathcal{H} = M(n+1)^T \mathcal{R}$. Esto demuestra la inclusión contraria.

Para la segunda afirmación, notamos que podemos aplicar la Proposición 2.4 (2) para concluir que \mathcal{K}_n y \mathcal{K}_{n+1} son finitamente generado. Como los conjuntos de vértices respectivos a cada cono tienen igual cardinalidad, la matriz $M(n+1)^T$ debe generar una biyección entre los conjuntos de vértices, de lo cual se deduce la biyección entre los conos. \square

Plano de las medidas de probabilidad. Consideremos la sucesión de planos $(\Pi_n)_{n \geq 1}$ definida de la siguiente manera: Para cada $n \geq 1$,

$$\Pi_n = \{v \in \mathbb{R}^{|V^n|} \mid \langle H(n), v \rangle = 1\}.$$

Notemos que si tenemos una sucesión de vectores $(p(n))_{n \geq 1}$ que satisface la ecuación (2.1.1), y $p(k) \in \Pi_k$, para algún $k \geq 1$, entonces $p(n) \in \Pi_n$, para todo $n > 1$. En este caso, la medida que se define a partir de $(p(n))_{n \geq 1}$, es de probabilidad (en efecto, para la primera afirmación basta darse cuenta de que $\langle H(n+1), p(n+1) \rangle = \langle M(n+1)H(n), p(n+1) \rangle$; y para la última que $\{[\alpha] \mid \alpha \in E_{0,n}\}$ es una partición de X).

El siguiente resultado muestra, de manera más precisa, cual es la forma del conjunto $\mathcal{M}(B)$.

Proposición 2.6. *Sea B un diagrama de Bratteli de rango finito. Entonces existe $\ell \geq 1$, tal que $\mathcal{M}(B)$ es afín-homeomorfo a $\mathcal{K}_\ell \cap \Pi_\ell$, es decir, existe una función lineal (para combinaciones convexas) biyectiva $\varphi : \mathcal{M}(B) \rightarrow \mathcal{K}_\ell \cap \Pi_\ell$.*

Demostración. Sea d tal que $|V_n| \leq d$, para todo $n \geq 1$.

Al igual que en la demostración del Lema 2.5, la condición de rango finito implica que cada \mathcal{K}_n es finitamente generado. La igualdad

$$M(n, m)^T \mathcal{K}_m = \mathcal{K}_n$$

para todo $m > n \geq 1$, implica, por Proposición 2.4 (1c), que $\text{tam}(\mathcal{K}_n) \leq \text{tam}(\mathcal{K}_m) \leq d$, es decir, la sucesión de tamaños de los conos es creciente y acotado, y por lo tanto debe estabilizarse. Sea N tal que, para todo $m > n > N$, $\text{tam}(\mathcal{K}_n) = \text{tam}(\mathcal{K}_m)$. Elijamos $\ell > N$.

Sea $\mu \in \mathcal{M}(T)$, definamos $\varphi(\mu) = \mu(\ell)$. Para todo $k \geq \ell$,

$$\begin{aligned} \mu(\ell) &= M(\ell, k)\mu(k) \\ &\in M(\ell, k)(\mathbb{R}_+^{|V_k|}), \end{aligned}$$

y por lo tanto $\mu(\ell) \in \mathcal{K}_\ell$. Como μ es de probabilidad, y $\{\alpha \mid \alpha \in E_{0,\ell}\}$ es una partición de X , se tiene directamente que $\varphi(\mu) \in \Pi_\ell$. Esto prueba de que φ está bien definida en $\mathcal{M}(B)$.

La igualdad $\varphi(a\mu + b\nu) = a\varphi(\mu) + b\varphi(\nu)$, para $a + b = 1$, se tiene directamente.

Notamos ahora de que, si tomamos un vector $p(n) \in \mathcal{K}_n$, para $n \geq \ell$, entonces la biyectividad por medio de la matriz $M(n+1)$ (ver Lema 2.5), entre \mathcal{K}_n y \mathcal{K}_{n+1} , permite encontrar un único vector $p(n+1) \in \mathcal{K}_{n+1}$ tal que

$$p(n) = M(n+1)p(n+1),$$

y por lo tanto, escoger un vector $p(\ell) \in \mathcal{K}_\ell$, permite generar una única sucesión $(p(n))_{n \geq 1}$ que cumple con la ecuación (2.1.1). Por lo tanto φ es inyectiva. La sobreyectividad se obtiene al recordar que cada sucesión que cumpla con (2.1.1) define una medida invariante para X , que este caso es de probabilidad pues elegimos $p(\ell) \in \mathcal{K}_\ell \cap \Pi_\ell$. \square

Observación 2.1. Notar que, a partir de la demostración, se puede deducir que $\mathcal{M}(B)$ es afín-homeomorfo a $\mathcal{K}_j \cap \Pi_j$, para todo $j \geq \ell$.

Corolario 2.7. *Consideremos un diagrama B propiamente ordenado, de rango finito, que podemos asumir de rango constante d . Entonces el sistema (X_B, T_B) tiene a lo más d medidas ergódicas.*

Demostración. El cono \mathcal{K}_ℓ es finitamente generado de, a lo más, d vértices por la Proposición 2.4 (2). El conjunto $\mathcal{K}_\ell \cap \Pi_\ell$ es convexo, y tiene a lo más d vértices, los correspondientes a la intersección de cada vértice con el plano Π_ℓ , que siempre corta al cono transversalmente. Aplicando el Teorema 1.3, en el cual se identifica a las medidas ergódicas con los puntos extremos de $\mathcal{M}(T_B)$, se tiene el resultado. \square

Corolario 2.8. *Sea $\mu \in \mathcal{M}^*(B)$, para un diagrama de rango finito B . Entonces existe $\ell \geq 1$ de modo que μ queda únicamente determinada por sus valores en $\{[\alpha] \mid \alpha \in E_{0,\ell}\}$.*

Demostración. En la demostración de la Proposición 2.6, cuando se prueba que $\varphi : \mathcal{M}(B) \rightarrow \mathcal{K}_\ell \cap \Pi_\ell$ es inyectiva, se usa el hecho de que para cada vector $p(\ell) \in \mathcal{K}_\ell$, se puede construir una única sucesión $(p(n))_{n \geq 1}$ que satisface (2.1.1), y por lo tanto una única medida invariante de B . \square

2.3. Subdiagramas, extensiones y restricciones

Siguiendo [BKMS13, § 3], comenzaremos con un ingrediente clave, que nos da un punto de vista muy interesante sobre la estructura de cada elemento de $\mathcal{M}^*(B)$, para un cierto diagrama B . Este ingrediente es el proceso de extensión de medidas de subdiagramas.

Definición 2.9. Sea B un diagrama de Bratteli. Un subdiagrama D de B , es un diagrama de Bratteli donde los vértices de cada nivel de D , son subconjuntos de los vértices de los respectivos niveles de B ; y las aristas de D son aquellas de B que conectan los vértices de dichos subconjuntos.

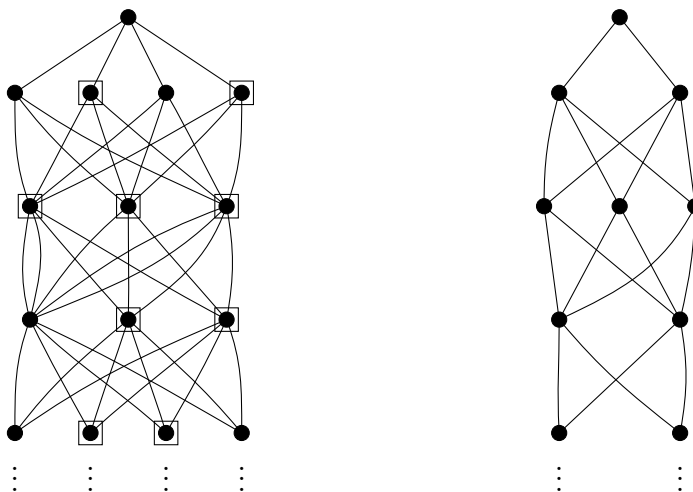


Figura 2.1: Ejemplo de un subdiagrama. El diagrama D (el de la derecha) es subdiagrama del diagrama B (izquierda). El subconjunto de vértices considerado está resaltado con cuadrados. Notar que el subdiagrama de alguna contracción, no necesariamente es igual a la contracción correspondiente del subdiagrama.

Restricción de la medida a un subdiagrama

El conjunto X_D se puede asociar de manera natural a un subconjunto de X_B , que llamaremos $X_B^{(0)}$. Concretamente, si para cada $n \geq 0$, $W_n \subseteq V_n$ es el subconjunto de vértices de nivel n , que se consideró para construir D , entonces

$$X_B^{(0)} = \{x \in X_B \mid f(\pi_{0,n}(x)) \in W_n, \quad \text{para todo } n \geq 1\}.$$

Se puede ver que $X_B^{(0)} \in \mathfrak{B}(X_B)$, los borelianos de X_B , y que $\mathfrak{B}(X_B^{(0)}) \subseteq \mathfrak{B}(X_B)$. Supongamos que tenemos una medida invariante μ en X_B . Como $X_B^{(0)}$ es medible en X_B , existe una medida $\hat{\mu}$ tal que $\hat{\mu}(F) = \mu(F)$, para todo F medible (boreliano) en $X_B^{(0)}$. Esta medida $\hat{\mu}$ en $X_B^{(0)}$, conocida como *restricción* de μ a $X_B^{(0)}$, se puede describir concretamente para diagramas de rango finito debido al Corolario 2.8. En efecto, escogemos un nivel ℓ en el subdiagrama, de manera de que cualquier medida se distinga en ese nivel. Luego definimos $\hat{\mu}_k(\ell) := \mu([\alpha_k] \cap X_B^{(0)})$, donde α_k es un camino en $E_{0,\ell} \cap X_B^{(0)}$, que termina en el vértice $k \in W_\ell$. El vector $\hat{\mu}(\ell)$ define una única medida invariante $\hat{\mu}$ en $X_B^{(0)}$, que es precisamente la restricción.

Extensión de la medida desde un subdiagrama

Supongamos ahora que, al contrario, tenemos una medida invariante μ definida en el subdiagrama D de B , ambos diagramas de rango finito. Se procederá a describir, en base a la notación y resultados anteriores, el proceso de *extensión* de la medida μ , a una medida en B . Para esto será de utilidad introducir algunos elementos adicionales, que se construyen a partir de B y del subdiagrama D .

Sucesión creciente de conjuntos. Sea $n \geq 1$, consideremos el subdiagrama D_n de B , construido de modo que el conjunto de vértices de nivel k , con $k < n$, es igual a V_k , mientras que para $k \geq n$, es igual a W_k (subconjunto de vértices de nivel k , elegido para construir D). En este caso X_{D_n} se puede identificar naturalmente con un subconjunto de X_B , que llamaremos $X_B^{(n)}$. De modo concreto se tiene

$$X_B^{(n)} = \{x \in X_B \mid f(\pi_{0,k}(x)) \in W_k \quad \text{para todo } k \geq n\}.$$

Sucesión de extensiones de μ . Consideremos ℓ como en el Corolario 2.8, con respecto al subdiagrama D . Consideremos ahora un cierto $N \geq \max\{\ell, n\}$, y definimos el vector $\mu^{(n)}(N)$, de modo que $\mu_k^{(n)}(N) = \mu([\alpha_k])$, donde α_k es un camino en $X_B^{(0)}$ (y por lo tanto, además en $X_B^{(n)}$) desde el nivel 0 hasta el k -ésimo vértice de nivel N (se puede ver además que el conjunto $[\alpha_k]$ es el mismo, ya sea en $X_B^{(0)}$ como en $X_B^{(n)}$). Es directo que este entero N cumple la función de ℓ del Corolario 2.8, pero ahora con respecto al diagrama X_{D_n} , y por lo tanto define una única medida invariante, tanto en este diagrama como en $X_B^{(n)}$. A esta medida la denotaremos por $\mu^{(n)}$ la cual, por su definición, es una extensión de μ .

Lema 2.10. *Sea $m > n \geq 0$.*

2.3. Subdiagramas, extensiones y restricciones

- (1) La medida $\mu^{(n)}$ en $X_B^{(n)}$, es una restricción de la medida $\mu^{(m)}$ en $X_B^{(m)}$.
- (2) Si F es medible en $X_B^{(m)}$, entonces $F \cap X_B^{(n)}$ es medible en $X_B^{(n)}$, y $\mu^{(n)}(F \cap X_B^{(n)}) \leq \mu^{(m)}(F)$.
- (3) Si F es medible en X_B , entonces $F \cap X_B^{(n)}$ es medible en $X_B^{(n)}$.

Demostración. (1) Primero se puede notar que $X_B^{(n)}$ es medible en $X_B^{(m)}$, y que $\mathfrak{B}(X_B^{(n)}) \subseteq \mathfrak{B}(X_B^{(m)})$. Sea μ^* la restricción de $\mu^{(m)}$ a $X_B^{(n)}$, y por lo tanto cumple la relación $\mu^*(F) = \mu^{(m)}(F)$, para todo F medible en $X_B^{(n)}$. Consideramos $N \geq \max\{\ell, m\}$, donde ℓ es como en el Corolario 2.8 con respecto al diagrama de rango finito D , y la medida μ . Consideremos el k -ésimo vértice de nivel N en D_n , y sea $\alpha_k \in E_{0,N}$, un camino en $X_B^{(n)}$ que termina en un dicho vértice. Tenemos que

$$\begin{aligned} \mu^*([\alpha_k]) &= \mu^{(m)}([\alpha_k] \cap X_B^{(n)}) \\ &= \mu^{(m)}([\alpha_k]) \\ &= \mu([\alpha_k]), \end{aligned}$$

y por lo tanto μ^* es una medida invariante, y que además satisface la igualdad de vectores $\mu^*(N) = \mu^{(n)}(N)$, por definición de $\mu^{(n)}$. Como $N > \max\{\ell, n\}$, se tiene $\mu^{(n)} = \mu^*$, que es lo primero que se quería probar.

(2) Con un proceso de verificación rutinaria se puede ver que

$$\left\{ F \cap X_B^{(n)} \mid F \text{ es medible en } X_B^{(m)} \right\} = \left\{ F \mid F \text{ es medible en } X_B^{(n)} \right\}.$$

Ahora, consideremos $k < m$, y un vértice i , de nivel k , que sea común a los diagramas D_n y D_m . Sea $\alpha_i \in E_{0,k}$ (con respecto a ambos diagramas), que termina en el vértice i . Sea N como antes, y consideremos el conjunto

$$\Lambda = \{ \alpha \in E_{k,N} \mid i(\alpha) = i \wedge f(\alpha) \in V_N \}.$$

Notar que Λ depende de en que diagrama se le considere, de hecho su cardinalidad puede ser mayor al considerarlo en D_m , que al hacerlo en D_n . De interpretar la igualdad

$$[\alpha_i] = \bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} [\alpha_i \circ \alpha]$$

en los diagramas D_n y D_m , se deduce que $\mu^{(n)}([\alpha_i]) \leq \mu^{(m)}([\alpha_i])$, y por lo tanto se tiene la igualdad que se quiere probar para $F = [\alpha]$, donde α un cierto camino finito en $E_{0,k}$, con $k < m$ (notar que, en el caso $k \geq m$, la desigualdad se transforma en igualdad). El caso para F arbitrario, se deduce desde aquí.

(3) Al igual que más arriba, es rutinario verificar que

$$\left\{ F \cap X_B^{(n)} \mid F \text{ es medible en } X_B \right\} = \left\{ F \mid F \text{ es medible en } X_B^{(n)} \right\}.$$

□

2.3. Subdiagramas, extensiones y restricciones

Extensión final. Definamos el conjunto $X_B^\infty = \bigcup_{k \geq 0} X_B^{(k)}$. Los conjuntos medibles en X_B^∞ , son aquellos que están en la σ -álgebra generada por la unión de todas las respectivas a cada $X_B^{(k)}$, $k \geq 0$. Se puede verificar que X_B^∞ es medible en X_B . Además se puede verificar que, si F es un conjunto medible de X_B , entonces $F \cap X_B^\infty$ es medible en X_B^∞ .

Sea F medible en X_B^∞ , la sucesión $(\mu^{(n)}(F \cap X_B^{(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ está bien definida y es creciente, de acuerdo a la afirmación anterior y al Lema 2.10(2). Definimos entonces $\hat{\mu}(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^{(n)}(F \cap X_B^{(n)})$, para cada F medible en X_B^∞ . Se puede verificar que $\hat{\mu}$ es una medida en X_B^∞ , incluso, abusando de la notación, se puede decir que $\hat{\mu}$ es una medida en X_B (definiéndola como 0 fuera de X_B^∞ , de la manera tradicional). A la medida $\hat{\mu}$ la llamaremos la *extensión* de μ (la medida del subdiagrama D) al diagrama B .

Lema 2.11. *La medida $\hat{\mu}$ es una medida invariante en X_B , y además para cada $n \geq 0$, $\mu^{(n)}$ es la restricción de $\hat{\mu}$ a $X_B^{(n)}$.*

Demostración. La invariancia se sigue directamente de la definición de μ .

Para lo segundo consideremos $n \geq 0$, y ℓ como en el Corolario 2.8, aplicado a D_n . Tomamos el camino en D_n $\alpha_k \in E_{0,\ell}$, el correspondiente en $X_B^{(n)}$, que termina en el k -ésimo vértice de nivel ℓ . Entonces se tiene

$$\begin{aligned} \hat{\mu}([\alpha_k] \cap X_B^{(n)}) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \mu^{(i)}([\alpha_k] \cap X_B^{(n)} \cap X_B^{(i)}) \\ &= \mu^{(n)}([\alpha_k] \cap X_B^{(n)}) \\ &= \mu_k^{(n)}(\ell) \end{aligned}$$

como una aplicación del Lema 2.10(1). Esta es la igualdad que debe cumplir la restricción, y por lo tanto es $\mu^{(n)}$. \square

Entonces cualquier medida invariante μ en el subdiagrama D de B , de rango finito, puede ser extendida a una medida invariante $\hat{\mu}$ en X_B , cuyo soporte se encuentra en X_B^∞ . Este conjunto es el de los caminos de X_B que eventualmente pasan sólo por vértices de D . En [BKMS13, § 3] se prueba que toda medida invariante de probabilidad, se obtiene como una extensión de este tipo. Específicamente se tiene el siguiente teorema:

Teorema 2.12 ([BKMS13] Teorema 3.3(4)). *Sea B un diagrama de Bratteli, propiamente ordenado, de rango finito, que podemos suponer es de rango uniforme d , y (X, T) el sistema de Bratteli-Vershik asociado.*

Entonces se puede contraer el diagrama B de modo que, para toda medida ergódica de probabilidad, μ , del sistema, existe un conjunto de vértices $I_\mu \subseteq \{1, \dots, d\}$ tal que el soporte de μ , es el subconjunto de X de todos los caminos que eventualmente sólo pasan por vértices de I_μ . Además

- (1) *Para medidas ergódicas $\mu \neq \nu$, se tiene $I_\mu \cap I_\nu = \emptyset$.*
- (2) *Sea μ una medida ergódica de probabilidad del sistema. Entonces existe una constante $L > 0$ tal que*

$$\mu \{ \tau_n = k \} \geq L,$$

para todo nivel n , y para todo $k \in I_\mu$.

2.4. Diagramas depurados

(3) Sea μ una medida ergódica de probabilidad del sistema. Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu \{\tau_n = k\} < \infty,$$

para todo $k \notin I_\mu$.

(4) El subdiagrama D , cuyo conjunto de vértices de nivel n es siempre I_μ , para $n \geq 1$, posee sólo una medida invariante (salvo ponderaciones), que es precisamente la restricción de μ a X_D .

La siguiente proposición muestra que es lo que ocurre en una situación inversa, en la que un subdiagrama con todos sus conjuntos de vértices de nivel iguales, tiene definida una medida invariante, y ésta se extiende a una medida invariante de probabilidad en el diagrama.

Proposición 2.13 ([BKMS13] Teorema 3.3(5)). *Sea B un diagrama de Bratteli de rango finito uniforme d , y D un subdiagrama con todos sus conjuntos de vértices de nivel iguales a $W \subseteq \{1, \dots, d\}$. Sea μ una medida invariante en D , que se extiende a una medida invariante de probabilidad ν en B . Entonces, para cada $k \notin W$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu \{\tau_n = k\} = 0.$$

De lo anterior se deriva la siguiente condición de única ergodicidad:

Corolario 2.14 ([BKMS13] Corolario 3.6). *Sea B un diagrama de Bratteli, propiamente ordenado, de rango finito uniforme d , y sea μ una medida ergódica¹ de probabilidad de B . Si existe $L > 0$, tal que para cada $k \in \{1, \dots, d\}$*

$$\liminf_n \mu \{\tau_n = k\} > L,$$

entonces el sistema de Bratteli-Vershik (X_B, T_B) es únicamente ergódico.

Los sistemas linealmente recurrentes cumplen con esta propiedad (ver [CDHM03, Lemma 4]), y por lo tanto son únicamente ergódicos. Pero hay sistemas únicamente ergódicos que no cumplen con esta propiedad, como se muestra en un ejemplo de la próxima sección.

2.4. Diagramas depurados

Vamos a introducir una definición que puede ser útil más adelante

¹En [BKMS13] aparece enunciado para una medida invariante solamente, pero con esas hipótesis no se obtiene el resultado. Esto se verá más adelante, específicamente en el segundo ejemplo de la sección 4.2.2 (Observación 4.4), y de la misma manera, en el último ejemplo de la sección 4.3.4

Definición 2.15. Si a un diagrama satisface las condiciones del Teorema 2.12, se llamará *depurado*.

Observación 2.2. La noción de diagrama depurado es similar a la introducida en [BDM10, Sec. 5] bajo el nombre de *clean*. Notar que a un diagrama depurado se le exige lo mismo que a un diagrama clean, pero abarcando a todas las medidas. En caso de necesitarlo, nos referiremos a los diagrama clean bajo el nombre de *depurado con respecto a* (cierta medida).

Observación 2.3. A contraer un diagrama depurado, éste sigue siendo depurado.

Ejemplo diagrama depurado (el Corolario 2.14 no es reversible) Consideremos un diagrama de rango finito uniforme 3, inicialmente nivelado, y talque la sucesión de funciones de orden $(\theta_n)_{n \geq 2}$ está definida de la siguiente manera:

$$\theta_{n+1}(t) = \begin{cases} 1(2)^{7^n}(3)^{7^{n+2}}1 & \text{si } t = 1 \\ 1(2)^{7^n}(3)^{7^{n-1}}11 & \text{si } t = 2 \\ 1(2)^{7^n}(3)^{7^{n+5}}1 & \text{si } t = 3 \end{cases}$$

Por 1.17, esta información define un único diagrama de Bratteli ordenado, que llamaremos B .

Lema 2.16. *En el diagrama B , se cumplen las siguientes desigualdades, para $n \geq 2$.*

$$h_2(n) < h_1(n) < h_3(n).$$

$$h_3(n) < 7^3 h_1(n) < 7^6 h_2(n).$$

Demostración. Para el diagrama B se tiene

$$H(n+1) = \begin{bmatrix} 2 & 7^n & 7^{n+2} \\ 3 & 7^n & 7^{n-2} \\ 2 & 7^n & 7^{n+5} \end{bmatrix} H(n).$$

La segunda desigualdad se sigue directamente desde aquí, mientras que la primera después de un proceso rutinario y sencillo de inducción. \square

Proposición 2.17. *El diagrama B es depurado y posee una única medida invariante de probabilidad. Se puede definir un sistema (X, T) a partir del diagrama de Bratteli ordenado B , que es minimal y únicamente ergódico. Si denotamos por μ la única medida ergódica del sistema, entonces $I_\mu = \{2, 3\}$.*

Demostración. El diagrama B tiene sólo un camino maximal, y sólo uno minimal. Por lo tanto es posible definir la transformación de Vershik T . Además el sistema (X, T) es minimal.

2.4. Diagramas depurados

Consideremos una medida invariante μ para el sistema, un entero $n \geq 2$ y analicemos $\mu \{\tau_n = 1\}$. Para esto notemos que del Lema 2.16 se desprende

$$\begin{aligned} h_1(n+1) &> 7^{n+2}h_3(n) > 7^{n-1}h_1(n) \\ h_2(n+1) &> 7^{n-1}h_3(n) > 7^{n-1}h_1(n) \\ h_3(n+1) &> 7^{n+5}h_3(n) > 7^{n-1}h_1(n), \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mu \{\tau_n = 1\} &= h_1(n) \left(\frac{2\mu \{\tau_{n+1} = 1\}}{h_1(n+1)} + \frac{3\mu \{\tau_{n+1} = 2\}}{h_2(n+1)} + \frac{2\mu \{\tau_{n+1} = 3\}}{h_3(n+1)} \right) \\ &< \frac{3}{7^{n-1}}. \end{aligned}$$

Se puede concluir entonces que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu \{\tau_n = 1\} < \infty.$$

Analizamos ahora $\mu \{\tau_n = 2\}$, para $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} \mu \{\tau_n = 2\} &= 7^n h_2(n) \left(\frac{\mu \{\tau_{n+1} = 1\}}{h_1(n+1)} + \frac{\mu \{\tau_{n+1} = 2\}}{h_2(n+1)} + \frac{\mu \{\tau_{n+1} = 3\}}{h_3(n+1)} \right) \\ &> \frac{7^n h_2(n)}{h_3(n+1)} = \frac{7^n h_2(n)}{2h_1(n) + 7^n h_2(n) + 7^{n+5} h_3(n)} \\ &> 1/7^{11}, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad se aplicó la segunda expresión del Lema 2.16.

Haciendo un análisis similar se puede ver que $\mu \{\tau_n = 3\} > 1/7^7$.

Estos cálculos implican que el diagrama B es depurado y, por Teorema 2.12, hay una única medida invariante μ , con $I_\mu = \{2, 3\}$ \square

Lema 2.18. *Sea (X, T) de Bratteli-Vershik minimal un sistema dado por un diagrama depurado de rango finito uniforme d , y μ una medida ergódica del sistema. Entonces,*

(1) Para $t_1 \notin I_\mu$ y $t_2 \in I_\mu$

$$\frac{h_{t_1}(n)}{h_{t_2}(m)} M_{t_2 t_1}(n, m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

uniformemente para $m > n$.

(2) Para cada entero $n \geq 1$, y para $t_1, t_2 \in I_\mu$

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{h_{t_1}(n)}{h_{t_2}(m)} M_{t_2 t_1}(n, m) \geq \mu \{\tau_n = t_1\}.$$

2.4. Diagramas depurados

(3) Para $n \geq 1$ y $t_2 \in I_\mu$

$$\sum_{t \in I_\mu} \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{h_t(n)}{h_{t_2}(m)} M_{t_2 t}(n, m) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

(4) Para $t_1, t_2 \in I_\mu$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{h_{t_1}(n)}{h_{t_2}(m)} M_{t_2 t_1}(n, m) - \mu \{ \tau_n = t_1 \} \right) = 0$$

Demostración. Sea L la constante correspondiente a μ que aparece en el Teorema 2.12(2), pues estamos considerando un diagrama depurado. Para la parte (1) es suficiente notar que

$$\begin{aligned} \mu \{ \tau_n = t_1 \} &\geq \frac{h_{t_1}(n)}{h_{t_2}(m)} M_{t_2 t_1}(n, m) \mu \{ \tau_m = t_2 \} \\ &\geq L \frac{h_{t_1}(n)}{h_{t_2}(m)} M_{t_2 t_1}(n, m). \end{aligned}$$

Para la parte (2) se hará uso del Teorema ergódico (ver 1.1(E3)). Sean $t_1, t_2 \in I_\mu$ y $n \geq 1$. Consideremos dos números reales K y $\varepsilon < L^2/K$. Usando el teorema ergódico mencionado y el teorema de Egoroff, podemos encontrar un conjunto A , con $\mu(A) > 1 - \varepsilon$ y un natural N_0 , tal que para todo $x \in A$ y $N \geq N_0$

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} 1_{\{ \tau_n = t_1 \}}(T^k x) - \mu \{ \tau_n = t_1 \} \right| < \varepsilon. \quad (2.4.1)$$

Ahora, tomemos $m > n$ tal que $h_{t_2}(m) > N_0$. Mirando la relación

$$\begin{aligned} &\mu \left(\bigcup_{j=0}^{\lfloor \varepsilon h_{t_2}(m)/L \rfloor} T^{-h_{t_2}-j+1} B_{t_2}(m) \right) \\ &= \left(\left\lfloor \frac{\varepsilon h_{t_2}(m)}{L} \right\rfloor + 1 \right) \mu(B_{t_2}(m)) > \frac{\varepsilon}{L} \mu \{ \tau_m = t_2 \} \geq \varepsilon, \end{aligned}$$

podemos ver que existe un $x_0 \in A$, y un $0 \leq j \leq \left\lfloor \frac{\varepsilon h_{t_2}(m)}{L} \right\rfloor$ tal que

$$x_0 \in T^{-h_{t_2}(m)-j+1}.$$

Notemos primero que

$$\frac{j}{h_{t_2}(m) + j} \leq \frac{\varepsilon}{L} < \frac{L}{K},$$

y si definimos $y_0 = T^j(x_0) \in T^{-h_{t_2}(m)+1} B_{t_2}(m)$, se tiene

$$\sum_{k=0}^{h_{t_2}(m)-1} 1_{\{ \tau_n = t_1 \}}(T^k y_0) = h_{t_1} M_{t_2 t_1}(n, m).$$

2.4. Diagramas depurados

Tenemos finalmente

$$\begin{aligned}
\mu \{ \tau_n = t_1 \} - \frac{L}{K} &< \mu \{ \tau_n = t_1 \} - \varepsilon \\
&< \frac{1}{h_{t_2} + j} \sum_{k=0}^{h_{t_2} + j - 1} 1_{\{ \tau_n = t_1 \}} (T^k x_0) \\
&= \frac{1}{h_{t_2} + j} \sum_{k=0}^{j-1} 1_{\{ \tau_n = t_1 \}} (T^k x_0) + \frac{1}{h_{t_2} + j} \sum_{k=j}^{h_{t_2} + j - 1} 1_{\{ \tau_n = t_1 \}} (T^k x_0) \\
&\leq \frac{j}{h_{t_2} + j} + \frac{1}{h_{t_2} + j} \sum_{k=0}^{h_{t_2} - 1} 1_{\{ \tau_n = t_1 \}} (T^k y_0) \\
&< \frac{L}{K} + \frac{h_{t_1}(n) M_{t_2 t_1}(n, m)}{h_{t_2} + j} \\
&\leq \frac{L}{K} + \frac{h_{t_1}(n) M_{t_2 t_1}(n, m)}{h_{t_2}}.
\end{aligned}$$

Entonces (2) se sigue ahora de la arbitrariedad del real K (haciendo $K \rightarrow \infty$).

Para las partes (3) y (4), se utilizará que para cada $n \geq 1$, se tiene la desigualdad

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^d \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{h_t(n)}{h_{t_0}(m)} M_{t_0 t}(n, m) \\
\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^d \frac{h_t(n)}{h_{t_0}(m)} M_{t_0 t}(n, m) = 1.
\end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Usando el hecho de que el diagrama es depurado y la parte (2), podemos encontrar un natural N tal que, para todo $n > N$

$$\begin{aligned}
1 - \varepsilon &< \sum_{t \in I_\mu} \{ \tau_n = t \} \\
&\leq \sum_{t \in I_\mu} \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{h_t(n)}{h_{t_2}} M_{t_2 t}(n, m) \leq 1.
\end{aligned}$$

Si ahora, por cualquier motivo, existiera $n > N$ y $t_1 \in I_\mu$ tal que

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{h_{t_1}(n)}{h_{t_2}(m)} M_{t_2 t_1}(n, m) - \mu \{ \tau_n = t_1 \} \geq \varepsilon,$$

concluiríamos la desigualdad contradictoria

$$\sum_{t \in I_\mu} \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{h_t(n)}{h_{t_2}(m)} M_{t_2 t}(n, m) - \sum_{t \in I_\mu} \{ \tau_n = t \} \geq \varepsilon.$$

Esto demuestra (3) y (4). □

2.4. Diagramas depurados

Observación 2.4. Se puede notar, a partir de la parte (2) del Lema anterior, que a un diagrama depurado se le puede aplicar una contracción adicional de modo que para todo $t_1, t_2 \in I_\mu$ y $m > n$.

$$\frac{h_{t_1}(n)}{h_{t_2}(m)} M_{t_2 t_1}(n, m) > \eta > 0,$$

para alguna constante $\eta < L$, la constante que aparece en el Teorema 2.12(2). A este tipo de diagramas se les llamará *homogéneamente depurados*. Se puede ver, así como en el comentario posterior al Corolario 2.14, que un diagrama linealmente recurrente cumple esta propiedad.

Capítulo 3

Valores propios en sistemas de Bratteli-Vershik

En este capítulo se enunciará una condición necesaria y suficiente sobre un valor $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$, para que éste sea valor propio de un sistema de Bratteli-Vershik de rango finito.

Para esto primero se hará un pequeño resumen de las definiciones y propiedades básicas asociadas a los valores propios en un sistema dinámico, siguiendo por una presentación de la historia de resultados obtenidos en particular para sistemas de Bratteli-Vershik. En la sección 3.3 se enuncia la nueva condición necesaria y suficiente, y se demuestra la necesidad y suficiencia por separado en diferentes subsecciones.

3.1. Valores propios en sistemas dinámicos

Comenzaremos con algunas definiciones básicas, en un contexto general, de manera de hacer la exposición un poco más autocontenida. El lector puede ver también estos temas en cualquier libro introductorio a la teoría ergódica y los sistemas dinámicos, por ejemplo, en [Wal82].

Definición 3.1. Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida, y $T : X \rightarrow X$ una transformación que preserva la medida. Definimos el operador lineal inducido por T , $U_T : L^2(X, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ mediante la relación $U_T(f)(x) = f(Tx)$, para $x \in X$.

Hay que hacer notar, que el operador se puede definir para toda f medible en (X, \mathcal{F}, μ) . Además, para cada f integrable en (X, \mathcal{F}, μ) se tiene la igualdad

$$\int U_T(f) \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Entre otras propiedades, el operador U_T es positivo, preserva funciones constantes, es una isometría en los espacios de Banach $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$, y es un operador unitario en $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$.

3.1. Valores propios en sistemas dinámicos

Definición 3.2. Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida, y $T : X \rightarrow X$ una transformación que preserva la medida. Un número complejo λ , se dice que es un valor propio de T , si es un valor propio del operador inducido $U_T : L^2(X, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$. Una función $f \in L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ tal que $U_T(f) = \lambda f$, se dirá que es una función propia de T asociada al valor propio λ .

Los valores propios los dividiremos en dos categorías: *valores propios continuos* y *no-continuos*.

Definición 3.3. Un valor propio de una transformación T en un espacio de medida (X, \mathcal{F}, μ) se dirá continuo, si alguna función propia asociada $f \in L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ es continua. En caso contrario se dirá que el valor propio es no-continuo.

Observación 3.1. Notar que si X es un espacio métrico compacto (como es el caso del espacio fase asociado a un diagrama de Bratteli propiamente ordenado), entonces una función continua $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, siempre pertenece a $L^2(X, \mathfrak{B}, \mu)$ para cualquier medida μ , donde \mathfrak{B} es la σ -álgebra de Borel. Por esto mismo, los valores propios continuos se pueden estudiar directamente sobre un sistema topológico, sin hacer ninguna mención a la medida.

Las propiedades principales de los valores y funciones propias de transformaciones ergódicas, se muestran en la siguiente proposición:

Proposición 3.4. Si T es una transformación ergódica en el espacio de medida (X, \mathcal{F}, μ) , entonces se tiene:

- (VP1) Si λ es valor propio de T , y f es la función propia asociada, entonces $|\lambda| = 1$ y $|f|$ es constante μ -c.s.
- (VP2) Funciones propias asociadas a valores propios distintos son ortogonales.
- (VP3) Si f y g son funciones propias asociadas a un mismo λ , entonces f es múltiplo de g .
- (VP4) Los valores propios de T forman un subgrupo de $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Observación 3.2. En el caso de una transformación ergódica, si alguno de sus valores propios, digamos λ , está asociado a una función propia continua, entonces todas las funciones propias asociadas a λ son continuas. En este caso, podemos decir también que un valor propio es continuo cuando todas las funciones propias asociadas a dicho valor son continuas.

Algunas aplicaciones

Hay resultados clásicos que muestran la importancia que han tenido los valores propios, entre ellos cabe mencionar la caracterización de las mezclas débiles. Una transformación T mezcla débilmente (o es mezcla débil) si y sólo si es ergódica, y tiene a $\lambda = 1$ como su único valor propio (o equivalentemente, $\lambda = 1$ es su único valor propio, y todas sus funciones propias son constantes).

Otro resultado que podría mencionar, para acentuar la importancia del estudio de los valores propios de una transformación T en un espacio de medida (X, \mathcal{F}, μ) , el teorema de Halmos y von Neumann sobre transformaciones de espectro discreto. Una transformación T es de este tipo, si $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ posee una base ortonormal formada sólo por funciones propias de T . Dicho teorema afirma que las transformaciones conjugadas (en el sentido de que inducen aplicaciones isomorfas sobre sus álgebras de medidas respectivas) son precisamente aquellas que tienen los mismos valores propios.

3.2. Resultados históricos relativos a valores propios continuos y no-continuos

A modo de introducción presentaremos el siguiente teorema, enunciado por B. Host alrededor de 1985 (ver [Hos86] y [Que10, § 6.2]), sobre valores propios en sistemas sustitutivos. Para una descripción de los sistemas sustitutivos, me permito referir al lector a [Que10, Cap. 5].

Teorema 3.5 (Teorema de Host). *Sea ζ una sustitución admisible sobre un alfabeto A y (X, T, μ) el sistema dinámico definido por ella. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1) *El complejo λ es un valor propio de (X, T, μ) .*
- (2) *El complejo λ es un valor propio continuo de (X, T, μ) .*
- (3) *Existe $p > 1$ tal que el límite*

$$h(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^{|\zeta^{pn}(a)|},$$

existe para todo $a \in A$, y h es un coborde de ζ .

Este teorema hace referencia a la clasificación, en continuos y no-continuos, de los valores propios de este sistema. Además se tiene una condición de convergencia sobre el número complejo λ , que lo caracteriza como valor propio.

Los sistemas sustitutivos, se pueden ver como un caso particular de sistemas de Bratteli-Varshik de rango finito, específicamente como sistemas de Bratteli-Vershik estacionarios (ver [For97] y [DHS99]). Recordar que los sistemas estacionarios son aquellos donde la sucesión de matrices de incidencia $(M(n))_{n \geq 1}$, es constante para $n \geq 2$. Por lo tanto, es natural preguntarse si una condición como la expresada en el Teorema 3.5, se puede generalizar a otros sistemas de Bratteli-Vershik. Como se mostrará más adelante, en [CDHM03] y [BDM05], se obtuvo una condición similar para sistemas linealmente recurrentes (sistemas con diagrama linealmente recurrente, que recordamos tiene número finito de matrices positivas como matrices de incidencia).

A continuación se hará un resumen de los resultados, de este estilo, que se han obtenido para sistemas de Bratteli-Vershik, incluido el caso linealmente recurrente.

3.2.1. Resultados generales

Teorema 3.6 ([BDM05]). *Sea (X, T, μ) un sistema de Bratteli-Vershik ergódico y minimal, y $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.*

(1) *λ es un valor propio de (X, T, μ) , si y sólo si existe una sucesión de funciones*

$$(\rho_n : \{1, 2, \dots, |V_n|\} \rightarrow \mathbb{R})_{n \geq 1},$$

tal que,

$$(\alpha(r_n(x) + \rho_n \circ \tau_n(x)))_{n \geq 1} \text{ converge (mod } \mathbb{Z})$$

para μ -casi todo $x \in X$.

(2) *λ es un valor propio continuo de (X, T, μ) , si y sólo si la sucesión*

$$(\alpha r_n(x))_{n \geq 1} \text{ converge uniformemente (mod } \mathbb{Z})$$

en X .

Observación 3.3. Se puede ver en la parte (1), que es suficiente que exista una subsucesión $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

$$(\alpha(r_{n_k}(x) + \rho_{n_k}(\tau_{n_k}(x))))_{k \geq 1} \text{ converge (mod } \mathbb{Z})$$

para μ -casi todo $x \in X$.

En efecto, para μ -casi todo $x \in X$ se define la función

$$g(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^{-r_{n_k}(x) - \rho_{n_k}(\tau_{n_k}(x))},$$

y se toma x_0 tal que $g(x_0)$ está definida, asegurándonos de que $x_0 \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B(n)$. Existe un entero positivo K tal que para todo $k > K$, $\tau_{n_k}(Tx_0) = \tau_{n_k}(x_0)$ y $r_{n_k}(Tx_0) = r_{n_k}(x_0) - 1$. Entonces

$$\frac{g(Tx_0)}{g(x_0)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda^{-r_{n_k}(Tx_0) - \rho_{n_k}(\tau_{n_k}(Tx_0))}}{\lambda^{-r_{n_k}(x_0) - \rho_{n_k}(\tau_{n_k}(x_0))}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^{r_{n_k}(x_0) - r_{n_k}(Tx_0)} = \lambda$$

El siguiente corolario, que aparece en [BDM05], entrega dos condiciones que relacionan las alturas $(H(n))_{n \geq 1}$ con los valores propios continuos, una de ellas necesaria, y la otra suficiente.

Corolario 3.7 ([BDM05] Corolario 13). *Sea (X, T) un sistema de Bratteli-Vershik minimal, y sea λ un número complejo de norma 1.*

(1) *Para que λ sea un valor propio continuo de (X, T) , es necesario que*

$$\lambda^{h_{k_n}(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1,$$

uniformemente en $(k_n)_{n \geq 1}$ en $\prod_{n \geq 1} V_n$.

3.2. Resultados históricos para valores propios continuos y no-continuos

(2) Para que λ sea un valor propio continuo de (X, T) , es suficiente que

$$\sum_{n=1}^{\infty} L(n) \max_{k \in V_n} |\lambda^{h_k(n)} - 1| < \infty,$$

donde, para $n \geq 1$,

$$L(n) = \max_{(k, \ell) \in V_{n+1} \times V_n} \frac{h_k(n+1)}{h_\ell(n)}.$$

La estructura de los valores propios continuos de un sistema de Bratteli-Vershik, es la que más se ha podido esclarecer. A continuación se presentarán algunos resultados relevantes. Para tener un panorama más completo, recomendamos al lector ver [BDM10, § 3-4].

Se introducirá un poco de notación para enunciar el siguiente teorema. Anotaremos, como es usual, $|a|$, al módulo de a , cuando $a \in \mathbb{C}$. Adicionalmente, se usará $\|a\|$, para denotar la norma del máximo, con a un vector en algún \mathbb{R}^n . Y finalmente se usará $\|a\|$, para $a \in \mathbb{R}$ (resp. $a \in \mathbb{R}^n$), para denotar la menor distancia de a a un entero (resp. la norma del máximo de a , pero con respecto a la menor distancia a un entero, de cada una de sus coordenadas).

Teorema 3.8 ([BDM10]). *Consideremos un diagrama de Bratteli propio, y sea (X, T) el sistema de Bratteli-Vershik minimal asociado. Si $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$ es un valor propio continuo de (X, T) , entonces:*

(1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max_{k \in V_n} |\lambda^{h_k(n)} - 1| < \infty.$$

o equivalentemente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha H(n)\| < \infty,$$

(2) Existe un entero $n_0 > 0$, y vectores $v \in \mathbb{R}^{|V_{n_0}|}$ y $w \in \mathbb{Z}^{|V_{n_0}|}$, tales que

$$\alpha H(n_0) = v + w \quad \text{y} \quad P(n_0, n)v \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Se deduce, a partir de este teorema, el siguiente resultado relativo a la forma de los valores propios continuos.

Corolario 3.9 ([BDM10] Corolario 7). *Sea (X, T) un sistema de Bratteli-Vershik como en el Teorema 3.8. consideremos además una medida invariante μ del sistema. Si $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$ es un valor propio continuo de (X, T) , entonces se cumple una de las siguientes condiciones:*

(1) $\alpha = p/q$, con p, q enteros tal que $(p, q) = 1$ y q divide a todas las coordenadas de $H(n_0)$, para algún nivel $n_0 \geq 1$.

3.2. Resultados históricos para valores propios continuos y no-continuos

(2) Existe un entero $m \geq 1$, y un vector $w \in \mathbb{Z}^{|V_m|}$, tal que $\alpha = \langle w, \mu(m) \rangle$.

Además, si α es un número real que cumple con (1), entonces $\lambda = \exp(2\pi i \alpha)$ es un valor propio continuo del sistema (X, T) .

Observación 3.4. Usando particiones de Kakutani-Rokhlin, es muy sencillo ver que la condición (1) de la proposición anterior, genera un valor propio. En la Figura 3.1, se muestra la manera de construir la función propia continua asociada al valor λ .

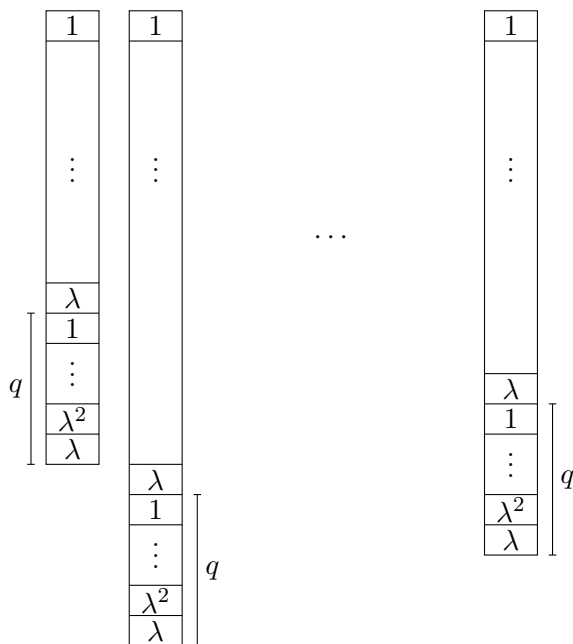


Figura 3.1: Valor propio racional $\lambda = \exp(2\pi i p/q)$, donde q divide a todas las alturas de un cierto nivel n_0 . Se puede ver que la función continua construida corresponde a una función propia asociada a λ .

3.2.2. Sistemas linealmente recurrentes

La descripción de los valores propios es más completa cuando nos restringimos al caso de sistemas linealmente recurrentes, los resultados que se presentarán a continuación se encuentran en [CDHM03] y [BDM05].

Recordar nuevamente, que un diagrama se llama linealmente recurrente, si la sucesión de matrices de incidencia $(M(n))_{n \geq 1}$, se obtiene a partir de un número finito de matrices de coeficientes positivos. Los sistemas linealmente recurrentes, serán precisamente aquellos que usen diagramas como éstos. Una manera equivalente de definir estos sistemas aparece en [CDHM03], a partir de las particiones de Kakutani-Rokhlin. En esta definición, la razón entre las alturas de las torres de niveles consecutivos, está acotada uniformemente.

3.2. Resultados históricos para valores propios continuos y no-continuos

En virtud de la Proposición 1.27, se asumirá que todas las matrices de incidencia son cuadradas de igual orden d .

Teorema 3.10 ([CDHM03],[BDM05]). *Sea (X, T, μ) un sistema de Bratteli-Vershik, ergódico, minimal y linealmente recurrente. Para que el número complejo $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$ sea valor propio del sistema (X, T, μ) es necesario y suficiente que:*

$$\sum_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq k \leq d} |\lambda^{h_k(n)} - 1|^2 < \infty,$$

o, equivalentemente,

$$\sum_{n \rightarrow \infty} \|\alpha H(n)\|^2 < \infty.$$

Además, para que el complejo $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$, sea valor propio continuo del sistema, es necesario y suficiente que:

$$\sum_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq k \leq d} |\lambda^{h_k(n)} - 1| < \infty,$$

o, equivalentemente,

$$\sum_{n \rightarrow \infty} \|\alpha H(n)\| < \infty.$$

Observación 3.5. Cabe hacer notar que los cambios que se aplican en la Proposición 1.27 (contracciones e interpolaciones acotadas), preservan las convergencias en el teorema anterior. Esa es la razón por la que podemos asumir que todas las matrices de incidencia tienen igual orden $d \times d$. Una interpolación arbitraria podría modificar la convergencia de alguna de las series utilizadas en el teorema.

La medida μ que aparece en el enunciado del Teorema 3.10 es, como siempre, una medida invariante de probabilidad. Lo que cabe agregar, es que en el caso de los sistemas linealmente recurrentes, se demuestra que es única, es decir, el sistema es únicamente ergódico. Esto se puede ver en [CDHM03], donde además se prueba que estos sistemas no son mezclas fuertes.

Se puede ver que las condiciones obtenidas son independientes del orden del diagrama. En otras palabras, dos sistemas linealmente recurrentes diferentes, pero con idéntica sucesión de matrices de incidencia, tienen los mismos valores propios.

A diferencia del caso estacionario, no todos los valores propios de un sistema linealmente recurrente, son necesariamente continuos. La condición para que λ sea valor propio continuo, es más restrictiva. En [BDM05, § 6] se puede ver un ejemplo de sistema linealmente recurrente, donde todos sus valores propios (excepto el valor propio trivial $\lambda = 1$), son no-continuos.

Hay algunos corolarios de este resultado que quisiera mencionar. La formulación con la cual son presentados los resultados, permite deducir una condición sencilla, que permite distinguir mezclas débiles entre sistemas linealmente recurrentes.

3.2. Resultados históricos para valores propios continuos y no-continuos

Corolario 3.11 ([CDHM03] Corolario 9). *Sea K_n , para $n \geq 2$, la menor distancia entre dos coordenadas del vector de alturas $H(n)$. Sea $K = \liminf_n K_n$. Si K es finito, entonces el sistema linealmente recurrente (X, T, μ) , tiene a lo más K valores propios. En particular, si $K = 1$, entonces el sistema es una mezcla débil.*

En [CDHM03, § 4] se muestran ejemplos de sistemas donde $K = 1$, y por lo tanto, que mezclan débilmente. Pero la condición del Corolario 3.11 no es una condición necesaria, como se muestra en el ejemplo a continuación.

Ejemplo de sistema linealmente recurrente, mezcla débil, con $K = \infty$ Consideremos la siguiente familia de matrices conmutativas, que comparten vectores propios.

$$\left\{ M_\ell = \begin{bmatrix} 3\ell - 1 & 3\ell - 2 & 3\ell - 2 \\ 2\ell - 1 & 2\ell - 1 & 2\ell - 1 \\ \ell - 1 & \ell & \ell \end{bmatrix} \mid \ell \geq 2 \right\},$$

y consideremos $2 \leq \ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_m$, para un cierto $m \geq 1$, es decir, una subcolección finita de estas matrices. Construimos un sistema linealmente recurrente, de modo que la sucesión de matrices de recurrencia del diagrama, considere sólo matrices de esta subcolección.

Tomemos un nivel $n \geq 1$, y j entre 1 y m . Definamos el entero $a_j(n)$, como la cantidad de veces que la matriz M_{ℓ_j} ha aparecido hasta el nivel n . Notar que, se tiene naturalmente que $a_1(n) + \dots + a_m(n) = n$.

De la igualdad, para $i \geq 0$,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 3\ell - 1 & 3\ell - 2 & 3\ell - 2 \\ 2\ell - 1 & 2\ell - 1 & 2\ell - 1 \\ \ell - 1 & \ell & \ell \end{bmatrix}^i = \\ & \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (6\ell - 3)^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

y definiendo $R(n) = (6\ell_1 - 3)^{a_1(n)} \dots (6\ell_m - 3)^{a_m(n)}$, se obtiene,

$$H(n) = \frac{R(n)}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto $K_n = (R(n) - 1)/2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Ahora, si consideramos un candidato $\lambda = \exp(2\pi i \alpha)$, con $\alpha \in [0, 1)$, a ser valor propio del sistema, entonces se deduce que $\|\alpha H(n)\|$ converge a 0, y se tienen simultáneamente:

$$\begin{aligned} R(n) \left(\frac{3\alpha}{2} \right) & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{2} \pmod{\mathbb{Z}} \\ R(n) (\alpha) & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \pmod{\mathbb{Z}} \\ R(n) \left(\frac{\alpha}{2} \right) & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{-\alpha}{2} \pmod{\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

3.3. Una caracterización para sistemas de rango finito

De las dos primeras se deduce que $\alpha = 0$, y por lo tanto $\lambda = 1$ es el único valor propio del sistema. Se concluye que es una mezcla débil.

La matriz de la sustitución de Chacon es

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz A tiene los mismos vectores propios que la familia de matrices considerada más arriba. Más aun, $M_2 = A^2$, y por lo tanto la sustitución de Chacon es uno de las posibles mezclas débiles linealmente recurrentes (estacionaria, para ser más precisos) que se construyen a partir de dicha familia de matrices.

Otro resultado que se desprende del Teorema 3.10, es que la clasificación dada por el Corolario 3.9, abarca ahora a todos los valores propios en el caso de que el sistema sea linealmente recurrente, no solamente a los valores propios continuos.

Proposición 3.12 ([CDHM03] Proposición 11). *Si $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$ es un valor propio de un sistema linealmente recurrente (X, T, μ) , entonces satisface una de las siguientes propiedades:*

- (1) *El valor α es racional, digamos $\alpha = p/q$, con $(p, q) = 1$; y existe $m \geq 1$ tal que el denominador q divide a $h_k(m)$, para todo $1 \leq k \leq d$.*
- (2) *Existe un entero $m \geq 1$ y un vector $w \in \mathbb{R}^d$, tales que $\alpha = \langle w, \mu(m) \rangle$.*

Además, si un valor real α cumple con la condición (1), entonces $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$ es valor propio continuo de (X, T, μ) .

3.3. Una caracterización para sistemas de rango finito

En esta sección se enunciará y se demostrará una caracterización de que cierto valor λ sea un valor propio de un sistema de rango finito. Ya existe una en un contexto más general, la expresada en el Teorema 3.6 (1), en el cual las conclusiones dependen de la existencia de una sucesión de funciones, que se denomina $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$, y que toma valores en los vértices de los niveles correspondientes. Existe una vaga idea de cual debería ser la interpretación que se debe dar a la existencia de esta sucesión (cf. [BDM05, § 4]).

Con el resultado que se mostrará en esta sección, sobre todo en la demostración de la suficiencia de la(s) condición(es) dada, comienza a delinearse de modo más claro, cual debería ser el funcionamiento de la sucesión $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En la aplicación a sistemas Toeplitz de rango finito que se hará en el capítulo siguiente, el funcionamiento es aun más claro, y abre por así decirlo, una ventana hacia un esclarecimiento más completo de la naturaleza de esta sucesión.

El enunciado del resultado, se hace en términos de algunos elementos combinatorios naturales de un diagrama de Bratteli. Esto también genera expectativas sobre su aplicación a sistemas en los cuales la estructura combinatoria se conoce bien. Particularmente a los sistemas de cambios de intervalos, ya que en estos se ha desarrollado bastante el estudio con respecto a dicha estructura (ver [GJ02], [FHZ03], [MMY05], [FZ11] y [Fer]).

3.3.1. Enunciado de la condición

Teorema 3.13. *Sea (X, T, μ) un sistema dado por un diagrama de Bratteli de rango finito (uniforme) d , depurado con respecto a la medida ergódica μ . Para que el número complejo $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$, sea valor propio del sistema, es necesario y suficiente que se cumpla cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes entre sí:*

(CNS1) Para todo $t_0 \in I_\mu$,

$$\sum_{t \in I_\mu} \frac{h_t(n)}{h_{t_0}(m)} \left| \sum_{s \in S_{n,m}(t, t_0)} \lambda^{\langle s, H(n) \rangle} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

uniformemente para $m > n$.

(CNS2) Para todo $t_1, t_2 \in I_\mu$

$$\frac{h_{t_1}(n)}{h_{t_2}(m)} \left[M_{t_2 t_1}(n, m) - \left| \sum_{s \in S_{n,m}(t_1, t_2)} \lambda^{\langle s, H(n) \rangle} \right| \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

uniformemente para $m > n$.

La demostración del Teorema se hará en las secciones que siguen. Las condiciones (CNS1) y (CNS2) se llamarán en lo consecutivo, “las condiciones del Teorema 3.13”.

Observación 3.6. Como $\#S_{n,m}(t_1, t_2) = M_{t_2 t_1}(n, m)$, entonces siempre se tiene la desigualdad

$$\left| \sum_{s \in S_{n,m}(t_1, t_2)} \lambda^{\langle s, H(n) \rangle} \right| \leq M_{t_2 t_1}(n, m). \quad (3.3.1)$$

Observación 3.7. La condición (CNS1), implica que la misma convergencia se tiene cuando la suma se hace para todo $t \in \{1, \dots, d\}$, pues

$$\begin{aligned} \sum_{t \in I_\mu} \frac{h_t(n)}{h_{t_0}(m)} \left| \sum_{s \in S_{n,m}(t, t_0)} \lambda^{\langle s, H(n) \rangle} \right| &\leq \sum_{t=1}^d \frac{h_t(n)}{h_{t_0}(m)} \left| \sum_{s \in S_{n,m}(t, t_0)} \lambda^{\langle s, H(n) \rangle} \right| \\ &\leq \sum_{t=1}^d \frac{h_t(n)}{h_{t_0}(m)} M_{t_0 t}(n, m) = 1. \end{aligned}$$

En sentido inverso también es cierto pues

$$\sum_{t \notin I_\mu} \frac{h_t(n)}{h_{t_0}(m)} \left| \sum_{s \in S_{n,m}(t, t_0)} \lambda^{\langle s, H(n) \rangle} \right| \leq \sum_{t \notin I_\mu} \frac{h_t(n)}{h_{t_0}(m)} M_{t_0 t}(n, m),$$

y la expresión de la derecha tiende a cero, cuando $n \rightarrow \infty$, uniformemente para $m > n$, de acuerdo al Lema 2.18 (1).

3.3. Una caracterización para sistemas de rango finito

Lema 3.14. *Para un sistema como en el enunciado del Teorema 3.13, se tiene que las condiciones (CNS1) y (CNS2) del mismo, son equivalentes*

Demostración. (CNS1) \implies (CNS2). Sea $\varepsilon > 0$ un número real arbitrario fijo. A partir de (CNS1), se deduce que existe un número entero N tal que para $m > n > N$ y $t_0 \in I_\mu$

$$\sum_{t \in I_\mu} \frac{h_t(n)}{h_{t_0}(m)} \left| \sum_{s \in S_{n,m}(t,t_0)} \lambda^{\langle s, H(n) \rangle} \right| > 1 - \varepsilon.$$

Supongamos ahora que para algunos $m > n > N$ existen $t_1, t_2 \in I_\mu$ de modo que

$$\frac{h_{t_1}(n)}{h_{t_2}(m)} \left[M_{t_2 t_1}(n, m) - \left| \sum_{s \in S_{n,m}(t_1, t_2)} \lambda^{\langle s, H(n) \rangle} \right| \right] > \varepsilon,$$

entonces

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{t \in V_n} \frac{h_t(n)}{h_{t_2}(m)} M_{t_2 t}(n, m) \\ &> \varepsilon + \sum_{t=1}^d \frac{h_t(n)}{h_{t_2}(m)} \left| \sum_{s \in S_{n,m}(t, t_2)} \lambda^{\langle s, H(n) \rangle} \right| \\ &\geq \varepsilon + \sum_{t \in I_\mu} \frac{h_t(n)}{h_{t_2}(m)} \left| \sum_{s \in S_{n,m}(t, t_2)} \lambda^{\langle s, H(n) \rangle} \right| > 1. \end{aligned}$$

Esta contradicción permite concluir que, para todo $m > n > N$

$$\frac{h_{t_1}(n)}{h_{t_2}(m)} \left[M_{t_2 t_1}(n, m) - \left| \sum_{s \in S_{n,m}(t_1, t_2)} \lambda^{\langle s, H(n) \rangle} \right| \right] \leq \varepsilon,$$

con lo cual se demuestra la implicación buscada. Notar que para obtener la contradicción, no es fundamental que $t_1, t_2 \in I_\mu$.

(CNS2) \implies (CNS1). Consideremos la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} 1 - \sum_{t \in I_\mu} \frac{h_t(n)}{h_{t_0}(m)} \left| \sum_{s \in S_{n,m}(t, t_0)} \lambda^{\langle s, H(n) \rangle} \right| &= \\ \sum_{t=1}^d \frac{h_t(n)}{h_{t_0}(m)} \left[M_{t_0 t}(n, m) - \left| \sum_{s \in S_{n,m}(t, t_0)} \lambda^{\langle s, H(n) \rangle} \right| \right] &+ \sum_{t \notin I_\mu} \frac{h_t(n)}{h_{t_0}(m)} M_{t_0 t}(n, m). \end{aligned}$$

Ambos términos de la expresión de la derecha tienden a cero cuando $n \rightarrow \infty$, uniformemente para $m > n$, el primero por (CNS2), mientras que el segundo por el Lema (REF) (1). \square

Observación 3.8. A partir de la demostración anterior se puede concluir que, si bien es cierto que (CNS2) no puede ser modificada de manera equivalente para todo $1 \leq t_1, t_2 \leq d$, se puede relajar las exigencias para t_1 . Es decir, (CNS2) es equivalente a la misma expresión, pero donde t_1 puede ser un vértice arbitrario.

3.3.2. Demostración de la necesidad

Asumiremos que $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$ es un valor propio del sistema (X, T, μ) , donde μ es una medida invariante ergódica de probabilidad. Asumiremos que f es una función propia para λ , tal que $|f| = 1$.

Antes de hacer los próximos cálculos recordemos que $B_t(n)$ denotará, para $1 \leq t \leq d$ y $n \geq 1$, al abierto $[\beta]$, para β el camino maximal en $E_{0,n}$ que termina en el vértice t de nivel n .

Cálculos preliminares

Si denotamos por $\mathcal{T}(n)$ a la σ -álgebra generada por la partición $\mathcal{P}(n)$ (ver § 1.5), entonces $\mathbb{E}(f|\mathcal{T}(n))$ es constante en cada elemento de la partición $\mathcal{P}(n)$. Si denotamos por f_n a esta esperanza condicional tenemos

$$\begin{aligned} f_n := \mathbb{E}(f|\mathcal{T}(n)) &= \sum_{t=1}^d \sum_{j=0}^{h_k(n)-1} 1_{T^{-j}B_t(n)} \frac{1}{\mu_t(n)} \int_{T^{-j}B_t(n)} f \, d\mu \\ &= \sum_{t=1}^d \sum_{j=0}^{h_k(n)-1} 1_{T^{-j}B_t(n)} \frac{1}{\mu_t(n)} \int_{B_t(n)} f \circ T^{-j} \, d\mu \\ &= \sum_{t=1}^d \sum_{j=0}^{h_k(n)-1} 1_{T^{-j}B_t(n)} \frac{1}{\mu_t(n)} \int_{B_t(n)} \lambda^{-j} f \, d\mu. \end{aligned}$$

Para cualquier vértice t y nivel $n \geq 1$, escribimos

$$\frac{1}{\mu_t(n)} \int_{B_t(n)} f \, d\mu = c_t(n) \lambda^{-\rho_t(n)}, \quad (3.3.2)$$

con $c_t(n) \geq 0$ y $\rho_t(n)$ elementos en \mathbb{R} . Se deduce que $f_n(x) = c_{\tau_n(x)}(n) \lambda^{-r_n(x) - \rho_{\tau_n(x)}(n)}$.

Lema 3.15 ([BDM10] Lema 17). *Se tiene*

- (1) Para todo vértice t , $\mu \{ \tau_n = t \} (1 - c_t(n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
- (2) Para todo vértice $t \in I_\mu$, $c_t(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

Demostración. Notar que (2) es un corolario de (1), así que nos dedicaremos a justificar sólo la primera afirmación.

Se puede ver directamente que

$$\|f_n\|_2^2 = \sum_{t=1}^d \mu \{ \tau_n = t \} c_t(n)^2.$$

3.3. Una caracterización para sistemas de rango finito

Como $\|f_n\|_2^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$, se deduce que

$$\sum_{t=1}^d \mu \{ \tau_n = t \} (1 - c_t(n)^2) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Hay que notar además que, a partir de la definición, $c_t(n) \leq 1$. Se concluye (1). \square

Para cada $s \in S_{n,m}(t_1, t_2)$ y $m > n \geq 1$, el conjunto $T^{-\langle s, H(n) \rangle} B_{t_2}(m)$ está formado por elementos de X que pasan por los vértices t_1 y t_2 , en los niveles n y m respectivamente. De modo general, se tiene la siguiente igualdad, para un vértice t_0 de nivel n :

$$B_{t_0}(n) = \bigcup_{t=1}^d \bigcup_{s \in S_{n,m}(t_0, t)} T^{-\langle s, H(n) \rangle} B_t(m), \quad (3.3.3)$$

en la cual todas las uniones son disjuntas.

Integrando la función propia f sobre $B_{t_0}(n)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{B_{t_0}(n)} f \, d\mu &= \sum_{t=1}^d \sum_{s \in S_{n,m}(t_0, t)} \int_{T^{-\langle s, H(n) \rangle} B_t(m)} f \, d\mu \\ &= \sum_{t=1}^d \sum_{s \in S_{n,m}(t_0, t)} \int_{B_t(m)} f \circ T^{-\langle s, H(n) \rangle} \, d\mu \\ &= \sum_{t=1}^d \sum_{s \in S_{n,m}(t_0, t)} \int_{B_t(m)} \lambda^{-\langle s, H(n) \rangle} f \, d\mu \\ &= \sum_{t=1}^d \left(\sum_{s \in S_{n,m}(t_0, t)} \lambda^{-\langle s, H(n) \rangle} \right) \int_{B_t(m)} f \, d\mu. \end{aligned}$$

Ahora, usando la ecuación (3.3.2), esta igualdad se puede escribir

$$\mu_{t_0}(n) c_{t_0}(n) \lambda^{-\rho_{t_0}(n)} = \sum_{t=1}^d \left(\sum_{s \in S_{n,m}(t_0, t)} \lambda^{-\langle s, H(n) \rangle} \right) \mu_t(n) c_t(m) \lambda^{-\rho_t(m)},$$

y multiplicando por $h_{t_0}(n)$, se tiene

$$\mu \{ \tau_n = t_0 \} c_{t_0}(n) \lambda^{-\rho_{t_0}(n)} = \sum_{t=1}^d \frac{h_{t_0}(n)}{h_t(m)} \left(\sum_{s \in S_{n,m}(t_0, t)} \lambda^{-\langle s, H(n) \rangle} \right) \mu \{ \tau_m = t \} c_t(m) \lambda^{-\rho_t(m)}. \quad (3.3.4)$$

Cálculos finales

Tomando valor absoluto en (3.3.4), se tiene

$$\begin{aligned} \mu \{ \tau_n = t_0 \} c_{t_0}(n) &\leq \sum_{t=1}^d \frac{h_{t_0}(n)}{h_t(m)} \left| \sum_{s \in S_{n,m}(t_0,t)} \lambda^{-(s,H(n))} \right| \mu \{ \tau_m = t \} c_t(m) \\ &\leq \sum_{t=1}^d \frac{h_{t_0}(n)}{h_t(m)} M_{tt_0}(n, m) \mu \{ \tau_m = t \} \\ &= \mu \{ \tau_n = t_0 \}. \end{aligned}$$

Notar que en la segunda línea se utilizó que para todo vértice t , $c_t(m) \leq 1$, además de la desigualdad (3.3.1) de la Observación 3.6.

Usando el Lema 3.15, se concluye

$$\sum_{t=1}^d \frac{h_{t_0}(n)}{h_t(m)} \left[M_{tt_0}(n, m) - \left| \sum_{s \in S_{n,m}(t_0,t)} \lambda^{-(s,H(n))} \right| \right] \mu \{ \tau_m = t \} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

uniformemente para $m > n$. Ahora tomando $t_1 \in I_\mu$ se tiene

$$\frac{h_{t_0}(n)}{h_{t_1}(m)} \left[M_{t_1 t_0}(n, m) - \left| \sum_{s \in S_{n,m}(t_0,t_1)} \lambda^{-(s,H(n))} \right| \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

uniformemente para $m > n$. Que es equivalente a la condición (2) del Teorema 3.13 (ver Observación 3.8).

3.3.3. Demostración de la suficiencia

Usando la hipótesis de que el diagrama es depurado, confirmamos la existencia de un valor real $\delta > 0$ tal que, para todo $t \in I_\mu$, $\mu \{ \tau_n = t \} \geq \delta$. Asumiremos desde ahora en adelante que, habiendo aplicado previamente una contracción al sistema, para cada $t_1, t_2 \in I_\mu$ y $m > n$,

$$\frac{h_{t_1}(n)}{h_{t_2}(m)} M_{t_2 t_1}(n, m) > \frac{\delta}{2}. \quad (3.3.5)$$

Esto es consecuencia de una aplicación directa del Lema 2.18 sobre el comportamiento de estas cantidades. En otras palabras estamos asumiendo que el diagrama es homogéneamente depurado (ver Observación 2.4).

Lema geométrico

Consideraremos el siguiente Lema, que nos permitirá analizar las sumas de potencias de λ que aparecen en el enunciado del Teorema 3.13.

3.3. Una caracterización para sistemas de rango finito

Lema 3.16 (Lema Geométrico). *Consideremos N números complejos $v_k = \exp(2\pi i\alpha_k)$, con α_k un número real, para $k = 1, 2, \dots, N$. Consideremos también la suma*

$$S = v_1 + v_2 + \dots + v_N,$$

y números reales positivos $\varepsilon < 1$, y $\xi < 1/2$. Si se tiene

$$|S| > (1 - \varepsilon)N,$$

entonces existe $1 \leq \ell \leq N$ tal que

$$\#\{\alpha_k \mid k = 1, 2, \dots, N \text{ y } \|\alpha_k - \alpha_\ell\| \geq \xi\} < \frac{2N\varepsilon}{1 - \cos(2\pi\xi)}$$

Demostración. Primero hay que recordar que

$$\begin{aligned} |S|^2 &= \left(\sum_{k=1}^N \exp(2\pi i\alpha_k) \right) \left(\sum_{k=1}^N \exp(-2\pi i\alpha_k) \right) \\ &= N + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq N} \cos(2\pi\|\alpha_j - \alpha_k\|). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} |S| > (1 - \varepsilon)N &\iff 1 - \frac{|S|}{N} < \varepsilon \\ &\implies 1 - \frac{|S|^2}{N^2} < 2\varepsilon \\ &\iff 2 \sum_{1 \leq j < k \leq N} \cos(2\pi\|\alpha_j - \alpha_k\|) > N(N - 1) - 2N^2\varepsilon. \end{aligned}$$

Definamos ahora el conjunto

$$K = \{(\alpha_j, \alpha_k) \mid 1 \leq j, k \leq N \text{ y } \|\alpha_j - \alpha_k\| \geq \xi\}.$$

Con esto se tiene

$$\begin{aligned} 2 \sum_{1 \leq j < k \leq N} \cos(2\pi\|\alpha_j - \alpha_k\|) &= \sum_{\substack{(\alpha_j, \alpha_k) \in K \\ 1 \leq j < k \leq N}} \cos(2\pi\|\alpha_j - \alpha_k\|) + \sum_{\substack{(\alpha_j, \alpha_k) \notin K \\ 1 \leq j < k \leq N}} \cos(2\pi\|\alpha_j - \alpha_k\|) \\ &\leq \#K \cos(2\pi\xi) + N(N - 1) - \#K, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\#K < \frac{2N^2\varepsilon}{1 - \cos(2\pi\xi)}.$$

Se concluye directamente que debe existir $1 \leq \ell \leq N$ tal que

$$\#\{\alpha_k \mid 1 \leq k \leq N \text{ y } \|\alpha_\ell - \alpha_k\| \geq \xi\} < \frac{2N\varepsilon}{1 - \cos(2\pi\xi)}.$$

□

Algunos elementos útiles y sus propiedades

Construiremos a continuación dos elementos que nos serán de utilidad en alcanzar nuestro objetivo de demostrar la suficiencia de las condiciones (equivalentes) del Teorema 3.13

- El primero de ellos es un número entero, asociado a cada par de vértices del diagrama de Bratteli de dos niveles dados (y por lo tanto, es una sucesión de números enteros), y que se obtiene al aplicar el Lema 3.16 a las condiciones del Teorema. Lo denotaremos por $\Lambda_{n,m}(t_1, t_2)$, donde $n < m$ son los niveles, y t_1, t_2 son vértices en I_μ .
- El segundo elemento importante es un conjunto de medida nula, que denotaremos por \mathcal{C} y que se construye a partir de una sucesión de conjuntos, cada uno de ellos asociado a uno de los números reales mencionados anteriormente, y que denotaremos por $\mathcal{D}_{n,m}$, donde $n < m$ son niveles en el diagrama.

A continuación, se presenta el detalle de estas construcciones.

Construcción de los enteros $\Lambda_{n,m}(t_1, t_2)$. Para $m > n$ y $t_1, t_2 \in I_\mu$, escribimos

$$L_{n,m}(t_1, t_2) := \frac{h_{t_1}(n)}{h_{t_2}(m)} \left[M_{t_2 t_1}(n, m) - \left| \sum_{s \in S_{n,m}(t_1, t_2)} \lambda^{(s, H(n))} \right| \right].$$

Las condiciones del Teorema 3.13 implican que $L_{n,m}(t_1, t_2) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, uniformemente para $m > n$. Y es así como es posible encontrar N_0 de modo que si $m > n > N_0$, entonces $L_{n,m}(t_1, t_2) < \delta/2 < 1$. También se puede ver directamente a partir de la ecuación que define $L_{n,m}(t_1, t_2)$ y de la desigualdad (3.3.5), que

$$L_{n,m}(t_1, t_2) > \frac{\delta}{2} \left[1 - \frac{\left| \sum_{s \in S_{n,m}(t_1, t_2)} \lambda^{(s, H(n))} \right|}{M_{t_2 t_1}(n, m)} \right],$$

y por lo tanto

$$\left| \sum_{s \in S_{n,m}(t_1, t_2)} \lambda^{(s, H(n))} \right| > \left(1 - \frac{2L_{n,m}(t_1, t_2)}{\delta} \right) M_{t_2 t_1}(n, m).$$

Usaremos el Lema 3.16, con las siguientes elecciones de los parámetros ϵ y ξ que allí aparecen:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{2L_{n,m}(t_1, t_2)}{\delta} \quad \text{y} \\ \xi &= \xi_{n,m}(t_1, t_2) := \frac{1}{2\pi} \arccos \left(1 - \sqrt{L_{n,m}(t_1, t_2)} \right). \end{aligned}$$

3.3. Una caracterización para sistemas de rango finito

Se concluye que existe $s_0 \in S_{n,m}(t_1, t_2)$ (s_0 dependiendo de t_1, t_2, n y m), tal que

$$\#\{s \in S_{n,m}(t_1, t_2) \mid \|\alpha\langle s, H(n) \rangle - \alpha\langle s_0, H(n) \rangle\| \geq \xi\} < \frac{4M_{t_2 t_1}(n, m)}{\delta} \sqrt{L_{n,m}(t_1, t_2)}.$$

Estamos ahora en condiciones de definir algunos de los elementos prometidos.

Definición 3.17. Definimos para cada $m > n > N_0$, y cada $t_1, t_2 \in I_\mu$,

$$\Lambda_{n,m}(t_1, t_2) := \langle s_0, H(n) \rangle.$$

Definición 3.18 (Sucesión de conjuntos $\mathcal{D}_{n,m}$). Para cada $m > n > N_0$, se define el conjunto

$$\mathcal{D}_{n,m} = \{\|\alpha(\langle s_{n,m}, H(n) \rangle - \Lambda_{n,m}(\tau_n, \tau_m))\| \geq \xi_{n,m}(\tau_n, \tau_m), \tau_n \in I_\mu, \tau_m \in I_\mu\}.$$

Las propiedades que se presentan en los siguientes dos lemas serán fundamentales.

Lema 3.19. $\mu(\mathcal{D}_{n,m}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, uniformemente para $m > n$.

Demostración. La medida del conjunto $\mathcal{D}_{n,m}$ es igual a

$$\sum_{t_2 \in I_\mu} \sum_{t_1 \in I_\mu} \mu \{ \|\alpha(\langle s_{n,m}, H(n) \rangle - \Lambda_{n,m}(t_1, t_2))\| \geq \xi_{n,m}(t_1, t_2), \tau_n = t_1, \tau_m = t_2 \},$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{D}_{n,m}) &< \sum_{t_2 \in I_\mu} \sum_{t_1 \in I_\mu} \frac{4M_{t_2 t_1}(n, m)}{\delta} \sqrt{L_{n,m}(t_1, t_2)} \mu(B_{t_2}(m)) h_{t_1}(n) \\ &= \sum_{t_2 \in I_\mu} \sum_{t_1 \in I_\mu} \frac{4h_{t_1}(n) M_{t_2 t_1}(n, m)}{\delta h_{t_2}(m)} \sqrt{L_{n,m}(t_1, t_2)} \mu\{\tau_m = t_2\} \\ &\leq \sum_{t_2 \in I_\mu} \sum_{t_1 \in I_\mu} \frac{4\sqrt{L_{n,m}(t_1, t_2)}}{\delta} \mu\{\tau_m = t_2\}. \end{aligned}$$

La afirmación del Lema ahora se obtiene de que $L_{n,m}(t_1, t_2) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ uniformemente para $m > n$ y $t_1, t_2 \in I_\mu$. \square

Lema 3.20 (Cuasi-aditividad de $\alpha\Lambda_{n,m}(t_1, t_2)$). Si tomamos $\ell > m > n$ suficientemente grandes. Entonces para t_1, t_2 y t_3 en I_μ

$$\|\alpha(\Lambda_{n,m}(t_1, t_2) + \Lambda_{m,\ell}(t_2, t_3) - \Lambda_{n,\ell}(t_1, t_3))\| < \xi_{n,m}(t_1, t_2) + \xi_{m,\ell}(t_2, t_3) + \xi_{n,\ell}(t_1, t_3)$$

Demostración. Para $\ell > m > n > N_0$ definimos el siguiente conjunto

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{n,m,\ell} &= \{\|\alpha(\Lambda_{n,m}(\tau_n, \tau_m) - \langle s_{n,m}, H(n) \rangle)\| < \xi_{n,m}(t_1, t_2)\} \\ &\quad \cap \{\|\alpha(\Lambda_{m,\ell}(\tau_m, \tau_\ell) - \langle s_{m,\ell}, H(n) \rangle)\| < \xi_{m,\ell}(t_2, t_3)\} \\ &\quad \cap \{\tau_n = t_1, \tau_m = t_2, \tau_\ell = t_3\}. \end{aligned}$$

3.3. Una caracterización para sistemas de rango finito

Como una aplicación del Lema geométrico, podemos encontrar la siguiente cota para la medida de este conjunto

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{G}_{n,m,\ell}) &\geq \frac{h_{t_1}(n)}{h_{t_2}(m)} M_{t_2 t_1}(n, m) \left(1 - \frac{4\sqrt{L_{n,m}(t_1, t_2)}}{\delta} \right) \mu \{ \tau_m = t_2 \} \\ &\quad \cdot \frac{h_{t_2}(m)}{h_{t_3}(\ell)} M_{t_3 t_2}(m, \ell) \left(1 - \frac{4\sqrt{L_{m,\ell}(t_2, t_3)}}{\delta} \right) \mu \{ \tau_\ell = t_3 \}. \end{aligned}$$

Gracias a la desigualdad (3.3.5) y el hecho de que $L_{n,m}(t, t_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, uniformemente para $m > n$ y todo $t, t_0 \in I_\mu$, podemos encontrar un entero N , tal que para todo $\ell > m > n > N$,

$$\mu(\mathcal{G}_{n,m,\ell}) \geq \delta^4/64.$$

Por el Lema 3.19 podemos asumir que N es lo suficientemente grande como para que $\mu(D_{n,m}) < \delta^4/64$, para todo $m > n > N$.

Supongamos ahora lo contrario a lo que queremos probar, es decir, supongamos que para ciertos enteros $\ell > m > n > N$, se tiene

$$\|\alpha(\Lambda_{n,m}(t_1, t_2) + \Lambda_{m,\ell}(t_2, t_3) - \Lambda_{n,\ell}(t_1, t_3))\| \geq \xi_{n,m}(t_1, t_2) + \xi_{m,\ell}(t_2, t_3) + \xi_{n,\ell}(t_1, t_3).$$

Entonces, tomando un $x_0 \in \mathcal{G}_{n,m,\ell}$ arbitrario, se tiene que $\tau_n(x_0) = t_1$, $\tau_\ell(x_0) = t_3$, y las desigualdades

$$\begin{aligned} &\|\alpha\Lambda_{n,\ell}(t_1, t_3) - \alpha\langle s_{n,\ell}(x_0), H(n) \rangle\| \\ &\geq \|\alpha(\Lambda_{n,m}(t_1, t_2) + \Lambda_{m,\ell}(t_2, t_3) - \Lambda_{n,\ell}(t_1, t_3))\| \\ &\quad - \|\alpha(\Lambda_{n,m}(t_1, t_2) - \langle s_{n,m}(x_0), H(n) \rangle) + \alpha(\Lambda_{m,\ell}(t_2, t_3) - \langle s_{m,\ell}(x_0), H(m) \rangle)\| \\ &> \xi_{n,\ell}(t_1, t_3), \end{aligned}$$

lo cual implicaría que $\mathcal{G}_{n,m,\ell} \subseteq D_{n,\ell}$, que es contradictorio con las medidas que estos conjuntos tienen, y por lo tanto la afirmación del Lema es cierta. \square

Construcción del conjunto \mathcal{C} . Ahora estamos en condiciones de definir este conjunto de medida nula prometido. Para esto, primero fijemos una sucesión decreciente de números reales positivos $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de modo que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \varepsilon_n < \infty.$$

Para $m > n$ suficientemente grandes y $t_1, t_2 \in I_\mu$, se tiene

$$L_{n,m}(t_1, t_2) < \sqrt{L_{n,m}(t_1, t_2)} < \xi_{n,m}(t_1, t_2).$$

Por la convergencia a cero de $L_{n,m}(t_1, t_2)$, para todo $t_1, t_2 \in I_\mu$, uniforme para $m > n$, podemos concluir que existe una sucesión $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ estrictamente creciente de números enteros positivos, de modo que para todo $t_1, t_2 \in I_\mu$

$$\xi_{n_k, m_k}(t_1, t_2) < \varepsilon_k, \tag{3.3.6}$$

3.3. Una caracterización para sistemas de rango finito

donde $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es cualquier otra sucesión de números enteros tales que $m_k > n_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Esto implica la sumabilidad de las sucesiones

$$(\xi_{n_k, m_k}(t_1, t_2))_{k \in \mathbb{N}}, (\sqrt{L_{n_k, m_k}(t_1, t_2)})_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{y} \quad (L_{n_k, m_k}(t_1, t_2))_{k \in \mathbb{N}},$$

para todo $t_1, t_2 \in I_\mu$.

Definamos a continuación, para $m > n$

$$\mathcal{C}_{n, m} = \mathcal{D}_{n, m} \cup \{\tau_n \notin I_\mu\} \cup \{\tau_m \notin I_\mu\}.$$

Para este conjunto, usando que el diagrama es depurado, junto con la cota de $\mu(\mathcal{D}_{n, m})$ (de la demostración del Lema 3.19) y la desigualdad (3.3.6), se tiene

$$\sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ n_k > N_0}} \mu(\mathcal{C}_{n_k, n_{k+1}}) < \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ n_k > N_0}} \left[\frac{4d\varepsilon_k}{\delta} + \sum_{t \notin I_\mu} (\mu\{\tau_{n_k} = t\} + \mu\{\tau_{n_{k+1}} = t\}) \right] < \infty.$$

Definición 3.21. $\mathcal{C} = \limsup_k \mathcal{C}_{n_k, n_{k+1}}$

Lema 3.22. $\mu(\mathcal{C}) = 0$

Demostración. Se sigue directamente de la sumabilidad de la sucesión $(\mu(\mathcal{C}_{n_k, n_{k+1}}))_{k \in \mathbb{N}}$. \square

Definición de una sucesión de funciones $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Es importante en este punto señalar que, para poder concluir que el número complejo λ es un valor propio del sistema (X, T, μ) , se utilizará el Teorema 3.6, de manera más específica la Observación 3.3, que se encuentra a continuación de él. En dicho teorema aparece una sucesión de funciones de los vértices del diagrama, denotadas por ρ_n , para $n \geq 1$. Basta la existencia de tal sucesión, combinada con la convergencia, μ casi segura y $(\text{mod } \mathbb{Z})$, de la sucesión $(\alpha(r_n + \rho_n \circ \tau_n))_{n \in \mathbb{N}}$, o al menos de alguna subsucesión.

Antes de enunciar la siguiente definición, fijemos un $\bar{t} \in I_\mu$. Para cada $n \geq 1$ y $t \in I_\mu$ se puede encontrar una sucesión creciente de enteros positivos $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$, de modo que $\alpha\Lambda_{n, m_k}(t, \bar{t})$ converja. Por un proceso estándar de considerar subsucesiones progresivamente, y luego elegir la famosa subsucesión diagonal, se podrá asumir que $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión independiente tanto de n como de t .

Definición 3.23. Sea $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la anterior sucesión creciente de números enteros positivos. Se define para cada $n \geq 1$, $\rho_n : \{1, \dots, d\} \rightarrow \mathbb{R}$ según la fórmula:

$$\rho_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha\Lambda_{n, m_k}(t, \bar{t}) \pmod{\mathbb{Z}} & \text{para } t \in I_\mu \\ 0 & \text{para } t \notin I_\mu \end{cases}$$

3.3. Una caracterización para sistemas de rango finito

Convergencia de $(\alpha(r_n + \rho_n \circ \tau_n))_{n \in \mathbb{N}}$

En estricto rigor, se demostrará la existencia de un punto de acumulación para esta sucesión de funciones (con respecto a la convergencia puntual (mod \mathbb{Z}) en $X \setminus \mathcal{C}$), lo cual es suficiente para concluir que $\lambda = \exp(2\pi i \alpha)$ es un valor propio del sistema (como se muestra en la Observación 3.3). Precisamente, se demostrará que

$$\alpha(r_{n_k}(x) + \rho_{n_k}(\tau_{n_k}(x)))$$

converge (mod \mathbb{Z}), para todo $x \in X \setminus \mathcal{C}$, donde la sucesión creciente de números enteros $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es exactamente la sucesión utilizada anteriormente para definir el conjunto \mathcal{C} .

Sea $\varepsilon > 0$ un número real arbitrario, y $x \notin \mathcal{C}$. Existe un entero positivo K de modo que, para todo $k > K$, $x \in X \setminus \mathcal{C}_{n_k, n_{k+1}}$. Recordar que este conjunto es igual a

$$\{\|\alpha(\langle s_{n_k, n_{k+1}}, H(n_k) \rangle - \Lambda_{n_k, n_{k+1}}(\tau_{n_k}, \tau_{n_{k+1}}))\| < \xi_{n_k, n_{k+1}}(\tau_{n_k}, \tau_{n_{k+1}}), \tau_{n_k} \in I_\mu, \tau_{n_{k+1}} \in I_\mu\}.$$

Este entero K se puede asumir que es suficientemente grande, como para que también se cumpla

$$\sum_{k \geq K} \varepsilon_k < \frac{\varepsilon}{8},$$

donde la sucesión decreciente y sumable $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$, es precisamente aquella que se ocupa para definir la sucesión de enteros $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Tomemos $\ell > k > K$. Procederemos a estimar

$$\|\alpha(r_{n_\ell}(x) + \rho_{n_\ell}(\tau_{n_\ell}(x))) - \alpha(r_{n_k}(x) + \rho_{n_k}(\tau_{n_k}(x)))\|$$

Por la definición de la funciones $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$, elegiremos primero un entero positivo m de modo que

$$\begin{aligned} \|\alpha \Lambda_{n_k, m}(\tau_{n_k}(x), \bar{t}) - \alpha \rho_{n_k}(\tau_{n_k}(x))\| &< \varepsilon/4 \\ \|\alpha \Lambda_{n_\ell, m}(\tau_{n_\ell}(x), \bar{t}) - \alpha \rho_{n_\ell}(\tau_{n_\ell}(x))\| &< \varepsilon/4. \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos

$$\|\alpha(r_{n_\ell}(x) + \rho_{n_\ell}(\tau_{n_\ell}(x))) - \alpha(r_{n_k}(x) + \rho_{n_k}(\tau_{n_k}(x)))\| < \frac{\varepsilon}{2} + \|\Theta\|,$$

donde

$$\Theta = \alpha \langle s_{n_k, n_\ell}(x), H(n_k) \rangle + \alpha \Lambda_{n_\ell, m}(\tau_{n_\ell}(x), \bar{t}) - \alpha \Lambda_{n_k, m}(\tau_{n_k}(x), \bar{t}).$$

Ahora, dado que se tienen las igualdades

$$\begin{aligned} \langle s_{n_k, n_\ell}(x), H(n_k) \rangle &= \sum_{j=k}^{\ell-1} \langle s_{n_j, n_{j+1}}(x), H(n_j) \rangle \\ \alpha \Lambda_{n_\ell, m}(\tau_{n_\ell}(x), \bar{t}) - \alpha \Lambda_{n_k, m}(\tau_{n_k}(x), \bar{t}) &= \sum_{j=k}^{\ell-1} \alpha \Lambda_{n_{j+1}, m}(\tau_{n_{j+1}}(x), \bar{t}) - \alpha \Lambda_{n_j, m}(\tau_{n_j}(x), \bar{t}), \end{aligned}$$

3.3. Una caracterización para sistemas de rango finito

la primera por propiedades del diagrama de Bratteli (ver ecuaciones (1.4.3) y (1.4.4), entre las propiedades de la función sufixo), y la segunda simplemente por la propiedad telescópica de la suma; se puede hacer la siguiente descomposición:

$$\Theta = \sum_{k=1}^{\ell-1} \Theta_j + \sum_{k=1}^{\ell-1} \Delta_j,$$

donde Θ_j y Δ_j están definidas, para cada $k \leq j < \ell$, de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \Theta_j &= \alpha(\Lambda_{n_j, n_{j+1}}(\tau_{n_j}(x), \tau_{n_{j+1}}(x)) + \Lambda_{n_{j+1}, m}(\tau_{n_{j+1}}(x), \bar{t}) - \Lambda_{n_j, m}(\tau_{n_j}(x), \bar{t})) \\ \Delta_j &= \alpha\langle s_{n_j, n_{j+1}}(x), H(n_j) \rangle - \alpha\Lambda_{n_j, n_{j+1}}(\tau_{n_j}(x), \tau_{n_{j+1}}(x)). \end{aligned}$$

Procederemos a acotar estas últimas cantidades. Usando el Lema 3.20 y la ecuacion (3.3.6) se tiene

$$\begin{aligned} \|\Theta_j\| &< (\xi_{n_j, n_{j+1}}(\tau_{n_j}(x), \tau_{n_{j+1}}(x)) + \xi_{n_{j+1}, m}(\tau_{n_{j+1}}(x), \bar{t}) + \xi_{n_j, m}(\tau_{n_j}(x), \bar{t})) \\ &< 2\varepsilon_j + \varepsilon_{j+1} \leq 3\varepsilon_j, \end{aligned}$$

y usando el hecho de que $x \notin \mathcal{C}_{n_j, n_{j+1}}$, para $j \geq k$, se tiene

$$\begin{aligned} \|\Delta_j\| &< \xi_{n_j, n_{j+1}}(\tau_{n_j}(x), \tau_{n_{j+1}}(x)) \\ &< \varepsilon_j. \end{aligned}$$

Recapitulando las estimaciones anteriores, se tiene

$$\begin{aligned} \|\alpha(r_{n_\ell}(x) + \rho_{n_\ell}(\tau_{n_\ell}(x))) - \alpha(r_{n_k}(x) + \rho_{n_k}(\tau_{n_k}(x)))\| &< \frac{\varepsilon}{2} + \|\Theta\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=k}^{\ell-1} (\|\Theta_j\| + \|\Delta_j\|) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=k}^{\ell-1} 4\varepsilon_j < \varepsilon. \end{aligned}$$

Como $\ell > k$ eran enteros arbitrarios mayores que K , se concluye que la sucesión

$$(\alpha(r_{n_k}(x) + \rho_{n_k}(\tau_{n_k}(x))))_{k \in \mathbb{N}}$$

es de Cauchy (mod \mathbb{Z}). Esto a su vez es cierto para todo x en el conjunto de medida completa $X \setminus \mathcal{C}$, que era precisamente lo que se quería probar. Esto implica, como ya se ha dicho, que las condiciones (equivalentes) del Teorema 3.13 son suficientes para garantizar de que $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$ es un valor propio del sistema (X, T, μ) .

Observación 3.9. Como se puede ver, existe una cierta dificultad si se desea usar las condiciones del Teorema 3.13 para calcular si algún valor λ es valor propio. Aunque la parte de la necesidad puede servir para descartar ciertos valores λ como valores propios.

La dificultad radica en tener que comprobar la convergencia uniforme para $m > n$. De la demostración se desprende una condición suficiente que depende solamente de n ,

3.3. Una caracterización para sistemas de rango finito

expresada en una fórmula no muy compacta pero que podría ser útil: para que λ sea valor propio del sistema (con las mismas hipótesis del Teorema 3.13), basta que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arccos \left(1 - \sqrt{\frac{h_{t_1}(n)}{h_{t_2}(n+1)} \left(M_{t_2 t_1}(n+1) - \left| \sum_{s \in S_{n+1}(t_1, t_2)} \lambda^{(s, H(n))} \right| \right)} \right) < \infty$$

para todo $t_1, t_2 \in I_\mu$ (notar que dentro de la sumatoria está la expresión para $\xi_{n, n+1}(t_1, t_2)$). Como se verá en el próximo capítulo, la expresión análoga para sistemas Toeplitz es mucho más sencilla.

Capítulo 4

Valores propios en sistemas Toeplitz de rango finito

Parte del desarrollo que se presenta en este capítulo ha sido expuesto en el artículo *Eigenvalues of Toeplitz minimal systems of finite topological rank*, en conjunto con los profesores Alejandro Maass y Fabien Durand, el que ha sido aceptado para su publicación en la revista *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, de Cambridge University Press.

4.1. Introducción a los sistemas Toeplitz

Recordemos que un diagrama es Toeplitz si, para cada $n \geq 1$, la cantidad de arcos que terminan en cada vértice de nivel n , es constante; es decir, el vector $Q(n)$ tiene todas sus coordenadas iguales.

Introducimos un poco de notación escribiendo $Q(n) = q_n \mathbf{1}_{|V_n|}$ y $p_n = q_1 q_2 \cdots q_n$. A la sucesión $(q_n)_{n \geq 1}$ se la llamará *sucesión característica* del diagrama Toeplitz, y al sistema de Bratteli-Vershik asociado se le dirá *sistema Toeplitz*. Ha habido un poco de historia antes de llegar a esta definición de sistema Toeplitz, parte de la cual se narrará al comienzo de este capítulo.

El resto del capítulo presentará la versión adaptada del Teorema 3.13 para el caso Toeplitz, analizando posteriormente algunos elementos de la demostración. En este análisis aparecen algunas relaciones especiales, que se derivan del hecho de que se está trabajando con el caso particular de un diagrama Toeplitz de rango finito.

También se introducirá una familia de diagramas Toeplitz de rango finito, que se conocerán bajo el nombre de *esencialmente cíclicos*. Se mostrarán propiedades de esta familia, con la pretensión de que éstas permitirán entender un poco mejor lo que sucede con un diagrama Toeplitz, dada la ocurrencia de un valor propio no-continuo. Esta familia y sus resultados ayudarán a enunciar una caracterización, que se presentará al final, de los diagramas Toeplitz que poseen valores propios no-continuos.

Historia

En [JK69, § 3], K. Jacobs y M. Keane definen una familia de sucesiones quasi-periódicas, que denominan *sucesiones de Toeplitz*, esto por el parecido de su construcción con otra, hecha por O. Toeplitz en 1928 en el contexto de funciones quasi-periódicas (ver [Toe28, § 1]). K. Jacobs y M. Keane clasificaron sus denominadas sucesiones de Toeplitz en regulares y no-regulares, y obtuvieron que los sistemas asociados a sucesiones de Toeplitz regulares son únicamente ergódicos y con espectro discreto.

Anteriormente a la definición de K. Jacobs y M. Keane, se habían construido casos particulares de sucesiones de Toeplitz para mostrar algunas propiedades en sistemas topológicos minimales. Por nombrar algunas, está la sucesión construida por J. Oxtoby (ver [Oxt52, § 10]) para mostrar que existen sistemas minimales que no son únicamente ergódicos. Esta sucesión resulta ser Toeplitz no-regular, de acuerdo a la clasificación y resultados de K. Jacobs y M. Keane. Más adelante, por su parte, H. Furstenberg construye una sucesión para mostrar la existencia de sistemas minimales con entropía positiva (ver [Fur67, Teorema III.2]), que también encaja con la definición de K. Jacobs y M. Keane. Un resultado de N. Markley y M. Paul, mostrará que “lo más común” es que las sucesiones de Toeplitz no-regulares cumplan las dos condiciones mostradas por los ejemplos, esto es, que los sistemas asociados tengan entropía positiva sin ser únicamente ergódicos (ver [MP79, Teorema 6]).

Un pequeño salto se produjo después de la publicación de S. Williams, [Wil84]. En dicha publicación se aborda el tema de la cantidad de medidas ergódicas que se pueden asociar a una sucesión de Toeplitz (resultado que después se generaliza en [Dow91]). Al parecer, una de las cosas que permitió un avance importante fue una construcción que mostró S. Williams, de sucesiones de Toeplitz a partir de subshifts (ver [Wil84, § 4]). Esto ayudó en parte a A. Iwanik, y posteriormente a T. Downarowicz e Y. Lacroix, a poder avanzar en el estudio de los valores propios de los sistemas asociados a sucesiones de Toeplitz (ver [Iwa96] y [DL96]), concluyendo con el siguiente resultado:

Teorema 4.1 ([DL96] Teorema 4). *Sea G cualquier subgrupo de $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, que contenga una cantidad infinita de racionales. Entonces existe una sucesión de Toeplitz η , tal que su sistema (únicamente ergódico) asociado $(\overline{\text{Orb}(\eta)}, \sigma)$, con σ la transformación shift, tiene espectro discreto igual a G .*

La definición de diagrama de Toeplitz que se entrega en este documento, está motivada por la publicación de R. Gjerde y Ø. Johansen [GJ00], en donde aparecen definidos los diagramas con la propiedad de *igual número de caminos* (que llamamos acá simplemente diagramas Toeplitz), y el siguiente resultado asociado:

Teorema 4.2 ([GJ00] Teorema 8). *La familia de sistemas de Bratteli-Vershik expansivos, asociados a diagramas de Bratteli con la propiedad de igual número de caminos, coincide con la familia de sistemas generados por sucesiones Toeplitz, salvo conjugación.*

Caracterizar los sistemas asociados a sucesiones Toeplitz, por medio de diagramas de Bratteli, dió inmediatamente sus frutos. R. Gjerde y Ø. Johansen generalizaron un poco

más el resultado de T. Downarowicz en [Dow91], dando además una nueva demostración en términos conceptuales. También aumentaron el conocimiento sobre el factor maximal equicontinuo de un sistema construido a partir de una sucesión Toeplitz, y como éstos no son preservados bajo equivalencia de Kakutani, por nombrar algunas cosas.

Valores propios en el caso Toeplitz de rango finito

En el caso de sistemas Toeplitz de rango finito, X. Bressaud, F. Durand y A. Maass en [BDM10, § 7] concluyen que este tipo de sistemas tienen solamente valores propios racionales (resultado que muestra un cierto contraste con el de T. Downarowicz e Y. Lacroix). Específicamente se tiene:

Teorema 4.3 ([BDM10]). *Sea (X, T, μ) un sistema de Toeplitz, de rango finito uniforme d , con sucesión característica $(q_n)_{n \geq 1}$ y μ medida ergódica.*

- (1) *Si λ es valor propio de (X, T, μ) , entonces es racional, es decir, $\lambda = \exp(2\pi ip/q)$, para algún par de enteros p, q .*
- (2) *El complejo $\exp(2\pi ip/q)$ es valor propio continuo de (X, T, μ) si y sólo si $p/q = a/p_n$, para cierto enteros a y $n > 0$. Si (X, T, μ) es además linealmente recurrente, entonces todos sus valores propios son continuos.*
- (3) *Si $\exp(2\pi ip/q)$, con $(p, q) = 1$, es un valor propio no-continuo de (X, T, μ) , entonces la sucesión (eventualmente constante) $(q/(q, p_n))_{n \geq 1}$, está (eventualmente) acotada por d .*

En la misma publicación, se muestra un ejemplo de que existen sistemas Toeplitz de rango finito con valores propios no-continuos (ver [BDM10, § 7]), y por lo tanto este tipo de sistemas de Bratteli-Vershik, junto con los sistemas linealmente recurrentes y a diferencia de los sistemas estacionarios, presentan valores propios de los dos tipos, continuos y no-continuos.

4.2. Diagramas Toeplitz esencialmente cíclicos

El Teorema 4.3 entrega como condición necesaria para que $\exp(2\pi ip/q)$, para p y $q > 0$ enteros, sea valor propio no-continuo de un sistema de Bratteli-Vershik Toeplitz, de rango uniforme d , (X, T, μ) ; que $q/(q, p_n) \leq d$ para todo n suficientemente grande. Ahora la pregunta es, a la inversa, si dados d , $(q_n)_{n \geq 0}$ y un entero positivo q satisfaciendo esta desigualdad ¿es posible encontrar un diagrama Toeplitz de rango uniforme d y sucesión característica q_n , de modo que $\exp(2\pi i/q)$ es valor propio del sistema asociado? La respuesta, como se verá, es siempre afirmativa. Comenzaremos construyendo una familia de diagramas en donde se da esta situación.

4.2.1. Construcciones y definiciones

Sea q un entero positivo (el diagrama que construiremos quedará asociado a este entero q). Consideremos $q^* \in \{1, \dots, q-1\}$ y definamos $r = q/(q, q^*)$, que es estrictamente mayor que 1.

Consideremos ahora un entero $d \geq r$, un conjunto $W \subseteq \{1, 2, \dots, d\}$ tal que $\#W \geq r$, y una partición de W , $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r\}$, de cardinalidad r .

Asociemos a esta partición el grafo cíclico \mathfrak{G} , dado por la Figura 4.1.

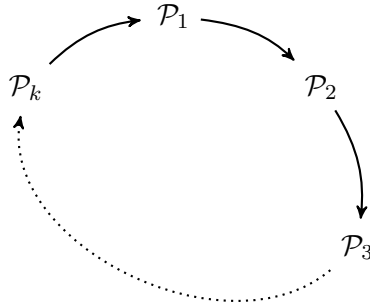


Figura 4.1: Grafo asociado a la partición $\{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r\}$ de W .

Sean $(q_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de enteros positivos, estrictamente creciente, y tal que $q_1 = 1$, $q_2 \equiv_q q^*$, y $q_n \equiv_r 1$ para $n > 2$.¹

Construyamos a continuación, para cada $n \geq 3$ y cada $k \in \{1, \dots, d\}$, una palabra $\alpha_k^{(n)}$ en W^* , de largo q_n , tal que se pueda leer en el grafo asociado a la partición, es decir, cualquier par de elementos de W consecutivos en $\alpha_k^{(n)}$, pertenecen a conjuntos consecutivos de \mathcal{P} con respecto al grafo. Además requeriremos que $\alpha_k^{(n)}$ comience con un elemento de \mathcal{P}_ℓ si $k \in \mathcal{P}_\ell$, es decir, $\alpha_k^{(n)}$ debe comenzar con un elemento de la misma partición a la que pertenezca k (notar que, por tanto, $\alpha_k^{(n)}$ está forzada a terminar en un elemento de la misma partición de W , pues $q_n \equiv_r 1$ para $n \geq 3$). Para $n < 3$, $\alpha_k^{(n)}$ podrá ser cualquier palabra en W^* , de largo q_n .

Con los elementos considerados anteriormente, estamos en condiciones de construir un diagrama de Bratteli propio de rango uniforme d . Para esto basta definir una sucesión de funciones de orden $(\theta_n)_{n \geq 1}$ (ver Proposición 1.17). Para cada $n \geq 1$, y cada $k \in \{1, \dots, d\}$, establecemos que $\theta_n(k) = \alpha_k^{(n)}$ excepto en, a lo más, b_n posiciones, donde $b_n \leq q_n$, para $n \geq 1$.

Observación 4.1. Notar que si $\theta_n(k)$ es exactamente igual a $\alpha_k^{(n)}$, para $n \geq 1$ y $1 \leq k \leq d$, el diagrama construido podría no ser necesariamente propio. La sucesión $(b_n)_{n \geq 1}$ permite modificar $\alpha_k^{(n)}$, de modo que el diagrama construido pueda serlo. Esto no quiere decir, en principio, que el espacio que deja dicha sucesión deba ser usado estrictamente con este fin.

¹Por su comodidad, se usará la expresión $a \equiv_n b$ para denotar la igualdad $a = b \pmod{n}$.

4.2. Diagramas Toeplitz esencialmente cíclicos

Definición 4.4. Un diagrama Toeplitz construido de la forma anterior, y tal que

$$\sum_{n \geq 1} b_n/q_n < \infty,$$

se llamará diagrama Toeplitz *esencialmente cíclico*. Si $d = r$, el diagrama esencialmente cíclico se dirá además *mínimo*.

Observación 4.2. Notar que, en el caso de un diagrama Toeplitz esencialmente cíclico mínimo, W está forzado a ser $\{1, \dots, d\}$, y \mathcal{P} está formado solamente por singletons.

Algunos ejemplos

Se presentarán tres ejemplos que serán además de utilidad para analizar algunas las propiedades básicas de los diagramas esencialmente cíclicos.

Primer Ejemplo (Este ejemplo se encuentra en [BDM10, Sec. 7]) Consideremos una sucesión creciente $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$, con $\ell_1 = 0$ y construimos la sucesión característica $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mediante la fórmula $q_n = 3^{\ell_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos las funciones de orden θ_n definidas de la siguiente manera, para $n \geq 2$, considerando t_n tal que $q_n = 2t_n - 3$,

$$\begin{aligned}\theta_n(1) &= (12)^{t_n-3}131 \\ \theta_n(2) &= 1(12)^{t_n-3}31 \\ \theta_n(3) &= (12)^{t_n-3}131.\end{aligned}$$

Este diagrama es esencialmente cíclico con parámetros $q = 2$, $q^* = 1$ (y por lo tanto $r = 2$) y grafo asociado dado por la Figura 4.2.



Figura 4.2: Grafo asociado al diagrama esencialmente cíclico del primer ejemplo.

Para esto basta chequear que eventualmente $b_n \leq 2$, y por lo tanto tenemos la convergencia de la serie $\sum b_n/q_n$. Como $r = 2 < 3 = d$, el diagrama no es mínimo.

Segundo ejemplo Consideramos un enteros arbitrarios $q, q^* \geq 1$ tales que $q/(q, q^*) = 2$, y una sucesión característica creciente y sumable $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cualquiera tal que $q_1 = 1$, $q_2 \equiv_q q^*$, y $q_n \equiv_4 1$, para $n > 2$. Para el siguiente diagrama de rango uniforme $d = 7$,

4.2. Diagramas Toeplitz esencialmente cíclicos

elegimos cualquier función de orden para los dos primeros niveles. Para $n > 2$, escribimos $q_n = 4c_n + 1$ y definimos la función de orden θ_n de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\theta_n(1) &= (12)^{2c_n-3}3456711 \\ \theta_n(2) &= 13456(12)^{2c_n-3}71 \\ \theta_n(3) &= 1(4353)^{c_n-1}2671 \\ \theta_n(4) &= 1(3435)^{c_n-1}2671 \\ \theta_n(5) &= 1(3534)^{c_n-1}2671 \\ \theta_n(6) &= 12345(6)^{2c_n-1}(7)^{2c_n-4}1 \\ \theta_n(7) &= 12345(6)^{2c_n-3}(7)^{2c_n-2}1\end{aligned}$$

Este diagrama es esencialmente cíclico asociado al grafo de la Figura 4.3, pues $b_n \leq 5$ para $n > 2$.

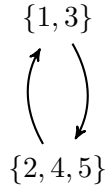


Figura 4.3: Grafo asociado al diagrama esencialmente cíclico del segundo ejemplo.

Acá se puede ver que el subconjunto distinguido $W = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ está estrictamente contenido en el conjunto de vértices. Este diagrama, al igual que el del primer ejemplo, no es mínimo.

Tercer ejemplo Comencemos considerando la siguiente sucesión característica $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $q_1 = 1, q_2 = 2 \cdot 5^2$ y $q_n = 5^{2n}$ para $n > 2$. Construyamos un diagrama de orden $d = 7$, de modo que θ_n , para $n > 2$ esté definido a partir de las siguientes igualdades (escribimos $q_n = 12\ell_n + 1$ en este caso):

$$\begin{aligned}\theta_n(1) &= (123)^{4\ell_n-2}1245671 \\ \theta_n(2) &= 1(312)^{4\ell_n-2}345671 \\ \theta_n(3) &= 1(123)^{4\ell_n-2}145671 \\ \theta_n(4) &= 1(647465)^{2\ell_n-1}237461 \\ \theta_n(5) &= 1(656574)^{2\ell_n-1}652361 \\ \theta_n(6) &= 16(646575)^{2\ell_n-1}72361 \\ \theta_n(7) &= 16(757564)^{2\ell_n-1}73261\end{aligned}$$

Este diagrama es esencialmente cíclico de manera múltiple.

4.2. Diagramas Toeplitz esencialmente cíclicos

Primero, es esencialmente cíclico con respecto a los parámetros $q = 6, q^* = 50$ ($r = 3$) y con grafo asociado dado por la Figura 4.4.

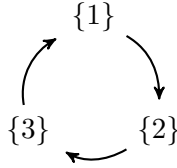


Figura 4.4: Grafo asociado al diagrama esencialmente cíclico del tercer ejemplo.

En efecto, este diagrama es esencialmente cíclico, ya que eventualmente $b_n \leq 6$. En este caso el conjunto distinguido es $W = \{1, 2, 3\}$.

Pero también es esencialmente cíclico con respecto a los parámetros $q = 4, q^* = 50$ ($r = 2$), con grafo asociado dado por la Figura 4.5.

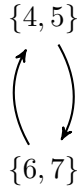


Figura 4.5: Grafo asociado al diagrama esencialmente cíclico del tercer ejemplo, cuando se ve como esencialmente cíclico de otra manera.

También se tiene que eventualmente $b_n \leq 6$, y el respectivo conjunto distinguido es $W = \{4, 5, 6, 7\}$.

4.2.2. Medidas invariantes en diagramas esencialmente cíclicos

Además de las características usuales de las medidas asociadas a diagramas de rango finito, se mostrarán algunas particularidades que presentan los diagramas esencialmente cíclicos.

Proposición 4.5. *Sea B un diagrama esencialmente cíclico, con subconjunto distinguido W , y sea D el subdiagrama asociado a W . Entonces toda medida finita invariante en D extiende a una medida finita invariante en B .*

Demostración. Consideraremos la sucesión creciente de subconjuntos de X , $(X^{(k)})_{k \geq 0}$ descrita en la sección 2.3, referente a las medidas en un diagrama de Bratteli, y por supuesto al subconjunto $X^{(\infty)}$.

4.2. Diagramas Toeplitz esencialmente cíclicos

Sea μ una medida invariante finita en D (y por lo tanto en $X^{(0)}$), y $\widehat{\mu}$ a su extensión a X . Recordar que se tiene

$$\widehat{\mu}(X) = \widehat{\mu}(X^{(\infty)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^{(n)}(X^{(n)}).$$

Donde $\mu^{(n)}$ es la extensión de μ al conjunto $X^{(n)}$, para cada $n \geq 1$.

En la sección citada, se establece que la extensión $\widehat{\mu}$ es una medida invariante en X , por lo tanto sólo falta probar que esta extensión es finita.

Desde ahora en adelante los elementos asociados al conjunto $X^{(k)}$ y/o al diagrama que lo genera, para un cierto $k \geq 0$, se distinguirán colocándoles un superíndice (k).

Dado un elemento $t \in W$ y $n \geq 1$, consideremos un camino cualquiera en $X^{(0)}$ desde el nivel 0 hasta el nivel n , que termine en t , digamos $\alpha_t^{(n)}$. Es decir, $\alpha_t^{(n)} \in E_{0,n}^{(0)}$ es tal que $f(\alpha_t^{(n)}) = t$. Se tiene

$$\begin{aligned} \mu^{(n)}(X^{(n)}) &= \sum_{t \in W} h_n^{(n)}(t) \mu^{(n)}([\alpha_t^{(n)}]) \\ &= \sum_{t \in W} h_n^{(n)}(t) \mu([\alpha_t^{(n)}]) \\ &= \sum_{t \in W} \frac{p_n}{h_n^{(0)}(t)} \mu \{ \tau_n^{(0)} = t \} \\ &\leq \mu(X^{(0)}) \frac{p_n}{\min_t h_n^{(0)}(t)}. \end{aligned}$$

Por otra parte, se tiene para cada $n \geq 2$ y $t_0 \in W$.

$$\begin{aligned} h_n^{(0)}(t_0) &= \sum_{t \in W} M_{t_0 t}^{(0)}(n) h_{n-1}^{(0)}(t) \\ &\geq \min_t h_{n-1}^{(0)}(t) \sum_{t \in W} M_{t_0 t}^{(0)}(n) \\ &\geq \min_t h_{n-1}^{(0)}(t) \sum_{t \in W} (q_n - b_n), \end{aligned}$$

donde la última desigualdad es consecuencia directa de la construcción del diagrama. Considerando N tal que $(q_n - b_n) > 0$ para todo $n > N$, se tiene a partir de lo anterior que, para $n > N$

$$\min_t h_n^{(0)}(t) \geq \min_t h_N^{(0)}(t) \prod_{k=N+1}^n (q_k - b_k),$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \mu^{(n)}(X^{(n)}) &\leq \mu(X^{(0)}) \frac{p_N}{\min_t h_N^{(0)}(t)} \prod_{k=N+1}^n \left(\frac{q_k}{q_k - b_k} \right) \\ &\leq \mu(X^{(0)}) \frac{p_N}{\min_t h_N^{(0)}(t)} \prod_{k=N+1}^{\infty} \left(1 + \frac{b_k}{q_k - b_k} \right) \\ &\leq \mu(X^{(0)}) \frac{p_N}{\min_t h_N^{(0)}(t)} \exp \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{b_k}{q_k - b_k} \right). \end{aligned}$$

4.2. Diagramas Toeplitz esencialmente cíclicos

Como la convergencia de $\sum b_k/(q_k - b_k)$ se sigue de la convergencia de $\sum b_k/q_k$, entonces podemos concluir que $\widehat{\mu}(X) < \infty$. \square

Observación 4.3. Como veremos en algunos ejemplos más adelante, en D podrían haber varias medidas ergódicas finitas, y todas ellas extienden a medidas finitas en B . El Teorema 2.12 implica que hay algunas medidas ergódicas de probabilidad μ en B , tal que I_μ está contenido en W . Nos referiremos a estas medidas ergódicas como *intrínsecas* al diagrama esencialmente cíclico.

Proposición 4.6. *Sea ν una medida del diagrama esencialmente cíclico B no intrínseca (es decir, $I_\nu \not\subseteq W$). Entonces $I_\nu \cap W = \emptyset$.*

Demostración. Notar que, por Teorema 2.12, I_ν es disjunto de cualquier medida intrínseca del diagrama, pero eso no implica directamente que sea disjunto de W (la colección de conjuntos I_μ , con μ intrínseca, no forman necesariamente una partición de W).

Para demostrar la proposición primero se demostrará la siguiente afirmación:

$$\forall m > n \geq 1 \forall t_0 \in W, t_1 \notin W \quad \frac{p_n}{p_m} M_{t_0 t_1}(n, m) \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{db_k}{q_k}. \quad (4.2.1)$$

En efecto, dado $n \geq 1$, podemos probar la desigualdad por inducción sobre $m > n$. Para $m = n + 1$ se tiene la desigualdad de manera directa. Hagamos ahora el paso inductivo desde m a $m + 1$.

$$\begin{aligned} \frac{p_n}{p_{m+1}} M_{t_0 t_1}(n, m+1) &= \frac{p_n}{p_{m+1}} \sum_{t=1}^d M_{t_0 t}(m+1) M_{t t_1}(n, m) \\ &= \sum_{t \in W} \frac{M_{t_0 t}(m+1)}{q_{m+1}} \frac{p_n}{p_m} M_{t t_1}(n, m) + \sum_{t \notin W} \frac{p_m}{p_{m+1}} M_{t_0 t}(m+1) \frac{M_{t t_1}(n, m)}{q_{n+1} \cdots q_m} \\ &\leq \sum_{k=n+1}^m \frac{db_k}{q_k} + d \frac{b_{m+1}}{q_{m+1}}. \end{aligned}$$

Habiendo demostrado esto, supongamos al contrario que $I_\nu \cap W \neq \emptyset$. Tomemos t_0 en la intersección, y $t_1 \in I_\nu \setminus W$ (debe existir un t_1 ya que estamos suponiendo que ν no es intrínseca al diagrama esencialmente cíclico B). Entonces tendríamos, usando el Lema 2.18, que para cada $n \geq 1$, hay un $m > n$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\nu \{\tau_n = t_1\}}{2} &\leq \frac{p_n}{p_m} M_{t_0 t_1}(n, m) \\ &\leq \sum_{k=n+1}^m db_k/q_k \leq d \sum_{k>n} b_k/q_k, \end{aligned}$$

con lo cual $\nu \{\tau_n = t_1\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, que es una contradicción. \square

Otro resultado interesante es el siguiente:

4.2. Diagramas Toeplitz esencialmente cíclicos

Proposición 4.7. *Sea B un diagrama esencialmente cíclico con conjunto distinguido W y partición asociada*

$$\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_r\}.$$

Si μ es una medida intrínseca de B , entonces para todo $1 \leq k \leq r$

$$I_\mu \cap \mathcal{P}_k \neq \emptyset,$$

y por lo tanto $\#I_\mu \geq r$.

Demostración. Sea $t_0 \in I_\mu$ y $1 \leq k \leq r$. En la palabra $\theta_{n+1}(t_0)$ se sigue el ciclo asociado al diagrama en exactamente $q_{n+1} - b_{n+1}$ posiciones. De esto se puede inducir directamente

$$\frac{q_{n+1} - b_{n+1}}{r} - 1 < \sum_{t \in \mathcal{P}_k} M_{t_0 t}(n+1) < \frac{q_{n+1} - b_{n+1}}{r} + 1,$$

por lo tanto,

$$\sum_{n \geq 1} \left| \sum_{t \in \mathcal{P}_k} \frac{M_{t_0 t}(n+1)}{q_{n+1}} - \frac{1}{r} \right| \leq \sum_{n \geq 1} \frac{b_{n+1} + r}{q_{n+1}} < \infty. \quad (4.2.2)$$

En particular,

$$\sum_{t \in \mathcal{P}_k} \frac{M_{t_0 t}(n+1)}{q_{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r}. \quad (4.2.3)$$

Si ahora existiera un k_0 tal que $I_\mu \cap \mathcal{P}_{k_0} = \emptyset$, entonces por el Lema 2.18(1), se tiene para todo $t \in \mathcal{P}_{k_0}$

$$\frac{M_{t_0 t}(n+1)}{q_{n+1}} = \frac{p_n}{p_{n+1}} M_{t_0 t}(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

lo cual es contradictorio con (4.2.3), pues dicha ecuación se cumple para todo $k = 1, 2, \dots, r$. Esta contradicción demuestra la proposición. \square

De esto se siguen dos corolarios directos.

Corolario 4.8. *Si B es un diagrama esencialmente cíclico con conjunto distinguido W , entonces la cantidad de medidas intrínsecas no puede ser mayor que $\lfloor \#W/r \rfloor$.*

Corolario 4.9. *Si B es un diagrama esencialmente cíclico mínimo, entonces posee una sola medida invariante de probabilidad, y por lo tanto el sistema asociado es únicamente ergódico.*

Demostración. Por la Proposición 4.7, y como el diagrama es mínimo, se tiene para cada medida intrínseca μ

$$d = r \leq \#I_\mu \leq d.$$

Es decir $\#I_\mu = d$, y por Teorema 2.12, el diagrama tiene una sola medida invariante de probabilidad. \square

Ejemplos de la sección 4.2.1

Se analizarán las medidas asociadas a los tres ejemplos de la sección 4.2.1. En cada caso se harán las afirmaciones correspondientes en primer lugar, para luego dar las justificaciones.

Primer ejemplo En este caso, se puede afirmar que el diagrama posee una única medida de probabilidad μ , la cual evidentemente resulta ser intrínseca. Para esta medida, se tiene que $I_\mu = \{1, 2\}$. Al igual que en el ejemplo de la sección 2.4, este diagrama muestra que el recíproco del Corolario 2.14 no es cierto, y también muestra que la colección de conjuntos de vértices I_ν , donde ν toma valores en las medidas ergódicas del sistema, no necesariamente forman una partición del conjunto de vértices.

A continuación se procederá a dar una justificación de la afirmación dada.

Sea ν una medida invariante del diagrama del primer ejemplo de la sección 4.2.1. Para $t = 3$ se tiene la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} \nu \{ \tau_n = 3 \} &= \sum_{t=1}^3 \frac{M_{t3}(n+1)}{q_{n+1}} \nu \{ \tau_{n+1} = t \} \\ &= \frac{1}{q_{n+1}} \sum_{t=1}^3 \nu \{ \tau_{n+1} = t \} \\ &= \frac{1}{q_{n+1}}, \end{aligned}$$

la cual muestra que $\sum_{n \geq 1} \nu \{ \tau_n = 3 \} < \infty$.

Para $t = 3$ procedemos de manera análoga:

$$\begin{aligned} \nu \{ \tau_n = 1 \} &= \sum_{t=1}^3 \frac{M_{t1}(n+1)}{q_{n+1}} \nu \{ \tau_{n+1} = t \} \\ &= \frac{t_{n+1} - 1}{q_{n+1}} \sum_{t=1}^3 \nu \{ \tau_{n+1} = t \} \\ &= \frac{t_{n+1} - 1}{q_{n+1}}, \end{aligned}$$

lo cual implica que $\nu \{ \tau_n = 1 \} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1/2$, por la definición de la sucesión $(t_n)_{n \geq 1}$. Aplicando el mismo procedimiento se tiene que $\nu \{ \tau_n = 2 \} = (t_{n+1} - 3)/q_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1/2$.

La única manera de que esto sea compatible con el Teorema 2.12, es que exista una única medida ergódica de probabilidad para este diagrama.

Segundo ejemplo Este diagrama, que llamaremos B , posee tres medidas ergódicas de probabilidad, que denotaremos por μ, ν y v . Se tiene que $I_\mu = \{1, 2\}$, $I_\nu = \{3, 4, 5\}$ y $I_v = \{6, 7\}$. Estos conjuntos forman, en este caso, una partición del conjunto de vértices.

4.2. Diagramas Toeplitz esencialmente cíclicos

Las medidas μ y ν son intrínsecas, y sus respectivos conjuntos forman una partición del conjunto distinguido W .

Para justificar estas afirmaciones, consideramos el subdiagrama donde se consideran sólo vértices en W en cada nivel $n \geq 1$. No es claro el número de medidas ergódicas de probabilidad que posee, o al menos no tan claro como en el primer ejemplo.

Lo que haremos es notar que este diagrama es esencialmente cíclico con respecto a otros parámetros. Por ejemplo, el diagrama es esencialmente cíclico para el conjunto distinguido $\{1, 2\}$, con los mismos valores de q y q^* y grafo asociado de acuerdo a la Figura 4.6. Se puede ver específicamente que en este caso $b_n \leq 7$, para $n > 2$. Sea D_1

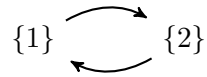


Figura 4.6: Grafo asociado al diagrama esencialmente cíclico del segundo ejemplo, una alternativa para analizar sus medidas.

el subdiagrama correspondiente al conjunto distinguido $\{1, 2\}$. Para $n > 2$ sus funciones de orden ϑ_n están dadas por

$$\begin{aligned}\vartheta_n(1) &= (12)^{2c_n-3}11 \\ \vartheta_n(2) &= 1(12)^{2c_n-3}1.\end{aligned}$$

Para cada $n > 2$, y medida invariante de probabilidad $\bar{\mu}$ en D_1 se tiene

$$\begin{aligned}\bar{\mu}\{\tau_n = 1\} &= \frac{2c_{n+1} - 1}{q_{n+1}}\bar{\mu}\{\tau_{n+1} = 1\} + \frac{2c_{n+1} - 1}{q_{n+1}}\bar{\mu}\{\tau_{n+1} = 2\} \\ &= \frac{2c_{n+1} - 1}{q_{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}, \\ \bar{\mu}\{\tau_n = 2\} &= \frac{2c_{n+1} - 3}{q_{n+1}}\bar{\mu}\{\tau_{n+1} = 1\} + \frac{2c_{n+1} - 3}{q_{n+1}}\bar{\mu}\{\tau_{n+1} = 2\} \\ &= \frac{2c_{n+1} - 3}{q_{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2},\end{aligned}$$

y por lo tanto, al igual que en el primer ejemplo, del Teorema 2.12 se deduce que $\bar{\mu}$ es la única medida de probabilidad. La Proposición 4.5 asegura que su extensión al diagrama completo es finita. Si llamamos μ a la normalización de esta extensión, se tiene que μ es una medida ergódica de probabilidad del sistema asociado al diagrama B .

Por otra parte, se puede ver que el diagrama es esencialmente cíclico con respecto al conjunto distinguido $\{3, 4, 5\}$, con los mismos valores para q y q^* y el grafo asociado de la Figura 4.7. Específicamente, se ve que $b_n \leq 5$ en este caso, para $n > 2$. Si llamamos D_2 al subdiagrama correspondiente a los vértices $\{3, 4, 5\}$, se tienen las siguientes funciones de orden para D_2

$$\begin{aligned}\vartheta_n(3) &= (4353)^{c_n-1} \\ \vartheta_n(4) &= (3435)^{c_n-1} \\ \vartheta_n(5) &= (3534)^{c_n-1},\end{aligned}$$

4.2. Diagramas Toeplitz esencialmente cíclicos

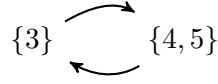


Figura 4.7: Grafo asociado al diagrama esencialmente cíclico del segundo ejemplo, otra alternativa para analizar sus medidas.

para $n > 2$. Se ve que este diagrama no es propio, pero si consideramos para él una medida invariante de probabilidad $\bar{\nu}$, se tiene

$$\begin{aligned}\bar{\nu}\{\tau_n = 3\} &= \frac{2c_{n+1} - 2}{q_{n+1}}\bar{\nu}\{\tau_{n+1} = 3\} + \frac{2c_{n+1} - 2}{q_{n+1}}\bar{\nu}\{\tau_{n+1} = 4\} + \frac{2c_{n+1} - 2}{q_{n+1}}\bar{\nu}\{\tau_{n+1} = 5\} \\ &= \frac{2c_{n+1} - 2}{q_{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}, \\ \bar{\nu}\{\tau_n = 4\} &= \frac{c_{n+1} - 1}{q_{n+1}}\bar{\nu}\{\tau_{n+1} = 3\} + \frac{c_{n+1} - 1}{q_{n+1}}\bar{\nu}\{\tau_{n+1} = 4\} + \frac{c_{n+1} - 1}{q_{n+1}}\bar{\nu}\{\tau_{n+1} = 5\} \\ &= \frac{c_{n+1} - 1}{q_{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4}, \\ \bar{\nu}\{\tau_n = 5\} &= \frac{c_{n+1} - 1}{q_{n+1}}\bar{\nu}\{\tau_{n+1} = 3\} + \frac{c_{n+1} - 1}{q_{n+1}}\bar{\nu}\{\tau_{n+1} = 4\} + \frac{c_{n+1} - 1}{q_{n+1}}\bar{\nu}\{\tau_{n+1} = 5\} \\ &= \frac{c_{n+1} - 1}{q_{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4},\end{aligned}$$

para $n > 2$. Se ve, al igual que más arriba, que $\bar{\nu}$ es la única medida de probabilidad del diagrama D_2 , y que extiende a una medida finita del diagrama B . Del mismo modo, se concluye que la normalización de esta extensión de $\bar{\nu}$, que llamaremos ν , es una medida de probabilidad del diagrama B , diferente de μ (los soportes de ambas medidas son disjuntos).

Ambas medidas μ y ν , son intrínsecas al diagrama esencialmente cíclico (de la manera como había sido considerado originalmente). Y son las únicas medidas intrínsecas pues forman una partición de W . Se había afirmado que el sistema posee además otra medida de probabilidad ν , que no es intrínseca y que tiene su soporte en los caminos que eventualmente pasan solamente por el sexto o el séptimo vértice. Una manera de ver esto es la siguiente: el diagrama B posee las mismas medidas invariantes que un cierto diagrama dado por las funciones de orden θ'_n , con $\theta'_1 = \theta_1$ y $\theta'_2 = \theta_2$ (igual a la función de orden original del primer y segundo nivel de B), y para $n > 2$

$$\begin{aligned}\theta'_n(1) &= (12)^{2c_n-3}3456711 \\ \theta'_n(2) &= 13456(12)^{2c_n-3}71 \\ \theta'_n(3) &= 1(4353)^{c_n-1}2671 \\ \theta'_n(4) &= 1(3435)^{c_n-1}2671 \\ \theta'_n(5) &= 1(3534)^{c_n-1}2671 \\ \theta'_n(6) &= 12345666(67)^{2c_n-4}1 \\ \theta'_n(7) &= 12345(67)^{2c_n-3}71.\end{aligned}$$

4.2. Diagramas Toeplitz esencialmente cíclicos

Esto, por la definición de medida invariante dada en la sección 2.1, ya que este diagrama, que llamaremos B' , difiere de B solamente en el orden. Considerando este orden nuevo, se puede ver que B' es esencialmente cíclico, por ejemplo, de conjunto distinguido $\{6, 7\}$ y grafo según la Figura 4.8. Específicamente se puede ver que $b_n \leq 8$ para este caso.

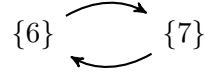


Figura 4.8: Grafo asociado a una variación del diagrama esencialmente cíclico del segundo ejemplo, con el objetivo para analizar sus medidas.

El subdiagrama, que llamaremos D_3 , que considera solamente vértices en este conjunto distinguido $\{6, 7\}$ tiene las siguientes funciones de orden ϑ_n , para $n > 2$

$$\begin{aligned}\vartheta_n(6) &= 666(67)^{2c_n-4} \\ \vartheta_n(7) &= (67)^{2c_n-3}7.\end{aligned}$$

Al igual que más arriba, si se toma una medida invariante $\bar{\nu}$ de probabilidad, entonces para $n > 2$

$$\begin{aligned}\bar{\nu} \{ \tau_n = 6 \} &= \frac{2c_{n+1} - 1}{q_{n+1}} \bar{\nu} \{ \tau_{n+1} = 6 \} + \frac{2c_{n+1} - 3}{q_{n+1}} \bar{\nu} \{ \tau_{n+1} = 7 \} \\ \bar{\nu} \{ \tau_n = 7 \} &= \frac{2c_{n+1} - 4}{q_{n+1}} \bar{\nu} \{ \tau_{n+1} = 6 \} + \frac{2c_{n+1} - 3}{q_{n+1}} \bar{\nu} \{ \tau_{n+1} = 7 \},\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{2c_{n+1} - 3}{q_{n+1}} &\leq \bar{\nu} \{ \tau_n = 6 \} \leq \frac{2c_{n+1} - 1}{q_{n+1}} \\ \frac{2c_{n+1} - 4}{q_{n+1}} &\leq \bar{\nu} \{ \tau_n = 7 \} \leq \frac{2c_{n+1} - 3}{q_{n+1}},\end{aligned}$$

es decir, tanto $\bar{\nu} \{ \tau_n = 6 \}$ como $\bar{\nu} \{ \tau_n = 7 \}$ convergen a $1/2$ cuando $n \rightarrow \infty$. Nuevamente, al igual que más arriba, se concluye que $\bar{\nu}$ es la única medida invariante de probabilidad de D_3 , y que extiende a una medida invariante finita del diagrama B' (y por lo tanto de B). La normalización de esta extensión, a la que llamaremos ν , es una medida de probabilidad del diagrama B diferente de μ y a ν .

Invocando el Teorema 2.12, podemos concluir que éstas son todas las medidas invariantes de probabilidad ergódicas del sistema asociado al diagrama B .

Observación 4.4. Este ejemplo sirve para analizar las hipótesis del Corolario 2.14. Consideremos la medida invariante de probabilidad $\mu^* = (\mu + \nu + \nu)/3$ en el diagrama B . Se puede ver que eventualmente, para todo $1 \leq t \leq 7$, $\mu^* \{ \tau_n = t \} \geq 0$, pues por ejemplo, μ cumple esta propiedad (por “extender” $\bar{\mu}$) para $t \in I_\mu$, y lo mismo para el resto de las medidas ergódicas de probabilidad del diagrama.

4.2. Diagramas Toeplitz esencialmente cíclicos

Esto muestra que si la hipótesis del corolario sobre la medida fuera sólo que ésta es invariante, no se tiene el resultado. Este ejemplo muestra una medida invariante que cumple con el resto de las condiciones, pero el sistema asociado no es únicamente ergódico.

Tercer ejemplo De la misma manera que para los ejemplos anteriores, para este ejemplo se probará que el diagrama tiene dos medidas ergódicas de probabilidad, digamos μ y ν , con $I_\mu = \{1, 2, 3\}$ e $I_\nu = \{4, 5, 6, 7\}$.

Para ver esto, basta ver el diagrama como esencialmente cíclico de las dos maneras en las que se había hecho en la sección 4.2.1. En la primera manera, el subdiagrama correspondiente al conjunto distinguido $\{1, 2, 3\}$, digamos D_1 , tiene funciones de orden ϑ_n , para $n > 2$, como sigue

$$\begin{aligned}\vartheta_n(1) &= (123)^{4\ell_n-2}121 \\ \vartheta_n(2) &= 1(321)^{4\ell_n-2}31 \\ \vartheta_n(3) &= 1(123)^{4\ell_n-2}11.\end{aligned}$$

Este diagrama es propio, y se puede ver sin mayor dificultad, de manera análoga a los ejemplos anteriores que, si consideramos cualquier medida invariante de probabilidad $\bar{\mu}$ para D_1 , entonces se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\mu} \{\tau_n = 1\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\mu} \{\tau_n = 2\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\mu} \{\tau_n = 3\} = 1/3,$$

y por lo tanto, $\bar{\mu}$ es la única medida invariante de probabilidad del diagrama D_1 . Esta, como ya se sabe gracias a la Proposición 4.5, extiende de manera finita a una medida invariante en B , cuya normalización, que llamaremos μ , es una medida invariante de probabilidad ergódica del sistema asociado a B .

En la segunda manera vista en la sección 4.2.1, el subdiagrama correspondiente al conjunto distinguido $\{4, 5, 6, 7\}$, digamos D_2 , tiene funciones de orden ϑ_n , para $n > 2$ como sigue

$$\begin{aligned}\vartheta_n(4) &= (647465)^{2\ell_n-1}746 \\ \vartheta_n(5) &= (656574)^{2\ell_n-1}656 \\ \vartheta_n(6) &= 6(646575)^{2\ell_n-1}76 \\ \vartheta_n(7) &= 6(757564)^{2\ell_n-1}76.\end{aligned}$$

Este diagrama también es propio, y se puede ver que, si se toma una medida invariante de probabilidad $\bar{\nu}$ en D_2 , se tiene, por ejemplo,

$$\frac{2\ell_{n+1}}{q_{n+1}} \leq \bar{\nu} \{\tau_n = 6\} \leq \frac{4\ell_{n+1}}{q_{n+1}},$$

y por lo tanto $\liminf_{n \rightarrow \infty} \bar{\nu} \{\tau_n = 6\} \geq 1/6$. No es difícil ver que ésta es la misma situación para el resto de los vértices.

El Teorema 2.12 implica que $\bar{\nu}$ es, por tanto, la única medida invariante de probabilidad del diagrama D_2 . Nuevamente, la Proposición 4.5 implica que esta medida se extiende a una medida finita del diagrama B , cuya normalización, que llamaremos ν , es una medida ergódica de probabilidad del sistema asociado a B , y diferente de μ .

4.2.3. Algunas propiedades interesantes

En este punto se analizarán un poco más en detalle los diagramas esencialmente cíclicos, con miras a ponderar mejor su importancia dentro de los diagramas Toeplitz.

La función κ

Se construirá a continuación una función que relaciona, de manera natural, el grafo cíclico \mathcal{G} de un diagrama esencialmente cíclico, con los vértices de este último. Primero consideremos la función $\eta : V_{\mathcal{G}} \rightarrow V_{\mathcal{G}}$, que entrega a cada vértice del grafo, el vértice anterior. Recordar que $V_{\mathcal{G}}$ es precisamente la partición $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r\}$ asociada al diagrama esencialmente cíclico.

Definición 4.10. Sean t_1, t_2 dos vértices de un diagrama esencialmente cíclico B , pertenecientes al subconjunto distinguido W . Supongamos que $t_1 \in \eta^\ell(\mathcal{P}_1)$ y $t_2 \in \eta^{-k}(\mathcal{P}_1)$, para ciertos enteros k, ℓ . Definimos, para este caso, $\kappa(t_1, t_2) :=_r k + \ell$. En caso de que $(t_1, t_2) \notin W \times W$, establecemos $\kappa(t_1, t_2) = 0$.

Observación 4.5. Notar que para pares de vértices $(t_1, t_2) \in W \times W$, la función κ permite decidir cuando t_1 aparece en la “posición correcta” de la palabra $\theta_n(t_2)$, con $n > 2$. En efecto, digamos que $t_1 \in \eta^\ell(\mathcal{P}_1)$ y $t_2 \in \eta^{-k}(\mathcal{P}_1)$, para ciertos enteros k, ℓ . Entonces la palabra $\theta_n(t_2)$ debería terminar en un elemento de $\eta^{-k}(\mathcal{P}_1)$, por tener largo congruente a 1, módulo r . Los elementos de $\eta^\ell(\mathcal{P}_1)$ que aparezcan en $\theta_n(t_2)$, por tanto, deberían estar a $k + \ell$ posiciones del final de la palabra, módulo r .

Podemos aprovechar la función κ para ampliar la definición de “aparecer en la posición correcta”.

Definición 4.11. Sean t_1, t_2 dos vértices en W , y dos niveles $m > n > 2$. Supongamos que t_1 aparece en la posición j -ésima de la palabra $\theta_{n,m}(t_2)$. Diremos que esta posición es correcta si

$$Q_{n,m} - j \equiv_r \kappa(t_1, t_2).$$

Notar que en el caso de la palabra $\theta_n(t_2)$, el total de posiciones correctas ocupadas por elementos de W es exactamente $q_n - b_n$.

Caracterización por medio de κ

La función $\kappa : \{1, \dots, d\}^2 \rightarrow \{0, \dots, r - 1\}$ y sus propiedades permiten caracterizar a los diagramas esencialmente cíclicos, desde un cierto punto de vista. Comencemos con algunos lemas técnicos.

Lema 4.12. Sean t_1, t_2 y t_3 tres vértices en W . Entonces se tiene

$$\kappa(t_1, t_3) \equiv_r \kappa(t_1, t_2) + \kappa(t_2, t_3).$$

4.2. Diagramas Toeplitz esencialmente cíclicos

Demostración. Supongamos que $t_1 \in \eta^{k_1}(\mathcal{P}_1)$, $t_2 \in \eta^{k_2}(\mathcal{P}_1)$ y $t_3 \in \eta^{k_3}(\mathcal{P}_1)$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned}\kappa(t_1, t_3) &\equiv_r k_1 - k_3 \\ \kappa(t_1, t_2) &\equiv_r k_1 - k_2 \\ \kappa(t_2, t_3) &\equiv_r k_2 - k_3,\end{aligned}$$

con lo cual se tiene la igualdad buscada. \square

Lema 4.13. *Sea $t_0 \in \mathcal{P}_i \subseteq W$, para un cierto $1 \leq i \leq r$. Para $m > n > 2$, la palabra $\theta_{n,m}(t_0) \in V_n^*$, de largo $Q_{n,m}$, se lee en el grafo cíclico \mathcal{G} , comenzando por un elemento de \mathcal{P}_i , excepto en una cierta cantidad de posiciones que denotaremos por $b_{n,m}(t_0)$. Se tiene que*

$$\frac{b_{n,m}(t_0)}{Q_{n,m}} \leq \frac{b_{n+1}}{q_{n+1}} + \frac{b_{n+2}}{q_{n+2}} + \dots + \frac{b_m}{q_m}.$$

Demostración. Sea $n > 2$, la demostración se hará por inducción sobre $m > n$.

Para $m = n + 1$ es cierto por definición. Consideremos ahora $m > n$ cualquiera y asumamos que la condición es cierta para este entero m y para todo $t \in W$.

Tomemos $t_1, t_2 \in W$, y supongamos que t_1 está en la posición j_1 -ésima de $\theta_{n,m}(t_2)$, mientras que t_2 está en la posición j_2 -ésima de $\theta_{m+1}(t_0)$. Esto implica que t_1 está en la posición $(j_2 - 1)Q_{n,m} + j_1$ de $\theta_{n,m+1}(t_0)$. Si

$$\begin{aligned}q_{m+1} - j_2 &\equiv_r \kappa(t_2, t_0) \\ Q_{n,m} - j_1 &\equiv_r \kappa(t_1, t_2),\end{aligned}$$

es decir, las posiciones respectivas de t_1 y t_2 son correctas en las respectivas palabras mencionadas. Entonces

$$\begin{aligned}Q_{n,m+1} - [(j_2 - 1)Q_{n,m} + j_1] &\equiv_r 2 - j_1 - j_2 \\ &\equiv_r [Q_{n,m} - j_1] + [q_{m+1} - j_2] \\ &\equiv_r \kappa(t_1, t_2) + \kappa(t_2, t_0) \\ &\equiv_r \kappa(t_1, t_0).\end{aligned}$$

Esto implica que la respectiva posición de t_1 en $\theta_{n,m+1}(t_0)$ es correcta también.

El total de posiciones correctas en $\theta_{n,m+1}(t_0)$, es $Q_{n,m+1} - b_{n,m+1}(t_0)$. El precedente análisis permite hacer un conteo multiplicativo, del cual se infiere

$$\begin{aligned}Q_{n,m+1} - b_{n,m+1}(t_0) &\geq [q_{m+1} - b_{m+1}] \left[Q_{n,m} - \max_{t \in W} b_{n,m}(t) \right] \\ &\geq Q_{n,m+1} - b_{m+1} Q_{n,m} - q_{m+1} \max_{t \in W} b_{n,m}(t).\end{aligned}$$

Esto a su vez implica

$$\frac{b_{n,m+1}(t_0)}{Q_{n,m+1}} \leq \frac{\max_{t \in W} b_{n,m}(t)}{Q_{n,m}} + \frac{b_{m+1}}{q_{m+1}},$$

expresión de la cual, al aplicarle la hipótesis inductiva, obtenemos el resultado esperado. \square

4.2. Diagramas Toeplitz esencialmente cíclicos

Corolario 4.14. *Sea B un diagrama esencialmente cíclico con subconjunto distinguido de vértices W , parámetros q y \bar{q} , partición \mathcal{P} y r -ciclo asociado \mathcal{G} . Cualquier contracción de B sigue siendo un diagrama esencialmente cíclico, que posee estos mismos elementos asociados.*

Demostración. Para esto hay que notar que para cada $t_0 \in W$, $\kappa(t_0, t_0) = 0$, y por lo tanto si tomamos niveles $m > n > 2$, la palabra $\theta_{n,m}(t_0)$ se lee en el mismo grafo cíclico \mathcal{G} , comenzando por un elemento de \mathcal{P} al cual pertenece t_0 , excepto en $b_{n,m}(t_0)$ posiciones.

Si consideramos una sucesión creciente $(n_k)_{k \geq 1}$, con $n_1 = 1$, entonces $Q_{n_1, n_2} \equiv_r \bar{q}$, $Q_{n_k, n_{k+1}} \equiv_r 1$, y

$$\sum_{k \geq 1} \frac{\max_{t \in W} b_{n_k, n_{k+1}}}{Q_{n_k, n_{k+1}}} \leq \sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{q_n} < \infty.$$

Con esto está demostrado lo que se quería probar. \square

Lema 4.15. *Sea B un diagrama esencialmente cíclico y μ una medida intrínseca (invariante de probabilidad). Entonces para μ -casi todo $x \in X$, existe un entero positivo N , de modo que para $n > N$*

$$\bar{s}_n(x) \equiv_r \kappa(\tau_{n-1}(x), \tau_n(x)).$$

Demostración. Denotemos por \mathcal{C}_n al siguiente conjunto

$$\{\bar{s}_n \not\equiv_r \kappa(\tau_{n-1}, \tau_n), \tau_n \in W\} \cup \{\tau_n \notin W\}.$$

Se puede ver que

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{C}_n) &\leq \sum_{t \in W} \frac{b_n}{q_n} \mu\{\tau_n = t\} + \sum_{t \notin W} \mu\{\tau_n = t\} \\ &\leq \frac{b_n}{q_n} + \sum_{t \notin W} \mu\{\tau_n = t\}, \end{aligned}$$

y por lo tanto $\sum_{n \geq 1} \mu(\mathcal{C}_n) < \infty$. Si definimos $\mathcal{C} = \limsup_n \mathcal{C}_n$, tenemos que $\mu(\mathcal{C}) = 0$, y que para cada $x \in X \setminus \mathcal{C}$, existe N tal que si $n > N$

$$x \in X \setminus \mathcal{C}_n = \{\bar{s}_n \equiv_r \kappa(\tau_{n-1}, \tau_n), \tau_n \in W\}.$$

Es decir, para $n > N$, $\tau_n(x) \in W$ y

$$\bar{s}_n(x) \equiv_r \kappa(\tau_{n-1}(x), \tau_n(x)).$$

\square

Observación 4.6. Se podría haber agregado al final de la demostración anterior, que para todo $x \in X \setminus \mathcal{C}$ y $m > n > N$, $\tau_n(x) \in W$ y

$$\bar{s}_{n,m} \equiv_r \kappa(\tau_n(x), \tau_m(x)).$$

4.2. Diagramas Toeplitz esencialmente cíclicos

En efecto, esto se puede obtener por inducción usando

$$\begin{aligned}\bar{s}_{n,m}(x) &= \bar{s}_{n,m-1}(x) + q_m \bar{s}_m(x) \\ &\equiv_r \bar{s}_{n,m-1}(x) + \bar{s}_m(x),\end{aligned}$$

ya que $q_m = 1 \pmod{r}$, y usando

$$\kappa(\tau_n(x), \tau_m(x)) \equiv_r \kappa(\tau_n(x), \tau_{m-1}(x)) + \kappa(\tau_{m-1}(x), \tau_m(x)),$$

pues $\tau_n(x) \in W$ para todo $n > N$.

Es más, siempre se tiene que $\tau_n(x) \in W$ para todo n suficientemente grande, para μ -casi todo $x \in X$, pues el soporte de μ está formado precisamente por un conjunto $U \subseteq W$ tal que $\tau_n(x)$ eventualmente pertenece él siempre.

Se obtiene el siguiente recíproco:

Proposición 4.16. *Sea B un diagrama Toeplitz propio de rango finito uniforme d , depurado con respecto a una medida ergódica de probabilidad μ . Supongamos que existe $r \geq 2$ y una función*

$$\kappa : \{1, \dots, d\} \times \{1, \dots, d\} \rightarrow \{0, 1, \dots, r-1\},$$

tal que

- (a) *Existe $\bar{t} \in I_\mu$ tal que $\kappa(\cdot, \bar{t})|_{I_\mu} : I_\mu \rightarrow \{0, 1, \dots, r-1\}$, es sobreyectiva.*
- (b) *Para todo trío de vértices t_1, t_2 y t_3 en I_μ ,*

$$\kappa(t_1, t_3) \equiv_r \kappa(t_1, t_2) + \kappa(t_2, t_3).$$

- (c) *Para μ -casi todo $x \in X$ (el conjunto de los caminos infinitos en B), existe un entero positivo N , tal que para $m > n > N$*

$$\bar{s}_{n,m}(x) \equiv_r \kappa(\tau_n(x), \tau_m(x)).$$

Entonces existe una contracción de B que es esencialmente cíclico, de conjunto distinguido I_μ , partición $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r\}$, con $\mathcal{P}_i = \{t \in I_\mu \mid \kappa(t, \bar{t}) = i-1\}$, para $1 \leq i \leq r$, con grafo cíclico asociado \mathcal{G} , dado por la Figura 4.9.

Demostración. Notar primero que al aplicar una contracción al diagrama B , tanto el conjunto I_μ , como las propiedades de la función κ , no se alteran.

Otra cosa previa que hay que notar, es que la condición (a) se cumple para todo $\bar{t} \in I_\mu$. En efecto, basta notar que si considero otro vértice $t^* \in I_\mu$, entonces

$$\kappa(t, \bar{t}) - \kappa(t, t^*) \equiv_r \kappa(\bar{t}, t^*).$$

Esto también muestra que la partición \mathcal{P} y el grafo asociado, no cambian si se definen en función de t^* .

Sea $(q_n)_{n \geq 1}$ la sucesión característica del diagrama Toeplitz, y sea q tal que $q/(p_n, q) = r$ para todo n suficientemente grande. Consideramos una contracción del diagrama de tal modo que la sucesión $(p_n \pmod{q})_{n \geq 2}$ sea constante. Llamemos a esta constante \bar{q} . Con esto se obtiene que

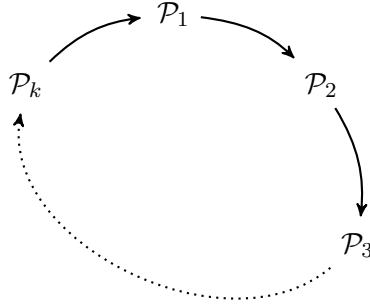


Figura 4.9: Figura del grafo \mathcal{G} de la Proposición 4.16.

- $q_2 \equiv_q \bar{q}$ y
- $q_n \equiv_r 1$, para $n > 2$.

Consideremos la partición de I_μ y el grafo definidos en el enunciado. Sea $t_0 \in I_\mu$, y sea $b_{n,m}(t_0)$ la cantidad de lugares en la palabra $\theta_{n,m}(t_0)$ que no siguen el grafo, comenzando por un vértice en el elemento de la partición \mathcal{P} al cual pertenece t_0 . Es decir $b_{n,m}(t_0)$ cuenta todas las posiciones, digamos j , de $\theta_{n,m}(t_0)$ en las cuales aparece un vértice t tal que

- $t \in I_\mu$ y $\kappa(t, t_0) \not\equiv_r Q_{n,m} - j$, o bien
- $t \notin I_\mu$.

Se puede ver que

$$\mu(\{\bar{s}_{n,m} \not\equiv_r \kappa(\tau_n, t_0), \tau_n \in I_\mu, \tau_m = t_0\} \cup \{\tau_n \notin I_\mu, \tau_m = t_0\}) = \frac{b_{n,m}(t_0)}{Q_{n,m}} \mu\{\tau_m = t_0\},$$

y por lo tanto $b_{n,m}(t_0)/Q_{n,m} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, uniformemente para $m > n$, pues $\mu\{\tau_m = t_0\}$ está acotado inferiormente por una cantidad positiva, para todo $t_0 \in I_\mu$ (la convergencia de $b_{n,m}(t_0)/Q_{n,m}$ se puede chequear notando que la función $\varphi_{n,m} = \bar{s}_{n,m} - \kappa(\tau_n, \tau_m) + 1_{\tau_n \notin I_\mu}$ tiende a cero μ -casi en todo $x \in X$, uniformemente para $m > n$).

Consideremos una contracción del sistema, asociado a una sucesión creciente $(n_k)_{k \geq 1}$, de modo que $\sum_{k \geq 1} b_{n_k, n_{k+1}}(t_0)/Q_{n_k, n_{k+1}} < \infty$. Esta contracción es el diagrama esencialmente cíclico, con los parámetros respectivos, que se estaba buscando. \square

Observación 4.7. Notar que, al igual como se muestra en la Observación 4.6, la condición (c) se puede modificar por

(c') Para μ -casi todo $x \in X$, existe un entero positivo N , tal que para $n > N$

$$\bar{s}_{n+1}(x) \equiv_r \kappa(\tau_n(x), \tau_{n+1}(x)).$$

4.3. Sistemas Toeplitz. Análisis general

En esta sección se re-escribirá el Teorema 3.13, se aplicará directamente a los diagramas esencialmente cíclicos, descubriendo que son una clase que tiene todos los posibles valores propios no-continuos para sistemas Toeplitz. Luego se analizarán algunos elementos de la demostración del Teorema 3.13, para conocer algo más de la estructura de un diagrama Toeplitz general que admite valores propios no-continuos, y para buscar ejemplos fuera de la clase de aquellos cuyos diagrama es esencialmente cíclico, si es que los hay.

4.3.1. Versión adaptada del Teorema 3.13

El Teorema 3.13 se puede re-escribir, adaptándolo al caso de sistemas Toeplitz de rango finito. Para esto primero hay que notar que, para $s \in S_{n,m}(t_1, t_2)$, donde t_1 y t_2 son vértices de niveles n y m respectivamente, con $m > n$,

$$\langle s, H(n) \rangle = p_n \langle s, H(1) \rangle.$$

Si usamos la notación, para $m > n$, $Q_{n,m} := p_m/p_n = q_{n+1} \cdots q_m$, entonces el Teorema 3.13 se escribiría de la siguiente manera

Teorema 4.17. *Sea (X, T) un sistema de Bratteli-Vershik Toeplitz de rango finito uniforme d , depurado con respecto a una medida ergódica μ del sistema, y con sucesión característica $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$. El número complejo $\lambda = \exp(2\pi i/q)$ es un valor propio no-continuo del sistema si y solamente si*

- *La sucesión eventualmente constante $(q/(q, p_n))_{n \in \mathbb{N}}$ no es mayor que d en el límite.*
- *Para todo $t_0 \in I_\mu$*

$$\sum_{t \in I_\mu} \frac{1}{Q_{n,m}} \left| \sum_{s \in \bar{S}_{n,m}(t, t_0)} \lambda^{p_n s} \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1,$$

uniformemente para $m > n$.

Observación 4.8. Naturalmente la segunda condición de este teorema puede ser reemplazada por la condición equivalente

$$\frac{M_{t_2 t_1}(n, m)}{Q_{n,m}} - \frac{\left| \sum_{s \in \bar{S}_{n,m}(t, t_0)} \lambda^{p_n s} \right|}{Q_{n,m}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

para todo $t_1, t_2 \in I_\mu$, uniformemente para $m > n$.

Recordar que

$$\bar{S}_{n,m}(t_1, t_2) = \{\bar{s}_{n,m}(x) \mid \tau_n(x) = t_1, \tau_m(x) = t_2\}.$$

Para, eventualmente, poder trabajar mejor con este tipo de conjuntos, se introduce la siguiente noción.

Definición 4.18. Consideremos niveles $m > n$, y vértices t_1, t_2 de un cierto diagrama B . Un conjunto $A \subseteq \{\tau_n = t_1, \tau_m = t_2\}$ se dirá *de representantes de $\bar{S}_{n,m}(t_1, t_2)$* , si

$$\bar{s}_{n,m}|_A : A \rightarrow \bar{S}_{n,m}(t_1, t_2)$$

es una biyección.

Notar que este conjunto es finito de cardinalidad $M_{t_2 t_1}(n, m)$.

4.3.2. Valores propios en Toeplitz esencialmente cíclicos

Aplicando el Teorema 4.17, que caracteriza los valores propios de sistemas de rango finito Toeplitz, podemos obtener el siguiente resultado.

Proposición 4.19. *Sea B un diagrama esencialmente cíclico con parámetro q , depurado con respecto a sus medidas intrínsecas. El complejo $\lambda = \exp(2\pi i/q)$ es valor propio no-continuo del sistema asociado (X, T) , para toda medida intrínseca μ (invariante de probabilidad) del diagrama B .*

Demostración. Consideremos $t_2 \in I_\mu$. Como el diagrama es cíclico (y toda contracción también), existe $s_0 \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ tal que para niveles $m > n > 2$ y un vértice t_1

$$b_{n,m}(t_1, t_2) := \#\{s \in \bar{S}_{n,m}(t_1, t_2) \mid s \neq_r s_0\} \leq b_{n,m}(t_2).$$

Se tiene, para niveles $m > n > 2$

$$\sum_{s \in \bar{S}_{n,m}(t_1, t_2)} \lambda^{p_n s} = [M_{t_2 t_1}(n, m) - b_{n,m}(t_1, t_2)] \lambda^{\bar{q} s_0} + b_{n,m}(t_1, t_2) \zeta,$$

donde ζ es un número complejo con $|\zeta| \leq 1$, pues

$$\begin{aligned} p_n s &\equiv_q \bar{q} s \quad \text{y} \\ \bar{q} s &\equiv_q \bar{q} s_0. \end{aligned}$$

De esto se deduce que

$$0 \leq \frac{M_{t_2 t_1}(n, m)}{Q_{n,m}} - \frac{\left| \sum_{s \in \bar{S}_{n,m}(t_1, t_2)} \lambda^{p_n s} \right|}{Q_{n,m}} \leq \frac{2b_{n,m}(t_2)}{Q_{n,m}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

uniformemente para $m > n$, en vista del Lema 4.13. La Proposición 4.19 y la observación que le sucede, implican que $\lambda = \exp(2\pi i/q)$ es valor propio. \square

Observación 4.9. En la última parte de la demostración se puede ver que existe una contracción del diagrama (que también es esencialmente cíclico), de modo que

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{M_{t_2 t_1}(n+1)}{q_{n+1}} - \frac{\left| \sum_{s \in \bar{S}_{n+1}(t_1, t_2)} \lambda^{p_{n+1} s} \right|}{q_{n+1}} \right) \leq \sum_{n \geq 1} \frac{2b_{n+1}}{q_{n+1}} < \infty.$$

Usando la expresión (4.2.2) de la demostración de la Proposición 4.7, se puede concluir que para una contracción como la mencionada,

$$\sum_{n \geq 1} \left| \sum_{t_1 \in \mathcal{P}_k} \frac{\left| \sum_{s \in \bar{S}_{n+1}(t_1, t_2)} \lambda^{p_{n+1}s} \right|}{q_{n+1}} - \frac{1}{r} \right| < \infty,$$

para \mathcal{P}_k , cualquier elemento de la partición \mathcal{P} de W .

Ejemplos (los mismos ejemplos de siempre)

Los ejemplos dados en la sección 4.2.1, cuyas medidas se analizaron en la sección 4.2.2 son esencialmente cíclicos, y por lo tanto tienen algún valor propio continuo.

Primer ejemplo Este diagrama propio esencialmente cíclico, induce un sistema únicamente ergódico de acuerdo al análisis hecho en la sección 4.2.2. Con respecto a esta única medida, que llamamos μ , y tal que $I_\mu = \{1, 2\}$, el sistema tiene asociado el valor propio $\lambda = \exp(2\pi i/2)$. Esto, ya que es esencialmente cíclico con parámetro $q = 2$. Del Teorema 4.3 se deduce que los únicos valores propios no-continuos de este sistema son de la forma $\lambda = \exp(2\pi i a/b)$, para $(a, b) = 1$ y $b = 2 \cdot 3^k$, para algún entero positivo k .

Segundo ejemplo El número complejo $\lambda = (2\pi i/q)$ es valor propio no-continuo del sistema asociado al diagrama del ejemplo, con respecto a ambas medidas intrínsecas μ y ν (ver análisis dado en la sección 4.2.2). Las condiciones sobre q y q^* indican que q debe ser un número par. Es más, se pueden construir casos particulares de este ejemplo, de modo que para cualquier número par $q = 2k$, $\lambda = \exp(2\pi i/q)$ sea valor propio alguno de estos sistemas particulares. Para esto basta ajustar $q^* = k$.

Tercer ejemplo Como se vio en la sección 4.2.2, el sistema asociado al diagrama correspondiente, tiene dos medidas que se llamaron μ y ν . Con respecto a μ , $\lambda = \exp(2\pi i/6)$ es valor propio no-continuo, mientras que con respecto a ν , $\lambda = \exp(2\pi i/4)$ es valor propio no-continuo.

4.3.3. Algunos lemas

Existen varios elementos que aparecen en la demostración de la suficiencia del Teorema 3.13, que al mirarlos dentro del contexto de los sistemas Toeplitz de rango finito, entregan información adicional que nos puede servir para entender el comportamiento de estos sistemas, cuando tienen asociado un valor propio no-continuo. Por ejemplo, el hecho de que α sea siempre racional permitirá refinar las convergencias que aparecen en la demostración. En esta sección se inducirán algunas relaciones a partir de aquellas de la demostración del Teorema 3.13. Nos estaremos siempre refiriendo a la sección 3.3.3.

Recordar que una condición necesaria para que un valor $\lambda = \exp(2\pi i/q)$ sea valor propio no-continuo es que la sucesión eventualmente constante $(q/(q, p_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converja a

un valor no mayor que el rango (uniforme) d del diagrama. Desde ahora en adelante al límite de esta sucesión la denotaremos por r .

Análisis del lema geométrico

La adaptación del Lema 3.16 permite obtener algunas relaciones interesantes.

Primero escribamos, para ciertos niveles $m > n$ y ciertos vértices t_1 y t_2

$$\sum_{s \in \bar{S}_{n,m}(t_1, t_2)} \lambda^{p_n s} = \sigma_{n,m}^{(0)}(t_1, t_2) + \sigma_{n,m}^{(1)}(t_1, t_2) \lambda^{p_n} + \cdots + \sigma_{n,m}^{(r-1)}(t_1, t_2) \lambda^{(r-1)p_n},$$

donde los coeficientes $\sigma_{n,m}^{(j)}(t_1, t_2)$ para $j = 0, 1, \dots, r-1$ se pueden definir como

$$\sigma_{n,m}^{(j)}(t_1, t_2) = \# \{s \in \bar{S}_{n,m}(t_1, t_2) \mid p_n s/q = p_n j/q \pmod{\mathbb{Z}}\}.$$

Lema 4.20. *Supongamos que para niveles $m > n$ suficientemente grandes y vértices t_1 y t_2 se tiene*

$$\left| \sum_{s \in \bar{S}_{n,m}(t_1, t_2)} \lambda^{p_n s} \right| > (1 - \varepsilon) M_{t_2 t_1}(n, m),$$

para algún $\varepsilon \in (0, 1)$. Entonces existe k (que depende de m, n, t_1, t_2 y hasta ε quizá) tal que

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{r-1} \sigma_{n,m}^{(j)}(t_1, t_2) &< \frac{2M_{t_2 t_1}(n, m)}{1 - \cos(2\pi/r)} \varepsilon \\ \frac{\sigma_{n,m}^{(k)}(t_1, t_2)}{M_{t_2 t_1}(n, m)} &> 1 - \frac{2}{1 - \cos(2\pi/r)} \varepsilon \end{aligned}$$

Demostración. Según el lema geométrico, existe k de modo que

$$\# \{s \in \bar{S}_{n,m}(t_1, t_2) \mid \|p_n s/q - p_n k/q\| \geq 1/r\} < \frac{2M_{t_2 t_1}(n, m)}{2\pi/r} \varepsilon.$$

Notar que si estamos trabajando con n suficientemente grande de modo que $q/(p_n, q) = r$, entonces

$$\begin{aligned} \|p_n s/q - p_n k/q\| < 1/r &\iff \|1/r [p_n s/(p_n, q) - p_n k/(p_n, q)]\| < 1/r \\ &\iff \frac{p_n}{(p_n, q)} s \equiv_r \frac{p_n}{(p_n, q)} k \\ &\iff s \equiv_r k \end{aligned}$$

Entonces la conclusión del lema geométrico se puede re-escribir

$$\# \{s \in \bar{S}_{n,m}(t_1, t_2) \mid s \not\equiv_r k\} < \frac{2M_{t_2 t_1}(n, m)}{2\pi/r} \varepsilon.$$

4.3. Sistemas Toeplitz. Análisis general

La expresión de la izquierda es igual $\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{r-1} \sigma_{n,m}^{(j)}(t_1, t_2)$.

Para demostrar la otra desigualdad, basta notar que

$$\sum_{j=0}^{r-1} \sigma_{n,m}^{(j)}(t_1, t_2) = M_{t_2 t_1}(n, m).$$

□

Observación 4.10. Si consideramos dos niveles $m > n$, un vértice t_0 y un valor $k \in \{0, 1, \dots, r-1\}$, se puede directamente que se tiene la siguiente relación:

$$\sum_{t=1}^d \sigma_{n,m}^{(k)}(t, t_0) = \left\lfloor \frac{Q_{n,m}}{r} \right\rfloor \quad \text{ó} \quad \left\lceil \frac{Q_{n,m}}{r} \right\rceil + 1.$$

De esto podemos inmediatamente concluir que para todo vértice t_0 y $k \in \{0, 1, \dots, r-1\}$,

$$\sum_{t=1}^d \frac{\sigma_{n,m}^{(k)}(t, t_0)}{Q_{n,m}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r}, \quad (4.3.1)$$

uniformemente para $m > n$.

Acerca de los elementos definidos en la sección 3.3.3

Recordemos que no estamos re-demostrando el Teorema 3.13, sino analizando algunos detalles en el contexto de un diagrama Toeplitz de rango finito (uniforme) d . Ahora procederemos a analizar los elementos $L_{n,m}(t_1, t_2)$, $\xi_{n,m}(t_1, t_2)$, $\Lambda_{n,m}(t_1, t_2)$ y $D_{n,m}$, definidos en la demostración de la suficiencia del teorema, para vértices $t_1, t_2 \in I_\mu$, y niveles $m > n$ suficientemente grandes.

En este nuevo contexto, escribiríamos

$$L_{n,m}(t_1, t_2) = \frac{M_{t_2, t_1}(n, m)}{Q_{n,m}} - \frac{\left| \sum_{s \in \bar{S}_{n,m}(t_1, t_2)} \lambda^{p_n s} \right|}{Q_{n,m}},$$

que, en el fondo, es la definición equivalente. Vamos a asumir, igualmente, desde ahora en adelante que, para todo $t_1, t_2 \in I_\mu$

$$L_{n,m}(t_1, t_2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

uniformemente para $m > n$. La definición que se cambiará es la de $\xi_{n,m}(t_1, t_2)$, ahora asumiremos que es igual a la constante $1/3r$, para todos los niveles $m > n$ y todos los vértices $t_1, t_2 \in I_\mu$. La definición de $\Lambda_{n,m}(t_1, t_2)$ es la misma, solamente estamos considerando qué es lo que sucedería con la variación en $\xi_{n,m}(t_1, t_2)$. Dicho esto, se introducirá un nuevo elemento:

Definición 4.21. Sea i_n el inverso multiplicativo (mod r) de $p_n/(p_n, q)$ (considerando n suficientemente grande), entonces definimos, para niveles $m > n$ (suficientemente grandes) y vértices $t_1, t_2 \in I_\mu$

$$\kappa_{n,m}(t_1, t_2) \equiv_r \frac{i_n \Lambda_{n,m}(t_1, t_2)}{(p_n, q)},$$

donde $\kappa_{n,m}(t_1, t_2)$ es elegido en $\{0, 1, \dots, r-1\}$.

Observación 4.11. Notar que para cualquier $\xi \leq 1/r$ se tiene, para niveles $n > m$ y vértices $t_1, t_2 \in I_\mu$

$$\begin{aligned} \|p_n s/q - \Lambda_{n,m}(t_1, t_2)/q\| < \xi &\iff \|1/r [p_n s/(q, p_n) - \Lambda_{n,m}(t_1, t_2)/(q, p_n)]\| < \xi \\ &\iff \|1/r [p_n s/(q, p_n) - \Lambda_{n,m}(t_1, t_2)/(q, p_n)]\| < 1/r \\ &\iff \frac{p_n}{(p_n, q)} s \equiv_r \frac{\Lambda_{n,m}(t_1, t_2)}{(q, p_n)} \\ &\iff s \equiv_r \kappa_{n,m}(t_1, t_2). \end{aligned}$$

Notar además que $\kappa_{n,m}(t_1, t_2)$ cumple el papel de k en el Lema 4.20. Se tiene, por tanto,

$$\{s \in \bar{S}_{n,m}(t_1, t_2) \mid s \not\equiv_r \kappa_{n,m}(t_1, t_2)\} < \frac{4M_{t_2 t_1}(n, m)}{\delta(1 - \cos(2\pi/r))} L_{n,m}(t_1, t_2).$$

El conjunto $\mathcal{D}_{n,m}$, en esta nueva notación, y para la nueva elección de $\xi_{n,m}(t_1, t_2)$, es igual a

$$\{\bar{s}_{n,m} \not\equiv_r \kappa_{n,m}(\tau_n, \tau_m), \tau_n \in I_\mu, \tau_m \in I_\mu\},$$

y la cota de su medida se calcula como

$$\mu(\mathcal{D}_{n,m}) < \sum_{t_1 \in I_\mu} \sum_{t_2 \in I_\mu} \frac{4L_{n,m}(t_1, t_2)}{\delta(1 - \cos(2\pi/r))} \mu\{\tau_m = t_2\}. \quad (4.3.2)$$

El lema de la cuasi-aditividad para $\Lambda_{n,m}(t_1, t_2)$ (Lema 3.20) se transforma en el siguiente resultado:

Lema 4.22. Si tomamos niveles $\ell > m > n$ suficientemente grandes, entonces para t_1, t_2 y $t_3 \in I_\mu$

$$\kappa_{n,\ell}(t_1, t_3) \equiv_r \kappa_{n,m}(t_1, t_2) + \kappa_{m,\ell}(t_2, t_3)$$

Demostración. Se sigue directamente de que para $\ell > m > n$ suficientemente grandes

$$\|(\Lambda_{n,m}(t_1, t_2) + \Lambda_{m,\ell}(t_2, t_3) - \Lambda_{n,\ell}(t_1, t_3))/q\| < 1/r,$$

y de la definición de $\kappa_{n,m}(t_1, t_2)$ (recordar que $\Lambda_{n,m}(t_1, t_2)$ es divisible por (p_n, q)) \square

Observación 4.12. Con el cambio que se ha introducido en la definición de $\xi_{n,m}(t_1, t_2)$, no es posible encontrar una subsucesión $(n_k)_{k \geq 1}$ de modo que ésta sea sumable. Pero se puede ver que es este caso no es necesario, porque las cantidades acotadas por este elemento ahora son iguales a 0.

Lema 4.23. *Si se considera una sucesión creciente de enteros $(n_k)_{k \geq 1}$ (con $n_1 = 1$) de modo que para todo par de vértices $t_1, t_2 \in I_\mu$*

$$\sum_{k=1}^{\infty} L_{n_k, n_{k+1}}(t_1, t_2) < \infty,$$

entonces

$$\frac{r_{n_k}(x) + \rho_{n_k}(\tau_{n_k}(x))}{q}$$

converge para μ -casi todo $x \in X$, que es la condición que permite que $\lambda = \exp(2\pi i/q)$ sea valor propio del sistema.

Demostración. Con la sucesión $(n_k)_{k \geq 1}$ elegida de esta manera, se permite que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\mathcal{C}_{n_k, n_{k+1}}) < \infty,$$

dado que la cota de $\mu(\mathcal{D}_{n,m})$ es más sencilla. Las otras expresiones que aparecen en la demostración, como $\|\Theta_j\|$ y $\|\Delta_j\|$, para $j \in \{k, k+1, \dots, \ell-1\}$, son iguales a cero. Con esto basta para concluir. \square

Una función κ

Ya vimos que cuando $L_{n,m}(t_1, t_2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, uniformemente para $m > n$, y para cualquier par de vértices $t_1, t_2 \in I_\mu$, se puede encontrar una contracción de manera que $(L_{n,n+1}(t_1, t_2))_{n \geq 1}$ sea sumable, y con esto basta para concluir que el sistema tiene el valor propio respectivo. Pero podemos rescatar otro elemento adicional, como veremos a continuación.

Supongamos que ya se le ha aplicado una contracción al sistema de modo que $(L_{n,n+1}(t_1, t_2))_{n \geq 1}$ sea sumable. Si tomamos un $x \notin C$, se puede ver que para todo n suficientemente grande que $\tau_n(x) \in I_\mu$ y

$$\bar{s}_{n+1} \equiv_r \kappa_{n,n+1}(\tau_n(x), \tau_{n+1}(x)),$$

o, de manera equivalente (ver análisis en la Observación 4.6),

$$\bar{s}_{n,m} \equiv_r \kappa_{n,m}(\tau_n(x), \tau_m(x)).$$

Asumamos que esta contracción permite que, para vértices $t_1, t_2 \in I_\mu$ y niveles $m > n \geq 1$, $\kappa_{n,m}(t_1, t_2)$ esté definido. Como los valores de estos $\kappa_{n,m}(t_1, t_2)$ están en el conjunto finito $\{0, 1, \dots, r-1\}$, es posible encontrar una sucesión creciente de números enteros $(m_k)_{k \geq 1}$ (con $m_1 = 1$), de modo que $(\kappa_{m_1, m_k}(t_1, t_2))_{k \geq 1}$ dependa únicamente de $t_1, t_2 \in I_\mu$. Además como $\kappa_{m_1, m_{k+1}}(t_1, t_3) \equiv_r \kappa_{m_1, m_k}(t_1, t_2) + \kappa_{m_k, m_{k+1}}(t_2, t_3)$, como se vio en el Lema 4.22, entonces se puede concluir que la sucesión $(\kappa_{m_k, m_{k+1}}(t_1, t_2))_{k \geq 1}$ depende únicamente de $t_1, t_2 \in I_\mu$.

Definición 4.24. Para vértices $t_1, t_2 \in I_\mu$, vamos a definir, en vista del análisis previo,

$$\kappa(t_1, t_2) := \kappa_{n_k, n_{k+1}}(t_1, t_2).$$

Lema 4.25. *La condición de que $L_{n,m}(t_1, t_2) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, uniformemente en $m > n$, para todo $t_1, t_2 \in I_\mu$ basta para concluir que existe una contracción del diagrama y una función $\kappa : \{1, \dots, d\} \times \{1, \dots, d\} \rightarrow \{0, 1, \dots, r-1\}$, tales que*

- (a) *Para todo $t_0 \in I_\mu$, la función $\kappa(\cdot, t_0)|_{I_\mu} : I_\mu \rightarrow \{0, 1, \dots, r-1\}$ es sobreyectiva.*
- (b) *$\kappa(t_1, t_3) \equiv_r \kappa(t_1, t_2) + \kappa(t_2, t_3)$, para todos los vértices t_1, t_2 y t_3 en I_μ .*
- (c) *Para μ -casi todo $x \in X$, se tiene que eventualmente*

$$\bar{s}_{n+1}(x) \equiv_r \kappa(\tau_n(x), \tau_{n+1}(x)).$$

Demostración. Primero hay que elegir una contracción para que $\sum_{n \geq 1} L_{n,n+1}(t_1, t_2) < \infty$, para todo $t_1, t_2 \in I_\mu$, y después volver a contraer usando la sucesión $(m_k)_{k \geq 1}$, descrita de manera previa al enunciado del lema. Después hay que definir arbitrariamente $\kappa(t_1, t_2)$ para $(t_1, t_2) \notin I_\mu \times I_\mu$ (por ejemplo $\kappa(t_1, t_2) = 0$ en este caso).

Las condiciones (b) y (c) se obtienen directamente de la definición de κ y de la discusión previa a la misma.

Solamente falta demostrar la condición (a). Para esto tomemos $t_0 \in I_\mu$, y supongamos que ℓ no está en la imagen de $\kappa(\cdot, t_0)|_{I_\mu}$, para algún $\ell \in \{0, 1, \dots, r-1\}$. Como, para todo $t \in I_\mu$, $\kappa(t, t_0)$ hace el papel del k en el Lema 4.20 y es diferente de ℓ , se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{t \in I_\mu} \frac{\sigma_{n,n+1}^{(\ell)}(t, t_0)}{q_{n+1}} &< \sum_{t \in I_\mu} \frac{4M_{t_0 t}(n+1)}{q_{n+1}\delta(1 - \cos(2\pi/r))} L_{n,n+1}(t, t_0) \\ &\leq \sum_{t \in I_\mu} \frac{4}{\delta(1 - \cos(2\pi/r))} L_{n,n+1}(t, t_0) \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned}$$

Por otra parte tenemos que, como se notó en la Observación 4.10,

$$\sum_{t=1}^d \frac{\sigma_{n,n+1}^{(\ell)}(t, t_0)}{q_{n+1}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{r}.$$

Ahora, para todo $t \notin I_\mu$,

$$\frac{\sigma_{n,n+1}^{(\ell)}(t, t_0)}{q_{n+1}} \leq \frac{M_{t_0 t}(n+1)}{q_{n+1}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

y por lo tanto se tiene la expresión contradictoria

$$\sum_{t \in I_\mu} \frac{\sigma_{n,n+1}^{(\ell)}(t, t_0)}{q_{n+1}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{r}.$$

La condición (a) queda, por tanto, demostrada. □

4.3.4. Resultado general

En esta sección se presentarán varias formas equivalentes de decir que $\lambda = \exp(2\pi i/q)$ es un valor propio no-continuo, de un sistema Toeplitz de rango finito. Es una recapitulación del análisis que se ha hecho hasta ahora, tanto en los diagramas esencialmente cíclicos, en la adaptación del Teorema 3.13 a este contexto, como en el análisis de los elementos que aparecen en la demostración de este último.

Teorema 4.26. *Sea (X, T) un sistema Toeplitz de rango finito (uniforme) d , dado por un diagrama depurado con respecto a una medida ergódica de probabilidad μ . Sea $(q_n)_{n \geq 1}$ la sucesión característica del diagrama, y q un entero positivo tal que, para todo n suficientemente grande, $1 < r := q/(q, p_n) \leq d$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1) *El complejo $\lambda = \exp(2\pi i/q)$ es valor propio no-continuo de (X, T, μ) .*
- (2) *Para todo vértice $t_1 \in I_\mu$,*

$$\sum_{t_2 \in I_\mu} \frac{1}{Q_{n,m}} \left| \sum_{s \in \bar{S}_{n,m}(t_1, t_2)} \lambda^{p_n s} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

uniformemente para $m > n$.

- (3) *Para todo par de vértices $t_1, t_2 \in I_\mu$*

$$\frac{M_{t_2 t_1}(n, m)}{Q_{n,m}} - \frac{\left| \sum_{s \in \bar{S}_{n,m}(t_1, t_2)} \lambda^{p_n s} \right|}{Q_{n,m}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

uniformemente para $m > n$.

- (4) *Existe una contracción del diagrama y una función*

$$\kappa : \{1, \dots, d\} \times \{1, \dots, d\} \rightarrow \{0, 1, \dots, r-1\},$$

tales que

- (a) *Para todo $t_0 \in I_\mu$, la función $\kappa(\cdot, t_0)|_{I_\mu} : I_\mu \rightarrow \{0, 1, \dots, r-1\}$ es sobreyectiva.*
- (b) *$\kappa(t_1, t_3) \equiv_r \kappa(t_1, t_2) + \kappa(t_2, t_3)$, para todos los vértices t_1, t_2 y t_3 en I_μ .*
- (c) *Para μ -casi todo $x \in X$, se tiene que para todo n suficientemente grande*

$$\bar{s}_{n+1}(x) \equiv_r \kappa(\tau_n(x), \tau_{n+1}(x)).$$

- (5) *Existe una contracción del diagrama, que resulta ser esencialmente cíclico, de conjunto distinguido I_μ , con parámetros $q, \bar{q} \equiv_q p_2$, una cierta partición \mathcal{P} de I_μ tal que $\#\mathcal{P} = r$, y un grafo cíclico \mathcal{G} , cuyos vértices son los elementos de la partición \mathcal{P} .*

(6) Existe una contracción del diagrama, y una partición $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r\}$ de I_μ , de modo que para todo $t_2 \in I_\mu$ y $k \in \{1, \dots, r\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{t_1 \in \mathcal{P}_k} \frac{\left| \sum_{s \in \bar{\mathcal{S}}_{n+1}(t_1, t_2)} \lambda^{p_n s} \right|}{q_{n+1}} - \frac{1}{r} \right| < \infty$$

(7) Existe una contracción del diagrama, de modo que para todo par de vértices $t_1, t_2 \in I_\mu$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{M_{t_2 t_1}(n+1)}{q_{n+1}} - \frac{\left| \sum_{s \in \bar{\mathcal{S}}_{n+1}(t_1, t_2)} \lambda^{p_n s} \right|}{q_{n+1}} \right] < \infty$$

(8) Existe una contracción del diagrama, de modo que para todo $t_2 \in I_\mu$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{t_1 \in I_\mu} \frac{\left| \sum_{s \in \bar{\mathcal{S}}_{n+1}(t_1, t_2)} \lambda^{p_n s} \right|}{q_{n+1}} - 1 \right| < \infty$$

Demostración. El Teorema 4.17 es exactamente (1) \iff (2) \iff (3).

(1) \implies (4). El Lema 4.25 es precisamente (3) \implies (4), que es equivalente a lo que se quiere probar.

(4) \implies (5). Esto es la Proposición 4.16 de las propiedades de un sistema esencialmente cíclico, donde se busca caracterizarlo por medio de la función κ .

(5) \implies (6). Esto es la observación que sigue a la Proposición 4.19, resultado que muestra como son los valores propios de los diagramas esencialmente cíclicos.

(6) \implies (8). Dado $t_2 \in I_\mu$ se tiene

$$\left| \sum_{t_1 \in I_\mu} \frac{\left| \sum_{s \in \bar{\mathcal{S}}_{n+1}(t_1, t_2)} \lambda^{p_n s} \right|}{q_{n+1}} - 1 \right| \leq \sum_{k=1}^r \left| \sum_{t_1 \in \mathcal{P}_k} \frac{\left| \sum_{s \in \bar{\mathcal{S}}_{n+1}(t_1, t_2)} \lambda^{p_n s} \right|}{q_{n+1}} - \frac{1}{r} \right|,$$

y luego sólo hay sumar sobre $n \in \mathbb{N}$ a ambos lados.

(8) \implies (7). Se sabe que

$$\left| \sum_{s \in \bar{\mathcal{S}}_{n+1}(t_1, t_2)} \lambda^{p_n s} \right| \leq M_{t_2, t_1}(n+1),$$

para todo par de vértices t_1, t_2 , y también se sabe que $q_{n+1} = \sum_{t_1=1}^d M_{t_2 t_1}(n+1)$. Por lo tanto si tomo vértices $t_1, t_2 \in I_\mu$,

$$\frac{M_{t_2 t_1}(n+1)}{q_{n+1}} - \frac{\left| \sum_{s \in \bar{\mathcal{S}}_{n+1}(t_1, t_2)} \lambda^{p_n s} \right|}{q_{n+1}} \leq 1 - \sum_{t \in I_\mu} \frac{\left| \sum_{s \in \bar{\mathcal{S}}_{n+1}(t, t_2)} \lambda^{p_n s} \right|}{q_{n+1}} - \sum_{t \notin I_\mu} \frac{\left| \sum_{s \in \bar{\mathcal{S}}_{n+1}(t, t_2)} \lambda^{p_n s} \right|}{q_{n+1}}.$$

Para concluir, notemos que

$$\begin{aligned} \sum_{t \notin I_\mu} \frac{\left| \sum_{s \in \bar{S}_{n+1}(t, t_2)} \lambda^{p_n s} \right|}{q_{n+1}} &\leq \sum_{t \notin I_\mu} \frac{M_{t_2 t}(n+1)}{q_{n+1}} \\ &\leq \sum_{t \notin I_\mu} \frac{\mu \{ \tau_n = t \}}{\mu \{ \tau_{n+1} = t_2 \}} \end{aligned}$$

donde la última expresión de la derecha es sumable sobre $n \in \mathbb{N}$, pues el diagrama es depurado y $\mu \{ \tau_{n+1} = t_2 \}$ está acotada inferiormente lejos de cero.

(7) \implies (1). Esto proviene directamente del contenido del Lema 4.23. Hay que recordar la definición de $L_{n, n+1}(t_1, t_2)$ para $t_1, t_2 \in I_\mu$.

Para concluir que todas las afirmaciones son equivalentes, sólo faltaría notar que se tiene (3) \implies (7) de manera directa. \square

Valores propios y medidas

Como se ha notado en el tratamiento de la familia de diagramas propios Toeplitz esencialmente cíclicos, particularmente en el tratamiento de los ejemplos, hay una cierta relación entre los valores propios del sistema asociado al diagrama, su rango, y la cantidad de medidas ergódicas de probabilidad que éste puede tener.

La siguiente proposición muestra que existe alguna relación en general. Para poder enunciar la proposición se necesitan algunas definiciones previas. Comenzamos fijando un diagrama de Bratteli B propio de rango finito (uniforme) d . Definimos el conjunto²

$$R_\mu := \left\{ \frac{q}{(p_n, q)} \mid q \geq 0, \exp(2\pi i/q) \text{ es v.p. no-continuo con respecto a la medida } \mu \right\},$$

y le asociamos el orden parcial dado por la divisibilidad en \mathbb{Z} . Escribamos $\mathcal{M}_{\text{erg}}(X, T)$ para designar al conjunto de las medidas ergódicas de probabilidad del sistema (X, T) asociado al diagrama B . Finalmente definamos el conjunto R mediante la igualdad

$$R = \{ \mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(X, T) \mid R_\mu \neq \emptyset \}.$$

Proposición 4.27.

- (1) Para $\mu \in R$ y $r \in R_\mu$, $r \leq \#I_\mu$.
- (2) Para cada $\mu \in R$, R_μ tiene un único elemento maximal (con respecto al orden dado por la divisibilidad en \mathbb{Z}), que denotaremos por r_μ .
- (3) Se tiene la desigualdad

$$\sum_{\mu \in R} r_\mu \leq d$$

²Cuando se escribe $q/(q, p_n)$, se hace referencia al valor que eventualmente toma la sucesión de estos valores.

(4) Se tienen las desigualdades

$$\#R \leq \#\mathcal{M}_{\text{erg}}(X, T) \leq d - \sum_{\mu \in R} (r_\mu - 1).$$

Demostración. (1) Sea q un entero positivo tal que $\exp(2\pi i/q)$ es un valor propio no-continuo del sistema (X, T) con respecto a una medida ergódica de probabilidad μ , y sea $r = q/(p_n, q)$. Por el Teorema 4.26(5), consideramos la contracción que es esencialmente cíclica. Entonces $r = q/(\bar{q}, q)$ y, de acuerdo a la Proposición 4.7, $r \leq \#I_\mu$.

(2) Sea $\mu \in R$. Si $q_1 \neq q_2$ son enteros positivos tales que tanto $\exp(2\pi i/q_1)$, como $\exp(2\pi i/q_2)$ son valores propios no-continuos del sistema (X, T) con respecto a la medida μ , entonces probaremos que $\exp(2\pi i/\text{mcm}(q_1, q_2))$ lo es también, donde $\text{mcm}(q_1, q_2)$ denota al mínimo común múltiplo entre q_1 y q_2 .

En efecto, que $\exp(2\pi i/\text{mcm}(q_1, q_2))$ sea valor propio del sistema con respecto a μ , es consecuencia directa de la identidad de Bezout. Para ver ahora que es valor propio no-continuo, asumamos por un momento lo contrario. Del Teorema 4.3 se deduce que $\exp(2\pi i/\text{mcm}(q_1, q_2))$ es valor propio continuo si y solamente si $\text{mcm}(q_1, q_2)$ divide a p_n , para algún $n \geq 1$. Esto implica que, por ejemplo, q_1 divide a p_n , lo cual es equivalente a la afirmación contradictoria de que $\exp(2\pi i/q_1)$ es valor propio continuo del sistema.

Definamos $q := \text{mcm}(q_1, q_2)$. Si suponemos que $r_1 = q_1/(p_n, q_1)$ y $r_2 = q_2/(p_n, q_2)$ son elementos maximales distintos de R_μ , entonces la siguiente igualdad (que puede ser verificada usando, por ejemplo, el Teorema fundamental de la aritmética)

$$\text{mcm}(r_1, r_2) = \frac{q}{(q, p_n)},$$

genera una contradicción. Por lo tanto R_μ tiene un único elemento maximal, con respecto al orden inducido por la divisibilidad en \mathbb{Z} .

(3) El Teorema 2.12 implica que para medidas ergódicas de probabilidad $\mu \neq \nu$, se tiene $I_\mu \cap I_\nu = \emptyset$. Entonces

$$\sum_{\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(X, T)} \#I_\mu \leq d.$$

Usando (1) se concluye la desigualdad buscada.

(4) Al igual que en la demostración de (3), se usará que para medidas ergódicas de probabilidad $\mu \neq \nu$, se tiene $I_\mu \cap I_\nu = \emptyset$. Entonces

$$\begin{aligned} \#R \leq \#\mathcal{M}_{\text{erg}}(X, T) &\leq \sum_{\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(X, T)} \#I_\mu - \sum_{\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(X, T)} (\#I_\mu - 1) \\ &\leq d - \sum_{\mu \in R} (r_\mu - 1). \end{aligned}$$

Notar que la última desigualdad se obtiene gracias a (1). □

Observación 4.13. Con la notación introducida en esta sección se puede establecer la forma general de los valores propios no-continuos de un sistema Toeplitz de rango finito. Concretamente, $\lambda = \exp(2\pi i/q)$ es valor propio no-continuo con respecto a $\mu \in R$ si y sólo si q no divide a la altura p_n , para todo $n \geq 1$, y es de la forma $k \cdot \ell$, con $k \in R_\mu$ y ℓ factor de alguna altura p_n .

Ejemplos

Para cada uno de los siguientes ejemplos se calcularán, gracias a los últimos resultados, todos sus valores propios no-continuos. De manera específica, se analizarán los conjuntos R_μ de cada caso. Los primeros tres ejemplos a continuación, son los que nos han acompañado desde la sección 4.2.1.

Primer ejemplo. De este ejemplo ya se conoce su única medida invariante, y el valor propio $\exp(\pi i)$ asociado a esta medida, que denotamos por μ . Se puede ver directamente que $r = 2$ es el único elemento de R_μ , ya que $\#I_\mu = 2$ es una cota superior, y debe ser el único maximal, con respecto a la división de los enteros.

Con respecto a las desigualdades que aparecen en la Proposición 4.27, hay varias que serían igualdades. De modo concreto se tiene: $r_\mu = \#I_\mu$, $\sum_{\nu \in R} r_\nu = r_\mu < d (= 3)$ y en la desigualdad que aparece en (4), la de la izquierda es igualdad y la de la derecha desigualdad estricta.

Segundo ejemplo. Este ejemplo tiene 3 medidas invariantes que se habían denotado por μ, ν y v . Se ha descubierto que $2 \in R_\mu$, y es su único elemento, ya que $\#I_\mu = 2$. También se tiene que $2 \in R_\nu$, y no puede haber un elemento maximal mayor. En efecto, si por ejemplo R_μ tuviera al 3, entonces también debería tener al 6, en vista de la Proposición 4.27(2), lo cual es contradictorio. Por lo tanto

$$R_\mu = R_\nu = \{2\}.$$

Ahora falta probar que $R_v = \emptyset$. Si $r \in R_v$, entonces $r \leq \#I_v = 2$. Es decir, $r = 2$ es el único elemento que puede pertenecer a R_v . Para probar la inexistencia de un valor propio no-continuo haremos uso del Teorema 4.26(3), eligiendo $m = n + 1$. Primero se puede ver que

$$\frac{M_{77}(n+1)}{q_{n+1}} = \frac{2c_{n+1} - 2}{q_{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1/2.$$

Si suponemos que $\exp(2\pi i/2k)$ es un valor propio no-continuo del sistema, entonces para n suficientemente grande

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{S}_{n+1}(7,7)} \lambda^{p_n s} &= \sum_{\bar{S}_{n+1}(7,7)} \lambda^{q^* s} \\ &= \sum_{s=1}^b \lambda^{q^* s}, \end{aligned}$$

4.3. Sistemas Toeplitz. Análisis general

donde, en la última igualdad, se ha asumido que $q^*/2k = a/b$, con $(a, b) = 1$. Por lo tanto

$$\frac{\left| \sum_{\bar{S}_{n+1}(7,7)} \lambda^{p_n s} \right|}{q_{n+1}} \leq \frac{b}{q_{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Por lo tanto la condición (3) del Teorema 4.26 no se cumple, y λ no puede ser valor propio.

El resumen de las desigualdades correspondientes de la Proposición 4.27 se puede expresar así:

- En (1), $r_\mu = \#I_\mu$ y $r_\nu < \#I_\nu$.
- En (3), $r_\mu + r_\nu = 4 < 7 = d$.
- En (4), $\underbrace{\#R}_2 < \underbrace{\mathcal{M}_{\text{erg}}(X, T)}_3 < \underbrace{d - (r_\mu - 1) - (r_\nu - 1)}_5$.

Este ejemplo tiene la particularidad de poseer valores propios no-continuos con respecto a algunas de sus medidas ergódicas, mientras que no posee ninguno para otras.

Tercer ejemplo. Por el análisis hecho en las secciones respectivas, se sabe que el diagrama tiene dos medidas invariantes, que se denotaron por μ y ν . Se deduce directamente, ya que $\exp(2\pi i/6)$ es valor propio no-continuo con respecto a μ , que $3 \in R_\mu$. Como $\#I_\mu = 3$, por 4.27(1), se tiene que $R_\mu = \{3\}$. Por otro lado, como $\exp(2\pi i/4)$ es valor propio no-continuo con respecto a ν , entonces $2 \in R_\nu$. Se demostrará que éste es el único elemento de R_ν .

Como $\#I_\nu = 4$, entonces la Proposición 4.27(1) implicaría que R_ν podría intersectar al conjunto $\{3, 4\}$. El valor $r = 3$ queda descartado por Proposición 4.27(2), pues implicaría que habría más de un elemento maximal con respecto a la división en los enteros. El valor $r = 4$ no puede ser descartado por las mismas razones, pero utilizando, al igual que en el ejemplo anterior, el Teorema 4.26(3) con $m = n + 1$, se logrará ver que no es valor propio no-continuo. Calculamos primero

$$\frac{M_{44}(n+1)}{q_{n+1}} = \frac{4\ell_{n+1} - 1}{q_{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1/3.$$

Si $r = 4 \in R_\nu$ entonces, por ejemplo, $\lambda = \exp(2\pi i/8)$ sería valor propio no-continuo del sistema. Consideremos el siguiente análisis para los elementos de $\bar{S}_{n+1}(4, 4)$:

$$\begin{aligned} \# \{s \in \bar{S}_{n+1}(4, 4) \mid s \equiv_4 0\} &= 2\ell_{n+1} - 1 \\ \# \{s \in \bar{S}_{n+1}(4, 4) \mid s \equiv_4 1\} &= 0 \\ \# \{s \in \bar{S}_{n+1}(4, 4) \mid s \equiv_4 2\} &= 2\ell_{n+1} \\ \# \{s \in \bar{S}_{n+1}(4, 4) \mid s \equiv_4 3\} &= 0. \end{aligned}$$

4.3. Sistemas Toeplitz. Análisis general

Como además $p_n \equiv_4 2$, para $n \geq 1$, entonces

$$\begin{aligned}
 \sum_{s \in \bar{S}_{n+1}(4,4)} \lambda^{p_n s} &= \sum_{s \in \bar{S}_{n+1}(4,4)} \exp(2\pi i p_n s / 8) \\
 &= \sum_{s \in \bar{S}_{n+1}(4,4)} \exp(2\pi i s / 4) \\
 &= (2\ell_{n+1} - 1) [1 + \exp(\pi i)] + \exp(\pi i) \\
 &= -1,
 \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\frac{\left| \sum_{s \in \bar{S}_{n+1}(4,4)} \lambda^{p_n s} \right|}{q_{n+1}} = \frac{1}{q_{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Con estos resultados, λ queda descartado como valor propio (no-continuo), y por lo tanto $r = 4 \notin R_\nu$.

El resumen de las desigualdades correspondientes de la Proposición 4.27 se puede expresar así:

- En (1), $r_\mu = \#I_\mu$ y $r_\nu < \#I_\nu$.
- En (3), $r_\mu + r_\nu = 5 < 7 = d$.
- En (4), $\underbrace{\#R}_2 = \underbrace{\mathcal{M}_{\text{erg}}(X, T)}_2 < \underbrace{d - (r_\mu - 1) - (r_\nu - 1)}_4$.

Variación del tercer ejemplo. Consideremos la siguiente variación del tercer ejemplo: los valores de q_n y ℓ_n se conservan, para $n \geq 1$, pero las funciones de orden θ_n , se definen de la siguiente manera, para $n > 2$,

$$\begin{aligned}
 \theta_n(1) &= (123)^{4\ell_n-2} 1245671 \\
 \theta_n(2) &= 1(321)^{4\ell_n-2} 345671 \\
 \theta_n(3) &= 1(123)^{4\ell_n-2} 145671 \\
 \theta_n(4) &= 1(5674)^{3\ell_n-2} 23745671 \\
 \theta_n(5) &= 15(7456)^{3\ell_n-2} 7452371 \\
 \theta_n(6) &= 15(4567)^{3\ell_n-2} 2367471 \\
 \theta_n(7) &= 15(5674)^{3\ell_n-2} 3674271.
 \end{aligned}$$

Se resumirán las propiedades básicas de este diagrama esencialmente cíclico, y del sistema asociado. La justificación de la veracidad de estas propiedades es similar al análisis que se ha hecho con los tres primeros ejemplos en las correspondientes secciones anteriores.

4.3. Sistemas Toeplitz. Análisis general

- Tiene dos medidas ergódicas, digamos μ y ν , con $I_\mu = \{1, 2, 3\}$ e $I_\nu = \{4, 5, 6, 7\}$.
- $\exp(2\pi i/6)$ es valor propio con respecto a μ , y $\exp(2\pi i/8)$ es valor propio con respecto a ν , ambos no-continuos.

De esto se puede deducir que $R_\mu = \{3\}$ y $R_\nu = \{2, 4\}$. Además se obtiene otra particularidad de este ejemplo (que es la justificación de que sea mencionado acá), que todas las desigualdades de la Proposición 4.27, se transforman en igualdades en este caso.

El sistema asociado a este diagrama no es únicamente ergódico y muestra, al igual que en la Observación 4.4 del segundo ejemplo de la sección 4.2.2, que si se relaja la hipótesis de ergodicidad en el Corolario 2.14, pidiendo solamente que la medida sea invariante, no se puede obtener la misma conclusión, es decir, no se puede asegurar que el sistema sea únicamente ergódico.

Conclusión

El objetivo del trabajo de tesis, en su inicio, fue encontrar condiciones para familias de sistemas de Bratteli-Vershik de rango finito, que permitieran analizar la existencia de valores propios asociados.

La primera familia a estudiar fue la de sistemas Toeplitz de rango finito, sobre la cual se habían establecidos resultados importantes (ver [BDM10, § 7]), y además había una cierta idea de como debían ser las condiciones en términos de los elementos combinatorios naturales asociados al diagrama. Se logró establecer una condición necesaria y suficiente para la ocurrencia de valores propios no-continuos en esta familia de sistemas Toeplitz minimales de rango finito, y además una relación entre la cantidad de medidas ergódicas de los sistemas y los valores propios asociados. Esto forma parte del artículo *Eigenvalues of Toeplitz minimal systems of finite topological rank*, desarrollado en conjunto con los profesores Fabien Durand y Alejandro Maass. Además en esta tesis se introduce la familia de diagramas Toeplitz esencialmente cíclicos, y se establece que los únicos sistemas Toeplitz minimales de rango finito que presentan valores propios no-continuos son aquellos que se construyen sobre un diagrama de esta familia (o equivalente a alguno de ellos).

El sortear las dificultades técnicas asociadas a la demostración de esta caracterización, permitió enfrentar de mejor manera la búsqueda de condiciones para otras familias de rango finito. Pero se logró llegar más allá: se estableció una condición necesaria y suficiente general para sistemas de Bratteli-Vershik minimales de rango finito (Teorema 3.13), en términos de los elementos combinatoriales asociados al sistema, de manera análoga al caso Toeplitz de rango finito. Esta condición, sin embargo, no distingue entre valores propios continuos y no-continuos.

Proyecciones

Queda abierta la pregunta de si hay una condición adicional a la caracterización del Teorema 3.13, con la cual se pueda diferenciar entre valores propios continuos y no-continuos en un sistema de Bratteli-Vershik minimal de rango finito. También sería interesante establecer alguna condición sobre la estructura del diagrama, al igual como se estableció para la familia de sistemas Toeplitz de rango finito en términos de diagramas esencialmente cíclicos.

Por otra parte, la demostración del Teorema 3.13 permite conocer relaciones sutiles entre diferentes elementos combinatoriales de los diagramas de sistemas que poseen valores propios. Esto lleva a pensar que su aplicación a sistemas minimales particulares,

en los cuales haya un buen conocimiento de sus elementos combinatoriales, sería muy productiva. Uno de estos sistemas es el de transformaciones de cambio de intervalo, ya que hay una buena cantidad de información con respecto a los elementos combinatoriales en este caso (ver por ejemplo [GJ02], [FHZ03], [FZ11] y [Fer]), y se ve mucho potencial en añadir la información obtenida acá con respecto al funcionamiento estructural de los sistemas de Bratteli-Vershik minimales de rango finito, que poseen valores propios.

Otra posible línea de trabajo, es la relacionada a acciones minimales de \mathbb{Z}^d sobre un conjunto de Cantor. Existe como precedente, que el trabajo sobre valores propios en sistemas de Bratteli-Vershik minimales linealmente recurrentes expuesto en [CDHM03] y [BDM05] pudo ser generalizado a acciones de \mathbb{Z}^d (ver [CGM07]). Sería muy interesante analizar el análogo, para acciones de \mathbb{Z}^d , de sistemas minimales de rango finito, y poder obtener resultados sobre los factores de rotación de estos sistemas.

Finalmente, se sabe que Daniel Coronel y José Aliste-Prieto lograron aplicar las técnicas y resultados presentadas en [CDHM03], [BDM05] y [CGM07], en conjuntos de Delone linealmente repetitivos (ver [Cor11] y [APC11]). También en este caso, sería interesante descubrir el equivalente a sistemas de rango finito en conjuntos de Delone, que contenga la familia de conjuntos linealmente repetitivos, y poder aplicar los resultados y técnicas obtenidas en esta tesis para estudiar, por ejemplo, la ecuación cohomológica asociada a los sistemas que se construyen sobre estos conjuntos.

Bibliografía

- [APC11] JOSÉ ALISTE-PRIETO Y DANIEL CORONEL. 2011. *Tower systems for linearly repetitive Delone sets*. Ergod. Theor. Dyn. Syst., **31**(6):1595–1618.
- [BDM05] XAVIER BRESSAUD, FABIEN DURAND, Y ALEJANDRO MAASS. 2005. *Necessary and sufficient conditions to be an eigenvalue for linearly recurrent dynamical Cantor systems*. J. Lond. Math. Soc., **72**(3):799–816.
- [BDM10] XAVIER BRESSAUD, FABIEN DURAND, Y ALEJANDRO MAASS. 2010. *On the eigenvalues of finite rank Bratteli–Vershik dynamical systems*. Ergod. Theor. Dyn. Syst., **30**(3):639–664.
- [BKMS10] SERGEY BEZUGLYI, JAN KWIATKOWSKI, KOSTYANTYN MEDYNETS, Y BORIS SOLOMYAK. 2010. *Invariant measures on stationary Bratteli diagrams*. Ergod. Theor. Dyn. Syst., **30**(4):973–1007.
- [BKMS13] SERGEY BEZUGLYI, JAN KWIATKOWSKI, KOSTYANTYN MEDYNETS, Y BORIS SOLOMYAK. 2013. *Finite rank Bratteli diagrams: Structure of invariant measures*. T. Am. Math. Soc., **365**(5):2637–2679.
- [BS02] MICHAEL BRIN Y GARRETT STUCK. 2002. *Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press. 240p.
- [CDHM03] MARÍA ISABEL CORTEZ, FABIEN DURAND, BERNARD HOST, Y ALEJANDRO MAASS. 2003. *Continuous and measurable eigenfunctions of linearly recurrent dynamical Cantor systems*. J. Lond. Math. Soc., **67**(3):790–804.
- [CGM07] MARÍA ISABEL CORTEZ, JEAN-MARC GAMBAUDO, Y ALEJANDRO MAASS. 2007. *Rotation topological factors of minimal \mathbb{Z}^d -actions on the Cantor set*. T. Am. Math. Soc., **359**(5):2305–2315.
- [Cor11] DANIEL CORONEL. 2011. *The cohomological equation over dynamical systems arising from Delone sets*. Ergod. Theor. Dyn. Syst., **31**(3):807–833.
- [Dek78] FREDERIK MICHEL DEKKING. 1977/78. *The spectrum of dynamical systems arising from substitutions of constant length*. Z. Wahrscheinlichkeit., **41**(3):221–239.

- [DHS99] FABIEN DURAND, BERNARD HOST, Y CHRISTIAN SKAU. 1999. *Substitutional dynamical systems, Bratteli diagrams and dimension groups*. Ergod. Theor. Dyn. Syst., **19**(4):953–993.
- [DL96] TOMASZ DOWNAROWICZ Y YVES LACROIX. 1996. *A non-regular Toeplitz flow with preset pure point spectrum*. Stud. Math., **120**(3):235–246.
- [Dow91] TOMASZ DOWNAROWICZ. 1991. *The Choquet simplex of invariant measures for minimal flows*. Israel J. Math., **74**(2):241–256.
- [Fer] SÉBASTIEN FERENCZI. *A generalization of the self-dual induction to every interval exchange transformation*. preprint. <http://iml.univ-mrs.fr/~ferenczi/fie.pdf>.
- [FHZ03] SÉBASTIEN FERENCZI, CHARLES HOLTON, Y LUCA Q. ZAMBONI. 2003. *Structure of three-interval exchange transformations II: A combinatorial description of the trajectories*. J. Anal. Math., **89**:239–276.
- [For97] ALAN FORREST. 1997. *K-groups associated with substitution minimal systems*. Israel J. Math., **98**(1):101–139.
- [Fur67] HARRY FURSTENBERG. 1967. *Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in diophantine approximation*. Theor. Comput. Syst., **1**(1):1–49.
- [FZ11] SÉBASTIEN FERENCZI Y LUCA Q. ZAMBONI. 2011. *Eigenvalues and simplicity of interval exchange transformations*. Ann. Sci. Ecole Norm. S., **44**(3):261–392.
- [GJ00] RICHARD GJERDE Y ØRJAN JOHANSEN. 2000. *Bratteli-Vershik models for Cantor minimal systems: applications to Toeplitz flows*. Ergod. Theor. Dyn. Syst., **20**(6):1687–1710.
- [GJ02] RICHARD GJERDE Y ØRJAN JOHANSEN. 2002. *Bratteli-Vershik models for Cantor minimal systems associated to interval exchange transformations*. Math. Scand., **90**(1):87–100.
- [GPS95] THIERRY GIORDANO, IAN PUTNAM, Y CHRISTIAN SKAU. 1995. *Topological orbit equivalence and C^* -crossed products*. J. Reine Angew. Math., **469**:51–112.
- [Hos86] BERNARD HOST. 1986. *Valeurs propres des systèmes dynamiques définis par des substitutions de longueur variable*. Ergod. Theor. Dyn. Syst., **6**(4):529–540.
- [HPS92] RICHARD HERMAN, IAN PUTNAM, Y CHRISTIAN SKAU. 1992. *Ordered Bratteli diagrams, dimension groups and topological dynamics*. Int. J. Math., **3**(6):827–864.

- [Iwa96] ANZELM IWANIK. 1996. *Toeplitz flows with pure point spectrum*. Stud. Math., **118**(1):27–35.
- [JK69] KONRAD JACOBS Y MICHAEL KEANE. 1969. *0 – 1-sequences of Toeplitz type*. Z. Wahrscheinlichkeit., **13**(2):123–131.
- [MMY05] STEFANO MARMI, PIERRE MOUSSA, Y JEAN-CHRISTOPHE YOCCOZ. 2005. *The cohomological equation for roth-type interval exchange maps*. J. Am. Math. Soc., **18**:823–872.
- [MP79] NELSON MARKLEY Y MICHAEL PAUL. 1979. *Almost automorphic symbolic minimal sets without unique ergodicity*. Israel J. Math., **34**(3):259–272.
- [Oxt52] JOHN C. OXTOBY. 1952. *Ergodic sets*. Bull. Am. Math. Soc., **58**(2):116–136.
- [Pet91] KARL PETERSEN. 1991. *Ergodic Theory*. Cambridge University Press. 329p. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 2).
- [Pul71] NORMAN J. PULLMAN. 1971. *A geometric approach to the theory of non-negative matrices*. Linear Algebra App., **4**(4):297–312.
- [Que10] MARTINE QUEFFÉLEC. 2010. *Substitution Dynamical Systems - Spectral Analysis, 2da ed.* Springer Heidelberg Berlin. 351p. (Lecture Notes in Mathematics, vol. 1294).
- [Toe28] OTTO TOEPLITZ. 1928. *Ein Beispiel zur Theorie der fastperiodischen Funktionen*. Math. Ann., **98**(1):281–295.
- [Wal82] PETER WALTERS. 1982. *An Introduction to Ergodic Theory*. Springer New York. 250p. (Graduate Texts in Mathematics, vol. 79).
- [Wil84] SUSAN WILLIAMS. 1984. *Toeplitz minimal flows which are not uniquely ergodic*. Z. Wahrscheinlichkeit., **67**(1):95–107.