UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL

# TARIFICACIÓN ÓPTIMA DE TARJETAS MULTIVIAJE CONSIDERANDO EFECTOS DEL INGRESO

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA, MENCION TRANSPORTE

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL

DIEGO ANDRÉS CRUZ PADILLA

PROFESOR GUÍA:
SERGIO JARA DÍAZ

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
LEONARDO BASSO SOTZ
ANDRÉS GÓMEZ-LOBO ECHENIQUE
ANTONIO GSCHWENDER KRAUSE

SANTIAGO DE CHILE
DICIEMBRE 2014

**RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR AL**
**TÍTULO DE:** Ingeniero Civil y grado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería, Mención Transporte
**POR:** Diego Andrés Cruz Padilla
**FECHA:** Agosto 2014
**PROFESOR GUÍA:** Sergio Jara Díaz


## TARIFICACIÓN ÓPTIMA DE TARJETAS MULTIVIAJE CONSIDERANDO EFECTOS DEL INGRESO

En esta tesis se trata la tarificación óptima simultánea de un abono de transporte con un boleto unitario por viaje, en presencia de disparidades en el ingreso y la tasa de motorización (TM) de los usuarios. Los abonos son una alternativa de pago por viajes en transporte público (TP), que consiste en un pago fijo mensual (diario, semanal o anual) que da derecho a ilimitados viajes durante dicho período. Están presentes en muchas ciudades del mundo y son vistos como una forma de facilitar e inducir el uso del TP; en general resultan convenientes para usuarios frecuentes del sistema (White, 1981; FitzRoy y Smith, 1998, 1999; Gschwender, 2007), debido a que estos comparan el valor del abono con el gasto obligatorio a realizar en TP. Esta comparación varía según la frecuencia de uso del sistema.

La literatura sobre abonos sigue la línea de la tarificación en dos partes $(P, T)$, donde el cobro por un bien consiste en una cantidad fija $T$ por entrar al mercado y otra $P$ por unidad.Las diferencias entre consumidores son tratadas principalmente a través de un parámetro de gusto que representa la intensidad de consumo (Brown y Sibley, 1986; Wilson, 1993) o a través del ingreso (Oi, 1971; Feldstein, 1972). En ambos tratamientos se consideran demandas invariantes para cualquier valor de $T$, omitiendo su efecto sobre el ingreso y la posible existencia de mercados o estratos donde este supuesto no resulta razonable. Carbajo (1988) aplica la tarificación en dos partes al TP con el objetivo de encontrar los valores óptimos del precio $P$ y de un abono de valor $T$, representando ambas alternativas como tarifas en dos partes: $(P, 0)$ y $(0, T)$, respectivamente. Para diferenciar a los usuarios usa un parámetro de gusto $\theta$, insinuando que puede ser visto como ingreso, manteniendo el supuesto del nulo efecto de $T$ sobre las demandas (inapropiado para la mayoría de las ciudades latinoamericanas).

En esta tesis trabajamos con una sociedad donde los viajes individuales crecen con el ingreso, pero donde la TM (correlacionada con el ingreso) provoca que la partición modal del TP disminuya a medida que los estratos son más ricos. Como ambos efectos (poder adquisitivo y nivel socioeconómico) van en dirección opuesta, los modelos basados en gusto no son aplicables y se requiere una reformulación del problema. Se desarrolla un modelo de tarificación de TP para encontrar los valores óptimos de un abono $T$ y un precio $P$, diferenciando a los individuos a través del ingreso, considerando ambos efectos mencionados. Para un par $(P, T)$ dado cada individuo escoge la alternativa que le entregue mayor bienestar, donde el corte entre quienes eligen $P$ o $T$ lo da el usuario indiferente de ingreso $\tilde{I}$, de manera tal que usuarios con $I_i > \tilde{I}$ escogen $P$, mientras que los con $I_i < \tilde{I}$ compran abono. Se presenta una aplicación considerando una ciudad de tres estratos, donde ingreso y TM están fuertemente concentrados. Se diseña un procedimiento para resolver el problema y se obtiene un par óptimo $(P^*, T^*)$ asociado a los parámetros utilizados, donde el estrato Pobre compra abono y los otros dos, boleto unitario. A través de los parámetros se reflejan cambios en el sistema, resultando que el par óptimo presenta baja sensibilidad ante pequeñas variaciones. Se cierra con posibles líneas futuras de investigación, que consisten en incorporar una distribución continua de ingreso, incluir gustos en cada estrato, considerar efectos modales y la aplicación a una ciudad descrita con mayor detalle.

# Agradecimientos

Listo, se acabó no más. Estas son las últimas palabras que escribiré en esta tesis y quiero dedicarlas a toda la gente que me acompañó en el camino hasta hoy. Es emocionante poder mirar hacia atrás y darme cuenta que durante todos estos años universitarios, desde el primer día hasta el último, nunca estuve sólo y siempre tuve el apoyo necesario para seguir avanzando. Creo que es necesario agradecerles a todos... vamos viendo:

Primero el Profe Sergio (que apenas me titule pasará a ser Sergio no más), que me entregó bastante más que saber que $P = m$ es la tarifa de máximo $BS$, que el valor del ocio es la tasa salarial más la utilidad de asignar tiempo al trabajo o que siempre uno puede salvar derivando e igualando a cero. Las infinitas conversaciones sobre libros, fútbol, viajes, mujeres (muy pocas veces) o tantos otros temas, creo que han establecido lazos muy cercanos a la amistad y que me han hecho disfrutar casi todos los momentos en que compartimos. También los otros cinco profesores de la división: Leo que, pese a tener las tallas más fomes del universo, siempre está entregando alegría, Cristiano por la eterna buena onda, Alejandro por recibirnos en Chiloé después de haber conversado sólo un par de veces con él y a los profes Pancho y Marcela por haber participado en mi educación. Creo que la división de transporte es un grupo de gran calidad humana y de exigencia académica, que me ha marcado como estudiante y como persona.

Segundo a mis papás, mis hermanos, la Chechi y toda mi familia, que me han apoyado y acompañado en lo que se me ocurra, sin olvidarme de que hay que dar lo mejor de uno en todo lo que se hace. El apoyo en los momentos difíciles y la alegría cotidiana hacen que la vida sea un poco más fácil.

La Lauri que ha sido mi fiel compañera y de donde puedo encontrar tranquilidad, buena conversación, infinito cariño y risas por montones.

A todos mis amigos: del colegio, CPJ, comunidad, universidad y los que fui conociendo por el camino.

Por último a la Católica, que quizás no me dio todas las alegrías que quería, pero me enseñó lo que era apasionarse por algo. También a Gary, sólo por ser el mejor del mundo.

Gracias por acompañarme hasta hoy.

# Tabla de Contenido

# Capítulo 1

# Introducción

El transporte público presenta diversas estructuras tarifarias alrededor del mundo: hay ciudades donde sólo existe una tarifa plana por viaje y otras que diferencian según las zonas visitadas, el largo del viaje o el horario en que se realiza. Algunas ofrecen abonos (también llamados tarjetas multiviajes) donde, por una cantidad fija de dinero, se pueden hacer ilimitados viajes en un día, semana, mes o año; incluso puede existir diferenciación según la edad o condición del viajero.

En las principales capitales europeas observamos coincidencia en ofrecer simultáneamente un boleto (o ticket) unitario por viaje y abonos que permiten el uso ilimitado de la red en un período establecido. En ciertos casos, como Madrid, París o Berlín, los boletos se pueden adquirir en un pack con un descuento asociado, mientras que los abonos tienen la posibilidad de ser diarios, semanales, mensuales o anuales. En general, estas redes consideran zonas de forma tal que los tickets o abonos aumentan su costo en la medida que el viaje resulte ser más largo o al visitar un mayor número de zonas, salvo en el caso de Roma que presenta una tarifa única en toda la ciudad. También se observa diferenciación de cobros según el horario del viaje e incluso el sistema "inteligente" de Londres, donde se cobra al usuario el mínimo posible según los viajes realizados durante el día, basado en el horario, la frecuencia y la ruta.

En la Tabla 1.1 se muestran ejemplos del valor de abono mensual y del número de viajes equivalentes si se pagase boleto unitario en las ciudades nombradas. Se observa que en todas ellas el abono resulta conveniente aún si se realizasen menos de dos viajes diarios. Específicamente, en Madrid y París el abono tiene un equivalente alrededor de los 37 viajes; sin embargo ambas ciudades coinciden en que no están permitidos los cambios de modo con el ticket unitario. El resultado de Madrid es válido sólo para viajes cortos, de menos de 5 estaciones de metro, ya que para viajes de más de 10, la equivalencia sería de 27 viajes (entre 5 y 10 estaciones la tarifa aumenta 0,1€ por estación). En Berlín los viajes equivalentes son 30, mientras que en Roma y Londres, la equivalencia está en el entorno de 25. Si se considerase que los viajes obligados a y desde el trabajo de una persona en el mes son aproximadamente 40, el abono resultaría conveniente frente a la compra de boleto unitario para residentes de la ciudad e incluso para quienes la visitan por un período relativamente prolongado de tiempo.

Tabla 1.1: Comparación del precio unitario con el abono mensual (2013)

| Ciudad | Madrid | París | Roma | Berlín | Londres |
|---|---|---|---|---|---|
| Abono Mensual [€] | 54,6 | 65,1 | 35 | 78 | 139 |
| Precio Unitario [€] | 1,5 - 2 | 1,7 | 1,5 | 2,6 | 5,4 |
| Viajes equivalente | 36 - 27 | 38 | 23 | 30 | 26 |

A partir de las distintas evidencias observadas en las capitales europeas, pensemos en una ciudad donde el sistema de transporte público presenta dos formas de pago: la compra de una tarjeta (o abono) que da derecho a ilimitados viajes en cierto período de tiempo (por ejemplo, un mes) o el pago de un boleto unitario por viaje. Para elegir la opción más conveniente, lo primero que haría un usuario cualquiera es estimar los viajes a realizar durante el mes, para luego, multiplicándolo por el precio unitario, obtener el gasto asociado al transporte público. Comparando ese gasto con el valor de la tarjeta, el individuo enfrenta tres situaciones posibles relevantes para la decisión

1. Que el valor de la tarjeta sea menor o igual al gasto con boleto unitario, caso en el cual compra la tarjeta, debido a que es más barato y tiene la posibilidad de realizar más viajes.
2. Que el valor de la tarjeta sea igual o levemente mayor al gasto con precio, caso en el cual estaría dispuesto a comprarla, ante la posibilidad de ilimitados viajes a precio cero.
3. Que el valor de la tarjeta supere largamente el gasto estimado con precio, lo que conduce a descartar el abono y escoger la alternativa de pagar cada viaje por separado.

Notemos que esto ya plantea un problema interesante que consiste en encontrar el valor a partir del cual un individuo opta por el abono. Consideremos dos individuos: uno rico, que se mueve por la ciudad en su propio auto y sólo esporádicamente en transporte público, y otro pobre, sin acceso a transporte privado y que utiliza el sistema de transporte público todos los días para ir a trabajar. Al tener una tarjeta disponible, el usuario de menor ingreso la compararía con un gasto mayor que el asociado al individuo de mayor ingreso, debido a que todos sus viajes obligados los realiza a través de la red de transporte público.

Una tarjeta muy cara, considerablemente mayor que el gasto de ambos usuarios, difícilmente será elegida por alguno de ellos, ya que preferirían seguir pagando por viaje. Otra tarjeta, levemente mayor que el gasto del usuario de bajo ingreso, dependiendo de cuánto mayor sea, puede que sea elegida por el usuario pobre, pero probablemente no será elegida por el usuario rico, debido a que supera largamente su gasto en transporte público. En el caso que el valor de la tarjeta se encuentre entre el gasto de ambos usuarios, el individuo pobre en general la elegirá, mientras que dependiendo de cuán mayor sea de su gasto, el individuo rico puede que la elija, debido a que el dinero no es una restricción significativa para él. Finalmente, si la tarjeta cuesta menos que el gasto del usuario rico, ambos individuos seguramente la comprarán, ya que con ella pueden hacer ilimitados viajes a un gasto menor que si pagaran por cada viaje que realizan.

El ejemplo anterior, sugiere que el ingreso juega un papel relevante en la elección entre boleto y tarjeta. Más aún, el individuo de bajo ingreso probablemente compre la tarjeta debido a que su valor será comparable con el gasto en transporte público que tiene debido a sus viajes obligados; en el caso del individuo rico, en cambio, la compra de la tarjeta está relacionada con la poca importancia que tiene ésta con respecto a su ingreso.

Esta forma de tarificar, donde coexisten una tarjeta de valor $T$ y un precio unitario $P$, es lo que estudiaremos en esta tesis. Desarrollaremos un enfoque para modelar, a partir del ingreso de cada individuo, su decisión frente al uso de abonos y encontraremos los valores óptimos para el precio unitario y el valor de la tarjeta de forma de maximizar el bienestar social. Ambas tarifas serán elegidas a partir de los distintos niveles de consumo de los usuarios, por lo que el problema supone una autoselección, ya que todos enfrentan las mismas oportunidades.

El primer paso será indagar en los desarrollos microeconómicos que se hacen cargo de este tipo de problema, específicamente en la tarificación en dos partes. En ella Oi (1971), Feldstein (1972), Brown y Sibley (1986) y Wilson (1993) estudian mercados, como el agua potable, la electricidad o las telecomunicaciones, donde se paga un monto fijo por el derecho a consumir y, además, un precio unitario por cada unidad consumida. Estos modelos los extenderemos al mercado de transporte, donde tanto el sistema de boleto como el de abono pueden ser representados como tarifas en dos partes: el abono, como el caso donde se paga sólo la entrada al mercado ($P = 0, T \neq 0$) y el boleto, que sería un caso sin pago de entrada ($P \neq 0, T = 0$).

Carbajo (1988) desarrolla el caso del mercado de transporte descrito anteriormente; con un enfoque microeconómico discute la conveniencia del uso del sistema de abonos. Con el fin de distinguir a los usuarios, les asocia un parámetro de gusto relacionado con la intensidad de uso del transporte público, a partir del cual identifica un usuario indiferente en la elección. El gusto asociado a este usuario marca el quiebre entre quienes viajan pagando por viaje o comprando la tarjeta y, a partir de él, se construye el modelo hasta encontrar expresiones para $P$ y $T$ óptimos que maximizan el bienestar social. Aunque es insinuado, el papel del ingreso no es estudiado por Carbajo.

Extendiendo a Carbajo, plantearemos el modelo de tarificación con precio y tarjeta, haciéndonos cargo de lo que aquí llamaremos efecto doble del ingreso. Veremos que si una persona decide comprar una tarjeta de valor $T$, ésta actuará como una disminución de su ingreso disponible, lo que aparecerá representado como una contracción de su función de demanda por viajes en el espacio $PX$. Por otro lado, mostraremos que los usuarios de mayores ingresos tienen mayor posesión de automóvil y una menor proporción de uso del transporte público. Es decir, serán los usuarios de menores ingresos quienes más viajen en este modo.

Para tratar de manera adecuada los dos efectos anteriores, trabajaremos con una sociedad separada en estratos discretos de ingreso. Mostraremos la conveniencia de definir un usuario de ingreso $\tilde{I}$ que será indiferente para valores dados de ambas alternativas y que determinará la frontera entre individuos de distinto estrato de ingreso; se mostrará que aquellos de ingreso mayor al indiferente elegirán viajar con boleto unitario e individuos de estrato de ingreso menor comprarán tarjeta.

Conocida la forma de pago que escogerán los individuos de cada estrato para cierto ingreso indiferente, resolveremos problema de maximización de bienestar social con la restricción de que se cubran los costos de los operadores. A partir de las condiciones de primer orden, llegaremos a expresiones que permiten encontrar los valores óptimos para el precio, $P^*$, y el valor de la tarjeta, $T^*$. Luego, como $\tilde{I}$ depende de $P^*$ y $T^*$, se diseña una forma de resolver el problema determinando los óptimos con $\tilde{I}$ desconocido.

Una vez que se cuente con las herramientas analíticas para resolver el problema, las aplicaremos a una ciudad estilizada, con estratos discretos de ingreso, donde la desigualdad se refleja en que los estratos de menor ingreso concentran a la mayoría de los usuarios. A cada estrato se le asociará una demanda por viajes adecuada para representar ambos efectos del ingreso, a partir de la cual se definirán las medidas de bienestar y se encontrarán valores numéricos para $(P^*, T^*)$. Con el fin de analizar las propiedades del par óptimo, se establecerán cinco escenarios donde se reflejarán, a través de cambios en los parámetros de las demandas, diversas condiciones de base.

En el siguiente capítulo revisaremos la literatura asociada a las tarjetas multiviajes, partiendo por las experiencias de los abonos en el mundo, donde diversos autores llegan a conclusiones similares en cuanto a que los abonos son una medida de fomento y crecimiento para la demanda por transporte público. Seguiremos con la tarificación en dos partes, para cerrar el capítulo con el análisis microeconómico que hace Carbajo (1988), antecedente teórico fundamental cuyas limitaciones motivan esta investigación. En el tercer capítulo plantearemos el modelo analítico para precio y tarjeta con diferenciación de ingreso, llegando a expresiones para $P^*$ y $T^*$ a partir de la maximización del bienestar social con restricción presupuestaria. En el cuarto, aplicaremos el modelo sobre una ciudad simulada de manera simple, con el fin de encontrar valores numéricos óptimos para el precio y el valor de la tarjeta, cuyo movimiento lo estudiaremos a través de variaciones en las condiciones iniciales del problema. El capítulo final contiene una síntesis, conclusiones y líneas de investigación futuras.

# Capítulo 2

# Antecedentes teóricos y empíricos

Desde mediados del siglo XX la presencia de autos en las calles pasó desde ser un signo de prosperidad tecnológica a ser un problema sin solución para las grandes ciudades. El uso eficiente del espacio se ha convertido en un desafío para los gobiernos locales, quienes han comenzado a implementar políticas que favorecen o atraen gente al transporte público. Aumentos de frecuencias, buses cómodos, nuevas líneas de metro y diversas formas de pago son ejemplos de las estrategias adoptadas para hacer frente al problema en cuestión.

En el contexto de esta tesis estudiaremos una de las formas de tarificación presente en las principales capitales europeas y del mundo desarrollado: el abono de transporte como una alternativa al pago unitario por viaje. Comenzaremos por analizar cómo esta medida ha sido utilizada para atraer usuarios al sistema de transporte público y cómo, una vez implementada, se ha posicionado como la forma de pago común para los usuarios, logrando modificar sus patrones de viaje. Continuaremos con el estudio de la tarificación en dos partes, considerando que los abonos son un caso particular de esta teoría, la cual consiste en el pago de una entrada al mercado por parte del usuario, además del correspondiente por unidad consumida. Concluiremos mostrando el desarrollo realizado por Carbajo (1988) quien plantea un modelo microeconómico con el fin de obtener la combinación óptima de precio y tarjeta.

## 2.1. Experiencias en el mundo

En las principales capitales europeas, tales como Madrid, París, Berlín, Roma o Londres, se observan complejas estructuras tarifarias que comprenden múltiples alternativas de pago por el transporte público. Los usuarios que viven en ellas o quienes las visitan, al enfrentarse a todas estas posibilidades, por lo general escogen aquella alternativa que más les convenga, acorde con el uso que le dará al sistema de transporte público. Estudiemos las alternativas que ofrece cada ciudad para luego comparar las distintas estructuras tarifarias.

En los años 70 y 80 en Madrid se empieza a observar un aumento en el número de autos circulando y una disminución de los viajes en transporte público. Considerando que tal evolución es perjudicial para la ciudad se adoptaron políticas de fomento de este último con el fin de hacerlo competitivo con el transporte privado. Después de una serie de cambios puntuales, en 1987 las autoridades deciden implementar un plan para la ciudad que consistió en mejorar la calidad de los buses, aumentar frecuencias, expandir las redes y ofrecer un sistema integrado de tarifas basado en el abono; todo apuntando al objetivo de que la gente eligiese viajar en bus o en metro por sobre el auto (Matas, 2004).

El modelo tarifario concebido en el plan madrileño se conserva en la actualidad, donde el boleto unitario es la forma de pago más simple y cuyo costo varía entre 1,5€ y 5,1€, teniendo la posibilidad de optar a un 20 % de descuento en el caso que se compre un paquete de diez. Las diferencias en el precio se deben a la segmentación de la ciudad en ocho zonas concéntricas, donde la zona de tarifa mínima corresponde al área metropolitana de Madrid en su totalidad (zona A). Viajes entre zonas son más caros que viajes cuyo origen y destino se encuentran en la misma zona. Para los viajes en metro, que sólo sirve la zona A, se cobra 1,5€ por los viajes cortos (menos de cinco estaciones) y 2€ por los largos (diez o más estaciones), con una transición de 0,1€ por estación para viajes entre cinco y diez estaciones. Los abonos mensuales o anuales permiten ilimitados viajes (en zonas específicas), durante su período de validez. El abono mensual para viajar por la zona A cuesta 54,6€, que equivale aproximadamente a 36 viajes con boleto unitario; el abono anual, tiene un equivalente de 364 viajes, que resultaría conveniente si se hiciera al menos un viaje diario en el año. Por último, para viajeros esporádicos o turistas que contemplan gran número de desplazamientos y visitas, se ofrecen pases diarios que permiten usar libremente el sistema por 1, 2, 3, 5 ó 7 días.

París presenta una estructura tarifaria similar a Madrid: para viajar por la zona céntrica se puede optar por un boleto unitario de 1,7€, un pack de 10 tickets con un 20 % de descuento o el *Passe Navigo* que representa un abono semanal, mensual o anual, equivalente a 11, 38 ó 399 viajes con boleto unitario, respectivamente. Enfocado en los turistas, se ofrecen pases con los que se puede viajar ilimitadamente durante 1, 2, 3 ó 5 días.

Roma también ofrece la posibilidad de pagar por viaje o por libre uso de la red durante cierto período de tiempo. Su particularidad es que es la única de las cinco ciudades que no presenta tarifas diferenciadas por zonas ni horarios; sin embargo ofrece la alternativa de un abono mensual que puede ser personal (35€) o transferible (53€), según lo que prefiera el usuario.

La ciudad de Berlín se encuentra separada en tres zonas tarifarias donde, al igual que Madrid, la zona de tarifa mínima (zona AB) comprende toda el área metropolitana con un boleto unitario de 2,6€, salvo para viajes de menos de tres estaciones de metro o seis de bus, cuyo precio es de 1,5€ por viaje. Se complementan con abonos transferibles de distinta duración y un abono mensual por viajes realizados después de las 10 de la mañana o días de fin de semana.

Finalmente, Londres presenta un sistema que difiere en cierto grado de los otros. Aparte de tener boletos unitarios y abonos (transferibles), diferenciados según horarios o zonas, a partir del año 2003 ofrecen una tarjeta llamada *Oyster Card*. Esta consiste en una forma de pago "inteligente" donde se cobra el mínimo posible según los viajes realizados en un día. Con este fin, el usuario debe indicarle al sistema la trayectoria que sigue en cada viaje mediante la validación de la tarjeta en distintos puntos de la ruta, incluyendo donde comienza y termina el viaje. Así, dependiendo de las zonas visitadas o el horario del viaje, el cobro será el mínimo posible dada la estructura tarifaria, llegando hasta un máximo diario que corresponde al valor del abono para las zonas utilizadas. Una vez alcanzado este máximo se puede seguir viajando sin cobros extras.

En la Tabla 2.1 se ofrece una síntesis de las cinco ciudades descritas donde se ofrece abono y boleto.

Tabla 2.1: Comparación de los sistemas de transporte público

| Ciudad | Madrid | París | Roma | Berlín | Londres |
|---|---|---|---|---|---|
| Zonas tarifarias | ✓ | ✓ | ✗ | ✓ | ✓ |
| Viajes cortos y largos | ✓ | ✗ | ✗ | ✓ | ✗ |
| Períodos tarifarios | ✗ | ✗ | ✗ | ✓ | ✓ |
| Pack de tickets con descuento | ✓ | ✓ | ✗ | ✓ | ✗ |
| Abonos turísticos | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Abonos transferibles | ✗ | ✗ | ✓ | ✓ | ✓ |

Es interesante analizar lo que ha ocurrido en las ciudades donde se han implementado los abonos, ya que es frecuente observar que estos forman parte de un plan de fomento del transporte público donde se busca que su uso, como método de pago, sea masivo. En Madrid, por ejemplo, como fruto del mencionado plan de 1987, en menos de quince años el abono logró posicionarse como el método de pago más usado, aunque el año de implementación sólo el 15 % de los viajes fueron realizados mediante abonos. Al año 2001 el 72 % de los viajes en bus y el 60 % de los viajes en metro fueron hechos por usuarios que poseían un abono (Matas, 2004). Cuatro años más tarde la tendencia se mantenía y el 64,2 % de todos los viajes en transporte público se llevaron a cabo a través de abonos (Observatorio de la Movilidad Metropolitana, 2007).

En las ciudades de Hamburgo, Múnich, Viena, Zúrich y la región alemana Rin-Ruhr estudiadas por Pucher y Kurth (1996) se observa el mismo efecto que en Madrid luego de la introducción de abonos. Como parte de un plan que incluía la creación de una nueva autoridad de transporte, los abonos mensuales y anuales tenían un valor muy atractivo (entre 20 y 30 tickets unitarios el mensual, dependiendo de la ciudad) que, sumado a la mejora del sistema, se hicieron muy populares. En la Tabla 2.2 se observa la proporción del uso de abonos en varias ciudades y regiones europeas.

Tabla 2.2: Resultados de la implementación de abonos

| Ciudad | Implementación | Año observado | Proporción viajes con abono |
|---|---|---|---|
| Madrid | 1987 | 2006 | 0,64 |
| Londres | 1972 | 2004/5 | 0,83 |
| París | 1975 | 2004 | 0,77 |
| Bruselas | 1970 | 2004 | 0,74 |
| Hamburgo | 1966 | 1996 | 0,78 |
| Estocolmo | 1971 | 1998 | 0,82 |
| Helsinki | – | 2004 | 0,70 |
| Praga | – | 2004 | 0,89 |
| Viena | 1985 | 2004 | 0,92 |
| Zúrich | 1985 | 2004 | 0,55 |
| Munich | 1972 | 1996 | 0,50 |
| Rin-Ruhr | 1980 | 1996 | 0,78 |

Fuentes: Observatorio de la Movilidad Metropolitana (2007), London Travel Report (2005), EMTA (2004), Pucher y Kurth (1996)

Además de posicionarse como el método de pago más usado en las ciudades donde se implementa, el abono también induce un aumento en los viajes en transporte público. Esto se explica principalmente por la posibilidad de realizar ilimitados viajes y por la capacidad que tienen los abonos de atraer usuarios de otros modos. Entre quienes han medido este efecto se encuentra Matas (2004) quien estima que entre los años 1987 y 2001, los viajes en Madrid aumentaron en un 7 % en buses y en un 15 % en metro debido a las tarjetas. FitzRoy y Smith (1998) muestran que en Friburgo, entre 1983 y 1995, los viajes per cápita en transporte público aumentan entre un 7 % y un 22 %, debido a la introducción de abonos e, incluso, después de un año de su creación, entre 3 mil y 4 mil usuarios de auto se habían cambiado de modo. Por último, Fitzroy y Smith (1999) calculan que el crecimiento de la demanda en cuatro ciudades suizas fue de 16 % en Ginebra, 14 % en Berna, 5,4 % en Basilea y 4,5 % en Zúrich, en menos de diez años después de haberse implementado.

Para explicar el aumento de la demanda por transporte público debido a los abonos, los autores estudiados coinciden en tres razones. Primero, que en el caso que existiese una penalización por cambiarse de modo, esta desaparece, teniendo la oportunidad de planificar mejor el viaje atendiendo a tiempo, distancia y comodidad. Segundo, que el valor de la tarifa unitaria deja de preocupar, ya que, una vez que el abono es adquirido, se viaja a precio marginal cero, por lo que viajes extras, como volver a almorzar a la casa, ir al cine el fin de semana o al estadio a ver al equipo favorito, no tienen un costo monetario extra para el usuario. Finalmente, que en algunos casos existen filas o accesos exclusivos para abonos, disminuyendo los tiempos de acceso.[1]

Desde el punto de vista del ingreso de los operadores los beneficios no son tan claros. En general existe una idea de que los abonos disminuyen las ganancias, ya que al aumentar los viajes los costos asociados aumentarían al mismo tiempo que los ingresos disminuirían, justamente por las razones antes expuestas: los usuarios comprarán abono siempre y cuando no tengan que gastar mucho más de lo que gastan pagando por cada viaje. Gschwender (2007) discute sobre el posible aumento en el costo para los operadores, poniendo énfasis en el horario en que ocurren los nuevos viajes. En el caso que éstos sean realizados en horario fuera de punta, habría capacidad ociosa para mover usuarios y no se tendría que incurrir en nuevos costos por parte de los operadores. Por el contrario, si los nuevos viajes se generan en el horario en que la red se encuentra cargada en su totalidad, un aumento de frecuencia sería necesario, produciendo alzas en los costos debido a nuevos vehículos y conductores. La evidencia empírica muestra que el impacto de la implementación de abonos sobre los ingresos de los operadores es diverso: se observan bajas en Madrid (Matas, 2004) y un conjunto de ciudades en Alemania, Austria y Suiza (Purcher y Kurth, 1996), mientras que en Friburgo (FitzRoy y Smith, 1998), Londres (Gschwender, 2007) y Edimburgo junto con otras ciudades del condado de West Midlands en Inglaterra (White, 1981) no se observan cambios, mostrando que la introducción de tarjetas no necesariamente implica una reducción de ingresos para los operadores. Del punto de vista teórico, Carbajo (1988) demuestra que se pueden encontrar combinaciones de precio y tarjeta que tengan efectos positivos sobre las ganancias de los operadores y el bienestar de los usuarios.

En síntesis, los abonos están presentes como una alternativa de pago por viajes en transporte público en muchas ciudades europeas. Hemos mostrado que en las ciudades estudiadas se ha logrado

[1] Gschwender (2007) muestra que los beneficios de los abonos en parte son compartidos con los métodos electrónicos de pago (aunque el precio marginal no sea cero): despreocupación por la tarifa exacta (queda sólo la preocupación de tener dinero disponible en la tarjeta), reducción de las penalizaciones por cambio de modo y ahorros en tiempos de subida, debido a que el pago es mucho más rápido que con efectivo.

un aumento en la demanda por viajes y que la mayoría de estos sean realizados con este método de pago. Esto corrobora la hipótesis de White (1981) que dice que una vez que se logra hacer atractivos los abonos, una gran proporción de viajeros los usarán.

La experiencia europea muestra ciertas características en cuanto a montos relativos de abonos por período y tarifas unitarias. En la siguiente sección mostraremos que la tarificación en dos partes puede servir de sustento microeconómico para el estudio riguroso de los abonos en el mercado del transporte.

## 2.2. Tarificación en dos partes

Cuando el cobro por un bien está separado en una cantidad fija y otra variable se dice que es una tarifa en dos partes. Ésta consiste en cobrarle al usuario $T$ por entrar al mercado y un precio $P$ por cada unidad consumida. Actualmente es utilizada en una serie de mercados tales como la telefonía, donde se cobra un fijo por el servicio y variable por los minutos hablados, el agua, donde $T$ representa el derecho de uso, mientras que $P$ sería el pago por los litros consumidos, o la afiliación a un equipo de fútbol, donde el usuario paga un monto al incorporarse y un precio, menor que el normal, por las entradas al estadio.

En comparación con un precio único por el consumo, una tarifa en dos partes podría ser más eficiente debido a que el pago de $T$ por parte de cada consumidor permitiría a los productores acercar el precio al costo marginal. Sin embargo, podrían existir usuarios que se negasen a pagar la entrada al mercado, prefiriendo dejar de consumir. Estos efectos son identificados por Brown y Sibley (1988) y Wilson (1993), quienes muestran que existe un trade-off entre eficiencia y participación en el mercado: mientras más cerca se encuentre el precio del costo marginal, más eficiente será el sistema, pero mayor será la entrada necesaria para cubrir el déficit presupuestario. Mientras mayor sea la entrada, más serán los consumidores que prefieren salir del mercado, disminuyendo la participación.

El primero en analizar microeconómicamente el problema de la tarificación en dos partes fue Oi (1971), quien estudia cómo maximizar ganancias a través de esta forma de tarificar. El problema es presentado desde el punto de vista del parque de diversiones DisneyWorld, que cobra a sus asistentes $T$ por entrar al parque y un precio $P$ por cada subida a algún juego. Con el fin de maximizar sus ganancias, el parque intenta obtener, a través de $T$, todo el excedente posible que los asistentes obtienen por los juegos. En la Figura 2.1 observamos la demanda de un asistente cualquiera al parque, el cual, a un precio $P_0$, jugará $X(P_0)$ veces (que Oi hace independiente del monto $T$ pagado previamente), obteniendo un beneficio de $A-T$. Notemos que si este excedente fuese negativo ($T > A$), el individuo dejará de consumir, debido a que se encontraría en una mejor situación (excedente nulo) sin asistir al parque.

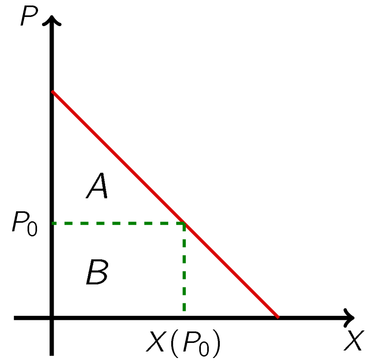



Figura 2.1: Demanda de un usuario cualquiera (Oi, 1971)

Como el monopolio busca extraer el mayor excedente posible de los consumidores, si al individuo de la figura anterior (2.1) se le cobrara un $T = A$, su excedente total sería nulo y el individuo sería indiferente de entrar o no al parque, ya que tendría el mismo beneficio participando o no del mercado. Al mismo tiempo, las ganancias del parque serían $B$, asociado al consumo, y $T$ por la entrada. Si se cobrase una entrada de valor $T = A - \delta$, con $\delta \approx 0$, se asegura que el individuo continuará consumiendo $X(P_0)$, con el mínimo excedente posible, tal como a un monopolista le gustaría.

Para un mercado donde todos los individuos son iguales, la situación recién descrita es la óptima desde el punto de vista del monopolista. Con el fin de maximizar sus utilidades, les cobra a los consumidores un precio $P$ en conjunto con una entrada $T$, a través de la cual les extrae todo el excedente asociado al consumo, permitiéndoles continuar en el mercado con el mínimo beneficio posible.

Sin embargo, lo razonable es que existan simultáneamente individuos que se suban a muchos juegos, otros a pocos e incluso algunos que prefieran no asistir al parque. Esto implica que existen diferencias entre los consumidores que hay que tomar en cuenta y modelarlas apropiadamente. Oi (1971), plantea que en una sociedad donde los individuos tienen "distintos gustos e ingresos" al monopolista le sería conveniente fijar un precio y cobrarle a cada individuo una entrada particular que les extraiga todo su excedente asociado al consumo. El problema de esto es que sería necesaria información específica de cada usuario y que el trato distinto a cada uno sería considerado ilegal. A partir de esto, el autor considera que los individuos se diferencian según sus funciones de demanda, que dependen tanto del precio del bien como del ingreso del individuo, pese a que las supone con "elasticidad ingreso nula" y, por lo tanto, "invariantes, en el plano $(X, P)$, ante cambios en el ingreso o en $T$".

Un paso más lo dan Brown y Sibley (1986), quienes consideran explícitamente las diferencias de los consumidores a través de su gusto por el producto. Ellos asocian un mayor gusto a quienes, a un nivel de precio dado, consumen más que otros. Es decir, el gusto estará dado por la posición relativa de la función de demanda en el plano $PX$.

Para ejemplificar el hecho de que existan usuarios con distintos gustos, los autores comparan dos tipos de usuario: *Activo* y *Pasivo*. Tal como vemos en la Figura 2.2, cualquiera sea el precio, *Activo* consumirá más que *Pasivo*.

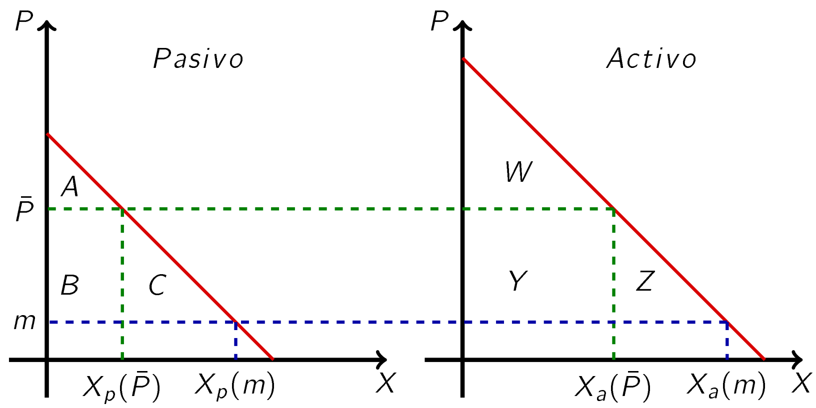



Figura 2.2: Demandas de usuarios activos y pasivos (Brown y Sibley, 1986)

Asumen que los productores tienen una estructura de costos caracterizada por un costo fijo $F$ y un costo marginal constante $m$, lo que define una función de costos de la forma

$$C_{OP} = F + m \cdot X(P) = F + m \cdot [X_a(P) + X_p(P)] \tag{2.1}$$

donde $X_a(P)$ y $X_p(P)$ son las cantidades consumidas por *Activo* y *Pasivo* a un precio $P$, respectivamente, y $X(P)$ es la demanda total en el mercado.

Si quisiéramos establecer una estructura con precio único, una primera opción sería fijar el precio igual al costo marginal, $P = m$, tarifa en la cual se alcanza el óptimo social, pero no se cubren los costos de los productores. En el caso de tener una restricción presupuestaria, la alternativa sería tarificar a costo medio, es decir $\bar{P} = CMe = C_{OP}/X$, caso en el cual la ganancia de la firma sería nula debido a que $B + Y = F$ (con $B$ e $Y$ definidos entre $m$ y $\bar{P}$). Para este nivel de precio ($\bar{P}$), siguiendo la Figura 2.2, *Activo* y *Pasivo* obtendrían beneficios de $W$ y $A$, respectivamente, mientras que la pérdida social, con respecto a $P = m$, sería de $C + Z$ (sobre el costo marginal).

¿Es posible pasar de un precio único a una tarifa en dos partes, sin que ningún agente quede peor? Una alternativa sería fijar el precio igual al costo marginal ($P = m$) y que los costos fijos se cubran con las entradas, que en el caso de los dos consumidores sería $T = F/2$. Bajo esta estructura, cuando *Activo* y *Pasivo* entran al mercado (siempre que ambos excedentes sean positivos), dejan de ser afectados por el pago de $T$ y consumen $X_a(m)$ y $X_p(m)$, respectivamente, eliminando las pérdidas sociales y permitiendo a la firma cubrir sus costos. Se puede observar que, al igual que en el análisis de Oi, ni el valor ni la forma de repartir $T$ afectan las curvas de demanda.

Mirando los beneficios en la Figura 2.2, tarificando a costo marginal, *Pasivo* obtiene $A+B+C-T$, mientras que *Activo*, $W + Y + Z - T$. El problema se genera cuando $T > A + B + C$, ya que los excedentes que obtiene *Pasivo* son negativos, lo que lo haría salir del mercado, debido a que prefiere obtener beneficios nulos antes que mantenerse consumiendo con excedentes negativos. Por lo tanto, sólo en el caso que ambos se mantengan en el mercado se puede encontrar una tarifa en dos partes, con $P = m$, donde ningún agente queda peor.

Otra opción sería diseñar una tarifa en dos partes para cada usuario, pero sería imposible de implementar, debido a que no habría como impedir que *Activo* pague la entrada de *Pasivo*. La solución que plantean Brown y Sibley consiste en hacer que los mismos usuarios se auto seleccionen, ofreciéndoles la opción de una tarifa única o una tarifa en dos partes. Así, si *Pasivo* tiene que salir del mercado, puede elegir la primera alternativa y no variar su condición. Además, los productores se pueden aprovechar de esto y ofrecer una entrada acorde a la demanda de *Activo*. Bajo este nuevo sistema, se pueden encontrar combinaciones de precios y entrada al mercado donde todos los agentes quedan mejor o igual que su situación inicial.

Una vez expuestas las formas de incorporar las diferencias entre los consumidores, el siguiente paso es encontrar expresiones para $P$ y $T$ correspondientes a una tarifa en dos partes. Las formas de tratar las diferencias son principalmente dos: por una parte Brown y Sibley (1986) y Wilson (1993), caracterizan a los usuarios según un parámetro de gusto por el producto, donde a mayor gusto, mayor consumo para un precio determinado. Por otra parte, Oi (1971) y Feldstein (1972) diferencian a los consumidores según su ingreso (aunque el primero menciona los gustos). Feldstein (1972) obtiene un resultado para las componentes variable y fija de la tarificación en dos partes, dejando en claro que en su derivación "no considera el hecho de que un aumento en el precio tiene un efecto indirecto en la demanda a través de la disminución del cargo fijo $T$, es decir, aumentando el ingreso disponible", debido a que "es probable que este efecto sea extremadamente pequeño en la práctica" (p.177-178). El autor desarrolla un caso particular considerando todos los efectos obteniendo un resultado que depende de "la fracción del ingreso gastada en el bien excluyendo el cargo fijo", pero añade que "es claro, sin embargo que ya que (esta fracción) es muy pequeña, el efecto de la corrección será, por lo general, sin importancia" (p.180). Bajo las consideraciones expuestas por cada autor, el trato de las diferencias a través de ingreso o gusto resulta indistinguible, ya que de alguna forma u otra todos omiten el efecto ingreso.

A partir del trato particular de las diferencias de los usuarios, cada autor llega a expresiones para $P$ y $T$, que difieren principalmente por la forma en que los modelos se hacen cargo de los efectos de participación en el mercado y eficiencia tarifaria. Tal como mencionamos, la participación tiene relación con el cobro de la entrada al mercado, ya que dependiendo de su valor $T$, el número de consumidores en el mercado cambiará. Oi, Wilson y Feldstein, pese a distinguir ambos efectos, consideran en sus modelos un número fijo de consumidores $N$. La diferencia es que Oi y Wilson caracterizan al usuario de menor demanda a través de un parámetro de gusto $\theta_0$ (o ingreso $I_0$), mientras que Feldstein simplemente establece que $N$ son los usuarios bajo el régimen de la tarifa en dos partes. Al saber que el usuario caracterizado por $\theta_0$ se mantiene en el mercado y es el de menor demanda, Oi y Wilson definen $T$ como el excedente que obtiene a partir de un $P$ cualquiera, asociándole un consumo con excedente nulo. Por otro lado, al conocer el número $N$ de consumidores, Feldstein define la entrada al mercado como una forma de cubrir los costos de los operadores, haciendo que todos los consumidores paguen a través de $T$ la diferencia entre ingresos y costos. Como estos tres autores imponen simplificaciones que permiten expresar $T$ en función de $P$ de manera sencilla, el problema de maximizar $\pi$ o $BS$ queda expresado sólo en función de $P$.

A diferencia de los autores nombrados, Brown y Sibley tratan la participación en el mercado a través de una función $\theta_0(P, T)$, que dice que el usuario de menor demanda que se mantiene en el mercado depende de las tarifas prevalecientes. A partir de esto, si los gustos en la sociedad van desde $\underline{\theta}$ hasta $\bar{\theta}$, existirá un usuario caracterizado por $\theta_0(P, T)$ a partir del cual los consumidores permanecen en el mercado. Los autores hacen esto debido a la necesidad de fijar $P$ y $T$ simultáneamente, considerando que el número de consumidores es afectado por ambas tarifas. La expresión que obtienen para $T$ dice que el aporte a los ingresos que hace el usuario de gusto $\theta_0$, normalizado por el valor de la tarjeta, es inversamente proporcional a la elasticidad de la participación en el mercado con respecto a $T$, $\epsilon$, ponderado por $\alpha = \frac{\gamma}{\gamma+1}$, término que varía según cuán activa es la restricción de costos, con $\gamma$ el multiplicador asociado a dicha restricción.

En la Tabla 2.3 se sintetizan las expresiones que obtienen para $T$ y para $P$ los diversos autores. Se observa allí que el precio es siempre presentado en la forma de mark-up ratio (diferencia entre el precio y el costo marginal, dividida por el precio). Las expresiones obtenidas son similares, como vemos en la tercera columna de la Tabla 2.3, coincidiendo en que el mark-up ratio es inversamente proporcional a la elasticidad precio de la demanda (definida de manera particular por cada uno), ponderada por un coeficiente que relaciona el número de individuos en el mercado y la proporción del consumo del usuario de gusto $\theta_0$ con respecto al consumo agregado de los usuarios ($\bar{X}$). La presencia de $\alpha$ (es decir, de $\gamma$) en Wilson y Brown y Sibley, se debe a la inclusión de la restricción de cobertura de costos en el problema. Feldstein obtiene expresiones que difieren de las del resto debido a dos factores. Primero porque maximiza bienestar ignorando la restricción de costos, dejando explícito que en caso de que no se cumpla, el precio se debe subir hasta hacerla activa. Y segundo, porque los excedentes de los usuarios (bienestar) están ponderados por su utilidad marginal del ingreso, lo que los hace pesar distinto en la función de bienestar social. Así, concluye que en la medida de que el precio se encuentre por sobre el costo marginal, son los usuarios más ricos quienes pagarán mayor proporción del costo del sistema.

Tabla 2.3: Expresiones para las tarifas en dos partes

| Autor | Max | Precio | Entrada |
|---|---|---|---|
| Oi | $\pi$ | $\frac{P-m}{P} = \frac{1}{\lvert E\rvert} \cdot \left(1 - N \cdot \frac{X(P,\theta_0)}{\bar{X}(P,\theta_0)}\right)$ | $T = \int_P^{\infty} X(P,\theta_0)\,\mathrm{d}P$ |
| Feldstein | $BS$ | $\frac{P-m}{P} = \frac{1}{\lvert\eta\rvert} \cdot \left(1 - \frac{\int_0^{\infty} f(I)\cdot\lambda_I\cdot X(P,I)\cdot\,\mathrm{d}I}{\bar{X}(P)\cdot\bar{\lambda}_I}\right)$ | $T = \frac{C(\bar{X}) - P\cdot\bar{X}}{N}$ |
| Wilson | $BS$ | $\frac{P-m}{P} = \frac{\alpha}{\bar{\eta}} \cdot \left(1 - N(\theta_0) \cdot \frac{X(P,\theta_0)}{\bar{X}(P,\theta_0)}\right)$ | $T = \int_P^{\infty} X(P,\theta_0)\,\mathrm{d}P$ |
| Brown y Sibley | $BS$ | $\frac{P-m}{P} = \frac{\alpha}{\xi} \cdot \left(1 - \frac{X(P,\theta_0)}{\bar{X}(P,\theta_0)}\right)$ | $\frac{T - \nu + (P-m)\cdot X(P,\theta_0)}{T} = \frac{\alpha}{\epsilon}$ |

De los cuatro modelos estudiados, el que mejor se adapta al objetivo de usarlo en la tarificación de abonos es el de Brown y Sibley, ya que el precio y el pago por entrar al mercado son determinados simultáneamente. Esto entrega una base teórica que luego Carbajo adaptará al mercado de transporte, tal como mostraremos en la siguiente sección.

## 2.3. La Economía de las tarjetas multiviaje

¿Cómo relacionar la tarificación en dos partes con la implementación de abonos de transporte? Hasta hoy, el trabajo más contundente en este tema es Carbajo (1988), quien, a partir del modelo de Brown y Sibley (1986), desarrolla un modelo microeconómico para los abonos. En él conviven dos formas de pago por transporte público: un precio $P$ por viaje realizado y una tarjeta de valor $T$ que, una vez comprada, da derecho a ilimitados viajes en cierto período de tiempo.

La relación entre un sistema con abonos y la tarificación en dos partes radica en que cuando un usuario elige pagar $P$ por viaje, está optando por una estructura donde la entrada al mercado es nula y sólo se paga por el consumo. Por el contrario, cuando se compra la tarjeta, se está pagando la entrada a un mercado donde el consumo tiene precio cero. Los usuarios deben elegir una de estas alternativas al comienzo del período de validez de la tarjeta.

Para explicar los conceptos claves de su investigación, Carbajo también hace referencia a los usuarios con distinta intensidad de uso del sistema. A través de esto, pone énfasis en un aspecto fundamental: para poder implementar un sistema con tarjetas es necesario considerar diferencias entre los consumidores, ya que en el caso de asumir que son todos iguales, sólo una alternativa sería elegida.

Para entender la mecánica de Carbajo, analicemos tres individuos: *Activo*, *Medio* y *Pasivo*, representados en la Figura 2.3, quienes, como notáramos en la Figura 2.1, ante un precio cualquiera $P_0$ harán $X_{act}(P_0) > X_{med}(P_0) > X_{pas}(P_0)$ viajes, respectivamente.

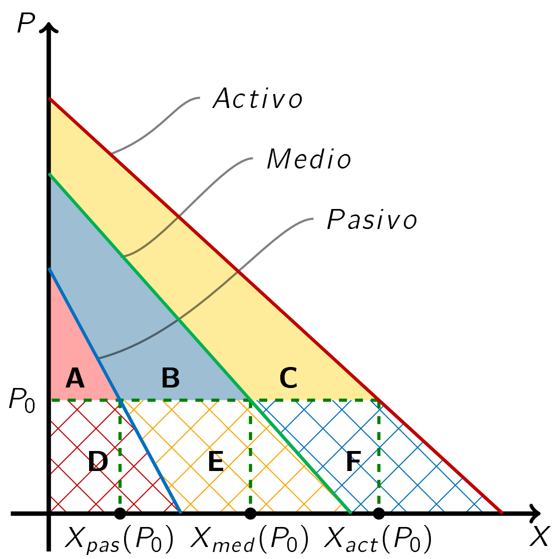



Figura 2.3: Demandas por viajes de usuarios Activos, Medios y Pasivos

Arbitrariamente, Carbajo introduce al sistema una tarjeta de valor $T = D+E$ a la cual los usuarios pueden optar como alternativa al precio unitario. En caso de comprarla, los usuarios harán $X_i(0)$ viajes (independientes de $T$); su beneficio, medido por el excedente marshalliano del consumidor ($EMC$), sería el área bajo su demanda menos el valor de la tarjeta. Para elegir con qué opción viajar, los usuarios comparan los beneficios asociados a la tarjeta ($EMC_T$) con los asociados al boleto unitario ($EMC_P$)

y se quedan con la que les entregue el mayor. Así, por ejemplo, el usuario *Activo* obtendría $A+B+C$ si elige boleto, mientras que su excedente con tarjeta sería $A+B+C+D+E+F-T$, sin embargo, como $T=D+E$, el excedente asociado a esta alternativa sería $A+B+C+F$. Análogamente, se obtienen los excedentes para el resto de los usuarios, mostrados en la Tabla 2.4.

Tabla 2.4: Excedentes al cobrar $T=D+E$

| Usuario | $EMC_P$ | $EMC_T$ | Elección |
|---|---|---|---|
| Activo | $A+B+C$ | $A+B+C+F$ | Elige T |
| Medio | $A+B$ | $A+B$ | Es indiferente |
| Pasivo | $A$ | $A-E$ | Elige P |

Notamos que los usuarios *Activo* y *Pasivo* eligen $T$ y $P$, respectivamente, mientras que *Medio* recibe el mismo beneficio de ambas alternativas, por lo que es indiferente entre ellas. A partir de los distintos comportamientos, Carbajo asume que los individuos se distinguen a través de su función de demanda y les asocia un parámetro de gustos $\theta$, que se relaciona con la intensidad de uso del sistema de transporte público. Este parámetro, para Carbajo, "puede ser pensado como ingreso o como un vector de características que hacen que los consumidores tengan distintas preferencias en cuanto a la frecuencia de sus viajes" (p.156).

El parámetro de gusto $\theta$ estará distribuido continuamente en la sociedad, donde, a mayor $\theta$, mayor será la demanda para un precio dado, es decir, $\theta_{Activo} > \theta_{Pasivo}$. Como consecuencia de esto, para precio y tarjeta dados, existirá un nivel de gusto $\tilde{\theta}$ que representará al usuario que es indiferente entre ambas alternativas y que marcará el corte entre quienes eligen viajar con $P$ o $T$. Este papel lo cumple el usuario *Medio* en el ejemplo, donde usuarios con $\theta > \theta_{Medio} = \tilde{\theta}$ eligen comprar la tarjeta, mientras que usuarios con $\theta < \theta_{Medio} = \tilde{\theta}$ eligen pagar por viaje realizado.

Conocido el comportamiento de los usuarios ante un precio $P$ y una tarjeta de valor $T$, el siguiente paso es establecer un criterio de maximización y obtener expresiones para la combinación óptima entre tarjeta y precio. Con este fin, Carbajo caracteriza $\theta$ como un parámetro en el rango $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$, que se distribuye continuamente como $h(\theta)$ en la sociedad y su función acumulada es $H(\theta)$.

A partir de lo anterior, la demanda por viajes en transporte público de un individuo cualquiera ya no depende sólo del precio, sino que también de sus gustos. Es por esto que la cantidad de viajes que realiza una persona caracterizada por $\theta$ queda determinada por $x(P,\theta)$.

El gusto indiferente $\tilde{\theta}$ está definido por la igualdad de excedentes con $P$ y $T$ en la ecuación (2.2), por lo tanto, este nivel de gusto será una función de $(P,T)$ y quedará determinado implícitamente por

$$\int_{0}^{\infty} x(p',\tilde{\theta})\,\mathrm{d}p' - T = \int_{P}^{\infty} x(p',\tilde{\theta})\,\mathrm{d}p' \tag{2.2}$$

de donde se puede obtener $\tilde{\theta}(P,T)$. Basándose en lo que concluyó del análisis de los usuarios *Activo* y *Pasivo*, Carbajo dice que individuos con $\theta < \tilde{\theta}(P,T)$ elegirán $P$, mientras que quienes tengan $\theta > \tilde{\theta}(P,T)$ comprarán la tarjeta de valor $T$.

Sabiendo que existe el usuario indiferente y que este marca un quiebre entre los que eligen precio o tarjeta, están todas las condiciones para poder plantear el problema de maximización y resolverlo. En primer lugar, con una función de costos de la forma $C = F + m \cdot X$, con $m$ el costo marginal, Carbajo define las ganancias como

$$\pi = \int_{\underline{\theta}}^{\tilde{\theta}} (P - m) \cdot x(P, \theta') \cdot h(\theta') \, \mathrm{d}\theta' + \int_{\tilde{\theta}}^{\bar{\theta}} (T - m \cdot x(0, \theta')) \cdot h(\theta') \, \mathrm{d}\theta' - F \tag{2.3}$$

donde el primer término representa las ganancias asociadas a los viajes con precio unitario y el segundo a las tarjetas. El beneficio de los usuarios es

$$BU = \int_{\underline{\theta}}^{\tilde{\theta}} \int_{P}^{\infty} x(P', \theta) \cdot h(\theta') \, \mathrm{d}p' \, \mathrm{d}\theta' + \int_{\tilde{\theta}}^{\bar{\theta}} \left[ \int_{0}^{\infty} x(P', \theta) \cdot h(\theta') \, \mathrm{d}p' \; - T \right] \mathrm{d}\theta' \tag{2.4}$$

donde, nuevamente, el primer término representa al excedente de los usuarios que viajan pagando $P$, mientras que el segundo a los que compran una tarjeta de valor $T$.

Utilizando las expresiones de las ganancias y el beneficio de los usuarios, Carbajo maximiza el bienestar social ($BS = \pi + BU$) con cobertura de costos de los operadores, obteniendo las siguientes expresiones para $P$ y $T$.

$$\frac{P - m}{P} = \frac{\lambda}{1 + \lambda} \cdot \frac{1}{\epsilon} \cdot \left[ 1 + \frac{\tilde{x} \cdot (1 - H(\tilde{\theta}))}{\underline{X}} \right] \tag{2.5}$$

$$\frac{T - (P \cdot \tilde{x} + m \cdot (\tilde{\tilde{x}} - \tilde{x}))}{T} = \frac{\lambda}{1 + \lambda} \cdot \frac{1}{\eta} \tag{2.6}$$

donde $\lambda$ es el multiplicador de la restricción presupuestaria, $\tilde{x} = x(P, \tilde{\theta})$ y $\tilde{\tilde{x}} = x(0, \tilde{\theta})$ son las demandas del usuario indiferente si éste eligiese viajar pagando $P$ o $T$, respectivamente, y el resto de las variables son:

$$\underline{X} = \int_{\underline{\theta}}^{\tilde{\theta}} x(P, \theta') \cdot h(\theta') \, \mathrm{d}\theta' \quad \epsilon = \frac{\underline{X}_P \cdot P}{\underline{X}} \quad \eta = \frac{h(\tilde{\theta}) \cdot T \cdot \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial T}}{1 - H(\tilde{\theta})} \quad \underline{X}_P = \int_{\underline{\theta}}^{\tilde{\theta}} \frac{\partial x}{\partial P} \cdot h(\theta') \, \mathrm{d}\theta'$$

A partir de las ecuaciones para $P$ y $T$ óptimos, el autor dice que el mark up ratio en (2.5) es inversamente proporcional a la elasticidad precio de la demanda, ponderado por dos coeficientes: uno relacionado con la restricción presupuestaria y otro que depende de la cantidad de usuarios que compren el abono, de los viajes del usuario indiferente si eligiese viajar con $P$ y del total de viajes realizados por todos los usuarios que usan el boleto unitario.

Por otro lado, en (2.6), el valor de la tarjeta queda determinado a partir del ingreso extra que entrega el usuario indiferente si comprase tarjeta, normalizado por $T$, el cual es inversamente proporcional a la elasticidad de la proporción de gente que elige tarjetas con respecto a $T$, ponderado por el término asociado al multiplicador de la restricción presupuestaria.

Al analizar las condiciones límites de la solución, notamos que cuando $\lambda = 0$ las expresiones recuperan el resultado para máximo bienestar social en caso que la restricción sea inactiva con $P = m$ y $T = m \cdot \tilde{\tilde{x}}$, es decir, el precio igual al costo marginal y la tarjeta igual al costo asociado a los viajes del usuario indiferente. Por el otro lado, cuando $\lambda \to \infty$ se recuperan las condiciones de maximización de ganancias de operadores. En el caso en que todos los usuarios sean iguales (con $\theta = \hat{\theta}$), sólo una de las alternativas de pago sería elegida, dependiendo del signo de $\tilde{\theta} - \hat{\theta}$. La expresión para el precio óptimo luciría como la ecuación 2.5, donde el paréntesis se reduciría a 1 y $\epsilon$ representaría la elasticidad de la demanda con respecto al precio de los usuarios. Con respecto al abono, debido a la independencia del bienestar social con respecto a $T$, el valor óptimo de la tarjeta sería el que logre cubrir los costos de los operadores; sin embargo, nada asegura que ésta sea elegida por parte de los usuarios, por lo que esta situación no siempre es factible.

## 2.4. Síntesis y comentarios

Al comparar las distintas estructuras tarifarias de las principales capitales europeas mostramos que todas presentan una estructura común basada en la combinación de un boleto unitario por viaje con una serie de abonos que permiten viajar ilimitadamente durante períodos específicos de tiempo, los cuales van desde un día hasta un año. Las diferencias entre cada sistema se dan por la presencia de alternativas como packs de boletos con descuentos, transferibilidad del abono, diferenciación de tarifas según horario o distancia recorrida en el viaje.

Históricamente, la implementación de abonos se ha hecho para hacer frente a la creciente tasa de motorización de las ciudades, obteniendo resultados positivos en prácticamente todos los lugares donde se ha implementado. Mostramos que en pocos años los abonos logran posicionarse como una alternativa atrayente para los usuarios de transporte público, logrando que la mayoría de los viajes sean realizados a través de este sistema de pago, aumentando los viajes totales y captando gente de otros modos de transporte.

Con el fin de analizar microeconómicamente el mercado de los abonos, estudiamos la tarificación en dos partes, que consiste en separar el cobro a los usuarios en una componente fija, que da derecho a entrar al mercado, y una componente variable, asociada al consumo. Brown y Sibley (1986) y Wilson (1993) destacan dos efectos (entre los cuales existe un compromiso) asociados a este tipo de tarificación: uno de eficiencia y otro de participación. El primero tiene relación con cuán cerca se encuentra el precio del costo marginal; la incorporación de un cobro como entrada al mercado permite que los operadores puedan bajar el precio con el fin de hacer el sistema más eficiente, manteniendo sus ganancias. El problema de esto es que, mientras menor sea el precio, mayor tendrá que ser la entrada para cubrir los costos y más serán los consumidores que desistan de participar en el mercado.

A partir de los modelos estudiados mostramos la importancia de considerar diferencias dentro de los consumidores, las cuales se modelan de dos formas. Brown y Sibley (1986) y Wilson (1993) distinguen a los usuarios a través de un parámetro de gusto, el cual está asociado al consumo de cada individuo en el mercado. Oi (1971) y Feldstein (1972), en cambio, modelan las diferencias a través del ingreso de los individuos, es decir, que el comportamiento de cada consumidor está determinado por el precio del bien y por su ingreso; sin embargo ambos autores obtienen sus resultados omitiendo el efecto del ingreso. Esta omisión tiene un impacto en la forma de entender y modelar el comportamiento de los consumidores, ya que una vez pagada la entrada al mercado la decisión de consumo sólo depende del precio unitario existente y no del ingreso que se ha reducido por el pago de $T$. Esta omisión la hacen explícita los autores; por un lado Oi trabaja con demandas invariantes ante cambios en el ingreso o el valor de la entrada y Feldstein considera que el efecto de la entrada sobre el ingreso es despreciable y no tiene mayor importancia. El supuesto de Feldstein está presente en todos los modelos de forma tal que la cantidad demandada resulta independiente del valor que tenga la componente fija $T$. Esta independencia incluso se observa en los autores que diferencian por gusto, como Brown y Sibley o Wilson. Esto quiere decir que, para un individuo que opta por consumir, el monto $T$ es irrelevante en la determinación de su consumo. Ningún autor se hace cargo de la posible existencia de mercados y segmentos donde esta suposición no resulta razonable.

Carbajo (1988) desarrolla un modelo donde aplica la diferenciación de cobros al mercado de transporte público. Lo hace a través de una tarjeta que da derecho a ilimitados viajes en un período de tiempo como alternativa al pago unitario por viaje. Con el fin de que existan diferencias entre los usuarios, el autor asocia a cada individuo un parámetro de gusto $\theta$, relacionado con la cantidad que consume. Carbajo hace mención en su investigación a que este parámetro de gusto podría ser visto como el ingreso del individuo o como un vector de características que lo describan.

La forma en que Carbajo modela a los usuarios es haciéndolos optar por una tarifa unitaria $P$ o por una tarjeta de valor $T$. La alternativa escogida será aquella que entregue mayor excedente, siendo indiferente en el caso que ambas le entreguen el mismo. Carbajo demuestra que el usuario indiferente, para $P$ y $T$ dados, será quien marca el corte entre quienes eligen cada alternativa y, a partir de él, llega a expresiones para $P$ y $T$ óptimos, definidos como aquellos que maximizan el bienestar social.

Las limitaciones de este modelo, que son heredadas de los modelos de tarificación en dos partes, son las que motivan esta tesis. Carbajo desarrolla su modelo basado en un parámetro de gustos que, al definirlo, insinúa podría ser el ingreso del individuo. Si este fuera el caso, sería necesario que las funciones de demanda utilizadas sean sensibles al pago de la tarjeta, ya que ésta representaría una disminución del poder adquisitivo del individuo que se vería reflejado en su patrón de viajes lo que puede ser muy relevante en muchos sectores. En ese caso el efecto de la tarjeta sobre el ingreso no puede ser omitido, como lo hace Feldstein en su modelo de tarificación en dos partes, debido a que el gasto en transporte público sí puede representar una fracción importante del ingreso, especialmente en los usuarios de estratos de ingreso bajo.

La modelación de Carbajo también considera que el número de viajes realizados por cualquier usuario que compra una tarjeta es independiente del valor de ésta. Esto resulta poco intuitivo, debido a que, dependiendo del valor de la tarjeta, el individuo dispondrá de más o menos dinero mensual para utilizarlo en bienes o actividades que no sean obligatorias (tales como ir al cine, al estadio, a un museo, de visita, etc.). A partir de esto, concluimos que los viajes del individuo que compra tarjeta disminuyen, para un mismo precio, a medida que el valor de la tarjeta aumenta, pero que este efecto disminuye con el nivel de renta del individuo.

En el siguiente capítulo tomaremos en cuenta todas estas limitaciones y propondremos un modelo que extiende el de Carbajo (1988) en cuanto a las consideraciones sobre el ingreso.

# Capítulo 3

# Formulación y solución analítica del modelo tarifario considerando ingreso

En este capítulo presentaremos el modelo teórico con el que representaremos la decisión de individuos frente al uso de abonos. Diremos que el comportamiento de los usuarios está determinado por su ingreso, mostrando que en este caso se observa un efecto doble de este último: como característica socio-económica (estratos de menores ingresos usan más el transporte público) y como ingreso disponible (el abono como una disminución del ingreso). A partir de las consideraciones anteriores, encontraremos expresiones para los valores óptimos de abono y boleto de forma de maximizar el bienestar social sujeto a una restricción de costos.

Para plantear el modelo se extenderá el enfoque establecido por Carbajo (1988), debido a que no se puede usar directamente ya que las condiciones establecidas en ese modelo no son traspasables automáticamente a un modelo con ingreso. Mostraremos cómo calcular los excedentes, definiremos un usuario indiferente y luego demostraremos que los individuos cuyo ingreso sea menor que el indiferente optarán por comprar la tarjeta, mientras quienes posean un ingreso mayor pagarán por viaje realizado. A partir de esto construiremos un método para encontrar el óptimo social.

## 3.1. Efectos del Ingreso

Con el fin de caracterizar a los individuos según su ingreso, necesitamos conocer qué papel cumple este último en la demanda de viajes en transporte público. Como punto de partida, analicemos un individuo cualquiera con ingreso $I$ y una demanda conocida por viajes en transporte público $X(P, I)$, tal como vemos en la Figura 3.1. Sabemos que si se le cobra un precio $P_0$ por cada viaje, éste realizará $X(P_0, I)$ en el período de tiempo que se esté analizando (en este caso usaremos viajes al mes).

Supongamos que se implementa una nueva política de transporte en la ciudad y el individuo puede viajar comprando, a principio de mes, una tarjeta de valor $T$, la cual le da derecho a indefinidos viajes durante ese período, sin tener que pagar extra por ellos (precio marginal cero). Por lo tanto, el individuo puede viajar pagando $P$ por cada viaje que realiza o $T$ al empezar el mes y usar libremente el sistema de transporte público.

La teoría prevaleciente establece que los viajes del individuo con abono serían $X(0, I)$, sin embargo de ser así, el valor de la tarjeta no cumpliría papel alguno en la demanda del individuo, sólo influiría en la decisión de participación en el mercado. Es por esto que decimos que si el individuo eligiese viajar con esta nueva alternativa, la tarjeta actúa como una disminución de su ingreso original y, como consecuencia, contrayendo su demanda por viajes. Esto haría que la demanda a analizar sea $X(P, I - T)$ en vez de $X(P, I)$, que en la Figura 3.1 está representada con la línea punteada. Una vez que el individuo compra la tarjeta, ésta le da derecho a viajar a precio cero, por lo que sus viajes con abono serían $X(0, I - T)$, que sí dependen del valor $T$ de la tarjeta.

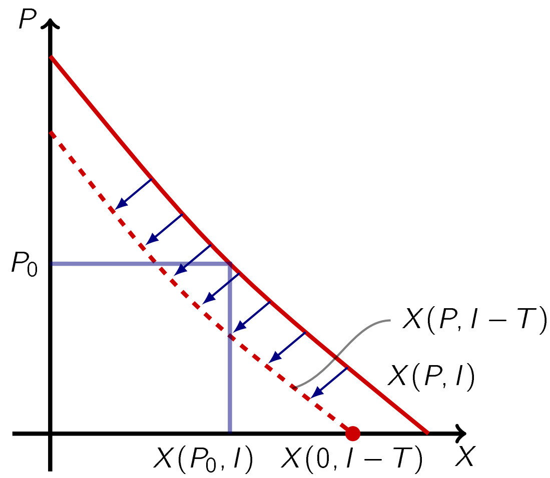



Figura 3.1: Demanda por viajes en transporte público

En síntesis, para un individuo cualquiera de ingreso dado, el pago por una tarjeta de valor $T$ al comienzo del período actúa disminuyendo el ingreso disponible, contrayendo la demanda y provocando un cambio en el número de viajes, cuyo valor depende de $T$.

¿Qué ocurre cuando miramos el ingreso como una característica socioeconómica del individuo? Ahora no se trata de analizar el ingreso disponible, ya que la condición socioeconómica no varía con $T$; se trata de mirar el efecto que posee el ingreso al mirarlo entre estratos. Para ello, es útil mirar las elasticidades con respecto al ingreso de la demanda agregada por viajes en transporte público en distintas ciudades del mundo. Jara-Díaz y Gschwender (2007) hacen una revisión de la bibliografía en torno a este tema, mostrando que la elasticidad ingreso de la demanda por transporte público resulta de dos efectos: la elasticidad de los viajes totales al ingreso, que es positiva, y del efecto indirecto a través de la posesión de automóvil, el que resulta negativo. El signo de este segundo efecto se debe al efecto positivo del ingreso sobre la posesión de automóvil y el efecto negativo de ésta última sobre los viajes en transporte público. A partir de este análisis obtienen los datos de la Tabla 3.1, que muestran que en general la elasticidad ingreso es negativa, vía la posesión de automóvil.

Tabla 3.1: Elasticidades de la demanda por transporte público con respecto al ingreso

| País/Ciudad | Elasticidad |
|---|---|
| Australia | -0,8 |
| Melbourne | -0,2 |
| Canadá | -0,16 |
| Reino Unido | -0,5 a -0,1 |
| Francia | -0,08 a -0,05 |
| Madrid | +0,15 |
| Friburgo | +0,4 a +0,8 |

Fuente: Gschwender y Jara-Díaz (2007)

Observamos que en los casos de Madrid y Friburgo se tiene una elasticidad ingreso positiva, calificados como "casos exitosos en términos de mejoras al transporte público y aumento de la demanda" (Jara-Díaz y Gschwender, 2007, p.9). A partir de esto, los autores sugieren que en sistemas de transporte público de alta calidad se podrían esperar elasticidades ingreso positivas, debido a que los usuarios podrían considerarlos como alternativa al uso del automóvil, disminuyendo el segundo efecto antes mencionado.

Del análisis presentado se concluye que, en general, un individuo de ingreso menor realizará más viajes en transporte público que uno de ingreso mayor, al mismo precio, reflejando un efecto (de más largo plazo) contrario al que se presentó vinculado a la disminución del ingreso disponible por el pago de tarjeta.

Analicemos ambos efectos desde puntos de vista distintos. Por un lado, si miramos la sociedad como un conjunto de estratos que se distinguen según su ingreso, individuos pertenecientes a estratos de menor ingreso tendrán su demanda por viajes en transporte público por sobre la de individuos de estratos más ricos, debido a que estos últimos tienen un mayor acceso al auto, tal como se ve en la Figura 3.2.b. Por otro lado, al mirar el problema desde el punto de vista de un individuo en un estrato dado, si este paga por una tarjeta de valor $T$ para viajar, su poder adquisitivo disminuirá y, como consecuencia, su demanda se contraerá, independiente del estrato al que pertenezca (Figura 3.2.a).

Por lo tanto, podemos distinguir dos movimientos que el ingreso provoca en la demanda por viajes: uno entre estratos y otro dentro de cada estrato, ambos en distinta dirección como se observan en la Figura 3.2. En la Figura 3.2.c se observan ambos efectos en conjunto, donde la contracción de la demanda es mayor en los individuos de estratos de menores ingresos debido a que el impacto de $T$ sobre el ingreso es de mayor consideración.

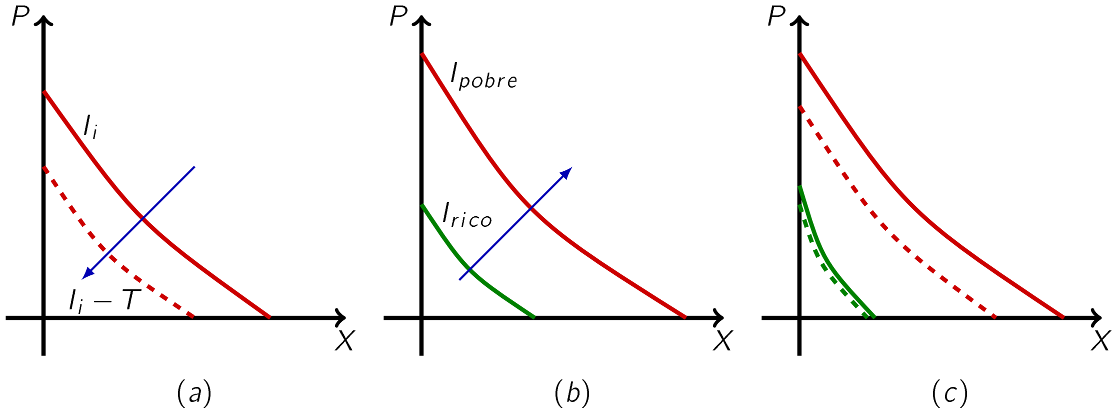



Figura 3.2: Movimiento de la demanda con el ingreso

¿Para qué hacemos el análisis de los efectos del ingreso en la demanda por viajes en transporte público? Queremos plantear un modelo de tarificación que haga convivir dos formas de pago: una donde se paga un precio $P$ por cada viaje y otra donde se compra una tarjeta de valor $T$ mensual, que da derecho a ilimitados viajes en un período de tiempo determinado. Como no todas las personas son iguales, hay quienes preferirán un sistema de pago por sobre el otro; mostraremos que esta decisión está vinculada al ingreso.

Como se mostró en el capítulo anterior, Carbajo (1988) utiliza un parámetro $\theta$ para describir a los individuos y se refiere a él como que "puede ser pensado como ingreso o un vector de características que hace que los consumidores tengan distintas preferencias en la frecuencia de viajes" (p.156). Sin embargo, la introducción del ingreso en el análisis de las tarjetas provoca dos diferencias importantes con el enfoque con gusto: primero, el número de viajes realizados con tarjeta, que para Carbajo es independiente de $T$, depende del valor del abono; segundo, el ingreso como parámetro de gusto no admite un tratamiento analítico continuo ya que su variación individual no provoca el mismo efecto que su variación entre individuos. Por lo tanto, el efecto doble del ingreso según se mire como disminución del poder adquisitivo o como nivel socio-económico conduce a una necesaria reformulación del problema de elección de las tarjetas multiviaje.

Es importante notar que si la demanda no se desplazara al comprar la tarjeta (es decir, no existiese el efecto del ingreso disponible), el problema es equivalente al de Carbajo, tomando $\theta = 1/Ingreso$. Por lo tanto, el hecho de que la demanda se contraiga es fundamental.

Finalmente, tampoco es claro qué individuos comprarán la tarjeta ni quienes elegirán pagar unitariamente, aspecto importante para poder plantear el modelo. Esta interrogante es la que resolveremos a continuación.

## 3.2. Modelo Analítico

### 3.2.1. Análisis de la elección entre tarjeta y boleto unitario

#### 3.2.1.1. Excedentes

Con el fin de caracterizar correctamente la demanda considerando ambos efectos descritos en la sección anterior, representaremos los viajes totales de un individuo como una función $X(P, T, I)$, que depende del precio $P$ del transporte público, del valor $T$ de la tarjeta y del ingreso $I$ que representa al estrato del individuo. En ella, el efecto asociado al ingreso disponible lo captura el valor $T$ de la tarjeta, ya que este representa la disminución del poder adquisitivo, en tanto que $I$ será el ingreso visto como característica socio-económica, constante ante cambios en $T$.

Siguiendo la Figura 3.3, notamos que individuos que escojan la alternativa de pagar un precio $P$ por viaje, realizarán $X_P = X(P, 0, I)$ viajes, obteniendo un excedente de $A$, definido como la disponibilidad a pagar por esos viajes $(A + B)$ menos la cantidad que paga por ellos $(X_P \cdot P = B)$. Por otro lado, quienes compren la tarjeta de valor $T$, harán $X_T = X(0, T, I)$ viajes, debido a que su demanda se contrae, y obtendrán un excedente de $A+B+C-T$ (su disponibilidad a pagar por $X_T$ menos el pago de $T$). Hacemos notar que $X_T$ se encuentra a la izquierda del punto donde intersecta la demanda con el eje $X$, $X(0, 0, I)$, y su valor sí depende del valor de la tarjeta.

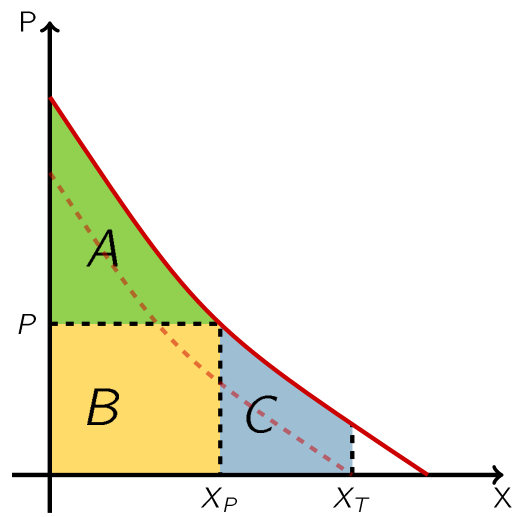



Figura 3.3: Excedentes con P y T

Analíticamente, el excedente pagando P por viaje resulta

$$EMC_P = \int_P^{\infty} X(\phi, 0, I)\, \mathrm{d}\phi = A \tag{3.1}$$

Definiendo $P(X, 0, I)$ como la función inversa de la demanda por viajes (precio al que un individuo realiza $X$ viajes), el excedente asociado a los viajes realizados con abono resulta

$$EMC_T = \int_0^{X(0,T,I)} P(\phi, 0, I)\,\mathrm{d}\phi - T = A + B + C - T \qquad (3.2)$$

Conocidos los excedentes que entrega cada alternativa, diremos que un usuario elegirá aquella que le reporte el mayor beneficio. Es decir, si $EMC_P > EMC_T$ el individuo preferirá pagar $P$ por cada viaje que realice. Por el contrario, si $EMC_P < EMC_T$, el individuo pagará $T$ a principio de mes, realizando $X_T$ viajes durante ese período.

Diremos que un individuo es indiferente entre $P$ y $T$ cuando ambas alternativas le entregan el mismo beneficio; por ejemplo, volviendo a la Figura 3.3, el individuo será indiferente si $A = A+B+C-T$. Es decir, dado un precio $P$, si el valor de la tarjeta ofrecida es $T = B + C$ el usuario recibirá los mismos excedentes eligiendo cualquiera de las dos alternativas, será indiferente entre ellas y $T = B + C$ equilibrará al precio dado.

A partir de lo anterior, para $P$ y $T$ dados, el ingreso del usuario indiferente ($\tilde{I}$) entre ambas alternativas queda determinado implícitamente por la expresión que iguala los excedentes con $P$ y $T$, es decir

$$\int_P^{\infty} X(\phi, 0, \tilde{I})\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{X(0,T,\tilde{I})} P(\phi, 0, \tilde{I})\,\mathrm{d}\phi - T \qquad (3.3)$$

de donde se puede obtener una función $\tilde{I}(P,T)$ que dice que para un par $(P,T)$ dado, se puede encontrar un ingreso indiferente $\tilde{I}$ a partir del cual usuarios con ingreso mayor o menor a él optaran por alternativas distintas. Quién elige cada alternativa será analizado en la siguiente sección.

#### 3.2.1.2. Curvas de indiferencia y elección de cada estrato

Con el fin de encontrar qué alternativa elige cada individuo, supongamos uno de ingreso $I_i$ que es indiferente entre un precio $P_0$ y una tarjeta de valor $T_0$. A partir de esto, como definimos en la expresión (3.3), podemos decir que los excedentes entregados al individuo por cada alternativa son iguales y, de la Figura 3.4.a, concluir que $T_0 = B + C$. Complementariamente, si representamos en el plano $PT$ todas las combinaciones posibles de precios y tarjetas que pueden ser ofrecidos, de la Figura 3.4.b podemos decir que el individuo de ingreso $I_i$ es indiferente en el par $(P_0, T_0)$, señalado por el punto 0.

Fijemos el valor de la tarjeta en $T_0$ y representemos todos los pares $(P, T_0)$ a través de una recta vertical desde $(0, T_0)$. Consideremos variaciones alrededor de $P_0$ y analicemos la elección del individuo de ingreso $I_i$.

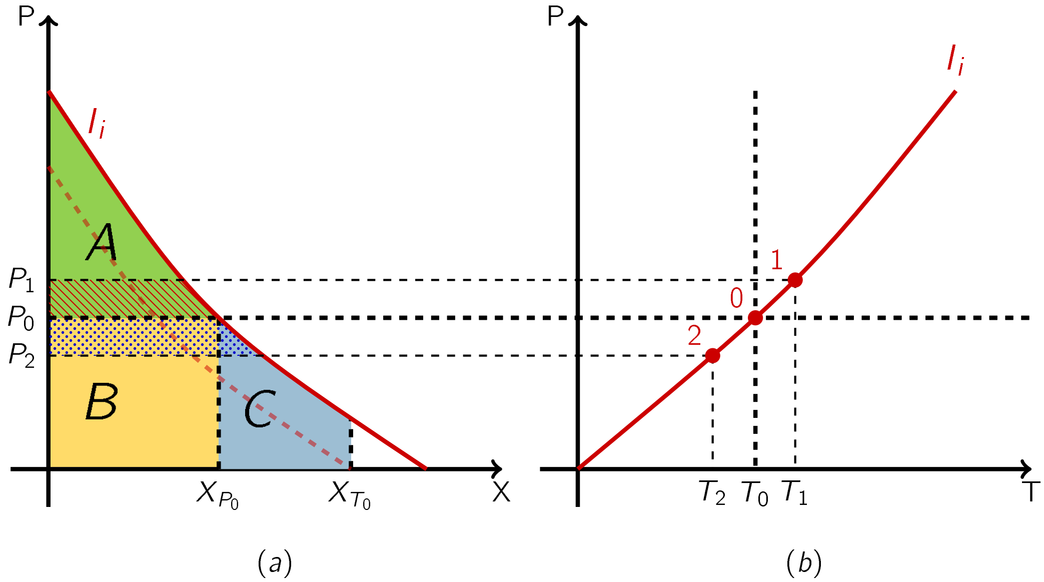



Figura 3.4: Demanda y curva de indiferencia

Tomemos un precio $P_1 > P_0$, en el plano $PX$, y llamemos $\delta_1$ al área entre $P_0$ y $P_1$, desde el eje $P$ hasta la demanda, representada con líneas rojas en la figura 3.4.a. El excedente con $P_1$ será $A - \delta_1$ y, por lo tanto,

$$EMC_{P_1} = A - \delta_1 < A = EMC_{P_0} = EMC_{T_0} \tag{3.4}$$

Es decir, cuando sube el precio de $P_0$ a un $P_1$ cualquiera, el beneficio que éste genera será menor que el que entrega $T_0$ ($EMC_{P_1} < EMC_{T_0}$) y, como consecuencia, el usuario elegirá comprar la tarjeta. Llevando este análisis al plano $PT$, se puede decir que si se ofrece cualquiera de los pares $(P, T_0)$ donde $P > P_0$, el individuo de ingreso $I_i$ elegirá viajar con tarjeta.

Ahora bien, si el precio sube desde $P_0$ a $P_1$, manteniendo $T_0$ constante, el usuario deja de ser indiferente y elige la tarjeta. ¿Qué tendríamos que hacer para que este usuario siguiera siendo indiferente al aumentar el precio? Vemos que al aumentar el precio, el excedente $EMC_P$ baja y, como el de la tarjeta sigue siendo el mismo, la elige. Por lo tanto, para poder mantener la indiferencia, el excedente que entrega la tarjeta también debería disminuir. De la ecuación (3.2), el excedente que entrega $T_0$ es el área $A + B + C - T_0$. Luego, para disminuir este beneficio, se puede agrandar $T_0$ o disminuir $A + B + C$, pero ambas van de la mano, ya que al hacer crecer el valor de la tarjeta, la demanda se contraerá más, por lo que se harán menos viajes y disminuirá el área $A + B + C$. Por lo tanto, si el precio sube de $P_0$ a $P_1$, para que el individuo de ingreso $I_i$ siga siendo indiferente, habría que subir el valor de la tarjeta desde $T_0$ a un $T_1 > T_0$ (punto 1).

Un análisis similar se puede hacer cuando el precio baja. Tomemos un precio $P_2 < P_0$ en la recta donde $T_0$ es constante. Definamos como $\delta_2$ el área entre $P_0$ y $P_2$, desde el eje $P$ hasta la demanda, que en la Figura 3.4.a se representa con puntos azules. El beneficio con este precio será $A + \delta_2$. Entonces,

$$EMC_{P_2} = A + \delta_2 > A = EMC_{P_0} = EMC_{T_0} \tag{3.5}$$

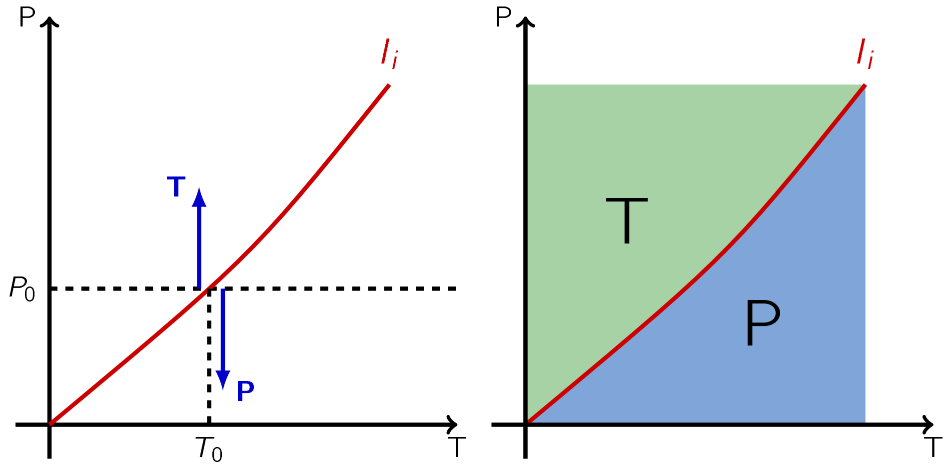
Como vemos, $EMC_{P_2} > EMC_{T_0}$ y, como se dijo antes, el invididuo elegirá viajar pagando $P_2$. Desde el punto de vista del plano $PT$, en cualquier punto $(P, T_0)$ con $P < P_0$, el individuo elegirá viajar pagando por cada viaje realizado.

Para mantener la indiferencia del individuo de ingreso $I_i$ cuando baja el precio, debemos proceder análogamente al caso cuando sube. Sabemos que al pasar de $P_0$ a $P_2$ el excedente entregado por el precio se incrementa. Por lo tanto, para que el usuario de ingreso $I_i$ siga siendo indiferente después de una baja en el precio, desde $P_0$ a $P_2$, se debería bajar el valor de la tarjeta de $T_0$ a un $T_2 < T_0$ (punto 2).

En conclusión, si fijamos el valor de la tarjeta en $T_0$ pueden ocurrir tres cosas con el usuario de ingreso $I_i$. Si le ofrecemos un precio $P_0$, que es el que equilibra a $T_0$, el individuo será indiferente. En el caso que se ofrezca un precio menor que $P_0$, éste viajará eligiendo $P$, mientras que si se ofrece uno mayor, el usuario comprará una tarjeta. Si quisiéramos que el individuo de ingreso $I_i$ fuese siempre indiferente, si el precio cambiara, la tarjeta tendría que cambiar en el mismo sentido, es decir, si el precio aumenta, la tarjeta debe aumentar o si disminuye, la tarjeta también lo debe hacer.

Un último punto que analizaremos será el origen del plano $PT$, es decir, cuando el precio y el valor de la tarjeta son nulos. En el caso que $P = 0$, el beneficio asociado a esta alternativa, para un individuo cualquiera, será toda la superficie bajo su demanda. Cuando la tarjeta es gratis, la demanda por viajes no se contraerá, por lo que el excedente asociado a esta alternativa también será el área bajo la demanda menos el valor de la tarjeta, que es cero. Por lo tanto, como el ingreso no jugó papel alguno en este análisis, podemos decir que todos los individuos serán indiferentes entre $P = 0$ y $T = 0$.

Del análisis anterior concluimos que desde el punto $(0, 0)$ del plano $PT$, existe una curva creciente donde en todos sus puntos el individuo de ingreso $I_i$ será indiferente a elegir cualquiera de las dos alternativas de pago. A esta curva la llamaremos curva de indiferencia y la definiremos como el lugar geométrico de todos los puntos $(P, T)$ donde un usuario recibirá el mismo beneficio viajando a precio $P$ o comprando la tarjeta $T$.




$(a)$ $(b)$

Figura 3.5: Curva de indiferencia

Como el individuo es indiferente en todos los pares de la curva, el análisis de subir y bajar el precio, manteniendo $T$ constante, se puede hacer a cada uno de ellos. Luego, una segunda conclusión que se obtiene es que si se ofrece un par $(P, T)$ por sobre la curva de indiferencia de un individuo, éste necesariamente elegirá la tarjeta. Por el contrario, si ofrece un par $(P, T)$ por debajo de la curva, el individuo elegirá pagar por cada viaje que realiza. Tal como se ve en la figura 3.5.b, la curva de indiferencia divide el plano en dos regiones, una donde se elegirá $T$ por sobre $P$ y otra, $P$ por sobre $T$.

El objetivo de esta sección es saber qué forma de pago elegirá cada estrato de ingreso. Para esto, tomaremos dos individuos de distintos estratos (rico y pobre) y graficaremos sus demandas (Figura 3.6.a). Según se mostró en el capítulo 2, la demanda del pobre estará por sobre la del rico debido al efecto de la posesión de automóvil.

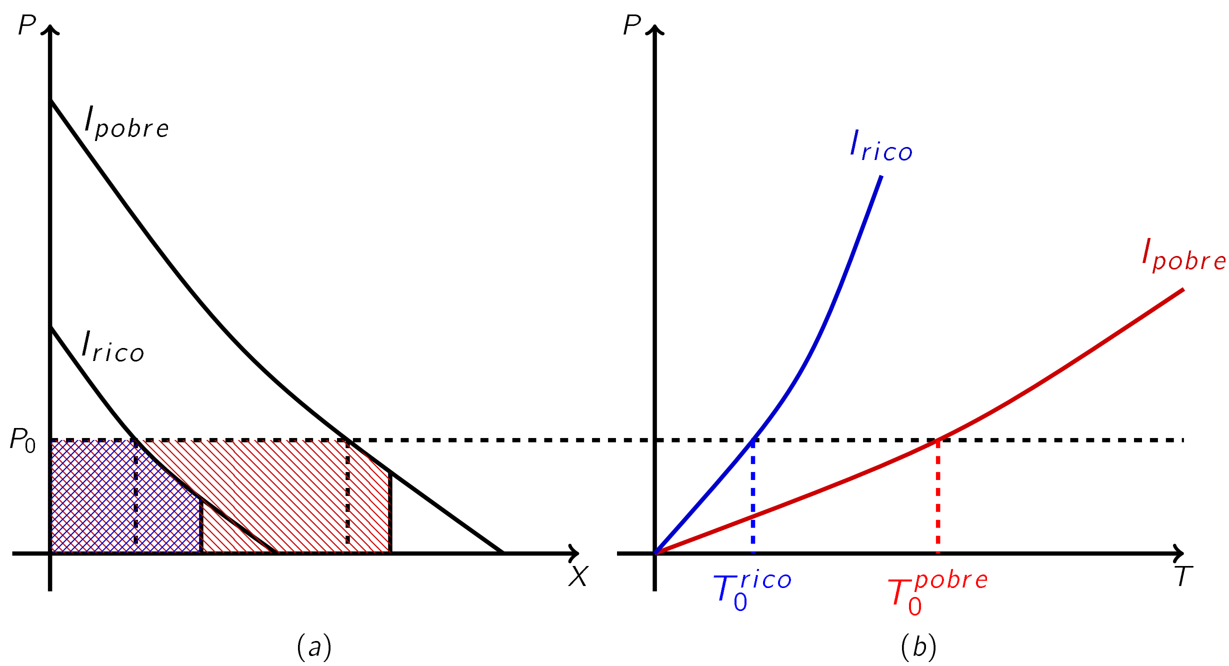



Figura 3.6: Demandas y curvas de indiferencia para dos estratos

Sabemos que cada uno de estos individuos tiene su respectiva curva de indiferencia en el plano PT. Por lo que dijimos anteriormente, ambas partirán por el origen del plano y serán crecientes en éste. Además, existirán $T_0^{rico}$ y $T_0^{pobre}$ que son los valores de las tarjetas que dejan indiferente a usuarios ricos y pobres, respectivamente, cuando el precio unitario es $P_0$. Para visualizar la posición relativa de las curvas de indiferencia, encontremos una relación de orden entre $T_0^{rico}$ y $T_0^{pobre}$, para $P_0$ dado.

Tal como mostramos cuando dedujimos los excedentes en la Figura 3.3, para un precio $P_0$ el valor de la tarjeta que hacía al individuo indiferente era $T_0 = B + C$. Mirando la Figura 3.6.a se puede ver que esto corresponde al área achurada con azul para el estrato rico, y al área achurada con rojo para el estrato pobre, es decir, $T_0^{rico} < T_0^{pobre}$. Por lo tanto, al llevarlos al plano $PT$, se puede decir que la curva de indiferencia del rico estará a la izquierda de la del pobre, ya que la tarjeta que equilibra a $P_0$ será de menor valor en el estrato rico que en el pobre.

Miremos el problema cuando todos los estratos deben enfrentarse a un precio $P^*$ y una tarjeta de valor $T^*$. Sabemos que habrá un estrato de ingreso $\tilde{I}$ (que puede o no existir) el cual será indiferente a ambas alternativas y, por ende, el par $(P^*, T^*)$ pertenecerá a su curva de indiferencia, tal como se puede ver en la Figura 3.7. Por el análisis hecho en la Figura 3.6, sabemos que estratos de ingreso mayores a $\tilde{I}$ tienen sus curvas de indiferencia a la izquierda de la del ingreso indiferente, representadas con azul en la Figura 3.7. Estos estratos tienen el par ofrecido por debajo de sus curvas de indiferencia, por lo que elegirán viajar, basándonos en el análisis de la Figura 3.5, pagando $P^*$ por viaje realizado.

Un análisis similar podemos hacer con estratos de ingreso menores a $\tilde{I}$. Sus curvas de indiferencia estarán por debajo de la del indiferente (las rojas de la Figura 3.7) y, por lo tanto, tendrán $(P^*, T^*)$ en la zona donde se elige $T$ según la Figura 3.5. Luego, concluimos que estos estratos viajarán adquiriendo $T^*$ a principio de mes.

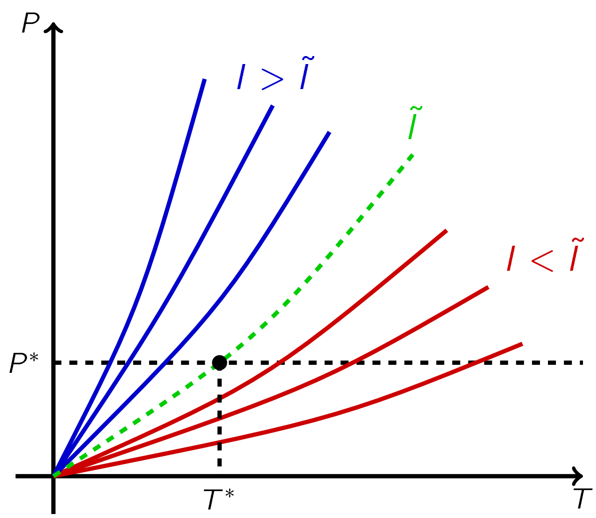



Figura 3.7: Curvas de indiferencia

Como conclusión podemos decir que estratos de ingreso mayores que el indiferente, elegirán pagar por viaje realizado, mientras que estratos de ingreso menor que el indiferente, comprarán la tarjeta. Específicamente, estratos de ingreso que tengan su curva de indiferencia por sobre la de $\tilde{I}$ elegirán $P$ y estratos que tengan su curva por debajo de $\tilde{I}$ elegirán $T$. Este resultado nos dice que los individuos que más viajes realizan en transporte público, para un precio y una tarjeta dados, preferirán comprar la tarjeta; conclusión acorde, debido a que quienes más viajan son los que más dinero gastan y, por lo tanto, a quienes un abono les resultaría conveniente.

Conocida la forma de decidir de los individuos y su comportamiento a partir de un ingreso indiferente, contamos con todas las herramientas para plantear un modelo de tarificación que considere una tarjeta multiviaje con la que se puede usar libremente el sistema de transporte público.

### 3.2.2. Modelo analítico

#### 3.2.2.1. Formulación paramétrica en el ingreso indiferente

Conocida la elección (entre $P$ y $T$) de cada estrato de ingreso a partir de un usuario indiferente, supongamos $\tilde{I}$ conocido y establezcamos las medidas de bienestar.

En primer lugar, dadas las expresiones (3.1) y (3.2) para los excedentes con cada alternativa, el beneficio total de los usuarios del sistema es

$$BU = \sum_{I_i > \tilde{I}} N_i \cdot EMC_{P_i} + \sum_{I_i < \tilde{I}} N_i \cdot EMC_{T_i} \tag{3.6}$$

donde $N_i$ es la cantidad de personas que pertenecen al estrato de ingreso cuyo ingreso es $I_i$.

Para calcular las ganancias de los operadores, diremos que enfrentan un costo fijo $F$ y uno marginal $m$ por viaje (constante). Es importante destacar que las ganancias por viajes eligiendo $P$ o $T$ son distintas. Viajes pagados con precio unitario significarán una ganancia al operador de $(P - m)$, ya que los usuarios pagan $P$ por cada viaje realizado, mientras que al operador le cuestan $m$. Para los viajes realizados con tarjeta, el operador tiene como ingreso $T$ por cada usuario que elige esta alternativa, mientras que el costo es de $m$ por cada viaje que estos usuarios realizan. Asi, las ganancias son

$$\pi = (P - m) \cdot \sum_{I_i > \tilde{I}} N_i \cdot X(P, 0, I_i) + T \cdot \sum_{I_i < \tilde{I}} N_i - m \cdot \sum_{I_i < \tilde{I}} N_i \cdot X(0, T, I_i) - F \tag{3.7}$$

Finalmente, sabemos que el bienestar social es la suma del beneficio de los usuarios con las ganancias de los operadores, por lo que resulta

$$\begin{aligned} BS = & \sum_{I_i > \tilde{I}} N_i \cdot EMC_{P_i} + \sum_{I_i < \tilde{I}} N_i \cdot EMC_{T_i} + (P - m) \cdot \sum_{I_i > \tilde{I}} N_i \cdot X(P, 0, I_i) \\ & + T \cdot \sum_{I_i < \tilde{I}} N_i - m \cdot \sum_{I_i < \tilde{I}} N_i \cdot X(0, T, I_i) - F \end{aligned} \tag{3.8}$$

Los valores de $P$ y $T$ que maximizan el bienestar social bajo la condición de cubrir costos resultan de

$$\begin{aligned} & \underset{P,T}{\text{Max}} && BS \\ & \text{s.a.} && \pi \geq 0 \qquad (\lambda) \end{aligned} \tag{3.9}$$

El lagrangeano es

$$\begin{aligned} L &= BS + \lambda \cdot \pi \\ &= BU + \pi + \lambda \cdot \pi \\ &= BU + (\lambda + 1) \cdot \pi \end{aligned} \tag{3.10}$$

Reemplazando (3.6) y (3.7) en (3.10)

$$L = \sum_{I_i > \tilde{I}} N_i \cdot EMC_{P_i} + \sum_{I_i < \tilde{I}} N_i \cdot EMC_{T_i} + (1+\lambda) \cdot \Bigg[ (P-m) \cdot \sum_{I_i > \tilde{I}} N_i \cdot X(P,0,I_i) \\ + T \cdot \sum_{I_i < \tilde{I}} N_i - m \cdot \sum_{I_i < \tilde{I}} N_i \cdot X(0,T,I_i) - F \Bigg] \tag{3.11}$$

Luego, para encontrar el óptimo, derivamos el lagrangeano con respecto a $P$ y $T$ y lo igualamos a 0.

$$\frac{\partial L}{\partial P} = \sum_{I_i > \tilde{I}} N_i \cdot \frac{\partial EMC_{P_i}}{\partial P} + (1+\lambda) \cdot \left[ \sum_{I_i > \tilde{I}} N_i \cdot X(P,0,I_i) + (P-m) \cdot \sum_{I_i > \tilde{I}} N_i \cdot \frac{\partial X(P,0,I_i)}{\partial P} \right] = 0 \tag{3.12}$$

Por el segundo teorema fundamental del cálculo, sabemos que

$$\frac{\partial EMC_{P_i}}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left( \int_P^\infty X(\phi,0,I_i)\, \mathrm{d}\phi \right) = -X(P,0,I_i) \tag{3.13}$$

Y por lo tanto,

$$\lambda \cdot \sum_{I_i > \tilde{I}} N_i \cdot X(P,0,I_i) + (1+\lambda) \cdot (P-m) \cdot \sum_{I_i > \tilde{I}} N_i \cdot \frac{\partial X(P,0,I_i)}{\partial P} = 0 \tag{3.14}$$

Si manipulamos los términos llegamos a

$$(1+\lambda) \cdot (P-m) \cdot \sum_{I_i > \tilde{I}} N_i \cdot \frac{\partial X(P,0,I_i)}{\partial P} \cdot \frac{P}{P} \cdot \frac{X(P,0,I_i)}{X(P,0,I_i)} = -\lambda \cdot \sum_{I_i > \tilde{I}} N_i \cdot X(P,0,I_i) \tag{3.15}$$

Llamando $\eta_{P,I_i}$ a la elasticidad precio de la demanda del estrato $I_i$ y $\theta = \frac{\lambda}{1+\lambda}$

$$\frac{(P-m)}{P} \cdot \sum_{I_i > \tilde{I}} N_i \cdot \left| \eta_{P,I_i} \right| \cdot X(P,0,I_i) = \theta \cdot \sum_{I_i > \tilde{I}} N_i \cdot X(P,0,I_i) \tag{3.16}$$

Finalmente, definiendo $\alpha_i$ como el cuociente entre los viajes del estrato $I_i$, $N_i \cdot X(P,0,I_i)$, y los viajes totales pagando tarifa unitaria, $\sum_{I_i > \tilde{I}} N_i \cdot X(P,0,I_i)$, llegamos a una ecuación para $P^*$

$$\boxed{\frac{(P^* - m)}{P^*} = \frac{\theta}{\sum\limits_{I_i > \tilde{I}} \alpha_i \cdot \left|\eta_{P,I_i}\right|}} \tag{3.17}$$

Esta expresión nos dice que el precio óptimo es tal que el mark up ratio es proporcional al inverso de la suma de las elasticidades precio de la demanda ($\eta_{P,I_i}$) ponderadas por un coeficiente que representa la proporción de los viajes del estrato con respecto al total.

Derivando $L$ con respecto a $T$

$$\frac{\partial L}{\partial T} = \sum_{I_i < \tilde{I}} N_i \cdot \frac{\partial EMC_{T_i}}{\partial T} + (1 + \lambda) \cdot \left[ \sum_{I_i < \tilde{I}} N_i - m \cdot \sum_{I_i < \tilde{I}} N_i \cdot \frac{\partial X(0, T, I_i)}{\partial T} \right] = 0 \tag{3.18}$$

Nuevamente, por el segundo teorema fundamental del cálculo tenemos,

$$\frac{\partial EMC_{T_i}}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \left( \int_0^{X(0,T,I_i)} P(\phi, 0, I_i)\, d\phi - T \right) = P\Big[X(0, T, I_i), 0, I_i\Big] \cdot \frac{\partial X(0, T, I_i)}{\partial T} - 1 \tag{3.19}$$

Reemplazando (3.19) en (3.18)

$$\begin{aligned} \sum_{I_i < \tilde{I}} N_i \cdot P\Big[X(0, T, I_i), 0, I_i\Big] \cdot \frac{\partial X(0, T, I_i)}{\partial T} - \sum_{I_i < \tilde{I}} N_i = \\ -(1 + \lambda) \cdot \left[ \sum_{I_i < \tilde{I}} N_i - m \cdot \sum_{I_i < \tilde{I}} N_i \cdot \frac{\partial X(0, T, I_i)}{\partial T} \right] \end{aligned} \tag{3.20}$$

Llamemos $\eta_{T,I_i}$ a la elasticidad de la demanda del estrato $I_i$ con respecto al valor de la tarjeta y manipulemos la expresión anterior

$$\begin{aligned} \sum_{I_i < \tilde{I}} N_i \cdot P\Big[X(0, T, I_i), 0, I_i\Big] \cdot \left|\eta_{T,I_i}\right| \cdot X(0, T, I_i) + T \cdot \sum_{I_i < \tilde{I}} N_i = \\ (1 + \lambda) \cdot \left[ T \cdot \sum_{I_i < \tilde{I}} N_i + m \cdot \sum_{I_i < \tilde{I}} N_i \cdot \left|\eta_{T,I_i}\right| \cdot X(0, T, I_i) \right] \end{aligned} \tag{3.21}$$

Ahora podemos despejar $T$

$$T = \frac{\displaystyle\sum_{I_i<\tilde{I}} N_i \cdot \left|\eta_{T,I_i}\right| \cdot X(0,T,I_i) \cdot \left\{P\left[X(0,T,I_i),0,I_i\right] - m \cdot (1+\lambda)\right\}}{\lambda \cdot \displaystyle\sum_{I_i<\tilde{I}} N_i} \tag{3.22}$$

Finalmente, si definimos $\beta_i$ como el cuociente entre la cantidad $N_i$ de individuos en el estrato $I_i$ y el total de personas que eligen viajar con tarjeta $(\sum_{I_i<\tilde{I}} N_i)$, la expresión para $T^*$ resulta

$$\boxed{T^* = \sum_{I_i<\tilde{I}} \beta_i \cdot \left|\eta_{T,I_i}\right| \cdot X(0,T^*,I_i) \cdot \lambda^{-1} \cdot \left\{P\left[X(0,T^*,I_i),0,I_i\right] - m \cdot (1+\lambda)\right\}} \tag{3.23}$$

que dice que el valor óptimo de la tarjeta está dado por la suma, entre quienes eligen $T$, de la multiplicación entre la proporción de individuos por estrato $(\beta_i)$, la elasticidad de la demanda con respecto al valor de la tarjeta $(\eta_{T,I_i})$, la demanda por viajes, el inverso del multiplicador asociado a la restricción presupuestaria y la diferencia entre la disponibilidad a pagar por los viajes hechos con tarjeta si se tuviese que pagar unitariamente por ellos y el costo marginal, ponderado por un coeficiente relacionado con la restricción.

Ahora que tenemos ecuaciones para $P$ y para $T$, nos faltaría encontrar una para $\lambda$, ya que el precio y la tarjeta dependen de su valor. Para esto consideraremos la ecuacion (3.24), que muestra la holgura complementaria asociada a la restricción presupuestaria, donde el multiplicador $(\lambda)$ por la restricción (3.7) vale 0. Con esta última expresión el problema queda resuelto, ya que encontramos tres ecuaciones para las tres incógnitas que teníamos.

$$\lambda \cdot \left[(P-m) \cdot \sum_{I_i>\tilde{I}} N_i \cdot X(P,0,I_i) + T \cdot \sum_{I_i<\tilde{I}} N_i - m \cdot \sum_{I_i<\tilde{I}} N_i \cdot X(0,T,I_i) - F\right] = 0 \tag{3.24}$$

#### 3.2.2.2. Búsqueda del óptimo: Precio unitario, valor de la tarjeta e ingreso indiferente

Hasta el momento se ha asumido $\tilde{I}$ conocido y, por lo tanto, podíamos identificar qué alternativa de pago elige cada estrato de ingreso. La dificultad con la que nos encontramos es que el ingreso indiferente $\tilde{I}$ se define como $\tilde{I}(P^*, T^*)$ y, por lo tanto, es función del par óptimo prevaleciente, lo que implica que la elección de los individuos de cada estrato no es conocida a priori.

Es en esta dimensión que identificar los estratos de manera discreta contribuye a encontrar el óptimo del problema. Supongamos el caso de una ciudad de $k$ estratos de ingreso, donde $I_1$ representa a los más pobres, mientras que $I_k$ a los más ricos. Como $\tilde{I}$ es sólo relevante para identificar la elección de cada estrato, sin conocerlo podemos asumir que la condición $I_j < \tilde{I} < I_{j+1}$ se cumple para algún estrato $j$. Esto implica que estratos cuyo ingreso sea mayor o igual a $I_{j+1}$ eligen viajar pagando $P$

por viaje, mientras que estratos con ingreso menor o igual a $I_j$ comprarán la tarjeta de valor $T$. Visto de otra manera, tal como vimos en la Figura 3.7, esto es equivalente a decir que el par $(P^*, T^*)$ se encuentra por encima de la curva de indiferencia de $I_j$ y por debajo de la de $I_{j+1}$.

Como las curvas de indiferencia no se intersectan sino en el origen, los $k$ estratos definen $k+1$ regiones en las que podría estar la curva de indiferencia asociada a $\tilde{I}$. En cada caso es posible encontrar el par óptimo $(P_j^*, T_j^*)$ asociado a esa región $j$ particular que se caracteriza por hacer que $\tilde{I}$ realmente pertenezca al intervalo supuesto.

A partir de lo anterior, se puede empezar resolviendo el caso en que $\tilde{I} < I_1$ y encontrar $P_1^*$, precio que todos elegirán. A continuación, se asume que $I_1 < \tilde{I} < I_2$ y nuevamente se resuelve el problema para encontrar $(P_2^*, T_2^*)$. Así, sucesivamente se resuelven $k+1$ casos, donde el último sería cuando $\tilde{I} > I_k$ y todos viajan con una tarjeta de valor $T_k^*$. En conclusión, se deben resolver $k+1$ problemas de maximización de la forma

$$\begin{aligned} \max_{P,T} \quad & BS \\ \text{s.a.} \quad & \pi \geq 0 \qquad\qquad (\lambda) \\ & P > P(T, I_j) \\ & P(T, I_{j+1}) > P \end{aligned} \tag{3.25}$$

donde $P(T, I_j)$ es la curva de indiferencia del estrato de ingreso $I_j$ y las restricciones indican que la solución debe estar en la zona acotada, para que cada usuario escoja la alternativa que le corresponda.

Resolviendo los $k+1$ casos, considerando los que resulten compatibles, el que tenga el mayor bienestar social asociado será óptimo global del problema. Es interesante notar que el óptimo puede ser el caso donde sólo se ofrece precio o sólo tarjeta, lo que quiere decir que no siempre será preferible que coexistan ambas tarifas.

## 3.3. Síntesis y conclusiones

En el presente capítulo analizamos el efecto doble que posee el ingreso sobre la demanda por viajes en transporte público. Por una parte, notamos que si un individuo decide comprar una tarjeta de valor $T$ a principio de mes, que le da derecho a ilimitados viajes, su demanda en el plano $PX$ se contraerá en alguna magnitud, acercándose al origen. Por otra parte, si consideramos el ingreso como una característica socioeconómica del usuario, los pobres serán por lo general los usuarios más activos en el mercado del transporte público, haciendo más viajes a un mismo precio, es decir, su demanda estará sobre la de los ricos en $PX$. Demostramos que si se ofrecen dos opciones de pago: una tarjeta $T$ mensual y un precio $P$ por viaje realizado, estratos de ingreso más altos que un cierto $\tilde{I}$ indiferente, elegirán pagar el unitario por viaje, mientras que los más bajos, elegirán comprar la tarjeta. Finalmente, extendiendo el enfoque de Carbajo considerando los efectos descritos del ingreso, se planteó el modelo de tarificación y se encontraron expresiones para $P$ y $T$ que maximizan el bienestar social (ecuaciones 3.17 y 3.23), además de la holgura complementaria que asegura la cobertura de costos de los operadores (ecuación 3.24).

Con el fin de hacer frente al problema de que el ingreso indiferente depende del par óptimo prevaleciente, se encontró una manera de resolver el problema ayudado por la identificación discreta de

$k$ estratos de ingreso. Dependiendo de la ubicación de la curva de indiferencia asociada al ingreso indiferente en el plano $PX$, se identificaron $k+1$ regiones de pares $(P, T)$ en las cuales se encontró una solución particular del problema. Aquella con un mayor bienestar social asociado es la solución general del problema.

En el siguiente capítulo implementaremos el modelo desarrollado en una ciudad estilizada con estratos cuyo ingreso presenta grandes diferencias.

# Capítulo 4

# Simulación y resultados del modelo

Una característica transversal a todas las capitales latinoamericanas es que en ellas convive gente con grandes diferencias de ingreso, reflejadas en muchos aspectos, incluyendo la localización de la vivienda, el tipo y lugar de trabajo, las actividades que realizan y la posesión de automóvil. En este caso, nos enfocaremos en la forma de moverse por la ciudad. Las diferencias de ingreso se traducen en una alta tasa de motorización para los estratos acomodados y menor cantidad de autos para la gente de ingresos bajos. Por ejemplo, en Santiago la proporción entre el ingreso del primer y el décimo decil es de aproximadamente 15, mientras que la proporción entre las tasas de motorización es de aproximadamente 8. Por todo esto es que, en general, quienes pertenecen a estratos de ingreso más altos viajan en sus autos, mientras que los individuos de estratos de ingreso menor son usuarios frecuentes del transporte público, pese a que existen ricos que viajan en micros o metro y pobres que viajan en transporte privado.

En este capítulo representaremos una ciudad con estratos muy diferenciados según su ingreso, donde se accede al transporte público a través de la compra de una tarjeta mensual o pagando un precio unitario por viaje. Utilizaremos el modelo desarrollado en el capítulo anterior con el fin de calcular valores numéricos óptimos para ambas alternativas y veremos cómo cambian según se modifican las condiciones del problema.

## 4.1. Representación de la demanda y del bienestar social

Previo a definir los estratos de ingreso y los parámetros asociados a ellos, necesitamos encontrar una forma funcional para la demanda por viajes en transporte público. Del capítulo anterior concluimos que la demanda por viajes en transporte público depende del ingreso $I$ del individuo, del precio $P$ por viaje y del valor $T$ de la tarjeta, es decir, $X(P, T, I)$. Utilizaremos una función lineal de la forma

$$X_i(P, T, I_i) = A_i - \delta_T \cdot B_i \cdot \frac{T}{I_i} - (1 - \delta_T) \cdot \frac{P}{C_i} \tag{4.1}$$

donde $X_i$ representa los viajes de un usuario promedio del estrato de ingreso $I_i$. El parámetro $\delta_T$ caracteriza la elección del usuario y vale 1 si éste compra la tarjeta, mientras que si viaja pagando $P$ por viaje, toma el valor de 0. Por último, sabemos que la tarjeta actúa como una fracción del ingreso del individuo, por lo cual la representaremos a través del término $T/I_i$.

En cuanto a los parámetros, $A_i$ representa los viajes que realiza cada individuo en el caso que el transporte público fuese gratis, ya que es donde la función de demanda corta el eje $X$. Lo relacionaremos inversamente con la posesión de automóvil, ubicando la demanda de individuos con menores ingresos más alejada del origen que la de usuarios de estratos más ricos.

Distinto es el caso cuando hay un incremento en la calidad del transporte público. Mejoras como aumentar frecuencias, aire acondicionado o asientos más cómodos, generan que los usuarios hagan más viajes por el mismo precio original, lo que se refleja en un aumento conjunto de los $A_i$ de todos los estratos de ingreso. Concluimos entonces que cambios en la tasa de motorización de un estrato o en la calidad del transporte público pueden ser capturados a través de cambios en parámetro $A_i$.

Por otra parte, sabemos que la contracción de la demanda depende de cuán sensible sea el individuo al valor de la tarjeta. Esta sensibilidad es capturada por el parámetro $B_i$, que determina que el individuo en vez de hacer $A_i$ viajes, realice $A_i - B_i \cdot T/I_i$ al comprar un abono. La expresión para la elasticidad de la demanda con respecto al valor de la tarjeta es

$$\left|\eta_{X,T}\right| = \frac{B_i \cdot T}{A_i \cdot I_i - B_i \cdot T} \tag{4.2}$$

de la cual concluimos que individuos con menor sensibilidad al valor de la tarjeta estarán representados por menores valores de $B_i$.

Finalmente, el parámetro $C_i$ permite capturar la sensibilidad del individuo con respecto al precio. Analíticamente, se puede observar que el punto donde la demanda intersecta al eje de los precios es $A_i \cdot C_i$ y que cambios en la pendiente de la función, pueden ser representados por variaciones de $C_i$. Sabemos que la elasticidad de la demanda con respecto al precio es

$$\left|\eta_{X,P}\right| = \frac{P}{A_i \cdot C_i - P} \tag{4.3}$$

a partir de la cual podemos concluir que individuos más inelásticos al precio del transporte público serán representados por mayores valores de $C_i$.

Una vez que se conoce el papel que cumple cada parámetro en la función de demanda, seguiremos con el cálculo de los excedentes. Dependiendo de la alternativa de pago que elijan los individuos del estrato de ingreso $I_i$, el excedente del consumidor ($EMC_i$) resultó ser

$$EMC_i = \begin{cases} \dfrac{N_i \cdot C_i}{2} \cdot \left(A_i - \dfrac{P}{C_i}\right)^2 & \text{si i elige P} \\ \\ \dfrac{N_i \cdot C_i}{2} \cdot \left(A_i^2 - B_i^2 \cdot \dfrac{T^2}{I_i^2}\right) - N_i \cdot T & \text{si i elige T} \end{cases} \tag{4.4}$$

Al igualar estos beneficios y reordenando los términos, se puede encontrar una expresión para la curva de indiferencia del estrato $I_i$

$$P = A_i \cdot C_i - \sqrt{A_i^2 \cdot C_i^2 - B_i^2 \cdot C_i^2 \cdot \frac{T^2}{I_i^2} - 2 \cdot C_i \cdot T} \tag{4.5}$$

Una vez conocidos los valores óptimos del precio y la tarjeta, $P^*$ y $T^*$, de la misma ecuación anterior se puede despejar el ingreso indiferente $\tilde{I} = \tilde{I}(P^*, T^*)$. Sabemos que el estrato representado por este ingreso, marca el quiebre entre quienes eligen precio o tarjeta y, del análisis de la Figura 3.7, concluimos que estratos de ingreso mayores al indiferente, $I_i > \tilde{I}$, eligen $P$, mientras que menores, $I_i < \tilde{I}$, eligen $T$.

Desde el punto de vista de los operadores, las ganancias asociadas a los viajes del estrato $I_i$ son

$$\pi_i = \begin{cases} N_i \cdot (P - m) \cdot \left(A_i - \dfrac{P}{C_i}\right) & \text{si i elige P} \\ \\ N_i \cdot T - m \cdot N_i \cdot \left(A_i - B_i \cdot \dfrac{T}{I_i}\right) & \text{si i elige T} \end{cases} \tag{4.6}$$

Finalmente, el bienestar social resulta

$$\begin{aligned} BS = {} & \sum_{I_i > \tilde{I}} \frac{N_i \cdot C_i}{2} \cdot \left(A_i - \frac{P}{C_i}\right)^2 + \sum_{I_i < \tilde{I}} \frac{N_i \cdot C_i}{2} \cdot \left(A_i^2 - B_i^2 \cdot \frac{T^2}{I_i^2}\right) - \sum_{I_i < \tilde{I}} N_i \cdot T \\ & + (P - m) \cdot \sum_{I_i > \tilde{I}} N_i \cdot \left(A_i - \frac{P}{C_i}\right) + \sum_{I_i < \tilde{I}} N_i \cdot T - m \cdot \sum_{I_i < \tilde{I}} N_i \cdot \left(A_i - B_i \cdot \frac{T}{I_i}\right) - F \end{aligned} \tag{4.7}$$

a partir del cual, usando los criterios establecidos en el capítulo anterior se pueden encontrar los óptimos para el precio y el valor de la tarjeta.

## 4.2. Simulación

Con el fin de encontrar los óptimos para el precio unitario y el abono, caracterizaremos los estratos de la ciudad tipo a través de un ingreso mensual, los parámetros de la función de demanda por viajes y su proporción en la sociedad. Consideraremos tres estratos de ingreso ($k = 3$): Pobres, Medios y Ricos, con grandes diferencias de ingreso, donde los más pobres son una amplia mayoría[1].

[1] Los valores en la Tabla 4.1 cumplen con las relaciones de orden discutidas en el punto 4.1 y fueron escogidos de manera de reproducir de forma muy agregada el uso de transporte público en Santiago.

Tabla 4.1: Estratos de ingreso

| Estrato | Ingreso [$] | $A_i$ | $B_i$ | $C_i$ | Proporción de la población |
|---|---|---|---|---|---|
| Pobres | 100.000 | 48 | 20 | 55 | 0.60 |
| Medios | 500.000 | 25 | 30 | 65 | 0.35 |
| Ricos | 1.000.000 | 10 | 50 | 80 | 0.05 |

Como se muestra en la Tabla 4.1, el ingreso del estrato Pobre es diez veces menor que el de los ricos y estos últimos son sólo un 5 % de la sociedad ($I_{Rico} >> I_{Pobre}$ y $N_{Pobre} >> N_{Rico}$). Tal como dijimos anteriormente, la intensidad de uso del transporte público es capturada por el parámetro $A_i$, que crece a medida que los estratos se hacen más pobres. Notamos también que, para $T$ constante, el desplazamiento de la demanda es mayor en estratos de menor ingreso, lo que se refleja en un $B_i/I_i$ mayor en ellos. Finalmente, el hecho de que $C_i$ aumente con el ingreso, muestra que mientras más rico es el estrato, menos sensible será al precio.

Una vez que definimos los parámetros de las demandas para todos los estratos, podemos graficar las curvas en el plano $PX$, tal como se ve en la siguiente Figura (4.1)

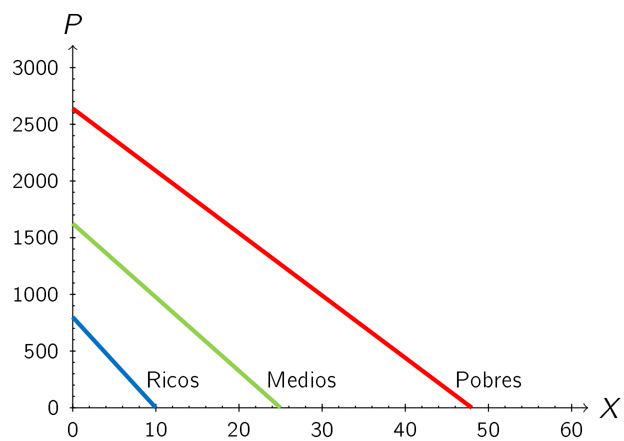



Figura 4.1: Demandas

donde la curva azul es la de los ricos, la verde la de los medios y la roja de los pobres.

Luego, usando la ecuacion (4.5), se pueden construir las curvas de indiferencia, tal como se muestra a continuación, en la Figura 4.2.

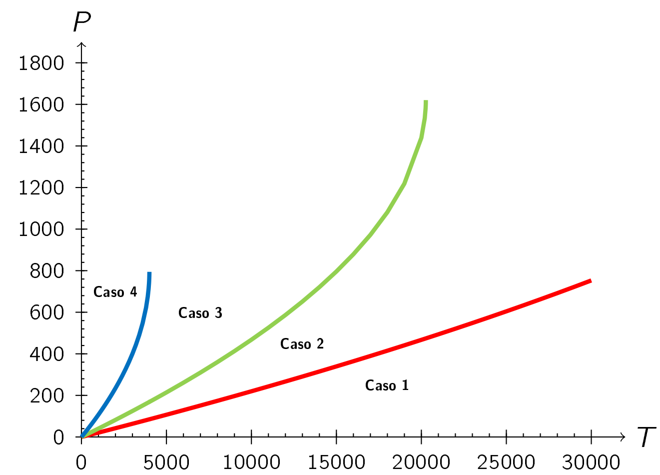



Figura 4.2: Curvas de indiferencia

Tabla 4.2: Elección de pago para los distintos casos

| Caso | Pobres | Medios | Ricos |
|---|---|---|---|
| Caso 1 | P | P | P |
| Caso 2 | T | P | P |
| Caso 3 | T | T | P |
| Caso 4 | T | T | T |

Siguiendo el análisis diseñado en el capítulo anterior, la existencia de tres estratos define cuatro regiones para la posible ubicación de $(P^*, T^*)$, identificadas en la Figura 4.2. La alternativa de pago elegida por cada estrato, en cada uno de los casos, se resume en la Tabla 4.2. El caso 1 será cuando todos eligen viajar con boleto unitario, es decir, el óptimo $(P^*, T^*)$ se encuentra bajo la curva de indiferencia del estrato Pobre ($\tilde{I} < I_{Pobre}$). El segundo queda determinado cuando el ingreso indiferente se encuentra entre el ingreso de los estratos Pobre y Medio ($I_{Pobre} < \tilde{I} < I_{Medio}$), el tercero, entre Medio y Rico ($I_{Medio} < \tilde{I} < I_{Rico}$) y, el cuarto, que es cuando todos eligen viajar comprando la tarjeta, ocurre cuando el par óptimo se encuentra sobre la curva de indiferencia del estrato Rico ($I_{Rico} < \tilde{I}$).

Una vez definidos los casos, los únicos datos faltantes para poder resolver son los relativos a los costos de los operadores, los que contemplan un costo marginal $m$ por cada viaje que se realiza en el sistema y una componente fija $F$ mensual. El costo marginal se aproximará a $m = \$220/viaje$ (obtenido por Batarce, 2012, para Santiago), y una componente fija $F = \$51.616$ millones al mes[2]. Se considerará un total de $N = 4,8$ millones de usuarios de transporte público (CGTS, 2012).

## 4.3. Resultados

Una vez que contamos con todas las herramientas para resolver el problema, podemos encontrar las soluciones para los cuatro casos anteriores utilizando las ecuaciones (3.17) y (3.23). En la Tabla (4.3) encontramos los valores óptimos para el precio y el valor de la tarjeta, $(P^*, T^*)$, además del bienestar social y el número de viajes asociado a cada caso

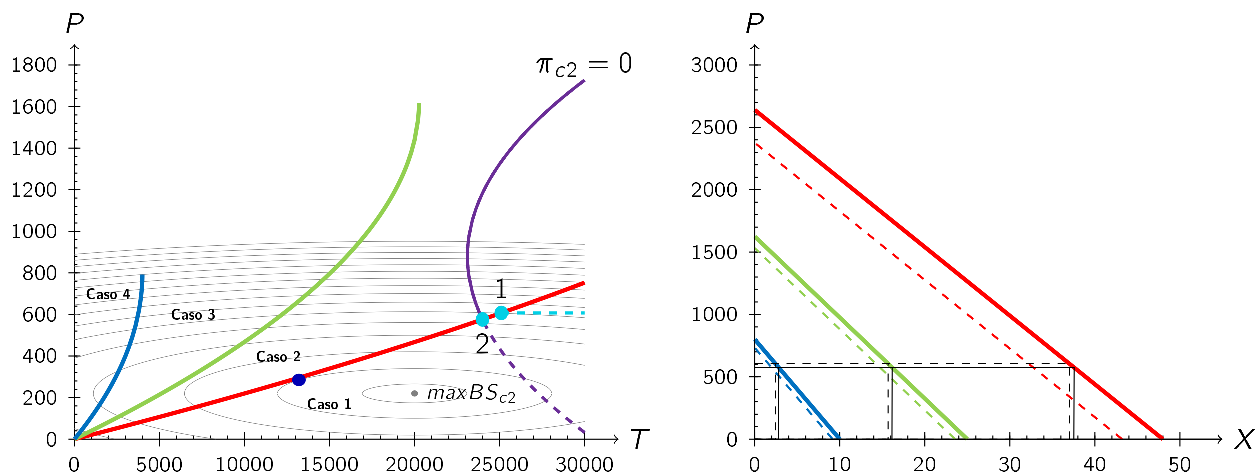
[2]Durante el transcurso del año 2011, un total de 4,8 millones de usuarios efectuaron 1.098 millones de viajes en el sistema de transporte público de la ciudad de Santiago (CGTS, 2012). Durante ese mismo período, los costos observados por parte de los operadores de Transantiago fueron de, aproximadamente $860.957 millones. En valores mensuales esto significa 91,5 millones de viajes, asociados a un costo variable $(X \cdot m)$ de $20.130 millones para el operador. Asumiendo que el resto del gasto proviene de fuentes fijas, obtenemos un valor de $F = \$51.616$ millones al mes, que será el que usaremos en las simulaciones.

Tabla 4.3: Resultados

| Caso | P | T | BS [$10^{10}\$/mes$] | Viajes individuales | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Pobre | Medio | Rico |
| Caso 1 | 607,1 | – | 12,16 | 37 | 16 | 2 |
| Caso 2 | 575,9 | 23993,1 | 12,59 | 43 | 16 | 3 |
| Caso 3 | infactible | | – | | | |
| Caso 4 | infactible | | – | | | |

Previo a analizar cada caso y su solución, notamos que los casos 3 y 4 resultan infactibles. El caso 3, debido a que no existen combinaciones $(P, T)$ en su región factible que cumplan simultáneamente con la condición de que los individuos del estrato Rico elijan $P$ y se cubran los costos de los operadores. El caso 4 no tiene solución porque no hay ningún valor para $T$ que cumpla la restricción presupuestaria y entregue un excedente positivo a los individuos de mayor ingreso.

Descartados los casos infactibles, analicemos los dos casos restantes, representados gráficamente en la Figura 4.3. El caso 1, cuando el precio es la única alternativa por la que se puede optar, puede ser tomado como base de comparación. Allí, el valor óptimo obtenido es de \$607 y el total de viajes que se realizan bajo esta situación es de 133,3 millones, aproximadamente. En la Figura 4.3.a observamos, representadas por una línea punteada a partir del punto 1, todas las soluciones posibles para este caso. Pese a que estamos en la condición de un único precio, podemos graficarlas en el plano $PT$, debido a que todos los pares $(P, T)$ pertenecientes a la recta se encuentran en la zona donde los tres estratos escogen pagar la tarifa unitaria, sin importar el valor de $T$ ofrecido. En cuanto a las ganancias de los operadores, como impusimos la condición de que se cubrieran los costos y el multiplicador asociado resultó $\lambda = 0,31$, la restricción se hace activa y no existen ganancias asociadas a este caso.




(a) (b)

Figura 4.3: Resultados en los planos $PT$ y $PX$

El punto 2 de la Figura 4.3.a representa la solución del caso 2. De la Tabla 4.3 notamos que el $BS$ es el mayor entre los casos factibles y, por lo tanto, es la solución del problema. Los óptimos calculados son de $P_2^* = \$576$ para el precio, elegido por Medios y Ricos, y $T_2^* = \$23.993$ para la tarjeta, que es adquirida por los individuos del estrato Pobre. En el plano PX (Figura 4.3.b) se observa que el precio óptimo (en línea continua) es menor que el precio resultante en el caso 1 (en línea punteada), induciendo un aumento del total de viajes en los estratos Medio y Rico (que pagan unitariamente). En el estrato Pobre el aumento es mayor debido a que se hacen más viajes a precio cero aunque la curva de demanda se contrae por la compra de tarjeta. Es interesante observar que en el óptimo los Pobres gastan un equivalente a \$555 por viaje, \$52 menos que los \$607 del caso 1; de aquí lo relevante del aumento del número de viajes debido al uso de la tarjeta. Considerando los tres estratos, el total de viajes aumenta en 14 % con respecto al caso 1.

Siguiendo la Figura 4.3, la curva $\pi_{c_2} = 0$ representa el lugar geométrico de todos los pares $(P, T)$ que hacen que las ganancias de los operadores sean nulas, bajo las condiciones del caso 2. Pese a que esta curva se define en todo el plano $PT$, sólo los pares pertenecientes a la región factible del caso son válidos y se representan de manera continua. En gris se muestran las curvas de nivel del bienestar social para el caso 2, el cual crece a medida que las curvas se acercan al punto de máximo bienestar social irrestricto, lo que ocurre para $P = \$220 = m$ (como era de esperar) y $T = \$20.000$ (punto $maxBS_{c_2}$). Como este punto se encuentra fuera de la región asociada al caso 2, el máximo bienestar social sin cobertura de costos para este caso se encontrará en el punto de tangencia entre la curva de indiferencia más cercana a $maxBS_{c_2}$ y la curva de bienestar máximo que se encuentre en la región (punto azul); sin embargo, en este punto no se cubren los costos de operación y se requeriría un subsidio de \$21.895 millones.

Al imponer la restricción presupuestaria, el espacio de soluciones factibles son todos los pares que están a la derecha de la curva $\pi_{c_2} = 0$, dentro de la región del caso 2. Debido al crecimiento del bienestar social hacia $maxBS_{c_2}$, el máximo bienestar social cubriendo costos siempre se encontrará en la intersección de la curva de indiferencia con la de ganancias nulas, salvo que $maxBS_{c_2}$ se encuentre dentro de la región factible. La solución restringida corresponde al punto 2 de la Figura 4.3.a, donde los individuos del estrato de menor ingreso serán indiferentes entre ambas alternativas y los operadores no obtendrán ganancias de esta situación.

En conclusión, encontramos las soluciones $(P_j^*, T_j^*)$ para los casos factibles y, dado que definimos el óptimo general del problema como el que tuviese el mayor bienestar social asociado, observamos que el óptimo del problema es $P_2^* = \$576$ por viaje y $T_2^* = \$23.993$ mensual, con un bienestar social de $BS_2 = 12,59 \cdot 10^{10}$ $\$/_{mes}$.

## 4.4. Análisis de sensibilidad

Los valores óptimos $(P^*, T^*)$ han sido obtenidos para parámetros dados de las funciones de demanda y costos, por lo que resulta interesante estudiar en qué dirección cambia el par óptimo al modificar marginalmente las condiciones iniciales del problema. Debido a que la función de demanda por viajes utilizada nos permite reflejar la tasa de motorización de cada estrato, la calidad del transporte público e individuos con distinta elasticidad con respecto al precio y la tarjeta, propondremos cinco escenarios y estudiaremos cómo cambia la solución del problema.

Tal como ocurre en el problema original, en cada uno de los escenarios el caso 2 es quien obtiene el mayor bienestar social, por lo que nos concentraremos en su análisis en particular.

### 4.4.1. Escenario 1: Mayor tasa de motorización en el estrato pobre

Al caracterizar la función de demanda por viajes, mostramos que cambios en la tasa de motorización de un estrato pueden ser reflejados a través del parámetro $A_i$. En este escenario estudiaremos el comportamiento del par óptimo $(P^*, T^*)$ cuando el estrato de menor ingreso presenta una mayor tasa de motorización con respecto al escenario original. A través de un **menor $\mathbf{A_i}$ del estrato Pobre ($\mathbf{A_P}$)** se reflejará una **mayor tasa de motorización** en el estrato.

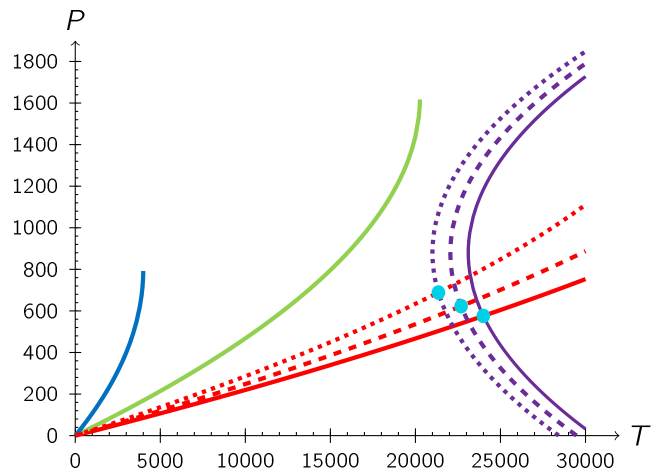



Figura 4.4: Mayor tasa de motorización en estrato Pobre

Los resultados se presentan en la Figura 4.4, donde las líneas continuas representan el escenario original, las líneas discontinuas representan el escenario cuando $A_P$ es 10 % menor y con línea punteada cuando es 20 % menor. Para los distintos niveles de $A_P$ notamos que existen cambios tanto en la curva de indiferencia como en la curva donde las ganancias de los operadores son nulas. Para cada situación, el par óptimo se encuentra en la intersección de la curva de indiferencia del estrato Pobre con la curva de ganancias nulas de los operadores.

El óptimo es tal que el precio es mayor y la tarjeta menor, para ambos niveles de disminución de $A_P$. Intuitivamente, el valor de $T$ se explica debido a que una mayor tasa de motorización implica un menor número de viajes en transporte público y, por lo tanto, un menor gasto en él. Dado que la solución se encuentra sobre la curva de indiferencia del estrato Pobre, para que estos conserven la indiferencia a partir de un gasto menor, la tarjeta debe tener un menor valor. En cuanto al precio, una tarjeta de menor valor provoca una reducción en las ganancias de los operadores, las que deben ser cubiertas por un precio óptimo mayor para que se cubran los costos.

Veamos lo anterior analíticamente. Al estar ambas curvas (de indiferencia y ganancias nulas) parametrizadas, se puede encontrar una expresión analítica para la intersección de ambas y así representar el movimiento simultáneo que estas presentan. Cuando obtuvimos la expresión (4.5) para las curvas de indiferencia, lo hicimos despejando el precio a partir de la igualdad de los excedentes obtenidos eligiendo precio o tarjeta, para llegar a una función de la forma $P(T)$. Análogamente, si despejamos el valor de la tarjeta en función del precio, llegamos a la expresión.

$$T = \frac{I_i^2}{C_i \cdot B_i^2} \cdot \sqrt{1 - P^2 \cdot \frac{B_i^2}{I_i^2} + 2 \cdot A_i \cdot P \cdot C_i \cdot \frac{B_i^2}{I_i^2}} - \frac{I_i^2}{C_i \cdot B_i^2} = T(P) \tag{4.8}$$

donde $T(P)$ depende de la tasa de motorización del estrato a través de $A_i$.

Por otro lado, a partir de la ecuación 4.6 conocemos las ganancias de los operadores, para las condiciones del caso 2. Como sabemos que la restricción presupuestaria es activa en la solución, el par $(P^*, T^*)$ cumple también con $\pi_{c_2} = 0$, es decir

$$\begin{aligned} \pi_{c_2}(P^*, T^*) =& (P^* - m) \cdot \left[ N_M \cdot \left( A_M - \frac{P^*}{C_M} \right) + N_R \cdot \left( A_R - \frac{P^*}{C_R} \right) \right] \\ &+ N_P \cdot T^* - m \cdot N_P \cdot \left( A_P - B_P \cdot \frac{T^*}{I_P} \right) - F = 0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Reemplazando la ecuación $T(P)$ de (4.8) en (4.9) se obtiene una ecuación implícita para el precio óptimo $P^*$ en la intersección entre las curvas de ganancias nulas y la curva de indiferencia del estrato Pobre, $\pi_{c_2}[P^*, T(P^*)] = 0$, que depende de $A_P$.

Como se quiere analizar el cambio en los precios a partir de una variación en la tasa de motorización del estrato pobre (reflejada en $A_P$), necesitamos conocer el signo de $\frac{dP^*}{dA_P}$. A partir del teorema de la función implícita, la expresión para esta derivada es

$$\frac{dP^*}{dA_P} = -\frac{\frac{\partial \pi_{c_2}}{\partial A_P}}{\frac{\partial \pi_{c_2}}{\partial P}} \tag{4.10}$$

donde las derivadas parciales están dadas por las siguientes expresiones

$$\frac{\partial \pi_{c_2}}{\partial A_P} = m \cdot N_P - \frac{P \cdot N_P \cdot (1 + m \cdot \frac{B_P}{I_P})}{\sqrt{1 - P^2 \cdot \frac{B_P^2}{I_P^2} + 2 \cdot A_P \cdot P \cdot C_P \cdot \frac{B_P^2}{I_P^2}}}$$

$$\frac{\partial \pi_{c_2}}{\partial P} = N_M \cdot \left( \frac{2P - m}{C_M} - A_M \right) + N_R \cdot \left( \frac{2P - m}{C_R} - A_R \right) - \frac{N_P \cdot (1 + m \cdot \frac{B_P}{I_P}) \cdot (A_P - \frac{P}{C_P})}{\sqrt{1 - P^2 \cdot \frac{B_P^2}{I_P^2} + 2 \cdot A_P \cdot P \cdot C_P \cdot \frac{B_P^2}{I_P^2}}}$$

Como $P > m$, ya que se tiene un costo fijo $F > 0$ y se quiere cubrir los costos de los operadores, se puede demostrar analíticamente que $\frac{\partial \pi_{c_2}}{\partial P} < 0$ y, numéricamente, que $\frac{\partial \pi_{c_2}}{\partial A_P} < 0$. A partir de estos resultados, concluimos que $\frac{dP}{dA_P} < 0$ y, por lo tanto, mostramos que la relación que existe entre los movimientos de las curvas de indiferencia y de ganancias nulas no permite que el precio $P^*$ baje cuando se presenta una mayor tasa de motorización en el estrato de menor ingreso.

En la Tabla 4.4 observamos que los resultados numéricos para las dos condiciones impuestas sobre la tasa de motorización de los individuos de menor ingreso confirman los desarrollos anteriores. Notamos además que el bienestar social disminuye cuando se presenta una mayor motorización en el estrato Pobre, debido a que los viajes totales (y los excedentes de los usuarios) en este modo disminuyen. La disminución del bienestar social es porcentualmente mayor que la disminución del número de viajes, debido a que los individuos del estrato Pobre son una gran mayoría de la sociedad y cualquier efecto sobre su demanda (como una contracción, en este escenario) tendrá un impacto importante en el $BS$. La disminución de los viajes de los estratos Medio y Rico se explica por el alza en los precios, mientras que en el Pobre, por el aumento en la tasa de motorización.

Tabla 4.4: Efecto de una mayor $TM_{Po}$

| | | | | Viajes Totales [$10^6$] | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Escenario ($A_P$) | $P^*$ | $T^*$ | BS [$10^{10}\$/mes$] | Pobre | Medio | Rico | Total |
| Original | 576 | 23993 | 12,59 | 124,4 | 27,1 | 0,7 | 152,2 |
| baja 10 % | 623 | 22687 | 9,25 | 110,8 | 25,9 | 0,5 | 137,2 |
| baja 20 % | 688 | 21351 | 6,28 | 97,1 | 24,2 | 0,3 | 121,7 |

Concluimos de este escenario que si la tasa de motorización en el estrato Pobre fuese mayor, el precio óptimo será mayor, mientras que el valor de la tarjeta, menor. El valor de $T$ siempre decrecerá, debido a que la intersección entre las curvas de indiferencia y las de ganancias nulas siempre se encontrará a la izquierda de la original. Si bien podría pensarse que un movimiento de gran magnitud de la curva de ganancias nulas podría disminuir el precio de equilibrio, mostramos que el movimiento de ésta última está vinculado con el de las curvas de indiferencia y obtuvimos como resultado que ante un menor valor del parámetro $A_P$ se generan precios mayores para el transporte público.

### 4.4.2. Escenario 2: Mejor calidad del transporte público

A diferencia del escenario anterior, una mejora en la calidad del transporte público puede ser representada por un **aumento en conjunto de los parámetros $\mathbf{A_i}$** de todos los estratos, debido a que la gente está dispuesta a pagar más por los mismos viajes. En este escenario representaremos esa mejora como un aumento en un 10 % en los parámetros $A_i$ de la sociedad. Acompañado de esto, el aumento de calidad se verá reflejado en un **incremento del costo marginal por viaje** para los operadores, de \$220 a \$250, ya que cada viaje se hace más caro.

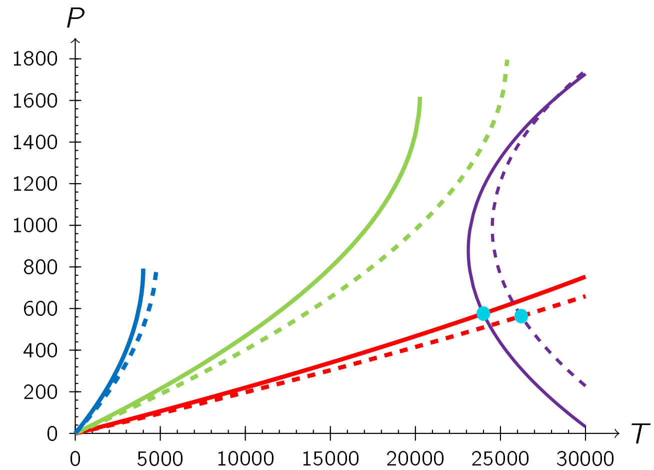



Figura 4.5: Transporte público de mejor calidad

Vemos en la Figura 4.5 que el efecto de aumentar $A_i$ genera que las curvas de indiferencia de los individuos se muevan hacia la derecha, ya que los individuos están dispuestos a pagar más por sus viajes, es decir, para un mismo precio, serán indiferentes con una tarjeta más cara que la original. El aumento en el costo marginal por viaje genera que los pares de la curva de ganancias nulas original ahora tengan pérdidas asociadas. Por lo tanto, para un mismo precio, se necesita una tarjeta de mayor valor para poder cubrir los costos, por lo que la nueva curva también estará más a la derecha.

Adicionalmente notamos que las curvas se intersectan en un precio menor que el original y un $T$ mayor, sin embargo si el costo marginal hubiese aumentado más, el desplazamiento de la curva de ganancias nulas habría intersectado en un par con un precio asociado mayor, generando ambigüedad en su comportamiento.

En cuanto a los resultados, los viajes aumentan en todos los estratos (11 % en el estrato Pobre, 20 % en el Medio y 43 % en el Rico), al igual que el bienestar social, que aumenta en un 31 % con respecto al caso original, pese a que se cobra una tarjeta más cara. Ambos incrementos se deben a la expansión de las demandas, ya que induce más viajes ante un mismo precio y genera mayores beneficios por cada viaje realizado.

Por lo tanto, una mejora en el sistema de transporte público se asocia a un incremento en el valor óptimo de la tarjeta y, dependiendo de cuanto más caro resulta cada viaje para los operadores, el precio óptimo puede aumentar o disminuir.

### 4.4.3. Escenario 3: Más usuarios en estratos extremos

En este escenario analizaremos los efectos de **cambiar el número de individuos que pertenecen a cada estrato**.En primer lugar moveremos personas del estrato Medio al Rico (situación a), disminuyendo a los primeros al 30 % para que los últimos aumenten a un 10 % del total de la población. En la situación b, serán los individuos del estrato Pobre los que aumentarán a un 70 %, en desmedro de los del estrato Medio, quienes disminuirán a un 25 %.

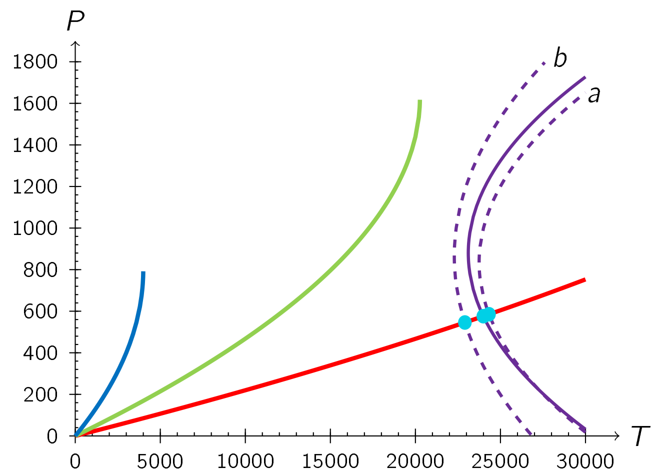



Figura 4.6: Más ricos (a) y más pobres (b)

Como las curvas de indiferencia son independientes de la cantidad de individuos de los estratos, un cambio en las proporciones no genera movimiento en ellas. Al modificar los $N_i$ sólo existen cambios en las ganancias de los operadores y, por lo tanto, en su curva de ganancias nulas. En la Figura 4.6 notamos que una mayor cantidad de ricos genera que los pares de la curva de ganancias nulas original no cubran los costos y la curva asociada a esta situación se encuentre a la derecha de la original. En cambio, cuando el $N_i$ del estrato Pobre es mayor, la curva se encuentra a la izquierda de la original.

En ambos casos se observa un efecto distinto a los escenarios anteriores, ya que en la situación *a* los costos son menores con respecto al escenario inicial, pero la curva de ganancias nulas asociada se encuentra a la derecha de la original. Lo mismo ocurre con la situación *b* que, pese a tener asociado un mayor costo, se logra cubrir con un precio y una tarjeta menor. Esto se debe a que gran parte de los costos se pagan de los ingresos provenientes de las tarjetas. Si observamos la Tabla 4.5, notamos que los ingresos asociados al pago de $T$, cubren entre el 81 % y el 87 % de los costos del sistema. Por lo tanto, en la situación *b*, donde hay una mayor proporción de individuos de menor ingreso, hay más usuarios que compran la tarjeta y, como consecuencia, un mayor ingreso para los operadores.

Tabla 4.5: Escenario 3

| | Viajes Totales [$10^6$] | | | | Costo total | % del costo | % del costo |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Escenario | Pobres | Medios | Ricos | Total | [$10^6$] | pagado por $P$ | pagado por $T$ |
| Original | 124,4 | 27,1 | 0,7 | 152,2 | 85102,4 | 18,8 | 81,2 |
| Más ricos | 124,2 | 23,0 | 1,3 | 148,6 | 84297,5 | 16,9 | 83,1 |
| Más pobres | 145,9 | 19,9 | 0,8 | 166,6 | 88262,7 | 12,8 | 87,2 |

Concluimos que una mayor proporción de ricos, genera un mayor precio y una tarjeta de mayor valor, debido a que los ingresos disminuyen en mayor proporción que los costos. Por el contrario, si la proporción de pobres es mayor, los ingresos por tarjeta aumentan en mayor medida que los costos asociados al aumento de viajes y los óptimos serán menores.

### 4.4.4. Escenario 4: Usuarios con menor sensibilidad al precio

En los últimos dos escenarios analizaremos los efectos cuando cambian las sensibilidades de los individuos con respecto a $P$ y a $T$. Comenzaremos con el caso en que los individuos presentan una **menor sensibilidad al precio**, representado por un **parámetros $C_i$ 20 % mayor** para todos los individuos.

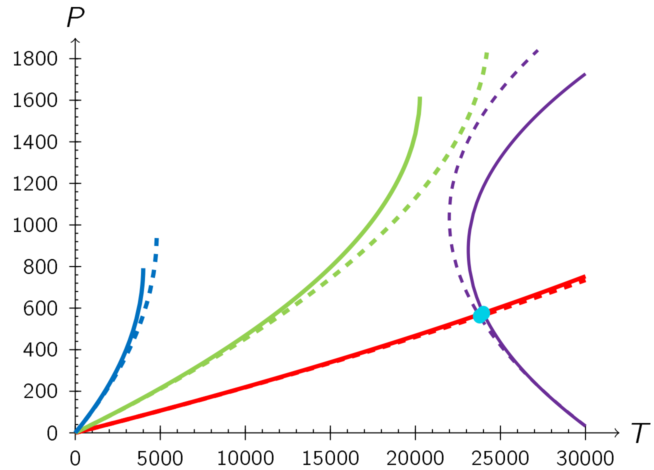



Figura 4.7: Escenario 4

Una mayor sensibilidad al precio significa que al usuario le importa menos cuánto le cobren por cada viaje. Por lo tanto, ante un precio constante, el individuo realizará un mayor número de viajes que los que hacía originalmente, generando un mayor gasto y moviendo las curvas de indiferencia en la dirección que se muestra en la Figura 4.7.

Notamos que la nueva curva de ganancias nulas para los operadores se encuentra a la izquierda de la original, pero que en la zona de intersección con la curva de indiferencia del estrato Pobre las separaciones son muy pequeñas. Esto se debe mayormente a que los individuos de menor ingreso continúan comprando la tarjeta y, como $C_P$ no influye en sus viajes no presentan cambios sustanciales y su gasto en transporte público no muestra cambios.

Los viajes totales y los costos totales son un 2 % y un 1 % mayores que en el escenario original, respectivamente. Por otro lado, los ingresos por parte de quienes pagan el boleto unitario son un 8 % mayor, explicando el movimiento de la curva de ganancias nulas, debido a que los costos crecen en menor proporción que las ganancias, el sistema necesita una menor cantidad de dinero para financiarse y se justifica que, para un mismo precio, se necesite una tarjeta menor para cubrir los costos.

Concluimos que si los usuarios presentan una mayor sensibilidad al precio, se observará un menor precio y una tarjeta de menor valor.

### 4.4.5. Escenario 5: Usuarios con menor sensibilidad al valor de la tarjeta

En el último escenario analizaremos el óptimo del problema cuando existen cambios en la elasticidad de los usuarios con respecto al valor de la tarjeta. Como en este caso estudiaremos individuos cuya sensibilidad es menor, representaremos este fenómeno mediante **un menor parámetro $\mathbf{B_i}$** (20 %) de todos los estratos.

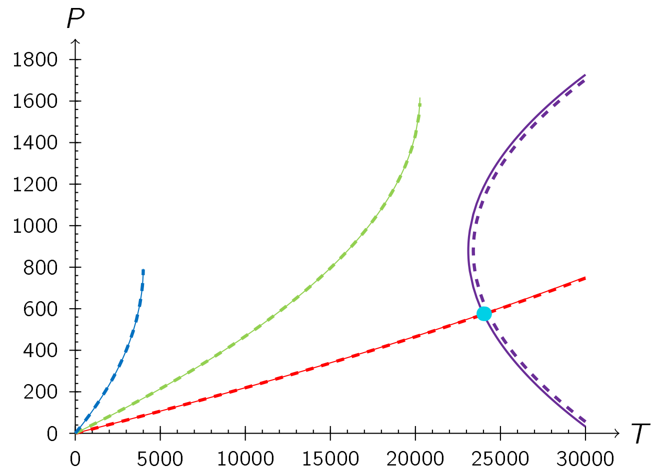



Figura 4.8: Escenario 5

Analíticamente, a partir de la ecuación (4.5), sabemos que un menor $B_i$ para los estratos se traduce en un movimiento hacia abajo de la curva de indiferencia. Es decir, para un valor de $T$ fijo, el precio que hará indiferente al individuo será menor cuando $B_i$ también lo sea. Al observar la Figura 4.8 notamos que estos movimientos son muy pequeños en comparación con los otros escenarios.

La nueva curva de ganancias nulas para los operadores se ubica levemente hacia la derecha de la original, debido a que el mayor número de viajes de quienes compran tarjeta generan un crecimiento de los costos mayor que el de los ingresos, es decir, el sistema se vuelve más caro y es necesario un precio mayor para cubrir los costos si es que se mantiene el precio de la tarjeta.

En cuanto a los resultados, el valor obtenido para la tarjeta es levemente mayor que el original, mientras que el precio se mantiene constante. En rigor el precio podría ser mayor o menor dependiendo de cuán menor sea la sensibilidad de los usuarios con respecto a $T$. El valor de la tarjeta, en cambio, siempre será mayor que el original.

En conclusión, una menor elasticidad con respecto a $T$ conducirá a un óptimo tal que el valor de la tarjeta es mayor que el original y un precio que puede ser mayor o menor dependiendo del cambio en $B_i$.

## 4.5. Resumen de los resultados

A continuación mostramos una tabla resumen con todos los escenarios y los resultados obtenidos

Tabla 4.6: Tabla Resumen

| | | | | Demandas agregadas [$10^6$] | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Escenario | Representación | $P^*$ | $T^*$ | Pobre | Medio | Rico | Total |
| Original | – | 576 | 23993 | 124,4 | 27,1 | 0,7 | 152,2 |
| Mayor $TM_{Pobres}$ | $\downarrow A_P$ en 10 % | 623 | 22687 | 110,8 | 25,9 | 0,5 | 137,2 |
| | $\downarrow A_P$ en 20 % | 688 | 21351 | 97,1 | 24,2 | 0,3 | 121,7 |
| Mayor calidad buses | $\uparrow A_i$ en 10 % | 564 | 26223 | 137,5 | 32,5 | 1,0 | 171,0 |
| Más ricos | $\Delta\%_{Me} = -5$ $\Delta\%_{Ri} = +5$ | 585 | 24327 | 124,2 | 23,0 | 1,3 | 148,6 |
| Más pobres | $\Delta\%_{Me} = -10$ $\Delta\%_{Po} = +10$ | 546 | 22909 | 145,9 | 19,9 | 0,8 | 166,6 |
| Baja elasticidad a P | $\uparrow C_i$ en 20 % | 567 | 23866 | 124,5 | 29,9 | 1,0 | 154,1 |
| Baja elasticidad a T | $\downarrow B_i$ en 20 % | 576 | 24250 | 127,8 | 27,1 | 0,7 | 153,6 |

## 4.6. Síntesis y conclusiones

En este capítulo usamos el modelo desarrollado en el capítulo 3, aplicándolo a una ciudad estilizada y adecuada a las condiciones impuestas. Representamos una sociedad con tres estratos, caracterizados por ingresos significativamente distintos y donde los individuos de menores ingresos son una amplia mayoría. A cada estrato se le asoció una demanda por viajes en transporte público cuyos parámetros tienen la capacidad de reflejar cambios en ciertas características específicas.

Los efectos del ingreso también son capturados: como la demanda por viajes en transporte público depende de la posesión de automóvil, la que a su vez crece con el ingreso. Por esta razón estas demandas se ubican más alejadas del origen mientras menor sea el ingreso (y menor la posesión de automóvil) que caracteriza al estrato. Por otro lado, la disminución en el ingreso disponible es capturada por la contracción de la demanda una vez adquirida la tarjeta, en caso de ser elegida.

Una vez definidos los estratos de ingreso, se identificaron sus curvas de indiferencia y, delimitadas por ellas, cuatro distintas zonas en el plano $PT$ (para $k = 3$ estratos) donde podía ubicarse el par óptimo $(P^*, T^*)$. Al resolver los cuatro casos, la solución general del problema resultó tal que sólo el estrato Pobre elige la tarjeta, mientras que usuarios de estratos Medio y Rico prefieren pagar $P^*$.

Dos de los cuatro casos resultaron infactibles, debido a que no existía un par $(P, T)$ dentro de la región correspondiente al caso donde se cubriesen los costos. Para que estos pudiesen ser factibles sería necesario que la curva de ganancias nulas asociada al caso sea parte de la región correspondiente; esto sólo podría lograrse si el sistema tuviese un costo menor en $F$, $m$ o ambos, ya que son los únicos parámetros que modifican la curva de ganancias nulas sin afectar las curvas de indiferencia.

Analizamos distintos escenarios, reflejando cambios en las condiciones iniciales del problema, para estudiar el comportamiento del par óptimo. Cuando el estrato de menor ingreso presenta una mayor tasa de posesión de automóviles, observamos una baja en el valor de la tarjeta y un alza en el precio unitario, ambos movimientos explicados por la disminución en los viajes y el hecho de que el estrato Pobre es el que sigue siendo indiferente.

Cuando mejora la calidad de los buses, los usuarios están dispuestos a pagar más por cada viaje, mientras que el costo marginal aumenta para los operadores. Esto genera un incremento en el valor de la tarjeta y, dependiendo de la magnitud del incremento del costo, el precio puede subir o bajar.

En el tercer escenario modificamos la proporción de gente en los estratos extremos. Al aumentar el número de Ricos, disminuyendo los Medios, observamos que el valor de la tarjeta y del precio son mayores. Sin embargo, si traspasamos gente del estrato Medio al Pobre, ambos óptimos son menores, debido a que los ingresos por tarjeta, que son las principales ganancias del sistema, son considerablemente mayores.

Cuando se tienen usuarios con menor sensibilidad al precio o al valor de tarjeta los cambios no son tan significativos como en los otros tres escenarios. En ambos casos las curvas de indiferencia y de ganancias nulas presentan pequeños movimientos que modifican levemente los óptimos con respecto al escenario original. Con usuarios con menor sensibilidad al precio, $P^*$ y $T^*$ son menores, mientras que cuando la sensibilidad al valor de la tarjeta es menor, el precio tiene un comportamiento ambiguo y la tarjeta tiene un valor levemente mayor.

En ciertos escenarios se observa que la curva de ganancias nulas podría llegar a intersectar la curva de indiferencia del estrato Medio. Si esto ocurriese, el punto de intersección pasa a ser un punto factible de solución, donde los Medios serían indiferentes; sin embargo, debido a que el máximo irrestricto del bienestar social se encuentra en la zona del caso 1, el óptimo siempre será la intersección con la curva del estrato Pobre.

En conclusión, implementamos el modelo y logramos obtener los óptimos para la sociedad. Al ponernos en escenarios, analizamos el comportamiento de la solución del problema según como cambiaban las condiciones iniciales. Pese a la variación en los parámetros, las elecciones de los distintos estratos siempre se mantuvieron bajo las condiciones del Caso 2, es decir, los individuos del estrato Pobre siempre eligen viajar comprando una tarjeta.

# Capítulo 5

# Síntesis, conclusiones y líneas futuras de investigación

En esta tesis se desarrolló un enfoque para modelar la decisión, a través del ingreso, de los usuarios de transporte público que se enfrentan a dos alternativas de pago: la compra de un abono mensual o un boleto por viaje realizado. El objetivo es encontrar los valores óptimos (conjuntos) de abono y boleto, tales que maximicen el bienestar social cubriendo el costo de los operadores. Los antecedentes teóricos se remontan a la tarificación en dos partes, que consiste en separar el cobro a los consumidores en una componente fija y una variable, es decir, se les hace pagar por el derecho a participar en el mercado y por el consumo que tengan en él. En el caso del sistema con abonos, la tarjeta se asocia con una tarifa en dos partes cuya parte variable es nula, mientras que en el caso del boleto, la entrada al mercado está asegurada. Todas las teorías de tarificación en dos partes suponen que no hay efecto ingreso tal como se entiende en la ecuación de Slutsky, lo que equivale a plantear que el gasto en el bien o servicio correspondiente es una proporción despreciable del ingreso.

Carbajo (1988) desarrolla un modelo que aplica esta diferenciación de cobros al mercado de transporte público, a través de una tarjeta de valor $T$, que da derecho a ilimitados viajes en un período de tiempo, y el pago unitario de $P$ por viaje. Con el fin de establecer diferencias en los usuarios, el autor asocia a cada individuo un parámetro de gusto $\theta$, relacionado con la cantidad que consume, donde, a mayor valor de este parámetro, más serán los viajes realizados por el individuo al mismo nivel de precios. Según el parámetro que caracterice a un individuo en particular, cada alternativa de pago le entregará distinto beneficio, medido por el excedente marshalliano del consumidor ($EMC$), eligiendo aquella que le entregue el mayor. Al hacer que los usuarios se diferencien de manera continua, se define un usuario indiferente que marca el corte entre quienes eligen cada alternativa y, a partir de él, se llega a expresiones para el precio y la tarjeta óptimos, definidos como aquellos que maximizan el bienestar para el conjunto de usuarios. En cuanto a la representación del parámetro de gustos, Carbajo insinúa que puede ser relacionado con el ingreso; sin embargo, observamos que la incorporación de este como un indicador de gusto no es compatible con la ausencia de efecto ingreso supuesta.

En esta tesis desarrollamos un modelo de tarificación de transporte público donde la opción entre pago de $T$ o $P$ es planteado en un universo de usuarios que presentan grandes diferencias de ingreso, donde los individuos más ricos son quienes menos usan el sistema y donde el gasto en transporte público puede ser relevante para gran parte de la población. La introducción de la tarjeta tiene un interés no menor, ya que nos obliga a distinguir dos efectos que tiene el ingreso sobre la demanda por viajes. El primero tiene relación con que si el individuo comprase (al principio del período) la tarjeta, su ingreso disponible disminuye, contrayendo la demanda por viajes, siendo esta contracción más importante en estratos de ingresos menores que en aquellos con altos ingresos. El segundo establece que la diferencia entre estratos de ingreso se traduce en distintos niveles de posesión de automóvil, los que están inversamente relacionados con la proporción de viajes en transporte público, de forma tal que las demandas de individuos de menor ingreso estarán por sobre las de individuos de mayor ingreso.

El uso del ingreso como variable de diferenciación entre individuos es relevante para el análisis del valor óptimo de las tarjetas; trabajar con gustos oculta el efecto que tienen los abonos sobre el ingreso disponible, dejando efectos fundamentales sin considerar. El doble papel que posee el ingreso, visto como ingreso disponible o característica socio-económica a través de la posesión de automóvil, dificulta también la representación de manera continua, debido a que induce movimientos de las demandas en distintos sentidos, cuando se mira a partir de un individuo o como el conjunto de individuos de distintos estratos de ingreso.

Decidimos trabajar con una sociedad separada en estratos de ingreso para poder representar adecuadamente los efectos opuestos asociados al ingreso. El efecto sobre el ingreso disponible se observa dentro de cada estrato, acercando al origen la demanda por viajes en el caso en que los individuos escojan viajar pagando $T$, a la vez que individuos con menor ingreso tienen su demanda por sobre la de individuos de mayor ingreso. A partir de esto definimos que la demanda por viajes en transporte público no sólo depende del precio $P$, sino que también del valor de la tarjeta $T$ y del estrato de ingreso del individuo $I_i$. Notamos que el hecho de que la demanda sea función del valor de la tarjeta es un avance con respecto a Carbajo, cuyo modelo representa los viajes realizados mediante este medio de pago invariantes ante cambios en $T$.

Para un valor conocido del par $(P, T)$ cada individuo escoge la alternativa que le entregue mayor beneficio, donde el corte entre quienes eligen $P$ o $T$ lo da el usuario de ingreso indiferente $\tilde{I}$, quien recibe igual beneficio de ambas alternativas. Definiendo el concepto de curva de indiferencia para un individuo del estrato de ingreso $I_i$ como el lugar geométrico de todos los pares $(P, T)$ que le generan igual bienestar, se demostró que individuos de estratos de ingreso mayores al indiferente, $I_i > \tilde{I}$, escogerán pagar $P$ por viaje, mientras que individuos de estratos de ingresos menores al indiferente, $I_i < \tilde{I}$, comprarán la tarjeta de valor $T$.

Para $\tilde{I}$ conocido, el bienestar en los estratos de mayor y menor ingreso será el $EMC$ usando $P$ y $T$, respectivamente, lo que permite encontrar $P^*$ y $T^*$ que maximicen el bienestar social cubriendo costos. La dificultad que se presenta es que $\tilde{I}$ es función del par $(P^*, T^*)$ y, por lo tanto, la elección de cada estrato es desconocida, debido a que depende de la solución del problema. Es en esta dimensión que la identificación de $k$ estratos de manera discreta contribuye a encontrar el óptimo del problema. Las curvas de indiferencia de los $k$ estratos – cada una independiente de la solución – delimitan $k + 1$ regiones en el plano $PT$; cada región tiene asociada una elección particular por parte de los individuos de cada estrato. Es posible resolver el problema restringido a los pares $(P, T)$ que definen cada región, encontrando $k + 1$ soluciones particulares, donde $(P^*, T^*)$ será el par que cumpla con las condiciones de su región y que tenga mayor bienestar social asociado.

Con el fin de aplicar el modelo desarrollado, consideramos una ciudad con tres estratos, caracterizados por los parámetros de su función de demanda, donde los individuos de mayores ingresos son muy pocos y muy ricos, mientras que la gran mayoría son pobres. A cada estrato le asociamos una función de demanda por viajes en transporte público, ubicando las demandas de los estratos de menor ingreso por sobre las de los mayores en el plano $PX$. En el plano $PT$ se identifican cuatro regiones, delimitadas por las curvas de indiferencia de cada estrato, que tienen asociadas las cuatro posibles combinaciones de elección de los estratos.

Se obtuvo un par óptimo $(P^*, T^*)$ asociado a los parámetros utilizados en el problema, donde los usuarios de los estratos Ricos y Medios viajan pagando $P^*$ por viaje, mientras que los del estrato Pobre compran la tarjeta de valor $T^*$. Para analizar cómo varía $(P^*, T^*)$ según cambiaban las condiciones del problema, creamos cinco escenarios donde reflejamos cambios en el sistema a través de los parámetros de las demandas.

Considerar una mayor tasa de motorización en el estrato Pobre provocó una disminución en el valor óptimo de la tarjeta y un aumento en el precio unitario óptimo. Un nivel superior en la calidad de los buses hizo que la gente estuviera dispuesta a pagar más por viaje, incrementando el valor de la tarjeta y generando un cambio en el precio dependiendo de la magnitud del aumento en el costo marginal por viajes. Cambiar las proporciones de gente en los estratos extremos generó que cuando el número de ricos era mayor, ambas tarifas subían, mientras que cuando individuos del estrato Medio pasan al estrato Pobre, el precio y el valor de la tarjeta aumentan. Finalmente, cambios en las sensibilidades a $P$ y a $T$ de los usuarios no presentaron movimientos considerables en ambas alternativas.

A partir de los cambios en las condiciones iniciales del problema, observamos que los valores del precio óptimo y el valor óptimo de la tarjeta cambian, pero sin modificar la elección de los distintos estratos de ingreso: para cada uno de los escenarios, los individuos del estrato Pobre siempre deciden viajar comprando la tarjeta mensual, mientras que el resto paga por cada viaje realizado. Es interesante notar que este resultado es cualitativamente análogo al obtenido por Carbajo, quien dice que usuarios *Activos* (de menores ingresos en este caso) son los que eligen comprar la tarjeta y usuarios *Pasivos*, pagan por viaje realizado.

En síntesis, en esta tesis logramos plantear un modelo de tarificación donde convive una tarjeta multiviaje con un precio unitario, caracterizando a los usuarios según el nivel de ingreso que posean. Mostramos que el modelo de Carbajo (1988) es inadecuado para incorporar el papel del ingreso, pues al trabajar con gustos se evade la responsabilidad de considerar el rol dual que tiene el ingreso, obviando el efecto del ingreso disponible, factor del cual nos hacemos cargo. Aplicamos el modelo a una ciudad estilizada, marcada por las grandes diferencias de ingreso que existen entre los distintos estratos, obteniendo que el estrato de menor ingreso siempre elegirá viajar comprando una tarjeta. Por último, encontramos que los valores de $(P^*, T^*)$ dependen de los parámetros del problema de una manera que hemos sido capaces de explicar.

Existen diversas formas de extender y aportar a esta investigación desde el punto de vista metodológico. Con el fin de representar correctamente los dos efectos que tiene el ingreso sobre la demanda por viajes utilizamos una sociedad separada en estratos discretos de ingreso. Sería interesante analizar si es posible incorporar una distribución continua del ingreso, representando explícitamente el efecto de este sobre la posesión de automóvil y el efecto que tienen las tarjetas sobre el ingreso disponible, además de tener en cuenta que el individuo no cambia de estrato de ingreso al pagar $T$.

Por otra parte, hacemos notar que al interior de cada estrato de ingreso efectivamente podrían existir diferencias de gustos entre los usuarios y podríamos diferenciarlos en dos dimensiones (ingreso y gusto). A partir de esto, tal como lo hace Carbajo en su modelo, se puede asociar a cada estrato una distribución continua de gustos que permitiría que individuos de un mismo estrato elijan una alternativa de pago distinta por el transporte público. Así, el modelo podría permitir que individuos del estrato Pobre elijan el boleto unitario o individuos del estrato Rico compren tarjeta.

Al comienzo de la tesis vimos que se han observado, en distintas ciudades europeas, tres efectos que tienen los abonos sobre la demanda por viajes en transporte público: se aumentan los viajes, los abonos se posicionan como la principal forma de pago y se atraen usuarios de otros modos. Los primeros dos efectos son directamente observables en nuestro modelo, pero el tercero no. Esto porque el modelo explica cambios a partir de la generación de viajes y no de la partición modal. Debido a esto, una tercera línea futura de investigación sería considerar los efectos que tienen las tarjetas sobre la elección de modo, ya que una nueva forma de pago hace más atrayente al transporte público. Complementario a esto, al considerar otros modos en el análisis, entran en juego los tiempos de viajes en los costos de los usuarios, debido que los viajes en auto causan externalidades negativas para el sistema, y hacen más complejo el cálculo de los beneficios de cada usuario.

Una cuarta línea de investigación dice relación con la idea de subsidios óptimos al transporte público, basados en la internalización de las externalidades positivas (efecto Mohring, efecto densidad), lo que tiene relevancia en las tarifas que se cobran y en el diseño óptimo asociado (frecuencia, capacidad, estructuras de línea, etc).

Por último, cabe preguntarse si hay alguna razón metodológica fundamental para no considerar tarifas en dos partes propiamente tales, es decir, un pago de un monto fijo por entrar al mercado y otro monto por cada viaje realizado. Es posible imaginar un abono que permita acceder a boletos unitarios más baratos que los que se adquieren sin el pago fijo. Si bien tarifas de este tipo no se observan en el transporte público urbano, sería interesante analizar las razones por las que este tipo de combinaciones no se encuentra disponible.

Finalmente, hay un evidente desafío empírico plantead por la aplicación del modelo a una ciudad descrita en mayor detalle, con estratos representados por funciones de demanda representativas de diversos sectores de ingresos (posesión de automóvil). Se podría obtener información sobre la distribución de ingresos de la ciudad y su relación con la posesión de automóvil y con las demandas por viajes en transporte público, además de los costos que deben asumir los operadores. Con esto se podrían calcular valores de más directa interpretación para $P^*$ y $T^*$ y analizar la factibilidad de la implementación de la tarjeta en la ciudad estudiada.

# Bibliografía


M. Batarce. Estimation of urban bus transit marginal cost without cost information. *XVII Panamericano de Ingeniería de Tránsito, Transporte y Logística*, Septiembre 2012, Santiago.

S. J. Brown y D. S. Sibley. *The Theory of Public Utility Pricing*. Cambridge University Press, 1986.

J. C. Carbajo. The Economics of Travel Passes. *Journal of Transport Economics and Policy*, 22(2): 153–173, 1988.

Coordinación General de Transportes de Santiago (CGTS). Informe de Gestión 2011 Transantiago. Informe técnico, Transantiago, Santiago, Chile, 2012.

European Metropolitan Transport Authorities (EMTA). Barometer of Public Transport Authorities in the European Metropolitan Areas - 2004. Informe técnico, EMTA, París, Francia, 2004.

M. Feldstein. Equity and Efficiency in Public Sector Pricing: The Optimal Two-Part Tariff. *The Quarterly Journal of Economics*, 86(2):175–187, 1972.

F. FitzRoy y I. Smith. Public transport demand in Freiburg: why did patronage double in a decade? *Transport Policy*, 5(3):163–173, 1998.

F. FitzRoy y I. Smith. Season Tickets and the Demand for Public Transport. *Kyklos*, 52(2):219–238, 1999.

Transport for London. London Travel Report 2005. Informe técnico, Group Transport Planning and Policy, Londres, Inglaterra, 2005.

A. Gschwender. *A Comparative Analysis of the Public Transport Systems of Santiago de Chile, London, Berlin and Madrid: What can Santiago learn from the European Experiences?* Tesis de Doctorado, Universidad de Wuppertal, Alemania, 2007.

A. Gschwender. Towards An Optimal Pricing System In The Urban Public Transport: What Can We Learn From The European Experience? *XIII Congreso Chileno de Ingeniería de Transporte*, Octubre 2007, Santiago.

A. Gschwender y S. Jara-Díaz. Elasticidades de la Demanda del Transporte Público Urbano: Síntesis e Interrelaciones. *XIII Congreso Chileno de Ingeniería de Transporte*, Octubre 2007, Santiago.

A. Matas. Demand and Revenue Implications of an Integrated Public Transport Policy: The Case of Madrid. *Transport Reviews*, 24(2):195–217, 2004.

A. Monzón, R. Cascajo, y P. Jordá. Informe 2005 del Observatorio de la Movilidad Metropolitana. Informe técnico, Ministerio de Medio Ambiente, 2007.

W. Oi. A Disneyland Dilemma: Two-Part Tariffs for a Mickey Mouse Monopoly. *The Quarterly Journal of Economics*, 85(1):77–96, 1971.

J. Pucher y S. Kurth. Verkehrsverbund: the success of regional public transport in Germany, Austria and Switzerland. *Transport Policy*, 2(4):279–291, 1996.

P. White. Travelcard Tickets in Urban Public Transport. *Journal of Transport Economics and Policy*, 15(1):17–34, 1981.

R. Wilson. *Nonlinear Pricing*. Oxford University Press, 1993.