



UNIVERSIDAD DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL

**FORMULACIÓN Y ANÁLISIS DE MODELOS DINÁMICOS DE
CUASIEQUILIBRIO DE LOCALIZACIÓN URBANA**

**TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA, MENCIÓN TRANSPORTE**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL

CRISTIÁN EDUARDO PRADO GARCÍA

PROFESOR GUÍA:

FRANCISCO MARTÍNEZ CONCHA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:

LEONARDO BASSO SOTZ

CRISTIÁN CORTÉS CARRILLO

RICARDO HURTUBIA GONZÁLEZ

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por CONICYT y FONDEF

SANTIAGO DE CHILE

2014

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR AL

TÍTULO DE: Ingeniero Civil en Transporte y grado de Magíster en Transporte

POR: Cristián Eduardo Prado García

FECHA: 03/09/2014

PROFESOR GUÍA: Francisco Martínez Concha

FORMULACIÓN Y ANÁLISIS DE MODELOS DINÁMICOS DE CUASIEQUILIBRIO DE LOCALIZACIÓN URBANA

El presente trabajo de tesis aborda el desarrollo de modelos dinámicos de localización urbana basados en los modelos de equilibrio, introduciendo desfases temporales en la información en el mercado inmobiliario. Esto se denomina *cuasiequilibrio*.

Se utiliza como base el modelo estático *Random Bidding and Supply Model* (Martínez y Henríquez, 2007), que caracteriza la demanda y la oferta de bienes raíces a través de modelos estocásticos *Logit* en un mercado estático. Los residentes se localizan en la ubicación donde son mejores postores en un remate; los productores ofrecen el número de viviendas en cada localidad que maximiza sus retornos, y el mercado completo se encuentra en equilibrio económico.

Los modelos de cuasiequilibrio desarrollados en este trabajo incorporan dinámica en las decisiones, causada por desfases temporales en la información que emplean los agentes en la toma de decisiones. De este modo, en lugar de alcanzarse el equilibrio en cada instante, aparecen fuerzas de mercado que conducen el resultado al equilibrio en el largo plazo. Los modelos de cuasiequilibrio permiten calcular la localización de la demanda, de la oferta, y los precios de uso de suelo para todos los períodos de análisis de forma dinámica, y bajo condiciones poco restrictivas tienen solución única para cada período.

Se muestra que si los atributos exógenos de la ciudad modelada se estabilizan en el tiempo, entonces la solución del modelo de cuasiequilibrio converge al resultado de equilibrio en el largo plazo. De modo similar, si el cálculo del modelo de cuasiequilibrio se realiza considerando un número mayor de cortes temporales –es decir, con desfases de información que se ajustan más rápidamente–, entonces el resultado de equilibrio se alcanza más rápido. Estos resultados se muestran analíticamente.

Finalmente, por medio de un simulador específicamente desarrollado para los modelos de equilibrio y cuasiequilibrio, se aplican los modelos en una ciudad ficticia, con el fin de estudiar la convergencia de estos bajo diversas condiciones, hacer un análisis de sensibilidad y caracterizar los casos donde aparece inestabilidad en las soluciones.

La principal contribución de este trabajo es avanzar a cerrar la brecha entre los modelos de equilibrio y los de microsimulación, al entregar un método para formular modelos dinámicos económicamente consistentes y que tiendan a aproximarse a un equilibrio.

Tabla de contenido

Capítulo 1	Introducción	1
1.1.	Objetivos	4
1.1.1.	Objetivo general	4
1.1.2.	Objetivos específicos	5
1.2.	Metodología	5
1.3.	Plan de trabajo	6
Capítulo 2	Marco teórico	7
2.1.	Aspectos generales de la economía urbana	7
2.2.	Enfoques <i>bid</i> y <i>choice</i> de los modelos de uso de suelo	8
2.2.1.	Enfoque <i>bid</i>	8
2.2.2.	Enfoque <i>choice</i>	10
2.2.3.	Equivalencia <i>bid-choice</i>	11
2.3.	Random Bidding and Supply Model	12
2.3.1.	Modelo de demanda	13
2.3.2.	Modelo de oferta	14
2.3.3.	Equilibrio de localización	16
2.3.4.	Sistema de equilibrio y condiciones de convergencia	16
2.4.	Modelos dinámicos	18
2.5.	Cuasiequilibrio	20
2.5.1.	Modelo de cuasiequilibrio de Martínez y Donoso (2011)	20
2.5.2.	Modelo de cuasiequilibrio de Hurtubia et al. (2012)	21
Capítulo 3	Formulación de los modelos de cuasiequilibrio	23
3.1.	Aspectos generales de la especificación de los modelos	23
3.2.	Modelos de demanda basados en información de posturas	24
3.2.1.	Modelo D0: de equilibrio	24
3.2.2.	Modelo D1: desfase en atributos de la oferta y en externalidades de localización	26
3.2.3.	Modelo D2: desfase en el cálculo de las posturas de referencia b_h	27
3.3.	Modelos de demanda basados en información de rentas	29
3.3.1.	Modelo D3: rentas desfasadas en el tiempo	30
3.3.2.	Modelo D4: rentas desfasadas, desfase en atributos de la oferta y en externalidades de localización	31

3.4.	Modelos de oferta	32
3.4.1.	Modelo S0: de equilibrio.....	32
3.4.2.	Modelo S1: rezago en la construcción de inmuebles	35
3.5.	Resumen de los modelos	37
Capítulo 4	Propiedades analíticas de los modelos.....	38
4.1.	Propiedades de los modelos de cuasiequilibrio	38
4.1.1.	Exceso o déficit de demanda por categoría en modelos de cuasiequilibrio	38
4.1.2.	Igualdad de la demanda localizada total y la oferta total.....	40
4.1.3.	Población creciente de forma homogénea y a tasa constante	41
4.2.	Expresión general de los modelos	44
4.3.	Contractancia.....	46
4.4.	Convergencia de los modelos en tiempo infinito	50
4.4.1.	Caso con ciudad invariante	50
4.4.2.	Caso donde la ciudad se estabiliza en el tiempo	53
4.4.3.	Dinámica de convergencia entre dos períodos.....	56
4.5.	Resumen de las propiedades demostradas.....	61
Capítulo 5	Simulaciones y resultados	62
5.1.	Descripción general	62
5.2.	Resumen de los modelos implementados	62
5.3.	Especificación de los modelos implementados	63
5.3.1.	Función de postura.....	64
5.3.2.	Valores de parámetros	64
5.4.	Algoritmo de resolución y aspectos generales	66
5.5.	Resumen de los casos analizados empíricamente.....	67
5.6.	Análisis de casos de uso.....	69
5.6.1.	C1 - Modelo irrestricto, ciudad con variables exógenas constantes	69
5.6.2.	C2 - Modelo irrestricto, ciudad con crecimiento a tasas constantes	76
5.6.3.	C3 - Ciudad con población constante y atributos variables en el tiempo y convergentes.....	81
5.6.4.	C4 - Shock único	86
5.6.5.	C5 - Shocks múltiples.....	91
5.6.6.	C6 - Modelo con restricciones	96
5.7.	Análisis de sensibilidad a las condiciones iniciales	101
5.7.1.	C7 - Sensibilidad al punto de partida de la postura de referencia.....	102
5.7.2.	C8 - Sensibilidad al valor inicial de la probabilidad inicial	105

5.7.3.	C9 - Sensibilidad al punto de partida de la oferta.....	109
5.8.	Análisis de sensibilidad a los parámetros de los modelos <i>logit</i>	112
5.8.1.	C10 - Sensibilidad de la solución al parámetro de oferta λ	112
5.8.2.	C11 - Sensibilidad de la solución al parámetro de demanda μ	114
5.8.3.	C12 - Sensibilidad al punto de partida de las probabilidades de localización para distintos valores de λ	118
5.8.4.	C13 - Sensibilidad al punto de partida de las probabilidades de localización para distintos valores de μ	120
5.9.	Resumen de las conclusiones de los casos analizados.....	123
Capítulo 6	Discusión y conclusiones.....	125
6.1.	Discusión.....	125
6.2.	Conclusiones	127
6.3.	Líneas de investigación futura	129
Capítulo 7	Bibliografía.....	130
Anexo 1	Implementación de un prototipo computacional.....	133
	Estructura del programa.....	134
	Archivo Qsim.py	134
	Archivo Readers.py	135
	Archivo Models/model.py	136
	Otros archivos	137
Anexo 2	Análisis específico del modelo D2S1	138
	Modelo D2S1 en ciudad con variables exógenas constantes – comparación con los otros modelos ..	138
	Número de iteraciones.....	138
	Probabilidad de localización	139
	Oferta inmobiliaria	140
	Postura de referencia.....	140
	Modelo D2S1 en ciudad con variables exógenas constantes – número de períodos extendido	141
	Número de iteraciones.....	141
	Probabilidad de localización.....	142
	Oferta inmobiliaria	143
	Postura de referencia.....	143

Índice de tablas

Tabla 3.1: Resumen de los modelos de equilibrio y cuasiequilibrio introducidos	37
Tabla 4.1: Resumen de las propiedades analíticas de los modelos	61
Tabla 4.2: Resumen de los teoremas	61
Tabla 5.1: Resumen de modelos simulados	63
Tabla 5.2: Parámetros de los modelos implementados	65
Tabla 5.3: Resumen de los casos empíricos analizados	68
Tabla 5.4: Valores iniciales ($t=-1$) de la oferta inmobiliaria	113
Tabla 5.5: Valores en $t=9$ de la oferta para cada modelo y para distintos valores de λ	114
Tabla 5.6: Valores iniciales ($t=-1$) de las probabilidades de localización.....	117
Tabla 5.7: Valores en $t=9$ de las probabilidades para cada modelo, para distintos valores μ	117
Tabla 5.8: Resumen de las principales conclusiones del análisis empírico.....	123

Índice de figuras

Figura 4.1: Ejemplo de convergencia de los valores de cuasiequilibrio al valor de equilibrio cuando los atributos de la ciudad se estabilizan	56
Figura 4.2: Ejemplo de convergencia de los valores de cuasiequilibrio al valor de equilibrio del extremo del intervalo cuando las particiones se refinan infinitamente	60
Figura 5.1: Diagrama de flujo general de los modelos	66
Figura 5.2: C1 - Número de iteraciones por modelo y por período.....	70
Figura 5.3: C1 - Probabilidad de localización y número de hogares localizados para la categoría de hogar 0 y la zona 0, por modelo y por período.....	71
Figura 5.4: C1 - Dispersión de la probabilidad de localización, por modelo y por período	72
Figura 5.5: C1 - Oferta localizada en la zona 0, por modelo y por período	72
Figura 5.6: C1 - Postura de referencia relativa del agente 0 respecto al agente 1, por modelo y período	73
Figura 5.7: C1 - Máximo exceso o déficit absoluto de demanda por modelo y período.....	74
Figura 5.8: C1 - Diferencia entre los resultados del modelo de equilibrio y los modelos de cuasiequilibrio en algunos períodos	75
Figura 5.9: C1 - Error absoluto medio respecto de los modelos de cuasiequilibrio respecto al modelo de equilibrio.....	76
Figura 5.10: C2 - Número de iteraciones por modelo y por período.....	77
Figura 5.11: C2 - Probabilidad de localización y número de hogares localizados para la categoría de hogar 0 y la zona 0, por modelo y por período.....	77
Figura 5.12: C2 - Oferta localizada en la zona 0, por modelo y por período	78
Figura 5.13: C2 – Postura de referencia relativa del agente 0 respecto al agente 1, por modelo y período ..	79
Figura 5.14: C2 - Máximo exceso o déficit absoluto de demanda, por modelo y período.....	79
Figura 5.15: C2 – Diferencia entre los resultados del modelo de equilibrio y los modelos de cuasiequilibrio en algunos períodos	80
Figura 5.16: Variaciones β_{hi} de las posturas por período para el escenario C3	81
Figura 5.17: C3 – Número de iteraciones por modelo y por período	82
Figura 5.18: C3 - Probabilidad de localización para la categoría de hogar 0 y la zona 0, por modelo y por período.....	83
Figura 5.19: C3 - Dispersión de la probabilidad de localización, por modelo y por período	83
Figura 5.20: C3 - Oferta localizada en la zona 0, por modelo y por período	84
Figura 5.21: Postura de referencia relativa del agente 0 respecto al agente 1, por modelo y período	84
Figura 5.22: C3 – Máximo exceso o déficit absoluto de demanda por modelo y período	85
Figura 5.23: Diferencia entre los resultados del modelo de equilibrio y los modelos de cuasiequilibrio en algunos períodos	86

Figura 5.24: Variaciones β_{hi} de las posturas por período para el escenario C4	87
Figura 5.25: C4 – Número de iteraciones por modelo y por período	88
Figura 5.26: C4 - Probabilidad de localización y número de hogares localizados para la categoría de hogar 0 y la zona 0, por modelo y por período.....	88
Figura 5.27: C4 – Dispersión de la probabilidad de localización, por modelo y por período.....	89
Figura 5.28: C4 – Oferta localizada en la zona 0, por modelo y por período	89
Figura 5.29: C4 – Postura de referencia relativa del agente 0 respecto al agente 1, por modelo y período ..	90
Figura 5.30: C4 – Máximo exceso o déficit absoluto de demanda por modelo y período	90
Figura 5.31: C4 – Error absoluto medio de los modelos de cuasiequilibrio respecto al modelo de equilibrio	91
Figura 5.32: C5 – Número de iteraciones por modelo y por período	92
Figura 5.33: C5 – Probabilidad de localización y número de hogares localizados para la categoría de hogar 0 y la zona 0, por modelo y por período.....	92
Figura 5.34: C5 – Dispersión de la probabilidad de localización, por modelo y por período.....	93
Figura 5.35: C5 – Oferta localizada en la zona 0, por modelo y por período	93
Figura 5.36: C5 – Postura de referencia relativa del agente 0 respecto al agente 1, por modelo y período ..	94
Figura 5.37: C5 – Máximo exceso o déficit absoluto de demanda por modelo y período	95
Figura 5.38: C5 – Error absoluto medio de los modelos de cuasiequilibrio respecto al modelo de cuasiequilibrio.....	95
Figura 5.39: C6 - Oferta de equilibrio y restricciones a la oferta	96
Figura 5.40: C6 – Número de iteraciones por modelo y por período	97
Figura 5.41: C6 - Multiplicadores de Lagrange de las restricciones en la zona 0, por modelo y por período	98
Figura 5.42: Probabilidad de localización y número de hogares localizados para la categoría de hogar 0 y la zona 0, por modelo y por período.....	98
Figura 5.43: Dispersión de la probabilidad de localización, por modelo y por período.....	99
Figura 5.44: C6 - Oferta localizada en las zonas 0 y 1, por modelo y por período.....	99
Figura 5.45: C6 - Postura de referencia relativa del agente 0 respecto al agente 1, por modelo y período .	100
Figura 5.46: C6 - Máximo exceso o déficit absoluto de demanda por modelo y período.....	100
Figura 5.47: C6 – Error absoluto medio de los modelos de cuasiequilibrio respecto al modelo de equilibrio	101
Figura 5.48: C7 – Número de iteraciones para cada valor del ponderador α , por período, para cada modelo por separado.....	103
Figura 5.49: C7 - Postura de referencia relativa del agente 0 respecto al agente 1, para cada valor del ponderador α , por período, para cada modelo por separado	104
Figura 5.50: C7 – Oferta localizada en la zona 0, para cada valor del ponderador α , por período, para cada modelo por separado	105

Figura 5.51: C8 - Número de iteraciones para cada valor del ponderador α , por período, para cada modelo por separado.....	106
Figura 5.52: C8 – Probabilidad de localización para la categoría de hogar 0 y la zona 0, para cada valor del ponderador α , por período, para cada modelo por separado	107
Figura 5.53: C8 - Postura de referencia relativa del agente 0 respecto al agente 1, para cada valor del ponderador α , por período, para cada modelo por separado	108
Figura 5.54: C8 – Oferta localizada en la zona 0, para cada valor del ponderador α , por período, para cada modelo por separado	109
Figura 5.55: C9 - Número de iteraciones para cada valor del ponderador α , por período, para cada modelo por separado.....	110
Figura 5.56: C9 – Oferta localizada en la zona 0, para cada valor del ponderador α , por período, para cada modelo por separado	111
Figura 5.57: C9 - Postura de referencia relativa del agente 0 respecto al agente 1, para cada valor del ponderador α , por período, para cada modelo por separado	112
Figura 5.58: C11 – Número de iteraciones para cada distintos valores de μ , por período, para cada modelo por separado.....	115
Figura 5.59: C11 – Probabilidad de localización para la categoría de hogar 0 y la zona 0, para distintos valores de μ , por período, para cada modelo por separado	116
Figura 5.60: C12 – Oferta localizada en la zona 0, con $\lambda=4$, para cada valor de la oferta inicial, por período, para cada modelo por separado	119
Figura 5.61: C12 – Oferta localizada en la zona 0, con $\lambda=4$, para cada valor de la oferta inicial, por período, para cada modelo por separado	120
Figura 5.62: C13 – Probabilidad de localización para el hogar 0 en la zona 0, con $\mu=1$, para cada valor de la oferta inicial, por período, para cada modelo por separado	121
Figura 5.63: C13 – Probabilidad de localización para el hogar 0 en la zona 0, con $\mu=5$, para cada valor de la oferta inicial, por período, para cada modelo por separado	122

Capítulo 1

Introducción

La economía urbana es una rama de la ciencia económica que concentra su estudio en la distribución espacial de las ciudades y en la interacción de los distintos agentes y sistemas que la integran. En un contexto mundial donde las ciudades crecen y se multiplican vertiginosamente –el 60% de la población mundial habitará en ciudades en 2030, según estimaciones del banco mundial–, aumentando en complejidad y enfrentando numerosas consecuencias negativas derivadas de su expansión, la planificación urbana formal cobra una importancia cada vez mayor.

En el último siglo han proliferado numerosos modelos de sistemas urbanos, que buscan tanto describir el uso de suelo y los sistemas de transporte de las ciudades como predecir los efectos de las distintas acciones y su evolución en el futuro. Estas representaciones matemáticas de las urbes resultan de gran utilidad para la planificación del desarrollo urbano por parte de las entidades reguladoras, para el análisis del impacto de los proyectos inmobiliarios o de transporte y para la optimización de las políticas sociales.

Entre los estudios pioneros de la economía urbana destaca el realizado por William Alonso (1964), que desarrolló un modelo microeconómico de localización basado en un mecanismo de remate. Su trabajo considera una ciudad simplificada, con un único centro, en torno al cual se distribuyen los agentes (hogares y empresas) según su valoración por la cercanía al centro y al tamaño de sus terrenos, y sentó las bases para la posterior creación de modelos de mayor complejidad.

Dentro de los modelos contemporáneos de localización urbana, destacan dos paradigmas de formulación: los modelos de microsimulación y los de equilibrio.

Los modelos de microsimulación se caracterizan por una formulación basada en reglas de interacción entre los agentes y en la modelación de las elecciones de localización a través de funciones de probabilidad. Algunos exponentes de este enfoque son el modelo UrbanSim (Waddell, 2001), que realiza un proceso dinámico estocástico a nivel agente, y

el modelo PECAS (Hunt y Abraham, 2007), que simula condiciones de equilibrio estático de mercado a través de una estructura microsimulada de matriz insumo-producto.

Entre sus ventajas, los modelos de simulación incluyen el poseer formulaciones flexibles y simples de implementar, así como la capacidad de representar el comportamiento a nivel individuo. Algunos cuentan con fundamento económico y el comportamiento de los agentes se basa en una teoría de comportamiento, pero en general no es posible asegurar la existencia de una solución ni convergencia.

Por su parte, los modelos de equilibrio son en general más coherentes con la teoría microeconómica de localización de firmas y hogares, a costa de una mayor complejidad analítica. Algunos de estos modelos permiten introducir supuestos como el comportamiento maximizador, la interdependencia entre la localización de los distintos agentes (externalidades de localización, economías de aglomeración) y la presencia de economías de escala en el desarrollo inmobiliario. La incorporación de un equilibrio de mercado en la localización inmobiliaria implica que todos los demandantes de viviendas encuentran una localización, todos los oferentes encuentran un comprador, y que los distintos agentes se encuentran en una situación que maximiza su beneficio individual.

El mecanismo de remate, introducido por Alonso, es una característica propia de las transacciones de bienes “cuasi-únicos”; es decir, aquellos que no son divisibles y son diferenciables (es decir, no poseen sustitutos perfectos), por lo que conforman un mercado en sí mismos, como es el caso del suelo. Los agentes participan en el remate realizando posturas, que forman a partir de su disponibilidad a pagar por cada localización, y éstas últimas se asignan al mejor postor. Entre los modelos que siguen este enfoque –conocido como enfoque “*bid*”– se cuentan los de Willson y Bennett (1985), que aplicó al remate un mecanismo de maximización de entropía, y el de Ellickson (1981), que propuso una versión donde los terratenientes escogen al mejor postor a través de un modelo *logit* de elección discreta.

McFadden (1978) y Anas (1982), entre otros, adoptan un enfoque distinto, denominado “*choice*”: se basan en un proceso de elección discreta probabilística, donde los agentes escogen su localización en base a sus atributos, maximizando una función de utilidad. Los agentes enfrentan una restricción presupuestaria y los precios de la propiedad son obtenidos de forma externa, mientras que en el enfoque *bid* se obtienen internamente calculando la máxima postura en cada localización.

Estos dos enfoques de modelación convergen en el trabajo de Martínez (1992), que muestra que bajo el supuesto de cuasi-unicidad, los precios son necesariamente formados a partir de la valoración económica de los compradores (como sugiere el enfoque *bid*), y que en consecuencia, las localizaciones de equilibrio obtenidas con enfoque *bid* son las mismas del enfoque *choice*. Este paradigma integrado de modelación es la base del modelo

*Random Bidding and Supply Model*¹ (Martínez y Henríquez, 2007), que caracteriza la demanda de los residentes, firmas, y la oferta inmobiliaria a través de modelos estocásticos de tipo *logit*.

Bajo supuestos simples, el resultado del modelo RB&SM es único, estable e independiente del punto de partida y de la trayectoria seguida para alcanzar la solución. Sin embargo, su formulación es estática, es decir, no incorpora la interdependencia temporal de las distintas variables urbanas y de las decisiones de los agentes. Así, al considerar múltiples períodos cortos de análisis, los supuestos de información y comportamiento del modelo RB&SM resultan demasiado exigentes. Cuando la dinámica de localización cobra relevancia, se invalidan los supuestos de transferencia instantánea de información entre los agentes y el mercado, y deja de ser aplicable la limpieza de mercado, necesaria para el equilibrio. Los numerosos y complejos cálculos de punto fijo de RB&SM pasan a ser igualmente una limitante para la implementación computacional al momento de multiplicar los períodos de cálculo. Esto pone de relieve la necesidad de un tratamiento distinto para los efectos dinámicos urbanos.

La incorporación de la dinámica en modelos de localización se ha hecho tradicionalmente por medio de modelos de microsimulación –como los ya descritos–, que relajan la base económica a través de funciones de comportamiento simples y supuestos exógenos, con el fin de obtener una implementación más ágil y aplicable a nivel de agente.

Existen también modelos de equilibrio que incorporan dinámica, como el de Anas y Arnott (1991), que calcula simultáneamente el equilibrio en todos los períodos considerando que los agentes tienen información perfecta sobre los equilibrios futuros del mercado inmobiliario (*perfect foresight*); el modelo de Martínez y Hurtubia (2006), que introduce un modelo dinámico de producción inmobiliaria basado en la maximización del valor presente de la rentabilidad esperada, suponiendo que los agentes no cuentan con información futura (*miopía*); y el de Martínez y Muñoz (2010), que integra un modelo dinámico para las etapas de producción e inversión inmobiliaria.

Con el fin de estrechar las diferencias conceptuales entre los modelos de equilibrio y de microsimulación, en los últimos años ha surgido el concepto de *cuasiequilibrio* en modelos dinámicos. Éste consiste en una relajación de las condiciones de equilibrio, permitiendo que los mercados no se “limpien” localmente (es decir, que la oferta y la demanda de inmuebles no necesariamente se igualen en cada localización) y levantando el supuesto de simultaneidad de información entre los agentes, afectando así la noción de equilibrio de corto plazo. Martínez y Donoso (2011) y Hurtubia et al. (2012) introducen el concepto de cuasiequilibrio a partir del modelo RB&SM, pasando a una formulación dinámica que supone comportamiento *miope*, donde los agentes emplean información desfasada en el tiempo en el proceso de decisión. De paso, estas formulaciones conllevan ventajas en la

¹ En adelante “Modelo RB&SM”

implementación algorítmica al eliminar algunos de los complejos cálculos de punto fijo que son característicos de RB&SM, reemplazándolos por cálculos directos a partir de los resultados de períodos previos.

Resulta de interés estudiar las aparentes ventajas de los modelos dinámicos de cuasiequilibrio. Para ello en esta tesis se plantearán distintas formulaciones de dichos modelos, relajando las condiciones que definen el modo en que fluye la información, con el fin de responder múltiples interrogantes: ¿qué tan distinto es el resultado de un modelo dinámico de cuasiequilibrio con respecto a uno de equilibrio? ¿Se mantiene la consistencia económica? ¿Se alcanza un estado estacionario en el largo plazo que represente un equilibrio? ¿Es posible caracterizar la diferencia entre los resultados de los distintos tipos de modelos en el tiempo y la velocidad de convergencia? ¿Cómo impacta la demora en la transferencia y actualización de la información y de la modificación de la oferta en el resultado?

De verificarse estas propiedades de los modelos dinámicos de cuasiequilibrio, se plantea la posibilidad de emplearlos para extender modelos de equilibrio, aprovechando la disponibilidad de mejores datos, así como para formular modelos de microsimulación que sean a la vez eficientes en el cálculo y económicamente consistentes, y que se aproximen a un valor de equilibrio en el largo plazo. Se intentará dar respuesta a éstas y otras preguntas por medio del ensayo de distintas formulaciones, el estudio de su coherencia económica y la comparación tanto analítica como computacional por medio de simulaciones.

1.1. Objetivos

1.1.1. Objetivo general

El objetivo principal es formular y analizar modelos dinámicos de localización urbana bajo supuestos de información imperfecta de los residentes en un contexto dinámico. Para esto, se busca formular varios modelos derivados de diversos supuestos de comportamiento miope y comparar las dinámicas de localización de esos modelos, llamados de cuasiequilibrio, con el resultado del modelo de equilibrio.

1.1.2. Objetivos específicos

- A partir del modelo RB&SM, formular modelos dinámicos de cuasiequilibrio incorporando condiciones como:
 - Relajación en la igualdad de oferta y demanda total (limpieza de mercado).
 - Distintos grados en la disponibilidad de la información sobre el comportamiento de los agentes.
- Comparar matemáticamente las formulaciones de los modelos de cuasiequilibrio y de equilibrio, considerando en especial comportamiento asintótico, convergencia y dependencia de la solución del punto de partida y del camino (*path*) de la simulación.
- Evaluar el efecto de la introducción de “*shocks*” (cambios repentinos de la magnitud una variable entre un período y el siguiente) en el tamaño de la población y en la oferta inmobiliaria.
- Generar un prototipo computacional que incorpore paramétricamente los distintos modelos.

1.2. Metodología

Inicialmente se realizará una revisión bibliográfica de los trabajos relacionados con modelos de localización, incluyendo modelos de equilibrio, de cuasiequilibrio, estáticos y dinámicos, y de microsimulación. Se debe identificar el estado del arte, y destacar posibles líneas de investigación. Se considerará en particular los trabajos de Martínez y Donoso (2011) y Hurtubia, Bierlaire y Martínez (2012) en torno a los modelos de cuasiequilibrio.

A continuación se formularán matemáticamente modelos dinámicos de cuasiequilibrio, relajando las condiciones del modelo RB&SM. Se diseñarán por separado los modelos de oferta y demanda, y se aumentará progresivamente el nivel de desfase intertemporal, hasta llegar en lo posible a un modelo en que toda la información disponible está desfasada en el tiempo. En cada caso se verificará su consistencia matemática y sus propiedades.

Se estudiará la relación analítica entre el modelo RB&SM y los modelos de cuasiequilibrio, estudiando la existencia de convergencia del cuasiequilibrio al equilibrio en el tiempo, la relevancia para la convergencia del tamaño de los períodos escogidos y su velocidad según la forma funcional de los modelos.

Luego se construirá un prototipo computacional que permita simular los distintos modelos introducidos sobre una ciudad tipo, con el fin de evaluar empíricamente los resultados, introduciendo un conjunto de indicadores estandarizados convenientes para

la comparación gráfica y la caracterización del comportamiento de los modelos en el largo plazo.

1.3. Plan de trabajo

La presente tesis se distribuye de la forma detallada a continuación. El Capítulo 2 aborda los aspectos teóricos esenciales que sustentan el trabajo desarrollado. Se revisan los fundamentos de la economía urbana y los principales modelos de equilibrio, microsimulación y cuasiequilibrio, tanto dinámicos como estáticos.

El Capítulo 3 aborda la construcción de modelos de equilibrio y de cuasiequilibrio. Se introducen cinco modelos de demanda, relajando las condiciones de flujo instantáneo de información de atributos del mercado, características de las posturas de otros agentes y de rentas inmobiliarias; y dos modelos de oferta, incorporando desfases en la decisión de construcción por parte de los desarrolladores inmobiliarios.

El Capítulo 4 presenta el análisis teórico de los modelos. En primer lugar se analizan algunas propiedades básicas de estos, para luego proceder a desarrollar una expresión generalizada de los modelos de equilibrio y cuasiequilibrio, que permitirá estudiar la convergencia de estos, la relación de sus resultados en el largo plazo bajo condiciones de estabilización de las variables exógenas y su comportamiento al realizar el cálculo para una partición de un período de tiempo dado.

El Capítulo 5 presenta el análisis empírico realizado con el simulador desarrollado específicamente para ejecutar los modelos de equilibrio y de cuasiequilibrio. Se analizan diversos casos, entre los que se cuentan los de una ciudad con variables exógenas constantes, con variables que se estabilizan en el tiempo y casos de shocks exógenos únicos y múltiples. A continuación se realiza un análisis de sensibilidad de los modelos frente a cambios de las distintas variables exógenas, de los puntos de partida de las variables endógenas y de los parámetros característicos de los modelos *logit*.

Finalmente, los Capítulos 6 y 7 presentan la discusión de los resultados, las principales conclusiones y líneas futuras de investigación, y las referencias empleadas. En los Anexos se incluye además el detalle de la estructura del simulador desarrollado en Python y las referencias para acceder a su código abierto.

Capítulo 2

Marco teórico

En este capítulo se presentan elementos relevantes para la comprensión de la literatura sobre los temas desarrollados en esta tesis.

2.1. Aspectos generales de la economía urbana

Los modelos económicos de uso de suelo se caracterizan por incorporar numerosos aspectos del comportamiento de los agentes del mercado inmobiliario, que resultan relevantes para el estudio de su interacción.

El primero de estos, que es transversal al estudio económico, es el comportamiento maximizador de los agentes. Consiste en la incorporación a la modelación del supuesto de que los distintos participantes del mercado buscan aumentar al máximo posible su bienestar individual, medido en todos los aspectos que resulten relevantes para ellos (y no limitado al beneficio monetario). Supone también que dicho estado puede ser cuantificado para los efectos de la modelación a través de una *función de utilidad*, que relaciona las distintas variables que interesan al agente a través de una cifra.

De ese modo, un individuo que busca una residencia puede valorar la cercanía al transporte público y la presencia de áreas verdes, mientras que un desarrollador inmobiliario puede valorar el tener las mayores ganancias posibles. En presencia de múltiples agentes con intereses enfrentados, la interacción se resolverá a través de un *mercado*, donde, a través de la negociación, los participantes buscarán alcanzar un punto de equilibrio donde cada uno alcance la mejor situación posible, considerando las decisiones del resto.

Otra característica particular del mercado inmobiliario es la presencia de externalidades de localización. Éstas se refieren a la influencia que un agente ejerce, a través de su decisión de localización y sus actividades, en la decisión del resto de los agentes. Un ejemplo de esto es el caso de individuos que buscan localizarse cerca de zonas altamente comerciales, o cerca de residentes que tengan un ingreso similar al suyo.

Un fenómeno derivado de las economías de localización son las economías de aglomeración, que consisten en beneficios derivados de la localización próxima de

personas o actividades económicas. Algunas economías de aglomeración, para las personas, consisten en acceso a un mayor número de servicios a una menor distancia de viaje; y para las firmas, en acceso a un mayor y más diverso mercado de mano de obra y a una menor distancia de sus clientes y proveedores.

Por último, un atributo distintivo del mercado inmobiliario es la cualidad de bienes cuasi-únicos (o diferenciables) de los inmuebles transados; característica de los bienes que no pueden ser producidos en serie, y que por lo tanto no cuentan con un mercado competitivo de comercio. En el caso del mercado de uso de suelo, si bien dos inmuebles pueden ser similares, la localización exacta no puede ser replicada. Las transacciones de bienes cuasi-únicos se resuelven por la vía de un *remate*, donde se fija un precio en función de la valoración de los atributos distintivos del bien por parte de los consumidores.

Los modelos de uso de suelo que cuentan con una estructura microeconómica adecuada, pueden ser diseñados para recoger todos estos fenómenos a través de la modelación del comportamiento de los agentes.

2.2. Enfoques *bid* y *choice* de los modelos de uso de suelo

Los modelos de uso de suelo tradicionalmente han seguido dos enfoques, aparentemente contrapuestos. El primero de estos, conocido como enfoque "*bid*" tiene su origen en el trabajo realizado por Alonso (1964), que desarrolló un modelo de localización de hogares y firmas con comportamiento determinístico en una ciudad monocéntrica. Si bien el modelo incorpora fuertes supuestos, provee la estructura para el enfoque *bid*, donde los terrenos y viviendas se asignan por medio de un remate, donde los hogares y firmas determinan su disposición a pagar según los atributos de la localización y ésta se adjudica a aquel que realiza la mejor oferta, definiendo en el proceso el precio de transacción.

Este enfoque fue retomado y profundizado en trabajos como el de Herbert y Stevens (1960), que utiliza un modelo de programación dinámica con una representación discreta del espacio, y el de Ellickson (1981) que propone una versión desagregada usando un modelo de tipo *logit*.

2.2.1. Enfoque *bid*

El enfoque *bid* puede caracterizarse por el siguiente proceso de maximización de una función de utilidad por parte de los consumidores (denotados por la letra h), donde el subíndice i denota la localización.

$$\begin{aligned} \max U_{hi} &= U(x, z_i, \beta_h) \\ \text{s. a. } px + r_i &= I_h \end{aligned}$$

El vector x corresponde a un bien de consumo agregado de precio p , el vector z_i denota los atributos de la localización, β_h denota los parámetros que rigen las preferencias del consumidor h . El problema está sujeto a una restricción presupuestaria, donde el lado izquierdo está compuesto por el gasto en el bien x y por el precio de renta r_i de la localización i , y el lado derecho corresponde al ingreso I_h del agente h .

A partir de este planteamiento, se deriva la disposición a pagar del agente h , por medio del siguiente procedimiento de dos etapas:

En primer lugar, se maximiza sobre el bien x condicional en la localización i , lo que entrega la función de utilidad indirecta y condicional:

$$V_{hi} = V(I - r_i, P, z_i, \beta_h)$$

A partir de esto, invirtiendo la función de utilidad indirecta para un nivel de utilidad dado, se obtiene la función de gasto:

$$I_h - r_i = V_{hi}^{-1}(U_h, P, z_i, \beta_h)$$

Finalmente, se obtiene la disposición a pagar, que corresponde a la renta que debe pagar el agente h para alcanzar el nivel de utilidad U_h en la localización i :

$$DP_{hi}(I_h, U_h, P, z_i, \beta_h) = I_h - V_{hi}^{-1}(U_h, P, z_i, \beta_h)$$

En los modelos con enfoque *bid*, la localización se asigna al mejor postor, es decir, a aquel que tiene la mayor disposición a pagar por ella. Denotando por h_i^* al postor que se adjudica la localización i , se tiene:

$$h_i^* = \operatorname{argmax}_h(DP_{hi})$$

En el mismo proceso, las rentas quedan definidas como la máxima postura para la localización.

$$r_i = \max_h(DP_{hi})$$

El nivel de utilidad al que optan los consumidores –que define la disposición a pagar– queda determinado de forma relativa y depende del equilibrio. Por ejemplo, si el precio de una localización en particular es conocido, se podrá fijar un nivel de utilidad de referencia (es el caso del modelo de Alonso con el precio agrícola o el precio en el centro de la ciudad). Sobre ese nivel, los consumidores optan por el máximo nivel de utilidad que puedan alcanzar, calculando la postura a partir de ese nivel.

2.2.2. Enfoque *choice*

Un enfoque alternativo es el propuesto por McFadden (1978) y Anas (1982), denominado *choice*, que se basa en la maximización de función de utilidad a través de un modelo de elección discreta con utilidad aleatoria.

En este enfoque la elección es realizada por los residentes, que maximizan una función de utilidad para un conjunto de alternativas de localización. De este modo, los consumidores se adjudican aquella que les entregue una mayor utilidad condicional a su restricción presupuestaria, y los precios son fijados de antemano por los oferentes. Esto da lugar a una de las principales diferencias entre el enfoque *bid* y el *choice*: en el primero, los precios se fijan de forma endógena a partir de las posturas de los consumidores (sujetos al nivel de utilidad), mientras que en el segundo estos últimos son tomadores de precios.

Los modelos de elección discreta de utilidad aleatoria se basan en una función de utilidad compuesta por una parte determinística y una parte estocástica. La primera es responsable de modelar las preferencias del consumidor por los distintos atributos de las alternativas, mientras que la segunda es una variable aleatoria de media nula, que captura diversos errores de modelación y los aspectos estocásticos propios de la decisión humana.

La utilidad que un hogar h experimenta por escoger una localización i se representa por un proceso de maximización de la forma:

$$\max_i \tilde{V}_{hi} = V(z_i, \beta_h) + \varepsilon_{hi}$$

donde z_i representa los atributos de la localización y β_h los parámetros que describen el comportamiento del agente tipo h . La variable ε_h representa el error aleatorio asociado a la decisión. Uno de los modelos más utilizados para la elección discreta es el *logit*, que se caracteriza por considerar errores independientes de la localización (sólo dependen del agente h), independientes entre ellos, y que siguen una distribución idéntica tipo *Gumbel*.

$$\varepsilon_h \sim \text{Gumbel}(\mu, 0) \quad \forall h$$

V_{hi} representa una función de utilidad condicional indirecta, derivada de un proceso de máxima utilidad sujeto a una restricción presupuestaria. El enfoque *choice* considera precios de renta exógenos, derivados del equilibrio de un mercado competitivo (Anas 1982), mientras que en el enfoque *bid* los precios son definidos por la máxima postura, y el proceso de equilibrio define las utilidades máximas que alcanzan los consumidores.

Bajo este esquema es posible calcular la probabilidad de que dado un agente h sea escogida la localización i a través de la siguiente expresión, donde $V_{hi} = V(z_i, \beta_h)$:

$$P_{i|h} = \frac{\exp(\mu V_{hi})}{\sum_i \exp(\mu V_{hi})}$$

2.2.3. Equivalencia *bid-choice*

El desarrollo de distintos modelos basados en los enfoques *bid* y *choice* dio lugar a esfuerzos orientados a la creación de una teoría unificada. Martínez (1992) compara ambos enfoques en el mercado de terrenos residenciales, concluyendo que ambos “son equivalentes, en el sentido de que producen la misma distribución de hogares en el espacio”.

Esta equivalencia tiene por elemento fundamental el supuesto de que los precios de los terrenos son endógenos en ambos casos, pues resultan de las valoraciones de los compradores, de acuerdo a lo que sugiere el enfoque *bid*. Esta condición corresponde a la cuasi-unicidad de las localizaciones: dado que no existe un mercado de bienes intercambiables para cada localización, las transacciones se realizan en un proceso de remate, donde se fijan los precios.

Bajo este supuesto, el enfoque *choice* queda expresado por la siguiente expresión, donde se hace explícita la dependencia de la utilidad en el precio:

$$\max_i \tilde{V}_{hi} = V(z_i, \beta_h, r_i) + \epsilon_{hi}$$

Martínez (1992) muestra que esto puede reescribirse como una maximización de excedente de consumidor, que se calcula como la diferencia entre la disposición a pagar del consumidor y el precio de la localización:

$$\max_i CS_{hi} = DP_h(z_i, \beta_h, U_h) - r_i$$

Por su parte, los precios de suelo se calculan de forma endógena a través de un proceso de remate, y corresponden a la máxima disposición a pagar

$$r_i = \max_h DP_h(z_i, \beta_h, U_h)$$

De este modo, al reemplazar r_i en CS_{hi} , ambas expresiones se combinan en el siguiente problema de maximización:

$$\max_i CS_{hi} = \max_i \left\{ DP_h(z_i, \beta_h, U_h) - \max_h DP_h(z_i, \beta_h, U_h) \right\}$$

Esta expresión reúne ambos enfoques a través de un modelo de equilibrio, donde las rentas se derivan de un modelo de oferta y la expresión completa entrega la demanda residencial. En la localización donde un consumidor es el mayor postor, su excedente alcanza su valor máximo, que es cero. Se cumple que los consumidores se localizan en los terrenos donde su utilidad es máxima y que la asignación se realiza a través de un remate, con lo que tanto el enfoque *bid* como el *choice* están representados y entregan la misma distribución.

Martínez (1992) extiende este modelo a la aplicación de la teoría de utilidad aleatoria, considerando que las funciones de postura de los consumidores tienen asociado un error estocástico independiente e idénticamente distribuido de tipo *Gumbel*

$$\widetilde{DP}_{hi} = DP_{hi} + \epsilon_h$$

donde $DP_{hi} = DP_h(z_i, \beta_h, U_h)$ y $\epsilon_h \sim \text{Gumbel}(\mu, 0)$

Bajo este supuesto, la probabilidad de que un agente h se adjudique una localización dada i en el remate (según el enfoque *bid*) es:

$$P_{h|i} = \frac{\exp(\mu DP_{hi})}{\sum_h \exp(\mu DP_{hi})}$$

La renta de la localización i en este modelo es:

$$r_i = \frac{1}{\mu} \ln \sum_h \exp(\mu DP_{hi})$$

Y la probabilidad de que un agente h dado escoja la localización i (según el enfoque *choice*) es:

$$P_{i|h} = \frac{\exp \mu(DP_{hi} - r_i)}{\sum_i \exp \mu(\mu P_{hi} - r_i)}$$

El marco conceptual de la equivalencia *bid-choice* sustenta el modelo *Random Bidding & Supply Model* (Martínez y Henríquez, 2007) que se describe a continuación.

2.3. Random Bidding and Supply Model

El "*Random Bidding & Supply Model*" (Martínez y Henríquez, 2007), denotado en adelante RB&SM, modelo de posturas y oferta estocásticas, surge de la equivalencia de los enfoques *bid* y *choice*, y de la aplicación de modelos de utilidad estocástica tipo *logit* sobre las funciones de postura. Busca representar el comportamiento de hogares y firmas, consumidores del mercado inmobiliario, y de los desarrolladores inmobiliarios, que proporcionan la oferta del mercado. Se modela la interacción de ambos en un mercado donde la asignación se lleva a cabo por medio de remates, incorporando restricciones a la oferta debidas a las regulaciones del uso de suelo, e incorporando fenómenos de economías de escala y de diversidad en la oferta y de externalidades de localización en la demanda.

Como se mostrará, el modelo incorpora la existencia de economías de escala y diversidad en la oferta, de externalidades de localización, y el cumplimiento de restricciones regulatorias, así como la condición impuesta de limpieza de mercado (todos los

consumidores ven satisfecha su demanda y todos los oferentes encuentran comprador). Estas condiciones dan lugar a ecuaciones no lineales de punto fijo, que se resuelven algorítmicamente en el modelo.

Se entregan condiciones que aseguran la convergencia del algoritmo a una solución única y estable bajo condiciones amplias.

Se considera que los terrenos urbanos son bienes cuasi-únicos, transados por medio de remates, y que los hogares y las firmas compiten por las localizaciones y éstas son asignadas al mejor postor.

Los hogares y las firmas son clasificados en N_H categorías de consumidores, denotados por el subíndice h . En cada categoría hay H_h consumidores. Por su parte, la oferta se caracteriza por unidades diferenciadas por la zona y el tipo de bien inmueble, denotados respectivamente por los subíndices i y v . Se consideran N_I zonas y N_V tipos de inmueble, y un total de S_{vi} inmuebles en cada categoría combinada.

A continuación se describen los modelos de comportamiento que rigen a cada uno de los agentes que participan en el mercado, y su interacción.

2.3.1. Modelo de demanda

Como se señaló anteriormente, se consideran N_H categorías de consumidores, y cada categoría, denotada por el subíndice h , contiene a H_h hogares o firmas.

El comportamiento de cada categoría de consumidores h queda determinado por su función de postura B_{hvi} que define su máxima disposición a pagar por un inmueble tipo v en una zona i .

La función de disposición postura en el enfoque *bid* se deriva de un modelo de utilidad, de acuerdo a lo descrito en la sección 2.2.1. Se asume la siguiente forma aditiva:

$$B_{hvi} = b_h + b_{hvi} + b$$

El término b_h , denominado “postura de referencia”, es un término que depende sólo de la categoría de consumidores, y que permite ajustar los niveles de utilidad para alcanzar el equilibrio; b_{hvi} representa la valoración de los atributos de los inmuebles y las zonas, y “ b ” es una constante independiente que permite ajustar las posturas a un nivel absoluto en el mercado.

Se incorpora el supuesto de que las posturas poseen errores estocásticos asociados, idénticamente distribuidos (con distribución *Gumbel* de parámetros $(\mu, 0)$) e

independientes (*IID*). De esto se obtiene la siguiente expresión para las probabilidades de localización de un hogar h dada una zona i y un hogar v :

$$P_{h|vi} = \frac{H_h \exp(\mu B_{hvi})}{\sum_h H_h \exp(\mu B_{hvi})}$$

La componente b_{hvi} permite en particular recoger los efectos de externalidades de localización y economías de aglomeración, haciendo explícita su dependencia de la localización y la oferta en cada zona, es decir:

$$b_{hvi} = b_{hvi}(P_{\cdot|i}, S_i)$$

En la expresión anterior, los puntos que reemplazan subíndices permiten representar vectores que recorren todos los valores posibles de la variable reemplazada². Así,

$$P_{\cdot|i} = \{P_{h|vi} : h \in \{1 \dots N_h\}, v \in \{1 \dots N_v\}\}$$

El vector S_i se define de forma análoga, recorriendo los valores de v .

La componente de la postura b_{hvi} depende de los valores del vector P , que a su vez depende de las posturas. Esto da lugar a la siguiente ecuación de punto fijo:

$$P_{h|vi} = \frac{H_h \exp \mu (b_h + b_{hvi}(P_{\cdot|i}, S_i))}{\sum_h H_h \exp \mu (b_h + b_{hvi}(P_{\cdot|i}, S_i))}$$

El término b se cancela en el numerador y el denominador, por no depender de h .

2.3.2. Modelo de oferta

La oferta de bienes inmuebles se modela a través de un modelo del comportamiento de los desarrolladores inmobiliarios, que construyen unidades discretas y diferenciadas por la zona de localización y el tipo de inmueble. Se supone que para un inmueble de tipo v ubicado en la zona i , el beneficio del desarrollador inmobiliario está dado por la siguiente expresión:

$$\pi_{vij} = S_{vij}(r_{vi} - c_{vij}) + \delta_{vij}$$

Donde S_{vij} es el número de inmuebles construidos por el productor j , y $r_{vi} - c_{vij}$ corresponde a los beneficios conseguidos por cada productor en cada unidad

² Esta notación (puntos reemplazando subíndices para denotar vectores) es utilizada frecuentemente en este trabajo.

desarrollada. Los términos δ_{vij} corresponden a errores estocásticos, que se suponen de tipo *Logit*, independientes e idénticamente distribuidos, con parámetros $(0, \lambda)$.

La renta r_{vi} se obtiene directamente del modelo de demanda, y corresponde a la máxima postura para un tipo de bien inmueble en una zona. Esto permite ligar económicamente la oferta y la demanda a través de un precio, lo que, como se describió anteriormente, es una ventaja de los modelos de equilibrio frente a los de microsimulación.

Los costos c_{vi} pueden capturar las economías de escala que enfrenta el productor en cada submercado. Esto se expresa como $c_{vij}(S_{vij})$, donde el costo depende del número de unidades producidas del mismo tipo en una misma zona. También es posible introducir economías de diversidad, donde la producción de bienes en distintas zonas puede dar lugar a beneficios. Esto se representa con la expresión $c_{vij}((S_{...})_{v'i'j'})$ –que también generaliza las economías de escala–, donde el costo depende de la combinación de inmuebles producida en todo el mercado por todos los desarrolladores inmobiliarios.

El problema del productor está dado por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \max_{S_{vij}} \pi_j &= \sum_{vi} S_{vij} (r_{vi}(S_{...}) - c_j(S_{...})) \\ \text{s. a.} \quad &\sum_{vi} a_{vi}^k S_{vi} \leq R_i^k \quad \forall k = 1, \dots, K_i \quad \forall i = 1, \dots, N_I \\ &\sum_{vi} S_{vij} = S_j \\ &\sum_{vij} S_{vij} = S \end{aligned}$$

Los valores a_{vi}^k y R_i^k son los parámetros de restricciones lineales que representan las regulaciones urbanas en la producción inmobiliaria. Si bien la linealidad de éstas constituye una limitación al modelo, en la práctica refleja de buena forma las restricciones que enfrenta el uso de suelo.

Las últimas dos restricciones al problema de maximización corresponden a la fijación exógena del tamaño del mercado y de las partes del mercado correspondientes a cada productor. Este último dato es optativo, pero resulta útil en caso de estar disponible.

La resolución de este problema se realiza asumiendo que π es una variable entrópica, lo que entrega las siguientes soluciones:

$$S_{vij}^* = SP_{vij} = S \frac{\exp \lambda (\tilde{\pi}_{vij} - \rho_j)}{\sum_{vij} \exp \lambda (\tilde{\pi}_{vij} - \rho_j)}$$

donde ρ_j es el multiplicador de Lagrange de la restricción del tamaño de mercado de cada productor y $\tilde{\pi}_{vij}$ está dado por la siguiente expresión:

$$\tilde{\pi}_{vij} = \pi_{vij} + \pi'_{vij} - \sum_k \gamma_i^k a_{vi}^k$$

con $\pi'_{vij} = \sum_{v'i'} S_{v'i'} \frac{\partial \pi_{v'i'j}}{\partial S_{vij}}$ un término que ajusta las externalidades entre productores debidas a las economías de escala y diversidad, y γ_i^k es el multiplicador de Lagrange de la primera restricción, dados por:

- $\gamma_i^k = 0 \ \forall k \neq \bar{k}$, donde \bar{k} denota la única restricción activa en cada zona (pues sólo una puede ser activa, debido a que se trata de restricciones lineales);
- $\gamma_i^{\bar{k}} = 0$ si ninguna restricción es activa;
- $\gamma_i^{\bar{k}} = \frac{1}{\lambda a_{0i}^{\bar{k}}} \ln \left[\frac{S}{R_i^{\bar{k}}} \sum_{vj} a_{vi}^{\bar{k}} \exp \lambda (\pi_{vij} + \pi'_{vij} - \gamma_i^{\bar{k}} (a_{vi}^{\bar{k}} - a_{0i}^{\bar{k}}) - \rho_j - \hat{\pi}_j) \right]$.

Con $\hat{\pi}_j = \frac{1}{\lambda} \ln \sum_{vij} \exp \lambda (\pi_{vij} + \pi'_{vij} - \rho_j - \lambda_i^{\bar{k}} a_{vi}^{\bar{k}})$ y donde se escoge un parámetro $a_{0i}^{\bar{k}}$ cualquiera entre los parámetros $a_{vi}^{\bar{k}}$ para efectuar una factorización útil para el cálculo.

2.3.3. Equilibrio de localización

La condición adicional que permite que el modelo se equilibre en oferta y demanda es la siguiente, llamada “condición de equilibrio”:

$$\sum_{vi} S_{vi} P_{h|vi} = H_h$$

donde H_h es el número de agentes de la categoría h , valor exógeno al modelo.

Esta condición corresponde a asegurar que *todos los agentes se localizan*. Reemplazando la expresión de la probabilidad, es posible despejar el valor b_h de la postura, que se denomina “postura de referencia”. Este término permite que los agentes ajusten sus posturas con el fin de garantizar que todos encuentren una localización, y se calcula como:

$$b_h = -\frac{1}{\mu} \ln \left(\sum_{vi} S_{vi} \exp \mu (b_{hvi} - r_{vi}) \right)$$

2.3.4. Sistema de equilibrio y condiciones de convergencia.

La expresión demanda introducida pueden resumirse en la siguiente ecuación de punto fijo, expresadas de forma general:

$$P = P(b, P, S)$$

donde $P = P_{i..}$, $b = b_i$ y $S = S_{i..}$ son los vectores de probabilidades, posturas de referencia y oferta inmobiliaria respectivamente. Cabe señalar que en la ecuación de punto fijo presentada, cada término del vector de probabilidad no depende de la totalidad de los términos de S .

Del mismo modo, las ecuaciones de oferta y del parámetro de regulación son:

$$\begin{aligned} S &= S(b, P, S, \gamma) \\ \gamma &= \gamma(b, P, S, \gamma) \end{aligned}$$

Finalmente, la ecuación de equilibrio se resume del siguiente modo:

$$b = b(b, P, S)$$

Estas cuatro ecuaciones vectoriales dan lugar a un sistema no-lineal altamente complejo. Se presenta un algoritmo que, bajo condiciones que se discuten a continuación, converge siempre a la solución, y se muestra que ésta es única. Dicho algoritmo es eficiente en el cálculo, y su complejidad escala de forma sublineal con el tamaño del conjunto de datos.

Se demuestra la contractancia de cada una de las 4 ecuaciones de punto fijo con respecto a la propia variable calculada. No se demuestra que el modelo sea contractante para las variables “cruzadas”, por lo que el sustento de la contractancia es en última instancia empírico. Sin embargo, se derivan condiciones necesarias para la existencia de una solución, suponiendo una forma funcional de las posturas. De la ecuación de probabilidades se puede obtener una condición para la varianza de las posturas:

$$\frac{1}{\mu} > \frac{1}{S} |H_{hvi} Z_h \beta_h|$$

Y de la ecuación de oferta una condición para la varianza de los beneficios de los productores:

$$\frac{1}{\lambda} > \frac{1}{S} \left| S_{vi} \sum_h P_{h|vi} \left(\beta_h \sum_g Z_g P_{g|vi} + \alpha_h X_{vi} \right) \right|$$

Estas condiciones no son fijas, pues dependen de los valores de las variables endógenas, por lo que en el algoritmo de solución deben ser recalculadas en cada iteración. Son cotas máximas para los parámetros de los modelos *logit* de posturas y de beneficios del desarrollador. Dado que dichos parámetros se relacionan de forma inversa con la varianza de los modelos, cuando alcanzan un valor muy grande, el modelo se acerca al escenario *todo o nada*, donde los postores se localizan directamente en el inmueble donde sean mejor postor y los oferentes desarrollan exclusivamente en la zona que maximiza su beneficio (en lugar del suavizado estocástico que permite un modelo *logit* con un

parámetro menor). En consecuencia, estas condiciones autorizan la existencia de múltiples soluciones solamente para valores de los parámetros μ y λ demasiado grandes, lo que se verifica empíricamente.

2.4. Modelos dinámicos

La incorporación de dinámica en modelos de localización residencial se ha hecho tradicionalmente por medio de modelos de microsimulación, que emplean funciones de comportamiento simples y supuestos exógenos, con el fin de obtener una implementación más ágil y aplicable a nivel de agente.

UrbanSim (Waddell, 2001) es un modelo de microsimulación que asigna localizaciones de hogares y empleos por medio de selección Montecarlo, considerando funciones de localización con probabilidades y restricciones exógenas. Los precios son generados a partir de datos históricos observados (y no de disponibilidades a pagar) y de atributos hedónicos. Las reglas de asignación de demanda y oferta buscan la maximización de los beneficios individuales de los respectivos agentes. No obstante, no se considera un mecanismo de remate ni un equilibrio de mercado. La dinámica se incorpora a través del desarrollo de nuevas zonas a partir de las ganancias esperadas, calculadas a partir de los precios del año previo.

PECAS (Hunt y Abraham, 2007) incorporan equilibrio de mercado a través de matrices input-output, incluyendo bienes, servicios, trabajos, terreno y limpieza de mercado con precios de equilibrio. El modelo es altamente complejo y no asegura existencia ni unicidad de un equilibrio estable, pero constituye un avance importante en la incorporación de consistencia económica.

El modelo DELTA, desarrollado por Simmonds y Still (1998), es un modelo dinámico que consta de diferentes módulos independientes que interactúan entre sí a través de sus valores de salida: un módulo económico, uno de uso de suelo y uno de migración, cada uno compuesto por submódulos. El submódulo económico predice la demanda residencial y no residencial en categorías agregadas, y el modelo de uso de suelo localiza hogares y empleos a través de un modelo lineal, donde la superficie utilizada es proporcional al ingreso e inversamente proporcional a la renta observada en el pasado. Utiliza precios históricos y costos de desarrollo para determinar la creación de nueva oferta inmobiliaria, considerando un desfase entre la decisión de construcción y su término. Las rentas se basan en valores históricos, y son modificadas por cambios endógenos en la demanda, la oferta o la accesibilidad.

Entre los modelos de equilibrio que incorporan dinámica intertemporal, se cuenta Anas y Arnott (1991), que resuelve un equilibrio Walrasiano, con un modelo de elección discreta

para la localización y para la oferta. El equilibrio dinámico se resuelve bajo el supuesto de que los productores predicen los precios futuros de equilibrio (supuesto “*perfect foresight*”), asignando valores residuales a los bienes en el infinito.

Martínez y Hurtubia (2006) integra el modelo de demanda de RB&SM con un modelo dinámico de producción inmobiliaria basado en la maximización del valor presente de la rentabilidad esperada por la construcción y venta de viviendas. Se incorporan retrasos en la información utilizada para construir, lo que da lugar a diferencias entre la oferta y la demanda inmobiliaria. Los precios se calculan por la vía de un modelo de equilibrio dinámico. Supone un desfase entre el inicio de la construcción y la venta de un bien inmueble, e incorpora el supuesto de *miopía*, de acuerdo al cual los oferentes sólo utilizan información histórica en la toma de decisiones, al no ser capaces de predecir el comportamiento futuro del sistema urbano.

Por su parte, Martínez y Muñoz (2010), siguiendo la estructura del mercado de bienes inmobiliarios propuesta por Martínez y Roy (2004), incorpora la existencia de agentes inversionistas propietarios de las localizaciones, que constituyen una capa intermedia entre la producción de inmuebles y la localización residencial. Cada período de decisión se subdivide en una etapa de inversión, donde los agentes propietarios realizan transacciones sobre su stock de inmuebles, y un período de operación, donde los inmuebles son asignados a sus locatarios. El enfoque de este trabajo está puesto en la primera etapa, que se representa por un modelo de máxima utilidad, donde las opciones son la inversión en bienes inmuebles y en instrumentos financieros a tasa de mercado.

Otro enfoque para los modelos de microsimulación corresponde al uso de “autómatas celulares”, introducidos por John Von Neuman (1966). Se trata de modelos dinámicos formados por un conjunto de elementos sencillos idénticos entre sí, que interactúan localmente unos con otros a través de reglas de comportamiento en un proceso iterativo, pudiendo exhibir comportamientos complejos en su conjunto. En general se caracterizan por la existencia de una grilla en un plano bidimensional, donde cada celda puede estar en un número finito de estados, y reacciona al estado de sus vecinos a través de una regla de evolución en cada período de la simulación.

Uno de los exponentes más conocidos de este enfoque es el “juego de la vida” de John Conway, presentado al público en *Scientific American* por Gardner (1970), donde los estados posibles para cada celda son “vivo” (1) o “muerto” (0). La regla de evolución indica que si una célula tiene tres o más vecinos vivos, al turno siguiente estará viva, y si tiene un número menor, al turno siguiente estará muerta. La evolución del autómata celular está determinada por el estado inicial, y se observan distintos tipos de patrones, entre ellos algunos que crecen indefinidamente y otros que desaparecen o se estabilizan.

Numerosos trabajos recientes utilizan autómatas celulares para modelar el comportamiento de sistemas urbanos. Entre ellos, se cuenta el modelo CityCA propuesto

por Ramírez et. al (2014). El modelo, aplicado a Santiago de Chile, considera una grilla equiespaciada que representa un sector geográfico real, y los distintos agentes corresponden a empresas, que pueden ocupar una celda y tienen la posibilidad de desplazarse en la grilla dentro de un radio variable determinado exógenamente. La regla de asignación refleja el criterio de que las empresas buscarán estar en localizaciones que tengan la mayor cantidad de empresas (economías de aglomeración). Sus resultados son consistentes con la Ley de Zipf (que predice que la mayor parte de las empresas estará concentrada espacialmente en una zona de tamaño reducido, y una parte menor ocupará el resto del espacio).

2.5. Cuasiequilibrio

Con el fin de reducir las diferencias conceptuales entre los modelos de equilibrio y la modelación por medio de microsimulación, de manera de permitir mayor consistencia y comparabilidad entre ellos, recientemente se ha concebido el concepto de *cuasiequilibrio* en modelos dinámicos. Éste consiste en una relajación de las condiciones de equilibrio, permitiendo que los mercados no se limpien localmente (pudiendo haber diferencias entre oferta y demanda en cada localización) y alterando el tiempo que toma el flujo de la información entre los agentes, afectando así la noción de equilibrio de corto plazo.

2.5.1. Modelo de cuasiequilibrio de Martínez y Donoso (2011)

Martínez y Donoso (2011) introducen el concepto de cuasiequilibrio en el modelo RB&SM con oferta fija, pasando a una formulación dinámica que supone comportamiento miope (los agentes sólo consideran los precios y atributos actuales e históricos en sus decisiones, no los valores futuros). Se relaja el supuesto de simultaneidad, de forma que los agentes emplean información desfasada en el tiempo en el proceso de decisión, y se relaja la condición de limpieza de mercado. De paso, esta formulación conlleva ventajas en la implementación algorítmica, pues elimina los complejos puntos fijos característicos de RB&SM, al permitir que el cálculo en un período sea directo a partir del anterior.

Las funciones de postura utilizan atributos retrasados en un período:

$$B_{hvi}^t = b_h^t + b_{hvi}(z^{t-1})$$

La oferta se determina con de forma dinámica en función de su valor en el período anterior, asumiendo conocimiento perfecto sobre el tamaño de la demanda:

$$V_{vi}^t = V_{vi}^{t-1} + (H^t - H^{t-1})P_{vi}^t$$

La función de *profit* del desarrollador depende de las rentas del período anterior:

$$\pi_{vi}^t = \pi(r_{vi}^{t-1})$$

La condición de equilibrio se reemplaza por la *condición de cuasiequilibrio* siguiente:

$$\sum_{vi} V_{vi}^{t-1} q_{h|vi}^t = H_h^t$$

Donde la probabilidad de cuasiequilibrio q está dada por:

$$q_{h|vi}^t = \frac{H_h^t \exp \mu (b_h^t + b_{hvi}(z^{t-1}))}{H_h^t \exp \mu (b_h^t + b_{hvi}(z^{t-1})) + \sum_{g \neq h} H_g^t \exp \mu (b_g^{t-1} + b_{gvi}(z^{t-1}))}$$

Dicha probabilidad es utilizada por los agentes para estimar su propia postura de referencia, con el fin de asegurar de la mejor forma la localización de todos los agentes del mercado. Se considera que los agentes no cuentan con información sobre las posturas de referencia del resto de los agentes.

Así, la postura de referencia queda definida por:

$$b_h^{t*} = -\frac{1}{\mu} \ln \sum_{vi} \frac{V_{vi}^{t-1} \exp(\mu b_{hvi}^t)}{H_h^t \exp \mu (b_h^{t*} + b_{hvi}(z^{t-1})) + \sum_{g \neq h} H_g^t \exp \mu (b_g^{t-1} + b_{gvi}(z^{t-1}))}$$

Adicionalmente, se propone utilizar la aproximación numérica $b_h^t \approx b_h^{t-1}$ en el denominador, lo que da lugar a la siguiente expresión:

$$b_h^t = -\frac{1}{\mu} \ln \sum_{vi} \frac{V_{vi}^{t-1} \exp(\mu b_{hvi}^t)}{\sum_g H_g^t \exp \mu (b_g^{t-1} + b_{gvi}(z^{t-1}))}$$

donde ya no es necesario efectuar el cálculo iterativo de un punto fijo.

2.5.2. Modelo de cuasiequilibrio de Hurtubia et al. (2012)

De forma similar, Hurtubia et al. (2012) definen un modelo de demanda de cuasiequilibrio desagregado a nivel de agente. Al igual que en el modelo RB&SM, considera que los agentes realizan un ajuste de sus posturas para asegurar la localización de todos. Sin embargo, altera esta condición de equilibrio considerando que la decisión es tomada en base a los valores conocidos de las rentas del período anterior.

Se impone sobre los agentes la siguiente condición desfasada en el tiempo:

$$\sum_i \frac{\exp \mu(b_h^t + b_{hi}(z_i^t))}{\sum_g \exp \mu(B_{gi}^{t-1})} = 1$$

De donde se deduce la ecuación para las posturas de referencia:

$$b_h^t = -\ln \left(\sum_i \exp \mu(b_{hi}^t(z_i^t) - r_i^{t-1}) \right)$$

Esta ecuación se diferencia de la de Martínez y Donoso (2011) en que el desfase se produce tanto en las posturas de referencia como en las posturas hedónicas.

Capítulo 3

Formulación de los modelos de cuasiequilibrio

En esta sección se introducen varios modelos de localización, introduciendo progresivamente la noción de cuasiequilibrio. El primero corresponde a un modelo de equilibrio, y los siguientes introducen progresivamente imperfección de información en el mercado inmobiliario, representada por un desfase en la información utilizada para la decisión.

3.1. Aspectos generales de la especificación de los modelos

Los modelos se especifican considerando una función de postura hedónica, es decir, que resulta de la valoración de los atributos del bien inmueble. Ésta está dada por la expresión $b_{hi} = b_{hi}(z, P_{\cdot|i})$, que recibe como entrada los atributos de la oferta (dados por el vector z) y las probabilidades de localización de los vecinos y propia (dadas por $P_{\cdot|i}$). Estos argumentos pueden estar desfasados en el tiempo o actualizados.

La mayor parte de los modelos involucra la resolución de ecuaciones de punto fijo, es decir, de la forma $x = f(x)$.

Los modelos se presentan divididos en dos grupos: modelos de demanda y de oferta. Los modelos de oferta y demanda son interdependientes, pues los primeros reciben como argumento la oferta en el período t , y los segundos utilizan los valores de rentas calculados a partir de los primeros, por lo que escogiendo un modelo de demanda y uno de oferta se forma un modelo completo de localización. Alternativamente, es posible considerar modelos restringidos con oferta o demanda exógena, lo que no se hará en el presente trabajo.

Los distintos modelos de demanda y de oferta se denotan respectivamente por las letras D y S (del inglés *demand* y *supply*), acompañados de un índice. Los modelos de índice 0 corresponden a modelos de equilibrio, basados en el modelo RB&SM, y los sucesivos incorporan elementos de *cuasiequilibrio*.

3.2. Modelos de demanda basados en información de posturas

Los modelos que se presentan a continuación corresponden a modificaciones de los puntos fijos de localización y de equilibrio del modelo RB&SM. En todos se encuentra expresado el valor de la oferta en el período t , denotado por S_t . Este valor proviene de alguno de los modelos de oferta, que se desarrollan en la sección 3.4.

Estos modelos introducen desfases en la información del mercado utilizada en las posturas de los agentes, a diferencia de los introducidos en la sección próxima, donde los desfases se realizan en la información de las rentas inmobiliarias,

3.2.1. Modelo D0: de equilibrio

Este es el primer modelo introducido, y sirve como base para los siguientes. Corresponde al modelo de demanda inmobiliaria del modelo RB&SM (sin incluir el modelo de oferta ni las restricciones). Es un modelo de equilibrio, sin dependencia intertemporal: la solución de cada período es independiente del período anterior.

Las ecuaciones que describen este modelo son las siguientes:

Punto fijo de equilibrio:

$$b_h^{t*} = -\frac{1}{\mu} \ln \sum_i \frac{S_i^{t*} \exp \mu (b_{hi}(P_{.|i}^{t*}, z^t))}{\sum_h H_h^t \exp \mu (b_h^{t*} + b_{hi}(P_{.|i}^{t*}, z^t))}$$

Punto fijo de localización:

$$P_{h|i}^{t*} = \frac{H_h^t \exp \mu (b_h^{t*} + b_{hi}(P_{.|i}^{t*}, z^t))}{\sum_h H_h^t \exp \mu (b_h^{t*} + b_{hi}(P_{.|i}^{t*}, z^t))}$$

Estas ecuaciones describen la interacción en el mercado inmobiliario de los dos agentes participantes: el residente, que realiza posturas en el proceso de remate; el rematador, que es propietario de la localización y la asigna al mejor postor.

Cabe señalar que las ecuaciones presentadas no corresponden a un despeje de las variables b_h^{t*} y $P_{h|i}^{t*}$, pues éstas aparecen a ambos lados de la ecuación. Se trata de ecuaciones de *punto fijo*, y el asterisco sobre ambas variables denota que se trata de los valores que satisfacen ambas ecuaciones. La existencia y unicidad de dichas soluciones es demostrada en Martínez y Henríquez (2007).

La primera ecuación se obtiene a partir de la llamada *condición de equilibrio*:

$$H_h^t = \sum_i S_i^t P_{h|i}^t$$

Esta condición es impuesta al modelo para garantizar que todos los residentes alcancen necesariamente una localización. La expresión de la izquierda, H_h , es el total de residentes de tipo h (valor exógeno), y la de la derecha corresponde a la suma de los residentes tipo h localizados por el modelo en cada zona i .

El mecanismo para lograr que esta condición se cumpla es el ajuste de la variable b_h de la función de postura, que depende únicamente del tipo de agente y no de la localización. Los agentes ajustan este valor de su postura para garantizar que todos se localizan. Sin esta condición, podría haber agentes que no fueran capaces de ganar el remate de ninguna localización, y agentes que ganen más de una, lo que se traduciría en que el total de agentes localizados de una categoría sea menor al total de agentes disponibles de dicha categoría.

El término b_h aparece en ambos lados de la igualdad, por lo que ésta es una ecuación de punto fijo. La solución de esta ecuación para todos los valores de h entrega los valores de b_h que satisfacen la condición de equilibrio.

La segunda ecuación corresponde a la probabilidad de localización de un residente h en una localización i . Esta expresión se obtiene debido al modelo de elección discreta tipo *logit* utilizado para el remate: el propietario de la localización i escoge al residente h que realice la mayor postura, y las posturas siguen una distribución estocástica tipo *Gumbel*.

Dentro de la función de postura, específicamente en la componente b_{hi} , aparecen las probabilidades de localización. Esto representa las *externalidades de localización*: el efecto que tiene en un agente la localización de los otros. De este modo es posible, por ejemplo, representar el hecho de que un grupo socioeconómico se vea atraído por zonas donde se encuentren otros residentes de su mismo segmento. El hecho de que en el cálculo de las probabilidades de localización intervengan las propias probabilidades como variable, da lugar a un cálculo de punto fijo.

El término S^t corresponde al número total de hogares que se localizan $S^t = \sum_h H_h^t$ y es una variable exógena al modelo. La oferta inmobiliaria S_i de cada zona es un dato exógeno para estos modelos (aunque puede ser obtenida de un modelo de oferta, como el del RB&SM). Debe cumplir que $\sum_i S_i^t = S^t$, es decir, que la oferta sea igual a la demanda inmobiliaria, lo cual es una condición sobre los datos exógenos.

La renta r_i , que no intervienen en las ecuaciones planteadas, pueden obtenerse como el valor esperado de la máxima postura, que, dado que las posturas siguen una distribución *Gumbel*, corresponde a una *logsuma*:

$$\bar{r}_i = \frac{1}{\mu} \ln \sum_h H_h^t \exp \mu \left(b_h^{t*} + b_{hi}(P_{\cdot|i}^{t*}, z^t) \right) + \frac{\gamma}{\mu}$$

El modelo queda definido por dos variables vectoriales endógenas:

- $b = \{b_h\}_h$
- $P = \{P_{h|i}\}_{h,i}$

La relación funcional entre las variables, dada por las ecuaciones del modelo, es la siguiente:

$$b_h^{t*} = b_h^t(b_{\cdot}^{t*}, P_{\cdot|i}^{t*}) \quad \forall h$$

$$P_{h|i}^{t*} = P_{h|i}^t(b_{\cdot}^{t*}, P_{\cdot|i}^{t*}) \quad \forall h, i$$

En este modelo, los dos agentes que participan en la localización (residentes y rematador), tienen el mismo nivel de información: la obtienen de forma instantánea.

En los próximos modelos, se introducirán desfases en la información utilizada por los agentes para decidir sus posturas.

3.2.2. Modelo D1: desfase en atributos de la oferta y en externalidades de localización

El modelo D1 se basa en el anterior, e incorpora una restricción en el traspaso de la información de los atributos del mercado a los agentes. Supone que los residentes deben emplear la información del período anterior para la toma de decisiones, debido a que existen fricciones en su flujo hacia todos los agentes.

Estos desfases permiten representar el hecho de que los agentes que se localizan toman sus decisiones con información imperfecta respecto al mercado. Se introduce el supuesto de que la información disponible en el instante t demora un lapso de tiempo definido en actualizarse, por lo que los datos utilizados por los agentes al momento de localizarse corresponden a un período anterior, denotado por $t - 1$.

Las ecuaciones de este modelo corresponden a una modificación de las del modelo $D0$: los atributos del mercado utilizados en el cálculo de la postura (en la componente b_{hi}), se retrasan en un período. De este modo, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$b_h^{t*} = -\frac{1}{\mu} \ln \sum_i \frac{S_i^{t*} \exp \mu (b_{hi}(P_{.|i}^{t-1}, z^{t-1}))}{\sum_h H_h^t \exp \mu (b_h^{t*} + b_{hi}(P_{.|i}^{t-1}, z^{t-1}))}$$

$$P_{h|i}^t = \frac{H_h^t \exp \mu (b_h^{t*} + b_{hi}(P_{.|i}^{t-1}, z^{t-1}))}{\sum_h H_h^t \exp \mu (b_h^{t*} + b_{hi}(P_{.|i}^{t-1}, z^{t-1}))}$$

La diferencia con el modelo anterior radica en que los argumentos $P_{.|i}^{t*}$ y z^t fueron reemplazados por $P_{.|i}^{t-1}$ y z^{t-1} , es decir, fueron desfasados en un período. De este modo, los residentes utilizan información desfasada sobre el mercado para realizar sus posturas, mientras que el rematador y el desarrollador inmobiliario utilizan información actualizada sobre las posturas (que a su vez, son calculadas con información desfasada).

Estas modificaciones tienen por consecuencia la desaparición del punto fijo de la segunda ecuación: al emplear la información con retardo, se desfasa la información de externalidades de localización (dadas por la aparición de las probabilidades de localización como argumento de la función de postura). Esto significa que los residentes, en su proceso de localización, utilizan información del período pasado sobre los atributos de las localizaciones y, en particular, sobre los otros residentes de ésta.

La relación funcional entre las variables endógenas del modelo es la siguiente:

$$b_h^{t*} = b_h^t(b_h^{t*}, P_{.|i}^{t-1}) \quad \forall h$$

$$P_{h|i}^t = P_{h|i}^t(b_h^{t*}, P_{.|i}^{t-1}) \quad \forall h, i$$

La condición de equilibrio $H_h^t = \sum_i S_i^t P_{h|i}^t$ sigue siendo válida en este modelo. En el próximo modelo, se introducirá una modificación a esta condición, dando lugar al concepto de *cuasiequilibrio*.

3.2.3. Modelo D2: desfase en el cálculo de las posturas de referencia b_h

Los modelos anteriores utilizan la condición de equilibrio para garantizar que todos los residentes se localicen, lo que se logra a través del ajuste de la variable b_h , llamada *postura de referencia*, que forma parte de la postura. En los modelos D0 y D1 anteriores, los agentes calculan su valor b_h a través de la expresión:

$$b_h^{t*} = -\frac{1}{\mu} \ln \sum_i \frac{S_i^{t*} \exp \mu (b_{hi}(\cdot))}{\sum_h H_h^t \exp \mu (b_h^{t*} + b_{hi}(\cdot))}$$

El valor de la postura de referencia permite ajustar la postura total de cada agente con el fin de asegurar que todos se localicen, alcanzando así el equilibrio del sistema.

Este cálculo implica el siguiente supuesto: para calcular su postura de referencia, los agentes deben tener información sobre la postura de los otros agentes. Específicamente, las posturas de referencia de los otros agentes, su estructura de preferencias (función b_{hi}), y los atributos de la localización que inciden en las posturas (atributos y externalidades). Estos últimos fueron modificados entre los modelos $D0$ y $D1$, desfasándolos en el tiempo, pero dichos modelos aún suponen que los agentes son capaces de ajustar sus posturas a través del cálculo instantáneo de b_h para alcanzar el equilibrio.

El modelo $D2$ se basa en el modelo $D1$, y modifica dicho supuesto: los residentes no tienen información instantánea sobre la postura de referencia de los otros agentes, por lo que deben utilizar información desfasada en un período. Las ecuaciones son las siguientes:

$$b_h^{t*} = -\frac{1}{\mu} \ln \sum_i \frac{S_i^{t*} \exp \mu (b_{hi}(P_{.i}^{t-1}, z^{t-1}))}{H_h^t \exp \mu (b_h^{t*} + b_{hi}(P_{.i}^{t-1}, z^{t-1})) + \sum_{h' \neq h} H_{h'}^t \exp \mu (b_{h'}^{t-1} + b_{h'vi}(P_{.i}^{t-1}, z^{t-1}))}$$

$$P_{h|i}^{t*} = \frac{H_h^t \exp \mu (b_h^{t*} + b_{hi}(P_{.i}^{t-1}, z^{t-1}))}{\sum_h H_h^t \exp \mu (b_h^{t*} + b_{hi}(P_{.i}^{t-1}, z^{t-1}))}$$

La primera ecuación incorpora la modificación señalada: en el cálculo de la postura de referencia del agente h , las posturas de referencia de otros agentes están desfasadas.

La segunda ecuación, en cambio, utiliza la información actualizada de todas las posturas de referencia. Esto se debe a que el rematador recibe las posturas actualizadas de todos los agentes, por lo que no necesita inferir información a partir de los períodos pasados.

La diferencia de información existente entre los residentes y el rematador en el proceso de localización da lugar a la siguiente dicotomía: las probabilidades de localización son calculadas con datos actualizados por el rematador, pero los residentes, en el proceso de construcción de sus posturas, utilizan una **estimación de la probabilidad de localización**, que difiere de la calculada por el rematador. Esta estimación, denotada en adelante como $q_{h|i}^t$, está dada por la siguiente expresión:

$$q_{h|i}^t = \frac{H_h^t \exp \mu (b_h^{t*} + b_{hi}(P_{.i}^{t-1}, z^{t-1}))}{H_h^t \exp \mu (b_h^{t*} + b_{hi}(P_{.i}^{t-1}, z^{t-1})) + \sum_{h' \neq h} H_{h'}^t \exp \mu (b_{h'}^{t-1} + b_{h'vi}(P_{.i}^{t-1}, z^{t-1}))}$$

En lugar de la condición de equilibrio de los modelos anteriores, en este caso se cumple la *condición de cuasiequilibrio* siguiente:

$$H_h^t = \sum_i S_i^t q_{h|i}^t$$

Esta condición refleja el hecho de que los residentes intentan ajustar sus posturas para asegurar su localización con información imperfecta, mientras que el rematador tiene información perfecta sobre las posturas de todos los usuarios. Como se verá posteriormente, esto da lugar a un exceso o déficit de demanda entre las categorías h .

El planteamiento de este modelo elimina la codependencia de las posturas de los residentes para un mismo período, pero el punto fijo de equilibrio permanece, pues la postura de cada agente aún depende de su propia postura de referencia.

La relación funcional entre las variables endógenas del modelo queda descrita por las siguientes expresiones:

$$b_h^{t*} = b_h^t(b_h^{t*}, b_{-h}^{t-1}, P_{\cdot|i}^{t-1}) \quad \forall h$$

$$P_{h|i}^t = P_{h|i}^t(b_h^{t*}, P_{\cdot|i}^{t-1}) \quad \forall h, i$$

3.3. Modelos de demanda basados en información de rentas

Los siguientes modelos utilizan un enfoque distinto a los anteriores: introducen en la decisión de los residentes la información de las rentas inmobiliarias³. Esto se hace a partir de una reescritura del modelo $D0$, que se describe a continuación.

Se indicó anteriormente que la renta inmobiliaria está dada por la siguiente expresión:

$$\bar{r}_i(b_h^{t*}, P_{\cdot|i}^{t*}, z^t) = \frac{1}{\mu} \ln \sum_h H_h^t \exp \mu (b_h^{t*} + b_{hi}(P_{\cdot|i}^{t*}, z^t)) + \frac{\gamma}{\mu}$$

Esta expresión corresponde al *máximo valor esperado de las posturas*. Se define a continuación el valor r_i , que corresponde a la *moda* de las posturas, como:

$$r_i^t = r_i(b_h^{t*}, P_{\cdot|i}^{t*}, z^t) = \frac{1}{\mu} \ln \sum_h H_h^t \exp \mu (b_h^{t*}, b_{hi}(P_{\cdot|i}^{t*}, z^t))$$

Utilizando esta variable, es posible reescribir el modelo $D0$ como:

$$b_h^{t*} = -\frac{1}{\mu} \ln \sum_i S_i^{t*} \exp \mu (b_{hi}(P_{\cdot|i}^{t*}, z^t) - r_i^t)$$

$$P_{h|i}^{t*} = H_h^t \exp \mu (b_h^{t*} + b_{hi}(P_{\cdot|i}^{t*}, z^t) - r_i^t)$$

³ En este contexto, se denomina “renta” al precio de arriendo o dividendo pagado por los residentes de un inmueble, que corresponde al ingreso del desarrollador inmobiliario.

3.3.1. Modelo D3: rentas desfasadas en el tiempo

El modelo $D3$ se basa en el primer modelo de demanda ($D0$), e introduce el siguiente desfase: los agentes utilizan información desfasada de las rentas para generar sus posturas. Las ecuaciones resultantes son las siguientes:

$$b_h^{t*} = -\frac{1}{\mu} \ln \sum_i S_i^t \exp \mu (b_{hi}(P_{.|i}^{t*}, z^t) - r_i^{t-1})$$

$$P_{h|i}^{t*} = H_h^t \exp \mu (b_h^t + b_{hi}(P_{.|i}^{t*}, z^t) - r_i^t)$$

Esto representa el siguiente efecto: los usuarios utilizan en su proceso de decisión la información de rentas disponible en el mercado (por ejemplo, en los diarios). Sin embargo, esta información no está actualizada, lo que da lugar al desfase.

La modificación respecto a $D0$ tiene lugar solamente en la primera ecuación: los residentes incorporan información de rentas del período anterior en el proceso de construir sus posturas. El rematador, por su parte, utiliza las rentas actualizadas, que representan la máxima postura del período actual (información a la cual el rematador tiene acceso).

$$b_h^{t*} = -\frac{1}{\mu} \ln \sum_i \frac{S_i^t \exp \mu (b_{hi}(P_{.|i}^{t*}, z^t))}{\sum_h H_h^t \exp \mu (b_h^{t-1*} + b_{hi}(P_{.|i}^{t-1*}, z^{t-1}))}$$

$$P_{h|i}^{t*} = \frac{H_h^t \exp \mu (b_h^t + b_{hi}(P_{.|i}^{t*}, z^t))}{\sum_h H_h^t \exp \mu (b_h^t + b_{hi}(P_{.|i}^{t*}, z^t))}$$

Y la condición de cuasiequilibrio es $H_h^t = \sum_i S_i^t q_{h|i}^t$, con el siguiente valor de estimación de probabilidad $q_{h|i}^t$:

$$q_{h|i}^t = \frac{H_h^t \exp \mu (b_h^t + b_{hi}(P_{.|i}^{t*}, z^t))}{\sum_h H_h^t \exp \mu (b_h^t + b_{hi}(P_{.|i}^{t*}, z^t))}$$

Este enfoque permite eliminar el cálculo de punto fijo de la primera ecuación, pues el cálculo de la postura de referencia se realiza utilizando su valor del período anterior.

La relación funcional entre los vectores b y P , utilizando la renta, está dada por:

$$b_h^{t*} = b_h^t(r^{t-1}, P_{.|}^{t*}) \quad \forall h$$

$$P_{h|i}^{t*} = P_{h|i}^{t*}(r^{t-1}, b_{.}^{t*}, P_{.|i}^{t-1*}) \quad \forall h, i$$

Reemplazando la expresión de la renta, se obtiene la siguiente formulación, basada en las mismas variables que utilizan los modelos basados en las posturas:

$$b_h^{t*} = b_h^t(b^{t-1*}, P_{.i}^{t-1*}, P_{.i}^{t*}) \quad \forall h$$

$$P_{h|i}^{t*} = P_{h|i}^t(b^{t*}, P_{.i}^{t*}) \quad \forall h, i$$

Este modelo contiene de forma implícita el desfase en la interacción de los residentes en el mercado introducido en el modelo D2.

3.3.2. Modelo D4: rentas desfasadas, desfase en atributos de la oferta y en externalidades de localización

Finalmente, este modelo incorpora simultáneamente todos los desfases en la información introducidos hasta ahora: desfase en la información de rentas (que implica desfase en la interacción de los residentes en el mercado), y desfase en los atributos del mercado.

Las ecuaciones son:

$$b_h^t = -\frac{1}{\mu} \ln \sum_i S_i^t \exp \mu (b_{hi}(P_{.i}^{t-1}, z^{t-1}) - r_i^{t-1})$$

$$P_{h|i}^t = H_h^t \exp \mu (b_h^t + b_{hi}(P_{.i}^{t-1}, z^{t-1}) - r_i^t)$$

Si se escribe la expresión de la renta de forma explícita, las ecuaciones son:

$$b_h^t = -\frac{1}{\mu} \ln \sum_i \frac{S_i^t \exp \mu (b_{hi}(P_{.i}^{t-1}, z^{t-1}))}{\sum_h H_h^t \exp \mu (b_h^{t-1} + b_{hi}(P_{.i}^{t-2}, z^{t-2}))}$$

$$P_{h|i}^t = \frac{H_h^t \exp \mu (b_h^t + b_{hi}(P_{.i}^{t-1}, z^{t-1}))}{\sum_h H_h^t \exp \mu (b_h^t + b_{hi}(P_{.i}^{t-1}, z^{t-1}))}$$

Y la condición de cuasiequilibrio es $H_h^t = \sum_i S_i^t q_{h|i}^t$, con el siguiente valor de estimación de probabilidad $q_{h|i}^t$:

$$q_{h|i}^t = \frac{H_h^t \exp \mu (b_h^t + b_{hi}(P_{.i}^{t-1}, z^{t-1}))}{\sum_h H_h^t \exp \mu (b_h^t + b_{hi}(P_{.i}^{t-1}, z^{t-1}))}$$

En este modelo desaparecen todos los puntos fijos, y contiene el mayor desfase de información posible.

La relación funcional entre los vectores b y P , utilizando la renta, está dada por:

$$b_h^t = b_h^t(r^{t-1}, P_{\cdot|i}^{t-1}) \quad \forall h$$

$$P_{h|i}^t = P_{h|i}^t(r^{t-1}, b^t, P_{\cdot|i}^{t-1}) \quad \forall h, i$$

O reemplazando la renta:

$$b_h^t = b_h^t(b^{t-1}, P_{\cdot|i}^{t-1}) \quad \forall h$$

$$P_{h|i}^t = P_{h|i}^t(b^t, P_{\cdot|i}^{t-1}) \quad \forall h, i$$

3.4. Modelos de oferta

A continuación se introducen dos versiones del modelo de oferta, una de equilibrio y otra de cuasiequilibrio.

En ambos modelos se utiliza el hecho de que a partir de los modelos de demanda, es posible estimar el valor de la renta como el valor de la máxima postura, estimado en los modelos *logit* como una *logsuma*. Este valor (ya introducido en los modelos de demanda) es:

$$r_i^t = r_i(b^{t*}, P_{\cdot|i}^{t*}, z^t) = \frac{1}{\mu} \ln \sum_h H_h^t \exp \mu (b_h^{t*} + b_{hi}(P_{\cdot|i}^{t*}, z^t))$$

El anterior es el valor de la renta para un modelo de equilibrio. Los modelos de demanda de cuasiequilibrio entregan resultados análogos.

3.4.1. Modelo S0: de equilibrio

Se considera una función de *profit* (utilidades) de los productores de la siguiente forma:

$$\pi_i^t = S_i^t \cdot (r_i^t - c_i(S_i^t))$$

Donde:

- S_i^t : oferta inmobiliaria en el período t para la zona i .
- r : renta obtenida por una unidad vendida
- c : costo de producción de una unidad.

El modelo RB&SM permite recoger economías de escala y de diversidad a través de la función de costo de los productores: $c_{vij} = c_j((S^t)_{vij})$, que depende de la oferta de los otros productores en cada zona y de cada tipo de inmueble.

Las economías de escala están ligadas a una mayor producción de un mismo tipo de inmueble por parte de un productor (mejor aprovechamiento de materiales, logística, experiencia), y las economías de diversidad lo están a la producción de distintos tipos de oferta para una misma zona por ejemplo, ciertas construcciones pueden ser complementarios en términos de costo).

En los modelos introducidos en este trabajo, se introducen ciertas simplificaciones con respecto al modelo RB&SM, pues la mayor flexibilidad de la función de oferta de éste no tiene ningún impacto en las propiedades de los modelos de cuasiequilibrio, y conservarlas puede restar claridad al análisis. Las modificaciones son las siguientes:

- Se emplea un único índice i (en lugar de los índices v e i del RB&SM) para representar la localización y el tipo de inmueble. Este índice puede representar indistintamente zonas, tipos de inmuebles, o combinaciones de ambos.
- Se asume que la función de costos sólo depende de la zona, y no de otras zonas o de la oferta. Esto elimina (incidentalmente) las economías de escala y diversidad.

$$c_i(S_i^t) = c_i^t$$

Estas modificaciones aligeran de forma significativa la notación. No obstante, cabe señalar que es perfectamente posible reescribir los modelos de cuasiequilibrio conservando la complejidad de la función de costos de productores del modelo RB&SM.

3.4.1.1. Problema del productor

El productor inmobiliario debe escoger producción en cada zona para maximizar su *profit*, considerando las economías derivadas de su propia producción.

Considerando las simplificaciones del modelo con respecto al problema tratado en RB&SM (Martínez y Henríquez 2007, apéndice A), el problema del productor es el siguiente:

$$\begin{aligned} \max_i \sum_i \pi_i^t &= \sum_i S_i^t \cdot (r_i^t - c_i^t) \\ \text{s. a. } S_i^t &\leq R_i^t \quad \forall i \\ \sum_i S_i^t &= S^t \end{aligned}$$

El principal efecto de la simplificación del modelo presentado con respecto al RB&SM radica en la expresión de las restricciones lineales. Esto es debido a que no se distinguen los distintos tipos de inmueble a través de un índice separado.

La resolución del problema del productor se realiza asumiendo que la variable S_i es entrópica, con lo que:

$$\max_i \sum_i S_i^t \cdot (r_i^t - c_i^t) - \frac{1}{\lambda} S_i (-1 + \ln S_i)$$

$$s. a. S_i^t \leq R_i^t \quad \forall i \quad (1)$$

$$\sum_i S_i^t = S^t \quad (2)$$

La solución de este problema de maximización es de la forma de un modelo *logit*⁴:

$$S_i^t = S^t \frac{\exp \lambda (r_i^t (b_i^{t*}, P_{.i}^{t*}) - c_i^t - \gamma_i^t)}{\sum_i \exp \lambda (r_i^t (b_i^{t*}, P_{.i}^{t*}) - c_i^t - \gamma_i^t)}$$

donde el parámetro γ_i^t es un multiplicador de Lagrange, que debe cumplir las siguientes condiciones:

- $S^t \frac{\exp \lambda (r_i^t - c_i^t - \gamma_i^t)}{\sum_i \exp \lambda (r_i^t - c_i^t - \gamma_i^t)} = R_i$ si la restricción es activa
- $\gamma_i = 0$ si no lo es.

Es posible despejar una ecuación de punto fijo para γ si la restricción es activa:

$$\gamma_i^t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{S^t}{R_i} \frac{\exp \lambda (r_i^t (b_i^{t*}, P_{.i}^{t*}) - c_i^t)}{\sum_i \exp \lambda (r_i^t (b_i^{t*}, P_{.i}^{t*}) - c_i^t - \gamma_i^t)}$$

La expresión $S^t = \sum_h H_h^t$ corresponde a la demanda total del período, que bajo los supuestos del modelo de equilibrio –información perfecta– es conocida por el productor.

La variable S_i^t no presenta punto fijo debido a la eliminación de las economías de escala y diversidad. No obstante, se deja consignada en el sistema de ecuaciones para considerar esta posible extensión. Luego:

$$S_i^t = S_i^t (b_i^{t*}, P_{.i}^{t*}, \gamma_i^t) \quad \forall i$$

$$\gamma_i^{t*} = \gamma (b_i^{t*}, P_{.i}^{t*}, S_i^t, \gamma_i^{t*}) \quad \forall i$$

⁴ En la expresión entregada se hace explícito el hecho de que la renta depende de las probabilidades de referencia y de las probabilidades de localización, y se omite la dependencia de variables exógenas. Se utiliza la expresión correspondiente al modelo de demanda D0 (de equilibrio), para los otros modelos introducidos los índices de las variables son distintos.

Cabe destacar que la variable γ depende de la oferta S de forma implícita, pues su valor varía según la restricción sea activa o no. Además, la ecuación que determina γ es de punto fijo, pues la variable aparece en ambos lados de la igualdad.

3.4.2. Modelo S1: rezago en la construcción de inmuebles

En este modelo se incorpora un rezago de k períodos en la decisión de construir la oferta inmobiliaria, con el fin de representar la demora que requiere la producción inmobiliaria desde la decisión de producción. Se consideran los siguientes supuestos:

- La decisión de construir en el futuro se toma de forma anticipada, en base a las rentas inmobiliarias que se perciben en el período actual por el mismo tipo de inmuebles.
- Se puede predecir con exactitud la demanda total del sistema, los costos de construcción y las regulaciones aplicables al proyecto.

La expresión de este modelo está dada por:

$$S_i^t = S^t \frac{\exp \lambda (r_i^{t-k} - c_i^t - \gamma_i^t)}{\sum_i \exp \lambda (r_i^{t-k} - c_i^t - \gamma_i^t)}$$

donde S_i^t es la oferta en la zona i en el período t , r_i^{t-k} es la renta en el período $t - k$, c_i^t son los costos de construcción y γ_i^t los parámetros de Lagrange de las restricciones. Se considera la condición $S^t = \sum_h H_h^t$, y el valor de los parámetros γ se obtiene de las siguientes condiciones:

- $S^t \frac{\exp \lambda (r_i^{t-k} - c_i^t - \gamma_i^t)}{\sum_i \exp \lambda (r_i^{t-k} - c_i^t - \gamma_i^t)} = R_i$ si la restricción es activa
- $\gamma_i = 0$ si no lo es.

El supuesto detrás de esta expresión es que la evaluación de un proyecto inmobiliario para el año t se realiza con k años de anticipación. El desarrollador inmobiliario conoce los costos reales y las regulaciones que enfrentará en el año t , mas no conoce sus ingresos potenciales. Por esto, utiliza la información de las rentas del año $t - k$, en que se toma la decisión.

Si la restricción es activa, las ecuaciones resultantes son:

$$S_i^t = S^t \frac{\exp \lambda (r_i^{t-k} - c_i^t - \gamma_i^t)}{\sum_i \exp \lambda (r_i^{t-k} - c_i^t - \gamma_i^t)}$$

Y si la restricción es activa,

$$\gamma_i^t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{S_i^t \exp \lambda(r_i^{t-k} - c_i^t)}{R_i^t \sum_i \exp \lambda(r_i^{t-k} - c_i^t - \gamma_i^t)}$$

La variable S_i^t , que corresponde a la oferta inmobiliaria en el período t , es definida por el desarrollador inmobiliario en el período $t - k$. El valor de la oferta en cada zona i proviene de un modelo de optimización de *profit*. Para esto, calcula sus ingresos utilizando información de rentas del período $t - k$ (pues no puede prever las rentas en t). El valor de los costos c_i^t es calculado en el período $t - k$, y su valor (exógeno) es conocido para todos los períodos, pudiendo representar los costos totales de desarrollo del proyecto durante los k años que se extiende su construcción. Finalmente, el valor γ_i^t se calcula en $t - k$ y proviene de la aplicación de las restricciones vigentes en el período t , que son exógenas y conocidas de forma anticipada a la construcción.

Se introduce el supuesto de que la variable $S^t = \sum_h H_h^t$ (que corresponde a la demanda agregada) es conocida. Esto corresponde a asumir que los productores son capaces de prever la demanda de forma perfecta.

Del mismo modo aplicado hasta ahora, el modelo queda expresado por el siguiente sistema de ecuaciones simplificado.

$$S_i^t = S_i^t(b_i^{t-k}, P_{.i}^{t-k}, \gamma_i^t) \quad \forall i$$

$$\gamma_i^{t*} = \gamma_i(b_i^{t-k}, P_{.i}^{t-k}, S_i^t, \gamma_i^{t*}) \quad \forall i$$

Cabe señalar que el punto fijo de los parámetros γ no desaparece con esta formulación. Esto se debe a que se considera que los productores pueden anticipar de forma perfecta las regulaciones que estarán vigentes en el período de construcción, por lo que sería impropio aplicar un retardo a esta información.

3.5. Resumen de los modelos

La siguiente tabla resume los modelos de demanda y de oferta que fueron definidos en este capítulo.

Tabla 3.1: Resumen de los modelos de equilibrio y cuasiequilibrio introducidos

Modelo	Tipo	Descripción	Expresión funcional
D0	Demanda	Modelo de demanda de equilibrio	$b_h^{t*} = b_h^t(b^{t*}, P_{\cdot i}^{t*}) \quad \forall h$ $P_{h i}^{t*} = P_{h i}^t(b^{t*}, P_{\cdot i}^{t*}) \quad \forall h, i$
D1	Demanda	D0 + desfase en atributos de la oferta y en externalidades de localización	$b_h^{t*} = b_h^t(b^{t*}, P_{\cdot i}^{t-1}) \quad \forall h$ $P_{h i}^t = P_{h i}^t(b^{t*}, P_{\cdot i}^{t-1}) \quad \forall h, i$
D2	Demanda	D1 + desfase en el cálculo de las posturas de referencia	$b_h^{t*} = b_h^t(b_h^{t*}, b_{-h}^{t-1}, P_{\cdot i}^{t-1}) \quad \forall h$ $P_{h i}^t = P_{h i}^t(b^{t*}, P_{\cdot i}^{t-1}) \quad \forall h, i$
D3	Demanda	D0 + desfase en los valores de renta	$b_h^{t*} = b_h^t(r^{t-1}, P_{\cdot i}^{t*}) \quad \forall h$ $P_{h i}^{t*} = P_{h i}^{t*}(r^{t-1}, b^{t*}, P_{\cdot i}^{t-1*}) \quad \forall h, i$
D4	Demanda	D3 + desfase en atributos de la oferta y en externalidades de localización	$b_h^t = b_h^t(r^{t-1}, P_{\cdot i}^{t-1}) \quad \forall h$ $P_{h i}^t = P_{h i}^t(r^{t-1}, b^t, P_{\cdot i}^{t-1}) \quad \forall h, i$
S0	Oferta	Modelo de oferta de equilibrio	$S_i^t = S_i^t(b^{t*}, P_{\cdot i}^{t*}, \gamma^t) \quad \forall i$ $\gamma_i^{t*} = \gamma(b^{t*}, P_{\cdot i}^{t*}, S_i^t, \gamma^{t*}) \quad \forall i$
S1	Oferta	S1 + desfase en la construcción de inmuebles	$S_i^t = S_i^t(b^{t-k}, P_{\cdot i}^{t-k}, \gamma^t) \quad \forall i$ $\gamma_i^{t*} = \gamma(b^{t-k}, P_{\cdot i}^{t-k}, S_i^t, \gamma^{t*}) \quad \forall i$

Capítulo 4

Propiedades analíticas de los modelos

La sección de análisis presenta resultados de dos tipos. En primer lugar, se analizan tres propiedades matemáticas de los modelos de cuasiequilibrio. A continuación se desarrolla un marco matemático integrado para los modelos de equilibrio y cuasiequilibrio, para analizar la convergencia de estos.

4.1. Propiedades de los modelos de cuasiequilibrio

A continuación se presentan algunas propiedades de los modelos de equilibrio y cuasiequilibrio.

4.1.1. Exceso o déficit de demanda por categoría en modelos de cuasiequilibrio

En los modelos descritos hasta ahora, cada agente es sensible a la localización del resto de los agentes del mercado. Esto se denomina “externalidades de localización”, y se traduce en que la postura de cada agente depende del vector completo de probabilidades de localización. Los modelos de demanda de cuasiequilibrio, a partir de D2, consideran que los agentes tienen información imperfecta sobre la localización del resto (es decir, no tienen toda la información a su disposición), por lo que estos deben realizar una estimación al momento de determinar su postura. Estas “probabilidades estimadas” se denotan por $q_{h|i}$, mientras que la probabilidad del remate, que asigna las localizaciones con información perfecta sobre las posturas de los usuarios, se denota por $P_{h|i}$.

En el proceso de localización, los agentes realizan un ajuste en las posturas con la intención de garantizar que todos se localicen. Esto corresponde a la “condición de equilibrio” de los modelos. Cuando se introducen las estimaciones de probabilidades por parte de los usuarios, ésta da paso a la “condición de cuasiequilibrio”, que corresponde al mejor intento que pueden realizar los usuarios para garantizar su localización. No obstante, debido a que no cuentan con información suficiente, fallan en asegurar la

localización de todos los agentes del mercado. En consecuencia, existe un excedente o déficit de demanda inmobiliaria en cada período. Esto se prueba a continuación.

Propiedad 4.1 (Exceso o déficit de demanda por categoría de agente en los modelos de cuasiequilibrio)

En los modelos de cuasiequilibrio donde la probabilidad estimada por los residentes $q_{h|i}^t$ en cada período es distinta de la utilizada por el rematador para asignar localizaciones $P_{h|i}$, aparece un excedente o un déficit en la demanda de cada categoría h .

Demostración:

La demanda localizada de cada categoría socioeconómica, denotada acá por H_h^{t-LOC} (para diferenciarla del valor exógeno de la demanda), está dada por la suma de la localización en cada zona, de acuerdo a la siguiente expresión:

$$H_h^{t-LOC} = \sum_i H_{hi}^t = \sum_i S_i^t P_{h|i}^t$$

Por otra parte, el total exógeno de hogares cumple la condición de cuasiequilibrio:

$$H_h^t = \sum_i S_i^t q_{h|i}^t$$

Cuando las probabilidades P y q son diferentes, al calcular la diferencia entre la demanda localizada y la demanda total, aparece un excedente o déficit de demanda.

$$H_h^{t-LOC} - H_h^t = \sum_i S_i^t (P_{h|i}^t - q_{h|i}^t) \neq 0$$

La información de los agentes es distinta de la del rematador en los modelos $D2$, $D3$ y $D4$, por lo que en general las probabilidades de ambos son distintas. Por ejemplo, en el modelo $D2$, la probabilidad del remate está dada por:

$$P_{h|i}^t = \frac{H_h^t \exp \mu \left(b_h^{t*} + b_{hi} (P_{.|i}^{t-1}, z^{t-1}) \right)}{\sum_h H_h^t \exp \mu \left(b_h^{t*} + b_{hi} (P_{.|i}^{t-1}, z^{t-1}) \right)}$$

y la probabilidad estimada por los agentes por:

$$q_{h|i}^t = \frac{H_h^t \exp \mu \left(b_h^{t*} + b_{hi} (P_{.|i}^{t-1}, z^{t-1}) \right)}{H_h^t \exp \mu \left(b_h^{t*} + b_{hi} (P_{.|i}^{t-1}, z^{t-1}) \right) + \sum_{h' \neq h} H_{h'}^t \exp \mu \left(b_{h'}^{t-1} + b_{h'i} (P_{.|i}^{t-1}, z^{t-1}) \right)}$$

Sin embargo, cabe señalar que pueden existir casos donde los valores de ambas probabilidades son iguales. Como se verá en el Capítulo 5, esto ocurre para el caso de una ciudad invariante (es decir, cuando las variables exógenas son constantes para todos los

períodos), y se cumple de forma asintótica cuando las ciudades convergen a un valor estable en el tiempo. En esos casos (y siempre que las probabilidades sean iguales), no se cumple una de las hipótesis de la propiedad (que ambas probabilidades sean distintas), por lo que ésta no es aplicable.

□

4.1.2. Igualdad de la demanda localizada total y la oferta total.

A pesar de que pueden existir diferencias por categoría de agente entre la demanda total y la localizada, las diferencias se cancelan al considerar la suma. Es decir, la totalidad de la demanda del mercado es localizada. Para probar esto, basta con calcular la suma sobre todos los hogares localizados, considerando que por definición siempre se tiene $\sum_h P_{h|i}^t = 1$, y que se ha supuesto que $S^t = \sum_h H_h^t$.

Propiedad 4.2 (La demanda total es localizada)

En los modelos de equilibrio y de cuasiequilibrio, la demanda total del mercado es localizada, suponiendo que se cumple $S^t = \sum_h H_h^t$.

Demostración:

La demanda localizada total cumple:

$$\sum_h \sum_i H_{hi} = \sum_h \sum_i S_i^t P_{h|i}^t = \sum_i S_i^t \sum_h P_{h|i}^t = \sum_i S_i^t$$

y los modelos de oferta introducidos cumplen:

$$\sum_h \sum_i H_{hi} = \sum_i S_i^t = S = \sum_h H_h$$

Lo que demuestra que el total de la demanda (exógena) es localizada en el modelo.

□

Cabe mencionar que los modelos de oferta introducidos incluyen como supuesto que la oferta total es igual a la demanda total, conocida por los productores en todo período. Dicho supuesto es clave para este resultado.

4.1.3. Población creciente de forma homogénea y a tasa constante

Se muestra a continuación que, bajo ciertas condiciones, si la población crece a tasa constantes, la tasa de crecimiento no influye en la convergencia.

Propiedad 4.3 (Bajo ciertas condiciones, una tasa de crecimiento constante de la demanda por categoría no afecta la localización)

Sea ρ la tasa de crecimiento de los hogares, de forma que $H_h^{t+1} = (1 + \rho)H_h^t$, con un número inicial de hogares H_h^0 . Si la postura hedónica b_{hi} es independiente del parámetro de crecimiento de la población y las restricciones son inactivas, entonces la localización, la oferta y las rentas entregadas por los modelos de cuasiequilibrio son independiente del parámetro de crecimiento ρ e idénticas a su valor en el instante inicial.

Demostración:

Se analizará el efecto de la tasa de crecimiento en las ecuaciones de los modelos. Se utilizarán para el análisis las ecuaciones del modelo de demanda D0 y del modelo de oferta S0. El análisis para las ecuaciones de los otros modelos es análogo, salvo que se indique lo contrario.

En primer lugar, considérense los efectos directos de reemplazar el parámetro de crecimiento en las ecuaciones de los modelos, sin tener en cuenta los efectos indirectos propagados a través de la interdependencia de las variables.

Modelo de localización de demanda

Considérese la expresión de la postura de referencia. Se tiene que $H_h^t = (1 + \rho)^t H_h^0$, luego, reemplazando:

$$\begin{aligned} b_h^{t*} &= -\frac{1}{\mu} \ln \sum_i \frac{S_i^{t*} \exp \mu(b_{hi})}{\sum_h H_h^t \exp \mu(b_h^{t*} + b_{hi})} \\ &= -\frac{1}{\mu} \ln \sum_i \frac{S_i^{t*} \exp \mu(b_{hi})}{\sum_h (1 + \rho)^t H_h^0 \exp \mu(b_h^{t*} + b_{hi})} \\ &= -\frac{1}{\mu} \ln(1 + \rho)^t - \frac{1}{\mu} \ln \sum_i \frac{S_i^{t*} \exp \mu(b_{hi})}{\sum_h H_h^0 \exp \mu(b_h^{t*} + b_{hi})} \end{aligned}$$

Dado que se ha supuesto que el término de la postura hedónica b_{hi} es independiente del parámetro de crecimiento, la diferencia del valor para dos agentes h y g es independiente del valor del factor de crecimiento, esto es.

$$b_h^{t*} - b_g^{t*} = -\frac{1}{\mu} \ln \sum_i \frac{S_i^{t*} \exp \mu(b_{hi})}{\sum_{h'} H_{h'}^0 \exp \mu(b_{h'}^{t*} + b_{hi})} + \frac{1}{\mu} \ln \sum_i \frac{S_i^{t*} \exp \mu(b_{gi})}{\sum_{h'} H_{h'}^0 \exp \mu(b_{h'}^{t*} + b_{hi})}$$

Este valor se reemplaza en la expresión del punto de fijo de localización, dada por:

$$P_{h|i}^{t*} = \frac{H_h^t \exp \mu (b_h^{t*} + b_{hi}(P_{.i}^{t*}, z^t))}{\sum_h H_h^t \exp \mu (b_h^{t*} + b_{hi}(P_{.i}^{t*}, z^t))}$$

Cabe recordar que el resultado de un modelo no depende de los valores individuales de las posturas, sino de su diferencia relativa. En efecto, es posible dividir el numerador y el denominador por $\exp(b_g^{t*})$, donde b_g^{t*} es la postura de referencia de un agente g dado. De este modo, se obtiene:

$$P_{h|i}^{t*} = \frac{H_h^t \exp \mu (b_h^{t*} - b_g^{t*} + b_{hi}(P_{.i}^{t*}, z^t))}{\sum_h H_h^t \exp \mu (b_h^{t*} - b_g^{t*} + b_{hi}(P_{.i}^{t*}, z^t))}$$

Adicionalmente, reemplazando la expresión de la demanda H_h^t por su valor en función del parámetro de crecimiento, se obtiene:

$$\begin{aligned} P_{h|i}^{t*} &= \frac{(1 + \rho)^t H_h^0 \exp \mu (b_h^{t*} - b_g^{t*} + b_{hi})}{\sum_h (1 + \rho)^t H_h^0 \exp \mu (b_h^{t*} - b_g^{t*} + b_{hi}(P_{.i}^{t*}, z^t))} \\ &= \frac{H_h^0 \exp \mu (b_h^{t*} + b_{hi})}{\sum_h H_h^0 \exp \mu (b_h^{t*} + b_{hi})} \end{aligned}$$

Tras simplificar por $(1 + \rho)^t$, y dado que tanto la diferencia $b_h^{t*} - b_g^{t*}$ (como se mostró) como $b_{hi}(P_{.i}^{t*}, z^t)$ (por hipótesis) son independientes del parámetro ρ , se concluye que la ecuación que determina $P_{h|i}^{t*}$ es independiente del parámetro de crecimiento ρ .

Modelo de rentas

La renta está dada por la siguiente expresión:

$$\bar{r}_i = \frac{1}{\mu} \ln \sum_h H_h^t \exp \mu (b_h^{t*} + b_{hi}) + \frac{\gamma}{\mu}$$

Reemplazando el valor de H_h^t por su expresión en función del parámetro de crecimiento, se tiene:

$$\begin{aligned} \bar{r}_i &= \frac{1}{\mu} \ln \sum_h (1 + \rho)^t H_h^0 \exp \mu (b_h^{t*} + b_{hi}) + \frac{\gamma}{\mu} \\ &= \frac{1}{\mu} (1 + \rho)^t + \frac{1}{\mu} \ln \sum_h H_h^0 \exp \mu (b_h^{t*} + b_{hi}) + \frac{\gamma}{\mu} \end{aligned}$$

Luego, el uso de un factor de crecimiento constante corresponde a sumar a la renta un valor $\frac{1}{\mu} (1 + \rho)^t$, que es constante para cada período. Dado que los valores de las rentas son relativos (dependen de una constante exógena, por lo que sólo la diferencia es

relevante), el hecho de sumar una constante no tiene ningún efecto, con lo que los resultados de rentas son equivalentes para cada período a los del período inicial.

Modelo de oferta

La ecuación del modelo de oferta es:

$$S_i^t = \left(\sum_h H_h^t \right) \frac{\exp \lambda(r_i^t - c_i^t)}{\sum_i \exp \lambda(r_i^t - c_i^t)}$$

donde los parámetros γ_i^t se asumieron nulos, debido al supuesto de que las restricciones no son activas.

Reemplazando:

$$S_i^t = \left(\sum_h H_h^0 \right) (1 + \rho)^t \frac{\exp \lambda(r_i^t - c_i^t)}{\sum_i \exp \lambda(r_i^t - c_i^t)}$$

Si se consideran dos modelos distintos m_1 y m_2 , la relación entre la oferta inmobiliaria entregada por ambos modelos es independiente del parámetro de crecimiento. En efecto, es posible escribir la expresión para cada modelo como:

$$S_i^{t,m} = \left(\sum_h H_h^0 \right) (1 + \rho)^t S^t P_i^{t,m}$$

donde $P_i^{t,m}$ es el único término que depende de la formulación del modelo. Luego, al comparar dos modelos distintos, se tiene que la razón entre la oferta de ambos modelos es independiente del parámetro de crecimiento de la población:

$$\frac{S_i^{t,m_1}}{S_i^{t,m_2}} = \frac{P_i^{t,m_1}}{P_i^{t,m_2}}$$

Adicionalmente, bajo el supuesto de que las restricciones nunca son activas, los parámetros γ son siempre nulos en ambos modelos.

$$\gamma_i = 0$$

Finalmente, falta verificar el supuesto de que no existe un efecto indirecto del parámetro de crecimiento en la expresión de b_h^{t*} y S_i^t .

La expresión de b_h^{t*} en función de S_i^t está dada por:

$$b_h^{t*} = -\frac{1}{\mu} \ln(1 + \rho)^t - \frac{1}{\mu} \ln \sum_i \frac{S_i^{t*} \exp \mu(b_{hi})}{\sum_h H_h^0 \exp \mu(b_h^{t*} + b_{hi})}$$

Reemplazando el valor de S_i^t , se tiene:

$$b_h^{t*} = -\frac{1}{\mu} \ln(1 + \rho)^t - \frac{1}{\mu} \ln \sum_i \left(\sum_h H_h^0 \right) (1 + \rho)^t \frac{\exp \lambda(r_i^t - c_i^t - \gamma_i^t)}{\sum_i \exp \lambda(r_i^t - c_i^t - \gamma_i^t)} \frac{\exp \mu(b_{hi})}{\sum_h H_h^0 \exp \mu(b_h^{t*} + b_{hi})}$$

Resolviendo:

$$b_h^{t*} = -\frac{2}{\mu} \ln(1 + \rho)^t - \frac{1}{\mu} \ln \sum_i \left(\sum_h H_h^0 \right) \frac{\exp \lambda(r_i^t - c_i^t - \gamma_i^t)}{\sum_i \exp \lambda(r_i^t - c_i^t - \gamma_i^t)} \frac{\exp \mu(b_{hi})}{\sum_h H_h^0 \exp \mu(b_h^{t*} + b_{hi})}$$

El valor de la renta depende sólo del vector (b^{t*}) , pues los términos aditivos que dependen del factor de crecimiento se simplifican. Así, del mismo modo que en el análisis realizado más arriba para b_h^{t*} , el término aditivo $-\frac{2}{\mu} \ln(1 + \rho)^t$ se elimina al considerar la resta de la postura de referencia para dos agentes. Por lo tanto, tras considerar los efectos indirectos a través de las otras variables endógenas, la diferencia de las posturas endógenas es independiente de los factores de crecimiento.

Dado que al despejar b_h^{t*} , se obtuvo la misma estructura que en el análisis inicial (con un término aditivo $-\frac{2}{\mu} \ln(1 + \rho)^t$ en lugar de $-\frac{1}{\mu} \ln(1 + \rho)^t$), es posible repetir el mismo análisis hecho más arriba para $P_{h|i}^{t*}$, \bar{r}_i y S_i^t , para concluir finalmente que, si las restricciones son inactivas, entonces un factor de crecimiento exógeno, constante y homogéneo para el crecimiento de la población no afecta la relación entre los modelos.

□

Es importante notar que el resultado anterior considera el supuesto de que la postura hedónica b_{hi} no depende del parámetro de crecimiento. El resultado puede extenderse fácilmente al caso donde la postura de hedónica crece linealmente con dicho parámetro, del mismo modo en que lo hace la postura de referencia, pues el término lineal se simplificaría en la expresión de la probabilidad. Si la dependencia es no-lineal, no es posible predecir a priori su efecto.

4.2. Expresión general de los modelos

Con el fin de estudiar la relación entre el modelo de equilibrio y los modelos de cuasiequilibrio, a continuación se plantea una reescritura de los modelos de una forma genérica, a través de funciones que reciben por argumento vectores de variables endógenas y exógenas. Como se verá, las funciones que caracterizan los modelos de equilibrio y de cuasiequilibrio están estrechamente relacionadas.

En primer lugar, se agrupan las variables endógenas y exógenas de los modelos en vectores generales. Entre las variables endógenas de los modelos, se cuentan las posturas de referencia, las posturas hedónicas, las probabilidades de localización, las rentas de las

viviendas y la oferta inmobiliaria. Las variables exógenas, por su parte, corresponden a los atributos de la ciudad y el tamaño de la población por grupo socioeconómico.

Así, es posible definir los siguientes vectores minimales:

Definición 4.1 (Conjuntos y vectores de variables endógenas y exógenas)

Se define el conjunto de variables endógenas $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ y el conjunto de variables exógenas $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

Para un instante $t \in \{1, \dots, T\}$, se definen los siguientes vectores:

- Vector de variables endógenas: $x^t \in \mathcal{X}$.
- Vector de variables exógenas: $\omega^t \in \Omega$.

Estos dos vectores contienen toda la información relativa a las variables endógenas y exógenas en un instante t . Los conjuntos \mathcal{X} y Ω contienen todos los valores posibles para las variables endógenas y exógenas en cualquier instante t .

Usando estos vectores, pueden definirse las siguientes funciones generales, que serán utilizadas posteriormente para caracterizar los modelos de equilibrio y de cuasiequilibrio.

Definición 4.2 (Funciones características Φ y Ψ)

Se definen las funciones características:

$$\begin{aligned} \Phi: \mathcal{X} \times \Omega &\rightarrow \mathcal{X} \\ (x, \omega) &\rightarrow \Phi(x, \omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \Omega \times \Omega &\rightarrow \mathcal{X} \\ (x_1, x_2, \omega_1, \omega_2) &\rightarrow \Psi(x_1, x_2, \omega_1, \omega_2) \end{aligned}$$

Estas funciones serán utilizadas respectivamente para caracterizar los modelos de equilibrio (Φ) y de cuasiequilibrio (Ψ). A modo explicativo, se señala que las componentes segunda y cuarta de la función Ψ representarán los términos desfasados temporalmente. Como se verá más adelante, un modelo de equilibrio ocupará la expresión $\Phi(x^t, \omega^t)$, y uno de cuasiequilibrio $\Psi(x^t, x^{t-1}, \omega^t, \omega^{t-1})$.

Las funciones Φ y Ψ cumplen la siguiente propiedad que relaciona sus valores:

Propiedad 4.4 (Relación funcional entre Φ y Ψ)

Las funciones Φ y Ψ cumplen la siguiente propiedad $\forall x \in \mathcal{X}, \omega \in \Omega$

$$\Phi(x, \omega) = \Psi(x, x, \omega, \omega)$$

Esta propiedad permitirá establecer la relación entre las expresiones utilizadas para un modelo de equilibrio y uno de cuasiequilibrio, a saber, que el segundo es idéntico al primero salvo por el desfase de algunas variables.

A continuación se definen los modelos de equilibrio y de cuasiequilibrio de forma general, utilizando las funciones introducidas hasta acá.

Definición 4.3 (Modelo de equilibrio)

La función Φ representa un modelo de equilibrio. Para cada instante $t \in \{0, \dots, T\}$ y para un conjunto de vectores exógenos ω^t , se dice que x^t es un valor de equilibrio (o que es el resultado de un modelo de equilibrio) si y sólo si:

$$x^t = \Phi(x^t, \omega^t)$$

Definición 4.4 (Modelo de cuasiequilibrio)

La función Ψ representa un modelo de cuasiequilibrio. Para cada instante $t \in \{0, \dots, T\}$ y para un conjunto de vectores exógenos ω^t , se dice que cumplen la condición de equilibrio si y sólo si:

$$x^t = \Psi(x^t, x^{t-1}, \omega^t, \omega^{t-1})$$

Es importante notar que las ecuaciones de equilibrio y de cuasiequilibrio son expresiones de punto fijo, debido a que los vectores x^t aparecen tanto a la izquierda como a la derecha de la igualdad.

4.3. Contractancia

Las condiciones de equilibrio y cuasiequilibrio se tratan como ecuaciones de *punto fijo*, pues no existe un despeje algebraico simple para el vector de resultados. En general es deseable que las funciones que caracterizan dichas condiciones sean *contractantes*, pues esta propiedad da lugar a una condición de suficiencia para la existencia de soluciones. La contractancia se tiene cuando (en términos generales), la “distancia” entre dos imágenes de una función es siempre menor que la distancia entre dos preimágenes dadas.

Para analizar la existencia y unicidad de soluciones de estas ecuaciones, así como la posibilidad de encontrar dichas soluciones a través de recurrencias convergentes, se entregan definiciones generales de contractancia para las funciones Φ y Ψ .

Definición 4.5 (Contractancia de Φ)

Φ se dice contractante si existe $L < 1$ tal que $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{X}, \omega \in \Omega$:⁵

$$\|\Phi(x_1, \omega) - \Phi(x_2, \omega)\|_\infty \leq L \|x_1 - x_2\|_\infty$$

⁵ La norma empleada para los vectores corresponde a la norma infinito, que entrega el valor de la mayor componente en valor absoluto

Definición 4.6 (Contractancia de Ψ)

Ψ se dice contractante si existe $L < 1$ tal que $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathcal{X}^2, \omega_1, \omega_2 \in \Omega$.⁶

$$\|\Psi(x_1, y_1, \omega_1, \omega_2) - \Psi(x_2, y_2, \omega_1, \omega_2)\|_\infty \leq L\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_\infty$$

Resulta importante para los resultados discutidos más abajo contar con una definición de contractancia en cada uno de sus argumentos endógenos de la función Ψ por separado.

Definición 4.7 (Contractancia parcial de Ψ para cada variable endógena)

Ψ se dice parcialmente contractante con respecto a la primera variable endógena, si existe $L_1 < 1$ tal que $\forall x_1, x_2, y \in \mathcal{X}, \omega_1, \omega_2 \in \Omega$

$$\|\Psi(x_2, y, \omega_1, \omega_2) - \Psi(x_1, y, \omega_1, \omega_2)\|_\infty \leq L_1\|x_1 - x_2\|_\infty$$

Análogamente se define la contractancia parcial con respecto a la segunda variable endógena, si existe $L_2 < 1$ tal que $\forall x, y_1, y_2 \in \mathcal{X}, \omega_1, \omega_2 \in \Omega$:

$$\|\Psi(x, y_1, \omega_1, \omega_2) - \Psi(x, y_2, \omega_1, \omega_2)\|_\infty \leq L_2\|y_1 - y_2\|_\infty$$

Bravo, Briceño, Cominetti, Cortés y Martínez (2010) entregan condiciones bajo las cuales está asegurado que la función Φ es contractante, lo que garantiza la existencia de una sucesión convergente a su único valor de punto fijo. Entrega también condiciones sobre los parámetros de los modelos *logit* (μ y λ), que deben estar dentro de cierto rango para que la convergencia se conserve.

A continuación se analizan ciertas condiciones que determinan la contractancia de la función Ψ .

Proposición 4.1 (Condición suficiente para contractancia de Ψ)

Si Ψ es parcialmente contractante para cada variable endógena, con constantes respectivas menores que $\frac{1}{2}$, entonces Ψ es contractante.

Demostración:

A partir de las hipótesis, se tiene que Ψ es contractante en su primer y segundo argumento con la misma constante $L < \frac{1}{2}$. Es decir, se cumplen las dos siguientes expresiones:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{X}, \omega_1, \omega_2 \in \Omega \quad \|\Psi(x_1, y, \omega_1, \omega_2) - \Psi(x_2, y, \omega_1, \omega_2)\|_\infty \leq L\|x_1 - x_2\|_\infty$$

$$\forall y_1, y_2 \in \mathcal{X}, x \in \mathcal{X}, \omega_1, \omega_2 \in \Omega \quad \|\Psi(x, y_1, \omega_1, \omega_2) - \Psi(x, y_2, \omega_1, \omega_2)\|_\infty \leq L\|y_1 - y_2\|_\infty$$

⁶ El cálculo de la norma de un par ordenado de vectores se realiza como una concatenación de los vectores. De esta forma, el valor que entrega es el máximo entre la norma de ambos vectores.

Entonces, por propiedad triangular y propiedades de la norma infinito vectorial, se tiene que $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathcal{X}^2, \omega_1, \omega_2 \in \Omega$:

$$\begin{aligned}
& \|\Psi(x_1, y_1, \omega_1, \omega_2) - \Psi(x_2, y_2, \omega_1, \omega_2)\|_\infty \\
&= \|\Psi(x_1, y_1, \omega_1, \omega_2) - \Psi(x_1, y_2, \omega_1, \omega_2) + \Psi(x_1, y_2, \omega_1, \omega_2) - \Psi(x_2, y_2, \omega_1, \omega_2)\|_\infty \\
&\leq \|\Psi(x_1, y_1, \omega_1, \omega_2) - \Psi(x_1, y_2, \omega_1, \omega_2)\|_\infty + \|\Psi(x_1, y_2, \omega_1, \omega_2) - \Psi(x_2, y_2, \omega_1, \omega_2)\|_\infty \\
&\leq L\|y_1 - y_2\|_\infty + L\|x_1 - x_2\|_\infty \\
&\leq 2L \max(\|y_1 - y_2\|_\infty, \|x_1 - x_2\|_\infty) \\
&= 2L\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_\infty
\end{aligned}$$

Debido a que se consideró $L < \frac{1}{2}$ se tiene que Ψ es contractante.

□

Se verá a continuación que la contractancia de Ψ es una condición suficiente para la contractancia de Φ .

Propiedad 4.5 (Contractancia de Φ a partir de la contractancia de Ψ)

Si Ψ es contractante, entonces Φ es contractante, con el mismo parámetro de contractancia.

Demostración:

Dado que Ψ es contractante con constante $L < 1$, se tiene $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathcal{X}, \omega_1, \omega_2 \in \Omega$ lo siguiente:

$$\|\Psi(x_1, y_1, \omega_1, \omega_2) - \Psi(x_2, y_2, \omega_1, \omega_2)\|_\infty \leq L\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_\infty$$

Basta tomar $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \omega_1 = \omega_2 = \omega$ y, dado que $\Psi(x, x, \omega, \omega) = \Phi(x, \omega)$ y aplicando la definición de norma infinito, se tiene la contractancia de Φ , con el mismo parámetro de contractancia.

□

Adicionalmente, si Ψ es contractante, entonces es contractante parcialmente para cada una de sus primeras dos componentes.

Propiedad 4.6 (Si Ψ es contractante, entonces es parcialmente contractante para cada variable endógena)

Si Ψ es contractante, entonces es parcialmente contractante en sus dos componentes endógenas, de acuerdo a la Definición 4.7.

Demostración:

Dado que Ψ es contractante con constante $L < 1$, se tiene $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathcal{X}, \omega_1, \omega_2 \in \Omega$ lo siguiente:

$$\|\Psi(x_1, y_1, \omega_1, \omega_2) - \Psi(x_2, y_2, \omega_1, \omega_2)\|_\infty \leq L\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_\infty$$

Basta tomar $y_1 = y_2 = y \in \mathcal{X}$ y se tiene que $\forall x_1, x_2, y \in \mathcal{X}, \omega_1, \omega_2 \in \Omega$:

$$\|\Psi(x_2, y, \omega_1, \omega_2) - \Psi(x_1, y, \omega_1, \omega_2)\|_\infty \leq L\|x_1 - x_2\|_\infty$$

Lo que corresponde a la definición de contractancia parcial en la primera componente. La demostración para la segunda componente es análoga.

□

Se demostrará a continuación que la contractancia de la función Φ , junto con las propiedades que tiene por construcción, permiten garantizar que para un instante t dado y un vector de variables exógenas ω^t , existe un único valor x^t que satisface la condición de equilibrio.

Propiedad 4.7 (Existencia y unicidad de un valor de equilibrio)

Para un instante $t \in \{1, \dots, T\}$ y un vector exógeno $\omega^t \in \Omega$ dado, si $\Phi: \mathcal{X} \times \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ es contractante, entonces existe un único valor $x^t \in \mathcal{X}$ que satisface la condición de equilibrio.

$$x^t = \Phi(x^t, \omega^t)$$

Se cumple así que x^t es un punto fijo de Φ . Además, es posible definir la siguiente sucesión:

$$\begin{aligned} x_n^t &= x_0^t \quad \text{si } n = 0 \\ x_{n+1}^t &= \Phi(x_n^t, \omega^t) \quad \text{si } n \in \mathbb{N} - \{0\} \end{aligned}$$

Que converge a x^t cuando $n \rightarrow \infty$

Demostración:

Por la contractancia de Φ y su definición, se tiene que $\forall x \in \mathcal{X}, \Phi(x, \omega^t) \in \mathcal{X}$. Luego, Φ satisface las hipótesis del *Teorema de Punto fijo de Banach*. En virtud de este teorema, se tiene que existe un único punto fijo, y que la sucesión dada converge a su valor.

□

Hasta ahora se han introducido funciones que representan los modelos de equilibrio y de cuasiequilibrio, se ha mostrado la existencia de un único valor de equilibrio para cada período (dado que el modelo de equilibrio es contractante), y se ha supuesto la contractancia de los modelos de cuasiequilibrio.

A continuación se aborda la pregunta fundamental de esta sección: ¿Bajo qué condiciones los modelos de cuasiequilibrio convergen a la misma solución que el modelo de equilibrio en el tiempo?

4.4. Convergencia de los modelos en tiempo infinito

En esta sección se demostrará que, bajo ciertos supuestos bastante generales, el modelo de equilibrio y el de cuasiequilibrio llegan al mismo resultado en el largo plazo, es decir, cuando $t \rightarrow \infty$.

Tras el análisis previo, se asume en lo sucesivo que el modelo de equilibrio converge a un resultado para cada período (posee un punto fijo) y que el modelo de cuasiequilibrio es contractante. Bajo distintos supuestos para las variables exógenas que caracterizan la ciudad, se analizará el comportamiento de la convergencia de ambos modelos en tiempo infinito para casos particulares. Se utilizarán las funciones y propiedades definidas en las subsecciones 4.2 y 4.3.

Supuesto 4.1

Ψ es contractante con constante de contractancia $L < 1$ para la norma $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$.⁷

La contractancia de Ψ ha sido definida en la sección 4.3. Este supuesto, necesario para la mayor parte del análisis presentado a continuación, no ha sido demostrado de forma general. En la sección 4.3 se entregaron condiciones que pueden permitir verificar este supuesto por la vía analítica o empírica.

Cabe señalar que dicho supuesto implica, según la Propiedad 4.5, que Φ también es contractante con constante $L < 1$

Supuesto 4.2

Ψ es continua en sus dos últimas componentes. Es decir, si $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega^t = \omega$, entonces:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{X}, b \in \Omega \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(x, x, \omega^t, b) = \Psi(x, x, \omega, b) \quad \wedge \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(x, x, b, \omega^t) = \Psi(x, x, b, \omega)$$

4.4.1. Caso con ciudad invariante

En primer lugar, se supondrá que las variables exógenas de la ciudad ω son invariantes, es decir, que el tamaño de la población, las características viales, de áreas verdes, etc. no varían en el tiempo. En este escenario, se mostrará que la solución de equilibrio es constante para todos los períodos, y que la de cuasiequilibrio se acerca a la de equilibrio a medida que avanza el tiempo, para alcanzar la igualdad en tiempo infinito.

⁷ En el resto de esta sección, la notación $\|\cdot\|$ siempre se referirá a la norma infinito.

Teorema 4.1 (Convergencia en tiempo infinito para ciudad invariante)

Sean las funciones $\Phi: \mathcal{X} \times \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ y $\Psi: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \Omega \times \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ introducidas en la sección 4.2, que cumplen las propiedades de la sección 4.3, el Supuesto 4.1 y el Supuesto 4.2.

Sea $\omega \in \Omega$ vector que representa los atributos exógenos de la ciudad para todo instante t . Sean $x^t = \Phi(x^t, \omega)$ los valores del modelo de equilibrio, y sean $y^t = \Psi(y^t, y^{t-1}, \omega, \omega)$ los valores del modelo de cuasiequilibrio para cada instante t .

Se cumple que:

- Existe un único valor x^* tal que $x^t = x^*$ constante $\forall t$.
- La sucesión y^t converge a x^* cuando $t \rightarrow \infty$ para cualquier punto de partida : $y_0 \in \mathcal{X}$.

Demostración:

Debido a que los valores ω son constantes, se tiene que todos los valores x^t satisfacen la misma ecuación:

$$x^t = \Phi(x^t, \omega) \forall t \quad (4.1)$$

Las soluciones x^t de dicha ecuación existen y son únicas por la Propiedad 4.7. Luego, todos los valores x^t son idénticos entre sí. Se denomina x^* a dicho valor, que cumple:

$$\begin{aligned} x^* &= x^* \quad \forall t \\ x^* &= \Phi(x^*, \omega) \end{aligned} \quad (4.2)$$

El siguiente paso consiste en demostrar que la sucesión dada por:

$$y^t = \Psi(y^t, y^{t-1}, \omega, \omega) \quad (4.3)$$

es convergente en t . Para esto, se define la siguiente función auxiliar:

$$\begin{aligned} \theta: \mathcal{X} &\rightarrow \mathcal{X} \\ \theta(v) &= u \Leftrightarrow u = \Psi(u, v, \omega, \omega) \end{aligned} \quad (4.4)$$

La función θ para cada valor $v \in \mathcal{X}$ devuelve el valor correspondiente a la solución del punto fijo de Ψ en el primer argumento. Cabe señalar que θ está bien definido como función, pues –dado que Ψ es contractante– la solución de punto fijo del primer argumento es única para cada valor del segundo argumento. Nótese además que el recorrido de θ es \mathcal{X} , pues es el mismo de Ψ (que cumple las hipótesis del Teorema de Punto Fijo de Banach)

Es posible reescribir la ecuación (4.3) utilizando la función θ :

$$y^t = \theta(y^{t-1}) \quad (4.5)$$

Para probar que la sucesión y^t converge, es suficiente mostrar que la función θ tiene un único punto fijo y , y que es contractante, por lo que la sucesión converge a dicho punto fijo.

Notar en primer lugar que el punto fijo existe y es único. En efecto, por (4.4) y por la Propiedad 4.4:

$$y = \theta(y) \Leftrightarrow y = \Psi(y, y, \omega, \omega) \Leftrightarrow y = \Phi(y, \omega) \quad (4.6)$$

Luego, la existencia de un punto fijo de θ equivale a la ecuación (4.1), que, como se vio, posee un punto fijo único.

Finalmente, se probará que θ es contractante, lo que necesario para que la sucesión $y^t = \theta(y^{t-1})$ se aproxime a su punto fijo a medida que t crece. Sean $v_1, v_2 \in \mathcal{X}$, $v_1 \neq v_2$, y $u_1 = \theta(v_1)$, $u_2 = \theta(v_2)$. Considérese la expresión

$$\|\theta(v_1) - \theta(v_2)\| = \|u_1 - u_2\| \quad (4.7)$$

Notar que de (4.4) se sigue que $u = \theta(v) = \Psi(u, v, \omega, \omega)$. Por esto y la contractancia de Ψ se tiene:

$$\begin{aligned} \|\theta(v_1) - \theta(v_2)\| &= \|\Psi(u_1, v_1, \omega, \omega) - \Psi(u_2, v_2, \omega, \omega)\| \\ &\leq L\|(u_1, v_1) - (u_2, v_2)\| \\ &\leq L \max\{\|u_1 - u_2\|, \|v_1 - v_2\|\} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Luego,

$$\|u_1 - u_2\|_\infty \leq L \max\{\|u_1 - u_2\|, \|v_1 - v_2\|\} \quad (4.9)$$

Supóngase por contradicción que $\|v_1 - v_2\|_\infty < \|u_1 - u_2\|_\infty$. En ese caso, se tiene de (4.9) que $\|u_1 - u_2\|_\infty \leq L\|u_1 - u_2\|$, lo que es una contradicción, pues $L < 1$. Luego, se cumple que $\|v_1 - v_2\|_\infty \geq \|u_1 - u_2\|_\infty$, y en consecuencia:

$$\|u_1 - u_2\|_\infty \leq L\|v_1 - v_2\| \quad (4.10)$$

Por lo tanto, reescribiendo $u_1 = \theta(v_1)$ y $u_2 = \theta(v_2)$, se cumple la definición de contractancia para θ :

$$\|\theta(v_1) - \theta(v_2)\|_\infty \leq L\|v_1 - v_2\| \quad (4.11)$$

Con esto, se verifica que la función θ cumple las hipótesis del Teorema de Punto Fijo de Banach. Por lo tanto, existe una sucesión $y^t = \theta(y^{t-1})$, que es la misma definida más arriba, y que en virtud de dicho teorema converge al punto fijo único de θ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \theta(y^{t-1}) = x^*$$

4.4.2. Caso donde la ciudad se estabiliza en el tiempo

Se ha probado que para una ciudad cuyas variables exógenas son constantes, el modelo de cuasiequilibrio converge al resultado de equilibrio en el tiempo. Se mostrará que basta que la ciudad se estabilice en el tiempo, es decir, que sus variables exógenas converjan a un límite, para que se cumpla la misma propiedad del caso de la ciudad invariante: el modelo de equilibrio y el de cuasiequilibrio convergen al mismo valor.

Teorema 4.2 (Convergencia para una ciudad que se estabiliza en tiempo infinito)

Sean las funciones $\Phi: \mathcal{X} \times \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ y $\Psi: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \Omega \times \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ introducidas en la sección 4.2, que cumplen las propiedades de la sección 4.3, el Supuesto 4.1 y el Supuesto 4.2.

Sea $\omega^t \in \Omega \forall t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vectores que representan el estado de los atributos exógenos de la ciudad en cada instante t , que se estabilizan en el tiempo en el valor $\omega \in \Omega$, es decir, $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega^t = \omega$. Sea $x^* = \Phi(x^*, \omega)$ el valor del modelo de equilibrio para el vector de atributos ω .

Sean $x^t = \Phi(x^t, \omega^t)$ los valores del modelo de equilibrio, y sean $y^t = \Psi(y^t, y^{t-1}, \omega^t, \omega^{t-1})$ los valores del modelo de cuasiequilibrio para cada instante t .

Entonces, se tiene que:

- La sucesión x^t converge a x^* cuando $t \rightarrow \infty$.
- La sucesión y^t converge a x^* cuando $t \rightarrow \infty$ para cualquier punto de partida: $y_0 \in \mathcal{X}$.

Demostración:

En primer lugar, se demostrará que $\lim_{t \rightarrow \infty} x^t = x^*$

Los valores de x^t están dados por la ecuación implícita $x^t = \Phi(x^t, \omega^t)$, que tiene solución para todo valor de t . Sin embargo, no es posible calcular directamente el límite al interior de la función, pues es necesario probar primero que éste existe.

Considérese la expresión:

$$\|x^t - x^*\| = \|\Phi(x^t, \omega^t) - \Phi(x^*, \omega)\| \quad (4.12)$$

Por desigualdad triangular se tiene que:

$$\|x^t - x^*\| \leq \|\Phi(x^t, \omega^t) - \Phi(x^*, \omega^t)\| + \|\Phi(x^*, \omega^t) - \Phi(x^*, \omega)\| \quad (4.13)$$

Y por la contractancia de Φ :

$$\begin{aligned}\|x^t - x^*\| &\leq L\|x^t - x^*\| + \|\Phi(x^*, \omega^t) - \Phi(x^*, \omega)\| \\ \Rightarrow \|x^t - x^*\| &\leq \frac{1}{1-L} \|\Phi(x^*, \omega^t) - \Phi(x^*, \omega)\|\end{aligned}\quad (4.14)$$

Debido a que Φ es continua y que $\omega^t \rightarrow \omega$, se tiene que, para cualquier valor de ϵ , existe $T \in \mathbb{N}$ tal que $\forall t > T \|\Phi(x^*, \omega^t) - \Phi(x^*, \omega)\| < \epsilon$. Luego,

$$\|x^t - x^*\| \leq \frac{\epsilon}{1-L} \quad (4.15)$$

De forma equivalente, definiendo $\delta = \frac{\epsilon}{1-L}$, que es igualmente arbitrario que ϵ , se tiene $\forall \delta > 0 \exists T \in \mathbb{N} \forall t > T \|x^t - x^*\| \leq \delta$. Esto demuestra que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x^t = x^*$$

A continuación, debe demostrarse la convergencia del modelo de cuasiequilibrio, dado por $y^t = \Psi(y^t, y^{t-1}, \omega^t, \omega^{t-1})$. Para este fin, no es posible utilizar un argumento similar al usado en la demostración Teorema 4.2, donde se creó una sucesión y^t en función de y^{t-1} utilizando una función auxiliar, pues en este caso la presencia de las variables ω^t y ω^{t-1} impide el despeje. Por esto, a continuación se mostrará la convergencia directamente, utilizando un método similar al usado más arriba para x^t .

De la definición de y^t se tiene:

$$\|y^t - x^*\| = \|\Psi(y^t, y^{t-1}, \omega^t, \omega^{t-1}) - \Psi(x^*, x^*, \omega, \omega)\| \quad (4.16)$$

Por desigualdad triangular:

$$\begin{aligned}\|y^t - x^*\| &\leq \|\Psi(y^t, y^{t-1}, \omega^t, \omega^{t-1}) - \Psi(x^*, x^*, \omega^t, \omega^{t-1})\| \\ &\quad + \|\Psi(x^*, x^*, \omega^t, \omega^{t-1}) - \Psi(x^*, x^*, \omega, \omega)\|\end{aligned}\quad (4.17)$$

Notar que se tiene que $\|\Psi(x^*, x^*, \omega^t, \omega^{t-1}) - \Psi(x^*, x^*, \omega, \omega)\| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$, dado que Ψ es continua y que $\omega^t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \omega$. Luego, para $\epsilon > 0$ dado existe $T \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|y^t - x^*\| \leq \|\Psi(y^t, y^{t-1}, \omega^t, \omega^{t-1}) - \Psi(x^*, x^*, \omega^t, \omega^{t-1})\| + \epsilon \quad \forall t > T \quad (4.18)$$

Por otra parte, de la contractancia de Ψ se tiene:

$$\|\Psi(y^t, y^{t-1}, \omega^t, \omega^{t-1}) - \Psi(x^*, x^*, \omega^t, \omega^{t-1})\| \leq L \max(\|y^t - x^*\|, \|y^{t-1} - x^*\|) \quad (4.19)$$

Luego, es posible acotar (4.18):

$$\|y^t - x^*\| \leq L \max(\|y^t - x^*\|, \|y^{t-1} - x^*\|) + \epsilon \quad (4.20)$$

La expresión de máximo de (4.20) tiene dos valores posibles.

$$\|y^t - x^*\| \leq L\|y^t - x^*\| + \epsilon \quad \vee \quad \|y^t - x^*\| \leq L\|y^{t-1} - x^*\| + \epsilon \quad (4.21)$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned} \|y^t - x^*\| &\leq \frac{\epsilon}{1-L} \vee \|y^t - x^*\| \leq L\|y^{t-1} - x^*\| + \epsilon \quad \forall t > T \\ \Rightarrow \|y^t - x^*\| &\leq \max\left(\frac{\epsilon}{1-L}, L\|y^{t-1} - x^*\| + \epsilon\right) \quad \forall t > T \end{aligned} \quad (4.22)$$

En particular, para $t = T + 1$,

$$\|y^{T+1} - x^*\| \leq \max\left(\frac{\epsilon}{1-L}, L\|y^T - x^*\| + \epsilon\right) \quad (4.23)$$

Para $t = T + 2$,

$$\begin{aligned} \|y^{T+2} - x^*\| &\leq \max\left(\frac{\epsilon}{1-L}, L\|y^{T+1} - x^*\| + \epsilon\right) \\ &\leq \max\left(\frac{\epsilon}{1-L}, L \max\left(\frac{\epsilon}{1-L}, L\|y^T - x^*\| + \epsilon\right) + \epsilon\right) \\ &= \max\left(\frac{\epsilon}{1-L}, L\frac{\epsilon}{1-L} + \epsilon, L(L\|y^T - x^*\| + \epsilon) + \epsilon\right) \\ &= \max\left(\frac{\epsilon}{1-L}, L^2\|y^T - x^*\| + L\epsilon + \epsilon\right) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Donde se utilizó que $L\frac{\epsilon}{1-L} + \epsilon = \frac{\epsilon}{1-L}$. Aplicando el mismo procedimiento recursivamente, se tiene:

$$\|y^{T+k} - x^*\| \leq \max\left(\frac{\epsilon}{1-L}, L^k\|y^T - x^*\| + L^{k-1}\epsilon + L^{k-2}\epsilon + \dots + L\epsilon + \epsilon\right) \quad (4.25)$$

Desarrollando la suma geométrica del lado derecho de (4.25) se obtiene:

$$\begin{aligned} \|y^{T+k} - x^*\| &\leq \max\left(\frac{\epsilon}{1-L}, L^k\|y^T - x^*\| + \frac{1-L^k}{1-L}\epsilon\right) \\ &= \frac{\epsilon}{1-L} + L^k \max\left(0, \|y^T - x^*\| - \frac{\epsilon}{1-L}\right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Notando que $\max\left(0, \|y^T - x^*\| - \frac{\epsilon}{1-L}\right)$ es constante y positivo para cada valor de ϵ y que $0 < L < 1$ se tiene que $L^k \max\left(0, \|y^T - x^*\| - \frac{\epsilon}{1-L}\right) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$. Luego, existe un valor $K \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k > K$,

$$L^k \max\left(0, \|y^T - x^*\| - \frac{\epsilon}{1-L}\right) < \epsilon \quad (4.27)$$

En consecuencia, $\forall k > K$

$$\|y^{T+k} - x^*\| \leq \frac{\epsilon}{1-L} + \epsilon \quad (4.28)$$

Reescribiendo la expresión con $t = T + k$, se tiene que, finalmente, para cualquier valor dado de ϵ , existe un valor $N = T + K \in \mathbb{N}$ tal que para todo $t > N$:

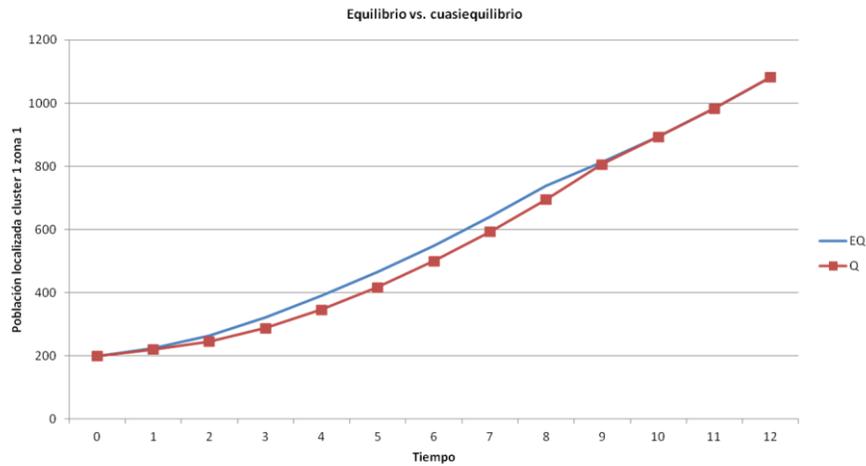
$$\|y^t - x^*\| \leq \frac{\epsilon}{1-L} + \epsilon \quad (4.29)$$

O definiendo $\delta = \frac{\epsilon}{1-L} + \epsilon$, valor igualmente arbitrario que ϵ , se obtiene que $\forall \delta > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall t > N \ \|y^t - x^*\| < \delta$. Esto equivale a:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y^t = x^*$$

□

La figura siguiente representa el comportamiento descrito por este teorema:



Nota: En azul los valores del modelo de equilibrio, en rojo los del modelo de cuasiequilibrio. Se observa que, para un mismo punto de partida, los valores de cuasiequilibrio son distintos de los de equilibrio, pero ambos convergen en el tiempo.

Figura 4.1: Ejemplo de convergencia de los valores de cuasiequilibrio al valor de equilibrio cuando los atributos de la ciudad se estabilizan

4.4.3. Dinámica de convergencia entre dos períodos

El análisis efectuado hasta ahora se ha ocupado de los efectos que tienen lugar en el límite de tiempo infinito. A continuación, un cambio de notación permitirá pasar a una definición de sucesiones sobre un intervalo definido de tiempo $[t^a, t^b]$. El cambio consiste en denotar los valores de cuasiequilibrio por y^{t_n} para una sucesión de instantes $\{t^0, t^1, \dots\}$, en lugar de utilizar el subíndice n . Así, será posible definir una sucesión de instantes t^i que conformen una partición del intervalo $[t^a, t^b]$.

Se supondrá que existe una función continua $W: [t^a, t^b] \rightarrow \Omega$ que entrega los valores del vector de variables exógenas para todo instante, y que existe un valor de equilibrio definido para el instante final del intervalo t^b , denotado por x^b , tal que $x^b = \Phi(x^b, \omega^b)$.

A continuación, se estudiará el comportamiento de los modelos de cuasiequilibrio al “densificar” los períodos, es decir, al aumentar el número de instantes considerados entre dos períodos de referencia. En términos de la modelación, esto equivale a suponer que el desfase temporal de la transferencia de información y la demora en la construcción de los inmuebles se hace menor.

Definición 4.8 (Partición de un intervalo de tiempo)

Sean los instantes de referencia $t = t^a$ y $t = t^b$, con $t^a, t^b \in \mathbb{R}$ y $t^b > t^a > 0$. Se define una partición del intervalo $[t^a, t^b]$ como un conjunto $P = \{t^0, \dots, t^n\}$ tal que $t^0 = t^a$, $t^n = t^b$ y los valores siguen la relación $t^0 < t^1 \dots < t^n$.

Definición 4.9 (Norma de una partición de un intervalo de tiempo)

Se define como un refinamiento de una partición P a un conjunto P' tal que $P \subset P'$.

Definición 4.10 (Norma de una partición de un intervalo de tiempo)

Se define la norma de una partición $|P|$ como $|P| = \max_{i=1, \dots, n} |t^i - t^{i-1}|$.

Es posible calcular los valores de un modelo de cuasiequilibrio sobre una partición, dado un punto de partida. Se mostrará a continuación que si se considera un conjunto de particiones de un intervalo $[t^a, t^b]$ que se refinan infinitamente, entonces el modelo de cuasiequilibrio calculado sobre dichas particiones converge al valor de equilibrio en t^b .

Teorema 4.3 (Convergencia frente a refinamiento de particiones de un intervalo de tiempo)

Sean las funciones $\Phi: \mathcal{X} \times \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ y $\Psi: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \Omega \times \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ introducidas en la sección 4.2, que cumplen las propiedades de la sección 4.3, el Supuesto 4.1 y el Supuesto 4.2.

Sea $(P_n)_{n \in \mathbb{N} - \{0\}}$ una sucesión de particiones $P_n = \{t_{P_n}^0, t_{P_n}^1, \dots, t_{P_n}^n\}$ del intervalo $[t^a, t^b]$, donde $t_{P_n}^0 = t^a$, $t_{P_n}^n = t^b$, $|P_n| = \max_{i=1, \dots, n} |t_{P_n}^i - t_{P_n}^{i-1}|$ es la norma de dichas particiones, y $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ P_{n+1} representa un refinamiento de la partición P_n .

Sea la función continua $W: [t^a, t^b] \rightarrow \Omega$, que representa los valores exógenos $W(t)$ para cada instante de $[t^a, t^b]$. Para cada instante de una partición $t_{P_n}^i \in P_n$, sea $\omega_{P_n}^i = W(t_{P_n}^i)$ el valor del vector exógeno en dicho instante. Sean $\omega^a = W(t^a)$ y $\omega^b = W(t^b)$ los vectores exógenos en los extremos del intervalo $[t^a, t^b]$.

Sea $x^b = \Phi(x^b, \omega^b)$ el valor de equilibrio en el instante t^b .

Sean $y_{P_n}^i = \Psi(y_{P_n}^i, y_{P_n}^{i-1}, \omega_{P_n}^i, \omega_{P_n}^{i-1}) \forall i = 1, \dots, n$ los valores de cuasiequilibrio para cada instante $t_{P_n}^i$ de la partición P_n , con punto de partida cualquiera $y_{P_n}^0 = y^a \in \mathcal{X}$.

Si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |P_n| = 0 \quad \forall n$$

Entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{P_n}^n = x^b$$

Demostración:

La prueba de este teorema consta de dos partes. En primer lugar, se demuestra que escogiendo n suficientemente grande puede asegurarse que los valores del vector exógeno $\omega_{P_n}^i$ están a una distancia arbitrariamente pequeña de ω^b para tantos instantes $t_{P_n}^i$ de la partición P_n como se quiera. En segundo lugar, al calcular los valores de cuasiequilibrio $y_{P_n}^n$ sobre dichos instantes (y gracias a que hay un número infinito de ellos), se concluye que están a una distancia arbitrariamente pequeña de x^b .

Primera parte

En primer lugar, dado que W es continua, para todo $\Delta > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$(\forall t) \quad |t^b - t| < \delta \Rightarrow \|\omega^b - W(t)\| < \Delta \quad (4.30)$$

Debido a que el intervalo $[t^a, t^b]$ es cerrado, para cada $\delta > 0$ es posible escoger un valor $t \in (t^a, t^b)$ tal que $|t^b - t| < \delta$.

Se verá a continuación que se cumple que si $n \rightarrow \infty$, si el número de elementos mayores que t en la partición P_n también tiende a infinito.

En efecto, sea $t \in (t^a, t^b)$ cualquiera, y sean los conjuntos $P_n^{t-} = \{t_k : t_k \in P_n, t^a \leq t_k < t\}$ y $P_n^{t+} = \{t_k : t_k \in P_n, t \leq t_k \leq t^b\}$, que cumplen $P_n^{t-} \cup P_n^{t+} = P_n$.

Dado que $|P_n| = \max_{i=1, \dots, n} |t_{P_n}^i - t_{P_n}^{i-1}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, se tiene que para n suficientemente grande, el cardinal de P_n^{t+} es mayor o igual a dos. En efecto, $t^b \in P_n^{t+}$, y si ese fuera su único elemento se cumpliría que $|P_n| = \max_{i=1, \dots, n} |t_{P_n}^i - t_{P_n}^{i-1}| \geq t^b - t$, donde $t^b - t > 0$ es una constante independiente de n , lo que contradice que $|P_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Supóngase ahora por contradicción que para n suficientemente grande, el cardinal de P_n^{t+} es $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$, valor finito independiente de n , y que en consecuencia P_n^{t+} puede escribirse como $P_n^{t+} = \{t_1, \dots, t_m\}$ con $t_1 < t_2 < \dots < t_m = t^b$. En tal caso, se cumple que

$$\begin{aligned} t^b - t_1 &= \sum_{i=1}^{m-1} (t_{i+1} - t_i) \leq (m-1) \max_{i=1, \dots, m} (t_{i+1} - t_i) \leq (m-1)|P_n| \\ &\Rightarrow |P_n^{t+}| \geq \frac{t^b - t_1}{m-1} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Si m es finito, esto contradice que $|P_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, pues $|P_n| \geq |P_n^{t+}|$. Luego, es posible afirmar que, para cualquier valor arbitrario $m \in \mathbb{N}$, existe n suficientemente grande tal que existen al menos m elementos en el conjunto P_n^{t+} .

Segunda parte

Considérese ahora la expresión $\|y_{P_n}^i - x^b\|$, para $i \in \{1, \dots, n\}$. Se cumple:

$$\|y_{P_n}^i - x^b\| = \|\Psi(y_{P_n}^i, y_{P_n}^{i-1}, \omega_{P_n}^i, \omega_{P_n}^{i-1}) - \Psi(x^b, x^b, \omega^b, \omega^b)\| \quad (4.32)$$

Por desigualdad triangular se tiene:

$$\begin{aligned} \|y_{P_n}^i - x^b\| &\leq \|\Psi(y_{P_n}^i, y_{P_n}^{i-1}, \omega_{P_n}^i, \omega_{P_n}^{i-1}) - \Psi(x^b, x^b, \omega_{P_n}^i, \omega_{P_n}^{i-1})\| \\ &\quad + \|\Psi(x^b, x^b, \omega_{P_n}^i, \omega_{P_n}^{i-1}) - \Psi(x^b, x^b, \omega^b, \omega^b)\| \end{aligned} \quad (4.33)$$

Notar que, dado que Ψ es continua y que $\omega_{P_n}^{i-1}$ es una subsucesión de $\omega_{P_n}^i$, se cumple que para todo $\epsilon > 0$ existe $\Delta > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} \|\omega^b - \omega_{P_n}^i\| < \Delta \wedge \|\omega^b - \omega_{P_n}^{i-1}\| < \Delta \\ \Rightarrow \|\Psi(x^b, x^b, \omega_{P_n}^i, \omega_{P_n}^{i-1}) - \Psi(x^b, x^b, \omega^b, \omega^b)\| < \epsilon \end{aligned} \quad (4.34)$$

De acuerdo a lo demostrado en la primera parte, para cada $\delta > 0$ se cumple:

$$(\forall t) |t^b - t| < \delta \Rightarrow \|\omega^b - W(t)\| < \Delta \quad (4.35)$$

Como se señaló en la primera parte, puede tomarse $t \in (t^a, t^b)$ que cumple $|t^b - t| < \delta$, y es posible escoger n suficientemente grande tal que existen al menos m elementos mayores que t en P_n para m dado. Luego, se puede definir $t_l \in P_n$ que cumple $t < t_l < t^b$, donde $l \in \{1, \dots, n\}$. De este modo,

$$|t^b - t_l| < |t^b - t| < \delta \quad (4.36)$$

Luego, por (4.35),

$$(\forall i \in \{l, \dots, n\}) |t^b - t_i| < \delta \Rightarrow \|\omega^b - \omega_{P_n}^i\| < \Delta \quad (4.37)$$

Y por (4.34), se cumple:

$$(\forall i \in \{l+1, \dots, n\}) \|\Psi(x^b, x^b, \omega_{P_n}^i, \omega_{P_n}^{i-1}) - \Psi(x^b, x^b, \omega^b, \omega^b)\| < \epsilon \quad (4.38)$$

En consecuencia, a partir de (4.33) y (4.38), para todo $i \in \{l+1, \dots, n\}$ se tiene:

$$\|y_{P_n}^i - x^b\| \leq \|\Psi(y_{P_n}^i, y_{P_n}^{i-1}, \omega_{P_n}^i, \omega_{P_n}^{i-1}) - \Psi(x^b, x^b, \omega_{P_n}^i, \omega_{P_n}^{i-1})\| + \epsilon \quad (4.39)$$

A partir de esto, de forma análoga al procedimiento de la demostración del Teorema 4.2 –ecuaciones (4.20) a (4.28)–, es posible aplicar recursivamente dicha expresión y escoger un valor k suficientemente grande, para obtener:

$$\|y_{P_n}^{l+k} - x^b\| \leq \frac{\epsilon}{1-L} + \epsilon \quad (4.40)$$

Nótese que, según lo demostrado en la primera parte, es posible escoger dicho k gracias a que para n suficientemente grande existen al menos k elementos mayores que t_l en P_n .

Finalmente, para cualquier valor $\epsilon > 0$, es posible reescribir la expresión (4.40) reemplazando $i = l + k$, con $i \in \{N, \dots, n\}$ para $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Luego,

$$\|y_{P_n}^i - x^b\| \leq \frac{\epsilon}{1-L} + \epsilon \quad (4.41)$$

Y en particular, es posible tomar $i = n$:

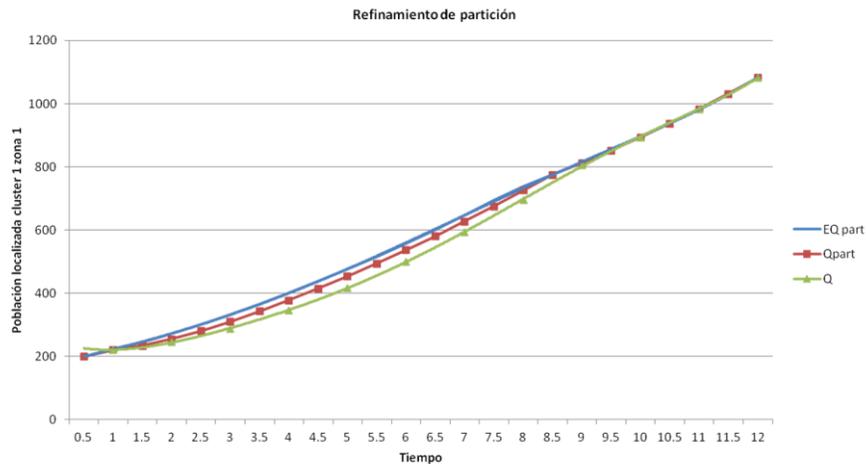
$$\|y_{P_n}^n - x^b\| \leq \frac{\epsilon}{1-L} + \epsilon \quad (4.42)$$

Lo que demuestra que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{P_n}^n = x^b$$

□

La figura siguiente representa el comportamiento descrito por este teorema:



Nota: En azul los valores del modelo de equilibrio, en verde los del modelo de cuasiequilibrio y en rojo los de cuasiequilibrio con partición refinada. Los valores de cuasiequilibrio con partición refinada convergen más rápidamente al valor de equilibrio.

Figura 4.2: Ejemplo de convergencia de los valores de cuasiequilibrio al valor de equilibrio del extremo del intervalo cuando las particiones se refinan infinitamente

4.5. Resumen de las propiedades demostradas

A lo largo de este capítulo se han demostrado las siguientes propiedades:

Tabla 4.1: Resumen de las propiedades analíticas de los modelos

Propiedad	Descripción
Propiedad 4.1 (Exceso o déficit de demanda por categoría de agente en los modelos de cuasiequilibrio)	Bajo ciertas condiciones, en los modelos de cuasiequilibrio aparece un excedente o un déficit en la demanda para cada categoría de agente. Esto no ocurre en los modelos de equilibrio, donde la demanda siempre iguala a la oferta para cada categoría
Propiedad 4.2 (La demanda total es localizada)	Si bien la Propiedad 4.1 muestra que puede existir un excedente o déficit de demanda para cada categoría, al considerar un nivel agregado se cumple que la demanda total es igual a la oferta total.
Propiedad 4.3 (Bajo ciertas condiciones, una tasa de crecimiento constante de la demanda por categoría no afecta la localización)	Bajo ciertos supuestos generales, se cumple que la demanda, la oferta y las rentas entregadas por un modelo de equilibrio o cuasiequilibrio son independientes del parámetro de crecimiento de la población si ésta crece a una tasa constante y homogénea para todas las categorías.

Luego, se introdujo una expresión matemática general para los modelos de equilibrio y de cuasiequilibrio a través de las funciones características Φ y Ψ , se definieron y analizaron las condiciones para el cumplimiento de las propiedades de contractancia y existencia y unicidad de valores de equilibrio, y se demostraron los siguientes teoremas, que asumen como supuesto la contractancia de la función Ψ .

Tabla 4.2: Resumen de los teoremas

Teorema	Descripción
Teorema 4.1 (Convergencia en tiempo infinito para ciudad invariante)	Si los atributos exógenos de la ciudad son invariantes en el tiempo, entonces el resultado del modelo de equilibrio también es invariante, y el del modelo de cuasiequilibrio converge al de equilibrio.
Teorema 4.2 (Convergencia para una ciudad que se estabiliza en tiempo infinito)	Basta que los atributos exógenos de la ciudad converjan a un límite en el tiempo para que el modelo de equilibrio y el de cuasiequilibrio también converjan a un valor en el tiempo.
Teorema 4.3 (Convergencia frente a refinamiento de particiones de un intervalo de tiempo)	Si se considera los períodos como una subdivisión de un intervalo de tiempo, y estos períodos se hacen infinitamente cortos, entonces el resultado del modelo de equilibrio y el de los de cuasiequilibrio al final del intervalo de tiempo se hacen idénticos.

En el capítulo siguiente se abordarán por la vía empírica algunas propiedades cuya demostración que no se han podido abordar por la vía analítica.

Capítulo 5

Simulaciones y resultados

5.1. Descripción general

En esta sección se realiza la simulación computacional de la evolución de la distribución de una población en una ciudad ficticia, constituida por residentes que se clasifican en 3 tipos según su nivel de ingreso, utilizando distintos modelos. La ciudad es dividida en 5 zonas, y se considera un horizonte temporal de 10 años, suponiendo que la cantidad de viviendas y de residentes (oferta y demanda) aumenta en el tiempo.

Se estudian 5 modelos distintos, a través de un prototipo de software computacional desarrollado específicamente para esta tesis, que permite implementar los distintos tipos de modelos introducidos en el Capítulo 3, modificar datos a través de archivos de entrada y obtener los resultados en formato de texto. Este programa se presenta en el Anexo 1.

Cabe señalar que los modelos simulados son ilustrativos y no están basados en una calibración con datos observados. Se ha buscado utilizar parámetros y configuraciones simples, que permitan apreciar de mejor forma los distintos efectos sin perder generalidad respecto a una simulación más compleja.

5.2. Resumen de los modelos implementados

Se analizan los siguientes 5 modelos, que corresponden a combinaciones de los modelos de oferta (identificados por S) y de demanda (identificados por D). La definición completa de los modelos de oferta y demanda se encuentra en el Capítulo 3, y en la sección 3.5 está disponible un cuadro resumen con las principales expresiones funcionales.

Tabla 5.1: Resumen de modelos simulados

Modelo simulado	Modelo de demanda	Modelo de oferta
D0S0	Modelo de equilibrio	Modelo de equilibrio
D1S1	D0 + desfase en información de atributos de oferta y en externalidades de localización	Rezago en 1 período en la producción de la oferta
D2S1 ⁸	D1 + desfase en el cálculo de las posturas de referencia	Rezago en 1 período en la producción de la oferta
D3S1	D0 + rentas desfasadas en el tiempo	Rezago en 1 período en la producción de la oferta
D4S1	D3 + desfase en información de atributos de oferta y en externalidades de localización	Rezago en 1 período en la producción de la oferta

Como se verá, el modelo D2S1 tiene un comportamiento muy distinto al resto, pues converge de forma mucho más lenta al modelo de equilibrio. Por esta razón, se analizará de forma independiente en el Anexo 2.

5.3. Especificación de los modelos implementados

A continuación se describen los atributos considerados para la función de postura y los valores de los parámetros de los modelos. Algunos de estos valores son modificados en los casos estudiados posteriormente.

⁸ Como se verá más adelante, el modelo D2S1 es analizado separadamente del resto, en el Anexo 2, debido a que su convergencia es sustancialmente más lenta que la del resto de los modelos, lo que dificulta el análisis. Se verá que, salvo por la velocidad de convergencia, su comportamiento no difiere de aquel de los otros modelos de equilibrio.

5.3.1. Función de postura

Se considera una función de postura lineal de la siguiente forma:

$$B_{hi} = b_h + b_{hi} + b$$

con :

$$b_{hi} = \alpha_h \sum_h \frac{Z_h P_{h|i} S_i}{\max_i S_i} + \beta_{hi} + cte$$

donde:

- h : tipo de residente
- i : zona
- b_h : ajusta el nivel de utilidad para alcanzar el equilibrio o el cuasiequilibrio, según el modelo utilizado.
- b_{hi} : describe la valoración de los atributos de las propiedades. En este caso, se empleó solamente valoraciones la valoración asignada al tipo de "vecinos", es decir, a las características de los residentes de los distintos segmentos que están localizados en la zona y el tipo de vivienda.
- α_h : precios hedónicos de los atributos considerados, es decir, valoración de los atributos por parte de los agentes.
- $\sum_h Z_h P_{h|i} S_i$: Corresponde al ingreso total de la zona i , donde $P_{h|i} S_i = H_{hi}$ es el número de hogares tipo h localizados en la zona i .
- $\max_i S_i$: Valor máximo de la oferta en el período. Se divide por este valor para mantener acotados los valores de la postura (y evitar un error numérico de las exponenciales), pues el numerador crece con S_i .
- β_{hi} : Valor de suma alzada en las posturas. Puede representar un subsidio o un impuesto. Inicialmente se fija a 0, luego se modifica en el análisis de sensibilidad.
- b : constante no específica. Al ser independiente de los consumidores y la oferta, sólo es relevante para el cálculo de valores absolutos para la postura.

5.3.2. Valores de parámetros

A continuación se presentan los valores por defecto de los distintos parámetros de los modelos. Estos valores fueron seleccionados con el fin de obtener simulaciones de tamaño reducido (se utilizan 5 zonas y 3 categorías de demanda) y facilitar el análisis de cada

componente por separado, sin perder generalidad respecto a una simulación más compleja. No están basados en ninguna calibración ni buscan representar una ciudad real.

Tabla 5.2: Parámetros de los modelos implementados

Parámetro	Valor
Número de categorías de residentes	$ H = 3$
Número de zonas	$ I = 5$
Valores iniciales de variables	
Oferta inicial	$S_i^{t=0} = [400 \quad 160 \quad 240 \quad 300 \quad 300]$
Demanda inicial	$H_{h0} = \begin{bmatrix} 100 \\ 300 \\ 1000 \end{bmatrix}$
Inicialización de probabilidades	$P_{h i}^{t=-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Parámetros de función de postura	
Valores iniciales de posturas de referencia	$b_h^{t=-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Parámetros de función de postura	$\alpha_h = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.666 \\ 0 \end{bmatrix}$
Valores de ingreso por categoría	$Z_h = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
Valores de restricción (cotas superiores a la oferta) – caso irrestricto y restringido	$R_i^t = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad \forall t$ σ $R_i^t = [1000 \quad 1000 \quad 300 \quad 300 \quad 300] \quad \forall t$
Parámetros	
Tiempo máximo	$T_{max} = 5$
Parámetro <i>Gumbel</i> de posturas	$\mu = 0.5$
Parámetro <i>Gumbel</i> de <i>profit</i> del oferente	$\lambda = 0.5$
Máximo de iteraciones por período	$ITER_MAX = 100$
Tolerancia máxima	$TOL = 1 \cdot 10^{-10}$
Tasa de crecimiento de la demanda – caso población constante y caso tasa de crecimiento constante	$POP_GROWTH_RATE = 1$ σ $POP_GROWTH_RATE = 0.1$

5.4. Algoritmo de resolución y aspectos generales

A continuación se presentan múltiples análisis realizados con el fin de comparar los distintos modelos.

Los modelos se calculan en dos niveles distintos de iteración: en primer lugar, para cada período de tiempo t , el modelo itera sobre el contador n para resolver los puntos fijos, hasta alcanzar un nivel de convergencia definido por una tolerancia; luego pasa al siguiente período $t + 1$ y repite el mismo proceso.

El esquema de operación de los modelos programados está descrito en la siguiente figura.

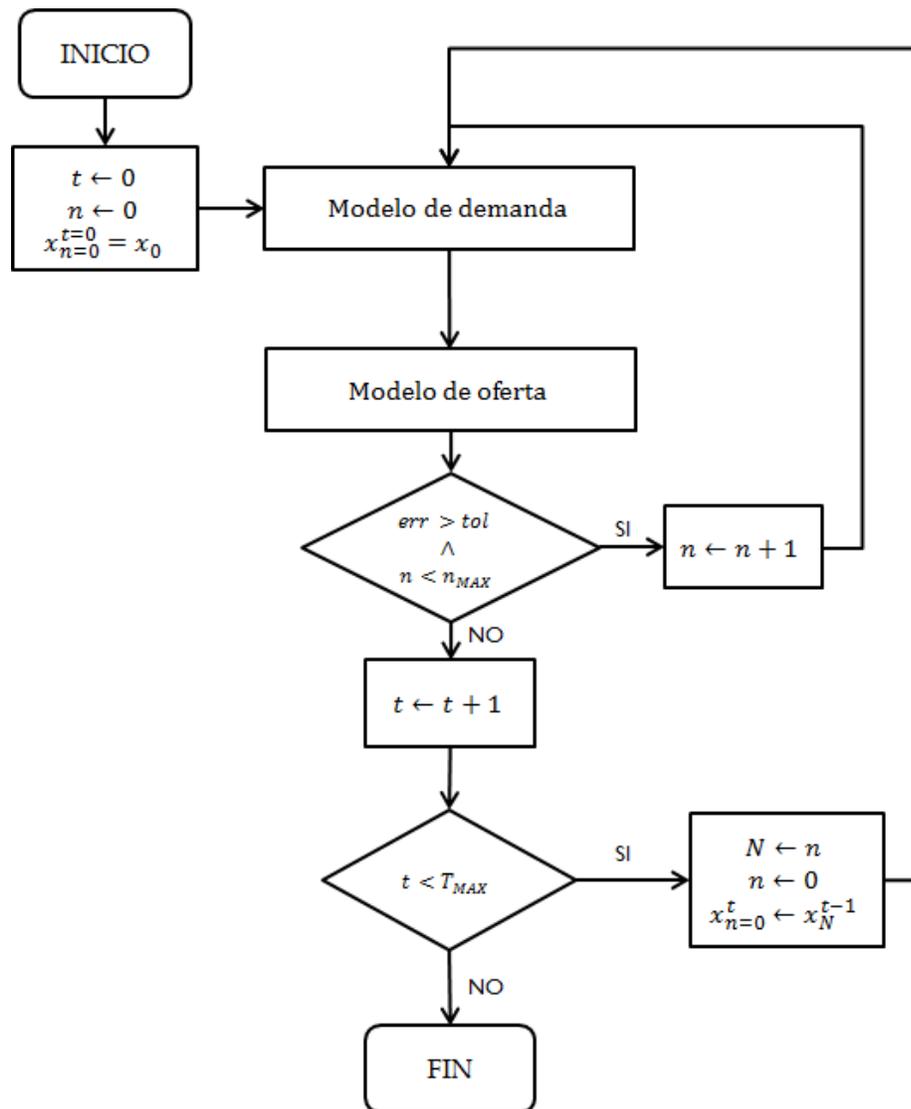


Figura 5.1: Diagrama de flujo general de los modelos

El diagrama de flujo representa la operación de todos los modelos programados. Los aspectos más relevantes a mencionar son:

1. Las variables endógenas se representan por un único vector x .
2. La inicialización se realiza considerando un vector exógeno x_0 .
3. Los contadores n y t se inicializan en 0.
4. Los valores de t van de $t = 0$ a $t = T_{MAX} - 1$. Así, hay un total de T_{MAX} períodos.
5. El contador n se reinicia en cada período t .
6. Tras el período inicial, cada período sucesivo se inicializa con el resultado de convergencia del período anterior.
7. Si en un período no se alcanza la convergencia (es decir, el contador n alcanza el valor n_{MAX}), se pasa al siguiente período. Por esto, tras una corrida es necesario verificar si en cada período se alcanzó la convergencia.
8. Si un modelo no requiere iteraciones internas para cada período, realiza dos iteraciones de todas formas. En la segunda, verifica que el error es 0, y pasa al período siguiente. Esto se debe a que el error se calcula comparando dos iteraciones sucesivas.
9. Los modelos utilizan 5 zonas, que no corresponden a datos reales ni tienen una representación física asociada. Las zonas son idénticas entre sí, salvo en algunos casos de análisis donde se introducen diferencias entre zonas. Esto se hace explícito cuando corresponde.
10. Las 3 categorías de demanda utilizadas difieren en su ingreso. Como se señaló en el cuadro anterior, los valores de ingreso están dados por el vector $Z_h = [3 \ 2 \ 1]^t$, que significa que la primera categoría tiene un ingreso 3 veces mayor a la última. Estos valores son ilustrativos y no tienen una unidad monetaria asociada.

5.5. Resumen de los casos analizados empíricamente

La tabla siguiente resume los casos analizados. Estos se dividen en tres categorías:

- **Análisis de casos de uso:** se estudian distintos casos que pueden encontrarse en aplicaciones a ciudades reales.
- **Análisis de sensibilidad a las condiciones iniciales:** se estudia la dependencia de los resultados al valor inicial de las variables endógenas. El RB&SM es independiente de éstas; se busca verificar si lo mismo se cumple en los modelos de cuasiequilibrio.
- **Análisis de sensibilidad a los parámetros de los modelos Logit:** se analizan los efectos de modificar los parámetros de los modelos logit de oferta y demanda. El RB&SM presenta casos de no-convergencia y sensibilidad al punto de partida para valores grandes de dichos parámetros; se busca verificar si lo mismo se cumple en los modelos de cuasiequilibrio.

Tabla 5.3: Resumen de los casos empíricos analizados

Caso	Descripción
Análisis de casos de uso	
C1 - Modelo irrestricto, ciudad con variables exógenas constantes	Se verifica empíricamente el Teorema 4.1.
C2 - Modelo irrestricto, ciudad con crecimiento a tasas constantes	Se verifica empíricamente que, en virtud de la Propiedad 4.3, este caso es equivalente al de ciudad invariante.
C3 - Ciudad con población constante y atributos variables en el tiempo y convergentes	Se verifica empíricamente el Teorema 4.2.
C4 - Shock único	Se introduce un aumento discreto de las posturas en un periodo, lo que representa un cambio brusco de los atributos de la ciudad o del mercado, y se estudian los efectos en los distintos modelos.
C5 - Shocks múltiples	Se introducen múltiples idénticos al descrito en el caso anterior, y se estudian los efectos en los modelos.
C6 - Modelo con restricciones	Se introducen restricciones a la localización por zona (supuestas nulas en los casos anteriores) y se estudian sus efectos en los resultados y la trayectoria de los distintos modelos.
Análisis de sensibilidad a las condiciones iniciales	
C7 - Sensibilidad al punto de partida de la postura de referencia	Se estudian los efectos de la variación del punto de partida de las distintas variables endógenas. Es conocido el hecho de que el resultado del modelo RB&SM es independiente del punto de partida, salvo para ciertos valores de los parámetros logit, por lo que se busca verificar la propiedad equivalente en los modelos de cuasiequilibrio.
C8 - Sensibilidad al valor inicial de la probabilidad inicial	
C9 - Sensibilidad al punto de partida de la oferta	
Análisis de sensibilidad a los parámetros de los modelos <i>logit</i>	
C10 - Sensibilidad de la solución al parámetro de oferta λ	Se estudia la sensibilidad de la solución a la modificación de los valores de los parámetros λ y μ de los modelos logit de oferta y demanda. Es conocido que el modelo RB&SM sólo converge para valores dentro de un cierto rango acotado, por lo que se busca verificar si los modelos de cuasiequilibrio presentan la misma propiedad.
C11 - Sensibilidad de la solución al parámetro de demanda μ	
C12 - Sensibilidad al punto de partida de las probabilidades de localización para distintos valores de λ	Se estudia los cambios en la sensibilidad al punto de partida para distintos valores de los parámetros de los modelos logit. Es conocido que el modelo RB&SM se hace sensible a las condiciones iniciales para valores suficientemente grandes de dichos parámetros (caso determinístico), y se busca verificar si los modelos de cuasiequilibrio presentan la misma propiedad.
C13 - Sensibilidad al punto de partida de las probabilidades de localización para distintos valores de μ	

5.6. Análisis de casos de uso

A continuación se estudian distintos casos de aplicación de los modelos D0S0, D1S1, D3S1 y D4S1. Según lo señalado anteriormente, el modelo D2S1 fue excluido del análisis por presentar una convergencia mucho más lenta que el resto de los modelos, lo que dificulta las comparaciones en paralelo a los otros modelos. Es analizado separadamente en el Anexo 2, donde se constata que su comportamiento no difiere del resto de los modelos de cuasiequilibrio.

5.6.1. C1 - Modelo irrestricto, ciudad con variables exógenas constantes

El primer escenario analizado corresponde a una ciudad invariante, cuyas principales características, de acuerdo a lo descrito anteriormente, son:

1. Se consideran 10 períodos, en una ciudad de 3 tipos de residentes y 5 zonas.
2. La población de cada segmento de residentes es constante.
3. Los atributos exógenos de la función de postura son constantes.
4. Las restricciones a la oferta no son activas

5.6.1.1. Descripción general de los resultados

El Teorema 4.1 demuestra que en una ciudad invariante los modelos de equilibrio entregan el mismo resultado para todos los períodos, y los de cuasiequilibrio parten en valores diversos, pero convergen al resultado del modelo de equilibrio a medida que el tiempo crece. Adicionalmente, el modelo de equilibrio teóricamente debe converger en una sola iteración después del primer período (puesto que cada período se inicializa con el resultado del anterior, y en este caso los resultados son invariantes).

Los resultados empíricos verifican esto. En primer lugar, se observa que el modelo D0S0 converge itera reiteradas veces en el primer período, y luego se mantiene en una iteración. Los modelos D1S1 y D3S1, que calculan puntos fijos, mantienen un número mayor de iteraciones (aunque decreciente), mientras que D4S1, que no tiene puntos fijos, mantiene un número constante de tres iteraciones.

El valor de la diferencia entre la postura de referencia para distintos agentes converge al mismo resultado entre los distintos modelos, si bien los valores individuales pueden ser distintos. Cabe señalar que debido a la forma funcional del modelo logit, sólo la diferencia relativa entre posturas tiene un efecto en la localización, no así los valores individuales.

Finalmente, el análisis empírico permite concluir que todos los modelos se estabilizan visiblemente, con variaciones decrecientes entre períodos.

5.6.1.2. Número de iteraciones

Debido a la forma en que se implementaron los modelos, D4S1 realiza 3 iteraciones fijas en lugar de una. Esto se debe a que en la primera iteración el valor de la oferta inmobiliaria es calculado después de las posturas y las probabilidades. El valor de la oferta inmobiliaria es único para el período (no tiene puntos fijos), sin embargo la postura de referencia depende de la oferta actualizada, que recién es obtenida por la postura en la segunda iteración. Finalmente, debido a que la condición de salida está definida a través de un indicador de diferencia entre dos iteraciones (delta), es necesario ejecutar una iteración idéntica adicional para terminar el cálculo. Este procedimiento es completamente equivalente a calcular primero la oferta inmobiliaria (cálculo único), y luego calcular la probabilidad y las posturas a partir de dicha oferta inmobiliaria, lo que también corresponde a un único cálculo. Esto demuestra que las iteraciones adicionales no mejoran el resultado ni sirven como un punto fijo, sino que sólo contribuyen a la implementación. Como se verá posteriormente, esto no se cumple cuando se incorporan restricciones a la localización, que dan lugar a un punto fijo en el modelo D4S1.

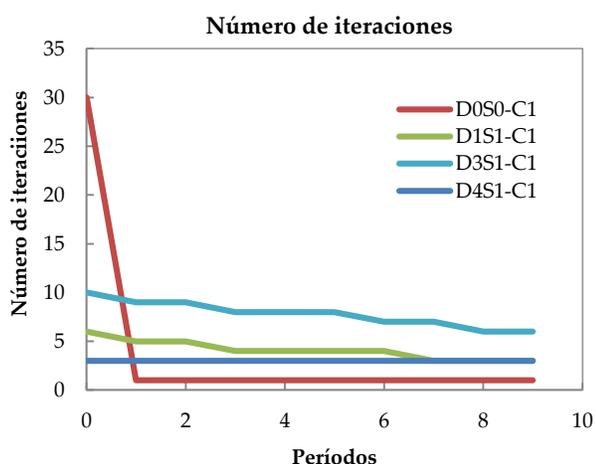


Figura 5.2: C1 - Número de iteraciones por modelo y por período

5.6.1.3. Probabilidad de localización y demanda localizada

Los valores de las probabilidades de localización convergen, y en consecuencia también lo hace la población localizada por categoría y zona. Las siguientes figuras muestran la convergencia del valor para la categoría 0 y la zona 0.

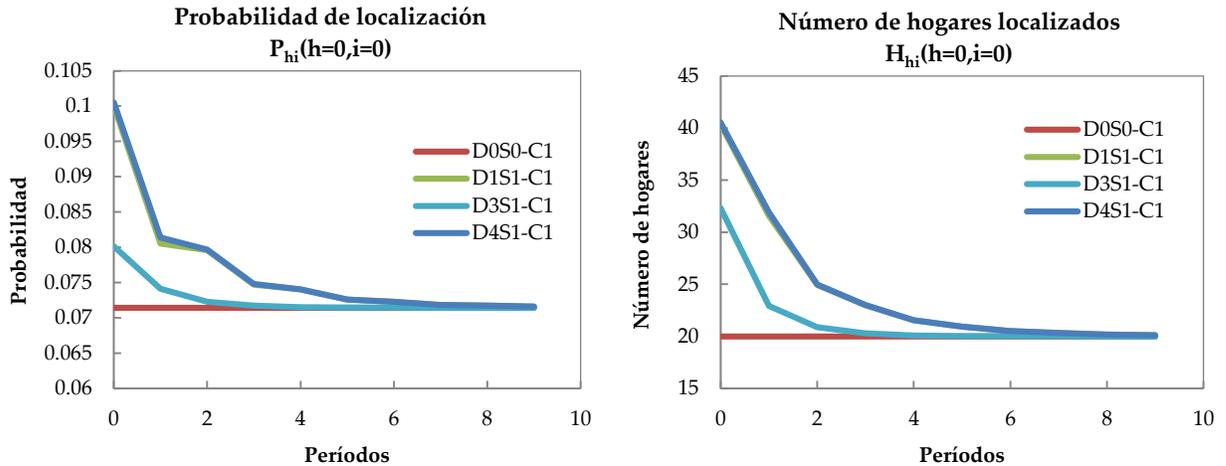


Figura 5.3: C1 - Probabilidad de localización y número de hogares localizados para la categoría de hogar 0 y la zona 0, por modelo y por período

Por razones de espacio no se incluyen los gráficos para todas las categorías. Sin embargo, es posible apreciar que la convergencia es homogénea para todas las zonas y las categorías a través del siguiente indicador de dispersión, que mide la desviación estándar:

$$\hat{\sigma}(P) = \sqrt{\frac{1}{|H||I|} \sum_{hi} (P_{h|i}^t - \overline{P_{h|i}^t})^2}$$

donde $\overline{P_{h|i}^t} = \frac{1}{|H||I|} \sum_{hi} P_{h|i}^t$ es el valor promedio de las probabilidades en todas las categorías y zonas, que tiene un valor constante debido a que las probabilidades suman 1 en las categorías de agentes. La figura siguiente muestra que en el análisis empírico la dispersión se estabiliza en el tiempo, lo que refleja la convergencia del vector completo de probabilidades a un único valor.

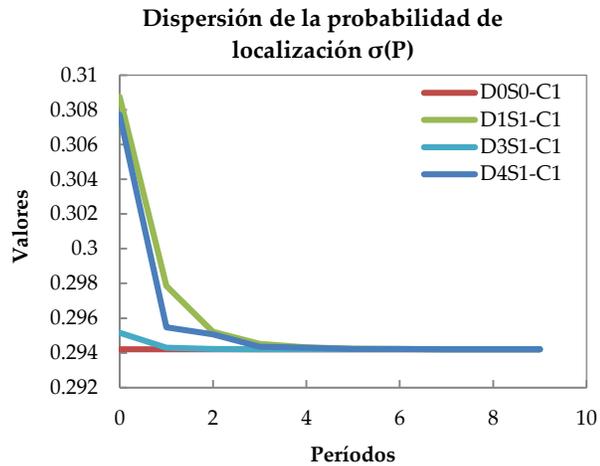


Figura 5.4: C1 - Dispersión de la probabilidad de localización, por modelo y por período

5.6.1.4. Oferta inmobiliaria

La convergencia de la oferta inmobiliaria también se alcanza rápidamente.

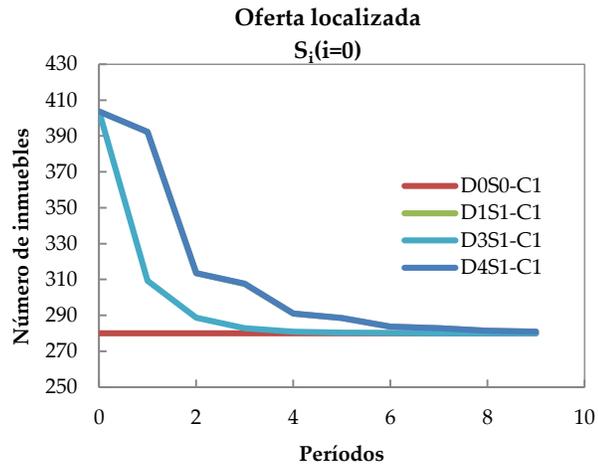


Figura 5.5: C1 - Oferta localizada en la zona 0, por modelo y por período

5.6.1.5. Postura de referencia

Los modelos no son sensibles a los valores individuales de las posturas de referencia, sino sólo a las diferencias relativas entre estos. En efecto, en la siguiente expresión simplificada, se observa que es posible dividir en el numerador y denominador de las probabilidades por una postura de referencia, que puede adoptar cualquier valor arbitrario sin alterar el resultado:

$$P_{h|i} = \frac{H_h \exp \mu(b_h + b_{hi})}{\sum_{h'} H_{h'} \exp \mu(b_{h'} + b_{h'i})} = \frac{H_h \exp \mu(b_h) \exp(b_{hi})}{\sum_{h'} H_{h'} \exp \mu(b_{h'}) \exp(b_{h'i})} = \frac{H_h \exp \mu(b_h - b_g + b_{gi})}{\sum_{h'} H_{h'} \exp \mu([b_{h'} - b_h] + b_{h'i})}$$

En las simulaciones realizadas se constató que, en línea con lo señalado, las posturas individuales convergen a distintos valores según el modelo, pero los valores relativos convergen a un mismo valor.

Los valores de postura de referencia relativa se calcularon utilizando como base el valor $b_{h=1}$ correspondiente al agente $h = 1$. En la figura siguiente se muestra la postura de referencia relativa del agente $h = 0$.

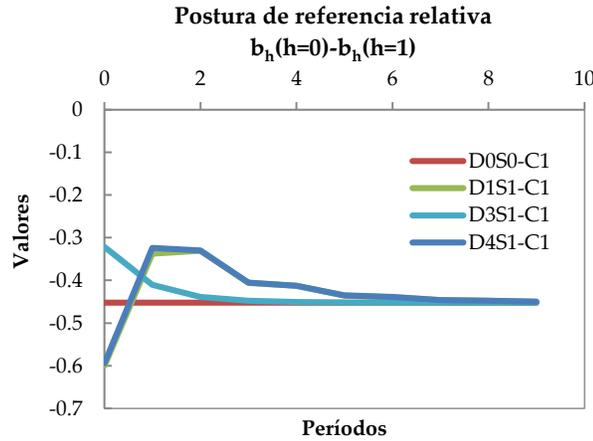


Figura 5.6: C1 - Postura de referencia relativa del agente 0 respecto al agente 1, por modelo y período

5.6.1.6. Exceso o déficit de demanda

En la subsección 4.1.1 se demostró que existe una diferencia teórica entre la demanda localizada por categoría y la demanda total en algunos modelos de cuasiequilibrio. Ésta diferencia aparece en los modelos que utilizan una condición de cuasiequilibrio, con una probabilidad estimada por los agentes para el cálculo de la postura de referencia que difiere de la utilizada por el rematador, como ocurre en los modelos D2S1, D3S1 y D4S1. La diferencia está dada por la siguiente expresión

$$H_h^{t-LOC} - H_h^t = \sum_i S_i^t (P_{h|i}^t - q_{h|i}^t)$$

El gráfico siguiente presenta la máxima diferencia entre la demanda localizada y la real (en valor absoluto), de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\max_h |H_h^{t-LOC} - H_h^t|$$

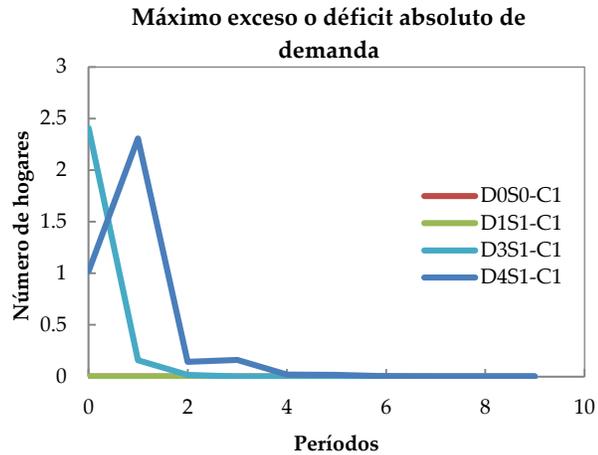
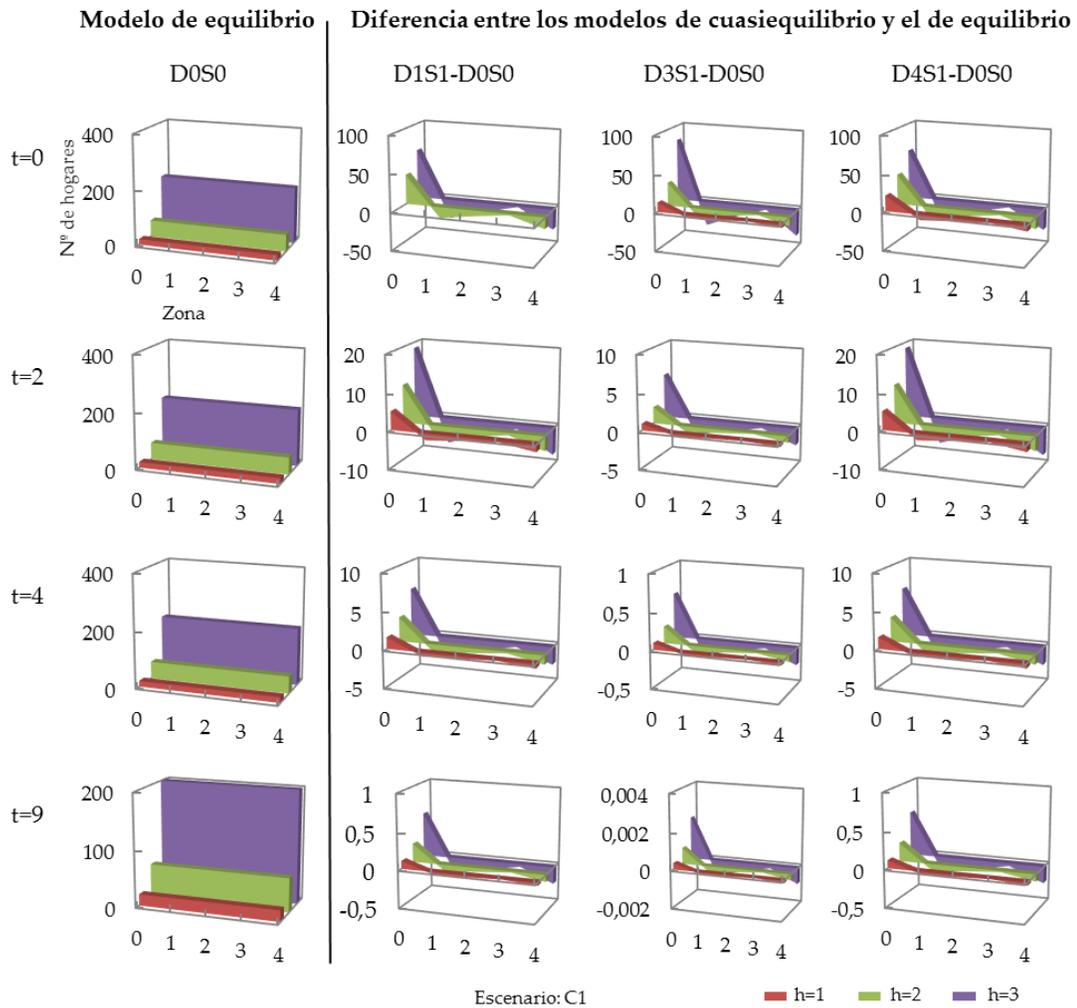


Figura 5.7: C1 - Máximo exceso o déficit absoluto de demanda por modelo y período

Se observa que la máxima diferencia entre la demanda localizada y la real tiene un valor relativamente elevado en los primeros períodos, que rápidamente se aproxima a cero en los períodos subsecuentes. Esto se debe a la convergencia de la localización de los distintos modelos.

5.6.1.7. Comparación de los modelos de cuasiequilibrio con el de equilibrio

La siguiente figura presenta en la columna izquierda la localización asignada por el modelo de equilibrio en los períodos 0, 2, 4 y 9 para cada zona y categoría. En las 3 columnas de la derecha, se presenta en el mismo tipo de gráfico la diferencia entre la demanda localizada por zona y categoría por los modelos de cuasiequilibrio y por el de equilibrio.



Nota: La columna izquierda muestra los valores del modelo de equilibrio para cada instante, las 3 columnas de la derecha muestran la diferencia entre el modelo de equilibrio y los de cuasiequilibrio. Se observa que a medida que pasa el tiempo, las diferencias se hacen menores. Esto se aprecia en la reducción de la escala de los gráficos, si bien la forma de estos se mantiene.

Figura 5.8: C1 - Diferencia entre los resultados del modelo de equilibrio y los modelos de cuasiequilibrio en algunos períodos

Los gráficos de la izquierda, correspondientes al modelo de equilibrio, son todos idénticos entre sí, resultado conocido para una ciudad invariante. En los gráficos de la derecha, que representan el error de los modelos de cuasiequilibrio, el error (representado por el eje vertical) decae fuertemente con el tiempo, hasta valores menores que la unidad en el último período (es decir, del orden del 0,5% de la localización).

El gráfico siguiente muestra una medida del error de los modelos de cuasiequilibrio con respecto al de equilibrio, calculado como el promedio de los errores absolutos, de acuerdo a la siguiente expresión, donde m denota un modelo de cuasiequilibrio.

$$Error\ Absoluto\ Medio(m, D0S0) = \frac{1}{|H||I|} \sum_{hi} |H_{hi}^{t,m} - H_{hi}^{t,D0S0}|$$

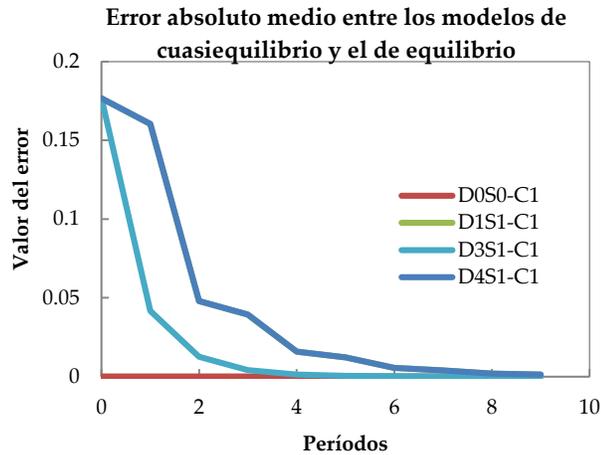


Figura 5.9: C1 - Error absoluto medio respecto de los modelos de cuasiequilibrio respecto al modelo de equilibrio

Se observa que el error decae en el tiempo, lo que corrobora que los modelos de cuasiequilibrio se acercan al resultado de equilibrio en el tiempo.

5.6.2. C2 - Modelo irrestricto, ciudad con crecimiento a tasas constantes

El escenario analizado a continuación corresponde a una ciudad con atributos exógenos invariantes, excepto por la población, que aumenta a tasa exógena constante del 10% por año, de forma homogénea para todas las categorías de ingreso.

1. Se consideran 10 períodos, en una ciudad de 3 tipos de residentes y 5 zonas.
2. La población de cada segmento de residentes es constante.
3. Los atributos exógenos de la función de postura son constantes.
4. Las restricciones a la oferta no son activas

A partir de este punto por simplicidad se omiten algunos gráficos que fueron presentados en el caso C1, salvo en el escenario de que aporten información relevante.

5.6.2.1. Descripción general de los resultados

De acuerdo a lo predicho teóricamente, gran parte de las variables de este escenario son idénticas a las del escenario anterior. Sólo se presentan diferencias para variables específicas.

5.6.2.2. Número de iteraciones

El número de iteraciones por modelo se comporta del mismo modo que en el escenario anterior, decreciendo con el tiempo.

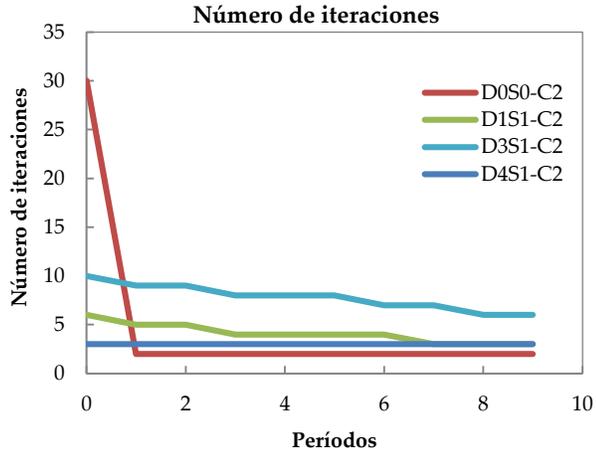


Figura 5.10: C2 - Número de iteraciones por modelo y por período

5.6.2.3. Probabilidad de localización y demanda localizada

Los siguientes gráficos muestran la probabilidad de localización y el número de hogares localizados por período para la categoría 0 y la zona 0.

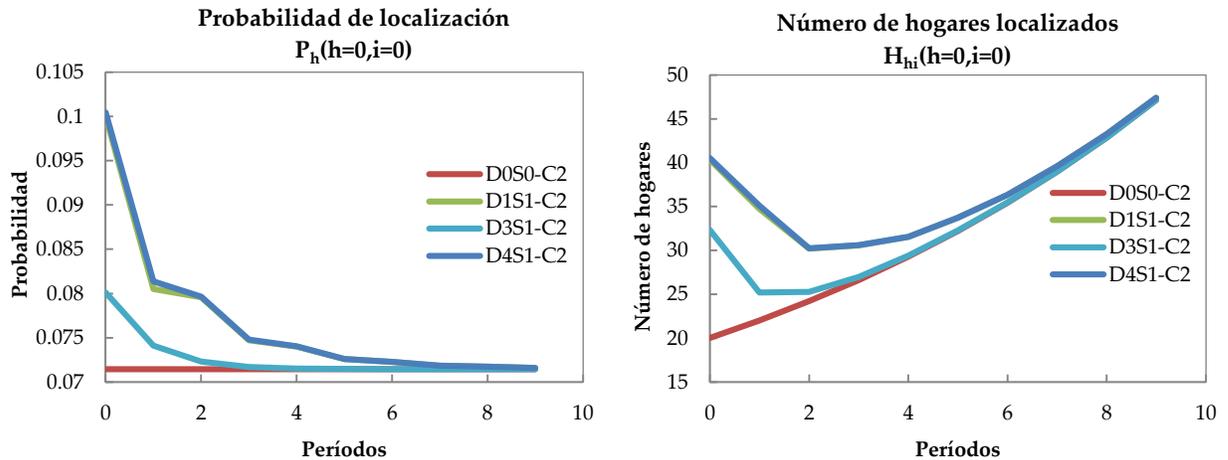


Figura 5.11: C2 - Probabilidad de localización y número de hogares localizados para la categoría de hogar 0 y la zona 0, por modelo y por período

Las probabilidades de localización por categoría de agente y por zona son idénticas a las del escenario anterior. La localización por zona y categoría, en cambio, es distinta al caso previo, puesto que la demanda aumenta período a período.

Cabe señalar que en el período $t = 0$ los modelos efectúan el cálculo de H_{hi} utilizando cada uno una expresión de cálculo distinta. El resultado de D0S0 corresponde al valor de equilibrio del período, mientras que los otros modelos utilizan en distinta medida los datos iniciales. Esto explica los diversos valores $H_{hi}(t = 0)$ que se observan en el gráfico.

5.6.2.4. Oferta inmobiliaria

La oferta inmobiliaria es creciente, de acuerdo al parámetro de crecimiento. Tal como se predijo en el análisis teórico, los valores de los distintos modelos convergen en el tiempo.

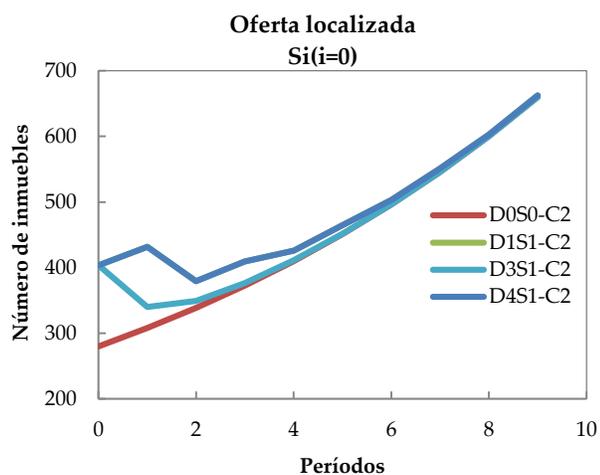


Figura 5.12: C2 - Oferta localizada en la zona 0, por modelo y por período

5.6.2.5. Postura de referencia

La postura de referencia de algunos modelos varía fuertemente, sin embargo, las diferencias entre agentes mantienen su valor relativo.

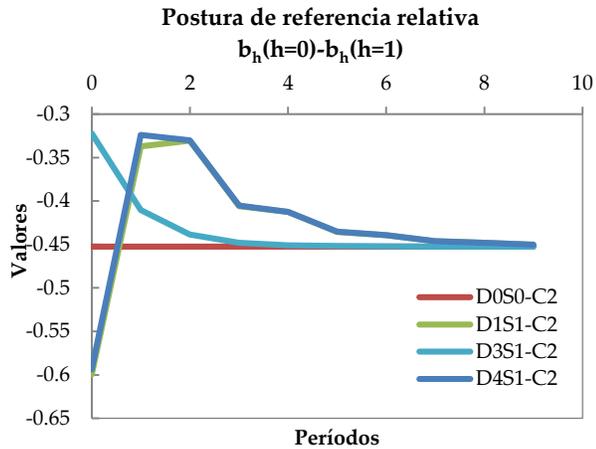


Figura 5.13: C2 – Postura de referencia relativa del agente 0 respecto al agente 1, por modelo y período

5.6.2.6. Exceso o déficit de demanda

El exceso o déficit de demanda aumenta ligeramente debido al aumento de la demanda, lo que hace que los valores extremos del gráfico siguiente sean ligeramente mayores que los del caso anterior. Sin embargo, la tendencia a cero se mantiene, y en el último período las diferencias son prácticamente nulas.

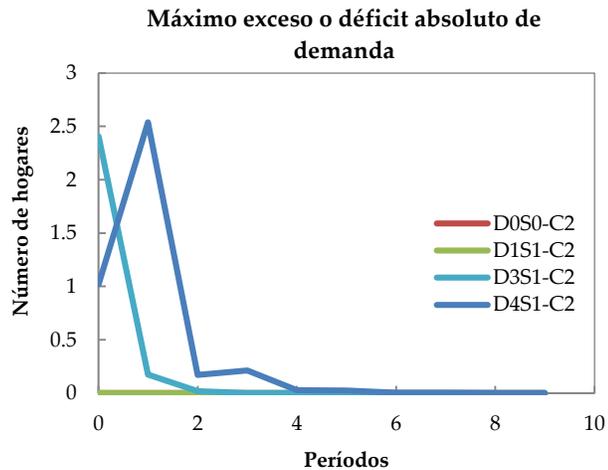
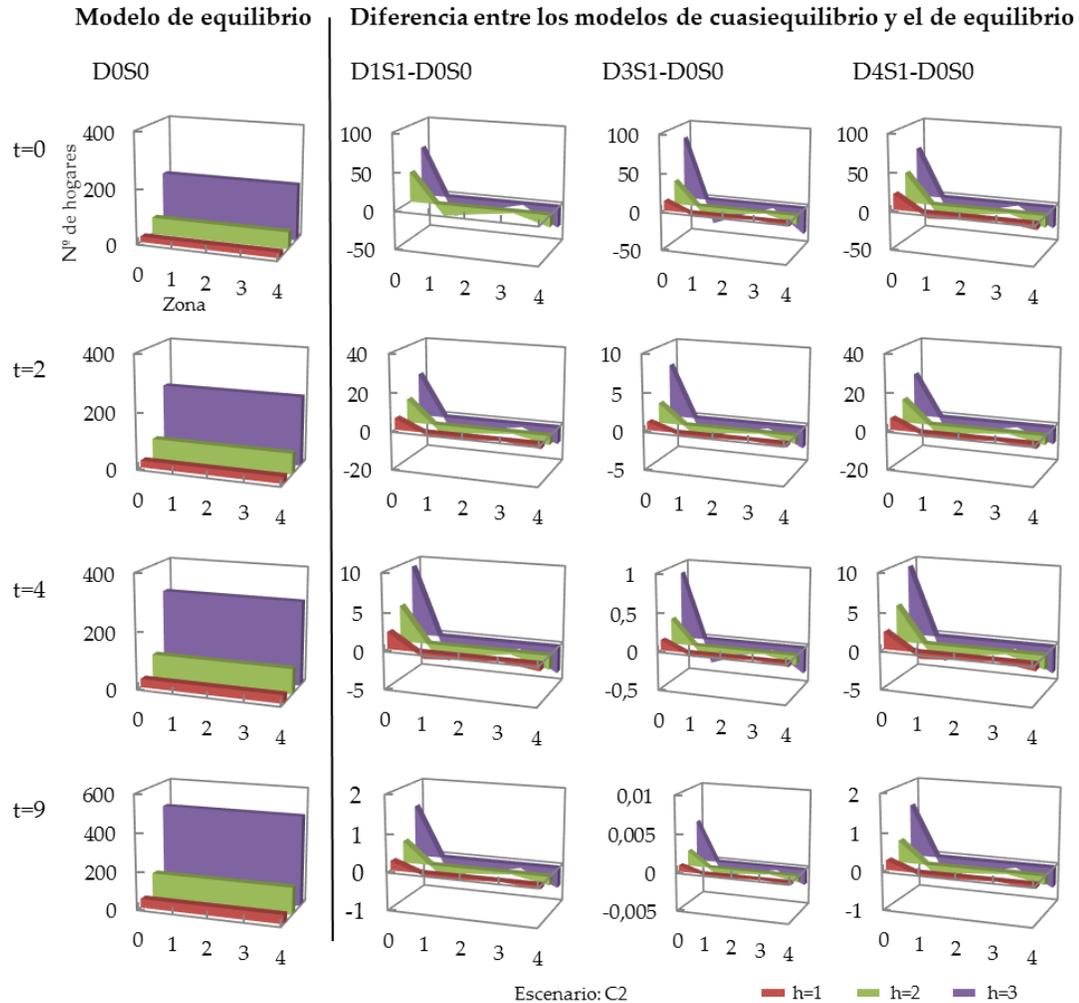


Figura 5.14: C2 - Máximo exceso o déficit absoluto de demanda, por modelo y período

5.6.2.7. Comparación de los modelos de cuasiequilibrio con el de equilibrio

Al igual que en el escenario anterior, la diferencia entre los modelos de cuasiequilibrio D1S1, D3S1 y D4S1 y el modelo de equilibrio D0S0 disminuye a medida que avanza el tiempo. La diferencia es mayor que en el caso anterior, debido a que la demanda también es mayor en magnitud.



Nota: La columna izquierda muestra los valores del modelo de equilibrio para cada instante, las 3 columnas de la derecha muestran la diferencia entre el modelo de equilibrio y los de cuasiequilibrio. Se observa que a medida que pasa el tiempo, las diferencias se hacen menores. Esto se aprecia en la reducción de la escala de los gráficos, si bien la forma de estos se mantiene.

Figura 5.15: C2 – Diferencia entre los resultados del modelo de equilibrio y los modelos de cuasiequilibrio en algunos períodos

5.6.3. C3 - Ciudad con población constante y atributos variables en el tiempo y convergentes

Se mostró teóricamente que cuando los atributos exógenos de la ciudad varían en el tiempo de forma convergente a un valor fijo, entonces la diferencia entre el resultado de los modelos de cuasiequilibrio y el de equilibrio tiende a cero en el tiempo. A continuación se estudia empíricamente este caso.

La expresión de la postura hedónica utilizada en todos los modelos simulados es:

$$B_{hi}^t = b_h^t + \alpha_h \sum_h \frac{Z_h^t P_{h|i}^t S_i^t}{\max_i S_i^t} + \beta_{hi} + cte$$

Los parámetros β_{hi} pueden representar cualquier valor que forme parte de la postura y que dependa de las categorías o de las zonas. Hasta ahora eran considerados nulos. A continuación dichos parámetros se considerarán variables, con el fin de reflejar atributos exógenos y variables de las posturas de los agentes.

En este análisis se asignará a los parámetros β_{hi} valores dependientes de t , de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\beta_{hi} = a \frac{\sin(1+t)}{(1+t)^b}$$

Los parámetros se asignaron de la siguiente forma: a es un valor aleatorio entre -1 y 1 , y $b = 1.8$. Estos valores permiten que la expresión se acerque suficientemente a 0 dentro de los 10 períodos considerados (notar que $\lim_{t \rightarrow \infty} a \frac{\sin(1+t)}{(1+t)^b} = 0$), y que exista suficiente variabilidad entre las funciones de postura de los distintos agentes y zonas en los primeros períodos. Los valores escogidos entregan el siguiente gráfico.

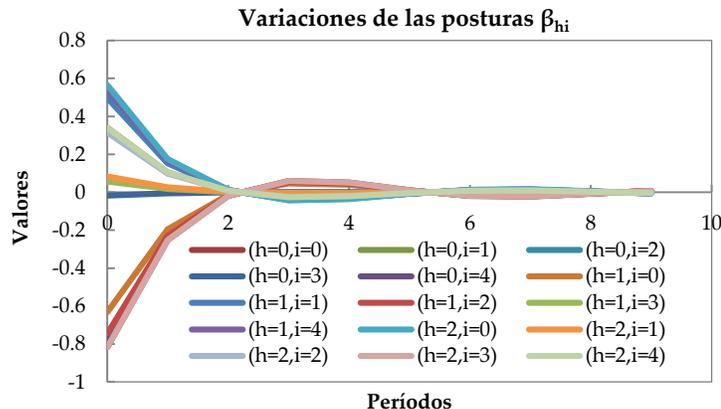


Figura 5.16: Variaciones β_{hi} de las posturas por período para el escenario C3

5.6.3.1. Descripción general de los resultados

Este escenario permite apreciar de buena forma las ventajas de los modelos de cuasiequilibrio frente a uno de equilibrio, pues muestra cómo, bajo una ciudad sin “shocks” en sus atributos y que se estabiliza en el tiempo, los primeros convergen al resultado de equilibrio con un número menor de iteraciones.

Se observa que las trayectorias de las variables son diversas, en consonancia con los parámetros introducidos, pero todas se estabilizan rápidamente en valores de equilibrio.

5.6.3.2. Número de iteraciones

El número de iteraciones del modelo de equilibrio oscila en torno a 25, mientras que los modelos de cuasiequilibrio realizan entre 3 y 10 iteraciones. El modelo D4S1 (que no realiza cálculos de puntos fijos) realiza siempre 3 iteraciones. El modelo D3S1 realiza en torno a 10, y el modelo D1S1 disminuye aproximándose a 3 iteraciones.

Este escenario es uno de los más favorables para los modelos de cuasiequilibrio, pues convergen a los resultados de equilibrio de forma rápida y en un número mucho menor de iteraciones.

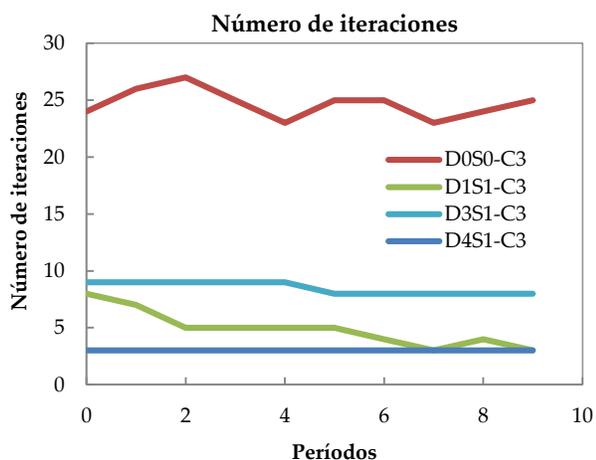


Figura 5.17: C3 – Número de iteraciones por modelo y por período

5.6.3.3. Probabilidad de localización y demanda localizada

La probabilidad de localización se estabiliza en el tiempo, sin ser especialmente sensible a las oscilaciones de la postura hedónica. El gráfico siguiente presenta el valor de la

probabilidad para la categoría 0 y la zona 0. Ésta presenta mayor variabilidad hacia los primeros periodos, y luego converge a un valor único.

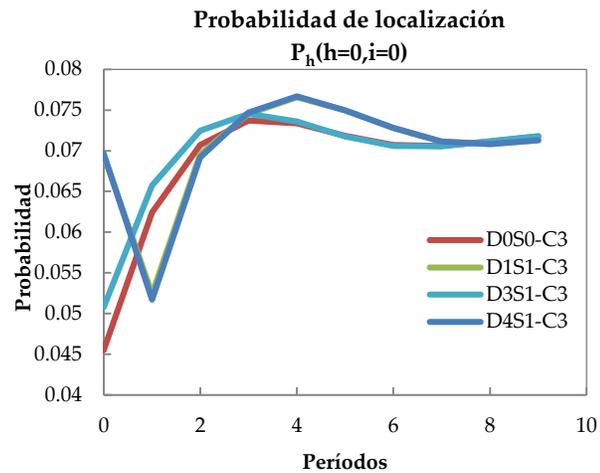


Figura 5.18: C3 - Probabilidad de localización para la categoría de hogar 0 y la zona 0, por modelo y por período

La curva de la dispersión de la probabilidad de localización muestra que la mayor variabilidad la presenta el modelo D1S1 hacia los primeros periodos. Hacia el final, todos los modelos se estabilizan en un valor único.

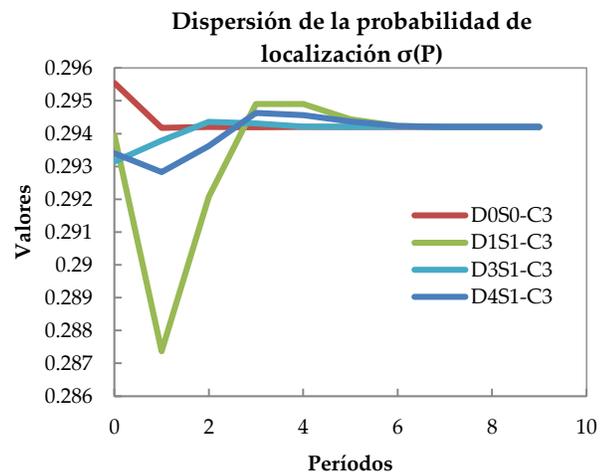


Figura 5.19: C3 - Dispersión de la probabilidad de localización, por modelo y por período

En los gráficos se puede apreciar que tanto las probabilidades como la localización replican parte del comportamiento oscilatorio del parámetro β en los primeros periodos. A medida que avanza el tiempo, las oscilaciones disminuyen hasta desaparecer, y los valores se estabilizan.

5.6.3.4. Oferta inmobiliaria

La oferta inmobiliaria converge a un valor único para cada zona, con trayectorias diversas según los modelos y la zona. Se presenta el gráfico para la zona 0.

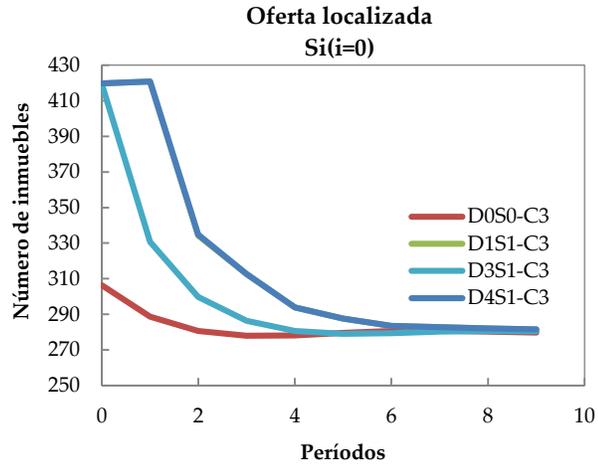


Figura 5.20: C3 - Oferta localizada en la zona 0, por modelo y por período

5.6.3.5. Postura de referencia

Las posturas de referencia convergen a valores distintos según el modelo, del mismo modo que en los casos anteriores. Se presenta a continuación el gráfico de la postura de referencia relativa para la categoría 0 respecto a la categoría 1.

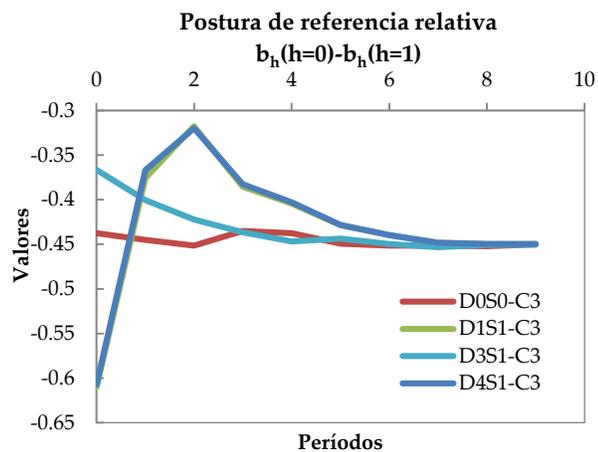


Figura 5.21: Postura de referencia relativa del agente 0 respecto al agente 1, por modelo y período

La diferencia entre las distintas categorías, que es el valor relevante para el cálculo de la localización, se estabiliza en valores únicos para todos los modelos.

5.6.3.6. Exceso o déficit de demanda

Al igual que en los casos analizados anteriormente, existe un exceso o déficit de demanda en los modelos D3S1 y D4S1. Estos tienden a cero con el tiempo.

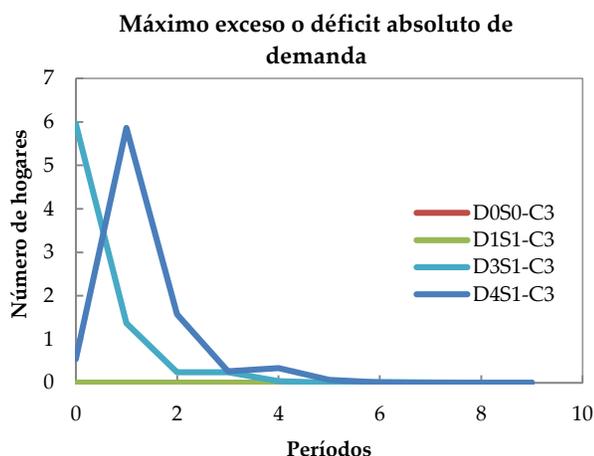


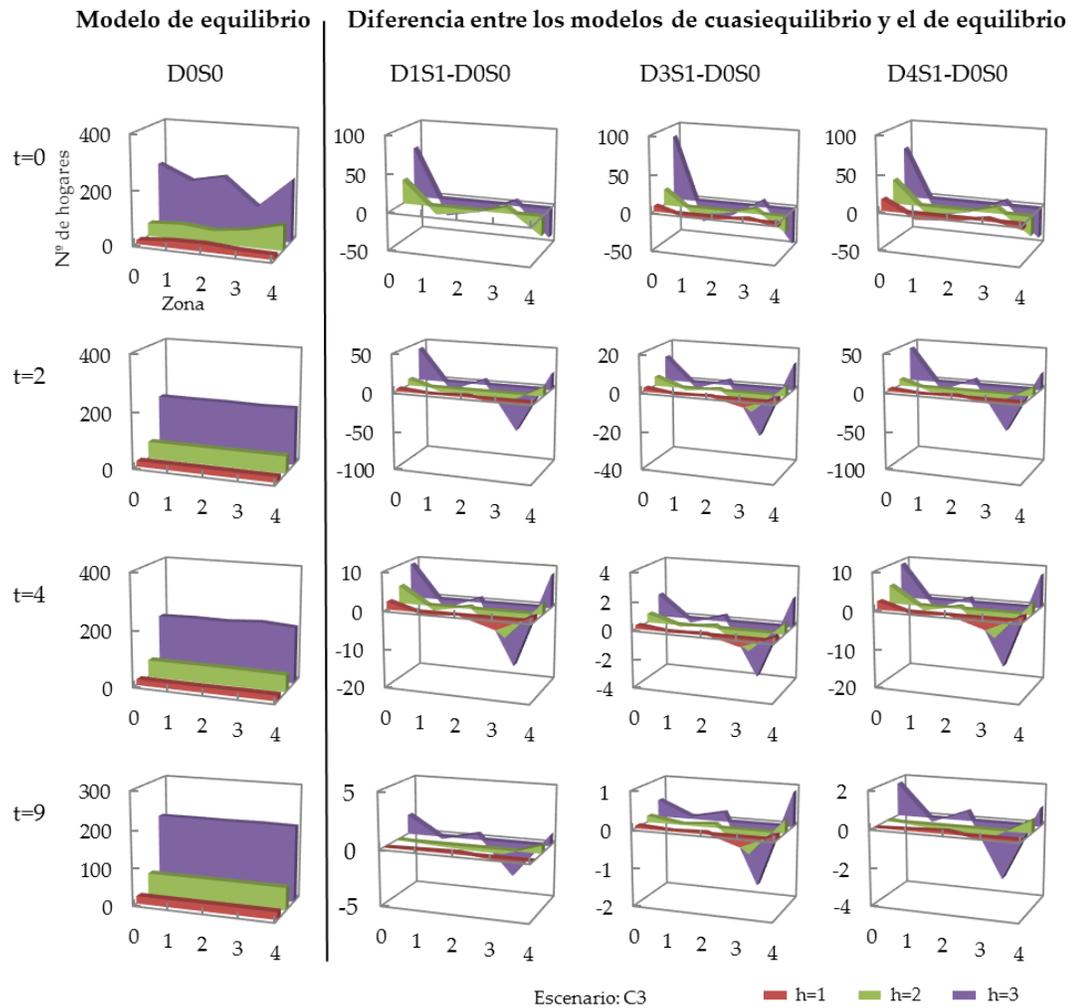
Figura 5.22: C3 – Máximo exceso o déficit absoluto de demanda por modelo y período

5.6.3.7. Comparación de los modelos de cuasiequilibrio con el de equilibrio

En este escenario resulta de especial interés tener una visión global sobre la forma en que convergen los distintos modelos en el tiempo, puesto que presentan distintas trayectorias.

La siguiente figura presenta el resultado del modelo de equilibrio (al lado izquierdo) como referencia, y en las 3 columnas siguientes muestra la diferencia entre los resultados de modelos de cuasiequilibrio y el de equilibrio.

Se observa que para todos los modelos de cuasiequilibrio, todas las categorías de hogares y todas las zonas, la diferencia con el modelo de equilibrio decae rápidamente en el tiempo. En el último período, la demanda localizada es aproximadamente dos órdenes de magnitud mayor que la diferencia entre los modelos de cuasiequilibrio y el de equilibrio.



Nota: La columna izquierda muestra los valores del modelo de equilibrio para cada instante, las 3 columnas de la derecha muestran la diferencia entre el modelo de equilibrio y los de cuasiequilibrio. Se observa que a medida que pasa el tiempo, las diferencias se hacen menores. Esto se aprecia en la reducción de la escala de los gráficos, si bien la forma de estos se mantiene.

Figura 5.23: Diferencia entre los resultados del modelo de equilibrio y los modelos de cuasiequilibrio en algunos períodos

5.6.4. C4 - Shock único

En este escenario se analizan los efectos de la introducción de un shock único en las posturas en el período 4. El shock está descrito por la siguiente expresión:

$$\beta_{hi} = a\delta_{t=4}$$

donde a es una variable aleatoria uniforme entre -1 y 1. El siguiente gráfico muestra los valores de β_{hi} .

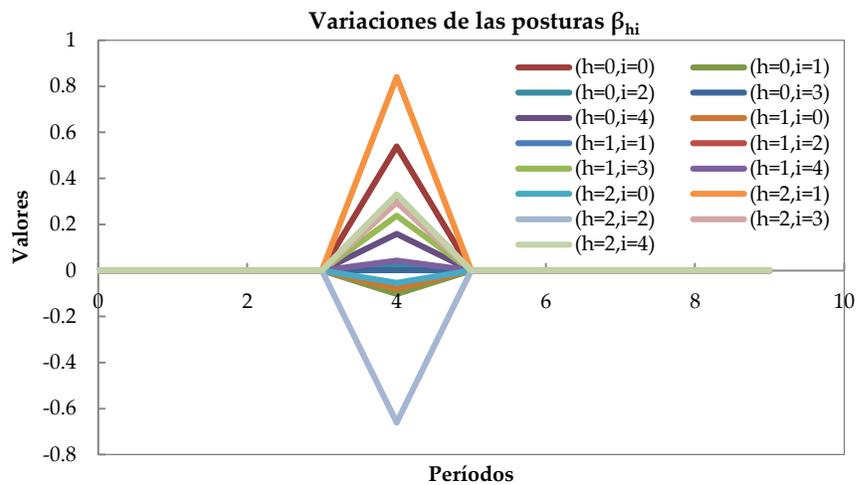


Figura 5.24: Variaciones β_{hi} de las posturas por período para el escenario C4

5.6.4.1. Descripción general de los resultados

Los modelos de cuasiequilibrio reaccionan con desfase al shock, mientras que el de equilibrio lo hace de forma instantánea a costa de un gran número de iteraciones. El modelo D3S1 reacciona más rápidamente puesto que mantiene el punto fijo de probabilidades. Todos los modelos se estabilizan nuevamente al cabo de cerca de dos períodos.

5.6.4.2. Número de iteraciones

Como era esperable, el modelo de equilibrio reacciona al shock con un fuerte aumento del número de iteraciones. Los de cuasiequilibrio no aumentan sus iteraciones, lo que ocasiona que se distancien temporalmente del resultado de equilibrio.

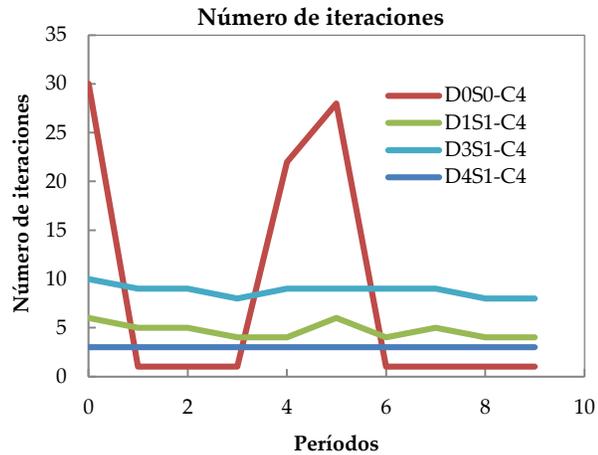


Figura 5.25: C4 – Número de iteraciones por modelo y por período

5.6.4.3. Probabilidad de localización y demanda localizada

Los modelos D1S1 y D4S1 reaccionan con un período de desfase al shock, lo que es consistente con el desfase incorporado en sus ecuaciones. El modelo D0S0 reacciona de inmediato. El modelo D3S1 también reacciona de forma instantánea, puesto que su expresión conserva el punto fijo de probabilidades.

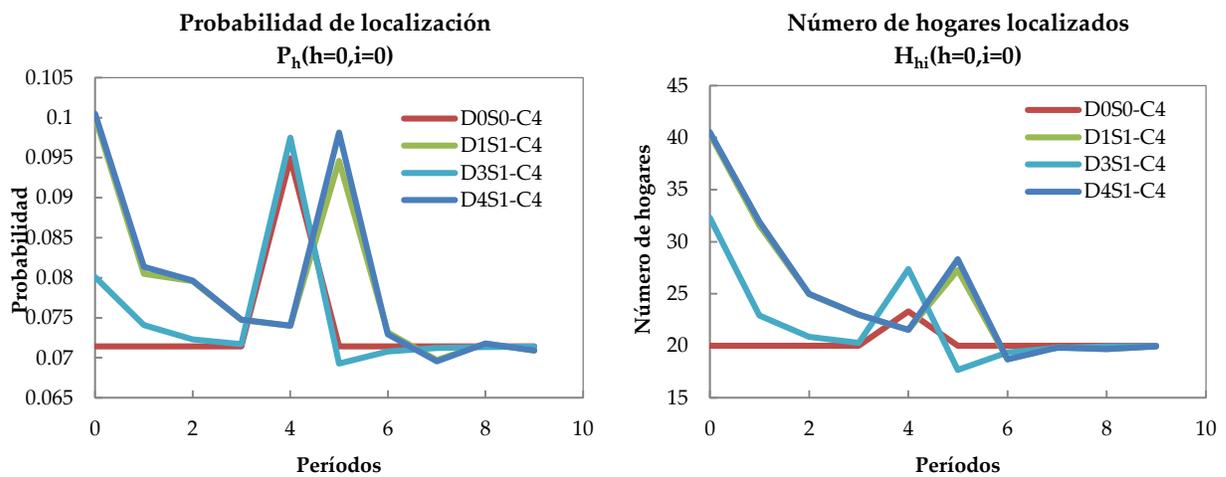


Figura 5.26: C4 - Probabilidad de localización y número de hogares localizados para la categoría de hogar 0 y la zona 0, por modelo y por período

Este comportamiento se replica en la localización agregada, como se aprecia en el gráfico.

La dispersión de las probabilidades también replica el comportamiento descrito, lo que es señal de que todas las zonas y categorías reaccionan del mismo modo.

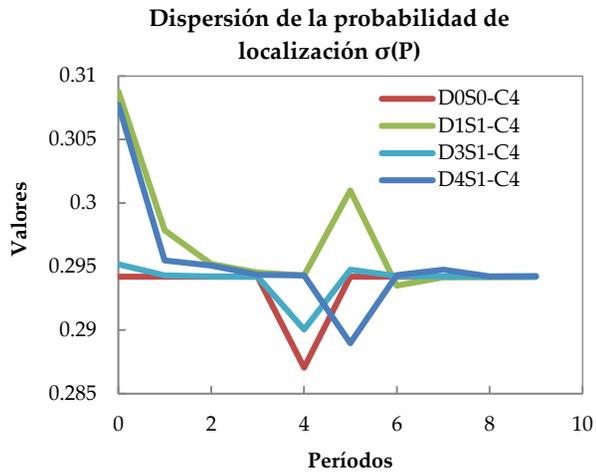


Figura 5.27: C4 – Dispersión de la probabilidad de localización, por modelo y por período

5.6.4.4. Oferta inmobiliaria

La oferta inmobiliaria converge de forma rápida frente al shock en todos los casos, lo que se debe a la gran contractancia del modelo *logit*. Las curvas de los modelos D3S1 y D4S1 son paralelas, puesto que sus expresiones de oferta son prácticamente idénticas.

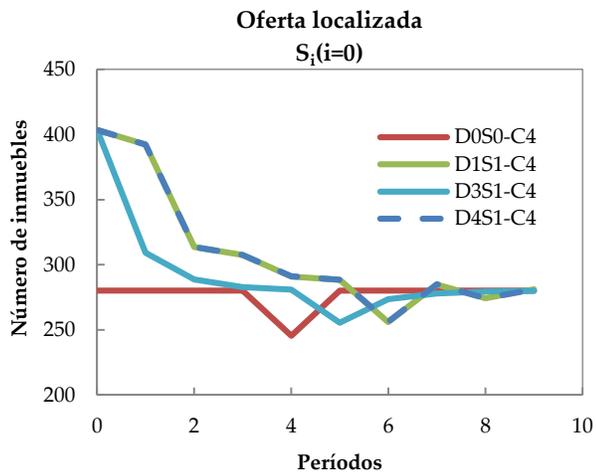


Figura 5.28: C4 – Oferta localizada en la zona 0, por modelo y por período

5.6.4.5. Postura de referencia

Las posturas de referencia del modelo D4S1 son las que más tardan en reaccionar al shock, pues por su expresión, los atributos de mercado llegan desfasados en 2 períodos a la postura. No obstante, todos los modelos terminan por converger.

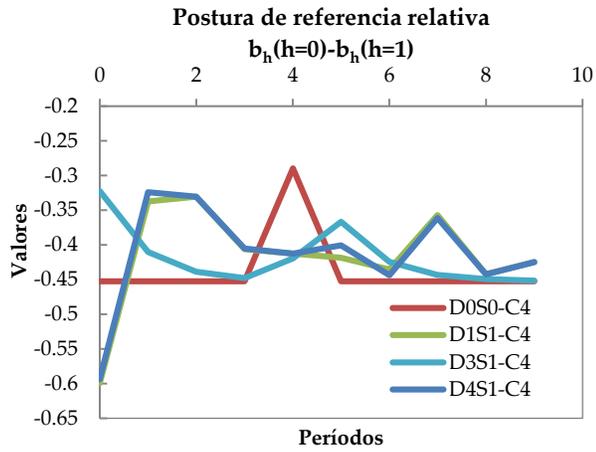


Figura 5.29: C4 – Postura de referencia relativa del agente 0 respecto al agente 1, por modelo y período

5.6.4.6. Exceso o déficit de demanda

Al igual que en los casos previos, los modelos D3S1 y D4S1 presentan excesos o déficit de demanda, que alcanzan su máximo justo después del período de shock. Sin embargo, su magnitud máxima es pequeña frente a la demanda total. Como en el caso de las simulaciones anteriores, el modelo D4S1 reacciona con un período adicional de retardo.

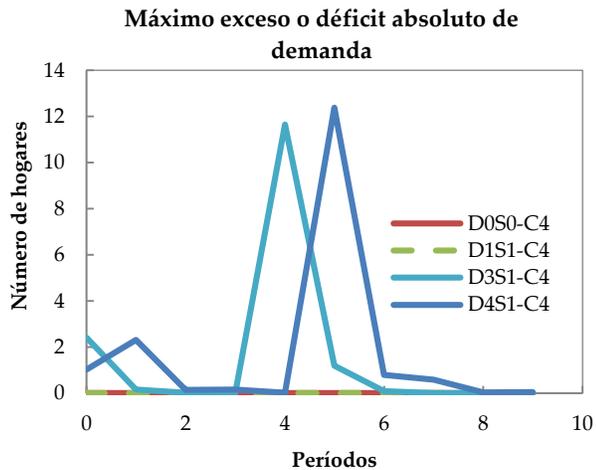


Figura 5.30: C4 – Máximo exceso o déficit absoluto de demanda por modelo y período

5.6.4.7. Comparación de los modelos de cuasiequilibrio con el de equilibrio

El gráfico siguiente muestra una medida de la diferencia neta entre los resultados de los modelos de cuasiequilibrio y el de equilibrio. Se aprecia que en torno al *shock* la diferencia se hace mayor, y que luego los valores tienden a igualarse.

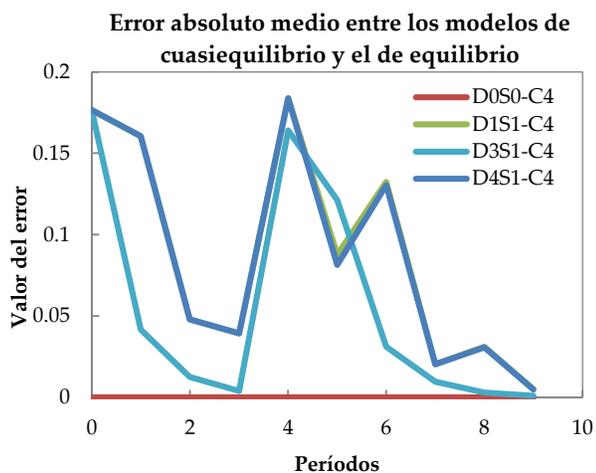


Figura 5.31: C4 – Error absoluto medio de los modelos de cuasiequilibrio respecto al modelo de equilibrio

5.6.5. C5 - Shocks múltiples

En este escenario se analizan los efectos de shocks múltiples, aplicados en los períodos 2, 4 y 6. Los shocks tienen la misma forma de los del caso “shock único”.

5.6.5.1. Descripción general de los resultados

Se observa que la aplicación de shocks múltiples lleva a los modelos a alejarse fuertemente, efecto que tiende a disiparse una vez que estos desaparecen.

5.6.5.2. Número de iteraciones

El modelo de equilibrio es el único que reacciona fuertemente en el número de iteraciones frente a los shocks. El resto mantiene el número de iteraciones relativamente constante.

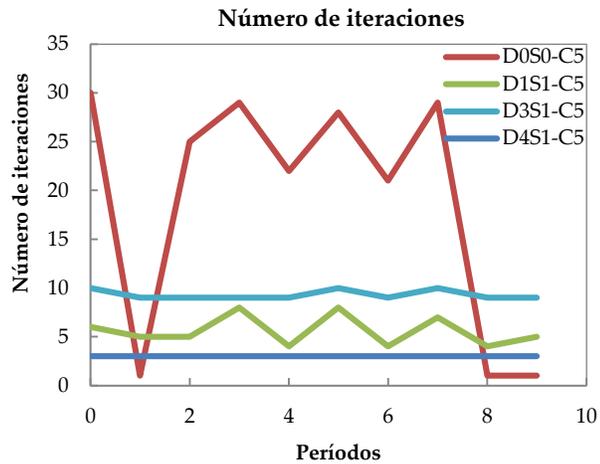


Figura 5.32: C5 – Número de iteraciones por modelo y por período

5.6.5.3. Probabilidad de localización y demanda localizada

Las probabilidades en este caso muestran como los resultados se alejan localmente debido a los shocks. Los modelos de cuasiequilibrio reaccionan con desfase, salvo D1S1, que, como se explicó en el escenario de shocks únicos, no incorpora el desfase de las externalidades de mercado. En todos los casos, una vez que desaparecen los shocks, los resultados de los modelos tienden a estabilizarse.

Del mismo modo, existe una fuerte variación en la localización que arrojan los distintos modelos. Esto muestra que si existen shocks, no es indiferente el modelo que se utilice. No obstante, al alejarse de los períodos donde se aplican los shocks, los resultados convergen.

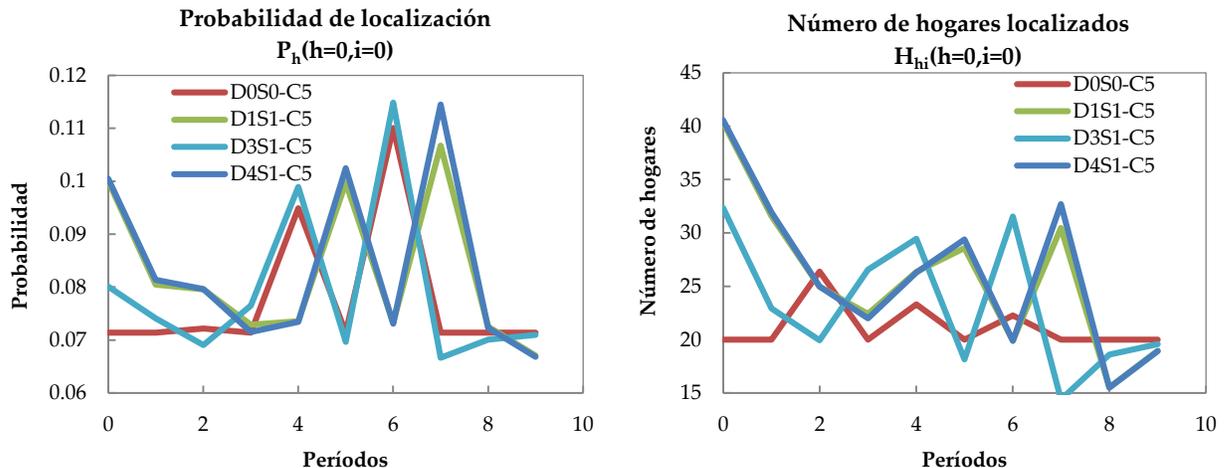


Figura 5.33: C5 – Probabilidad de localización y número de hogares localizados para la categoría de hogar 0 y la zona 0, por modelo y por período

La dispersión de las probabilidades repite el mismo comportamiento y hace más evidente el impacto de los shocks en las probabilidades.

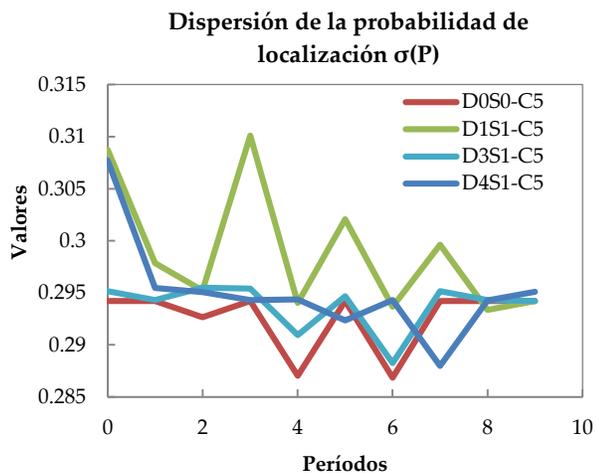


Figura 5.34: C5 – Dispersión de la probabilidad de localización, por modelo y por período

5.6.5.4. Oferta inmobiliaria

La oferta inmobiliaria también reacciona con fuertes diferencias cuando aparecen los shocks. Cabe señalar que, como se puede observar en el gráfico a continuación, para el período $t=4$ el modelo D0S0 entrega un valor de oferta cercano a 250, mientras que el modelo D4S1 está cercano a 350 inmuebles localizados, es decir, el error es cercano al 40%. Tras pasar los shocks, estas diferencias se debilitan, y los modelos convergen a un valor único.

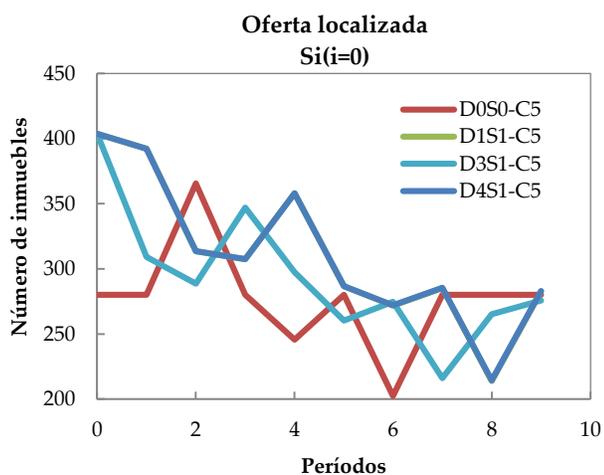


Figura 5.35: C5 – Oferta localizada en la zona 0, por modelo y por período

5.6.5.5. Postura de referencia

Como es de esperar, la variación de las posturas de referencia es responsable de gran parte de las diferencias ya descritas. El gráfico siguiente da cuenta de los distintos valores que toman las posturas relativas para cada modelo.

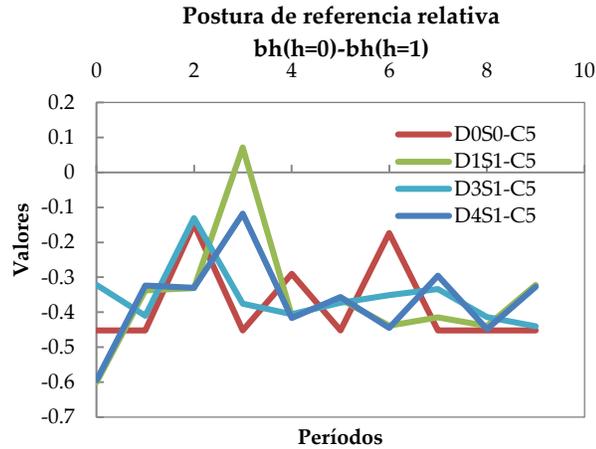


Figura 5.36: C5 – Postura de referencia relativa del agente 0 respecto al agente 1, por modelo y período

Al final de los 10 períodos no se aprecia convergencia. Se verificó, sin embargo, que al aumentar el número de períodos los valores se estabilizan.

5.6.5.6. Exceso o déficit de demanda

Durante el período de shocks múltiples, los excesos o déficits de demanda aumentan. No obstante, estos tienden a disiparse en un período, volviendo a aparecer con cada shock, y su valor es más bien pequeño comparado con la demanda (que ronda los cientos de hogares por categoría).

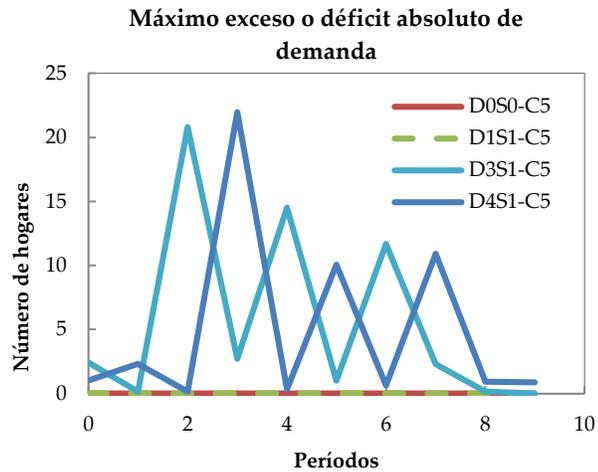


Figura 5.37: C5 – Máximo exceso o déficit absoluto de demanda por modelo y período

5.6.5.7. Comparación de los modelos de cuasiequilibrio con el de equilibrio

Los errores medios de los modelos de cuasiequilibrio con respecto al de equilibrio llegan a un 40%, y se mantienen elevados mientras existen shocks. Tras desaparecer estos, los errores se reducen.

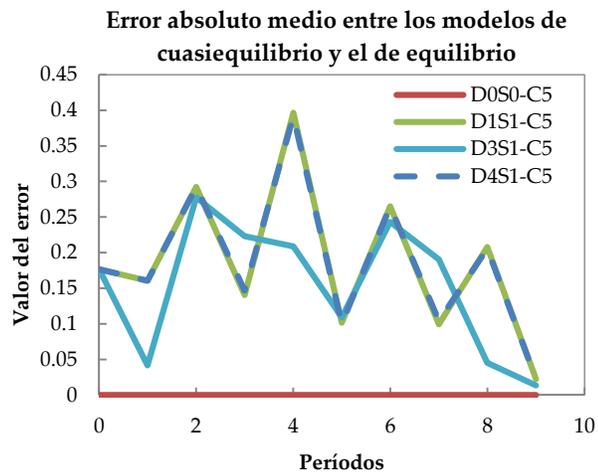


Figura 5.38: C5 – Error absoluto medio de los modelos de cuasiequilibrio respecto al modelo de cuasiequilibrio

5.6.6. C6 - Modelo con restricciones

A continuación se analiza el efecto de las restricciones zonales en los modelos, hasta ahora supuestas inexistentes. Para esto, se introducen restricciones activas en dos zonas: la 0 y la 3. Dado que se conoce el resultado irrestricto de los análisis anteriores, en ambas zonas se escogió un valor máximo que fuera menor que el resultado sin restricciones, para que ésta sea activa, y mayor que el punto de partida, para que la solución inicial sea factible.

Es importante señalar que el modelo utilizado para representar las restricciones no incorpora desfases intertemporales. Es decir, se asume que los productores son capaces de conocer las restricciones vigentes en el momento de construcción de un inmueble, y que éstas son completamente independientes del valor en el período anterior. Como se verá, esto da lugar a ciertas limitaciones de los modelos de oferta.

La figura siguiente representa la oferta inmobiliaria de equilibrio irrestricto (barras enteras), los valores máximos impuestos por las restricciones (en azul), y la demanda de equilibrio que deberá relocalizarse en este escenario (porción achurada de las barras).

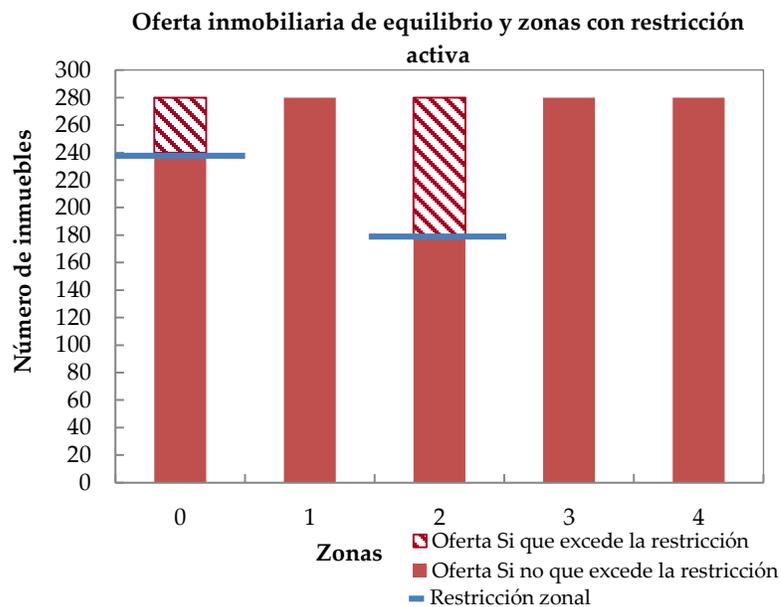


Figura 5.39: C6 - Oferta de equilibrio y restricciones a la oferta

5.6.6.1. Descripción general de los resultados

Los modelos de cuasiequilibrio convergen al mismo resultado del de equilibrio, pero realizan un número mayor de iteraciones. Esto se debe a una característica del modelo de regulaciones en el caso de cuasiequilibrio: mientras que en un modelo de equilibrio que

se estabiliza las restricciones no son violadas en el límite, en un modelo de cuasiequilibrio el uso de información desfasada hace que casi siempre exista una restricción activa, que se normaliza por medio de un mayor número de iteraciones.

5.6.6.2. Número de iteraciones

Se observa que el número de iteraciones del modelo de equilibrio es alto para el primer período, y luego desciende bruscamente. Esto se debe a que durante el primer período se alcanza el equilibrio restringido, y en los períodos siguientes éste no cambia. Por otra parte, los modelos de cuasiequilibrio presentan consistentemente un número elevado de iteraciones.

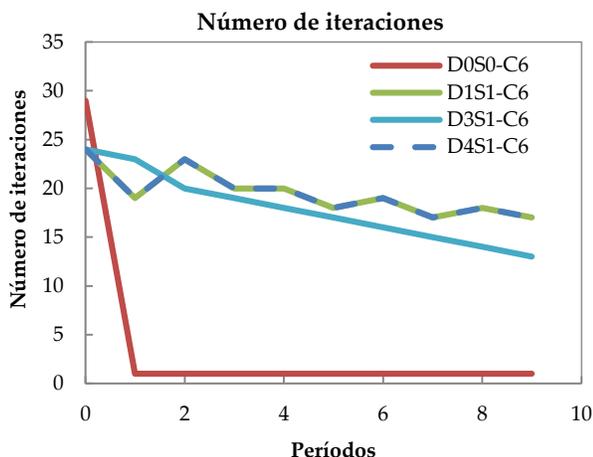


Figura 5.40: C6 – Número de iteraciones por modelo y por período

5.6.6.3. Multiplicadores de Lagrange de las restricciones

A continuación se presenta el valor del multiplicador de Lagrange correspondiente a la restricción de oferta aplicada. Sólo las zonas 0 y 2 tienen valores no-nulos, pues sólo esas zonas están sujetas a una regulación, y por lo tanto tienen una restricción activa.

Según se aprecia en la figura siguiente (que corresponde a la zona 0, cuyo comportamiento es análogo al de la zona 2), a medida que avanza el tiempo, los valores del parámetro tienden convergen a un valor único. Este valor corresponde al “precio sombra” de la restricción: equivale a un “castigo” monetario a las rentas inmobiliarias en la zona restringida, que fuerza a los productores a ajustar su producción al valor de la restricción.

Mientras que el modelo D0S0 converge inmediatamente al valor final del parámetro γ , los modelos de cuasiequilibrio tienen inicialmente valores distintos, para posteriormente converger al mismo valor que entrega el modelo de equilibrio.

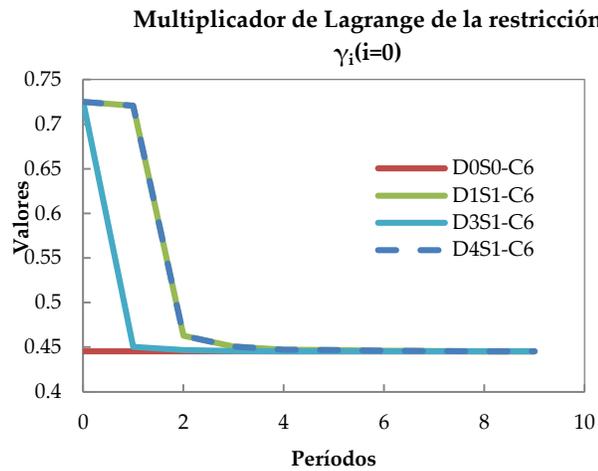


Figura 5.41: C6 - Multiplicadores de Lagrange de las restricciones en la zona 0, por modelo y por período

5.6.6.4. Probabilidad de localización y demanda localizada

Se observa que todos los modelos de regulación presentan convergencia en la probabilidad por zona y categoría.

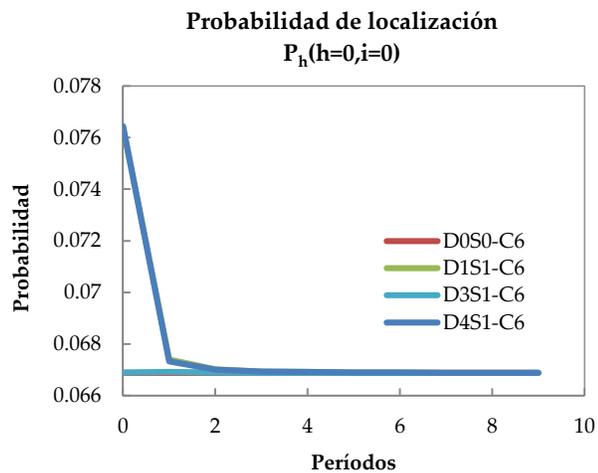


Figura 5.42: Probabilidad de localización y número de hogares localizados para la categoría de hogar 0 y la zona 0, por modelo y por período

El análisis de la dispersión de las probabilidades confirma que para todas las categorías y zonas los valores de probabilidad se estabilizan.

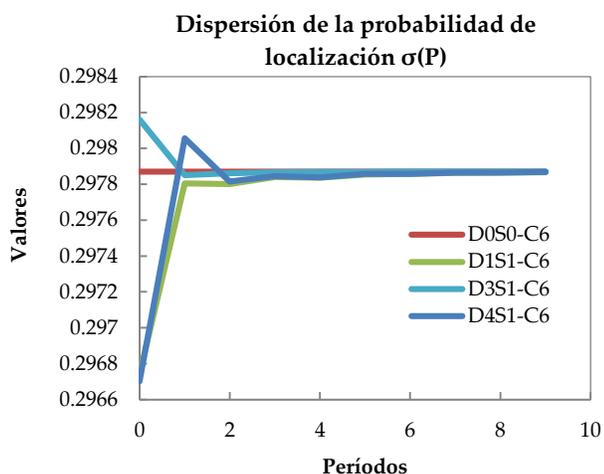


Figura 5.43: Dispersión de la probabilidad de localización, por modelo y por período

5.6.6.5. Oferta inmobiliaria

La oferta inmobiliaria alcanza su techo y se mantiene fija en las zonas donde la restricción es activa. En las zonas donde la restricción es inactiva, converge a los valores de equilibrio después de ciertos períodos. Esto se aprecia en los dos gráficos siguientes:

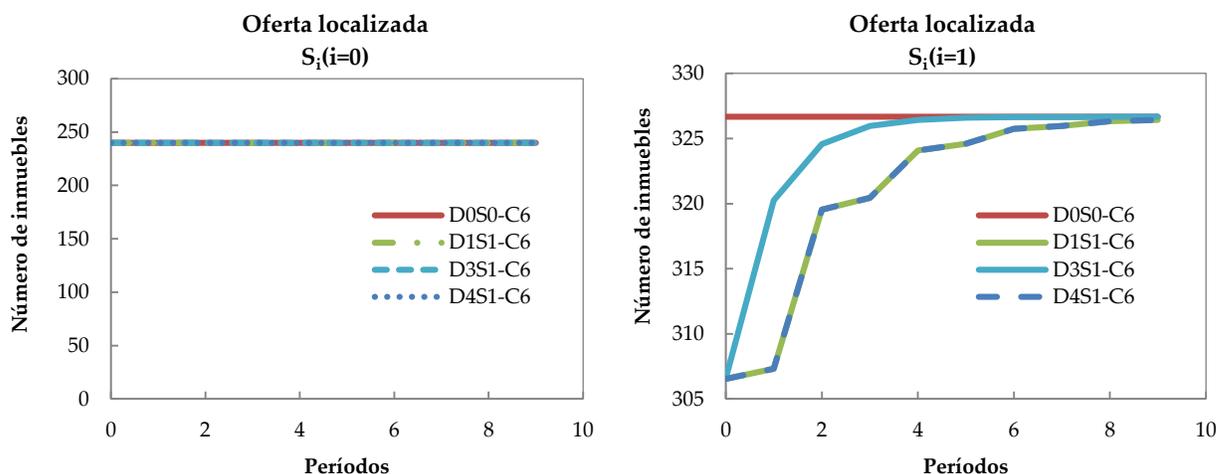


Figura 5.44: C6 - Oferta localizada en las zonas 0 y 1, por modelo y por período

5.6.6.6. Postura de referencia

Las funciones de postura de referencia son responsables de ajustar el cumplimiento de la ecuación de equilibrio o de cuasiequilibrio. Si bien éstas se estabilizan en valores distintos según el modelo, la diferencia de posturas converge al mismo valor.

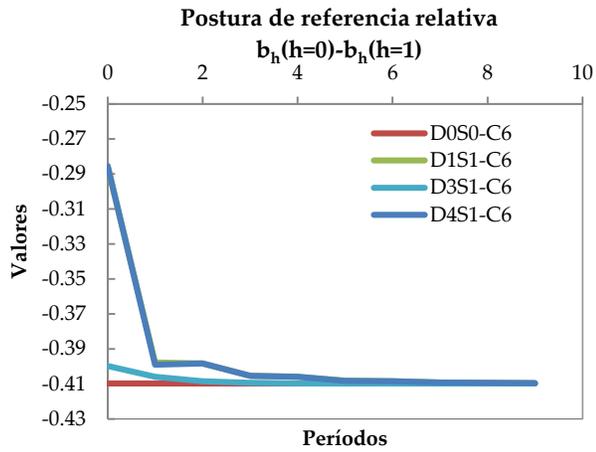


Figura 5.45: C6 - Postura de referencia relativa del agente 0 respecto al agente 1, por modelo y período

5.6.6.7. Exceso o déficit de demanda

Como es usual, aparece un exceso o déficit de demanda en los modelos D3S1 y D4S1. La diferencia resulta ser muy pequeña, del orden de una parte en un millón.

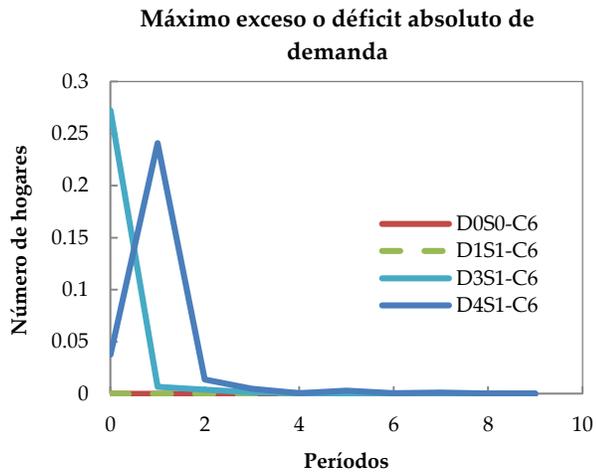


Figura 5.46: C6 - Máximo exceso o déficit absoluto de demanda por modelo y período

5.6.6.8. Comparación de los modelos de cuasiequilibrio con el de equilibrio

Se presenta a continuación la comparación del resultado de los modelos de cuasiequilibrio y el de equilibrio en el tiempo. Se observa que los resultados de largo plazo son idénticos en todos los casos, y se aprecian los efectos de las regulaciones, que hacen variar el comportamiento de los modelos en el proceso de convergencia

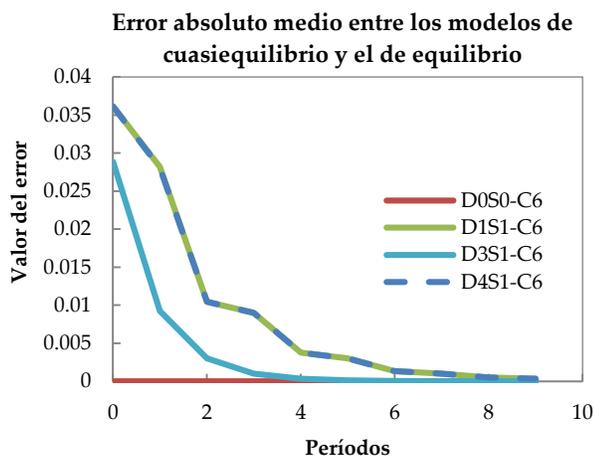


Figura 5.47: C6 – Error absoluto medio de los modelos de cuasiequilibrio respecto al modelo de equilibrio

5.7. Análisis de sensibilidad a las condiciones iniciales

A continuación se presentan múltiples análisis de sensibilidad realizados sobre los distintos modelos introducidos.

Los tests realizados en esta sección utilizan como base el caso de una ciudad con variables exógenas constantes, que permite aislar los efectos de la variación de las distintas variables de los modelos. Dicho modelo entrega el mismo resultado de equilibrio para todos los períodos. El modelo de equilibrio lo alcanza en el primer período con cerca de 30 iteraciones y posteriormente ejecuta una única iteración por período, los modelos de cuasiequilibrio convergen en el tiempo al resultado de equilibrio por distintas trayectorias.

5.7.1. C7 - Sensibilidad al punto de partida de la postura de referencia

Se analiza a continuación el efecto de la utilización de distintos valores iniciales de la postura de referencia b_h en los modelos de equilibrio y cuasiequilibrio.

Los valores iniciales utilizados en las simulaciones son variables aleatorias uniformemente distribuidas entre 0 y 1, amplificadas por una constante que puede tomar 4 valores distintos entre 0.25 y 9. Todas las simulaciones utilizan vectores de base distintos (generados aleatoriamente en tiempo de ejecución) y las mismas constantes de amplificación

$$b_h^{t=-1} = \alpha X \quad \alpha \in \{0.25, 0.5, 4, 9\}, X \sim \mathcal{U}([0,1])$$

También se ejecutaron simulaciones con vectores constantes amplificadas por distintos factores, que corroboran los resultados presentados pero que no se muestran a continuación por razones de espacio.

Se observa que, de acuerdo con lo observado en el modelo RB&SM, la variación del punto de partida de la postura de referencia no altera de forma alguna el modelo de equilibrio en ninguna de sus variables. En el caso de los modelos de cuasiequilibrio, la variación de dicho punto de partida contribuye a alejar los resultados del valor de equilibrio. No obstante, todos terminan por converger a éste con relativa rapidez.

5.7.1.1. Efectos en el número de iteraciones

En la siguiente figura se presenta el número de iteraciones para cada modelo por separado, para cada uno de los valores $\alpha \in \{0.25, 0.5, 4, 9\}$. El modelo de equilibrio no sufre ningún cambio en el número de iteraciones según el valor de α , por lo que las curvas se superponen.

Por su parte, los modelos D1S1 y D3S1 presentan un número de iteraciones ligeramente distinto según el valor inicial.

El modelo D4S1 ejecuta siempre 3 iteraciones en el caso irrestricto (sólo por razones de programación, pues teóricamente podría realizar una única iteración), por lo que no se ve alterado por las variaciones del punto de partida.

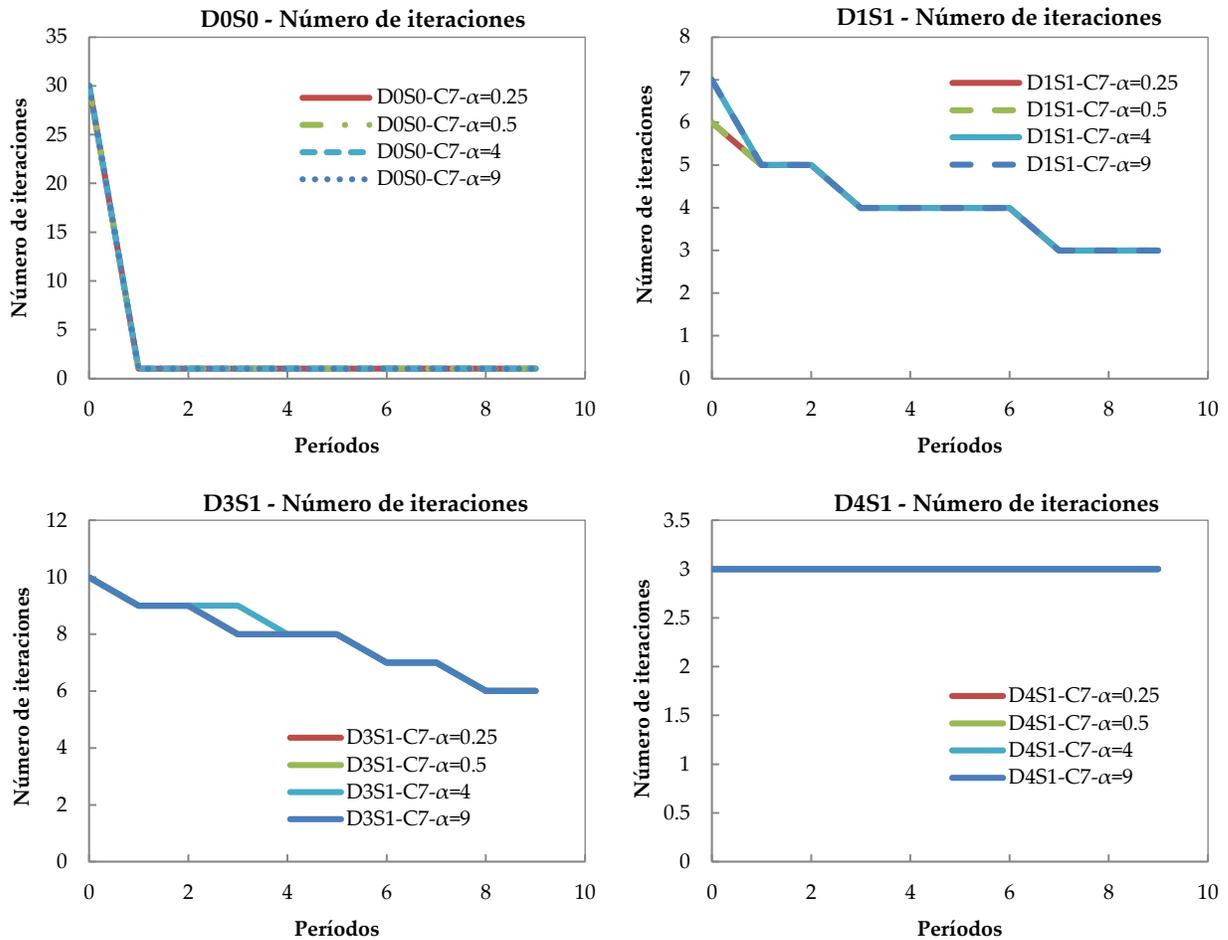


Figura 5.48: C7 – Número de iteraciones para cada valor del ponderador α , por período, para cada modelo por separado

5.7.1.2. Efectos en la postura de referencia

Se presentan a continuación gráficos para cada modelo, para cada uno de los valores α . el gráfico de dicha diferencia para el modelo D1S1. Se observa que la postura de referencia relativa entre los pares de agentes converge al mismo valor en todos los modelos, independientemente del punto de partida. El modelo de equilibrio alcanza en el primer período su valor final y se mantiene constante. Por su parte, los modelos de cuasiequilibrio toman distintos valores en el tiempo, para finalmente converger. No obstante, desde el primer período en adelante, los valores son independientes del punto de partida.

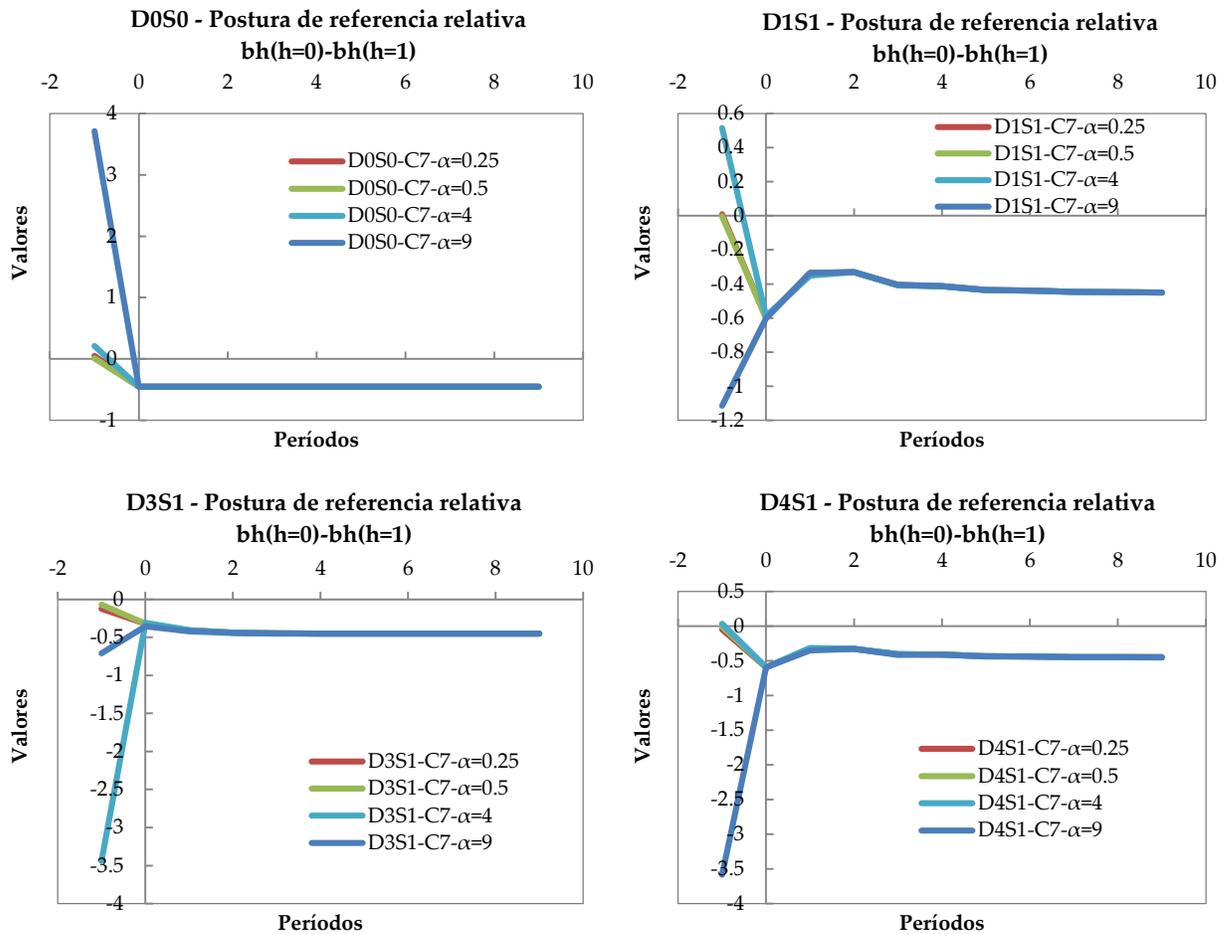


Figura 5.49: C7 - Postura de referencia relativa del agente 0 respecto al agente 1, para cada valor del ponderador α , por período, para cada modelo por separado

5.7.1.3. Probabilidad de localización y oferta inmobiliaria

El efecto de variar el punto de partida de la postura de referencia se propaga también a las variables de oferta y de probabilidad.

Sólo se incluyen a continuación los efectos en S_i , que son los más notorios. Los efectos en $P_{h|i}$ son similares, pero más leves.

La oferta inmobiliaria es especialmente sensible al punto de partida de la postura debido a la formulación matemática de los modelos: ésta se calcula a partir de la renta, que suma la exponencial de todas las posturas, por lo que la diferencia de cada una con el valor de equilibrio se amplifica. No obstante, tanto la oferta como la probabilidad de localización convergen finalmente a un mismo valor en todos los modelos.

Se presenta a continuación la curva de oferta para cada modelo en función del ponderador α , donde se aprecia que rápidamente se alcanza la convergencia en todos los casos y al mismo valor. El modelo de equilibrio es independiente del punto de partida desde el primer instante, mientras que los modelos de cuasiequilibrio mantienen cierto grado de dependencia durante los primeros instantes, que luego se disipa durante el proceso de convergencia al valor de equilibrio.

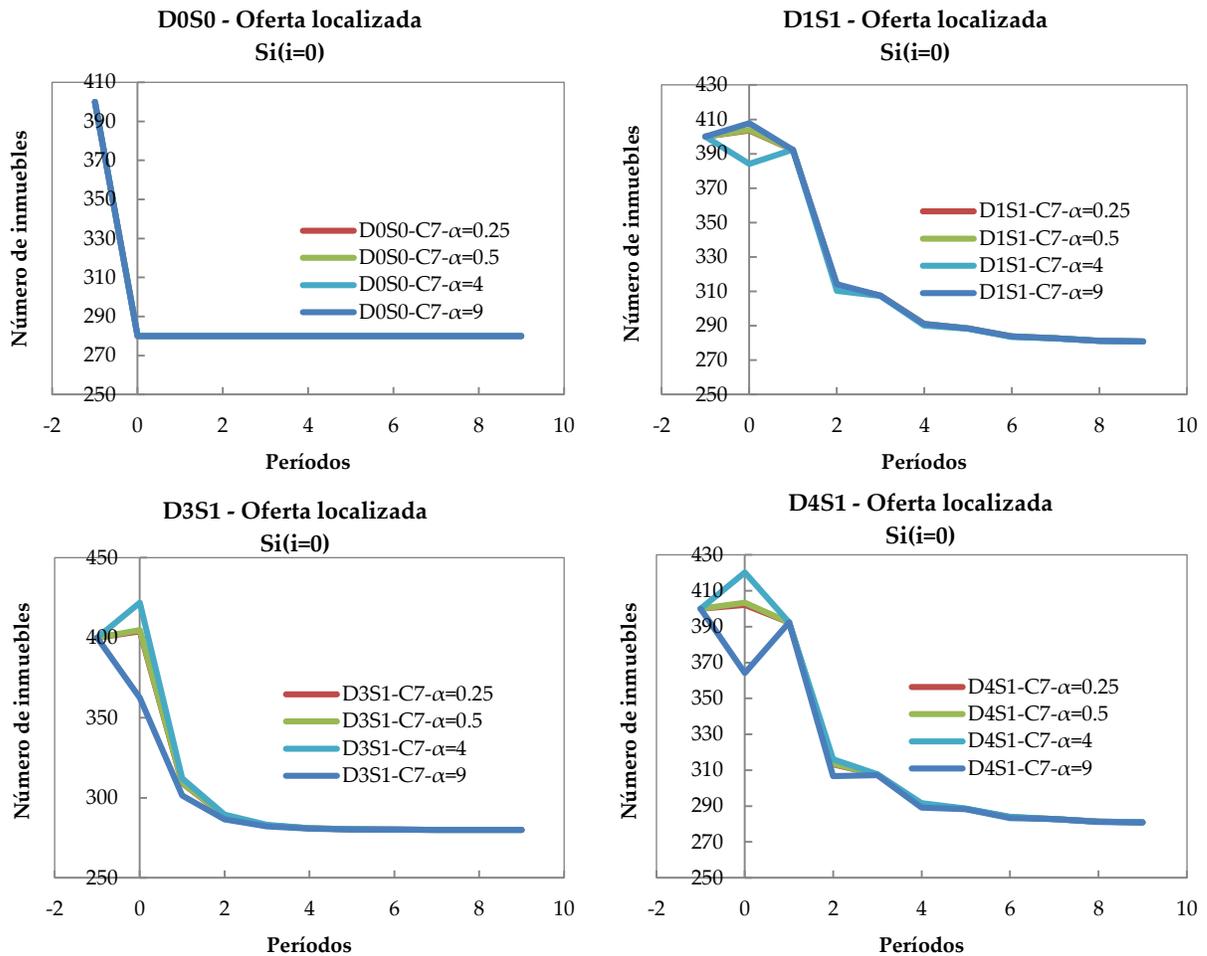


Figura 5.50: C7 – Oferta localizada en la zona 0, para cada valor del ponderador α , por período, para cada modelo por separado

5.7.2. C8 - Sensibilidad al valor inicial de la probabilidad inicial

De forma similar al caso anterior, se evalúan acá los efectos de la variación del punto inicial de las probabilidades.

El modelo de equilibrio no se ve alterado, y todas las variables de los modelos de cuasiequilibrio convergen de forma rápida para hacer desaparecer los efectos iniciales del

punto de partida. Esto da cuenta de la fuerte contractancia de la expresión *logit* de la probabilidad.

5.7.2.1. Efectos en el número de iteraciones

El número de iteraciones del modelo de equilibrio sólo varía en el primer período del modelo de equilibrio, para luego estabilizarse en una única iteración por período.

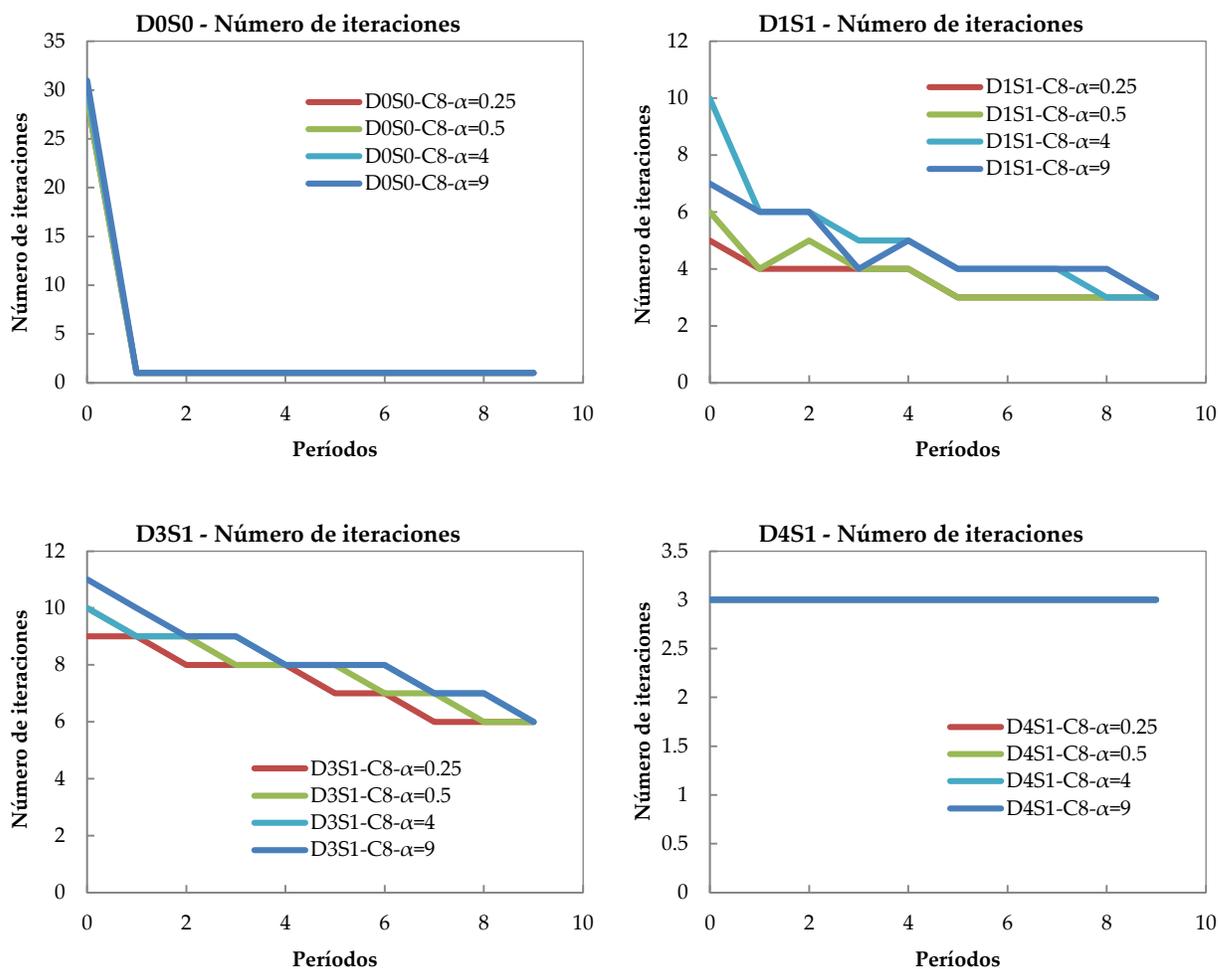


Figura 5.51: C8 - Número de iteraciones para cada valor del ponderador α , por período, para cada modelo por separado

Los modelos D2S1 y D3S1 presentan variaciones diversas en el número de iteraciones, pero manteniendo una tendencia a la baja en el tiempo.

El modelo D4S1 nuevamente se mantiene inalterado, en 3 iteraciones por períodos.

5.7.2.2. Efectos en la probabilidad de localización

Los efectos en la probabilidad de localización inicial son prácticamente indistinguibles en todos los modelos. Esto se aprecia en la figura siguiente: en el caso del modelo de equilibrio, el resultado es constante desde el principio. En los modelos de cuasiequilibrio, en cambio, existe una pequeña diferencia (casi imperceptible) que se propaga hasta el primer período. En adelante, los valores son prácticamente independientes del valor inicial de la probabilidad.

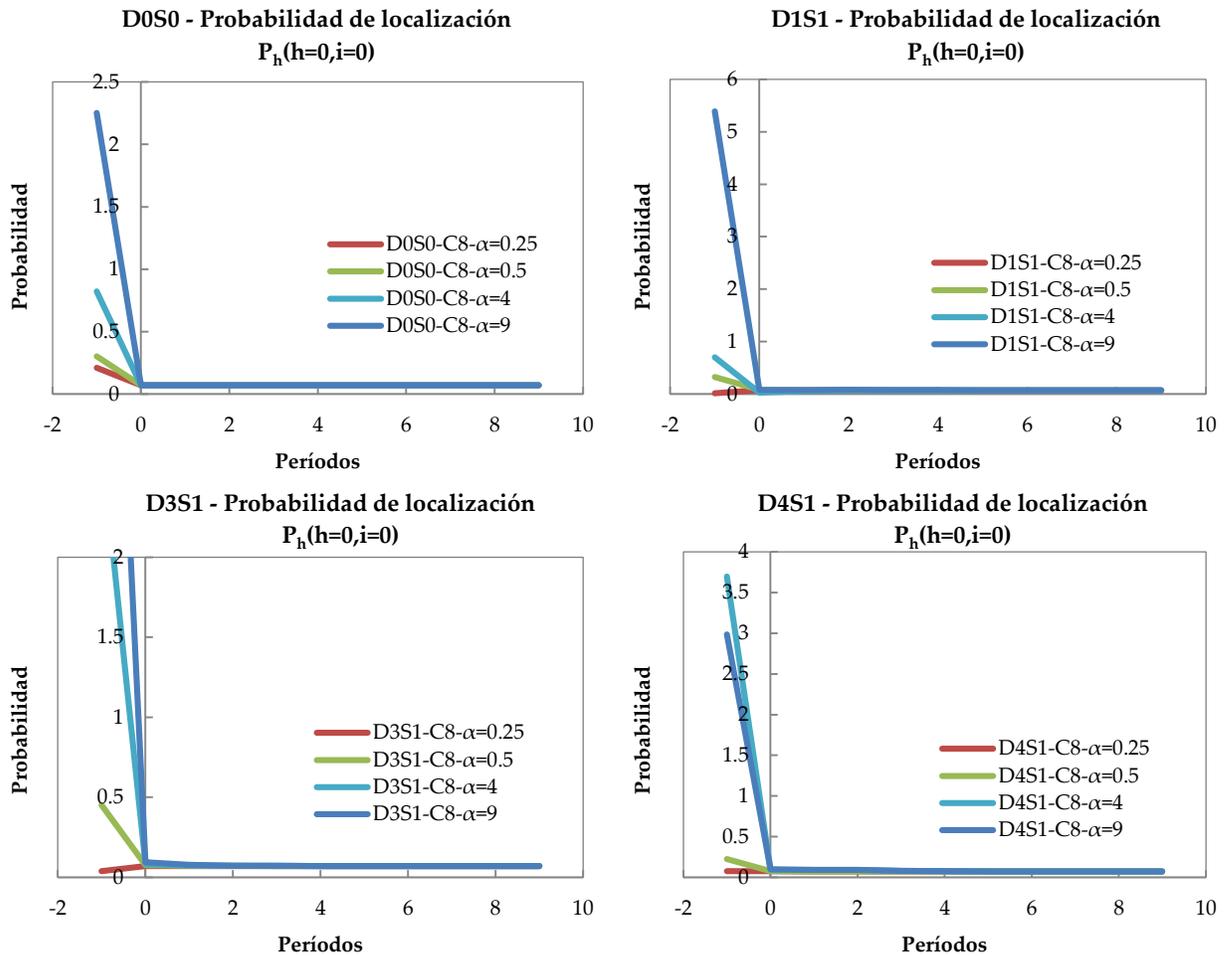


Figura 5.52: C8 – Probabilidad de localización para la categoría de hogar 0 y la zona 0, para cada valor del ponderador α , por período, para cada modelo por separado

5.7.2.3. Efectos en la postura de referencia

Se analizan a continuación los efectos que la variación en el punto de partida de las posturas de referencia tiene en la diferencia entre éstas que se observa entre los agentes.

El modelo D0S0 se mantiene inalterado, pues es insensible a los cambios en el punto de partida. El resto de los modelos converge al mismo valor, siguiendo trayectorias variadas.

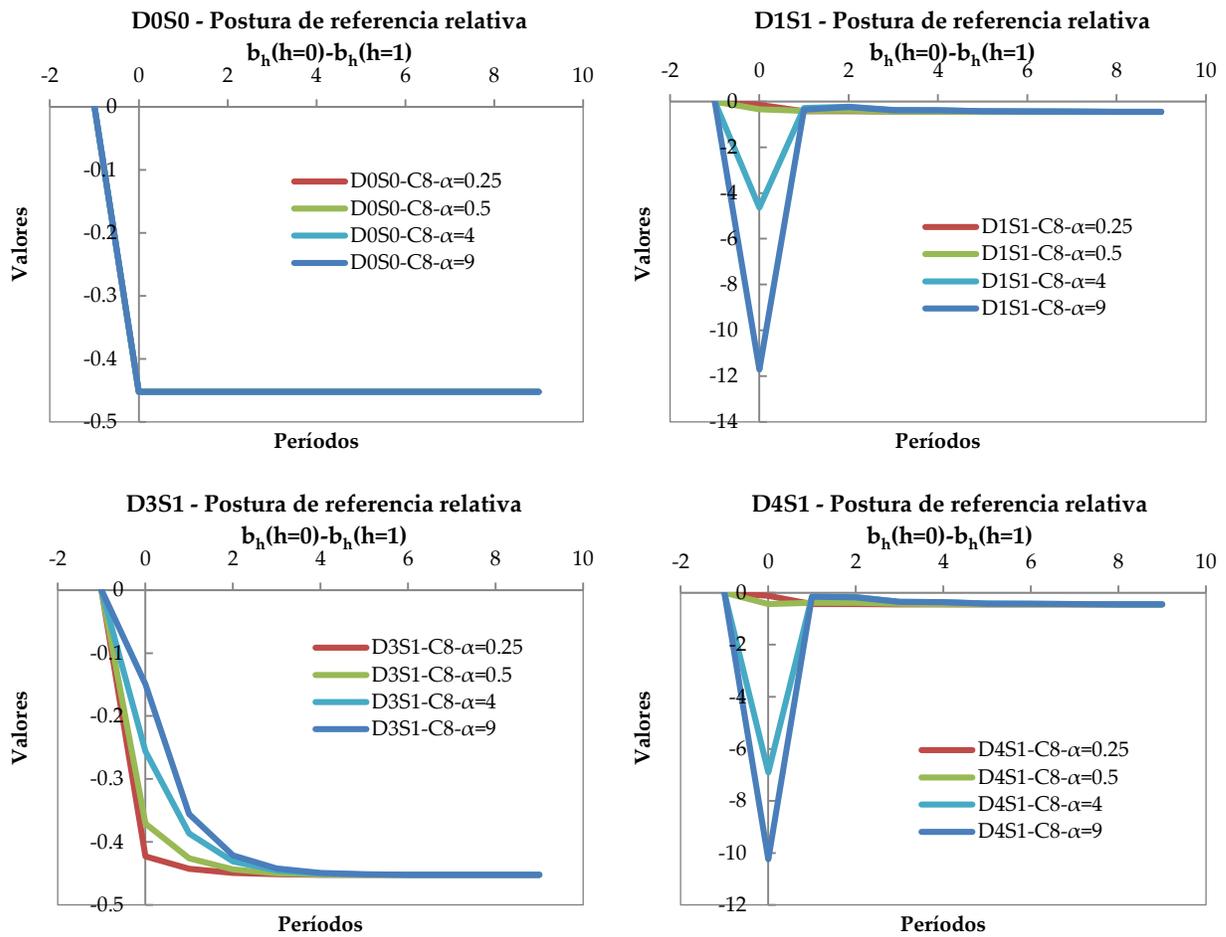


Figura 5.53: C8 - Postura de referencia relativa del agente 0 respecto al agente 1, para cada valor del ponderador α , por período, para cada modelo por separado

5.7.2.4. Efectos en la oferta inmobiliaria

Al igual que en los casos anteriores, la oferta del modelo de equilibrio no se ve alterada. Los otros 3 modelos considerados presentan múltiples diferencias en la trayectoria, pero todos convergen.

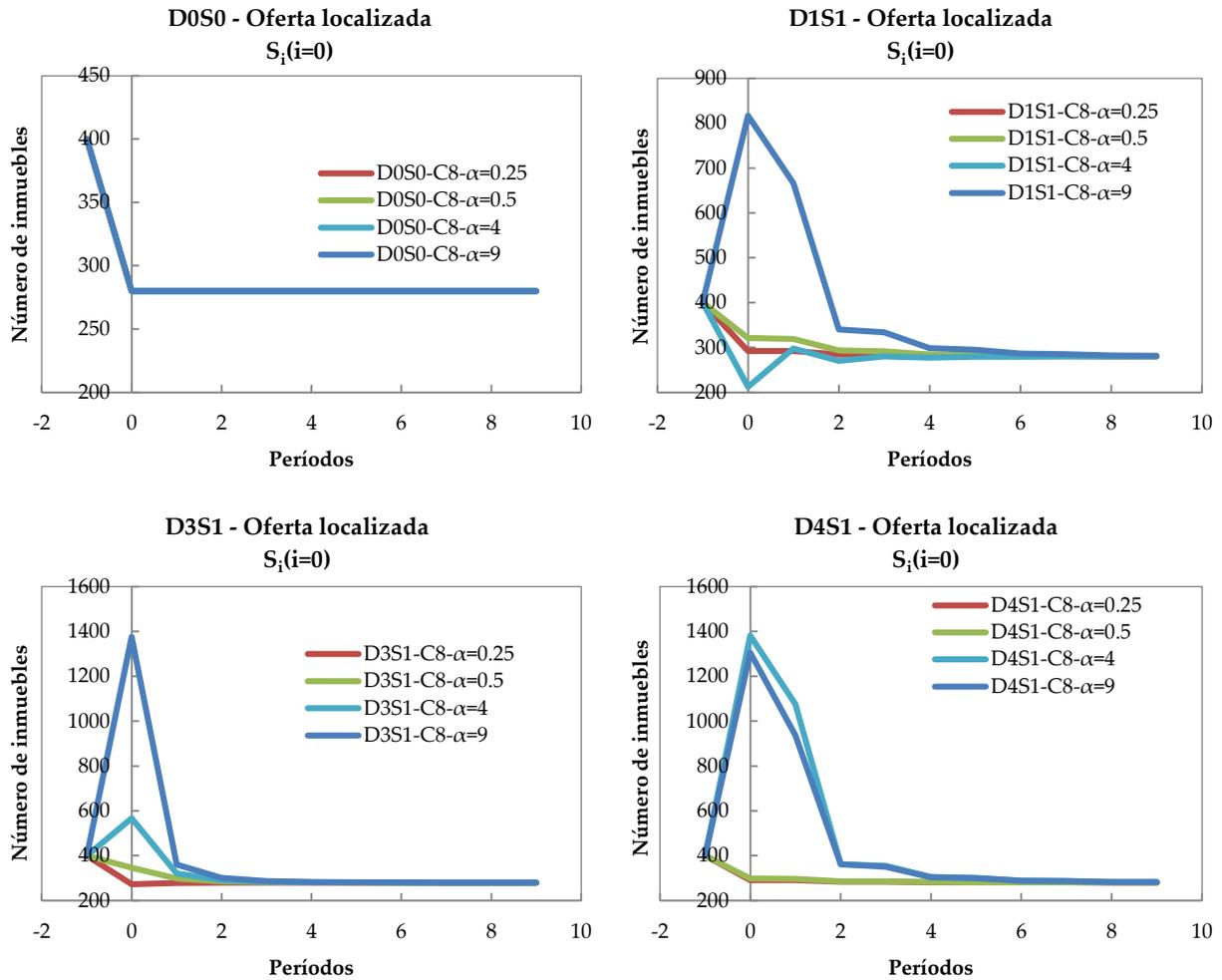


Figura 5.54: C8 – Oferta localizada en la zona 0, para cada valor del ponderador α , por período, para cada modelo por separado

5.7.3. C9 - Sensibilidad al punto de partida de la oferta

A continuación se estudia la sensibilidad de los modelos al punto de partida de la oferta.

Se observa que, al igual que en los casos anteriores, todos los modelos de cuasiequilibrio disipan los efectos del distinto punto de partida en el tiempo, mientras que el modelo de equilibrio es independiente de éste.

5.7.3.1. Efectos en el número de iteraciones

El número de iteraciones no varía en el modelo de equilibrio. En los modelos de cuasiequilibrio, en cambio, presenta ligeras variaciones, excepto por el último modelo, que mantiene su número de iteraciones en 3.

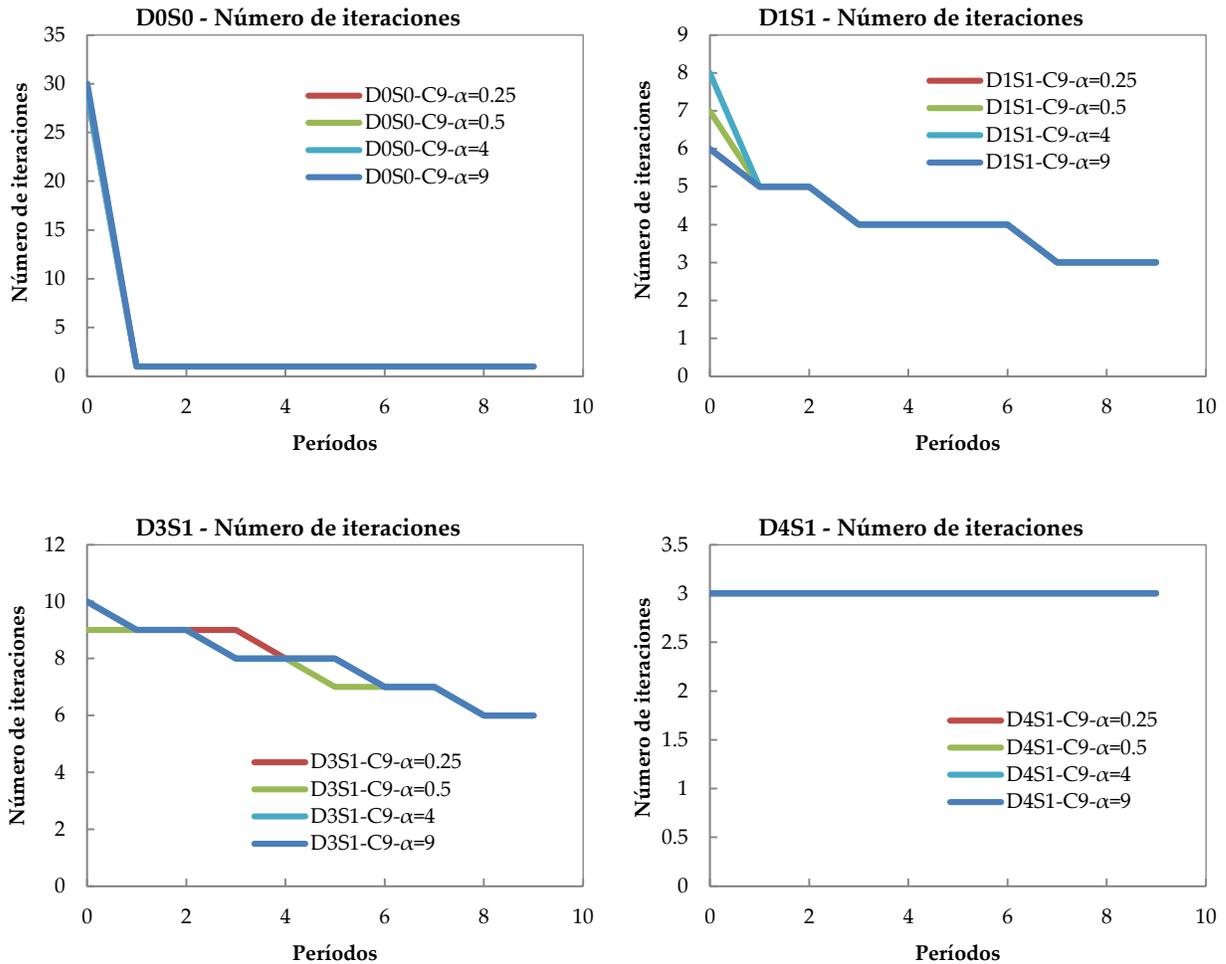


Figura 5.55: C9 - Número de iteraciones para cada valor del ponderador α , por período, para cada modelo por separado

5.7.3.2. Efectos en la oferta inmobiliaria

Al igual que en los casos anteriores, la oferta inmobiliaria del modelo de equilibrio es insensible a los cambios del punto inicial. Los modelos de cuasiequilibrio dependen del punto inicial en los primeros períodos, para luego converger al valor de equilibrio.

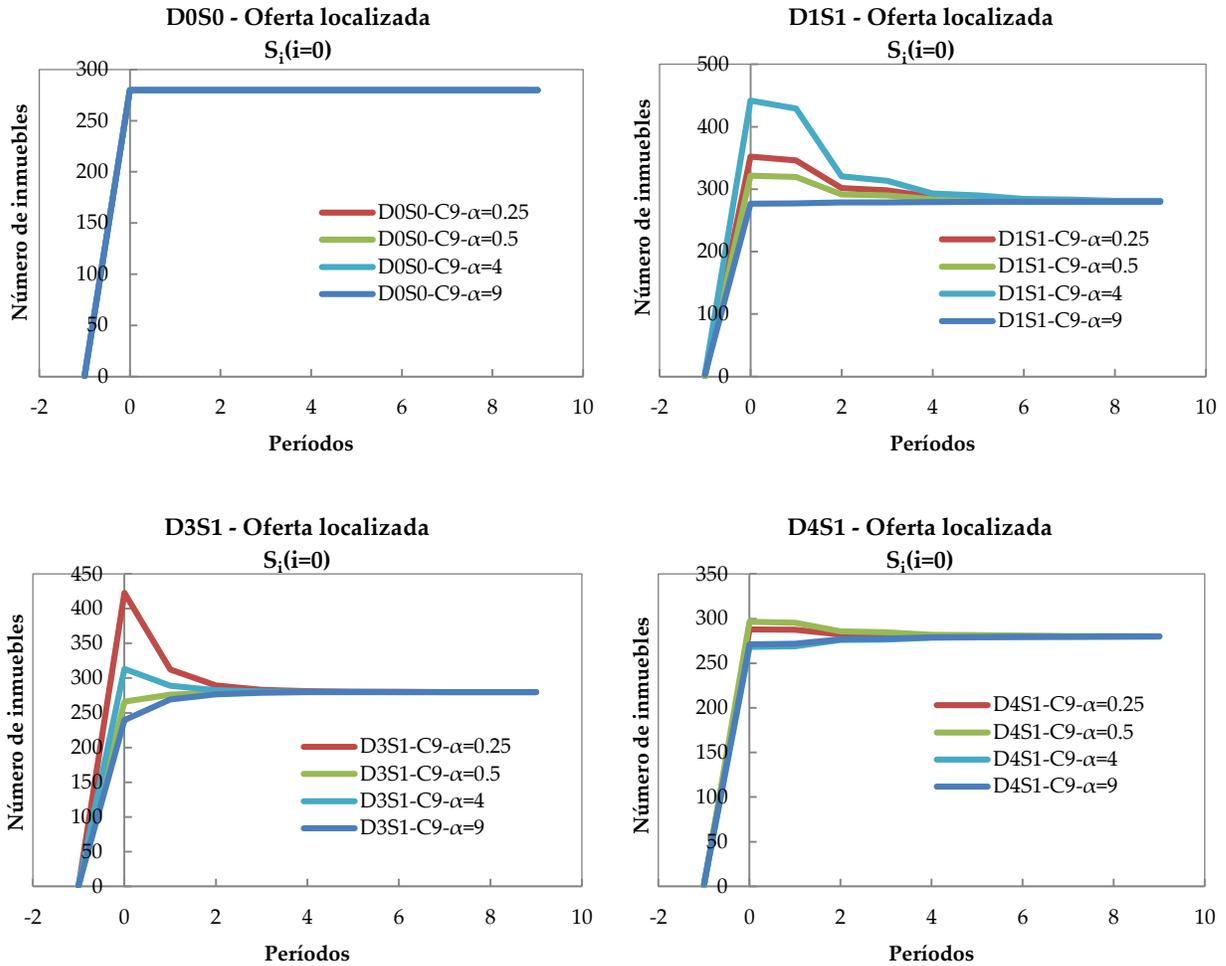


Figura 5.56: C9 – Oferta localizada en la zona 0, para cada valor del ponderador α , por período, para cada modelo por separado

Cabe destacar que todos los modelos de cuasiequilibrio utilizan la misma expresión para el modelo de oferta. Las variaciones se deben a los efectos indirectos en otras variables endógenas, que a su vez, afectan la oferta.

5.7.3.3. Efectos en postura de referencia

La diferencia inicial de posturas de referencia entre agentes converge rápidamente a un valor único.

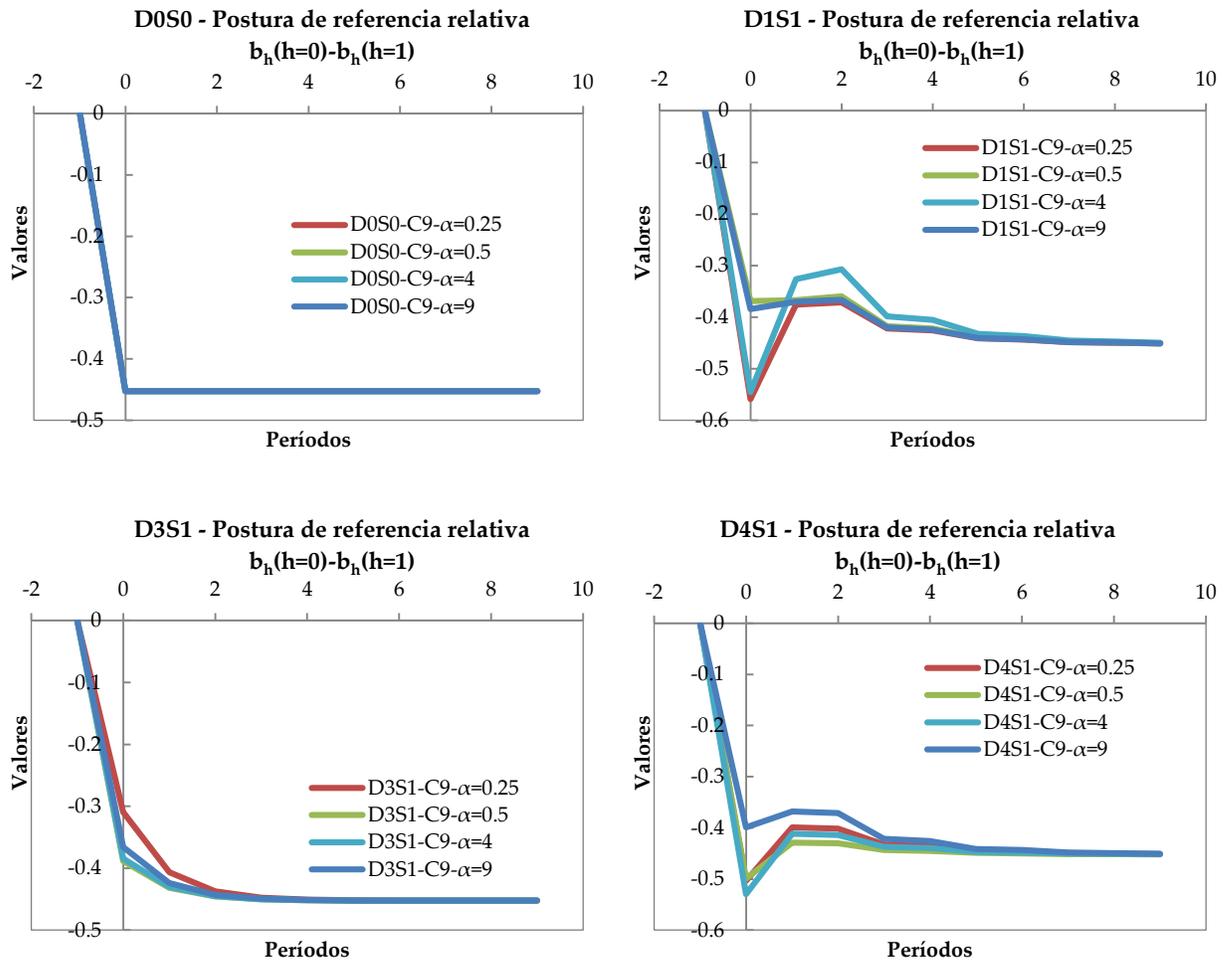


Figura 5.57: C9 - Postura de referencia relativa del agente 0 respecto al agente 1, para cada valor del ponderador α , por período, para cada modelo por separado

5.8. Análisis de sensibilidad a los parámetros de los modelos *logit*

5.8.1. C10 - Sensibilidad de la solución al parámetro de oferta λ

El parámetro λ del modelo *logit* de oferta, que describe los beneficios del desarrollador inmobiliario, determina hasta qué punto dichos beneficios son determinísticos (de menor dispersión, obtenidos para valores altos de λ) o estocásticos (para valores bajos). El parámetro está presente en la ecuación de oferta del modelo D0S0, dada por la expresión siguiente.

$$S_i^t = S^t \frac{\exp \lambda (r_i^t (b_i^{t*}, P_{|i}^{t*}) - c_i^t - \gamma_i^t)}{\sum_i \exp \lambda (r_i^t (b_i^{t*}, P_{|i}^{t*}) - c_i^t - \gamma_i^t)}$$

La expresión de oferta de los modelos de cuasiequilibrio es similar a la anterior. Debido a que todas las ecuaciones son interdependientes, los efectos de modificar el parámetro λ se propagan a las otras variables endógenas del modelo.

El análisis de la sensibilidad de la solución al parámetro λ posee un gran interés, debido a que en el modelo RB&SM se demostró que las variaciones de los parámetros λ y μ pueden dar lugar a inestabilidades del modelo.

A continuación se verifica que para valores altos de lambda, que corresponden a un comportamiento de la oferta más determinístico, los resultados de la oferta también se hacen más determinísticos, concentrando casi la totalidad de la oferta en una sola zona.

5.8.1.1. Efecto en la oferta inmobiliaria

Se muestra a continuación que la oferta de los modelos se hace más determinística a medida que λ aumenta. Es decir, los modelos tienden a localizar toda la oferta en una sola zona.

Los siguientes dos cuadros presentan la oferta para $t = -1$ (valor de partida) y para $t = 9$ (valor final). Para el período inicial existe un único valor, con el cual se inicializaron las variables, que se presenta en la tabla siguiente.

Tabla 5.4: Valores iniciales (t=-1) de la oferta inmobiliaria

t	Si(i=0)	Si(i=1)	Si(i=2)	Si(i=3)	Si(i=4)
-1	400	160	240	300	300

En el cuadro siguiente se muestran los valores finales, para $t = 9$ y para cada valor de λ . Se observa que en el caso del mayor valor de λ considerado ($\lambda = 9$), la localización es prácticamente de tipo *todo o nada*. Prácticamente todos los inmuebles se localizan en la zona $i = 1$.

Tabla 5.5: Valores en t=9 de la oferta para cada modelo y para distintos valores de λ .

t	λ	Modelo	Si(i=0)	Si(i=1)	Si(i=2)	Si(i=3)	Si(i=4)
9	0.5	D0S0	280.00	280.00	280.00	280.00	280.00
		D1S1	280.92	279.67	279.82	279.95	279.65
		D3S1	280.00	280.00	280.00	280.00	280.00
		D4S1	280.93	279.67	279.82	279.95	279.65
	1	D0S0	280.00	280.00	280.00	280.00	280.00
		D1S1	297.72	274.49	275.99	277.47	274.33
		D3S1	281.92	279.42	279.56	279.70	279.40
		D4S1	297.78	274.47	275.98	277.46	274.31
	4	D0S0	973.59	106.60	106.60	106.60	106.60
		D1S1	974.01	106.44	106.51	106.60	106.44
		D3S1	973.59	106.60	106.60	106.60	106.60
		D4S1	974.03	106.44	106.50	106.60	106.43
	9	D0S0	1373.97	6.51	6.51	6.51	6.51
		D1S1	1373.97	6.51	6.51	6.51	6.51
		D3S1	1373.97	6.51	6.51	6.51	6.51
		D4S1	1373.97	6.51	6.51	6.51	6.51

5.8.2. C11 - Sensibilidad de la solución al parámetro de demanda μ

El análisis siguiente muestra la sensibilidad de los modelos a los valores del parámetro μ , que caracteriza la dispersión de modelo *logit* de probabilidad. Dicho parámetro está presente en las ecuaciones de punto fijo de equilibrio y de localización de los modelos, que en el modelo D0S0 están dadas por las expresiones siguientes (para los modelos de cuasiequilibrio las expresiones son similares).

Punto fijo de equilibrio:

$$b_h^{t*} = -\frac{1}{\mu} \ln \sum_i \frac{S_i^{t*} \exp \mu (b_{hi}(P_{.i}^{t*}, z^t))}{\sum_h H_h^t \exp \mu (b_h^{t*} + b_{hi}(P_{.i}^{t*}, z^t))}$$

Punto fijo de localización:

$$P_{h|i}^{t*} = \frac{H_h^t \exp \mu (b_h^{t*} + b_{hi}(P_{.i}^{t*}, z^t))}{\sum_h H_h^t \exp \mu (b_h^{t*} + b_{hi}(P_{.i}^{t*}, z^t))}$$

Como principal conclusión, se observa que el aumento del valor del parámetro hace que los modelos se comporten de forma más determinística. Distintos modelos pueden

converger a resultados diferentes. Adicionalmente, en algunos casos se observa que algunos modelos de cuasiequilibrio no convergen mientras que otros sí lo hacen.

5.8.2.1. Efecto en el número de iteraciones.

El modelo D3S1 no converge para algunos períodos, considerando un máximo de 15.000 iteraciones, y el modelo D1S1 alcanza la convergencia en un gran número de éstas, En tanto, los modelos D0S0 y D4S1 convergen en el mínimo número posible de iteraciones.

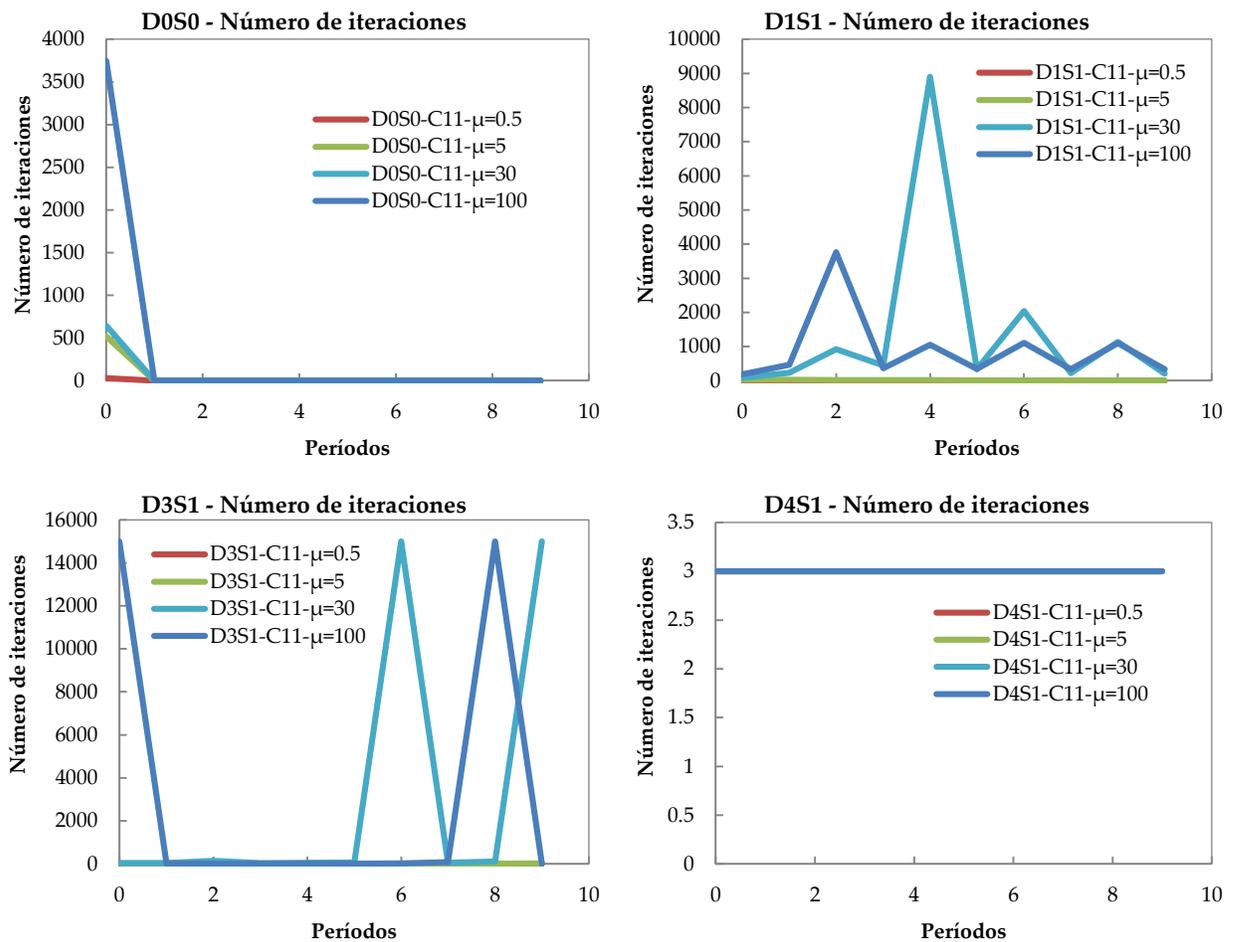


Figura 5.58: C11 – Número de iteraciones para cada distintos valores de μ , por período, para cada modelo por separado

5.8.2.2. Efecto en las probabilidades de localización.

Los gráficos siguiente revelan los efectos del cambio del parámetro μ en las probabilidades de localización en la categoría 0 y en la zona 0. Se observa un comportamiento distinto en función del valor del parámetro

En el modelo D0S0 se observan dos puntos de acumulación para las probabilidades. El valor más alto se alcanza para valores altos del parámetro μ . Los modelos D1S1 y D3S1 tienen un comportamiento similar, pero convergen a valores distintos para un mismo μ .

El modelo D4S1 oscila entre las distintas soluciones para el máximo valor μ . El modelo D1S1 también presenta oscilaciones.

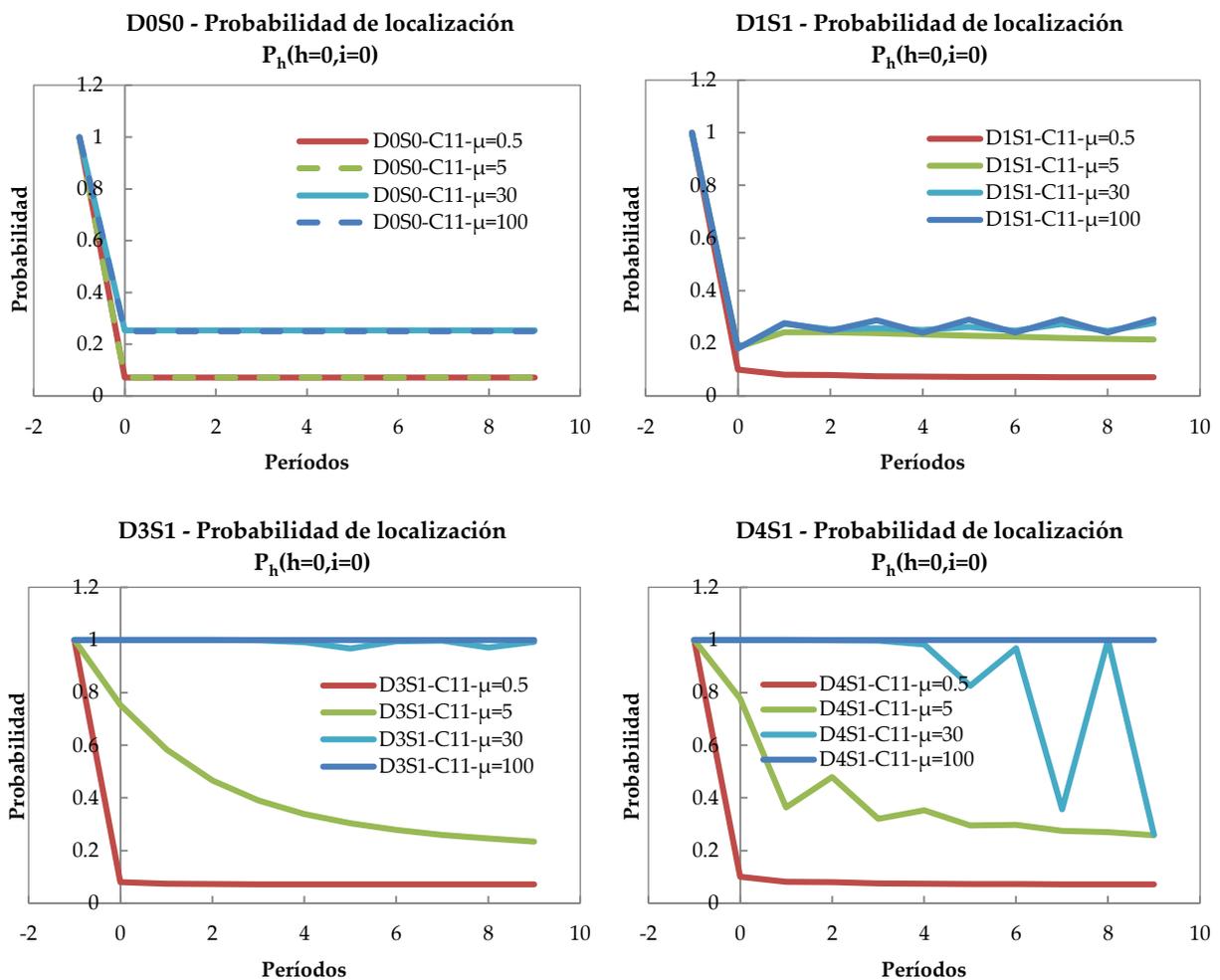


Figura 5.59: C11 – Probabilidad de localización para la categoría de hogar 0 y la zona 0, para distintos valores de μ , por período, para cada modelo por separado

El comportamiento determinístico se aprecia en los siguientes cuadros, que muestran los valores iniciales de las probabilidades, y luego los valores finales para distintos valores μ , para todas las zonas y categorías en cada modelo.

Tabla 5.6: Valores iniciales (t=-1) de las probabilidades de localización

		Ph i - Valores iniciales				
		i=0	i=1	i=2	i=3	i=4
h=0		100%	0%	0%	0%	0%
h=1		0%	100%	100%	100%	0%
h=2		0%	0%	0%	0%	100%

Tabla 5.7: Valores en t=9 de las probabilidades para cada modelo, para distintos valores μ

		Ph i - Valores en t=9									
		$\mu=0.5$					$\mu=5$				
Modelo	h	i=0	i=1	i=2	i=3	i=4	i=0	i=1	i=2	i=3	i=4
D0S0	h=0	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%
	h=1	21%	21%	21%	21%	21%	21%	21%	21%	21%	21%
	h=2	71%	71%	71%	71%	71%	71%	71%	71%	71%	71%
D1S1	h=0	7%	7%	7%	7%	7%	21%	3%	3%	3%	3%
	h=1	21%	21%	21%	21%	21%	35%	17%	17%	17%	17%
	h=2	71%	71%	71%	71%	71%	43%	80%	80%	80%	80%
D3S1	h=0	7%	7%	7%	7%	7%	23%	3%	3%	3%	3%
	h=1	21%	21%	21%	21%	21%	36%	17%	17%	17%	17%
	h=2	71%	71%	71%	71%	71%	40%	80%	80%	80%	80%
D4S1	h=0	7%	7%	7%	7%	7%	26%	2%	2%	2%	2%
	h=1	21%	21%	21%	21%	21%	40%	16%	16%	16%	16%
	h=2	71%	71%	71%	71%	71%	35%	82%	82%	82%	82%
		$\mu=30$					$\mu=100$				
Modelo	h	i=0	i=1	i=2	i=3	i=4	i=0	i=1	i=2	i=3	i=4
D0S0	h=0	25%	0%	0%	0%	0%	25%	0%	0%	0%	0%
	h=1	75%	0%	0%	0%	0%	75%	0%	0%	0%	0%
	h=2	0%	100%	100%	100%	100%	0%	100%	100%	100%	100%
D1S1	h=0	28%	0%	0%	0%	0%	29%	0%	0%	0%	0%
	h=1	72%	4%	4%	4%	4%	71%	5%	5%	5%	5%
	h=2	0%	96%	96%	96%	96%	0%	95%	95%	95%	95%
D3S1	h=0	99%	0%	0%	0%	0%	100%	0%	0%	0%	0%
	h=1	1%	21%	21%	31%	21%	0%	0%	100%	100%	0%
	h=2	0%	79%	79%	69%	79%	0%	100%	0%	0%	100%
D4S1	h=0	26%	0%	0%	0%	0%	100%	0%	0%	0%	0%
	h=1	74%	0%	0%	7%	0%	0%	0%	91%	93%	0%
	h=2	0%	100%	100%	93%	100%	0%	100%	9%	7%	100%

En algunos casos se obtienen probabilidades determinísticas (concentradas en una categoría), y en otros se reparte la probabilidad entre dos zonas con valores que tienden

a 25% y 75%. Se observan numerosas combinaciones de resultados, incluso para un mismo parámetro μ o para un mismo modelo.

5.8.3. C12 - Sensibilidad al punto de partida de las probabilidades de localización para distintos valores de λ

A continuación se analiza la sensibilidad de las soluciones del modelo al punto de partida de las probabilidades, utilizando un valor bajo del parámetro *Gumbel* del modelo de oferta ($\lambda = 1$) y uno alto ($\lambda = 4$). Estos valores son adecuados para apreciar los efectos.

5.8.3.1. Valor λ

Se observa que la oferta de todos los modelos converge a un único valor para distintos valores de la oferta inicial. El modelo de equilibrio D0S0 converge en el primer período. Por su parte, los modelos de cuasiequilibrio convergen al cabo de algunos períodos.

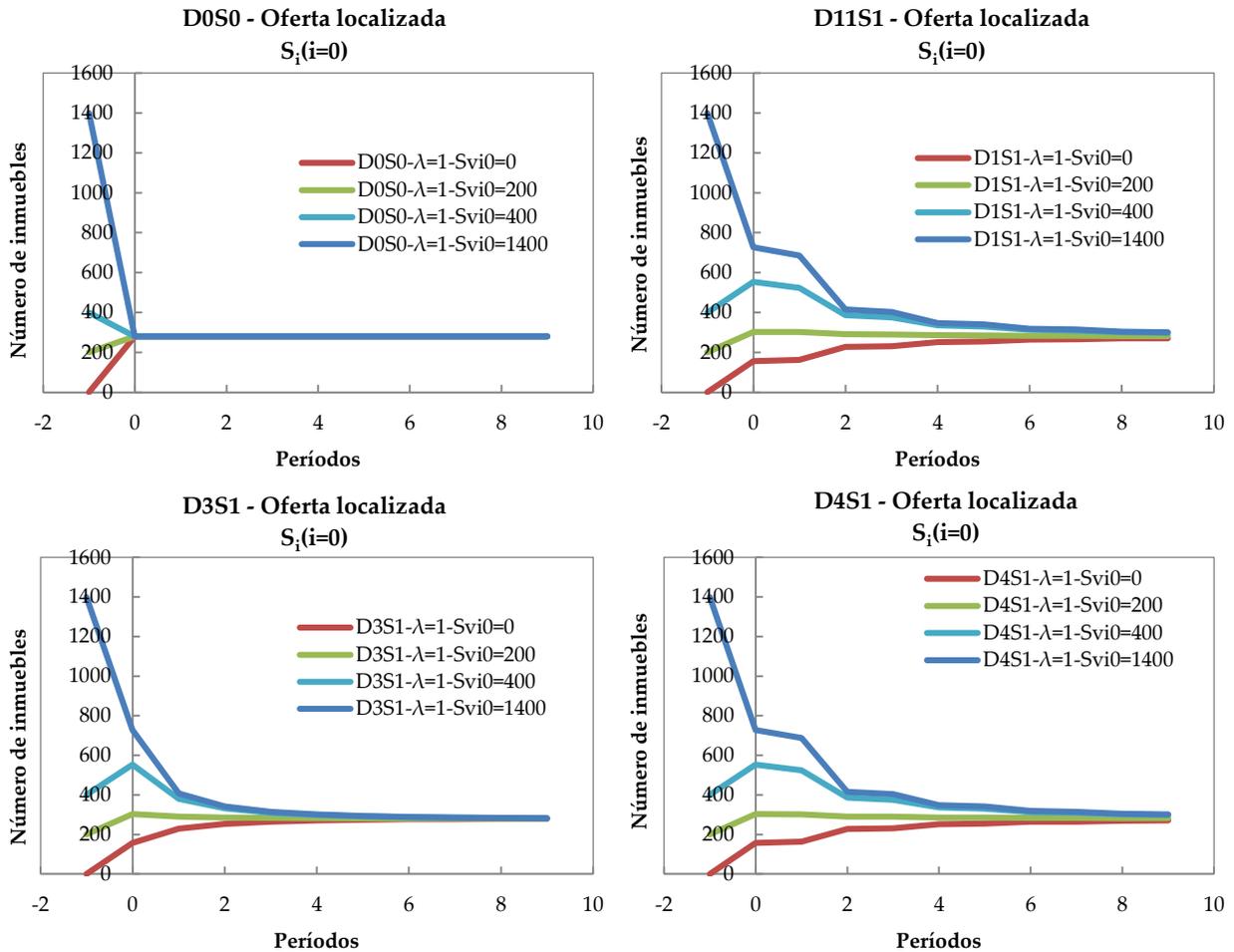


Figura 5.60: C12 – Oferta localizada en la zona 0, con $\lambda=4$, para cada valor de la oferta inicial, por período, para cada modelo por separado

5.8.3.2. Valor $\lambda=4$

A diferencia del caso $\lambda = 1$, en este caso aparecen soluciones múltiples según el valor inicial de la oferta. El modelo D0S0 entrega dos soluciones constantes desde el principio según el punto de partida de las probabilidades. Los modelos de cuasiequilibrio también entregan dos soluciones, pero demoran más en estabilizarse.

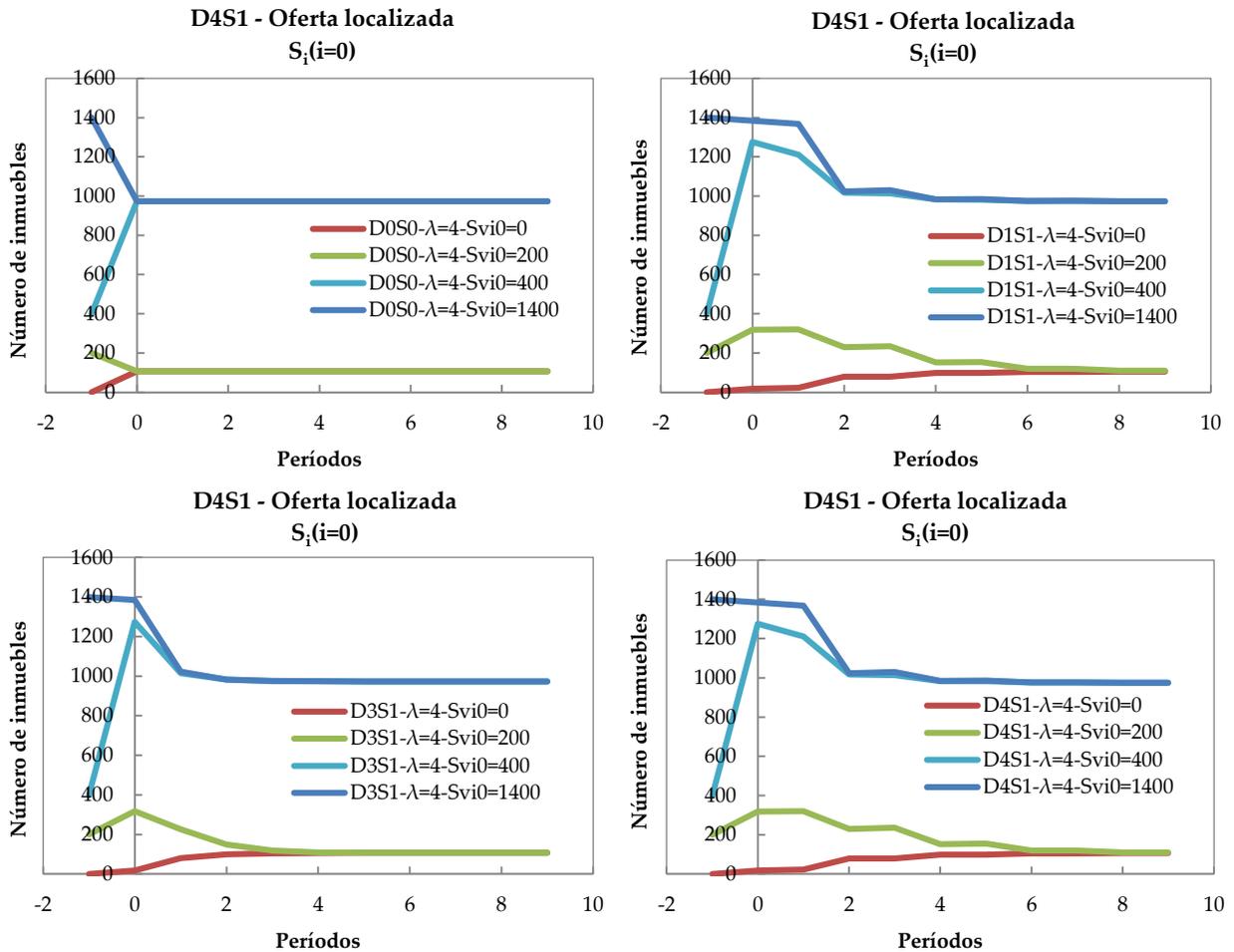


Figura 5.61: C12 – Oferta localizada en la zona 0, con $\lambda=4$, para cada valor de la oferta inicial, por período, para cada modelo por separado

5.8.4. C13 - Sensibilidad al punto de partida de las probabilidades de localización para distintos valores de μ

Del mismo modo que en la subsección anterior, a continuación se analizan los efectos del aumento del parámetro μ en la dependencia del valor inicial de oferta.

5.8.4.1. Valor $\mu = 1$

Para un valor de $\mu = 1$, se observa que la solución de todos los modelos (de equilibrio y cuasiequilibrio) es independiente del punto de partida (la dependencia desaparece en el tiempo).

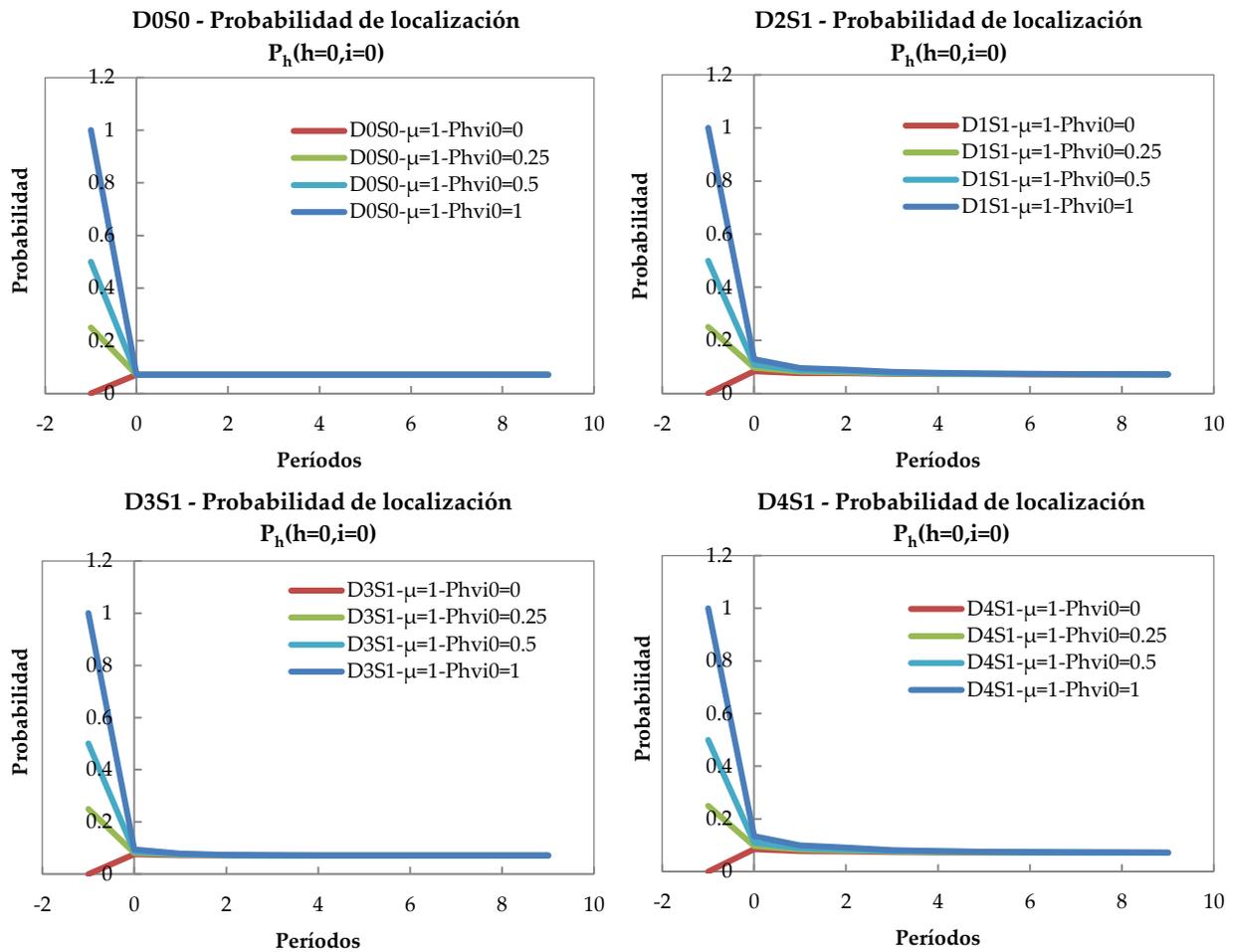


Figura 5.62: C13 – Probabilidad de localización para el hogar 0 en la zona 0, con $\mu=1$, para cada valor de la oferta inicial, por período, para cada modelo por separado

5.8.4.2. Valor $\mu = 5$

Para un valor de $\mu = 5$ ya se observan múltiples soluciones en los modelos de cuasiequilibrio. El modelo de equilibrio, sin embargo, mantiene su solución única. Los modelos de cuasiequilibrio entregan dos soluciones según el punto de partida de las probabilidades.

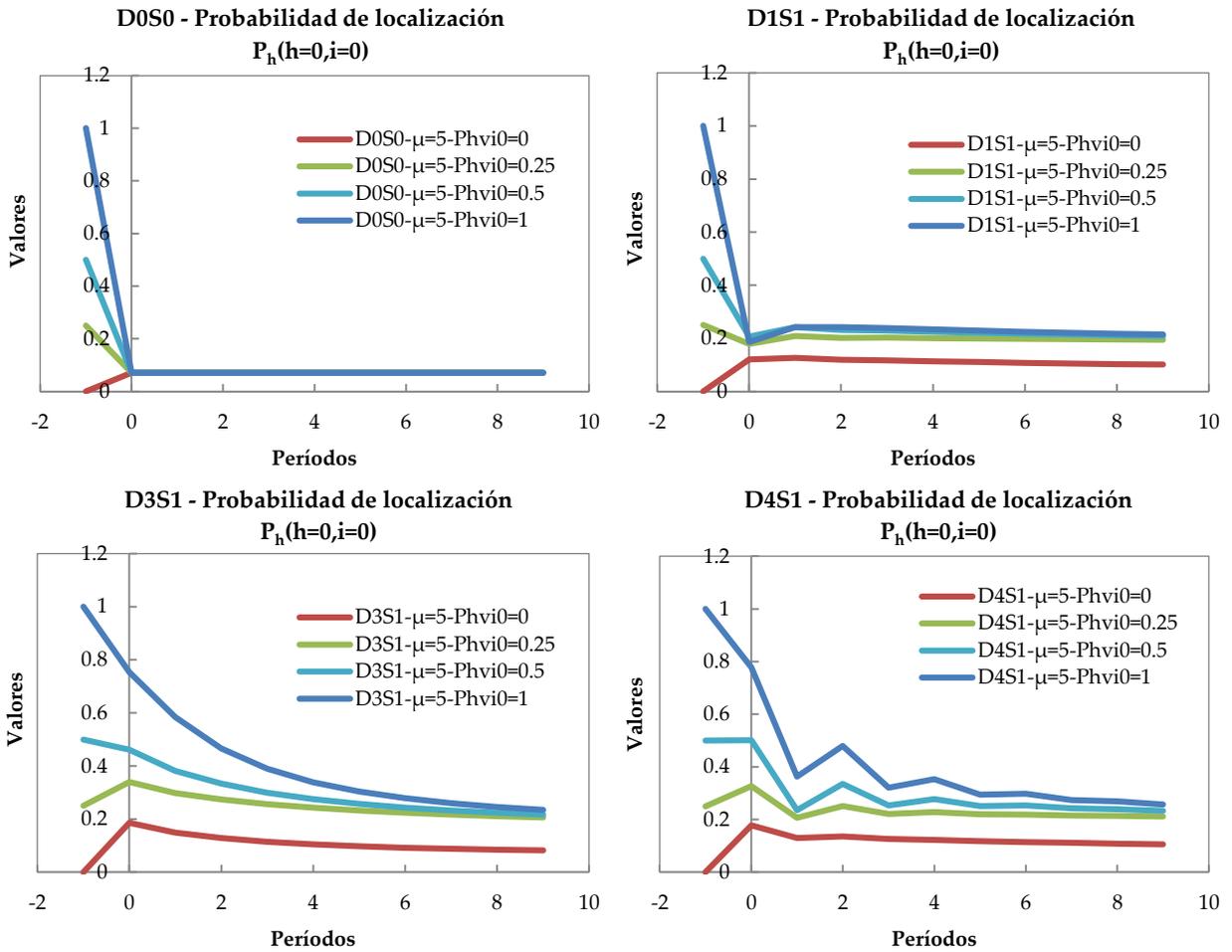


Figura 5.63: C13 – Probabilidad de localización para el hogar 0 en la zona 0, con $\mu=5$, para cada valor de la oferta inicial, por período, para cada modelo por separado

5.9. Resumen de las conclusiones de los casos analizados

La siguiente tabla resume las principales conclusiones del análisis de casos.

Tabla 5.8: Resumen de las principales conclusiones del análisis empírico

Caso	Conclusiones principales
Análisis de casos de uso	
C1 - Modelo irrestricto, ciudad con variables exógenas constantes	Se verifica el Teorema 4.1: el resultado del modelo de equilibrio es siempre el mismo, y los de cuasiequilibrio convergen al resultado de equilibrio en el tiempo.
C2 - Modelo irrestricto, ciudad con crecimiento a tasas constantes	Se verifica que, en virtud de la Propiedad 4.3, este caso es equivalente al de ciudad invariante.
C3 - Ciudad con población constante y atributos variables en el tiempo y convergentes	Se verifica el Teorema 4.2: los modelos de equilibrio y cuasiequilibrio tienden al mismo resultado en tiempo infinito.
C4 - Shock único	Los modelos de cuasiequilibrio reaccionan con desfase al shock, estabilizándose en aproximadamente 2 períodos. El de equilibrio reacciona de forma instantánea a costa de un gran número de iteraciones.
C5 - Shocks múltiples	Los modelos de cuasiequilibrio tienden a alejarse fuertemente del resultado de equilibrio. Una vez que pasan los shocks, se acercan nuevamente. El modelo de equilibrio absorbe los shocks instantáneamente.
C6 - Modelo con restricciones	Los modelos de cuasiequilibrio convergen al mismo resultado del de equilibrio, pero realizan un mayor número de iteraciones.
Análisis de sensibilidad a las condiciones iniciales	
C7 - Sensibilidad al punto de partida de la postura de referencia	En todos los casos se constata que el modelo de equilibrio es independiente del punto de partida, y que los modelos de cuasiequilibrio presentan variaciones en los primeros períodos, que se disipan a medida que el tiempo tiende a infinito.
C8 - Sensibilidad al valor inicial de la probabilidad inicial	
C9 - Sensibilidad al punto de partida de la oferta	

Resumen de las principales conclusiones del análisis empírico (continuación)

Análisis de sensibilidad a los parámetros de los modelos *logit*

C10 - Sensibilidad de la solución al parámetro de oferta λ	Los resultados de oferta se hacen más determinísticos a medida que el parámetro λ aumenta, concentrando la totalidad de la oferta en una sola zona.
C11 - Sensibilidad de la solución al parámetro de demanda μ	Los resultados se hacen más determinísticos a medida que μ aumenta. Además, se observan casos de no convergencia para algunos modelos de cuasiequilibrio.
C12 - Sensibilidad al punto de partida de las probabilidades de localización para distintos valores de λ	Para valores bajos de λ la oferta de todos los modelos converge a un único valor, independientemente de las condiciones iniciales (si bien los modelos de cuasiequilibrio son sensibles en los primeros períodos). Para valores altos de λ , aparecen soluciones múltiples dependientes del valor inicial de la oferta.
C13 - Sensibilidad al punto de partida de las probabilidades de localización para distintos valores de μ	Para valores bajos de μ se observa que la localización de todos los modelos converge a un único valor independiente del punto de partida (si bien los de cuasiequilibrio son sensibles en los primeros períodos). Para valores altos de μ se observan múltiples soluciones en los modelos de cuasiequilibrio, dependientes del punto de partida de las probabilidades, mientras que el de equilibrio mantiene su solución única.

Capítulo 6

Discusión y conclusiones

6.1. Discusión

En este trabajo se estudian 5 modelos de demanda y 2 de oferta, comenzando por modelos de equilibrio e introduciendo luego el cuasiequilibrio. En el caso de los modelos de demanda, se introdujo progresivamente un desfase en la captura de los atributos de mercado por parte de los agentes, un desfase en la interacción de los agentes a través de las posturas de referencia –ambos como en Martínez y Donoso (2011), y un desfase en las rentas utilizadas como fuente de información para la toma de decisión –siguiendo a Hurtubia et al. (2012)–. El último de estos modelos de demanda logra eliminar todo cálculo de puntos fijos de su estructura funcional.

Respecto a los modelos de oferta, se introdujo un modelo que incorpora desfases entre el instante en que se toma la decisión de construir y el instante en que los nuevos inmuebles entran al mercado. Se incorpora el supuesto de que los desarrolladores inmobiliarios tienen información perfecta sobre la demanda total agregada del sistema y sobre las regulaciones que estarán vigentes al momento de entrar al mercado. Por otra parte, en ambos modelos se mantuvo la componente regulatoria inalterada, por lo que, en caso de existir regulaciones activas, siempre se realizará un cálculo de punto fijo.

Si bien los modelos de cuasiequilibrio por definición no alcanzan el equilibrio en cada período, se mostró que aparecen fuerzas de mercado que los impulsan en la dirección del equilibrio. En el caso de que los atributos exógenos de la ciudad simulada se estabilicen, los modelos de cuasiequilibrio convergen a los resultados de equilibrio en el tiempo, y se hizo extensiva esta propiedad al caso donde la población continúa creciendo pero alcanzando una tasa única y constante. Esto se demostró analíticamente para una expresión generalizada de los modelos de cuasiequilibrio, que permite en particular reproducir cualquiera de las introducidas originalmente. En este proceso se introdujo como supuesto la contractancia global de las funciones que describen los modelos de cuasiequilibrio. Si bien esto último no fue demostrado analíticamente, se encontraron condiciones suficientes para que se cumpla (sin requerir que los modelos sean de tipo *logit*), y el supuesto fue validado ampliamente por las simulaciones realizadas, salvo cuando los parámetros de las funciones *logit* toman valores muy grandes. El análisis empírico de los casos para una ciudad estable, una ciudad con población creciente a tasas

constantes y una ciudad con atributos variables y convergentes en el tiempo, validan los resultados analíticos.

Por otra parte, se demostró que la solución de los modelos de cuasiequilibrio, cuando estos son aplicados sobre una sucesión infinita de períodos, es independiente del camino seguido, y sólo depende del estado de la ciudad en el instante final. Este resultado permitió demostrar que, si se considera un intervalo de tiempo fijo particionado sobre el cual se calculan valores de cuasiequilibrio, una partición más fina da lugar a resultados más cercanos al equilibrio.

En caso de existir shocks instantáneos en los valores de las variables exógenas –caso homologable a recomenzar desde un nuevo punto de partida– se verificó de forma empírica en el análisis de casos que, tras los períodos con shocks, todos los modelos se vuelven a aproximar relativamente rápido al valor de equilibrio, tardando en general entre 1 y 3 períodos de cálculo. No obstante, cabe señalar que si se aplican constantemente shocks, los resultados podrían estar permanentemente lejos del equilibrio.

Las diferencias en la estructura funcional de los modelos permiten caracterizar la velocidad de convergencia al equilibrio según el grado de información que manejen los agentes. En general, mientras más imperfecta sea ésta, se realizan menos cálculos de punto fijo, y por lo tanto la convergencia es más lenta tras un shock. Se verifica que el modelo más restringido en información (D4S1) es el que tarda más en volver al equilibrio. No obstante, se constató que un modelo intermedio, donde sólo se desfasa la interacción de los agentes a través de las posturas de referencia (D2S1), converge de forma mucho más lenta debido a su estructura funcional: las variables que se ajustan en cada período son muy pocas, por lo que el modelo tiene menos libertad para converger.

Los modelos descritos hasta ahora fueron calculados sin considerar restricciones activas. Éstas fueron analizadas separadamente en un caso de análisis empírico, que permitió mostrar que, de acuerdo a su diseño, los modelos de cuasiequilibrio presentaron un número elevado de iteraciones, incluso aquellos que tienen un modelo de demanda sin puntos fijos. Se conservó la rápida convergencia de la variable oferta, siendo levemente más lenta para el modelo con mayor imperfección de información. Todos los modelos terminaron por estabilizarse en el resultado de equilibrio.

El análisis de sensibilidad al punto de partida de las distintas variables endógenas mostró que, para las condiciones basales de los modelos (parámetros de los modelos *logit* con valor 0,5), todos los modelos de cuasiequilibrio son insensibles al punto de partida en el largo plazo, y que los efectos de cambiarlos desaparecen rápidamente.

Sin embargo, en línea con los resultados para el modelo RB&SM de Martínez y Henríquez (2007), los modelos se hacen sensibles al punto de partida a medida que aumenta el valor de los parámetros de los modelos *logit* (μ de localización y λ de oferta).

Los resultados de Martínez y Henríquez (2007) para el modelo RB&SM permitían prever que los modelos de cuasiequilibrio se harían inestables para valores muy altos de parámetros de los modelos *logit*, entregando soluciones múltiples. Esto se verificó empíricamente, encontrando que a medida que dichos valores se elevan, los modelos de cuasiequilibrio oscilan entre múltiples soluciones.

Un desafío que no pudo ser abordado en este trabajo es la aplicación a datos de una ciudad real. La información disponible para Santiago proviene de fuentes diversas, y es insuficientes en lo que respecta a las variables exógenas (accesibilidad, superficies construidas y tipos de inmueble existentes, etc.), por lo que no fue posible construir una serie de tiempo adecuada para la aplicación de modelos sensibles de cuasiequilibrio. No obstante, las definiciones y los resultados teóricos y empíricos presentados son escalables a cualquier aplicación real.

Si bien el análisis de este trabajo fue hecho a partir de una formulación agregada de zonas geográficas y agentes demandantes, es posible adaptar las expresiones para representar las decisiones de individuos en lugar de *clusters*. Tanto la versión original como una posible adaptación pueden ser utilizadas para definir reglas de asignación en modelos de microsimulación.

6.2. Conclusiones

El trabajo realizado a lo largo de esta tesis aporta al estado del arte de los modelos de equilibrio de localización urbana a través de la validación de la introducción de dinámica a través de modelos de cuasiequilibrio, lo conlleva una mayor representatividad del modo en que fluye la información entre los distintos agentes del mercado inmobiliario. Las formulaciones introducidas en este trabajo pueden servir para extender modelos existentes de equilibrio o desarrollar nuevas aplicaciones, en la medida de que existan suficientes datos disponibles a nivel intertemporal. Por otra parte, los modelos de cuasiequilibrio permiten vincular los modelos de equilibrio con los de microsimulación, reemplazando las reglas de aplicación de los estos por expresiones económicamente consistentes y que presentan fuerzas de mercado que las llevan a un equilibrio en el largo plazo. La formalización de estas propiedades hecha en este trabajo es un aporte para el sustento teórico de este tipo de aplicaciones.

Las principales contribuciones de este trabajo son el haber generado una estructura teórica que sustenta las distintas configuraciones posibles de modelos de cuasiequilibrio –en particular las de Martínez y Donoso (2011) y en Hurtubia et al. (2012)–, y haber demostrado que estos mantienen el sustento microeconómico, con fuerzas de mercado que los impulsan al valor de equilibrio con el paso del tiempo y con la capacidad de absorber shocks en función de cuán espaciados en el tiempo se encuentren estos.

Se mostró que en la medida que una ciudad se estabiliza, los modelos de cuasiequilibrio convergen al resultado de equilibrio, excepto cuando el comportamiento es muy determinístico. Es posible suponer que las ciudades en desarrollo presentan un mayor número de “shocks”, mientras que las ciudades más desarrolladas presentan un comportamiento más estable, lo que daría sustento a este tipo de escenarios.

Los modelos recuperan con rapidez su estabilidad al enfrentarse a shocks, son independientes del punto de partida, y en caso de ser aplicados en un intervalo particionado de tiempo, donde los cambios en la oferta y la transmisión de la información ocurren más rápidamente, los resultados se acercan más al equilibrio mientras más fina sea la partición. Esto sugiere que es posible desarrollar modelos donde se calibre el tamaño de los períodos, y obtener conclusiones sobre la lejanía de la ciudad respecto al estado de equilibrio y las fuerzas de mercado que la impulsan hacia éste.

El análisis empírico permitió corroborar que los modelos de cuasiequilibrio son, en general, más eficientes en el uso de recursos computacionales que el de equilibrio. Los modelos de cuasiequilibrio consistentemente llegan al resultado de equilibrio en un número total de iteraciones menor, incluso en el caso de la ciudad estable. Este resultado sólo es violado en el caso de los modelos con regulaciones, que en su versión de cuasiequilibrio conservan sus puntos fijos cuando existen restricciones activas, y pueden converger más lentamente que el modelo de equilibrio.

Los modelos de cuasiequilibrio, cuando se ejecutan para un número suficiente de períodos, son estables frente a los cambios del punto de partida e independientes del camino de la solución (*path-independent*). No obstante, aparecen inestabilidades cuando los parámetros de los modelos *logit* son muy grandes. Esto corresponde a acercarse al caso determinístico “*todo o nada*”, que es precisamente lo que busca evitarse al introducir estocasticidad en los modelos, por lo que la existencia de estas inestabilidades no constituye una limitación importante.

Los análisis fueron realizados con una ciudad simplificada y sin un modelo calibrado con datos reales, con el fin de simplificar el análisis y aislar los efectos de mejor forma. No obstante, la definición original de los modelos definidos, su generalización matemática y las propiedades analíticas y empíricas (así como también el simulador desarrollado) son escalables a cualquier aplicación real, con la única restricción de los datos disponibles y la capacidad de cálculo.

Este trabajo aporta sustento teórico y empírico a la siguiente afirmación: utilizando modelos de cuasiequilibrio dinámico para la oferta y para la demanda, es posible construir modelos de microsimulación con mecanismos de remate, con base microeconómica y con precios endógenos, que presenten fuerzas de mercado que los aproximen al equilibrio económico de forma estable.

6.3. Líneas de investigación futura

El trabajo realizado da lugar a numerosas líneas de investigación, que apuntan profundizar en la caracterización teórica de los modelos de cuasiequilibrio y aplicar estos en la modelación por microsimulación.

Resulta de interés introducir otras configuraciones del modelo de oferta, introduciendo en particular mecanismos de regulación continuos y diferenciables.

La caracterización completa de la contractancia de los modelos de cuasiequilibrio es un tema abierto, de gran interés teórico, y cuya formalización involucra numerosos aspectos de la teoría matemática de puntos fijos y funciones contractantes. En este trabajo se realizaron avances respecto a dicha caracterización.

Respecto a posibles aplicaciones reales, el permanente desarrollo de las bases de datos geoespaciales de Chile, así como la disponibilidad de datos de otros países puede permitir en el corto plazo la realización de un estudio que utilice modelos similares a los introducidos en este trabajo.

Finalmente, una importante línea de trabajo es la aplicación del paradigma de cuasiequilibrio a modelos de microsimulación. Si bien los modelos desarrollados utilizan un enfoque agregado, pueden ser fácilmente adaptados a un enfoque basado en agentes –como en Hurtubia et al. (2012)– o a reglas de asignación de un modelo de autómatas celulares –como del de Ramírez et al. (2014)–, para incorporarse a modelos de mayor escala existentes o para la generación de nuevas plataformas de modelación.

Capítulo 7

Bibliografía

- [1]. Alonso, W. (1964). *Location and land use: towards a general theory of land rent*. Harvard Univ. Press, Cambridge.
- [2]. Anas, A. (1982). *Residential location markets and urban transportation: economic theory, econometrics, and policy analysis with discrete choice models*. Academic Press, London.
- [3]. Anas, A. y Arnott, R.J. (1991). *Dynamic housing market equilibrium with taste heterogeneity, idiosyncratic perfect foresight, and stock conversions*. *Journal of Housing Economics*, 1(1):2-32.
- [4]. Bravo, M. (2007). *Un modelo integrado de los sistemas de transporte y uso de suelo con externalidades*. Tesis para optar al grado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería Mención Transporte, Universidad de Chile.
- [5]. Bravo, M., Briceño, L., Cominetti, R., Cortés, C. y Martínez, F. (2010). *An integrated behavioral model of the land-use and transport systems with network congestion and location externalities*. *Transportation Research Part B: Methodological*, 44(4), 584-596.
- [6]. Ellickson, B. (1981). *An alternative test of the hedonic theory of housing markets*. *Journal of Urban Economics*, 9(1):56-79.
- [7]. Gardner, M. (1970). *Mathematical games: The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "life"*. *Scientific American* 223.4: 120-123.
- [8]. Hunt, J.D. y Abraham, J.E. (2003). *Design and application of the PECAS land use modelling system*. In *Proceedings of the 8th Computers in Urban Planning and Urban Management Conference (CUPUM)*, Sendai, Japan.
- [9]. Hurtubia, R. (2012). *Discrete choice and microsimulation methods for agent-based land use modeling*. PhD thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne.

- [10]. Hurtubia, R., Bierlaire, M. y Martínez, F. (2012). *Dynamic microsimulation of location choices with a quasi-equilibrium auction approach*. In 12th Swiss Transport Research Conference, Ascona.
- [11]. Martínez, F. (1992). *The bid-choice land use model: an integrated economic framework*. *Environment and Planning A*, 24(6):871.
- [12]. Martínez, F. y Donoso, P. (2010). *The MUSSA II land use auction equilibrium model*. *Residential Location Choice: Models and Applications*, pages 99-113.
- [13]. Martínez, F. y Donoso, P. (2011). *A quasi-equilibrium logit model for residential suburbanization*. *Computers in Urban Planning and Urban Management 2011 Conference*.
- [14]. Martínez, F. y Henríquez, R. (2007). *A random bidding and supply land use equilibrium model*. *Transportation Research Part B: Methodological*, 41(6):632-651.
- [15]. Martínez, F. y Hurtubia, R. (2006). *Dynamic model for the simulation of equilibrium status in the land use market*. *Networks and spatial economics*, 6(1):55-73.
- [16]. Martínez, F. y Muñoz, A (2010). *A dynamic operational urban economic model based on agent's behavior*. 12th WCTR, Lisbon, Portugal, July 11-15.
- [17]. Martínez, F. y Roy, J. (2004). *A model for residential supply*. *The Annals of the Regional Science* 38(3), 531-50.
- [18]. McFadden, D (1978). *Modeling the choice of residential location*. *Transportation Research Record*, (673).
- [19]. Ramirez, P., Leger, P. y Vallone, A. (2014). *Un modelo flexible para la simulación de distribución de ciudades*. *Ingeniare. Rev. chil. ing.* [online]. 2014, vol.22, n.3, pp. 351-362.
- [20]. Still, B.G. y Simmonds, D.C. (1997). *Implementation of the Delta/Start Model*. Institute of Transport Studies, University of Leeds, Working Paper 494
- [21]. Still, B.G. y Simmonds, D.C. (1999). *DELTA/START: adding land use analysis to integrated transport models*. *Proceedings of the 8th World Conference on Transport Research* (Elsevier, Amsterdam)

- [22]. Von Neumann, J. (1966). *Theory of Self-Reproducing Automata*. University of Illinois Press.
- [23]. Waddell, P. (2001). *Microsimulation of urban development and location choices: Design and implementation of UrbanSim*. *Networks and Spatial Economics*, 3(1):43-67.
- [24]. Wilson A. G. y Bennett R. J. (1985). *Mathematical Methods in Human Geography and Planning*. John Wiley, New York.

Anexo 1

Implementación de un prototipo computacional

Se ha desarrollado un prototipo computacional, capaz de realizar la simulación de modelos de equilibrio y de cuasiequilibrio sobre datos de una ciudad introducidos por el usuario, para horizontes de tiempo arbitrarios. Las características del modelo, los datos de la ciudad y los parámetros específicos de la corrida se entregan al programa en archivos de texto, de acuerdo a un formato establecido. El programa incluye una interfaz gráfica simple, capaz de graficar las distintas variables de salida de los modelos para una ciudad de tamaño reducido. El desarrollo de este programa se realizó en *Python 2.7.2*, utilizando la biblioteca *Numpy* para el tratamiento de matrices y la biblioteca *Matplotlib* para la interfaz gráfica.

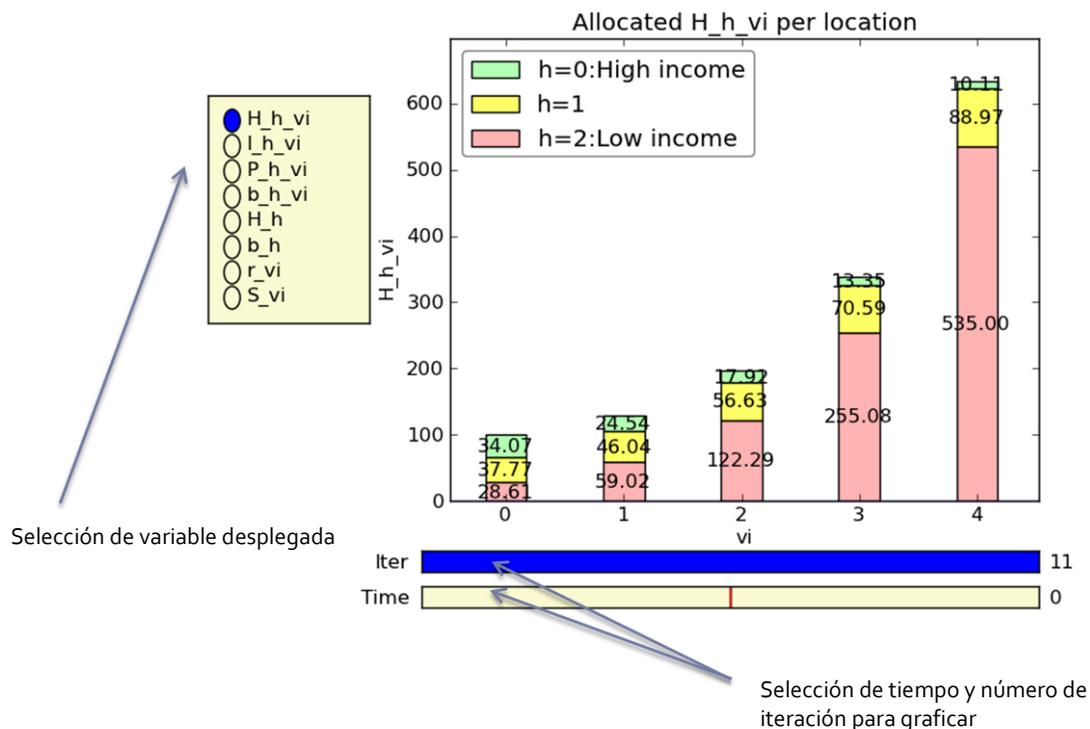


Figura: Interfaz gráfica del simulador

Estructura del programa

A continuación se describe la estructura de la plataforma computacional diseñada. Ésta es de código abierto, y se encuentra disponible para descarga en el repositorio <https://github.com/cristeprado>.

Archivo Qsim.py

Clase: "SimulationStep"

Input: self, N_h, N_vi: corresponden a las dimensiones de hogares y de localizaciones.

El concepto "step": se refiere a cada estado de la simulación. Puede corresponder a una iteración dentro de un período o al resultado de un período. Si hay T períodos, habrá T+2 steps, pues python permite la notación steps[-1] y steps[-2] para acceder a los dos últimos elementos del arreglo. Esto permite almacenar en las últimas 2 posiciones del arreglo los valores de inicialización para los períodos de modelación $t=-1$ y $t=-2$

Métodos:

- **copy:** devuelve una copia independiente del objeto. Sirve para duplicar los valores de una iteración durante el proceso iterativo.

Clase: "Simulation"

Input: data, model, sim_name (opcional)

Variables de instancia:

- self.params: contiene el set de parámetros del modelo
- self.households_data: contiene la información de hogares
- self.probs_init: contiene la información de inicialización de probabilidades
- self.locations_data: contiene la información de las zonas
- self.model: referencia al modelo que se ejecutará en la simulación
- self.sim_name: almacena el nombre de la simulación

Métodos:

- `__init__`: inicializa el objeto, crea un objeto de parámetros,
- `make_step`: crea un nuevo paso temporal de la simulación
- `init_steps`: inicializa los pasos temporales, de $t=-2$ a $t=T$. Asigna los vectores iniciales para `b_h`, `P_h_i`, `gamma_i`, `S_i`.
- `Init_population`: invocado por `init_steps`. Si el parámetro “`use_explicit_pop`” es verdadero, lee la población inicial de los datos. Si no, la construye a partir de una matriz inicial, aplicando un factor de crecimiento (incluido en los parámetros).
- `Run`: ejecuta la simulación, llamando al método “`calc`” del modelo y pasándole como input los pasos de simulación.

Archivo `Readers.py`

Se presenta dividido en dos partes. La primera contiene las clases **`DataReader`**, **`ParameterSetReader`**, **`VerticalVectorReader`**, **`HorizontalVectorReader`** y **`MatrixReader`**.

Las últimas 4 extienden a la primera (herencia). La única variable de instancia (heredada de la clase padre) es “`file_handler`”, que corresponde a un archivo de entrada cuyo nombre se recibe como input.

Todas las clases implementan el método “`get_data`”, que accede al archivo contenido en la variable de instancia, leen la información y la introducen en un objeto de “`DataSet`” o “`ParameterSet`” (definidos más abajo).

La segunda parte contiene las clases **`DataSet`** y **`ParameterSet`**, que están vacías, pues sólo sirven para contener los datos leídos. `ParameterSet` extiende a `DataSet`.

No se impone ninguna restricción ex-ante al tipo de datos que dichas clases contienen. No obstante, los métodos que crean estas clases cumplen lo siguiente:

`ParameterSetReader` crea un objeto `ParameterSet` a partir del archivo de parámetros. Éste consiste en líneas, cada una con dos strings separados por coma. El primer string es el nombre y el segundo un número. El método crea variables de instancia del `ParameterSet` con los nombres de los parámetros leídos, y les asigna el valor correspondiente (intenta asignarlo como entero, y si falla, lo asigna como double).

`VerticalVectorReader` y `HorizontalVectorReader` leen archivos de vectores verticales y horizontales respectivamente. Ambos consisten en líneas que contienen información separada por comas. El primero tiene los nombres de las variables en la primera línea y los datos verticalmente hacia abajo, el segundo contiene los nombres en la primera

posición de cada línea, y los datos correspondientes a continuación en la misma línea. Los métodos crean un `numpy.vector`⁹ de 2 dimensiones para cada variable, asignan los valores (en la primera dimensión si es vertical y en la segunda si es horizontal), crea un diccionario¹⁰ en un `DataSet` y le asigna una entrada con el nombre de cada variable y su valor correspondiente. Los valores se almacenan como tipo `float`.

`MatrixReader` lee información matricial de un archivo, que contiene el nombre de la matriz en la primera línea, y los valores matriciales en las siguientes. En cada línea los valores están separados por comas. Crea una variable de instancia con el nombre de la matriz en un objeto de tipo `DataSet` y devuelve el `DataSet`.

Estos métodos no verifican la validez de los nombres de las variables, por lo que el usuario debe verificar estas condiciones si realiza modificaciones.

Archivo `Models/model.py`

Clase `Model`

Clase estructural de los modelos. Los modelos creados por el usuario deben extender a la clase `Model` e implementar sus métodos.

Input: `self, data`

Variables de instancia: `params, households_data, locations_data` (todos leídos desde el input "data")

Métodos:

- `calc(dm, t)`: es llamado por el método "run" de la simulación, descrito más arriba. Recibe un set de "steps" de simulación y el período actual de cálculo. Ejecuta las iteraciones para un período. En particular, para cada iteración almacena una lista de los valores de todas las iteraciones (arreglo de "steps") y actualiza los valores llamando a los otros métodos de la clase.
- `Calc_delta`: calcula una medida de distancia entre dos iteraciones consecutivas. Cuando esta distancia es menor que la tolerancia definida en los parámetros, se considera que el modelo convergió a un valor.

⁹ Numpy es una biblioteca de Python, que permite manejar datos matriciales de forma similar a la de Matlab.

¹⁰ El objeto diccionario en python permite asociar objetos a un nombre de tipo string. La lectura se realiza por medio de tablas Hash, en tiempo $o(1)$ para todo efecto práctico.

- Calc_b_h, Calc_P_h_vi, Calc_r_vi, Calc_S_vi, Calc_b_h_vi: métodos vacíos, son implementados por cada modelo específico. Los modelos creados por el usuario deben extender a la clase Model.
- Calc_gamma_vi, calc_I_h_vi, calc_B_h_vi, calc_I2, calc_avgZ_vi: valores calculados con fórmulas definidas en base a los calculados anteriormente.

Otros archivos

Plotter.py

Contiene la clase “Plotter” que utiliza la biblioteca “matplotlib” de Python para generar una interfaz gráfica de visualización de los resultados de una simulación. Permite seleccionar los datos que se despliegan, escogiendo entre las variables de simulación (b_h, b_hvi, P_hvi, etc.), y por medio de un deslizador, escoger la iteración y el período.

Report_generators.py

Contiene la clase “ReportGenerator”, que recibe un objeto de la clase “Simulation” (después de la ejecución de “run”) e imprime reportes en base a los resultados. Recibe como input también la dirección de la carpeta de salida de los reportes.

Custom_report_generators.py

Prácticamente idéntica a la anterior, contiene la clase “CustomReportGenerator”, que ejecuta reportes personalizados por el usuario.

Test.py

Contiene diversas clases que ejecutan tests de las distintas funciones de todas las clases, utilizando datos ficticios. Si la ejecución del programa test.py no arroja ningún error, los tests fueron aprobados correctamente. Permite realizar modificaciones de las clases y verificar que ninguna funcionalidad resultó alterada. Debe actualizarse cada vez que se agrega una nueva funcionalidad. Utiliza la biblioteca “unittest” de Python.

Anexo 2

Análisis específico del modelo D2S1

El análisis de casos reveló la necesidad de excluir el modelo D2S1 de las simulaciones, pues su convergencia es mucho más lenta que aquella del resto de los modelos. A continuación se justifica esta decisión, y se muestra empíricamente que el modelo, si bien tarda más, alcanza de todas formas la convergencia en el tiempo, tal como predicen los resultados teóricos. El modelo D2S1 está descrito en la sección 5.2.

Modelo D2S1 en ciudad con variables exógenas constantes – comparación con los otros modelos

El primer escenario analizado corresponde a una ciudad invariante (como la descrita en la sección 4.4.1). Las principales características son:

1. La población de cada segmento de residentes es constante.
2. Los atributos exógenos de la función de postura son constantes.
3. Las restricciones a la oferta no son activas

Se presentan a continuación los resultados necesarios para justificar la separación del análisis del modelo D2S1.

Número de iteraciones

Se observa que el número de iteraciones del modelo D2S1 excede fuertemente al número de iteraciones del resto de los modelos.

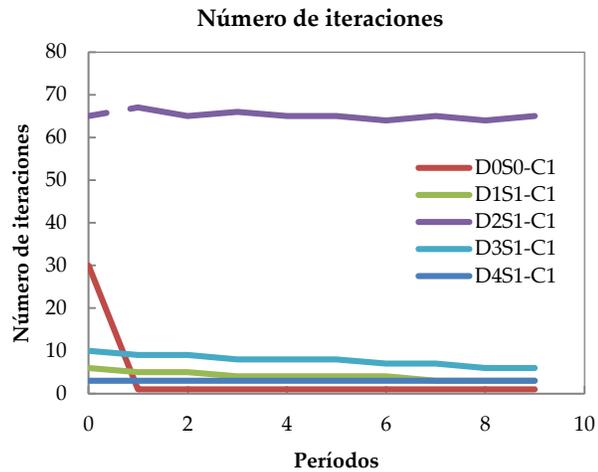


Figura: C1 - Número de iteraciones por modelo y por período (incluyendo el modelo D2S1)

Probabilidad de localización

Del mismo modo, no se observa convergencia en los valores de las probabilidades de localización, la postura de referencia, ni otras variables. Esto queda representado por la siguiente figura, que representa la evolución de los valores de la probabilidad de localización para la categoría 0 y la zona 0 en el tiempo.

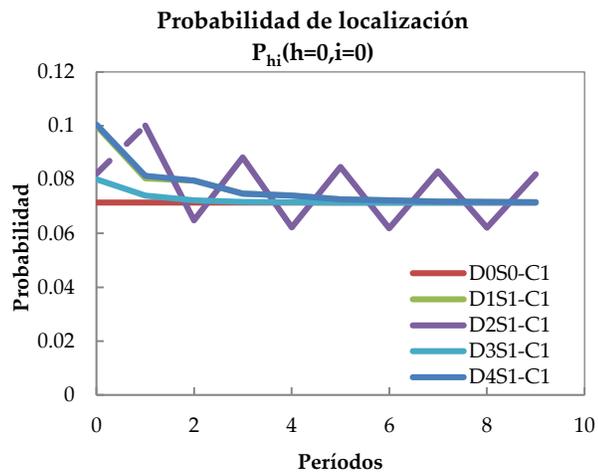


Figura: C1 - Probabilidad de localización para la categoría de hogar 0 y la zona 0, por modelo y por período (incluyendo el modelo D2S1)

Oferta inmobiliaria

A diferencia de las variables anteriores, la oferta alcanza la convergencia a la misma velocidad que el resto de los modelos, como muestra la siguiente figura. Esto se debe a que el modelo de oferta de D2S1 es el mismo que el utilizado en los otros modelos de cuasiequilibrio.

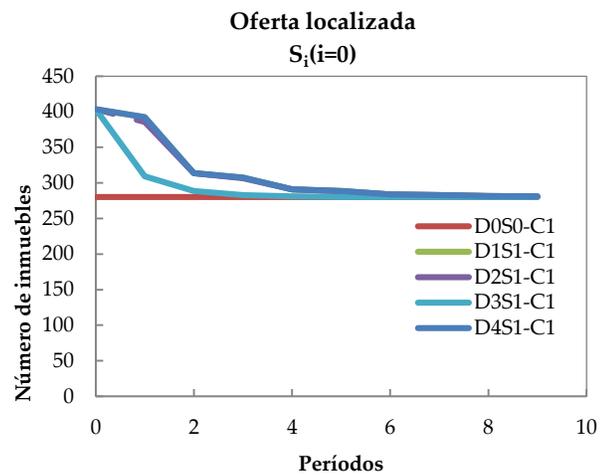


Figura: C1 - Oferta localizada en la zona 0, por modelo y por período (incluyendo el modelo D2S1)

Postura de referencia

Por su parte, la postura de referencia b_h de todos los modelos converge (a valores distantes en una constante), salvo por el modelo D2S1, que oscila sin aparentemente converger.

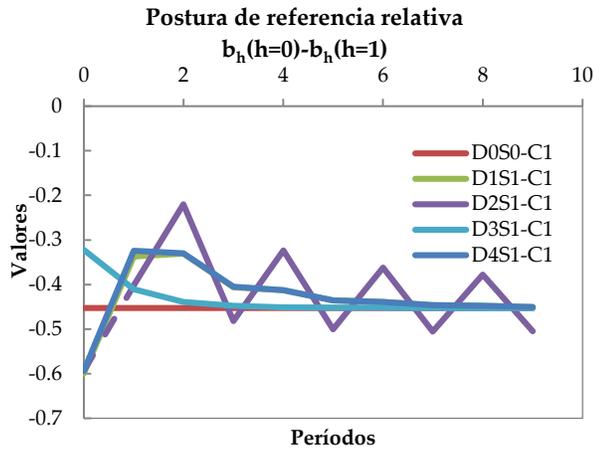


Figura: C1 - Postura de referencia relativa del agente 0 respecto al agente 1, por modelo y período (incluyendo el modelo D2S1)

La aparente no-convergencia del modelo D2S1 en estos 10 períodos se estudia en detalle a continuación, expandiendo el rango de análisis.

Modelo D2S1 en ciudad con variables exógenas constantes – número de períodos extendido

Los resultados teóricos sugieren que el modelo D2S1, como el resto, debe converger en el tiempo cuando la ciudad es estable. Esto en principio se contradice con los resultados observados en 4.4.2, por lo que se estudia a continuación el comportamiento del modelo D2S1 para períodos de análisis más largos.

Número de iteraciones

Se observa que el modelo alcanza la convergencia efectivamente, pero en un número de períodos mayor que los otros modelos estudiados. El número de iteraciones decrece hasta 1 iteración por período aproximadamente 500 iteraciones. Es esperable que el número de iteraciones decrezca en el tiempo, en la medida que la diferencia entre los valores entre dos iteraciones consecutivas sea cada vez menor. A partir del instante en que dichas variaciones son menores al nivel de tolerancia (condición de salida de las iteraciones), se observa una sola iteración por período.

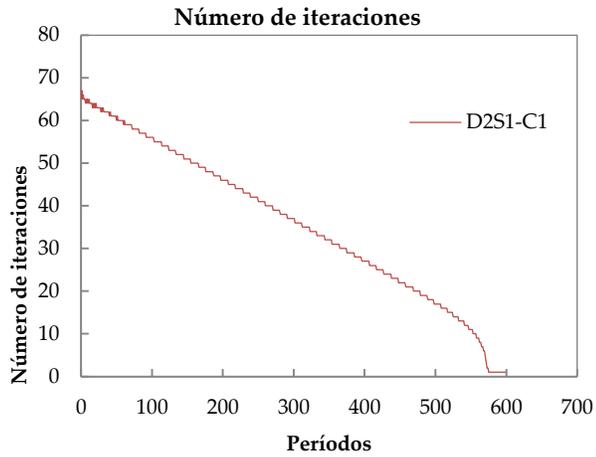


Figura: C1 - Número de iteraciones por período para el modelo D2S1, con número de períodos extendido

Probabilidad de localización

La probabilidad de localización se estabiliza en el límite y de forma oscilatoria, lo que se aprecia en la figura. En el período 120, la variación de un período al siguiente ya es menor al 1%.

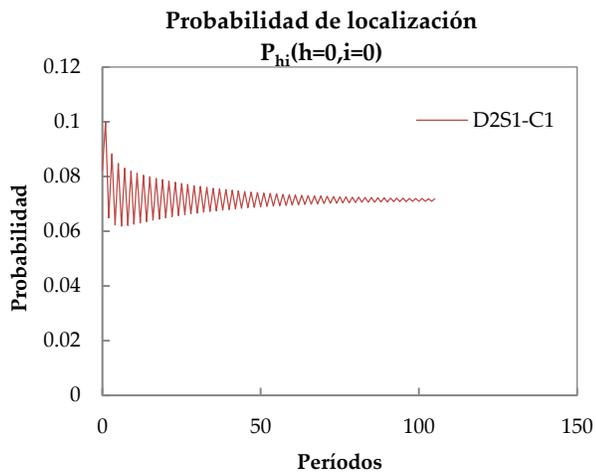


Figura: C1 - Probabilidad de localización para la categoría de hogar 0 y la zona 0 para el modelo D2S1, con número de períodos extendido

Oferta inmobiliaria

El modelo de oferta alcanza la convergencia, como muestra la siguiente figura para la zona 0.

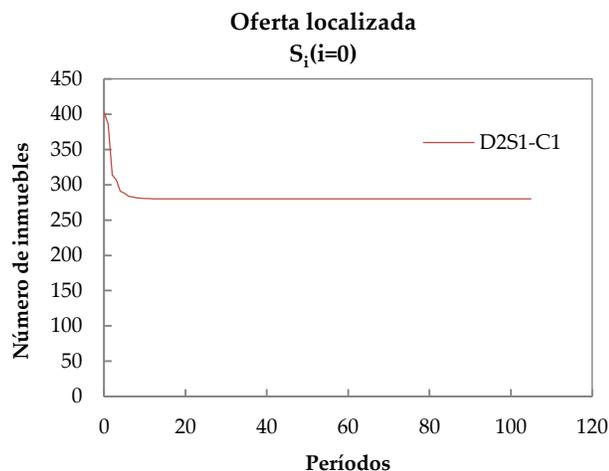


Figura: C1 - Oferta localizada en la zona 0 para el modelo D2S1, con número de períodos extendido

Postura de referencia

La lenta convergencia de este modelo en comparación con los otros estudiados se debe a la forma funcional de la postura de referencia.

$$b_h^{t*} = -\frac{1}{\mu} \ln \sum_i \frac{S_i^{t*} \exp \mu (b_{hi}(P_{.i}^{t-1}, z^{t-1}))}{H_h^t \exp \mu (b_h^{t*} + b_{hi}(P_{.i}^{t-1}, z^{t-1})) + \sum_{h' \neq h} H_{h'}^t \exp \mu (b_{h'}^{t-1} + b_{h'i}(P_{.i}^{t-1}, z^{t-1}))}$$

A diferencia de los otros modelos estudiados, éste calcula el punto fijo sobre sólo una variable: para cada h , el valor de b_h es el único considerado en el punto fijo. Esto otorga un grado de libertad mucho menor al modelo, a diferencia de los otros que, cuando permiten el cálculo de puntos fijos, lo hacen simultáneamente sobre todo el vector de valores b_h para cada valor h , lo que asegura una convergencia más rápida.

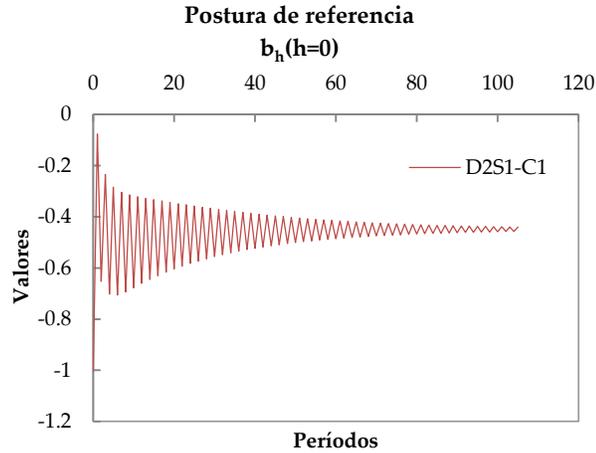


Figura: C1 - Postura de referencia del agente 0 para el modelo D2S1, con número de períodos extendido

En efecto, en cada iteración, el vector b_h se inicializa con los valores de la iteración anterior, como expresa la siguiente ecuación discretizada:

$$b_h^{t,n} = -\frac{1}{\mu} \ln \sum_i \frac{S_i^{t*} \exp \mu \left(b_{hi} \left(P_{.|i}^{t-1}, z^{t-1} \right) \right)}{H_h^t \exp \mu \left(b_h^{t,n-1} + b_{hi} \left(P_{.|i}^{t-1}, z^{t-1} \right) \right) + \sum_{h' \neq h} H_{h'}^t \exp \mu \left(b_{h'}^{t-1} + b_{h'vi} \left(P_{.|i}^{t-1}, z^{t-1} \right) \right)}$$

En cada iteración, cada valor b_h depende sólo de su valor en la iteración $n - 1$, y no existe interacción entre los distintos b_h^n . Esto explica la lenta convergencia, pues existen menos grados de libertad para el ajuste, y puede explicar el comportamiento oscilatorio, si una iteración lleva las posturas de referencia a un nuevo valor, para luego volver a un valor cercano al anterior en la iteración siguiente.