ALGUNOS ELEMENTOS DE TEORIA DE CATASTROFES Y UNA APLICACION

Miguel Basch H.*

EXTRACTO

El presente trabajo tiene dos propósitos en mente; en primer lugar, el de entregarle al lector no especializado en el tema una visión panorámica de lo que hay detrás de la teoría de catástrofes —manteniendo el nivel matemático a un nivel mínimo—, y las consecuencias que ha tenido sobre la ciencia en general, y en segundo lugar, mostrar cómo puede ser utilizada esta teoría, al tratar un tópico como es el de regulación en el sector financiero, y de paso, examinar cómo se podrían generar algunas singularidades.

ABSTRACT

The presente paper has a double purpose in mind, on the one hand, to give the non specialized reader a brief and comprehensive survey of what catastrophe theory really is —trying to keep mathematics at a minimum level—, and the consequences it has had on science in general, and on the other hand, to show how the theory can be handled, when treating a topic such as regulation in the banking sector, and thus making evident how singularities might occur.

*El autor es profesor e investigador del Departamento de Administración de la Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas de la Universidad de Chile.

ALGUNOS ELEMENTOS DE TEORIA DE CATASTROFES UNA APLICACION*

Miguel Basch H.

1. INTRODUCCION

Hasta la fecha, las matemáticas modernas eran principalmente de interés para especialistas en materias abstrusas, tales como teoría de nudos o grupos mondrómicos, que poco o nada dicen a un lego y, a la vez, dirigidas a un público bastante restringido. Aparentemente, la teoría de catástrofes sería una excepción. Las matemáticas, que sustentan a esta teoría, estudian las singularidades que pueden tener ciertas funciones y, llegan a su culminación con el elegante teorema de clasificación de catástrofes de Thom[1] que ha atraído en orden de popularidad descendente a físicos, sociólogos, estudiantes de asuntos urbanos y hasta a periodistas diletantes.

La teoría de catástrofes evolucionó por etapas. Curiosamente, Thom comenzó sus divagaciones entre biólogos, a quienes advirtió que, estarían analizando en forma incompleta y errónea, sus principales temas de interés, por ejemplo: embriología, morfología y biología molecular. C.H. Waddington presentó al mundo las ideas de Thom, diciendo que sólo su propia falta de preparación técnica, le impedía desarrollar la teoría, en la cual el lenguaje de variedades diferenciales sería la forma idónea para describir la fenomenología de la biología de la evolución.

Antes de haber descifrado el código genético usando métodos puramente bioquímicos, numerosos matemáticos habían tratado de resolver el problema con escaso o ningún éxito. Incluso el mismo Thom había desdeñado, con soberbia, los esfuerzos de muchos científicos, cuyo campo de acción no incluyera expresamente el estudio de las funciones continuas: "tenemos que dejar a los biólogos realizar sus experimentos, si bien muy concretos, son

**Estudios de Economía*, publicación del Departamento de Economía de la Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas de la Universdiad de Chile, Vol. 13, nº 1, abril, 1986

intrascendentes; ¿cómo podrían pretender resolver un problema, si ni siquiera saben formularlo?" (Thom[2]).

En 1972 las ideas de Thom lograron impactar a la comunidad científica. Sus colegas matemáticos quedaron impresionados por la originalidad e imaginación desplegadas en su libro, "Estabilidad Estructural y Morfogénesis"[1]. A pesar de algunas fallas, su salida al mundo fue considerada una especie de revelación. Para nombrar un caso, C. Zeeman estaba anonadado con la obra de Thom. Tanto fue su entusiasmo, que aplicó inmediatamente esta nueva teoría a campos tales como la biología, sociología, psicología y ciencias políticas; colocaba la teoría de catástrofes a la par con el análisis clásico.

Sin embargo, la recepción de las ideas de Thom no estaba exenta de obstáculos. Virtualmente, ningún científico sin un interés específico en singularidades de funciones continuas, había leído el libro con algún cuidado. El propio Zeeman era un topólogo competente de larga trayectoria. Las ideas presentadas en el libro estaban más allá del alcance de un matemático corriente. Tan novedosas y revolucionarias resultaron ser estas ideas, que gran parte de la comunidad matemática desconfió de la solidez de sus argumentos. Quedó entonces, en manos de los especialistas, la tarea de examinar con ojo crítico la obra de Thom. Por ejemplo, J. Guckenheimer observó que la teoría no escapaba a ciertas asperezas y problemas técnicos. Por su parte, H.J. Sussmann y R. Zahler (1978)[3] estudiaron las aplicaciones de la teoría a la biología y a las ciencias sociales. Sus críticas fueron ásperas y duras: en *Nature*, ". . . ningún modelo de catástrofes que hemos estudiado es correcto cuantitativamente, y las conclusiones cualitativas frecuentemente son erróneas o tautológicas". Sin embargo, se cuidaron mucho de no atacar a Thom en forma directa, al menos en el terreno matemático, donde su reputación era intachable. Hay que considerar que Thom se hizo merecedor de la "Medalla Fields", máximo premio que puede aspirar obtener un matemático; además, fue admitido con honores, a la Academia Francesa.

En esta controversia, que surgió en torno a la teoría de catástrofes, hubo tantos detractores como defensores. Muchos matemáticos vieron una excusa en esta polémica para no seguir interiorizándose en la teoría. Algunos que no habían participado activamente en la disputa reconocieron que su silencio había evidenciado un sutil sentido de autoconservación. Los más apenados, al parecer, fueron los cientistas sociales, que habían visto en la teoría de catástrofes una gran oportunidad para cuantificar sus teorías.

2. ASPECTOS MATEMATICOS[4]

La teoría de catástrofes está íntimamente ligada a la rama de las matemáticas denominada topología diferencial. Por topología, en términos gruesos, se entiende una especie de geometría de las formas. En ella, predominan las transformaciones continuas. En topología diferencial, tal como en geometría diferencial, juega un rol importante el cálculo diferencial.

En topología se estudian funciones de varias variables definidas en espacios más abstractos que el plano usual. Gran parte del análisis toma lugar en lo que se llaman variedades (*manifolds*). Estas, son análogas a una superficie corriente pero de más dimensiones; por ejemplo, una curva diferenciable es una variedad unidimensional. Las propiedades de estas variedades se describen, más que nada, localmente. Para cualquier punto sobre una variedad de dimensión n, existe una vecindad de éste que es homeomórfica al interior de una esfera euclidiana de n dimensiones. En general, entre dos variedades existen muchas transformaciones (funciones) continuas; si, en particular, para una determinada función y su inverso ambas son diferenciables, entonces tenemos un difeomorfismo. El tema central de topología diferencial es la relación entre variedades y difeomorfismos. El meollo de la teoría, corresponde a aquellas propiedades que permanecen invariantes ante un difeomorfismo.

A pesar de lo abstracto que parece ser la topología diferencial, ésta utiliza conceptos que están ya presentes en la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias. En esta última, dada una ecuación $dx/dt = F(x, t)$, la incógnita es una función –x– de t. Para la gran mayoría de ecuaciones, no hay soluciones que se deriven analíticamente. Casi siempre el matemático tendrá que recurrir a una computadora. La teoría culmina con la demostración clásica en donde se muestra que existen soluciones a tales ecuaciones y, que éstas son únicas.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias también son objetos geométricos. Este fue el descubrimiento de Poincaré y Lyapunov. Se entiende, por estado de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias $dx_i/dt = F_i(x_i, t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, al menor conjunto de números que se requiere en t_0, para predecir en forma unívoca la trayectoria del sistema más allá de t_0. Para esto se precisan n+ 1 números. Por lo tanto, el espacio de fases para este sistema es R^{n+1}; y al definir un campo vectorial f sobre R^{n+1}, tenemos que éste, junto a su espacio de fases forman un sistema dinámico.

La interrelación que existe, entre la topología diferencial y los aspectos cualitativos de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, sólo recientemente ha quedado clara. Poincaré había concebido las ecuaciones diferenciales en términos de flujos y trayectorias. Sin embargo, no clarificó ciertos aspectos geométricos de la teoría; por ejemplo, ¿qué estructura topológica, induce sobre su espacio de fases, una familia de ecuaciones diferenciales ordinarias? La introducción de estructuras topológicas en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, correspondió a un esfuerzo colectivo, en el que participaron notables matemáticos tales como: Morse, Whitney, Milnor, el propio Thom, Smale, Peixoto, recientemente Kupka, Williams, Anosov y Arnol'd.

Como teoría matemática, la teoría de catástrofes está íntimamente ligada al estudio de las singularidades de transformaciones continuas (suaves). También puede ser concebida en forma menos rigurosa, como un conjunto de conceptos matemáticos sueltos; para un filósofo de la ciencia, corresponde a un cierto punto de vista que aparece en modelos de biología teórica, por ejemplo. El teorema de Thom nos provee con una elegante clasificación de singularidades de ciertas transformaciones "suaves", hasta el punto en que ya no es posible seguir haciendo más clasificaciones. Dicho esto, hay que agregar que el teorema es profundo y sutil, comparable al teorema índice de Atiyah-Singer en análisis. A pesar que se asocia el nombre de Thom con el teorema en forma honorífica, la primera demostración rigurosa fue dada por J. Mather, basándose en el trabajo de Malgrange.

El contexto más general en que se desarrolla la teoría, está dado por el espacio de todas las transformaciones suaves entre variedades. El problema de clasificación de singularidades es demasiado complejo para ser analizado en espacios de tal magnitud. Las patologías locales son muchas como para no dificultar este estudio. Como estrategia general, los topólogos pretenden estudiar sólo las funciones genéricas. El concepto de genericidad, está asociado a "la gran mayoría de los casos".

El caso más sencillo lo constituye la teoría de Morse. Se dice que un punto singular de una función $f: R^n \to R$ es no degenerado si la matriz de las derivadas parciales segundas (Hessiano) de f evaluada en este punto, es invertible. Sobre variedades compactas, la teoría de Morse provee un análisis de aquellas funciones cuyos puntos singulares son no degenerados. Todo el análisis es de carácter local. Si los puntos singulares de una cierta función dada f, son no degenerados, entonces, los puntos singulares de cualquier función g cercana a f, también serán no degenerados. De esta manera, la estructura de tales funciones, en lo que a singularidades respecta, estará completamente determinada por las condiciones de degeneración de cualquiera de estas funciones. Todo esto determina un conjunto sobre variedades compactas que es abierto y denso y, por tanto, genérico. El problema de clasificación, para transformaciones suaves sobre variedades compactas, carece de interés si sólo se considera este conjunto de funciones genéricas.

El caso general es considerablemente más complicado. El objeto a estudiar sigue siendo el espacio de transformaciones suaves, $F_i: U \to R$, donde U y

R son variedades cualesquiera. Mather (1973)[4] ha estudiado este caso con mucho éxito. Aparecen ciertas consideraciones de estabilidad y las funciones genéricas quedan relacionadas con problemas de dimensionalidad. En esta teoría, las funciones genéricas son aquellas que son estables en el sentido C^{∞}. Para estabilidad C^0, las transformaciones estables son genéricas para variedades arbitrarias U y **R**, en donde U es compacto. Esto se parece a la *teoría de Morse. En el caso* C^{∞}, hay una interrelación entre estabilidad y condiciones de no degeneracion. Como uno podría esperar, las transformaciones estables son tales que sus puntos singulares son diferentes y no degenerados.

Le correspondió a Sussmann formalizar la relación existente entre las *teorías de Morse y Mather. Las singularidades de transformaciones suaves*, estarían determinadas por dos entes abstractos: por una parte, un sistema dinámico (N, V), en donde N es una variedad que conforma el espacio de fases y V un campo vectorial, y por otra, una transformación $F : N \to P$, en que **P** es una variedad. Esta mezcla de transformaciones sobre variedades y sistemas dinámicos, deja entrever las relaciones que tiene la teoría de catástrofes, tanto con topología diferencial como con la teoría abstracta de ecuaciones diferenciales ordinarias[6].

Se intuye la presencia de catástrofes al considerar singularidades degeneradas. Sea nuevamente f una transformación suave con valores reales. Una catástrofe en f, en términos gruesos, es una especie de gran singularidad que hace su aparición cuando f forma parte de una familia de funciones próximas a ésta —sea ésta **H**—. La singularidad irrumpe, cuando el número de *puntos extremos de H cambia abruptamente*, al variar ciertos parámetros que definen a H. Así, por ejemplo, el número de puntos mínimos de $f_a = x^3 - ax$ cambia bruscamente al variar el parámetro a desde 1 a -1. Las funciones de Morse sobre variedades compactas son tales que, cualquier función suficientemente cercana a una función de Morse f, exhibirá singularidades no degeneradas, si f también las exhibe. Dicho en otras palabras, cualquier función cercana a f, tiene la misma cantidad de puntos mínimos que f. Funciones con singularidades no degeneradas, no tendrán por lo tanto una catástrofe.

Para una función dada f, con puntos críticos degenerados, la inmersión de f en una familia de funciones F_c, definida por algún parámetro c, es un concepto muy importante. Es esta inmersión, la que hace que tales funciones inestables sean tratables matemáticamente. La inmersión también le da una connotación física al modelo, por cuanto, la familia de funciones se origina bajo la influencia de un campo vectorial sobre una variedad. Al final, los campos vectoriales se traducen en ecuaciones diferenciales y son estas ecuaciones diferenciales las que le dan una estructura matemática a algún fenómeno físico. Las inmersiones más conspicuas en la teoría de Thom son aquellas denominadas desdoblamientos o pliegues. Además se denomina germen de f, a todas aquellas funciones g que coinciden localmente con una función f dada, cerca de un punto x. Siguiendo a Callahan [7], [8], podemos decir que las catástrofes están fijadas por: (i) el germen de una función real suave f, en un punto singular degenerado y (ii) el desdoblamiento de f.

Tomado estrictamente como una creación matemática, la teoría de catástrofes coincide con el teorema de Thom y éste se refiere a la clasificación de singularidades de transformaciones suaves. La complejidad del teorema radica en que las singularidades ocurren en familias de funciones, parametrizadas por variables exógenas.

El teorema de Thom queda mejor ilustrado al considerar una dimensionalidad pequeña. Considérese una función suave f, definida en un espacio unidimensional X, y que esté parametrizada por dos parámetros a y b, pertenecientes a un espacio bidimensioual C. Sea M una superficie fijada por los valores de equilibrio de f, dados por $\partial f/\partial x = 0$, en que x es coodenada de X. De aquí fluye que M es una superficie suave sobre C x X. Las únicas singularidades posibles en la proyección de M sobre C, según Thom, son las catástrofes elementales llamadas dobleces y cúspides.

Zeeman llama a C el espacio de control y, X el espacio conductual. Otros prefieren hablar de variables internas y externas. Como sea, al introducir el teorema de Thom, el ejemplo nos muestra a R^3 tal como se vería desde lo alto: el espacio de control queda proyectado en la base, y la variedad M hace las veces de carpa circense sobre la parte central de C, que queda dividida en capas por medio de un pliegue.

3. UN POCO DE FILOSOFIA CATASTROFICA

Vista desde afuera, la teoría de catástrofes nos parece algo nebuloso e incierto. Por un lado, está todo el aparataje matemático, que llega a su culminación con el teorema de Thom y, desde otra perspectiva, existe la teoría de catástrofes aplicada que tanta controversia ba causado en biología, física y algunas ciencias sociales.

Thom comienza su trabajo en teoría de catástrofes como un biólogo, preocupado por los misterios que conllevan las formas. Según él, la visión del mundo que tiene una persona moderna ya sufre de un sesgo inevitable que conduce a una corrupción intelectual. Los conceptos poderosos y abstractos de la física contempóranea se han encargado de llevar los esquemas reduccionistas a un extremo. Tan inmersas están las personas en estos planteamientos que, ahora, frente a procesos reales y tangibles, es necesario realizar un acto de percepción creativa para aprehenderlos en toda su dimensión. Para Thom, los sistemas biológicos no son solamente bioquímica disfrazada; tanto el *yak* como una lombriz existen como formas geométricas. Sus vidas pueden ser descritas como la suma de sus propios cortes transversales en el tiempo. Tales arcos evidentemente presentan discontinuidades, siendo las más notorias aquellas que se producen al nacer y morir.

El objetivo de Thom es el de generar una teoría de morfología o de la forma. El cambio de las estructuras biológicas aparece en tal teoría como un aspecto geométrico. El concepto de forma aparece relacionado a la idea de estabilidad; lo que tiene forma necesariamente es estable. Las inestabilidades aparecen cuando colapsan las simetrías; sin embargo, las inestabilidades pueden ser estables también, de tal manera que el colapso de estructuras estables reaparece en la naturaleza como cambios en la morfología. Además, las formas mismas están dominadas por sus singularidades, ya que la estructura de la singularidad es la que marca el comportamiento de aquellas. Esto sugiere claramente la influencia de Riemann, para quien lo importante de una función son sus puntos singulares.

Para los físicos, las teorías fenomenológicas sólo escudriñan la superficie de las cosas; además han tenido connotaciones peyorativas para referirse a teorías que sólo apelan a la evidencia empírica sin tener un marco conceptual teórico que la desarrolle. Thom[2] no sólo acepta la perspectiva fenomenológica, sino que además la avala como un principio filosófico. "El hecho de que podamos construir una teoría puramente geométrica de morfogénesis, que sea independiente del substrato de formas y de las fuerzas que las crearon, parece difícil de creer". Tal es la teoría que crea Thom, con una línea de pensamiento que nos hace recordar a Heráclito.

Una pelota de fútbol y una naranja tienen formas similares, ambas son esféricas. Al notar que ambas son redondas y tienen superficies rugosas, un matemático interesado sólo en la estructura geométrica, podría concluir que ambas son nutritivas. Esto sugiere para Sussmann que las clasificaciones fenomenológicas adolecen de un error, para él "... la ciencia comienza cuando es desechado cualquier parecido superficial como principal criterio de clasificación de fenómenos y, toma en su lugar, el análisis de la estructura del mecanismo". Este es el punto de vista ortodoxo, ¿pero quién determina lo que es superficial? Si tanto las pelotas de fútbol como las naranjas tienen estructuras radicalmente diferentes entre sí, ¿cómo es que tienen formas tan parecidas? Esta no es una pregunta de fácil respuesta, nos responde Thom.

El objetivo último de Thom, es el de construir una teoría que sintetice todo tipo de *información* puramente local en un modelo global, y que éste provea una descripción del espacio de objetivos observables, el campo vectorial que lo gobierna y el conjunto de catástrofes. Lo que está sugiriendo Thom, es que la diferencia entre estados microscópicos y macroscópicos de un sistema, puede ser reemplazado eventualmente por la distinción entre propiedades locales y globales de un sistema. El físico enfatiza un análisis hacia lo pequeño; Thom hacia la totalidad.

Un punto medular de la teoría de Thom es el concepto de estabilidad estructural. El lo introduce para clarificar qué significa ser un objeto, desde un punto de vista científico. Después de todo, éste es el fin que busca Thom. De alguna manera, al leerlo, aparecen reminiscencias kantianas, o berkelianas, en el sentido de que los objetos físicos no podrían ser percibidos por nosotros (los observadores) si es que no fuesen estables. No hay nadie más apropiado que el propio maestro[1] para transmitir este concepto:

"Retornemos a la idea fundamental, la de estabilidad estructural; como dijimos anteriormente, el universo no es un caos y, por lo tanto, podemos observar una secnencia de formas típicas a las que damos nombres. Sin embargo, debemos tomar en consideración las condiciones en que toma lugar la observación científica. El experimentador no puede observar todo el universo a la vez; está obligado por sus experimentos y observaciones a aislar un subsistema S, que es relativamente independiente del resto del universo. En la práctica, él aisla y observa a **S** en una cierta caja **B**, cuyas características geométricas e instrumentos de medición adheridos a ella, están determinados por él. Luego, se pone a **S** en un cierto estado a, que está definido por un cierto proceso de preparación, es decir, la modalidad con que se completa la caja **B** está descrita de la forma más precisa posible. Luego de haber especificado el estado a, el experimentador observa o *testea* el contenido de **B**, después de un cierto tiempo de la preparación de a. Cada experimentador espera que, si se realiza el mismo experimento, en otro lugar y en otro momento, con una caja **B'** que se obtiene de **B** a partir del grupo de Galileo G y, con la misma preparación que se usó para el estado a, se observarán los mismos fenómenos dentro de un cierto margen de error experimental; sin esta esperanza todo sería en vano. Sin embargo, cualquier tipo de medidas que se tome para aislar a S, serán insuficientes para eliminar completamente las interacciones entre S y el medio que lo rodea; además, las condiciones que describen el proceso de preparación no pueden ser llevadas a cabo con absoluta exactitud. Inevitablemente, estas diferencias iniciales no pueden sino perturbar la evolución ideal del sistema. Por ende, se pueden esperar resultados aproximadamente parecidos –eqnivalentes bajo G–, después de suponer implícitamente que la evolución de **S** desde el estado a, es estable en términos cualitativos, por lo menos, en lo que se refiere a perturbaciones del estado inicial e interacciones con el medio externo. De esta manera, la hipótesis de estabilidad estructural en los procesos científicos aislados, está implícita en toda observación científica".

4. UNA APLICACION

La aplicación que se dará de la teoría de catástrofes será a la teoría moderna de finanzas, en particular al problema concerniente a la falencia de instituciones financieras. Se puede mostrar que, efectivamente, bajo ciertas condiciones, existen interacciones entre reguladores del sistema financiero, la administración de éste y los depositantes que resultan en un comportamiento catastrófico en el sentido de la teoría de Thom.

En el modelo que se desarrollará, se considera un sistema que consiste de los siguientes grupos de agentes económicos: administración de la entidad financiera, agentes reguladores y los depositantes. La variable dependiente que se desea explicar es la probabilidad de falencia o de quiebra de la institución. Para desarrollar el modelo, suponemos que existen ciertas imperfecciones de mercado, tales que existe un costo creciente al endeudamiento, para una empresa que desee financiarse vía emisión de deuda. De esta manera, si C representa los costos por imperfecciones de mercado para una cierta empresa, por peso de deuda emitida, entonces:

$$C = C(B);\ \partial C/\partial B > 0,$$

en que B es el valor de mercado de la deuda de la empresa.

El otro parámetro que usará el modelo, está definido a través de la varianza de los depósitos que enfrenta la institución financiera. Suponemos que éste atrae a una determinada clientela de depositantes que están identificados por una determinada desviación estándar σ de sus depósitos. El banco o entidad financiera no tiene control sobre σ, pues éste está afectado por el nivel de confianza η, que tiene el público de la institución. Por tanto, $\sigma = \sigma(\eta)$. Este efecto clientela, afectará al banco identificándolo en una cierta clase de riesgo α; así finalmente, la relación entre α y σ será del tipo $\alpha = \alpha(\sigma) = \alpha(\sigma(\eta))$.

La posibilidad de una catástrofe, surge como consecuencia de un conflicto entre los agentes reguladores del sistema financiero y el grupo de depositantes. Se supone[9] que, los reguladores consideran que los costos sociales, que involucra una falencia financiera, son superiores a los costos en que incurre el sector privado, de allí que exista un sistema regulador. Consecuentemente, las regulaciones tienden a imponer ciertas restricciones, en la forma de encajes y/o seguros de depósitos, con el fin de minimizar la probabilidad de quiebra y por lo tanto también los costos sociales. A pesar que los depositantes prefieren tener regulación a no tenerla, para así evitar su posible quiebra personal, llega un momento en que el subsidio hacia los depositantes disminuye mientras mayor sea la regulación. Esto ocurre, pues parte del peso de la regulación es absorbido ahora por los depositantes, en la forma de mayores comisiones por servicios prestados y/o menores tasas de captación. El conflicto surge cada vez que los costos privados de quiebra son menores que los sociales. Como los reguladores actúan para disminuir estos costos, habrá un incentivo para que los depositantes retiren sus fondos y los inviertan en otros instrumentos financieros más rentables.

Para implementar el modelo que conducirá a una quiebra catastrófica, definimos las siguientes variables estocásticas:

$\bar{D}$ = depósitos netos, como ingresos al banco.

$F.\bar{C}.$ = flujos de caja netos, que ingresan por concepto de intereses y liquidación de activos.

$\bar{X} = F.\bar{C}. + \bar{D}$

Supongamos que el egreso de depósitos netos es mayor que el flujo de caja que ingresa a la institución financiera; es decir $X \leqslant 0$. Para impedir la quiebra, el banco hará uso de sus reservas de capital **K**. Habrá falencia sólo si,

$$-\bar{X} \geqslant K$$

De esta relación se desprende que a menor **K**, mayor es la probabilidad de falencia financiera para un nivel cualquiera de $\tilde{X}$. Así, si definimos la razón de capital-depósito como $k = -K/D$, esta probabilidad de quiebra queda expresada por:

π = probabilidad de quiebra $= \text{Prob}(\tilde{x} \leqslant k)$

en que $\bar{x} = \bar{X}/D$

En el modelo se supone que el banco posee dos variables de control que le permiten determinar el nivel deseado de quiebra π. Estos son, por una parte, la clase de riesgo α que elige la entidad y, por otra, la razón **k**. Por lo tanto,

$$\pi = f(\alpha, k) \text{ con,}$$

$$\partial f/\partial\alpha > 0, \partial f/\partial k > 0.$$

Por el momento, no hemos considerado en nuestro modelo, la influencia que tiene el medio regulador en el sistema financiero. Este interviene con el objetivo de facilitar el rol de intermediación en el mercado. Como tal, se preocupa de la probabilidad de quiebra π[1] como también de la calidad de los activos que posee un determinado banco. Así, parece razonable en primera instancia, pensar que la función reguladora **R** depende de α y π. Aún más, se supondrá que para un α dado, a mayor π percibido, mayor es la probabilidad de regulación. Asismismo, para cualquier nivel de π, mientras mayor sea la clase de riesgo α a que está sujeta el banco, también habrá más regulación. De esta manera, aparecen interactuando simultáneamente, dos grupos de influencia diferentes: la administración del banco y los agentes reguladores.

Hasta este momento, tenemos una interacción dinámica en que la administración elige, de acuerdo a sus propias preferencias, una cierta combinación de α y **k**, basada en consideraciones de rentabilidad privada, que tiene asociada una cierta probabilidad de quiebra. Mientras mayor sea este π, mayor será la regulación cuyo fin será reducir π, a un nivel que sea aceptable socialmente. De esta manera, se llegará a nuevos valores de **k** y α. El nivel de equilibrio dependerá de la forma funcional de **f** y **R**:

$$\pi = f(\alpha,k) - R(\alpha,\pi), \text{ con}$$

$$\partial R/\partial\alpha > 0, \quad \partial R/\partial\pi > 0$$

Para completar el cuadro, se introducirá en el modelo, el efecto que tiene una variación en el nivel de confianza hacia la banca, por parte de los depositantes. Es razonable suponer que éstos, pasarán por una crisis de confianza hacia las instituciones financieras, mientras mayor sea la clase de riesgo a las que pertenecen. También es válido suponer que, a mayor probabilidad de quiebra percibida (π^c), mayor será esta crisis. Por lo tanto, si definimos una función D que representa la crisis de confianza de los depositantes hacia la banca, ésta dependerá en primera instancia de α y π (ver nota 1).

Así tenemos,

$$D = D(\alpha,\pi) \text{ con,}$$

$$\partial D/\partial\alpha > 0, \; \partial D/\partial\pi > 0$$

Supondremos además que la interacción final de los tres agentes está dada por:

$$\pi = f(\alpha,k) - R(\alpha,\pi) + D(\alpha,\pi) \qquad (1)^2$$

[1] En estricto rigor R depende de π^e –probabilidad de quiebra esperada por el grupo regulador. En primera aproximación, supondremos que π^r es estimado por π, bajo la hipótesis de comportamiento estacionario de las variables en juego.

[2] El modelo ha sido construido exprofeso en forma aditiva, sólo atendiendo a motivos de simplicidad.

El próximo paso, es averiguar bajo qué condiciones se produce un comportamiento catastrófico. Thom demostró que para el caso de dos variables de control (α y k) y una variable de estado (π), sólo se produce una catástrofe en el sistema descrito por (1), si éste es el resultado de una función potencial cuártica en π:

$$V = V(\alpha, k; \pi) = A\pi^4 + B\pi^3 + C\pi^2 + D\pi + E$$

en donde A, B, C, D y E son funciones suaves de α y k.

El equilibrio del sistema está dado por:

$$d\pi/dt = -\partial V/\partial\pi = 0 \qquad (2)$$

y el conjunto de valores α, k y π que satisfacen (2), está dado por la relación (1).

Para simplificar el tratamiento matemático del problema, suponemos que en el límite de $\pi \to 0$, *ceteris paribus*, las funciones de regulación y crisis de confianza son nulas, lo mismo que sus derivadas parciales, es decir:

$$R(\alpha, 0) = D(\alpha,0) = \partial R(\alpha,0)/\partial\pi = \partial D(\alpha,0)/\partial\pi = 0$$

Como (1) es una relación cúbica en π, y usando el teorema de preparación de Weierstrass-Malgrange, podemos expresar a **R** y **D** de la siguiente manera:

$$\mathbf{R}\ (\alpha,\pi) = r_1(\alpha)\pi^2 + r_2(\alpha)\pi^3$$

$$\mathbf{D}\ (\alpha,\pi) = d_1(\alpha)\pi^2 + d_2(\alpha)\pi^3$$

Si además suponemos que r_1, r_2, d_1 y d_2 son lineales en α, entonces:

$$R\ (\alpha,\pi) = r_1\alpha\pi^2 + r_2\alpha\pi^3$$

$$D\ (\alpha,\pi) = d_1\alpha\pi^2 + d_2\alpha\pi^3, \text{ en que}$$

r_1, r_2, d_1 y d_2 son constantes positivas, ya que requerimos que $\partial R/\partial\pi$ y $\partial D/\partial\pi$ sean positivos. Finalmente, la relación (1) queda:

$$f(\alpha, k) + \alpha(d_2 - r_2)\pi^3 + \alpha(d_1 - r_1)\pi^2 - \pi = 0$$

Podemos simplificar esta relación, definiendo:

$$a \equiv r_2 - d_2 \qquad y \qquad b \equiv d_1 - r_1$$

Así (1) se transforma en:

$$\alpha a\left(\pi - \frac{b}{3a}\right)^3 + \left(1 - \frac{\alpha b^2}{3a}\right)\left(\pi - \frac{b}{3a}\right) = f(\alpha, k) - \frac{b}{3a} + \frac{2\alpha b^3}{27a^2}$$

$$= h(\alpha, k) \tag{3}$$

Podemos sintetizar aún más esta expresión, transformando linealmente la probabilidad de quiebra π:

$$\pi' \equiv \pi - b/3a$$

Finalmente llegamos a:

$$(\pi')^3 + \frac{1}{\alpha a}\left(1 - \frac{\alpha b^2}{3a}\right)\pi' = \frac{b(\alpha, k, a, b)}{\alpha a} = j(\alpha, k)$$

y si además definimos:

$$c \equiv -\frac{1}{\alpha a}\left(1 - \frac{\alpha b^2}{3a}\right), \text{ queda:}$$

$$(\pi')^3 - c\,\pi' = j(\alpha, k) \tag{4}$$

La expresión (4), es la que obtiene Thom para su catástrofe elemental, denominada cúspide. Ahora bien, el conjunto de catástrofes en el espacio de parámetros α, **k** se obtiene derivando (4):

$$3(\pi')^2 - c = 0 \tag{5}$$

Por tanto, una de las condiciones para que ocurra una catástrofe de cúspide es que, $c > 0$. Reemplazando (5) en (4) obtenemos,

$$j = -2(\pi')^3$$

Se puede estudiar el fenómeno catastrófico en **el plano α,k** como también en el plano j, c que es más simple. El origen de la cúspide está en el punto $\alpha = 3a/b^2$; de aquí fluye que $a > 0$ para asegurar que $\pi > 0$ y $\alpha > 0$. Además para que haya una catástrofe en el punto $j = c = 0$ es necesario que $b > 0$ (este punto se obtiene derivando (5) y exigiendo que $\pi > 0$).

Entonces, en el plano j, c, podemos expresar el conjunto de catástrofes **K**, a través de la relación,

$$K = \{(j, c): 27\,j^2 = 4c^3\} \tag{6}$$

Esta relación se obtiene, despejando π' de (4) y (5)

Podemos sintetizar lo obtenido hasta ahora. Las relaciones de catástrofes dadas por (6), que corresponden a una cierta dinámica, en algún sentido crítica, entre agentes reguladores, depositantes e instituciones financieras, fluyen de los puntos de equilibrio de una función de potencial $V(\alpha, \mathbf{k}; \pi)$. Esta se obtiene integrando (2); en función de los parámetros j y c, la función potencial tiene la siguiente representación:

$$V(j, c; \pi') = (\pi')^4/4 - j\pi' - c(\pi')^2/2 \tag{7}$$

Los puntos de equilibrio, dados por (2), corresponden a lo que llamó Thom la variedad conductual (*behaviour manifold*), que es justamente la relación (4):

$$e(j, c, \pi') = (\pi')^3 - j - c\pi' = 0$$

En la figura 1 aparecen las formas que puede tomar la función potencial de distintas regiones del plano j, c. En la zona III hay tres puntos π' para los cuales hay pendiente cero, con dos mínimos estables y un máximo inestable. Esto indica qoe en esta región, dentro de la curva K, la variedad conductual M (que es un subconjunto de R^3) tiene tres ramas topológicamente diferentes, dos atrayentes y una rama repelente entre ellas.

Por sobre la curva **K**, los puntos correspondientes en la variedad conductual M, están sobre el pliegue F, dado por:

$$F = \{(j, c, \pi') : 3(\pi')^2 - c = 0\} \tag{8}$$

Comparando con (6), vemos que bajo la proyección,

$$\psi(j, c, \pi') = (j, c)$$

la imagen de la curva de desdoblamiento F, es justamente el conjunto de catástrofes K: $\psi(F) = K$.

En la figura 2, podemos vislumbrar las catástrofes, imaginando trayectorias en el espacio de parámetros j, c que cruzan K. Por ejemplo T_1, cruza K y entra en la región interior que tiene tres ramas sobre ella, siendo la trayectoria correspondiente sobre M, la curva T_1^*. Esta permanece en la rama atrayente inferior, hasta que llega al pliegue F, donde por la dinámica del sistema salta bruscamente a la rama superior. Es aquí cuando ocurre un evento catastrófico; ha habido una discontinuidad en el comportamiento de equilibrio del sistema. En forma análoga, la trayectoria T_2 sobre C da origen a T_2^* sobre M, que comienza a partir de un único punto mínimo en la rama superior. Al atravesar K, el punto correspondiente sobre T_2^* llega a F donde abruptamente cae a la rama inferior; nuevamente ha ocurrido una catástrofe.

Un aspecto que es importante recalcar es que las trayectorias sobre M están basadas, en última instancia, en la relación (2). Es decir, la dinámica interna del sistema no aparece en la figura 2; lo que sí aparece es el equilibrio móvil controlado por un punto también móvil, que corresponde a la dinámica externa en el espacio de parámetros (la terminología es de Thom). Sin embargo, debe quedar claro que la dinámica interna, dada por (2), explica el movimiento del punto de equilibrio. En términos rigurosos, el punto $\pi(t)$ permanece siempre cerca de la rama atrayente, sobre una trayectoria que es perturbada sin cesar por el movimiento del parámetro en cuestión.

A continuación, se dará una breve reseña de los aspectos relevantes de la dinámica externa del sistema financiero con sus interacciones (la discusión sigue la de T. Ho y A. Saunders[10]). Comencemos discutiendo sobre las funciones de regulación financiera y de crisis de confianza de los depositantes. Habíamos visto que una condición necesaria para la existencia de catástrofes, era que a, b > 0. Esto implica que los efectos de confianza de los depositautes dominan a las de regulación, para valores bajos de π; pero para niveles altos de probabilidad de quiebra sucede lo contrario ($R > D$). Esto es razonable, ya que los agentes reguladores no muestran mayor interés por los bancos si es que no muestran señales de falencia financiera; en todo caso, parece que su interés es menor qne el de los depositantes para π bajo. Lo que es importante, es que aún cuando los agentes reguladores muestran mayor preocupación por una posible quiebra que los depositantes, es factible que ocurra una falencia catastrófica en la institución. Del modelo surge una implicación clara, y es que no basta la regulación *per se* para impedir una quiebra, sino la efectividad de ésta, cuando se la compara con los patrones de confianza de los depositantes a lo largo de todo el rango de π. Por ejemplo, si se diera que $R > D$ para todo valor de π, no habría una falencia catastrófica. Es decir, el sólo hecho que un agente regulador identifique un banco con una alta probabilidad de quiebra, y luego intervenga correspondientemente, no es suficiente para impedir una crisis.

Si volvemos a la figura 2, y consideramos a nn banco perteneciente a una clase de riesgo alta en la posición 1, podemos pensar que de repente el banco se propone disminuir su razón capital-depósito (aumentar k). Si se decide hacer esto a lo largo de la trayectoria T_1^* en forma continua, llegará un punto tal que, se producirá un aumento sustancial y discontinuo en π, esto ocurre en la posición 2 y se salta al punto 3. Esto indica que para bancos en esta clase de riesgo α, existe un valor crítico de k, más allá del cual basta sólo una perturbación marginal para que se produzca la falencia catastrófica. Sin embargo, de la misma figura, se infiere que el banco puede llegar a la posición 3 por un camino alternativo (indicado por la línea de puntos en el gráfico). Es justamente este salto abrupto y repentino, lo que podría ser muy difícil de impedir para los agentes reguladores, a menos que identifiquen *ex ante* este valor crítico de k para cada clase de riesgo. Otro aspecto interesante es la asimetría de la interacción. Si se desea revertir el proceso a partir del punto 3, disminuyendo **k**, no se vuelve al punto de origen sino al punto 5. También se concluye de la misma figura que, las únicas instituciones financiera para quienes existe un peligro real de quiebra catastrófica, son aquellas pertenecientes a una clase de riesgo alta. Un banco en la posición 6, con un α bajo, está más allá del pliegue F, y por lo tanto, aumenta o disminuye su probabilidad de quiebra en forma lenta y continua.

FIGURA 1

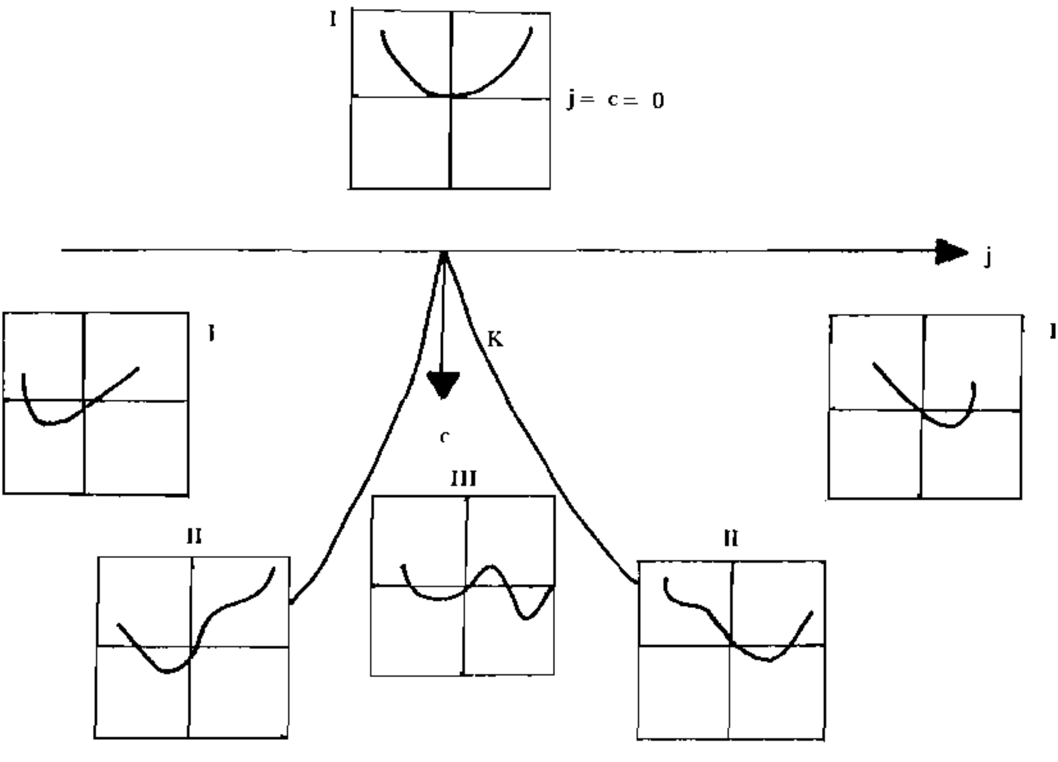
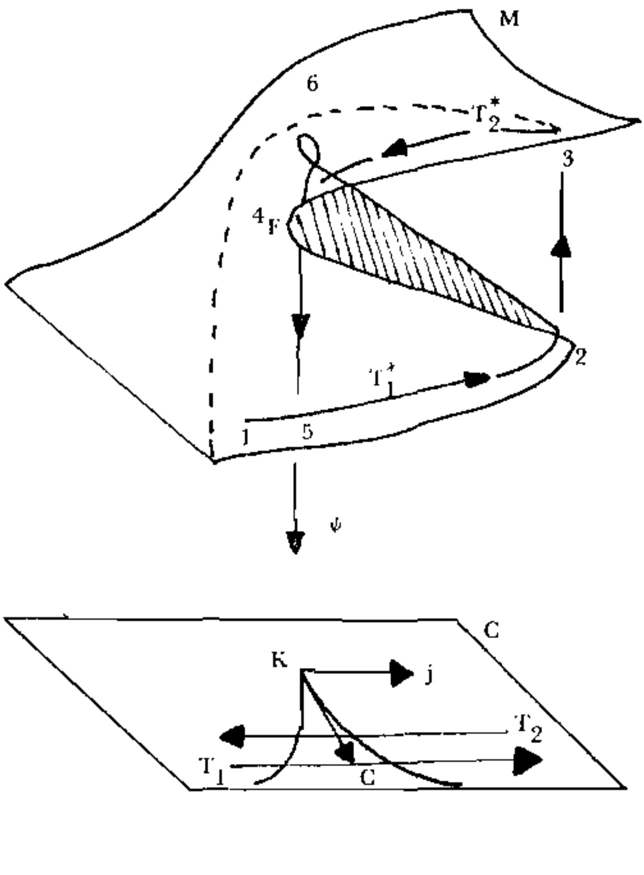


FIGURA 2



REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

[1] THOM, R., "Structural stability and morphogenesis". Reading, Mass: Benjamin, 1975.

[2] THOM, R., Respuesta a la *crítica* de C. Zeeman. En A. Manning (ed.), "Dynamical systems—Warwick", 1974, New York: Springer-Verlag, 1975.

[3] SUSSMANN, H.J. y R. ZAHLER, "Catastrophe theory as applied to the social and biological sciences: A critique", Synthese, 1978, 37.

[4] Para la descripción de los aspectos matemáticos, de la teoría de catástrofes, fueron consultados: T. Poston e I. Stewart: "*Catastrophe* theory and *its* applications". London: Pitman Publishing Ltda., 1978. D. Berlinski, "On systems analysis". Cambridge, Mass.: MIT Press, 1976.

[5] MATHER, J., "*Stratifications* and mappings" en M.M. Peixoto (ed.) Dynamical systems. New York: Academic Press, 1973.

[6] SUSSMANN, H.J., Catastrophe theory". Synthese, 1975, 31.

[7] CALLAHAN, J., "Singularities and plane maps", en *American Mathematical Monthly Journal*, 1974, 81.

[8] CALLAHAN, J., "Singularities and plane maps II: Sketching catastrophes", en *American Mathematical Monthly Journal*, 1977, 84.

[9] MELTZER, A.H., "Major issues in the regulation of financial institutions", *Journal of Political Economy*, 75, 1967.

[10] T. HO y A. SAUNDERS, "Catastrophe theory in banking and finance", *en* G.P. Szego (ed.) New Quantitative Techniques for economic analysis. New York: Academic Press, 1982.