



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

ESTRUCTURA Y NÚMEROS DE RAMSEY PARA CICLOS VERSUS RUEDAS DE
TAMAÑO IMPAR

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

NICOLÁS IGNACIO SANHUEZA MATAMALA

PROFESORA GUÍA:
MAYA STEIN

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
MAYA STEIN
MARTÍN MATAMALA VÁSQUEZ
JOSÉ SOTO SAN MARTÍN

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por Fondecyt Iniciación 11090141 y Centro de Modelamiento Matemático.

SANTIAGO DE CHILE
JUNIO 2014

**RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR AL
TÍTULO DE:** Ingeniero Civil Matemático.
POR: Nicolás Sanhueza Matamala.
FECHA: 30 de junio de 2014
PROFESOR GUÍA: Maya Stein.

ESTRUCTURA Y NÚMEROS DE RAMSEY PARA CICLOS VERSUS RUEDAS DE TAMAÑO IMPAR

Se estudia la estructura de grafos completos de tamaño apropiado, con una coloreación de sus aristas en dos colores, de manera tal que no presentan como subgrafos monocromáticos a ciertos tipos de grafos específicos. En este caso se considera el caso de un ciclo impar C_n con n vértices y una rueda $W_n := K_1 + C_n$ con $n + 1$ vértices; en el caso en que n es impar.

Se muestra que para n impar y todo grafo completo de tamaño apropiado, con una coloreación de sus aristas en azul y rojo que no contenga como subgrafo monocromático rojo a C_n ni como subgrafo monocromático azul a W_n ; eliminando a lo más dos vértices se obtiene una partición de sus vértices en tres conjuntos que inducen grafos completos de color rojo, y aristas formando un grafo tripartito completo.

Dicho resultado se puede ver como una generalización de resultados presentados por Nikiforov y Schelp; y como una suerte de recíproca a cotas conocidas para números de Ramsey asimétricos.

Como resultado secundario de la demostración se obtienen dos cotas para el número de Ramsey de $r(C_{2k+1}, W_{2k+2})$: una es más fina para valores pequeños de k y la otra es mejor en el caso asintótico. Los valores exactos de dichos números de Ramsey son, en este instante, un problema abierto. Las cotas expresadas son una aproximación a los valores que han sido conjeturados y permiten ver que, al menos a un nivel asintótico, dichos resultados son ciertos.

*«Sigán leyendo, sigán imaginando. No copien, busquen sus propias ideas y estilo, y sean fieles a eso.
No olviden leer y documentarse. ¡La creatividad es informada! ¡Investiguen!»*

—Themo Lobos

Agradecimientos

Muchas gracias a toda mi familia por su constante y sempiterno apoyo, por siempre haberme soportado en mis venturas académicas y de la vida en general. A mi madre Manira, mi padre Mario y mis hermanos Andrés y Francisco por siempre haber estado ahí: cualquier triunfo que pueda llegar a tener es culpa de ustedes. A mis tíos, abuelos y primos por el apoyo constante. De forma muy especial agradezco a Jaime, Norma, Karen, Piti, Caro, Simona y todo el resto de la familia Contreras-Sanhueza «por la casa» y por su cálido recibimiento a este palurdo sureño en los primeros años en la gran ciudad.

A Ángela, por su compañía, cariño y apoyo incondicional durante todos estos años. <3

A mis compañeros de carrera y generación por haber creado un entorno entretenido y desafiante para convivir; y además por estar siempre dispuestos a contestar mis molestas dudas de aritmética básica. Nada hubiese sido lo mismo sin ustedes. A Ignacio Correa por sus valiosos aportes a esta memoria. A todos ustedes —de a uno a uno, individualmente— vayan mis más afectuosos agradecimientos.

A los profesores, académicos y funcionarios de Ingeniería Civil Matemática, por hacer de mi paso por la carrera una instancia agradable. Al profesor Cristián Reyes por reafirmar mi gusto por las matemáticas y por el carácter. A la profesora Maya Stein por su apoyo, guía y consejo durante el desarrollo de este trabajo; a los profesores Martín Matamala y José Soto por su participación en la comisión.

Por último, pero no por eso menos importante, agradezco a Felipito. Tu recuerdo siempre vivirá entre nosotros. Vuelta alto, halcón.

Índice general

Introducción	1
1. Definiciones básicas y resultados previos	4
1.1. Definiciones básicas y notación	4
1.1.1. Definiciones elementales	4
1.1.2. Teoría de Ramsey	6
1.2. Resultados previos	7
1.2.1. Resultados previos	7
1.2.2. Resultados obtenidos	9
1.2.3. Lemas usados	11
2. Estructura de grafos sin ciclos ni ruedas	14
2.1. Demostración del teorema principal	14
3. Cotas en el número de Ramsey para rueda par versus ciclo impar	26
3.1. Demostración del teorema secundario	26
3.2. Mejora de la cota asintótica	33
Conclusión	38

Introducción

El trabajo realizado se enmarca dentro de la teoría de grafos, y en particular, se buscan resultados relacionados a la teoría de Ramsey, estabilidad y estructura en grafos. En un sentido muy vago, la teoría de Ramsey en grafos asegura que todo grafo G con suficiente tamaño contiene a un grafo fijo H como subgrafo, o bien, el complemento de G contiene a H como subgrafo.

Un ejemplo concreto de resultados en teoría de Ramsey, y que atañe al trabajo realizado en la memoria, es el número de Ramsey para ciclos de tamaño n . De acuerdo a lo obtenido por Faudree et al. [FS74], se sabe que cuando $n \geq 5$ es impar, todo grafo con $2n - 1$ vértices contiene al ciclo de tamaño n , o bien su complemento lo contiene. Además, cuando $n \geq 4$ es par, todo grafo con $\frac{3}{2}n - 1$ vértices contiene al ciclo de tamaño n , o bien su complemento lo contiene.

Aparte de estos resultados, interesa estudiar casos adyacentes a estos que se relacionan con ciertos resultados de «estabilidad y estructura». En un sentido un poco más preciso: el problema de estudio en la presente memoria es la estructura de grafos completos de tamaño apropiado, con una coloreación de sus aristas en dos colores, de manera tal que no presentan como subgrafos monocromáticos a ciertos tipos de grafos específicos. Interesa estudiar qué formas pueden tomar las coloreaciones de tales grafos, dadas las restricciones de subgrafos mencionadas.

Por ejemplo, considérese el caso de un ciclo de tamaño impar $n = 2k + 1$. ¿Qué tipo de coloreaciones no contienen a C_n en ningún color? Una forma construir una coloreación que cumpla esto es la siguiente. En un grafo con a lo más $4k$ vértices, construir una partición de los vértices en $\{V_1, V_2\}$ donde cada parte tiene tamaño a lo más $2k$. Luego toda arista que tenga los extremos de sus vértices en el mismo elemento de la partición se colorea de color rojo, en caso contrario, azul. Entonces forma dos grafos completos disjuntos de tamaño a lo más $2k$ en color rojo, por lo que no puede contener a C_n en color rojo. Además las aristas azules forman un grafo bipartito y C_n no lo es dado que n es impar, así que tampoco puede estar como subgrafo en el color azul. Nótese que intercambiando los colores se llega a la misma conclusión.

Lo que es más interesante de esta construcción es que para n impar, salvo una posible eliminación de un vértice y/o intercambio de colores, se tiene que *todo* grafo de tamaño apropiado con una coloración que prohíba a los ciclos C_n *debe* tomar la forma ya nombrada. Esto fue demostrado por Nikiforov y Schelp [NS08].

En el contexto de esta memoria se centró en estudiar una instancia similar, pero en el caso de un ciclo impar C_n con n vértices y una rueda $W_n := K_1 + C_n$ con $n + 1$ vértices; en el caso en que n es impar. Algunos resultados de cotas para el número de Ramsey de ciclos versus ruedas fueron entregados por Zhang et al. [ZCC10], quienes muestran que si m impar, $n \geq m$ y $m \geq 20$, entonces todo grafo en $3n - 2$ vértices contiene a C_n como subgrafo, o bien su complemento contiene a W_m como subgrafo. En particular, esto sirve para el caso en que $n = m$.

Realizando una construcción parecida a la ya mostrada, se puede encontrar una coloración que no contenga a C_n en color rojo ni a W_n en color azul, en un grafo con a lo más $3(n - 1)$ vértices. Se particionan sus vértices en tres conjuntos $\{V_1, V_2, V_3\}$ donde ninguno tiene tamaño mayor a $n - 1$, y se escogen las aristas azules para que sean exclusivamente las que tienen sus extremos en componentes distintas de la partición. Dicho grafo no tiene como subgrafo de color rojo a C_n ni como subgrafo de color azul a W_n .

Se busca un resultado similar al de Nikiforov y Schelp en el caso de prohibición de ciclos en ambos colores, pero aplicado a estas instancias donde se prohíben ciclos y ruedas respectivamente. El resultado principal es el siguiente:

Teorema 1.2.11

Sea $n = 2k + 1 \geq 13$, un número impar. Si $N \geq 5k + 3$; y $G := K_N$ tiene una coloreación de sus aristas $c : E(G) \rightarrow \{R, A\}$ de manera tal que $C_n \not\subseteq G^R$ y $W_n \not\subseteq G^A$, entonces $V(G)$ se puede particionar en $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup B$ tal que $|B| \leq 2$, $|V_i| \leq 2k$ y

$$E(V_i, V_i) \subseteq E^R(G) \quad E(V_i, V_j) \subseteq E^A(G)$$

para todo $i \neq j$ en $\{1, 2, 3\}$.

Dicho de otra forma: se muestra que para n impar existe un N apropiado tal que para todo grafo completo de tamaño al menos N con una coloreación de aristas en azul y rojo que no contenga como subgrafo monocromático rojo a C_n ni como subgrafo monocromático azul a W_n ; eliminando a lo más dos vértices se obtiene una partición de sus vértices en tres conjuntos $\{V_1, V_2, V_3\}$ de manera tal que el tamaño de cada V_i no excede a $n - 1$ y además las aristas que tienen ambos extremos en el mismo V_i son rojas; y las que tienen sus extremos en V_i y V_j con i distinto de j ; reciben un color distinto. Dicho resultado se demuestra en el Capítulo 2.

Este resultado se puede ver como una extensión del resultado ya mencionado debido a Nikiforov y Schelp [NS08]. Además es una suerte de recíproca a cotas conocidas para números de Ramsey asimétricos, presentadas por Chvátal y Harary en [CH72] y por Burr [Bur81], en un sentido que será precisado más adelante.

Uno de los primeros pasos en la estrategia usada en la demostración del Teorema 1.2.11, fue asegurar la existencia de una rueda W_{n+1} como subgrafo en las aristas de color azul. Como no tenemos el grafo W_n como subgrafo en el color azul, significa que todas las 2-cuerdas del «aro» de la rueda W_{n+1} deben ser rojas. Este tipo de conclusiones es terreno fértil para encontrar las estructuras deseadas. Para probar esto, era suficiente probar alguna cota superior para el número de Ramsey del ciclo C_n versus la rueda W_{n+1} , en el caso en que n sea impar.

Se encontraron, efectivamente, cotas para el número de Ramsey $r(C_{2k+1}, W_{2k+2})$. Los valores exactos de dichos números de Ramsey son, en este instante, un problema abierto. Las cotas expresadas son una aproximación a los valores que han sido conjeturados y permiten ver que, al menos a un nivel asintótico, dichos resultados son ciertos.

La primera cota mostrada es

Teorema 1.2.12

Si $n = 2k + 1 \geq 11$, entonces $r(C_n, W_{n+1}) \leq 5k + 3$.

y la segunda es

Teorema 1.2.13

Sea $n = 2k + 1 \geq 9$. Entonces $r(C_n, W_{n+1}) \leq 4k + 339$.

La primera cota es más fina para valores pequeños de k y la otra es mejor en el caso asintótico. Dichos resultados se demuestran en el Capítulo 3.

Posteriormente, en la Conclusión, se plantean algunas conjeturas que podrían guiar el trabajo a seguir a partir de lo realizado. La primera de ellas, mucho más general, tiene que ver con el resultado de estructura encontrado. ¿Es posible demostrar alguna descomposición parecida en otras familias de grafos? Las siguientes tienen que ver con las cotas a los números de Ramsey encontrados. ¿Se puedan hacer más finas?

Capítulo 1

Definiciones básicas y resultados previos

1.1. Definiciones básicas y notación

1.1.1. Definiciones elementales

Antes de empezar, se dará un breve recuento por los términos y definiciones básicos con los que se trabajará, para homologar notación y despejar posibles dudas posteriores. En la mayoría de los casos se sigue la notación del libro de Diestel [Die12].

Un *grafo* es una tupla $G = (V, E)$ donde V es un conjunto y E es un conjunto de 2-subconjuntos de V . Los elementos de V se llaman los *vértices* del grafo y los de E las *aristas* del grafo. Una manera típica de representar un grafo es mediante un dibujo en el que cada vértice es un punto, y unir cada par de estos puntos con una línea si es que los dos juntos forman una arista.

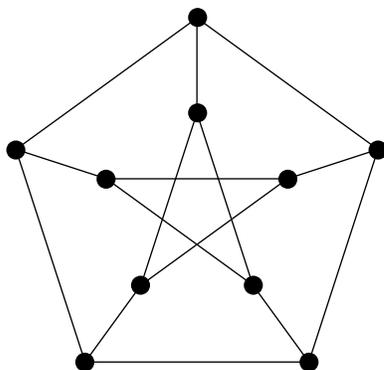


Figura 1.1: Un dibujo de un grafo.

El *grafo completo de tamaño n* se denota por K_n y es tal que $V(K_n) = \{1, \dots, n\}$ y $E(K_n) = \{xy : x \neq y \in V(K_n)\}$.

Dado un grafo H , se dice que $G = (V(G), E(G))$ es un *subgrafo* de H si es que $V(G) \subseteq V(H)$ y $E(G) \subseteq E(H)$. Se denotará como $G \subseteq H$.

Dados grafos G y H , un *homomorfismo de grafos* es una función $f : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que $xy \in E(G)$ implica que $f(x)f(y) \in E(H)$. Si existe un homomorfismo $f : V(G) \rightarrow V(H)$ entre dos grafos que es biyectivo, y su inversa f^{-1} es un homomorfismo de H en G , se dice que los grafos G y H son *isomorfos*, lo que se denota $G \simeq H$.

Notar que si existe un homomorfismo inyectivo entre G y H , entonces G es isomorfo a un subgrafo de H . En general no se hará distinción entre grafos de una misma clase de isomorfismos, así que podemos hablar de cosas como «el grafo completo en n vértices», y así.

Un *camino* P es un grafo con vértices dados por $V(P) = \{v_0, \dots, v_n\}$ y aristas dadas por $E(P) = \{v_i v_{i+1} : 0 \leq i < n\}$. Se dice que tal camino tiene como extremos a v_0 y v_n . El *largo* de un camino P es su número de aristas, se denota $\|P\|$. Al camino de largo k se denota como P^k . Si un grafo G contiene como subgrafo a un camino que tiene como extremos a los vértices x e y , se dice que x e y están *conectados* en G . Si todo par de vértices en $V(G)$ están conectados en G , se dirá que el grafo G es *conexo*.

Dados $A, B \subseteq V(G)$ y $P = x_0 \dots x_k$ un camino subgrafo de G , se dirá que es un (A, B) -camino si $V(P) \cap A = \{x_0\}$ y $V(P) \cap B = \{x_k\}$.

Un *ciclo* C es un grafo en los vértices $V(C) = \{v_0, \dots, v_n\}$ con $|V(C)| \geq 3$ tal que $E(C) = \{v_i v_{i+1} : 0 \leq i < n\} \cup \{v_n v_0\}$. El largo de un ciclo es su número de aristas o de vértices. El ciclo de largo k se denota C_k .

Se dice que un grafo G es k -conexo si $|V(G)| > k$ y para todo $S \subseteq V(G)$ con $|S| < k$ se tiene que $G \setminus S$ es conexo. En particular, un grafo es 1-conexo si y sólo si conexo. El máximo k tal que el grafo es k -conexo es llamado la *vértice conexidad* del grafo y se denota $\kappa(G)$.

Se dirá que un grafo G es k -coloreable si existe una función $c : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ tal que $xy \in E(G)$ implica $c(x) \neq c(y)$. A tal función se le llamará *coloreación propia*. El mínimo k tal que G es k -coloreable es llamado el *número cromático* de G y se denota $\chi(G)$.

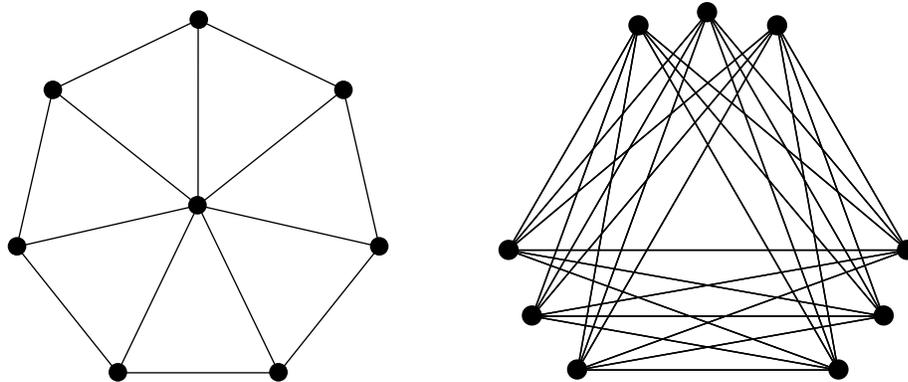


Figura 1.2: El grafo W_7 y el grafo $K_{3,3,3}$.

Una *coloreación de aristas* de un grafo G es una función $f : E(G) \rightarrow C$ donde C es un conjunto finito llamado el conjunto de *colores*. En el presente trabajo se trabajará mayormente con $C = \{R, A\}$, que se interpreta como los colores rojo y azul.

Dada una coloreación de aristas $f : E(G) \rightarrow C$ en un grafo G , se define $E^c(G) = f^{-1}(c)$ para cualquier color $c \in C$. Dado un vértice $v \in V(G)$, una coloreación de aristas f a colores en

C , y un $c \in C$, se define $N_G^c(v)$ como el conjunto de $x \in V(G)$ tal que $f(vx) = c$. Si G es claro del contexto, se anotará $N^c(v)$. Se define además $d^c(v) := |N^c(v)|$ como el grado-color para cierto color, y además $\delta^c(G) := \min\{d^c(v) : v \in V(G)\}$ y $\Delta^c(G) := \max\{d^c(v) : v \in V(G)\}$ como el grado-color mínimo y máximo respectivamente.

Además se define, para cada color $c \in C$, el grafo $G^c = (V(G), E^c(G))$. Bajo esta notación se tiene que $N_G^c(v) = N_{G^c}(v)$. De esta forma, se obtiene que $\delta^c(G) = \delta(G^c)$ y $\Delta^c(G) = \Delta(G^c)$.

Dado un grafo $G = (V, E)$ y $A, B \subseteq V$, se define $E(A, B)$ como el conjunto de todas las aristas que tienen un extremo en A y otro en B . Si $x \in V(G)$ y $A \subseteq V(G)$, se usará la notación $E(v, A) := E(\{v\}, A)$.

Se define la *rueda* de tamaño n como el grafo obtenido al unir C_n con un nuevo vértice, que se une con cada uno de los vértices del ciclo. Lo denotamos W_n . Dado $k \in \mathbf{N}$ y una lista de índices $(n_1, \dots, n_k) \in \mathbf{N}^k$, el grafo K_{n_1, \dots, n_k} es el grafo k -partito completo compuesto de conjuntos independientes de tamaños n_1, \dots, n_k .

Si un grafo G contiene como subgrafo ciclos de largo ℓ para todo $3 \leq \ell \leq |V(G)|$, diremos que el grafo es *pancíclico*.

La *cintura* de un grafo G es el largo de su ciclo más corto, la *circunferencia* es el largo de su ciclo más largo. Dado un grafo con cintura g y circunferencia c , se dice que es *débilmente pancíclico* si contiene ciclos de largo ℓ para todo $g \leq \ell \leq c$.

1.1.2. Teoría de Ramsey

Dado un grafo $G = (V, E)$, el *grafo complemento* \overline{G} tiene los mismos vértices que G pero sólo las aristas que no tiene G .

El *n-ésimo número de Ramsey*, denotado $r(n)$ o $r(K_n)$, es el mínimo N tal que todo grafo G con $|V(G)| \geq N$ es tal que $K_n \subseteq G$ o bien $K_n \subseteq \overline{G}$. A priori no es evidente que tal número esté bien definido, pero un resultado clásico de Ramsey lo confirma:

Teorema 1.1.1 (F. Ramsey, 1930)

Para todo $n \in \mathbf{N}$, existe un N tal que todo grafo en N vértices contiene a K_n o bien a $\overline{K_n}$ como subgrafo.

Dicho resultado es primordial a la Teoría de Ramsey, y a partir de él surgen muchas generalizaciones. En particular, en lugar de trabajar buscando subgrafos en un grafo o en su complemento, se puede suponer que se trabaja en un grafo completo K_N con N vértices y se tiene una función $f : E(K_N) \rightarrow C$ donde C es un conjunto finito de «colores», y se busca un grafo G como subgrafo en K_N de manera tal que todas las aristas de G tengan el mismo color. Notar que $G = K_n$ y $|C| = 2$ recupera el caso original del Teorema de Ramsey. En el caso de esta memoria se trabajará con $|C| = 2$ y llamaremos a los dos colores *rojo* y *azul*.

La generalización con la que finalmente se trabajará es la siguiente. Dados grafos G_1, G_2 , el *número de Ramsey asimétrico* $r(G_1, G_2)$ se define como el mínimo N tal que todo grafo H de orden N cumple que $G_1 \subseteq H$ o bien $G_2 \subseteq \overline{H}$. Equivalentemente, usando la noción de coloreo de aristas, se busca un N tal que toda coloreación de las aristas de K_N en colores rojo y azul tiene como subgrafo a un G_1 rojo, o bien a un G_2 azul. Se usará la notación $r(G) := r(G, G)$.

Del Teorema de Ramsey es sencillo ver que el número de Ramsey asimétrico está bien definido en todos los casos. Además se tiene que $r(G, H) = r(H, G)$ para todo par de grafos G, H .

1.2. Resultados previos

1.2.1. Resultados previos

Se conocen cotas y valores exactos para $r(G, H)$ en algunos casos donde G y H pertenecen a algunas familias de grafos específicas. En el caso en que G y H son ciclos de tamaño m y n respectivamente, se conoce el valor exacto en todos los casos:

Teorema 1.2.1 (Faudree y Schelp [FS74])

$$r(C_n, C_m) = \begin{cases} 6 & (n, m) \in \{(3, 3), (4, 4)\} \\ 2n - 1 & 3 \leq m \leq n, m \text{ impar}, (n, m) \neq (3, 3) \\ n + \frac{m}{2} - 1 & 4 \leq m \leq n, \text{ambos pares}, (n, m) \neq (4, 4) \\ \max\left\{n + \frac{m}{2} - 1, 2m - 1\right\} & 3 \leq m \leq n, m \text{ par y } n \text{ impar} \end{cases}$$

En el caso particular en que $n = m$, se tiene como corolario lo siguiente

Corolario 1.2.2

$$r(C_n) = \begin{cases} 6 & 3 \leq n \leq 4 \\ 2n - 1 & 5 \leq n, n \text{ impar} \\ \frac{3}{2}n - 1 & 6 \leq n, n \text{ par} \end{cases}$$

Otros casos estudiados son los de ciclos contra ruedas, para el cual hay varios resultados conocidos (ver [SBT06], [CCMN09], [Rad14]). El objetivo de este trabajo es estudiar el caso n impar: un ciclo de tamaño n versus una rueda de tamaño n ; o sea, estudiar $r(C_n, W_n)$.

Existe una cota inferior para $r(C_n, W_n)$ con una demostración simple: sea $k \geq 1$ y $n = 2k + 1$ un impar. Se considera el grafo K_N con $N = 6k$. Sea $\{U_1, U_2, U_3\}$ una partición de $V(K_N)$ donde $|U_1| = |U_2| = |U_3| = 2k$. Si se colorean las aristas que tienen cada uno de sus extremos dentro del mismo elemento de la partición U_i de color rojo, y el resto de color azul, se obtiene una bicoloración de las aristas de K_N que no contiene a C_{2k+1} en el color rojo (pues cada componente conexa roja tiene $2k$ como tamaño máximo) y no contiene a W_{2k+1} en el color azul (pues $\chi(W_{2k+1}) = 4$ y la componente formada por las aristas azules de la coloreación es tripartita completa). Entonces $r(C_{2k+1}, W_{2k+1}) \geq 6k + 1$.

Tal argumento tiene una generalización directa presentada por Chvátal y Harary:

Teorema 1.2.3 (Chvátal y Harary [CH72])

$r(G, H) \geq (\chi(G) - 1)(\varrho(H) - 1) + 1$, donde $\chi(G)$ es el número cromático de G y $\varrho(H)$ es el tamaño de la componente conexa más grande de H .

Interesa lograr una suerte de recíproca de este resultado. Si se tiene K_N con $N < r(G_1, G_2)$ con sus aristas bicoloradas de tal forma que **no contiene** un G_1 rojo como subgrafo ni un G_2

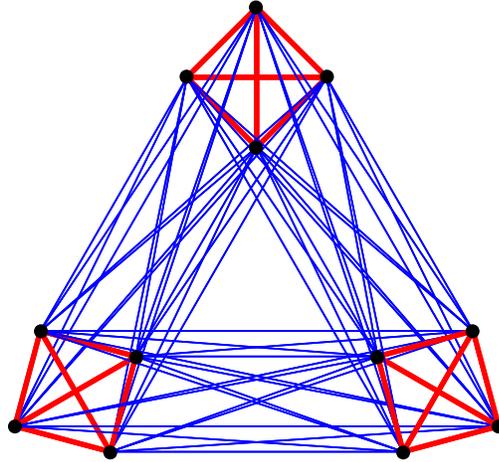


Figura 1.3: Caso $k = 2$ de la cota inferior para el número de Ramsey de una rueda versus un ciclo impar: un grafo de tamaño $6k$ que no contiene como subgrafo a W_{2k+1} en azul ni a C_{2k+1} en rojo. Las aristas más gruesas representan el color rojo, las más finas el color azul.

azul como subgrafo, ¿se tiene una partición de sus vértices en menos de $\chi(G_2)$ partes donde cada parte tiene tamaño menor a $\varrho(G_1)$?

Se conocen resultados de este estilo. Uno que compara ciclos de tamaño impar está dado en el artículo de Nikiforov y Schelp [NS08].

Teorema 1.2.4 (Nikiforov y Schelp, [NS08])

Sea $n = 2k + 1 > 4$ y $N \geq 3k + 2$, y un grafo $G := K_N$ con una coloreación $c : E(G) \rightarrow \{R, A\}$ tal que $C_n \not\subseteq G^R$ y $C_n \not\subseteq G^A$. Entonces existe un vértice $u \in V(G)$ y una partición $V(G) = U_1 \cup U_2 \cup \{u\}$ tal que

$$E(U_1, U_1) \cup E(U_2, U_2) \subseteq E^R(G) \quad \wedge \quad E(U_1, U_2) \subseteq E^A(G)$$

o bien

$$E(U_1, U_1) \cup E(U_2, U_2) \subseteq E^A(G) \quad \wedge \quad E(U_1, U_2) \subseteq E^R(G).$$

Un pequeño comentario respecto a la demostración de este resultado. Se desprende del Corolario 1.2.2 que si $n = 2k + 1$ es un número impar suficientemente grande, entonces tomando N tal que $r(C_{n+1}) = 3k + 2 \leq N < 4k + 1 = r(C_n)$, toda coloreación de las aristas de K_N contendrá a C_{n+1} , pero existirá alguna que no contenga a C_n . Este hecho es crucial para demostrar el Teorema 1.2.4, mediante el siguiente lema:

Lema 1.2.5 (Nikiforov y Schelp, [NS08])

Sea G hamiltoniano de orden $2n$ tal que $C_{2n-1} \not\subseteq G$ y $C_{2n-1} \not\subseteq \overline{G}$. Entonces existe una partición $V(G) = U_1 \cup U_2$ tal que $|U_1| = |U_2| = n$ y U_1, U_2 son independientes. Además, existe un vértice u tal que $G - u = K_{n,n-1}$.

Estos comentarios presentan una idea de las estrategias usadas en la demostración: justificar la existencia de un cierto subgrafo encontrando una cota adecuada para un número de Ramsey, y a

partir de él «armar» una estructura global para el grafo como la del Teorema 1.2.4.

Vale la pena recopilar los valores conocidos para los números de Ramsey de ciclos versus ruedas. Consideremos C_n la rueda de tamaño n y W_m , la rueda obtenida al unir un ciclo de tamaño m con un vértice. Dependiendo de la paridad de n y de m , y de cotas entre estos dos valores, los números de Ramsey tienen distintos comportamientos.

En el caso de m par se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.2.6 (Chen, Cheng, Miao y Ng, [CCMN09])
 $r(C_n, W_m) = 2n - 1$ para m par, $m \geq 4$ cuando $n \geq \frac{3}{2}m + 1$.

Notar que no se conoce el valor exacto para todos los valores de m y de n , el teorema sólo asegura en el caso en que $n \geq \frac{3}{2}m + 1$. El resto de los casos actualmente es un problema abierto.

Para el caso de n impar y $m \geq n \geq 3$, se tiene lo siguiente.

Teorema 1.2.7 (Chen, Cheng, Ng y Zhang, [CCNZ12])
 $r(C_n, W_m) = 3n - 2$ para m impar, $n \geq m \geq 3$, $(m, n) \neq (3, 3)$.

En esta situación sí se conocen los valores en todos, salvo un número finito de casos. Los teoremas mencionados estudian la situación en la que el ciclo es más grande que la rueda. En los casos en que $m \geq n$ se tienen dos resultados conocidos.

Teorema 1.2.8 (Zhang, Zhang y Chen [ZZC14])
 $r(C_n, W_m) = 2m + 1$ para n impar, $m \geq 3(n - 1)/2$ con $(n, m) \neq (3, 3)$ y $(n, m) \neq (4, 4)$.

Teorema 1.2.9 (Zhang, Zhang y Chen [ZZC14])
 $r(C_n, W_m) = 3n - 2$ para n, m impares, $n < m \leq 3(m - 1)/2$.

Estos resultados mencionados no cubren todos los casos en que $m \geq n$; m es par y n es impar. Zhang et al. [ZZC14] formulan una conjetura para los casos restantes.

Conjetura 1.2.10
Si n impar, m par y $n < m < 3(n - 1)/2$, entonces $r(C_n, W_m) = 2m + 1$.

Se buscará una aproximación para los números de Ramsey que caen en este intervalo, más precisamente, una cota superior para $r(C_n, W_{n+1})$ cuando n es impar.

1.2.2. Resultados obtenidos

El propósito de este trabajo es probar un resultado parecido al Teorema 1.2.4, pero al comparar un ciclo de tamaño impar versus una rueda del mismo tamaño. El resultado principal es el siguiente:

Teorema 1.2.11
Sea $n = 2k + 1 \geq 13$, un número impar. Si $N \geq 5k + 3$; y $G := K_N$ tiene una coloreación de sus aristas $c : E(G) \rightarrow \{R, A\}$ de manera tal que $C_n \not\subseteq G^R$ y $W_n \not\subseteq G^A$, entonces $V(G)$ se puede particionar en $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup B$ tal que $|B| \leq 2$, $|V_i| \leq 2k$ y

$$E(V_i, V_i) \subseteq E^R(G) \quad E(V_i, V_j) \subseteq E^A(G)$$

para todo $i \neq j$ en $\{1, 2, 3\}$.

Este resultado es ajustado en el sentido de que para $N \geq 5k + 3$ existen coloreaciones de $G := K_N$ que cumplen las hipótesis del Teorema 1.2.11 y es necesario borrar dos vértices para llegar a la partición $\{V_1, V_2, V_3, B\}$ con la forma deseada.

Si tenemos $5k + 3 \leq N \leq 6k$, consideramos el grafo $G := K_N$ y particionamos $V(G)$ en $\{U_1, U_2, U_3\}$ de forma tal que $|U_i| \leq 2k$ para todo $i \in \{1, 2, 3\}$. Sean $u_1, v_1 \in U_3$ distintos y $u_2 \in U_1$ y $v_2 \in U_2$. Considerar el coloreo tal que $c(xy) = R$ si y sólo si existe $i \in \{1, 2, 3\}$ tal que $\{x, y\} \subseteq U_i$ o bien $xy = u_1u_2$ o $xy = v_1v_2$. Dicha partición no contiene a C_{2k+1} en G^R ni a W_{2k+1} en G^R ; pero es necesario borrar $B = \{u_1, v_1\}$ para obtener una partición como la buscada.

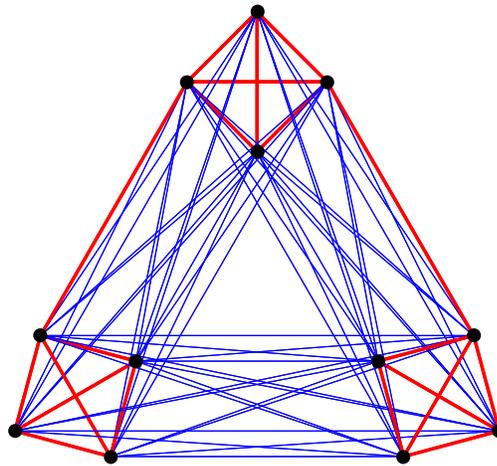


Figura 1.4: Para $k = 2$, una coloreación de las aristas K_{6k} tal que $C_{2k+1} \not\subseteq G^R$ y $W_{2k+1} \not\subseteq G^A$, pero es necesario borrar dos vértices para obtener la partición deseada. Las aristas más gruesas representan el color rojo, las más finas el color azul.

Para demostrar el teorema principal se usó el siguiente resultado, que también se prueba:

Teorema 1.2.12

Si $n = 2k + 1 \geq 11$, entonces $r(C_n, W_{n+1}) \leq 5k + 3$.

Posteriormente, usando técnicas parecidas, se logró el siguiente resultado:

Teorema 1.2.13

Sea $n = 2k + 1 \geq 9$. Entonces $r(C_n, W_{n+1}) \leq 4k + 339$.

Estos últimos resultados seguirían como corolario de la Conjetura 1.2.10, efectuada por Zhang et al. [ZZC14]. Dicha conjetura es un poco más general y trata los números de Ramsey de ciclos impares versus ruedas pares en el caso en que la rueda es mayor que el ciclo.

Generalizando un poco esta conjetura, podría esperarse que la cota inferior dada por Chvátal-Harary en el Teorema 1.2.3 se alcance siempre que se trabaja con ciclos impares versus ruedas pares. En este sentido, el mejor resultado conocido hasta el momento es el entregado por Chen,

Cheng, Miao y Ng [CCMN09], en el Teorema 1.2.6. Notar que dicho resultado trata ruedas y ciclos con las paridades deseadas, pero en este caso se consideran ruedas de tamaño menor al de la rueda; a diferencia del caso que se estudió en este trabajo.

Por otro lado, tal resultado indica que efectivamente la cota inferior dada por el Teorema 1.2.3 se alcanza cada vez que se consideran ciclos impares versus ruedas pares. Esto da esperanzas a que la Conjetura 1.2.10 sea cierta.

1.2.3. Lemas usados

Primero se enuncian y se demuestran unos lemas elementales que serán útiles después. Estos garantizarán la existencia de ciertos subgrafos dada la presencia de otras estructuras, como grafos k -partitos completos o grafos bipartitos completos más algunas aristas.

Lema 1.2.14

Sea G tal que $\chi(G) \leq k$, y una coloreación propia de los vértices $c : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$. Notar que los $G_i := c^{-1}(\{i\})$ definen una partición de $V(G)$.

Sean $\{r_i\}_{i=1}^k$ tal que $|G_i| \leq r_i$. Entonces G es subgrafo del grafo k -partito K_{r_1, \dots, r_k} .

Demostración. Sea $\{R_i\}_{i=1}^k$ una partición en conjuntos independientes del grafo K_{r_1, \dots, r_k} con $|R_i| = r_i$. Como $|G_i| \leq |R_i|$, existe una función inyectiva $f : V(G) \rightarrow V(K_{r_1, \dots, r_k})$ tal que $f(G_i) \subseteq R_i$. Es directo verificar que tal función es un homomorfismo inyectivo de grafos y por lo tanto se concluye que $G \subseteq K_{r_1, \dots, r_k}$. \square

Corolario 1.2.15

Sea $k \geq 1$. Entonces $C_{2k+1} \subseteq K_{k, k, 1}$

Demostración. Si $V(C_{2k+1}) = \{v_1, v_2, \dots, v_{2k+1}\}$ entonces $c : V(C_{2k+1}) \rightarrow \{1, 2, 3\}$ definida por $c(v_i) = 1$ si $i \neq 2k+1$ par, $c(v_i) = 2$ si $i \neq 2k+1$ impar y $c(v_{2k+1}) = 3$ es una 3-coloración propia con partes de tamaño k , k y 1. Entonces por el Lema 1.2.14, $C_{2k+1} \subseteq K_{k, k, 1}$. \square

Corolario 1.2.16

Sea $r \geq 2$. Entonces $W_{2r} \subseteq K_{r, r, 1}$

Demostración. Sea $V(W_{2r}) = \{v_1, v_2, \dots, v_{2r}, w\}$ donde w es el «bujé» de la rueda y el resto de los vértices forman el ciclo de tamaño $2r$. Entonces $c : V(W_{2r}) \rightarrow \{1, 2, 3\}$ definida por $c(v_i) = 1$ si i par, $c(v_i) = 2$ si i impar y $c(w) = 3$; es una 3-coloración propia con partes de tamaño r , r y 1. Entonces por el Lema 1.2.14, $W_{2r} \subseteq K_{r, r, 1}$. \square

Lema 1.2.17

Sea $k \geq 1$, y G grafo que particiona sus vértices en V_1 y V_2 de manera tal que $E(V_1, V_2)$ forma un grafo bipartito completo con $|V_1| = k+1$ y $|V_2| = k$. Si además existe una arista $e = xy$ con $\{x, y\} \subseteq V_1$, entonces G es pancíclico.

Demostración. Sea $3 \leq j \leq 2k + 1 = |G|$. Se debe ver que G tiene a C_j como subgrafo.

Si $j = 2l$ par; entonces $2 \leq l \leq k$ y por lo tanto basta seleccionar l vértices a cada lado de la partición V_1, V_2 ; como $E(V_1, V_2)$ induce un grafo bipartito completo, entonces encontrar el ciclo de largo $2l$ es directo.

Si $j = 2l + 1$ impar, entonces $1 \leq j \leq k$. Seleccionando la arista $e = xy$ en V_1 , realizamos una numeración de los vértices de la siguiente forma: $v_0 = x, v_{2j} = y$. Se seleccionan de forma arbitraria j vértices distintos en V_2 que se numeran con $v_1, v_3, \dots, v_{2j-1}$; y $j - 1$ vértices en V_1 que se numeran $v_2, v_4, \dots, v_{2j-2}$. Por construcción, $v_0v_1 \dots v_{2j}$ es un ciclo de largo $2j + 1$. \square

Serán útiles durante la demostración lemas y resultados anteriores que garanticen existencia de ciclos y cotas para sus respectivos tamaños. Especialmente útiles serán criterios suficientes para garantizar que los grafos son pancíclicos o débil-pancíclicos.

Dirac, en 1952, publicó resultados que entregan los primeros antecedentes en el tema: existencia de ciclos largos dadas ciertas condiciones en el grado mínimo.

Teorema 1.2.18 (Dirac [Dir52])

Todo grafo con $n \geq 3$ vértices y grado mínimo al menos $n/2$ tiene un ciclo hamiltoniano.

Lema 1.2.19 (Dirac [Dir52])

Sea G grafo 2-conexo de orden $n \geq 3$ con $\delta(G) = \delta$. Entonces $c(G) \geq \min\{2\delta, n\}$.

El Teorema 1.2.18 es un clásico y tiene muchas extensiones. Una que trabaja con hipótesis similares y generaliza el resultado, es entregada por Bondy:

Teorema 1.2.20 (Bondy [Bon71])

Sea G grafo con $n \geq 3$ vértices y grado mínimo al menos $n/2$. Entonces G es pancíclico; o bien $n = 2k$ y $G \simeq K_{k,k}$.

Corolario 1.2.21

Sea G grafo con $n \geq 3$ vértices y grado mínimo mayor que $n/2$. Entonces G es pancíclico.

Los siguientes teoremas de Brandt et al. dan condiciones suficientes para que un grafo sea débilmente pancíclico. El primero está en términos del grado mínimo del grafo y el segundo en términos de la cantidad de aristas del grafo.

Lema 1.2.22 (Brandt et al. [BFG98])

Todo grafo no bipartito G de orden n con $\delta(G) \geq (n + 2)/3$ es débilmente pancíclico con cintura 3 ó 4.

Lema 1.2.23 (Brandt [Bra97])

Sea G no bipartito con $|V(G)| = n$ y $|E(G)| > (n - 1)^2/4 + 1$. Entonces G es débilmente pancíclico con $g(G) = 3$.

Lo siguiente es una cota superior para la cintura del grafo, en términos del tamaño del grafo. Tenemos que si el grado mínimo es mayor que 3, la cintura es de tamaño logarítmico en el tamaño del grafo.

Lema 1.2.24 ([Die12, p.10])

Sea G un grafo. Si $\delta(G) \geq 3$ entonces $g(G) < 2 \log_2(|G|)$.

Finalmente, se enuncian unos resultados más específicos en términos de números de Ramsey asimétricos. En el caso de ciclos y ruedas de tamaño impar, se sabe lo siguiente:

Teorema 1.2.25 (Surahmat et al., [SBT06])

$r(C_n, W_m) = 3n - 2$ para m, n impares tales que $n \geq m \geq 3$ y $(n, m) \neq (3, 3)$.

Además, del trabajo realizado en [NS08] para demostrar el Teorema 1.2.4 se puede extraer una versión ligeramente más fuerte que servirá en esta demostración:

Lema 1.2.26 (Nikiforov y Schelp, [NS08])

Sea $n = 2k + 1 \geq 4$ y $N \geq 3k + 2$, y un grafo $G := K_N$ con una coloreación $c : E(G) \rightarrow \{R, A\}$ tal que $C_n \not\subseteq G^R$ y $C_n \not\subseteq G^A$. Entonces existe una partición $V(G) = Y_1 \cup Y_2$ tal que $E(Y_i, Y_i) \subseteq E^R(G)$ para todo $i \in \{1, 2\}$ y no hay aristas rojas disjuntas en $E(Y_1, Y_2)$; o bien lo mismo pero intercambiando el rol de los colores rojo y azul.

Notar que de aquí sigue el Teorema 1.2.4 inmediatamente: si Y_1 y Y_2 inducen grafos completos de color rojo, sin pérdida de generalidad, entonces $E(Y_1, Y_2)$ no contienen aristas disjuntas de color rojo. Por lo tanto las aristas rojas en $E(Y_1, Y_2)$ forman un grafo estrella (posiblemente vacío). Escogiendo el centro de tal estrella como el vértice v y $U_i := Y_i \setminus \{v\}$ se obtiene exactamente la partición buscada en el Teorema 1.2.4.

Capítulo 2

Estructura de grafos sin ciclos ni ruedas

2.1. Demostración del teorema principal

El propósito de este capítulo es demostrar el Teorema 1.2.11, dando por cierto el Teorema 1.2.12; que será demostrado en el capítulo siguiente.

Sea $n = 2k + 1 \geq 13$ impar y $N \geq 5k + 3$. Se colorea cada arista de $G = K_N$ de color rojo o azul (se denotan R y A , respectivamente), de manera tal que no contiene como subgrafo a C_n monocromático rojo ni a W_n monocromático azul. Por Teorema 1.2.25, si $N \geq 3n - 2 = 6k + 1$ y como $n > 3$, entonces G debe contener como subgrafo un ciclo de tamaño n monocromático rojo, o bien una rueda de tamaño n monocromática azul. Como interesa estudiar las coloraciones que *no* contienen copias monocromáticas de los grafos mencionados, basta considerar $N \leq 6k$.

Bajo la suposición de que $r(C_n, W_{n+1}) \leq 5k + 3 \leq N$, como no tenemos un C_n monocromático rojo; debe existir un W_{n+1} monocromático azul. Sea x el «buje» de tal rueda, y C el «aro» de la rueda, es decir, el C_{n+1} asociado.

Se considera el grafo inducido por los vértices del ciclo C , es decir, $G[C]$. Tal grafo no puede contener como subgrafo un C_n monocromático rojo (pues sería también subgrafo de G) ni tampoco un C_n monocromático azul (pues tal ciclo, más las uniones que tiene con el «buje», formarían una rueda W_n azul). Luego, $G^A[C]$ cumple las hipótesis del Lema 1.2.5 y se pueden particionar los vértices de C en dos conjuntos U'_1 y U'_2 tal que $|U'_1| = |U'_2| = k + 1$, cada uno de los U'_i induce un clique rojo de tamaño $k + 1$ y existe un vértice v tal que $E(U'_1 - v, U'_2 - v) \subseteq E^A(G)$. Se definen $U_i = U'_i - v$ para $i \in \{1, 2\}$ y $U_3 = \{x\}$ (el «buje» de la rueda). Sin pérdida de generalidad, se supone que $|U_1| = k + 1$ y $|U_2| = k$.

Se tiene que $E(U_i, U_i) \subseteq E^R(G)$ para todo $i \in \{1, 2, 3\}$ y además $E(U_i, U_j) \subseteq E^A(G)$ para todo $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$. Inspirado en esto, definimos el conjunto

$$\mathcal{S} := \{(X_1, X_2, X_3) : U_i \subseteq X_i, X_i \cap X_j = \emptyset, E(X_i, X_j) \subseteq E^A(G); \forall i \neq j \in \{1, 2, 3\}\}.$$

Claramente $(U_1, U_2, U_3) \in \mathcal{S}$ así que $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Se considera $(X_1^*, X_2^*, X_3^*) \in \mathcal{S}$ que maximice $|X_1| + |X_2| + |X_3|$.

En primer lugar se demuestra el siguiente lema:

Lema 2.1.1

$E(X_i^*, X_i^*) \subseteq E^R(G)$ para todo $i \in \{1, 2, 3\}$.

Demostración. Sea $i \in \{1, 2\}$ y supóngase que X_i^* contiene alguna arista azul $e = xy$. Como $|U_i| \geq k$ y U_i es un completo de color rojo, esto significa que $|X_i^*| \geq k + 1$. En cualquier caso, $|X_{3-i}^*| \geq k$. Como X_1^* y X_2^* forman un bipartito completo donde todas las aristas son azules, y existe la arista e , por el Lema 1.2.17 vemos que es posible encontrar un ciclo de tamaño $2k + 1$ (que usa a la arista e). Como $|X_3^*| \geq 1$ y conecta de color azul a todo vértice de X_1^* y X_2^* , se obtiene un W_n monocromático de color azul, lo que es una contradicción.

Sea ahora $i = 3$ y supóngase que X_3^* contiene alguna arista azul $e = x_1x_2$. Como $|X_1^*| \geq k + 1$ y $|X_2^*| \geq k$ entonces $\{x_2\}, X_1^*, X_2^*$ contienen a $K_{k,k,1}$ como subgrafo formado por aristas azules y por Corolario 1.2.15 tienen a C_{2k+1} monocromático azul. Como las aristas que unen a x_1 con $X_1^* \cup X_2^* \cup \{x_2\}$ son todas azules, se tiene un W_n monocromático azul, lo que es nuevamente una contradicción. Esto prueba el resultado. \square

Por lo tanto, cada X_i^* induce un grafo completo monocromático de color rojo. En particular, esto implica que $|X_i^*| \leq 2k$ para todo $i \in \{1, 2, 3\}$; pues de otra forma se tendría C_{2k+1} como subgrafo monocromático rojo en G . Nótese que en el caso que $\bigcup_{i=1}^3 X_i^* = V(G)$, se concluye el resultado inmediatamente. Luego, desde ahora en adelante, se supondrá que $V(G) \setminus \bigcup_{i=1}^3 X_i^* \neq \emptyset$.

Sea $v \notin \bigcup_{i=1}^3 X_i^*$. Se mostrará que existe un $i \in \{1, 2, 3\}$ tal que $E(v, X_i^*) \subseteq E^R(G)$. Supóngase que no es así. Entonces existen vértices $x_i \in X_i^*$ para $i \in \{1, 2, 3\}$ tal que vx_i es de color azul. Se forma un ciclo monocromático azul de largo $2k + 1$ usando los vértices x_1, v, x_2 y los vértices en X_1^* y X_2^* . Como el vértice x_3 es tal que conecta azul con todos los vértices usados en tal ciclo, aparece un W_n monocromático azul, lo que es una contradicción.

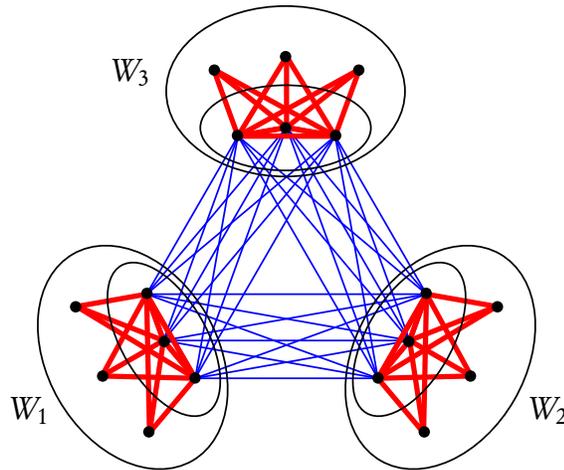


Figura 2.1: La partición W_1, W_2, W_3 de $V(G)$. Para todo $i \in \{1, 2, 3\}$, existe $X_i^* \subseteq W_i$ tal que X_i^* induce un completo rojo y $E(X_i^*, W_i \setminus X_i^*)$ induce un bipartito completo rojo. Además, X_1^*, X_2^* y X_3^* son las componentes de un tripartito completo azul. Las aristas más gruesas representan el color rojo, las más finas el color azul.

Se definen los conjuntos

$$\begin{aligned} W_1 &:= X_1^* \cup \{v \in V(G) : E(v, X_1^*) \subseteq E^R(G)\}, \\ W_2 &:= X_2^* \cup \{v \in V(G) : E(v, X_2^*) \subseteq E^R(G)\} \setminus W_1, \text{ y} \\ W_3 &:= X_3^* \cup \{v \in V(G) : E(v, X_3^*) \subseteq E^R(G)\} \setminus (W_1 \cup W_2). \end{aligned}$$

Por lo dicho anteriormente, W_1 , W_2 y W_3 forman una partición de $V(G)$.

Lema 2.1.2

Sea $i \in \{1, 2, 3\}$ y $v \in W_i \setminus X_i^*$. Entonces tal vértice v tiene un vecino rojo en W_j para algún $j \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$.

Demostración. Se razona por contradicción. Sin pérdida de generalidad, sea $v \in W_3 \setminus X_3^*$ sin vecinos rojos en W_1 ni en W_2 . Por lo tanto, $E(X_3^* \cup \{v\}, X_1^*)$ y $E(X_3^* \cup \{v\}, X_2^*)$ sólo consisten en aristas azules. Entonces $(X_1^*, X_2^*, X_3^* \cup \{v\}) \in \mathcal{S}$, lo que contradice la maximalidad de (X_1^*, X_2^*, X_3^*) . \square

De acuerdo a lo mencionado, cada uno de estos tres conjuntos W_i contiene un subconjunto $X_i^* \subseteq W_i$ que forma un subgrafo completo de color rojo, y $E(X_i^*, W_i \setminus X_i^*)$ forman un bipartito completo de color rojo. Estos conjuntos servirán para formar la estructura de partición a la que se quiere llegar. Para llegar a ello, primero se verá un lema un poco más general.

Lema 2.1.3

Sea $W \subseteq V(G)$ de forma tal que existe $X \subseteq W$ que induce un subgrafo completo rojo y $E(X, W \setminus X) \subseteq E^R(G)$. Si $|X| \geq 3$, entonces todo par de vértices en W puede unirse por caminos rojos de todo largo desde 2 hasta $|X| - 1$.

Demostración. Sean $w_1, w_2 \in W$ dos vértices distintos. Si ambos están en X entonces lo querido se tiene de inmediato, ya que $|X| \geq 3$ y X induce un subgrafo completo de color rojo.

Si ambos vértices están en $W \setminus X$, como $E(X, W \setminus X) \subseteq E^R(G)$, se puede escoger un $u \in X$ cualquiera de forma tal que $w_1 u w_2$ sea un (w_1, w_2) -camino rojo de largo 2. Escogiendo u_1, u_2 distintos en X se puede encontrar un camino P_j en X que los una, de largo j para todo $1 \leq j \leq |X| - 2$. De esa forma, $w_1 u_1 P_j u_2 w_2$ es un camino de largo $j + 2$, que muestra el lema en este caso.

Finalmente, si $w_1 \in W$ y $w_2 \notin W$, se tiene el resultado escogiendo $u \in W \setminus \{w_1\}$ cualquiera. Entonces $u w_2$ es una arista roja y nuevamente se pueden encontrar (w_1, u) -caminos rojos en W de largo 1 hasta $|X| - 2$, como se hizo antes. \square

Notemos que los conjuntos W_1 y W_2 descritos anteriormente cumplen las hipótesis del Lema 2.1.3.

De acá se desprende un corolario que será útil durante las demostraciones siguientes.

Corolario 2.1.4

Sean, para todo $i \in \{1, 2\}$, conjuntos $R_i \subseteq V(G)$ de forma tal que existen $S_i \subseteq R_i$ que inducen subgrafos completos rojos y $E(S_i, R_i \setminus S_i) \subseteq E^R(G)$, $R_1 \cap R_2 = \emptyset$. Supóngase que $\min\{|S_1|, |S_2|\} \geq 3$ y $|S_1| + |S_2| \geq 2k + 1$. Entonces no existen dos aristas rojas disjuntas en $E(R_1, R_2)$.

Demostración. Supóngase que e_1 y e_2 son dos aristas rojas disjuntas en $E(R_1, R_2)$. Denótese $v_i^j := R_i \cap e_j$. Por el Lema 2.1.3, para todo $2 \leq j_1 \leq |S_1| - 1$ existen $(v_1^1, v_1^{j_1})$ -caminos rojos de largo j_1 , y para todo $2 \leq j_2 \leq |S_2| - 1$ existen $(v_2^1, v_2^{j_2})$ -caminos rojos de largo j_2 . Uniendo estos caminos mediante e_1 y e_2 , se obtienen ciclos rojos de largo $2 + j_1 + j_2$ para todo j_1, j_2 en los rangos mencionados anteriormente. Por lo tanto se tienen ciclos de largo 6 hasta $|S_1| + |S_2|$. Como $|S_1| + |S_2| \geq 2k + 1$, esto implica la existencia de un ciclo de tamaño $2k + 1$, lo que es una contradicción. \square

Este resultado se puede mejorar en el caso de los W_1 y W_2 que fueron definidos anteriormente, mediante el siguiente lema.

Lema 2.1.5

Sean W_1, W_2, W_3 como fueron definidos anteriormente. Entonces no existen dos (W_1, W_2) -caminos independientes que sólo usen aristas de color rojo.

Demostración. Supóngase que sí existen, sean P_1 y P_2 tales caminos. Se puede suponer sin pérdida de generalidad que $\|P_1\| + \|P_2\|$ es mínimo entre todos los pares de (W_1, W_2) -caminos independientes monocromáticos de color rojo. Por definición de (W_1, W_1) -camino, se tiene que $|W_i \cap V(P_j)| = 1$ para todo $i, j \in \{1, 2\}$. Así, se denotarán $\{p_i^j\} := W_i \cap V(P_j)$ para todo $i, j \in \{1, 2\}$. Como los caminos son independientes y $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, se tiene que $p_i^j \neq p_{i'}^{j'}$ si $(i, j) \neq (i', j')$.

Como W_1 se compone de un clique rojo de tamaño al menos $k + 1$ (que está en X_1^*) y vértices que forman un bipartito completo de color rojo con X_1^* , invocando el Lema 2.1.3, se pueden unir los vértices p_1^1 y p_1^2 con caminos rojos contenidos en W_1 de tamaño ℓ , para todo $\ell \in [2, k]$. En W_2 es análogo, pero allí se tiene un clique rojo de tamaño al menos k , por lo que se puede unir p_2^1 y p_2^2 con caminos de largo en $[2, k - 1]$ contenidos en W_2 .

Dado que los caminos P_1 y P_2 son independientes, conectando los vértices p_i^j con los caminos mencionados anteriormente, se tienen ciclos monocromáticos rojos de largo ℓ para todo ℓ tal que $\|P_1\| + \|P_2\| + 4 \leq \ell \leq \|P_1\| + \|P_2\| + 2k - 1$.

Nótese que ℓ no puede tomar el valor $2k + 1$ pues $C_{2k+1} \not\subseteq E^R(G)$. Dicho de otra forma, ℓ no pertenece al intervalo $[4 + \|P_1\| + \|P_2\|, 2k - 1 + \|P_1\| + \|P_2\|]$. Como $\|P_1\|, \|P_2\| \geq 1$, entonces $2k - 1 + \|P_1\| + \|P_2\| \geq 2k + 1$. Entonces forzosamente se debe tener que $2k + 1 < 4 + \|P_1\| + \|P_2\|$, o bien,

$$2k - 2 \leq \|P_1\| + \|P_2\|. \quad (2.1)$$

Se sabe que $n = 2k + 1 \geq 13$, debido a lo cual no puede suceder que $\|P_1\| = \|P_2\| = 1$. Por lo tanto, el camino P_j tiene intersección no vacía con W_3 , entonces se definirá q_i^j como el vértice en $P_j \cap W_3$ adyacente a p_i^j . Recuérdese que $X_3^* \neq \emptyset$ y que existe $x \in X_3^*$ tal que xv es rojo para todo $v \in W_3 \setminus \{x\}$.

Se mostrará que si un camino P_i tiene a tal vértice x , entonces $\|P_i\| \leq 4$. En efecto, supóngase que $\|P_i\| \geq 5$. Si $q_1^i \neq x \neq q_2^i$ entonces $p_1^i q_1^i x q_2^i p_2^i$ es un camino que no interseca con P_{3-i} y de largo 4. Si $x \in \{q_1^i, q_2^i\}$, dependiendo del caso se pueden armar los caminos $p_1^i x q_2^i p_2^i$ o $p_1^i q_1^i x p_2^i$,

de largo 3, y disjuntos con P_{3-i} . En cualquier caso se encuentra un camino de largo estrictamente menor a 5, lo que contradice la minimalidad de $\|P_1\| + \|P_2\|$. Por lo tanto, se deduce que

$$\forall i \in \{1, 2\}, x \in P_i \implies \|P_i\| \leq 4. \quad (2.2)$$

Ahora véase que si un camino P_i no tiene a tal vértice x , entonces $\|P_{3-i}\| \leq 4$. En efecto, supóngase que $x \notin P_i$ y que $\|P_{3-i}\| > 4$. Por (2.2) se tiene que x no está en P_{3-i} y se sabe que tampoco está en P_i . Entonces $p_1^{3-i}q_1^{3-i}xq_2^{3-i}p_2^{3-i}$ es un camino de largo 4 disjunto con P_i , lo que nuevamente contradice la minimalidad de $\|P_1\| + \|P_2\|$. Por lo tanto,

$$\forall i \in \{1, 2\}, x \notin P_i \implies \|P_{3-i}\| \leq 4. \quad (2.3)$$

Las observaciones (2.2) y (2.3) implican que $\min\{\|P_1\|, \|P_2\|\} \leq 4$. Sin pérdida de generalidad, supóngase que $\|P_1\| \leq \|P_2\|$ y por lo tanto

$$\|P_1\| \leq 4. \quad (2.4)$$

Esto unido con (2.1) implica que $2k - 2 \leq \|P_2\| + 4$ y por lo tanto,

$$2k - 6 \leq \|P_2\|. \quad (2.5)$$

Como $n = 2k + 1 \geq 13$, entonces $\|P_2\| \geq 2k - 6 \geq 6 > 4$. Entonces, por las recíprocas de (2.2) y (2.3) se tiene que $x \notin P_2$ y $x \in P_1$.

Para cualquier vértice y en $P_2 \cap W_3$, la arista xy es de color rojo. La idea es usar estas aristas para encontrar ciclos rojos «pegando» tres caminos: uno de p_1^1 hasta x , otro de x hasta p_1^2 y otro desde p_1^2 hasta p_1^1 . Nótese que, para cualquier $y \in P_2 \cap W_3$, se tiene que $p_1^1P_1xyP_2p_1^2$ es un (p_1^1, p_1^2) -camino que no tiene ninguna arista en W_1 . Se puede escoger $y \in P_2 \cap W_3$ de $\|P_2\| - 1$ maneras (cualquier vértice de P_2 excepto los extremos) de manera tal que $xyP_2p_1^2$ puede formar caminos de largo 2 hasta $\|P_2\|$. Por (2.5), se tiene la existencia de (x, p_1^2) -caminos de largo 2 hasta $2k - 6$.

Recordando que en W_1 se pueden encontrar (p_1^2, p_1^1) -caminos de todos los largos desde 2 hasta k , junto a los caminos mencionados antes se forman ciclos de tamaño $4 + \|p_1^1P_1x\|$ hasta $3k - 6 + \|p_1^1P_1x\|$.

Dependiendo de si $x = q_1^1$ o no, el camino $p_1^1P_1x$ tiene largo 1 ó 2. En cualquier caso, se tienen ciclos de tamaño 6 hasta $3k - 5$. Como $2k + 1 \geq 6$, se debe tener que $3k - 5 < 2k + 1$. Esto implica que $k \leq 5$ y por lo tanto $2k + 1 \leq 11$, lo que es absurdo pues $2k + 1 \geq 13$. De esta contradicción se concluye. \square

Ahora se demostrará que en realidad los W_1 y W_2 no pueden tener un tamaño mayor a $2k$. Intuitivamente, eso es un acercamiento al resultado buscado: se buscan particiones en subgrafos completos rojos; como el ciclo de tamaño $2k + 1$ no es subgrafo de K_N entonces cada elemento de la partición debe tener tamaño menor a $2k$.

Lema 2.1.6

Se tiene que $|W_i| \leq 2k$ para $i \in \{1, 2\}$.

Demostración. Como $|X_1^*| \geq k + 1$ y todo vértice en $W_1 \setminus X_1^*$ es vecino rojo de todo vértice en X_1^* , se tiene que las aristas $E(X_1^*, W_1 \setminus X_1^*)$ forman un bipartito completo monocromático de color rojo. Seleccionando $R_1, R_2 \subseteq X_1^*$ disjuntos de forma tal que $|R_1| = 1$ y $|R_2| = k$, tomando $R_3 = W_1 \setminus (R_1 \cup R_2)$ se obtiene que dichos conjuntos disjuntos forman las componentes de un grafo tripartito completo monocromático rojo. Si $|W_1| \geq 2k + 1$, entonces $|R_3| \geq k$ y por lo tanto se obtiene un grafo $K_{k,k,1}$ monocromático de color rojo. Por Corolario 1.2.15, esto implica que C_{2k+1} es subgrafo de G , lo que es imposible. Por lo tanto $|W_1| \leq 2k$.

Si $|X_2^*| \geq k + 1$ el argumento presentado se puede realizar de forma idéntica. Sin embargo, a priori sólo se sabe que $|X_2^*| \geq k$. Esto basta para reducirse al caso en que $|X_2^*| = k$ pero $|W_2| \geq 2k + 1$. Dado eso, entonces $|W_2 \setminus X_2^*| \geq k + 1$. Al igual que el caso anterior, $E(X_2^*, W_2 \setminus X_2^*)$ forman un bipartito completo monocromático rojo. Se tienen las hipótesis del Lema 1.2.17, y por lo tanto se deduce que $W_2 \setminus X_2^*$ no puede tener ninguna arista roja. Entonces, $W_2 \setminus X_2^*$ induce un completo azul de tamaño al menos $k + 1$.

Nótese que todo vértice en $V \setminus W_2$ no puede tener más de dos vecinos rojos en $W_2 \setminus X_2^*$; de ser así, formaría un ciclo rojo de tamaño $2k + 1$ usando el bipartito completo monocromático rojo mencionado anteriormente, y una arista en el completo rojo X_2^* , como se ilustra en la Figura 2.2.

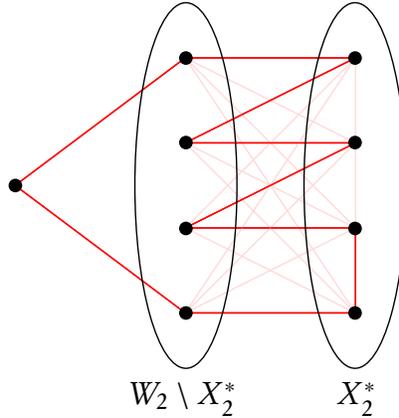


Figura 2.2: Caso $k = 4$ de la construcción que encuentra un C_{2k+1} monocromático rojo cuando existe un vértice en W_2^c que tiene dos vecinos rojos en $W_2 \setminus X_2^*$. Recuerde que $k > 1$.

Sea $x_3 \in X_3^*$, y $N^R(x_3) \cap (W_2 \setminus X_2^*)$ el conjunto de vecinos rojos de x_3 en $W_2 \setminus X_2^*$ (posiblemente vacío). Por lo mencionado anteriormente, el tamaño de este conjunto es a lo más uno. Se considerará el conjunto $Y_2 := W_2 \setminus (N^R(x_3) \cup X_2^*)$.

Nótese que entre Y_2 y X_1^* no hay dos aristas rojas disjuntas, por el Lema 2.1.5, y además tampoco puede haber un vértice en X_1^* que tenga como vecinos rojos a dos vértices distintos de Y_2 , por lo mencionado anteriormente. Luego, las aristas rojas en $E(Y_2, X_1^*)$ forman una estrella (posiblemente vacía) con centro en Y_2 .

Eliminando este (posible) centro de la estrella en Y_2 , se obtiene un conjunto $Y' \subseteq Y_2$ tal que $E(Y', x_3)$, $E(Y', X_1^*)$ son todas aristas de color azul. Además, por definición, $E(X_1^*, X_2^*)$ y $E(x_3, X_1^* \cup X_2^*)$ también son azules. Nótese que $|Y'| \geq |Y_2| - 1 \geq |W_2 \setminus X_2^*| - 2 \geq k - 1 \geq 2$. Usando a lo más 2 vértices de Y' se encuentra un ciclo azul de tamaño $2k + 1$ en $X_1^* \cup X_2^* \cup Y'$, junto a x_3 forman una rueda de tamaño n de color azul, lo que es una contradicción. \square

Recapitulando un poco: Se tiene $n = 2k + 1 \geq 13$ y $6k \geq N \geq 5k + 3$. Los vértices de $V(G)$ se particionan en W_1, W_2 y W_3 , donde para $i \in \{1, 2, 3\}$ existen $X_i^* \subseteq W_i$ tal que

$E(X_i^*, X_j^*) \subseteq E^A(G)$ para $i \neq j \subseteq \{1, 2, 3\}$; y las aristas cuyos extremos caen dentro del mismo X_i^* son de color rojo, para $i \in \{1, 2, 3\}$. Además $|X_1^*| \geq k + 1$, $|X_2^*| \geq k$, $|X_3^*| \geq 1$, y por Lema 2.1.6, se tiene $|W_i| \leq 2k$ para $i \in \{1, 2\}$.

A continuación se verá un caso particular donde el resultado deseado se puede concluir inmediatamente: el lema siguiente implica que se puede concluir si existe $i \in \{1, 2\}$ y un vértice $v \in W_i$ que contenga a todo W_i^{C} en su vecindad azul. Se enunciará y se demostrará de forma un poco más general:

Lema 2.1.7

Sean $X \subseteq W$ conjuntos de vértices en $V(G)$ tales que

1. X y W cumplen las hipótesis del Lema 2.1.3; es decir, X induce un completo de color rojo, y $E(X, W \setminus X) \subseteq E^R(G)$.
2. $|X| \geq k - 1$.
3. $3k + 2 \leq |W^{\text{C}}|$.
4. Existe $X' \subseteq W^{\text{C}}$ tal que $|X'| \geq k$ y X' induce un completo de color rojo.
5. Existe $v \in W$ tal que $W^{\text{C}} \subseteq N^A(v)$.

Entonces el Teorema 1.2.11 es cierto, es decir, existen dos vértices $\{v_1, v_2\}$ tal que $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \{v_1, v_2\}$, donde

$$E(V_i, V_i) \subseteq E^R(G) \quad E(V_i, V_j) \subseteq E^A(G)$$

para todo $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$.

Demostración. Sean $X \subseteq W$ como en el enunciado del lema. Se considera $G[W^{\text{C}}]$, el grafo formado por los vértices en W^{C} , con la coloreación inducida por la coloreación en las aristas de G . Por hipótesis, $|W^{\text{C}}| \geq 3k + 2$ y por Corolario 1.2.2, $r(C_{2k+2}) = 3k + 2$; luego existe un ciclo C_{2k+2} monocromático subgrafo de $G[W^{\text{C}}]$.

Además este grafo no contiene C_{2k+1} monocromáticos de color rojo (pues serían ciclos en G) y tampoco de color azul (pues junto al vértice $v \in W$ formarían una rueda azul de tamaño $2k + 1$ en G). Luego, $G[W^{\text{C}}]$ cumple las hipótesis del Lema 1.2.26 y por lo tanto existe una partición $Y_1 \cup Y_2$ de W^{C} , y un color $C \in \{R, A\}$ tal que

1. Y_1 e Y_2 inducen grafos monocromáticos completos de color C .
2. $E(Y_1, Y_2)$ no contiene aristas disjuntas de color C .

Nótese que esto implica que las aristas de color distinto a C en W^{C} forman un grafo bipartito. Por hipótesis, existe $X' \subseteq W^{\text{C}}$ tal que $|X'| \geq k$ e induce un completo de color rojo. Como $k \geq 3$, dicho grafo no puede ser bipartito. De esta forma se deduce que $C = R$, es decir, Y_1 e Y_2 inducen completos de color rojo.

Sigue que

$$|Y_1|, |Y_2| \leq 2k, \tag{2.6}$$

pues de otra forma contendrían como subgrafo a C_{2k+1} rojo. Como $|W^{\text{C}}| \geq 3k + 2$ entonces $\min\{|Y_1|, |Y_2|\} \geq k + 2$.

Para facilitar la notación, se anotará $Y_3 := W$. Entonces $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ son disjuntos a pares. Nótese que cada par en $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ cumple las hipótesis del Corolario 2.1.4 y por lo tanto

$$\text{no hay dos aristas rojas disjuntas en } E(Y_1, Y_2), \text{ ni en } E(Y_2, Y_3), \text{ ni en } E(Y_1, Y_3). \quad (2.7)$$

Dicho de otra forma, entre cada par de conjuntos en $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ podemos encontrar una estrella monocromática de color rojo (posiblemente vacía). Sea B el conjunto de centros de estas estrellas. Entonces $\{Y_1 \setminus B, Y_2 \setminus B, Y_3 \setminus B\}$ forma una partición de $V(G) \setminus B$ donde entre cada par de conjuntos todas las aristas son azules; pues al eliminar los centros de las estrellas se eliminan todas las posibles aristas rojas que están entre los conjuntos $\{Y_i\}_{i=1}^3$. Nótese que $|B| \leq 3$. Se probará que basta considerar un conjunto $B' \subseteq B$ tal que $|B'| \leq 2$, para eliminar todas las aristas rojas entre los conjuntos $\{Y_i\}_{i=1}^3$.

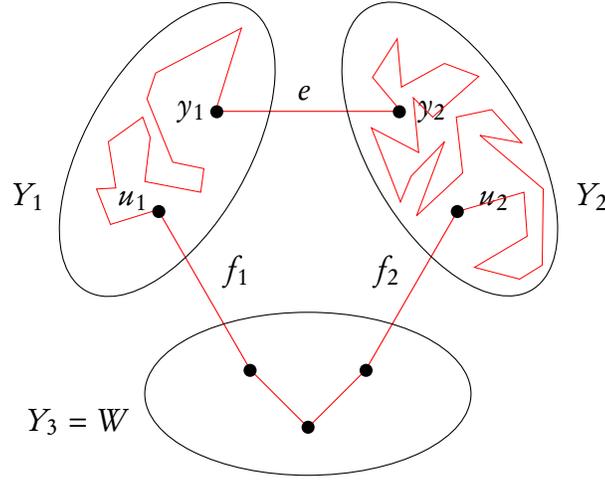


Figura 2.3: Y_1 e Y_2 son grafos completos de color rojo. Se quiere ver que no existe una arista $e \in E(Y_1, Y_2)$ tal que existan dos aristas $f_i \in E(Y_i, Y_3)$ para $i \in \{1, 2\}$ que sean disjuntas a e . Dado cualquier par de vértices en $W = Y_3$, pueden ser unidos por un camino de largo a lo más 2, por el Lema 2.1.3. Además, en Y_1, Y_2 podemos encontrar caminos de largos apropiados que unan los extremos de tales aristas; de manera de hallar el ciclo de tamaño $2k + 1$.

Si es que existe un par en $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ donde todas las aristas entre esos conjuntos sean azules, entonces se tiene a lo más dos posibles centros de estrellas, y considerando B' como los centros de tales estrellas, $|B'| \leq 2$. Así que basta considerar el caso en que todo par de conjuntos en $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ contiene al menos una arista roja.

Sea $e = y_1 y_2$ una arista roja en $E(Y_1, Y_2)$, con $y_i \in Y_i$ para $i \in \{1, 2\}$. Supóngase que en $E(Y_1, Y_3)$ y $E(Y_2, Y_3)$ existen aristas rojas, cada una de ellas disjunta con e . Llámense $f_i = u_i w_i \in E(Y_i, Y_3)$ con $u_i \in Y_i$ y $w_i \in Y_3$, para $i \in \{1, 2\}$ tales aristas. Por hipótesis, $Y_3 = W$ cumple las hipótesis del Lema 2.1.3, así que si los vértices w_1 y w_2 son distintos, pueden ser unidos por un camino de largo 2; si $w_1 = w_2$ se unen por un camino de largo cero. Como f_i y e son disjuntas, los vértices u_i e y_i son distintos y pertenecen a Y_i para $i \in \{1, 2\}$.

Notar que Y_1 e Y_2 son completos de tamaño superior a $k + 2$ y por lo tanto también cumplen las hipótesis del Lema 2.1.3. Luego en Y_i existen (y_i, u_i) -caminos de largo 2 hasta $k + 2$ para todo $i \in \{1, 2\}$. Usando estos caminos más la arista e y el (w_1, w_2) -camino mencionado anteriormente, se obtienen ciclos rojos de largo l para todo $l \in [6, 2k + 5]$, lo que forma un C_{2k+1} ciclo

rojo, lo que es una contradicción. Por lo tanto no pueden haber aristas rojas disjuntas con e en $E(W, Y_1)$ y $E(W, Y_2)$.

Luego, existe un $i \in \{1, 2\}$ tal que todas las aristas rojas en $E(Y_i, Y_3)$ inciden en y_i , por lo tanto y_i es el centro de la estrella entre $E(Y_i, Y_3)$. Por lo tanto, si se elige $B' = \{y_1, y_2\} = e$ se tiene que $E(Y_i \setminus B', Y_3)$ y $E(Y_1 \setminus B', Y_2 \setminus B')$ no tienen aristas rojas, por (2.7). Si existiera una arista roja e' en $E(Y_3, Y_{3-i} \setminus B')$ entonces tomando alguna arista roja $y_i w$ en $E(Y_i, W)$ se tiene que $w y_i y_{3-i}$ es un (Y_{3-i}, W) -camino disjunto con la arista e' . Análogo al razonamiento anterior, por el Lema 2.1.3 en Y_3 se encuentran caminos de largo 2 hasta $k - 2$ entre w y $e' \cap W$; y en Y_{3-i} se encuentran caminos de largo 2 hasta $k + 2$ entre y_{3-i} y $e' \cap Y_{3-i}$, juntándolos se encuentra nuevamente un ciclo de largo $2k + 1$, como se ve en la Figura 2.4.

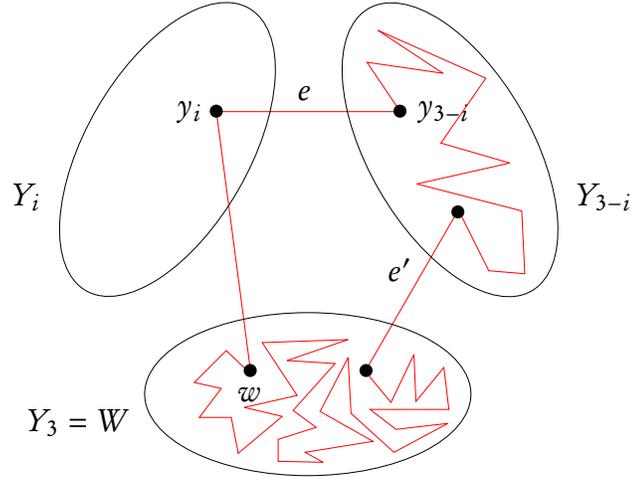


Figura 2.4: $e = y_1 y_2$ es una arista en $E(Y_1, Y_2)$, y entre cada uno de los conjuntos $E(Y_1, Y_3)$ y $E(Y_2, Y_3)$, las aristas rojas forman una estrella. Si se tiene que $i \in \{1, 2\}$ es tal que y_i es centro de la estrella roja en $E(Y_1, Y_3)$, entonces no puede existir una arista roja al quitar e : encontramos un ciclo C_{2k+1} monocromático rojo.

Por lo tanto, usando $B' = \{y_1, y_2\}$ se obtienen conjuntos $\{Y_1 \setminus B', Y_2 \setminus B', Y_3\}$ tal que cada par de ellos no contiene aristas rojas y $|B'| \leq 2$. Notar que Y_1 e Y_2 inducen completos de color rojo, luego por (2.6) y (2.7) para concluir basta verificar que $Y_3 = W$ no contiene ninguna arista azul.

Supóngase que $e = w_1 w_2$ es una arista azul en $W \setminus B'$. Como $|Y_i| \geq k + 2$ para todo $i \in \{1, 2\}$, entonces $|Y_i \setminus B'| \geq k + 1$. En $E(Y_1 \setminus B', Y_2 \setminus B')$ no hay aristas rojas, entonces forman un bipartito completo de color azul con al menos $k + 1$ vértices por lado y por lo tanto contiene como subgrafo azul a un ciclo C de tamaño $2k$. El vértice w_1 tiene como vecino azul a todo $Y_1 \setminus B'$ y $Y_2 \setminus B'$, así que se puede formar un ciclo azul de largo $2k + 1$ en $V(C) \cup \{w_1\}$. Finalmente, el vértice w_2 tiene como vecino azul a todo $Y_1 \cup Y_2 \cup \{w_1\}$ y por lo tanto forman una rueda azul de tamaño $2k + 1$, lo que es una contradicción. \square

Se verá un caso particular de este resultado, que será usado después:

Corolario 2.1.8

Sean $X \subseteq W$ con las mismas hipótesis que en el Lema 2.1.7, pero además se tiene como hipótesis extra que $E(W, W^c) \subseteq E^A(G)$. Entonces se tiene el Teorema 1.2.11 pero quitando a lo más un vértice.

Demostración. Se tienen las mismas hipótesis que la del Lema 2.1.7 y calcando la demostración se puede encontrar una partición $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ de $V(G)$ (con $W = Y_3$) tal que cumplan (2.6) y (2.7). Por la hipótesis extra, tenemos que $E(W, Y_1)$ y $E(W, Y_2)$ son todas aristas azules, y en conclusión sólo pueden haber aristas rojas en $E(Y_1, Y_2)$, que forman una estrella (posiblemente vacía) y para eliminarlas basta quitar (a lo más) un sólo vértice en Y_1 o Y_2 . Se concluye de manera idéntica a lo anteriormente realizado. \square

Recapitulando: se tiene una partición de $V(G) = W_1 \cup W_2 \cup W_3$ tal que $|W_1|, |W_2| \geq k$ y $X_i^* \subseteq W_i$. Además, no existen dos (W_1, W_2) -caminos monocromáticos rojos disjuntos. Por el Teorema de Menger aplicado al grafo $G^R = (V, E^R)$, se obtiene que el tamaño de un (W_1, W_2) -separador mínimo en G^R está acotado superiormente por 1. Se denotará a tal separador como $S \subseteq V(G)$.

Nótese que la conclusión del Teorema 1.2.11 es inmediata si es que se cumple la Hipótesis 5 del Lema 2.1.7 para $W = W_i$ para algún $i \in \{1, 2\}$; pues las Hipótesis 1 y 2 son evidentes, la Hipótesis 3 sale del Lema 2.1.6 y de que $N \geq 5k + 3$ y la Hipótesis 4 se tiene por la existencia de X_{3-i}^* , que es disjunto con X_i^* .

Luego, por el Lema 2.1.7, basta reducirse al caso en que todo vértice en W_i tiene un vecino rojo en W_{3-i} o en W_3 , para $i \in \{1, 2\}$. A partir de ahora se separará la demostración en casos.

1. Existe una arista roja en $E(W_1, W_2)$.

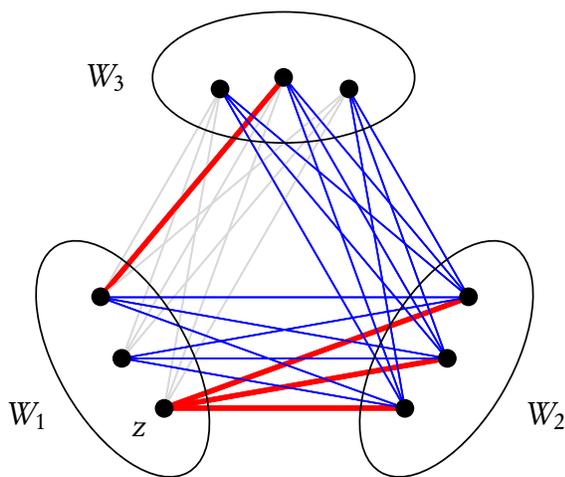


Figura 2.5: Ilustra el caso en que existe una arista roja en $E(W_1, W_2)$. Quitando el vértice $z \in W_1$, se tiene que W_2 tiene la estructura que permite concluir por el Corolario 2.1.8. Las aristas más gruesas representan el color rojo, las más finas el color azul.

Sea $e = e_1e_2$ con $e_i \in W_i$ para $i \in \{1, 2\}$ tal arista. Como no hay dos (W_1, W_2) -caminos rojos arista-disjuntos, las aristas rojas en $E(W_1, W_2)$ forman una estrella. Supóngase que el centro de tal estrella, z , está en W_i . Luego, si w es un vértice distinto de z en W_i , entonces se tiene que $W_{3-i} \subseteq N^A(w)$. Se está bajo la suposición de que todo vértice en W_i tiene un vecino rojo en W_i^c , así que si w es un vértice en W_i distinto de z ; este vértice w forzosamente debe tener un vecino rojo en W_3 .

Notemos que en W_3 las aristas de color rojo forman un grafo conexo. Además, si $w \in W_{3-i} \setminus \{e_{3-i}\}$, este vértice w está obligado a tener un vecino rojo en W_{3-i}^0 y si fuera en W_3 forma un (W_1, W_2) -camino rojo disjunto con la arista existente en $E(W_1, W_2)$. Luego, todos los vértices de W_{3-i} tienen como vecino rojo al centro de la estrella $z \in W_i$. En conclusión, $E(W_3, W_{3-i}) \subseteq E^A(G)$. Si se elimina el vértice z tenemos que el conjunto W_{3-i} es tal que $E(W_{3-i}, W_i \setminus \{z\})$ y $E(W_{3-i}, W_3)$ son todas azules, y por lo tanto satisface las condiciones del Corolario 2.1.8. Esto indica que existe $|B| \leq 1$ tal que quitando $B \cup \{z\}$ forma la partición deseada, y con ello se puede concluir el resultado en este caso.

2. No existe una arista roja en $E(W_1, W_2)$.

Recuérdese que existe un (W_1, W_2) -separador S de cardinalidad a lo más uno. No puede ser vacío pues siempre existe un camino entre W_1 y W_2 : todo vértice en W_1 tiene un vecino rojo en W_1^0 y no puede estar en W_2 —pues si estuviese en W_2 se obtiene una arista roja en $E(W_1, W_2)$ —, y lo mismo pasa al considerar los vecinos rojos de los vértices de W_2 . Luego, todo vértice en W_1 y W_2 tiene algún vecino rojo en W_3 . Como W_3 induce un grafo conexo al considerar las aristas rojas, siempre existe un (W_1, W_2) -camino monocromático rojo. Luego el tamaño de un separador mínimo debe ser $|S| = 1$.

No puede ser que tal separador esté en W_3^0 : si $S = \{s\} \subseteq W_i$, cualquier $x \neq s$ en $W_1 \cup W_2$ debe tener un vecino rojo en W_3 . Un vértice en X_3^* tiene como vecinos rojos a todos los vértices de W_3 , así que usándolo se puede formar un (W_1, W_2) -camino rojo que no contenga a v . Luego, forzosamente se tiene que $S = \{s\} \subseteq W_3$.

Supóngase que el grafo $G^R[W_3] \setminus \{s\}$ es conexo. Luego, debe existir $i \in \{1, 2\}$ tal que $E(W_3 \setminus \{s\}, W_i)$ es completamente azul. En caso contrario, existiría un (W_1, W_2) -camino que no usa el separador S , lo que es absurdo. Luego, tal conjunto W_i cumple las hipótesis del Lema 2.1.8 en el grafo $G \setminus S$, y por lo tanto se puede concluir el resultado deseado eliminando a lo más un vértice más. Basta, por lo tanto, suponer que $G^R[W_3] \setminus \{s\}$ es desconexo.

Recuérdese que $X_3^* \subseteq W_3$ es tal que $E(X_3^*, W_3 \setminus X_3^*)$ induce un bipartito completo de color rojo. Luego, la única forma en que $G^R[W_3] \setminus S$ sea desconexo es que $X_3^* \subseteq S$. Como $X_3^* \neq \emptyset$ entonces se tiene que $X_3^* = S$ y luego $|X_3^*| = |S| = 1$.

Por Lema 2.1.2, todo vértice en $W_3 \setminus X_3^*$ tiene un vecino rojo ya sea en W_1 o W_2 , y ninguno puede tener vecino rojo en ambos. Luego, se puede particionar $W_3 \setminus X_3^*$ en $Y_1 \cup Y_2$ donde $Y_i := \{v \in W_3 \setminus S : \text{tiene un vecino rojo en } W_i\}$.

Como $\{Y_1, Y_2\}$ es partición, $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$. Además, $E(Y_1, W_2) \cup E(Y_2, W_1) \subseteq E^A(G)$. Finalmente, se tiene que $E(Y_1, Y_2) \subseteq E^A(G)$, pues todo vértice en Y_i tiene un vecino rojo en W_i y de existir una arista roja en $E(Y_1, Y_2)$, se tendría un (W_1, W_2) -camino rojo que no pasa por S . Entonces se obtiene una partición del estilo $\{W_1 \cup Y_1, W_2 \cup Y_2, S\}$ tal que $E(W_1 \cup Y_1, W_2 \cup Y_2) \subseteq E^A(G)$.

Se considera $G \setminus S$, y supongamos sin pérdida de generalidad que $|W_1 \cup Y_1| \leq |W_2 \cup Y_2|$.

Se quiere ver que $|W_1 \cup Y_1| \leq 2k$. Por contradicción, supóngase que no es así y por lo tanto $|W_1 \cup Y_1| \geq 2k + 1$. Si así fuera, el grafo inducido por $W_1 \cup Y_1$ no puede ser un completo monocromático de color rojo, pues contendría como subgrafo a C_{2k+1} en color rojo. Luego, contiene al menos una arista azul. Sea $e = v_1v_2$ alguna de ellas, con $v_1, v_2 \in W_1 \cup Y_1$. Considérese $H := G[W_2 \cup Y_2]$ con la coloración heredada obvia.

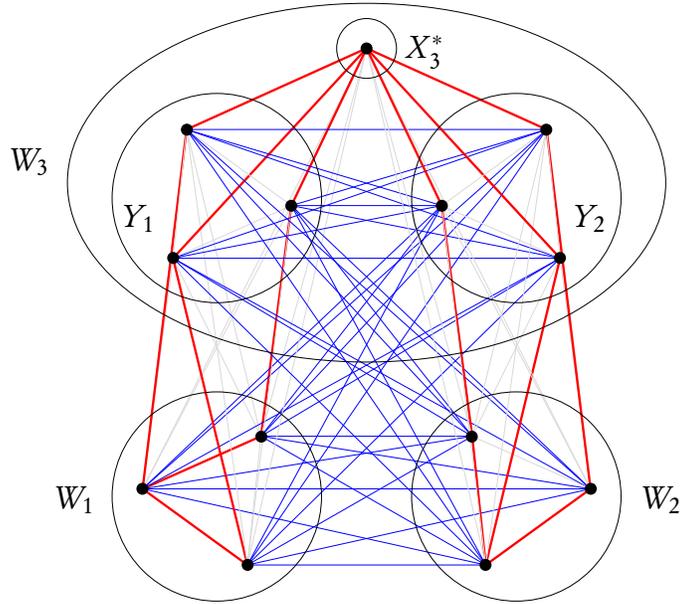


Figura 2.6: Los vértices en W_3 se particionan en $X_3^* \cup Y_1 \cup Y_2$. Todo vértice en Y_i tienen algún vecino rojo en W_i , para $i \in \{1, 2\}$. Además, $E(W_1 \cup Y_1, W_2 \cup Y_2)$ sólo consiste de aristas azules. Las aristas más gruesas representan el color rojo, las más finas el color azul.

Si existe un vértice $w \in V(H)$ tal que $|N_H^A(w)| \geq k$, entonces en $W_1 \cup Y_1 \setminus \{v_1, v_2\}$ se escogen $k - 1$ vértices cualquiera en un conjunto B_1 . Como $E(W_1 \cup Y_1, W_2 \cup Y_2) \subseteq E^A(G)$, entonces $E(\{v_1, v_2\} \cup B_1, N_H^A(w))$ forman un bipartito completo monocromático azul donde un lado tiene tamaño $k + 1$ y el otro mayor que k . Como $v_1 v_2$ es una arista azul, existe un ciclo monocromático azul de tamaño $2k + 1$ contenido en $\{v_1, v_2\} \cup B_1 \cup N_H^A(w)$. Finalmente recuérdese que $\{v_1, v_2\} \cup B_1 \cup N_H^A(w) \subseteq N_A^G(w)$ y por lo tanto, tomando a w como «buj» de la rueda, se forma una rueda de tamaño $2k + 1$ monocromática azul. Entonces para todo $w \in V(H)$ se debe tener que $|N_H^A(w)| \leq k - 1$.

Obviamente se tiene que $|N_H^A(w)| + |N_H^R(w)| + 1 = |H|$ para todo $w \in H$, así que la cota encontrada implica que $|N_H^A(w)| \geq |H| - k$. Por otro lado, como $|W_1 \cup Y_1| + |W_2 \cup Y_2| + 1 = N \geq 5k + 3$ se tiene que $|H| = |W_2 \cup Y_2| \geq \frac{5k+2}{2} > 2k$. Esto implica que $|H| - k > \frac{1}{2}|H|$ y por lo tanto que $|N_H^R(w)| > \frac{1}{2}|H|$.

Si se considera entonces el grafo dado por H^R , que contiene todas las aristas rojas de H , se obtiene que todo vértice tiene grado mayor estricto que $\frac{1}{2}|H|$, así que $\delta(H^R) > \frac{1}{2}|H^R|$. Por Lema 1.2.20, es pancíclico o bien bipartito completo donde cada parte tiene el mismo tamaño; pero este último caso es imposible ya que la cota en el grado mínimo es estrictamente mayor que $|H^R|/2$. Entonces H^R es pancíclico. Como $|H^R| \geq 2k + 1 \geq 3$ entonces el grafo H^R tiene un ciclo de tamaño $2k + 1$, que es un monocromático rojo en G ; lo que es imposible. Luego, el caso en que $|W_1 \cup Y_1| \geq 2k + 1$ no puede suceder.

Entonces $|W_1 \cup Y_1| \leq 2k$. Por lo tanto se tiene que $|W_2 \cup Y_2| \geq N - 1 - 2k \geq 3k + 2$ y se aplica el Corolario 2.1.8 para concluir.

Como estos son todos los casos posibles, se concluye la demostración del Teorema 1.2.11. ■

Capítulo 3

Cotas en el número de Ramsey para rueda par versus ciclo impar

3.1. Demostración del teorema secundario

El propósito de esta sección es demostrar el Teorema 1.2.12.

Sea $n = 2k + 1 \geq 11$. Por lo tanto, $k \geq 5$. Considérese $N = 5k + 3$ y un grafo completo G en N vértices con una bicoloración de sus aristas $c : E(G) \rightarrow \{R, A\}$ en rojo y azul. Basta probar que esta coloración contiene como subgrafo a C_{2k+1} monocromático de color rojo, o bien a W_{2k+2} monocromático de color azul.

Supóngase que no es así; entonces G no contiene como subgrafo a C_{2k+1} monocromático de color rojo ni a W_{2k+2} monocromático de color azul. Probamos una serie de lemas:

Lema 3.1.1

Se tiene que $\Delta^A(G) \leq 4k + 2$. Por lo tanto, $\delta^R(G) \geq k$.

Demostración. Supóngase que existe v con $d^A(v) \geq 4k + 3$. Por Teorema 1.2.1, se obtiene que $r(C_{2k+1}, C_{2k+2}) = 2(2k + 1) - 1 = 4k + 3$. Por lo tanto, $N^A(v)$ contiene un ciclo rojo de tamaño $2k + 1$ o bien un ciclo azul de tamaño $2k + 2$; pero en el primer caso tendríamos a C_{2k+1} monocromático rojo en el grafo G ; y en el segundo el ciclo C_{2k+2} azul, junto a v , forman un W_{2k+2} monocromático azul en G , lo que es imposible.

Por lo tanto $\Delta^A(G) \leq 4k + 2$, de donde se sigue inmediatamente que $\delta^R(G) \geq k$. \square

Se buscará ahora una cota inferior para $\Delta^A(G)$, o equivalentemente, una cota superior para $\delta^R(G)$. Para ello primero se demuestra lo siguiente:

Lema 3.1.2

Sea $0 \leq s \leq k - 1$. Si $\delta^R(G) \geq k + s$, entonces G^R es $(s + 1)$ -conexo.

En particular, si $\delta^R(G) \geq k$, entonces G^R es conexo; y si $\delta^R(G) \geq k + 1$ entonces G^R es 2-conexo.

Demostración. Sea $0 \leq s \leq k - 1$ y supóngase que $\delta^R(G) \geq k + s$. Con el propósito de encontrar una contradicción, supóngase que G^R no es $(s + 1)$ -conexo, es decir, existe un conjunto S tal que $|S| \leq s$ y $G^R \setminus S$ es desconexo.

Supóngase que C_1, \dots, C_r son las componentes conexas de $G^R \setminus S$. En primer lugar notamos que

$$\delta^R(G \setminus S) \geq \delta^R(G) - |S| \geq \delta^R(G) - s \geq k$$

y por lo tanto cada componente conexa tiene tamaño al menos $k + 1$, es decir, $|C_i| \geq k + 1$ para $i \in \{1, \dots, r\}$.

Nótese que $r \geq 2$, pues G^R es desconexo y al menos debe tener dos componentes conexas. Se prueba que $r = 2$. Si $r > 2$ entonces se tienen al menos tres componentes conexas, C_1, C_2 y C_3 . Por lo visto anteriormente, cada una de estas componentes tiene tamaño mayor a $k + 1$. Como en el grafo G^R forman componentes conexas distintas, significa que no existe ninguna arista roja con vértices en componentes distintas, así que en G se tiene que el grafo formado por tales vértices tienen como subgrafo a un grafo 3-partito completo con componentes de tamaño $|C_1|, |C_2|$ y $|C_3|$, monocromático de color azul.

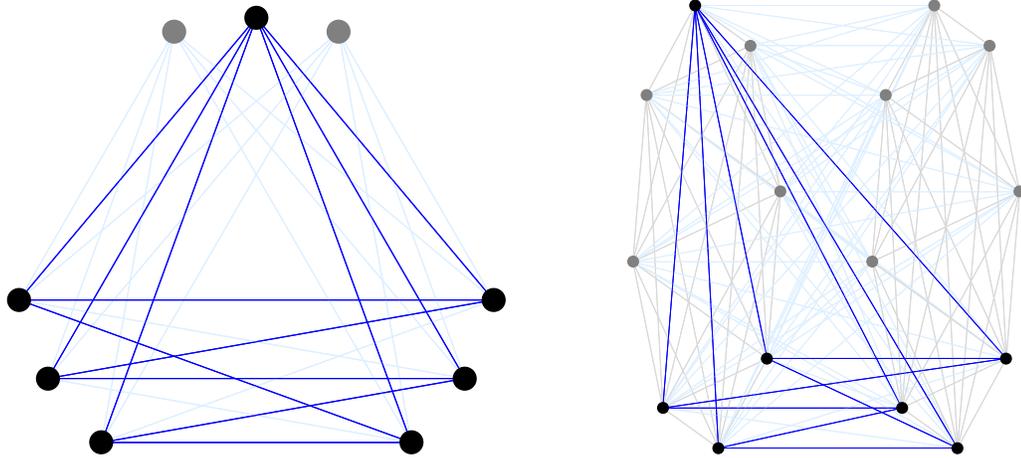


Figura 3.1: En la primera figura, W_{2k+2} como subgrafo del tripartito $K_{k+1, k+1, k+1}$. En la segunda, W_{2k+2} como subgrafo en un caso particular, donde se tiene como subgrafo a un bipartito completo en azul con partes de tamaño mayor a $k + 2$, y una de las partes tiene un vértice de grado azul mayor a $k + 1$.

En particular, las aristas $E(C_2, C_3)$ forman un bipartito completo de color azul, como cada una tiene tamaño mayor a $k + 1$ significa que contiene un ciclo de tamaño $2k + 2$. Escogiendo $v \in C_1$ cualquiera, tiene como vecinos azules a todo C_2 y C_3 , con lo que se forma la rueda azul de tamaño $2k + 2$, lo que es imposible. Luego $r = 2$.

Notar que $|G^R \setminus S| \geq |G| - |S| \geq 5k + 3 - (k - 1) \geq 4k + 4$. Como $|C_1| + |C_2| = |G^R \setminus S|$, existe alguna componente en $\{C_1, C_2\}$ con al menos $2k + 2$ vértices. Sin pérdida de generalidad, supóngase que $|C_1| \geq |C_2|$ y por lo tanto $|C_1| \geq 2k + 2$.

Considérese el subgrafo y la coloreación inducidos por C_1 . Nótese que si un vértice v en C_1 tiene $k + 1$ vecinos azules en C_1 , entonces, usando que $E(C_1, C_2) \subseteq E^A(G)$ se concluye que los vértices $\{v\}, N^A(v) \cap C_1$ y C_2 contienen como subgrafo a un grafo tripartito completo con partes

de tamaño 1, $|N^A(v) \cap C_1|$ y $|C_2|$. Como $|N^A(v) \cap C_1| \geq k + 1$ y $|C_2| \geq k + 1$ entonces contiene como subgrafo a $K_{1,k+1,k+1}$ y por Lema 1.2.16 contiene como subgrafo a W_{2k+2} monocromático azul, lo que no puede ser.

Esto implica que $\Delta^A(C_1) \leq k$ y por lo tanto $\delta^R(C_1) \geq |C_1| - k - 1$. Como $|C_1| \geq 2k + 2$, entonces se tiene que

$$\delta^R(C_1) \geq \frac{|C_1|}{2}$$

Por Teorema 1.2.20 se tiene que las aristas rojas en C_1 forman un grafo pancíclico o bien un bipartito completo con partes de igual tamaño.

Supóngase que $C_1^R \simeq K_{m,m}$ para algún m . Como $|C_1| \geq 2k + 2$ entonces $m \geq k + 1$. Como el grado azul de todo vértice es a lo más k , tenemos que $m = k + 1$. Por lo tanto $|C_1| = 2k + 2$. Si C_1^R fuere bipartito con partes de tamaño $k + 1$, se seleccionan en cada lado de la partición k vértices que nombramos $\{u_1^1, \dots, u_k^1\}$ y $\{u_1^2, \dots, u_k^2\}$ respectivamente. Como $|C_1| + |C_2| \geq 4k + 4$, se tiene que $|C_2| \geq 2k + 2$. Supóngase que algún vértice v tiene como vecinos azules a dos vértices en C_2 , digamos, v_1 y v_2 . Entonces $u_1^1 \dots u_k^1 v_1 u_1^2 \dots u_k^2 v_2$ es un ciclo azul de largo $2k + 2$ y v es vecino azul de todos ellos, así que forma una rueda azul. Entonces C_2 es tal que $\Delta^A(C_2) \leq 1$ y por lo tanto $\delta^R(C_2) \geq 2k$. Como $k > 1$ entonces $\delta^R(C_2) > |C_2|/2$ y por Corolario 1.2.21, C_2 es pancíclico en el color rojo, así que tiene un ciclo de color rojo de tamaño $2k + 1$, lo que es una contradicción. Luego C_1^R no puede ser bipartito completo con partes de igual tamaño.

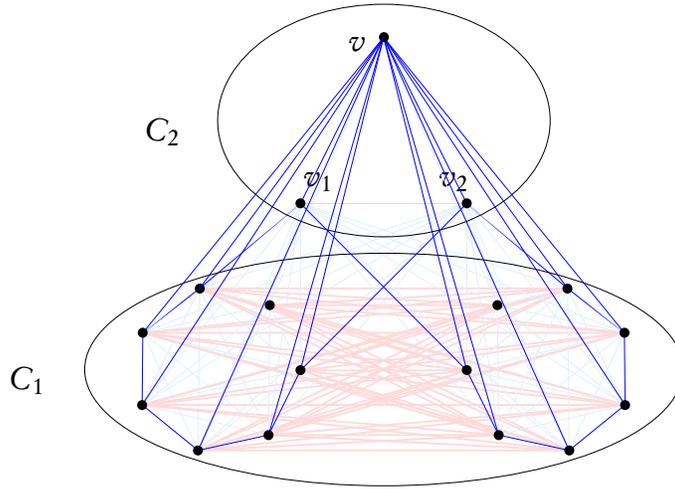


Figura 3.2: Si C_1 en las aristas rojas es un grafo bipartito completo con partes de tamaño $k + 1$, y C_2 tiene un vértice de grado azul al menos 2; entonces se forma una rueda W_{2k+2} azul. En la figura, el ejemplo para $k = 6$. El vértice $v \in C_2$ tiene como vecinos azules en C_2 a v_1 y v_2 ; y todas las aristas en $E(C_1, C_2)$ son azules.

Por Teorema 1.2.18, se tiene que C_1^R es pancíclico. En particular, incluye un ciclo de tamaño $2k + 1$ rojo, lo que es una contradicción. Esto concluye lo pedido. \square

Observación 3.1.3

En particular, el Lema 3.1.2 indica que G^R es conexo.

Lema 3.1.4

El grafo G^R no es bipartito.

Demostración. Si lo fuera, sea $\{H_1, H_2\}$ un bipartición de G^R . Cada uno de esos grafos induce un completo en las aristas azules. Como $|G^R| = 5k + 3$, existe un $i \in \{1, 2\}$ tal que H_i tiene tamaño al menos $\lceil \frac{5k+3}{2} \rceil$. Si $k \geq 2$, se tiene que $\lceil \frac{5k+3}{2} \rceil \geq 2k + 3$. Existe un grafo completo con aristas de color azul y de tamaño al menos $2k + 3$, por lo que contiene una rueda W_{2k+2} azul, contradicción. \square

Se tienen ya los ingredientes necesarios para probar una cota inferior para el grado máximo azul, o equivalentemente, una cota inferior para el grado mínimo en rojo. Será útil el Teorema 1.2.22, que asegura que un grafo no bipartito es débilmente pancíclico si su grado mínimo es suficientemente grande.

Lema 3.1.5

Se tiene que $\Delta^A(G) \geq \frac{10k+1}{3}$.

Demostración. Se mostrará que el grafo G^R no puede tener grado mínimo mayor a $\frac{5k+5}{3}$. Supongamos que tiene tal grado. Por Lema 3.1.4, G^R no es bipartito, y como $\frac{5k+5}{3} = \frac{|G^R|+2}{3}$, entonces usando el Teorema 1.2.22 se obtiene que G^R es débilmente pancíclico con cintura de tamaño menor o igual a 4. Como G no tiene ciclos rojos de largo $2k + 1$ y es débilmente pancíclico, esto significa que $c(G^R) \leq 2k$, o sea, su circunferencia es menor a $2k$.

Como $\delta^R(G) \geq \frac{5k+5}{3} \geq k + 1$, por Lema 3.1.2 se tiene que G^R es 2-conexo. Por Lema 1.2.19 se tiene que $c(G^R) \geq \min\{2\delta(G^R), |G^R|\}$ y como $|G^R| \geq 2k \geq c(G^R)$ entonces $\delta(G^R) \leq k$, contradicción.

Entonces $\delta^R(G) < \frac{5k+5}{3}$, así que $\Delta^A(G) \geq 5k + 3 - \frac{5k+5}{3} - 1 \geq \frac{10k+1}{3}$. \square

A partir de ahora se definirá un nuevo subgrafo para trabajar. Considérese un vértice \bar{v} con grado azul máximo en G . Defínase H como el subgrafo inducido por los vértices $N^A(\bar{v})$, o sea los vecinos azules de \bar{v} ; con la coloreación heredada de G . Por Lemas 3.1.1 y 3.1.5, tenemos que

$$\left\lceil \frac{10k+1}{3} \right\rceil \leq |H| \leq 4k+2, \quad (3.1)$$

donde se usa que $|H|$ es entero para agregar el «techo» en la cota inferior.

Por el Corolario 1.2.2, $r(C_{2k+2}) = 3k + 2$. Para $k \geq 3$ se tiene que $\lceil \frac{10k+1}{3} \rceil \geq 3k + 2$ y por lo tanto $|H| \geq r(C_{2k+2})$, así que H contiene un ciclo de tamaño $2k + 2$ de color rojo o azul. Si fuera azul, junto con el vértice \bar{v} se forma la rueda W_{2k+2} en el grafo G , así que no puede ser. Por lo tanto H contiene como subgrafo a C_{2k+2} de color rojo. Entonces,

$$C_{2k+2} \subseteq H^R \quad \wedge \quad C_{2k+2} \not\subseteq H^A. \quad (3.2)$$

Como C_{2k+1} rojo no está en G , no puede estar en H . Esto en particular implica que si $C = x_0x_1 \cdots x_{2k}x_{2k+1}$ es un ciclo rojo de tamaño $2k + 2$, entonces las aristas $x_i x_{i+2}$ (donde la suma se toma módulo $2k + 2$) son de color azul. Esto significa que H contiene dos ciclos azules de tamaño $k + 1$ disjuntos, dados por $C_1 = x_0x_2 \cdots x_{2k}$ y $C_2 = x_1x_3 \cdots x_{2k+1}$.

Los dos argumentos anteriores permiten hacer la siguiente observación:

Observación 3.1.6

Se tiene que

1. $c(H^R) \geq 2k + 2$ y
2. $g(H^A) \leq k + 1$.

Podemos encontrar, además, una cota superior para la cintura del grafo H_R .

Lema 3.1.7

Se tiene que $g(H^R) \leq 2k + 1$.

Demostración. Si $\delta(H^R) \geq 3$, por Teorema 1.2.24, tenemos que $g(H^R) < 2 \log_2(|H^R|)$. Tenemos que $|H^R| = |H| \leq 4k + 2$ y dado que $k \geq 3$, tenemos que $2 \log_2(4k + 2) \leq 2k + 2$ y por lo tanto $g(H^R) \leq 2k + 1$.

Si $\delta(H^R) < 3$, entonces existe un vértice w de grado rojo en H a lo más 2. Entonces tiene como vecino azul a todos los vértices de H , exceptuando a lo más 2. Sea $R := N^A(w) \cap H$. Se tiene que $|R| \geq |H| - 3 \geq \left\lceil \frac{10k+1}{3} \right\rceil - 3 \geq 2k + 2$ donde la última cota vale dado que $k \geq 3$. Nótese que R no puede contener un camino azul con $2k + 1$ vértices. De ser así, y junto con w forman un ciclo de largo $2k + 2$, junto con \bar{v} forman un W_{2k+2} . Por lo tanto si P es un camino azul de largo máximo en R , tiene a lo más $2k$ vértices, así que $|R \setminus P| \geq 2$. Por maximalidad, los extremos de P no pueden tener vecinos azules en $R \setminus P$. Luego, nombrando como p_1 y p_2 son los extremos del camino P y escogiendo $q_1, q_2 \in R \setminus P$ cualesquiera, se tiene que $p_1q_1p_2q_2$ es un ciclo rojo de tamaño $4 \leq 2k + 1$.

Luego, en cualquier caso, $g(H^R) \leq 2k + 1$. □

Notemos que por la Observación 3.1.6 y el Lema 3.1.7, $g(H^R) \leq 2k + 1 < 2k + 2 \leq c(H^R)$; y además H no contiene al ciclo rojo C^{2k+1} . Se deduce que

$$H_R \text{ no es débilmente pancíclico.} \tag{3.3}$$

Ahora se estudiará un poco más a fondo la estructura del grafo H . Se comenzará por una serie de dos lemas: ni las aristas azules ni las aristas rojas hacen de H un grafo bipartito.

Lema 3.1.8

El grafo H^A no es bipartito.

Demostración. Supóngase que sí lo es y $\{H_1, H_2\}$ es una bipartición. Tanto H_1 como H_2 inducen completos de color rojo, y como el subgrafo C_{2k+1} rojo está prohibido se tiene que $\max\{|H_1|, |H_2|\} \leq 2k$. Como $|H_1| + |H_2| = |H| \geq \left\lceil \frac{10k+1}{3} \right\rceil$, se tiene que $\min\{|H_1|, |H_2|\} \geq \left\lceil \frac{10k+1}{3} \right\rceil - 2k \geq k + 2$, donde la última cota vale dado que $k \geq 3$.

En particular, si existieran dos aristas rojas disjuntas entre H_1 y H_2 , entonces se tienen ciclos rojos de largo 4 hasta $|H|$, en particular, de tamaño $2k + 1$; lo que es imposible. Entonces todas las aristas rojas en $E(H_1, H_2)$ no pueden ser disjuntas, es decir, forman una estrella (posiblemente vacía). Quitando el centro de esta estrella se obtienen H'_1 y H'_2 , tales que $E(H'_1, H'_2)$

induce un completo bipartito azul, y $\min\{|H'_1|, |H'_2|\} \geq \min\{|H_1|, |H_2|\} - 1 \geq k + 1$. En particular, contiene el ciclo azul de tamaño $2k + 2$, junto al vértice \bar{v} forma W_{2k+2} de color azul, contradicción. \square

Lema 3.1.9

El grafo H^R no es bipartito.

Demostración. Nuevamente, supóngase que sí lo es y $\{H_1, H_2\}$ es una bipartición. Tanto H_1 como H_2 inducen completos de color azul, y como el subgrafo C_{2k+2} azul está prohibido en H (si no, junto con \bar{v} forma W_{2k+2} azul) se tiene que $\max\{|H_1|, |H_2|\} \leq 2k + 1$. Como $|H_1| + |H_2| = |H| \geq \lceil \frac{10k+1}{3} \rceil$, se tiene que $\min\{|H_1|, |H_2|\} \geq \lceil \frac{10k+1}{3} \rceil - (2k + 1) \geq k + 2$, donde la última cota vale dado que $k \geq 6$.

Repitiendo lo realizado en el caso anterior: si existieran dos aristas azules disjuntas entre H_1 y H_2 , entonces tenemos ciclos azules de largo 4 hasta $|H|$, en particular, de tamaño $2k + 2$; lo que es imposible. Entonces todas las aristas azules en $E(H_1, H_2)$ no pueden ser disjuntas, es decir, forman una estrella (posiblemente vacía). Quitando el centro de tal estrella, se obtienen H'_1 y H'_2 tales que $\min\{|H'_1|, |H'_2|\} \geq \min\{|H_1|, |H_2|\} - 1 \geq k + 1$ y además $E(H'_1, H'_2)$ inducen un completo bipartito rojo.

Se define $Z := N^R(\bar{v})$. Recuérdese que $H = N^A(\bar{v})$ y por lo tanto $Z \cap H = \emptyset$. Además, por Lema 3.1.1 se tiene que $|Z| \geq k$.

Se quiere probar que existe $i \in \{1, 2\}$ tal que $E(H'_i, Z)$ sólo consiste de aristas azules. Supóngase que no es así y por lo tanto existen $h_i \in H'_i$ y $z_i \in Z$ tal que $h_i z_i$ son aristas rojas, para $i \in \{1, 2\}$. Si es que $z_1 = z_2$ entonces $h_1 z_1 h_2$ es un camino de largo 2 que une vértices en H'_1 y H'_2 . Como $E(H'_1, H'_2)$ es un completo bipartito rojo donde cada parte tiene tamaño mayor a k , esto significa que se puede encontrar un ciclo C_{2k+1} rojo, lo que es imposible. Por lo tanto $z_1 \neq z_2$. Nótese que todo vértice en Z es vecino rojo de \bar{v} , así que se tiene que $h_1 v_1 \bar{v} v_2 h_2$ es un camino de largo 4 que une vértices en H'_1 y H'_2 ; y dado que $k \geq 2$ nuevamente se encuentra un ciclo de tamaño $2k + 1$ rojo, y se llega a una contradicción.

Sin pérdida de generalidad, supóngase que H'_1 es tal que $E(H'_1, Z)$ sólo consiste de aristas azules. Sea $\bar{x} \in H'_1$ cualquiera. Nótese que $(H_1 \setminus \{\bar{x}\}) \cup Z \cup \{\bar{v}\} \subseteq N^A(\bar{x})$ y por lo tanto $|N^A(\bar{x})| \geq |H_1 \setminus \{\bar{x}\}| + |Z| + 1 \geq k + 1 + k + 1 \geq 2k + 2$. De hecho se tiene que $|H'_1| \geq k + 1$ y $|Z \cup \{\bar{v}\}| \geq k + 1$ por lo que se encuentra un ciclo azul de tamaño $2k + 2$ en $N^A(\bar{x})$; que unido a \bar{x} forma una rueda azul W_{2k+2} , lo que es una contradicción. \square

Entonces se concluye que ni H^A ni H^R inducen grafos bipartitos. Nótese ahora una propiedad fundamental del grafo que forman las aristas azules: es débilmente pancíclico; es decir, para todo $g(H^A) \leq \ell \leq c(H^A)$, contiene un ciclo de largo ℓ .

Lema 3.1.10

El grafo H^A es débilmente pancíclico.

Demostración. Se sabe que

$$(m - 1)^2/4 + 1 < \frac{1}{2} \binom{m}{2}$$

para todo $m > 5$ entero. Dado que $k \geq 2$, entonces $|H| \geq \lceil \frac{10k+1}{3} \rceil \geq 7$ así que la cota indicada vale para $m = |H|$. Como $E(H^A) + E(H^R) = \binom{|H|}{2}$, significa que existe un color $c \in \{R, A\}$ tal que $|E(H^c)| \geq \frac{1}{2} \binom{|H|}{2} > (|H| - 1)^2/4 + 1$. Además se tiene que H^A y H^R no son bipartitos. Luego, el Lema 1.2.23 asegura que H^A es débilmente pancíclico o bien H^R es débilmente pancíclico.

Por (3.3), tenemos que H^R no es débilmente pancíclico. Por lo tanto, debe tenerse que H^A es débilmente pancíclico. \square

Por la Observación 3.1.6, se tiene que $g(H^A) \leq k + 1$. Por (3.2), H^A no puede tener un ciclo de tamaño $2k + 2$; y como es débil-pancíclico, se deduce que

$$c(H^A) \leq 2k + 1. \quad (3.4)$$

Ahora se buscará una cota inferior para el grado azul en H . Antes de eso se probará un lema muy sencillo que será útil.

Lema 3.1.11

Sea C un ciclo y $S \subseteq V(C)$ tal que $|S| > |C|/2$. Entonces para todo $1 \leq i < |C|$, S contiene vértices x_i e y_i que están unidos por un camino de largo i en C .

Demostración. Supóngase que la proposición es falsa y sea $1 \leq i < |C|$ tal que S no contiene dos vértices en C unidos por un camino de largo i . Sean $c_0 c_1 \cdots c_{|C|-1}$ los vértices del ciclo en orden. Como S no contiene dos vértices en C unidos por un camino de largo i , se tiene que la función $c_k \mapsto c_{k+i \pmod{|C|}}$ es una función bien definida desde S a $V(C) \setminus S$, que además es inyectiva. Entonces $|C| = |S| + |C \setminus S| \geq 2|S| > |C|$, absurdo. \square

Lema 3.1.12

Se tiene que $\delta(H^A) \geq k + 1$.

Demostración. Supóngase que no. Entonces existe un vértice x con $d_H^A(x) < k + 1$. Dado que $k \geq 6$, se tiene que $|H| \geq \lceil \frac{10k+1}{3} \rceil \geq 3k + 3 = r(C_{2k+2}) + 1$ y por lo tanto en el grafo $H \setminus \{x\}$ existe un ciclo monocromático de tamaño $2k + 2$, que por (3.2) forzosamente debe ser de color rojo. Llamemos C a tal ciclo.

El vértice x tiene a lo más a k vecinos azules en $H \setminus \{x\}$, por lo tanto tiene al menos $k + 2$ vecinos rojos en C . Por Lema 3.1.11, tiene dos vecinos que en C están unidos por un camino de largo 3, digamos, c_1 y c_2 . Entonces $c_1 x c_2 C$ forma un ciclo rojo de largo $2k + 1$, contradicción. \square

Lema 3.1.13

El grafo H^A no es 2-conexo.

Demostración. Si lo fuera, por Lema 1.2.19, se infiere que H^A tiene un ciclo de tamaño al menos $\min\{2\delta(H^A), |H|\}$. Por (3.4) se tiene que $c(H^A) \leq 2k + 1$, y por lo tanto se tiene que $\delta(H^A) \leq k$, que contradice el Lema 3.1.12. \square

Como H^A no es 2-conexo, existe un conjunto S con $|S| \leq 1$ tal que $H^A \setminus S$ es desconexo. Supongamos que $\{C_1, \dots, C_r\}$ son las distintas componentes conexas de $H^A \setminus S$. Obviamente $r \geq 2$. Si $r > 2$, sean C_1, C_2, C_3 tres componentes conexas distintas. Por Lema 3.1.12, $\delta(H^A) \geq k + 1$, y entonces $\delta(H^A \setminus S) \geq \delta(H^A) - 1 \geq k$ y por lo tanto cada componente conexa C_i de $H^A \setminus S$ cumple $|C_i| \geq k + 1$. Entonces $C_1 \cup C_2 \cup C_3$ contiene un grafo tripartito rojo con componentes de tamaño mayor a $k + 1$ cada una, entonces contiene el ciclo rojo de tamaño C_{2k+1} como subgrafo, lo que no puede ser. Entonces $r = 2$ y $H^A \setminus S$ tiene dos componentes conexas, que se llamarán H_1 y H_2 .

Notar que dos vértices que estén en H_1 no pueden estar unidos por una arista de color rojo: como H_2 y H_1 tienen tamaño mayor a $k + 1$, esta nueva arista permitiría armar un ciclo rojo de tamaño $2k + 1$, por el Lema 1.2.17. Entonces H_1 y H_2 forman completos de color azul.

Entonces $H \setminus S$ forma un grafo bipartito en las aristas rojas. Por el Lema 3.1.4, se tiene que H^R no es bipartito. Entonces $S \neq \emptyset$, y en conclusión $S = \{w\}$. Si w sólo tuviera vecinos rojos en H_1 o en H_2 , arma un grafo bipartito en el color rojo. Entonces w tiene vecinos rojos en ambos lados de la bipartición H_1 y H_2 , lo que arma un ciclo rojo de tamaño $2k + 1$. Esta es la última contradicción, que termina por probar el Teorema 1.2.12. ■

3.2. Mejora de la cota asintótica

En la sección anterior se probó que $r(C_{2k+1}, W_{2k+2}) \leq 5k + 3$. Además, por Teorema 1.2.3 se sabe la cota inferior $r(C_{2k+1}, W_{2k+2}) \geq 2(2k + 2) + 1 = 4k + 5$. El propósito de esta sección es probar el Teorema 1.2.13, que consiste en una cota para el número de Ramsey del ciclo $2k + 1$ versus la rueda de tamaño $2k + 2$ de la forma $r(C_{2k+1}, W_{2k+2}) \leq 4k + C$ donde C es una constante apropiada. Esto, sumado a la cota inferior del Teorema de Chvátal-Harary, entrega que $r(C_{2k+1}, W_{2k+2}) \sim 4k$, lo que mejora el Teorema 1.2.12 en el caso asintótico.

La estrategia de demostración del Teorema 1.2.13 es muy similar a la presentada en la Sección 3.1 para demostrar el Teorema 1.2.12. La diferencia crucial es el uso del siguiente resultado de Brandt, Faudree y Goddard [BFG98].

Teorema 3.2.1 (Brandy-Faudree-Goddard [BFG98])

Si G es un grafo 2-conexo no bipartito, en n vértices tal que $\delta(G) > \frac{n}{4} + 250$, entonces G tiene todos los ciclos de largo $g(G)$ hasta $c(G)$, con la posible excepción de C_7 .

Usando este resultado en lugar del Teorema 1.2.22 se logra la mejora deseada, y se llega a demostrar el Teorema 1.2.13. Aparte de esto, y el tamaño de las cotas, los pasos son totalmente análogos a los ya realizados para mostrar el Teorema 1.2.12. Se incluye la demostración acá por completitud, el lector está invitado a saltarse la demostración si lo cree necesario.

Para demostrar el Teorema 1.2.13, supongamos que G es un grafo completo en $N = 4k + 339$ vértices con una bicoloración de aristas en rojo y azul que no tiene como subgrafo monocromático a C_{2k+1} en rojo ni a W_{2k+2} en azul.

Entonces se muestran los siguientes resultados.

Lema 3.2.2

Si $\delta^R(G) \geq N/4 + 250$, entonces G^R es 2-conexo.

Demostración. Supóngase que $\delta^R(G) \geq N/4 + 250 \geq k + 335$. Con el propósito de encontrar una contradicción, supóngase que G^R no es 2-conexo, es decir, existe un conjunto S tal que $|S| \leq 1$ y $G^R \setminus S$ es desconexo.

Supóngase que C_1, \dots, C_r son las componentes conexas de $G^R \setminus S$. En primer lugar, nótese que

$$\delta^R(G \setminus S) \geq \delta^R(G) - |S| \geq \delta^R(G) - 1 \geq k + 334 \geq k + 1$$

y por lo tanto cada componente conexa tiene tamaño al menos $k + 1$, es decir, $|C_i| \geq k + 1$ para $i \in \{1, \dots, r\}$.

Nótese que $r \geq 2$, pues G^R es desconexo y al menos debe tener dos componentes conexas. Se probará que $r = 2$. Si $r > 2$ entonces se tienen al menos tres componentes conexas, sean C_1, C_2 y C_3 tres de ellas. Por lo visto anteriormente, cada una de estas componentes tiene tamaño mayor a $k + 1$. Como en el grafo G^R forman componentes conexas distintas, significa que no existe ninguna arista roja con vértices en componentes distintas, así que en G se tiene que tales vértices contienen un grafo 3-partito completo con componentes de tamaño $|C_1|, |C_2|$ y $|C_3|$, monocromático de color azul.

En particular, las aristas $E(C_2, C_3)$ forman un bipartito completo de color azul, como cada una tiene tamaño mayor a $k + 1$ significa que contiene un ciclo de tamaño $2k + 2$. Escogiendo $v \in C_1$ cualquiera, tiene como vecinos azules a todo C_2 y C_3 , con lo que se forma la rueda azul de tamaño $2k + 2$, lo que es imposible. Luego $r = 2$.

Notar que $|G^R \setminus S| \geq |G| - |S| \geq N - 1$. Como $|C_1| + |C_2| = |G^R \setminus S|$, existe alguna componente en $\{C_1, C_2\}$ con al menos $(N - 1)/2$ vértices. Sin pérdida de generalidad, supóngase que $|C_1| \geq |C_2|$ y por lo tanto $|C_1| \geq (N - 1)/2 \geq 2k + 168 > 2k + 2$.

Considérese el subgrafo y la coloreación inducidos por C_1 . Notemos que si un vértice v en C_1 tiene $k + 1$ vecinos azules en C_1 ; usando que en C_2 existen al menos $k + 1$ vértices y estos son vecinos azules de todo C_1 ; se concluye que $\{v\}, N^A(C_1)$ y C_2 inducen un grafo que contiene un tripartito completo de partes de tamaño mayor a $1, k + 1$ y $k + 1$; por lo tanto por Lema 1.2.16 se encuentra la rueda W_{2k+2} con centro en v . Esto implica que $\Delta^A(C_1) \leq k$ y por lo tanto $\delta^R(C_1) \geq |C_1| - k - 1$. Como $|C_1| > 2k + 2$, entonces se tiene que

$$\delta^R(C_1) > \frac{|C_1|}{2}$$

Por Corolario 1.2.21 se tiene que las aristas rojas en C_1 forman un grafo pancíclico y en particular incluyen una copia monocromática roja de C_{2k+1} , lo que es una contradicción. \square

Lema 3.2.3

El grafo G^R no es bipartito.

Demostración. Si lo fuera, sea $\{H_1, H_2\}$ un bipartición de G^R . Cada uno de esos grafos induce un completo en las aristas azules. Como $|G^R| = N = 4k + 339 \geq 4k + 5$, existe un $i \in \{1, 2\}$ tal que H_i tiene tamaño al menos $2k + 3$. Luego existe un grafo completo completo con aristas de color azul y de tamaño al menos $2k + 3$, por lo que contiene una rueda W_{2k+2} azul, contradicción. \square

Lema 3.2.4

Se tiene que $\Delta^A(G) \geq 3k + 4$.

Demostración. Se mostrará que el grafo G^R no puede tener grado mínimo mayor a $N/4 + 250$. Supóngase que tiene grado mínimo mayor a $N/4 + 250$. Por Lema 3.2.3, G^R no es bipartito, y por Lema 3.2.2 se tiene que G^R es 2-conexo. Por Teorema 3.2.1 se tiene que G^R tiene todos los ciclos de tamaño desde $g(G^R)$ hasta $c(G^R)$, salvo la posible excepción de C_7 .

Como el grado mínimo es mayor a $N/4 + 250$, tomando cuatro vértices distintos $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ existe algún par de vértices $x, y \in V(G) \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ que está en la intersección de la vecindad de G^R de dos vértices, digamos, v_1, v_2 . Entonces v_1xv_2y es un ciclo de largo cuatro y por lo tanto $g(G^R) \leq 4 \leq 7 < 2k + 1$ dado que $k \geq 4$. Como no hay un ciclo rojo de tamaño $2k + 1$ y G^R tiene todos los ciclos de tamaño desde $g(G^R)$ hasta $c(G^R)$, salvo la posible excepción de C_7 ; debe tenerse que $c(G^R) < 2k + 1$.

Como G^R es 2-conexo, por Lema 1.2.19 se tiene que $c(G^R) \geq \min\{2\delta(G^R), |G^R|\}$ y como $|G^R| > 2k \geq c(G^R)$ entonces $\delta(G^R) \leq k$, contradicción.

Entonces $\delta^R(G) \leq N/4 + 250$ y por lo tanto existe un vértice v con grado menor o igual a $N/4 + 250$. Entonces el grado máximo azul es

$$\Delta^A(G) \geq d^A(v) \geq N - 1 - (N/4 + 250) = 3(4k + 336)/4 - 251 \geq 3k + 4$$

y se concluye lo deseado. □

A partir de ahora se definirá un nuevo subgrafo para trabajar. Considérese un vértice \bar{v} con grado azul máximo en G . Se define H como el subgrafo inducido por los vértices $N^A(\bar{v})$, o sea los vecinos azules de \bar{v} ; con la coloreación heredada de G . Por Lema 3.2.4 se tiene que

$$3k + 4 \leq |H| \tag{3.5}$$

Por Corolario 1.2.2, se tiene que $r(C_{2k+2}) = 3k + 2$, así que H contiene un ciclo de tamaño $2k + 2$ de color rojo o azul. Si fuera azul, junto con el vértice \bar{v} se forma la rueda W_{2k+2} en el grafo G , así que no puede ser. Por lo tanto H contiene como subgrafo a C_{2k+2} de color rojo.

Como C_{2k+1} rojo no está en G , no puede estar en H . Esto en particular implica que si $C = x_0x_1 \cdots x_{2k}x_{2k+1}$ es un ciclo rojo de tamaño $2k + 2$, entonces las aristas $x_i x_{i+2}$ (donde la suma se toma módulo $2k + 2$) son de color azul. Esto significa que H contiene dos ciclos azules de tamaño $k + 1$ disjuntos, dados por $C_1 = x_0x_2 \cdots x_{2k}$ y $C_2 = x_1x_3 \cdots x_{2k+1}$.

Los dos argumentos anteriores permiten hacer la siguiente observación:

Observación 3.2.5

Se tiene que

1. $c(H^R) \geq 2k + 2$ y
2. $g(H^A) \leq k + 1$.

Se estudiará más a fondo la estructura del grafo H . Se comienza por una serie de dos lemas: ni las aristas azules ni las aristas rojas hacen de H un grafo bipartito.

Lema 3.2.6

El grafo H^A no es bipartito.

Demostración. Supóngase que sí lo es y $\{H_1, H_2\}$ es una bipartición. Tanto H_1 como H_2 inducen completos de color rojo, y como el subgrafo C_{2k+1} rojo está prohibido se tiene que $\max\{|H_1|, |H_2|\} \leq 2k$. Como $|H_1| + |H_2| = |H| \geq 3k + 4$, tenemos que $\min\{|H_1|, |H_2|\} \geq 3k + 4 - 2k \geq k + 4 \geq k + 2$.

En particular, si existieran dos aristas rojas disjuntas entre H_1 y H_2 , entonces se tienen ciclos rojos de largo 4 hasta $|H|$, en particular, de tamaño $2k + 1$; lo que es imposible. Entonces todas las aristas rojas en $E(H_1, H_2)$ no pueden ser disjuntas, es decir, forman una estrella (posiblemente vacía). Quitando el centro de esta estrella se obtienen H'_1 y H'_2 , tales que $E(H'_1, H'_2)$ induce un completo bipartito azul, y $\min\{|H'_1|, |H'_2|\} \geq \min\{|H_1|, |H_2|\} - 1 \geq k + 1$. En particular, contiene el ciclo azul de tamaño $2k + 2$, junto al vértice \bar{v} forma W_{2k+2} de color azul, contradicción. \square

Lema 3.2.7

El grafo H^R no es bipartito.

Demostración. Nuevamente, supóngase que sí lo es y $\{H_1, H_2\}$ es una bipartición. Tanto H_1 como H_2 inducen completos de color azul, y como el subgrafo C_{2k+2} azul está prohibido en H (si no, junto con \bar{v} forma W_{2k+2} azul) se tiene que $\max\{|H_1|, |H_2|\} \leq 2k + 1$. Como $|H_1| + |H_2| = |H| \geq 3k + 4$, tenemos que $\min\{|H_1|, |H_2|\} \geq 3k + 4 - (2k + 1) \geq k + 3$.

Repitiendo lo realizado en el caso anterior: si existieran dos aristas azules disjuntas entre H_1 y H_2 , entonces se tienen ciclos azules de largo 4 hasta $|H|$, en particular, de tamaño $2k + 2$; lo que es imposible. Entonces todas las aristas azules en $E(H_1, H_2)$ no pueden ser disjuntas, es decir, forman una estrella (posiblemente vacía). Quitando el centro de tal estrella, se obtienen H'_1 y H'_2 tales que $\min\{|H'_1|, |H'_2|\} \geq \min\{|H_1|, |H_2|\} - 1 \geq k + 2$ y además $E(H'_1, H'_2)$ inducen un completo bipartito rojo.

Se define $Z := N^R(\bar{v})$. Recuérdese que $H = N^A(\bar{v})$ y por lo tanto $Z \cap H = \emptyset$. Como $\max\{|H_1|, |H_2|\} \leq 2k + 1$ entonces $|H| \leq 4k + 2$ y por lo tanto $|Z| \geq N - (4k + 2) \geq 337$, luego $Z \neq \emptyset$.

Se quiere probar que existe $i \in \{1, 2\}$ tal que $E(H'_i, Z)$ sólo consiste de aristas azules. Supóngase que no es así y por lo tanto existen $h_i \in H'_i$ y $z_i \in Z$ tal que $h_i z_i$ son aristas rojas, para $i \in \{1, 2\}$. Si es que $z_1 = z_2$ entonces $h_1 z_1 h_2$ es un camino de largo 2 que une vértices en H'_1 y H'_2 . Como $E(H'_1, H'_2)$ es un completo bipartito rojo donde cada parte tiene tamaño mayor a k , esto significa que se puede encontrar un ciclo C_{2k+1} rojo, lo que es imposible. Por lo tanto $z_1 \neq z_2$. Nótese que todo vértice en Z es vecino rojo de \bar{v} , así que se tiene que $h_1 v_1 \bar{v} v_2 h_2$ es un camino de largo 4 que une vértices en H'_1 y H'_2 , nuevamente se encuentra un ciclo de tamaño $2k + 1$ rojo, y llegamos a contradicción.

Sin pérdida de generalidad, supóngase que H'_1 es tal que $E(H'_1, Z)$ sólo consiste de aristas azules. Se tiene que $|H'_1| \geq \min\{|H'_1|, |H'_2|\} \geq k + 2$. Se seleccionan $\bar{x} \in H'_1$ cualquiera y $R_1 \subseteq H'_1 \setminus \{\bar{x}\}$ tal que $|R_1| = k + 1$.

Como

$$|H'_1 \cup Z| \geq |H \cup Z| - 1 \geq N - |H_2| - 2 \geq N - (2k + 1) - 2 \geq 2k + 336$$

se pueden seleccionar $R_2 \subseteq H'_1 \cup Z \setminus (R_1 \cup \{\bar{x}\})$ de manera tal que $|R_2| = k + 1$.

Cada vértice en H'_1 tiene como vecino azul a todos los vértices en $H'_1 \cup Z$. Entonces \bar{x} tiene vecinos azules a todo $R_1 \cup R_2$. Además, cada vértice de R_1 tiene como vecino azul a todo vértice de R_2 . Luego $E(R_1, R_2)$ induce un completo bipartito con partes de tamaño $k + 1$, en particular tiene un ciclo de tamaño $2k + 2$ que junto a \bar{x} forma una rueda W_{2k+2} , lo que resulta ser una contradicción. \square

Se tiene entonces que ni H^A ni H^R inducen grafos bipartitos. Nótese ahora una propiedad fundamental del grafo que forman las aristas azules: es débilmente pancíclico; es decir, para todo $g(H^A) \leq \ell \leq c(H^A)$, contiene un ciclo de largo ℓ .

Lema 3.2.8

El grafo H^A es débilmente pancíclico.

Demostración. Como $|H| \geq 3k + 4 \geq 5$ entonces se tiene que

$$(|H| - 1)^2/4 + 1 < \frac{1}{2} \binom{|H|}{2}$$

Como $E(H^A) + E(H^R) = \binom{|H|}{2}$, significa que existe un color $c \in \{R, A\}$ tal que $|E(H^c)| \geq \frac{1}{2} \binom{|H|}{2} > (|H| - 1)^2/4 + 1$. Además sabemos que H^A y H^R no son bipartitos. Luego, el Lema 1.2.23 asegura que H^A es débilmente pancíclico y $g(H^A) = 3$ o bien H^R es débilmente pancíclico y $g(H^R) = 3$.

Por la Observación 3.2.5 se tiene que que $c(H^R) \geq 2k + 2$; entonces si $g(H^R) = 3$ y es débilmente pancíclico, tiene como subgrafo a C_{2k+1} , lo que no puede ser. Por lo tanto, debe tenerse que H^A es débilmente pancíclico. \square

Por lo mencionado, se tiene que $g(H^A) = 3 \leq 2k + 1$. Como H^A no puede tener un ciclo de tamaño $2k + 2$, se deduce que

$$c(H^A) \leq 2k + 1. \tag{3.6}$$

Lema 3.2.9

Se tiene que $\delta(H^A) \geq k + 1$.

Demostración. Supóngase que no. Entonces existe un vértice x con $d_H^A(x) < k + 1$. Se tiene que $|H| \geq 3k + 3 = r(C_{2k+2}) + 1$ y por lo tanto en el grafo $H \setminus \{x\}$ existe un ciclo monocromático de tamaño $2k + 2$, que forzosamente debe ser de color rojo. Sea C uno de estos ciclos.

El vértice x tiene a lo más a k vecinos azules en $H \setminus \{x\}$, por lo tanto tiene al menos $k + 2$ vecinos rojos en C . Por Lema 3.1.11, tiene dos vecinos que en C están unidos por un camino de largo 3, digamos, c_1 y c_2 . Entonces $c_1 x c_2 C$ forma un ciclo rojo de largo $2k + 1$, contradicción. \square

Lema 3.2.10

Se tiene que H^A no es 2-conexo.

Demostración. Si lo fuera, por Lema 1.2.19, se infiere que H^A tiene un ciclo de tamaño al menos $\min\{2\delta(H^A), |H|\}$. Por 3.6 se tiene que $c(H^A) \leq 2k + 1$, así que $\delta(H^A) \leq k$, que contradice el Lema 3.2.9. \square

Como H^A no es 2-conexo, existe un conjunto S con $|S| \leq 1$ tal que $H^A \setminus S$ es desconexo. Supóngase que $\{C_1, \dots, C_r\}$ son las distintas componentes conexas de $H^A \setminus S$. Obviamente $r \geq 2$. Si $r > 2$, sean C_1, C_2, C_3 tres componentes conexas. Por Lema 3.2.9, $\delta(H^A) \geq k + 1$, y entonces $\delta(H^A \setminus S) \geq \delta(H^A) - 1 \geq k$ y por lo tanto cada componente conexa C_i de $H^A \setminus S$ cumple $|C_i| \geq k + 1$. Entonces $C_1 \cup C_2 \cup C_3$ contiene un grafo tripartito rojo con componentes de tamaño mayor a $k + 1$ cada una, en conclusión contiene el ciclo rojo de tamaño $2k + 1$ como subgrafo, lo que no puede ser. Entonces $r = 2$ y $H^A \setminus S$ tiene dos componentes conexas, llámense H_1 y H_2 .

Notar que dos vértices que estén en H_1 no pueden estar unidos por una arista de color rojo: como H_2 y H_1 tienen tamaño mayor a $k + 1$, esta nueva arista permitiría armar un ciclo rojo de tamaño $2k + 1$, por el Teorema 1.2.17. Entonces H_1 y H_2 forman completos de color azul.

Entonces $H \setminus S$ forma un grafo bipartito en las aristas rojas. Por el Lema 3.2.3, se tiene que H^R no es bipartito. Entonces $S \neq \emptyset$, luego $S := \{w\}$. Si w sólo tuviera vecinos rojos en H_1 o en H_2 , arma un grafo bipartito en el color rojo. Entonces w tiene vecinos rojos en ambos lados de la bipartición H_1 y H_2 , lo que arma un ciclo rojo de tamaño $2k + 1$. Esta es la última contradicción, que termina por probar el Teorema 1.2.13. ■

Conclusión

En términos del resultado de «estructura» obtenido en el Teorema 1.2.11, la extensión obvia es verificar si esto funciona en otra clase de grafos. Resulta interesante plantear esto en el caso más general posible.

Dado un grafo G , se define su *excedente cromático* (o *chromatic surplus*) como el mínimo número de vértices en una clase de color; tomado sobre todos los coloreos propios de G con $\chi(G)$ colores. Lo denotamos por $s(G)$. Por ejemplo, para el caso de C_n y W_n con n impar, se tiene que $s(C_n) = s(W_n) = 1$.

Un teorema que generaliza el resultado del Teorema 1.2.3 es dado por Burr en [Bur81].

Teorema 3.2.11 (Burr [Bur81])

Para todo par de grafos G y H , con G conexo y $|V(G)| = n \geq s(H)$, se tiene que

$$r(G, H) \geq (\chi(H) - 1)(n - 1) + s(H).$$

Siguiendo las definiciones de [ABS10], se dice que un grafo G es H -bueno si $r(G, H) = (\chi(H) - 1)(|G| - 1) + s(H)$. Es decir, que la cota inferior dada por el Teorema 3.2.11 se alcanza. Esto da marco para enunciar la conjetura en su forma más general.

Conjetura 3.2.12

Sean $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ familias de grafos tales que G_n es conexo y H_n -bueno para todo n .

Entonces existe $f(n) < r(G_n, H_n)$ tal que si $N \geq f(n)$ y si K_N es un grafo completo con una bicoloración de sus aristas tal que ni G_n ni H_n son subgrafos monocromáticos de K_N en sus colores respectivos; entonces sus vértices se pueden particionar en $\chi(H_n) + 1$ conjuntos $\{V_0, V_1, \dots, V_{\chi(H)}\}$ donde $|V_0| \leq C$, donde C es una constante que no depende de n , $|V_i| < |G_n|$ para todo $i \in \{1, \dots, \chi(H) - 1\}$ y $|V_{\chi(H)}| < s(H_n)$; de manera tal que $E(V_i, V_i) \subseteq E^R(K_N)$ y $E(V_i, V_j) \subseteq E^A(K_N)$ para todo $i, j \in \{1, \dots, \chi(H)\}$ con $i \neq j$.

Esto generalizaría los Teoremas 1.2.11 y 1.2.4. Valdría la pena estudiar bajo qué condiciones es cierta tal conjetura: quizás sea necesario imponer algunas cotas uniformes para los parámetros de los grafos, por ejemplo, $\chi(G_n)$. O bien, estudiar familias de grafos específicas donde esto sea cierto, quizás el caso más cercano y asequible sería el de ruedas versus ruedas del mismo tamaño.

Otro ámbito fértil para mejoras son los resultados que conciernen a cotas de números de Ramsey. Por ejemplo, los Teoremas 1.2.12 y 1.2.13 presentan margen para mejorarse en términos de la cota superior alcanzada. El Teorema 1.2.3 da una cota inferior para el número de Ramsey de dos grafos cualesquiera y Zhang, Zhang y Chen [ZZC14] conjeturan que esta cota se alcanza en el caso de un ciclo impar de tamaño n , una rueda par de tamaño m y $n < m < 3(n - 1)/2$. Por lo tanto queda abierto el problema en el caso que nos atañe, cuando $m = n + 1$.

Conjetura 3.2.13

Si $n = 2k + 1$ es un impar suficientemente grande, $r(C_n, W_{n+1}) = 2m + 1 = 4k + 5$.

Otra manera de mejorar el resultado obtenido en términos del Teorema 1.2.12 sería adaptar la demostración a los casos en que m sea un par de la forma $m = n + j$ para un j impar suficientemente chico.

Conjetura 3.2.14

Si $n = 2k + 1$ es un impar suficientemente grande y j es impar suficientemente chico, ¿es cierto que $r(C_n, W_{n+j}) \leq 5k + 3$?

Bibliografía

- [ABS10] Allen, P., G. Brightwell y J. Skokan: *Ramsey-goodness – and otherwise*. ArXiv e-prints, 2010.
- [BFG98] Brandt, S., R.J. Faudree y W. Goddard: *Weakly pancyclic graphs*. Journal of Graph Theory, 27:141–176, 1998.
- [Bon71] Bondy, J. A.: *Pancyclic Graphs I*. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 11:80–84, 1971.
- [Bra97] Brandt, S.: *A sufficient condition for all short cycles*. Discrete Appl. Math., 79:63–66, 1997.
- [Bur81] Burr, S. A.: *Ramsey numbers involving graphs with long suspended paths*. J. London Math. Soc., 24:405–413, 1981.
- [CCMN09] Chen, Y., T.C. Cheng, Z. Miao y C.T. Ng: *The Ramsey numbers for cycles versus wheels of odd order*. Applied Mathematics Letters, 22:1875–1876, 2009.
- [CCNZ12] Chen, Y.J., T.C.E. Cheng, C.T. Ng y Y.Q. Zhang: *A theorem on cycle-wheel Ramsey number*. Discrete Math., 312:1059–1061, 2012.
- [CH72] Chvátal, V. y F. Harary: *Generalized Ramsey theory for graphs, III. Small off-diagonal numbers*. Pacific J. Math, 41:335–345, 1972.
- [Die12] Diestel, Reinhard: *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 4ª edición, 2012, ISBN 9783642142789.
- [Dir52] Dirac, G.A.: *Some theorems in abstract graphs*. Proceedings of the London Mathematical Society, 2:69–81, 1952.
- [FS74] Faudree, R.J. y R.H. Schelp: *All Ramsey numbers for cycles in graphs*. Discrete Mathematics, 8:313–329, 1974.
- [NS08] Nikiforov, V. y R.H. Schelp: *Cycles and stability*. Journal of Combinatorial Theory, 98:69–84, 2008.
- [Rad14] Radziszowski, S.: *Small Ramsey numbers*. The Electronic Journal of Combinatorics, DS 1.14, 2014.
- [SBT06] Surahmat, E.T. Baskoro y I. Tomescu: *The Ramsey numbers of large cycles versus wheels*. Discrete Mathematics, 306:3334–3337, 2006.
- [ZCC10] Zhang, Y., Y. J. Chen y T. C. Chen: *The Ramsey numbers for cycles versus wheels of even order*. European Journal of Mathematics, 31:254–259, 2010.
- [ZZC14] Zhang, Y., Y. Zhang y Y. Chen: *The Ramsey numbers of wheels versus odd cycles*. Discrete Mathematics, 323:76–80, 2014.