



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

CONVERGENCIA ASINTÓTICA EN ESQUEMAS ADAPTATIVOS CON OPERADORES
FRACCIONARIOS

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, MENCIÓN
ELÉCTRICA

JAVIER ANDRES GALLEGOS VELIZ

PROFESOR GUÍA:

Sr. MANUEL DUARTE MERMOUD

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:

Sr. CARLOS CONCA ROSENDE

Sr. MARCOS ORCHARD CONCHA

Sr. RICARDO PÉREZ CORREA

SANTIAGO DE CHILE

JULIO 2015

RESUMEN DE LA TESIS
PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGISTER EN CIENCIA DE LA INGENIERÍA
MENCIÓN ELÉCTRICA
POR: JAVIER ANDRES GALLEGOS VELIZ
PROF. GUÍA: Sr. MANUEL DUARTE MERMOUD

Resumen

Se realiza un análisis teórico de estabilidad, acotamiento, convergencia y propiedades de sistemas de orden no entero con la elección de derivada no entera según Caputo. En las deducciones se emplea fundamentalmente el principio de comparación y el método de funciones de Lyapunov.

Se diseñan esquemas adaptables de orden entero o no entero, entendidos como ajustes de parámetros que buscan minimizar una función objetivo y que incluye un operador de cálculo general (no entero o entero). El diseño consta de dos etapas: en la primera se recurre a métodos conocidos o propuestos de carácter general para obtener leyes de ajuste, mientras que en la segunda se analizan la convergencia de tales leyes, las cuales resultan ser sistemas de orden no entero. El énfasis es puesto en el método del gradiente por su simplicidad y amplio uso. En este contexto, una generalización de excitación persistente es propuesta para incluir el caso no entero.

Se aplican parte de los desarrollos precedentes a un problema práctico relevante en la disciplina de Control de Sistemas, como es la identificación de parámetros y la estimación de estados para un sistema lineal desconocido. Para ello se diseña un esquema identificador y se presentan ejemplos ilustrativos y simulaciones.

Como parte de los resultados obtenidos indirectamente en la tesis se profundizan aspectos elementales del cálculo no entero.

Agradecimientos

A quienes han hecho posible esta tesis:

Mi familia por su apoyo irrestricto.

El profesor Manuel Duarte por su apoyo integral.

El grupo de investigación por las discusiones.

Tabla de Contenido

1. Introducción	5
1.1. Problema de Estudio	5
1.2. Objetivo General	6
1.3. Objetivos Específicos	6
1.4. Estructura de la tesis	6
2. Preliminares	7
2.1. Cálculo No entero	7
2.1.1. Introducción al Cálculo No entero	7
2.1.2. Definiciones, Propiedades	10
2.2. Herramientas Matemáticas	13
2.2.1. Espacios de Funciones	13
2.3. Sistemas de orden no entero	15
2.4. Aspectos Computacionales	17
3. Convergencia asintótica en Sistemas Fraccionarios	18
3.1. Sistema Lineal Variante	18
3.1.1. Sistema Lineal Variante: Caso escalar	19
3.1.2. Sistema Lineal Variante: caso vectorial	25
3.2. Sistema Lineal Forzado	26
3.3. Sistema No Lineal	29

4. Adaptatividad Fraccionaria	32
4.1. Método del gradiente	32
4.1.1. ●Modelo error tipo I	33
4.1.2. ●Funcionales de Error	40
4.1.3. ●Filtraje de Entradas	42
4.1.4. ●Multiples errores	43
4.1.5. ●Modelo de Error Tipo II	44
4.2. Método de Mínimos Cuadrados	44
4.3. Método Dinámico	46
4.4. Método por Deslizamiento	49
4.5. Método Heurístico	51
4.6. Robustez	54
5. Aplicaciones	57
5.1. Observador Adaptable	57
5.1.1. Identificador Adaptable del mismo Orden	57
5.1.2. Identificador Adaptable de distinto Orden	59
5.1.3. Observador Adaptable	60
5.1.4. Ejemplos Ilustrativos	61
6. Conclusiones y Trabajo futuro	65
6.1. Conclusiones	65
6.2. Trabajo futuro	66
Bibliografía	68
A. Apendice A	I
A.1. Results for $\alpha \geq 1$	I
A.2. Results for $0 < \alpha < 1$	II
A.2.1. Extensions	III

A.2.2. Alternative Hypothesis	VI
A.2.3. Unbounded Case	VII
A.2.4. Proof of Proposition 2	VII
A.3. Applications	IX
A.3.1. Example 1	IX
A.3.2. Example 2	IX
A.3.3. Example 3	IX
A.3.4. Example 4	X

Índice de figuras

4.1. Caso $w(\cdot)$ constante	54
4.2. Caso $w(\cdot)$ senoidal	55
5.1. $u = 10(\sin(t) + \sin(2t)); \alpha = 0.9$	62
5.2. $u = 10(\sin(t) + \sin(2t)); \alpha = 0.5$	62
5.3. $u = 1_{t \geq 0}; \alpha = 0.9$	63
5.4. $u = 10(\sin(t) + \sin(2t)); \alpha = 0.95$	64

Capítulo 1

Introducción

1.1. Problema de Estudio

El problema genérico a resolver es expresable en los siguientes términos: se tiene una función (que llamaremos error) que depende de ciertos parámetros y variables; ajustar los parámetros disponibles de tal forma que la función sea minimizada. El ajuste será adaptable en el sentido que es continuamente realizado en el tiempo y no hecho de una sola vez. En tal ajuste se insta a introducir operadores diferenciales/integrales de orden no entero. Esto último se justifica especulativamente en que ciertas propiedades de tales operadores (no localidad, integrales construidas desde sumas ponderadas del pasado) son afines con la filosofía adaptable. El problema específico aunque no exclusivo a abordar es, en el contexto anterior, el de funciones lineales en los parámetros.

El tipo de soluciones buscadas es similar a las sucesiones minimizantes que se obtienen por el método del gradiente, con la diferencia que, por el hecho de ajustar continuamente, más que sucesiones las soluciones serán funciones. Consecuentemente, la forma natural de presentarlas serán por ecuaciones diferenciales.

La variedad de problemas que hacen uso de ajuste de parámetros con derivada entera, las soluciones dadas y sus aplicaciones en ingeniería pueden ser consultada en libros como [6], [23]. En resumen, conceptos tan fundamentales en la ingeniería moderna como son aprendizaje y adaptabilidad pueden ser comprendidos en términos de ajuste de parámetros.

El ajuste de parámetros con derivada no entera fue propuesto por [7] mediante simulaciones. Hasta la fecha ningún avance teórico fue realizado en el análisis de la convergencia del error, principalmente porque los sistemas resultantes (lineales no autónomos) no han sido estudiados en profundidad en la literatura, exceptuando el trabajo de [8] que aborda el caso escalar y consigue una condición de convergencia (entrada que nunca se anulan) mediante el método de resolventes de ecuaciones integrales.

1.2. Objetivo General

El objetivo general es elaborar y analizar teóricamente diseños que hacen uso de herramientas de cálculo diferencial no entero en problemas de optimización.

1.3. Objetivos Específicos

- Estudiar analíticamente acotamiento y convergencia de ecuaciones diferenciales no enteras.
- Determinar propiedades específicas de dinámicas no enteras.
- Diseñar estrategias que usen dinámicas no enteras en problemas de optimización y/o adaptabilidad. Obtener condiciones bajo las cuales son efectivas.
- Determinar ventajas o desventajas de tales esquemas frente a la alternativa entera.
- Diseñar una aplicación relevante en el contexto de Teoría de Sistemas.

1.4. Estructura de la tesis

La estructura de exposición del trabajo realizado es la siguiente:

- **Capítulo 1. Introducción:** Esquema de la tesis
- **Capítulo 2. Preliminares:** Conceptos y relaciones fundamentales
- **Capítulo 3. Convergencia asintótica en Sistemas Fraccionarios:** Resultados sobre estabilidad y convergencia en dinámicas fraccionarias.
- **Capítulo 4. Adaptatividad Fraccionaria:** Se presentan diseños adaptables fraccionarios
- **Capítulo 5. Aplicaciones:** Aplicación en Sistemas Dinámicos de los diseños.
- **Capítulo 6. Conclusiones y Trabajo futuro:** Se plantean las conclusiones del trabajo y se sugieren trabajos a realizar en el futuro.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se revisan definiciones y elementos matemáticos que permitirán fundamentar los desarrollos de capítulos posteriores. Adicionalmente, se plantean aspectos distintivos de sistemas de orden no entero (o fraccionarios).

2.1. Cálculo No entero

2.1.1. Introducción al Cálculo No entero

I

No solo la notación de Leibniz para la derivada resultó más práctica y difundida que la de Newton, sino que también probablemente le permitió a Leibniz ponderar la posibilidad (bajo sugerencia de L'Hopital) que n en d^n , usualmente un natural, pudiese en principio ser un número real; pues aunque Newton fue el (co)creador del cálculo diferencial, no analizó igualmente esta posibilidad.

No debe deducirse de lo anterior que el cálculo entero y el no entero surgieron casi simultáneamente, ya que Leibniz no avanzó desde ese nivel especulativo. En efecto, desde el nivel puramente especulativo, tendríamos que atribuir a Arquímedes la autoría del cálculo infinitesimal (y desde el nivel formal y libre de contradicciones, a Cauchy o Weierstrass).

Que un importante matemático como Leibniz haya estado interesado en el Cálculo no entero no es excepcional; Euler, Laplace, Fourier, Riemann entre otros intentaron responder las preguntas elementales que aparecen si se lo desea desarrollar formalmente. Aparte de la simple pero potente curiosidad intelectual, el impulso parece residir en la clara conciencia del poder que tiene el cálculo entero para modelar procesos físicos y especialmente para expresar leyes fundamentales de la naturaleza (principalmente, por la capacidad que tiene de representar la noción de causalidad al relacionar dos instantes infinitesimalmente contiguos mediante la derivada), lo cual permite elucubrar sobre las potencialidades que tendría el cálculo no entero. Una búsqueda superficial en publicaciones

recientes permite formar la intuición que este es usado para modelar procesos complejos donde efectos no locales como la memoria o propiedades hereditarias constituyen sus propiedades distintivas (correspondiendo a que en la derivada no entera la relación entre un instante admite hacerlo también con instantes del pasado). Sin embargo la otra cara de tan ilustre lista esta indicando que el cálculo no entero desarrollado de una manera consistente no es ni matemática ni conceptualmente trivial. Las dificultades surgen menos en las definiciones que en las propiedades que de ellas se deducen, pues generalmente llevan a conclusiones insatisfactorias o al menos diferentes de las que uno esperaría según el cálculo entero.

Una revisión de los aportes (parciales) de cada uno de ellos puede ser encontrada con relativo detalle en [26] y complementariamente en [29]. Daremos una síntesis de la evolución conceptual: (i) Leibniz, quien postulaba la existencia de cantidades infinitesimales, intentó darle sentido al infinitésimo $d^{1/2}x$ y encuentra una expresión compatible con la propiedad $d^{1/2}d^{1/2}x = dx$; Euler plantea que puesto que los términos $d^n x$ son conocidos cuando n es natural, $d^\alpha x$ puede ser obtenido por sucesivas interpolaciones. (ii) Un enfoque distinto es iniciado por Lacroix: uno tiene una expresión genérica para $D^n x^m$ cuando n, m son naturales, entonces uno supone que la expresión también es válida cuando n, m son reales; Fourier toma la misma idea pero partiendo de $D^n \sin(mx)$; Liouville a su vez parte de $D^n \exp(ax)$. Este enfoque es de carácter general, pues existen clases de funciones que pueden expandirse en series de potencias (funciones analíticas) o en series de senoidales (transformada Fourier) o exponenciales (Laplace). Que las definiciones anteriores no son coincidentes (ni consistentes entre sí) se ejemplifica con que con la de Lacroix se obtuvo que $D^\alpha x^0$ es no nulo donde $x^0 = 1$, mientras para Liouville se indefine. (iii) En una línea de investigación paralela, Abel observó que ciertas ecuaciones integrales pueden ser resueltas esquemáticamente mediante operadores que identificó con derivadas e integrales no enteras. (iv) Riemann es el primero en acentuar el rol del límite inferior de integración en las expresiones de la integral o derivada no entera, definiendo una función de complementariedad que permitiría 'independizarse' de tal valor (problema de inicialización en jerga moderna) (v) Laurent complejiza el enfoque (ii) al usar la fórmula de Cauchy y asumirla general para orden de parte real negativa para un contorno especial, obteniendo la integral no entera de uso moderno cuando se la restringe al eje real. Sin embargo, para orden de parte real positiva, que debiese dar la derivada, diverge. Una forma de salvar la divergencia es descomponer $\alpha = m - \beta$ con m entero y $m > \beta > 0$ de tal forma que $D^\alpha := D^{m-\beta} = D^m D^{-\beta}$ conocida como derivada Riemann-Liouville.

II

La pregunta básica a responder es cómo generalizar una integral o derivada entera para que en algún sentido sea una integral o derivada fraccionaria. Una manera formal es establecer propiedades y buscar el operador que las satisface. Las propiedades para construir una definición pueden ser agrupadas en cuatro criterios:

a) Cuando el orden de Integración/Derivación sea entero debe coincidir con la noción usual de Integración/Derivación.

b) Cumplir cierta generalización como sugieren Lacroix, Fourier o Laurent. Una alternativa es que la transformada Laplace de la integral de orden α de una función f debe ser $s^{-\alpha} f$. Esto, pues la de la

integral entera es $s^{-1}f$ y no aparecen las condiciones iniciales de f . Esto es sugerido para usos de los operadores en ecuaciones fraccionarias .

c) Debe existir un teorema fundamental que vincule la derivada fraccionaria con la integral fraccionaria del mismo orden de tal manera que generalicen el Teorema Fundamental del Cálculo, que establece en qué sentido la integral es el operador inverso de la derivada. Esto permite que ambos conceptos mantengan las relaciones que los vinculan, cuando son generalizados.

d) Es deseable para su manipulación que el operador Integración/Derivación sea lineal sobre el espacio de funciones Integrables/Derivables y que el conjunto de operadores forme una estructura de grupo o algebraica.

El punto (a) ha llevado a una definición única de la integral. Para la integral de orden entera (integrar n veces) existe una fórmula la cual, al suponerla válida para orden no entero, coincide con la que es llamada integral fraccional. Mientras que al no existir para la derivada entera (derivada n veces) de una función una formula similar, a menos que uno particularice para un tipo de función, no existe una única generalización de derivada no entera. Añádase la ambigüedad del punto (c) y (d) y el uso no claro de las condiciones iniciales, si se lo pretende definir según Transformada Laplace en similitud a (b).

En la práctica, sin embargo, el problema es abordado inversamente: se define una Integral/Derivada y luego se revisan sus propiedades. Esta búsqueda ha llevado operadores diferenciales no enteros que resultan ser integrales (específicamente, convoluciones) que se extiende desde cero hasta el momento de evaluación (implicando que la derivada fraccionaria es no local y causal)

Nuestra elección (Derivada Caputo) cumple (c) para la manera especificada en Propiedades 2.1.1 y 2.1.2 y cumple (d) al menos para orden de derivación en el intervalo $[0, 1]$ (ver [3]).

III

Es necesario recordar que el concepto de derivada fue definido por Newton para representar matemáticamente el concepto de velocidad y aceleración (método de fluxiones) y encontró a la vez una conexión con el concepto de tangente a una curva. Por otro lado la integral (operador inverso de la derivada) fue introducida para calcular el área bajo una curva de una función (Leibniz). Estos dos hechos muestran la íntima relación con la geometría (y por ende, con la Física) que tiene el Cálculo Diferencial. ¿Existe un contenido físico para la derivada/integral fraccionaria? ¿Tiene asociado un concepto geométrico?.

Por el hecho de que la integral no entera puede ser vista como una convolución y esta a su vez puede ser interpretada como la salida de un sistema dinámico lineal (de la siguiente manera: $conv(f, g) = conv(\int f_w \exp(-wt)dt, g) = \int conv(f_w \exp(-wt), g)dt$ donde el integrando es un sistema dinámico lineal primer orden y suponemos que $f(t) = \int f_w \exp(-wt)dt$ y donde f_w es llamada una pseudo transformada de Laplace), la integral no entera puede ser representada como un sistema lineal en derivadas parciales de dimensión infinita [25]. Esta representación es llamada difusiva pues la

ecuación resultante tiene la forma similar a la de fenómenos difusivos. Esto daría contenido físico a la integral.

Una interpretación geométrica de la integral no entera de una función f puede ser intentada de la siguiente manera: $conv(K, f)(t)$ es el área bajo la curva ponderada de f según K , esta ponderación puede ser vista como una medida no uniforme (dependiente del tiempo) sobre el eje temporal, este tipo de área bajo la curva tiene características de despreciar o sobre valorar instantes pasados (según el orden de integración) y se puede llamar área no uniforme o fraccionaria. Esta perspectiva ha sido explorada en [32].

Puesto que la derivada no entera no está definida de manera única, tampoco hay una interpretación de consenso. Por la sección precedente, de existir un significado geométrico, este debe ser no local (como sería el área bajo una curva); por contraste hacemos notar que la tangente a una curva es un concepto local.

La derivada Riemann de f nos dice como varía en el tiempo el área fraccionaria bajo la curva de f .

La derivada Caputo admite una interpretación física similar a la de la integral fraccionaria, pues es definida en términos de esta salvo que usa la primera derivada de f como integrando.

2.1.2. Definiciones, Propiedades

Las siguientes dos definiciones son tomadas de [17].

Definición 2.1.1 *La integral fraccionaria de orden $\alpha > 0$ de la función $f(t)$ es definida por*

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.1)$$

Cuando $\alpha \in \mathbb{N}$ entonces $I^\alpha f(t)$ coincide con la fórmula de la integral entera iterada α veces.

A diferencia de la integral entera, la historia pasada de $f(\cdot)$ ($\tau < t$) es ponderada no uniformemente por el factor $(t - \tau)^{\alpha-1}$. Por ejemplo, si $\alpha < 1$ las evaluaciones de $f(\cdot)$ en instantes pasados pesan menos mientras más en el pasado estén respecto de t . Matemáticamente, esto responde al hecho que $I^\alpha f(t)$ es la convolución de $f(\cdot)$ con $t^{\alpha-1}$. En este sentido, nosotros podríamos llamar $\alpha = 1$ un valor crítico, pues el comportamiento de $t^{\alpha-1}$ varía drásticamente si $\alpha < 1$ (convergente a cero) a si es $\alpha > 1$ (divergente).

Definiremos también $I_T^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_T^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$ y $I_{[0,T]}^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$ cuando $t > T$.

Definición 2.1.2 *La derivada Caputo de orden α de la función $f(t)$ es definida como*

$$D^\alpha f(t) = I^{n-\alpha} f^{(n)}(t), \quad (2.2)$$

donde $n = [\alpha] + 1$ para $[\cdot]$ la función parte entera. Aunque en principio podría ser cualquiera $n > \alpha$, pues interpretando $I^{n-\alpha} = D^{\alpha-n}$, entonces $D^{\alpha-n} D^n f(t) = D^\alpha f(t)$ independiente del valor particular de n .

De tal definición resulta una de las propiedades fundamentales de las ecuaciones diferenciales de orden no entero, referida como la No Localidad. Decimos que la derivada entera es local pues en su definición se toman vecindades en torno al punto de evaluación al considerar el límite hacia tal punto. En cambio la derivada no entera, al ser definida por una integral, considera todos los instantes previos y en este sentido es No Local. Consideremos entonces una ecuación general $D^\alpha x(t) = f(x, t)$. Si $\alpha = 1$ dado el valor $x(t^-)$ el ajuste para obtener $x(t^+)$ solo debe considerar $f(x, t)$ evaluada en t . En cambio, si $\alpha \neq 1$ no es suficiente conocer $x(t^-)$ y $f(x, t)$ evaluada en t ; se necesitan además todos los valores previos de $f(x, t)$. Al considerar instantes pasados y no solo presentes en la actualización, podemos considerarlo como una clase de inercia que se opone a los cambios.

Por lo anterior, el nombre difundido de ecuaciones diferenciales de orden no entero o fraccionario es algo confuso; en rigor se trata de ecuaciones integrales. De la misma forma, operador diferencial de orden no entero es también confuso.

Otra consecuencia de la No localidad es que en principio no se puede obtener propiedades locales (crecimiento, optimalidad local, etc.) de funciones mediante su derivada no entera como si ocurre con la derivada entera. Por ejemplo, si su derivada entera mantiene el signo se infiere la monotonía, pero si su derivada no entera mantiene el signo existen contra-ejemplos donde no es monótona. Una pregunta inmediata es, ¿nos permite la derivada fraccionaria deducir propiedades globales, como la periodicidad o la convergencia?.

Dado que su definición es similar a la de la integral, $\alpha = 1$ es también un valor crítico para la derivada no entera. Esto tiene la siguiente consecuencia: Uno espera que una ecuación integral usando el operador diferencial (o integral) tenga soluciones, digamos $x(t, \alpha)$, que sean continuas respecto a cambios en α en el sentido de la aplicación $\alpha \in \mathbb{R} \rightarrow x(t, \alpha) \in X$ cuando $\alpha \in (0, 1)$ o cuando $\alpha > 1$, donde X es el espacio de soluciones. En efecto, las simulaciones señalan que tal separación de comportamientos ocurre.

Algunas implicaciones siguen del hecho que la derivada es deducida mediante una integral. Por ejemplo, supongamos que $D^\alpha x$ es diferenciable y su derivada es continua, por ello $I^\alpha \dot{x}(t) = f(t)$ es una ecuación integral del primer tipo cuya solución \dot{x} es continua por lo cual concluimos (ver [30]) que x es diferenciable y su derivada es continua. Supongamos $D^\alpha x$ es uniformemente acotada entonces $\liminf |\dot{x}| = 0$ esto pues de suponer lo contrario \dot{x} mantiene el signo y se puede aplicar Proposición 2.2.5.

Las dos propiedades siguientes, tomadas de [17], permiten una interpretación al punto (c) de la Sección anterior, y pueden ser entendidas como el Teorema Fundamental del Cálculo Fraccionario.

Propiedad 2.1.1 *Si f pertenece a $C^n[a, b]$, el espacio de funciones continuas que tienen n primeras derivadas continuas para todo $t \in [a, b]$, entonces*

$$I^\alpha D^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k. \quad (2.3)$$

Propiedad 2.1.2 Si f pertenece a $\mathcal{L}^\infty[a, b]$, el espacio de funciones acotadas para todo $t \in [a, b]$, entonces

$$D^\alpha I^\alpha f(t) = f(t). \quad (2.4)$$

La propiedad, tomada de [17], siguiente da una expresión del punto (d) de la Sección anterior en lo que concierne a los operadores integrales y es referida como la propiedad de semi grupo.

Propiedad 2.1.3 Sea $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. Si $f \in C[a, b]$, entonces para todo $t \in [a, b]$,

$$I^\alpha I^\beta f(t) = I^{\alpha+\beta} f(t). \quad (2.5)$$

La siguiente propiedad resultará de utilidad para estudiar funciones Lyapunov basadas en formas cuadráticas cuando $\alpha < 1$.

Propiedad 2.1.4 Sea $x(t)$ función vectorial diferenciable, entonces para $t \geq 0$

$$D^\alpha x^T x \leq 2x^T D^\alpha x. \quad (2.6)$$

El lector es referido a [18] para una demostración.

La siguiente propiedad relaciona el signo de derivadas de distinto orden.

Propiedad 2.1.5 Si $1 \geq \beta \geq \alpha > 0$ entonces $D^\beta f \leq 0 \Rightarrow D^\alpha f \leq 0$.

Demostración 2.1.1 Integrando $D^\beta f$ obtenemos que $I^{\beta-\alpha} D^\beta f \leq 0$. Por definición, $I^{\beta-\alpha} I^{1-\beta} Df \leq 0$, es decir, gracias a la propiedad de semigrupo de las integrales, $I^{1-\alpha} Df \leq 0$, que por definición equivale a que $D^\alpha f \leq 0$. \square .

Observación 2.1.1 La conversa no es necesariamente cierta, pero uno puede afirmar por la prueba anterior, que si $1 \geq \beta \geq \alpha > 0$ entonces $D^\alpha f \leq 0 \Rightarrow I^{\beta-\alpha} D^\beta f \leq 0$.

Observación 2.1.2 Esta propiedad tiene implicancias en el análisis de la estabilidad (acotamiento) de sistemas fraccionarios. Por ejemplo, si un sistema de orden β dado por una ecuación del tipo $D^\beta x = f(x, t)$ posee una función de Lyapunov tal que $V^{(\beta)} \leq 0$ (sistema de trayectorias acotadas), entonces los sistemas $D^\alpha x = f(x, t)$ para $0 < \alpha < \beta$ también tienen una función de Lyapunov (de hecho la misma) que satisface $V^{(\alpha)} \leq 0$.

Las siguientes son propiedades de límites para los operadores fraccionarios. Sus demostraciones están en el apéndice.

Propiedad 2.1.6 Si f es una función acotada que se anula para $t > T$ entonces $I^\alpha f \rightarrow 0$ y $D^\alpha f \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Además, $I^\alpha f$ será uniformemente continua y si $D^\alpha f$ es continua, $D^\alpha f$ será uniformemente continua.

Propiedad 2.1.7 Sea f una función acotada. Si $I^\alpha f \rightarrow L$ cuando $t \rightarrow \infty$, entonces $I_T^\alpha f \rightarrow L$ cuando $t \rightarrow \infty$.

2.2. Herramientas Matemáticas

Definimos la siguiente relación sobre matrices reales $n \times n$

Definición 2.2.1

$$A \leq B \text{ ssi } (\forall x \in \mathbb{R}^n) \ x^T A x \leq x^T B x. \quad (2.7)$$

Si $B = 0$ decimos que A es semi definida negativa y B semi definida positiva si $A = 0$. Si $B = 0$ y la desigualdad es estricta, decimos que A es definida negativa (notar que este caso uno debe restringir $\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ para que tenga sentido la desigualdad estricta). Similarmente definimos B positiva definida.

Notar que por ser escalares $x^T A x = x^T A^T x$. Luego, solo para matrices simétricas esta relación puede ser antisimétrica, y por ende una relación de orden.

2.2.1. Espacios de Funciones

Estrechamente vinculados al uso de funciones Lyapunov son los espacios de Lebesgue definidos como

$$\mathcal{L}^p(S, \mu) := \left\{ f : S \rightarrow \mathbb{R} \mid \|f\|_p \equiv \left(\int_S |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\} \quad (2.8)$$

Esto, pues si $V = V(x, t)$ es función de Lyapunov de un sistema con variable x entonces dV/dt es $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ y la importancia es que para ciertos sistemas $dV/dt = f(x)$ es una expresión explícita y bajo continuidad uniforme se puede concluir la convergencia de $f(x(t))$ a cero.

En lo que sigue, supondremos que S es subconjunto de \mathbb{R}^n y μ es la medida Lebesgue.

Los espacios Lebesgue (más específicamente, el espacio cociente con respecto al kernel de $\|\cdot\|_p$) son espacios Banach cuando $1 \leq p \leq \infty$ [33].

Puesto que existen Teoremas de Lyapunov fraccionarios es natural presentar una extensión directa al caso no entero dada por

$$\mathcal{L}_\alpha^p(\mathbb{R}) := \left\{ f : S \rightarrow \mathbb{R} \mid (I^\alpha |f|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\} \quad (2.9)$$

Evidentemente el principal es $\mathcal{L}_\alpha^1(\mathbb{R})$ y resulta ser espacio vectorial, como puede ser verificado directamente. Daremos un resultado simple que ilustra el uso de la definición anterior

Proposición 2.2.1 Supongamos un sistema de trayectorias $x(\cdot)$ para el cual existe una función V diferenciable que cumple para algún $0 < \alpha \leq 1$,

$$(i) c_1 \|x\|^2 \leq V(x, t)$$

$$(ii) D^\alpha V \leq f(t),$$

donde $f \in \mathcal{L}_\alpha^p(\mathbb{R})$, entonces $x \in \mathcal{L}_\alpha^\infty(\mathbb{R})$

Demostración 2.2.1 Integrando (ii) $V \leq V(0) + I^\alpha f(t) \leq V(0) + I^\alpha |f(t)|$. Por lo que $c_1 \|x(t)\|^2 \leq V(x, t) \leq C$ donde C es una constante independiente del tiempo, lo que implica que $\|x(t)\|_\infty = \sup \|x(t)\| \leq C$. \square

Un estudio de los espacios $\mathcal{L}_\alpha^p(\mathbb{R})$ no ha sido encontrado en la literatura revisada. Sin embargo, el lector interesado puede encontrar algunas bases en [20].

Una pregunta básica es si \mathcal{L}_α^p (entendido como el espacio cociente respecto al espacio de funciones casi siempre nulas) es un espacio normado. Sean f, g funciones escalares reales integrables. Integrando sobre un intervalo finito $[0, t]$ podemos definir un producto interno $\langle f, g \rangle := I^\alpha fg$, pues se cumple linealidad (básicamente pues la convolución lo es), definida positiva ($\langle f, f \rangle = I^\alpha f^2$ es nula sólo si $f = 0$ -modulo el kernel) y simetría (conmutatividad del producto). Por lo tanto, se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwarz $|\langle f, g \rangle|^2 \leq \langle f, f \rangle \langle g, g \rangle$ que en este caso toma la forma

$$|I^\alpha fg|^2 \leq (I^\alpha f^2)(I^\alpha g^2). \quad (2.10)$$

En particular, para $g = 1$, obtenemos la desigualdad

$$I^\alpha f^2 \geq \frac{1}{t^\alpha} |I^\alpha f|^2. \quad (2.11)$$

Podemos definir entonces $\|f\|^2 := \langle f, f \rangle$. Lo cual hace a $\mathcal{L}_\alpha^2([0, t])$ un espacio normado, con producto escalar.

Demostraremos propiedades relevantes del espacio $\mathcal{L}_\alpha^1(\mathbb{R})$ en la caracterización de sus elementos.

Proposición 2.2.2 Sea $f \in \mathcal{L}_\alpha^1(\mathbb{R})$ entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t |f| d\tau}{t} = 0$.

Demostración 2.2.2 Como $f \in \mathcal{L}_\alpha^1(\mathbb{R})$, existe $C > 0$ tal que $I^\alpha |f| < C$. Llamando $g(t) = I^\alpha [|f|](t)$ sigue que

$$I^{1-\alpha} g \leq I^{1-\alpha} C = Ct^{1-\alpha}. \quad (2.12)$$

Por lo tanto (usando propiedad de semigrupo) $0 \leq \frac{\int_0^t |f| d\tau}{t} \leq Ct^{-\alpha}$. Tomando límite se concluye que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t |f| d\tau}{t} = 0$. \square

Observación 2.2.1 De la demostración anterior puede inferirse que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t |f| d\tau}{t^\beta} = 0$ con $\beta > 1 - \alpha$.

Proposición 2.2.3 Sea f función uniformemente continua tal que $f \in \mathcal{L}_\alpha^1(\mathbb{R})$ para algún $\alpha > 1$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} f = 0$.

La proposición anterior será referida como Lema de Barbalat.

Proposición 2.2.4 Existen funciones f uniformemente continuas tal que $f \in \mathcal{L}_\alpha^1(\mathbb{R})$ para algún $\alpha < 1$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} f \neq 0$.

Si f es función uniforme continua, nunca se anula y no converge a cero, ¿ puede tener integral $\alpha < 1$ acotada? Sí, basta tomar $f(t) = \exp(-t) + \Delta(t)$ con Δ la triangular que se va espaciando. Mas aún, uno puede reemplazar Δ por una función suave menor que Δ .

Proposición 2.2.5 Sea f función uniformemente continua tal que $f \in \mathcal{L}_\alpha^1(\mathbb{R})$ para algún $\alpha < 1$, entonces $\liminf_{t \rightarrow \infty} f = 0$.

La demostración de estas tres últimas propiedades puede ser encontrada en el apéndice.

2.3. Sistemas de orden no entero

Uno de los resultados fundamentales en el estudio asintótico fue demostrado en [2] y es referido como el principio de comparación.

Lema 2.3.1 Sea $x(0) = y(0)$, $D^\beta x \geq D^\beta y$ y $0 < \beta < 1$, entonces $x(t) \geq y(t)$ para $t \geq 0$.

Es fácil ver de la demostración que el resultado es valido aún si $x(0) \geq y(0)$ y para $0 < \beta \leq 1$.

Mostraremos una diferencia básica entre un sistema entero y otro no entero. A pesar que la derivada Caputo de una constante es nula, una ecuación del tipo $D^\alpha x(t) = f(x, t)$ tal que $f(x, t) = 0$ para $t > t_0$ y $\alpha < 1$ no implica que $x(t)$ será constante a partir de $t > t_0$. En efecto, integrando obtenemos $x(t) = x(0) - I^\alpha f(x, t)$ donde a diferencia del caso entero $I^\alpha f(x, t)$ será variante aún para $t > t_0$ por la dependencia temporal del integrando $I^\alpha f(x, t) = \int_0^t K(t, \tau) f(x, \tau) d\tau$.

Soluciones de ecuaciones que usan operadores no entero

Para ecuaciones lineales invariantes en el tiempo uno puede usar la transformada de Laplace considerando que es un operador lineal, que $\mathcal{L}[D^\alpha x] = s^\alpha x - s^{\alpha-1}x(0)$, que $\mathcal{L}[I^\alpha x] = s^{-\alpha}x$ cuando $\alpha \leq 1$ y que anti transformadas de expresiones que son funciones racionales de orden conmensurado se encuentran en la literatura [17].

Como ejemplo consideremos

$$D^\alpha x = -\lambda x + f(t). \quad (2.13)$$

La única solución para $x(0)$ fijo es dada por la anti transformada de $x = \frac{s^\alpha + \lambda}{s^{\alpha-1}x(0) + f(t)}$, es decir

$$x(t) = x(0)E_\alpha(-\lambda t^\alpha) + f(t) * [t^{\alpha-1}E_{\alpha, \alpha}(-\lambda t^\alpha)]. \quad (2.14)$$

Para ecuaciones variantes en el tiempo o no lineales, un método de cierta generalidad es el de expansión en series. Consideremos, a manera de ilustración, la ecuación

$$D^\alpha x = -xf(t). \quad (2.15)$$

Supongamos $f(t) = a_0 + \sum a_i t^{i-\alpha}$ y que $x(t) = b_0 + \sum b_i t^i$. Reemplazando obtenemos $\sum c_i t^{i-\alpha} = \sum d_i t^{i-\alpha}$, igualando coeficientes obtenemos $b_i = b_i(a_i)$ y $b_0 = x(0)a(0)^{-1}$.

Correlación

Para obtener una impresión de las diferencias entre un sistema entero y uno no entero, estudiaremos la correlación $x(t) x^{(\alpha)}(t)$ en caso escalar mediante desigualdades (por ello la generalización vectorial no es directa). Supondremos continuidad y acotamiento. Este producto surge de manera natural al definir por ejemplo $2V(x, t) = x(t)^2$ entonces $DV \leq x(t)x^{(\alpha)}(t)$. Así por ejemplo, si $xx^{(\alpha)} \leq 0$ entonces tal trayectoria es acotada o si $xx^{(\alpha)} \leq -x^2$ entonces tal trayectoria converge a cero, para todo $\alpha \in (0, 1]$.

Supongamos $xx^{(\alpha)} < 0$ y $x > 0$ luego para todo $t > 0$, $x^{(\alpha)} < 0$. Si para todo $t > 0$, $\dot{x} < 0$ entonces x converge sino en algunos instantes $\dot{x} > 0$ y suponiendo continuidad de la derivada existe un instante donde $\dot{x} = 0$.

Sea $x(t) \dot{x}(t) \leq 0$ supongamos que x cambia signo en instante $T > 0$. En particular $x(T) = 0$ y supongamos sin perder generalidad que $x(T^-) < 0$ y $x(T^+) > 0$. Consecuentemente, $\dot{x}(T^-) \geq 0$ y $D\dot{x}(T^+) \leq 0$ pero esto es contradictorio con el hecho que la función crece, $\dot{x}(T) > 0$ suponiendo continuidad de la derivada. Luego x no cambia signo. Aunque para $x(t) x^{(\alpha)}(t) \leq 0$ uno puede argumentar de manera similar la conclusión no es directa, uno usa que $D^\alpha x = I^{1-\alpha}\dot{x}$ para decir que no se podría tener el cambio de signo a $D^\alpha x(T^+) < 0$.

Sea $x(t) \dot{x}(t) \leq 0$ como x no cambia signo, entonces x converge, esto pues $\dot{x}(t)$ mantiene el signo por lo que la función es monótona no creciente (no decreciente) y x que es acotada por abajo (por arriba) por cero. Si además $\dot{x}(t)$ es continua uniformemente, entonces $\dot{x}(t)$ convergerá a cero (Lema Barbalat). Luego si $\dot{x} = f(x, t)$ una condición adicional de convergencia para x a cero es que $\lim_{t \rightarrow \infty} f(a, t) = 0$ para todo t implique necesariamente $a = 0$. Por ejemplo para $\dot{x} = -f(t)x$ la condición es $f(t) > \epsilon$.

Por lo anterior, la pregunta es si para $\alpha < 1$, $x \geq 0$ y $x^{(\alpha)} \leq 0$ la función $x(t)$ converge. Notemos que al definir $y(t) = x^{(\alpha)}(t) \leq 0$ es decir $x(t) = x(0) + I^\alpha y(t)$. Por lo cual, $0 < x(t) < x(0)$ pero además $I^\alpha y$ es negativa y acotada por abajo. En resumen, $D^\alpha x \leq 0$, $x \geq 0 \Rightarrow x \rightarrow L$ ssi $I^\alpha y \leq C$, $y \geq 0 \Rightarrow I^\alpha y \rightarrow L$ (la otra implicancia es similar).

Lo anterior nos motiva a preguntarnos si la integral no entera de una función positiva es monótona, como sucede en el caso entero. Consideremos $I^\alpha f = \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$ (olvidaremos las constantes multiplicativas positivas) Estudiaremos la diferencia $I^\alpha f(t_2) - I^\alpha f(t_1)$, con $t_2 > t_1$ resulta

$$\int_0^{t_1} f(\tau) [(t_2 - \tau)^{\alpha-1} - (t_1 - \tau)^{\alpha-1}] d\tau + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.16)$$

Notemos que para $\alpha = 1$ el primer termino desaparece y el segundo es positivo y que para $\alpha < 1$ el primer termino es negativo. Por lo tanto no podemos afirmar que $I^\alpha f(t_2) - I^\alpha f(t_1) \geq 0$, aun si $f(t) \geq 0$. Una condición suficiente para ello es que $f(\cdot)$ sea creciente y positiva. En efecto, bajo el cambio de variables $s = t - \tau$ que lleva a $I^\alpha f = \int_0^t s^{\alpha-1} f(t-s) ds$ obtenemos que la diferencia se

expresa por $\int_0^{t_1} s^{\alpha-1} [f(t_2 - s) - f(t_1 - s)] ds + \int_{t_1}^{t_2} s^{\alpha-1} f(t_2 - s) ds$. Sin embargo, una función creciente y positiva tiene integral divergente (los resultado son similares para f negativa y decreciente).

Otra forma de concluir lo anterior es que si bien $\dot{x} \leq 0 \Rightarrow D^\alpha x \leq 0$, la converso no necesariamente es cierta.

En resumen, no podemos argumentar por monotonía la proposición $I^\alpha f \leq C \wedge f \geq 0 \Rightarrow I^\alpha f \rightarrow L$. Supongamos que converge. Usaremos la construcción del pulso aperiódico en (demostración Apéndice A.2.10). Como $p(t) = \sum p_i(t) + p_{n+1}(t)$, $I^\alpha p(t) = \sum I^\alpha p_i(t) + I^\alpha p_{n+1}(t)$. Si $I^\alpha p(t) \rightarrow L$, entonces $\sum I^\alpha p_i(t) \rightarrow L$. En efecto, si una función cualquiera $f(\cdot)$ converge a L , entonces la función $f(t - T)$ también converge a L para cualquier T finito. Pero por otro lado siempre existe t_δ tal que $I^\alpha p_{n+1}(t_\delta) = C$ lo cual es una contradicción, pues la igualdad $I^\alpha p(t_\delta) = \sum I^\alpha p_i(t_\delta) + C$ es incompatible con la convergencia de ambos términos a L para n suficientemente grande.

Supongamos f función positiva y uniformemente continua. Las demostraciones que $I^\alpha f \rightarrow L$ implica para $\alpha = 1$ que f converge a cero (Lema Barbalat) suelen proceder por contradicción. Para $\alpha < 1$, por 2.2.4, esto equivale a probar que si f no converge a cero, la integral no converge. Si f positiva y no converge a cero, existe $\epsilon > 0$ tal que $f > \epsilon$ se va espaciando cada vez mas o no espaciando. Si es no espaciadamente efectivamente la integral no converge (diverge, ver Ejemplo 3.1.5 y usamos no va espaciadamente implica existencia de un T y la continuidad uniforme permite razonar como en Ejemplo 3.1.4) y si es espaciadamente podemos usar como base el párrafo anterior (usando $f > p$ por continuidad uniforme para algún p adecuado) para concluir que la integral no converge. Y por ende se probaría que la contrareciproca es cierta: $I^\alpha f \rightarrow L$ implica para $\alpha = 1$ que f converge a cero).

De esta manera la proposición $D^\alpha x \leq 0, x \geq 0 \Rightarrow x \rightarrow L$ no es cierta en general cuando $\alpha < 1$.

2.4. Aspectos Computacionales

Tanto la integral como la derivada no entera anteriormente definidas, involucran teóricamente el conocimiento de todos los instantes pasados (a partir de cero) de la función a integrar o derivar, respectivamente. Si uno fuera a implementarla tal cual implicaría una memoria infinita donde se van guardando tales valores. Esto es particularmente crítico en el caso de ecuaciones diferenciales no enteras, donde el efecto memoria de la derivada la hace sustancialmente distinta a una ecuación entera donde uno considera simplemente los valores en el instante actual.

La solución práctica del problema anterior es la aproximación (local) a nivel computacional de la ecuación no entera por una entera, haciendo uso de una expansión de la variable s^α asociado a la transformada Laplace de la integral o derivada en términos de la variable entera s (método CRONE, [22]). Una pregunta interesante es si dentro del rango de validez se pueden extraer conclusiones aproximadas i.e. con margen de error aceptable) desde la ecuación entera sobre la convergencia asintótica del sistema fraccionario, pues al menos el acotamiento del sistema no entero es implicado por la del sistema entero aproximativo (esto sugiere una especie de compresión de la información).

Capítulo 3

Convergencia asintótica en Sistemas Fraccionarios

En este capítulo estableceremos condiciones que garantizan que sistemas de orden no entero o entero tengan soluciones acotadas y/o convergentes. A menos que se indique lo contrario, la derivada es Caputo, $0 < \alpha \leq 1$ y supondremos diferenciabilidad de las funciones.

Los conceptos de estabilidad y estabilidad asintótica estarán referidos a $t_0 = 0$ (ver definición en [36], la única diferencia con estabilidad usual es que esta última es válida para cualquier tiempo inicial de la condición inicial), el mismo tiempo de inicio para la derivada fraccionaria. Es importante notar que a diferencia del caso entero, el tiempo de inicio no es arbitrario y no podremos aplicar argumentos de traslación en el tiempo de la condición inicial, sin alterar la forma de las ecuaciones estudiadas. Esto se conecta con el hecho que el estado es mal definido en ecuaciones fraccionarias.

3.1. Sistema Lineal Variante

Sea $A(t)$ una matriz real y el sistema

$$x^{(\alpha)} = A(t)x \quad (3.1)$$

Para A matriz constante la condición para que x converga asintóticamente es que $\arg(\text{spec}(A)) > \alpha \frac{\pi}{2}$ [1]. En tal caso diremos que A es α -estable. En el caso escalar ($A(t) = a = cte$) según la solución (2.14) para $f(t) = 0$ se tiene que $\partial x / \partial a \leq \text{sgn}(x(0))$ al usar la monotonía de $E_\alpha(-\lambda t^\alpha)$ (ver por ejemplo [21]) por lo cual mientras mayor es a más rápido converge a cero. En el caso matricial de [1] se puede deducir lo mismo respecto a los valores propios. De esta manera la velocidad de convergencia al igual que en el caso entero está dada por los valores propios de A .

Notemos que si $\alpha \leq \beta \leq 1$ y A es β -estable entonces A es α -estable. Esto sugiere que para A variante los resultados del caso entero también serán válidos en el caso no entero. Un ejemplo positivo de esto es el siguiente teorema.

Teorema 3.1.1 *Sea $A(t)$ matriz real tal que para todo t , $A(t) \leq -\varepsilon I$ (equivalentemente $-A(t) \geq \varepsilon I$) entonces x es asintóticamente estable en $t_0 = 0$. para sistema (3.1). En particular, la convergencia es $O(t^{-\alpha})$*

Demostración 3.1.1 Por Propiedades de la derivada Caputo, $D^\alpha x^T x \leq 2x^T D^\alpha x = x^T A(t)x$. Usando hipótesis $D^\alpha x^T x \leq -2\varepsilon x^T x$. Usando Teorema 5.1 de [2] se prueba convergencia Mittag-Leffler a cero y se concluye, pues convergencia Mittag-Leffler es orden $O(t^{-\alpha})$ como es mostrado en [1]. \square

Observación 3.1.1 En la demostración anterior, ninguna restricción es hecha sobre $x(0)$ salvo la de ser finito. Por lo cual la convergencia es global cuando $A(t) \leq -\varepsilon I$ sea válido. Un resultado local se obtiene al afirmar que $x^T A(t)x \leq -\varepsilon x^T x$ se cumple para $\|x\| < c$. Esta observación estará implícita en los resultados que siguen.

Observación 3.1.2 Notemos que para una matriz simétrica $A(t) \geq \varepsilon I$ entonces $\lambda_m = \lambda_m(t) > \varepsilon$ donde λ_m es el menor valor propio de A . Esto, pues si x es cualquier vector propio de $(A - \varepsilon I)$ con valor propio λ , $A(t)x = (\lambda + \varepsilon)x$ y como $A(t) - \varepsilon I \geq 0$, entonces $\lambda \geq 0$ luego $\lambda_m = \lambda_m(t) > \varepsilon$. En particular, A es positiva definida.

Observación 3.1.3 Notemos que el sistema con $A_1 = -\varepsilon I$ tiene velocidad de convergencia dada por ε . Por otro lado la velocidad de convergencia de las soluciones para $A_2(t) \leq -\varepsilon I$ es mas rápida o igual a las de $A_1 = -\varepsilon I$. Entonces se puede inferir que $k > 1$ en kA_2 es un factor de aceleración.

En lo que sigue buscaremos una condición más débil que la del teorema anterior. Distinguiremos el caso escalar del vectorial para simplificar el análisis. Además, estudiaremos Propiedades matemáticas de las ecuaciones que nos permitirán entender y establecer la estabilidad.

3.1.1. Sistema Lineal Variante: Caso escalar

Consideremos la siguiente ecuación

$$x^{(\alpha)} = a(t)x \quad (3.2)$$

donde $a = a(t)$ es una función continua, escalar, acotada y tal que para todo t , $a(t) \leq 0$

Propiedad 3.1.1 La solución a la ecuación 3.2 existe y es única.

Demostración 3.1.2 Llamando $f(t, x) = a(t)x$, entonces f es Lipschitz respecto a su segunda variable, pues la función a es acotada (la cota de a siendo el parámetro Lipschitz). Por otro lado, f es continua en sus dos argumentos (por linealidad). Luego podemos aplicar Teorema 6.5 en [3] que establece la unicidad y existencia. \square

Nuestro principal objeto de estudio es la convergencia a cero de las soluciones. Por ello, la siguiente propiedad responde a una de las preguntas básicas.

Propiedad 3.1.2 $x = 0$ es un punto de equilibrio de 3.2 y es único.

Demostración 3.1.3 Como la derivada Caputo de una constante es cero, $x \equiv 0$ es solución de la ecuación 3.2 con condición inicial $x(0) = 0$. Y como la solución es única si $x(0) = 0$ entonces para todo $t > 0$, $x(t) = 0$ que es la definición de punto de equilibrio. Para la unicidad basta observar que para cualquier otra condición inicial el sistema tendrá dinámica, pues sólo la derivada (Caputo) de una constante es nula puesto que $a(\cdot)$ no es idénticamente nula. \square

Propiedad 3.1.3 La ecuación 3.2 es lineal respecto a la condición inicial.

Demostración 3.1.4 Supongamos que $x = x(t)$ es la solución cuando $x(0) = x_0$. Notemos que para $r \in \mathbb{R}$, $rx(t)$ satisface la ecuación 3.2, pues como $x^{(\alpha)} = a(t)x$ y como r es constante, $rx^{(\alpha)} = a(t)rx$. Y como en $rx(0) = rx_0$ y la solución es única, se deduce que $rx(t)$ es la solución cuando $rx(0) = rx_0$ (Homogeneidad).

Supongamos que $x_i = x_i(t)$ es la solución cuando $x_i(0) = x_{i0}$. Luego $x = x_1 + x_2$ satisface la ecuación 3.2 con $x(0) = x_{10} + x_{20}$ (Aditividad). \square

Observación 3.1.4 Puesto que el sistema es lineal, las propiedades asintóticas que se puedan derivar serán de carácter global. En efecto, fijando a , si para la condición inicial $x(0)$ se tiene convergencia, entonces también se tiene para la condición inicial $rx(0)$ para $r \in \mathbb{R}$ no nulo. Y viceversa, si existe $x(0)$ tal que no existe convergencia entonces no ocurrirá para ninguna condición inicial.

Propiedad 3.1.4 $x(t) = x(0) + I^\alpha[ax]$ es solución de la ecuación 3.2.

Demostración 3.1.5 Directa de Lema 6.2 en [3]. Como demostración alternativa, dada la unicidad, basta α derivarla.

Observación 3.1.5 Tal solución (ecuación) es reconocible como una ecuación integral del segundo tipo con kernel discontinuo.

Propiedad 3.1.5 El punto de equilibrio del Sistema 3.2 es uniformemente estable según Lyapunov para tiempo inicial $t_0 = 0$.

Demostración 3.1.6 Sin perder generalidad (por la Propiedad anterior), supongamos $x(0) > 0$. Por Corolario 6.16 en [3], para todo $t > 0$ se tiene $x(t) > 0$. Usando que $a(t) \leq 0$, se deduce que

$$0 < x(t) \leq x(0). \quad (3.3)$$

Tomando $\delta = \epsilon$ en la definición de estabilidad Lyapunov se concluye pues si $|x(0)| < \epsilon$ entonces $|x(t)| < |x(0)| < \epsilon$. \square

Notar que si en algún instante a es no nulo, entonces para todo $t > 0$, $0 < x(t) < x(0)$

Para la próxima propiedad, necesitaremos la siguiente proposición.

Proposición 3.1.1 Sea f acotada ($|f| < f_M$). Entonces $I^\alpha[f](t)$ es Hölder- α continua (i.e. existe constante C tal que $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$)

Demostración 3.1.7 Sin perder generalidad, supongamos $t_1 \geq t_2$.

$$|I^\alpha[f](t_1) - I^\alpha[f](t_2)|\Gamma(\alpha) = \left| \int_0^{t_2} [(t_1 - \tau)^{\alpha-1} - (t_2 - \tau)^{\alpha-1}]f(\tau)d\tau + \int_{t_2}^{t_1} (t_1 - \tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau \right|$$

Usando desigualdad triangular

$$|I^\alpha[f](t_1) - I^\alpha[f](t_2)|\Gamma(\alpha) \leq \left| \int_0^{t_2} [(t_1 - \tau)^{\alpha-1} - (t_2 - \tau)^{\alpha-1}]f(\tau)d\tau \right| + \left| \int_{t_2}^{t_1} (t_1 - \tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau \right|$$

Pasando el módulo al integrando

$$|I^\alpha[f](t_1) - I^\alpha[f](t_2)|\Gamma(\alpha) \leq \int_0^{t_2} [(t_1 - \tau)^{\alpha-1} - (t_2 - \tau)^{\alpha-1}] |f(\tau)| d\tau + \int_{t_2}^{t_1} (t_1 - \tau)^{\alpha-1} |f(\tau)| d\tau$$

Acotando f

$$|I^\alpha[f](t_1) - I^\alpha[f](t_2)|\Gamma(\alpha) \leq f_M [\int_0^{t_2} |(t_1 - \tau)^{\alpha-1} - (t_2 - \tau)^{\alpha-1}| d\tau + \int_{t_2}^{t_1} (t_1 - \tau)^{\alpha-1} d\tau]$$

Evaluando integrales

$$|I^\alpha[f](t_1) - I^\alpha[f](t_2)|\Gamma(\alpha) \leq \frac{f_M}{\alpha} [t_2^\alpha - t_1^\alpha + (t_1 - t_2)^\alpha + (t_1 - t_2)^\alpha]$$

Luego

$$|I^\alpha[f](t_1) - I^\alpha[f](t_2)| \leq \frac{2f_M}{\alpha\Gamma(\alpha)} (t_1 - t_2)^\alpha$$

Por lo que f es Hölder- α continua. \square

Corolario 3.1.1 *Si $D^\alpha f$ es acotada y $f \in C^1(\mathbb{R})$, entonces f es Hölder- α continua.*

Demostración 3.1.8 *$D^\alpha f$ acotada implica $I^\alpha D^\alpha f = f(t) - f(0)$ es Hölder- α continua. Luego, $(f(t) - f(0)) + f(0) = f(t)$ es Hölder- α continua. Esto, pues sumar una constante a una función deja invariante $|f(t_2) - f(t_1)|$ que es lo que define la continuidad Hölder- α . \square*

Observación 3.1.6 *Analogía con el caso entero: Df/dt acotada implica f uniformemente continua, $D(I f) = f$ acotada implica $I f$ uniformemente continua.*

Corolario 3.1.2 *Si df/dt es acotada, entonces $D^\alpha f$ es Hölder- $(1-\alpha)$ continua. En particular, se cumple si f es Lipschitz.*

Demostración 3.1.9 *Basta observar que $D^\alpha f = I^{1-\alpha}[df/dt]$. \square*

Propiedad 3.1.6 *Las soluciones de (3.2) son Hölder- α continua.*

Demostración 3.1.10 *Usando Corolario 3.1.1 y el hecho que $x(\cdot), a(\cdot)$ son acotadas, sigue que x es Hölder- α continua. \square*

En lo que sigue buscaremos una condición amplia de convergencia asintótica para el Sistema (3.2). Para ello necesitaremos la siguiente proposición.

Proposición 3.1.2 *Existen constantes $C_1, C_2 > 0$, tal que para todo instante $t > 0$, $I^\alpha[-ax](t) < C_1$ y $I^\alpha[-ax^2](t) < C_2$*

Demostración 3.1.11 *La primera se deduce del acotamiento de x . Para la segunda, escogiendo $2V = x^2$ sigue que $D^\alpha V \leq ax^2 \leq 0$. Integrando resulta $V(0) - V \geq I^\alpha[-ax^2]$, luego $V(0) \geq V(0) - V \geq I^\alpha[-ax^2]$. \square*

Cuando $\alpha = 1$ y $a(\cdot)$ es uniformemente continua y no converge a cero, $x(\cdot)$ converge a cero por Corolario del Lema de Barbalat [6]. Sin embargo para $\alpha < 1$ solo podemos afirmar que $\lim inf f = 0$ cuando $I^\alpha f < C$ y f es positiva.

Teorema 3.1.2 Supongamos $|x(0)| < \infty$. Si $a(\cdot)$ satisface $\lim_{t \rightarrow \infty} I^\alpha[-a] = \infty$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} x = 0$, i.e. $x = 0$ es punto de equilibrio asintóticamente estable en $t_0 = 0$.

Demostración 3.1.12 Sin perder generalidad supongamos $x(0) > 0$.

Definamos $2V = x^2$, luego $D^\alpha V \leq ax^2$ e integrando $I^\alpha D^\alpha V \leq I^\alpha ax^2$. Aplicando propiedades de Derivada Caputo obtenemos $x^2(t) \leq x^2(0) + I^\alpha ax^2(t)$. Reescribiendo $I^\alpha ax^2(t)$ como $I^\alpha[x^2(t) + x^2(\tau) - x^2(t)]a(t) = x^2(t)I^\alpha a(t) + I^\alpha[x^2(\tau) - x^2(t)]a(t)$, obtenemos

$$x^2(t) \leq \frac{x^2(0) + B}{1 + I^\alpha a(t)}, \quad (3.4)$$

donde $B = B(t) = I^\alpha[x^2(\tau) - x^2(t)]a(t)$. Como B es la integral de funciones acotadas por, digamos C , B resulta continua y para diverger por arriba tiene que tomar un tiempo infinito, pues $B = B(t)$ es menor que Ct^α que diverge en infinito.

Observemos que si $I^\alpha[-a] \rightarrow \infty$ entonces $\liminf x = 0$ pues si suponemos lo contrario existe un instante T a partir del cual $x > \epsilon$. Luego $I_T^\alpha[-ax] \rightarrow \infty$ ya que si $I^\alpha[-a] \rightarrow \infty$ entonces $I_T^\alpha[-a] \rightarrow \infty$ pues el termino ${}_0I_T^\alpha[-ax]$ es acotado. Luego $I_T^\alpha[-ax] > \epsilon I_T^\alpha[-a] \rightarrow \infty$. Pero, $I_T^\alpha[-ax] \rightarrow \infty$ contradice proposición anterior. Luego podemos definir la siguiente sucesión de instantes, $t_i \equiv \min\{t | x(t) \leq 1/i\}$. Puesto que $\liminf x = 0$ y x es continua, cada t_i existe y está bien definido y el mínimo es alcanzado, pues equivale a encontrar la primera vez que $x^2(t) = 1/i$. Por otro lado, como x no es nunca cero, la serie $(t_i)_i$ es divergente, pues como x es continua en tiempo finito siempre alcanza su mínimo, pero, la función x no tiene mínimo, pero si ínfimo que es 0. Por la elección de la serie $(t_i)_i$, $x^2(t_i) \rightarrow 0$ y $x^2(t_i) \leq x^2(t) \forall t < t_i$, por lo cual $B(t_i) < 0$ y cada t_i no se pueden espaciar infinito, pues de otro modo se contradice con $I^\alpha ax$ acotado. En efecto, si se espaciará infinito entre t_k y t_{k+1} , $x(t) > 1/k + 1$ para un intervalo infinito, por hipótesis, luego $C > I_{t_k}^\alpha[-a]x^2 > (1/(k+1))I_{t_k}^\alpha[-a] \rightarrow \infty$ lo cual es contradictorio.

Luego $B(t)$ no puede diverger entre t_k, t_{k+1} , pues es continua. Luego $B(t)$ es acotado por arriba. Tomando límites a (3.4) sigue que $x \rightarrow 0$ por álgebra de límites. \square

Observación 3.1.7 Cuando $\alpha = 1$ el teorema puede ser deducido de la solución genérica ($x = \exp(-\int_0^t a d\tau)$). La prueba anterior presenta una alternativa: como $Dx \leq 0$, x no puede crecer, B es siempre negativo y en particular es acotado por arriba, por lo cual se deduce que $x^2(t) \leq \frac{x^2(0)}{1 + I^\alpha a(t)}$, la cual converge a cero pues el denominador diverge.

Observación 3.1.8 Si $I^\alpha a$ es acotado por abajo, como x es acotado, B también resulta acotado.

Probaremos que tal condición no sólo es suficiente sino también necesaria.

Teorema 3.1.3 Si $x \rightarrow 0$, entonces $I^\alpha[-a] \rightarrow \infty$.

Demostración 3.1.13 Como $x \rightarrow 0$, $I^\alpha[-ax] \rightarrow x(0)$ (usando que $x = x(0) + I^\alpha[ax]$). Por Propiedad de límites de integrales fraccionarias, $I_T^\alpha[ax] \rightarrow x(0)$ para cualquier $T > 0$. Por otro lado como $x \rightarrow 0$, existe T_ϵ tal que para todo $t > T_\epsilon$, $|x| < \epsilon$ de lo cual se tiene que $|I_T^\alpha(ax)| \leq \epsilon |I_T^\alpha(a)|$. Puesto que ϵ puede ser tan pequeño como se quiera y la integral debe converger a $x(0)$, necesariamente $|I_T^\alpha(a)| \rightarrow \infty$ y como $a(\cdot)$ es acotado $|I^\alpha(a)| \rightarrow \infty$. \square .

Aunque el Teorema 3.1.2 asegura convergencia, no dice a que tasa convergerá a cero. La siguiente proposición permite una estimación de órdenes de convergencia.

Proposición 3.1.3 Si $(-a_1) \geq (-a_2)$ entonces $|x_1| \leq |x_2|$ cuando $x_1(0) = x_2(0) = x(0)$ y x_i es solución de (3.2) con $a = a_i$. En particular, si $[-a] \geq C > 0$ con C constante, entonces $x \leq E_\alpha(-Ct^\alpha)$.

Demostración 3.1.14 Sin perder generalidad supongamos $x(0) > 0$. Sea $x_2 = x_1 + \epsilon$, entonces

$$D^\alpha \epsilon = x_1(a_2 - a_1) + \epsilon a_2$$

con $\epsilon(0) = 0$. Como $a_2 - a_1 \geq 0$ se tiene que

$$D^\alpha \epsilon \geq \epsilon a_2.$$

La igualdad $D^\alpha \epsilon = \epsilon a_2$ tiene como solución única $\epsilon = 0$ y aplicando principio de comparación $\epsilon \geq 0$. Es decir, para todo $t > 0$

$$x_2(t) \geq x_1(t).$$

El caso particular surge de resolver la ecuación para entrada constante. \square

Observación 3.1.9 De esta manera uno puede hablar de supersoluciones o subsoluciones de (3.2). La búsqueda de funciones $a(\cdot)$ que de origen a supersoluciones junto con el hecho de que se mantiene el signo permite establecer criterios simples de convergencia. El ejemplo es un pulso por lo cual los parámetros del pulso (largo del ciclo y periodo, amplitud) permiten clasificar las funciones $a(\cdot)$ que dan origen a soluciones convergentes si es mayor o menor que un pulso dado.

Daremos ejemplos de funciones $a(\cdot)$ que cumplen $\lim_{t \rightarrow \infty} I^\alpha[-a] = \infty$.

Ejemplo 3.1.1 $a(t) = C < 0$ donde C es una constante, pues $I^\alpha[-C] = -Ct^\alpha \rightarrow \infty$.

Ejemplo 3.1.2 $a(t) = -\sin^2(t)$, Como $I^\alpha[1] \rightarrow +\infty$, sigue que $I^\alpha[\sin^2(t) + \cos^2(t)] = I^\alpha[\sin^2(t)] + I^\alpha[\cos^2(t)] \rightarrow +\infty$. Luego al menos una de las dos integrales diverge. Supongamos que una es acotada y la otra diverge entonces $I^\alpha[\cos^2 t] = I^\alpha[\cos^2 t] - I^\alpha[\sin^2 t] \rightarrow \pm\infty$ Contradiciendo el hecho que la integral fraccionaria de $\cos(t)$ es acotada (ver, por ejemplo, [4]).

Ejemplo 3.1.3 Supongamos un pulso periódico p de valor 0 y 1. Si p tiene ciclo de 100%, su integral fraccionaria diverge pues equivale a una constante. Por otro lado podemos escribir $p = p_1 + p_2$ donde p_1 es un pulso de 50% y p_2 es un pulso de 50% tal que cuando p_1 es cero p_2 es 1, y viceversa. Luego $I^\alpha p = I^\alpha p_1 + I^\alpha p_2$. Como $I^\alpha p$ diverge, $I^\alpha p_1$ o $I^\alpha p_2$ deben diverger. Intuitivamente, ambas debieran diverger. En efecto, sea T la mitad del primer ciclo de p_1 que parte en 1, una forma de verlo es reexpresar $p_i(t)$ en términos de $p_j(t - T)$, de manera que $I^\alpha p_i = I_T^\alpha p_j - I_{[0,T]}^\alpha p_2 + I_{[0,T]}^\alpha 1$, donde los dos últimos términos son acotados. Otra forma es observar $I^\alpha p_1(t + (2n + 1)T) > I^\alpha p_2(t + (2n + 1)T)$ pues p_1 tendrá más pulsos en 1 que p_2 pero $I^\alpha p_1(t + 2nT) < I^\alpha p_2(t + 2nT)$, pues p_2 tiene ahora los mismos pulsos que p_1 pero los de estos ocurrieron antes por lo que aportan menos. Luego, como al menos una de las integrales diverge y son continuas, ambas divergen. Es decir cualquier pulso con ciclo 50% tiene integral fraccionaria divergente.

Si p_3 es un pulso con ciclo $> 50\%$ también diverge, pues $I^\alpha p_3 \geq I^\alpha p_1$.

Notemos que un pulso p de ciclo 50% puede ser escrito como suma de dos pulsos de 25%. Repitiendo el argumento, concluimos que pulsos de ciclo 25% divergen.

Esto se puede repetir sucesivamente, por lo cual todo pulso periódico de ciclo finito tiene integral fraccionaria divergente.

De esto sigue que $-a(t) = p(t)$ tiene integral divergente.

Ejemplo 3.1.4 Si f es una función positiva tal que es mayor que ϵ periódicamente en un intervalo finito, entonces tiene integral fraccionaria divergente. Esto, pues existe un pulso p periódico con valores 0 y ϵ que por el ejemplo anterior diverge tal que $I^\alpha f \geq I^\alpha p$.

Ejemplo 3.1.5 Sea p un pulso 0, 1 de ciclo I/T que parte en $t = 0$ valiendo 1 y de periodo $T > I > 0$. Sea \bar{p} un pulso aperiódico que vale 1 en intervalo de largo I y 0 fuera de él y que ocurre una vez en cada intervalo de la forma $[nT, (n+1)T)$. Luego, si evaluamos en $t = T$, $I^\alpha \bar{p}(T) \geq I^\alpha p(T)$, pues el ciclo de \bar{p} ocurre justo o después del de p y las integrales empiezan a decaer una vez que termina el ciclo (Propiedad 2.1.6). Recursivamente, como cada pulso que compone \bar{p} parte justo o después que los de p y suponiendo cierto el caso en $t = (n-1)T$ (descomponiendo la integral hasta y después de $t = (n-1)T$) se tiene $I^\alpha \bar{p}(nT) \geq I^\alpha p(nT)$. Tomando límite cuando n se va a infinito y como la integral del pulso periódico diverge entonces $\limsup I^\alpha \bar{p} = \infty$. Por otro lado, como T es finito el pulso puede descender finitamente en cada intervalo $[nT, (n+1)T)$ y como en $t = nT$ la integral es no acotada, sigue que $\lim I^\alpha \bar{p} = \infty$.

Para finalizar daremos otros resultados de convergencia para la ecuación (3.2)

Proposición 3.1.4 Si $I^\alpha[-a] \rightarrow 0$ entonces $x \rightarrow x(0)$.

Demostración 3.1.15 Sin perder generalidad supongamos $x(0) = x_0 > 0$, luego $0 \leq x \leq x_0$ (ecuación (3.3)). Como $-a > 0$, $0 \leq [-xa] \leq [-x_0a]$, se tiene que $0 \leq I^\alpha[-xa] \leq x_0 I^\alpha[-a]$. Usando que $x = x_0 + I^\alpha[xa]$ el resultado sigue al tomar límites.

Observación 3.1.10 La Propiedad anterior puede interpretarse como que la condición inicial es atractiva ante pequeñas perturbaciones (perturbaciones de integral fraccionaria convergente a cero).

Observación 3.1.11 Aunque para cualquier instante $D^\alpha x \leq 0$ para $x(0) > 0$, necesariamente existen instantes (intervalos) donde $x(\cdot)$ crece.

Observación 3.1.12 Como x converge a $x(0)$ suponiendo además que a es uniforme continua, entonces necesariamente a converge a cero. La demostración sigue del lema 3 en [28].

Puesto que cuando $\alpha = 1$ se tiene que x siempre converge (acotada y monótona), una pregunta lógica es si esta Propiedad se preserva al variar α . Suponiendo una continuidad de los resultados para $0 \leq \alpha \leq 1$ (ver capítulo 2 en definiciones para una intuición) uno puede estudiar el otro caso extremo (tomado como límite por la derecha): $\alpha = 0$. Bajo condiciones de suavidad, $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I^\alpha f = f$, por lo cual nuestra solución toma la forma de $x = x(0) - ax$ es decir $x = x(0) - ax$ y notamos que las siguientes Propiedades se preservan: $x(t) \leq x(0)$ y $x(t) > 0$ (que en conjunto prueban la estabilidad para $t_0 = 0$). Por otro lado si a converge a cero, x converge a $x(0)$ lo cual corresponde a la observación

3.1.12. Pero x converge ssi a converge; esto nos sugiere que la propiedad que x siempre converja no es invariante con α . Finalmente si a diverge (y por ello la propiedad $-\lim I^{alf}a = \infty$ implica convergencia se preserva aun cuando $\alpha \rightarrow 0^+$), ϕ converge a cero.

Motivados por lo anterior mostraremos que x converge sólo si $I^\alpha|a|$ lo hace. Supongamos que x converge a L . Entonces $I^\alpha ax$ converge a $x(0) - L$. Como x converge, existe T tal que para todo $t > T$, $|x(t) - L| \leq \varepsilon$, así $(L - \varepsilon)I_T^\alpha|a| \leq I_T^\alpha|a|x \leq (L + \varepsilon)I_T^\alpha w^2$. Por Propiedad 2.1.7, $I_T^\alpha|a|x$ también converge a $L - x(0)$. En particular, $I_T^\alpha|a| \leq \frac{1}{L}I_T^\alpha|a|x + \varepsilon_1$, donde $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon)$ convergiendo a cero cuando ε converge a cero. Similarmente, usando la otra desigualdad, $I_T^\alpha|a| \geq \frac{1}{L}I_T^\alpha|a|x - \varepsilon_1$. Por otro lado, para todo $t > T$ suficientemente grande, existe ε_2 tal que $I^\alpha|a| \geq I_T^\alpha|a| + \varepsilon_2$ (esto por la convergencia a cero de $I_{[0,T]}^\alpha|a|$). Consecuentemente, existe ε_3 tal que $I^\alpha|a| \geq \frac{1}{L}I_T^\alpha|a|x + \varepsilon_3$ (y similar para otra desigualdad). Luego $I^\alpha|a|$ converge a $(L - x(0))/L$.

El siguiente resumen hace manifiesta que en la clasificación de los sistemas por su comportamiento asintótico, una cantidad integral es relevante: Si $I^\alpha|a| \rightarrow \infty$ implica $x(\cdot)$ converge a cero. Si $I^\alpha|a| \leq C$ implica $x(\cdot)$ converge a un numero distinto de cero o no converge (esto pues $I^\alpha|a| \rightarrow \infty$ es condición necesaria para convergencia a cero). Si $I^\alpha|a| \rightarrow 0$ implica $x(\cdot)$ converge a $x(0)$.

3.1.2. Sistema Lineal Variante: caso vectorial

Para la estabilidad uniforme de la solución $x = 0$ para $t_0 = 0$ o punto de equilibrio de (3.1) basta considerar la función $2V = x^T x$ puesto que entonces $V^{(\alpha)} \leq x^T Ax \leq 0$ e integrando $V(t) \leq V(0)$ de lo cual se puede deducir estabilidad para $t_0 = 0$.

Para caracterizar la estabilidad asintótica para $t_0 = 0$ del punto de equilibrio $x = 0$ de (3.1) el Teorema 3.1.1 provee una herramienta útil, pero no suficientemente general, pues en muchos casos prácticos la matriz A suele ser semi definida negativa, mientras la condición del teorema implica en particular que A sea definida positiva. Para estos casos necesitamos el siguiente teorema.

Teorema 3.1.4 *Sea $f(t)$ función escalar positiva tal que $I^\alpha[f] \rightarrow \infty$. Supongamos $\|x(0)\| < \infty$. Si $A(t) \leq -f(t)I$, entonces $x = 0$ punto de equilibrio del sistema (3.1) es asintóticamente estable para $t_0 = 0$ i.e. $x \rightarrow 0$ (I es la matriz identidad).*

Demostración 3.1.16 *Usando propiedad derivada fraccionaria y la hipótesis,*

$$2(x^T x)^{(\alpha)} \leq x^T A(t)x \leq -f(t)x^T x$$

Observando que el sistema $(x^T x)^{(\alpha)} = -f(t)x^T x$ es asintóticamente estable para $t_0 = 0$ por Teorema 3.1.2 (se puede ver como $y^{(\alpha)} = -f(t)y$ con $y(0) > 0$), el resultado sigue al usar principio de comparación. \square

Observación 3.1.13 *Teorema 3.1.1 es un caso particular de este teorema al usar $f(t) = \epsilon$ para todo t y Ejemplo 3.1.1. Esta condición implica estabilidad Mittag-Leffler (o equivalentemente, estabilidad $t^{-\alpha}$). En particular, si $f(t) > \epsilon$ para todo t se obtiene estabilidad Mittag-Leffler.*

Notar que el caso escalar está incluido en este teorema; basta tomar $f = w^2$.

Observación 3.1.14 *Como $f(t)$ eventualmente podría ser cero, este teorema no restringe la clase de matrices a ser positiva definida como Teorema 3.1.1.*

Observación 3.1.15 Supongamos que A es matriz simétrica. Una condición suficiente para que se cumpla la condición se obtiene al definir $\lambda = \lambda(A(t))$ como el mayor valor propio de A entonces $\lambda(t)$ teniendo integral fraccionaria divergente implica estabilidad asintótica para $t_0 = 0$ (pues $A \leq \lambda I$). (Sin embargo, si A es semi definida negativa, λ podría ser nula, por ello estas condiciones no son equivalentes a las del teorema).

Una condición necesaria para que se cumpla la condición del teorema anterior es que $-\lambda_m(I^\alpha[A])$ (con $\lambda_m(A)$ menor valor propio de A) tenga integral fraccionaria divergente.

Cuando A no es simétrica el razonamiento se modifica con $Re(\lambda)$ en lugar de λ .

Observación 3.1.16 Sea u vector unitario cualquiera (de orden adecuado) entonces $A(t) \leq -f(t)I$ implica, por definición, $u^T A(t)u \leq -f(t)$. Notando que si $f(t)$ converge a cero demasiado rápido su integral fraccionaria no diverge (por ejemplo si $f(t)$ es $O(e^{-t})$) se deduce que A debe tener rango completo por lo menos en una sucesión divergente de instantes para cumplir hipótesis del teorema anterior.

La condición del Teorema 3.1.4 podría ser en general no necesaria como es mostrado en [9] para $\alpha = 1 \wedge A = -ww^T$ donde es suficiente que la divergencia de la integral de la entrada ocurra en un conjunto finito de direcciones adecuadas.

Ejemplo 3.1.6 Si $A(t) \leq 0$ es periódica y uniformemente continua tal que existe algún instante para el cual $A < 0$, entonces usando el Ejemplo 3.1.3 se satisface la condición del teorema anterior.

El teorema anterior no entrega tasa de convergencia, sin embargo se puede proceder tal como en caso escalar:

Proposición 3.1.5 Si $f_1(t) \geq f_2(t)$ para todo t y $A_i(t) \leq -f_i(t)I$ entonces $x_1(t) \leq x_2(t)$ cuando $x_1(0) = x_2(0)$.

Demostración 3.1.17 Usando hipótesis

$$2(x_1^T x_1)^{(\alpha)} \leq -f_1(t)x_1^T x_1 \leq -f_2(t)x_1^T x_1.$$

El resultado sigue de usar principio de comparación respecto a la ecuación $y = -f_2(t)y$. \square

3.2. Sistema Lineal Forzado

Esta sección presenta algunos resultados de convergencia sobre sistemas lineales forzados.

Estableceremos antes un lema que simplificará el análisis:

Lema 3.2.1 Sea h una función en \mathcal{L}^1 y sea u una función acotada por u_M y convergente a cero. Sea $y = h * u$ donde $*$ es el operador convolución. Entonces y converge a cero.

Demostración 3.2.1 Como $|h(\tau)u(t - \tau)| \leq u_M|h|$ y h pertenece a \mathcal{L}^1 , la función en τ dada por $h(\tau)u(t - \tau)$ es dominada por $u_M|h|(\tau)$ que pertenece a \mathcal{L}^1 . Entonces se puede aplicar el teorema de convergencia dominada [30]

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^\infty h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^\infty h(\tau) \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t-\tau)d\tau = 0.$$

Luego y converge a 0. \square

Observación 3.2.1 Para mayor rigor se puede definir un corte sobre h al anularla después y antes $[0, t]$ y tomar límite sobre $\int_0^t h(\tau)u(t-\tau)d\tau$, y cuando se toma el límite coinciden las funciones h y h cortada.

Con este lema podemos establecer el siguiente resultado general.

Teorema 3.2.1 Sea H filtro lineal entero o fraccionario (i.e. representación en transformada Laplace de un sistema lineal tiempo invariante) conmensurado respecto a $\alpha < 1$ que es asintóticamente estable. Si la entrada u es acotada y converge a cero entonces la salida y converge a cero.

Demostración 3.2.2 Basta observar que usando [1], la respuesta al impulso pertenece a \mathcal{L}^1 para $\alpha \leq 1$ y usar el lema recién probado. En efecto en [1] se demostró BIBO estabilidad por lo cual tomando $u \equiv 1$ la convolución pasa a ser la integral de la respuesta al impulso que por ser BIBO estable es acotada (Como el filtro es asintóticamente estable, los términos asociados a condiciones iniciales convergen a cero por definición). \square

Observación 3.2.2 El teorema anterior permite desprestigiar términos \mathcal{L}^2 en sistemas lineales autónomos forzados si uno estudia convergencia asintótica.

Corolario 3.2.1 Sea el sistema (Modelo de Error Tipo II)

$$e^{(\alpha)} = -\lambda e + \phi^T w$$

$$\phi^{(\alpha)} = -ew$$

con $\lambda > 0$. Si w converge a cero, e converge a cero

Demostración 3.2.3 Para aplicar teorema anterior basta probar que ϕ es acotada, pues el filtro es asintóticamente estable. Para ello se elige $2V = \phi^2 + e^2$ por lo cual $D^\alpha V \leq -\lambda e^2$ y el sistema resulta estable para $t_0 = 0$ y por ello ϕ es acotada. \square

A continuación presentamos una generalización de un resultado que siempre es supuesto como cierto en el caso entero pero cuya demostración no fue encontrada en la literatura revisada.

Teorema 3.2.2 Sea el sistema descrito por

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) \tag{3.5}$$

donde A es acotada (en norma), $f(t)$ es una función acotada perteneciente a \mathcal{L}^2 y si $f(t) \equiv 0$, entonces el sistema es uniforme asintóticamente estable para $t_0 = 0$. Entonces el sistema es asintóticamente estable para $t_0 = 0$ para cualquier condición inicial acotada.

Demostración 3.2.4 Escogemos $V = x^T P(t)x$ donde $P(t)$ satisface las siguiente relaciones

$$0 < c_1 I \leq P(t) \leq c_2 I$$

$$-\dot{P} = PA + A^T P + Q$$

$$Q \geq c_3 I.$$

La existencia de $P(t)$ y $Q(t)$ es garantizada por Teorema (3.10) en [16] gracias a la estabilidad de la matriz $A(t)$. Entonces (usando Cauchy-Schwarz)

$$\dot{V} \leq -c_3 \|x\|^2 + c_2 \|x\| \|f\| \quad (3.6)$$

Usando que $2ab \leq a^2 + b^2$ con $a = \epsilon \|x\|$ y $b = c_2 \|f\|/\epsilon$ para $\epsilon^2 = 2(1 - \rho)c_3$ con $\rho < 1$ se deduce que $\dot{V} \leq -c_3 \rho \|x\|^2 + c_2^2 \|f\|^2 / (2\epsilon^2) \leq c_2^2 \|f\|^2 / (2\epsilon^2)$. Integrando obtenemos $V(t) \leq V(0) + c_2^2 \|f\|_2^2 / (2\epsilon^2)$, por lo cual $V(t)$ resulta acotada (y $x(t)$ también, digamos por C).

Integrando (3.6) y usando que $V(t)$ es acotada se deduce que $\|x\|_2 \leq (V(0) + c_2^2 C \|f\|_2^2 / (2\epsilon^2)) / c_3$ por lo cual x pertenece a \mathcal{L}^2 . Como f y x son acotadas, x es Lipschitz por ecuación (3.5). Aplicando Lema de Barbalat se tiene que $\|x\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. \square

Observación 3.2.3 El teorema anterior permite despreciar términos \mathcal{L}^2 en sistemas genéricos (posiblemente no lineales) toda vez que se cumpla la ecuación (3.6) cuando se estudia estabilidad asintótica. Como aplicación tenemos el resultado conocido en el contexto de observadores en que en lugar de estudiar $\dot{\phi} = w^T \phi + c^T \exp(Ft) \phi_0$ uno estudia $\dot{\phi} = w^T \phi$ cuando F es matriz asintóticamente estable constante.

Corolario 3.2.2 El sistema 3.5 satisface que si $f \in \mathcal{L}^\infty$, entonces $x \in \mathcal{L}^\infty$. En particular el sistema es BIBO estable si se define la salida como $y = c^T x$ con $c \in \mathcal{L}^\infty$. (Podemos entender ahora a $f(t)$ como una perturbación)

Demostración 3.2.5 Usando ecuación 3.6 sigue que existe una constante C_1 suficientemente grande tal que para cualquier $\|x\| > C$ se tiene que $\dot{V} \leq 0$. Luego podemos aplicar el teorema en [19] para concluir que $x(t)$ es acotada. El resto sigue de usar Cauchy-Schwarz: $|y| \leq \|c\| \|x\| \leq C_2$. \square

Corolario 3.2.3 Sea el sistema $D^\alpha x = A(t)x + f$ donde $f \in \mathcal{L}_\alpha^2$ y $A(t) \leq -\epsilon I$ para todo $t > 0$. Entonces las trayectorias del sistema son acotadas.

Demostración 3.2.6 Se tiene que $D^\alpha x^T x \leq x^T D^\alpha x = x^T A(t)x + x^T f \leq -\epsilon \|x\|^2 + \|x\| \|f\|$. Usando un razonamiento similar al del teorema anterior, sigue que $D^\alpha x^T x \leq \|f\|$ por lo cual, integrando y usando hipótesis sobre f concluimos que x es acotado. \square

Concluiremos con un tipo especial de sistema no autónomo dado por

$$D^\alpha x = f(x) + P(t)x. \quad (3.7)$$

Supondremos que $x^T f(x) \leq 0$ para cualquier x por lo cual el sistema autónomo es estable para $t_0 = 0$. Entonces si $P(t) \geq \epsilon I$ se tiene convergencia asintótica. En efecto definiendo $2V = x^T x$ implica

$$D^\alpha x^T x \leq -\epsilon x^T x.$$

Usando principio de comparación se concluye la convergencia asintótica del sistema. La condición $x^T f(x) \leq 0$ puede ser relajada a $x^T f(x) \leq \delta x^T x$ donde $\delta < \epsilon$.

3.3. Sistema No Lineal

Buscaremos resultados de estabilidad (asintótica) para $t_0 = 0$ para sistemas no necesariamente lineales usando técnicas ya desarrolladas o nuevas. En particular, nos interesa estudiar el siguiente sistema genérico no lineal

$$D^\alpha x = f(t, x), \quad (3.8)$$

donde $f(0, t) = 0$.

Observemos primero que la ecuación $D^\alpha x = \hat{f}(t)x$ puede ser interpretada como una linealización en torno a $x = 0$ de (3.8). Por ello uno obtiene así una impresión local del comportamiento; aunque una formalización es requerida para validar conclusiones.

El siguiente teorema es una generalización directa del Teorema 3.1.4

Teorema 3.3.1 *Supongamos que el sistema (3.8) tiene asociada una función V y una función γ de clase K tal que*

$$(i) V \geq \gamma(x)$$

$$(ii) D^\alpha V \leq -|f(x, t)|\gamma(x)$$

$$(iii) I^\alpha[|f(x, t)|] \rightarrow \infty \text{ para cualquier } x \text{ fijo,}$$

entonces $x \rightarrow 0$.

Demostración 3.3.1 *Usando (i) y (ii) sigue que $D^\alpha V \leq -|f(x, t)|V$. Usando principio de comparación y (iii) se concluye que el sistema (3.8) es asintóticamente estable global para $t_0 = 0$ (local si las condiciones se cumplen para una vecindad del origen). \square*

El siguiente teorema también utiliza argumentos anteriores en su prueba.

Teorema 3.3.2 *Sea un sistema (3.8) con una función definida positiva $V = V(x)$ tal que $D^\alpha V = f(V)$ con f función cóncava con $f(0) = 0$ y $f'(0) < 0$. Entonces el sistema es asintóticamente estable para $t_0 = 0$.*

Demostración 3.3.2 *De la concavidad de la función f se deduce que $D^\alpha V \leq f'(0)V$. Por principio de comparación y ya que la ecuación $D^\alpha V = f'(0)V$ es asintóticamente estable $t_0 = 0$, se deduce de la positividad de V que el sistema es asintóticamente estable $t_0 = 0$. \square*

El siguiente teorema muestra condiciones de acotamiento del mismo tipo que las planteadas en [19] aunque las demostraciones difieren.

Teorema 3.3.3 *Sea $V(x, t)$ una función diferenciable, definida positiva en x para el sistema con trayectorias $x(t) \in \mathbb{R}^n$ para $t > 0$, tal que $V(x, t) > \gamma(x)$ con γ función positiva radialmente no acotada (por ejemplo, $\|x\| = \gamma(x)$). Supongamos que $D^\alpha V$ es continua, diferenciable y $0 < \alpha \leq 1$.*

(a) *Si existe $T > 0$ tal que $D^\alpha V \leq 0$ para $t > T$ entonces el sistema es acotado (es decir, las trayectorias del sistema son acotadas).*

(b) Supongamos que $V = V(x)$. Sea Ω vecindad compacta del origen tal que $D^\alpha V \leq 0$ para todo $x \in \Omega^c$. Entonces x es acotada.

Demostración 3.3.3 (a) Llamemos $D^\alpha V(t) = f(t)$. Como T es finito y $D^\alpha V$ continua, $f(t)$ es acotada en $[0, T]$. Como es diferenciable, podemos integrar y obtener $V(t) = V(0) + I_{[0,T]}^\alpha f(t) + I_T^\alpha f(t) < C + I_T^\alpha f < C$. Esto pues $I_{[0,T]}^\alpha f(t)$ es convergente a cero (Propiedad 2.1.6) por lo cual existe T_1 tal que para todo $t > T_1$ acotamos $I_{[0,T]}^\alpha f(t) < C_1$ y como es continua entre $[T, T_1]$ su valor es acotado por C_2 ; escogiendo $C = \max(C_i)$ obtenemos la cota. Entonces $\gamma(x) < V < V(0) + C$ lo que implica x que es acotado pues γ es radialmente no acotada entonces por contrareciproca si γ es acotada, x es acotada.

(b) Si x está siempre en Ω se tiene su acotamiento. Si x está siempre en Ω^c se tiene su acotamiento (más aún se tiene estabilidad Lyapunov en $t_0 = 0$ pues en tal caso $D^\alpha V \leq 0$ que integrando resulta $V \leq V(0)$). Si x está siempre en Ω después de un tiempo finito, se tiene su acotamiento. Si x está siempre en Ω^c después de un tiempo finito se tiene por la parte (a). El caso que resta es que x este en Ω y Ω^c alternada e e interminablemente. Notemos que como Ω es compacto, V es acotada evaluada en la frontera de Ω i.e. $\partial\Omega$. Sea tal cota C_Ω . Luego cuando va a pasar a la zona Ω^c , por estar bien definida y por ser x continua, debe pasar por $\partial\Omega$. Sea T instante cualquiera de un cambio de zona hacia Ω^c , entonces

$$V(x(T)) = V(0) + I^\alpha D^\alpha V(x(T)) < C_\Omega.$$

Como C_Ω independiente del instante T se tiene que $I_{[0,T]}^\alpha D^\alpha V(T) < C_\Omega + V(0)$ con $C_\Omega + V(0)$ independiente del instante T . Para $t > T$

$V = V(0) + I_{[0,T]}^\alpha D^\alpha V + I_T^\alpha D^\alpha V < C + I_T^\alpha D^\alpha V < C$, donde C es escogido como en la parte (a). Luego x es acotada mientras permanece en Ω^c y como mientras permanece en Ω también y el instante era cualquiera, se tiene el acotamiento de $V(x)$ y, razonando como en la parte (a), el de x . \square

Observación 3.3.1 En caso $\alpha = 1$ basta usar que en Ω^c , V no crece, pero en derivada no entera esta suposición no es necesariamente cierta.

Observación 3.3.2 La parte (b) puede ser generalizada para $V = V(x, t)$ si imponemos que Ω sea invariante en el tiempo.

Los siguientes resultados son extensiones de teoremas en [27] donde se plantean condiciones sobre la integral de la derivada de una función para garantizar su estabilidad o convergencia. A priori, la vinculación surge de que la derivada fraccionaria según Caputo puede ser vista también como la integral (fraccionaria) de la derivada.

Sea $V(x(t))$ diferenciable con $V(x) \geq \gamma(x)$ con $\gamma(\cdot)$ función clase K , definida sobre las trayectorias $x(t)$ para $t \geq 0$ de un sistema dado.

El primero permite concluir estabilidad en $t_0 = 0$ aunque $D^\alpha V$ pudiese ser a veces positivo.

Proposición 3.3.1 Si existe α en $(0, 1]$ y para todo $t \geq 0$ se verifica que $I^\alpha D^\alpha V \leq 0$ para cualquier trayectoria, entonces el sistema asociado es uniformemente estable en $t_0 = 0$.

Demostración 3.3.4 $I^\alpha D^\alpha V = V(t) - V(0) \leq 0$, por lo cual $V(x(t)) \leq V(x(0))$. La estabilidad uniforme se deduce de [15]. \square

El segundo plantea una condición aun más débil.

Proposición 3.3.2 Supongamos que $V = V(t)$ es uniforme continua. Si existe α en $(0, 1]$, una sucesión (t_i) divergente tal que $|t_i - t_{i+1}| \leq T$ donde T es suficientemente pequeño (dependiendo del grado de acotamiento $T(\epsilon)$) y se verifica que $I^\alpha D^\alpha V(t_i) \leq 0$ para cualquier trayectoria entonces el sistema asociado es acotado.

Demostración 3.3.5 $I^\alpha D^\alpha V(t_i) = V(t_i) - V(0) \leq 0$ por lo cual $V(t_i) \leq V(0)$. Por continuidad uniforme para cualquier ϵ existe $\delta > 0$ tal que si $|t - t_i| < T < \delta$ entonces $|V(t) - V(t_i)| \leq \epsilon$ por lo cual $V(t) \leq \epsilon + V(0)$ y notamos que esto es siempre posible pues $t_i \rightarrow \infty$. \square

El tercero es una generalización de un resultado en [27].

Proposición 3.3.3 Si existe T tal que para todo $t > 0$, $\int_t^{t+T} \dot{V} \leq 0$ entonces el sistema es acotado.

Demostración 3.3.6 Como V es continua y $[0, T]$ es compacto, V alcanza su máximo digamos V_M (por ende finito) y se tiene que para cualquier $t \in [0, T]$, $V(t) \leq V_M$. Sea ahora $0 < t < T$, puesto que $\int_t^{t+T} \dot{V} \leq 0$ se tiene que $V(t+T) \leq V(t) \leq V_M$. Tomando $0 < t < 2T$ uno puede repetir el argumento y recursivamente concluir que puesto que para cualquier $t > 0$, $\gamma(x) \leq V(t) \leq V_M$, las trayectorias son acotadas. \square

En [27] se postula que si $\int_t^{t+T} \dot{V} \leq -\gamma(\|x\|)$, entonces se tiene convergencia a cero. Sin embargo, la demostración deja algunas dudas: ¿en que instante esta evaluado x en la función gamma? Se llega a conclusión que x debe tomar un valor u pero se ocupa como hipótesis no demostrada que x esta en $[u, c]$ (el caso sin la integral se hace por contradicción). Es posible probarlo con una hipótesis más restringida al usar gamma constante positiva:

$$\int_t^{t+T} \dot{V} \leq -\gamma V(t+T) \quad (3.9)$$

pues en tal caso, $V(t+T) \leq \frac{1}{1+\gamma} V(t)$ y desde que γ es positiva y constante, se tiene convergencia a cero, pues el factor resulta $\frac{1}{1+\gamma} < 1$.

Alternativamente, si $\int_t^{t+T} \dot{V} \leq -\gamma \|V(t)\|$, entonces se requiere que $0 < \gamma < 1$.

Llevándolo al caso no entero, si

$$I^\alpha D^\alpha V \leq -f(t)V(t), \quad (3.10)$$

con $f(t) \rightarrow \infty$ entonces V converge a cero y por ende el sistema es asintóticamente estable en $t_0 = 0$.

Finalmente podemos caracterizar la convergencia de la función $V = V(x(t))$ si $(\exists t_n) (t_n \rightarrow \infty) \forall t > t_n, (\exists 0 \leq \alpha \leq 1) I_{t_n}^\alpha D_{t_n}^\alpha V \leq 0$, pues de esta manera $V(t)$ es decreciente y acotada por abajo. Cuando además se tiene que $V(t_n) \rightarrow 0$, entonces $V(t) \rightarrow 0$. Condición suficiente para lo primero es que $D_{t_n}^\alpha V \leq 0, \forall t > t_n$ mientras que para la última $\liminf_{t \rightarrow \infty} V = 0$.

Capítulo 4

Adaptatividad Fraccionaria

En este capítulo estudiaremos comparativamente estrategias de optimización que hacen uso de ajuste continuo de parámetros mediante operadores fraccionarios. Usaremos las mismas hipótesis generales que en el capítulo anterior, es decir $0 < \alpha \leq 1$ y diferenciabilidad de todas las funciones involucradas. Los conceptos de estabilidad y estabilidad asintótica estarán referidos a $t = 0$

4.1. Método del gradiente

Recordemos que el método del gradiente plantea para minimizar una función objetivo $F(x)$ construir una sucesión dada por

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \gamma_n \nabla_x F(\mathbf{x}_n), \quad n \geq 0. \quad (4.1)$$

donde γ_n es una sucesión adecuadamente elegida. La intuición del método viene dada por generar una sucesión que sigue la dirección del gradiente entero de F (en sentido opuesto) ya que el gradiente es ortogonal a las curvas de nivel de F .

Si F es convexa, diferenciable y ∇F es Lipschitz, la sucesión efectivamente converge a $\arg \min_x F(x)$.

Uno podría en principio usar también el gradiente no entero. Sin embargo este resulta en general no ortogonal a las curvas de nivel $F(x(\tau)) = C$ pues, aunque $D^\alpha[F(x(\tau))] = 0$, la regla de la cadena no aplica en derivada no entera y no podemos desarrollarla tal como en el caso entero como $\langle \nabla_x F, dx/d\tau \rangle = 0$. Por lo tanto cuando hablemos del gradiente nos referiremos al gradiente usual.

Se plantea como generalización construir un ajuste continuo de parámetros para la función $F = F(t, x)$ (ahora dependiente del tiempo), dado por

$$D^\alpha x = -\gamma(t) \nabla_x F(t, x). \quad (4.2)$$

Cuando $F = F(x)$ y $\alpha = 1$ existen resultados generales (bajo hipótesis de suavidad y convexidad) de convergencia (débil) a $\arg \min_x F(x)$ y $|\nabla_x F|$ convergiendo a cero como función del tiempo cuando x esta restringido a un subespacio de un espacio Hilbert [5].

Tratándose de un problema de optimización, tener un grado de libertad adicional en el orden de

derivación teóricamente no empeora el comportamiento (en aspectos como tasa de convergencia o robustez). Sin embargo el método sólo sugiere una forma de ajuste; la justificaciones analíticas serán con técnicas dinámicas por ser afin al carácter continuo del ajuste.

Nos enfocaremos principalmente en la función convexa más usada, la cuadrática lineal (variante), que da origen al Modelo de Error Tipo I. Por esto usaremos notación que proviene de modelos de error (ver [6]) donde se supone que no hay acceso al vector de parámetros, pero sí a su derivada (de otra manera la solución sería trivial haciendo, por ejemplo, $x = 0$). De hecho, fue en este contexto donde fue sugerido el uso de herramientas de calculo fraccionario para mejorar el rendimiento de esquemas adaptativos [7].

4.1.1. •Modelo error tipo I

Consideremos la función de error $e(t) = \phi(t)^T w(t)$ conocida con $w(\cdot)$ función vectorial acotada y conocida (x^T denota la traspuesta del vector x). Basado en el método del gradiente (haciendo inicialmente $\gamma = 1$) sobre e^2 respecto a ϕ ajustaremos según

$$D^\alpha \phi = -ww^T \phi = -ew. \quad (4.3)$$

Observación 4.1.1 *Que el ajuste es no local cuando $\alpha < 1$ puede ser reconocido en el siguiente razonamiento: cuando $\alpha = 1$ tenemos al integrar infinitesimalmente $\phi(t + dt) - \phi(t) = -ew(t)$ que da la idea de una sucesión continua mientras que cuando $\alpha < 1$ no podemos efectuar tal integración local pues la derivada parte en $t = 0$ conociendo únicamente que $\phi(t) - \phi(0) = -ew(t)t^\alpha$ y desconocemos que valor toma la diferencia $\phi(t + dt) - \phi(t)$. Por ello hay un abuso de notación al incluir el orden no entero en el método del gradiente. Sin embargo $\phi(t) - \phi(0) = -ew(t)t^\alpha$ es válida también para $\alpha = 1$; esto quiere decir que si usamos la misma dirección $-ww^T \phi$ uno esperaría un comportamiento asintótico similar al caso entero, pues ambos satisfacen una suma vectorial similar (salvo por factor de escalamiento t^α vs t).*

Observación 4.1.2 *Si A es una matriz positiva definida y simétrica, existe W matriz tal que $A = WW^T$. Los resultados que siguen son fácilmente generalizables cuando w es un matriz. De esta manera la ecuación (4.3) puede (debe) ser entendida por el lector desde esta perspectiva más general.*

Observación 4.1.3 *Notemos que la convergencia buscada (e tienda a cero) es equivalente a que $\nabla_\phi e^2$ tienda a cero provisto que w no tienda a cero. Y este es el resultado clásico del método del gradiente.*

Claramente el mínimo de e^2 es 0 y $\arg \min_x e^2 = w(t)^\perp$ (un conjunto dependiente del tiempo). La pregunta básica es si ϕ resulta asintóticamente ortogonal a $w(t)$.

Para $\alpha = 1$ eligiendo $2V = \phi^T \phi$ se sigue que $\dot{V} = -e^2$ por lo cual $\int_0^t e^2 d\tau$ es acotada, es decir $e^2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Suponiendo continuidad uniforme de w (correspondiendo a que ∇e^2 sea Lipszchitz), se sigue que e^2 es uniformemente continua. Usando Lema de Barbalat se concluye que e converge asintóticamente a cero y en particular ϕ resulta asintóticamente ortogonal a $w(t)$.

Si ϕ converge a un valor no nulo, entonces necesariamente $I^\alpha w^2 \leq C$. Esto pues, de suponer lo contrario (que puede ocurrir aun si $I^\alpha w^2 \rightarrow \infty$), existe T tal que $\phi > \epsilon$ para algún $\epsilon > 0$ por lo tanto $\epsilon I_T^\alpha w^2 \leq I_T^\alpha e^2$ lo cual es contradictorio.

Para $0 < \alpha < 1$ se demuestra similarmente que $e^2 \in \mathcal{L}_\alpha^1(\mathbb{R})$. Sin embargo, no es suficiente que $I^\alpha e^2$ sea acotado y e uniformemente continua para concluir convergencia de e a cero (propiedades que en el caso entero bastan para concluir convergencia del error incluso en modelos de error más complejos como II y otros) según es mostrado en la siguiente proposición.

Proposición 4.1.1 *Existe una función w uniformemente continua no convergente a cero tal que cuando $0 < \alpha < 1$ la solución de (4.3) con tal entrada, tampoco converge a cero. En particular e no converge a cero.*

Demostración 4.1.1 *Caso escalar:*

Sin perder generalidad supondremos $\phi(0) > 0$ y sea $w^2 = f$ no convergente a cero y tal que $I^\alpha f < 1/2$. Sabemos que tal función existe por Proposición 2.2.4 donde se prueba que existe g función uniformemente continua tal que $I^\alpha g < C$ (en particular el Corolario del Lema de Barbalat fraccionario resulta falso) luego, escogiendo $f = (g/(2C))$, obtenemos tal función usando que \sqrt{f} es también uniformemente continua.

Notemos que $\phi = \phi(0) - I^\alpha \phi w^2$ es solución de la ecuación (4.3). Entonces como $0 < \phi < \phi(0)$, sigue que $I^\alpha \phi w^2 < \phi(0)I^\alpha w^2 < 1/2\phi(0)$ y por tanto

$$\phi(t) \geq \phi(0)(1 - I^\alpha w^2). \quad (4.4)$$

Luego, $\phi(t) \geq 1/2\phi(0)$ (en particular ϕ no converge a cero) y como w es triangular de amplitud fija, e no converge a cero.

Caso vectorial

Basta tomar $w^T = (f, 0, 0, \dots, 0)$, pues en tal caso $e = \phi_1 f$ y el estudio de la ecuación para ϕ_1 se reduce al de la parte anterior. \square

Observación 4.1.4 *Ecuaciones 3.4 y 4.4 permiten acotar el error.*

Observación 4.1.5 *Para tal w si ϕ converge, entonces $I^\alpha \phi w^2$ converge, como w^2 no converge a cero y ϕ tampoco y son uniformemente continuas el Lema de Barbalat original generalizado a integrales fraccionarias sería falso. Si el Lema de Barbalat es verdadero, ϕ no converge y e no converge.*

La siguiente proposición muestra que, como ya fue señalado en Observación 3.1.11, y no obstante hacer uso del método gradiente, la explicación de no optimalidad reside en que $\|\phi\|$ puede crecer por lo que $\lim e^2$ no está necesariamente dominado por $\liminf e^2$.

Proposición 4.1.2 *Para el sistema (4.3) se cumple que $\liminf_{t \rightarrow \infty} e^2 = 0$.*

Demostración 4.1.2 *Si $2V = \phi^T \phi$, sigue que $D^\alpha V \leq -e^2$ por lo cual $\int e^2$ es acotada. Por Propiedad 2.2.5 se concluye que $\liminf e^2 = 0$. \square .*

Observación 4.1.6 *Esto puede ser interpretado como una cuasi ortogonalidad, pues en la práctica, para cualquier $\epsilon > 0$, $e^2 > \epsilon$ sólo puede ocurrir en intervalos (por continuidad uniforme de e^2 eso ocurrirá en intervalos de largo finito; la continuidad uniforme de e^2 se deduce del acotamiento y continuidad*

uniforme de w y de ϕ , la continuidad uniforme de ϕ se tiene pues $D^\alpha \phi_i$ es acotada usando Corolario 3.1.1) que se van espaciando, donde el espaciamiento se va a infinito, pues de lo contrario su integral diverge ya que existiría T finito suficientemente grande donde siempre ocurre uno de esos intervalos y por el Ejemplo 3.1.5 divergerá. Como el espaciamiento se va a infinito, en la práctica $\lim e^2 = 0$. Por otro lado, en caso vectorial, si las entradas son funciones linealmente independientes (que no tiendan a cero) y por continuidad uno es llevado a inferir que $\liminf \|\phi\| = 0$, pues si $\phi^T w = 0$ implica $\phi = 0$. Por esta razón podemos llamar 'modelo de error' a la extensión no entera del ajuste paramétrico.

Se podría entonces establecer una ley de ajuste del tipo $D^\alpha \phi = -\phi w^2$ donde $\alpha < 1$ cuando $e > e_0$ sino $\alpha = 1$. Esto asegura convergencia asintótica del error, pues por el párrafo anterior existe un instante donde $e = e_0$ y después por usar la ley entera con condición inicial tal instante asegurando continuidad, permanecerá con $\alpha = 1$, convergerá a cero por ser ley entera, y la condición de convergencia paramétrica será igual a la del caso entero. (En presencia de perturbaciones, sin embargo, pueden ocurrir oscilaciones de α).

Cuando usamos $w = cte$ escalar se obtiene convergencia del error básicamente por que ϕ tiende a cero como mostraremos más adelante (que también fue mostrado en [8] mediante método de la Resolvente). Esto sugiere validez para una generalización más restringida del método del gradiente, a saber $F = F(x)$.

Por la Proposición 4.1.1 quedan sólo dos maneras de optimizar el error: hacer que ϕ se vuelva asintóticamente ortogonal a w o restringir el espacio de w a funciones convergentes a cero. Exploraremos un caso particular de la primera alternativa: hacer que $\|\phi\|$ tienda a cero.

Para simplificar la notación definiremos los siguientes conjuntos

Definición 4.1.1 Sea I matriz identidad, se definen los siguientes subespacios de funciones continuas y acotadas

$$ES(n, \alpha) := \{w : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n | (\exists f_w : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}) I^\alpha f_w \rightarrow \infty \wedge w w^T \geq f_w(t) I\} \quad (4.5)$$

$$EP(n, 1) := \left\{ w : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n | (\exists \epsilon, T) (\forall t > 0) \int_t^{t+T} w w^T \geq \epsilon I \right\} \quad (4.6)$$

Diremos que $w(\cdot)$ es de excitación suficiente o persistente respectivamente.

Observación 4.1.7 Se hace notar una diferencia cualitativa en la definición de ambos conjuntos: mientras la propiedad distintiva de $EP(n, 1)$ se establece para cualquier intervalo de largo fijo y finito, en la de $ES(n, \alpha)$ se recurre al límite de todo el eje temporal positivo. Esencialmente, esto responderá a que en el caso de una ecuación entera uno puede integrar localmente y como la derivada entera es local queda la diferencia entre t y $t + T$ por ello uno puede arribar (no tan directamente) a una condición local (definiendo el conjunto EP), mientras en el caso no entero (la derivada siendo no local) la diferencia vinculará el instante inicial $t = 0$ y hará que se deba considerar toda la historia precedente en la condición definiendo el conjunto ES .

Funciones perteneciendo al conjunto $EP(n, 1)$ son sabidas que al ser reemplazadas en ecuación (4.3) para orden 1 hacen que ϕ tienda a cero [9]. El siguiente teorema es la contraparte no entera.

Teorema 4.1.1 Si $w \in ES(n, \alpha)$ entonces la solución de (4.3) para tal w , tiende a cero para cualquier condición inicial (globalmente).

Demostración 4.1.3 Por Teorema 3.1.4, la condición de convergencia toma la forma $ww^T \geq f(t)I$. \square

Observación 4.1.8 Por definición, la condición es equivalente a que dado u vector constante cualquiera $(w^T u)^2 \geq f(t) \|u\|^2$. Como ejemplo negativo si $w^T = (1 \ 1)$ y $u^T = (-1 \ 1)$ no se cumple la condición pues $(w^T u) = 0$ luego $f(t) = 0$ que no tiene integral divergente.

Observación 4.1.9 Aplicando desigualdad Cauchy-Schwarz, $\|w\|^2 \|u\|^2 \geq (w^T u)^2 \geq f(t) \|u\|^2$. Luego una condición necesaria es que $\|w\|^2 \geq f(t)$. Como ejemplo negativo, $\|w\|$ cuya norma tenga integral acotada no cumple la condición.

Se debe notar que ambos conjuntos no son exhaustivos necesariamente: por ejemplo una señal de pulso con valores 0, 1 tal que la separación entre cada vez que está en 1 se va espaciando (tendiendo a infinito) no esta en $EP(1, 1)$ pero su integral(entera) diverge por lo cual la función ϕ correspondiente converge a cero.

El conjunto $EP(n, 1)$ ha sido bastante caracterizado en la literatura y por ejemplo, funciones cuasi periódicas (de las cuales las funciones periódicas son un caso especial) pertenecen a este conjunto. El siguiente lema muestra la conexión de este conjunto con $ES(n, \alpha)$.

Lema 4.1.1 Sea $w(\cdot)$ función uniformemente continua. Si $w \in EP(n, 1)$, entonces $w \in ES(n, \alpha)$ para cualquier $\alpha > 0$.

Demostración 4.1.4 Por hipótesis $\varepsilon I \leq \int_t^{t+T} ww^T$. Lo cual es por definición equivalente a $\varepsilon \|u\| \leq \int_t^{t+T} (w^T u)^2$ donde $u \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ es un vector constante. Aplicando Teorema de valor medio, puesto que $w(\cdot)$ es continua al ser uniformemente continua sigue que $(\exists \xi)$ con $t < \xi < t + T$ tal que $\varepsilon \|u\| \leq T(w^T u)^2(\xi)$ y por la continuidad también existirá un intervalo $I \subseteq (t, t + T)$ donde $\forall \tau \in I$, $(2T)^{-1} \varepsilon \|u\| \leq (w^T u)^2(\tau)$ o reescrito matricialmente

$$(2T)^{-1} \varepsilon I \leq ww^T(\tau).$$

Como esto ocurre para cualquier $t > 0$ y la continuidad es uniforme, podemos construir una sucesión divergente $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ donde $t_{i+1} = t_i + T$, que define intervalos I_i de largo fijo independiente de i y una función $f(t)$ que es nula en todas partes salvo en los intervalos I_i donde vale $(2T)^{-1} \varepsilon$. Por lo tanto

$$f(t)I \leq ww^T(t).$$

Usando el Ejemplo 3.1.5, f tiene integral divergente para cualquier $0 < \alpha \leq 1$. Por lo tanto $w \in ES(n, \alpha)$. \square

Caracterización del espacio ES

A continuación daremos Propiedades de los espacios $ES(n, \alpha)$.

Propiedad 4.1.1 Si $\alpha \leq \beta$ entonces $ES(n, \alpha) \subseteq ES(n, \beta)$

Demostración 4.1.5 Sea $w \in ES(n, \alpha)$ entonces $ww^T \geq f(t)I$ donde $I^\alpha f \rightarrow \infty$. En particular existe $T_C > 0$ a partir del cual $I^\alpha f \geq C$. Puesto que $I^\beta f = I^{\beta-\alpha} I^\alpha f$, a partir de T se integra una función divergente y para $t < T$ la integral es acotada. Luego $I^\beta f \rightarrow \infty$ es decir $w \in ES(n, \beta)$. \square

Notemos que por Lema 4.1.1, los conjuntos $ES(n, \alpha)$ son no vacíos y en particular $\bigcap_{\alpha \in [\beta, 1]} ES(n, \alpha) = ES(n, \beta) \neq \emptyset$ para $\beta > 0$.

La Propiedad siguiente muestra que los conjuntos no son todos iguales.

Propiedad 4.1.2 $\alpha < 1 \Rightarrow ES(1, \alpha) \subset ES(1, 1)$.

Demostración 4.1.6 Basta considerar que el pulso que se va espaciando está en $ES(1, 1)$ pero no en $ES(1, \alpha)$ (Proposición 2.2.4) en conjunto con la Propiedad anterior. \square

La siguiente Propiedad muestra la invarianza bajo transformaciones lineales.

Propiedad 4.1.3 Si M es una matriz constante de $n \times n$ y rango completo y $w \in ES(n, \alpha)$ entonces $Mw \in ES(n, \alpha)$.

Demostración 4.1.7 Como $w \in ES(n, \alpha)$, $Mww^T M^T \geq f M M^T$. Puesto que $M M^T > 0$ por ser M de rango completo y dado que es un matriz constante, existe $\epsilon > 0$ (menor valor propio) tal que $M M^T > \epsilon I$, por lo cual $Mww^T M^T \geq f \epsilon I$. \square

De la Propiedad anterior se puede deducir otra que relaciona los espacios $ES(n, \alpha)$ con el espacio $ES(m, \alpha)$ cuando $m < n$ usando una matriz M de rango m . La siguiente Propiedad es un caso simple pero ilustrativo.

Propiedad 4.1.4 Sea $u \in \mathbb{R}^n$ vector constante no nulo, si $w \in ES(n, \alpha)$ entonces $u^T w$ es $ES(1, \alpha)$. En particular si $w \in ES(n, \alpha)$ entonces sus componentes están en $ES(1, \alpha)$ (aunque la conversa no es cierta como se deduce de considerar un vector w constante).

Demostración 4.1.8 La primera parte sigue de usar el hecho que si $w \in ES(n, \alpha)$, entonces $(u^T w) \geq f(t)u^T u := \hat{f}$. Para la segunda basta tomar $u = e_i$ con $(e_i)_i$ la base canónica de \mathbb{R}^n . \square

La siguiente Propiedad muestra que $w \in ES(n, \alpha)$ geoméricamente es un vector que necesita recorrer cada tanto todas las direcciones.

Propiedad 4.1.5 Si w pertenece en todo instante a un subespacio propio \mathbb{R}^n , entonces $w \notin ES(n, \alpha)$.

Demostración 4.1.9 Como se trata de un subespacio propio, existe un vector u no nulo ortogonal a tal subespacio tal que $w^T u = 0$ para todo instante, por lo cual $u^T w w^T u = 0$. \square

La siguiente Propiedad establece la invarianza de $ES(n, \alpha)$ bajo traslaciones \mathcal{L}_α^1 .

Propiedad 4.1.6 Sean w_1, w_2 funciones acotadas por C y tal que $(w_1 - w_2) \in \mathcal{L}_\alpha^1$. Supongamos además que existe $f_i(t) > 0$ tal que $w_i w_i^T > f_i I$ entonces, $w_1 \in ES(n, \alpha)$ ssi $w_2 \in ES(n, \alpha)$.

Demostración 4.1.10 Demostremos que $w_1 \in ES(n, \alpha)$ implica $w_2 \in ES(n, \alpha)$. Sea x vector constante. Entonces $x^T w_2 w_2^T x = x^T w_1 w_1^T x - x^T (w_1 - w_2) x^T (w_1 + w_2)$. Usando Cauchy-Schwarz, $x^T w_2 w_2^T x \geq x^T w_1 w_1^T x - 2C x^T x \|(w_1 - w_2)\|$. Entonces $x^T w_2 w_2^T x = f_2(t) x^T x \geq x^T w_1 w_1^T x - 2C x^T x \|(w_1 - w_2)\|$. Integrando, $I^\alpha f_2(t) x^T x \geq I^\alpha (x^T w_1 w_1^T x) - 2C x^T x I^\alpha \|(w_1 - w_2)\|$. Como $w_1 \in ES(n, \alpha)$ existe f_1 tal que $I^\alpha f_2(t) x^T x \geq I^\alpha f_1 x^T x - 2C x^T x I^\alpha \|(w_1 - w_2)\|$ y puesto que $(w_1 - w_2) \in \mathcal{L}_\alpha^1$ y tomando límites, se concluye que $[I^\alpha f_2(t)] x^T x \geq [I^\alpha f_1] x^T x - \hat{C} \rightarrow \infty$, es decir, $w_2 \in ES(n, \alpha)$.

Como $(w_1 - w_2) \in \mathcal{L}_\alpha^1$ ssi $(w_2 - w_1) \in \mathcal{L}_\alpha^1$ los roles de w_i pueden intercambiarse para la otra implicancia. \square

La siguiente es una Propiedad elemental.

Propiedad 4.1.7 Si $w \in ES(n, \alpha)$ entonces $1_{t \geq T} w \in ES(n, \alpha)$ donde 1 es la función indicatriz y $T > 0 \in \mathbb{R}$.

Demostración 4.1.11 Si $w \in ES(n, \alpha)$ entonces existe f adecuada tal que $w w^T \leq f(t) I$. Definiendo $f_T(t) = 1_{t \geq T} f$ obtenemos $1_{t \geq T} w w^T \leq f_T(t) I$. \square

Una de las principales síntesis en el estudio de señales que producen convergencia paramétrica (ϕ tendiendo a cero) en esquemas adaptables, dada en [10], conecta el conjunto EP con la autovarianza R_w de la señal y su densidad espectral, donde esta última permite formalizar la idea intuitiva de una señal suficientemente rica, es decir, una señal conteniendo suficientes frecuencias (contenido armónico). La siguiente Propiedad muestra la conexión con el conjunto ES. Para ello definimos la autovarianza de w como

$$R_w(\tau) := \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_s^{s+T} w(t) w(t + \tau)^T dt \quad (4.7)$$

cuando el límite existe.

Propiedad 4.1.8 Si w es función vectorial uniformemente continua tal que $R_w(0) > 0$, entonces $w \in ES(n, \alpha)$ para todo α .

Conversamente, si $w \in ES(n, \alpha)$ con f_w asociada tal que $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_s^{s+T} f dt > 0$ entonces $R_w(0) > 0$ (por ejemplo, si $f_w(t) > \epsilon$).

Demostración 4.1.12 La primera implicancia sigue de que $R_w(0) > 0$ implica $w \in EP(n, 1)$. Usando continuidad uniforme se deduce que $w \in ES(n, \alpha)$.

La segunda es directa de la definición de $ES(n, \alpha)$. \square

La formulación en términos de autovarianza simplifica el análisis de la invarianza de los conjuntos EP (y de ES suponiendo continuidad uniforme) bajo transformaciones dinámicas como es mostrado en la siguiente propiedad que extiende el resultado en [10].

Propiedad 4.1.9 Sean u , y funciones escalares relacionadas entre sí como entrada y salida respectivamente, por un filtro asintóticamente estable continuo H fraccionario o entero. Si $u \in EP$, entonces $y \in EP$. Si u , y son vectoriales, y en adición $H^*(j\omega)$ es o no singular (si u es del mismo orden que y) o linealmente independiente o es tal que $H^*(j\omega)c = a(j\omega)d(j\omega) + b(j\omega)n(j\omega)$ donde n, d son polinomios coprimos y a, b son polinomios formados a partir del vector cualquiera c tal que

$\text{grad}(ad + bn) < \text{grad}(n)$, entonces si S_u no está concentrado en $k < n$ puntos donde n es el orden de y ($H^*(jw)c$ es de orden n).

Demostración 4.1.13 Para la parte escalar se puede demostrar que $S_y = H(jv)S_u(dv)H^*(jv)$ donde S_y y S_u refiere a la densidad espectral de y, u respectivamente, que en este caso son escalares, pues $R_y(0) = \int S_y$ (ver en [10] los detalles). Por hipótesis $R_u(0) > 0$ por lo cual $R_y(0) > 0$. Notar que podemos despreciar las condiciones, pues por [1] al ser H asintóticamente estable decaen a cero.

Para la parte vectorial supongamos por contradicción que $y \notin EP$. Entonces existe vector constante no nulo c tal que

$$\int c^T S_y c = \int |H^*c|^2 S_u = 0.$$

Por continuidad de H , $H^*(jw)c = 0$ para todo $w \in \text{supp}(S_u)$ con $\text{supp}(\mu)$ es el soporte de la medida μ . Como $|\text{supp}(S_u)| \geq n$, se sigue que $ad + bn \equiv 0$ contradiciendo la coprimidad. Por otro lado, si $H^*(jw)$ es o no singular o linealmente independiente en las n frecuencias la contradicción es directa. \square

Observación 4.1.10 Se debe notar que como no es relevante la magnitud de la señal u para concluir uno puede reducirla arbitrariamente de tal manera que puede ser entendida como un ruido cuando se la suma a una señal de referencia; en un ambiente ruidoso aditivamente no sería necesario introducir otra señal.

Íntimamente relacionado a la densidad espectral es el concepto de línea espectral en la frecuencia ν de la señal u que se define según [24] por

$$\hat{u}(\nu) := \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_s^{s+T} u(t) \exp(-j\nu t) dt. \quad (4.8)$$

Es inmediato observar que si una función $y(t) \in \mathbb{R}^n$ esta relacionada con $u(t) \in \mathbb{R}^m$ por un sistema lineal invariante en el tiempo representado por un filtro $H(s)$ y u tiene línea espectral en la frecuencia ν , entonces y tiene línea espectral en la frecuencia ν . En efecto, por propiedades de la convolución, $\hat{y}(\nu) = H(j\nu)\hat{u}(\nu)$.

Incidencia del Factor γ (ganancia adaptable)

Recordemos que disponemos de la función $\gamma = \gamma(t)$ la cual inicialmente fijamos $\gamma(t) = 1$. Una pregunta es si eligiéndola adecuadamente nos permite ampliar la clase de entradas que hacen converger a ϕ . Consideremos el caso escalar. Naturalmente por razones practicas $\gamma(t)$ debe ser acotada, digamos por C , luego $|I^\alpha[\gamma w^2]| \leq |CI^\alpha[w^2]|$. Si inicialmente w no hacía converger a ϕ entonces $I^\alpha[w^2]$ es necesariamente acotada, luego $I^\alpha[\gamma w^2]$ también lo es y por ello no amplía la clase.

Sin embargo, $\gamma = \gamma(t)$ nos permite acelerar la convergencia según puede deducirse de Teorema 3.1.3 de la siguiente manera (caso escalar): Supongamos que deseamos que ϕ converja tan rápido como lo hace con una entrada w_1 , entonces debemos hacer que $\gamma(t)w(t)^2 \geq w_1^2$.

Si en lugar de γ un escalar usamos una matriz variante definida positiva, esto no cambia la conclusión anterior.

Pero hay otra manera de usar la función $\gamma = \gamma(t)$. Desde una perspectiva general, estamos interesados en usar operadores fraccionarios en esquemas de optimización por lo que es válido el siguiente esquema:

$$D\phi = -ww^T \phi \exp\left(\frac{1}{1 + I^\alpha(e^2)}\right). \quad (4.9)$$

Teorema 4.1.2 Para el sistema (4.9), el error tiende a cero para entradas acotadas cuando w es uniformemente continua y acotada (tal que ww^T tenga valores propios acotados) y el conjunto $EP(n, 1)$ son todas las entradas que hacen converger ϕ exponencialmente a cero.

Demostración 4.1.14 Sea $2V = \phi^T \phi$, entonces $DV = -e^2 \exp\left(\frac{1}{1 + I^\alpha(\phi^2 w^2)}\right) \leq 0$. Por lo cual $e^2 \exp\left(\frac{1}{1 + I^\alpha(\phi^2 w^2)}\right)$ está en \mathcal{L}^1 y ϕ es acotada. Entonces $D\phi$ es acotada y, por consiguiente, ϕ es uniformemente continua por lo cual e es uniformemente continua. Como $1 < \exp\left(\frac{1}{1 + I^\alpha(\phi^2 w^2)}\right)$ se sigue que e^2 es \mathcal{L}^1 . Por Lema de Barbalat, el error tiende a cero.

Por otro lado como $1 < \exp\left(\frac{1}{1 + I^\alpha(e^2)}\right)$ se sigue que $DV \leq -e^2$. Usando principio de comparación y el hecho que la ecuación $DV = -e^2$ es asintóticamente estable si $w \in EP(n, 1)$ como es mostrado en [11], concluimos la estabilidad exponencial. \square .

Observación 4.1.11 En lugar de usar la función exponencial, se pudo haber usado cualquier función f tal que $f(t) \geq c > 0$ para cualquier instante t .

4.1.2. •Funcionales de Error

a) Funcionales de Error Algebraicos

Consideremos el problema de minimizar $F(e^2)$ en lugar de e^2 , donde $F(x) > 0$ para $x > 0$. El método del gradiente nos sugiere ajustar según

$$D^\alpha \phi = -ww^T \phi F'(e^2), \quad (4.10)$$

donde $F'(\cdot)$ es la derivada de F .

Proposición 4.1.3 Si $F'(x) > 0$ para cualquier $x > 0$ el sistema tiene trayectorias acotadas. Si adicionalmente w es acotado, $\alpha = 1$ y F' continua, entonces F converge a cero.

Demostración 4.1.15 Definiendo $2V = \phi^T \phi$ se concluye al derivar que $D^\alpha V \leq -e^2 F'(e^2) \leq 0$, por lo que $V = \phi^T \phi$ es acotado. Para $\alpha = 1$, $e^2 F'(e^2)$ es L_1 y como e^2 es acotado, $F'(e^2)$ es continua y resulta en particular acotada y uniformemente continua al estar definida en un compacto. Usando Barbalat y ya que e^2 es uniformemente continua se concluye que e^2 converge a cero y por ende F tiende al mínimo $F(0)$. \square

Algunos ejemplos de funciones que cumplen la proposición: \tanh , funciones de clase K , $\exp(\cdot)$, $F(e^2) = e^{2n}$ con $n \in \mathbb{N}$.

b) Funcionales de Error Dinámicos

Supondremos una relación lineal $y = \theta^T u$ donde se desconoce θ y una estimación $\hat{y} = \hat{\theta}^T u$ de y mediante una estimación de θ dada por $\hat{\theta}$.

Sea L operador lineal (diferencial, integral y/o proporcional) y $J = L[e^2] = L[(u^T \hat{\theta} - u^T \theta)^2]$. Por el método del gradiente se propone la siguiente ley de ajuste

$$D^\alpha \hat{\theta} = -\gamma L[u u^T] \hat{\theta} + L[u y]. \quad (4.11)$$

Definiendo $\phi = \hat{\theta} - \theta$, la ecuación anterior equivale a

$$D^\alpha \phi = -\gamma L[u u^T] \phi. \quad (4.12)$$

Ejemplo 4.1.1 Sea $L = I^\beta$, entonces $D^\alpha \phi = -I^\beta[u u^T] \phi$.

Notemos que para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x^T (I^\beta[u u^T])x = I^\beta[x^T u u^T x] = I^\beta[(x^T u)^2] \geq 0$, por lo que $I^\alpha[u u^T]$ es semidefinida positiva y el sistema es estable en $t_0 = 0$.

Para la convergencia asintótica, la condición se establece ahora sobre la matriz $I^\beta[u u^T]$ en lugar de $u u^T$. Es fácil ver que el rango posible de entradas se amplía respecto a los conjuntos $ES(n, \beta)$ puesto que si $u u^T \geq f(t)I$, entonces $I^\beta[u u^T] \geq I^\beta[f]I$, y dado que f diverge, entonces $I^\beta[f]$ también diverge.

Ejemplo 4.1.2 Sea $L = \frac{1}{s^{\beta+p}}$.

Definiendo Γ y δ por

$$\Gamma^{(\beta)} = -p\Gamma + u u^T,$$

$$\delta^{(\beta)} = -p\delta + u y,$$

con $\Gamma(0) = 0$ y $\delta(0) = 0$, podemos expresar las leyes de ajuste por

$$D^\alpha \hat{\theta} = -\gamma \Gamma \hat{\theta} + \delta y, \quad (4.13)$$

$$D^\alpha \phi = -\gamma \Gamma \phi. \quad (4.14)$$

El caso $\alpha = \beta = 1$ fue estudiado en [12] y el conjunto que asegura convergencia asintótica es $EP(n, 1)$. La ventaja respecto a un ajuste más simple son las tasas arbitrariamente rápidas de convergencia logradas por este método (para ello se varía la constante γ con lo cual Γ puede tener valores propios positivos arbitrariamente grandes).

Supongamos $\beta < 1$ y $\gamma = 1$. Sea x vector (constante), entonces

$$x^T \Gamma^{(\alpha)} x = -p x^T \Gamma x + x^T u u^T x.$$

Definiendo $y := x^T \Gamma x$ sigue que $y^{(\beta)} = -p y + f(t)$, donde $f(t) = x^T u u^T x \geq 0$, $y(0) = 0$. Usando la solución analítica (2.14), se concluye que $y = E_{\beta, \beta} * f > 0$. Es decir, Γ es semi definida positiva y si existe algún instante tal que $x^T u u^T x \neq 0$, entonces es definida positiva. Es fácil ver que si $u \in EP(n, 1)$ o en $ES(n, \beta)$ existe tal instante (por contradicción, si no existiesen las integrales que definen los conjuntos serían nulas). Cuando $\alpha \leq 1$ el sistema resulta estable en $t_0 = 0$ y los valores propios de la matriz Γ pueden ser modificados con la ganancia adaptiva $\gamma > 0$, por lo cual se puede tener la velocidad de la convergencia regulada.

Para convergencia asintótica, la ecuación 4.14 requiere o que $\Gamma(t) \geq \epsilon I$ o $\Gamma(t) \geq f(t)I$ con $I^\alpha f \rightarrow \infty$. En este ultimo caso basta que $E_{\beta,\beta} * uu^t \geq f(t)I$ para lo cual es suficiente que $u \in EP(n, 1)$ (Como $E_{\beta,\beta}$ es \mathcal{L}^1 y positiva su integral converge a L , $E_{\beta,\beta} * uu^t \geq nT(L-\epsilon)I$ a partir de cierto instante). En el caso $u \in ES(n, \alpha)$ requerimos adicionalmente que $I^\alpha[E_{\beta,\beta} * f_u] \rightarrow \infty$ dado que $I^\alpha[f_u] \rightarrow \infty$.

Observación 4.1.12 La ley de ajuste Kreisselmeier (caso $\alpha = \beta = 1$), comparten la misma filosofía que una ley con derivada fraccionario cualquiera, en el sentido de hacer uso de un efecto 'memoria' donde toda la información del pasado se usa para el ajuste en el presente (en el caso no entero esto viene dado en la definición de derivada) ponderando los últimos instantes mayores que los iniciales. La comparación se extiende al uso de recursos computacionales, pues ambas realizan una convolución. En efecto, se puede demostrar (ver [12] o [6]) que equivale a optimizar $J := \int_0^t \exp(-p(t-\tau))e^2(\tau)d\tau$ respecto a $\phi(t)$ donde $e(\tau) := \phi(t)w(\tau)$ por lo cual

$$\frac{d\phi}{dt} = - \int_0^t \exp(-p(t-\tau))e(t,\tau)w(\tau)d\tau$$

Una generalización no entera de este razonamiento lleva a plantear

$$\frac{d\phi}{dt} = -I^\alpha e(t,\tau)w(\tau) \quad (4.15)$$

El Kernel en vez de $\exp(-t)$ es ahora $(t)^{-\alpha}$. Se puede implementar pues $e(t,\tau) = \hat{\theta}(t)w(\tau) - y(\tau)$ (la interpretación de este error es $\hat{\theta}(t)$ es el valor de nuestra predicción en t y tiene sentido evaluar el pasado con este valor y no con valores desactualizados). Esto implica $\frac{d\phi}{dt} = -[I^\alpha w^2]\phi(t)$, la cual es estable en $t_0 = 0$ y la condición de convergencia de ϕ (y del error ϕw) es $I^\alpha w^2 \rightarrow \infty$. Para el caso vectorial basta que $I^\alpha ww^T \in EP(n, 1)$.

4.1.3. •Filtraje de Entradas

La idea es suponer la entrada u fija y modificarla de manera que se ajuste a los requerimientos que aseguran convergencia rápida.

Nuevamente supondremos una relación entrada-salida lineal como en la ecuación (4.24). Si filtramos u e y por los mismos m filtros independientes H_i (fraccionarios o enteros), obtenemos la relación $Y = U^T\theta$, donde $Y_i = H_i y$, $U_i = H_i u$. Esto lleva a un error $E = W^T\phi$ con $W = U$. Aplicando método del gradiente a $E^T E$

$$D^\alpha \phi = -\gamma WW^T \phi. \quad (4.16)$$

Puesto que los filtros son linealmente independientes, las columnas de W resultan linealmente independientes y con ello $WW^T > 0$, por lo que tasas arbitrariamente rápidas de convergencia pueden ser logradas ajustando la constante γ (ver Observación 3.1.3). Las condiciones de convergencia es que o bien $WW^T > \epsilon I$ o bien $W \in EP(n, \alpha)$.

Observación 4.1.13 Sean F_1, F_2 dos filtros lineales de ordenes distintos, sea u entrada no nula. Entonces si y_1 e y_2 son sus respectivas salidas para condiciones iniciales nulas, y_1 e y_2 son linealmente independientes (y por ello los filtros son linealmente independientes). En efecto, para $ay_1 + by_2 \equiv 0$ implica en dominio Laplace $aF_1 + bF_2 = 0$. Por otro lado, como F_1 y F_2 son de órdenes distintos y a, b

son reales no nulos, $aF_1 + bF_2$ tendrá un numerador que es un polinomio que se anula en a lo más $n = n_1 + n_2$ puntos. Luego la única manera que $ay_1 + by_2 \equiv 0$ es que $a = b = 0$. Recursivamente, se prueba para (F_i) polinomios de ordenes distintos. Que ocurre con la condición inicial? Como los filtros serán diseñados se les puede asignar valor cero. Sino como los polinomios se anulan en puntos discretos y son continuos su condición no se pierde si los filtros son estables asintóticamente.

4.1.4. •Múltiples errores

Nuestro modelo de error, de carácter vectorial con E y w vectoriales con Φ matriz cuadrada, es dado por

$$E = \Phi w. \quad (4.17)$$

Aplicando gradiente sobre $E^T E$ respecto a Φ se postula la ley de ajuste

$$\Phi^{(\alpha)} = -E w^T. \quad (4.18)$$

Usando $V = \text{tr}(\Phi^T \Phi)$ (suma finita de términos cuadráticos, por lo cual podemos aplicar Propiedad de derivada Caputo) se deduce $V^{(\alpha)} \leq -2\text{tr}(\Phi^T \Phi w w^T) = -2w^T \Phi^T \Phi w \leq 0$. Por lo cual se tiene estabilidad en $t_0 = 0$ y $\liminf E^T E = 0$. Para la convergencia asintótica, una condición suficiente sobre el vector w es que, dada cualquier matriz A semi definida positiva constante, exista una función f independiente de A cuya integral α -fraccionario diverja tal que

$$w^T A w \geq f(t) \text{tr}(A). \quad (4.19)$$

La demostración es similar a la dada para el Teorema 3.1.4. La relación de tal w con los conjuntos EP o ES es presentemente desconocida.

En este contexto un problema simple, como el ajuste de un parámetro para satisfacer más de un objetivo, puede resultar interesante para determinar el tipo de restricciones que surgen. Por ejemplo sean las componentes del vector e dadas por $e_i = \phi w_i$ y deseamos minimizar $\|e\|^2$. El método del gradiente nos sugiere

$$D^\alpha \phi = -e^T w = -\phi \left(\sum_i w_i \right)^2. \quad (4.20)$$

La ecuación resulta estable en $t_0 = 0$ ($\phi D^\alpha \phi \leq 0$). Para el caso $\alpha = 1, n = 2$ la solución $\phi = \phi(0) \exp(-\int (w_1 + w_2)^2)$ indica que aunque ϕ es acotada y siempre converge (y si $\|w\|$ tienen integral acotada y uniformemente continua, el error converge a cero) no es suficiente para convergencia de ϕ a cero que $w_i \in EP$ pues si $w_1 = -w_2$ ni ϕ ni e convergerán a cero. La condición en general resulta ser que $(\sum_i w_i(t))^2$ diverja.

4.1.5. •Modelo de Error Tipo II

En este caso la generalización de (4.2) reside en que en lugar de tener una dependencia algebraica del error respecto de ϕ será una dependencia dinámica.

Sea el sistema

$$D^\alpha e = Ae + w^T \phi, \quad (4.21)$$

donde A es una matriz cuadrada asintóticamente estable constante, w es una matriz, e y ϕ son vectores. Como antes, el problema es encontrar una ley de ajuste ($D^\beta \phi$) en función de datos conocidos (e, w). Usando la ecuación anterior se infiere que $\partial e / \partial \phi = -A^{-1}w$. Como A es negativa definida se propone para minimizar e^2

$$D^\alpha \phi = -\gamma w e. \quad (4.22)$$

Para $\alpha = 1$ y e escalar se puede demostrar e converge a cero y su continuidad uniforme. Por otro lado de/dt también converge a cero (Lema de Barbalat). De esto se deduce que $\phi^T w$ converge a cero: ϕ se ortogonaliza con w , igual que en caso modelo error tipo I. Notar que esto se logra con el mismo ajuste $D\phi = -ew$ en el sentido que e es un factor de escalamiento para la dirección w . Las condiciones sobre w de convergencia a cero de ϕ son encontradas usando precisamente que e converge a cero.

Para $\gamma = 1$ y $\alpha < 1$ usando $2V = \phi^T \phi + e^T e$ sigue que $D^\alpha V \leq e^T A e \leq 0$, por lo que el sistema es uniforme estable en $t_0 = 0$ y se puede inferir que $\liminf \|e\| = 0$ (básicamente usando el mismo argumento en Proposición 4.1.2 junto con que A es constante y negativa definida, por lo cual $\lambda_m(A)e^T e e^T A e \leq \lambda_M(A)e^T e$, donde $\lambda_{m,M}$ son valores propios mínimo y máximos constante). Por ello lo podemos llamar modelo de error (ver observación 4.1.6). Sin embargo, para encontrar condiciones de convergencia como las del caso entero esto es insuficiente.

Algunos resultados simples y escalares en el error: (a) si w se anula a partir de cierto instante T entonces ϕ converge a $\phi(0)$ (usando Propiedad A.2.1) y entonces $D^\alpha e = -\lambda e + f(t)$ con $f(t)$ que se anula después de T luego e tiende a cero. (b) Si $I^\alpha w \rightarrow 0$ entonces ϕ converge a $\phi(0)$ (c) Si w es constante, el sistema es lineal con matriz α estable, por lo cual, tanto e como ϕ tienden a cero.

Para aplicar Teorema 3.1.4 se puede intentar una transformación adecuada de coordenadas o permitir que γ sea variable. En este último caso, se obtiene la condición

$$\begin{bmatrix} A & w^T \\ \gamma w & 0 \end{bmatrix} \geq f(t)I \quad (4.23)$$

que asegura convergencia de (e, ϕ) a cero. Sin embargo, esta es una condición implícita sobre w y γ . En el primer caso, la transformación buscada debiese lograr una condición explícita sobre w , como la que es obtenida cuando $\alpha = 1$ donde es suficiente que $w \in EP(n, 1)$.

4.2. Método de Mínimos Cuadrados

Los resultados en la sección anterior indican que para optimizar funcionales de error usando operadores no enteros se requiere en general hacer converger los parámetros (representados en la condición que ϕ tienda a cero). En esta sección estudiaremos directamente la convergencia

paramétrica.

La estrategia subyacente al método Mínimos Cuadrados se basa en la observación de que un óptimo (local) es un punto donde la primera derivada se anula.

Supondremos que un sistema de entrada vectorial u y salida escalar y , puede ser representado por

$$y = \theta^T u, \quad (4.24)$$

donde $\theta \in \mathbb{R}^n$ es un vector desconocido constante.

a)

Como conocemos u e y tomando n muestras de ambos, basta la independencia lineal de las funciones u_i para encontrar exactamente θ : si U es la matriz de evaluaciones de u , e Y es el vector de evaluaciones de y , entonces $\theta = U^{-1}Y$. En efecto, sea u_{ij} evaluación en t_i de la función u_j . Como son funciones de independencia lineal para cada i , $\sum_j \theta_j u_{ij} = 0$ implica $\theta_j = 0$. Luego $U\theta = 0$ tiene solución única $\theta = 0$. En particular, si u_j son funciones linealmente independientes implica $\det(U) \neq 0$. Cuando se tienen $m < n$ muestras se puede hacer uso de la técnica clásica mínimos cuadrados (ver por ejemplo capítulo 10 de [13]) para tener un estimado de θ .

En ambos casos, un posible esquema adaptable (en el sentido de parámetros que se ajustan automáticamente) es considerar $\hat{\theta} = \hat{\theta}(t)$ constante por tramos; en cada tramo se recogen muestras entrada-salida y se actualiza el valor de $\hat{\theta}$ al final de este. Así es permitido que θ no sea constante aunque debe variar lento comparado con el largo del tramo. Se puede también generalizar para y vectorial: cada componente y_i es tratada según lo anterior (Método de mínimos cuadrados recursivos).

Las desventajas de esta solución es la discontinuidad del ajuste (aunque eventualmente se podría ir de $\hat{\theta}(k)$ a $\hat{\theta}(k+1)$ con una función suave a partir de cierto instante en el tramo) y la condición de independencia lineal sobre las entradas. La ventaja es la posibilidad de estimación exacta si los parámetros son constantes y su carácter adaptable cuando los parámetros varían; si tal variación es conocida, el largo del tramo puede ser ajustado acordemente. Otra desventaja es que la presencia de ruido puede llevar a problemas de no invertibilidad (de la matriz U). Una solución básica es promediar sobre más muestras en caso que el ruido tenga esperanza nula.

b)

Definiremos un funcional a optimizar por

$$J = I^\alpha [e^2] \quad (4.25)$$

donde $e = (\hat{\theta} - \theta)u$. Cuando $\hat{\theta} = \theta$, J es mínimo. Por otro lado el mínimo se alcanza cuando, $\frac{\partial J}{\partial \hat{\theta}} = 0$ lo que implica $I^\alpha u(y - u^T \hat{\theta}) = 0$. Despejando

$$\hat{\theta} = (I^\alpha uu^T)^{-1} I^\alpha (uy), \quad (4.26)$$

que al ser reemplazado en (4.25) hace $J = 0$. Ahora la condición de independencia lineal de las entradas puede ser relajada a invertibilidad de $I^\alpha [uu^T](t)$ para algún $t > 0$ y para algún $\alpha \in \mathbb{R}_+$. En caso que θ varíe, se puede proceder con un esquema similar al de la parte (a) o, haciendo uso del olvido de la integral fraccionario (Propiedad 2.1.6), definir $\hat{\theta}(t) = (I^\alpha [uu^T](t))^{-1} I^\alpha [uy](t)$. Por el hecho de que las señales de entrada y salida son mediadas por la integral y la integral es un 'pasa

bajos' elemental, es esperable un mejor comportamiento frente al ruido que el esquema de la parte (a) teniendo a α como variable de ajuste.

La siguiente proposición muestra nuevamente la utilidad de los conjuntos de excitación definidos en la sección anterior:

Proposición 4.2.1 Si $u \in EP(n)$ es acotada entonces siempre existirán instantes donde $I^\alpha [uu^T](t)$ es invertible. Si $u \in ES(\alpha)$ entonces $I^\alpha [uu^T](t)$ es invertible.

Demostración 4.2.1 Caso $\alpha = 1$: $u \in EP(n)$ implica $\int_t^{t+T} uu^T \geq \epsilon I$ para cualquier $t \geq 0$. Por lo tanto, $\int_0^{nT} [uu^T] \geq \epsilon nTI$. Lo cual implica que todos los valores propios de $\int_0^{nT} [uu^T]$ son positivos, por lo que $\det(\int_0^{nT} [uu^T]) \neq 0$.

Caso $\alpha < 1$, Como $u \in EP(n)$ entonces $u \in ES(n, \alpha)$. Luego $I^\alpha [uu^T] \geq f(t)I$. Considerando que $I^\alpha f \rightarrow \infty$, siempre existirán instantes donde $f \neq 0$, pues de lo contrario $I^\alpha f \rightarrow 0$ puesto que es acotada (Propiedad 2.1.6). \square

4.3. Método Dinámico

En este caso el diseño directamente usa el conocimiento de ecuaciones diferenciales asintóticamente estables en $t_0 = 0$.

a) Método Inverso

La idea es establecer propiedades deseables para la función ϕ y encontrar una ecuación diferencial factible que tenga a tal función como solución. La dificultad manifiesta de este método es en parte la misma del método de ensayo y error y en parte la de tener presentes propiedades del cálculo (esto es relevante cuando se contrasta el cálculo fraccionario con el infinitesimal). Por ello conviene restringir el espacio de búsqueda imponiendo propiedades simples pero profundas. En lo que sigue ilustraremos con un ejemplo.

La propiedad deseable principal es que (A) ϕ sea tal que para cualquier w el error e converja a cero. Dada la relación lineal $e = \phi^T w$ esta propiedad puede simplificarse en dos requerimientos: Si w converge a cero, basta que ϕ sea acotado y si w no converge a cero, necesariamente ϕ debe converger a cero.

La segunda restricción sobre la ecuación es que (B) tiene que hacer uso de funciones conocidas. En el contexto de modelos de error, las funciones disponibles son e, w . De esta manera podemos esquemáticamente escribir $\phi = \phi[e, w]$. Supondremos además que $w(\cdot)$ es uniformemente continua y acotada.

Observemos que si $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, entonces $\int M(w)d\tau$ o converge o diverge cuando $t \rightarrow \infty$. Suponiendo que $M(w)$ es uniformemente continua y que si $M(w) \rightarrow 0$ implica $w \rightarrow 0$ se sigue por Lema de Barbalat que o $w \rightarrow 0$ o que $\int M(w) \rightarrow \infty$. Ejemplos de funciones M que satisfacen lo anterior son $x^{2\alpha}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $|x|$.

Supongamos entonces que $\phi = F(\int M(w)d\tau)$. Para cumplir la condición (A) nos bastará que ϕ sea acotada y que si $\int M(w)d\tau \rightarrow \infty$ entonces $F(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$. Ejemplo de tales funciones F son $\exp(-x)$ y $1/(1+x)$.

En general, se necesita hacer un supuesto adicional de continuidad sobre w para asegurar unicidad de la solución para la ecuación anterior.

Para fijar ideas consideremos el caso escalar y la elección

$$\phi(t) = \phi(0) \frac{1}{1 + \int_0^t w^2 d\tau}.$$

Derivando y reemplazando $e = \phi w$

$$D\phi(t) = -\frac{ew}{(1 + \int w^2)^{-1}}. \quad (4.27)$$

De esta manera se satisface (B) y por tanto se genera un modelo de error asintóticamente estable con la deseable propiedad que e converge a cero para cualquier entrada uniformemente continua. (Aunque puede ser entendido como una variante método del gradiente con adecuado factor de aceleración $\gamma(t)$, el método apunta en una dirección más general).

Otro ejemplo es postular $\phi = \phi(0) \operatorname{sech}(\int w^2)$. Entonces $D\phi = -\tanh(\int_0^t w^2 d\tau)ew$ y se satisfacen las propiedades (A) y (B).

Observación 4.3.1 Dado que $\phi(0)$ es desconocido, es necesario que aparezca ϕ en el lado derecho (comprendido en la expresión de e).

Observación 4.3.2 La integral $I^\alpha f^2$ cuando $\alpha \geq 1$ también o converge o diverge; si converge, $f \rightarrow 0$ dada la continuidad uniforme. Sin embargo, no existen reglas simples de cálculo no entero para trabajar formalmente expresiones compuestas tales como la regla de la cadena: Para una ley de ajuste no entera, bastaría una función $f(\cdot)$ que se anula en menos infinito y tal que $D^\alpha f(-I^\alpha w^2) = -f(I^\alpha w^2)w^2$.

Una forma alternativa de introducir cálculo no entero es hacer uso de la función Mittag-Leffler; de esta manera se obtiene una ecuación que entrega como solución una función que es solución asociada a la ecuación fraccionaria lineal. Por ejemplo, sea $\phi(t) = \phi(0)E_\alpha(-\int_0^t w^2 d\tau)$, entonces

$$D\phi(t) = -ew \frac{Ex_\alpha(-\int_0^t w^2 d\tau)}{E_\alpha(\int_0^t w^2 d\tau)}, \quad (4.28)$$

donde $Ex(x_0) = dE/dx(x_0)$. Notar además que cuando $\alpha = 1$ recuperamos la ley del gradiente.

La selección natural de $\phi = E_\alpha(-I^\alpha w^2)$, que cuando $\alpha = 1$ es $\phi = \exp(-\int w^2)$ y da origen a la ecuación $D\phi = -ew$, no parece dar origen a $D^\alpha \phi = -ew$: según simulaciones, la solución de $D^\alpha \phi = -ew$ no presenta siempre la monotonía de $E_\alpha(\cdot)$ respecto a $I^\alpha w^2$, en el sentido que si $I^\alpha w^2$ crece/decrece, $E_\alpha(\cdot)$ debiera decrecer/crecer, aunque las discrepancias son en intervalos pequeños, de hecho, si se escoge un pulso para w , se cumple.

Veamos otra aplicación, en el caso del Modelo de Error Tipo II. Supongamos que tenemos la siguiente expresión para el error

$$D^\alpha e = \phi w - \lambda e. \quad (4.29)$$

donde $\lambda > 0$. Deseamos que $\phi = \phi(0) \exp(-\int w^2)$, pues entonces (a) ϕ siempre converge, (b) si w converge a cero, e converge a cero (c) si w no converge a cero y es uniforme continua, entonces

necesariamente ϕ converge a cero y lo mismo ocurre con e (esto dos últimos por Teorema 3.2.1). Para ello necesitamos que

$$D\phi = -\phi w^2$$

Lo cual, notando que $\phi w = D^\alpha e + \lambda e \equiv f(e)$, equivale a

$$D\phi = -f(e)w. \quad (4.30)$$

Observación 4.3.3 En la práctica esto requeriría conocer $D^\alpha e$. Cuando $\alpha < 1$ hay una sutileza adicional a sólo conocer \dot{e} , pues las derivadas fraccionarias están referidas a un tiempo inicial.

b) Método Directo

En este caso en lugar de partir de una solución deseable, partimos de una ecuación estable.

Caso escalar

Si $\lambda > 0$, entonces la ecuación $D^\alpha \phi = -\lambda \phi$ es asintóticamente estable en $t_0 = 0$. Puesto que conocemos $e = \phi w$ y w , supongamos que w nunca es cero, entonces

$$D^\alpha \phi = -\lambda e/w \quad (4.31)$$

asegura convergencia asintótica de ϕ y por ende de e (como siempre, suponemos que w es acotada) con un parámetro λ constante o variable de regulación de convergencia, para cualquier w que no cruce por cero. Una ley de ajuste alternativa debiera al menos cumplir que si $|w| > 0$, e converge siempre a cero.

Caso vectorial

Para una extensión del caso escalar, definiremos un Modelo de Error Tipo I modificado, en el cual el error puede ser llevado a la siguiente forma

$$e = W(t)\phi, \quad (4.32)$$

donde ahora $W(\cdot)$ es una matriz cuadrada y $e(\cdot)$ es un vector. Entonces si $W(\cdot)$ es invertible (para lo cual es suficiente que sus vectores columnas sean linealmente independientes como funciones o usar filtraje de entradas como en Sección 4.1.3 para asegurarnos una matriz no singular), podemos establecer que la siguiente ley

$$D^\alpha \phi = -AW^{-1}e \quad (4.33)$$

hace a ϕ tender a cero cuando A es una matriz α -estable

(c) Generalización

Se puede explorar una complejización de la ley en el siguiente sentido

$$\sum_i a_i D^{\alpha_i} \phi = F(\phi w, \dots). \quad (4.34)$$

Construiremos un ejemplo ilustrativo. Supondremos por simplicidad conmensurabilidad en los

ordenes de derivación.

$$D\phi + D^{1/2}\phi = -\phi w^2. \quad (4.35)$$

Definiendo $D^{1/2}\phi = x$, podemos escribirla como

$$D^{1/2} \begin{bmatrix} \phi \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w^2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ x \end{bmatrix} = A(t) \begin{bmatrix} \phi \\ x \end{bmatrix}$$

Aplicando el Teorema 3.1.4 se puede deducir una condición implícita sobre w que asegura convergencia asintótica. Es posible usar también Teorema 3.1.1. Un ejemplo es $w = c \neq 0$.

Observación 4.3.4 Como los operadores diferenciales no enteros son en general no conmutativos, se debe escoger adecuadamente los ordenes para que la representación de sea consistente. Por ejemplo, en el paso donde se define la variable x por $D^{1/2}\phi = x$ puede ocurrir que necesitemos $D^{5/7}\phi = x$ entonces $D^{5/7}D^{5/7}\phi$ no necesariamente es $D^{10/7}\phi$ por lo que la ecuación $D^{10/7}\phi + D^{5/7}\phi = -\phi w^2$ no tendría tal representación.

4.4. Método por Deslizamiento

Usamos aquí un ajuste de parámetros, sugerido por el control por modo deslizante capítulo 7 en [15] para el caso entero, cuya expresión es

$$D^\alpha \phi = -\operatorname{sgn}(\phi)w. \quad (4.36)$$

Mostraremos que si w es acotada y escalar,

$$\phi = \phi_0 - I^\alpha (\operatorname{sgn}(\phi) |w|) \quad (4.37)$$

es solución de la ecuación (4.36). Veamos que ϕ así definido no cambia de signo por contradicción: Supongamos, sin perder generalidad, que $\phi_0 > 0$ y que existe un primer cambio de signo en $T > 0$ donde $\phi(T) = 0$ es decir

$$\phi_0 = I_{[0,T]}^\alpha (\operatorname{sgn}(\phi) |w|)(T) = I_{[0,T]}^\alpha (|w|)(T)$$

Puesto que el integrando es positivo para $t > T$ y dado que el Kernel de la integral $K(t) = (t - \tau)^{\alpha-1}$ es decreciente con t ($\frac{dK}{dt} \leq 0$) se deduce que para $t > T$

$$I_{[0,T]}^\alpha (|w|)(t) < \phi_0$$

Supongamos que $\phi(t > T) < 0$ al menos durante un intervalo después de T . Escribiendo la solución como

$$\phi(t) = \phi_0 - I_{[0,T]}^\alpha (|w|)(t) + I_T^\alpha (|w|)(t)$$

se deduce que $\phi(t > T) > 0$. Contradicción con la suposición $\phi(t > T) < 0$, por lo cual ϕ no cambia signo.

Por lo tanto $0 \leq \phi < \phi_0$ donde la desigualdad $\phi < \phi_0$ surge del hecho que $0 \leq \phi$ por lo cual la integral en (4.37) es siempre positiva. Como ϕ y w son acotadas, tomando derivada α a la ecuación

(4.37) se obtiene la ecuación (4.36) y además resulta continua. Provisto que la solución es única se deduce que el sistema (4.36) es uniformemente estable en $t_0 = 0$.

Observación 4.4.1 Este mismo razonamiento permite una demostración alternativa a la Propiedad 3.1.5. De hecho se puede afirmar que para cualquier sistema escalar $D^\alpha \phi = -F(\phi, t)$ donde $F(\phi, t)$ este en el tercer cuadrante respecto a ϕ para todo instante, entonces ϕ no cambiara de signo.

La siguiente proposición muestra que el error $e = \phi w$ no necesariamente converge a cero.

Proposición 4.4.1 Existen funciones uniformemente continuas w para las cuales e no converge a cero.

Demostración 4.4.1 Supongamos, sin perder generalidad, $\phi_0 > 0$. Por la proposición anterior ϕ o es cero o es positivo. Luego $\phi(t) = \phi_0 - I^\alpha(|w|)$ a menos que en algún instante se anule, para lo cual se necesita $I^\alpha|w| \geq \phi_0$. Si consideramos w no convergente a cero y tal que $I^\alpha(|w|) < C < \phi_0$ (La existencia de tal función fue probada en Proposición 2.2.4). Entonces la función ϕ nunca converge o llega a cero. Como w tampoco converge a cero, e tampoco. \square

De la demostración anterior se puede deducir que si $I^\alpha|w| < \phi_0$ entonces $I^\alpha|w| \rightarrow L \Rightarrow \phi \rightarrow \phi_0 - L$. Además, si $I^\alpha|w|$ crece o decrece, ϕ decrece o crece y si $I^\alpha|w|$ no converge entonces ϕ no converge.

Para asegurar que el error se hace cero para cualquier condición finita usamos la siguiente condición y ejemplo.

Proposición 4.4.2 Si $I^\alpha(|w|) \rightarrow \infty$, entonces existe $T > 0$ tal que $\phi(T) = 0$ para cualquier condición inicial finita.

Demostración 4.4.2 Sin perder generalidad, supongamos $\phi(t) > 0$ para todo $t \geq 0$. Entonces $\phi = \phi_0 - I^\alpha \text{sgn}(w)w = \phi_0 - I^\alpha|w|$. Como $I^\alpha|w|$ diverge existe T' tal que para cualquier $t > T'$ se tiene $I^\alpha|w|(t) > \phi_0$ pero esto contradice el no cambio de signo de ϕ , luego no es cierto que $\phi > 0$ para todo t . En particular, existe al menos un $T > 0$ tal que $\phi(T) = 0$. \square

Ejemplo 4.4.1 Sea $w \in ES(1, \alpha)$. Si $|w(t)| \leq 1$ para todo t entonces $I^\alpha|w| \geq I^\alpha w^2 \rightarrow \infty$. Si no como $|w(t)| \leq C$, ya que w es acotada, entonces $|w/C| \leq 1$, por lo cual $1/CI^\alpha|w| = I^\alpha|w/C| \geq 1/C^2 I^\alpha w^2 \rightarrow \infty$.

¿ Que ocurre para $t > T$?. Mostraremos que esto se relaciona con el concepto de punto de equilibrio para el sistema. Cuando $\alpha = 1$ será consistente que $\phi(t) = 0$.

Proposición 4.4.3 Sea el sistema $D^\alpha x = f(x, t)$ con $\alpha < 1$ y $0 = f(0, t)$. Entonces el sistema en general nunca pasa por $x = 0$, o si pasa, no permanece ahí.

Demostración 4.4.3 Supongamos por contradicción que $x(0) > 0$, $x(T) = 0$, $x(t) = 0$ es una trayectoria del sistema con $t > T > 0$ (T es la primera vez en que se anula). Integrando la ecuación del sistema, $x = x(0) + I^\alpha f(x, t)$. Descomponiendo la integral como $x(t) = x(0) + I_{[0, T]}^\alpha f(x, t) + I_T^\alpha f(x, t)$. Por hipótesis, $x(t) = 0$ luego

$$0 = x(0) + I_{[0,T]}^\alpha f(x, t).$$

Lo cual es una contradicción, pues cuando α no es 1, $I_{[0,T]}^\alpha f(x, t)$ es una función en general dependiente del tiempo y decreciente a cero en infinito y no una constante. (Cuando $\alpha = 1$ no hay contradicción). \square

Observación 4.4.2 Esto es una manifestación de que para $\alpha < 1$ no podemos calificar a x como una variable de estado del sistema.

Observación 4.4.3 Tenemos que $\phi(t)$ una vez que llegue a cero no podrá permanecer ahí. Sin embargo, si ha de mantener el signo positivo, que ϕ se anule en un sólo punto tampoco sera consistente (básicamente, con una demostración similar a 4.4.2 sacando el punto $t = T$ de medida cero a las integrales), por lo que se verá forzada a regresar 'constantemente' a cero aunque no en un intervalo continuo (pues para ello $\dot{\phi} > 0$ en el extremo del intervalo que como en el intervalo $D^\alpha \phi = 0$ entonces $D^\alpha \phi > 0$ en el extremo).

4.5. Método Heurístico

Construiremos leyes adaptables en base a observaciones sobre resultados en secciones precedentes y sobre simulaciones.

En general, el ajuste de parámetros estará dado por una ecuación del tipo

$$D^\alpha \phi = F(e, w, \dots), \quad (4.38)$$

donde F es un funcional de funciones conocidas, $e = \phi w$.

Descartamos inmediatamente $D^\alpha \phi = F(w)$, pues si se integra, obtenemos $\phi = \phi(0) + I^\alpha F(w)$ y como desconocemos $\phi(0)$, no podremos construir F para hacer ϕ converja a cero, pues eso requeriría que $I^\alpha F(w) \rightarrow \phi(0)$. Descartamos igualmente que la derivada sea Riemann-Liouville o cualquiera con la propiedad que la derivada de una constante no sea cero, pues como $\phi = \hat{\theta} - \theta$, entonces $D^\alpha \phi = D^\alpha \hat{\theta} - f(t)$, donde $f(t) = D^\alpha \theta$ es desconocida y por lo tanto, conocer $D^\alpha \phi$, no nos entrega una ley de ajuste de parámetros $D^\alpha \hat{\theta}$.

Si nuestro problema fuera construir modelos estables una solución válida y elemental sería escoger para los Modelos de Error simplemente el ajuste $D^\alpha \phi = 0$. Pero la estabilidad no es el desafío de los modelos de error sino asegurar su convergencia.

I

Recordemos de la Sección 4.3 que si w convergía a cero, ϕ tenía que ser acotada. Una condición suficiente es estabilidad Lyapunov en $t_0 = 0$ para la variable ϕ . Para ello es suficiente que $\phi F(e, w, \dots) \leq 0$, pues en tal caso $D^\alpha \phi^2 \leq 0$, implicando estabilidad en $t_0 = 0$. Específicamente, $F(\phi, \dots)$ debe ser una función en el primer y tercer cuadrante en la variable ϕ implícita en la dependencia $F = F(e, \dots)$. Algunos ejemplos simples son $D^\alpha \phi = -\tanh(e)w$ y $D\phi = -ew \frac{1}{(1+e^2)}$ (esta última lleva a convergencia del error pues $\int \frac{e^2}{(1+e^2)} < C$ y e es acotada y uniformemente continua ya que ϕ es Lipschitz y w es por hipótesis uniformemente continua. Similarmente $D\phi = -ew(1+e^2)$ que lleva a $\int e^2(1+e^2) < C$ implicando convergencia del error.

Introduciendo cálculo fraccionario uno puede postular $D\phi = -ew \frac{I^\alpha(e^2)}{1+I^\alpha(e^2)}$ y concluir que si $\alpha \geq 1$, ϕ es Lipschitz para w acotada y aplicando Barbalat a $I(e^2 \frac{I^\alpha(e^2)}{1+I^\alpha(e^2)}) < C$ se concluye convergencia del error, pues $\frac{I^\alpha e^2}{1+I^\alpha(e^2)}$ converge a un número mayor que cero. Lo anterior es válido para el caso vectorial y para los otros modelos de error. Sin embargo, cuando $\alpha < 1$, tenemos igualmente que ϕ es acotada y si w es acotada, ϕ es Lipschitz, pero $I(e^2 \frac{I^\alpha e^2}{1+I^\alpha e^2}) \leq C$ no nos permite concluir convergencia del error (a menos que se pruebe que $\frac{I^\alpha e^2}{1+I^\alpha e^2}$ es o acotado inferiormente o uniformemente continuo). Por ello el siguiente refinamiento

$$D\phi = -ew \frac{\rho + I^\alpha(e^2)}{1 + I^\alpha(e^2)} \quad (4.39)$$

donde $0 < \rho < 1$, permite concluir estabilidad de ϕ en $t_0 = 0$ y convergencia del error a cero.

II

En las secciones precedentes se observó que la convergencia del error era asegurada en caso de derivada de orden no entero, mediante convergencia paramétrica $\phi \rightarrow 0$ y que a través de distintos métodos se llegaron a leyes que compartían una forma genérica del tipo $D^\alpha \phi = -ewf(t)$. Estas observaciones se vinculan por un hecho fundamental sintetizado en el siguiente razonamiento.

Una condición natural sería imponer que $\phi = 0$ sea punto de equilibrio pues intuitivamente alcanzando el objetivo, el sistema tiene que permanecer en el estado asociado. Dado que $F = F(\phi w, w, \dots)$, tal condición se traduce en principio en que $0 = F(0, \dots)$.

Proposición 4.5.1 Sea el sistema (4.38) con $\alpha < 1$ estable y F acotada para argumentos acotados, continua respecto a w y $0 = F(0, \dots)$. Entonces existe una función w uniformemente continua tal que el error e no converge a cero.

Demostración 4.5.1 Integrando (4.38) se obtiene $\phi = \phi(0) - I^\alpha F(\phi w, \dots)$. Supongamos w^2 triangular como la construida en Proposición 2.2.4. Entonces $I^\alpha F(\phi w, \dots)$ resulta acotada, pues si $w = 0$ entonces $F = 0$ y si w no es cero $F \leq F_m$, luego $I^\alpha F$ es acotada por $F_m I^\alpha p$ donde p es un función pulso construida como en Proposición 2.2.4.

Como $F = F(w)$ es continua y $F(w = 0) = 0$, se puede escoger w_M , donde $|w| \leq w_M$, suficientemente pequeño tal que $I^\alpha F(\phi w, \dots) < \phi(0)$ pues $I^\alpha F(\phi w, \dots) < F_m I^\alpha p$ y F_m se controla por continuidad con w_M . Por lo tanto, ϕ no convergerá a cero ni w lo hará por construcción, luego e tampoco. \square

Observación 4.5.1 Sistemas del tipo $D^\alpha \phi = -ewf(t)$ con $f(\cdot)$ positiva y acotada cumplen los requerimientos para F y por lo ello es posible construir funciones w que no hacen converger el error. Cuando $\alpha = 1$ esto no es cierto por el Lema de Barbalat.

Observación 4.5.2 Si en cambio hacemos $|F(0, \dots)| = |a| \neq 0$, una trayectoria ϕ aproximándose a cero, $F(\phi)$ será aproximadamente a (suponiendo continuidad de F), en particular $F(x) > a - \epsilon$ a partir de cierto instante, luego $D^\alpha \phi > a - \epsilon$ a partir de cierto instante y esto es inconsistente con una trayectoria acotada. La alternativa es que si $\phi(t) = 0$ entonces $F(0, \dots) = G(t)$ una función que cumpla $\liminf_{t \rightarrow \infty} |G(t)| = 0$

III

Lo anterior marca una nueva dirección de búsqueda. Consideremos ajustes del tipo

$$D^\beta \phi = -I^\alpha[\text{sgn}(e)w], \quad (4.40)$$

donde $\gamma = \alpha + \beta > 1$, $\alpha < 1$ y $\beta \leq 1$. Con esto $F(w = 0)$ no necesariamente es cero (si $\gamma \leq 1$ sería equivalente a $D^\gamma \phi = -\text{sgn}(e)w$) y evitamos la conclusión de la proposición anterior.

Similarmente se puede plantear $D^\beta \phi = -I^\alpha[ew]$; una ecuación parecida a la obtenida en ecuación 4.15 con la diferencia que $\phi(\cdot)$ está como función en la integral y no como número $\phi(t)$. Esto implicaría que al hacer la analogía completa, usando la derivada funcional $\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\delta J}{\delta \phi}$ y haciendo la suposición que la derivada funcional como operatoriamente similar a la derivada parcial que $\frac{d\phi}{dt} = -I^\alpha[ew]$.

Entonces $\phi = \phi(0) - I^\gamma[\text{sgn}(\phi w)w]$. Notemos que el hecho que w sea acotada implica que ϕ será continua, pues es la integral entera de una función uniformemente continua ($I^{\gamma-1}[\text{sgn}(e)w]$). Luego no es discontinua como se podría pensar por usar la función signo.

Supondremos en lo que sigue que $\phi(0) > 0$. Si $I^\gamma|w| < \phi(0)$, ϕ no cambia signo. Como $I^\gamma|w|$ converge, ϕ converge y puesto que $I^\gamma|w|$ es acotada, si w es uniformemente continua, w y e convergen a cero.

Sea $I^\alpha|w| \rightarrow \infty$ (Si $I^\alpha|w| \rightarrow \infty$ entonces $I^\gamma|w| \rightarrow \infty$). Luego existe un instante $T > 0$ $I^\alpha|w|(T) > \phi(0)$, por lo tanto ϕ cambia signo en T (esta vez no es inconsistente el cambio de signo pues $\gamma > 1$). Esto implica que $\phi = 0$ no es punto de equilibrio en el sentido que si fuera de equilibrio cuando una trayectoria llegase a este entonces se quedaría ahí (definición como en [15]). Específicamente, esto ocurre pues la integral depende de los instantes pasados: si $\phi(t_0) = 0$ no implica que $I^\alpha w^2 \phi = 0$, es decir, la derivada puede ser no nula. Por otro lado, la otra condición de equilibrio es $I^\alpha w^2 \phi = 0$; así, si inicialmente ϕ parte en cero se queda en cero (En caso vectorial, si ϕ parte ortogonal a w). Estos dos hechos muestran una inconsistencia al atribuir a la variable ϕ ser la variable de estado del sistema (4.40). Por ejemplo si $\alpha, \beta = 1$ podemos reescribir tal sistema como $D^2 \phi = -w^2 \phi$, que tiene variables $(\phi, D\phi)$ y punto de equilibrio $(0, 0)$.

Consideremos para simplificar el análisis $\beta = 1$. Mostraremos que si existe $T_0 > 0$ tal que $I^\alpha|w| > c$ para todo $t \geq T_0$, entonces ϕ oscila (cambia alternadamente de signo sin converger) o converge a cero. Supongamos lo contrario, es decir existe $T_1 > 0$ tal que para todo $t \geq T_1$ se cumple que ϕ no cambia signo, digamos positivo. Entonces $D\phi = I_{[0, T_1]}^\alpha f - I_{T_1}^\alpha |w|$. Como w es acotado, el primer término converge a cero (Propiedad 2.1.6). Por la misma razón, como $I^\alpha|w| > c$ podemos tomar $\mu > 0$ y $T_2 > T_1$ tal que $I_{T_1}^\alpha |w| > c - \mu$ para todo $t > T_2$ y escoger T_3 tal que $|I_{[0, T_1]}^\alpha f|(t) < (c - \mu)/2$, por lo cual tomando $T = \max(T_i)$ sigue que $D\phi \leq -(c - \mu)/2$ para todo $t \geq T$, lo cual hace a ϕ decreciente y de tal forma que es inconsistente con que ϕ sea positivo.

Para probar convergencia (o acotamiento), debiésemos mostrar que la amplitud de la oscilación tras cada ciclo disminuye (o se mantiene). El argumento cualitativo es que a diferencia de la integral entera (y por ello fijamos $\alpha < 1$) la integral no entera pondera los instantes pasados decrecientemente en el tiempo. Como sabemos que por continuidad la derivada tiene que anularse debe ocurrir una cancelación en la separación de integrales entre integrando positivo y negativo, evitando que la derivada vuelva a tomar los mismos valores, pues la cancelación ocurriría en valores de magnitud menor dado que integrales del tipo $|I_{[0, T]}^\alpha f|(t)$ decrecen para $t > T$. (Cuando $\alpha = 1$ tales integrales son constantes, por lo que es compatible con una solución que oscila con amplitud y frecuencia constante y no converge)

Supongamos ϕ converge (a cero). Como $\phi = \phi(0) - I^\gamma[\text{sgn}(\phi w)w]$, $I^\gamma[\text{sgn}(\phi w)w]$ debe converger a $\phi(0)$. En particular, la integral $I^\alpha[\text{sgn}(\phi w)w]$ no diverge. Luego ϕ es Lipszchitz (su derivada es acotada). Como w es acotada, $I^\alpha[\text{sgn}(\phi w)w]$ resulta uniformemente continua y por ende $D\phi$ es

uniformemente continua. Como ϕ converge, $D\phi$ converge a cero (Lema de Barbalat).

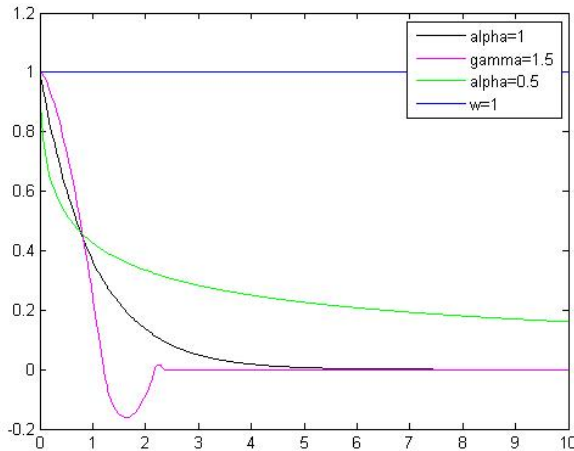


Figura 4.1: Caso $w(\cdot)$ constante

Complementaremos este análisis cualitativo con uno cuantitativo en caso escalar (Figuras 4.1 y 4.2) comparando los esquemas para $D\phi = -ew$, $D^{1/2}\phi = -ew$ y $D\phi = -I^{1/2}[\text{sgn}(e)w]$. Observamos que efectivamente ocurre un cambio de signo, pero, las oscilaciones se atenúan rápidamente comparado con los otros esquemas. Cuando $w = \text{cte}$ se pueden dar soluciones explícitas usando transformada Laplace y tablas.

4.6. Robustez

En esta sección estamos interesados más en mantener acotado el error que de hacerlo converger, cuando se introducen perturbaciones que vuelven inciertas las condiciones de operación. Recordemos que el uso de operadores fraccionarios se justifica en la práctica en parte para mejorar frente a la alternativa entera el comportamiento, siendo la robustez una variable importante de decisión.

Dos propiedades de operadores fraccionarios pueden contribuir a tal fin. Una es la No Localidad del operador diferencial, que como vimos en el capítulo 2 le confiere una resistencia a los cambios bruscos que están asociados a ruidos de frecuencias altas. La otra es la propiedad del operador integral cuando $\alpha < 1$ de cierto olvido del pasado también vista en el capítulo 2, por la cual si un ruido ocurrió en el pasado resulta atenuado en el presente.

Notemos que para $\alpha = 1$, el Corolario 3.2.2 nos garantiza acotamiento si la entrada es $EP(n, 1)$ o $ES(n, 1)$ para perturbaciones acotadas y aditivas en la ecuación de ajuste de parámetros.

Una solución simple es hacer $D^\alpha\phi = 0$. La desventaja es que cuando la perturbación desaparezca, el esquema no hace converger el error. Otra solución simple es usar uno de los esquemas postulados en las secciones precedentes. Si no hay ruido y la señal es adecuada, el esquema converge. Aunque en presencia de ruido no hay argumentación que asegure estabilidad, algunas simulaciones sugieren un mejor comportamiento (índice RMS) del diseño para $\alpha < 1$ que para el de $\alpha = 1$.

Consideraremos una perturbación del siguiente tipo $D^\alpha\phi = F(e, w, \dots) + \nu(t)$ donde $\nu(t)$ es desconocida.

Una extensión directa de un esquema adaptable robusto entero (Capítulo 8 de [6] y al menos para

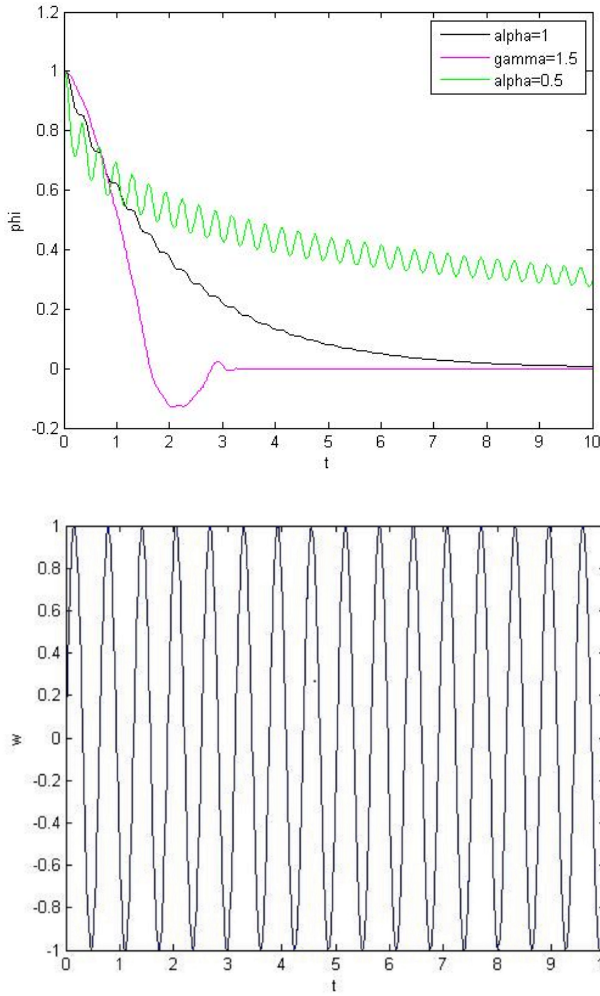


Figura 4.2: Caso $w(\cdot)$ senoidal

$\alpha = 1$ si la perturbación desaparece el sistema converge), está dada por

$$D^\alpha \phi = -\phi w^2 - |\phi w| \hat{\theta}, \quad (4.41)$$

donde $\theta = \phi + \hat{\theta}$ es una constante. Entonces

$$D^\alpha \phi^2 / 2 \leq \phi D^\alpha \phi = -\phi^2 w^2 - |\phi w| \phi (\phi + \theta).$$

Luego si $|\phi| > \theta$, el sistema es estable en $t_0 = 0$. Usando Teorema 3.3.3 sigue que ϕ es acotada. Con una perturbación aditiva acotada, resulta $D^\alpha \phi^2 \leq -\phi^2 w^2 - |\phi w| \phi (\phi + \theta) + \phi v = -\phi^2 w^2 - \phi (|\phi w| \phi + |\phi w| \theta + v)$. Suponiendo $w > \epsilon$ entonces existe una constante A tal que $|\phi| > A$ implica estabilidad, luego el sistema es acotado.

Una solución alternativa que considera ambos requisitos puede ser dada siguiendo el diseño de Zona Muerta (Capítulo 8 [6])

$$D^\alpha \phi = \begin{cases} -\phi w^2 & \text{si } |e| < e_m \\ 0 & \text{sino} \end{cases} \quad (4.42)$$

Observando que si $w > \epsilon$, $|e| \leq e_m$ define una región compacta para ϕ y usando Teorema 3.3.3 probamos acotamiento (esta vez podemos usar siguiendo la observación 4.4.1 para concluir que ϕ no cambia signo y usar esta función como V o simplemente definir $2V = \phi^2$). Si la perturbación no ocurre o desaparece después de cierto tiempo y e_m es adecuadamente grande ϕ tenderá a cero.

Por otro lado notemos que si imponemos $w > \epsilon$ podemos usar el esquema de la ecuación 4.31 y obtenemos por BIBO estabilidad ([1]) el acotamiento del error pues el sistema queda de la forma $D^\alpha \phi = -\phi + \nu(t)$ y puesto que $\nu(t)$ sea acotada, ϕ lo será.

La siguiente es conocida como modificación $\sigma - \theta$ en Capítulo 8 de [6] para el caso entero supone primero el error ruidoso de la forma $e = \phi w + v$, entonces se propone para $\sigma_0 > 0$ una constante

$$\phi^{(\alpha)} = -ew - \sigma \hat{\theta} \quad (4.43)$$

donde

$$\sigma = \begin{cases} 0 & \text{si } |\hat{\theta}| < M \\ \sigma_0(|\hat{\theta}|/M - 1) & \text{si } M \leq |\hat{\theta}| \leq 2M \\ \sigma_0 & \text{si } |\hat{\theta}| \geq 2M \end{cases}$$

con $\sigma_0 > 0$ y $M > |\theta|$ una estimación de los parámetros.

Luego $\phi^{2(\alpha)} \leq -e^2 - \sigma\phi^2 - \sigma\phi\theta + ev$. Entonces si v es acotado y $w > \epsilon > 0$, para ϕ suficientemente grande (Ω^c en Teorema 3.3.3) se deduce que $\phi^{2(\alpha)} \leq 0$

Supongamos ahora que $e^{(\alpha)} = -e + \phi w + v$, donde $\lambda > 0$, y el mismo ajuste $\phi^{(\alpha)} = -ew - \sigma\theta$. Definiendo $2V = e^2 + \phi^2$ obtenemos $V^{(\alpha)} \leq -ae^2 + ev - \sigma\phi^2 - \sigma\phi\theta$. Luego $V^{(\alpha)} \leq 0$ en Ω^c cuando definimos $\Omega = \{(e, \phi) \mid \|(e, \phi)\| \leq k\}$ para k suficientemente grande.

Si $v \equiv 0$ entonces $V^{(\alpha)} \leq -ae^2 - \sigma\phi\theta$. por la elección de σ resulta $\sigma\phi\theta \geq 0$ por lo cual $V^{(\alpha)} = \phi^{2(\alpha)} \leq -ae^2 = -a\phi^2 w^2$ por lo que la condición de convergencia en ausencia de perturbación se preserva. Esto último se puede extender al caso vectorial.

Capítulo 5

Aplicaciones

Ejemplos sencillos que apliquen directamente los diseños del Capítulo 4 en funciones lineales para optimizarlas, pueden ser contruidos efectivamente pero nuestro objetivo es aplicar los diseños en problemas propios de la Teoría de Sistemas.

Sistemas físicos modelados propiamente (y no fenomenológicamente para condiciones iniciales específicas) por ecuaciones fraccionarias que usen derivada según Caputo son difíciles de encontrar; de hecho existe argumentación teórica que postula inconsistencias resultantes de elegir tal derivada [14]. Al menos, tendría que ser un sistema con características singulares.

Por el momento la utilización en sistemas dinámicos de los resultados anteriores pasa por hacerlos compatibles con sistemas de orden entero; el sentido específico en el cual son compatibles es el objetivo de este capítulo. De una manera general y esquemática, el sistema físico será orden entero y el aparato de control, observación, o de cualquier clase, será entendido como un aparato matemático donde se puede disponer de herramientas abstractas, una de ellas siendo los operadores de orden no entero. Por tanto, uno de los problemas fundamentales a abordar lo constituye el encontrar una representación fraccionaria (fenomenológica) de un sistema entero.

5.1. Observador Adaptable

El objetivo es determinar un modelo matemático para un sistema desconocido, el cual supondremos ser un sistema lineal tiempo invariante con entrada u y salida y funciones escalares del tiempo, del cual conocemos exclusivamente el par (u, y) . Tal construcción precisa estimar parámetros del modelo Identificador que se elija a priori. De tal modelo se podrán conocer variables internas del sistema (Observador) las cuales resultan útil por ejemplo en aplicaciones de control donde tales señales son usadas para construir la señal de control u tal que la salida sea la deseada. Ajustaremos continuamente (adaptablemente) tales parámetros .

A menos que se diga lo contrario, usaremos el modelo de error tipo I para ajustar parámetros.

5.1.1. Identificador Adaptable del mismo Orden

El problema es determinar un modelo exacto del sistema. En particular determinar parámetros (n, α, θ) donde n es el orden del sistema, α es el orden de la dinámica interna conmensurada, θ son

los parámetros para alguna representación.

Supongamos que $(n, \alpha \leq 1)$ los conocemos (en caso contrario podemos intentar por ensayo y error)

I

Como el sistema es lineal, sea $H(s^\alpha)$ su función de transferencia, es decir $y/u = H(s^\alpha) = P(s^\alpha)/Q(s^\alpha)$, con P y Q polinomios en s^α de coeficientes p_i y q_i . Sin perder generalidad, Q se supondrá mónico. Entonces,

$$s^{\alpha n} y = \sum_i p_i s^{\alpha i} u + \sum_i q_i s^{\beta_i} y, \quad (5.1)$$

por lo cual si postulamos como observador $s^{\alpha n} y = \sum \hat{p}_i s^{\alpha i} u + \sum \hat{q}_i s^{\beta_i} y$ obtenemos el error $e = s^{\alpha n} (\hat{y} - y) = \phi^T w$ donde $w^T := (s^{\alpha i} u, s^{\beta_i} y)$. Por tanto podemos ajustar según

$$D^\beta \phi = -e w. \quad (5.2)$$

Es necesario señalar que aunque disponemos de (y, u) , la construcción del vector w y el error e requieren pasar por un filtro tales señales. El diseño es válido aún si el orden es no conmensurado, aunque se debe conocer o suponer cuales son exactamente; en orden conmensurado $\alpha_i = i\alpha$ y $\beta_i = i\alpha$.

II

Representemos el sistema lineal desconocido de la siguiente forma. Sea (F, g) un par controlable cualquiera

$$w_1^{(\alpha)} = F w_1 + g y \quad (5.3)$$

$$w_2^{(\alpha)} = F w_2 + g u \quad (5.4)$$

$$y = \theta_1^T w_1 + \theta_2^T w_2. \quad (5.5)$$

Esto nos permite construir un observador de estructura análoga con variables denotadas por $\hat{\theta}_i$ e \hat{w}_i , con condiciones iniciales nulas y llegar a la función de error

$$e = \phi^T \hat{w} + f, \quad (5.6)$$

donde f converge a cero con rapidez dependiente de F y de las condiciones iniciales para w_i . Inicialmente despreciaremos f (en la práctica y debido a la disponibilidad de F , está dentro del orden de incertezas de las mediciones física). Así reconocemos un Modelo de Error Tipo I y puesto que conocemos y , tenemos acceso al error $e = \hat{y} - y$ y podemos ajustar según

$$D^\beta \phi = -e \hat{w}, \quad (5.7)$$

donde $0 < \beta \leq 1$.

Si \hat{w} está en $ES(n, \beta)$ o en $EP(n, 1)$, se tiene convergencia de ϕ a cero y por ende identificamos los parámetros que nos permiten tener una representación del sistema. Notemos que puesto que \hat{w} resulta de un filtraje lineal de u , podemos usar los resultados de la Propiedad 4.1.9 para encontrar una condición sobre u . En particular si $\beta = 1$, el error converge a cero para cualquier entrada acotada, uniformemente continua.

Si consideramos f podemos usar el Teorema 3.5 para $\beta = 1$. En efecto, la ecuación del ajuste queda $D^\beta \phi = -w w^T \phi + f w$ como w es acotada $f w$ decae exponencial. Para $\beta < 1$ uno puede usar el ajuste de parámetros por método del gradiente con filtraje de entradas, para asegurar que $D^\beta \phi = -A(t)\phi$ tal que $A \leq -\varepsilon I$. En efecto, $D^\beta \phi^T \phi \leq \phi^T A(t)\phi + \phi^T f(t) \leq -\varepsilon \phi^T \phi + \phi^T f(t)$. Por otro lado $D^\beta \phi = -A(t)\phi + f$ es acotada por 3.2.3. Por principio de comparación y Teorema 3.2.1 concluimos que $\|\phi\|$ tiende a cero.

Una pregunta natural es ¿Todo sistema lineal $H(s^\alpha) = a(s^\alpha)/b(s^\alpha)$ conmensurado puede ser llevado a una representación de tal forma? Cuando $\alpha = 1$ la respuesta es afirmativa y se encuentra en [23]. Para $\alpha < 1$ el argumento es similar: escogiendo las matrices (F, g) en forma canónica controlable, se obtiene luego de aplicar transformada Laplace, que la expresión $u(s)a(s^\alpha)/(\lambda(s^\alpha) - \tilde{b}(s^\alpha))$ puede ser reescrita como $a^T w_1 + \tilde{b}^T w_2$ donde $\tilde{b} = \lambda - b$ para λ polinomio Hurwitz asociado a la matriz F y nosotros notamos genéricamente el vector d como los coeficientes del polinomio $d(s^\alpha)$. La conmensurabilidad es requerida para que el argumento sea similar al del caso entero, es decir, puedo identificar s con s^α . Por la definición de \tilde{b} se concluye que la expresión $u(s)a(s^\alpha)/(\lambda(s^\alpha) - \tilde{b}(s^\alpha))$ es simplemente $u(s)H(s^\alpha)$ por lo cual $y = a^T w_1 + \tilde{b}^T w_2$.

Observación 5.1.1 Notar que en las ecuaciones (5.3) y (5.4) uno puede en principio usar distintos ordenes y desarrollar los mismos argumentos. El sistema resultante es lineal pero con conmensurabilidad distinta en numerador y denominador del filtro.

5.1.2. Identificador Adaptable de distinto Orden

El problema es determinar un observador de orden fijo α conmensurado para un sistema lineal de orden conmensurado arbitrario $\beta \leq 1$

|

Si $\alpha = 1$ hay una solución aproximada usando el hecho que s^β se puede aproximar por $P(s)/Q(s)$ con precisión arbitraria. Es fácil ver que para un filtro lineal en s^β , al reemplazarlo por $P(s)/Q(s)$ da origen a un sistema lineal equivalente a uno lineal de orden mayor al inicial. Sobre este sistema entero se diseña un observador adaptable entero (ver por ejemplo capítulo 4 [6]) con parámetros ajustables entera o no enteramente.

Este problema específico tiene una importancia en un plano cualitativo. Si uno siempre pudiese aproximar sistemas fraccionarios (lineales) por sistemas (lineales) de orden entero aunque más complejos (de orden mayor), entonces el cálculo fraccionario no aportaría esencialmente nada nuevo en nuestra representación de la naturaleza. Un argumento a favor de esto último puede ser dado de la siguiente manera: Bajo hipótesis razonables un sistema fraccionario da origen a soluciones que son continuas. El espacio de soluciones de sistemas lineales enteros es denso en el espacio de funciones continuas sobre un intervalo compacto de tiempo (esto sigue del hecho que las soluciones son exponenciales y de usar el Teorema Stone-Weierstrass). En particular, sigue que cualquier solución de un sistema fraccionario puede ser aproximada con precisión arbitraria por un sistema orden entero. Un ejemplo es la aproximación hecha en el párrafo anterior.

II

Supongamos $\alpha < \beta \leq 1$ y representemos el sistema lineal de la siguiente forma: Sea (F, g) un par controlable cualquiera,

$$w_1^{(\alpha)} = FI^{\beta-\alpha}w_1 + gI^{\beta-\alpha}y, \quad (5.8)$$

$$w_2^{(\alpha)} = FI^{\beta-\alpha}w_2 + gI^{\beta-\alpha}u, \quad (5.9)$$

pues si uno deriva $(\beta - \alpha)$ veces las ecuaciones anteriores obtenemos $w_1^{(\beta)} = Fw_1 + gy$ y $w_2^{(\beta)} = Fw_2 + gu$ (al derivar usamos $D^{\beta-\alpha}D^\alpha w = D^\beta w$, puesto que $\alpha < \beta \leq 1$). Consecuentemente, se tiene que

$$y = \theta_1^T w_1 + \theta_2^T w_2. \quad (5.10)$$

Entonces podemos construir un observador del mismo orden α como en la sección anterior (parte II) y llegar al Modelo Error Tipo I.

Notar que esto nos permite construir un identificador no entero ($\alpha < 1$) de un sistema entero ($\beta = 1$). Es en este sentido que uno puede hacer compatible ambos órdenes.

Observación 5.1.2 Aunque no se hizo distinción sobre la estabilidad del sistema a determinar, en los capítulos anteriores una condición básica pedida sobre las variables externas era su acotamiento. Esto lleva, en este contexto, a imponer como condición que el sistema original sea al menos BIBO estable de manera que por ejemplo las w_i sean acotadas.

5.1.3. Observador Adaptable

Hasta ahora hemos visto problemas que son más bien de identificación de parámetros. Un problema más complicado es del observador que parte de una representación dada y se busca que el vector estimado \hat{x} cumpla $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x} - x\| = 0$. Lo abordaremos indirectamente.

En una representación no mínima el vector de variables internas del modelo del sistema, digamos \hat{x} , converge al del original si el original, digamos x , también está representado en forma no mínima, esto pues el par (F, g) es controlable. Por otro lado las diversas representaciones se vinculan por transformaciones de coordenadas. Supongamos que tenemos una representación en el vector $z(t) \in \mathbb{R}^n$ relacionada con la representación no mínima de parámetros $\theta \in \mathbb{R}^m$ mediante la transformación continua (en θ)

$$z(t) = T(\theta)x(t). \quad (5.11)$$

Notar que por estar x asociada a una representación no mínima, la transformación $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ de manera que T es no biyectiva globalmente.

Con el uso de identificadores podemos postular un estimado $\hat{z}(t) = T(\hat{\theta})\hat{x}(t)$. Puesto que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\theta - \hat{\theta}(t)\| = 0$ al ser un estimador insesgado (con señales adecuadas que garanticen convergencia) y por continuidad de la transformación tenemos que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(\theta) - T(\hat{\theta})\| = 0$.

Sumando y restando $T(\theta)\hat{x}(t)$ tenemos que

$$\|z - \hat{z}\| \leq \| [T(\theta) - T(\hat{\theta})\hat{x}(t)] \| + \| T(\theta)[x(t) - \hat{x}(t)] \|.$$

Puesto que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\theta - \hat{\theta}(t)\| = 0$ al ser un identificador (con señales adecuadas que garanticen convergencia) y por continuidad de la transformación tenemos que $\lim_{t \rightarrow \infty} \| [T(\theta) - T(\hat{\theta})] \| = 0$ y para un sistema acotado o estable, $\hat{x}(t)$ es acotado por estabilidad, luego $\lim_{t \rightarrow \infty} \| [T(\theta) - T(\hat{\theta})]\hat{x}(t) \| = 0$. Por otro lado, como x es el vector de la representación no mínima tenemos que $\lim_{t \rightarrow \infty} \| T(\theta)[x(t) - \hat{x}(t)] \| = 0$. Luego podemos concluir que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|z - \hat{z}\| = 0. \quad (5.12)$$

Luego nuestros esquemas de Identificación adaptables permiten construir un esquema de Observador Adaptable para representaciones de variables internas generales de sistemas acotados.

5.1.4. Ejemplos Ilustrativos

Ejemplo 1

Consideremos el siguiente sistema lineal de orden no entero

$$D^{1/2}y = -y + u. \quad (5.13)$$

Que supondremos de aquí en adelante desconocido, por lo cual definiremos a y b constantes desconocidas tales que

$$D^{1/2}y = ay + bu. \quad (5.14)$$

Notemos que tal sistema tiene asociado el filtro $H = \frac{b}{s^{1/2}+a}$. Sea $\lambda > 0$ cualquiera entonces $\frac{y}{u} = \frac{b(s^{1/2}+\lambda)}{(s^{1/2}-a)(s^{1/2}+\lambda)}$. Despejando,

$$y = \frac{\lambda+a}{s^{1/2}+\lambda}y + \frac{b}{s^{1/2}+\lambda}u.$$

Definiendo $w_1 = \frac{1}{s^{1/2}+\lambda}y$ y $w_2 = \frac{1}{s^{1/2}+\lambda}u$, las cuales son completamente conocidas salvo condiciones iniciales, que por ser un filtro estable decaen a cero, podemos escribir

$$y = (\lambda + a)w_1 + bw_2 = \theta_1w_1 + \theta_2w_2, \quad (5.15)$$

donde $a = \theta_1 - \lambda$ y $b = \theta_2$.

Sobre esta representación establecemos un estimador de la forma

$$\hat{y} = \hat{\theta}_1\hat{w}_1 + \hat{\theta}_2\hat{w}_2. \quad (5.16)$$

De esta manera de generar un error de la forma

$$e = \phi_1 w_1 + \phi_2 w_2, \quad (5.17)$$

donde ocupamos el hecho que \hat{w}_i y w_i difieren exclusivamente en un termino de condiciones iniciales que tiende a cero. En este caso simple el error coincide con el error de observación.

Usemos la ley de ajuste más simple encontrada

$$D^\alpha \hat{\theta}_i = -e w_i, \quad (5.18)$$

con $\hat{\theta}_i(0) = 0$

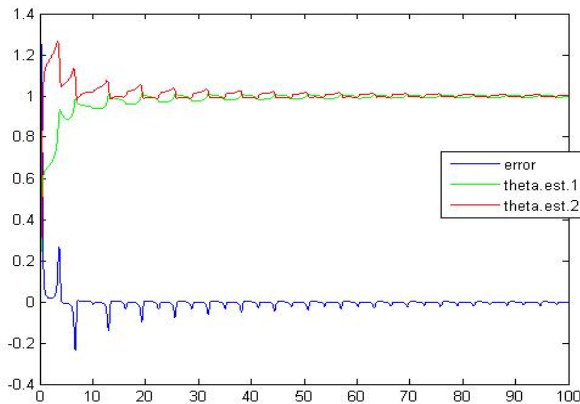


Figura 5.1: $u = 10(\sin(t) + \sin(2t)); \alpha = 0.9$

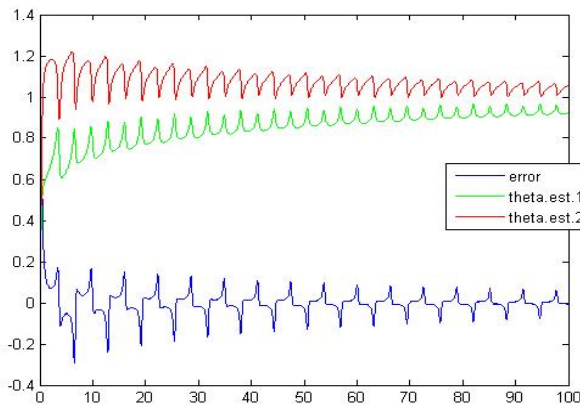


Figura 5.2: $u = 10(\sin(t) + \sin(2t)); \alpha = 0.5$

Tomaremos $\lambda = 2$ para comparar convergencia pues en tal caso $\theta_1 = \theta_2 = 1$. Por Teorema 4.1.9 (notando que en este caso H puede ser descompuesto en dos partes no singulares $w = H_1(yu)^T$ y $y = H_2 u$) escogeremos una entrada con a lo menos 4 frecuencias espectrales y de amplitud media (10) para asegurar la convergencia y apreciar el transiente: $u = 10(\sin(t) + \sin(2t))$. Figura 5.1 describe la convergencia del observador (error) y de los estimadores $\hat{\theta}_i$ (notado theta.est.i en la figura) con $\alpha = 0.9$. En Figura 5.2 es posible observar como la tasa de convergencia del observador y de los estimadores disminuye al disminuir a $\alpha = 0.5$. En figura 5.3 se observa que con entrada escalón $u = 1_{t \geq 0}$ la cual no cumple requisitos de teorema 4.1.9 no se tiene convergencia a los valores reales de los estimadores pero el error si converge a cero (se gráfica solo para $\alpha = 0.9$).

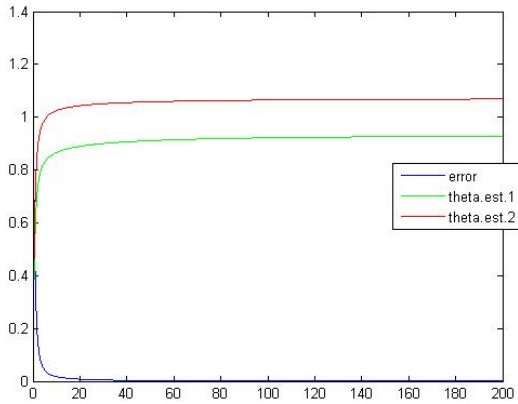


Figura 5.3: $u = 1_{t \geq 0}$; $\alpha = 0.9$

Ejemplo 2

Sea el sistema lineal

$$\dot{y} = -y + u. \quad (5.19)$$

Que desconoceremos de aquí en más por lo cual definiremos a y b constantes desconocidas tales que

$$\dot{y} = ay + bu. \quad (5.20)$$

El problema es construir un estimador y observador de orden no entero $1/2$.

Por analogía al ejemplo anterior, definiremos las variables w_i de la siguiente forma

$$\dot{w}_1 = -2w_1 + y$$

$$\dot{w}_2 = -2w_2 + u.$$

Notemos que entonces $y = (2 + a)w_1 + bw_2$. Reescribiendo como

$$w_1^{(1/2)} = -2w_1^{(1/2)} + y^{(1/2)}$$

$$w_2^{(1/2)} = -2w_2^{(1/2)} + u^{(1/2)},$$

se propone el estimador (observador) de orden no entero

$$\hat{w}_1^{(1/2)} = -2\hat{w}_1^{(1/2)} + y^{(1/2)}$$

$$\hat{w}_2^{(1/2)} = -2\hat{w}_2^{(1/2)} + u^{(1/2)},$$

donde \hat{w}_i y w_i difieren exclusivamente en un término asociado a las condiciones iniciales convergente

a cero, junto con $\hat{y} = \theta_1 w_1 + \theta_2 w_2$. Entonces $e = \phi_1 w_1 + \phi_2 w_2$ salvo un término que decae a cero. Por lo cual ajustaremos según

$$D^\alpha \phi_i = -e w_i. \quad (5.21)$$

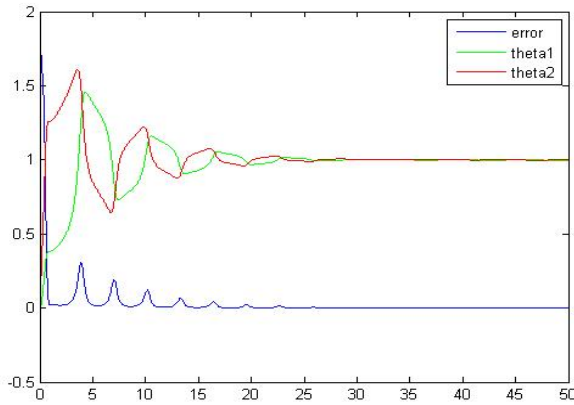


Figura 5.4: $u = 10(\sin(t) + \sin(2t))$; $\alpha = 0.95$

Figura 5.4 presenta una simulación de la convergencia de las variables.

Observación 5.1.3 A pesar de que el observador fraccionario es equivalente al entero, cuando existen cambios en el valor de los parámetros supuestamente constantes, tal equivalencia se pierde y el sistema es propiamente fraccionario teniendo las ventajas que pueden tomar tales esquemas ante tales perturbaciones y si no hay el sistema es entero tomando así potencialmente las características mejores en ambos casos.

Capítulo 6

Conclusiones y Trabajo futuro

6.1. Conclusiones

Constatamos la ayuda que prestan las funciones de tipo Lyapunov para el estudio de propiedades asintóticas para el caso no entero. En especial para sistemas vectoriales para los cuales tal función siendo escalar simplifica los argumentos.

Las condiciones de convergencia sobre sistemas generales de orden no entero encontradas involucran al igual que en el caso entero una cantidad integral (ver Definición 4.5), que podemos llamar energía del sistema, que resulta ser divergente cuando se la toma de manera total sobre el eje temporal. Por añadidura, si tal integral no es divergente aún es posible obtener algunas conclusiones sobre el comportamiento del sistema, al menos para el caso escalar, usando información de las cotas de tales integrales. Esto sugiere un uso alternativo o equivalente de tales integrales al de las funciones Lyapunov. Esto es reflejado en el caso lineal autónomo forzado y no autónomo entero forzado por el hecho obtenido que uno puede desprestigiar en el análisis de convergencia entradas de integral cuadrática finita.

Aunque para matrices constantes el rango de convergencia es ampliado a medida que el orden de derivación disminuye, esto ocurre para matrices no simétricas pues el aumento se relaciona a un mayor rango de la fase compleja de sus valores propios y las matrices simétricas (o Hermitianas) tienen valores propios reales. La matriz típica con la que trabajamos ocurre ser simétrica y los conjuntos obtenidos muestran un comportamiento inverso en el sentido de la inclusión respecto al orden de derivación

Los esquemas propiamente fraccionarios optimizaban el error bajo la condición de estimación efectiva de los parámetros. Por ello los esquemas mostrados son automáticamente esquemas de identificación. Sin embargo, esto es una desventaja respecto a los esquemas enteros en los cuales es posible hacer converger el error sin que los parámetros converjan a sus valores reales. En efecto, el espacio de señales que aseguran el error converge a cero es menor que en el caso no entero. Las ventajas de los esquemas fraccionarios frente a los enteros, en la mejora en índices de optimización tales como tiempo de estabilización, transiente, sobrepasos ante perturbaciones, han sido indicadas en simulaciones.

Como parte de los fundamentos de la tesis se analizaron propiedades sobre la no localidad y los puntos de equilibrio que son distintivas de los sistemas no enteros.

El ejemplo de aplicación muestra que incluso sobre sistemas enteros uno puede introducir diseños no enteros ampliando así el conjunto de herramientas disponibles en el control de sistemas, permitiendo

optimizar índices de comportamiento.

Se mostró además como un problema de optimización se transforma en un problema dinámico. Esto no es nuevo sino constata el vínculo íntimo cuya expresión más estética y lograda son las ecuaciones Euler-Lagrange para minimizar integrales de Lagrangianos.

6.2. Trabajo futuro

Los desarrollos se plantearon generalmente para derivada Caputo de orden $\alpha \leq 1$. Aunque tal elección de la derivada fue fundamentada, el análisis de otras derivadas con propiedades que faciliten los cálculos, sean teóricamente satisfactorias y/o que presenten características afines para lo particular en que se pretenda aplicar, los cuales parecen ser los principales ejes en la evolución actual del cálculo no entero, permitirían afrontar los mismos problemas de esta tesis bajo otra perspectiva. Por otro lado, para $\alpha > 1$ uno podría descomponerlo como $\alpha = [\alpha] \pm \beta$ donde $[\]$ es la función que asigna el entero mayor o menor más cercano a α y $0 < \beta < 1$ y $D^\alpha f = D^{[\alpha]} D^\beta f$ o $D^\alpha f = D^{[\alpha]} I^\beta f$, donde los términos a la derecha están ya analizados, aunque alguna precaución debe ser mantenida a causa de la no conmutatividad de los operadores.

En todas nuestras hipótesis esta implícita la diferenciabilidad de las soluciones. Cuáles son las señales de entrada o bajo qué condiciones esto se logra es un problema no resuelto. Puede ser suficiente para mantener las conclusiones considerar el siguiente razonamiento: sabemos que las variables del sistema son α -diferenciables pues son soluciones de ecuaciones en α -derivada que resultan continuas y que por la definición de la α -derivada (integral de la derivada entera) se tienen que son diferenciable en casi todo punto.

En los diseños no enteros presentados referidos al modelo error tipo I que sean generalizables al caso vectorial una pregunta interesante es cual es la condición precisa que implica que el error tienda a cero sin tener que ϕ ni w tiendan a cero (en caso escalar esto no puede ocurrir) haciéndose para ello necesariamente ortogonales en infinito. Eventualmente esto podría requerir que ϕ converja cuando se ajusta por el gradiente: el hecho que el gradiente del error respecto a ϕ sea ortogonal a la curva de nivel del error, para ϕ constante, resulta ser un plano en w y como ϕ converge, queda en dirección de un vector ortogonal al plano de w .

Desde una perspectiva práctica, un estudio comparativo de los diversos esquemas propuestos en aspectos como respuesta transiente, tiempo de estabilización, efecto de perturbaciones es necesario para diferenciarlos completamente. Aunque tales respuestas dependerán del ejemplo específico seleccionado, algunas relaciones generales pueden ser buscadas apoyándose en simulaciones. En particular, un estudio teórico sobre la robustez requiere establecer índices estadísticos comparativos (como la varianza y la esperanza).

El orden de derivación es un parámetro ajustable en un proceso de optimización mayor. Usando la 'continuidad' del comportamiento en el orden de derivación (separando para ello el orden menor que uno del mayor que uno) una búsqueda por intervalos cada vez más finos puede ser efectuada para dar con el valor precisado. Sin embargo, siguiendo la filosofía de adaptabilidad, se debiese postular un ajuste continuo del orden en actualización simultánea al resto de parámetros. No obstante, tal ajuste requiere a su vez un orden de derivación fijo.

Es deseable obtener para el Modelo error tipo II una caracterización en términos exclusivamente de w del conjunto de señales que lo hacen converger.

En la escala de aplicación de los diseños propuestos, se puede seguir con el uso de tales

observadores en un esquema de control realimentado y el análisis de convergencia asintótica del sistema completo.

Bibliografía

- [1] D. Matignon, "Stability Results For Fractional Differential Equations With Applications To Control Processing", In *Computational Engineering in Systems Applications*, 963–968, 1996.
- [2] Y. Li, Y. Q. Chen, and I. Podlubny, "Mittag-Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems," *Automatica*, vol. 45, no. 8, pp. 1965–1969, 2009.
- [3] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations*, Springer, 2004.
- [4] K. Yao, W. Y. Su, S. P. Zhou, "The Fractional Derivatives of a Fractal Function", *Acta Mathematica Sinica-english Series* , vol. 22, no. 3, pp. 719-722, 2006.
- [5] F. Álvarez, A. Cabot, "Steepest Descent With Curvature Dynamical System". *Journal of Optimization Theory and Applications*, 120(2), 2004.
- [6] K.S. Narendra and A.M. Annaswamy, *Stable Adaptive Systems*, Prentice-Hall, 1989.
- [7] B. Vinagre et al, "Using Fractional Order Adjustment Rules and Fractional Order Reference Models in Model-Reference Adaptive Control", *Nonlinear Dynamics*, vol. 29, no. 1 - 4, pp. 269-279, 2002.
- [8] B. Zhang, "Stability and Liapunov Functionals for Fractional Differential Equations". *Math. and Computer Science Working Papers. Paper 12*. 2012.
- [9] A. Morgan and K. Narendra, "On Uniform asymptotic stability of certain nonautonomous linear differential equations". *SIAM J. Control Optim.* 15 , 1977.
- [10] S. Boyd and S. Sastry, "Necessary and sufficient conditions for parameter convergence in adaptive control", *Automatica* 22(6):629-639, 1986.
- [11] B. Anderson, "Exponential stability of linear equations arising in adaptive identification", *IEEE Trans. Automat. Control*, AC-22, pp. 83-88, 1977.
- [12] G. Kreisselmeier, "Adaptive observers with exponential rate of convergence", *Automatic Control*, *IEEE Transactions on* Volume:22 , Issue: 1, pp. 2 - 8, Feb 1977.
- [13] A. C. Rencher and W. F. Christensen, "Methods of Multivariate Analysis", *Wiley Series in Probability and Statistics* 709 (3rd ed.), John Wiley Sons, p. 19. 2012
- [14] J. Sabatier et al., "How to impose physically coherent initial conditions to a fractional system?", *Communications in Non Linear Science and Numerical Simulation*, Vol 15, issue 5. 1318-1326. 2010.
- [15] J.J. Slotine and W. Li , *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, 1991.
- [16] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice-Hall, 2002.

- [17] A. Kilbas, H. Srivastava, J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, 2006.
- [18] N. Aguila-Camacho, M.A. Duarte-Mermoud and J.A. Gallegos, "Lyapunov Functions for Fractional Order Systems", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 19, No. 9, pp. 2951-2957, 2014.
- [19] J. LaSalle, "Some Extensions of Liapunov's Second Method Circuit Theory", *IRE Transactions on* (0096-2007) Vol.7, Iss.4, p.520-527, 1960.
- [20] S. Samko, A. Kilbas, O. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives*, Gordon and Breach Science, 1993.
- [21] K. S. Miller and S. G. Samko. "Completely monotonic functions". *Integr. Transf. and Spec. Funct.*, 12(4):389–402, 2001.
- [22] A. Oustaloup, F. Levron, B. Mathieu, and F. M. Nanot, "Frequencyband complex noninteger differentiator: characterization and synthesis," *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, *IEEE Transactions*, vol. 47, no. 1, pp. 25–39, 2000.
- [23] S. Sastry, M. Bodson, *Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness*, Prentice Hall, 1994.
- [24] S. Boyd and S. Sastry, "On Parameter Convergence in Adaptive Control", *Systems and Control Letters* 3(6):311-319, 1983.
- [25] D. Heleschewitz, D. Matignon, "Diffusive realizations of fractional integro-differential operators: structural analysis under approximation", *Conference IFAC, system, structure and control*, Nantes, France, vol. 2, pp. 243–248, July 1998.
- [26] B. Ross, "The development of fractional calculus". *Historia Math.* 4, 75–89, 1977.
- [27] A. Annaswamy, PhD Thesis, Yale University, 1985.
- [28] M. A. Duarte-Mermoud, N. Aguila-Camacho, J. A. Gallegos, "Sufficient Condition on the Fractional Integral for the Convergence of a Function", *The Scientific World Journal* Vol. 2013, 2013.
- [29] K. Miller and B. Ross, "An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations", *John Wiley and Sons*, New York, 1993.
- [30] G. C. Evans, "Volterra's integral equations of the second kind, with discontinuous kernel", *Transactions of the American Mathematical Society* Vol. 11, No. 4, pp. 393-413, Oct., 1910.
- [31] F. Riesz, B. Sz.-Nagy, *Functional Analysis*, Dover Publ., Inc.: New York, NY, USA, 1990.
- [32] I. Podlubny, "Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation". *Fractional Calculus and Applied Analysis*, vol. 5, no. 4, pp. 367–386, 2002.
- [33] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 1991.
- [34] G. H. Hardy, *Orders of Infinity: The 'Infinitärcalcül' of Paul du Bois-Reymond*, Cambridge University Press, 1910.
- [35] F. Zhang, C. Li, Y. Chen, 'Asymptotical Stability of Nonlinear Fractional Differential System with Caputo Derivative', *International Journal of Differential Equations*, vol. 2011, pages 12.
- [36] J. P. LaSalle, *Stability of nonautonomous systems*, *Nonlinear Anal.*, 57-65, 1976

Apéndice A

Appendice A

A.1. Results for $\alpha \geq 1$

In this section a generalization of the Corollary of Barbalat Lemma [23] is presented for $\alpha \geq 1$ using conditions on the fractional order integral rather than on the integer integral.

Lema A.1.1 Let f be a non negative uniformly continuous function. If for all $t \geq 0$, $I^\alpha f(t) < C$ with C a positive constant, then f converges to zero.

Demostración A.1.1 We will prove the result by contradiction. Let us suppose that f does not converge to zero. Then, by negation of the definition of convergence, $\exists \epsilon > 0$ and there exists an increasing divergent sequence $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ such that $f(t_i) > \epsilon$. Since f is uniformly continuous $\exists \delta > 0$ such that $\forall i \in \mathbb{N}$ if $|t - t_i| < \delta$ then $|f(t) - f(t_i)| \leq \epsilon/2$. Therefore if $t \in ([t_i, t_i + \delta])$ then $|f(t)| = f(t) = |f(t_i) - f(t_i) + f(t)| \geq f(t_i) - |f(t_i) - f(t)| > \epsilon/2$.

Let $p(t)$ be a function null in every point except when $t \in ([t_i, t_i + \delta])$ where its value is $\epsilon/2$.

By definition $\Gamma(\alpha)I^\alpha f = \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$ and therefore

$$\Gamma(\alpha)I^\alpha f = \int_0^{t-1} (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau + \int_{t-1}^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (\text{A.1})$$

Since f is a positive function, we have

$$\Gamma(\alpha)I^\alpha f \geq \int_0^{t-1} (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (\text{A.2})$$

Since $(t - \tau)^{\alpha-1} \geq 1$ for $0 \leq \tau \leq t - 1$ and since $f(t) \geq p(t)$ for every t , we can write

$$\Gamma(\alpha)I^\alpha f \geq \int_0^{t-1} f(\tau) d\tau \geq \int_0^{t-1} p(\tau) d\tau \geq \sum_1^{[n_t]} \epsilon \delta / 2 \quad (\text{A.3})$$

where $n_t = \max \{i : t_i \leq t - 1\}$. Taking limit when $t \rightarrow \infty$ we obtain

$$\infty > \Gamma(\alpha)C \geq \Gamma(\alpha)I^\alpha f \geq \int_0^{t-1} p(\tau) d\tau \rightarrow \infty \quad (\text{A.4})$$

which contradicts the assumption that $I^\alpha f$ is bounded. Therefore, f converges to zero, as t tends to infinity.

Observación A.1.1 The Lemma 1 also holds if f is a negative function or if $|f|$ is placed instead of the condition f non negative function. In particular, for $|f|^p$ the bounded integral condition of Lemma 1 is analogue of belonging to \mathcal{L}^p , the Lebesgue space with the p -norm, but using fractional integral.

Observación A.1.2 For $\alpha = 1$ Lemma is just the Corollary of Barbalat Lemma, namely: if f is in \mathcal{L}^p and is a uniformly continuous function then $f \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$. In this sense Lemma 1 can be referred as the fractional extension of Barbalat Lemma for the case of $\alpha \geq 1$. For $\alpha = 2$ Lemma 1 holds only for $f \equiv 0$ because $I^2 f = I^1 I^1 f$ and since $I^1 f$ is an increasing function, $I^2 f$ is unbounded (f being uniformly continuous). For similar reason, the same conclusion can be derived for $\alpha > 2$.

Observación A.1.3 Since $I^\alpha f$ can be expressed in terms of $t^\alpha * f$, where $*$ denotes the convolution operator and $\alpha > 1$, the Lemma also says that if the convolution $t^\alpha * f$ is bounded and f is a positive uniformly continuous function, then f converges to zero at infinity. Moreover, it is also true if one uses At^α instead of t^α with A a real constant or even for $At^\alpha + Bt^\beta$ where $\beta > 1$ and B is another real constant of the same sign as A (and so on).

Corolario A.1.1 Let us suppose that f is $C^{[\alpha]+1}(\mathbb{R}^+)$ and $f^{(k)}(0) = 0$ for $k = 0, 1, \dots, [\alpha] + 1$. If $D^\alpha f$ is positive and uniformly continuous then $D^\alpha f \rightarrow 0$.

Demostración A.1.2 It is a straightforward consequence of Lemma 1 by applying Property 1.

The next proposition is a mathematical observation to the Lemma 1.

Proposición A.1.1 Let f be a positive continuous function. If for all $t \geq 0$, $I^\alpha f(t) < C$ with C a positive constant then $I^\alpha f$ converges as $t \rightarrow \infty$.

Demostración A.1.3 Since f is a positive function, $I^{\alpha-1} f$ is also positive function. By Property 3 we can write $I^\alpha f = I^1 I^{\alpha-1} f$ and therefore $I^\alpha f$ becomes an increasing function. Finally, since $I^{\alpha-1} f$ is bounded, it will converge as $t \rightarrow \infty$.

A.2. Results for $0 < \alpha < 1$

This section presents results obtained for $\alpha < 1$. In this case a direct generalization of the Corollary of Barbalat Lemma is not true as it is shown in the next proposition (the technical proof is given at the end of this section).

Proposición A.2.1 There exists a positive uniformly continuous function f such that $I^\alpha f(t) < C$, for all $t \geq 0$, with C a positive constant, but f does not converge to zero as t goes to infinity.

Nevertheless, one can assure at least the statement given in the next Proposition.

Proposición A.2.2 If f is a positive bounded function and $I^\alpha f < C \in \mathbb{R}$, then $\liminf_{t \rightarrow \infty} f = 0$.

Demostración A.2.1 We prove it by contradiction. Let us assume that $\liminf_{t \rightarrow \infty} f = l > 0$ which exists because f is bounded, then there exist an arbitrary small $\epsilon > 0$ and $T = T(\epsilon) > 0$ such that $f \geq l - \epsilon > 0$ for all $t > T$. Therefore for $t > T$, $C > I^\alpha f \geq I^\alpha g = (l - \epsilon)(t - T)^\alpha + B_T \rightarrow \infty$ as $t \rightarrow \infty$ (where g takes the value of $l - \epsilon$ for all $t > T$ and the value of $f(t)$ for each $t < T$, and $B_T = I_{[0, T]}^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (t - \tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau$ which is positive when $t > T$), that is a contradiction.

Even for \mathcal{L}^p functions, since $\lim_{\alpha \rightarrow 0} I^\alpha f = f$ for almost every point [20], if $\lim_{t \rightarrow \infty} I^\alpha f = L \in \mathbb{R}$ and L is not zero, f does not converge to zero when f is a continuous function. Hence, if L is not zero, one can not expect a general result for every $0 < \alpha < 1$ with hypotheses independent of α .

Thereby, we will make a stronger assumption (Proposition 1 does not necessary apply for $\alpha < 1$ because fractional integral of a non negative function can eventually decrease, so the convergence of the fractional integral can not be assured from its boundedness) namely f a positive function and $\lim_{t \rightarrow \infty} I^\alpha f = L \in \mathbb{R}$, and we will seek for extra conditions assuring $\lim_{t \rightarrow \infty} f = 0$.

Also, it should be noted that if $L \neq 0$, $I f = I^{1-\alpha} I^\alpha f \rightarrow \infty$ (by Property 3). Thereby if $\lim_{t \rightarrow \infty} I^\alpha f = L$ and f is positive then $f \notin \mathcal{L}^1$. Thus this case effectively will extend the class of functions with bounded integer integral such that the function vanish at infinity to functions not in \mathcal{L}^1 but having convergent α -integral such that the function vanish at infinity.

Next, we remind the Lemma proved in [28]

Lema A.2.1 If f is a uniformly continuous function from \mathbb{R}^+ to \mathbb{R}^+ and $\lim_{t \rightarrow \infty} I^\alpha f(t) = 0$ then $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ for $0 < \alpha \leq 1$. The case $\alpha = 1$ is only possible if $f(t) = 0$ for all t .

A.2.1. Extensions

For the proofs of the Lemmas of this subsection, we will first state and prove two interesting properties.

Propiedad A.2.1 If f is a bounded function that vanishes for all $t > T$ then $I^\alpha f \rightarrow 0$ and $D^\alpha f \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$. Moreover, $I^\alpha f$ will be a uniformly continuous function and if $D^\alpha f$ is continuous, $D^\alpha f$ will be a uniformly continuous function.

Demostración A.2.2 Since f is a bounded function vanishing for all $t > T$, we can write

$$|I^\alpha f| \leq |f_{max}| I_{[0, T]}^\alpha 1 \quad (\text{A.5})$$

Resolving the integral we get

$$|I^\alpha f| \leq C(t^\alpha - (t - T)^\alpha) = C t^\alpha (1 - (1 - \frac{T}{t})^\alpha) \quad (\text{A.6})$$

where C is a constant defined in terms of $|f_{max}|$ and $\Gamma(\alpha)$.

Rewriting t^α as $1/t^{-\alpha}$ to use L'Hopital rule, the behaviour of (12) when t goes to infinity is given by:

$$|I^\alpha f| \leq Ct^{\alpha-1} \quad (\text{A.7})$$

which implies that $|I^\alpha f| \rightarrow 0$ and therefore $I^\alpha f \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$.

For the Caputo derivative part, note that f is constant after time T and therefore its derivative vanishes after time T . Then we can use the same argument as above to show that $D^\alpha f$ goes to zero as t goes to infinity.

Furthermore, since f is bounded, then $I^\alpha f$ is uniformly continuous (in fact, it is Hölder- α [20]). Since $D^\alpha f$ is a continuous time function and it is convergent to zero at infinity, then $D^\alpha f$ is uniformly continuous.

Propiedad A.2.2 Let f be a bounded function, if $I^\alpha f \rightarrow L$ as $t \rightarrow \infty$ then $I_T^\alpha f \rightarrow L$ as $t \rightarrow \infty$.

Demostración A.2.3 According to notations given in Definition 1, $I^\alpha f$ can be written as

$$I^\alpha f - I_{[0,T]}^\alpha f = I_T^\alpha f \quad (\text{A.8})$$

Then the result will follow from Property 4 and algebra of limits.

The next Lemma is a simple extension of Lemma 2

Lema A.2.2 Let f be a bounded function and, after a time T , it is uniformly continuous and non negative (non positive) function. If $I^\alpha f \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$, then $f \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$.

Demostración A.2.4 Using Property 4 the result is straightforward, since Lemma 2 is also valid when initial time is $T \neq 0$ Du.

Corolario A.2.1 Let $D^\alpha f(t)$ be a uniformly continuous function in $C^1(\mathbb{R}^+)$ that changes sign up to time $T \geq 0$. If $f(t) \rightarrow f(0)$ as $t \rightarrow \infty$, then $D^\alpha f(t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$.

Demostración A.2.5 By Property 1, we can write $I^\alpha D^\alpha f(t) = f(t) - f(0)$. Since $f(t)$ converges to $f(0)$, then $I^\alpha D^\alpha f(t)$ converges to zero as $t \rightarrow \infty$. Thus, $D^\alpha f(t)$ satisfies the hypothesis of Lemma 3 and therefore $D^\alpha f(t) \rightarrow 0$.

Now we will state the main extension of Lemma 2

Lema A.2.3 Let f be a bounded uniformly continuous function in $C^1(\mathbb{R}^+)$, the space of continuous functions that have continuous first derivative, such that $I^\alpha f \rightarrow L$ as $t \rightarrow \infty$. Then we can state the following:

(a) $I^\alpha f$ is decomposable as $I^\alpha f = \delta_T + \delta$ with $\delta(0) = 0, \delta(\infty) = 0$ and δ_T is a function with $\delta_T(0) = 0$ and $\delta_T(t > T) = L$.

Let us suppose that δ_T is such that $D^\alpha \delta_T$ is a continuous function of time.

(b) If $D^\alpha \delta$ does not change sign after a finite time (or vanishes after a finite time) then f converges to zero as $t \rightarrow \infty$

(c) If f is a positive function and $D^\alpha \delta$ has positive $(D^\alpha \delta)_+$ and negative $(D^\alpha \delta)_-$ parts such that at infinite they satisfy $|(D^\alpha \delta)_+| \sim |(D^\alpha \delta)_-|$, then f converges to zero as t goes to infinity (\sim denotes order relation between functions [34]).

Demostración A.2.6 (a) Since f is bounded and $I^\alpha f$ goes to L at infinity, there exist a continuous function $\bar{\delta}$ [20] so that $I^\alpha f = \bar{\delta}$ with $\bar{\delta}(0) = 0$ and $\bar{\delta}(\infty) = L$. Then, if we define $\delta = \bar{\delta} - \delta_T$ the result follows.

(b) Since f is bounded, by α -differentiating $I^\alpha f = \bar{\delta}$ and using Property 2, we can write

$$f = D^\alpha \delta_T + D^\alpha \delta \quad (\text{A.9})$$

By Property 4, we can assure that $D^\alpha \delta_T$ converges to zero and that it is uniformly continuous. Since f and $D^\alpha \delta_T$ are uniformly continuous functions in $C^1(\mathbb{R}^+)$, then $D^\alpha \delta$ is uniformly continuous in $C^1(\mathbb{R}^+)$. Since $\delta(0) = 0$ and $\delta(\infty) = 0$, by using Corollary 2 it can be concluded that $D^\alpha \delta$ goes to zero as $t \rightarrow \infty$ and therefore $f \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$.

(c) We define

$$(D^\alpha \delta)_+(t) = \begin{cases} D^\alpha \delta & \text{if } D^\alpha \delta \geq 0 \\ 0 & \text{if } D^\alpha \delta < 0 \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Similarly we define $(D^\alpha \delta)_-(t)$. Therefore we can write

$$D^\alpha \delta(t) = D^\alpha \delta_+(t) + D^\alpha \delta_-(t) \quad (\text{A.11})$$

Since f is a positive function then $D^\alpha \delta_T + D^\alpha \delta > 0$. Since $D^\alpha \delta_T$ goes to zero as t goes to infinity, $(D^\alpha \delta)_-(t)$ also converges to zero. By the order assumption, $(D^\alpha \delta)_+(t)$ will also converge to zero as t goes to infinity. Therefore $D^\alpha \delta(t)$ and f converge to zero asymptotically.

Observación A.2.1 Part (c) of Lemma 4 also holds for the case when f is a negative function.

Observación A.2.2 If $\alpha = 1$ then $D^\alpha \delta_T = 0$ for $t > T$. Thus f converges to zero asymptotically by Part (b). Consequently, the proof of Lemma 4 includes the case of the original Barbalat Lemma [23].

Observación A.2.3 A sufficient argument for the condition on $D^\alpha \delta$ in Part (b) is that δ has integer ($\alpha = 1$) derivative always positive. This would be the case of a fractional integral with monotone convergence.

Observación A.2.4 It should be noted that since $I^\alpha D^\alpha \delta = I^\alpha (D^\alpha \delta)_+ + I^\alpha (D^\alpha \delta)_-$ and $I^\alpha D^\alpha \delta$ converges to zero (for δ in $C^1(\mathbb{R}^+)$), then $I^\alpha (D^\alpha \delta)_+ \rightarrow -I^\alpha (D^\alpha \delta)_-$. Thus the condition in Part (c) is consistent. Besides, it is true for every positive uniformly continuous function if and only if the following proposition is true: Let f be a non negative uniformly continuous function and g any uniformly continuous function convergent to zero. Then if $I^\alpha (f + g) \rightarrow 0$, f will converge to zero as t goes to infinity.

A.2.2. Alternative Hypothesis

In view of the results in the last section, we will work with a Hölder continuity condition on the functions, which seems more natural than uniform continuity for fractional integrals as can be inferred from the many results in chapter 3 of [20]. In particular, we will need the following subspace.

Definición A.2.1 We define H_α^λ as the subset of the Hölder- λ space of functions with asymptotic behaviour faster than $t^{-\alpha}$.

Let function g be defined by $I^\alpha f = g$ with $g(0) = 0$ and $g(\infty) = L$. If f is bounded then $f = D^\alpha g$. Since $D^\alpha g(t) = I^{1-\alpha} \dot{g}(t)$, f converges to zero if and only if $\dot{g}(t)$ has a vanishing $1 - \alpha$ fractional integral. An instance of the last condition is $\dot{g} = O(\exp(-t))$ (using big O notation [34]). The following Lemma gives a sufficient condition for the convergence of f .

Lema A.2.4 Let us assume that $I^\alpha f = g$ with $g(0)=0$ and $g(\infty)=L$. If f is bounded and $\dot{g} \in H_\alpha^\lambda$ with $0 < \lambda < \alpha$ then f converges to zero as t goes to infinity.

Demostración A.2.7 Since by hypothesis g converges to L as t goes to infinity and \dot{g} is uniformly continuous because it is Hölder- λ , by applying the integer Barbalat Lemma in its differential form [23], we conclude that \dot{g} converges to zero as t goes to infinity. It was proven in [20] that the behaviour of a function in H^λ when t goes to infinity is

$$I^{1-\alpha} \dot{g} \sim \dot{g}(0) \frac{t^\alpha}{1+t} + \dot{g}(\infty) \frac{t^{1+\alpha}}{1+t} \quad (\text{A.12})$$

Therefore, since $\dot{g}(\infty)$ goes to zero faster than $t^{-\alpha}$, f converges to zero as t goes to infinity.

Observación A.2.5 A more familiar condition on g for the convergence of f is that $\dot{g} \in H^\lambda \cap \mathcal{L}^1$, because if the previous integral (18) does not converge to zero then $\dot{g} \notin \mathcal{L}^1$.

Observación A.2.6 Lemma 5 can be restated in terms of ${}^R D^{1-\alpha} f$ instead of \dot{g} . Hence, an equivalent condition on f will be that ${}^R D^{1-\alpha} f \in H_\alpha^\lambda$, besides the convergence of its fractional integral.

Observación A.2.7 For the case when $\alpha = 1$, the differential version of the original Barbalat Lemma implies that \dot{g} goes to zero under the assumption of uniform continuity and, together with the assumption that $\lim_{\alpha \rightarrow 1} I^{1-\alpha} \dot{g} = \dot{g}$, f will go to zero asymptotically.

Observación A.2.8 From a broader viewpoint, this result can be viewed as the converse of Barbalat Lemma, namely: Given a function f vanishing at infinity, to find conditions on f such that its fractional integral converges as t goes to infinity. This approach would provide relaxing conditions upon g .

Corolario A.2.2 Let us suppose that f converges to L as t goes to infinity, and for $\lambda < \alpha$, $\dot{f} \in H_\alpha^\lambda$. If $D^\alpha f$ is a uniformly continuous function in $C^1(\mathbb{R}^+)$ then $D^\alpha f$ goes to zero when t goes to infinity.

Demostración A.2.8 It follows from the fact that when t goes to infinity $I^\alpha D^\alpha f = f(t) - f(0) \rightarrow L - f(0)$. Then Lemma 5 can be readily applied.

A.2.3. Unbounded Case

So far, we have restricted our analysis to bounded functions. The next proposition relaxes this constraint and gives convergence conditions for functions in the following space:

Definición A.2.2 Let $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ the space of continuous functions from \mathbb{R}^+ to \mathbb{R}^+ . We define the $C_{1-\alpha}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ space as

$$C_{1-\alpha}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+) = \{f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+) \mid f(t)t^\alpha \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)\}$$

Lema A.2.5 Let f be a positive function in $C_{1-\alpha}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$. If $I^\alpha f$ monotonically converges to a limit in \mathbb{R}^+ , i.e. the $I^\alpha f = g$ is such that $\dot{g} \leq 0$ for all $t > t_0$, then f converges to zero asymptotically.

Demostración A.2.9 Since f is positive and $\dot{g} \leq 0$, then $I^\alpha f = g$ is bounded from below and not increasing. Therefore $I^\alpha f$ will converge as t goes to infinity.

On the other hand, since \dot{g} is less or equal than zero, we can write

$$\frac{d}{dt} I^\alpha f \leq 0 \tag{A.13}$$

or equivalently

$${}^R D^{1-\alpha} f \leq 0 \tag{A.14}$$

Applying Lemma 2.12 in [35] (in this case $h \equiv 0$ and therefore hypothesis of Lemma 2.12 trivially hold) we can write

$$0 \leq f(t) \leq \frac{f_0}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha} \tag{A.15}$$

with $f_0 = \Gamma(1-\alpha) \lim_{t \rightarrow 0} f(t)t^\alpha$. Therefore f converges to zero, as t goes to infinity.

Observación A.2.9 The same result is true in Lemma 6 if one imposes f to be a negative instead of a positive function and g is such that $\dot{g} \geq 0$.

A.2.4. Proof of Proposition 2

Demostración A.2.10 Let $p(t)$ be a function null at every point except in the intervals $[t_i, t_i + \delta]$ where it takes the value 1 (aperiodic pulse) and $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ is a divergent increasing sequence to be specified and δ is a fixed positive real to be specified.

Note that for each t and for all $\tau \leq t$, $p(\tau)$ can be written as

$$p(\tau) = \sum_{i=1}^n p_i(\tau) \tag{A.16}$$

where $n = \max \{i : t \geq t_i\}$ and $p_i(t)$ is a function 0 at every point except in the interval $[t_i, t_i + \delta]$ where it takes the value 1.

For every i , we have $I^\alpha p_i(t) < C_1$ where C_1 is a positive real constant. In fact, if $t < t_i$ then $I^\alpha p_i(t) = 0$; if $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ then $\alpha \Gamma(\alpha) I^\alpha p_i(t) = (t - t_i)^\alpha \leq \delta^\alpha$ and if $t \geq t_{i+1}$ then $\alpha \Gamma(\alpha) I^\alpha p_i(t) = (t - t_i)^\alpha - (t - t_i - \delta)^\alpha \leq \delta^\alpha$, because for every i and for $t \geq t_{i+1}$, $I^\alpha p_i(t)$ is strictly monotone decreasing since $\frac{d}{dt}[(t - t_i)^\alpha - (t - t_i - \delta)^\alpha] < 0$.

By Property 4, for every i , $I^\alpha p_i(t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$. Therefore, by definition of convergence, there exists T_i such that for all $t > T_i$, $I^\alpha p_i(t) < \frac{1}{i^2}$. We will define t_{i+1} such that $t_{i+1} > T_i$. In this way, we construct a divergent increasing sequence $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$. For instance, let t_1 be arbitrary positive real number and $t_{i+1} = T_i + 1$ and a fixed δ so that $\delta^\alpha \alpha^{-1} \Gamma(\alpha)^{-1} = 1$, then necessarily $T_i + 1 < T_{i+1}$ because $T_{i+1} > t_{i+1}$ since the condition for T_{i+1} is $I^\alpha p_{i+1}(t) < \frac{1}{(i+1)^2} \leq 1$ but $I^\alpha p_{i+1}(t_{i+1} + \delta) = 1$. For the same reason, the p_i do not overlap to each other. Therefore $t_{i+1} - t_i > 1$ and thus $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ is an increasing sequence. Moreover, $t_i \rightarrow \infty$ as $i \rightarrow \infty$.

Hence, for any $t \in \mathbb{R}^+$ there exists $n \in \mathbb{N}$ so that $t_{n+1} \leq t \leq t_{n+2}$. Thus, by linearity of the integral operator, we can write

$$I^\alpha p(t) = I^\alpha \left(\sum_{i=1}^n p_i(t) + p_{n+1}(t) \right) = \sum_{i=1}^n I^\alpha p_i(t) + I^\alpha p_{n+1}(t) \quad (\text{A.17})$$

Then because of the construction of t_i it follows that

$$I^\alpha p(t) \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} + I^\alpha p_{n+1}(t) \leq 2 + C_1 \quad (\text{A.18})$$

Thereby, we have a bounded, positive, not vanishing at infinite function p , whose fractional integral remains bounded.

Let $f(t)$ be a positive triangular function so that for all $t > 0$, $f(t) \leq p(t)$. For instance, let f be null at every point except in the intervals $[t_i, t_i + \delta/2]$ where is the function $2\delta^{-1}(t - t_i)$ and in the intervals $[t_i + \delta/2, t_i + \delta]$ where is the function $2\delta^{-1}(t_i + \delta - t)$. Then, f is a uniformly continuous function because it is Lipschitz of constant $2\delta^{-1}$. Therefore f is a bounded, positive, not vanishing and uniformly continuous function such that

$$I^\alpha f \leq I^\alpha p \leq 2 + C_1 < C \quad (\text{A.19})$$

which proves Proposition 2.

Observación A.2.10 From the proof, a stronger condition than uniform continuity, namely f a Lipschitz function, is not enough to assure convergence of f to zero.

A.3. Applications

A.3.1. Example 1

Let us consider the following integral equation (with degenerate kernel) defined by

$$I^\alpha f = g(t, f) \quad (\text{A.20})$$

Let us assume that $g(t, f)$ converges to limit L as t goes to infinity. If $\alpha \geq 1$ and f is a positive uniformly continuous function, then f converges to zero as t goes to infinity by Lemma 1. If $0 < \alpha < 1$ and g as required in Lemma 3 or Lemma 4 Part (b) or (c), then f goes to zero as t goes to infinity. For instance, we can choose $g(t, f) = f(0) - g(t)f(t)$ with $g(t)$ vanishing at infinity, $g(0) = 1$ and such that f is positive and uniformly continuous from an arbitrary finite time $t_1 \geq 0$ and on.

A.3.2. Example 2

Let the fractional system be defined as

$${}^R D^\alpha f = h \quad (\text{A.21})$$

with $0 < \alpha < 1$. System (27) can be rewritten as

$$\frac{d}{dt} I^{1-\alpha} f = h \quad (\text{A.22})$$

In the notation of Lemma 5 we have

$$\dot{g} = h \quad (\text{A.23})$$

If h is a bounded function such that the integral $I^{1-\alpha} f$ converges as t goes to infinity (if h changes sign up to time T and the integral $I^{1-\alpha} f$ is bounded, g will be monotone). If $h \in H^\lambda \cap L^1$ with $\lambda < \alpha$ then f vanishes as t goes to infinity.

A.3.3. Example 3

Let us consider the fractional system represented by $D^\beta x = f(x, t)$ with $f(0, t) = 0$.

Let $V(x(t))$ be a function associated to the system which is uniformly continuous with respect to time and let us assume that there exists a positive constant C such that (locally) holds:

$$V(x) \geq C \|x\|^2 \quad (\text{A.24})$$

for all $t > T > 0$, for some T . Let us suppose that $V(x(t))$ satisfies for some $0 < \alpha < 1$

$${}^R D^\alpha[V(x)](t) \leq 0 \tag{A.25}$$

If ${}^R D^\alpha[V(x)](t) \in H_\alpha^\lambda$ then the origin of the system is (locally) asymptotically stable.

Demostración A.3.1 Since $D_R^\alpha[V(x)](t) \equiv \frac{d}{dt} I^{1-\alpha} V \leq 0$ and $0 \leq V$, $I^{1-\alpha} V$ is bounded from below and not increasing, so it converges as t goes to infinity. Applying Lemma 6, V converges to zero as t goes to infinity. Since $0 \leq C \|x\|^2 \leq V(t)$ then it follows that $\|x\|^2 \rightarrow 0$ i.e. $x \rightarrow 0$. Therefore the origin of the system is (locally) asymptotically stable.

A.3.4. Example 4

Let us consider the following fractional system defined as

$$I^\alpha x = A + Ct^{-\beta} \tag{A.26}$$

with $0 < \alpha < 1$, C a real positive constant and A a real constant.

The system (32) has convergent solutions to zero if x is positive and belongs to $C_{1-\alpha}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$. This is because the derivative of $t^{-\beta}$ is negative for positive β . The rest follows from Lemma 5.

We remark that it is permitted a case where $I^\alpha x(0) \neq 0$ because of the unboundedness nature of x since $I^\alpha x(0)$ is the integral on an interval with null measure.