Potential Analysis **21:** 7–33, 2004.

Formule d'Itô pour des diffusions uniformément elliptiques, et processus de Dirichlet

K. DUPOIRON[1], P. MATHIEU[1] et J. SAN MARTIN[2]
[1]*CMI, Université de Provence, 39 rue Joliot Curie, 13453 Marseille Cedex 13, France*
(e-mail: {Karelle.Dupoiron,Pierre.Mathieu}@cmi.univ-mrs.fr)
[2]*Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Departamento de Ingeniría Matemática, Casilla 170-3 Correo 3, Santiago, Chile*
(e-mail: jsanmart@dim.uchile.cl)

(Received: 12 September 2002; accepted: 5 June 2003)

Résumé. Soit X une diffusion uniformément elliptique sur $\mathbb{R}^d$, F une fonction dans $H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et ν la loi initiale de la diffusion. On montre que si l'intégrale $\int |\nabla F|^2(x)U\nu(x)\,\mathrm{d}x$ est finie, où $U\nu$ désigne le potentiel de la mesure ν, alors $F(X)$ est un processus de Dirichlet. Si de plus, F appartient à $H^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et si les intégrales $\int |\nabla F|^2(x)U\nu(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int |\nabla f_k|^2(x)U\nu(x)\,\mathrm{d}x$ sont finies, pour les dérivées faibles f_k de F, alors on peut écrire une formule d'Itô. En particulier, on définit l'intégrale progressive $\int \nabla F(X)\,\mathrm{d}X$ et on prouve l'existence des covariations quadratiques $[f_k(X), X^k]$.

Mots clés: processus de Dirichlet, formes de Dirichlet, formule d'Itô, intégrales stochastiques, covariations quadratiques.

1. Introduction

Soit $(X_t)_{t\geqslant 0}$ un processus de diffusion à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, soit $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne et $Y := F(X)$. Si F est de classe C^2, on sait décrire le comportement du processus Y grâce à la formule d'Itô, pourvu que les coefficients du générateur de la diffusion soient suffisamment réguliers. Dans ce cas X est une semi-martingale, et on peut écrire la formule d'Itô:

$$F(X_S) - F(X_0) = \int_0^S \nabla F(X_s)\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}[\partial_k F(X), X^k]_S \tag{1}$$

pour tout temps déterministe S, où les covariations quadratiques $[\partial_k F(X), X^k]_S$ sont données par

$$[\partial_k F(X), X^k]_S = \sum_{j=1}^{d}\int_0^S \partial_{kj}F(X_s)\,\mathrm{d}[X^k, X^j]_S. \tag{2}$$

En particulier on voit que $F(X)$ est alors une semi-martingale, dont on connaît la partie martingale. On peut naturellement se demander ce qu'il se passe dans des cadres plus généraux, par exemple si F est moins régulière (premier type de généralisation), ou lorsque les coefficients de la diffusion sont moins réguliers (deuxième type de généralisation). Essentiellement trois questions se posent:

- Quelle est la nature du processus $F(X)$? Quelle que soit la généralisation envisagée, X ou $F(X)$ ne sont plus en effet des semi-martingales. Il faut alors recourir à la notion de processus de Dirichlet (somme d'une martingale et d'un processus d'énergie nulle) introduite par Fukushima. Dans [6], on peut trouver des conditions sur F (appartenance au domaine de la forme de Dirichlet associée à la diffusion) pour que $F(X)$ soit un processus de Dirichlet.
- D'aure part on peut s'interroger sur la possible construction d'une intégrale stochastique $\int_0^S \nabla F(X_u)\,\mathrm{d}X_u$ pour des X (et éventuellement des F) plus généraux.
- Enfin si une telle construction est rendue possible, dans quelle mesure peut-on étendre les formules (1) et (2)?

Dans le premier type de généralisation (F n'est plus de classe C^2), l'écriture (2) n'est pas bien définie, même si X est une semi-martingale, il faut alors donner un sens plus général aux covariations quadratiques. De nombreux travaux ont contribué à développer ce sujet. Parmi eux on peut citer un papier de Föllmer, Protter et Shiryaev [5] qui traite du cas brownien unidimensionnel, où F est supposée absolument continue de dérivée f localement de carré intégrable. $F(X)$ admet alors une représentation (1) où les covariations quadratiques existent comme limite en probabilité des covariations discrètes $\sum_{t_i\in D_n}(f(X_{t_{i+1}})-f(X_{t_i}))(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})$ le long d'une suite de subdivisions (D_n). A ce papier fait suite celui de Bardina et Jolis [1] dans le cadre de diffusions plus générales, toujours en dimension 1; la loi de X_t et supposée avoir une densité satisfaisant certaines propriétés et F admet une dérivée localement de carré intégrable. Plus récemment Föllmer et Protter [4] ont étendu ce résultat au mouvement brownien d-dimensionnel et validé l'égalité (1) pour F dans $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, dès que la diffusion part en dehors d'un ensemble de capacité nulle. On peut aussi citer un travail de Russo et Valois [13] qui prouve (1) pour F de classe C^1, et X une semi-martingale, dont le processus retourné dans le temps reste une semi-martingale. Pour des fonctions F plus générales encore, citons le papier de Moret et Nualart [10] où l'existence des covariations quadratiques est prouvée pour F appartenant à l'espace de Sobolev $W^{1,p}$, avec $p > d$, et pour X une martingale d-dimensionnelle; les techniques utilisées sont celles du calcul de Malliavin. Tous ces résultats reposent sur l'existence d'intégrales progressives $\int_0^t f(X_s)\,\mathrm{d}X_s$ et rétrogrades $\int_0^t f(X_s)\,\mathrm{d}^*X_s$.

Pour le second type de généralisation (X n'est plus une semi-martingale), c'est l'intégrale progressive qui apparaît dans (1) qui n'a déjà plus de sens. Dans ce cas, le problème est donc triple, il faut d'une part construire l'intégrale $\int_0^t \nabla F(X_s)\,\mathrm{d}X_s$, d'autre part prouver l'existence des covariations quadratiques (2), et prouver ensuite la représentation (1). Là encore, on compte de multiples résultats répondant à ces questions. On peut notamment citer Föllmer [3] qui a construit l'intégrale

$\int_0^t \nabla F(X_s)\,\mathrm{d}X_s$, trajectoire par trajectoire, et qui a montré (1) pour F de classe C^2, et tout processus X à variations quadratiques finies, en particulier si X est un processus de Dirichlet. Grâce à la théorie des formes de Dirichlet, Nakao [11] a développé un calcul stochastique par rapport à des fonctionnelles additives du type $A_t^u = u(X_t) - u(X_0)$ et a notamment donné une définition de l'intégrale de Stratonovich par rapport à A^u. C'est aussi le travail qui est fait par Lyons et Zhang [8] sous la mesure invariante. Pour ce type de généralisation, on trouve aussi plus récemment un calcul stochastique développé par Russo, Valois et Wolf [14], utilisant la représentation de Lyons–Zheng pour des processus de Dirichlet. En 1999 Lyons et Stoica [7] ont prouvé une généralisation de type 1 et 2. Ils ont montré l'existence d'une intégrale de Stratonovich pour une diffusion uniformément elliptique et pour des temps strictement positifs, lorsque ∇F est bornée et dans le domaine du générateur, obtenant à la place de (1): $F(X_t) - F(X_s) = \int_s^t \nabla F(X_u) \circ \mathrm{d}X_u,\ s,t > 0$. Sous des conditions plus fortes sur F, cette intégrale et cette égalité peuvent s'étendre quand s tend vers 0, si la diffusion part d'un point fixé. Il y a aussi dans ce sens un résultat de Rozkosz [12] qui est plus amplement cité plus loin.

Dans ce papier nous traitons le cas des diffusions associées à un opérateur sous forme divergence uniformément elliptique. Le résultat principal (Théorème 1) identifie une condition optimale sur F pour que $F(X)$ soit un processus de Dirichlet, partant d'une loi initiale ν pouvant charger des ensembles de capacité nulle. Cette condition lie la loi initiale ν du processus à la régularité de F par (3). Le résultat repose sur le contrôle des oscillations quadratiques de $F(X)$ en temps petit. Ce contrôle est possible si les oscillations sont estimées sur une subdivision suffisamment régulière en zéro, ce qui explique le choix qui est fait de travailler sur les subdivisions dyadiques.

Le papier est organisé comme suit: dans les préliminaires, on rappelle quelques notions de la théorie des formes de Dirichlet et les résultats de [6] qui nous intéressent; on précise également notre cadre d'étude. Dans la deuxième partie, on donne une condition nécessaire et suffisante sur la fonction F pour que $F(X)$ soit un processus de Dirichlet généralisant ainsi un résultat contenu dans [4] (pour des X plus généraux que le mouvement brownien), ou encore un résultat de Bertoin [2] (mais dans le cadre plus restreint des diffusions uniformément elliptiques). Enfin dans la troisième partie, nous développons un calcul stochastique pour X, en construisant l'intégrale $\int_0^t \nabla F(X_s)\,\mathrm{d}X_s$ par des sommes de Riemann, et nous prouvons l'existence des covariations quadratiques, sous des conditions de type H^2 sur F faisant intervenir la loi initiale du processus. Les preuves sont assorties de contrôle uniforme sur les sommes discrètes, ce qui donne un résultat de continuité sur l'application $f \mapsto \int_0^t f(X_s)\,\mathrm{d}X_s$. On termine en prouvant l'écriture (1) avec la représentation (2) des covariations quadratiques.

2. Préliminaires

DÉFINITION 1 (Processus de Dirichlet). Soit S un réel strictement positif, et $(A_t,\ 0 \leqslant t \leqslant S)$ un processus stochastique. On dit que A est un processus de Dirichlet, si on peut trouver une décomposition $A_t = M_t + N_t$ de A, telle que

- M est une martingale continue de carré intégrable,
- N est un processus à variations quadratiques nulles, c'est-à-dire:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{t_i \in D_n} (N_{t_{i+1}} - N_{t_i})^2 = 0$$

en probabilité, où D_n désigne la subdivision dyadique d'ordre n de $[0, S]$.

Supposons donnée une forme de Dirichlet symétrique $\mathcal{E}$ de domaine $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ inclus dans $L^2(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}x)$, et (X_t, P_t) le processus de Hunt associé. On note $\mathbb{P}_x$ la loi de X lorsque $X_0 = x, \mathbb{P}_\nu$ la loi de X lorsque la loi de X_0 est ν. On posera également $P_m = \int_{\mathbb{R}^d} P_x m(\mathrm{d}x)$, où m est la mesure de Lebesgue (P_m n'est donc pas nécessairement une mesure de masse totale finie). Alors Fukushima [6] montre que si $u \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$, et si $\tilde{u}$ est une version quasi-continue de u, la fonctionnelle additive $A_t^{(u)} := \tilde{u}(X_t) - \tilde{u}(X_0)$ est un processus de Dirichlet, lorsque la loi μ de X_0 est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Notons alors $A^{(u)} = M^{(u)} + N^{(u)}$ sa décomposition en tant que processus de Dirichlet. La partie martingale $M^{(u)}$ est une martingale sous P_x pour quasi tout x, et $N^{(u)}$ est d'énergie nulle au sens où: $\lim_{t\to 0} \frac{1}{2t} E_m(N_t^2) = 0$ où m désigne la mesure de Lebesgue. En particulier $N^{(u)}$ est à variations quadratiques nulles au sens décrit ci-dessus par la propriété de Markov, sous la mesure $\mathbb{P}_m$. Si de plus la fonction u est dans le domaine L^2 du générateur de X, alors $N^{(u)}$ est à variations bornées et $A^{(u)}$ est une semi-martingale.

(Cadre d'étude). Soit $a(x) = (a_{ij}(x))_{1\leqslant i,j\leqslant d}$ une famille de fonctions mesurables, localement intégrables sur $\mathbb{R}^d$, telles que $a_{ij} = a_{ji}$ pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant d$. On note σ la racine carrée de a. On suppose de plus qu'il existe une constante $\lambda \geqslant 1$ telle que

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^d \xi_i^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \lambda \sum_{i=1}^d \xi_i^2, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \forall x \in \Omega.$$

On note L l'opérateur div(a grad), et $\mathcal{E}$ la forme de Dirichlet associée: $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ est la fermeture dans $L^2(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}x)$ de la forme bilinéaire, fermable

$$\mathcal{E}(f, g) = \int_{\mathbb{R}^d} -Lf(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \sigma\nabla f(x).\sigma\nabla g(x)\,\mathrm{d}x$$

définie pour toutes fonctions f et $g \in C_c^\infty$. Sous les hypothèses faites sur σ, $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = H^1(\mathbb{R}^d)$. Soit (X_t, P_t) le processus de Hunt associé.

NOTATIONS 1. Pour une loi ν donnée, on écrira:

$$\nu_t(x) := \frac{\mathrm{d}P_t\nu}{\mathrm{d}x}(x) \quad P_t\nu \text{ étant absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, pour } t > 0.$$

$$U\nu(x) := \int_0^{+\infty} \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-s}\nu_s(x) \quad \text{lorsque cette intégrale converge.}$$

On montre ici, par un calcul direct, que si F vérifie la condition d'intégrabilité

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}z\, |\nabla F(z)|^2 U\nu(z) < +\infty \tag{3}$$

étant donnée une loi initiale ν, alors $Y = F(X)$ est un processus de Dirichlet sous la loi $\mathbb{P}_\nu$. Si de plus les dérivées de F vérifient la condition d'intégrabilité

$$\sum_{k,l=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}z\, |\partial_{kl}F(z)|^2 U\nu(z) < +\infty \tag{4}$$

on peut alors écrire une formule d'Itô sous $\mathbb{P}_\nu$:

$$F(X_S) - F(X_0) = \int_0^S \nabla F(X_s)\, \mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} [f_k(X), X^k]_S \quad \mathbb{P}_\nu\text{-p.s.} \tag{5}$$

où

$$\int_0^S \nabla F(X_s)\, \mathrm{d}X_s := \lim_{n\to+\infty} \sum_{t_i\in D_n} \nabla F(X_{t_i}).(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \tag{6}$$

et

$$[f_k(X), X^k]_S := \lim_{n\to+\infty} \sum_{t_i\in D_n} (f_k(X_{t_{i+1}}) - f_k(X_{t_i}))(X^k_{t_{i+1}} - X^k_{t_i}) \tag{7}$$

D_n désignant la suite des subdivisions dyadiques de $[0, S]$, les limites étant prises en probabilité, sous $\mathbb{P}_\nu$. On en déduit une formule d'Itô, sous $\mathbb{P}_{x_0}$ pour quasi tout point de départ x_0, lorsque F est dans H^2_{loc}, les limites (6) et (7) existant en probabilité sous $\mathbb{P}_{x_0}$. Les covariations sont définies par (7) et on montre qu'on peut étendre la formule (2) sous les conditions (3) et (4).

Ces résultats sont très proches de ceux obtenus par Föllmer et Protter dans [4] pour le cas brownien. On insiste cependant sur deux points:

D'une part la condition d'intégrabilité (3) est la condition minimale requise pour que $F(X)$ soit un processus de Dirichlet, partant d'une loi ν, puisque le crochet de la partie martingale est alors $\int_0^S |\sigma\nabla F|^2(X_s)\,\mathrm{d}s$. En particulier si X est le mouvement brownien multidimensionnel, on a une condition pour que $F(X)$ soit un processus de Dirichlet sous $\mathbb{P}_\nu$. Cette condition est vérifiée pour $\nu = \delta_{x_0}$ pour tout x_0 en dehors d'un ensemble de capacité nulle, lorsque F est dans H^1_{loc}. Elle correspond d'ailleurs à la norme $\|F\|_2(x_0)$ de [4]. En revanche nous n'imposons pas ici de condition d'intégrabilité supplémentaire de type $\|F\|_1(x_0)$. Celle-ci apparaît dans [4] au moment de prouver la convergence des sommes rétrogrades $\sum F(X_{t_{i+1}})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$. La preuve de Föllmer et Protter utilise une formule explicite pour le mouvement brownien retourné dans le temps, qui n'existe pas en général. Ici, on prouve directement la convergence des sommes (7), sans démontrer, séparément, la convergence des sommes progressives et des sommes rétrogrades. Enfin [4] donne une décomposition de $F(X)$ en $F(X) = M^{(F)} + N^{(F)}$ grâce à la formule d'Itô généralisée, sous P_{x_0}. Le processus $N^{(F)}$ correspond aux covariations quadratiques et $M^{(F)}$ correspond à l'intégrale de ∇F par rapport au brownien. Bien que le calcul ne soit pas fait dans [4], on peut voir que c'est aussi la décomposition de la fonctionnelle $F(X)$ en processus de Dirichlet (martingale + processus à variations quadratiques nulles). D'une manière générale, avec le travail qui est fait ici, on peut noter, comme dans [9], que c'est le lien entre la régularité de F et la loi initiale ν qui donne la propriété de Dirichlet. Cette dépendance en ν disparaît, si on demande une intégrabilité plus forte sur F. En particulier si $F \in W^{1,p}$ pour un $p > d \vee 2$, alors la condition (3) est vérifiée pour toute loi ν (appliquer l'inégalité de Hölder), et on retrouve ainsi un résultat de Rozkosz [12]: $Y = F(X)$ est alors un processus de Dirichlet pour toute loi initiale.

D'autre part il faut remarquer que les calculs faits ici permettent de définir l'intégrale $\int_0^S \nabla F(X_s)\,\mathrm{d}X_s$ par (6). Contrairement au cas brownien cette intégrale n'est pas une martingale, et la décomposition (5) ne correspond donc pas à la décomposition donnée par Fukushima [6] en somme de martingale et de processus à variations quadratiques nulles. Toutefois on peut encore dire que la covariation $[f_k(X), X]_t$ est à variations quadratiques nulles (en fait on verra qu'elle est à variation totale bornée). L'intégrale progressive définie par (6) contient donc une partie martingale et une partie à variations quadratiques nulles.

Enfin il faut souligner que l'essentiel du travail consiste à contrôler les oscillations de $F(X)$ pour des temps proches de zéro, et à prouver la convergence des sommes de Riemann $\sum_{t_i \in D_n} f(X_{t_i})(X_{t_{i+}} - X_{t_i})$ pour des subdivisions D_n qui partent de zéro, ce qui justifie le choix des subdivisions dyadiques. Ce n'est pas la philosophie de [7] qui ne considère que des sommes sur des subdivisions de $[s, t]$, avec $s, t > 0$. L'existence d'une éventuelle limite en zéro de $\int_s^t \nabla F(X_u) \circ \mathrm{d}X_u$ est ensuite envisagée, indépendamment de la convergence des sommes de Riemann associées. Ici l'importance de la régularité de la mesure initiale ν ne se fait sentir que pour $s = 0$.

3. Propriété de Dirichlet

3.1. DÉFINITIONS ET RÉSULTATS

On se place dans le cadre décrit au paragraphe 2.

NOTATIONS 2. Sauf mention contraire, ν désignera une mesure de probabilité, qui peut charger des ensembles de capacité nulle.

(D_n) sera la suite des subdivisions dyadiques de l'intervalle $[0, S]$, S étant un réel fixé.

THÉORÈME 1. *Soit F une fonction mesurable dans $L^2(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}x)$, vérifiant* (3). *Alors sous $\mathbb{P}_\nu$, le processus $(Y_t := F(X_t),\ 0 \leqslant t \leqslant S)$ est un processus de Dirichlet. De plus on a pour n assez grand:*

$$E_\nu \sum_{t_i \in D_n} (Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})^2 \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}z\, |\nabla F(z)|^2 U\nu(z)$$

où C est une constante qui dépend de λ, d et S.

Il faut d'abord remarquer que le processus $(Y_t)_{t>0}$ est "bien défini" pour les temps strictement positifs. En effet, si F vérifie la condition (3), alors $F \in H^1_{\mathrm{loc}}$. Ceci résulte de ce que pour tout compact K, $\inf_{x \in K} U\nu(x)$ est atteint et est strictement positif. Par conséquent, d'après [6], on peut supposer F quasi-continue. Soient F_1 et F_2 deux versions quasi-continues de F. Pour tout $s > 0$, $P_s\nu$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, donc ne charge aucun ensemble de capacité nulle. On a alors

$$\mathbb{P}_\nu(\exists t > s,\ F_1(X_t) \neq F_2(X_t)) = 0$$

grâce à la propriété de Markov. Ainsi $(F(X_t))_{t>0}$ est "bien défini".

En revanche, il faut pouvoir définir $F(X_0)$ sans ambiguité: la mesure ν peut en effet charger des ensembles de capacité nulle, si bien que deux versions quasi-continues de F peuvent différer en X_0. Comme $t \mapsto Y_t$ est continu sous $\mathbb{P}_\nu$ pour $t > 0$, il semble alors naturel de choisir une version $\widetilde{F}$ de F, quasi-continue, de sorte que $\widetilde{F}$ soit définie ν presque-sûrement et $\widetilde{F}(X_0) = Y_0 = \lim_{t\to 0} F(X_t)$, la limite étant prise dans $L^2(\mathbb{P}_\nu)$. L'inégalité (14) prouve que cette limite existe, puisque la suite $(F(X_t))_{t>0}$ est de Cauchy en 0 dans $L^2(\mathbb{P}_\nu)$. Posons donc:

$$\widetilde{F}(x) := \lim_{t\to 0} P_t F(x) = \lim_{t\to 0} E_x(F(X_t)).$$

Cette limite existe pour quasi tout x, par forte continuité du semi-groupe, et aussi ν presque-sûrement d'après l'inégalité (14). Plus précisément, l'ensemble

$$A = \{x,\ E_x(F(X_t)) \text{ ne converge pas lorsque } t \text{ tend vers } 0\}$$

est de mesure ν nulle et de capacité nulle. De plus on a: $\widetilde{F}(x) = F(x)$ quasi-partout. Donc $\widetilde{F}$ est quasi-continue et $F(X_t) = \widetilde{F}(X_t)$ $\mathbb{P}_\nu$-p.s. pour tout $t > 0$.

$\widetilde{F}(X_0)$ est bien définie et il reste à montrer qu'on a encore $\lim_{t\to 0}\widetilde{F}(X_t)=\widetilde{F}(X_0)$ dans $L^2(\mathbb{P}_\nu)$.

Or pour $t>0$ et $r>0$, on a:

$$\begin{aligned} &E_\nu(E_{X_t}(F(X_r))-F(X_r))^2 &(8)\\ &\quad=\int\nu(\mathrm{d}x)E_x(E_{X_t}(F(X_r))-F(X_r))^2\\ &\quad=\int\nu(\mathrm{d}x)E_x(F(X_{r+t})-F(X_r))^2 &(9)\end{aligned}$$

par la propriété de Markov. D'après l'inégalité (14), (9) peut être rendu arbitrairement petit pourvu que r et t soient suffisamment petits. Faisant tendre r vers 0 dans (8), on en déduit que pour tout $\varepsilon>0$ et t petit:

$$E_\nu\big(\widetilde{F}(X_t)-F(X_0)\big)^2\leqslant\varepsilon.$$

Ainsi $\widetilde{F}(X_t)$ tend vers $\widetilde{F}(X_0)$ dans $L^2(\mathbb{P}_\nu)$.

Désormais on notera F, au lieu de $\widetilde{F}$, la version quasi-continue ainsi choisie.

Ici, $P_t\nu$ est absolument continue pour tout ν et tout $t>0$. Donc $(Y_s,\ s\geqslant t)$ est un processus de Dirichlet pour tout $t>0$. Démontrer le Théorème 1, c'est donc contrôler les variations quadratiques de $(Y_s, s\leqslant t)$ pour tout t petit. Pour cela nous avons besoin de contrôler les probabilités de transition de X.

LEMME 1 (Estimées d'Aronson et Nash). *Sous les hypothèses faites sur a, on a*: $\exists M(\lambda,d)$

$$\frac{1}{Mt^{d/2}}\exp\biggl(-\frac{M|y-x|^2}{t}\biggr)\leqslant p_t(x,y)\leqslant\frac{M}{T^{d/2}}\exp\biggl(-\frac{|y-x|^2}{Mt}\biggr).$$

Pour la démonstration on se référera à [15] (Théorèmes I.1.15 et I.2). □

NOTATIONS 3. On pose

$$\begin{aligned} p_t^M(x,y)&:=\frac{M}{t^{d/2}}\exp\biggl(-\frac{|y-x|^2}{Mt}\biggr),\\ \nu_t^M(x)&:=\frac{\mathrm{d}P_t^M\nu}{\mathrm{d}x}(x).\end{aligned}$$

Notons alors que $\int_0^S\nu_t^M(x)\,\mathrm{d}t\leqslant CU\nu(x)$ pour une constante C.

Donnons immédiatement deux applications du Théorème 1 et de ces estimées.

On retrouve ici un résultat de Roskosz [12]:

COROLLAIRE 1. *Si* $F\in W^{1,p}$ *pour un* $p>d\vee 2$, *alors* $F(X)$ *est un processus de Dirichlet pour tout point de départ* x_0.

Preuve. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$, et ν la mesure de Dirac en x_0, alors d'après les estimées gaussiennes, on a pour une certaine constante M:

$$U\nu(x) \leqslant M \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t \frac{\mathrm{e}^{-t-\frac{|x_0-x|^2}{Mt}}}{t^{d/2}}.$$

Soit $q > 1$ un réel et p son conjugué $(1/p + 1/q = 1)$, et soit α un réel positif tel que $\alpha < 1/p$. Dans tout ce qui suit C désigne une constante qui peut changer de ligne en ligne, et qui ne dépend que de la dimension d, de M et de q. On a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}x\ (U\nu(x))^q &\leqslant C \int_0^{+\infty} \mathrm{d}r\, r^{d-1} \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{d}t \frac{\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{t}}}{t^{d/2}} \right)^q \\
&\underset{\text{(Hölder)}}{\leqslant} C \int_0^{+\infty} \mathrm{d}r r^{d-1} \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{d}t \frac{\mathrm{e}^{-\frac{pt}{2}}}{t^{\alpha p}} \right)^{q/p} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t \frac{\mathrm{e}^{-\frac{qt}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{qr^2}{t}}}{t^{q(\frac{d}{2}-\alpha)}} \\
&\leqslant C \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t \frac{\mathrm{e}^{-\frac{qt}{2}}}{t^{q(\frac{d}{2}-\alpha)}} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}r r^{d-1} \mathrm{e}^{-\frac{qr^2}{t}} \\
&\underset{(u=\frac{r^2}{t})}{\leqslant} C \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t \frac{\mathrm{e}^{-\frac{qt}{2}}}{t^{q(\frac{d}{2}-\alpha)-\frac{d}{2}}} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}u u^{\frac{d}{2}-1} \mathrm{e}^{-qu} \\
&\leqslant C \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t \frac{\mathrm{e}^{-\frac{qt}{2}}}{t^{q(\frac{d}{2}-\alpha)-\frac{d}{2}}}.
\end{aligned}$$

L'intégrale majorante converge si et seulement si

$$q\left(\frac{d}{2} - \alpha\right) - \frac{d}{2} < 1.$$

On peut trouver un tel α (avec $\alpha < 1/p$) dés que

$$q\left(\frac{d}{2} - 1 + \frac{1}{q}\right) - \frac{d}{2} < 1.$$

Si $d < 2$ ceci est vérifié pour tout q tel que $q < d/(d-2)$, et si $d \leqslant 2$ ceci est tout le temps vrai pour $q > 1$.

Ainsi $\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}x\ (U\nu(x))^q$ est finie pour $q \in]1, d/(d-2)[$ lorsque $d > 2$, et pour $q > 1$ lorsque $d \leqslant 2$.

Il suffit maintenant d'appliquer l'inégalité de Hölder pour voir que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}x\ |\nabla F(x)|^2 U\nu(x) < +\infty$$

lorsque F appartient à $W^{1,2p}$, où $p = q/(q-1) > 1 \vee d/2$. Le Théorème 1 permet alors de conclure. □

La deuxième application immédiate est la suivante:

COROLLAIRE 2. *Si F est dans H^1_{loc}, alors pour quasi tout point de départ x_0, le processus $(F(X_t),\ 0 \leqslant t \leqslant S)$ est un processus de Dirichlet sous $\mathbb{P}_{x_0}$ pour tout $S > 0$.*

On peut noter que ce corollaire fait écho au résultat de Föllmer et Protter [4], lequel donne une décomposition explicite du processus $F(X)$ en tant que processus de Dirichlet, lorsque X est le mouvement brownien; cette décomposition correspond en fait à l'écriture de la formule d'Itô généralisée pour $F(X)$.

Preuve. En utilisant les estimées inférieures d'Aronson et Nash, et la Proposition 3.6 de [4], on voit qu'on peut trouver une suite de compacts $(K_m)_{m\geqslant i}$ de $\mathbb{R}^d$, et un ensemble polaire E_1 tels que

$$\lim_{m\to+\infty} \mathbb{P}_{x_0}(X_t \in K_m \forall t \in [0, S]) = 1 \quad \forall S > 0$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla F_m|^2(x) U\delta_{x_0}(x) < +\infty$$

pour tout $x_0 \notin E_1$, tout $m \geqslant 1$, où F_m désigne la restriction de F à K_m et δ_{x_0} la mesure de Dirac en x_0. D'après le Théorème 1, $(Y^m_t := F_m(X_t),\ 0 \leqslant t \leqslant S)$ est un processus de Dirichlet pour tout $m \geqslant 1$, sous $\mathbb{P}_{x_0}$ pour tout $x_0 \notin E_1$. Sa décomposition s'écrit $Y^m = M^m + N^m$, où M^m est une martingale sous $\mathbb{P}_{x_0}$ pour tout $x_0 \notin E_1$ et N^m est un processus à variations quadratiques nulles sous $\mathbb{P}_{x_0}$ pour tout $x_0 \notin E_1$.

D'après [6], on peut aussi décomposer $Y = F(X)$ en $M + N$ où M est une martingale sous $\mathbb{P}_{x_0}$ pour $x_0 \notin E_2$, où E_2 est un ensemble de capacité nulle et N est à variations quadratiques nulles sous toute mesure absolument continue. Soient $T_m = \inf\{t > 0,\ X_t \notin K_m\}$, $S_n = \sum_{t_i \in D_n} (N_{t_{i+1}} - N_{t_i})^2$ et $S^m_n = \sum_{t_i \in D_n} (N^m_{t_{i+1}} - N^m_{t_i})^2$. Alors pour x_0 en dehors de $E_1 \cup E_2$,

$$\mathbb{P}_{x_0}(S_n > \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}_{x_0}(T_m \leqslant S) + \mathbb{P}_{x_0}(S^m_n > \varepsilon).$$

D'où

$$\limsup_{n\to+\infty} \mathbb{P}_{x_0}(S_n > \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}_{x_0}(T_m \leqslant S).$$

Il reste à faire tendre m vers $+\infty$ pour avoir le résultat. □

3.2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

On ne perd pas en généralité si on prend $S = 1$. Estimons les accroissements du processus Y: pour T et t positifs, on a

$$\begin{aligned} &E_\nu(F(X_{T+t}) - F(X_t))^2 \\ &\quad = \int_{\mathbb{R}^d} \nu(\mathrm{d}x) \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}z \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}y\ p_t(x, y) p_T(y, z)(F(y) - F(z))^2. \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour toute fonction G de classe C^1, on a

$$\begin{aligned} G(z) - G(y) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} G(y + r(z-y))\,\mathrm{d}r \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}r\,(z-y).\nabla G(y + r(z-y)). \end{aligned} \tag{10}$$

Soit $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe C^1, telle que

$$\lim_{n\to+\infty} G_n = F \quad \text{dans } H^1_{\mathrm{loc}}.$$

En particulier

$$\lim_{n\to+\infty} G_n(X_t) = F(X_t) \quad \text{dans } L^2(\mathbb{P}_\nu)\ \forall t > 0$$

et d'après (10), on peut écrire pour tout $t > 0$:

$$\begin{aligned} E_\nu(Y_{T+t} - Y_t)^2 &= \lim_{n\to+\infty} E_\nu(G_n(X_{T+t}) - G_n(X_t))^2 \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \nu(\mathrm{d}x) \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}z \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}y\ p_t(x,y) p_T(y,z), \end{aligned}$$
$$\left(\int_0^1 \mathrm{d}r\,(z-y).\nabla G_n(y + r(z-y))\right)^2$$
$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \nu(\mathrm{d}x) \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}z \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}y\ p_t(x,y) p_T(y,z),$$
$$\left(\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} (z-y).\nabla G_n(y + r(z-y))\right)^2$$
$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \nu(\mathrm{d}x) \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}z \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}y\ p_t(x,y) p_T(y,z) \times$$
$$\times \left(\int_0^1 \mathrm{d}r\,(z-y).\nabla F(y + r(z-y))\right)^2$$
$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \nu(\mathrm{d}x) \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}z \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}y\ p_t(x,y) p_T(y,z) |y-z|^2 \int_0^1 \times$$
$$\times \mathrm{d}r\,|\nabla F(y + r(z-y))|^2$$

en appliquant Cauchy–Schwarz. Le reste du calcul repose sur les estimées d'Aronson et Nash, et des inégalités propres aux probabilités de transition gaussiennes:

$$|y-z|^2 p_T(y,z) \leqslant |y-z|^2 p_T^M(y,z) \leqslant 2T \times 2^{d/2} C \times p_{2T}^M(y,z)$$

pour $C = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} x \exp(-x/2)$. Ainsi en renommant la constante,

$$
\begin{aligned}
&E_\nu (Y_{T+t} - Y_t)^2 \\
&\quad \leqslant CT \int_{\mathbb{R}^d} \nu(\mathrm{d}x) \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}z \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}y \; p_t^M(x,y) p_{2T}^M(y,z) \times \\
&\qquad \times \int_0^1 \mathrm{d}r \, |\nabla F(y + r(z-y))|^2 \\
&\quad \leqslant CT \int_{\mathbb{R}^d} \nu(\mathrm{d}x) \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}z \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}y \; p_t^M(x,y) \int_0^1 \mathrm{d}r \; p_{2Tr^2}^M(y,z) |\nabla F(z)|^2
\end{aligned}
$$

après changement de variable et en notant que $p_{2T}^M(y, \frac{z-y}{r} + y) = r^d p_{2Tr^2}^M(y,z)$.

On en déduit

$$
E_\nu (Y_{T+t} - Y_t)^2 \leqslant CT \int_{\mathbb{R}^d} \nu(\mathrm{d}x) \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}z \, |\nabla F(z)|^2 \int_0^1 \mathrm{d}r \; p_{t+2Tr^2}^M(x,z). \quad (11)
$$

LEMME 2. *Il existe une constante C telle que:*

$$
p_{t+2Tr^2}^M(x,z) \leqslant C \frac{1}{T} \int_{t+2T}^{t+3T} \mathrm{d}s \; p_s^M(x,z) \quad \forall T \leqslant \frac{t}{2}, \; \forall r \in [0,1].
$$

Preuve. En effet, pour tout $s \in [t+2T, t+3T]$, pour tout $r \in [0,1]$, on a l'encadrement:

$$
1 \leqslant \frac{s}{t + 2Tr^2} \leqslant \frac{5}{2},
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
&\exp\left(-\frac{|x-z|^2}{M(t+2Tr^2)} \right) \leqslant \exp\left(-\frac{|x-z|^2}{Ms} \right) \quad \text{et} \\
&\frac{1}{(t+2Tr^2)^{d/2}} \leqslant \left(\frac{5}{2} \right)^{d/2} \frac{1}{s^{d/2}}.
\end{aligned}
$$

Ce qui donne le résultat pour $C = (5/2)^{d/2}$. □

En utilisant le Lemme 2 et l'inégalité (11), on obtient donc

$$
E_\nu (Y_{T+t} - Y_t)^2 \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} \nu(\mathrm{d}x) \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}z \, |\nabla F(z)|^2 \int_{t+2T}^{t+3T} \mathrm{d}s \; p_s^M(x,z) \quad (12)
$$

pour tout $T \leqslant t/2$.

On applique maintenant l'inégalité (12) à la subdivision D_n, pour $T = t_i - t_{i-1}$ et $t = t_{i-1}$. La condition $t_i - t_{i-1} \leqslant t_{i-1}/2$ est vérifiée pour $i \geqslant 3$:

$$\begin{aligned} & E_\nu \sum_{i=3}^{2^n} (Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}})^2 \\ & \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} \nu(\mathrm{d}x) \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}z\, |\nabla F(z)|^2 \sum_{i=3}^{2^n} \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} \mathrm{d}s\, p_s^M(x, z) \\ & \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}z\, |\nabla F(z)|^2 \int_0^2 \mathrm{d}s \int_{\mathbb{R}^d} \nu(\mathrm{d}x)\, p_s^M(x, z) \\ & \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}z\, |\nabla F(z)|^2 U\nu(z). \end{aligned}$$

De plus d'après (12), $(Y_t)_{t>0}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{P}_\nu)$ lorsque t tend vers 0. On peut donc définir $Y_0 := \lim_{t\to 0} Y_t$, dans $L^2(\mathbb{P}_\nu)$. On a alors

$$\lim_{n\to+\infty} E_\nu (Y_{t_2} - Y_0)^2 = 0 \tag{13}$$

et donc pour n assez grand

$$E_\nu (Y_{t_2} - Y_0)^2 \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}z\, |\nabla F(z)|^2 U\nu(z).$$

Fin de la preuve. On conclut comme dans [9]: d'après [6], on peut écrire $Y_t - Y_0 = M_t + N_t$ où M est une martingale sous $\mathbb{P}_{x_0}$ pour tout point x_0, car (X_t, P_t) vérifie la condition d'absolue continuité (voir [6], p. 208), et N_t est un processus à variations quadratiques nulles sous $\mathbb{P}_\mu$, pour toute mesure de probabilité μ absolument continue. On doit donc démontrer que N est encore à variations quadratiques nulles sous $\mathbb{P}_\nu$. Comme $P_s \nu$ est absolument continue, par la propriété de Markov, on a:

$$\limsup_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{2^n} \mathbf{1}(t_i \geqslant s)(N_{t_{i+1}} - N_{t_i})^2 = 0 \tag{14}$$

en probabilité, sous $\mathbb{P}_\nu$, pour tout $0 < s \leqslant 1$.

De plus d'après (12) et (13), on voit que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir s suffisamment petit de manière à obtenir:

$$\limsup_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{2^n} \mathbf{1}(t_{i+1} \leqslant s) E_\nu ((Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})^2) \leqslant \frac{\varepsilon}{6}. \tag{15}$$

On sait d'autre part que M est une martingale L^2, et que

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t |\sigma \nabla F|^2 (X_s)\, \mathrm{d}s.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
E_\nu(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 &= E\left(\nu_{t_i}(X_0)\int_0^{t_{i+1}-t_i} \mathrm{d}s\, |\sigma\nabla F|^2(X_s)\right) \\
&= C\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}x \int_0^{t_{i+1}-t_i} \mathrm{d}s\, \nu_{t_i}(x) P_s(|\nabla F|^2)(x) \\
&\leqslant C\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}x \int_0^{t_{i+1}-t_i} \mathrm{d}s\, \nu_{t_i}(x) P_s^M(|\nabla F|^2)(x) \\
&\leqslant C\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}x \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathrm{d}s\, \nu_s^M(x)|\nabla F|^2(x).
\end{aligned}$$

D'où l'on déduit:

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{2^n} \mathbf{1}(t_{i+1} \leqslant s) E_\nu((M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2) \\
&\quad \leqslant C\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}x \int_0^s \mathrm{d}u\, \nu_u^M(x)|\nabla F|^2(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{6}
\end{aligned} \tag{16}$$

pour s assez petit.

De (15) et (16), on déduit:

$$\limsup_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{2^n} \mathbf{1}(t_{i+1} \leqslant s) E_\nu((N_{t_{t_{i+1}}} - N_{t_i})^2) \leqslant \frac{2\varepsilon}{3}. \tag{17}$$

Regroupant (14) et (17), il vient

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to+\infty} \mathbb{P}_\nu\left(\sum_{i=1}^{2^n}(N_{t_{i+1}} - N_{t_i})^2 \geqslant a\right) \\
&\quad \leqslant \limsup_{n\to+\infty} \mathbb{P}_\nu\left(\sum_{i=1}^{2^n} \mathbf{1}(t_{i+1} \leqslant s)(N_{t_{i+1}} - N_{t_i})^2 \geqslant \frac{a}{2}\right) \\
&\quad \leqslant \limsup_{n\to+\infty} \frac{2}{a} E_\nu\left(\sum_{i=1}^{2^n} \mathbf{1}(t_{i+1} \leqslant s)(N_{t_{i+1}} - N_{t_i})^2\right) \\
&\quad \leqslant \frac{4\varepsilon}{3a}.
\end{aligned}$$

4. Formule d'Itô

NOTATIONS 4. Par la suite on désignera par f_k (resp. f_{kl}) les dérivées faibles $\partial_k F$ (resp. $\partial^2_{kl} F$) d'une fonction F, lorsqu'elles existent.

Dans ce paragraphe, on démontre une formule d'Itô sous $\mathbb{P}_\nu$ lorsque F et ν sont liées par

$$\int \mathrm{d}z\, |\nabla F(z)|^2 U\nu(z) < +\infty, \tag{18}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}z \sum_{k,l=1}^{d} f_{kl}^2(z) U\nu(z) < +\infty. \tag{19}$$

Pour cela on démontre d'abord l'existence des covariations quadratiques $[f(X), X]$ lorsque f vérifie

$$\int \mathrm{d}z\, |\nabla f(z)|^2 U\nu(z) < +\infty \tag{20}$$

en montrant la convergence en probabilité des sommes

$$\sum_{t_i \in D_n} (f(X_{t_{i+1}}) - f(X_{t_i}))(X^k_{t_{i+1}} - X^k_{t_i}).$$

On montre de plus que ces sommes sont dominées dans $L^1(\mathbb{P}_\nu)$ par la norme définie par (20). En seconde partie, on définit l'intégrale progressive $\int_0^S f(X_s)\,\mathrm{d}X_s$, pour toute fonction f satisfaisant (20), comme limite des sommes de Riemann $\sum_{t_i\in D_n} f(X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$ en probabilité, sous $\mathbb{P}_\nu$.

Le calcul est fait lorsque f est une dérivée faible $f = \partial_k F$ où F vérifie (18) et (19). L'idée est d'estimer dans $L^1(\mathbb{P}_\nu)$ les sommes

$$\sum_{t_i \in D_n} (F(X_{t_{i+1}}) - F(X_{t_i}) - \nabla F(X_{t_i}).(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}))$$

grâce encore à une formule de Taylor, puis de déduire leur convergence du cas où F est une fonction de classe C^2.

4.1. COVARIATIONS QUADRATIQUES

PROPOSITION 1. *Soit f une fonction satisfaisant la condition* (20). *Alors pour tout $k = 1, \ldots, d$*

$$[f(X), X^k]_S := \lim_{n\to+\infty} \sum_{t_i \in D_n} (f(X_{t_{i+1}}) - f(X_{t_i}))(X^k_{t_{i+1}} - X^k_{t_i})$$

existe en probabilité sous $\mathbb{P}_\nu$.

De plus on a pour n assez grand,

$$E_\nu\biggl(\sum_{t_i\in D_n} \bigl|(f(X_{t_{i+1}} - f(X_{t_i}))(X^k_{t_{i+1}} - X^k_{t_i})\bigr|\biggr)$$
$$\leqslant C\biggl(\int \mathrm{d}z\, |\nabla f(z)|^2 U\nu(z)\biggr)^{1/2}.$$

Preuve. (1) D'après la première partie, on sait qu'on peut trouver une version quasicontinue de f telle que $f(X_0)$ soit "bien" défini. Comme f vérifie (18), $f(X)$ est un processus de Dirichlet d'après le Théorème 1 et s'écrit $f(X_t) = M_t^f + N_t^f$. M^f est une martingale sous $\mathbb{P}_\nu$; N^f est un processus à variations quadratiques nulles sous $\mathbb{P}_\nu$.

De même, soit $M^k + N^k$ la décomposition de X^k en tant que processus de Dirichlet local (l'application $e_k : x \mapsto x_k$ appartient à H^1_{loc}). M^k est une martingale L^2 car

$$E_\nu \langle M^k \rangle_t = \int \nu(\mathrm{d}x) \int_0^t \mathrm{d}s\ P_s(|\sigma \nabla e_k|^2)(x) < +\infty.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
&\sum_{t_i \in D_n} (f(X_{t_{i+1}}) - f(X_{t_i}))(X^k_{t_{i+1}} - X^k_{t_i}) \\
&\quad = \sum_{t_i \in D_n} (M^f_{t_{i+1}} - M^f_{t_i})(M^k_{t_{i+1}} - M^k_{t_i}) + \sum_{t_i \in D_n} (M^f_{t_{i+1}} - M^f_{t_i})(N^k_{t_{i+1}} - N^k_{t_i}) + \\
&\qquad + \sum_{t_i \in D_n} (N^f_{t_{i+1}} - N^f_{t_i})(M^k_{t_{i+1}} - M^k_{t_i}) + \sum_{t_i \in D_n} (N^f_{t_{i+1}} - N^f_{t_i})(N^k_{t_{i+1}} - N^k_{t_i}).
\end{aligned}$$

Chacun des trois derniers termes du membre de droite de l'égalité a une limite nulle, dans $L^1(\mathbb{P}_\nu)$, lorsque n croît indéfiniment en vertu de l'inégalité de Cauchy–Schwarz. Le premier terme tend vers le crochet $\langle M^f, M^k \rangle_S$, dans $L^1(\mathbb{P}_\nu)$.

(2) On montre maintenant l'estimation de ces sommes: d'une part, on a

$$\begin{aligned}
&E_\nu \Bigg(\sum_{\substack{t_i \in D_n \\ i \geqslant 2}} (X^k_{t_{i+1}} - X^k_{t_i})^2 \Bigg) \\
&\quad = \sum_{\substack{t_i \in D_n \\ i \geqslant 2}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}x\ \nu_{t_i}(x) \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}y\ p_{t_{i+1}-t_i}(x, y)(x_k - y_k)^2 \\
&\quad \leqslant C \sum_{\substack{t_i \in D_n \\ i \geqslant 2}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}x\ \nu_{t_i}(x) \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}y\ p^M_{t_{i+1}-t_i}(x, y)(x_k - y_k)^2
\end{aligned}$$

avec $\nu_{t_i}(x) \leqslant C \nu^M_{t_i}(x)$. Puis, si $t_i \leqslant s \leqslant t_{i+1}$,

$$\begin{aligned}
p^M_{t_i}(x, y) &= \frac{M}{t_i^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{M t_i} \right) \\
&\leqslant \left(\frac{s}{t_i} \right)^{d/2} \frac{M}{s^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{M s} \right) \\
&\leqslant \sup_{i > 0} \left(\frac{t_{i+1}}{t_i} \right)^{d/2} \frac{M}{s^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{M s} \right) \\
&\leqslant 2^{d/s} p^M_s(x, y).
\end{aligned}$$

D'où $\nu_{t_i}(x) \leqslant C \frac{1}{t_{i+1}-t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \nu_s^M(x)\, \mathrm{d}s$. De plus,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}y\, p^M_{t_{i+1}-t_i}(x, y)(x_k - y_k)^2 = C(t_{i+1} - t_i).$$

D'où

$$\begin{aligned} E_\nu\Bigg(\sum_{\substack{t_i \in D_n \\ i \geqslant 2}} (X^k_{t_{i+1}} - X^k_{t_i})^2 \Bigg) &\leqslant C \sum_{\substack{t_i \in D_n \\ i \geqslant 2}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}x \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathrm{d}s\, \nu_s^M(x) \\ &\leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}x \int_0^S \mathrm{d}s\, \nu_s^M(x) \leqslant C \end{aligned}$$

car $\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}x\, \nu_s^M(x) = C$ où C est une autre constante qui ne dépend que de M et de la dimension d.

Et comme $\lim_{n\to+\infty} E_\nu(X^k_{t_2} - X^k_0)^2 = 0$, ceci reste vrai si on somme sur toute la subdivison D_n.

D'autre part, on a d'après l'estimation (12)

$$\begin{aligned} &E_\nu\Bigg(\sum_{t_i \in D_n} (f(X_{t_{i+1}}) - f(X_{t_i}))^2 \Bigg) \\ &\quad\leqslant C \int \mathrm{d}z\, |\nabla f(z)|^2 \int_0^{2S} \mathrm{d}s\, \nu_s^M(z) + E_\nu(f(X_{t_2}) - f(X_0))^2. \end{aligned}$$

Comme de plus $\lim_{n\to+\infty} E_\nu(f(X_{t_2}) - f(X_0))^2 = 0$, on peut toujours supposer que pour n assez grand on a aussi

$$E_\nu((f(X_{t_2}) - f(X_0))^2) \leqslant C \int \mathrm{d}z\, |\nabla f(z)|^2 \int_0^{2S} f \mathrm{d}s\, \nu_s^M(z).$$

D'où pour n assez grand, en utilisant Cauchy–Schwarz, on déduit:

$$\begin{aligned} &E_\nu\Bigg(\sum_{t_i \in D_n} \big|(f(X_{t_{i+1}}) - f(X_{t_i}))(X^k_{t_{i+1}} - X^k_{t_i})\big| \Bigg) \\ &\quad\leqslant E_\nu\Bigg(\sum_{t_i \in D_n} (f(X_{t_{i+1}}) - f(X_{t_i}))^2 \Bigg)^{1/2} \Bigg(\sum_{t_i \in D_n} (X^k_{t_{i+1}} - X^k_{t_i})^2 \Bigg)^{1/2} \\ &\quad\leqslant \Bigg(E_\nu \sum_{t_i \in D_n} (f(X_{t_{i+1}}) - f(X_{t_i}))^2 \Bigg)^{1/2} \Bigg(E_\nu \sum_{t_i \in D_n} (X^k_{t_{i+1}} - X^k_{t_i})^2 \Bigg)^{1/2} \\ &\quad\leqslant C\Bigg(\int \mathrm{d}z\, |\nabla f(z)|^2 \int_0^{2S} \mathrm{d}s\, \nu_s^M(z) \Bigg)^{1/2} \\ &\quad\leqslant C\Bigg(\int \mathrm{d}z\, |\nabla f(z)|^2 U\nu(z) \Bigg)^{1/2}. \end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 3. *Si f vérifie* (20), *alors les processus $A^k := [f(X), X^k]$ sont à variations totales finies pour tout k dans $\{1, \dots, d\}$. De plus, $\int_0^S \partial_j f(X_s) \mathrm{d}[X^j, X^k]_s$ existe $\mathbb{P}_\nu$-p.s. pour tout j et tout k dans $\{1, \dots, d\}$ et on a:*

$$[f(X), X^k]_S = \sum_{j=1}^d \int_0^S \partial_j f(X_s)\, \mathrm{d}[X^j, X^k]_s \quad \mathbb{P}_\nu\text{-}p.s.$$

Preuve. (1) Soient s et t fixés ($s < t$), et f comme dans la Proposition 1. En probabilité sous $\mathbb{P}_\nu$ on peut écrire:

$$A_t^k - A_s^k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{t_i \in D_n \cap [s,t]} (f(X_{t_{i+1}}) - f(X_{t_i}))(X_{t_{i+1}}^k - X_{t_i}^k).$$

D'où

$$\begin{aligned} &E_\nu(|A_t^k - A_s^k|) \\ &\quad \leqslant C\left(\int_s^t \mathrm{d}u \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}x\, \nu_u(x)|\sigma\nabla f|^2(x)\right)^{1/2}\left(\int_s^t \mathrm{d}u \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}x\, \nu_u(x)|\sigma\nabla\varphi_k|^2(x)\right)^{1/2} \end{aligned}$$

avec $\varphi_p(x) = x^p$ (projection sur la p-ième coordonnée). Ainsi pour toute subdvision Δ de $[0, S]$, on obtient par l'inégalité de Cauchy–Schwarz:

$$\begin{aligned} &E_\nu \sum_{t_i\in\Delta} |A_{t_{i+1}}^k - A_{t_{i+1}}^k| \\ &\quad \leqslant C\left(\int_0^S \mathrm{d}u \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}x\, \nu_u(x)|\sigma\nabla f|^2(x)\right)^{1/2}\left(\int_0^S \mathrm{d}u \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}x\, \nu_u(x)|\sigma\nabla\varphi_k|^2(x)\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Il suffit alors de passer à la borne supérieure pour toutes les subdivisions Δ pour voir que A^k est un processus à variation totale bornée. En particulier ceci est vrai pour $[X^j, X^k]$.

(2) Prenons d'abord f de classe C_c^∞, à valeurs réelles, alors en probabilité sous $\mathbb{P}_\nu$, on a:

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} \sum_{t_i\in D_n} (f(X_{t_{i+1}}) - f(X_{t_i}))(X_{t_{i+1}}^k - X_{t_i}^k) \\ &\quad = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^d \sum_{t_i\in D_n} \partial_j f(X_{t_i})(X_{t_{i+1}}^j - X_{t_i}^j)(X_{t_{i+1}}^k - X_{t_i}^k) \\ &\quad = [f(X), X^k]_S \end{aligned}$$

car

$$E_\nu\Bigg|\sum_{t_i\in D_n} (f(X_{t_{i+1}}) - f(X_{t_i}))(X_{t_{i+1}}^k - X_{t_i}^k) -$$

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{j=1}^{d} \sum_{t_i \in D_n} \partial_j f(X_{t_i})(X^j_{t_{i+1}} - X^j_{t_i})(X^k_{t_{i+1}} - X^k_{t_i}) \Bigg| \\
&\leqslant E_\nu \Bigg(\sup_{t_i \in D_n} \sup_{z \in [X_{t_i}; X_{t_{i+1}}]} |D^2 f(z)| \sum_{t_i \in D_n} |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|^2 \Bigg).
\end{aligned}
$$

D'où pour f de classe $\mathcal{C}_c^\infty$,

$$
[f(X), X^k]_S = \sum_{j=1}^{d} \int_0^S \partial_j f(X_s)\, \mathrm{d}[X^j, X^k]_s \quad \mathbb{P}_\nu\text{-}p.s.,
$$

l'intégrale du membre de droite étant définie comme une intégrale par rapport à un processus à variations totales bornées.

De plus, puisque $\mathrm{d}[X^j, X^k]_s = \sigma \nabla \varphi_j(X_s).\sigma \nabla \varphi_k(X_s)\, \mathrm{d}s$, par un calcul direct on obtient:

$$
\begin{aligned}
&E_\nu \Bigg(\sum_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{d} \int_0^S \partial_j f(X_s)\, \mathrm{d}[X^j, X^k]_s \Bigg)^2 \\
&\leqslant C \int_0^S \mathrm{d}s \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}x\, \nu_s(x) |\sigma \nabla f|^2(x)
\end{aligned}
\tag{21}
$$

pour une constante C qui dépend de la dimension, de S, de λ, et des constantes des estimées gaussiennes d'Aronson, de sorte que l'on peut étendre continûment l'intégrale $\int_0^S \partial_j f(X_s)\, \mathrm{d}[X^j, X^k]_s$ à des f vérifiant (20). Soit f maintenant vérifiant (20). Notons $CQ_n^k(f) = \sum_{t_i \in D_n} (f(X_{t_{i+1}}) - f(X_{t_i}))(X^k_{t_{i+i}} - X^k_{t_i})$ et prenons une suite (f^p) de fonctions $\mathcal{C}_c^\infty$ qui converge vers f dans H^1_{loc}. On a

$$
\begin{aligned}
&E_\nu \Bigg| CQ_n^k(f) - \sum_{j=1}^{d} \int_0^S \partial_j f(X_s)\, \mathrm{d}[X^j, X^k]_s \Bigg| \\
&\leqslant E_\nu |CQ_n^k(f) - CQ_n^k(f^p)| + \\
&\quad + E_\nu \Bigg| CQ_n^k(f^p) - \sum_{j=1}^{d} \int_0^S \partial_j f^p(X_s)\, \mathrm{d}[X^j, X^k]_s \Bigg| + \\
&\quad + E_\nu \Bigg| \sum_{j=1}^{d} \int_0^S (\partial_j f(X_s) - \partial_j f^p(X_s))\, \mathrm{d}[X^j, X^k]_s \Bigg| \\
&\leqslant 2C \Bigg(\int_0^S \mathrm{d}s \int_{\mathbb{R}_d} \mathrm{d}x\, \nu_s(x) |\sigma \nabla (f - f^p)|^2(x) \Bigg)^{1/2} + \\
&\quad + E_\nu \Bigg| CQ_n^k(f^p) - \sum_{j=1}^{d} \int_0^S \partial_j f^p(X_s)\, \mathrm{d}[X^j, X^k]_s \Bigg|
\end{aligned}
$$

d'après la Proposition 1 et l'inégalité (21). Le premier terme tend vers zéro si p tend vers $+\infty$ et à p fixé, le second terme tend vers zéro si n tend vers $+\infty$. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} E_\nu\left|CQ_n^k(f)-\sum_{j=1}^d\int_0^S \partial_j f(X_s)\,\mathrm{d}[X^j,X^k]_s\right|=0$$

ce que l'on voulait. □

4.2. INTÉGRALE PROGRESSIVE

PROPOSITION 2. *On se donne une fonction F vérifiant les conditions* (18) *et* (19) *alors on a l'estimation suivante pour n assez grand:*

$$E_\nu\left(\sum_{t_i\in D_n}|F(X_{t_{i+1}})-F(X_{t_i})-\nabla F(X_{t_i}).(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})|\right)$$
$$\leqslant C\sum_{k,l=1}^d\left(\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{d}z\,f_{kl}^2(z)U\nu(z)\right)^{1/2}.$$

D'après la remarque faite au Théorème 1, $F(X_0)$ et $\nabla F(X_0)$ sont bien définis.

Preuve. Pour $T\geqslant 0$ et $t>0$, on a:

$$\begin{aligned}&E_\nu|F(X_{T+t})-F(X_t)-\nabla F(X_t).(X_{T+t}-X_t)|\\&\quad=\iint\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\nu_t(x)p_T(x,y)|F(y)-F(x)-\nabla F(x).(y-x)|\\&\quad\leqslant C\iint\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\nu_t^M(x)p_T^M(x,y)|F(y)-F(x)-\nabla F(x).(y-x)|.\end{aligned}$$

Pour une fonction G de classe C^2, on a

$$\begin{aligned}&G(y)-G(x)-\nabla G(x).(y-x)\\&\quad=\int_0^1(y-x).(\nabla G(x+r(y-x))-\nabla G(x))\\&\quad=\sum_{k,l=1}^d\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_0^1\mathrm{d}s\,(y-x)_k(y-x)_l g_{kl}(x+sr(y-x)).\end{aligned}$$

Les conditions (18) et (19) impliquent que F appartient à H^2_{loc}. Soit $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions C^2 qui convergent vers F dans H^2_{loc}. En passant à la limite dans

$$E_\nu|G_n(X_{T+t})-G_n(X_t)-\nabla G_n(X_t).(X_{T+t}-X_t)|$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant C \sum_{k,l=1}^{d} \iint \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\, \nu_t^M(x) p_T^M(x,y) \int_0^1 r\, \mathrm{d}r \times \\
&\quad \times \int_0^1 \mathrm{d}s \left|(y-x)_k (y-x)_l g_{kl}^{(n)}(x + sr(y-x))\right|
\end{aligned}
$$

où $g_{kl}^{(n)} = \partial_{kl}^2 G_n$.

On obtient

$$
\begin{aligned}
&E_\nu |F(X_{T+t}) - F(X_t) - \nabla F(X_t).(X_{T+t} - X_t)| \\
&\quad \leqslant \sum_{k,l=1}^{d} \iint \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\, \nu_t^M(x) p_T^M(x,y) \int_0^1 r\, \mathrm{d}r \times \\
&\quad \times \int_0^1 \mathrm{d}s\, |(y-x)_k (y-x)_l f_{kl}(x + sr(y-x))|.
\end{aligned}
$$

Dans l'intégrale en y, on note que

$$
|x-y|_k |x-y|_l\, p_T^M(x,y) \leqslant CT p_{2T}^M(x,y)
$$

pour une constante C, et on effectue le changement de variable $z = x + sr(y-x)$. Il vient:

$$
\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}y\, p_T^M(x,y) |x-y|_k |x-y|_l |f_{kl}(x + sr(y-x))| \\
&\quad \leqslant CT \int \mathrm{d}z \frac{1}{(sr)^d} p_{2T}^M\left(x, \frac{z-x}{sr} + x\right) |f_{kl}(z)| \\
&\quad \leqslant CT \int \mathrm{d}z\, p_{2T(sr)^2}^M(x,z) |f_{kl}(z)|.
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\begin{aligned}
&E_\nu |F(X_{T+t}) - F(X_t) - \nabla F(X_t).(X_{T+t} - X_t)| \\
&\quad \leqslant CT \sum_{k,l=1}^{d} \iint \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \int_0^1 r\, \mathrm{d}r \int_0^1 \mathrm{d}s\, \nu_t^M(x) p_{2T(sr)^2}^M(x,y) |f_{kl}(y)| \\
&\quad \leqslant CT \sum_{k,l=1}^{d} \iint \nu(\mathrm{d}x)\, \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}u \int_0^1 \mathrm{d}v\, p_{2Tu^2+t}^M(x,y) |f_{kl}(y)| \\
&\quad \leqslant C \sum_{k,l=1}^{d} \int \nu(\mathrm{d}x) \int \mathrm{d}y \int_{t+2T}^{t+3T} \mathrm{d}s\, p_s^M(x,y) |f_{kl}(y)| \qquad (22)
\end{aligned}
$$

La dernière inégalité résulte du Lemme 2, pour $T \leqslant t/2$.

Appliquons (22) à la subdivision D_n, pour $T = t_{i+1} - t_i$ et $t = t_i,\ i \geqslant 2$:

$$E_\nu\biggl(\sum_{\substack{t_i \in D_n \\ i \geqslant 2}} |F(X_{t_{i+1}}) - F(X_{t_i}) - \nabla F(X_{t_i}).(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})|\biggr)$$

$$\leqslant C \sum_{k,l=1}^{d} \int \mathrm{d}y\,|f_{kl}|(y) \int_0^{2S} \mathrm{d}s\ \nu_s^M(y)$$

$$\leqslant C \sum_{k,l=1}^{d} \biggl(\int \mathrm{d}y\,|f_{kl}|^2(y) \int_0^{2S} \mathrm{d}s\ \nu_s^M(y)\biggr)^{1/2} \biggl(\int \mathrm{d}y \int_0^{2S} \mathrm{d}s\ \nu_s^M(y)\biggr)^{1/2}$$

$$\leqslant C \sum_{k,l=1}^{d} \biggl(\int \mathrm{d}y\,|f_{kl}|^2(y) \int_0^{2S} \mathrm{d}s\ \nu_s^M(y)\biggr)^{1/2}.$$

Cette inégalité est encore vraie si on somme sur les indices $i = 0, 1$, pour n assez grand, car de (22) on déduit aussi que

$$\lim_{n\to+\infty} E_\nu|F(X_{t_2}) - F(X_0) - \nabla F(X_0).(X_{t_2} - X_0)| = 0. \qquad \square$$

On peut maintenant en déduire le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Soit F une fonction de $L^2(\mathrm{d}x)$ qui vérifie* (18) *et* (19). *Alors,*

$$\int_0^S \nabla F(X_s)\,\mathrm{d}X_s := \lim_{n\to+\infty} \sum_{t_i \in D_n} \nabla F(X_{t_i}).(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \tag{23}$$

existe en probabilité sous $\mathbb{P}_\nu$. De plus on a la formule d'Itô

$$\begin{aligned} F(X_S) &- F(X_0) \\ &= \int_0^S \nabla F(X_s)\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} [f_k(X), X^k]_S \\ &= \int_0^S \nabla F(X_s)\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{d} \int_0^S \partial_{kj} F(X_s)\,\mathrm{d}[X^j, X^k]_s \end{aligned} \tag{24}$$

$\mathbb{P}_\nu$ presque-sûrement.

Preuve. (1) Comme F vérifie (18) et (19), elle appartient à H^2_{loc}. On commence par montrer que si F est de classe C_c^2, alors la limite (23) existe sous $\mathbb{P}_\nu$. Ensuite on approchera F dans H^2_{loc} par une suite $(G_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de fonctions C_c^2 sur $\mathbb{R}^d$, et on passera à la limite grâce aux estimations faites précédemment.

Soit G une fonction de classe C_c^2 sur $\mathbb{R}^d$. Pour tout x et tout y de $\mathbb{R}^d$, on a:

$$\left|G(x+y) - G(x) - \frac{1}{2}(\nabla G(x).y + \nabla G(x+y).y)\right|$$

$$\leqslant \sup_{z\in[x,x+y]} |D^2G(z)||y|^2.$$

En appliquant ceci à $x + y = X_{t_{i+1}}$ et $x = X_{t_i}$, et en sommant sur les t_i, on obtient

$$\begin{aligned}
&E_\nu\bigg(\sum_{t_i\in D_n}\bigg|G(X_{t_{i+1}}) - G(X_{t_i}) - \frac{1}{2}(\nabla G(X_{t_i}) + \nabla G(X_{t_{i+1}})).(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})\bigg|\bigg)\\
&\quad\leqslant E_\nu\bigg(\sum_{t_i\in D_n}\sup_{z\in[X_{t_i},X_{t_{i+1}}]}|D^2G(z)|\,|X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|^2\bigg)\\
&\quad\leqslant E_\nu\bigg(\sup_{t_i\in D_n}\sup_{z\in[X_{t_i},X_{t_{i+1}}]}|D^2G(z)|\sum_{t_i\in D_n}|X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|^2\bigg).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to+\infty} E_\nu\bigg(\sum_{t_i\in D_n}\bigg|G(X_{t_{i+1}}) - G(X_{t_i}) -\\
&\qquad - \frac{1}{2}(\nabla G(X_{t_i}) + \nabla G(X_{t_{i+1}})).(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})\bigg|\bigg)\\
&\quad\leqslant E_\nu\bigg(\liminf_{n\to+\infty}\sup_{t_i\in D_n}\sup_{z\in[X_{t_i},X_{t_{i+1}}]}|D^2G(z)|\sum_{t_i\in D_n}|X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|^2\bigg)\\
&\quad= 0
\end{aligned}$$

par continuité des trajectoires $s \mapsto G(X_s)$, et parce que $\sum_{t_i\in D_n}|X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|^2$ est borné dans $L^2(\mathbb{P}_\nu)$.

Comme

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}E_\nu\bigg(\sum_{t_i\in D_n}(\nabla G(X_{t_{i+1}}) - \nabla G(X_{t_i})).(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})\bigg)$$

existe d'après la Proposition 1, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} E_\nu\bigg(\sum_{t_i\in D_n}G(X_{t_{i+1}}) - G(X_{t_i}) - \nabla G(X_{t_i}).(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})\bigg)$$

existe aussi et que ces deux limites sont égales. En particulier

$$\lim_{n\to+\infty}\bigg(\sum_{t_i\in D_n}\nabla G(X_{t_i}).(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})\bigg)$$

existe en probabilité sous $\mathbb{P}_\nu$ et cette limite, notée $\int_0^S G(X_s)\,\mathrm{d}X_s$ est égale à

$$\int_0^S G(X_s)\,\mathrm{d}X_s = G(X_S) - G(X_0) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^d[g_k(X), X^k]_S \quad \mathbb{P}_\nu\text{-p.s.}$$

(2) Soit (G_p) une suite de fonctions C_c^2 qui converge vers F dans H^2_{loc}. Alors on a d'une part

$$\lim_{p\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}z\, |\nabla F(z) - \nabla G_p(z)|^2 U\nu(z) = 0, \tag{25}$$

$$\lim_{p\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}z \sum_{k,l=1}^{d} (f_{kl}(z) - g_{kl}^{(p)}(z))^2 U\nu(z) = 0 \tag{26}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} E_\nu\bigg(\sum_{t_i\in D_n} G_p(X_{t_{i+1}}) - G_p(X_{t_i}) - \nabla G_p(X_{t_i}).(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})\bigg)\\
&\quad = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} E_\nu\bigg(\sum_{t_i\in D_n} (\nabla G_p(X_{t_{i+1}}) - \nabla G_p(X_{t_i})).(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})\bigg).
\end{aligned} \tag{27}$$

Grâce aux estimées des Propositions 1 et 2, on peut passer à la limite en p dans (27), et les égalités (25) et (26) prouvent qu'à la limite on a

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\bigg(\sum_{t_i\in D_n} F(X_{t_{i+1}}) - F(X_{t_i}) - \nabla F(X_{t_i}).(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})\bigg)\\
&\quad = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\bigg(\sum_{t_i\in D_n} (\nabla F(X_{t_{i+1}}) - \nabla F(X_{t_i})).(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})\bigg) \quad \mathbb{P}_\nu\text{-p.s.}
\end{aligned}$$

En particulier

$$\int_0^S \nabla F(X_s)\,\mathrm{d}X_s := \lim_{n\to+\infty} \sum_{t_i\in D_n} \nabla F(X_{t_i}).(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$$

existe en probabilité sous $\mathbb{P}_\nu$ et on a:

$$\begin{aligned}
&F(X_S) - F(X_0) - \int_0^S \nabla F(X_s)\,\mathrm{d}X_s\\
&\quad = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} [f_k(X), X^k]_S\\
&\quad = \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{d} \int_0^S \partial_{kj} F(X_s)\,\mathrm{d}[X^j, X^k]_s \quad \mathbb{P}_\nu\text{-p.s.}
\end{aligned}$$

d'après le Corollaire 3, ce qui termine la preuve. □

COROLLAIRE 4. *Soit $S > 0$ fixé. L'application:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} : \mathcal{H}^1_\nu(\mathbb{R}^d) &\to L^1(\mathbb{P}_\nu)\\
f &\mapsto \int_0^S f(X_s)\,\mathrm{d}X_s
\end{aligned}$$

est linéaire continue $\mathbb{P}_\nu$ *presque-sûrement, avec*

$$\mathcal{H}_\nu^1(\mathbb{R}^d) := \left\{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}x\, |f|^2(x) \int_0^S \mathrm{d}s\, \nu_s(x) + \right. \\ \left. + \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}x\, |\sigma \nabla f|^2(x) \int_0^S \mathrm{d}s\, \nu_s(x) < +\infty \right\}.$$

Preuve. Soit $f \in \mathcal{H}_\nu^1(\mathbb{R}^d)$, il existe $F \in \mathcal{H}_\nu^2(\mathbb{R}^d) := \{g \in L^2,\ \partial_k g \in \mathcal{H}_\nu^1(\mathbb{R}^d)\ \forall k\}$, telle que $\exists k \in \{1, \dots, d\}$, $\partial_k F = f$, alors

$$\begin{aligned} &E_\nu \left| \int_0^S f(X_s)\, \mathrm{d}X_s \right| \\ &\leqslant C \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}x\, |\sigma \nabla F|^2(x) \int_0^S \mathrm{d}s\, \nu_s(x) \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}x\, |\sigma \nabla f|^2(x) \int_0^S \mathrm{d}s\, \nu_s(x) \right)^{1/2} \\ &\leqslant C \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}x\, |f|^2(x) \int_0^S \mathrm{d}s\, \nu_s(x) \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}x\, |\sigma \nabla f|^2(x) \int_0^S \mathrm{d}s\, \nu_s(x) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Ce qui prouve ce que l'on voulait. □

COROLLAIRE 5. *Soit F une fonction de H^2_{loc}. Pour quasi tout point x_0,*

$$\int_0^S \nabla F(X_s)\, \mathrm{d}X_s := \lim_{n \to +\infty} \sum_{t_i \in D_n} \nabla F(X_{t_i}).(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$$

existe en probabilité sous $\mathbb{P}_{x_0}$. De plus on a la formule d'Itô

$$\begin{aligned} &F(X_t) - F(X_0) \\ &\quad = \int_0^S \nabla F(X_s)\, \mathrm{d}X_s + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d [f_k(X), X^k]_S \quad \mathbb{P}_{x_0}\text{-}p.s. \\ &\quad = \int_0^S \nabla F(X_s)\, \mathrm{d}X_s + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^d \int_0^S \partial_{kj} F(X_s)\, \mathrm{d}[X^j, X^k]_s \quad \mathbb{P}_{x_0}\text{-}p.s. \end{aligned}$$

Preuve. En utilisant les arguments du Corollaire 2, on peut toujours supposer que F est à support compact et qu'elle vérifie (18) et (19) pour $\nu = \delta_{x_0}$, la mesure de Dirac en x_0, pour quasi tout x_0. Alors d'après le Théorème 2, la limite

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{t_i \in D_n} \nabla F(X_{t_i}).(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$$

existe en probabilité sous $\mathbb{P}_{x_0}$ pour quasi tout x_0, et on a la formule d'Itô $\mathbb{P}_{x_0}$-p.s. □

COROLLAIRE 6. *Si $F \in W^{2,p}$ pour un $p > d \vee 2$*

$$\int_0^S \nabla F(X_s)\, \mathrm{d}X_s = \lim_{n\to+\infty} \sum_{t_i \in D_n} \nabla F(X_{t_i}).(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$$

et

$$\sum_{k=1}^{d} [f_k(X), X^k]_t = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{d} \sum_{t_i \in D_n} (f_k(X_{t_{i+1}}) - f_k(X_{t_i}))(X^k_{t_{i+1}} - X^k_{t_i})$$

existent en probabilité sous $\mathbb{P}_{x_0}$ pour tout x_0. Et on a la formule d'Itô (24).

Preuve. Si $F \in W^{2,p}$ pour un $p > d \vee 2$ choisi comme dans le Corollaire 1, d'après l'inégalité de Hölder, les conditions (18) et (19) sont vérifiées pour $\nu = \delta_{x_0}$, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Ceci donne l'existence de l'intégrale progressive $\int_0^S \nabla F(X_s)\, \mathrm{d}X_s$ comme limite en probabilité des sommes de Riemann $\sum_{t_i \in D_n} \nabla F(X_{t_i}).(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$ sous $\mathbb{P}_{x_0}$ pour tout x_0, et l'existence des covariations quadratiques $[f_k(X), X^k]_S$ sous $\mathbb{P}_{x_0}$ pour tout $k = 1, \ldots, d$. Ainsi la formule d'Itô (24) a lieu $\mathbb{P}_{x_0}$-p.s. pour tout x_0. □

Références

1. Bardina, X. and Jolis, M.: 'An extension of Itô's formula for elliptic diffusion processes', *Stochastics Process. Appl.* **69**(1) (1997), 83–109.
2. Bertoin, J.: 'Les processus de Dirichlet en tant qu'espace de Banach', *Stochastics* **18**(2) (1986), 155–168.
3. Föllmer, H.: 'Calcul d'Itô sans probabilités', in *Séminaire de probabilités XV*, Lecture Notes in Math. 850, 1979/1980, pp. 143–150.
4. Föllmer, H. and Protter, P.: 'On Itô's formula for multidimensional Brownian motion', *Probab. Theory Related Fields* **116** (2000), 1–20.
5. Föllmer, H., Protter, P. and Shiryaev, A.N.: 'Quadratic covariation and an extension of Itô's formula', *Bernoulli* **1**(1–2) (1995), 1–20.
6. Fukushima, M., Oshima, Y. and Takeda, M.: *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes*, De Gruyter Studies in Math. 19, 1994.
7. Lyons, T.J. and Stoica, L.: 'The limits of stochastic integrals of differential forms', *Ann. Probab.* **27**(1) (1999), 1–49.
8. Lyons, T.J. and Zhang, T.S.: 'Decomposition of Dirichlet processes and its application', *Ann. Probab.* **22**(1) (1994), 494–524.
9. Mathieu, P.: 'Dirichlet processes associated to diffusions', *Stochastics Stochastics Rep.* **71** (2000), 165–176.
10. Moret, S. and Nualart, D.: 'Generalization of Itô's formula for smooth nondegenerate martingales', *Stochastic Process. Appl.* **91**(1) (2001), 115–149.
11. Nakao, S.: 'Stochastic calculus for continuous additive functionals of zero energy', *Z. Wahrsch. Verw. Geb.* **68** (1985), 557–578.
12. Rozkosz, A.: 'Stochastic representation of diffusions corresponding to divergence form operators', *Stochastic Process. Appl.* **63** (1996), 11–33.
13. Russo, F. and Vallois, P.: 'Itô formula for C^1-functions of semimartingales', *Probab. Theory Related Fields* **116** (1996), 1–20.

14. Russo, F., Vallois, P. and Wolf, J.: 'A generalized class of Lyons–Zheng processes', *Bernoulli* **7**(71) (2001), 363–379.
15. Stroock, D.W.: 'Diffusion semigroups corresponding to uniformly elliptic divergence form operator', in *Séminaire de Probabilités XXII*, Lecture Notes in Math. 1321, 1988, pp. 316–347.