UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

INESTABILIDAD ELÁSTICA EN MATERIALES ELECTROELÁSTICOS BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO.

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MECÁNICO

JUAN PABLO PARRA VILLALOBOS

PROFESOR GUÍA:
ROGER BUSTAMANTE PLAZA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
ELENA ATROSHCHENKO
WILLIAMS CALDERON MUÑOZ

SANTIAGO DE CHILE
MAYO 2014

Resumen

Los Elastómeros Electro-Sensibles son materiales que se caracterizan por sufrir grandes deformaciones en presencia de un campo eléctrico. Debido a esto la atención de los científicos se ha centrado en estudiar el comportamiento de estos materiales con el propósito de determinar su potencial uso como actuadores, para músculos artificiales en robótica y para aplicaciones biomédicas en prótesis entre otras aplicaciones. El comportamiento de estos materiales ha recibido la atención de los investigadores solo recientemente, y el objetivo de este trabajo es abordar en más detalle algunos aspectos de la modelación del comportamiento de estos materiales.

Los conceptos básicos a considerar para el estudio del comportamiento de los elastómeros electro-sensibles en presencia de un campo eléctrico son la cinemática de los cuerpos al momento de la deformación, las ecuaciones de Maxwell para las variables de campo eléctrico en ausencia de campos magnéticos, corrientes libres y cargas eléctricas, y sin dependencia del tiempo; además de las leyes del balance de masa, la formulación Lagrangiana y la simetría de los materiales.

Este trabajo consiste en estudiar el comportamiento de la segunda variación para tres problemas de valor de frontera por medio del software Mathematica con diferentes geometrías para los cuerpos electro-activos y diferentes vectores de campo eléctrico, considerando ademas algunos ejemplos simples de ecuaciones constitutivas para el material. La segunda variación, y en particular su signo, se estudió como criterio para predecir la aparición de inestabilidades electro-elásticas.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi familia, por su incondicional apoyo y comprensión durante el estudio y desarrollo de mi memoria de título. En especial a mis padres y hermanos que siempre confiaron en mí y en lo que podía lograr.

Un especial agradecimiento al Profesor Roger Bustamante, quien siempre estuvo presente con buena voluntad y disponibilidad para la realización de este trabajo. Además quiero agradecer la confianza que tuvo en mí para permitirme ser parte de su cuerpo docente en uno de sus ramos y por todo lo que me enseñó. Y muchas gracias por toda la dedicación y paciencia.

A los profesores del Departamento de Ingeniería Mecánica, que confiaron en nosotros como futuros profesionales y que dedicaron estos años a nuestra formación. También un agradecimiento a los funcionarios del Departamento y del Taller Mecánico por toda su disponibilidad durante estos años.

A los amigos que conocí durante mi paso por la Universidad, que siempre estuvieron ahí para darme apoyo y motivación. En especial los amigos mas cercanos que conocí durante mis primeros años de Universidad y aquellos que conocí en la especialidad, les deseo lo mejor. Éxito.

Tabla de Contenido

CAPÍTULO 1

Introducción

Los Elastómeros Electro-Sensibles, también conocidos como Elastómeros Electroactivos, son materiales que se caracterizan por presentar grandes deformaciones en presencia de un campo eléctrico. Es debido a esto que han llamado la atención de la comunidad científica desde hace algunos años. Uno de los primeros trabajos teóricos para modelar el comportamiento de un cuerpo elástico que presente grandes deformaciones con interacción con campos eléctricos fue el paper escrito por Toupin en el año 1956, donde logró obtener las ecuaciones gobernantes de los cuerpos electroelásticos no-lineales [1]. Este trabajo es la base de las investigaciones subsequentes en el área.

1.1. Motivación

Últimamente el interés por estudiar estos materiales ha aumentado debido a su potencial uso como actuadores, para músculos artificiales en robótica y para aplicaciones biomédicas en prótesis [2], además del uso en el diseño de dispositivos para el control de vibraciones. Todo esto no ha sido fácil de estudiar ya que la modelación matemática de las propiedades de estos materiales se encuentra en una etapa temprana de desarrollo, lo cual se debe en parte por la escasez de datos experimentales que se pueden utilizar para la caracterización del material.

1.2. Objetivos

Los objetivos de la memoria son estudiar el comportamiento de la segunda variación para el funcional asociado a la formulación variacional para estos materiales electroelásticos en presencia de un campo eléctrico externo, donde se asume el cuerpo electroelástico completamente rodeado de espacio vacío. Además se considera parte del estudio comparar el comportamiento del material para diferentes geometrías y direcciones de campos eléctricos externos.

En particular se tienen dos trabajos a realizar. El primero consiste en estudiar el comportamiento de los materiales electroelásticos para algunos ejemplos de ecuaciones constitutivas, considerando un espacio libre infinito que rodea al cuerpo electroelástico; y el segundo es estudiar el comportamiento de la segunda variación para el funcional asociado a la formulación variacional para estos materiales electroelásticos para tres problemas de valor de frontera por medio del software Mathematica. Estos problemas son:

- La extensión homogénea de un espacio semi-infinito, cuya deformación es plana y bajo el efecto de un campo eléctrico perpendicular al plano.

- Extensión e Inflación de un tubo rodeado de espacio libre en presencia de un campo eléctrico radial.

- La inflación de una ésfera de pared gruesa en presencia de una campo eléctrico radial.

1.3. Alcances

Se considera en este trabajo cuerpos electroelásticos rodeados de espacio vacío, los materiales no presentan carga eléctrica alguna y se desprecian las cargas y campos magnéticos.

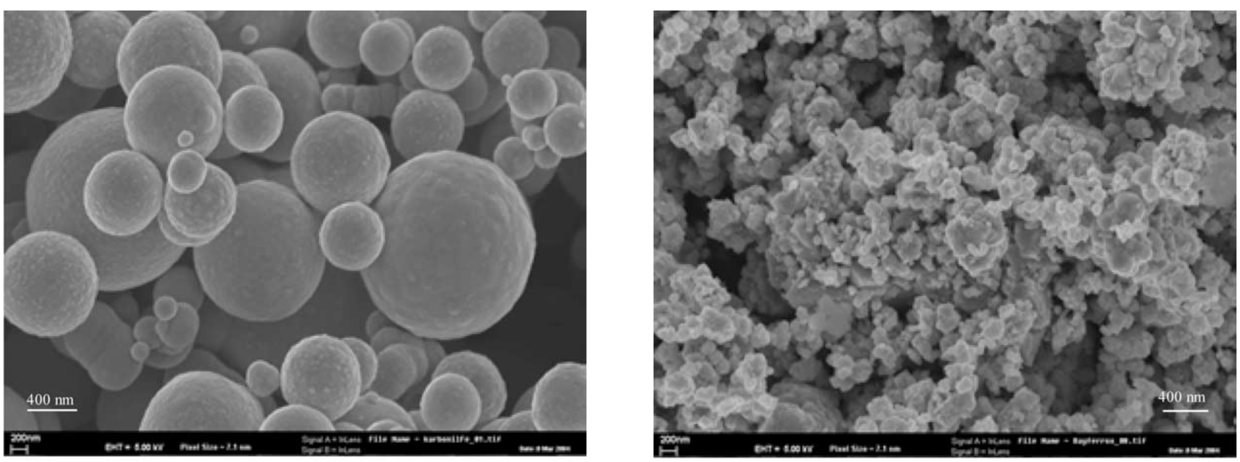
Se asumen deformaciones cuasi-estáticas, es decir el efecto del tiempo no se considera.

CAPÍTULO 2

Materiales Electroelásticos

Los Polímeros Electroactivos son materiales compuestos hechos de una matriz de elastómeros con una distribución de partículas electroactivas. Estos materiales presentan un cambio de tamaño o forma cuando son estimulados por un campo eléctrico. Una propiedad característica típica de estos materiales es que pueden presentar grandes deformaciones mientras están en presencia de fuerzas y campos eléctricos. Esto se debe a que las fuerzas eléctricas que actúan sobre las partículas son transmitidas directamente a las cadenas poliméricas, dando como resultado su deformación o traslado. La distorsión de la forma ocurre casi instantáneamente y desaparece abruptamente cuando el campo eléctrico externo es aplicado o removido [3].

La microestructura de los Polímeros Electroactivos se puede ver en la figura 1, donde se pueden observar diferentes partículas esféricas (las partículas electroactivas) las cuales están rodeadas por la matriz de elastómeros (que generalmente se consideran como materiales no activos desde el punto de vista eléctrico).



a b

Figura 1: Microestructura de dos Elastómeros Electro-Sensibles con distintos tipos y tamaños de partículas, (a) Hierro (Fe) y (b) Magnetita (Fe_3O_4), tomadas con un microscopio electrónico de barrido [4]

Estos materiales se están usando en muchos mecanismos que se utilizan en la vida cotidiana. Cada vez más, se están realizando esfuerzos para reducir su tamaño, masa y energía, así como utilizarlos para controlar dispositivos biológicamente inspirados. Durante muchos años, se ha sabido que ciertos tipos de polímeros pueden cambiar de forma en respuesta a la estimulación eléctrica, sin embargo, inicialmente estos materiales solo presentaban una pequeña deformación (estiramiento, contracción o de flexión). Desde principios de la década de 1990 surgen los nuevos materiales Polímeros Electroactivos (EAP) que presentan grandes deformaciones bajo campos eléctricos externos.

Las propiedades únicas de estos materiales son altamente atractivas para usos en actuadores, músculos artificiales en robótica, aplicaciones biomédicas en prótesis, entre otras aplicaciones. Cada vez más, los ingenieros son capaces de desarrollar mecanismos accionados que antes eran sólo imaginables en la ciencia ficción.

En los últimos años, ha habido un progreso significativo en el campo de los Polímeros Electroelásticos hacia la fabricación de actuadores prácticos, y diversos productos comerciales están comenzando a surgir. Los mecanismos y dispositivos que se están considerando son aplicables a la industria aeroespacial, automotriz, médica, robótica, exoesqueletos, mecanismos de articulación, entretención, animación, juguetes, ropa, interfaces táctiles, control de ruido, transductores, generadores de energía y estructuras inteligentes [3].

La inestabilidad elástica que pueden presentar estos materiales se puede explicar como un conjunto de fenómenos no lineales en la geometría, donde los desplazamientos en un cuerpo no son proporcionales a las fuerzas aplicadas. Algunos modelos que mejor explican el comportamiento que tienen estos materiales en presencia de un campo eléctrico son una lámina cargada uniaxialmente y una lámina cargada biaxialmente, como se observa en la figura 2 y 3.

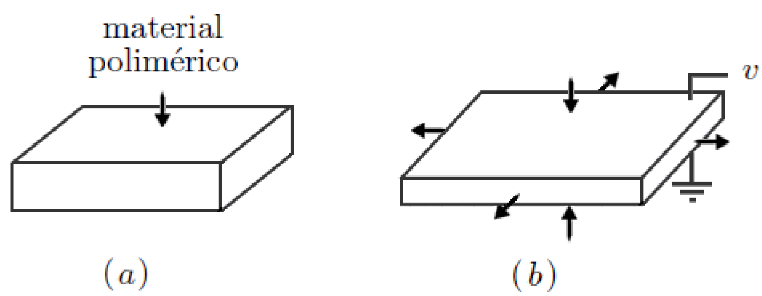


Figura 2: Lámina Plana de un Material Polimérico, (a) Sin Carga Eléctrica, (b) Con Carga Eléctrica

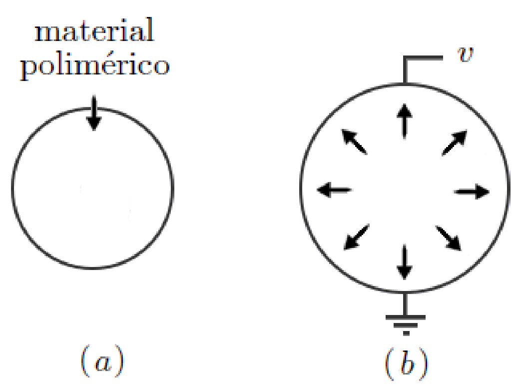


Figura 3: Membrana Esférica (carga biaxial) de un Material Polimérico, (a) Sin Carga Eléctrica, (b) Con Carga Eléctrica

La deformación que estas geometrías presentan es la que se observa en estas figuras, pero en algunas ocasiones existe una inestabilidad elástica al momento de actuar un campo eléctrico, como se logra observar en la figura 5. Esta inestabilidad se presenta como unas pequeñas “arrugas” en el material, lo que indica que para los rangos de desplazamientos y fuerzas las ecuaciones que modelan al cuerpo presentan no linealidad.

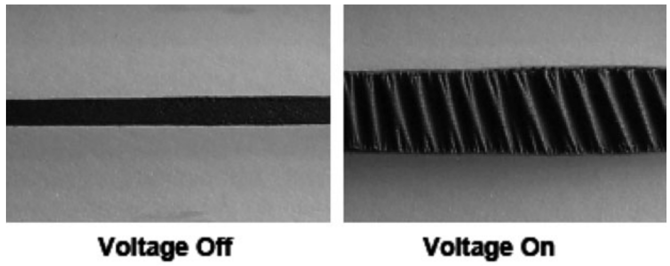


Figura 4: Ej. de posibles deformaciones asociadas a un fenómeno de inestabilidad electroelástica en una lámina cargada uniaxialmente [5]

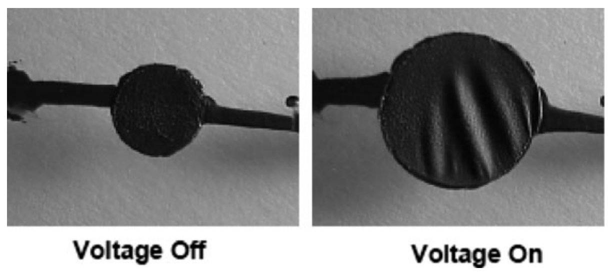


Figura 5: Ej. de posibles deformaciones asociadas a un fenómeno de inestabilidad electroelástica en una lámina cargada biaxialmente [6]

CAPÍTULO 3

Electroelasticidad No-lineal

El estudio de los materiales electroelásticos no lineales considera la deformación de los cuerpos y además la presencia de un campo eléctrico, y para eso se darán a entender conceptos necesarios para este estudio [7, 8].

3.1. Cinemática

Se considera un sólido continuo electroelástico que ocupa la región $B_o \subset \mathrm{R}^3$ en la configuración de referencia (libre de esfuerzos mecánicos y en ausencia de un campo eléctrico). Se define la posición en la configuración inicial de un cuerpo como el vector $\mathbf{X} \in B_o$ y en una configuración deformada el punto $\mathbf{X}$ ocupa la posición $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X})$, donde el vector $\boldsymbol{\chi}$ describe la deformación del material.

El Tensor Gradiente de Deformación $\mathbf{F}$ se define como:

$$\mathbf{F} = Grad\, \mathbf{x}. \tag{3.1}$$

También usamos la notación estándar:

$$J = det\, \mathbf{F}, \tag{3.2}$$

con la convención J $>$ 0.

3.2. Ecuaciones de Campo Eléctrico

La forma simplificada de las ecuaciones de Maxwell para las variables del Campo Eléctrico en ausencia de campos magnéticos, corrientes libres y cargas eléctricas, y sin dependencia del tiempo son las siguientes:

$$div\, \mathbf{D} = \mathbf{0}, \tag{3.3}$$

$$curl\, \mathbf{E} = \mathbf{0}, \tag{3.4}$$

donde $\mathbf{E}$ es el vector campo eléctrico y $\mathbf{D}$ es el vector desplazamiento eléctrico. Considerando curl y div como los operadores curl y divergencia con respecto a $\mathbf{x}$.

En el espacio vacío se tiene:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_{\mathbf{o}}\mathbf{E}, \tag{3.5}$$

donde la constante ε_o es la permitividad eléctrica en el vacío. Para materia condensada es necesario considerar una variable adicional llamada la polarización eléctrica $\mathbf{P}$, donde:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_{\mathbf{o}}\mathbf{E} + \mathbf{P}. \tag{3.6}$$

3.3. Leyes del Balance Mecánico

La ecuación de equilibrio en ausencia de fuerzas de cuerpo mecánicas y de efecto del tiempo es:

$$div\ \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_e = \mathbf{0}, \tag{3.7}$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el Tensor de Esfuerzos de Cauchy y $\mathbf{f}_e$ es la fuerza de cuerpo eléctrica (por unidad de volumen), la cual se expresa como:

$$\mathbf{f}_e = (grad\ \mathbf{E})^T\mathbf{P}. \tag{3.8}$$

Considerando esto y las ecuaciones 3.3, 3.4 y 3.6 se obtiene:

$$\mathbf{f}_e = div\ \boldsymbol{\tau}_m, \tag{3.9}$$

donde:

$$\boldsymbol{\tau}_m = \varepsilon_o \left[\mathbf{E} \otimes \mathbf{E} - \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})\mathbf{I}\right], \tag{3.10}$$

con $\mathbf{I}$ el tensor identidad y $\boldsymbol{\tau}_m$ se define como el Tensor de Esfuerzos de Maxwell.

Ahora bien, se puede introducir el Tensor de Esfuerzos Total $\boldsymbol{\tau}$ definido como:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\tau}_m. \tag{3.11}$$

Entonces la ecuación de equilibrio 3.7 se puede expresar como:

$$div\ \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}. \tag{3.12}$$

3.4. Condiciones de Borde

El Campo Eléctrico $\mathbf{E}$ y el Vector Desplazamiento Eléctrico $\mathbf{D}$ satisfacen condiciones de continuidad en particular a través de la superficie del cuerpo con el espacio vacío. En la configuración deformada, en ausencia de cargas eléctricas de superficie, las condiciones de continuidad son:

$$\mathbf{n} \cdot [\mathbf{D}] = 0, \qquad \mathbf{n} \times [\mathbf{E}] = \mathbf{0}, \tag{3.13}$$

donde el paréntesis cuadrado indica la discontinuidad alrededor de la superficie y $\mathbf{n}$ es la normal a la superficie.

La condición de borde correspondiente al Tensor de Esfuerzos Total $\boldsymbol{\tau}$ es:

$$[\boldsymbol{\tau}]\mathbf{n} = \mathbf{0}. \tag{3.14}$$

Si $\mathbf{t}_a$ es la fuerza de tracción mecánica aplicada por unidad de área, entonces el tensor de Esfuerzos calculado dentro del material debe cumplir que:

$$\boldsymbol{\tau}\mathbf{n} = \boldsymbol{\tau}_m\mathbf{n} + \mathbf{t}_a, \tag{3.15}$$

donde $\boldsymbol{\tau}_m$ es el Tensor de Esfuerzos de Maxwell en el exterior del cuerpo definido en la ecuación 3.10.

3.5. Formulación Lagrangiana

La forma global de las ecuaciones 3.3 y 3.4 son:

$$\int_B div\ \mathbf{D}\ dv = \int_{\partial B} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}\ da = 0, \tag{3.16}$$

$$\int_C curl\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\ da = \int_{\partial C} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = 0, \tag{3.17}$$

donde B y ∂B son la configuración actual de un cuerpo y su contorno respectivamente, y además $\mathbf{n}$ es el vector normal a ∂B. C y ∂C corresponden a una superficie abierta en la configuración actual de un material y su contorno curvo cerrado respectivamente, además $\mathbf{n}$ es el vector normal a C, y $d\mathbf{x}$ es tangente a ∂C.

La contraparte Lagrangiana de $\mathbf{D}$ y $\mathbf{E}$, denotadas como $\mathbf{D}_l$ y $\mathbf{E}_l$ respectivamente, se definen como [2, 7]:

$$\mathbf{D}_l = J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{D}, \tag{3.18}$$

$$\mathbf{E}_l = \mathbf{F}^T\mathbf{E}. \tag{3.19}$$

Y se cumple que:

$$Div\ \mathbf{D}_l = 0, \tag{3.20}$$

$$Curl\ \mathbf{E}_l = \mathbf{0}, \tag{3.21}$$

donde Div y $Curl$ son los operadores divergencia y curl definidos con $\mathbf{X}$ en la configuración de referencia.

Ahora bien, se puede expresar la forma Lagrangiana de $\mathbf{P}$, la cual se denota como $\mathbf{P}_l$ como:

$$\mathbf{P}_l = J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{P}. \tag{3.22}$$

Considerando la ecuación 3.6 se obtiene:

$$\mathbf{D}_l = \varepsilon_o J\mathbf{c}^{-1}\mathbf{E}_l + \mathbf{P}_l, \tag{3.23}$$

donde $\mathbf{c}$ es el Tensor de Deformación de Cauchy-Green Derecho, definido como:

$$\mathbf{c} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}. \tag{3.24}$$

A partir del Tensor de Esfuerzos Total $\boldsymbol{\tau}$ se puede definir un tensor total de esfuerzos nominal $\mathbf{T}$ como:

$$\mathbf{T} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\tau}. \tag{3.25}$$

Considerando la ecuación 3.12 se obtiene que:

$$Div\ \mathbf{T} = \mathbf{0}, \tag{3.26}$$

y considerando la ecuación de borde 3.15 en la configuración de referencia se tiene que:

$$\mathbf{T}^T\mathbf{N} = \mathbf{T}_M^T\mathbf{N} + \mathbf{t}_A, \tag{3.27}$$

donde $\mathbf{N}$ es el vector normal en la configuración de referencia y $\mathbf{t}_A$ es la fuerza de tracción mecánica aplicada en la configuración de referencia, con:

$$\mathbf{T}_M = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\tau}_m. \tag{3.28}$$

3.6. Ecuaciones Constitutivas

Las leyes constitutivas permiten expresar, por ejemplo, el Tensor de Esfuerzo de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ y la Polarización $\mathbf{P}$ en términos de las variables independientes. Consideramos la función Ψ que depende sólo de $\mathbf{F}$ y $\mathbf{E}$, la cual se puede escribir como $\Psi = \Psi(\mathbf{F}, \mathbf{E})$. Como se sabe que existe una conexión entre $\mathbf{E}$ y $\mathbf{E}_l$, se puede expresar lo siguiente:

$$\Psi(\mathbf{F}, \mathbf{E}) = \Psi(\mathbf{F}, \mathbf{F}^{-T}\mathbf{E}_l) \equiv \Phi(\mathbf{F}, \mathbf{E}_l), \tag{3.29}$$

considerando como Φ la función que depende sólo de $\mathbf{F}$ y $\mathbf{E}_l$.

Se puede expresar el Tensor de Esfuerzos de Cauchy y la Polarización como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho\mathbf{F}\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{F}}, \tag{3.30}$$

$$\mathbf{P} = -\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{E}}. \tag{3.31}$$

Para basar los cálculos en el uso de Φ se tiene la conexión:

$$\mathbf{F}\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{F}} = \mathbf{F}\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{F}} - \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{E}} \otimes \mathbf{E}, \tag{3.32}$$

con lo cual se puede expresar el Tensor de Esfuerzos de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho\mathbf{F}\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{F}} - \mathbf{P}\otimes\mathbf{E}, \tag{3.33}$$

y el Tensor de Esfuerzos Total $\boldsymbol{\tau}$ como:

$$\boldsymbol{\tau} = \rho\mathbf{F}\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{F}} + \varepsilon_o\left[\mathbf{E}\otimes\mathbf{E} - \frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})\mathbf{I}\right]. \tag{3.34}$$

Basados en el uso de Φ la forma Euleriana y Lagrangiana de la Polarización son:

$$\mathbf{P} = -\rho\mathbf{F}\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{E}_l}, \tag{3.35}$$

$$\mathbf{P}_l = -\rho_o\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{E}_l}. \tag{3.36}$$

Considerando la ecuación 3.25 en 3.34 se obtiene:

$$\mathbf{T} = \rho_o\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{F}} + \varepsilon_o J\mathbf{F}^{-1}\left[\mathbf{E}\otimes\mathbf{E} - \frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})\mathbf{I}\right]. \tag{3.37}$$

Usando la transformación definida en la ecuación 3.19 y luego derivándola se obtiene:

$$J\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} = J\mathbf{E}_l\cdot(\mathbf{c}^{-1}\mathbf{E}_l), \tag{3.38}$$

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{F}}(J\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}) = -2J\mathbf{F}^{-1}\left[\mathbf{E}\otimes\mathbf{E} - \frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})\mathbf{I}\right]. \tag{3.39}$$

Ahora bien, se introduce una Función de Energía Libre, la cual llamaremos Ω, definida como:

$$\Omega = \rho_o\Phi - \frac{1}{2}\varepsilon_o J\mathbf{E}_l\cdot(\mathbf{c}^{-1}\mathbf{E}_l). \tag{3.40}$$

Entonces el Tensor de Esfuerzos Total en la forma Lagrangiana y Euleriana se puede expresar como:

$$\mathbf{T} = \frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{F}}, \tag{3.41}$$

$$\boldsymbol{\tau} = J^{-1}\mathbf{F}\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{F}}. \tag{3.42}$$

Con lo que se obtiene también:

$$\mathbf{D}_l = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{E}_l}, \tag{3.43}$$

$$\mathbf{D} = -J^{-1}\mathbf{F}\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{E}_l}, \tag{3.44}$$

$$\mathbf{P}_l = \mathbf{D}_l - \varepsilon_o J\mathbf{c}^{-1}\mathbf{E}_l. \tag{3.45}$$

En caso de un material incompresible (J=1) se tiene que:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{F}\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{F}} - p\mathbf{I}, \tag{3.46}$$

$$\mathbf{D} = -\mathbf{F}\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{E}_l}, \tag{3.47}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_o\mathbf{E}. \tag{3.48}$$

Otro caso es usar $\mathbf{D}_l$ como la variable eléctrica independiente en vez de $\mathbf{E}_l$, para lo cual se usa una transformación de tipo Legendre definida por:

$$\Omega^*(\mathbf{F}, \mathbf{D}_l) = \Omega(\mathbf{F}, \mathbf{E}_l) + \mathbf{D}_l \cdot \mathbf{E}_l, \tag{3.49}$$

con la cual se tiene que, para un material compresible:

$$\mathbf{T} = \frac{\partial \Omega^*}{\partial \mathbf{F}}, \tag{3.50}$$

$$\mathbf{E}_l = \frac{\partial \Omega^*}{\partial \mathbf{D}_l}. \tag{3.51}$$

La Función de Energía Libre con respecto al espacio vacío alrededor del cuerpo se puede expresar como:

$$\Omega_e(\mathbf{F}, \mathbf{E}_l) = -\frac{1}{2}\varepsilon_o J(\mathbf{F}^{-T}\mathbf{E}_l) \cdot (\mathbf{F}^{-T}\mathbf{E}_l). \tag{3.52}$$

3.7. Simetría de Materiales

Los materiales electroelásticos que consideramos son isotrópicos, es decir se asume a las partículas electroactivas distribuidas de forma aleatoria en la matriz polimérica. Si Φ es una función isotrópica de los dos tensores $\mathbf{c}$ y $\mathbf{E}_l \otimes \mathbf{E}_l$, en este caso la dependencia de Φ se reduce a la dependencia de invariantes combinados $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$ de $\mathbf{c}$ y $\mathbf{E}_l \otimes \mathbf{E}_l$, los cuales se definen como [9]:

$$I_1 = tr\ \mathbf{c}, \tag{3.53}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[(tr\ \mathbf{c})^2 - tr\ (\mathbf{c}^2)\right], \tag{3.54}$$

$$I_3 = det\ \mathbf{c} = J^2, \tag{3.55}$$

$$I_4 = \mid \mathbf{E}_l \mid^2, \tag{3.56}$$

$$I_5 = \mathbf{E}_l \cdot (\mathbf{c}\mathbf{E}_l), \tag{3.57}$$

$$I_6 = \mathbf{E}_l \cdot (\mathbf{c}^2\mathbf{E}_l). \tag{3.58}$$

Con lo cual podemos escribir que $\Omega(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6)$, y además definimos que:

$$\Omega_i = \frac{\partial\Omega}{\partial \mathbf{I}_i}, \tag{3.59}$$

con lo cual se obtiene:

$$\boldsymbol{\tau} = 2J^{-1}[\Omega_1\mathbf{b} + \Omega_2(I_1\mathbf{b} - \mathbf{b}^2) + \Omega_3 I_3\mathbf{I} + \Omega_5\mathbf{bE}\otimes\mathbf{bE} + \Omega_6(\mathbf{bE}\otimes\mathbf{b}^2\mathbf{E} + \mathbf{b}^2\mathbf{E}\otimes\mathbf{bE})], \tag{3.60}$$

y

$$\mathbf{D} = -2J^{-1}[\Omega_4\mathbf{bE} + \Omega_5\mathbf{b}^2\mathbf{E} + \Omega_6\mathbf{b}^3\mathbf{E}], \tag{3.61}$$

donde $\mathbf{b}$ es el Tensor de Deformación de Cauchy-Green Izquierdo, definido como:

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T. \tag{3.62}$$

Además para un material incompresible (J=1) se tiene que:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\Omega_1\mathbf{b} + 2\Omega_2(I_1\mathbf{b} - \mathbf{b}^2) - p\mathbf{I} + 2\Omega_5\mathbf{bE}\otimes\mathbf{bE} + 2\Omega_6(\mathbf{bE}\otimes\mathbf{b}^2\mathbf{E} + \mathbf{b}^2\mathbf{E}\otimes\mathbf{bE}), \tag{3.63}$$

$$\mathbf{D} = -2[\Omega_4\mathbf{bE} + \Omega_5\mathbf{b}^2\mathbf{E} + \Omega_6\mathbf{b}^3\mathbf{E}]. \tag{3.64}$$

En particular, para la función Ω^* se consideran los mismos invariantes I_1, I_2, I_3 junto con las tres invariantes independientes basadas por $\mathbf{D}_l$, entonces se tiene que:

$$\boldsymbol{\tau} = 2J^{-1}[\Omega_1^*\mathbf{b} + \Omega_2^*(I_1\mathbf{b} - \mathbf{b}^2) + \Omega_3^*I_3\mathbf{I} + \Omega_5^*\mathbf{bD}\otimes\mathbf{bD} + \Omega_6^*(\mathbf{bD}\otimes\mathbf{b}^2\mathbf{D} + \mathbf{b}^2\mathbf{D}\otimes\mathbf{bD})], \tag{3.65}$$

$$\mathbf{E} = 2J[\Omega_4^*\mathbf{bD} + \Omega_5^*\mathbf{b}^2\mathbf{D} + \Omega_6^*\mathbf{b}^3\mathbf{D}], \tag{3.66}$$

donde I_4, I_5 e I_6 se reemplazan por:

$$K_4 = \mathbf{D}_l\cdot\mathbf{D}_l, \tag{3.67}$$

$$K_5 = \mathbf{D}_l\cdot(\mathbf{c}\mathbf{D}_l), \tag{3.68}$$

$$K_6 = \mathbf{D}_l\cdot(\mathbf{c}^2\mathbf{D}_l). \tag{3.69}$$

3.8. Funcional y Formulación Variacional

Para identificar si existe inestabilidad o no en el material al aplicarle un campo eléctrico se puede hacer el análisis considerando el funcional Π asociado a la formulación variacional [1].

Considerando la ecuación 3.4 se puede introducir el potencial escalar $\varphi(\mathbf{x})$, el cual se obtiene de:

$$\mathbf{E} = -grad\ \varphi, \tag{3.70}$$

y considerando la ecuación 3.21 se puede introducir el potencial escalar Lagrangiano $\varphi_l(\mathbf{X})$, que se obtiene de:

$$\mathbf{E}_l = -Grad\ \varphi_l. \tag{3.71}$$

El funcional Π asociado a la formulación variacional es una expresión para la energía total acumulada por el cuerpo (elástica y eléctrica) mas la energía eléctrica del espacio vacío que rodea al cuerpo, la cual se expresa como:

$$\begin{aligned}\Pi(\mathbf{x},\varphi_l) = &\int_{B_r}\Omega(\mathbf{F},\mathbf{E}_l)\,dV + \int_{B'_r}\Omega_e(\mathbf{F},\mathbf{E}_l)\,dV - \int_{\partial B_r^\tau}\mathbf{x}\cdot\mathbf{t}_A\,dA\\ &-\int_{B_r}\rho_r\mathbf{x}\cdot\mathbf{f}\,dV - \int_{\partial B^\infty}\varphi\mathbf{D}_a\cdot\mathbf{n}\,da,\end{aligned} \tag{3.72}$$

donde $\mathbf{f}$ es la fuerza mecánica del cuerpo, $\mathbf{D}_a$ es un desplazamiento eléctrico aplicado lejos, ∂B_r^τ es el contorno con tracciones ya existentes en la configuración de referencia y ∂B^∞ es el contorno de ∂B en el infinito.

Estudiando el signo de la segunda variación del funcional Π asociado a la formulación variacional se puede determinar si existe inestabilidad o no en el material al aplicarle un campo eléctrico, y su segunda variación se expresa como [10]:

$$\begin{aligned}\delta^2\Pi = &\int_{B_r}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}}\delta F_{i\alpha}\delta F_{j\beta} + 2\frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{i\alpha}\partial E_{l_\beta}}\delta F_{i\alpha}\delta E_{l_\beta} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial E_{l_\alpha}\partial E_{l_\beta}}\delta E_{l_\alpha}\delta E_{l_\beta}\right)dV\\ &+\varepsilon_o\int_B([(\delta_{ip}E_jE_q + \delta_{jq}E_iE_p - \delta_{iq}E_jE_p - \delta_{jp}E_iE_q - \delta_{pq}E_iE_j) + \frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})\\ &(\delta_{iq}\delta_{jp} - \delta_{ip}\delta_{jq})]a_{pi}a_{qj} + (\delta_{pq}E_i + \delta_{iq}E_p - \delta_{ip}E_q)a_{ip}\delta E_q - \delta_{pq}\delta E_p\delta E_q)dv.\end{aligned} \tag{3.73}$$

Una solución del problema de valor de frontera es estable si:

$$\delta^2\Pi \geq 0 \quad \forall \quad \delta\mathbf{x},\delta\mathbf{E}. \tag{3.74}$$

Se necesita determinar si la solución de este problema es estable o no considerando un problema en tres dimensiones, para lo cual definimos los vectores $\mathbb{F}$ y $\mathbb{F}'$ como:

$$\mathbb{F} = (\delta F_{11},\delta F_{12},\delta F_{13},\delta F_{21},\delta F_{22},\delta F_{23},\delta F_{31},\delta F_{32},\delta F_{33},\delta E_{l_1},\delta E_{l_2},\delta E_{l_3})^T, \tag{3.75}$$

$$\mathbb{F}' = (a_{11},a_{12},a_{13},a_{21},a_{22},a_{23},a_{31},a_{32},a_{33},\delta E_1,\delta E_2,\delta E_3)^T. \tag{3.76}$$

donde a_{ij} son los componentes del tensor $grad\ \delta\mathbf{x}$. Luego, la ecuación 3.74 es satisfecha si[1]:

$$\mathbb{F}^T\mathbb{M}\mathbb{F} \geq 0, \qquad \mathbb{F}'^T\mathbb{M}'\mathbb{F}' \geq 0, \tag{3.77}$$

[1] Es solo una condición suficiente, no necesaria.

donde las matrices $\mathbb{M} = \mathbb{M}_{12x12}$ y $\mathbb{M}' = \mathbb{M}'_{12x12}$ se definen como:

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B} \\ \mathbb{B}^T & \mathbb{C} \end{pmatrix}, \tag{3.78}$$

$$\mathbb{M}' = \begin{pmatrix} \mathbb{A}' & \mathbb{B}' \\ \mathbb{B}'^T & \mathbb{C}' \end{pmatrix}, \tag{3.79}$$

donde las matrices $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{9x9}$, $\mathbb{B} = \mathbb{B}_{9x3}$ y $\mathbb{C} = \mathbb{C}_{3x3}$ están dadas por:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix}
\frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{11}\partial F_{11}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{12}\partial F_{11}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{13}\partial F_{11}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{21}\partial F_{11}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{22}\partial F_{11}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{23}\partial F_{11}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{31}\partial F_{11}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{32}\partial F_{11}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{33}\partial F_{11}} \\
\frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{12}\partial F_{11}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{12}\partial F_{12}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{13}\partial F_{12}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{21}\partial F_{12}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{22}\partial F_{12}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{23}\partial F_{12}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{31}\partial F_{12}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{32}\partial F_{12}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{33}\partial F_{12}} \\
\frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{13}\partial F_{11}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{13}\partial F_{12}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{13}\partial F_{13}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{21}\partial F_{13}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{22}\partial F_{13}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{23}\partial F_{13}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{31}\partial F_{13}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{32}\partial F_{13}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{33}\partial F_{13}} \\
\frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{21}\partial F_{11}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{21}\partial F_{12}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{21}\partial F_{13}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{21}\partial F_{21}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{22}\partial F_{21}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{23}\partial F_{21}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{31}\partial F_{21}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{32}\partial F_{21}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{33}\partial F_{21}} \\
\frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{22}\partial F_{11}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{22}\partial F_{12}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{22}\partial F_{13}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{22}\partial F_{21}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{22}\partial F_{22}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{23}\partial F_{22}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{31}\partial F_{22}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{32}\partial F_{22}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{33}\partial F_{22}} \\
\frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{23}\partial F_{11}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{23}\partial F_{12}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{23}\partial F_{13}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{23}\partial F_{21}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{23}\partial F_{22}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{23}\partial F_{23}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{31}\partial F_{23}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{32}\partial F_{23}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{33}\partial F_{23}} \\
\frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{31}\partial F_{11}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{31}\partial F_{12}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{31}\partial F_{13}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{31}\partial F_{21}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{31}\partial F_{22}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{31}\partial F_{23}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{31}\partial F_{31}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{32}\partial F_{31}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{33}\partial F_{31}} \\
\frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{32}\partial F_{11}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{32}\partial F_{12}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{32}\partial F_{13}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{32}\partial F_{21}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{32}\partial F_{22}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{32}\partial F_{23}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{32}\partial F_{31}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{32}\partial F_{32}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{33}\partial F_{32}} \\
\frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{33}\partial F_{11}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{33}\partial F_{12}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{33}\partial F_{13}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{33}\partial F_{21}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{33}\partial F_{22}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{33}\partial F_{23}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{33}\partial F_{31}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{33}\partial F_{32}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{33}\partial F_{33}}
\end{pmatrix}, \tag{3.80}$$

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix}
\frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{11}\partial E_{l_1}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{11}\partial E_{l_2}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{11}\partial E_{l_3}} \\
\frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{12}\partial E_{l_1}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{12}\partial E_{l_2}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{12}\partial E_{l_3}} \\
\frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{13}\partial E_{l_1}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{13}\partial E_{l_2}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{13}\partial E_{l_3}} \\
\frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{21}\partial E_{l_1}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{21}\partial E_{l_2}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{21}\partial E_{l_3}} \\
\frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{22}\partial E_{l_1}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{22}\partial E_{l_2}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{22}\partial E_{l_3}} \\
\frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{23}\partial E_{l_1}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{23}\partial E_{l_2}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{23}\partial E_{l_3}} \\
\frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{31}\partial E_{l_1}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{31}\partial E_{l_2}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{31}\partial E_{l_3}} \\
\frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{32}\partial E_{l_1}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{32}\partial E_{l_2}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{32}\partial E_{l_3}} \\
\frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{33}\partial E_{l_1}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{33}\partial E_{l_2}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{33}\partial E_{l_3}}
\end{pmatrix}, \tag{3.81}$$

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix}
\frac{\partial^2\Omega}{\partial E_{l_1}\partial E_{l_1}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial E_{l_1}\partial E_{l_2}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial E_{l_1}\partial E_{l_3}} \\
\frac{\partial^2\Omega}{\partial E_{l_1}\partial E_{l_2}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial E_{l_2}\partial E_{l_2}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial E_{l_2}\partial E_{l_3}} \\
\frac{\partial^2\Omega}{\partial E_{l_1}\partial E_{l_3}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial E_{l_2}\partial E_{l_3}} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial E_{l_3}\partial E_{l_3}}
\end{pmatrix}. \tag{3.82}$$

En el caso de considerar un cuerpo incompresible la matriz $\mathbb{A}$ depende de una variable p, por lo cual se expresa como:

$$\mathbb{A}_{i\alpha j\beta} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}} - p[F^{-1}_{\alpha i}F^{-1}_{\beta j} - F^{-1}_{\alpha j}F^{-1}_{i\beta}], \tag{3.83}$$

donde sus componentes se distribuyen como:

$$
\mathbb{A} = \begin{pmatrix}
\mathbb{A}_{1111} & \mathbb{A}_{1211} & \mathbb{A}_{1311} & \mathbb{A}_{2111} & \mathbb{A}_{2211} & \mathbb{A}_{2311} & \mathbb{A}_{3111} & \mathbb{A}_{3211} & \mathbb{A}_{3311} \\
\mathbb{A}_{1211} & \mathbb{A}_{1212} & \mathbb{A}_{1312} & \mathbb{A}_{2112} & \mathbb{A}_{2212} & \mathbb{A}_{2312} & \mathbb{A}_{3112} & \mathbb{A}_{3212} & \mathbb{A}_{3312} \\
\mathbb{A}_{1311} & \mathbb{A}_{1312} & \mathbb{A}_{1313} & \mathbb{A}_{2113} & \mathbb{A}_{2213} & \mathbb{A}_{2313} & \mathbb{A}_{3113} & \mathbb{A}_{3213} & \mathbb{A}_{3313} \\
\mathbb{A}_{2111} & \mathbb{A}_{2112} & \mathbb{A}_{2113} & \mathbb{A}_{2121} & \mathbb{A}_{2221} & \mathbb{A}_{2321} & \mathbb{A}_{3121} & \mathbb{A}_{3221} & \mathbb{A}_{3321} \\
\mathbb{A}_{2211} & \mathbb{A}_{2212} & \mathbb{A}_{2213} & \mathbb{A}_{2221} & \mathbb{A}_{2222} & \mathbb{A}_{2322} & \mathbb{A}_{3122} & \mathbb{A}_{3222} & \mathbb{A}_{3322} \\
\mathbb{A}_{2311} & \mathbb{A}_{2312} & \mathbb{A}_{2313} & \mathbb{A}_{2321} & \mathbb{A}_{2322} & \mathbb{A}_{2323} & \mathbb{A}_{3123} & \mathbb{A}_{3223} & \mathbb{A}_{3323} \\
\mathbb{A}_{3111} & \mathbb{A}_{3112} & \mathbb{A}_{3113} & \mathbb{A}_{3121} & \mathbb{A}_{3122} & \mathbb{A}_{3123} & \mathbb{A}_{3131} & \mathbb{A}_{3231} & \mathbb{A}_{3331} \\
\mathbb{A}_{3211} & \mathbb{A}_{3212} & \mathbb{A}_{3213} & \mathbb{A}_{3221} & \mathbb{A}_{3222} & \mathbb{A}_{3223} & \mathbb{A}_{3231} & \mathbb{A}_{3232} & \mathbb{A}_{3332} \\
\mathbb{A}_{3311} & \mathbb{A}_{3312} & \mathbb{A}_{3313} & \mathbb{A}_{3321} & \mathbb{A}_{3322} & \mathbb{A}_{3323} & \mathbb{A}_{3331} & \mathbb{A}_{3332} & \mathbb{A}_{3333}
\end{pmatrix}. \tag{3.84}
$$

Las matrices $\mathbb{A}' = \mathbb{A}'_{9x9}$, $\mathbb{B}' = \mathbb{B}'_{9x3}$ y $\mathbb{C}' = \mathbb{C}'_{3x3}$ están dadas por:

$$
\mathbb{A}' = \begin{pmatrix}
-E_1^2 & -E_1E_2 & -E_1E_3 & -E_1E_2 & -E_2^2 & -E_2E_3 & -E_1E_3 & -E_2E_3 & -E_3^2 \\
-E_1E_2 & \frac{1}{2}(E_1^2+E_2^2-E_3^2) & E_2E_3 & \frac{1}{2}(E_3^2-E_1^2-E_2^2) & 0 & -E_1E_3 & -E_2E_3 & E_1E_3 & 0 \\
-E_1E_3 & E_2E_3 & \frac{1}{2}(E_1^2-E_2^2+E_3^2) & -E_2E_3 & 0 & E_1E_2 & \frac{1}{2}(E_2^2-E_1^2-E_3^2) & -E_1E_2 & 0 \\
-E_1E_2 & \frac{1}{2}(E_3^2-E_1^2-E_2^2) & -E_2E_3 & \frac{1}{2}(E_1^2+E_2^2-E_3^2) & 0 & E_1E_3 & E_2E_3 & -E_1E_3 & 0 \\
-E_2^2 & 0 & 0 & 0 & -E_2^2 & -E_2E_3 & -E_1E_3 & -E_2E_3 & -E_3^2 \\
-E_2E_3 & -E_1E_3 & E_1E_2 & E_1E_3 & -E_2E_3 & \frac{1}{2}(E_2^2-E_1^2+E_3^2) & -E_1E_2 & \frac{1}{2}(E_1^2-E_2^2-E_3^2) & 0 \\
-E_1E_3 & -E_2E_3 & \frac{1}{2}(E_2^2-E_1^2-E_3^2) & E_2E_3 & -E_1E_3 & -E_1E_2 & \frac{1}{2}(E_1^2-E_2^2+E_3^2) & E_1E_2 & 0 \\
-E_2E_3 & E_1E_3 & -E_1E_2 & -E_1E_3 & -E_2E_3 & \frac{1}{2}(E_1^2-E_2^2-E_3^2) & E_1E_2 & \frac{1}{2}(E_2^2-E_1^2+E_3^2) & 0 \\
-E_3^2 & 0 & 0 & 0 & -E_3^2 & 0 & 0 & 0 & -E_3^2
\end{pmatrix}, \tag{3.85}
$$

$$
\mathbb{B}' = \begin{pmatrix}
E_1 & -E_2 & -E_3 \\
E_2 & E_1 & 0 \\
E_3 & 0 & E_1 \\
E_2 & E_1 & 0 \\
-E_1 & E_2 & -E_3 \\
0 & E_3 & E_2 \\
E_3 & 0 & E_1 \\
0 & E_3 & E_2 \\
-E_1 & -E_2 & E_3
\end{pmatrix}, \tag{3.86}
$$

$$
\mathbb{C}' = -\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{pmatrix}. \tag{3.87}
$$

La ecuación 3.77 se satisface si los valores propios de $\mathbb{M}$ y $\mathbb{M}'$ son mayores o iguales a cero. Si la matriz es simétrica, se sabe que los valores propios son reales.

Entonces, si se tienen soluciones exactas para los problemas de valor de frontera, con estas soluciones se pueden evaluar en $\mathbb{M}$ y $\mathbb{M}'$ y estudiar el comportamiento de los valores propios en particular en función de la magnitud de las deformaciones y/o del campo eléctrico aplicado. Es decir, si λ y λ' son los valores propios de $\mathbb{M}$ y $\mathbb{M}'$ calculados de:

$$
det(\mathbb{M} - \lambda\mathbb{I}) = 0, \qquad det(\mathbb{M}' - \lambda'\mathbb{I}) = 0, \tag{3.88}
$$

donde $\mathbb{I} = \mathbb{I}_{12x12}$ es la matriz identidad, la configuración es estable si se obtiene que todos los valores propios de la matriz $\mathbb{M}$ y $\mathbb{M}'$ son iguales o mayores a cero, pero si todos son negativos se obtiene una configuración inestable. En el caso de que existan valores propios positivos y negativos en la matriz $\mathbb{M}$ y $\mathbb{M}'$ la configuración es denominada en equilibrio neutro.

CAPÍTULO 4

Problemas a Estudiar

En esta capítulo se estudia el comportamiento de la segunda variación para el funcional asociado a la formulación variacional para estos materiales electroelásticos para tres problemas de valor de frontera por medio del software Mathematica, para los cuales se tienen diferentes geometrías base y diferentes funciones de Energía Libre.

Cada geometría base se estudia para las dos funciones de Energía Libre con lo cual se tienen seis problemas en total. Sólo la primera de estas geometrías se considera como un caso compresible, mientras las otras dos se consideran como un caso incompresible.

4.1. Funciones de Energía Libre

- Primera Función de Energía Libre Caso Compresible:

$$\Omega = \frac{1}{4}\mu(0)[(1+\gamma)(I_1 {I_3}^{-1/3} - 3) + (1-\gamma)(I_2 {I_3}^{-2/3} - 3)] + \varepsilon_o(\alpha I_4 + \beta I_5 I_3^{-1/3}) + \frac{1}{2}\kappa({I_3}^{1/2} - 1)^2, \quad (4.1)$$

  donde $\mu(0)$, α, β, γ , κ son constantes, y sus valores se expresan en la tabla 1.

- Primera Función de Energía Libre Caso Incompresible:

$$\Omega = \frac{1}{4}\mu(0)[(1+\gamma)(I_1 - 3) + (1-\gamma)(I_2 - 3)] + \varepsilon_o(\alpha I_4 + \beta I_5), \quad (4.2)$$

  donde $\mu(0)$, α, β, γ son constantes, y sus valores se expresan en la tabla 1.

- Segunda Función de Energía Libre Caso Compresible:

$$\Omega = \left(\frac{I_1 {I_3}^{-1/3} - 3}{2}\right)(g_0 + g_1 I_4) - log\left[cosh\left(\frac{\sqrt{I_4}}{m_1}\right)\right] m_0 m_1 - \frac{1}{2}\zeta_o I_4 + \frac{1}{2}\varepsilon_o I_5 I_3^{-1/3} + \frac{1}{2}\kappa({I_3}^{1/2} - 1)^2, \quad (4.3)$$

  donde g_0, g_1, m_0, m_1, ζ_o y κ son constantes, y sus valores se expresan en la tabla 2.

- Segunda Función de Energía Libre Caso Incompresible:

$$\Omega = \left(\frac{I_1 - 3}{2}\right)(g_0 + g_1 I_4) - log\left[cosh\left(\frac{\sqrt{I_4}}{m_1}\right)\right] m_0 m_1 - \frac{1}{2}\zeta_o I_4 + \frac{1}{2}\varepsilon_o I_5, \quad (4.4)$$

  donde g_0, g_1, m_0, m_1 y ζ_o son constantes, y sus valores se expresan en la tabla 2.

Los valores de las constantes de las Funciones de Energía Libre se obtuvieron de forma muy aproximada de la poca información experimental [11]. Para eso se asumió un cilindro en tracción/compresión como se observa en la figura 6, donde σ sería el esfuerzo total de tracción/compresión, λ_z el alargamiento/acortamiento, y E_o sería el campo eléctrico uniforme axial aplicado en el cilindro.

Figura 6: Cilindro en Tracción/Compresión

Sus valores se presentan en las tablas 1 y 2, y sus comportamientos se puede observar en las figuras 7 - 8 y 9 - 10.

Tabla 1: Valores de las Constantes de la Primera Función de Energía Libre

Constante	Valor	Unidad
$\mu(0)$	$3.92 \cdot 10^5$	[Pa]
α	$6 \cdot 10^3$	[$N^2 m^2 A^{-2} C^{-2}$]
β	-10^4	[$N^2 m^2 A^{-2} C^{-2}$]
γ	1	
κ	10^9	[Pa]
ε_o	$8.8419 \cdot 10^{-12}$	[$C^2 N^{-1} m^{-2}$]

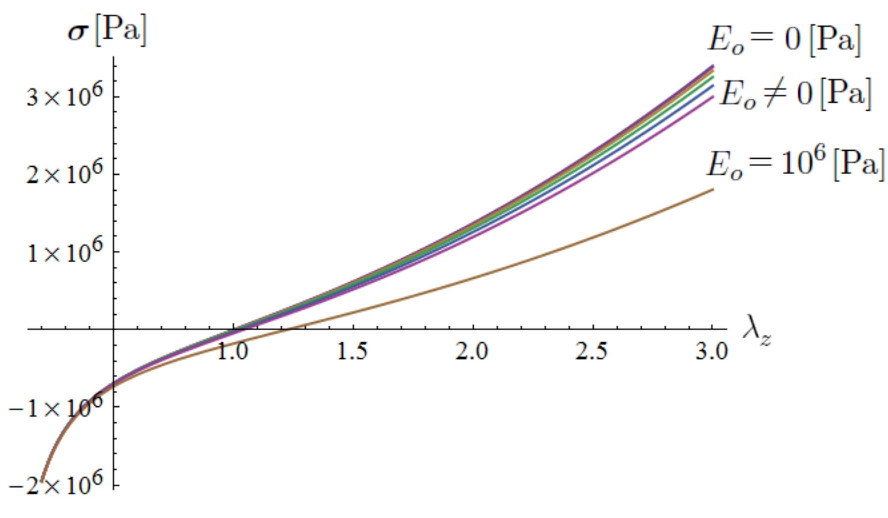


Figura 7: Primera Función de Energía Libre (σ vs ε)

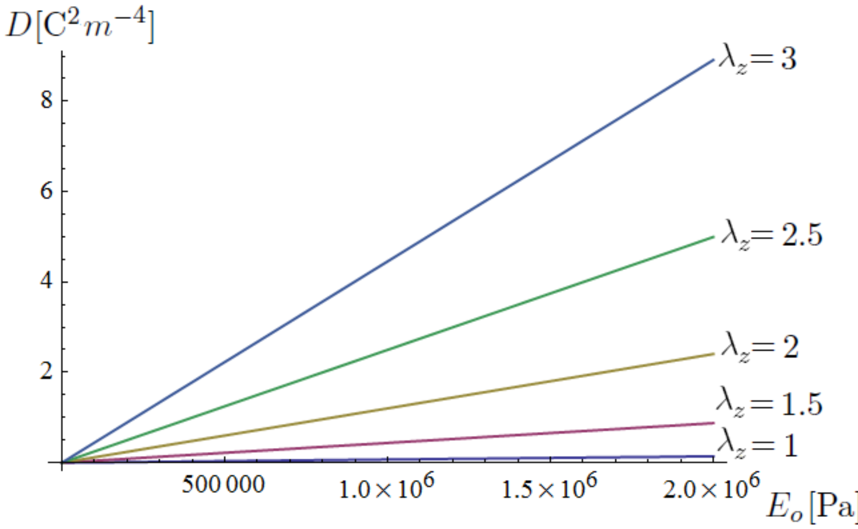


Figura 8: Primera Función de Energía Libre (D vs E_o)

Tabla 2: Valores de las Constantes de la Segunda Función de Energía Libre

Constante	Valor	Unidad
g_0	$3.92 \cdot 10^5$	[Pa]
g_1	-10^{-8}	[Pa $\mathrm{A}^{-2} m^2$]
m_0	$3 \cdot 10^{-2}$	[T]
m_1	$0.2 \cdot 10^6$	[A m^{-1}]
ζ_o	10^{-10}	[Pa $\mathrm{A}^{-2} m^2$]
κ	10^9	[Pa]
ε_o	$8.8419 \cdot 10^{-12}$	[$\mathrm{C}^2 N^{-1} m^{-2}$]

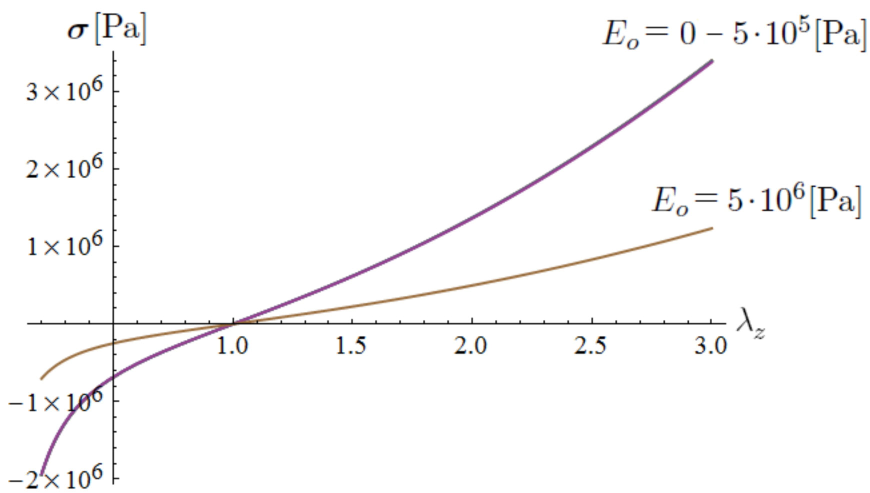


Figura 9: Segunda Función de Energía Libre (σ vs ε)

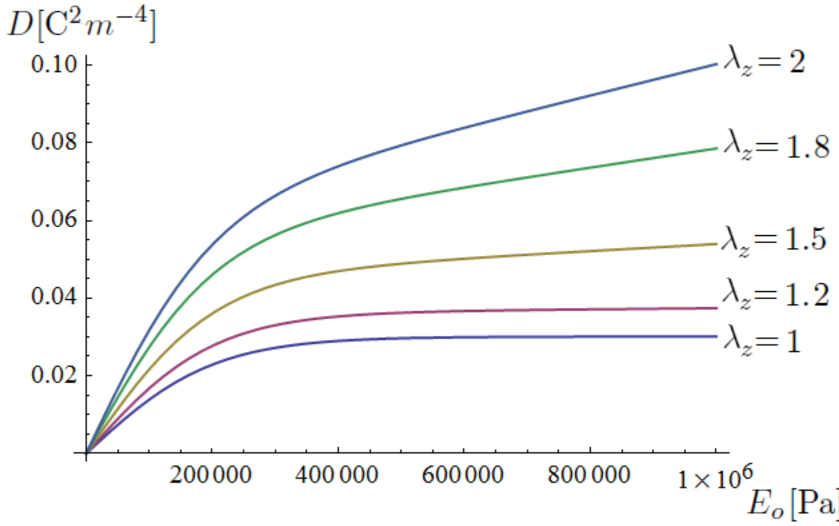


Figura 10: Segunda Función de Energía Libre (D vs E_o)

4.2. Geometrías Base

- Caso 1:

  La extensión homogénea de un espacio semi-infinito. En la figura 11 está la descripción del problema, el cual asume una deformación:

$$x_1 = \lambda X_1, \qquad x_2 = \lambda^{-1} X_2, \qquad x_3 = X_3, \tag{4.5}$$

  donde $-\infty \leq X_1 \leq \infty$, $X_2 \leq 0$ y $-\infty \leq X_3 \leq \infty$, y se asume la presencia de un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E} = Ee_2$.

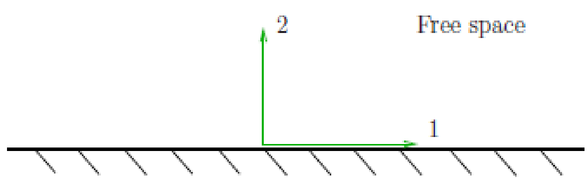


Figura 11: Espacio semi-infinito

- Caso 2:

  La extensión e inflación de un tubo (ver figura 12), con $a \leq r \leq b$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, dada por [2]:

$$r^2 = a^2 + \lambda_z^{-1}(R^2 - A^2), \qquad \theta = \Theta, \qquad z = \lambda_z Z, \tag{4.6}$$

  donde A, B son los radios iniciales interior y exterior, $0 \leq z \leq L$, L es el largo inicial con $L >> B$ y $0 \leq \Theta \leq 2\pi$, y asumiendo $rD_r = constante$, $E_z = constante$, donde D_z, E_r depende de r.

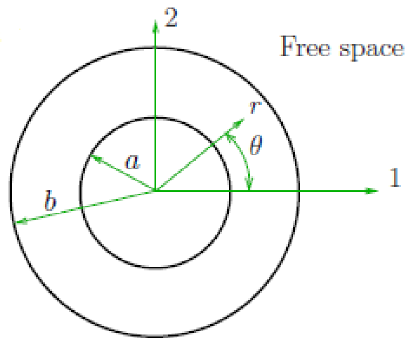


Figura 12: Tubo (vista frontal)

- Caso 3:

  La inflación de una esfera de pared gruesa, donde $A \leq R \leq B$, $0 \leq \Theta \leq \pi$, $0 \leq \Phi \leq 2\pi$, y la deformación está dada por [2]:

$$r^3 = R^3 + a^3 - A^3, \qquad \theta = \Theta, \qquad \phi = \Phi, \tag{4.7}$$

  y donde se asume $E_r = E_r(r)$, $D_r = D_r(r)$, con $r^2 D_r = constante$.

CAPÍTULO 5

Memoria de Cálculo

La configuración estable o inestable de estos materiales se puede determinar conociendo la matriz $\mathbb{M}$ de la ecuación 3.78, la cual considera las segundas derivadas de las funciones de energía libre con respecto al tensor de deformación y campo eléctrico Lagrangiano, además del campo eléctrico que actúa en el material y la presión. Para esto es necesario encontrar las expresiones a ocupar para determinar los valores propios de $\mathbb{M}$.

5.1. Derivadas Generales de la Función de Energía Libre

La función de energía libre Ω depende de los invariantes (definidos en 3.53 - 3.58), los cuales pueden depender del tensor de deformación y del campo eléctrico Lagrangiano:

$$\Omega = \Omega(I_i) = \Omega(I_i(\mathbf{F}, \mathbf{E}_l)), \tag{5.1}$$

con i=1....6.

Se deriva la función de energía libre en términos del gradiente de deformación considerando los 6 invariantes con la regla de la cadena:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial F_{i\alpha}} = \frac{\partial \Omega}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial F_{i\alpha}} + \frac{\partial \Omega}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial F_{i\alpha}} + \frac{\partial \Omega}{\partial I_3}\frac{\partial I_3}{\partial F_{i\alpha}} + \frac{\partial \Omega}{\partial I_4}\frac{\partial I_4}{\partial F_{i\alpha}} + \frac{\partial \Omega}{\partial I_5}\frac{\partial I_5}{\partial F_{i\alpha}} + \frac{\partial \Omega}{\partial I_6}\frac{\partial I_6}{\partial F_{i\alpha}}. \tag{5.2}$$

Pero el invariante 4 no depende del tensor de deformación, y para las funciones de energía libre a ocupar no se considera el invariante 6 (ver sección 4.1), por lo cual esta derivada se puede expresar como:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial F_{i\alpha}} = \frac{\partial \Omega}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial F_{i\alpha}} + \frac{\partial \Omega}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial F_{i\alpha}} + \frac{\partial \Omega}{\partial I_3}\frac{\partial I_3}{\partial F_{i\alpha}} + \frac{\partial \Omega}{\partial I_5}\frac{\partial I_5}{\partial F_{i\alpha}}. \tag{5.3}$$

Derivando por segunda vez en términos del gradiente de deformación se logra obtener:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}} &= \frac{\partial^2\Omega}{\partial I_1^2}\frac{\partial I_1}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_1}{\partial F_{j\beta}} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial I_1\partial I_2}\left(\frac{\partial I_1}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_2}{\partial F_{j\beta}} + \frac{\partial I_2}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_1}{\partial F_{j\beta}}\right) + \frac{\partial^2\Omega}{\partial I_1\partial I_3}\left(\frac{\partial I_1}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_3}{\partial F_{j\beta}}\right. \\
&\left. + \frac{\partial I_3}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_1}{\partial F_{j\beta}}\right) + \frac{\partial^2\Omega}{\partial I_1\partial I_5}\left(\frac{\partial I_1}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_5}{\partial F_{j\beta}} + \frac{\partial I_5}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_1}{\partial F_{j\beta}}\right) + \frac{\partial^2\Omega}{\partial I_2^2}\frac{\partial I_2}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_2}{\partial F_{j\beta}} \\
&+ \frac{\partial^2\Omega}{\partial I_2\partial I_3}\left(\frac{\partial I_2}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_3}{\partial F_{j\beta}} + \frac{\partial I_3}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_2}{\partial F_{j\beta}}\right) + \frac{\partial^2\Omega}{\partial I_2\partial I_5}\left(\frac{\partial I_2}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_5}{\partial F_{j\beta}} + \frac{\partial I_5}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_2}{\partial F_{j\beta}}\right) \\
&+ \frac{\partial^2\Omega}{\partial I_3^2}\frac{\partial I_3}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_3}{\partial F_{j\beta}} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial I_3\partial I_5}\left(\frac{\partial I_3}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_5}{\partial F_{j\beta}} + \frac{\partial I_5}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_3}{\partial F_{j\beta}}\right) + \frac{\partial^2\Omega}{\partial I_5^2}\frac{\partial I_5}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_5}{\partial F_{j\beta}} \\
&+ \frac{\partial\Omega}{\partial I_1}\frac{\partial^2 I_1}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}} + \frac{\partial\Omega}{\partial I_2}\frac{\partial^2 I_2}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}} + \frac{\partial\Omega}{\partial I_3}\frac{\partial^2 I_3}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}} + \frac{\partial\Omega}{\partial I_5}\frac{\partial^2 I_5}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}}. \qquad (5.4)
\end{aligned}
$$

Derivando la ecuación 5.3 en términos del campo eléctrico Lagrangiano se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\Omega}{\partial F_{i\alpha}\partial E_{l_\beta}} &= \frac{\partial^2\Omega}{\partial I_1\partial I_4}\frac{\partial I_1}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_4}{\partial E_{l_\beta}} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial I_1\partial I_5}\frac{\partial I_1}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_5}{\partial E_{l_\beta}} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial I_2\partial I_4}\frac{\partial I_2}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_4}{\partial E_{l_\beta}} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial I_2\partial I_5}\frac{\partial I_2}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_5}{\partial E_{l_\beta}} \\
&+ \frac{\partial^2\Omega}{\partial I_3\partial I_4}\frac{\partial I_3}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_4}{\partial E_{l_\beta}} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial I_3\partial I_5}\frac{\partial I_3}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_5}{\partial E_{l_\beta}} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial I_5^2}\frac{\partial I_5}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_5}{\partial E_{l_\beta}} + \frac{\partial\Omega}{\partial I_5}\frac{\partial^2 I_5}{\partial F_{i\alpha}\partial E_{l_\beta}}. \qquad (5.5)
\end{aligned}
$$

Ahora bien, se deriva la función de energía libre en términos del campo eléctrico Lagrangiano considerando los 6 invariantes con la regla de la cadena:

$$
\frac{\partial\Omega}{\partial E_{l_\alpha}} = \frac{\partial\Omega}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial E_{l_\alpha}} + \frac{\partial\Omega}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial E_{l_\alpha}} + \frac{\partial\Omega}{\partial I_3}\frac{\partial I_3}{\partial E_{l_\alpha}} + \frac{\partial\Omega}{\partial I_4}\frac{\partial I_4}{\partial E_{l_\alpha}} + \frac{\partial\Omega}{\partial I_5}\frac{\partial I_5}{\partial E_{l_\alpha}} + \frac{\partial\Omega}{\partial I_6}\frac{\partial I_6}{\partial E_{l_\alpha}}, \qquad (5.6)
$$

pero sólo los invariantes 4, 5 y 6 dependen del campo eléctrico Lagrangiano, donde el último no se considera para las funciones de energía libre a estudiar (ver sección 4.1), por lo cual esta derivada se puede expresar como:

$$
\frac{\partial\Omega}{\partial E_{l_\alpha}} = \frac{\partial\Omega}{\partial I_4}\frac{\partial I_4}{\partial E_{l_\alpha}} + \frac{\partial\Omega}{\partial I_5}\frac{\partial I_5}{\partial E_{l_\alpha}}. \qquad (5.7)
$$

Derivando por segunda vez en términos del campo eléctrico Lagrangiano se logra obtener:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\Omega}{\partial E_{l_\alpha}\partial E_{l_\beta}} &= \frac{\partial^2\Omega}{\partial I_4^2}\frac{\partial I_4}{\partial E_{l_\alpha}}\frac{\partial I_4}{\partial E_{l_\beta}} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial I_4\partial I_5}\left(\frac{\partial I_4}{\partial E_{l_\alpha}}\frac{\partial I_5}{\partial E_{l_\beta}} + \frac{\partial I_5}{\partial E_{l_\alpha}}\frac{\partial I_4}{\partial E_{l_\beta}}\right) \\
&+ \frac{\partial^2\Omega}{\partial I_5^2}\frac{\partial I_5}{\partial E_{l_\alpha}}\frac{\partial I_5}{\partial E_{l_\beta}} + \frac{\partial\Omega}{\partial I_4}\frac{\partial^2 I_4}{\partial E_{l_\alpha}\partial E_{l_\beta}} + \frac{\partial\Omega}{\partial I_5}\frac{\partial^2 I_5}{\partial E_{l_\alpha}\partial E_{l_\beta}}. \qquad (5.8)
\end{aligned}
$$

5.2. Derivadas de los Invariantes

Considerando los 5 invariantes que se ocupan en los casos a estudiar se obtienen sus derivadas con respecto al tensor de deformación y campo eléctrico Lagrangiano.

5.2.1. Primer Invariante

El Primer Invariante se expresa como:

$$I_1 = tr\ \mathbf{c}, \tag{5.9}$$

y en notación indicial como:

$$I_1 = c_{\gamma\gamma} = F_{k\gamma} F_{k\gamma}. \tag{5.10}$$

Se deriva con respecto al tensor de deformación, se despejan los índices y se obtiene:

$$\frac{\partial I_1}{\partial F_{i\alpha}} = \frac{\partial (F_{k\gamma} F_{k\gamma})}{\partial F_{i\alpha}} = 2 \frac{\partial F_{k\gamma}}{\partial F_{i\alpha}} F_{k\gamma} = 2\delta_{ki}\delta_{\gamma\alpha} F_{k\gamma} = 2F_{i\alpha}, \tag{5.11}$$

luego se deriva otra vez con respecto al tensor de deformación y se obtiene:

$$\frac{\partial^2 I_1}{\partial F_{i\alpha} \partial F_{j\beta}} = \frac{\partial}{\partial F_{j\beta}} \left(\frac{\partial I_1}{\partial F_{i\alpha}} \right) = 2 \frac{\partial F_{i\alpha}}{\partial F_{j\beta}} = 2\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}. \tag{5.12}$$

5.2.2. Segundo Invariante

El Segundo Invariante se expresa como:

$$I_2 = \frac{1}{2} \left[I_1^2 - tr\ (\mathbf{c}^2) \right], \tag{5.13}$$

y en notación indicial como:

$$I_2 = \frac{1}{2} \left[c_{\gamma\gamma} c_{\delta\delta} - c_{\gamma\delta} c_{\delta\gamma} \right] = \frac{1}{2} \left[F_{k\gamma} F_{k\gamma} F_{q\delta} F_{q\delta} - F_{k\gamma} F_{k\delta} F_{q\delta} F_{q\gamma} \right]. \tag{5.14}$$

Se deriva con respecto al tensor de deformación:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial I_2}{\partial F_{i\alpha}} &= \frac{1}{2}[2\frac{\partial F_{k\gamma}}{\partial F_{i\alpha}}F_{k\gamma}F_{q\delta}F_{q\delta} + 2F_{k\gamma}F_{k\gamma}\frac{\partial F_{q\delta}}{\partial F_{i\alpha}}F_{q\delta} - \frac{\partial F_{k\gamma}}{\partial F_{i\alpha}}F_{k\delta}F_{q\delta}F_{q\gamma} \\
&\quad -F_{k\gamma}\frac{\partial F_{k\delta}}{\partial F_{i\alpha}}F_{q\delta}F_{q\gamma} - F_{k\gamma}F_{k\delta}\frac{\partial F_{q\delta}}{\partial F_{i\alpha}}F_{q\gamma} - F_{k\gamma}F_{k\delta}F_{q\delta}\frac{\partial F_{q\gamma}}{\partial F_{i\alpha}}],
\end{aligned} \tag{5.15}
$$

se resuelven las derivadas internas y se despejan los índices:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial I_2}{\partial F_{i\alpha}} &= \frac{1}{2}[2\delta_{ki}\delta_{\gamma\alpha}F_{k\gamma}F_{q\delta}F_{q\delta} + 2F_{k\gamma}F_{k\gamma}\delta_{qi}\delta_{\delta\alpha}F_{q\delta} - \delta_{ki}\delta_{\gamma\alpha}F_{k\delta}F_{q\delta}F_{q\gamma} \\
&\quad -F_{k\gamma}\delta_{ki}\delta_{\delta\alpha}F_{q\delta}F_{q\gamma} - F_{k\gamma}F_{k\delta}\delta_{qi}\delta_{\delta\alpha}F_{q\gamma} - F_{k\gamma}F_{k\delta}F_{q\delta}\delta_{qi}\delta_{\gamma\alpha}],
\end{aligned} \tag{5.16}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial I_2}{\partial F_{i\alpha}} &= \frac{1}{2}[2F_{i\alpha}F_{q\delta}F_{q\delta} + 2F_{k\gamma}F_{k\gamma}F_{i\alpha} - F_{i\delta}F_{q\delta}F_{q\alpha} \\
&\quad -F_{i\gamma}F_{q\alpha}F_{q\gamma} - F_{k\gamma}F_{k\alpha}F_{i\gamma} - F_{k\alpha}F_{k\delta}F_{i\delta}],
\end{aligned} \tag{5.17}
$$

considerando γ y δ como índices mudos se despeja y se obtiene:

$$
\frac{\partial I_2}{\partial F_{i\alpha}} = \frac{1}{2}[2F_{i\alpha}c_{\delta\delta} + 2c_{\gamma\gamma}F_{i\alpha} - F_{i\delta}c_{\delta\alpha} - F_{i\gamma}c_{\alpha\gamma} - c_{\gamma\alpha}F_{i\gamma} - c_{\alpha\delta}F_{i\delta}], \tag{5.18}
$$

$$
\frac{\partial I_2}{\partial F_{i\alpha}} = \frac{1}{2}[4F_{i\alpha}c_{\gamma\gamma} - 4F_{i\gamma}c_{\gamma\alpha}] = 2[F_{i\alpha}c_{\gamma\gamma} - F_{i\gamma}c_{\gamma\alpha}]. \tag{5.19}
$$

Se deriva la ecuación 5.19 con respecto al tensor de deformación:

$$
\frac{\partial^2 I_2}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}} = \frac{\partial}{\partial F_{j\beta}}\left(\frac{\partial I_2}{\partial F_{i\alpha}}\right) = 2\frac{\partial(F_{i\alpha}c_{\gamma\gamma} - F_{i\gamma}c_{\gamma\alpha})}{\partial F_{j\beta}}, \tag{5.20}
$$

$$
\frac{\partial^2 I_2}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}} = 2\left(\frac{\partial F_{i\alpha}}{\partial F_{j\beta}}c_{\gamma\gamma} + F_{i\alpha}\frac{\partial c_{\gamma\gamma}}{\partial F_{j\beta}} - \frac{\partial F_{i\gamma}}{\partial F_{j\beta}}c_{\gamma\alpha} - F_{i\gamma}\frac{\partial c_{\gamma\alpha}}{\partial F_{j\beta}}\right), \tag{5.21}
$$

$$
\frac{\partial^2 I_2}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}} = 2\left(\frac{\partial F_{i\alpha}}{\partial F_{j\beta}}c_{\gamma\gamma} + 2F_{i\alpha}\frac{\partial F_{k\gamma}}{\partial F_{j\beta}}F_{k\gamma} - \frac{\partial F_{i\gamma}}{\partial F_{j\beta}}c_{\gamma\alpha} - F_{i\gamma}\frac{\partial F_{k\gamma}}{\partial F_{j\beta}}F_{k\alpha} - F_{i\gamma}F_{k\gamma}\frac{\partial F_{k\alpha}}{\partial F_{j\beta}}\right), \tag{5.22}
$$

se resuelven las derivadas internas:

$$
\frac{\partial^2 I_2}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}} = 2(\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}c_{\gamma\gamma} + 2F_{i\alpha}\delta_{kj}\delta_{\gamma\beta}F_{k\gamma} - \delta_{ij}\delta_{\gamma\beta}c_{\gamma\alpha} - F_{i\gamma}\delta_{kj}\delta_{\gamma\beta}F_{k\alpha} - F_{i\gamma}F_{k\gamma}\delta_{kj}\delta_{\alpha\beta}), \tag{5.23}
$$

se despejan los índices y se obtiene:

$$\frac{\partial^2 I_2}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}} = 2(\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}c_{\gamma\gamma} + 2F_{i\alpha}F_{j\beta} - \delta_{ij}c_{\beta\alpha} - F_{i\beta}F_{j\alpha} - F_{i\gamma}F_{j\gamma}\delta_{\alpha\beta}). \tag{5.24}$$

5.2.3. Tercer Invariante

El Tercer Invariante se expresa como:

$$I_3 = det\ \mathbf{c} = J^2, \tag{5.25}$$

y su primera derivada parcial con respecto al tensor de deformación es [12]:

$$\frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{F}} = 2I_3\mathbf{F}^{-1}, \tag{5.26}$$

la cual en notación indicial es:

$$\frac{\partial I_3}{\partial F_{i\alpha}} = 2I_3F^{-1}_{\alpha i}, \tag{5.27}$$

donde $F^{-1}_{\alpha i}$ es la componente (α, i) del Tensor $\mathbf{F}^{-1}$.

Se deriva la ecuación 5.27 con respecto al tensor de deformación:

$$\frac{\partial^2 I_3}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}} = \frac{\partial}{\partial F_{j\beta}}\left(\frac{\partial I_3}{\partial F_{i\alpha}}\right) = 2\frac{\partial(I_3F^{-1}_{\alpha i})}{\partial F_{j\beta}} = 2\frac{\partial I_3}{\partial F_{j\beta}}F^{-1}_{\alpha i} + 2I_3\frac{\partial F^{-1}_{\alpha i}}{\partial F_{j\beta}}, \tag{5.28}$$

donde el primer término se conoce por la ecuación 5.27, entonces se reemplaza y se obtiene:

$$\frac{\partial^2 I_3}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}} = 4I_3F^{-1}_{\beta j}F^{-1}_{\alpha i} + 2I_3\frac{\partial F^{-1}_{\alpha i}}{\partial F_{j\beta}}, \tag{5.29}$$

pero el segundo término es necesario calcularlo, y para eso se tiene que:

$$\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F} = \mathbf{I}, \tag{5.30}$$

donde la derivada de esto se expresa como:

$$\frac{\partial(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \mathbf{F}} = \mathbf{0}, \tag{5.31}$$

la cual en notación indicial se puede escribir como:

$$\frac{\partial(F^{-1}_{\alpha k}F_{k\gamma})}{\partial F_{j\beta}} = 0, \tag{5.32}$$

separando ambas derivadas se tiene:

$$\frac{\partial F^{-1}_{\alpha k}}{\partial F_{j\beta}}F_{k\gamma} + F^{-1}_{\alpha k}\frac{\partial F_{k\gamma}}{\partial F_{j\beta}} = 0, \tag{5.33}$$

pasando uno de los términos al otro lado y multiplicando por $F^{-1}_{\gamma i}$ por ambos lados se tiene:

$$\frac{\partial F^{-1}_{\alpha k}}{\partial F_{j\beta}}F_{k\gamma} = -F^{-1}_{\alpha k}\delta_{kj}\delta_{\gamma\beta}, \tag{5.34}$$

$$\frac{\partial F^{-1}_{\alpha k}}{\partial F_{j\beta}}F_{k\gamma}F^{-1}_{\gamma i} = -F^{-1}_{\alpha k}F^{-1}_{\gamma i}\delta_{kj}\delta_{\gamma\beta}, \tag{5.35}$$

despejando los tensores de deformación y despejando los índices se tiene:

$$\frac{\partial F^{-1}_{\alpha k}}{\partial F_{j\beta}}\delta_{ki} = -F^{-1}_{\alpha j}F^{-1}_{\beta i}, \tag{5.36}$$

$$\frac{\partial F^{-1}_{\alpha i}}{\partial F_{j\beta}} = -F^{-1}_{\alpha j}F^{-1}_{\beta i}, \tag{5.37}$$

reemplazando este valor en la ecuación 5.29 se obtiene finalmente que:

$$\frac{\partial^2 I_3}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}} = 4I_3F^{-1}_{\beta j}F^{-1}_{\alpha i} - 2I_3F^{-1}_{\alpha j}F^{-1}_{\beta i}. \tag{5.38}$$

5.2.4. Cuarto Invariante

El Cuarto Invariante se expresa como:

$$I_4 = \mid \mathbf{E}_l \mid^2, \tag{5.39}$$

y en notación indicial como:

$$I_4 = E_{l_\gamma} E_{l_\gamma}. \tag{5.40}$$

Se deriva con respecto al campo eléctrico Lagrangiano, se despejan los índices y se obtiene:

$$\frac{\partial I_4}{\partial E_{l_\alpha}} = 2\frac{\partial E_{l_\gamma}}{\partial E_{l_\alpha}} E_{l_\gamma} = 2\delta_{\gamma\alpha} E_{l_\gamma} = 2E_{l_\alpha}, \tag{5.41}$$

luego se deriva otra vez con respecto al campo eléctrico Lagrangiano y se obtiene:

$$\frac{\partial^2 I_4}{\partial E_{l_\alpha} \partial E_{l_\beta}} = \frac{\partial}{\partial E_{l_\beta}} \left(\frac{\partial I_4}{\partial E_{l_\alpha}} \right) = 2\frac{\partial E_{l_\alpha}}{\partial E_{l_\beta}} = 2\delta_{\alpha\beta}. \tag{5.42}$$

5.2.5. Quinto Invariante

El Quinto Invariante se expresa como:

$$I_5 = \mathbf{E}_l \cdot (\mathbf{c}\mathbf{E}_l), \tag{5.43}$$

y en notación indicial como:

$$I_5 = E_{l_\delta} c_{\delta\gamma} E_{l_\gamma} = E_{l_\delta} F_{k\delta} F_{k\gamma} E_{l_\gamma}. \tag{5.44}$$

Se deriva con respecto al tensor de deformación:

$$\frac{\partial I_5}{\partial F_{i\alpha}} = E_{l_\delta} \frac{\partial F_{k\delta}}{\partial F_{i\alpha}} F_{k\gamma} E_{l_\gamma} + E_{l_\delta} F_{k\delta} \frac{\partial F_{k\gamma}}{\partial F_{i\alpha}} E_{l_\gamma}, \tag{5.45}$$

se resuelven las derivadas internas:

$$\frac{\partial I_5}{\partial F_{i\alpha}} = E_{l_\delta} \delta_{ki} \delta_{\delta\alpha} F_{k\gamma} E_{l_\gamma} + E_{l_\delta} F_{k\delta} \delta_{ki} \delta_{\gamma\alpha} E_{l_\gamma}, \tag{5.46}$$

se despejan los índices y se obtiene:

$$\frac{\partial I_5}{\partial F_{i\alpha}} = E_{l_\alpha} F_{i\gamma} E_{l_\gamma} + E_{l_\delta} F_{i\delta} E_{l_\alpha} = 2E_{l_\alpha} F_{i\gamma} E_{l_\gamma}. \tag{5.47}$$

Se deriva la ecuación 5.47 con respecto al tensor de deformación, se despejan los índices y se obtiene:

$$\frac{\partial^2 I_5}{\partial F_{i\alpha} \partial F_{j\beta}} = \frac{\partial}{\partial F_{j\beta}} \left(\frac{\partial I_5}{\partial F_{i\alpha}} \right) = 2E_{l_\alpha} \frac{\partial F_{i\gamma}}{\partial F_{j\beta}} E_{l_\gamma} = 2E_{l_\alpha} \delta_{ij} \delta_{\gamma\beta} E_{l_\gamma} = 2E_{l_\alpha} \delta_{ij} E_{l_\beta}. \tag{5.48}$$

Se deriva la ecuación 5.47 con respecto al campo eléctrico Lagrangiano, se despejan los índices y se obtiene:

$$\frac{\partial^2 I_5}{\partial F_{i\alpha} \partial E_{l_\beta}} = \frac{\partial}{\partial E_{l_\beta}} \left(\frac{\partial I_5}{\partial F_{i\alpha}} \right) = 2 \frac{\partial E_{l_\alpha}}{\partial E_{l_\beta}} F_{i\gamma} E_{l_\gamma} + 2E_{l_\alpha} F_{i\gamma} \frac{\partial E_{l_\gamma}}{\partial E_{l_\beta}}, \tag{5.49}$$

$$\frac{\partial^2 I_5}{\partial F_{i\alpha} \partial E_{l_\beta}} = 2\delta_{\alpha\beta} F_{i\gamma} E_{l_\gamma} + 2E_{l_\alpha} F_{i\gamma} \delta_{\gamma\beta} = 2\delta_{\alpha\beta} F_{i\gamma} E_{l_\gamma} + 2E_{l_\alpha} F_{i\beta}. \tag{5.50}$$

Se deriva la ecuación 5.44 con respecto al campo eléctrico Lagrangiano, se despejan los índices y se obtiene:

$$\frac{\partial I_5}{\partial E_{l_\alpha}} = \frac{\partial E_{l_\delta}}{\partial E_{l_\alpha}} c_{\delta\gamma} E_{l_\gamma} + E_{l_\delta} c_{\delta\gamma} \frac{\partial E_{l_\gamma}}{\partial E_{l_\alpha}} = \delta_{\delta\alpha} c_{\delta\gamma} E_{l_\gamma} + E_{l_\delta} c_{\delta\gamma} \delta_{\gamma\alpha} = c_{\alpha\gamma} E_{l_\gamma} + E_{l_\delta} c_{\delta\alpha} = 2c_{\alpha\gamma} E_{l_\gamma}, \tag{5.51}$$

luego se deriva otra vez con respecto al campo eléctrico Lagrangiano y se obtiene:

$$\frac{\partial^2 I_5}{\partial E_{l_\alpha} \partial E_{l_\beta}} = \frac{\partial}{\partial E_{l_\beta}} \left(\frac{\partial I_5}{\partial E_{l_\alpha}} \right) = 2c_{\alpha\gamma} \frac{\partial E_{l_\gamma}}{\partial E_{l_\beta}} = 2c_{\alpha\gamma} \delta_{\gamma\beta} = 2c_{\alpha\beta}. \tag{5.52}$$

5.3. Derivadas Particulares de las Funciones de Energía Libre

Considerando las dos funciones de energía libre a estudiar es necesario determinar todas sus derivadas con respecto a los invariantes. Esto se realiza en cada caso de forma particular.

5.3.1. Primera Función de Energía Libre Caso Compresible

La Primera Función de Energía Libre en el caso compresible es:

$$\Omega = \frac{1}{4}\mu(0)[(1+\gamma)(I_1 I_3^{-1/3} - 3) + (1-\gamma)(I_2 I_3^{-2/3} - 3)] + \varepsilon_o(\alpha I_4 + \beta I_5 I_3^{-1/3}) + \frac{1}{2}\kappa(I_3^{1/2} - 1)^2. \quad (5.53)$$

Las derivadas de esta Función de Energía son:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial I_1} = \frac{1}{4}\mu(0)(1+\gamma)I_3^{-1/3}, \quad (5.54)$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial I_2} = \frac{1}{4}\mu(0)(1-\gamma)I_3^{-2/3}, \quad (5.55)$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial I_3} = \frac{1}{4}\mu(0)\left[-\frac{1}{3}(1+\gamma)I_1 I_3^{-4/3} - \frac{2}{3}(1-\gamma)I_2 I_3^{-5/3}\right] - \frac{1}{3}\varepsilon_o\beta I_5 I_3^{-4/3} + \frac{1}{2}\kappa(I_3^{1/2} - 1)I_3^{-1/2}, \quad (5.56)$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial I_4} = \varepsilon_o\alpha, \quad (5.57)$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial I_5} = \varepsilon_o\beta I_3^{-1/3}, \quad (5.58)$$

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial I_1\partial I_3} = -\frac{1}{12}\mu(0)(1+\gamma)I_3^{-4/3}, \quad (5.59)$$

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial I_2\partial I_3} = -\frac{1}{6}\mu(0)(1-\gamma)I_3^{-5/3}, \quad (5.60)$$

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial I_3^2} = \frac{1}{4}\mu(0)\left[\frac{4}{9}(1+\gamma)I_1 I_3^{-7/3} + \frac{10}{9}(1-\gamma)I_2 I_3^{-8/3}\right] + \frac{4}{9}\varepsilon_o\beta I_5 I_3^{-7/3} + \frac{1}{4}\kappa I_3^{-3/2}, \quad (5.61)$$

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial I_3\partial I_5} = -\frac{1}{3}\varepsilon_o\beta I_3^{-4/3}. \quad (5.62)$$

5.3.2. Primera Función de Energía Libre Caso Incompresible

La Primera Función de Energía Libre en el caso incompresible es:

$$\Omega = \frac{1}{4}\mu(0)[(1+\gamma)(I_1-3)+(1-\gamma)(I_2-3)]+\varepsilon_o(\alpha I_4+\beta I_5). \tag{5.63}$$

Las derivadas de esta Función de Energía son:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial I_1} = \frac{1}{4}\mu(0)(1+\gamma), \tag{5.64}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial I_2} = \frac{1}{4}\mu(0)(1-\gamma), \tag{5.65}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial I_4} = \varepsilon_o\alpha, \tag{5.66}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial I_5} = \varepsilon_o\beta. \tag{5.67}$$

5.3.3. Segunda Función de Energía Libre Caso Compresible

La Segunda Función de Energía Libre en el caso compresible es:

$$\Omega = \left(\frac{I_1 I_3^{-1/3}-3}{2}\right)(g_0+g_1 I_4) - log\left[cosh\left(\frac{\sqrt{I_4}}{m_1}\right)\right]m_0 m_1 - \frac{1}{2}\zeta_o I_4 + \frac{1}{2}\varepsilon_o I_5 I_3^{-1/3} + \frac{1}{2}\kappa(I_3^{1/2}-1)^2. \tag{5.68}$$

Las derivadas de esta Función de Energía son:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial I_1} = \frac{1}{2}I_3^{-1/3}(g_0+g_1 I_4), \tag{5.69}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial I_3} = -\frac{1}{6}I_1 I_3^{-4/3}(g_0+g_1 I_4) - \frac{1}{6}\varepsilon_o I_5 I_3^{-4/3} + \frac{1}{2}\kappa(I_3^{1/2}-1)I_3^{-1/2}, \tag{5.70}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial I_4} = \left(\frac{I_1 I_3^{-1/3}-3}{2}\right)g_1 - \frac{m_0}{2\sqrt{I_4}}tanh\left(\frac{\sqrt{I_4}}{m_1}\right) - \frac{\zeta_o}{2}, \tag{5.71}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial I_5} = \frac{\varepsilon_o}{2} I_3^{-1/3}, \tag{5.72}$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial I_1 \partial I_3} = -\frac{1}{6} I_3^{-4/3} (g_0 + g_1 I_4), \tag{5.73}$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial I_1 \partial I_4} = \frac{1}{2} g_1 I_3^{-1/3}, \tag{5.74}$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial I_3^2} = \frac{2}{9} I_1 I_3^{-7/3} (g_0 + g_1 I_4) + \frac{2}{9} \varepsilon_o I_5 I_3^{-7/3} + \frac{1}{4} \kappa I_3^{-3/2}, \tag{5.75}$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial I_3 \partial I_4} = -\frac{1}{6} g_1 I_1 I_3^{-4/3}, \tag{5.76}$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial I_3 \partial I_5} = -\frac{1}{6} \varepsilon_o I_3^{-4/3}, \tag{5.77}$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial I_4^2} = \frac{m_0}{4 m_1 I_4} sech^2 \left(\frac{\sqrt{I_4}}{m_1} \right) + \frac{m_0}{4 I_4^{3/2}} tanh \left(\frac{\sqrt{I_4}}{m_1} \right). \tag{5.78}$$

5.3.4. Segunda Función de Energía Libre Caso Incompresible

La Segunda Función de Energía Libre en el caso incompresible es:

$$\Omega = \left(\frac{I_1 - 3}{2} \right) (g_0 + g_1 I_4) - log \left[cosh \left(\frac{\sqrt{I_4}}{m_1} \right) \right] m_0 m_1 - \frac{1}{2} \zeta_o I_4 + \frac{1}{2} \varepsilon_o I_5. \tag{5.79}$$

Las derivadas de esta Función de Energía son:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial I_1} = \frac{1}{2} (g_0 + g_1 I_4), \tag{5.80}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial I_4} = \left(\frac{I_1 - 3}{2} \right) g_1 - \frac{m_0}{2\sqrt{I_4}} tanh \left(\frac{\sqrt{I_4}}{m_1} \right) - \frac{\zeta_o}{2}, \tag{5.81}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial I_5} = \frac{\varepsilon_o}{2}, \tag{5.82}$$

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial I_1 \partial I_4} = \frac{g_1}{2}, \tag{5.83}$$

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial I_4^2} = \frac{m_0}{4m_1 I_4} sech^2\left(\frac{\sqrt{I_4}}{m_1}\right) + \frac{m_0}{4I_4^{3/2}} tanh\left(\frac{\sqrt{I_4}}{m_1}\right). \tag{5.84}$$

5.4. Cálculos en las Deformaciones

Considerando los diferentes casos de deformaciones que se presentan es necesario determinar las variables vectoriales y tensoriales de cada deformación, además del campo eléctrico y presión que se generan en el cuerpo.

5.4.1. Caso 1: Deformación en un Medio Semi-Infinito

Se asume una deformación en un medio semi-infinito como:

$$x_1 = \lambda X_1, \qquad x_2 = \lambda^{-1} X_2, \qquad x_3 = X_3, \qquad con\ \lambda > 0\ constante, \tag{5.85}$$

donde $-\infty \leq X_1 \leq \infty$, $X_2 \leq 0$ y $-\infty \leq X_3 \leq \infty$, y se asume la presencia de un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E} = E_2$.

Considerando las ecuaciones 3.1, 3.24 y 3.62 se determina el Tensor Gradiente de Deformación, el Tensor de Deformación de Cauchy-Green Derecho y el Tensor de Deformación de Cauchy-Green Izquierdo, respectivamente:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.86}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.87}$$

Para este campo de deformación y eléctrico, debido a que son uniformes, cumplen con la ecuación de equilibrio y la de Maxwell.

Debido a que el Campo Eléctrico es uniforme en la dirección perpendicular al plano se considera que $E_1 = E_3 = 0$ y $E_2 = constante$. Con la ecuación 3.19 se determina el Campo Eléctrico

Lagrangiano:

$$\mathbf{E}_l = \mathbf{F}^T\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda^{-1}E_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.88}$$

Considerando las ecuaciones 3.53 - 3.58 se determinan los invariantes para esta deformación:

$$I_1 = tr\ \mathbf{c} = \lambda^2 + \lambda^{-2} + 1, \tag{5.89}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[(tr\ \mathbf{c})^2 - tr\ (\mathbf{c}^2)\right] = \frac{1}{2}\left[(\lambda^2+\lambda^{-2}+1)^2 - (\lambda^4+\lambda^{-4}+1)\right] = \lambda^2+\lambda^{-2}+1, \tag{5.90}$$

$$I_3 = det\ \mathbf{c} = 1, \qquad (isocórico) \tag{5.91}$$

$$I_4 =\mid \mathbf{E}_l \mid^2= \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda^{-1}E_2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda^{-1}E_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda^{-2}E_2^2, \tag{5.92}$$

$$I_5 = \mathbf{E}_l \cdot (\mathbf{c}\mathbf{E}_l) = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda^{-1}E_2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda^{-1}E_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda^{-4}E_2^2, \tag{5.93}$$

$$I_6 = \mathbf{E}_l \cdot (\mathbf{c}^2\mathbf{E}_l) = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda^{-1}E_2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda^4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda^{-1}E_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda^{-6}E_2^2. \tag{5.94}$$

El Campo Eléctrico externo $\mathbf{E}^o$ se define como:

$$\mathbf{E}^o = (0, E_o, 0)^T, \tag{5.95}$$

donde sólo se considera la dirección perpendicular al plano.

Asumiendo las ecuaciones de condición de borde 3.13 y 3.15 se obtiene, respectivamente, que:

$$D_2 = D_2^o, \tag{5.96}$$

$$\tau_{22} = \tau_{m_{22}} + t_{a_2}, \tag{5.97}$$

donde la componente del Vector Desplazamiento Eléctrico D_2 se obtiene de la ecuación 3.61:

$$D_2 = -2J^{-1}(\lambda^{-2}E_2\Omega_4 + \lambda^{-4}E_2\Omega_5) \tag{5.98}$$

y la componente del Vector Desplazamiento Eléctrico en el exterior D_2^o se define como:

$$D_2^o = \varepsilon_o E_o. \tag{5.99}$$

Considerando las ecuaciones 5.98 y 5.99 en la ecuación 5.96 y despejando E_2 se obtiene que:

$$E_2 = -\frac{\varepsilon_o E_o \lambda^2}{2(\Omega_4 + \lambda^{-2}\Omega_5)}. \tag{5.100}$$

El Tensor de Esfuerzos Total y el Tensor de Esfuerzos de Maxwell en el exterior del cuerpo se obtienen por las ecuaciones 3.60 y 3.10, respectivamente como:

$$\tau_{22} = 2\lambda^{-2}\Omega_1 + 2[(\lambda^2 + \lambda^{-2} + 1)\lambda^{-2} - \lambda^{-4}]\Omega_2 + 2\Omega_3 + 2\lambda^{-4}E_2^2\Omega_5, \tag{5.101}$$

$$\tau_{m22} = \varepsilon_o \left(E_o^2 - \frac{1}{2}E_o^2\right) = \frac{\varepsilon_o E_o^2}{2}, \tag{5.102}$$

las cuales se consideran en la ecuación 5.97, y además asumiendo una fuerza de tracción mecánica aplicada por unidad de área t_{a_2} nula se obtiene que:

$$2\lambda^{-2}\Omega_1 + 2(1 + \lambda^{-2})\Omega_2 + 2\Omega_3 + 2\lambda^{-4}E_2^2\Omega_5 = \frac{\varepsilon_o E_o^2}{2}. \tag{5.103}$$

Finalmente con las ecuaciones 5.100 y 5.103 se puede determinar E_2 y λ por ejemplo para un valor dado E_o.

5.4.2. Caso 2: Deformación de un Tubo de Sección Circular

Se asume la extensión e inflación de un tubo como:

$$r^2 = a^2 + \lambda_z^{-1}(R^2 - A^2), \qquad \theta = \Theta, \qquad z = \lambda_z Z, \qquad con\ \lambda_z > 0\ constante, \tag{5.104}$$

donde a, b son los radios finales interior y exterior; A, B son los radios iniciales interior y exterior, con $a \leq r \leq b$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq L$, L es el largo inicial con $L >> B$ y $0 \leq \Theta \leq 2\pi$, y

$rD_r = constante$, $E_z = constante$, E_r depende de r. La deformación anterior, el campo eléctrico y desplazamiento eléctrico mencionados aquí satisfacen las ecuaciones de equilibrio y las de Maxwell [2].

Considerando la ecuación 3.1 se determina el Tensor Gradiente de Deformación en coordenadas cilíndricas:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & \frac{1}{R}\frac{\partial r}{\partial \Theta} & \frac{\partial r}{\partial Z} \\ r\frac{\partial \theta}{\partial R} & \frac{r}{R}\frac{\partial \theta}{\partial \Theta} & r\frac{\partial \theta}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{1}{R}\frac{\partial z}{\partial \Theta} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_z^{-1}\frac{R}{r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{pmatrix}, \tag{5.105}$$

para lo cual se asume que $\lambda_z = 1$,

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{R}{r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{R} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.106}$$

Considerando las ecuaciones 3.24 y 3.62 se determina el Tensor de Deformación de Cauchy-Green Derecho y el Tensor de Deformación de Cauchy-Green Izquierdo, respectivamente, y quedan como:

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{R^2}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{R^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.107}$$

Debido a que el Campo Eléctrico E_r depende de r, E_θ es nulo y E_z es constante se considera que $E_r \neq 0$ y $E_\theta = E_z = 0$. Con la ecuación 3.19 se determina el Campo Eléctrico Lagrangiano:

$$\mathbf{E}_l = \mathbf{F}^T\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{R}{r}E_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.108}$$

Considerando las ecuaciones 3.53 - 3.58 se determinan los invariantes para esta deformación:

$$I_1 = tr\ \mathbf{c} = \frac{R^2}{r^2} + \frac{r^2}{R^2} + 1, \tag{5.109}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[(tr\ \mathbf{c})^2 - tr\ (\mathbf{c}^2)\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{R^2}{r^2} + \frac{r^2}{R^2} + 1\right)^2 - \left(\frac{R^4}{r^4} + \frac{r^4}{R^4} + 1\right)\right] = \frac{R^2}{r^2} + \frac{r^2}{R^2} + 1, \tag{5.110}$$

$$I_3 = det\ \mathbf{c} = 1, \qquad (incompresible) \tag{5.111}$$

$$I_4 = \mid \mathbf{E}_l \mid^2 = \begin{pmatrix} \frac{R}{r}E_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{R}{r}E_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{R^2}{r^2}E_r^2, \tag{5.112}$$

$$I_5 = \mathbf{E}_l \cdot (\mathbf{c}\mathbf{E}_l) = \begin{pmatrix} \frac{R}{r}E_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{R^2}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{R^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{R}{r}E_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{R^4}{r^4}E_r^2, \tag{5.113}$$

$$I_6 = \mathbf{E}_l \cdot (\mathbf{c}^2\mathbf{E}_l) = \begin{pmatrix} \frac{R}{r}E_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{R^4}{r^4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^4}{R^4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{R}{r}E_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{R^6}{r^6}E_r^2. \tag{5.114}$$

Debido a que $rD_r = constante$, se define:

$$rD_r = C_o, \tag{5.115}$$

donde la componente radial del Vector Desplazamiento Eléctrico D_r se obtiene de la ecuación 3.61:

$$D_r = -2\left(\frac{R^2}{r^2}E_r\Omega_4 + \frac{R^4}{r^4}E_r\Omega_5\right). \tag{5.116}$$

Reemplazando la ecuación 5.115 en 5.116 y despejando se obtiene que:

$$E_r = -\frac{C_o r^3}{2R^2(r^2\Omega_4 + R^2\Omega_5)}. \tag{5.117}$$

El Tensor de Esfuerzos Total se obtiene de la ecuación 3.60, con lo cual se calculan τ_{rr} y $\tau_{\theta\theta}$ como:

$$\tau_{rr}(r) = 2\Omega_1\frac{R^2}{r^2} + 2\Omega_2\left[\left(\frac{R^2}{r^2} + \frac{r^2}{R^2} + 1\right)\frac{R^2}{r^2} - \frac{R^4}{r^4}\right] - p + 2\Omega_5\frac{R^4}{r^4}E_r^2, \tag{5.118}$$

$$\tau_{\theta\theta}(r) = 2\Omega_1\frac{r^2}{R^2} + 2\Omega_2\left[\left(\frac{R^2}{r^2} + \frac{r^2}{R^2} + 1\right)\frac{r^2}{R^2} - \frac{r^4}{R^4}\right] - p. \tag{5.119}$$

Asumiendo la ecuación de condición de borde 3.13 se obtiene que:

$$D_r^o(r) = \frac{C_o}{r}, \qquad para \quad 0 < r \leq a \quad y \quad b \leq r < \infty, \tag{5.120}$$

donde D_r^o es el Vector Desplazamiento Eléctrico en el exterior.

Se define el Campo Eléctrico externo $\mathbf{E}^o$ como:

$$\mathbf{E}^o = \varepsilon_o^{-1}\mathbf{D}^o, \tag{5.121}$$

y considerando el Vector Desplazamiento Eléctrico en el exterior de la ecuación 5.120 se obtiene que:

$$\mathbf{E}^o = \varepsilon_o^{-1}C_o \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.122}$$

Asumiendo la ecuación de condición de borde 3.15 en la pared interna y externa del cuerpo se obtiene, respectivamente, que:

$$\tau_{rr}(a) = -P_o + \tau_{m_{rr}}(a), \tag{5.123}$$

$$\tau_{rr}(b) = \tau_{m_{rr}}(b), \tag{5.124}$$

donde P_o es la presión interna.

El Tensor de Esfuerzos de Maxwell en el espacio vacío que rodea el cuerpo se obtiene por la ecuación 3.10:

$$\tau_{m_{rr}} = \varepsilon_o^{-1}C_o^2\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{2r^2}\right) = \varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2r^2}, \tag{5.125}$$

y el Tensor de Esfuerzos de Maxwell en la pared interna y externa del cuerpo se expresa, respectivamente, como:

$$\tau_{m_{rr}}(a) = \varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2a^2}, \tag{5.126}$$

$$\tau_{m_{rr}}(b) = \varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2b^2}. \tag{5.127}$$

Se considera la ecuación de equilibrio 3.12 para un componente radial:

$$\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} = \frac{1}{r}(\tau_{\theta\theta} - \tau_{rr}), \tag{5.128}$$

la que se puede integrar como:

$$\tau_{rr}(r) = \int_a^r \frac{1}{\xi}(\tau_{\theta\theta}(\xi) - \tau_{rr}(\xi))d\xi + \tau_{rr}(a). \tag{5.129}$$

Reemplazando las expresiones de las ecuaciones 5.123 y 5.126 en la integral se obtiene:

$$\tau_{rr}(r) = \int_a^r \frac{1}{\xi}(\tau_{\theta\theta}(\xi) - \tau_{rr}(\xi))d\xi - P_o + \varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2a^2}. \tag{5.130}$$

Considerando el Tensor de Esfuerzos Total para $r = b$ se reemplaza la ecuación 5.124 en 5.130, con lo que se obtiene:

$$\int_a^b \frac{1}{\xi}(\tau_{\theta\theta}(\xi) - \tau_{rr}(\xi))d\xi - P_o + \varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2a^2} = \varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2b^2}, \tag{5.131}$$

que es la relación que nos permitiría obtener el radio interno a del cuerpo cilíndrico, asumiendo conocido C_o y P_o, dada la ecuación 5.104 se tiene que b depende de a como:

$$b = \sqrt{a^2 + B^2 - A^2}. \tag{5.132}$$

Considerando las ecuaciones 5.118 y 5.130, y despejando se obtiene p en el cuerpo:

$$p = 2\Omega_1\frac{R^2}{r^2} + 2\Omega_2\left(\frac{R^2}{r^2} + 1\right) + 2\Omega_5\frac{R^4}{r^4}E_r^2 - \int_a^r \frac{1}{\xi}(\tau_{\theta\theta}(\xi) - \tau_{rr}(\xi))d\xi + P_o - \varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2a^2}. \tag{5.133}$$

5.4.3. Caso 3: Deformación de un Cuerpo Esférico

Se asume la inflación de una esfera de pared gruesa como:

$$r^3 = R^3 + a^3 - A^3, \qquad \theta = \Theta, \qquad \phi = \Phi, \tag{5.134}$$

donde a, b son los radios finales interior y exterior; A, B son los radios iniciales interior y exterior, con $a \leq r \leq b$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, y $A \leq R \leq B$, $0 \leq \Theta \leq \pi$, $0 \leq \Phi \leq 2\pi$, y $E_r(r)$, $D_r(r)$, $r^2 D_r = constante$. Esta deformación y este campo eléctrico y desplazamiento eléctrico satisfacen la ecuación de equilibrio y las ecuaciones de Maxwell [2].

Considerando la ecuación 3.1 se determina el Tensor Gradiente de Deformación en coordenadas esféricas:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & \frac{1}{R}\frac{\partial r}{\partial \Theta} & \frac{1}{Rsin\Theta}\frac{\partial r}{\partial \Phi} \\ r\frac{\partial \theta}{\partial R} & \frac{r}{R}\frac{\partial \theta}{\partial \Theta} & \frac{r}{Rsin\Theta}\frac{\partial \theta}{\partial \Phi} \\ rsin\theta\frac{\partial \phi}{\partial R} & \frac{rsin\theta}{R}\frac{\partial \phi}{\partial \Theta} & \frac{rsin\theta}{Rsin\Theta}\frac{\partial \phi}{\partial \Phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{R^2}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r}{R} \end{pmatrix}. \tag{5.135}$$

Considerando las ecuaciones 3.24 y 3.62 se determina el Tensor de Deformación de Cauchy-Green Derecho y el Tensor de Deformación de Cauchy-Green Izquierdo, respectivamente como:

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{R^4}{r^4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{R^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{R^2} \end{pmatrix}. \tag{5.136}$$

Debido a que el Campo Eléctrico E_r depende de r, E_θ y E_ϕ son nulos se considera que $E_r \neq 0$ y $E_\theta = E_\phi = 0$. Con la ecuación 3.19 se determina el Campo Eléctrico Lagrangiano:

$$\mathbf{E}_l = \mathbf{F}^T\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{R^2}{r^2}E_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.137}$$

Considerando las ecuaciones 3.53 - 3.58 se determinan los invariantes para esta deformación:

$$I_1 = tr\ \mathbf{c} = \frac{R^4}{r^4} + 2\frac{r^2}{R^2}, \tag{5.138}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[(tr\ \mathbf{c})^2 - tr\ (\mathbf{c}^2)\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{R^4}{r^4} + 2\frac{r^2}{R^2}\right)^2 - \left(\frac{R^8}{r^8} + 2\frac{r^4}{R^4}\right)\right] = \frac{r^4}{R^4} + 2\frac{R^2}{r^2}, \tag{5.139}$$

$$I_3 = det\ \mathbf{c} = 1, \qquad (incompresible) \tag{5.140}$$

$$I_4 = \mid \mathbf{E}_l \mid^2 = \begin{pmatrix} \frac{R^2}{r^2}E_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{R^2}{r^2}E_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{R^4}{r^4}E_r^2, \tag{5.141}$$

$$I_5 = \mathbf{E}_l \cdot (\mathbf{c}\mathbf{E}_l) = \begin{pmatrix} \frac{R^2}{r^2}E_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{R^4}{r^4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{R^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{R^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{R^2}{r^2}E_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{R^8}{r^8}E_r^2, \tag{5.142}$$

$$I_6 = \mathbf{E}_l \cdot (\mathbf{c}^2\mathbf{E}_l) = \begin{pmatrix} \frac{R^2}{r^2}E_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{R^8}{r^8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^4}{R^4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^4}{R^4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{R^2}{r^2}E_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{R^{12}}{r^{12}}E_r^2. \tag{5.143}$$

Debido a que $r^2 D_r = constante$, se define:

$$r^2 D_r = C_o, \tag{5.144}$$

donde el Vector Desplazamiento Eléctrico D_r se obtiene por la ecuación 3.61:

$$D_r = -2\left(\frac{R^4}{r^4}E_r\Omega_4 + \frac{R^8}{r^8}E_r\Omega_5\right). \tag{5.145}$$

Reemplazando la ecuación 5.144 en 5.145 y despejando se obtiene que:

$$E_r = -\frac{C_o r^6}{2R^4(r^4\Omega_4 + R^4\Omega_5)}. \tag{5.146}$$

El Tensor de Esfuerzos Total se obtiene por la ecuación 3.60, con lo cual se calculan τ_{rr}, $\tau_{\theta\theta}$ y $\tau_{\phi\phi}$ como:

$$\tau_{rr}(r) = 2\Omega_1\frac{R^4}{r^4} + 2\Omega_2\left[\left(\frac{R^4}{r^4} + 2\frac{r^2}{R^2}\right)\frac{R^4}{r^4} - \frac{R^8}{r^8}\right] - p + 2\Omega_5\frac{R^8}{r^8}E_r^2, \tag{5.147}$$

$$\tau_{\theta\theta}(r) = \tau_{\phi\phi}(r) = 2\Omega_1\frac{r^2}{R^2} + 2\Omega_2\left[\left(\frac{R^4}{r^4} + 2\frac{r^2}{R^2}\right)\frac{r^2}{R^2} - \frac{r^4}{R^4}\right] - p. \tag{5.148}$$

Asumiendo la ecuación de condición de borde 3.13 se obtiene que:

$$D_r^o(r) = \frac{C_o}{r^2}, \qquad para \quad 0 < r \leq a \quad y \quad b \leq r < \infty, \tag{5.149}$$

donde D_r^o es el Vector Desplazamiento Eléctrico en el exterior.

Se define el Campo Eléctrico externo $\mathbf{E}^o$ como:

$$\mathbf{E}^o = \varepsilon_o^{-1}\mathbf{D}^o, \tag{5.150}$$

y considerando el Vector Desplazamiento Eléctrico en el exterior de la ecuación 5.149 se obtiene que:

$$\mathbf{E}^o = \varepsilon_o^{-1} C_o \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.151}$$

Asumiendo la ecuación de condición de borde 3.15 en la pared interna y externa del cuerpo se obtiene, respectivamente, que:

$$\tau_{rr}(a) = -P_o + \tau_{m_{rr}}(a), \tag{5.152}$$

$$\tau_{rr}(b) = \tau_{m_{rr}}(b), \tag{5.153}$$

donde P_o es la presión interna.

El Tensor de Esfuerzos de Maxwell en el exterior del cuerpo se obtiene por la ecuación 3.10:

$$\tau_{m_{rr}} = \varepsilon_o^{-1} C_o^2 \left(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{2r^4} \right) = \varepsilon_o^{-1} \frac{C_o^2}{2r^4}, \tag{5.154}$$

y el Tensor de Esfuerzos de Maxwell en la pared interna y externa del cuerpo se expresa, respectivamente, como:

$$\tau_{m_{rr}}(a) = \varepsilon_o^{-1} \frac{C_o^2}{2a^4}, \tag{5.155}$$

$$\tau_{m_{rr}}(b) = \varepsilon_o^{-1} \frac{C_o^2}{2b^4}. \tag{5.156}$$

Se considera la ecuación de equilibrio 3.12 para un componente radial:

$$\frac{d\tau_{rr}}{dr} = \frac{1}{r}(\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi} - 2\tau_{rr}) = \frac{2}{r}(\tau_{\theta\theta} - \tau_{rr}), \tag{5.157}$$

la cual se integra como:

$$\tau_{rr}(r) = \int_a^r \frac{2}{\xi}(\tau_{\theta\theta}(\xi) - \tau_{rr}(\xi)) d\xi + \tau_{rr}(a). \tag{5.158}$$

Se reemplazan los valores de la ecuación 5.152 y 5.155 en la integral y se obtiene:

$$\tau_{rr}(r) = \int_a^r \frac{2}{\xi}(\tau_{\theta\theta}(\xi) - \tau_{rr}(\xi))d\xi - P_o + \varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2a^4}. \tag{5.159}$$

Considerando el Tensor de Esfuerzos Total para $r = b$ se reemplaza la ecuación 5.153 en 5.159, con lo que se obtiene la ecuación para encontrar a.

$$\int_a^b \frac{2}{\xi}(\tau_{\theta\theta}(\xi) - \tau_{rr}(\xi))d\xi - P_o + \varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2a^4} = \varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2b^4}, \tag{5.160}$$

asumiendo conocido C_o y P_o, dada la ecuación 5.134 se tiene que b depende de a como:

$$b = \sqrt[3]{a^3 + B^3 - A^3}. \tag{5.161}$$

Considerando las ecuaciones 5.147 y 5.159, y despejando se obtiene p en el cuerpo:

$$p = 2\Omega_1\frac{R^4}{r^4} + 4\Omega_2\frac{R^2}{r^2} + 2\Omega_5\frac{R^8}{r^8}E_r^2 - \int_a^r \frac{2}{\xi}(\tau_{\theta\theta}(\xi) - \tau_{rr}(\xi))d\xi + P_o - \varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2a^4}. \tag{5.162}$$

CAPÍTULO 6

Resultados

La resolución de los problemas considera el estudio del comportamiento de la segunda variación para el funcional asociado a la formulación variacional para materiales electroelásticos. Para eso es necesario obtener los valores propios de las matrices $\mathbb{M}$ y $\mathbb{M}'$ mencionadas en las ecuaciones 3.78 y 3.79 respectivamente, con ayuda del software Mathematica, y estudiar el signo de dichos valores propios.

La matriz $\mathbb{M}$ se expresa como función de las matrices $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ y $\mathbb{C}$, mencionadas en las ecuaciones 3.80, 3.81 y 3.82 respectivamente. La forma de expresar estas matrices considera las segundas derivadas de la función de Energía Libre obtenidas por la regla de la cadena en las ecuaciones 5.4, 5.5 y 5.8. Mientras que la matriz $\mathbb{M}'$ se expresa como función de las matrices $\mathbb{A}'$, $\mathbb{B}'$ y $\mathbb{C}'$, y su forma de expresar está determinada por las ecuaciones 3.85, 3.86 y 3.87 respectivamente.

Los problemas a considerar son un medio semi-infinito plano, un tubo cilíndrico y un cuerpo esférico, para los cuales se estudia el comportamiento de los valores propios de $\mathbb{M}$ y $\mathbb{M}'$ en presencia de dos funciones de Energía Libre diferentes para cada una. Además es necesario determinar algunas variables correspondientes a cada tipo de geometría.

6.1. Deformación en un Medio Semi-Infinito Plano considerando la Primera Función de Energía Libre

Se considera un medio semi-infinito plano cuya función de Energía Libre se estudia en un caso compresible, donde es necesario determinar el parámetro λ de deformación y el Campo Eléctrico uniforme E_2 que actúa en el cuerpo. Obteniendo estos valores se calculan las matrices $\mathbb{M}$ y $\mathbb{M}'$ con sus respectivos valores propios.

La Primera Función de Energía Libre para este caso comprensible es:

$$\Omega = \frac{1}{4}\mu(0)[(1+\gamma)(I_1 I_3^{-1/3} - 3) + (1-\gamma)(I_2 I_3^{-2/3} - 3)] + \varepsilon_o(\alpha I_4 + \beta I_5 I_3^{-1/3}) + \frac{1}{2}\kappa(I_3^{1/2} - 1)^2. \quad (6.1)$$

6.1.1. Resolución de Problemas

Para calcular el parámetro λ de deformación y el Campo Eléctrico uniforme E_2 que actúa en el cuerpo se tienen las ecuaciones 5.100 y 5.103, donde se reemplazan las derivadas de esta función de Energía Libre calculadas en la sección 5.3.1, obteniendo las ecuaciones:

$$E_2 = -\frac{E_o\lambda^2}{2(\alpha+\lambda^{-2}\beta)}, \tag{6.2}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\mu(0)\lambda^{-2}(1+\gamma)+\frac{1}{2}\mu(0)(1+\lambda^{-2})(1-\gamma) \\ +&\frac{1}{6}\mu(0)(\gamma-3)(\lambda^2+\lambda^{-2}+1)+\frac{4}{3}\varepsilon_o\beta\lambda^{-4}E_2^2-\frac{\varepsilon_o E_o^2}{2}=0. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Con sólo dos variables a determinar (λ y E_2) y con las ecuaciones 6.2 y 6.3 se pueden obtener estos valores, considerando las constantes de la Función de Energía Libre expresadas en la tabla 1. Para esto se consideran cinco valores diferentes de E_o, y así obtener diferentes valores de λ y E_2 como se muestra en la tabla 3.

Tabla 3: Valores los Parámetros para diferentes valores de E_o

E_o [V/m]	λ	E_2 [V/m]
10^2	0.9999999999	0.0125
10^3	0.9999999999	0.125
10^4	0.9999999994	1.25
10^5	0.9999999435	12.5
10^6	0.9999943587	124.995

Las expresiones de los componentes de la matriz $\mathbb{M}$ se pueden definir con los componentes de $\mathbb{A}_{i\alpha j\beta}$, $\mathbb{B}_{i\alpha\beta}$ y $\mathbb{C}_{\alpha\beta}$ para este problema. Considerando solo los valores no nulos, estas componentes se expresan como:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{i\alpha j\beta} = &\frac{\partial^2\Omega}{\partial I_1\partial I_3}\left(\frac{\partial I_1}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_3}{\partial F_{j\beta}}+\frac{\partial I_3}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_1}{\partial F_{j\beta}}\right)+\frac{\partial^2\Omega}{\partial I_2\partial I_3}\left(\frac{\partial I_2}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_3}{\partial F_{j\beta}}+\frac{\partial I_3}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_2}{\partial F_{j\beta}}\right) \\ &+\frac{\partial^2\Omega}{\partial I_3^2}\frac{\partial I_3}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_3}{\partial F_{j\beta}}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial I_3\partial I_5}\left(\frac{\partial I_3}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_5}{\partial F_{j\beta}}+\frac{\partial I_5}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_3}{\partial F_{j\beta}}\right)+\frac{\partial\Omega}{\partial I_1}\frac{\partial^2 I_1}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}} \\ &+\frac{\partial\Omega}{\partial I_2}\frac{\partial^2 I_2}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}}+\frac{\partial\Omega}{\partial I_3}\frac{\partial^2 I_3}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}}+\frac{\partial\Omega}{\partial I_5}\frac{\partial^2 I_5}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}}, \end{aligned} \tag{6.4}$$

$$\mathbb{B}_{i\alpha\beta} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial I_3\partial I_5}\frac{\partial I_3}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_5}{\partial E_{l_\beta}}+\frac{\partial\Omega}{\partial I_5}\frac{\partial^2 I_5}{\partial F_{i\alpha}\partial E_{l_\beta}}, \tag{6.5}$$

$$\mathbb{C}_{\alpha\beta} = \frac{\partial\Omega}{\partial I_4}\frac{\partial^2 I_4}{\partial E_{l_\alpha}\partial E_{l_\beta}}+\frac{\partial\Omega}{\partial I_5}\frac{\partial^2 I_5}{\partial E_{l_\alpha}\partial E_{l_\beta}}. \tag{6.6}$$

Reemplazando las derivadas calculadas en las secciones 5.2 y 5.3.1 se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{A}_{i\alpha j\beta} = & -\frac{1}{3}\mu(0)(1+\gamma)[F_{i\alpha}F^{-1}_{\beta j} + F_{j\beta}F^{-1}_{\alpha i}] - \frac{2}{3}\mu(0)(1-\gamma)[(F_{i\alpha}c_{\gamma\gamma} - F_{i\gamma}c_{\gamma\alpha})F^{-1}_{\beta j} \\
& +(F_{j\beta}c_{\gamma\gamma} - F_{j\gamma}c_{\gamma\beta})F^{-1}_{\alpha i}] + \left[\frac{1}{9}\mu(0)(14-6\gamma)(\lambda^2+\lambda^{-2}+1) + \frac{16}{9}\varepsilon_o\beta\lambda^{-4}E_2^2\right. \\
& \left.+\kappa\right]F^{-1}_{\alpha i}F^{-1}_{\beta j} - \frac{4}{3}\varepsilon_o\beta\left[E_{l_\beta}F_{j\gamma}E_{l_\gamma}F^{-1}_{\alpha i} + E_{l_\alpha}F_{i\gamma}E_{l_\gamma}F^{-1}_{\beta j}\right] + \frac{1}{2}\mu(0)(1+\gamma)\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} \\
& +\frac{1}{2}\mu(0)(1-\gamma)(\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}c_{\gamma\gamma} + 2F_{i\alpha}F_{j\beta} - \delta_{ij}c_{\beta\alpha} - F_{i\beta}F_{j\alpha} - F_{i\gamma}F_{j\gamma}\delta_{\alpha\beta}) \\
& +\left[\frac{1}{6}\mu(0)(\gamma-3)(\lambda^2+\lambda^{-2}+1) - \frac{2}{3}\varepsilon_o\beta\lambda^{-4}E_2^2\right](2F^{-1}_{\beta j}F^{-1}_{\alpha i} - F^{-1}_{\alpha j}F^{-1}_{\beta i}) \\
& +2\varepsilon_o\beta E_{l_\alpha}\delta_{ij}E_{l_\beta},
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

$$
\mathbb{B}_{i\alpha\beta} = -\frac{4}{3}\varepsilon_o\beta F^{-1}_{\alpha i}c_{\beta\gamma}E_{l_\gamma} + 2\varepsilon_o\beta(\delta_{\alpha\beta}F_{i\gamma}E_{l_\gamma} + E_{l_\alpha}F_{i\beta}),
\tag{6.8}
$$

$$
\mathbb{C}_{\alpha\beta} = 2\varepsilon_o\alpha\delta_{\alpha\beta} + 2\varepsilon_o\beta c_{\alpha\beta}.
\tag{6.9}
$$

6.1.2. Resultados

Introduciendo las matrices en el software Mathematica y reemplazando los valores de las variables se obtiene finalmente la matriz $\mathbb{M}$ y a su vez los valores propios de ella, como se expresan en la tabla 4 para los diferentes casos considerados.

Tabla 4: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de E_o

E_o [V/m]	Valores Propios					
10^2	$3 \cdot 10^9$	784000	784000	784000	784000	784000
	$-5.46 \cdot 10^{-7}$	$-1.53 \cdot 10^{-7}$	$-7.07 \cdot 10^{-8}$	$-2.45 \cdot 10^{-8}$	$2.21 \cdot 10^{-8}$	$7.13 \cdot 10^{-11}$
10^3	$3 \cdot 10^9$	784000	784000	784000	784000	784000
	$2.21 \cdot 10^{-6}$	$-2.16 \cdot 10^{-6}$	$2.38 \cdot 10^{-7}$	$-9.24 \cdot 10^{-8}$	$-7.07 \cdot 10^{-8}$	$-4.71 \cdot 10^{-8}$
10^4	$3 \cdot 10^9$	784000	784000	784000	784000	784000
	$2.21 \cdot 10^{-4}$	$-2.20 \cdot 10^{-4}$	$-2.03 \cdot 10^{-7}$	$-1.28 \cdot 10^{-7}$	$-7.07 \cdot 10^{-8}$	$1.99 \cdot 10^{-8}$
10^5	$3 \cdot 10^9$	784000	784000	784000	784000	784000
	$2.21 \cdot 10^{-2}$	$-2.21 \cdot 10^{-2}$	$-4.60 \cdot 10^{-6}$	$-1.47 \cdot 10^{-7}$	$-7.07 \cdot 10^{-8}$	$-6.76 \cdot 10^{-8}$
10^6	$3 \cdot 10^9$	784003	784002	784000	783998	783997
	2.210	-2.210	$-4.77 \cdot 10^{-4}$	$-2.06 \cdot 10^{-7}$	$-7.07 \cdot 10^{-8}$	$3.06 \cdot 10^{-8}$

Además considerando el valor del Campo Eléctrico se puede determinar la matriz $\mathbb{M}'$ y a su vez los valores propios de ella, como se expresan en la tabla 5 para los diferentes casos considerados.

Tabla 5: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de E_o

E_o [V/m]	Valores Propios					
10^2	-1.00047	-1.00031	-1.00031	0.00053	0.00031	0.00031
	-0.00024	0.00015	-0.00015	0.00015	0.00003	-3.11 $\cdot 10^{-17}$
10^3	-1.0446	-1.0303	-1.0303	0.0507	0.0303	0.0303
	-0.0246	0.0156	-0.0156	0.0156	0.0029	-5.89 $\cdot 10^{-17}$
10^4	-2.8454	-2.337	-2.337	2.1827	-2.1827	1.5624
	-1.5624	1.5624	1.337	1.337	0.2815	2.75 $\cdot 10^{-16}$
10^5	-252.864	-156.238	156.238	156.238	99.5518	-18.184
	-18.184	17.184	17.184	-14.4271	10.5013	2.79 $\cdot 10^{-15}$
10^6	-25279.8	15623.8	15623.8	-15623.8	9659.08	-177.27
	-177.27	176.27	176.27	-126.991	122.991	-1.81 $\cdot 10^{-11}$

6.2. Deformación en un Medio Semi-Infinito Plano considerando la Segunda Función de Energía Libre

Se considera un medio semi-infinito plano cuya función de Energía Libre se estudia en un caso compresible, donde es necesario determinar el parámetro λ de deformación y el Campo Eléctrico uniforme E_2 que actúa en el cuerpo. Obteniendo estos valores se calculan las matrices $\mathbb{M}$ y $\mathbb{M}'$ con sus respectivos valores propios.

La Segunda Función de Energía Libre para este caso comprensible es:

$$\Omega = \left(\frac{I_1 I_3^{-1/3} - 3}{2}\right)(g_0 + g_1 I_4) - log\left[cosh\left(\frac{\sqrt{I_4}}{m_1}\right)\right] m_0 m_1 - \frac{1}{2}\zeta_o I_4 + \frac{1}{2}\varepsilon_o I_5 I_3^{-1/3} + \frac{1}{2}\kappa(I_3^{1/2} - 1)^2. \tag{6.10}$$

6.2.1. Resolución de Problemas

Para calcular el parámetro λ de deformación y el Campo Eléctrico uniforme E_2 que actúa en el cuerpo se tienen las ecuaciones 5.100 y 5.103, donde se reemplazan las derivadas de esta función de Energía Libre calculadas en la sección 5.3.3, obteniendo las ecuaciones:

$$E_2 = -\frac{\varepsilon_o E_o \lambda^2}{(\lambda^2 + \lambda^{-2} - 2)g_1 - \frac{m_0}{\lambda^{-1}E_2} tanh\left(\frac{\lambda^{-1}E_2}{m_1}\right) - \zeta_o + \lambda^{-2}\varepsilon_o}, \tag{6.11}$$

$$\frac{1}{3}(2\lambda^{-2} - \lambda^2 - 1)(g_0 + g_1\lambda^{-2}E_2^2) + \frac{2}{3}\varepsilon_o\lambda^{-4}E_2^2 = \frac{\varepsilon_o E_o^2}{2}. \tag{6.12}$$

Con sólo dos variables a determinar (λ y E_2) y con las ecuaciones 6.11 y 6.12 se pueden obtener estos valores, considerando las constantes de la Función de Energía Libre expresadas en la tabla 2. Para esto se consideran cinco valores diferentes de E_o, para así obtener diferentes valores de λ y E_2 como se muestra en la tabla 6.

Tabla 6: Valores los Parámetros para diferentes valores de E_o

E_o [V/m]	λ	E_2 [V/m]
$5 \cdot 10^4$	0.9999999859	2.94551
$1 \cdot 10^5$	0.9999994361	5.89102
$5 \cdot 10^5$	0.9999985902	29.455
$1 \cdot 10^6$	0.9999943610	58.9095
$5 \cdot 10^6$	0.9998590424	294.468

Las expresiones de los componentes de la matriz $\mathbb{M}$ se pueden definir con los componentes de $\mathbb{A}_{i\alpha j\beta}$, $\mathbb{B}_{i\alpha\beta}$ y $\mathbb{C}_{\alpha\beta}$ para este problema. Considerando solo los valores no nulos, estas componentes se expresan como:

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_{i\alpha j\beta} = & \frac{\partial^2\Omega}{\partial I_1 \partial I_3}\left(\frac{\partial I_1}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_3}{\partial F_{j\beta}} + \frac{\partial I_3}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_1}{\partial F_{j\beta}}\right) + \frac{\partial^2\Omega}{\partial I_3^2}\frac{\partial I_3}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_3}{\partial F_{j\beta}} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial I_3 \partial I_5}\left(\frac{\partial I_3}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_5}{\partial F_{j\beta}}\right. \\ & \left. + \frac{\partial I_5}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_3}{\partial F_{j\beta}}\right) + \frac{\partial \Omega}{\partial I_1}\frac{\partial^2 I_1}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}} + \frac{\partial \Omega}{\partial I_3}\frac{\partial^2 I_3}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}} + \frac{\partial \Omega}{\partial I_5}\frac{\partial^2 I_5}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}},\end{aligned} \tag{6.13}$$

$$\mathbb{B}_{i\alpha\beta} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial I_1 \partial I_4}\frac{\partial I_1}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_4}{\partial E_{l_\beta}} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial I_3 \partial I_4}\frac{\partial I_3}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_4}{\partial E_{l_\beta}} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial I_3 \partial I_5}\frac{\partial I_3}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_5}{\partial E_{l_\beta}} + \frac{\partial \Omega}{\partial I_5}\frac{\partial^2 I_5}{\partial F_{i\alpha}\partial E_{l_\beta}}, \tag{6.14}$$

$$\mathbb{C}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial I_4^2}\frac{\partial I_4}{\partial E_{l_\alpha}}\frac{\partial I_4}{\partial E_{l_\beta}} + \frac{\partial \Omega}{\partial I_4}\frac{\partial^2 I_4}{\partial E_{l_\alpha}\partial E_{l_\beta}} + \frac{\partial \Omega}{\partial I_5}\frac{\partial^2 I_5}{\partial E_{l_\alpha}\partial E_{l_\beta}}. \tag{6.15}$$

Reemplazando las derivadas calculadas en las secciones 5.2 y 5.3.3 se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_{i\alpha j\beta} = & -\frac{2}{3}(g_0 + g_1\lambda^{-2}E_2^2)[F_{i\alpha}F_{\beta j}^{-1} + F_{j\beta}F_{\alpha i}^{-1}] + \left[\frac{8}{9}(\lambda^2+\lambda^{-2}+1)(g_0+g_1\lambda^{-2}E_2^2)\right. \\ & \left. + \frac{8}{9}\varepsilon_o\lambda^{-4}E_2^2 + \kappa\right]F_{\alpha i}^{-1}F_{\beta j}^{-1} - \frac{2}{3}\varepsilon_o\left[E_{l_\beta}F_{j\gamma}E_{l_\gamma}F_{\alpha i}^{-1} + E_{l_\alpha}F_{i\gamma}E_{l_\gamma}F_{\beta j}^{-1}\right] \\ & + (g_0+g_1\lambda^{-2}E_2^2)\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\left[(\lambda^2+\lambda^{-2}+1)(g_0+g_1\lambda^{-2}E_2^2) + \varepsilon_o\lambda^{-4}E_2^2\right] \\ & (2F_{\beta j}^{-1}F_{\alpha i}^{-1} - F_{\alpha j}^{-1}F_{\beta i}^{-1}) + \varepsilon_o E_{l_\alpha}\delta_{ij}E_{l_\beta},\end{aligned} \tag{6.16}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{B}_{i\alpha\beta} = & \, 2g_1F_{i\alpha}E_{l_\beta} - \frac{2}{3}[g_1(\lambda^2+\lambda^{-2}+1)F_{\alpha i}^{-1}E_{l_\beta} + \varepsilon_o F_{\alpha i}^{-1}c_{\beta\gamma}E_{l_\gamma}] \\ & + \varepsilon_o(\delta_{\alpha\beta}F_{i\gamma}E_{l_\gamma} + E_{l_\alpha}F_{i\beta}),\end{aligned} \tag{6.17}$$

$$\mathbb{C}_{\alpha\beta} = \left[\frac{m_0}{m_1\lambda^{-2}E_2^2} sech^2\left(\frac{\lambda^{-1}E_2}{m_1}\right) + \frac{m_0}{\lambda^{-3}E_2^3} tanh\left(\frac{\lambda^{-1}E_2}{m_1}\right)\right] E_{l_\alpha}E_{l_\beta} + \left[(\lambda^2+\lambda^{-2}-2)g_1 - \frac{m_0}{\lambda^{-1}E_2} tanh\left(\frac{\lambda^{-1}E_2}{m_1}\right) - \zeta_o\right]\delta_{\alpha\beta} + \varepsilon_o c_{\alpha\beta}. \quad (6.18)$$

6.2.2. Resultados

Introduciendo las matrices en el software Mathematica y reemplazando los valores de las variables se obtiene finalmente la matriz $\mathbb{M}$ y a su vez los valores propios de ella, como se expresan en la tabla 7 para los diferentes casos considerados.

Tabla 7: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de E_o

E_o [V/m]	Valores Propios					
$5 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^9$	784000	784000	784000	784000	784000
	$5.52 \cdot 10^{-3}$	$-5.52 \cdot 10^{-3}$	$-3.56 \cdot 10^{-7}$	$-2.82 \cdot 10^{-7}$	$1.19 \cdot 10^{-7}$	$-5.82 \cdot 10^{-11}$
$1 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^9$	784000	784000	784000	784000	784000
	$-2.21 \cdot 10^{-2}$	$2.21 \cdot 10^{-2}$	$-1.50 \cdot 10^{-7}$	$1.27 \cdot 10^{-7}$	$-9.05 \cdot 10^{-8}$	$-1.66 \cdot 10^{-8}$
$5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^9$	784001	784001	784000	783999	783999
	-0.552	0.552	$-1.03 \cdot 10^{-6}$	$2.40 \cdot 10^{-7}$	$-1.50 \cdot 10^{-7}$	$-1.32 \cdot 10^{-7}$
$1 \cdot 10^6$	$3 \cdot 10^9$	784003	784002	784000	783997	783997
	-2.21	2.21	$-1.66 \cdot 10^{-5}$	$-2.49 \cdot 10^{-7}$	$-1.50 \cdot 10^{-7}$	$1.19 \cdot 10^{-7}$
$5 \cdot 10^6$	$3 \cdot 10^9$	784064	784055	784000	783945	783936
	-55.2736	55.245	-0.0103	$-1.50 \cdot 10^{-7}$	$1.29 \cdot 10^{-7}$	$-1.03 \cdot 10^{-7}$

Además considerando el valor del Campo Eléctrico se puede determinar la matriz $\mathbb{M}'$ y a su vez los valores propios de ella, como se expresan en la tabla 8 para los diferentes casos considerados.

Tabla 8: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de E_o

E_o [V/m]	Valores Propios					
$5 \cdot 10^4$	-14.1167	8.67603	8.67603	-8.67603	7.58391	-4.69548
	-4.69548	-4.49911	3.69548	3.69548	1.35585	$4.74 \cdot 10^{-15}$
$1 \cdot 10^5$	-56.2206	34.7041	34.7041	-34.7041	24.2178	-8.84615
	-8.84615	7.84615	7.84615	-7.69215	3.99085	$-3.06 \cdot 10^{-15}$
$5 \cdot 10^5$	-1403.87	867.598	-867.598	867.598	539.257	-42.1587
	-42.1587	41.1587	41.1587	-31.4315	27.4453	$-1.81 \cdot 10^{-13}$
$1 \cdot 10^6$	-5615.18	-3470.33	3470.33	3470.33	2147.85	-83.8122
	-83.8122	82.8122	82.8122	-60.8994	56.9028	$1.82 \cdot 10^{-12}$
$5 \cdot 10^6$	-140302	-86711.5	86711.5	86711.5	53593.8	-416.941
	-416.941	415.941	415.941	-296.466	292.467	$1.66 \cdot 10^{-11}$

6.3. Deformación de un Tubo Cilíndrico considerando la Primera Función de Energía Libre

Se considera un tubo cilíndrico cuya función de Energía Libre se estudia en un caso incompresible, donde es necesario determinar el Campo Eléctrico E_r, los radios finales interior y exterior, a y b respectivamente, y el parámetro p que aparece en la modelación de cuerpos incompresibles. Obteniendo estos valores se calculan las matrices $\mathbb{M}$ y $\mathbb{M}'$ con sus respectivos valores propios.

La Primera Función de Energía Libre para este caso incomprensible es:

$$\Omega = \frac{1}{4}\mu(0)[(1+\gamma)(I_1-3)+(1-\gamma)(I_2-3)] + \varepsilon_o(\alpha I_4 + \beta I_5). \tag{6.19}$$

6.3.1. Resolución de Problemas

Para calcular el Campo Eléctrico E_r en función de r se tiene las ecuación 5.117, donde se reemplazan las derivadas de esta función de Energía Libre calculadas en la sección 5.3.2, obteniendo que:

$$E_r(r) = -\frac{C_o r^3}{2(r^2-a^2+A^2)[\varepsilon_o \alpha r^2 + \varepsilon_o \beta (r^2-a^2+A^2)]}. \tag{6.20}$$

Para calcular el radio interno final a se tiene la ecuación 5.131, donde se reemplazan los valores de las ecuaciones 5.118 y 5.119 en la integral con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{1}{\xi}\left[2(\Omega_1+\Omega_2)\left(\frac{\xi^2}{\xi^2-a^2+A^2} - \frac{\xi^2-a^2+A^2}{\xi^2}\right) - 2\Omega_5 \frac{(\xi^2-a^2+A^2)^2}{\xi^4}E_r^2\right] d\xi \\ -P_o + \varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2a^2} = \varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2b^2},\end{aligned} \tag{6.21}$$

se reemplazan los valores de las derivadas de la función de Energía Libre calculadas en la sección 5.3.2 y el Campo Eléctrico $E_r(\xi)$ de la ecuación 6.20, obteniendo que:

$$\begin{aligned}\int_a^b \left[\mu(0)\left(\frac{\xi}{\xi^2-a^2+A^2} - \frac{\xi^2-a^2+A^2}{\xi^3}\right) - \frac{\beta C_o^2 \xi}{2\varepsilon_o[\alpha\xi^2+\beta(\xi^2-a^2+A^2)]^2}\right] d\xi \\ -P_o + \varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2a^2} = \varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2b^2},\end{aligned} \tag{6.22}$$

resolviendo la integral se obtiene que:

$$\frac{\mu(0)}{2}\left[ln(a^2)-ln(A^2)+ln(B^2)-ln(a^2-A^2+B^2)+\frac{(a-A)(a+A)}{a^2}-\frac{(a-A)(a+A)}{a^2-A^2+B^2}\right]$$
$$+\frac{C_o^2\beta}{4(\alpha+\beta)}\left[\frac{1}{\varepsilon_o\alpha a^2-\varepsilon_o\alpha A^2+B^2(\varepsilon_o\alpha+\varepsilon_o\beta)}-\frac{1}{\varepsilon_o\alpha a^2+\varepsilon_o\beta A^2}\right]$$
$$-P_o+\varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2a^2}=\varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2(a^2-A^2+B^2)}. \tag{6.23}$$

Introduciendo esta ecuación en el software Mathematica y asumiendo que:

$$A=0.025\ [\text{m}],\quad B=0.035\ [\text{m}],$$

y se obtienen de forma numérica los radios finales del tubo cilíndrico, para lo cual se asumen tres valores diferentes para las constantes C_o y P_o como se muestra en la tabla 9.

Tabla 9: Radios Finales del Tubo Cilíndrico para algunos valores de C_o y P_o

C_o [C$^2VN^{-1}m^{-2}$]	P_o [Pa]	a [m]	b [m]
$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^4$	0.0256798	0.0354888
$1 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^4$	0.0293026	0.0381922
$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^5$	0.0392174	0.0462386
$3 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^4$	0.0256564	0.0354718
$3 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^4$	0.0292774	0.0381728
$3 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^5$	0.0391870	0.0462128
$5 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^4$	0.0256093	0.0354378
$5 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^4$	0.0292268	0.0381341
$5 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^5$	0.0391260	0.0461611

Para calcular p en función de r se tiene la ecuación 5.133, donde se reemplazan los valores de las ecuaciones 5.118 y 5.119 en la integral con lo que se obtiene:

$$p(r)=2\Omega_1\frac{r^2-a^2+A^2}{r^2}+2\Omega_2\left(\frac{2r^2-a^2+A^2}{r^2}\right)+2\Omega_5\frac{(r^2-a^2+A^2)^2}{r^4}E_r^2$$
$$-\int_a^r\frac{1}{\xi}\left[2(\Omega_1+\Omega_2)\left(\frac{\xi^2}{\xi^2-a^2+A^2}-\frac{\xi^2-a^2+A^2}{\xi^2}\right)-2\Omega_5\frac{(\xi^2-a^2+A^2)^2}{\xi^4}E_r^2\right]d\xi$$
$$+P_o-\varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2a^2}, \tag{6.24}$$

se reemplazan los valores de las derivadas de la función de Energía Libre calculadas en la sección 5.3.2 y el Campo Eléctrico $E_r(\xi)$ de la ecuación 6.20 obteniéndose:

$$\begin{aligned} p(r) =& \frac{1}{2}\mu(0)\left[(1+\gamma)\frac{r^2-a^2+A^2}{r^2}+(1-\gamma)\frac{2r^2-a^2+A^2}{r^2}\right]+\frac{\beta C_o^2 r^2}{2\varepsilon_o[\alpha r^2+\beta(r^2-a^2+A^2)]^2} \\ & -\int_a^r\left[\mu(0)\left(\frac{\xi}{\xi^2-a^2+A^2}-\frac{\xi^2-a^2+A^2}{\xi^3}\right)-\frac{\beta C_o^2\xi}{2\varepsilon_o[\alpha\xi^2+\beta(\xi^2-a^2+A^2)]^2}\right]d\xi \\ & +P_o-\varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2a^2}, \end{aligned} \tag{6.25}$$

resolviendo la integral se obtiene finalmente que:

$$\begin{aligned} p(r) =& \frac{1}{2}\mu(0)\left[\frac{3r^2-2a^2+2A^2}{r^2}-\gamma\right]+\frac{\beta C_o^2 r^2}{2\varepsilon_o[\alpha r^2+\beta(r^2-a^2+A^2)]^2} \\ & -\frac{\mu(0)}{2}\left[ln(a^2)-ln(A^2)+ln(r^2+A^2-a^2)-ln(r^2)+(a^2-A^2)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)\right] \\ & -\frac{C_o^2\beta}{4(\alpha+\beta)}\left[\frac{1}{\varepsilon_o(\alpha+\beta)r^2-\varepsilon_o\beta a^2+\varepsilon_o\beta A^2}-\frac{1}{\varepsilon_o\alpha a^2+\varepsilon_o\beta A^2}\right]+P_o-\varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2a^2}. \end{aligned} \tag{6.26}$$

Las expresiones de los componentes de la matriz $\mathbb{M}$ se pueden definir con los componentes de $\mathbb{A}_{i\alpha j\beta}$, $\mathbb{B}_{i\alpha\beta}$ y $\mathbb{C}_{\alpha\beta}$ para este problema. Considerando solo los valores no nulos, estas componentes se expresan como:

$$\mathbb{A}_{i\alpha j\beta}=\frac{\partial\Omega}{\partial I_1}\frac{\partial^2 I_1}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}}+\frac{\partial\Omega}{\partial I_2}\frac{\partial^2 I_2}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}}+\frac{\partial\Omega}{\partial I_5}\frac{\partial^2 I_5}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}}-p[F_{\alpha i}^{-1}F_{\beta j}^{-1}-F_{\alpha j}^{-1}F_{i\beta}^{-1}], \tag{6.27}$$

$$\mathbb{B}_{i\alpha\beta}=\frac{\partial\Omega}{\partial I_5}\frac{\partial^2 I_5}{\partial F_{i\alpha}\partial E_{l_\beta}}, \tag{6.28}$$

$$\mathbb{C}_{\alpha\beta}=\frac{\partial\Omega}{\partial I_4}\frac{\partial^2 I_4}{\partial E_{l_\alpha}\partial E_{l_\beta}}+\frac{\partial\Omega}{\partial I_5}\frac{\partial^2 I_5}{\partial E_{l_\alpha}\partial E_{l_\beta}}. \tag{6.29}$$

Reemplazando las derivadas calculadas en las secciones 5.2 y 5.3.2 se obtiene:

$$\mathbb{A}_{i\alpha j\beta} = \frac{1}{2}\mu(0)(1+\gamma)\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\mu(0)(1-\gamma)(\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}c_{\gamma\gamma} + 2F_{i\alpha}F_{j\beta} - \delta_{ij}c_{\beta\alpha} - F_{i\beta}F_{j\alpha} - F_{i\gamma}F_{j\gamma}\delta_{\alpha\beta}) + 2\varepsilon_o\beta E_{l_\alpha}\delta_{ij}E_{l_\beta} - p[F^{-1}_{\alpha i}F^{-1}_{\beta j} - F^{-1}_{\alpha j}F^{-1}_{i\beta}], \tag{6.30}$$

$$\mathbb{B}_{i\alpha\beta} = 2\varepsilon_o\beta(\delta_{\alpha\beta}F_{i\gamma}E_{l_\gamma} + E_{l_\alpha}F_{i\beta}), \tag{6.31}$$

$$\mathbb{C}_{\alpha\beta} = 2\varepsilon_o\alpha\delta_{\alpha\beta} + 2\varepsilon_o\beta c_{\alpha\beta}. \tag{6.32}$$

6.3.2. Resultados

Introduciendo las matrices en el software Mathematica y reemplazando los valores de las variables se obtiene finalmente la matriz $\mathbb{M}(r)$ (que ahora depende de la posición radial r) y a su vez los valores propios de ella. Considerando 8 valores de r entre a y b se calculan los valores propios para los diferentes valores de C_o y P_o, como se expresan en las tablas 10 - 18.

Tabla 10: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 1\cdot10^{-6}$ [$\mathrm{C}^2VN^{-1}m^{-2}$] y $\mathrm{P}_o = 1\cdot10^4$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0256798	785374	783806	773434	763336	761738	-371112
	20663.6	10565.8	193.578	-8.03 $\cdot10^{-8}$	-7.07 $\cdot10^{-8}$	-6.15 $\cdot10^{-8}$
0.0270811	784074	782667	773380	764314	762883	-370957
	19685.8	10619.7	1332.93	-7.93 $\cdot10^{-8}$	-7.07 $\cdot10^{-8}$	-6.25 $\cdot10^{-8}$
0.0284824	782974	781704	773339	765153	763864	-370837
	18846.6	10661.1	2296.07	-7.84 $\cdot10^{-8}$	-7.07 $\cdot10^{-8}$	-6.32 $\cdot10^{-8}$
0.0298837	782034	780882	773307	765879	764710	-370745
	18121.1	10693.3	3118	-7.79 $\cdot10^{-8}$	-7.07 $\cdot10^{-8}$	-6.39 $\cdot10^{-8}$
0.0312849	781225	780175	773281	766510	765447	-370671
	17489.6	10718.7	3825.34	-7.73 $\cdot10^{-8}$	-7.07 $\cdot10^{-8}$	-6.45 $\cdot10^{-8}$
0.0326862	780522	779561	773261	767063	766091	-370613
	16936.7	10738.9	4438.67	-7.64 $\cdot10^{-8}$	-7.07 $\cdot10^{-8}$	-6.50 $\cdot10^{-8}$
0.0340875	779909	779026	773245	767550	766658	-370566
	16449.8	10755.1	4974.11	-7.60 $\cdot10^{-8}$	-7.07 $\cdot10^{-8}$	-6.55 $\cdot10^{-8}$
0.0354888	779369	778556	773232	767981	767159	-370528
	16018.9	10768.3	5444.43	-7.56 $\cdot10^{-8}$	-7.07 $\cdot10^{-8}$	-6.59 $\cdot10^{-8}$

Tabla 11: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 1 \cdot 10^{-6}$ [$C^2 V N^{-1} m^{-2}$] y $P_o = 5 \cdot 10^4$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0293026	792664	784969	727268	678040	669422	-286087
	105960	56731.5	-969.282	-1.36 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	-2.26 $\cdot 10^{-8}$
0.0305725	784345	777356	725735	681029	673285	-281630
	102971	58264.6	6643.34	-1.29 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	-2.66 $\cdot 10^{-8}$
0.0318425	777431	771052	724524	683708	676702	-278134
	100292	59475.6	12947.8	-1.23 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	-2.97 $\cdot 10^{-8}$
0.0331124	771612	765762	723556	686116	679742	-275354
	97884.1	60444	18238.1	-1.18 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	-3.31 $\cdot 10^{-8}$
0.0343823	766658	761272	722773	688288	682460	-273118
	95711.8	61266.8	22728.2	-1.14 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	-3.57 $\cdot 10^{-8}$
0.0356523	762401	757423	722134	690254	684900	-271301
	93746.5	61865.7	26577.2	-1.10 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	-3.82 $\cdot 10^{-8}$
0.0369222	758710	754094	721608	692037	687099	-269810
	91963.4	62391.7	29905.6	-1.07 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	-4.03 $\cdot 10^{-8}$
0.0381922	755487	751194	721172	693659	689089	-268575
	90341.1	62828.3	32806.3	-1.04 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	-4.23 $\cdot 10^{-8}$

Tabla 12: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 1 \cdot 10^{-6}$ [$C^2 V N^{-1} m^{-2}$] y $P_o = 1 \cdot 10^5$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0392174	812859	798701	651260	557271	538073	226729
	-174932	132739	-14700.9	-3.29 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	3.42 $\cdot 10^{-8}$
0.0402204	785840	772864	643373	557908	540679	226092
	-150519	140627	11135.8	-2.99 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	2.90 $\cdot 10^{-8}$
0.0412235	763898	751939	636848	558558	542974	225442
	147151	-130872	32061.1	-2.76 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	2.42 $\cdot 10^{-8}$
0.0422265	745776	734699	631390	559224	545030	224776
	152610	-114807	49300.1	-2.56 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	1.97 $\cdot 10^{-8}$
0.0432295	730596	720292	626779	559904	546898	224096
	157220	-101495	63707.5	-2.39 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	1.57 $\cdot 10^{-8}$
0.0442325	717724	708102	622852	560594	548614	223406
	161147	-90339.5	75896.8	-2.25 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	1.17 $\cdot 10^{-8}$
0.0452355	706694	697678	619482	561290	550205	222710
	164516	86319.2	-80900.6	-2.13 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	8.20 $\cdot 10^{-9}$
0.0462386	697151	688679	616569	561988	551687	222012
	167425	95314.6	-72844.6	-2.02 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	4.81 $\cdot 10^{-9}$

Tabla 13: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 3 \cdot 10^{-6}$ [$C^2 V N^{-1} m^{-2}$] y $P_o = 1 \cdot 10^4$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0256564	784954	783439	773425	763667	762124	-371079
	20332.6	10574.2	559.885	$-8.01 \cdot 10^{-8}$	$-7.07 \cdot 10^{-8}$	$-6.18 \cdot 10^{-8}$
0.0270586	783700	782341	773375	764615	763233	-370934
	19385.1	10624.6	1658.38	$-7.89 \cdot 10^{-8}$	$-7.07 \cdot 10^{-8}$	$-6.27 \cdot 10^{-8}$
0.0284608	782639	781412	773336	765428	764183	-370822
	18572	10663.2	2587.15	$-7.84 \cdot 10^{-8}$	$-7.07 \cdot 10^{-8}$	$-6.35 \cdot 10^{-8}$
0.0298630	781733	780620	773306	766131	765003	-370735
	17869.3	10693.3	3379.86	$-7.76 \cdot 10^{-8}$	$-7.07 \cdot 10^{-8}$	$-6.42 \cdot 10^{-8}$
0.0312652	780952	779937	773283	766742	765715	-370667
	17257.8	10717	4062.14	$-7.68 \cdot 10^{-8}$	$-7.07 \cdot 10^{-8}$	$-6.49 \cdot 10^{-8}$
0.0326674	780274	779346	773264	767277	766339	-370613
	16722.5	10735.8	4653.79	$-7.63 \cdot 10^{-8}$	$-7.07 \cdot 10^{-8}$	$-6.52 \cdot 10^{-8}$
0.0340696	779682	778829	773249	767749	766887	-370569
	16251.3	10751	5170.34	$-7.60 \cdot 10^{-8}$	$-7.07 \cdot 10^{-8}$	$-6.56 \cdot 10^{-8}$
0.0354718	779161	778376	773236	768166	767372	-370534
	15834.3	10763.3	5624.1	$-7.53 \cdot 10^{-8}$	$-7.07 \cdot 10^{-8}$	$-6.62 \cdot 10^{-8}$

Tabla 14: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 3 \cdot 10^{-6}$ [$C^2 V N^{-1} m^{-2}$] y $P_o = 5 \cdot 10^4$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0292774	792238	784582	727226	678252	669684	-285926
	105748	56769	-587.065	$-1.36 \cdot 10^{-7}$	$-7.07 \cdot 10^{-8}$	$-2.28 \cdot 10^{-8}$
0.0305482	783975	777023	725709	681236	673536	-281515
	102764	58287.4	6973.41	$-1.29 \cdot 10^{-7}$	$-7.07 \cdot 10^{-8}$	$-2.67 \cdot 10^{-8}$
0.0318189	777108	770762	724511	683909	676944	-278054
	100091	59486.6	13235.3	$-1.23 \cdot 10^{-7}$	$-7.07 \cdot 10^{-8}$	$-3.00 \cdot 10^{-8}$
0.0330897	771327	765508	723553	686311	679974	-275303
	97688.8	60445.5	18490.4	$-1.18 \cdot 10^{-7}$	$-7.07 \cdot 10^{-8}$	$-3.31 \cdot 10^{-8}$
0.0343605	766406	761048	722778	688478	682683	-273090
	95522.2	61220.4	22950.8	$-1.14 \cdot 10^{-7}$	$-7.07 \cdot 10^{-8}$	$-3.60 \cdot 10^{-8}$
0.0356313	762176	757224	722146	690437	685115	-271291
	93562.5	61852.9	26774.6	$-1.10 \cdot 10^{-7}$	$-7.07 \cdot 10^{-8}$	$-3.83 \cdot 10^{-8}$
0.0369021	758509	753918	721626	692215	687306	-269816
	91784.8	62373.5	30081.3	$-1.07 \cdot 10^{-7}$	$-7.07 \cdot 10^{-8}$	$-4.06 \cdot 10^{-8}$
0.0381728	755305	751036	721194	693832	689289	-268595
	90167.7	62805.5	32963.3	$-1.04 \cdot 10^{-7}$	$-7.07 \cdot 10^{-8}$	$-4.25 \cdot 10^{-8}$

Tabla 15: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 3 \cdot 10^{-6}$ [$C^2 V N^{-1} m^{-2}$] y $P_o = 1 \cdot 10^5$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0391870	812448	798309	651211	557211	538205	226631
	-174656	132787	-14311.1	-3.28 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	3.42 $\cdot 10^{-8}$
0.0401907	785495	772537	643341	558010	540813	225990
	-150310	140656	11460.2	-2.99 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	2.89 $\cdot 10^{-8}$
0.0411944	763606	751664	636831	558664	543108	225336
	147165	-130718	32332.9	-2.75 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	2.40 $\cdot 10^{-8}$
0.0421981	745527	734466	631385	559333	545166	224667
	152610	-114697	49529.1	-2.55 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	1.97 $\cdot 10^{-8}$
0.0432018	730381	720092	626784	560016	547035	223984
	157209	-101422	63901.1	-2.39 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	1.55 $\cdot 10^{-8}$
0.0442054	717535	707928	622863	560708	548751	223292
	161125	-90296.7	76061	-2.25 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	1.16 $\cdot 10^{-8}$
0.0452091	706518	697518	619493	561404	550338	222596
	164486	86460.1	-80878.4	-2.12 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	8.11 $\cdot 10^{-9}$
0.0462128	696952	688498	616550	562089	551807	221911
	167390	95442.5	-72818.5	-2.02 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	4.68 $\cdot 10^{-9}$

Tabla 16: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 5 \cdot 10^{-6}$ [$C^2 V N^{-1} m^{-2}$] y $P_o = 1 \cdot 10^4$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0256093	784144	782706	773410	764336	762903	-371019
	19663.9	10588.1	1292.09	-7.95 $\cdot 10^{-8}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	-6.24 $\cdot 10^{-8}$
0.0270134	782953	781689	773367	765222	763939	-370893
	18777.6	10631.7	2308.92	-7.86 $\cdot 10^{-8}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	-6.33 $\cdot 10^{-8}$
0.0284175	781970	780830	773333	765982	764826	-370797
	18017.6	10665.2	3168.96	-7.78 $\cdot 10^{-8}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	-6.38 $\cdot 10^{-8}$
0.0298215	781130	780096	773308	766639	765592	-370722
	17361.1	10691.2	3903.22	-7.70 $\cdot 10^{-8}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	-6.45 $\cdot 10^{-8}$
0.0312256	780406	779464	773287	767210	766257	-370663
	16790.1	10711.7	4535.33	-7.65 $\cdot 10^{-8}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	-6.52 $\cdot 10^{-8}$
0.0326297	779777	778915	773271	767709	766838	-370617
	16290.5	10728	5083.59	-7.60 $\cdot 10^{-8}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	-6.56 $\cdot 10^{-8}$
0.0340337	779229	778437	773258	768149	767350	-370579
	15850.9	10741.1	5562.33	-7.57 $\cdot 10^{-8}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	-6.60 $\cdot 10^{-8}$
0.0354378	778746	778016	773247	768538	767802	-370548
	15462	10751.7	5982.92	-7.51 $\cdot 10^{-8}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	-6.63 $\cdot 10^{-8}$

Tabla 17: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 5 \cdot 10^{-6}$ [$C^2 V N^{-1} m^{-2}$] y $P_o = 5 \cdot 10^4$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0292268	791385	783810	727145	678681	670211	-285610
	105319	56842.3	177.342	-1.35 $\cdot 10^{-7}$	-7.08 $\cdot 10^{-8}$	-2.32 $\cdot 10^{-8}$
0.0304993	783237	776358	725660	681654	674043	-281288
	102346	58331.3	7633.45	-1.28 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	-2.70 $\cdot 10^{-8}$
0.0317717	776462	770184	724487	684315	677430	-277898
	99685.3	59507.1	13810.2	-1.22 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	-3.05 $\cdot 10^{-8}$
0.0330442	770757	765001	723549	686705	680442	-275204
	97294.7	60446.8	18994.6	-1.17 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	-3.34 $\cdot 10^{-8}$
0.0343167	765900	760601	722790	688860	683133	-273037
	95139.8	61206.1	23395.7	-1.13 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	-3.63 $\cdot 10^{-8}$
0.0355891	761725	756828	722172	690808	685548	-271276
	93191.5	61825.6	27169	-1.09 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	-3.88 $\cdot 10^{-8}$
0.0368616	758105	753565	721662	692575	687724	-269832
	91424.8	62335.5	30432.4	-1.06 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	-4.09 $\cdot 10^{-8}$
0.0381341	754943	750721	721240	694182	689692	-268637
	89818.2	62758.5	33276.7	-1.03 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	-4.27 $\cdot 10^{-8}$

Tabla 18: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 5 \cdot 10^{-6}$ [$C^2 V N^{-1} m^{-2}$] y $P_o = 1 \cdot 10^5$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0391260	811624	797525	651113	557565	538473	226435
	-174103	132880	-13530.7	-3.27 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	3.38 $\cdot 10^{-8}$
0.0401310	784804	771883	643279	558215	541082	225785
	-149893	140714	12109.3	-2.97 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	2.88 $\cdot 10^{-8}$
0.0411360	763021	751114	636798	558877	543380	225123
	147192	-130411	32876.6	-2.74 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	2.40 $\cdot 10^{-8}$
0.0421410	745028	734000	631377	559554	545439	224446
	152610	-114480	49986.8	-2.54 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	1.94 $\cdot 10^{-8}$
0.0431460	729950	719693	626795	560243	547310	223757
	157185	-101280	64287.6	-2.38 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	1.52 $\cdot 10^{-8}$
0.0441510	717155	707579	622887	560938	549026	223062
	161081	-90213.4	76388.9	-2.24 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	1.14 $\cdot 10^{-8}$
0.0451561	706164	697194	619511	561631	550607	222369
	164425	86741.9	-80834.7	-2.12 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	7.91 $\cdot 10^{-9}$
0.0461611	696532	688115	616497	562286	552041	221714
	167320	95702.1	-72755.7	-2.01 $\cdot 10^{-7}$	-7.07 $\cdot 10^{-8}$	4.74 $\cdot 10^{-9}$

Además considerando el valor del Campo Eléctrico se puede determinar la matriz $\mathbb{M}'(r)$ y a su vez los valores propios de ella. Considerando 8 valores de r entre a y b se calculan los valores propios para los diferentes valores de C_o y P_o, como se expresan en las tablas 19 - 27.

Tabla 19: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 1 \cdot 10^{-6}$ [$\mathrm{C}^2 V N^{-1} m^{-2}$] *y* $\mathrm{P}_o = 1 \cdot 10^4$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0256798	-446403	446402	446402	-446402	-945.383	-945.383
	944.882	-944.882	944.383	944.383	$5.42 \cdot 10^{-11}$	$-5.25 \cdot 10^{-11}$
0.0270811	-385220	-385219	385219	385219	-878.246	-878.246
	877.745	-877.745	877.246	877.246	$9.05 \cdot 10^{-11}$	$8.54 \cdot 10^{-11}$
0.0284824	-336330	-336329	336329	336329	-820.658	-820.658
	820.156	-820.156	819.658	819.658	$-1.80 \cdot 10^{-10}$	$-1.39 \cdot 10^{-10}$
0.0298837	-296573	296572	296572	-296572	-770.659	-770.659
	770.157	-770.157	769.659	769.659	$-5.80 \cdot 10^{-11}$	$1.10 \cdot 10^{-11}$
0.0312849	-263754	263753	263753	-263753	-726.797	-726.797
	726.295	-726.295	725.797	725.797	$-1.19 \cdot 10^{-10}$	$-4.36 \cdot 10^{-11}$
0.0326862	-236310	-236309	236309	236309	-687.973	-687.973
	687.471	-687.471	686.973	686.973	$-6.65 \cdot 10^{-11}$	$-4.98 \cdot 10^{-11}$
0.0340875	-213099	-213098	213098	213098	-653.338	-653.338
	652.836	-652.836	652.338	652.338	$5.32 \cdot 10^{-11}$	$-2.24 \cdot 10^{-11}$
0.0354888	-193273	-193272	193272	193272	-622.227	-622.227
	621.725	-621.725	621.227	621.227	$2.01 \cdot 10^{-11}$	$9.98 \cdot 10^{-12}$

Tabla 20: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 1 \cdot 10^{-6}$ [$\mathrm{C}^2 V N^{-1} m^{-2}$] *y* $\mathrm{P}_o = 5 \cdot 10^4$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0293026	$-4.29 \cdot 10^6$	$4.29 \cdot 10^6$	$-4.29 \cdot 10^6$	$4.29 \cdot 10^6$	-2932.17	-2932.17
	2931.67	-2931.67	2931.17	2931.17	$-5.14 \cdot 10^{-10}$	$-2.29 \cdot 10^{-10}$
0.0305725	$-2.70 \cdot 10^6$	$-2.70 \cdot 10^6$	$2.70 \cdot 10^6$	$2.70 \cdot 10^6$	-2325.11	-2325.11
	2324.61	-2324.61	2324.11	2324.11	$6.64 \cdot 10^{-10}$	$-1.39 \cdot 10^{-10}$
0.0318425	$-1.85 \cdot 10^6$	$1.85 \cdot 10^6$	$-1.85 \cdot 10^6$	$1.85 \cdot 10^6$	-1925.06	-1925.06
	1924.56	-1924.56	1924.06	1924.06	$5.99 \cdot 10^{-10}$	$8.45 \cdot 10^{-11}$
0.0331124	$-1.34 \cdot 10^6$	$-1.34 \cdot 10^6$	$1.34 \cdot 10^6$	$1.34 \cdot 10^6$	-1642.6	-1642.6
	1642.1	-1642.1	1641.6	1641.6	$-1.25 \cdot 10^{-10}$	$5.31 \cdot 10^{-11}$
0.0343823	$-1.02 \cdot 10^6$	$1.02 \cdot 10^6$	$1.02 \cdot 10^6$	$-1.02 \cdot 10^6$	-1433.07	-1433.07
	1432.57	-1432.57	1432.07	1432.07	$1.17 \cdot 10^{-10}$	$9.05 \cdot 10^{-11}$
0.0356523	-808041	808040	-808040	808040	-1271.75	-1271.75
	1271.25	-1271.25	1270.75	1270.75	$1.36 \cdot 10^{-10}$	$-3.80 \cdot 10^{-11}$
0.0369222	-653674	653673	653673	-653673	-1143.89	-1143.89
	1143.39	-1143.39	1142.89	1142.89	$1.80 \cdot 10^{-10}$	$3.03 \cdot 10^{-11}$
0.0381922	-540438	-540437	540437	540437	-1040.15	-1040.15
	1039.65	-1039.65	1039.15	1039.15	$5.89 \cdot 10^{-11}$	$3.89 \cdot 10^{-11}$

Tabla 21: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 1 \cdot 10^{-6}$ [$\mathrm{C}^2 V N^{-1} m^{-2}$] y $\mathrm{P}_o = 1 \cdot 10^5$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0392174	$-3.35 \cdot 10^6$	$-3.35 \cdot 10^6$	$3.35 \cdot 10^6$	$3.35 \cdot 10^6$	-2592.09	-2592.09
	2591.59	-2591.59	2591.09	2591.09	$6.26 \cdot 10^{-10}$	$-4.80 \cdot 10^{-10}$
0.0402204	$-3.85 \cdot 10^6$	$-3.85 \cdot 10^6$	$3.85 \cdot 10^6$	$3.85 \cdot 10^6$	-2777.13	-2777.13
	2776.63	-2776.63	2776.13	2776.13	$-2.37 \cdot 10^{-10}$	$1.04 \cdot 10^{-10}$
0.0412235	$-4.66 \cdot 10^6$	$-4.66 \cdot 10^6$	$4.66 \cdot 10^6$	$4.66 \cdot 10^6$	-3054.82	-3054.82
	3054.32	-3054.32	3053.82	3053.82	$-3.10 \cdot 10^{-10}$	$7.06 \cdot 10^{-11}$
0.0422265	$-6.00 \cdot 10^6$	$-6.00 \cdot 10^6$	$6.00 \cdot 10^6$	$6.00 \cdot 10^6$	-3464.66	-3464.66
	3464.16	-3464.16	3463.66	3463.66	$-1.52 \cdot 10^{-9}$	$3.57 \cdot 10^{-10}$
0.0432295	$-8.34 \cdot 10^6$	$8.34 \cdot 10^6$	$-8.34 \cdot 10^6$	$8.34 \cdot 10^6$	-4085.11	-4085.11
	4084.61	-4084.61	4084.11	4084.11	$-1.87 \cdot 10^{-9}$	$-3.11 \cdot 10^{-10}$
0.0442325	$-1.29 \cdot 10^7$	$-1.29 \cdot 10^7$	$1.29 \cdot 10^7$	$1.29 \cdot 10^7$	-5086.71	-5086.71
	5086.21	-5086.21	5085.71	5085.71	$-2.25 \cdot 10^{-9}$	$-5.42 \cdot 10^{-10}$
0.0452355	$-2.38 \cdot 10^7$	$-2.38 \cdot 10^7$	$2.38 \cdot 10^7$	$2.38 \cdot 10^7$	-6912.54	-6912.54
	6912.04	-6912.04	6911.54	6911.54	$2.35 \cdot 10^{-9}$	$2.82 \cdot 10^{-11}$
0.0462386	$-6.23 \cdot 10^7$	$-6.23 \cdot 10^7$	$6.23 \cdot 10^7$	$6.23 \cdot 10^7$	-11165.7	-11165.7
	11165.2	-11165.2	11164.7	11164.7	$1.33 \cdot 10^{-8}$	$3.99 \cdot 10^{-10}$

Tabla 22: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 3 \cdot 10^{-6}$ [$\mathrm{C}^2 V N^{-1} m^{-2}$] y $\mathrm{P}_o = 1 \cdot 10^4$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0256564	$-3.97 \cdot 10^6$	$3.97 \cdot 10^6$	$-3.97 \cdot 10^6$	$3.97 \cdot 10^6$	-2818.52	-2818.52
	2818.02	-2818.02	2817.52	2817.52	$-1.17 \cdot 10^{-9}$	$1.39 \cdot 10^{-10}$
0.0270586	$-3.43 \cdot 10^6$	$-3.43 \cdot 10^6$	$3.43 \cdot 10^6$	$3.43 \cdot 10^6$	-2619.99	-2619.99
	2619.49	-2619.49	2618.99	2618.99	$-2.49 \cdot 10^{-10}$	$-6.19 \cdot 10^{-11}$
0.0284608	$-2.99 \cdot 10^6$	$2.99 \cdot 10^6$	$-2.99 \cdot 10^6$	$2.99 \cdot 10^6$	-2449.45	-2449.45
	2448.95	-2448.95	2448.45	2448.45	$-7.40 \cdot 10^{-10}$	$2.63 \cdot 10^{-10}$
0.0298630	$-2.64 \cdot 10^6$	$-2.64 \cdot 10^6$	$2.64 \cdot 10^6$	$2.64 \cdot 10^6$	-2301.21	-2301.21
	2300.71	-2300.71	2300.21	2300.21	$8.80 \cdot 10^{-10}$	$-2.11 \cdot 10^{-10}$
0.0312652	$-2.35 \cdot 10^6$	$2.35 \cdot 10^6$	$2.35 \cdot 10^6$	$-2.35 \cdot 10^6$	-2171.03	-2171.03
	2170.53	-2170.53	2170.03	2170.03	$-4.89 \cdot 10^{-11}$	$-2.54 \cdot 10^{-11}$
0.0326674	$-2.11 \cdot 10^6$	$-2.11 \cdot 10^6$	$2.11 \cdot 10^6$	$2.11 \cdot 10^6$	-2055.69	-2055.69
	2055.19	-2055.19	2054.69	2054.69	$-9.46 \cdot 10^{-10}$	$5.66 \cdot 10^{-11}$
0.0340696	$-1.90 \cdot 10^6$	$-1.90 \cdot 10^6$	$1.90 \cdot 10^6$	$1.90 \cdot 10^6$	-1952.71	-1952.71
	1952.21	-1952.21	1951.71	1951.71	$4.08 \cdot 10^{-10}$	$-1.77 \cdot 10^{-10}$
0.0354718	$-1.72 \cdot 10^6$	$1.72 \cdot 10^6$	$1.72 \cdot 10^6$	$-1.72 \cdot 10^6$	-1860.15	-1860.15
	1859.65	-1859.65	1859.15	1859.15	$5.21 \cdot 10^{-10}$	$1.71 \cdot 10^{-10}$

Tabla 23: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 3 \cdot 10^{-6}$ [$\mathrm{C}^2 V N^{-1} m^{-2}$] y $\mathrm{P}_o = 5 \cdot 10^4$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0292774	-3.78 $\cdot 10^7$	-3.78 $\cdot 10^7$	3.78 $\cdot 10^7$	3.78 $\cdot 10^7$	-8702.65	-8702.65
	8702.15	-8702.15	8701.65	8701.65	7.57 $\cdot 10^{-9}$	3.96 $\cdot 10^{-10}$
0.0305482	-2.39 $\cdot 10^7$	-2.39 $\cdot 10^7$	2.39 $\cdot 10^7$	2.39 $\cdot 10^7$	-6914.38	-6914.38
	6913.88	-6913.88	6913.38	6913.38	6.81 $\cdot 10^{-9}$	5.00 $\cdot 10^{-9}$
0.0318189	-1.64 $\cdot 10^7$	-1.64 $\cdot 10^7$	1.64 $\cdot 10^7$	1.64 $\cdot 10^7$	-5732.31	-5732.31
	5731.81	-5731.81	5731.31	5731.31	5.27 $\cdot 10^{-10}$	-4.40 $\cdot 10^{-10}$
0.0330897	-1.19 $\cdot 10^7$	1.19 $\cdot 10^7$	-1.19 $\cdot 10^7$	1.19 $\cdot 10^7$	-4895.9	-4895.9
	4895.4	-4895.4	4894.9	4894.9	-3.23 $\cdot 10^{-9}$	-1.19 $\cdot 10^{-9}$
0.0343605	-9.13 $\cdot 10^6$	-9.13 $\cdot 10^6$	9.13 $\cdot 10^6$	9.13 $\cdot 10^6$	-4274.49	-4274.49
	4273.99	-4273.99	4273.49	4273.49	2.17 $\cdot 10^{-10}$	-1.00 $\cdot 10^{-10}$
0.0356313	-7.20 $\cdot 10^6$	-7.20 $\cdot 10^6$	7.20 $\cdot 10^6$	7.20 $\cdot 10^6$	-3795.48	-3795.48
	3794.98	-3794.98	3794.48	3794.48	2.39 $\cdot 10^{-9}$	-4.91 $\cdot 10^{-11}$
0.0369021	-5.83 $\cdot 10^6$	5.83 $\cdot 10^6$	-5.83 $\cdot 10^6$	5.83 $\cdot 10^6$	-3415.45	-3415.45
	3414.95	-3414.95	3414.45	3414.45	-1.90 $\cdot 10^{-9}$	2.17 $\cdot 10^{-10}$
0.0381728	-4.82 $\cdot 10^6$	4.82 $\cdot 10^6$	4.82 $\cdot 10^6$	-4.82 $\cdot 10^6$	-3106.85	-3106.85
	3106.35	-3106.35	3105.85	3105.85	1.46 $\cdot 10^{-9}$	1.19 $\cdot 10^{-9}$

Tabla 24: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 3 \cdot 10^{-6}$ [$\mathrm{C}^2 V N^{-1} m^{-2}$] y $\mathrm{P}_o = 1 \cdot 10^5$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0391870	-3.03 $\cdot 10^7$	-3.03 $\cdot 10^7$	3.03 $\cdot 10^7$	3.03 $\cdot 10^7$	-7794.63	-7794.63
	7794.13	-7794.13	7793.63	7793.63	-8.99 $\cdot 10^{-9}$	2.61 $\cdot 10^{-9}$
0.0401907	-3.49 $\cdot 10^7$	-3.49 $\cdot 10^7$	3.49 $\cdot 10^7$	3.49 $\cdot 10^7$	-8356.85	-8356.85
	8356.35	-8356.35	8355.85	8355.85	-1.02 $\cdot 10^{-8}$	-3.02 $\cdot 10^{-9}$
0.0411944	-4.23 $\cdot 10^7$	4.23 $\cdot 10^7$	4.23 $\cdot 10^7$	-4.23 $\cdot 10^7$	-9200.41	-9200.41
	9199.91	-9199.91	9199.41	9199.41	9.13 $\cdot 10^{-9}$	5.22 $\cdot 10^{-9}$
0.0421981	-5.45 $\cdot 10^7$	-5.45 $\cdot 10^7$	5.45 $\cdot 10^7$	5.45 $\cdot 10^7$	-10446.6	-10446.6
	10446.1	-10446.1	10445.6	10445.6	-1.34 $\cdot 10^{-8}$	4.62 $\cdot 10^{-9}$
0.0432018	-7.60 $\cdot 10^7$	7.60 $\cdot 10^7$	-7.60 $\cdot 10^7$	7.60 $\cdot 10^7$	-12337	-12337
	12336.5	-12336.5	12336	12336	3.08 $\cdot 10^{-9}$	-1.95 $\cdot 10^{-12}$
0.0442054	-1.18 $\cdot 10^8$	-1.18 $\cdot 10^8$	1.18 $\cdot 10^8$	1.18 $\cdot 10^8$	-15399.5	-15399.5
	15399	-15399	15398.5	15398.5	3.35 $\cdot 10^{-8}$	6.81 $\cdot 10^{-9}$
0.0452091	-2.20 $\cdot 10^8$	-2.20 $\cdot 10^8$	2.20 $\cdot 10^8$	2.20 $\cdot 10^8$	-21017.6	-21017.6
	21017.1	-21017.1	21016.6	21016.6	7.22 $\cdot 10^{-8}$	3.57 $\cdot 10^{-8}$
0.0462128	-5.87 $\cdot 10^8$	5.87 $\cdot 10^8$	5.87 $\cdot 10^8$	-5.87 $\cdot 10^8$	-34288	-34288
	34287.5	-34287.5	34287	34287	4.91 $\cdot 10^{-8}$	3.87 $\cdot 10^{-8}$

Tabla 25: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 5 \cdot 10^{-6}$ [$\mathrm{C}^2 V N^{-1} m^{-2}$] y $\mathrm{P}_o = 1 \cdot 10^4$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0256093	-1.07 $\cdot 10^7$	-1.07 $\cdot 10^7$	1.07 $\cdot 10^7$	1.07 $\cdot 10^7$	-4642.2	-4642.2
	4641.7	-4641.7	4641.2	4641.2	1.17 $\cdot 10^{-9}$	-1.17 $\cdot 10^{-9}$
0.0270134	-9.33 $\cdot 10^6$	9.33 $\cdot 10^6$	-9.33 $\cdot 10^6$	9.33 $\cdot 10^6$	-4320.79	-4320.79
	4320.29	-4320.29	4319.79	4319.79	-1.19 $\cdot 10^{-9}$	-2.51 $\cdot 10^{-11}$
0.0284175	-8.17 $\cdot 10^6$	8.17 $\cdot 10^6$	-8.17 $\cdot 10^6$	8.17 $\cdot 10^6$	-4043.91	-4043.91
	4043.41	-4043.41	4042.91	4042.91	8.61 $\cdot 10^{-10}$	5.35 $\cdot 10^{-10}$
0.0298215	-7.22 $\cdot 10^6$	7.22 $\cdot 10^6$	-7.22 $\cdot 10^6$	7.22 $\cdot 10^6$	-3802.63	-3802.63
	3802.13	-3802.13	3801.63	3801.63	4.80 $\cdot 10^{-10}$	-2.47 $\cdot 10^{-10}$
0.0312256	-6.44 $\cdot 10^6$	6.44 $\cdot 10^6$	6.44 $\cdot 10^6$	-6.44 $\cdot 10^6$	-3590.28	-3590.28
	3589.78	-3589.78	3589.28	3589.28	1.62 $\cdot 10^{-9}$	6.17 $\cdot 10^{-10}$
0.0326297	-5.78 $\cdot 10^6$	5.78 $\cdot 10^6$	-5.78 $\cdot 10^6$	5.78 $\cdot 10^6$	-3401.8	-3401.8
	3401.3	-3401.3	3400.8	3400.8	1.70 $\cdot 10^{-9}$	-1.74 $\cdot 10^{-10}$
0.0340337	-5.22 $\cdot 10^6$	5.22 $\cdot 10^6$	5.22 $\cdot 10^6$	-5.22 $\cdot 10^6$	-3233.24	-3233.24
	3232.74	-3232.74	3232.24	3232.24	-5.98 $\cdot 10^{-10}$	-3.04 $\cdot 10^{-11}$
0.0354378	-4.74 $\cdot 10^6$	-4.74 $\cdot 10^6$	4.74 $\cdot 10^6$	4.74 $\cdot 10^6$	-3081.52	-3081.52
	3081.02	-3081.02	3080.52	3080.52	-4.65 $\cdot 10^{-10}$	-1.16 $\cdot 10^{-10}$

Tabla 26: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 5 \cdot 10^{-6}$ [$\mathrm{C}^2 V N^{-1} m^{-2}$] y $\mathrm{P}_o = 5 \cdot 10^4$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0292268	-1.00 $\cdot 10^8$	-1.00 $\cdot 10^8$	1.00 $\cdot 10^8$	1.00 $\cdot 10^8$	-14201.4	-14201.4
	14200.9	-14200.9	14200.4	14200.4	-1.13 $\cdot 10^{-8}$	-1.15 $\cdot 10^{-9}$
0.0304993	-6.41 $\cdot 10^7$	6.41 $\cdot 10^7$	-6.41 $\cdot 10^7$	6.41 $\cdot 10^7$	-11327.2	-11327.2
	11326.7	-11326.7	11326.2	11326.2	1.49 $\cdot 10^{-8}$	-9.87 $\cdot 10^{-9}$
0.0317717	-4.43 $\cdot 10^7$	-4.43 $\cdot 10^7$	4.43 $\cdot 10^7$	4.43 $\cdot 10^7$	-9415.82	-9415.82
	9415.32	-9415.32	9414.82	9414.82	-7.98 $\cdot 10^{-9}$	7.37 $\cdot 10^{-9}$
0.0330442	-3.24 $\cdot 10^7$	3.24 $\cdot 10^7$	-3.24 $\cdot 10^7$	3.24 $\cdot 10^7$	-8057.69	-8057.69
	8057.19	-8057.19	8056.69	8056.69	1.19 $\cdot 10^{-8}$	5.79 $\cdot 10^{-9}$
0.0343167	-2.48 $\cdot 10^7$	-2.48 $\cdot 10^7$	2.48 $\cdot 10^7$	2.48 $\cdot 10^7$	-7045.49	-7045.49
	7044.99	-7044.99	7044.49	7044.49	5.22 $\cdot 10^{-9}$	2.57 $\cdot 10^{-9}$
0.0355891	-1.96 $\cdot 10^7$	-1.96 $\cdot 10^7$	1.96 $\cdot 10^7$	1.96 $\cdot 10^7$	-6263.38	-6263.38
	6262.88	-6262.88	6262.38	6262.38	-6.63 $\cdot 10^{-9}$	6.27 $\cdot 10^{-9}$
0.0368616	-1.59 $\cdot 10^7$	-1.59 $\cdot 10^7$	1.59 $\cdot 10^7$	1.59 $\cdot 10^7$	-5641.66	-5641.66
	5641.16	-5641.16	5640.66	5640.66	-2.86 $\cdot 10^{-9}$	-1.78 $\cdot 10^{-9}$
0.0381341	-1.31 $\cdot 10^7$	-1.31 $\cdot 10^7$	1.31 $\cdot 10^7$	1.31 $\cdot 10^7$	-5136.01	-5136.01
	5135.51	-5135.51	5135.01	5135.01	-3.96 $\cdot 10^{-9}$	3.90 $\cdot 10^{-10}$

Tabla 27: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 5 \cdot 10^{-6}$ [$C^2 V N^{-1} m^{-2}$] y $P_o = 1 \cdot 10^5$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0391260	-8.52 $\cdot 10^7$	8.52 $\cdot 10^7$	-8.52 $\cdot 10^7$	8.52 $\cdot 10^7$	-13056.4	-13056.4
	13055.9	-13055.9	13055.4	13055.4	3.93 $\cdot 10^{-9}$	-3.72 $\cdot 10^{-9}$
0.0401310	-9.82 $\cdot 10^7$	9.82 $\cdot 10^7$	-9.82 $\cdot 10^7$	9.82 $\cdot 10^7$	-14017.7	-14017.7
	14017.2	-14017.2	14016.7	14016.7	5.46 $\cdot 10^{-9}$	-2.65 $\cdot 10^{-9}$
0.0411360	-1.19 $\cdot 10^8$	1.19 $\cdot 10^8$	-1.19 $\cdot 10^8$	1.19 $\cdot 10^8$	-15459.6	-15459.6
	15459.1	-15459.1	15458.6	15458.6	-2.18 $\cdot 10^{-8}$	5.27 $\cdot 10^{-9}$
0.0421410	-1.54 $\cdot 10^8$	1.54 $\cdot 10^8$	-1.54 $\cdot 10^8$	1.54 $\cdot 10^8$	-17594	-17594
	17593.5	-17593.5	17593	17593	-1.05 $\cdot 10^{-8}$	1.54 $\cdot 10^{-9}$
0.0431460	-2.17 $\cdot 10^8$	2.17 $\cdot 10^8$	2.17 $\cdot 10^8$	-2.17 $\cdot 10^8$	-20845.3	-20845.3
	-20844.8	20844.8	20844.3	20844.3	3.46 $\cdot 10^{-8}$	1.08 $\cdot 10^{-8}$
0.0441510	-3.41 $\cdot 10^8$	3.41 $\cdot 10^8$	3.41 $\cdot 10^8$	-3.41 $\cdot 10^8$	-26150.7	-26150.7
	26150.2	-26150.2	26149.7	26149.7	-8.99 $\cdot 10^{-8}$	2.07 $\cdot 10^{-8}$
0.0451561	-6.48 $\cdot 10^8$	6.48 $\cdot 10^8$	-6.48 $\cdot 10^8$	6.48 $\cdot 10^8$	-36013.3	-36013.3
	-36012.8	36012.8	36012.3	36012.3	-7.58 $\cdot 10^{-8}$	1.42 $\cdot 10^{-8}$
0.0461611	-1.80 $\cdot 10^9$	1.80 $\cdot 10^9$	-1.80 $\cdot 10^9$	1.80 $\cdot 10^9$	-60006.6	-60006.6
	-60006.1	60006.1	60005.6	60005.6	3.17 $\cdot 10^{-7}$	1.02 $\cdot 10^{-7}$

6.4. Deformación de un Tubo Cilíndrico considerando la Segunda Función de Energía Libre

Se considera un tubo cilíndrico cuya función de Energía Libre se estudia en un caso incompresible, donde es necesario determinar el Campo Eléctrico E_r, los radios finales interior y exterior, a y b respectivamente, y el parámetro p que aparece en la modelación de cuerpos incompresibles. Obteniendo estos valores se calculan las matrices $\mathbb{M}$ y $\mathbb{M}'$ con sus respectivos valores propios.

La Segunda Función de Energía Libre para este caso incomprensible es:

$$\Omega = \left(\frac{I_1 - 3}{2}\right)(g_0 + g_1 I_4) - log\left[cosh\left(\frac{\sqrt{I_4}}{m_1}\right)\right] m_0 m_1 - \frac{1}{2}\zeta_o I_4 + \frac{1}{2}\varepsilon_o I_5. \tag{6.33}$$

6.4.1. Resolución de Problemas

Para calcular el Campo Eléctrico E_r en función de r se tiene las ecuación 5.117, donde se reemplazan las derivadas de esta función de Energía Libre calculadas en la sección 5.3.4, obteniendo que:

$$E_r(r) = -\frac{C_o r^3}{(r^2 - a^2 + A^2)\left[\left(\frac{(A^2-a^2)^2}{r^2(r^2-a^2+A^2)} g_1 - \frac{m_0 r}{R E_r} tanh\left(\frac{R E_r}{m_1 r}\right) - \zeta_o\right) r^2 + \varepsilon_o (r^2 - a^2 + A^2)\right]}, \tag{6.34}$$

la cual es una ecuación implícita para obtener E_r, la que presenta algunos desafíos para poder resolverse, por lo cual se aplica una interpolación entre el radio interno final a, el radio r y el Campo Eléctrico E_r. Es necesario realizar esta aproximación con interpolación debido a que existe una tangente hiperbólica en la que se incluye el término E_r que depende de r y no se puede determinar numéricamente.

Para realizar la interpolación se dieron 9 valores diferentes del radio interior a entre 0.03 [m] y 0.07 [m], y para cada uno de estos radios interiores se consideran 6 valores diferentes de un radio r entre a y b, y para cada valor de r se calcula el Campo Eléctrico E_r de forma numérica de la ecuación 6.34. Luego con todos estos valores se hace una triple interpolación entre a, r y E_r con la herramienta "fitting" de Mathematica y se obtiene la ecuación 6.35.

$$E_r(r) = H_o + H_1 r + H_2 r^2, \tag{6.35}$$

donde los valores de H_o, H_1 y H_2 dependen de la constante C_o, y se presentan en la tabla 28. Los términos fueron testeados obteniendo la mejor aproximación con ellos, y además se intentó de obtener la menor cantidad de términos posibles para así tener un fácil manejo de datos.

Tabla 28: Valores de las Constantes de la ecuación 6.35 para algunos valores de C_o

C_o [$\mathrm{C}^2 V N^{-1} m^{-2}$]	H_o	H_1	H_2
$1 \cdot 10^{-6}$	3.93 - 5251.45 a + 378176 a^2	17613.9	-449014
$3 \cdot 10^{-6}$	11.81 - 15754.4 a + 1.13 $\cdot 10^6$ a^2	52841.7	-1.34 $\cdot 10^6$
$5 \cdot 10^{-6}$	19.69 - 26257.3 a + 1.89 $\cdot 10^6$ a^2	88069.6	-2.24 $\cdot 10^6$

Para calcular el radio interno final a se tiene la ecuación 5.131, donde se reemplazan los valores de las ecuaciones 5.118 y 5.119 en la integral con lo que se obtiene:

$$\int_a^b \frac{1}{\xi}\left[2(\Omega_1+\Omega_2)\left(\frac{\xi^2}{\xi^2-a^2+A^2}-\frac{\xi^2-a^2+A^2}{\xi^2}\right)-2\Omega_5\frac{(\xi^2-a^2+A^2)^2}{\xi^4}E_r^2\right]d\xi$$
$$-P_o+\varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2a^2}=\varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2b^2}, \tag{6.36}$$

se reemplazan los valores de las derivadas de la función de Energía Libre calculadas en la sección 5.3.4 obteniéndose:

$$\int_a^b \left[g_0\frac{\xi^4-(\xi^2-a^2+A^2)^2}{\xi^3(\xi^2-a^2+A^2)}+\frac{g_1(\xi^4-(\xi^2-a^2+A^2)^2)-\varepsilon_o(\xi^2-a^2+A^2)^2}{\xi^5}E_r^2\right]d\xi$$
$$-P_o+\varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2a^2}=\varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2b^2}, \tag{6.37}$$

se reemplaza el valor del Campo Eléctrico $E_r(\xi)$ de la ecuación 6.35 y se tiene:

$$\int_a^b g_0 \frac{\xi^4-(\xi^2-a^2+A^2)^2}{\xi^3(\xi^2-a^2+A^2)}d\xi + \int_a^b \frac{g_1(\xi^4-(\xi^2-a^2+A^2)^2)-\varepsilon_o(\xi^2-a^2+A^2)^2}{\xi^5}$$
$$(H_o+H_1\xi+H_2\xi^2)^2 d\xi - P_o + \varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2a^2} = \varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2(a^2-A^2+B^2)}. \quad (6.38)$$

y resolviendo la integral se obtiene:

$$\begin{aligned}
&-\frac{2}{3}\varepsilon_o(a^2-A^2+B^2)^{3/2}H_1H_2-\frac{1}{4}\varepsilon_o(a^2-A^2+B^2)^2H_2^2+\frac{1}{4}\frac{(g_1+\varepsilon_o)(a^2-A^2)^2H_o^2}{(a^2-A^2+B^2)^2}\\
&+\frac{2}{3}\frac{(g_1+\varepsilon_o)(a^2-A^2)^2H_oH_1}{(a^2-A^2+B^2)^{3/2}}+2\frac{(g_1+\varepsilon_o)(a^2-A^2)^2H_1(-2H_o+(a^2-A^2)H_2)}{(a^2-A^2+B^2)^{1/2}}\\
&+2(a^2-A^2+B^2)^{1/2}H_1(-\varepsilon_oH_o+2(g_1+\varepsilon_o)a^2H_2-2(g_1+\varepsilon_o)A^2H_2)\\
&-\frac{1}{2}(a^2-A^2+B^2)(\varepsilon_o(H_1^2+2H_oH_2)-2(g_1+\varepsilon_o)a^2H_2^2+2(g_1+\varepsilon_o)A^2H_2^2)\\
&+\frac{1}{2}\frac{(a^2-A^2)(-g_o-(2H_o^2+(-a^2+A^2)H_1^2+2(-a^2+A^2)H_oH_2)(g_1+\varepsilon_o))}{a^2-A^2+B^2}+\frac{1}{2}g_o log(B^2)\\
&-\frac{1}{2}(g_o+2g_1A^2H_1^2+4g_1A^2H_oH_2+g_1A^4H_2^2+\varepsilon_oH_o^2+2\varepsilon_oA^2H_1^2+4\varepsilon_oA^2H_oH_2\\
&+\varepsilon_oA^2H_2^2+(g_1+\varepsilon_o)a^4H_2^2-2(g_1+\varepsilon_o)a^2(H_1^2+2H_oH_2+A^2H_2))log(a^2-A^2+B^2)\\
&+\frac{2}{3}\varepsilon_oa^3H_1H_2+\frac{1}{4}\varepsilon_oa^4H_2^2-\frac{1}{4}\frac{(g_1+\varepsilon_o)(a^2-A^2)^2H_o^2}{a^4}-\frac{2}{3}\frac{(g_1+\varepsilon_o)(a^2-A^2)^2H_oH_1}{a^3}\\
&-2\frac{(g_1+\varepsilon_o)(a^2-A^2)^2H_1(-2H_o+(a^2-A^2)H_2)}{a}\\
&-2aH_1(-\varepsilon_oH_o+2(g_1+\varepsilon_o)a^2H_2-2(g_1+\varepsilon_o)A^2H_2)\\
&+\frac{1}{2}a^2(\varepsilon_o(H_1^2+2H_oH_2)-2(g_1+\varepsilon_o)a^2H_2^2+2(g_1+\varepsilon_o)A^2H_2^2)\\
&-\frac{1}{2}\frac{(a^2-A^2)(-g_o-(2H_o^2+(-a^2+A^2)H_1^2+2(-a^2+A^2)H_oH_2)(g_1+\varepsilon_o))}{a^2}+\frac{1}{2}g_o log(A^2)\\
&+\frac{1}{2}(g_o+2g_1A^2H_1^2+4g_1A^2H_oH_2+g_1A^4H_2^2+\varepsilon_oH_o^2+2\varepsilon_oA^2H_1^2+4\varepsilon_oA^2H_oH_2\\
&+\varepsilon_oA^2H_2^2+(g_1+\varepsilon_o)a^4H_2^2-2(g_1+\varepsilon_o)a^2(H_1^2+2H_oH_2+A^2H_2))log(a^2)\\
&-P_o+\varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2a^2}=\varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2(a^2-A^2+B^2)}. \qquad (6.39)
\end{aligned}$$

Introduciendo esta ecuación en el software Mathematica y asumiendo que:

$$A = 0.025 \text{ [m]}, \quad B = 0.035 \text{ [m]},$$

y se obtienen de forma numérica los radios finales del tubo cilíndrico, para lo cual se asumen tres valores diferentes para las constantes C_o y P_o como se muestra en la tabla 29.

Tabla 29: Radios Finales del Tubo Cilíndrico para algunos valores de C_o y P_o

C_o [$C^2VN^{-1}m^{-2}$]	P_o [Pa]	a [m]	b [m]
$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^4$	0.0256798	0.0354888
$1 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^4$	0.0293026	0.0381922
$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^5$	0.0392174	0.0462386
$3 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^4$	0.0256564	0.0354718
$3 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^4$	0.0292774	0.0381729
$3 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^5$	0.0391874	0.0462131
$5 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^4$	0.0256093	0.0354378
$5 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^4$	0.0292269	0.0381342
$5 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^5$	0.0391270	0.0461619

Para calcular p en función de r se tiene la ecuación 5.133, donde se reemplazan los valores de las ecuaciones 5.118 y 5.119 en la integral con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} p(r) =& \ 2\Omega_1 \frac{r^2 - a^2 + A^2}{r^2} + 2\Omega_2 \left(\frac{2r^2 - a^2 + A^2}{r^2} \right) + 2\Omega_5 \frac{(r^2 - a^2 + A^2)^2}{r^4} E_r^2 \\ & - \int_a^r \frac{1}{\xi} \left[2(\Omega_1 + \Omega_2) \left(\frac{\xi^2}{\xi^2 - a^2 + A^2} - \frac{\xi^2 - a^2 + A^2}{\xi^2} \right) - 2\Omega_5 \frac{(\xi^2 - a^2 + A^2)^2}{\xi^4} E_r^2 \right] d\xi \\ & + P_o - \varepsilon_o^{-1} \frac{C_o^2}{2a^2}, \end{aligned} \tag{6.40}$$

se reemplazan los valores de las derivadas de la función de Energía Libre calculadas en la sección 5.3.4:

$$\begin{aligned} p(r) =& \left(g_0 + g_1 \frac{r^2 - a^2 + A^2}{r^2} E_r^2 \right) \frac{r^2 - a^2 + A^2}{r^2} + \varepsilon_o \frac{(r^2 - a^2 + A^2)^2}{r^4} E_r^2 \\ & - \int_a^r \left(g_0 + g_1 \frac{\xi^2 - a^2 + A^2}{\xi^2} E_r^2 \right) \left(\frac{\xi}{\xi^2 - a^2 + A^2} - \frac{\xi^2 - a^2 + A^2}{\xi^3} \right) d\xi \\ & + \int_a^r \varepsilon_o \frac{(\xi^2 - a^2 + A^2)^2}{\xi^5} E_r^2 d\xi + P_o - \varepsilon_o^{-1} \frac{C_o^2}{2a^2}, \end{aligned} \tag{6.41}$$

se reemplaza el valor del Campo Eléctrico $E_r(\xi)$ de la ecuación 6.35 obteniéndose:

$$\begin{aligned} p(r) =& \ g_0 \frac{r^2 - a^2 + A^2}{r^2} + (g_1 + \varepsilon_o) \frac{(r^2 - a^2 + A^2)^2}{r^4} (H_o + H_1 r + H_2 r^2)^2 \\ & - \int_a^r g_0 \frac{\xi^4 - (\xi^2 - a^2 + A^2)^2}{\xi^3(\xi^2 - a^2 + A^2)} d\xi - \int_a^r \left(\frac{g_1}{\xi} - (g_1 + \varepsilon_o) \frac{(\xi^2 - a^2 + A^2)^2}{\xi^5} \right) \\ & (H_o + H_1 \xi + H_2 \xi^2)^2 d\xi + P_o - \varepsilon_o^{-1} \frac{C_o^2}{2a^2}, \end{aligned} \tag{6.42}$$

resolviendo la integral se obtiene:

$$
\begin{aligned}
p(r) = {} & g_0\frac{r^2-a^2+A^2}{r^2}+(g_1+\varepsilon_o)\frac{(r^2-a^2+A^2)^2}{r^4}(H_o+H_1r+H_2r^2)^2 \\
& +\frac{2}{3}\varepsilon_o r^3H_1H_2+\frac{1}{4}\varepsilon_o r^4H_2^2-\frac{1}{4}\frac{(g_1+\varepsilon_o)(a^2-A^2)^2H_o^2}{r^4} \\
& -\frac{2}{3}\frac{(g_1+\varepsilon_o)(a^2-A^2)^2H_oH_1}{r^3}-2\frac{(g_1+\varepsilon_o)(a^2-A^2)^2H_1(-2H_o+(a^2-A^2)H_2)}{r} \\
& -2rH_1(-\varepsilon_oH_o+2(g_1+\varepsilon_o)a^2H_2-2(g_1+\varepsilon_o)A^2H_2)-\frac{1}{2}g_olog(r^2-a^2+A^2) \\
& +\frac{1}{2}r^2(\varepsilon_o(H_1^2+2H_oH_2)-2(g_1+\varepsilon_o)a^2H_2^2+2(g_1+\varepsilon_o)A^2H_2^2) \\
& -\frac{1}{2}\frac{(a^2-A^2)(-g_o-(2H_o^2+(-a^2+A^2)H_1^2+2(-a^2+A^2)H_oH_2)(g_1+\varepsilon_o))}{r^2} \\
& +\frac{1}{2}(g_o+2g_1A^2H_1^2+4g_1A^2H_oH_2+g_1A^4H_2^2+\varepsilon_oH_o^2+2\varepsilon_oA^2H_1^2+4\varepsilon_oA^2H_oH_2 \\
& +\varepsilon_oA^2H_2^2+(g_1+\varepsilon_o)a^4H_2^2-2(g_1+\varepsilon_o)a^2(H_1^2+2H_oH_2+A^2H_2))log(r^2) \\
& -\frac{2}{3}\varepsilon_oa^3H_1H_2-\frac{1}{4}\varepsilon_oa^4H_2^2+\frac{1}{4}\frac{(g_1+\varepsilon_o)(a^2-A^2)^2H_o^2}{a^4}+\frac{2}{3}\frac{(g_1+\varepsilon_o)(a^2-A^2)^2H_oH_1}{a^3} \\
& +2\frac{(g_1+\varepsilon_o)(a^2-A^2)^2H_1(-2H_o+(a^2-A^2)H_2)}{a}-\frac{1}{2}g_olog(A^2) \\
& +2aH_1(-\varepsilon_oH_o+2(g_1+\varepsilon_o)a^2H_2-2(g_1+\varepsilon_o)A^2H_2) \\
& -\frac{1}{2}a^2(\varepsilon_o(H_1^2+2H_oH_2)-2(g_1+\varepsilon_o)a^2H_2^2+2(g_1+\varepsilon_o)A^2H_2^2) \\
& +\frac{1}{2}\frac{(a^2-A^2)(-g_o-(2H_o^2+(-a^2+A^2)H_1^2+2(-a^2+A^2)H_oH_2)(g_1+\varepsilon_o))}{a^2} \\
& -\frac{1}{2}(g_o+2g_1A^2H_1^2+4g_1A^2H_oH_2+g_1A^4H_2^2+\varepsilon_oH_o^2+2\varepsilon_oA^2H_1^2+4\varepsilon_oA^2H_oH_2 \\
& +\varepsilon_oA^2H_2^2+(g_1+\varepsilon_o)a^4H_2^2-2(g_1+\varepsilon_o)a^2(H_1^2+2H_oH_2+A^2H_2))log(a^2) \\
& +P_o-\varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2a^2}.
\end{aligned}
\tag{6.43}
$$

Las expresiones de los componentes de la matriz $\mathbb{M}$ se pueden definir con los componentes de $\mathbb{A}_{i\alpha j\beta}$, $\mathbb{B}_{i\alpha\beta}$ y $\mathbb{C}_{\alpha\beta}$ para este problema. Considerando solo los valores no nulos, estas componentes se expresan como:

$$\mathbb{A}_{i\alpha j\beta}=\frac{\partial\Omega}{\partial I_1}\frac{\partial^2I_1}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}}+\frac{\partial\Omega}{\partial I_5}\frac{\partial^2I_5}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}}-p[F_{\alpha i}^{-1}F_{\beta j}^{-1}-F_{\alpha j}^{-1}F_{i\beta}^{-1}], \tag{6.44}$$

$$\mathbb{B}_{i\alpha\beta}=\frac{\partial^2\Omega}{\partial I_1\partial I_4}\frac{\partial I_1}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_4}{\partial E_{l_\beta}}+\frac{\partial\Omega}{\partial I_5}\frac{\partial^2I_5}{\partial F_{i\alpha}\partial E_{l_\beta}}, \tag{6.45}$$

$$\mathbb{C}_{\alpha\beta}=\frac{\partial^2\Omega}{\partial I_4^2}\frac{\partial I_4}{\partial E_{l_\alpha}}\frac{\partial I_4}{\partial E_{l_\beta}}+\frac{\partial\Omega}{\partial I_4}\frac{\partial^2I_4}{\partial E_{l_\alpha}\partial E_{l_\beta}}+\frac{\partial\Omega}{\partial I_5}\frac{\partial^2I_5}{\partial E_{l_\alpha}\partial E_{l_\beta}}. \tag{6.46}$$

Reemplazando las derivadas calculadas en las secciones 5.2 y 5.3.4 se obtiene:

$$\mathbb{A}_{i\alpha j\beta} = \left(g_0 + g_1\frac{R^2}{r^2}E_r^2\right)\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} + \varepsilon_o E_{l_\alpha}\delta_{ij}E_{l_\beta} - p[F^{-1}_{\alpha i}F^{-1}_{\beta j} - F^{-1}_{\alpha j}F^{-1}_{i\beta}], \tag{6.47}$$

$$\mathbb{B}_{i\alpha\beta} = 2g_1 F_{i\alpha}E_{l_\beta} + \varepsilon_o(\delta_{\alpha\beta}F_{i\gamma}E_{l_\gamma} + E_{l_\alpha}F_{i\beta}), \tag{6.48}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_{\alpha\beta} =& \left[\frac{m_0 r^2}{m_1 R^2 E_r^2} sech^2\left(\frac{RE_r}{m_1 r}\right) + \frac{m_0 r^3}{R^3 E_r^3} tanh\left(\frac{RE_r}{m_1 r}\right)\right] E_{l_\alpha}E_{l_\beta} \\ &+ \left[\left(\frac{R^2}{r^2} + \frac{r^2}{R^2} - 2\right)g_1 - \frac{m_0 r}{RE_r} tanh\left(\frac{RE_r}{m_1 r}\right) - \zeta_o\right]\delta_{\alpha\beta} + \varepsilon_o c_{\alpha\beta}.\end{aligned} \tag{6.49}$$

6.4.2. Resultados

Introduciendo las matrices en el software Mathematica y reemplazando los valores de las variables se obtiene finalmente la matriz $\mathbb{M}(r)$ (que ahora depende de la posición radial r) y a su vez los valores propios de ella. Considerando 8 valores de r entre a y b se calculan los valores propios para los diferentes valores de C_o y P_o, como se expresan en las tablas 30 - 38.

Tabla 30: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 1\cdot 10^{-6}$ [$C^2VN^{-1}m^{-2}$] *y* $P_o = 1\cdot 10^4$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0256798	711623	710349	701921	693717	692418	-228041
	90283	82078.6	73651	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.50 $\cdot 10^{-7}$
0.0270811	714660	713502	705859	698398	697220	-235880
	85601.8	78140.9	70498.2	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.50 $\cdot 10^{-7}$
0.0284824	718687	717626	710636	703797	702719	-245406
	80203.2	73363.6	66374	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0298837	723554	722575	716135	709821	708828	-256382
	74179	67864.9	61425.4	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0312849	729100	728191	722221	716357	715435	-268536
	67643.4	61779.2	55809	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0326862	735155	734306	728742	723268	722409	-281564
	60732.4	55258.3	49693.8	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.50 $\cdot 10^{-7}$
0.0340875	741533	740738	735529	730397	729593	-295127
	53602.6	48471.3	43262.2	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$
0.0354888	748036	747288	742395	737569	736814	-308850
	46431	41605.1	36711.9	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.49 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$

Tabla 31: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 1 \cdot 10^{-6}$ [$\mathrm{C}^2 V N^{-1} m^{-2}$] y $\mathrm{P}_o = 5 \cdot 10^4$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0293026	711550	705412	659393	620131	613258	163869
	-148808	124607	78587.5	-1.51 $\cdot 10^{-7}$	-1.51 $\cdot 10^{-7}$	1.48 $\cdot 10^{-7}$
0.0305725	708341	702706	661085	625039	618795	158961
	-151136	122915	81293.7	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0318425	707312	702093	664030	630639	624908	-156219
	153361	119970	81907.1	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0331124	708006	703136	668002	636836	631530	-163536
	147164	115998	80863.5	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0343823	710047	705474	672793	643518	638571	-172618
	140482	111207	78525.8	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0356523	713105	708789	678197	650560	645918	-183023
	133440	105803	75210.5	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0369222	716885	712795	684014	657815	653441	-194325
	126185	99985.9	71205	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0381922	721108	717221	690038	665128	660990	-206098
	118872	93961.6	66779.1	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$

Tabla 32: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 1 \cdot 10^{-6}$ [$\mathrm{C}^2 V N^{-1} m^{-2}$] y $\mathrm{P}_o = 1 \cdot 10^5$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0392174	717697	706740	592638	519901	505044	264099
	191362	77260.1	-46740.5	-1.58 $\cdot 10^{-7}$	-1.58 $\cdot 10^{-7}$	1.41 $\cdot 10^{-7}$
0.0402205	696549	686515	586382	520293	506971	263707
	197618	97485	-27519.7	-1.57 $\cdot 10^{-7}$	-1.57 $\cdot 10^{-7}$	1.42 $\cdot 10^{-7}$
0.0412235	681357	672052	582505	521591	509466	262409
	201495	111948	-14822.2	-1.56 $\cdot 10^{-7}$	-1.56 $\cdot 10^{-7}$	1.43 $\cdot 10^{-7}$
0.0422265	670647	661923	580552	523711	512532	260289
	203448	122077	-7178.99	-1.55 $\cdot 10^{-7}$	-1.55 $\cdot 10^{-7}$	1.44 $\cdot 10^{-7}$
0.0432295	663344	655086	580147	526554	516132	257446
	203853	128914	-3475.78	-1.54 $\cdot 10^{-7}$	-1.54 $\cdot 10^{-7}$	1.45 $\cdot 10^{-7}$
0.0442326	658628	650752	580969	530005	520199	253995
	203031	133248	-2827.37	-1.54 $\cdot 10^{-7}$	-1.54 $\cdot 10^{-7}$	1.45 $\cdot 10^{-7}$
0.0452356	655855	648296	582732	533941	524646	250059
	201268	135704	-4500.89	-1.53 $\cdot 10^{-7}$	-1.53 $\cdot 10^{-7}$	1.46 $\cdot 10^{-7}$
0.0462386	654501	647213	585182	538227	529366	245773
	198818	136787	-7867.26	-1.53 $\cdot 10^{-7}$	-1.53 $\cdot 10^{-7}$	1.46 $\cdot 10^{-7}$

Tabla 33: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 3 \cdot 10^{-6}$ [$C^2 V N^{-1} m^{-2}$] y $P_o = 1 \cdot 10^4$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0256564	711256	710025	701889	693961	692707	-227963
	90039.1	82111	73974.8	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.50 $\cdot 10^{-7}$
0.0270586	714332	713214	705835	698627	697489	-235822
	85373.5	78164.5	70786.1	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0284608	718393	717368	710620	704012	702971	-245364
	79988.1	73380.2	66632.2	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.50 $\cdot 10^{-7}$
0.0298630	723287	722341	716125	710025	709066	-256353
	73975.2	67875.5	61658.7	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$
0.0312652	728857	727979	722215	716551	715661	-268519
	67449.4	61784.7	56021.1	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0326674	734932	734113	728741	723453	722624	-281557
	60546.7	55259.2	49887.3	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.50 $\cdot 10^{-7}$
0.0340696	741329	740561	735532	730576	729800	-295128
	53424.2	48468.1	43439.5	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.50 $\cdot 10^{-7}$
0.0354718	747848	747125	742402	737741	737012	-308859
	46259.1	41598.3	36874.7	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.50 $\cdot 10^{-7}$

Tabla 34: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 3 \cdot 10^{-6}$ [$C^2 V N^{-1} m^{-2}$] y $P_o = 5 \cdot 10^4$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0292774	711176	705071	659331	620274	613441	163726
	-148617	124669	78929.2	-1.51 $\cdot 10^{-7}$	-1.51 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0305482	708018	702413	661042	625186	618978	158814
	-150996	122958	81587.1	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0318190	707030	701838	664003	630788	625091	-156120
	153212	119997	82161.7	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0330898	707758	702914	667989	636988	631713	-163471
	147012	116011	81086.3	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0343605	709826	705278	672791	643674	638755	-172581
	140326	111209	78722	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0356313	712908	708616	678206	650717	646103	-183011
	133283	105794	75384.3	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0369021	716708	712641	684031	657974	653626	-194333
	126026	99968.9	71359.4	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0381729	720949	717083	690063	665288	661175	-206123
	118712	93937.2	66916.8	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$

Tabla 35: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 3 \cdot 10^{-6}$ [$C^2VN^{-1}m^{-2}$] y $P_o = 1 \cdot 10^5$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0391874	717318	706378	592561	519950	505123	264050
	191439	77621.8	-46441	$-1.58 \cdot 10^{-7}$	$-1.58 \cdot 10^{-7}$	$1.41 \cdot 10^{-7}$
0.0401910	696236	686218	586327	520350	507054	263650
	197673	97782.2	-27290.4	$-1.57 \cdot 10^{-7}$	$-1.57 \cdot 10^{-7}$	$1.42 \cdot 10^{-7}$
0.0411947	681097	671806	582469	521656	509554	262344
	201531	112194	-14651	$-1.56 \cdot 10^{-7}$	$-1.56 \cdot 10^{-7}$	$1.43 \cdot 10^{-7}$
0.0421984	670430	661719	580533	523785	512627	260215
	203467	122281	-7056.88	$-1.55 \cdot 10^{-7}$	$-1.55 \cdot 10^{-7}$	$1.44 \cdot 10^{-7}$
0.0432021	663162	654917	580144	526636	516234	257364
	203856	129083	-3395.99	$-1.54 \cdot 10^{-7}$	$-1.54 \cdot 10^{-7}$	$1.45 \cdot 10^{-7}$
0.0442057	658476	650611	580979	530096	520309	253904
	203021	133389	-2784.47	$-1.54 \cdot 10^{-7}$	$-1.54 \cdot 10^{-7}$	$1.45 \cdot 10^{-7}$
0.0452094	655728	648180	582756	534040	524762	249960
	201244	135820	-4490.41	$-1.53 \cdot 10^{-7}$	$-1.53 \cdot 10^{-7}$	$1.46 \cdot 10^{-7}$
0.0462131	654396	647118	585216	538335	529490	245665
	198784	136882	-7885.37	$-1.53 \cdot 10^{-7}$	$-1.53 \cdot 10^{-7}$	$1.46 \cdot 10^{-7}$

Tabla 36: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 5 \cdot 10^{-6}$ [$C^2VN^{-1}m^{-2}$] y $P_o = 1 \cdot 10^4$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0256093	710522	709378	701827	694455	693291	-227813
	89545.3	82173.3	74621.6	$-1.50 \cdot 10^{-7}$	$-1.50 \cdot 10^{-7}$	$1.50 \cdot 10^{-7}$
0.0270134	713679	712639	705790	699088	698032	-235711
	84911.6	78209.5	71361.2	$-1.50 \cdot 10^{-7}$	$-1.50 \cdot 10^{-7}$	$1.49 \cdot 10^{-7}$
0.0284175	717805	716852	710589	704447	703480	-245285
	79553.4	73411.1	67148.1	$-1.50 \cdot 10^{-7}$	$1.50 \cdot 10^{-7}$	$-1.50 \cdot 10^{-7}$
0.0298215	722754	721875	716105	710436	709546	-256300
	73563.7	67894.7	62124.7	$-1.50 \cdot 10^{-7}$	$-1.50 \cdot 10^{-7}$	$1.50 \cdot 10^{-7}$
0.0312256	728372	727555	722206	716942	716117	-268488
	67057.6	61793.7	56444.6	$-1.50 \cdot 10^{-7}$	$-1.50 \cdot 10^{-7}$	$1.50 \cdot 10^{-7}$
0.0326297	734488	733726	728741	723828	723059	-281546
	60171.9	55259.2	50273.8	$-1.50 \cdot 10^{-7}$	$-1.50 \cdot 10^{-7}$	$1.50 \cdot 10^{-7}$
0.0340337	740920	740207	735540	730936	730215	-295135
	53064.2	48460.1	43793.4	$-1.50 \cdot 10^{-7}$	$-1.50 \cdot 10^{-7}$	$1.49 \cdot 10^{-7}$
0.0354378	747471	746800	742417	738088	737411	-308882
	45912.3	41583.1	37199.7	$-1.50 \cdot 10^{-7}$	$-1.50 \cdot 10^{-7}$	$1.50 \cdot 10^{-7}$

Tabla 37: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 5 \cdot 10^{-6}$ [$C^2 V N^{-1} m^{-2}$] y $P_o = 5 \cdot 10^4$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0292269	710429	704388	659209	620564	613811	163436
	-148240	124791	79612.4	-1.51 $\cdot 10^{-7}$	-1.51 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0304994	707372	701826	660959	625482	619347	158518
	-150719	123041	82173.5	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0317719	706465	701330	663952	631091	625460	-155925
	152909	120048	82670.4	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0330443	707261	702469	667965	637296	632083	-163344
	146704	116035	81531.3	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0343168	709385	704886	672790	643986	639125	-172510
	140014	111210	79113.9	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0355892	712514	708269	678224	651034	646474	-182988
	132966	105776	75731.1	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0368617	716355	712332	684067	658295	653998	-194352
	125705	99933.2	71667.7	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0381342	720631	716809	690113	665612	661547	-206178
	118388	93886.7	67191.5	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$

Tabla 38: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 5 \cdot 10^{-6}$ [$C^2 V N^{-1} m^{-2}$] y $P_o = 1 \cdot 10^5$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0391270	716560	705654	592408	520050	505282	263950
	191592	78345.6	-45842.6	-1.58 $\cdot 10^{-7}$	-1.58 $\cdot 10^{-7}$	1.41 $\cdot 10^{-7}$
0.0401320	695611	685623	586217	520465	507222	263535
	197783	98376.9	-26832.7	-1.57 $\cdot 10^{-7}$	-1.57 $\cdot 10^{-7}$	1.42 $\cdot 10^{-7}$
0.0411370	680576	671314	582398	521787	509733	262213
	201602	112686	-14309.8	-1.56 $\cdot 10^{-7}$	-1.56 $\cdot 10^{-7}$	1.43 $\cdot 10^{-7}$
0.0421419	669996	661311	580497	523934	512819	260066
	203503	122689	-6814.39	-1.55 $\cdot 10^{-7}$	-1.55 $\cdot 10^{-7}$	1.44 $\cdot 10^{-7}$
0.0431469	662799	654578	580139	526802	516440	257198
	203861	129422	-3238.4	-1.54 $\cdot 10^{-7}$	-1.54 $\cdot 10^{-7}$	1.45 $\cdot 10^{-7}$
0.0441519	658172	650331	581002	530279	520529	253721
	202998	133669	-2700.87	-1.54 $\cdot 10^{-7}$	-1.54 $\cdot 10^{-7}$	1.45 $\cdot 10^{-7}$
0.0451569	655475	647949	582804	534240	524997	249760
	201196	136051	-4471.83	-1.53 $\cdot 10^{-7}$	-1.53 $\cdot 10^{-7}$	1.46 $\cdot 10^{-7}$
0.0461619	654185	646929	585288	538551	529739	245449
	198712	137071	-7924.16	-1.53 $\cdot 10^{-7}$	-1.53 $\cdot 10^{-7}$	1.46 $\cdot 10^{-7}$

Además considerando el valor del Campo Eléctrico se puede determinar la matriz $\mathbb{M}'(r)$ y a su vez los valores propios de ella. Considerando 8 valores de r entre a y b se calculan los valores propios para los diferentes valores de C_o y P_o, como se expresan en las tablas 39 - 47.

Tabla 39: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 1 \cdot 10^{-6}$ [$C^2VN^{-1}m^{-2}$] y $P_o = 1 \cdot 10^4$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0256798	-75455.9	-75454.9	75454.9	75454.9	-388.972	-388.972
	388.469	-388.469	387.972	387.972	$1.74 \cdot 10^{-11}$	$1.35 \cdot 10^{-11}$
0.0270811	-70850.5	-70849.5	70849.5	70849.5	-376.93	-376.93
	376.427	-376.427	375.93	375.93	$7.41 \cdot 10^{-11}$	$-1.48 \cdot 10^{-11}$
0.0284824	-65484.6	-65483.6	65483.6	65483.6	-362.394	-362.394
	361.891	-361.891	361.394	361.394	$-1.30 \cdot 10^{-11}$	$-1.36 \cdot 10^{-12}$
0.0298837	-59466.8	-59465.8	59465.8	59465.8	-345.365	-345.365
	344.862	-344.862	344.365	344.365	$-2.28 \cdot 10^{-12}$	$4.54 \cdot 10^{-13}$
0.0312849	-52924.5	-52923.5	52923.5	52923.5	-325.842	-325.842
	325.338	-325.338	324.842	324.842	$1.87 \cdot 10^{-11}$	$1.59 \cdot 10^{-11}$
0.0326862	-46003.9	-46002.9	46002.95	46002.9	-303.825	-303.825
	303.321	-303.321	302.825	302.825	$-4.33 \cdot 10^{-12}$	$8.07 \cdot 10^{-13}$
0.0340875	-38869.7	-38868.7	38868.7	38868.7	-279.315	-279.315
	278.811	-278.811	278.315	278.315	$3.72 \cdot 10^{-12}$	$-2.95 \cdot 10^{-12}$
0.0354888	-31705.1	-31704.1	31704.1	31704.1	-252.31	-252.31
	251.806	-251.806	251.31	251.31	$3.28 \cdot 10^{-12}$	$-2.67 \cdot 10^{-12}$

Tabla 40: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 1 \cdot 10^{-6}$ [$C^2VN^{-1}m^{-2}$] y $P_o = 5 \cdot 10^4$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0293026	-93250	93249	93249	-93249	-432.354	-432.354
	431.852	-431.852	431.354	431.354	$-5.30 \cdot 10^{-11}$	$2.69 \cdot 10^{-11}$
0.0305725	-86198.2	86197.2	-86197.2	86197.2	-415.704	-415.704
	415.202	-415.202	414.704	414.704	$-1.73 \cdot 10^{-11}$	$1.36 \cdot 10^{-13}$
0.0318425	-78609.4	78608.4	-78608.4	78608.4	-397.006	-397.006
	396.503	-396.503	396.006	396.006	$1.35 \cdot 10^{-11}$	$-3.40 \cdot 10^{-12}$
0.0331124	-70598.5	70597.5	-70597.5	70597.5	-376.26	-376.26
	375.757	-375.757	375.26	375.26	$6.38 \cdot 10^{-12}$	$1.95 \cdot 10^{-12}$
0.0343823	-62293	-62292	62292	62292	-353.465	-353.465
	352.962	-352.962	352.465	352.465	$8.57 \cdot 10^{-12}$	$-8.57 \cdot 10^{-12}$
0.0356523	-53832.9	-53831.9	53831.9	53831.9	-328.622	-328.622
	328.119	-328.119	327.622	327.622	$1.93 \cdot 10^{-11}$	$-1.55 \cdot 10^{-11}$
0.0369222	-45370.9	45369.9	-45369.9	45369.9	-301.731	-301.731
	301.227	-301.227	300.731	300.731	$-7.27 \cdot 10^{-12}$	$9.52 \cdot 10^{-26}$
0.0381922	-37072.3	-37071.3	37071.3	37071.3	-272.792	-272.792
	272.288	-272.288	271.792	271.792	$4.69 \cdot 10^{-12}$	$-8.95 \cdot 10^{-13}$

Tabla 41: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 1 \cdot 10^{-6}$ [$C^2VN^{-1}m^{-2}$] y $P_o = 1 \cdot 10^5$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0392174	-144260	-144259	144259	144259	-537.639	-537.639
	537.137	-537.137	536.639	536.639	-1.62 $\cdot 10^{-11}$	-1.48 $\cdot 10^{-12}$
0.0402205	-130832	130831	130831	-130831	-512.029	-512.029
	511.526	-511.526	511.029	511.029	2.26 $\cdot 10^{-11}$	1.18 $\cdot 10^{-11}$
0.0412235	-117439	117438	-117438	117438	-485.14	-485.14
	484.638	-484.638	484.14	484.14	3.17 $\cdot 10^{-11}$	1.42 $\cdot 10^{-12}$
0.0422265	-104185	-104184	104184	104184	-456.975	-456.975
	456.472	-456.472	455.975	455.975	-1.22 $\cdot 10^{-11}$	-1.36 $\cdot 10^{-12}$
0.0432295	-91178.6	-91177.6	91177.6	91177.6	-427.531	-427.531
	427.028	-427.028	426.531	426.531	1.47 $\cdot 10^{-11}$	-3.46 $\cdot 10^{-12}$
0.0442326	-78531.6	-78530.6	78530.6	78530.6	-396.81	-396.81
	396.307	-396.307	395.81	395.81	1.68 $\cdot 10^{-11}$	1.32 $\cdot 10^{-11}$
0.0452356	-66362.1	-66361.1	66361.1	66361.1	-364.811	-364.811
	364.308	-364.308	363.811	363.811	4.00 $\cdot 10^{-11}$	-3.63 $\cdot 10^{-12}$
0.0462386	-54792.7	54791.7	-54791.7	54791.7	-331.534	-331.534
	331.031	-331.031	330.534	330.534	2.26 $\cdot 10^{-11}$	5.28 $\cdot 10^{-12}$

Tabla 42: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 3 \cdot 10^{-6}$ [$C^2VN^{-1}m^{-2}$] y $P_o = 1 \cdot 10^4$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0256564	-678085	-678084	678084	678084	-1165.05	-1165.05
	1164.55	-1164.55	1164.05	1164.05	1.28 $\cdot 10^{-10}$	-8.73 $\cdot 10^{-11}$
0.0270586	-636779	-636778	636778	636778	-1129.02	-1129.02
	1128.52	-1128.52	1128.02	1128.02	1.65 $\cdot 10^{-10}$	-1.33 $\cdot 10^{-10}$
0.0284608	-588615	-588614	588614	588614	-1085.5	-1085.5
	1085	-1085	1084.5	1084.5	3.44 $\cdot 10^{-10}$	-7.78 $\cdot 10^{-11}$
0.0298630	-534572	-534571	534571	534571	-1034.49	-1034.49
	1033.99	-1033.99	1033.49	1033.49	1.93 $\cdot 10^{-10}$	1.05 $\cdot 10^{-10}$
0.0312652	-475794	475793	475793	-475793	-975.993	-975.993
	975.492	-975.492	974.993	974.993	-4.87 $\cdot 10^{-11}$	3.33 $\cdot 10^{-11}$
0.0326674	-413598	413597	413597	-413597	-910.002	-910.002
	909.501	-909.501	909.002	909.002	7.31 $\cdot 10^{-11}$	-2.94 $\cdot 10^{-11}$
0.0340696	-349465	-349464	349464	349464	-836.52	-836.52
	836.018	-836.018	835.52	835.52	-3.93 $\cdot 10^{-11}$	-1.17 $\cdot 10^{-12}$
0.0354718	-285048	285047	285047	-285047	-755.546	-755.546
	755.045	-755.045	754.546	754.546	-1.43 $\cdot 10^{-10}$	2.04 $\cdot 10^{-12}$

Tabla 43: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 3 \cdot 10^{-6}$ [$C^2VN^{-1}m^{-2}$] y $P_o = 5 \cdot 10^4$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0292774	-838106	838105	-838105	838105	-1295.19	-1295.19
	1294.68	-1294.68	1294.19	1294.19	$1.11 \cdot 10^{-10}$	$4.22 \cdot 10^{-12}$
0.0305482	-774792	-774791	774791	774791	-1245.32	-1245.32
	1244.82	-1244.82	1244.32	1244.32	$-9.01 \cdot 10^{-11}$	$-8.94 \cdot 10^{-11}$
0.0318190	-706631	706630	-706630	706630	-1189.31	-1189.31
	1188.81	-1188.81	1188.31	1188.31	$1.56 \cdot 10^{-10}$	$-5.03 \cdot 10^{-11}$
0.0330898	-634657	634656	-634656	634656	-1127.14	-1127.14
	1126.64	-1126.64	1126.14	1126.14	$-1.39 \cdot 10^{-10}$	$-3.07 \cdot 10^{-11}$
0.0343605	-560017	560016	-560016	560016	-1058.82	-1058.82
	1058.31	-1058.31	1057.82	1057.82	$-2.26 \cdot 10^{-10}$	$-1.17 \cdot 10^{-10}$
0.0356313	-483973	-483972	483972	483972	-984.342	-984.342
	983.84	-983.84	983.342	983.342	$6.95 \cdot 10^{-11}$	$4.09 \cdot 10^{-12}$
0.0369021	-407899	-407898	407898	407898	-903.715	-903.715
	903.213	-903.213	902.715	902.715	$-3.38 \cdot 10^{-11}$	$-4.77 \cdot 10^{-12}$
0.0381729	-333284	-333283	333283	333283	-816.935	-816.935
	816.434	-816.434	815.935	815.935	$1.85 \cdot 10^{-10}$	$2.51 \cdot 10^{-11}$

Tabla 44: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 3 \cdot 10^{-6}$ [$C^2VN^{-1}m^{-2}$] y $P_o = 1 \cdot 10^5$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0391874	$-1.29 \cdot 10^{6}$	$-1.29 \cdot 10^{6}$	$1.29 \cdot 10^{6}$	$1.29 \cdot 10^{6}$	-1611.05	-1611.05
	1610.55	-1610.55	1610.05	1610.05	$-1.70 \cdot 10^{-10}$	$7.65 \cdot 10^{-11}$
0.0401910	$-1.17 \cdot 10^{6}$	$-1.17 \cdot 10^{6}$	$1.17 \cdot 10^{6}$	$1.17 \cdot 10^{6}$	-1534.28	-1534.28
	1533.78	-1533.78	1533.28	1533.28	$-1.26 \cdot 10^{-10}$	$2.87 \cdot 10^{-11}$
0.0411947	$-1.05 \cdot 10^{6}$	$1.05 \cdot 10^{6}$	$1.05 \cdot 10^{6}$	$-1.05 \cdot 10^{6}$	-1453.67	-1453.67
	1453.17	-1453.17	1452.67	1452.67	$3.98 \cdot 10^{-10}$	$-2.12 \cdot 10^{-10}$
0.0421984	-936712	936711	-936711	936711	-1369.23	-1369.23
	1368.73	-1368.73	1368.23	1368.23	$-1.98 \cdot 10^{-10}$	$-8.74 \cdot 10^{-11}$
0.0432021	-819775	819774	819774	-819774	-1280.95	-1280.95
	1280.45	-1280.45	1279.95	1279.95	$-1.51 \cdot 10^{-10}$	$1.03 \cdot 10^{-10}$
0.0442057	-706063	-706062	706062	706062	-1188.83	-1188.83
	1188.33	-1188.33	1187.83	1187.83	$3.79 \cdot 10^{-10}$	$1.17 \cdot 10^{-10}$
0.0452094	-596637	-596636	596636	596636	-1092.87	-1092.87
	1092.37	-1092.37	1091.87	1091.87	$-1.98 \cdot 10^{-10}$	$9.19 \cdot 10^{-12}$
0.0462131	-492603	492602	492602	-492602	-993.074	-993.074
	992.573	-992.573	992.074	992.074	$4.26 \cdot 10^{-11}$	$2.00 \cdot 10^{-11}$

Tabla 45: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 5 \cdot 10^{-6}$ [$\mathrm{C}^2 V N^{-1} m^{-2}$] y $\mathrm{P}_o = 1 \cdot 10^4$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0256093	$-1.87 \cdot 10^6$	$1.87 \cdot 10^6$	$-1.87 \cdot 10^6$	$1.87 \cdot 10^6$	-1938.51	-1938.51
	1938.01	-1938.01	1937.51	1937.51	$-6.17 \cdot 10^{-10}$	$-5.34 \cdot 10^{-10}$
0.0270134	$-1.76 \cdot 10^6$	$-1.76 \cdot 10^6$	$1.76 \cdot 10^6$	$1.76 \cdot 10^6$	-1878.79	-1878.79
	1878.29	-1878.29	1877.79	1877.79	$2.32 \cdot 10^{-10}$	$-1.82 \cdot 10^{-10}$
0.0284175	$-1.63 \cdot 10^6$	$1.63 \cdot 10^6$	$1.63 \cdot 10^6$	$-1.63 \cdot 10^6$	-1806.56	-1806.56
	1806.06	-1806.06	1805.56	1805.56	$2.34 \cdot 10^{-10}$	$-1.97 \cdot 10^{-10}$
0.0298215	$-1.48 \cdot 10^6$	$1.48 \cdot 10^6$	$-1.48 \cdot 10^6$	$1.48 \cdot 10^6$	-1721.81	-1721.81
	1721.31	-1721.31	1720.81	1720.81	$5.86 \cdot 10^{-10}$	$1.35 \cdot 10^{-10}$
0.0312256	$-1.31 \cdot 10^6$	$1.31 \cdot 10^6$	$1.31 \cdot 10^6$	$-1.31 \cdot 10^6$	-1624.54	-1624.54
	1624.04	-1624.04	1623.54	1623.54	$2.89 \cdot 10^{-10}$	$-2.25 \cdot 10^{-10}$
0.0326297	$-1.14 \cdot 10^6$	$1.14 \cdot 10^6$	$-1.14 \cdot 10^6$	$1.14 \cdot 10^6$	-1514.76	-1514.76
	1514.26	-1514.26	1513.76	1513.76	$-6.13 \cdot 10^{-10}$	$3.98 \cdot 10^{-10}$
0.0340337	-968767	968766	-968766	968766	-1392.45	-1392.45
	1391.95	-1391.95	1391.45	1391.45	$-2.93 \cdot 10^{-10}$	$1.47 \cdot 10^{-10}$
0.0354378	-790188	790187	790187	-790187	-1257.63	-1257.63
	1257.13	-1257.13	1256.63	1256.63	$4.50 \cdot 10^{-10}$	$1.90 \cdot 10^{-10}$

Tabla 46: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 5 \cdot 10^{-6}$ [$\mathrm{C}^2 V N^{-1} m^{-2}$] y $\mathrm{P}_o = 5 \cdot 10^4$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0292269	$-2.32 \cdot 10^6$	$2.32 \cdot 10^6$	$2.32 \cdot 10^6$	$-2.32 \cdot 10^6$	-2155.38	-2155.38
	2154.88	-2154.88	2154.38	2154.38	$-4.78 \cdot 10^{-10}$	$-1.24 \cdot 10^{-11}$
0.0304994	$-2.14 \cdot 10^6$	$2.14 \cdot 10^6$	$-2.14 \cdot 10^6$	$2.14 \cdot 10^6$	-2072.56	-2072.56
	2072.06	-2072.06	2071.56	2071.56	$6.19 \cdot 10^{-10}$	$3.19 \cdot 10^{-10}$
0.0317719	$-1.95 \cdot 10^6$	$1.95 \cdot 10^6$	$1.95 \cdot 10^6$	$-1.95 \cdot 10^6$	-1979.46	-1979.46
	1978.96	-1978.96	1978.46	1978.46	$7.94 \cdot 10^{-10}$	$5.61 \cdot 10^{-10}$
0.0330443	$-1.75 \cdot 10^6$	$1.75 \cdot 10^6$	$-1.75 \cdot 10^6$	$1.75 \cdot 10^6$	-1876.09	-1876.09
	1875.59	-1875.59	1875.09	1875.09	$2.66 \cdot 10^{-10}$	$-1.42 \cdot 10^{-10}$
0.0343168	$-1.55 \cdot 10^6$	$1.55 \cdot 10^6$	$-1.55 \cdot 10^6$	$1.55 \cdot 10^6$	-1762.43	-1762.43
	1761.93	-1761.93	1761.43	1761.43	$-6.85 \cdot 10^{-10}$	$-5.26 \cdot 10^{-10}$
0.0355892	$-1.34 \cdot 10^6$	$-1.34 \cdot 10^6$	$1.34 \cdot 10^6$	$1.34 \cdot 10^6$	-1638.49	-1638.49
	1637.98	-1637.98	1637.49	1637.49	$-3.48 \cdot 10^{-11}$	$1.30 \cdot 10^{-11}$
0.0368617	$-1.13 \cdot 10^6$	$-1.13 \cdot 10^6$	$1.13 \cdot 10^6$	$1.13 \cdot 10^6$	-1504.26	-1504.26
	1503.76	-1503.76	1503.26	1503.26	$2.28 \cdot 10^{-10}$	$1.18 \cdot 10^{-10}$
0.0381342	-923792	-923791	923791	923791	-1359.76	-1359.76
	1359.26	-1359.26	1358.76	1358.76	$1.10 \cdot 10^{-10}$	$1.30 \cdot 10^{-12}$

Tabla 47: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 5 \cdot 10^{-6}$ [$C^2VN^{-1}m^{-2}$] y $P_o = 1 \cdot 10^5$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0391270	-3.59 $\cdot 10^6$	3.59 $\cdot 10^6$	3.59 $\cdot 10^6$	-3.59 $\cdot 10^6$	-2681.84	-2681.84
	2681.34	-2681.34	2680.84	2680.84	6.14 $\cdot 10^{-10}$	2.72 $\cdot 10^{-10}$
0.0401320	-3.26 $\cdot 10^6$	-3.26 $\cdot 10^6$	3.26 $\cdot 10^6$	3.26 $\cdot 10^6$	-2554.1	-2554.1
	2553.6	-2553.6	2553.1	2553.1	1.12 $\cdot 10^{-9}$	5.95 $\cdot 10^{-10}$
0.0411370	-2.92 $\cdot 10^6$	2.92 $\cdot 10^6$	-2.92 $\cdot 10^6$	2.92 $\cdot 10^6$	-2419.96	-2419.96
	2419.46	-2419.46	2418.96	2418.96	-6.69 $\cdot 10^{-10}$	8.70 $\cdot 10^{-11}$
0.0421419	-2.59 $\cdot 10^6$	-2.59 $\cdot 10^6$	2.59 $\cdot 10^6$	2.59 $\cdot 10^6$	-2279.4	-2279.4
	2278.9	-2278.9	2278.4	2278.4	4.65 $\cdot 10^{-10}$	3.75 $\cdot 10^{-10}$
0.0431469	-2.27 $\cdot 10^6$	2.27 $\cdot 10^6$	2.27 $\cdot 10^6$	-2.27 $\cdot 10^6$	-2132.43	-2132.43
	2131.92	-2131.92	2131.43	2131.43	-7.82 $\cdot 10^{-10}$	-2.70 $\cdot 10^{-11}$
0.0441519	-1.95 $\cdot 10^6$	1.95 $\cdot 10^6$	1.95 $\cdot 10^6$	-1.95 $\cdot 10^6$	-1979.04	-1979.04
	1978.54	-1978.54	1978.04	1978.04	4.80 $\cdot 10^{-10}$	-2.91 $\cdot 10^{-10}$
0.0451569	-1.65 $\cdot 10^6$	1.65 $\cdot 10^6$	-1.65 $\cdot 10^6$	1.65 $\cdot 10^6$	-1819.24	-1819.24
	1818.74	-1818.74	1818.24	1818.24	7.42 $\cdot 10^{-10}$	2.18 $\cdot 10^{-10}$
0.0461619	-1.36 $\cdot 10^6$	-1.36 $\cdot 10^6$	1.36 $\cdot 10^6$	1.36 $\cdot 10^6$	-1653.03	-1653.03
	1652.52	-1652.52	1652.03	1652.03	-3.29 $\cdot 10^{-10}$	-1.26 $\cdot 10^{-10}$

6.5. Deformación de una Esfera Hueca bajo Presión Interna considerando la Primera Función de Energía Libre

Se considera un cuerpo esférico cuya función de Energía Libre se estudia en un caso incompresible, donde es necesario determinar el Campo Eléctrico E_r, los radios finales interior y exterior, a y b respectivamente, y el parámetro p que aparece en la modelación de cuerpos incompresibles. Obteniendo estos valores se calculan las matrices $\mathbb{M}$ y $\mathbb{M}'$ con sus respectivos valores propios.

La Primera Función de Energía Libre para este caso incomprensible es:

$$\Omega = \frac{1}{4}\mu(0)[(1+\gamma)(I_1-3) + (1-\gamma)(I_2-3)] + \varepsilon_o(\alpha I_4 + \beta I_5). \tag{6.50}$$

6.5.1. Resolución de Problemas

Para calcular el Campo Eléctrico E_r en función de r se tiene las ecuación 5.146, donde se reemplazan las derivadas de esta función de Energía Libre calculadas en la sección 5.3.2, obteniendo que:

$$E_r(r) = -\frac{C_o r^6}{2(r^3 - a^3 + A^3)^{4/3}[\varepsilon_o \alpha r^4 + \varepsilon_o \beta (r^3 - a^3 + A^3)^{4/3}]}. \tag{6.51}$$

Para calcular el radio interno final a se tiene la ecuación 5.160, donde se reemplazan los valores de las ecuaciones 5.147 y 5.148 en la integral con lo que se obtiene:

$$\int_a^b \frac{2}{\xi}\left[2\Omega_1\left(\frac{\xi^2}{(\xi^3-a^3+A^3)^{2/3}}-\frac{(\xi^3-a^3+A^3)^{4/3}}{\xi^4}\right)+2\Omega_2\left(\frac{\xi^4}{(\xi^3-a^3+A^3)^{4/3}}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{(\xi^3-a^3+A^3)^{2/3}}{\xi^2}\right)-2\Omega_5\frac{(\xi^3-a^3+A^3)^{8/3}}{\xi^8}E_r^2\right]d\xi-P_o+\varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2a^4}=\varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2b^4}, \qquad (6.52)$$

se reemplazan los valores de las derivadas de la función de Energía Libre calculadas en la sección 5.3.2 y el Campo Eléctrico $E_r(\xi)$ de la ecuación 6.51, obteniéndose:

$$\int_a^b \left[\mu(0)(1+\gamma)\frac{\xi^6-(\xi^3-a^3+A^3)^2}{\xi^5(\xi^3-a^3+A^3)^{2/3}}+\mu(0)(1-\gamma)\frac{\xi^6-(\xi^3-a^3+A^3)^2}{\xi^3(\xi^3-a^3+A^3)^{2/3}}\right.$$
$$\left.-\frac{\beta C_o^2\xi^3}{\varepsilon_o[\alpha\xi^4+\beta(\xi^3-a^3+A^3)^{4/3}]^2}\right]d\xi-P_o+\varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2a^4}=\varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2b^4}, \qquad (6.53)$$

resolviendo la integral se obtiene:

$$-\frac{\mu(0)(a^3-A^3)B}{4(B^3+a^3-A^3)^{4/3}}\left(1-\frac{2(B^3+a^3-A^3)^{2/3}(2a^3-2A^3+B^3)(\gamma-1)}{(a^3-A^3)B^2}+\gamma\right.$$
$$\left.-\frac{5(B^3+a^3-A^3)(1+\gamma)}{a^3-A^3}\right)+\frac{\mu(0)(a^3-A^3)A}{4a^4}\left(1-\frac{2a^2(2a^3-A^3)(\gamma-1)}{(a^3-A^3)A^2}+\gamma-\frac{5a^3(1+\gamma)}{a^3-A^3}\right)$$
$$-\int_a^b T(\xi)d\xi-P_o+\varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2a^4}=\varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2(B^3+a^3-A^3)^{4/3}}, \qquad (6.54)$$

donde uno de los términos de la integral presenta algunos desafíos para poder resolverse, el que es el término:

$$T(\xi)=\frac{\beta C_o^2\xi^3}{\varepsilon_o[\alpha\xi^4+\beta(\xi^3-a^3+A^3)^{4/3}]^2}. \qquad (6.55)$$

Se asumen varias series de Taylor de este término donde se observa que para una orden mayor a 6 los radios finales presentan una variación demasiado baja, es por eso que se aproxima este término como una Serie de Taylor de orden 6, la cual se expresa como:

$$T(\xi)=H_o+H_1(\xi-a)+H_2(\xi-a)^2+H_3(\xi-a)^3$$
$$+H_4(\xi-a)^4+H_5(\xi-a)^5+H_6(\xi-a)^6, \qquad (6.56)$$

donde:

$$H_o = \frac{C_o^2\beta\varepsilon_o a^3}{(\alpha\varepsilon_o a^4 + \beta\varepsilon_o A^4)^2}, \tag{6.57}$$

$$H_1 = \frac{C_o^2\beta(-5\alpha a^6 - 8\beta a^5 A + 3\beta a^2 A^4)}{\varepsilon_o(\alpha a^4 + \beta A^4)^3}, \tag{6.58}$$

$$\begin{aligned} H_2 = {} & \frac{C_o^2\beta}{\varepsilon_o(\alpha a^4 + \beta A^4)^4 A^3}(15\alpha^2 a^9 A^3 - \alpha\beta a^{11} A - 30\alpha\beta a^5 A^7 \\ & +64\alpha\beta a^8 A^4 - 32\beta^2 a^4 A^8 + 3\beta^2 a A^{11} + 44\beta^2 a^7 A^5), \end{aligned} \tag{6.59}$$

$$\begin{aligned} H_3 = {} & -\frac{C_o^2\beta}{3\varepsilon_o(\alpha a^4 + \beta A^4)^5 A^6}(105\alpha^3 a^{12} A^6 - 8\alpha^2\beta a^{17} A + 872\alpha^2\beta a^{11} A^7 - 465\alpha^2\beta a^8 A^{10} \\ & -84\alpha^2\beta a^{14} A^4 + 1560\alpha\beta^2 a^{10} A^8 - 1280\alpha\beta^2 a^7 A^{11} + 195\alpha\beta^2 a^4 A^{14} - 160\alpha\beta^2 a^{13} A^5 \\ & +616\beta^3 a^9 A^9 - 660\beta^3 a^6 A^{12} + 152\beta^3 a^3 A^{15} - 3\beta^3 A^{18}), \end{aligned} \tag{6.60}$$

$$\begin{aligned} H_4 = {} & -\frac{2C_o^2\beta}{3\varepsilon_o(\alpha a^4 + \beta A^4)^6 A^9}(-105\alpha^4 a^{15} A^9 + 5\alpha^3\beta a^{23} A + 172\alpha^3\beta a^{17} A^7 - 1476\alpha^3\beta a^{14} A^{10} \\ & +855\alpha^3\beta a^{11} A^{13} + 24\alpha^3\beta a^{20} A^4 + 744\alpha^2\beta^2 a^{16} A^8 - 4968\alpha^2\beta^2 a^{13} A^{11} + 4404\alpha^2\beta^2 a^{10} A^{14} \\ & -855\alpha^2\beta^2 a^7 A^{17} + 45\alpha^2\beta^2 a^{19} A^5 + 651\alpha\beta^3 a^{15} A^9 - 5112\alpha\beta^3 a^{12} A^{12} + 5676\alpha\beta^3 a^9 A^{15} \\ & -1740\alpha\beta^3 a^6 A^{18} + 105\alpha\beta^3 a^3 A^{21} - 1309\beta^4 a^{11} A^{13} + 1848\beta^4 a^8 A^{16} - 704\beta^4 a^5 A^{19} \\ & +60\beta^4 a^2 A^{22}), \end{aligned} \tag{6.61}$$

$$\begin{aligned} H_5 = {} & -\frac{2C_o^2\beta}{3\varepsilon_o(\alpha a^4 + \beta A^4)^7 A^{12}}(189\alpha^5 a^{18} A^{12} - 8\alpha^4\beta a^{29} A - 88\alpha^4\beta a^{23} A^7 - 25\alpha^4\beta a^{26} A^4 \\ & +4140\alpha^4\beta a^{17} A^{13} - 2538\alpha^4\beta a^{14} A^{16} - 536\alpha^4\beta a^{20} A^{10} + 22708\alpha^3\beta^2 a^{16} A^{14} \\ & -3976\alpha^3\beta^2 a^{19} A^{11} - 310\alpha^3\beta^2 a^{22} A^8 - 21252\alpha^3\beta^2 a^{13} A^{17} + 4788\alpha^3\beta^2 a^{10} A^{20} \\ & -68\alpha^3\beta^2 a^{25} A^5 - 252\alpha^2\beta^3 a^{21} A^9 - 7788\alpha^2\beta^3 a^{18} A^{12} + 43320\alpha^2\beta^3 a^{15} A^{15} \\ & -49812\alpha^2\beta^3 a^{12} A^{18} + 18060\alpha^2\beta^3 a^9 A^{21} - 1638\alpha^2\beta^3 a^6 A^{24} - 4172\alpha\beta^4 a^{17} A^{13} \\ & +29414\alpha\beta^4 a^{14} A^{16} - 40024\alpha\beta^4 a^{11} A^{19} + 18268\alpha\beta^4 a^8 A^{22} - 2604\alpha\beta^4 a^5 A^{25} \\ & +63\alpha\beta^4 a^2 A^{28} + 5236\beta^5 a^{13} A^{17} - 9163\beta^5 a^{10} A^{20} + 4928\beta^5 a^7 A^{23} \\ & -836\beta^5 a^4 A^{26} + 24\beta^5 a A^{29}), \end{aligned} \tag{6.62}$$

$$
\begin{aligned}
H_6 = & -\frac{2C_o^2\beta}{9\varepsilon_o(\alpha a^4+\beta A^4)^8 A^{15}}(-945\alpha^6 a^{21}A^{15}+44\alpha^5\beta a^{35}A+245\alpha^5\beta a^{29}A^7 \\
& +756\alpha^5\beta a^{26}A^{10}+4214\alpha^5\beta a^{23}A^{13}-30492\alpha^5\beta a^{20}A^{16}+19467\alpha^5\beta a^{17}A^{19} \\
& +96\alpha^5\beta a^{32}A^4+1056\alpha^4\beta^2 a^{28}a^8+4045\alpha^4\beta^2 a^{25}A^{11}+47628\alpha^4\beta^2 a^{22}A^{14} \\
& -250628\alpha^4\beta^2 a^{19}A^{17}+244188\alpha^4\beta^2 a^{16}A^{20}-60858\alpha^4\beta^2 a^{13}A^{23}+394\alpha^4\beta^2 a^{31}A^5 \\
& +1568\alpha^3\beta^3 a^{27}A^9+4992\alpha^3\beta^3 a^{24}A^{12}+158162\alpha^3\beta^3 a^{21}A^{15}-763992\alpha^3\beta^3 a^{18}A^{18} \\
& +905828\alpha^3\beta^3 a^{15}A^{21}-367416\alpha^3\beta^3 a^{12}A^{24}+41958\alpha^3\beta^3 a^9 A^{27}+1820\alpha^2\beta^4 a^{23}A^{13} \\
& +188160\alpha^2\beta^4 a^{20}A^{16}-957574\alpha^2\beta^4 a^{17}A^{19}+1304376\alpha^2\beta^4 a^{14}A^{22}-5733\alpha^2\beta^4 a^5 A^{31} \\
& +124824\alpha^2\beta^4 a^8 A^{28}-670048\alpha^2\beta^4 a^{11}A^{25}+69412\alpha\beta^5 a^{19}A^{17}-464352\alpha\beta^5 a^{16}A^{20} \\
& +735721\alpha\beta^5 a^{13}A^{23}-442140\alpha\beta^5 a^{10}A^{26}+102838\alpha\beta^5 a^{729}-7212\alpha\beta^5 a^4 A^{32} \\
& +63\alpha\beta^5 aA^{35}-60214\beta^6 a^{15}A^{21}+125664\beta^6 a^{12}A^{24}-87703\beta^6 a^9 A^{27} \\
& +23100\beta^6 a^6 A^{30}-1804\beta^6 a^3 A^{33}+12\beta^6 A^{36}), \qquad (6.63)
\end{aligned}
$$

resolviendo la integral de esta aproximación se obtiene finalmente que:

$$
\begin{gathered}
-\frac{\mu(0)(a^3-A^3)B}{4(B^3+a^3-A^3)^{4/3}}\left(1-\frac{2(B^3+a^3-A^3)^{2/3}(2a^3-2A^3+B^3)(\gamma-1)}{(a^3-A^3)B^2}+\gamma\right. \\
\left.-\frac{5(B^3+a^3-A^3)(1+\gamma)}{a^3-A^3}\right)+\frac{\mu(0)(a^3-A^3)A}{4a^4}\left(1-\frac{2a^2(2a^3-A^3)(\gamma-1)}{(a^3-A^3)A^2}+\gamma-\frac{5a^3(1+\gamma)}{a^3-A^3}\right) \\
+H_o(a-(B^3+a^3-A^3)^{1/3})+\frac{1}{2}H_1(2a(B^3+a^3-A^3)^{1/3}-(B^3+a^3-A^3)^{2/3}-a^2) \\
+\frac{1}{3}H_2(a-(B^3+a^3-A^3)^{1/3})^3-\frac{1}{4}H_3((B^3+a^3-A^3)^{1/3}-a)^4+\frac{1}{5}H_4(a-(B^3+a^3-A^3)^{1/3})^5 \\
-\frac{1}{6}H_5((B^3+a^3-A^3)^{1/3}-a)^6+\frac{1}{7}H_6(a-(B^3+a^3-A^3)^{1/3})^7 \\
-P_o+\varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2a^4}=\varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2(B^3+a^3-A^3)^{4/3}}. \qquad (6.64)
\end{gathered}
$$

Introduciendo esta ecuación en el software Mathematica y asumiendo que:

$$A = 0.025 \text{ [m]}, \quad B = 0.035 \text{ [m]},$$

y se obtienen de forma numérica los radios finales del cuerpo esférico, para lo cual se asumen tres valores diferentes para las constantes C_o y P_o como se muestra en la tabla 48.

Tabla 48: Radios Finales del Cuerpo Esférico para algunos valores de C_o y P_o

C_o [C$^2VN^{-1}m^{-1}$]	P_o [Pa]	a [m]	b [m]
$1 \cdot 10^{-8}$	$5.0 \cdot 10^{4}$	0.0264679	0.0357764
$1 \cdot 10^{-8}$	$1.0 \cdot 10^{5}$	0.0278258	0.0365419
$1 \cdot 10^{-8}$	$1.5 \cdot 10^{5}$	0.0289522	0.0372096
$3 \cdot 10^{-8}$	$5.0 \cdot 10^{4}$	0.0264655	0.0357751
$3 \cdot 10^{-8}$	$1.0 \cdot 10^{5}$	0.0276686	0.0364511
$3 \cdot 10^{-8}$	$1.5 \cdot 10^{5}$	0.0291388	0.0373229
$5 \cdot 10^{-8}$	$5.0 \cdot 10^{4}$	0.0264608	0.0357725
$5 \cdot 10^{-8}$	$1.0 \cdot 10^{5}$	0.0275827	0.0364016
$5 \cdot 10^{-8}$	$1.5 \cdot 10^{5}$	0.0292483	0.0373898

Para calcular p en función de r se tiene la ecuación 5.162, donde se reemplazan los valores de las ecuaciones 5.147 y 5.148 en la integral con lo que se obtiene:

$$
\begin{aligned}
p(r) = {} & 2\Omega_1 \frac{(\xi^3 - a^3 + A^3)^{4/3}}{r^4} + 4\Omega_2 \frac{(\xi^3 - a^3 + A^3)^{2/3}}{r^2} + 2\Omega_5 \frac{(\xi^3 - a^3 + A^3)^{8/3}}{r^8} E_r^2 \\
& - \int_a^r \frac{2}{\xi} \left[2\Omega_1 \left(\frac{\xi^2}{(\xi^3 - a^3 + A^3)^{2/3}} - \frac{(\xi^3 - a^3 + A^3)^{4/3}}{\xi^4} \right) + 2\Omega_2 \left(\frac{\xi^4}{(\xi^3 - a^3 + A^3)^{4/3}} \right.\right. \\
& \left.\left. - \frac{(\xi^3 - a^3 + A^3)^{2/3}}{\xi^2} \right) - 2\Omega_5 \frac{(\xi^3 - a^3 + A^3)^{8/3}}{\xi^8} E_r^2 \right] d\xi + P_o - \varepsilon_o^{-1} \frac{C_o^2}{2a^4},
\end{aligned}
\tag{6.65}
$$

se reemplazan los valores de las derivadas de la función de Energía Libre calculadas en la sección 5.3.2 y el Campo Eléctrico $E_r(\xi)$ de la ecuación 6.51:

$$
\begin{aligned}
p(r) = {} & \frac{1}{2}\mu(0)(1+\gamma) \frac{(r^3 - a^3 + A^3)^{4/3}}{r^4} + \mu(0)(1-\gamma) \frac{(r^3 - a^3 + A^3)^{2/3}}{r^2} \\
& + \frac{\beta C_o^2 r^4}{2\varepsilon_o[\alpha r^4 + \beta(r^3 - a^3 + A^3)^{4/3}]^2} - \int_a^r \mu(0)(1+\gamma) \frac{\xi^6 - (\xi^3 - a^3 + A^3)^2}{\xi^5(\xi^3 - a^3 + A^3)^{2/3}} d\xi \\
& - \int_a^r \mu(0)(1-\gamma) \frac{\xi^6 - (\xi^3 - a^3 + A^3)^2}{\xi^3(\xi^3 - a^3 + A^3)^{2/3}} d\xi + \int_a^r \frac{\beta C_o^2 \xi^3}{\varepsilon_o[\alpha \xi^4 + \beta(\xi^3 - a^3 + A^3)^{4/3}]^2} d\xi \\
& + P_o - \varepsilon_o^{-1} \frac{C_o^2}{2a^4},
\end{aligned}
\tag{6.66}
$$

resolviendo la integral se obtiene:

$$
\begin{aligned}
p(r) = & \frac{1}{2}\mu(0)(1+\gamma)\frac{(r^3-a^3+A^3)^{4/3}}{r^4} + \mu(0)(1-\gamma)\frac{(r^3-a^3+A^3)^{2/3}}{r^2} \\
& + \frac{\beta C_o^2 r^4}{2\varepsilon_o[\alpha r^4 + \beta(r^3-a^3+A^3)^{4/3}]^2} + \frac{\mu(0)(a^3-A^3)(r^3-a^3+A^3)^{1/3}}{4r^4} \\
& \left(1 - \frac{2r^2(a^3-A^3+r^3)(\gamma-1)}{(a^3-A^3)(r^3-a^3+A^3)^{2/3}} + \gamma - \frac{5r^3(1+\gamma)}{a^3-A^3}\right) - \frac{\mu(0)(a^3-A^3)A}{4a^4} \\
& \left(1 - \frac{2a^2(2a^3-A^3)(\gamma-1)}{(a^3-A^3)A^2} + \gamma - \frac{5a^3(1+\gamma)}{a^3-A^3}\right) + \int_a^r T(\xi)d\xi + P_o - \varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2a^4}, \quad (6.67)
\end{aligned}
$$

asumiendo la misma Serie de Taylor de la ecuación 6.56 se resuelve la integral y se obtiene finalmente que:

$$
\begin{aligned}
p(r) = & \frac{1}{2}\mu(0)(1+\gamma)\frac{(r^3-a^3+A^3)^{4/3}}{r^4} + \mu(0)(1-\gamma)\frac{(r^3-a^3+A^3)^{2/3}}{r^2} \\
& + \frac{\beta C_o^2 r^4}{2\varepsilon_o[\alpha r^4 + \beta(r^3-a^3+A^3)^{4/3}]^2} + \frac{\mu(0)(a^3-A^3)(r^3-a^3+A^3)^{1/3}}{4r^4} \\
& \left(1 - \frac{2r^2(a^3-A^3+r^3)(\gamma-1)}{(a^3-A^3)(r^3-a^3+A^3)^{2/3}} + \gamma - \frac{5r^3(1+\gamma)}{a^3-A^3}\right) - \frac{\mu(0)(a^3-A^3)A}{4a^4} \\
& \left(1 - \frac{2a^2(2a^3-A^3)(\gamma-1)}{(a^3-A^3)A^2} + \gamma - \frac{5a^3(1+\gamma)}{a^3-A^3}\right) - H_o(a-r) \\
& + \frac{1}{2}H_1(r-a)^2 - \frac{1}{3}H_2(a-r)^3 + \frac{1}{4}H_3(r-a)^4 - \frac{1}{5}H_4(a-r)^5 \\
& + \frac{1}{6}H_5(r-a)^6 - \frac{1}{7}H_6(a-r)^7 + P_o - \varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2a^4}. \quad (6.68)
\end{aligned}
$$

Las expresiones de los componentes de la matriz $\mathbb{M}$ se pueden definir con los componentes de $\mathbb{A}_{i\alpha j\beta}$, $\mathbb{B}_{i\alpha\beta}$ y $\mathbb{C}_{\alpha\beta}$ para este problema. Considerando solo los valores no nulos, estas componentes se expresan como:

$$
\mathbb{A}_{i\alpha j\beta} = \frac{\partial\Omega}{\partial I_1}\frac{\partial^2 I_1}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}} + \frac{\partial\Omega}{\partial I_2}\frac{\partial^2 I_2}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}} + \frac{\partial\Omega}{\partial I_5}\frac{\partial^2 I_5}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}} - p[F_{\alpha i}^{-1}F_{\beta j}^{-1} - F_{\alpha j}^{-1}F_{i\beta}^{-1}], \quad (6.69)
$$

$$
\mathbb{B}_{i\alpha\beta} = \frac{\partial\Omega}{\partial I_5}\frac{\partial^2 I_5}{\partial F_{i\alpha}\partial E_{l_\beta}}, \quad (6.70)
$$

$$
\mathbb{C}_{\alpha\beta} = \frac{\partial\Omega}{\partial I_4}\frac{\partial^2 I_4}{\partial E_{l_\alpha}\partial E_{l_\beta}} + \frac{\partial\Omega}{\partial I_5}\frac{\partial^2 I_5}{\partial E_{l_\alpha}\partial E_{l_\beta}}. \quad (6.71)
$$

Reemplazando las derivadas calculadas en las secciones 5.2 y 5.3.2 se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{A}_{i\alpha j\beta} = & \frac{1}{2}\mu(0)(1+\gamma)\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\mu(0)(1-\gamma)(\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}c_{\gamma\gamma} + 2F_{i\alpha}F_{j\beta} - \delta_{ij}c_{\beta\alpha} \\
& - F_{i\beta}F_{j\alpha} - F_{i\gamma}F_{j\gamma}\delta_{\alpha\beta}) + 2\varepsilon_o\beta E_{l_\alpha}\delta_{ij}E_{l_\beta} - p[F^{-1}_{\alpha i}F^{-1}_{\beta j} - F^{-1}_{\alpha j}F^{-1}_{i\beta}],
\end{aligned}
\tag{6.72}
$$

$$
\mathbb{B}_{i\alpha\beta} = 2\varepsilon_o\beta(\delta_{\alpha\beta}F_{i\gamma}E_{l_\gamma} + E_{l_\alpha}F_{i\beta}),
\tag{6.73}
$$

$$
\mathbb{C}_{\alpha\beta} = 2\varepsilon_o\alpha\delta_{\alpha\beta} + 2\varepsilon_o\beta c_{\alpha\beta}.
\tag{6.74}
$$

6.5.2. Resultados

Introduciendo las matrices en el software Mathematica y reemplazando los valores de las variables se obtiene finalmente la matriz $\mathbb{M}(r)$ (que ahora depende de la posición radial r) y a su vez los valores propios de ella. Considerando 8 valores de r entre a y b se calculan los valores propios para los diferentes valores de C_o y P_o, como se expresan en las tablas 49 - 57.

Tabla 49: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 1 \cdot 10^{-8}$ [$\mathrm{C}^2VN^{-1}m^{-1}$] y $\mathrm{P}_o = 5 \cdot 10^4$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0264679	796067	775255	775255	714962	714962	-335030
	69037.7	8744.96	8744.96	-9.21 $\cdot 10^{-8}$	-9.19 $\cdot 10^{-8}$	-3.45 $\cdot 10^{-8}$
0.0277976	788772	771086	771086	719605	719605	-332377
	64394.9	12913.9	12913.9	-8.88 $\cdot 10^{-8}$	-8.88 $\cdot 10^{-8}$	-3.94 $\cdot 10^{-8}$
0.0291274	783032	767851	767851	723486	723486	-330518
	60514.1	16148.9	16148.9	-8.61 $\cdot 10^{-8}$	-8.60 $\cdot 10^{-8}$	-4.34 $\cdot 10^{-8}$
0.0304572	778437	765293	765293	726753	726753	-329190
	57247.3	18707.3	18707.3	-8.40 $\cdot 10^{-8}$	-8.39 $\cdot 10^{-8}$	-4.68 $\cdot 10^{-8}$
0.0317870	774704	763237	763237	729521	729521	-328225
	54479.3	20763.4	20763.4	-8.24 $\cdot 10^{-8}$	-8.23 $\cdot 10^{-8}$	-4.98 $\cdot 10^{-8}$
0.0331168	771633	761561	761561	731880	731880	-327513
	52119.8	22439.1	22439.1	-8.09 $\cdot 10^{-8}$	-8.08 $\cdot 10^{-8}$	-5.20 $\cdot 10^{-8}$
0.0344466	769007	760179	760179	733903	733903	-326980
	50097	23821.4	23821.4	-7.96 $\cdot 10^{-8}$	-7.96 $\cdot 10^{-8}$	-5.41 $\cdot 10^{-8}$
0.0357764	766930	759026	759026	735646	735646	-326576
	48353.9	24974.2	24974.2	-7.87 $\cdot 10^{-8}$	-7.86 $\cdot 10^{-8}$	-5.58 $\cdot 10^{-8}$

Tabla 50: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 1 \cdot 10^{-8}$ [$C^2 V N^{-1} m^{-1}$] y $P_o = 1 \cdot 10^5$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0278258	826091	787582	787582	678888	678888	-328979
	105112	-3582.44	-3582.44	-1.13 $\cdot 10^{-7}$	-1.13 $\cdot 10^{-7}$	-9.21 $\cdot 10^{-9}$
0.0290710	811324	778569	778569	685424	685424	-320748
	98576.4	5430.39	5430.39	-1.06 $\cdot 10^{-7}$	-1.06 $\cdot 10^{-7}$	-1.62 $\cdot 10^{-8}$
0.0303162	799868	771679	771679	691009	691009	-314877
	92990.6	12320.9	12320.9	-1.01 $\cdot 10^{-7}$	-1.01 $\cdot 10^{-7}$	-2.25 $\cdot 10^{-8}$
0.0315613	790755	766260	766260	695787	695787	-310542
	88213	17739.6	17739.6	-9.71 $\cdot 10^{-8}$	-9.70 $\cdot 10^{-8}$	-2.77 $\cdot 10^{-8}$
0.0328065	783151	761705	761705	699719	699719	-306870
	84280.8	22294.8	22294.8	-9.37 $\cdot 10^{-8}$	-9.37 $\cdot 10^{-8}$	-3.24 $\cdot 10^{-8}$
0.0340516	775874	757013	757013	702285	702285	-302158
	81715.1	26986.9	26986.9	-9.09 $\cdot 10^{-8}$	-9.09 $\cdot 10^{-8}$	-3.62 $\cdot 10^{-8}$
0.0352968	766615	750060	750060	701857	701857	-292472
	82142.5	33940.4	33940.4	-8.86 $\cdot 10^{-8}$	-8.86 $\cdot 10^{-8}$	-3.95 $\cdot 10^{-8}$
0.0365419	750748	736438	736438	694650	694650	-269398
	89349.9	47561.8	47561.8	-8.66 $\cdot 10^{-8}$	-8.66 $\cdot 10^{-8}$	-4.27 $\cdot 10^{-8}$

Tabla 51: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 1 \cdot 10^{-8}$ [$C^2 V N^{-1} m^{-1}$] y $P_o = 1.5 \cdot 10^5$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0289522	872827	818087	818087	666332	666332	-363160
	117668	-34088.2	-34088.2	-1.31 $\cdot 10^{-7}$	-1.31 $\cdot 10^{-7}$	7.89 $\cdot 10^{-9}$
0.0301318	850661	804118	804118	673963	673963	-348777
	110037	-20271.4	-20271.4	-1.21 $\cdot 10^{-7}$	-1.21 $\cdot 10^{-7}$	-5.00 $\cdot 10^{-9}$
0.0313114	833946	793803	793803	680669	680669	-338615
	103331	-9803.72	-9803.72	-1.14 $\cdot 10^{-7}$	-1.14 $\cdot 10^{-7}$	-7.52 $\cdot 10^{-9}$
0.0324910	820445	785491	785491	686331	686331	-330776
	97668.7	-1490.74	-1490.74	-1.08 $\cdot 10^{-7}$	-1.08 $\cdot 10^{-7}$	-1.39 $\cdot 10^{-8}$
0.0336707	808718	778076	778076	690657	690657	-323375
	93343.4	5923.93	5923.93	-1.03 $\cdot 10^{-7}$	-1.03 $\cdot 10^{-7}$	-1.95 $\cdot 10^{-8}$
0.0348503	795893	769038	769038	692044	692044	-311938
	91955.6	14961.7	14961.7	-9.98 $\cdot 10^{-8}$	-9.98 $\cdot 10^{-8}$	-2.41 $\cdot 10^{-8}$
0.0360299	776008	752848	752848	686164	686164	-286171
	97836.3	31151.7	31151.7	-9.66 $\cdot 10^{-8}$	-9.65 $\cdot 10^{-8}$	-2.85 $\cdot 10^{-8}$
0.0372096	737166	718229	718229	663496	663496	-224662
	120504	65770.9	65770.9	-9.37 $\cdot 10^{-8}$	-9.37 $\cdot 10^{-8}$	-3.24 $\cdot 10^{-8}$

Tabla 52: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 3 \cdot 10^{-8}$ [$C^2 V N^{-1} m^{-1}$] y $P_o = 5 \cdot 10^4$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0264655	796021	775240	775240	715036	715036	-335057
	68963.9	8759.36	8759.36	-9.20 $\cdot 10^{-8}$	-9.20 $\cdot 10^{-8}$	-3.47 $\cdot 10^{-8}$
0.0277954	788738	771079	771079	719674	719674	-332413
	64325.8	12920.6	12920.6	-8.88 $\cdot 10^{-8}$	-8.87 $\cdot 10^{-8}$	-3.94 $\cdot 10^{-8}$
0.0291254	783008	767850	767850	723551	723551	-330559
	60449.1	16149.8	16149.8	-8.61 $\cdot 10^{-8}$	-8.61 $\cdot 10^{-8}$	-4.35 $\cdot 10^{-8}$
0.0304553	778421	765296	765296	726814	726814	-329235
	57185.9	18703.6	18703.6	-8.40 $\cdot 10^{-8}$	-8.39 $\cdot 10^{-8}$	-4.69 $\cdot 10^{-8}$
0.0317853	774694	763244	763244	729579	729579	-328273
	54421.2	20756.1	20756.1	-8.23 $\cdot 10^{-8}$	-8.23 $\cdot 10^{-8}$	-4.96 $\cdot 10^{-8}$
0.0331152	771627	761571	761571	731935	731935	-327562
	52064.6	22429.1	22429.1	-8.10 $\cdot 10^{-8}$	-8.08 $\cdot 10^{-8}$	-5.21 $\cdot 10^{-8}$
0.0344452	769075	760190	760190	733955	733955	-327030
	50045.1	23809.9	23809.9	-7.96 $\cdot 10^{-8}$	-7.95 $\cdot 10^{-8}$	-5.41 $\cdot 10^{-8}$
0.0357751	766929	759037	759037	735694	735694	-326623
	48306.3	24962.8	24962.8	-7.86 $\cdot 10^{-8}$	-7.86 $\cdot 10^{-8}$	-5.58 $\cdot 10^{-8}$

Tabla 53: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 3 \cdot 10^{-8}$ [$C^2 V N^{-1} m^{-1}$] y $P_o = 1 \cdot 10^5$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0276686	828789	791738	791738	686873	686873	-339665
	97127.2	-7741.21	-7741.21	-1.10 $\cdot 10^{-7}$	-1.10 $\cdot 10^{-7}$	-1.17 $\cdot 10^{-8}$
0.0289233	814755	783238	783238	693388	693388	-332144
	90612.3	760.591	760.591	-1.04 $\cdot 10^{-7}$	-1.04 $\cdot 10^{-7}$	-1.86 $\cdot 10^{-8}$
0.0301779	803848	776728	776728	698940	698940	-326788
	85059.6	7271.74	7271.74	-9.94 $\cdot 10^{-8}$	-9.93 $\cdot 10^{-8}$	-2.46 $\cdot 10^{-8}$
0.0314325	795151	771593	771593	703672	703672	-322823
	80328	12406.8	12406.8	-9.55 $\cdot 10^{-8}$	-9.55 $\cdot 10^{-8}$	-2.99 $\cdot 10^{-8}$
0.0326872	787830	767215	767215	707515	707515	-319345
	76485	16785.2	16785.2	-9.24 $\cdot 10^{-8}$	-9.24 $\cdot 10^{-8}$	-3.43 $\cdot 10^{-8}$
0.0339418	780578	762466	762466	709820	709820	-314397
	74180.2	21533.9	21533.9	-8.97 $\cdot 10^{-8}$	-8.97 $\cdot 10^{-8}$	-3.81 $\cdot 10^{-8}$
0.0351964	770688	754832	754832	708590	708590	-303278
	75409.9	29168.2	29168.2	-8.75 $\cdot 10^{-8}$	-8.75 $\cdot 10^{-8}$	-4.13 $\cdot 10^{-8}$
0.0364511	752607	738994	738994	699182	699182	-275789
	84818	45005.9	45005.9	-8.57 $\cdot 10^{-8}$	-8.56 $\cdot 10^{-8}$	-4.41 $\cdot 10^{-8}$

Tabla 54: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 3 \cdot 10^{-8}$ [$C^2VN^{-1}m^{-1}$] y P_o = 1.5 $\cdot 10^5$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0291388	870591	814312	814312	658709	658709	-353305
	125291	-30315.4	-30315.4	-1.34 $\cdot 10^{-7}$	-1.34 $\cdot 10^{-7}$	1.03 $\cdot 10^{-8}$
0.0303080	847635	799781	799781	666287	666287	-338011
	117713	-15869.5	-15869.5	-1.24 $\cdot 10^{-7}$	-1.24 $\cdot 10^{-7}$	1.92 $\cdot 10^{-9}$
0.0314772	830160	788901	788901	672893	672893	-327062
	111107	-4909.26	-4909.26	-1.16 $\cdot 10^{-7}$	-1.16 $\cdot 10^{-7}$	-5.40 $\cdot 10^{-9}$
0.0326463	816164	780229	780229	678514	678514	-318679
	105486	3769.42	3769.42	-1.10 $\cdot 10^{-7}$	-1.10 $\cdot 10^{-7}$	-1.18 $\cdot 10^{-8}$
0.0338155	804065	772553	772553	682837	682837	-310903
	101163	11446.3	11446.3	-1.05 $\cdot 10^{-7}$	-1.05 $\cdot 10^{-7}$	-1.75 $\cdot 10^{-8}$
0.0349846	791106	763468	763468	684384	684384	-299489
	99616.4	20531.6	20531.6	-1.01 $\cdot 10^{-7}$	-1.01 $\cdot 10^{-7}$	-2.23 $\cdot 10^{-8}$
0.0361538	771703	747822	747822	679183	679183	-274886
	104817	36177.8	36177.8	-9.79 $\cdot 10^{-8}$	-9.78 $\cdot 10^{-8}$	-2.67 $\cdot 10^{-8}$
0.0373229	734882	715240	715240	658564	658564	-217445
	125436	68760.3	68760.3	-9.49 $\cdot 10^{-8}$	-9.49 $\cdot 10^{-8}$	-3.06 $\cdot 10^{-8}$

Tabla 55: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 5 \cdot 10^{-8}$ [$C^2VN^{-1}m^{-1}$] y $P_o = 5 \cdot 10^4$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0264608	795928	775211	775211	715183	715183	-335112
	68816.6	8788.42	8788.42	-9.20 $\cdot 10^{-8}$	-9.20 $\cdot 10^{-8}$	-3.47 $\cdot 10^{-8}$
0.0277911	788670	771065	771065	719812	719812	-332483
	64187.9	12934.2	12934.2	-8.87 $\cdot 10^{-8}$	-8.87 $\cdot 10^{-8}$	-3.96 $\cdot 10^{-8}$
0.0291213	782960	767848	767848	723681	723681	-330641
	60319.5	16151.8	16151.8	-8.61 $\cdot 10^{-8}$	-8.61 $\cdot 10^{-8}$	-4.34 $\cdot 10^{-8}$
0.0304515	778388	765303	765303	726936	726936	-329324
	57063.5	18696.5	18696.5	-8.40 $\cdot 10^{-8}$	-8.40 $\cdot 10^{-8}$	-4.71 $\cdot 10^{-8}$
0.0317818	774673	763258	763258	729695	729695	-328368
	54305.2	20741.9	20741.9	-8.23 $\cdot 10^{-8}$	-8.22 $\cdot 10^{-8}$	-4.98 $\cdot 10^{-8}$
0.0331120	771615	761590	761590	732045	732045	-327661
	51954.7	22409.5	22409.5	-8.08 $\cdot 10^{-8}$	-8.05 $\cdot 10^{-8}$	-5.21 $\cdot 10^{-8}$
0.0344423	769070	760213	760213	734058	734058	-327128
	49941.5	23787	23787	-7.96 $\cdot 10^{-8}$	-7.95 $\cdot 10^{-8}$	-5.40 $\cdot 10^{-8}$
0.0357725	766927	759060	759060	735789	735789	-326716
	48211	24940.2	24940.2	-7.86 $\cdot 10^{-8}$	-7.86 $\cdot 10^{-8}$	-5.59 $\cdot 10^{-8}$

Tabla 56: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 5 \cdot 10^{-8}$ [$C^2 V N^{-1} m^{-1}$] y $P_o = 1 \cdot 10^5$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0275827	830144	793929	793929	691271	691271	-345421
	92729.4	-9935.11	-9935.11	-1.09 $\cdot 10^{-7}$	-1.09 $\cdot 10^{-7}$	-1.30 $\cdot 10^{-8}$
0.0288425	816520	785713	785713	697762	697762	-338284
	86237.9	-1714.89	-1714.89	-1.03 $\cdot 10^{-7}$	-1.03 $\cdot 10^{-7}$	-2.02 $\cdot 10^{-8}$
0.0301024	805919	779412	779412	703286	703286	-333206
	80713.7	4586.93	4586.93	-9.85 $\cdot 10^{-8}$	-9.85 $\cdot 10^{-8}$	-2.61 $\cdot 10^{-8}$
0.0313622	7974546	774434	774434	707984	707984	-329440
	76016.1	9565.1	9565.1	-9.47 $\cdot 10^{-8}$	-9.47 $\cdot 10^{-8}$	-3.09 $\cdot 10^{-8}$
0.0326221	790296	770156	770156	711771	711771	-326067
	72229	13844.1	13844.1	-9.16 $\cdot 10^{-8}$	-9.16 $\cdot 10^{-8}$	-3.54 $\cdot 10^{-8}$
0.0338819	783066	765382	765382	713929	713929	-320994
	70071.5	18618.2	18618.2	-8.92 $\cdot 10^{-8}$	-8.91 $\cdot 10^{-8}$	-3.89 $\cdot 10^{-8}$
0.0351418	772847	757386	757386	712258	712258	-309106
	71741.6	26613.7	26613.7	-8.70 $\cdot 10^{-8}$	-8.69 $\cdot 10^{-8}$	-4.21 $\cdot 10^{-8}$
0.0364016	753582	740356	740356	701646	701646	-279228
	82353.8	43643.7	43643.7	-8.53 $\cdot 10^{-8}$	-8.51 $\cdot 10^{-8}$	-4.51 $\cdot 10^{-8}$

Tabla 57: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 5 \cdot 10^{-8}$ [$C^2 V N^{-1} m^{-1}$] y $P_o = 1.5 \cdot 10^5$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0292483	869191	812051	812051	654316	654316	-347515
	129684	-28058.8	-28058.8	-1.36 $\cdot 10^{-7}$	-1.36 $\cdot 10^{-7}$	1.18 $\cdot 10^{-8}$
0.0304114	845738	797158	797158	661838	661838	-331659
	122162	-13241.6	-13241.6	-1.26 $\cdot 10^{-7}$	-1.25 $\cdot 10^{-7}$	3.24 $\cdot 10^{-9}$
0.0315744	827830	785953	785953	668377	668377	-320250
	115623	-1995.43	-1995.43	-1.17 $\cdot 10^{-7}$	-1.17 $\cdot 10^{-7}$	-4.26 $\cdot 10^{-9}$
0.0327375	813584	777104	777104	673978	673978	-311567
	110022	6891.09	6891.09	-1.11 $\cdot 10^{-7}$	-1.11 $\cdot 10^{-7}$	-1.06 $\cdot 10^{-8}$
0.0339006	801275	769279	769279	678293	678293	-303570
	105707	14719.6	14719.6	-1.06 $\cdot 10^{-7}$	-1.06 $\cdot 10^{-7}$	-1.62 $\cdot 10^{-8}$
0.0350637	788243	760170	760170	679926	679926	-292170
	104074	23829.6	23829.6	-1.02 $\cdot 10^{-7}$	-1.02 $\cdot 10^{-7}$	-2.14 $\cdot 10^{-8}$
0.0362267	769134	744847	744847	675115	675115	-268249
	108885	39152.4	39152.4	-9.87 $\cdot 10^{-8}$	-9.87 $\cdot 10^{-8}$	-2.56 $\cdot 10^{-8}$
0.0373898	733505	713459	713459	655676	655676	-213181
	128324	70540.5	70540.5	-9.57 $\cdot 10^{-8}$	-9.57 $\cdot 10^{-8}$	-2.97 $\cdot 10^{-8}$

Además considerando el valor del Campo Eléctrico se puede determinar la matriz $\mathbb{M}'(r)$ y a su vez los valores propios de ella. Considerando 8 valores de r entre a y b se calculan los valores propios para los diferentes valores de C_o y P_o, como se expresan en las tablas 58 - 66.

Tabla 58: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 1 \cdot 10^{-8}$ [$C^2 V N^{-1} m^{-1}$] y $P_o = 5 \cdot 10^4$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0264679	-267866	-267865	267865	267865	-732.437	-732.437
	731.935	-731.935	731.437	731.437	-1.02 $\cdot 10^{-10}$	2.13 $\cdot 10^{-11}$
0.0277976	-158717	-158716	158716	158716	-563.911	-563.911
	563.409	-563.409	562.911	562.911	-2.64 $\cdot 10^{-11}$	-1.71 $\cdot 10^{-12}$
0.0291274	-102793	-102792	102792	102792	-453.914	-453.914
	453.411	-453.411	452.914	452.914	4.89 $\cdot 10^{-11}$	1.15 $\cdot 10^{-11}$
0.0304572	-70886.7	70885.7	-70885.7	70885.7	-377.026	-377.026
	376.523	-376.523	376.026	376.026	6.12 $\cdot 10^{-12}$	1.40 $\cdot 10^{-12}$
0.0317870	-51215.5	-51214.5	51214.5	51214.5	-320.546	-320.546
	320.042	-320.042	319.546	319.546	1.40 $\cdot 10^{-11}$	-2.30 $\cdot 10^{-12}$
0.0331168	-38355.2	-38354.2	38354.2	38354.2	-277.463	-277.463
	276.959	-276.959	276.463	276.463	5.09 $\cdot 10^{-12}$	-3.18 $\cdot 10^{-12}$
0.0344466	-29552.7	-29551.7	29551.7	29551.7	-243.613	-243.613
	243.108	-243.108	242.613	242.613	-1.13 $\cdot 10^{-11}$	-3.98 $\cdot 10^{-13}$
0.0357764	-23301.7	-23300.7	23300.7	23300.7	-216.374	-216.374
	215.869	-215.869	215.374	215.374	5.43 $\cdot 10^{-12}$	-3.39 $\cdot 10^{-12}$

Tabla 59: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 1 \cdot 10^{-8}$ [$C^2 V N^{-1} m^{-1}$] y $P_o = 1 \cdot 10^5$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0278258	-4.72 $\cdot 10^{6}$	4.72 $\cdot 10^{6}$	4.72 $\cdot 10^{6}$	-4.72 $\cdot 10^{6}$	-3073.82	-3073.82
	3073.32	-3073.32	3072.82	3072.82	1.20 $\cdot 10^{-9}$	5.00 $\cdot 10^{-10}$
0.0290710	-1.09 $\cdot 10^{6}$	1.09 $\cdot 10^{6}$	-1.09 $\cdot 10^{6}$	1.09 $\cdot 10^{6}$	-1479.59	-1479.59
	1479.09	-1479.09	1478.59	1478.59	-5.18 $\cdot 10^{-10}$	-2.42 $\cdot 10^{-10}$
0.0303162	-441952	441951	441951	-441951	-940.661	-940.661
	940.159	-940.159	939.661	939.661	7.68 $\cdot 10^{-11}$	-6.23 $\cdot 10^{-11}$
0.0315613	-227562	227561	-227561	227561	-675.127	-675.127
	674.626	-674.626	674.127	674.127	-7.32 $\cdot 10^{-11}$	-2.60 $\cdot 10^{-11}$
0.0328065	-134556	-134555	134555	134555	-519.257	-519.257
	518.755	-518.755	518.257	518.257	3.95 $\cdot 10^{-11}$	-3.67 $\cdot 10^{-12}$
0.0340516	-87060.3	87059.3	87059.3	-87059.3	-417.776	-417.776
	417.273	-417.273	416.776	416.776	2.33 $\cdot 10^{-11}$	-2.13 $\cdot 10^{-12}$
0.0352968	-60021.8	60020.8	60020.8	-60020.8	-346.97	-346.97
	346.467	-346.467	345.97	345.97	-1.45 $\cdot 10^{-11}$	-1.94 $\cdot 10^{-12}$
0.0365419	-43379.6	43378.6	-43378.6	43378.6	-295.046	-295.046
	294.542	-294.542	294.046	294.046	-9.70 $\cdot 10^{-12}$	-4.38 $\cdot 10^{-12}$

Tabla 60: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 1 \cdot 10^{-8}$ [$C^2VN^{-1}m^{-1}$] y $P_o = 1.5 \cdot 10^5$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0289522	$-7.58 \cdot 10^6$	$7.58 \cdot 10^6$	$-7.58 \cdot 10^6$	$7.58 \cdot 10^6$	-3896.29	-3896.29
	3895.79	-3895.79	3895.29	3895.29	$-5.93 \cdot 10^{-10}$	$-6.73 \cdot 10^{-11}$
0.0301318	$-1.43 \cdot 10^9$	$1.43 \cdot 10^9$	$-1.43 \cdot 10^9$	$1.43 \cdot 10^9$	-53639.2	-53639.2
	-53638.7	53638.7	53638.2	53638.2	$4.07 \cdot 10^{-7}$	$-3.24 \cdot 10^{-7}$
0.0313114	$-4.25 \cdot 10^6$	$4.25 \cdot 10^6$	$4.25 \cdot 10^6$	$-4.25 \cdot 10^6$	-2918.12	-2918.12
	2917.62	-2917.62	2917.12	2917.12	$-9.87 \cdot 10^{-10}$	$-4.05 \cdot 10^{-10}$
0.0324910	-997262	-997261	997261	997261	-1412.78	-1412.78
	1412.28	-1412.28	1411.78	1411.78	$-2.27 \cdot 10^{-10}$	$-1.18 \cdot 10^{-10}$
0.0336707	-406853	406852	406852	-406852	-902.555	-902.555
	902.054	-902.054	901.555	901.555	$-5.77 \cdot 10^{-11}$	$-4.95 \cdot 10^{-12}$
0.0348503	-210989	-210988	210988	210988	-650.097	-650.097
	649.595	-649.595	649.097	649.097	$6.97 \cdot 10^{-11}$	$1.96 \cdot 10^{-11}$
0.0360299	-125409	-125408	125408	125408	-501.316	-501.316
	500.814	-500.814	500.316	500.316	$-4.39 \cdot 10^{-11}$	$1.37 \cdot 10^{-11}$
0.0372096	-81460.1	81459.1	-81459.1	81459.1	-404.131	-404.131
	403.629	-403.629	403.131	403.131	$1.57 \cdot 10^{-11}$	$-6.84 \cdot 10^{-13}$

Tabla 61: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 3 \cdot 10^{-8}$ [$C^2VN^{-1}m^{-1}$] y $P_o = 5 \cdot 10^4$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0264655	$-2.40 \cdot 10^6$	$2.40 \cdot 10^6$	$2.40 \cdot 10^6$	$-2.40 \cdot 10^6$	-2192.76	-2192.76
	2192.25	-2192.25	2191.76	2191.76	$3.52 \cdot 10^{-10}$	$2.70 \cdot 10^{-10}$
0.0277954	$-1.42 \cdot 10^6$	$-1.42 \cdot 10^6$	$1.42 \cdot 10^6$	$1.42 \cdot 10^6$	-1688.58	-1688.58
	1688.08	-1688.08	1687.58	1687.58	$2.12 \cdot 10^{-10}$	$1.59 \cdot 10^{-10}$
0.0291254	-923216	923215	-923215	923215	-1359.33	-1359.33
	1358.83	-1358.83	1358.33	1358.33	$1.45 \cdot 10^{-10}$	$4.05 \cdot 10^{-11}$
0.0304553	-636873	-636872	636872	636872	-1129.1	-1129.1
	1128.6	-1128.6	1128.1	1128.1	$-6.83 \cdot 10^{-11}$	$4.80 \cdot 10^{-11}$
0.0317853	-460257	460256	-460256	460256	-959.933	-959.933
	959.432	-959.432	958.933	958.933	$-1.00 \cdot 10^{-10}$	$-2.91 \cdot 10^{-11}$
0.0331152	-344752	-344751	344751	344751	-830.863	-830.863
	830.361	-830.361	829.863	829.863	$6.29 \cdot 10^{-11}$	$1.13 \cdot 10^{-12}$
0.0344452	-365673	365672	-365672	365672	-729.433	-729.433
	728.932	-728.932	728.433	728.433	$-8.74 \cdot 10^{-11}$	$-2.20 \cdot 10^{-11}$
0.0357751	-209503	-209502	209502	209502	-647.805	-647.805
	647.303	-647.303	646.805	646.805	$-6.25 \cdot 10^{-11}$	$-3.34 \cdot 10^{-11}$

Tabla 62: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 3 \cdot 10^{-8}$ [$C^2VN^{-1}m^{-1}$] y $P_o = 1 \cdot 10^5$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0276686	-2.49 $\cdot 10^7$	-2.49 $\cdot 10^7$	2.49 $\cdot 10^7$	2.49 $\cdot 10^7$	-7069.47	-7069.47
	7068.97	-7068.97	7068.47	7068.47	-8.46 $\cdot 10^{-9}$	1.48 $\cdot 10^{-9}$
0.0289233	-7.31 $\cdot 10^6$	7.31 $\cdot 10^6$	7.31 $\cdot 10^6$	-7.31 $\cdot 10^6$	-3825.58	-3825.58
	3825.08	-3825.08	3824.58	3824.58	1.86 $\cdot 10^{-9}$	4.65 $\cdot 10^{-10}$
0.0301779	-3.23 $\cdot 10^6$	-3.23 $\cdot 10^6$	3.23 $\cdot 10^6$	3.23 $\cdot 10^6$	-2544.53	-2544.53
	2544.02	-2544.02	2543.53	2543.53	4.65 $\cdot 10^{-10}$	-2.32 $\cdot 10^{-10}$
0.0314325	-1.75 $\cdot 10^6$	1.75 $\cdot 10^6$	-1.75 $\cdot 10^6$	1.75 $\cdot 10^6$	-1871.06	-1871.06
	1870.56	-1870.56	1870.06	1870.06	5.49 $\cdot 10^{-10}$	3.27 $\cdot 10^{-10}$
0.0326872	-1.06 $\cdot 10^6$	1.06 $\cdot 10^6$	-1.06 $\cdot 10^6$	1.06 $\cdot 10^6$	-1461.11	-1461.11
	1460.61	-1460.61	1460.11	1460.11	2.54 $\cdot 10^{-10}$	-6.54 $\cdot 10^{-11}$
0.0339418	-704920	704919	-704919	704919	-1187.87	-1187.87
	1187.37	-1187.37	1186.87	1186.87	-3.20 $\cdot 10^{-10}$	-8.90 $\cdot 10^{-11}$
0.0351964	-493558	-493558	493558	493558	-994.036	-994.036
	993.535	-993.535	993.036	993.036	-5.00 $\cdot 10^{-11}$	2.63 $\cdot 10^{-11}$
0.0364511	-360930	360929	-360929	360929	-850.122	-850.122
	849.621	-849.621	849.122	849.122	-1.42 $\cdot 10^{-10}$	1.22 $\cdot 10^{-11}$

Tabla 63: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 3 \cdot 10^{-8}$ [$C^2VN^{-1}m^{-1}$] y $P_o = 1.5 \cdot 10^5$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0291388	-4.02 $\cdot 10^7$	4.02 $\cdot 10^7$	-4.02 $\cdot 10^7$	4.02 $\cdot 10^7$	-8966.99	-8966.99
	8966.49	-8966.49	8965.99	8965.99	-6.47 $\cdot 10^{-9}$	3.75 $\cdot 10^{-9}$
0.0303080	-8.52 $\cdot 10^8$	8.52 $\cdot 10^8$	-8.52 $\cdot 10^8$	8.52 $\cdot 10^8$	-41278.8	-41278.8
	-41278.3	41278.3	41277.8	41277.8	1.90 $\cdot 10^{-7}$	-6.49 $\cdot 10^{-8}$
0.0314772	-7.83 $\cdot 10^7$	7.83 $\cdot 10^7$	-7.83 $\cdot 10^7$	7.83 $\cdot 10^7$	-12516.7	-12516.7
	12516.2	-12516.2	12515.7	12515.7	2.80 $\cdot 10^{-8}$	8.72 $\cdot 10^{-9}$
0.0326463	-1.27 $\cdot 10^7$	-1.27 $\cdot 10^7$	1.27 $\cdot 10^7$	1.27 $\cdot 10^7$	-5044.11	-5044.11
	5043.61	-5043.61	5043.11	5043.11	-2.19 $\cdot 10^{-9}$	6.05 $\cdot 10^{-10}$
0.0338155	-4.62 $\cdot 10^6$	4.62 $\cdot 10^6$	4.62 $\cdot 10^6$	-4.62 $\cdot 10^6$	-3041.73	-3041.73
	3041.23	-3041.23	3040.73	3040.73	-2.77 $\cdot 10^{-9}$	1.38 $\cdot 10^{-10}$
0.0349846	-2.26 $\cdot 10^6$	2.26 $\cdot 10^6$	-2.26 $\cdot 10^6$	2.26 $\cdot 10^6$	-2128.84	-2128.84
	2128.34	-2128.34	2127.84	2127.84	6.70 $\cdot 10^{-10}$	5.54 $\cdot 10^{-10}$
0.0361538	-1.30 $\cdot 10^6$	-1.30 $\cdot 10^6$	1.30 $\cdot 10^6$	1.30 $\cdot 10^6$	-1613.31	-1613.31
	1612.81	-1612.81	1612.31	1612.31	-1.43 $\cdot 10^{-10}$	-5.57 $\cdot 10^{-10}$
0.0373229	-825415	-825414	825414	825414	-1285.35	-1285.35
	1284.84	-1284.84	1284.35	1284.35	-1.64 $\cdot 10^{-10}$	2.51 $\cdot 10^{-11}$

Tabla 64: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 5 \cdot 10^{-8}$ [$C^2 V N^{-1} m^{-1}$] y $P_o = 5 \cdot 10^4$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0264608	$-6.63 \cdot 10^6$	$6.63 \cdot 10^6$	$6.63 \cdot 10^6$	$-6.63 \cdot 10^6$	-3642.47	-3642.47
	3641.97	-3641.97	3641.47	3641.47	$1.04 \cdot 10^{-9}$	$-2.94 \cdot 10^{-10}$
0.0277911	$-3.93 \cdot 10^6$	$-3.93 \cdot 10^6$	$3.93 \cdot 10^6$	$3.93 \cdot 10^6$	-2806.84	-2806.84
	2806.34	-2806.34	2805.84	2805.84	$9.51 \cdot 10^{-10}$	$-3.28 \cdot 10^{-10}$
0.0291213	$-2.55 \cdot 10^6$	$2.55 \cdot 10^6$	$2.55 \cdot 10^6$	$-2.55 \cdot 10^6$	-2260.55	-2260.55
	2260.05	-2260.05	2259.55	2259.55	$-1.79 \cdot 10^{-10}$	$-1.79 \cdot 10^{-10}$
0.0304515	$-1.76 \cdot 10^6$	$1.76 \cdot 10^6$	$-1.76 \cdot 10^6$	$1.76 \cdot 10^6$	-1878.27	-1878.27
	1877.77	-1877.77	1877.27	1877.27	$3.71 \cdot 10^{-10}$	$-8.94 \cdot 10^{-11}$
0.0317818	$-1.27 \cdot 10^6$	$-1.27 \cdot 10^6$	$1.27 \cdot 10^6$	$1.27 \cdot 10^6$	-1597.22	-1597.22
	1596.72	-1596.72	1596.22	1596.22	$3.39 \cdot 10^{-10}$	$-1.84 \cdot 10^{-10}$
0.0331120	-955228	955227	-955227	955227	-1382.69	-1382.69
	1382.19	-1382.19	1381.69	1381.69	$-3.16 \cdot 10^{-10}$	$-9.95 \cdot 10^{-11}$
0.0344423	-736351	736350	-736350	736350	-1214.05	-1214.05
	1213.55	-1213.55	1213.05	1213.05	$1.87 \cdot 10^{-10}$	$1.32 \cdot 10^{-10}$
0.0357725	-580815	-580814	580814	580814	-1078.29	-1078.29
	1077.79	-1077.79	1077.29	1077.29	$-6.90 \cdot 10^{-11}$	$-5.44 \cdot 10^{-11}$

Tabla 65: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 5 \cdot 10^{-8}$ [$C^2 V N^{-1} m^{-1}$] y $P_o = 1 \cdot 10^5$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0275827	$-5.41 \cdot 10^7$	$-5.41 \cdot 10^7$	$5.41 \cdot 10^7$	$5.41 \cdot 10^7$	-10403.4	-10403.4
	10402.9	-10402.9	10402.4	10402.4	$-9.60 \cdot 10^{-9}$	$-4.75 \cdot 10^{-9}$
0.0288425	$-1.75 \cdot 10^7$	$1.75 \cdot 10^7$	$-1.75 \cdot 10^7$	$1.75 \cdot 10^7$	-5915.08	-5915.08
	5914.58	-5914.58	5914.08	5914.08	$6.29 \cdot 10^{-9}$	$-5.12 \cdot 10^{-9}$
0.0301024	$-8.07 \cdot 10^6$	$-8.07 \cdot 10^6$	$8.07 \cdot 10^6$	$8.07 \cdot 10^6$	-4019.37	-4019.37
	4018.87	-4018.87	4018.37	4018.37	$1.13 \cdot 10^{-9}$	$7.75 \cdot 10^{-10}$
0.0313622	$-4.47 \cdot 10^6$	$-4.47 \cdot 10^6$	$4.47 \cdot 10^6$	$4.47 \cdot 10^6$	-2991.42	-2991.42
	2990.92	-2990.92	2990.42	2990.42	$-1.06 \cdot 10^{-9}$	$-4.95 \cdot 10^{-10}$
0.0326221	$-2.77 \cdot 10^6$	$-2.77 \cdot 10^6$	$2.77 \cdot 10^6$	$2.77 \cdot 10^6$	-2354.25	-2354.25
	2353.75	-2353.75	2353.25	2353.25	$1.04 \cdot 10^{-9}$	$2.84 \cdot 10^{-11}$
0.0338819	$-1.85 \cdot 10^6$	$1.85 \cdot 10^6$	$1.85 \cdot 10^6$	$-1.85 \cdot 10^6$	-1924.42	-1924.42
	1923.92	-1923.92	1923.42	1923.42	$5.07 \cdot 10^{-10}$	$1.14 \cdot 10^{-10}$
0.0351418	$-1.30 \cdot 10^6$	$1.30 \cdot 10^6$	$-1.30 \cdot 10^6$	$1.30 \cdot 10^6$	-1616.87	-1616.87
	1616.37	-1616.37	1615.87	1615.87	$-4.19 \cdot 10^{-10}$	$1.39 \cdot 10^{-11}$
0.0364016	-961241	961241	-961241	961241	-1387.04	-1387.04
	1386.53	-1386.53	1386.04	1386.04	$3.48 \cdot 10^{-10}$	$5.11 \cdot 10^{-11}$

Tabla 66: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 5 \cdot 10^{-8}$ [$C^2VN^{-1}m^{-1}$] y $P_o = 1.5 \cdot 10^5$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0292483	-8.74 $\cdot 10^7$	8.74 $\cdot 10^7$	-8.74 $\cdot 10^7$	8.74 $\cdot 10^7$	-13223.3	-13223.3
	13222.8	-13222.8	13222.3	13222.3	1.50 $\cdot 10^{-9}$	6.62 $\cdot 10^{-10}$
0.0304114	-8.10 $\cdot 10^8$	-8.10 $\cdot 10^8$	8.10 $\cdot 10^8$	8.10 $\cdot 10^8$	-40270.9	-40270.9
	-40270.4	40270.4	40269.9	40269.9	1.54 $\cdot 10^{-7}$	1.14 $\cdot 10^{-7}$
0.0315744	-3.80 $\cdot 10^8$	3.80 $\cdot 10^8$	3.80 $\cdot 10^8$	-3.80 $\cdot 10^8$	-27590.5	-27590.5
	-27590	27590	27589.5	27589.5	-6.16 $\cdot 10^{-8}$	3.37 $\cdot 10^{-8}$
0.0327375	-4.44 $\cdot 10^7$	-4.44 $\cdot 10^7$	4.44 $\cdot 10^7$	4.44 $\cdot 10^7$	-9430.29	-9430.29
	9429.79	-9429.79	9429.29	9429.29	1.36 $\cdot 10^{-8}$	-4.75 $\cdot 10^{-9}$
0.0339006	-1.48 $\cdot 10^7$	-1.48 $\cdot 10^7$	1.48 $\cdot 10^7$	1.48 $\cdot 10^7$	-5455.93	-5455.93
	5455.43	-5455.43	5454.93	5454.93	-1.56 $\cdot 10^{-9}$	4.85 $\cdot 10^{-11}$
0.0350637	-7.01 $\cdot 10^6$	-7.01 $\cdot 10^6$	7.01 $\cdot 10^6$	7.01 $\cdot 10^6$	-3745.98	-3745.98
	3745.48	-3745.48	3744.98	3744.98	1.40 $\cdot 10^{-9}$	-1.40 $\cdot 10^{-9}$
0.0362267	-3.94 $\cdot 10^6$	3.94 $\cdot 10^6$	-3.94 $\cdot 10^6$	3.94 $\cdot 10^6$	-2807.31	-2807.31
	2806.81	-2806.81	2806.31	2806.31	-9.58 $\cdot 10^{-10}$	-2.49 $\cdot 10^{-11}$
0.0373898	-2.46 $\cdot 10^6$	-2.46 $\cdot 10^6$	2.46 $\cdot 10^6$	2.46 $\cdot 10^6$	-2220.22	-2220.22
	2219.72	-2219.72	2219.22	2219.22	-9.43 $\cdot 10^{-11}$	8.07 $\cdot 10^{-11}$

6.6. Deformación de una Esfera Hueca bajo Presión Interna considerando la Segunda Función de Energía Libre

Se considera un cuerpo esférico cuya función de Energía Libre se estudia en un caso incompresible, donde es necesario determinar el Campo Eléctrico E_r, los radios finales interior y exterior, a y b respectivamente, y el parámetro p que aparece en la modelación de cuerpos incompresibles. Obteniendo estos valores se calculan las matrices $\mathbb{M}$ y $\mathbb{M}'$ con sus respectivos valores propios.

La Segunda Función de Energía Libre para este caso incomprensible es:

$$\Omega = \left(\frac{I_1 - 3}{2}\right)(g_0 + g_1 I_4) - log\left[cosh\left(\frac{\sqrt{I_4}}{m_1}\right)\right] m_0 m_1 - \frac{1}{2}\zeta_o I_4 + \frac{1}{2}\varepsilon_o I_5. \tag{6.75}$$

6.6.1. Resolución de Problemas

Para calcular el Campo Eléctrico E_r en función de r se tiene las ecuación 5.146, donde se reemplazan las derivadas de esta función de Energía Libre calculadas en la sección 5.3.4, obteniendo que:

$$E_r(r) = -\frac{C_o r^6}{(r^3 - a^3 + A^3)^{4/3}[((I_1 - 3)g_1 - \frac{m_0}{\sqrt{I_4}} tanh\left(\frac{\sqrt{I_4}}{m_1}\right) - \zeta_o) r^4 + \varepsilon_o (r^3 - a^3 + A^3)^{4/3}]}, \tag{6.76}$$

la cual es una ecuación implícita para obtener E_r, la que presenta algunos desafíos para poder resolverse, por lo cual se aplica una interpolación entre el radio interno final a, el radio r y el Campo Eléctrico E_r. Es necesario realizar esta aproximación con interpolación debido a que existe una tangente hiperbólica en la que se incluye el término E_r que depende de r y no se puede determinar numéricamente.

Para realizar la interpolación se dieron 7 valores diferentes del radio interior a entre 0.03 [m] y 0.06 [m], y para cada uno de estos radios interiores se consideran 6 valores diferentes de un radio r entre a y b, y para cada valor de r se calcula el Campo Eléctrico E_r de forma numérica de la ecuación 6.76. Luego con todos estos valores se hace una triple interpolación entre a, r y E_r con la herramienta "fitting" de Mathematica y se obtiene la ecuación 6.77.

$$E_r(r) = H_o + H_1 r + H_2 r^3, \tag{6.77}$$

donde los valores de H_o, H_1 y H_2 dependen de la constante C_o, y se presentan en la tabla 67. Los términos fueron testeados obteniendo la mejor aproximación con ellos, y además se intentó de obtener la menor cantidad de términos posibles para así tener un fácil manejo de datos.

Tabla 67: Valores de las Constantes de la ecuación 6.77 para algunos valores de C_o

C_o [$C^2VN^{-1}m^{-1}$]	H_o	H_1	H_2
$1 \cdot 10^{-8}$	-168.92 - 15905 a + 9.99 $\cdot 10^6$ a^3	26348.2	-1.05 $\cdot 10^7$
$3 \cdot 10^{-8}$	-506.78 - 47715.1 a + 2.99 $\cdot 10^7$ a^3	79044.7	-3.15 $\cdot 10^7$
$5 \cdot 10^{-8}$	-844.63 - 79525.2 a + 4.99 $\cdot 10^7$ a^3	131741	-5.26 $\cdot 10^7$

Para calcular el radio interno final a se tiene la ecuación 5.160, donde se reemplazan los valores de las ecuaciones 5.147 y 5.148 en la integral con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{2}{\xi}\Bigg[2\Omega_1\left(\frac{\xi^2}{(\xi^3-a^3+A^3)^{2/3}} - \frac{(\xi^3-a^3+A^3)^{4/3}}{\xi^4}\right) + 2\Omega_2\Bigg(\frac{\xi^4}{(\xi^3-a^3+A^3)^{4/3}} \\ - \frac{(\xi^3-a^3+A^3)^{2/3}}{\xi^2}\Bigg) - 2\Omega_5\frac{(\xi^3-a^3+A^3)^{8/3}}{\xi^8}E_r^2\Bigg]d\xi - P_o + \varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2a^4} = \varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2b^4},\end{aligned} \tag{6.78}$$

se reemplazan los valores de las derivadas de la función de Energía Libre calculadas en la sección 5.3.4, obteniendo que:

$$\begin{aligned}2\int_a^b \Bigg[g_0\frac{2\xi^3(A^3-a^3)+(A^3-a^3)^2}{\xi^5(\xi^3-a^3+A^3)^{2/3}} + g_1\frac{(\xi^3-a^3+A^3)^{2/3}(2\xi^3(A^3-a^3)+(A^3-a^3)^2)}{\xi^9}E_r^2 \\ -\varepsilon_o\frac{(\xi^3-a^3+A^3)^{8/3}}{\xi^9}E_r^2\Bigg]d\xi - P_o + \varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2a^4} = \varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2b^4},\end{aligned} \tag{6.79}$$

se reemplaza el valor del Campo Eléctrico $E_r(\xi)$ de la ecuación 6.77, obteniéndose:

$$2\int_a^b g_0 \frac{2\xi^3(A^3-a^3)+(A^3-a^3)^2}{\xi^5(\xi^3-a^3+A^3)^{2/3}}d\xi + 2\int_a^b \left[g_1 \frac{(\xi^3-a^3+A^3)^{2/3}(2\xi^3(A^3-a^3)+(A^3-a^3)^2)}{\xi^9} \right.$$
$$\left. -\varepsilon_o \frac{(\xi^3-a^3+A^3)^{8/3}}{\xi^9} \right](H_o+H_1r+H_2r^3)^2 d\xi - P_o + \varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2a^4} = \varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2b^4}, \tag{6.80}$$

donde los términos de la integral presentan algunos desafíos para poder resolverse, por lo cual éste se define como:

$$T(\xi) = 2\frac{g_1(\xi^3-a^3+A^3)^{2/3}(2\xi^3(A^3-a^3)+(A^3-a^3)^2) - \varepsilon_o(\xi^3-a^3+A^3)^{8/3}}{\xi^9}$$
$$(H_o+H_1r+H_2r^3)^2 + 2g_0\frac{2\xi^3(A^3-a^3)+(A^3-a^3)^2}{\xi^5(\xi^3-a^3+A^3)^{2/3}}, \tag{6.81}$$

con lo que tenemos:

$$\int_a^b T(\xi)d\xi - P_o + \varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2a^4} = \varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2b^4}. \tag{6.82}$$

Se asumen varias series de Taylor de este término donde se observa que para una orden mayor a 4 los radios finales presentan una variación demasiado baja, es por eso que se aproxima este término como una Serie de Taylor de orden 4, la cual se expresa como:

$$T(\xi) = K_o + K_1(\xi-a) + K_2(\xi-a)^2 + K_3(\xi-a)^3 + +K_4(\xi-a)^4, \tag{6.83}$$

donde:

$$K_o = 2\left(\frac{a}{A^2} - \frac{A^4}{a^5}\right)\left(g_0 + g_1\frac{A^4(H_o^2+2aH_oH_1+a^2H_1^2+2a^3H_oH_2+2a^4H_1H_2+a^6H_2^2)}{a^4}\right)$$
$$-2\frac{\varepsilon_o A^8(H_o^2+2aH_oH_1+a^2H_1^2+2a^3H_oH_2+2a^4H_1H_2+a^6H_2^2)}{a^9}, \tag{6.84}$$

$$
\begin{aligned}
K_1 = 2\Bigg[& \left(\frac{a}{A^2}-\frac{A^4}{a^5}\right) g_1 \Bigg(\frac{A^4(2H_oH_1+2aH_1^2+6a^2H_oH_2+8a^3H_1H_2+6a^5H_2^2)}{a^4} \\
& +4\left(\frac{A}{a^2}-\frac{A^4}{a^5}\right)(H_o^2+2aH_oH_1+a^2H_1^2+2a^3H_oH_2+2a^4H_1H_2+a^6H_2^2)\Bigg) \\
& +\left(g_0+g_1\frac{A^4(H_o^2+2aH_oH_1+a^2H_1^2+2a^3H_oH_2+2a^4H_1H_2+a^6H_2^2)}{a^4}\right) \\
& \left(5\frac{A^4}{a^6}-4\frac{A}{a^3}+\frac{A^3-2a^3}{A^5}\right)-\Bigg(\frac{A^8(2H_oH_1+2aH_1^2+6a^2H_oH_2+8a^3H_1H_2+6a^5H_2^2)}{a^9} \\
& +\left(8\frac{A^5}{a^7}-9\frac{A^8}{a^{10}}\right)(H_o^2+2aH_oH_1+a^2H_1^2+2a^3H_oH_2+2a^4H_1H_2+a^6H_2^2)\Bigg)\varepsilon_o\Bigg],
\end{aligned}
\tag{6.85}
$$

$$
\begin{aligned}
K_2 = 2\Bigg[& \left(5\frac{A^4}{a^6}-4\frac{A}{a^3}+\frac{A^3-2a^3}{A^5}\right) g_1 \Bigg(\frac{A^4(2H_oH_1+2aH_1^2+6a^2H_oH_2+8a^3H_1H_2+6a^5H_2^2)}{a^4} \\
& +4\left(\frac{A}{a^2}-\frac{A^4}{a^5}\right)(H_o^2+2aH_oH_1+a^2H_1^2+2a^3H_oH_2+2a^4H_1H_2+a^6H_2^2)\Bigg) \\
& +\left(\frac{a}{A^2}-\frac{A^4}{a^5}\right) g_1 \Bigg(\frac{A^4(H_1^2+6aH_oH_2+12a^2H_1H_2+15a^4H_2^2)}{a^4}+4\left(\frac{A}{a^2}-\frac{A^4}{a^5}\right) \\
& (2H_oH_1+2aH_1^2+6a^2H_oH_2+8a^3H_1H_2+6a^5H_2^2)+\left(10\frac{A^4}{a^6}-16\frac{A}{a^3}+\frac{4A^3+2a^3}{a^3A^2}\right) \\
& (H_o^2+2aH_oH_1+a^2H_1^2+2a^3H_oH_2+2a^4H_1H_2+a^6H_2^2)\Bigg)+\Bigg(\frac{16a^3A^3-2a^6-15A^6}{a^7A^2} \\
& -\frac{4a^2A^3-5a^5}{A^8}\Bigg)\left(g_0+g_1\frac{A^4(H_o^2+2aH_oH_1+a^2H_1^2+2a^3H_oH_2+2a^4H_1H_2+a^6H_2^2)}{a^4}\right) \\
& -\Bigg(\left(8\frac{A^5}{a^7}-9\frac{A^8}{a^{10}}\right)(2H_oH_1+2aH_1^2+6a^2H_oH_2+8a^3H_1H_2+6a^5H_2^2) \\
& +\frac{A^8(H_1^2+6aH_oH_2+12a^2H_1H_2+15a^4H_2^2)}{a^9}+\left(45\frac{A^8}{a^{11}}-72\frac{A^5}{a^8}+\frac{20a^3A^2+8A^5}{a^8}\right) \\
& (H_o^2+2aH_oH_1+a^2H_1^2+2a^3H_oH_2+2a^4H_1H_2+a^6H_2^2)\Bigg)\varepsilon_o\Bigg],
\end{aligned}
\tag{6.86}
$$

$$
\begin{aligned}
K_3 = & \frac{2}{3a^{12}A^{12}}[g_0(-40a^{19}A - 4a^{13}A^7 + 18a^{10}A^{10} - 124a^7A^{13} + 105a^4A^{16} + 45a^{16}A^4) \\
& +g_1(H_o^2(3a^{12}A^8 - 20a^9A^{11} + 390a^6A^{14} - 872a^3A^{17} + 495A^{20} + 4a^{15}A^5) \\
& +H_oH_1(64a^{10}A^{11} + 696a^7A^{14} - 1360a^4A^{17} + 720aA^{20} + 8a^{16}A^5) \\
& +H_1^2(-3a^{14}A^8 - 38a^{11}A^{11} + 297a^8A^{14} - 512a^5A^{17} + 252a^2A^{20} + 4a^{17}A^5) \\
& +H_oH_2(-12a^{15}A^8 - 76a^{12}A^{11} + 480a^9A^{14} - 736a^6A^{17} + 336a^3a^{20} + 8a^{18}A^5) \\
& +H_1H_2(-18a^{16}A^8 - 64a^{13}A^{11} + 360a^{10}A^{14} - 496a^7A^{17} + 210a^4A^{20} + 8a^{19}A^5) \\
& +H_2^2(-15a^{18}A^8 - 2a^{15}A^{11} + 63a^{12}A^{14} - 80a^9A^{17} + 30a^6A^{20} + 4a^{21}A^5))] \\
& -2\left(\left(8\frac{A^5}{a^7} - 9\frac{A^8}{a^{10}}\right)(H_1^2 + 6aH_oH_2 + 12a^2H_1H_2 + 15a^4H_2^2)\right. \\
& +\frac{A^8(2H_oH_2 + 8aH_1H_2 + 20a^3H_2^2)}{a^9} + \left(45\frac{A^8}{a^{11}} - 72\frac{A^5}{a^8} + \frac{20a^3A^2 + 8A^5}{a^8}\right) \\
& (2H_oH_1 + 2aH_1^2 + 6a^2H_oH_2 + 8a^3H_1H_2 + 6a^5H_2^2) \\
& + \left(-165\frac{A^8}{a^{12}} + 360\frac{A^5}{a^9} + \frac{120a^3A^3 + 40a^6 + 8A^6}{3a^8A} - 9\frac{20a^3A^2 + 8A^5}{a^9}\right) \\
& \left.(H_o^2 + 2aH_oH_1 + a^2H_1^2 + 2a^3H_oH_2 + 2a^4H_1H_2 + a^6H_2^2)\right)\varepsilon_o, \qquad (6.87)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_4 = & -\frac{2}{3a^{13}A^{15}}[g_0(160a^{19}A^4 - 110a^{22}A - 50a^{16}A^7 + 10a^{13}A^{10} + 40a^{10}A^{13} - 260a^7A^{16} + 210a^4A^{19}) \\
& +g_1(H_o^2(-5a^{12}A^{11} - 210a^9A^{14} + 1675a^6A^{17} - 2952a^3A^{20} + 1485A^{23} + 7a^{18}A^5) \\
& +H_oH_1(-8a^{16}A^8 - 16a^{13}A^{11} - 380a^{10}A^{14} + 2570a^7A^{17} - 4160a^4A^{20} + 1980aA^{23} + 14a^{19}A^5) \\
& +H_1^2(-8a^{17}A^8 - 8a^{14}A^{11} - 158a^{11}A^{14} + 937a^8A^{17} - 1400a^5A^{20} + 630a^2A^{23} + 7a^{20}A^5) \\
& +H_oH_2(-24a^{18}A^8 - 10a^{15}A^{11} - 240a^{12}A^{14} + 1280a^9A^{17} - 1776a^6a^{20} + 756a^3A^{23} + 14a^{21}A^5) \\
& +H_1H_2(-32a^{19}A^8 + 2a^{16}A^{11} - 164a^{13}A^{14} + 800a^{10}A^{17} - 1040a^7A^{20} + 420a^4A^{23} + 14a^{22}A^5) \\
& +H_2^2(-24a^{21}A^8 + 22a^{18}A^{11} - 30a^{15}A^{14} + 100a^{12}A^{17} - 120a^9A^{20} + 45a^6A^{23} + 7a^{24}A^5))] \\
& -\frac{2}{3a^{13}A^6}[H_o^2(-10a^{12}A^2 + 1720a^6A^8 - 2952a^3A^{11} + 1485A^{14} - 240a^9A^5) \\
& +H_oH_1(-20a^{13}A^2 + 2600a^7A^8 - 4160a^4A^{11} + 1980aA^{14} - 400a^{10}A^5) \\
& +H_1^2(-10a^{14}A^2 + 940a^8A^8 - 1400a^5A^{11} + 630a^2A^{14} - 160a^{11}A^5) \\
& +H_oH_2(-20a^{15}A^2 + 1280a^9A^8 - 1776a^6A^{11} + 756a^3A^{14} - 240a^{12}A^5) \\
& +H_1H_2(-20a^{16}A^2 + 800a^{10}A^8 - 1040a^7A^{11} + 420a^4A^{14} - 160a^{13}A^5) \\
& +H_2^2(-10a^{18}A^2 + 100a^{12}A^8 - 120a^9A^{11} + 45a^6A^{14})]\varepsilon_o, \qquad (6.88)
\end{aligned}
$$

resolviendo la integral se obtiene:

$$
\begin{aligned}
& K_o[(a^3 - A^3 + B^3)^{1/3} - a] + \frac{1}{2}K_1[(a^3 - A^3 + B^3)^{1/3} - a]^2 + \frac{1}{3}K_2[(a^3 - A^3 + B^3)^{1/3} - a]^3 \\
& + \frac{1}{4}K_3[(a^3 - A^3 + B^3)^{1/3} - a]^4 + \frac{1}{5}K_4[(a^3 - A^3 + B^3)^{1/3} - a]^5 - P_o + \varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2a^4} = \varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2b^4}. \qquad (6.89)
\end{aligned}
$$

Introduciendo esta ecuación en el software Mathematica y asumiendo que:

$$A = 0.025 \text{ [m]}, \quad B = 0.035 \text{ [m]},$$

y se obtienen de forma numérica los radios finales del cuerpo esférico, para lo cual se asumen tres valores diferentes para las constantes C_o y P_o como se muestra en la tabla 68.

Tabla 68: Radios Finales del Cuerpo Esférico para algunos valores de C_o y P_o

C_o [C$^2VN^{-1}m^{-1}$]	P_o [Pa]	a [m]	b [m]
$1 \cdot 10^{-8}$	$5.0 \cdot 10^4$	0.0263289	0.0357006
$1 \cdot 10^{-8}$	$1.0 \cdot 10^5$	0.0282219	0.0367734
$1 \cdot 10^{-8}$	$1.5 \cdot 10^5$	0.0311632	0.0386004
$3 \cdot 10^{-8}$	$5.0 \cdot 10^4$	0.0263268	0.0356994
$3 \cdot 10^{-8}$	$1.0 \cdot 10^5$	0.0282197	0.0367721
$3 \cdot 10^{-8}$	$1.5 \cdot 10^5$	0.0311611	0.0385990
$5 \cdot 10^{-8}$	$5.0 \cdot 10^4$	0.0263227	0.0356972
$5 \cdot 10^{-8}$	$1.0 \cdot 10^5$	0.0282155	0.0367696
$5 \cdot 10^{-8}$	$1.5 \cdot 10^5$	0.0311568	0.0385962

Para calcular p en función de r se tiene la ecuación 5.162, donde se reemplazan los valores de las ecuaciones 5.147 y 5.148 en la integral con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} p(r) = {} & 2\Omega_1 \frac{(\xi^3 - a^3 + A^3)^{4/3}}{r^4} + 4\Omega_2 \frac{(\xi^3 - a^3 + A^3)^{2/3}}{r^2} + 2\Omega_5 \frac{(\xi^3 - a^3 + A^3)^{8/3}}{r^8} E_r^2 \\ & - \int_a^r \frac{2}{\xi} \left[2\Omega_1 \left(\frac{\xi^2}{(\xi^3 - a^3 + A^3)^{2/3}} - \frac{(\xi^3 - a^3 + A^3)^{4/3}}{\xi^4} \right) + 2\Omega_2 \left(\frac{\xi^4}{(\xi^3 - a^3 + A^3)^{4/3}} \right.\right. \\ & \left.\left. - \frac{(\xi^3 - a^3 + A^3)^{2/3}}{\xi^2} \right) - 2\Omega_5 \frac{(\xi^3 - a^3 + A^3)^{8/3}}{\xi^8} E_r^2 \right] d\xi + P_o - \varepsilon_o^{-1} \frac{C_o^2}{2a^4}, \end{aligned} \tag{6.90}$$

se reemplazan los valores de las derivadas de la función de Energía Libre calculadas en la sección 5.3.4 y el Campo Eléctrico $E_r(\xi)$ de la ecuación 6.77 obteniéndose:

$$\begin{aligned} p(r) = {} & \left(g_0 + g_1 \frac{(r^3 - a^3 + A^3)^{4/3}}{r^4} (H_o + H_1 r + H_2 r^3)^2 \right) \frac{(\xi^3 - a^3 + A^3)^{4/3}}{r^4} \\ & + \varepsilon_o \frac{(\xi^3 - a^3 + A^3)^{8/3}}{r^8} (H_o + H_1 r + H_2 r^3)^2 - 2 \int_a^r g_0 \frac{2\xi^3(A^3 - a^3) + (A^3 - a^3)^2}{\xi^5 (\xi^3 - a^3 + A^3)^{2/3}} d\xi \\ & -2 \int_a^r \frac{g_1 (\xi^3 - a^3 + A^3)^{2/3} (2\xi^3(A^3 - a^3) + (A^3 - a^3)^2) - \varepsilon_o (\xi^3 - a^3 + A^3)^{8/3}}{\xi^9} \\ & (H_o + H_1 r + H_2 r^3)^2 d\xi + P_o - \varepsilon_o^{-1} \frac{C_o^2}{2a^4}, \end{aligned} \tag{6.91}$$

donde la integral presenta algunos desafíos para poder resolverse y definimos sus términos al igual que la ecuación 6.81, con lo que tenemos:

$$\begin{aligned} p(r) = &\left(g_0 + g_1\frac{(r^3-a^3+A^3)^{4/3}}{r^4}(H_o+H_1r+H_2r^3)^2\right)\frac{(\xi^3-a^3+A^3)^{4/3}}{r^4} \\ &+\varepsilon_o\frac{(\xi^3-a^3+A^3)^{8/3}}{r^8}(H_o+H_1r+H_2r^3)^2 - \int_a^r T(\xi)d\xi + P_o - \varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2a^4}, \end{aligned} \tag{6.92}$$

asumiendo la misma Serie de Taylor de la ecuación 6.83 se resuelve la integral y se obtiene finalmente que:

$$\begin{aligned} p(r) = &\left(g_0 + g_1\frac{(r^3-a^3+A^3)^{4/3}}{r^4}(H_o+H_1r+H_2r^3)^2\right)\frac{(\xi^3-a^3+A^3)^{4/3}}{r^4} \\ &+\varepsilon_o\frac{(\xi^3-a^3+A^3)^{8/3}}{r^8}(H_o+H_1r+H_2r^3)^2 - K_o(r-a) - \frac{1}{2}K_1(r-a)^2 \\ &-\frac{1}{3}K_2(r-a)^3 - \frac{1}{4}K_3(r-a)^4 - \frac{1}{5}K_4(r-a)^5 + P_o - \varepsilon_o^{-1}\frac{C_o^2}{2a^4}. \end{aligned} \tag{6.93}$$

Las expresiones de los componentes de la matriz $\mathbb{M}$ se pueden definir con los componentes de $\mathbb{A}_{i\alpha j\beta}$, $\mathbb{B}_{i\alpha\beta}$ y $\mathbb{C}_{\alpha\beta}$ para este problema. Considerando solo los valores no nulos, estas componentes se expresan como:

$$\mathbb{A}_{i\alpha j\beta} = \frac{\partial\Omega}{\partial I_1}\frac{\partial^2 I_1}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}} + \frac{\partial\Omega}{\partial I_5}\frac{\partial^2 I_5}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}} - p[F_{\alpha i}^{-1}F_{\beta j}^{-1} - F_{\alpha j}^{-1}F_{i\beta}^{-1}], \tag{6.94}$$

$$\mathbb{B}_{i\alpha\beta} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial I_1\partial I_4}\frac{\partial I_1}{\partial F_{i\alpha}}\frac{\partial I_4}{\partial E_{l_\beta}} + \frac{\partial\Omega}{\partial I_5}\frac{\partial^2 I_5}{\partial F_{i\alpha}\partial E_{l_\beta}}, \tag{6.95}$$

$$\mathbb{C}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial I_4^2}\frac{\partial I_4}{\partial E_{l_\alpha}}\frac{\partial I_4}{\partial E_{l_\beta}} + \frac{\partial\Omega}{\partial I_4}\frac{\partial^2 I_4}{\partial E_{l_\alpha}\partial E_{l_\beta}} + \frac{\partial\Omega}{\partial I_5}\frac{\partial^2 I_5}{\partial E_{l_\alpha}\partial E_{l_\beta}}. \tag{6.96}$$

Reemplazando las derivadas calculadas en las secciones 5.2 y 5.3.4 se obtiene:

$$\mathbb{A}_{i\alpha j\beta} = \left(g_0 + g_1\frac{R^4}{r^4}E_r^2\right)\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} + \varepsilon_o E_{l_\alpha}\delta_{ij}E_{l_\beta} - p[F_{\alpha i}^{-1}F_{\beta j}^{-1} - F_{\alpha j}^{-1}F_{i\beta}^{-1}], \tag{6.97}$$

$$\mathbb{B}_{i\alpha\beta} = 2g_1 F_{i\alpha} E_{l_\beta} + \varepsilon_o(\delta_{\alpha\beta} F_{i\gamma} E_{l_\gamma} + E_{l_\alpha} F_{i\beta}), \tag{6.98}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_{\alpha\beta} = &\left[\frac{m_0 r^4}{m_1 R^4 E_r^2} sech^2\left(\frac{R^2 E_r}{m_1 r^2}\right) + \frac{m_0 r^6}{R^6 E_r^3} tanh\left(\frac{R^2 E_r}{m_1 r^2}\right)\right] E_{l_\alpha} E_{l_\beta} \\ &+ \left[\left(\frac{R^4}{r^4} + 2\frac{r^2}{R^2} - 3\right) g_1 - \frac{m_0 r^2}{R^2 E_r} tanh\left(\frac{R^2 E_r}{m_1 r^2}\right) - \zeta_o\right] \delta_{\alpha\beta} + \varepsilon_o c_{\alpha\beta}.\end{aligned} \tag{6.99}$$

6.6.2. Resultados

Introduciendo las matrices en el software Mathematica y reemplazando los valores de las variables se obtiene finalmente la matriz $\mathbb{M}(r)$ (que ahora depende de la posición radial r) y a su vez los valores propios de ella. Considerando 8 valores de r entre a y b se calculan los valores propios para los diferentes valores de C_o y P_o, como se expresan en las tablas 69 - 77.

Tabla 69: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 1 \cdot 10^{-8}$ [$C^2 V N^{-1} m^{-1}$] y $P_o = 5 \cdot 10^4$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0263289	799462	780234	780234	724365	724365	-347827
	59634.9	3765.7	3765.7	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0276677	792808	776471	776471	728793	728793	-345601
	55207.2	7528.88	7528.88	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0290065	787558	773540	773540	732479	732479	-344037
	51520.9	10459.8	10459.8	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0303453	783321	771190	771190	735548	735548	-342870
	48451.6	12809.9	12809.9	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0316841	779757	769183	769183	738037	738037	-341794
	45963.3	14817.2	14817.2	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0330230	776485	767214	767214	739848	739848	-340332
	44152.2	16786.4	16786.4	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.50 $\cdot 10^{-7}$
0.0343618	772995	764833	764833	740697	740697	-337692
	43302.9	19166.9	19166.9	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0357006	768568	761369	761369	740048	740048	-332615
	43952.3	22631.1	22631.1	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$

Tabla 70: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 1 \cdot 10^{-8}$ [$C^2VN^{-1}m^{-1}$] y $P_o = 1 \cdot 10^5$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0282219	819269	777367	777367	659878	659878	-303147
	124122	6633.42	6633.42	-1.51 $\cdot 10^{-7}$	-1.51 $\cdot 10^{-7}$	1.48 $\cdot 10^{-7}$
0.0294435	802701	767074	767074	666375	666375	-293075
	117625	16926.1	16926.1	-1.51 $\cdot 10^{-7}$	-1.51 $\cdot 10^{-7}$	1.48 $\cdot 10^{-7}$
0.0306651	789897	759230	759230	671957	671957	-285854
	112043	24769.8	24769.8	-1.51 $\cdot 10^{-7}$	-1.51 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0318868	779724	753062	753062	676744	676744	-280468
	107256	30937.6	30937.6	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0331084	771283	747921	747921	680714	680714	-275997
	103286	36078.9	36078.9	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0343301	763661	743080	743080	683615	683615	-271277
	100385	40920	40920	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0355517	755734	737561	737561	684860	684860	-264594
	99139.8	46438.6	46438.6	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0367734	745984	729976	729976	683400	683400	-253383
	100600	54024.3	54024.3	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$

Tabla 71: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 1 \cdot 10^{-8}$ [$C^2VN^{-1}m^{-1}$] y $P_o = 1.5 \cdot 10^5$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0311632	851222	781357	781357	593021	593021	-268243
	190979	2642.91	2642.91	-1.55 $\cdot 10^{-7}$	-1.55 $\cdot 10^{-7}$	1.44 $\cdot 10^{-7}$
0.0322257	819322	760181	760181	599128	599128	-242450
	184872	23819.3	23819.3	-1.54 $\cdot 10^{-7}$	-1.54 $\cdot 10^{-7}$	1.46 $\cdot 10^{-7}$
0.0332881	795089	744214	744214	604432	604432	-223521
	179568	39785.9	39785.9	-1.53 $\cdot 10^{-7}$	-1.53 $\cdot 10^{-7}$	1.46 $\cdot 10^{-7}$
0.0343506	776045	731736	731736	609034	609034	-209078
	174966	52264	52264	-1.52 $\cdot 10^{-7}$	-1.52 $\cdot 10^{-7}$	1.47 $\cdot 10^{-7}$
0.0354130	760264	721334	721334	612776	612776	-197040
	171224	62665.5	62665.5	-1.52 $\cdot 10^{-7}$	-1.52 $\cdot 10^{-7}$	1.48 $\cdot 10^{-7}$
0.0364755	745800	711456	711456	615090	615090	-184890
	168910	72544.3	72544.3	-1.51 $\cdot 10^{-7}$	-1.51 $\cdot 10^{-7}$	1.48 $\cdot 10^{-7}$
0.0375379	730261	700043	700043	614789	614789	169211
	-169049	83957.1	83957.1	-1.51 $\cdot 10^{-7}$	-1.51 $\cdot 10^{-7}$	1.48 $\cdot 10^{-7}$
0.0386004	710455	684221	684221	609842	609842	174158
	-144297	99778.7	99778.7	-1.51 $\cdot 10^{-7}$	-1.51 $\cdot 10^{-7}$	1.48 $\cdot 10^{-7}$

Tabla 72: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 3 \cdot 10^{-8}$ [$C^2VN^{-1}m^{-1}$] y $P_o = 5 \cdot 10^4$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0263268	799409	780210	780210	724423	724423	-347833
	59576.6	3789.55	3789.55	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0276658	792766	776454	776454	728846	728846	-345612
	55153.7	7545.91	7545.91	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0290047	787525	773528	773528	732528	732528	-344054
	51471.6	10471.7	10471.7	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0303437	783295	771182	771182	735594	735594	-342889
	48405.8	12817.6	12817.6	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0316826	779736	769178	769178	738079	738079	-341816
	45920.5	14821.6	14821.6	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0330216	776469	767212	767212	739888	739888	-340357
	44111.8	16787.7	16787.7	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0343605	772985	764835	764835	740736	740736	-337721
	43263.8	19164.7	19164.7	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0356994	768563	761376	761376	740087	740087	-332650
	43913	22624.4	22624.4	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$

Tabla 73: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 3 \cdot 10^{-8}$ [$C^2VN^{-1}m^{-1}$] y $P_o = 1 \cdot 10^5$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0282197	819216	777339	777339	659920	659920	-303135
	124080	6660.75	6660.75	-1.51 $\cdot 10^{-7}$	-1.51 $\cdot 10^{-7}$	1.48 $\cdot 10^{-7}$
0.0294415	802659	767055	767055	666415	666415	-293074
	117585	16945.2	16945.2	-1.51 $\cdot 10^{-7}$	-1.51 $\cdot 10^{-7}$	1.48 $\cdot 10^{-7}$
0.0306633	789865	759217	759217	671996	671996	-285861
	112004	24782.7	24782.7	-1.51 $\cdot 10^{-7}$	-1.51 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0318850	779699	753054	753054	676782	676782	-280481
	107218	30945.8	30945.8	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0331068	771264	747917	747917	680751	680751	-276014
	103249	36083.1	36083.1	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0343286	763648	743079	743079	683651	683651	-271299
	100349	40920.6	40920.6	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0355504	755726	737565	737565	684896	684896	-264622
	99103.9	46435.2	46435.2	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0367721	745982	729984	729984	683437	683437	-253419
	100563	54015.7	54015.7	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$

Tabla 74: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 3 \cdot 10^{-8}$ [$C^2VN^{-1}m^{-1}$] y $P_o = 1.5 \cdot 10^5$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0311611	851168	781326	781326	593046	593046	-268214
	190954	2674.04	2674.04	$-1.55 \cdot 10^{-7}$	$-1.55 \cdot 10^{-7}$	$1.44 \cdot 10^{-7}$
0.0322237	819280	760158	760158	599153	599153	-242433
	184847	23841.9	23841.9	$-1.54 \cdot 10^{-7}$	$-1.54 \cdot 10^{-7}$	$1.45 \cdot 10^{-7}$
0.0332862	795056	744198	744198	604457	604457	-223513
	179543	39802.1	39802.1	$-1.53 \cdot 10^{-7}$	$-1.53 \cdot 10^{-7}$	$1.46 \cdot 10^{-7}$
0.0343488	776020	731725	731725	609059	609059	-209079
	174941	52275.2	52275.2	$-1.52 \cdot 10^{-7}$	$-1.52 \cdot 10^{-7}$	$1.47 \cdot 10^{-7}$
0.0354113	760245	721328	721328	612802	612802	-197047
	171198	62672.5	62672.5	$-1.52 \cdot 10^{-7}$	$-1.52 \cdot 10^{-7}$	$1.48 \cdot 10^{-7}$
0.0364739	745786	711453	711453	615116	615116	-184903
	168884	72547.1	72547.1	$-1.51 \cdot 10^{-7}$	$-1.51 \cdot 10^{-7}$	$1.48 \cdot 10^{-7}$
0.0375364	730253	700045	700045	614816	614816	169184
	-169069	83955	83955	$-1.51 \cdot 10^{-7}$	$-1.51 \cdot 10^{-7}$	$1.48 \cdot 10^{-7}$
0.0385990	710456	684230	684230	609872	609872	174128
	-144329	99769.7	99769.7	$-1.51 \cdot 10^{-7}$	$-1.51 \cdot 10^{-7}$	$1.48 \cdot 10^{-7}$

Tabla 75: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 5 \cdot 10^{-8}$ [$C^2VN^{-1}m^{-1}$] y $P_o = 5 \cdot 10^4$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0263227	799303	780163	780163	724540	724540	-347843
	59459.9	3837.24	3837.24	$-1.50 \cdot 10^{-7}$	$-1.50 \cdot 10^{-7}$	$1.49 \cdot 10^{-7}$
0.0276619	792682	776420	776420	728953	728953	-345636
	55046.6	7579.98	7579.98	$-1.50 \cdot 10^{-7}$	$-1.50 \cdot 10^{-7}$	$1.49 \cdot 10^{-7}$
0.0290011	787459	773505	773505	732627	732627	-344086
	51372.8	10495.3	10495.3	$-1.50 \cdot 10^{-7}$	$-1.50 \cdot 10^{-7}$	$1.49 \cdot 10^{-7}$
0.0303403	783242	771167	771167	735686	735686	-342928
	48314.3	12833.1	12833.1	$-1.50 \cdot 10^{-7}$	$-1.50 \cdot 10^{-7}$	$1.49 \cdot 10^{-7}$
0.0316795	779695	769170	769170	738165	738165	-341860
	45835	14830.3	14830.3	$-1.50 \cdot 10^{-7}$	$-1.50 \cdot 10^{-7}$	$1.49 \cdot 10^{-7}$
0.0330188	776438	767210	767210	739969	739969	-340407
	44031	16790.2	16790.2	$-1.50 \cdot 10^{-7}$	$-1.50 \cdot 10^{-7}$	$1.50 \cdot 10^{-7}$
0.0343580	772964	764840	764840	740814	740814	-337778
	43185.6	19160.4	19160.4	$-1.50 \cdot 10^{-7}$	$-1.50 \cdot 10^{-7}$	$1.49 \cdot 10^{-7}$
0.0356972	768554	761389	761389	740166	740166	-332720
	43834.2	22611.1	22611.1	$-1.50 \cdot 10^{-7}$	$-1.50 \cdot 10^{-7}$	$1.50 \cdot 10^{-7}$

Tabla 76: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 5 \cdot 10^{-8}$ [$C^2VN^{-1}m^{-1}$] y $P_o = 1 \cdot 10^5$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0282155	819109	777285	777285	660003	660003	-303112
	123997	6715.39	6715.39	-1.51 $\cdot 10^{-7}$	-1.51 $\cdot 10^{-7}$	1.48 $\cdot 10^{-7}$
0.0294375	802577	767017	767017	666495	666495	-293072
	117505	16983.4	16983.4	-1.51 $\cdot 10^{-7}$	-1.51 $\cdot 10^{-7}$	1.48 $\cdot 10^{-7}$
0.0306595	789801	759191	759191	672074	672074	-285875
	111926	24808.6	24808.6	-1.51 $\cdot 10^{-7}$	-1.51 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0318815	779649	753038	753038	676857	676857	-280507
	107143	30962.1	30962.1	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0331035	771226	747908	747908	680824	680824	-276050
	103176	36091.5	36091.5	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0343256	763620	743078	743078	683723	683723	-271343
	100277	40921.8	40921.8	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0355476	755709	737572	737572	684968	684968	-264677
	99032.1	46428.4	46428.4	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$
0.0367696	745979	730002	730002	683511	683511	-253490
	100489	53998.5	53998.5	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	-1.50 $\cdot 10^{-7}$	1.49 $\cdot 10^{-7}$

Tabla 77: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 5 \cdot 10^{-8}$ [$C^2VN^{-1}m^{-1}$] y $P_o = 1.5 \cdot 10^5$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0311568	851061	781264	781264	593096	593096	-268157
	190904	2736.29	2736.29	-1.55 $\cdot 10^{-7}$	-1.55 $\cdot 10^{-7}$	1.44 $\cdot 10^{-7}$
0.0322196	819197	760113	760113	599203	599203	-242401
	184797	23887.1	23887.1	-1.54 $\cdot 10^{-7}$	-1.54 $\cdot 10^{-7}$	1.46 $\cdot 10^{-7}$
0.0332824	794992	744165	744165	604508	604508	-223499
	179492	39834.5	39834.5	-1.53 $\cdot 10^{-7}$	-1.53 $\cdot 10^{-7}$	1.46 $\cdot 10^{-7}$
0.0343451	775969	731702	731702	609110	609110	-209079
	174890	52297.6	52297.6	-1.52 $\cdot 10^{-7}$	-1.52 $\cdot 10^{-7}$	1.47 $\cdot 10^{-7}$
0.0354079	760206	721314	721314	612853	612853	-197059
	171147	62686.4	62686.4	-1.52 $\cdot 10^{-7}$	-1.52 $\cdot 10^{-7}$	1.47 $\cdot 10^{-7}$
0.0364707	745759	711447	711447	615169	615169	-184927
	168831	72552.8	72552.8	-1.51 $\cdot 10^{-7}$	-1.51 $\cdot 10^{-7}$	1.48 $\cdot 10^{-7}$
0.0375334	730238	700049	700049	614871	614871	169129
	-169109	83950.8	83950.8	-1.51 $\cdot 10^{-7}$	-1.51 $\cdot 10^{-7}$	1.48 $\cdot 10^{-7}$
0.0385962	710458	684248	684248	609933	609933	174067
	-144391	99751.6	99751.6	-1.51 $\cdot 10^{-7}$	-1.51 $\cdot 10^{-7}$	1.48 $\cdot 10^{-7}$

Además considerando el valor del Campo Eléctrico se puede determinar la matriz $\mathbb{M}'(r)$ y a su vez los valores propios de ella. Considerando 8 valores de r entre a y b se calculan los valores propios para los diferentes valores de C_o y P_o, como se expresan en las tablas 78 - 86.

Tabla 78: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 1 \cdot 10^{-8}$ [$\mathrm{C}^2 V N^{-1} m^{-1}$] y $\mathrm{P}_o = 5 \cdot 10^4$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0263289	-9302.74	9301.74	-9301.74	9301.74	-136.896	-136.896
	136.387	-136.387	135.896	135.896	$4.09 \cdot 10^{-12}$	$-2.57 \cdot 10^{-14}$
0.0276677	-10183.7	10182.7	-10182.7	10182.7	-143.209	-143.209
	142.701	-142.701	142.209	142.209	$6.89 \cdot 10^{-13}$	$-6.96 \cdot 10^{-15}$
0.0290065	-10454.6	10453.6	-10453.6	10453.6	-145.094	-145.094
	144.586	-144.586	144.094	144.094	$-2.03 \cdot 10^{-12}$	$-5.13 \cdot 10^{-13}$
0.0303453	-10059.8	-10058.8	10058.8	10058.8	-142.337	-142.337
	141.829	-141.829	141.337	141.337	$4.92 \cdot 10^{-12}$	$1.60 \cdot 10^{-12}$
0.0316841	-9008.94	-9007.94	9007.94	9007.94	-134.724	-134.724
	134.216	-134.216	133.724	133.724	$-3.12 \cdot 10^{-12}$	$2.30 \cdot 10^{-12}$
0.0330230	-7386.95	7385.95	-7385.95	7385.95	-122.041	-122.041
	121.532	-121.531	121.041	121.041	$1.73 \cdot 10^{-12}$	$-2.60 \cdot 10^{-13}$
0.0343618	-5364.51	5363.51	-5363.51	5363.51	-104.073	-104.073
	103.562	-103.562	103.073	103.073	$-5.00 \cdot 10^{-13}$	$-1.99 \cdot 10^{-13}$
0.0357006	-3209.33	3208.33	-3208.33	3208.33	-80.6056	-80.6056
	80.0918	-80.0912	79.6056	79.6056	$-5.85 \cdot 10^{-13}$	$-2.46 \cdot 10^{-13}$

Tabla 79: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 1 \cdot 10^{-8}$ [$\mathrm{C}^2 V N^{-1} m^{-1}$] y $\mathrm{P}_o = 1 \cdot 10^5$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0282219	-12995.7	12994.7	-12994.7	12994.7	-161.713	-161.713
	161.206	-161.206	160.713	160.713	$-5.12 \cdot 10^{-12}$	$2.52 \cdot 10^{-12}$
0.0294435	-13024.2	13023.2	13023.2	-13023.2	-161.89	-161.89
	161.383	-161.383	160.89	160.89	$-1.92 \cdot 10^{-12}$	$-3.05 \cdot 10^{-13}$
0.0306651	-12426.5	12425.5	-12425.5	12425.5	-158.143	-158.143
	157.636	-157.636	157.143	157.143	$3.43 \cdot 10^{-12}$	$-5.06 \cdot 10^{-13}$
0.0318868	-11222.4	-11221.4	11221.4	11221.4	-150.31	-150.31
	149.803	-149.803	149.31	149.31	$-4.07 \cdot 10^{-12}$	$-2.66 \cdot 10^{-14}$
0.0331084	-9485.44	-9484.44	9484.44	9484.44	-138.228	-138.228
	137.72	-137.72	137.228	137.228	$-2.75 \cdot 10^{-12}$	$1.35 \cdot 10^{-12}$
0.0343301	-7349.86	7348.86	7348.86	-7348.86	-121.735	-121.735
	121.226	-121.226	120.735	120.735	$1.11 \cdot 10^{-12}$	$-3.37 \cdot 10^{-14}$
0.0355517	-5017.65	5016.65	5016.65	-5016.65	-100.668	-100.668
	100.157	-100.156	99.6676	99.6676	$-1.32 \cdot 10^{-12}$	$-8.47 \cdot 10^{-13}$
0.0367734	-2765.8	-2764.8	2764.8	2764.8	-74.863	-74.863
	74.3482	-74.3482	73.863	73.863	$-1.62 \cdot 10^{-13}$	$4.08 \cdot 10^{-14}$

Tabla 80: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 1 \cdot 10^{-8}$ [$C^2VN^{-1}m^{-1}$] y $P_o = 1.5 \cdot 10^5$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0311632	-19775.6	-19775.6	19775.6	19775.6	-199.371	-199.371
	198.865	-198.865	198.371	198.371	$5.37 \cdot 10^{-12}$	$2.51 \cdot 10^{-14}$
0.0322257	-18205.1	-18204.1	18204.1	18204.1	-191.31	-191.31
	190.804	-190.804	190.31	190.31	$-5.97 \cdot 10^{-12}$	$2.41 \cdot 10^{-12}$
0.0332881	-16111.3	-16110.3	16110.3	16110.3	-180.002	-180.002
	179.496	-179.496	179.002	179.002	$1.73 \cdot 10^{-12}$	$1.39 \cdot 10^{-12}$
0.0343506	-13586.8	-13585.8	13585.8	13585.8	-165.339	-165.339
	164.832	-164.832	164.339	164.339	$-1.98 \cdot 10^{-12}$	$-4.88 \cdot 10^{-13}$
0.0354130	-10763.3	10762.3	10762.3	-10762.3	-147.214	-147.214
	146.706	-146.706	146.214	166.339	$-2.97 \cdot 10^{-12}$	$1.12 \cdot 10^{-12}$
0.0364755	-7815.82	-7814.82	7814.82	7814.82	-125.52	-125.52
	125.011	-125.01	124.52	124.52	$-4.42 \cdot 10^{-13}$	$-3.13 \cdot 10^{-13}$
0.0375379	-4965.89	-4964.89	4964.89	4964.89	-100.149	-100.149
	99.6384	-99.638	99.1495	99.1495	$1.30 \cdot 10^{-12}$	$-2.91 \cdot 10^{-13}$
0.0386004	-2485.75	-2484.75	2484.75	2484.75	-70.9965	-70.9965
	70.4809	-70.4801	69.9965	69.9965	$5.95 \cdot 10^{-13}$	$2.47 \cdot 10^{-13}$

Tabla 81: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 3 \cdot 10^{-8}$ [$C^2VN^{-1}m^{-1}$] y $P_o = 5 \cdot 10^4$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0263268	-83683	-83682	83682	83682	-409.602	-409.602
	409.099	-409.099	408.602	408.602	$-2.10 \cdot 10^{-11}$	$-2.90 \cdot 10^{-12}$
0.0276658	-91619.5	-91618.5	91618.5	91618.5	-428.562	-428.562
	428.06	-428.06	427.562	427.562	$4.02 \cdot 10^{-11}$	$2.20 \cdot 10^{-11}$
0.0290047	-94065.1	-94064.1	94064.1	94064.1	-434.238	-434.238
	433.735	-433.735	433.238	433.238	$2.50 \cdot 10^{-11}$	$1.23 \cdot 10^{-11}$
0.0303437	-90519.7	-90518.7	90518.7	90518.7	-425.985	-425.985
	425.483	-425.483	424.985	424.985	$-2.79 \cdot 10^{-11}$	$-2.44 \cdot 10^{-12}$
0.0316826	-81069.1	-81068.1	81068.1	81068.1	-403.162	-403.162
	402.659	-402.659	402.162	402.162	$-2.18 \cdot 10^{-11}$	$-1.45 \cdot 10^{-11}$
0.0330216	-66476.3	-66475.3	66475.3	66475.3	-365.124	-365.124
	364.621	-364.621	364.124	364.124	$6.55 \cdot 10^{-12}$	$-2.11 \cdot 10^{-12}$
0.0343605	-48277.5	48276.5	48276.5	-48276.5	-311.23	-311.23
	310.727	-310.726	310.23	310.23	$-8.49 \cdot 10^{-12}$	$3.57 \cdot 10^{-12}$
0.0356994	-28881.6	28880.6	-28880.6	28880.6	-240.836	-240.836
	240.331	-240.331	239.836	239.836	$-8.39 \cdot 10^{-12}$	$6.05 \cdot 10^{-13}$

Tabla 82: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 3 \cdot 10^{-8}$ [C$^2 V N^{-1} m^{-1}$] y P$_o = 1 \cdot 10^5$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0282197	-116913	-116912	116912	116912	-484.054	-484.054
	483.552	-483.552	483.054	483.054	1.62 $\cdot 10^{-11}$	-1.56 $\cdot 10^{-11}$
0.0294415	-117179	-117178	117178	117178	-484.603	-484.603
	484.101	-484.101	483.603	483.603	4.22 $\cdot 10^{-11}$	-1.59 $\cdot 10^{-11}$
0.0306633	-111809	-111808	111808	111808	-473.381	-473.381
	472.879	-472.879	472.381	472.381	5.34 $\cdot 10^{-12}$	-3.34 $\cdot 10^{-12}$
0.0318850	-100980	100979	100979	-100979	-449.899	-449.899
	449.396	-449.396	448.899	448.899	2.75 $\cdot 10^{-11}$	7.90 $\cdot 10^{-12}$
0.0331068	-85354.7	-85353.7	85353.7	85353.7	-413.668	-413.668
	413.165	-413.165	412.668	412.668	-6.08 $\cdot 10^{-12}$	3.01 $\cdot 10^{-12}$
0.0343286	-66139.7	66138.7	-66138.7	66138.7	-364.2	-364.2
	363.697	-363.697	363.2	363.2	-1.25 $\cdot 10^{-11}$	-3.34 $\cdot 10^{-12}$
0.0355504	-45153	-45152	45152	45152	-301.007	-301.007
	300.503	-300.503	300.007	300.007	7.09 $\cdot 10^{-12}$	2.77 $\cdot 10^{-12}$
0.0367721	-24887.5	24886.5	24886.5	-24886.5	-223.599	-223.599
	223.094	-223.094	222.599	222.599	-2.54 $\cdot 10^{-12}$	6.14 $\cdot 10^{-13}$

Tabla 83: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 3 \cdot 10^{-8}$ [C$^2 V N^{-1} m^{-1}$] y P$_o = 1.5 \cdot 10^5$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0311611	-177925	177924	-177924	177924	-597.03	-597.03
	596.528	-596.528	596.03	596.03	-6.42 $\cdot 10^{-11}$	2.30 $\cdot 10^{-11}$
0.0322237	-163802	163801	-163801	163801	-592.865	-592.865
	592.363	-592.363	591.865	591.865	3.28 $\cdot 10^{-11}$	3.53 $\cdot 10^{-12}$
0.0332862	-144968	-144967	144967	144967	-538.955	-538.955
	538.453	-538.453	537.955	537.955	5.30 $\cdot 10^{-11}$	-4.15 $\cdot 10^{-11}$
0.0343488	-122255	122254	122254	-122254	-494.979	-494.979
	494.476	-494.476	493.979	493.979	-1.26 $\cdot 10^{-11}$	1.18 $\cdot 10^{-11}$
0.0354113	-96851.5	-96850.5	96850.5	96850.5	-440.615	-440.615
	440.112	-440.112	439.615	439.615	1.25 $\cdot 10^{-11}$	-5.62 $\cdot 10^{-12}$
0.0364739	-70329.4	70328.4	-70328.4	70328.4	-375.543	-375.543
	375.04	-375.04	374.543	374.543	1.38 $\cdot 10^{-11}$	-1.66 $\cdot 10^{-12}$
0.0375364	-44683.6	-44682.6	44682.6	44682.6	-299.441	-299.441
	298.937	-298.937	298.441	298.441	1.17 $\cdot 10^{-11}$	-9.41 $\cdot 10^{-12}$
0.0385990	-22364.3	22363.3	-22363.3	22363.3	-211.987	-211.987
	211.482	-211.482	210.987	210.987	-6.08 $\cdot 10^{-12}$	-1.85 $\cdot 10^{-12}$

Tabla 84: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 5 \cdot 10^{-8}$ [$C^2VN^{-1}m^{-1}$] y $P_o = 5 \cdot 10^4$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0263227	-232263	232262	-232262	232262	-682.061	-682.061
	681.559	-681.559	681.061	681.061	-6.16 $\cdot 10^{-12}$	-2.61 $\cdot 10^{-13}$
0.0276619	-254352	254351	-254351	254351	-713.733	-713.733
	713.231	-713.231	712.733	712.733	7.99 $\cdot 10^{-11}$	2.17 $\cdot 10^{-11}$
0.0290011	-261190	-261189	261189	261189	-723.258	-723.258
	722.756	-722.756	722.258	722.258	-6.69 $\cdot 10^{-11}$	1.30 $\cdot 10^{-11}$
0.0303403	-251386	251385	251385	-251385	-709.562	-709.562
	709.061	-709.061	708.562	708.562	-9.08 $\cdot 10^{-11}$	3.68 $\cdot 10^{-11}$
0.0316795	-225172	225171	-225171	225171	-671.575	-671.575
	671.073	-671.073	670.575	670.575	-6.58 $\cdot 10^{-11}$	-4.49 $\cdot 10^{-11}$
0.0330188	-184665	-184664	184664	184664	-608.223	-608.223
	607.722	-607.722	607.223	607.223	3.63 $\cdot 10^{-11}$	1.05 $\cdot 10^{-11}$
0.0343580	-134129	-134128	134128	134128	-518.435	-518.435
	517.933	-517.933	517.435	517.435	5.29 $\cdot 10^{-11}$	-2.64 $\cdot 10^{-11}$
0.0356972	-80256.3	80255.3	-80255.3	80255.3	-401.138	-401.138
	400.635	-400.635	400.138	400.138	2.98 $\cdot 10^{-11}$	-1.47 $\cdot 10^{-11}$

Tabla 85: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 5 \cdot 10^{-8}$ [$C^2VN^{-1}m^{-1}$] y $P_o = 1 \cdot 10^5$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0282155	-324534	324533	324533	-324533	-806.146	-806.146
	805.645	-805.645	805.146	805.146	5.87 $\cdot 10^{-11}$	2.69 $\cdot 10^{-11}$
0.0294375	-325324	325323	-325323	325323	-807.127	-807.127
	806.625	-806.625	806.127	806.127	7.93 $\cdot 10^{-11}$	-2.25 $\cdot 10^{-11}$
0.0306595	-310459	310458	310458	-310458	-788.483	-788.483
	787.981	-787.981	787.483	787.483	3.76 $\cdot 10^{-11}$	5.74 $\cdot 10^{-12}$
0.0318815	-280426	-280425	280425	280425	-749.4	-749.4
	748.898	-748.898	748.4	748.4	-6.75 $\cdot 10^{-11}$	-2.04 $\cdot 10^{-12}$
0.0331035	-237060	-237059	237059	237059	-689.063	-689.063
	688.561	-688.561	688.063	688.063	4.56 $\cdot 10^{-11}$	1.82 $\cdot 10^{-11}$
0.0343256	-183714	-183713	183713	183713	-606.657	-606.657
	606.155	-606.155	605.657	605.657	-8.66 $\cdot 10^{-11}$	-6.65 $\cdot 10^{-12}$
0.0355476	-125435	-125434	125434	125434	-501.368	-501.368
	500.866	-500.866	500.368	500.368	2.25 $\cdot 10^{-11}$	-1.26 $\cdot 10^{-11}$
0.0367696	-69148.6	-69147.6	69147.6	69147.6	-372.381	-372.381
	371.878	-371.878	371.381	371.381	3.41 $\cdot 10^{-27}$	0

Tabla 86: Valores Propios de la Matriz $\mathbb{M}'$ para algunos valores de r entre a y b considerando $C_o = 5 \cdot 10^{-8}$ [$C^2 V N^{-1} m^{-1}$] y $P_o = 1.5 \cdot 10^5$ [Pa]

r [m]	Valores Propios					
0.0311568	-493967	493966	-493966	493966	-994.448	-994.448
	993.947	-993.947	993.448	993.448	$-1.32 \cdot 10^{-10}$	$-3.74 \cdot 10^{-11}$
0.0322196	-454798	454797	-454797	454797	-954.227	-954.227
	953.726	-953.726	953.227	953.227	$-3.22 \cdot 10^{-11}$	$2.20 \cdot 10^{-11}$
0.0332824	-402539	-402538	402538	402538	-897.76	-897.76
	897.259	-897.259	896.76	896.76	$1.90 \cdot 10^{-10}$	$-2.62 \cdot 10^{-12}$
0.0343451	-339499	339498	-339498	339498	-824.512	-824.512
	824.01	-824.01	823.512	823.512	$1.52 \cdot 10^{-10}$	$-7.27 \cdot 10^{-11}$
0.0354079	-268972	268971	-268971	268971	-733.946	-733.946
	733.445	-733.445	732.946	732.946	$-5.95 \cdot 10^{-11}$	$-8.64 \cdot 10^{-12}$
0.0364707	-195330	-195329	195329	195329	-625.527	-625.527
	625.025	-625.025	624.527	624.527	$5.35 \cdot 10^{-11}$	$3.37 \cdot 10^{-11}$
0.0375334	-124112	124111	-124111	124111	-498.719	-498.719
	498.217	-498.217	497.719	497.719	$-2.33 \cdot 10^{-11}$	$5.77 \cdot 10^{-12}$
0.0385962	-62124	62123	62123	-62123	-352.986	-352.986
	352.483	-352.483	351.986	351.986	$1.05 \cdot 10^{-11}$	$-6.88 \cdot 10^{-14}$

6.7. Comentarios

Los resultados obtenidos en los diferentes problemas consideran las deformaciones finales para cada geometría, además del estudio de los valores propios de las matrices $\mathbb{M}$ y $\mathbb{M}'$ para diferentes valores dados en cada caso.

6.7.1. Deformación en un Medio Semi-Infinito Plano

Se calculó λ y E_2 para diferentes valores de E_o y se logró observar que a medida que el Campo Eléctrico externo E_o aumenta pasa lo mismo con el Campo Eléctrico uniforme E_2, pero la magnitud del parámetro λ disminuye. Se logró apreciar que la magnitud del Campo Eléctrico uniforme E_2 es mayor para la primera función de Energía Libre que para la segunda considerando los mismos valores de E_o, pero los parámetros λ no se diferencian significativamente entre cada tipo de función de energía, lo que implica que su deformación es aproximadamente la misma en cada caso.

El parámetro λ es menor a 1 lo que implica que existe una acortamiento en la dirección 1 y un alargamiento en la dirección 2 como se observa en la figura 13, donde la línea normal simboliza el medio semi-infinito plano antes de la presencia del Campo Eléctrico y la línea punteada simboliza el medio semi-infinito plano ya deformado por la presencia del Campo Eléctrico. Además se logra apreciar que la magnitud del parámetro λ se acerca cada vez más a 1 cuando el Campo Eléctrico externo disminuye, lo que indica que la deformación aumenta en presencia de dicho campo.

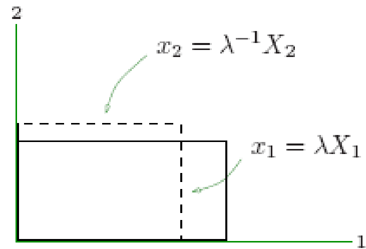


Figura 13: Espacio semi-infinito deformado

Como se observa en las tabla 4 los valores propios de la matriz $\mathbb{M}$ para E_o entre 10^2 y 10^4 son positivos, a excepción de unos pocos números que resultaron ser negativos pero que su rango no supera los 10^{-4}. Es por eso que se puede asumir dichos números iguales a cero lo que implicaría que los valores propios para E_o entre 10^2 y 10^4 presentan una configuración estable. En cambio en las tablas 5 y 7 - 8 los valores propios de la matriz $\mathbb{M}$ y $\mathbb{M}'$ para cada valor diferente de E_o no presentan el mismo signo, lo que implica que su configuración está en equilibrio neutro.

6.7.2. Deformación de un Tubo Cilíndrico

Se calcularon los radios finales internos y externos, a y b, para diferentes valores de C_o y P_o, y valores fijos de los radios iniciales interno y externo, A y B. Se logró apreciar que a medida que la presión interna P_o aumenta en el tubo cilíndrico la deformación que se presenta es mayor, pero no pasa lo mismo con la constante C_o que disminuye a medida que aumenta la deformación del cuerpo.

La deformación presentada en el tubo cilíndrico es de tipo radial y es muy pequeña para una presión interna P_o de 10^4 pero muy grande para una presión interna P_o de 10^5, como se presenta en las tablas 9 y 29. Además comparando esta deformación con la presentada para diferentes valores de la constante C_o se puede observar que la diferencia entre las deformaciones del tubo cilíndrico son mayores variando P_o que variando C_o.

Es importante destacar que en las tablas 9 y 29 los valores de los radios finales para cada valor de C_o y P_o en ambos problemas es el mismo, lo que implica que la deformación es la misma considerando la primera o segunda función de energía libre.

Todos los valores de los radios finales, a y b, en cada problema fueron mayores a los radios iniciales, A y B respectivamente; lo que implica que el tubo cilíndrico presentó una inflación como se observa en la figura 14.

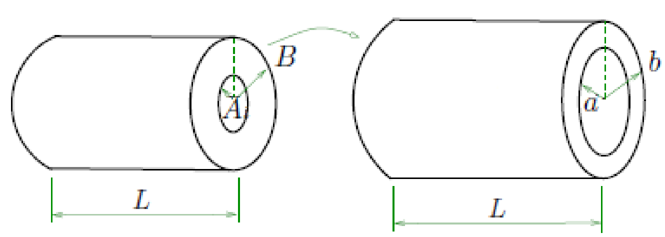


Figura 14: Tubo Cilíndrico deformado

Para cada uno de los radios finales presentados en las tablas 9 y 29 se consideraron 8 valores diferentes de r entre a y b, y se obtuvo las matrices $\mathbb{M}$ y $\mathbb{M}'$. Para cada matriz se calcularon los valores propios de estas como se observa en las tablas 10 - 27 y 30 - 47, y se logró observar que para cada caso los valores propios no presentaron el mismo signo, lo que implica que la configuración del tubo cilíndrico está en equilibrio neutro.

6.7.3. Deformación de una Esfera Hueca bajo Presión Interna

Se calcularon los radios finales internos y externos, a y b, para diferentes valores de C_o y P_o, y valores fijos de los radios iniciales interno y externo, A y B. Se logró apreciar que a medida que la presión interna P_o aumenta en el cuerpo esférico la deformación que se presenta es mayor, pero no pasa lo mismo con la constante C_o que disminuye a medida que aumenta la deformación del cuerpo.

La deformación presentada en el cuerpo esférico es de tipo radial y es muy pequeña para una presión interna P_o de $5 \cdot 10^4$ pero muy grande para una presión interna P_o de $1.5 \cdot 10^5$, como se presenta en las tablas 48 y 68. Además comparando esta deformación con la presentada para diferentes valores de la constante C_o se puede observar que la diferencia entre las deformaciones del cuerpo esférico son mayores variando P_o que variando C_o.

Es importante destacar que comparando las tablas 48 y 68 se aprecia los radios finales para cada valor de C_o y P_o en el cuerpo esférico bajo la presencia de la segunda función de Energía Libre son mayores a los observados en presencia de la primera función de Energía Libre, lo que implica que la deformación es mayor para la segunda función.

Bajo el efecto de la presión y del Campo Eléctrico la esfera sufrió un inflado tal como se presenta de forma esquemática en la figura 15.

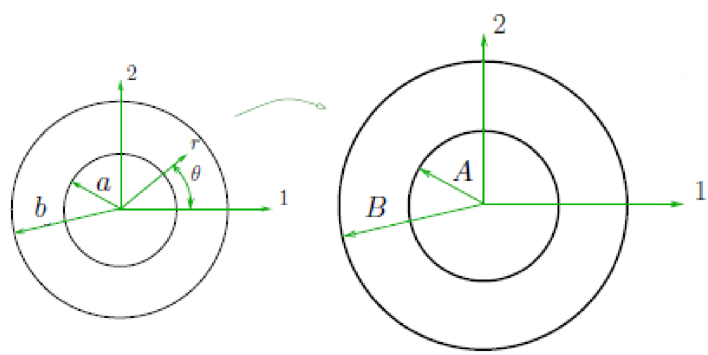


Figura 15: Cuerpo Esférico deformado

Para cada uno de los radios finales presentados en las tablas 48 y 68 se consideraron 8 valores diferentes de r entre a y b, y se obtuvo la matriz $\mathbb{M}$ y $\mathbb{M}'$. Para cada matriz se calcularon los valores propios de estas como se observa en las tablas 49 - 66 y 69 - 86, y se logró observar que para cada caso los valores propios no presentaron el mismo signo, lo que implica que la configuración del cuerpo esférico está en equilibrio neutro al igual que el caso anterior.

CAPÍTULO 7

Conclusiones

En el presente trabajo se estudió el comportamiento de la segunda variación para tres problemas de valor de frontera con diferentes geometrías y vectores de Campo Eléctrico. La segunda variación, y en particular su signo, se usó como criterio para predecir la aparición de inestabilidades electro-elásticas en los diferentes cuerpos.

Por medio de los resultados se observa que se pueden obtener grandes deformaciones elásticas bajo el efecto de un Campo Eléctrico externo. Es importante considerar la dirección y magnitud del Campo Eléctrico aplicado para los diferentes tipos de geometrías, ya que gracias a estos se pudieron estudiar los diferentes problemas.

Los resultados obtenidos en el medio semi-infinito plano indican que existe una pequeña expansión del cuerpo en la dirección perpendicular al plano debido al Campo Eléctrico uniforme actuando en la misma dirección de la deformación. Para ambas funciones de Energía Libre ocupadas en esta geometría el tipo y magnitud de deformación fueron casi iguales, lo que implica que la deformación en el medio semi-infinito plano no depende en gran medida de las funciones de Energía Libre estudiadas, esto debido a que para las deformaciones presentes, las energías de deformación no presentan diferencias para el comportamiento del cuerpo.

Además los resultados obtenidos en el tubo cilíndrico indican que existe una expansión de los radios del cuerpo debido a la presencia del Campo Eléctrico radial. La magnitud de las deformaciones observadas dependen principalmente de la presión interna del tubo cilíndrico, ya que los radios finales son mayores para una presión interna mayor. Para ambas funciones de Energía Libre ocupadas en esta geometría el tipo y magnitud de deformación fueron casi iguales considerando los mismos valores de las constantes, lo que implica que la deformación en el tubo cilíndrico no depende en gran medida de las funciones de Energía Libre estudiadas, si no mas bien de la presión interna.

En cambio los resultados obtenidos en el cuerpo esférico indican que existe una expansión de los radios del cuerpo debido a la presencia del Campo Eléctrico radial. La magnitud de las deformaciones observadas dependen principalmente de la presión interna del cuerpo esférico, ya que los radios finales son mayores para una presión interna mayor. En la segunda función de Energía Libre la deformación del cuerpo fue mayor en comparación con la obtenida para la primera función de Energía Libre considerando los mismos valores de las constantes, lo que implica que la deformación en el cuerpo esférico depende de las funciones de Energía Libre estudiadas y además de la presión interna.

En todos los casos estudiados no se pudo determinar si la configuración era estable o inestable, si no mas bien se encontraban en una situación de equilibrio neutro. Debido a esto se puede cuestionar el método de la segunda variación $\delta^2\Pi$ para la cual se debió calcular una gran cantidad de valores propios y estudiar sus signos, los cuales nunca fueron todos positivos ni todos negativos para una misma matriz, lo que era muy difícil de obtener.

Todo este estudio demostró que que este método no tiene validez alguna para determinar la existencia de inestabilidad elástica en un cuerpo.

Bibliografía

[1] R. Bustamante, A. and J. Merodio, "On weak formulations and their second variation in nonlinear electroelasticity", Mechanics Research Communications, vol. 46, pp. 15-19, 2012.

[2] A. Dorfmann and R. Ogden, "Nonlinear electroelastic Deformations", Journal of Elasticity, pp. 1-29, 2006. 10.1007/s10659-005-9028-y.

[3] G. Bossis, C. Abbo, S. Cutillas, C. Lacis and C. Métayer, "Electroactive and Electrostructured Elastomers", Int. J. Modern Phys. B, pp. 564-573, 2001.

[4] Z. Varga, G. Filipcsei, and M. Zrinyi, "Smart composites with controlled anisotropy", Polymer, vol. 46, no. 18, pp. 7779 - 7787, 2005. Stimuli Responsive Polymers, IUPAC MACRO 2004.

[5] R. Pelrine, R. Kornbluh, Q. Pei and J. Joseph, "High-Speed Electrically Actuated Elastomers with Strain Greater Than 100 %", Science, pp. 836-839, 2000. 10.1126/science.287.5454.836.

[6] A. O'Halloran, F. O'Malley and P. McHugh, "A review on dielectric elastomer actuators, technology, applications and challenges", Journal of Applied Physics, pp. 104, 2008. 10.1063/1.2981642.

[7] A. Dorfmann and R. Ogden, "Nonlinear electroelasticity", Acta Mechanica, vol. 174, pp. 167-183, 2005. 10.1007/s00707-004-0202-2.

[8] R. Bustamante, A. Dorfmann and R. Ogden, "Nonlinear electroelastostatics: a variational framework", Z. angew. Math. Phys., vol. 60, pp. 154-177, 2009. 10.1007/s00033-007-7145-0.

[9] A. J. M. Spencer, "Theory of invariants. In: Continuum physics", Academic Press, vol. 1, pp. 239-353, 1971.

[10] R. Bustamante, J. Merodio, "On weak formulations and their second variation in nonlinear electroelasticity", Mechanics Research Communications, vol. 46, pp. 15-19, 2012.

[11] R. Díaz-Calleja, P. Llovera-Segovia, J. Dominguez, M. Carsí and A. Quijano, "Theoretical modelling and experimental results of electromechanical actuation of an elastomer", Journal of Applied Physics, pp. 1-10, 2013. 10.1088/0022-3727/46/23/235305.

[12] R. Bustamante, "Mecánica de Medios Continuos", Apuntes de Curso, 2012.