

Méthode du second membre modifié pour la gestion de rapports de viscosité importants dans le problème de Stokes bifluide

Thi Thu Cuc Bui ^a, Pascal Frey ^{a,b}, Bertrand Maury ^{c,*}

^a UPMC – Université Paris 06, UMR 7598, Laboratoire J.L. Lions, 75005 Paris, France

^b Universidad de Chile, UMI 2807, Centro de Modelamiento Matemática, Santiago, Chile

^c Université Paris-sud, Laboratoire de mathématiques, 91405 Orsay cedex, France

Résumé

Dans cette Note, nous présentons une méthode pour résoudre numériquement l'équation de Stokes modélisant l'écoulement incompressible de deux fluides non-miscibles ayant des viscosités très différentes. La résolution des systèmes d'équations provenant de la discrétisation par éléments finis est faite par la méthode d'Uzawa. Les problèmes de conditionnement de la matrice de raideur liés aux rapports de viscosités très importants sont contournés par un nouveau schéma itératif. Un exemple numérique est proposé pour illustrer l'efficacité de cette approche.

Abstract

Method of the Modified Right-Hand Side for the handling of high viscosity ratios the bifluid Stokes problem. In this Note, we present a method to solve numerically the Stokes equation for the incompressible flow between two immiscible fluids presenting very different viscosities. The resolution of the finite element systems of equations is performed using Uzawa's method. The stiffness matrix conditioning problems related to the very important viscosity ratios are circumvented using an new iterative scheme. A numerical example is proposed to show the efficiency of this approach.

Mots-clés : Mécanique des fluides numérique ; Problème de Stokes bifluide ; Méthode d'Uzawa

Keywords : Computational fluid mechanics; Bifluid Stokes problem; Uzawa's method

Abridged English version

We consider a domain $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) which is subdivided into two subdomains Ω^i , $i = 1, 2$, sharing a common interface Γ . In this Note, we propose a method to solve the Stokes problem (1) describing an incompressible

* Auteur correspondant.

Adresses e-mail : bui@ann.jussieu.fr (T.T.C. Bui), frey@ann.jussieu.fr (P. Frey), Bertrand.Maury@math.u-psud.fr (B. Maury).

flow of two immiscible fluids with very different viscosities μ^i on Ω^i . In the variational formulation (6), we consider as approximation space of the velocity \mathbf{u} (resp. of the pressure p) the space of Lagrange finite elements \mathbb{P}_1 -bubble (resp. \mathbb{P}_1). Uzawa's method is then used to solve the resulting linear system (7), in which several equations of the form $AX = G$, A being the stiffness matrix, are solved using a conjugate gradient method. Notice that very important viscosity ratios can jeopardize the numerical resolution as the condition number of A may become very large. To circumvent these difficulties, we propose a new variational formulation of the Stokes problem in which the viscosity ratio has been totally removed from the matrix A and transferred to the right-hand side of the equation. As a consequence, the condition number of A depends only on the mesh size h of the triangulation T_h covering the domain Ω . With this approach (cf. Section 3), the Uzawa solution (\mathbf{u}, p) of the Stokes problem is now obtained as the limit of a sequence of solutions (\mathbf{u}_k, p_k) when $k \rightarrow \infty$.

This method can be extended without any difficulty to unsteady Stokes equations and to the simulation of the displacement of a large number of pseudo-rigid particles in a viscous fluid. An example of a Couette flow is provided to show the efficiency of our approach (Fig. 1).

1. Introduction

Dans cette Note, on présente une méthode pour résoudre le problème de Stokes dans le cas où les deux fluides modélisés présentent un rapport de viscosité très important, de l'ordre de 10^6 par exemple. Pour de tels rapports, la matrice de raideur A issue de la discrétisation par éléments finis est généralement très mal conditionnée. De ce fait, les méthodes itératives utilisées pour résoudre les systèmes linéaires associés rencontrent d'énormes difficultés de convergence. Pour circonvier ce problème, nous proposons ici une méthode basée sur une formulation variationnelle du problème de Stokes dans laquelle le rapport des viscosités est éliminé de la matrice A et transféré au second membre. Ainsi, le conditionnement de la matrice A ne dépend que de la taille de maille h de la triangulation T_h utilisée pour discrétiser le domaine de calcul.

Cette approche se généralise sans difficulté aux équations instationnaires pour la simulation des écoulements multi-fluides, même lorsque ceux-ci sont caractérisés par des rapports de viscosités très importants. De même, il est possible d'envisager d'appliquer cette méthode à la simulation numérique du déplacement d'un grand nombre de particules pseudo-rigides en suspension dans un fluide visqueux. Enfin, nous allons tirer parti du raffinement de maillage anisotrope des interfaces entre les fluides pour améliorer la précision des solutions et réduire le nombre de degrés de liberté du problème.

La méthode d'Uzawa permettant de résoudre numériquement le problème de Stokes est rappelée à la Section 2. Nous détaillons notre approche à partir d'un problème de Poisson, pour établir la convergence de la méthode, et nous introduisons la formulation variationnelle associée au problème de Stokes à la Section 3. Enfin, Section 4, nous proposons un exemple de résolution numérique du cas test de l'écoulement de Couette pour illustrer l'efficacité de notre méthode.

2. Méthode d'Uzawa pour la résolution du problème de Stokes

2.1. Modèle continu

On considère un domaine Ω de \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$) et deux sous-domaines Ω^1 et Ω^2 de frontières respectives $\partial\Omega^1$ et $\partial\Omega^2$, tels que $\Omega^1 \cup \Omega^2 = \Omega$ et $\Omega^1 \cap \Omega^2 = \emptyset$. On désigne par Γ la frontière entre les deux sous-domaines : $\Gamma = \partial\Omega^1 \cap \partial\Omega^2$. Dans le problème qui nous intéresse, chaque domaine Ω^i est occupé par un fluide visqueux incompressible caractérisé par sa masse volumique ρ^i et sa viscosité dynamique μ^i . Les équations de Stokes qui régissent ce problème sont de la forme, dans chaque Ω^i , $i = 1, 2$:

$$\begin{cases} -\mu^i \Delta \mathbf{u}^i + \nabla p^i = \rho^i \mathbf{f}^i \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^i = 0 \end{cases} \quad (1)$$

avec les conditions de continuité du champ de vitesses et d'équilibre des contraintes normales avec la tension superficielle à l'interface Γ :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2 = \mathbf{0} \\ (\sigma^1 - \sigma^2) \cdot \mathbf{n}^1 = -K \mathbf{n}^1 \end{cases} \quad (2)$$

et des conditions aux limites de type Dirichlet ou de type Neumann, ou de type mixte :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_D \text{ sur } \Gamma_D, \quad \sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{s}_N \text{ sur } \Gamma_N, \quad \Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega, \quad \Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset \quad (3)$$

où $\sigma = \mu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t) - p\mathbf{I}$ est le tenseur des contraintes, \mathbf{n}^1 est le vecteur normal unitaire sur Γ à Ω^1 , dirigé vers Ω^2 , K est une fonction connue (de la forme κ/R , où $\kappa > 0$ est une constante et R est le rayon de courbure locale, supposé positif si le centre de courbure est dans Ω^1). Les fonctions inconnues, vitesse et pression, sont de la forme $\mathbf{u} = \mathbf{u}^i$, $p = p^i$ dans Ω^i , $i = 1, 2$. Par la suite, pour toute grandeur φ^i définie sur Ω^i , on convient de noter simplement $\varphi = \varphi^1 \chi_{\Omega^1} + \varphi^2 \chi_{\Omega^2}$ la grandeur sur Ω .

2.2. Formulation variationnelle

Pour simplifier l'écriture et sans perte de généralité, on considère désormais des conditions aux limites de type Dirichlet homogène, ce qui nous amène à introduire les espaces fonctionnels suivants, pour les fonctions test, la vitesse et la pression respectivement :

$$X = H_0^1(\Omega)^d, \quad V = \{\mathbf{v} \in X : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}, \quad M = L^2(\Omega) \quad (4)$$

On introduit la notation $A_1(\mathbf{u}) = \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t$, et comme $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, on a $\Delta \mathbf{u} = \operatorname{div} A_1(\mathbf{u})$ sur chaque Ω^i . Ainsi, en considérant le produit scalaire de la première équation du système de Stokes (1) dans $L^2(\Omega^i)^d$ avec une fonction test $\mathbf{v} \in X$, et en sommant sur i , on obtient grâce à formule de Green :

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega^i} (\mu^i A_1(\mathbf{u}^i) - p^i \mathbf{I}) : \nabla \mathbf{v}^i \, dx + \sum_{i=1}^2 \int_{\partial\Omega^i} (-\mu^i A_1(\mathbf{u}^i) \mathbf{n}^i + p^i \mathbf{n}^i) \cdot \mathbf{v}^i \, ds = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega^i} \rho^i \mathbf{f}^i \cdot \mathbf{v}^i \, dx \quad (5)$$

Le symétrique de l'opérateur $A_1(\mathbf{u})$ permet d'écrire $A_1(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} = A_1(\mathbf{u}) : (\nabla \mathbf{v})^t$ et sachant que $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d$ et $\mathbf{n}^2 = -\mathbf{n}^1$ sur Γ , avec les conditions à l'interface (2), on obtient finalement la formulation variationnelle (voir [2]) suivante : Chercher $\mathbf{u} \in X$, $p \in M$ tels que :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega^i} \frac{1}{2} \mu^i A_1(\mathbf{u}^i) : A_1(\mathbf{v}^i) \, dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx - \int_{\Gamma} K \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^1 \, ds, & \forall \mathbf{v} \in X \\ \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx = 0, & \forall q \in M \end{cases} \quad (6)$$

2.3. Discrétisation par éléments finis

Le domaine Ω est recouvert par une triangulation T_h respectant la discrétisation Γ_h de l'interface. On choisit comme espace d'approximation V_h des vitesses et M_h des pressions, respectivement, les sous-espaces de V et de M des éléments finis de Lagrange \mathbb{P}_1 -bulle et \mathbb{P}_1 , respectivement. Dans la première équation de (6), on introduit les matrices $A \in \mathcal{M}_N$, $B \in \mathcal{M}_{np, N}$ avec $N = d(np + ne)$, qui correspondent respectivement aux formes bilinéaires suivantes :

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega^i} \frac{1}{2} \mu^i (\nabla \mathbf{u}^i + (\nabla \mathbf{u}^i)^t) : (\nabla \mathbf{v}^i + (\nabla \mathbf{v}^i)^t) \, dx, \quad b(p, v) = - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx$$

et un vecteur $F \in \mathbb{R}^N$ correspondant au second membre. Alors, résoudre (6) revient à résoudre le système linéaire suivant [3] :

$$\begin{bmatrix} A & B^t \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

2.4. Méthode d'Uzawa

La méthode d'Uzawa (voir [1]) a été introduite dans ce contexte pour permettre la résolution des équations du problème de Stokes en vitesse et en pression séparément, sous la forme :

$$AU = F - B^t P \quad (8)$$

$$BA^{-1}B^t P = BA^{-1}F \quad (9)$$

Celle-ci est effectuée par la méthode itérative du gradient conjugué. Notons qu'on peut résoudre (9) sans inverser la matrice A , si à chaque étape du gradient conjugué sur P , on résout plusieurs systèmes de type $AX = G$ où $G = F$ ou $G = B^t Y$. On procède de même avec $G = F - B^t P$ pour résoudre (8). Ainsi, la résolution du problème de Stokes dépend fortement de la qualité, au sens du conditionnement, de la matrice A . Il s'agit là d'un enjeu majeur dans les applications numériques.

Rappelons qu'on s'intéresse à la simulation des écoulements bifluïdes où le rapport des viscosités entre μ^1 et μ^2 est très important, en particulier lorsqu'on considère la simulation de particules pseudo-rigides dans un fluide visqueux. Le conditionnement de la matrice A dépend ainsi étroitement de ce rapport. Pour s'affranchir de ce problème, on propose ici une nouvelle méthode qui rend la matrice A indépendante du rapport des viscosités.

3. Une nouvelle approche : la méthode du second membre modifié

3.1. Problème de Poisson

Pour introduire notre approche, on considère tout d'abord un problème modèle de Poisson sur Ω , dans lequel chaque Ω^i est occupé par un matériau conducteur, de conductivité μ^i . Sans perte de généralité, on suppose que $\mu^1 = 1$, $\mu^2 = \epsilon$ et que $\epsilon \ll 1$. On suppose aussi que la solution est fixée à 0 sur $\partial\Omega$ et qu'un terme source $f \in L^2(\Omega)$ est donné. La formulation variationnelle associée à ce problème est alors : Chercher $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que :

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega^i} \mu^i \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

ce qui revient à écrire :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega^2} (1 - \epsilon) \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (10)$$

En pratique, on construit une suite de champs u_k selon le procédé suivant : u_0 étant fixé, chercher u_{k+1} tel que :

$$\int_{\Omega} \nabla u_{k+1} \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega^2} (1 - \epsilon) \nabla u_k \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Proposition 1. La suite (u_k) converge vers u dans $H_0^1(\Omega)$.

On fait la différence entre la relation de récurrence et la formulation variationnelle (10), et l'on prend $v = e_{k+1} = u_{k+1} - u$, pour obtenir ($|\cdot|_{1,\Omega^i}$ désigne la semi norme H^1 sur Ω^i)

$$|e_{k+1}|_{1,\Omega^1}^2 + |e_{k+1}|_{1,\Omega^2}^2 = (1 - \epsilon) \int_{\Omega^2} \nabla e_k \cdot \nabla e_{k+1} \leq |e_k|_{1,\Omega^2} |e_{k+1}|_{1,\Omega^2}$$

dont on déduit que $|e_k|_{1,\Omega^2}$ est décroissant, et donc converge vers un réel positif ou nul. On a donc

$$0 \leq |e_{k+1}|_{1,\Omega^1}^2 \leq |e_k|_{1,\Omega^2} |e_{k+1}|_{1,\Omega^2} - |e_{k+1}|_{1,\Omega^2}^2 \rightarrow 0 \quad \text{quand } k \rightarrow +\infty$$

Il existe un opérateur P continu de prolongement de fonctions de $H^1(\Omega^1)$ nulles en $\partial\Omega$ en des fonctions de $H_0^1(\Omega)$. Notons $\tilde{e}_k = e_k|_{\Omega^1}$. Par continuité $P(\tilde{e}_k)$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. Or la restriction de e_k à Ω^2 est harmonique, et comme telle minimise la semi norme H^1 sur Ω^2 parmi les fonctions qui se raccordent à e_k sur Γ . On a donc

$$|e^k|_{1,\Omega^2} \leq |P(\tilde{e}_k)|_{1,\Omega^2} \leq |P(\tilde{e}_k)|_{1,\Omega} \leq C|e_k|_{1,\Omega^1} \rightarrow 0 \quad \square$$

3.2. Formulation variationnelle

Appliquons cette stratégie pour réécrire la formulation variationnelle (6) du problème de Stokes, qui devient donc : Chercher $\mathbf{u} \in X$, $p \in M$ tels que $\forall \mathbf{v} \in X$, $\forall q \in M$:

$$\begin{cases} \int_{\Omega^1} \frac{1}{2} A_1(\mathbf{u}^1) : A_1(\mathbf{v}^1) dx + \int_{\Omega^2} \frac{\epsilon}{2} A_1(\mathbf{u}^2) : A_1(\mathbf{v}^2) dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} dx = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx - \int_{\Gamma} K \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^1 ds \\ \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} dx = 0 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \frac{1}{2} A_1(\mathbf{u}) : A_1(\mathbf{v}) dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} dx = \int_{\Omega^2} \frac{1-\epsilon}{2} A_1(\mathbf{u}) : A_1(\mathbf{v}) dx + \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx - \int_{\Gamma} K \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^1 ds \\ \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} dx = 0 \end{cases}$$

La suite $(\mathbf{u}_k, p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est construite comme précédemment : (\mathbf{u}_k, p_k) connu, chercher $(\mathbf{u}_{k+1}, p_{k+1})$ tel que :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \frac{1}{2} A_1(\mathbf{u}_{k+1}) : A_1(\mathbf{v}) dx - \int_{\Omega} p_{k+1} \operatorname{div} \mathbf{v} dx = \int_{\Omega^2} \frac{1-\epsilon}{2} A_1(\mathbf{u}_k) : A_1(\mathbf{v}) dx \\ + \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx - \int_{\Gamma} K \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^1 ds, \quad \forall \mathbf{v} \in X \\ \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u}_{k+1} dx = 0, \quad \forall q \in M \end{cases} \quad (11)$$

3.3. Résolution numérique

En introduisant les matrices \bar{A} et C correspondant respectivement aux formes bilinéaires

$$\bar{a}(u, v) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} A_1(\mathbf{u}) : A_1(\mathbf{v}) dx, \quad c(u, v) = \int_{\Omega^2} \frac{1-\epsilon}{2} A_1(\mathbf{u}) : A_1(\mathbf{v}) dx$$

et d'après (11), (\mathbf{U}_k, P_k) étant connu, on cherche $(\mathbf{U}_{k+1}, P_{k+1})$ solution du système linéaire :

$$\begin{cases} \bar{A} \mathbf{U}_{k+1} + B^t P_{k+1} = C \mathbf{U}_k + F \\ B \mathbf{U}_{k+1} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

qui est du même type que le système (7) :

$$\begin{bmatrix} \bar{A} & B^t \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{k+1} \\ P_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_k \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

où $F_k = C \mathbf{U}_k + F$. On obtient donc par la méthode d'Uzawa un couple $(\mathbf{U}_{k+1}, P_{k+1})$, pour tout $k \geq 0$. La solution numérique (\mathbf{U}, P) du problème de Stokes est alors la limite de la suite (\mathbf{U}_k, P_k) lorsque $k \rightarrow \infty$.

Avec cette méthode du second membre modifié, on constate que la matrice \bar{A} ne dépend plus maintenant de ϵ et que son conditionnement dépend uniquement de la taille h du maillage T_h . En effet, tout ce qui concerne le rapport des

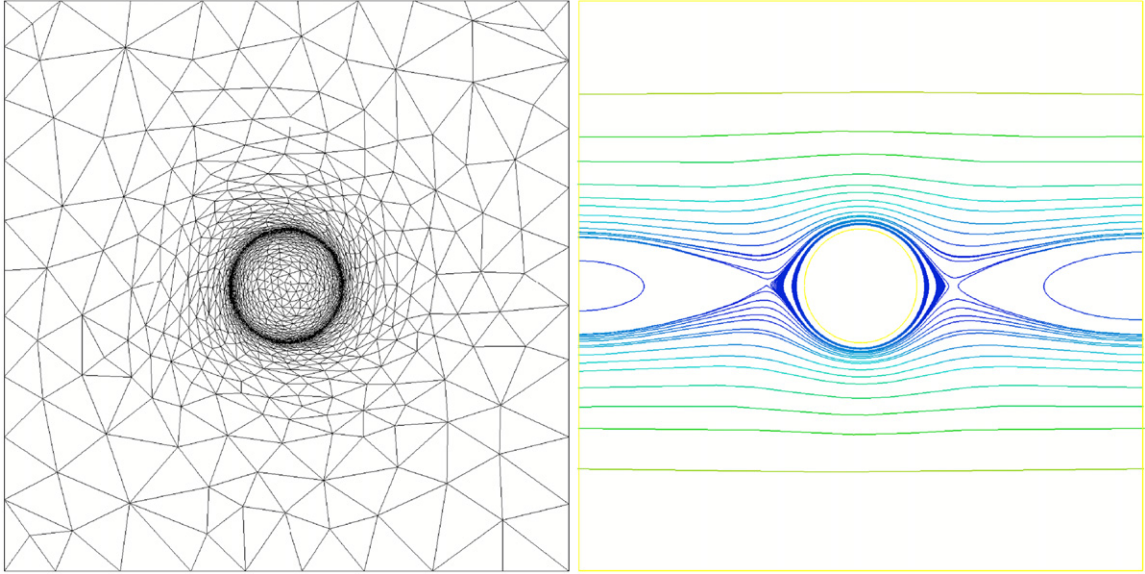


Fig. 1. Maillage anisotrope du domaine de calcul et lignes de courant du champ de vitesse au voisinage de l'interface.

Fig. 1. Anisotropic mesh of the computational domain and streamlines of the velocity field in the vicinity of the interface.

viscosités est transféré au second membre dans la matrice C . Cette formulation permet de gérer des domaines présentant un fort contraste de viscosité, $\epsilon = 10^{-6}$ dans l'exemple en dessous. Elle permet aussi de traiter sans difficulté le cas de domaines multiples, comme par exemple dans la simulation du déplacement d'un grand nombre de particules pseudo-rigides en suspension dans un fluide visqueux. Elle s'étend également trivialement au problème de Stokes instationnaire où l'interface Γ évolue au cours du temps. Il pourra alors s'avérer intéressant de coupler une approche de type ligne de niveau "level-set" avec des techniques d'adaptation de maillage anisotrope. Enfin, la résolution du problème de Stokes généralisé, ou problème de Navier–Stokes, constitue une extension naturelle de notre approche.

4. Exemple

On présente la simulation d'un écoulement de Couette dans un carré unité $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ au centre duquel se trouve un disque de rayon 0.1 qui correspond au domaine Ω^1 . Dans ce cas test, nous avons fixé les valeurs suivantes des paramètres du problème : viscosités $\mu^1 = 1$, $\mu^2 = 10^{-6}$ et masses volumiques $\rho^1 = \rho^2 = 1$. Pour simplifier, on ne considère ni de force extérieure ($\mathbf{f} = 0$) ni de tension superficielle ($K = 0$). Les conditions aux limites sont de type Dirichlet sur les bords extérieurs du domaine et décrites par : $\mathbf{u}_x = 2(y - 0,5)$, $\mathbf{u}_y = 0$.

La Fig. 1 présente le maillage anisotrope raffiné au voisinage de l'interface (à gauche) et comportant 1456 points et 2872 triangles pour une taille minimale $h_{\min} = 0,005$. Les lignes de courant du champ de vitesse sont présentées sur la même figure, à droite.

Il est connu que dans ce cas test, la vitesse angulaire θ du disque Ω^1 doit converger vers la valeur limite 1 quand le diamètre tend vers 0, ce que nous avons vérifié ici expérimentalement en trouvant $\theta = 0,97$. Les tests effectués mettent en évidence une convergence de la méthode du second membre modifié en β^k , avec β de l'ordre de 1/2. Les tests que nous avons effectués pour différentes valeurs de ϵ mettent en évidence que l'efficacité de la méthode ne dépend pas de façon sensible de la valeur de ϵ , y compris dans l'asymptotique $\epsilon \rightarrow 0$ (nous sommes descendus jusqu'à 10^{-8}).

Références

- [1] F. Brezzi, M. Fortin, Mixed and Hybrid Finite Element Methods, Springer-Verlag, 1991.
- [2] V. Girault, H. Lopez, B. Maury, One time-step finite element discretization of the equation of motion of two-fluid flows, Numerical Methods for Differential Equations 22 (3) (2006) 680–707.
- [3] O. Pironneau, Méthode des éléments finis pour les fluides, RMA, vol. 7, Masson, 1988.