



UNIVERSIDAD DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

**APLICACIONES DE LA REPRESENTACIÓN PSEUDO-ESPECTRAL
DE CHEBYSHEV A LA MODELACIÓN Y OPERACIÓN DE
SISTEMAS ENERGÉTICOS**

**MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL ELÉCTRICO
NICOLÁS ERNESTO CÁCERES LAGOS**

PROFESOR GUÍA:
MARCELO MATUS ACUÑA

PROFESOR CO-GUÍA:
RODRIGO MORENO VIEYRA

MIEMBRO DE LA COMISIÓN:
EDUARDO PEREIRA BONVALLET

SANTIAGO DE CHILE

ENERO 2015

*Al apoyo incondicional de mi madre,
a la rectitud y disciplina de mi padre,
a las locuras de mi hermana,
y al amor de Marión...
A ellos gracias por hacer esto posible.*

RESUMEN DE LA MEMORIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL ELÉCTRICO
POR: NICOLÁS ERNESTO CÁCERES L.
FECHA: 13/ENERO/2015
PROF. GUÍA: SR. MARCELO MATUS A.

APLICACIONES DE LA REPRESENTACIÓN PSEUDO-ESPECTRAL DE CHEBYSHEV A LA MODELACIÓN Y OPERACIÓN DE SISTEMAS ENERGÉTICOS

El cambio en la legislación referente a los requerimientos de energías renovables no convencionales (ERNC) en Chile y los precios más competitivos han incentivado fuertemente su inserción, planteando interrogantes sobre la operación técnica y económica de los sistemas eléctricos debido a la variabilidad de las ERNC y el requerimiento de redespachos intrahorarios.

Ante la necesidad de mejores herramientas con resolución horaria o menor, en esta memoria de título se estudia un modelo de predespacho en base a polinomios de Chebyshev con resolución continua, permitiendo incorporar de mejor manera la variabilidad de fuentes renovables y ciertas restricciones técnicas como rampas y balances hidráulicos en comparación al método tradicional con resolución horaria. Esta formulación es fácilmente extensible a otros problemas de operación eléctrica, como microredes y coordinación hidrotérmica.

En esta memoria se estudian las propiedades numéricas de los polinomios, destacando el uso de los puntos extremos de Chebyshev y el método *one-side* para aproximación de perfiles temporales no negativos. Posteriormente se estudia el uso de matrices operacionales de Integración y Derivación para representación de restricciones técnicas de la operación eléctrica en el continuo.

Adicionalmente, se elabora un modelo uninodal y monoembalse que incorpora diversas restricciones, proponiendo una solución al tratamiento de los puntos extremos de Chebyshev en variables binarias con el fin de realizar un equivalente al modelo horario. Este modelo se compara con un predespacho horario elaborado previamente, validando así la formulación propuesta.

En este trabajo, se demuestra que es posible modelar mediante polinomios de Chebyshev, obteniendo resultados de costos totales similares al modelo horario (con diferencias menores a un 0.1 %), respetando el orden de mérito, recuperando los costos marginales y valores del agua de manera equivalente. También es posible modelar mediante reducción de coeficientes (dos tercios de la totalidad de las variables de generación), pudiendo de igual forma recuperar resultados similares al despacho horario, donde fundamentalmente se recupera el mismo valor del agua, lo cual permite la extensión a modelos de coordinación hidrotérmica.

Agradecimientos

Este trabajo va dedicado a la mujer más incondicional, más grande y que más me ha apoyado durante el transcurso de mi vida y mis estudios: a mi madre, ya que gracias a sus esfuerzos y esperanzas por verme llegar lejos, sembró la semilla que dio por fruto el término de este trabajo.

También va para ti padre, por inculcarme valores como la responsabilidad, que me han facilitado el camino hasta acá, y ¡Cómo no agradecer las locuras de mi hermana!, gracias por tener siempre ese minuto de relajo entre tantas responsabilidades, que me alegraba y me sigue alegrando hasta el día de hoy, nunca crezcas.

Agradezco también a mi compañera de estos últimos años, quien me aguanta, me comprende y me acompaña, a ti Marión, porque esto será un comienzo de muchas cosas que se nos vienen en el futuro.

Especiales agradecimientos a mi profesor guía, Sr. Marcelo Matus por hacer este trabajo posible, por depositar en mí la confianza y darme siempre su disponibilidad cuando lo necesité. También agradezco a Eduardo Pereira, quien en los últimos períodos de esta memoria fue un sólido aporte para la validación del modelo.

Agradezco de igual manera a Rodrigo Moreno, quien fue un gran aporte durante las últimas correcciones del trabajo.

Mis agradecimientos también a quienes me acompañaron en la carrera: las personas del EnergyLab, desde sus comienzos con Diego Huarapil, Taboada y Huaso hasta los finales con Felipe Barrera, Enrique, Pancho e Ignacio, por hacer del departamento un lugar mejor; los de la sala de pregrado: Carlos, Felipe (Super), Bachi y Hao, por darnos ánimo mutuamente en el último suspiro de la carrera; y finalmente a mis compañeros José Cáceres y Felipe Carrasco, por ser el mejor equipo “CaCaCar”.

Finalmente agradezco a SERC Chile por financiar este trabajo y a don Marcelo Cortés por su grato recibimiento y ayuda en la Universidad de Antofagasta.

Tabla de Contenido

Agradecimientos	iii
Tabla de Contenido	iv
Índice de Figuras	vi
Índice de Tablas	vii
Lista de Acrónimos	viii
Capítulo 1: Introducción	1
1.1 Motivación	1
1.2 Objetivos	2
1.2.1 Objetivo General	2
1.2.2 Objetivos Específicos.....	2
1.2.3 Alcances de la memoria	2
1.2.4 Estructura del trabajo	3
Capítulo 2: Operación y planificación de Sistemas Eléctricos	4
2.1 Operación de sistemas eléctricos de corto plazo	4
2.1.1 Despacho económico	5
2.1.2 Predespacho económico.....	6
2.2 Planificación en sistemas hidrotérmicos	8
2.2.1 Modelación temporal de la demanda en mediano/largo plazo.....	11
Capítulo 3: Modelo de despacho económico utilizando polinomios de Chebyshev	14
3.1 Uso de polinomios de Chebyshev	14
3.2 Polinomios de Chebyshev	15
3.2.1 Polinomios de Chebyshev de primer Tipo T_n	15
3.2.2 Aproximación numérica mediante polinomios de Chebyshev	16
3.2.3 Elección de puntos de muestreo y fenómeno de Runge	16
3.2.4 Raíces y extremos	18
3.2.5 Propiedades de integración y derivación	24
3.3 Modelo de Predespacho utilizando polinomios de Chebyshev	28
3.3.1 Definición de índices, parámetros y variables	28
3.3.2 Función Objetivo	30
3.3.3 Restricciones	31
3.3.4 Límites	36
3.4 Modelo de despacho utilizando polinomios de Chebyshev	37
Capítulo 4: Propuesta metodológica	38
4.1 Manejo de datos	38
4.1.1 Tratamiento de perfiles temporales.....	38
4.1.2 Elección de coeficientes por central	39
4.2 Predespacho y despacho económico	39

4.3	Análisis de Resultados	39
4.4	Resumen de la metodología	40
4.5	Implementación Computacional	41
Capítulo 5: Análisis de Resultados		43
5.1	Descripción de caso de estudio	43
5.1.1	Demanda	43
5.1.2	Generación ERNC	43
5.1.3	Embalse equivalente	45
5.1.4	Centrales de pasada y series hidráulicas	46
5.1.5	Centrales térmicas	47
5.1.6	Resumen de capacidad instalada.....	48
5.2	Resultados	49
5.2.1	Casos de estudio simulados	49
5.2.2	Caso 1 – Validación de UC Relajado	51
5.2.3	Caso 2 – Validación de UC.....	55
5.2.4	Caso 3 – UC Relajado Chebyshev, 168 v/s 112 coeficientes	60
5.3	Aspectos computacionales	64
5.3.1	Resolución de problema de Unit-Commitment	64
5.3.2	Resolución y reducción de problema relajado	65
Capítulo 6: Conclusiones y trabajos futuros		66
	Trabajos Futuros.....	68
Bibliografía		69
Anexo A.	Integración por trapecios.....	73
Anexo B.	Integración por regla del trapecio en función objetivo	74
Anexo C.	Descomposición de potencia real y nodal de generadores térmicos.....	76
Anexo D.	Centrales térmicas ITD Octubre 2014	77
Anexo E.	Anexo de resultados	78
	• Caso 1.....	78
	• Caso 2.....	79

Índice de Figuras

Figura 2.1: Problema de despacho de generación hidrotérmica	9
Figura 2.2: Función de costos futuros (FCF) y Función de costos inmediatos (FCI) [23]	10
Figura 2.3: Descripción de etapas en coordinación hidrotérmica.....	11
Figura 2.4: Construcción de curva de duración de demanda por bloques	13
Figura 3.1: $f(x) = 1/(1+16x^2)$ interpolada en puntos equiespaciados	17
Figura 3.2: $f(x) = 1/(1+16x^2)$ interpolada en extremos de Chebyshev	17
Figura 3.3: Número de condición de matriz A	18
Figura 3.4: Extremos de Chebyshev, o puntos de Gauss-Chebyshev-Lobatto	19
Figura 3.5: Comparación de intervalo, puntos extremos v/s equiespaciados	19
Figura 3.6: Reconstrucción de perfil con distinto número de coeficientes	20
Figura 3.7: Conversión de perfiles a vector de coeficientes polinómicos de Chebyshev	21
Figura 3.8: Magnitud de coeficientes de Chebyshev de perfil de demanda	21
Figura 3.9: Aproximación de Chebyshev y método one-side.....	23
Figura 3.10: Integración de perfil mediante Chebyshev	27
Figura 3.11: Derivada e integral reconstruidas matricialmente	28
Figura 4.1: Diagrama de flujo de metodología	41
Figura 4.2: Resumen de modelo computacional en Chebyshev	42
Figura 5.1: Perfil de demanda, caso de estudio	43
Figura 5.2: Generación ERNC Pobra Oct-2014 v/s requerimiento ley 20/25	44
Figura 5.3: Perfil Eólico agregado	45
Figura 5.4: Perfil solar agregado.....	45
Figura 5.5: Perfiles individuales de centrales serie hidráulica y de pasada	46
Figura 5.6: Perfil agregado de central hidráulica y de pasada	47
Figura 5.7: Generación porcentual por tecnología, caso de estudio	49
Figura 5.8: Notación de descripción de casos.....	50
Figura 5.9: Comparación energética, caso 1	51
Figura 5.10: Generación horaria por tecnología, caso 1	52
Figura 5.11: Generación horaria de centrales carboneras, caso 1	52
Figura 5.12: Generación horaria centrales a gas, caso 1	53
Figura 5.13: Generación CBiomasa_2 UC_Chebyshev, caso 1	53
Figura 5.14: Generación CBiomasa_2 UC_Tradicional, caso 1	53
Figura 5.15: Volumen de embalse, caso 1	54
Figura 5.16: Costo marginal, caso 1	54
Figura 5.17: Comparación energética, caso 2.....	56
Figura 5.18: Generación horaria por tecnología, caso 2	56
Figura 5.19: Generación Bocamina, caso 1	57
Figura 5.20: Generación Solar, caso 2	57
Figura 5.21: Generación Embalse, caso 2.....	58
Figura 5.22: Generación CTM3GNL, caso 2.....	58
Figura 5.23: Generación TG3GNL, caso 2.....	58
Figura 5.24: Volúmenes de embalse, caso 2.....	59
Figura 5.25: Costos marginales, caso 2	59
Figura 5.26: Despacho centrales carboneras, modelo Relajado Chebyshev 112 coeficientes	61
Figura 5.27: Despacho centrales a gas, modelo Relajado Chebyshev 112 coeficientes.....	61

Figura 5.28: Generación central CTM3GNL, comparación 168 v/s 112 coeficientes	61
Figura 5.29: Generación embalse, comparación 168 v/s 112 coeficientes	62
Figura 5.30: Volumen embalse, comparación 168 v/s 112 coeficientes.....	62
Figura 5.31: Costos marginales, comparación 168 v/s 112 coeficientes	63
Figura 5.32: GAP Unit-Commitment	64
Figura 5.33: Gap Unit-Commitment, escala logarítmica.....	64
Figura 5.34: Tiempo de ejecución y diferencia en función objetivo	65
Figura 7.1: Integración trapezoidal	73
Figura 7.2: Potencia real v/s nodal.....	76

Índice de Tablas

Tabla 2.1: Máximas combinaciones de predespacho, para 24 períodos de 1 hora	7
Tabla 3.1: Asociación de muestreo y variables de mapa en unit-commitment	20
Tabla 3.2: Estados de encendido y apagado de generadores térmicos	34
Tabla 5.1: Demanda total anual año 2025 por sistema, ITD Oct-2014	43
Tabla 5.2: Potencia acumulada por tecnología ERNC ITD Oct2014 y corrección	44
Tabla 5.3: Parámetros de embalse equivalente	46
Tabla 5.4: Detalle agrupación centrales a carbón	47
Tabla 5.5: Generación por tecnología en MW, caso de estudio	49
Tabla 5.6: Comparación de casos	50
Tabla 5.7: Valor del agua, caso 1.....	55
Tabla 5.8: Costos totales, caso 1	55
Tabla 5.9: Valor del agua, caso 2.....	60
Tabla 5.10: Costos totales, caso 2.....	60
Tabla 5.11: Valor del agua, caso 3.....	63
Tabla 7.1: Centrales térmicas modeladas, agrupación ITD Oct-2014	77
Tabla 7.2: Generación por central, caso 1.....	78
Tabla 7.3: Generación por central, caso 2.....	79

Lista de Acrónimos

CDEC	: Centro de despacho económico de carga
EDP	: Ecuaciones en derivadas parciales
EMS	: <i>Energy Managment System</i>
ERNC	: Energías Renovables No Convencionales
FCF	: Función de costos futuros
FCI	: Función de costos inmediatos
GNL	: Gas Natural Licuado
ITD Oct-2014	: Informe Técnico Definitivo de Octubre de 2014
MILP	: <i>Mixed-Integer Linear Programming</i>
PCP	: Programador de corto plazo
PDGH	: Problema de Despacho de Generación Hidrotérmica
SDDP	: <i>Stochastic Dynamic Dual Programming</i>
SIC	: Sistema Interconectado Central
SING	: Sistema Interconectado del Norte Grande
UC	: <i>Unit-Commitment</i>

Capítulo 1: Introducción

1.1 Motivación

La aparición de la Ley 20.698, o más conocida como Ley 20/25, obliga a las empresas que cierto porcentaje de sus compras de Energía provenga de Energías Renovables No Convencionales (ERNC), el cual deberá ascender a un 20 % el año 2025 para todos los contratos firmados después de su promulgación en Octubre de 2013. Esta ley en la actualidad, representa un claro incentivo para incrementar la capacidad instalada de dichas tecnologías, observándose a la fecha una totalidad de 14428 MW con su resolución de calificación ambiental aprobada, pero aún sin iniciar su construcción [1].

Los desafíos de inserción de estas tecnologías para la operación de corto y largo plazo recaen en distintos ámbitos, desde el pronóstico del recurso y su incidencia en la operación a futuro, el cálculo de reservas del sistema, el manejo de la variabilidad temporal de la generación con el parque generador existente, entre otros. Esto es válido para todos los SEP, especialmente en microredes, donde existe gran penetración ERNC y una demanda fluctuante, por lo que es necesaria alta resolución de en el despacho (de 1 a 15 minutos) [2]. Fundamentalmente en el manejo de la variabilidad temporal, es importante tratarla de manera adecuada en las políticas de operación del sistema, debido a que los tiempos mínimos de operación de las centrales térmicas, son superiores a los ciclos temporales de la energía Eólica y/o Solar, debiendo compatibilizarse las operaciones entre distintos tipos de tecnologías [3].

Más aún, para planificar la expansión de sistemas eléctricos, no existen modelos de coordinación Hidrotérmica que manejen este tipo de variabilidades, debido a que los existentes utilizan simplificaciones energéticas modelando la demanda por bloques [3] para reducir computacionalmente el problema, los cuales corresponden a balances atemporales en los cuales no se pueden incorporar restricciones técnicas temporales. La incompleta modelación de las variabilidades, podría llevar a evaluaciones ineficientes para el desarrollo del sistema eléctrico, otorgando las señales de precio incorrectas para la operación de largo plazo del sistema.

Ante la inexistencia de herramientas que permitan modelar variabilidades temporales en el largo plazo, y la complejidad computacional de las herramientas convencionales de corto plazo, en este trabajo se desarrolla una herramienta de planificación de corto plazo mediante polinomios de Chebyshev, los cuales permiten representar aproximaciones de perfiles temporales en tiempo continuo con menor cantidad de información, conservando la linealidad del problema, validándola para utilizarla en la resolución de sub-problemas de herramientas de coordinación Hidrotérmica y proponiendo su utilización en problemas de alta resolución temporal tales como microredes.

1.2 Objetivos

Los objetivos se dividen en dos grupos, un objetivo general y un conjunto de objetivos específicos, los cuales se complementan a partir de la sección de alcances del trabajo.

1.2.1 Objetivo General

El objetivo general de este trabajo es desarrollar de un modelo de Planificación de la operación de sistemas eléctricos en variable continua mediante representación Pseudo-espectral de Chebyshev en un sistema de mercado con despacho centralizado, llevando a cabo análisis de resultados de estudio de casos con alta penetración de energías renovables y su incidencia en la operación.

1.2.2 Objetivos Específicos

En virtud del cumplimiento del objetivo general se plantean los siguientes objetivos específicos:

- Disponer de una revisión bibliográfica de polinomios de Chebyshev, destacando propiedades relevantes que aportan en la modelación de Sistemas Eléctricos.
- Conocer de manera acabada la modelación matemática del modelo realizado, poniendo énfasis en su equivalencia con los modelos temporales.
- Evaluar y validar el modelo realizado, con una herramienta temporal previamente validada.
- Analizar los resultados, tanto a nivel técnico-económico de la operación del sistema eléctrico como a nivel numérico, evaluando la importancia de la modelación de las restricciones técnicas.

1.2.3 Alcances de la memoria

Dentro de los alcances del presente trabajo, en primer lugar se incluye una revisión bibliográfica de los distintos métodos de modelación matemática de la operación de sistemas eléctricos, considerando tanto el corto plazo como los modelos de largo plazo de coordinación Hidrotérmica.

Adicionalmente, se incluye una acabada revisión bibliográfica de los métodos matemáticos utilizados para realizar aproximaciones numéricas mediante polinomios de Chebyshev, incorporando la teoría matemática relevante para el trabajo de modelación.

El trabajo a su vez incluye un modelo de predespacho económico determinístico formulado mediante polinomios de Chebyshev, en el cual se modela con sólo un embalse y sin sistema de transmisión. Esto con el fin de verificar la factibilidad de realizar la modelación mediante polinomios y generar discusión a partir de la comparación de un modelo clásico de *Unit*

Commitment formulado en el tiempo. Adicionalmente se pretende vislumbrar ventajas numéricas de incorporar aproximaciones mediante la reducción de coeficientes.

Se elabora un caso de estudio utilizando un plan de obras al 2025 con alta penetración solar, con el fin de verificar la incidencia de ésta penetración en la modelación, principalmente asociadas a las restricciones técnicas de las unidades térmicas del modelo.

Finalmente, el interés del trabajo es plantear una nueva metodología de resolución con el fin de validarla y verificar su potencial reducción de variables, destacando ventajas y desventajas con respecto a la modelación convencional por bloques horarios.

Este trabajo no considera el manejo de incertidumbre ni el trabajo de modelos de coordinación Hidrotérmica de largo plazo. A su vez, si bien se muestra la incidencia de la adición de distintas restricciones distorsiona la señal de precios de costo marginal, no se busca dar soluciones ni cambios a los métodos de pago de generadores.

1.2.4 Estructura del trabajo

El presente trabajo se divide en 6 capítulos independientes, los cuales se estructuran de la siguiente forma:

En el capítulo 1 se exponen temas introductorios al trabajo, tales como la motivación por desarrollarlo. Esto en conjunto con los distintos objetivos abarcados a la largo de éste con sus respectivos alcances.

En el capítulo 2 se presenta brevemente los distintos tipos de modelación de sistemas eléctricos con sus respectivos horizontes de análisis, visualizando distintas metodologías de resolución y sus respectivas formas de resolución y limitaciones. También se presenta una breve revisión bibliográfica de las aplicaciones de polinomios de Chebyshev en distintas áreas.

En el capítulo 3 se describen detalladamente los polinomios de Chebyshev, sus propiedades y las consideraciones prácticas en su utilización para dar pie al entendimiento del modelo de predespacho realizado en el mismo capítulo.

Luego, en el capítulo 4 se observa la propuesta metodológica para llevar a cabo los objetivos del trabajo. Primeramente se describe cómo se tratan los perfiles y cómo se realiza la reducción de coeficientes. Para luego dar paso a la modelación y el posterior análisis técnico-económico de las soluciones obtenidas.

En el capítulo 5 se describe el caso de estudio del sistema eléctrico analizado, el cual corresponde a un equivalente uninodal, monoembalse del SIC y SING reunidos, y proyectado al año 2025 según el plan de obras de la CNE. A partir del caso generado, se

simula a nivel de predespacho y despacho en una herramienta previamente elaborada y revisada, validando el modelo desarrollado. Posteriormente, se realizan reducciones de coeficientes en el despacho económico, evaluando el desempeño computacional y los resultados obtenidos.

Finalmente en el capítulo 6, a partir de los resultados y discusiones de los casos analizados, se presentan distintas conclusiones del trabajo realizado. También se mencionan diversos trabajos futuros.

Capítulo 2: Operación y planificación de Sistemas Eléctricos

En el siguiente capítulo se presenta el problema de operación de sistemas eléctricos desde la perspectiva de un operador centralizado, fundamentalmente cómo se maneja el problema de suplir la demanda de manera económica y segura para distintas escalas temporales, desde horas, pasando por semanas hasta meses y años.

2.1 Operación de sistemas eléctricos de corto plazo

El problema de la operación de sistemas eléctricos de corto plazo consiste en determinar de manera óptima las unidades que deben operar en períodos de tiempo acotados, los cuales varían dependiendo del parque generador disponible y los aspectos regulatorios del mercado, entre un día y dos semanas. Mediante optimización, la solución entrega el programa de operación de unidades (cuales unidades generan y cuales no) además de los niveles de potencia que inyecta cada una de las unidades con el fin de abastecer los requerimientos demanda, reservas y otras restricciones de seguridad.

En la literatura [4], se destaca que en la operación, existen dos metodologías ampliamente estudiadas. El predespacho o *Unit Commitment* (UC), el cual como resultado entrega qué unidades del conjunto de generadores se encontrarán en operación para el período de análisis, y el despacho económico, el cual entrega los niveles de potencia óptimos con que genera cada unidad conectada al sistema. La importancia del predespacho es resolver qué unidades se encuentran en operación, mientras que la del despacho es entregar los niveles de potencia y costos marginales del sistema.

Tanto el predespacho como el despacho, son resueltos centralizadamente por el operador del sistema eléctrico, quien coordina la operación de las centrales generadoras. En Chile, existen dos organismos encargados de la operación. Estos se llaman Centros de Despacho Económico de Carga (CDEC), existiendo uno para el Sistema Interconectado Central (CDEC-SIC) y otro para el Sistema Interconectado del Norte Grande (CDEC-SING), los cuales son los sistemas mayores de 200 MW. Las funciones fundamentales de éstos son

minimizar los costos totales de operación y garantizar los estándares de seguridad del sistema [5].

2.1.1 Despacho económico

El despacho económico resuelve el problema de minimizar el costo de operación de un sistema eléctrico determinando las potencias de cada generador para abastecer la demanda de manera segura. Este al formularse matemáticamente mediante un problema de optimización lineal permite recuperar los costos marginales a partir de las variables duales de la restricción de balance (2.2).

Un modelo general de despacho económico se presenta a continuación [6]:

$$\min F = \sum_{i=1}^{NG} C_i(P_{G_{i,k}}) \quad (2.1)$$

$$s. t. \sum_{n=1}^N P_{G_{n,k}} = \sum_{i=1}^{ND} P_{D,k} + P_L \quad (2.2)$$

$$|P_{ij}| \leq P_{ijmax} \quad i, j \in NT \quad (2.3)$$

$$P_{Gimin} \leq P_{Gi} \leq P_{Gimax} \quad i \in NG \quad (2.4)$$

$$RDw_{G_i} \leq P_{G_{i,k}} - P_{G_{i,k-1}} \leq RUp_{G_i} \quad (2.5)$$

Donde:

- $P_{D,k}$: Demanda real en tiempo k .
- P_{ij} : Flujo de potencia en línea i, j
- P_{ijmax} : Límite de transferencia en línea i, j
- $P_{G_{i,k}}$: Potencia generada por i en tiempo k .
- P_{Gimax} : Potencia máxima de generador i .
- P_{Gimin} : Potencia mínima de generador i .
- P_L : Pérdidas en sistema de transmisión.
- C_i : Función de costo del generador i .
- NT : Número de líneas de transmisión.
- NG : Número de generadores.
- ND : Número de demandas en el sistema
- RUp_{G_i} : Rampa de subida de generador G_i
- RDw_{G_i} : Rampa de bajada de generador G_i

Se observa de la ecuación (2.4), que la restricción de mínimo técnico se debe respetar. Esto es porque se asume que a las centrales con las que se calcula el despacho económico se

encuentran operativas, previamente calculado en la etapa de predespacho descrita en el numeral 2.1.2.

Debido a que las funciones de costo de los generadores y las pérdidas del sistema de transmisión corresponden a funciones no lineales, es recurrente linealizar por tramos [7] con el fin de utilizar rutinas de programación lineal para obtener mejores tiempos de ejecución. La linealización por tramos para su uso con programación lineal se encuentra sujeta a la convexidad de las funciones a analizar, ya que si son no convexas se requieren variables binarias de localización en los tramos que convierten el problema en entero mixto.

Adicionalmente, debido a que tanto las pérdidas como las funciones de costo de generadores térmicos se pueden aproximar de forma cuadrática, otro método de solución es mediante programación cuadrática o programación cuadrática secuencial.

2.1.2 Predespacho económico

Tal como se menciona en el preámbulo, el predespacho colabora encontrando una agenda óptima y un nivel de producción de las unidades generadoras en una ventana de tiempo predeterminada. Las variables de decisión representan que unidades se encuentran encendidas en cada punto del intervalo de análisis [8].

También existen modelos de despachos resueltos de manera descentralizada por los mismos operadores de centrales generadoras. Los dueños de las centrales tratan de maximizar sus utilidades, es decir, sus ventas de energía y reserva menos los costos de producción y partida. [9]. En estos modelos se asumen conocidos los perfiles horarios de precios de energía y reserva, teniendo en cuenta que también se deben respetar las restricciones de las centrales generadoras en un despacho resuelto centralizadamente.

Una formulación básica de predespacho basada en minimizar los costos del horizonte se describe como [10]:

- **Función objetivo:**
 - Costos de operación.
 - Costos de partida.
 - Costos de apagado.
- **Restricciones:**
 - Restricciones de balance.
 - Límites de potencia de unidades.
 - Tiempos mínimos en operación y apagado.
 - Rampas de operación.

Dentro de las restricciones que gran parte de las metodologías formuladas hasta la fecha no incluyen, se pueden encontrar:

- Restricciones de reserva.
- Límites de transmisión.
- Criterios N-1.
- Regulación de frecuencia.
- Regulación de tensión.
- Restricciones de flujo óptimo.

La representación de este problema involucra variables binarias para representar si las unidades se encuentran o no en operación, lo que conduce a formulaciones de Programación Lineal Entera Mixta (MILP: *Mixed Integer Linear Programming*). Debido al número de combinaciones entre posibles estados factibles de operación para todos los períodos de tiempo del intervalo a analizar y todas las unidades generadoras, se tiene que la resolución computacional es intensiva ya que corresponde a un problema NP-complejo [11].

Para un caso de un parque generador N unidades [4], donde sólo una de ellas puede abastecer la demanda, se tiene el máximo de estados posibles para un instante de tiempo, como se representa en la ecuación (2.6)

$$\binom{N}{1} + \binom{N}{2} + \dots + \binom{N}{N-1} + \binom{N}{N} = 2^N - 1 \quad (2.6)$$

Para el caso de T instantes de tiempo, el máximo número de combinaciones incrementa a $(2^N - 1)^T$, lo cual en un día de 24 intervalos de 1 hora, corresponde a lo expresado en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1: Máximas combinaciones de predespacho, para 24 períodos de 1 hora

N	$(2^N - 1)^{24}$
5	6.2×10^{35}
10	1.73×10^{72}
20	$3,12 \times 10^{144}$
40	$9,74 \times 10^{288}$

Estos límites superiores difícilmente se alcanzan debido a que muchos estados son infactibles debido a las restricciones del problema, pero aun así sigue siendo un problema de grandes dimensiones.

Diversas metodologías han sido estudiadas para la resolución de éste tipo de problemas, donde la más común actualmente corresponde a la programación lineal entera mixta (MILP: *Mixed Integer Linear Programming*). Esta metodología se encuentra ampliamente estudiada y con constantes mejoras debido a la facilidad de implementación mediante software comercial [12]. Estos software implementan distintos algoritmos de resolución de

problemas combinatoriales tales como Ramificación y corte (*Branch & Cut*) y heurísticas de pre cálculo.

Otra metodología clásica de resolución corresponde a la programación dinámica, la cual consiste en definir estados que corresponden a arreglos de las unidades que se encuentran operando, y el resto se encuentran apagadas. Un estado factible es aquel en que las unidades operativas pueden abastecer los requerimientos de demanda y otras restricciones, respetando sus mínimos técnicos en cada período. Esta metodología es posible resolverla mediante algoritmos de recursión hacia adelante (*forward*) [4].

Otros métodos de resolución corresponden a: listas de mérito [13], relajación Lagrangeana [14], algoritmos genéticos [15], algoritmos de recocido simulado (*Simulated annealing*) [16], optimización con enjambre de partículas (*Particle Swarm optimization*) [17], búsqueda tabú (*Tabu-search method*) [18], algoritmos de lógica difusa (*Fuzzy logic algorithms*) [19] y programación evolutiva (*Evolutionary programming*) [20].

2.2 Planificación en sistemas hidrotérmicos

Para sistemas hidrotérmicos, determinar la estrategia óptima de operación entre los distintos períodos de operación es conocida como Despacho de Generación Hidrotérmica (PDGH), y ésta se distribuye en distintas escalas de tiempo.

En el corto plazo (comprendido desde horas a semanas) el problema es gobernado por la operación de las unidades térmicas con sus respectivas restricciones tales como: tasas de tomas de carga, tiempos mínimos/máximos de encendido/apagado y mínimos técnicos. Por otro lado, en el largo plazo (comprendido desde semanas hasta años) es importante la gestión adecuada del agua almacenada en los embalses, la cual depende directamente del régimen hidrológico en las cuencas. [21].

Debido a la estructura matemática del problema, se aplican distintos enfoques para modelar el PDGH de acuerdo al intervalo temporal que se analiza. El despacho de corto plazo es un problema entero-mixto donde es posible modelar con detalle horario, por el contrario, en el despacho de mediano/largo plazo debido a la complejidad computacional de su resolución se modela como un problema de optimización estocástica a través de variables continuas.

El PDGH usualmente se modela a partir de la concatenación de sub-problemas más pequeños, utilizando descomposición en escalas temporales [21]: La coordinación Hidrotérmica de mediana/largo plazo, y la coordinación Hidrotérmica de corto plazo (conformada por el predespacho y el despacho económico). En la Figura 2.1 se observa la división temporal del PDGH:

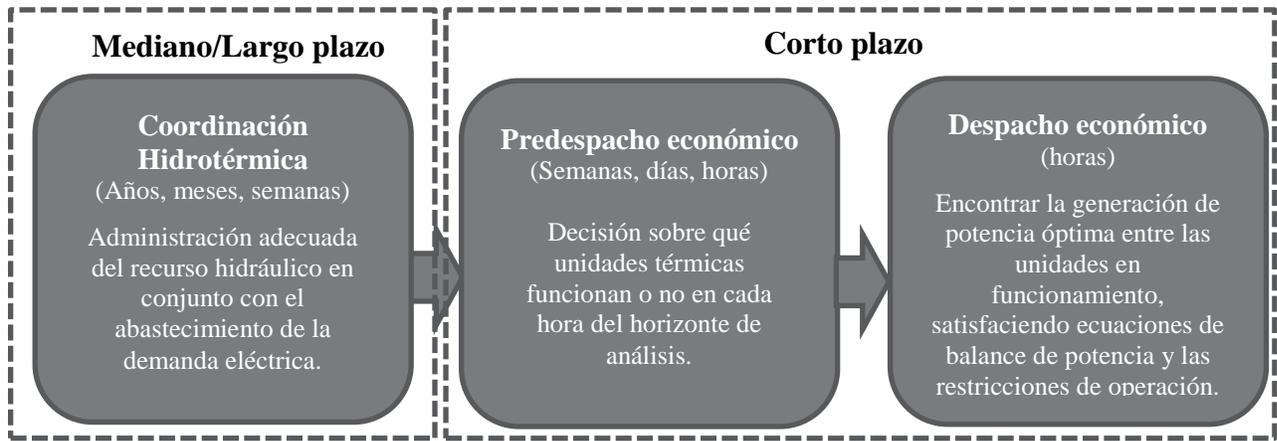


Figura 2.1: Problema de despacho de generación hidrotérmica

La coordinación hidrotérmica de mediano/largo correspondiente a la primera etapa de la resolución de la PDGH consiste en la determinación del valor del agua embalsada que minimiza el costo de operación asociado a las unidades térmicas en el horizonte de programación. El utilizar agua, posee un costo de oportunidad debido a que evita consumo de combustible para la generación eléctrica. Sin embargo, la energía hidráulica generable se encuentra limitada por la cantidad de agua disponible en los embalses, hecho por el cual las decisiones de operación del sistema se encuentran acopladas temporalmente.

Aunque el agua puede considerarse como un recurso gratuito, ésta posee un valor, debido a que su uso inmediato desplaza generación térmica hacia el futuro minimizando los costos térmicos en el corto plazo, pudiendo caracterizarse como un costo de oportunidad.

La solución del despacho de corto plazo suele llamarse función de costos inmediatos (FCI), la cual se relaciona a través de una función de costos futuros (FCF) que es una representación del costo futuro del agua, dada una topología del sistema y generación disponible. La FCF otorga la información sobre el agua disponible tanto al inicio como al final de la etapa, así caracterizándose completamente la disponibilidad durante el período, anulando la incertidumbre hidrológica. En la Figura 2.2 es posible ver la relación entre las dos funciones.

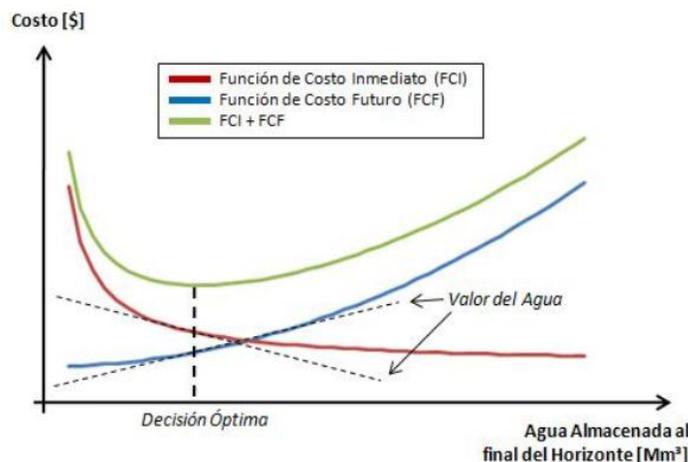


Figura 2.2: Función de costos futuros (FCF) y Función de costos inmediatos (FCI) [22]

La FCF posee distintos métodos de cálculo, dentro de los cuales el más utilizado es calcular recursivamente los costos de operación en el futuro, considerando distintos volúmenes de agua almacenada. Esto puede ser calculado mediante programación dinámica dual estocástica (*SDDP: Stochastic Dynamic Dual Programming*), la cual comúnmente se implementa a través del algoritmo de descomposición anidada de Benders.

El algoritmo de descomposición anidada de Benders permite resolver más eficientemente problemas de optimización de gran tamaño (cientos de miles de variables) cuyas restricciones tienen una estructura por bloques. Un problema completo se descompone en subproblemas aprovechando la estructura bloque-columna en sus restricciones, donde cada uno de los subproblemas se concatena en una estructura de maestro-esclavo. Esto se realiza con el fin de que en un subproblema no aparezcan variables asociadas a un esclavo, en dónde las variables del maestro se convierten en parámetros del esclavo [23].

Cada subproblema es resuelto de forma individual, relacionándose de forma iterativa con su esclavo a través de un punto de solución y con su maestro a través de un corte de Benders, obtenido a partir de la teoría dual [24], lo cual se generalizó exigiendo únicamente convexidad aplicándose la teoría de la dualidad convexa no lineal [25].

En la Figura 2.3, se observa el proceso de traspaso de información entre subproblemas (que para problemas hidrotérmicos corresponden a etapas temporales), el cual puede suceder tantas veces hacia adelante y hacia atrás como sea necesario hasta cumplir un criterio de convergencia [26].

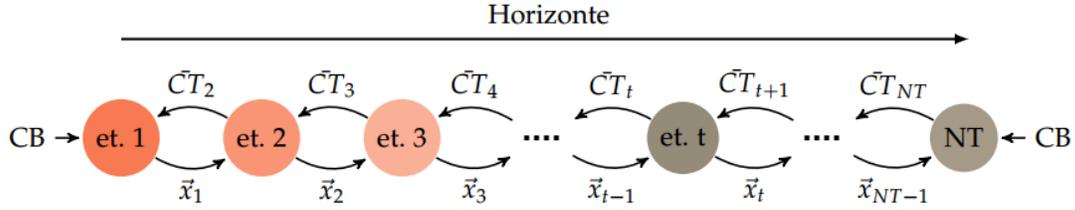


Figura 2.3: Descripción de etapas en coordinación hidrotérmica

En el caso de un problema de coordinación hidrotérmica, en la resolución hacia adelante (o *forward*), se traspa la información del volumen de la etapa anterior, comenzando desde el volumen inicial de un embalse como condición de borde, el cual se debe imponer como parámetro con anterioridad. En la Figura 2.3 corresponde a la variable \vec{x} , la cual se traspa de izquierda a derecha, comenzando a partir de una condición de borde.

Cuando se resuelve el problema hacia atrás (o *backward*), los volúmenes finales encontrados en una etapa, se utilizan como volúmenes iniciales de la etapa anterior. Adicionalmente, los costos futuros quedan representados por el conjunto de cortes de Benders de la etapa de más adelante, lo cual en la Figura 2.3 se representa a través de \overline{CT} .

La resolución concluye cuando el costo total u otra variable que se defina se parezcan tanto como se desee en el criterio de convergencia impuesto.

La descomposición sólo tiene como requisitos la posibilidad de subdivisión en subproblemas convexos, donde actúa relacionándolos, independiente de cómo se formule el subproblema propiamente tal. Es por eso que es posible utilizarla en modelación horaria, por bloques, o eventualmente a partir de bases vectoriales distintas, tal como es el caso de polinomios de grado N o de Chebyshev, como se observa posteriormente en este trabajo.

Finalmente, la importancia de la FCF es que permite desacoplar la coordinación Hidrotérmica de mediano/largo plazo con la de corto plazo [21], la cual mediante la descomposición anidada de Benders se representa a partir de un conjunto de cortes.

2.2.1 Modelación temporal de la demanda en mediano/largo plazo

En sistemas eléctricos de potencia con grandes niveles de generación hidráulica de embalse, las decisiones se encuentran acopladas en el tiempo. Es por esto que el problema que se debe resolver en la planificación de la operación de mediano/largo plazo no es cubrir la demanda de potencia, sino que cumplir con el requerimiento energético en el horizonte de análisis [27].

Debido a la incidencia de la generación hidráulica de embalse, la duración de las etapas de la coordinación hidrotérmica de mediano/largo plazo se define en base a la variación de la disponibilidad energética del recurso hídrico, el cual presenta variaciones en los caudales de entrada a partir de períodos semanales (la variación diaria e intradiaria se aproxima

como cero), por el contrario de la variación de la potencia eléctrica demandada en el sistema, cuyas variaciones se producen a escala horaria o menor.

Con el fin de representar la operación de forma completa, se desearía resolver el problema con resolución horaria tal como la operación de corto plazo mediante el predespacho y el despacho, pero debido al crecimiento del número de variables en función del período de análisis el problema se torna irresoluble. Incluso utilizando descomposición anidada de Benders, cada subproblema si se representa de manera lineal y con resolución horaria, el problema es de grandes dimensiones (cientos de miles de variables por subproblema) dificultando su resolución. Es por esto que se realiza una aproximación en cada subproblema dividiéndolos en bloques, en dónde por ejemplo, es reducir una semana (672 hrs, cada una con su variable) a una aproximación de 5 bloques.

La repartición en bloques se realiza a partir de la curva de duración de demanda, la cual consiste en un ordenamiento de las demandas de la etapa en orden decreciente [28]. Es común discretizar ésta curva en bloques minimizando el error cuadrático medio como se observa en la Figura 2.4 , o bien utilizar su aproximación mediante la duración del período y el factor de carga mediante la ecuación (2.7):

$$d(p.u.) = 1 - 2 \cdot T \cdot (1 - f_c) \quad (2.7)$$

Donde:

- D** : Demanda [°/1].
- T** : Tiempo total de la etapa.
- f_c** : Factor de carga.

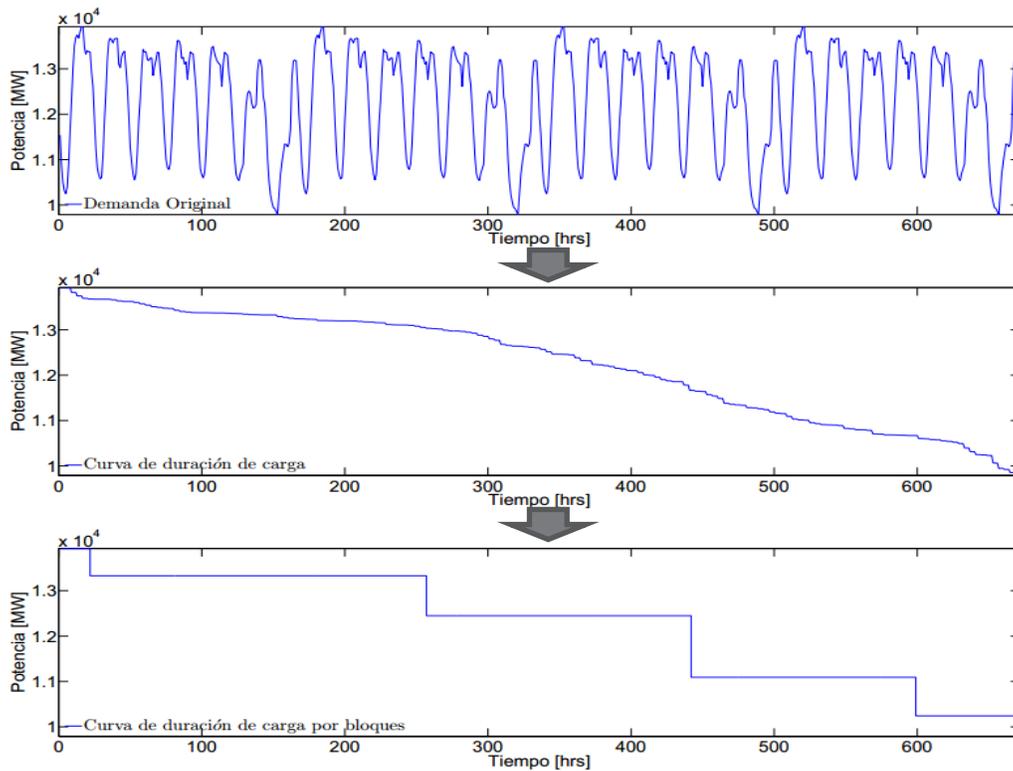


Figura 2.4: Construcción de curva de duración de demanda por bloques

Esta modelación por bloques se realiza situándolos de tal forma que se minimice el error cuadrático medio entre la aproximación realizada y la curva de duración de carga.

La modelación por bloques disminuye las variables del problema de optimización. Para el caso de la Figura 2.4, 4 semanas (672 hrs) se modelan a partir de 5 bloques, es decir, cada elemento del sistema en vez de modelarse con 672 variables se modela con 5.

Debido al ordenamiento decreciente de la curva de duración de carga, se pierde la componente temporal asociada al dominio de ésta, quedando los valores consecutivos sin relación alguna, lo que imposibilita la modelación de fenómenos con dependencias temporales dentro de cada etapa tales como rampas y tiempos mínimos de operación o detención de generadores térmicos.

Esto puede provocar resultados alejados de la realidad debido a que las escalas temporales de las energías renovables no convencionales no corresponden a las mismas de los tiempos de operación térmicos.

Por ejemplo, un generador térmico a carbón tiene un tiempo mínimo de operación del orden de 24 horas, y un generador solar produce alrededor de 8 horas al día. Energéticamente las soluciones pueden corresponder a operaciones que no respeten las restricciones asociadas a

los tiempos, tales como operaciones menores a mínimo técnico durante las horas de sol (debido a que no se respeten los tiempos mínimos de operación).

Otra consecuencia directa de la aproximación por bloques (utilizada en el software PLP), es la utilización de sólo una variable de volumen por etapa, la cual posee valores iniciales y finales en los bordes y modela el balance hidráulico asociado a la totalidad de los bloques. Esto impide conocer el comportamiento interno dentro del bloque modelado, pudiendo producirse casos de operación infactibles para cumplir las condiciones de borde debido a la modelación simplificada.

Capítulo 3: Modelo de despacho económico utilizando polinomios de Chebyshev

Los polinomios de Chebyshev corresponden a una base ortogonal, con propiedades que permiten utilizarlos en interpolación polinómica. La propiedad que da una ventaja a éstos entre todos los polinomios de grado n es la llamada minmax, en donde la máxima norma de la función a interpolar en el intervalo $[-1,1]$ es mínima utilizando los polinomios de Chebyshev, es decir, minimiza el máximo error absoluto entre la información real y la aproximación. Esto permite realizar ajustes con menores errores que con otras bases polinomiales [29].

3.1 Uso de polinomios de Chebyshev

Como se menciona en el preámbulo, los polinomios de Chebyshev cumplen la propiedad numérica de minmax, lo que permite realizar ajustes polinomiales de manera precisa, minimizando el error absoluto. Debido a esto, los polinomios de Chebyshev se utilizan fundamentalmente en la solución de Ecuaciones en derivadas parciales (EDP) [30], cuyo uso da pie a la modelación de variados fenómenos físicos, tales como en el uso de tomografías acústicas en oceanografía [31] o la aproximación de terrenos en geofísica [32].

Adicionalmente, debido a la operatoria matricial que éstos permiten, frecuentemente se utilizan para modelar fenómenos de tipo temporal, debido a la existencia de matrices operacionales que dan pie a formas convenientes de integración y derivación [33] para el análisis de cargas variantes del tiempo en Sistemas eléctricos.

Finalmente, en el marco de operación de sistemas eléctricos, se utilizan polinomios de Chebyshev en un modelo iterativo basado en programación dinámica con el fin de encontrar aproximaciones continuas del valor futuro del agua del embalse Puclaro [34], ubicado en La Serena, Chile.

3.2 Polinomios de Chebyshev

En esta sección, se dan a conocer las principales definiciones concernientes a los polinomios de Chebyshev, mostrando también las distintas propiedades numéricas y de operatoria que se utilizan a lo largo del trabajo.

3.2.1 Polinomios de Chebyshev de primer Tipo T_n

Los polinomios de Chebyshev [35] de primer tipo $T_n(x)$ corresponden a un polinomio en x de grado n definido por la relación (3.1):

$$T_n(x) = \cos(n\theta) \quad \text{cuando } x = \cos(\theta) \quad (3.1)$$

Si el rango de la variable x es el intervalo $[-1,1]$, entonces el rango de la variable θ correspondiente corresponde a $[0, \pi]$. Estos rangos son recorridos en direcciones opuestas, tal que $x = -1$ corresponde a $\theta = \pi$ y $x = 1$ corresponde a $\theta = 0$.

Se desprende del teorema de Moivre que $\cos(n\theta)$ es un polinomio de grado n en $\cos(\theta)$, en donde:

$$\begin{aligned} \cos(0\theta) &= 1 \\ \cos(1\theta) &= \cos(\theta) \\ \cos(2\theta) &= 2 \cdot \cos^2(\theta) - 1 \\ \cos(3\theta) &= 4 \cdot \cos^3(\theta) - 3 \cdot \cos(\theta) \\ \cos(4\theta) &= 8 \cdot \cos^4(\theta) - 8 \cdot \cos^2(\theta) + 1 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.2)$$

Aplicando la definición (3.1), se tiene que los polinomios de Chebyshev de primer tipo son:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2 \cdot x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4 \cdot x^3 - 3 \cdot x \\ T_4(x) &= 8 \cdot x^4 - 8 \cdot x^2 + 1 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.3)$$

En la práctica, es posible calcularlos de manera recursiva de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) + \cos((n-2) \cdot \theta) \\ = 2 \cdot \cos(\theta) \cdot \cos((n-1) \cdot \theta) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Aplicando la definición (3.1), y en conjunto con las condiciones iniciales se tiene un método recursivo para el cálculo de los polinomios de Chebyshev de primer tipo:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_n(x) = 2 \cdot x \cdot T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad \forall n = 2, 3, \dots \end{array} \right. \quad (3.5)$$

3.2.2 Aproximación numérica mediante polinomios de Chebyshev

A partir del teorema del truncamiento de Chebyshev [36], se tiene que el error de aproximar una función $f(x)$ por la suma de los N primeros polinomios de primer tipo ponderados por coeficientes, es acotada por la suma de los valor absolutos de los coeficientes restantes. Entonces se tiene:

$$f_N(x) \equiv \sum_{n=0}^N c_n \cdot T_n(x) \quad (3.6)$$

Entonces, el error corresponde a:

$$\begin{aligned} f(x) - f_N(x) &\equiv |f(x) - f_N(x)| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n| \quad \forall f(x); \forall N; \forall x \in [-1,1] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Este error se encuentra acotado superiormente por (3.7) debido a que el máximo valor que puede tomar $T_n(x)$ es 1.

La expresión (3.6) puede ser expresada matricialmente de forma discreta como:

$$A(x) \cdot c = y = f_N(x) \quad (3.8)$$

En donde:

Punto del dominio	x_0
Punto del recorrido	$f_N(x_0) = y = y_0$
Vector de polinomios	$A(x_0) = [T(x_0) \quad \cdots \quad T_N(x_0)] \in M_{1 \times N+1}$
Vector de coeficientes	$c = \begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} \in M_{N+1 \times 1}$

En base a la relación anterior, sea una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con un dominio discretizado por la serie $X = \{x_0, \dots, x_{N+1}\}$ de puntos tal que su recorrido corresponde a $Y = \{y_0, \dots, y_{N+1}\}$. La representación de su truncamiento mediante polinomios de Chebyshev queda expresada por la expresión (12) para cada uno de los puntos de muestreo (13):

$$A(X) \cdot c = \begin{bmatrix} T(x_0) \\ \vdots \\ T(x_{N+1}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0(x_0) & \cdots & T_{N+1}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ T_0(x_{N-1}) & \cdots & T_{N+1}(x_{N-1}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{N+1} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

3.2.3 Elección de puntos de muestreo y fenómeno de Runge

Una forma es usar polinomios de la forma $p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \cdots + a_N \cdot x^N$ en intervalos equiespaciados, pero esto resulta catastrófico en casos especiales. Un problema conocido es

el llamado fenómeno de Runge, tal que cuando las funciones continuamente diferenciables son interpoladas por polinomios en $N + 1$ puntos equiespaciados, las aproximaciones no convergen, alejándose a una tasa que puede ser tan grande como 2^N [37].

Para lidiar con aquel fenómeno, se deben tomar intervalos no equiespaciados, tal que la densidad por unidad de largo sea:

$$\text{densidad} \sim \frac{N}{\pi\sqrt{1-x^2}} \quad (3.10)$$

Los puntos mayormente usados en la literatura corresponden a los extremos de Chebyshev (3.14), los cuales cumplen con la propiedad (3.10).

En la Figura 3.1 se observa la función $f(x) = \frac{1}{1+16x^2}$ muestreada en $N = 16$ puntos equiespaciados, y se compara con la Figura 3.2 correspondiente al muestreo en los extremos de Chebyshev. En el caso equiespaciado el error crece exponencialmente a medida que N crece, en cambio en el muestreo con los extremos decrece.

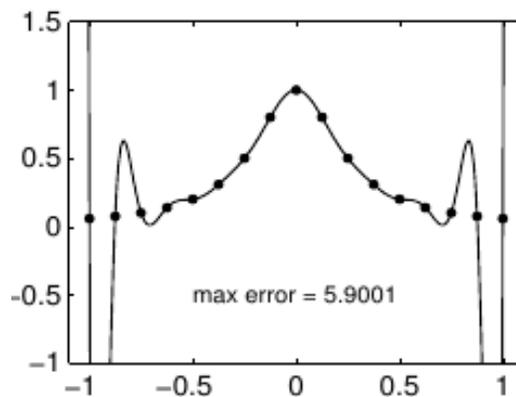


Figura 3.1: $f(x) = 1/(1+16x^2)$ interpolada en puntos equiespaciados

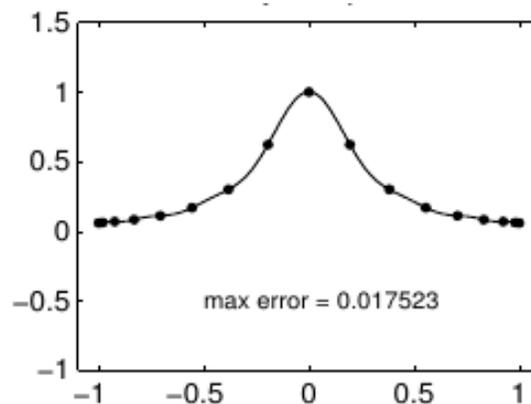


Figura 3.2: $f(x) = 1/(1+16x^2)$ interpolada en extremos de Chebyshev

Adicionalmente, se observa que si se incrementa el número de puntos a analizar se producen inestabilidades numéricas, las que se pueden cuantificar mediante el número de condición κ de la matriz de transformación A (3.9), el cual aumenta a valores muy grandes (del orden de 10^{17}) al utilizar intervalos de muestreo equiespaciados, siendo que las matrices para que sean numéricamente estables éste valor debe ser cercano a 1. Esto disminuye considerablemente al utilizar intervalos muestreados en los puntos extremos de Chebyshev, como se observa en la Figura 3.3.

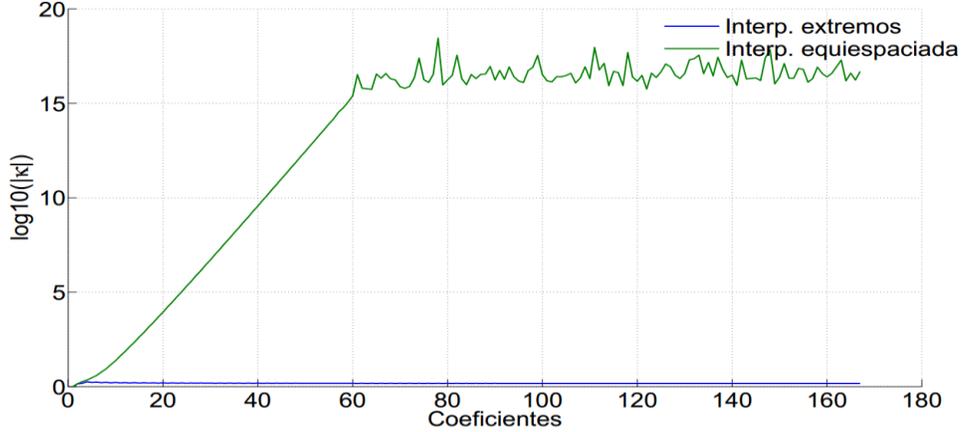


Figura 3.3: Número de condición de matriz A

3.2.4 Raíces y extremos

Un polinomio de Chebyshev de grado $n > 0$ tiene precisamente n zeros y $n + 1$ extremos locales en el intervalo $[-1,1]$. Por ejemplo, el polinomio de grado 5 posee 5 zeros (intersecciones con el eje x) y 6 extremos (máximos o mínimos). De los extremos, $n - 1$ se encuentran en el intervalo $(-1,1)$, y 2 de ellos en los puntos ± 1 . Desde la fórmula (3.1), los zeros para x en $[-1,1]$ de $T_n(x)$ deben corresponder a los zeros de θ en $[0, \pi]$ de $\cos(n \cdot \theta)$. De esto se tiene:

$$n\theta = k\pi - \frac{\pi}{2} \quad (3.11)$$

Por lo que los zeros de $T_n(x)$ son:

$$x = x_k = \cos\left(\frac{\left(k - \frac{1}{2}\right) \cdot \pi}{n}\right), \text{ con } k = 1, 2, \dots, n \quad (3.12)$$

Por otro lado, los extremos internos de $T_n(x)$ corresponden a los extremos de $\cos(n\theta)$, análogos a los zeros de $\sin(n\theta)$, entonces:

$$\frac{d}{dx} T_n(x) = \frac{d}{dx} \cos(n\theta) = \frac{\left(\frac{d}{d\theta} \cos(n\theta)\right)}{\frac{dx}{d\theta}} = -n \cdot \frac{\sin(n\theta)}{-\sin(\theta)} \quad (3.13)$$

Finalmente, incluyendo los extremos de $T_n(x)$ en $x = \pm 1$, los extremos en el intervalo $[-1,1]$ son:

$$x = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \text{ con } k = 0, 1, \dots, n \quad (3.14)$$

Estos puntos también son conocidos como los puntos de Gauss-Chebyshev-Lobatto, pero por simplicidad se nombran como extremos. Ellos representan los puntos equiespaciados de un círculo de radio unitario proyectados sobre el eje de las abscisas, es decir, son equiespaciados sobre el arco de la semicircunferencia y no sobre el eje tal como se observa en la Figura 3.4.

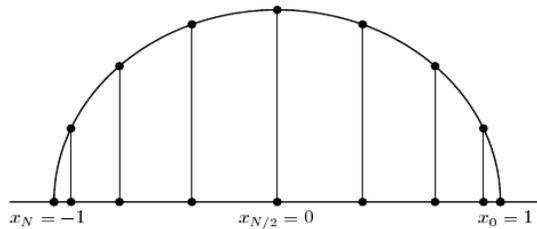


Figura 3.4: Extremos de Chebyshev, o puntos de Gauss-Chebyshev-Lobatto

3.2.4.1 Incorporación de puntos extremos en problemas con dominio equiespaciado

Se debe utilizar un muestreo no equiespaciado para garantizar la estabilidad numérica al trabajar en Chebyshev. Como se observa en la Figura 3.7 el muestreo concentra la mayor cantidad de puntos en los bordes del intervalo y en el centro los valores se encuentran más espaciados.

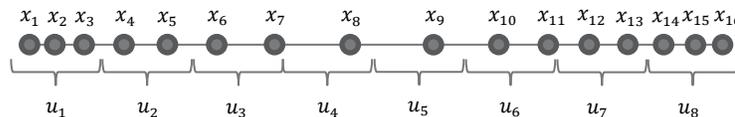


Figura 3.5: Comparación de intervalo, puntos extremos v/s equiespaciados

Para un problema de predespacho económico esto conlleva a tener más variables binarias de las necesarias para representar las primeras y últimas horas del intervalo, debido a que el estado de operación de las unidades generadoras térmicas no permite ser modificado en intervalos menores a una hora.

Es por esto que se elabora un mapa de variables de predespacho con el fin de reducir el número de variables binarias a representar en el problema.

En la Figura 3.5 se observa un muestreo en los puntos extremos de Chebyshev que se utilizan en el problema de optimización y su respectiva agrupación en un mapa de variables tal que el largo de los intervalos formados por estas variables se encuentra determinado por el parámetro Tol_{map} .

Para el caso de ejemplo, se tiene $k \in \{1 \dots 16\}$ de las variables de muestreo y $m \in \{1 \dots 8\}$ de las variables de unit-commitment. Si se desea acceder a $u_{map(k)}$ se tienen los resultados en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1: Asociación de muestreo y variables de mapa en unit-commitment

k	$u_{map(k)}$	k	$u_{map(k)}$
1	1	9	5
2	1	10	6
3	1	11	6
4	2	12	7
5	2	13	7
6	3	14	8
7	3	15	8
8	4	16	8

Para el caso semanal con 168 puntos de muestreo, al aplicar una tolerancia de 2 [hrs] se reducen las variables de *Unit-Commitment* a $m = 67$ puntos.

3.2.4.2 Ejemplo de aplicación de aproximación numérica con en puntos extremos

Utilizando como ejemplo el perfil de demanda mostrado en Figura 3.6 en color azul, el cual corresponde a un muestreo horario representado mediante 168 coeficientes, se observa que éste es posible representarlo con un menor número de coeficientes, en donde para el caso se muestran las aproximaciones con 112 (curva verde), 84 (curva roja) y 56 (curva celeste).

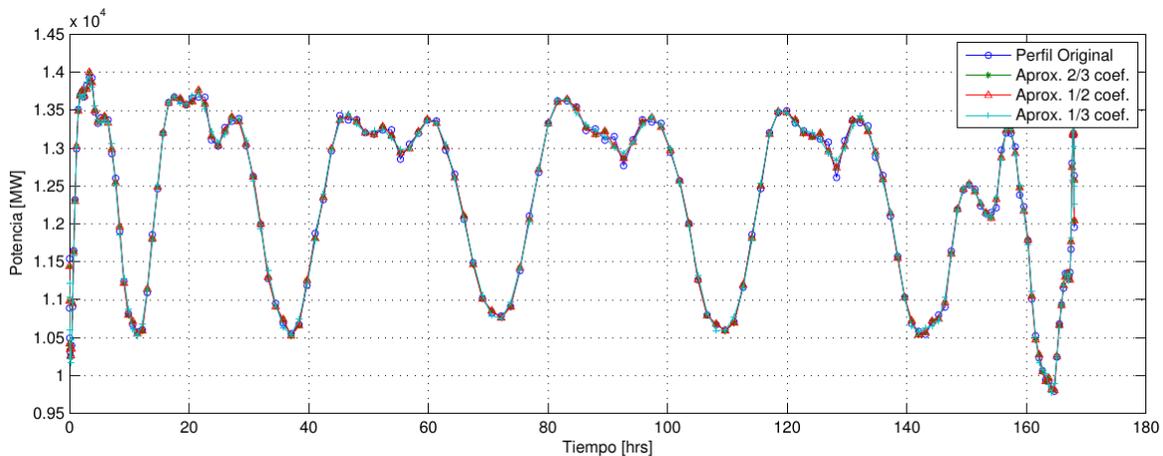


Figura 3.6: Reconstrucción de perfil con distinto número de coeficientes

Se tiene que una de las formas de calcular la aproximación de Chebyshev es como se explica diagrama de flujo de la Figura 3.7, en donde si se desea reducir los coeficientes basta con imponer con valor 0 los últimos del vector de coeficientes del perfil.



Figura 3.7: Conversión de perfiles a vector de coeficientes polinómicos de Chebyshev

El uso de una menor cantidad de coeficientes que el número de puntos de la señal original, representa una pérdida de información, por lo que no es posible capturar el perfil original con su resolución completa, pero si es posible llegar a una aproximación.

Esto se debe al comportamiento Pseudo-espectral de los coeficientes de los polinomios, en donde son los primeros los que poseen mayores magnitudes, lo cual es posible evidenciarlo en la Figura 3.8, en donde los dos gráficos superiores muestran los coeficientes asociados al perfil original (a la izquierda en magnitud y a la derecha en magnitud logarítmica). De éstos se ve que entre los primeros y los últimos existe una diferencia de 4 órdenes de magnitud.

En la misma figura, en los dos gráficos inferiores se muestra el recorte de coeficientes a partir del número 113 imponiéndolos como ceros, lo cual es equivalente a la reconstrucción mediante dos tercios de los datos¹.

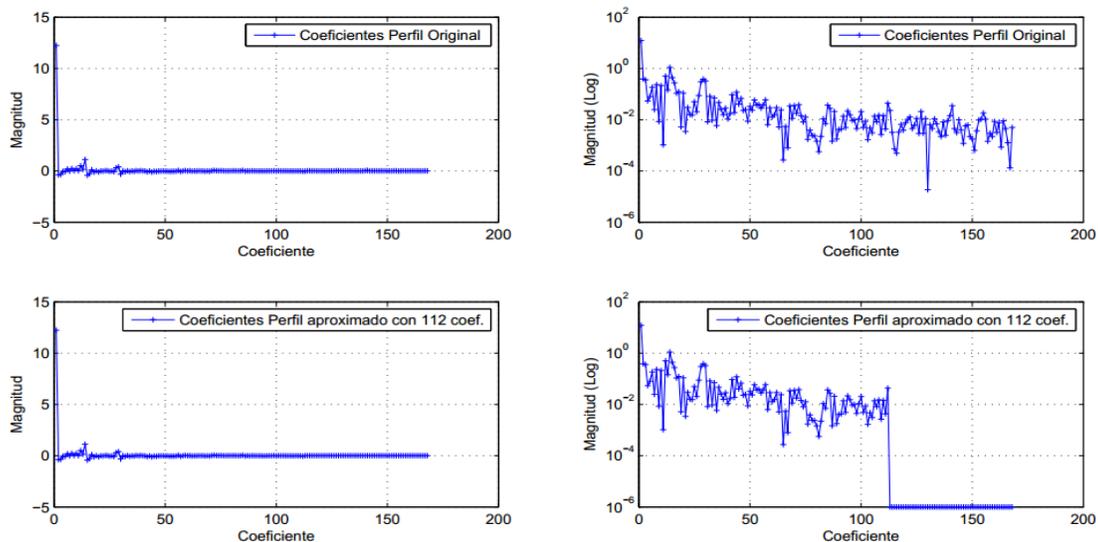


Figura 3.8: Magnitud de coeficientes de Chebyshev de perfil de demanda

¹ A partir del coeficiente 113 en la figura inferior derecha se impone como 10^{-6} sólo con fines ilustrativos, debido a que la función logaritmo se indefinire con valores cero.

3.2.4.3 Aproximación numérica con método One-side

La aproximación de polinomios de Chebyshev es posible realizarla de variadas formas. Como se muestra en el numeral 3.2.2, sólo se requiere una matriz de transformación A evaluada en los puntos del dominio del perfil a aproximar, el cual puede ser equiespaciado o en los puntos extremos de Chebyshev.

En la Figura 3.9 es posible ver que en el primer gráfico se realiza la aproximación mediante la matriz A evaluada en puntos equiespaciados, la cual debido a su mal condicionamiento numérico conlleva a errores que no permiten la representación del perfil.

En el segundo gráfico de la Figura 3.9 se realiza el mismo procedimiento, pero mediante la matriz de transformación A evaluada en puntos equiespaciados. Este tratamiento permite realizar un ajuste del perfil tal que no posee inestabilidades numéricas.

En el tercer gráfico de la misma Figura 3.9 se presenta el método *One-side* [38], el cual consiste en resolver un problema de optimización lineal con el fin de imponer la positividad de la señal recuperada en el tiempo, previniendo así oscilaciones e imponiendo la minimización del error mediante una función objetivo. Este método se presenta en la ecuación (3.15) para el caso de un perfil original y muestreado con n puntos:

$$\begin{aligned}
 \text{Min } & \sum_{j=1}^n \epsilon_j^+ + \epsilon_j^- & (3.15) \\
 \text{s. a. } & \epsilon_n^+ - \epsilon_n^- = A_{[n,:]} \cdot c - y_n & (\forall n \in 1 \dots n) \\
 & A_{[n,:]} \cdot c \geq 0 & (\forall n \in 1 \dots n) \\
 & \epsilon_n^+ \geq 0 & (\forall n \in 1 \dots n) \\
 & \epsilon_n^- \geq 0 & (\forall n \in 1 \dots n) \\
 & -\infty \leq c_n \leq \infty & (\forall n \in 1 \dots n)
 \end{aligned}$$

Donde:

- ϵ_n^+ : Variable de error positivo entre aproximación y dato real en punto n .
- ϵ_n^- : Variable de error negativo entre aproximación y dato real en punto n .
- $A_{[n,:]}$: Fila n -ésima de matriz de transformación A de Chebyshev.
- c : Vector de coeficientes de polinomios de Chebyshev.
- y_n : Elemento n -ésimo de vector de datos originales y .

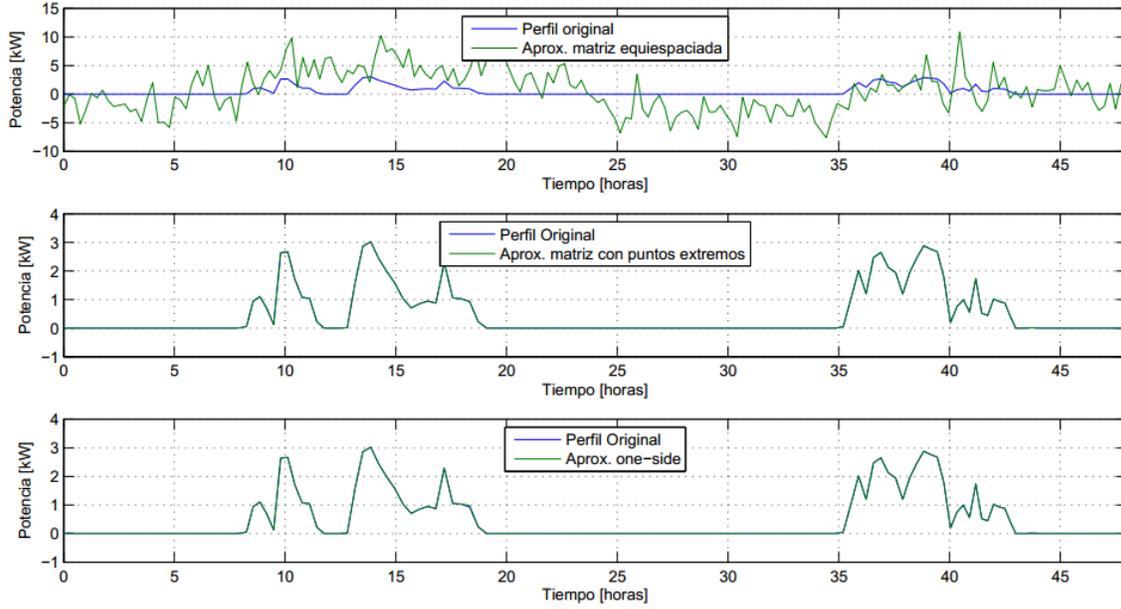


Figura 3.9: Aproximación de Chebyshev y método one-side

Esta formulación es equivalente a minimizar el valor absoluto de una expresión [39], lo cual corresponde a la minimización de $|A \cdot c - y|$, llevando el error entre la reconstrucción al espacio temporal mediante (3.8) y la demanda lo más cercano a cero para cada punto.

Con el fin de minimizar el error absoluto entre el perfil original y su aproximación, es posible imponer una tolerancia (Tol) que relacione la construcción del perfil aproximado con el perfil original, lo cual es importante en perfiles de potencia, ya que una desviación puede alterar la operación, y por ende los costos totales y marginales.

Además, es posible restringir que la energía de ambos perfiles (es decir, el área bajo la curva) sea la misma tanto de la señal original como de la reconstruida. El modelo extendido de la formulación *one-side* queda representado en la expresión (3.16).

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \sum_{j=1}^n \epsilon_j^+ + \epsilon_j^- & (3.16) \\
 & \text{s. a} & \\
 & \epsilon_n^+ - \epsilon_n^- = A_{[n,:]} \cdot c - y_n & (\forall n \in 1 \dots n) \\
 & \int_{-1}^1 A \cdot c = \int_{-1}^1 y & \\
 & A_{[n,:]} \cdot c \geq 0 & (\forall n \in 1 \dots n) \\
 & 0 \leq \epsilon_n^+ \leq Tol \cdot y_n & (\forall n \in 1 \dots n) \\
 & 0 \leq \epsilon_n^- \leq Tol \cdot y_n & (\forall n \in 1 \dots n) \\
 & -\infty \leq c_n \leq \infty & (\forall n \in 1 \dots n)
 \end{aligned}$$

Donde:

- ϵ_n^+ : Variable de error positivo entre aproximación y dato real en punto n .
- ϵ_n^- : Variable de error negativo entre aproximación y dato real en punto n .
- $A_{[n,:]}$: Fila n -ésima de matriz de transformación A de Chebyshev.
- c : Vector de coeficientes de polinomios de Chebyshev.
- y_n : Elemento n -ésimo de vector de datos originales y .
- Tol : Parámetro predefinido de tolerancia porcentual con respecto a perfil original.

3.2.5 Propiedades de integración y derivación

En sistemas eléctricos existen distintas representaciones que se modelan a partir de integrales y derivadas, entre las cuales se encuentran:

- Integración:
 - Modelación de costos: Los costos totales se modelan a partir de la integración sobre el horizonte de los perfiles de potencia generada.

$$\int_0^T \sum_{i=1}^{Num_{gen}} c_v^i \cdot P_i(t) dt \quad (3.17)$$

- Balances hidráulicos: En el caso de un embalse, se realiza un balance tomando el flujo de caudales de entrada y salida, considerando su volumen inicial.

$$V_i + \int_0^t (q_{in}(t) - q_{out}(t)) dt = V(t) \quad (3.18)$$

- Derivación:
 - Rampas de generación: Corresponde directamente a la derivada de la generación en un instante temporal.

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = Ramp_i(t) \quad (3.19)$$

Donde:

- c_v^i : Costo variable de la unidad generadora i .
- Num_{gen} : Total de unidades generadoras en el sistema.
- $P_i(t)$: Potencia generada por unidad i en instante de tiempo t .
- $q_{in}(t)$: Caudal de entrada a embalse en tiempo t .
- $q_{out}(t)$: Caudal de salida desde embalse en tiempo t .
- $Ramp_i(t)$: Rampa de generación de unidad i en tiempo t .
- T : Duración temporal del período de análisis.
- V_i : Volumen inicial del embalse.
- $V(t)$: Volumen del embalse en tiempo t .

Al representar un perfil mediante aproximación de Chebyshev (3.6), es posible encontrar una relación entre los coeficientes de la aproximación original y la derivada o integral de la aproximación debido a que el conjunto de polinomios corresponde a una base vectorial ortogonal y cada uno de ellos es continuo [35]. Esto, para el caso de la derivada es:

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^N c_n \cdot T_n(x) \Rightarrow f'_N(x) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^N c_n \cdot T_n(x) \right) = \sum_{n=0}^N c'_n \cdot T_n(x) \quad (3.20)$$

De dónde los coeficientes de la aproximación original y la aproximación de la derivada se pueden relacionar mediante una matriz D tal que se cumple:

$$c' = D \cdot c \quad (3.21)$$

Análogamente es posible encontrar una matriz que relacione los coeficientes de la aproximación asociada a la función original y la integral como se muestra en (3.22), dónde por el contrario del caso de la derivada, se debe ajustar mediante la suma del término γ , el cual depende de los intervalos de integración definida que se requieran.

$$\tilde{c} = I \cdot c + \gamma \quad (3.23)$$

En las subsecciones siguientes se muestra cómo se calcula cada una de las matrices de integración y derivación.

3.2.5.1 Matriz de derivación

Al representar una función f con una base polinómica de Chebyshev de N coeficientes como en (12), existe una matriz D [40] tal que:

$$\frac{d[f_N(x)]}{dx} \approx T_{diff} \cdot D \cdot c \quad (3.24)$$

En donde la función $f_N(x)$ es una discretización de la función f , A_{diff} corresponde a la matriz de transformación y c a los coeficientes de la representación polinómica de la función.

La expresión es posible calcularla mediante el siguiente algoritmo [41]:

$$D = (D_{ij}); D_{ij} = \begin{cases} j & \text{si } i = 0 \text{ y } j - i \text{ es par} \\ 2 \cdot j & \text{si } j > i \text{ y } j - i \text{ es par} \\ 0 & \sim \end{cases} \quad (3.25)$$

Las dimensiones de la matriz D corresponden a $(D)_{(N)x(N+1)}$, ya que la última fila corresponde a valores 0. Esto se debe a que para representar una derivada de una combinación lineal de polinomios de grado N , se necesita una de grado $N - 1$. Esta matriz siempre se encuentra pre-multiplicada por una matriz de transformación $(A_{diff})_{(N+1)x(N)}$, la cual es una variante de la matriz A de transformación (3), tal que no posee la última columna con el fin de que el conjunto $A_{diff} \cdot D$ sea siempre de dimensión $N + 1 \times N + 1$, con el fin de representar la función $f'_N(x)$ en $N + 1$ puntos, al igual que $f_N(x)$.

3.2.5.2 Matriz de Integración

Así, como existe una matriz de diferenciación, también existe una matriz de integración, tal que $\int^t f_N(x)dx$ sea:

$$\int^t f_N(x)dx \approx A_{int} \cdot J \cdot c \quad (3.26)$$

En donde la función $f_N(x)$ es una discretización de la función f , T_{int} corresponde a la matriz de transformación y c a los coeficientes de la representación polinómica de la función original.

Las dimensiones de la matriz J corresponden a $(J)_{(N+2) \times (N+1)}$, ya que se debe agregar una fila adicional. Esto se debe a que para representar la integral de un polinomio de grado N se necesita un polinomio de grado $N + 1$. La matriz de transformación posee dimensiones tales que $(T_{int})_{(N+2) \times (N+2)}$, la cual es una variante de la matriz A de transformación (3.8).

Las fórmulas básicas de integración de los polinomios de Chebyshev en el dominio $[-1,1]$ son [42]:

$$\begin{aligned} \int T_0 dx &= T_1; \quad \int T_1 dx \\ &= \frac{T_0}{4} + \frac{T_2}{4}; \quad \int T_k dx = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{T_{k+1}}{k+1} - \frac{T_{k-1}}{k-1} \right), \quad k \geq 2 \end{aligned} \quad (3.27)$$

De las cuales se desprende la matriz J , compuesta por:

$$J = \begin{cases} J_{k,k} = 0 \\ J_{2,1} = 1 \\ J_{1,2} = \frac{1}{2} \\ J_{k,k-1} = \frac{1}{2 \cdot (k-1)} = -J_{k,k+1} \end{cases} \quad k = 2, 3, \dots \quad (3.28)$$

Los valores de la primera fila de la matriz J que determina los valores de los coeficientes asociados a T_0 pueden tomar distintas magnitudes, dependiendo del punto de partida de la función de integración. Para completar la primitiva $F_{N+1}(x)$, los términos a agregar corresponden a:

$$J_{1,k} = \begin{cases} 0 & \text{con } k \text{ impar} \\ \left(\frac{1}{2 \cdot (k)} + \frac{1}{2 \cdot (k-2)} \right) \cdot (-1)^{\frac{k}{2}+1} & \text{con } k \text{ par} \end{cases} \quad \forall k \geq 3 \quad (3.29)$$

Para el caso del cálculo general de una integral definida a partir de un valor arbitrario, una vez teniendo la expresión definida para la primitiva F_{N+1} es posible desplazar la función restando la primitiva evaluada en el punto inicial del intervalo, como se expresa en (3.30).

$$\int_a^x f_N(x) = F_{N+1}(x) - F_{N+1}(a) \quad (3.30)$$

Esto se debe a que cada columna k de la matriz J representa la combinación lineal de polinomios que calcula la integral del polinomio de grado $k - 1$. Con los coeficientes de aquella, es posible calcular mediante (3.31):

$$F_{N+1}(a) = \sum_{i=1}^{N+2} J_{i,k} \cdot \cos((i - 1) \cdot \arccos(a)) \quad \forall k \in \{1, \dots, N + 1\} \quad (3.31)$$

Finalmente, si se trabaja con un dominio general $[a, b]$ la matriz J es premultiplicada por un factor escalar $\frac{b-a}{2}$, cuyo caso particular en el dominio $[-1, 1]$ es 1.

3.2.5.3 Ejemplo de aplicación de matrices de derivación e integración

Tanto las matrices de derivación como de integración actúan directamente sobre los coeficientes de Chebyshev que representan la función en el tiempo. Por ejemplo se tiene que al premultiplicar el vector de coeficientes de la función original por la matriz de integración, se tienen los coeficientes de la función integrada. Dicho resultado al multiplicarlo nuevamente con la matriz A es posible volver a mostrar la función en el tiempo. El proceso se muestra a continuación en la Figura 3.10:



Figura 3.10: Integración de perfil mediante Chebyshev

En la Figura 3.11 es posible ver un ejemplo de la aplicación de las matrices de Integración y derivación, en donde a partir de la función original correspondiente a $f(x) = x$ se reconstruye la derivada $f'(x) = 1$ y la integral $\int_{x=0}^x f(x)dx = \frac{x^2}{2}$ completamente a partir de las matrices descritas en el presente numeral.

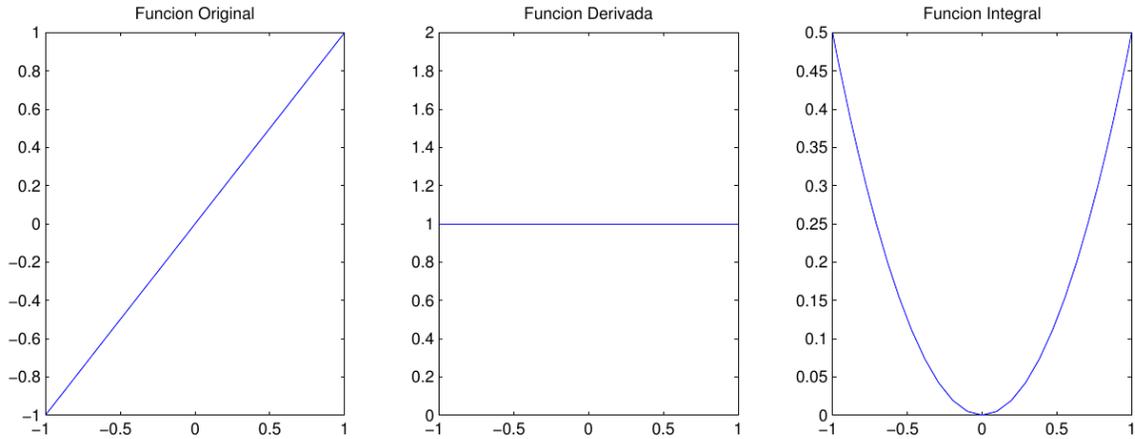


Figura 3.11: Derivada e integral reconstruidas matricialmente

3.2.5.4 Integración en Chebyshev por método de Clenshaw-Curtis

Para la integración de un intervalo $[a, b]$ de una función $f_N(x)$, es posible calcular directamente su valor a partir del método de Clenshaw-Curtis [41]:

$$\int_a^b f_N(x) dx = (b - a) \cdot \left[\frac{1}{2} a_0 - \frac{1}{3} a_2 - \frac{1}{15} a_4 - \dots - \frac{1}{(2 \cdot k + 1)(2 \cdot k - 1)} a_{2k} \dots \right] \quad (3.32)$$

Donde a_i corresponden a los coeficientes de los polinomios de Chebyshev que reconstruyen la función f_N .

Existe la posibilidad de integrar los intervalos a través de métodos numéricos convencionales tales como el de los trapecios (véase Anexo A).

3.3 Modelo de Predespacho utilizando polinomios de Chebyshev

En el siguiente apartado, se describe el modelo elaborado mediante polinomios de Chebyshev, explicando detalladamente el desarrollo de cada una de sus restricciones, parámetros y variables involucradas.

El predespacho se formula con su equivalente con variables binarias equiespaciadas mediante agrupación (como se explica en 3.2.4.1), con el fin de compatibilizar los puntos extremos de Chebyshev, los cuales son estrictamente necesarios para la estabilidad numérica del problema.

3.3.1 Definición de índices, parámetros y variables

A continuación se presenta toda la notación necesaria para comprender el modelo matemático presentado posteriormente.

3.3.1.1 Índices:

i	Coefficientes	$i \in \{1 \dots Num_{coef}\}$
j^{Ernc}	Identificador de central ERNC.	$j^{Ernc} \in \{1 \dots Num_{cenErnc}\}$
j^{ter}	Identificador de central térmica	$j^{Ter} \in \{1 \dots Num_{cenTer}\}$
j^{emb}	Identificador de central de embalse	$j^{Emb} \in \{1 \dots Num_{cenEmb}\}$
k	Puntos de muestreo de perfiles	$k \in \{1 \dots Num_{datos}\}$
m	Número de intervalos de mapa de muestreo.	$m \in \{1 \dots Num_{map}\}$

3.3.1.2 Variables continuas:

$\overline{g_{j_i^{Ernc}}}$	Coefficiente i -ésimo de potencia despachada de generador j^{Ernc} .
$\overline{g_{j_i^{emb}}}$	Coefficiente i -ésimo de potencia despachada de generador j^{emb} .
$\overline{g_{j_i^{ter}}}$	Coefficiente i -ésimo de potencia despachada de generador j^{ter} .
$\overline{G_{j_i^{ter}}}$	Coefficiente i -ésimo de potencia real generada por generador j^{ter} .
$ramp_{j_k^{ter}}$	Rampa de intervalo k -ésimo de generador j^{ter} .
$ramp_{j_k^{ter}}^{up}$	Rampa de subida de intervalo k -ésimo de generador j^{ter} .
$\overline{qg_{j_i^{emb}}}$	Coefficiente i -ésimo de caudal turbinado por central de embalse j^{emb} .
$\overline{vol_{j_i^{emb}}}$	Coefficiente i -ésimo de volumen de embalse j^{emb} .

3.3.1.3 Variables binarias:

Estas variables se encuentran relacionadas con un mapa elaborado con una tolerancia Tol_{map} cuyo fundamento y construcción se encuentra en 3.2.4.1.

$u_{j_{map(k)}^{ter}}$	Variable de estado en instante k -ésimo de generador j^{ter} .
$u_{j_{map(k)}^{ter}} = \begin{cases} 1 & \text{si generador térmico } j \text{ se encuentra despachado en instante } k \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$	
$S_{j_{map(k)}^{ter}}$	Variable de encendido en instante k -ésimo de generador j^{ter} .
$u_{j_{map(k)}^{ter}} = \begin{cases} 1 & \text{si generador térmico } j \text{ comienza a encender en instante } k \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$	
$d_{j_{map(k)}^{ter}}$	Variable de estado en instante k -ésimo de generador j^{ter} .
$u_{j_{map(k)}^{ter}} = \begin{cases} 1 & \text{si generador térmico } j \text{ comienza a apagarse en instante } k \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$	

3.3.1.4 Parámetros:

β_k	Coefficiente de escalamiento en el tiempo de muestreo k .
cv_j	Costo variable de central j .

dem_k	Demanda muestreada en tiempo k .
$map(k)$	Relación entre tiempo k con variable de estado en generador térmico.
$Num_{cenErnc}$	Número de centrales generadoras ERNC.
Num_{cenEmb}	Número de centrales generadores con embalse.
Num_{cenTer}	Número de centrales térmicas.
Num_{datos}	Número de puntos muestreados del intervalo.
Num_{UC}	Número de variables de estado. Relacionadas entre tiempos k con $map(k)$
$\eta_{j_k}^{emb}$	Rendimiento de central hidráulica de embalse j^{emb} .
$Pmax_{jk}$	Potencia máxima de generador j en tiempo k (Dado por perfil en ERNC o potencia máxima técnica).
$Pmin_j$	Potencia mínima de generador j . (Dado por características técnicas).
$qAflu_{j_k}^{emb}$	Caudal afluente de embalse j^{emb} en tiempo k .
$Rup_{j_k}^{ter}$	Tasa de toma de carga de central térmica j^{ter} en tiempo k .
$Rdw_{j_k}^{ter}$	Tasa de descarga de central térmica j^{ter} en tiempo t_k .
$Rstart_{j^{ter}}$	Tasa de toma de carga de central térmica j^{ter} al encenderse.
$Rstop_{j^{ter}}$	Tasa de toma de carga de central térmica j^{ter} al apagarse.
r	Tasa de descuento equivalente al horizonte de estudio.
t_{min}	Primer punto del horizonte de estudio.
t_{max}	Último punto del horizonte de estudio.
$T_{j^{ter}}^{minDet}$	Tiempo mínimo de detención de central térmica j^{ter} .
$T_{j^{ter}}^{minOp}$	Tiempo mínimo de operación de central térmica j^{ter} .
Tol_{map}	Tolerancia para elaboración de mapa
$u_{j^{ter}}^{ini}$	Estado inicial de generador j^{ter} .
$vol_{j^{emb}}^{ini}$	Volumen inicial del embalse j^{emb} .
$vol_{j^{emb}}^{min}$	Volumen mínimo de embalse j^{emb} .
$vol_{j^{emb}}^{max}$	Volumen máximo de embalse j^{emb} .
γ_j^{Emb}	Factor de escala adimensional del embalse j^{emb} .

3.3.1.5 Descripción de Matrices:

A	Matriz de Transformación de Chebyshev al tiempo con m coeficientes.
I	Matriz de Integración de coeficientes de Chebyshev definida desde $x = -1$.
D	Matriz de Derivación de coeficientes de Chebyshev.
D_{num}	Matriz de derivación de serie de tiempo discreta.

3.3.2 Función Objetivo

El objetivo del modelo corresponde a la minimización de los costos totales de operación del sistema eléctrico. Considerando tanto los costos de operación como los costos de partida de

las centrales. Alternativamente es posible considerar costos de ciclaje de las centrales, penalizando mediante un valor económico cada ciclo entre potencia mínima y máxima de cada central, lo cual se puede valorizar a través de costos de mantenimiento. Para mayor información de su construcción véase el Anexo B.

$$\begin{aligned} \min(Z) = & \frac{t_{max} - t_{min}}{2} \\ & \cdot \sum_{k=1}^{Num_{Datos}} \left[\sum_{j=1}^{Num_{cenTerm}} \beta(k) \cdot v(k) \cdot cv_j \right. \\ & \cdot \left(A_{[k,:]} \cdot \widetilde{g}_j(k) + \delta_{j_k^{ter}} \cdot \frac{2 \cdot ramp_{j_k^{ter}}^{up} - ramp_{j_k^{ter}}}{2 \cdot (Pmax_{j_k^{ter}} - Pmin_{j_k^{ter}})} \right) \\ & \left. + \sum_{j=1}^{Num_{cenErnc}} \beta(k) \cdot v(k) \cdot cv_j \cdot A_{[k,:]} \cdot \widetilde{g}_j(k) \right] \end{aligned} \quad (3.33)$$

3.3.3 Restricciones

A continuación se presenta y explica cada una de las restricciones asociadas al modelo elaborado, ejemplificando donde es necesario con el fin de esclarecer el trasfondo de la restricción.

3.3.3.1 Balance nodal.

Esta restricción corresponde a una igualdad debido a que el modelo analizado es uninodal. Cada vector de coeficientes $\widetilde{g}_{j[:]}$ de cada generador se evalúa en el instante k mediante el vector $A_{[k,:]}$ con el fin de satisfacer la demanda en cada instante k .

El conjunto de k restricciones es equivalente a sumar los perfiles reconstruidos en el tiempo e igualarlos a la demanda.

$$A_{[k,:]} \cdot \left(\sum_{j=1}^{Num_{cenErnc}} \widetilde{g}_{j[:]}^{Ernc} + \sum_{j=1}^{Num_{cenTer}} \widetilde{g}_{j[:]}^{Ter} + \sum_{j=1}^{Num_{cenEmb}} \widetilde{g}_{j[:]}^{Emb} \right) = dem_k \quad (\forall k) \quad (3.34)$$

3.3.3.2 Balance caudal-potencia

Al igual que la restricción de balance nodal, cada vector de coeficientes es llevado a al tiempo para ser representado como perfil mediante el vector $A_{[k,:]}$. El conjunto de k restricciones muestra la relación a través del rendimiento η_{hid} del perfil de generación y de caudal turbinado de cada central j^{Emb} .

$$\eta_{hid} \cdot A_{[k,:]} \cdot q \widetilde{g}_{j[:]}^{Emb} = A_{[k,:]} \cdot \widetilde{g}_{j[:]}^{Emb} \quad (\forall k; \forall j^{Emb}) \quad (3.35)$$

3.3.3.3 Balance caudal-Volumen en embalses

Debido a que existen inestabilidades numéricas asociadas a la integración de los caudales para obtener el volumen, la relación de balance en los embalses se realiza directamente en el tiempo de manera discreta, planteando el problema como ecuación diferencial con condición de borde. El término que premultiplica al volumen corresponde a una matriz que se explica a continuación:

$$\underbrace{A}_{\text{Lleva vol al tiempo}} \rightarrow \underbrace{D_{num}}_{\text{Deriva vol en el tiempo}} \cdot A \rightarrow \underbrace{A^{-1}}_{\text{Devuelve vol a Chebyshev}} \cdot D_{num} \cdot A$$

Cada fila $[k, :]$ de la matriz $(A^{-1} \cdot D_{num} \cdot A)$ al multiplicarla por el vector de volúmenes permite obtener el valor de la derivada en Chebyshev, evaluada en el punto k . Ésta variación de volumen en el tiempo es equivalente a la generación eléctrica sumada al volumen entrante al embalse, también representadas en Chebyshev.

Los caudales se multiplican por un factor de escala con el fin de efectuar correctamente el análisis dimensional entre éstos y los volúmenes.

Adicionalmente para escalar numéricamente el problema se utiliza el factor adimensional γ_j^{Emb} , el cual reduce el orden de magnitud de la variable de volumen, con el fin de igualar caudales expresados en metros por segundo con volúmenes del orden de millones de metros cúbicos. Esto se debe realizar debido a que términos de gran orden de magnitud alteran el número de condición del problema de optimización, llevando a inestabilidades numéricas.

$$\begin{aligned} (A^{-1} \cdot D_{num} \cdot A)_{[i,:]} \cdot \widetilde{vol}_{j[i]}^{emb} \\ = \frac{3600}{\gamma_j^{Emb}} \cdot (q\widetilde{g}_{j[k]}^{Emb} + qA\widetilde{flu}_{j[k]}^{emb}) \quad \forall k \in \{1 \dots NumDat - 1\}; \forall j^{Emb} \end{aligned} \quad (3.36)$$

La condición de borde del problema está dada por el volumen inicial, tal que el conjunto de coeficientes del volumen evaluado en el primer instante debe ser igual al volumen inicial:

$$A_{[1,:]} \cdot \widetilde{vol}_{j[i]}^{emb} = vol_{j^{emb}}^{ini} \quad (\forall j^{Emb}) \quad (3.37)$$

3.3.3.4 Volumen mínimo y máximo en embalses

En cada instante de tiempo, debe cumplirse que el volumen esté situado entre el volumen máximo y mínimo. El cual también debe encontrarse escalado:

$$\frac{vol_{j^{emb}}^{ini}}{\gamma_j^{Emb}} \leq A_{[k,:]} \cdot \widetilde{vol}_{j[i]}^{emb} \leq \frac{vol_{j^{emb}}^{max}}{\gamma_j^{Emb}} \quad (\forall j^{Emb}; \forall k) \quad (3.38)$$

3.3.3.5 Mínimos y máximos técnicos en centrales no térmicas

Al igual que la restricción de volumen, cada potencia debe estar contenida entre 0 y su límite máximo. Para el caso de las centrales térmicas, sólo se limita su potencia real $G_{j[i]}^{Term}$ entre 0 y potencia máxima, ya que cuando la central se encuentra despachada rige la restricción 3.3.3.6.²

$$\begin{aligned}
 0 &\leq A_{[k,:]} \cdot \widetilde{g_{j[i]}^{Emb}} \leq p_{j^{Emb}}^{max} \quad (\forall j^{Emb}; \forall k) \\
 0 &\leq A_{[k,:]} \cdot \widetilde{g_{j[i]}^{Ernc}} \leq p_{j^{Ernc}}^{max} \quad (\forall j^{Ernc}; \forall k) \\
 0 &\leq A_{[k,:]} \cdot \widetilde{G_{j[i]}^{Term}} \leq p_{j^{Term}}^{max} \quad (\forall j^{Term}; \forall k)
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

3.3.3.6 Mínimos y máximos técnicos en centrales térmicas

La potencia $\widetilde{g_{j[i]}^{Term}}$ contribuye únicamente al balance nodal, y ésta se encuentra activa si y sólo si el generador se encuentra despachado. Esto se representa a partir de la siguiente relación:

$$u_{j^{Term}_{map(k)}} \cdot p_{j^{Term}}^{min} \leq A_{[k,:]} \cdot \widetilde{g_{j[i]}^{Term}} \leq u_{j^{Term}_{map(k)}} \cdot p_{j^{Term}}^{max} \quad (\forall j^{Term}; \forall k) \tag{3.40}$$

Si el generador no se encuentra despachado, automáticamente la restricción impone que la generación debe ser 0 fijando tanto el límite inferior como el superior en 0, en el caso contrario la generación queda limitada por sus límites mínimos y máximos técnicos.

3.3.3.7 Encendido y apagado de centrales térmicas.

La relación entre el estado actual y el estado del período anterior permite ligar éstos con las variables de encendido y apagado según la siguiente restricción:

$$u_{j^{ter}_{map(k)}} - u_{j^{ter}_{map(k-1)}} - s_{j^{ter}_{map(k)}} + d_{j^{ter}_{map(k)}} = 0 \quad (\forall j^{Term}; \forall k \in \{2 \dots NumDat\}) \tag{3.41}$$

$$u_{j^{ter}_{map(k)}} - u_{j^{ter}_{map(k-1)}} - s_{j^{ter}_{map(k)}} + d_{j^{ter}_{map(k)}} = 0 \quad (\forall j^{Term}; \forall k \in \{2 \dots NumDat\}) \tag{3.42}$$

Para el caso $k = 1$, se debe definir el estado inicial de la máquina antes de iniciar el horizonte de análisis, quedando representado mediante:

$$u_{j_1^{ter}} - u_{j_1^{ter}}^{ini} - s_{j_1^{ter}} + d_{j_1^{ter}} = 0 \quad (\forall j^{Term}; k = 1) \tag{3.43}$$

A partir de la Tabla 3.2 es posible ver las distintas combinaciones de variables que son factibles para la restricción:

² Para mayor información del modelo de potencias del generador térmico refiérase al Anexo C.

Tabla 3.2: Estados de encendido y apagado de generadores térmicos

Estado anterior $u_{j_{k-1}^{ter}}$	Estado actual $u_{j_k^{ter}}$	$s_{j_k^{ter}}$	$d_{j_k^{ter}}$	Significado
0	0	0	0	Generador apagado.
0	1	1	0	Generador comenzando a encender.
1	0	0	1	Generador comenzando a apagarse.
1	1	0	0	Generador encendido.

3.3.3.8 Relación entre generación real y nodal en centrales térmicas

Esta restricción relaciona la generación térmica que contribuye al balance nodal y la real. Estas se relacionan por la restricción:

$$A_{[k,:]} \cdot \widetilde{g}_{j_{[i]}^{Term}} \leq A_{[k,:]} \cdot \widetilde{G}_{j_{[i]}^{Term}} \quad (\forall k) \quad (3.44)$$

Es decir, la potencia real es siempre mayor que la nodal. Esto permite tener potencias reales fuera del tiempo en que la central se encuentra despachada (cuya potencia nodal $\widetilde{g}_{j_{[i]}^{Term}}$ sería 0) con el fin de valorizarlas en los períodos de encendido y apagado, como se muestra en el Anexo C.

3.3.3.9 Tiempos mínimos de operación en centrales térmicas

Para representar los tiempos mínimos de operación para el instante k , se debe localizar las variables binarias del mapa que corresponden al intervalo de tiempo. A partir de ese instante, se suman $\text{ceil}\left(\frac{T_j^{minOp}}{Tol_{map}}\right)$ variables que a lo menos suman el tiempo mínimo de operación. Esto asegura a que si la central se encuentra despachada, a lo más se encendió una vez en el período $\{k - T_{minOpe}, k\}$.

$$u_{j_{map(k)}^{ter}} \geq \sum_{m=map(k)-\text{ceil}\left(\frac{T_j^{minOp}}{Tol_{map}}\right)}^{map(k)} s_{j_m^{Term}} \quad (\forall j^{Term}; \forall k) \quad (3.45)$$

3.3.3.10 Tiempos mínimos de detención en centrales térmicas

Es el caso análogo a los tiempos mínimos de operación, salvo que la variable que se suma es la de apagado, que obliga a que si el generador se encuentra apagado, a lo más se apagó una vez en el intervalo $\{k - T_{minOpe}, k\}$. Esto se representa a través de la siguiente restricción:

$$1 - u_{j_{map(k)}^{ter}} \geq \sum_{m=map(k)-ceil\left(\frac{T_{j_{ter}}^{minDet}}{Tol_{map}}\right)}^{map(k)} d_{j_m^{Term}} \quad (\forall j^{Term}; \forall k) \quad (3.46)$$

3.3.3.11 Número máximo de encendidos y apagados en centrales térmicas

Esta restricción tiene como objetivo reducir el número de cortes asociados a la programación entera-mixta, para reducir los tiempos de ejecución del programa. Se tiene que el número máximo de encendidos y apagados no puede exceder al valor de cada ciclo de encendido/apagado que se puede efectuar con el mínimo tiempo.

Por ejemplo, un generador en un día de 24 horas, si su tiempo mínimo de operación y de detención son iguales a 4 horas, no es posible encenderlo ni apagarlo más de 3 veces en el día. Esto se representa a partir de la ecuación (3.47) para los encendidos, y la ecuación (3.48) para los apagados.

$$\sum_{m=1}^{Num_{UC}} s_{j_m^{ter}} \leq ceil\left(\frac{(t_{fin} - t_{ini})}{T_{j_{ter}}^{minDet} + T_{j_{ter}}^{minOpe}}\right) \quad (3.47)$$

$$\sum_{m=1}^{Num_{UC}} d_{j_m^{ter}} \leq ceil\left(\frac{(t_{fin} - t_{ini})}{T_{j_{ter}}^{minDet} + T_{j_{ter}}^{minOpe}}\right) \quad (3.48)$$

3.3.3.12 Rampas en centrales térmicas

Las rampas de centrales térmicas se representan directamente como una variable, con el fin de poder penalizarlas en la función objetivo y representar los costos por ciclaje de las centrales si es pertinente al caso. Esta variable se define a partir de las variables de generación real de cada una de las centrales térmicas como se muestra a continuación:

$$A_{[k,:]} \cdot (D \cdot \widetilde{G_{j_{[i]}}^{Term}}) = ramp_{j_k^{ter}} \quad (\forall k; \forall j^{Term}) \quad (3.49)$$

La matriz de derivación D permite obtener los coeficientes asociados a la función derivada del perfil de generación. A partir de la evaluación para cada instante k mediante $A_{[k,:]}$ es posible recuperar la rampa en cada instante de tiempo.

Además, se define sobre la generación real debido a que si el generador no está despachado la generación que contribuye al balance nodal es 0, lo cual impediría modelar las rampas de partida como se expresa en el numeral 3.3.3.13.

Cabe destacar que las variables de rampa son las únicas que se encuentran expresadas directamente en el tiempo dentro del problema.

3.3.3.13 Separación entre rampa de partida/detención y operacional en centrales térmicas

Esta restricción tiene como objetivo modelar y valorar los tiempos de encendido y apagado de las centrales, representando la trayectoria que siguen los perfiles de potencia antes de llegar a potencia mínima y ser despachadas.

Se tiene que si la unidad se encuentra despachada, la rampa se encuentra acotada por los valores operacionales $Rup_{j_k^{ter}}$ y $-Rdw_{j_k^{ter}}$. En cambio si aún no alcanza la potencia mínima, se encuentra delimitada por los parámetros $Rstart_{j_k^{ter}}$ y $-Rstop_{j_k^{ter}}$. Esto se representa a partir de las ecuaciones (3.50) y (3.51).

$$ramp_{j_k^{ter}} \leq Rup_{j_k^{ter}} + (1 - u_{j_{map(k)}^{ter}}) \cdot (Rstart_{j_k^{ter}} - Rup_{j_k^{ter}}) \quad (\forall j^{Term}; \forall k) \quad (3.50)$$

$$ramp_{j_k^{ter}} \geq -Rdw_{j_k^{ter}} + (1 - u_{j_{map(k)}^{ter}}) \cdot (-Rstop_{j_k^{ter}} + Rdw_{j_k^{ter}}) \quad (\forall j^{Term}; \forall k) \quad (3.51)$$

Se tiene que todos los parámetros de rampa se ingresan como valores positivos para que la modelación sea correcta:

$$Rup_{j_k^{ter}}, Rdw_{j_k^{ter}}, Rstart_{j_k^{ter}}, Rstop_{j_k^{ter}} \geq 0 \quad (\forall j^{Term}; \forall k)$$

Cabe destacar que se deja la holgura tal que los parámetros de rampas operacionales $Rup_{j_k^{ter}}, Rdw_{j_k^{ter}}$ dependan del tiempo, con el fin de desactivar los ciclajes de éstas en un período de tiempo si se estima conveniente, imponiendo un perfil de rampas en el tiempo.

3.3.3.14 Relación entre rampa y rampa de subida en centrales térmicas

Esta relación tiene por objetivo acotar la rampa de subida utilizada para penalizar los ciclajes en la función objetivo, con el fin que no supere el valor de la rampa real del generador térmico.

$$ramp_{j_k^{ter}}^{up} - ramp_{j_k^{ter}} \geq 0 \quad (\forall j^{Term}; \forall k) \quad (3.52)$$

3.3.4 Límites

A continuación es posible observar los límites de cada una de las variables dentro del problema de optimización. Es importante visualizar que las variables expresadas como coeficientes polinómicos de Chebyshev son libres. La única variable no representada en Chebyshev son las rampas de generadores térmicos, las cuales se encuentran acotadas tanto superior como inferiormente por las rampas operacionales.

Cota Inferior	Variable	Cota Superior
$-\infty$	$\widetilde{g}_{j_l}^{Ernc}$	∞
$-\infty$	$\widetilde{g}_{j_l}^{emb}$	∞
$-\infty$	$\widetilde{g}_{j_l}^{ter}$	∞
$-\infty$	$\widetilde{G}_{j_l}^{ter}$	∞
$-Rdw_{j_{ter}}$	$ramp_{j_k}^{ter}$	$Rup_{j_k}^{ter}$
0	$ramp_{j_k}^{up,ter}$	∞
$-\infty$	$q\widetilde{g}_{j_l}^{emb}$	∞
$-\infty$	$\widetilde{vol}_{j_l}^{emb}$	∞
0	$u_{j_{map(k)}}^{ter}$	1
0	$s_{j_{map(k)}}^{ter}$	1
0	$d_{j_{map(k)}}^{ter}$	1

3.4 Modelo de despacho utilizando polinomios de Chebyshev

Una vez efectuado el predespacho y obtenido un vector de solución tanto para las variables binarias como continuas, es posible modelar el despacho económico mediante la fijación de las variables binarias en el valor de la solución del predespacho, acotando las variables tanto inferior como superiormente por la solución obtenida.

Esto se realiza con el fin de convertir el modelo entero mixto en uno conformado sólo por variables continua, en el cual es posible analizar las variables duales asociadas a los costos marginales y valores del agua, debido a que la teoría de dualidad sólo rige para problemas de programación lineal.

Es posible realizarlo imponiendo tanto el límite inferior como superior de las variables del numeral 3.3.1.3 en función de la solución obtenida del predespacho, lo cual permite directamente resolver el problema sin variables binarias, es decir, como problema lineal.

Capítulo 4: Propuesta metodológica

Con el fin de cumplir con los objetivos planteados en esta memoria, en este capítulo se muestra la metodología de trabajo, la cual consiste en 4 etapas fundamentales: La primera, consiste en realizar un tratamiento adecuado de los datos con el fin de poder representar el problema en el dominio de Chebyshev. En la segunda etapa, se resuelve el problema de predespacho económico mediante dos problemas de optimización, uno elaborado mediante polinomios de Chebyshev diseñado en el presente trabajo, y otro resuelto en el tiempo con resolución horaria [43] con el fin de validar el trabajo. En una tercera etapa, se realiza el despacho económico para cada uno de los problemas de manera independiente con el fin de obtener los costos marginales de operación. Finalmente, en la cuarta etapa se desarrolla una comparación de los resultados de ambos modelos.

Adicionalmente, se describen los detalles de la implementación computacional del modelo propuesto.

4.1 Manejo de datos

Debido a que los muestreos de datos se trabajan en intervalos equiespaciados (comúnmente horarios), es necesario realizar un tratamiento previo a los datos con el fin de interpolar los perfiles en los puntos extremos de Chebyshev. Adicionalmente, dependiendo la naturaleza de cada uno de los perfiles, se debe establecer *a priori* cual es el número de coeficientes a modelar. A continuación se explican ambos tópicos.

4.1.1 Tratamiento de perfiles temporales

En esta etapa, los perfiles temporales muestreados de manera horaria se adecúan a los puntos extremos mediante el problema de optimización mostrado en (3.16) con el fin de garantizar la estabilidad numérica del problema resuelto en Chebyshev. Entre estos perfiles, se encuentran los datos de entrada de:

- Perfiles eólicos.
- Perfiles solares.
- Perfiles de afluentes.
- Perfiles de demanda.

Es importante conservar las características originales de cada uno de estos perfiles, con el fin de que el tratamiento numérico sobre ellos no incida en los resultados de la operación del sistema eléctrico. Es por esto que el muestreo considera las siguientes características:

- Minimizar el error global entre el perfil muestreado y el original, correspondiente a la suma de los errores individuales punto a punto.

- Garantizar que el error punto a punto entre el perfil original y el reconstruido sea menor que una tolerancia predefinida por el usuario.
- Garantizar que la energía de ambos perfiles sean iguales, es decir, que sus áreas bajo la curva sean iguales.

4.1.2 Elección de coeficientes por central

Como se expresa en el numeral 3.2.2, con el fin de realizar aproximaciones numéricas es posible reducir el número de coeficientes con el que se muestrea un perfil, lo cual es equivalente a reducir el número de variables asociadas a la representación de cada perfil de generación temporal de cada central.

De la literatura [36], se tiene que empíricamente la representación adecuada para gran parte de los perfiles corresponde a dos tercios de la totalidad de sus coeficientes. Cabe destacar que es importante identificar las variabilidades de cada unidad en la operación del sistema, debido a que las unidades con mayor variabilidad es necesario modelarlas con la totalidad de los coeficientes, en cambio las unidades que varíen suavemente es posible modelarlas con pocos coeficientes.

En el caso más extremo, es posible modelar con sólo un coeficiente aquellas unidades que presenten un despacho constante, tal como una unidad despachada en base sin variabilidad a lo largo del horizonte, o unidades que no se encuentren en operación durante el período.

4.2 Predespacho y despacho económico

En las etapas 3 y 4 de la metodología, se busca simular la operación del sistema eléctrico en una ventana temporal predefinida por el usuario, que para los casos de estudios analizados en el presente documento corresponde a 1 semana. La etapa 3, simula de manera independiente el modelo de predespacho horario [43] y el creado en esta memoria en Chebyshev, con el fin de determinar qué unidades térmicas se encuentran en operación durante el período. Una vez determinado el estado de operación (modelado a partir de variables binarias), estos se asumen fijas y se modela en una etapa 4 el despacho económico para cada uno de los modelos de predespacho. Esto con el fin de obtener las variables duales asociadas a cada uno de los modelos, que permiten recuperar los costos marginales horarios y los valores del agua del embalse.

4.3 Análisis de Resultados

Con el fin de validar el modelo formulado en Chebyshev, se comparan los resultados obtenidos de éste contra los obtenidos en el modelo horario. Los análisis realizados corresponden a:

- Análisis horario:

- Despachos horarios por central.
- Evolución de volúmenes de embalse.
- Costo marginal horario.
- Análisis del período:
 - Energía total por central.
 - Valor del agua del período.
 - Costo total de la operación.

Como se puede ver, se realizan análisis de potencia despachada, volúmenes y costos marginales con el fin de visualizar gráficamente y comparar el comportamiento de ambos modelos, así como también balances globales del período tales como energía total, costos totales y valores del agua de la etapa, para vislumbrar el desempeño global de cada una de las herramientas, tanto en el resultado de sus variables físicas como económicas.

Para efectuar la validación, este proceso se realiza con los modelos con todas sus restricciones activas (modelo restringido), así como también con un modelo que sólo cuente con la restricción de balance nodal y máximos de las centrales (modelo relajado). En cada una de estas simulaciones se realizan simulaciones posteriores con el fin de reducir la cantidad de variables, en función del comportamiento del caso con todos los coeficientes.

4.4 Resumen de la metodología

En la Figura 4.1 es posible ver el diagrama de bloques al que se incurre en cada una de las simulaciones.

En la etapa 1, es posible ver que corresponde al manejo de los datos de entrada y la lectura de estos en los modelos. Particularmente para el caso del modelo en Chebyshev, se realiza un tratamiento adicional para adecuar los datos en los puntos extremos. Adicionalmente, en esta etapa el usuario debe escoger la cantidad de coeficientes a modelar por central, la cual incide directamente en el número de variables del modelo en Chebyshev.

En la etapa 2 se ejecutan ambos modelos con el fin de dar paso a la etapa 3, en la cual se fijan las variables binarias del resultado del predespacho con el fin de obtener los costos marginales.

Finalmente en la etapa 4, se realizan comparaciones de ambos modelos según lo expresado en el numeral 4.3.

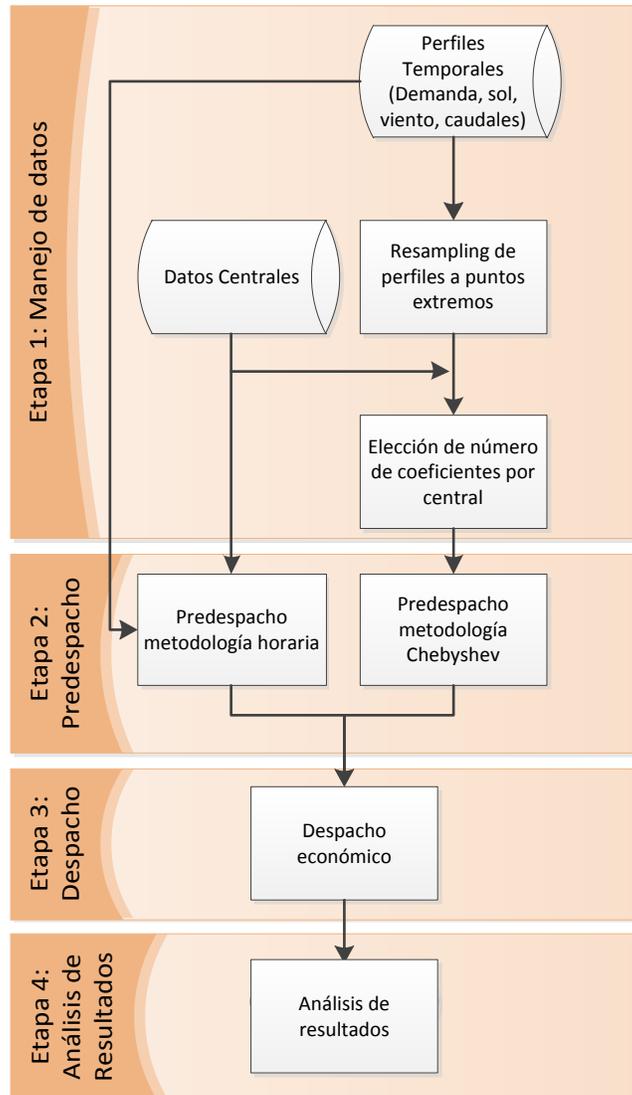


Figura 4.1: Diagrama de flujo de metodología

4.5 Implementación Computacional

La estructura de datos de entrada y salida se realizan mediante archivos de extensión csv (*comma separated values*) manejados mediante la interfaz de usuario Microsoft Excel®.

La adecuación de los perfiles al dominio de los puntos extremos se implemente en MATLAB®, al igual que todo el manejo de los archivos de entrada y generación de archivos de salida.

Los modelos de predespacho y despacho en Chebyshev, se realizan mediante generación de matrices en MATLAB®, en el cual es posible elegir el motor de optimización GUROBI® o CPLEX®, dependiendo de las necesidades del usuario.

Luego de formular el problema, es resuelto en un computador con procesador Intel i7 2620m de 2.8 [GHz], con 8 [GB] de memoria RAM, utilizando un gap de 0.01 % para todos los problemas.

Para validar la modelación, se utilizó un modelo horario de operación [43], el cual se encuentra desarrollado en Python con el motor de optimización CPLEX®.

En la Figura 4.2 es posible ver un resumen de la implementación computacional:

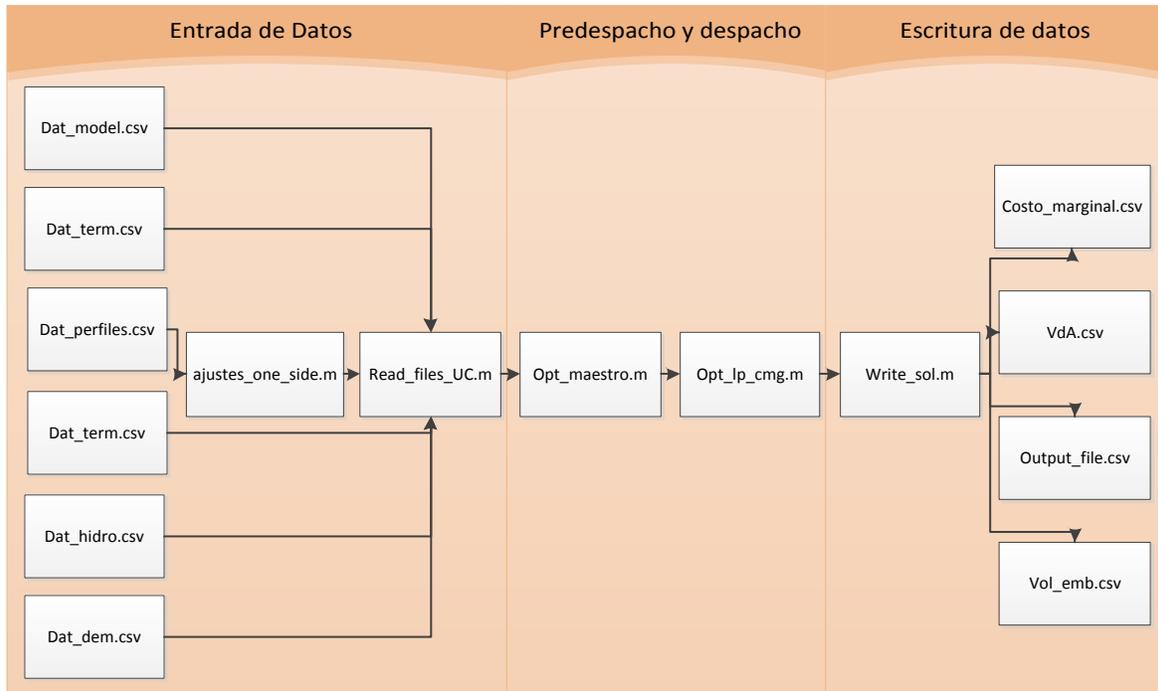


Figura 4.2: Resumen de modelo computacional en Chebyshev

Capítulo 5: Análisis de Resultados

El caso de estudio a analizar corresponde a una simplificación extraída del informe técnico definitivo de Precios de nudo de la Comisión nacional de Energía, elaborado en Octubre de 2014 [44] (ITD Oct-2014). A partir de las proyecciones elaboradas en el informe, se utiliza el plan de obras expuesto y se ajusta a los requerimientos de inserción renovable del año 2025.

5.1 Descripción de caso de estudio

5.1.1 Demanda

De acuerdo con la información disponible en el ITD Oct-2014, la proyección de demanda posee crecimientos inferiores al 4 %, los cuales se reflejan en las siguientes demandas en cada uno de los sistemas al año 2025:

Tabla 5.1: Demanda total anual año 2025 por sistema, ITD Oct-2014

Año	SIC	SING	Total
	TWh	TWh	TWh
2025	76,2	29,2	105,4

Utilizando un perfil semanal típico agregado considerando tanto SIC como SING, éste se ajusta con el fin de cumplir con los requerimientos anuales de la demanda, tal que la energía demandada por el perfil semanal es un cincuentaidosavo de la demanda total anual esperada. El perfil utilizado se observa en la Figura 5.1.

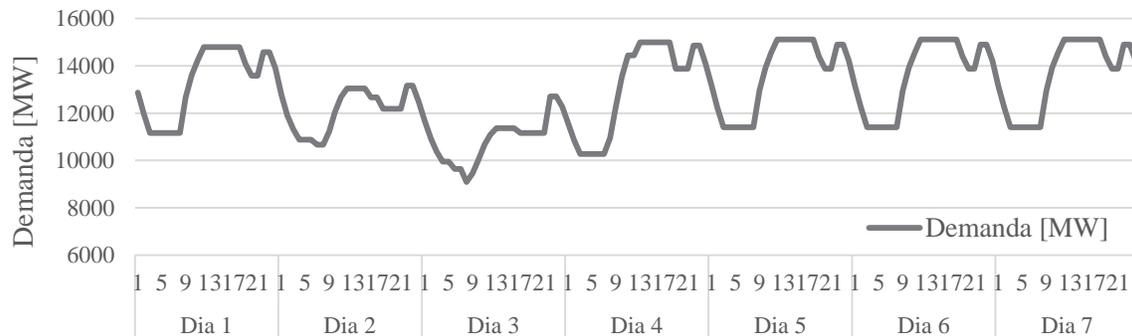


Figura 5.1: Perfil de demanda, caso de estudio

5.1.2 Generación ERNC

Para la representación de éstas energías, se utilizan perfiles típicos ajustados a los niveles energéticos expresados en el informe ITD Oct-2014. La capacidad instalada por tecnología es posible observarla en la Tabla 5.2.

Tabla 5.2: Potencia acumulada por tecnología ERNC ITD Oct2014 y corrección

Tecnología ERNC	Potencia Acumulada [MW]	Factor de Planta	Potencia Acumulada corregida [MW]
Eólica	1640	27 %	1640
Solar Fotovoltaica	2548	23 %	5748
Solar - Termosolar	110	60 %	110
Biomasa	328	50 %	328
Hidro pasada	408	50 %	408
Desechos Forestales	44	50 %	44
Geotérmica	210	90 %	210
Total	5288	-	8488

Es posible observar que utilizando los factores de planta no se cumplen los requerimientos dictados por la ley ERNC, como se observa en la Figura 5.2. Es por esto, que para el año de estudio se añade la capacidad instalada en solar, con el fin de cumplir el requerimiento solicitado de 18,9 TWh. Además, esta inserción solar cumple con el objetivo adicional de observar cómo se comporta el modelo ante altas fluctuaciones del recurso solar, y cómo estas influyen en las restricciones técnicas de las centrales térmicas.

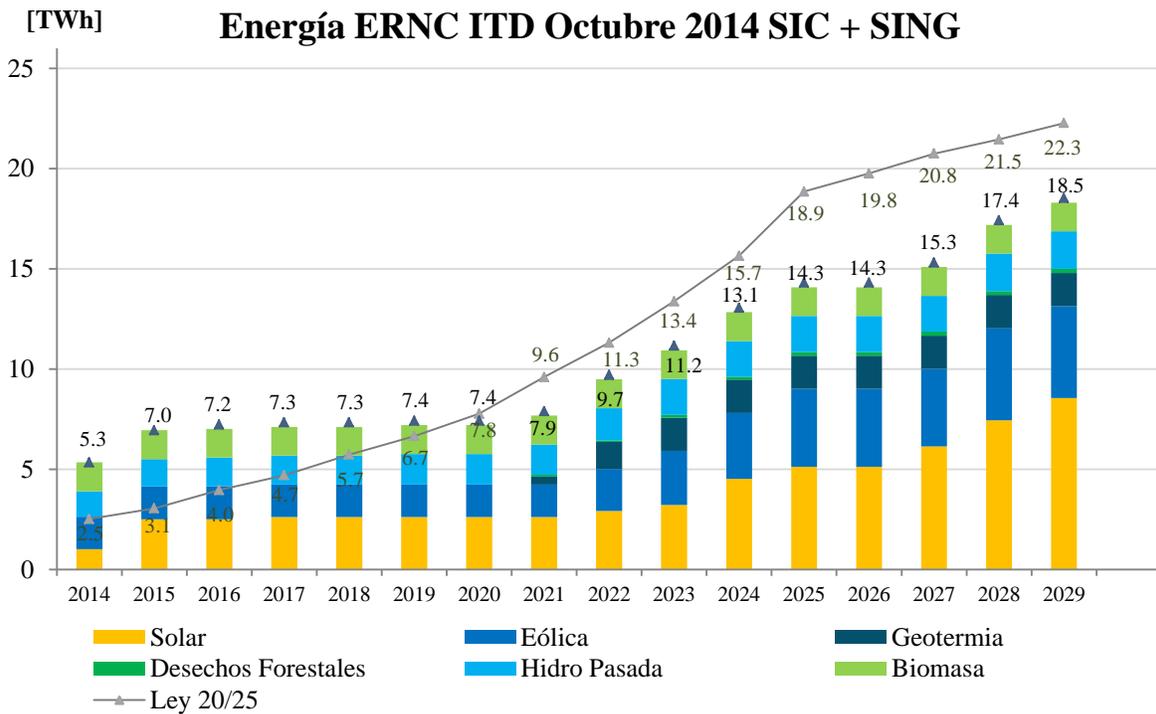


Figura 5.2: Generación ERNC Pobra Oct-2014 v/s requerimiento ley 20/25

Tanto los perfiles solares como eólicos corresponden a una central equivalente que cumple con la totalidad de la energía disponible en la semana. Las agrupaciones se muestran en la Figura 5.3 y Figura 5.4, correspondientes al equivalente eólico y solar respectivamente.

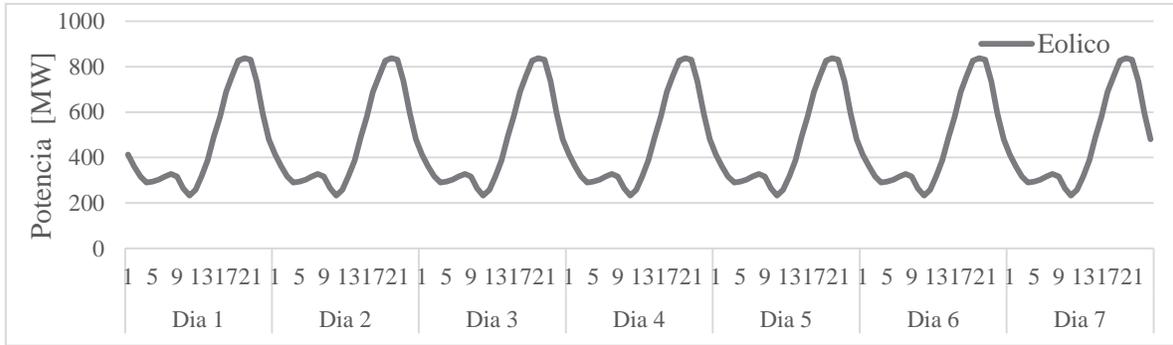


Figura 5.3: Perfil Eólico agregado

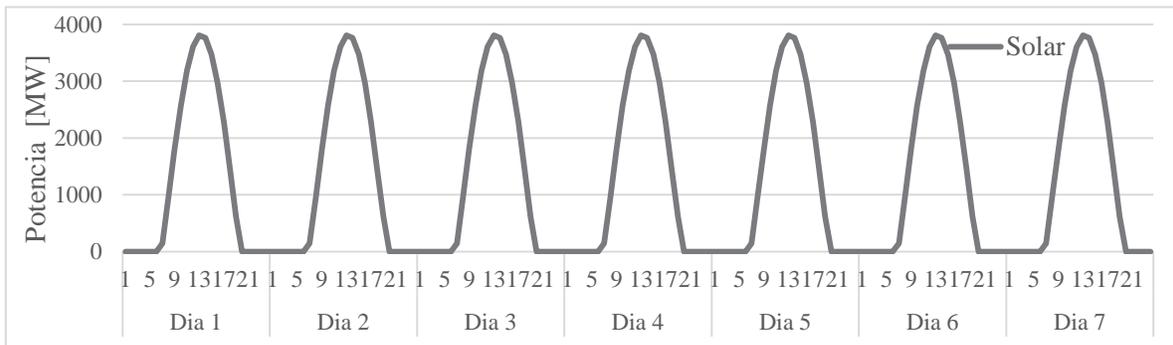


Figura 5.4: Perfil solar agregado

La generación hidráulica de pasada se encuentra incluida en el balance global realizado en el numeral 5.1.4, y las demás centrales se representan con un perfil constante, el cual se despacha según la minimización del costo total en el horizonte de análisis.

5.1.3 Embalse equivalente

Debido a que no se realiza modelación del sistema de transmisión, se modela el conjunto de embalses del SIC en uno solo, que representa el comportamiento del conjunto de embalses del SIC. Para la representación del embalse se toman los siguientes supuestos:

- Conjunto de embalses: Se agrupan los 11 embalses correspondientes al SIC, de tal modo que:
 - El volumen inicial, final, mínimo y máximo es la suma de los volúmenes individuales respectivamente.
 - El rendimiento equivalente corresponde al promedio ponderado de cada uno de los rendimientos por la potencia máxima asociada. Es decir:

$$\eta_{eq} = \frac{\sum_{i=1}^{11} (\eta_i \cdot P_{max}^i)}{\sum_{i=1}^{11} (P_{max}^i)} \quad (5.1)$$

El conjunto hidráulico posee los siguientes parámetros, expresados en la Tabla 5.3

Tabla 5.3: Parámetros de embalse equivalente

Parámetro	Valor	Unidad
Volumen mínimo	1.830,45	[Mm3]
Volumen máximo	10.452,61	[Mm3]
Volumen inicial	5.603,55	[Mm3]
Volumen final	5.439,04	[Mm3]
Potencia máxima	3.867,05	[MW]
Rendimiento	1,72	[MW/m3/s]
Afluente de entrada	270	[m3/s]

Las cotas iniciales y finales asociadas al embalse son representativas a la contribución hidráulica en el sistema eléctrico chileno, y provienen de un caso de estudio de operación semanal del año 2025, elaborado con el software PCP.

5.1.4 Centrales de pasada y series hidráulicas

Para el caso de las centrales hidráulicas de pasada y serie, debido a que no existe modelación de las series, se utilizan los resultados de una simulación elaborada en el software PCP y se utilizan como centrales de pasada en el modelo con el fin de representar las participaciones hidráulicas equivalentes en el caso.

De la salida del PCP, se agrupan todas las generaciones asociadas a series hidráulicas y se elabora un perfil tal que se representa como una central de pasada con rendimiento 1, tal como se presenta en la Figura 5.5.

De manera equivalente, se agrupan todas las generaciones de centrales de pasada de la salida del PCP (excluyendo centrales eólicas y solares ya modeladas según el numeral 5.1.2), obteniendo el perfil de una central de pasada equivalente, con rendimiento unitario, como se muestra en la Figura 5.5

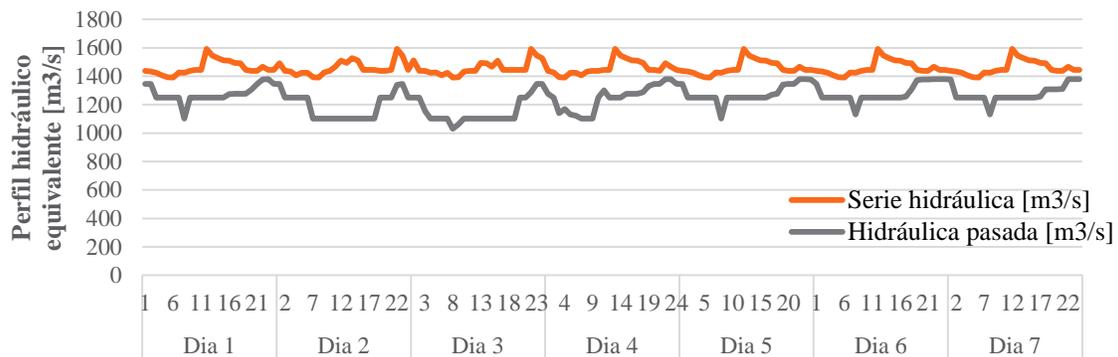


Figura 5.5: Perfiles individuales de centrales serie hidráulica y de pasada

Ambos perfiles se suman, así construyendo uno equivalente a la generación de pasada y de series hidráulicas, los cuales se ingresan como una única central, con rendimiento unitario y costo variable 0. El perfil equivalente se observa en la Figura 5.6.



Figura 5.6: Perfil agregado de central hidráulica y de pasada

5.1.5 Centrales térmicas

Las centrales térmicas a nivel de modelación corresponden sólo a las de gas y carbón, debido a que sólo en estas se modela la condición de mínimos técnicos. Las de biomasa, geotermia y Diesel se modelan a través de perfiles constantes, sin mínimos técnicos y sin restricciones de rampa, representando en cada caso la totalidad de su capacidad instalada debido a la menor importancia en la obtención de resultados debido a su poca participación en el sistema.

Con el fin de simplificar la modelación, se realiza una agrupación de centrales carboneras disponibles al año 2025, la cual se detalla en la Tabla 5.4.

Tabla 5.4: Detalle agrupación centrales a carbón

Grupo	Nombre Central	Costo Variable [USD/MWh]	Potencia [MW]
Angamos	ANGAMOS I	38,60	244
	ANGAMOS II	37,19	244
Bocamina	Bocamina	47,75	122
	Bocamina 02	44,46	342
Cochrane	Cochrane 1	46,75	236
	Cochrane 2	46,75	236
CTA-CTH	CTA	42,65	153
	CTH	40,44	154
CTM1-2-CTTAR	CTM1	37,39	155
	CTM2	36,29	164
	CTTAR	37,20	149
Guacolda1-4	Guacolda 01	34,66	143
	Guacolda 02	34,66	143
	Guacolda 03	31,40	137
	Guacolda 04	34,26	139

Tabla 5.4 (continuación): Detalle agrupación centrales a carbón

Grupo	Nombre Central	Costo Variable [USD/MWh]	Potencia [MW]
Guacolda5-Campiche	Campiache	41,93	242
	Guacolda 05	40,09	139
Norgener1-2	NTO1	39,07	127
	NTO2	38,69	132
SantaMaria	Santa María	37,04	321
U12-15	U12	45,76	80
	U13	43,87	80
	U14	39,74	128
	U15	38,35	124
Ventanas	Nueva Ventanas	41,84	249
	Ventanas 01	42,44	113
	Ventanas 02	39,89	209

Por otro lado, se modelan las centrales de GNL, tanto ciclos combinados y ciclos abiertos, con parámetros referenciales a las tecnologías, representando la totalidad de las unidades sin agrupamientos. El detalle de las unidades de GNL modeladas, y los parámetros técnicos utilizados en el modelo se presentan en los Anexo D, Tabla 7.1.

Con respecto a la flexibilidad de las centrales de carbón y GNL, se considera:

- Unidades a carbón: sin flexibilidad, sólo pueden operar a potencia máxima.
- Unidades GNL Ciclo combinado. Admiten una partida (o apagado) durante la semana, lo que en términos del modelo es representado mediante un tiempo mínimo de 84 horas. Pueden ciclar entre potencia mínima y máxima con una rampa máxima de 10 [MW/min]
- Unidades GNL ciclo abierto. Tiempos mínimos de 3 horas, manteniendo rampas máximas de 10 [MW/min].

5.1.6 Resumen de capacidad instalada

A continuación en la Tabla 5.5, se muestra la capacidad instalada en MW por tecnología una vez hechas las simplificaciones al sistema expuestas en los numerales anteriores, complementándose con la Figura 5.7 que muestra las participaciones porcentuales de la totalidad de la capacidad instalada.

Tabla 5.5: Generación por tecnología en MW, caso de estudio

	Potencia [MW]
Biomasa	437,90
Carbon	4703,71
Diesel	3713,00
Embalse	3867,00
Eolico	1638,25
Gas	4540,80
Geotermia	210,00
Hidro-pasada-serie	2925,14
SolarPV	5739,74
Total general	27775.54

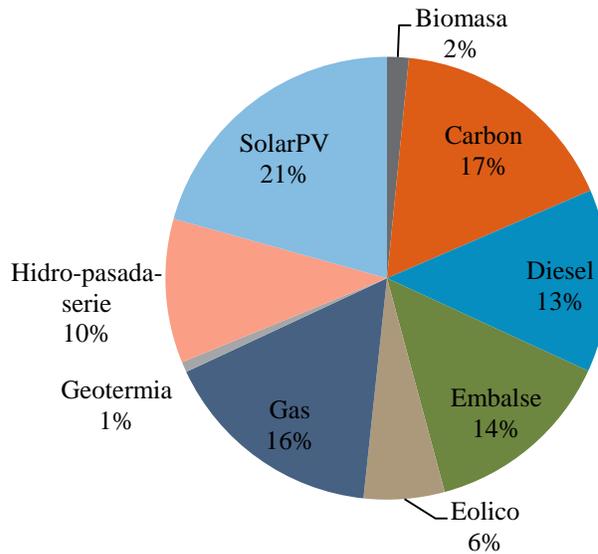


Figura 5.7: Generación porcentual por tecnología, caso de estudio

5.2 Resultados

5.2.1 Casos de estudio simulados

A partir de caso de estudio representado en el numeral 5.1, se busca primeramente validar el modelo comparando con un modelo formulado en el tiempo [43], con el fin de visualizar el comportamiento de la operación del sistema en ambos modelos, dados los mismos datos de entrada. Esta comparación se hace tanto para el caso de predespacho como para un modelo relajado, que sólo considera el balance nodal y balances hidráulicos.

Una vez realizada la validación del modelo, se prueban distintos casos de reducción de coeficientes, para ver la validez de la utilización de aproximaciones con menor cantidad de

coeficientes para el ahorro de variables en el problema de optimización. En la Tabla 5.6 se observan la comparación de casos realizada.

Tabla 5.6: Comparación de casos

N° de caso	Tipo	Caso A	Caso B
1	Validación	UC Temporal 168 horas	UC Chebyshev 168 coeficientes
2		UC Relajado Temporal 168 horas	UC Relajado Chebyshev 168 coeficientes
3	Reducción	UC Relajado Chebyshev 168 coeficientes	UC Relajado Chebyshev 112 coeficientes

La descripción de los casos es la siguiente, en donde se resume en la Figura 5.8:

La primera etiqueta corresponde al tipo de modelación, en el caso UC corresponde a una modelación tradicional MILP, en cambio en el UC Relajado es la modelación lineal, en donde los estados de las máquinas térmicas se fuerzan a 1 (en operación), no existen restricciones de rampa y sus mínimos técnicos son iguales a 0.

La segunda etiqueta denota el tipo de modelación, la cual puede ser horaria para el modelo convencional o en Chebyshev para el modelo propuesto en este trabajo.

Finalmente, la etiqueta Información contiene la cantidad de información contenida en cada modelación. Para el caso del modelo tradicional, la información se cuantifica en horas, en cambio para el caso en Chebyshev, se mide en coeficientes.

Por ejemplo, un caso de UC tradicional MILP, que modela temporalmente una semana, se denotaría como: UC Temporal 168 horas, y su equivalente relajado se nombraría UC Relajado Temporal 168 horas.

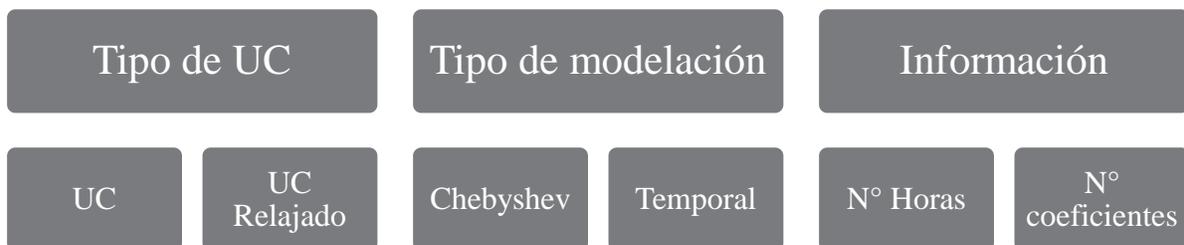


Figura 5.8: Notación de descripción de casos.

5.2.2 Caso 1 – Validación de UC Relajado

Esta validación permite establecer si las restricciones principales del modelo se encuentran formuladas correctamente, así como también tener una apreciación acerca de la necesidad de sintonización.

Las principales restricciones validadas son:

- Potencia máxima de cada unidad generadora.
- Ecuación de balance generación y demanda.
- Ecuaciones relacionadas al uso del volumen del embalse.

5.2.2.1 Generación por central y despachos horarios

En el caso del abastecimiento de la demanda, se observa en la Figura 5.9 que no existen grandes fluctuaciones entre ambos modelos, salvo en la generación de la central CBiomasa_2, la cual debido a su nivel de inyección corresponde a menos de 3 GWh. Se tiene que en ambos modelos son despachadas exactamente las mismas unidades, tal que su participación energética a lo largo del período es prácticamente igual.

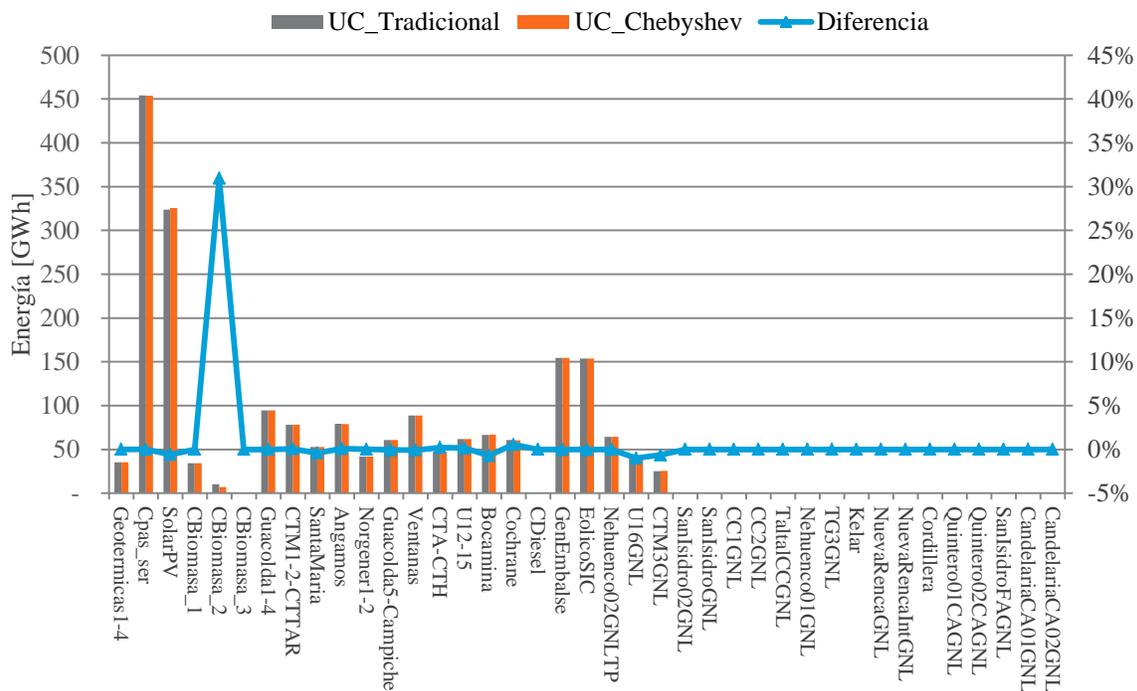


Figura 5.9: Comparación energética, caso 1

5.2.2.2 Despachos horarios por central

En la Figura 5.10 es posible ver la generación apilada por tecnología. Se observa que en este caso no existen recortes de generación solar debido a que no existen restricciones técnicas que afecten a la operación de las máquinas. Es por esto, que se puede ver que tanto la generación a carbón, a gas y de embalse realizan un seguimiento a la totalidad de la generación solar.

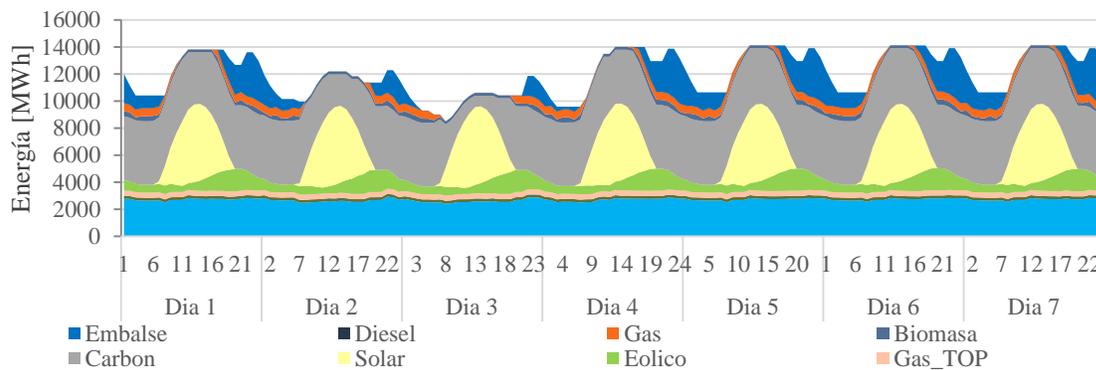


Figura 5.10: Generación horaria por tecnología, caso 1

Es posible ver en detalle el seguimiento de las centrales a carbón a la generación solar en la Figura 5.11, llegando al extremo de apagar gran parte de las centrales, dejando sólo 2 operativas durante el día 3, correspondiente a un día Domingo de un perfil típico de demanda, lo cual técnicamente inviable.

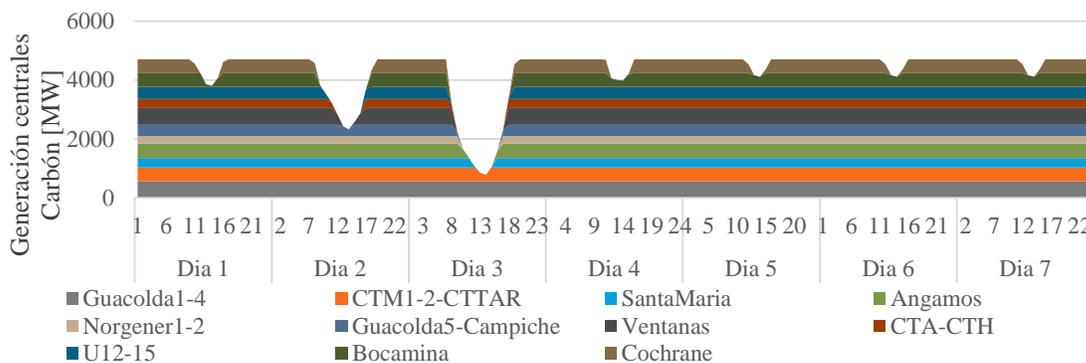


Figura 5.11: Generación horaria de centrales carboneras, caso 1

Complementariamente, sólo existe operación de 2 centrales a gas, las cuales realizan plenamente un seguimiento solar, cubriendo la demanda en momentos del día en que la generación fotovoltaica es nula.

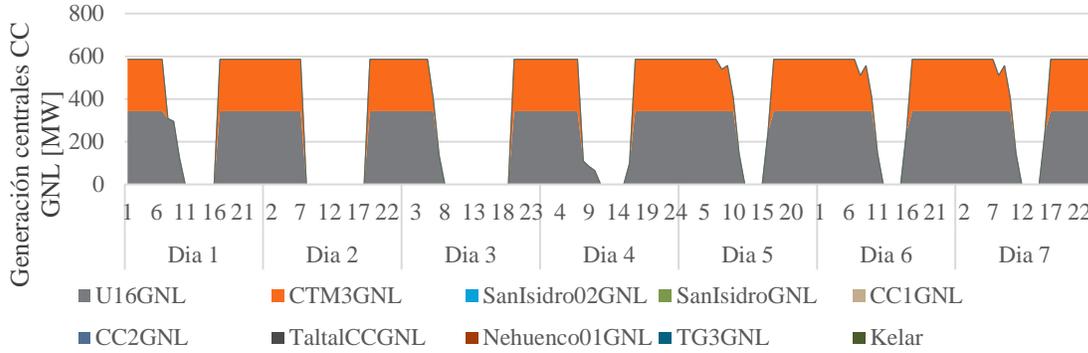


Figura 5.12: Generación horaria centrales a gas, caso 1

La generación de cada una de las centrales para cada forma de modelación es similar, salvo en la central CBiomasa_2, la cual presenta la mayor diferencia de energía inyectada a lo largo del período. Esto se debe a la diferencia en los despachos, en donde en el caso Chebyshev se tienen grandes variabilidades en los bordes, como se ve en la Figura 5.13 en contraste con el resultado de la Figura 5.14 del modelo tradicional. Esto se debe a la naturaleza trigonométrica de los polinomios, añadido a la reducida distancia entre los puntos de los bordes debido a la formulación de puntos extremos para asegurar estabilidad numérica.

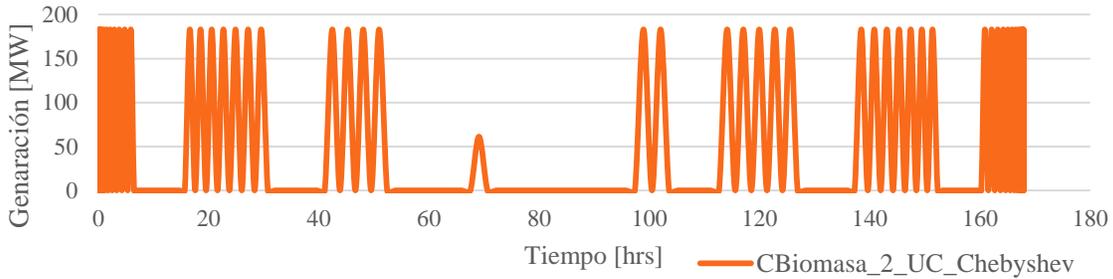


Figura 5.13: Generación CBiomasa_2 UC_Chebyshev, caso 1

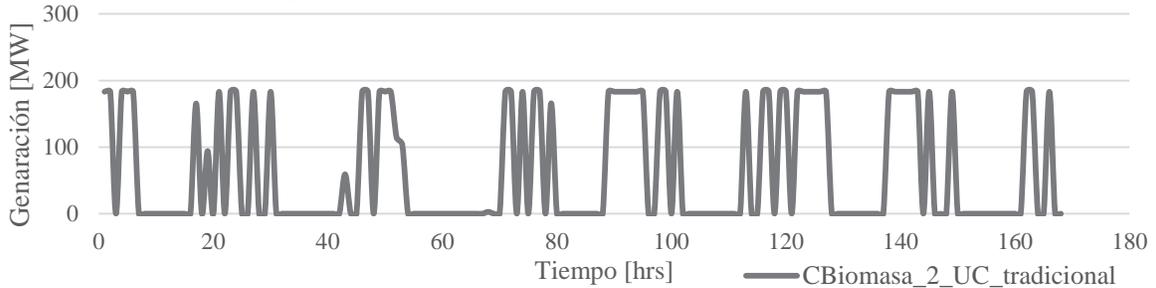


Figura 5.14: Generación CBiomasa_2 UC_Tradicional, caso 1

5.2.2.3 Volúmenes embalse

Se observa en la Figura 5.15 que el comportamiento del volumen del embalse en ambos modelos se ajusta de manera adecuada tanto en sus crecimientos como decrecimientos, respetándose las cotas iniciales y finales.

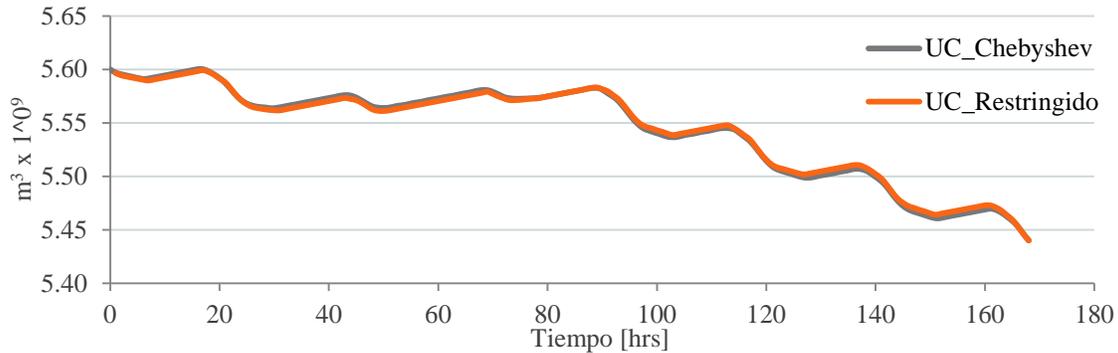


Figura 5.15: Volumen de embalse, caso 1

5.2.2.4 Costo marginal horario y valor del agua

En el presente caso relajado, se tiene que la operación oscila entre unidades a carbón y las primeras unidades a gas del orden de mérito. Por otro lado, debido a que no existen restricciones técnicas activas no existe operación fuera de mérito, cumpliéndose en su totalidad la lista. En la Figura 5.25 es posible ver que los costos marginales de ambos casos se alinean adecuadamente.

Complementariamente a los costos marginales, se observa en la Tabla 5.7 el valor del agua obtenido del multiplicador de la restricción de volumen inicial (3.37) de la etapa es el mismo para ambos casos de modelación, debido a que una unidad de volumen adicional de recurso hídrico desplaza generación de la central CTM3GNL, cuyo costo variable equivale al valor del agua.

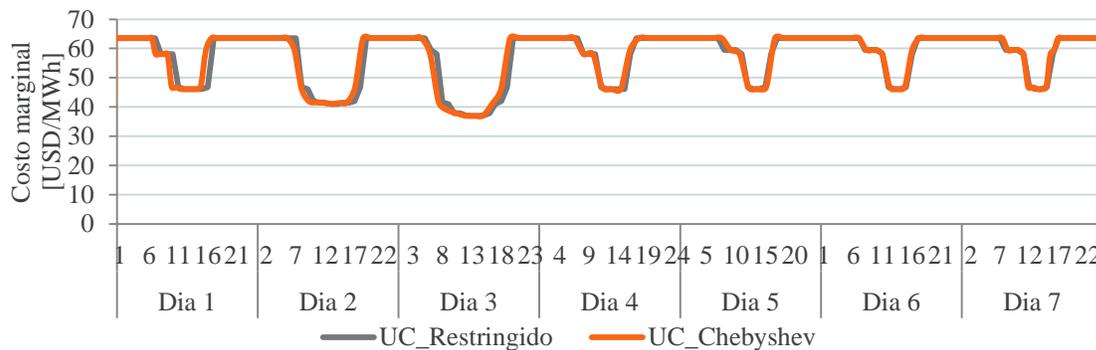


Figura 5.16: Costo marginal, caso 1

Tabla 5.7: Valor del agua, caso 1

	Valor [USD/MWh]
Chebyshev	63,53
Tradicional	63,53
Diferencia	0 %

5.2.2.5 Costo total

En la Tabla 5.10 es posible observar los costos totales de cada una de las modelaciones del caso relajado. Es importante destacar que estos valores sólo incluyen costos asociados a la operación de las centrales, y no los costos de partida.

Tabla 5.8: Costos totales, caso 1

	Total [MUSD]
UC Tradicional	\$ 35,513.92
UC Chebyshev	\$ 35,490.66
Diferencia	0,07 %

5.2.3 Caso 2 – Validación de UC

La validación del caso 1 permite establecer si las restricciones básicas del modelo se encuentran adecuadamente formuladas, así como también vislumbrar la necesidad de sintonización de parámetros del modelo. En el caso 2, se completa el modelo agregando las siguientes restricciones:

- Potencia mínima de cada unidad generadora.
- Rampas máximas de subida y bajada de unidades generadoras.
- Tiempos mínimos de operación y detención.
- Inflexibilidad de unidades de carbón (sólo pueden operar a potencia máxima).

5.2.3.1 Generación por central y despachos horarios

Para el abastecimiento de la demanda a lo largo de la semana, los resultados a nivel global (en generación en GWh) son satisfactorios, en donde se observan pequeñas diferencias a nivel de generación térmica. Particularmente el modelo en Chebyshev decide no apagar la central Bocamina, disminuyendo así la generación en base a Gas, lo que incide directamente en el costo total. La comparación de ambas generaciones se encuentra en la Figura 5.17, cuyos datos exactos se encuentran en el Anexo E, Tabla 7.3. Adicionalmente en esta comparación se incluye la diferencia de generaciones en el eje secundario, la cual se encuentra calculada como la variación porcentual con respecto al UC Tradicional.

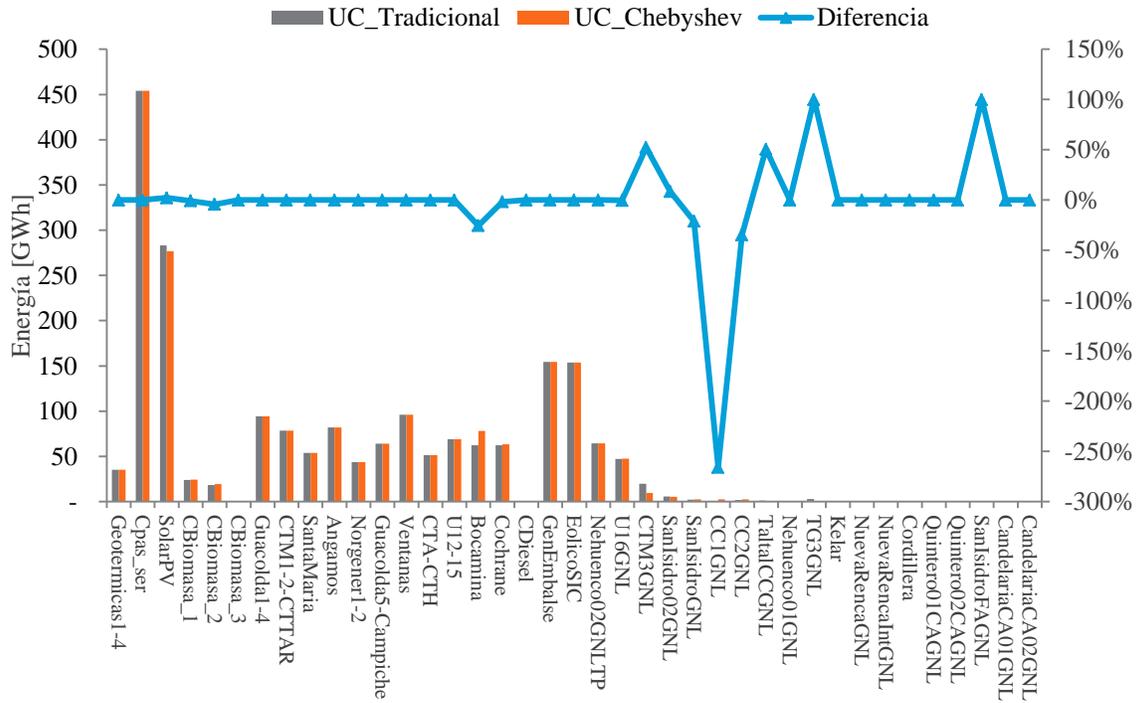


Figura 5.17: Comparación energética, caso 2

En la Figura 5.18 es posible ver la generación agrupada por tecnología horariamente del caso temporal, en donde se observa que en el fin de semana (día 2 y 3), se producen recortes de sol y apagado de centrales carboneras. Adicionalmente, cabe destacar que el seguimiento de demanda en las horas en que no existe sol se realiza principalmente con generación hidráulica de embalse y generación a gas.

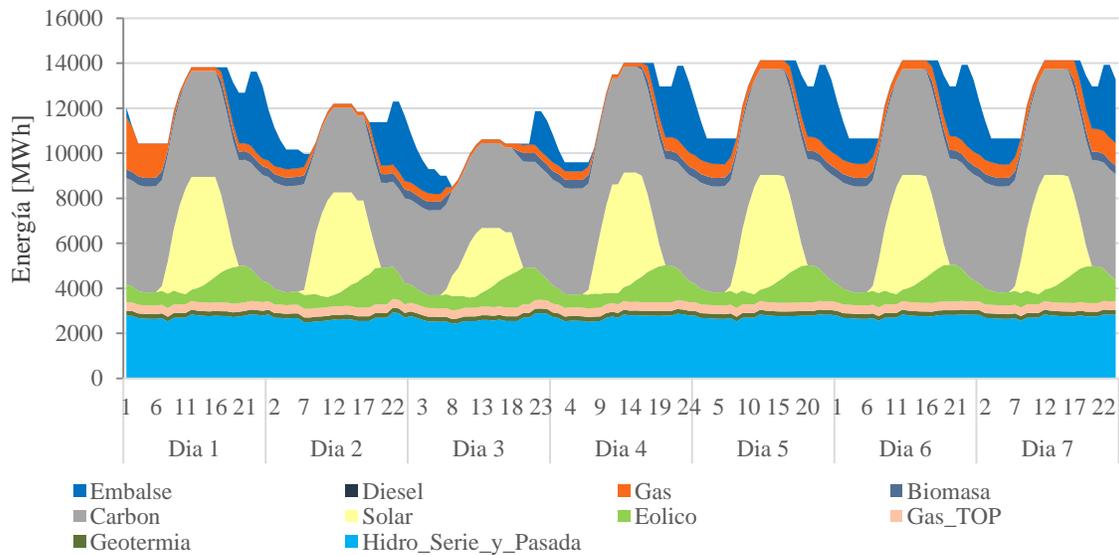


Figura 5.18: Generación horaria por tecnología, caso 2

5.2.3.2 Despachos horarios por central

Complementando la información general de energía expuesta en el numeral anterior, se muestran las centrales con mayor variación en sus resultados. Particularmente, se ve que en el modelo de Chebyshev tan sólo se apaga una central Carbonera, la central Cochrane, dejando así la central Bocamina operativa (véase Figura 5.19).

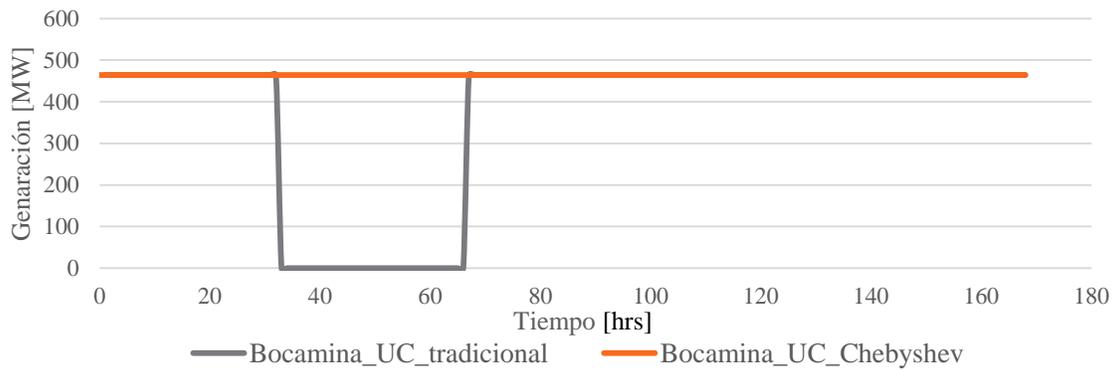


Figura 5.19: Generación Bocamina, caso 1

El dejar encendida la central Bocamina, conlleva a una menor generación solar en el caso Chebyshev, esto exclusivamente en los días 2 y 3 correspondientes al fin de semana, donde la demanda es menor, como se observa en la Figura 5.20.

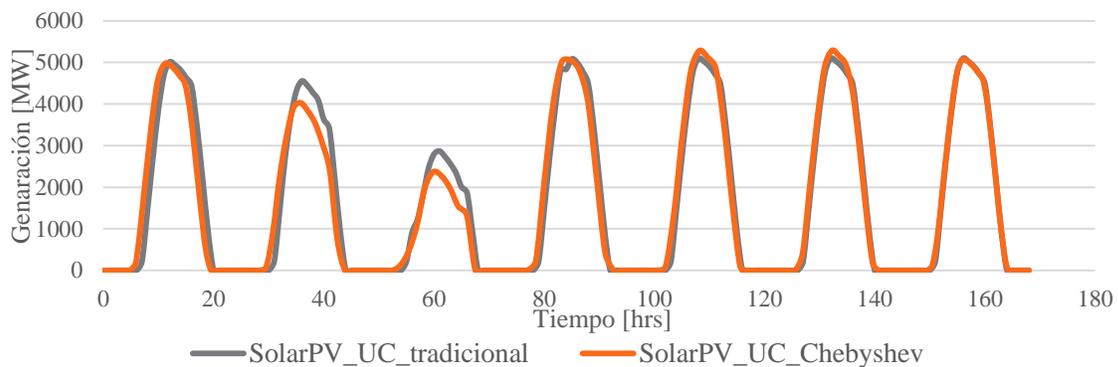


Figura 5.20: Generación Solar, caso 2

A su vez, la generación carbonera otorgada por Bocamina, conlleva a un ahorro del recurso hidráulico el fin de semana (entre hora 25 y 72) debido a la menor participación de generación de embalse necesaria, como se ve en la Figura 5.21.

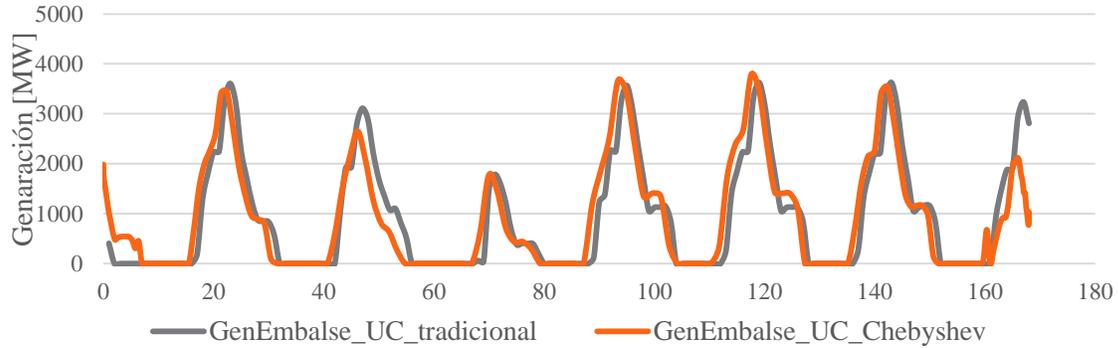


Figura 5.21: Generación Embalse, caso 2

El ahorro hidráulico, a su vez incide en una menor operación de gas para realizar el seguimiento, así cambiando la operación de las últimas unidades de gas en el orden de mérito despachadas, correspondientes a CTM3GNL y TG3GNL, cuyas comparaciones se observan en las Figura 5.22 y Figura 5.23 respectivamente.

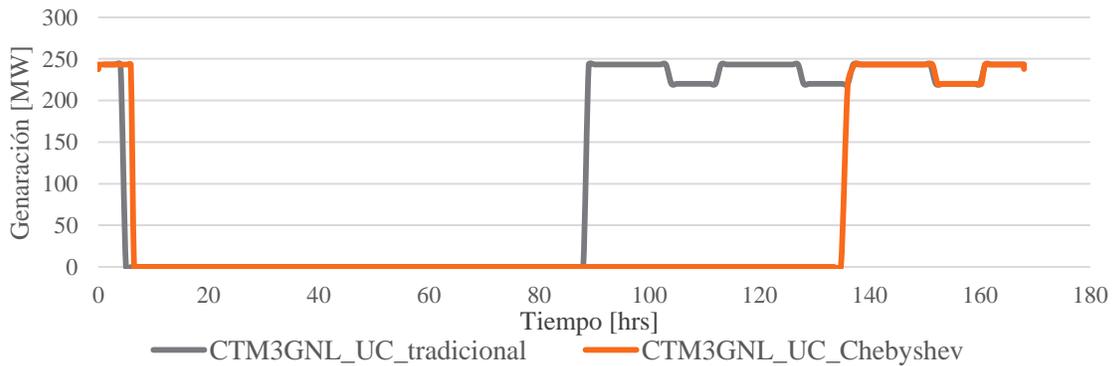


Figura 5.22: Generación CTM3GNL, caso 2

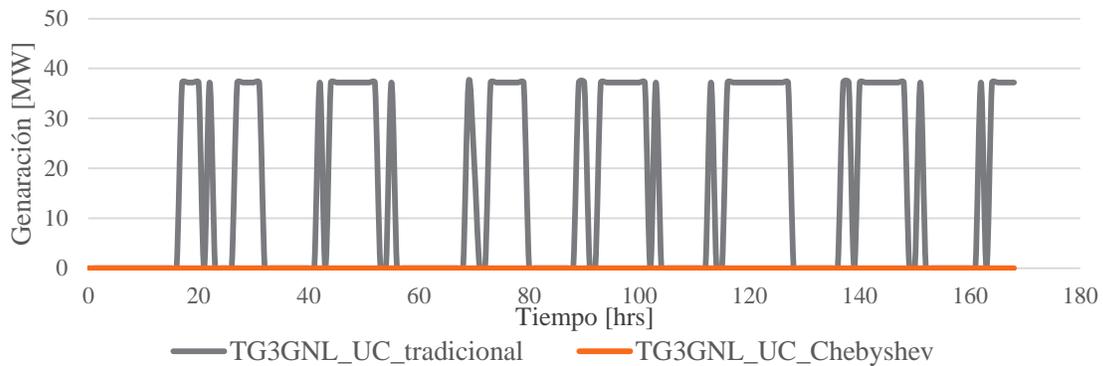


Figura 5.23: Generación TG3GNL, caso 2

5.2.3.3 Volúmenes embalse

De la Figura 5.24, se observa que ambos modelos respetan tanto la cota inicial como final del problema, distribuyendo de manera diferente el agua a lo largo del período. Esto se debe a una degeneración del problema, en donde el recurso hidráulico se puede sustituir por otra generación tal que el costo de ella sea igual al valor del agua. Adicionalmente, es

posible ver en las inmediaciones de la hora 40 el mayor nivel de volumen del caso Chebyshev, debido a la menor generación hidráulica por el funcionamiento de la central Bocamina, lo cual se revierte en los periodos posteriores debido a la sustitución de generación a gas por energía hidráulica.

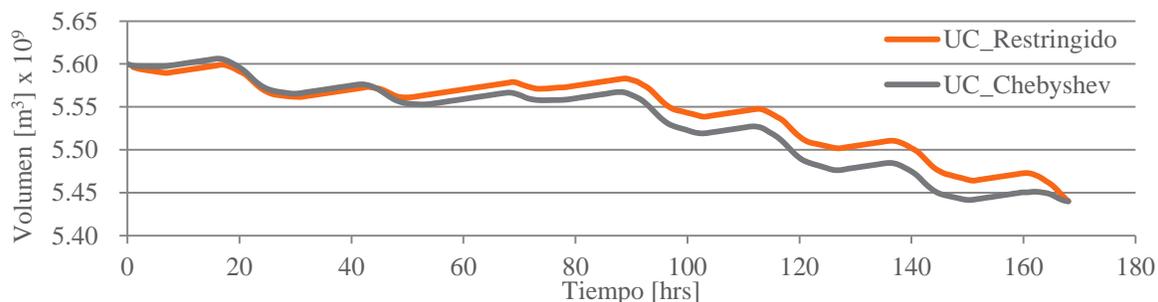


Figura 5.24: Volúmenes de embalse, caso 2

5.2.3.4 Costo marginal horario y valor del agua

En la Figura 5.25, se ven los costos marginales para ambos modelos, el cual se extrae de la variable dual asociada a la restricción de balance entre generación y demanda. Se observa que debido a la activación de los mínimos técnicos por tiempos mínimos de operación de las centrales a carbón en las horas de la tarde, se desprende sol, lo cual conlleva a una baja de los costos marginales al precio solar, debido a que el MWh adicional podría ser entregado por él. Adicionalmente, se observa que el máximo nivel de costos marginales en el caso Chebyshev es menor que en el tradicional, debido a la distinta gestión de los generadores térmicos que conlleva a una menor utilización de unidades a gas más caras en el orden de mérito.

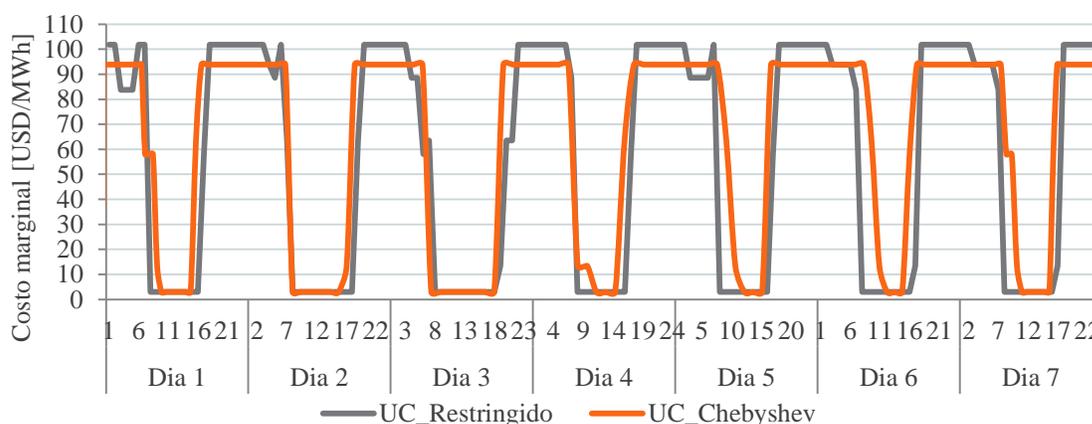


Figura 5.25: Costos marginales, caso 2

El valor del agua en ambos modelos se extrae de la variable dual asociada a la restricción que impone el volumen inicial del embalse (Restricción 3.3.3.3 del modelo en Chebyshev). Este valor corresponde a un equivalente de la central más cara despachada en cada modelo, debido a que cada MWh en agua que se agrega al modelo, contribuye en disminuir un

MWh de la unidad más cara despachada (si es técnicamente factible). En la Tabla 5.9 se observa la diferencia de los valores del agua para ambos casos, de donde se tiene que el valor del caso Chebyshev es un 7,77 % más barato que el Tradicional.

Tabla 5.9: Valor del agua, caso 2

	Valor [USD/MWh]
Chebyshev	93,85
Tradicional	101,76
Diferencia	7,77 %

5.2.3.5 Costo total

En la Tabla 5.10 es posible observar los costos totales de cada una de las modelaciones. Cabe recordar que en este caso no se utilizaron costos de partida, por lo que estos costos representan sólo los costos variables de la energía producida. Es importante ver que la diferencia de 0,16 % excede a una degeneración del problema, debido a que el parámetro impuesto del gap del problema provee una tolerancia de un 0,001 %.

Tabla 5.10: Costos totales, caso 2

	Total [MUSD]
UC Tradicional	\$ 38,037.34
UC Chebyshev	\$ 37,975.83
Diferencia	0,16 %

5.2.4 Caso 3 – UC Relajado Chebyshev, 168 v/s 112 coeficientes

En el siguiente caso, se realiza una comparación entre dos casos resueltos mediante polinomios de Chebyshev. El correspondiente al caso 1 del numeral 5.2.2 y el mismo caso, modelando cada central con 112 coeficientes en su variable de generación, a excepción de la central Solar que no es posible modelarla con menos coeficientes manteniendo su producción energética en el período.

5.2.4.1 Despachos horarios por central

Los resultados se asemejan a los expuestos en el numeral 5.2.2, del caso correspondiente a 168 coeficientes. Se despachan las mismas unidades, con los mismos valores máximos y en los mismos horarios. La diferencia fundamental entre ambos casos es que para representar despachos constantes sólo en partes del período, se necesitan altos exponentes en los perfiles, los cuales fueron recortados. Esto sucede en los despachos de carbón en la Figura 5.26 y en la Figura 5.27 para las centrales a gas, donde se tienen oscilaciones suaves sobre el perfil de despacho de 168 coeficientes, no lográndose reconstruir en su totalidad por la falta de coeficientes de mayor magnitud, pero sí representándose de manera muy similar los despachos.

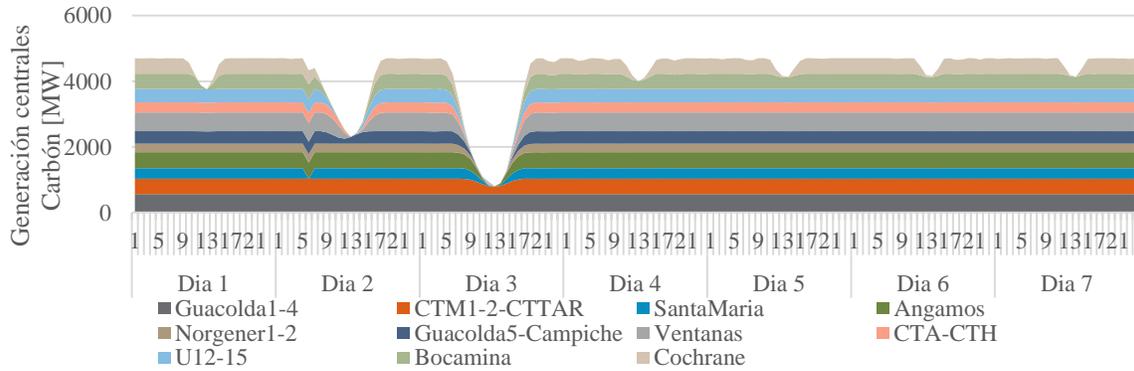


Figura 5.26: Despacho centrales carboneras, modelo Relajado Chebyshev 112 coeficientes

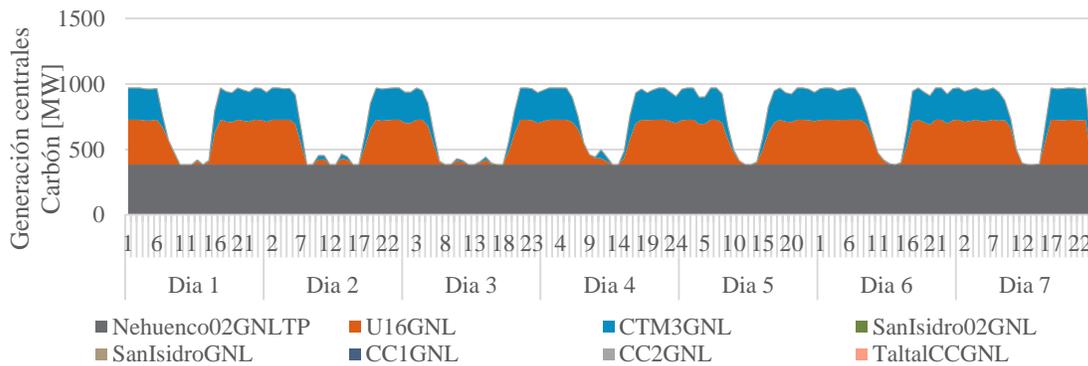


Figura 5.27: Despacho centrales a gas, modelo Relajado Chebyshev 112 coeficientes

En la Figura 5.28 se observa la dificultad de expresar perfiles con bordes rectos, tal como uno de despacho de GNL debido a las características trigonométricas de los polinomios de Chebyshev. Salvo las variaciones, se respetan los niveles de potencia máxima.

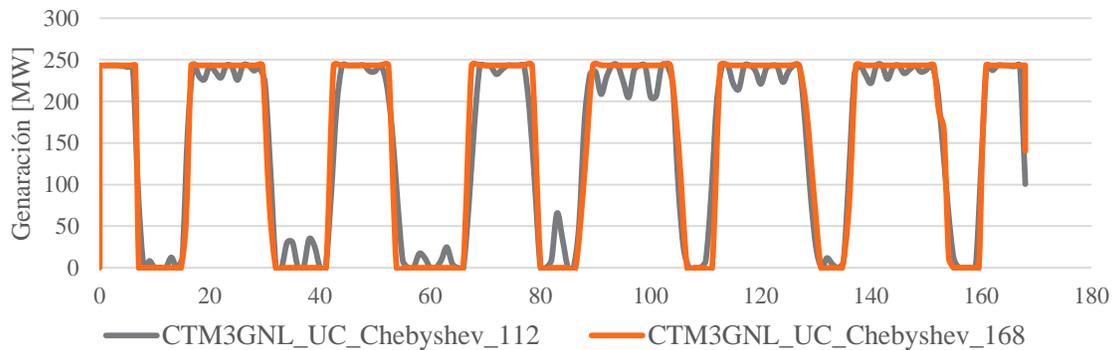


Figura 5.28: Generación central CTM3GNL, comparación 168 v/s 112 coeficientes

El caso contrario corresponde al de generación de embalse, donde debido a la suavidad del perfil, no existen problemas para representar de manera equivalente el perfil con tan sólo 112 de los 168 coeficientes con información, como se observa en la Figura 5.29.

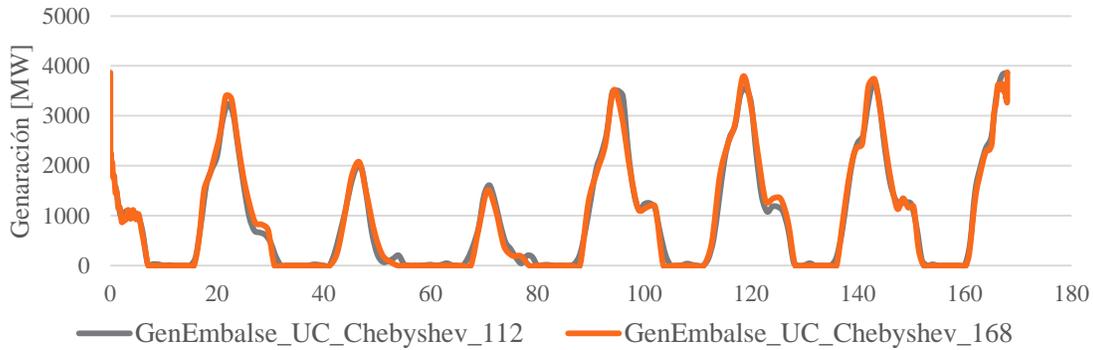


Figura 5.29: Generación embalse, comparación 168 v/s 112 coeficientes

5.2.4.2 Volúmenes embalse

Los volúmenes corresponden a las variaciones más suaves dentro del conjunto de perfiles incluidos en la modelación, siendo posible representarlos sin dificultad. Para el perfil representado en la Figura 5.30 se tiene un ajuste total del perfil con el despacho de 168 coeficientes. Esto se debe, a que éste representado en dominio de coeficientes de Chebyshev, a partir del coeficiente 24 se tiene que los órdenes de magnitud son inferiores a 10^{-8} .

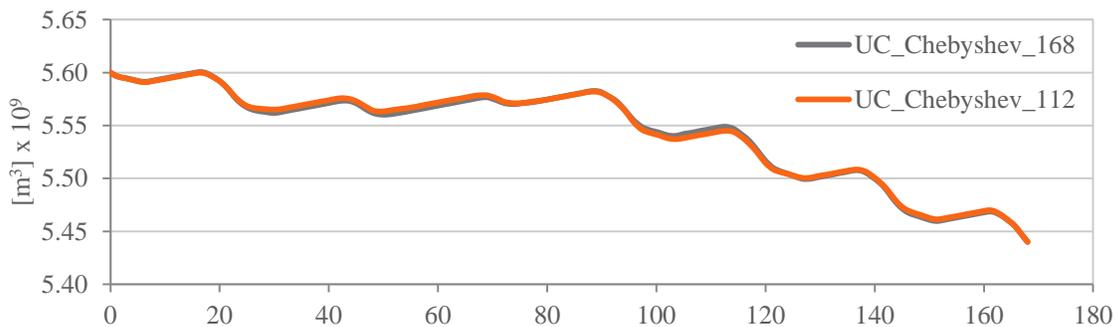


Figura 5.30: Volumen embalse, comparación 168 v/s 112 coeficientes

5.2.4.3 Costos marginales y valor del agua

La reconstrucción de costos marginales en el caso con 112 coeficientes, respeta el orden de mérito al igual que la modelación con 168 coeficientes, pero se tiene que las oscilaciones producidas por el recorte de coeficientes producen una distorsión de precios en las horas de sol, pero siempre manteniéndose el máximo costo marginal igual al caso completo, como se muestra en la Figura 5.31. Debido a que se mantiene el máximo costo marginal, se observa en la Tabla 5.11 que el valor del agua es exactamente el mismo, pudiendo darse así la señal correcta de utilización de embalses a etapas posteriores.

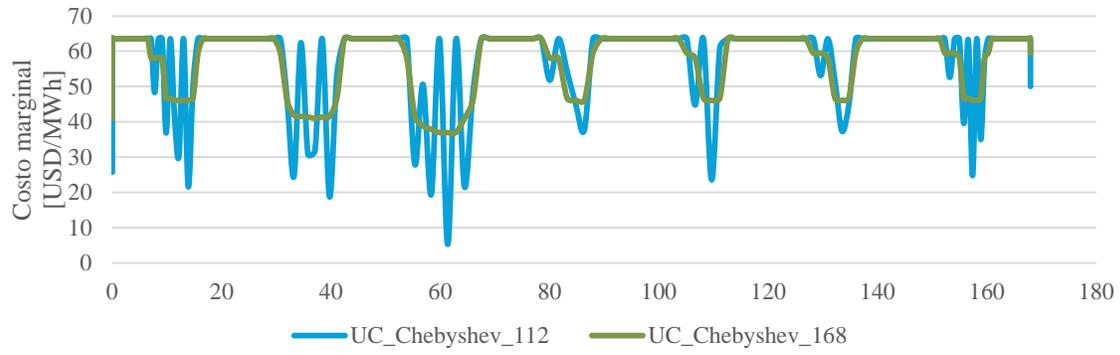


Figura 5.31: Costos marginales, comparación 168 v/s 112 coeficientes

Tabla 5.11: Valor del agua, caso 3

	Valor [USD/MWh]
Chebyshev 168 coeficientes	63,53
Chebyshev 168 coeficientes	63,53
Diferencia	0 %

5.3 Aspectos computacionales

En la siguiente sección se analizan los desempeños computacionales tanto para el predespacho como el despacho. Para el predespacho se muestra la convergencia del GAP en función del tiempo y para el despacho los tiempos de ejecución para distintos casos de reducción de coeficientes.

5.3.1 Resolución de problema de Unit-Commitment

La resolución del problema de UC mediante Gurobi® 6.0, que consta de 30 generadores térmicos, 1 embalse y 9 generadores no térmicos (entre ERNC, Diesel y Falla) se desempeña en su convergencia como se observa en la Figura 5.32, en donde en la segunda iteración llega a valores bajo el 1 % de GAP, pero a partir de esa tolerancia converge lentamente hasta llegar al valor impuesto por defecto de 0,01 %. En la Figura 5.33 se ve como converge mediante escala logarítmica, en donde para bajar del orden de magnitud 10^{-2} a 10^{-3} se tienen cerca de 3000 s de ejecución.

Esto se debe a distintas razones, entre las cuales se encuentra el manejo inicial del optimizador para lidiar con las variables libres, debido a que al trabajar con coeficientes, ellos corresponden a variables libres, y no a positivas acotadas superiormente como en un despacho convencional.

Otra razón corresponde a la necesidad de manejar matrices con precisión numérica *double*, dadas las características de las matrices de transformación, derivación e Integración. Éstas al poseer valores muy pequeños (del orden de 10^{-12}), generan diferencias difíciles de escalar en el problema, generando inestabilidades numéricas en el manejo del problema internamente en el optimizador.

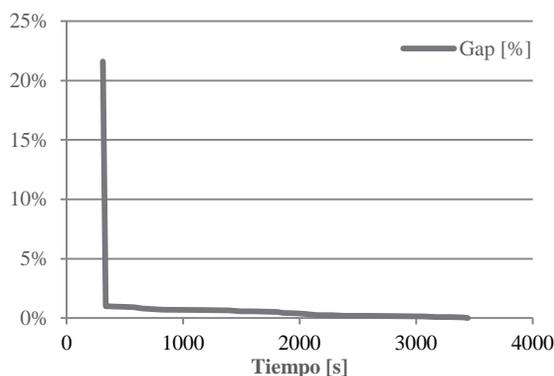


Figura 5.32: GAP Unit-Commitment

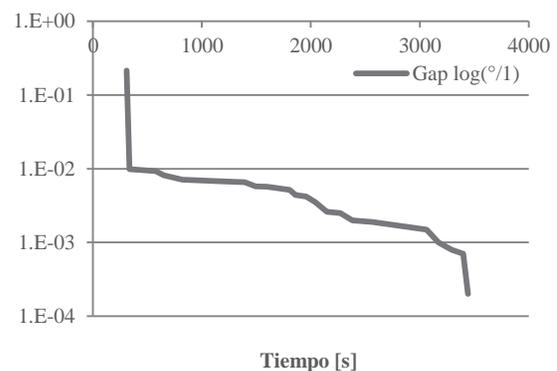


Figura 5.33: Gap Unit-Commitment, escala logarítmica

5.3.2 Resolución y reducción de problema relajado

En la resolución del problema relajado se tiene una situación similar a la resolución del predespacho, en donde el manejo numérico es una problemática presente en la optimización debido al manejo de las matrices de transformación, Integración y derivación. En la Figura 5.34 es posible ver el incremento de la función objetivo a medida que se reducen las variables que representan coeficientes de generación.

Es importante destacar que la mejor solución siempre corresponde a la que maneja el total de la información disponible, correspondiente al caso de modelación con 168 coeficientes. A medida que se reduce información, es más complejo reproducir los perfiles de despacho obtenidos con 168 coeficientes, llegando así a soluciones más ineficientes.

En la Figura 5.34 se observa que hasta una reducción de 72 coeficientes, no se alcanza a superar el umbral de un 1 % de error con respecto al caso de la totalidad de la información. En el numeral 5.2.4 se presentó el caso de 112 coeficientes, el cual presenta un 0,4 % adicional de costos con respecto al caso con 168 coeficientes, pero con sólo dos tercios de la información por perfil es posible representar la tendencia de los perfiles de manera satisfactoria.

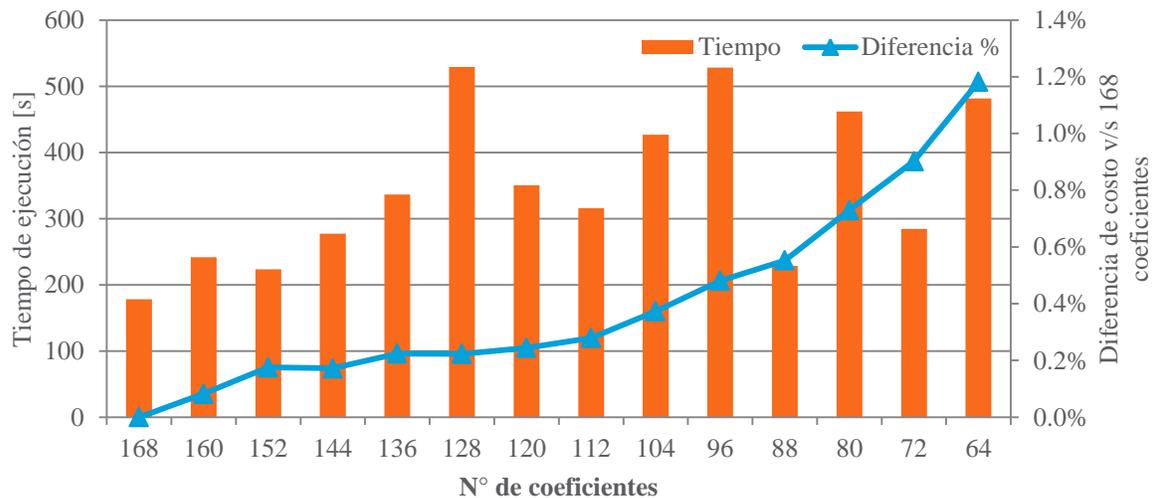


Figura 5.34: Tiempo de ejecución y diferencia en función objetivo, reducción de coeficientes

Capítulo 6: Conclusiones y trabajos futuros

6.1 Conclusiones

A lo largo del trabajo se estudian los distintos tipos de metodologías de operación de sistemas eléctricos, tanto el despacho y el predespacho en el corto plazo, como la operación de largo plazo, evidenciando la complejidad computacional de resolución de cada uno de ellos y mostrando las simplificaciones que se asumen para poder resolverlos.

A partir de las simplificaciones de resolución, se discute la necesidad de incorporar una modelación temporal en los problemas de largo plazo, debido a la incidencia de los cambios regulatorios de inserción ERNC y la imposibilidad de modelación de restricciones técnicas asociadas a la variabilidad temporal de estas energías dada la aproximación por bloques.

En el capítulo 2, desde la teoría de aproximación de Chebyshev, se estudió la representación de perfiles temporales de manera continua, validando la posibilidad de representar perfiles ERNC con el fin de capturar su variabilidad. Por otro lado, es posible aprovechar la característica Pseudo-espectral de Chebyshev con el fin de representar los perfiles con menor cantidad de coeficientes.

Junto con la aproximación de perfiles, se estudió la necesidad de utilizar matrices numéricamente estables, lo cual se consigue mediante la resolución del problema evaluando en los puntos extremos de Chebyshev.

En el mismo capítulo, se discute que la a evaluación en puntos extremos en la resolución del predespacho conlleva a otros problemas, tal como la acumulación de variables en los bordes y a un muestreo no equiespaciado, lo cual dificulta la resolución. Se da solución a esta problemática realizando un mapa de variables, agrupando en intervalos predefinidos previamente.

También se muestra que para la representación de restricciones propias del problema de operación de sistemas eléctricos, tales como las rampas de generación y los balances hidráulicos de embalses, fue posible utilizar las matrices de integración y derivación de funciones. Estas matrices cuentan con la ventaja de no utilizar aproximaciones hacia adelante o atrás de manera discreta, sino que directamente evaluando la función derivada (o integral) en el punto deseado.

En el capítulo 3 se realizó un modelo de despacho y predespacho mediante polinomios de Chebyshev, conservando la estructura del problema horario en cuanto al planteamiento de restricciones.

En el capítulo 4, se diseña una propuesta metodológica de validación, consistente en corroborar los resultados del modelo de esta memoria mediante uno previamente validado realizado mediante bloques horarios.

En el capítulo 5, se obtienen los principales resultados de validación, comparando según la propuesta metodológica. Se obtuvieron resultados de operación, similares para el caso relajado entre ambos modelos, con errores de costos totales inferiores al 0.1 %. Para el caso del predespacho, los errores son inferiores al 0.2 % en el costo total, atribuibles a la homologación de variables binarias desde los puntos extremos a su equivalente equiespaciado.

En el mismo capítulo, a partir del caso de estudio elaborado, fue posible ver la necesidad de incorporación de las restricciones técnicas referentes a generadores térmicos en casos con alta penetración solar, esto debido a la modificación de los despachos provocada por la activación de los tiempos mínimos de operación y detención de los generadores. Los mínimos técnicos conllevan directamente a una modificación del despacho, y a su vez, una modificación del valor del agua, en donde éste para el caso relajado no captura la totalidad de caso restringido. Ésta diferencia otorga una señal errónea de operación de embalses en el mediano y largo plazo, administrando de manera inadecuada el volumen embalsado entre distintas etapas.

También se hizo el análisis del caso restringido, en donde fue posible ver que para un caso con alta penetración solar, se producen recortes de sol debido a las restricciones técnicas presentes todos los días, llevando el costo marginal a precios del costo variable del sol y dejando la operación del parque a carbón a mínimo técnico, operando inframarginalmente.

Adicionalmente, a partir de la validación del modelo mediante polinomios de Chebyshev, fue posible ver la dificultad de implementar problemas de predespacho, debido a la lenta convergencia una vez llegado al 1 % de GAP, tardando en converger a una tolerancia del 0,01 % un tiempo cercano a una hora.

Dentro del capítulo 5 también fue posible validar la posibilidad de representar los perfiles de generación con menor información, esto debido a las características pseudoespectrales de los polinomios de Chebyshev, perdiendo información con el fin de ahorrar variables del problema de optimización. Para los casos de estudio, un desarrollo con 112 coeficientes (dos tercios de la totalidad de variables de generación por central) produce un sobrecosto de 0,4 % con respecto a un caso con la totalidad de ellos, pero solo con esa información es posible mantener las mismas unidades despachadas y el valor del agua de la etapa, pudiendo caracterizarse el despacho.

Finalmente, a partir de la representación aproximada es posible recuperar el valor del agua asociado al dual de la restricción de volumen inicial. Esto permite una extensión del problema relajado en Chebyshev, utilizándolo como subproblema en una herramienta de coordinación hidrotérmica mediante descomposición anidada de Benders. Esto debido a que cada subproblema debe ser lineal y definido en los bordes, con el fin de poder traspasar la información de los duales y volúmenes respectivamente, lo cual cumple el problema formulado en Chebyshev con la utilización de puntos extremos.

6.2 Trabajos Futuros

Se propone como trabajos futuros al presente desarrollo, con el fin de mejorar su desempeño y extender sus funcionalidades:

- Cuantificar penalizadores de ciclaje de centrales térmicas para poder representar en tiempo continuo sobrecostos como encendidos/apagados, así como también evitar variabilidades técnicamente infactibles en unidades.
- Realizar heurística que determine previamente unidades que queden fuera del despacho según el nivel de demanda, con el fin de reducir tiempos de ejecución.
- Corroborar escalamientos numéricos, tolerancias de factibilidad y optimalidad de los problemas de optimización, con el fin de acelerar los tiempos de ejecución.
- Extender la metodología de trabajo a un problema de coordinación Hidrotérmica completo, con sistema multimodal, utilizando en la resolución de los subproblemas lineales el modelo relajado realizado mediante polinomios de Chebyshev.
- Complementar y extender el trabajo realizado en aplicaciones para microredes [45], con el fin de implementar la modelación en tiempo continuo en despachos donde es necesaria alta resolución temporal.
- Explorar incorporación de la representación de Chebyshev en fenómenos dinámicos en redes eléctricas, en donde es necesaria la resolución de ecuación de Ecuaciones en derivadas parciales y los polinomios han sido extensamente utilizados.

Bibliografía

- [1] P. G. Rojas, «Reporte ERNC,» Noviembre 2014. [En línea]. Available: <http://www.cifes.gob.cl/mailling/2014/noviembre/REPORTENov2014.pdf>. [Último acceso: 30 Noviembre 2014].
- [2] D. E. Olivares, C. A. Cañizares y M. Kazerani, «A Centralized Optimal Energy Management,» de *IEEE PES General Meeting*, 2011.
- [3] D. S. Lavin, «Efectos Técnico-Económicos de la operación del SIC por ingresos de centrales ERNC,» Santiago, 2013.
- [4] A. J. Wood y B. F. Wollenberg, *Power generation, operation and control*, John Wiley & Sons, Inc., 1996.
- [5] C. N. d. Energía, «Norma Técnica Chilena de Seguridad y Calidad de Servicio,» Octubre 2009. [En línea]. Available: http://www.sec.cl/pls/portal/docs/PAGE/SECNORMATIVA/ELECTRICIDAD_NORMASTECNICAS/NT_DE_SYCS_2010_MODIF_REX442.PDF. [Último acceso: 24 Junio 2014].
- [6] J. Zhu, *Power System Operation*, New Jersey: Wiley & Sons, Inc., 2009.
- [7] P. Sánchez-Martín y A. Ramos, «Modeling Transmission Ohmic Losses in a Stochastic Bulk Production Cost Model,» [En línea]. Available: <http://www.iit.upcomillas.es/aramos/papers/losses.pdf>. [Último acceso: 4 Septiembre 2014].
- [8] A. Bhardwaj, V. K. Kamboj, V. K. Shukla, B. Singh y P. Khurana, «Unit Commitment in Electrical Power System - A literatura Review,» de *IEEE International Power Engineering and Optimization Conference*, Melaka, 2012.
- [9] C. Benavides, «Herramienta computacional para modelo de predespacho económico de carga,» Universidad de Chile, Santiago, 2008.
- [10] F. L. Rodrigo Palma, «Towards More Accurate Unit Commitment Performance Comparisons,» de *Transmission & Distribution Conference and Exposition: Latin America*, 2006.
- [11] T. Li y M. Shahidehpour, «Price-Based Unit Commitment: A Case of Lagrangian Relaxation Versus Mixed Integer Programming,» *IEEE Transactions on power systems*, vol. 20, n° 4, pp. 2015-2025, 2005.
- [12] G. Morales-España, J. M. Latorre y A. Ramos, «Tight and Compact MILP Formulation for the Thermal unit Commitment Problem,» *IEEE Transaction on Power Systems*, vol. 28, n° 4, pp. 4897-4908, 2013.
- [13] T. Senjyu, K. Shimabukuro, K. Uezato y T. Funabashi, «A Fast Technique for Unit Commitment Problem by,» *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 18, n° 2, pp.

882-888, 2003.

- [14] S. B. W. L. Peterson, «A capacity based Lagrangian relaxation unit commitment with ramp rate constraints,» *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 10, n° 2, pp. 1077-1084, 1995.
- [15] F. Li, «Genetic Algorithm Approach to More Consistent and Cost Effective Unit Commitment,» *Intelligent Control and Automation*, vol. 1, pp. 581-585, 2000.
- [16] D. Simopoulos y S. Kavatza, «Unit commitment by an enhanced simulated annealing algorithm,» *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 21, n° 1}, pp. 68-76, 2006.
- [17] P. Sriyanyong y Y. Song, «Unit Commitment Using Particle Swarm Optimization Combined with Lagrange Relaxation,» *Power Engineering Society General Meeting*, vol. 3, pp. 2752-2759, 2005.
- [18] C. C. A. Rajan y M. Mohan, «An evolutionary programming-based tabu search method for solving the unit commitment problem,» *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 19, n° 1, pp. 577-585, 2004.
- [19] S. Saneifard, N. R. Prasad y H. A. Smolleck, «A fuzzy logic approach to unit commitment,» *IEEE Transactions of Power Systems*, vol. 12, n° 2, pp. 988-995, 1997.
- [20] H. Chen y X. Wang, «Cooperative Coevolutionary Algorithm for Unit Commitment,» *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 17, n° 1, pp. 128-133, 2002.
- [21] E. Gil, J. Bustos y H. Rudnick, «Short Hydrothermal Generatio Scheduling Model Using a Genetic Algorithm,» *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 18, n° 4, pp. 1256-1264, 2003.
- [22] J. C. Villanueva, Integración de generación eólica en estudios de coordinación hidrotérmica de mediano/largo plazo, Santiago, 2011.
- [23] R. T. Ávila, «Modelo de Coordinación Hidrotérmica multinodal y multiembalse para sistemas eléctricos longitudinales en el mediano plazo,» Santiago, 2006.
- [24] H. Rudnick, C. Silva y R. Palma, «Descomposición de Benders en optimización de sistemas eléctricos de potencia,» de *Apuntes de Ingeniería*, 67, 1995, p. 59.
- [25] A. M. Geoffrion, «Generalized Benders Decomposition,» *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 10, n° 4, pp. 237-260, 1972.
- [26] S. P. Løvengreen, «Estrategias para engrantar periodos de racionamiento en sistemas hidrotérmicos,» Santiago, 2012.
- [27] L. Södder, «Wind energy impact on the energy reliability of a Hydro-thermal power system in a deregulated market,» de *13th PSCC*, Trondheim, 1999.
- [28] W. Brokering, R. Palma y L. Vargas, Los Sistemas Eléctricos de Potencia, Santiago:

Pearson Education, 2008.

- [29] P. Deuflhard y A. Hohmann, Numerical Analysis in Modern Scientific Computing An Introduction, Springer, 1995.
- [30] A. Mosiño, «Using Chebyshev polynomials to approximate Partial differential Equations: a Reply,» *Computer economics*, n° 39, pp. 13-27, 2012.
- [31] G. Liao, X. Xu, Q. Wu, C. Zhang, C. Yang y X. Zhu, «A coastal acoustic Tomography inverse Method Based on Chebyshev Polynomials and Its Application in Zhousan field experiment,» de *3rd International Congress on Image and Signal Processing*, 2010.
- [32] A. V. Frolov y I. Tsvetkov, «Uniform Approximation of Geophysical Fields on a Sphere by Trigonometric polynomials,» *Doklady Earth Sciences*, vol. 408, n° 4, pp. 682-685, 2006.
- [33] I. I. Lázaro, G. Pineda, E. Espinosa y S. Zavala, «Analysis of time Varying Power System Loads via Chebyshev Polynomials,» de *Electronics, Robotics and Automotive Mechanics*, 2008.
- [34] I. Beya y M. Olivares, «Optimización de la operación del sistema embalse puclaro incorporando el objetivo de generación hidroeléctrica,» de *XX Congreso Chileno de hidraulica*, Santiago, 2011.
- [35] J. Mason, Chebyshev Polynomials, Chapman & Hall/CRC, 2003.
- [36] J. P. Boyd, Chebyshev and Fourier Spectral Methods, DOVER Publications, Inc., 2000.
- [37] L. N. Trefethen, Spectral Methods in MATLAB, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- [38] G. A. Watson, «On the best linear one-sided Chebyshev approximation,» *Journal of approximation Theory*, pp. 48-58, 1973.
- [39] B. A. McCarl y T. H. Spreen, Applied Mathematical Programming using algebraic Systems, 1997.
- [40] O. Guimaraes, J. R. C. Piqueira y M. L. Netto, «Direct Computation of Operational Matrices for Polynomial Bases,» *Mathematical Problems in Engineering*, p. 12, 2010.
- [41] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling y B. P. Flannery, Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing, Cambridge University Press, 2002.
- [42] D. Trif, Matrix Based Operational Approach to Differential and Integral Problems, InTech, 2011.
- [43] E. P. Bonvallet, «Modelo estocástico de predespacho económico para el manejo de la incertidumbre eólica incorporando acciones correctivas,» Santiago, 2011.

- [44] C. N. d. Energía, «Precio de nudo de corto plazo,» Octubre 2014. [En línea]. Available: <http://www.cne.cl/tarificacion/electricidad/precios-de-nudo-de-corto-plazo/octubre-2014>. [Último acceso: 17 Noviembre 2014].
- [45] M. Matus, N. Cáceres, S. Püschel-Lovengreen y R. Moreno, «Chebyshev Based Continuous Time Power System,» de *IEEE PES General Meeting*, Denver, 2015.

Anexo A. Integración por trapecios

Sea una función f continua en un intervalo $[x_0, x_N]$. Es posible aproximar su área bajo la curva mediante el método del trapecio, el cual consiste en calcular la suma de las áreas formadas entre cada segmento formado por la grilla de muestreo.

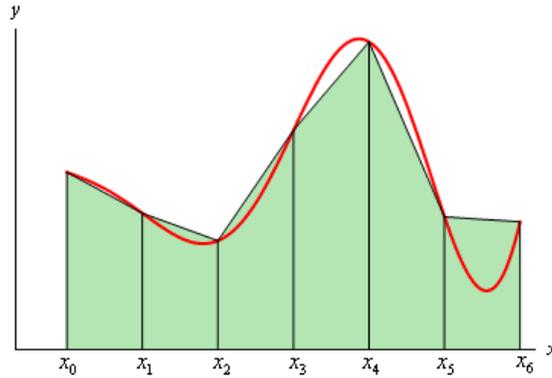


Figura 7.1: Integración trapezoidal³

Por ejemplo, en la Figura 7.1 se observa una función $f(x)$ muestreada en $N + 1$ puntos que la dividen en N bloques. El área bajo la curva de la suma de todos los bloques está dada por:

$$\sum_{k=0}^N (x_{k+1} - x_k) \cdot \frac{f(x_{k+1}) + f(x_k)}{2} \quad (7.1)$$

Esta relación se puede representar mediante un ponderador para cada punto $f(x_k)$ de la forma:

$$\sum_{k=0}^N \beta_k \cdot f(x_k) \quad (7.2)$$

En donde β_k se obtiene de la expansión de la ecuación (7.2) representándose como:

$$\beta_k = \begin{cases} \beta_0 = \frac{x_1 - x_0}{2} & ; k = 0 \\ \beta_k = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2} & ; \forall k \in \{1 \dots N - 1\} \\ \beta_N = \frac{x_N - x_{N-1}}{2} & ; k = N \end{cases} \quad (7.3)$$

³ http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcII/ApproximatingDefIntegrals_files/image002.gif

Anexo B. Integración por regla del trapecio en función objetivo

La función objetivo inicial que se plantea en un problema de despacho corresponde a la minimización de los costos totales en el horizonte. Es decir, si se tienen j perfiles de despacho correspondientes a j centrales, la minimización de los costos totales sujetos a sus costos variables cv_j corresponde a:

$$\min(Z) = \sum_{j=1}^{Num_{cen}} \int_{t=t_{min}}^{t_{max}} cv_j \cdot g_j(t) dt \quad (7.4)$$

En donde:

- cv_j Costo variable de central j .
- g_j Perfil de generación de central j en el tiempo.
- $\overline{\mathcal{G}}_j$ Coeficientes de Chebyshev asociados al perfil temporal de central j .
- Num_{cen} Número de centrales generadoras.
- r Tasa de descuento del período de análisis.
- t_{min} Inicio del período de tiempo.
- t_{max} Fin del período de tiempo.

Debido a que se desea comparar el modelo planteado en Chebyshev con otro desarrollado directamente en el tiempo, se debe evitar la degeneración asociada a las soluciones (debido a la competencia directa del valor del agua con centrales térmicas, es indistinto generar con cualquiera de las 2 en ciertos períodos de tiempo). Esta degeneración es posible evitarla añadiendo la tasa de descuento (r), por lo que la función objetivo queda de la forma:

$$\min(Z) = \sum_{j=1}^{Num_{cen}} \int_{t=t_{min}}^{t_{max}} \frac{cv_j \cdot g_j(t)}{(1+r)^t} dt \quad (7.5)$$

Utilizando la aproximación lineal de la tasa de descuento, es posible representar la ecuación anterior como:

$$\min(Z) = \sum_{j=1}^{Num_{cen}} \int_{t=t_{min}}^{t_{max}} cv_j \cdot g_j(t) \cdot v(t) dt \quad (7.6)$$

En donde la tasa de descuento decrece linealmente desde su valor inicial 1 hasta decaer en r al final del período, como se muestra en la ecuación (7.7).

$$v(t) = 1 - r \cdot \frac{t - t_i}{t_{max} - t_{min}} \quad (7.7)$$

Debido a que el dominio de los polinomios de Chebyshev es $[-1,1]$, se reescala el dominio de la función objetivo, conservando el valor con una premultiplicación de ésta por el largo

del intervalo original. Adicionalmente, se reemplazan los puntos del dominio en la función de tasa de descuento:

$$\min(Z) = \frac{t_{max} - t_{min}}{2} \cdot \sum_{j=1}^{Num_{cen}} \int_{k=-1}^1 cv_j \cdot g_j(k) \cdot \underbrace{\left(1 - r \cdot \frac{k+1}{2}\right)}_{v(k)} dt \quad (7.8)$$

Aplicando el método de integración del trapecio (véase numeral 0) en una grilla de $N + 1$ puntos tal que $k_0 = -1$ y $k_N = 1$ se tiene que la formulación en el tiempo es expresada por:

$$\min(Z) = \frac{t_{max} - t_{min}}{2} \cdot \sum_{j=1}^{Num_{cen}} \sum_{k=0}^N \beta(k) \cdot cv_j \cdot g_j(k) \cdot v(k) \quad (7.9)$$

Finalmente, debido a que las variables del problema son los coeficientes de Chebyshev de los despachos de cada una de las generadoras, la función objetivo queda expresada como:

$$\min(Z) = \frac{t_{max} - t_{min}}{2} \cdot \sum_{j=1}^{Num_{cen}} \sum_{k=0}^N \beta(k) \cdot cv_j \cdot v(k) \cdot A_{[k,:]} \cdot \widetilde{g_j(k)} \quad (7.10)$$

Posteriormente, se agrega un término que al integrarlo permite tener una aproximación del número de ciclos que ha efectuado un generador en el horizonte de estudio. Esta expresión proviene de descomponer la rampa como:

$$ramp^{up} - ramp^{dw} = ramp; ramp^{up}, ramp^{dw} \geq 0 \quad (7.11)$$

Integrando las rampas de subida y bajada, ajustándolo por el intervalo que recorre el perfil de potencia, se tiene el doble de ciclos que efectúa el generador:

$$\int_{k=-1}^{k=1} \frac{ramp^{up}_{j_k^{ter}} - ramp^{dw}_{j_k^{ter}}}{(Pmax_{j_k^{ter}} - Pmin_{j_k^{ter}})} = 2 \cdot N^{\circ} \text{ ciclos} \quad (7.12)$$

Reemplazando la variable de $ramp^{dw}_{j_k^{ter}}$ por las disponibles en el modelo, llevándolo a la integración discreta por trapecios y aplicando la tasa de descuento tal como en el término de costos asociados a los perfiles en (7.10) se tiene finalmente:

$$\sum_{k=0}^N \delta_{j_k^{ter}} \cdot \beta(k) \cdot v(k) \cdot \frac{2 \cdot ramp^{up}_{j_k^{ter}} - ramp_{j_k^{ter}}}{2 \cdot (Pmax_{j_k^{ter}} - Pmin_{j_k^{ter}})} \quad (7.13)$$

En donde $\delta_{j_k}^{ter}$ corresponde al costo de ciclar una vez el generador térmico k . Éste es posible calibrarlo mediante la depreciación del activo, costos de mantenimiento de la unidad, entre otros valores.

Anexo C. Descomposición de potencia real y nodal de generadores térmicos

Se realiza una descomposición de las potencias de un generador térmico en dos variables. Una $\widetilde{g}_{j_t}^{ter}$ que contribuye únicamente al balance nodal, y otra $\widetilde{G}_{j_t}^{ter}$ que representa la potencia real del generador, se encuentre o no despachado.

La variable que se penaliza en la función objetivo es $\widetilde{G}_{j_t}^{ter}$, debido a que según la formulación, al encontrarse despachada la central con un valor igual o mayor que su mínimo técnico, representa exactamente la potencia que debe ingresar al balance nodal.

En caso de no encontrarse despachada, en conjunto con las restricciones del numeral 3.3.3.13 se tiene que sigue una trayectoria tal que es posible calibrar la rampa de partida tal como el cociente entre la potencia mínima y el tiempo de sincronización, con el fin de que en un determinado tiempo la central alcance su potencia mínima. Esto genera un área triangular antes de que la central sea despachada, la cual es posible utilizar como una aproximación de los costos de partida de la central.

Para el caso de ejemplo de la Figura 7.2, si el tiempo de partida es de 12 [hrs] hasta alcanzar una potencia mínima de 200 [MW], esto involucra un costo aproximado de US\$48.000.- si utilizara como combustible carbón y su costo variable rondara los 40 [USD\$/MW].

Es posible realizar un caso análogo con las rampas de apagado, con el fin de representar una aproximación de los costos de apagado.

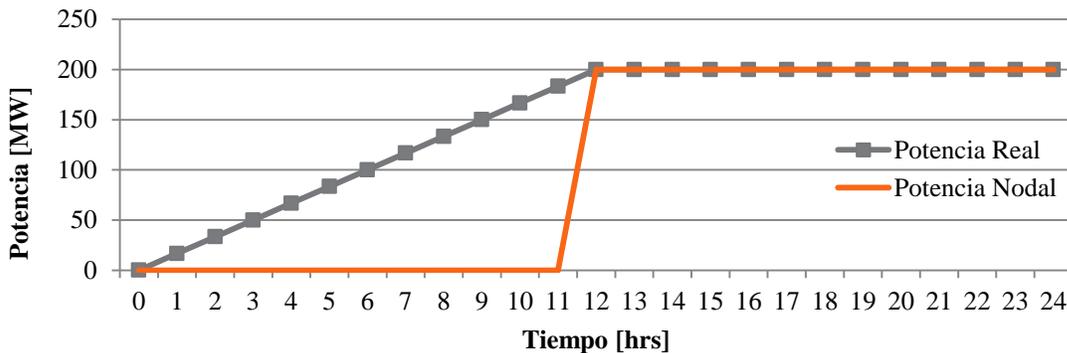


Figura 7.2: Potencia real v/s nodal

Anexo D. Centrales térmicas ITD Octubre 2014

Tabla 7.1: Centrales térmicas modeladas, agrupación ITD Oct-2014

Nombre	Pmáx MW	Pmin MW	Combustible	Costo Variable USD/MWh	Rampa máxima MW/min	Tiempo mínimo hrs
Geotermicas1-4	210	0	Geotermia	2	9999	0
CBiomasa_1	203,4	0	Biomasa	13,5	9999	0
CBiomasa_2	183,2	0	Biomasa	63,54	9999	0
CBiomasa_3	51,3	0	Biomasa	227	9999	0
CDiesel	3713	0	Diésel	305,42	9999	0
Angamos	488,3	488,3	Carbón	37,89	1	24
Bocamina	464,2	464,2	Carbón	46,1	1	24
Cochrane	472	472	Carbón	46,75	1	24
CTA-CTH	306,5	306,5	Carbón	41,55	1	24
CTM1-2-CTTAR	467,42	467,42	Carbón	36,96	1	24
Guacolda1-4	561,9	561,9	Carbón	33,74	1	24
Guacolda5- Campiche	381	381	Carbón	41,01	1	24
Norgener1-2	259,31	259,31	Carbón	38,88	1	24
SantaMaria	321	321	Carbón	37,04	1	24
U12-15	411,08	411,08	Carbón	41,93	1	24
Ventanas	571	571	Carbón	41,39	1	24
Nehuenco02GNLTP	384,2	250	Gas	2,43	10	84
U16GNL	343	165	Gas	58,07	10	84
CTM3GNL	243,2	220	Gas	59,49	10	84
SanIsidro02GNL	392	195,8	Gas	83,74	10	84
SanIsidroGNL	350	195,8	Gas	88,65	10	84
CC1GNL	325,6	195,36	Gas	90,66	10	84
CC2GNL	325,6	195,36	Gas	90,66	10	84
TaltalCCGNL	360	120	Gas	93,86	10	84
Nehuenco01GNL	340,1	250	Gas	95,56	10	84
TG3GNL	37,2	0	Gas	96,48	10	3
Kelar	517	230	Gas	97,8	10	84
NuevaRencaGNL	312	187,2	Gas	101,78	10	84
NuevaRencaIntGNL	30	18	Gas	122,3	10	84
Cordillera	50	30	Gas	132,98	10	3
Quintero01CAGNL	128	76,8	Gas	133,9	10	3
Quintero02CAGNL	129	77,4	Gas	133,9	10	3
SanIsidroFAGNL	20	0	Gas	140,72	10	3

Tabla 7.2 (continuación): Centrales térmicas modeladas, agrupación ITD Oct-2014

Nombre	Pmáx MW	Pmin MW	Combustible	Costo Variable USD/MWh	Rampa máxima MW/min	Tiempo mínimo hrs
CandelariaCA01GNL	125,3	75,18	Gas	152,28	10	3
CandelariaCA02GNL	128,6	77,14	Gas	152,28	10	3

Anexo E. Anexo de resultados

- Caso 1

Tabla 7.2: Generación por central, caso 1

Generación GWh	UC_Tradicional	UC_Chebyshev	Diferencia
Geotermicas1-4	35,28	35,28	0,00 %
Cpas_ser	454,03	453,93	0,02 %
SolarPV	323,82	325,74	-0,59 %
CBiomasa_1	34,17	34,17	0,00 %
CBiomasa_2	10,23	7,07	30,94 %
CBiomasa_3	-	-	-
Guacolda1-4	94,40	94,40	0,00 %
CTM1-2-CTTAR	78,10	78,05	0,06 %
SantaMaria	52,70	52,91	-0,40 %
Angamos	79,17	79,10	0,08 %
Norgener1-2	41,75	41,75	0,01 %
Guacolda5-Campiche	60,69	60,72	-0,05 %
Ventanas	88,77	88,84	-0,08 %
CTA-CTH	46,89	46,79	0,21 %
U12-15	61,79	61,69	0,15 %
Bocamina	66,48	66,95	-0,71 %
Cochrane	60,81	60,47	0,56 %
CDiesel	-	-	-
GenEmbalse	154,46	154,49	-0,02 %
EolicoSIC	153,73	153,77	-0,03 %
Nehuenco02GNLTP	64,55	64,55	0,00 %
U16GNL	39,43	39,83	-1,01 %
CTM3GNL	25,26	25,42	-0,65 %
SanIsidro02GNL	-	-	-
SanIsidroGNL	-	-	-
CC1GNL	-	-	-
CC2GNL	-	-	-
TaltalCCGNL	-	-	-

Tabla 7.3 (continuación): Generación por central, caso 1

Generación GWh	UC_Tradicional	UC_Chebyshev	Diferencia
Nehuenco01GNL	-	-	-
TG3GNL	-	-	-
Kelar	-	-	-
NuevaRencaGNL	-	-	-
NuevaRencaIntGNL	-	-	-
Cordillera	-	-	-
Quintero01CAGNL	-	-	-
Quintero02CAGNL	-	-	-
SanIsidroFAGNL	-	-	-
CandelariaCA01GNL	-	-	-
CandelariaCA02GNL	-	-	-

- **Caso 2**

Tabla 7.3: Generación por central, caso 2

Generación GWh	UC_Tradicional	UC_Chebyshev	Diferencia
Geotermicas1-4	35,28	35,28	0 %
Cpas_ser	454,03	453,93	0 %
SolarPV	283,32	278,52	2 %
CBiomasa_1	24,15	24,27	-1 %
CBiomasa_2	18,51	19,36	-5 %
CBiomasa_3	-	-	-
Guacolda1-4	94,40	94,40	0 %
CTM1-2-CTTAR	78,53	78,53	0 %
SantaMaria	53,93	53,93	0 %
Angamos	82,03	82,03	0 %
Norgener1-2	43,56	43,56	0 %
Guacolda5-Campiche	64,01	64,01	0 %
Ventanas	95,93	95,93	0 %
CTA-CTH	51,49	51,49	0 %
U12-15	69,06	69,06	0 %
Bocamina	62,20	77,99	-25 %
Cochrane	62,30	62,02	0 %
CDiesel	-	-	-
GenEmbalse	154,46	154,47	0 %
EolicoSIC	153,73	153,77	0 %

Tabla 7.4 (continuación): Generación por central, caso 2

Generación GWh	UC_Tradicional	UC_Chebyshev	Diferencia
Nehuenco02GNLTP	64,55	64,55	0 %
U16GNL	47,28	47,53	-1 %
CTM3GNL	19,80	9,20	54 %
SanIsidro02GNL	5,76	4,84	16 %
SanIsidroGNL	2,12	2,16	-2 %
CC1GNL	0,65	2,01	-208 %
CC2GNL	1,75	2,01	-14 %
TaltaCCGNL	0,96	1,09	-14 %
Nehuenco01GNL	-	-	-
TG3GNL	2,70	-	100 %
Kelar	-	-	-
NuevaRencaGNL	-	-	-
NuevaRencaIntGNL	-	-	-
Cordillera	-	-	-
Quintero01CAGNL	-	-	-
Quintero02CAGNL	-	-	-
SanIsidroFAGNL	0,02	-	100 %
CandelariaCA01GNL	-	-	-
CandelariaCA02GNL	-	-	-