Estudios de Administración, vol. 1, N°1, 1994

Equilibrio del mercado financiero

Jorge Gregoire C.
Salvador Zurita L.
Universidad de Chile

Extracto

El presente trabajo examina en forma crítica y compara los diferentes modelos de equilibrio del mercado de activos. La revisión incluye el modelo de Sharpe-Lintner-Black y la crítica de Roll, la versión intertemporal multibeta de Merton en tiempo continuo, el modelo de consumo agregado de Breeden y finalmente la teoría de arbitraje asintótica de Ross, además de soluciones acotadas de equilibrio para economías finitas, desarrolladas por Grinblatt y Titman. El acento está en los aspectos teóricos, pero también se discuten los principales resultados empíricos.

Abstract

This paper critically reviews the different models of equilibrium in asset markets. The survey includes the Sharpe-Lintner-Black model, and Roll's critique, Merton's intertemporal multibeta version in continuos time, the aggregate consumption model developed by Breeden, Ross' arbitrage pricing theory, and Grinblatt and Titman's equilibrium arbitrage pricing theory in finite economies. Although the emphasis is on the theoretical work, the main empirical results are also outlined.

1. Introducción

Desde la publicación de los trabajos pioneros de Markowitz (1959) y Tobin (1958) que propusieron la teoría de *portfolio*, o modelo de media/varianza, se han desarrollado diversos modelos que intentan representar las condiciones de equilibrio en el mercado de capitales, en particular la relación entre riesgo y retorno. Al respecto existen dos vertientes de modelos: por una parte, el modelo CAPM (*capital asset pricing model*) de Sharpe (1964) y Lintner (1965) y sus extensiones, que puede ser derivado a partir de funciones de utilidad específicas, por ejemplo función cuadrática para los inversionistas-consumidores, o alternativamente a partir de suponer distribuciones de Gauss para los retornos de mercado. Extensiones importantes del modelo corresponden a Black (1972) y al modelo intertemporal de Merton (1973), que se resume en una versión multifactor, multibeta para la ecuación de precios. Finalmente, los modelos de Lucas (1978), Breeden (1979) y Cox, Ingersoll y Ross (1985) desarrollan aun más el modelo intertemporal. La segunda vertiente se refiere al modelo de arbitraje de Ross 1976a, b, que no requiere especificar tan fuertemente, en principio al menos, las funciones de utilidad o las leyes probabilísticas que siguen los retornos de mercado en el contexto de una economía con un número infinitamente grande de activos; en un contexto más restrictivo de equilibrio en una economía finita, son necesarios supuestos algo más fuertes (Grinblatt y Titman 1983). Ambos enfoques, sin embargo, al derivar los modelos suponen agentes individuales que diversifican sus inversiones; suponen, además, economías con mercados perfectos o, alternativamente, que no presentan trabas institucionales al arbitraje. Asimismo, en un cierto sentido, los modelos intertemporales, multibeta, presentan cierta relación con la teoría de arbitraje, que en el caso general admite más de un factor de riesgo sistemático, y es también multibeta en esencia.

En rigor, existe un enfoque alternativo del problema, que corresponde a la teoría de preferencia por los estados, que se basa en los trabajos de K. Arrow 1964 y G. Debreu 1959; por ejemplo Hirshleifer 1964, 1970 desarrolla un enfoque teórico para una economía de Arrow-Debreu, que si bien como marco teórico es notable, es prácticamente imposible de someter a contrastación empírica. Cabe destacar, sin embargo, que existe una relación muy directa entre el modelo de arbitraje de Ross y la teoría de preferencia por los estados, ya que el modelo citado representa una restricción al tablero de Arrow-Debreu que muestra los retornos de los diferentes activos, en los distintos estados de naturaleza. Por ello, en este trabajo nos centramos en modelos verificables empíricamente, en principio al menos, en los cuales los "objetos de selección" son distribuciones de probabilidad para los retornos, y no directamente títulos o derechos sobre consumo en distintos estados de naturaleza. En las secciones siguientes se examinan algunos modelos que nos han parecido más destacables para el objetivo propuesto, sin pretender una revisión exhaustiva del tema.

2. Modelo simple de Sharpe-Lintner-Black

El modelo CAPM original, de un solo período, donde los inversionistas-consumidores maximizan la utilidad esperada de la riqueza terminal, se deriva directamente, o es una extensión, de la teoría de portfolio de Markowitz-Tobin. Precisamente Tobin 1958 ha demostrado que conforme al supuesto de individuos aversos al riesgo (funciones de utilidad cóncavas, de Von Neumann-Morgenstern), y si los retornos de activos en el mercado siguen distribuciones normales (que son un caso límite de las distribuciones simétricas estables), podemos derivar una función de utilidad $V(E, \sigma)$, donde E representa el retorno esperado y σ la desviación estándar de los retornos, y obtener así curvas de indiferencia con pendiente positiva y convexidad en el plano (E,σ). Por lo tanto, con sólo estos dos parámetros basta para decidir entre opciones de inversión. Si sólo consideráramos activos riesgosos, el gráfico 1 indica el portfolio óptimo para el individuo en el punto Q. En el gráfico 2 podemos observar que si además existe la posibilidad de prestar o pedir prestado a una tasa única y libre de riesgo, r, entonces la frontera de portfolios eficientes será la línea que partiendo en r es tangente al conjunto riesgoso en un punto como P y se prolonga más allá, indicando endeudamiento a la tasa r e inversión en el portfolio riesgoso y eficiente P. Se tiene que la frontera rPZ es tal, que cada punto en ella corresponde a un portfolio eficiente en media y varianza; esto es, para un determinado nivel de retorno esperado no es posible menor dispersión, y para cada nivel de σ no hay un mayor retorno esperado. Puede probarse formalmente que todo portfolio óptimo será seleccionado entre los eficientes (teorema del conjunto eficiente, en Fama y Miller 1972).

Gráfico 1

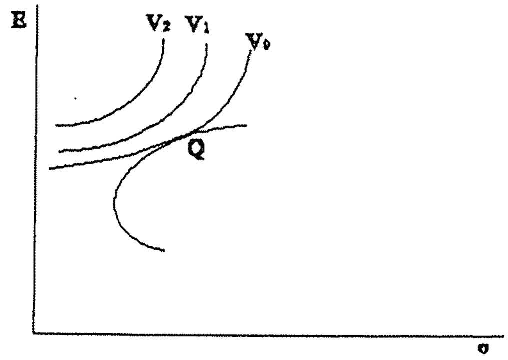
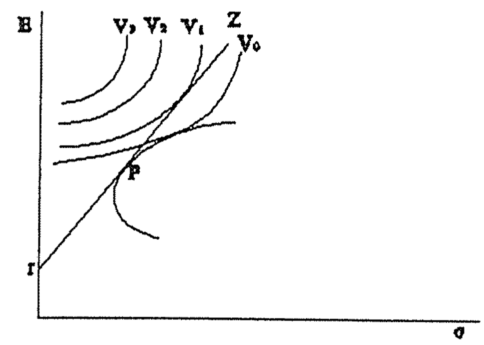


Gráfico 2



El resultado anterior corresponde a la selección del portfolio óptimo para el consumidor-inversionista individual, dadas sus preferencias y las oportunidades del mercado. Pasemos ahora a un modelo de equilibrio en el mercado de capitales, cuyo origen está en Sharpe 1964 y Lintner 1965. Un tratamiento formal del modelo se encuentra en Fama y Miller 1972, Merton 1972 y Jensen 1972. A continuación se presenta una breve exposición del modelo de Sharpe-Lintner y sus extensiones más importantes.

Supongamos entonces que existe un mercado perfecto de capitales sin costo de transacción ni impuestos, donde todos los agentes individuales tienen la posibilidad de prestar y endeudarse a la tasa libre de riesgo r ya mencionada. Supongamos además que se dan expectativas homogéneas, en el sentido de que todo agente considera las mismas distribuciones de retornos para un activo. En ese caso, la línea rPz del gráfico 2 puede interpretarse como la frontera eficiente del conjunto de oportunidades que es visualizado en forma idéntica por todos los agentes y donde cada cual seleccionará su portfolio óptimo según sus preferencias.

Podemos observar, sin embargo, que todo portfolio eficiente corresponde a una combinación lineal del portfolio riesgoso y eficiente P y el activo libre de riesgo (incluyendo puntos que indican emisión de bonos); se concluye entonces que si el mercado está en equilibrio (exceso de demanda igual a cero), P debe incluir todos los activos riesgosos de la economía; es decir, se trata del "portfolio de mercado". A esta frontera de eficiencia rPz se la llama línea de mercado de capitales, y permite observar la vigencia del teorema de separación de Tobin 1958, ya que los posibles portfolios eficientes se obtienen independientemente de las preferencias individuales. Es más, nos dice que los individuos se comportan como si seleccionaran portfolios combinando linealmente dos activos o fondos básicos, el portfolio riesgoso P y el activo de cero riesgo.

El paso siguiente consiste en obtener la relación entre un activo cualquiera en el margen y un portfolio eficiente. El resultado final es obtener el modelo CAPM, que establece una relación lineal simple entre los retornos esperados de equilibrio y el riesgo no diversificable:

$$E_i = r + \lambda \beta_{im} \qquad i = 1,2 \ldots\ldots n \tag{1}$$

donde E_i representa el retorno esperado de equilibrio para el activo i, r es la tasa de interés libre de riesgo, λ es el precio por riesgo en la economía y β_{im} es una medida de riesgo sistemático del activo e igual a $\beta_{im} = \sigma_{im}/\sigma_m^2$ donde σ_{im} es la covarianza del retorno de i con el retorno del portfolio de mercado y σ_m^2 es la varianza del retorno del portfolio de mercado. El portfolio de mercado es un portfolio eficiente en media y varianza, que incluye todos los activos riesgosos de la economía con ponderación igual a su valor de mercado. Puede demostrarse sin dificultad que el premio de mercado λ, estadísticamente hablando es igual al exceso de retornos $(E_m - r)$. Para un análisis más riguroso del premio por riesgo, véase Rubinstein 1973. En pocas palabras, podemos decir que el modelo CAPM resume o captura una proposición económica básica: supone individuos aversos al riesgo, que al formar sus portfolios actúan como si maximizaran la utilidad esperada de la riqueza terminal, diversificando eficientemente y, por tanto, eliminando totalmente el riesgo idiosincrático o residual, de modo que en equilibrio el mercado solamente premia el riesgo no diversificable o sistemático.

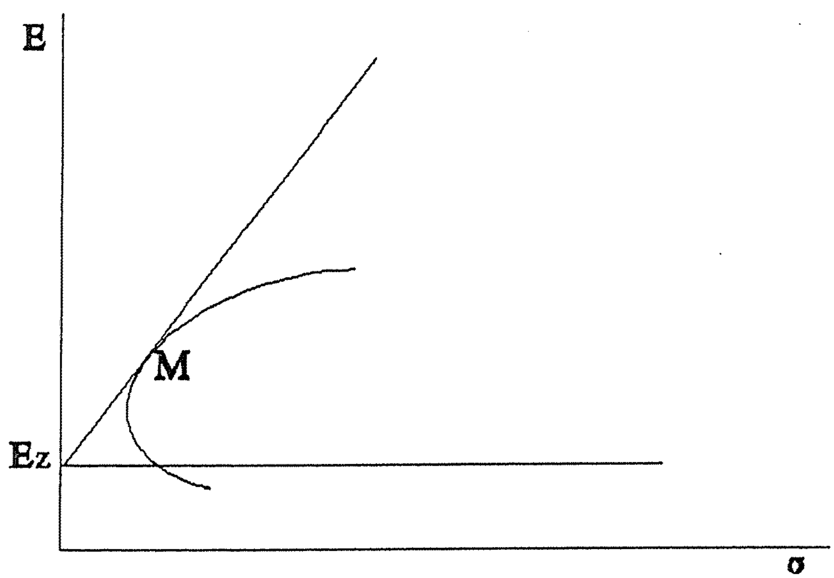
Según se explicó antes, en su derivación original el modelo supone funciones de utilidad cuadrática para los individuos o, alternativamente, distribuciones normales de retornos. Supone, además, mercados perfectos de capital, en los cuales es posible para todo agente prestar o pedir prestado a la tasa libre de riesgo. Por último, supone expectativas homogéneas respecto a las distribuciones de retornos. Como es tradicional, en economía positiva la calidad de los supuestos no debe juzgarse según su mayor o menor "realismo", sino por su valor predictivo del comportamiento en el mercado (Friedman 1953). No obstante, el análisis crítico de sus supuestos ha conducido finalmente a importantes extensiones, que se discuten a continuación y en secciones siguientes.

En primer lugar, una variante interesante del modelo original de Sharpe-Lintner se debe a F. Black 1972, que desarrolla el CAPM relajando el supuesto de que existe un activo libre de riesgo, mediante el cual los consumidores-inversionistas pueden realizar, a la misma (única) tasa de interés y sin restricciones, operaciones tanto de prestar como de pedir prestado. El análisis de Black se basa en las matemáticas del conjunto eficiente y observa que es posible preservar la propiedad de linealidad de la ecuación de equilibrio en dicho caso, si en la economía existe o puede formarse un activo o portfolio de mínima varianza y que sea ortogonal con el portfolio de mercado. Ciertamente, en términos financieros ello es posible en un mercado en el cual se da la venta corta irrestricta, porque en dicho caso se puede obtener portfolios de activos riesgosos, algunos en posición larga y otros en posición corta, con dicha propiedad de ortogonalidad. El gráfico 3 muestra la frontera eficiente de portfolios, en la línea que corta el eje de retornos en E_z y es tangente en M con el *set* eficiente, continuando más allá. Debe destacarse que E_z representa el retorno esperado, común a todos los posibles portfolios beta-cero, incluyendo el de mínima varianza local. Puede demostrarse, además, que el portfolio con beta cero está en el tramo con pendiente negativa en el set de mínima varianza (Black 1972, Roll 1977). En ese caso el portfolio con "beta cero" de mínima varianza ($\beta_{zm} = 0$) toma el lugar del activo libre de riesgo del modelo de Sharpe-Lintner:

$$E_i = E_z + \lambda \beta_{im} \qquad i=1,2,\ldots\ldots n \qquad (2)$$

Black demostró entonces que cuando no existe un activo libre de riesgo, pero sí existen las posibilidades de ventas cortas irrestrictas en la economía, se mantiene inalterado el principio de separación de dos fondos, esto es que el inversionista forma sus portfolios como si combinara linealmente dos "fondos mutuos"; a saber: el portfolio beta-cero y el portfolio de mercado, independientemente de cuáles sean sus preferencias, ya que éstas sólo afectarán a las ponderaciones asignadas a cada fondo.[1] En esas condiciones se obtiene la ecuación (2), en la cual el riesgo sistemático sigue midiéndose respecto del portfolio de mercado. Puede probarse que estadísticamente el premio de mercado es igual al exceso de retorno (E_m - E_z). Cabe finalmente señalar que las conclusiones más importantes de los modelos de Sharpe-Lintner y Black, la linealidad de la relación riesgo retorno en el mercado, línea de mercado de capitales y CAPM propiamente tal, corresponde, según demostró Roll 1977, a resultados puros de álgebra lineal según el supuesto de que el portfolio de mercado es eficiente en media y varianza. Volveremos sobre este punto más adelante.

Gráfico 3



[1]La venta corta no está definida en el mercado chileno, encontrándose sólo precarias aproximaciones. En cuanto a los efectos de las restricciones a la venta corta sobre los precios de los activos, véanse Figlewski y Webb 1993, Raab y Schwager 1993.

3. Modelo intertemporal de Merton 1973, de tiempo continuo

Una tercera y notable variante del modelo CAPM corresponde al modelo intertemporal (de tiempo continuo) desarrollado por R. Merton 1973, en el cual se permiten alteraciones instantáneas del conjunto eficiente de oportunidades de inversión; en sus desarrollos matemáticos el modelo hace uso del cálculo estocástico, y específicamente procesos de Itô. En un apéndice al final de este trabajo se explican aspectos distribucionales. Cabe destacar que el modelo supone un mercado competitivo, sin costos de transacción ni impuestos, activos perfectamente divisibles, mercado de capitales siempre en equilibrio; que se puede prestar y pedir prestado a la misma tasa, y, además, se permiten ventas cortas irrestrictas. Los agentes maximizan la utilidad esperada del consumo de su vida total, con funciones de utilidad de Von Neumann-Morgenstern estrictamente cóncavas.

La base del modelo es que en cada instante pueden cambiar las variables estado, que pueden ser muchas, y se altera el conjunto de oportunidades, llevando a recomposiciones de los portfolios. En el caso particular, y menos complejo, en que los cambios en el conjunto eficiente los identificamos con las variaciones en la tasa de interés r, como variable instrumental, Merton deriva un modelo de equilibrio de mercado, conocido como el modelo de tres fondos (el CAPM usual es de dos fondos), que puede resumirse como sigue:

$$\mu_i - r = \beta_1(\mu_m - r) + \beta_2(\mu_n - r) \qquad i = 1,2,\dots n-1 \qquad (3)$$

donde μ_i es el retorno de equilibrio esperado, instantáneo, para el activo i; μ_m el correspondiente al portfolio de mercado y μ_n el de un activo n riesgoso con correlación perfecta negativa con la tasa r; β_1 y β_2 son medidas de riesgo sistemático; en la economía existen n activos riesgosos y un activo libre de riesgo (instantáneo). Podemos explicar algo más recordando que en el CAPM simple uniperíodo la tasa libre de riesgo está fija y el conjunto de oportunidades también; en cambio, en el modelo multiperíodo la tasa libre de riesgo está fija por un instante y puede variar, es decir es estocástica, de un instante a otro. En el modelo de Merton, la estocasticidad de la tasa de interés libre de riesgo instantánea trae por consecuencia, o crea, una demanda por activos o portfolios que permitan a los agentes protegerse (*hedge*) frente a las variaciones en r. En el caso general, en que trabajamos con un número S de variables estado que caracterizan el conjunto de oportunidades, se crea una demanda por S activos que permiten un hedge respecto a cada variable estado.

En resumen, habría un modelo de $S+2$ fondos en el caso general; es decir, una separación respecto de las preferencias sobre la base de $S+2$ fondos, que son el activo libre de riesgo (instantáneo), el portfolio de mercado y otros S activos especializados en que cada uno protege o permite un hedge respecto a una variable estado, pues presentan sus retornos una correlación igual a -1 con dichas variables. En el caso particular en que las variaciones en r sintetizan las variaciones en el conjunto de oportunidades de inversión, el modelo implica una separación en tres fondos solamente. Si el consumo no se afecta por variaciones en la tasa de interés, para todos los individuos del mercado, obtendríamos el CAPM tradicional (pero en tiempo continuo), y ése sería también el caso si la tasa r fuese no estocástica. En los otros casos, los agentes individuales formarán sus portfolios como si combinaran linealmente tres fondos o activos; a saber: el activo libre de riesgo (instantáneo), el portfolio de mercado (eficiente) y el activo o portfolio n, que permite efectuar un hedge o protección frente a variaciones no previstas en el conjunto eficiente (aquí resumido en la tasa r).

4. Evidencia empírica (crítica de Roll), anomalías

El modelo CAPM básico de Sharpe-Lintner y sus importantes extensiones han sido sometidos a numerosas pruebas empíricas, las primeras de las cuales se discuten en el interesante resumen crítico de Jensen 1972, pudiendo destacarse además el trabajo de Fama y MacBeth (1973). Lamentablemente, todas esas pruebas iniciales no son concluyentes, especialmente conforme al trabajo crítico de Roll 1977, según el cual el problema, empíricamente hablando, se refiere a la dificultad de observar el "portfolio de mercado", de modo que al recurrir a un proxy como un índice de mercado y al obtener la linealidad requerida sólo estaríamos probando haber seleccionado un portfolio *ex post* eficiente (en media y varianza), y si no obtuviésemos dicha linealidad tampoco podemos "rechazar", ya que sólo estaríamos probando que hemos seleccionado un índice ex post no eficiente. En la base del problema tenemos que aun para un subconjunto de activos es posible, por ejemplo, encontrar para todo portfolio eficiente (local solamente) su correspondiente portfolio ortogonal, y, por tanto, linealidad. Estos y otros resultados son demostrados matemáticamente en el trabajo de Roll y corresponden básicamente a resultados de álgebra lineal, sin tener que recurrir para su argumentación ni a las funciones de utilidad de los inversionistas ni a la distribución probabilística de retornos, excepto suponer que la varianza existe y es finita. La crítica de Roll ha significado un fuerte cuestionamiento del CAPM de Sharpe-Lintner-Black; por su parte, Stambaugh 1982 estudia la posibilidad de usar distintos índices proxies, dando pocas esperanzas.

Por otra parte, en general, para índices representativos de portfolios accionarios bien diversificados y ponderados según valores de mercado, la evidencia disponible, aunque no concluyente, permite observar desviaciones importantes, como, por ejemplo, el llamado "efecto tamaño" detectado empíricamente por Banz 1981, y discutido en Reinganum 1981 y Basu 1983, entre los más destacados. El citado efecto puede resumirse en que la línea empírica del mercado de activos presenta deformaciones tales, que firmas pequeñas (de bajo patrimonio de mercado) presentan retornos en exceso para sus niveles de riesgo beta, y en las firmas de alta capitalización sucede lo contrario. Claramente, este resultado es compatible con una mala especificación del modelo de equilibrio, o bien con importantes desviaciones en la eficiencia (informativa) del mercado, dado que los tests empíricos analizados son de hipótesis conjuntas. Más aun, en el caso probable de una errónea especificación del modelo, este efecto tamaño debe interpretarse más bien como una variable proxy a una variable subyacente; es decir, se da un evidente vacío teórico para un hecho empírico determinado. Chan y Chen 1988, por ejemplo, destacan alternativamente que el problema se debe a coeficientes estimados beta ruidosos y que las variables tales como tamaño se correlacionan con los verdaderos betas. En todo caso, estos y otros fenómenos empíricos detectados, conocidos como "anomalías" de los modelos de equilibrio de Sharpe-Lintner-Black, han ensombrecido bastante el panorama en estudio y las posibilidades del modelo CAPM simple y han motivado fuertemente el acento en modelos de equilibrio multifactoriales o "multibetas", tanto en lo teórico como empírico, en la línea de Merton, de modelos en tiempo continuo, como también en el modelo de arbitraje de Ross 1976a, b, que se resume más adelante. Cabe destacar, con respecto a las "anomalías" ya señaladas, el resultado obtenido por Fama y French 1992, que indica que para el período 1963-1990 las variables tamaño y, especialmente, valor libro/valor de mercado de las acciones, capturan la variación *cross section* de los retornos accionarios medios, asociados con beta de mercado, tamaño, valor libro/valor mercado, utilidad/precio y *leverage*; la contribución de la variable beta aparece prácticamente nula, y aun cuando estos resultados son materia de discusión, ellos apuntan, al menos por ahora, a modelos multibeta. Otras "anomalías" que han generado especial interés corresponden al efecto fin de semana (French 1980), según el cual se observan retornos anormales, en forma sistemática entre días viernes-lunes, con actividad bursátil; asimismo, el efecto fin de año, detectado por Keim 1983, Reinganum 1983, que encuentran retornos anormales que se concentran entre los últimos días de diciembre y los primeros cinco días de enero, generándose así posibilidades de reglas de compra-venta *ad hoc*. Por último, puede mencionarse también el efecto fin de mes (Ariel 1987), y el efecto día feriado (Ariel 1990). Para un buen análisis actualizado de estas y otras anomalías, véase Fama 1991.

5. Modelo intertemporal basado en el consumo

Una variante interesante de modelos intertemporales, de precios de activos, corresponde a aquéllos basados en el consumo, tales como los de Breeden 1979, Breeden y Litzenberger 1978, Rubinstein 1976. Específicamente, el modelo de consumo agregado de Breeden puede considerarse una extensión del modelo de tiempo continuo de Merton ya citado. Se demuestra que, en un caso general, para una economía en la cual existe un solo bien de consumo, y con un conjunto de oportunidades de inversión estocástico, la ecuación de equilibrio multibeta de Merton (se tendrá un número de betas igual al número de variables estado que caracterizan el conjunto de oportunidades de inversión más uno), puede colapsarse en una ecuación con un solo beta, pero en este caso dicho beta se mide con respecto al consumo agregado y no el beta usual respecto de la riqueza (portfolio de mercado). En la ecuación de equilibrio del mercado de capitales resultante se tiene entonces que, para todo activo, el exceso de retorno esperado instantáneo es proporcional a su beta o covarianza con respecto al consumo agregado.

Breeden demuestra que en una economía del tipo planteado por Merton, en que el conjunto de oportunidades es estocástico y la función de utilidad del consumo de por vida es independiente de los estados, aunque aditiva en tiempo, la riqueza ya no es un estadístico suficiente para la utilidad marginal de cada peso, pero el consumo sí lo es. Por eso la ecuación de equilibrio en Merton es multibeta; en cambio, en la ecuación de Breeden los beta-consumo de cada activo son medida suficiente. El modelo se resume finalmente en la ecuación riesgo/retorno de equilibrio siguiente:

$$\mu_i - r = \beta_{ic}(\mu_c - r) \text{ para todo activo riesgoso} \qquad (4)$$

que supone una economía en la cual existe un activo o portfolio cuyo retorno está perfectamente correlacionado con las variaciones en el consumo agregado, en el instante siguiente. Así, los coeficientes beta de riesgo sistemático para los activos pueden apropiadamente medirse con respecto a dicho activo o portfolio correlacionado con el consumo y β_{ic} es el beta-consumo para el activo *i*. En equilibrio, entonces, de acuerdo con (4), el exceso de retorno esperado del activo *i* sobre la tasa (instantánea) libre de riesgo, μ_i-*r*, es igual al riesgo sistemático beta-consumo, por el premio por riesgo, μ_c-*r*, que es el exceso de retorno esperado (instantáneo) en un activo perfectamente correlacionado con el consumo agregado. Cox, Ingersoll y Ross 1985 obtienen este mismo resultado, pero en un contexto de equilibrio general que integra los mercados de bienes y los financieros. En dicho trabajo los autores derivan endógenamente el proceso estocástico de los activos financieros y su dependencia de las variables reales subyacentes (véase también Lucas 1978). Breeden y Litzenberger 1978 demuestran, por otra parte, que, conforme al supuesto de individuos con funciones de utilidad idénticas con aversión relativa al riesgo constante (medida de Arrow-Pratt; Arrow 1971, Pratt 1964) y, si además el consumo sigue una distribución lognormal, éstas serán condiciones suficientes para derivar el modelo cuando los retornos y los beta-consumo se miden a lo largo de períodos finitos, discretos, de tiempo.

En cuanto a la intuición económica del modelo, una vía ofrecida por Breeden 1979 se basa en el nivel de riqueza y la productividad de las inversiones en fechas y estados de naturaleza futuros. De acuerdo con las condiciones de óptimo del modelo, se obtiene que el consumo agregado está correlacionado negativamente en forma perfecta con la utilidad marginal de un peso adicional de riqueza invertido, lo cual es concordante con suponer individuos con preferencias (por consumo) independientes de los estados. Este no es el caso con la riqueza, ya que al trabajar con oportunidades de inversión estocásticas pueden darse casos en que las diferencias en los niveles de riqueza sean más que compensadas por diferencias de productividad. En consecuencia, para este último caso el consumo agregado es un estadístico suficiente para la utilidad marginal, y por tanto la covarianza de los retornos respecto del consumo agregado es suficiente medida de riesgo, y, por el contrario, la riqueza no lo es.

Finalmente, Breeden desarrolla un modelo intertemporal, para el caso de una economía con varios bienes de consumo. Este es un caso más complejo, ya que presenta una economía con oportunidades de inversión estocásticas y, además, con precios con comportamiento estocástico para los bienes de consumo. Las ecuaciones de demanda por activos incluyen en este caso componentes adicionales relacionados con las posiciones largas y cortas en activos de portfolios más altamente correlacionados con los precios de los bienes de consumo. Breeden obtiene una ecuación de equilibrio de mercado, basada en un solo beta, que corresponde al beta-consumo real. Se define este beta, β_i^* para el activo *i*, como la covarianza local de su retorno real con los cambios porcentuales en el consumo real agregado, dividido por la tasa de varianza de los cambios porcentuales en el consumo real agregado. El modelo supone un vector de proporciones presupuestarias asignadas a los diferentes bienes de consumo, y en el caso de la economía multibienes debe conocerse tanto el vector de ponderaciones (proporciones) marginales, en el agregado, como el vector con ponderaciones medias. Los índices de precios con estas ponderaciones son iguales sólo en el caso "homotético", según observa Breeden.

La evidencia empírica no es suficientemente clara hasta aquí, ofreciéndose una excelente discusión al respecto en Fama 1991. Por una parte, cabe destacar los resultados más bien promisorios de los tests de Breeden, Gibbons y Litzenberger 1989, que muestran una linealidad en la relación de retornos esperados y betas-consumo, aun cuando sus tests presentan algunas posibilidades de sesgos importantes. Por otra parte, Chen, Roll y Ross 1986 muestran un resultado bastante pobre para el modelo, al incluir el beta-consumo estimado en una regresión correspondiente al caso multifactorial, en un contexto de teoría de arbitraje de Ross. En dicha regresión, la contribución marginal del beta-consumo es prácticamente nula en cuanto a explicar el *cross-section* de retornos esperados. Finalmente, debe mencionarse una línea diferente de estudios empíricos, que sobre la base de especificar el modelo con supuestos fuertes respecto a preferencias y aspectos distribucionales, estudian las propiedades o comportamiento del modelo en series de tiempo y corte transversal, que incluye lo que se ha denominado el "puzzle" del premio por riesgo (por ejemplo Mehra y Prescott 1985), que puede resumirse en que el premio encontrado es incompatible con un valor hipotético del coeficiente de aversión relativa al riesgo (Arrow-Pratt) que se supone razonable para un consumidor representativo, de acuerdo con el modelo.

Cabe destacar, finalmente, que en gran medida las dificultades empíricas del modelo de consumo pueden estar reflejando precisamente las evidentes dificultades de medir adecuadamente el consumo agregado. Asimismo, Cornell 1981 ha planteado los posibles problemas de variabilidad de los betas-consumo en el curso del tiempo, lo cual complicaría bastante los tests empíricos.

6. Modelo de arbitraje

El modelo de precios por arbitraje desarrollado por Ross 1976a,b, constituye efectivamente una opción respecto al modelo CAPM para representar las relaciones de precios en el mercado de capitales. Como se explicó en secciones anteriores, la popularidad del modelo CAPM se debe a su simplicidad lineal; sin embargo, tiene el inconveniente empírico de la dificultad evidente de observar el portfolio de mercado, para aplicaciones; es más, de acuerdo con Roll 1977, el único test válido sería demostrar que el portfolio de mercado es eficiente en media y varianza, ya que todas las otras connotaciones, incluidas la misma linealidad de retornos con los betas, son sólo resultados o consecuencias de la eficiencia del portfolio de mercado.

El modelo de Ross, por el contrario, aunque mantiene la intuición económica del CAPM y su linealidad entre retornos y riesgo sistemático, no depende del portfolio de mercado para su validación empírica, y, más aun, dicho portfolio no cumple ningún papel en el modelo de arbitraje. Como veremos más adelante, presenta, sin embargo, otras dificultades tanto de tipo teórico como empírico.

A. DERIVACIÓN INTUITIVA DEL MODELO

El contenido de esta sección sigue la derivación heurística presentada en Ross 1976a. Un tratamiento más riguroso de la condición de arbitraje, y especialmente de sus requerimientos o supuestos necesarios, ha sido desarrollada por el mismo Ross (1976 b).

De acuerdo con la argumentación intuitiva ya señalada, se parte con los supuestos neoclásicos de mercados perfectos de capital, sin costos de transacción.

Se supone, además, la existencia de un proceso generador de retornos, y en ese caso los agentes creen homogéneamente que los retornos aleatorios para los activos son generados por un modelo lineal de k factores comunes:

$$\tilde{r}_i = E_i + b_{il}\,\tilde{\delta}_1 + b_{i2}\,\tilde{\delta}_2 + ... + b_{ik}\,\tilde{\delta}_k + \tilde{u}_i \qquad i = 1,2,...n \qquad (5)$$

donde $\tilde{r}_i$ representa el retorno del activo i (el signo $\tilde{}$ representa aleatoriedad), E_i representa los retornos esperados para el activo i, $\tilde{\delta}_j$ es el factor j, común para los todos los activos considerados y con media cero, b_{ij} es una medida o coeficiente de respuesta del retorno del activo i ante variaciones en $\tilde{\delta}_j$. Los factores comunes $\tilde{\delta}$ representan el componente sistemático del riesgo y los $\tilde{u}_i$ representan ruido, y como tal el componente no sistemático del riesgo. Se cumple que $E(\tilde{u}_i / \tilde{\delta}_j) = 0$ y, además, que este componente idiosincrático $\tilde{u}_i$ es suficientemente independiente de $\tilde{u}_l, (i \neq l)$, para que opere la ley de los grandes números. Asimismo, para poder obtener resultados generalizables al caso de varios factores comunes de riesgo, suponemos que el número de activos n es muy superior al número de factores k.

De acuerdo con Ross, omitiendo los términos de ruido $\tilde{u}_i$, el modelo de factores (5) es equivalente a plantear una restricción al tablero de Arrow-Debreu que muestra los retornos de los activos considerados, en los diferentes estados de la naturaleza, ya que dicho tablero de retornos se ubicará en un espacio de $k+1$ dimensiones, delimitado por un vector de constantes $e' = (1,1,1,...,1)$ y k vectores $(\delta_1, \delta_2, ...\delta_k)$. Esto es de la mayor importancia para comprender la teoría de arbitraje, ya que los retornos de cada activo pueden obtenerse como una combinación lineal de factores y los mismos factores pueden replicarse mediante combinaciones lineales de un número $k+1$

de títulos (se incluye el título de cero riesgo), y por lo tanto los retornos de todo otro activo o portfolio existente en el mercado pueden reproducirse o replicarse mediante una combinación lineal de estos $k+1$ activos. La exigencia de que existan unos pocos factores comunes es un punto clave en el modelo. Por cierto se seguiría que los portfolios o activos originales existentes y sus réplicas exactas deberían cumplir una condición de tener igual precio y satisfacer la condición de no arbitraje; consecuentemente, los retornos de los activos quedan sujetos a restricción. Recordemos que se ha supuesto un mercado neoclásico perfecto, sin costos de transacción.

La derivación, entonces, parte de la ecuación factorial (5) y prosigue con la creación de portfolios de arbitraje, que no requieren riqueza adicional, es decir, que corresponden a meras recomposiciones de las carteras existentes en un momento. O sea, si un vector w representa un portfolio de arbitraje (formado de los n activos) y el vector columna e es un vector de constantes $e' = (1,1,1......1)$, se tiene el requisito

$$w'e = 0$$

Evidentemente, estas recomposiciones de cartera significan que las compras de activos (posiciones largas) quedan "financiadas" exactamente por ventas cortas (posiciones cortas) en otros activos. De aquí que en el modelo teórico se requiera un mercado sin trabas artificiales a las ventas cortas, que se suponen irrestrictas.[2]

Por otra parte, se agrega el requerimiento de que el portfolio de arbitraje está perfectamente diversificado (en una economía "grande" no hay problema), de modo que los elementos de w están en el orden de $1/n$ (n es el número de activos). Finalmente, a estos portfolios se les exige que carezcan, además, de riesgo sistemático; entonces deben cumplir:

$$w'b_j = 0 \qquad j=1,2,....,k$$

[2]Sobre venta corta en Chile, véase anterior nota de pie de página.

donde b_j representa un vector de coeficientes de respuesta correspondiente al factor sistemático j.

Formando entonces estos portfolios de arbitraje w, ellos tendrán, de acuerdo con la ecuación (5), un retorno R:

$$R = w'\tilde{r} = w'E + (w'b_1)\tilde{\delta}_1 + \dots\dots + (w'b_k)\tilde{\delta}_k + w'\tilde{u}$$

donde $\tilde{r}$ es un vector de retornos de los activos, E un vector de retornos esperados y $\tilde{u}$ un vector de componente idiosincrásico. Como se explicó anteriormente, los portfolios de arbitraje se suponen diversificados, de modo que si el vector de ruido $\tilde{u}$ es "suficientemente" independiente y el número de activos es grande, el último termino, $w'\tilde{u}$, desaparece (aproximadamente). Puesto que además se construyen eliminando el riesgo sistemático, según ya se señaló, entonces

$$w'\tilde{r} = w'E$$

Dado que estos portfolios de arbitraje, por definición, no usan recursos adicionales ni incurren en riesgo de ninguna clase, entonces, su retorno deberá ser $w'E=0$, si el inversionista está en equilibrio, es decir, si no desea modificar su actual cartera y si se debe satisfacer una condición de no arbitraje en el mercado. De otro modo, si el retorno fuese positivo sería posible obtener ganancias arbitrariamente elevadas, por el simple expediente de aumentar la escala del portfolio de arbitraje. Cabe señalar que la condición de "no arbitraje" es más general que la condición de equilibrio, y de hecho podría regir en variados tipos de desequilibrio. Cabe también señalar que la condición de no arbitraje resumida en que $w'E=0$ para todos los posibles portfolios de arbitraje que pudieran formarse presenta además propiedades asintóticas, como se explicó precedentemente.

Finalmente, los requerimientos señalados constituyen en realidad declaraciones de álgebra lineal, que expresan que todo vector w que es ortogonal respecto del vector de constantes e, y también respecto de cada uno de los vectores de coeficientes b_j, deba también ser ortogonal respecto del vector E de retornos esperados.

Consecuentemente, conforme al álgebra lineal (Hadley 1964), el mencionado vector de retornos esperados E debe ser necesariamente una combinación lineal del vector de constantes y de los vectores $b_j (j=1,2,...,k)$. Vale decir, existen $k + 1$ ponderadores λ_0, $\lambda_1,...\lambda_k$ tales que se cumple

$$E_i = \lambda_0 + \lambda_1 b_{i1} + ... + \lambda_k b_{ik} \quad \text{para todo } i. \tag{6}$$

Ahora bien, si en la economía existe un activo libre de riesgo, entonces λ_0 puede interpretarse correctamente como el retorno de ese activo; alternativamente, λ_0 puede interpretarse correctamente como el retorno común a todos los portfolios "beta cero", es decir, portfolios tales que $b_{ij} = 0$ para todo j.

Por último, en la ecuación de precios (6) los premios por riesgo sistemático, $\lambda_1, \lambda_2 ...., \lambda_k$ pueden también interpretarse como excesos de retorno. Específicamente, si formamos portfolios tales que presenten riesgo sistemático unitario en un factor y cero riesgo en los restantes factores, entonces, para cada λ_j se tiene

$$\lambda_j = E^j - \lambda_0$$

como el exceso de retorno o premio de mercado por el riesgo, para portfolios que sólo presentan riesgo sistemático del factor j; es decir, son como portfolios "especializados" que replican o imitan al factor j correspondiente. Para una comprensión más a fondo del significado de los premios por riesgo y, en general de la coherencia de la teoría de arbitraje en un modelo de equilibrio dinámico, véanse Roll y Ross 1980 y especialmente Cox, Ingersoll y Ross 1985.

B. EVIDENCIA EMPIRICA

La ecuación de precios (6) rige solamente como aproximación si n es finito, y es verificable empíricamente en subconjuntos de activos; de hecho, ha sido objeto de numerosas investigaciones, a partir del trabajo empírico pionero de Roll y Ross 1980. Sobre la base de la matriz de varianzas y covarianzas, estimada para un subconjunto de activos de la economía, dichos autores utilizan la técnica estadística de análisis de factores, específicamente estimaciones de máxima verosimilitud, para extraer el número de factores que parecen "explicar" la estructura de retornos de mercado. Los resultados obtenidos apuntan a validar un modelo de más de un factor, y en principio no más de cuatro o cinco. Las técnicas de extracción de factores y las pruebas empíricas del tipo Roll y Ross han sido criticadas por Shanken 1982, y Dhrymes, Friend y Gultekin 1984, pero han sido replicadas por P. Dybvig y S. Ross 1985, y Roll y Ross 1984, por citar algunas referencias importantes a modo ilustrativo.

Otros tests empíricos interesantes de la teoría de arbitraje corresponden a Chen 1983, y Chen, Roll y Ross 1986, entre otros. El trabajo de Chen, Roll y Ross es especialmente atractivo, por cuanto, a diferencia de los anteriores, intentan dar un contenido económico a los posibles factores, cosa que está ausente por completo en la mayoría de los trabajos realizados. Para ello, combinan las técnicas de extracción de factores ya mencionadas con variables obtenidas de la intuición económica, solamente basados en una definición muy básica de valor de un activo y los posibles factores que representan "*shocks*" que afectan a los flujos de caja y tasas de descuento. Las regresiones múltiples estimadas respaldan variables tales como una apropiada medida (agregada) de la tasa de crecimiento del producto y el premio del retorno en bonos corporativos riesgosos y un bono del gobierno norteamericano, como las más importantes. Por otra parte, al incluir en las regresiones el retorno en algún índice accionario, como Standard & Poor (según el supuesto de que es una proxy del portfolio de mercado), la contribución marginal es prácticamente nula, y lo mismo ocurre con la tasa de crecimiento del consumo agregado, según se mencionó en secciones anteriores.

C. SOLUCIONES ACOTADAS, EN UNA ECONOMIA FINITA

El enfoque heurístico aquí utilizado para derivar el modelo de arbitraje presenta, sin embargo, a juicio del propio S. Ross 1976a, b y otros autores, algunos problemas teóricos de cierta importancia y, por lo mismo, dificultades para fines de verificar empíricamente la teoría (Shanken, ya citado). Así, al aumentar el número de activos n, en general podemos suponer que la riqueza aumentará, pero esto podría llevar a que, al menos para algunos agentes, se tendrá una mayor aversión al riesgo, y por lo tanto se tendrá un factor persistente en la ecuación de precios. Más aun, a medida que aumenta n, la ley de los grandes números, según vimos, permite efectos de diversificación, eliminando los componentes idiosincrásicos (vector independiente), pero ahora se introduce el ya señalado efecto contrario.

Ross 1976b presenta un tratamiento riguroso de la teoría de arbitraje, estudiando estos problemas citados, y mediante un ejemplo contrario, es decir, en que la condición de no arbitraje no se cumple, demuestra finalmente que su cumplimiento impone requerimientos adicionales, tales como a) Agentes con aversión al riesgo, que presentan homogeneidad de expectativas, en términos del vector E de retornos esperados (*ex ante*). Este supuesto de homogeneidad puede relajarse bastante, según Ross, pero es utilizado en la demostración formal. b) Que el retorno esperado de mercado debe presentar un límite o cota superior al ir aumentando el número de activos. c) Además, requiere la existencia de al menos un agente cuya función de utilidad presente aversión relativa al riesgo acotada; vale decir, una medida de Arrow-Pratt acotada; esto último, por oposición al ejemplo contrario ya aludido, el cual suponía aversión absoluta al riesgo constante y aversión relativa creciente. La actuación de dicho agente en el mercado debe ser, además, no despreciable asintóticamente. Con estos requerimientos o supuestos críticos, Ross efectúa la demostración matemática de su teorema II, que establece una cota superior a la suma de las desviaciones cuadráticas respecto de la relación básica de precios, a medida que aumenta el número de activos.

Estos resultados teóricos permiten en principio efectuar pruebas empíricas en subconjuntos de activos. No obstante, la ecuación de precios resultante ha sido obtenida suponiendo una economía con un número infinitamente grande de activos. Es decir, el modelo presenta características asintóticas, y persiste la duda para trabajos empíricos. Al respecto, Ross 1976b estima que no habrá problemas si existe un número "suficientemente grande" de activos, presentando algunos cálculos estimativos para el error de aproximación. Argumentos parecidos se encuentran en Huberman 1982 e Ingersoll 1984, entre otros.

Cabe destacar, finalmente, los trabajos de Grinblatt y Titman 1983, y Dybvig 1983, que abordan el problema de la formación de precios en una economía finita y que en ambos casos, aunque con un conjunto de supuestos diferentes, derivan la teoría de arbitraje en un contexto de equilibrio, y no de condición de no arbitraje, como los anteriores, y obtienen una expresión refinada para el grado de aproximación en los precios.

Grinblatt y Titman, por ejemplo, derivan su modelo haciendo uso de supuestos relativamente débiles sobre las preferencias y el proceso generador de retornos. Suponiendo que la varianza específica, idiosincrásica del activo i es finita, obtienen que en la medida en que la importancia (tamaño) relativa del activo en el mercado se hace arbitrariamente pequeña, la desviación del retorno esperado respecto de la línea de arbitraje se hace también arbitrariamente pequeña. Más aun, en la medida en que el número de activos en la economía aumenta arbitrariamente pero el tamaño absoluto de ellos permanece constante, la importancia relativa de cada activo disminuye arbitrariamente, y entonces, en el límite, la ecuación de precios rige en forma exacta. Finalmente, conforme al supuesto adicional de normalidad multivariante, obtienen una expresión específica de la magnitud del error de precios para un activo i, según la cual depende de la importancia relativa del activo i en el mercado, X_i, del coeficiente de aversión relativa al riesgo, r^*, para un inversionista que posee el activo i en la misma proporción del mercado; y la varianza del componente idiosincrásico del retorno del activo i, σ_i^2. Es decir, el error es igual a $X_i r^* \sigma_i^2$. Debe hacerse presente que el valor de X_i no requiere conocer el portfolio de mercado, como podría inadvertidamente imaginarse, ya que está referido al valor del total de los activos transados en el mercado, dado que el modelo supone que pueden existir no transables. De acuerdo con cálculos estimativos para el mercado norteamericano, los autores concluyen que la teoría de arbitraje puede proporcionar una buena aproximación para cada activo transado y que es posible someterla a prueba empírica en subconjuntos de activos.

7. Conclusión

Al examinar los modelos de precios de activos disponibles, resaltan las fortalezas y debilidades relativas, tanto teóricas como -principalmente- empíricas. El modelo de Sharpe-Lintner-Black, que presenta características de equilibrio walrasiano, enfrenta claros problemas empíricos, pese a su popularidad en aplicaciones. Efectivamente, si en promedio los retornos *ex ante* igualan los retornos *ex post*, y si el portfolio de mercado es observable y además eficiente en media y varianza, ello constituye un test suficiente, y el vector de betas estimado sería apropiado en aplicaciones. En la medida en que ello no es así, surge un elemento de ambigüedad en los tests, incluidas las posibles anomalías de tamaño y otras detectadas.

Asimismo, el modelo de consumo, también de un solo beta, presenta, más allá de su elegante forma, problemas empíricos parecidos, por cuanto requiere una adecuada medida del consumo agregado y, por lo tanto, conocimiento, en rigor, del vector de ponderaciones (agregadas) correspondientes de los diferentes bienes de consumo.

Los modelos multifactoriales, o multibeta, sea la versión intertemporal de Merton 1973 o la de arbitraje de Ross 1976a, b, presentan dificultades no menores. El primero requiere el portfolio de mercado, y además identificar apropiadamente las variables estado necesarias, que caracterizan la estocasticidad del conjunto de oportunidades. La teoría de arbitraje, por su parte, presenta nula ayuda para identificar los factores comunes de riesgo sistemático.

No obstante lo anterior, trabajos recientes (Constantinides 1987) indican que los diferentes modelos corresponden a variadas formas de un mismo modelo general de equilibrio, una fórmula fundamental de valoración, y corresponden, cada uno de ellos, a especificaciones diferentes de las preferencias, por un lado, y de los aspectos distribucionales, por otro.

APENDICE

Distribuciones compactas[*]

Como hemos visto, el análisis de media y varianza es consistente con el supuesto de maximización de la utilidad esperada de los individuos sólo bajo ciertas condiciones. En efecto, dicho análisis puede justificarse imponiendo restricciones sobre las preferencias de los individuos (suponiendo que la función de utilidad es cuadrática, lo que a su vez implica aversión absoluta al riesgo creciente, inconsistente con la evidencia empírica), o bien sobre la distribución de retornos de los activos financieros (suponiendo que es normal,

[*]Esta nota se basa en Ingersoll (1987), *Theory of Financial Decisison Making*, Rowman and Littlefield.

o más general, elíptica con media y varianza finitas, lo que viola la responsabilidad limitada de las acciones con probabilidad distinta de cero).

Sin embargo, para cierto tipo distinto de distribución de retornos, el análisis de media y varianza puede ser aproximadamente correcto para la mayoría de las funciones de utilidad, y la exactitud de la aproximación es mayor mientras menor sea el intervalo de tiempo considerado. Las distribuciones de este tipo se llaman distribuciones compactas, y están estrechamente relacionadas con las distribuciones que se utilizan para trabajar en modelos de finanzas con tiempo continuo.

DEFINICION. Sea x una variable aleatoria cualquiera con media cero, varianza unitaria y momentos centrales finitos:

$$E[\tilde{x}] = 0, \quad \mathrm{Var}[\tilde{x}] = 1, \quad E[\tilde{x}^k] = m_k < \infty \tag{1}$$

Entonces se dice que la variable aleatoria z es compacta si se puede escribir como**

$$z \equiv \mu\, t + f(t)\; \tilde{x} \equiv \mu\, t + t^{\delta}\; g(t)\; \tilde{x} \tag{2}$$

donde $\delta > 0$ es la menor potencia en la expansión de f(.) alrededor de cero tal que el límite de $g(t)$ cuando t converge a 0 es constante:

$$\lim_{t \to 0} g(t) = \sigma \tag{3}$$

EJEMPLO. Supongamos que la función $f(t)$ es un polinomio:

**Esta no es la única forma de caracterizar una función compacta, pero es conveniente para mostrar sus características.

$$f(t) = c_1\, t^3 + c_2\, t^4 + c_3\, t^5 \tag{4}$$

Entonces, $\delta = 3$, puesto que

$$f(t) = t^3\, (c_1 + c_2\, t + c_3\, t^2) \tag{5}$$

y tenemos que:

$$\lim_{t \to 0} (c_1 + c_2\, t + c_3\, t^2) = c_1 \equiv \sigma \tag{6}$$

PROPIEDAD 1. Para las variables compactas, los momentos de orden superior a 2 son despreciables con relación a la varianza si el intervalo de tiempo de análisis t es suficientemente pequeño. Esto es, para intervalos de tiempo suficientemente pequeños, en principio sólo la media y la varianza importan.

DEMOSTRACION. El momento central de orden k es

$$M_k = E[(\tilde{z} - \mu\, t)^k] = E[t^{k\delta}\, g^k(t)\, \tilde{x}^k] = t^{k\delta}\, g^k(t)\, m_k \tag{7}$$

donde m_k representa el momento central de orden k de la variable aleatoria x.

En particular, puesto que x tiene varianza unitaria, la varianza de la distribución compacta z es

$$M_2 = t^{2\delta}\, g^2(t) \tag{8}$$

Entonces, definiendo L_k como el límite:

$$L_k = \lim_{t \to 0} [\frac{M_k}{M_2}] = \lim_{t \to 0} [t^{\delta(k-2)} g^{k-2}(t)\; m_k] \tag{9}$$

se tiene que

$$L_k = \sigma^{k-2}\, m_k \lim_{t \to 0} t^{\delta\,(k-2)} = 0 \quad , \quad \forall k > 2 \tag{10}$$

PROPIEDAD 2. La importancia relativa de la media y la varianza depende de si el parámetro δ definido en (2) es mayor, igual o inferior a 1/2.

DEMOSTRACION. Definir el límite L como

$$L = \lim_{t \to 0} \frac{M_2}{M_1} = \lim_{t \to 0} \frac{t^{2\delta}\, g^2(t)}{\mu\, t} = \frac{\sigma^2}{\mu} \lim_{t \to 0} t^{2\delta - 1} \tag{11}$$

En consecuencia, si $\delta > 1/2$, $L = 0$, y sólo la media importa; si $\delta = 1/2$, $L = \sigma^2/\mu$, y tanto la media como la varianza importan, y, finalmente, si $\delta < 1/2$, $L = \infty$, con lo cual sólo la varianza importa. Todo esto es a medida que el intervalo de tiempo se hace más y más pequeño.

Finalmente, para mostrar la aplicación de estas ideas a la teoría de finanzas con tiempo continuo, consideremos la utilidad esperada de un inversionista donde z, la tasa de retorno neto de la inversión, tiene una distribución compacta:

$$E[U(W_0\,(1 + \tilde{z})] \tag{12}$$

Realicemos una expansión en series de Taylor exacta para la utilidad esperada (12) en torno a la riqueza inicial, W_0:

$$\begin{aligned} &E[U(W_0\,(1+\tilde{z}))] = \\ &E[U(W_0) + U'(W_0)\,\tilde{z}\,W_0 + \frac{1}{2}\,U''(W_0)\tilde{z}^2\,W_0^2 \\ &+ U'''(W_0)\,(W_0\,(1+k\tilde{z})o(\tilde{z}^3))] \end{aligned} \tag{13}$$

donde $o(.)$ significa del mismo orden de magnitud, y $0 < k < 1$.

Entonces, si definimos los parámetros,

$$\begin{aligned} b &= W_0 \ U'(W_0) \\ c &= -\frac{1}{2} \ U''(W_0) \ W_0^2 \end{aligned} \tag{14}$$

y $U'''(.)$ es finita, podemos escribir la utilidad esperada (12) aproximadamente como

$$E[U(W_0)] = U(W_0) + b \ \mu \ t - c \ (g(t)^2 \ t^{2\delta} + \mu^2 \ t^2) \tag{15}$$

donde hemos reemplazado la definición de z, según (2).

Esto nos permite escribir el incremento en la utilidad esperada por intervalo de tiempo, a medida que el intervalo de tiempo se hace más y más pequeño (tiempo continuo), como

$$\lim_{t \to 0} \frac{E[U(W)] - U(W_0)}{t} = \beta \ \mu - c \ \sigma^2 \lim_{t \to 0} t^{2\delta - 1} \tag{16}$$

La implicancia de (16) es que si $\delta > 1/2$, el cambio en la utilidad esperada en un infinitésimo es función sólo de la media. Esto describe un mundo donde los inversionistas son neutros con respecto al riesgo. Similarmente, si $\delta < 1/2$, el término de varianza en (16) domina, por lo que estaríamos en un mundo de individuos superaversos al riesgo, que elegirían siempre el porfolio de mínima varianza. Finalmente, si $\delta = 1/2$, el límite (16) es igual a

$$b \ \mu - c\sigma^2 \tag{17}$$

donde están presentes la media y la varianza. En este caso, (17) es la ecuación utilizada para encontrar la frontera eficiente en el análisis de media y varianza.

En conclusión, podemos decir que si bien es cierto que el análisis de media varianza en tiempo discreto requiere de restricciones fuertes, ya sea sobre las preferencias o sobre las distribuciones de retornos, al pasar a tiempo continuo esto no es necesario. En efecto, para una amplia gama de distribuciones de retornos, llamadas variables aleatorias compactas, el análisis de media y varianza es consecuente con la regla de la utilidad esperada, porque en este caso, al tomar el límite haciendo que el intervalo de tiempo se haga más y más pequeño, los demás momentos de la distribución pierden importancia en relación con los dos primeros.

Referencias

ARIEL, R.A. (1986). "A Monthly Effect in Stock Returns", *Journal of Financial Economics* 18, pp. 161-174.

___________ (1990). "High Stock Returns before Holidays: Existence and Evidence on Possible Causes", *Journal of Finance* 45, pp. 1611-1626.

ARROW, K.J. (1964). "The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-Bearing", *Review of Economic Studies* 31, pp. 91-96.

___________ (1971). *Essays in the Theory of Risk-Bearing*. Amsterdam: New Holland.

BANZ, ROLF W. (1981). "The Relationship between Return and Market Value of Common Stocks", *Journal of Financial Economics* 9, pp. 3-18.

BASU, SANJOY (1983). "The Relationship between Earnings Yield, Market Value, and Return for NYSE Common Stocks: Further Evidence". *Journal of Financial Economics* 12, pp. 129-156.

BLACK, F. (1972). "Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing", *Journal of Business* 45, pp. 444-455.

BREEDEN, D.T. (1979). "An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities", *Journal of Financial Economics* 7, pp. 265-296.

BREEDEN, D.T. y R. LITZENBERGER (1978). "Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices", *Journal of Business*, octubre, pp. 621-651.

BREEDEN, D.T., M.R. GIBBONS y R.H. LITZENBERGER (1989). "Empirical Tests of the Consumption-Oriented CAPM", *Journal of Finance* 44, pp. 231-262.

CHAN, K.C. y N. CHEN (1988). "An Inconditional Asset-Pricing Test and the Role of Firm Size as an Instrumental Variable for Risk", *Journal of Finance* 43, pp. 309-325.

CHEN, N. (1983). "Some Empirical Tests of the Theory of Arbitrage Pricing", *Journal of Finance* 38, pp. 1393-1414.

CHEN, N., R. ROLL y S.A. ROSS (1986). "Economic Forces and the Stock Market", *Journal of Business* 56, pp. 383-403.

CONSTANTINIDES, G.M. (1987). "Theory of Valuation: Overview and Recent Developments", en S. BHATTACHARIYA y G.M. CONSTANTINIDES, eds., *Frontiers of Financial Theory*. Rowman and Littlefield.

CORNELL, B. (1981). "The Consumption-Based Assed Pricing Model: a Note on Potential Tests and Applications", *Journal of Financial Economics* 9, pp. 103-108.

COX, J., J.E. INGERSOLL y S.A. ROSS (1985). "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices", *Econometrica* 53, pp. 363-384.

DEBREU, G. (1959). *The Theory of Value*. N. York: Wiley.

DHRYMES, P.J., I. FRIEND y N.B. GULTEKIN (1984). "A Critical Reexamination of the Empirical Evidence on the Arbitrage Pricing Theory", *Journal of Finance* 39, pp. 323-346.

DYBVIG, P. (1983). "An Explicit Bound on Individual Assets' Deviations from APT Pricing in a Finite Economy", *Journal of Financial Economics* 12, pp. 483-496.

DYBVIG, P. y S.A. ROSS (1985). "Yes, the APT is Testable", *Journal of Finance* 40, pp. 1173-1188.

FAMA, E.F. (1991). "Efficient Capital Markets, II", *Journal of Finance* 46, pp. 1575-1617.

FAMA, E.F. y M.H. MILLER (1972). *The Theory of Finance*. N. York: Holt, Rinehart and Winston.

FAMA, E.F. y J. MACBETH (1973). "Risk, Return and Equilibrium: Empirical Tests", *Journal of Political Economy* 81, pp. 607-636.

FAMA, E.F. y K.R. FRENCH (1992). "The Cross-Section of Expected Stock Returns", *Journal of Finance* 47, pp. 427-465.

FIGLEWSKI, S. y G.P. WEBB (1993). "Options, Short Sales, and Market Completeness", *Journal of Finance* 48, pp. 761-777.

FRENCH, K. (1980). "Stock Returns and the Weekend Effect", *Journal of Financial Economics* 8, pp. 55-69.

FRIEDMAN, M. (1953). *Essays in Positive Economics*. Chicago: University of Chicago Press.

GRINBLATT, M. y S. TITMAN (1983). "Factor Pricing in a Finite Economy", *Journal of Financial Economics* 12, pp. 497-507.

HADLEY, G. (1964). *Linear Algebra*. Reading, Mass., Addison-Wesley.

HIRSHLEIFER, J. (1964). "Efficient Allocation of Capital in an Uncertain World", *American Economic Review*, mayo, pp. 77-85.

___________ (1970). *Investment, Interest and Capital*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

HUBERMAN, G. (1982). "A Simple Approach to Arbitrage Pricing Theory", *Journal of Economic Theory* 28, pp. 183-191.

INGERSOLL, J. (1984). "Some Results in the Theory of Arbitrage Pricing", *Journal of Finance* 39, pp. 1021-1039.

JENSEN, M. (1972). "Capital Markets: Theory and Evidence", *Bell Journal of Economics and Management Science*, otoño, pp. 357-398.

KEIM, D. (1983). "Size-Related Anomalies and Stock Return Seasonality", *Journal of Financial Economics* 12, pp. 13-22.

LINTNER, J. (1965). "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets", *Review of Economics and Statistics* 47, pp. 13-37.

LUCAS, R. (1978). "Asset Prices in an Exchange Economy", *Econometrica* 46, pp. 1429-1445.

MARKOWITZ, H. (1959). *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. N. York: Wiley.

MEHRA, R. y E. PRESCOTT (1985). "The Equity Premium: a Puzzle", *Journal of Monetary Economics* 15, pp. 145-161.

MERTON, R. (1972). "An Analytical Derivation of the Efficient Set", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, pp. 1851-1872.

___________ (1973). "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model", *Econometrica* 41, pp. 867-887.

PRATT, J. (1964). "Risk Aversion in the Small and in the Large", *Econometrica* 32, pp. 122-137.

RAAB, M. y R. SCHWAGER (1993). "Spanning with Short-Selling Restrictions", *Journal of Finance* 48 pp. 791-793.

REINGANUM, M. (1981). "Misspecification of Capital Asset Pricing: Emprirical Anomalies Based on Earning Yields and Market Value", *Journal of Financial Economics* 9, pp. 19-46.

___________ (1983). "The Anomalous Stock Market Behavior of Small Firms in January", *Journal of Financial Economics*.

ROLL, R. (1977). "A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests; Part I: on Past and Potential Testability of the Theory", *Journal of Financial Economics* 4, pp. 129-176.

ROLL, R. y S. ROSS (1980). "An Empirical Investigation of the Arbitrage Pricing Theory", *Journal of Finance* 35, pp. 1073-1103.

___________ (1984). "A Critical Reexamination of the Empirical Evidence on the Arbitrage Pricing Theory: a Reply", *Journal of Finance* 39, pp. 347-350.

ROSS, S. (1976a). "Return, Risk and Arbitrage", en I. FRIEND y J. BICKSLER, eds., *Risk and Return in Finance*. Cambridge, Mass.: Ballinger.

___________ (1976b). "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing", *Journal of Economic Theory* 13, pp. 341-360.

RUBINSTEIN, M. (1973). "A Comparative Statics Analysis of Risk Premiums", *Journal of Business* 46, pp. 605-615.

SHANKEN, J. (1982). "The Arbitrage Pricing Theory: Is it testable?", *Journal of Finance* 37, pp. 1129-1140.

SHARPE, W. (1964). "Capital Asset Prices: a Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk", *Journal of Finance* 19, pp. 425-442.

STAMBAUGH, R. (1982). "On the Exclusion of Assets from Tests of the Two-Parameter Model: a Sensitivity Analysis", *Journal of Financial Economics* 10, pp. 237-268.

TOBIN, J. (1958). "Liquidity Preference as Behavior towards Risk", *Review of Economic Studies* 26, pp. 65-86.