



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ALGUNOS PROBLEMAS DE VALOR
DE FRONTERA PARA UN NUEVO TIPO DE ECUACIÓN
CONSTITUTIVA CONSIDERANDO PEQUEÑAS DEFORMACIONES
Y COMPORTAMIENTO NO LINEAL DE SÓLIDO

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN
CIENCIAS DE LA INGENIERÍA MENCIÓN MECÁNICA

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MECÁNICO

SEBASTIAN IGNACIO MONTERO GUARDA

PROFESOR GUÍA:
ROGER BUSTAMANTE PLAZA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
ALEJANDRO ORTIZ BERNARDÍN
DANIEL HURTADO SEPÚLVEDA

Proyecto financiado por FONDECYT 1120011

SANTIAGO DE CHILE

2014

Resumen

Hay algunos problemas en Mecánica del Medio Continuo donde encontramos cuerpos que exhiben una respuesta elástica no lineal, los cuales no pueden ser modelados adecuadamente usando la teoría elástica clásica, específicamente en casos donde hay deformaciones pequeñas y comportamiento no lineal del material. Algunos ejemplos pueden ser encontrados en la modelación de materiales frágiles y en Mecánica de Fractura.

Recientemente, una nueva clase de relaciones constitutivas implícitas para cuerpos elásticos ha sido desarrollada para describir este tipo de respuesta elástica de sólido. Esta teoría contiene como subclase los clásicos cuerpos de Cauchy y de Green. Dentro de esta clase de relación constitutiva, uno puede obtener, a través de rigurosas aproximaciones, relaciones constitutivas para la deformación linealizada como una función no lineal del esfuerzo. Tal aproximación no es posible en las teóricas clásicas de elasticidad de Cauchy y Green, donde el proceso de linealización solamente llevará al clásico cuerpo elástico linealizado.

Estudiamos los efectos de usar esta nueva clase de relaciones constitutivas, obteniendo los estados de esfuerzo y deformación para cuatro problemas de valor de frontera usando el Método de elementos Finitos. Los resultados son comparados con las soluciones encontradas en la literatura considerando la teoría clásica de elasticidad linealizada. Los problemas son: tensión uniaxial de una placa rectangular infinita con un agujero elíptico, tensión uniaxial de una placa rectangular finita con entalles de borde hiperbólicos, una placa semi-infinita con una carga puntual y una inclusión en una matriz blanda bajo tracción.

Abstract

There are some problems in Continuum Mechanics where we have bodies exhibiting a non-linear elastic response, which can't be modeled adequately using the classical elastic theories, specifically in cases where there are small deformations and nonlinear behavior for the material. Some applications can be found in the modeling of brittle materials and in Fracture Mechanics.

Recently, a new class of implicit constitutive relations for elastic bodies have been developed to describe this type of elastic response of solids. This theory contains as a special subclass the classical Cauchy and Green elastic bodies. Within this class of constitutive relations, one can obtain, through a rigorous approximation, constitutive relations for the linearized strain as a nonlinear function of the stress. Such an approximation is not possible within classical theories of Cauchy and Green elasticity, where the process of linearization will only lead to the classical linearized elastic body.

We study the consequences of using this new class of constitutive relation, obtaining states of stress and strain for four classical boundary value problems using the Finite Element Method. The results were compared with solutions found in the literature considering the classical theory of linearized elasticity. The problems are: the uniaxial tension of an infinite rectangular plate with an elliptic hole, the uniaxial tension of a finite rectangular plate with hyperbolic boundaries notches, a semi-infinite plate with a point load and an inclusion in a soft matrix under traction.

Dedicatoria

“Y allí se encuentra la voluntad, que no fenece. ¿Quién conoce los misterios de la voluntad y su vigor? Pues Dios es una gran voluntad que penetra todas las cosas por la naturaleza de su atención. El hombre no se rinde a los ángeles, ni por entero a la muerte, salvo únicamente por la flaqueza de su débil voluntad.”

Agradecimientos

Ha sido un largo pero gratificante camino el que he recorrido durante estos 8 años, y en el trayecto he conocido mucha gente que me ha brindado su amistad y apoyo incondicional, personas que me han enseñado valores importantes y me han entregado su ayuda en este proceso tan significativo para mí, por lo tanto siento que es importante agradecerles por esta incondicional entrega durante todo este tiempo.

Me gustaría agradecer en primer lugar a los coordinadores de la beca CONICYT, por concederme el apoyo y por seguir fomentando la investigación en Chile, también agradecer a mis profesores guías, Roger Bustamante Plaza y Alejandro Ortiz por resolver mis dudas, tenerme paciencia y encaminar mi investigación por buen camino.

Agradecer a mis compañeros de carrera, con quienes hemos librado diferentes batallas y que gracias al conjunto apoyo hemos logramos salir adelante. No me puedo olvidar de mi grupo de amigos de Plan común “los 12”, con quienes compartí penas y alegrías, además de apoyo en los estudios y diferentes trabajos para la universidad.

Quiero agradecer a mis familiares, los cuales me han ayudado desde mucho antes y han guiado mi camino hasta el día de hoy. Agradecer a mi abuela, Yuly Montesinos por su preocupación y enseñanzas, a mi padre Eduardo Montero por guiarme en el camino de la ingeniería, por enseñarme la virtud del esfuerzo y mostrarme que todo tiene solución si se ve desde otro punto de vista, a mi hermano Felipe Montero por aconsejarme, cuidarme, brindarme su ayuda y apoyarme en todos los proyectos que he realizado y estoy realizando en mi vida, a mi madre Carmen Guarda Montesinos, por fomentar mi educación, por guiarme, y por nunca rendirse frente a los problemas, por siempre salir adelante y por todo el sacrificio y amor incondicional entregado. Agradecer a mi pareja Claudia Contreras Álvarez, quien me ha acompañado durante estos últimos 2 años, brindándome palabras de aliento, apoyo y las fuerzas necesarias para seguir adelante, agradecer a mi hijo, Agustín Montero Contreras quien junto con su madre se han convertido en mi mundo entero y en las razones por las cuales luchar cada día, a ellos les agradezco todo el amor y la paciencia entregada.

Finalmente quiero agradecer a mi fallecida bisabuela, María Troncoso, por enseñarme la frase que ha marcado toda mi vida, “*querer es poder*”, gracias madre por enseñarme a nunca rendirme, a luchar por mis queridos y a vivir sin olvidar mis propias metas y sueños, gracias.

Tabla de contenido

Resumen	i
Abstract.....	ii
Dedicatoria	iii
Agradecimientos	iv
1. Introducción.....	1
1.1 Motivación.....	1
1.2 Introducción	2
1.3 Objetivos	3
2. Ecuaciones básicas	7
2.1 Cinemática	7
2.2 Ecuación de equilibrio y relaciones constitutivas.....	8
2.3 Tensión uniaxial	10
2.4 Problema de valor de frontera.....	11
3. Elementos finitos.....	13
3.1 Forma débil.....	13
3.2 Forma débil linealizada	13
3.3 Forma débil linealizada discreta.....	15
3.4 Implementación computacional	16
3.5 Esfuerzo y deformación en el elemento.....	18
3.6 Vector de fuerza interna nodal elemental	22
3.7 Vector de fuerzas externa nodal elemental	23
3.8 Matriz de rigidez tangente elemental.....	24
3.9 Integración Numérica	25
4. Antecedentes de los problemas.....	27
4.1 Placa con agujero elíptico bajo tracción	27
4.2 Placa con entalle hiperbólico bajo tracción.....	31
4.3 Placa seminfinita bajo carga de compresión puntual.....	33
4.4 Inclusión esférica	35

5. Metodología.....	36
5.1 Parámetros dimensionales de los problemas	36
5.2 Programas utilizados	38
5.3 Extracción de datos.....	44
5.4 Metodología implementada.....	45
5.5 Tipo de Errores	52
6. Resultados y análisis.....	55
6.1 Placa con agujero elíptico bajo tracción.....	55
6.2 Placa con entalle de perfil hiperbólico	77
6.3 Placa seminfinita bajo carga puntual	97
6.4 Inclusión esférica	113
7. Conclusiones.....	152
Bibliografía.....	156
A. Resultados adicionales para el problema de inclusión esférica	158
A.1 Evolución de las componentes del esfuerzo y la deformación en x_1	158
A.2 Evolución de las componentes del esfuerzo y la deformación en x_2	179

Capítulo 1

Introducción

1.1 Motivación

Dentro del área de la mecánica del medio continuo, el comportamiento mecánico de los cuerpos es modelado a través de expresiones llamadas “*ecuaciones constitutivas*”. Estas relacionan la deformación con el esfuerzo a través de funciones que pueden ser de carácter lineal o no-lineal. Muchos de los modelos constitutivos usados en mecánica de sólidos consideran ecuaciones constitutivas lineales, incluso en problemas en donde el comportamiento puede ser altamente no lineal. También actualmente ocurre que se modela el esfuerzo en función de la deformación, situación que podría no corresponder con la realidad del fenómeno, ya que son las fuerzas externas al cuerpo quienes generalmente generarían cargas internas en él, provocando como respuesta una deformación, por lo tanto es coherente pensar que algunas ecuaciones constitutivas debiesen relacionar la deformación en función del esfuerzo o bien consideran algo más general donde la deformación y los esfuerzos se relacionan por medio de ecuaciones implícitas. La teoría elástica lineal clásica ha fallado en modelar situaciones donde se tienen comportamientos no lineales de sólido y donde además se tienen deformaciones pequeñas y esfuerzos elevados (esto ocurre en los materiales frágiles).

El estudio de estas nuevas relaciones constitutivas podrían ser de gran importancia en diferentes áreas, como en la Biomecánica y la Geomecánica, especialmente en situaciones donde sea necesario conocer el esfuerzo adecuado para no superar una deformación máxima impuesta por el sistema.

Recientemente se han llevado a cabo varios estudios, tratando de encontrar ecuaciones constitutivas de carácter no lineal, que relacionen la deformación en función del esfuerzo en particular cuando las deformaciones son pequeñas. La presente tesis consiste en el estudio de una de ellas, la cual es analizada de manera numérica y comparada con la teoría elástica lineal clásica, con el fin de encontrar diferencias y determinar si la expresión modela adecuadamente algunos fenómenos en mecánica de sólidos tal como la concentración de esfuerzos en cuerpos frágiles.

1.2 Introducción

En esta tesis se obtiene soluciones numéricas para algunos problemas de valor de frontera para una nueva ecuación constitutiva que se usa para modelar la respuesta elástica no lineal de algunos cuerpos en casos donde la deformación es pequeña y se mantiene acotada. Algunos ejemplos se pueden encontrar en materiales frágiles, puntas de grietas y cualquier otro tipo de concentrador de esfuerzos.

Según la teoría de la elasticidad las ecuaciones constitutivas para los sólidos no lineales son las de los sólidos elásticos de Cauchy y de Green (ver [1],[2]), que se muestran en las ecuaciones (1.1) y (1.2) respectivamente, en dónde \mathbf{S} es el tensor de esfuerzos nominal, \mathbf{F} es el gradiente de deformación, W es la energía de deformación y \mathbf{g} es un funcional:

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} = \mathbf{S}, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{g}(\mathbf{F}). \quad (1.2)$$

A diferencia de las ecuaciones mencionadas anteriormente, la relación a investigar se basa en escribir la deformación en función del esfuerzo, donde $\boldsymbol{\varepsilon}$ es la deformación, $\boldsymbol{\sigma}$ es el esfuerzo de Cauchy y \mathbf{g} es una función tensorial (ver [3],[4],[9]):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma}). \quad (1.3)$$

Definiendo la función \mathbf{g} como una expresión dependiente de una función escalar $W = W(\boldsymbol{\sigma})$ y del esfuerzo de Cauchy, se tiene explícitamente que $\mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$. Para cuerpos isotrópicos W es una función que depende de los tres invariantes del tensor de Cauchy ($I_1 = \text{tr} \boldsymbol{\sigma}$, $I_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2)$, $I_3 = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^3)$). Para esta tesis trabajaremos con [15]:

$$W(I_1, I_2) = \frac{-\alpha}{\beta} \ln[\cosh(\beta I_1)] + \frac{\gamma}{\iota} \sqrt{1 + 2\iota I_2}, \quad (1.4)$$

donde α , β , γ y ι son constantes del material. Substituyendo la ecuación de la función escalar en la definición de \mathbf{g} y usando la ecuación (1.3), se tiene que la deformación es [15]:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\alpha \tanh(\beta I_1) \mathbf{I} + \frac{\gamma}{(1+2\iota I_2)^{\frac{1}{2}}} \boldsymbol{\sigma}. \quad (1.5)$$

Lo importante de la ecuación (1.5) es que cumple con la primera ley de la termodinámica [22], la segunda no entra en juego debido a que no hay disipación de energía en un cuerpo elástico.

1.3 Objetivos

Objetivos generales

El objetivo general de esta tesis es explorar, mediante métodos numéricos y analíticos, algunos problemas de valor de frontera en donde hay concentraciones de esfuerzos pero las deformaciones se mantienen acotadas y pequeñas (como por ejemplo en materiales frágiles, grietas, cambios de sección) o bien en donde hay distribuciones no homogéneas de esfuerzos. Estos problemas se modelan a través de la nueva ecuación constitutiva presentada anteriormente (1.3).

Se planea resolver los siguientes 4 problemas usando (1.5):

- El primer problema consiste en analizar el campo de esfuerzos y deformaciones que se desarrollan en un material elástico no lineal sometido a una carga de tracción constante, aplicada a una placa infinita con un agujero elíptico en su centro, en donde se asumen pequeñas deformaciones, como se muestra en la Figura 1.1.

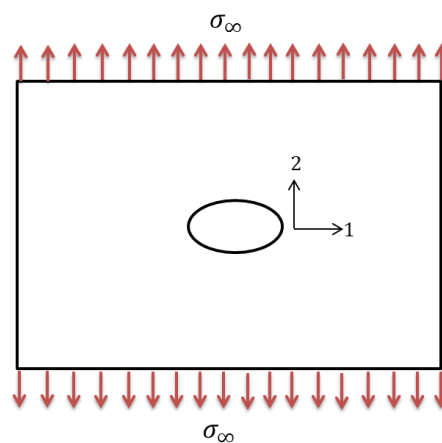


Figura 1.1: Placa con agujero elíptico en tracción.

- El segundo problema consiste en analizar el campo de esfuerzos y deformaciones que se desarrollan en una placa seminfinita bajo tracción, la cual posee en los costados entalles con forma de hipérbola, las cuales generan concentraciones de esfuerzos.

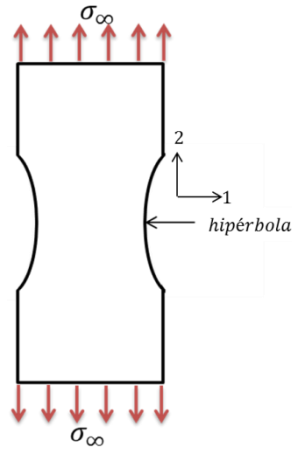


Figura 1.2: Placa plana con entalles hiperbólicos.

- El tercer problema consiste en analizar el campo de esfuerzos y deformaciones que se desarrollan en un medio seminfinito sometido a una carga puntual.

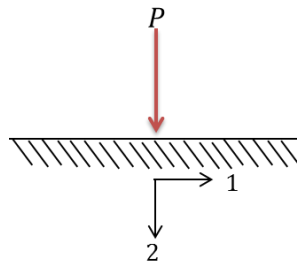


Figura 1.3: Medio semi-infinito con carga compresiva puntual.

- El cuarto problema consiste en explorar el campo de esfuerzos y deformaciones que aparece en un cubo con una inclusión esférica. Esta esfera es una inclusión que se encuentra perfectamente pegada a la otra geometría, y se comporta como un sólido no lineal elástico, mientras que el cubo se comporta como un sólido lineal elástico.

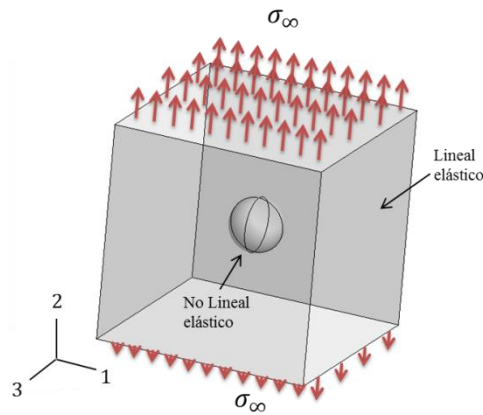


Figura 1.4: Cubo con inclusión esférica.

Objetivos específicos

Los objetivos específicos según cada problema son:

- Para el primer problema, se busca graficar el esfuerzo (σ_{22}) y la deformación (ϵ_{22}) en la punta de la grieta elíptica, para diversos valores de la razón $\frac{b}{a}$ (razón entre semiejes de la elipse), en particular estudiando casos en los que $a \ll b$. Específicamente se estudia 6 valores distintos para $\frac{b}{a}$ se comparan con la solución del caso lineal. La idea principal es llegar al caso en que la elipse se asemeja a una grieta muy fina.
- Para el segundo problema, se busca graficar el esfuerzo (σ_{22}) y la deformación (ϵ_{22}) en el borde más interno del entalle hiperbólico; el objetivo es determinar la concentración de esfuerzos y de deformación en ese lugar para luego compararlos con resultados para el mismo problema de la teoría clásica elástica lineal. Se estudian 6 geometrías distintas para diversos valores de la razón: $\frac{b}{a}$ (pendiente de la asíntota de la hipérbola).
- Para el tercer problema se busca graficar el campo de esfuerzo y deformación en el medio semi-infinito. Se desea obtener la concentración de esfuerzos y deformación en el punto de aplicación de la carga y compararla con los resultados de la teoría elástica lineal clásica (Fuerza puntual en un sólido 2D infinito isotrópico, problema de Kelvin).
- Para el cuarto problema se desea modelar el efecto de una inclusión no lineal elástica en un cuerpo lineal elástico, y visualizar si el campo de deformación

permanece pequeño y acotado en la interfaz del sistema cubo-esfera, y si el campo de esfuerzos alcanza valores máximos en dicha interface. Se busca graficar los esfuerzos y la deformación en los ejes de simetría utilizados y compararlos con el caso en que la inclusión también se modele como material lineal elástico.

Capítulo 2

Ecuaciones Básicas

2.1 Cinemática

Sea $X \in \mathcal{B}$ es un punto en un cuerpo \mathcal{B} y $\mathbf{X} = \boldsymbol{\kappa}(X)$ es la posición de X en la configuración de referencia $\kappa_r(\mathcal{B})$, asumimos que existe una función $\boldsymbol{\chi}$ referida como el movimiento del cuerpo, tal que $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(X, t)$, donde \mathbf{x} es la posición de X en la configuración actual $\kappa_t(\mathcal{B})$ al tiempo t (ver Figura 2.1).

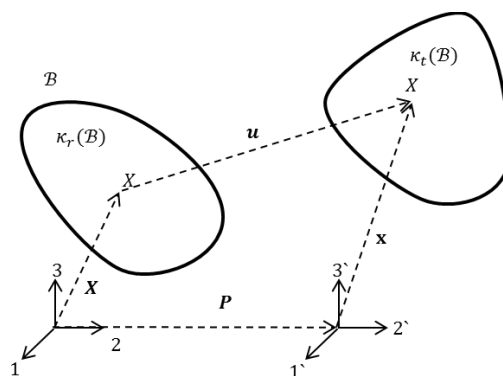


Figura 2.1: Esquema cuerpo \mathcal{B} y sus configuraciones.

El gradiente de deformación \mathbf{F} y el tensor de deformación derecho e izquierdo de Cauchy-Green, \mathbf{C} y \mathbf{B} , son definidos respectivamente como:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{X}}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T, \quad (2.1)$$

respectivamente. El campo de desplazamiento \mathbf{u} es definido a través de:

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}. \quad (2.2)$$

Finalmente el tensor de la deformación de Green-St.Venant (\mathbf{E}) y la deformación linealizada ($\boldsymbol{\epsilon}$) son definidas a través de:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}), \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right]. \quad (2.3)$$

En esta tesis se considera el caso $\|\nabla \mathbf{u}\| \sim \mathcal{O}(\delta)$ con $\delta \ll 1$ y así la medición de la deformación relevante es la deformación linealizada, y la configuración actual y la de referencia son aproximadamente iguales.

2.2 Ecuación de equilibrio y relaciones constitutivas

En esta tesis se estudian problemas cuasi estáticos con ausencia de fuerzas de cuerpo. La ecuación de equilibrio en términos del tensor de esfuerzo de Cauchy es:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}. \quad (2.4)$$

Para cuerpos elásticos, se ha propuesto recientemente en la literatura una relación constitutiva implícita de la forma (ver [3],[5],[6],[7],[8]):

$$f(\mathbf{B}, \boldsymbol{\sigma}, \rho) = \mathbf{0}, \quad (2.5)$$

donde ρ es la densidad del cuerpo. Para cuerpos isotrópicos la ecuación anterior se transforma en:

$$\alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{B} + \alpha_2 \mathbf{B}^2 + \alpha_3 \boldsymbol{\sigma} + \alpha_4 \boldsymbol{\sigma}^2 + \alpha_5 (\mathbf{B}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{B}) + \alpha_6 (\mathbf{B}\boldsymbol{\sigma}^2 + \boldsymbol{\sigma}^2\mathbf{B}) + \alpha_7 (\mathbf{B}^2\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{B}^2) + \alpha_8 (\mathbf{B}^2\boldsymbol{\sigma}^2 + \boldsymbol{\sigma}^2\mathbf{B}^2) = \mathbf{0}, \quad (2.6)$$

donde α_i ($i = 0, 1, 2, \dots, 8$) son funciones escalares que dependen de los invariantes:

$$\operatorname{tr} \mathbf{B}, \operatorname{tr} \mathbf{B}^2, \operatorname{tr} \mathbf{B}^3, \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}, \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}^2, \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}^3, \operatorname{tr}(\mathbf{B}\boldsymbol{\sigma}), \operatorname{tr}(\mathbf{B}^2\boldsymbol{\sigma}), \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2\mathbf{B}), \operatorname{tr}(\mathbf{B}^2\boldsymbol{\sigma}^2), \quad (2.7)$$

y de la densidad ρ . Para $\|\nabla \mathbf{u}\| \sim \mathcal{O}(\delta)$ con $\delta \ll 1$, se tiene

$$\mathbf{B} \approx \mathbf{I} + 2\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.8)$$

Usando una expansión de Taylor en las coordenadas cartesianas alrededor de $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$ y asumiendo que α_i ($i = 0, 1, 2, \dots, 8$) no depende explícitamente de la densidad ρ se tiene la siguiente aproximación:

$$\alpha_i(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}) \approx \alpha_i(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{I} + 2\boldsymbol{\varepsilon}) \approx \alpha_i(\boldsymbol{\sigma}) + \left. \frac{\partial \alpha_i}{\partial \varepsilon} \right|_{(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0})} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (i = 0, 1, \dots, 8). \quad (2.9)$$

Substituyendo (2.8) y (2.9) en (2.6), se obtiene la siguiente relación implícita para términos sobre el orden de δ :

$$\begin{aligned} \aleph_0 \mathbf{I} + \aleph_1 \boldsymbol{\varepsilon} + \aleph_2 \boldsymbol{\sigma} + \aleph_3 \boldsymbol{\sigma}^2 + \aleph_4 \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\sigma} + \aleph_5 \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\varepsilon} + \aleph_6 \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\sigma}^2 + \aleph_7 \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\varepsilon} + (\beth_{0kl} \varepsilon_{kl}) \mathbf{I} + \\ (\beth_{1kl} \varepsilon_{kl}) \boldsymbol{\sigma} + (\beth_{2kl} \varepsilon_{kl}) \boldsymbol{\sigma}^2 = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde $\aleph_m = \aleph_m(\boldsymbol{\sigma})$ ($m = 0, 1, \dots, 7$) y $\beth_{nkl} = \beth_{nkl}(\boldsymbol{\sigma})$ ($n = 0, 1, 2$) son (en general) funciones escalares y tensoriales del tensor de esfuerzo de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$. Bajo ciertas condiciones puede ser resuelta para $\boldsymbol{\varepsilon}$. Un método simple para encontrar dichas condiciones es la siguiente: Definiendo el vector $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23})^T$, la ecuación anterior puede ser escrita como:

$$\mathbf{M} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{d}, \quad (2.11)$$

donde la matriz $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{6 \times 6}$ y el vector $\mathbf{d} = \mathbf{d}_{6 \times 1}$ dependen (en general no linealmente) de $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23})^T$. Por brevedad, la forma explícita de \mathbf{M} no se muestra aquí. Si $\det(\mathbf{M}) \neq 0$, luego $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{d}$ puede ser calculado. Para cuerpos isotrópicos, la ecuación (2.5) puede ser usada para obtener la relación no lineal (ver [4],[9]):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma}). \quad (2.12)$$

Para un cuerpo isotrópico que es descrito por la relación constitutiva linealizada clásica, la función tensorial $\mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma})$ es:

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{(1+\nu)}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} (tr \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}, \quad (2.13)$$

donde E y ν son el Módulo de Young y la razón de Poisson, respectivamente.

En este trabajo se asume que existe $W = W(\boldsymbol{\sigma})$ tal que $\mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ (ver [9]). Para cuerpos isotrópicos W es dependiente de los invariantes.

$$I_1 = \text{tr} \boldsymbol{\sigma}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2), \quad I_3 = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^3). \quad (2.14)$$

En diferentes publicaciones se ha utilizado y estudiado la siguiente expresión para la función escalar W (ver [5], [14]):

$$W(I_1, I_2) = -\alpha \left[I_1 - \frac{1}{\beta} \ln(1 + \beta I_1) \right] + \frac{\alpha \gamma}{\iota} \sqrt{1 + 2I_2}, \quad (2.15)$$

pero la expresión (2.15) presentaba problemas con la contracción lateral en casos de tracción, por lo tanto para modelar adecuadamente el fenómeno se modificó esta ecuación. En Bustamante y Rajagopal [15] la siguiente función escalar es presentada y seleccionada para utilizar en esta tesis:

$$W(I_1, I_2) = \frac{-\alpha}{\beta} \ln[\cosh(\beta I_1)] + \frac{\gamma}{\iota} \sqrt{1 + 2I_2}, \quad (2.16)$$

donde α , β , γ y ι son constantes del material. Substituyendo en $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ se tiene

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\alpha \tanh(\beta I_1) \mathbf{I} + \frac{\gamma}{(1+2I_2)^{\frac{1}{2}}} \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.17)$$

La principal característica de la función escalar seleccionada es que produce que la deformación este limitada para ciertos valores de las constantes del material. Estos parámetros debiesen ser obtenidos de datos experimentales, pero tal corroboración experimental no ha sido todavía realizada. En este trabajo los parámetros han sido seleccionados arbitrariamente con miras a la determinación de la versatilidad o utilidad de estas nuevas relaciones constitutivas de los cuerpos elásticos.

2.3 Tensión uniaxial

Resultados para una barra bajo tensión uniaxial son entregadas para demostrar la respuesta de un cuerpo elástico que es descrito por la relación (2.17).

Para una tensión uniforme σ aplicada a la barra, la deformación longitudinal ε es $\varepsilon = -\alpha \tanh(\beta\sigma) + \frac{\gamma}{(1+\iota\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}\sigma$. Los siguientes parámetros del material son elegidos [15]:

Tabla 2.1: Parámetros del material.

<i>Parámetro</i>	<i>Valor</i>	<i>Unidad</i>
α	0.01	-
β	$9.276808104499897 \cdot 10^{-8}$	[1/Pa]
γ	$4.019950248448356 \cdot 10^{-9}$	[1/Pa]
ι	10^{-14}	[1/Pa ²]
E	323387085	[Pa]
ν	0.3	-

La respuesta elástica de la barra se muestra a continuación:

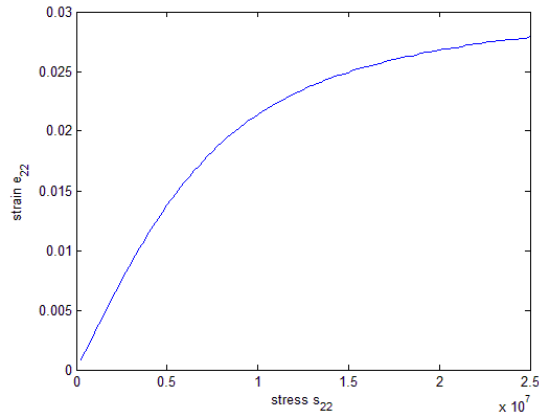
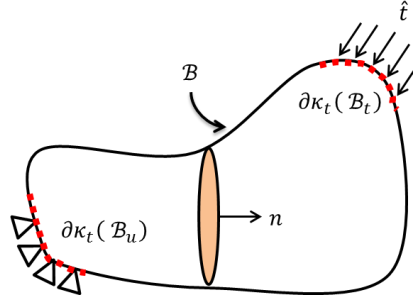


Figura 2.2: Respuesta elástica barra carga uniaxial.

2.4 Problema de valor de frontera

Considerar un cuerpo elástico \mathcal{B} definido por un dominio acotado abierto $\kappa_t(\mathcal{B}) \subset \mathbb{R}^3$ con borde $\partial\kappa_t(\mathcal{B})$ tal que $\partial\kappa_t(\mathcal{B}_u) \cup \partial\kappa_t(\mathcal{B}_t) = \partial\kappa_t(\mathcal{B})$ y $\partial\kappa_t(\mathcal{B}_u) \cap \partial\kappa_t(\mathcal{B}_t) = \emptyset$.


 Figura 2.3: Cuerpo \mathcal{B} .

La posición de un punto $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ es $\mathbf{x} \in \kappa_t(\mathcal{B})$. El campo de desplazamientos \mathbf{u} que se busca es tal que cumple con la ecuación de equilibrio

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}, \quad (2.18)\text{a}$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ tiene que obtenerse de:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \text{ donde } \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]. \quad (2.18)\text{b}$$

De la ecuación anterior se tiene que en general es una función no lineal de $\boldsymbol{\sigma}$. Las condiciones de borde son

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \text{ en } \delta\kappa_t(\mathcal{B}_u), \quad \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \hat{\mathbf{t}} \text{ en } \delta\kappa_t(\mathcal{B}_t), \quad (2.18)\text{c}$$

donde $\hat{\mathbf{u}}$ es un campo de desplazamiento impuesto y $\hat{\mathbf{t}}$ es una tracción prescrita.

El problema de valor de frontera mencionado anteriormente posee solución exacta solo para casos simples (ver [10], [11], [12], [13]) y presenta retos para los analistas numéricos no solo porque en general es una función no lineal sino también porque el esfuerzo ha sido calculado por inversión de la ecuación (2.12).

Capítulo 3

Elementos finitos

La solución del problema de valor de frontera (2.18) por elementos finitos requiere una forma débil, para este fin se usa el principio de trabajos virtuales. Las siguientes notaciones son consideradas para leer de mejor manera la forma débil [14]:

$$\kappa_t(\mathbf{B}) = \Omega, \quad \partial\kappa_t(\mathbf{B}) = \Gamma, \quad \partial\kappa_u(\mathbf{B}_u) = \Gamma_u, \text{ y } \partial\kappa_t(\mathbf{B}_t) = \Gamma_t.$$

3.1 Forma débil

Considerar las funciones de prueba $u_i(\mathbf{x}) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{H}^1(\Omega)$ y las funciones de testeo $\delta u_i(\mathbf{x}) \in \mathcal{V} \equiv \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ ($i = 1, 2, 3$); donde $\mathbb{H}^1(\Omega)$ es el espacio de Sobolev de las funciones que sus primeras derivadas son integrables al cuadrado en Ω y con valores nulos en el borde esencial Γ_u . La forma débil (principio de trabajos virtuales) asociada con (2.18) (ver [16]) se define como encontrar $u_i(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}$ tal que cumpla con:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u_i \hat{t}_i d\Gamma = 0 \quad \forall \delta u_i \in \mathcal{V}, \quad (3.1)$$

donde σ_{ij} es obtenido de la relación implícita no lineal (2.12).

3.2 Forma débil linealizada

Debido a la relación implícita entre la deformación y el tensor de esfuerzos de Cauchy, la forma débil se transforma en una expresión no lineal. La linealización de la forma débil puede ser construida aproximando el campo de esfuerzos como 2 términos de una expansión de la serie de Taylor, $\boldsymbol{\sigma}^{(k)} \approx \boldsymbol{\sigma}^{(k-1)} + \left. \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{(k-1)} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}$, la cual nos entrega:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \Big|_{(k-1)} \Delta \varepsilon_{kl}^{(k)} d\Omega = \int_{\Gamma_t} \delta u_i \hat{t}_i d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}^{(k-1)} d\Omega, \quad (3.2)$$

donde $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}$ es el incremento de la deformación asociado con el incremento en el desplazamiento (\mathbf{u}), es decir $\Delta \mathbf{u}$, desde un paso $k - 1$ hasta un paso k . Notar que en la ecuación (3.2), $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ es el tensor de elasticidad y es calculado implícitamente como

$$\mathbf{C}_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}, \text{ donde } \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^{-1}. \quad (3.3)$$

La ecuación (3.3) es obtenida al derivar mediante la regla de la cadena la ecuación $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma})$ con respecto a $\boldsymbol{\sigma}$, es decir,

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (3.4)$$

que en notación indicial queda como $C_{ijkl}^{-1} = \frac{\partial W}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}}$, en donde se asumió invertibilidad de tensor de cuarto orden $\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$. Usando (3.3) junto con (2.17) se obtiene la siguiente expresión para los módulos inversos del tensor de elasticidad [14]:

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^{-1} &= \frac{\partial W}{\partial I_2} \delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{\partial W}{\partial I_3} (\delta_{ik} \sigma_{lj} + \sigma_{ik} \delta_{jl}) + \frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2} \delta_{ij} \delta_{kl} + \\ &\frac{\partial^2 W}{\partial I_2^2} \sigma_{kl} \sigma_{ij} + \frac{\partial^2 W}{\partial I_3^2} \sigma_{km} \sigma_{ml} \sigma_{ip} \sigma_{pj} + \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2} (\sigma_{kl} \delta_{ij} + \delta_{kl} \sigma_{ij}) + \\ &\frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_3} (\sigma_{km} \sigma_{ml} \delta_{ij} + \delta_{kl} \sigma_{ip} \sigma_{pj}) + \frac{\partial^2 W}{\partial I_2 \partial I_3} (\sigma_{km} \sigma_{ml} \sigma_{ij} + \sigma_{kl} \sigma_{ip} \sigma_{pj}), \end{aligned} \quad (3.5)$$

en donde para el caso a estudiar en esta tesis se tiene que las derivadas de la función escalar son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial I_1} &= -\alpha \tanh(\beta I_1), \\ \frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2} &= \alpha \beta [\tanh^2(\beta I_1) - 1], \\ \frac{\partial W}{\partial I_2} &= \frac{\gamma}{(1+2I_2)^{\frac{1}{2}}}, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial I_2^2} &= -\frac{\gamma I_1}{(1+2I_2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_3} = \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2} = \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_3} = \frac{\partial^2 W}{\partial I_2 \partial I_3} = 0.$$

Evaluando las derivadas anteriores en la ecuación (3.5) se llega a la siguiente expresión para los módulos inversos del tensor de elasticidad:

$$C_{ijkl}^{-1} = \alpha\beta[\tanh^2(\beta I_1) - 1]\delta_{ij}\delta_{kl} - \frac{\gamma^l}{(1+2I_2)^{\frac{3}{2}}}\sigma_{kl}\sigma_{ij} + \frac{\gamma}{(1+2I_2)^{\frac{1}{2}}}\delta_{ik}\delta_{jl}. \quad (3.7)$$

Esta última expresión es la que se utiliza en el programa para resolver todos los problemas de valor de frontera de esta tesis.

3.3 Forma débil linealizada discreta

Sean la función de elemento de testeo arbitraria ($\delta \mathbf{u}_h^{(e)}$) y la función de elemento de prueba arbitraria ($\Delta \mathbf{u}_h^{(e)}$):

$$\delta \mathbf{u}_h^{(e)}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n N_I(\mathbf{x}) \delta \mathbf{u}_I^{(e)}, \quad (3.8)$$

$$\Delta \mathbf{u}_h^{(e)}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n N_I(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{u}_I^{(e)}, \quad (3.9)$$

donde N_I 's son las funciones de forma utilizadas en elementos finitos y n es el número de nodos en el elemento. Usando (3.8) y (3.9), la deformación virtual se transforma en:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \sum_{I=1}^n [\delta \mathbf{u}_I^{(e)} \otimes \nabla N_I + \nabla N_I \otimes \delta \mathbf{u}_I^{(e)}], \quad (3.10)$$

donde el incremento de la deformación es

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \sum_{I=1}^n [\Delta \mathbf{u}_I^{(e)} \otimes \nabla N_I + \nabla N_I \otimes \Delta \mathbf{u}_I^{(e)}]. \quad (3.11)$$

Después de aplicar la arbitrariedad de las funciones de prueba nodales, ensamblar las contribuciones de cada elemento en el sistema global, y aplicar las condiciones de borde (tracciones y desplazamientos impuestos) en incrementos $\Delta \mathbf{t}$, el siguiente esquema Newton-Rhapon es obtenido:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(n-1)}\Delta\mathbf{u}^{(n)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{T}^{(n-1)}, \quad (3.12)$$

donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez tangente global, \mathbf{F} y \mathbf{T} son los vectores de fuerzas nodales globales, respectivamente, y $\Delta\mathbf{u}$ es el vector que contiene todos los grados de libertad de desplazamientos de la malla de elementos finitos. También $t + \Delta t$ denota la aproximación incremental donde la solución es conocida en un tiempo discreto t y la solución en el tiempo discreto $t + \Delta t$ es la buscada. Finalmente, n representa las iteraciones de equilibrio dentro de un incremento.

3.4 Implementación computacional

La implementación numérica de la teoría no lineal de elasticidad implícita introduce un sutil cambio dentro del código de elemento finito estándar. El problema es atacado a través de un esquema de Newton-Rhapson. El algoritmo del Newton-Rhapson es mostrado en el Cuadro 3.1, donde **maxit** representa las máximas iteraciones permitidas, **tol** $\ll 1$ es una tolerancia del esquema, **nsteps** es el número de cargas por pasos, $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}$ es el esfuerzo en el elemento escrito con la notación de Voigt, y $\boldsymbol{\epsilon}^{(e)}$ la deformación en el elemento escrito con la notación de Voigt. Para desarrollar el ensamble de las contribuciones de los elementos en el sistema discreto global, la matriz de rigidez tangente elemental y los vectores de fuerza nodal externos e internos, necesitan ser establecidos. El desarrollo de esto es presentado en las subsecciones, donde el esfuerzo plano es considerado y elementos cuadriláteros de 4 nodos han sido usados.

Cuadro 3.1: Algoritmo solución Newton-Rhapson.

- ENTRADA
 - *Geometría*: coordenadas nodos, numeración nodos, numeración elementos, conexión entre elementos.
 - *Parámetros del material*: valores de α , β , γ y ι .
 - *Parámetros Newton-Rhapson*: **maxit**, **tol**, **nsteps**.

- INICIALIZACION
 - $u = 0$, $\Delta u = 0$, $\sigma^{(e)} = \epsilon^{(e)} = 0$ para todos los elementos en la malla.

- LOOP sobre los pasos de carga: **step=1** a **nsteps**
 - INICIALIZACION **error=1.0**, **nit=0**, **factor=step/nsteps**

 - WHILE (**error > tol**)and (**nit < maxit**)
 - **nit=nit+1**
 - ENCONTRAR **K** ensamblando las matrices elementales de rigidez $\mathbf{K}^{(e)}(\sigma^{(e)})$.
 - ENCONTRAR **F** ensamblando el vector de fuerzas elemental $\mathbf{F}^{(e)}$.
 - ENCONTRAR **T** ensamblando el vector de fuerzas elemental $\mathbf{T}^{(e)}(\sigma^{(e)})$.
 - ENCONTRAR **R= factor xF-T**
 - APLICAR condiciones de borde esenciales
 - RESOLVER $\Delta u = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{R}$
 - ACTUALIZAR $u = u + \Delta u$
 - ACTUALIZAR $\text{error} = \sqrt{\frac{\Delta u \cdot \Delta u}{u \cdot u}}$

 - FIN WHILE

- FIN LOOP

3.5 Esfuerzo y deformación en el elemento

Para esfuerzo plano en el caso 2D, el esfuerzo y la deformación en el elemento, bajo la notación de vector de Voigt son (ver [16]):

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = \left(\varepsilon_{11}^{(e)} \quad \varepsilon_{22}^{(e)} \quad 2\varepsilon_{12}^{(e)} \right)^T, \quad (3.13)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \left(\sigma_{11}^{(e)} \quad \sigma_{22}^{(e)} \quad \sigma_{12}^{(e)} \right)^T. \quad (3.14)$$

Para el caso 3D, el esfuerzo y la deformación en el elemento son:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = \left(\varepsilon_{11}^{(e)} \quad \varepsilon_{22}^{(e)} \quad \varepsilon_{33}^{(e)} \quad 2\varepsilon_{12}^{(e)} \quad 2\varepsilon_{13}^{(e)} \quad 2\varepsilon_{23}^{(e)} \right)^T, \quad (3.15)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \left(\sigma_{11}^{(e)} \quad \sigma_{22}^{(e)} \quad \sigma_{33}^{(e)} \quad \sigma_{12}^{(e)} \quad \sigma_{13}^{(e)} \quad \sigma_{23}^{(e)} \right)^T. \quad (3.16)$$

Luego dado un punto de Gauss (\mathbf{x}_g) en coordenadas cartesianas (\mathbf{x}_r)

$$\mathbf{x}_r = \sum_{l=1}^4 N_l(\mathbf{x}_g) \mathbf{X}_l, \quad (3.17)$$

es posible calcular incrementalmente el esfuerzo y la deformación de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p^{(e)}(\mathbf{x}_r) = \boldsymbol{\varepsilon}_{p-1}^{(e)}(\mathbf{x}_r) + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p^{(e)}(\mathbf{x}_r), \quad (3.18)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_p^{(e)}(\mathbf{x}_r) = \boldsymbol{\sigma}_{p-1}^{(e)}(\mathbf{x}_r) + \Delta \boldsymbol{\sigma}_p^{(e)}(\mathbf{x}_r), \quad (3.19)$$

En las ecuaciones (3.18) y (3.19), p inicia desde 1 antes de que el Loop del Newton-Rhapson inicie. Cuando $p=1$ significa que en el elemento, bajo el punto de Gauss dado, está libre de esfuerzo y deformación, el cual es parte de la segunda instrucción en el algoritmo dado en el Cuadro 3.1. Los incrementos que aparecen en las ecuaciones anteriores, tanto para el esfuerzo y la deformación elemental, pueden ser expresadas como

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p^{(e)}(\mathbf{x}_r) = \sum_{l=1}^4 \mathbf{B}_l^{(e)}(\mathbf{x}_r) \Delta \mathbf{u}_l^{(e)}, \quad (3.20)$$

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_p^{(e)}(\mathbf{x}_r) = \mathbf{C}(\mathbf{x}_r) \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p^{(e)}(\mathbf{x}_r), \quad (3.21)$$

donde $\mathbf{B}_l^{(e)}$ (para el caso 2d y 3d respectivamente) son:

$$\mathbf{B}_I^{(e)}(\mathbf{x}_r) = \begin{pmatrix} N_{I,1}(\mathbf{x}_r) & 0 \\ 0 & N_{I,2}(\mathbf{x}_r) \\ N_{I,2}(\mathbf{x}_r) & N_{I,1}(\mathbf{x}_r) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_I^{(e)}(\mathbf{x}_r) = \begin{pmatrix} N_{I,1}(\mathbf{x}_r) & 0 & 0 \\ 0 & N_{I,2}(\mathbf{x}_r) & 0 \\ 0 & 0 & N_{I,3}(\mathbf{x}_r) \\ N_{I,2}(\mathbf{x}_r) & N_{I,1}(\mathbf{x}_r) & 0 \\ N_{I,3}(\mathbf{x}_r) & 0 & N_{I,1}(\mathbf{x}_r) \\ 0 & N_{I,3}(\mathbf{x}_r) & N_{I,2}(\mathbf{x}_r) \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

la cual es la matriz de deformación nodal elemental, la cual ordenada según la organización local del elemento define la matriz de deformación elemental:

$$\mathbf{B}^{(e)} = [\mathbf{B}_1^{(e)} \quad \mathbf{B}_2^{(e)} \quad \mathbf{B}_3^{(e)} \quad \mathbf{B}_4^{(e)}], \quad (3.23)$$

donde

$$\Delta \mathbf{u}_I^{(e)} = \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u}_{I1}^{(e)} \\ \Delta \mathbf{u}_{I2}^{(e)} \\ \Delta \mathbf{u}_{I3}^{(e)} \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

es el incremento de desplazamientos nodales en el elemento, para cada grado de libertad. Finalmente, \mathbf{C} es el tensor de elasticidad escrito bajo la notación de Voigt, el cual para esfuerzo plano (caso 2D) se escribe como:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1112} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2212} \\ C_{1112} & C_{2212} & C_{1212} \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Luego utilizando la ecuación (3.7), la inversa de cada módulo elástico queda expresada como:

$$C_{1111}^{-1} = \alpha\beta[\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma^l}{(1+2\nu_2)^{\frac{3}{2}}} \sigma_{11}^2 + \frac{\gamma}{(1+2\nu_2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.26)$$

$$C_{1122}^{-1} = \alpha\beta[\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma^l}{(1+2\nu_2)^{\frac{3}{2}}} \sigma_{11} \sigma_{22},$$

$$C_{1112}^{-1} = -\frac{\gamma^l}{(1+2\nu_2)^{\frac{3}{2}}} \sigma_{11} \sigma_{12},$$

$$\begin{aligned}
 C_{2222}^{-1} &= \alpha\beta[\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma^\iota}{(1+2\iota_2)^{\frac{3}{2}}} \sigma_{22}^2 + \frac{\gamma}{(1+2\iota_2)^{\frac{1}{2}}}, \\
 C_{1212}^{-1} &= -\frac{\gamma^\iota}{(1+2\iota_2)^{\frac{3}{2}}} \sigma_{12}^2 + \frac{\gamma}{(1+2\iota_2)^{\frac{1}{2}}}, \\
 C_{2212}^{-1} &= -\frac{\gamma^\iota}{(1+2\iota_2)^{\frac{3}{2}}} \sigma_{12} \sigma_{22}.
 \end{aligned}$$

Dado el tensor de Cauchy

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

los invariantes para 2 dimensiones son:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sigma_{11} + \sigma_{22}, \\
 I_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_{11}^2 + 2\sigma_{12}^2 + \sigma_{22}^2),
 \end{aligned} \quad (3.28)$$

y no se muestra I_3 pues en nuestra formulación no se usa.

Para el caso 3D se tiene el siguiente tensor de elasticidad:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1123} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2223} \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3323} \\ C_{1112} & C_{2212} & C_{3312} & C_{1212} & C_{1213} & C_{1223} \\ C_{1113} & C_{2213} & C_{3313} & C_{1213} & C_{1313} & C_{1323} \\ C_{1123} & C_{2223} & C_{3323} & C_{1223} & C_{1323} & C_{1323} \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Luego utilizando la ecuación (3.7) se puede obtener la inversa de los 21 módulos elásticos independientes que se muestran a continuación:

$$\begin{aligned}
 C_{1111}^{-1} &= \alpha\beta[\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma^\iota}{(1+2\iota_2)^{\frac{3}{2}}} \sigma_{11}^2 + \frac{\gamma}{(1+2\iota_2)^{\frac{1}{2}}}, \\
 C_{1122}^{-1} &= \alpha\beta[\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma^\iota}{(1+2\iota_2)^{\frac{3}{2}}} \sigma_{11} \sigma_{22}, \\
 C_{1133}^{-1} &= \alpha\beta[\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma^\iota}{(1+2\iota_2)^{\frac{3}{2}}} \sigma_{11} \sigma_{33}, \\
 C_{1112}^{-1} &= -\frac{\gamma^\iota}{(1+2\iota_2)^{\frac{3}{2}}} \sigma_{11} \sigma_{12}, \\
 C_{1113}^{-1} &= -\frac{\gamma^\iota}{(1+2\iota_2)^{\frac{3}{2}}} \sigma_{11} \sigma_{13}, \\
 C_{1113}^{-1} &= -\frac{\gamma^\iota}{(1+2\iota_2)^{\frac{3}{2}}} \sigma_{11} \sigma_{23},
 \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned}
 C_{2222}^{-1} &= \alpha\beta[\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma^\iota}{(1+2\iota_2)^{\frac{3}{2}}} \sigma_{22}^2 + \frac{\gamma}{(1+2\iota_2)^{\frac{1}{2}}}, \\
 C_{2233}^{-1} &= \alpha\beta[\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma^\iota}{(1+2\iota_2)^{\frac{3}{2}}} \sigma_{22}\sigma_{33}, \\
 C_{2212}^{-1} &= -\frac{\gamma^\iota}{(1+2\iota_2)^{\frac{3}{2}}} \sigma_{12}\sigma_{22}, \\
 C_{2213}^{-1} &= -\frac{\gamma^\iota}{(1+2\iota_2)^{\frac{3}{2}}} \sigma_{22}\sigma_{13}, \\
 C_{2223}^{-1} &= -\frac{\gamma^\iota}{(1+2\iota_2)^{\frac{3}{2}}} \sigma_{22}\sigma_{23}, \\
 C_{3333}^{-1} &= \alpha\beta[\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma^\iota}{(1+2\iota_2)^{\frac{3}{2}}} \sigma_{33}^2 + \frac{\gamma}{(1+2\iota_2)^{\frac{1}{2}}}, \\
 C_{3312}^{-1} &= -\frac{\gamma^\iota}{(1+2\iota_2)^{\frac{3}{2}}} \sigma_{33}\sigma_{12}, \\
 C_{3313}^{-1} &= -\frac{\gamma^\iota}{(1+2\iota_2)^{\frac{3}{2}}} \sigma_{33}\sigma_{13}, \\
 C_{3323}^{-1} &= -\frac{\gamma^\iota}{(1+2\iota_2)^{\frac{3}{2}}} \sigma_{33}\sigma_{23}, \\
 C_{1212}^{-1} &= -\frac{\gamma^\iota}{(1+2\iota_2)^{\frac{3}{2}}} \sigma_{12}^2 + \frac{\gamma}{(1+2\iota_2)^{\frac{1}{2}}}, \\
 C_{1213}^{-1} &= -\frac{\gamma^\iota}{(1+2\iota_2)^{\frac{3}{2}}} \sigma_{12}\sigma_{13}, \\
 C_{1223}^{-1} &= -\frac{\gamma^\iota}{(1+2\iota_2)^{\frac{3}{2}}} \sigma_{12}\sigma_{23}, \\
 C_{1313}^{-1} &= -\frac{\gamma^\iota}{(1+2\iota_2)^{\frac{3}{2}}} \sigma_{13}^2 + \frac{\gamma}{(1+2\iota_2)^{\frac{1}{2}}}, \\
 C_{1323}^{-1} &= -\frac{\gamma^\iota}{(1+2\iota_2)^{\frac{3}{2}}} \sigma_{13}\sigma_{23}, \\
 C_{2323}^{-1} &= -\frac{\gamma^\iota}{(1+2\iota_2)^{\frac{3}{2}}} \sigma_{23}^2 + \frac{\gamma}{(1+2\iota_2)^{\frac{1}{2}}}.
 \end{aligned}$$

Dado el tensor de Cauchy

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

los invariantes para 3 dimensiones son:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}, \\
 I_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{13}^2 + 2\sigma_{23}^2).
 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Finalmente evaluando cada módulo, según sea el caso 3D o 2D, se obtiene \mathbf{C}^{-1} y (recordando el supuesto impuesto de invertibilidad de tensor de cuarto orden) se calcula \mathbf{C} .

Para el problema de valor de frontera 3D, el material elástico lineal isotrópico utilizado es el siguiente:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1111} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1122} & C_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1122}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1122}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1122}) \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

en donde se define

$$C_{1122} = \lambda, \quad C_{1212} = \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1122}) = \mu, \quad C_{1111} = \lambda + 2\mu. \quad (3.34)$$

Con λ , μ constantes llamadas módulos de Lamé, y que son equivalentes a:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (3.35)$$

donde E es el módulo de Young y ν es el coeficiente de Poisson.

3.6 Vector de fuerza interna nodal elemental

El vector de fuerza interna nodal para cada elemento se expresa de la siguiente forma:

$$\mathbf{T}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{B}_1^{(e)} \quad \mathbf{B}_2^{(e)} \quad \mathbf{B}_3^{(e)} \quad \mathbf{B}_4^{(e)})^T \boldsymbol{\sigma}^{(e)} d\Omega, \quad (3.36)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}$ se calcula como se describió anteriormente en la sección 3.5 y la integral es resuelta numéricamente utilizando cuadratura de Gauss. El algoritmo para calcular el vector de fuerzas internas nodales para cada elemento se muestra en el Cuadro 3.2, donde el instrucción de `ALMACENAR`, significa que las cantidades necesitan ser guardados afuera del loop del Newton-Rhapson para usos futuros.

Cuadro 3.2: Vector de fuerzas internas nodales elementales.

- LOOP sobre los puntos de Gauss del elemento
 - ENCONTRAR $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}$ en el punto de Gauss actual
 - ENCONTRAR $\mathbf{C}(\boldsymbol{\sigma}^{(e)})$
 - ENCONTRAR $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}$
 - ENCONTRAR $\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(e)} (\mathbf{C}; \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)})$
 - ACTUALIZAR y ALMACENAR $\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}$
 - ACTUALIZAR y ALMACENAR $\boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \boldsymbol{\sigma}^{(e)} + \Delta\boldsymbol{\sigma}^{(e)}$
 - ENCONTRAR $\mathbf{T}^{(e)}(\boldsymbol{\sigma}^{(e)})$.
- FIN LOOP

3.7 Vector de fuerzas externa nodal elemental

El vector de fuerza externa nodal elemental es calculado a través de la siguiente expresión

$$\mathbf{F}^{(e)} = \int_{\Gamma_t^{(e)}} (N_1^{(e)} \quad N_2^{(e)} \quad N_3^{(e)} \quad N_4^{(e)})^T \hat{\mathbf{t}}^{(e)} d\Gamma, \quad (3.37)$$

donde N_I ($I=1, 2, 3, 4$) es la función de forma para un elemento cuadrilátero de 4 nodos o para un elemento tetraédrico de 4 nodos, según sea el caso (2D o 3D) se escribe de la siguiente forma para el nodo I:

$$N_I^{(e)}(\mathbf{x}_r) = \begin{pmatrix} N_I(\mathbf{x}_r) & 0 \\ 0 & N_I(\mathbf{x}_r) \end{pmatrix},$$

$$N_I^{(e)}(\mathbf{x}_r) = \begin{pmatrix} N_I(\mathbf{x}_r) & 0 & 0 \\ 0 & N_I(\mathbf{x}_r) & 0 \\ 0 & 0 & N_I(\mathbf{x}_r) \end{pmatrix}, \quad (3.38)$$

y donde $\hat{\mathbf{t}}^{(e)} = (\hat{t}_1^{(e)}, \hat{t}_2^{(e)})^T$ para el caso 2D denota el vector de tracción en algún borde de algún elemento que toma parte en la tracción, y para el caso 3D, $\hat{\mathbf{t}}^{(e)} = (\hat{t}_1^{(e)}, \hat{t}_2^{(e)}, \hat{t}_3^{(e)})^T$ denota la tracción o compresión sobre la cara (superficie) de algún elemento que participa en la tensión. La integral de la ecuación (3.37) es resuelta numéricamente utilizando cuadratura de Gauss.

3.8 Matriz de rigidez tangente elemental

La matriz de rigidez tangente elemental se calcula a través de la siguiente expresión

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{B}_1^{(e)} \quad \mathbf{B}_2^{(e)} \quad \mathbf{B}_3^{(e)} \quad \mathbf{B}_4^{(e)})^T \mathbf{C} (\mathbf{B}_1^{(e)} \quad \mathbf{B}_2^{(e)} \quad \mathbf{B}_3^{(e)} \quad \mathbf{B}_4^{(e)}) d\Omega, \quad (3.39)$$

donde la integral es resuelta numéricamente utilizando cuadratura de Gauss. El algoritmo para calcular esta matriz se presenta en el Cuadro 3.3, donde la instrucción almacenar significa que el valor es guardado afuera del loop del Newton- Rhapsion para usos futuros.

Cuadro 3.3: Matriz de rigidez tangente elemental.

- LOOP sobre los puntos de Gauss del elemento
 - ENCONTRAR $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}$ en el punto de Gauss actual
 - ENCONTRAR $\mathbf{C}(\boldsymbol{\sigma}^{(e)})$
 - ENCONTRAR $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}$
 - ENCONTRAR $\Delta \boldsymbol{\sigma}^{(e)} (\mathbf{C}; \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)})$
 - ACTUALIZAR y ALMACENAR $\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}$
 - ACTUALIZAR y ALMACENAR $\boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \boldsymbol{\sigma}^{(e)} + \Delta \boldsymbol{\sigma}^{(e)}$
 - ENCONTRAR $\mathbf{C}(\boldsymbol{\sigma}^{(e)})$
 - ENCONTRAR $\mathbf{K}^{(e)}(\mathbf{C})$
- FIN LOOP

3.9 Integración Numérica

Para elementos cuadriláteros de 4 nodos, las funciones de forma están dadas en términos de coordenadas isoparamétricas $\xi = \{\xi_1, \xi_2\}$, las cuales son definidas en el elemento de referencia, esto permite la integración numérica de la forma débil linealizada usando cuadratura de Gauss. Las funciones de forma en el elemento de referencia son:

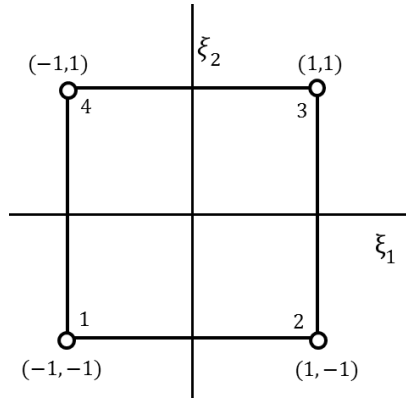


Figura 3.1: Elemento de referencia.

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2), & N_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2), \\
 N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2), & N_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2).
 \end{aligned}
 \tag{3.40}$$

Para elementos tetraédricos de 4 nodos, las funciones de forma están dadas en términos de las coordenadas isoparamétricas $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, las cuales son definidas en el elemento de referencia que se puede ver en la figura [17]:

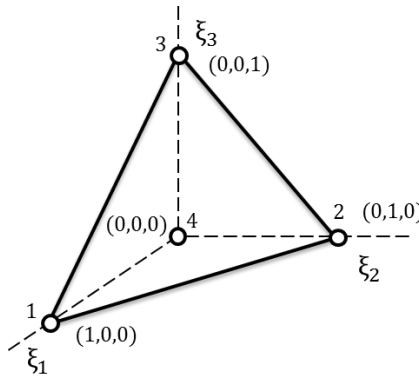


Figura 3.2: Elemento de referencia caso 3D.

Las funciones de forma en el elemento de referencia tetraédrico son:

$$\begin{aligned} N_1 &= \xi_1, & N_2 &= \xi_2, \\ N_3 &= \xi_3, & N_4 &= 1 - \xi_1 - \xi_2 - \xi_3. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Las derivadas de las funciones de forma con respecto a las coordenadas cartesianas, utilizando la regla de la cadena, están dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} &= \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right)^{-T} \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} &= \sum_{a=1}^4 \mathbf{x}_a \otimes \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

En consecuencia, el elemento diferencial de volumen en las integrales de la forma débil linealizada es

$$\begin{aligned} d\Omega^{(e)} &= \mathcal{J}^\xi d\xi_1 d\xi_2, \\ \mathcal{J}^\xi &= \det \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Similarmente, el diferencial de superficie del elemento es encontrado usando la definición unidimensional de la ecuación anterior.

Capítulo 4

Antecedentes de los problemas

A continuación se muestran las soluciones de los problemas de valor de frontera, bajo los supuestos de la teoría elástica lineal clásica, indicando los respectivos factores de concentración y ecuaciones para los desplazamientos.

4.1 Placa con agujero elíptico bajo tracción

La solución de este problema de valor de frontera se describe en términos de coordenadas elípticas, por lo que se mostrará una breve explicación de este tipo de coordenadas [18].

Se considera las siguientes ecuaciones para definir “x” e “y”, en función de las variables ξ y η :

$$\begin{aligned}x &= c \cdot \cosh(\xi)\cos(\eta), \\y &= c \cdot \sinh(\xi)\sin(\eta),\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde c es una constante. Si se elimina η se tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{x^2}{c^2 \cosh^2(\xi)} + \frac{y^2}{c^2 \sinh^2(\xi)} = 1.\tag{4.2}$$

Si se toma $\xi = \xi_0$, se tiene una elipse con semiejes $c \cdot \cosh(\xi_0)$, $c \cdot \sinh(\xi_0)$ y con focos $x = \pm c$. Para diferentes valores de ξ se obtiene una gama diferentes de elipses que poseen los mismos focos, esta familia de curvas se les llama elipses cofocales. Al igual que en coordenadas polares donde para $r = cte$ uno obtiene una circunferencia al ir variando el valor de θ , en este caso para $\xi = cte$ uno obtiene una elipse al ir variando η (desde 0 a 2π); de hecho para este caso η corresponde al ángulo excéntrico de 1 punto en la elipse. Ahora si se elimina ξ se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2(\eta)} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2(\eta)} = 1.\tag{4.3}$$

Para un valor constante de η se obtiene una hipérbola que posee los mismos focos que la elipse. Esta ecuación representa una familia de hipérbolas cofocales, en donde η es constante y ξ varía. En la Figura 4.1 se pueden observar las familias de elipses e hipérbolas.

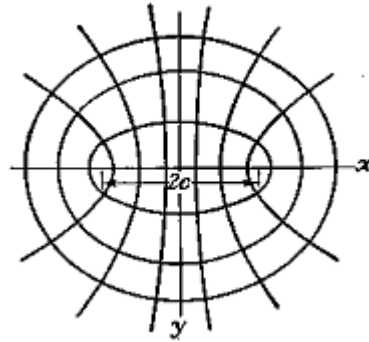


Figura 4.1: Coordenadas elípticas.

Las coordenadas presentadas anteriormente corresponden a las coordenadas elípticas. Para el problema de valor de frontera de la placa con un agujero elíptico se utilizan éstas.

La solución (ver Timoshenko and Goodier 1970, [18]) es una expresión larga que depende de ξ, η, c, ξ_0, S (esfuerzo aplicado) y β , que es el ángulo en que está rotada la tensión con respecto al eje x.

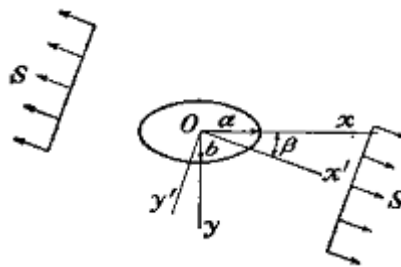


Figura 4.2: Placa con agujero elíptico y tensión uniforme.

Antes de mostrar la solución, primero es importante explicar los componentes del esfuerzo (σ_ξ, σ_η) en este tipo de coordenadas. Se tiene que σ_ξ es la componente normal en una curva $\xi = cte$, σ_η es la componente normal en una curva $\eta = cte$ y $\tau_{\xi\eta}$

es el esfuerzo de corte sobre ambas curvas. A continuación se muestra un esquema de lo mencionado anteriormente:

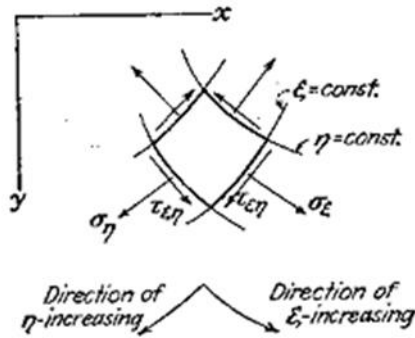


Figura 4.3: Componentes del esfuerzo en coordenadas elípticas.

A través de una serie de sustituciones de ecuaciones y de la utilización de potenciales complejos se llegan a las siguientes expresiones para una gama de casos generales.

$$\begin{aligned} \sigma_\xi + \sigma_\eta &= 2[\psi'(z) + \bar{\psi}'(\bar{z})] = 4\text{Re}(\psi'(z)), \\ \sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta} &= 2e^{2i\alpha}[\bar{z}\psi''(z) + \chi''(z)], \\ 2G(u_\xi - iu_\eta) &= e^{i\alpha} \left[\frac{3-\nu}{1+\nu}\bar{\psi}(\bar{z}) - \bar{z}\psi'(z) - \chi'(z) \right], \end{aligned} \tag{4.4}$$

en donde $\psi(z)$ y $\chi(z)$ son potenciales de esfuerzo en variable compleja con $z = c \cdot \cosh(\zeta)$ y con $\zeta = \xi + i\eta$, α es al ángulo que se forma entre la tangente de la curva $\eta = cte$ (en la dirección de ξ creciente) y el eje x.

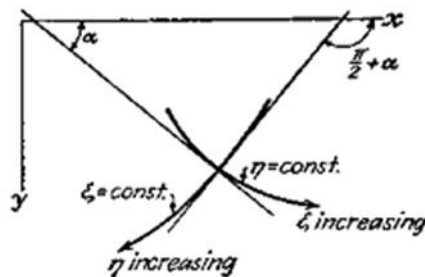


Figura 4.4: Definición del ángulo α .

A través de ciertos supuestos, condiciones de borde y substituciones, que no se muestran por brevedad aquí, se llega a que los potenciales complejos son:

$$\begin{aligned} 4\psi(z) &= Sc[e^{2\xi_0} \cosh(\zeta) + (1 - e^{2\xi_0 - 2i\beta})\sinh(\zeta)], \\ 4\chi(z) &= -Sc^2 \left[(\cosh(2\xi_0) - \cosh(2\beta))\zeta + \frac{1}{2} e^{2\xi_0} \cdot \cosh(2(\zeta - \xi_0 - i\beta)) \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Sustituyendo los potenciales en las ecuaciones (4.4) y tomando en cuenta que en el borde del agujero elíptico se tiene las siguientes condiciones $\xi = \xi_0$, $\sigma_\xi = 0$ y $\tau_{\xi\eta} = 0$, el componente σ_η queda expresado como:

$$(\sigma_\eta)_{\xi=\xi_0} = S \frac{\sinh(2\xi_0) + \cos(2\beta) - e^{2\xi_0} \cos(2(\beta - \eta))}{\cosh(2\xi_0) - \cos(2\eta)}. \quad (4.6)$$

Luego para el caso de interés en donde $\beta = \frac{\pi}{2}$, se tiene:

$$(\sigma_\eta)_{\xi=\xi_0} = Se^{2\xi_0} \left[\frac{\sinh(2\xi_0(1 + e^{-2\xi_0}))}{\cosh(2\xi_0) - \cos(2\eta)} - 1 \right]. \quad (4.7)$$

Si se evalúa η tal que $\cos(2\eta) = 1$, se obtiene el valor máximo del esfuerzo σ_η que equivale a la tensión en la punta del agujero elíptico. Luego de algunas manipulaciones se llega a:

$$(\sigma_\eta)_{\xi=\xi_0} = S \left(1 + 2 \frac{b}{a} \right), \quad (4.8)$$

donde a y b corresponden a los semi ejes menor y mayor respectivamente de la elipse.

Es importante notar que en la punta de la grieta elíptica el esfuerzo σ_η coincide con el esfuerzo σ_{22} de las coordenadas cartesianas, luego usando las siguientes igualdades $S = \sigma_\infty$ y $\sigma_\eta = \sigma_{22}$, el factor de concentración de esfuerzos evaluado en $x_1 = b$ (o $\eta = 0$) es:

$$\frac{\sigma_{22}}{\sigma_\infty} = 1 + 2 \frac{b}{a} \quad (4.9)$$

Para el cálculo de la deformación se utiliza la ecuación (2.13), vista en la sección 2 para materiales isotrópicos. En cuanto a los desplazamientos se utiliza la última

expresión que aparece en (4.4) y se evalúan por las derivadas de los potenciales de (4.5).

4.2 Placa con entalle hiperbólico bajo tracción

La solución de este problema de valor de frontera se describe en términos de coordenadas elípticas ξ y η al igual que el caso anterior. Como se trata de una placa con entalles de bordes hiperbólicos se tiene que $\eta = \eta_0$ es constante.

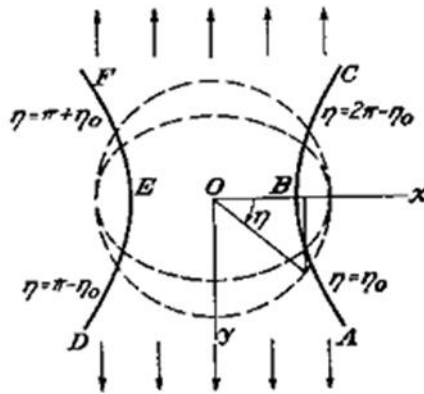


Figura 4.5: Placa con agujero elíptico y tensión uniforme.

Definiendo los siguientes potenciales complejos y sus constantes:

$$\begin{aligned} \psi(z) &= -\frac{1}{2}Ai\zeta, \\ \chi(z) &= -\frac{1}{2}Ai\zeta - Bci \cdot \sinh(\zeta), \\ B &= -A\cos^2(\eta_0), \\ A &= \frac{-\sigma_\infty L}{(\pi - 2\eta_0 + \sin 2\eta_0)}, \end{aligned} \tag{4.10}$$

y resolviendo el sistema de ecuaciones (4.4), es posible obtener los campos de deformación, de esfuerzo y de desplazamiento en toda la placa (ver [18]).

La solución es una expresión larga que depende de ξ, η, η_0, a y T (ver [19]). Estos dos últimos parámetros corresponden respectivamente al semi eje menor (a) de la hipérbola y el segundo parámetro (T) es la tensión promedio en la cintura de la placa.

Para materiales isotrópicos H. Neuber (1933) propuso la siguiente solución para el borde hiperbólico de la placa en la línea $y = 0$ (en este caso se tiene que $\sigma_\eta = 0$):

$$(\sigma_\xi)_{\xi=0} = 2C \cdot \csc^3(\eta) \cdot (\sin^2(\eta) + \sin^2(\eta_0)), \quad (4.11)$$

$$C = \frac{(T \cos(\eta_0))}{2a(\pi - 2\eta_0 + \sin(2\eta_0))},$$

Evaluando en el punto más interno en la muesca hiperbólica es decir para $x = a$ se obtiene el esfuerzo máximo es:

$$(\sigma_\xi)_{max} = \frac{(2T \cot(\eta_0))}{a(\pi - 2\eta_0 + \sin(2\eta_0))}. \quad (4.12)$$

Reemplazando en la ecuación anterior las siguiente expresión relacionada con la geometría usada

$$T = 2a\sigma_\infty, \quad (4.13)$$

y tomando en cuenta que el esfuerzo σ_ξ en el punto más interno del borde hiperbólico equivale a la componente σ_{22} en las coordenadas cartesianas, se tienen que el factor de concentración de esfuerzos equivale a:

$$\frac{\sigma_{22}}{\sigma_\infty} = \frac{(4 \cot(\eta_0))}{(\pi - 2\eta_0 + \sin(2\eta_0))}. \quad (4.14)$$

Para el cálculo de la deformación se utiliza la ecuación (2.13), vista en la sección 2 para materiales isotrópicos. En cuanto a los desplazamientos se utiliza la última expresión que aparece en (4.4) y se evalúan por las derivadas de los potenciales de (4.5).

4.3 Placa seminfinita bajo carga de compresión puntual

Sea una fuerza puntual $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ (por unidad de largo en la dirección x_3) aplicada en el origen del sistema de coordenadas cartesianas. Para poder resolver este problema se utiliza los siguientes potenciales complejos (ver, por ejemplo, [20]):

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= -\frac{(F_1+iF_2)}{2\pi(1+\kappa)}\ln(z), \\ \psi(z) &= -\frac{\kappa(F_1-iF_2)}{2\pi(1+\kappa)}\ln(z),\end{aligned}\tag{4.15}$$

en donde $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$. Tras resolver las ecuaciones de equilibrio y algunos pasos adicionales que no se mostrarán aquí se obtiene las siguientes distribuciones de esfuerzo en coordenadas polares ($x_1 = r\cos\theta, x_2 = r\sin\theta$):

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -\frac{(\kappa+3)}{(\kappa+1)}\frac{(F_1\cos\theta+F_2\sin\theta)}{2\pi r}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{(\kappa-1)}{(\kappa+1)}\frac{(F_1\cos\theta+F_2\sin\theta)}{2\pi r}, \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{(\kappa-1)}{(\kappa+1)}\frac{(F_1\sin\theta-F_2\cos\theta)}{2\pi r}.\end{aligned}\tag{4.16}$$

Transformando estos resultados al sistema de coordenadas Cartesiana se tiene que las componentes del esfuerzo son:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= -\frac{F_1(1+\nu)}{4\pi}\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\left(\frac{2}{1+\nu} + \frac{x_1^2-x_2^2}{x_1^2+x_2^2}\right) - \frac{F_2(1+\nu)}{4\pi}\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}\left(\frac{2\nu}{1+\nu} + \frac{x_1^2-x_2^2}{x_1^2+x_2^2}\right), \\ \sigma_{22} &= -\frac{F_1(1+\nu)}{4\pi}\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\left(\frac{2\nu}{1+\nu} - \frac{x_1^2-x_2^2}{x_1^2+x_2^2}\right) - \frac{F_2(1+\nu)}{4\pi}\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}\left(\frac{2}{1+\nu} - \frac{x_1^2-x_2^2}{x_1^2+x_2^2}\right), \\ \sigma_{12} &= -\frac{F_1(1+\nu)}{4\pi}\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}\left(\frac{1-\nu}{1+\nu} + \frac{2x_1^2}{x_1^2+x_2^2}\right) - \frac{F_2(1+\nu)}{4\pi}\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\left(\frac{1-\nu}{1+\nu} - \frac{2x_2^2}{x_1^2+x_2^2}\right).\end{aligned}\tag{4.17}$$

Y las componentes del desplazamiento son:

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{F_1(1+\nu)}{8\pi G}\left(\frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2} - \frac{3-\nu}{1+\nu}\ln(\sqrt{x_1^2+x_2^2})\right) + \frac{F_2(1+\nu)}{8\pi G}\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}, \\ u_2 &= \frac{F_1(1+\nu)}{8\pi G}\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2} + \frac{F_2(1+\nu)}{8\pi G}\left(\frac{x_2^2}{x_1^2+x_2^2} - \frac{3-\nu}{1+\nu}\ln(\sqrt{x_1^2+x_2^2})\right).\end{aligned}\tag{4.18}$$

Tomando la componente 22 de la distribución de esfuerzos y evaluando para $F_1 = 0$ y $x_1=0$, se tiene la siguiente expresión:

$$\sigma_{22} = -\frac{F_2(3+\nu)}{4\pi} \frac{1}{x_2}. \quad (4.19)$$

Si se observa esta última ecuación se podrá ver que al evaluar en el punto donde es aplicada la carga, es decir en el origen del eje Cartesiano, el esfuerzo tiende al infinito, por lo tanto para poder comparar con los resultados numéricos, no se evalúa en el origen del sistema de referencia, sino más bien se evalúa en una distancia equivalente al largo del elemento finito en donde es aplicada la fuerza puntual. Por lo tanto evaluando para $x_2 = l_e$, con l_e como la distancia o largo del elemento finito, y para $\sigma_\infty = \frac{-F_2(3+\nu)}{4\pi L}$ se tiene que el factor de concentración para este caso es:

$$\frac{\sigma_{22}}{\sigma_\infty} = \frac{L}{l_e}, \quad (4.20)$$

análogamente para la componente 11, se evalúa para $F_1 = 0$ y $x_1=0$, y se tiene:

$$\sigma_{11} = -\frac{F_2(\nu-1)}{4\pi} \frac{1}{x_2}. \quad (4.21)$$

Evaluando para el esfuerzo en el infinito y para el largo del elemento se obtiene que la concentración es:

$$\frac{\sigma_{11}}{\sigma_\infty} = \frac{L}{l_e}. \quad (4.22)$$

Para el cálculo de la deformación se utiliza la ecuación (2.13), vista en la sección 4 para materiales isotrópicos.

En cuanto a los desplazamientos, se busca encontrar una expresión para la componente del desplazamiento u_2 en la línea $x_1 = 0$, $0 < x_2 < L$ y para la componente u_1 en la línea $x_2 = 0$, $0 < x_1 < L$, de esta manera se tiene:

$$u_1 = 0, \quad (4.23)$$

$$u_2 = \frac{F_2(1+\nu)}{8\pi G} \left(1 - \frac{(3-\nu)}{(1+\nu)} \ln(x_2) \right).$$

4.4 Inclusión esférica

Por simplicidad en el caso de la inclusión esférica no se intentó buscar o usar soluciones exactas para el caso lineal elástico; en su lugar se comparó los resultados del uso de las ecuaciones constitutivas no lineales con el caso lineal elástico resolviendo este último por medio del método de elementos finitos también.

Se definieron los siguientes valores para las propiedades de la solución lineal, módulo de Young $E = 323.387.085$ [Pa] y coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$. Se definió que para la solución lineal la inclusión lineal posea un módulo de Young igual al doble del módulo de Young que posee la matriz.

Capítulo 5

Metodología

En esta sección se muestran y explican los programas utilizados así como también la metodología implementada para obtener resultados confiables, además se muestran la extracción de resultados realizadas para cada problema, para cumplir los objetivos planteados, así como también los parámetros dimensionales utilizados en cada problema de valor de frontera.

5.1 Parámetros dimensionales de los problemas

A continuación se muestran los parámetros dimensionales más importantes de cada problema y cuáles de ellos son los que varían según cada geometría.

Para la placa con agujero elíptico se tiene la siguiente geometría:

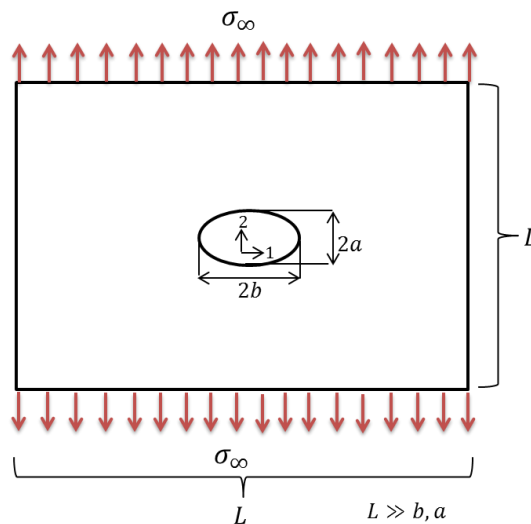


Figura 5.1: Parámetros placa con agujero elíptico.

Para este problema los parámetros más importantes son el largo (L) y los semiejes de la elipse (a, b). En esta tesis se considerarán como valores fijos L y b , y el valor que

varía para cada geometría es a , el cual se obtiene tras definir un valor a la razón entre el semieje menor y el mayor.

Para la placa con entalles hiperbólicos se tiene la siguiente geometría:

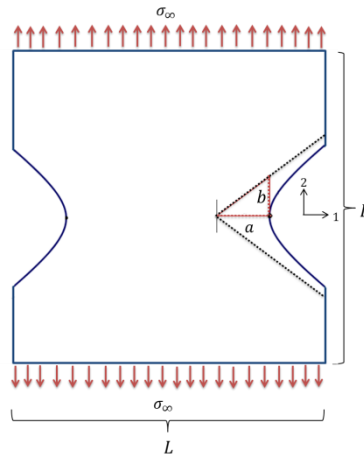


Figura 5.2: Parámetros placa con entalle hiperbólico.

Al igual que en el problema de la placa elíptica para esta tesis se asume que los valores fijos de esta geometría son el largo (L) y el semieje mayor (b), y el parámetro que varía es el semieje menor (a). La variación de este valor se hace mediante la elección de la pendiente de la asíntota de la hipérbola.

Para el problema de la placa seminfinita con carga puntual, se tiene la siguiente geometría:

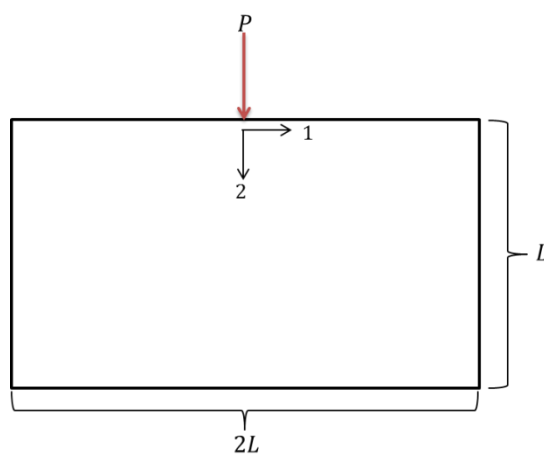


Figura 5.3: Parámetros placa seminfinita.

En este problema no se estudian otros casos, pero si es importante determinar un largo “ L ” adecuado para simular de forma aproximada un medio semi-infinito.

Para el último problema se tiene la siguiente geometría:

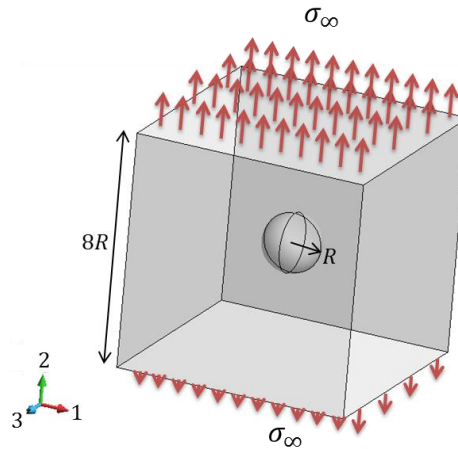


Figura 5.4: Parámetros cubo con inclusión esférica.

En donde el parámetro más importante es el radio de la esfera. Este problema no fue estudiado con tanto detalle para esta tesis, de modo que se consideró solo un ejemplo para la geometría.

5.2 Programas utilizados

Para resolver y modelar los problemas se utilizó un código de elementos finitos programando en Matlab por el profesor *Alejandro Ortiz Bernardin* y que fue modificado para el desarrollo de los diversos problemas presentados. Las mallas con las condiciones de borde fueron realizadas en el programa GID¹, un pre y pos procesador que se puede encontrar en la web. El programa Matlab tiene como input un “*archivo de cálculo*” (.txt) que contiene las coordenadas de la malla, la conectividad de los nodos, la cantidad de elementos, su conectividad elemental, las condiciones de borde, el esfuerzo aplicado, el número de pasos para el cálculo incremental de las cargas, y las condiciones para la solución del Newton-Rhapson, y entrega como resultado archivos legibles por GID y un txt con el valor de los

¹ www.gidhome.com

esfuerzos y deformación de cada elemento por cada paso. Con estos archivos se puede explorar los campos y analizar concentraciones de solicitaciones.

En el programa GID se hicieron las mallas para las geometrías estudiadas. Este programa permite la creación de mallas del tipo estructuradas o no estructuradas [21]. La primera consiste en un entramado ordenado, bajo ciertos criterios de mallado, por ejemplo se pueden establecer tamaños de líneas, superficie y volúmenes o se puede establecer la cantidad de divisiones en ellos. La segunda consiste en una malla generada al azar, carente de orden, las opciones generales son mallar alrededor de una línea o punto y mallar una superficie o volumen con un tamaño de elemento dado. También ofrece la opción de realizar concentraciones de malla, en elementos o puntos, además de otras alternativas relevantes para el remallado y el ajuste de su tamaño.

Una técnica fundamental que se realiza para refinar zonas donde las concentraciones de esfuerzos y deformaciones son altas, y que se utiliza especialmente en los problemas de mecánica de fractura, es crear regiones de mallado similares a la geometría de estudio; esta región generalmente tiene el tamaño del área de concentración de las solicitaciones y en ella se realiza el refinado de la malla. En esta tesis se utilizó esta técnica en zonas importantes donde se apreciaba altas concentraciones de esfuerzos y deformaciones. En la Figura 5.5 que se muestra a continuación se puede verificar esto:

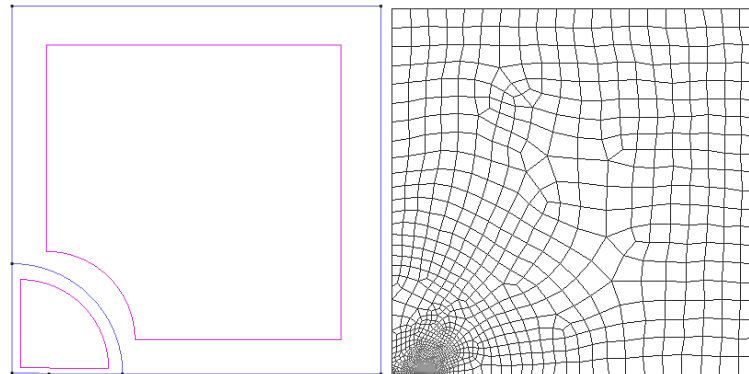


Figura 5.5: Zona de refinado. Caso Placa con agujero elíptico.

Otro componente importante dentro de este programa es la opción de verificar la calidad de malla. Éste dispone de 7 criterios que se describen a continuación:

- *Mínimo ángulo:* El criterio de calidad consiste en evaluar el ángulo mínimo de elementos de superficie y el ángulo diedro mínimo de elementos de volumen.

Esto significa que los elementos con un ángulo pequeño se consideran que son de una calidad peor que aquellos con ángulos más grandes.

- *Máximo ángulo:* Este criterio de calidad consiste en evaluar el ángulo máximo para cada elemento. Los elementos con ángulos más grandes se consideran peor. Por lo general, el criterio del ángulo mínimo es bueno para elementos tipo triángulos y tetraedros y el criterio de máximo ángulo es bueno para elementos tipo cuadriláteros y hexaedros.
- *Volumen de elemento:* Este criterio de calidad consiste en revisar el tamaño de volumen de los elementos (distancia de líneas en el caso 1D, el área de las superficies en el caso 2D y de volumen para volúmenes en el caso 3D). Elementos con "volumen" pequeños se consideran peores.
- *Mínimo Arista:* Este criterio de calidad se basa en revisar el tamaño del borde más pequeño de cada elemento. Los elementos con bordes más pequeños se consideran peores.
- *Máxima Arista:* Este criterio de calidad considera la revisión del tamaño del borde más grande de cada elemento de la malla. Los elementos con bordes más grandes se consideran peores.
- *Calidad de forma:* Este criterio de calidad consiste en medir la semejanza de los elementos de la malla con una referencia (un triángulo equilátero en el caso de los triángulos, un tetraedro regular en el caso de tetraedros, un cuadrado en el caso de los cuadriláteros y un cubo en el caso de hexaedros). Su valor es 1 para un elemento perfecto (la referencia), y que disminuye a medida que el elemento se vuelve peor. Si se llega a una cifra negativa, significa que el elemento tiene un Jacobiano negativo en algún momento, producto de que éste posee alguna forma muy irregular. Si se llega a un caso así, la malla está mala y no debe ser utilizada.

La expresión matemática de esta medida de calidad para cada tipo de elemento se describe a continuación:

- *Elemento tipo Triángulos:* La calidad de forma (q) para triángulos es medido a través de la siguiente expresión:

$$q = \frac{4\sqrt{3} \cdot A_r}{\sum_{i=1}^3 l_i^2}, \quad (5.1)$$

donde A_r es el área del triángulo de referencia y l_i son los largos de las aristas de éste.

- *Elementos tipo Tetraedros*: La calidad de forma (q) para tetraedros se calcula a través de la siguiente expresión:

$$q = \frac{6\sqrt{2} \cdot V_r}{\sum_{i=1}^6 l_i^3}, \quad (5.2)$$

donde V_r es el Volumen del tetraedro de referencia y l_i son los largos de las aristas de éste.

- *Elementos tipo Cuadriláteros*: La calidad de forma (q) para cuadriláteros se calcula como la peor calidad de forma del nodo “ n ” en la malla. La calidad de este nodo (q_n) se obtiene como:

$$q_n = \frac{2 \cdot A_n}{l_1^2 + l_2^2}, \quad (5.3)$$

donde l_1 y l_2 son los largos de las líneas concurrentes al nodo, y A_n , corresponde al área del paralelogramo ficticio que se forma con estas líneas.

- *Elemento tipo Hexaedros*: La calidad de forma (q) para hexaedros se calcula como la peor calidad de forma del nodo “ n ” en la malla. La calidad de este nodo (q_n) se obtiene como:

$$q_n = \frac{V_n}{\left(\frac{(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^2}{3} - (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) + (V_n)^{4/3} \right)^{\frac{3}{4}}}, \quad (5.4)$$

donde l_1 , l_2 y l_3 son los largos de los bordes concurrentes al nodo. A_1 , A_2 , A_3 son las áreas de las caras concurrentes al nodo y V_n es el volumen de un paralelepípedo ficticio, que se forma con estas caras concurrentes.

- *Mínimo Jacobiano*: Este criterio de calidad consiste en buscar el mínimo Jacobiano entre todos los Jacobianos calculados en cada punto de Gauss del

elemento. Si hay elementos con jacobianos negativos, la malla se considera como mala.

El programa ofrece además 2 formas para visualizar la calidad de malla: la Normal y la Acumulada. La primera consiste en mostrar en el grafico el número de elementos que poseen exactamente el criterio especificado, la segunda consiste en mostrar en el grafico los elementos que poseen el criterio especificado o aquellos que poseen un valor menor.

En el desarrollo de esta tesis se verificó el criterio de calidad de forma y se graficaron de manera acumulada. A continuación se muestra un ejemplo de este tipo de gráficos.

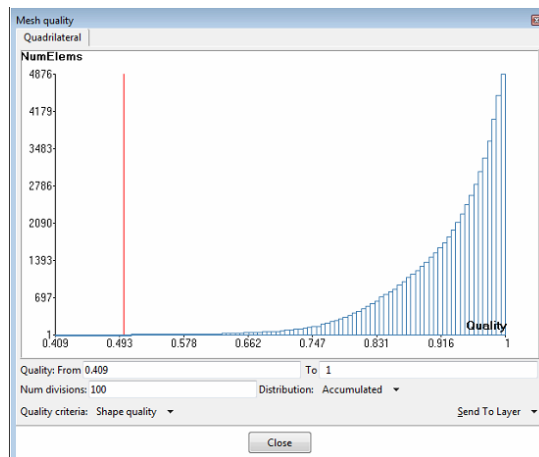


Figura 5.6: Calidad de forma.

El programa GID permite además la creación de “problem-Types” esto es una interfaz de usuario en el cual se puede colocar los datos del problema a resolver, como:

- Condiciones iniciales.
- Condiciones de borde.
- Parámetros para los “solvers”.
- Materiales.
- Unidades de Medida.
- Intervalo para las soluciones en pasos.

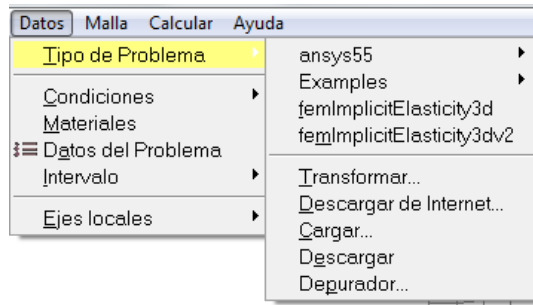


Figura 5.7: Problem-types.

Para los problemas de valor de frontera estudiados en esta tesis, el problema-type (*femImplicitElasticity*) contiene la siguiente información:

- Condiciones de borde.
 - Restricción de desplazamiento en nodos.
 - Cargas distribuidas (borde de elementos o en superficie) y puntuales (nodos).
 - Tipo de elasticidad, lineal o No lineal (elementos).
- Parámetros para resolver el Newton Rhapsion.
 - Tolerancia.
 - Número máximo de iteraciones dentro del Newton Rhapsion.
 - Numero de pasos.
- Tipo de Materiales.
 - Valor de los parámetros.

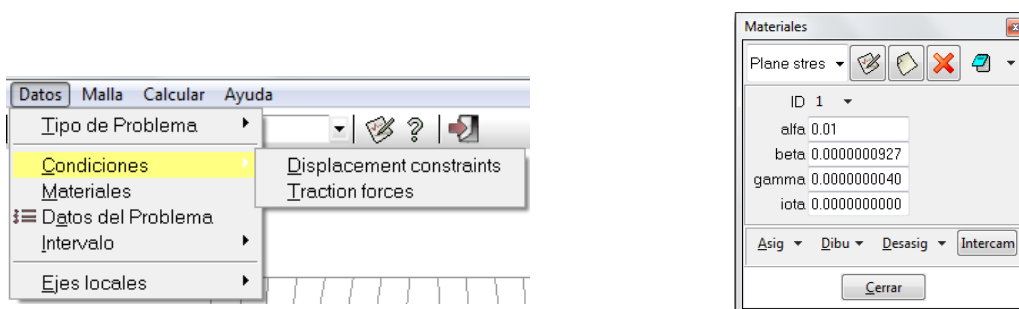


Figura 5.8: Tipo de condiciones y materiales.

Ya realizada la malla, verificada su calidad, se procede a imponer todas las opciones del problema-type. Luego de haber impuesto todas estas condiciones y valores de parámetros, se continua con la generación del archivo de cálculo, el cual como se mencionó anteriormente es el input para el programa en Matlab.

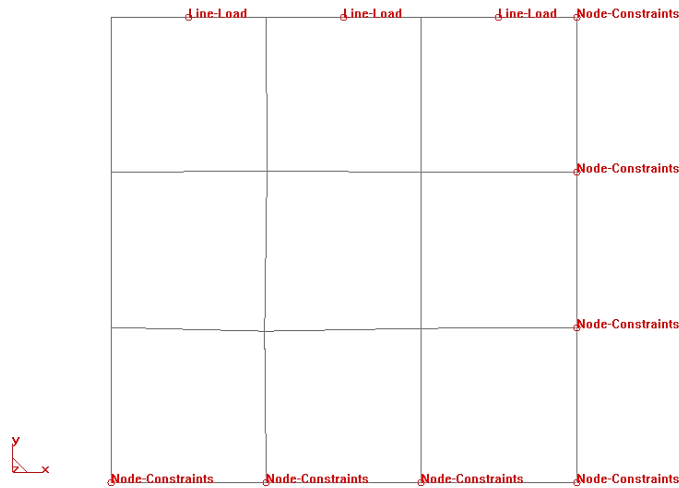


Figura 5.9: Condiciones de borde en una geometría.

Después de dejar correr el programa en Matlab, se obtienen los resultados los cuales son explorados en GID. El post-procesador del programa permite obtener diagramas de contorno de desplazamientos, campos de esfuerzos y deformación, así como también generar gráficos, en puntos, en líneas y superficies, dentro de la geometría estudiada.

5.3 Extracción de datos

La extracción de datos realizada fue principalmente sobre el punto de concentración de esfuerzos y deformaciones. Se obtenían a nivel puntual o lineal, es decir se buscaba el perfil desde el punto de concentración hasta otro punto lejano.

Para poder realizar comparaciones entre problemas con geometrías y condiciones de contorno diferente (condiciones de Neuman), es necesario obtener valores adimensionales con los cuales poder comparar. Estos valores se definen a continuación:

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_{ij} &= \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{\infty}}, \\
 \bar{\varepsilon}_{ij} &= \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_{\infty}}, \\
 \bar{x}_i &= \frac{x_i - b}{b}, \\
 \bar{u}_i &= \frac{u_i}{b},
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

donde σ_{ij} , ε_{ij} , x_i y u_i corresponden a componentes del esfuerzo, la deformación, la posición en el lugar donde se extraen los datos y las componentes del desplazamiento. En cuanto a σ_∞ , ε_∞ y b corresponden al esfuerzo y la deformación muy lejos de la zona de interés y a una longitud característica que depende de cada problema.

Estos valores adimensionales sirven para comparar los resultados para los diversos casos que se realizan y para llevar a cabo la metodología que se describe a continuación.

5.4 Metodología implementada

Dado que se está estudiando una ecuación constitutiva nueva, en el contexto de algunos problemas de valor de frontera, para los cuales no se tienen soluciones exactas, es necesario considerar una metodología especial para los métodos numéricos para asegurar resultados confiables.

Para cada problema y caso se realizaron los siguientes pasos:

1. Establecer valores preliminares de geometría, esfuerzo y pasos.
2. Dibujo de Geometrías y Generación de mallas gruesas en GID.
3. Determinar punto de control y concentración de solicitaciones.
4. Realizar Prueba de esfuerzo (malla gruesa).
5. Realizar Prueba de pasos (malla gruesa).
6. Selección de Esfuerzo y Pasos.
7. Realizar Prueba de Geometría.
8. Realizar Prueba de Malla.

El significado de estos pasos se detalla a continuación.

Geometría preliminar, esfuerzo y pasos

En este primer paso se selecciona un valor preliminar relacionado con la geometría del modelo (por ejemplo, un largo L), un esfuerzo aplicado (σ_∞) y un número de pasos (step), con el fin de fijar una cota superior para estos valores, para luego determinarlos de manera más precisa con otros estudios que se realizan en los pasos siguientes. Con los parámetros elegidos se verifica la convergencia para el caso de

tracción uniaxial de 1 elemento 2D. Se busca graficar la deformación (ϵ_{22}) versus el esfuerzo (σ_{22}) en el nodo que presenta más restricciones y comprobar que se logre una curva como la se muestra en la Figura 2.2, así como también observar que el elemento muestra una contracción lateral.

En la siguiente figura se muestra las condiciones de borde usadas, y el nodo en el cual se grafica los resultados:

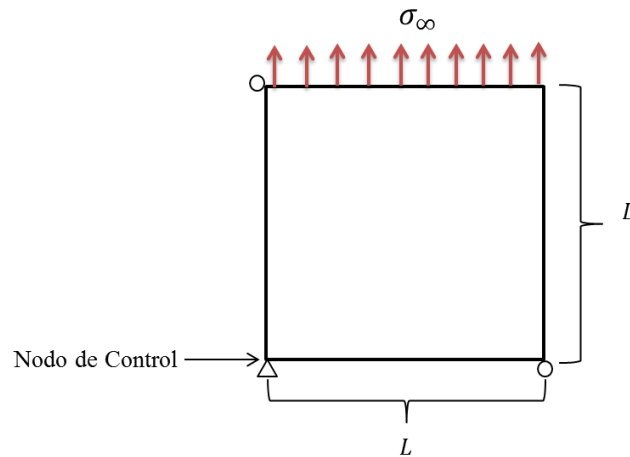


Figura 5.10: Condiciones de borde 1 elemento bajo tracción uniaxial.

Al usar los siguientes parámetros: $L = 1 [m]$, $step = 1.000$ y $\sigma_{\infty} = 10^8 [Pa]$ se obtienen los siguientes resultados:

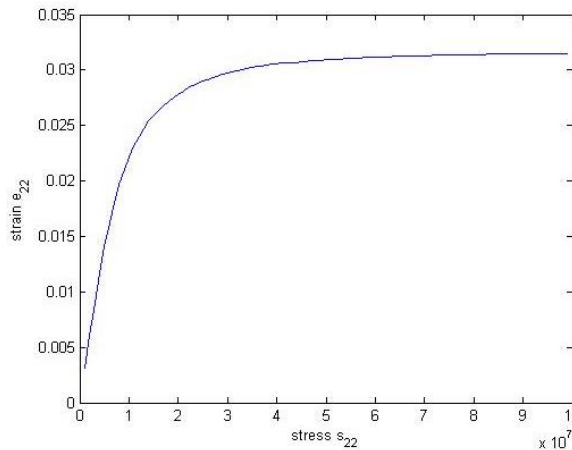


Figura 5.11: Curva ϵ_{22} versus σ_{22} para 1 elemento.

Se observa que las deformaciones presentan un límite para su magnitud para esfuerzos elevados.

Al graficar los desplazamientos del elemento se obtiene la siguiente figura:

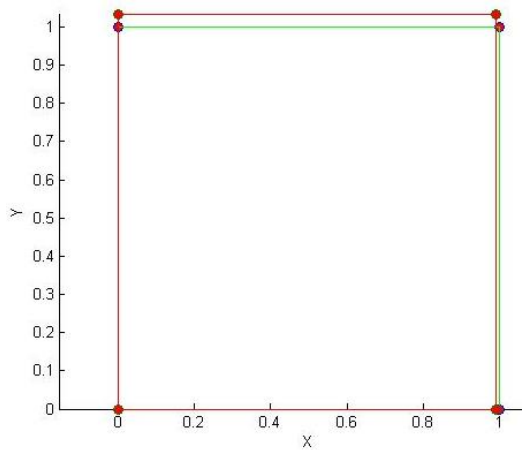


Figura 5.12: Desplazamientos 1 elemento caso 2D.

En verde se muestra el elemento inicial antes de aplicar el esfuerzo y en rojo se muestra el elemento ya deformado en el último paso. De la figura se puede apreciar el efecto de la contracción en el eje X , producto de la tracción en Y .

Es importante indicar que estos valores solo corresponden a una cota máxima de los parámetros a seleccionar para cada problema. Para obtener los valores finales es importante seguir los demás pasos en esta metodología.

Generación de Geometrías y de mallas gruesas en GID

En este segundo paso, se dibujan las geometrías a estudiar y se generan mallas gruesas (sin refinar). Para el problema de la placa con agujero elíptico la geometría ya estaba definida según la publicación [5] por lo tanto se mantuvo ese valor, $L = 1 [m]$, para el segundo problema también se utilizó dicha dimensión y quedó fijada, en cambio para los 2 últimos problemas se usó este valor al inicio, pero quedó sujeta a la prueba de Geometría. Las mallas utilizadas fueron gruesas y no estructuradas, como se muestra a continuación:

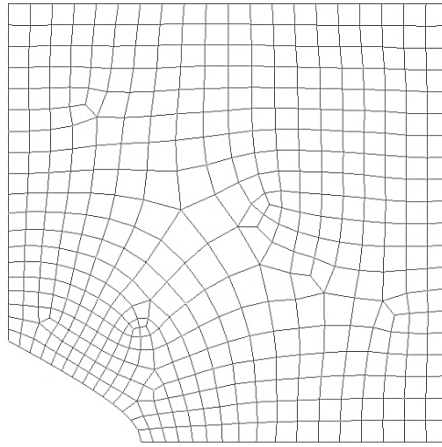


Figura 5.13: Malla gruesa, sin refinar para la placa con agujero elíptico (cuarta parte de la placa).

Determinar punto de control y concentración de solicitaciones

En este tercer paso, con las mallas generadas, se procede a crear un archivo de cálculo para luego utilizarlo en el programa creado en Matlab. Los resultados obtenidos se observan en el post-procesador GID, donde la idea fundamental es inspeccionar visualmente el lugar donde se concentra el esfuerzo y la deformación para establecer en éste lugar el punto de control para diferentes pruebas como la de malla.

Generalmente el punto de control es el lugar donde se concentran los esfuerzos y las deformaciones. Para cada problema de valor de frontera, este punto coincidía con lo mencionado anteriormente, a continuación se muestra un ejemplo de ello:

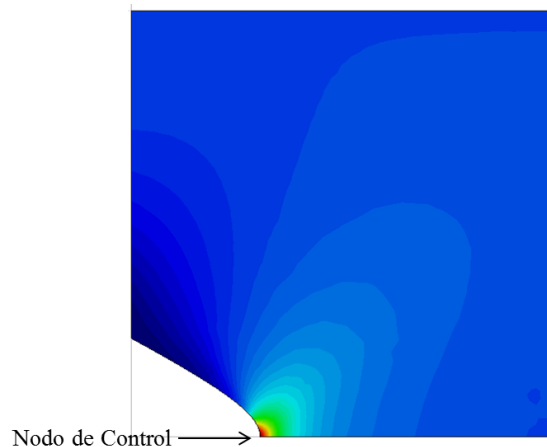


Figura 5.14: Punto de control.

Prueba de Esfuerzo aplicado

En este cuarto paso se busca determinar o simplemente encontrar una cota más baja para el valor del esfuerzo aplicado, ya que numéricamente cada geometría o problema presentado posee un esfuerzo máximo con el cual puede converger, sobrepasando este valor se pierde la convergencia, e incluso se comprobó empíricamente que este número, puede bajar al ir refinando la malla. Esto se podría deber a que con cargas aplicadas más altas, las concentraciones y los errores se elevan demasiado, afectando la convergencia del programa.

Para esta prueba se utiliza una malla gruesa “Fija”, y se grafica para diversas cargas aplicadas, la curva de la deformación (ϵ_{22}) versus el esfuerzo (σ_{22}) normalizados, en el nodo de control (por cada paso). La idea fundamental es obtener una curva similar a la Figura 5.11 (curva no lineal), cuando esto se logra es conveniente escoger el esfuerzo aplicado anterior como la nueva cota máxima a utilizar, producto de que, como se mencionó anteriormente, al ir refinando la malla es necesario disminuir la carga aplicada para mantener la convergencia. También es importante que al visualizar el campo de solicitaciones en el programa GID se vea una concentración en el punto de control, si ésta no se halla en el nodo, la carga usada no sirve.

A continuación se muestra un ejemplo de esto para el caso de la placa con agujero elíptico baja tracción. En ella se observa como para un esfuerzo de $\sigma_{\infty} = 1 \cdot 10^7 [Pa]$ ya se obtiene la curva deseada, por lo tanto es mejor fijar la cota con $\sigma_{\infty} = 1 \cdot 10^6 [Pa]$ para no tener problemas de convergencia al ir refinando la malla. Luego con el fin de no disminuir en gran cantidad el esfuerzo aplicado y evitar perder así la curva deseada, se toma como cota inferior o valor mínimo para el esfuerzo aplicado $\sigma_{\infty} = 1 \cdot 10^5 [Pa]$.

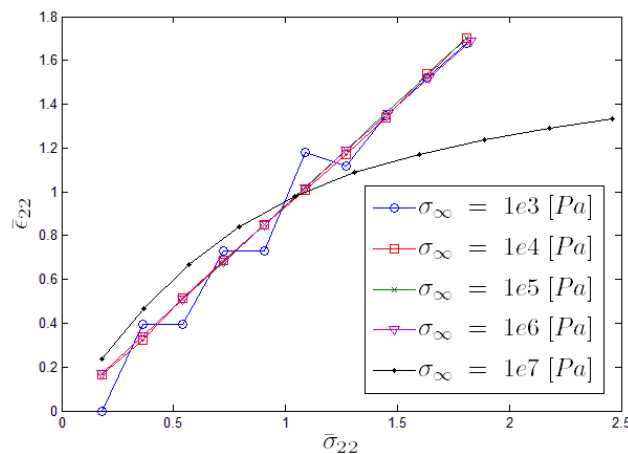


Figura 5.15: Prueba de esfuerzo aplicado.

Prueba de Pasos

En este quinto paso, se usa la misma malla gruesa y la cota máxima de esfuerzo encontrada en el paso anterior, y se va extrayendo datos y graficando el esfuerzo y la deformación en el punto de control seleccionado, para diversos pasos de la carga (step). Luego cuando el comportamiento de ϵ_{22} y σ_{22} es aproximadamente constante, se escoge dicho número de “pasos” como cota mínima.

Se toma este valor como cota máxima, ya que se comprobó empíricamente que al ir refinando más las mallas en las geometrías era necesario bajar esta cantidad de pasos para asegurar la convergencia, especialmente si la geometría estudiada provocaba elevadas concentraciones de esfuerzo. Se esperaría que para asegurar la convergencia la acción acertada y adecuada sería aumentar la cantidad de pasos, es decir la acción contraria, pero aun así se observó empíricamente en el problema de placa con agujero elíptico bajo tracción y el problema de placa con entalles de perfil hiperbólico bajo tracción, la convergencia se veía afectada por el uso de una cantidad de pasos elevado. Esta situación se podría deber por las altas concentraciones que generan las geometrías estudiadas y la cantidad de errores que vienen de utilizar tantas iteraciones. A continuación se muestra un ejemplo de la prueba de pasos:

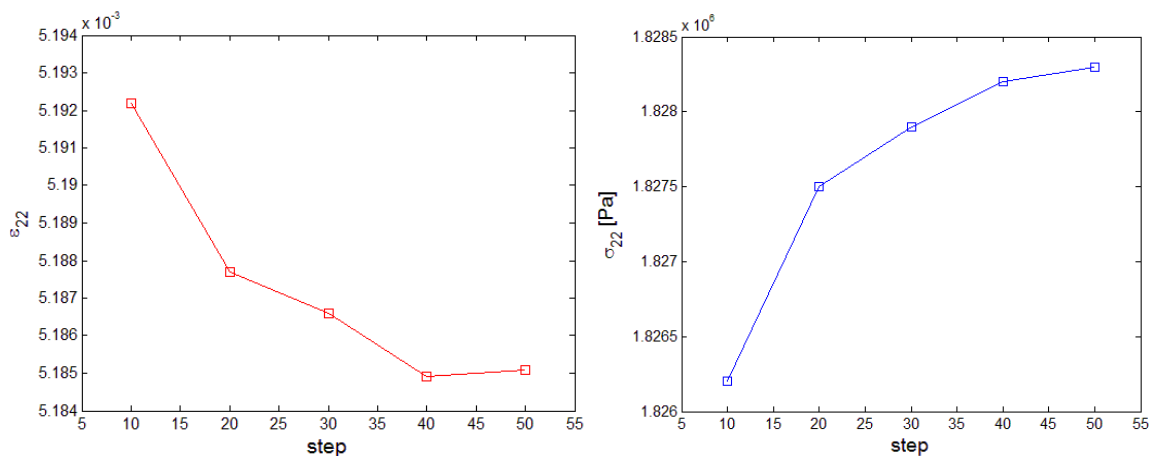


Figura 5.16: Ejemplo de prueba de pasos caso $a/b=1/3$ placa con agujero elíptico.

Selección de Esfuerzo y pasos Aplicados

En este sexto paso se selecciona el esfuerzo lejano a aplicar y los pasos a utilizar en el problema, teniendo en cuenta las cotas máximas encontradas en las pruebas

anteriores. Luego estos valores se van ajustando de acuerdo a la geometría y al tipo de malla.

Si la geometría del problema es un generador de altas concentraciones de esfuerzo, tanto la carga aplicada como los pasos utilizados deben disminuir por problemas con la convergencia. Lo mismo ocurre cuando el refinado es muy fino.

Prueba de Geometría

La prueba de geometría se realiza generalmente para problemas en donde se tiene un medio seminfinito. Para realizarla se llevan a cabo diversas geometrías y se les aplican mallas con densidades iguales en el sector de refinado (concentración de esfuerzos), luego se determina el esfuerzo y la deformación en el punto de control seleccionado en los pasos anteriores.

Cuando los valores de esfuerzo y deformación son aproximadamente constantes para las geometrías estudiadas, entonces a partir de la dimensión donde ocurre esta situación se asume que los valores encontrados son confiables. A continuación se muestra una prueba de geometría para el caso de la placa seminfinita.

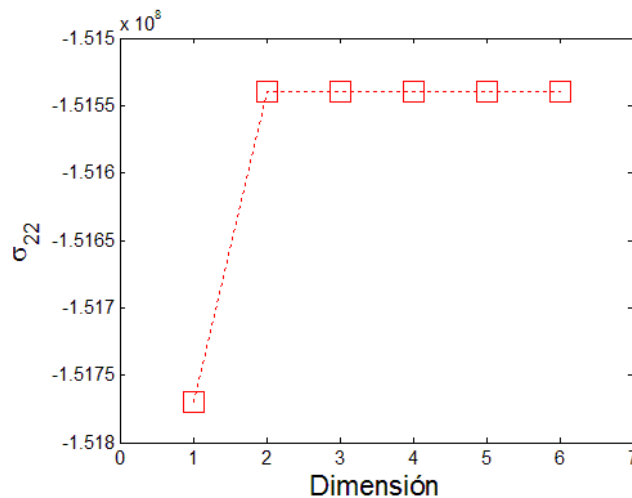


Figura 5.17: Ejemplo prueba de geometría problema placa semi-infinita bajo carga puntual.

Prueba de Malla

Para cada problema de valor de frontera se realiza una prueba de malla. Esta consiste en generar diversas mallas cada vez más refinadas y extraer valores del esfuerzo y la deformación nominales en el punto de control, para luego compararlas y graficarlas en función del Logaritmo de los grados de libertad (DOF). Cuando se alcanza un valor

constante en la curva de los parámetros medidos, entonces se asume que dicha malla es la que entrega valores confiables. A continuación se muestra un ejemplo de la gráfica de prueba de malla.

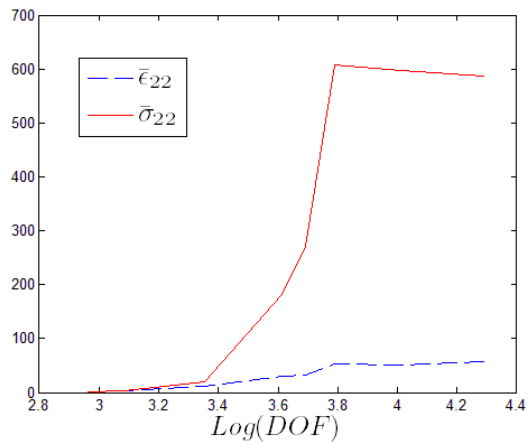


Figura 5.18: Prueba de malla problema placa con agujero elíptico caso $a/b=1/40$.

5.5 Tipo de Errores

El método de los elementos finitos proporciona una solución aproximada del problema de contorno analizado, en consecuencia dicha solución está afectada por diversas fuentes de error. A continuación se menciona algunos tipos de errores en la solución de elementos finitos que se han considerado en esta tesis:

1. Error de discretización.
2. Error de aproximación de la geometría.
3. Error en el cálculo de las integrales del elemento.
4. Errores en la solución del sistema de ecuaciones.
5. Errores asociados a la ecuación constitutiva.

El error es definido como la diferencia entre la solución exacta y la solución aproximada obtenida mediante el método de elementos finitos. Esta definición puede expresarse como:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_u(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_h(\mathbf{x}), \\
 \mathbf{E}_\varepsilon(\mathbf{x}) &= \varepsilon(\mathbf{x}) - \varepsilon_h(\mathbf{x}), \\
 \mathbf{E}_\sigma(\mathbf{x}) &= \sigma(\mathbf{x}) - \sigma_h(\mathbf{x}).
 \end{aligned}
 \tag{5.6}$$

La determinación del error local mediante las ecuaciones anteriores no es conveniente en general. Es mejor introducir normas del error que representen una cantidad escalar integral del mismo. A continuación presentamos algunos ejemplos de definiciones de normas del error, la primera es la norma “ L_2 ” del error que se define como

$$\|\mathbf{E}_u\| = \left(\int_{\Omega} \mathbf{E}_u \cdot \mathbf{E}_u d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.7)$$

la segunda es la norma energética del error que se define según la deformación y el Modulo de Young como

$$\|\mathbf{E}_\varepsilon\| = \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} E(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}_h(\mathbf{x}))^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.8)$$

Si bien las expresiones presentadas anteriormente sirven para calcular el error de problemas numéricos estándares, la definición mostrada no es aplicable en esta tesis, ya que no se ha encontrado una solución exacta para la ecuación constitutiva analizada.

En otras publicaciones relacionadas con el estudio de este tipo de ecuaciones constitutivas implícitas analizadas en esta tesis, se utiliza la definición del error (norma) para obtener una tasa de convergencia, la cual está relacionada con la malla más fina encontrada. Calcular este valor es importante ya que nos entrega la información del grado de influencia que poseen las mallas utilizadas en el problema estudiado; de esta manera si se define \mathbf{u}^f como el desplazamiento para la malla más fina y \mathbf{u}^i como el desplazamiento para una malla cualquiera pero menos fina se calcula el siguiente factor [14]:

$$f^i = \frac{\int_{\kappa_t(\mathcal{B})} \|\mathbf{u}^f - \mathbf{u}^i\| dv}{\int_{\kappa_t(\mathcal{B})} \|\mathbf{u}^f\| dv}, \quad (5.9)$$

que luego sirve para obtener la tasa de convergencia a través de la siguiente expresión:

$$R^i = \frac{f^i - f^{i-1}}{n_i - n_{i-1}}, \quad (5.10)$$

donde n_i es el número de nodos de la malla considerada. Por simplicidad (para evitar el cálculo de la integral) se calcula la tasa de convergencia en la línea en donde se espera la máxima concentración de esfuerzos, en varios ejemplos en la línea en $(x_1, 0)$. Por lo tanto se reemplaza $\|\mathbf{u}^f - \mathbf{u}^i\|$ y $\|\mathbf{u}^f\|$, por $|u_1^f(x_1, 0) - u_1^i(x_1, 0)|$ y $|u_1^f(x_1, 0)|$ respectivamente, y de esta manera se tiene que el factor de convergencia es:

$$f^i = \frac{\int_a^L |u_1^f(x_1, 0) - u_1^i(x_1, 0)| dx_1}{\int_a^L |u_1^f(x_1, 0)| dx_1}. \quad (5.11)$$

Si bien la expresión de la tasa de convergencia es relevante para determinar la influencia de la densidad de la malla, es importante hacer notar que es necesario primero obtener la malla más fina y por lo general al ir refinando cada vez más, no se sabe directamente si la solución numérica va mejorando o empeorando, por lo tanto determinar esta malla de referencia es difícil y requiere de otro tipo de pruebas. En esta tesis no se calculó esta tasa de convergencia, ya que al ir refinando más, se verificó que en algunos casos la solución variaba mucho o empeoraba, de esta forma se implementó una metodología con un conjunto de pruebas que asegurasen la convergencia y la fiabilidad de los resultados sin tener que usar la expresión (5.10).

Para los casos estudiados en esta tesis es importante reconocer que los posibles errores más relevantes aparte de estar relacionados con el “método utilizado”, están asociados principalmente a los supuestos tomados, como por ejemplo la de inversión de tensor de cuarto orden. A continuación se presentan los posibles errores que se pueden encontrar en el estudio de estos casos:

1. Discretización.
2. Inversión de matriz.
3. Aumento incremental.
4. Derivada del esfuerzo.
5. Tamaño de elemento de refinado.

Capítulo 6

Resultados y análisis

En esta sección se presenta los resultados obtenidos para cada problema de valor frontera, con su respectivo análisis y discusión.

6.1 Placa con agujero elíptico bajo tracción

El objetivo específico para el caso de la placa con agujero elíptico era graficar el esfuerzo (σ_{22}) y la deformación (ϵ_{22}) en la punta de la grieta elíptica, para diversos valores de la razón: $\frac{a}{b}$ (razón entre semiejes de la elipse) en particular cuando $a \ll b$, específicamente para 6 valores distintos y compararlos con la solución lineal. La idea principal es llegar a un tamaño de elipse similar a una grieta muy fina y graficar la concentración de esfuerzo y deformación nominal en la punta para así verificar si la deformación se mantiene acotada y pequeña, dentro de los valores que estipula la linealización. Se estudiaron las siguientes razones: 1/25, 1/30, 1/35, 1/40, 1/45, 1/50.

A continuación se muestran las condiciones de borde, las geometrías, las mallas empleadas, la medición de resultados, las pruebas de malla y los resultados para cada caso.

Modelación

En la figura se muestran las condiciones de borde del problema. Se asume simetría en el eje X y en el eje Y , por lo tanto se modela $\frac{1}{4}$ de toda la placa, de esta manera se aplica condición de rodillo en las caras que pertenecen a los ejes de simetría. La cara que corresponde a la grieta está libre de restricciones o de fuerzas. La carga aplicada σ_{∞} varía según la geometría de la grieta utilizada.

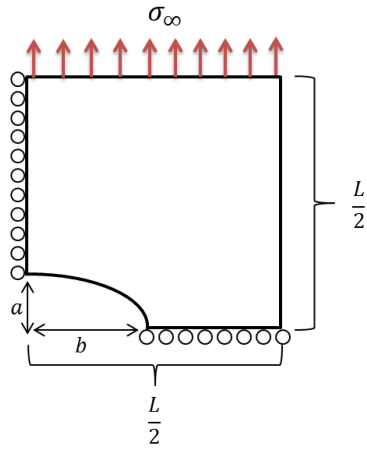


Figura 6.1: Condiciones de borde placa con agujero elíptico.

Geometrías

Detalles de las geometrías estudiadas se pueden observar en la siguiente figura, en donde se observa que son elipses muy angostas, casi simulando, en el límite, una grieta de espesor muy pequeño. El $\frac{1}{4}$ de placa utilizado es de largo $L = 1$ [m] y el valor fijado para el semi eje “b” es de 0.1 [m].

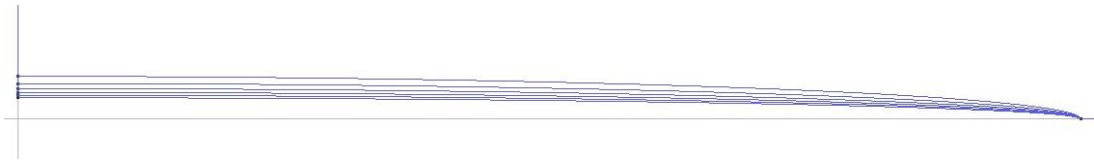


Figura 6.2: Geometrías utilizadas.

Mallas

La malla utilizada es la que se genera automáticamente en el programa GID. Se comienza a mallar desde la punta de la grieta elíptica con cierta concentración de elementos definida en el programa. El elemento de mayor tamaño posee un tamaño normalizado (con el largo de la placa) de 0.05 y el tamaño más pequeño es el que se va configurando, así como también su densidad.

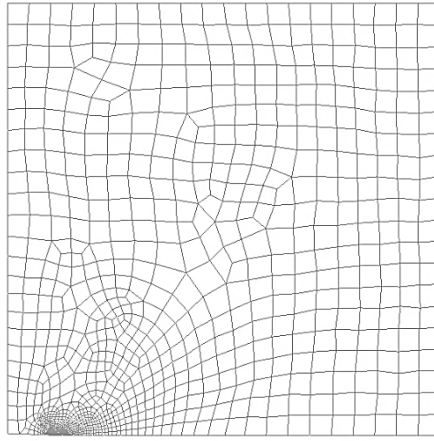


Figura 6.3: Esquema general problema de placa con agujero elíptico.

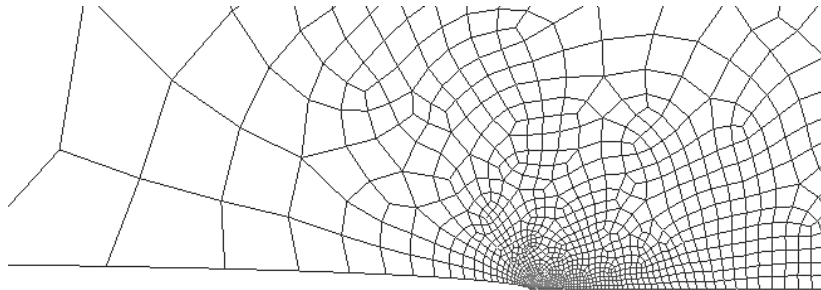
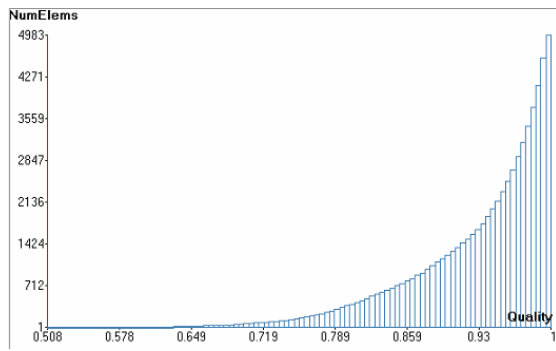
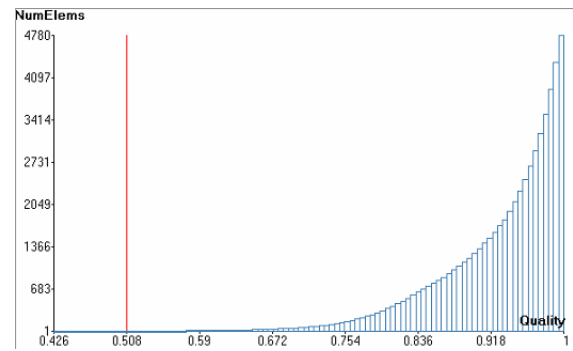


Figura 6.4: Detalle malla refinada cerca de la punta del agujero elíptico.

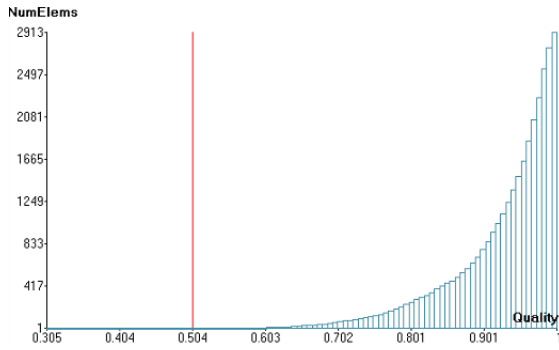
A cada geometría se le verificó su calidad de malla utilizando el criterio de forma, como se mencionó anteriormente en la sección 5.3. Se estableció que por lo menos más del 90% de los elementos tuviesen una calidad de forma mayor a 0.5. A continuación se muestran los gráficos acumulados de la calidad de malla, la línea roja vertical representa el límite que se fijó para medir el porcentaje de elementos con buena calidad, a la derecha de ella están aquellos con excelente calidad, a la derecha de ella los con calidad regular o mala.



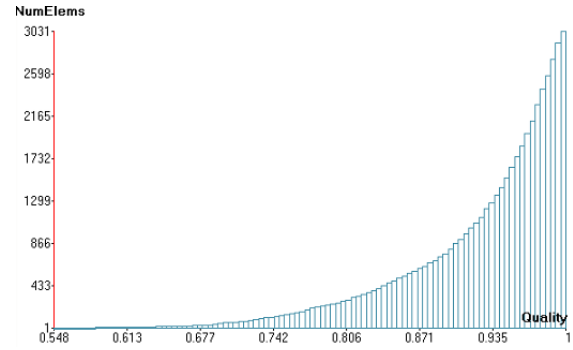
(a) Caso $a/b=1/25$.



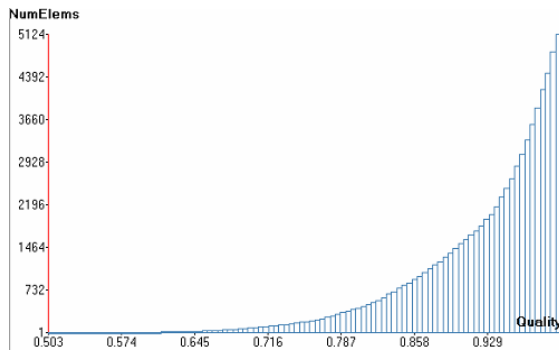
(b) Caso $a/b=1/30$.



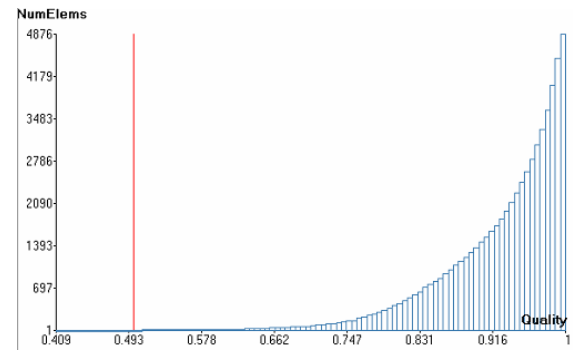
(c) Caso $a/b=1/35$.



(d) Caso $a/b=1/40$.



(e) Caso $a/b=1/45$.



(f) Caso $a/b=1/50$.

Figura 6.5: Calidad de malla. Criterio de forma.

A partir de estos gráficos se puede establecer la siguiente tabla:

Tabla 6.1: Calidad de malla

<i>Caso</i>	<i>Elementos totales</i>	<i>Elementos con calidad de forma < 0.5</i>	<i>Porcentaje de elementos con calidad de forma > 0.5</i>
1/25	4983	1	99.979 [%]
1/30	4780	4	99.916 [%]
1/35	2913	3	99.897 [%]
1/40	3031	1	99.967 [%]
1/45	5124	1	99.980 [%]
1/50	4876	5	99.897 [%]

De la tabla anterior se puede ver que las mallas generadas para cada caso son de buena calidad y que responden adecuadamente a las condiciones establecidas. Menos del 0.1 % de los elementos posee una calidad menor a 0.5; este resultado es importante ya que es de vital relevancia tener una malla que no presente elementos inadecuados especialmente en la zona de refinado, en donde ocurre la concentración de esfuerzos y deformaciones.

Extracción de resultados

Se obtiene los valores de σ_{22} y ε_{22} . Estos se extraen en la parte inferior de la placa desde la punta de la grieta hasta el borde externo, es decir para $x_2 = 0, b \leq x_1 < L$ con $x_1 \rightarrow b$, como lo indica la flecha roja en la figura:

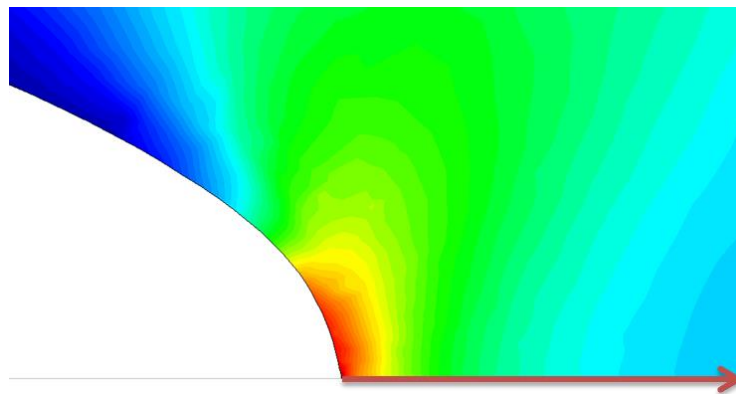


Figura 6.6: Extracción de resultados.

Luego con estos valores se calculan los esfuerzos y deformaciones normalizados, como se mostró en la sección 5.3.

Convergencia y prueba de malla

Para este problema de valor de frontera se implementó la metodología mencionada anteriormente. Utilizando una malla gruesa para la última geometría es decir $a/b=1/50$, se identificó el nodo de control y se llevaron a cabo las pruebas de carga y de pasos.

La prueba de carga, mostró que el esfuerzo σ_∞ necesario para utilizar en el problema se encontraba entre 100.000 y los 10.000.000 [Pa], pero como se indicó en la sección 5.4, para asegurar la convergencia al ir refinando la malla, es adecuado tomar un esfuerzo menor al máximo encontrado. De esta manera se establece que $10^5 < \sigma_\infty < 10^6$ [Pa].

En la siguiente figura se muestra la prueba de esfuerzo aplicado:

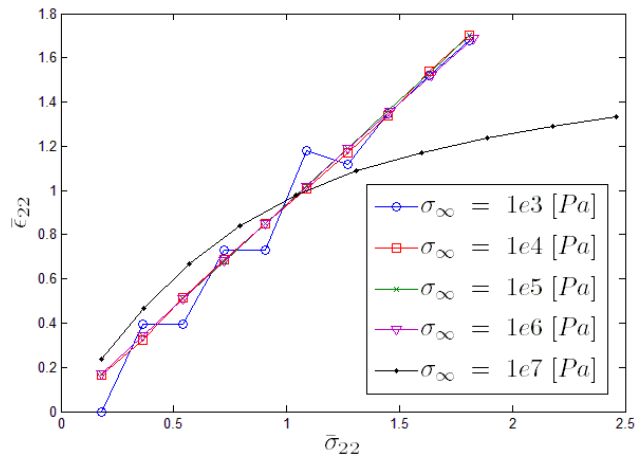


Figura 6.7: Prueba de esfuerzo placa con agujero elíptico.

Luego para la prueba de pasos se encontró que al utilizar una cantidad de 50 pasos se podían obtener valores confiables de esfuerzo y deformación en el nodo de control; más allá de este valor los resultados eran aproximadamente constantes (en función del número de pasos), así que con el fin de no gastar recursos computacionales de forma innecesaria, se utilizó esta cantidad como cota máxima inicial para los pasos.

A continuación se muestra la prueba de pasos, se puede observar que la diferencia entre los resultados de la deformación en el paso 10 (0.5192 %) con respecto al paso 50 (0.5185 %) no va más allá de un 0.007 % y para el caso del esfuerzo, la diferencia entre el paso 10 ($1.826 \cdot 10^8$ [Pa]) y el paso 50 ($1.828 \cdot 10^6$ [Pa]) no va más allá de los 10^3 [Pa] considerando que los valores están en el orden de los 10^6 [Pa].

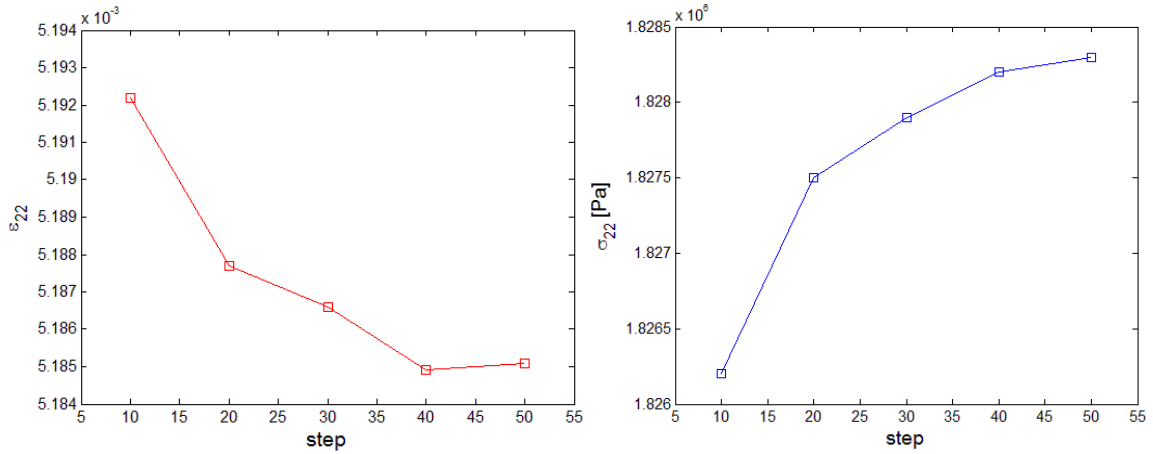


Figura 6.8: Prueba de pasos placa con agujero elíptico.

A priori, la primera elección de parámetros de entrada para todas las geometrías, tomando en cuenta las pruebas ya mencionadas, fue $\sigma_{\infty} = 10^6 [Pa]$ y $step=50$, luego al ir refinando las mallas en todos los casos, estos valores o cotas fueron disminuyendo, debido a que no se alcanzaba una convergencia. De esta manera se fue ajustando estos parámetros iterativamente, buscando que se acomodasen tanto para la geometría con malla gruesa como para la misma geometría con una malla muy fina. Esto último era de vital importancia ya que para la prueba de malla que se realizaría posteriormente, las condiciones de borde debían ser iguales para todos los casos (geometría con mallas diferentes).

De esta forma, los valores encontrados con los cuales se logró convergencia para todos los casos con sus respectivas mallas refinadas, fueron los que se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 6.2: Valores para cumplir convergencia

<i>Razón semiejes a/b</i>	<i>Esfuerzo aplicado (σ_{∞})[Pa]</i>	<i>Pasos</i>
1/25	1.000.000	5
1/30	1.000.000	4
1/35	700.000	3
1/40	700.000	3
1/45	700.000	3
1/50	700.000	3

Se puede ver de la Tabla 6.2 que el esfuerzo aplicado se disminuyó dentro de los límites encontrados en la prueba de carga, y esta disminución no fue grande, en

cambio los pasos debieron bajarse en una gran cantidad con el fin de obtener convergencia. Es relevante indicar que al cambiar el esfuerzo aplicado (producto de los problemas de convergencia), siempre se realizaba un chequeo de la respuesta que se obtenía en el nodo de control, es decir, se graficaba la curva ε_{22} versus σ_{22} en el punto para todos los pasos, verificando que ésta siempre se pareciera a la que se muestra en la Figura 5.11, si no había similitud era porque se había disminuido demasiado la carga aplicada. De esta manera para todas las geometrías estudiadas se encontró que no debía variarse mucho el esfuerzo pues ya con éstos valores se obtenía la curva objetivo, por lo tanto la única variable que se podía modificar, para asegurar la obtención de resultados, eran los pasos, y es por esto que la variación es más grande y notoria en este parámetro.

Para el caso $a/b=1/50$, fue difícil obtener convergencia, ya que si bien ésta se alcanzaba para pasos mayores a 3 pero menores a 10, al graficar el esfuerzo y la deformación normalizados en la línea $x_2 = 0, b \leq x_1 < L$, se observaba una discontinuidad antes de llegar al nodo donde se encontraba la concentración de solicitaciones. Se tenía que el esfuerzo bajaba abruptamente y luego volvía a aumentar en $x_1 = b$, situación que podría ser errónea según lo visto en los otros casos. Esto no ocurría cuando se usaba una cantidad de pasos igual a 3.

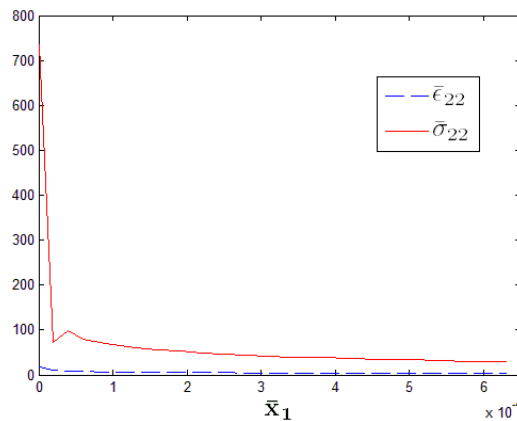
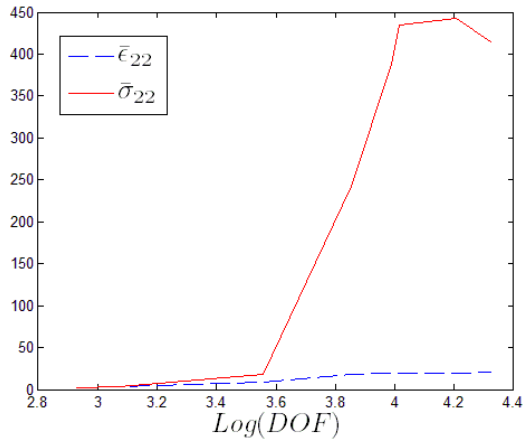


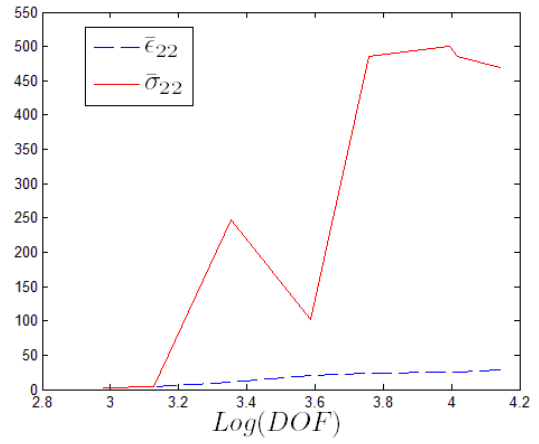
Figura 6.9: Discontinuidad caso $a/b=1/50$ pasos mayores a 3.

El hecho de que se deba disminuir el esfuerzo y los pasos para obtener convergencia se puede deber principalmente a los errores que se producen al derivar el esfuerzo y también tras calcularlo de manera incremental, al tener cargas altas y más pasos, los errores se van acrecentando en cada iteración, especialmente en la zona donde ocurre la concentración.

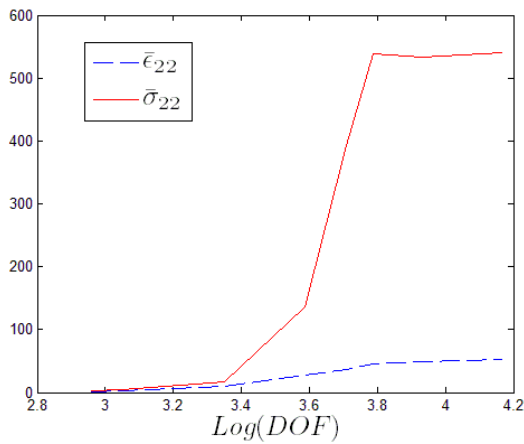
Se realizaron pruebas de mallas para cada caso buscando determinar y seleccionar, como se mencionó en la sección anterior, la malla con la cual más allá de ella los valores de la deformación y el esfuerzo normalizados aproximadamente sean constantes. A continuación se muestra una figura con los gráficos obtenidos para cada geometría:



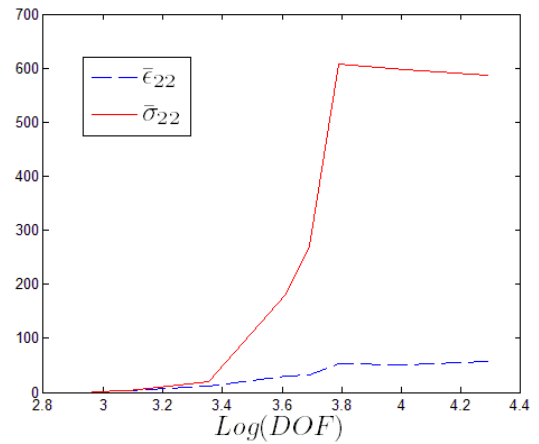
(a) Caso $a/b=1/25$. $\sigma_\infty = 10^6$.



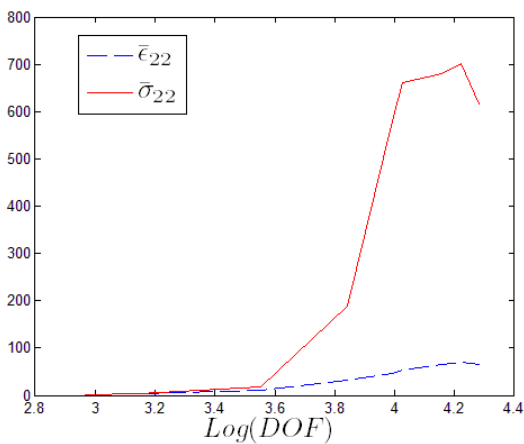
(b) Caso $a/b=1/30$. $\sigma_\infty = 10^6$.



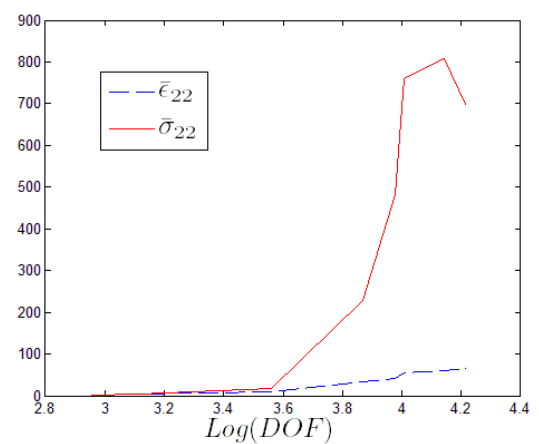
(c) Caso $a/b=1/35$. $\sigma_\infty = 7 \cdot 10^5$.



(d) Caso $a/b=1/40$. $\sigma_\infty = 7 \cdot 10^5$.



(e) Caso $a/b=1/45$. $\sigma_\infty = 7 \cdot 10^5$.



(f) Caso $a/b=1/50$. $\sigma_\infty = 7 \cdot 10^5$.

Figura 6.10: Pruebas de malla para cada caso.

De la Figura 6.10 se puede observar que las geometrías $a/b=1/45$ y $a/b=1/50$ son muy sensibles al refinado de malla y que no se alcanza una malla óptima directamente, pues no se ven cantidades constantes de los valores normalizados de la deformación y el esfuerzo. Se puede observar en estos 2 últimos casos que el esfuerzo disminuye al ir aumentando el refinado y que la deformación va aumentando, aunque en valores pequeños. Esta situación se debe principalmente a la geometría y a la singularidad que se crea en la punta de la grieta. También se debe tomar en cuenta los errores relacionados con los tamaños de los elementos de la malla (gran diferencia entre el más pequeño y el mayor), los errores que aparecen al suponer que el tensor de módulos elásticos es invertible, errores producto de la misma discretización y por último errores relacionados con el aumento incremental. Para los otros casos se aprecia una constancia en las curvas luego de cierto valor de grado de libertad, por lo tanto es más fácil y evidente seleccionar la malla a utilizar.

Se puede observar en la siguiente tabla el tamaño de elemento normalizado y los nodos totales para las mallas seleccionadas en cada caso:

Tabla 6.3: Tamaño de elementos.

<i>Caso a/b</i>	<i>Tamaño de elemento normalizado</i>	<i>Nodos totales</i>
1/25	0.000006	5188
1/30	0.0000065	4948
1/35	0.000003	3066
1/40	0.000003	3074
1/45	0.0000025	5335
1/50	0.0000065	5079

Se puede observar de la Tabla 6.3 que el tamaño normalizado de elemento en el sector refinado es del orden de los 10^{-6} , pero los nodos totales no son similares. Si se observa la Figura 6.10 se puede que ver que las pruebas de mallas para los casos $a/b=1/25$, $1/45$ y $1/50$ no son muy satisfactorias como las demás, tomando en cuenta que los nodos totales en estas geometrías son mayores a 5.000 se podría fundamentar que existe un error relacionado con el tamaño de elemento más pequeño y el más grande, para mejorar esto en trabajos futuros se puede utilizar mallas estructuradas con una transición de elementos de menor a mayor tamaño más suave.

Resultados

En primer lugar se muestra el gráfico ϵ_{22} versus σ_{22} para la última geometría ($a/b=1/50$) extraídos en la punta de la grieta (punto $x = b$, y $y = 0$), con el fin de demostrar que con los valores de esfuerzo aplicado se está trabajando en el rango no lineal. Se visualiza también que la deformación alcanza un valor menor al 12%, cantidad que concuerda con el supuesto de deformaciones pequeñas.

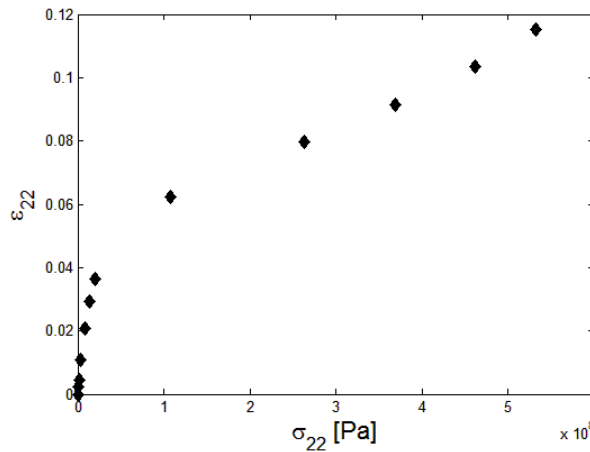
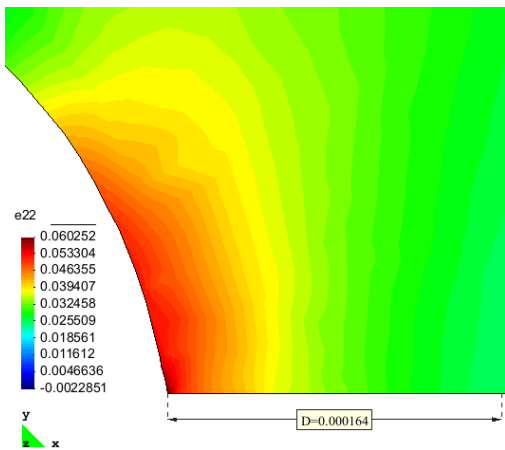


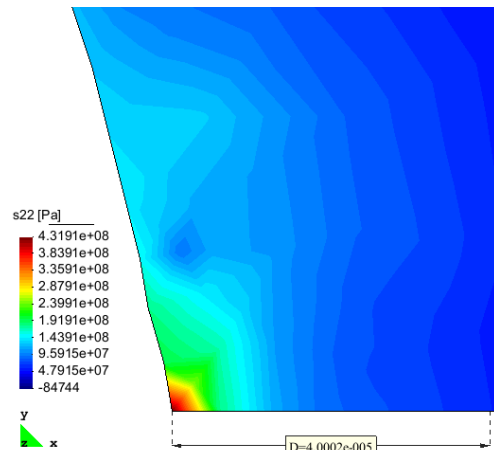
Figura 6.11: Respuesta ϵ_{22} versus σ_{22} para el punto $x = b$, y $y = 0$. Caso $a/b=1/50$.

De la curva se observa que se cumple con la curva objetivo, es decir la curva elástica no lineal que se obtiene para una barra bajo carga uniaxial, (ver Figura 2.2) y que la respuesta está dentro de lo estipulado.

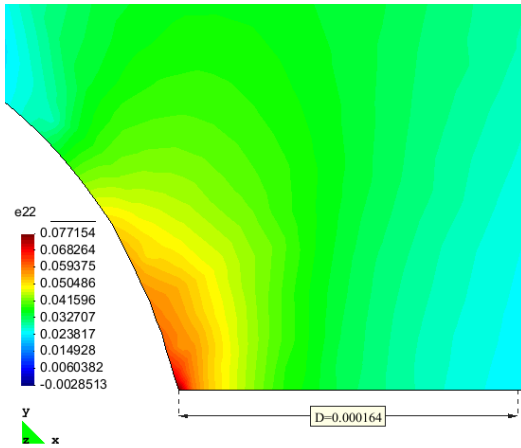
A continuación se muestran los campos de esfuerzos y deformaciones cerca de la punta del agujero elíptico (en el último paso), para las 6 geometrías estudiadas:



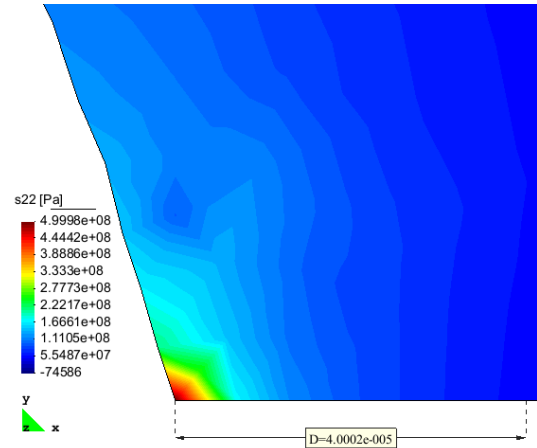
a.1) Campo de deformación ϵ_{22} , $a/b=1/25$.



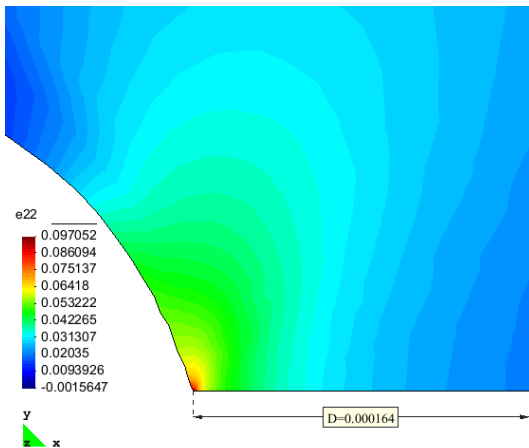
a.2) Campo de esfuerzo σ_{22} , $a/b=1/25$.



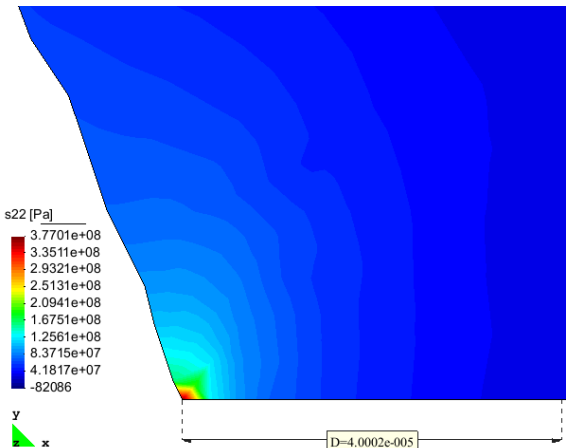
b.1) Campo de deformación ϵ_{22} ,
 $a/b=1/30$.



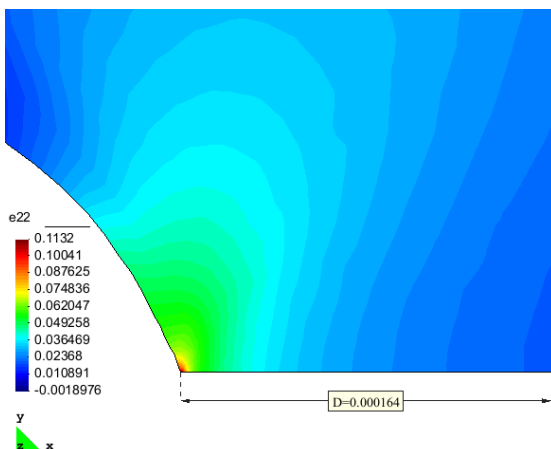
b.2) Campo de esfuerzo σ_{22} , $a/b=1/30$.



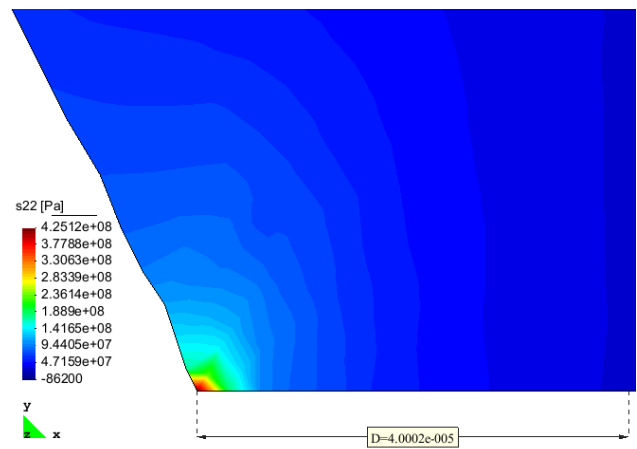
c.1) Campo de deformación ϵ_{22} ,
 $a/b=1/35$.



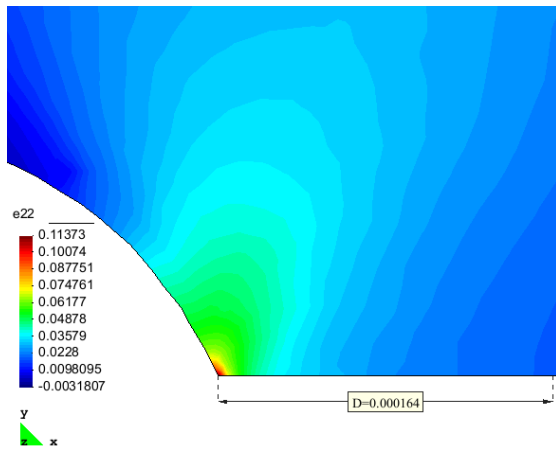
c.2) Campo de esfuerzo σ_{22} , $a/b=1/35$.



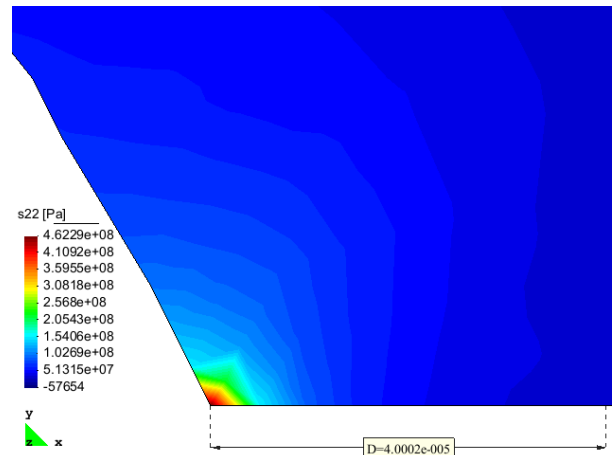
d.1) Campo de deformación ϵ_{22} ,
 $a/b=1/40$.



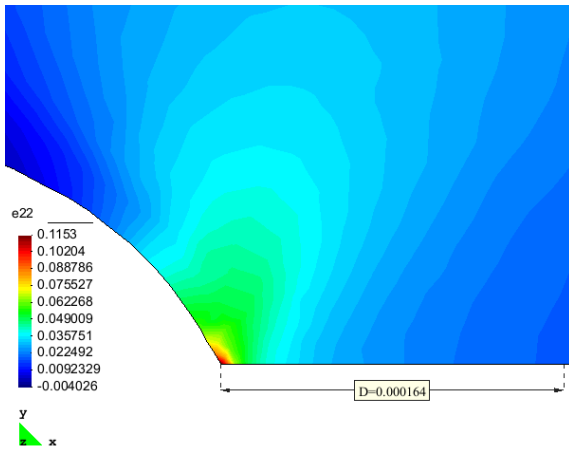
d.2) Campo de esfuerzo σ_{22} , $a/b=1/40$.



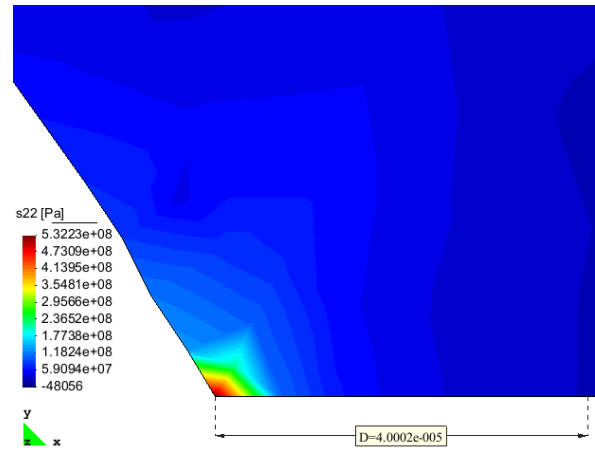
e.1) Campo de deformación ε_{22} ,
 $a/b=1/45$.



e.2) Campo de esfuerzo σ_{22} , $a/b=1/45$.



f.1) Campo de deformación ε_{22} ,
 $a/b=1/50$.



f.2) Campo de esfuerzo σ_{22} , $a/b=1/50$.

Figura 6.12: Campo de esfuerzos y deformación componente 22 para todas las geometrías.

A continuación también se muestra un detalle en la punta del agujero elíptico para los 2 últimos casos:

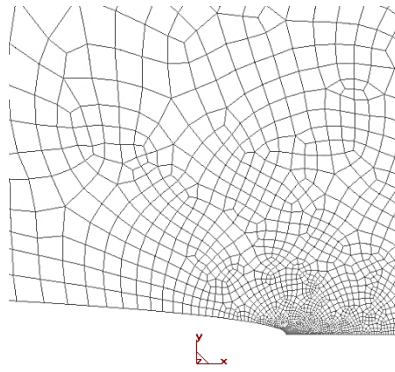


Figura 6.13: Detalle malla refinada cerca de la punta del agujero elíptico caso $a/b=1/45$.

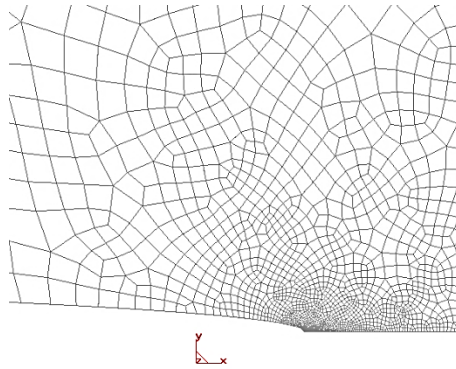


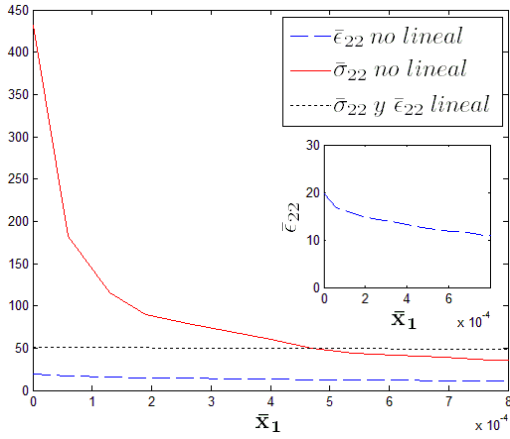
Figura 6.14: Detalle malla refinada cerca de la punta del agujero elíptico caso $a/b=1/50$.

De la Figura 6.12 se puede observar como el campo de esfuerzo se concentra cada vez más en un área más pequeña alrededor de la punta de la grieta al ir cambiando su geometría (elipse más angosta), y como el campo de deformación también lo hace, pero los valores de éste último se mantienen pequeños y dentro de las magnitudes que estipula la linealización realizada (el valor máximo de la deformación va desde 6% hasta el 12%), aunque se vaya cambiando la geometría de la grieta elíptica.

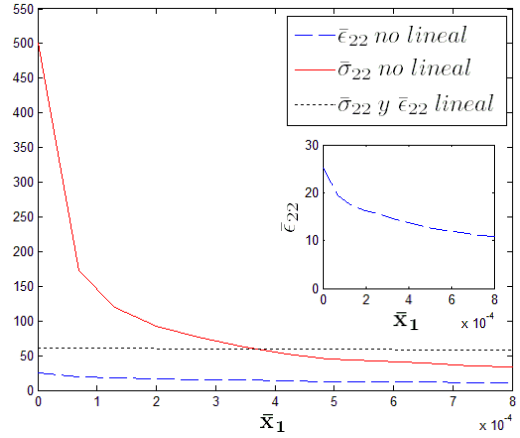
Teniendo en cuenta las definiciones de las variables adimensionalizadas de la sección 5.3:

$$\bar{\sigma}_{22} = \frac{\sigma_{22}}{\sigma_{\infty}}, \quad \bar{\epsilon}_{22} = \frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{\infty}}, \quad \bar{x}_1 = \frac{x_1 - b}{b}, \quad (6.1)$$

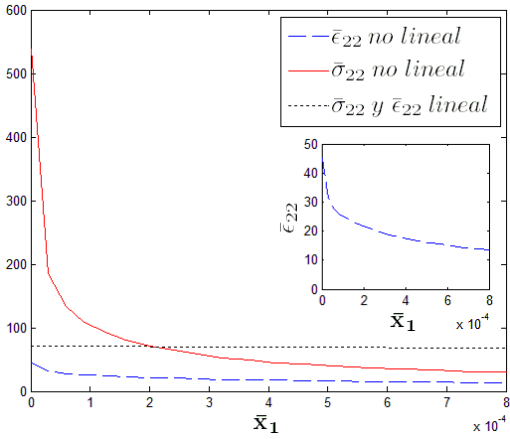
a continuación se muestra el esfuerzo y la deformación normalizados para el caso lineal y el no lineal versus la distancia normalizada, en la línea $x_2 = 0, b \leq x_1 < L$ con $x_1 \rightarrow b$,



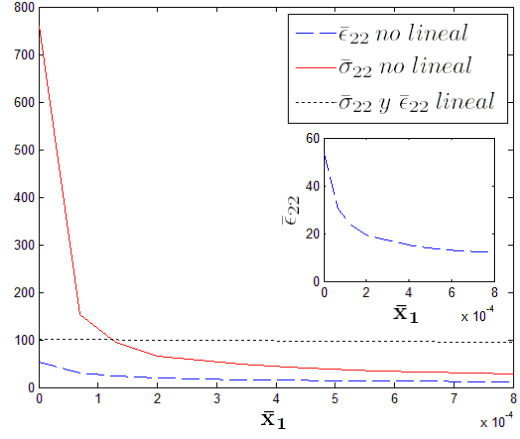
(a) Caso $a/b=1/25, \sigma_\infty = 10^6$.



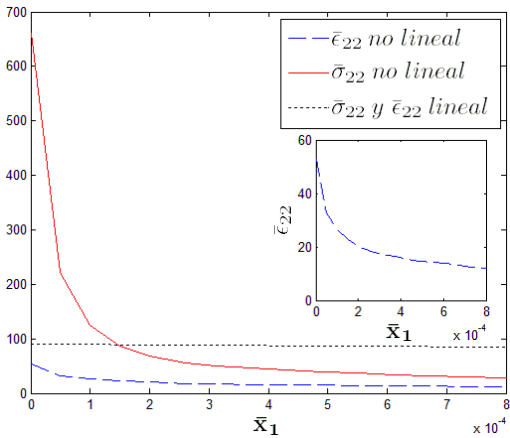
(b) Caso $a/b=1/30, \sigma_\infty = 10^6$.



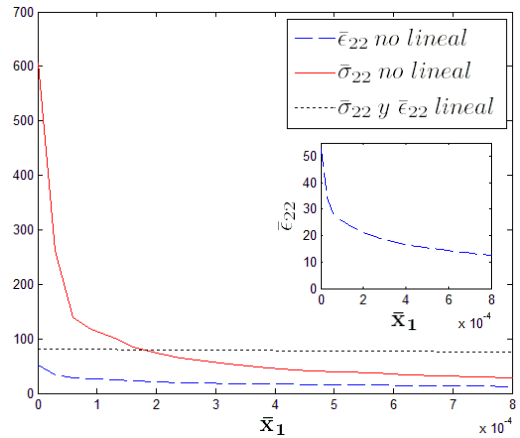
(c) Caso $a/b=1/35, \sigma_\infty = 7 \cdot 10^5$.



(d) Caso $a/b=1/40, \sigma_\infty = 7 \cdot 10^5$.



(e) Caso $a/b=1/45, \sigma_\infty = 7 \cdot 10^5$.



(f) Caso $a/b=1/50, \sigma_\infty = 7 \cdot 10^5$.

Figura 6.15: Comportamiento lineal y no lineal de $(\bar{\epsilon}_{22})$ en función de $(\bar{\sigma}_{22})$ para la placa con agujero elíptico, para diferentes relaciones de a/b .

De la Figura 6.15 se puede observar que para las 3 primeras geometrías $\bar{\epsilon}_{22}(b, 0)$ no lineal se mantiene bajo los 50, luego crece y se mantiene acotada hasta cierto valor. La concentración de esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}(b, 0)$ no lineal aumenta cada vez más al ir cambiando las geometrías y además se va acercando cada vez más a la punta de la grieta. Para un valor de concentración de 100, la cantidad de \bar{x}_1 en los 2 primeros casos es cercana a los $2 \cdot 10^{-4}$, para los otros casos es menor a $1 \cdot 10^{-4}$, lo que demuestra la concentración de las solicitaciones alrededor de la fisura. Se puede observar además que ambas soluciones (lineal y no lineal) difieren en gran medida, especialmente en la concentración de esfuerzos. La concentración de la deformación en cambio se mantiene pequeña para ambas soluciones pero con magnitudes inferiores para el caso no lineal. En la Tabla 6.4 se observa la magnitud de la deformación no lineal en la punta de la grieta ($\epsilon_{22-punta}$) y en el infinito ($\epsilon_{22\infty}$), se puede ver de ésta que para ambas deformaciones se alcanzan magnitudes pequeñas, y que la primera aumenta en cada caso, pero la segunda se mantiene acotada y similar en cada geometría aunque la carga externa aplicada varíe. Con esto también se demuestra que hay una concentración de la deformación en la punta de la grieta al ir haciendo más fina la fisura y que ésta se debe a un aumento de $\epsilon_{22-punta}$.

Tabla 6.4: Magnitud de las deformaciones en la punta de la grieta y en el infinito.

Razón a/b	1/25	1/30	1/35	1/40	1/45	1/50
$\epsilon_{22-punta}$ [%]	6.05	7.7	9.7	11.3	11.37	11.53
$\epsilon_{22\infty}$ [%]	0.307	0.307	0.215	0.215	0.215	0.215

Recordando la expresión para calcular la concentración de esfuerzos y deformación adimensionales en la punta de la grieta elíptica para el caso lineal de la sección 4.1:

$$\frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{\infty}} = \frac{\sigma_{22}}{\sigma_{\infty}} = 1 + 2 \frac{b}{a}, \quad (6.2)$$

donde a y b representan los semiejes menor y mayor respectivamente, se obtienen los concentradores de la solución lineal y se comparan con la solución no lineal.

En la Tabla 6.5 se pueden observar los concentradores de esfuerzo y deformación para cada geometría, comparados con el caso lineal. Se puede apreciar una clara diferencia entre los resultados obtenidos y la teoría elástica lineal Clásica. Las placas con agujeros elípticos para los cuales a/b son más pequeños en donde se simula una grieta

alcanzan solicitaciones muy altas, y el resultado más importante que se puede observar es que la deformación va alcanzando un valor fijo (aproximado) al ir disminuyendo a/b con un valor de casi 54 y que el esfuerzo aumenta bruscamente en cuando llega a este valor.

Tabla 6.5: Factores de concentración de esfuerzo y deformación en la punta de la grieta elíptica. $\bar{\sigma}_{22}$ y $\bar{\epsilon}_{22}$ están evaluados en $x_2 = 0, x_1 = b$ (6.2)[18].

a/b	$1/25$	$1/30$	$1/35$	$1/40$	$1/45$	$1/50$
<i>Caso No lineal</i>						
$\bar{\sigma}_{22}$	432	500	539	607	660	760
$\bar{\epsilon}_{22}$	19.626	25.1316	45.1404	52.6511	52.8977	53.6279
<i>Caso lineal</i>						
$\bar{\sigma}_{22}$	51	61	71	81	91	101
$\bar{\epsilon}_{22}$	51	61	71	81	91	101

Recordando los potenciales complejos para este problema de valor de frontera que aparecen en la sección 4.1:

$$4\psi(z) = Sc[e^{2\xi_0} \cosh(\zeta) + (1 - e^{2\xi_0 - 2i\beta})\sinh(\zeta)], \quad (6.3)$$

$$4\chi(z) = -Sc^2 \left[(\cosh(2\xi_0) - \cosh(2\beta))\zeta + \frac{1}{2}e^{2\xi_0} \cdot \cosh(2(\zeta - \xi_0 - i\beta)) \right].$$

se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = 2[\psi'(z) + \bar{\psi}'(\bar{z})] = 4Re(\psi'(z)), \quad (6.4)$$

$$\sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta} = 2e^{2i\alpha}[\bar{z}\psi''(z) + \chi''(z)],$$

evaluando para $0 < \xi < \infty$ y $\eta = 0$, teniendo en cuenta que $z = c \cdot \cosh(\zeta)$ con $\zeta = \xi + i\eta$ (c es la distancia entre focos) y que α es al ángulo que se forma entre la tangente de la curva $\eta = cte$ (en la dirección de ξ creciente) y el eje x del sistema de coordenadas cartesianas. De esta manera se puede graficar la solución teórica para el caso $a/b=1/50$, en la línea $x_2 = 0, b \leq x_1 < L$. La siguiente figura muestra las curvas obtenidas del esfuerzo y la deformación adimensionales para los componentes 11 y 22.

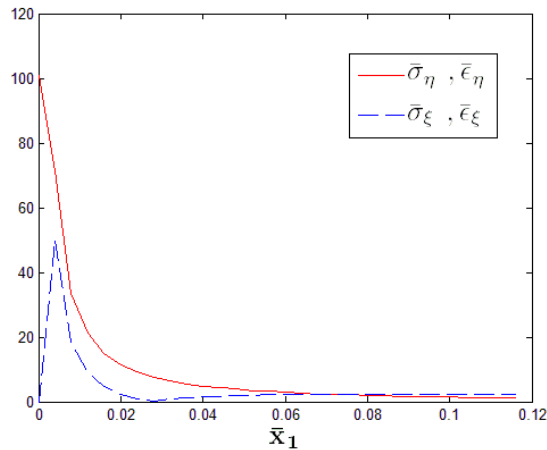
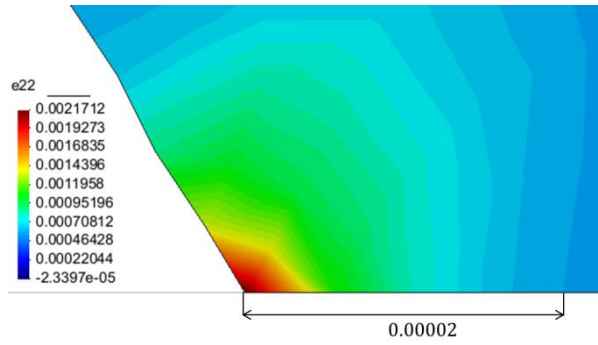


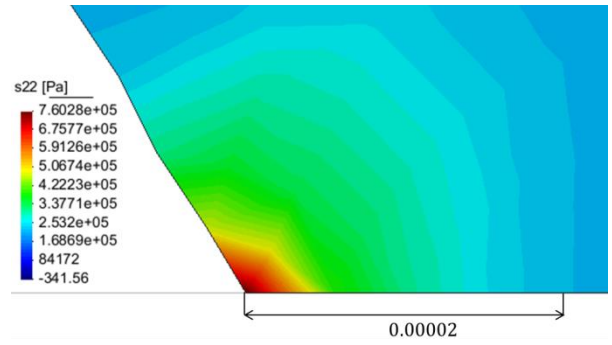
Figura 6.16: Concentración de esfuerzo ($\bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{11}$) y deformación ($\bar{\epsilon}_{22}, \bar{\epsilon}_{11}$) en la línea $x_2 = 0, b \leq x_1 < L$ solución lineal.

Si se compara la Figura 6.15 (curva caso $a/b=1/50$) con esta última mostrada, se puede ver claramente que la concentración es más alta para el caso no lineal y que además el aumento abrupto en el esfuerzo comienza a una distancia de $1 \cdot 10^{-4}$, en cambio para el caso lineal este incremento inicia a los $1.5 \cdot 10^{-2}$. En cuanto a la solución para la deformación en el caso no lineal esta alcanza valores pequeños y acotados, a diferencia de la solución de la teoría elástica lineal que alcanza el mismo valor que el esfuerzo normalizado. Todo esto muestra que la nueva ecuación constitutiva utilizada permite obtener concentraciones altas de esfuerzo y bajas de deformación, como se esperaría que se comportase en la realidad el fenómeno para materiales frágiles.

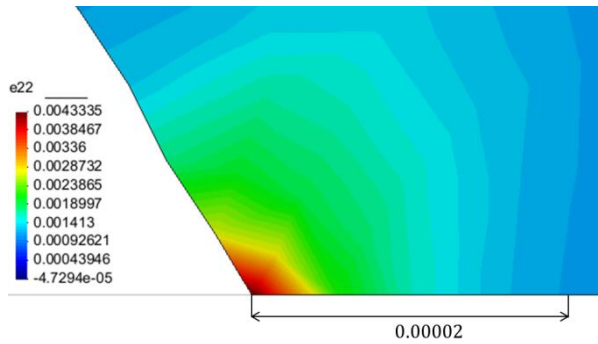
A continuación se muestran 5 cargas intermedias para la última geometría de la placa con agujero elíptico en el caso $a/b=1/50$.



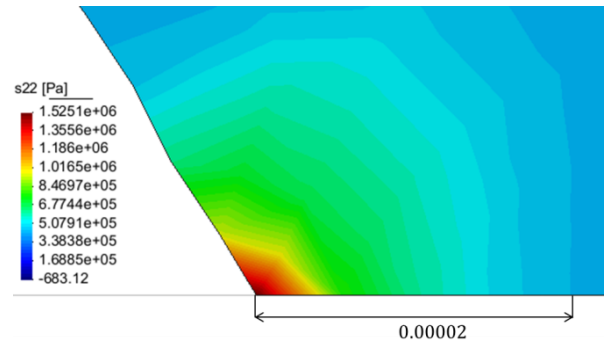
a.1) Deformación ε_{22} para $\sigma_{\infty} = 5.000$ [Pa].



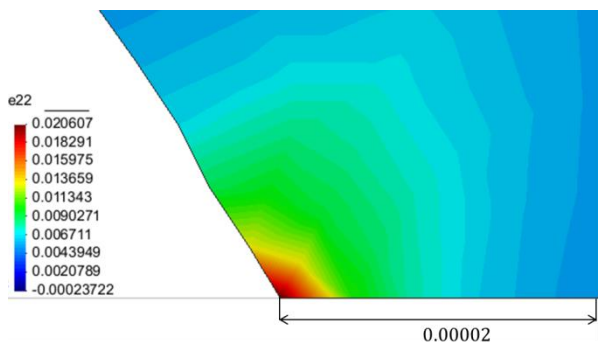
a.2) Esfuerzo σ_{22} para $\sigma_{\infty} = 5.000$ [Pa]



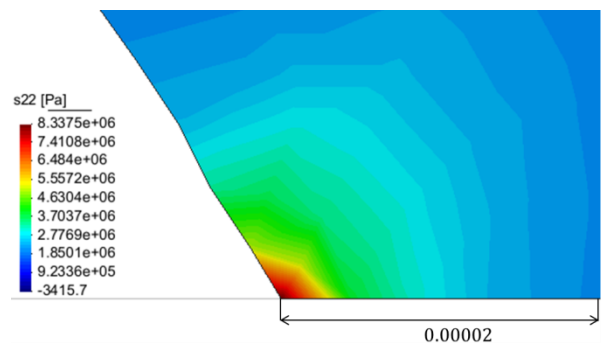
b.1) Deformación ε_{22} para $\sigma_{\infty} = 10.000$ [Pa].



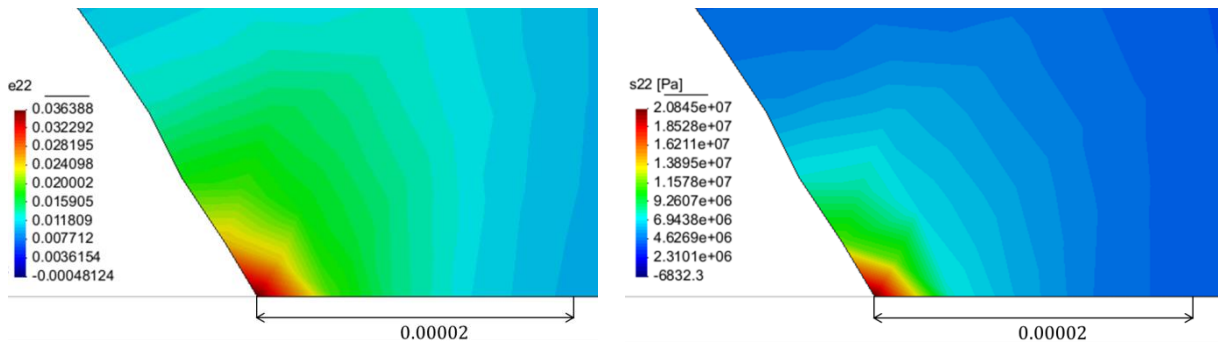
b.2) Esfuerzo σ_{22} para $\sigma_{\infty} = 10.000$ [Pa].



c.1) Deformación ε_{22} para $\sigma_{\infty} = 50.000$ [Pa].

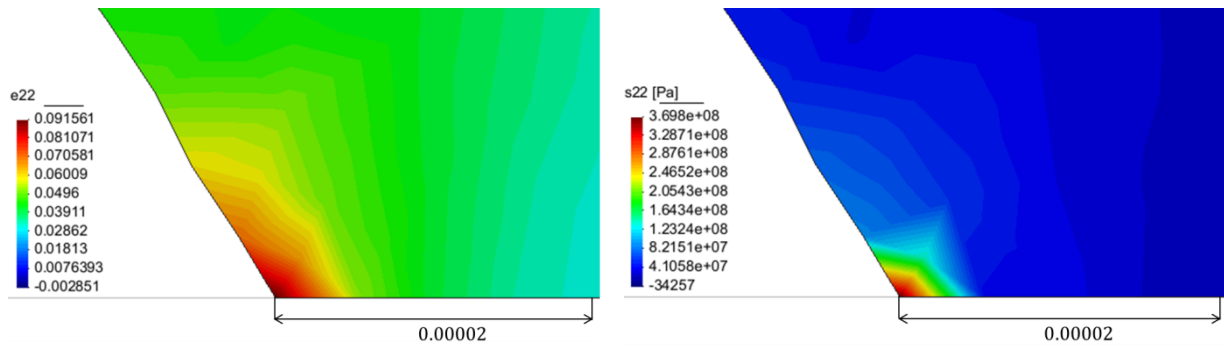


c.2) Esfuerzo σ_{22} para $\sigma_{\infty} = 50.000$ [Pa].



d.1) Deformación ε_{22} para $\sigma_{\infty} = 100.000$ [Pa].

d.2) Esfuerzo σ_{22} para $\sigma_{\infty} = 100.000$ [Pa].



e.1) Deformación ε_{22} para $\sigma_{\infty} = 500.000$ [Pa].

e.2) Esfuerzo σ_{22} para $\sigma_{\infty} = 500.000$ [Pa].

Figura 6.17: Casos intermedios para geometría $a/b=1/50$.

De la Figura 6.17 se puede ver cómo al ir aumentando la carga se concentran los campos de esfuerzo y deformación cada vez más cerca del punto $x_1 = b, x_2 = 0$. Tomando como referencia el largo 0.00002 [m] marcado en las figuras, se observa y se desprende que el área de la concentración del esfuerzo va disminuyendo cada vez que se aumenta la tensión aplicada y que el área o zona de la concentración de la deformación va aumentando, pero manteniendo su centro en la punta del agujero elíptico y manteniendo sus valores pequeños.

El área de la concentración del esfuerzo es tan pequeña que es del tamaño del elemento refinado (aproximadamente $7 \cdot 10^{-6}$) como se puede observar en la siguiente figura:

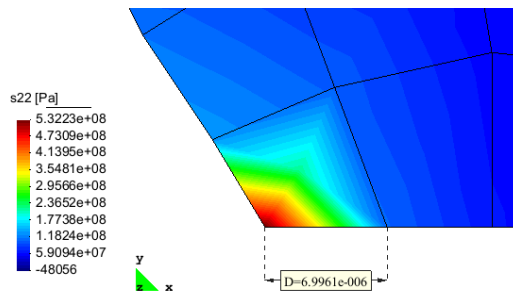


Figura 6.18: Concentración del esfuerzo en 1 elemento.

Para cambiar esto y obtener así mejores resultados es necesario utilizar mallas mucho más finas que las utilizadas en esta tesis y que las mallas utilizadas generalmente en este tipo de problemas.

Las siguientes figuras corresponden a los diagramas de contornos del desplazamiento, en la dirección X, la dirección Y, la magnitud total de ésta y el diagrama de vectores para el caso $a/b=1/50$.

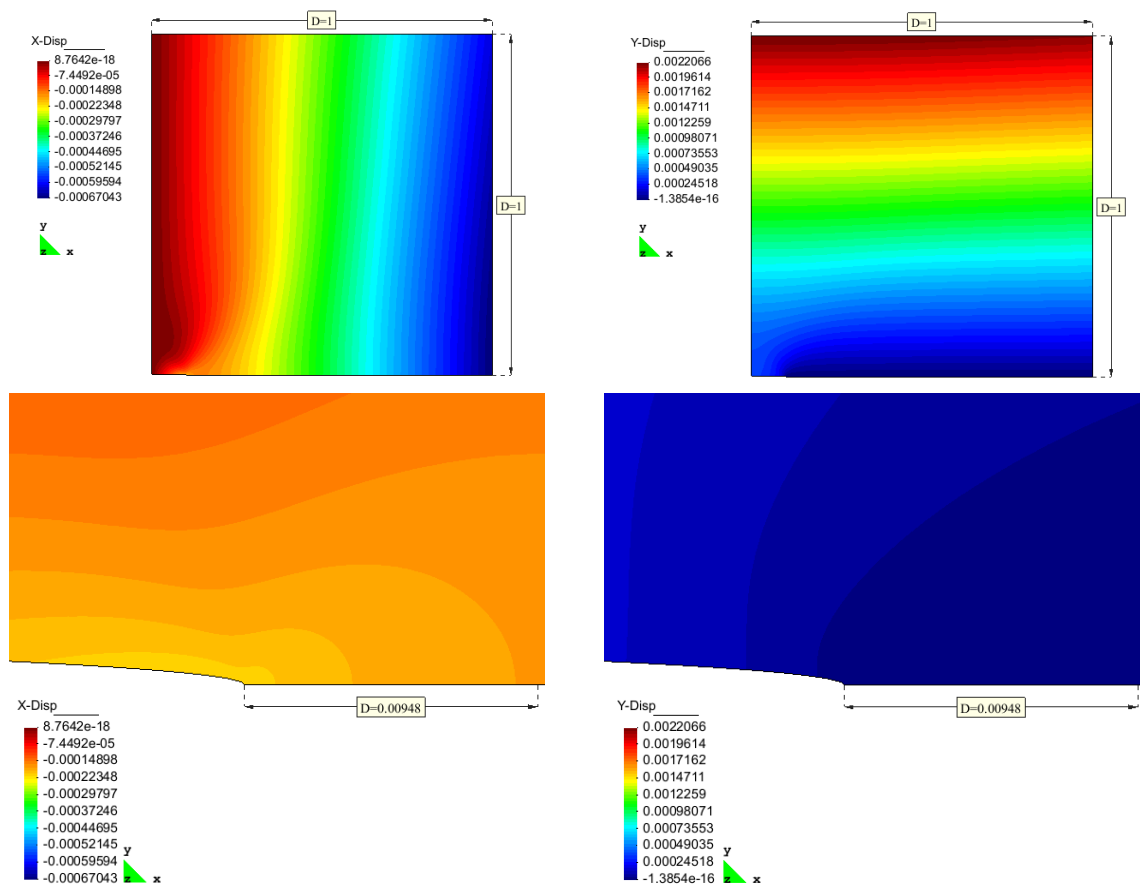


Figura 6.19: Contornos campo de desplazamientos y detalle de desplazamientos cerca de la punta de la grieta elíptica.

De las Figura 6.19 presentadas, se observa que los desplazamientos son pequeños especialmente en el sector del agujero elíptico. Se aprecia en la imagen de la magnitud, como la grieta afecta el movimiento de su vecindad (restringiéndolo), específicamente en la punta de ella. Del diagrama de vectores se puede decir que se modela adecuadamente el fenómeno físico, pues se verifica la existencia de tracción y producto de ésta misma, contracción en los bordes.

Resolviendo el sistema de ecuaciones de la sección 4.1, evaluando u_1 y teniendo en cuenta la definición del desplazamiento adimensional que aparece en la sección 5.3 :

$$\bar{u}_1 = \frac{u_1}{b}, \tag{6.5}$$

a continuación se muestra el desplazamiento normalizado \bar{u}_1 en la línea $x_2 = 0$, $b < x_1 < L$, para la solución lineal y la no lineal:

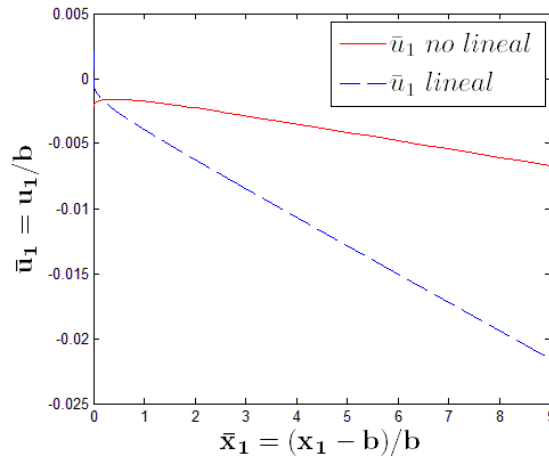


Figura 6.20: \bar{u}_1 en la línea $x_2 = 0$, $0 < x_1 < L$ caso lineal y no lineal.

Se ve del gráfico la contracción que ocurre en la geometría. El desplazamiento es menor para el caso no lineal que para el caso lineal, esto se debe a las características de la nueva ecuación constitutiva utilizada y a los supuestos utilizados de deformación y desplazamientos pequeños.

6.2 Placa con entalle de perfil hiperbólico

El objetivo específico para el caso de la placa con entalles hiperbólicos era graficar el esfuerzo σ_{22} y la deformación ϵ_{22} en el borde más interno de la hipérbola, para diversos valores de la razón $\frac{a}{b}$ (pendiente de la asíntota de la hipérbola), en particular cuando $a \gg b$. Específicamente se estudia 6 valores distintos para a/b y se comparan con la solución lineal. La idea principal es llegar una hendidura profunda y graficar la concentración de esfuerzo y deformación adimensionales en la punta de ésta, para así verificar si la deformación se mantiene acotada y pequeña. Se estudiaron las siguientes razones para a/b : 1/10, 1/5, 1/2, 1, 2, 3.

A continuación se muestran las condiciones de borde, las geometrías, las mallas empleadas, la extracción de resultados, las pruebas de malla y los resultados para cada caso.

Modelación

En la Figura 6.21 se muestran las condiciones de borde del problema. Se asume simetría, por lo tanto se modela $\frac{1}{4}$ de toda la placa, de esta manera se aplica la condición de rodillo en las caras que pertenecen a los ejes de simetría. La cara que corresponde a la entalla está libre de cargas externas y restricciones a los desplazamientos. La carga aplicada σ_∞ varía según la geometría utilizada.

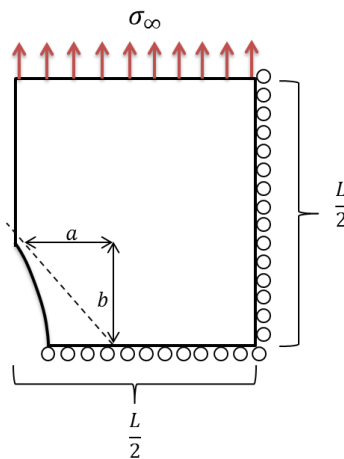


Figura 6.21: Condiciones de borde placa con muescas hiperbólicas.

Geometrías

Se consideró una placa de largo $L = 1$ [m] y el valor fijado para el semi eje “ b ” es 0.1 [m]. Luego las geometrías estudiadas fueron las siguientes:

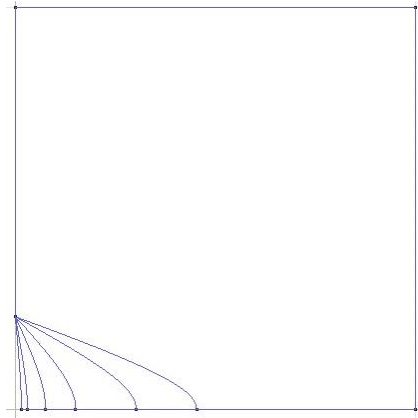


Figura 6.22: Geometrías estudiadas para placa con entalle hiperbólico laterales. Representación de un cuarto de placa.

1. $\frac{a}{b} = \frac{1}{10}$
2. $\frac{a}{b} = \frac{1}{5}$
3. $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$
4. $\frac{a}{b} = 1$
5. $\frac{a}{b} = 2$
6. $\frac{a}{b} = 3$

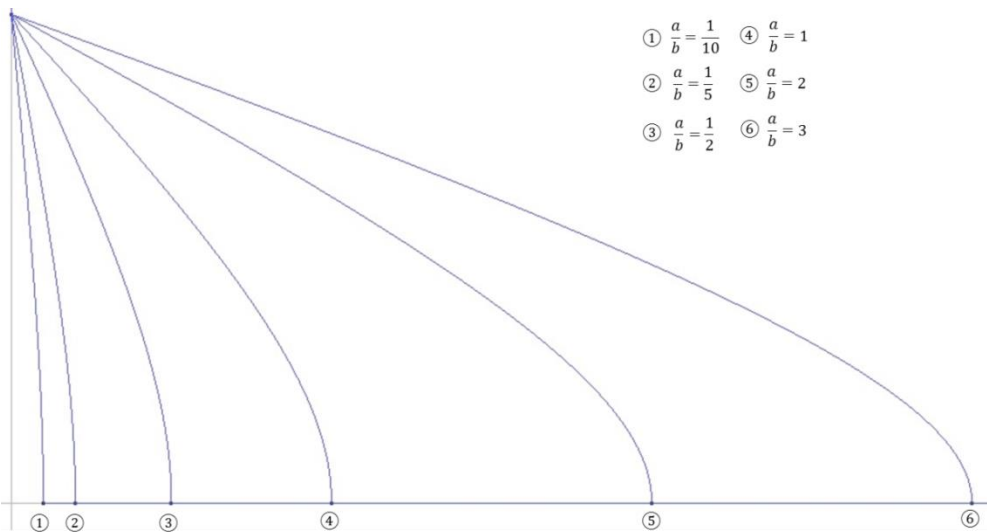


Figura 6.23: Razones de semiejes, detalle Figura 6.22.

Mallas

La malla utilizada es la que se genera automáticamente en el programa GID. Se comienza a mallar desde la Punto más interno del borde hiperbólico con cierta concentración de elementos definida en el programa. El elemento de mayor tamaño posee un tamaño normalizado (con el largo de la placa) de 0.05 y el tamaño más pequeño, relacionado con el refinado, es el que se va configurando según cada prueba de malla. El valor va desde 0.1 hasta 0.000001.

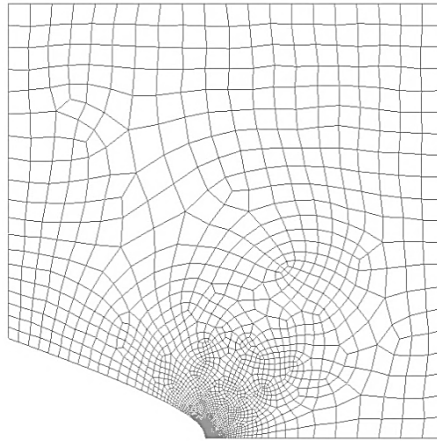


Figura 6.24: Malla generada en un cuarto de la placa completa.

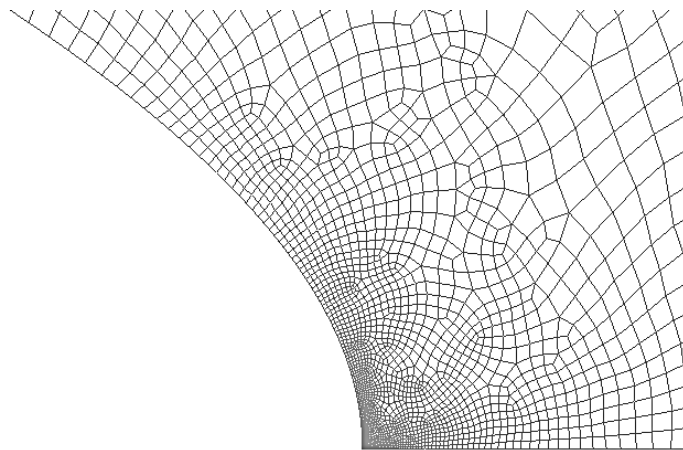


Figura 6.25: Malla en la zona cercana al punto donde se aprecian mayores esfuerzos.

Para todos los casos y sus respectivas mallas seleccionadas se verificó la calidad que éstas poseían, utilizando el criterio de calidad de forma. Al igual que en el problema anterior de la placa con agujero elíptico, se fijó como condición que más del 90% de

los elementos debían poseer una calidad de malla mayor o igual a 0.5, todo esto con el objetivo de tener mallas de buena calidad y evitar así errores o problemas de convergencia. A continuación se muestran los gráficos acumulados de la calidad de forma para cada caso, con su respectiva marca que muestra desde donde los elementos se consideran buenos. Los elementos a la derecha de la marca (línea vertical roja), se consideran de buena calidad.

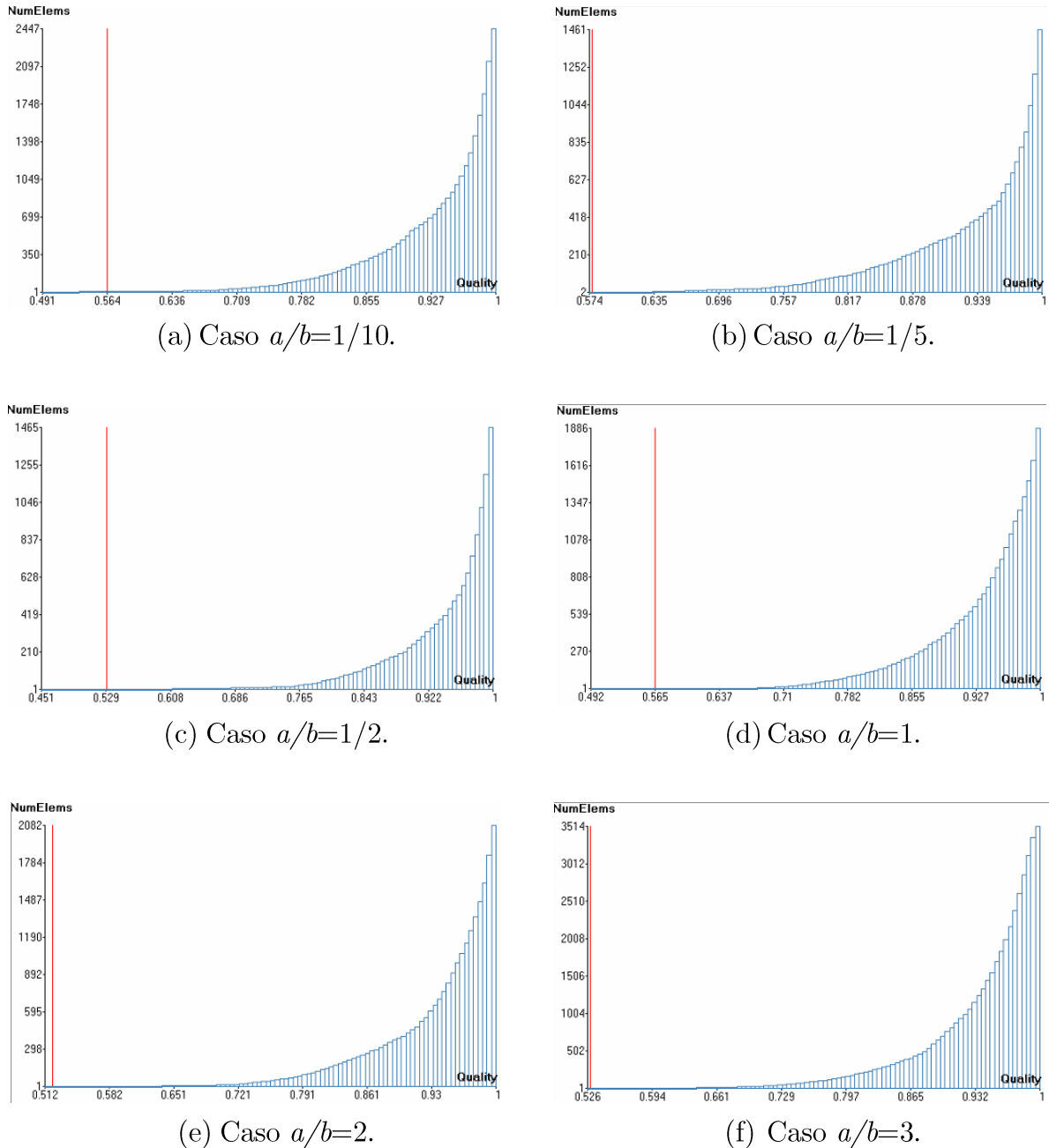


Figura 6.26: Calidad de malla. Criterio de forma.

A partir de estos gráficos se puede establecer la siguiente tabla:

Tabla 6.6: Calidad de malla

<i>Caso</i>	<i>Elementos totales</i>	<i>Cantidad de Elementos con calidad de forma <0.5</i>	<i>Porcentaje de elementos con calidad de forma >0.5</i>
1/10	2447	5	99.796 [%]
1/5	1461	1	99.932 [%]
1/2	1465	2	99.863 [%]
1	1886	1	99.947 [%]
2	2082	1	99.952 [%]
3	3514	1	99.972 [%]

De la tabla anterior se puede ver que las mallas generadas para cada caso son de buena calidad y que responden adecuadamente a las condiciones establecidas. Menos del 0.1 % de los elementos posee una calidad menor a 0.5, este resultado es importante ya que es de vital relevancia tener una malla que no presente elementos inadecuados especialmente en la zona de refinado, en donde ocurre la concentración de esfuerzos y deformaciones.

Extracción de resultados

Se estudia el comportamiento de σ_{22} y ϵ_{22} . Estos se extraen en la parte inferior de la placa desde la punta del borde hiperbólico hasta el interior de la misma, es decir para $x_2 = 0, x_a \leq x_1 < L$ con $x_1 \rightarrow x_a$ y donde $x_a = a(\cosh(\frac{\pi}{2}) - 1)$, como lo indica la flecha en la figura:

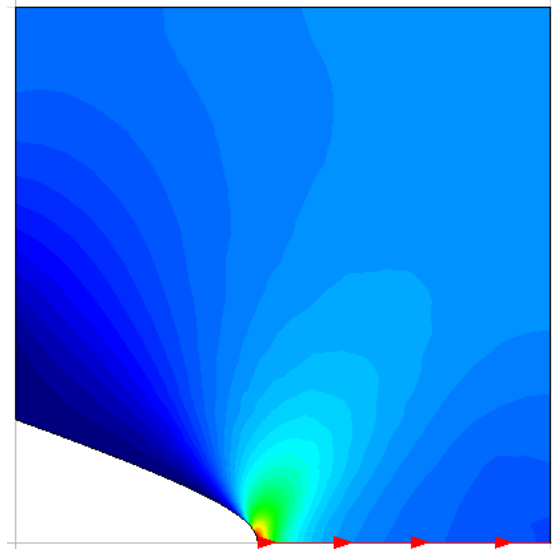


Figura 6.27: Extracción de resultados de esfuerzos y de deformación.

Luego con estos valores se calculan los esfuerzos y deformaciones adimensionales como se muestra en la sección 5.3.

Convergencia y prueba de malla

Al igual que para el problema de la sección 6.1, para este problema de valor de frontera se aplica la misma metodología de la sección 5.4. Se realizó la prueba de carga para la última geometría estudiada ($a/b=3$) usando una malla gruesa y evaluando diversas cargas, desde 10^3 hasta 10^7 [Pa] todas aplicadas en el mismo punto de control $((x, y) = (x_a, 0))$, a continuación se muestra el resultado de esta prueba:

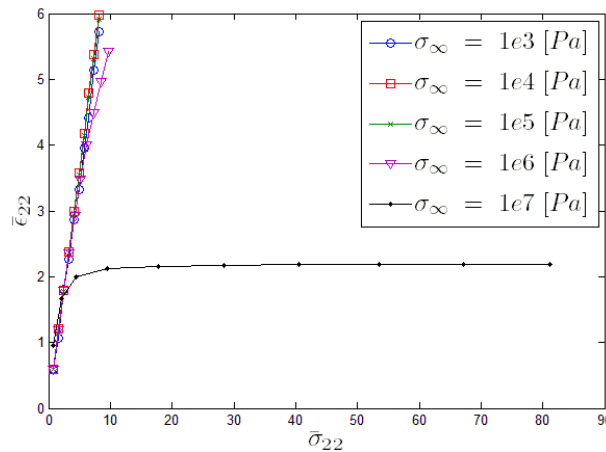


Figura 6.28: Prueba de esfuerzo, para una malla gruesa de la geometría $a/b=3$. Se evalúan 5 cargas diferentes aplicadas en el mismo nodo de control.

Se observa del gráfico que la cota máxima para el esfuerzo aplicado es 10^7 y se fija mínima como 10^6 [Pa] (aquí comienza una respuesta no lineal). Para este problema de valor de frontera se utiliza la cota máxima como elección de carga aplicada y no la anterior, que es lo que se aconseja en la metodología, ya que las geometrías no generan concentraciones de esfuerzos elevadas como en el caso del agujero elíptico.

A continuación se muestra la prueba de pasos. De los gráficos se puede observar que no se llega a una constancia en los valores de esfuerzo y deformación, pero sí que desde el paso 40 la diferencia se va haciendo más pequeña, de esta manera se decide tomar como paso inicial una cantidad de 50, con el argumento de que al ir refinando la malla bajo esta cantidad de pasos, los resultados serán cada vez más confiables y las diferencias en los valores serán menores.

La diferencia entre los resultados del paso 10 con respecto al paso 50 no son muy grandes, para el paso 10 se obtiene una deformación del 2,1% y un esfuerzo de $9.6 \cdot 10^6$ [Pa], para el paso 50 se obtiene una deformación del 2,07% y un esfuerzo de $9.9 \cdot 10^6$ [Pa], si se calcula la diferencia porcentual para cada parámetro, se tiene que la deformación difiere un 2% entre estos 2 pasos y el esfuerzo lo hace un 3%.

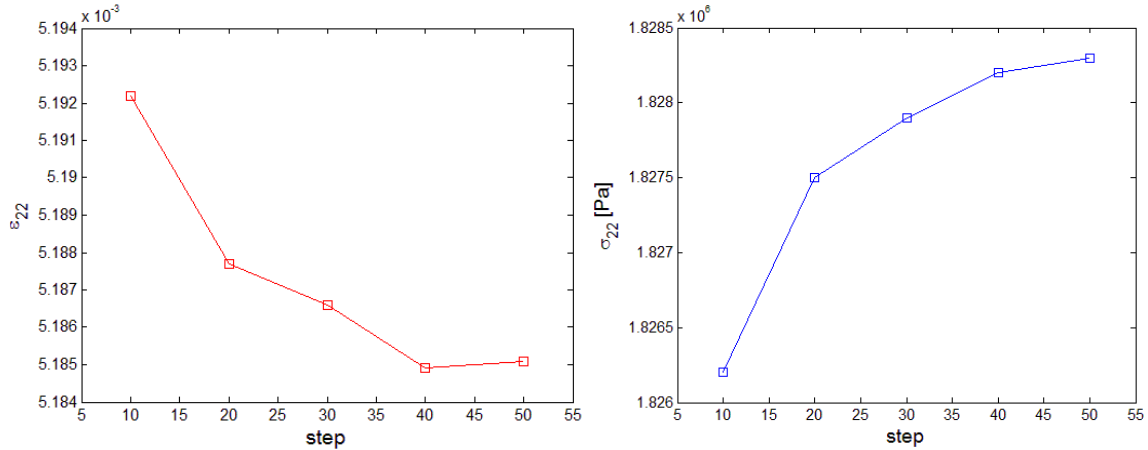


Figura 6.29: Prueba de pasos placa con entalle hiperbólico.

Luego con las 2 pruebas realizadas, se decide en primera instancia utilizar una cantidad de pasos de 50 y un esfuerzo de 10^7 [Pa]. Al ir refinando estos valores decrecen, especialmente la cantidad de pasos. La carga aplicada no disminuye mucho ya que con la cantidad seleccionada se logra obtener una respuesta no lineal, por lo tanto es más conveniente variar el parámetro asociado al Newton Rhapson (pasos) para obtener convergencia.

Después de ir refinando y cambiando los parámetros mencionados anteriormente se llega a que los valores encontrados para que los problemas convergiesen son los mostrados en la Tabla 6.7:

Tabla 6.7: Valores para obtener convergencia en el problema del entalle hiperbólico.

<i>Razón semiejes a/b</i>	<i>Esfuerzo aplicado (σ_∞) [Pa]</i>	<i>Pasos</i>
1/10	25.000.000	10
1/5	10.000.000	10
1/2	10.000.000	10
1	5.000.000	10
2	5.000.000	10
3	2.500.000	10

De esta tabla se puede ver que para el primer caso se utiliza una cantidad mayor que la cota aplicada, esto se debe a que la geometría no concentra mucho los esfuerzos y las deformaciones, por ende es necesario utilizar una carga externa mayor para obtener la curva objetivo. Se puede ver de la tabla que se llega a una cantidad de pasos iguales para todos los casos y que es el esfuerzo el que varía en cada uno de ellos, esto se debe principalmente a la geometría y a su capacidad de concentrar solicitaciones; si es un concentrador de esfuerzos elevados es necesario disminuir la tensión aplicada para asegurar la convergencia del código.

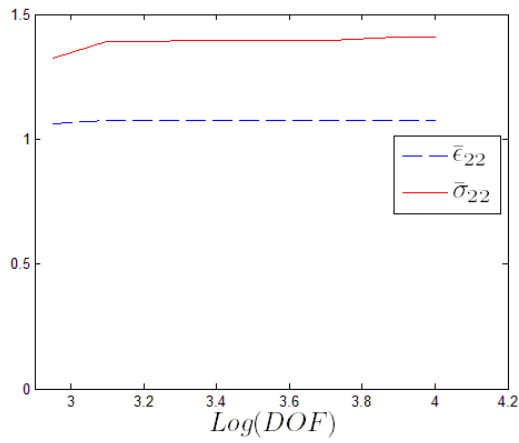
A continuación se muestran los datos de las mallas seleccionadas para cada caso:

Tabla 6.8: Tamaño de elementos.

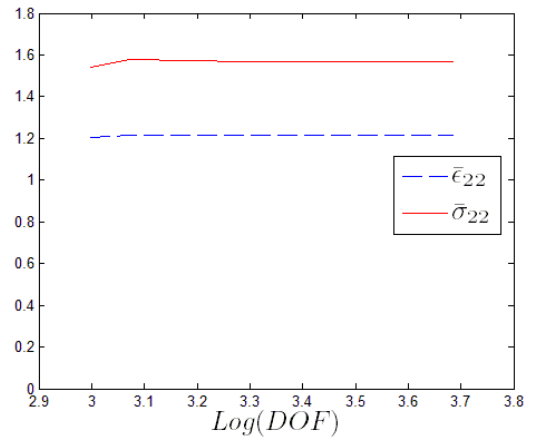
<i>Caso</i>	<i>Tamaño de elemento normalizado</i>	<i>Nodos totales</i>
1/10	0.0001	2583
1/5	0.0001	1572
½	0.0001	1573
1	0.00001	2032
2	0.00001	2232
3	0.0001	3663

Se puede observar de la tabla que el tamaño normalizado de elemento en el sector refinado es del orden de los 10^{-5} para los 4 últimos casos, situación que se produce debido a que la hendidura o entalle presenta un cambio más brusco de geometría, por lo tanto el elemento debe ser de menor tamaño en dicho sector. Los nodos totales son similares en los 5 casos, salvo el último caso en que producto de la geometría se debió utilizar una densidad elementos mayor en la zona donde se produce concentración de esfuerzos.

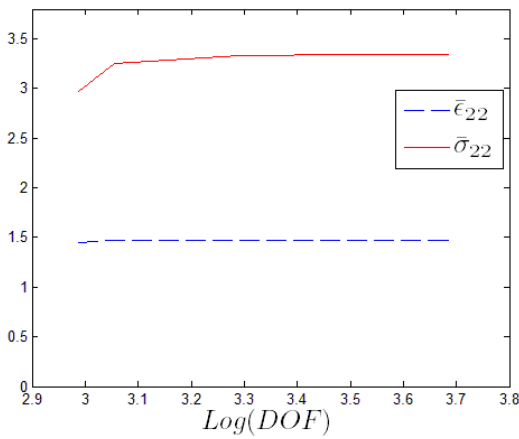
Se realizaron pruebas de mallas para cada caso, buscando determinar cómo se mencionó en la sección 5, la malla con la cual más allá de ella (en el sentido del número de grados de libertad), los valores de la deformación y el esfuerzo normalizado, aproximadamente son constantes en función del número de grados de libertad. A continuación se muestra una figura con los gráficos realizados para cada geometría:



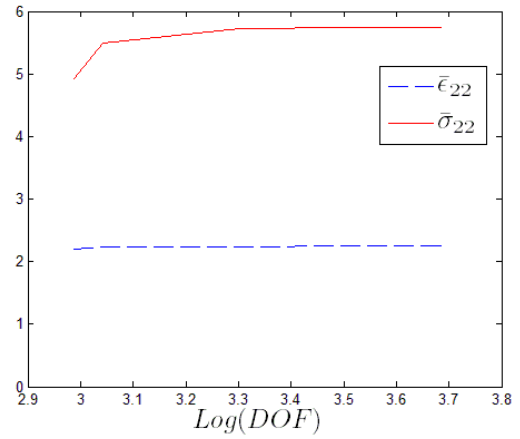
(a) Caso $a/b=1/10$. $\sigma_\infty = 2.5 \cdot 10^7$ [Pa].



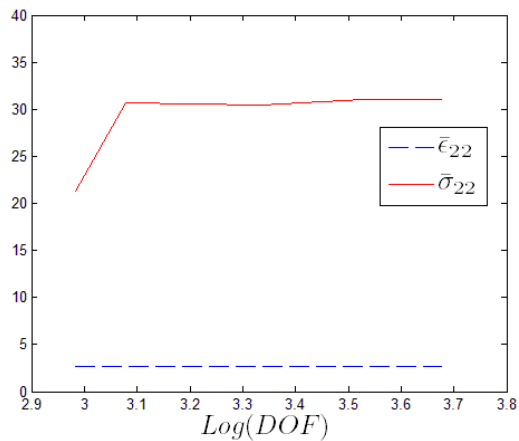
(b) Caso $a/b=1/5$. $\sigma_\infty = 1 \cdot 10^7$ [Pa].



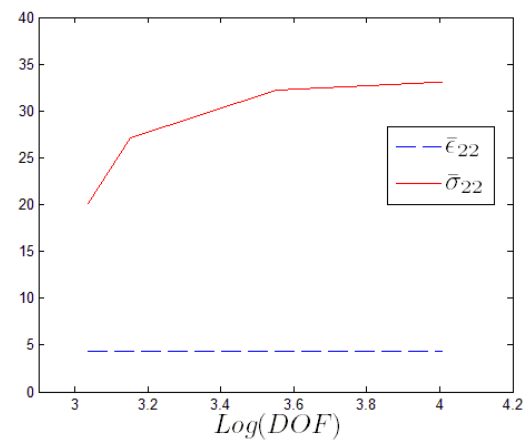
(c) Caso $a/b=1/2$. $\sigma_\infty = 1 \cdot 10^7$ [Pa].



(d) Caso $a/b=1$. $\sigma_\infty = 5 \cdot 10^6$ [Pa].



(e) Caso $a/b=2$. $\sigma_\infty = 5 \cdot 10^6$ [Pa].



(f) Caso $a/b=3$. $\sigma_\infty = 2.5 \cdot 10^6$ [Pa].

Figura 6.30: Prueba de malla para cada geometría.

De estos gráficos se puede observar que las pruebas de malla son muy buenas, en el sentido de que con una malla no muy fina se pueden obtener resultados adecuados sin

tener que utilizar recursos computacionales extras. El único caso que presenta una leve diferencia en su curva de esfuerzo normalizado es el último (f). Esta situación se debe a que la geometría del caso (f) genera una concentración más alta de esfuerzos que las otras, por lo tanto el mallado en el punto debe ser mayor y por ende es necesario agregar más grados de libertad.

Resultados

En primer lugar se muestra el grafico ϵ_{22} versus σ_{22} para la última geometría ($a/b=3$) donde los datos se extrajeron en el punto más interno del entalle hiperbólico ($x_1 = a \left(\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 \right), x_2$), con el fin de demostrar que con los valores utilizados de esfuerzo aplicado, se está trabajando en el rango no lineal. Se observa también que la deformación alcanza un valor menor al 4%, cantidad que concuerda con el supuesto de deformaciones pequeñas.

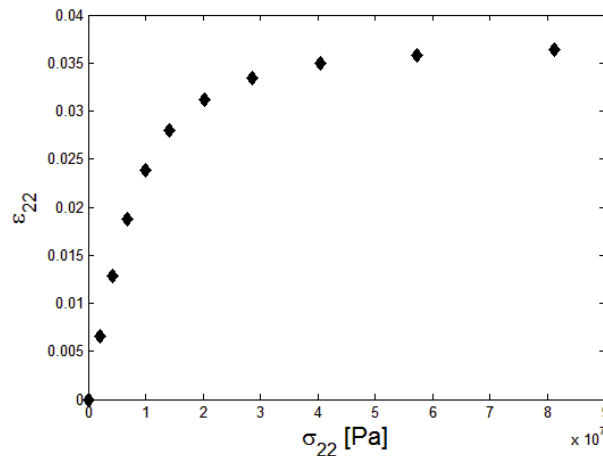
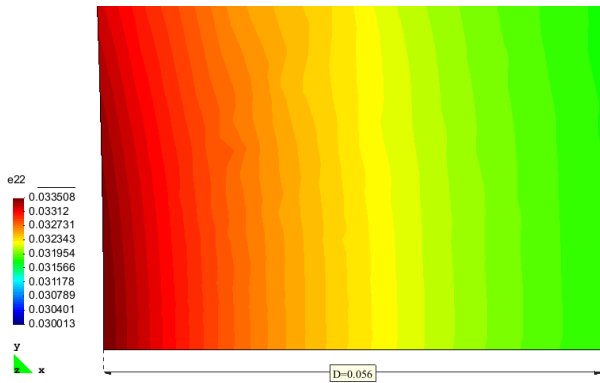


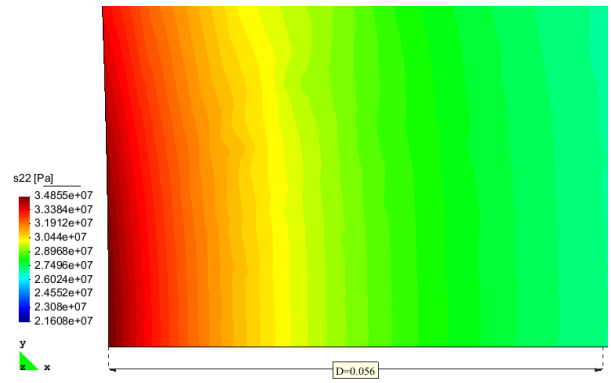
Figura 6.31: Comportamiento de ϵ_{22} versus σ_{22} , caso $a/b=3$.

De la curva se observa que se cumple con la curva objetivo (caso 1D) y que la respuesta está dentro de lo estipulado.

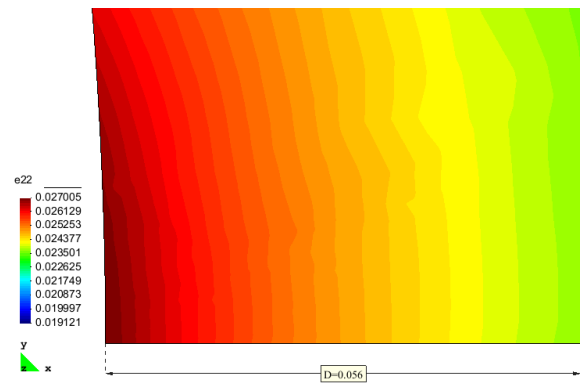
A continuación se muestran los campos de esfuerzos y deformaciones cerca de la punta del borde interno de la muesca hiperbólica (en el último paso. carga externa total), para las 6 geometrías estudiadas:



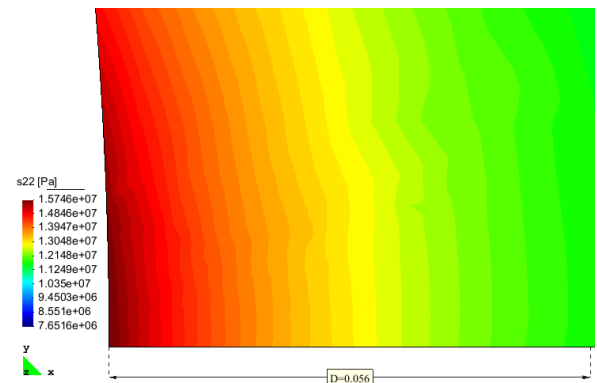
a.1) Campo deformación ϵ_{22} , $a/b=1/10$.



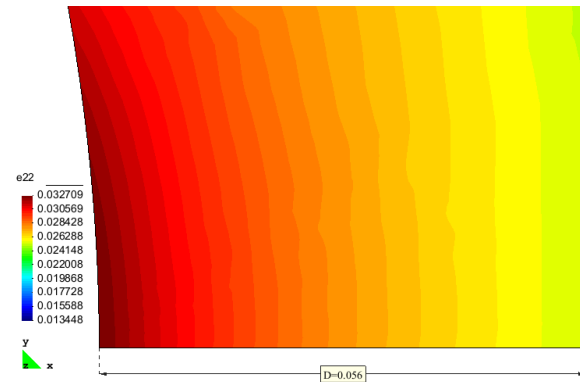
a.2) Campo esfuerzo σ_{22} , $a/b=1/10$.



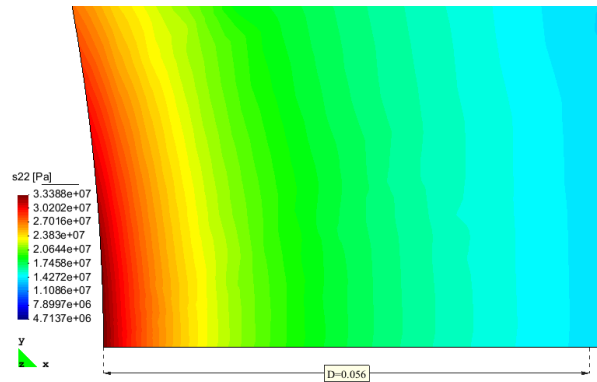
b.1) Campo deformación ϵ_{22} , $a/b=1/5$.



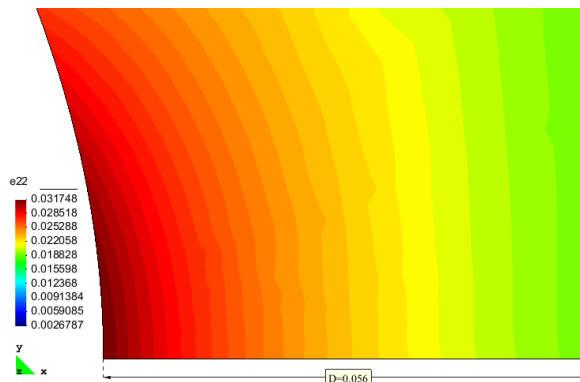
b.2) Campo esfuerzo σ_{22} , $a/b=1/5$.



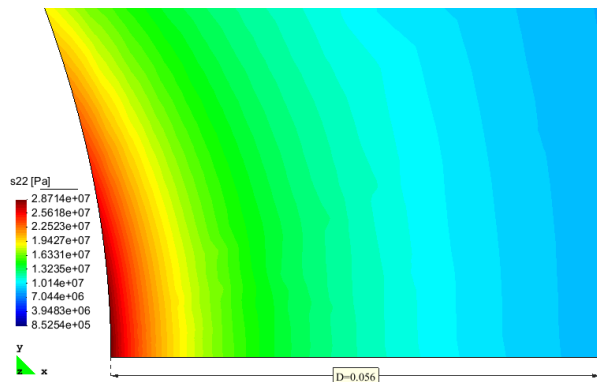
c.1) Campo deformación ϵ_{22} , $a/b=1/2$.



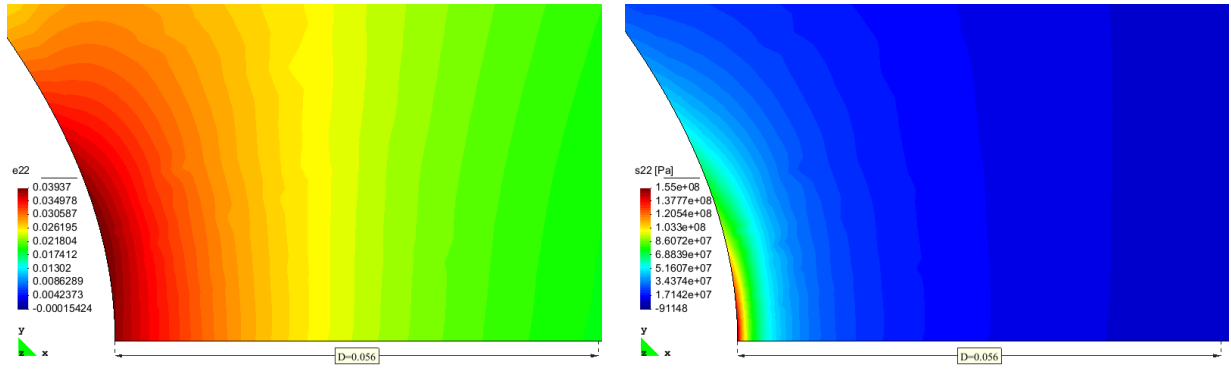
c.2) Campo esfuerzo σ_{22} , $a/b=1/2$.



d.1) Campo deformación ϵ_{22} , $a/b=1$.

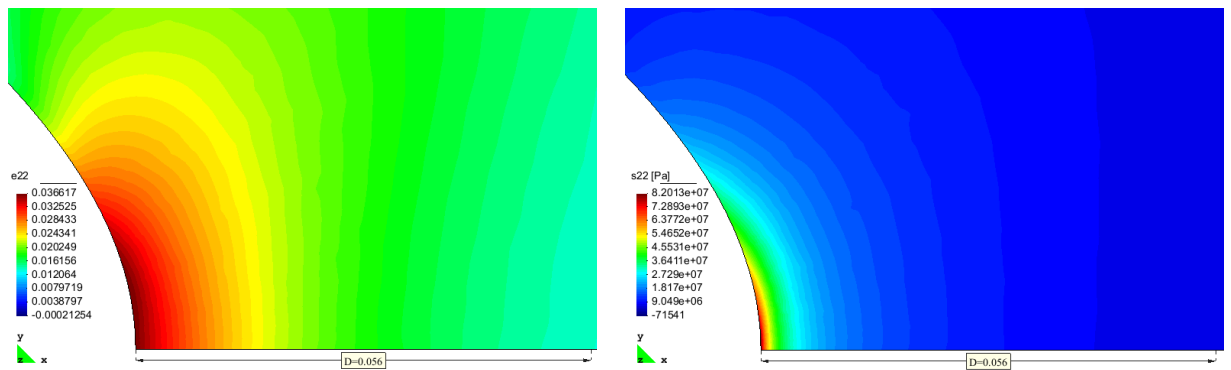


d.2) Campo esfuerzo σ_{22} , $a/b=1$.



e.1) Campo deformación ε_{22} , $a/b=2$.

e.2) Campo esfuerzo σ_{22} , $a/b=2$.



f.1) Campo deformación ε_{22} , $a/b=3$.

f.2) Campo de esfuerzo σ_{22} , $a/b=3$.

Figura 6.32: Campo de esfuerzos σ_{22} y deformación ε_{22} para todas las geometrías.

A continuación también se muestra un detalle en la punta del agujero elíptico para los 2 últimos casos:

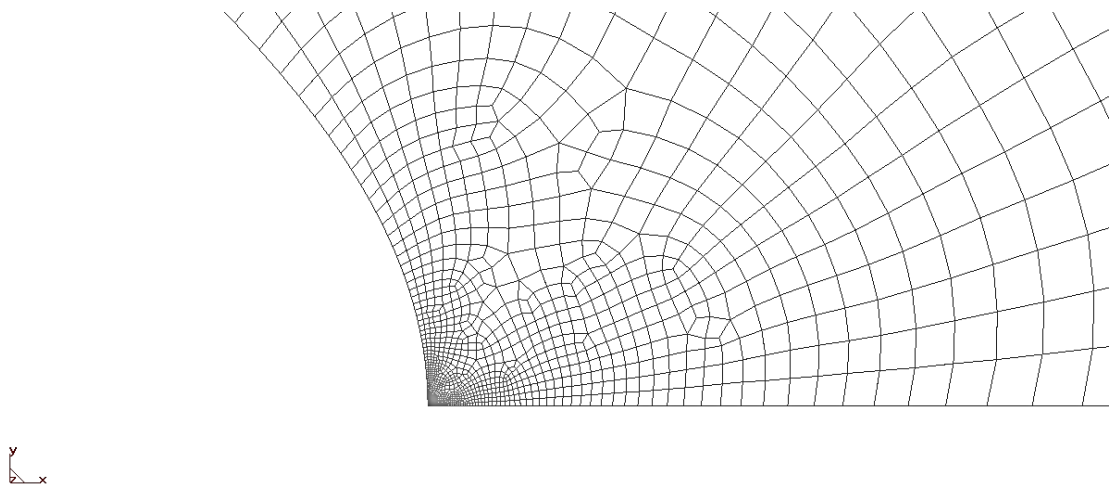


Figura 6.33: Detalle malla refinada cerca del punto más interno del entalle con perfil hiperbólico caso $a/b=2$.

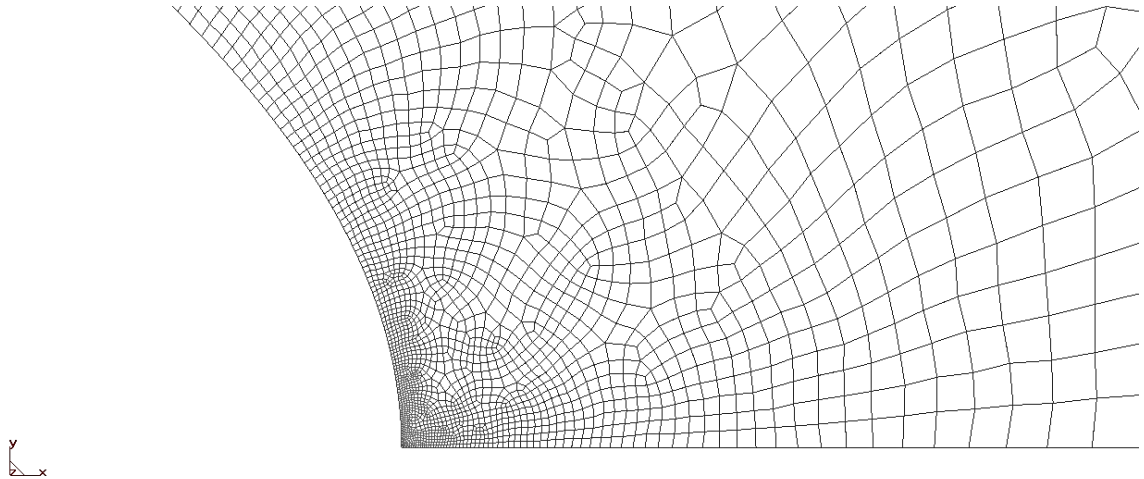


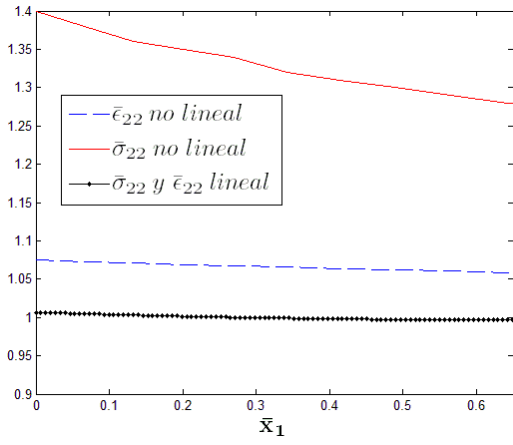
Figura 6.34: Detalle malla refinada cerca del punto más interno del entalle con perfil hiperbólico caso $a/b=3$.

De las figuras se observa como al ir haciendo más interna la hendidura, la deformación y el esfuerzo aumentan, y también se ve como el área de concentración para ambos casos se hace más pequeña y centrada en el punto interno de la hipérbola. Se puede apreciar también de estos resultados que la deformación en todos los casos se mantiene baja, cercana al 4%.

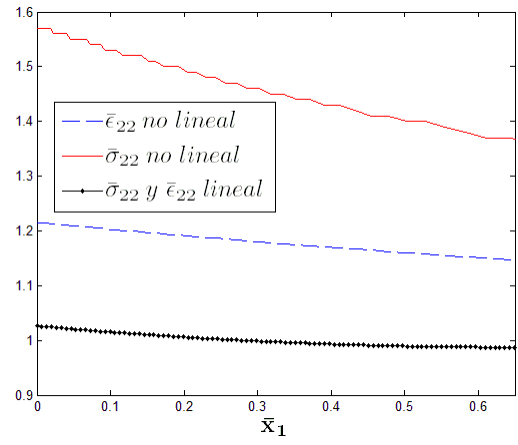
Teniendo en cuenta las definiciones de las variables adimensionalizadas de la sección 5.3:

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_{22} &= \frac{\sigma_{22}}{\sigma_{\infty}}, \\
 \bar{\varepsilon}_{22} &= \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{\infty}}, \\
 \bar{x}_1 &= \frac{x_1 - x_a}{x_a}, \\
 x_a &= a(\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1),
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

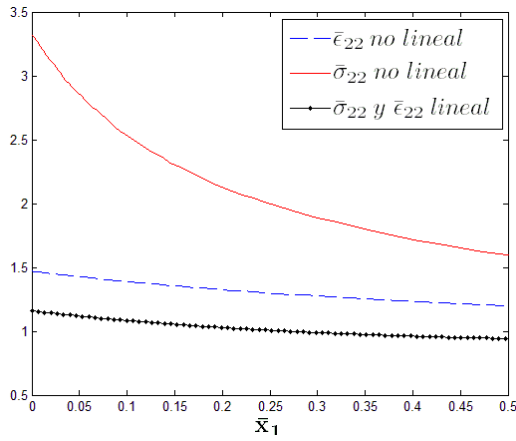
a continuación se muestra el esfuerzo y la deformación adimensionales para el caso lineal y no lineal versus la distancia adimensional, en la línea $x_2 = 0$, $x_a \leq x_1 < L$ con $x_1 \rightarrow x_a$ (aproximándose más hacia x_a).



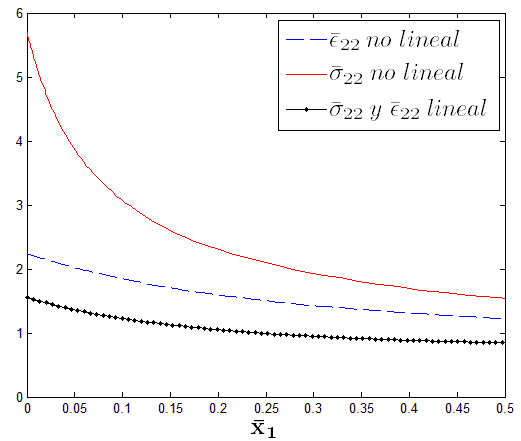
(a) Caso $a/b=1/10$, $\sigma_\infty = 2.5 \cdot 10^7$ [Pa].



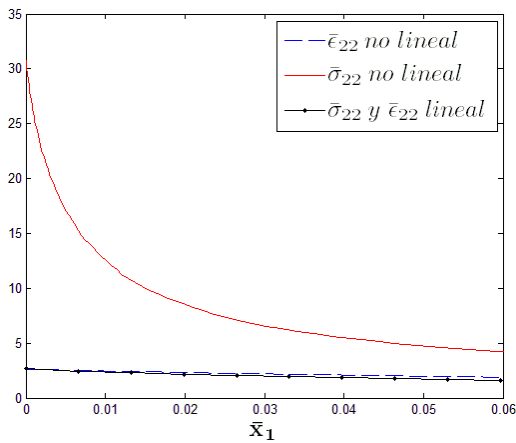
(b) Caso $a/b=1/5$, $\sigma_\infty = 1 \cdot 10^7$ [Pa].



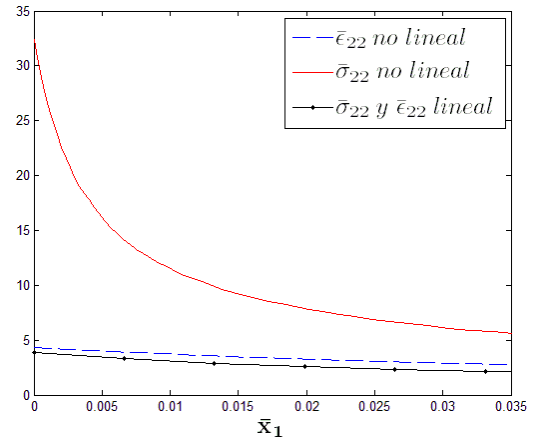
(c) Caso $a/b=1/2$, $\sigma_\infty = 1 \cdot 10^7$ [Pa].



(d) Caso $a/b=1$, $\sigma_\infty = 5 \cdot 10^6$ [Pa].



(e) Caso $a/b=2$, $\sigma_\infty = 5 \cdot 10^6$ [Pa].



(f) Caso $a/b=3$, $\sigma_\infty = 2.5 \cdot 10^6$ [Pa].

Figura 6.35: Concentración lineal y no lineal del esfuerzo ($\bar{\sigma}_{22}$) y la deformación ($\bar{\epsilon}_{22}$) para cada caso estudiado en la línea $x_2 = 0, x_a \leq x_1 < L$ con $x_1 \rightarrow x_a$.

De la Figura 6.35 se puede observar cómo el esfuerzo y la deformación se concentran cada vez más, cerca del punto más interno del entalle hiperbólico. Se puede apreciar además que para los 2 últimos casos la concentración de esfuerzo no lineal es bastante alta en comparación a los otros 4 casos, y hay un incremento que va desde aproximadamente 5.5 a casi 30 (entre $a/b=1$ y $a/b=2$). Los 2 últimos casos además son muy similares en cuanto a la magnitud de la sollicitación adimensional no lineal, en cambio la deformación normalizada no lineal difiere casi el doble. Se observa además que ambas soluciones (lineal y no lineal) son muy distintas, especialmente en las 2 últimas geometrías donde las concentraciones de esfuerzo no lineales son mucho mayores que las lineales al ir acercándose al punto más interno del entalle. De todas maneras para ambas soluciones las deformaciones se mantienen pequeñas.

En la Tabla 6.4 se observa la magnitud de la deformación no lineal en el punto más interno del entalle hiperbólico ($\epsilon_{22-entalle}$) y en el infinito ($\epsilon_{22\infty}$) (donde se aplica la carga externa), se observa de ésta que para ambas deformaciones se alcanzan magnitudes pequeñas, y que la primera deformación aumenta en cada caso, pero la segunda se mantiene acotada y similar en cada geometría aunque la carga externa aplicada varíe. Con esto se demuestra que hay una concentración de la deformación en el punto más interno del entalle hiperbólico y esta aumenta al ir haciendo más profunda la hendidura.

Tabla 6.9: Magnitud de las deformaciones en el punto interno del entalle hiperbólico y en el infinito.

Razón a/b	1/10	1/5	1/2	1	2	3
$\epsilon_{22-entalle}$ [%]	3.33	2.69	3.26	3.17	3.84	3.634
$\epsilon_{22\infty}$ [%]	3.11	2.22	2.22	1.415	1.465	0.8415

Recordando la expresión para calcular la concentración de esfuerzos y deformación adimensionales en el punto más interno del entalle hiperbólico para el caso lineal de la sección 4.2 se tiene:

$$\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{\infty}} = \frac{(4\cot(\eta_0))}{(\pi-2\eta_0+\sin(2\eta_0))}, \tag{6.7}$$

se obtienen los concentradores de la solución lineal y se comparan con la solución no lineal.

En la tabla se muestra los concentradores de esfuerzo y deformación para cada geometría. Se puede observar que la concentración de esfuerzos aumenta al hacer más interna el entalle al igual que la deformación. También se aprecia la gran diferencia de valores entre los resultados obtenidos y la teoría elástica lineal clásica. Se puede observar de la tabla que la concentración aumenta en gran medida en las geometrías con muescas hiperbólicas más internas, principalmente en las 2 últimas, donde es más notoria esta situación.

Tabla 6.10: Factores de concentración en la punta del entalle hiperbólico.

a/b	$1/10$	$1/5$	$1/2$	1	2	3
<i>Caso no lineal</i>						
$\bar{\sigma}_{22}$	1.3951	1.5723	3.324	5.6942	30.758	32.4308
$\bar{\epsilon}_{22}$	1.0686624	1.1330906	1.4688089	2.2398586	2.6230034	4.3182412
<i>Caso lineal</i>						
$\bar{\sigma}_{22}$	1.0067	1.0264	1.1579	1.5559	2.6540	3.8734
$\bar{\epsilon}_{22}$	1.0067	1.0264	1.1579	1.5559	2.6540	3.8734

Recordando los potenciales complejos para este problema de valor de frontera que aparecen en la sección 4.2:

$$\begin{aligned}\psi(z) &= -\frac{1}{2}Ai\zeta, \\ \chi(z) &= -\frac{1}{2}Ai\zeta - Bci \cdot \sinh(\zeta),\end{aligned}\tag{6.8}$$

se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta} &= 2[\psi'(z) + \bar{\psi}'(\bar{z})] = 4Re(\psi'(z)), \\ \sigma_{\eta} - \sigma_{\xi} + 2i\tau_{\xi\eta} &= 2e^{2i\alpha}[\bar{z}\psi''(z) + \chi''(z)],\end{aligned}\tag{6.9}$$

evaluando para $0 < \xi < \infty$ y $\eta = 0$, teniendo en cuenta que $z = c \cdot \cosh(\zeta)$ con $\zeta = \xi + i\eta$ (c es la distancia entre los focos) y que α es al ángulo que se forma entre la tangente de la curva $\eta = cte$ (en la dirección de ξ creciente) y el eje x del sistema de coordenadas Cartesianas. De esta manera se puede graficar la solución teórica para el caso $a/b=3$, en la línea $x_2 = 0, x_a \leq x_1 < L$. La siguiente Figura muestra las curvas obtenidas del esfuerzo y la deformación adimensionales para los componentes 11 y 22.

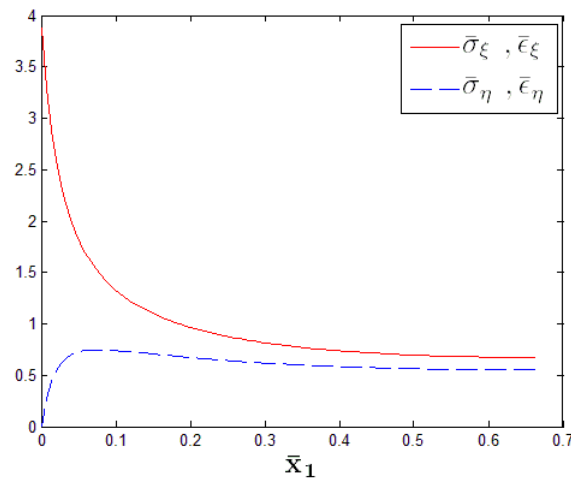
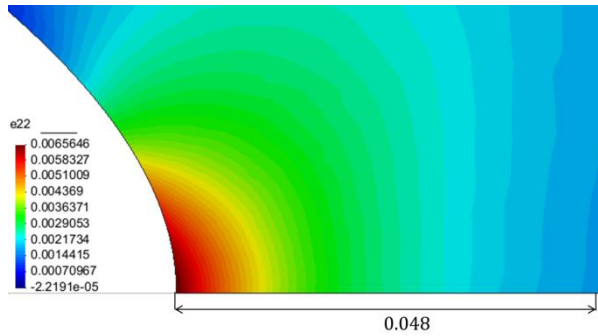


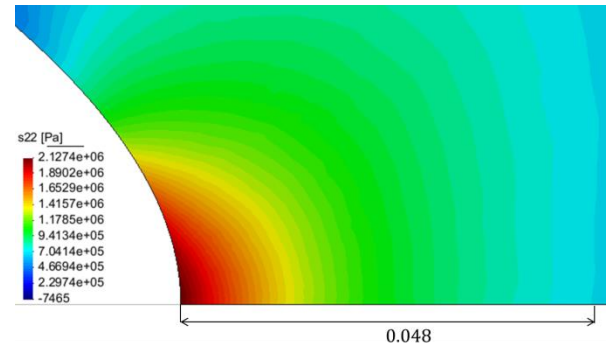
Figura 6.36: Concentración de esfuerzo ($\bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{11}$) y deformación ($\bar{\epsilon}_{22}, \bar{\epsilon}_{11}$) en la línea $x_2 = 0, x_a \leq x_1 < L$ solución lineal.

Si se compara la Figura 6.35 con la Figura 6.36, se logra ver que la concentración de esfuerzos es más alta para el caso no lineal que para el caso lineal, se puede observar también que el máximo para el caso teórico ocurre en la punta de la cintura de la placa $(x, y) = (x_a, 0)$ al igual que la solución numérica encontrada. Se visualiza además que la deformación es pequeña y acotada para el caso no lineal, no así para el caso lineal en donde su aumento es igual a la cantidad que alcanza el esfuerzo. Todas estas situaciones muestran nuevamente el efecto de esta reciente ecuación constitutiva en la modelación del fenómeno.

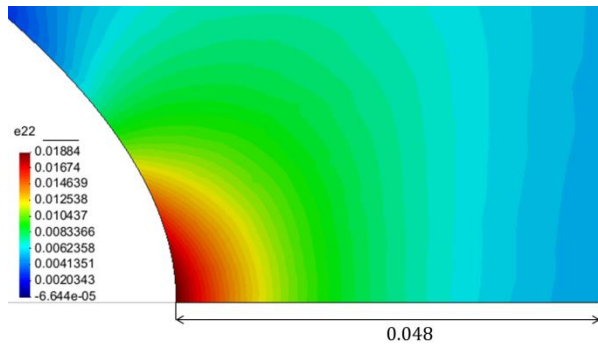
A continuación se muestran los campos de esfuerzo y deformación para la última geometría $a/b=3$, bajo diferentes cargas externas σ_∞ .



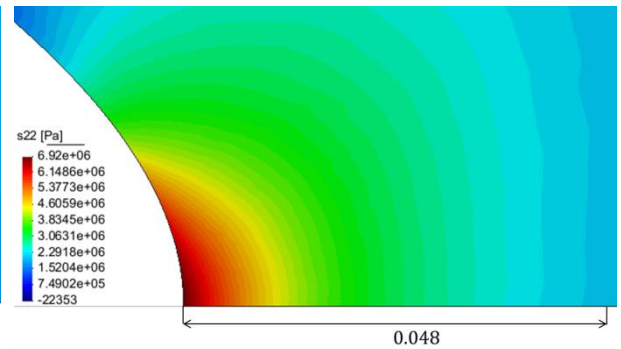
a.1) Deformación ε_{22} para $\sigma_\infty = 2.5 \cdot 10^5$ [Pa].



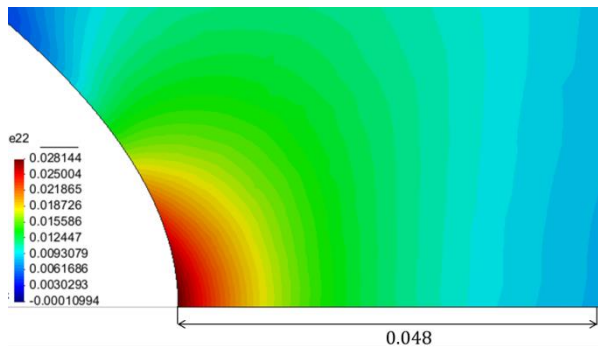
a.2) Esfuerzo σ_{22} para $\sigma_\infty = 2.5 \cdot 10^5$ [Pa].



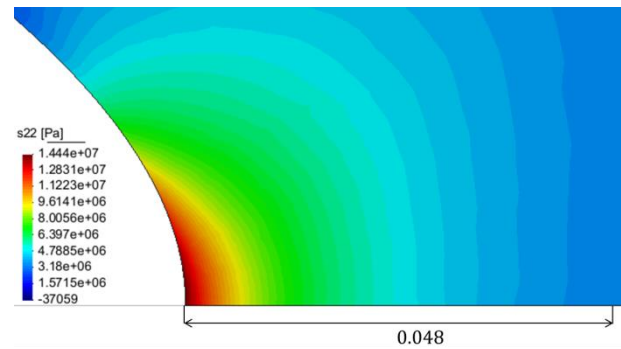
b.1) Deformación ε_{22} para $\sigma_\infty = 7.5 \cdot 10^5$ [Pa].



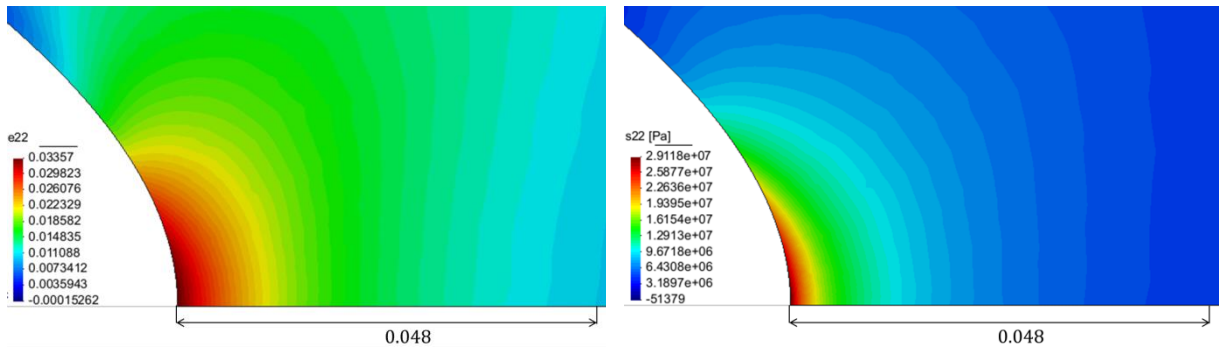
b.2) Esfuerzo σ_{22} para $\sigma_\infty = 7.5 \cdot 10^5$ [Pa].



c.1) Deformación ε_{22} para $\sigma_\infty = 1.25 \cdot 10^6$ [Pa].

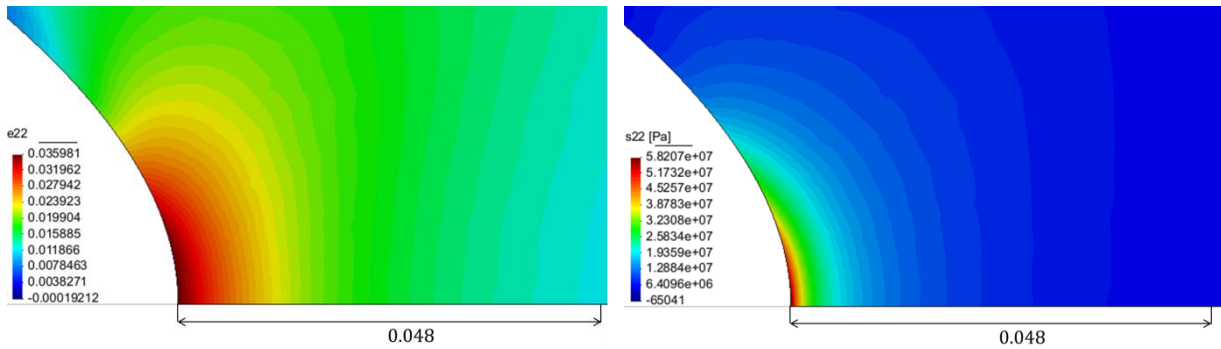


c.2) Esfuerzo σ_{22} para $\sigma_\infty = 1.25 \cdot 10^6$ [Pa].



d.1) Deformación ε_{22} para $\sigma_{\infty} = 1.75 \cdot 10^6$ [Pa].

d.2) Esfuerzo σ_{22} para $\sigma_{\infty} = 1.75 \cdot 10^6$ [Pa].



e.1) Deformación ε_{22} para $\sigma_{\infty} = 2.25 \cdot 10^6$ [Pa].

e.2) Esfuerzo σ_{22} para $\sigma_{\infty} = 2.25 \cdot 10^6$ [Pa].

Figura 6.37: Casos intermedios para geometría $a/b=3$.

Observando las figuras y tomando en cuenta la distancia de referencia fijada (0.048) se puede decir que el campo de deformación va aumentando su área de concentración y que el campo de esfuerzo va disminuyendo, pero en ambos casos la superficie se concentra en el punto más interno de la hendidura (punto $(x,y) = (x_a,0)$) y en parte del borde de la hipérbola. Se observa nuevamente que la deformación se mantiene en valores pequeños y que concuerdan con las cantidades estipuladas por la linealización.

A continuación se muestra la concentración del esfuerzo en el borde interno de la hipérbola, se observa que la máxima concentración se ubica en la primera columna de elementos y que el espesor de ésta no es más que $1/3$ del largo de 1 elemento finito (0.0001).

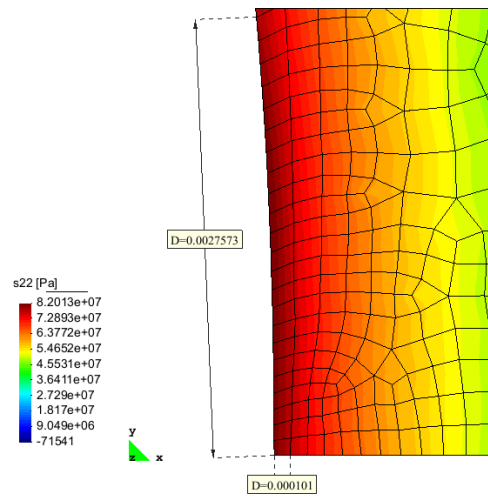


Figura 6.38: Concentración del esfuerzo σ_{22} en elementos.

Las siguientes figuras corresponden a los diagramas de contornos del desplazamiento, en la dirección X, la dirección Y, la magnitud total de ésta y el diagrama de vectores para el caso $a/b=3$.

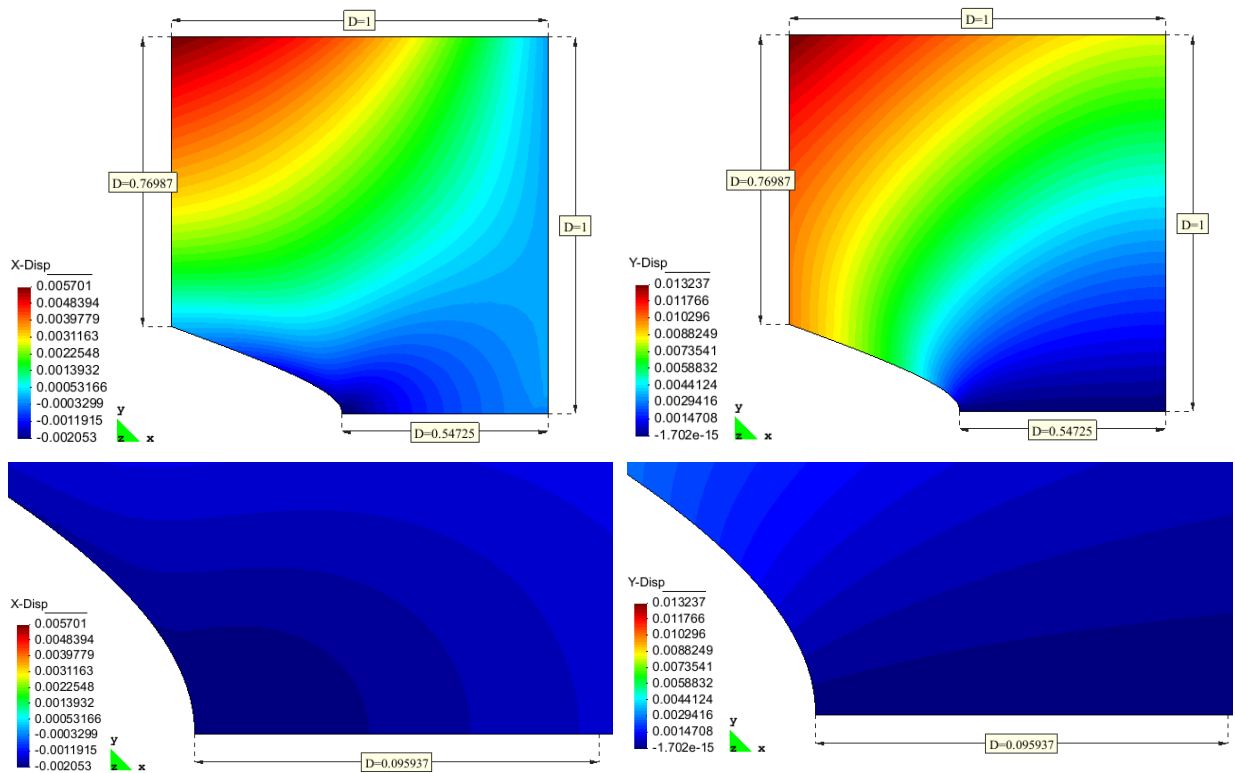


Figura 6.39: Desplazamientos. Tracción y contracción lateral de la placa.

De las figuras presentadas, se observa que los desplazamientos son pequeños (según lo estipulado en los supuestos) especialmente en el interior de la placa.

Resolviendo el sistema de ecuaciones de la sección 4.1, evaluando u_1 y teniendo en cuenta la definición del desplazamiento adimensional que aparece en la sección 5.3 :

$$\bar{u}_1 = \frac{u_1}{x_a}, \tag{6.10}$$

a continuación se muestra el desplazamiento normalizado \bar{u}_1 en la línea $x_2 = 0$, $x_a < x_1 < L$, para la solución lineal y la no lineal:

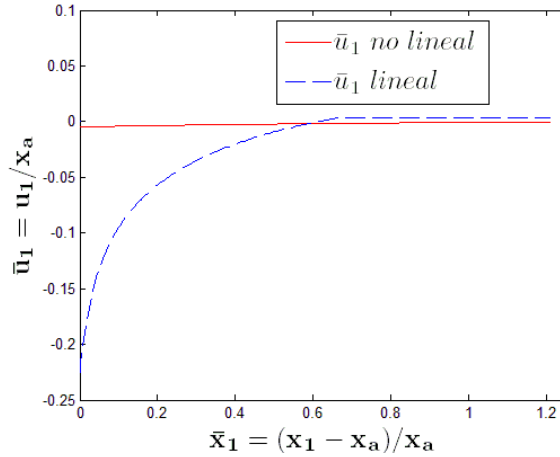


Figura 6.40: \bar{u}_1 en la línea $x_2 = 0$, $0 < x_1 < L$ caso lineal y no lineal.

Se observa de este gráfico la existencia de contracción lateral, pero el valor que se obtiene de desplazamiento para el caso no lineal es bastante menor que el que se espera para el caso lineal. En ambos casos se visualiza que el desplazamiento es mayor cercano al borde, luego tiende a disminuir al interior de la placa.

6.3 Placa seminfinita bajo carga puntual

El objetivo específico para el caso de la placa seminfinita es obtener el campo de esfuerzo y deformación en todas las direcciones y graficar la concentración de esfuerzo y deformación nominal en el lugar donde se aplica la carga puntual.

A continuación se muestran las condiciones de borde, las geometrías, las mallas empleadas, la medición de resultados, las pruebas de malla y los resultados obtenidos.

Modelación

En la Figura 6.41 se muestran las condiciones de borde del problema. Se supone simetría axial, por lo tanto se modela 1/2 de toda la placa. De esta manera se aplica condición de rodillo en la cara que pertenece al eje de simetría y a los bordes que se proyectan al infinito. La carga aplicada es la mitad de la original. La placa debe ser lo suficientemente grande de modo de modelar de forma aproximada un medio semi-infinito.

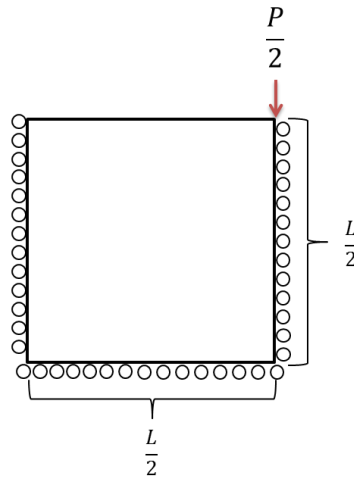


Figura 6.41: Condiciones de borde placa seminfinita.

Prueba de Geometrías

Para el caso de Geometrías seminfinitas, como se mencionó en la sección anterior es necesario hacer una prueba para determinar la dimensión adecuada “ L ” para tener un modelo de un medio semi-infinito. De acuerdo a la Figura 6.42, a partir de $L=2$ [m], se logran valores constantes de esfuerzo y deformación en el lugar donde es aplicada la carga, pero con la intención de asegurarse que la geometría no afecte en la convergencia se seleccionó una geometría de placa de $L=4$.

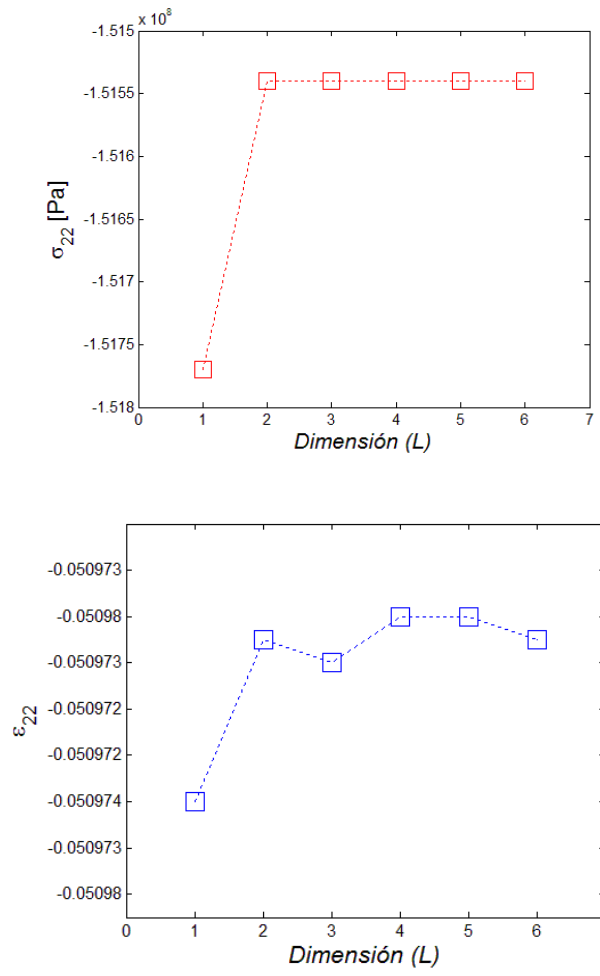


Figura 6.42: Prueba de geometrías L con una carga de $\sigma_{\infty} = 10.000$ [Pa].

Mallas

La malla utilizada es del tipo estructurada y concéntrica, con centro en el punto de aplicación de la fuerza. El refinado es cerca de este punto. La idea principal es obtener una malla ordenada con una buena calidad debido a que en este tipo de problemas la convergencia es muy difícil de controlar producto de la alta concentración de esfuerzos que ocurre casi en un punto.

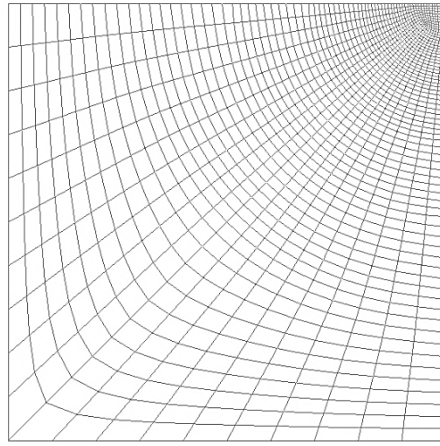


Figura 6.43: Malla utilizada.

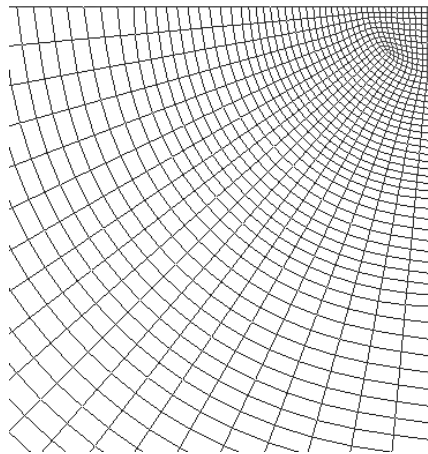


Figura 6.44: Acercamiento zona refinada.

Como se mencionó en la metodología se revisó la calidad de malla utilizando el criterio de calidad de forma. A continuación se muestra el grafico para esto:

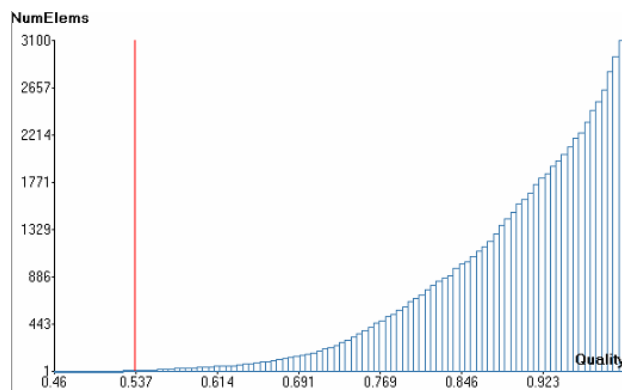


Figura 6.45: Calidad de malla. Criterio de forma.

Se estipuló que la calidad objetivo sea mayor a 0.5, en el gráfico se marca esta cantidad, a la derecha de esta línea roja los elementos son buenos y a la izquierda, regulares. Utilizando una malla de 3100 elementos cuadriláteros de 4 nodos, el porcentaje de elementos que poseen una calidad de malla superior al valor fijado es del 99%, por lo tanto la calidad de forma para este caso es bastante buena y cumple con la condición estipulada en que más del 90 % de los elementos sobrepasen la cota superior de calidad de malla.

Extracción de resultados

Se obtiene los valores de σ_{22} y ε_{22} . Estos se extraen en la parte lateral de la placa desde el punto de aplicación de la fuerza hasta la parte inferior de ella, es decir para $x_1 = 0, 0 < x_2 < L$ con $x_2 \rightarrow 0$, como lo indica la flecha en la figura:

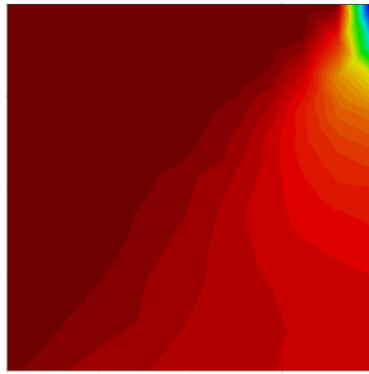


Figura 6.46: Extracción de resultados placa seminfinita detalle en el punto de aplicación de la carga externa.

También se extraen los valores de σ_{11} y ε_{11} , en la cara superior del medio seminfinito, es decir en la línea $x_2 = 0, 0 < x_1 < L$ con $x_1 \rightarrow 0$.

Luego con estos valores se calculan los esfuerzos y deformaciones adimensionales, utilizando las ecuaciones presentadas en la sección de metodología.

Convergencia y prueba de malla

Al igual que en los otros problemas de valor de frontera, para éste también se utilizó la metodología mostrada en la Sección 5.4.

Se realizó la prueba de carga para una geometría inicial de largo $L=2$, de este estudio se observa que para una carga $\frac{P}{2} = 10^7$ [N] y una malla gruesa se alcanza rápidamente

una respuesta no lineal y una deformación acotada, por lo tanto esta carga no puede ser seleccionada como cota máxima debido a que al ir refinando la malla podrían haber problemas de convergencia. Se puede tomar como cota máxima la fuerza de 10^6 [N], pero se conoce que en estos problemas la concentración de esfuerzos es alta en el punto aplicado, por lo tanto para una malla más fina esta cota causaría problemas de convergencia, por lo tanto es más conveniente tomar como límite máximo una tensión de 10^5 [N]. De la figura se puede ver todo lo mencionado anteriormente.

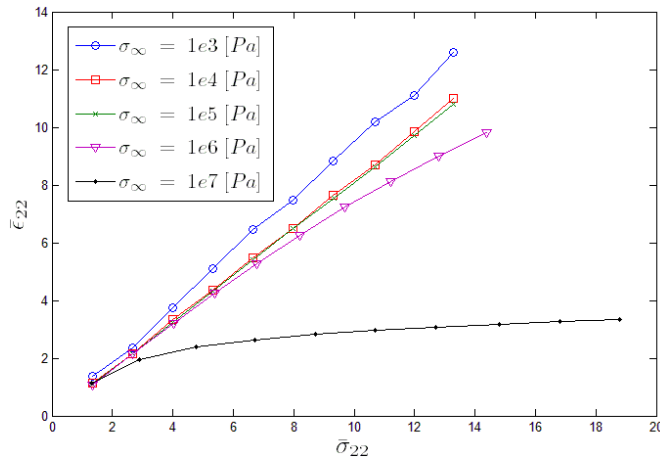


Figura 6.47: Prueba de carga aplicada.

En cuanto a la prueba de pasos se puede decir que la deformación no se ve afectada por la cantidad de ellos, pero si el esfuerzo. Este último tiene menos diferencia en su valor luego del paso 30 (ver Figura 6.48), por lo tanto se selecciona esta cantidad como cota máxima.

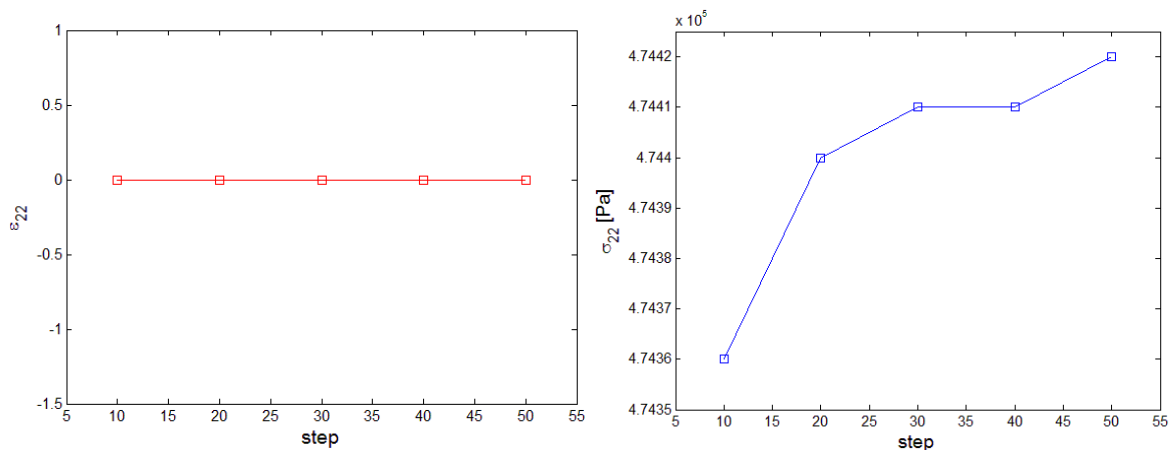


Figura 6.48: Prueba de carga aplicada.

Luego con las 2 primeras pruebas realizadas se selecciona como parámetros a usar $\frac{P}{2} = 100.000$ [N] y pasos=30. Después de ir refinando y revisando los campos de esfuerzo y deformación, se obtiene como valores finales para cumplir convergencia, los siguientes valores:

Tabla 6.11: Valores para cumplir convergencia.

<i>Largo (L)</i>	<i>Esfuerzo aplicado (P)[N]</i>	<i>Pasos</i>
4	10.000	10

Se observa de la tabla que se debió bajar el esfuerzo y los pasos también, esto era de esperarse debido a las características de este tipo de problema.

Luego con estos valores finales se realiza la prueba de malla.

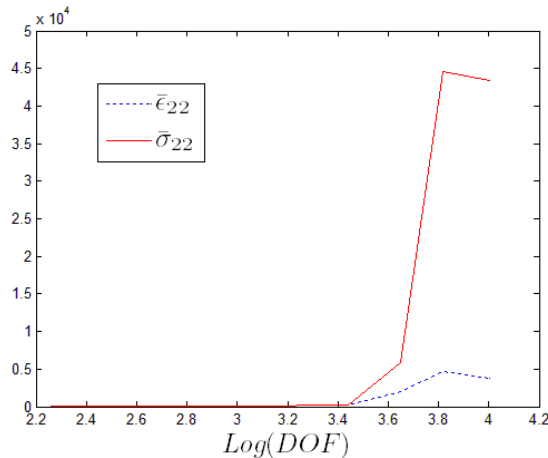


Figura 6.49: Prueba de malla.

De la figura se puede ver que es difícil definir una malla adecuada, ya que al ir refinando, cada vez más va aumentando la concentración de solicitaciones. No se logra ver una constancia en los valores del esfuerzo y deformación normalizados, pero si se puede encontrar en qué punto (números de grados de libertad) ya comienza a bajar. Este punto es la malla que se utilizó.

Luego los datos para la malla seleccionada, gracias a la prueba correspondiente, son los siguientes: Largo (L)=4, Tamaño de elemento=0.00015 y Nodos totales=3271.

Resultados

En primer lugar se muestra el gráfico ϵ_{22} versus σ_{22} para este problema, medido en el punto de aplicación de la carga, para 10 pasos diferentes y por ende para 10 cargas

externas distintas, con el fin de demostrar que con el valor de la compresión aplicada, se está trabajando en el rango no lineal. Se visualiza también que la deformación alcanza un valor menor al 5.5%, cantidad que concuerda con el supuesto de deformaciones pequeñas.

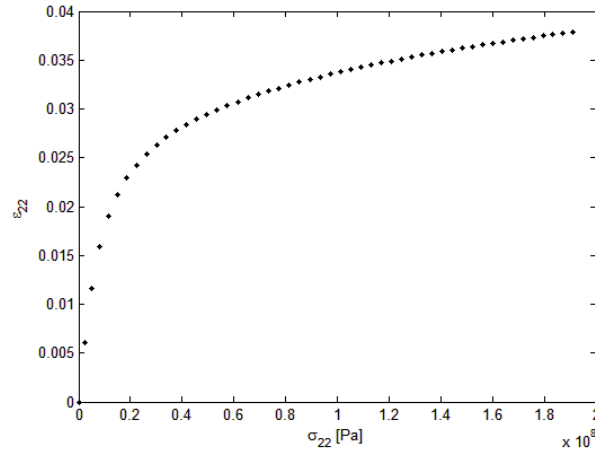


Figura 6.50: Respuesta ϵ_{22} versus σ_{22} .

De la curva se observa que se cumple con la curva objetivo (Figura 2.2) y que la respuesta está dentro de lo estipulado.

A continuación se muestran los resultados para este problema. En las siguientes figuras se observa el estado final del campo de esfuerzos y deformación para la placa seminfinita para $\sigma_{\infty} = 10.000$ [N].

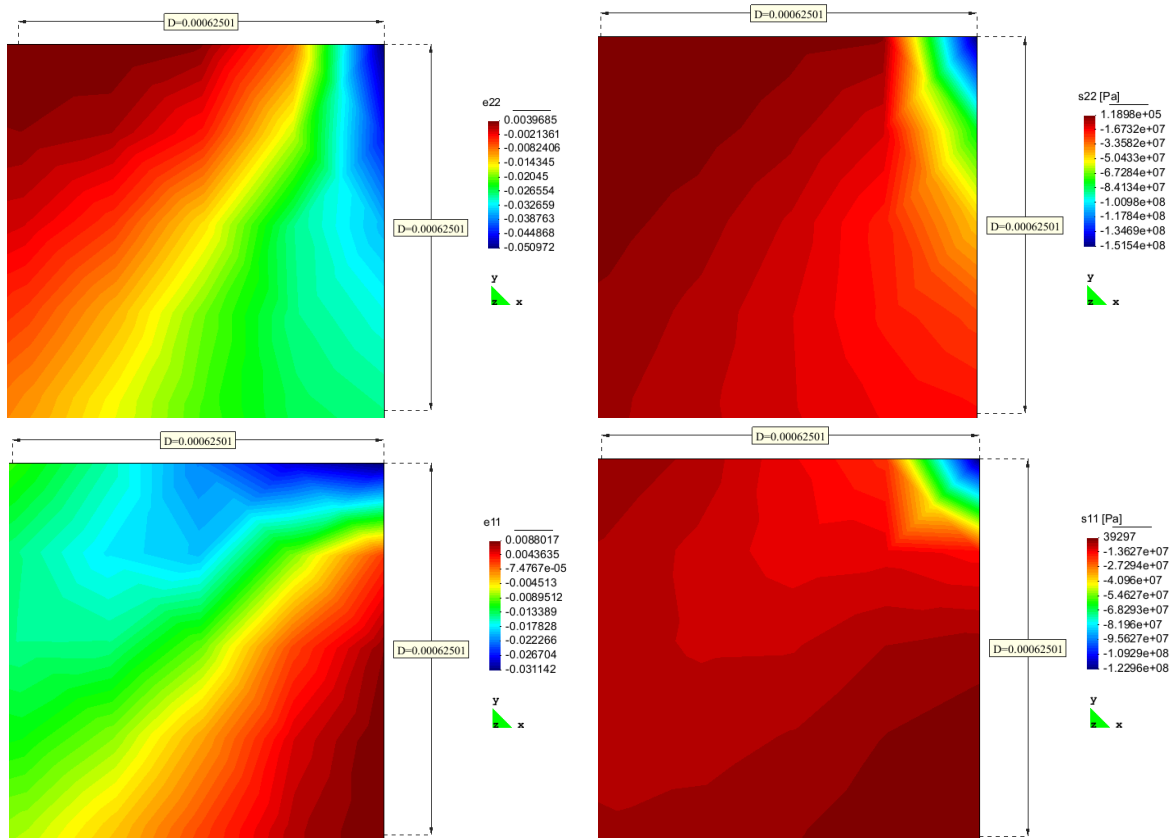


Figura 6.51: Vista en detalle en el punto de aplicación de la carga. Campos esfuerzos y deformaciones componentes ε_{22} , σ_{22} , ε_{11} , σ_{11} , placa seminfinita.

Se ve claramente como los campos se concentran en el punto donde es aplicada la carga. Se aprecia que el orden de la deformación es pequeña, cercana a los 3 – 5% y que el esfuerzo es alto cercano a los 10^8 [Pa].

Teniendo en cuenta las definiciones de las variables adimensionalizadas de la Sección 5.3:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{22} &= \frac{\sigma_{22}}{\sigma_{\infty}}, \\ \bar{\varepsilon}_{22} &= \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{\infty}}, \\ \bar{x}_2 &= \frac{x_2}{L},\end{aligned}\tag{6.11}$$

A continuación se muestra el gráfico del esfuerzo y la deformación normalizados, componentes 22, versus la distancia normalizada en la línea $x_1 = 0, 0 \leq x_2 < L$, con $x_2 \rightarrow 0$.

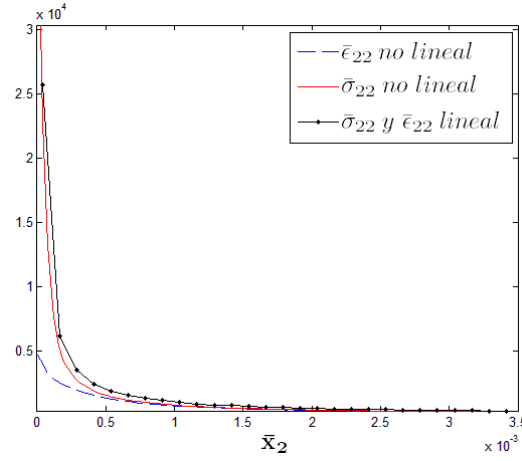


Figura 6.52: Concentración de esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ y deformación $\bar{\epsilon}_{22}$ adimensionales, para solución lineal y no lineal, en la línea $x_1 = 0, 0 \leq x_2 < L$.

De la figura se puede observar como el esfuerzo y la deformación se concentra cada vez más, cerca del punto en donde se aplica la fuerza. Esta concentración empieza a aumentar desde una distancia de $5 \cdot 10^{-4}$, para el caso del esfuerzo en cuanto a la deformación el aumento se hace más notoria a una distancia de $1 \cdot 10^{-4}$. Se aprecia además que ambas soluciones (lineal y no lineal) difieren notoriamente especialmente en la deformación, que para el caso no lineal se mantiene pequeña y acotada, no así para el caso lineal que aumenta rápidamente y alcanza magnitudes elevadas de concentración. La concentración de esfuerzo es similar, pero hay que recalcar que para el caso lineal se graficó hasta una distancia igual al tamaño del elemento finito al cual se le aplica la carga (x_e), debido a que en el punto de aplicación (origen de los ejes Cartesianos) la teoría lineal predice que la concentración tiende a infinito. La magnitud de la deformación no lineal en el punto de aplicación de la carga (ϵ_{22p}) es aproximadamente del 5.11 % y la magnitud de la deformación en el infinito ($\epsilon_{22\infty}$) es igual a 0.0011 %, se observa de estos valores que se trabaja en el rango de pequeñas deformaciones (0-12%), y que la alta concentración se debe principalmente al elevado valor de (ϵ_{22p}).

Teniendo en cuenta las definiciones de las variables adimensionalizadas de la Sección 5.3:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{\infty}}, \\ \bar{\epsilon}_{11} &= \frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_{\infty}}, \\ \bar{x}_1 &= \frac{x_1}{L},\end{aligned}\tag{6.12}$$

A continuación se muestra el gráfico del esfuerzo y la deformación normalizados, componentes 11, versus la distancia normalizada en la línea $x_2 = 0, 0 \leq x_1 < L$, con $x_1 \rightarrow 0$.

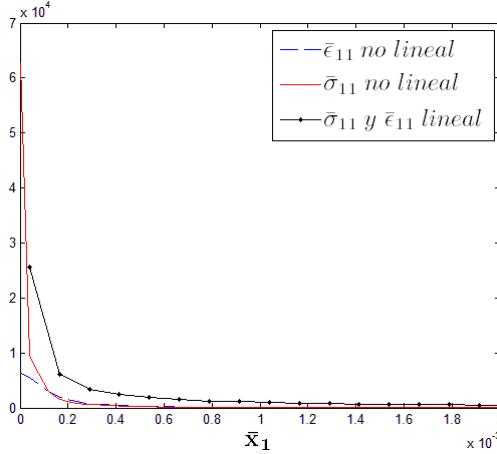


Figura 6.53: Concentración de esfuerzo $\bar{\sigma}_{11}$ y deformación $\bar{\epsilon}_{11}$ normalizados, para la solución lineal y no lineal, en la línea $x_2 = 0, 0 \leq x_1 < L$.

De la figura se puede observar como el esfuerzo y la deformación se concentra cada vez más, cerca del punto en donde se aplica la fuerza. Esta concentración empieza a aumentar desde una distancia de $2 \cdot 10^{-4}$, para el caso del esfuerzo en cuanto a la deformación el aumento se hace más notoria a una distancia de $4 \cdot 10^{-4}$. La magnitud de la deformación no lineal en el punto de aplicación de la carga (ϵ_{11p}) es aproximadamente del 3.11 % y la magnitud de la deformación en el infinito ($\epsilon_{11\infty}$) es igual a 0.0005 %, se observa de estos valores que se trabaja en el rango de pequeñas deformaciones (0-12%), y que la alta concentración se debe principalmente al elevado valor de (ϵ_{11p}).

Recordando la expresión para calcular la concentración de esfuerzos y deformación adimensionales en el punto de aplicación de la carga para el caso lineal de la Sección 4.3:

$$\frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{\infty}} = \frac{\sigma_{22}}{\sigma_{\infty}} = \frac{L}{l_e}, \quad (6.13)$$

donde L es la dimensión del medio semi-infinito y l_e es el largo del elemento finito en el cual se aplica la carga externa, se obtienen los concentradores de la solución lineal y se comparan con la solución no lineal.

En la siguiente tabla se muestra los concentradores de esfuerzo y deformación de los 2 componentes estudiados para la placa seminfinita. Se aprecia una gran diferencia entre los resultados obtenidos y la teoría elástica lineal clásica. Es importante mencionar que la extracción de resultados no fue realizada en el punto donde se aplica la fuerza sino en una distancia igual al tamaño del elemento finito en el cual se aplica la carga externa. La teoría lineal según antecedentes predice que en el punto donde es aplicada la fuerza, el esfuerzo y por ende la deformación tienden al infinito, situación que no se da en la realidad. Según el modelo no lineal estudiado existe un valor acotado para la deformación y un esfuerzo que puede ser cuantificado gracias al análisis numérico, las cantidades se pueden ver en la Tabla 6.13.

Tabla 6.12: Factores de concentración en $x_2 = x_e = 1.5599 \cdot 10^{-4}$ [m].

<i>Caso No lineal</i>	
$\bar{\sigma}_{22}$	22788
$\bar{\epsilon}_{22}$	4036
$\bar{\sigma}_{11}$	9487
$\bar{\epsilon}_{11}$	5639
<i>Caso lineal</i>	
$\bar{\sigma}_{22}$	25643
$\bar{\epsilon}_{22}$	25643
$\bar{\sigma}_{11}$	25643
$\bar{\epsilon}_{11}$	25643

Tabla 6.13: Factores de concentración en $x_2 = 0$ [m].

<i>Caso No lineal</i>	
$\bar{\sigma}_{22}$	44538
$\bar{\epsilon}_{22}$	4634
$\bar{\sigma}_{11}$	62735
$\bar{\epsilon}_{11}$	6228

Recordando la solución para este problema de valor de frontera que aparecen en la sección 4.3:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= -\frac{F_1(1+\nu)}{4\pi} \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} \left(\frac{2}{1+\nu} + \frac{x_1^2-x_2^2}{x_1^2+x_2^2} \right) - \frac{F_2(1+\nu)}{4\pi} \frac{x_2}{x_1^2+x_2^2} \left(\frac{2\nu}{1+\nu} + \frac{x_1^2-x_2^2}{x_1^2+x_2^2} \right), \\ \sigma_{22} &= -\frac{F_1(1+\nu)}{4\pi} \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} \left(\frac{2\nu}{1+\nu} - \frac{x_1^2-x_2^2}{x_1^2+x_2^2} \right) - \frac{F_2(1+\nu)}{4\pi} \frac{x_2}{x_1^2+x_2^2} \left(\frac{2}{1+\nu} - \frac{x_1^2-x_2^2}{x_1^2+x_2^2} \right),\end{aligned}\tag{6.14}$$

es posible graficar las curvas del esfuerzo y la deformación para el caso lineal.

En la siguiente figura se observa la solución teórica para este problema de valor de frontera, en la línea $x_1 = 0, 0 \leq x_2 < L$. Se grafica el esfuerzo y la deformación normalizados para las componentes 11 y 22

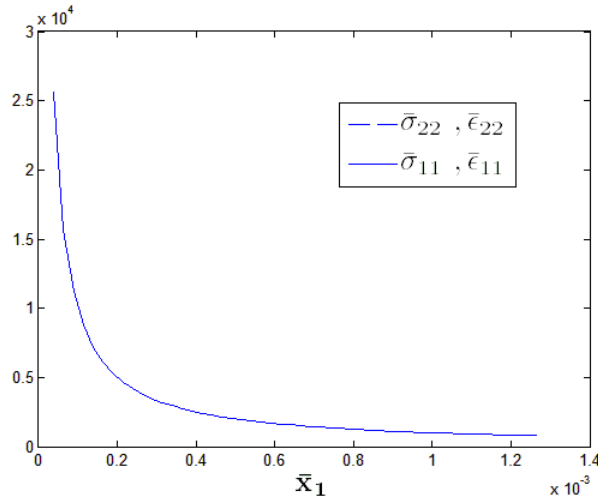
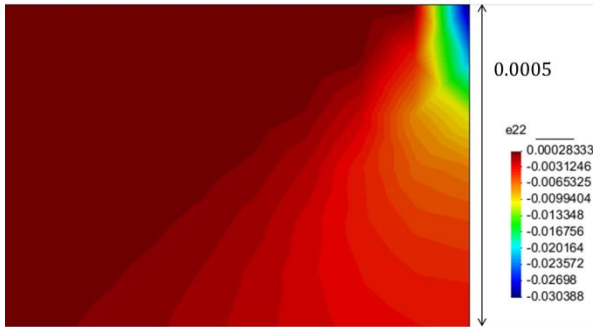


Figura 6.54: Concentración de esfuerzo ($\bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{11}$) y deformación ($\bar{\epsilon}_{22}, \bar{\epsilon}_{11}$) en la línea $x_1 = 0, 0 \leq x_2 < L$ solución lineal.

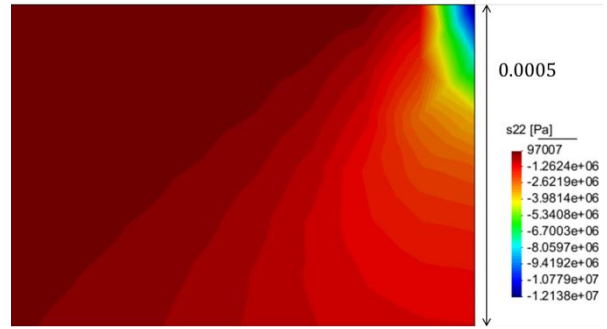
A continuación en la Figura 6.55 se muestran los resultados para 5 cargas intermedias en la placa seminfinita:

$P = 1.000[N]$



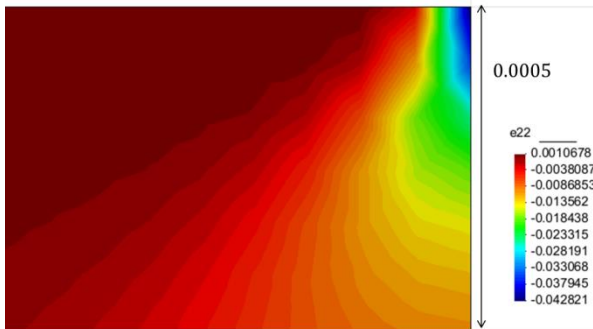
a.1) Deformación ε_{22} para $P = 10^3[N]$.

$P = 1.000[N]$



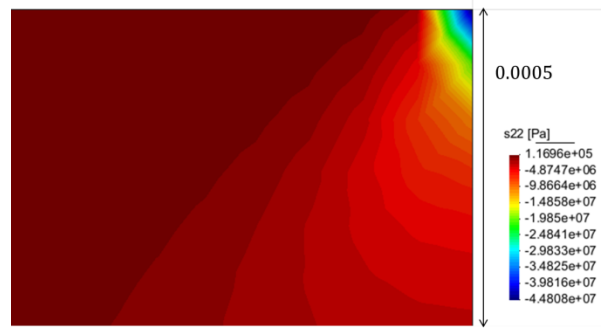
a.2) Esfuerzo σ_{22} para $P = 10^3[N]$.

$P = 3.000[N]$



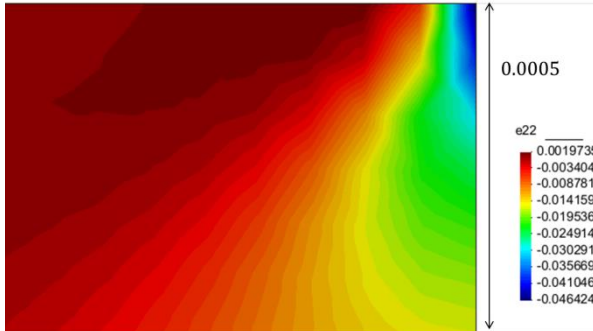
b.1) Deformación ε_{22} para $P = 3 \cdot 10^3[N]$.

$P = 3.000[N]$



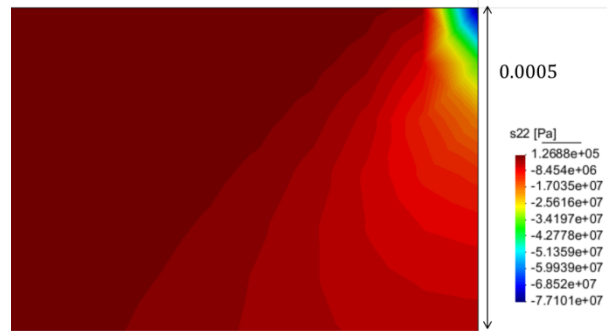
b.2) Esfuerzo σ_{22} para $P = 3 \cdot 10^3[N]$.

$P = 5.000[N]$



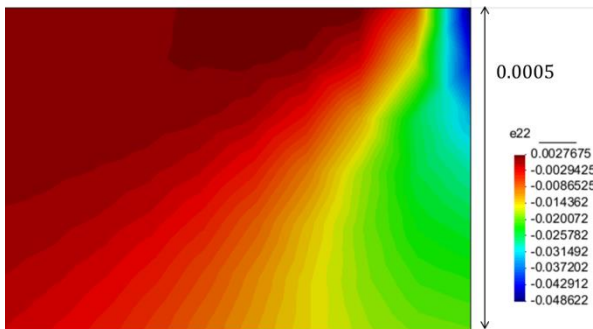
c.1) Deformación ε_{22} para $P = 5 \cdot 10^3[N]$.

$P = 5.000[N]$



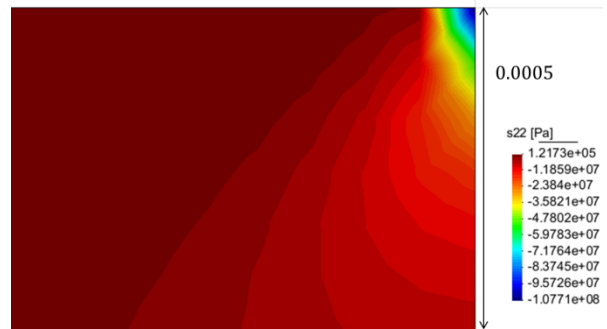
c.2) Esfuerzo σ_{22} para $P = 5 \cdot 10^3[N]$.

$P = 7.000[N]$



d.1) Deformación ε_{22} para $P = 7 \cdot 10^3[N]$.

$P = 7.000[N]$



d.2) Esfuerzo σ_{22} para $P = 7 \cdot 10^3[N]$.

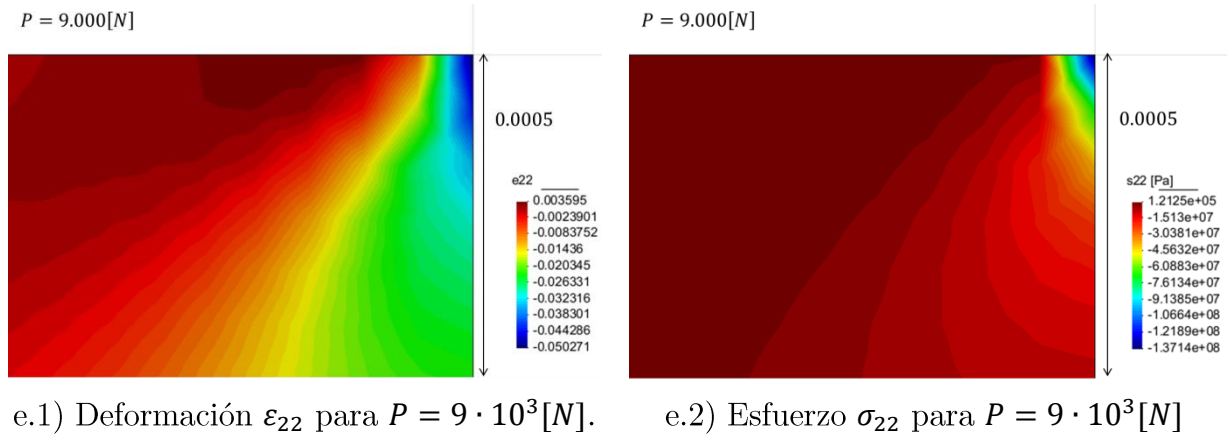


Figura 6.55: Casos intermedios de carga externa aplicada para placa seminfinita.

De la figura se puede apreciar como el área de concentración en el campo de deformación va aumentando y en el campo de esfuerzo va disminuyendo, al ir creciendo la carga aplicada, y en ambos casos las superficies de concentración se centran en el punto de aplicación de la carga.

A continuación se muestra en la figura que la concentración del esfuerzo es en el nodo del elemento donde es aplicada la carga. Se observa que el área de concentración es casi la superficie del elemento.

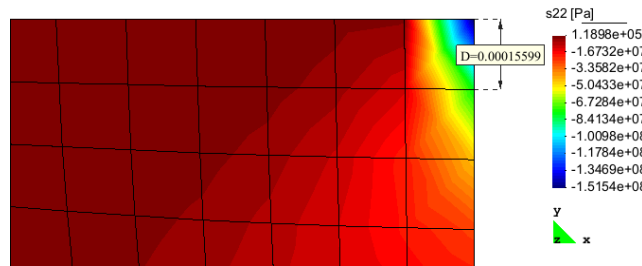


Figura 6.56: Concentración del campo de esfuerzo en 1 elemento.

En cuanto a los desplazamientos se observa de la Figura 6.56 que se mantienen pequeños, según lo estipulado por la linealización y que hay un comportamiento que es acorde a lo que se esperaría del fenómeno físico (se verifica desplazamiento lateral producto de la compresión). En las figuras siguientes se muestran las componentes, las magnitudes y los vectores de estos desplazamientos, además de acercamientos a la zona donde es aplicada la carga. Es importante mencionar que los vectores poseen un

tamaño constante y por lo tanto el grafico no es igual a los presentados en los otros problemas en donde el tamaño es acorde a la magnitud del desplazamiento.

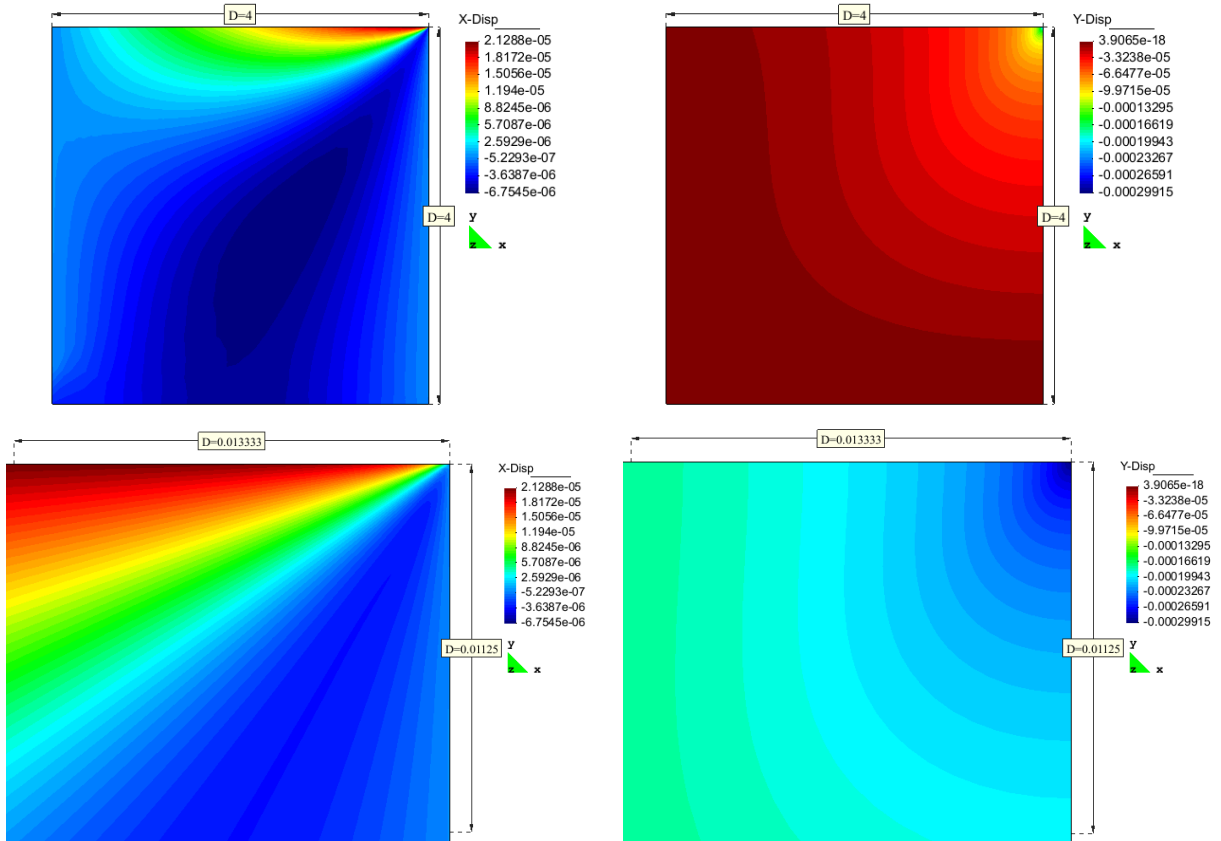


Figura 6.57: Componentes de desplazamiento y detalles cerca del punto de aplicación de la carga externa.

Teniendo en cuenta la definición del componente de desplazamiento que aparece en la sección 4.3 y del desplazamiento adimensional que aparece en la sección 5.3 :

$$u_2 = \frac{F_1(1+\nu)}{8\pi G} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{F_2(1+\nu)}{8\pi G} \left(\frac{x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{3-\nu}{1+\nu} \ln(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \right), \quad (6.15)$$

$$\bar{u}_2 = \frac{u_2}{L},$$

a continuación se muestra el desplazamiento adimensional \bar{u}_2 en la línea $x_1 = 0$, $0 < x_2 < L$, para la solución lineal y la no lineal:

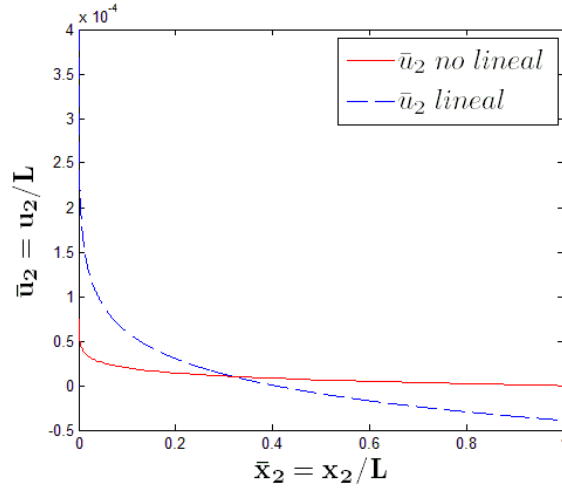


Figura 6.58: \bar{u}_2 en la línea $x_1 = 0$, $0 < x_2 < L$ caso lineal y no lineal.

Se observa de la figura que el desplazamiento lineal es mayor que el no lineal, y como se espera éste va disminuyendo al ir avanzando en la profundidad del medio seminfinito.

6.4 Inclusión esférica

El objetivo en este problema de valor de frontera consiste en obtener los campos de esfuerzo y deformación para un cubo hecho de un material lineal con una inclusión esférica modelada usando la nueva ecuación constitutiva, además de explorar lo que sucede en la interface de los materiales. La idea fundamental consiste en graficar los esfuerzos normalizados $(\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{33}, \bar{\sigma}_{12}, \bar{\sigma}_{13}, \bar{\sigma}_{23})$ y la deformación $(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23})$ en los ejes de simetría utilizados y compararlos con la solución lineal elástica clásica.

Para este problema los valores utilizados para el material lineal son $E_{matriz} = 323.387.085$ [Pa] y $\nu = 0.3$.

Modelación

En la figura se muestran las condiciones de borde del problema. Se supone simetría, por lo tanto se modela 1/8 de todo el cubo y la inclusión esférica. De esta manera se aplica condición de rodillo en las caras que pertenecen a los ejes de simetría. La carga

aplicada varía según la geometría utilizada. En la Figura 6.59 se muestra las condiciones mencionadas.

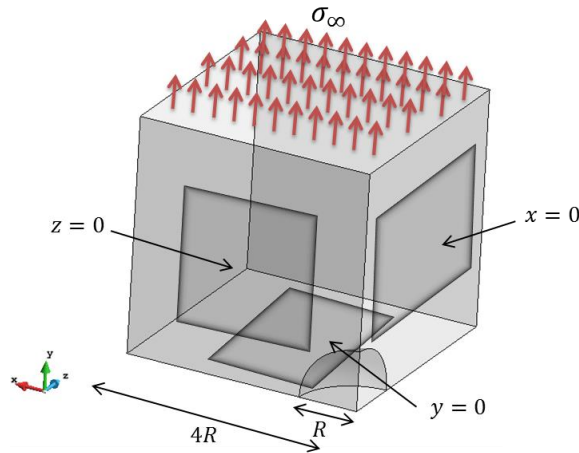


Figura 6.59: Condiciones de borde cubo con inclusión esférica.

De la figura se puede ver también los parámetros geométricos utilizados.

Mallas

La malla utilizada es no estructurada y refinada en la interface de los cuerpos. En un principio se utilizó una malla gruesa para obtener aproximadamente un valor del espesor del campo de concentraciones en la interface, y luego a partir de esto se fue refinando como se observa en la figura. El objetivo fundamental además es realizar una malla lo más fina posible, es decir lo máximo que permita los recursos computacionales.

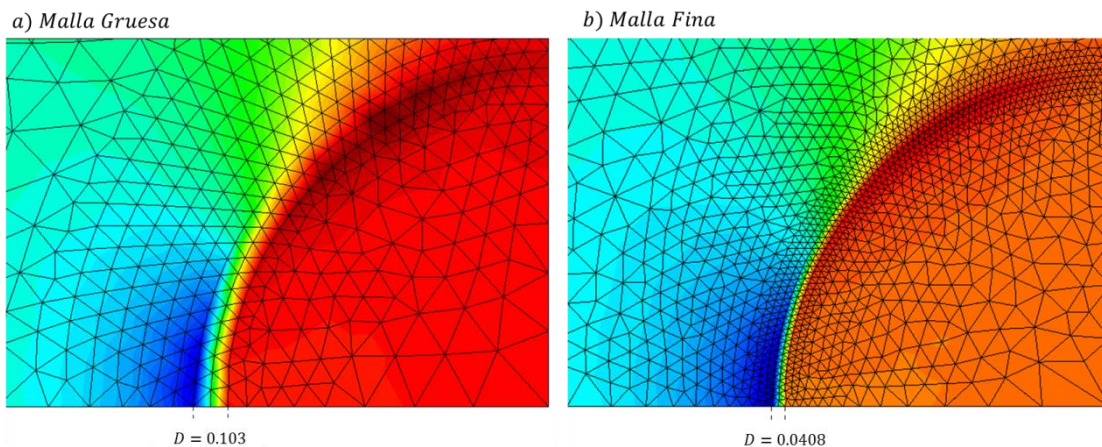


Figura 6.60: Espesor de interface para refinado grueso y fino.

A continuación se muestra la malla final que se utilizó para obtener los resultados:

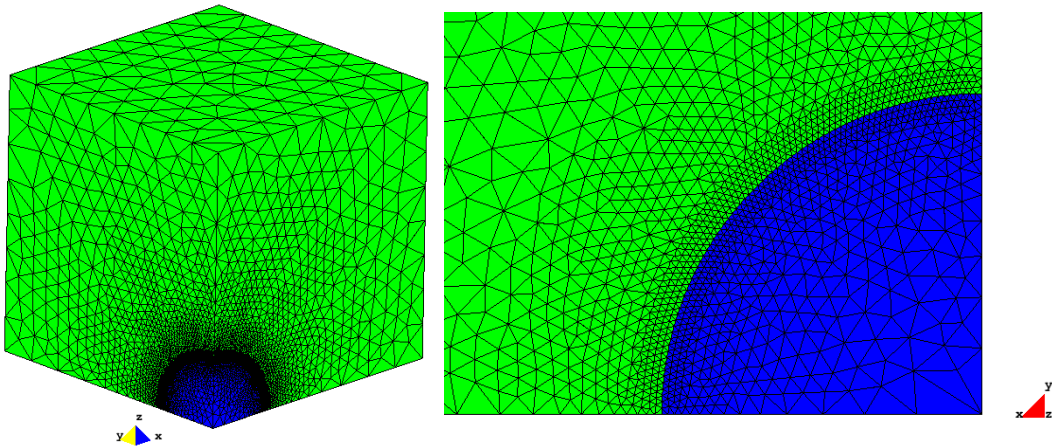


Figura 6.61: Malla generada. Acercamiento zona de refinado.

Como se mencionó en la metodología se verificó la calidad de malla, específicamente la calidad de forma, buscando que más del 90 [%] de los elementos posean una calidad superior o igual a 0.5. En la siguiente figura se muestra esto:

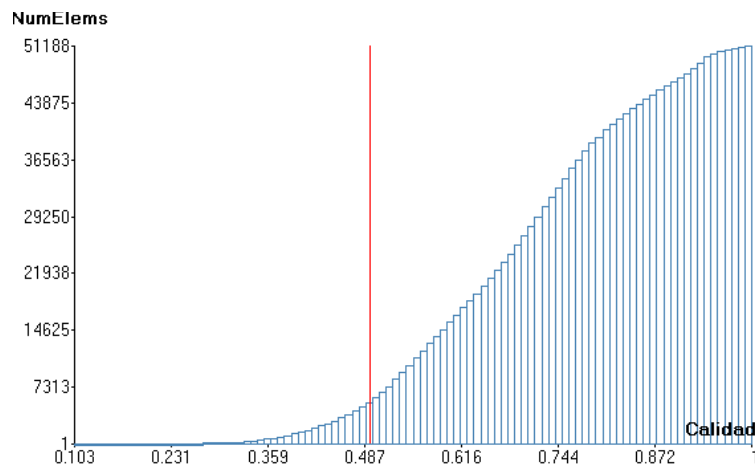


Figura 6.62: Calidad de malla. Criterio de forma.

Los elementos al lazo izquierdo de la línea vertical roja, presentan una calidad de malla menor a 0.5, y los que se encuentran a la derecha a una calidad de malla superior a 0.5.

A continuación se muestra una tabla cuantificando el porcentaje de elementos que poseen una calidad de malla superior al valor fijado.

Tabla 6.14: Calidad de malla

<i>Caso</i>	<i>Elementos totales</i>	<i>Elementos con calidad de forma < 0.5</i>	<i>Porcentaje de elementos con calidad de forma >0.5</i>
1	51188	5119	89.999 [%]

Se aprecia en la tabla que la malla alcanza la condición estipulada, por lo tanto la malla usada es útil y confiable.

Extracción de resultados

Los resultados son extraídos en los ejes de simetría y se realizan gráficos de línea obteniendo los campos de deformación y esfuerzo, como se aprecia en la Figura 6.63.

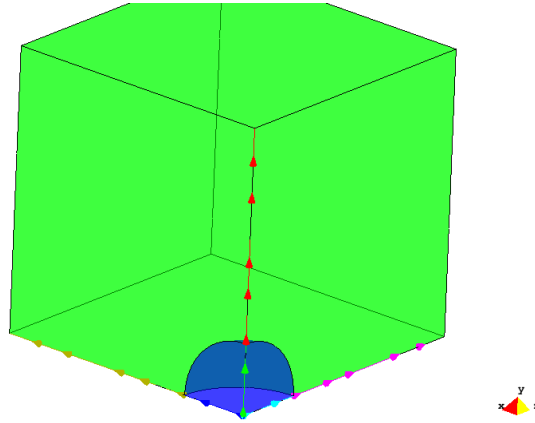


Figura 6.63: Extracción de resultados en ejes de simetría.

Luego de obtener los valores en estos ejes, se procede a calcular los resultados según lo mostrado en la sección 5.3.

Convergencia y prueba de malla

Para este problema no se llevó a cabo una prueba de malla, debido a que el objetivo principal era obtener una geometría con la malla más fina que se pudiese alcanzar de acuerdo a los recursos computacionales disponibles, pero de todas formas se utilizó una malla gruesa para verificar si con los valores utilizados de esfuerzo y pasos, el modelo puede o no converger, además de visualizar lo que sucede en la interface.

A continuación en la Tabla 6.15 se muestran las características de la malla utilizada y alcanzada para este problema:

Tabla 6.15: Valores utilizados de malla

<i>Radio (R)</i>	<i>Tamaño de elemento refinado</i>	<i>Tamaño elemento externo</i>	<i>Nodos totales</i>
1	0.02	0.5	11.254

Resultados

En primer lugar se muestra el grafico ϵ_{22} versus σ_{22} en la Figura 6.64 para un punto en el interior de la inclusión esférica $((x, y, x) = (0,0,0))$, con el fin de demostrar que con el valor de la tracción aplicada “lejos” ($\sigma_{\infty} = 1.5 \cdot 10^7$ [Pa]) se está trabajando en el rango no lineal. Se puede apreciar también que la deformación alcanza un valor menor al 2.75%, cantidad que concuerda con el supuesto de deformaciones pequeñas.

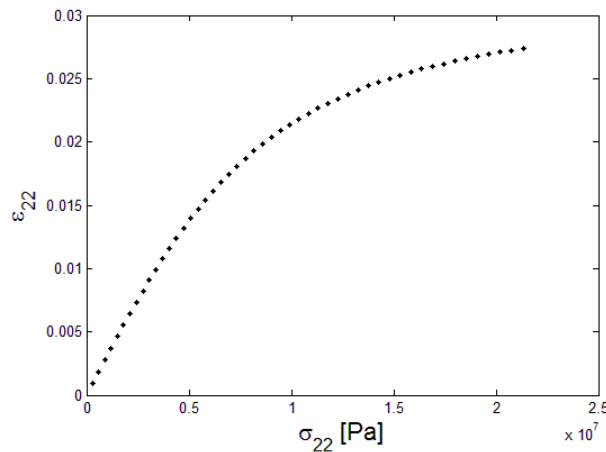
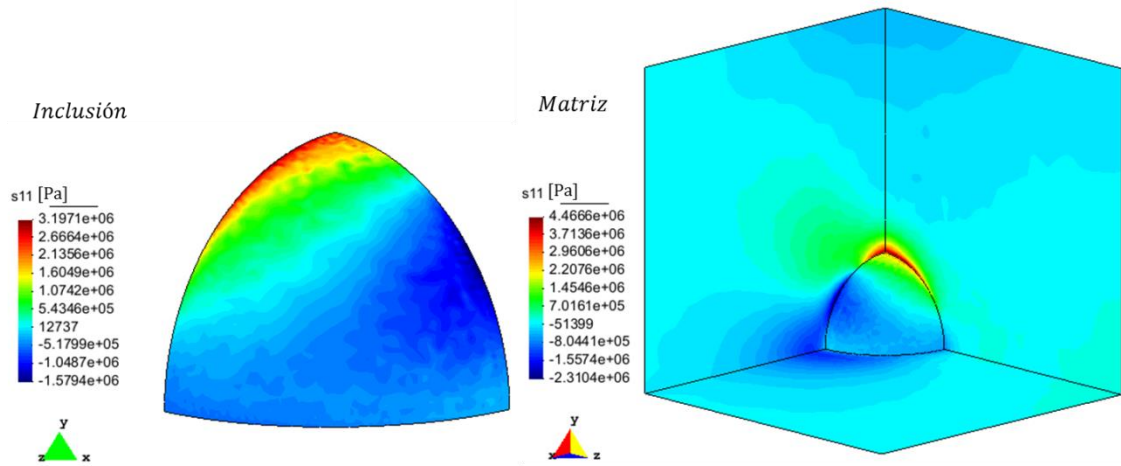
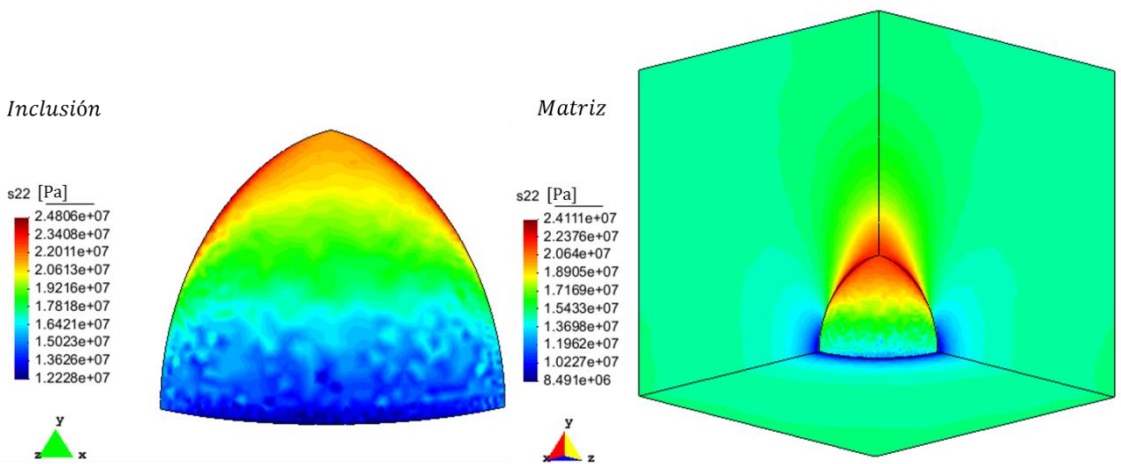


Figura 6.64: Respuesta ϵ_{22} versus σ_{22} para el problema de inclusión esférica en un cubo hecho de un cuerpo lineal elástico.

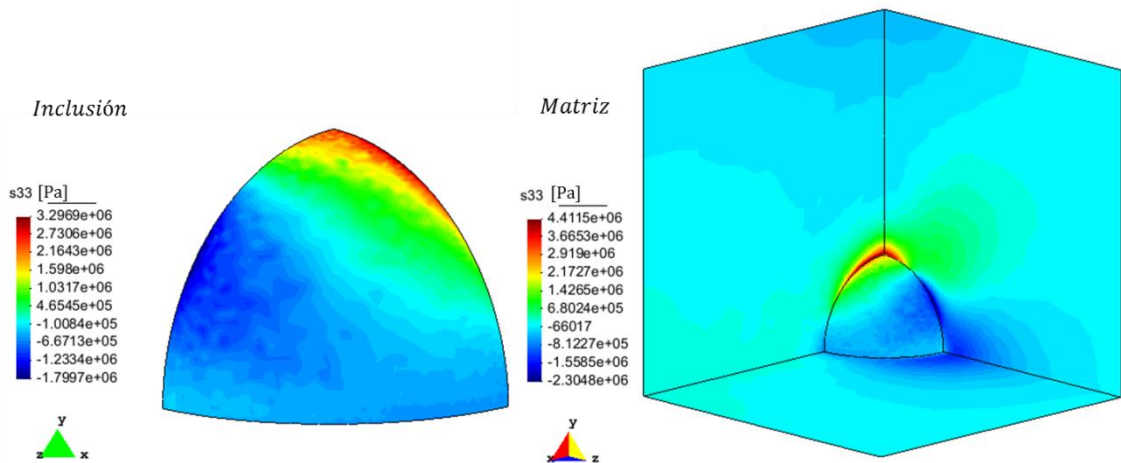
En la siguiente Figura 6.65 se muestra el campo de esfuerzos (componentes del tensor de esfuerzos), para ambos cuerpos inclusión esférica y cubo. Es posible observar el efecto de la tracción y el comportamiento de los cuerpos (inclusión y cubo), se aprecia que la concentración de esfuerzos es en la interface, pero en un sector lateral, no en el eje de aplicación de la carga.



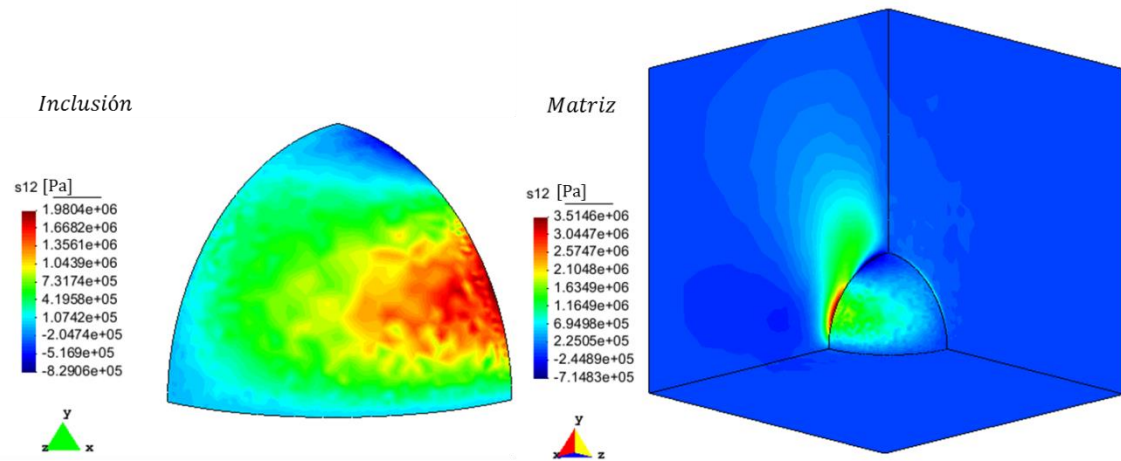
a) Campo de esfuerzo σ_{11} en la inclusión y la matriz.



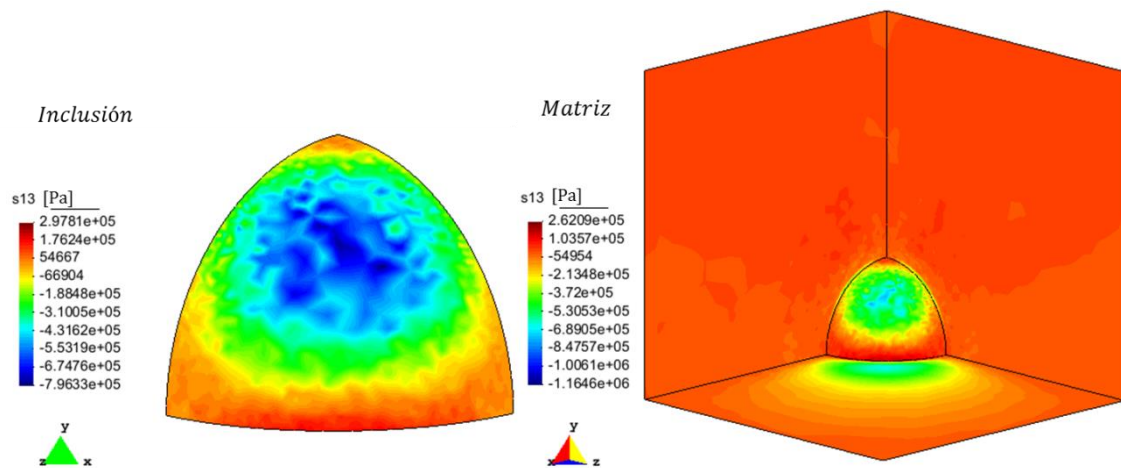
b) Campo de concentración esfuerzo σ_{22} .



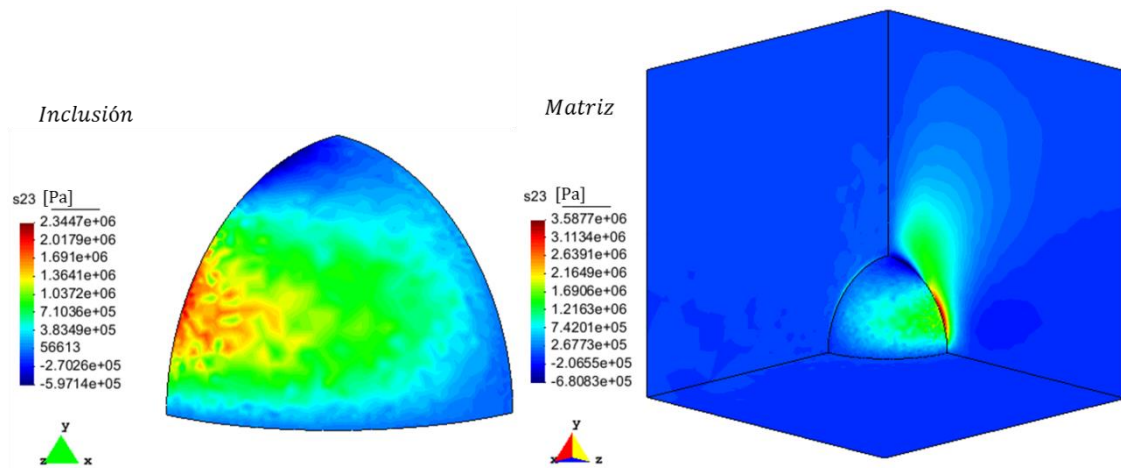
c) Campo de esfuerzo σ_{33} en la inclusión y la matriz.



d) Campo de esfuerzo σ_{12} en la inclusión y la matriz.



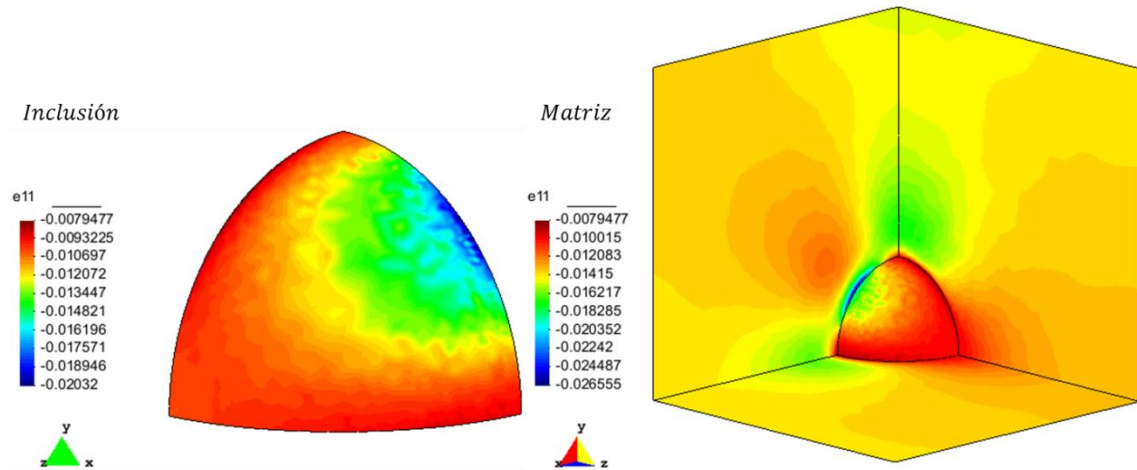
e) Campo de esfuerzo σ_{13} en la inclusión y la matriz.



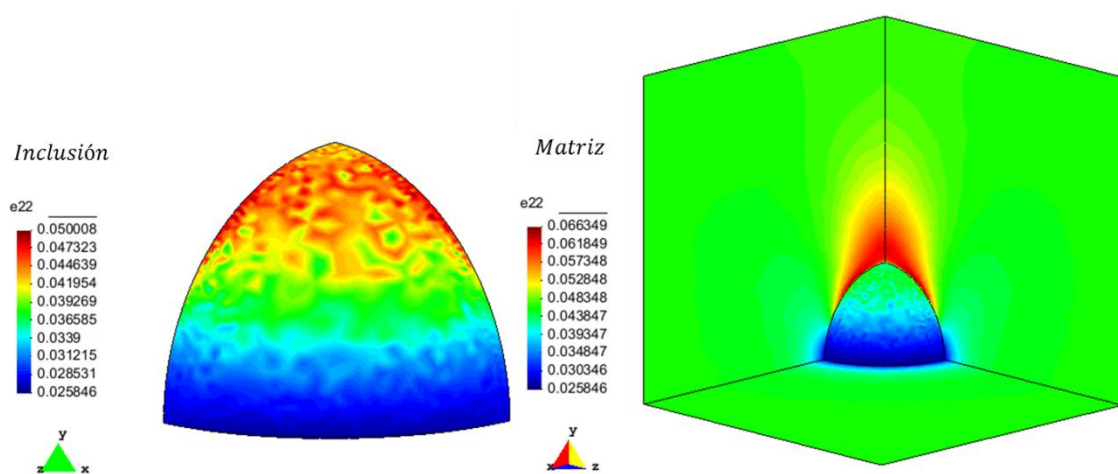
f) Campo de esfuerzo σ_{23} en la inclusión y la matriz.

Figura 6.65: Diagrama de contorno, campo de esfuerzos para la inclusión esférica y el cubo.

En la siguiente Figura 6.66 se muestra el campo de deformación (componentes del tensor de deformación), para ambos cuerpos inclusión esférica y cubo. Es posible observar el efecto de la tracción y el comportamiento de los cuerpos (inclusión y cubo), se aprecia los valores máximos de la deformación para cada componente, siendo la componente ϵ_{22} la de mayor magnitud. Todas estas magnitudes máximas se ubican en la interface pero dentro de la matriz.

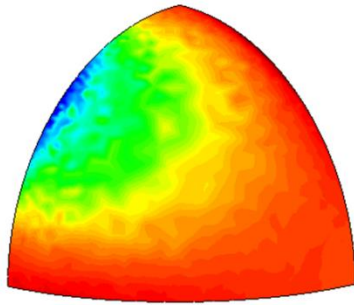
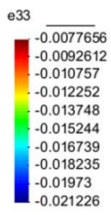


a) Campo de deformación ϵ_{11} en la inclusión y la matriz.

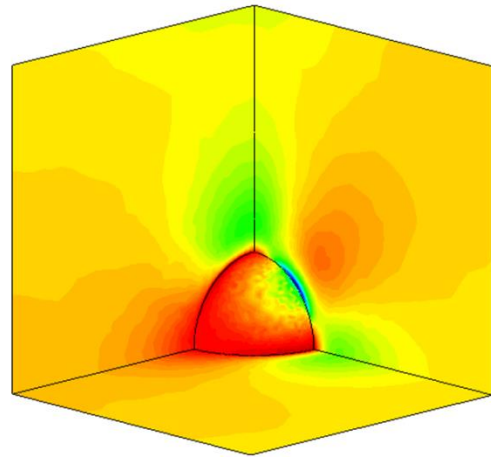
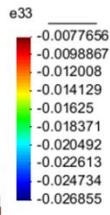


b) Campo de deformación ϵ_{22} en la inclusión y la matriz.

Inclusión

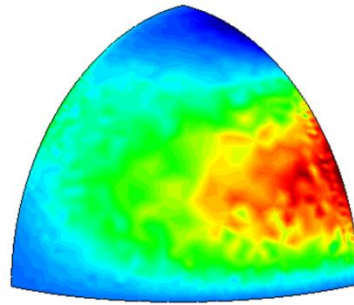
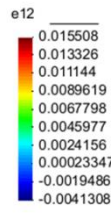


Matriz

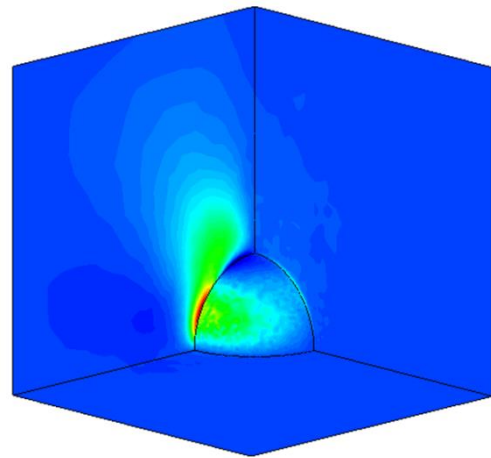
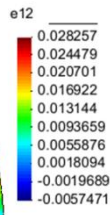


c) Campo de deformación ϵ_{33} en la inclusión y la matriz.

Inclusión

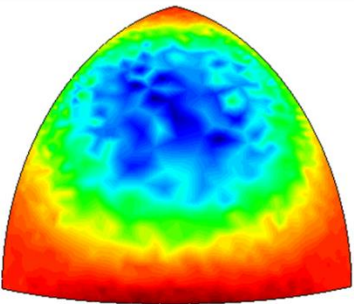
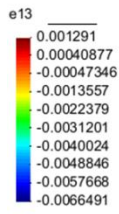


Matriz

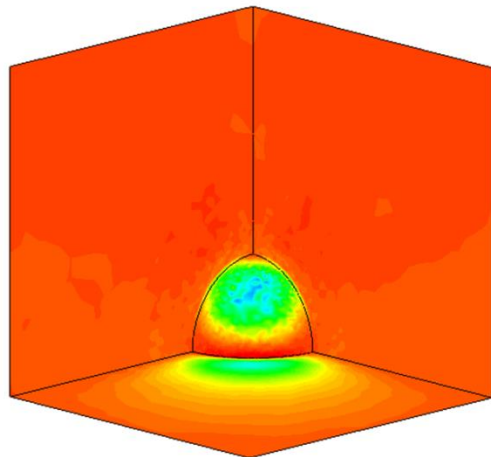
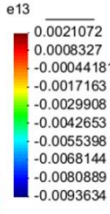


d) Campo de deformación ϵ_{12} en la inclusión y la matriz.

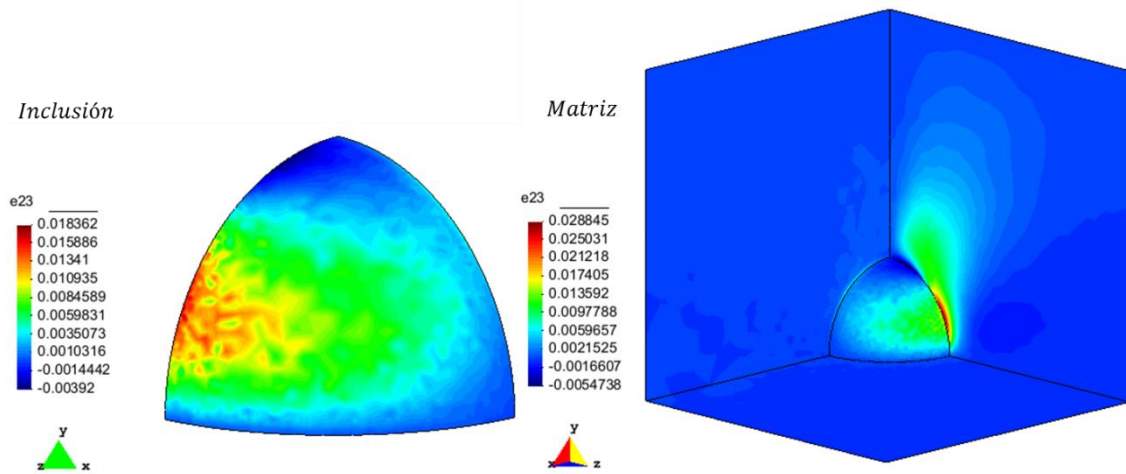
Inclusión



Matriz



e) Campo de deformación ϵ_{13} en la inclusión y la matriz.



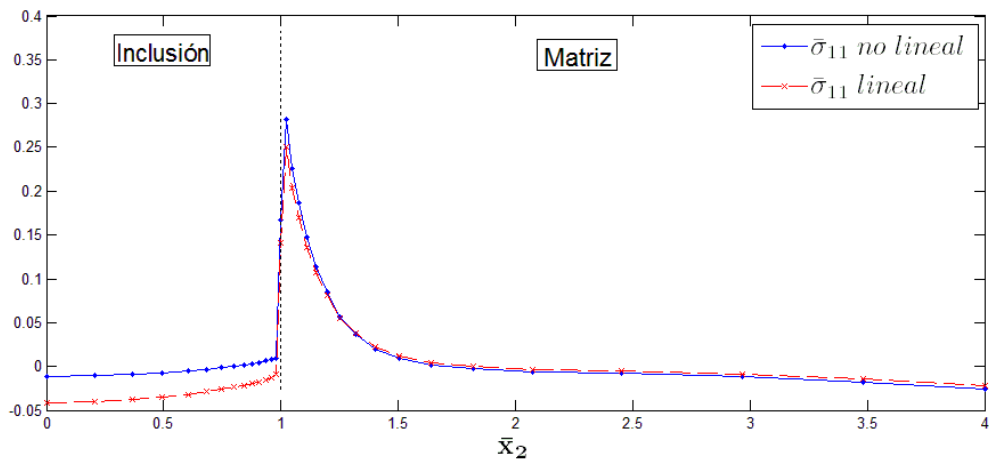
f) Campo de deformación ϵ_{23} en la inclusión y la matriz.

Figura 6.66: Diagrama de contorno, campo de deformación para la inclusión esférica y el cubo.

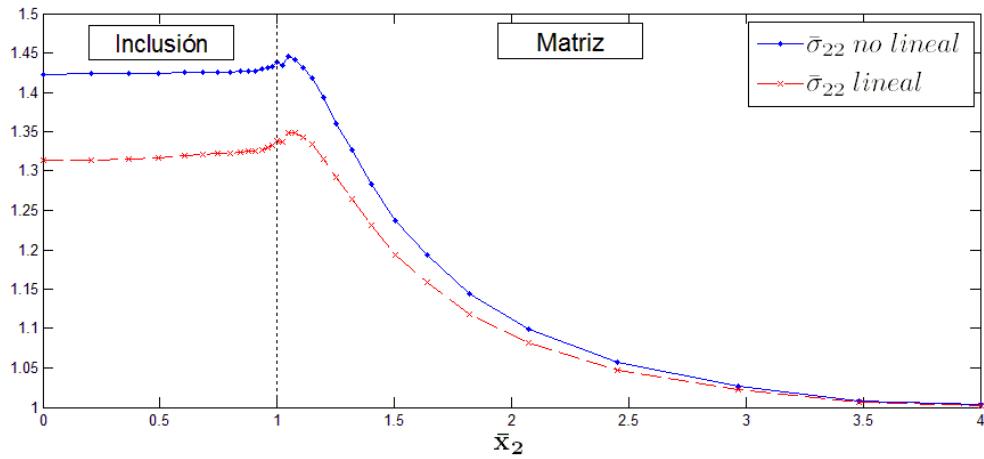
Teniendo en cuenta las definiciones de las variables adimensionalizadas de la Sección 5.3:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{\infty}}, \quad \bar{x}_2 = \frac{x_2}{R}, \quad (6.16)$$

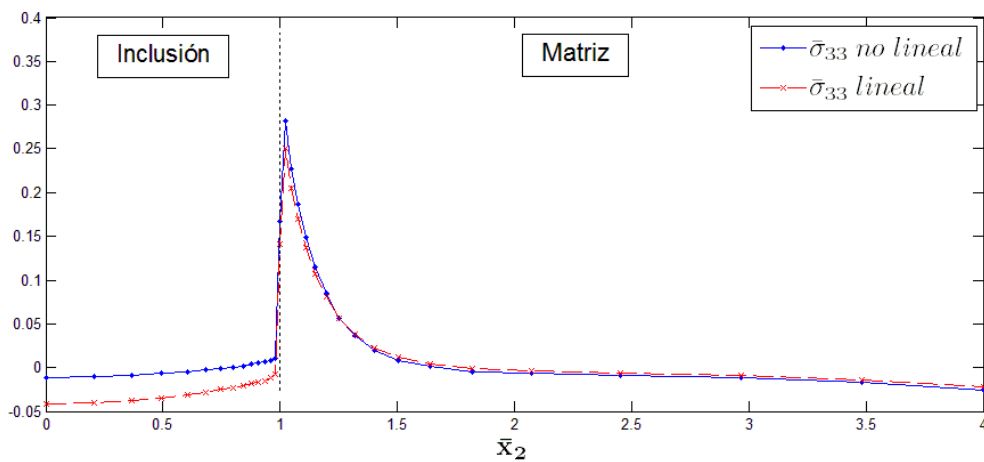
a continuación se muestran en la Figura 6.67 los gráficos de los campos de esfuerzo y deformación en la línea $x_1 = x_3 = 0, 0 < x_2 < 4R$, para la solución numérica considerando una inclusión lineal y una modelada con la ecuación constitutiva no lineal (1.5), en donde la línea $0 < x_2 < R$ corresponde a la inclusión y la línea $R < x_2 < 4R$ a la matriz (recordar que $R = 1$). La interface se muestra con una línea vertical segmentada.



a) Componente del esfuerzo adimensional $\bar{\sigma}_{11}$ en \bar{x}_2 .



b) Componente del esfuerzo adimensional $\bar{\sigma}_{22}$ en \bar{x}_2 .



c) Componente del esfuerzo adimensional $\bar{\sigma}_{33}$ en \bar{x}_2 .

Figura 6.67: Componentes adimensionales del tensor de esfuerzos para la línea

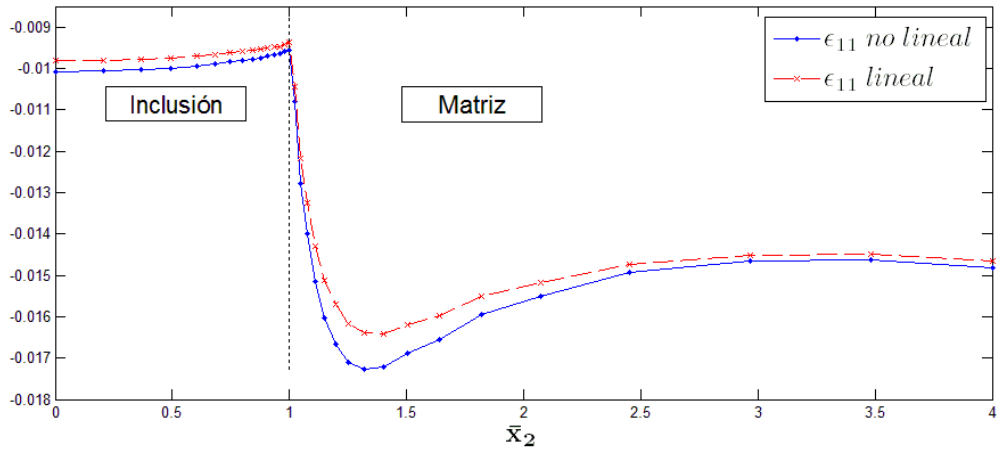
$$x_1 = x_3 = 0, 0 < x_2 < 4R.$$

En primer lugar se analizará los esfuerzos normales ($\bar{\sigma}_{11}$, $\bar{\sigma}_{22}$, $\bar{\sigma}_{33}$) ya que los esfuerzos de corte debiesen ser nulos en las direcciones en las cuales se van a realizar las mediciones, producto de la naturaleza del problema, de hecho el resultado de elementos finitos muestra valores cercanos a cero. Se puede observar que las componentes $\bar{\sigma}_{11}$ y $\bar{\sigma}_{33}$, parecen ser iguales por la simetría, y que también en estos esfuerzos la solución no lineal difiere de la lineal. Se aprecia como para la primera solución (curva punteada) el esfuerzo es mayor que para la segunda (curva con x), con una diferencia de casi 0.03, entendiéndose con esto que la inclusión no lineal se comporta como un elemento más rígido dentro del sistema matriz-inclusión, que una de carácter lineal. En cuanto al comportamiento del fenómeno se puede ver como en la interfaz ocurre un cambio muy brusco en los valores de las componentes del esfuerzo, todo esto debido a la condición impuesta, es decir, inclusión totalmente

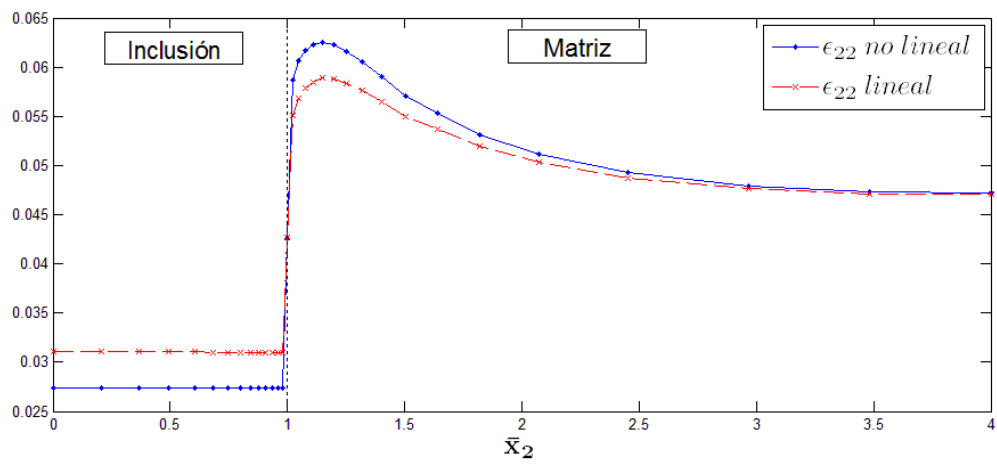
pegada a la matriz. Se observa como estas componentes al ir avanzando en \bar{x}_2 aumentan desde la inclusión hasta la interface, luego ocurre un aumento muy rápido en este lugar y el esfuerzo comienza a disminuir dentro de la matriz. El valor máximo se encuentra en el sector de la interface, dentro de la matriz, alcanzando una magnitud cercana a los 0.28.

Para la componente $\bar{\sigma}_{22}$ se observa nuevamente que la solución no lineal difiere de la lineal y la diferencia es de casi 0.1. El esfuerzo se concentra en este elemento esférico y el valor de la tensión es mayor en el caso no lineal que en el lineal, pero aun así no es la magnitud máxima, ésta se encuentra en el sector de la matriz muy cercana a la interface, alcanzando un valor cercano a 1.45. El hecho de que ocurra esto, se debe principalmente a que la inclusión actúa como un anclaje para la matriz, dadas las características elásticas que posee este elemento inserto, por lo tanto el esfuerzo en este sector de la matriz se hace más alto debido a la restricción que ejerce la inclusión.

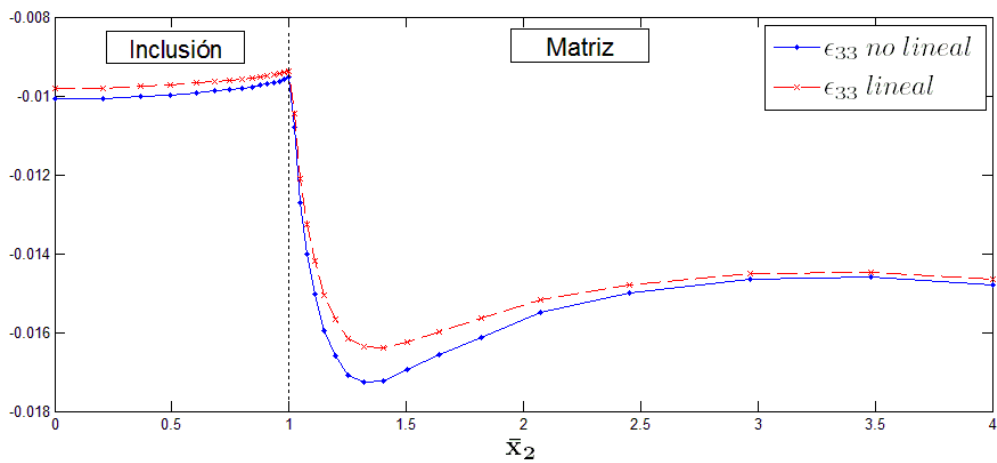
En la Figura 6.68 se muestra las componentes longitudinales de la deformación, de ellas se puede ver que poseen valores pequeños y que no superan el 7% en el caso No Lineal. Se observa que las componentes ε_{11} y ε_{33} son similares producto de la simetría, situación que concuerda con las características del fenómeno físico, también se puede ver que las solución lineal y la no lineal difieren levemente, especialmente en las deformaciones máximas y mínimas. Se aprecia que poseen valores negativos, indicando con esto la existencia de contracción en las mismas direcciones de las componentes. Se puede apreciar de la magnitud de los valores entregados, que la inclusión se contrae poco (1%) y la matriz lo hace un poco más (1.7%). Nuevamente se observa que la interfaz ancla ambos elementos, restringiendo la deformación, alcanzando el valor más bajo en este sector. El valor máximo de deformación ocurre un poco más allá de la interface, cercana a una distancia de 1.3. La componente ε_{22} es diferente a las otras, se puede apreciar en este grafico que nuevamente la solución no lineal difiere de la lineal, y esto se hace más notorio en el sector de la inclusión. De esta curva se puede visualizar que la diferencia en cuanto a valores entre la solución no lineal y lineal es aproximadamente de un 1% en el sector de la inclusión y un poco más alejado de la interface, dentro de la matriz. Es importante notar el salto de la deformación en la interface para ambas soluciones, esta va desde 2.75% (dentro de la inclusión) hasta un 5.75% (dentro de la matriz), alcanzando una magnitud de aproximadamente un 4.25% en la misma interfaz.



a) Componente de deformación ϵ_{11} en \bar{x}_2 .



b) Componente de deformación ϵ_{22} en \bar{x}_2 .



c) Componente de deformación ϵ_{33} en \bar{x}_2 .

Figura 6.68: Comportamiento de las componentes del tensor de deformación para la línea $x_1 = x_3 = 0, 0 < x_2 < 4R$.

Teniendo en cuenta las definiciones de las variables adimensionalizadas de la Sección 5.3:

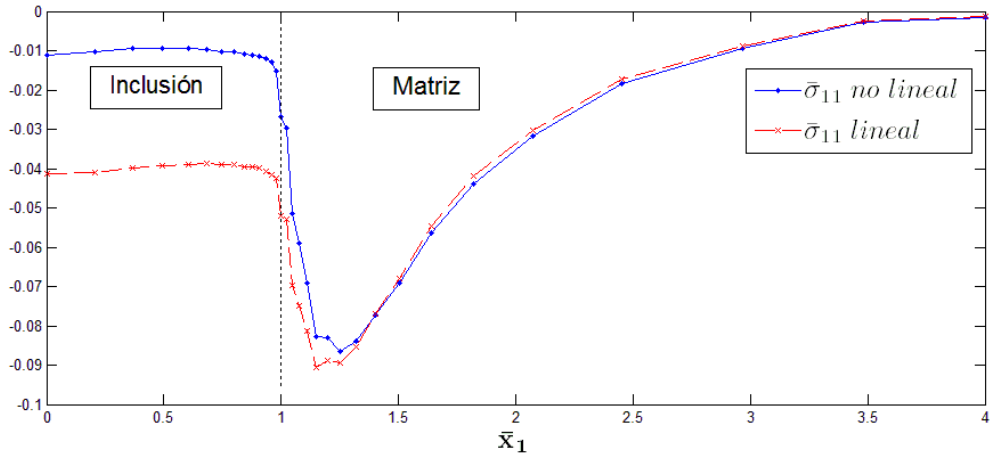
$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{\infty}}, \quad \bar{x}_1 = \frac{x_1}{R}, \quad (6.17)$$

a continuación se muestran los gráficos de los campos de esfuerzo y deformación en la línea $x_2 = x_3 = 0, 0 < x_1 < 4R$, para la solución numérica considerando una inclusión lineal y una modelada con la ecuación constitutiva no lineal (1.5). En donde la línea $0 < x_1 < R$ corresponde a la inclusión y la línea $R < x_1 < 4R$ a la matriz (recordar que $R = 1$). La inclusión y la matriz están separadas por una línea vertical segmentada.

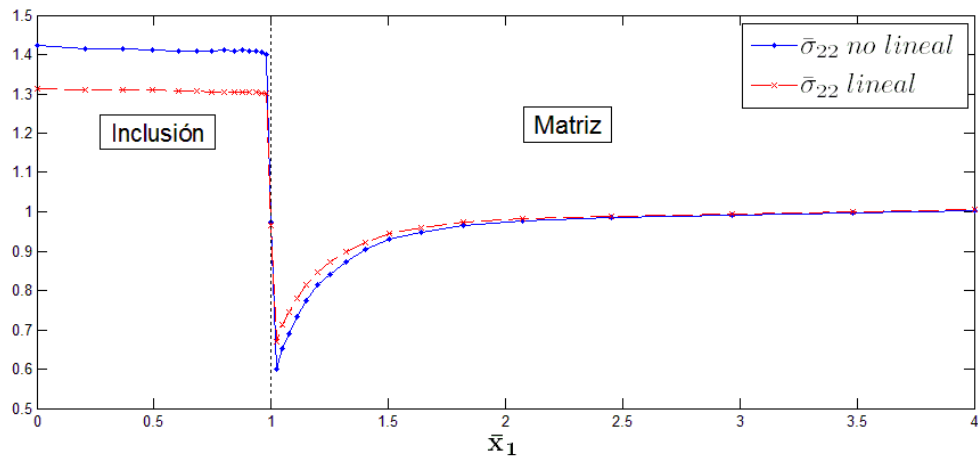
La siguiente Figura 6.69 corresponde a las componentes normales del esfuerzo. De los gráficos se puede ver que la solución no lineal difiere de la lineal en un valor cercano a 0.03 para las componentes $\bar{\sigma}_{11}$ y $\bar{\sigma}_{33}$, para la componente $\bar{\sigma}_{22}$ en valor cercano a 0.1. En todas las curvas se observa que en la inclusión el esfuerzo es más alto en la solución no lineal que en la lineal y que la esfera se comporta como un elemento más rígido que la matriz, anclando a este último, todo esto producto de la condición impuesta.

Se puede ver de la Figura 6.69 que en las componentes del esfuerzo existe contracción lateral, debido a que $\bar{\sigma}_{11}$ y $\bar{\sigma}_{33}$ alcanzan valores negativos. En el sector de la inclusión alcanzan valores similares en el punto $\bar{x}_1 = 0$ y $\bar{x}_1 = 1$, para ambas soluciones. El valor máximo se alcanza en el sector de la matriz, una magnitud de 0.09, para el caso lineal.

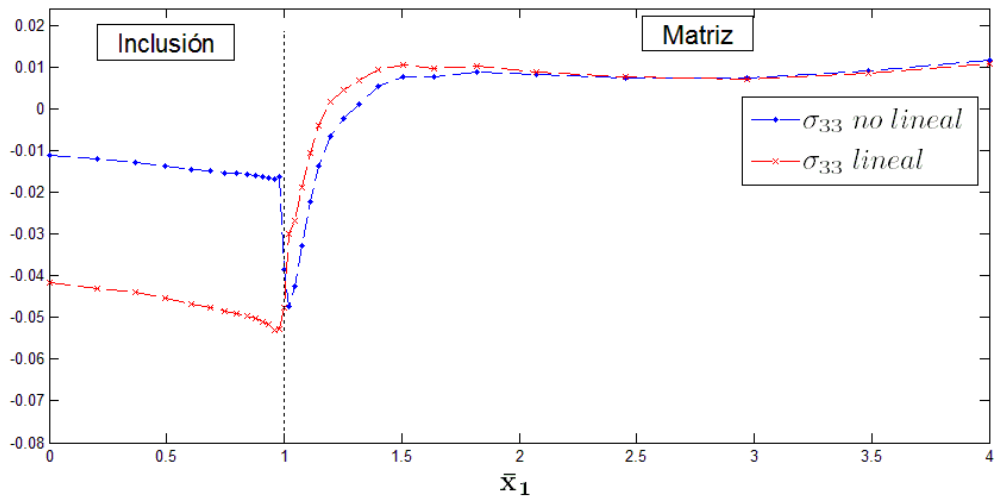
Para la componente $\bar{\sigma}_{22}$ se puede ver que se alcanza un valor máximo en el sector de la inclusión para el caso no lineal, llegando a una cantidad cercana a 1.425 y el mínimo se encuentra en la matriz alcanzando un valor cercano a 0.6, y nuevamente esto ocurre para el caso no lineal. Avanzando en la línea se puede ver cómo el esfuerzo disminuye y cae bruscamente en la interface, luego a una distancia $\bar{x}_1 \approx 1$ vuelve a aumentar. Es importante mencionar que esta caída brusca en el esfuerzo, en el sector de la interface, se podría hacer más suave, refinando aún más en este sector. También se logra apreciar nuevamente cómo la inclusión es más rígida y restringe la matriz, aumentando las sollicitaciones en la interface. Se puede ver además que el esfuerzo permanece casi constante después de $\bar{x}_1 = 2$.



a) Componente del esfuerzo adimensional $\bar{\sigma}_{11}$ en \bar{x}_1 .



b) Componente del esfuerzo adimensional $\bar{\sigma}_{22}$ en \bar{x}_1 .



c) Componente del esfuerzo adimensional $\bar{\sigma}_{33}$ en \bar{x}_1 .

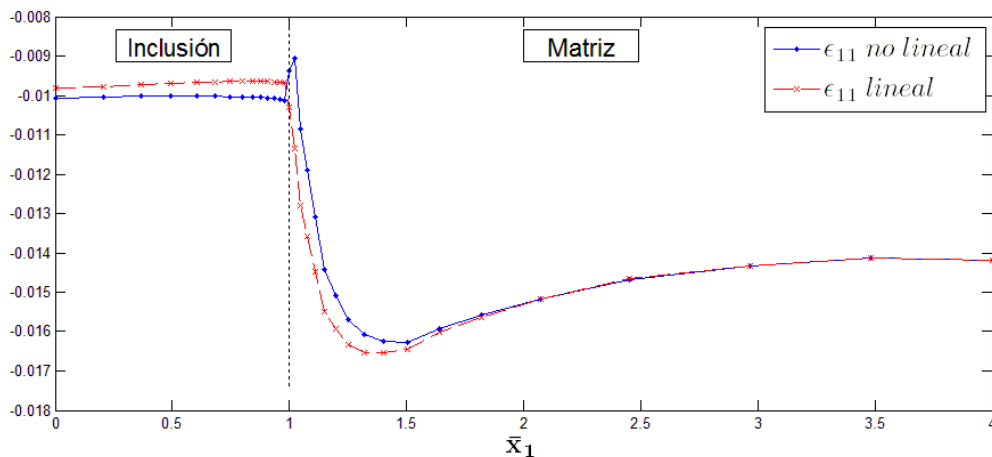
Figura 6.69: Componentes adimensionales del tensor de esfuerzos para la línea

$$x_2 = x_3 = 0, 0 < x_1 < 4R.$$

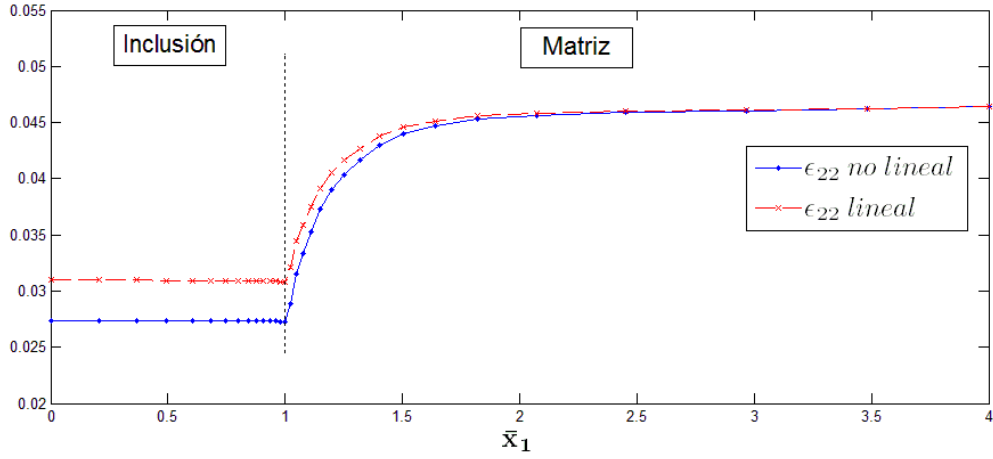
A continuación en la Figura 6.70 se muestra las componentes longitudinales de la deformación. De las curvas se logra observar que la solución no lineal difiere levemente de la lineal, y que la máxima diferencia es aproximadamente menor a un 1%, también se puede apreciar que las máximas deformaciones se dan para el caso lineal.

Las curvas de las componentes ϵ_{11} y ϵ_{33} , poseen valores negativos por lo que se entiende que hay contracción, situación que concuerda con las características físicas del fenómeno. Se puede ver de los gráficos de estas componentes que en la interface hay cambios bruscos y rápidos en la deformación y son estos cambios los que afectan los resultados dentro de la matriz, es importante recordar que en la vecindad de la interface es necesario tener un refinado adecuado para hacer más suave este cambio en la deformación y evitar así que los resultados en la matriz y la inclusión sean distorsionados. La interface es un lugar muy sensible al tamaño del elemento finito y es el lugar donde se refleja la restricción impuesta de inclusión completamente pegada a la matriz. En el sector de la inclusión se aprecia que no hay mucha variación, la deformación se mantiene pequeña y casi constante, cercana a un 1%, luego al llegar a la interface, se visualiza que aumenta un poco, para después decaer al ir avanzando dentro de la matriz, llegando a un valor cercano a los 1.3-1.4%.

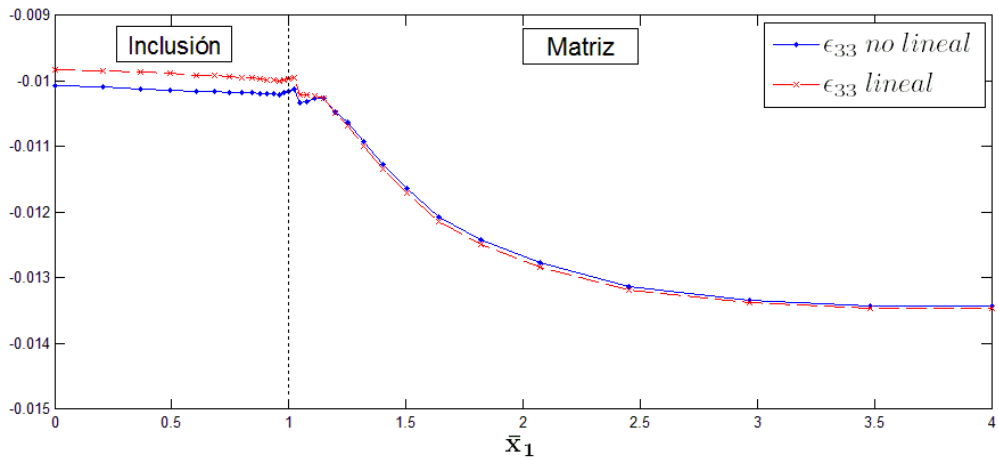
Para la componente ϵ_{22} , se observa que la solución no lineal difiere de la lineal levemente y que a lo largo de \bar{x}_1 , la primera se mantiene siempre bajo la segunda. Nuevamente se aprecia que la deformación en el sector de la inclusión se mantiene casi constante para ambas soluciones y que luego de pasar la interface y avanzar dentro de la matriz, aumenta bruscamente hasta llegar a un valor máximo de un 4.5% en $\bar{x}_1 = 1.7$. Los valores mínimos se obtienen al interior de la inclusión, 2.75% para la solución no lineal y 3.1% para la solución lineal.



a) Componente de deformación ϵ_{11} en \bar{x}_1 .



b) Componente de deformación ε_{22} en \bar{x}_1 .



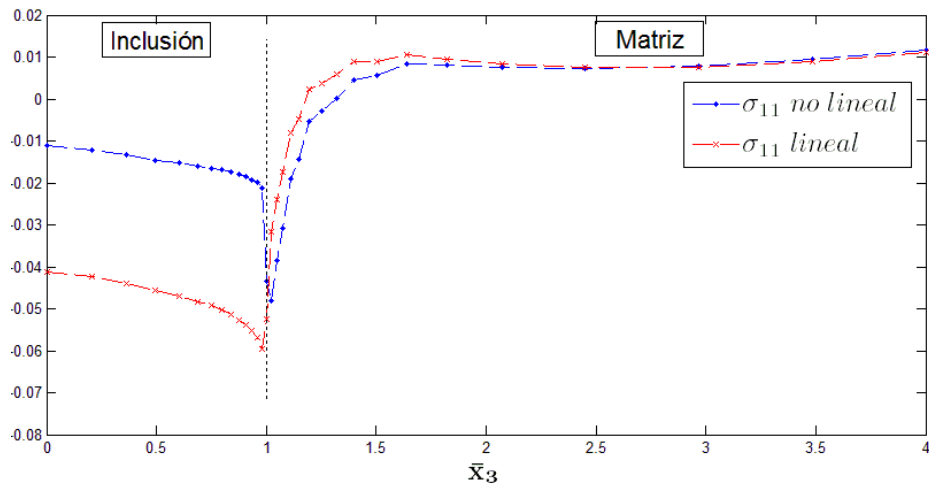
c) Componente de deformación ε_{33} en \bar{x}_1 .

Figura 6.70: Componentes del tensor de deformación para la línea $x_2 = x_3 = 0, 0 < x_1 < 4R$.

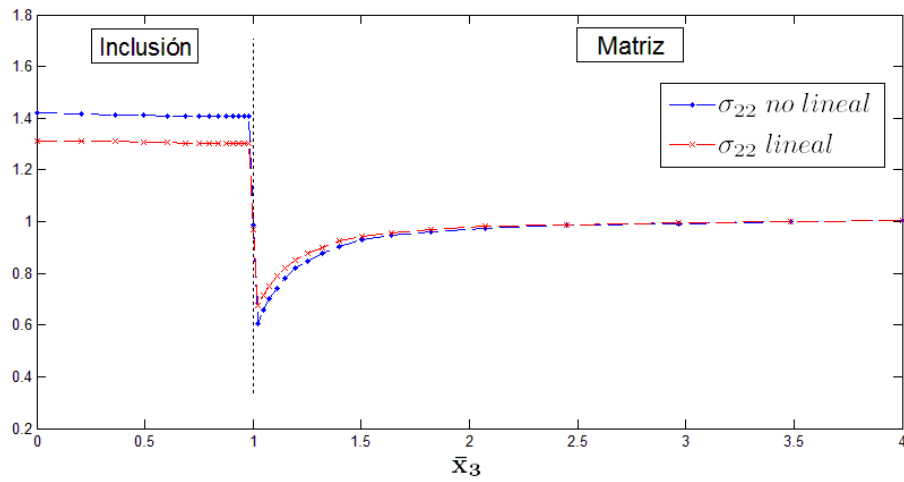
Teniendo en cuenta las definiciones de las variables adimensionalizadas de la sección 5.3:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_\infty}, \quad \bar{x}_3 = \frac{x_3}{R}, \quad (6.18)$$

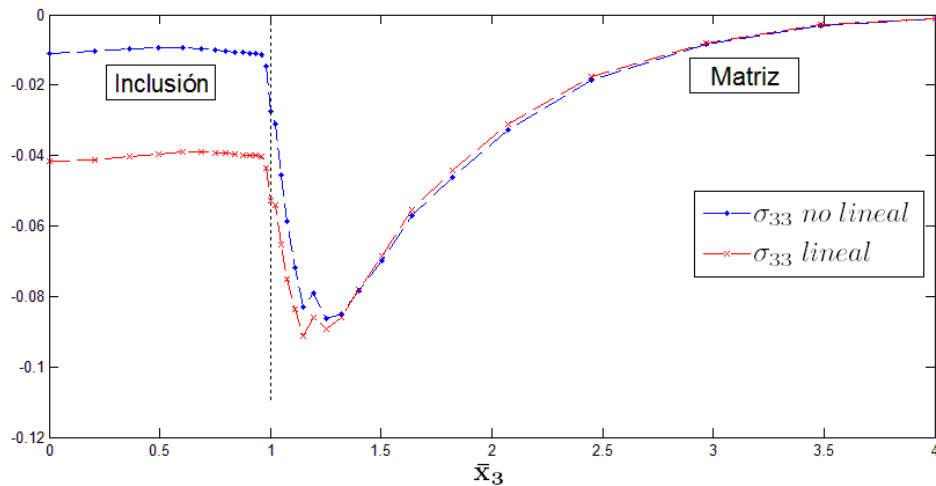
a continuación se muestran los gráficos de los campos de esfuerzo y deformación en la línea $x_2 = x_1 = 0, 0 < x_3 < 4R$, para la solución numérica considerando una inclusión lineal y una modelada con la ecuación constitutiva no lineal (1.5). En donde la línea $0 < x_3 < R$ corresponde a la inclusión y la línea $R < x_3 < 4R$ a la matriz (recordar que $R = 1$). La inclusión y la matriz están separadas por una línea vertical segmentada.



a) Componente del esfuerzo adimensional $\bar{\sigma}_{11}$ en \bar{x}_3 .

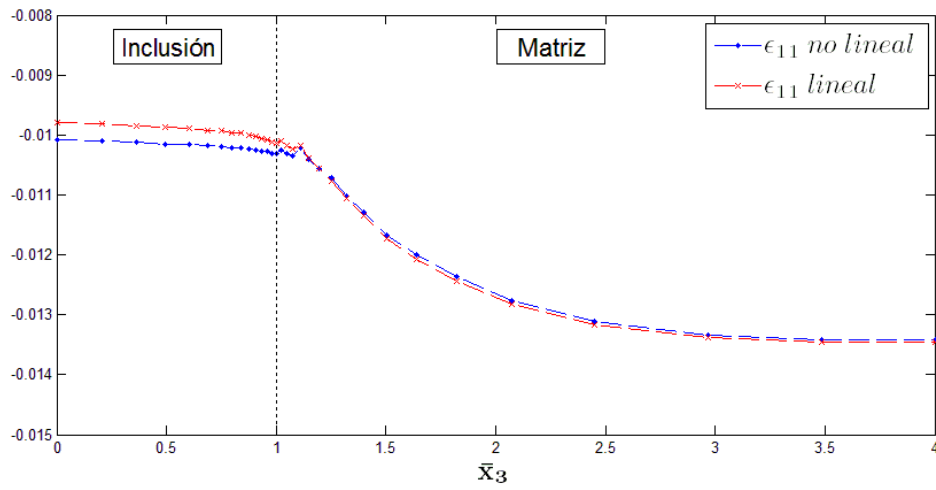


b) Componente del esfuerzo adimensional $\bar{\sigma}_{22}$ en \bar{x}_3 .

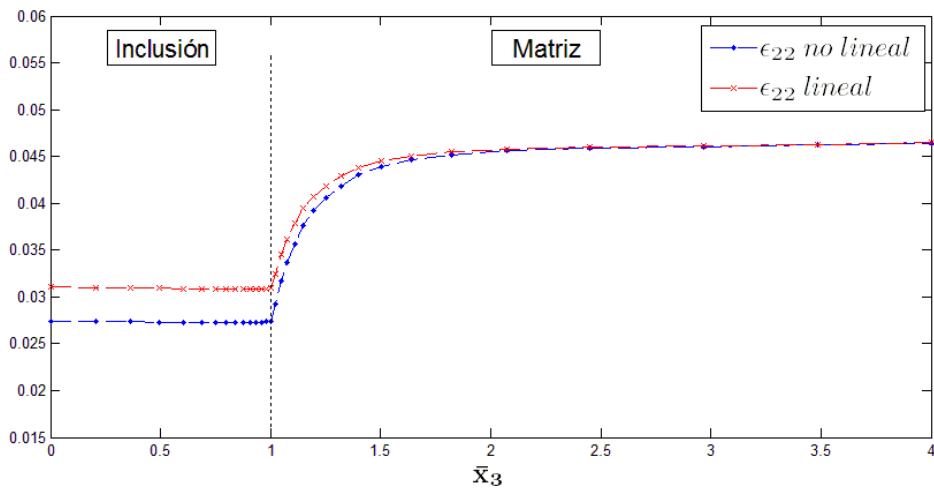


c) Componente del esfuerzo adimensional $\bar{\sigma}_{33}$ en \bar{x}_3 .

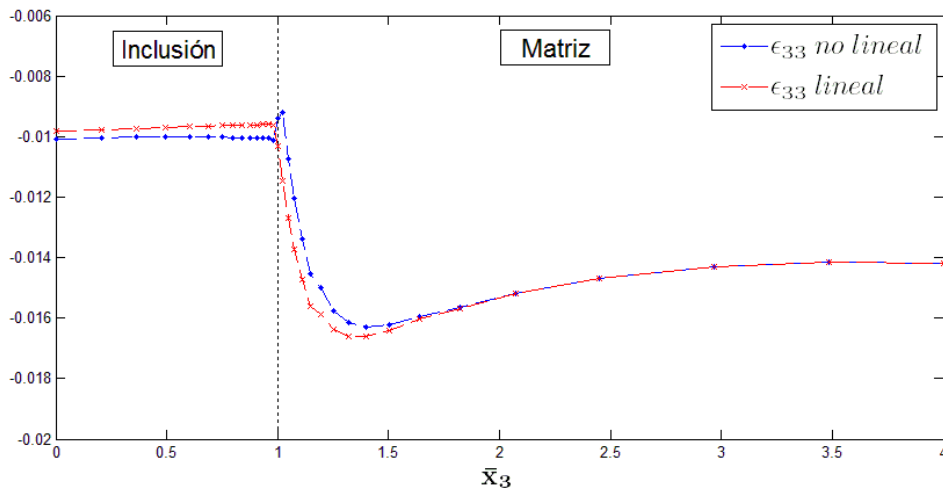
Figura 6.71: Componentes adimensionales del tensor de esfuerzos para la línea $x_2 = x_1 = 0, 0 < x_3 < 4R$.



a) Componente de deformación ϵ_{11} en \bar{x}_3 .



b) Componente de deformación ϵ_{22} en \bar{x}_3 .

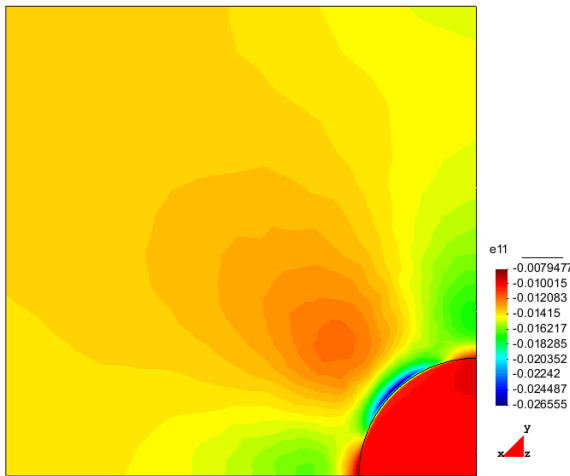


a) Componente de deformación ϵ_{33} en \bar{x}_3 .

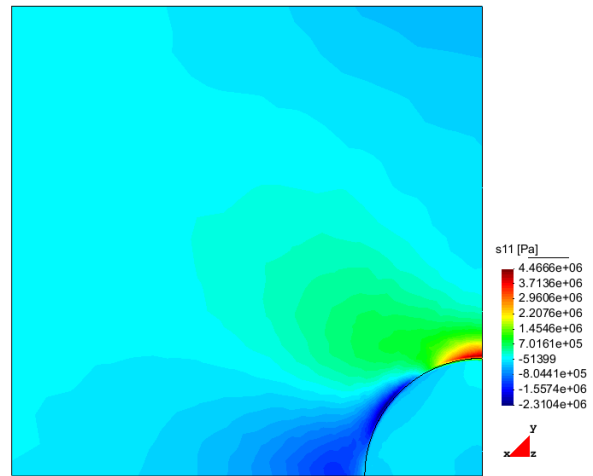
Figura 6.72: Componentes del tensor de deformación para la línea $x_2 = x_1 = 0, 0 < x_3 < 4R$.

Si se observan los gráficos de la Figura 6.71 y de la Figura 6.72, y se comparan con los obtenidos en la Figura 6.69 y la Figura 6.70, se puede ver que los esfuerzos y deformaciones son similares, es decir las componentes cumplen con $\bar{\sigma}_{22}(x_1) \approx \bar{\sigma}_{22}(x_3)$, $\bar{\varepsilon}_{22}(x_1) \approx \bar{\varepsilon}_{22}(x_3)$, $\bar{\sigma}_{11}(x_1) \approx \bar{\sigma}_{33}(x_3)$, $\bar{\varepsilon}_{11}(x_1) \approx \bar{\varepsilon}_{33}(x_3)$, $\bar{\sigma}_{11}(x_3) \approx \bar{\sigma}_{33}(x_1)$ y $\bar{\varepsilon}_{11}(x_3) \approx \bar{\varepsilon}_{33}(x_1)$. Con esto se demuestra y corrobora que existe simetría.

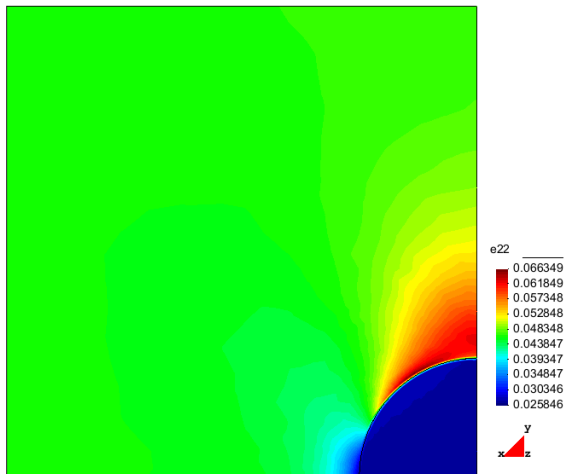
A continuación se muestran los diagramas de contorno para los campos de esfuerzo y deformación en el plano XY . Se observan de las figuras que para los esfuerzos y deformaciones normales (11, 22, 33) hay cambios considerables, en cuanto a los esfuerzos y deformaciones de corte, las variaciones son pequeñas.



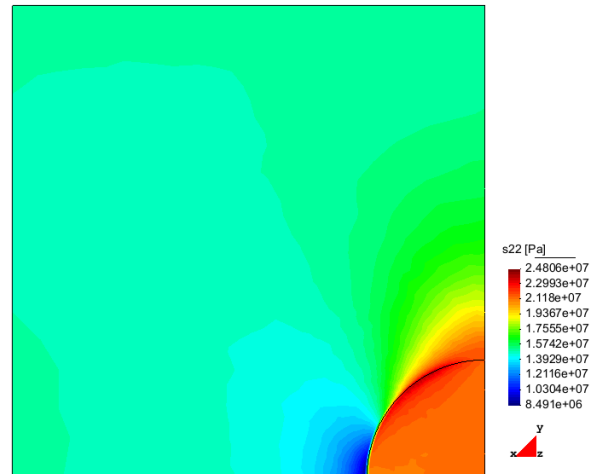
a.1) Campo ε_{11} en plano xy .



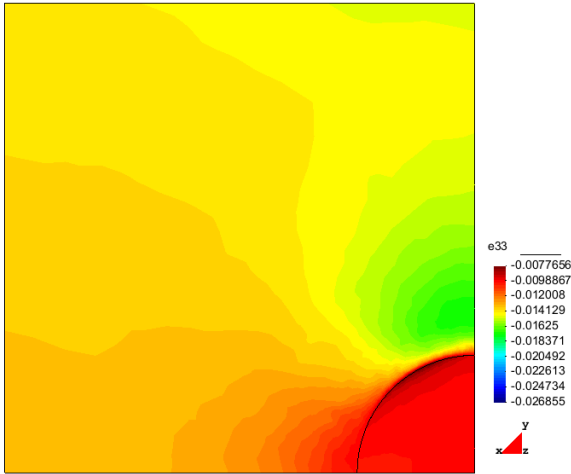
a.2) Campo σ_{11} en plano xy .



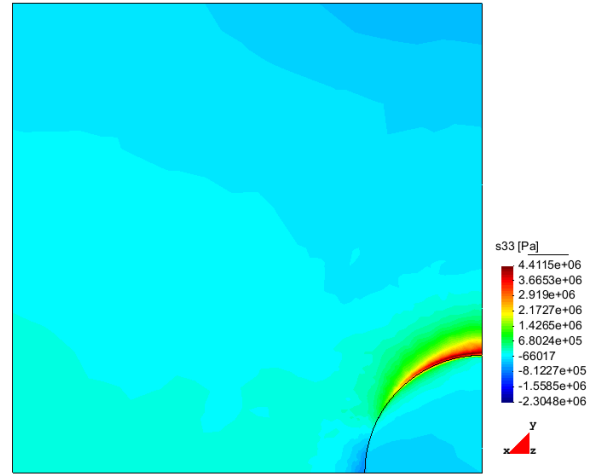
b.1) Campo ε_{22} en plano xy .



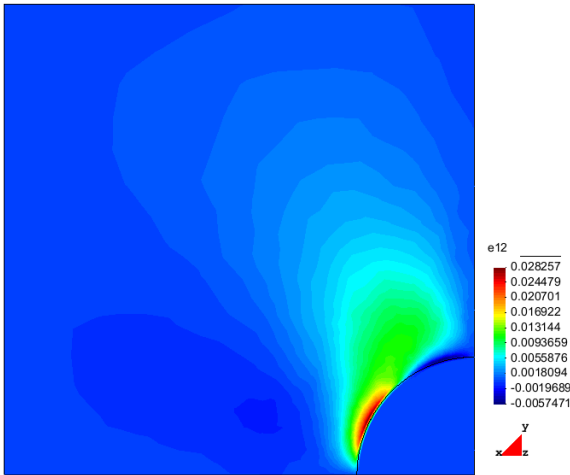
b.2) Campo σ_{22} en plano xy .



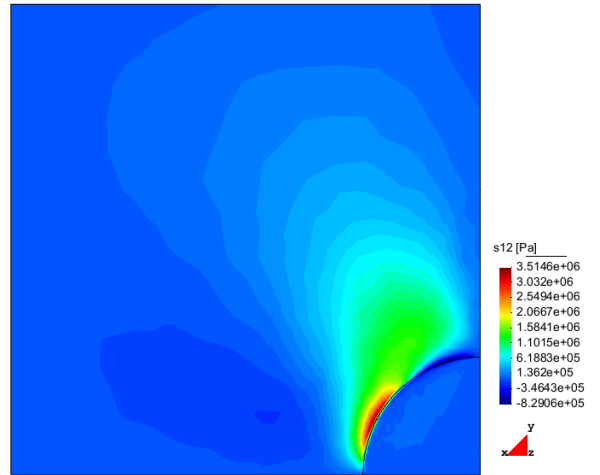
c.1) Campo ϵ_{33} en plano xy .



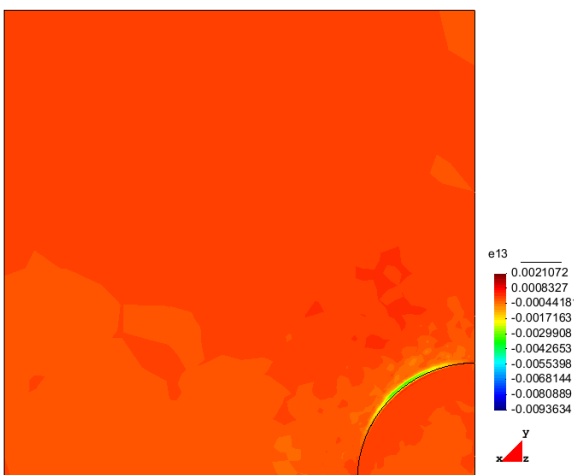
c.2) Campo σ_{33} en plano xy .



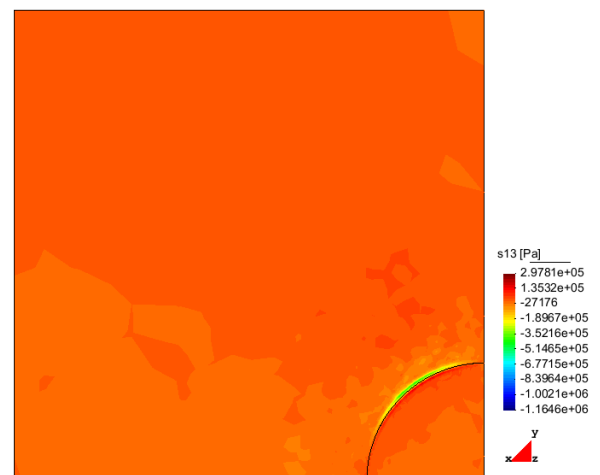
d.1) Campo ϵ_{12} en plano xy .



d.2) Campo σ_{12} en plano xy .



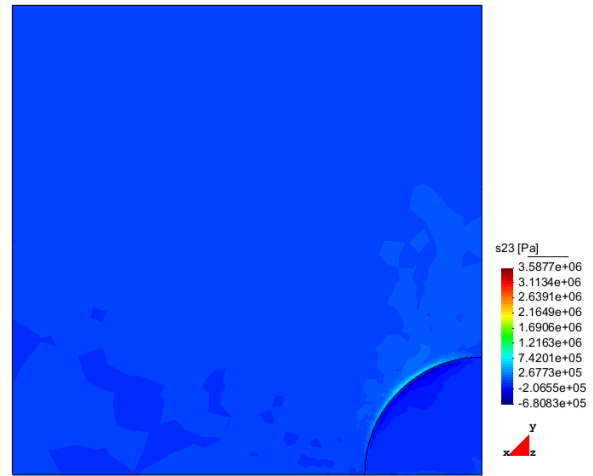
e.1) Campo ϵ_{13} en plano xy .



e.2) Campo σ_{13} en plano xy .



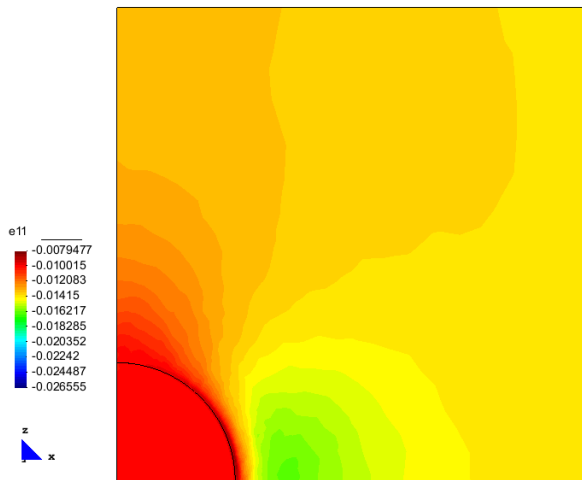
f.1) Campo ε_{23} en plano xy .



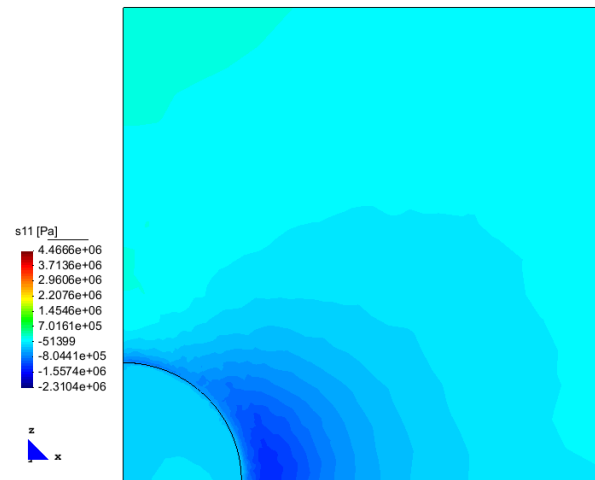
f.2) Campo σ_{23} en plano xy .

Figura 6.73: Campo de esfuerzo y deformación según componentes en el plano XY .

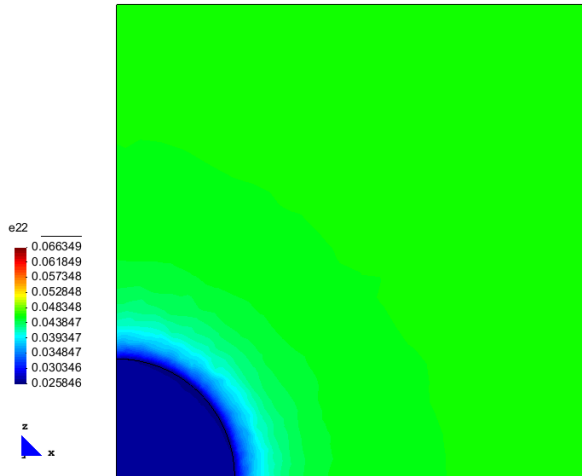
A continuación se muestran los diagramas de contorno para los campos de esfuerzo y deformación en el plano XZ .



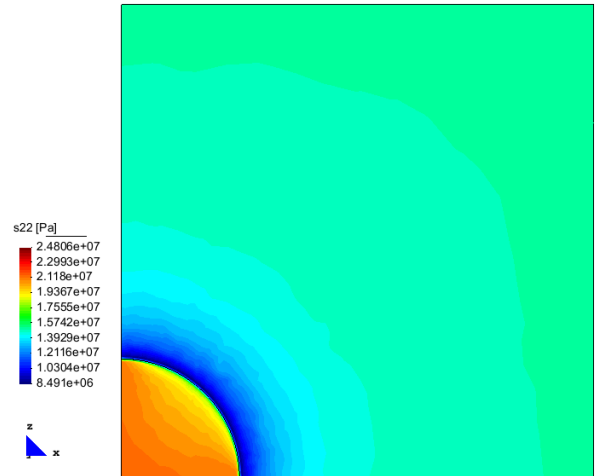
a.1) Campo ε_{11} en plano xz .



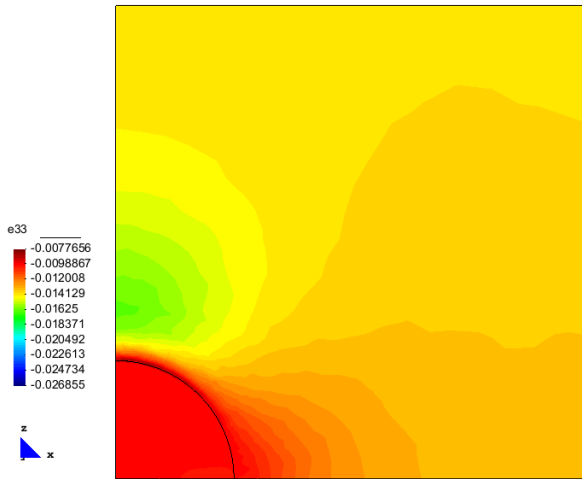
a.2) Campo σ_{11} en plano xz .



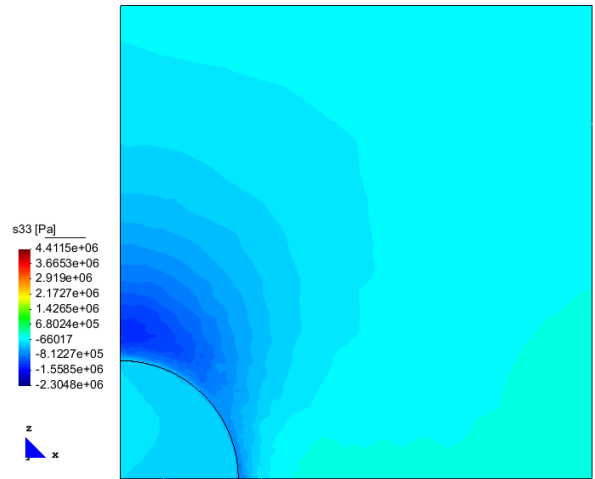
b.1) Campo ε_{22} en plano xz .



b.2) Campo σ_{22} en plano xz .



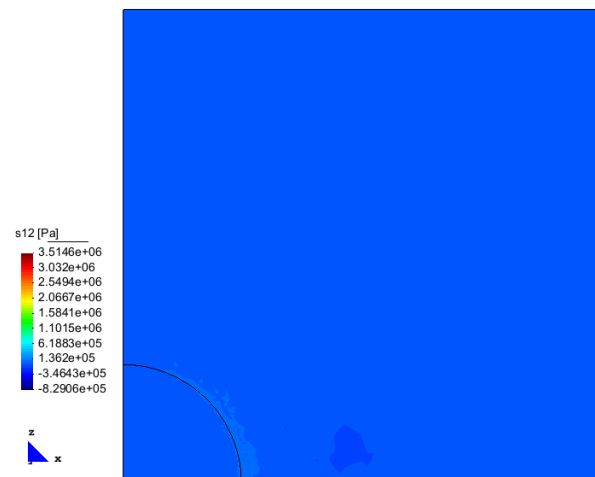
c.1) Campo ε_{33} en plano xz .



c.2) Campo σ_{33} en plano xz .



d.1) Campo ε_{12} en plano xz .



d.2) Campo σ_{12} en plano xz .

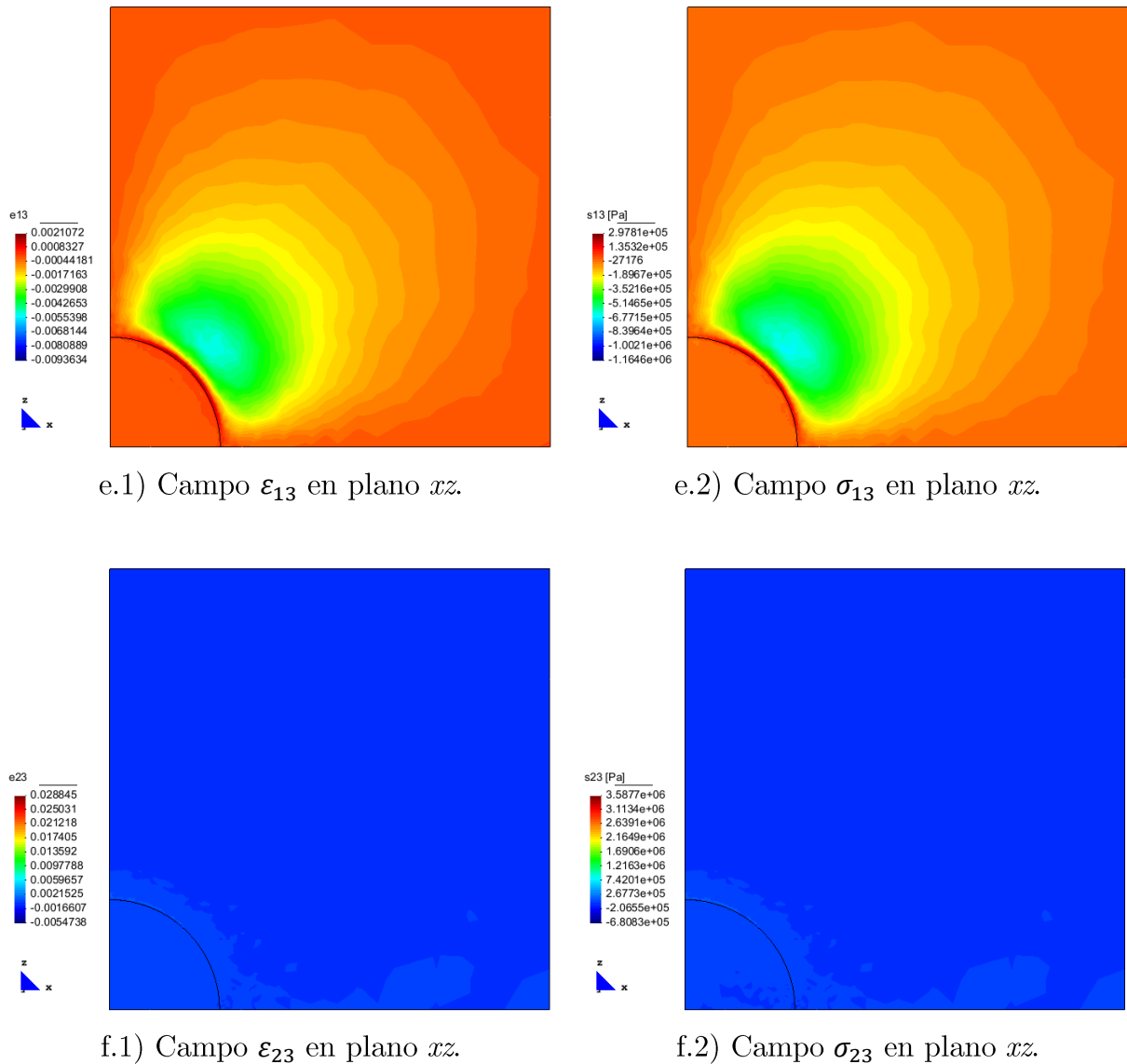
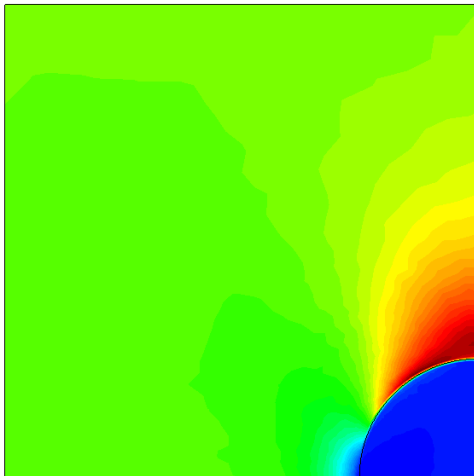
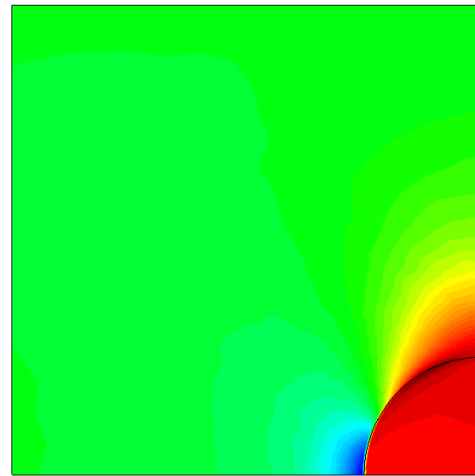


Figura 6.74: Campo de esfuerzo y deformación según componentes en el plano XY .

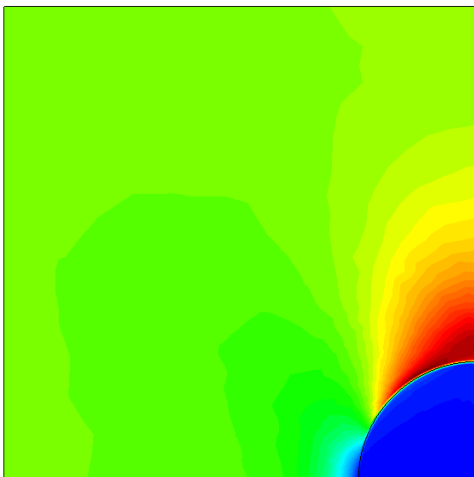
En la Figura 6.75 se muestra el campo de esfuerzo σ_{22} y la deformación ε_{22} , para 10 cargas intermedias. En ellas se observa el aumento en las sollicitaciones, especialmente en la inclusión y en la interface, en donde alcanza valores máximos. La deformación se mantiene pequeña, iniciando desde un 0.4% hasta llegar al máximo que es un 6%.



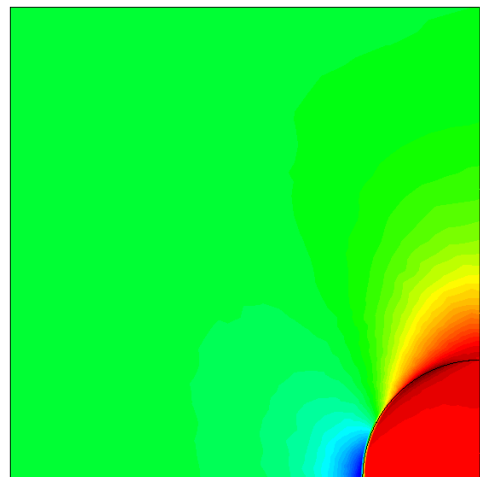
a.1) Deformación ε_{22} para $\sigma_{\infty} = 1.5 \cdot 10^6$ [Pa].



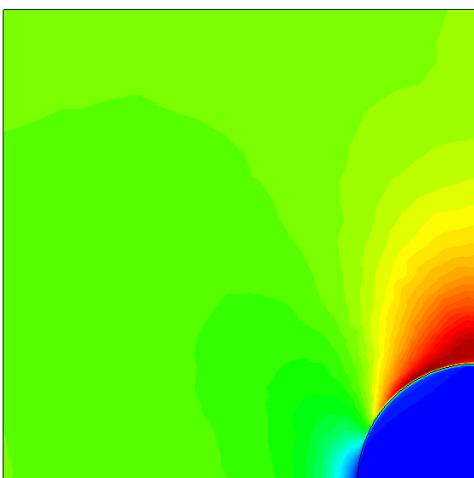
a.2) Esfuerzo σ_{22} para $\sigma_{\infty} = 1.5 \cdot 10^6$ [Pa].



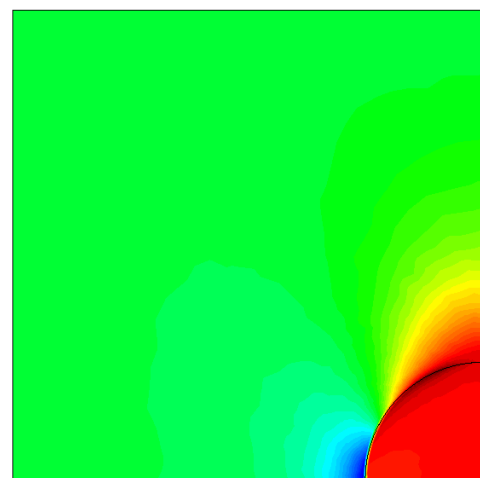
b.1) Deformación ε_{22} para $\sigma_{\infty} = 3 \cdot 10^6$ [Pa].



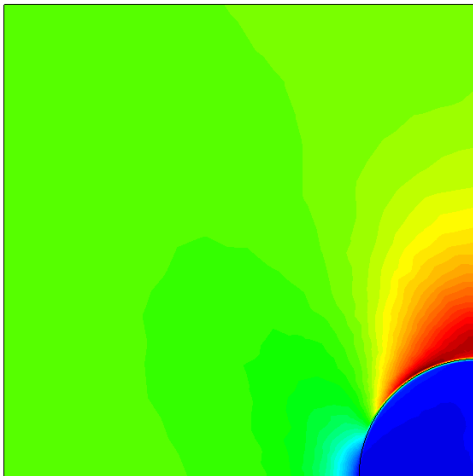
b.2) Esfuerzo σ_{22} para $\sigma_{\infty} = 3 \cdot 10^6$ [Pa].



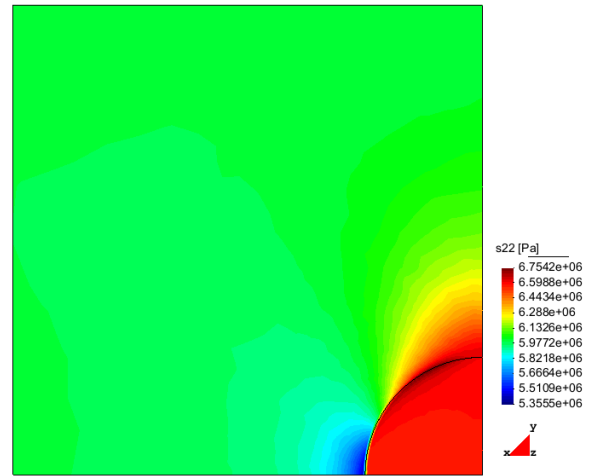
c.1) Deformación ε_{22} para $\sigma_{\infty} = 4.5 \cdot 10^6$ [Pa].



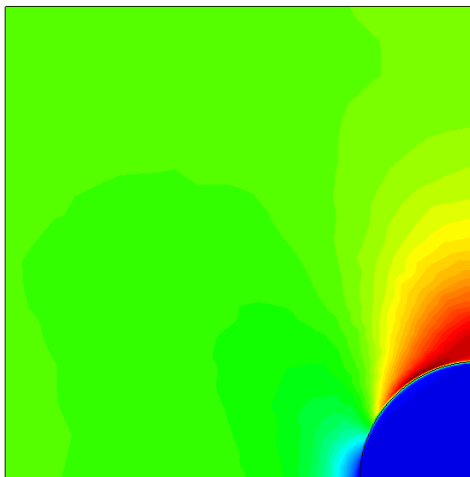
c.2) Esfuerzo σ_{22} para $\sigma_{\infty} = 4.5 \cdot 10^6$ [Pa].



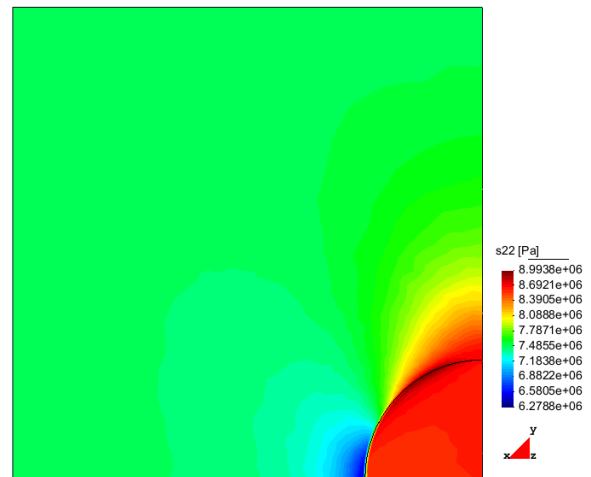
d.1) Deformación ε_{22} para $\sigma_{\infty} = 6 \cdot 10^6$ [Pa].



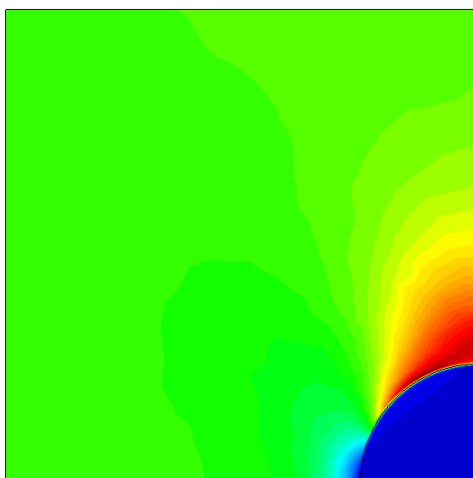
d.2) Esfuerzo σ_{22} para $\sigma_{\infty} = 6 \cdot 10^6$ [Pa].



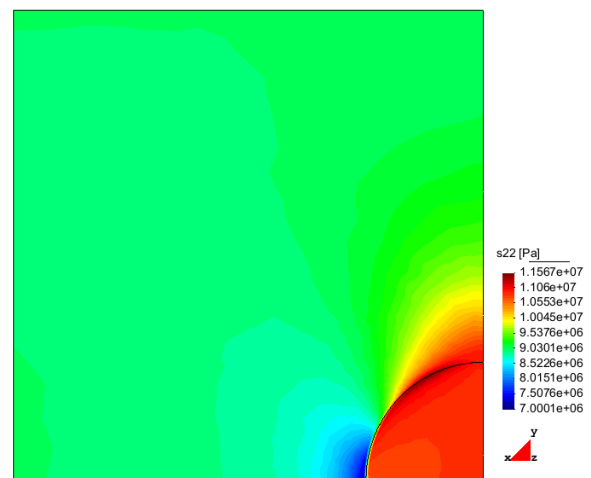
e.1) Deformación ε_{22} para $\sigma_{\infty} = 7.5 \cdot 10^6$ [Pa].



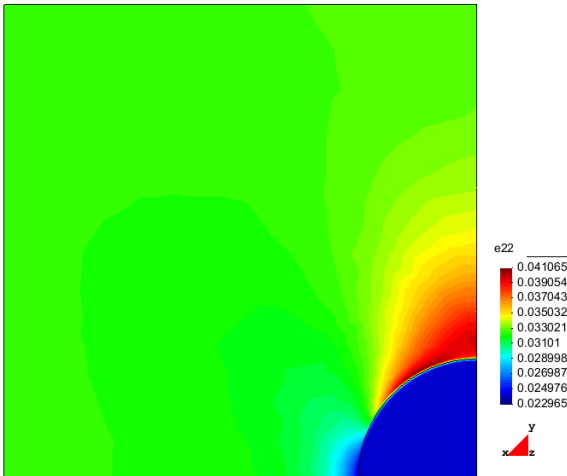
e.2) Esfuerzo σ_{22} para $\sigma_{\infty} = 7.5 \cdot 10^6$ [Pa].



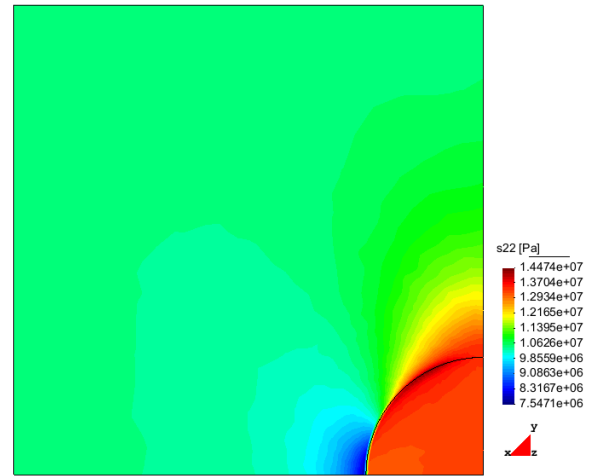
f.1) Deformación ε_{22} para $\sigma_{\infty} = 9 \cdot 10^6$ [Pa].



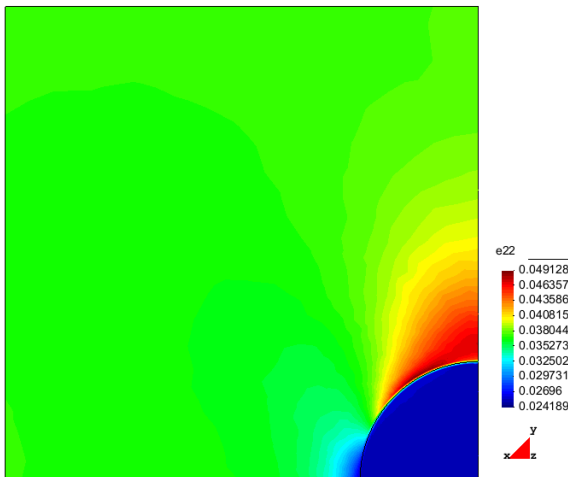
f.2) Esfuerzo σ_{22} para $\sigma_{\infty} = 9 \cdot 10^6$ [Pa].



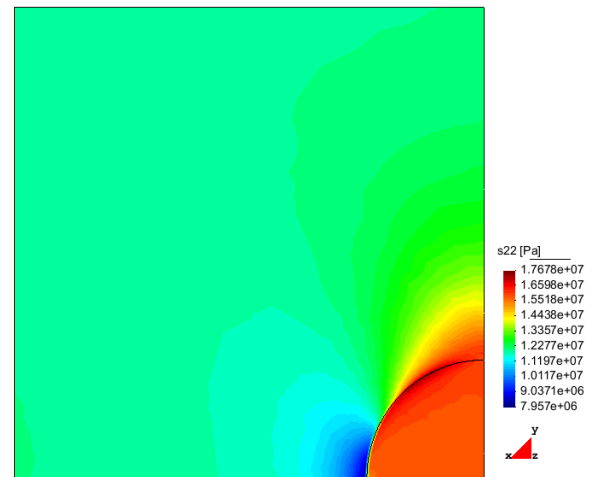
g.1) Deformación ε_{22} para $\sigma_{\infty} = 10.5 \cdot 10^6$ [Pa].



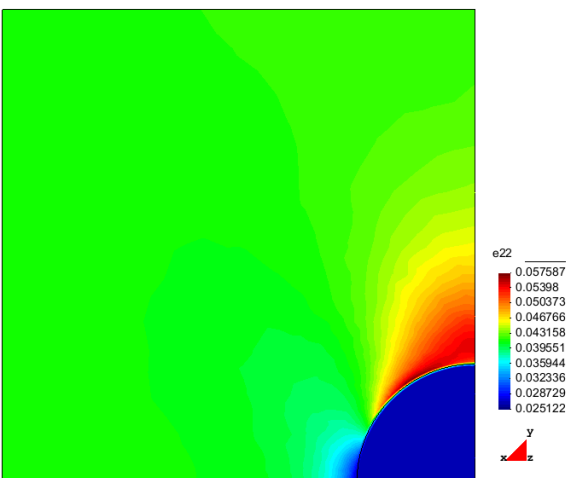
g.2) Esfuerzo σ_{22} para $\sigma_{\infty} = 10.5 \cdot 10^6$ [Pa].



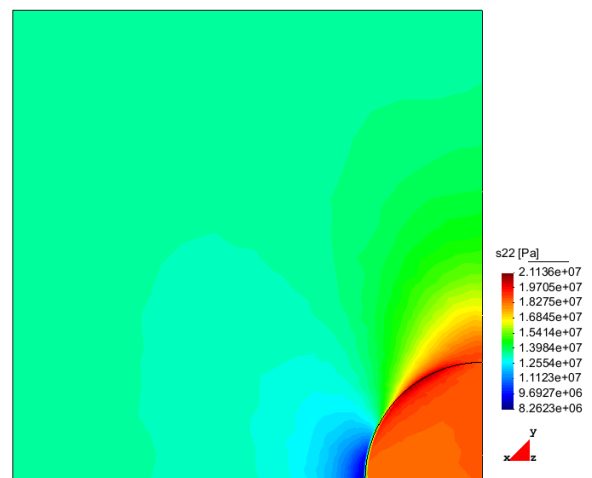
h.1) Deformación ε_{22} para $\sigma_{\infty} = 12 \cdot 10^6$ [Pa].



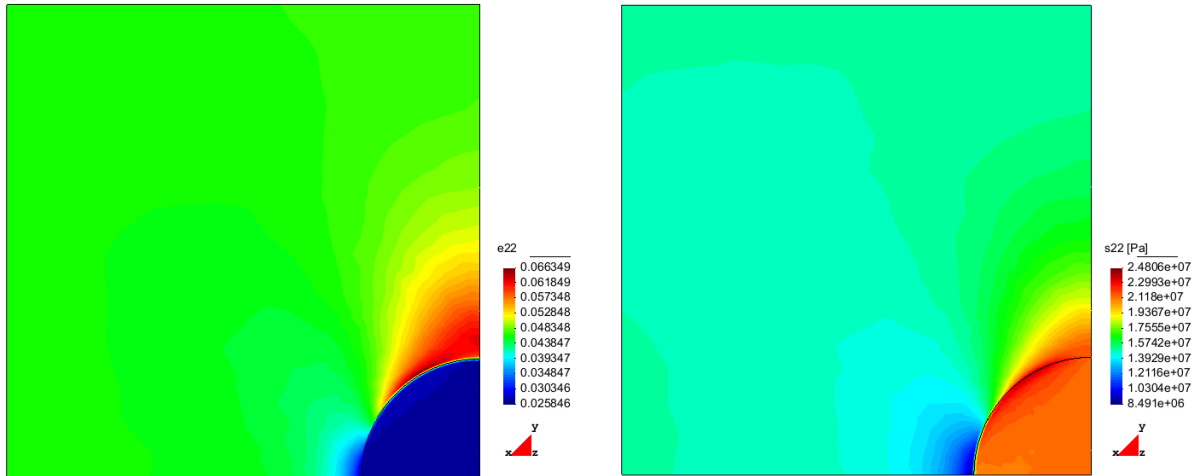
h.2) Esfuerzo σ_{22} para $\sigma_{\infty} = 12 \cdot 10^6$ [Pa].



i.1) Deformación ε_{22} para $\sigma_{\infty} = 13.5 \cdot 10^6$ [Pa].



i.2) Esfuerzo σ_{22} para $\sigma_{\infty} = 13.5 \cdot 10^6$ [Pa].

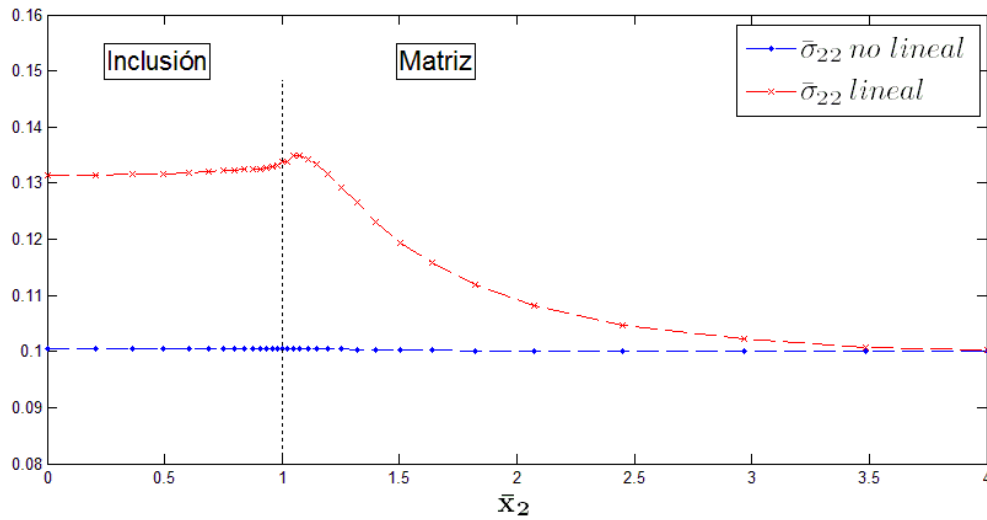


j.1) Deformación ε_{22} para $\sigma_{\infty} = 15 \cdot 10^6$ [Pa].

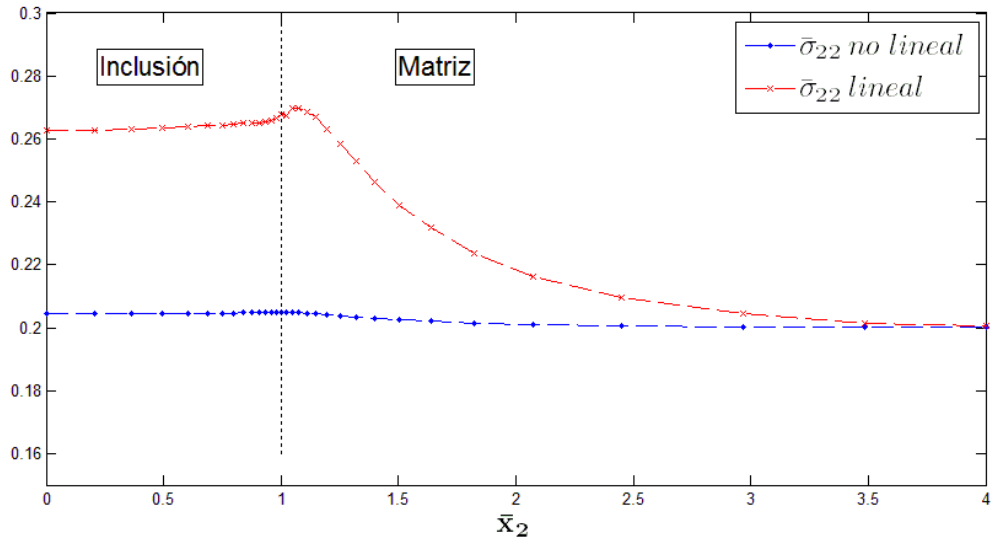
j.2) Esfuerzo σ_{22} para $\sigma_{\infty} = 15 \cdot 10^6$ [Pa].

Figura 6.75: Campo de esfuerzo y deformación según componentes en el plano XY.

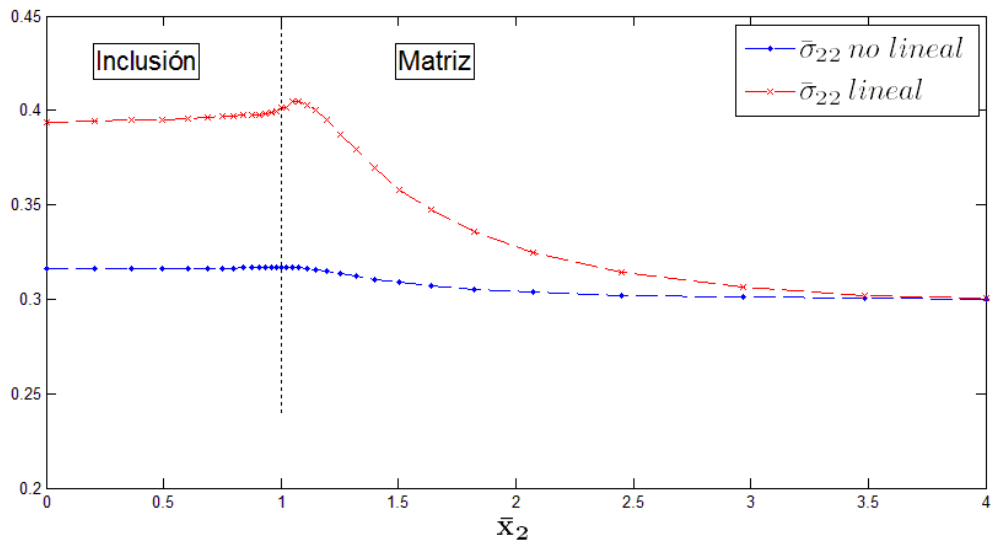
En la figura siguiente se muestra la comparación entre el resultado lineal y el no lineal del esfuerzo adimensional $\bar{\sigma}_{22}$ en la línea para las 10 diferentes cargas externas utilizadas:



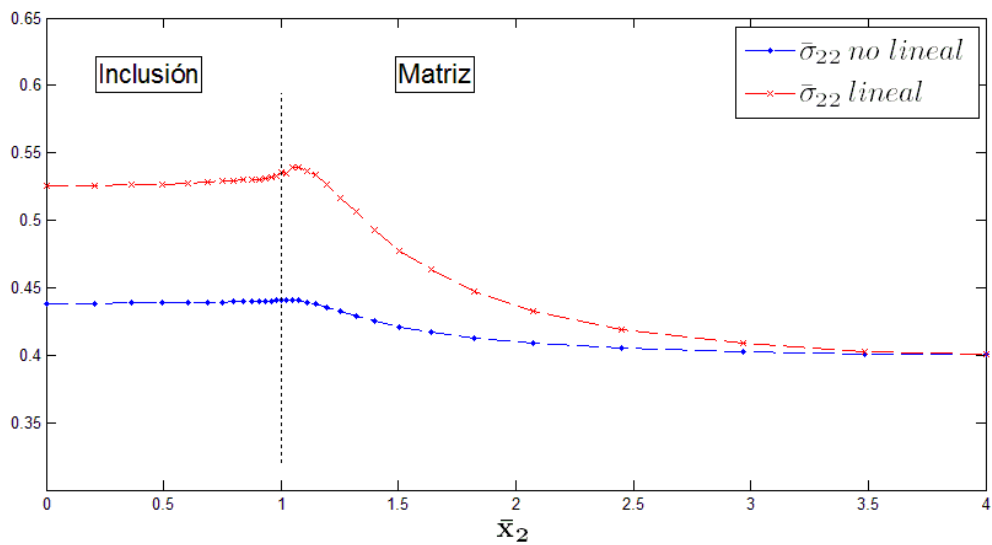
a) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ para $\sigma_{\infty} = 1.5 \cdot 10^6$ [Pa].



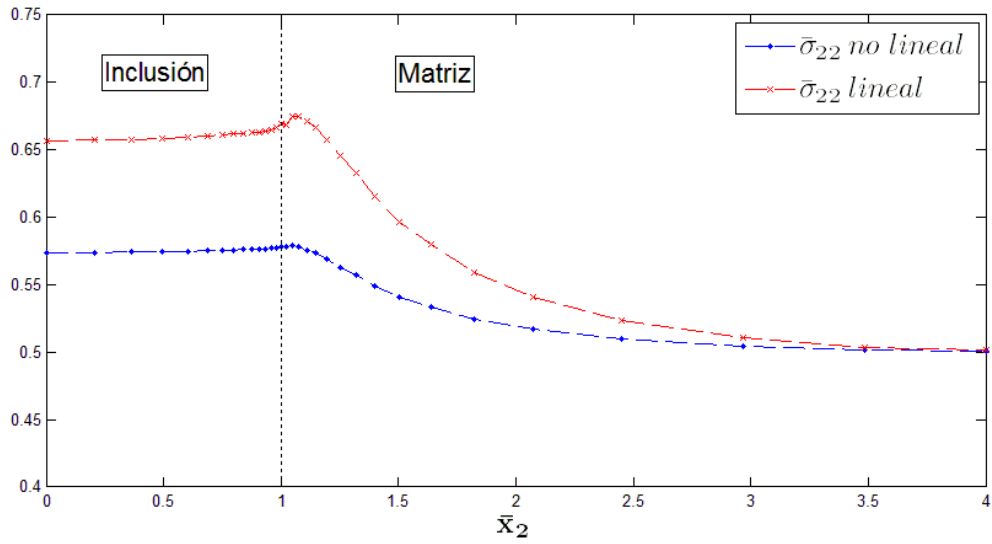
b) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ para $\sigma_{\infty} = 3 \cdot 10^6$ [Pa].



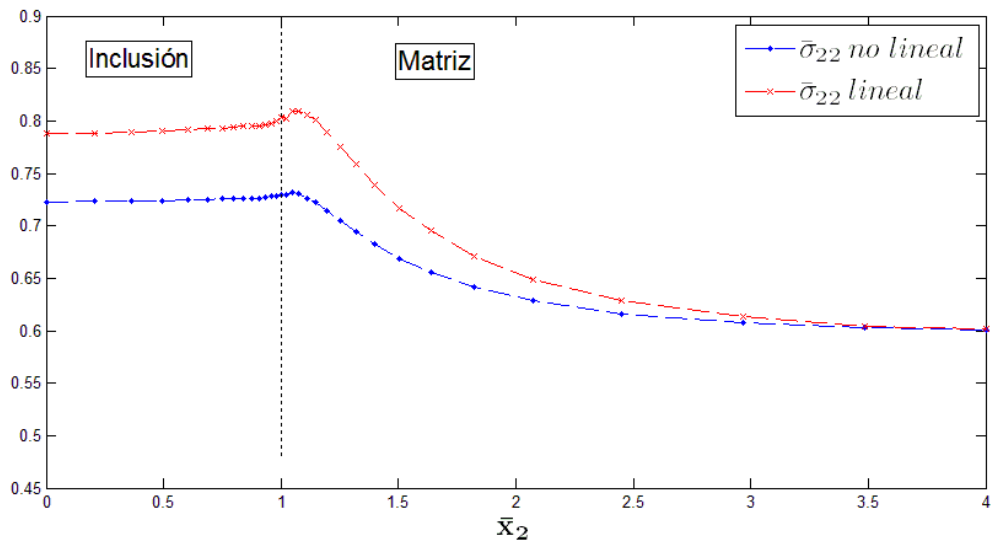
c) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ para $\sigma_{\infty} = 4.5 \cdot 10^6$ [Pa].



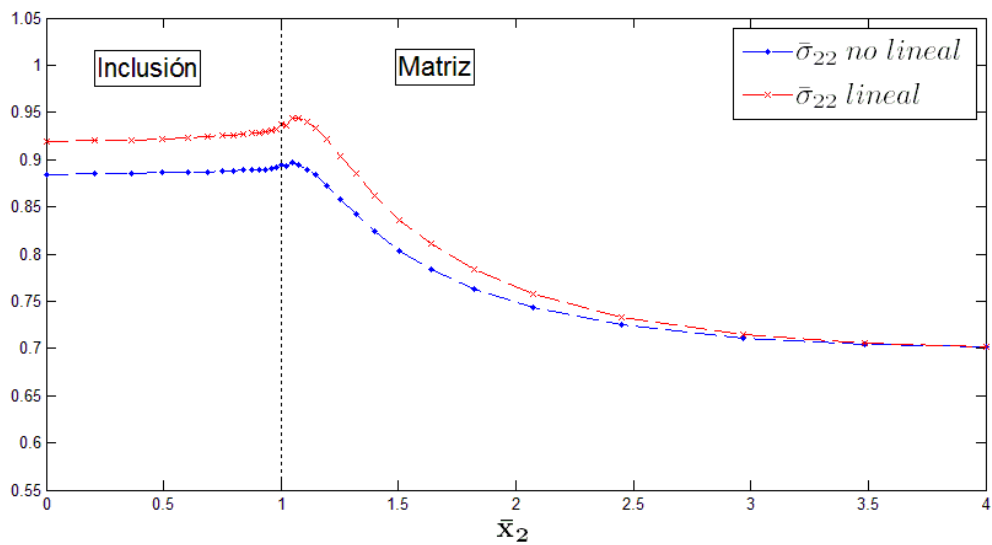
d) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ para $\sigma_{\infty} = 6 \cdot 10^6$ [Pa].



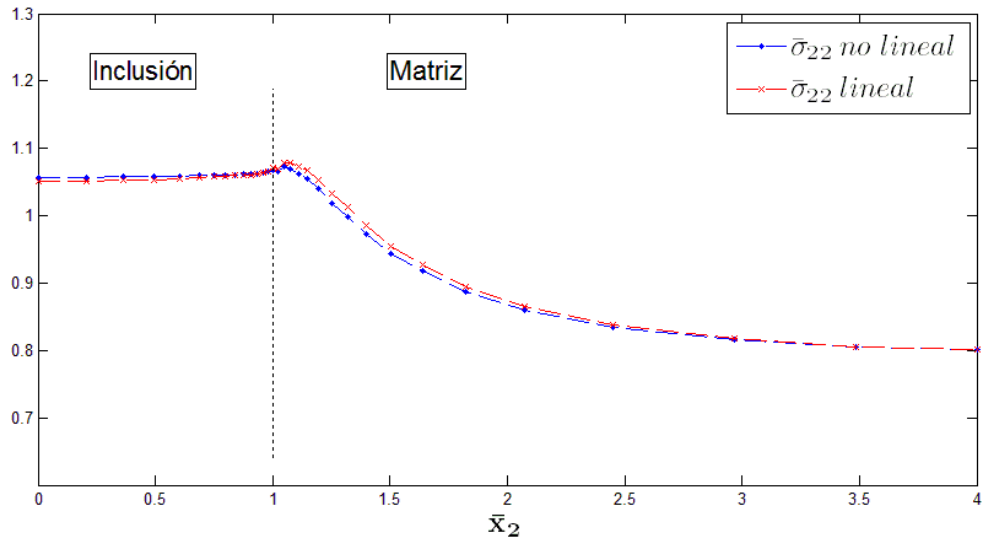
e) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ para $\sigma_{\infty} = 7.5 \cdot 10^6$ [Pa].



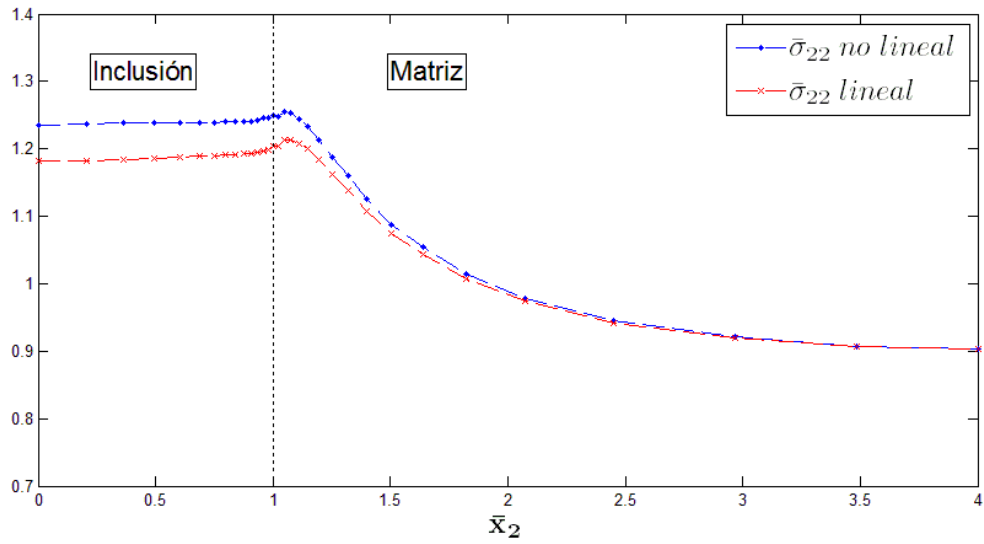
f) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ para $\sigma_{\infty} = 9 \cdot 10^6$ [Pa].



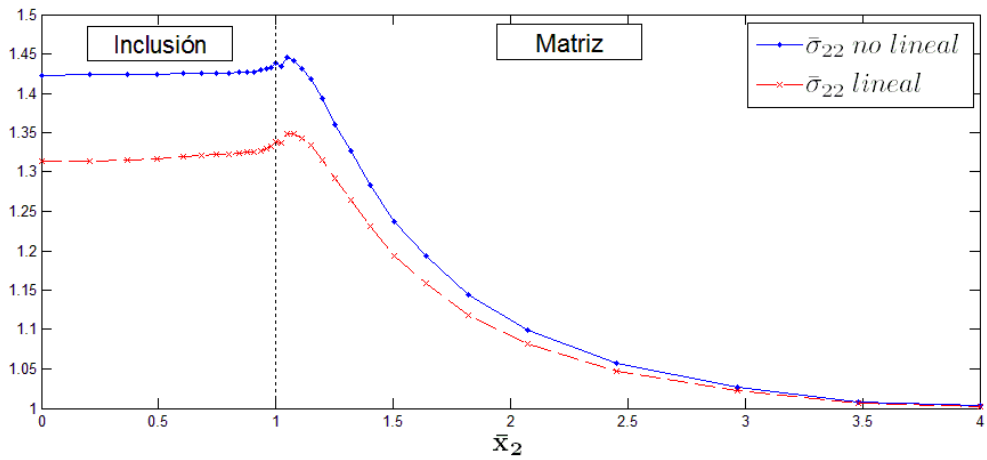
g) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ para $\sigma_{\infty} = 10.5 \cdot 10^6$ [Pa].



h) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ para $\sigma_{\infty} = 12 \cdot 10^6$ [Pa].



i) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ para $\sigma_{\infty} = 13.5 \cdot 10^6$ [Pa].

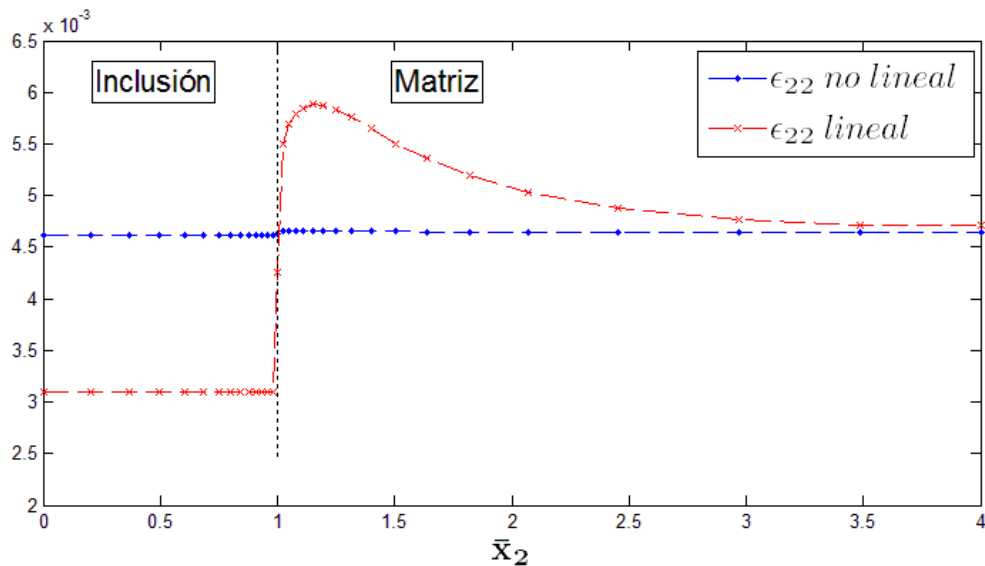


j) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ para $\sigma_{\infty} = 15 \cdot 10^6$ [Pa].

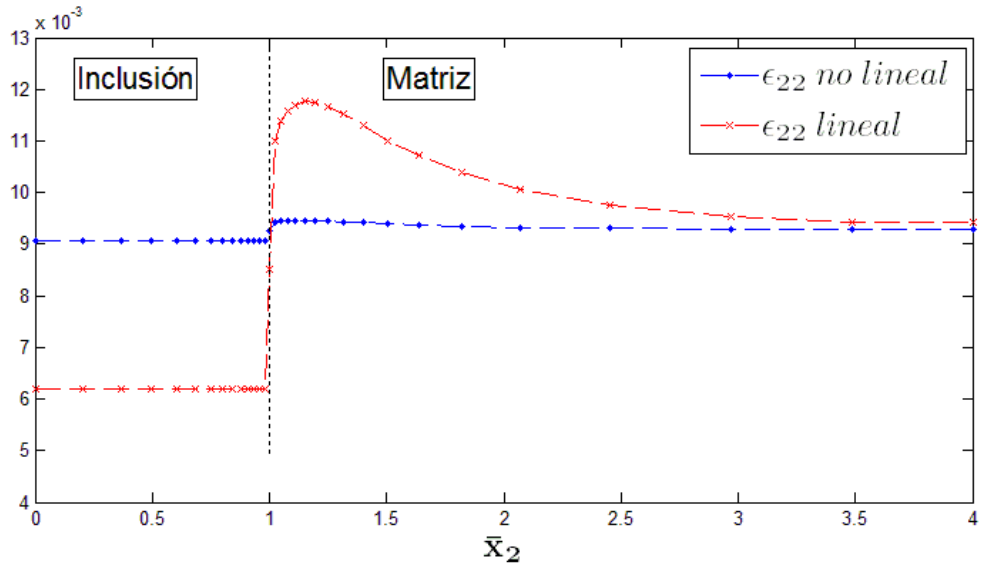
Figura 6.76: Evolución del esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ en la línea $x_1 = x_3 = 0, 0 < x_2 < 4R$ para diferentes cargas externas.

De la Figura 6.76, se puede observar cómo la solución lineal alcanza la forma final de la respuesta, lo único que va variando al aumentar el valor de las cargas aplicadas es la magnitud (la curva se va desplazando hacia arriba). En cambio para la solución no lineal la respuesta va cambiando, es decir la forma de la curva va variando al ir aumentando el valor del esfuerzo externo aplicado. También se observa que la magnitud del esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ va aumentando cada vez más hasta superar el valor máximo de la solución lineal, a partir de la carga $\sigma_{\infty} = 12 \cdot 10^6$ [Pa] la solución no lineal posee magnitudes mayores que la solución lineal, específicamente en el sector de la inclusión y en la interface (dentro de la matriz).

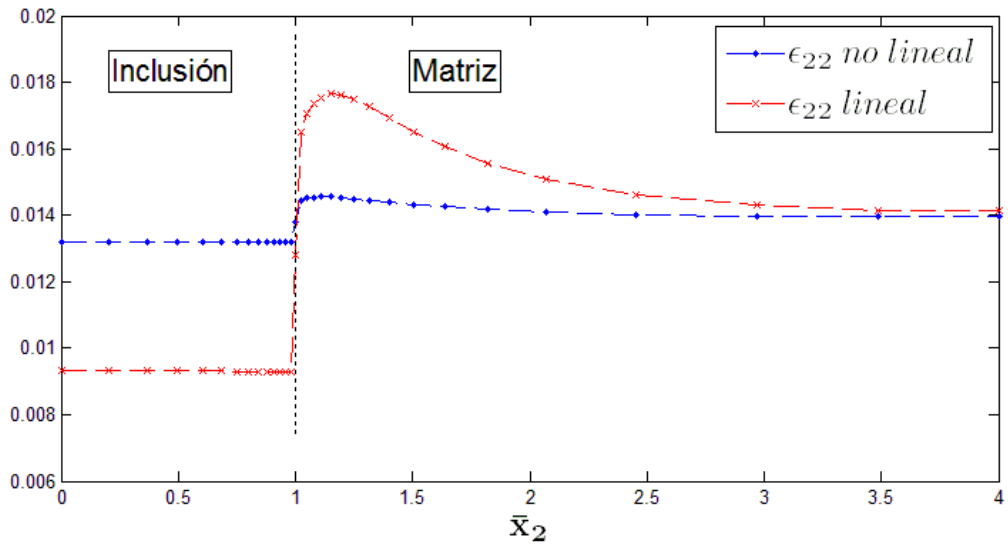
En la figura siguiente se muestra la comparación entre el resultado lineal y el no lineal de la deformación adimensional $\bar{\epsilon}_{22}$ en la línea para las 10 diferentes cargas externas utilizadas:



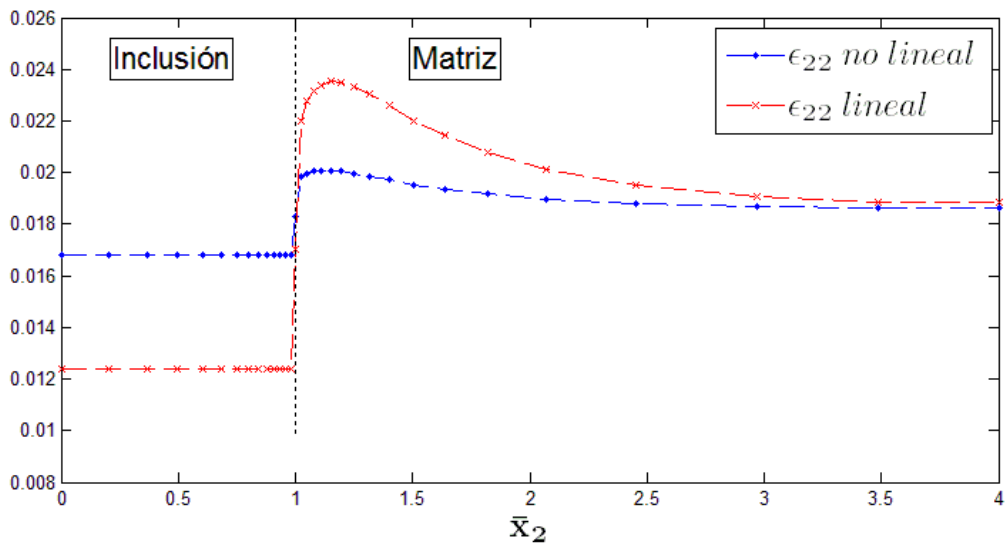
a) Deformación $\bar{\epsilon}_{22}$ para $\sigma_{\infty} = 1.5 \cdot 10^6$ [Pa].



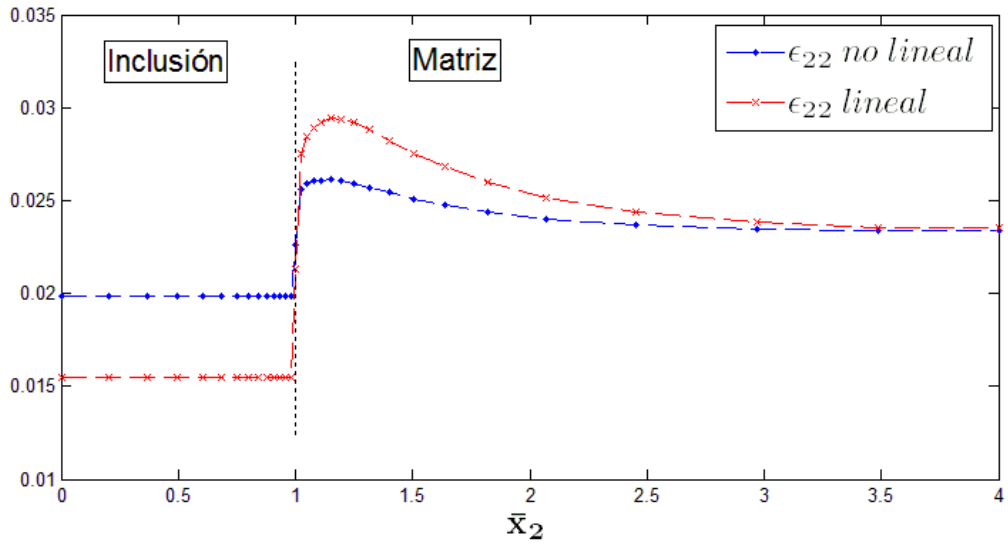
b) Deformación ϵ_{22} para $\sigma_{\infty} = 3 \cdot 10^6$ [Pa].



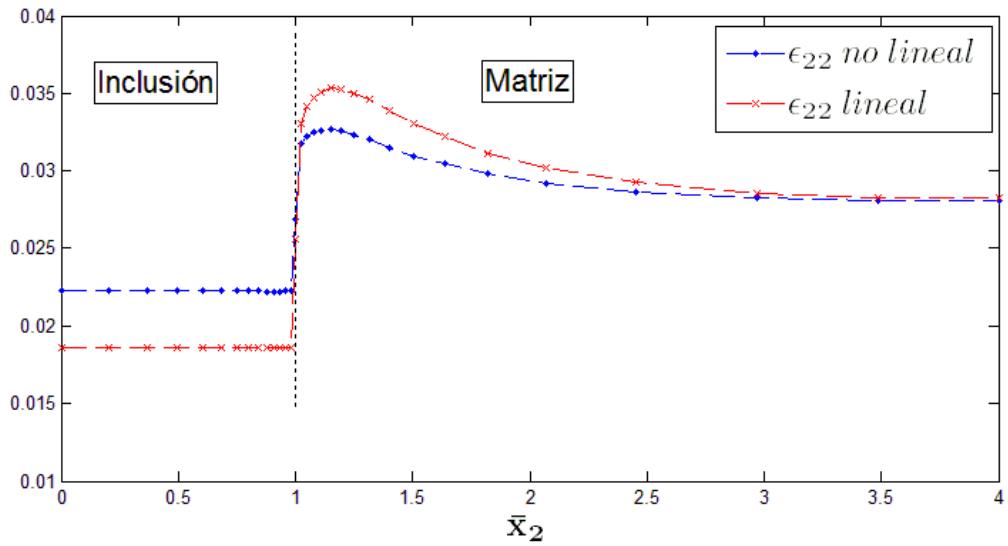
c) Deformación ϵ_{22} para $\sigma_{\infty} = 4.5 \cdot 10^6$ [Pa].



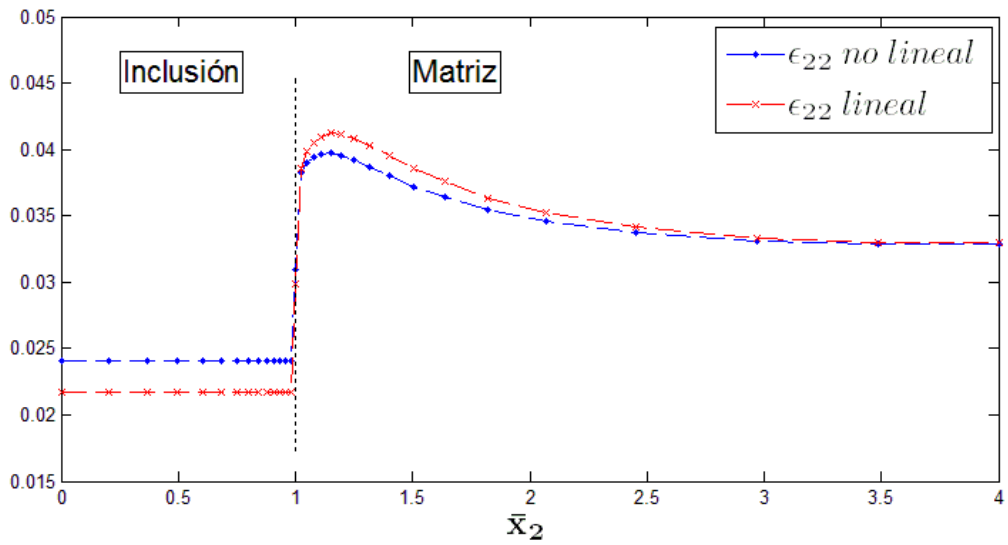
d) Deformación ϵ_{22} para $\sigma_{\infty} = 6 \cdot 10^6$ [Pa].



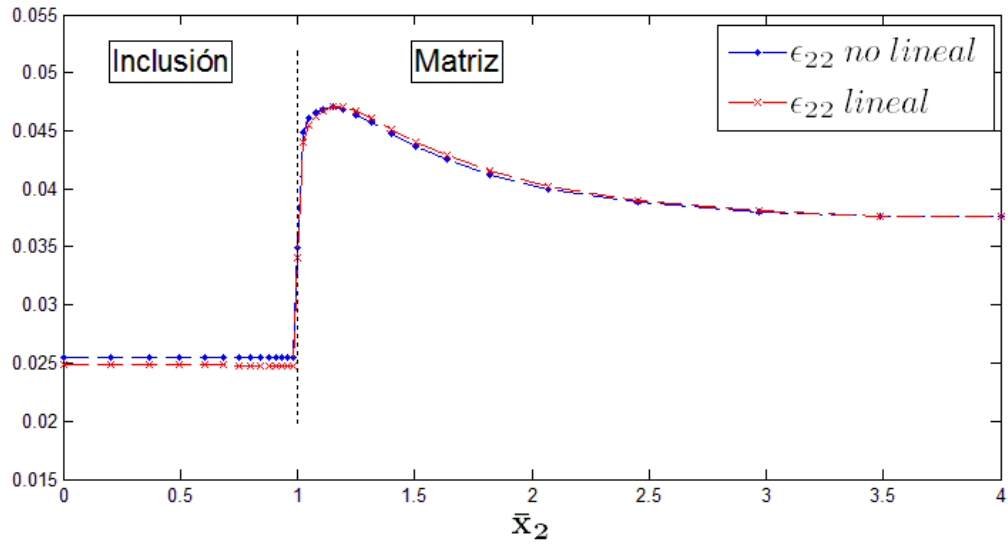
e) Deformación ϵ_{22} para $\sigma_{\infty} = 7.5 \cdot 10^6$ [Pa].



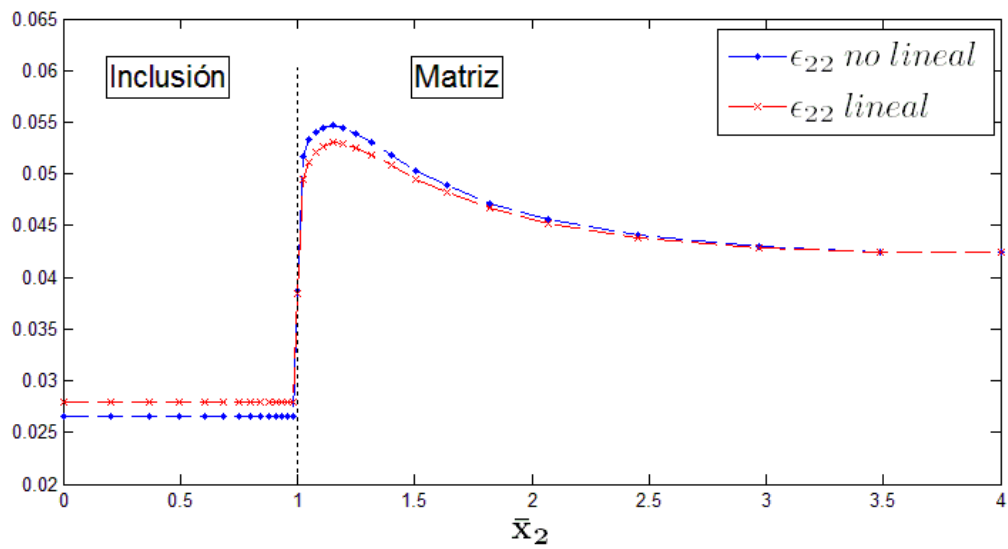
f) Deformación ϵ_{22} para $\sigma_{\infty} = 9 \cdot 10^6$ [Pa].



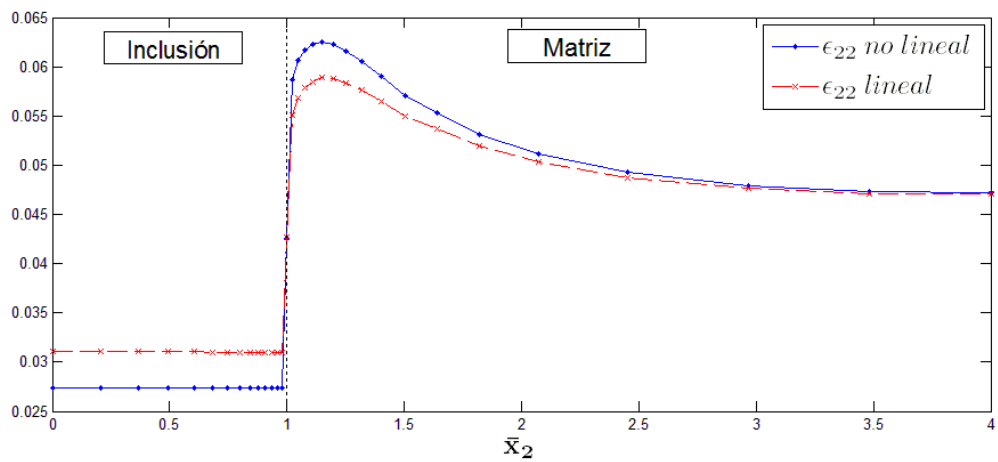
g) Deformación ϵ_{22} para $\sigma_{\infty} = 10.5 \cdot 10^6$ [Pa].



h) Deformación ϵ_{22} para $\sigma_{\infty} = 12 \cdot 10^6$ [Pa].



i) Deformación ϵ_{22} para $\sigma_{\infty} = 13.5 \cdot 10^6$ [Pa].



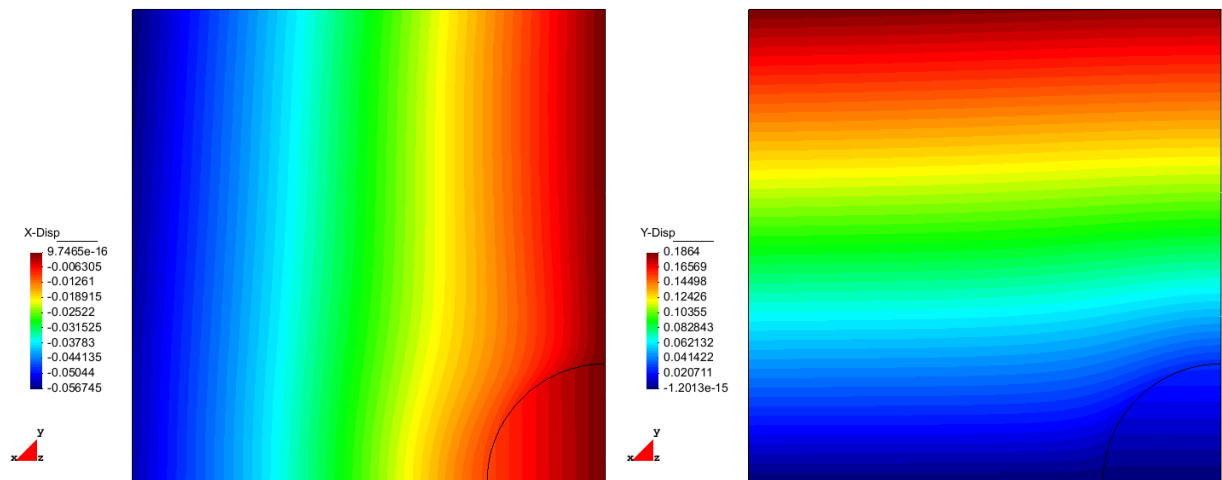
j) Deformación ϵ_{22} para $\sigma_{\infty} = 15 \cdot 10^6$ [Pa].

Figura 6.77: Evolución de la deformación ϵ_{22} en la línea $x_1 = x_3 = 0, 0 < x_2 < 4R$ para diferentes cargas externas.

De la Figura 6.77, se puede observar nuevamente que la solución lineal alcanza una forma final para la respuesta y ésta solamente varia la magnitud al ir aumentando las cargas externas aplicadas, en cambio en la solución no lineal la respuesta va evolucionando de manera diferente tras incrementar la magnitud del esfuerzo externo aplicado, se verifica que la deformación en la inclusión va disminuyendo y en la interface (dentro de la matriz) va aumentando al ir aplicando cargas externas mayores. Se aprecia que luego de $\sigma_{\infty} = 12 \cdot 10^6$ [Pa], la deformación en la inclusión es menor que la que se observa en la solución lineal y que en la interface es mayor.

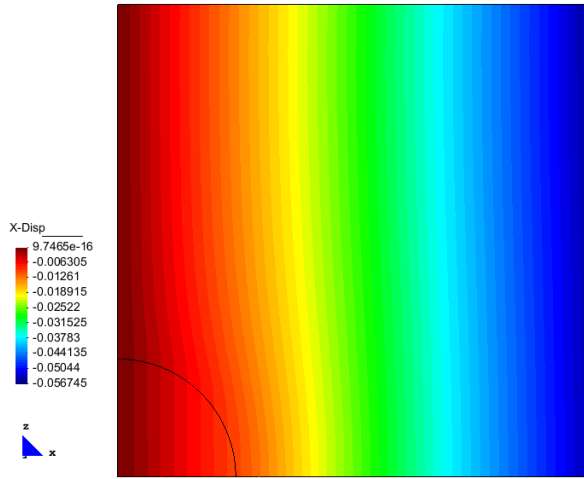
En la sección anexo A, se muestran los mismos resultados anteriores pero para las componentes restantes en la línea $x_1 = x_3 = 0, 0 < x_2 < 4R$ y en la línea $x_2 = x_3 = 0, 0 < x_1 < 4R$.

A continuación se muestra el campo de desplazamientos para los planos XY y XZ , además del contorno usando vectores. Se observan de las figuras que éstos son pequeños especialmente en el sector de la inclusión.

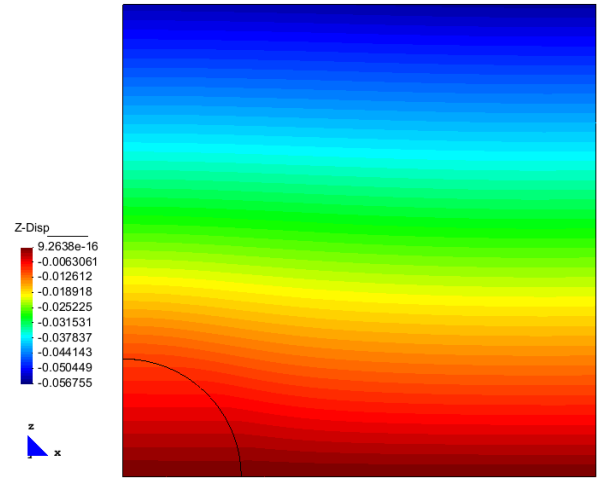


a.1) Desplazamiento u_1 en el plano xy .

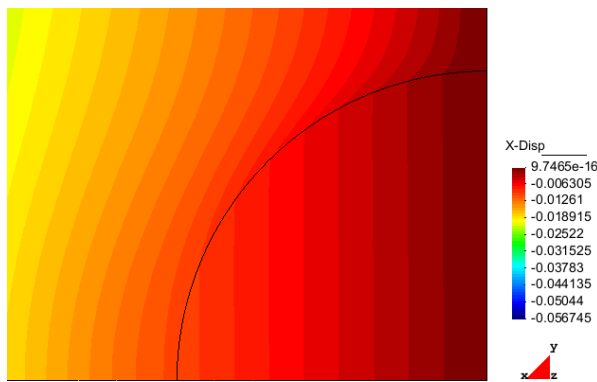
a.2) Desplazamiento u_2 en el plano xy .



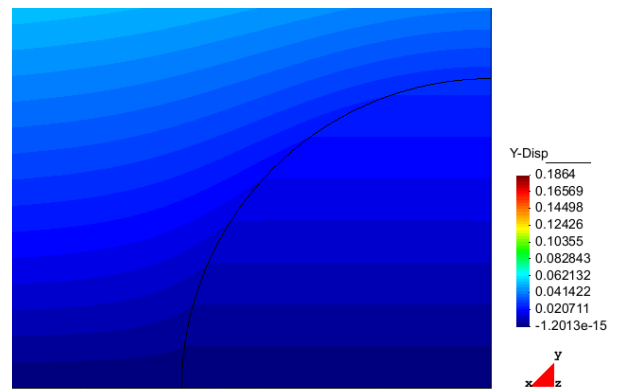
b.1) Desplazamiento u_1 en el plano xz .



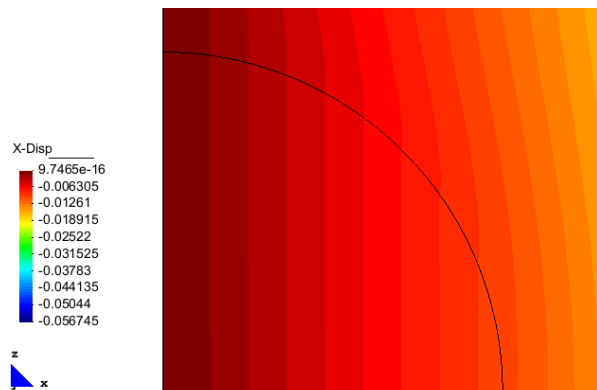
b.2) Desplazamiento u_3 en el plano xz .



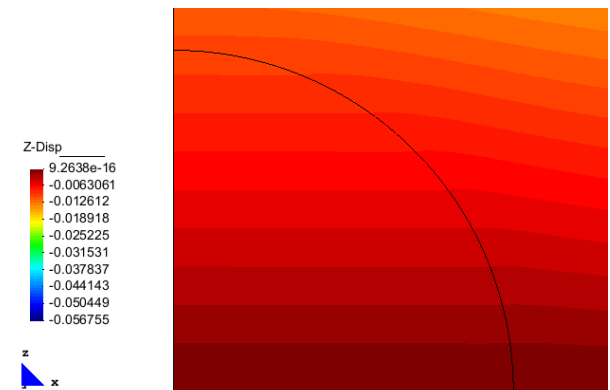
c.1) Detalle en interfaz, desplazamiento u_1 en el plano xy .



c.1) Detalle en interfaz, desplazamiento u_2 en el plano xy .



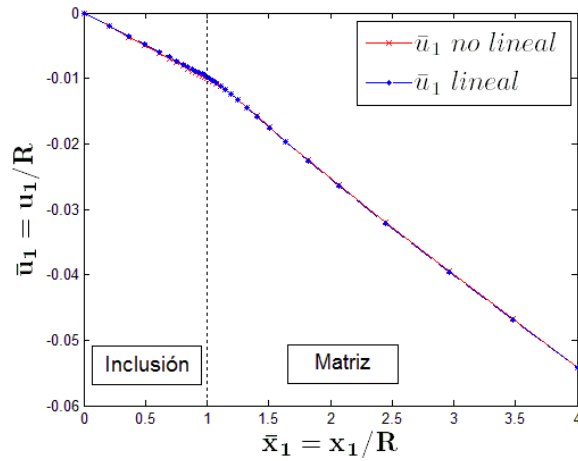
d.1) Detalle en interfaz, desplazamiento u_1 en el plano xz .



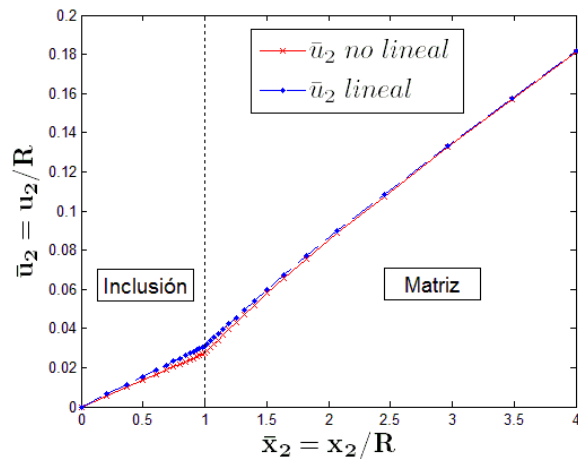
d.2) Detalle en interfaz, desplazamiento u_3 en el plano xz .

Figura 6.78: Componentes de los desplazamientos en planos XY y XZ . Detalles de los desplazamientos en la interface de la inclusión.

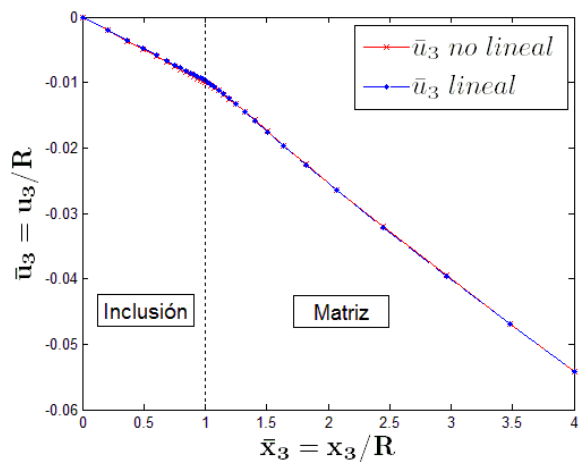
Finalmente se muestra los desplazamientos normalizados en las direcciones de los ejes y se comparan con la solución numérica lineal:



a) Desplazamiento \bar{u}_1 en \bar{x}_1 .



b) Desplazamiento \bar{u}_2 en \bar{x}_2 .



c) Desplazamiento \bar{u}_3 en \bar{x}_3 .

Figura 6.79: Desplazamientos adimensionales para solución lineal y no lineal.

Se observa de los gráficos que para ambas soluciones, los desplazamientos son similares especialmente en el sector de la inclusión. Se puede decir que con las propiedades de la matriz utilizada no se puede apreciar grandes diferencias para esta nueva ecuación constitutiva en relación a los desplazamientos, por lo que puede ser necesario utilizar un material hiper-elástico para la matriz, para que se manifieste una respuesta mayor, la cual pueda ser estudiada y comparada de mejor manera.

De todos los resultados obtenidos se observa, que no hay mucha diferencia entre la solución lineal y la no lineal, esto se debe, como se mencionó anteriormente a los valores utilizados para las propiedades de la matriz y la inclusión, por lo tanto es importante realizar otro estudio con otras cantidades para verificar adecuadamente el efecto de esta nueva ecuación constitutiva, otro factor que fue determinante en estos resultados, es el tamaño del elemento refinado en la interface de los cuerpos, es relevante utilizar una malla mucho más fina en este sector, ya que es aquí en donde ocurren las máximas concentraciones de esfuerzo y deformación. De los resultados se observó que existe un espesor en la interface, donde ocurren cambios bruscos en las sollicitaciones, el valor de esta longitud, no fue determinada debido a las restricciones computacionales existentes.

Capítulo 7

Conclusiones

La nueva ecuación constitutiva es una función escalar que establece una relación entre el esfuerzo y la deformación, esta nueva ecuación no corresponde a un potencial de energía, y por lo tanto no pertenece a la teoría elástica lineal clásica. También es importante mencionar que ésta cumple con la primera ley termodinámica (la segunda no entra en juego debido a que no hay disipación de energía) por lo tanto es válida desde el punto de vista físico [22]. Es importante hacer hincapié en esto, debido a que es fácil confundirse y relacionar esta ecuación constitutiva con un potencial de energía, siendo que simplemente es una expresión que permite la simplificación teórica del comportamiento mecánico del sólido.

Como la definición de la nueva ecuación constitutiva relaciona la deformación en función del esfuerzo, para obtener el tensor de módulos elásticos necesario en el método de elementos finitos, que según la formulación débil linealizada (y sus respectivas aproximaciones), corresponde a la derivada del esfuerzo en función de la deformación, es necesario derivar la inversa, es decir, la deformación (su definición) en función del esfuerzo, para así obtener el tensor de módulos elásticos inverso y luego invertirlo para obtener el tensor de elasticidad necesario en el método. Se asume que este tensor de segundo orden es invertible, este supuesto no ha sido comprobado todavía y es importante verificarlo y estudiarlo analíticamente, ya que el programa utilizado para resolver los problemas de valor de frontera (Matlab) realiza el cálculo de la inversa numéricamente, por ende el tensor de elasticidad obtenido es una aproximación y no el exacto, de esta manera para asegurar los resultados obtenidos en esta tesis es primordial verificar la validez del supuesto tomado. En cuanto a los resultados obtenidos, fue importante la realización de pruebas de mallas para obtener resultados confiables. Además es importante, para asegurar la convergencia y la validez de lo obtenido, establecer algún tipo de error relacionado con el tensor de elasticidad, como por ejemplo un error de energía, el cual es un tipo de error global y que permite un mejor análisis del problema. También se puede calcular la energía liberada por deformación de algún resultado experimental y compararlo con los resultados numéricos obtenidos en esta tesis, en esto último aspecto es importante

hacer hincapié, de que una base de datos experimental, permitiría una comparación más directa con la realidad física del fenómeno.

Las mallas utilizadas fueron muy finas, pero sería relevante revisar geometrías con mallas que lo sean aún más y en lo posible estructuradas (son de mejor calidad), ya que en los casos en donde las geometrías son más críticas en relación a la concentración de esfuerzos, los esfuerzos y las deformaciones se concentraban casi en un solo elemento finito, situación que podría estar restringiendo la soluciones producto de que tal vez los problemas necesiten ser resueltos con mallas que posean un tamaño de elemento finito aún más pequeño en el sector de refinado. Una malla más fina en el lugar donde se concentran las solicitaciones permitiría un mejor cálculo de los esfuerzos y de las deformaciones, evitándose así errores numéricos y obteniéndose una concentración distribuida en una vecindad de elementos finitos, y no en un solo elemento. En el caso que refinar aún más las mallas sea muy complicado o no entreguen mejorías a la solución, se propone enriquecer las funciones de forma usando funciones especiales estudiadas en mecánica de fractura, con el fin de mejorar la integración numérica y por ende los resultados obtenidos.

Los errores que podrían haber afectado las soluciones numéricas obtenidas son: la discretización, el cálculo incremental, la derivada del esfuerzo y evidentemente el tamaño de malla utilizando. De cierta manera el error que mejor puede ser controlado a priori es el que se relaciona con el tamaño de malla, pero este control se hace cada vez más difícil si la geometría presenta concentradores de esfuerzos elevados, situación que se apreció en esta tesis por ejemplo para el problema del medio semifinito con carga puntual, los errores de discretización, cálculo incremental y la derivada del esfuerzo, están estrechamente ligados a las aproximaciones y a los supuestos tomados, así como también a la linealización realizada. Al suponer que el tensor de elasticidad es invertible, no se está seguro que la inversa obtenida sea exacta o bien aproximada a la real, afectando directamente al cálculo de los incrementos del desplazamiento, y por ende a la obtención de los esfuerzos y las deformaciones, contribuyendo así al aumento en los errores.

Las soluciones obtenidas para la placa con agujero elíptico bajo tracción, mostraron que el esfuerzo se concentraba en la punta de la grieta, y que los valores se hacían cada vez más altos al ir haciendo angosta la fisura (concentraciones que van desde 432 a 760), la deformación en cambio aumentaba pero se mantenía pequeña (desde 6% hasta 12%), hasta alcanzar un valor de concentración de aproximadamente 54. Al comparar estos resultados, con la solución elástica lineal clásica, se observaron

grandes diferencias, especialmente en ambos factores de concentración. Para la concentración de esfuerzo obtenida con la solución no lineal, se observó que para el último caso ($a/b=1/50$) ésta fue 7 veces mayor que la que se obtiene con la solución lineal, en cambio la concentración de la deformación para el caso no lineal (54) fue casi la mitad que la que se obtiene con la solución lineal (101). Es importante mencionar que para este problema se obtuvieron concentraciones demasiado elevadas para el esfuerzo, las cuales no pueden ser encontradas en algún caso real o algún material frágil existente, por ende este aumento elevado en las concentraciones se puede atribuir a una especie de endurecimiento del material o un crecimiento de su rigidez producto de una elevación de las deformaciones, esta idea debe ser estudiada para otros problemas de valor de frontera con el fin de confirmar la hipótesis planteada, de todas maneras lo más importante de estos resultados es que la deformación se mantiene pequeña, acotada y no crece proporcionalmente con la esfuerzo como sucede generalmente en la solución teórica lineal que se contradice con la realidad del fenómeno. Los desplazamientos se mantienen pequeños y muy similares a la teoría. Es importante hacer notar que para este problema las concentraciones se centran y distribuyen en un solo elemento finito, situación preocupante y que debe ser corregida en trabajos futuros, para asegurar la confianza de estos resultados, para ello es relevante realizar mallas más finas y en lo posible estructuradas.

Para el problema de entalles con perfil hiperbólico bajo tracción, se encontró que los esfuerzos y las deformaciones se concentraban en el punto más interno del entalle y los factores de concentración eran más altos que los obtenidos con la teoría elástica lineal. Se encontró además que la deformación y los desplazamientos eran pequeños y se mantenían así en cada geometría utilizada, de hecho, al ir haciendo cada vez más interna la hendidura aumentaban las solicitaciones y la deformación, pero para este último los valores eran pequeños y no excedían el 4%. Las concentraciones de esfuerzo alcanzaron un valor máximo de aproximadamente 33, que es casi 10 veces más elevada que la concentración obtenida con la solución lineal (3.8), las concentraciones de deformación para ambas soluciones alcanzaron valores similares, pero aun así la solución no lineal poseía magnitudes mayores. Para este problema también se puede observar que la deformación se mantiene pequeña y que no aumenta de manera proporcional con el esfuerzo, resultado muy importante de recalcar en esta tesis y de esta nueva ecuación constitutiva estudiada. También es importante considerar que las concentraciones de esfuerzo y deformación no se concentran ni distribuyen en un solo

elemento finito como en el problema de la placa elíptica, por lo que se puede confiar en los resultados obtenidos y en la malla utilizada.

En el caso del medio seminfinito bajo la acción de una carga puntual se observó que el esfuerzo y la deformación se concentraban altamente en el punto de aplicación de la carga, y las concentraciones eran muy altas y diferían notoriamente de la solución lineal, siendo estas últimas mayores que las otras, para la deformación no lineal se obtuvieron concentraciones del orden de los 4000 y para el caso lineal cercana a los 25000. Las deformaciones fueron pequeñas y similares a las que estipula la teoría de esta nueva ecuación constitutiva (no proporcionales al esfuerzo) cercanas al 5%. La concentración del esfuerzo y la deformación se distribuyó en más de dos elementos finitos por lo que se puede considerar que los resultados son confiables. La malla utilizada para este problema debe ser muy fina producto de las altas concentraciones y se recomienda que sea estrictamente estructurada, para asegurar una calidad de malla adecuada en la zona de refinado.

La inclusión no lineal se comportó como una restricción para la matriz y las concentraciones de esfuerzo y deformación fueron altas y encontradas, en la mayoría de las componentes, en el sector de la interface, al interior de la inclusión. Las deformaciones al interior de este elemento esférico fueron pequeñas, cercanas al 3%. La comparación entre la solución lineal y la no lineal, no fue enriquecedora, ya que estas no diferían mucho, por lo tanto se propone estudiar este caso utilizando otro tipo de material como matriz, por ejemplo uno de carácter híper-elástico. También se propone estudiar este caso con una malla aún más fina, especialmente en el sector de la interface, en donde ocurren la mayoría de los fenómenos, para ello es relevante crear un código similar en otro tipo de programa, como C++.

En general, la ecuación constitutiva modeló adecuadamente los problemas de valor de frontera representando situaciones en donde hay altas concentraciones de esfuerzos producto de que las deformaciones se mantienen pequeñas. La comparación realizada de esta ecuación constitutiva con la teoría elástica lineal, solo entrega una aproximación cualitativa del comportamiento de este nuevo tipo de relaciones constitutivas, por lo tanto es de relevancia, como se mencionó anteriormente, comparar estos resultados con una base de datos experimental, o realizar nuevos problemas que posean su contraparte empírica.

Bibliografía

- [1] Truesdell, C.A., Noll, W.: “*The Non-linear Field Theories of Mechanics*”, 4th edn. Springer, Berlin (2004).
- [2] Green, A.E., Adkins, J.: “*Large Elastic Deformations*”. 2nd edn. Oxford University Press, London (1970).
- [3] Rajagopal, K.R.: “*The elasticity of elasticity*”. *Journal of Applied Mathematics and Physics* 58, 309–317 (2007).
- [4] Bustamante, R., Rajagopal, K.R.: “*A note on plain strain and stress problems for a new class of elastic bodies*”. *Mathematics and Mechanics of Solids* 15, 229–238 (2010).
- [5] Ortiz-Bernardin, A., Bustamante, R., Rajagopal, K.R.: “*A numerical study of elastic bodies that are described by constitutive equations that exhibit limited strains*”, *International Journal of Solids and Structures* 51, 875–885 (2014).
- [6] Rajagopal, K.R.: “*On implicit constitutive theories*”. *Applied Mathematics* 48, 279–319 (2003).
- [7] Rajagopal, K.R., Srinivasa, A.R.: “*On the response of non-dissipative solids*”. *Proceedings of the Royal Society A* 463, 357–367 (2007).
- [8] Rajagopal, K.R., Srinivasa, A.R.: “*On a class of non-dissipative solids that are not hyperelastic*”. *Proceedings of the Royal Society A* 465, 493–500 (2009).
- [9] Bustamante, R.: “*Some topics on a new class of elastic bodies*”. *Proceedings of the Royal Society A* 465, 1377–1392 (2009).
- [10] Bustamante, R., Rajagopal, K.R.: “*Solutions of some simple boundary value problems within the context of a new class of elastic materials*”. *International Journal of Non-linear Mechanics* 46, 376–386 (2011).
- [11] Bustamante, R., Rajagopal, K.R.: “*On the inhomogeneous shearing of a new class of elastic bodies*”. *Mathematics and Mechanics of Solids* 17, 762–778 (2012).

-
- [12] Rajagopal, K.R.: “*Non-linear elastic bodies exhibiting limiting small strain*”. Mathematics and Mechanics of Solids 16, 122–139 (2011b).
- [13] Rajagopal, K.R., Walton, J.R.: “*Modeling fracture in the context of strain limiting theory of elasticity: a single anti-plane crack*”. International Journal of Fracture 169, 39–48 (2011).
- [14] Ortiz-Bernardin, A., Bustamante, R., Rajagopal, K. R.: “*A numerical study of a plate with a hole for a new class of elastic bodies*”, Acta Mechanica 223, 1971–1981 (2012).
- [15] Bustamante, R., Rajagopal, K. R. (paper en progreso).
- [16] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L.: “*The finite element theory. Volume 2: Solid Mechanics*”.5th edn. Butterworth-Heinemann, Oxford, UK (2000).
- [17] Fish, J., Belytschko, T.: “*A first course in finite element*”. 1st edn. John Wiley and Sons.ltda, UK (2007).
- [18] Timoshenko, S. P., Goodier, J. N.: “*Theory of Elasticity*”. McGraw-Hill.2nd edn. NY (1970).
- [19] Green, A. E., Zerna, W.: “*Theoretical Elasticity*”. 2nd edn. Dover Publications, Inc., New York (1968).
- [20] Kachanov, M., Shafiro, B., Tsukrov, I.: “*Handbook of Elasticity Solutions*”.13th edn. Springer Science, Berlin (2003).
- [21] International Center For Numerical Methods In Engineering (CIMNE): “*Gid pre and post-processor user Manual*”. Edn 12th (2010).
- [22] Bustamante, R., Rajagopal, K. R.: “*A note on some new classes of constitutive relations for elastic bodies*”, Journal of Applied Mathematics (2014). (aceptada)

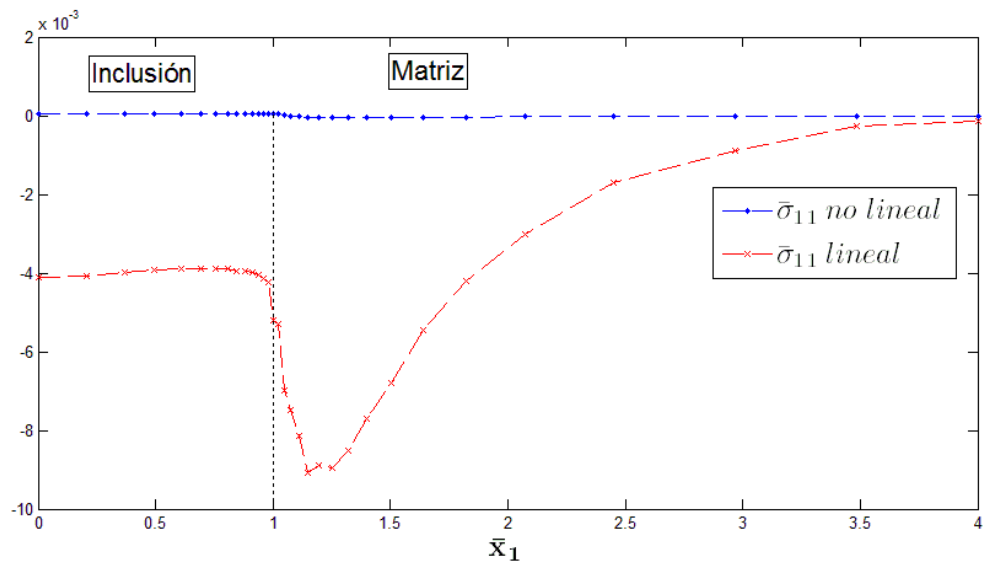
Anexo A

Resultados adicionales para el problema de inclusión esférica

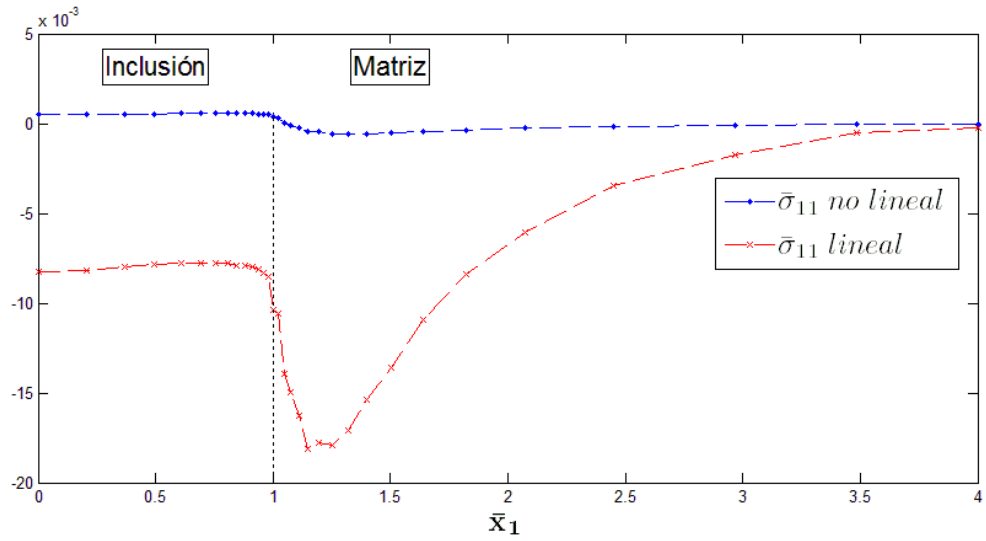
En la siguiente sección se muestra la evolución de las componentes de esfuerzo y deformación para el problema de la inclusión esférica.

A.1 Evolución de las componentes del esfuerzo y la deformación en \bar{x}_1

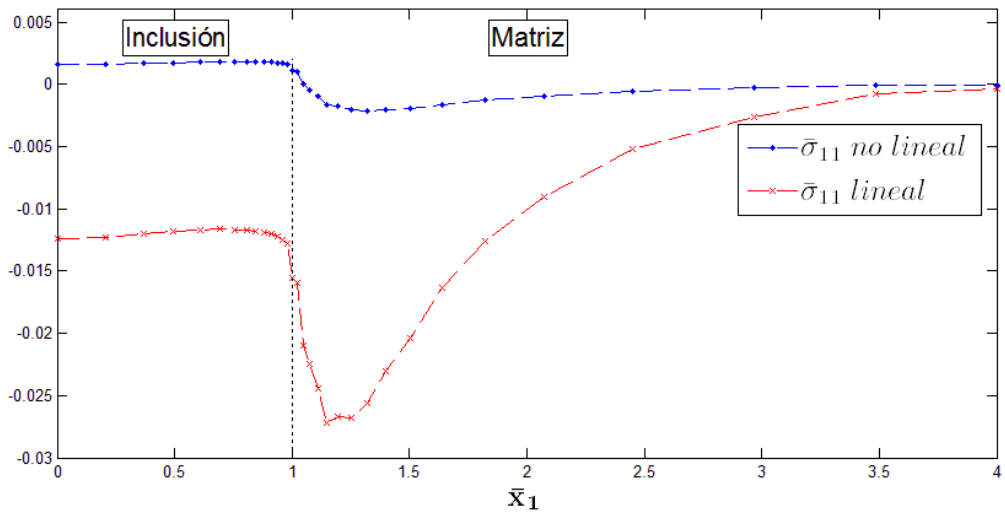
Evolución del esfuerzo $\bar{\sigma}_{11}$ y la deformación ε_{11} en la línea $x_2 = x_3 = 0, 0 < x_1 < 4R$ para diferentes cargas externas. La inclusión y la matriz están separadas por una línea vertical segmentada.



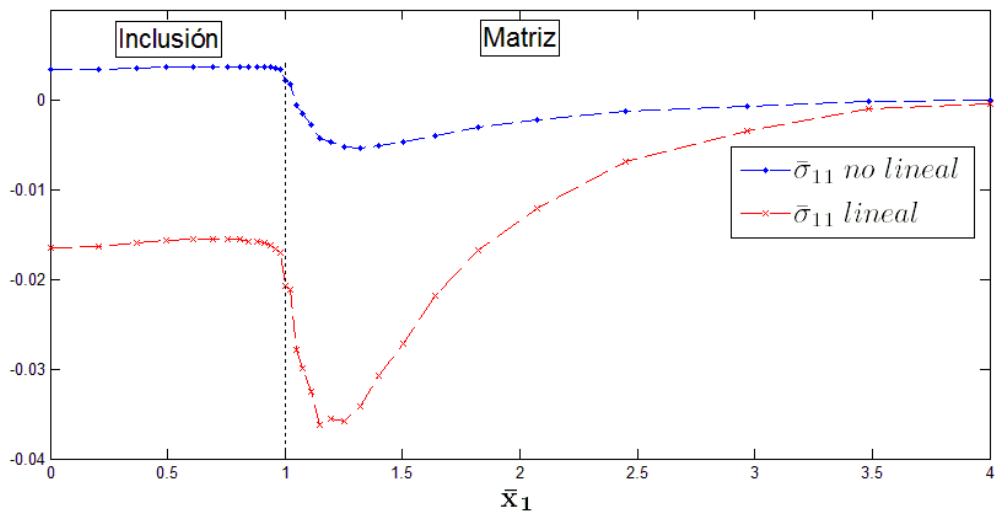
a) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{11}$ para $\sigma_\infty = 1.5 \cdot 10^6$ [Pa].



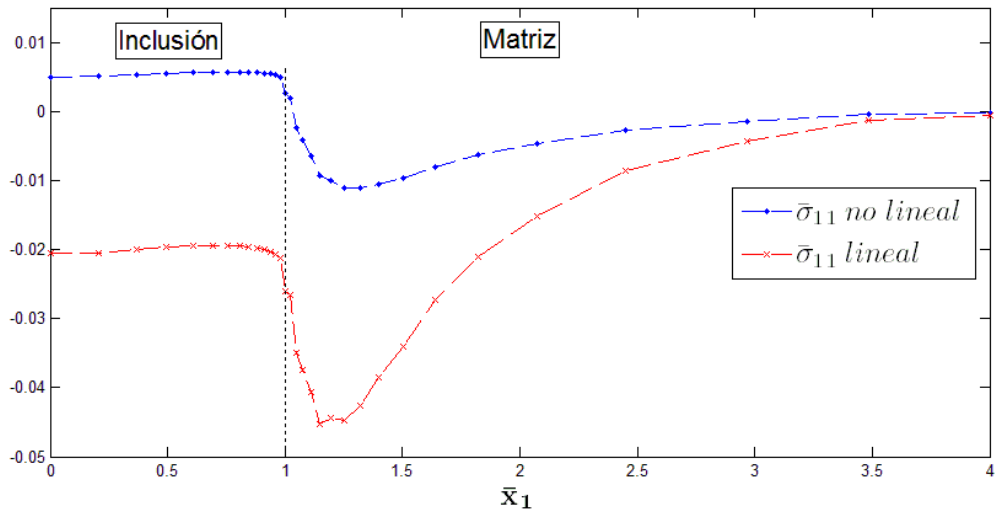
b) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{11}$ para $\sigma_{\infty} = 3 \cdot 10^6$ [Pa].



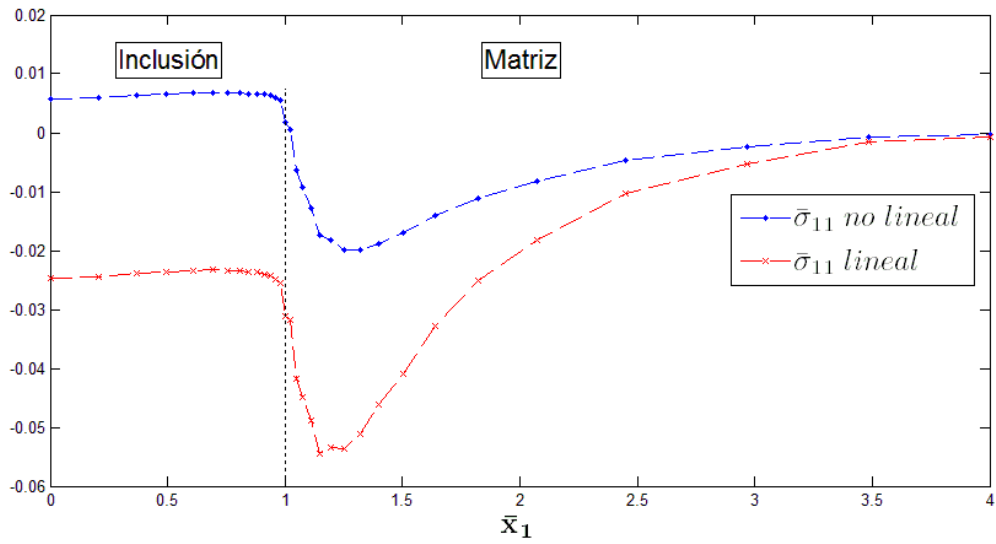
c) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{11}$ para $\sigma_{\infty} = 4.5 \cdot 10^6$ [Pa].



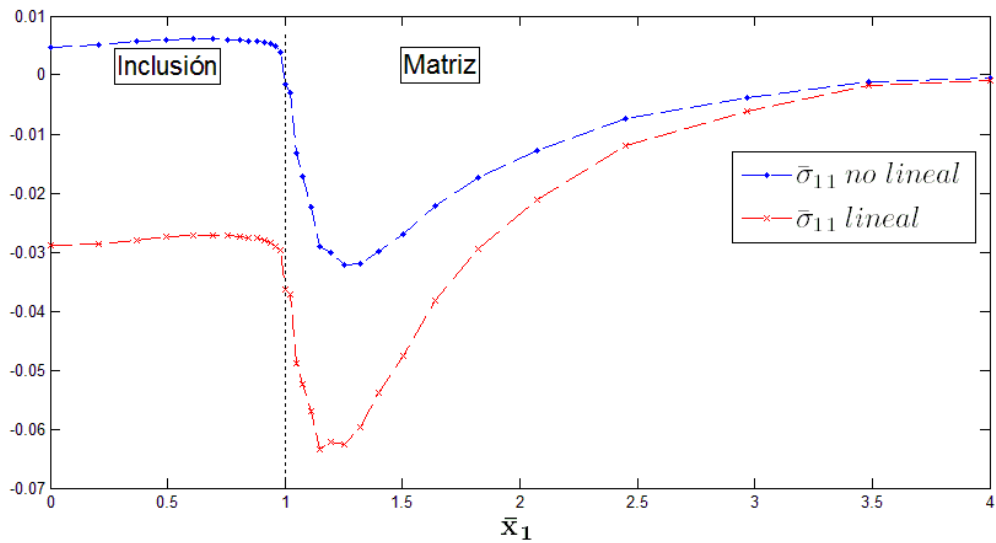
d) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{11}$ para $\sigma_{\infty} = 6 \cdot 10^6$ [Pa].



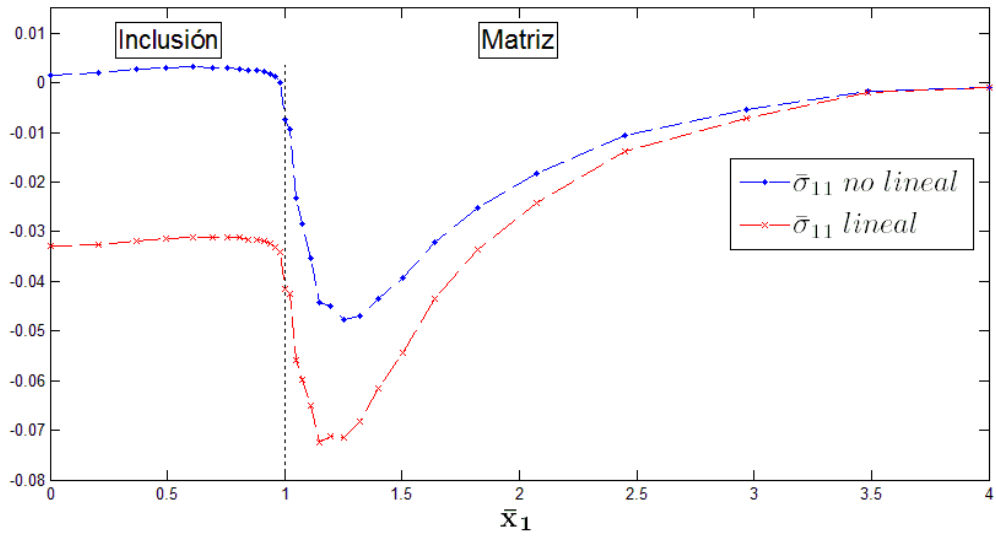
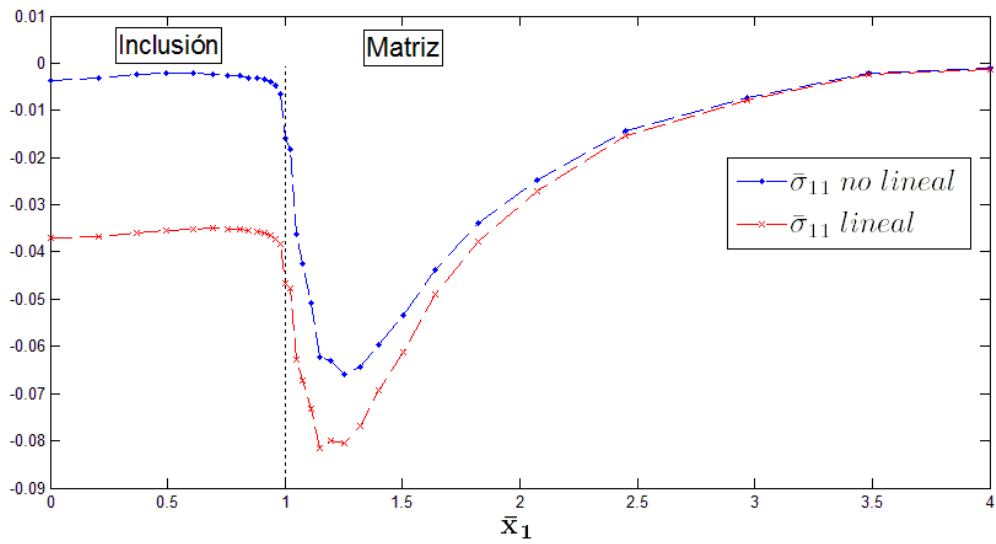
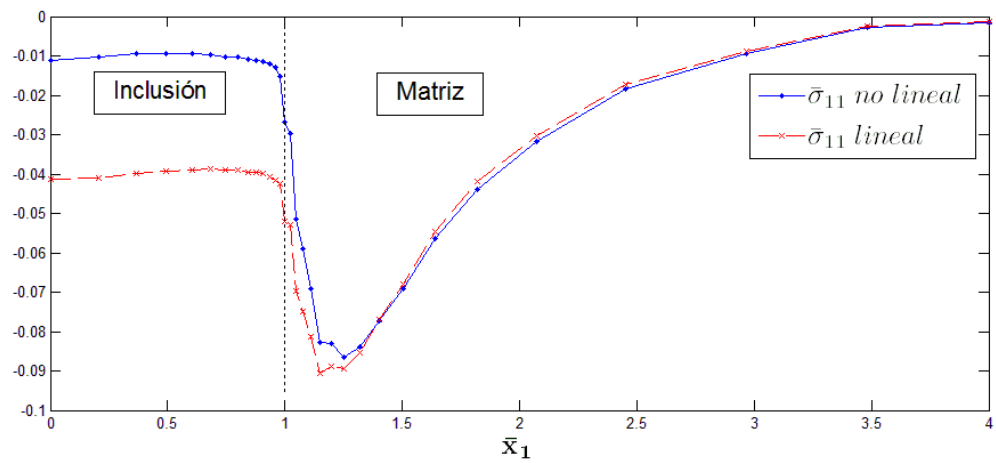
e) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{11}$ para $\sigma_{\infty} = 7.5 \cdot 10^6$ [Pa].

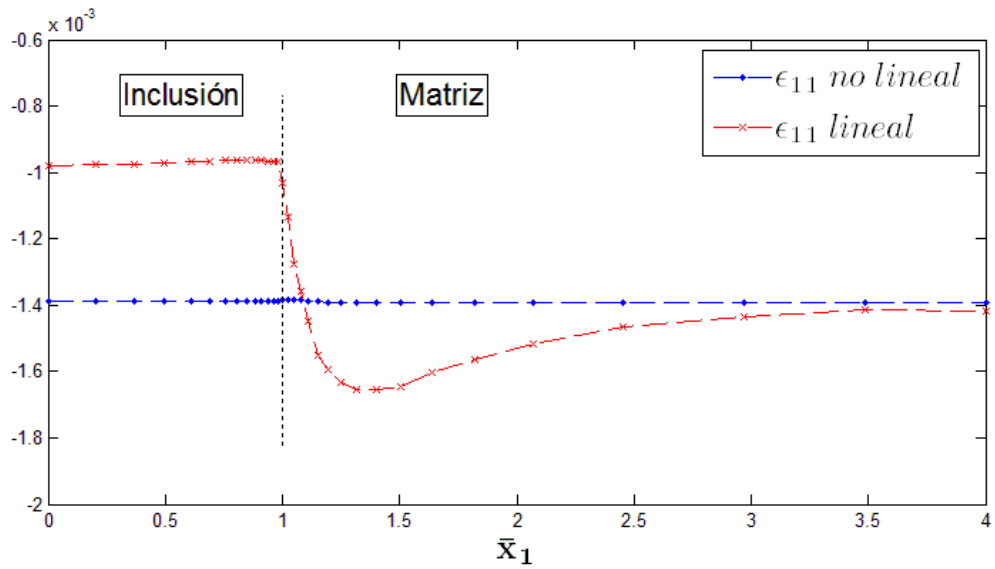


f) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{11}$ para $\sigma_{\infty} = 9 \cdot 10^6$ [Pa].

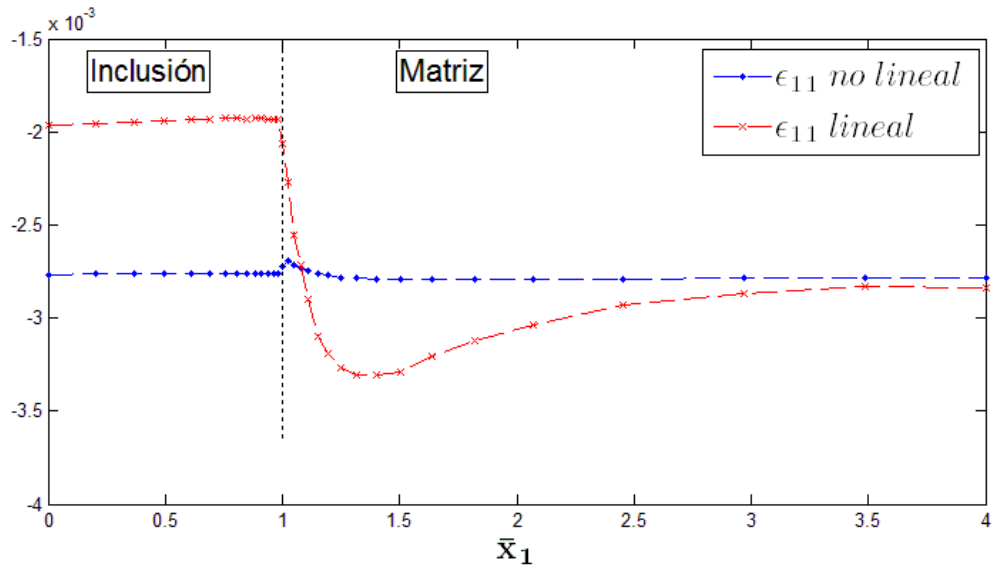


g) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{11}$ para $\sigma_{\infty} = 10.5 \cdot 10^6$ [Pa].

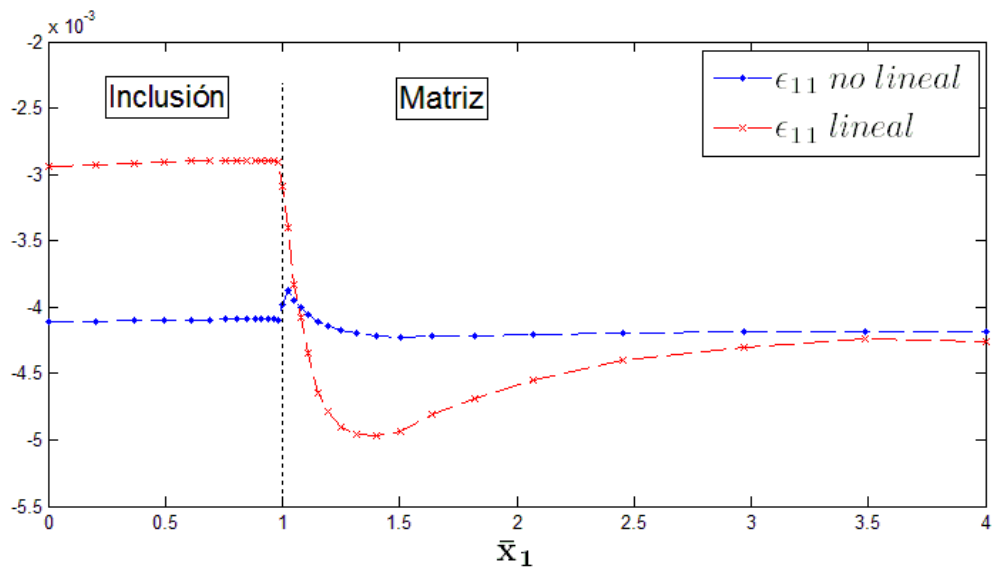
h) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{11}$ para $\sigma_{\infty} = 12 \cdot 10^6$ [Pa].i) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{11}$ para $\sigma_{\infty} = 13.5 \cdot 10^6$ [Pa].j) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{11}$ para $\sigma_{\infty} = 15 \cdot 10^6$ [Pa].Figura A.1: Evolución del esfuerzo $\bar{\sigma}_{11}$ en la línea $x_2 = x_3 = 0, 0 < x_1 < 4R$ para diferentes cargas externas.



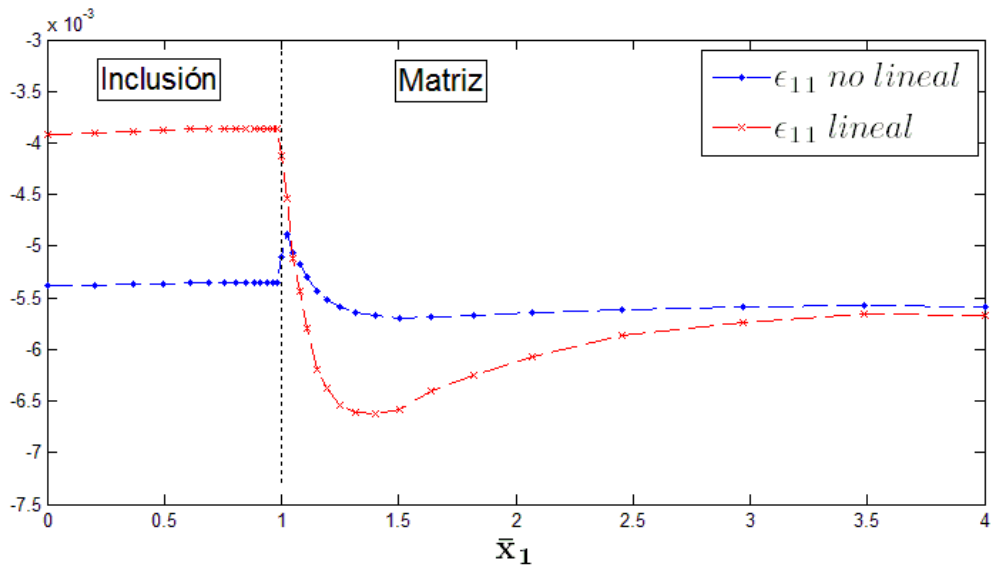
a) Deformación ϵ_{11} para $\sigma_{\infty} = 1.5 \cdot 10^6$ [Pa].



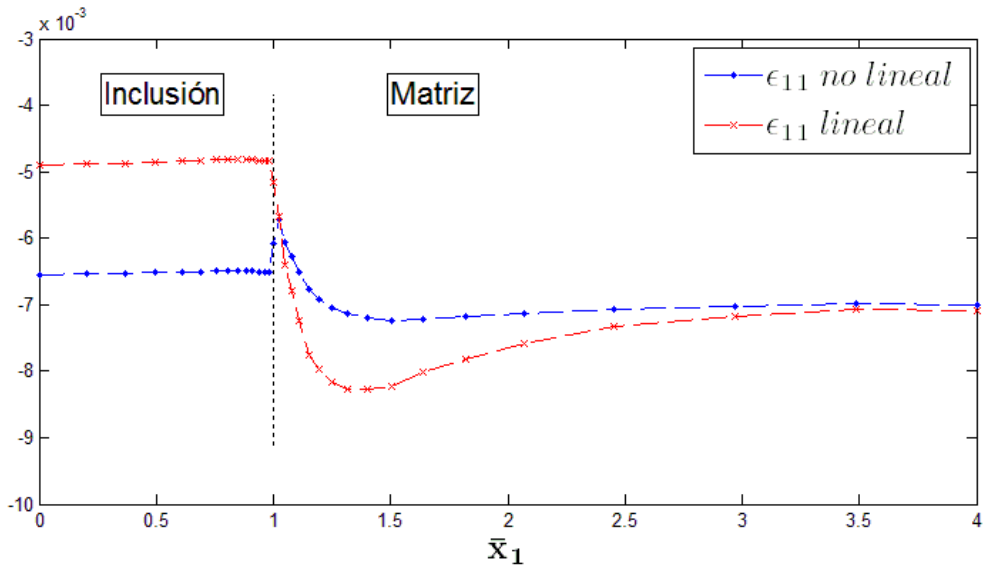
b) Deformación ϵ_{11} para $\sigma_{\infty} = 3 \cdot 10^6$ [Pa].



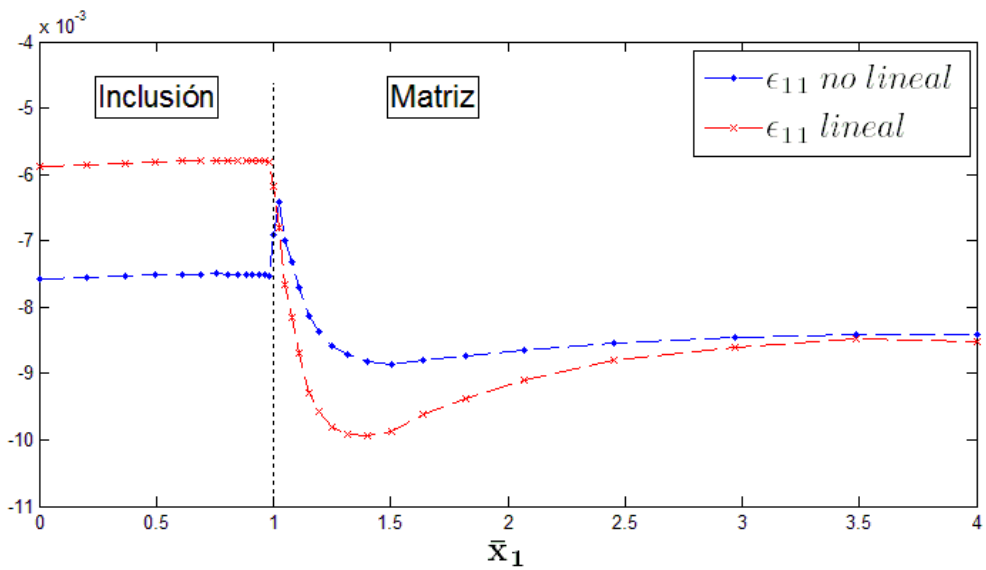
c) Deformación ϵ_{11} para $\sigma_{\infty} = 4.5 \cdot 10^6$ [Pa].



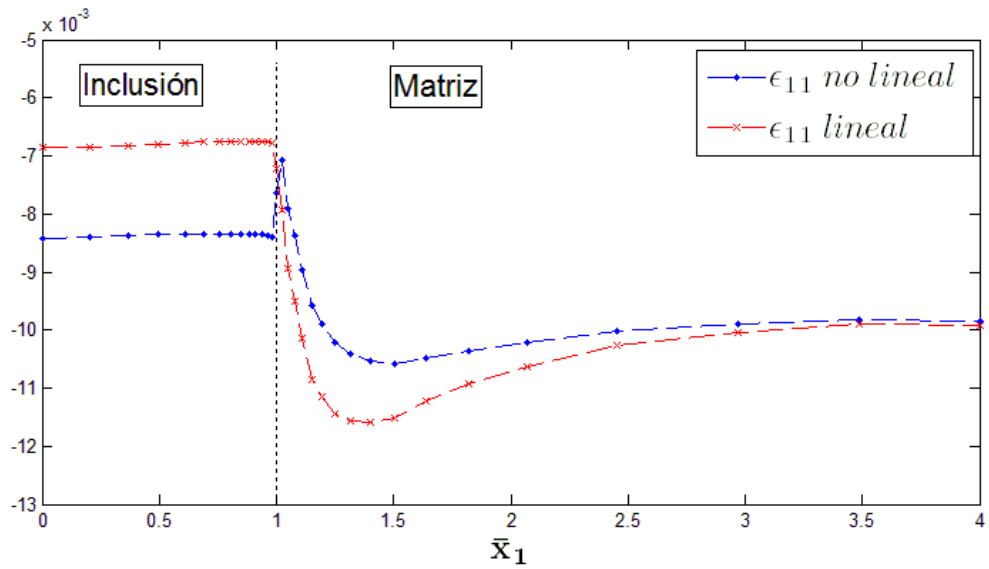
d) Deformación ϵ_{11} para $\sigma_{\infty} = 6 \cdot 10^6$ [Pa].



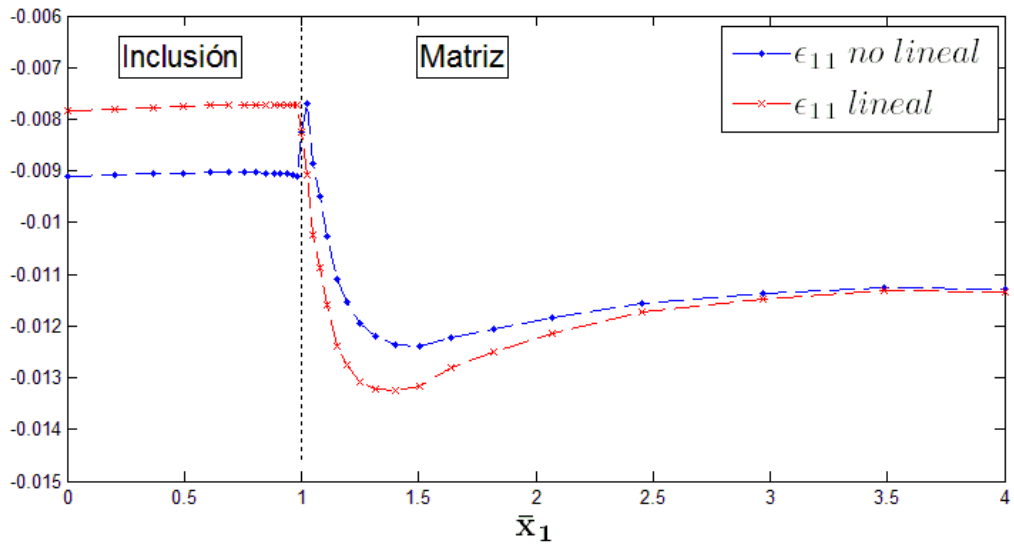
e) Deformación ϵ_{11} para $\sigma_{\infty} = 7.5 \cdot 10^6$ [Pa].



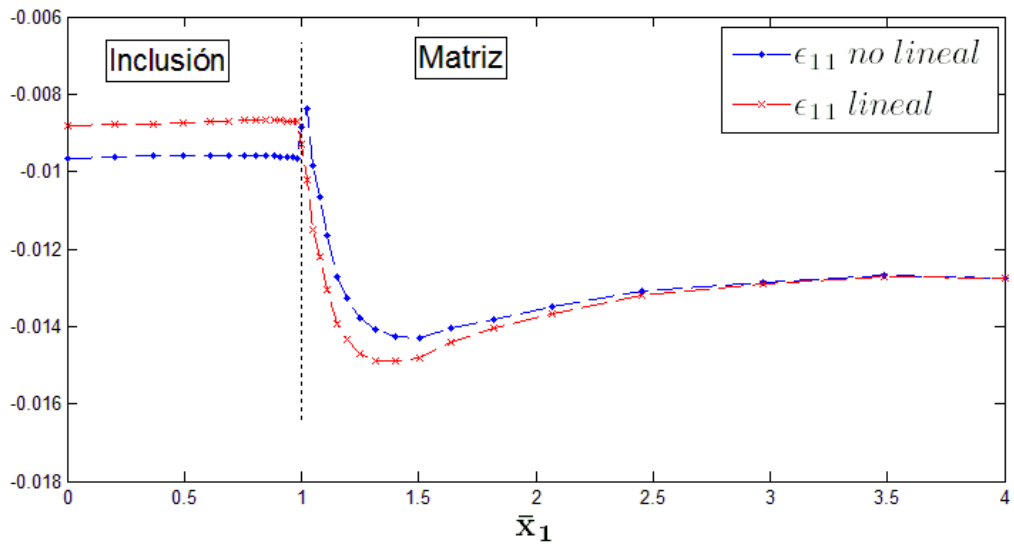
f) Deformación ϵ_{11} para $\sigma_{\infty} = 9 \cdot 10^6$ [Pa].



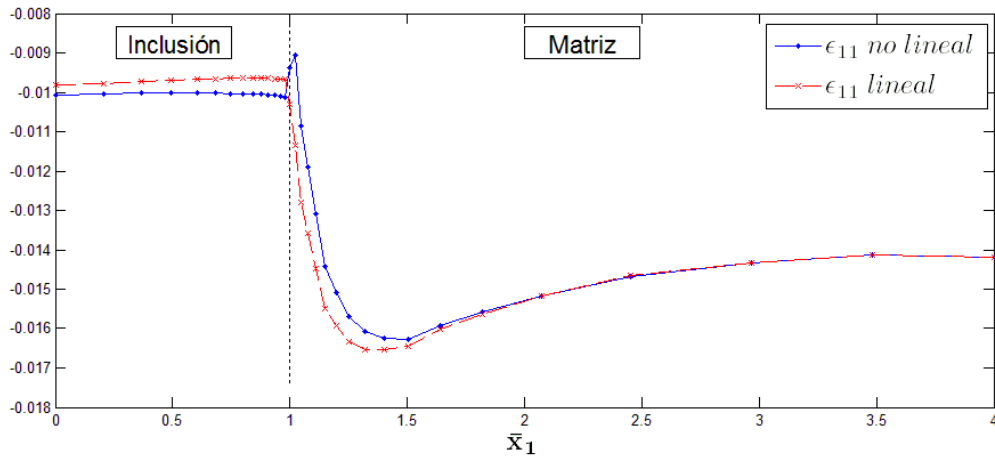
g) Deformación ϵ_{11} para $\sigma_{\infty} = 10.5 \cdot 10^6$ [Pa].



h) Deformación ϵ_{11} para $\sigma_{\infty} = 12 \cdot 10^6$ [Pa].



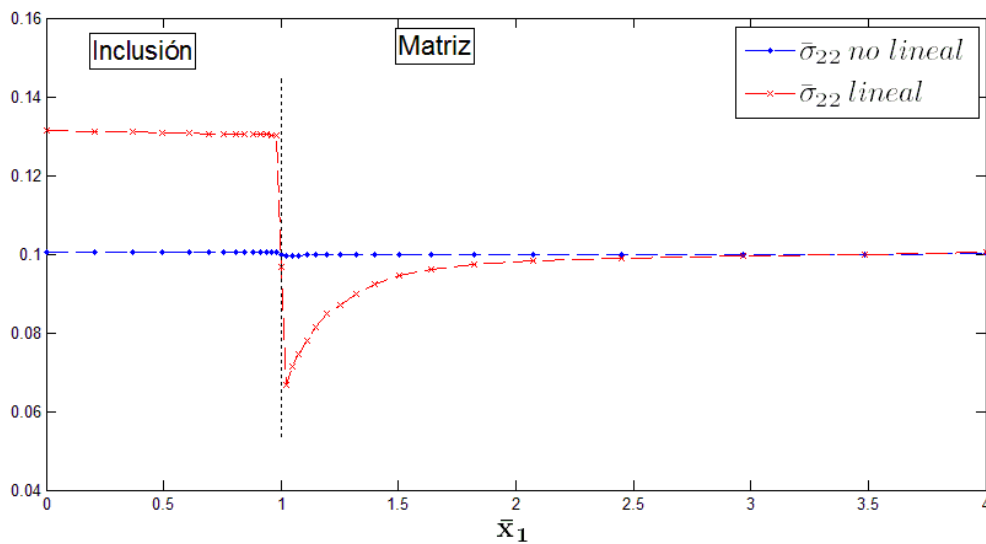
i) Deformación ϵ_{11} para $\sigma_{\infty} = 13.5 \cdot 10^6$ [Pa].



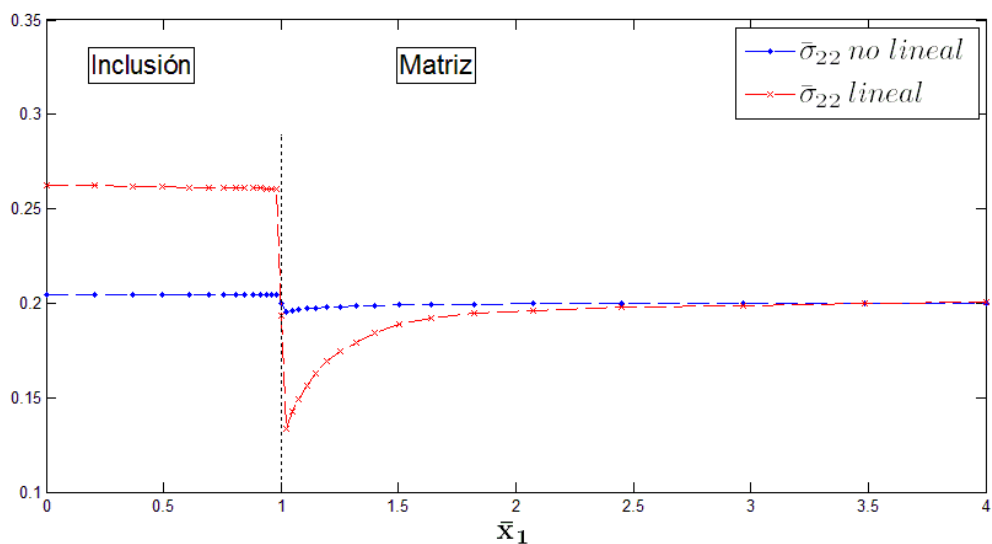
j) Deformación ϵ_{11} para $\sigma_{\infty} = 15 \cdot 10^6$ [Pa].

Figura A.2: Evolución de la deformación ϵ_{11} en la línea $x_2 = x_3 = 0, 0 < x_1 < 4R$ para diferentes cargas externas.

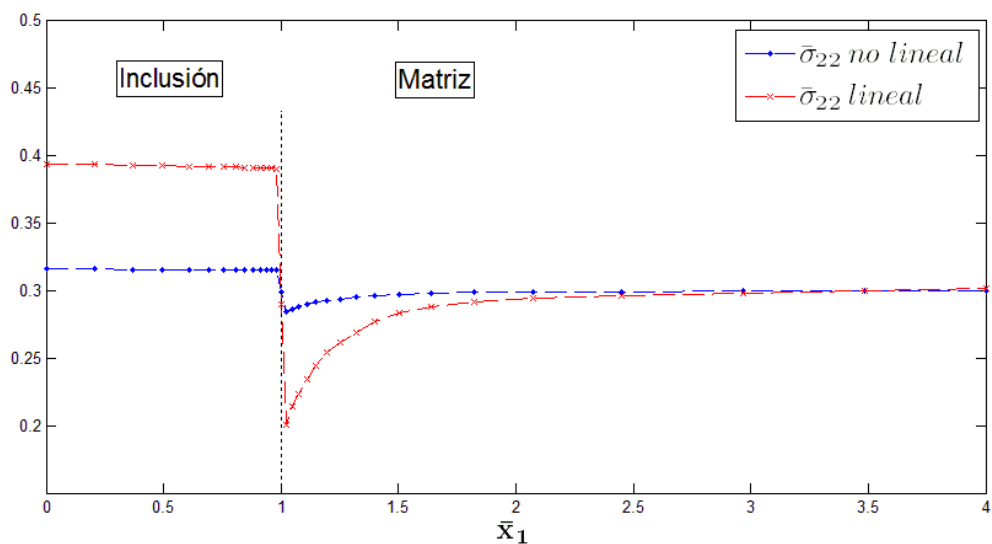
Evolución del esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ y la deformación ϵ_{22} en la línea $x_2 = x_3 = 0, 0 < x_1 < 4R$ para diferentes cargas externas. La inclusión y la matriz están separadas por una línea vertical segmentada.



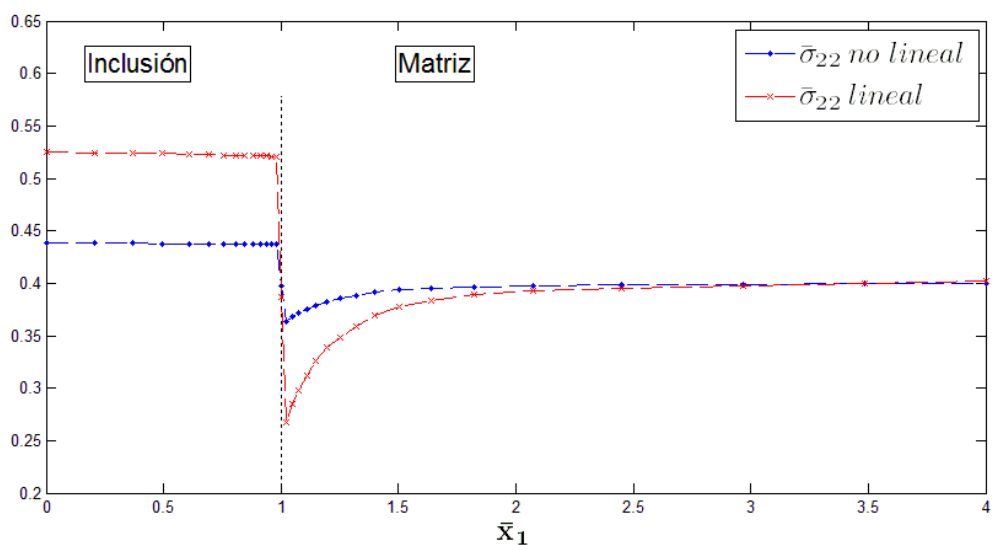
a) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ para $\sigma_{\infty} = 1.5 \cdot 10^6$ [Pa].



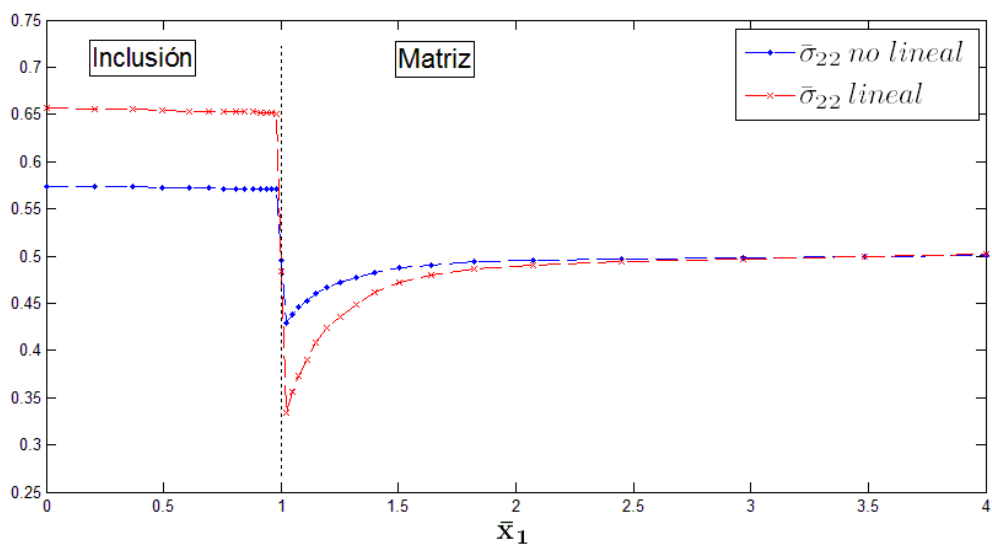
b) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ para $\sigma_{\infty} = 3 \cdot 10^6$ [Pa].



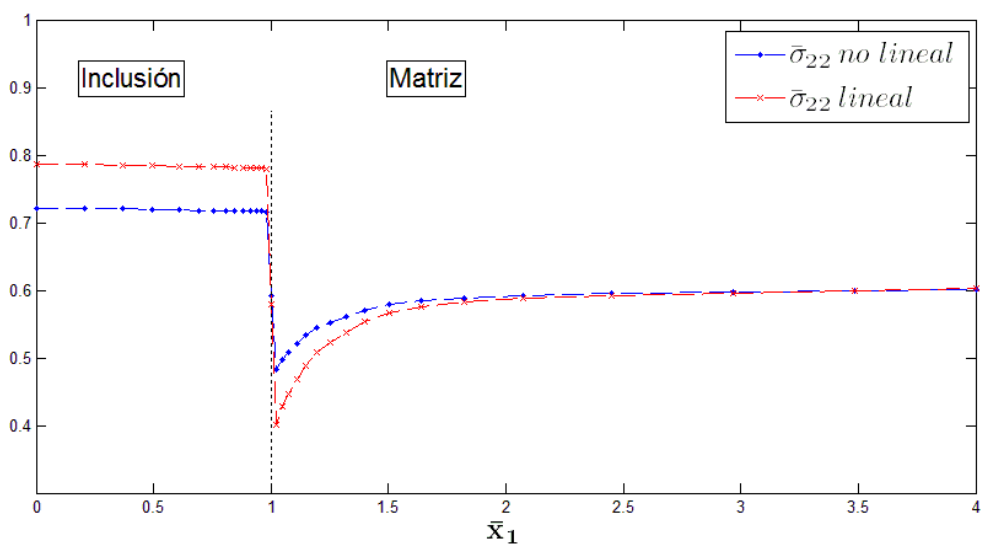
c) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ para $\sigma_{\infty} = 4.5 \cdot 10^6$ [Pa].



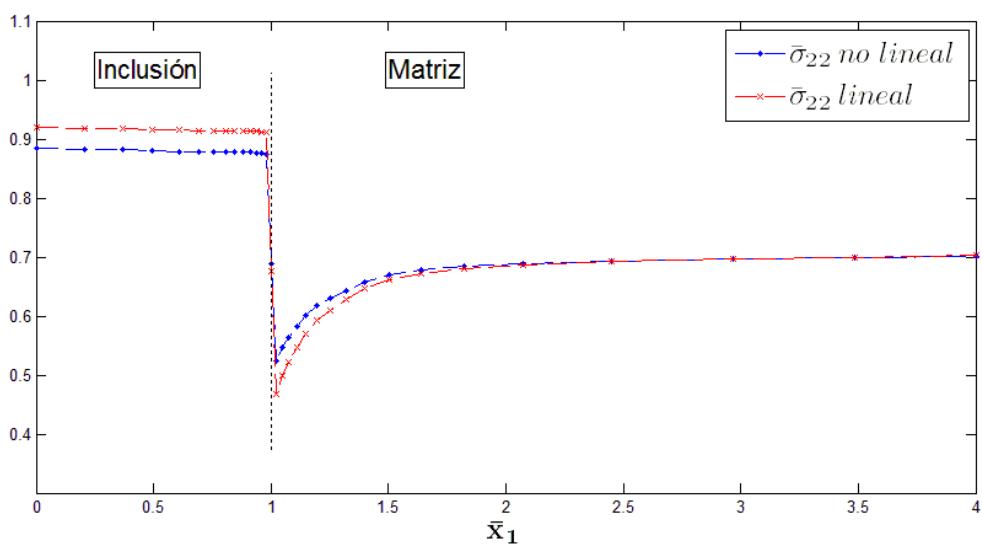
d) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ para $\sigma_{\infty} = 6 \cdot 10^6$ [Pa].



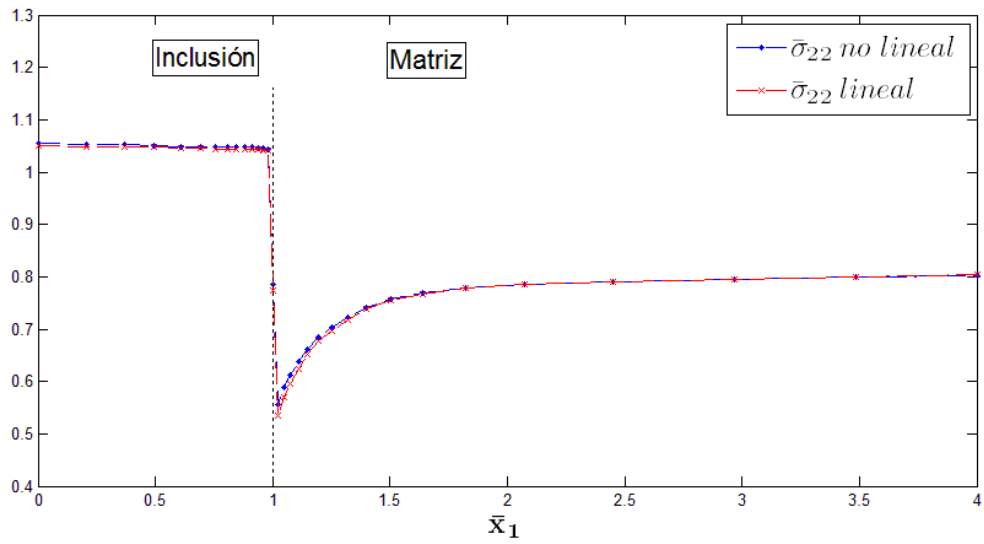
e) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ para $\sigma_{\infty} = 7.5 \cdot 10^6$ [Pa].



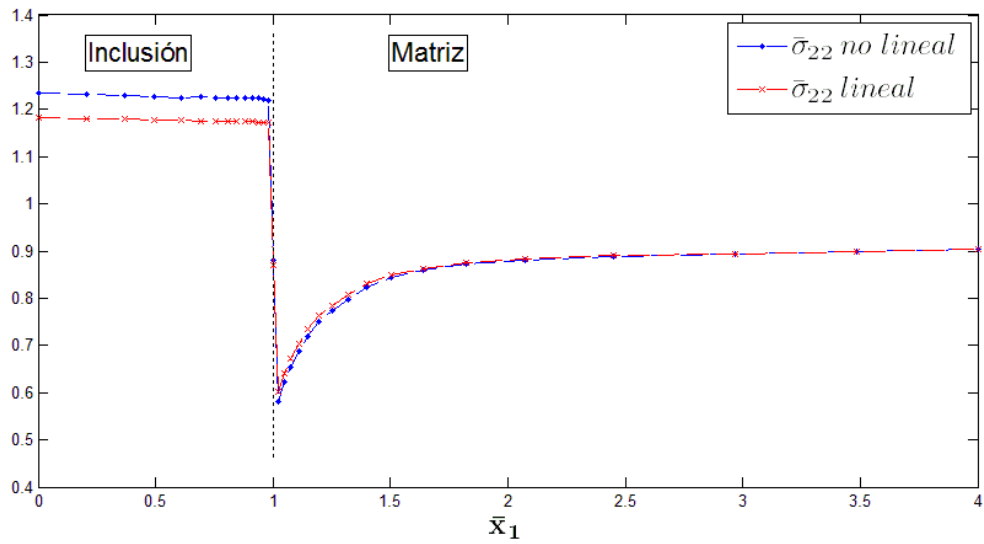
f) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ para $\sigma_{\infty} = 9 \cdot 10^6$ [Pa].



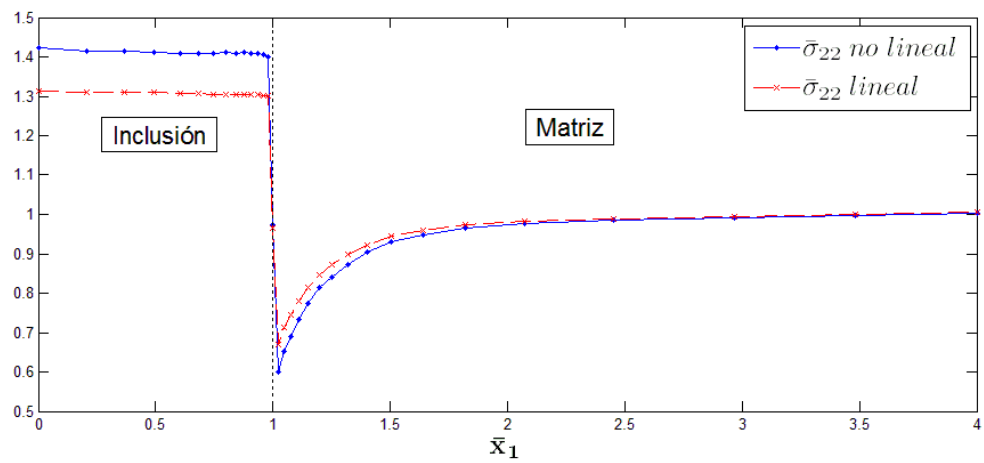
g) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ para $\sigma_{\infty} = 10.5 \cdot 10^6$ [Pa].



h) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ para $\sigma_{\infty} = 12 \cdot 10^6$ [Pa].

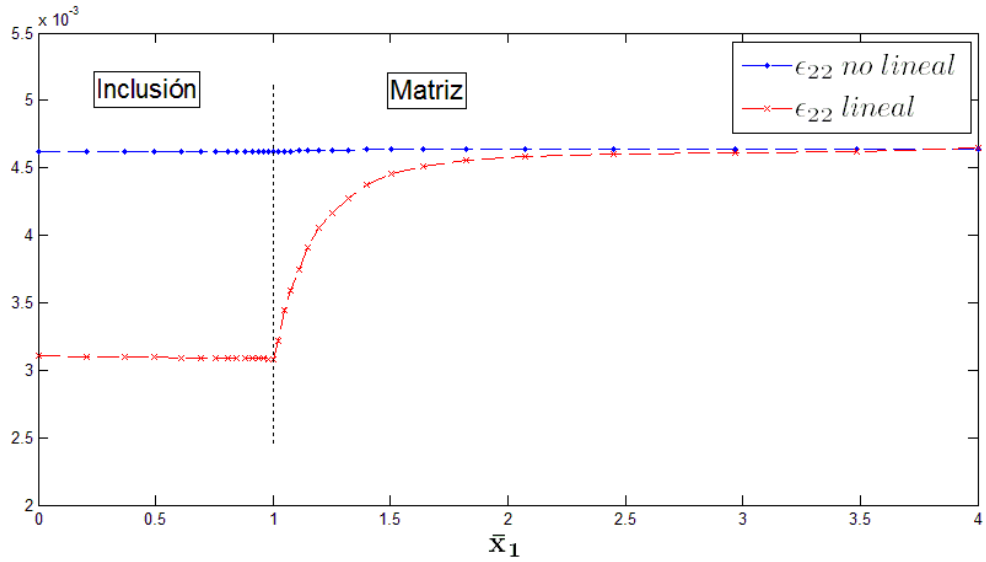


i) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ para $\sigma_{\infty} = 13.5 \cdot 10^6$ [Pa].

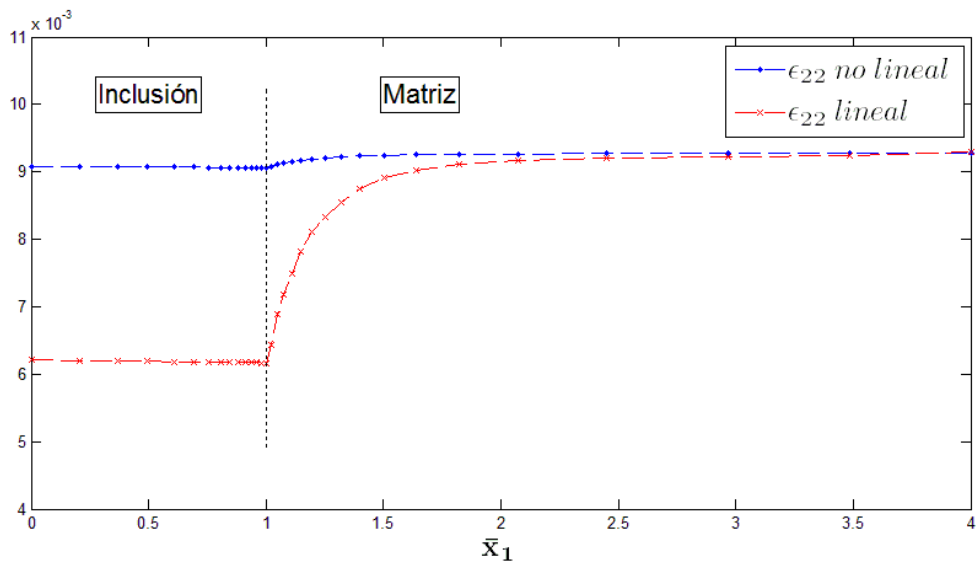


j) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ para $\sigma_{\infty} = 15 \cdot 10^6$ [Pa].

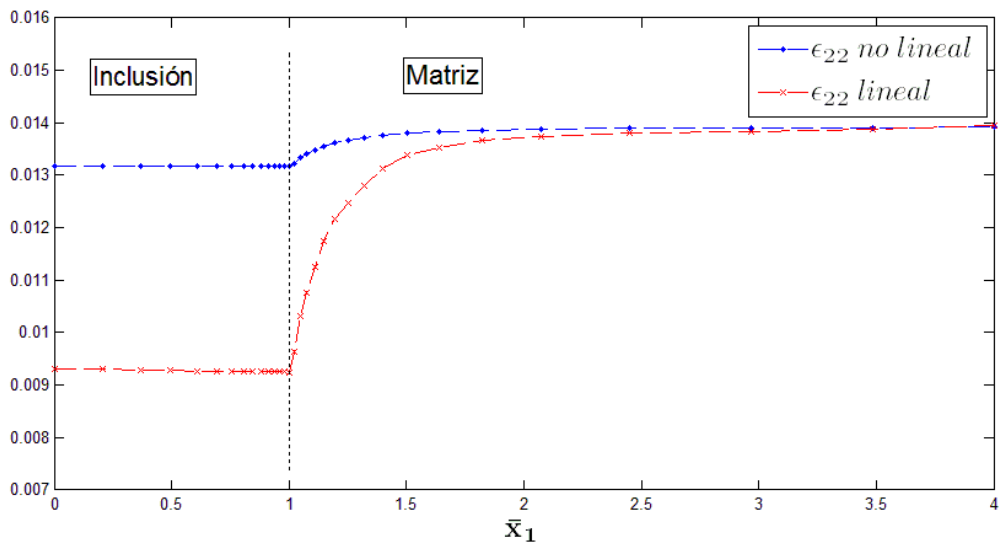
Figura A.3: Evolución del esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ en la línea $x_2 = x_3 = 0, 0 < x_1 < 4R$ para diferentes cargas externas.



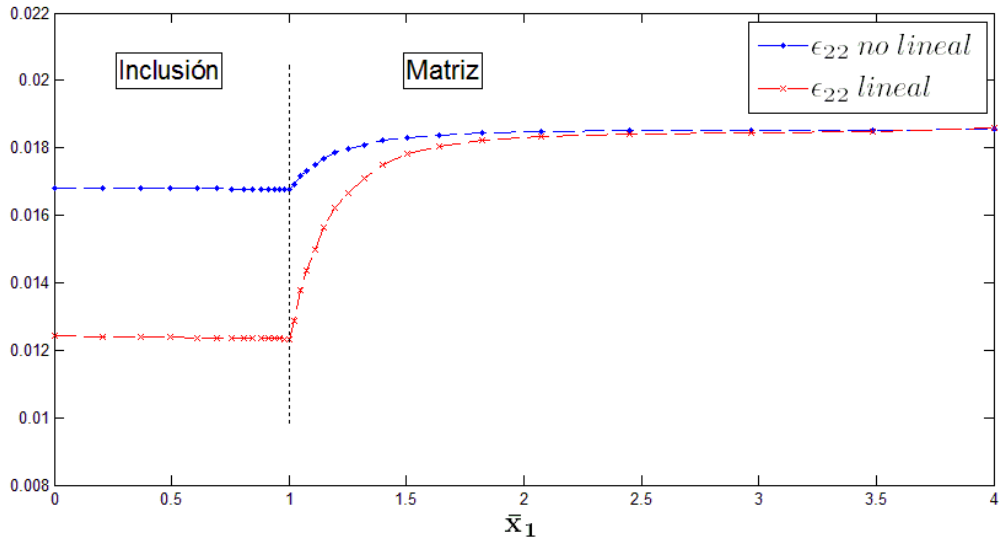
a) Deformación ϵ_{22} para $\sigma_{\infty} = 1.5 \cdot 10^6$ [Pa].



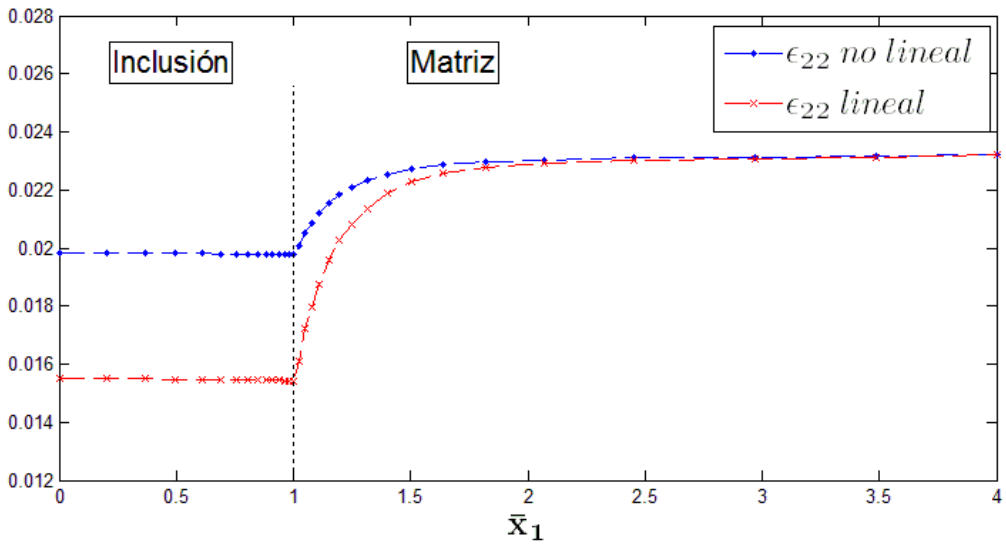
b) Deformación ϵ_{22} para $\sigma_{\infty} = 3 \cdot 10^6$ [Pa].



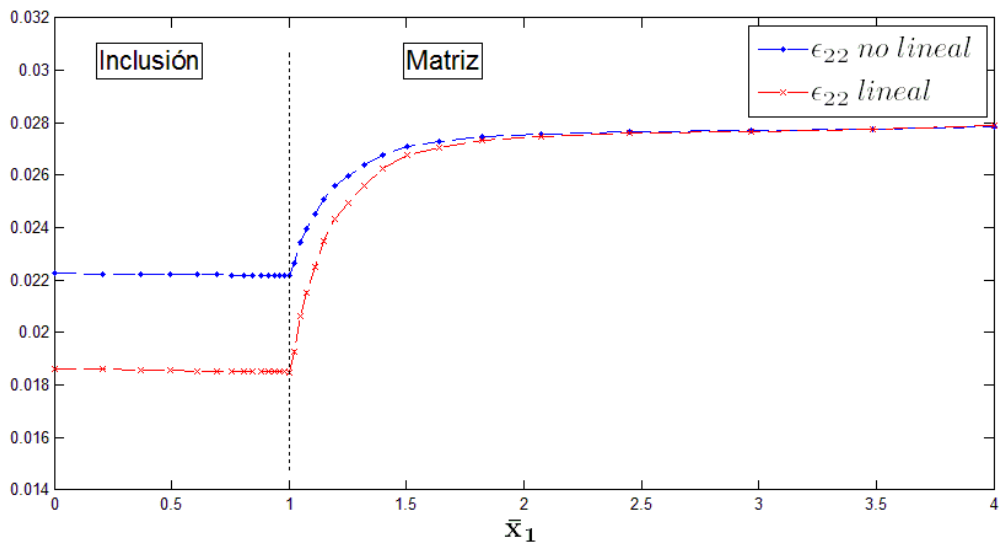
c) Deformación ϵ_{22} para $\sigma_{\infty} = 4.5 \cdot 10^6$ [Pa].



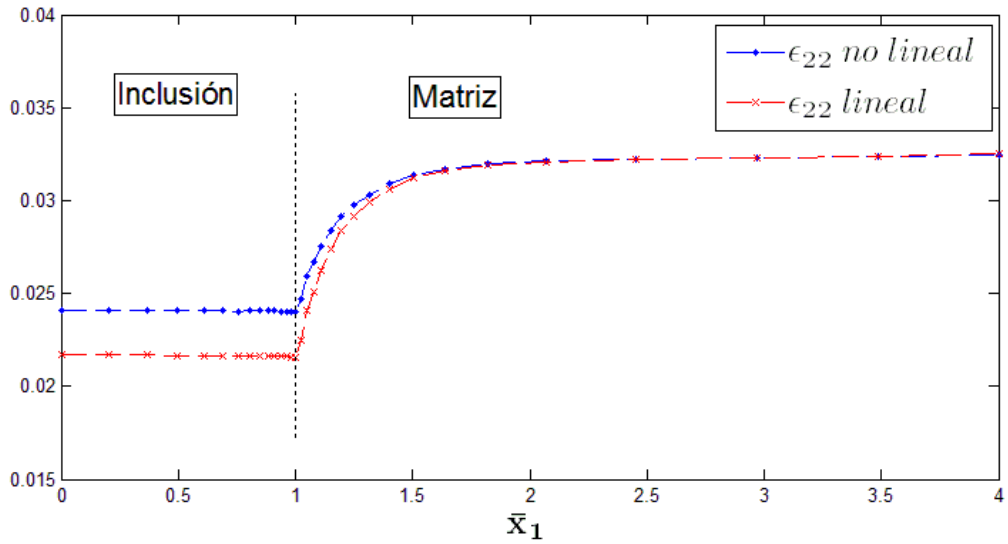
d) Deformación ϵ_{22} para $\sigma_{\infty} = 6 \cdot 10^6$ [Pa].



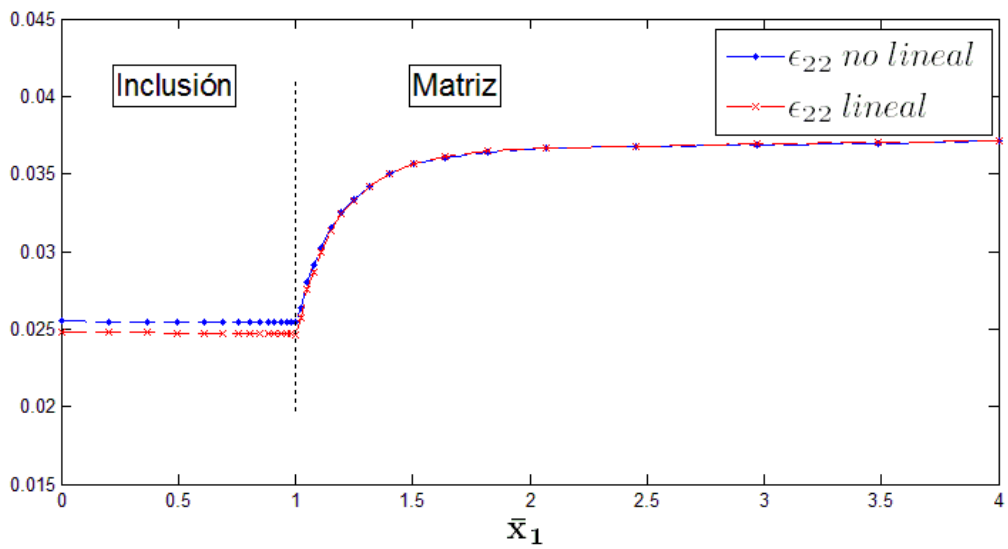
e) Deformación ϵ_{22} para $\sigma_{\infty} = 7.5 \cdot 10^6$ [Pa].



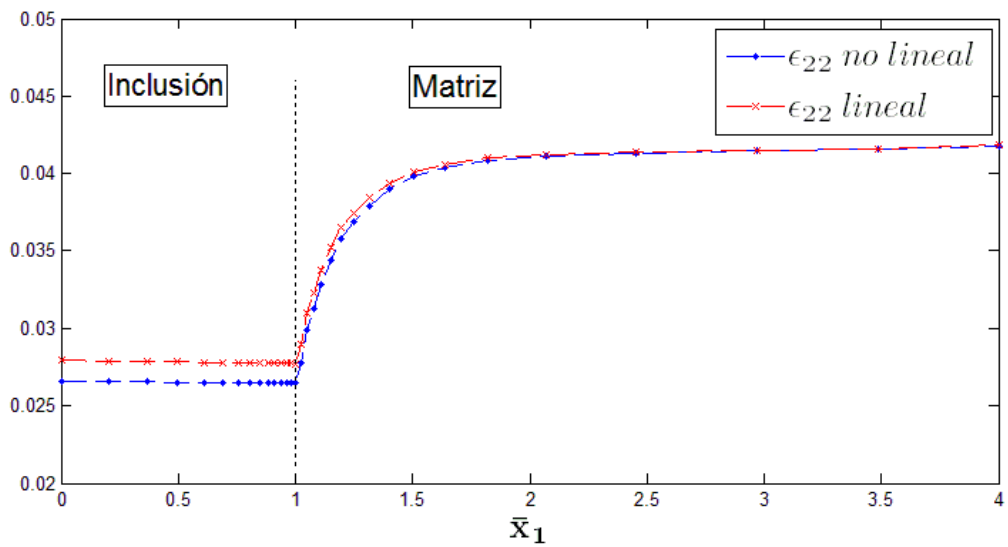
f) Deformación ϵ_{22} para $\sigma_{\infty} = 9 \cdot 10^6$ [Pa].



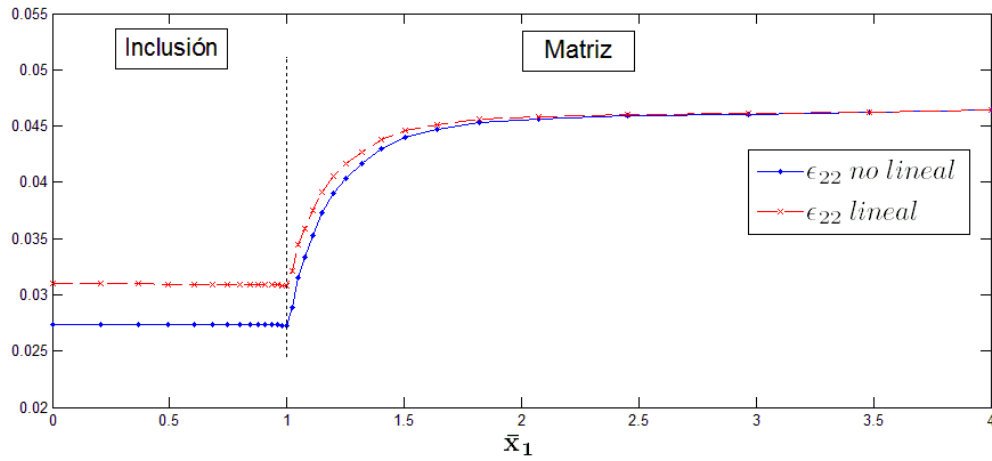
g) Deformación ϵ_{22} para $\sigma_{\infty} = 10.5 \cdot 10^6$ [Pa].



h) Deformación ϵ_{22} para $\sigma_{\infty} = 12 \cdot 10^6$ [Pa].



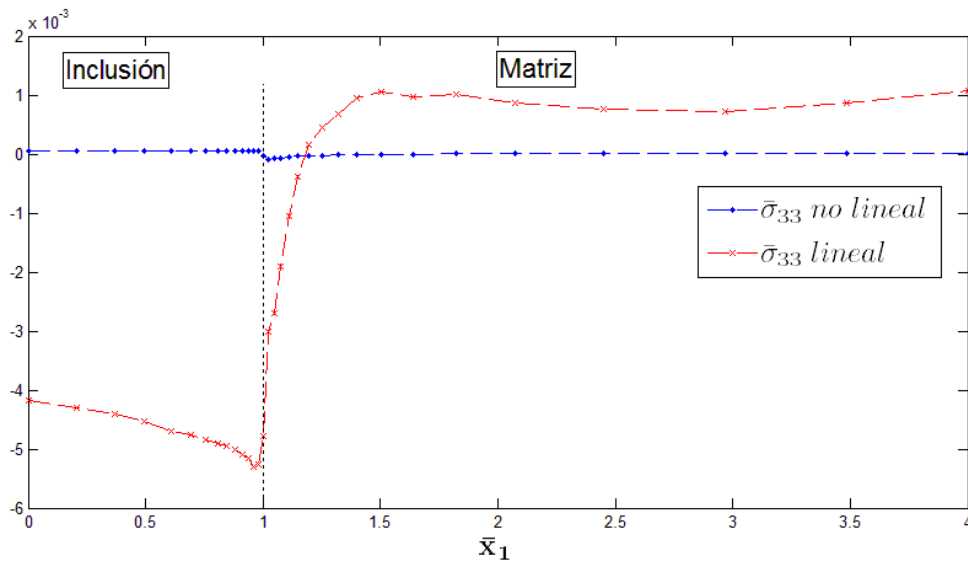
i) Deformación ϵ_{22} para $\sigma_{\infty} = 13.5 \cdot 10^6$ [Pa].



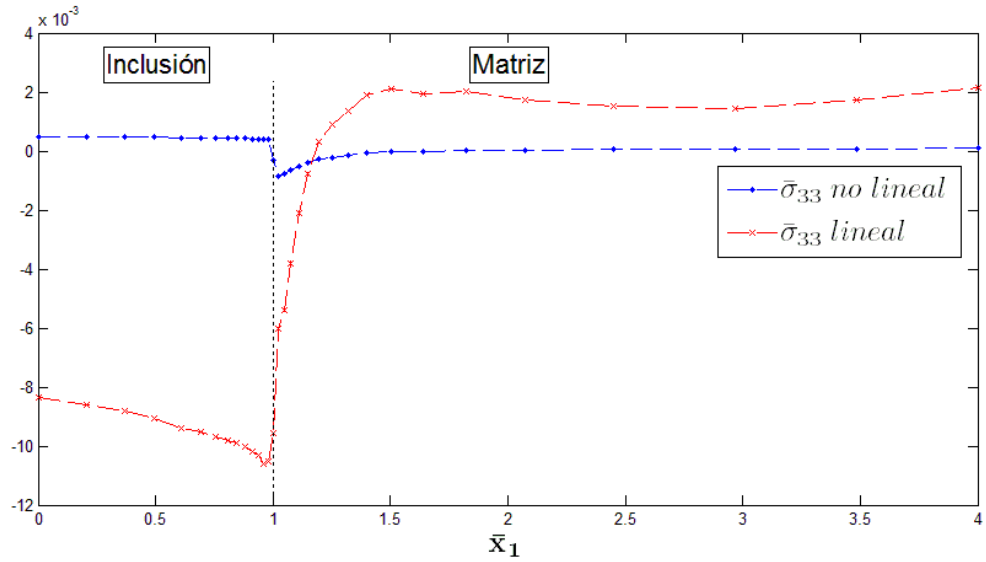
j) Deformación ϵ_{22} para $\sigma_{\infty} = 15 \cdot 10^6$ [Pa].

Figura A.4: Evolución de la deformación ϵ_{22} en la línea $x_2 = x_3 = 0, 0 < x_1 < 4R$ para diferentes cargas externas.

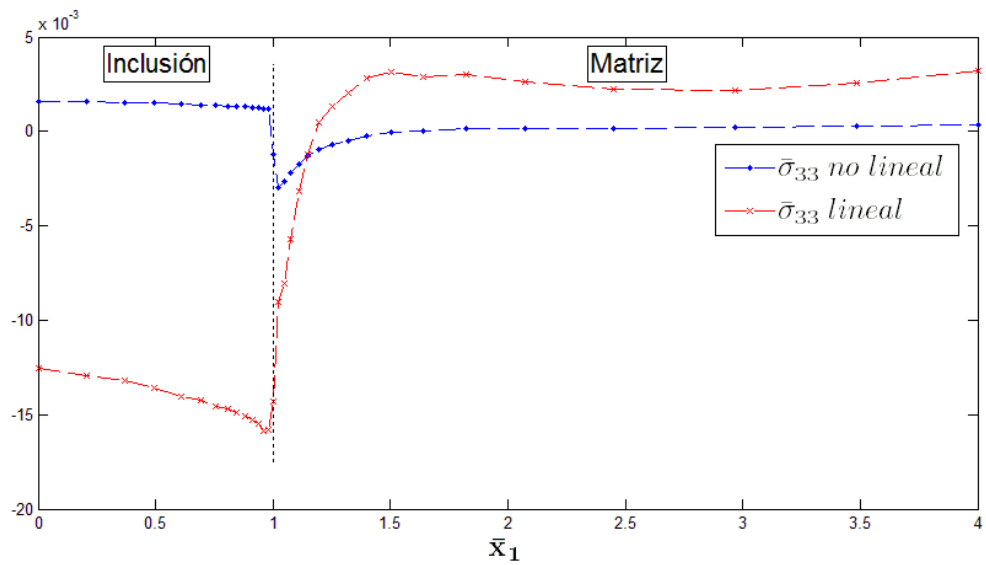
Evolución del esfuerzo $\bar{\sigma}_{33}$ y la deformación ϵ_{33} en la línea $x_2 = x_3 = 0, 0 < x_1 < 4R$ para diferentes cargas externas. La inclusión y la matriz están separadas por una línea vertical segmentada.



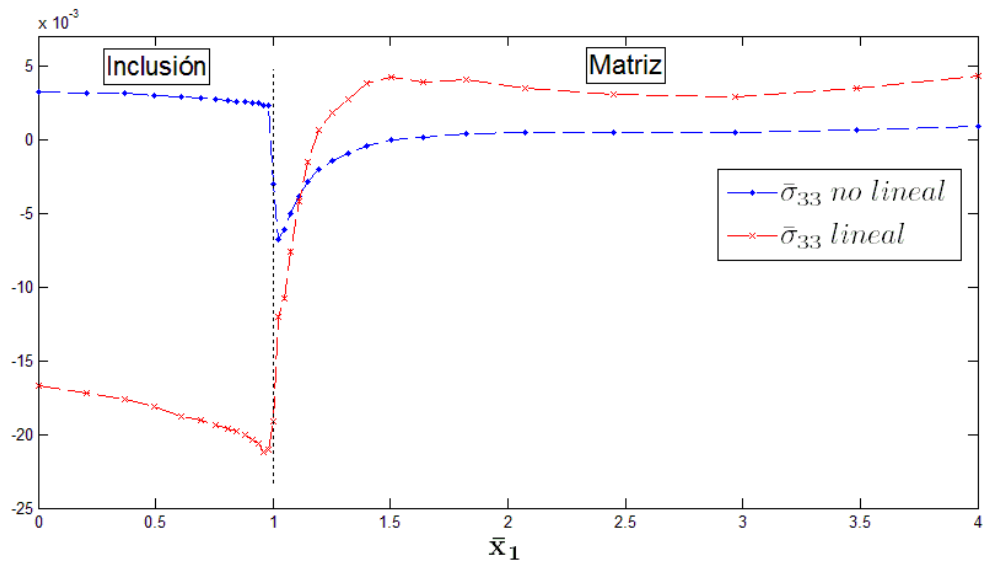
a) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{33}$ para $\sigma_{\infty} = 1.5 \cdot 10^6$ [Pa].



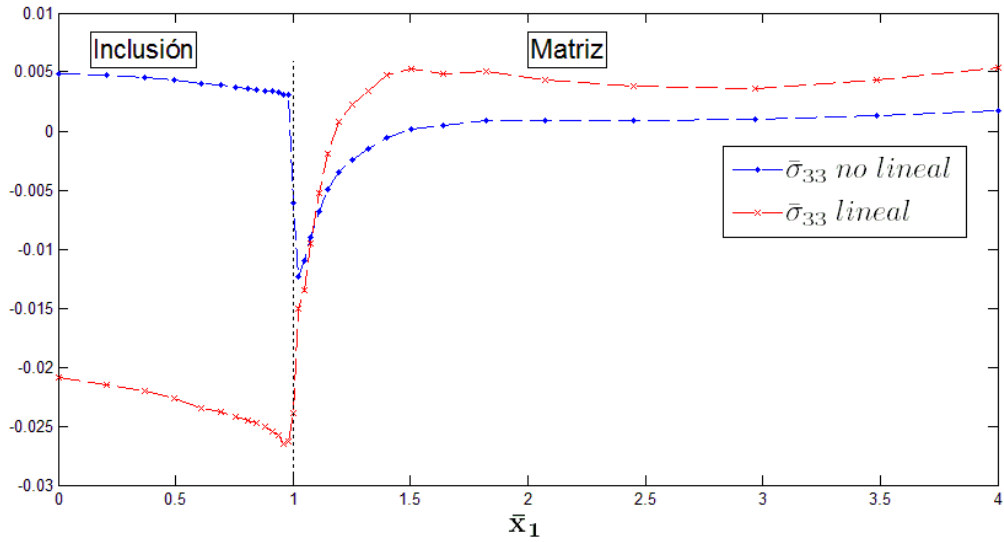
b) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{33}$ para $\sigma_\infty = 3 \cdot 10^6$ [Pa].



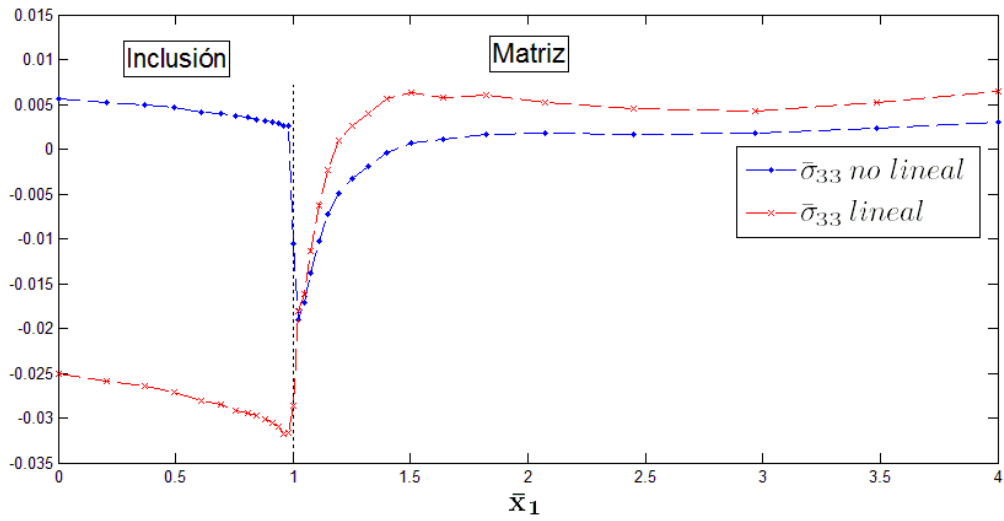
c) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{33}$ para $\sigma_\infty = 4.5 \cdot 10^6$ [Pa].



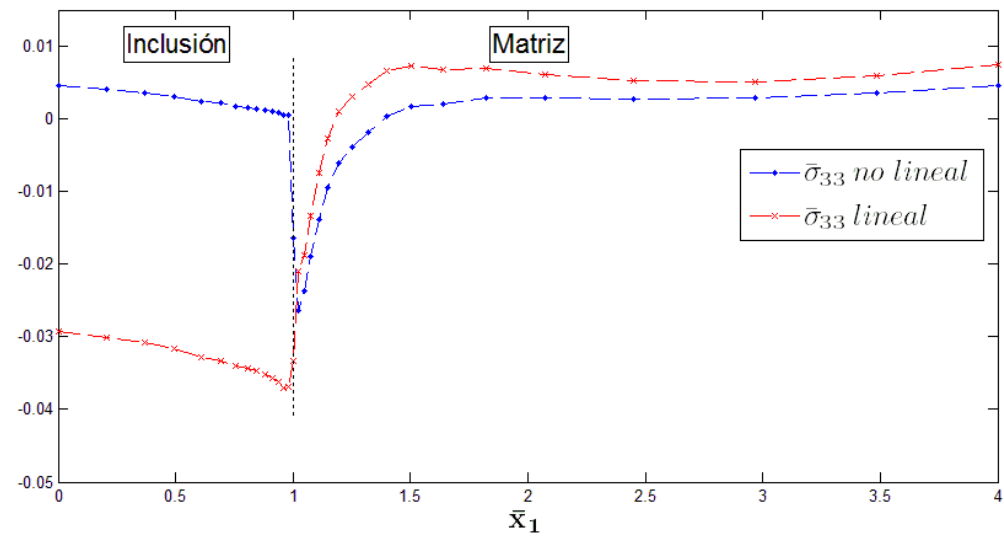
d) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{33}$ para $\sigma_\infty = 6 \cdot 10^6$ [Pa].



e) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{33}$ para $\sigma_{\infty} = 7.5 \cdot 10^6$ [Pa].



f) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{33}$ para $\sigma_{\infty} = 9 \cdot 10^6$ [Pa].



g) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{33}$ para $\sigma_{\infty} = 10.5 \cdot 10^6$ [Pa].

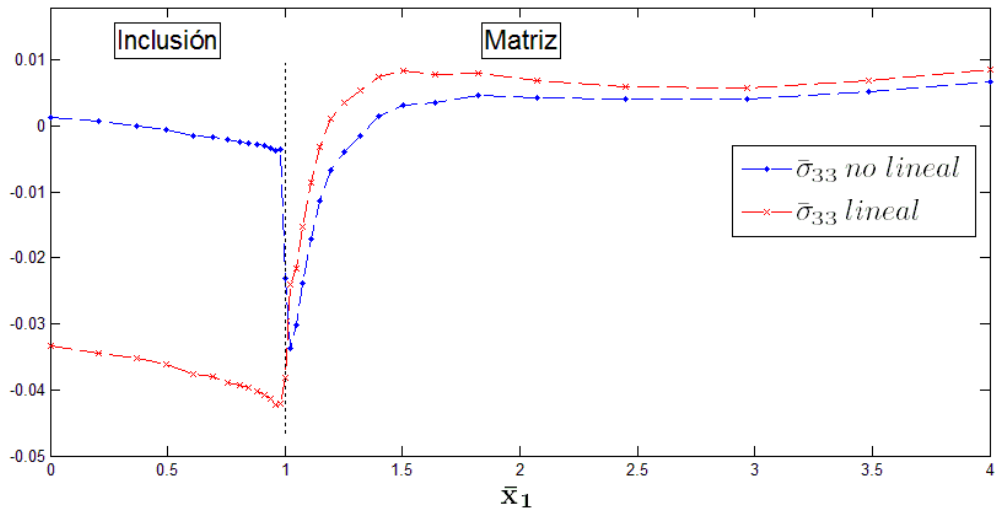
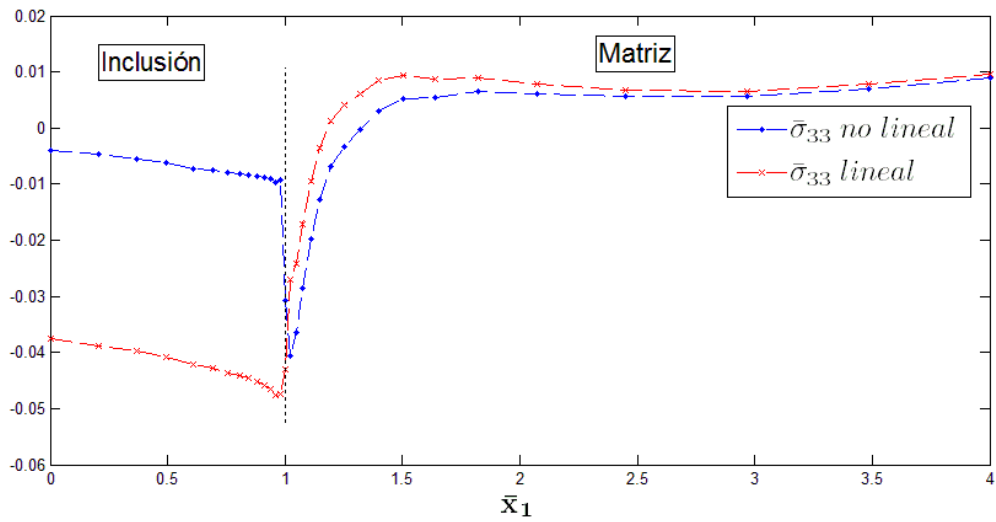
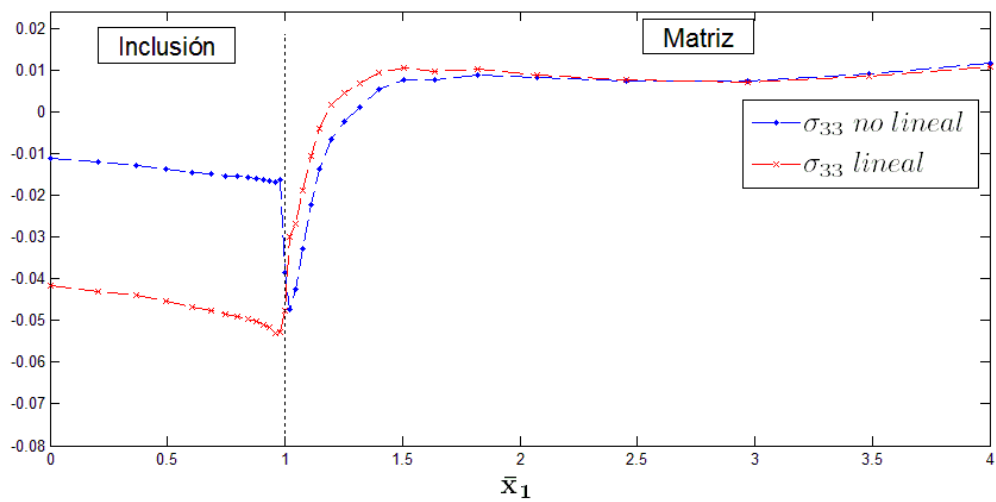
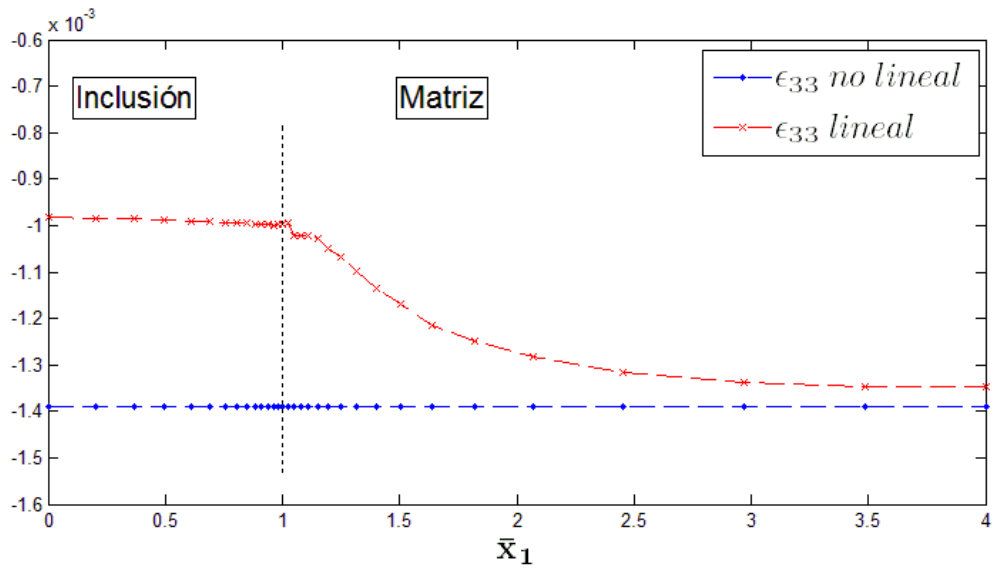
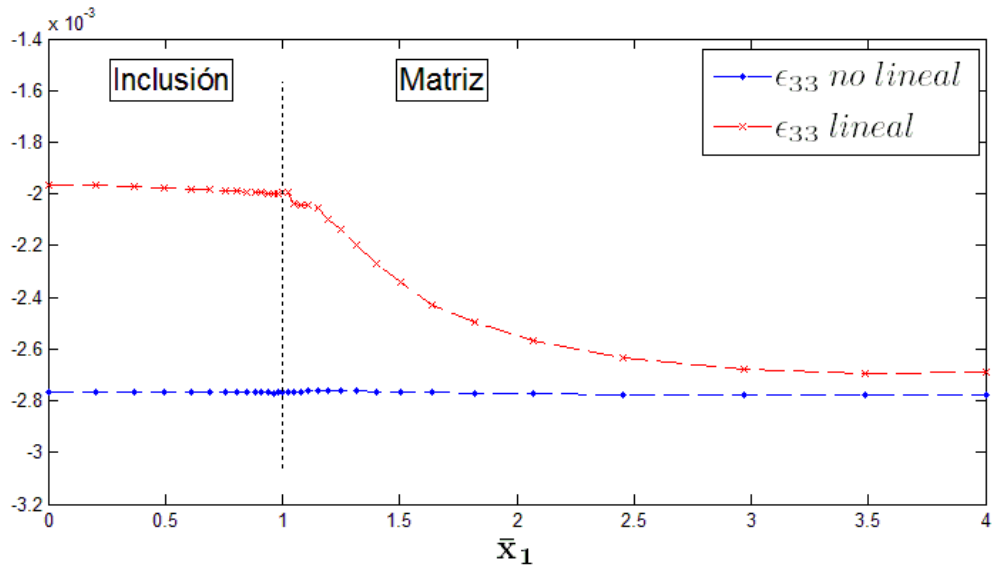
h) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{33}$ para $\sigma_\infty = 12 \cdot 10^6$ [Pa].i) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{33}$ para $\sigma_\infty = 13.5 \cdot 10^6$ [Pa].j) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{33}$ para $\sigma_\infty = 15 \cdot 10^6$ [Pa].

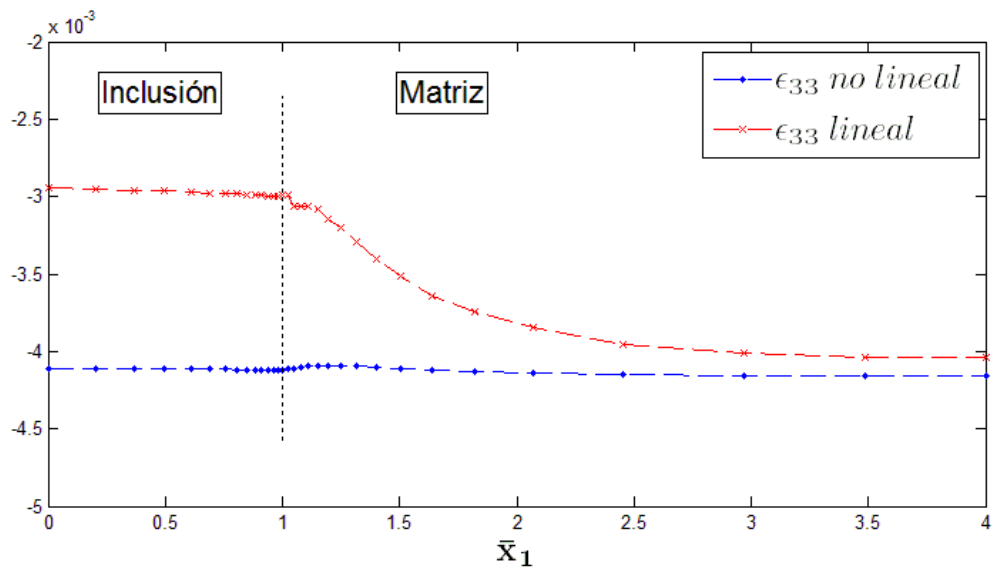
Figura A.5: Evolución del esfuerzo $\bar{\sigma}_{33}$ en la línea $x_2 = x_3 = 0, 0 < x_1 < 4R$ para diferentes cargas externas.



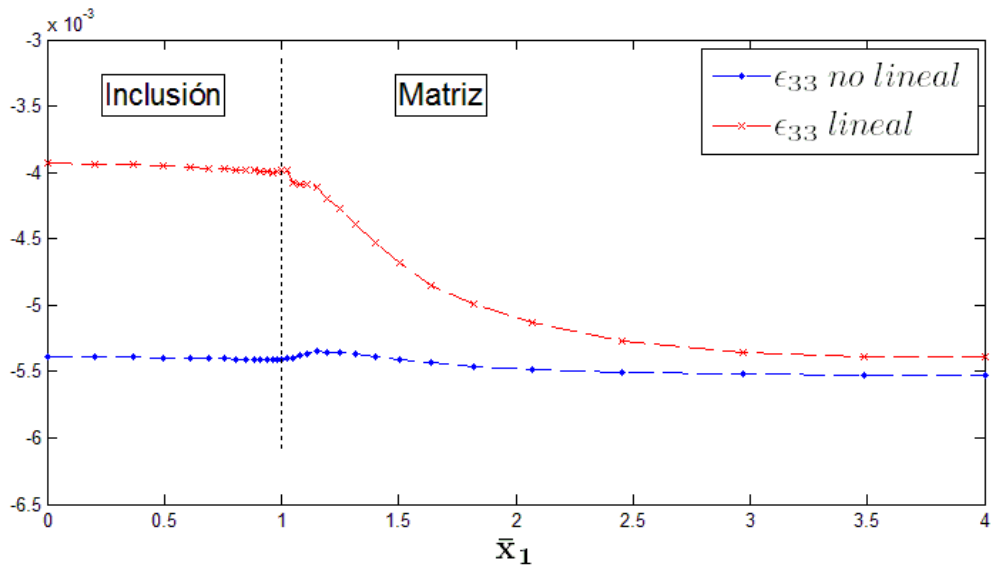
a) Deformación ϵ_{33} para $\sigma_{\infty} = 1.5 \cdot 10^6$ [Pa].



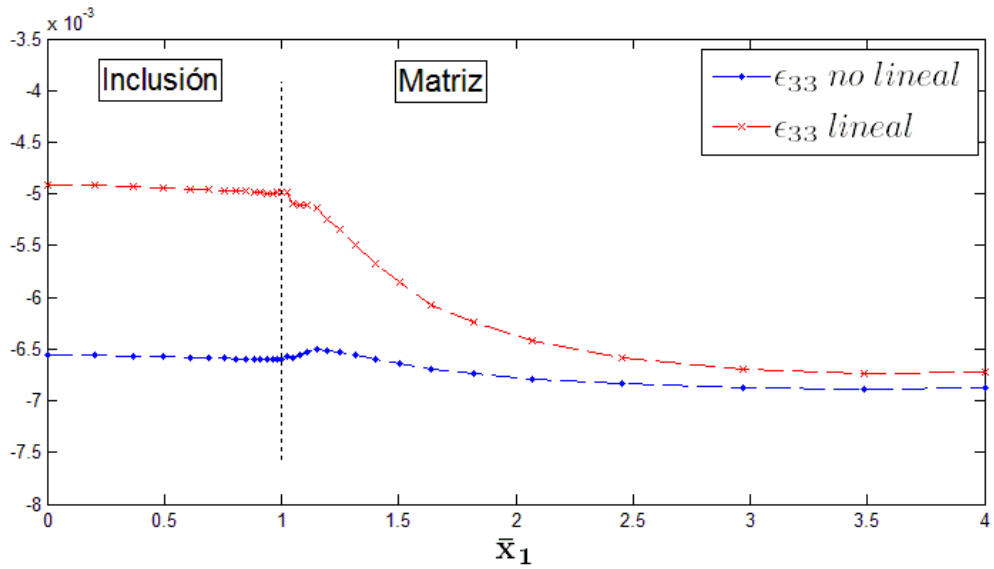
b) Deformación ϵ_{33} para $\sigma_{\infty} = 3 \cdot 10^6$ [Pa].



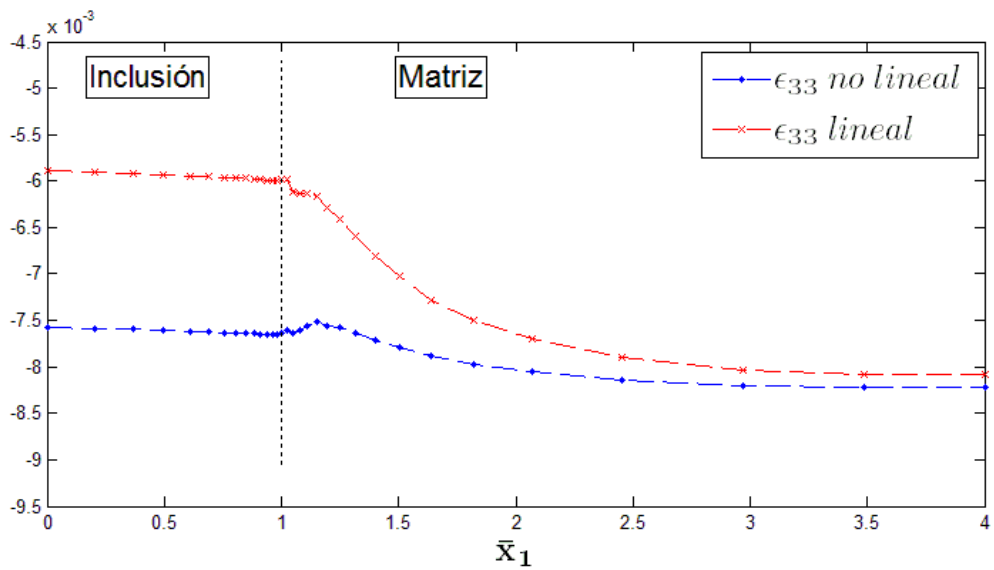
c) Deformación ϵ_{33} para $\sigma_{\infty} = 4.5 \cdot 10^6$ [Pa].



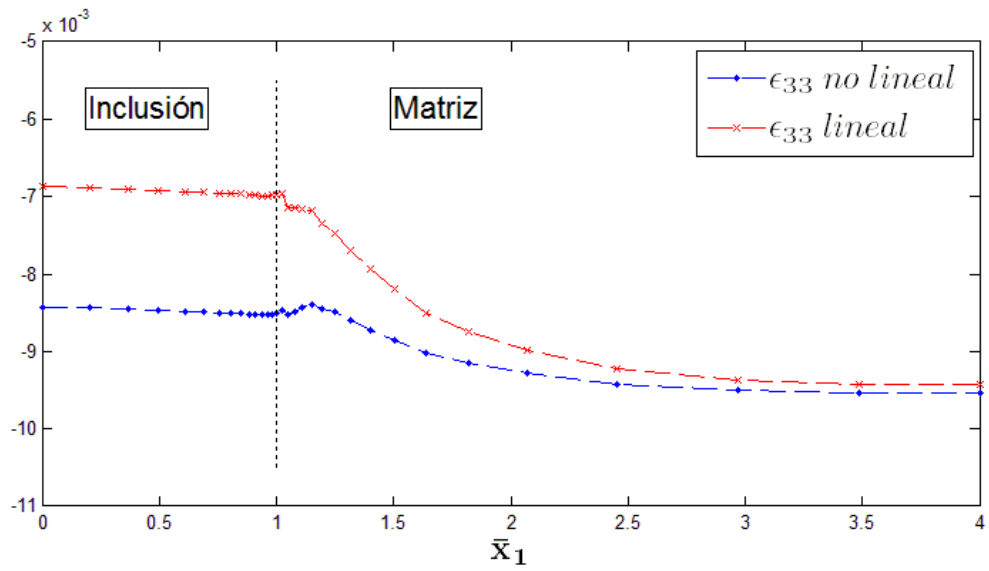
d) Deformación ϵ_{33} para $\sigma_{\infty} = 6 \cdot 10^6$ [Pa].



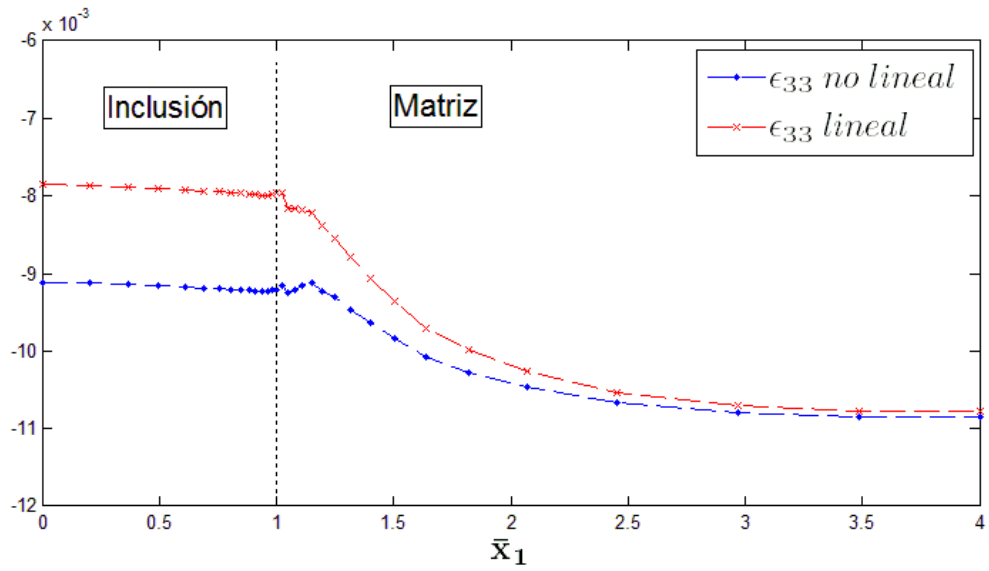
e) Deformación ϵ_{33} para $\sigma_{\infty} = 7.5 \cdot 10^6$ [Pa].



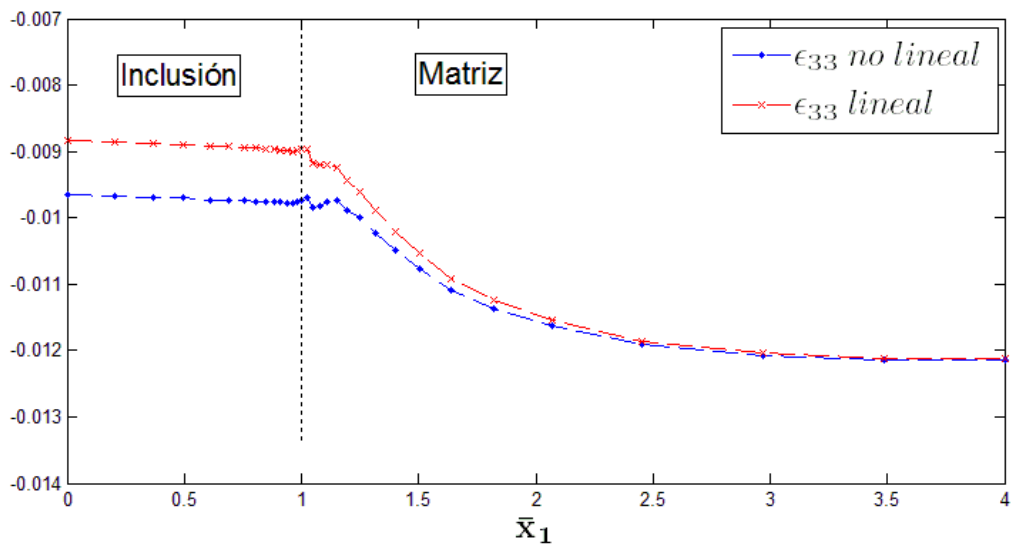
f) Deformación ϵ_{33} para $\sigma_{\infty} = 9 \cdot 10^6$ [Pa].



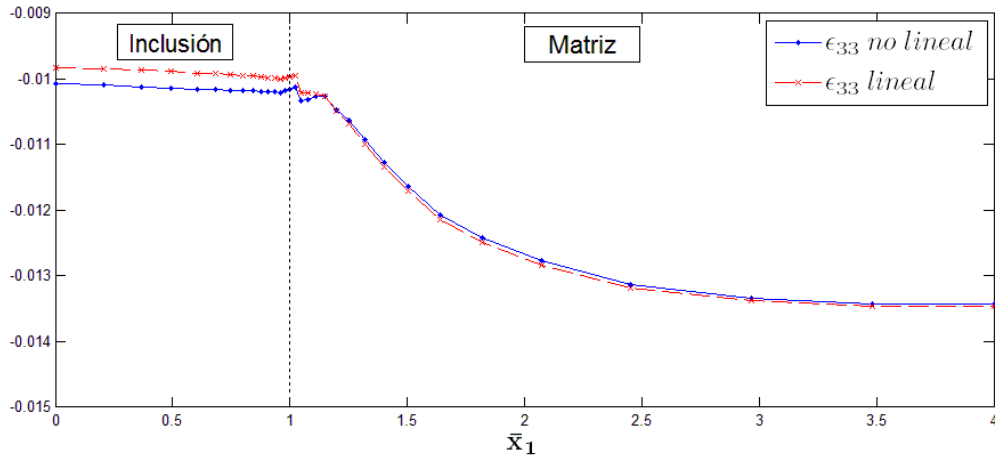
g) Deformación ϵ_{33} para $\sigma_{\infty} = 10.5 \cdot 10^6$ [Pa].



h) Deformación ϵ_{33} para $\sigma_{\infty} = 12 \cdot 10^6$ [Pa].



i) Deformación ϵ_{33} para $\sigma_{\infty} = 13.5 \cdot 10^6$ [Pa].

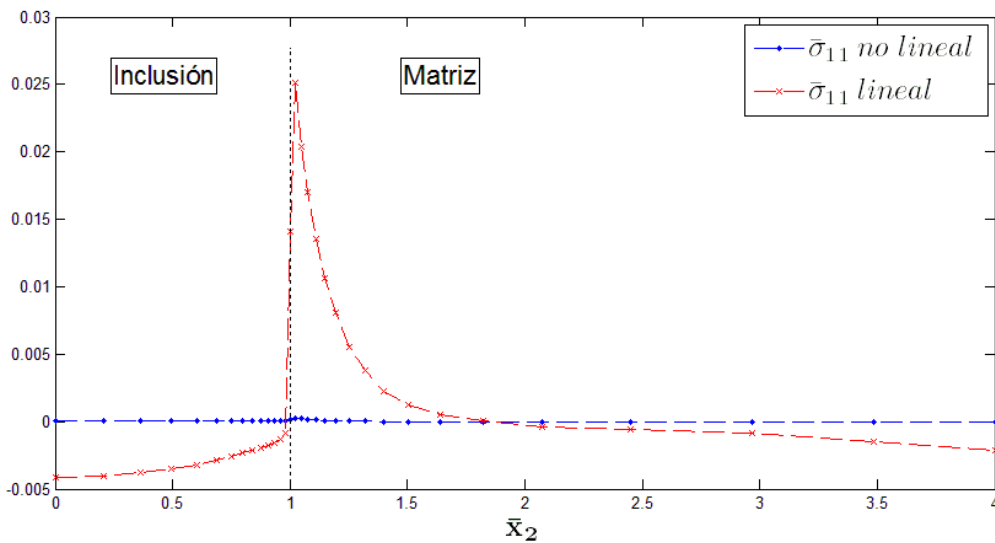


j) Deformación ϵ_{33} para $\sigma_{\infty} = 15 \cdot 10^6$ [Pa].

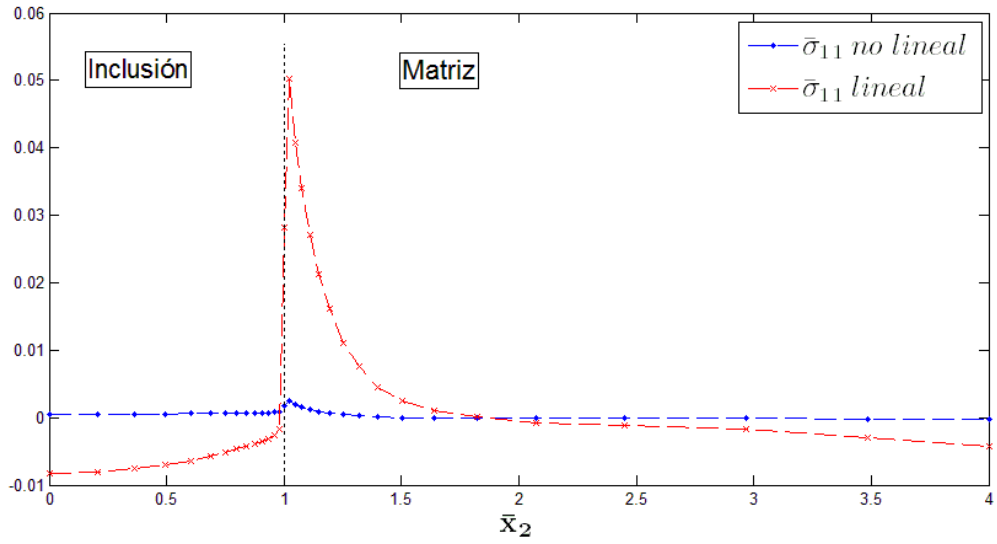
Figura A.6: Evolución de la deformación ϵ_{33} en la línea $x_2 = x_3 = 0, 0 < x_1 < 4R$ para diferentes cargas externas.

A.2 Evolución de las componentes del esfuerzo y la deformación en \bar{x}_2

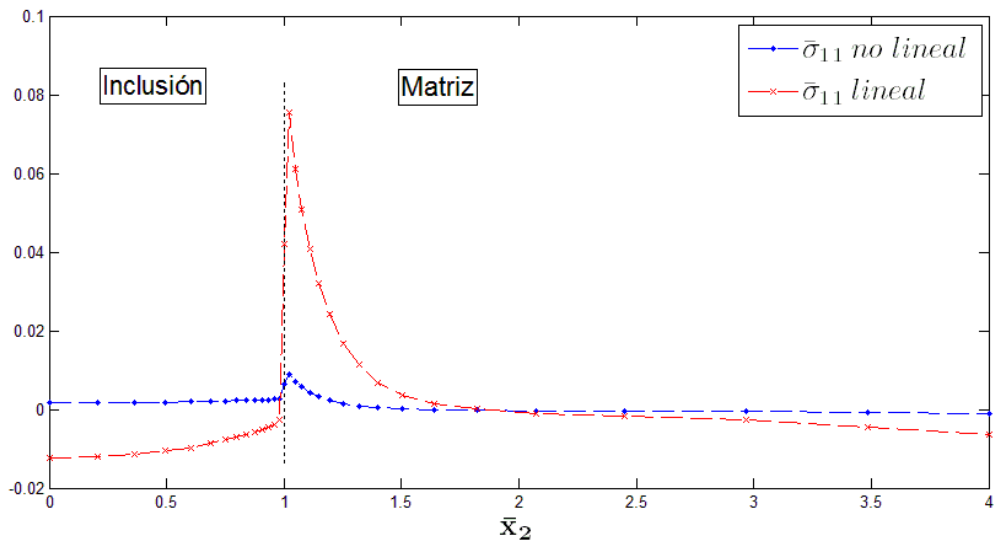
Evolución del esfuerzo $\bar{\sigma}_{11}$ y la deformación ϵ_{11} en la línea $x_1 = x_3 = 0, 0 < x_2 < 4R$ para diferentes cargas externas. La inclusión y la matriz están separadas por una línea vertical segmentada.



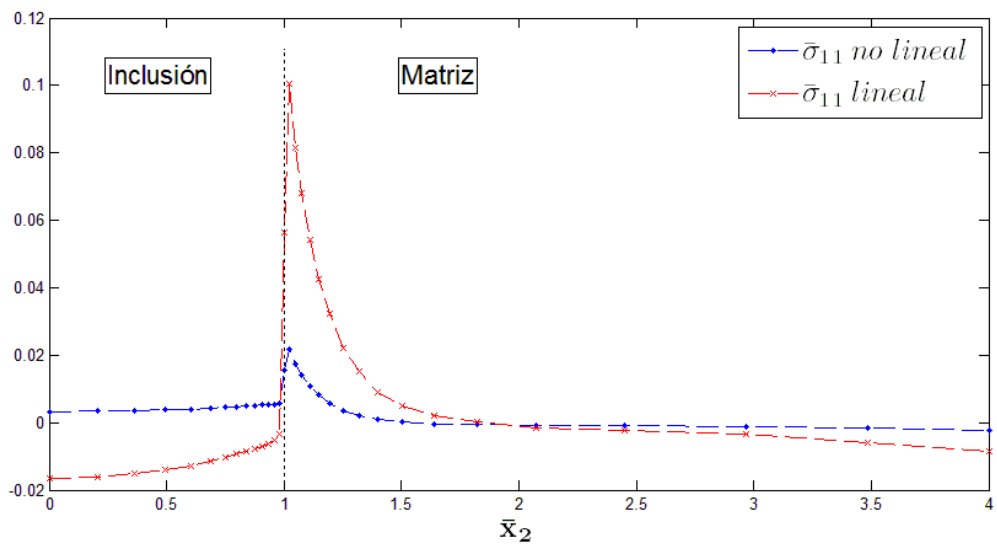
a) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{11}$ para $\sigma_{\infty} = 1.5 \cdot 10^6$ [Pa].



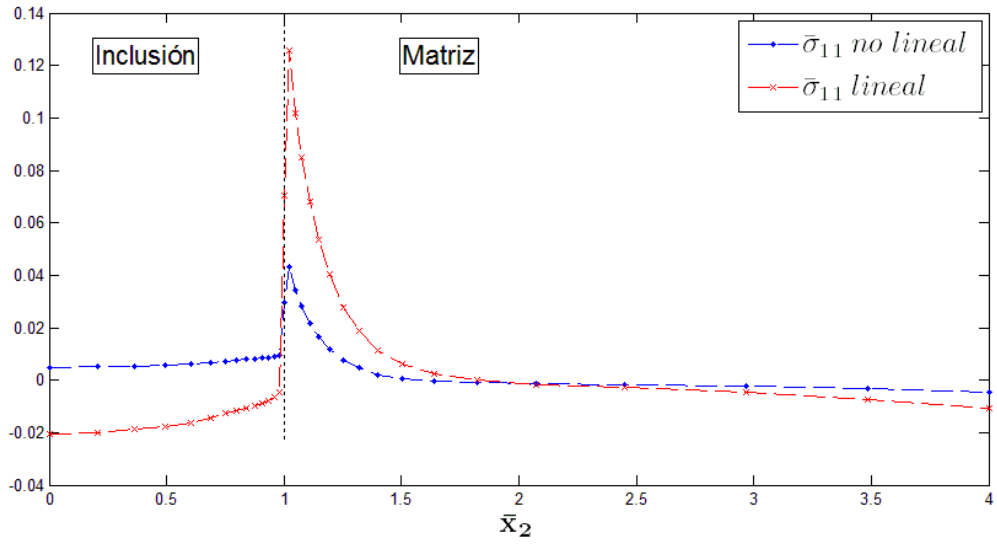
b) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{11}$ para $\sigma_{\infty} = 3 \cdot 10^6$ [Pa].



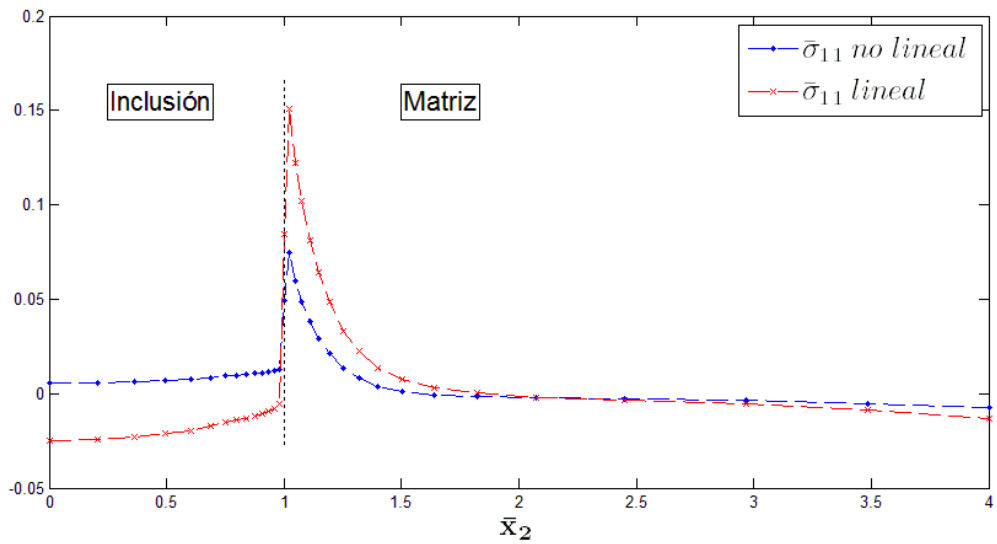
c) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{11}$ para $\sigma_{\infty} = 4.5 \cdot 10^6$ [Pa].



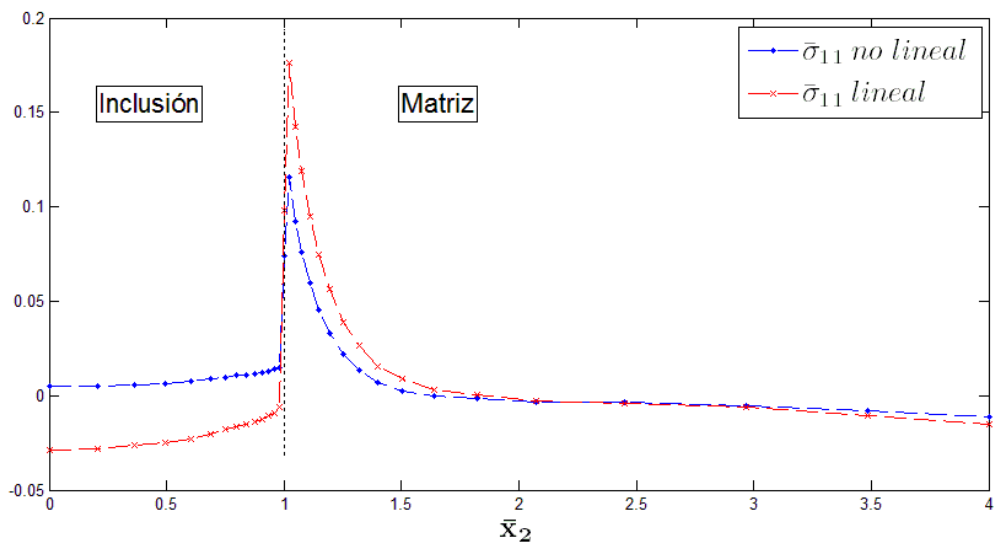
d) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{11}$ para $\sigma_{\infty} = 6 \cdot 10^6$ [Pa].



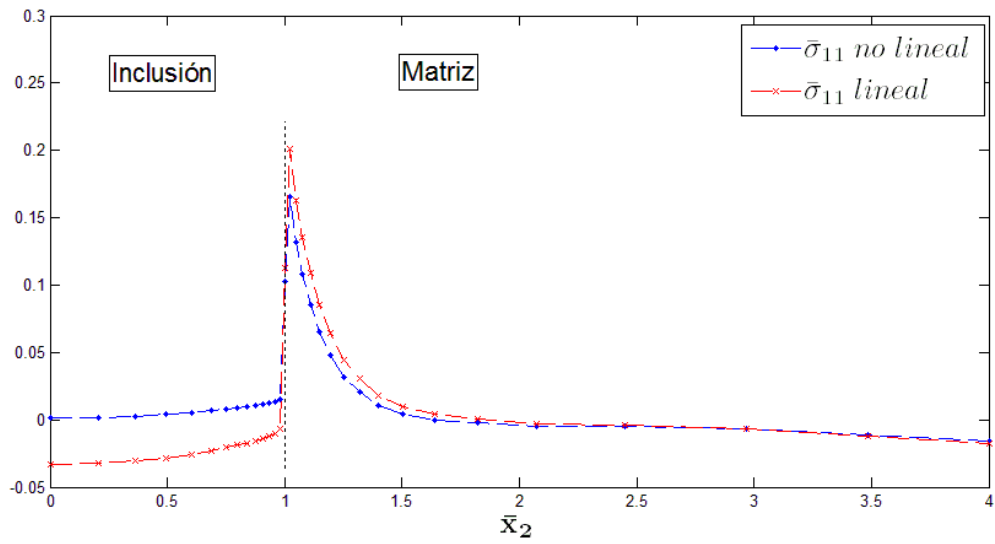
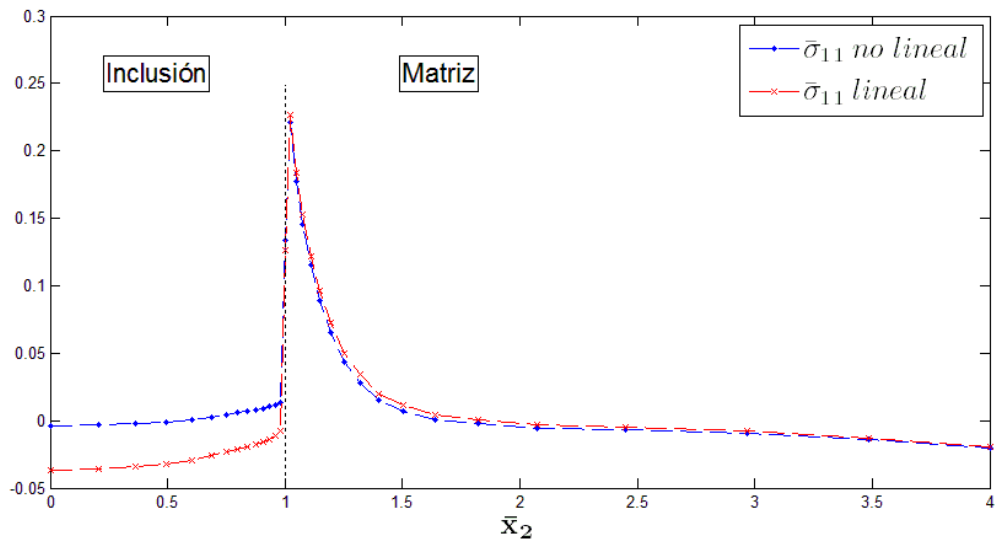
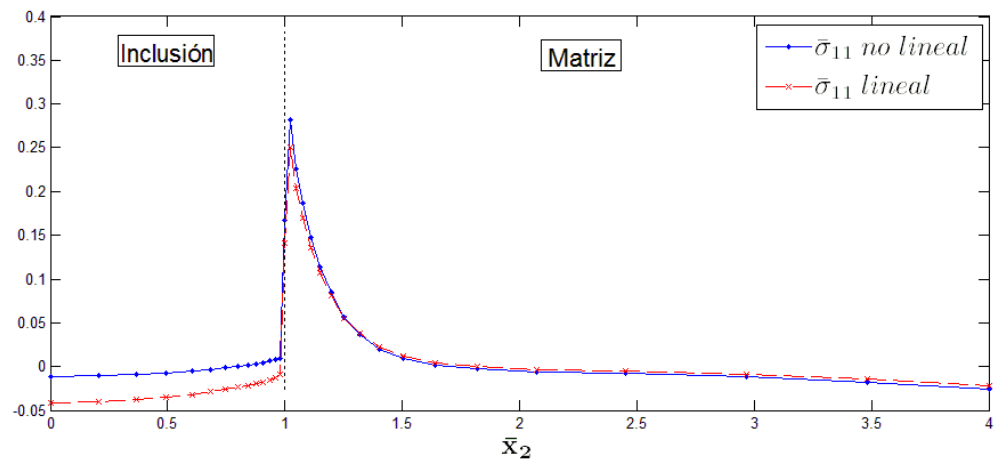
e) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{11}$ para $\sigma_{\infty} = 7.5 \cdot 10^6$ [Pa].

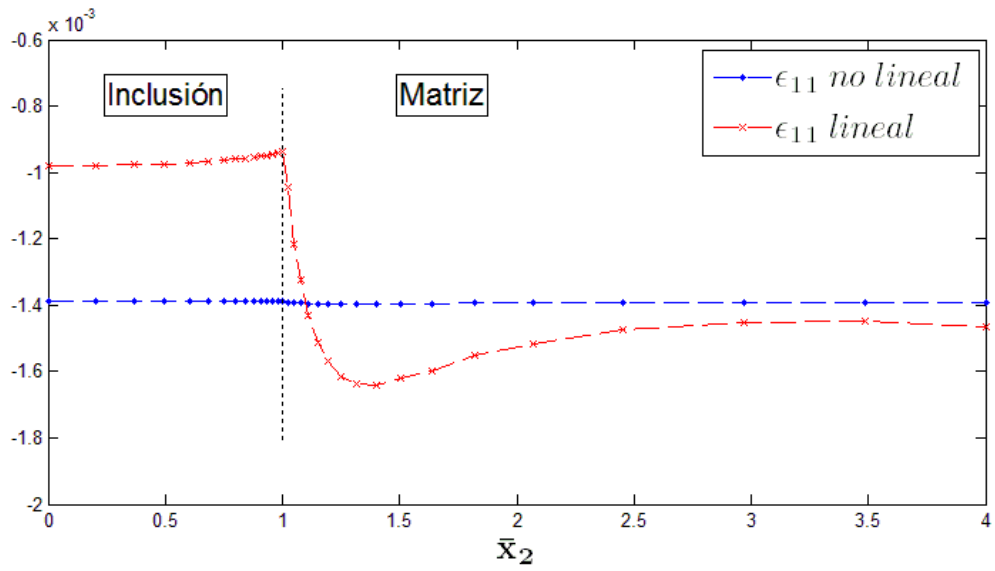


f) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{11}$ para $\sigma_{\infty} = 9 \cdot 10^6$ [Pa].

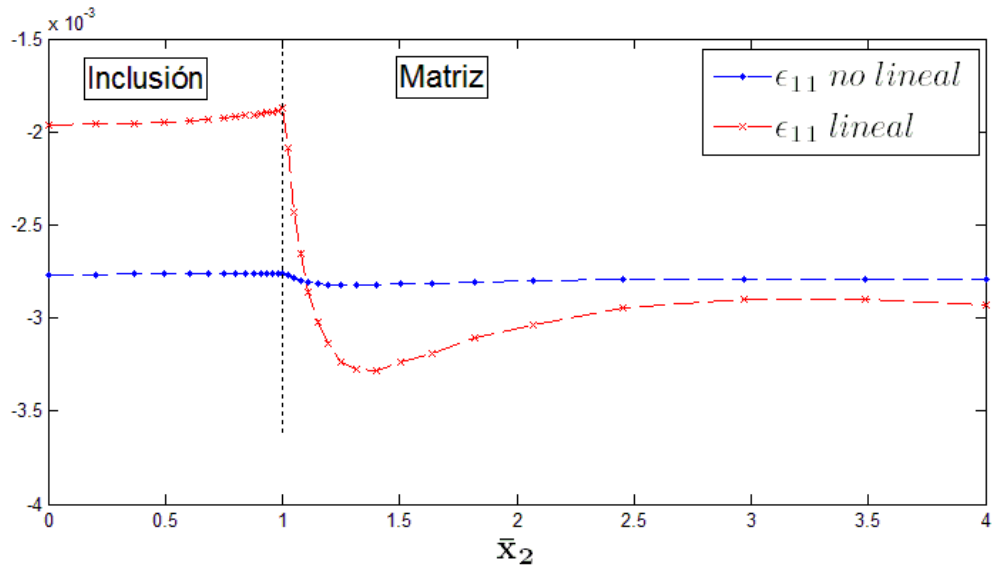


g) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{11}$ para $\sigma_{\infty} = 10.5 \cdot 10^6$ [Pa].

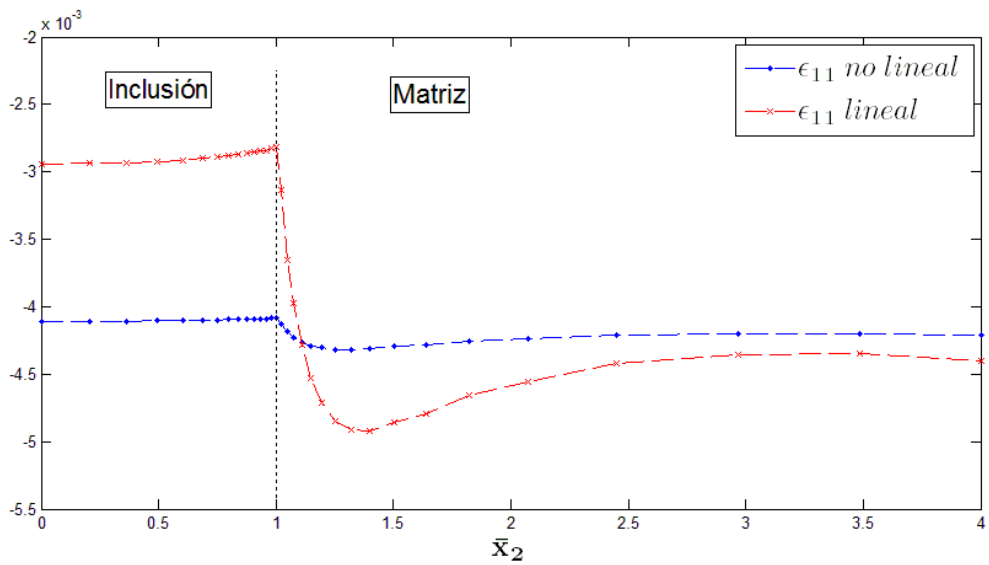
h) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{11}$ para $\sigma_\infty = 12 \cdot 10^6$ [Pa].i) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{11}$ para $\sigma_\infty = 13.5 \cdot 10^6$ [Pa].j) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{11}$ para $\sigma_\infty = 15 \cdot 10^6$ [Pa].Figura A.7: Evolución del esfuerzo $\bar{\sigma}_{11}$ en la línea $x_1 = x_3 = 0, 0 < x_2 < 4R$ para diferentes cargas externas.



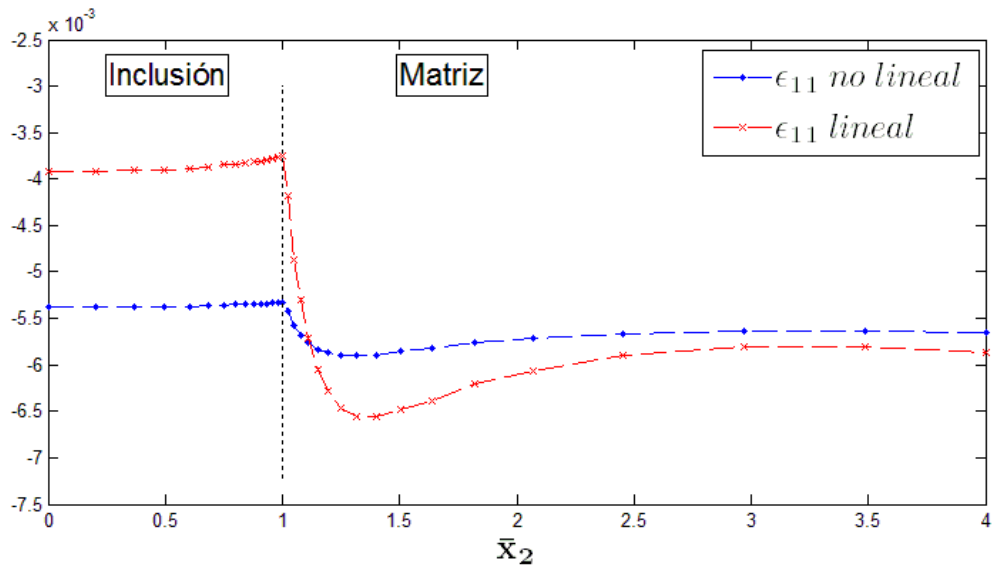
a) Deformación ϵ_{11} para $\sigma_{\infty} = 1.5 \cdot 10^6$ [Pa].



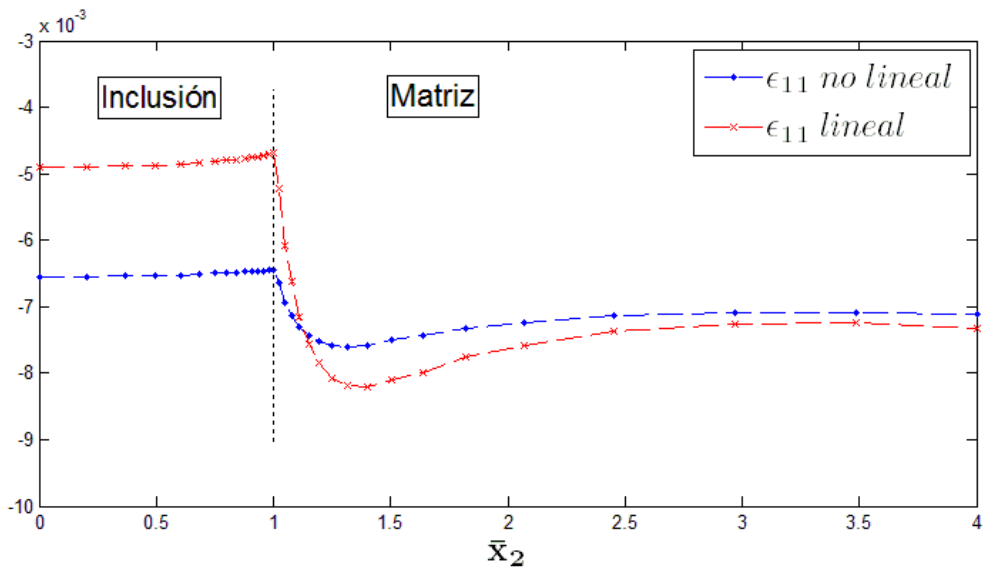
b) Deformación ϵ_{11} para $\sigma_{\infty} = 3 \cdot 10^6$ [Pa].



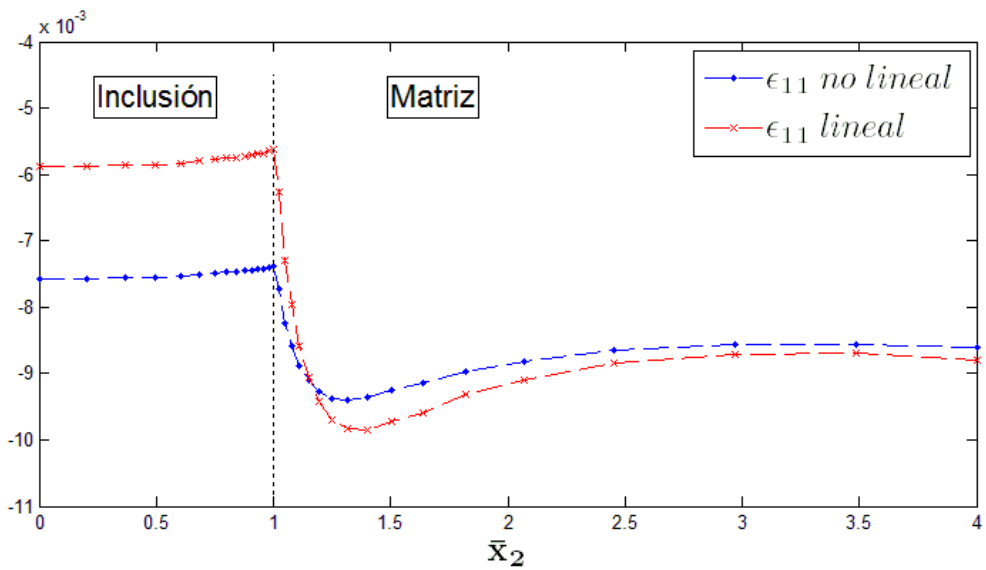
c) Deformación ϵ_{11} para $\sigma_{\infty} = 4.5 \cdot 10^6$ [Pa].



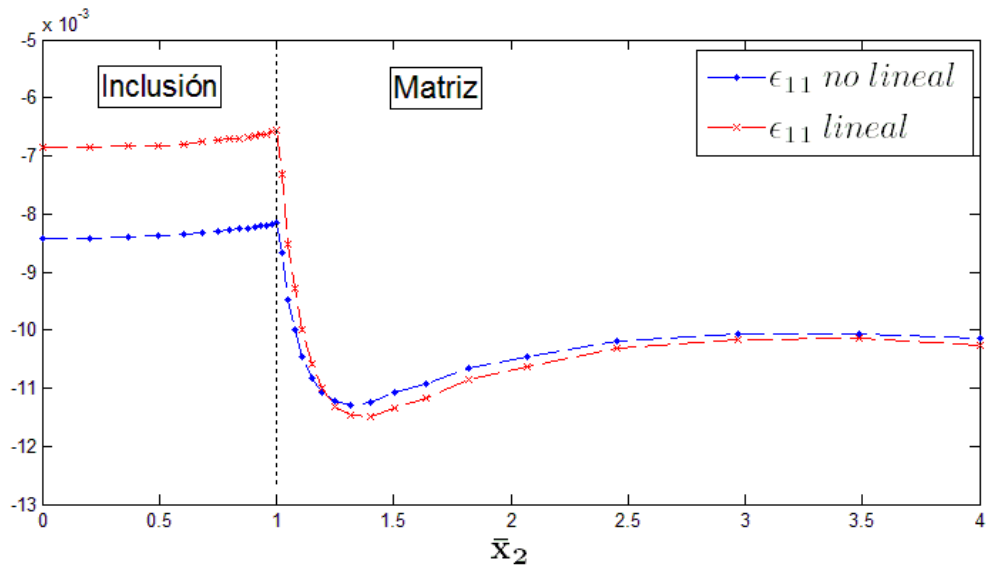
d) Deformación ϵ_{11} para $\sigma_{\infty} = 6 \cdot 10^6$ [Pa].



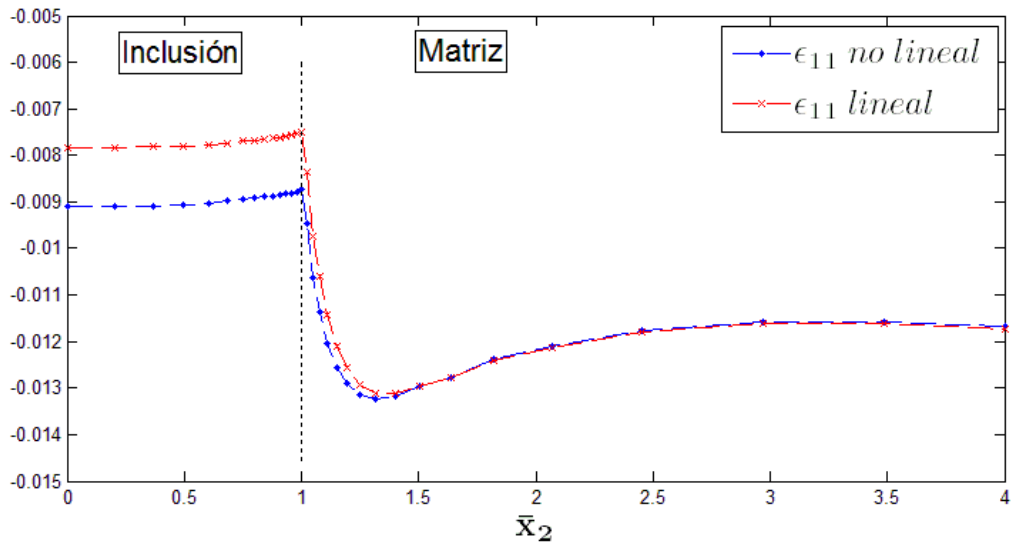
e) Deformación ϵ_{11} para $\sigma_{\infty} = 7.5 \cdot 10^6$ [Pa].



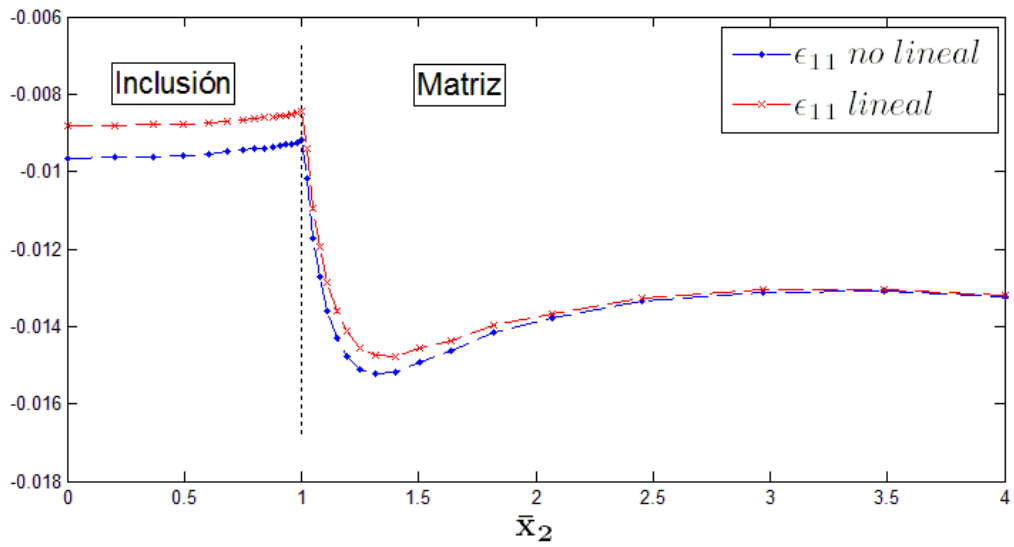
f) Deformación ϵ_{11} para $\sigma_{\infty} = 9 \cdot 10^6$ [Pa].



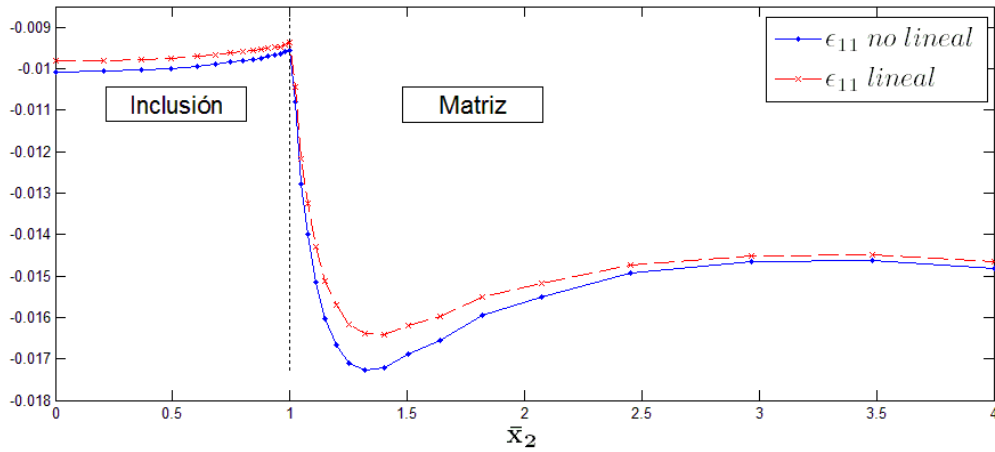
g) Deformación ϵ_{11} para $\sigma_{\infty} = 10.5 \cdot 10^6$ [Pa].



h) Deformación ϵ_{11} para $\sigma_{\infty} = 12 \cdot 10^6$ [Pa].



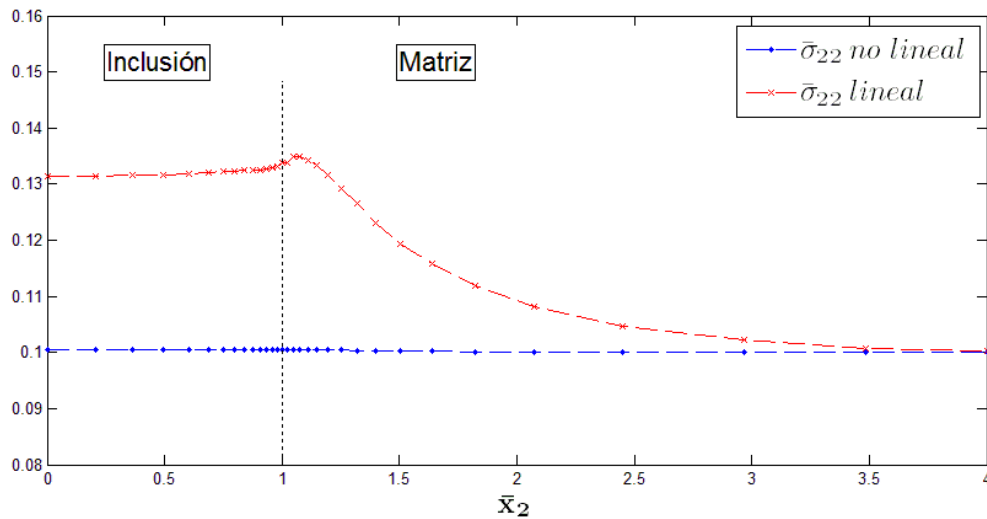
i) Deformación ϵ_{11} para $\sigma_{\infty} = 13.5 \cdot 10^6$ [Pa].



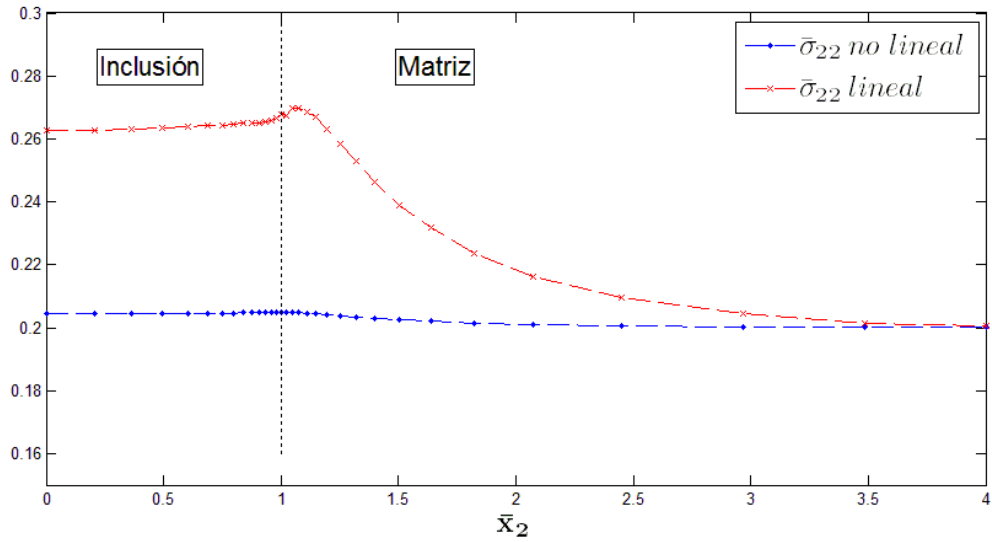
j) Deformación ϵ_{11} para $\sigma_{\infty} = 15 \cdot 10^6$ [Pa].

Figura A.8: Evolución de la deformación ϵ_{11} en la línea $x_1 = x_3 = 0, 0 < x_2 < 4R$ para diferentes cargas externas.

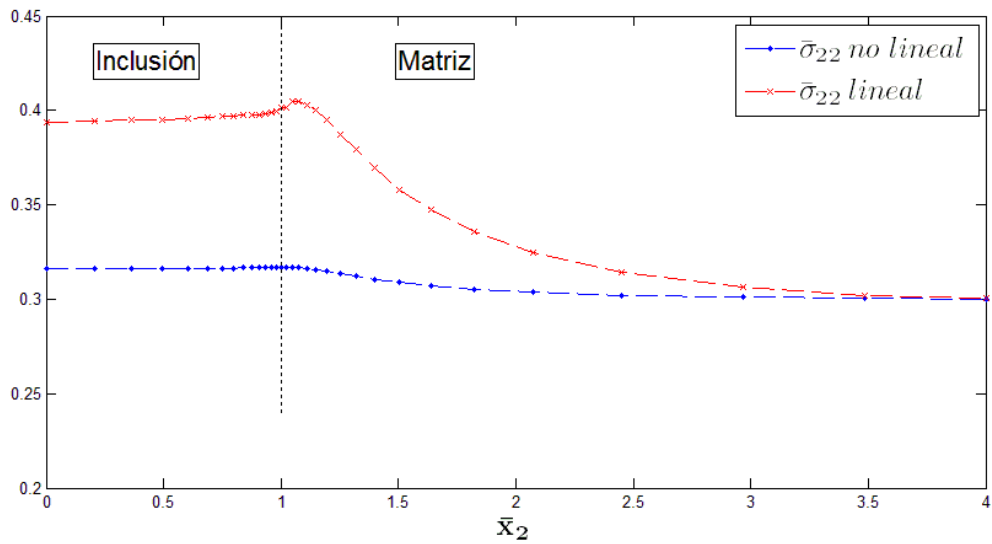
Evolución del esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ y la deformación ϵ_{22} en la línea $x_1 = x_3 = 0, 0 < x_2 < 4R$ para diferentes cargas externas. La inclusión y la matriz están separadas por una línea vertical segmentada.



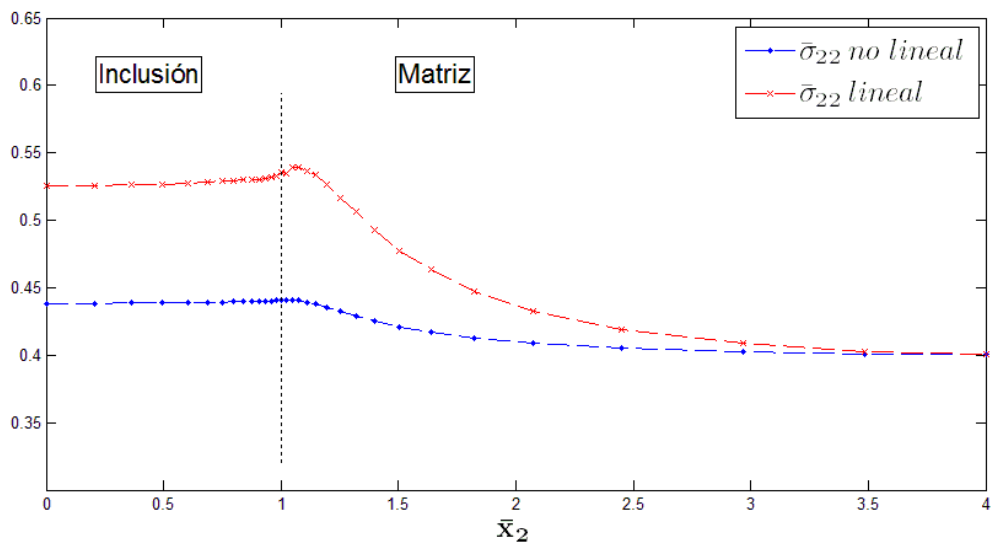
a) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ para $\sigma_{\infty} = 1.5 \cdot 10^6$ [Pa].



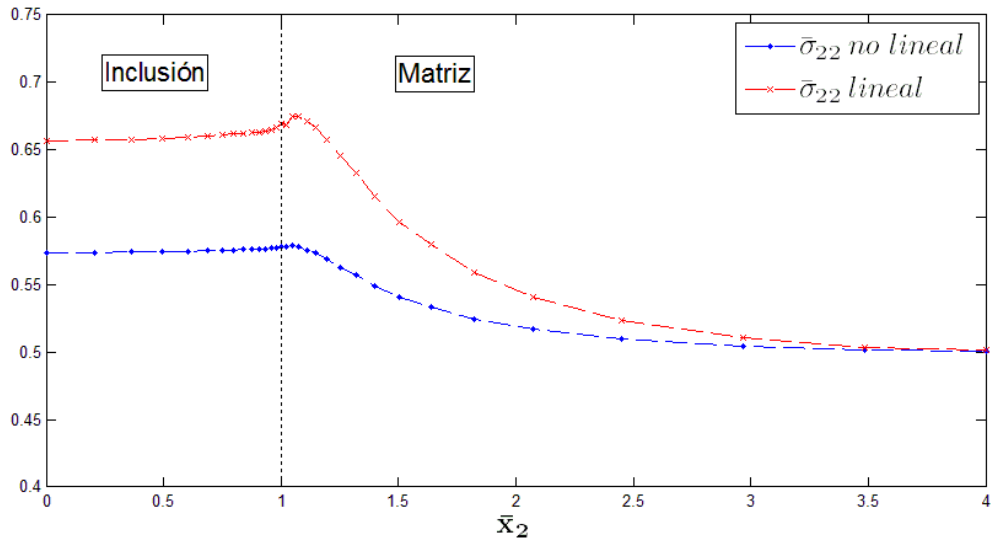
b) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ para $\sigma_{\infty} = 3 \cdot 10^6$ [Pa].



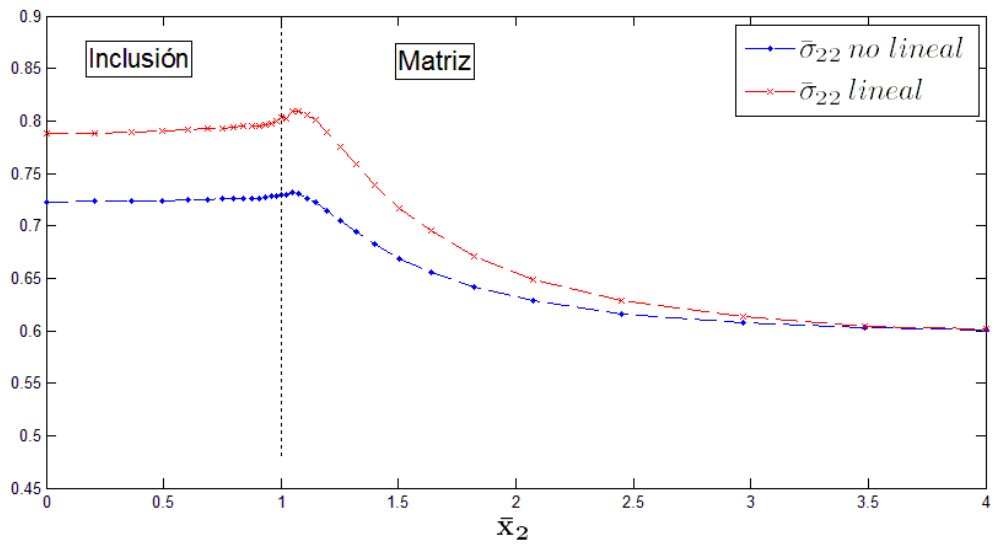
c) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ para $\sigma_{\infty} = 4.5 \cdot 10^6$ [Pa].



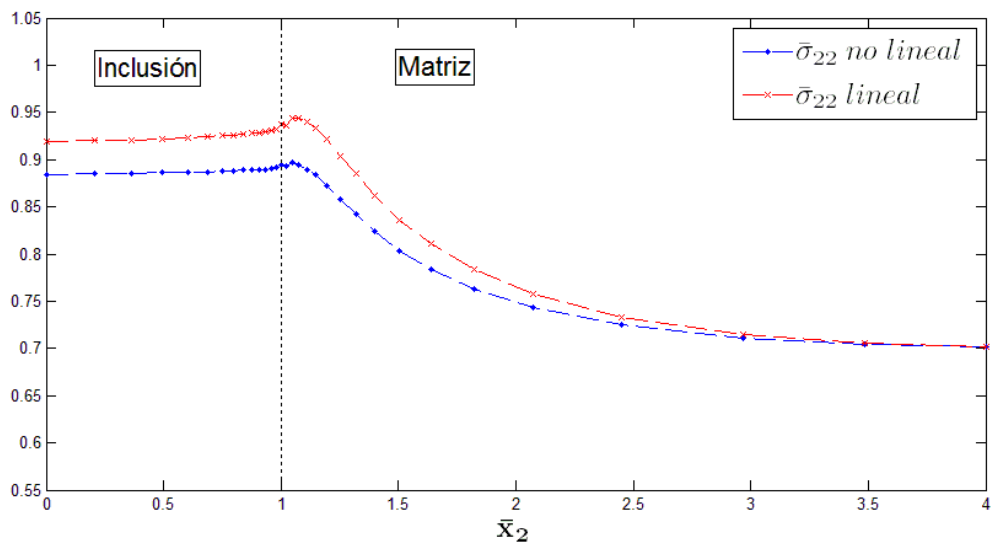
d) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ para $\sigma_{\infty} = 6 \cdot 10^6$ [Pa].



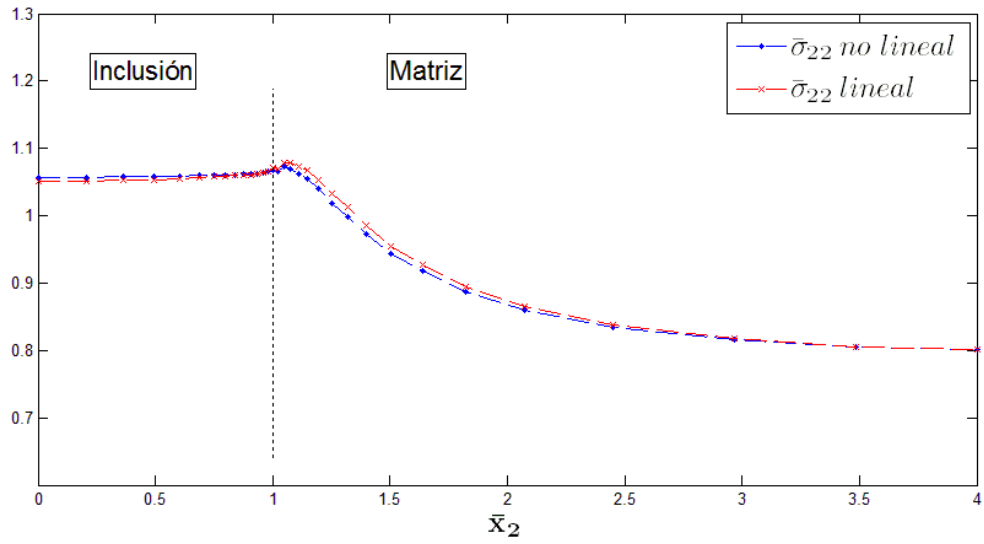
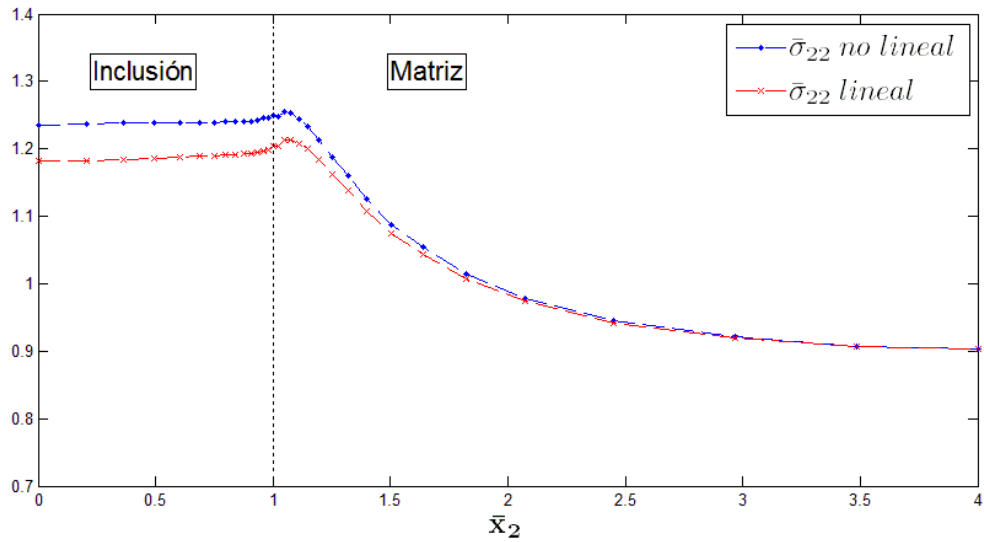
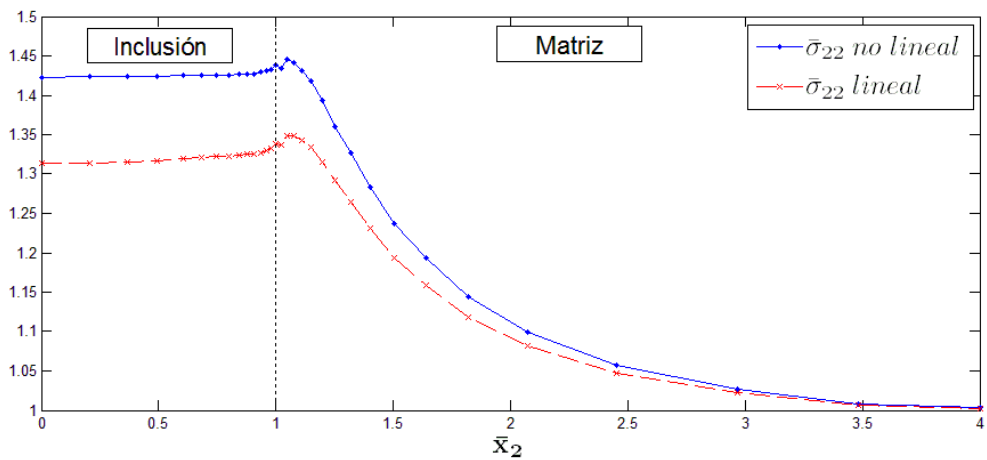
e) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ para $\sigma_{\infty} = 7.5 \cdot 10^6$ [Pa].

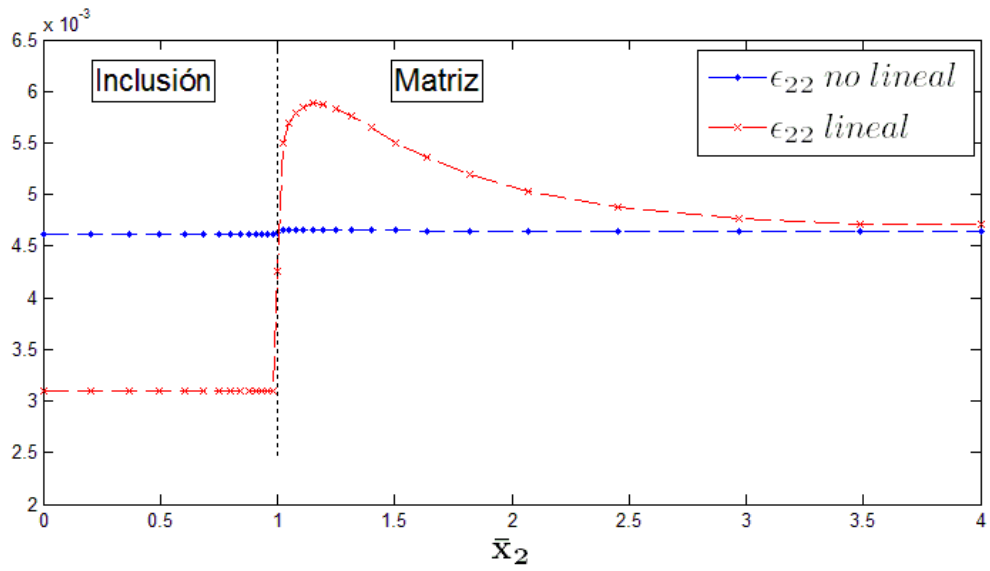


f) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ para $\sigma_{\infty} = 9 \cdot 10^6$ [Pa].

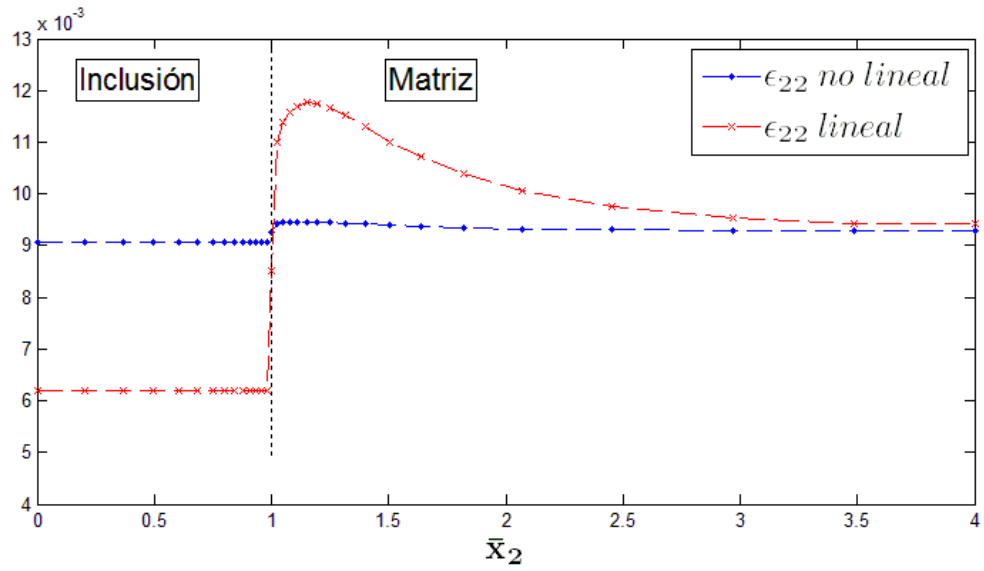


g) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ para $\sigma_{\infty} = 10.5 \cdot 10^6$ [Pa].

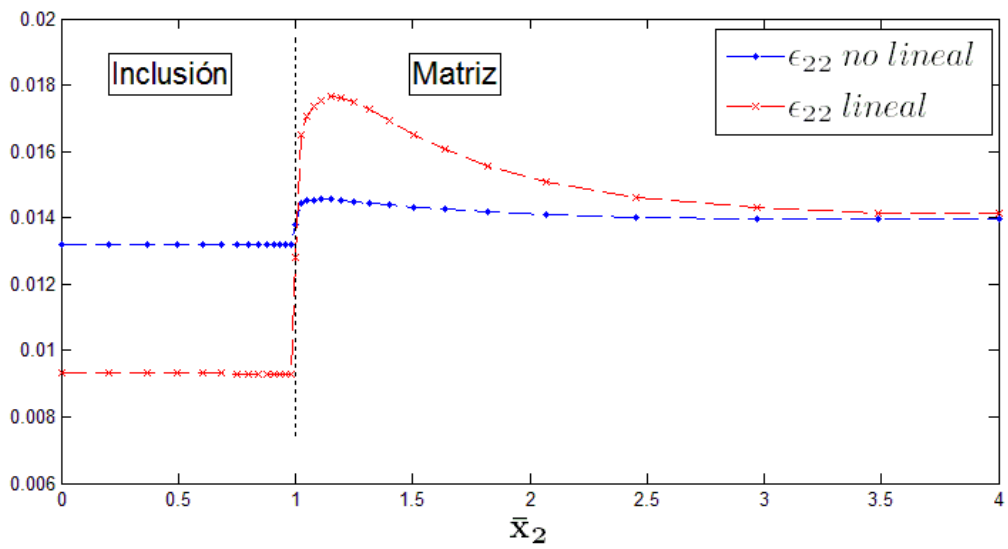
h) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ para $\sigma_{\infty} = 12 \cdot 10^6$ [Pa].i) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ para $\sigma_{\infty} = 13.5 \cdot 10^6$ [Pa].j) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ para $\sigma_{\infty} = 15 \cdot 10^6$ [Pa].Figura A.9: Evolución del esfuerzo $\bar{\sigma}_{22}$ en la línea $x_1 = x_3 = 0, 0 < x_2 < 4R$ para diferentes cargas externas.



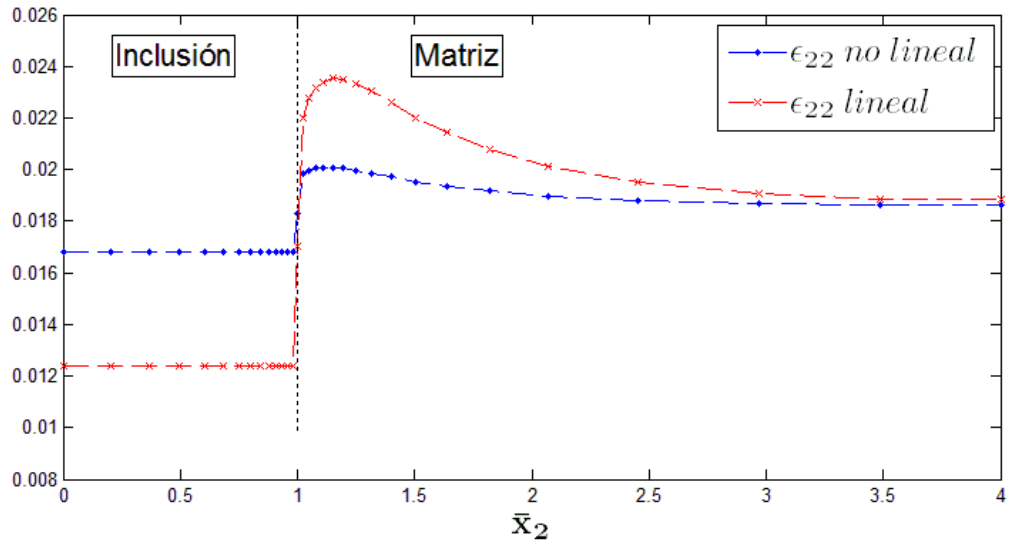
a) Deformación ϵ_{22} para $\sigma_{\infty} = 1.5 \cdot 10^6$ [Pa].



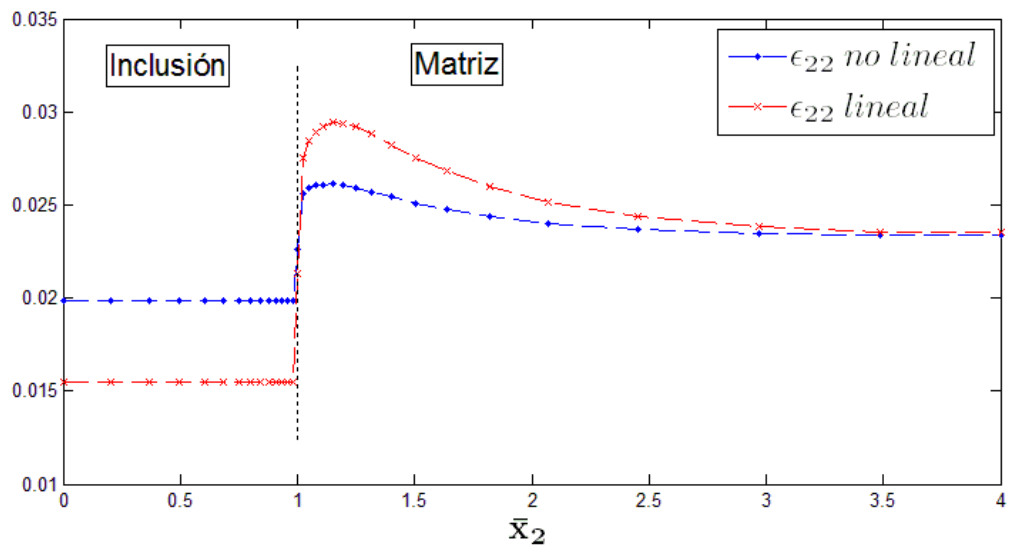
b) Deformación ϵ_{22} para $\sigma_{\infty} = 3 \cdot 10^6$ [Pa].



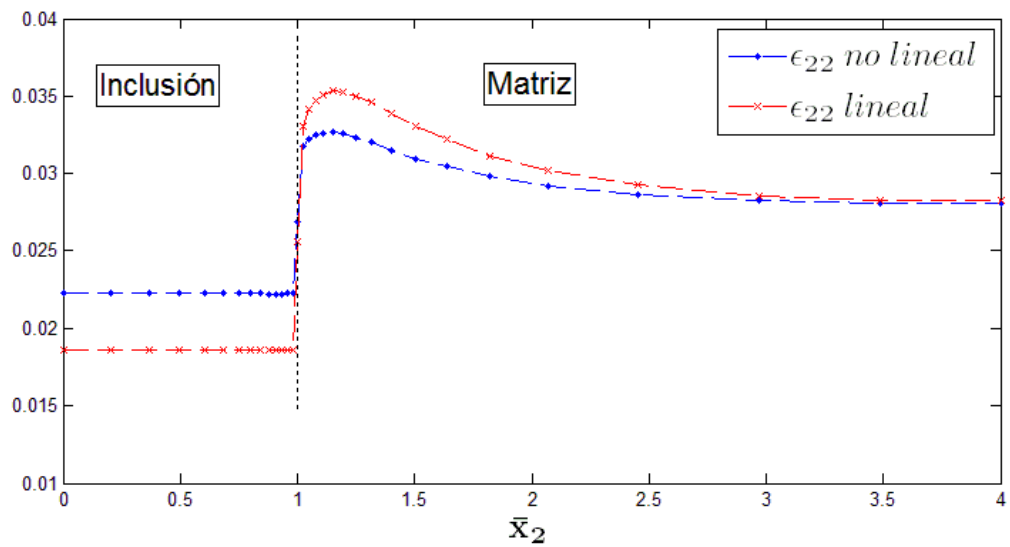
c) Deformación ϵ_{22} para $\sigma_{\infty} = 4.5 \cdot 10^6$ [Pa].



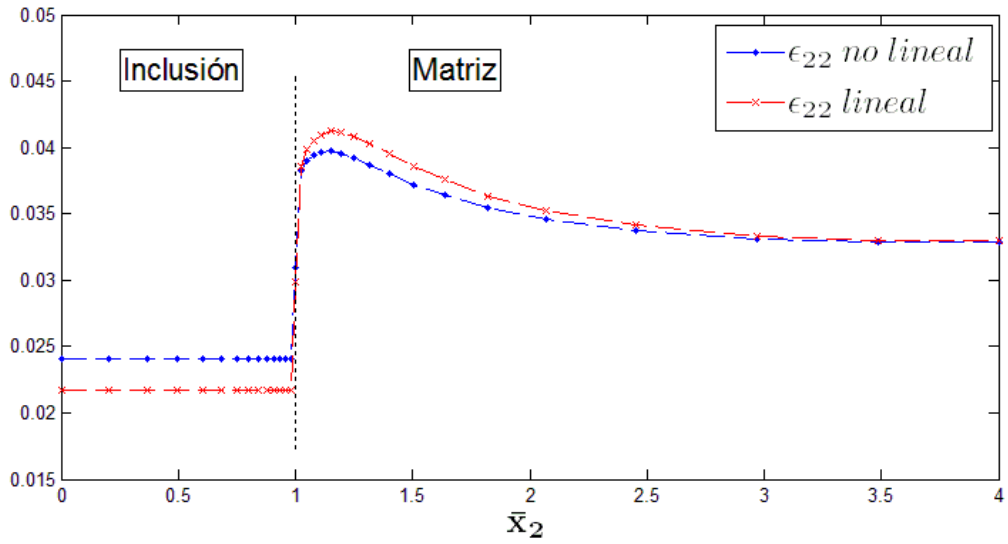
d) Deformación ϵ_{22} para $\sigma_{\infty} = 6 \cdot 10^6$ [Pa].



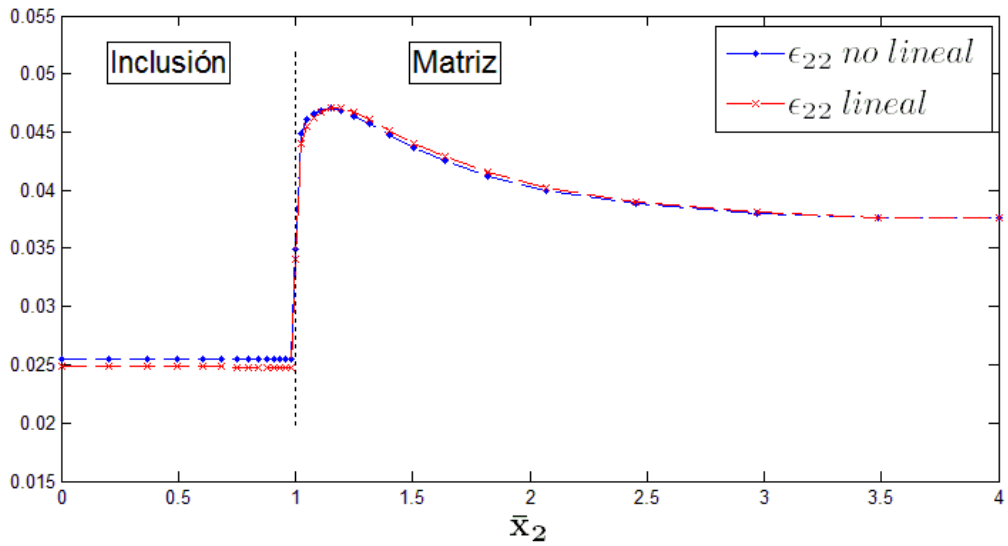
e) Deformación ϵ_{22} para $\sigma_{\infty} = 7.5 \cdot 10^6$ [Pa].



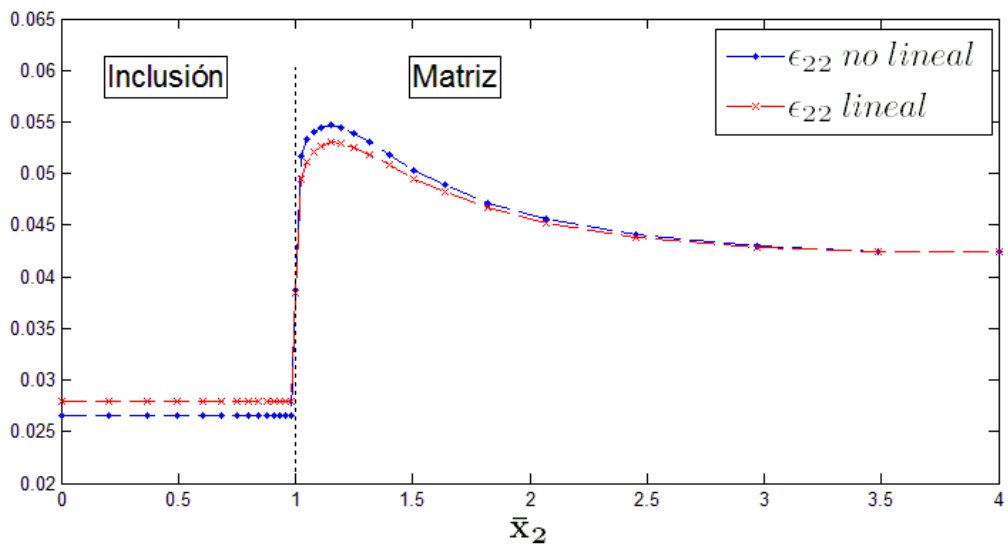
f) Deformación ϵ_{22} para $\sigma_{\infty} = 9 \cdot 10^6$ [Pa].



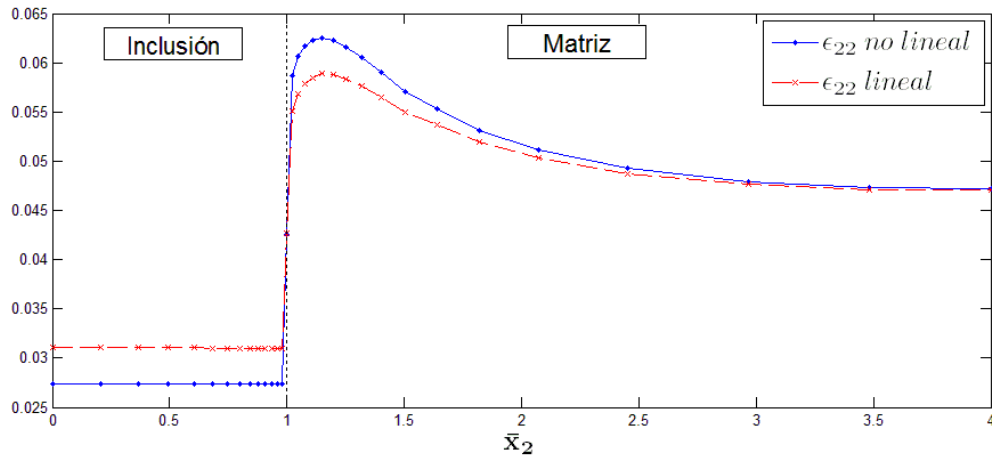
g) Deformación ϵ_{22} para $\sigma_{\infty} = 10.5 \cdot 10^6$ [Pa].



h) Deformación ϵ_{22} para $\sigma_{\infty} = 12 \cdot 10^6$ [Pa].



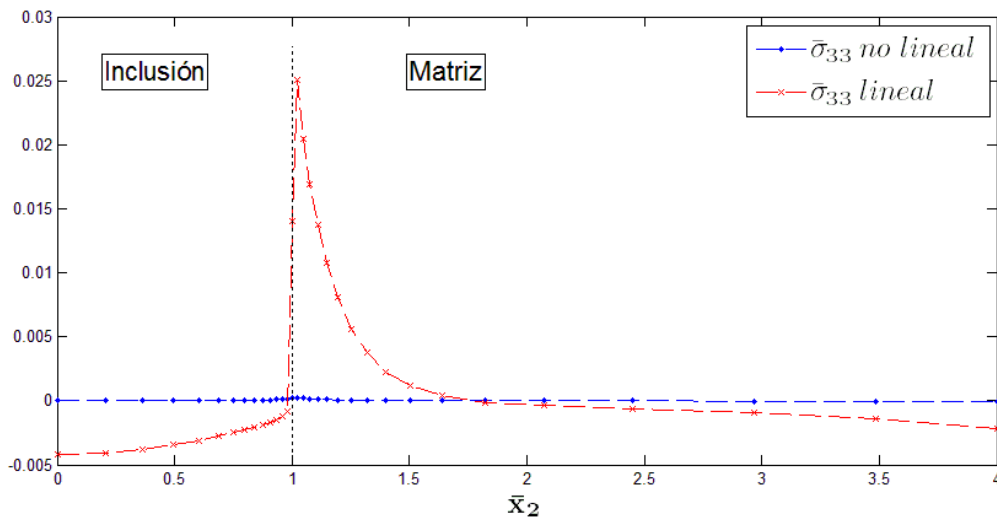
i) Deformación ϵ_{22} para $\sigma_{\infty} = 13.5 \cdot 10^6$ [Pa].



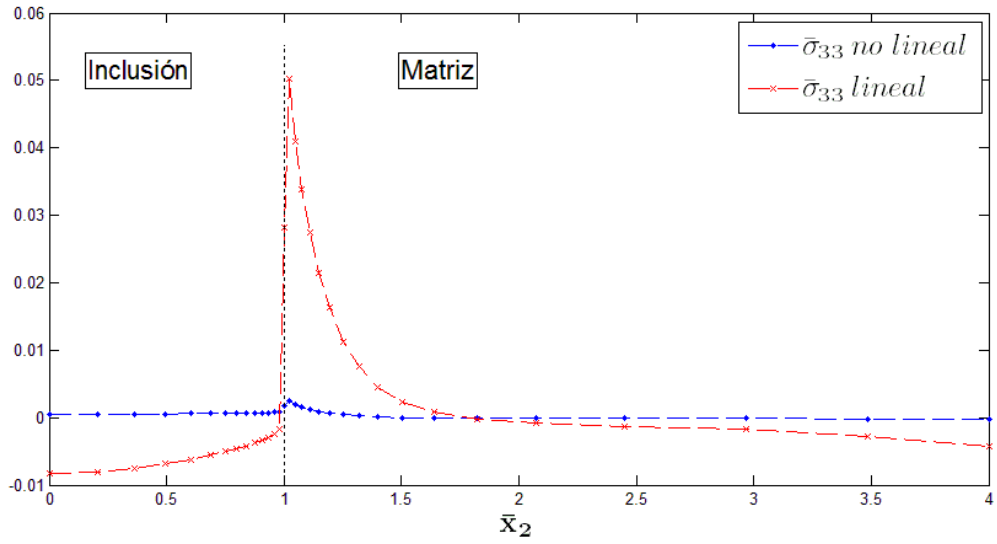
j) Deformación ϵ_{22} para $\sigma_{\infty} = 15 \cdot 10^6$ [Pa].

Figura A.10: Evolución de la deformación ϵ_{22} en la línea $x_1 = x_3 = 0, 0 < x_2 < 4R$ para diferentes cargas externas.

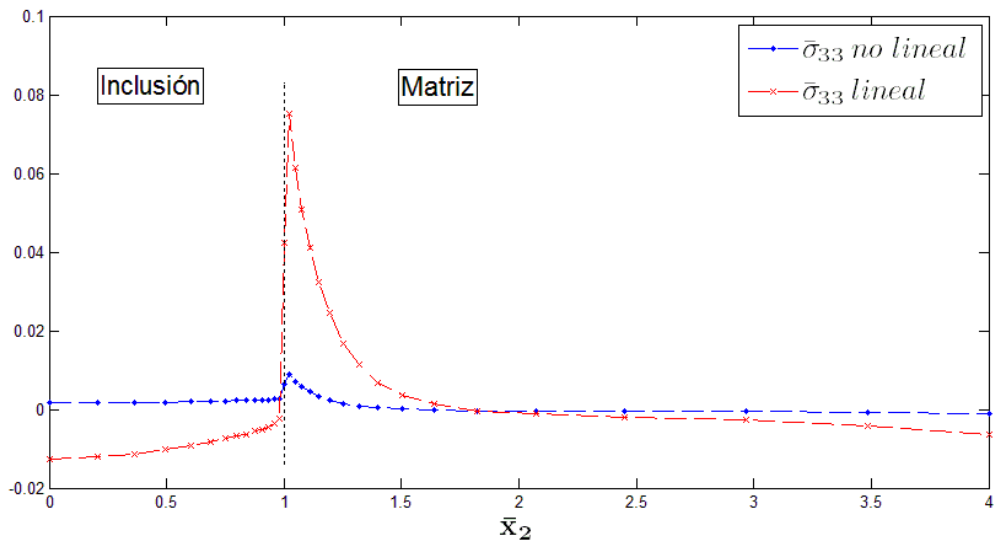
Evolución del esfuerzo $\bar{\sigma}_{33}$ y la deformación ϵ_{33} en la línea $x_1 = x_3 = 0, 0 < x_2 < 4R$ para diferentes cargas externas. La inclusión y la matriz están separadas por una línea vertical segmentada.



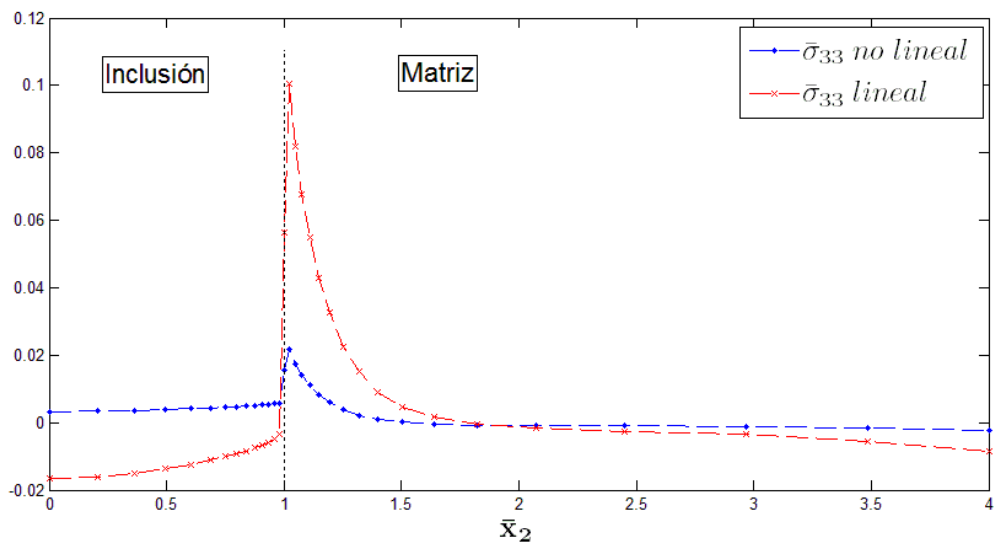
a) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{33}$ para $\sigma_{\infty} = 1.5 \cdot 10^6$ [Pa].



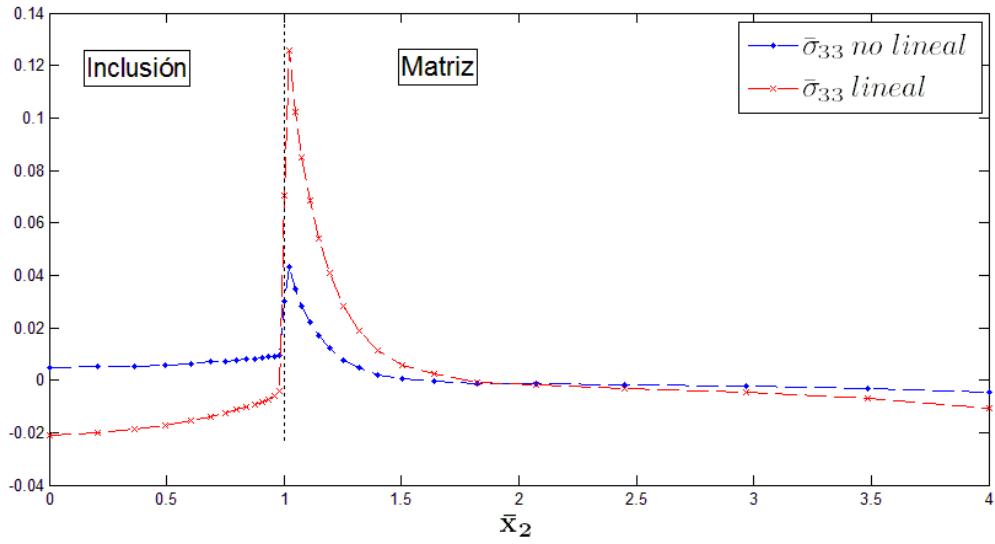
b) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{33}$ para $\sigma_{\infty} = 3 \cdot 10^6$ [Pa].



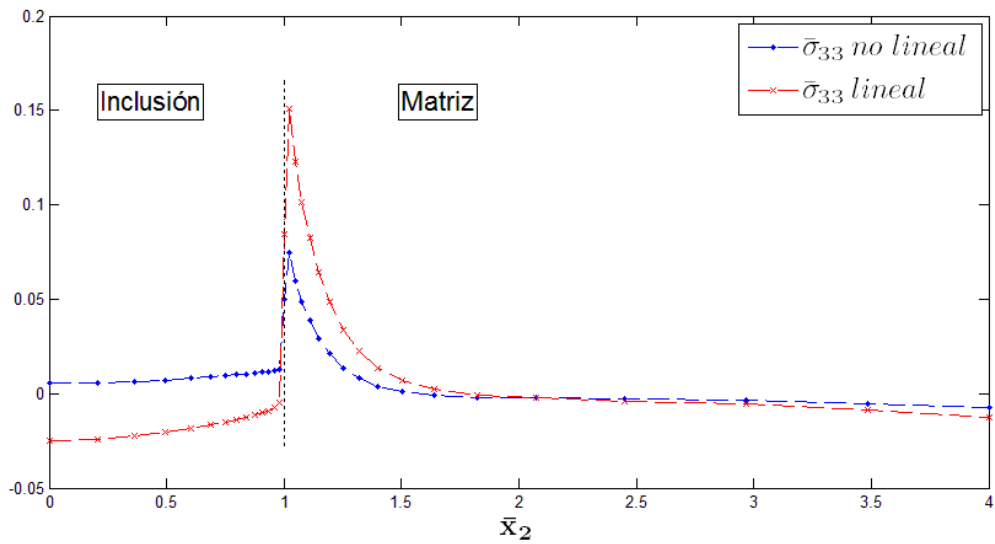
c) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{33}$ para $\sigma_{\infty} = 4.5 \cdot 10^6$ [Pa].



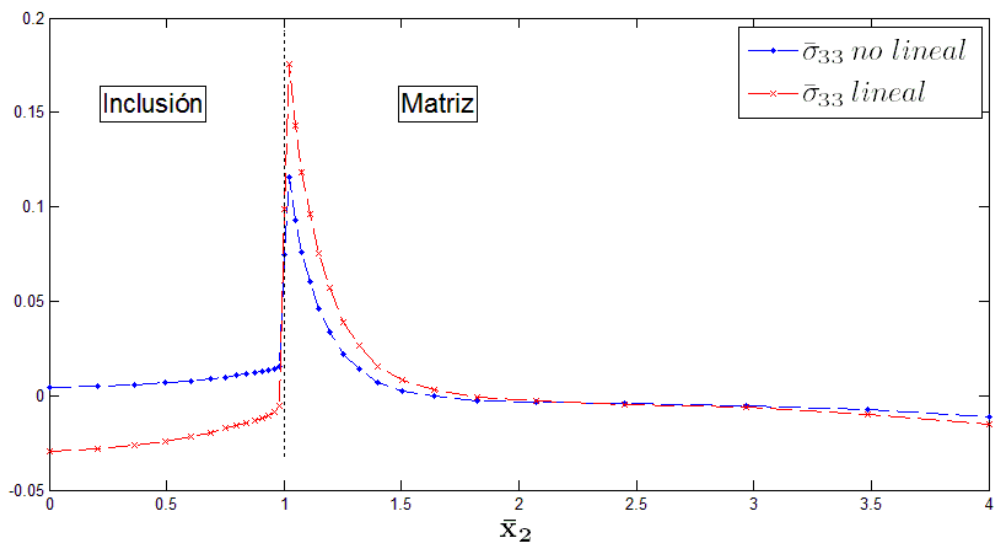
d) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{33}$ para $\sigma_{\infty} = 6 \cdot 10^6$ [Pa].



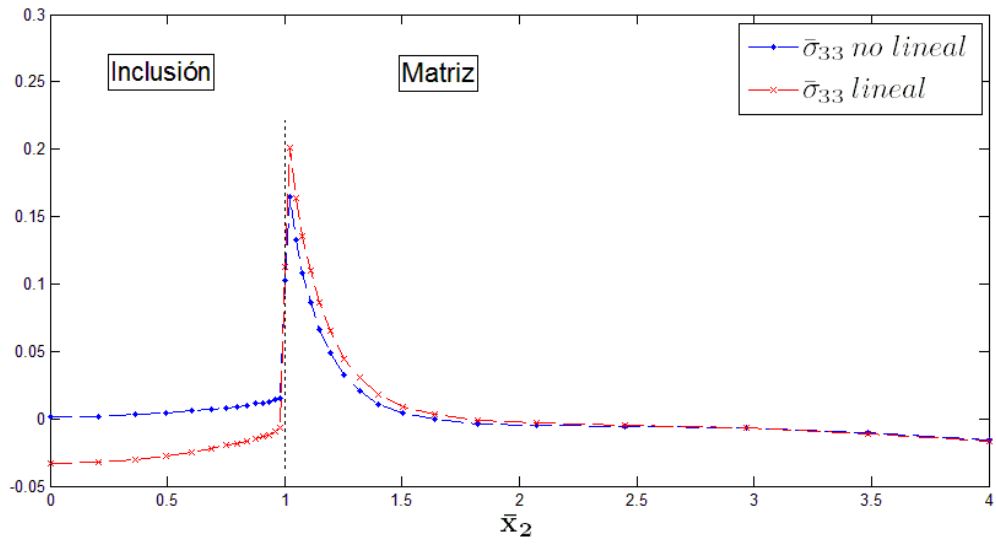
e) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{33}$ para $\sigma_{\infty} = 7.5 \cdot 10^6$ [Pa].



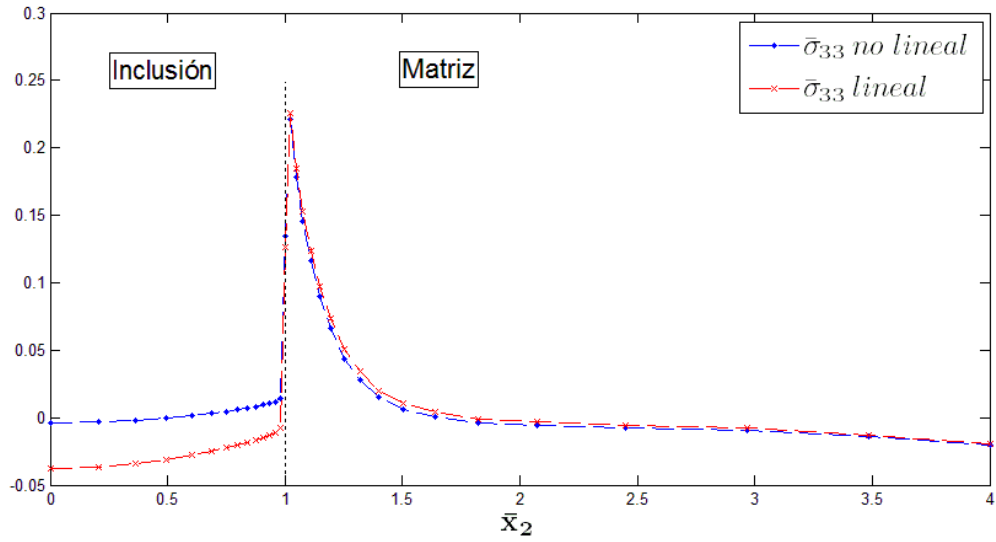
f) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{33}$ para $\sigma_{\infty} = 9 \cdot 10^6$ [Pa].



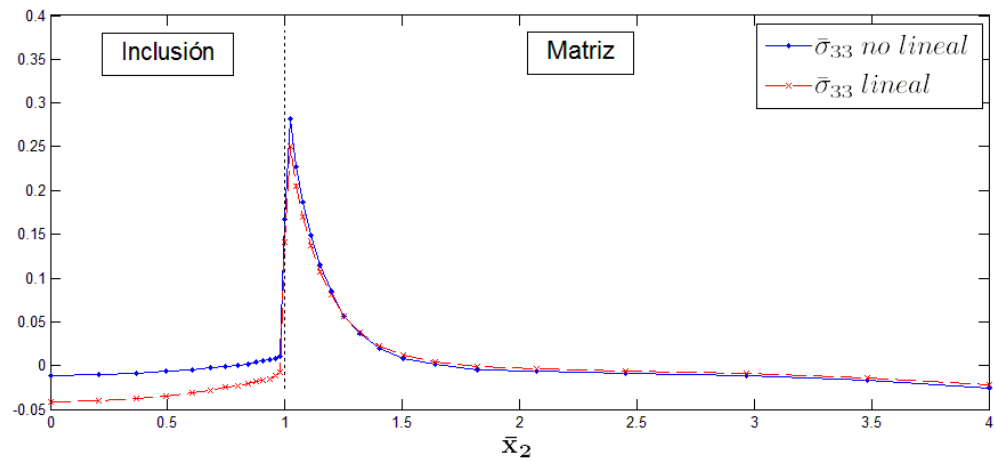
g) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{33}$ para $\sigma_{\infty} = 10.5 \cdot 10^6$ [Pa].



h) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{33}$ para $\sigma_{\infty} = 12 \cdot 10^6$ [Pa].

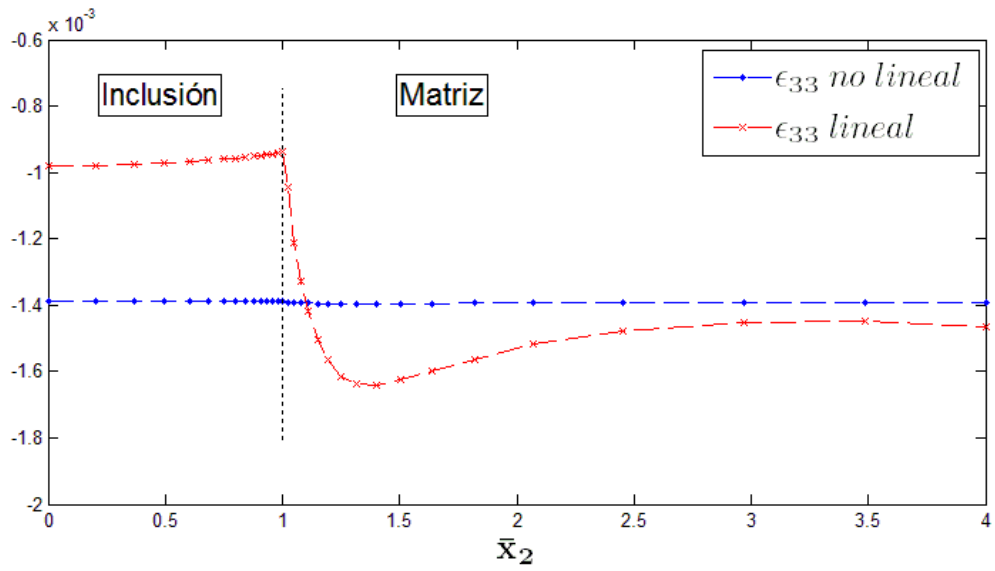


i) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{33}$ para $\sigma_{\infty} = 13.5 \cdot 10^6$ [Pa].

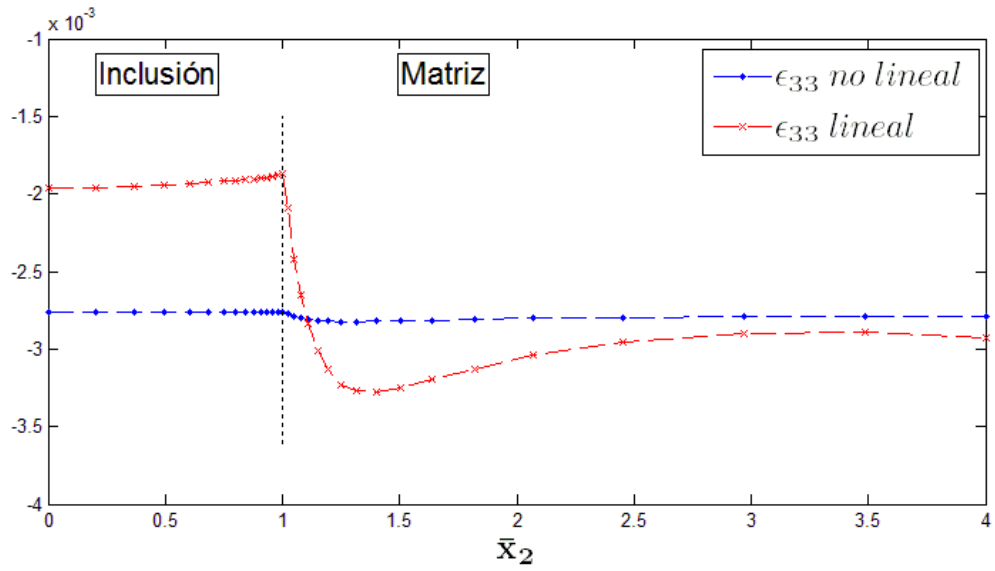


j) Esfuerzo $\bar{\sigma}_{33}$ para $\sigma_{\infty} = 15 \cdot 10^6$ [Pa].

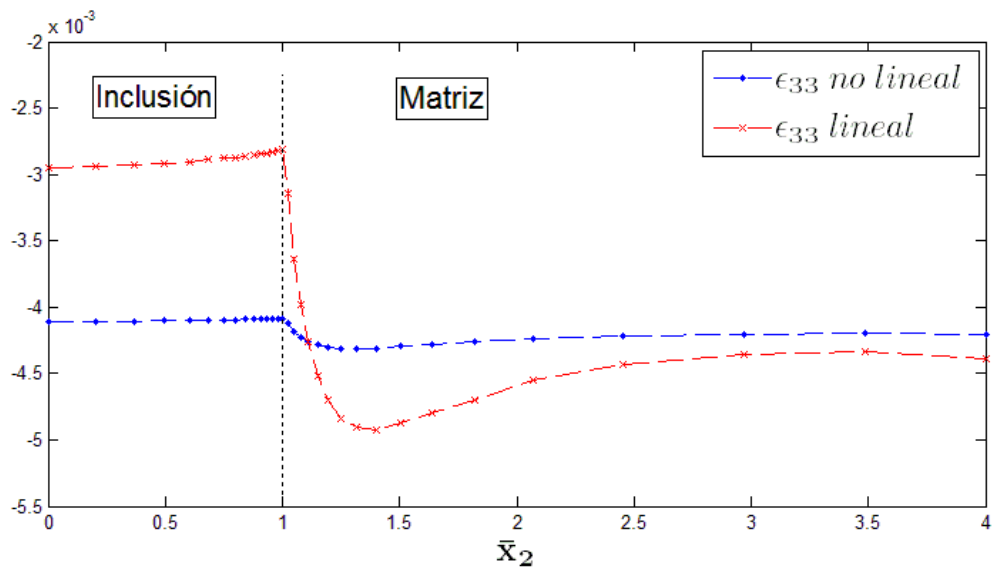
Figura A.11: Evolución del esfuerzo $\bar{\sigma}_{33}$ en la línea $x_1 = x_3 = 0, 0 < x_2 < 4R$ para diferentes cargas externas.



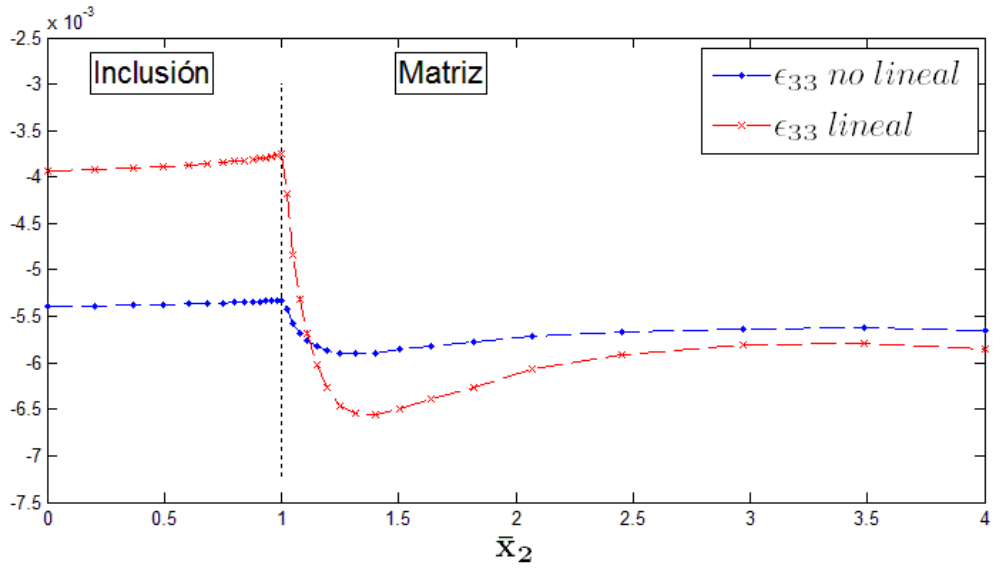
a) Deformación ϵ_{33} para $\sigma_{\infty} = 1.5 \cdot 10^6$ [Pa].



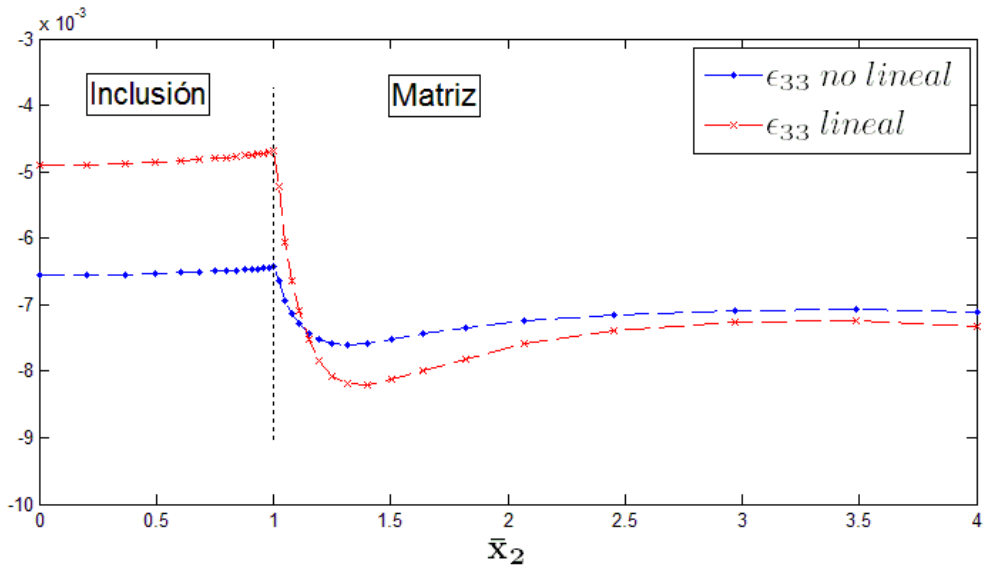
b) Deformación ϵ_{33} para $\sigma_{\infty} = 3 \cdot 10^6$ [Pa].



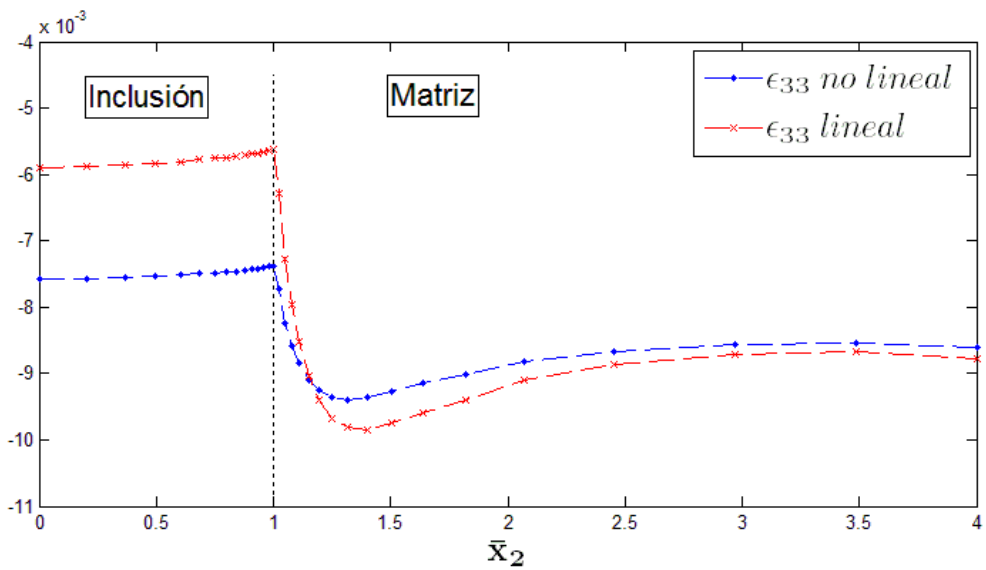
c) Deformación ϵ_{33} para $\sigma_{\infty} = 4.5 \cdot 10^6$ [Pa].



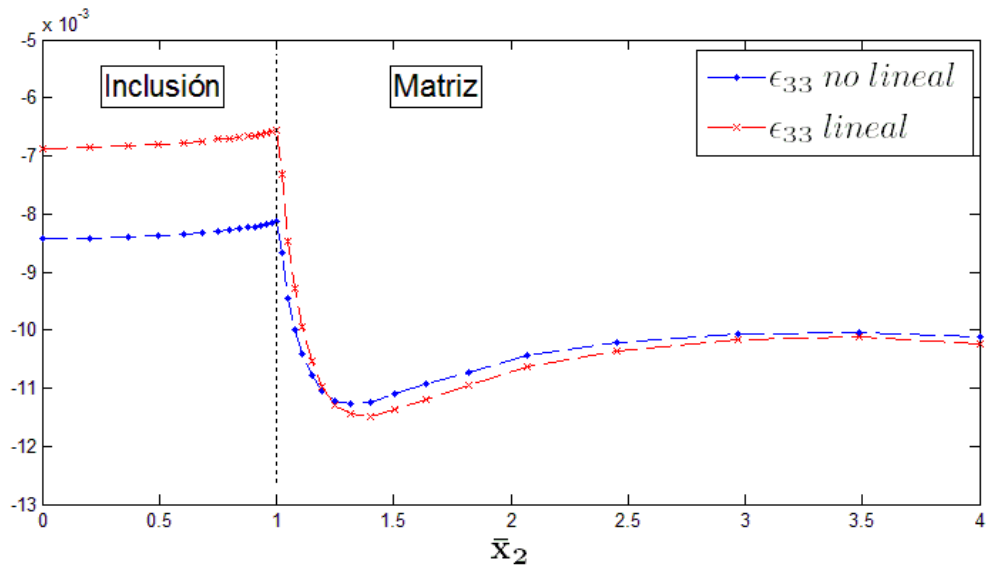
d) Deformación ϵ_{33} para $\sigma_{\infty} = 6 \cdot 10^6$ [Pa].



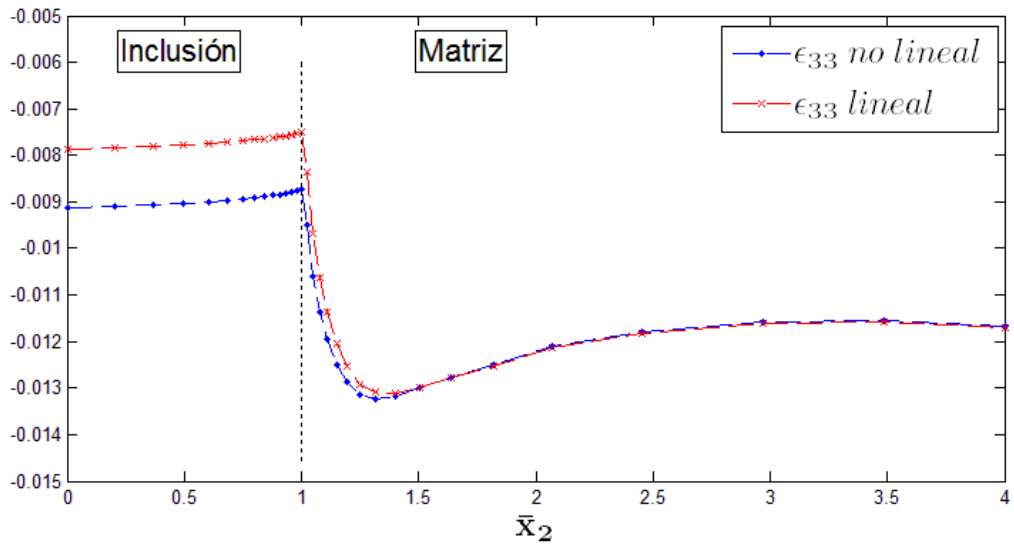
e) Deformación ϵ_{33} para $\sigma_{\infty} = 7.5 \cdot 10^6$ [Pa].



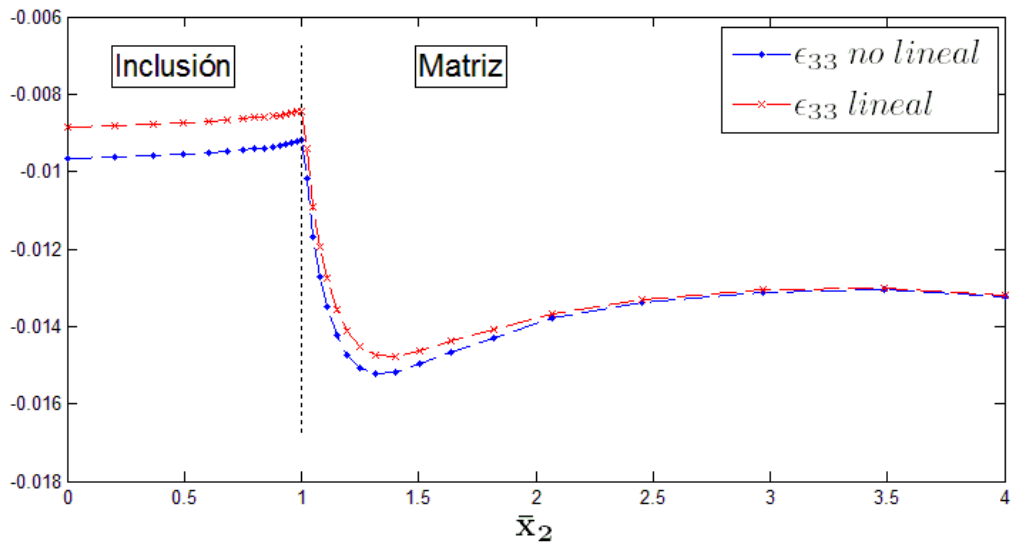
f) Deformación ϵ_{33} para $\sigma_{\infty} = 9 \cdot 10^6$ [Pa].



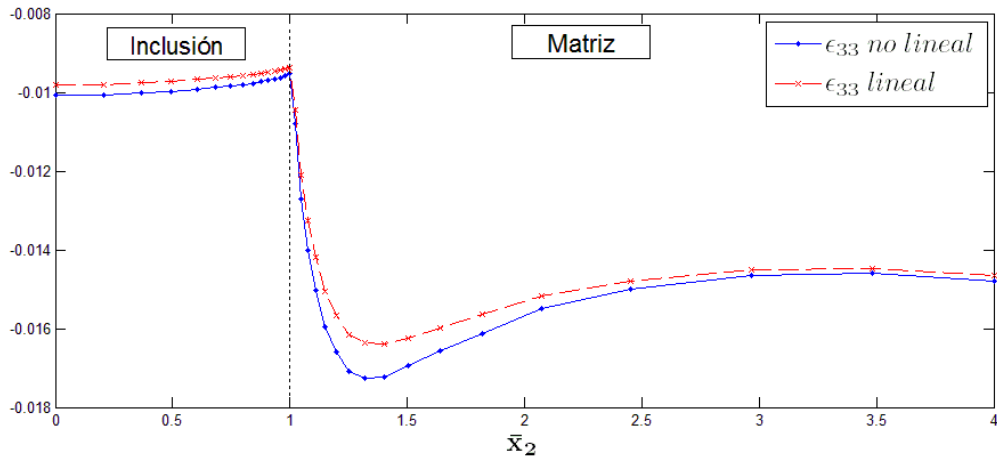
g) Deformación ϵ_{33} para $\sigma_{\infty} = 10.5 \cdot 10^6$ [Pa].



h) Deformación ϵ_{33} para $\sigma_{\infty} = 12 \cdot 10^6$ [Pa].



i) Deformación ϵ_{33} para $\sigma_{\infty} = 13.5 \cdot 10^6$ [Pa].



j.1) Deformación ϵ_{33} para $\sigma_\infty = 15 \cdot 10^6$ [Pa].

Figura A.12: Evolución de la deformación ϵ_{33} en la línea $x_1 = x_3 = 0, 0 < x_2 < 4R$ para diferentes cargas externas.