



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE GEOLOGÍA

ALGORITMO DE DETECCIÓN DE ONDAS P INVARIANTE DE ESCALA: CASO DE  
RÉPLICAS DEL SISMO DEL 11 DE MARZO DE 2010

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS  
MENCION GEOLOGÍA

PATRICIO ANTONIO TOLEDO PEÑA

PROFESOR GUÍA:  
JAIME CAMPOS MUÑOZ

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
GABRIEL VARGAS EASTON  
ARMANDO CISTERNAS SILVA  
GONZALO ACUÑA LEIVA  
BERTRAND DELOUIS

SANTIAGO DE CHILE  
DICIEMBRE 2014



**RESUMEN DE LA TESIS PARA  
OPTAR AL GRADO DE DOCTOR EN CS.  
MENCIÓN GEOLOGÍA  
POR: Patricio A. Toledo  
FECHA: 01/12/2014  
PROF. GUÍA: Sr. Jaime A. Campos**

**Algoritmo de detección de ondas P invariante de escala: Caso de réplicas del sismo del 11 de marzo de 2010.**

Bajo la presión del megaterremoto del Maule en febrero de 2010, los centros de estudio chilenos debieron enfrentar una emergencia adicional, consistente en el procesamiento de terabits de datos tomados con posterioridad al gran evento. Esta masa de información proviene principalmente de las campañas de intervención. Sin embargo, la razón de fondo del número de datos que se logra, son las leyes de escalamiento que dominan la dinámica de la corteza y es que estas dictan qué sucede antes y después de cada evento. Más aún, estas leyes imponen cotas bastante estrictas al volumen de datos que es necesario registrar para identificar los procesos en sí. A pesar de que una teoría completa de la generación de sismicidad es desconocida en la actualidad, es posible comprender sus rasgos principales con una multiplicidad de técnicas, dos de ellas son la similitud y las observaciones directas. El uso de estos métodos, permite identificar algunas simetrías presentes en los fenómenos corticales. Estas simetrías son invarianzas de escala, es decir, la posibilidad de expresar los observables de interés como leyes de potencia del espacio, del tiempo y del tamaño de lo estudiado. Esta invarianza es el motivo tras la geometría fractal de las fallas, la ley de Gutenberg-Richter para los tamaños de los eventos sísmicos, la ley de Omori para los tiempos entre réplicas y otros. Estos elementos, permiten identificar un rasgo combinatorial presente en el proceso de generación de sismicidad, que posibilita la introducción de la entropía de Shannon como uno de los observables relevantes, que en la actualidad, no ha sido explotado exhaustivamente por los geocientistas. La entropía está ligada a la idea de información que es posible conocer y transmitir. La interpretación de la fuente sísmica como una de carácter estocástico cuyas señales viajan a través de un medio ruidoso (la corteza) finalmente registradas en receptores (sismómetros) permite hacer la analogía con un telégrafo y con ello conocer la información que proviene de los terremotos. La noción de entropía se fundamenta sobre unas probabilidades que se han identificado con ayuda del fenómeno conocido como la anomalía del primer dígito, que se reporta presente en la fuente sísmica, hecho debidamente establecido en la primera de las publicaciones que se adjuntan por medio de observaciones y simulación de autómatas celulares. Esta anomalía, se muestra está asociada a una familia de sistemas disipativos de los cuales la corteza es uno. Con ayuda de la teoría de la información se han encontrado criterios básicos de índole geométrico, que han permitido desarrollar los algoritmos de reconocimiento de sismicidad propuestos, que se han probado empíricamente en el caso de una serie de réplicas pertenecientes al sismo de Pichilemu del 11 de marzo del 2010, presentados en detalle en el segundo trabajo adjunto. Se ha probado que estos algoritmos se muestran competitivos y complementarios a los ya usados popularmente, lo que aumenta la capacidad de detección y abre posibilidades de estudio en el problema de alerta temprana. Finalmente se discute la posibilidad de interpretar el proceso de disipación de energía a través de una representación simple, que ligaría información, entropía y geometría.

*A mi padre*

# Agradecimientos

Durante los primeros años de trabajo recibí soporte económico del Centro Internacional de Investigación de Terremotos MONTESSUS DE BALLORE (CIIT-MB) financiado gracias al programa de Núcleos Científicos Milenio. Este soporte fue fundamental y quiero agradecer a su director Jaime Campos por ello. Posteriormente Jaime continuó ayudando, esta vez por medio del convenio Fondecyt 1130636. Durante el mes de diciembre de 2010 recibí la invitación del profesor Raúl Madariaga para visitar la École Normale Supérieure en París, esta estadía resultó muy fructífera, puesto que Amaya Fuenzalida me explicó cómo se trabajaba el problema de reconocimiento de sismicidad, que finalmente terminó por ser mi tema de tesis. Vayan las gracias a ellos. Parte de este viaje y la estadía fueron financiados por la Embajada de Francia en Chile, por medio del programa de estadías cortas, mis agradecimientos al personal de la embajada y al pueblo francés, que admiro mucho. Durante los años 2011, 2012 y 2013 recibí apoyo del Ministerio de Educación de Chile por medio de una beca doctoral entregada por Conicyt. Estas líneas son un agradecimiento a todos los chilenos, que de una forma u otra colaboraron con este trabajo. Es un esfuerzo enorme el que hacen los ciudadanos sobre todo los más modestos, espero que lo escrito en este texto pueda compensar lo invertido.

Personalmente quiero agradecer al profesor Armando Cisternas por sus comentarios críticos a mi trabajo. Su actitud abierta, de rigor y completamente desinteresada son un gran ejemplo, espero que él siga así por muchos años más. También quiero agradecer a mi profesor Jaime Campos, en estos momentos un gran amigo, lo respeto mucho, su actitud de apoyo y confianza fueron fundamentales para enfrentar esta tesis, nunca tuve temor a discutir mis ideas con él, incluso cuándo yo mismo no tenía claro lo que quería discutir, Jaime fue una gran ayuda, el mejor tutor que una persona como yo puede encontrar. Vayan también los agradecimientos a Gabriel Vargas, Gonzalo Acuña y Bertrand Deloius profesores miembros de la comisión por sus gentil ayuda e interés.

También quiero agradecer a mis amigos y colegas Sergio Ruiz, Sebastián Riquelme y Mauricio Fuentes. Un gran abrazo para todos ellos, fueron muy importantes para mi, en distintos momentos con cada uno de ellos discutí y desvarié y siempre me escucharon. Quiero agradecer también a Sophie Peyrat y a Lily Seidman que me ayudaron en las primeras etapas de la tesis. Un saludo muy cordial para Maritza Acuña que me ayudó a navegar por los torrentes de la burocracia de la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile, sin ella todo habría sido mucho más difícil, creo que todos en el Departamento de Geología compartirán mi opinión.

Finalmente, quisiera agradecer a la familia: a mi hijo, Alejandra, a mi madre, mi hermana y su familia, gracias a todos.

# Tabla de contenido

<b>Resumen</b>	<b>iii</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>v</b>
<b>Tabla de contenido</b>	<b>v</b>
<b>Índice de ilustraciones</b>	<b>viii</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Presentación del problema . . . . .	1
1.1.1 Las escalas presentes en la corteza . . . . .	1
1.1.2 Uso de las escalas para detección de sismicidad . . . . .	2
1.1.3 Algunos algoritmos ocupados en la actualidad . . . . .	3
1.2 Antecedentes, modelos y observaciones . . . . .	6
1.2.1 Comportamiento en escala, tiempo y espacio . . . . .	6
1.2.2 Heterogeneidad e inestabilidades . . . . .	7
1.2.3 Algunos modelos ocupados en la actualidad . . . . .	8
1.2.4 Modelos continuos y bifurcaciones . . . . .	8
1.2.5 Modelos discretos y equilibrio cerca del punto crítico . . . . .	9
1.3 Fundamentos . . . . .	11
1.3.1 Estructura espacial o escalamiento de la energía . . . . .	11
1.3.2 Estructura temporal o evolución de la energía . . . . .	13
1.3.3 Anomalía del primer dígito . . . . .	14
1.3.4 Los pares de Jeffreys y una métrica invariante de escala . . . . .	15
1.3.5 Una conexión entre geometría y la entropía de Shannon . . . . .	16
1.4 Hipótesis y Objetivos . . . . .	17
1.5 Metodología . . . . .	18
<b>2 Un rasgo combinatorial de la fuente sísmica</b>	<b>19</b>
<b>3 Uso del contenido de información presente en la fuente sísmica</b>	<b>36</b>
<b>4 Perspectivas y la estructura matemática emergente</b>	<b>67</b>
<b>5 Conclusión</b>	<b>72</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>74</b>

<b>A Presentaciones a congresos nacionales e internacionales</b>	<b>82</b>
A.1 Coloquio: Concepción, Chile. Marzo 2014 . . . . .	82
A.2 Conferencia: Bogotá, Colombia. Julio 2014 . . . . .	84

# Índice de ilustraciones

1.1	Disparo de tipo STA/LTA . . . . .	4
1.2	Disparo de tipo <i>Z-detector</i> . . . . .	5
1.3	Dos retículos usados en autómatas . . . . .	10
1.4	Invarianza de escala . . . . .	11
1.5	Escalamiento en leyes de potencia . . . . .	14
4.1	Efecto del escalamiento sobre la anomalía del primer dígito . . . . .	68
4.2	Ilustración del mapa propuesto para el proceso de escalamiento . . . . .	69
4.3	Las rotaciones en dos y tres dimensiones . . . . .	69
4.4	Exponencial de un grupo de Lie . . . . .	70
4.5	Logaritmo de un grupo de Lie . . . . .	70
4.6	Geodésica de un grupo de Lie . . . . .	71



# Capítulo 1

## Introducción

Los megaterremotos presentan muchas y grandes réplicas, las cuales se distribuyen de manera heterogénea tanto a nivel espacial como temporal. Después del terremoto de febrero del 2010, por primera vez se presentó la oportunidad de estudiar un evento gigante de subducción en distancia epicentral haciendo uso de la revolución digital: sismómetros de gran rango dinámico, sistemas de memoria que permiten elevadas tasas de muestreo, interconexión de los sistemas de registro, una numerosa constelación de satélites que permite registro sincrónico y grabación de los observables no solamente sobre un soporte puntual (GPS) sino que sobre un soporte superficial (InSAR) además de una cobertura mundial que no existía la última vez que una época de gran sismicidad se había presentado en la Tierra, tal como fue la década del 50 y 60 en el siglo 20, momento en el que se ubican el gran terremoto de Valdivia y los gigantes de Alaska y Kamchatka. El megaterremoto anterior al sismo chileno de 2010 ocurrió en 2004 en un ambiente de tectónica transpresional en la región de Indonesia (Lay et al., 2005; Stein y Okal, 2005) posteriormente llegarían el gran terremoto de Japón de 2011 con su devastador *tsunami* (Simons et al., 2011) un gran evento de rumbo en 2012 nuevamente en Indonesia y en 2014 un segundo megaterremoto en Chile, esta vez en Iquique (Hayes et al., 2014). Este fenómeno de *clustering* o acumulación temporal ahora se sabe que corresponde a una característica de la familia de sistemas a las cuales pertenece la corteza. Esta localización espacial y temporal, y las leyes que la rigen exigen estrategias de proceso de la información del todo diferentes a las comúnmente utilizadas. Por este motivo, se ha considerado apropiado realizar la introducción con un fuerte énfasis en identificar la familia de sistemas al que pertenece la corteza, caracterizar sus observables y con ello poder proponer métodos de reconocimiento acorde y de esta forma generar un esquema diferente y complementario de estudio de los terremotos, facilitado por el nuevo estándar de procesamiento y registro de información.

### 1.1 Presentación del problema

#### 1.1.1 Las escalas presentes en la corteza

La corteza terrestre se formó prematuramente, cogenéticamente a la Tierra misma, esto se sabe debido a que los minerales más antiguos que se conocen tienen una edad un tanto menor a la edad del sistema Solar (Nutman et al., 2001). La corteza forma parte de la

llamada esquizósfera o la zona de la litósfera que es factible de deformarse de manera frágil. Al ser una capa esférica, no tiene bordes, pero se puede distinguir un espesor característico que impone límites bien precisos a la zona donde este tipo de deformación puede ocurrir. Este espesor fluctúa en torno a  $1 \cdot 10^5$  m, siendo el radio terrestre de unos  $6 \cdot 10^6$  metros, se obtiene que sólo el 1% de este es ocupado en fenómenos frágiles. La superficie de la Tierra es de unos  $5 \cdot 10^8$  m<sup>2</sup> lo que limita enormemente el área disponible para los diferentes fenómenos existentes, aún así este espacio es considerable. Teniendo en cuenta la sismicidad que es posible reconocer instrumentalmente, los eventos más pequeños probablemente puedan ser aquellos que existen a la escala molecular (del orden de decenas de nanómetros) en torno a  $1 \cdot 10^{-18}$  m<sup>2</sup>. Curiosamente, esta escala no se encuentra lejos de la escala a la cual se producen los fenómenos de percolación, la permeabilidad de un medio se mide en unidades de área y un darcy corresponde a la escala a la cual un fluido similar al agua podría atravesar una arena. Esta área es del orden de  $1 \cdot 10^{-14}$  m<sup>2</sup> esta observación inmediatamente liga los movimientos de los fluidos a la deformación frágil y más concretamente liga los fenómenos viscosos a la ruptura del material cortical. Esta escala donde ocurre la transición entre fenómenos viscosos —siempre ligados a disipación de energía, movimiento elástico y últimamente ruptura frágil es un límite inferior relevante. Dentro de estos rangos de tamaños es donde se ha encontrado que la energía entregada a la corteza desde el manto sufre disipación en forma de terremotos<sup>1</sup> y estas escalas espaciales están ligadas a escalas temporales. Los intervalos de tiempo más pequeños factibles son aquellos donde la energía elástica es transmitida en forma oscilaciones del retículo cristalino (fonones) con frecuencias del orden de  $1 \cdot 10^{12}$  Hz y los intervalos de tiempo mayores están acotados por la potencia calorífica entregada desde el manto y por el espesor cortical donde se disipa esta energía con frecuencias en torno a  $1 \cdot 10^{-10}$  Hz (cientos de años). Fuera de estos rangos hay que hacer otras hipótesis para poder concebir la generación de sismicidad. Si se admite que la sismicidad se genera entre estos límites, es necesario reconocer que para estudiar la sismicidad hay que intentar registrar los transientes a lo largo de este rango de tamaños, eso deriva en el problema del reconocimiento de la sismicidad.

### 1.1.2 Uso de las escalas para detección de sismicidad

La detección de patrones es un problema general relacionado a la capacidad de las máquinas de aprender. Como problema general, varios campos del conocimiento están involucrados, desde las ciencias biológicas a las sociales, y desde algunas ramas de la matemática hasta la física y la informática. Desde el punto de vista de la sismología, un problema general de reconocimiento de patrones es la habilidad de los computadores de reconocer eventos registrados por los sismómetros. Este es un problema de gran interés, está relacionado a los esfuerzos desplegados tanto a la escala global como a la escala local destinados a conocer la sismicidad. La disponibilidad de algoritmos de detección de eventos sísmicos de gran calidad, conocidos en la jerga como algoritmos de disparo o *trigger*, viabilizan estudios detallados, libres de sesgo humano, instrumental o algorítmico. Con la instrumentación moderna, un estudio de campo puede recolectar terabits de datos, que deben ser procesados con objeto de localizar eventos, identificar fases, determinar mecanismos de foco, estudiar los esfuerzos *in*

---

<sup>1</sup>La escala inmediatamente inferior, la escala del nanómetro, se caracteriza por la aparición de efectos cuánticos tal como se ha indicado en Barenblatt y Monteiro (2010). A esta escala la descripción en términos de campos continuos como los esfuerzos o la deformación no es posible y se debe recurrir a una descripción probabilista.

*situ*. Esto es la rutina, otras actividades más sofisticadas representan inversiones de la fuente sísmica, determinación de la evolución de los esfuerzos de Coulomb, cálculo de imágenes tomográficas, estudios de ruido. Para ver ejemplos de este tipo de estudios en el caso del terremoto del Maule en febrero de 2010, revisar los trabajos de Lange et al. (2012) y Rietbrock et al. (2012). Para el reciente evento de Iquique en 2014 se sugiere estudiar las investigaciones de Schurr et al. (2014) y Ruiz et al. (2014). Todos estos trabajos dependen, de mayor o menor forma, de la aptitud de los algoritmos de detección para identificar eventos sísmicos.

### 1.1.3 Algunos algoritmos ocupados en la actualidad

Los actuales métodos de disparo, que usan ondas de cuerpo de campo cercano pueden ser agrupados en dos grupos mayores de acuerdo a su popularidad. Están por un lado aquellos que ocupan como discriminador la energía cinética registrada por los sismómetros o alguna función simple de esta y por otro lado están aquellos métodos que hacen uso de la morfología de las ondas. Estos son los discriminadores de base. Con estos dos rasgos se suele ingresar a procedimientos de mayor sofisticación que pueden incluir algoritmos genéticos, redes neuronales y máquinas de vectores de soporte, en donde un software logra aprender en qué contexto aparecen patrones repetitivos que finalmente constituyen la alerta para producir un disparo.

Los métodos de energía son por lejos los más utilizados, se basan en el estudio del cuadrado de la velocidad de partícula. Una de las funciones más comunes usadas para aprender de esta energía es la denominada STA/LTA (Bormann, 2002), que se puede traducir como razón promedio de corto plazo versus largo plazo. Supóngase que se cuenta con una serie de tiempo unidimensional de largo  $N + M$  compuesta por números reales  $s_i$  con  $i = -M, \dots, N$  en donde se cree existe un evento sísmico. Por promedio de corto plazo se entiende:

$$s_i^{\text{short}} = \frac{1}{T^{\text{short}}} \sum_{j=i-T^{\text{short}}}^i s_j^2, \quad (1.1)$$

donde  $T^{\text{short}}$  representa el lapso de tiempo de corto plazo a estudiar. De igual forma, el largo plazo está dado por:

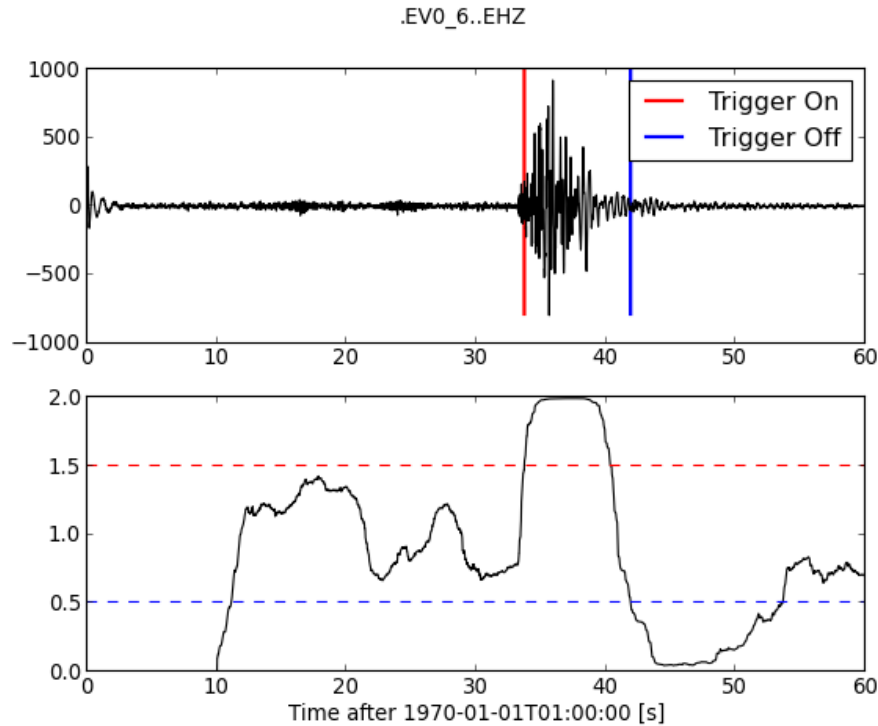
$$s_i^{\text{long}} = \frac{1}{T^{\text{long}}} \sum_{j=i-T^{\text{long}}}^i s_j^2, \quad (1.2)$$

donde  $T^{\text{long}}$  representa ahora el lapso de tiempo de largo plazo. La razón STA/LTA corresponde a la nueva serie de tiempo:

$$S_i = \frac{s_i^{\text{short}}}{s_i^{\text{long}}}, \quad (1.3)$$

la idea principal es eliminar las fluctuaciones de alta frecuencia que comúnmente se asocian a ruido, de tal forma que emerja el contenido de información relevante. Como se verá, esto es difícil de lograr en la corteza, puesto que ella está dominada por un proceso de disipación cuya principal característica es la ausencia de una energía característica por lo que este tipo de función en general induce un sesgo, simplemente debido a su estructura matemática.

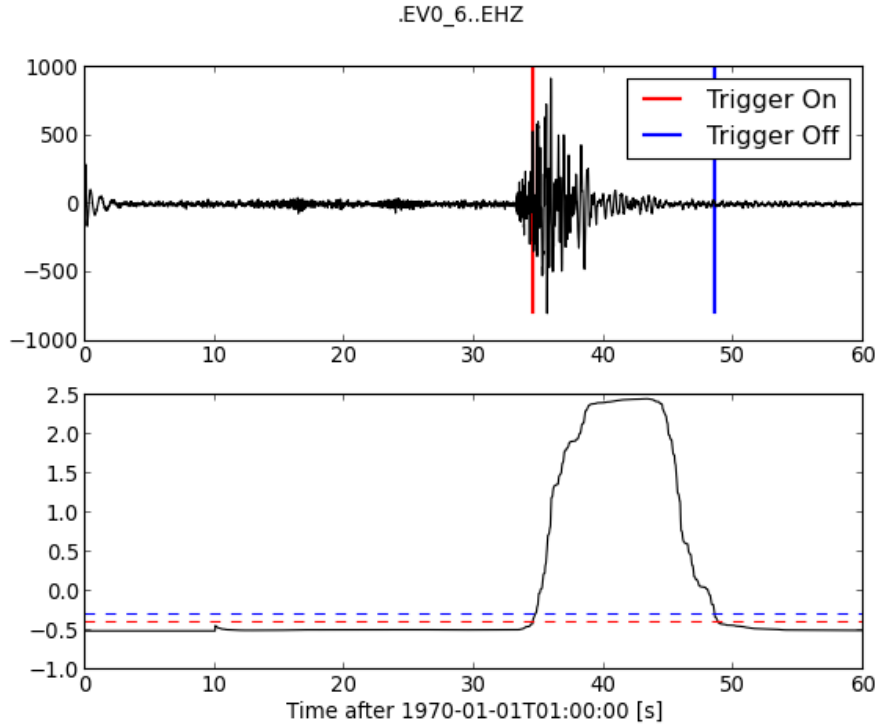
En la figura 1.1 es posible apreciar una implementación del algoritmo de disparo descrito en detalle en Withers et al. (1998) y analizado en Beyreuther et al. (2010). Arriba se presenta



**Figura 1.1.** Ejemplo de disparo STA/LTA. Arriba se presenta una señal  $s_i$  con un evento sísmico. En rojo se marca el tiempo de inicio de la alerta o disparo, en azul el tiempo de fin de la alerta. Abajo se aprecia la nueva serie  $S_i$  con el trigger STA/LTA. En rojo se marca el nivel umbral que ha de sobrepasar el *trigger* para dar comienzo a la alerta. En azul se indica el umbral al que ha de descender la señal de disparo para dar por concluida la alerta. Estos dos niveles son dos nuevos parámetros a discreción que han de calibrarse en un estudio de rutina. Fuente [http://docs.obspy.org/tutorial/code\\_snippets/trigger\\_tutorial.html](http://docs.obspy.org/tutorial/code_snippets/trigger_tutorial.html).

una señal  $s_i$ , en rojo se marca el tiempo  $i_*$  de inicio de la alerta o disparo, en azul el tiempo  $i_{**}$  de fin de la alerta que se calculan a partir de dos niveles umbral  $S_*$  y  $S_{**}$  definidos de forma discrecional a partir de  $S_i$  que son posibles de apreciar en el cuadro inferior en línea punteada azul para  $S_*$  y rojo para  $S_{**}$ . Este tipo de algoritmo ya alcanza seis parámetros a calibrar: el tiempo de inicio  $i_*$ , el tiempo final  $i_{**}$ , el corto plazo  $T^{\text{short}}$ , el largo plazo  $T^{\text{long}}$ , el umbral inferior  $S_*$  y el umbral superior  $S_{**}$ . Si a ello se agregan los filtros o formas de promedio más sofisticadas, es posible hablar de alrededor de 10 elementos de ajuste, lo que sin dudas representa un espacio paramétrico grande a explorar. Una discusión detallada de estos algoritmos se encuentra en Trnkoczy (2002). Este tipo de métodos se encuentra implementado en los algoritmos de detección de sismicidad más modernos, como por ejemplo el de coalescencia CMM (coalescence microseismic mapping) descrito en detalle por Drew et al. (2005).

Los métodos morfológicos son aquellos destinados a remarcar una firma particular de los eventos: puede ser el arribo repentino de la onda P, la gran amplitud de la onda S o la elipticidad de las ondas de superficie. Ejemplos de este tipo son el *Z-detector* (Swindell y Snell, 1977) o los filtros de polarización (Reading et al., 2001). El caso del detector Z



**Figura 1.2.** Ejemplo de disparo *Z-detector*. Arriba se presenta una señal  $s_i$  con un evento sísmico. En rojo se marca el tiempo de inicio de la alerta o disparo, en azul el tiempo de fin de la alerta. Abajo se aprecia la nueva serie  $Z_i$ . En rojo se marca el nivel umbral que ha de sobrepasar el *trigger* para dar comienzo a la alerta. En azul se indica el umbral al que ha de descender la señal de disparo para dar por concluida la alerta. Estos dos niveles son dos nuevos parámetros a discreción que han de calibrarse en un estudio de rutina. Fuente [http://docs.obspy.org/tutorial/code\\_snippets/trigger\\_tutorial.html](http://docs.obspy.org/tutorial/code_snippets/trigger_tutorial.html).

corresponde a una señal del siguiente estilo:

$$Z_i = \frac{s_i - \mu^{\text{short}}}{\sigma^{\text{short}}}, \quad (1.4)$$

donde  $\mu^{\text{short}}$  es la media del STA y  $\sigma^{\text{short}}$  es la varianza del STA. En la figura 1.2 es posible apreciar el comportamiento de este *trigger* que si bien intenta identificar un rasgo diferente de los eventos sísmicos, utiliza una estrategia similar al ilustrado en el caso de STA/LTA de la figura 1.1.

Una revisión detallada de los *triggers* más comunes se haya en Withers et al. (1998). Hay que hacer una observación, normalmente se separan los algoritmos entre aquellos que pueden implementarse en tiempo y aquellos que se pueden trabajar en el dual (frecuencia). En el asunto de la detección temprana de sismicidad esta distinción no es relevante, puesto que los métodos que se trabajan en frecuencia requieren del registro completo del sismo, es decir, el detalle que complica el uso de esos métodos es que se necesita conocer la señal  $s_i$  por completo para poder calcular el espectro, pero eso no es posible, porque precisamente el evento es lo que se desea encontrar. Ejemplos de uso de este tipo de algoritmos en el contexto del gran terremoto del Maule en febrero de 2010 se puede encontrar en Lange et al. (2012) y en Rietbrock et al. (2012). El uso conjunto de *triggers* del tipo STA/LTA y polarización más

un esquema de aprendizaje en base al criterio de Akaike, que actúa reemplazando el uso de los umbrales, puede encontrarse en Diehl et al. (2009), un trabajo de corte similar que ocupa datos ANCORP (norte de Chile) puede encontrarse en Nippres et al. (2010). Finalmente habría que citar el trabajo de Zhang et al. (2003) en donde se utiliza un discriminador del tipo *wavelet* junto al criterio de Akaike. Como puede verse, las posibilidades son amplias, pero hay que recalcar que la familia de algoritmos que exploran la energía es la más utilizada<sup>2</sup>.

Existen métodos más sofisticados que no emplean ni umbrales ni convexidad, sino que implementan máquinas que aprenden a detectar los patrones más recurrentes. Entre las máquinas más ocupadas se hayan las redes neuronales. El detalle de su funcionamiento escapa por completo los alcances de esta tesis, sin embargo podemos dar referencias de interés. Una introducción de carácter teórica se puede encontrar en el texto de Haykin et al. (2009). El uso de redes neuronales en un ambiente de sismicidad local puede estudiarse en Dai y MacBeth (1995, 1997a,b). El uso de redes neuronales en el contexto volcánico puede verse en Curilem et al. (2009) e Ibs-von Seht (2008) cuyos resultados se presentan en detalle y son alentadores.

## 1.2 Antecedentes, modelos y observaciones

En este trabajo proponemos una nueva familia de *triggers* que se basan en el contenido de información de las señales (Shannon, 1948). Sin embargo, para encontrar esta información, hay que hacer uso extensivo de una simetría presente en la corteza cuya máxima expresión es la ausencia de escala, tanto en lo que concierne a la estructura espacial, como a la evolución temporal y más importante en la disipación de la energía.

### 1.2.1 Comportamiento en escala, tiempo y espacio

En una zona determinada y en un lapso de tiempo fijo, la cantidad  $N$  de eventos menores que un cierto tamaño, representado acá por la energía liberada  $E$ , decae de forma algebraica de la siguiente manera:

$$N(E) \simeq E^{-\alpha}, \quad (1.5)$$

donde  $\alpha$  es un número real cercano a uno. Esta es una de las formas en las que se conoce la ley de Gutenberg-Richter (GR) y es uno de los más evidentes indicadores de la acción de un proceso no lineal en el fenómeno de generación de sismicidad (Dubois, 1995; Turcotte, 1997). Este tipo de decaimiento algebraico o de potencia, es un rasgo diferente a uno del tipo geométrico o exponencial, en donde más bien ocurre que el número de eventos decae con la energía en el papel del exponente, dando lugar así a un comportamiento acotado a nivel geográfico. Cuando hay un decaimiento como el mostrado en la ecuación 1.5 las interrelaciones entre los elementos que conforman el sistema tiene una estructura espacial compleja (Sethna, 2006).

¿Cuál es el rango de energías en las cuales esta ley es válida? Por arriba, el terremoto de

---

<sup>2</sup>El criterio introducido por Akaike (1974) tiene conexiones profundas con los métodos descritos en esta tesis. Sin embargo, comúnmente, este es visto desde un punto de vista puramente estadístico. Acá se pretende ligar la información relevante al proceso de generación de sismicidad y últimamente a la geometría que subyace este proceso.

Valdivia es el evento más grande registrado instrumentalmente (Kanamori y Cipar, 1974) con una magnitud de momento estimada en 9,5. Según Barrientos y Ward (1990) este terremoto liberó ca.  $10^{23}$  N m de energía. Por abajo, Yoshimitsu et al. (2014) publicó el límite inferior con eventos cercanos a  $10^{-3}$  N m, equivalentes a terremotos de magnitud  $-7$  en la escala de momento. En total hay 26 órdenes de magnitud.

Hasta cuándo duran las réplicas. La distribución temporal del número de eventos  $n(t)$ , para una zona fija, también presenta una decaimiento algebraico:

$$n(t) \simeq t^{-\beta}, \quad (1.6)$$

en el que  $\beta$  es un exponente cercano a uno. Esta ley es conocida como la ley de Omori, fue deducida en el intercurso del estudio del gran terremoto de Nobi (Mino-Owari, 1981) en la parte central del Japón y posteriormente aplicada en los terremotos de Nankai (1854), Formosa (1904), Zenkoji y Kioto (1830), Anegawa (1909), Avezano (1915), Shimabara (1922), Kanto (1923), Tango (1927) y Sanriku (1933). Las réplicas del terremoto de Nobi estudiado por Omori siguen la ecuación 1.6 hasta la actualidad, más de cien años después. Para una completa revisión de esta ley revisar el trabajo de Utsu et al. (1995). Un punto central de este decaimiento es la relación entre precursores y réplicas, este aspecto es discutido en Matsu'ura (1986) y las referencias allí. Según estos autores no hay claridad en la causalidad, sin embargo, no hay que dejar de lado los nuevos descubrimientos realizados después de los terremotos de Tohoku-Oki en 2011 (Kato et al., 2012; Uchida y Matsuzawa, 2013) y del reciente terremoto de Iquique del 2014 (Ruiz et al., 2014; Schurr et al., 2014) a propósito de la aparición de un patrón precursor de tipo plástico en estos grandes eventos, esta nueva evidencia con certeza jugará un rol relevante al momento de clarificar el rango preciso y la escala en la cual la ley de Omori tiene validez. Hay que notar que según la ecuación 1.6, cada evento tiene sus propias réplicas y que incluso los grandes terremotos son réplicas de otros eventos mayores del catálogo sismológico, esta propiedad es la llamada autosemejanza o *self-similarity*.

La forma en que se distribuye espacialmente esta sismicidad fue estudiada en un principio por Scholz y Aviles (1986) y Okubo y Aki (1987). Estos autores mostraron, fuera de toda duda, el carácter fractal de la geometría que se expresa en la corteza producto de la sismicidad. Recientemente Felzer y Brodsky (2006) han reportado una nueva dimensión en este rasgo, y es que además de comportarse como un fractal, existe una correlación espacio temporal manifestada en que la densidad de réplicas  $\rho$  disminuye de manera algebraica con la distancia  $r$  medida desde cada evento principal hacia su réplica:

$$\rho(r) \simeq r^{-\gamma}, \quad (1.7)$$

nuevamente  $\gamma$  es un exponente cercano a uno. Se ha interpretado este fenómeno como parte de la dinámica ligada a las fluctuaciones del estrés presente en la zona de generación de sismicidad. Debido a la novedad de esta ley, sólo se le conoce válida en un rango de magnitudes acotado entre 2 y 4.

### 1.2.2 Heterogeneidad e inestabilidades

¿Cuál es el origen de estas leyes de potencia que aparecen recurrentemente al estudiar la sismicidad? En general se piensa que existen dos mecanismos. Por un lado la heterogeneidad

presente en la corteza y por otro lado está el carácter no lineal de las leyes de interacción. La heterogeneidad está indudablemente ligada al proceso de relajación que toma lugar después de un terremoto. Este proceso de relajación, codificado en la ley de Omori, toma lugar en el área de fractura. Su estructura es compleja y ha dado lugar al concepto de barrera discutido por Aki (1979). Las barreras plasman la idea de que existe un balance entre la cantidad de energía de superficie que soporta la fractura y la resistencia del material, conocido como el factor de intensidad de esfuerzos. Este balance, que se conoce como el criterio de Irwin, se mantiene hasta que comienza a propagarse una fractura (Kostrov y Das, 1988), por tanto, existiendo heterogeneidad el proceso de liberación de esta energía es controlado por los parches de mayor resistencia, el cómo este mecanismo genera leyes de potencia es desconocido aún (Scholz, 1998). La naturaleza de las leyes de interacción esta asociado a esta resistencia y la no linealidad es evidente de la descripción anterior: si existe balance no hay fractura, si no existe balance hay fractura. En la actualidad sólo se dispone de una descripción fenomenológica de la acción del roce en la resistencia de las rocas, se las conoce genéricamente como leyes de fricción de tasa y estado (*rate and state friction laws*) y la más aceptada hoy en día es la de Dieterich y Ruina (Marone, 1998). El efecto de estas leyes es una inestabilidad denominada de adherencia y deslizamiento (*stick-slip*).

### 1.2.3 Algunos modelos ocupados en la actualidad

Los modelos en los cuales se incorporan estos elementos dan lugar a algunos de los comportamientos descritos en las ecuaciones 1.5, 1.6 o 1.7. Aquellas simulaciones donde la corteza es pensada como un arreglo de bloques unidos por medio de resortes, dan lugar a leyes de decaimiento de la energía del tipo geométrico cuando las interacciones son lineales o cuando la dimensión del modelo es baja, como en el caso del modelo de Burridge y Knopoff unidimensional (Burridge y Knopoff, 1967). Si se eleva la dimensión (aumenta el número de elementos) y se incorporan interacciones del tipo no lineal se obtienen decaimientos algebraicos para la estructura espacial como en el caso del autómatas presentado en Bak et al. (1987). Al agregar ciertas cantidades de viscosidad, que representan disipación, los modelos de bloques presentan evoluciones temporales con decaimientos algebraicos (Ito y Matsuzaki, 1990). Es importante destacar que estos modelos no suponen heterogeneidad previa, por lo que favorecen la idea que la no linealidad sería la principal responsable de la estructura compleja (Scholz, 1998). Los modelos de bloques, han podido establecer que la variación del exponente en las leyes de potencia está asociado a la viscosidad presente (Olami et al., 1992) en el sentido de la capacidad de estos autómatas de modelar disipación y se ha mostrado que el exponente crítico es una función del grado de conservación (Christensen y Olami, 1992a,b). Últimamente, esta conclusión ha sido respaldada por observaciones directas, por ejemplo para el caso del último terremoto de Iquique del 2014, en donde se explora la variación del parámetro  $b$  (ver ecuación 1.11) en asociación al proceso lento reportado (Schurr et al., 2014).

### 1.2.4 Modelos continuos y bifurcaciones

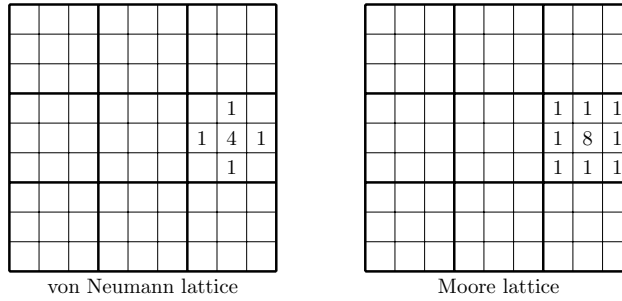
Estos modelos de bloques son discretos y es de esperar que algunos elementos importantes para comprender la complejidad de la dinámica de la corteza no estén presentes. Otro tipo de modelos son los continuos. En estos, se ha encontrado la presencia de un camino al



caos (Strogatz, 2001) por medio de una bifurcación de Hopf-Andronov, es decir, la transición entre comportamiento periódico a uno puramente aleatorio (Ott, 2002) además de la aparición de soluciones localizadas para el caso unidimensional (Erickson et al., 2011). El caos, sin embargo, no está caracterizado por leyes de decaimiento algebraico que es una de las marcas más características de los fenómenos complejos (Crutchfield y Young, 1988; Langton, 1990). Necesariamente se necesita aumentar la dimensión de los modelos, dicho de otra manera, la no linealidad no es suficiente para la aparición de un comportamiento de largo alcance. Dentro de los modelos de tipo continuos unidimensionales está el de Nakanishi (1990, 1991) y dentro de los bidimensionales hay que destacar los trabajos de Carlson y Langer (1989) y Akishin et al. (1998) en donde se toma como base el modelo de bloques de Burrige y Knopoff (1967), pero en este caso se mantiene la dinámica newtoniana con elementos inerciales. Este modelo no presenta aleatoriedad (como en el caso de los autómatas) ni necesita de heterogeneidad. Las únicas fuentes de complejidad son la dimensión del modelo y el uso de debilitamiento cinemático (*velocity weakening*) para la interacción entre las masas y la superficie móvil. Este tipo de modelo presenta decaimientos como leyes de potencia para la energía y la presencia de inestabilidades del tipo *stick-slip*. Un modelo del tipo continuo presentado por Cochard y Madariaga (1994) y Madariaga y Cochard (1996), definido sobre un semiespacio, bajo la influencia de fricción del tipo *rate and state* lineal y homogéneo para el resto de los parámetros excepto la condición de esfuerzos inicial (que es natural de esperar si se piensa en el proceso de generación de sismicidad en el largo plazo, en concordancia con la discusión anterior en relación a la existencia de barreras) presenta escalamientos del tipo algebraico para la liberación de energía, y una generación de sismicidad controlada por el esfuerzo residual de la ley de fricción. De lo anterior, no es posible concluir fácilmente que la existencia de no linealidad es la condición necesaria y suficiente para la aparición de complejidad, identificada con la existencia de distribuciones del tipo ley de potencia en los parámetros tanto de los experimentos numéricos, de laboratorio o de las observaciones.

### 1.2.5 Modelos discretos y equilibrio cerca del punto crítico

En el ámbito del estudio de los modelos de bloques, que posibilitan estudiar leyes de interacción no lineales y gran cantidad de elementos bajo condiciones disipativas, están los autómatas celulares y en particular la pila de arena estudiada por Bak et al. (1987) y aplicada al caso de la sismicidad en Bak y Tang (1989) y Sornette y Sornette (1989). Este modelo es conocido por la aparición de un equilibrio dinámico denominado criticalidad auto-organizada (SOC *self-organized criticality*) que presenta como característica más relevante la existencia de leyes de potencia para la distribución de energía y geometrías fractales para la estructura espacial. Es sabido que no presenta una evolución temporal que sea análoga al comportamiento de las réplicas, sin embargo, modificaciones menores a este modelo las causan (Ito y Matsuzaki, 1990). Una exposición reciente de los avances en este tema puede encontrarse en Pruessner (2012) e información más específica en Christensen y Moloney (2005) y Jensen (1998). El modelo se define sobre un retículo  $(x, y)$  como el presentado en la figura 1.3 partiendo de una situación en general aleatoria, aunque la existencia del equilibrio crítico no depende de esto. Cada célula puede tomar valores enteros  $z(x, y)$  que representan el estado de esfuerzo al que es sometida la celda. Hay un límite fijo, 4 en el caso conservativo de la grilla de Neumann, que representa un punto de fluencia como los modelados en las leyes de roce. Asíncronicamente, es decir, de forma al azar y una celda a cada paso se carga una unidad

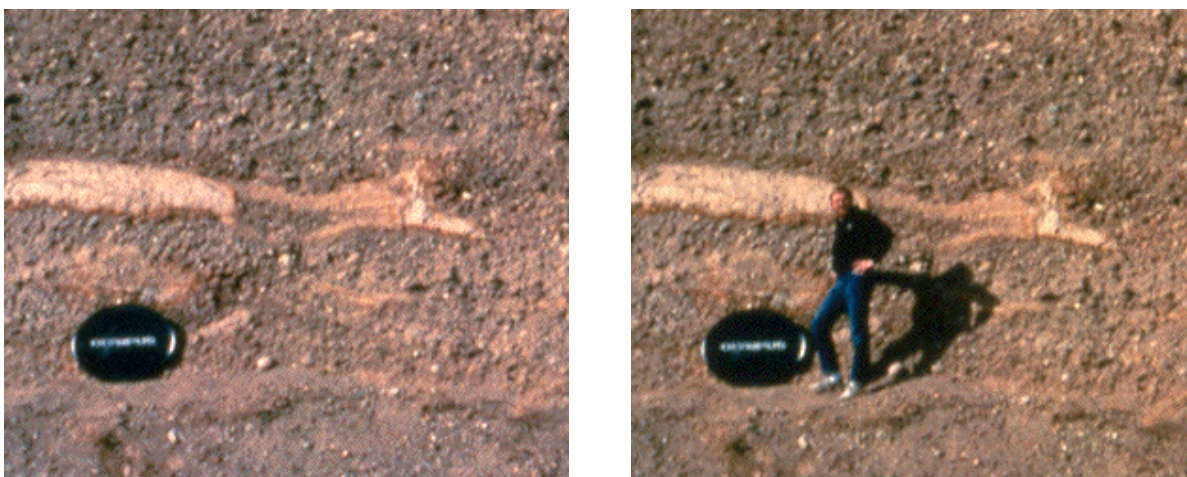


**Figura 1.3.** Dos retículos usados típicamente para representar autómatas. Grilla de Neumann usada en la pila de arena, grilla de Moore usada en uno de los autómatas propuestos en este trabajo.

$z(x, y) \rightarrow z(x, y) + 1$ , hasta que una celda cede al sobrepasar su límite, liberando su carga a los vecinos como interacción  $z(x, y) \rightarrow z(x, y) - 4$  y  $z(x \pm 1, y \pm 1) \rightarrow z(x \pm 1, y \pm 1) + 1$  dando lugar a un fenómeno extendido en el espacio, con correlaciones del tipo algebraico en una geometría fractal. Este equilibrio es robusto, la mayor parte de los parámetros puede variarse y la existencia de la criticalidad no depende de ello. La distribución de energía liberada, es decir, la cantidad de celdas que ceden para cada iteración se comporta de manera análoga a la ley de Gutenberg-Richter (GR), los tiempos de espera se comportan a la manera de la ley de Omori. La disipación ocurre en los bordes del retículo, en donde las celdas de frontera simplemente liberan una parte de su carga al vacío. Este tipo de modelo es conservativo, en el sentido de que los cuatro bloques acumulados, se prorratan en las celdas vecinas, esto no es necesario para la existencia de la criticalidad, como lo muestra el modelo de Olami et al. (1992), en donde se encuentra que hay un umbral en el grado de conservación a partir del cual el sistema sufre auto-organización.

Hay gran debate al respecto de la existencia de este equilibrio crítico en la corteza (Ramos, 2010). Sin embargo, se cree que es un elemento central en el entendimiento de la dinámica cortical (Bernard, 2001; Scholz, 1990). Uno de los elementos donde esta complicación es más aparente es en el ámbito de un precursor conocido como liberación acelerada de momento (*accelerating moment release*) descrita en detalle en Mignan (2008) y las referencias allí. En este caso, la aparición de un rasgo con características de ley de potencia puede ser explicado en base a la idea puramente mecánica de acumulación de esfuerzos, sin necesidad alguna del concepto de equilibrio en torno al punto crítico. En la acumulación de esfuerzos existe transferencia e interacción entre las fallas por medio de redistribución en términos de esfuerzos de Coulomb (King et al., 1994). Un estudio aplicado se encuentra en Stein et al. (1997), en donde se analiza el caso de la cadena de eventos localizados en el margen de la placa de Anatolia.

En el marco del equilibrio crítico, este tipo de liberación de energía es explicado por medio del aumento del largo de correlación, lo que posibilita la redistribución de las tensiones desde las pequeñas escalas a las más grandes. Este tipo de mecanismo se denomina de cascada inversa: los pequeños eventos coalescen en eventos de tamaño mayor, es decir, la energía de longitud de onda corta es transferida hacia la longitud de onda larga. En este momento hay que destacar que el proceso de generación de réplicas funciona del modo inverso, en donde la energía remanente de la gran longitud de onda es transferida hacia las pequeñas longitudes, del mismo modo en que la energía es transferida en el caso de la turbulencia en el modelo de cascadas (Landau y Lifshitz, 1987). En este último caso, es posible demostrar



**Figura 1.4.** La tapa de la cámara fotográfica es un referencia que permite fijar la escala de trabajo, en este caso sin embargo, es posible ver la fuerza de la geometría fractal al revelarse la verdadera escala. Tomado desde Frame et al. (2014)

en base a argumentos dimensionales que el espectro de disipación de la energía presenta decaimientos algebraicos, comúnmente conocidos como la ley de los  $5/3$  (Kolmogorov, 1941; Obukhov, 1941) a condición que la turbulencia se desarrolle de forma isotrópica en una escala de tamaños bien determinados, conocido como el rango inercial. Esta descripción, basada en dos grandes cascadas de energía constituye un rasgo complementario del ciclo sísmico, basado principalmente en la idea del rebote elástico de Ried (Scholz, 1990). Para una discusión en profundidad del mecanismo de disipación de energía en el régimen turbulento ver Frisch (1995) y para una visión general de las hipótesis, métodos, aplicaciones ver Monin y Yaglom (2007a) y Monin y Yaglom (2007b). Para una discusión respecto de los mecanismos de disipación en la zona de falla ver Ohnaka (2013).

## 1.3 Fundamentos

### 1.3.1 Estructura espacial o escalamiento de la energía

La forma de estas leyes de potencia, presentes en buena parte de los observables que se pueden encontrar en la corteza, tiene su raíz en una simetría de las leyes de la naturaleza en acción. En la figura 1.4 es posible obtener una impresión de los elementos en juego. La geometría fractal de un afloramiento de sedimentos no permite dar una idea clara del tamaño del fenómeno, hasta que una referencia externa es incluida, en la figura a la derecha es posible apreciar que el afloramiento realmente tiene una escala métrica y no centrimétrica como podría creerse a partir de la falsa tapa de cámara, usada comúnmente en los estudios geológicos.

Esta simetría, homogeneidad o autosemejanza es la que determina la estructura espacial en términos de la geometría fractal de la sismicidad y de la distribución de energía como función del tamaño de los eventos (ley de GR) asimismo influye en la evolución temporal en términos de la disipación de energía (ley de Omori). A pesar de no estar en condiciones de escribir las ecuaciones dinámicas del fenómeno, es posible obtener información relevante al

respecto de las variables involucradas haciendo uso de esta simetría. Para ello se estudian los parámetros adimensionales que gobiernan el fenómeno, estos dictan los regímenes en donde son válidos los diferentes comportamientos en base a los datos empíricos, estos regímenes ocurren típicamente cuando el fenómeno desarrolla asíntotas.

La corteza es el lugar donde ocurre este fenómeno de generación de sismicidad y está caracterizada por una zona sismogénica de espesor  $h$ , un módulo de corte  $\mu$ , que puede considerarse constante para estos efectos y un módulo de bulto  $\kappa$  igualmente constante. Los eventos sísmicos liberan una cierta cantidad de esfuerzo  $\Delta\sigma$  que presenta fluctuaciones remarcablemente bajas con un valor medio  $\Delta\sigma \simeq 4$  MPa (Allmann y Shearer, 2009). La elipticidad de una fuente sísmica de largo  $L$  y ancho  $W$  es también referenciada como parámetro de gobierno, sin embargo, la razón  $L/W$  varía mucho más que la caída de tensión (Golitsyn, 2001). La potencia  $F$  que es introducida en la corteza es proveniente de la disipación de calor a través del manto. Esta potencia es disipada en forma de terremotos de momento  $M = \mu u S$ , donde  $u$  es el desplazamiento en el plano de falla y  $S = LW$  es la superficie que trabaja. Este momento es liberado a una tasa  $\dot{M}$  medida en unidades de potencia al igual que  $F$ . Estos parámetros son los que gobiernan el fenómeno. De acuerdo a Golitsyn (2007) se puede identificar inmediatamente varias escalas. La primera es  $\tau(\geq M) = M/\dot{M} \simeq M/F$  para el tiempo de espera de los eventos de magnitud mayores que  $M$ . Puede verse que en zonas donde el flujo de energía geotérmica es más intenso este lapso es más corto. Una segunda escala es espacial  $L(M) = (M/\Delta\sigma)^{1/3}$  que corresponde a la raíz cúbica del concepto de volumen activado, parámetro comúnmente usado en sismología de minas (Gibowicz y Kijko, 1994; Kostrov, 1974). De este volumen puede obtenerse un área de generación de sismicidad  $S(M) = (M/\Delta\sigma)^{2/3}$ .

Con los parámetros de gobierno es posible obtener tres valores adimensionales. Uno de ellos está asociado a la razón de Poisson  $\Pi_\nu = (2\kappa - \mu)/(3\kappa + 2\mu)$ , los otros dos corresponden a  $\Pi_\mu = \Delta\sigma/\mu$  y  $\Pi_h = L(M)/h$ . El número de eventos mayores que una cierta magnitud que ocurren en un lapso de tiempo  $\dot{N}(\geq M)$  tiene unidades de frecuencia, la similaridad indica que debe existir necesariamente la siguiente relación:

$$\frac{\dot{N}(\geq M)}{FM^{-1}} = f(\Pi_\nu, \Pi_\mu, \Pi_h), \quad (1.8)$$

donde  $f$  es una función que presenta homogeneidad. De los datos empíricos  $\Pi_\nu$  es constante y  $\Pi_\mu$  es pequeño y presenta débiles fluctuaciones. Esta última es la observación hecha por Aki (1967) y es la fuente de la hipótesis de escalamiento de los terremotos, se dice que  $f$  presenta similaridad completa en dichos parámetros (Barenblatt, 2003). Luego, la forma más general posible para el número de eventos mayores que cierta magnitud es  $\dot{N}(\geq M) = FM^{-1}f(\Pi_h)$ . Esta última ecuación es la celebrada ley de Gutenberg-Richter y en esta forma es posible observar la importancia de la zona sismogénica en la proceso de generación de sismicidad, pues permite anticipar que cualquier ley de escalamiento para los terremotos debe ser acotada, por lo que la autosemejanza ha de romperse eventualmente, hecho nuevamente observado por Aki (1996). El análisis dimensional no puede hacer más que esto. Para ir más allá se debe invocar la similaridad de segundo tipo o incompleta (Barenblatt, 1996) que indica:

$$\dot{N}(\geq M) \simeq FM^{-1}\Pi_h^\delta, \quad (1.9)$$

donde  $\delta$  es un exponente que no puede obtenerse por análisis dimensional y debe encontrarse resolviendo un problema de valores propios no lineal. Esta ecuación es la forma más conocida

de la ley de GR, deducida por Golitsyn (2001). Permite tener una idea del papel jugado por el parámetro  $a$  y el parámetro  $b$  frecuentemente citados en los estudios de sismicidad. En forma explícita (1.9) se escribe:

$$\dot{N}(\geq M) \simeq \Delta \sigma^{-\delta/3} h^{-\delta} F M^{\delta/3-1}. \quad (1.10)$$

Recordar que la ley de GR se conoce normalmente por la expresión:

$$\log \dot{N}(\geq M) = a - b \log M, \quad (1.11)$$

por tanto, el parámetro  $a$  depende de la caída de tensión, del espesor de la zona sismogénica y de la disipación de energía calórica proveniente del gradiente geotermal. Todos estos parámetros son locales al contexto geográfico, excepto la caída de tensión, que más bien depende de la taxonomía de los terremotos (Venkataraman y Kanamori, 2004). Del parámetro  $b$  se ha dicho que los modelos discretos indican que está relacionado a la disipación del fenómeno, en términos del grado de conservación, pero no es posible conocer más a partir de esta información, sólo que deriva de la similaridad incompleta de  $f$ . Los estudios que indican variaciones en el parámetro  $b$  deben necesariamente tratar de identificar si son producto de aspectos viscoplásticos o por pérdida de la similaridad.

De la discusión anterior, queda plasmada la idea que el mecanismo de cascada inversa, donde la energía de las pequeñas escalas se organiza hacia la gran escala está controlado por una ley de potencia que depende de una hipótesis de similaridad del segundo tipo cuya firma es el parámetro  $b$ . El hecho que las fluctuaciones de este parámetro hayan sido considerados un precursor ha sido reportado en Keilis-Borok y Kossobokov (1990); Kossobokov y Carlson (1995); Smith (1981).

### 1.3.2 Estructura temporal o evolución de la energía

En el caso de la generación de réplicas, se puede decir que existe una declinación en el tiempo de la intensidad de los eventos  $M(t)/M_0 = (t_M/t)^\epsilon$  debida probablemente a una disminución en la tasa de generación de tensiones  $\varsigma(t)/\varsigma_0 = (t_T/t)^\epsilon$ , asociada a una etapa de relajación.  $M_0$ ,  $\varsigma_0$ ,  $t_M$ , y  $t_T$  son constantes. Considerando estas últimas variables como los parámetros de gobierno, se tiene el adimensional  $\Pi_\tau = t/MT^{-1}$ . Por lo que es posible introducir el período interevento  $\tau_r$  por medio de la siguiente ecuación:

$$\tau_r/M_0 T_0^{-1} = f(\Pi_\tau), \quad (1.12)$$

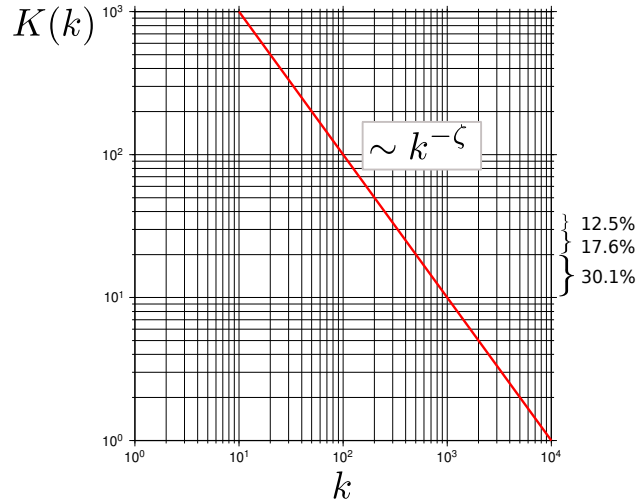
Cuando sea posible establecer<sup>3</sup> que  $f$  alcanza una asíntota, lo que es esperable en los tiempos largos o pequeños, será posible invocar la similaridad y se tendrá:

$$\tau_r \simeq 1/t^{\epsilon-\varepsilon}, \quad (1.13)$$

que es la celebrada ley de Omori. Por lo que el proceso de generación de réplicas con decaimiento algebraico sólo puede ocurrir cuando  $\epsilon \geq \varepsilon$ , es decir, cuando la intensidad de los eventos decae más rápido que la generación de tensiones. Es posible que la generación sea

---

<sup>3</sup>Notar que esta  $f$  es diferente de la que aparece en la ecuación 1.8 aunque cumplan la misma función.



**Figura 1.5.** Un sistema dinámico modelado por medio de la variable  $K$  presenta un decaimiento algebraico en  $k$  con exponente  $\zeta$ .

constante ( $\varepsilon = 0$ ) en cuyo caso el proceso de aparición de réplicas será solamente función de la declinación en la intensidad de los eventos. Este es un mecanismo de cascada directa, ya que después de ocurrida la caída de tensión producto de un evento, la heterogeneidad en el espacio es necesariamente de menor escala que el evento principal, dando lugar a un proceso de liberación de energía hacia las escalas más pequeñas. Hay que observar que una ley inversa se cumple para los precursores —por los mismos argumentos acá presentados— lo que explicaría la aceleración de sismicidad reportada como premonitor (Lomnitz, 1994).

### 1.3.3 Anomalía del primer dígito

Ha quedado bien establecida la aparición de las leyes de potencia en el contexto del proceso de disipación de la energía que alimenta la dinámica de la corteza. De forma tal que se puede generalizar la mecánica de la siguiente forma: se dispone de un fenómeno donde las variables (tal vez todas) presentan escalamientos del tipo algebraico, por ejemplo, en la figura 1.5 se presenta la variable  $K$  que decae como una ley de potencia con  $k$ . En un gráfico logarítmico esto se presenta como una recta de pendiente  $\zeta$ , este tipo de variables, típicamente alcanzan varios órdenes de magnitud, que se ha visto puede deberse a la gran correlación que presentan estos sistemas lo que les confiere la capacidad de gastar su energía disponible a lo largo de varias escalas.

Es necesario hacer varias observaciones geométricas. Lo primero es que para cada escala, por ejemplo entre  $10^1$  y  $10^2$  entre década y década, todos los números que tienen igual mantisa ocupan primero un 30,1%, luego un 17,6%, luego un 12,5% y así hasta terminar la escala de la forma  $\log_{10}(D + 10) - \log_{10}(D)$  con  $D = 10, 20, 30, \dots, 90$ . Es decir, del espacio disponible, todos los números que tienen igual primer dígito diferente de cero se distribuyen de manera inhomogénea. Lo segundo es que si se tiene un fenómeno lineal en este gráfico logarítmico y se toman muestras de forma exhaustiva, se tendrá que los primeros dígitos de las muestras heredarán la estructura de la representación logarítmica en virtud del mapa lineal al que son

sometidos. Esta característica, es la denominada anomalía del primer dígito, por primera vez reportada al notar el desgaste irregular de los bordes de las hojas en las tablas de logaritmos (Newcomb, 1881) y expuesta en forma analítica por Benford (1938) como la probabilidad  $p_D$  de encontrar el primer dígito  $D$  diferente de cero en una población grande de datos provenientes de sistemas naturales:

$$p_D = \log_{10}(1 + 1/D), \quad D = 1, 2, \dots, 9, \quad (1.14)$$

se puede decir que encontrar un número que comience por 1 es más probable que uno que comience por 2 y así sucesivamente.

La anomalía del primer dígito ha recibido bastante atención y es sabido que aparece con frecuencia en áreas como: física (Berger et al., 2005; Tolle et al., 2000), matemáticas (Cohen y Katz, 1984), computación (Knuth, 1981), economía (Nigrini, 1996) y recientemente ha encontrado un lugar en geociencias (Geyer y Martí, 2012; Nigrini y Miller, 2007; Sambridge et al., 2010). Desde el ángulo de la estadística, existen varios teoremas que la caracterizan, algunos describen sus propiedades invariantes de escala (Hill, 1995b), otros están relacionados al tipo de muestreo necesario para obtenerla (Hill, 1995a). Para una revisión en profundidad de esta anomalía se recomienda el trabajo de Sambridge et al. (2010). A pesar de estos esfuerzos, se sabe poco de los motivos por los cuales tantos fenómenos siguen esta regularidad (Berger y Hill, 2011). La pista intuitiva de la figura 1.5 no es suficiente y los casos más generales, se cree, están relacionados a la *universalidad* estadística tal cual ocurre en el caso del teorema central del límite o a la teoría de las matrices aleatorias (Tao, 2009). En el capítulo 2 se profundiza en este conocimiento y se establece la existencia de la anomalía del primer dígito en varios parámetros de la fuente sísmica, se muestra que los autómatas que presentan criticalidad y se cree modelan la sismicidad también lo presentan, pudiendo ser este comportamiento crítico el que explique la presencia de la anomalía a través de las leyes de potencia.

### 1.3.4 Los pares de Jeffreys y una métrica invariante de escala

Se ha argumentado que esta fenómeno del primer dígito está conectado a variables que se presentan usualmente en la descripción de los fenómenos naturales en pares, de tal forma que tanto la variable como la inversa permiten describir el fenómeno de igual manera (Tarantola, 2006). Luego, la elección es completamente arbitraria y por tanto, la manera correcta de parametrizar el fenómeno ha de ser con una teoría que sea simple e igualmente válida para la variable o la inversa. Este tipo de teorías se basan en el principio de *covarianza general* sobre el cual descansa la descripción moderna de la mecánica (Arnol'd, 1989), de la gravedad (Misner y Wheeler, 1973) o del análisis dimensional (Barenblatt, 2003).

Estas duplas se conocen como pares de Jeffreys y entre ellos podemos destacar el período y la frecuencia, la velocidad y la lentitud, la resistencia y la conductancia, la rigidez y la flexibilidad, la compresibilidad y la expansión. Frecuentemente presentan grandes rangos dinámicos, se deben graficar en escala logarítmica y muestran anomalía del primer dígito (Tarantola, 2006).

La descripción del fenómeno de generación de sismicidad, en base a invarianza de escala y anomalía del primer dígito nos lleva a introducir una noción de métrica necesaria para

cuantificar estos elementos. Si ha de trabajarse en un cierto espacio en donde los elementos presentan similaridad en escala, es decir, si se tienen muestras  $C_1$  y  $C_2$  y se desea saber qué tan lejanas están, la distancia euclidiana:

$$\varrho_E = \|C_1 - C_2\|, \quad (1.15)$$

no será capaz de dar cuenta de la operación  $C_1 \rightarrow kC_1$ , se dice que la simetría de escala ha sido rota por la introducción de esta métrica. Si se considera la siguiente noción de distancia:

$$\varrho_J = |\log C_1^{-1}C_2|, \quad (1.16)$$

se recupera la simetría, puesto que los elementos similares se encontrarán a igual separación. Este tipo de métrica define una cantidad llamada de Jeffreys y el elemento de distancia  $d\varrho_J \simeq dX/X$  define un espacio apropiado para estudiar este tipo de variables<sup>4</sup>.

### 1.3.5 Una conexión entre geometría y la entropía de Shannon

En el caso que las muestras  $C_1$  y  $C_2$  de los experimentos representen distribuciones de probabilidad, se tiene que el valor medio de estas distancias:

$$H(C_2, C_1) = C_2 \log C_1^{-1}C_2, \quad (1.17)$$

se conoce como la entropía relativa en el contexto de la física estadística (Volkenstein y Shenitzer, 2009) o contenido de información relativa (Shannon, 1948) en el ámbito de la informática y la complejidad (Gell-Mann y Lloyd, 1996). En el caso que uno de los experimentos sea cierto, por ejemplo  $C_1$ , la entropía sólo depende de las probabilidades  $C_2$  y se habla de información absoluta, se escribe simplemente:

$$H(C_2) = C_2 \log C_2. \quad (1.18)$$

La conexión entre estas áreas del conocimiento se discute hasta la actualidad (Esposito y Broeck, 2011). La relación entre la física del calor —aquella de los sistemas de muchos elementos— y la información data del siglo 19, cuando Maxwell dio a luz un ente capaz de violar la segunda ley de la Termodinámica a partir de un conocimiento detallado del mundo microscópico. Dicha paradoja fue resuelta en 1929 por Szilárd, introduciéndose la conexión entre información y calor. Un recuento histórico en relación a la capacidad informática y la relación de esta con la termodinámica se puede leer en Bennett (2003). La cuantificación de la relación entre calor e información fue formalizada por Landauer (1982) y recientemente tal efecto ha sido medido experimentalmente (Bérut et al., 2012) estableciendo firmemente la futura unificación de estas ramas del conocimiento. Al momento de escribir este documento, ya se han construido motores que hacen uso del flujo de información para extraer una cantidad de calor equivalente a  $k_B T \log 2$  por cada bit (Koski et al., 2014).

Esta noción de valor medio es mejor interpretada como un centroide en este espacio donde

---

<sup>4</sup>Es interesante destacar que en el ámbito de la Teoría de la Medida, se solicita que la medida de Lebesgue tenga una simetría de traslación, que liga la integral con el operador diferencial o la derivada si se quiere. Si se cambia esta restricción a una simetría de escala, se obtiene la medida de Haar (Burk, 2007), que tiene una estructura similar al elemento de distancia propuesto por Jeffreys (Tarantola, 2005).



están definidos los elementos por medio de distribuciones de probabilidad (una noción de geometría). Existen varias medidas de la información  $H(C_2, C_1)$  en este espacio, varias de ellas son revisadas en Gell-Mann y Lloyd (2004). Todas ellas cumplen las nociones de positividad, simetría, acumulación y convexidad<sup>5</sup>. Como resultado de estas propiedades, la información en general posee varias cantidades no negativas:

**información condicional**  $H(C_2|C_1) = H(C_2, C_1) - H(C_1)$  que mide la cantidad de información necesaria para describir  $C_2$  cuando se conoce  $C_1$ ,

**la información mutua**  $H(C_2 : C_1) = H(C_2) + H(C_1) - H(C_2, C_1)$  que indica cuanto de  $C_2$  nos entrega el conocimiento de  $C_1$  y la

**distancia de información**  $\Delta(C_2, C_1) = 2H(C_2, C_1) - H(C_2) - H(C_1)$  que indica cuanto de  $C_1$  y  $C_2$  no es común a ellos, lo que está íntimamente asociado al concepto de redundancia. Se tiene que  $\Delta(C_2, C_1) = H(C_2, C_1) - H(C_2 : C_1)$  y adicionalmente  $\Delta(C_2, C_1) = H(C_2|C_1) + H(C_1|C_2)$ . A partir de las propiedades de la información, es posible mostrar que  $\Delta$  cumple las desigualdad triangular (Gell-Mann y Lloyd, 1996).

En el capítulo 3 se utiliza esta última noción de distancia para reconocer sismicidad en ambientes de gran ruido, además se utiliza la noción de redundancia para explorar la escala a la cuál emerge la criticalidad y la complejidad en el fenómeno de generación de sismicidad.

## 1.4 Hipótesis y Objetivos

Las hipótesis centrales de este trabajo son dos: La primera es que se entenderá que la corteza puede ser modelada como un sistema disipativo, que se auto-organiza en torno a estructuras generalmente fuera del equilibrio. Las estructuras pueden ser espaciales como fallas (Hirata, 1989), heterogeneidades composicionales evidenciadas por ejemplo en la geometría de los reservorios (Sahimi et al., 1990) o en los yacimientos (Turcotte, 1986) y también son temporales como las anomalías magnéticas de los fondos oceánicos (Jonkers, 2003) o la acumulación de megaterremotos en décadas específicas de la historia (Kerr, 2011). La disipación que ocurre en la corteza corresponde a la liberación de la energía que es transmitida a ella desde el manto como producto de la tectónica. Hay que notar que existe la posibilidad de una interacción no nula entre la atmósfera, el océano y la corteza o más generalmente entre fluidos y corteza, de las cuales el terremoto de Pichilemu sería un buena ejemplo, tal como lo evidencia el análisis de los esfuerzos de Coulomb (Fariás et al., 2011). Réplicas de mecanismo normal ocurridas después del terremoto de Japón de 2012 (Kato et al., 2011) se cree representan este tipo de interacción también. Para conocer estas interacciones se han lanzado varias misiones espaciales COMPASS (Rusia y Polonia) DEMETER (Francia, Japón, Rusia) y VARIANT (Agencia Espacial Europea y Ucrania) todas ellas destinadas principalmente al estudio de fluidos corticales (Ouzounov y Freund, 2001). En estos momentos no podemos discutir esta relación, pero sin dudas los datos que se están recopilando serán relevantes para establecer esta forma de interacción. Tampoco se debería descartar una interacción de corte astronómica, de la cual los ciclos de Milankovitch (Raymo y Nisancioglu, 2003) son la mejor ilustración.

---

<sup>5</sup>Por positividad se entiende  $H(C_2) \geq 0$ . Por simetría  $H(C_1, C_2) = H(C_2, C_1)$ . Por acumulación  $H(C_2, C_1) \geq H(C_2)$ . Y por convexidad  $H(C_1) + H(C_2) \geq H(C_2, C_1)$ .

En un sistema lineal es posible separar claramente las escalas, lo que permite delimitar enormemente la acción de cada elemento de los sistemas de muchos componentes, no es el caso de la corteza que al entenderse como un sistema no lineal admite correlaciones en grandes rangos dinámicos. La segunda hipótesis es que existe una variable combinatorial: la entropía, que es posible definir en este contexto de no linealidad y que permite capturar rasgos de la dinámica cortical no expresadas por medio de la energía. La tasa de disipación de energía en un sistema como la corteza presenta escalamientos particulares, que no deberían ser tratados de la misma forma que en un sistema lineal por lo que es esperable que elementos centrales que caracterizan la corteza no hayan sido identificados.

Luego, el primer objetivo es desarrollar las herramientas matemáticas, computacionales y de física estadística apropiadas para explotar la autosimilaridad presente en la dinámica de la corteza, expresada en la forma de un patrón de reconocimiento de sismicidad. Subsidiario a este objetivo se encuentra el entendimiento del fenómeno de disipación de energía en la corteza, comprender este proceso permitirá implementar algoritmos eficientes y complementarios al conocimiento existente, en concreto en el problema de reconocimiento en ambientes de alta sismicidad, como lo es la realidad chilena. Estos algoritmos son novedosos, y son descritos en el capítulo 3.

Un segundo objetivo es establecer la existencia y exponer las razones físicas de la aparición de la anomalía del primer dígito en los sismogramas, esta es una condición necesaria para el posterior desarrollo de los algoritmos, puesto que es el rasgo combinatorial que permite medir la entropía que cargan los terremotos, este aspecto es inédito y se explora en el capítulo 2.

## 1.5 Metodología

Con respecto al primer objetivo, se utilizará una mezcla de métodos. Por un lado, se explorará la física del proceso de disipación de energía. Este proceso, cuando es visto desde el punto de la física estadística presenta propiedades de invarianza que serán explotadas en forma de algoritmos de detección. Estos métodos serán probados por medio de procesamiento de datos reales, registrados después del terremoto del Maule (cuando una buena red de registro se encontraba en pie) en la zona de Pichilemu. Estos datos de campo cercano, permitirán comparar los algoritmos propuestos con aquellos de más amplio uso, como lo son los *triggers* de energía y en particular el detector del tipo STA/LTA.

Con respecto al segundo objetivo, exploraremos tanto desde la perspectiva de la estructura espacial como de la evolución temporal de la sismicidad la anomalía del primer dígito (Sambridge et al., 2010). Esta característica, mirada bajo el prisma de la física estadística, permitirá interpretar la fuente sísmica desde un punto de vista informático. Este nuevo pigmento posibilitará la introducción de las variaciones de entropía como parámetro de detección. La propiedad que subyace a esta anomalía es la autosimilaridad existente en el fenómeno de generación de la sismicidad (Sornette y Sornette, 1989), la manera en que esta simetría modela la dinámica de la corteza es uno de los elementos centrales de la tesis y se la explorará por medio de un autómata celular (Bak y Tang, 1989) y se comprobará en base a un conjunto de observaciones realizadas en Japón, después del gran terremoto de Tohoku-Oki.

## Capítulo 2

# Un rasgo combinatorial de la fuente sísmica

En la publicación adosada a este capítulo, se presenta un estudio enviado a la revista *Non-linear processes in geophysics*. Se trata del hallazgo de una nueva característica de los terremotos. Con datos del gran evento ocurrido en Tohoku-Oki, Japón en 2011 se establece la existencia de una distribución inhomogénea en la energía, alturas de *tsunami*, tiempos de espera y deformaciones asociadas al evento. Esta anomalía se sustenta en el análisis de datos empíricos y de modelos indirectos. Se explora su generalidad por medio de autómatas celulares y se asocia esta anomalía a la existencia de un patrón particular de disipación de energía, que en el campo de la física de la materia condensada se conoce como criticidad auto-organizada. Este patrón, traducido en una densidad de probabilidad facilita la idea explotada en el capítulo 3, puesto que al disponerse de un conjunto de probabilidades es posible identificar la información relevante o, como se conoce en la física de los sistemas de muchos componentes: la entropía del sistema. Este rasgo es una cantidad eminentemente combinatorial y representa las posibilidades que tiene un sistema de evolucionar.

Manuscript prepared for Nonlin. Processes Geophys.  
with version 2.3 of the L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X class copernicus.cls.  
Date: 20 November 2014

# Earthquake source parameters which display first digit phenomenon

P. A. Toledo<sup>1,\*</sup>, S. R. Riquelme<sup>2</sup>, and J.A. Campos<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Department of Geology, University of Chile, Plaza Ercilla 803, Santiago, Chile

\*now at: Mining Innovation Center, University Adolfo Ibáñez, Diagonal Las Torres 2640, Santiago, Chile

<sup>2</sup>National Seismological Center, University of Chile, Blanco Encalada 2002, Santiago, Chile

<sup>3</sup>Department of Geophysics, University of Chile, Blanco Encalada 2002, Santiago, Chile

*Correspondence to:* Patricio A. Toledo (patoledo@ing.uchile.cl)

**Abstract.** We study main parameters of earthquakes from the perspective of the first digit phenomenon: the nonuniform probability of the lower first digit different from zero compared to the higher ones. We found that source parameters like coseismic slip distributions at the fault and coseismic inland displacements show first digit anomaly. We also found the tsunami runups measured after the earthquake to display the phenomenon. Other parameters found to obey first digit anomaly are related to the aftershocks: we show that seismic moment liberation and seismic waiting times also display an anomaly. We explain this finding by invoking a self-organized criticality frame. We show that critically organized automata show the first digit signature and we interpret this as a possible explanation of the behavior of the studied parameters of the Tohoku earthquake.

## 1 Introduction

With the advent of modern seismological and geodetical instrumentation, the study of the earthquake process has experienced great advances, much of it punctuated by the occurrence of giant earthquakes. Since 2004, three of these spectacular events occurred, each producing large tsunamis, followed by human and material losses. These are the 2004 Northern Sumatra (Lay et al., 2005), the 2010 Central Chile (Vigny et al., 2011) and the 2011 Tohoku Japan (Simons et al., 2011) earthquakes, each of them representing an opportunity to advance in the comprehension of geophysical phenomena. Three key elements in the understanding of these events are: a) the source process, a highly nonlinear and heterogeneous phenomenon regarding the initiation, growth and stopping of the earthquake itself, b) the postseismic relaxation effects, which comprise the later perturbations at the crust and fault itself after the stop of the slip phase, and c) the water wave produced by the

sudden uplift of the ocean floor, its propagation through the ocean and the, often destructive, arrival inland.

Of the aforementioned events, the Tohoku earthquake is by far the best recorded, at the local and global level. The Japanese and worldwide effort, lead by universities and public institutions, gathered a great bulk of information regarding this event, most of it public. We use data and models of this event, to assess an establish a regularity of the source and later events known as the first digit anomaly (Benford, 1938).

This phenomenon consist in the nonuniform statistical distribution of the first digit different from zero present in a —usually large— population of data  $d = \{d_1, \dots, d_n\}$  coming from natural systems. The law states that the probability of finding the number one as the first digit different from zero in  $d$  is higher than the probability of finding the number two and so on according to the formula:

$$P_D = \log_{10}(1 + 1/D), \quad D = 1, 2, \dots, 9, \quad (1)$$

first proposed in the 19 century (Newcomb, 1881) by noticing the wear accumulated in the first pages of logarithm tables relative to the last ones.

The first digit phenomenon has received considerable attention (Hill, 1998) and is known to be found in diverse areas like: physics (Berger et al., 2005; Tolle et al., 2000), mathematics (Cohen and Katz, 1984), computation (Knuth, 1981), economy (Nigrini, 1996) and recently it has found some application in geophysics (Sambridge et al., 2010; Nigrini and Miller, 2007; Geyer and Martí, 2012). From the angle of statistics there are known theorems, some of them regarding scale invariant properties (Hill, 1995a) and others related to random sampling (Hill, 1995b). A depth review of these properties is outside of the scope of this work, and we recommend the paper of Sambridge et al. (2010) for a review. But despite efforts, little is known concerning why some numbers collected from natural data follow this regularity (Berger and Hill, 2011). It has been argued by Tarantola (2006) that the effect appears related to the so called Jeffreys' pairs: physical variables endowed with the property of being as meaningful as their inverses. For instance: period and frequency, conductivity and resistivity (hydraulic, electric or thermal) or compliance and stiffness. We must note that Jeffreys' pairs usually display large dynamical ranges, a fact evident because of the regular use of logarithm scales when working with these variables. From now on, we will work under the hypothesis that an underlying physical process connects these elements (random sampling, scale invariance, broad dynamical range) and could explain the ubiquitous presence of the first digit phenomenon.

## **2 The Tohoku earthquake from the point of view of the first digit**

As we pointed out, the first digit phenomenon has recently found some applications in geophysics. Sambridge et al. (2010) demonstrated that the initial signal of an earthquake, as viewed in a typical seismogram, displays Benford's anomaly. This effect was proposed as an event trigger, because the noise registered in the seismogram, displays a kind of gaussian behaviour very different from first

digit phenomenon. Our insight is that this property of the earthquake arrival is directly related to the seismic source and related processes. To go further into this track, we revisited some published data from the Tohoku earthquake in terms of the first digit distribution.

Leaving aside seismograms, we studied physical parameters closely related to the coseismic and postseismic processes. We choose to review data from the Tohoku earthquake mainly because of data quality. The data used comes from direct measurements of earthquake effects and indirect estimations as well. Care was taken in regard to the statistical significance of the samples selected, as we left out interesting data with few samples.

In Table 1 we present first digit statistics of various parameters closely related to the seismic source process in the case of the Tohoku earthquake. For each parameter, a  $\chi^2$  goodness of fit test with 9 degrees of freedom is presented. Also, each test is accompanied with the 5% significance level  $p$ , values of this last parameter close to one indicate statistical agreement with the hypothesis of the empirical data following the first digit anomaly. First, we show the finite fault model, as regularly published by the U.S. Geological Survey (Hayes, 2011a). This set is showed in Fig. 1, the data corresponds to an inversion of P wave, SH wave and long period surface waves of the source from globally located stations (Ji et al., 2002; Hayes, 2011b). We collected the 240 slips ( $\Delta u$ ) and seismic moments ( $M_0$ ) which give form to the finite fault model of the earthquake. We found the slips to follow the first digit anomaly. Seismic moments present the anomaly as well, and this is expected because seismic moment is a affine scaling of slips at the fault. From Fig. 1 the high dynamical range of the data can be clearly evidenced, and as it was mentioned this is one of the known characteristics of parameters showing first digit anomaly. Second, we used a GPS inversion of the coseismic inland deformation. This inversion uses data from the GPS Earth Observation Network (GEONET Ozawa et al. (2011)) and it represents an ensemble of 357 points inverted, showed in Fig. 2 are the total displacement magnitudes, which describe the effect of slip distribution on the fault and the effects over the Earth's surface from geodetic data, observe the high dynamical range of displacements. The absolute value of the deformation  $|u_c|$  shows a clear first digit anomaly as shown in Table 1. Third, from the same dataset, we studied the first digit distribution of the postseismic relaxation process  $|u_p|$  proposed by the authors. The data shown in Fig. 3 present the expected dynamical range for data which shows agreement with the expected probabilities. Fourth, Sambridge et al. (2011) showed that the waiting times between earthquakes presented first digit anomaly. Also in Table 1 we show selected events of the aftershock series as recorded by the Global Centroid Moment Tensor (GCMT Ekström et al. (2012)) of the Tohoku earthquake. We collected data from 11 March 2011 until 31 January 2012, considering a restricted geographic location of the earthquake, to avoid sophisticated filtering of events. The aftershock series is composed of 172 events, located between 12 and 80 kilometres depth and ranging from moment magnitude 4.9 to 9.1 a representation of the aftershock series can be seen in Fig. 4, the color of the circles clearly show the high dynamical range reached by waiting times. From this set, the first digit distribution of the seismic moment released

$M_0(t)$  is remarkable and the waiting times  $\Delta\tau$  between aftershocks was found to obey a weak statistical significant first digit anomaly at the 5% level. Fifth, regarding the tsunami phenomenon, we analyzed runups ( $r$ ) data measured by Mori et al. (2011). This data set comprises 5260 points, each of them representing the maximum height inland reached by the water wave generated by the dislocation in the ocean floor. An image is presented in Fig. 5, where the different scale colors present in tsunami data can be appreciated. This data set also presents first digit anomaly.

As a summary, parameters closely related to the source process display Benford's effect and those parameters include: slip and moment distribution on the fault inverted from seismic data, surface deformation inverted from geodetic data, tsunami heights (possibly related to the source itself) surveyed directly and the GCMT aftershock series' moment release and waiting times.

### 3 A possible explanation of the ubiquity of Benford's law

As has been shown, the first digit anomaly appears in various variables regarding the process of seismic rupture. The earthquake, now viewed not just as the slip phase, contains this signature and it seems natural to search for a unique mechanism, which could explain the anomaly. Indeed a model capable of accounting for global features of earthquake has already been proposed and it is known as self-organized criticality, SOC (Bak and Tang, 1989; Ito and Matsuzaki, 1990; Sornette and Sornette, 1989). We will not try to demonstrate that SOC is the mechanism behind earthquakes, as there is a considerable debate about the relation between SOC and earthquakes (Ramos, 2010) but we will show that the paradigm of SOC, the two-dimensional sand pile cellular automaton (Bak et al., 1988) shows a remarkable first digit anomaly.

A SOC state is a special equilibrium reached by extended systems which are governed by non-linear rules generally under dissipative conditions. This regimen is characterized by power laws and fractal geometries. The existence of various laws of this type in seismology: Gutenberg-Richer, Omori, Båth and lately aftershock density distance decay (Felzer and Brodsky, 2006) are the strongest evidence of some critical mechanism at work, although the exact conditions are still unknown. For a recent view of current research see Pruessner (2012) and for a throughout exposition of the subject see Christensen and Moloney (2005) and Jensen (1998).

We tested two cellular automata, known to present very different behaviors: the one-dimensional sand pile (Bak et al., 1988) and the two-dimensional Bak-Tang-Wiesenfeld (BTW) automaton (Bak et al., 1987, 1988). The one-dimensional pile consists of an array of  $L$  integers subjected to random forcing. When a threshold is reached, the forced cell yield, transferring its burden to the next neighbour. Those rules are played asynchronously for a period of time  $T$  until meaningful statistics revealing the special equilibrium reached can be collected. This automaton does not present the properties of SOC since the correlation between cells is weak so that the global energy distribution of the pile (the number of consecutive transfers or avalanche) presents exponential properties, the

interactions decay fast. On the other hand, the BTW automaton is formed by a bidimensional grid of  $L \times L$  points. Again the cells are submitted to random forcing, a threshold is set, and when a cell yields, it transfers its burden to four neighbours. On both automata the borders of the grid are the dissipative points ( $1/4$  of the burden is lost in the  $2D$  case). After asynchronously playing of the rules, the BTW automaton reaches a state of dynamic equilibrium characterized by avalanches of all sizes. These simple rules give rise to a highly correlated state in time and space as well. The global energy distribution of the automaton is a self-similar power law.

In Table 2, we show the results of the one-dimensional sand pile. We present statistics of automata of different sizes, ranging from the small 11 points grid automaton to the bigger 301 one. It is shown that waiting times between avalanches show Benford's anomaly while the energy  $E$  release does not. The explanation to this is quite simple: as the pile does not reach whole size avalanches, because of the weak correlation, most of the events represent avalanches of size one or two, giving to the digits 1 and 2 such high frequencies. On the other hand, the automaton was run for a very long time relative to its size, this long time allows it to reach a diverse population of times between avalanches with first digit anomaly.

In Table 3 we show the BTW sand pile. Again the statistics are shown for automata of different sizes. The range of size is wider because of the higher dimension of the automata. The waiting times and the energetics of the automaton show a remarkable Benford's effect. It should be noted that the lower size automaton exposes weak correlation effect, likewise the  $1D$  sand pile. This is related to the finite size of the grid (Bak et al., 1987); the higher the automaton size, the better the first digit anomaly.

There are other models that are more akin to model seismicity. One of the more severe criticisms to the BTW model, is the lack of aftershocks, a common and well established property of earthquakes. However Ito and Matsuzaki (1990) showed an automaton with minor changes in relation to the BTW model that display aftershocks and is capable of reproducing Omori's law. There are even models with no stochastic mechanisms, like the Carlson-Langer model (Carlson and Langer, 1989) in the tradition of the well known Burridge-Knopoff model (Burridge and Knopoff, 1967). Moreover there are automata with nonconservative rules like the Olami-Feder-Christensen (Olami et al., 1992), all of them are believed to present self-organized critical equilibria. If they show Benford's effect, then they will be the subject of future studies. But we believe that the first digit anomaly is a symptom of these systems.

#### **4 Discussion**

Concerning the actual relationship between earthquakes and SOC, we are bringing new information to light. What we have learnt is that if SOC is the underlying mechanism behind the complexity of earthquakes, revealed in power laws, then its first digit imprint is translated into the main observables



of seismicity like the energy, tsunami runups and waiting times. That's the case of the earthquake source parameters presented. The aftershocks are an interesting matter as it is believed that the heterogeneous stress drop at the fault generates barriers, which at the end generate the complex patterns found in aftershock series, with Omori's law as one of the main characteristics (Aki, 1979). That the first digit phenomenon encounters stable parameters, like the released seismic moment and waiting times is a strong indication that SOC is at work not only on the generation process, but also on the later liberation at the fault itself.

How far could this mechanism be pushed? Are all the relevant parameters of the automata tested subject to first digit anomaly? To test the space structure of the toy models presented, we propose a slightly different automata. The BTW model uses the so called von Neumann lattice where the central point is connected with four neighbours. This kind of model does not allow all the digits to be represented in a given step at pixel points, as the pile yields once four units are reached. If we use a bigger lattice, with eight neighbours, potentially all the range of digits could be reached, and a space structure could be seen. This kind of lattice is called Moore lattice, both geometries are show in Fig. 6. We tested this lattice with the obvious rules: after 8 units are reached, the cell yields to the 8 neighbours, this simple modification should not change the critical regimen hallmark of SOC. In Fig. 7 the energy distribution of 4 different automata is shown. As the grid size grows the distribution approaches a power law, leaving behind the finite size effect, this kind of behaviour is considered indicative of the SOC state. In addition of the waiting times and energy liberated in time, at the end of each avalanche we calculate the first digit distribution of the pixels height, sadly for the subset of states studied we found no first digit anomaly. In Fig. 8 we present a given state after an avalanche, no special structure could be seen, no high dynamical range present and also no first digit anomaly. In Table 4 the relevant parameters studied are presented, and the statistical compliance with the first digit anomaly is seen for the waiting times and energy liberated but no for pixel heigh  $\bar{u}$  data. Based in this simple experiment, we can speculate that space heterogeneity is a crucial condition for the first digit anomaly to occur in conjunction with the non-linear rules, more clearly we expect the homogeneity of the yield to be the reason why first digit phenomena is not present in pixel space.

## 5 Conclusions

The first digit phenomenon has been taken for a simple mathematical property, but it has proven to be hard to elucidate the true origins of it (Berger and Hill, 2011). We have demonstrated that the phenomenon is not only present in the seismic source process, but it is also present in one of the most remarkable explanations of the earthquake phenomena. We claim that an imprint of the SOC mechanism could be traced back by way of Benford's effect, by the study of time and space observables be those indirectly derived or measured in situ.

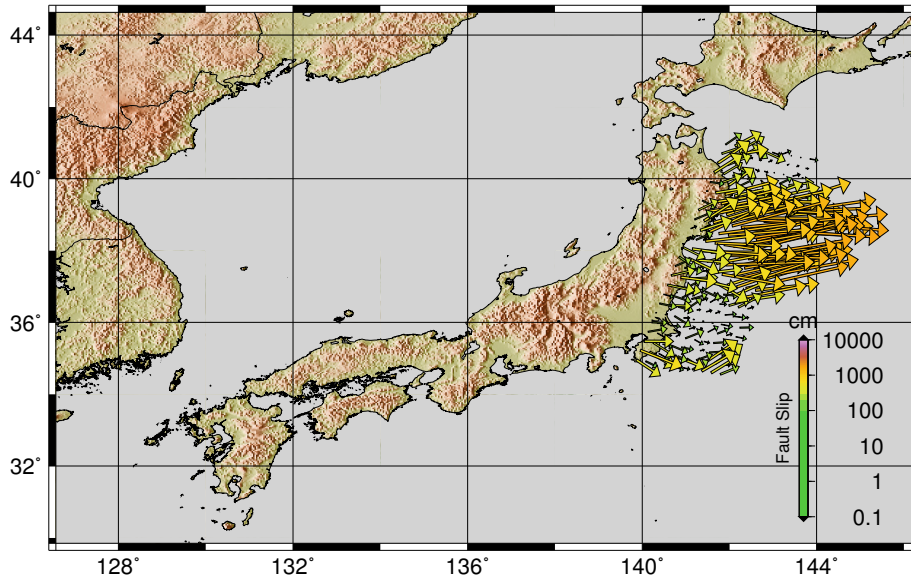
The main properties seems to be: 1) the stochastic nature of the earthquake phenomena in study, 2) a scale independent mechanism, ranging in various orders of magnitude, from short period GPS source inversions to long period seismic wave imaging and 3) nonlinear laws of interaction powering the long range correlations.

*Acknowledgements.* We are specially grateful to professor Armando Cisternas for the critical review of the first drafts. Special thanks go to Lily Seidman who made a throughout review of the english writing. PT and SR were partially supported by postgraduate Conicyt fellowships.

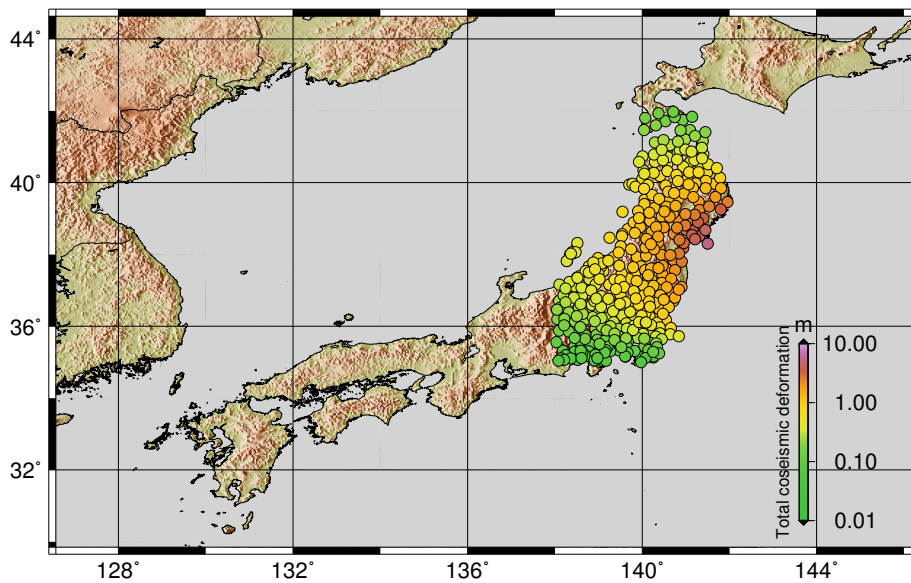
## References

- Aki, K.: Characterization of barriers on an earthquake fault, *Journal of Geophysical Research*, 84, 6140–6148, 1979.
- Bak, P. and Tang, C.: Earthquakes as a self-organized critical phenomenon, *Journal of Geophysical Research*, 94, 15 635–15, 1989.
- Bak, P., Tang, C., and Wiesenfeld, K.: Self-organized criticality: An explanation of the  $1/f$  noise, *Physical Review Letters*, 59, 381–384, 1987.
- Bak, P., Tang, C., and Wiesenfeld, K.: Self-organized criticality, *Physical Review A*, 38, 364–374, 1988.
- Benford, F.: The law of anomalous numbers, *Proceedings of the American Philosophical Society*, pp. 551–572, 1938.
- Berger, A. and Hill, T.: Benford’s Law strikes back: No simple explanation in sight for mathematical gem, *The Mathematical Intelligencer*, 33, 85–91, 2011.
- Berger, A., Bunimovich, L., and Hill, T.: One-dimensional dynamical systems and Benford’s law, *Transactions of the American Mathematical Society*, 357, 197–220, 2005.
- Burridge, R. and Knopoff, L.: Model and theoretical seismicity, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 57, 341–371, 1967.
- Carlson, J. and Langer, J.: Mechanical model of an earthquake fault, *Physical Review A*, 40, 6470, 1989.
- Christensen, K. and Moloney, N. R.: *Complexity and criticality*, vol. 1, Imperial College Press, 2005.
- Cohen, D. and Katz, T.: Prime numbers and the first digit phenomenon, *Journal of Number Theory*, 18, 261–268, 1984.
- Ekström, G., Nettles, M., and Dziewoński, A.: *The Global CMT Project 2004–2010: centroid-moment tensors for 13,017 earthquakes*, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 2012.
- Felzer, K. R. and Brodsky, E. E.: Decay of aftershock density with distance indicates triggering by dynamic stress, *Nature*, 441, 735–738, 2006.
- Geyer, A. and Martí, J.: Applying Benford’s law to volcanology, *Geology*, 40, 327–330, 2012.
- Hayes, G.: Rapid source characterization of the 2011  $M_w$  9.0 off the Pacific coast of Tohoku Earthquake, *Earth Planets and Space*, 63, 529, 2011a.
- Hayes, G.: Updated Result of the March 11, 2011  $M_w$  9.0 Earthquake Offshore Honshu, Japan, Tech. rep., U.S. Geological Survey, <http://earthquake.usgs.gov/earthquakes/eqinthenews/2011/usc0001xgp/finite.fault.php>, 2011b.
- Hill, T.: Base-invariance implies Benford’s law, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 123, 887–896, 1995a.
- Hill, T.: A statistical derivation of the significant-digit law, *Statistical Science*, 10, 354–363, 1995b.
- Hill, T.: The First Digit Phenomenon: A century-old observation about an unexpected pattern in many numerical tables applies to the stock market, census statistics and accounting data, *American Scientist*, 86, 358–363, 1998.
- Ito, K. and Matsuzaki, M.: Earthquakes as self-organized critical phenomena, *Journal of Geophysical Research*, 95, 6853–6860, 1990.
- Jensen, H. J.: *Self-organized criticality: emergent complex behavior in physical and biological systems*, vol. 10, Cambridge university press, 1998.

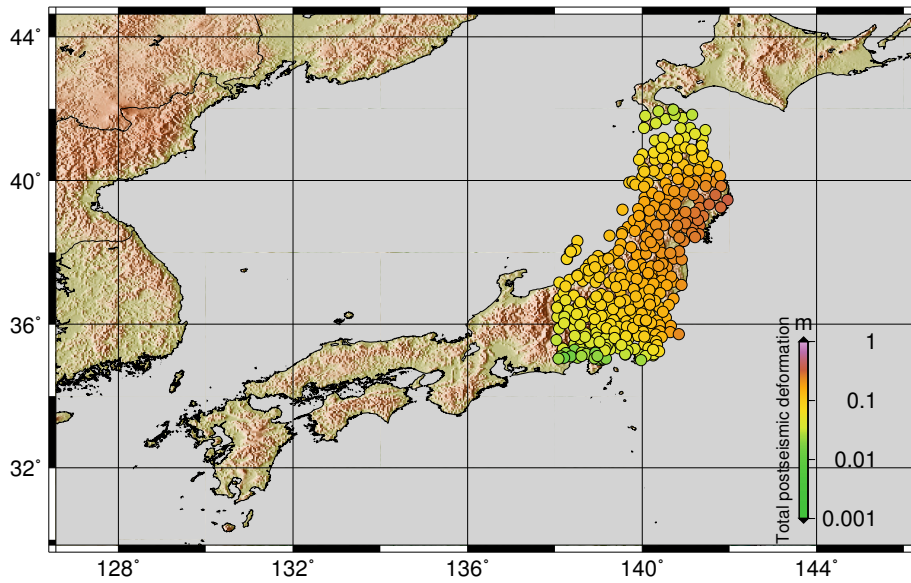
- Ji, C., Wald, D., and Helmberger, D.: Source description of the 1999 Hector Mine, California, earthquake, part I: Wavelet domain inversion theory and resolution analysis, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 92, 1192–1207, 2002.
- Knuth, D.: *Seminumerical algorithms*, Volume 2 of *The art of computer programming*, 1981.
- Lay, T., Kanamori, H., Ammon, C., Nettles, M., Ward, S., Aster, R., Beck, S., Bilek, S., Brudzinski, M., Butler, R., et al.: The great Sumatra-Andaman earthquake of 26 December 2004, *Science*, 308, 1127–1133, 2005.
- Mori, N., Takahashi, T., Yasuda, T., and Yanagisawa, H.: Survey of 2011 Tohoku earthquake tsunami inundation and run-up, *Geophysical Research Letters*, 38, L00G14, 2011.
- Newcomb, S.: Note on the frequency of use of the different digits in natural numbers, *American Journal of Mathematics*, 4, 39–40, 1881.
- Nigrini, M.: A taxpayer compliance application of Benford’s law, *The Journal of the American Taxation Association*, 18, 72–91, 1996.
- Nigrini, M. and Miller, S.: Benford’s law applied to hydrology data results and relevance to other geophysical data, *Mathematical Geology*, 39, 469–490, 2007.
- Olami, Z., Feder, H., and Christensen, K.: Self-Organized Criticality in a continuous, nonconservative cellular automaton modeling earthquakes, *Physical Review Letters*, 68, 1244–1247, 1992.
- Ozawa, S., Nishimura, T., Suito, H., Kobayashi, T., Tobita, M., and Imakiire, T.: Coseismic and postseismic slip of the 2011  $M_w$  9 Tohoku-Oki earthquake, *Nature*, 475, 373–376, 2011.
- Pruessner, G.: *Self-organised criticality: theory, models and characterisation*, Cambridge University Press, 2012.
- Ramos, O.: Criticality in earthquakes. Good or bad for prediction?, *Tectonophysics*, 485, 321–326, 2010.
- Sambridge, M., Tkalčić, H., and Jackson, A.: Benford’s law in the natural sciences, *Geophysical Research Letters*, 37, L22 301, 2010.
- Sambridge, M., Tkalčić, H., and Arroucau, P.: Benford’s Law of First Digits: From Mathematical Curiosity to Change Detector, *Asia Pacific Mathematics Newsletter*, 1, 2011.
- Simons, M., Minson, S., Sladen, A., Ortega, F., Jiang, J., Owen, S., Meng, L., Ampuero, J., Wei, S., Chu, R., et al.: The 2011 magnitude 9.0 Tohoku-Oki earthquake: Mosaicking the megathrust from seconds to centuries, *Science*, 332, 1421, 2011.
- Sornette, A. and Sornette, D.: Self-organized criticality and earthquakes, *EPL (Europhysics Letters)*, 9, 197, 1989.
- Tarantola, A.: *Elements for Physics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2006.
- Tolle, C., Budzien, J., and LaViolette, R.: Do dynamical systems follow Benford’s law?, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 10, 331–336, 2000.
- Vigny, C., Socquet, A., Peyrat, S., Ruegg, J., Métois, M., Madariaga, R., Morvan, S., Lancieri, M., Lacassin, R., Campos, J., et al.: The 2010  $M_w$  8.8 Maule megathrust earthquake of Central Chile, monitored by GPS, *Science*, 332, 1417, 2011.



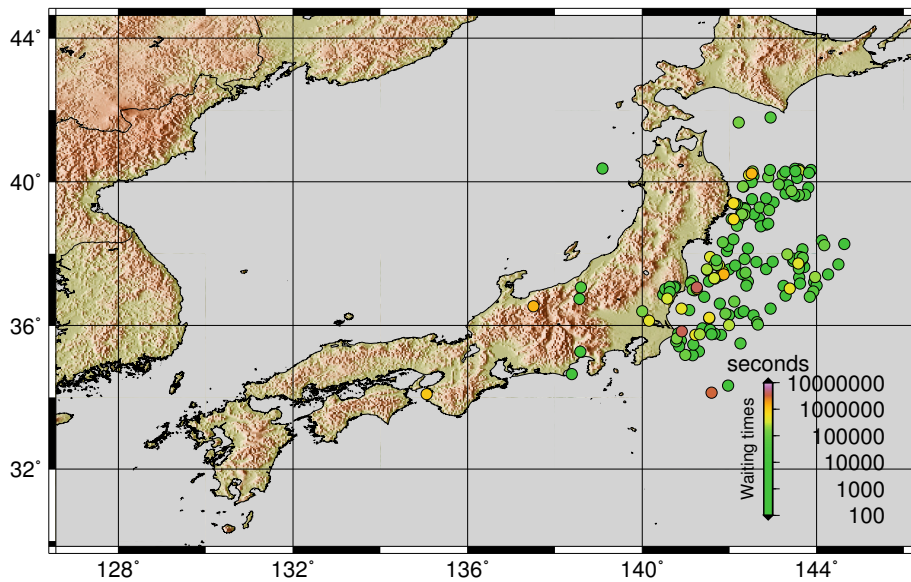
**Fig. 1.** Finite fault model from NEIC (Hayes, 2011a). Colorbar slip magnitude in centimeters. Size of arrows proportional to slip, rake represented as direction of arrows. From the size of arrows it is clear the existence of displacements in a broad dynamical range, covering at least six orders of magnitude.



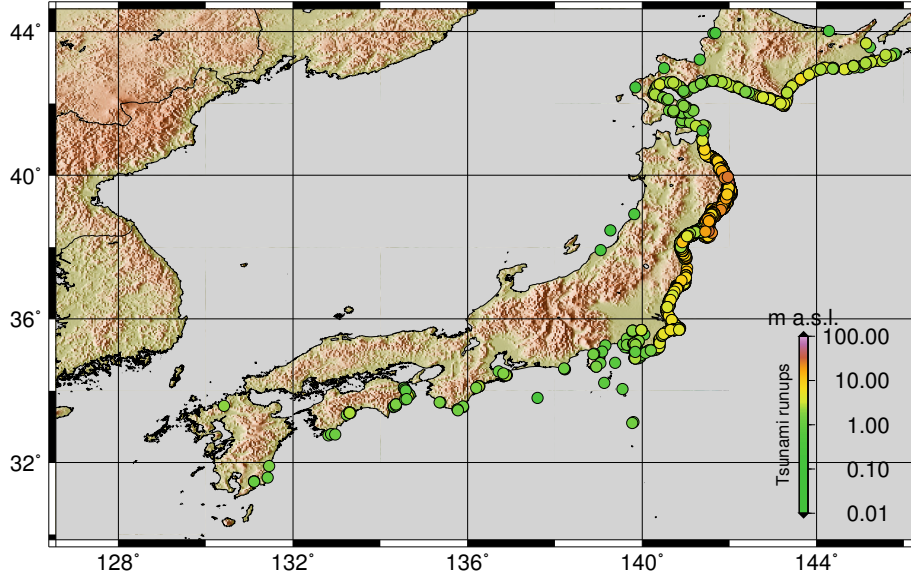
**Fig. 2.** Coseismic slip distribution (Ozawa et al., 2011). Displacement in meters. Note the dynamical range of data spanning four orders of magnitude.



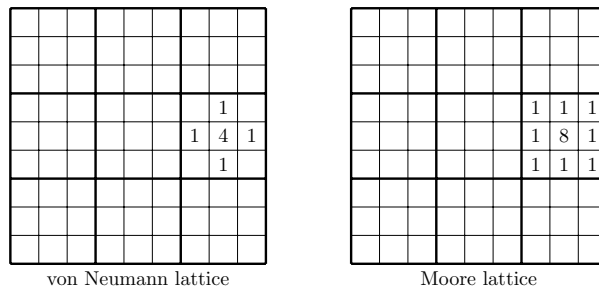
**Fig. 3.** Postseismic slip distribution (Ozawa et al., 2011). Displacement in meters. Dynamical range of data clearly evidenced from color distribution of circles running at least four orders of magnitude.



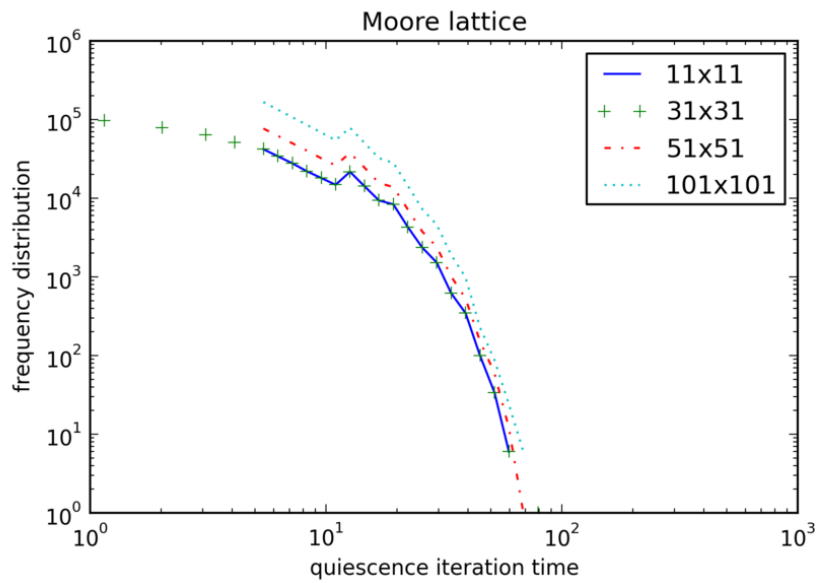
**Fig. 4.** Selected events of the aftershock series, from 11 March 2012 until 31 January 2012, from GCMT database (Ekström et al., 2012). Dynamical range of waiting times is at least four orders of magnitude.



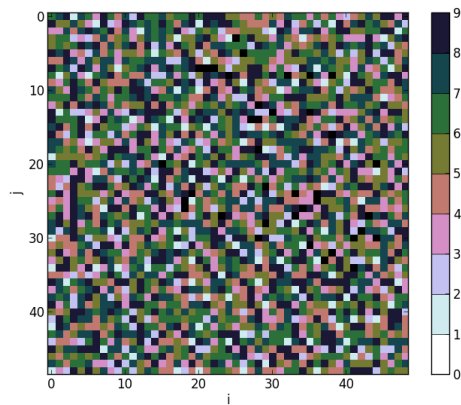
**Fig. 5.** Runup data measured by Mori et al. (2011). Colorbar in meters. Different scales present in runup data clearly evident from populations present in figure spanning at least 4 orders of magnitude.



**Fig. 6.** Two different cellular automata geometries. Neumann lattice used in BTW cellular automata, Moore lattice used in automata proposed in this study.



**Fig. 7.** Moore lattice cellular automata distribution quiescence distribution. As the lattice size grows, the finite size effect becomes smaller, reaching the automata the regimen of self-organized criticality, as proposed by Bak et al. (1987, 1988).



**Fig. 8.** Moore lattice cellular automata, pixel height distribution after an avalanche. There is no appreciable high dynamical range distribution in height distribution, as those revealed in figures 1, 2, 3, 4, 5 also there is no first digit phenomenon in this particular variable.



**Table 1.** Benford's law probabilities  $P_D$  in conjunction with the first digit distribution of various parameters related to the source of the Tohoku earthquake and related phenomena.

$D$	$P_D$	Finite Fault <sup>a</sup>		Surface GPS <sup>b</sup>		GCMT Aftershock <sup>c</sup>		Runups <sup>d</sup>
		$\Delta u$	$M_0$	$ u_c $	$ u_p $	$M_0(t)$	$\Delta\tau$	$r$
1	0.301	0.346	0.325	0.340	0.387	0.314	0.327	0.360
2	0.176	0.163	0.154	0.154	0.190	0.169	0.123	0.173
3	0.125	0.113	0.142	0.101	0.078	0.140	0.070	0.104
4	0.097	0.096	0.104	0.101	0.064	0.093	0.076	0.080
5	0.079	0.067	0.104	0.078	0.059	0.070	0.053	0.062
6	0.067	0.058	0.050	0.064	0.056	0.087	0.070	0.062
7	0.058	0.046	0.042	0.064	0.062	0.041	0.058	0.057
8	0.051	0.046	0.025	0.045	0.053	0.052	0.152	0.054
9	0.046	0.067	0.054	0.053	0.050	0.035	0.070	0.049
$\chi^2_{9-1}$		0.340	0.583	0.0123	0.451	0.271	4.628	0.161
$p$		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.797	1.000
$n$		240	240	377	357	172	172	5260

<sup>a</sup>Slips and Seismic Moment from Hayes (2011b).

<sup>b</sup>Coseismic and Postseismic displacements from Ozawa et al. (2011).

<sup>c</sup>Moment and waiting times aftershock data from GCMT (Ekström et al. (2012)). From 11 March 2011 to 31 January 2012.

<sup>d</sup>Runups data from Mori et al. (2011).

**Table 2.** Sand pile 1D Cellular automaton (Bak et al., 1988). First digit statistics for various 1D cellular automata of different sizes.

$L$		11		21		31		101		201		301	
$D$	$P_D$	$\Delta\tau$	$E$	$\Delta\tau$	$E$	$\Delta\tau$	$E$	$\Delta\tau$	$E$	$\Delta\tau$	$E$	$\Delta\tau$	$E$
1	0.301	0.335	0.786	0.328	0.733	0.326	0.796	0.322	0.780	0.315	0.802	0.318	0.812
2	0.176	0.217	0.181	0.204	0.201	0.191	0.163	0.186	0.168	0.189	0.160	0.184	0.154
3	0.125	0.173	0.030	0.137	0.053	0.140	0.034	0.140	0.041	0.139	0.030	0.136	0.028
4	0.097	0.066	0.004	0.093	0.010	0.103	0.006	0.107	0.008	0.103	0.006	0.104	0.005
5	0.079	0.077	0.000	0.083	0.003	0.080	0.001	0.079	0.002	0.080	0.001	0.081	0.001
6	0.067	0.055	0.000	0.058	0.000	0.056	0.001	0.061	0.001	0.063	0.000	0.062	0.000
7	0.058	0.026	0.000	0.044	0.000	0.042	0.000	0.045	0.000	0.048	0.000	0.049	0.000
8	0.051	0.022	0.000	0.026	0.000	0.037	0.000	0.035	0.000	0.035	0.000	0.037	0.000
9	0.046	0.029	0.000	0.027	0.000	0.023	0.000	0.025	0.000	0.028	0.000	0.029	0.000
$\chi^2_{9-1}$		1.110	9.100	0.550	8.130	0.450	9.080	0.410	8.760	0.310	9.200	0.260	9.380
$p$		1.000	0.330	1.000	0.420	1.000	0.340	1.000	0.360	1.000	0.330	1.000	0.310
$T$		1210		4410		9610		102010		404010		906010	

**Table 3.** BTW 2D Cellular automaton (Bak et al., 1987, 1988). First digit statistics for various 2D cellular automata of different sizes.

$L \times L$		$11 \times 11$		$21 \times 21$		$31 \times 31$		$101 \times 101$		$201 \times 201$		$301 \times 301$	
$D$	$P_D$	$\Delta\tau$	$E$	$\Delta\tau$	$E$	$\Delta\tau$	$E$	$\Delta\tau$	$E$	$\Delta\tau$	$E$	$\Delta\tau$	$E$
1	0.301	0.333	0.512	0.438	0.360	0.384	0.327	0.387	0.360	0.368	0.337	0.364	0.318
2	0.176	0.231	0.242	0.185	0.230	0.219	0.165	0.206	0.183	0.209	0.184	0.207	0.183
3	0.125	0.190	0.130	0.148	0.153	0.130	0.133	0.135	0.115	0.138	0.126	0.136	0.131
4	0.097	0.095	0.072	0.105	0.105	0.100	0.107	0.088	0.087	0.091	0.094	0.095	0.099
5	0.079	0.061	0.025	0.038	0.060	0.076	0.084	0.063	0.066	0.065	0.073	0.063	0.078
6	0.067	0.041	0.012	0.043	0.042	0.023	0.064	0.043	0.059	0.048	0.058	0.051	0.061
7	0.058	0.027	0.004	0.016	0.024	0.026	0.048	0.037	0.050	0.035	0.049	0.036	0.051
8	0.051	0.007	0.003	0.019	0.017	0.023	0.039	0.026	0.043	0.024	0.042	0.027	0.042
9	0.046	0.014	0.000	0.008	0.009	0.021	0.033	0.015	0.038	0.021	0.036	0.021	0.036
$\chi^2_{9-1}$		2.120	4.590	2.250	1.810	1.500	0.200	1.120	0.180	0.930	0.140	0.830	0.110
$p$		0.980	0.800	0.970	0.990	0.990	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$T$		1210		4410		9610		102010		404010		906010	

**Table 4.** Moore lattice  $2D$  Cellular automaton. First digit statistics for various  $2D$  cellular automata of different sizes.

$L \times L$	$D$	$P_D$	$11 \times 11$			$21 \times 21$			$31 \times 31$			$101 \times 101$		
			$\Delta\tau$	$E$	$\bar{u}$	$\Delta\tau$	$E$	$\bar{u}$	$\Delta\tau$	$E$	$\bar{u}$	$\Delta\tau$	$E$	$\bar{u}$
	1	0.301	0.329	0.385	0.747	0.323	0.325	0.055	0.321	0.325	0.050	0.320	0.313	0.046
	2	0.176	0.162	0.185	0.094	0.170	0.177	0.079	0.172	0.178	0.075	0.172	0.176	0.072
	3	0.125	0.119	0.120	0.116	0.126	0.129	0.100	0.128	0.128	0.097	0.129	0.125	0.094
	4	0.097	0.097	0.084	0.127	0.101	0.095	0.122	0.102	0.098	0.119	0.102	0.095	0.117
	5	0.079	0.081	0.063	0.135	0.082	0.076	0.138	0.082	0.066	0.139	0.082	0.077	0.138
	6	0.067	0.068	0.051	0.138	0.067	0.062	0.150	0.066	0.056	0.155	0.065	0.065	0.157
	7	0.058	0.057	0.043	0.134	0.054	0.052	0.162	0.053	0.056	0.168	0.052	0.056	0.174
	8	0.051	0.047	0.037	0.122	0.043	0.045	0.165	0.043	0.049	0.180	0.042	0.049	0.192
	9	0.046	0.039	0.032	0.059	0.035	0.039	0.030	0.034	0.043	0.018	0.034	0.044	0.010
	$\chi^2_{9-1}$		0.043	0.431	7.838	0.092	0.064	11.422	0.105	0.069	13.745	0.123	0.008	15.745
	$p$		1.000	1.000	0.449	1.000	1.000	0.179	1.000	1.000	0.089	1.000	1.000	0.046
	$T$		73448210			8108053			22820134			96357626		

## Capítulo 3

# Uso del contenido de información presente en la fuente sísmica

En la publicación presentada en este capítulo, que se ha enviado a la revista *Journal of Seismology* se construye sobre lo trabajado en el capítulo 2. En base a la idea de entropía, que es posible de calcular considerando un fenómeno que muestra anomalía del primer dígito, se enfrenta el problema de identificación de señales sísmicas. Se ha estudiado el terremoto de Pichilemu del 11 de marzo del 2010, registrado en distancia epicentral. Se propone una nueva familia de algoritmos basados en la idea de autosimilaridad presente en los sismogramas y estos se comparan con los algoritmos más populares en el ámbito, que son los de energía. Se muestra que los nuevos algoritmos, que se llamarán de entropía, son competitivos y mejor aún son complementarios a los métodos del tipo STA/LTA, por lo que se aumenta la capacidad de detección. Las perspectivas que se abren tocan aspectos de fundamento, tales como la posibilidad de comprender la raíz de la complejidad de los terremotos, conocer el volumen de información máxima que puede extraerse a partir de cierto acervo de datos, y la posibilidad de aplicar estas nuevas ideas al problema de alerta temprana.

## An earthquake trigger based on entropy of first digit anomaly

Patricio A. Toledo · Jaime A. Campos

the date of receipt and acceptance should be inserted later

**Abstract** We face the problem of identification of a seismic signal, under an environment of superimposed events, through the development of an algorithm of detection based on a statistical pattern, linked to Shannon's entropy, obtained from first digit anomaly present in seismograms. This detection method exploits an information invariant contained in the seismic signal, which is independent of the size of events, at least in the range accessible to our observations. We compared the performance of the proposed trigger versus a generic STA/LTA algorithm using near field data belonging to the 11/3 2010 Pichilemu earthquake. Our findings show that both algorithms are complementary and its simultaneous use increases

---

P.A. Toledo

Department of Geology, University of Chile

E-mail: patoledo@ing.uchile.cl *Present address: Mining Innovation Center, University Adolfo Ibáñez*

J.A. Campos

Department of Geophysics, University of Chile

E-mail: jaime@dgf.uchile.cl

the efficiency of detection. We propose this strategy of recognition, well adapted to the processing and analysis needs imposed by today's mass seismic recording capacities, might also be important for early warning systems.

**Keywords** pattern recognition, entropy, information, earthquakes

**PACS** 93.85.+q · 91.30.Dk · 91.30.Px · 65.40.Gr · 89.70.+c · 43.60.Lq

## 1 Introduction

Pattern recognition is a general problem related to the aptitude of machines to learn. As a general problem, many fields of sciences are concerned by this ability, from biological to social science, from branches of mathematics and physics to informatics. In seismology, a general problem of pattern recognition is the potential of computers to recognize earthquakes recorded by instruments. The availability of high quality seismic pattern recognition algorithms, known as triggers, allows detailed studies devoid of biases coming from human intervention or by drifts in the algorithms themselves. With modern instrumentation, an aftershock survey could collect terabytes of data per month, which must be processed quickly for seismic localization, phase wave identification, focal mechanisms determination and magnitude estimation. A similar but more critical situation is faced by current operations of worldwide seismological centers, which must estimate classical parameters to be used in early warning systems, specially in high seismic risk areas. In addition, others studies may concern source inversions, change of stress determination, noise and phase tomography. All of them are strongly dependent on the aptitude of the recognition algorithms to accurately identify seismic events.

Current trigger methods, using near field body waves, can be grouped into major groups: those based on energy considerations and those based on wave morphology. Energy methods are the family of procedures depending on the square of the particle velocity recordings, for example classic short time versus long time energy average STA/LTA (Bormann 2002) used in modern microseismic tools like CMM (Drew et al 2005). Wave morphology algorithms are those aimed at enhancing a particular signature of earthquakes: the sudden arrival of P wave compared with noise or the high amplitude of the S wave, examples are the Z-detector (Swindell and Snell 1977) or the polarization filter methods (Reading et al 2001). For a complete review of these triggers see Withers et al (1998) and examples of use of these algorithms in the context of the Central Chile Maule earthquake are Lange et al (2012) and Rietbrock et al (2012).

In this work, we explore a type of trigger based on the information content (Shannon 1948) of signals. Sambridge et al (2010, 2011) shows that the onset of earthquakes presents a signature very distinctive: given two observation time windows, one containing mainly noise and the other the first instants of the event, the frequency of occurrence of the first digit different from zero is a characteristic of the seismic event, with a decreasing probability for each digit from one to nine as follows:

$$p_{\lambda}^1 = k_N \log(1 + 1/\lambda), \lambda = 1, 2, \dots \quad (1)$$

where  $k_N \simeq 0.43$  represents a change to natural from decimal logarithm. This regularity is known as the first digit phenomenon and is commonly found in natural phenomena (Sambridge et al 2010; Sottili et al 2012; Nigrini and Miller 2007; Geyer and Martí 2012).

This particular feature of earthquakes signals allows the construction of a characteristic function (Baer and Kradolfer 1987) on which detection is applied. Sambridge et al (2010) proposes a statistical characteristic function based on the goodness of fit (GOF) between probabilities predicted by equation 1 and empirical probabilities given by the actual frequencies of the first digits found in the observation time window. This GOF trigger may identify clear wave arrivals, but also weak seismic signals hidden in noise. This last property is very important as the energy triggers may have problems making such identification, because if noise level is too high, only after careful filtering, the earthquake signals could be isolated.

## 2 The information content of earthquakes

We will consider the seismic source as a fault broadcasting information in the form of wave radiation travelling through a noisy channel represented by the crust, which is recorded at a seismometer acting like a receiver. The situation is analogous to the transmission of a message in a written language, given an alphabet  $A$  composed of letters each one with a given probability of occurrence  $p_\lambda$ ,  $\lambda \in A$ , the information content of a message written in that language could be quantified using Shannon's entropy:

$$H = -k_S \sum_{\lambda \in A} p_\lambda \log p_\lambda, \quad (2)$$

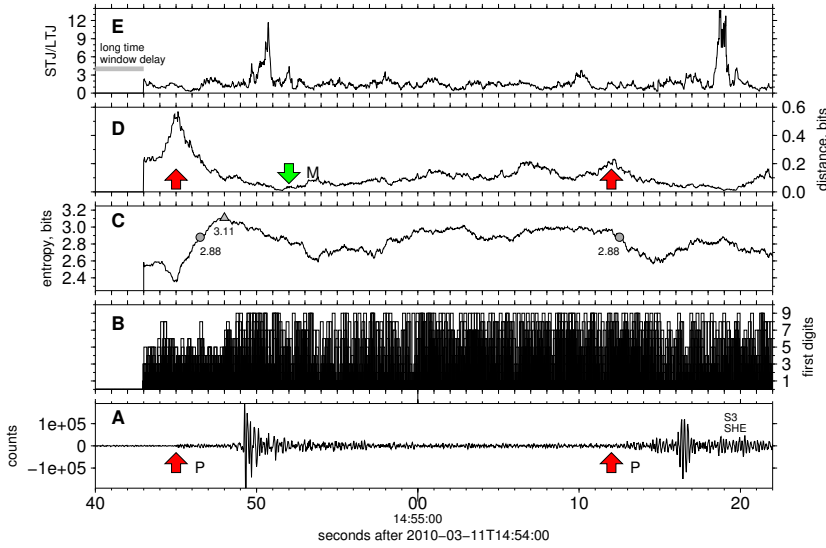
$k_S \simeq 1.44$  measured in bits. For example, in Yaglom and Yaglom (1983) estimations of information content are given for various languages. English alphabet has  $|A| = 27$  symbols and given the actual frequencies of the letters its entropy is  $H \simeq 4.03$  bits, which is interpreted as the number of bits needed to transmit a letter of



a message through a noisy channel. As it is known, entropy reaches a maximum  $H_*$  when all letters are equiprobable with a value of  $\log_2 |A| \simeq 4.74$  bits. So the net effect of having nonuniform probabilities for each letter decreases the entropy or in terms of information, the more unusual the symbols the more information available.

Now consider the seismic horizontal continuous measurement shown in Fig. 1 panel A, after calculation of the first digit different from zero shown in panel B, the new time signal is composed of an alphabet of nine elements each representing the nine nonzero digits. Following our approach, a fault is represented by a stochastic source broadcasting messages with first digit phenomenon, and they represent the formal language transmitted through the crust by propagating seismic waves. The maximum entropy is reached when the recorded messages have equal probabilities, resulting in  $\log_2 9 \simeq 3.17$  bits on average, this is the most expensive scenario and it is found in a white noise setting, in panel C the entropy is calculated from equation 2 using empirical frequencies obtained over a mobile window of 3 seconds show above. This moving window entropy reach a maximum at 14:54:48 with a value of  $H \simeq 3.11$  close to the theoretical maximum. When a seismic source broadcasts a signal with a perfect first digit anomaly, the information content of the signal is  $H \simeq 2.88$  bits. Two moments where this feature is seen are marked also on panel C, and this number is the average quantity of bits required to transmit the onset of an earthquake. Note that the entropy of a seismic signal is lower than  $H_*$  this is one of the main reasons of the ability of humans and hopefully machines to identify earthquakes by analyzing recordings.

Within this scheme, the next step is to look for a characteristic function behaving like a distance between the theoretical probabilities, given by equation 1,



**Fig. 1** Information content of a seismic signal belonging to the Pichilemu aftershock series, recorded at station S3 on the east component, see Fig. 4 A) Forty seconds of recorded signals, two events are seen at 14:54:47 and 14:55:13 approximately, marked with red arrows B) The first digit distribution of the aforementioned recordings C) First digit distribution entropy of the signal. Three important points are marked, a maximum value of entropy peaking at 3.11 bits and two moments where the entropy reaches the perfect first digit phenomenon with entropy values of 2.88 D)  $\Delta(p, q)$  pseudodistance proposed in equation 5. After seismic events, this pseudodistance decreases reaching a minimum close to zero at point M marked with a green arrow E) Short time versus long time information  $K(w, q)$ , this trigger peaks after the first arrival of the events, with a delay controlled by the long time chosen.

and the empirical probabilities, estimated from seismic data. Under our description, a distance close to zero will happen when the theoretical perfect signal, i.e. following first digit anomaly, is approached by the recorded signal contaminated with noise. We interpret this moment as a seismic event being identified in time. We will build this distance in the following way, let a system with two different macrostates formed from a set  $A$ . When the system goes from a state character-

ized by probabilities  $p_\lambda$  to a state characterized by probabilities  $q_\lambda$ , the relative information change between those states is given by:

$$H_\lambda^{p \rightarrow q} = \log q_\lambda - \log p_\lambda, \quad (3)$$

and the expected global change in information is given by the  $q$ -average:

$$H^{p \rightarrow q} = \sum_{\lambda \in A} q_\lambda H_\lambda^{p \rightarrow q}, \quad (4)$$

this quantity is positive unless  $p_\lambda = q_\lambda$  for all  $\lambda \in A$ , which means that a nontrivial change in entropy always results in increasing information (Volkenstein and Shentitzer 2009). What happens when the system suffers the reverse process is analogous and it is represented by the  $p$ -average from going from state  $q_\lambda$  to  $p_\lambda$ . The addition of both sources of information define a pseudodistance  $\Delta(p, q) = H^{p \rightarrow q} + H^{q \rightarrow p}$ , between the two states:

$$\Delta(p, q) = \sum_{\lambda \in A} (p_\lambda - q_\lambda) \log \frac{p_\lambda}{q_\lambda}, \quad (5)$$

first proposed by Jeffreys (Jeffreys 1946) and discussed in Tarantola (2006, 2005). In statistic inference, this pseudodistance is called the Kullback-Leibler divergence (Kullback and Leibler 1951; Kullback 1997). In Fig. 1 panel D we can see its evolution after the arrival of the event, it decreases until it reaches a minimum near zero (M in Fig. 1). It presents a considerable delay associated with the rather long time window used to calculate the empirical frequencies. Another characteristic function for earthquake detection is given by the ratio of  $\Delta(p, w)$  defined over frequencies  $w_\lambda$  at a short time window and frequencies  $q_\lambda$  defined over a long time window:

$$K(w, q) = \frac{\Delta(p, w)}{\Delta(p, q)}, \quad (6)$$

this last trigger, is similar to STA/LTA triggers and we will call it STJ/LTJ trigger. In Fig. 1 panel E we show the behaviour of this trigger. In this case it has two sharp peaks delayed from the events, again because causality of the long time window applied.

#### Strategy of application

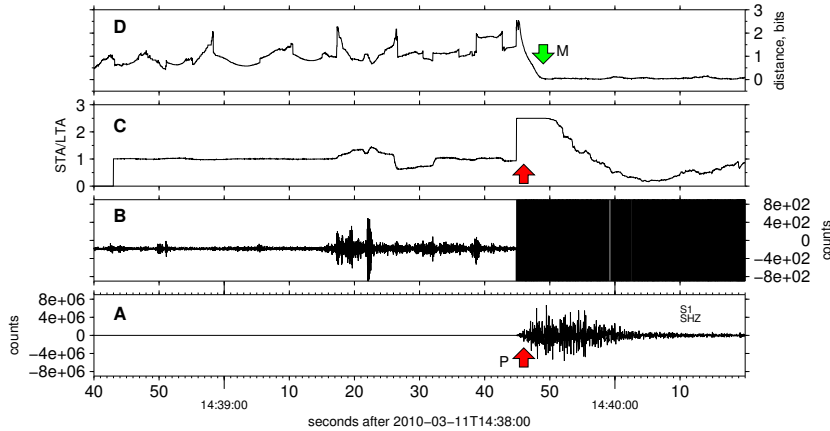
Given a time series, hopefully containing earthquake signals, a time window of the signal is selected as the current state (see the time window delay in figure 1 panel E) this is the only discretionary parameter of the pseudodistance trigger and it is bounded by the sampling frequency and by the target magnitude of the events on study. This window will be considered representative of the crust state near the receiver. Over this lapse of time, the first digit of the signal is obtained and the empirical statistics are calculated. Those statistics represent the state  $q_\lambda$  in equation 5, and we compare it against the pure first digit anomaly given by probabilities  $p_\lambda$  from equation 1. If the Jeffreys' divergence is close to zero we claim there is an earthquake registered, otherwise we advance the window further in time as we can not point the occurrence of an event because of existence of false positive cases. In the case of the STJ/LTJ trigger, two time windows are selected at the same time, the short window gives  $w_\lambda$  and the long  $q_\lambda$ , both windows do not overlap, this trigger is noisier because of the two windows involved but peaks high at earthquake arrivals.

An interesting characteristic of this information trigger is related to the scaling properties inherited from the first digit phenomenon. As it was remarked in Sambridge et al (2010), the first digit anomaly is capable of detecting events embedded

in the coda of an early earthquake or mixed with noise. In Fig. 2 we can appreciate this feature. An event is shown in panel A. At the scale presented in this frame, no appreciable seismicity could be seen other than the event shown. Panel B shows the same recorded data rescaled  $10^4$  times, as a consequence, a richer seismicity emerges. The panel C shows a STA/LTA trigger, which presents a shock at 14:39:45 and closer inspection reveals early energy, which slightly delineates the weaker seismicity. This trigger usually works setting two thresholds, a lower to call off the trigger alarm and a upper to start the trigger. This early energy, with high probability, would be filtered by the upper threshold. Panel D shows  $\Delta(p, q)$  trigger, the big shock is sharp, but the overall structure is richer, showing more complex seismicity before. We interpret this richness as a scale-invariant property, as the intensity in  $\Delta(p, q)$  is less modulated by energy and a waterlevel cutoff may represent better the arrival of smaller events.

#### Sensibility of the trigger

The introduction of two time windows induces higher variability in  $K(w, q)$  than in  $\Delta(p, w)$ , so we explore the differences between the energy trigger and the entropy trigger. In Fig. 3 panel A, we show the east component for an event arriving at 14:55:38. Three time windows were chosen: 0.3, 1 and 3 seconds. In panel B, the entropy trigger marks sharp the arrival of the waves, even at the shorter window, although the better detection should be considered at the 3 seconds window, even taking into account the delay. In this case, the energy trigger shown in panel C displays a noisy behaviour and a slight fluctuation marks the wave arrival, the

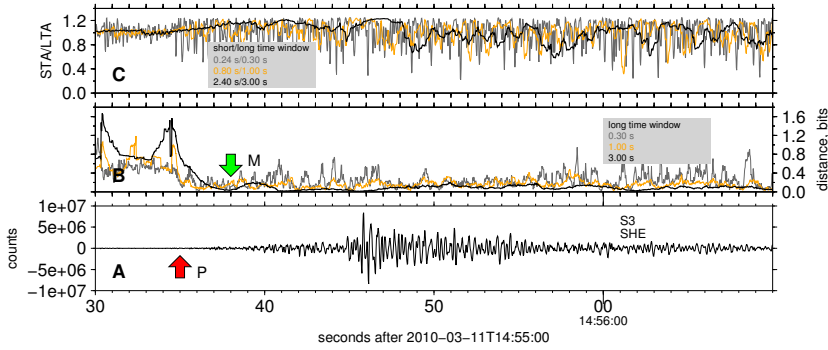


**Fig. 2** Scaling properties of information trigger A) Red arrow marks event belonging to the Pichilemu aftershock series arriving at 14:39:45 measured at station S1 on the vertical component, see Fig. 4 B) Same recording now rescaled  $10^4$  times. Smaller earthquakes are visible at this scale C) STA/LTA panel clearly shows first energy arrival, red arrow indicates P wave, also note the weaker signals before 14:39:45. Common waterlevel cutoffs will dismiss this information, clearly related with the smaller event present D) The  $\Delta(p, q)$  divergence shows a richer structure, reaching a minimum after the big event arrival, point M with the green arrow. We must note that before this point the pseudodistance is less modulated by the big energy arrival and smaller events could be identified, we interpret this behaviour as a scale-invariant property.

smaller windows, induce even weaker variations, yet harder to associate with seismic waves.

### 3 Application of information trigger to a local aftershock series

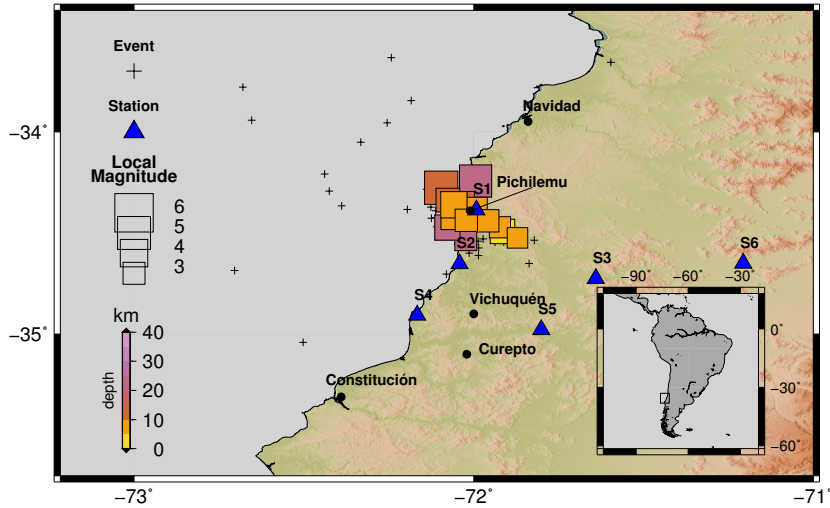
A set of carefully selected earthquakes was studied with aid of those triggers. In order to obtain clean signals without attenuation and path effects, our selection criteria sought events with a significative magnitude range at epicenter distances less than 100 km. Table 1 represents one day aftershocks of 11/3 2010 Pichilemu



**Fig. 3** Sensibility with respect to time windows A) Event belonging to the Pichilemu aftershock series, red arrow marks P wave arriving at 14:55:38 approximately, measured at station S3 on the east component, see Fig. 4 B)  $\Delta(p, q)$  pseudodistance over three different long time windows. The longer the time window the smoother the signal. A longer time window is translated into a longer decay but not necessarily in smaller peaks, point M with the green arrow marks the minimum pseudodistance C) The noisy effect of the time averaging in the case of energy trigger is clearly shown, rendering waterlevel cutoffs harder to calibrate.

Seismic sequence (Lange et al 2012; Rietbrock et al 2012; Fariás et al 2011) used in this study. They range in depth from very superficial near zero depth to 23 km and from 4.2 to 6.7 in magnitude. They are events produced by a normal fault activated after the Maule megathrust earthquake (Fariás et al 2011). The continuous recordings are those from the Maule Aftershock Deployment led by the University of Chile and IRIS. In Fig. 4 it is shown in circles the location of the Pichilemu series, along crosses with the events considered for testing of the triggers, the temporal array of short period stations used is also shown in triangles.

As the objective of this comparison is to explore the performance of our algorithm in respect of one of the most popular methods used in seismology and considering the multiple possible combinations an energy trigger parameter set can display, we have established the same value for time windows on all triggers at



**Fig. 4** Area of study near Pichilemu, Central Chile. Shown in squares are the selected events localized in this study to be used for comparison between STA/LTA and the proposed triggers, see Table 1. Blue triangles show near field short period network of seismometers used. Not all stations were fully operational at the time of the aftershock. Crosses show the epicenter of the main Pichilemu aftershock series from 11/3 to 29/3 2010.

test, also we have based our analysis on a open implementation of the STA/LTA algorithm described in Withers et al (1998) and implemented in Beyreuther et al (2010).

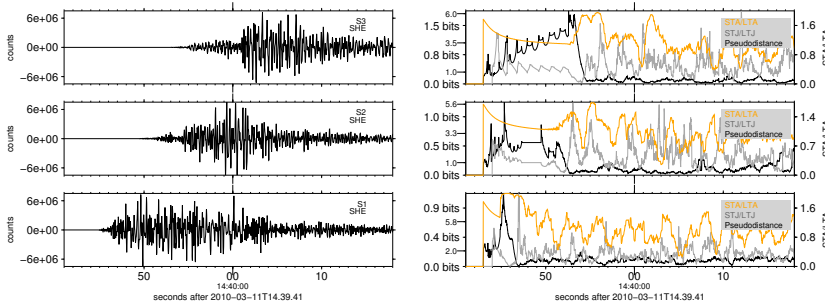
The first event studied is that with higher magnitude in Table 1. Recorded at three stations with available data S1, S2 and S3. Fig. 5 presents the comparison of STA/LTA,  $K(w, q)$  and  $\Delta(p, q)$  triggers along with the east-west waveform recorded at each station. The characteristic function related to STA/LTA gives, in general, good results as expected, presenting an envelope associated with the arrival of the diffuse energy from the earthquake. The entropy trigger  $\Delta(p, q)$  presents a sharp decrease towards zero, indicating the arrival time of the expected information and confirming the existence of a statistical structure associated to



**Table 1** Events located on 2010-03-11 from the Pichilemu aftershock series. Those events were recorded near the epicenter with a short period network of stations deployed after the big Maule earthquake, see Fig. 4 for the location of the intervention array.

event	hour	lat	lon	dep	$M_l$
	hh:mm:ss			km	
1	14:39:42	-34.29	-72.06	5.3	6.7
2	14:55:25	-34.45	-72.27	0.0	6.6
3	15:26:13	-34.34	-71.99	7.2	4.9
4	15:34:47	-34.49	-71.92	7.3	5.0
5	15:46:22	-34.47	-71.93	7.7	4.6
6	15:53:33	-34.41	-71.99	5.4	4.7
7	15:54:37	-34.48	-72.08	21.5	5.5
8	16:10:53	-34.39	-72.04	10.1	5.0
9	17:18:48	-34.34	-72.08	10.2	5.1
10	17:45:59	-34.36	-72.07	22.9	4.2
11	18:00:38	-34.41	-72.04	17.4	4.8
12	18:02:15	-34.42	-72.10	17.0	4.8
13	19:09:17	-34.39	-72.01	7.0	4.8
14	20:11:19	-34.38	-72.06	7.1	5.7
15	20:48:42	-34.49	-71.98	16.6	4.9
16	21:31:04	-34.53	-71.88	17.1	4.3
17	21:50:03	-34.44	-72.04	9.8	5.1

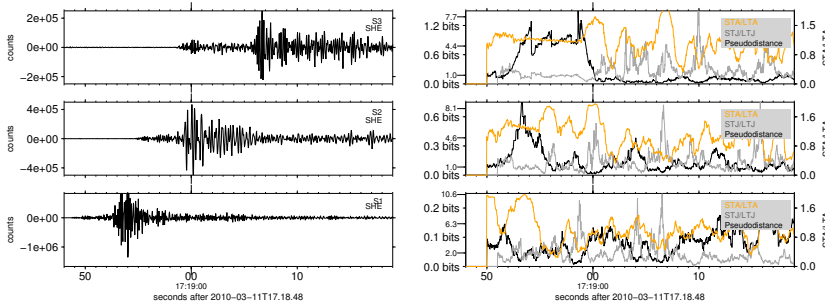
the first digit anomaly present in seismic signals. This fact, is consistently present throughout the stations studied. While technically STA/LTA and pseudodistance algorithms show good behaviour resolving triggers, STJ/LTJ presents itself in a noisier way, probably because the sensibility inherited by the time windows selected.



**Fig. 5** Pichilemu 11/3 aftershock 1. Left panel shows east component signals recorded at stations S1, S2 and S3. Our local magnitude is  $\simeq 6.7$ , with a source lasting approximately 3 to 4 seconds, a long time average of 2 seconds was chosen. On right panel three transients could be seen: STA/LTA, STJ/LTJ and  $\Delta(p, q)$  pseudodistance for each station. Although shear waves peak stronger in horizontal components, the  $\Delta(p, q)$  signal is sharp at the initial energy arrival. Short time versus long time triggers are noisier.

The next example corresponds to a magnitude 5.1 event occurred at 17:18:48 origin time, recorded at the same three stations. Again, the analysis shows the persistence of the good performance of entropy and energy triggers this time considering a 1.6 units in magnitude smaller earthquake as shown in Fig. 6, although in this case, the energy trigger presents a diffuser signal.

The rest of events studied, are summarized in Table 2. A qualitative synthesis of the performance of the triggers algorithms, based on a comparison against manual P wave picks was obtained in order to estimate the efficiency of detection. As the purpose of this study is to evaluate these new triggers, the thresholds needed to calibrate the detection algorithms were rendered a binary criteria, true or 1 for successful identification and false or 0, otherwise. These hard criteria allow us to identify the more conspicuous detections, therefore all false and ambiguous behaviours are dismissed. For each station and for every event considered, the failure or success is annotated for each algorithm presented. The performance is



**Fig. 6** Pichilemu 11/3 aftershock 9. Left panel shows east component signals recorded at stations S1, S2 and S3. Our local magnitude is  $\simeq 5.1$ , with a source lasting approximately 1 second, we decided to keep the long time average at 2 seconds. On right panel three transients could be seen: STA/LTA, STJ/LTJ and  $\Delta(p, q)$  pseudodistance for each station. Although shear waves peak stronger in horizontal components, the  $\Delta(p, q)$  signal is sharp at the initial energy arrival at stations S3 and S2. Short time versus long time energy trigger is noisier and modulated by surface wave energy.

measured as the number of success and the efficiency is the rate of success against the total number of events. The entropy trigger ranges in efficiency from 0.9 to 0.5 with an average of 0.6, energy trigger ranges from perfect score to 0.8 with a mean of 0.8 and STJ/LTJ trigger scores from 0.4 to 0.2 with a success of 0.3 on average, which is a rather poor performance. The joint operation of the triggers over stations, presents a maximum efficiency of 0.9 in the case of the event 14, a minimum of 0.3 for the event 16, and a joint average efficiency of 0.6. The best station is S3, next is S1 and finally S2. Various factors could influence the performance of the triggers on each station. Apart from hardware issues, distance, areal coverage of the array, noise from different sources and the crust structure beneath may affect and the joint operation of triggers play a role moderating them.

**Table 2** Binary table showing the performance of entropy and energy triggers studied against expert picker. Each station is tested against three triggers and the efficiency of performance is estimated.

event	S3			S2			S1			Joint
	$\Delta(p, q)$	STA/LTA	$K(w, q)$	$\Delta(p, q)$	STA/LTA	$K(w, q)$	$\Delta(p, q)$	STA/LTA	$K(w, q)$	Efficiency
1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0.8
2	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0.8
3	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0.6
4	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0.6
5	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0.4
6	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0.4
7	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0.4
8	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0.7
9	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0.7
10	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0.4
11	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0.9
12	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0.4
13	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0.6
14	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0.9
15	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0.4
16	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0.3
17	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0.6
Eff.	0.9	0.6	0.4	0.5	0.8	0.2	0.5	1.0	0.3	–

#### 4 Discussion

While Shannon's entropy as an important variable in studies of seismicity was established, a big question remains: why is this anomaly present in earthquakes and not in noise? A clear insight about this property of earthquakes is the unknown scaling process dominating the generation of seismicity, as remarked in Sornette

and Sornette (1989). We want to highlight another path, related to the location and structure of information. According to Hill (1995), it is possible to extend first digit law to others beyond. The probability of any figure  $\lambda$  in a series displaying first digit phenomenon is  $p_\lambda^1$ , and this property could be used to extract the probability on any digit in a given position. For example, the probability of the second digit being equal to one is  $p_1^2 = p_{11} + p_{21} + p_{31} + \dots + p_{91} \simeq 0.11$  and the probability of the  $\sigma$ -th digit being  $\lambda$  is given by:

$$p_\lambda^\sigma = k_B \sum_{\nu=10^{\sigma-2}}^{10^{\sigma-1}-1} \log \left( 1 + \frac{1}{10\nu + \lambda} \right), \quad (7)$$

where  $\lambda = 1, 2, \dots, 9$  and  $\sigma = 2, 3, \dots$  are the indexes of  $p_\lambda^\sigma$ . This last equation is a key through the complex structure of earthquakes. In Table 3 the probabilities of the different digits according to the position are shown. It may be seen that the distribution of the sixth digit and beyond are equiprobable to the given resolution. An understanding of this property could be obtained considering the entropy carried in a given position, which is a scale information property. If the  $\sigma$ -th digits of the signal are distributed according to the generalized first digit phenomenon of equation 7, the information content of the first digits could be generalized as follows:

$$H^\sigma = -k_S \sum_{\lambda \in \Lambda} p_\lambda^\sigma \log p_\lambda^\sigma, \quad \sigma = 2, 3, \dots \quad (8)$$

In Table 3 the maximum entropy is presented along with the information content according to this generalized rule. It is clear that the first two or three digits carry the most information, and the rest converge quickly to the state of maximum entropy or minimum information given by  $H_*^\sigma$ , where all digits are distributed according to a homogeneous distribution, this is interpreted as a fully random series of numbers, with no relevant information at all.

**Table 3** Given a phenomenon presenting first digit anomaly, the second and next digits also present anomalies, transforming the given data set in a stochastic chain. The digits anomaly is weaker as we use more digits. A consequence is the structure where the information is located. Starting with the fourth and next digits, the anomaly disappears as a result a fully random sequence.

$p_{\lambda}^{\sigma}$	$\sigma$						
	$\lambda$	1	2	3	4	5	6
0	–	0.11968	0.10178	0.10018	0.10002	0.10000	
1	0.30103	0.11389	0.10138	0.10014	0.10001	0.10000	
2	0.17609	0.10882	0.10097	0.10010	0.10001	0.10000	
3	0.12494	0.10433	0.10057	0.10006	0.10001	0.10000	
4	0.09691	0.10031	0.10018	0.10002	0.10000	0.10000	
5	0.07918	0.09668	0.09979	0.09998	0.10000	0.10000	
6	0.06695	0.09337	0.09940	0.09994	0.09999	0.10000	
7	0.05799	0.09035	0.09902	0.09990	0.09999	0.10000	
8	0.05115	0.08757	0.09864	0.09986	0.09999	0.10000	
9	0.04576	0.08500	0.09827	0.09982	0.09998	0.10000	
$H^{\sigma}$	2.87592	3.31332	3.32184	3.32193	3.32193	3.32193	
$H_{*}^{\sigma}$	3.16993	3.32193	3.32193	3.32193	3.32193	3.32193	
$R^{\sigma}$	0.13201	0.00257	0.00003	0.00000	0.00000	0.00000	

This last idea, is related to the meaningful information of a message. So far the information content of a signal has been used to trigger a window where an event is supposed to exist. But the confirmation of the existence of such event must be made afterwards. The meaning of the information, which is completely neglected according to information theory, is hard to elucidate, the message is the important thing, not the semantic content. A thorough and deep discussion of these aspects is given in Volkenstein and Shenitzer (2009). We may pose two criteria in order to identify the localization of the structure of earthquakes. First, note that a com-

plex message contains low levels of redundancy. According to Yaglom and Yaglom (1983) the relative gain in information  $R^\sigma = 1 - \frac{H^\sigma}{H^{\sigma-1}}$  is a measure of redundancy. A fully random signal, with all digits equiprobable has zero redundancy and a signal with great regularity has redundancy near one. In Table 3 the redundancy is shown for each digit position and we note that the fourth and beyond positions contain no redundancy. According to this criterion, most of the information is stored in the first three digits and the complex structure is stored there. Secondly, the onset of the compressive wave may define the focal mechanism, the amplitude of the first seconds the magnitude (Allen and Kanamori 2003), these numbers are not random: the seismogram of an earthquake reflects its structure, we may say it is a pigment of a bigger picture. According to Gell-Mann and Lloyd (2004), a complex signal could be divided in two parts, one with structure and another with a random behaviour, and the length of the structured part defines the so called effective complexity in connection with algorithmic complexity. A fully random series may be complex in the sense of Kolmogorov, in other words, impossible to compress it, but if it is devoid of structure, it is simpler. And the richness of earthquakes is related to this effective complexity, the scale distribution of digits contains two parts, a structured part with first, second and third digit phenomena, and the rest of the signal is fully random, with no structure. The fact that meaningful information is isolated in the first digits is a scale property of earthquakes. This last feature has a direct application in data storage and transmission.

If the symbols of an alphabet  $A$  have nonuniform probabilities, efficient ways to store and transmit messages have been found. The idea of using the lower length codes for the more probable symbols was first explored by Shannon (1948); Fano (1961) and by Huffman (1952). These algorithms represent cases of lossless

compression, they do not lose information. In Table 4 the Shannon-Fano (SF) and the Huffman coding schemes are presented considering the first digit anomaly discussed. The classic scheme using binary digits is also presented for comparison. The efficiency of each coding may be estimated with help of the mean length of the digit in each coding, which is  $L \simeq 2.92$  for both schemas, SF and Huffman and  $L = 4$  for classic binary representation. The efficiency is  $\eta = H^1/L$ . With  $H^1 \simeq 2.88$  bits, the efficiency of the binary coding is  $\eta \simeq 0.72$  and  $\eta \simeq 0.98$  for Shannon-Fano and Huffman codings. See Jolion (2001) for an application in image processing. This kind of compression may present an opportunity for observatories interested in improving its performance by adding not only selected phases but also waveform data to the regular storage, also it may present an opportunity for relaxing networking and satellite facilities. Finally, another proposal might be useful for storage and transmission considering not only the first digit probabilities, but also the complexity of earthquakes. As it has been shown, the first three digits contain the most meaningful information, the rest is a fully random succession. The proposal is to save for storage and transmission the sign, the scale and the first three digits, which represent  $1 + 8 + 2.88 + 3.31 + 3.32 \simeq 18.51$  bits. This kind of compression, is called lossy, because information is irremediable lost but, as we have seen, this information has less meaning.

## 5 Conclusions

Using field data recorded at epicentral distance, which guaranteed a good signal versus noise ratio, the performance of entropy versus energy triggers was compared. Later we benchmarked these triggers against expert geophysicist P wave



**Table 4** Given a language  $A$  with prescribed probabilities for each symbol, the more efficient way of representing these symbols is not a uniform scheme like the binary coding but the Shannon-Fano (SF) or the Huffman coding (Fano 1961; Huffman 1952). The average length of the coding symbols is  $L \sim 2.92$  for the SF or Huffman and significantly greater for the binary scheme. This kind of improvement represents an opportunity for lossless compressing.

$\lambda$	$p_\lambda$	Coding scheme		
		Binary	SF	Huffman
1	0.30103	0001	00	10
2	0.17609	0010	01	110
3	0.12494	0011	100	111
4	0.09691	0100	101	000
5	0.07918	0101	1100	001
6	0.06695	0110	1101	0100
7	0.05799	0111	1110	0101
8	0.05115	1000	11110	0110
9	0.04576	1001	11111	0111
$L$	–	4	2.92082	2.92082

picking. While standard practice STA/LTA trigger hits on average 80%, divergence trigger hits 60%, meanwhile STJ/LTJ trigger has a poor performance of just 30%, probably because lack of fine tuning. Our results suggest a joint operation of entropy and energy triggers yielding higher efficiency in regarding global efforts of detection. Our study shows that this new entropy trigger is competitive with respect to energy characteristic functions. As we compare the energy against the proposed entropy, a scale structure in seismicity emerges as a new parameter to study forward. This proposed perspective based on the information content of recorded earthquakes hints towards a different path of research in relation to the seismic source characterization problem in particular and over the open problem

of the identification of the drive behind the scaling mechanism present in the crust dynamics. The shown structure may allow a description in terms of statistical physics, in the wide sense, of the problem of seismicity generation. The mathematical traits we envision are related to the extremal problem of a yet unknown scale free entropy under dissipative restrictions. Regarding the detection problem, we have validated the possibility of complementing routine energy algorithms with entropy data, therefore increasing the robustness of detection systems. The definition of autonomous thresholds free from expert subjectiveness, calibrated pre and post events timing and testing under noisier environments like coda or multiplets splitting are unsolved problems. The reported efficiency is defined over a controlled environment as the studied seisms are previously known, the extrapolation of these rates of event detection to other scenarios, like an unknown aftershock series is a work for a future tests also. Possible applications apart from the obvious are the cutting edge detection problem aimed at early warning systems.

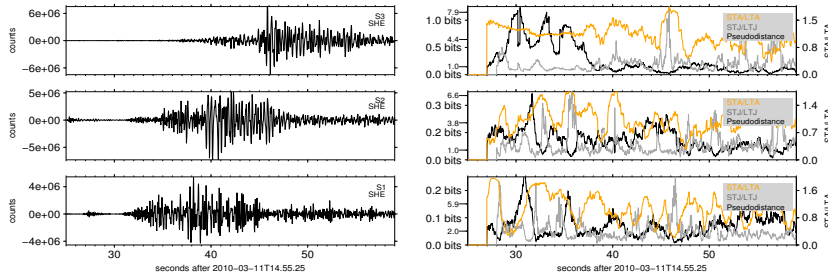
**Acknowledgements** PT thanks Sophie Peyrat for help in accessing data from the Pichilemu aftershock series. PT was partially supported by Conicyt fellowship. JC was partially supported by Fondecyt grant 1130636.

## References

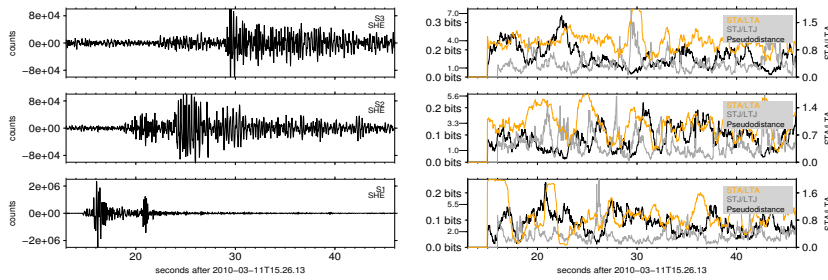
- Allen RM, Kanamori H (2003) The potential for earthquake early warning in southern California. *Science* 300(5620):786–789
- Baer M, Kradolfer U (1987) An automatic phase picker for local and teleseismic events. *Bulletin of the Seismological Society of America* 77(4):1437–1445
- Beyreuther M, Barsch R, Krischer L, Megies T, Behr Y, Wassermann J (2010) ObsPy: A python toolbox for seismology. *Seismological Research Letters* 81(3):530–533

- Bormann P (2002) IASPEI: New Manual of Seismological Observatory Practice (NMSOP). GeoForschungsZentrum
- Drew J, Leslie H, Armstrong P, Michard G (2005) Automated microseismic event detection and location by continuous spatial mapping. In: SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Society of Petroleum Engineers, SPE
- Fano R (1961) Transmission of information. A statistical theory of communication. The MIT Press
- Farías M, Comte D, Roecker S, Carrizo D, Pardo M (2011) Crustal extensional faulting triggered by the 2010 Chilean earthquake: The Pichilemu Seismic Sequence. *Tectonics* 30(6):TC6010
- Gell-Mann M, Lloyd S (2004) Effective complexity. *Nonextensive entropy* pp 387–398
- Geyer A, Martí J (2012) Applying Benford's law to volcanology. *Geology* 40(4):327–330
- Hill T (1995) The significant-digit phenomenon. *The American Mathematical Monthly* 102(4):322–327
- Huffman D (1952) A method for the construction of minimum-redundancy codes. *Proceedings of the IRE* 40(9):1098–1101
- Jeffreys H (1946) An invariant form for the prior probability in estimation problems. *Proceedings of the Royal Society of London Series A Mathematical and Physical Sciences* 186(1007):453–461
- Jolion J (2001) Images and Benford's law. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 14(1):73–81
- Kullback S (1997) *Information theory and statistics*. Dover Publishers, Gloucester, Massachusetts
- Kullback S, Leibler R (1951) On information and sufficiency. *The Annals of Mathematical Statistics* 22(1):79–86
- Lange D, Tilmann F, Barrientos S, Contreras-Reyes E, Methe P, Moreno M, Heit B, Agurto H, Bernard P, Vilotte J, et al (2012) Aftershock seismicity of the 27 February 2010  $M_w$  8.8 Maule earthquake rupture zone. *Earth and Planetary Science Letters* 317:413–425
- Nigrini M, Miller S (2007) Benford's law applied to hydrology data results and relevance to other geophysical data. *Mathematical Geology* 39(5):469–490

- Reading AM, Mao W, Gubbins D (2001) Polarization filtering for automatic picking of seismic data and improved converted phase detection. *Geophysical Journal International* 147(1):227–234, DOI 10.1046/j.1365-246X.2001.00501.x
- Rietbrock A, Ryder I, Hayes G, Haberland C, Comte D, Roecker S, Lyon-Caen H (2012) Aftershock seismicity of the 2010 Maule  $M_w = 8.8$ , Chile, earthquake: Correlation between co-seismic slip models and aftershock distribution? *Geophysical Research Letters* 39(8):L08,310
- Sambridge M, Tkalčić H, Jackson A (2010) Benford’s law in the natural sciences. *Geophysical Research Letters* 37(22):L22,301
- Sambridge M, Tkalčić H, Arroucau P (2011) Benford’s Law of First Digits: From Mathematical Curiosity to Change Detector. *Asia Pacific Mathematics Newsletter* 1(4)
- Shannon C (1948) A mathematical theory of communications, I and II. *Bell Syst Tech J* 27:379–423
- Sornette A, Sornette D (1989) Self-organized criticality and earthquakes. *EPL (Europhysics Letters)* 9:197
- Sottili G, Palladino D, Giaccio B, Messina P (2012) Benford’s Law in Time Series Analysis of Seismic Clusters. *Mathematical Geosciences* pp 1–16
- Swindell W, Snell N (1977) Station processor automatic signal detection system, phase i: Final report, station processor software development. Report ALEX (01)-FR-77-01, AFTAC Contract F08606-76-C-0025, Texas Instruments, Dallas
- Tarantola A (2005) *Inverse problems theory and methods for model parameter estimation*. SIAM, 3600 University City Science Center, Philadelphia, PA 19104-2688
- Tarantola A (2006) *Elements for Physics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg
- Volkenstein M, Shenitzer A (2009) *Entropy and information*. Birkhauser
- Withers M, Aster R, Young C, Beiriger J, Harris M, Moore S, Trujillo J (1998) A comparison of select trigger algorithms for automated global seismic phase and event detection. *Bulletin of the Seismological Society of America* 88(1):95–106
- Yaglom A, Yaglom I (1983) *Probability & Information*. D. Riedel Publishing Company, Dordrecht, Holland



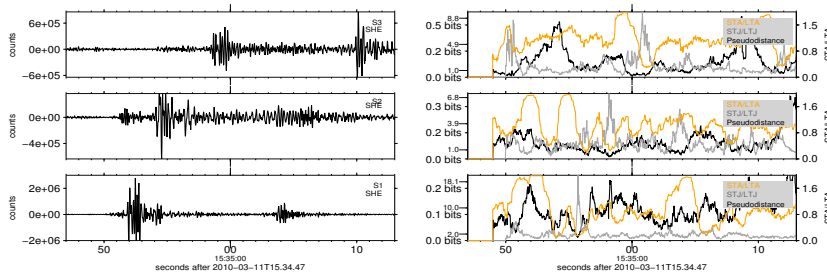
**Fig. 7** Pichilemu 11/3 aftershock 2. Left panel shows east component signals recorded at stations S1, S2 and S3. On right panel three transients could be seen: STA/LTA, STJ/LTJ and pseudodistance for each station.



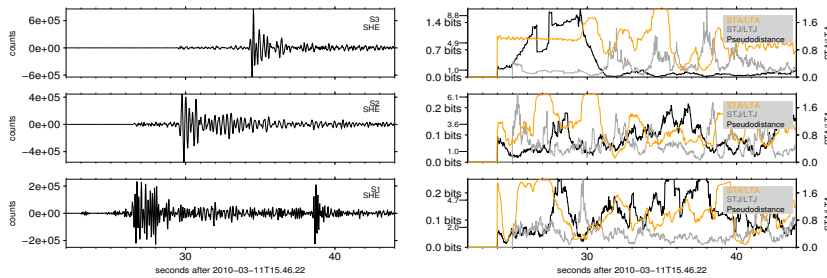
**Fig. 8** Pichilemu 11/3 aftershock 3. Left panel shows east component signals recorded at stations S1, S2 and S3. On right panel three transients could be seen: STA/LTA, STJ/LTJ and pseudodistance for each station.

## 6 Appendix

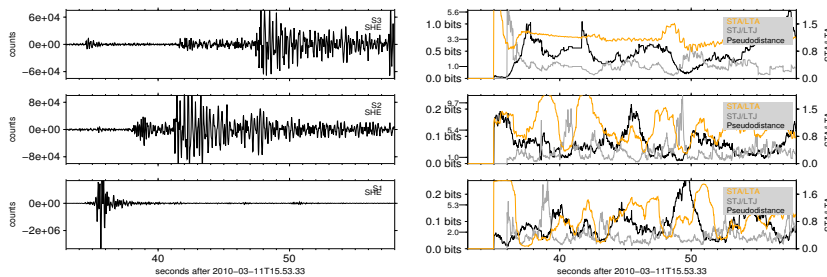
Figures 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 were used to build the Table 2. Each figure represents on the left the signals recorded at stations S1, S2 and S3. On the right the different triggers are shown, from which the binary criteria is calculated.



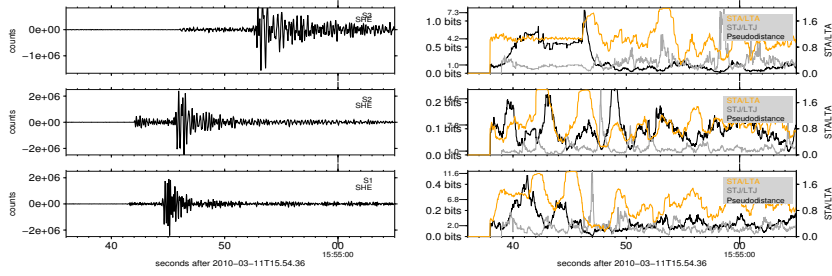
**Fig. 9** Pichilemu 11/3 aftershock 4. Left panel shows east component signals recorded at stations S1, S2 and S3. On right panel three transients could be seen: STA/LTA, STJ/LTJ and pseudodistance for each station.



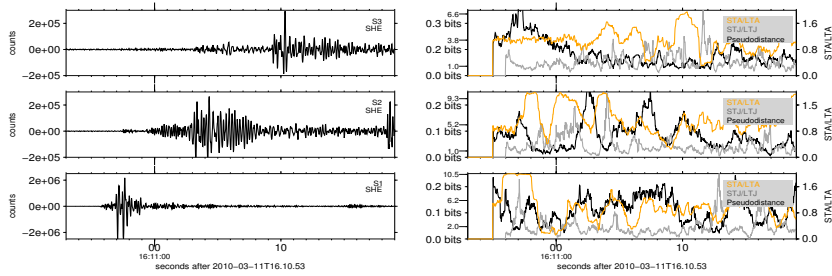
**Fig. 10** Pichilemu 11/3 aftershock 5. Left panel shows east component signals recorded at stations S1, S2 and S3. On right panel three transients could be seen: STA/LTA, STJ/LTJ and pseudodistance for each station.



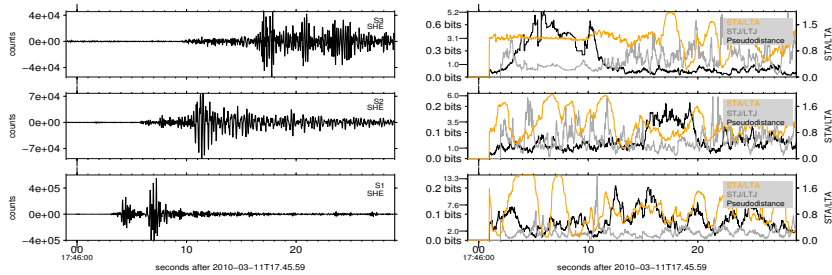
**Fig. 11** Pichilemu 11/3 aftershock 6. Left panel shows east component signals recorded at stations S1, S2 and S3. On right panel three transients could be seen: STA/LTA, STJ/LTJ and pseudodistance for each station.



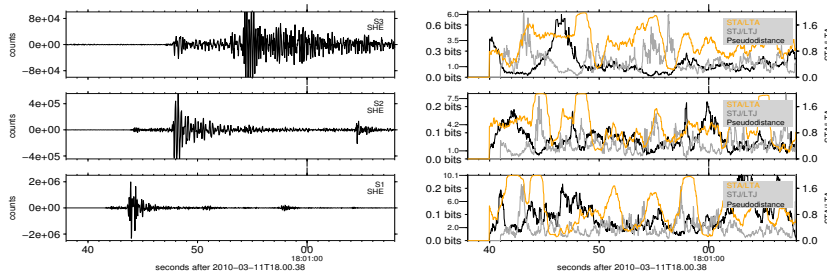
**Fig. 12** Pichilemu 11/3 aftershock 7. Left panel shows east component signals recorded at stations S1, S2 and S3. On right panel three transients could be seen: STA/LTA, STJ/LTJ and pseudodistance for each station.



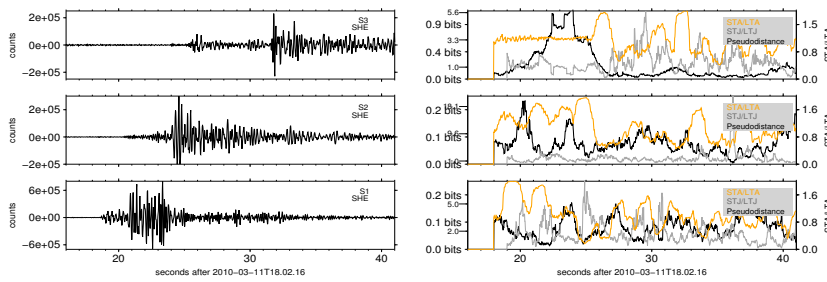
**Fig. 13** Pichilemu 11/3 aftershock 8. Left panel shows east component signals recorded at stations S1, S2 and S3. On right panel three transients could be seen: STA/LTA, STJ/LTJ and pseudodistance for each station.



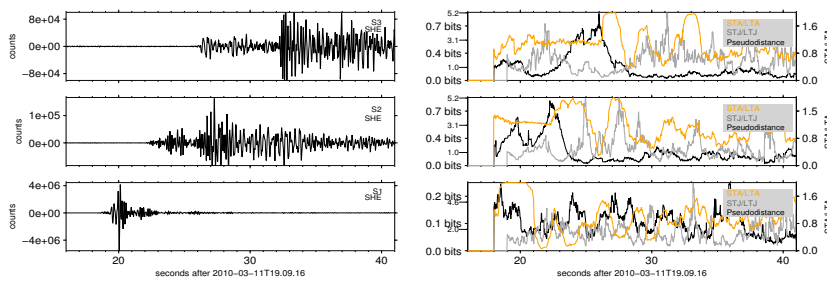
**Fig. 14** Pichilemu 11/3 aftershock 10. Left panel shows east component signals recorded at stations S1, S2 and S3. On right panel three transients could be seen: STA/LTA, STJ/LTJ and pseudodistance for each station.



**Fig. 15** Pichilemu 11/3 aftershock 11. Left panel shows east component signals recorded at stations S1, S2 and S3. On right panel three transients could be seen: STA/LTA, STJ/LTJ and pseudodistance for each station.

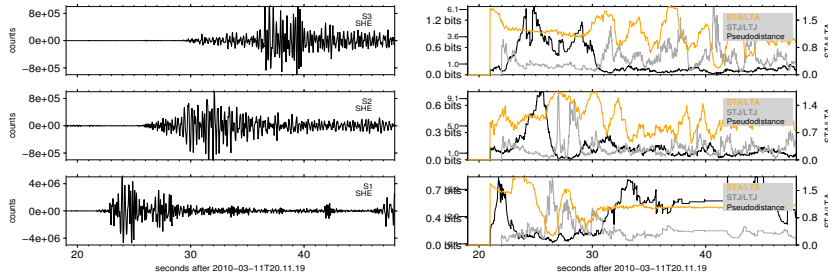


**Fig. 16** Pichilemu 11/3 aftershock 12. Left panel shows east component signals recorded at stations S1, S2 and S3. On right panel three transients could be seen: STA/LTA, STJ/LTJ and pseudodistance for each station.

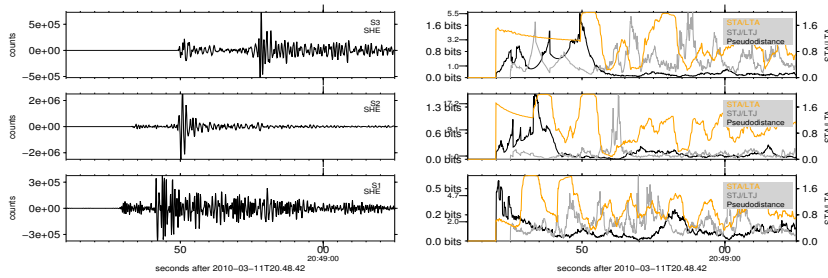


**Fig. 17** Pichilemu 11/3 aftershock 13. Left panel shows east component signals recorded at stations S1, S2 and S3. On right panel three transients could be seen: STA/LTA, STJ/LTJ and pseudodistance for each station.

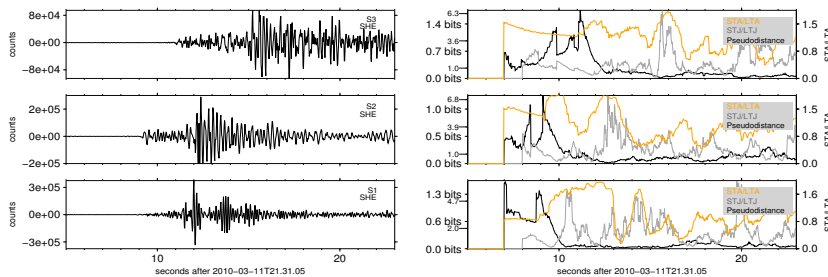




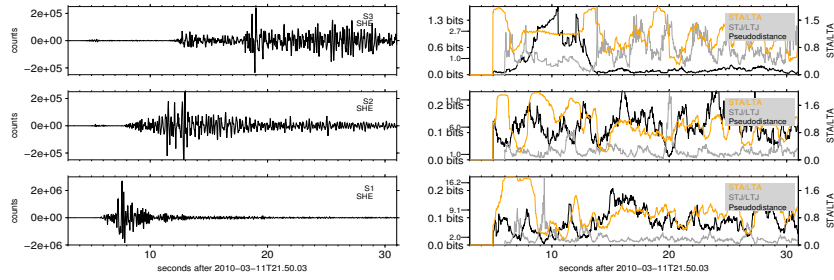
**Fig. 18** Pichilemu 11/3 aftershock 14. Left panel shows east component signals recorded at stations S1, S2 and S3. On right panel three transients could be seen: STA/LTA, STJ/LTJ and pseudodistance for each station.



**Fig. 19** Pichilemu 11/3 aftershock 15. Left panel shows east component signals recorded at stations S1, S2 and S3. On right panel three transients could be seen: STA/LTA, STJ/LTJ and pseudodistance for each station.



**Fig. 20** Pichilemu 11/3 aftershock 16. Left panel shows east component signals recorded at stations S1, S2 and S3. On right panel three transients could be seen: STA/LTA, STJ/LTJ and pseudodistance for each station.



**Fig. 21** Pichilemu 11/3 aftershock 17. Left panel shows east component signals recorded at stations S1, S2 and S3. On right panel three transients could be seen: STA/LTA, STJ/LTJ and pseudodistance for each station.

## Capítulo 4

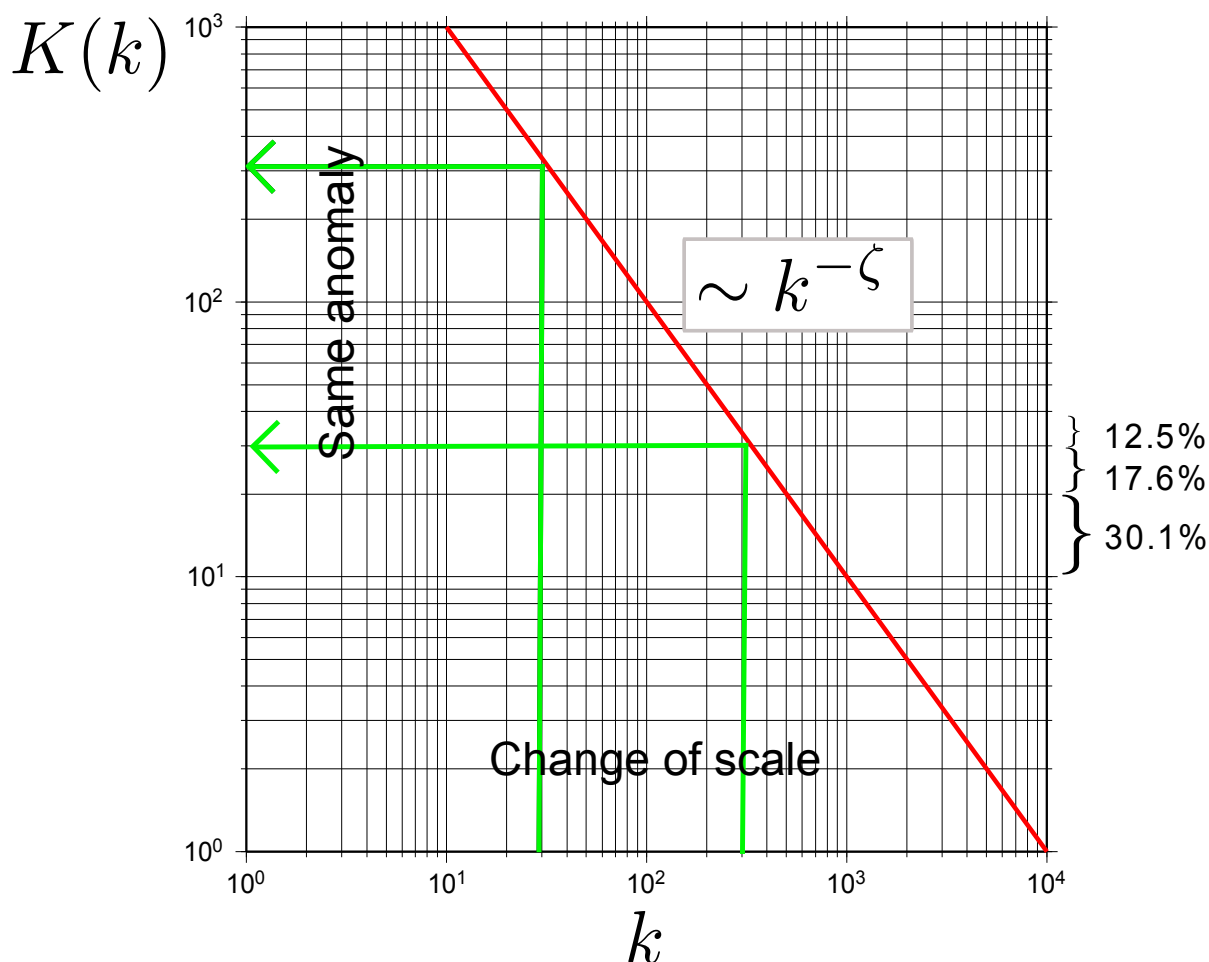
# Perspectivas y la estructura matemática emergente

Desde el punto de vista puramente geométrico hay dos ideas claves que se originan en este trabajo. La primera es una observación relevante en términos de la reducción de la complejidad en el problema de la disipación de energía en la corteza, o más bien dicho, en la estructura y evolución de las variables que se pueden observar al estudiar terremotos. Ya se ha discutido la existencia de variables que tienen decaimientos como leyes de potencia y cómo puede manifestarse de esta manera la anomalía del primer dígito y de aquí cómo es posible obtener la entropía de Shannon y con ello construir una métrica que permite identificar eventos sísmicos que ocurren y se propagan en la corteza, de la misma forma que se propagan los mensajes a través de un telégrafo.

Según Tao (2009) cuando existe una variable que presenta anomalía del primer dígito —por ejemplo  $K(k)$  de la figura 1.5— que es sometida a un escalamiento  $K(k) \rightarrow k^\eta K(k)$ , con  $\eta$  un número real, se tiene que la anomalía simplemente se traslada. Para ser concretos, supóngase que  $k^\eta = 2$ , entonces hay que darse cuenta que todo número que tenga primer dígito uno, tendrá después del escalamiento primer dígito dos o a lo más tres, nunca cuatro, puesto que  $2 \cdot 1, 9999 \dots \simeq 3, 9998 \dots$ , proceso que es posible observar en la figura 4.1. Si en el eje de las abscisas se realiza un escalamiento, entonces en virtud de la ley de potencia, la anomalía del primer dígito se traslada, pero como no es relevante la escala, todo el proceso en efecto no es una traslación, sino que representa un movimiento periódico, ya que es posible hacer el mapa entre la línea real positiva y la primera década.

Se llega a la siguiente imagen del proceso de escalamiento ilustrada en la figura 4.2. Si se tiene una variable que presenta decaimientos algebraicos con anomalía del primer dígito, entonces el proceso de escalamiento (que es una simetría espacio temporal como se ha visto) puede ser mapeado en una rotación, que en una dimensión corresponde geoméricamente a identificar la dinámica sobre un círculo, esta rotación no actúa sobre la variable misma, sino que sobre unas probabilidades (de la ecuación 1.14) de acuerdo a la interpretación que se ha estado utilizando. Hay que notar que en mayores dimensiones  $K = K(k, l, \dots)$ , se debe hacer una hipótesis extra para encontrar la geometría correcta del mapa, pudiendo ser esta la superficie de un toro o de una esfera. Estas hipótesis involucran aspectos de isotropía, que no se han discutido acá.

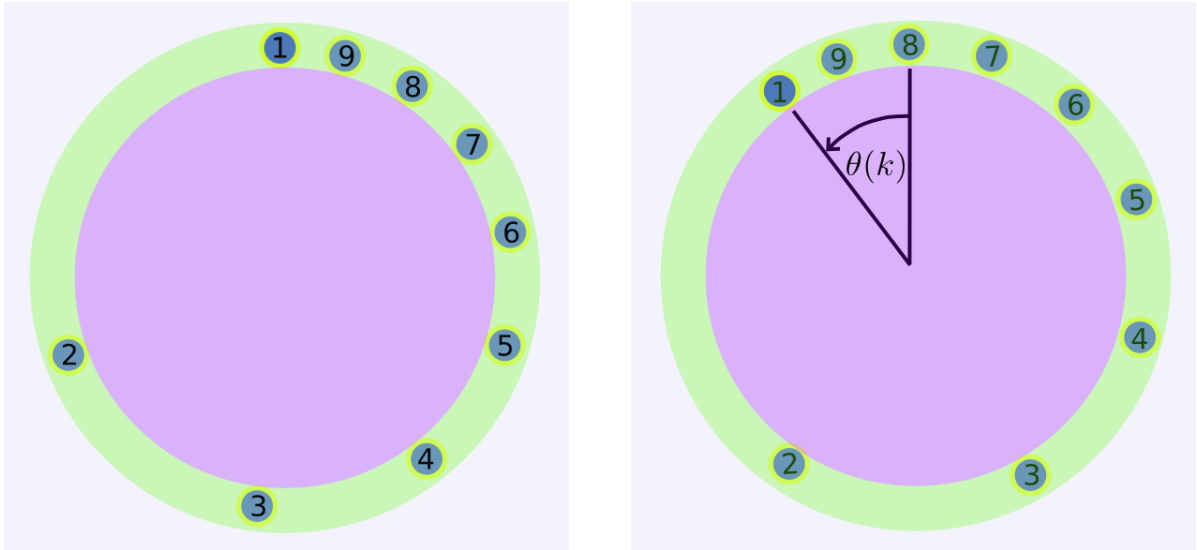
La segunda idea clave es entender la relación que existe entre esta geometría impuesta y



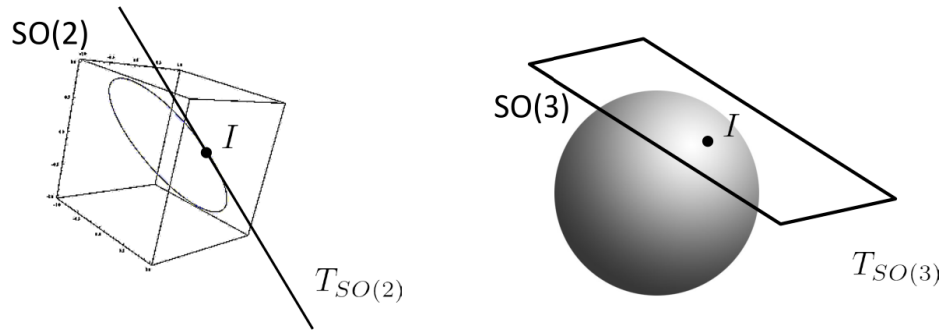
**Figura 4.1.** El efecto neto del escalamiento sobre una variable que presenta un decaimiento como ley de potencia es que la anomalía del primer dígito se traslada, pero al no ser importante la escala se produce una mapa periódico.

las probabilidades, y sobre todo, entender la métrica propuesta (la divergencia de Kullback-Liebler). Para ello, es conveniente observar que las rotaciones conforman un grupo continuo, es decir, son una estructura matemática de grupo<sup>1</sup> que están parametrizadas de manera suave. En el caso de las rotaciones en una dimensión, estas dependen del ángulo de giro  $\theta$

<sup>1</sup>Un grupo está compuesto de un conjunto de elementos más una operación binaria llamada producto. Esta operación ha de ser cerrada y asociativa, además debe existir un elemento neutro, llamado la unidad y para cada elemento debe existir un inverso, es decir que el producto de dicho elemento y su inverso de por resultado el neutro. El caso en donde el producto es conmutativo, es decir que el orden no altere el producto tiene un lugar especial y en ese caso se llama al grupo abeliano. Ejemplos de grupos son: los reales con la suma, los reales positivos con el producto, las matrices cuadradas con coeficientes reales y determinante distinto de cero con el producto de matrices. Si se tiene un grupo  $G$ , que actúa sobre un conjunto  $S$ , la acción del grupo se describe a través de un homomorfismo  $\phi : G \rightarrow \text{Perm}(S)$ , donde  $\text{Perm}(S)$  corresponde al conjunto de todas las permutaciones de los elementos de  $S$ . Se tiene que  $\phi$  plasma la idea de simetría, puesto que cada elemento del grupo es posible identificarlo con un reordenamiento simple de  $S$ .



**Figura 4.2.** En el caso que una variable presente decaimientos algebraicos y anomalía del primer dígito es posible entonces hacer una mapa entre la recta real positiva y un círculo. El cambio de escala corresponde a una rotación.

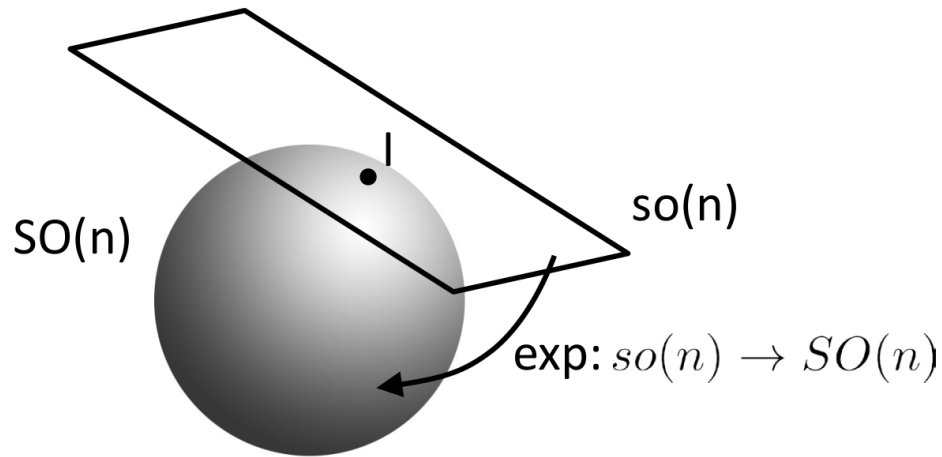


**Figura 4.3.** Los grupos de rotaciones en dos y tres dimensiones,  $SO(2)$  y  $SO(3)$  respectivamente. Se ilustran también los espacios tangentes a la identidad, que corresponden a una recta en  $SO(2)$  y un plano en  $SO(3)$ . Fuente [www.inf.ethz.ch/~lballan/](http://www.inf.ethz.ch/~lballan/).

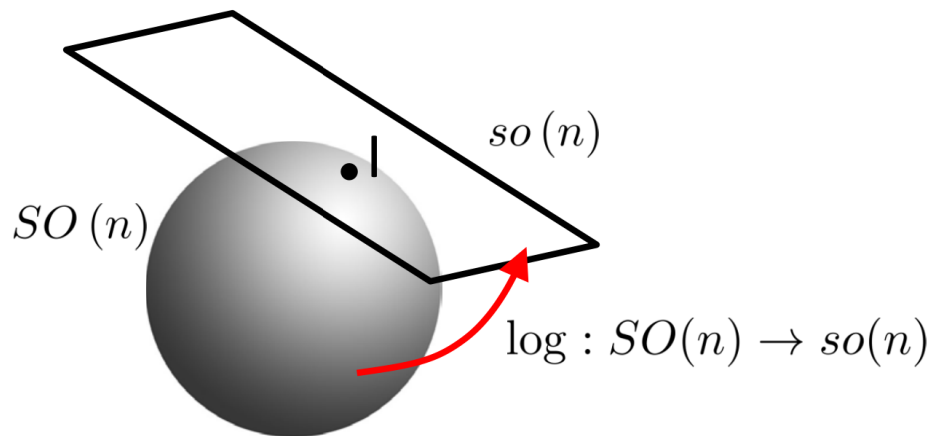
ligado a la escala en nuestra discusión.

La utilidad de los grupos de continuos o de Lie, en opinión del autor, ha sido subestimada igual cosa que los grupos. En el ámbito de las geociencias, los grupos están en el fondo de la cristalografía (Cotton, 2008) así como en los estudios de punta en física del estado sólido (Hamermesh, 1989). En la figura 4.3 se ilustran dos de los grupos de Lie más importantes  $SO(2)$  y  $SO(3)$ , las rotaciones en dos y tres dimensiones sobre los elementos del círculo y la esfera. Los grupos de Lie tienen asociados un espacio tangente, que captura la estructura local. Los elementos de este espacio conforman un espacio vectorial y puede verse representado gráficamente en la figura 4.3 como una recta para el caso de las rotaciones en dos dimensiones y por un plano en el caso de las rotaciones de tres dimensiones. A este espacio se le denomina el álgebra de Lie asociada cuando es posible dotarlo de un producto exterior.

Hay dos operaciones fundamentales definidas sobre estos dos conjuntos (el grupo de Lie y el espacio tangente asociado). La operación exponencial, que se ilustra en la figura 4.4, está



**Figura 4.4.** Exponencial de un grupo de Lie. Esta función está definida desde el álgebra de Lie hacia el grupo de Lie. Fuente [www.inf.ethz.ch/~lballan/](http://www.inf.ethz.ch/~lballan/).



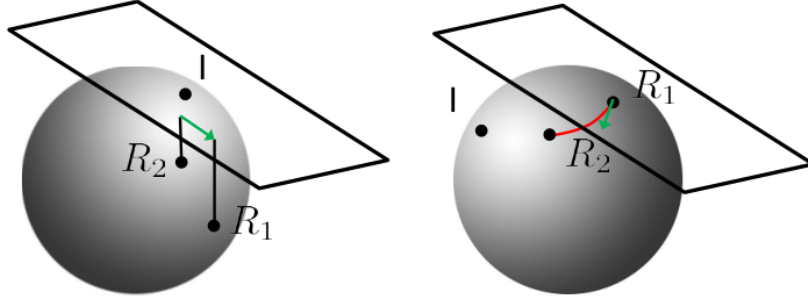
**Figura 4.5.** El logaritmo de un grupo de Lie. Esta función está definida desde el grupo de Lie hacia el álgebra de Lie. Fuente [www.inf.ethz.ch/~lballan/](http://www.inf.ethz.ch/~lballan/).

definida desde el álgebra de Lie hacia el grupo de Lie, en el caso que se ilustra,  $\exp : so(n) \rightarrow SO(n)$  donde  $SO(n)$  son las rotaciones en  $n$  dimensiones. Se tiene que:

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k, \quad (4.1)$$

de la misma manera que se define la exponencial en los reales. La exponencial corresponde a aquella rotación que es posible alcanzar si se avanza sobre una geodésica que pasa por la identidad en la dirección de  $A$ . En general no se cumple que  $\exp(A)\exp(B) \neq \exp(A+B)$ . La segunda operación, es la inversa a la exponencial y se conoce como el logaritmo. Este está definido desde el grupo de Lie hacia el álgebra de Lie (el hiperplano tangente en la figura). Es decir,  $\log : SO(n) \rightarrow so(n)$ . como se aprecia en la figura 4.5. Se tiene que el logaritmo se escribe:

$$\log(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (A - I)^k, \quad (4.2)$$



**Figura 4.6.** Distancia geodésica de un grupo de Lie. Cuando el espacio tangente está posicionado sobre la identidad del grupo a la distancia geodésica se le conoce como distancia hiperbólica. Fuente [www.inf.ethz.ch/~lballan/](http://www.inf.ethz.ch/~lballan/).

donde  $I$  es la identidad. De igual forma, se tiene que en general  $\log(AB) \neq \log(A) + \log(B)$ .

Con estos elementos podemos hacer la siguiente conexión. Cuando se toma la exponencial de una rotación  $R_1$  definida sobre el espacio tangente, esta corresponde geoméricamente a posicionarse sobre la identidad y avanzar sobre la superficie del grupo de Lie siguiendo una geodésica. De tal manera que el arco de distancia que conecta dos elementos  $R_1$  y  $R_2$  viene dado por la expresión:

$$\varrho(R_1, R_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \|\log R_1^{-1} R_2\|, \quad (4.3)$$

que es posible observar gráficamente en la figura 4.6. Para encontrar el camino más corto que une  $R_1$  y  $R_2$  sobre el grupo de Lie, es necesario pararse en  $R_2$  y rotar  $R_1^{-1}$ , el largo de ese camino, es el camino más corto y está dado por el log ya que avanzar es operar con la exp. Es posible apreciar la conexión geométrica entre el logaritmo (distancia) las rotaciones (cambio de escala) y la información (probabilidades o anomalía del primer dígito) o entre las ecuaciones 4.3 y 1.16.

Han quedado planteadas una serie de preguntas. La más evidente es dilucidar si existe realmente una conexión entre la fórmula 4.3 y la distancia de Jeffreys de la ecuación 1.16 que es la base para introducir la entropía y posteriormente la distancia de información (divergencia de Kullback-Liebler) ocupada extensamente en el capítulo 3. Se deja planteada la exploración de esta conexión entre grupos continuos, geometría, invarianza de escala y entropía. Un punto de comienzo puede ser un área de trabajo conocida como *geometría de la información* en donde se parte de la base que una distribución de probabilidad obtenida de datos reales pertenece a un espacio que presenta una curvatura diferente del plano (Amari y Nagaoka, 2007; Nielsen y Bhatia, 2013) que es una propiedad fundamental de corte geométrico y esta característica actúa como guía en la exploración de las restricciones más importantes que encuentran las probabilidades, cosa que se ha realizado de manera intuitiva acá.

## Capítulo 5

### Conclusión

Al respecto de los algoritmos propuestos, es posible concluir que con los datos registrados en distancia epicentral, que garantizan una buena razón de señal versus ruido, el rendimiento de los métodos de entropía contra los métodos de energía se presentan competitivos, aún en el caso presentado donde no se hace mayor uso de técnicas de filtrado ni de ajuste fino. De la comparación hecha, objetivamente implementada para mostrarse justa e insesgada, se puede concluir que los métodos de entropía propuestos son complementarios a los de energía. Esto es relevante en términos de los esfuerzos actuales en términos de estudiar más profundamente la gran masa de datos que se registran, más aún considerando el comportamiento espacio temporal de la sismicidad, que tiende a conglomerarse, exigiendo a los sistemas de registro durante un tiempo acotado con gran intensidad y durante un tiempo extenso de forma más relajada. Se debe indicar que la definición de parámetros de disparo autónomos y libres de sesgo, la calibración de los tiempos pre y post evento y las pruebas en ambientes aún más exigentes como lo son aquellos de mala razón señal ruido, han quedado pospuestos a futuro. Una aplicación posible, de relevancia para los centros de estudio, es el problema de la alerta temprana (*early warning*) también se espera trabajarlo a futuro.

Se ha demostrado que tanto la estructura como la evolución de la corteza puede mirarse bajo el prisma de la entropía, o inversamente por medio de la información de Shannon. Este es un observable no explorado actualmente por los geocientistas. La figura que emerge es una en la cual el mecanismo de disipación de energía puede ser mapeado hacia un espacio simple con una geometría bien definida, de corte combinatorial o probabilista si se quiere, dominado por las múltiples escalas de trabajo presentes.

En lo que concierne a la relación entre los terremotos y el equilibrio de tipo SOC, no hay nuevas noticias, sin embargo, ha quedado establecido que este tipo de sistemas presenta una marcada anomalía del primer dígito, posiblemente asociada a la existencia de decaimientos algebraicos en el mecanismo de disipación de energía. Esta firma queda registrada en la fuente sísmica y en toda la cadena de sucesos posterior: *tsunami runups*, deformación cosísmica, deformación postsísmica, serie de réplicas y posiblemente otros observables de corte ionosféricos no explorados acá.

Los elementos centrales que han de llamar la atención son 1) la naturaleza estocástica de la fuente 2) el mecanismo de disipación de energía invariante de escala 3) leyes de interacción no lineales de largo alcance 4) la necesidad de ocupar los principios de la física estadística y en concreto de buscar lejos del equilibrio los patrones más relevantes 5) la presencia de cierta



auto-organización en la dinámica, que debe complementar la analogía del ciclo sísmico que se deriva de la visión mecánica proveniente del rebote elástico de Ried.

Las implicancias de este tipo de algoritmos y de los métodos en general que se han desarrollado se pueden separar en dos: en primer lugar, aquellas relacionadas a las áreas de estudio involucrada. En este ámbito los estudios de corte geológico en general y tectónicos en particular pueden ser beneficiados al contar con imágenes más completas del fenómeno de sismicidad, esta hay que recordar es una de las principales herramientas disponibles en la actualidad para auscultar el proceso de construcción de estructuras en las escalas de tiempo entre 1 y  $3 \cdot 10^7$  segundos (un año). El área de la geología estructural es también potencial beneficiado puesto que el asunto de la disipación de energía en la corteza está íntimamente ligado a la geometría fractal de las fallas y este es un área en el cual los métodos matemáticos desarrollados pueden ser de interés. Otra área que también presenta potencial es la vulcanología, simplemente como usuarios de los algoritmos de detección de sismicidad. En segundo lugar, aquellas relacionadas a las aplicaciones: podemos mencionar la minería, que sufre el problema de reconocimiento de sismicidad inducida en ambientes de gran ruido, la exploración y explotación de reservorios de hidrocarburos que cuenta con una larga historia de uso de métodos sismológicos, los cuales hacen uso de reconocimiento de patrones. Todo lo dicho en hidrocarburos aplica en el desarrollo de geotermia. La detección temprana de *tsunamis* y todo el ámbito de *early warning* debería estudiarse en relación a los métodos desarrollados acá, también hay que mencionar el uso incipiente de señales de posicionamiento satelital continuo (cGPS) en los estudios de deformación y finalmente la detección de señales producto de explosiones (civiles, militares y otras).

# Bibliografía

- Akaike, H. A new look at the statistical model identification. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 19(6):716–723, 1974.
- Aki, K. Characterization of barriers on an earthquake fault. *Journal of Geophysical Research*, 84(B11):6140–6148, 1979.
- Aki, K. Scaling law of seismic spectrum. *Journal of Geophysical Research*, 72(4):1217–1231, 1967.
- Aki, K. Scale dependence in earthquake phenomena and its relevance to earthquake prediction. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 93(9):3740–3747, 1996.
- Akishin, P., Altaisky, M., Antoniou, I., Budnik, A., y Ivanov, V. Simulation of earthquakes with cellular automata. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2(4):267–279, 1998.
- Allmann, B.P. y Shearer, P.M. Global variations of stress drop for moderate to large earthquakes. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth (1978–2012)*, 114(B1), 2009.
- Amari, S.i. y Nagaoka, H. *Methods of information geometry*, vol. 191. American Mathematical Soc., 2007.
- Arnol'd, V.I. *Mathematical methods of classical mechanics*, vol. 60. Springer, 1989.
- Bak, P. y Tang, C. Earthquakes as a self-organized critical phenomenon. *Journal of Geophysical Research*, 94(B11):15635–15, 1989.
- Bak, P., Tang, C., y Wiesenfeld, K. Self-organized criticality: An explanation of the  $1/f$  noise. *Physical Review Letters*, 59(4):381–384, 1987.
- Barenblatt, G. y Monteiro, P. Scaling laws in nanomechanics. *Physical Mesomechanics*, 13(5):245–248, 2010.
- Barenblatt, G.I. *Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics: dimensional analysis and intermediate asymptotics*, vol. 14. Cambridge University Press, 1996.
- Barenblatt, G.I. *Scaling*. 34. Cambridge University Press, 2003.
- Barrientos, S.E. y Ward, S.N. The 1960 Chile earthquake: inversion for slip distribution from surface deformation. *Geophysical Journal International*, 103(3):589–598, 1990.
- Benford, F. The law of anomalous numbers. *Proceedings of the American Philosophical Society*, págs. 551–572, 1938.

- Bennett, C.H. Notes on Landauer's principle, reversible computation, and Maxwell's Demon. *Studies In History and Philosophy of Science Part B: Studies In History and Philosophy of Modern Physics*, 34(3):501–510, 2003.
- Berger, A., Bunimovich, L., y Hill, T. One-dimensional dynamical systems and Benford's law. *Transactions of the American Mathematical Society*, 357(1):197–220, 2005.
- Berger, A. y Hill, T. Benford's Law strikes back: No simple explanation in sight for mathematical gem. *The Mathematical Intelligencer*, 33(1):85–91, 2011.
- Bernard, P. From the search of 'precursors' to the research on 'crustal transients'. *Tectonophysics*, 338(3):225–232, 2001.
- Bérut, A., Arakelyan, A., Petrosyan, A., Ciliberto, S., Dillenschneider, R., y Lutz, E. Experimental verification of Landauer's principle linking information and thermodynamics. *Nature*, 483(7388):187–189, 2012.
- Beyreuther, M., Barsch, R., Krischer, L., Megies, T., Behr, Y., y Wassermann, J. ObsPy: A python toolbox for seismology. *Seismological Research Letters*, 81(3):530–533, 2010.
- Bormann, P. *IASPEI: New Manual of Seismological Observatory Practice (NMSOP)*. GeoforschungsZentrum, 2002.
- Burk, F. *A garden of integrals*, vol. 31. MAA, 2007.
- Burridge, R. y Knopoff, L. Model and theoretical seismicity. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 57(3):341–371, 1967.
- Carlson, J. y Langer, J. Mechanical model of an earthquake fault. *Physical Review A*, 40(11):6470, 1989.
- Christensen, K. y Moloney, N.R. *Complexity and criticality*, vol. 1. Imperial College Press, 2005.
- Christensen, K. y Olami, Z. Scaling, phase transitions, and nonuniversality in a self-organized critical cellular-automaton model. *Physical Review A*, 46(4):1829, 1992a.
- Christensen, K. y Olami, Z. Variation of the Gutenberg-Richter b values and nontrivial temporal correlations in a Spring-Block Model for earthquakes. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth (1978–2012)*, 97(B6):8729–8735, 1992b.
- Cochard, A. y Madariaga, R. Dynamic faulting under rate-dependent friction. *Pure and Applied Geophysics*, 142(3-4):419–445, 1994.
- Cohen, D. y Katz, T. Prime numbers and the first digit phenomenon. *Journal of Number Theory*, 18(3):261–268, 1984.
- Cotton, F.A. *Chemical applications of group theory*. John Wiley & Sons, 2008.
- Crutchfield, J.P. y Young, K. Computation at the onset of chaos. En *The Santa Fe Institute, Westview*. Citeseer, 1988.
- Curilem, G., Vergara, J., Fuentealba, G., Acuña, G., y Chacón, M. Classification of seismic signals at Villarrica volcano (Chile) using neural networks and genetic algorithms. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, 180(1):1–8, 2009.

- Dai, H. y MacBeth, C. Automatic picking of seismic arrivals in local earthquake data using an artificial neural network. *Geophysical journal international*, 120(3):758–774, 1995.
- Dai, H. y MacBeth, C. The application of back-propagation neural network to automatic picking seismic arrivals from single-component recordings. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth (1978–2012)*, 102(B7):15105–15113, 1997a.
- Dai, H. y MacBeth, C. Application of back-propagation neural networks to identification of seismic arrival types. *Physics of the earth and planetary interiors*, 101(3):177–188, 1997b.
- Diehl, T., Deichmann, N., Kissling, E., y Husen, S. Automatic S-wave picker for local earthquake tomography. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 99(3):1906–1920, 2009.
- Drew, J., Leslie, H., Armstrong, P., y Michard, G. Automated microseismic event detection and location by continuous spatial mapping. En *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*. Society of Petroleum Engineers, SPE, 2005.
- Dubois, J. *La dynamique non-linéaire en physique du globe*. Elsevier Masson, 1995.
- Erickson, B.A., Birnir, B., y Lavallée, D. Periodicity, chaos and localization in a Burridge–Knopoff model of an earthquake with rate-and-state friction. *Geophysical Journal International*, 187(1):178–198, 2011.
- Esposito, M. y Broeck, v.d.C. Second law and Landauer principle far from equilibrium. *EPL (Europhysics Letters)*, 95(4):40004, 2011.
- Fariás, M., Comte, D., Roecker, S., Carrizo, D., y Pardo, M. Crustal extensional faulting triggered by the 2010 Chilean earthquake: The Pichilemu Seismic Sequence. *Tectonics*, 30(6):TC6010, 2011.
- Felzer, K.R. y Brodsky, E.E. Decay of aftershock density with distance indicates triggering by dynamic stress. *Nature*, 441(7094):735–738, 2006.
- Frame, M., Mandelbrot, B., y Neger, N. Fractal Geometry. <http://classes.yale.edu/fractals/panorama/Literature/Stoppard/ScaleInvar/ScaleInvar3.html>, 2014. Accessed: 2014-08-25.
- Frisch, U. *Turbulence: the legacy of AN Kolmogorov*. Cambridge university press, 1995.
- Gell-Mann, M. y Lloyd, S. Effective complexity. *Nonextensive entropy*, págs. 387–398, 2004.
- Gell-Mann, M. y Lloyd, S. Information measures, effective complexity, and total information. *Complexity*, 2(1):44–52, 1996.
- Geyer, A. y Martí, J. Applying Benford’s law to volcanology. *Geology*, 40(4):327–330, 2012.
- Gibowicz, S. y Kijko, A. *An introduction to mining seismology*, vol. 399. Academic Press, San Diego, 1994.
- Golitsyn, G. Place of the Gutenberg-Richter Law Among Other Statistical Laws of Nature. *Selected Papers From Volume 32 of Vychislitel’naya Seysmologiya*, págs. 119–137, 2001.
- Golitsyn, G. Energy cycle of geodynamics and the seismic process. *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, 43(6):443–446, 2007.

- Hamermesh, M. *Group theory and its application to physical problems*. Courier Dover Publications, 1989.
- Hayes, G.P., Herman, M.W., Barnhart, W.D., Furlong, K.P., Riquelme, S., Benz, H.M., Bergman, E., Barrientos, S., Earle, P.S., y Samsonov, S. Continuing megathrust earthquake potential in Chile after the 2014 Iquique earthquake. *Nature*, 512(7514):295–298, 2014.
- Haykin, S.S., Haykin, S.S., Haykin, S.S., y Haykin, S.S. *Neural networks and learning machines*, vol. 3. Pearson Education Upper Saddle River, 2009.
- Hill, T. A statistical derivation of the significant-digit law. *Statistical Science*, 10(4):354–363, 1995a.
- Hill, T. Base-invariance implies Benford’s law. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 123(3):887–896, 1995b.
- Hirata, T. Fractal dimension of fault systems in Japan: Fractal structure in rock fracture geometry at various scales. En *Fractals in Geophysics*, Springer, págs. 157–170. 1989.
- Ibs-von Seht, M. Detection and identification of seismic signals recorded at Krakatau volcano (Indonesia) using artificial neural networks. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, 176(4):448–456, 2008.
- Ito, K. y Matsuzaki, M. Earthquakes as self-organized critical phenomena. *Journal of Geophysical Research*, 95(B5):6853–6860, 1990.
- Jensen, H.J. *Self-organized criticality: emergent complex behavior in physical and biological systems*, vol. 10. Cambridge university press, 1998.
- Jonkers, A. Long-range dependence in the Cenozoic reversal record. *Physics of the Earth and Planetary interiors*, 135(4):253–266, 2003.
- Kanamori, H. y Cipar, J.J. Focal process of the great Chilean earthquake May 22, 1960. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 9(2):128–136, 1974.
- Kato, A., Obara, K., Igarashi, T., Tsuruoka, H., Nakagawa, S., y Hirata, N. Propagation of slow slip leading up to the 2011 Mw 9.0 Tohoku-Oki earthquake. *Science*, 335(6069):705–708, 2012.
- Kato, A., Sakai, S., y Obara, K. A normal-faulting seismic sequence triggered by the 2011 off the Pacific coast of Tohoku earthquake: Wholesale stress regime changes in the upper plate. *Earth, planets and space*, 63(7):745–748, 2011.
- Keilis-Borok, V. y Kossobokov, V. Premonitory activation of earthquake flow: algorithm M8. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 61(1):73–83, 1990.
- Kerr, R.A. More megaquakes on the way? That depends on your statistics. *Science*, 332(6028):411–411, 2011.
- King, G.C., Stein, R.S., y Lin, J. Static stress changes and the triggering of earthquakes. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 84(3):935–953, 1994.
- Knuth, D. Seminumerical algorithms, Volume 2 of The art of computer programming. 1981.

- Kolmogorov, A.N. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. En *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1941, vol. 30, págs. 299–303.
- Koski, J., Maisi, V., Pekola, J., y Averin, D. Experimental realization of a Szilard engine with a single electron. *Proceedings of the National Academy of Sciences, PNAS*, 111(38):13786–13789, 2014.
- Kossobokov, V. y Carlson, J. Active zone size versus activity: A study of different seismicity patterns in the context of the prediction algorithm M8. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth (1978–2012)*, 100(B4):6431–6441, 1995.
- Kostrov, B. y Das, S. *Principles of earthquake source mechanics*. Cambridge University Press, 1988. ISBN 0-521-30345-1.
- Kostrov, V. Seismic moment and energy of earthquakes, and seismic flow of rock. *Physics of the Solid Earth*, 1:13–21, 1974.
- Landau, L. y Lifshitz, E. Mechanics of fluids. *Course of Theoretical Physics*, 6, 1987.
- Landauer, R. Uncertainty principle and minimal energy dissipation in the computer. *International Journal of Theoretical Physics*, 21(3-4):283–297, 1982.
- Lange, D., Tilmann, F., Barrientos, S., Contreras-Reyes, E., Methe, P., Moreno, M., Heit, B., Agurto, H., Bernard, P., Vilotte, J., et al.. Aftershock seismicity of the 27 February 2010  $M_w$  8.8 Maule earthquake rupture zone. *Earth and Planetary Science Letters*, 317:413–425, 2012.
- Langton, C.G. Computation at the edge of chaos: phase transitions and emergent computation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 42(1):12–37, 1990.
- Lay, T., Kanamori, H., Ammon, C., Nettles, M., Ward, S., Aster, R., Beck, S., Bilek, S., Brudzinski, M., Butler, R., et al.. The great Sumatra-Andaman earthquake of 26 December 2004. *Science*, 308(5725):1127–1133, 2005.
- Lomnitz, C. *Fundamentals of earthquake prediction*. John Wiley & Sons New York, 1994.
- Madariaga, R. y Cochard, A. Dynamic friction and the origin of the complexity of earthquake sources. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 93(9):3819–3824, 1996.
- Marone, C. Laboratory-derived friction laws and their application to seismic faulting. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, 26(1):643–696, 1998.
- Matsu'ura, R.S. Precursory quiescence and recovery of aftershock activities before some large aftershocks. *Bulletin of the Earthquake Research Institute, University of Tokyo*, 61(1):1–65, 1986.
- Mignan, A. The stress accumulation model: Accelerating moment release and seismic hazard. *Advances in Geophysics*, 49:67, 2008.
- Misner, C.W. y Wheeler, J.A. *Gravitation*. Macmillan, 1973.
- Monin, A.S. y Yaglom, A.M. *Statistical fluid mechanics: mechanics of turbulence*, vol. 1. Courier Dover Publications, 2007a.

- Monin, A.S. y Yaglom, A.M. *Statistical fluid mechanics: mechanics of turbulence*, vol. 2. Courier Dover Publications, 2007b.
- Nakanishi, H. Cellular-automaton model of earthquakes with deterministic dynamics. *Physical Review A*, 41(12):7086, 1990.
- Nakanishi, H. Statistical properties of the cellular-automaton model for earthquakes. *Physical Review A*, 43(12):6613, 1991.
- Newcomb, S. Note on the frequency of use of the different digits in natural numbers. *American Journal of Mathematics*, 4(1):39–40, 1881.
- Nielsen, F. y Bhatia, R. *Matrix information geometry*. Springer, 2013.
- Nigrini, M. A taxpayer compliance application of Benford’s law. *The Journal of the American Taxation Association*, 18(1):72–91, 1996.
- Nigrini, M. y Miller, S. Benford’s law applied to hydrology data—results and relevance to other geophysical data. *Mathematical Geology*, 39(5):469–490, 2007.
- Nippres, S., Rietbrock, A., y Heath, A. Optimized automatic pickers: application to the ANCORP data set. *Geophysical Journal International*, 181(2):911–925, 2010.
- Nutman, A., Friend, C., y Bennett, V. Review of the oldest (4400-3600 Ma) geological and mineralogical record: glimpses of the beginning. *Episodes*, 24(2):93–101, 2001.
- Obukhov, A. On the distribution of energy in the spectrum of turbulent flow. En *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1941, vol. 32, págs. 22–24.
- Ohnaka, M. *The physics of rock failure and earthquakes*. Cambridge University Press, 2013.
- Okubo, P.G. y Aki, K. Fractal geometry in the San Andreas fault system. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth (1978–2012)*, 92(B1):345–355, 1987.
- Olami, Z., Feder, H., y Christensen, K. Self-Organized Criticality in a continuous, nonconservative cellular automaton modeling earthquakes. *Physical Review Letters*, 68(8):1244–1247, 1992.
- Ott, E. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge university press, 2002.
- Ouzounov, D. y Freund, F.T. GROUND-ATMOSPHERE-IONOSPHERE INTERACTIONS RELATED TO EARTHQUAKES: HOW CAN EARTHSCOPE HELP? En *Earthscope Workshop: Making and Breaking a Continent, Report Snowbird, UT, USA*. 2001.
- Pruessner, G. *Self-organised criticality: theory, models and characterisation*. Cambridge University Press, 2012.
- Ramos, O. Criticality in earthquakes. Good or bad for prediction? *Tectonophysics*, 485(1-4):321–326, 2010.
- Raymo, M.E. y Nisancioglu, K.H. The 41 kyr world: Milankovitch’s other unsolved mystery. *Paleoceanography*, 18(1), 2003.
- Reading, A.M., Mao, W., y Gubbins, D. Polarization filtering for automatic picking of seismic data and improved converted phase detection. *Geophysical Journal International*, 147(1):227–234, 2001. ISSN 1365-246X. doi:10.1046/j.1365-246X.2001.00501.x.

- Rietbrock, A., Ryder, I., Hayes, G., Haberland, C., Comte, D., Roecker, S., y Lyon-Caen, H. Aftershock seismicity of the 2010 Maule  $M_w= 8.8$ , Chile, earthquake: Correlation between co-seismic slip models and aftershock distribution? *Geophysical Research Letters*, 39(8):L08310, 2012.
- Ruiz, S., Metois, M., Fuenzalida, A., Ruiz, J., Leyton, F., Grandin, R., Vigny, C., Madariaga, R., y Campos, J. Intense foreshocks and a slow slip event preceded the 2014 Iquique Mw 8.1 earthquake. *Science*, pág. 1256074, 2014.
- Sahimi, M., Yortsos, Y.C., et al.. Applications of fractal geometry to porous media: a review. 1990.
- Sambridge, M., Tkalčić, H., y Jackson, A. Benford's law in the natural sciences. *Geophysical Research Letters*, 37(22):L22301, 2010.
- Scholz, C.H. y Aviles, C. The fractal geometry of faults and faulting. *Earthquake Source Mechanics*, págs. 147–155, 1986.
- Scholz, C. *The mechanics of earthquakes and faulting*. Cambridge University Press, UK, USA, Australia, 1990. ISBN 0-521-33443.
- Scholz, C.H. Earthquakes and friction laws. *Nature*, 391(6662):37–42, 1998.
- Schurr, B., Asch, G., Hainzl, S., Bedford, J., Hoechner, A., Palo, M., Wang, R., Moreno, M., Bartsch, M., Zhang, Y., et al.. Gradual unlocking of plate boundary controlled initiation of the 2014 Iquique earthquake. *Nature*, 2014.
- Sethna, J.P. *Statistical mechanics: entropy, order parameters, and complexity*, vol. 14. Oxford University Press Oxford, 2006.
- Shannon, C. A mathematical theory of communications, I and II. *Bell Syst. Tech. J.*, 27:379–423, 1948.
- Simons, M., Minson, S., Sladen, A., Ortega, F., Jiang, J., Owen, S., Meng, L., Ampuero, J., Wei, S., Chu, R., et al.. The 2011 magnitude 9.0 Tohoku-Oki earthquake: Mosaicking the megathrust from seconds to centuries. *Science*, 332(6036):1421, 2011.
- Smith, W.D. The b-value as an earthquake precursor. *Nature*, 289:136–139, 1981.
- Sornette, A. y Sornette, D. Self-organized criticality and earthquakes. *EPL (Europhysics Letters)*, 9:197, 1989.
- Stein, R.S., Barka, A.A., y Dieterich, J.H. Progressive failure on the North Anatolian fault since 1939 by earthquake stress triggering. *Geophysical Journal International*, 128(3):594–604, 1997.
- Stein, S. y Okal, E.A. Seismology: Speed and size of the Sumatra earthquake. *Nature*, 434(7033):581–582, 2005.
- Sternberg, S. *Group theory and physics*. Cambridge University Press, 1995.
- Strogatz, S.H. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology and chemistry*. Perseus publishing, 2001.



- Swindell, W. y Snell, N. Station processor automatic signal detection system, phase I: Final report, station processor software development. *Report ALEX (01)-FR-77-01, AFTAC Contract F08606-76-C-0025, Texas Instruments, Dallas*, 1977.
- Tao, T. Benford's law, Zipf's law, and the Pareto distribution. <http://terrytao.wordpress.com/2009/07/03/benfords-law-zipfs-law-and-the-pareto-distribution>, 2009. Accessed: 2014-08-25.
- Tarantola, A. *Inverse problems theory and methods for model parameter estimation*. SIAM, 3600 University City Science Center, Philadelphia, PA 19104-2688, 2005. ISBN 0-89871-572-5.
- Tarantola, A. *Elements for Physics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2006. ISBN 3-540-25302-5.
- Tolle, C., Budzien, J., y LaViolette, R. Do dynamical systems follow Benford's law? *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 10(2):331–336, 2000.
- Trnkoczy, A. Understanding and parameter setting of STA/LTA trigger algorithm. *IASPEI New Manual of Seismological Observatory Practice*, 2:1–19, 2002.
- Turcotte, D.L. A fractal approach to the relationship between ore grade and tonnage. *Economic Geology*, 81(6):1528–1532, 1986.
- Turcotte, D.L. *Fractals and chaos in geology and geophysics*. Cambridge university press, 1997.
- Uchida, N. y Matsuzawa, T. Pre-and postseismic slow slip surrounding the 2011 Tohoku-oki earthquake rupture. *Earth and Planetary Science Letters*, 374:81–91, 2013.
- Utsu, T., Ogata, Y., y Matsu'ura, R.S. The centenary of the Omori formula for a decay law of aftershock activity. *Journal of Physics of the Earth*, 43(1):1–33, 1995.
- Venkataraman, A. y Kanamori, H. Observational constraints on the fracture energy of subduction zone earthquakes. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth (1978–2012)*, 109(B5), 2004.
- Volkenstein, M. y Shenitzer, A. *Entropy and information*. Birkhauser, 2009.
- Withers, M., Aster, R., Young, C., Beiriger, J., Harris, M., Moore, S., y Trujillo, J. A comparison of select trigger algorithms for automated global seismic phase and event detection. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 88(1):95–106, 1998.
- Yoshimitsu, N., Kawakata, H., y Takahashi, N. Magnitude- 7 level earthquakes: A new lower limit of self-similarity in seismic scaling relationships. *Geophysical Research Letters*, 41(13):4495–4502, 2014.
- Zhang, H., Thurber, C., y Rowe, C. Automatic P-wave arrival detection and picking with multiscale wavelet analysis for single-component recordings. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 93(5):1904–1912, 2003.

## Apéndice A

# Presentaciones a congresos nacionales e internacionales

### A.1 Coloquio: Concepción, Chile. Marzo 2014

*Geophysical Signatures of Earthquakes and Volcanoes* organizado por la Universidad de Concepción.

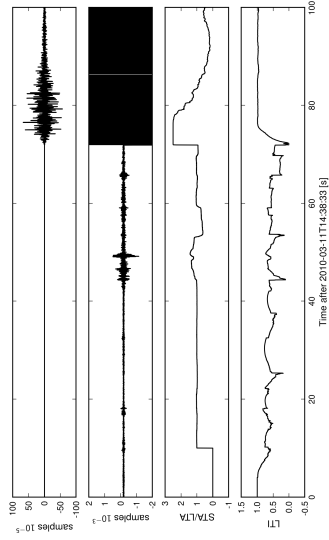


Figure 1: Upper panel presents an event belonging to the Pichilemu aftershock series. STA/LTA panel clearly show the energy arrival ca. 70 seconds after zero time. Bottom panel shows LTA trigger which presents a richer structure, not easy to interpret. Second panel shows a zoom before the 70 second arrival, where a small earthquake is evidenced.

*An earthquake trigger based on first digit anomaly*

Patricio A. Toledo<sup>\*†</sup>

Jaime A. Campos<sup>\*\*</sup>

<sup>\*</sup> Universidad de Chile, Department of Geology

<sup>\*\*</sup> Universidad de Chile, Department of Geophysics

<sup>†</sup> Universidad Adolfo Ibáñez, Mining Innovation Center

Pattern recognition is a general problem related to the aptitude of machines to learn. As a general problem many fields of sciences are concerned by this ability, from biological to social science, and from branches of mathematics and physics to informatics. From the point of view of seismology, a general problem of pattern recognition is the potential of computers to recognize earthquakes recorded by instruments. This is a problem of great interest, it concerns the global and local efforts. The availability of high quality seismic pattern recognition algorithms, generically known as triggers, allows detailed studies devoid of biases coming from human intervention or by drifts in the algorithms themselves. Current trigger algorithms can be grouped into to mayor groups: those based on energy considerations and those on wave morphology. Energy methods are the family of procedures depending on the square of the particle velocity recordings, wave morphology algorithms are those aimed at enhancing a particular signature of earthquakes: the sudden arrival of P wave compared with noise or the high amplitude of the S wave. This work is a proposal of an unexplored family of triggers: those based on the information content of signals: given two observation time windows, one containing mainly noise and the other the first instants of the event, the probability of occurrence of the first digit different from zero is a characteristic of the seismic event, with a decreasing probability for each digit. This regularity is known as the first digit phenomenon and is commonly found in natural phenomena. This particular feature of earthquakes, allows the construction of a characteristic function on which the detection is applied. This information trigger allows not only the identification of clear wave arrivals, but also small earthquakes hidden in noise. This last property is very important as the energy triggers have no opportunity of make such a identification, because if noise level is too high only after careful filtering the earthquake signal could be isolated. On the other hand, waveform triggers also found problems here, because for such high noise levels there is no clear wave morphology to recognize, as the event is embedded into the noise, again only a careful filtering may succeed.

## A.2 Conferencia: Bogotá, Colombia. Julio 2014

*III Latin-American Congress of Seismology* organizado por *Latin-American and Caribbean Seismological Commission (LACSC) of the International Association of Seismology and Physics of the Earth's Interior IASPEI*.

# LACSC 2014 ASSEMBLY. Use of first digit anomaly in background studies under chilean type of subduction environment

Patricio A. Toledo<sup>†,‡</sup>, Jaime A. Campos<sup>‡</sup>

<sup>†</sup> DGL/DGF UChile, <sup>‡</sup> FIC UAI

## Self-Similarity



The property just saw is called **self-similarity** and the geometry induced is termed **fractal**

## Jeffreys' pairs

- Jeffreys noted very interesting parameters frequently appear as **pairs**, one the inverse of the other.
- They are positive and must be plotted in log scale, they span various decades. They are known as **Jeffreys' pairs**.
- Examples are:  $\tau$  and  $\nu$ ,  $T$  and  $\beta$ ,  $c$  and  $n$  the slowness,  $\rho$  and  $\eta$  the lightness, stiffness and compliance, conductivity and resistivity.
- Key property: Jeffreys' pairs display first digit anomaly, see A. Tarantola (2006). *Elements for Physics*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag. ISBN: 3-540-25302-5.

## Symmetry recovered

- If we accept a parameter is as important as its inverse.
- Then we must accept that a **symmetry** of the physics world is present.
- Therefore, modeling a system should be invariant with respect to this parameter, this principle is called **covariance**.
- When a Jeffreys' pair is involved, the cartesian distance between the result of two experiments  $E_1$  and  $E_2$  with outputs  $c_1 = 1/n_1$  and  $c_2 = 1/n_2$  **breaks** the symmetry:  $\|c_1 - c_2\| \neq \|n_1 - n_2\|$ . (1)
- So a new distance is introduced:

## Triggering

$D$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	$P_{11}$	$P_{12}$	$P_{13}$	$P_{14}$	$P_{15}$	$P_{16}$	$P_{17}$	$P_{18}$	$P_{19}$	$P_{20}$
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

## Entropy or information trigger

- If we take a window focused on the earthquake part, the time series shows a first digit anomaly.
- We propose a trigger using two empirical probabilities those from noise and those from the earthquake arrival.
- Using the idea of **state** given by a set of probabilities we evaluate the changes in entropy, once the typical state of the crust under the action of an earthquake is reached, a trigger is called. We will use the idea of distance, borrowed from Jeffreys.

## 11/3 2010 Pichilemu seismic sequence

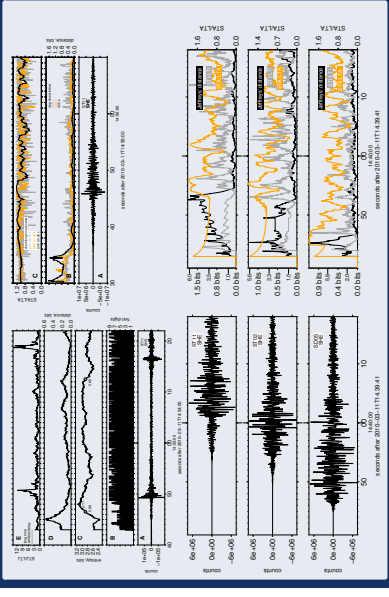


Table 3. Same as table 2, showing the PDFs of the difference of entropy and entropy of the difference of performance in triggered states from triggers with the difference of performance in triggered states.

State	PDF	PDF	PDF	PDF	PDF	PDF	PDF	PDF	PDF	PDF	PDF	PDF	PDF	PDF	PDF	PDF	PDF	PDF	PDF	PDF
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

- and the symmetry is **recovered**.
- $$\rho(E_1, E_2) = \left\| \log \frac{c_2}{c_1} \right\| = \left\| \log \frac{n_2}{n_1} \right\|, \quad (2)$$

Please note, if  $c_2$  —or  $n_2$ — by virtue of the covariance invoked— is interpreted as a probability density, the mean distance represents Shannon's entropy of information.

## First digit anomaly

- Which is the symmetry invoqued?
- The distance introduced honors **scale invariance**, because it deals with ratios of the variables.
- The symmetry involved in the opening figure is scale invariance, and it is one of the reasons why the Earth's geometry is fractal, the other reason being **criticality**
- Where is this scale symmetry present in the figure?
- It is encoded in each pixel:
- A pixel has a support on the space (the resolution of the image) plus a value, a floating point number like this:  $0.00231321$ , (3)
- the scale is given by the number of zeros from the left.
- it represents how far the phenomenon is capable of explore the physical manifold where it is modeled.
- The symmetry invoqued suggests this transformation:  $0.00231321 \rightarrow 231321$ , (4)  
 $0.00000452 \rightarrow 452$ , (5)  
 $1.212 \rightarrow 1.212$ , (6)  
 $0.00000000043 \rightarrow 43$ , (7)
- from where the idea of studying the first and next digits behaviour is clearly stated starting from **first principles**.
- What is the first digit anomaly?
- Samples of a parameter, may be a Jeffreys' pair, display a **nonuniform** distribution of probability for the first and higher digits different from zero.
- The actual rule is:  $p_d = \log_{10}(1 + 1/d)$ ,  $d = 1, 2, \dots, 9$  (8)  
the number one appearing on average 30.1%, the number two appearing 17.6%, three 12.5% and so on.

# LACSC 2014 ASSEMBLY. Earthquake source parameters which display first digit phenomenon

Patricio A. Toledo<sup>†,‡</sup>, Sebastián R. Riquelme<sup>§</sup>, Jaime A. Campos<sup>†</sup>  
<sup>†</sup> DGL/DGF UChile, <sup>‡</sup> FIC UAI, <sup>§</sup> Centro Sismológico Nacional UChile

## Abstract

We study main parameters of earthquakes from the perspective of the first digit phenomenon: the nonuniform probability of the lower first digit different from zero compared to the higher ones. We found that source parameters like coseismic slip distributions at the fault and coseismic inland displacements show first digit anomaly. We also found the tsunami runups measured after the earthquake to display the phenomenon. We explain this finding by invoking a self-organized criticality frame. We show that critically organized automata show the first digit signature and we interpret this as a possible explanation of the behavior of the studied parameters of the Tohoku earthquake.

## First digit anomaly

This phenomenon consist in the nonuniform statistical distribution of the first digit different from zero present in a —usually large— population of data  $d = \{d_1, \dots, d_n\}$  coming from natural systems. The law states that the probability of finding the number one as the first digit different from zero in  $d$  is higher than the probability of finding the number two and so on according to the formula:

$$P_D = \log_{10}(1 + 1/D), \quad D = 1, 2, \dots, 9, \quad (1)$$

first proposed in the 19 century (Newcomb, 1881) by noticing the wear accumulated in the first pages of logarithm tables relative to the last ones.

## Tohoku earthquake

We revisited some published data from the Tohoku earthquake in terms of the first digit distribution. We studied physical parameters closely related to the coseismic and postseismic processes. We choose to review data from the Tohoku earthquake mainly because of data quality. The data used comes from direct measurements of earthquake effects and indirect estimations as well. Care was taken in regard to the statistical significance of the samples selected, as we left out interesting data with few

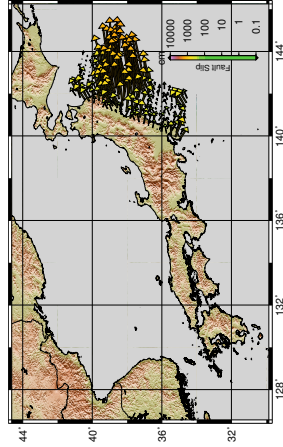


Table 1. Benford's law probabilities  $P_D$  in conjunction with the first digit distribution of various parameters related to the source of the Tohoku earthquake and related phenomena.

$D$	$P_D$	Finite Fault <sup>a</sup> $\Delta u$	$M_0$	Surface GPS <sup>b</sup> $ u_p $	GCMT Aftershock <sup>c</sup> $M_0(t)$	Rumps <sup>d</sup> $r$
1	0.301	0.346	0.325	0.340	0.387	0.327
2	0.176	0.163	0.154	0.154	0.190	0.123
3	0.125	0.113	0.142	0.101	0.078	0.140
4	0.097	0.095	0.104	0.075	0.054	0.076
5	0.079	0.067	0.084	0.074	0.059	0.070
6	0.067	0.058	0.050	0.064	0.056	0.087
7	0.058	0.046	0.042	0.064	0.062	0.041
8	0.051	0.046	0.025	0.045	0.053	0.052
9	0.046	0.067	0.054	0.053	0.050	0.070
$\chi^2$	1.340	0.583	0.023	0.451	0.271	4.628
$P$	1.960	0.000	1.970	0.000	1.172	0.161
$n$	240	240	377	357	172	5260

<sup>a</sup>Slips and Seismic Moment from Hayes (2011b).

<sup>b</sup>Coseismic and Postseismic displacements from Ozawa et al. (2011).

<sup>c</sup>Moment and waiting times aftershock data from GCMT (Ekström et al. (2012)). From 11 March 2011 to 31 January 2012.

<sup>d</sup>Rumps data from Mori et al. (2011).

Table 2. Stand file 1D Cellular automaton (Bak et al., 1988). First digit statistics for various 1D cellular automaton of different sizes.

$L$	$P_D$	$\Delta^*$	$E$	$\Delta^*$	$E$	$\Delta^*$	$E$	$\Delta^*$	$E$	$\Delta^*$	$E$
1	0.301	0.335	0.786	0.328	0.733	0.326	0.796	0.322	0.780	0.315	0.802
2	0.176	0.217	0.181	0.204	0.201	0.191	0.163	0.186	0.168	0.189	0.160
3	0.125	0.173	0.030	0.137	0.053	0.140	0.054	0.140	0.041	0.139	0.050
4	0.097	0.066	0.004	0.093	0.010	0.103	0.006	0.109	0.008	0.103	0.006
5	0.079	0.055	0.000	0.058	0.000	0.056	0.001	0.061	0.001	0.063	0.000
6	0.058	0.026	0.000	0.044	0.000	0.042	0.000	0.045	0.000	0.048	0.000
7	0.051	0.022	0.000	0.026	0.000	0.023	0.000	0.025	0.000	0.028	0.000
8	0.046	0.029	0.000	0.027	0.000	0.023	0.000	0.025	0.000	0.028	0.000
$\chi^2$	1.110	9.100	5.550	8.130	4.500	9.080	0.410	8.760	0.310	9.200	0.260
$P$	1.000	0.330	1.000	0.420	1.000	0.340	0.360	1.000	0.330	1.000	0.310
$T$	1210	4410	9610	10210	9610	10210	46010	96010	46010	96010	96010

Table 3. BTV 2D Cellular automaton (Bak et al., 1987, 1988). First digit statistics for various 2D cellular automaton of different sizes.

$L \times L$	$P_D$	$\Delta^*$	$E$	$\Delta^*$	$E$	$\Delta^*$	$E$	$\Delta^*$	$E$	$\Delta^*$	$E$
1	0.301	0.333	0.512	0.438	0.360	0.364	0.327	0.387	0.360	0.368	0.337
2	0.176	0.231	0.242	0.185	0.230	0.195	0.206	0.185	0.209	0.184	0.207
3	0.125	0.176	0.176	0.165	0.165	0.165	0.165	0.165	0.165	0.165	0.165
4	0.097	0.095	0.072	0.105	0.105	0.100	0.107	0.088	0.087	0.091	0.095
5	0.079	0.061	0.025	0.038	0.060	0.076	0.084	0.063	0.065	0.073	0.063
6	0.067	0.041	0.012	0.043	0.042	0.023	0.064	0.043	0.059	0.048	0.058
7	0.058	0.027	0.004	0.016	0.024	0.026	0.048	0.037	0.050	0.035	0.049
8	0.051	0.007	0.003	0.019	0.017	0.023	0.039	0.026	0.043	0.024	0.027
9	0.046	0.004	0.000	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010
$\chi^2$	2.120	4.500	2.250	1.810	1.500	1.200	1.120	1.180	0.930	1.040	0.830
$P$	0.980	0.800	0.970	0.990	0.990	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$T$	1210	4410	9610	10210	10210	46010	96010	46010	96010	96010	96010

## Conclusions

We have demonstrated that the phenomenon is not only present in the seismic source process, but it is also present in one of the most remarkable explanations of the earthquake phenomena. We claim that an imprint of the SOC mechanism could be traced back by way of Benford's effect, by the study of time and space observables be those indirectly derived or measured in situ.

The main properties seems to be: 1) the stochastic nature of the earthquake phenomena in study, 2) a scale independent mechanism, ranging in various orders of magnitude, from short period GPS source inversions to long period seismic wave imaging and 3) nonlinear laws of interaction powering the long range correlations.

