



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

PLANIFICACIÓN MINERA INCORPORANDO LA COMPONENTE DE
RIESGO SÍSMICO

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN GESTIÓN DE
OPERACIONES
MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL
MATEMÁTICO

CARLOS FELIPE FLORES GUZMÁN

PROFESOR GUÍA:
ALEJANDRO JOFRÉ CÁCERES

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
SERGIO GAETE BECERRA
FERNANDO ORDÓÑEZ PIZARRO

Este trabajo cuenta con el patrocinio de CODELCO - CHILE.

SANTIAGO DE CHILE
2015

Resumen

En el primer Capítulo se describe el problema el cual consiste en modelar la planificación de una mina subterránea considerando la componente de riesgo sísmico, es decir, se busca encontrar cual es la capacidad a considerar para extraer con el fin de maximizar la utilidad incluyendo la sismicidad inducida por la propia minería. La aplicabilidad de este estudio es estratégica, con este trabajo se fundamenta la necesidad y valor agregado de invertir en estos temas. Además, sirve para tomar decisiones políticas a largo plazo. El Capítulo 2 es una Revisión Bibliográfica, donde se observan trabajos que abarcan distintos enfoques de modelos de planificación minera que van desde programación lineal, considerando incertidumbre en el precio del cobre, otros que consideran incertidumbre en la demanda, derrumbes, huelgas, desastres naturales, entre otros, hasta modelos bajo el marco teórico del Control Óptimo Estocástico. Luego se formula un Marco Teórico, donde primero se repasan los avances que han sido desarrollado en Codelco El Teniente relativos a la sismicidad inducida, cuales son las medidas que se han ido aplicando, los datos que se han medido, etc. Segundo se revisa la Distribución de Pareto, la cual ha sido la ley más aceptada para representar la distribución de tamaños (momento) de los eventos.

El Desarrollo de los Modelos se hace en el Capítulo 4, se comienza con un modelo simple, en el cual no se considera incertidumbre en ninguno de sus parámetros. A partir de este, los modelos se van complejizando al considerar incertidumbre en la demanda, en el riesgo y dependencia en la sismicidad a través de la capacidad a construir. El Capítulo 5 corresponde al Análisis de los Modelos, se analiza y comparan los resultados obtenidos en el desarrollo de los modelos, como el comportamiento de las capacidades óptimas obtenidas, los límites del negocio según el modelo considerado, los distintos casos a ocurrir y sus relaciones, entre otros Análisis de los Modelos.

Finalmente a partir de datos reales en el contexto de la mina Codelco El Teniente, se realizan en el Capítulo 6 ejemplos numéricos que concuerdan con lo esperado según lo desarrollado en los capítulos anteriores, es decir, los modelos que consideran mayor incertidumbre en sus variables obtienen capacidades óptimas a construir menores y por ende, producciones promedios diarias también menores. Además se analizan los límites en los cuales el negocio deja de ser rentable. Se concluye que lo óptimo es considerar la incertidumbre inducida por la sismicidad con una relación entre sus parámetros lo más realista posible, que considerar modelos deterministas.

Tabla de Contenido

1. Introducción	1
1.1. Contexto	1
1.2. Método de Explotación: Block Caving	4
1.2.1. Condiciones de aplicación	4
1.2.2. Principios	5
1.3. Definición del Problema	7
1.3.1. Parámetros	7
1.3.2. Variables	8
1.3.3. Funciones	8
2. Revisión Bibliográfica	9
2.1. Modelos de Planificación Minera	9
3. Marco Teórico	12
3.1. Estrategia de Control de los Estallidos de Roca	12
3.1.1. Primeras formas de Control	13
3.2. Sismicidad asociada a un proceso minero	14
3.3. Riesgo Sísmico	15
3.3.1. Distribución de Eventos	15
3.3.2. Efecto sísmico de una explotación minera	15
3.4. Distribución de Pareto	17
3.4.1. Análisis de la Distribución de Pareto	18
4. Desarrollo de los Modelos	20
4.1. Modelo 1: Caso Determinista.	21
4.2. Modelo 2: Caso con Incertidumbre en la demanda	22
4.3. Modelo 3: Caso con Incertidumbre en la demanda y en la sismicidad	25
4.4. Análisis de parámetro M_+ como variable	36
4.5. Modelo 4: Caso con Incertidumbre en la demanda, sismicidad y parámetro M_+ dependiendo de K	40
5. Análisis a los Modelos	44
5.1. Coherencia en los Modelos	44
5.1.1. $U_{IV} \leq U_{III}$	46
5.1.2. $U_{III} \leq U_{II}$	47
5.1.3. $U_{II} \leq U_I$	47

5.2.	Diferencia en las Soluciones	48
5.2.1.	Relación U_{Di} y U_{Re}	48
5.2.2.	Relación U_{Re} y U_{Op}	51
5.3.	Análisis de los Límites Económicos	54
6.	Ejemplos Numéricos	57
6.1.	Demanda como una Variable Aleatoria Normal Truncada	58
6.2.	Resultados	59
6.2.1.	Relación U_{Di} y U_{Re}	61
6.2.2.	Relación U_{Re} y U_{Op}	62
6.2.3.	Límite Económico	62
7.	Conclusiones	64
	Bibliografía	66

Capítulo 1

Introducción

1.1. Contexto

El presente trabajo se desarrolla en el contexto de CODELCO - División El Teniente, sin embargo, su aplicabilidad se extiende a cualquier proceso de extracción y producción de minerales metálicos como: Oro, Plata, Cobre, Aluminio, Hierro, Molibdeno y Cinc.

El Cobre es un mineral altamente demandado en el mundo debido a sus múltiples usos gracias a sus propiedades que lo caracterizan, por ejemplo, construcción en tuberías de agua y gas, generación y transporte de electricidad debido a su alta conductividad eléctrica, ductibilidad y maleabilidad, confección de elementos industriales, construcción y ornamentación entre otros.

Chile es el mayor productor y exportador de cobre en el mundo, lo que es de gran importancia para el país, la economía, sociedad y cultura. En el año 2014 Chile produjo 5.75 millones de Toneladas métricas en comparación a las 18.5 millones de Toneladas métricas producidas en el mundo, es decir, Chile representa actualmente el 31.1 % de la producción mundial.

Dentro de Chile, CODELCO en su totalidad, es el mayor productor de Cobre. El Teniente, es su división con mayor producción, alcanzando el año 2014 una producción de 460000 Toneladas métricas. Para poder mantener esta producción anual, CODELCO se encuentra desarrollando proyectos estructurales como Nuevo Nivel Mina (NNM) y Chuquicamata Subterránea.

La planificación minera consiste en definir lo más detalladamente posible que cantidad de mineral, en este caso cobre, se debe extraer en un determinado tiempo, desde que sector, con que frecuencia, etc. con el objetivo de maximizar las utilidades presentes y futuras que dependen de una demanda incierta. Realizar una extracción a una tasa muy alta genera posibles daños en la infraestructura, y por el contrario,

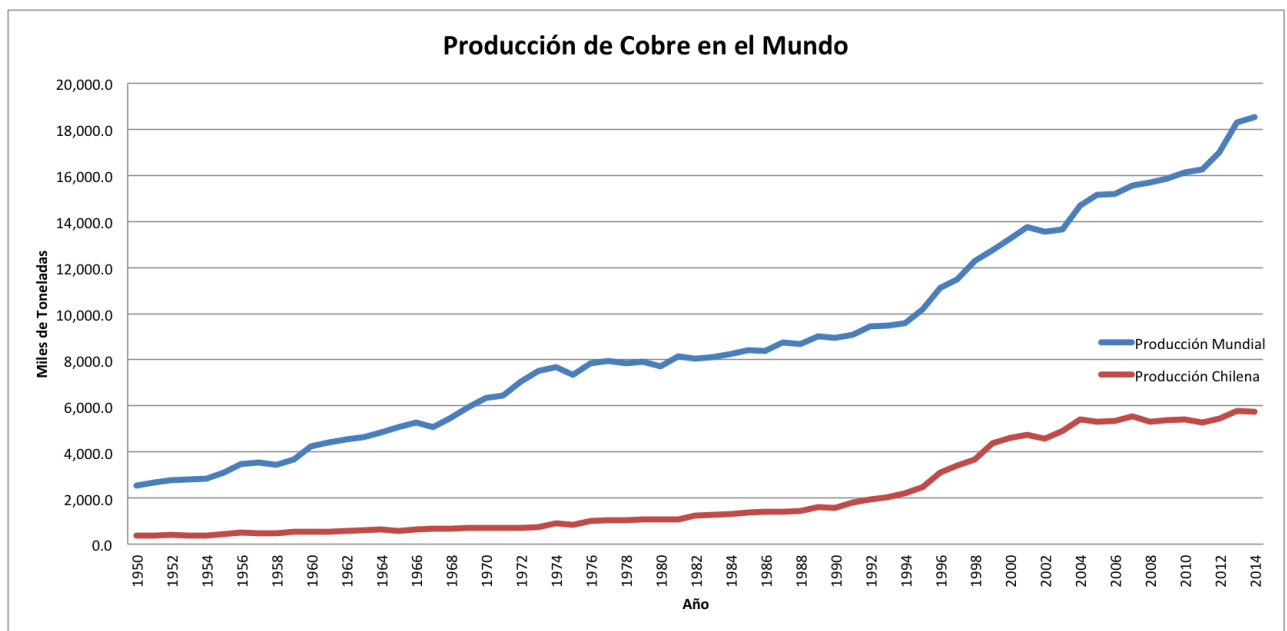


Figura 1.1: Producción del Cobre en el Mundo

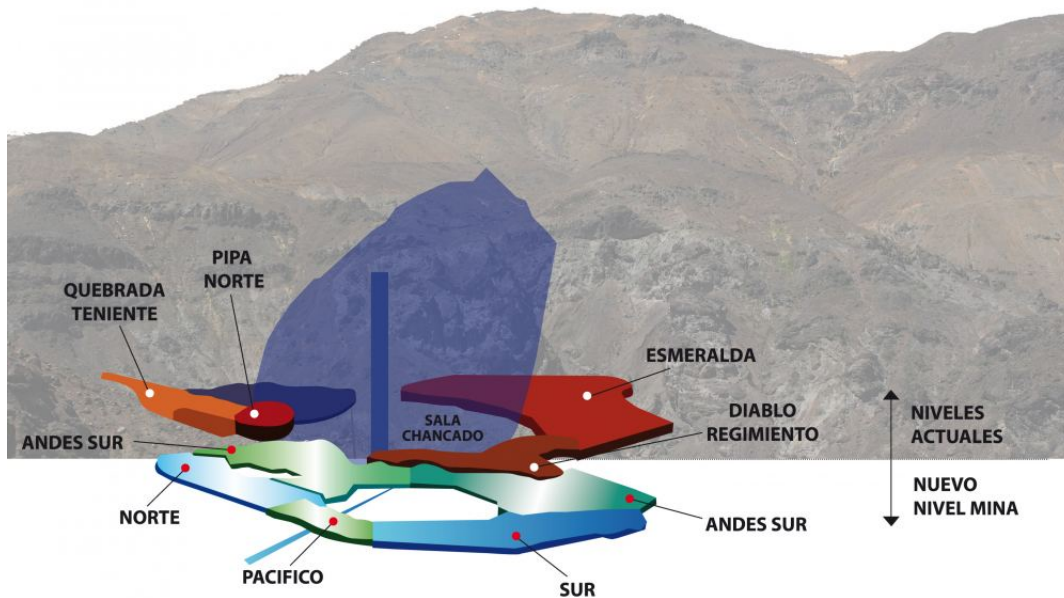


Figura 1.2: Proyecto Expansión Estructural Nuevo Nivel Mina en CODELCO - El Teniente

realizar a una tasa muy baja podría hacer perder negocios de último minuto. Es por eso la importancia de generar una planificación óptima que maximice las utilidades esperadas.

A lo anterior hay que agregar ciertas complicaciones para realizar la planificación.

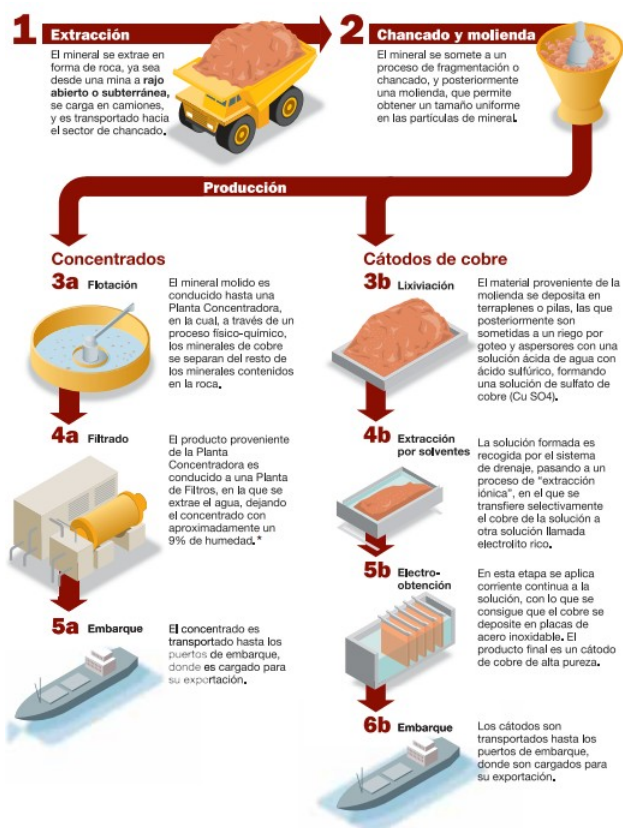


Figura 1.3: Proceso de Producción del Cobre

La siguiente lista muestra algunos parámetros que cuentan con incertidumbre en sus posibles valores y dificulta así el realizar la planificación minera:

- Precio del cobre
- Sismicidad inducida
- Desastres naturales
- Huelgas
- Fallas en máquinas
- Incidentes
- Requerimientos Medioambientales emergentes

Existen muchos modelos que consideran la incertidumbre en el precio del cobre, algunos de ellos son revisados en el Capítulo 2, y que van mejorando en sus técnicas de solución para encontrar resultados más precisos y confiables. Otros modelos consideran una incertidumbre más amplia, agregando variabilidad en posibles huelgas, fallas en máquinas, eventos inesperados que afectan la producción.

De este modo, la presente Tesis, se enfoca en el segundo punto, la incorporación de la sismicidad en la planificación minera. Esta sismicidad no corresponde a movimientos telúricos generados por la naturaleza, si no, a sismos que son inducidos por la misma minera según la forma en que se lleva la excavación, lo que puede traer

consigo por ejemplo, daños en los túneles mineros si es minería subterránea.

1.2. Método de Explotación: Block Caving

Cada día se busca mejorar y probar nuevas técnicas en los procesos de la minería, con el objetivo de poder disminuir costos y explotar sectores con menor ley. Por ejemplo, si se mejoran los métodos de explotación se pueden explotar yacimientos profundos y/o de baja ley.

Los métodos de explotación de minas corresponden al conjunto de operaciones cuyo objetivo final es maximizar la recuperación de un cuerpo mineralizado, asegurando la rentabilidad del negocio. Si bien los métodos ya están definidos de forma general, cada uno de ellos presenta particularidades dadas principalmente por las características propias de cada yacimiento. Entre ellas se puede mencionar:

- Profundidad de Emplazamiento
- Características geomecánicas del cuerpo mineralizado
- Composición mineralógica
- Presencia de fallas
- Niveles Freáticos
- Reservas
- Discontinuidades

El *block caving* o *hundimiento de bloques* es un método de explotación aplicado en minería subterránea a cuerpos masivos de mediana a baja ley, cuya característica principal es la fragmentación de la roca producto de los esfuerzos inducidos por las excavaciones y el aprovechamiento de la fuerza de gravedad para su transporte y posterior extracción desde puntos definidos. Se realiza la subdivisión del cuerpo mineralizado en bloques, cada uno de ellos considerado como una unidad independiente de explotación, lo cual es de bajo costo y asegura altos niveles de producción, es decir, la ventaja de este método es su bajo costo con la eventual desventaja que es un método no selectivo, es decir, afecta en los casos donde la mineralización es no homogénea.

1.2.1. Condiciones de aplicación

El método de block caving se aplica, casi sin excepción, en yacimientos masivos de grandes dimensiones, como son por ejemplo, los depósitos minerales diseminados conocidos con el nombre de cobres porfíricos, de gran ocurrencia e importancia económica en nuestro país. También es posible su aplicación en cuerpos de forma tabular de gran espesor.

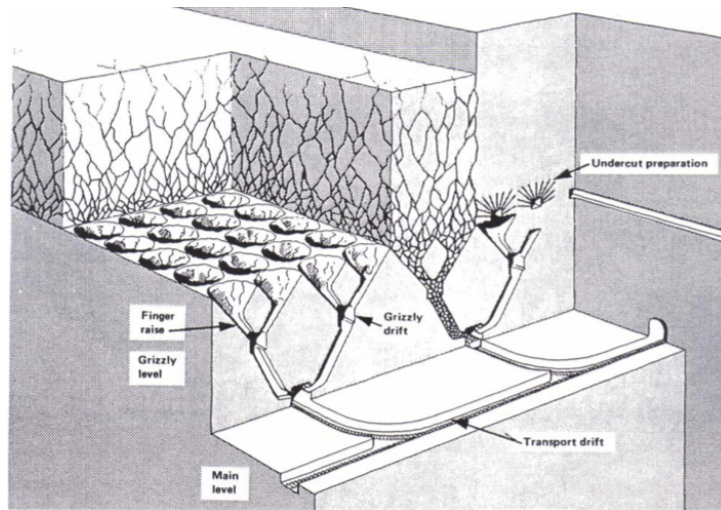


Figura 1.4: Método Block Caving [9].

Sus mejores condiciones de aplicación se dan en rocas mineralizadas relativamente incompetentes, con un alto índice de fracturas, que se hundan con facilidad quebrándose en fragmentos de tamaño reducido. Sin embargo, la tecnología disponible hoy en día permite también su aplicación en macizos rocosos que presentan alta resistencia a fragmentarse.

Es muy deseable o casi imprescindible que los límites del depósito sean regulares y que la distribución de leyes sea relativamente uniforme. Este método no permite la explotación selectiva o marginal de cuerpos pequeños, como a la inversa, tampoco es posible separar sectores de baja ley incluidos dentro del macizo mineralizado [9].

1.2.2. Principios

En lo esencial, este método consiste en inducir el hundimiento de una columna mineralizada, socavándola mediante un corte basal, proceso que se realiza aplicando las técnicas convencionales de perforación y tronadura.

Los esfuerzos internos pre-existentes en el macizo rocoso (gravitacionales y tectónicos), más los inducidos por la modificación de sus condiciones de equilibrio debido al corte basal, generan una inestabilidad en la columna de roca o losa inmediatamente superior. Esta se desploma parcialmente rellenando el vacío creado y la situación de equilibrio tiende a reestablecerse.

El mineral derrumbado se extrae por la base a través de un sistema de zanjas recolectoras excavadas previamente, generando así nuevas condiciones de inestabilidad. El fenómeno continúa y el desplome o hundimiento de la columna se propaga así sucesivamente hasta la superficie, proceso que en la terminología minera se denomina subsidencia.

El proceso termina cuando se ha extraído toda la columna mineralizada. El material estéril sobrepuesto desciende también ocupando el vacío dejado y en la superficie se observa la aparición de un cráter.

Dependiendo de su extensión vertical, el cuerpo mineralizado puede ser explotado a partir de uno o de varios niveles de producción que se hundren sucesivamente en una secuencia descendente. Las alturas de columna entre los niveles puede variar entre 80 a 300 metros [9].

Se distinguen en la práctica dos modalidades de aplicación de este método:

- Block Caving propiamente tal, en que cada nivel se subdivide en bloques virtuales de área basal entre $3.6 \cdot 10^3 \text{ m}^2$ (60 x 60 m) a $10 \cdot 10^3 \text{ m}^2$ (100 x 100 m), que se hundren sucesivamente en una secuencia discreta.
- Panel Caving, que consiste en un hundimiento continuo de áreas o módulos de explotación de dimensiones menores.

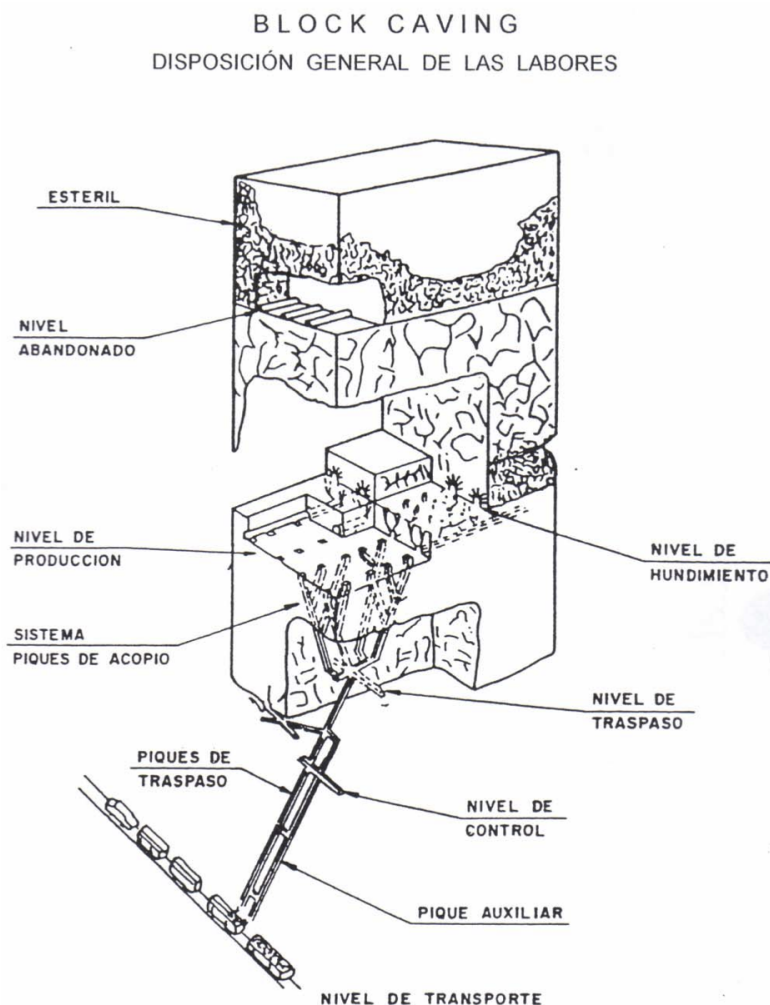


Figura 1.5: Roca Mineralizada de Fácil Hundibilidad. Granulometría Fina [9].

1.3. Definición del Problema

En la planificación minera se debe definir qué, cuánto, y como se extraerá el mineral en un período de tiempo. Si se considera una tasa de excavación muy alta, esto puede traer consigo una sobrecarga muy rápida del material y cambios de esfuerzos que eventualmente generen daños en la infraestructura y accidentes en los trabajadores.

Considerar la componente de sismicidad en la planificación, permitirá no solo identificar qué, cuánto, y como sacar el mineral, si no además cuales son los costos óptimos en que se debe incurrir para la construcción de las galerías, y entonces la extracción a realizar será soportada por la resistencia construida y por ende administrar la sismicidad.

Se busca analizar además distintos escenarios, por ejemplo, que ocurre al modelar sin y con sismicidad, como varían los casos debido a los tiempos ociosos que se generen en los tiempos de reparación cuando los sismos inducidos por la propia minería producen daños. Responder preguntas del tipo si es mejor o no que haya sismicidad en el sector, que tanto se gana al conocer e investigar sobre estas características, etc.



Figura 1.6: Galería a fortalecer en minería subterránea

Para el desarrollo de los modelos que se presentan en el Capítulo 4, se consideran ciertos parámetros, variables y funciones los cuáles son descritos a continuación:

1.3.1. Parámetros

- p : Precio del cobre
- λ : Ley de cobre a extraer
- r : Tasa de recuperación

- α : Tasa de valor futuro
- $z(t)$: Demanda en el período t
- ξ : Capacidad a extraer que se pierde en caso de sismo
- M : Magnitud de un sismo

1.3.2. Variables

- K : Capacidad a extraer de la Mina (define como se construye la mina)
- $T(t)$: Cantidad a extraer en el período t
- M_0 : Magnitud máxima de un sismo que podrá resistir la mina

1.3.3. Funciones

- $V(T)$: Utilidad que se obtiene al extraer y procesar una cantidad de mineral T
- $C(K)$: Costo de construir una mina para una capacidad K
- $C_1(T)$: Costo de producir T toneladas de cobre
- $C_2(M)$: Costo de reparación si ocurre un sismo de magnitud M
- $C_3(M, K)$: Costo de construir una resistencia para sismos de magnitud M en una mina con capacidad K

Para que el desarrollo de los modelos tenga sentido, se suponen ciertas condiciones, como por ejemplo, que las funciones de costos son crecientes y convexas en K .

En la planificación minera típica lo que se busca es encontrar qué, cuánto, y como extraer el mineral, en este trabajo, el objetivo no es solo lo anterior, si no además identificar cual es la resistencia óptima a construir para que así sismicidad inducida presente sea el mínimo posible.

Los modelos desarrollados se separarán en cuatro, partiendo con un modelo básico que no considera incertidumbre en sus parámetros, luego se agrega incertidumbre en su demanda, después se le agrega incertidumbre en el sismicidad pero dejando independiente la relación entre la capacidad total y la resistencia de las rocas y finalmente el modelo que relaciona la independencia anterior.

Capítulo 2

Revisión Bibliográfica

2.1. Modelos de Planificación Minera

Al hacer una revisión del estado del arte sobre modelos de Planificación Minera con incertidumbre, se encuentran una variedad que abordan el problema desde distintos enfoques. Por ejemplo, en el 2003, Denis Sauré [10] desarrolló el trabajo de tesis denominado: “*Enfoque de opciones reales para la optimización de los planes mineros de largo plazo*”, el cual se llevo a cabo bajo el marco teórico del Control Óptimo Estocástico. En él se plantea y resuelve el problema de planificación minera modelando explícitamente la decisión de inversión en incremento de capacidad y la heterogeneidad del yacimiento minero de cobre. El modelo de control es comparado con el resultante de la aplicación de argumentos de no arbitraje (Opciones Reales). El principal aporte es la incorporación de una función de costos de extracción más cercana a la realidad y la inclusión de la opción de ampliar capacidad. Adicionalmente se plantea una solución heurística al problema de planificación, basada en supuestos adicionales. Los resultados muestran un comportamiento complementario entre las opciones de abandono y ampliación de capacidad en el sentido que la opción de abandono cobra relevancia ante situaciones de operación y de mercado adversas, cuando la opción de ampliar es prácticamente nula. De la misma forma la opción de ampliación cobra relevancia ante situaciones de operación y de mercado “favorables”, cuando la opción de abandono es prácticamente nula. Los resultados indican que a diferencia de lo que pasa con la decisión de abandono, la decisión de expandir capacidad es relevante para condiciones de mercado y operación altamente “probables” en el largo plazo.

Otro estudio interesante en revisar, es el realizado por Ximena Schultz [11] quien desarrolló el trabajo “*Agregación de un modelo de planificación minera utilizando análisis de cluster a priori*” como su memoria de Título. El trabajo consistía en desarrollar un modelo agregado de toma de decisiones de la minería subterránea El Teniente. Básicamente el modelo decide que bloques de material extraer en el tiempo, y como existe una gran cantidad de bloques en una mina, el tiempo de ejecución

es elevado debido a la gran cantidad de variables binarias que se generaban. Con el modelo de este trabajo se obtenían soluciones confiables con respecto a las originales en tiempos considerablemente menores. La disminución considerable en los tiempos permitía poder incorporar incertidumbre en ciertos parámetros lo que antes no se podía por la magnitud del problema. La técnica utilizada para obtener mejores resultados en la denominada “Análisis de Cluster a Priori”, que básicamente lo que hace es agrupar elementos que sean muy similares en un mismo grupo.

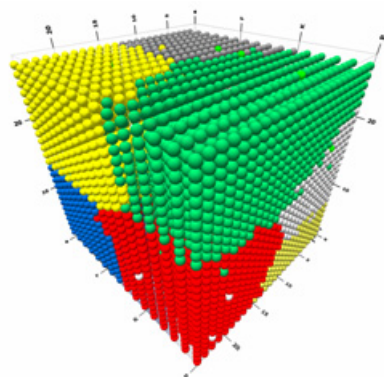


Figura 2.1: Ejemplo de agrupamiento en bloques de minería

Dos años después, Luis Carvallo [5] desarrolló un modelo estocástico de planificación minera utilizando escenarios probabilísticos del precio del cobre basado en el modelo de Schultz. El problema abordado en este trabajo consiste en evaluar cuál es el mejor enfoque para enfrentar la planificación minera considerando el precio como un valor incierto. La incertidumbre en el precio del cobre fue representada a través de escenarios probabilísticos de precios, donde cada uno tiene igual probabilidad de ocurrencia y se resuelve mediante distintos enfoques como por ejemplo: estocástico de maximización del valor esperado, determinístico estático de precio promedio, determinístico estático del peor caso, entre otros. Concluye que los enfoques estocásticos presentan el mejor desempeño a nivel de solución pero con tiempos de resolución bastante superiores a los enfoques determinísticos que tienen niveles de soluciones más bajos.

Finalmente pero no menos importante, en el 2011 se realizó un estudio denominado: “*Multi-Stage stochastic optimisation for managing major production incidents*” desarrollado por M. Armstrong, A. Galli & R. Razanatsimba [4]. Este modelo busca generar una planificación considerando la incertidumbre en el precio del cobre y posibles imprevistos como por ejemplo:

- Fallas continuas en los vehículos
- Posibles derrumbes
- Desastres naturales
- Huelgas de los trabajadores
- Interrupción de la producción por retrasos en la obtención de permisos ambientales

Para facilitar el desarrollo del modelo, se consideran dos fuente de incertidumbre:

- Precio de mercado del cobre
- Ocurrencia de incidentes graves que interrumpen la producción

Con el objetivo de simplificar, se supone que los precios siguen un movimiento browniano geométrico y que los incidentes en la producción tienen una distribución binomial, que son independientes de un período y otro y que no afectan a los precios.

La revisión de estos modelos y sus variaciones, que constan principalmente de probar nuevas técnicas de resolución tratando de mejorar las soluciones, son los trabajos más similares que se pueden encontrar al que se desarrolla en esta Tesis.

La principal diferencia que se busca destacar, es la incorporación de la sismicidad en la incertidumbre de los parámetros. Es claro que no se puede manejar la ocurrencia o no de sismos provocados por la explotación, pero si se puede optimizar la resistencia a construir que incluya la sismicidad maximizando a su vez las utilidades esperadas.

Cabe destacar así, la relación que se considera en la capacidad K de una mina al construirla y la sismicidad que esto conlleva, lo que tiene todo el sentido en la realidad de estas variables.

Capítulo 3

Marco Teórico

3.1. Estrategia de Control de los Estallidos de Roca

Hasta mediados de los años setenta, la División El Teniente solamente explotó mineral secundario, el cual tenía la característica en ser de alta ley y de respuesta muy favorable a la minería. Como se explicó anteriormente en la Introducción, desde los años 1940 se utilizó un método de hundimiento gravitacional, conocido como block caving.

Con el agotamiento del mineral secundario, tuvo que comenzar a explotarse mineral primario de menor ley y mayor competencia. Los primeros intentos se realizaron a mediados de la década del 70, evidenciando las primeras apariciones de un fenómeno caracterizado por una destrucción violenta de excavaciones subterráneas en esos sectores. Tal fenómeno según la experiencia en la minería internacional en esos tiempos, se asoció a lo que llamaban estallido de roca.

Estallido de roca se define como la pérdida de continuidad del proceso productivo o de la operación minera, provocada por la ruptura y proyección del macizo al interior de excavaciones asociados a un evento sísmico. Por otro lado, **evento sísmico** se define como la deformación brusca de un medio sólido, con liberación de energía en forma de ondas mecánicas.

Con el pasar de los años, varios sectores de la División El Teniente sufrieron modificaciones debido a estallidos de rocas que dejaban graves daños en la infraestructura y accidentes laborales. Por ejemplo, el sector 4NFW fue cerrado, en el año 1989 comenzó la extracción en el sector Teniente Sub6, el cual se encontraba completamente emplazado de mineral primario y con el nivel de hundimiento más profundo de toda la mina. Luego, entre los años 1990 y 1992 se registraron estallidos de rocas relevantes que llevaron el cierre temporal del área en Marzo de 1992, debido a daños gravísimos en la infraestructura y accidentes fatales, con el objetivo de esperar a que se desarrollara una metodología de explotación que hiciera factible

la producción en el sector.

Desde el año 1982 se implementó en la División El Teniente el monitoreo sísmico, pero los datos registrados no habían permitido un acercamiento a una conceptualización de un mecanismo de origen del fenómeno, ligado a la minería en aplicación, que permitiera una estrategia efectiva de control del problema a través de modificaciones de esa minería, es decir, que entregara una herramienta con la cual se pudiese planificar la minería controlando y así evitando eventos sísmicos que desencadenen estallidos de roca.

La minería experimental del sector Sub6 a comienzos de 1994, permitió aplicar un marco conceptual para la sismicidad inducida en la roca primaria sujeta a hundimiento gravitacional, desarrollado en los años 1993, mostrando las posibilidades de control de la sismicidad inducida.

Los planteamientos básicos de ese marco conceptual son los siguientes:

La minería modifica las condiciones de equilibrio de un volumen de macizo rocoso en el entorno de la explotación. Esto genera en ese volumen, denominado “volumen activo”, un proceso de restablecimiento del equilibrio, en el cual se producen los procesos de ruptura del macizo rocoso que llevan asociados eventos sísmicos, eventos que corresponden a las energías radiadas en forma de ondas mecánicas por esas rupturas.

Los parámetros de la minería aplicada, geometrías de macizo rocoso definidas por ésta y las tasas de explotación, hundimiento extracción, etc, junto con las características del macizo sujeto a explotación, geometría global y condiciones geológicas estructurales, determinarán la geometría del volumen activo y su evolución en el tiempo. Es decir, definirán los procesos de ruptura y en consecuencia las características de la sismicidad asociada.

De esta forma, es posible plantear que una modificación de los parámetros de minería permiten modificar la respuesta del macizo sujeto a explotación, en particular su respuesta sísmica posibilitando su control.

3.1.1. Primeras formas de Control

En base a la experiencia adquirida en los sectores Sub6 y Esmeralda, se generó una primera forma de control de la sismicidad inducida por la minería y por ende los estallidos de roca. Este control consistió en tabular velocidades de socavación y extracción para los sectores en caving inicial, sin conexión a un nivel superior hundido, y en áreas con menos de un 30 % de la columna sólida extraída, de manera de minimizar la ocurrencia de eventos sísmicos de altas magnitudes.

Además se estructuró el denominado “Índice de Actividad Minera”, parámetro que estima la sismicidad asociado a una determinada minería, en un mediano y largo

plazo. Como primer paso para este índice, se estiman los siguientes términos:

- El volumen activo en función del volumen de macizo fragmentado por las distintas fases de la minería, socavación, extracción, apertura de bateas, etc. por unidad de tiempo.
- Tasa de eventos sísmicos asociada a ese volumen de activo considerando algunos parámetros del macizo rocoso en explotación y ajustando respecto de tasas de eventos obtenidas históricamente para determinados volúmenes activos y condiciones de macizo rocoso.

De este modo, fue posible asociar a la planificación de mediano y largo plazo una estimación de la sismicidad inducida, la que comparando con actividades sísmicas históricas con un entorno en similares características se califica su potencial de interferencia con las faenas productivas. Es decir, se ha logrado un primer acercamiento a controlar estratégicamente la generación de la sismicidad inducida y por ende estallidos de roca.

Para la planificación de corto plazo, se realizan otros estudios de sismicidad histórica que permitan estructurar estimadores para la sismicidad inducida y poder ser utilizado por parte de Operaciones Mina.

3.2. Sismicidad asociada a un proceso minero

Dada una condición inicial del macizo, la explotación minera, induce un proceso de deformación global de éste, conducido fundamentalmente por la fuerza de gravedad. El proceso de deformación tiende a restablecer las condiciones de equilibrio en todo el volumen de roca perturbado por la minería.

El mecanismo y desarrollo de este proceso de deformación, puede detallarse en los siguientes términos:

- a) El efecto principal de la explotación es la generación y desarrollo en el tiempo de cavidad en el macizo, efecto originado principalmente por la extracción y hundimiento.
- b) Esta generación de cavidad tiene como consecuencia principal el permitir la acción de la gravedad sobre los volúmenes de macizo con posibilidades de movimientos dados por esa cavidad, generándose el fracturamiento y posterior fragmentación del macizo. Este colapso del macizo se produce, en general, por el desarme de su arreglo estructural.
- c) Este proceso de colapso del macizo se inicia localmente y por efectos de corto plazo en un sector productivo, para luego propagarse en el largo plazo, a todo el macizo que pueda ser afectado por la minería, culminando con la formación del cráter en superficie.

La sismicidad inducida es la expresión del efecto de radiación de ondas mecánicas

asociado a los procesos de ruptura del macizo rocoso en el volumen activo, volumen en proceso de restablecer su equilibrio, generado por la minería.

El volumen activo, volumen en desequilibrio en un instante dado, es función de la intensidad de la minería, tasas de hundimiento y extracción por ejemplo, y la velocidad de los procesos de restauración del equilibrio en el macizo. Su evolución esta condicionada por las características de la masa de roca y las posibilidades de movimiento en el interior de ésta.

3.3. Riesgo Sísmico

3.3.1. Distribución de Eventos

Para la estimación de la distribución en magnitud de eventos sísmicos en estructuras mayores de la corteza terrestre, se utiliza la llamada distribución de **Gutenberg-Richter**. Esta supone que la frecuencia acumulativa de sismos en función de la magnitud de estos tiene una forma dada por una expresión del tipo:

$$\text{Log}(N) = a - b \cdot M$$

Donde N es el número de eventos de magnitud M o menores para un lapso de tiempo, siendo a y b constantes positivas. Para datos de sismica tectónica, se ha encontrado valores para el parámetro b en un rango aproximado de 0.5 a 1.5.

Esta expresión puede ser construida para la sismicidad registrada en un yacimiento. Además, de esta relación, se puede estimar las magnitudes máximas esperadas que se pudiesen registrar en el sector de interés, como una indicación de la sismicidad a que está sujeto. Por otro lado, se ha estudiado las variaciones en el tiempo de este parámetro b en minería inducida como una indicación de peligro sísmico en minería, sin resultados concretos.

Uno de los modelos más aceptados, es la Ley de Gutenberg-Richter expresada en función de la energía, que es representada por la siguiente expresión:

$$E = k \cdot 10^{\frac{3M}{2}}$$

donde, k es una constante, M es la magnitud y E es la energía del sismo.

3.3.2. Efecto sísmico de una explotación minera

Con el objetivo de avanzar hacia una evaluación cuantitativa de la sismicidad y basado en una descripción mecánica de la interacción minería-macizo rocoso, se

propuso un modo de evaluación de la sismicidad de una explotación minera. El concepto clave que se utilizó fue el de volumen activo (volumen en desequilibrio) en un momento dado.

Esencialmente, una explotación minera consiste en el quiebre y la remoción de material de un macizo rocoso.

El efecto principal de la minería es el desequilibrio mecánico de la masa de roca. La perturbación inducida en el macizo rocoso desencadena procesos de respuesta conducentes al restablecimiento del equilibrio.

Los procesos básicos de restauración del equilibrio son:

- Rupturas, es decir, creación de superficies libre y/o fragmentos.
- Movimiento de la masa de roca ya sea deformación o movimientos de partes sólidas rígidas.

La evolución espacial y temporal de estos procesos depende de las particularidades de la masa de roca y las condiciones de minería.

Llamamos volumen activo al lugar geométrico donde se desarrollan los procesos de restauración, es decir, al volumen en desequilibrio.

El volumen activo en un momento dado, Ω_t , depende de la intensidad de la minería y la velocidad de los procesos de restauración.

Se puede representar abstractamente el proceso minero mediante los siguientes subprocesos:

$$(\Omega_t, M_t, G_t, K_t, \Lambda_t, E_t)$$

Ω_t : Volumen activo

M_t : Masa de roca, eventualmente en evolución

G_t : Geometría de la masa de roca, en evolución

K_t : Condiciones cinemáticas en que se desarrolla el proceso

Λ_t : Cavidad generada por la extracción y la respuesta de la masa de roca

E_t : Minería

El proceso que comanda la evolución es la minería. Sin embargo una vez iniciado el proceso global, sus posibilidades de acción son condicionadas, por el resto de los procesos. Así por ejemplo, una suspensión en el proceso de quiebre de la masa de roca puede significar la suspensión, obligada de la extracción, fragmentos de tamaño muy grande pueden limitar la velocidad de minería, la destrucción de la infraestructura puede dificultar o impedir la minería, etc.

El volumen activo evoluciona de acuerdo a las propiedades de la masa de roca y

las posibilidades de movimiento, expresadas en K_t y M_t , en el entorno delimitado por G_t . El crecimiento de Ω_t depende de la minería y la velocidad de respuesta de la masa de roca.

La masa de roca contenida en el volumen activo, por el propio proceso de reequilibrio, cambia sus propiedades.

La condición cinemática depende de las propiedades de la masa de roca M_t y la disposición geométrica de la cavidad Λ_t .

El problema abstracto que se planteó es conocer la evolución del volumen activo, Ω_t , a partir de $(M_t, G_t, K_t, \Lambda_t, E_t)$.

En el desarrollo de este trabajo, se ocupan estos modelos como preprocesamiento para conocer el comportamiento del volumen activo y así optimizar sobre la explotación del mineral.

3.4. Distribución de Pareto

La distribución de Pareto es una distribución de Ley de Potencias, es decir, las frecuencias decrecen según un exponente cuando la variable aleatoria aumenta. Por ejemplo, el hecho de que una variable tome un valor cuatro veces mayor, no es tan bajo como ocurriría en una normal. Un caso conocido de distribución de Pareto, es cuando la distribución asociada a la Ley de Gutenberg-Richter se expresa en Momento Sísmico en vez de la Magnitud.

Burroughs y Tebbens (2001b, 2002) examinaron la evidencia de las distribuciones de la ley de potencias truncadas en los conjuntos de datos sobre la magnitud de terremotos, zonas de incendios forestales, longitudes de fallas (en la Tierra y en Venus) y tamaños de terrenos de petróleo y gas. Además estimaron parámetros de la distribución de Pareto truncada ajustando por mínimos cuadrados sobre un plano de probabilidades (2001a) y minimizando el error cuadrático medio en un plano de la función de distribución.

Según muchos estudios, como el anterior mencionado, se ha llegado que con la distribución de Pareto se puede representar el comportamiento del momento sísmico de un sismo. Consta de tres parámetros β , M_- y M_+ . β determina el comportamiento de la variable, M_- denota el valor mínimo posible, y M_+ el valor máximo posible.

La función de densidad de probabilidad es:
$$f_M(M) = \frac{\beta M^{-\beta-1}}{M_-^{-\beta} - M_+^{-\beta}}$$

Luego, la función de distribución de probabilidad es:
$$F_M(M) = \frac{M_-^{-\beta} - M^{-\beta}}{M_-^{-\beta} - M_+^{-\beta}}$$

donde $M_- \leq M \leq M_+$, y $\beta > 0$.

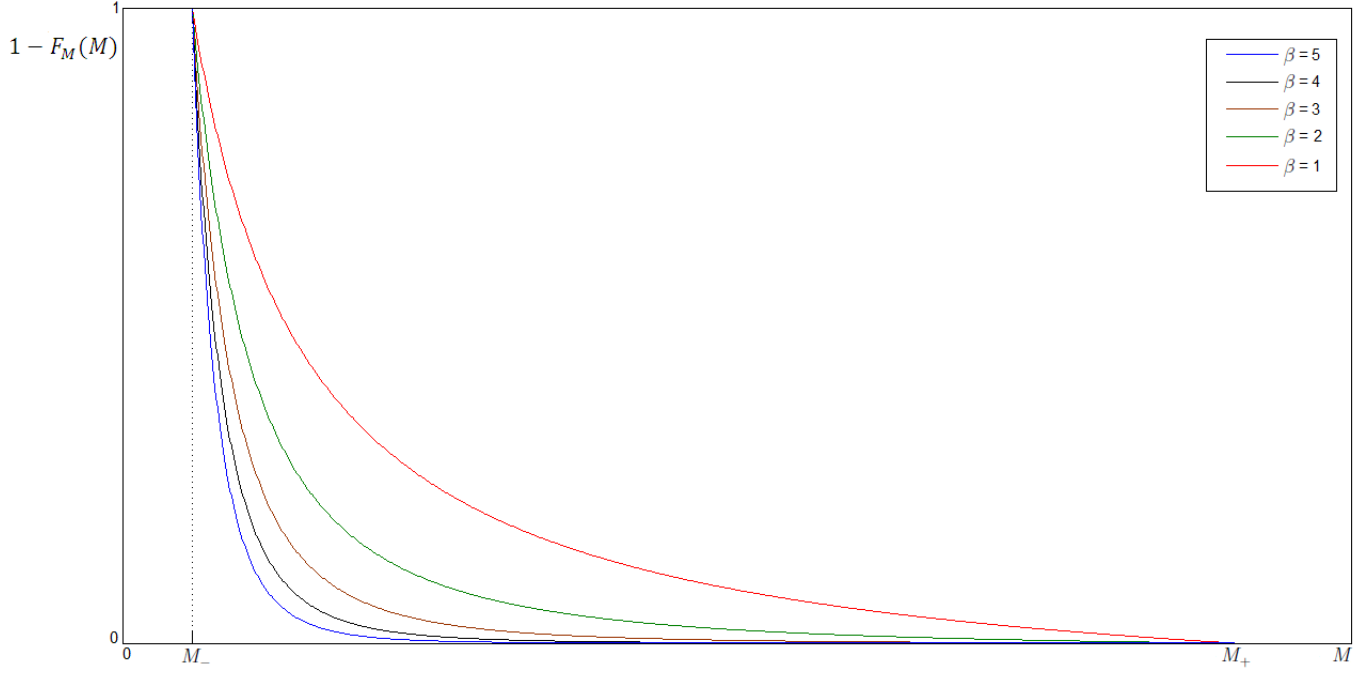


Figura 3.1: Ejemplo de la distribución de Pareto para distintos valores de β

Luego $1 - F_M(M_1)$ corresponde a la probabilidad de que ocurra un sismo de momento sísmico mayor o igual a M_1 . Se observa que los parámetros de la distribución β , M_- y M_+ dependen completamente de las características físicas de las rocas en el lugar a aplicar.

3.4.1. Análisis de la Distribución de Pareto

Se analiza, para el desarrollo de los modelos, lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_M(M)}{\partial M_+} &= \frac{-(M_-^{-\beta} - M^{-\beta}) \cdot \beta M_+^{-\beta-1}}{(M_-^{-\beta} - M_+^{-\beta})^2} \\ \frac{\partial F_M(M)}{\partial M_+} &= -\frac{\beta M_+^{-\beta-1}}{M_-^{-\beta} - M_+^{-\beta}} \cdot \frac{M_-^{-\beta} - M^{-\beta}}{M_-^{-\beta} - M_+^{-\beta}} \\ \frac{\partial F_M(M)}{\partial M_+} &= -f(M_+) \cdot F(M) < 0 \\ \frac{\partial f_M(M)}{\partial M} &= \frac{-(\beta + 1)\beta M_+^{\beta-2}(M_-^{-\beta} - M_+^{-\beta}) - \beta M_+^{\beta-1}\beta M_+^{\beta-1}}{(M_-^{-\beta} - M_+^{-\beta})^2} \\ \frac{\partial f_M(M)}{\partial M} &= -\frac{(\beta + 1)\beta M_+^{\beta-2}(M_-^{-\beta} - M_+^{-\beta}) + (\beta M_+^{\beta-1})^2}{(M_-^{-\beta} - M_+^{-\beta})^2} < 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

- $F_M(M)$ es decreciente con respecto a M_+
- $f_M(M)$ es decreciente con respecto a M

Capítulo 4

Desarrollo de los Modelos

Hoy en día, existe mucha data disponible en cada minera gracias a la tecnología que se va incorporando. Se tienen datos históricos de la demanda, estallidos de roca con sus respectivas fallas, producción, leyes de recuperación, etc. Lo anterior permite generar modelos tan robustos que vayan incorporando todas estas variables y parámetros. En particular Codelco El Teniente, tiene incorporado sistemas que miden la sismología constantemente, lo que ha permitido generar modelos para estimar correctamente el fenómeno de los sismos inducidos y así poder ir manejando el control.

Se parte de un modelo simplificado que no considera incertidumbre en sus parámetros ni sismicidad, llegando a un cuarto modelo con incertidumbre en la demanda y en la sismicidad, y relacionando las características de la roca a la capacidad de la mina a construir. En cada uno de los Modelos se analiza la convexidad, con el objetivo de corroborar que la solución corresponda al óptimo buscado.

Cabe notar que el presente estudio lleva un enfoque marginalista, en el cual no se considera incertidumbre en el precio, sino que este es fijo. Además, se recalca que la metodología es lo suficientemente general para considerar otras distribuciones a las planteadas en este trabajo, las cuales sin embargo representan de buena manera lo que ocurre en la realidad. Se plantea como extensión de este trabajo, analizar los modelos con otro tipo de distribuciones.

El desarrollo de estos modelos permitirá realizar simulaciones, optimizar, encontrar parámetros claves entre otras aplicaciones en lo relacionado con la actividad sísmica y la planificación, abriendo las puertas de este modo a un mejor control de los procesos mineros.

Para todos los casos, se considera un horizonte de tiempo τ tal que $K \cdot \tau \leq \Gamma$, donde Γ corresponde a la capacidad total del yacimiento.

4.1. Modelo 1: Caso Determinista.

Primero se supone un modelo donde no existe incertidumbre en ninguno de los parámetros. Además tampoco se considera la sismicidad.

Se define la utilidad entre un intervalo de tiempo de 0 a τ como la siguiente función:

$$\tilde{V}(K) := \int_0^\tau e^{-\alpha t} U(t) dt - \tilde{C}(K)$$

donde:

$$U(t) = p\lambda r T(t) - C_1(T(t))$$

Se asume que T es constante ($T(t)$ es la cantidad a extraer en el período t), por lo tanto la demanda es igual a lo que se extrae ($z(t) = T(t)$), entonces se tiene:

$$\tilde{V}(K) = p\lambda r \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha} T - C_1(T) \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha} - \tilde{C}(K)$$

Se define $V(K)$ y $C(K)$ para facilitar la notación:

$$\tilde{V}(K) = \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha} V(K)$$

$$\tilde{C}(K) = \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha} C(K)$$

Se tiene que en un intervalo de tiempo fijo τ :

$$V_1(K) = p\lambda r T - C_1(T) - C(K) \quad T \leq K$$

Luego como C_1, C son convexas, si $\frac{\partial V_1}{\partial T} = 0$ y $T < K$, entonces claramente conviene reducir K hasta que se tenga $T = K$ ya que C es creciente. Por lo tanto:

$$V_1(K) = p\lambda r K - C_1(K) - C(K)$$

Y así en el óptimo K_1 se tiene:

$$V_1'(K_1) = 0$$

$$0 = p\lambda r - C_1'(K_1) - C'(K_1)$$

$$p\lambda r = C_1'(K_1) + C'(K_1) \tag{4.1}$$

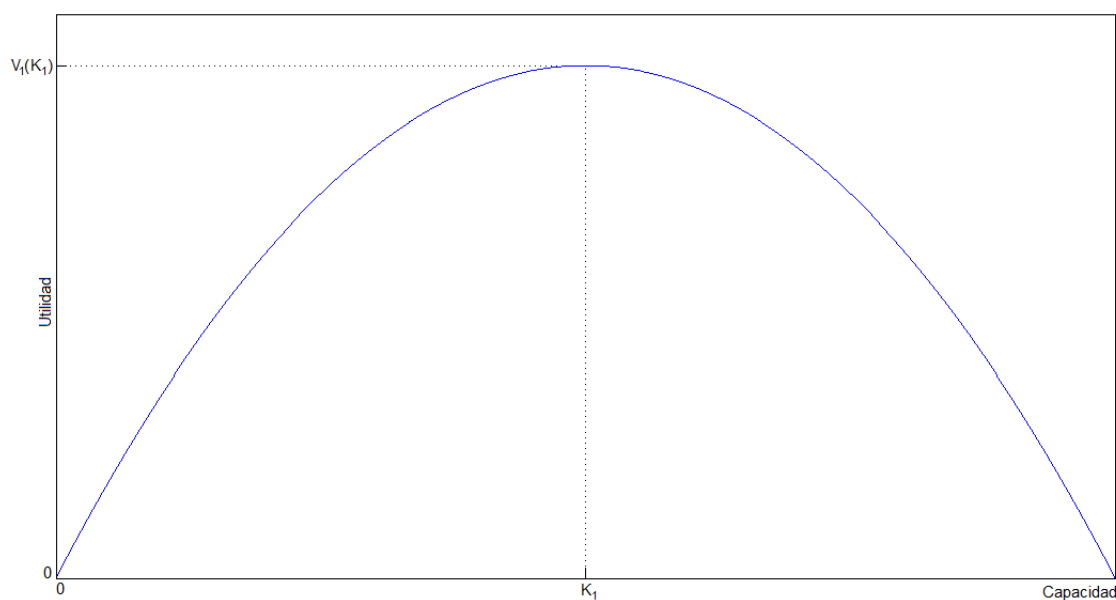


Figura 4.1: Ejemplo de K_1 Óptimo en Modelo 1

Análisis de convexidad

Proposición 4.1 $V_1(K)$ es cóncava y tiene máximo

DEMOSTRACIÓN.

$$V_1'(K) = p\lambda r - C_1'(K) - C'(K)$$

$$V_1''(K) = -C_1''(K) - C''(K)$$

Por hipótesis se tiene que $C_1(K)$ y $C(K)$ son convexas, por lo tanto:

$$V_1''(K) < 0$$

Es decir, $V_1(K)$ es cóncava y tiene máximo. □

4.2. Modelo 2: Caso con Incertidumbre en la demanda

En este caso se supone que existe incertidumbre en la demanda, por lo tanto, z es una variable aleatoria que sigue una distribución F_z . Luego la cantidad a extraer será el mínimo entre la demanda y la capacidad de la mina, es decir:

$$T(K, z) = z \wedge K = \min\{z, K\}$$

Entonces la función de utilidad en un período fijo queda:

$$V_2(K, z) = p\lambda r T(K, z) - C_1(T(K, z)) - C(K)$$

Como en este caso existe incertidumbre, se analiza maximizar la esperanza de la Utilidad:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V_2) &= p\lambda r \mathbb{E}(T) - \mathbb{E}(C_1(T)) - C(K) \\ \frac{\partial \mathbb{E}(V_2)}{\partial K} &= p\lambda r \frac{\partial \mathbb{E}(T)}{\partial K} - \frac{\partial \mathbb{E}(C_1(T))}{\partial K} - C'(K) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Se analiza $\frac{\partial \mathbb{E}(g(T))}{\partial K}$ para una función $g(T)$ continua:

$$\frac{\partial \mathbb{E}(g(T))}{\partial K} = \mathbb{E}\left(\frac{\partial g(T)}{\partial K}\right) = \mathbb{E}(g'(T) \frac{\partial T}{\partial K}) \quad (4.3)$$

Se observa que si H es la función de Heaviside, entonces T se puede escribir como:

$$T = z \wedge K = KH(z - K) + zH(K - z)$$

Luego su derivada es:

$$\frac{\partial T}{\partial K} = H(z - K) - K\delta(z - K) + z\delta(K - z) = H(z - K)$$

donde δ es la función delta de Dirac. Volviendo a (4.3):

$$\frac{\partial \mathbb{E}(g(T))}{\partial K} = \mathbb{E}(g'(T)H(z - K)) = \mathbb{E}(g'(K)H(z - K))$$

$$\frac{\partial \mathbb{E}(g(T))}{\partial K} = g'(K)(1 - F(K))$$

Luego si se toma el caso $g(T) = T$, se tiene:

$$\frac{\partial \mathbb{E}(T)}{\partial K} = 1 - F(K) \quad (4.4)$$

Tomando $g(T) = C_1(T)$, la derivada queda:

$$\frac{\partial \mathbb{E}(C_1(T))}{\partial K} = C'_1(K)(1 - F(K)) \quad (4.5)$$

Retomando (4.2) e igualando a 0:

$$\frac{\partial \mathbb{E}(V_2)}{\partial K} = p\lambda r \frac{\partial \mathbb{E}(T)}{\partial K} - \frac{\partial \mathbb{E}(C_1(T))}{\partial K} - C'(K) = 0$$

Reemplazando (4.4) y (4.5), se tiene:

$$p\lambda r(1 - F(K_2)) - C'_1(K_2)(1 - F(K_2)) - C'(K_2) = 0$$

$$p\lambda r - C'_1(K_2) - \frac{C'(K_2)}{1 - F(K_2)} = 0$$

Proposición 4.2 $K_1 > K_2$

DEMOSTRACIÓN. De 4.1 se tiene que: $p\lambda r = C'_1(K_1) + C'(K_1)$ luego,

$$C'_1(K_1) + C'(K_1) = p\lambda r = C'_1(K_2) + \frac{C'(K_2)}{1 - F(K_2)}$$

$$C'_1(K_2) + \frac{C'(K_2)}{1 - F(K_2)} > C'_1(K_2) + C'(K_2)$$

Luego

$$C'_1(K_1) + C'(K_1) > C'_1(K_2) + C'(K_2)$$

Y como C'_1 y C' son crecientes

$$K_1 > K_2$$

□

Vale decir que con incertidumbre en la demanda la capacidad de diseño es menor, lo cual tiene todo el sentido económico.

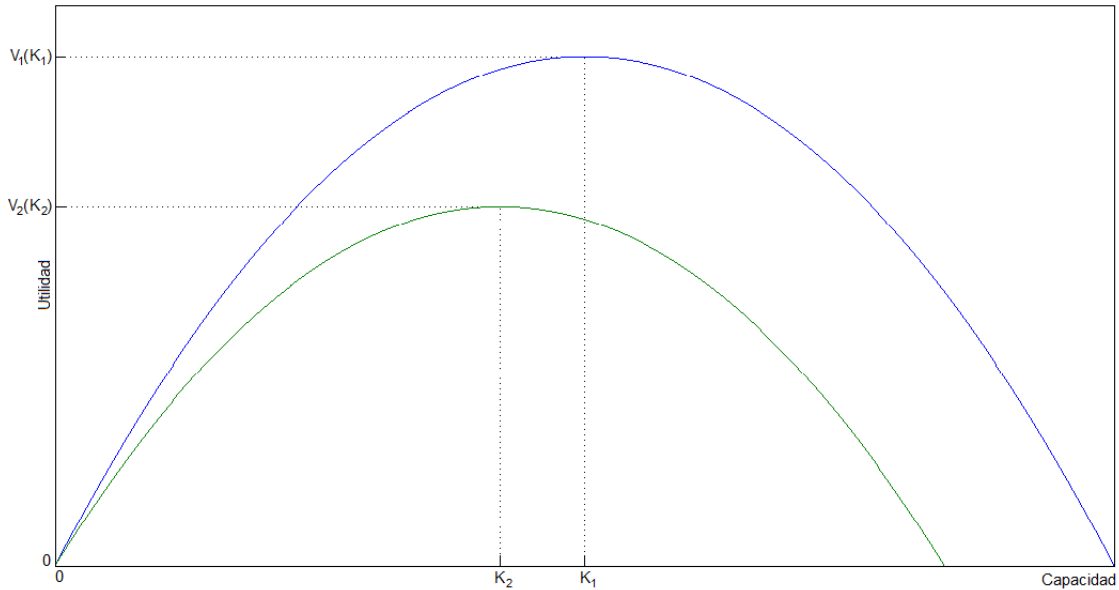


Figura 4.2: Ejemplo de K_2 Óptimo en Modelo 2

Análisis de convexidad

Proposición 4.3 $V_2(K)$ es cóncava y tiene máximo

DEMOSTRACIÓN.

$$\frac{\partial \mathbb{E}(V_2)}{\partial K} = p\lambda r(1 - F_Z(K)) - C'_1(K)(1 - F_Z(K)) - C'(K)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbb{E}(V_2)}{\partial K^2} = -p\lambda r \cdot F'_Z(K) - C''_1(K)(1 - F_Z(K)) + C'_1(K) \cdot F'_Z(K) - C''(K)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbb{E}(V_2)}{\partial K^2} = (-p\lambda r + C'_1(K)) \cdot F'_Z(K) - C''_1(K)(1 - F_Z(K)) - C''(K)$$

Se observa que para todo $K \leq K_1$, $V'_1(K) > 0$, ya que $V_1(K)$ alcanza su máximo en K_1 y $V_1(K)$ es cóncava. Luego, $p\lambda r - C'_1(K) - C''(K) > 0 \forall K \leq K_1$, es decir, $-p\lambda r + C'_1(K) < -C''(K) \forall K \leq K_1$. Entonces se tiene:

$$\frac{\partial^2 \mathbb{E}(V_2)}{\partial K^2} < -C''(K) \cdot F'_Z(K) - C''_1(K)(1 - F_Z(K)) - C''(K), \forall K \leq K_1$$

Pero $C''(K) > 0 \forall K \geq 0$, entonces se tiene que:

$$\frac{\partial^2 \mathbb{E}(V_2)}{\partial K^2} < \underbrace{-C''(K) \cdot F'_Z(K)}_{<0} + \underbrace{-C''_1(K)(1 - F_Z(K))}_{<0} + \underbrace{-C''(K)}_{<0}$$

Así se puede concluir que en el intervalo $[0, K_1]$ $\frac{\partial \mathbb{E}(V_2)}{\partial K}$ es decreciente, $\mathbb{E}(V_2(K))$ es cóncava, y por lo tanto K_2 es máximo.

Además cabe notar, que como se demostró que todo punto crítico de $V_2(K)$ es máximo y menor a K_1 , se puede concluir que $V_2(K)$ es cóncava $\forall K$. \square

4.3. Modelo 3: Caso con Incertidumbre en la demanda y en la sismicidad

En este caso se supone que además de existir incertidumbre en la demanda se tiene incertidumbre en la sismicidad.

Para esto se considera un nuevo parámetro M que representa el momento sísmico de un sismo que sigue una distribución de Pareto F_M de parámetros β , M_- y M_+ .

Luego se agregan dos funciones: C_2 y C_3 que representan el costo de reparación en caso de sismo y el costo de construir una resistencia respectivamente, ambos con respecto a un momento sísmico a decidir M_0 . Además en caso de sismo la capacidad a extraer disminuye en ξ , por lo tanto la función que representa la cantidad a extraer queda:

$$T(K, z, M, M_0) = z \wedge (K - 1_{M > M_0} \xi) = \min\{z, K - 1_{M > M_0} \xi\}$$

Luego, la utilidad queda definida entre un intervalo de tiempo de 0 a τ , como la siguiente función:

$$\tilde{V}_3(K) := \int_0^\tau \tilde{U}_3(t) dt - \tilde{C}(K) - \tilde{C}_3(M_0, K)$$

donde:

- $\tilde{U}_3(t)$: Es la utilidad en el tiempo t , que incorpora la ganancia, el costo de producir y el costo de reparar en caso de sismo.

Se observa, que la forma de $\tilde{U}_3(t)$ depende de si van ocurriendo sismos que afecten la infraestructura o no (momento sísmico mayor o menor a M_0). Se asume que si ocurre un sismo que provoca daño, entonces no ocurrirá otro sismo mientras dura la reparación. Para incorporar este comportamiento, se modela como un proceso de eventos sísmicos según la definición de los siguientes tiempos:

- π_i : Tiempo que transcurre desde el $(i - 1)$ -ésimo sismo si es que no produjo daño o desde el término de la reparación si es que produjo daño hasta el i -ésimo sismo. Se asume que π_i es una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro ν .
- t_r : Tiempo que dura la reparación en caso que el sismo produce daño.
- t_i : Tiempo que dura un proceso, es decir, el tiempo que transcurre desde el $(i - 1)$ -ésimo sismo hasta el i -ésimo sismo. $t_i = \pi_i + \mathbb{1}_{[M_i > M_0]} t_r$
- S_i : Tiempo en el que ocurre el i -ésimo sismo desde el comienzo ($S_0 = 0$).

$$S_i = \sum_{j=1}^i \pi_j + \mathbb{1}_{[M_j > M_0]} t_r$$

Para clarificar esta notación, se muestra la siguiente línea de tiempo con las notaciones recién definidas:

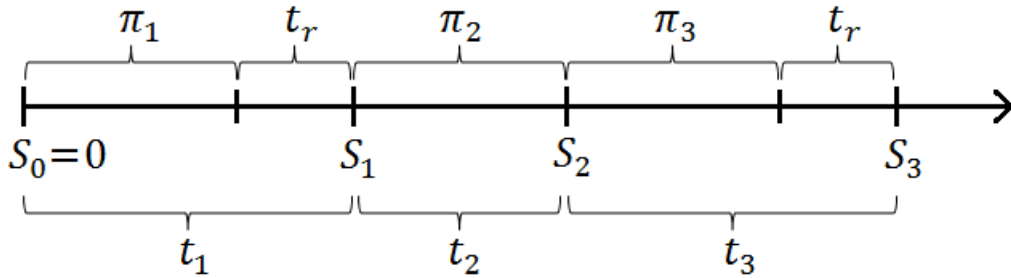


Figura 4.3: Línea de Tiempo

Con lo anterior, se reescribe $\tilde{V}_3(K)$ separando la integral de la siguiente forma:

$$\tilde{V}_3(K) = \left[\sum_{i=1}^{N(\tau)} \tilde{U}_i \right] - \tilde{C}(K) - \tilde{C}_3(M_0, K)$$

donde:

$$\tilde{U}_i(t) = \int_{S_{i-1}}^{S_{i-1}+\pi_i} U_a \cdot e^{-\alpha t} dt + \mathbf{1}_{[M_i > M_0]} \cdot \left[\int_{S_{i-1}+\pi_i}^{S_i} U_b \cdot e^{-\alpha t} dt - \tilde{C}_2(M_i - M_0) \right]$$

$$\tilde{U}_i(t) = \int_{S_{i-1}}^{S_{i-1}+\pi_i} U_a \cdot e^{-\alpha t} dt + \mathbf{1}_{[M_i > M_0]} \cdot \left[\int_{S_{i-1}+\pi_i}^{S_{i-1}+\pi_i+\mathbf{1}_{[M_i > M_0]}t_r} U_b \cdot e^{-\alpha t} dt - \tilde{C}_2(M_i - M_0) \right]$$

con:

- $N(\tau)$: Número de renovaciones que han ocurrido al tiempo τ .
- $U_a = p\lambda rT(K, z) - C_1(T(K, z))$
- $U_b = p\lambda rT(K - \xi, z) - C_1(T(K - \xi, z))$

Para poder analizar $\mathbb{E}[\tilde{V}_3]$ como en el modelo anterior, primero se analiza con detalle \tilde{U}_i :

$$\begin{aligned} \tilde{U}_i &= \int_{S_{i-1}}^{S_{i-1}+\pi_i} U_a \cdot e^{-\alpha t} dt + \mathbf{1}_{[M_i > M_0]} \cdot \left[\int_{S_{i-1}+\pi_i}^{S_{i-1}+\pi_i+\mathbf{1}_{[M_i > M_0]}t_r} U_b \cdot e^{-\alpha t} dt - \tilde{C}_2(M_i - M_0) \right] \\ \tilde{U}_i &= \frac{-1}{\alpha} e^{-\alpha t} \Big|_{S_{i-1}}^{S_{i-1}+\pi_i} U_a + \mathbf{1}_{[M_i > M_0]} \cdot \left[\frac{-1}{\alpha} e^{-\alpha t} \Big|_{S_{i-1}+\pi_i}^{S_{i-1}+\pi_i+\mathbf{1}_{[M_i > M_0]}t_r} U_b - \tilde{C}_2(M_i - M_0) \right] \\ \tilde{U}_i &= \frac{e^{-\alpha S_{i-1}} - e^{-\alpha(S_{i-1}+\pi_i)}}{\alpha} U_a + \mathbf{1}_{[M_i > M_0]} \cdot \left[\frac{e^{-\alpha(S_{i-1}+\pi_i)} - e^{-\alpha(S_{i-1}+\pi_i+\mathbf{1}_{[M_i > M_0]}t_r)}}{\alpha} U_b - \tilde{C}_2(M_i - M_0) \right] \\ \tilde{U}_i &= e^{-\alpha S_{i-1}} \cdot \frac{1 - e^{-\alpha \pi_i}}{\alpha} U_a + e^{-\alpha(S_{i-1}+\pi_i)} \cdot \mathbf{1}_{[M_i > M_0]} \cdot \left[\frac{1 - e^{-\alpha \mathbf{1}_{[M_i > M_0]}t_r}}{\alpha} U_b - C_2(M_i - M_0) \right] \end{aligned}$$

donde: $e^{-\alpha(S_{i-1}+\pi_i)} C_2(M_i - M_0) = \tilde{C}_2(M_i - M_0)$

$$\tilde{U}_i = e^{-\alpha S_{i-1}} \cdot \left[\frac{1 - e^{-\alpha \pi_i}}{\alpha} U_a + e^{-\alpha \pi_i} \cdot \mathbf{1}_{[M_i > M_0]} \cdot \left[\frac{1 - e^{-\alpha \mathbf{1}_{[M_i > M_0]}t_r}}{\alpha} U_b - C_2(M_i - M_0) \right] \right]$$

Luego, se calcula la Esperanza de \tilde{U}_i :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\tilde{U}_i] &= \mathbb{E} \left[e^{-\alpha S_{i-1}} \cdot \left[\frac{1 - e^{-\alpha \pi_i}}{\alpha} U_a + e^{-\alpha \pi_i} \cdot \mathbb{1}_{[M_i > M_0]} \cdot \left[\frac{1 - e^{-\alpha \mathbb{1}_{[M_i > M_0]} t_r}}{\alpha} U_b - C_2(M_i - M_0) \right] \right] \right] \\ \mathbb{E}[\tilde{U}_i] &= \mathbb{E} \left[e^{-\alpha S_{i-1}} \cdot \left[\frac{1 - e^{-\alpha \pi_i}}{\alpha} U_a + e^{-\alpha \pi_i} \cdot \mathbb{1}_{[M_i > M_0]} \cdot \frac{1 - e^{-\alpha \mathbb{1}_{[M_i > M_0]} t_r}}{\alpha} U_b \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - e^{-\alpha \pi_i} \cdot \mathbb{1}_{[M_i > M_0]} \cdot C_2(M_i - M_0) \right] \right]\end{aligned}$$

Se observa claramente, que las variables aleatorias S_{i-1} , π_i y M_i son independientes entre sí. Luego, $\mathbb{E}[\tilde{U}_i]$ queda:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\tilde{U}_i] &= \mathbb{E}[e^{-\alpha S_{i-1}}] \cdot \left[\mathbb{E} \left[\frac{1 - e^{-\alpha \pi_i}}{\alpha} \right] U_a + \mathbb{E}[e^{-\alpha \pi_i}] \cdot \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{[M_i > M_0]} \cdot \frac{1 - e^{-\alpha \mathbb{1}_{[M_i > M_0]} t_r}}{\alpha} \right] U_b \right. \\ &\quad \left. - \mathbb{E}[e^{-\alpha \pi_i}] \cdot \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{[M_i > M_0]} \cdot C_2(M_i - M_0) \right] \right]\end{aligned}$$

A continuación, se calculan las esperanzas anteriores:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{-\alpha \pi_i}] &= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha w} \cdot \nu e^{-\nu w} dw \\ &= \nu \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha + \nu)w} dw \\ &= \nu \cdot \frac{-e^{-(\alpha + \nu)w}}{\alpha + \nu} \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{\nu}{\alpha + \nu}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[\frac{1 - e^{-\alpha \pi_i}}{\alpha} \right] &= \frac{1}{\alpha} \cdot (1 - \mathbb{E}[e^{-\alpha \pi_i}]) \\ &= \frac{1}{\alpha} \cdot \left(1 - \frac{\nu}{\alpha + \nu} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha + \nu}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{[M_i > M_0]} \cdot \frac{1 - e^{-\alpha \mathbb{1}_{[M_i > M_0]} t_r}}{\alpha} \right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[M_i > M_0]} \cdot \frac{1 - e^{-\alpha \mathbb{1}_{[M_i > M_0]} t_r}}{\alpha} dM \\
&= \int_{M_0}^{+\infty} \frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} dM \\
&= (1 - F_M(M_0)) \cdot \frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[e^{-\alpha \mathbb{1}_{[M_i > M_0]} t_r} \right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha \mathbb{1}_{[M_i > M_0]} t_r} dM \\
&= \int_{-\infty}^{M_0} 1 dM + \int_{M_0}^{+\infty} e^{-\alpha t_r} dM \\
&= F_M(M_0) + (1 - F_M(M_0)) \cdot e^{-\alpha t_r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{-\alpha S_{i-1}}] &= \mathbb{E}[e^{-\alpha(\sum_{j=1}^{i-1} \pi_j + \sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{1}_{[M_j > M_0]} t_r)}] \\
&= \prod_{j=1}^{i-1} \left[\mathbb{E}[e^{-\alpha \pi_j}] \mathbb{E}[e^{-\alpha \mathbb{1}_{[M_j > M_0]} t_r}] \right] \\
&= \prod_{j=1}^{i-1} \left[\frac{\nu}{\alpha + \nu} \cdot \left(F_M(M_0) + (1 - F_M(M_0)) \cdot e^{-\alpha t_r} \right) \right] \\
&= \left(\frac{\nu}{\alpha + \nu} \right)^{i-1} \cdot \left(F_M(M_0) + (1 - F_M(M_0)) \cdot e^{-\alpha t_r} \right)^{i-1}
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\tilde{U}_i] &= \left(\frac{\nu}{\alpha + \nu} \right)^{i-1} \cdot \left(F_M(M_0) + (1 - F_M(M_0)) \cdot e^{-\alpha t_r} \right)^{i-1} \cdot \left[\frac{1}{\alpha + \nu} U_a + \right. \\
&\quad \left. \frac{\nu}{\alpha + \nu} \cdot (1 - F_M(M_0)) \cdot \frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} U_b - \frac{\nu}{\alpha + \nu} \cdot \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{[M_i > M_0]} \cdot C_2(M_i - M_0) \right] \right]
\end{aligned}$$

Se observa que el término $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{[M_i > M_0]} \cdot C_2(M_i - M_0)]$ es independiente de i , por ende se ocupará una notación independiente del término i : $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{[M > M_0]} \cdot C_2(M - M_0)]$.

Volviendo a: $\tilde{V}_3(K) = \left[\sum_{i=1}^{N(\tau)} \tilde{U}_i \right] - \tilde{C}(K) - \tilde{C}_3(M_0, K)$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N(\tau)} \tilde{U}_i \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^1 \tilde{U}_i \right] \cdot \mathbb{P}[N(\tau) = 1] + \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^2 \tilde{U}_i \right] \cdot \mathbb{P}[N(\tau) = 2] + \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^3 \tilde{U}_i \right] \cdot \mathbb{P}[N(\tau) = 3] + \dots \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^j \tilde{U}_i \right] \cdot \mathbb{P}[N(\tau) = j] \right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}[N(\tau) = j] \cdot \sum_{i=1}^j \mathbb{E}[\tilde{U}_i] \right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}[N(\tau) = j] \cdot \sum_{i=1}^j \Omega^{i-1} \cdot \left[\frac{1}{\alpha + \nu} U_a + \frac{\nu}{\alpha + \nu} \cdot (1 - F_M(M_0)) \cdot \frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} U_b \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\nu}{\alpha + \nu} \cdot \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{[M > M_0]} \cdot C_2(M - M_0) \right] \right] \right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}[N(\tau) = j] \cdot \sum_{i=1}^j \Omega^{i-1} \right) \cdot \left[\frac{1}{\alpha + \nu} U_a + \frac{\nu}{\alpha + \nu} \cdot (1 - F_M(M_0)) \cdot \frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} U_b \right. \\
&\quad \left. - \frac{\nu}{\alpha + \nu} \cdot \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{[M > M_0]} \cdot C_2(M - M_0) \right] \right]
\end{aligned}$$

donde:

$$\Omega = \left(\frac{\nu}{\alpha + \nu} \right) \cdot \left(F_M(M_0) + (1 - F_M(M_0)) \cdot e^{-\alpha t_r} \right)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N(\tau)} \tilde{U}_i \right] &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}[N(\tau) = j] \cdot \frac{1 - \Omega^j}{1 - \Omega} \right) \cdot \left[\frac{1}{\alpha + \nu} U_a + \frac{\nu}{\alpha + \nu} \cdot (1 - F_M(M_0)) \cdot \frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} U_b \right. \\
&\quad \left. - \frac{\nu}{\alpha + \nu} \cdot \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{[M > M_0]} \cdot C_2(M - M_0) \right] \right]
\end{aligned}$$

Calculando la derivada de la utilidad esperada, se tiene que.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbb{E}[\tilde{V}_3(K)]}{\partial K} &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}[N(\tau) = j] \cdot \frac{1 - \Omega^j}{1 - \Omega} \right) \cdot \frac{1}{\alpha + \nu} \frac{\partial \mathbb{E}[U_a]}{\partial K} - \frac{\partial \mathbb{E}[\tilde{C}(K)]}{\partial K} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}[N(\tau) = j] \cdot \frac{1 - \Omega^j}{1 - \Omega} \right) \cdot \frac{\nu}{\alpha + \nu} \cdot (1 - F_M(M_0)) \cdot \frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} \frac{\partial \mathbb{E}[U_b]}{\partial K} \\
&\quad - \frac{\partial \mathbb{E}[\tilde{C}_3(M_0, K)]}{\partial K}
\end{aligned}$$

Proposición 4.4 $K_3 < K_2$, donde K_3 es la capacidad óptima para el modelo 3.

DEMOSTRACIÓN. Notemos que en el caso en que: $F_M(M_0) = 1$, es decir, si los sismos no generasen daño, entonces se recupera el caso anterior y se tendría que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{E}[\tilde{V}_3(K)]}{\partial K} &= \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha} \frac{\partial \mathbb{E}[U_a]}{\partial K} - \frac{\partial \mathbb{E}[\tilde{C}(K)]}{\partial K} - \frac{\partial \mathbb{E}[\tilde{C}_3(M_0, K)]}{\partial K} \\ &\leq \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha} \frac{\partial \mathbb{E}[U_a]}{\partial K} - \frac{\partial \mathbb{E}[\tilde{C}(K)]}{\partial K} \\ &= \frac{\partial \mathbb{E}[\tilde{V}_2(K)]}{\partial K} \end{aligned}$$

Luego, si $\frac{\partial \mathbb{E}[\tilde{V}_3(K)]}{\partial K}$ es creciente respecto de $F_M(M_0)$, entonces se tendría que:

$$\frac{\partial \mathbb{E}[\tilde{V}_3(K)]}{\partial K} \leq \frac{\partial \mathbb{E}[\tilde{V}_2(K)]}{\partial K}, \text{ en cualquier caso.}$$

Para verificar esto, primero se comprueba que: $\sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}[N(\tau) = j] \cdot \frac{1 - \Omega^j}{1 - \Omega} \right)$ es creciente respecto de $F_M(M_0)$. En efecto,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}[N(\tau) = j] \cdot \frac{1 - \Omega^j}{1 - \Omega} \right) = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N(\tau)} \Omega^{i-1} \right]$$

Luego, si $F_M(M_0)$ aumenta, entonces ocurrirán menos sismos con daños, por lo tanto, habrán más renovaciones de sismos y entonces $N(\tau)$ aumenta. En efecto $N(\tau) = l$, donde l es tal que: $S_l < \tau < S_{l+1}$. Se recuerda que:

$$\begin{aligned} S_l &= \sum_{j=1}^l \pi_j + \mathbf{1}_{[M_j > M_0]} t_r \\ \mathbb{E}[S_l] &= \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^l \pi_j + \mathbf{1}_{[M_j > M_0]} t_r \right] \\ &= \sum_{j=1}^l \mathbb{E}[\pi_j] + \mathbb{E}[\mathbf{1}_{[M_j > M_0]} t_r] \\ &= \sum_{j=1}^l \mathbb{E}[\pi_j] + (1 - F_M(M_0)) \cdot t_r \end{aligned}$$

Luego es claro que: $\frac{\partial \mathbb{E}[S_l]}{\partial F_M(M_0)} < 0$.

Por lo tanto, si $F_M(M_0)_2 < F_M(M_0)$, entonces $\mathbb{E}[S_l](F_M(M_0)_2) \leq \mathbb{E}[S_l](F_M(M_0)) \leq \tau < \mathbb{E}[S_{l+1}](F_M(M_0))$, con lo que se concluye que:

$$N(\tau)[F_M(M_0)_2] \leq N(\tau)[F_M(M_0)]$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial F_M(M_0)} &= \frac{\partial \left(\frac{\nu}{\alpha + \nu} \right) \cdot \left(F_M(M_0) + (1 - F_M(M_0)) \cdot e^{-\alpha t_r} \right)}{\partial F_M(M_0)} \\ &= \left(\frac{\nu}{\alpha + \nu} \right) \cdot \left(1 - e^{-\alpha t_r} \right) \\ &> 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, claramente $\frac{\partial \Omega^{i-1}}{\partial F_M(M_0)} > 0$.

Y entonces se concluye:

$$\frac{\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N(\tau)} \Omega^{i-1} \right]}{\partial F_M(M_0)} = \frac{\partial \sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}[N(\tau) = j] \cdot \frac{1 - \Omega^j}{1 - \Omega} \right)}{\partial F_M(M_0)} > 0$$

Se recuerda que, si $F_M(M_0) = 1$, entonces se tiene que:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}[N(\tau) = j] \cdot \frac{1 - \Omega^j}{1 - \Omega} \right) \cdot \frac{1}{\alpha + \nu} = \frac{1 - e^{-\alpha \tau}}{\alpha}$$

entonces si $F_M(M_0) < 1$ implica que:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}[N(\tau) = j] \cdot \frac{1 - \Omega^j}{1 - \Omega} \right) \cdot \frac{1}{\alpha + \nu} < \frac{1 - e^{-\alpha \tau}}{\alpha}$$

Con lo anterior, se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{E}[\tilde{V}_3(K)]}{\partial K} &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}[N(\tau) = j] \cdot \frac{1 - \Omega^j}{1 - \Omega} \right) \cdot \frac{1}{\alpha + \nu} \frac{\partial \mathbb{E}[U_a]}{\partial K} - \frac{\partial \mathbb{E}[\tilde{C}(K)]}{\partial K} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}[N(\tau) = j] \cdot \frac{1 - \Omega^j}{1 - \Omega} \right) \cdot \frac{\nu}{\alpha + \nu} \cdot (1 - F_M(M_0)) \cdot \frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} \frac{\partial \mathbb{E}[U_b]}{\partial K} \\ &\quad - \frac{\partial \mathbb{E}[\tilde{C}_3(M_0, K)]}{\partial K} \\ &\leq \frac{1 - e^{-\alpha \tau}}{\alpha} \frac{\partial \mathbb{E}[U_a]}{\partial K} - \frac{\partial \mathbb{E}[\tilde{C}(K)]}{\partial K} \\ &\quad + \frac{1 - e^{-\alpha \tau}}{\alpha} \nu \cdot (1 - F_M(M_0)) \cdot \frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} \frac{\partial \mathbb{E}[U_b]}{\partial K} - \frac{\partial \mathbb{E}[\tilde{C}_3(M_0, K)]}{\partial K} \end{aligned}$$

Al igual que en el Modelo 1, para facilitar la notación, se define:

$$\tilde{C}_3(K) = \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha} C_3(K)$$

Por lo tanto, la desigualdad queda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{E}[\tilde{V}_3(K)]}{\partial K} &\leq \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha} \frac{\partial \mathbb{E}[U_a]}{\partial K} - \frac{\partial \mathbb{E}[\tilde{C}(K)]}{\partial K} \\ &\quad + \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha} \nu \cdot (1 - F_M(M_0)) \cdot \frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} \frac{\partial \mathbb{E}[U_b]}{\partial K} - \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha} \frac{\partial \mathbb{E}[C_3(M_0, K)]}{\partial K} \end{aligned}$$

Por otro lado, se supone que:

$$\frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha} \nu \cdot (1 - F_M(M_0)) \cdot \frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} \frac{\partial \mathbb{E}[U_b]}{\partial K} - \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha} \frac{\partial \mathbb{E}[C_3(M_0, K)]}{\partial K} < 0$$

\Leftrightarrow

$$\frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha} \left[\nu \cdot (1 - F_M(M_0)) \cdot \frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} \frac{\partial \mathbb{E}[U_b]}{\partial K} - \frac{\partial \mathbb{E}[C_3(M_0, K)]}{\partial K} \right] < 0 \quad (4.6)$$

\Leftrightarrow

$$\nu \cdot (1 - F_M(M_0)) \cdot \frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} \frac{\partial \mathbb{E}[U_b]}{\partial K} - \frac{\partial \mathbb{E}[C_3(M_0, K)]}{\partial K} < 0 \quad (4.7)$$

Ya que si no, implicaría que a mayor capacidad K , las ganancias que se obtienen en los períodos de reparación van aumentando considerando los costos de construir la fortificación y los costos de reparación, lo cual no tiene sentido lógico, por lo tanto, si esta dependencia coherente se mantiene con la función $C_3(M_0, K)$, se tiene que:

$$\frac{\partial \mathbb{E}[\tilde{V}_3(K)]}{\partial K} < \frac{\partial \mathbb{E}[\tilde{V}_2(K)]}{\partial K}$$

Y por lo tanto, $K_3 < K_2$, donde K_3 es la capacidad óptima para el modelo 3.

Otra forma de concluir, es analizando el significado de la siguiente expresión:

$$\frac{\sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}[N(\tau) = j] \cdot \frac{1 - \Omega^j}{1 - \Omega} \right) \left(\frac{1}{\alpha + \nu} \frac{\partial \mathbb{E}[U_a]}{\partial K} + \frac{\nu}{\alpha + \nu} \cdot (1 - F_M(M_0)) \cdot \frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} \frac{\partial \mathbb{E}[U_b]}{\partial K} \right)}{\partial F_M(M_0)}$$

Lo que corresponde a como varía la tasa de Utilidad con respecto a la Capacidad a medida que varía la probabilidad de ocurrencia de sismos $F_M(M_0)$. Lo lógico, es que a medida que la probabilidad de que no ocurran sismos que provoquen daños aumente, la tasa de Utilidad con respecto a la Capacidad también aumente, ya que siempre debiese ser mejor escenarios sin ocurrencia de sismos, por lo tanto es natural asumir la expresión anterior positiva.

Y entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}[N(\tau) = j] \cdot \frac{1 - \Omega^j}{1 - \Omega} \right) \left(\frac{1}{\alpha + \nu} \frac{\partial \mathbb{E}[U_a]}{\partial K} + \frac{\nu}{\alpha + \nu} \cdot (1 - F_M(M_0)) \cdot \frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} \frac{\partial \mathbb{E}[U_b]}{\partial K} \right) \\ & \leq \frac{1 - e^{-\alpha \tau}}{\alpha} \frac{\partial \mathbb{E}[U_a]}{\partial K} \end{aligned}$$

Lo que implica finalmente que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{E}[\tilde{V}_3(K)]}{\partial K} &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}[N(\tau) = j] \cdot \frac{1 - \Omega^j}{1 - \Omega} \right) \cdot \frac{1}{\alpha + \nu} \frac{\partial \mathbb{E}[U_a]}{\partial K} - \frac{\partial \mathbb{E}[\tilde{C}(K)]}{\partial K} \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}[N(\tau) = j] \cdot \frac{1 - \Omega^j}{1 - \Omega} \right) \cdot \frac{\nu}{\alpha + \nu} \cdot (1 - F_M(M_0)) \cdot \frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} \frac{\partial \mathbb{E}[U_b]}{\partial K} \\ &- \frac{\partial \mathbb{E}[\tilde{C}_3(M_0, K)]}{\partial K} \\ &\leq \frac{1 - e^{-\alpha \tau}}{\alpha} \frac{\partial \mathbb{E}[U_a]}{\partial K} - \frac{\partial \mathbb{E}[\tilde{C}(K)]}{\partial K} \\ &\leq \frac{\partial \mathbb{E}[\tilde{V}_2(K)]}{\partial K} \end{aligned}$$

□

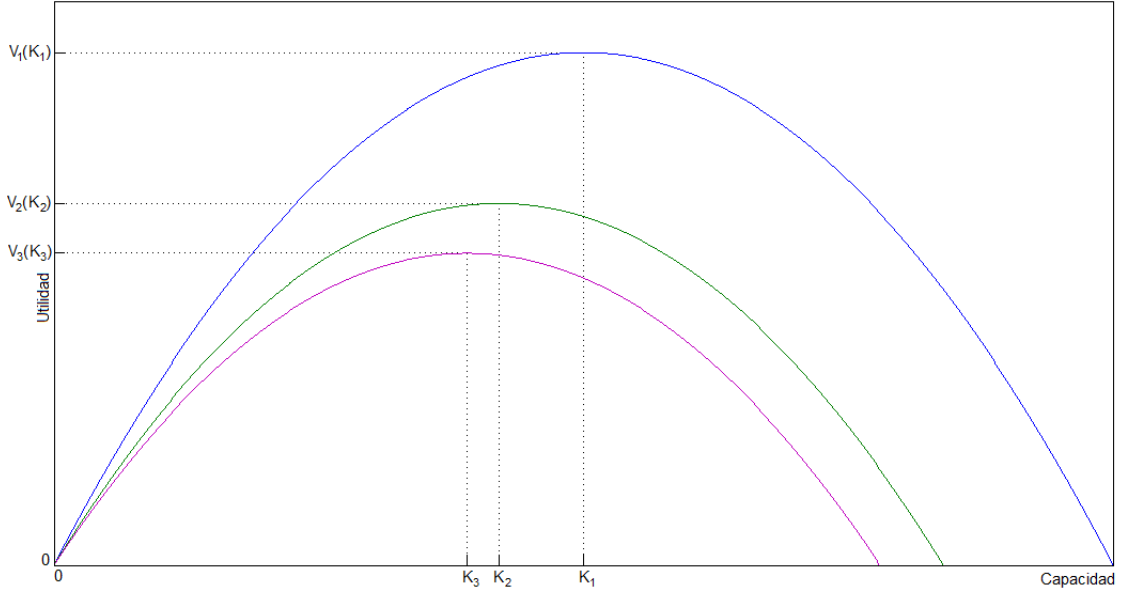


Figura 4.4: Ejemplo 2 de K_3 Óptimo en Modelo 3

Análisis de convexidad

Proposición 4.5 $\mathbb{E}(V_3(K))$ es cóncava y tiene máximo.

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbb{E}[\tilde{V}_3(K)]}{\partial K} &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}[N(\tau) = j] \cdot \frac{1 - \Omega^j}{1 - \Omega} \right) \cdot \frac{1}{\alpha + \nu} \frac{\partial \mathbb{E}[U_a]}{\partial K} - \frac{\partial \mathbb{E}[\tilde{C}(K)]}{\partial K} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}[N(\tau) = j] \cdot \frac{1 - \Omega^j}{1 - \Omega} \right) \cdot \frac{\nu}{\alpha + \nu} \cdot (1 - F_M(M_0)) \cdot \frac{1 - e^{-\alpha \tau r}}{\alpha} \frac{\partial \mathbb{E}[U_b]}{\partial K} \\
&\quad - \frac{\partial \mathbb{E}[\tilde{C}_3(M_0, K)]}{\partial K} \\
\frac{\partial^2 \mathbb{E}[\tilde{V}_3(K)]}{\partial K^2} &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}[N(\tau) = j] \cdot \frac{1 - \Omega^j}{1 - \Omega} \right) \cdot \frac{1}{\alpha + \nu} \frac{\partial^2 \mathbb{E}[U_a]}{\partial K^2} - \frac{\partial^2 \mathbb{E}[\tilde{C}(K)]}{\partial K^2} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}[N(\tau) = j] \cdot \frac{1 - \Omega^j}{1 - \Omega} \right) \cdot \frac{\nu}{\alpha + \nu} \cdot (1 - F_M(M_0)) \cdot \frac{1 - e^{-\alpha \tau r}}{\alpha} \frac{\partial^2 \mathbb{E}[U_b]}{\partial K^2} \\
&\quad - \frac{\partial^2 \mathbb{E}[\tilde{C}_3(M_0, K)]}{\partial K^2} \\
&\leq \frac{1 - e^{-\alpha \tau}}{\alpha} \frac{\partial^2 \mathbb{E}[U_a]}{\partial K^2} - \frac{\partial^2 \mathbb{E}[\tilde{C}(K)]}{\partial K^2} \\
&\quad + \frac{1 - e^{-\alpha \tau}}{\alpha} \nu \cdot (1 - F_M(M_0)) \cdot \frac{1 - e^{-\alpha \tau r}}{\alpha} \frac{\partial^2 \mathbb{E}[U_b]}{\partial K^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\partial^2 \mathbb{E}[\tilde{C}_3(M_0, K)]}{\partial K^2} \\
& = \frac{\partial^2 \mathbb{E}[\tilde{V}_2(K)]}{\partial K^2} \\
& \quad + \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha} \nu \cdot (1 - F_M(M_0)) \cdot \frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} \frac{\partial^2 \mathbb{E}[U_b]}{\partial K^2} \\
& - \frac{\partial^2 \mathbb{E}[\tilde{C}_3(M_0, K)]}{\partial K^2}
\end{aligned}$$

Se observa que el primer término es negativo por la Proposición 4.3. El tercer término es negativo por hipótesis. Además es claro, que:

$$\frac{\partial^2 \mathbb{E}[U_b]}{\partial K^2} < 0$$

Así se concluye que $\frac{\partial^2 \mathbb{E}(V_3)}{\partial K^2} < 0$.

Por lo tanto, se obtiene que $\frac{\partial \mathbb{E}(V_3)}{\partial K}$ es decreciente, $\mathbb{E}(V_3(K))$ es cóncava y por lo tanto K_3 es máximo. \square

4.4. Análisis de parámetro M_+ como variable

En el caso anterior, se supone que el parámetro M_+ es fijo y dado, esto no es realmente cierto en la realidad, debido a que si en la minería se realiza una extracción a una tasa muy alta o considera una capacidad mucho mayor, esto afecta en las características de la roca.

En este análisis, se supone que el parámetro M_+ , que representa el momento sísmico máximo que podría alcanzar un sismo, se puede variar y se estudia como afecta esto a la función de utilidad.

Por lo tanto se analiza como varía la utilidad esperada con respecto a M_+ .

Proposición 4.6 *La utilidad esperada es decreciente respecto a M_+ .*

DEMOSTRACIÓN. La utilidad esperada se representa por la siguiente función:

$$\mathbb{E}[\tilde{V}_3(K)] = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N(\tau)} \tilde{U}_i \right] - \tilde{C}(K) - \tilde{C}_3(M_0, K)$$

Primero se analiza, la derivada de:

$$\mathbb{E}[\tilde{U}_i] = \left(\frac{\nu}{\alpha + \nu} \right)^{i-1} \cdot \left(F_M(M_0) + (1 - F_M(M_0)) \cdot e^{-\alpha t r} \right)^{i-1} \cdot \left[\frac{1}{\alpha + \nu} U_a + \frac{\nu}{\alpha + \nu} \cdot (1 - F_M(M_0)) \cdot \frac{1 - e^{-\alpha t r}}{\alpha} U_b - \frac{\nu}{\alpha + \nu} \cdot \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{[M_i > M_0]} \cdot C_2(M_i - M_0) \right] \right]$$

Claramente los dos primeros términos son positivos, para el tercero, se puede asumir las condiciones para que sea positivo, dado que interesa analizar cuando el negocio es rentable. Por otro lado es claro que:

$$\frac{\partial(F_M(M_0) + (1 - F_M(M_0)) \cdot e^{-\alpha t r})}{\partial M_+} = \frac{\partial(e^{-\alpha t r} + F_M(M_0) \cdot (1 - e^{-\alpha t r}))}{\partial M_+} < 0$$

ya que $\frac{\partial F_M(M_0)}{\partial M_+} = -f(M_+) \cdot F(M_0) < 0$.

Se analiza $\frac{\partial \mathbb{E}[\mathbb{1}_{[M_i > M_0]} \cdot C_2(M_i - M_0)]}{\partial M_+} = \frac{\partial \mathbb{E}[C_2((M - M_0)^+)]}{\partial M_+}$. Para esto, primero se expresa $\mathbb{E}[C_2((M - M_0)^+)]$:

$$\mathbb{E}[C_2((M - M_0)^+)] = (1 - F_M(M_0)) \cdot \mathbb{E}[C_2(M - M_0) | M > M_0] + F_M(M_0) \cdot \underbrace{\mathbb{E}[C_2(M - M_0) | M < M_0]}_{=0}$$

$$\mathbb{E}[C_2((M - M_0)^+)] = (1 - F_M(M_0)) \cdot \mathbb{E}[C_2(M - M_0) | M > M_0]$$

$$\mathbb{E}[C_2((M - M_0)^+)] = \int_{M_0}^{M_+} C_2(M - M_0) \cdot f_M(M_+, M) dM$$

Se define:

$$g(M_+, x) := \int_{M_0}^{M_+} C_2(M - M_0) \cdot f_M(x, M) dM$$

y

$$h(M_+) := g(M_+, M_+)$$

Luego, se calcula la derivada de $h(M_+)$:

$$\frac{\partial h}{\partial M_+} = \frac{\partial g}{\partial M_+} + \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial M_+}$$

$$\frac{\partial h}{\partial M_+} = C_2(M_+ - M_0) \cdot f_M(M_+, M_+) + \int_{M_0}^{M_+} C_2(M - M_0) \cdot \frac{\partial f_M}{\partial x}(x, M) dM \quad (4.8)$$

Para continuar, se calcula $\frac{\partial f_M}{\partial x}(x, M_+)$. Se recuerda la función $f_M(M)$:

$$f_M(M) = \frac{\beta M^{-\beta-1}}{M_-^{-\beta} - M_+^{-\beta}}$$

Por lo tanto la derivada es:

$$\frac{\partial f_M}{\partial M_+}(M) = \frac{-\beta M^{-\beta-1}}{(M_-^{-\beta} - M_+^{-\beta})^2} \cdot \beta M_+^{-\beta-1}$$

$$\frac{\partial f_M}{\partial M_+}(M) = \frac{-\beta M_+^{-\beta-1}}{M_-^{-\beta} - M_+^{-\beta}} \cdot f(M)$$

$$\frac{\partial f_M}{\partial M_+}(M) = -f_M(M_+) \cdot f(M)$$

Reemplazando en (4.8), se tiene que:

$$\frac{\partial h}{\partial M_+} = C_2(M_+ - M_0) \cdot f_M(M_+, M_+) + \int_{M_0}^{M_+} C_2(M - M_0) \cdot -f_M(M_+) \cdot f(M) \, dM$$

$$\frac{\partial h}{\partial M_+} = f_M(M_+) \cdot \left[C_2(M_+ - M_0) - \int_{M_0}^{M_+} C_2(M - M_0) \cdot f(M) \, dM \right] \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial h}{\partial M_+} = f_M(M_+) \cdot \int_{M_0}^{M_+} \underbrace{[C_2(M_+ - M_0) - C_2(M - M_0)]}_{>0} \cdot f(M) \, dM$$

Por lo tanto $\frac{\partial h}{\partial M_+} > 0$, y entonces $\frac{\partial h}{\partial M_+} = \frac{\partial \mathbb{E}[C_2((M - M_0)^+)]}{\partial M_+} > 0$.

Entonces:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \left[\frac{1}{\alpha + \nu} U_a + \frac{\nu}{\alpha + \nu} \cdot (1 - F_M(M_0)) \cdot \frac{1 - e^{-\alpha t r}}{\alpha} U_b - \frac{\nu}{\alpha + \nu} \cdot \mathbb{E}[\mathbf{1}_{[M_i > M_0]} \cdot C_2(M_i - M_0)] \right]}{\partial M_+} \\ &= \frac{\nu}{\alpha + \nu} \cdot \frac{\partial \left[(1 - F_M(M_0)) \cdot \frac{1 - e^{-\alpha t r}}{\alpha} U_b - \mathbb{E}[\mathbf{1}_{[M_i > M_0]} \cdot C_2(M_i - M_0)] \right]}{\partial M_+} \\ &= \frac{\nu}{\alpha + \nu} \cdot \frac{\partial \left[-F_M(M_0) \cdot \frac{1 - e^{-\alpha t r}}{\alpha} U_b - \mathbb{E}[\mathbf{1}_{[M_i > M_0]} \cdot C_2(M_i - M_0)] \right]}{\partial M_+} \end{aligned}$$

Ocupando (4.9):

$$\begin{aligned}
&= \frac{\nu}{\alpha + \nu} \cdot \left[f_M(M_+) F_M(M_0) \cdot \frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} U_b - f_M(M_+) \cdot \left[C_2(M_+ - M_0) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_{M_0}^{M_+} C_2(M - M_0) \cdot f(M) \, dM \right] \right] \\
&= - \frac{\nu}{\alpha + \nu} \cdot f_M(M_+) \left[- F_M(M_0) \cdot \frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} U_b + C_2(M_+ - M_0) \right. \\
&\quad \left. - \int_{M_0}^{M_+} C_2(M - M_0) \cdot f(M) \, dM \right]
\end{aligned}$$

Basta con verificar que:

$$-F_M(M_0) \cdot \frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} U_b + C_2(M_+ - M_0) - \int_{M_0}^{M_+} C_2(M - M_0) \cdot f(M) \, dM > 0$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
&= - F_M(M_0) \cdot \frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} U_b + C_2(M_+ - M_0) - \int_{M_0}^{M_+} C_2(M - M_0) \cdot f(M) \, dM \\
&= - F_M(M_0) \cdot \frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} U_b + C_2(M_+ - M_0) - (1 - F(M_0)) \cdot \mathbb{E}[C_2(M - M_0) | M > M_0] \\
&= - F_M(M_0) \cdot \frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} U_b + \underbrace{(C_2(M_+ - M_0) - \mathbb{E}[C_2(M - M_0) | M > M_0])}_{>0} \\
&\quad + \underbrace{F(M_0) \cdot \mathbb{E}[C_2(M - M_0) | M > M_0]}_{>0} \\
&\geq - F_M(M_0) \cdot \frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} U_b + F(M_0) \cdot \mathbb{E}[C_2(M - M_0) | M > M_0] \\
&\geq F_M(M_0) \cdot \left[\mathbb{E}[C_2(M - M_0) | M > M_0] - \frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} U_b \right]
\end{aligned}$$

Donde claramente

$$\mathbb{E}[C_2(M - M_0) | M > M_0] - \frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} U_b > 0$$

ya que si no, convendría que hubiesen sismos y repararlos.

Por lo tanto:

$$\frac{\partial \left[\frac{1}{\alpha + \nu} U_a + \frac{\nu}{\alpha + \nu} \cdot (1 - F_M(M_0)) \cdot \frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} U_b - \frac{\nu}{\alpha + \nu} \cdot \mathbb{E}[\mathbf{1}_{[M_i > M_0]} \cdot C_2(M_i - M_0)] \right]}{\partial M_+} < 0$$

Y entonces $\frac{\partial \mathbb{E}[\tilde{U}_i]}{\partial M_+} < 0$

Volviendo al cálculo inicial, se tenía que:

$$\mathbb{E}[\tilde{V}_3(K)] = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N(\tau)} \tilde{U}_i \right] - \tilde{C}(K) - \tilde{C}_3(M_0, K)$$

Por último se verifica que si $M_+^1 < M_+^2$, entonces $N_{M_+^1}(\tau) > N_{M_+^2}(\tau)$

Lo cual es cierto ya que si $M_+^1 < M_+^2$, entonces habrán más reparaciones para el caso M_+^2 ya que es más probable que ocurran sismos con daños, y por lo tanto, ocurrirán menos renovaciones de sismos.

$$\text{Se recuerda: } \mathbb{E}[\tilde{V}_3(K)] = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N(\tau)} \tilde{U}_i \right] - \tilde{C}(K) - \tilde{C}_3(M_0, K).$$

Luego, si $M_+^1 < M_+^2$, se tiene que: $\mathbb{E}[\tilde{V}_3(K, M_+^1)] > \mathbb{E}[\tilde{V}_3(K, M_+^2)]$, ya que para el caso M_+^2 se tienen menos términos en la sumatoria y cada uno de ellos, \tilde{U}_i , es menor que para el caso M_+^1 , ya que $\frac{\partial \mathbb{E}[\tilde{U}_i]}{\partial M_+} < 0$.

Finalmente, se tiene que:

$$\frac{\partial \mathbb{E}(\tilde{V}_3(K))}{\partial M_+} < 0 \tag{4.10}$$

□

Lo que significa, que si se aumenta el parámetro M_+ de la distribución de Pareto, entonces la utilidad esperada disminuye. Este resultado tiene sentido con la realidad, ya que M_+ representa el momento sísmico máximo de un sismo que resiste el terreno, si este momento sísmico máximo aumenta, lo que se espera es que lo que se gana con el negocio sea menor, ya que los sismos que podrían haber causado más daño.

4.5. Modelo 4: Caso con Incertidumbre en la demanda, sismicidad y parámetro M_+ dependiendo de K

Se supone que el parámetro M_+ , que representa el momento sísmico máximo de un sismo que puede ocurrir en un terreno, depende de la variable K , es decir, de la capacidad de una mina. Esto significa que si se decide por construir una mina con

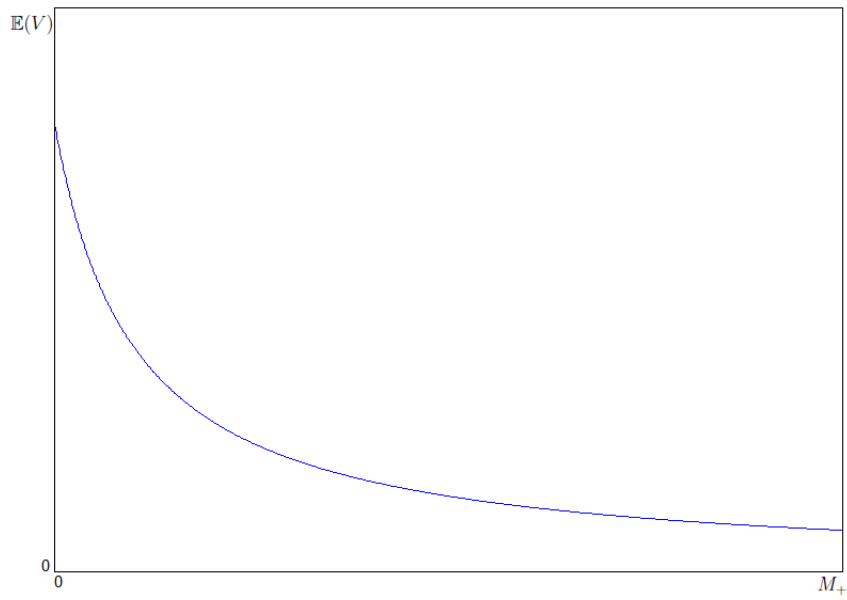


Figura 4.5: Ejemplo de $E(V)$ decreciente respecto de M_+

una capacidad mayor, entonces el momento sísmico máximo que podría ocurrir de un sismo variará.

La dependencia será creciente, es decir:

$$\frac{\partial M_+}{\partial K} > 0 \quad (4.11)$$

Por lo tanto a mayor capacidad de la mina, mayor será el momento sísmico máximo que podría ocurrir de un sismo.

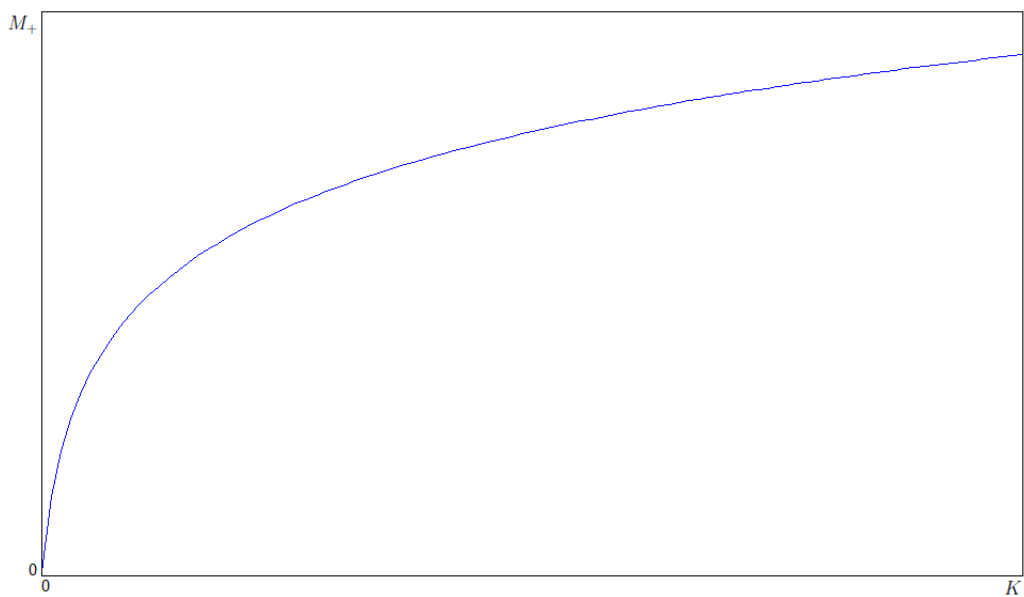


Figura 4.6: Ejemplo de M_+ creciente con respecto a K

El Modelo en este caso, es similar al Modelo 3, con la salvedad que M_+ ya no es un parámetro, sino variable que depende de K .

Por lo tanto, la derivada de la esperanza queda:

$$\frac{\partial \mathbb{E}(V_4(K, M_0, M_+(K)))}{\partial K} = \frac{\partial \mathbb{E}(V_4(K))}{\partial K} + \frac{\partial \mathbb{E}(V_4(M_+(K)))}{\partial K}$$

Proposición 4.7 $K_4 < K_3$, donde K_4 es la capacidad óptima para el modelo 4.

DEMOSTRACIÓN. Se observa que

$$\frac{\partial \mathbb{E}(V_4(K))}{\partial K} = \frac{\partial \mathbb{E}(V_3(K))}{\partial K}$$

y

$$\frac{\partial \mathbb{E}(V_4(M_+(K)))}{\partial K} = \frac{\partial \mathbb{E}(V_3(M_+))}{\partial M_+} \cdot \frac{\partial M_+}{\partial K}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial \mathbb{E}(V_4(K, M_0, M_+(K)))}{\partial K} = \frac{\partial \mathbb{E}(V_3(K))}{\partial K} + \frac{\partial \mathbb{E}(V_3(M_+))}{\partial M_+} \cdot \frac{\partial M_+}{\partial K}$$

Observando (4.11) y (4.10), se deduce claramente que el segundo término es negativo. Luego se tiene que:

$$\frac{\partial \mathbb{E}(V_4(K))}{\partial K} < \frac{\partial \mathbb{E}(V_3(K))}{\partial K}$$

Además como se tiene que $\frac{\partial \mathbb{E}(V_3(K))}{\partial K}$ y $\frac{\partial \mathbb{E}(V_4(K))}{\partial K}$ son decrecientes, entonces se concluye que $K_4 < K_3$, donde K_4 es tal que $\mathbb{E}(V_4(K_4))$ alcanza su máximo.

□

Análisis de convexidad

Proposición 4.8 $\mathbb{E}(V_4(K))$ es cóncava y tiene máximo.

DEMOSTRACIÓN.

$$\frac{\partial \mathbb{E}(V_4(K, M_0, M_+(K)))}{\partial K} = \frac{\partial \mathbb{E}(V_3(K))}{\partial K} + \frac{\partial \mathbb{E}(V_3(M_+))}{\partial M_+} \cdot \frac{\partial M_+}{\partial K}$$

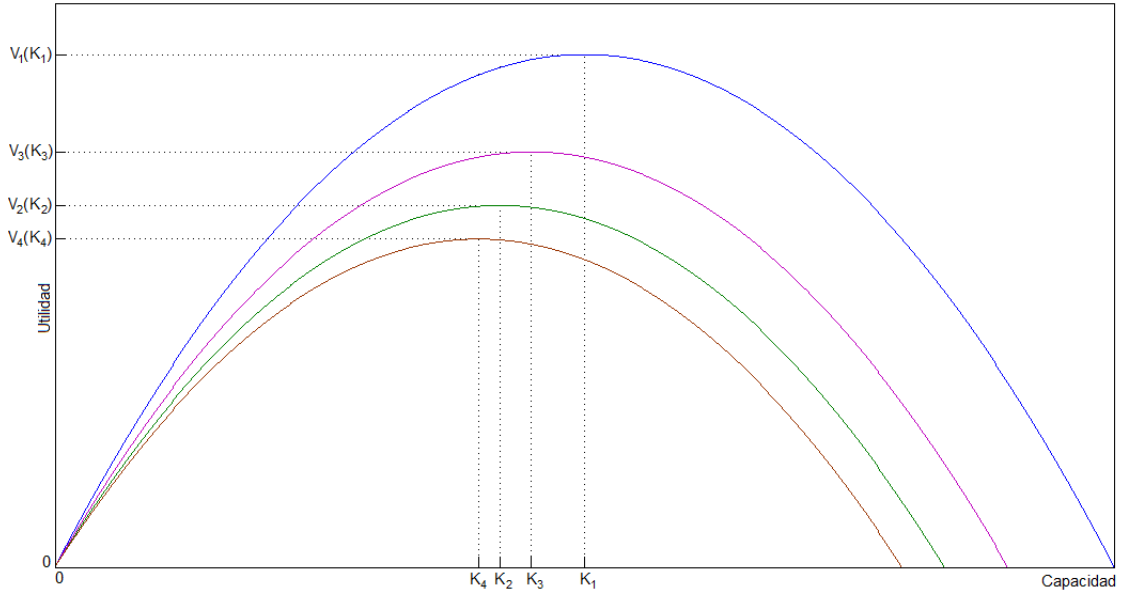


Figura 4.7: Ejemplo de K_4 Óptimo en Modelo 4

$$\frac{\partial^2 \mathbb{E}(V_4(K, M_0, M_+(K)))}{\partial K^2} = \frac{\partial^2 \mathbb{E}(V_3(K))}{\partial K^2} + \frac{\partial \left(\frac{\partial \mathbb{E}(V_3(M_+))}{\partial M_+} \right)}{\partial K} \cdot \frac{\partial M_+}{\partial K} + \frac{\partial \mathbb{E}(V_3(M_+))}{\partial M_+} \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial M_+}{\partial K} \right)}{\partial K}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbb{E}(V_4(K, M_0, M_+(K)))}{\partial K^2} = \frac{\partial^2 \mathbb{E}(V_3(K))}{\partial K^2} + \frac{\partial^2 \mathbb{E}(V_3(M_+))}{\partial M_+^2} \cdot \left(\frac{\partial M_+}{\partial K} \right)^2 + \frac{\partial \mathbb{E}(V_3(M_+))}{\partial M_+} \cdot \frac{\partial^2 M_+}{\partial K^2}$$

- El primer término es negativo por lo analizado en **3.3.1**
- Para el tercer término, se impone que $\frac{\partial^2 M_+}{\partial K^2} < 0$, de este modo, queda negativo

Se agrega la siguiente condición:

$$\frac{\partial^2 \mathbb{E}(V_3(M_+))}{\partial M_+^2} \cdot \left(\frac{\partial M_+}{\partial K} \right)^2 + \frac{\partial \mathbb{E}(V_3(M_+))}{\partial M_+} \cdot \frac{\partial^2 M_+}{\partial K^2} < 0$$

es decir: $\frac{\partial \mathbb{E}(V_3(M_+))}{\partial M_+} \cdot \frac{\partial M_+}{\partial K}$ sea decreciente con respecto a K .

Así se concluye que $\frac{\partial^2 \mathbb{E}(V_4)}{\partial K^2} < 0$.

Por lo tanto, se obtiene que $\frac{\partial \mathbb{E}(V_4)}{\partial K}$ es decreciente, $\mathbb{E}(V_4(K))$ es cóncava y por lo tanto K_4 es máximo. \square

Capítulo 5

Análisis a los Modelos

En el capítulo anterior, se desarrollaron los distintos modelos según las suposiciones respectivas llegando a las soluciones. A partir de eso, es inevitable el análisis y comportamiento de los modelos, como varían según la realidad que se considera, evaluar los límites reales y teóricos, etc. Gracias a estos análisis será posible evaluar distintos escenarios y condiciones factibles como no factibles, y de este modo, poder comenzar a considerar cual podrían ser los caminos más óptimos al momento de planificar la operación de una minera, sin dejar de lado la sismicidad.

Se comparan los cuatro casos desarrollados anteriormente, con el objetivo de encontrar relaciones en sus soluciones. Se analiza según los modelos, que es lo se espera que suceda, que es lo que sucederá, cuales son los mejores casos que podrían ocurrir, etc. Para realizar las comparaciones de manera más simplificada, se suponen funciones de los costos lineales.

5.1. Coherencia en los Modelos

Se recuerda la función utilidad del último modelo:

$$V_4(K, z, M, M_0, M_+(K)) = \left[\sum_{i=1}^{N(\tau)} \tilde{U}_i \right] - \tilde{C}(K) - \tilde{C}_3(M_0, K) \quad (5.1)$$

donde,

$$\tilde{U}_i = \int_{S_{i-1}}^{S_{i-1}+\pi_i} U_a \cdot e^{-\alpha t} dt + \mathbb{1}_{[M_i > M_0]} \cdot \left[\int_{S_{i-1}+\pi_i}^{S_i} U_b \cdot e^{-\alpha t} dt - \tilde{C}_2(M_i - M_0) \right]$$
$$\tilde{U}_i = e^{-\alpha S_{i-1}} \cdot \left[\frac{1 - e^{-\alpha \pi_i}}{\alpha} U_a + e^{-\alpha \pi_i} \cdot \mathbb{1}_{[M_i > M_0]} \cdot \left[\frac{1 - e^{-\alpha \mathbb{1}_{[M_i > M_0]} t_r}}{\alpha} U_b - C_2(M_i - M_0) \right] \right]$$

A partir de esto, se definen los siguientes cuatro casos extremos:

- U_I : No se paga resistencia y no hay estallido
- U_{II} : Se paga resistencia y no hay estallido
- U_{III} : Se paga resistencia y hay estallido
- U_{IV} : No se paga resistencia y hay estallido

es decir,

$$\bullet U_I = \left[\sum_{i=1}^{N(\tau)} \tilde{U}_i \right] - \tilde{C}(K)$$

$$\begin{aligned} U_I &= \int_0^\tau U_a \cdot e^{-\alpha t} dt - \tilde{C}(K) \\ &= \int_0^\tau [p\lambda r T(K, z) - C_1(T(K, z))] \cdot e^{-\alpha t} dt - \tilde{C}(K) \\ &= [p\lambda r T(K, z) - C_1(T(K, z))] \cdot \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha} - \tilde{C}(K) \end{aligned}$$

$$\bullet U_{II} = \left[\sum_{i=1}^{N(\tau)} \tilde{U}_i \right] - \tilde{C}(K) - \tilde{C}_3(M_0, K)$$

$$\begin{aligned} U_{II} &= \int_0^\tau U_a \cdot e^{-\alpha t} dt - \tilde{C}(K) - \tilde{C}_3(M_0, K) \\ &= \int_0^\tau [p\lambda r T(K, z) - C_1(T(K, z))] \cdot e^{-\alpha t} dt - \tilde{C}(K) - \tilde{C}_3(M_0, K) \\ &= [p\lambda r T(K, z) - C_1(T(K, z))] \cdot \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha} - \tilde{C}(K) - \tilde{C}_3(M_0, K) \end{aligned}$$

$$\bullet U_{III} = \left[\sum_{i=1}^{N(\tau)} \tilde{U}_i \right] - \tilde{C}(K) - \tilde{C}_3(M_0, K)$$

$$\begin{aligned} U_{III} &= \sum_{i=1}^{N(\tau)} \left[e^{-\alpha S_{i-1}} \cdot \left[\frac{1 - e^{-\alpha\pi_i}}{\alpha} U_a + e^{-\alpha\pi_i} \cdot \left[\frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} U_b - C_2(M_+ - M_0) \right] \right] \right] \\ &\quad - \tilde{C}(K) - \tilde{C}_3(M_0, K) \end{aligned}$$

$$\bullet U_{IV} = \left[\sum_{i=1}^{N(\tau)} \tilde{U}_i \right] - \tilde{C}(K)$$

$$U_{IV} = \sum_{i=1}^{N(\tau)} \left[e^{-\alpha S_{i-1}} \cdot \left[\frac{1 - e^{-\alpha \pi_i}}{\alpha} U_a + e^{-\alpha \pi_i} \cdot \left[\frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} U_b - C_2(M_+ - M_-) \right] \right] \right] - \tilde{C}(K)$$

Es claro, que lo que debiese ocurrir es lo siguiente:

$$U_{IV} \leq U_{III} \leq U_{II} \leq U_I$$

En efecto, a continuación se verifican estas desigualdades:

5.1.1. $U_{IV} \leq U_{III}$

$$U_{IV} \leq U_{III}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{N(\tau)} \left[e^{-\alpha S_{i-1}} \cdot \left[\frac{1 - e^{-\alpha \pi_i}}{\alpha} U_a + e^{-\alpha \pi_i} \cdot \left[\frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} U_b - C_2(M_+ - M_-) \right] \right] \right] - \tilde{C}(K) \\ & \leq \\ & \sum_{i=1}^{N(\tau)} \left[e^{-\alpha S_{i-1}} \cdot \left[\frac{1 - e^{-\alpha \pi_i}}{\alpha} U_a + e^{-\alpha \pi_i} \cdot \left[\frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} U_b - C_2(M_+ - M_0) \right] \right] \right] - \tilde{C}(K) - \tilde{C}_3(M_0, K) \\ & \leq \\ & \sum_{i=1}^{N(\tau)} \left[e^{-\alpha S_{i-1}} \cdot \left[\frac{1 - e^{-\alpha \pi_i}}{\alpha} U_a + e^{-\alpha \pi_i} \cdot \left[\frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} U_b - C_2(M_+ - M_-) \right] \right] \right] \\ & \leq \\ & \sum_{i=1}^{N(\tau)} \left[e^{-\alpha S_{i-1}} \cdot \left[\frac{1 - e^{-\alpha \pi_i}}{\alpha} U_a + e^{-\alpha \pi_i} \cdot \left[\frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} U_b - C_2(M_+ - M_0) \right] \right] \right] - \tilde{C}_3(M_0, K) \end{aligned}$$

Se observa que este resultado es cierto, ya que si se construye una resistencia para soportar sismos de momento sísmico M_0 , entonces su reparación en ese caso debe ser menor a reparar el daño total en caso de no construir resistencia.

Por lo tanto, esto es una restricción que deben cumplir las funciones C_2 y C_3 para que el problema tenga sentido.

5.1.2. $U_{III} \leq U_{II}$

$$\begin{aligned}
& U_{III} \leq U_{II} \\
& \sum_{i=1}^{N(\tau)} \left[e^{-\alpha S_{i-1}} \cdot \left[\frac{1 - e^{-\alpha \pi_i}}{\alpha} U_a + e^{-\alpha \pi_i} \cdot \left[\frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} U_b - C_2(M_+ - M_0) \right] \right] \right] - \tilde{C}(K) - \tilde{C}_3(M_0, K) \\
& \leq \\
& [p\lambda r T(K, z) - C_1(T(K, z))] \cdot \frac{1 - e^{-\alpha \tau}}{\alpha} - \tilde{C}(K) - \tilde{C}_3(M_0, K) \\
& \sum_{i=1}^{N(\tau)} \left[e^{-\alpha S_{i-1}} \cdot \left[\frac{1 - e^{-\alpha \pi_i}}{\alpha} U_a + e^{-\alpha \pi_i} \cdot \left[\frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} U_b - C_2(M_+ - M_0) \right] \right] \right] \\
& \leq \\
& [p\lambda r T(K, z) - C_1(T(K, z))] \cdot \frac{1 - e^{-\alpha \tau}}{\alpha}
\end{aligned}$$

Este resultado es verdadero, ya que de no ser así, entonces convendría que hubiese un sismo y repararlo para obtener mayor utilidades, lo cual claramente no tiene sentido con el modelamiento del problema.

5.1.3. $U_{II} \leq U_I$

$$\begin{aligned}
& U_{II} \leq U_I \\
& [p\lambda r T(K, z) - C_1(T(K, z))] \cdot \frac{1 - e^{-\alpha \tau}}{\alpha} - \tilde{C}(K) - \tilde{C}_3(M_0, K) \\
& \leq \\
& [p\lambda r T(K, z) - C_1(T(K, z))] \cdot \frac{1 - e^{-\alpha \tau}}{\alpha} - \tilde{C}(K) \\
& - \tilde{C}_3(M_0, K) \leq 0
\end{aligned}$$

Lo cual es claramente cierto, ya que la función $C_3(\cdot)$ es positiva.

Por lo tanto, se puede concluir que:

$$U_{IV} \leq U_{III} \leq U_{II} \leq U_I$$

y se tiene la coherencia de los modelos en estos casos.

5.2. Diferencia en las Soluciones

A partir de (5.1), se definen los siguientes tres casos:

- U_{Di} : Utilidad que se espera al momento de diseñar
- U_{Op} : Utilidad esperada que se obtendría en el caso óptimo
- U_{Re} : Utilidad esperada real que se obtiene

es decir,

- $U_{Di} = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N(\tau)} \tilde{U}_i(M_0^*, K^*) \right] - \tilde{C}(K^*) - \tilde{C}_3(M_0^*, K^*)$
- $U_{Op} = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N(\tau)} \tilde{U}_i(M_0^{Op}, K_{Op}) \right] - \tilde{C}(K_{Op}) - \tilde{C}_3(M_0^{Op}, K_{Op})$. Con M_+ dependiendo de K_{Op} .
- $U_{Re} = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N(\tau)} \tilde{U}_i(M_0^*, K^*) \right] - \tilde{C}(K^*) - \tilde{C}_3(M_0^*, K^*)$. Con M_+ dependiendo de K^* .

Es claro, que lo que debiese ocurrir es lo siguiente:

$$U_{Re} \leq U_{Op} \leq U_{Di}$$

5.2.1. Relación U_{Di} y U_{Re}

Se observa que el caso U_{Di} no ocurre nunca, debido a que en este caso se supone que el parámetro M_+ es independiente de la capacidad, lo cual no ocurre en la realidad, pero si al momento de diseñar se considera un parámetro fijo \tilde{M}_+ (por que no se conoce la relación), eso es lo que ocurriría. En este análisis, se busca estudiar la diferencia de lo que se espera obtener al considerar \tilde{M}_+ fijo y lo que en verdad ocurriría.

Se analiza la siguiente diferencia:

$$\mathbb{E}[V_3(K^*, \tilde{M}_+)] - \mathbb{E}[V_3(K^*, M_+(K^*))] =: A$$

Según se concluyó en la sección 3.4, $\mathbb{E}[V_3(K, M_+)]$ es decreciente con respecto a M_+ , por lo tanto el signo de la diferencia anterior dependerá exclusivamente si \tilde{M}_+ es mayor o no a $M_+(K^*)$.

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N(\tau)} \tilde{U}_i \right] = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}[N(\tau) = j] \cdot \frac{1 - \Omega^{j-1}}{1 - \Omega} \right) \cdot \left[\frac{1}{\alpha + \nu} U_a + \frac{\nu}{\alpha + \nu} \cdot (1 - F_M(M_0)) \cdot \frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} U_b \right. \\ \left. - \frac{\nu}{\alpha + \nu} \cdot \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{[M > M_0]} \cdot C_2(M - M_0) \right] \right]$$

$$A = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N(\tau)} \tilde{U}_i(M_0^*, K^*, \tilde{M}_+) \right] - \tilde{C}(K^*) - \tilde{C}_3(M_0^*, K^*) \\ - \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N(\tau)} \tilde{U}_i(M_0^*, K^*, M_+(K^*)) \right] + \tilde{C}(K^*) + \tilde{C}_3(M_0^*, K^*)$$

$$A = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}[N(\tau) = j] \cdot \frac{1 - \Omega(\tilde{M}_+)^{j-1}}{1 - \Omega(\tilde{M}_+)} \right) \cdot \left[\frac{U_a}{\alpha + \nu} + \frac{\nu(1 - F_M(M_0, \tilde{M}_+))}{\alpha + \nu} \cdot \frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} U_b \right. \\ \left. - \frac{\nu}{\alpha + \nu} \cdot \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{[M > M_0]} \cdot C_2(M - M_0) \right] \right] \\ \sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}[N(\tau) = j] \cdot \frac{1 - \Omega(M_+(K^*))^{j-1}}{1 - \Omega(M_+(K^*))} \right) \cdot \left[\frac{U_a}{\alpha + \nu} + \frac{\nu(1 - F_M(M_0, M_+(K^*)))}{\alpha + \nu} \cdot \frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} U_b \right. \\ \left. - \frac{\nu}{\alpha + \nu} \cdot \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{[M > M_0]} \cdot C_2(M - M_0) \right] \right]$$

Se observa gráficamente los posibles casos según los valores de \tilde{M}_+ con respecto a $M_+(K^*)$

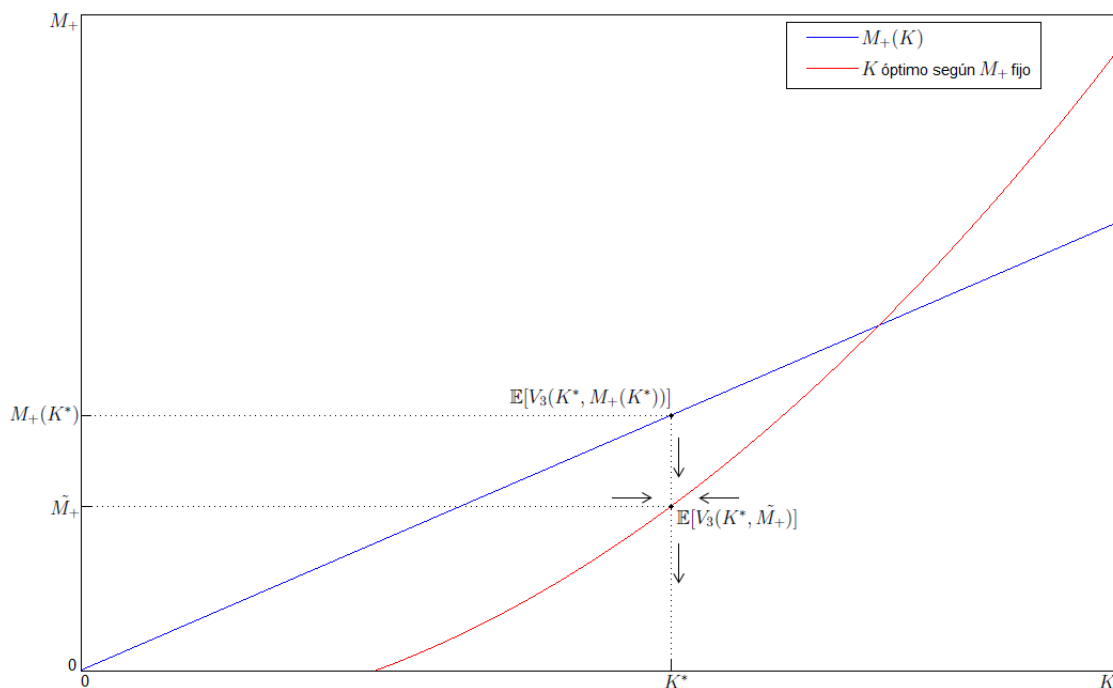


Figura 5.1: Caso $\tilde{M}_+ < M_+(K^*)$

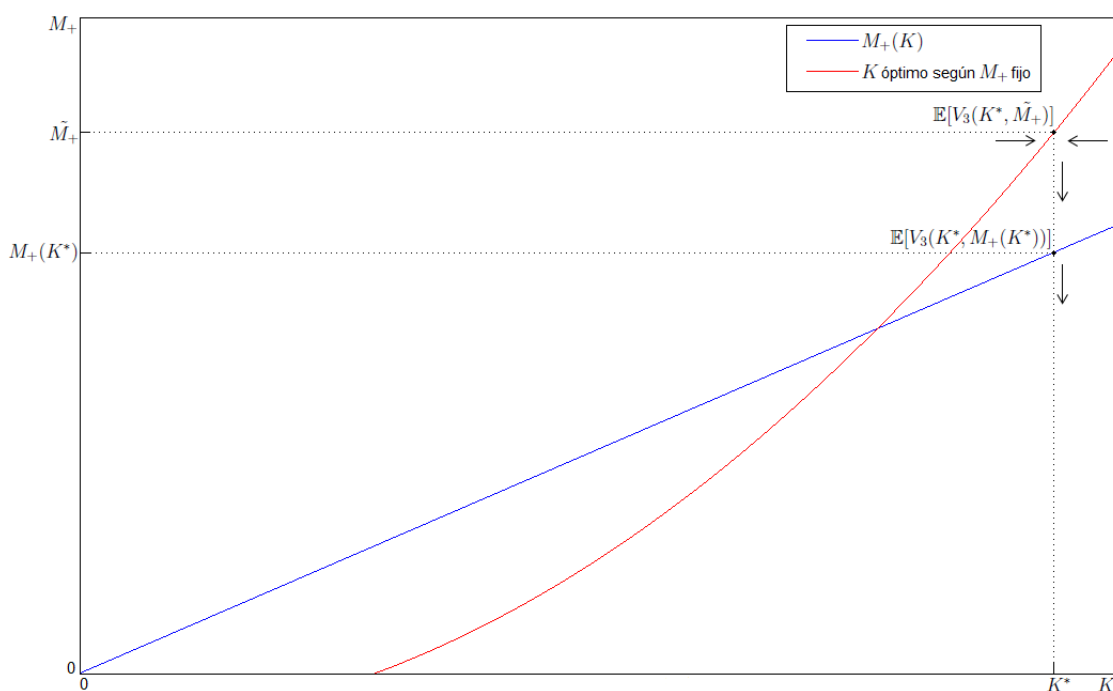


Figura 5.2: Caso $\tilde{M}_+ > M_+(K^*)$

Las flechas negras, representan el crecimiento de la utilidad esperada en el sentido que indica. Horizontalmente siempre el máximo se encuentra en la curva roja,

mientras que verticalmente siempre aumenta la utilidad esperada al bajar (disminuir M_+ para un mismo K).

Se observa que existen dos casos posibles. Al momento de fijar el parámetro \tilde{M}_+ , este podría ser menor o mayor que $M_+(K^*)$, donde K^* es el óptimo si $M_+ = \tilde{M}_+$, generalmente ocurre el primer caso, dado que se subestima el parámetro M_+ .

5.2.2. Relación U_{Re} y U_{Op}

En el punto anterior se analizó la diferencia de lo que se espera obtener al diseñar con un parámetro fijo M_+ y lo que en verdad ocurre. En esta caso, se analiza lo que se podría llegar a obtener si al momento de diseñar se conociera la correcta relación entre el parámetro M_+ y la capacidad a construir comparado con lo que se obtiene al no conocer tal relación.

Se analiza la siguiente diferencia:

$$\mathbb{E}[V_3(K_{Op}, M_+(K_{Op}))] - \mathbb{E}[V_3(K^*, M_+(K^*))] =: B$$

Por definición de K_{Op} , es claro que esta diferencia es positiva, se desarrolla sus expresión para realizar ejemplos numéricos en el capítulo siguiente.

$$\begin{aligned} B &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N(\tau)} \tilde{U}_i(M_0^{Op}, K_{Op}, M_+(K_{Op})) \right] - \tilde{C}(K_{Op}) - \tilde{C}_3(M_0^{Op}, K_{Op}) \\ &\quad - \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N(\tau)} \tilde{U}_i(M_0^*, K^*, M_+(K^*)) \right] + \tilde{C}(K^*) + \tilde{C}_3(M_0^*, K^*) \\ B &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}[N(\tau) = j] \cdot \frac{1 - \Omega(M_+(K_{Op}))^{j-1}}{1 - \Omega(M_+(K_{Op}))} \right) \cdot \left[\frac{U_a}{\alpha + \nu} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu(1 - F_M(M_0^{Op}, M_+(K_{Op})))}{\alpha + \nu} \cdot \frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} U_b - \frac{\nu}{\alpha + \nu} \cdot \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{[M > M_0^{Op}]} \cdot C_2(M - M_0^{Op}) \right] \right] \\ &\quad - \tilde{C}(K_{Op}) - \tilde{C}_3(M_0^{Op}, K_{Op}) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}[N(\tau) = j] \cdot \frac{1 - \Omega(M_+(K^*))^{j-1}}{1 - \Omega(M_+(K^*))} \right) \cdot \left[\frac{U_a}{\alpha + \nu} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu(1 - F_M(M_0^*, M_+(K^*)))}{\alpha + \nu} \cdot \frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} U_b - \frac{\nu}{\alpha + \nu} \cdot \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{[M > M_0^*]} \cdot C_2(M - M_0^*) \right] \right] \\ &\quad + \tilde{C}(K^*) + \tilde{C}_3(M_0^*, K^*) \end{aligned}$$

Se observa gráficamente los posibles casos:

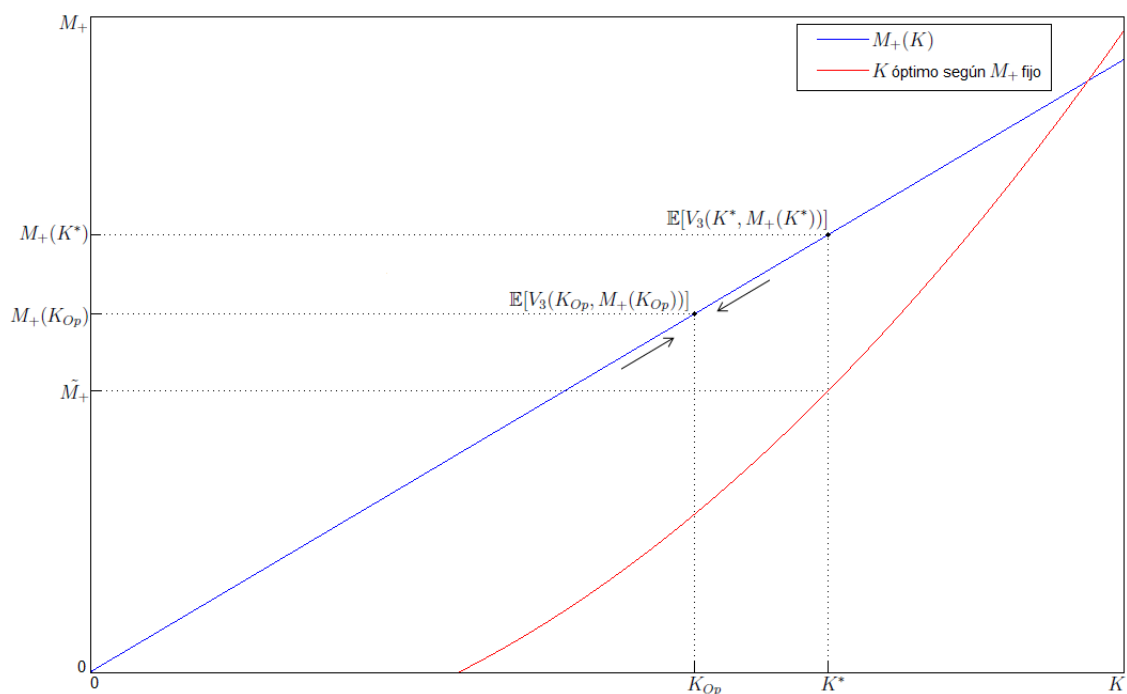


Figura 5.3: Caso $K_{Op} < K^*$

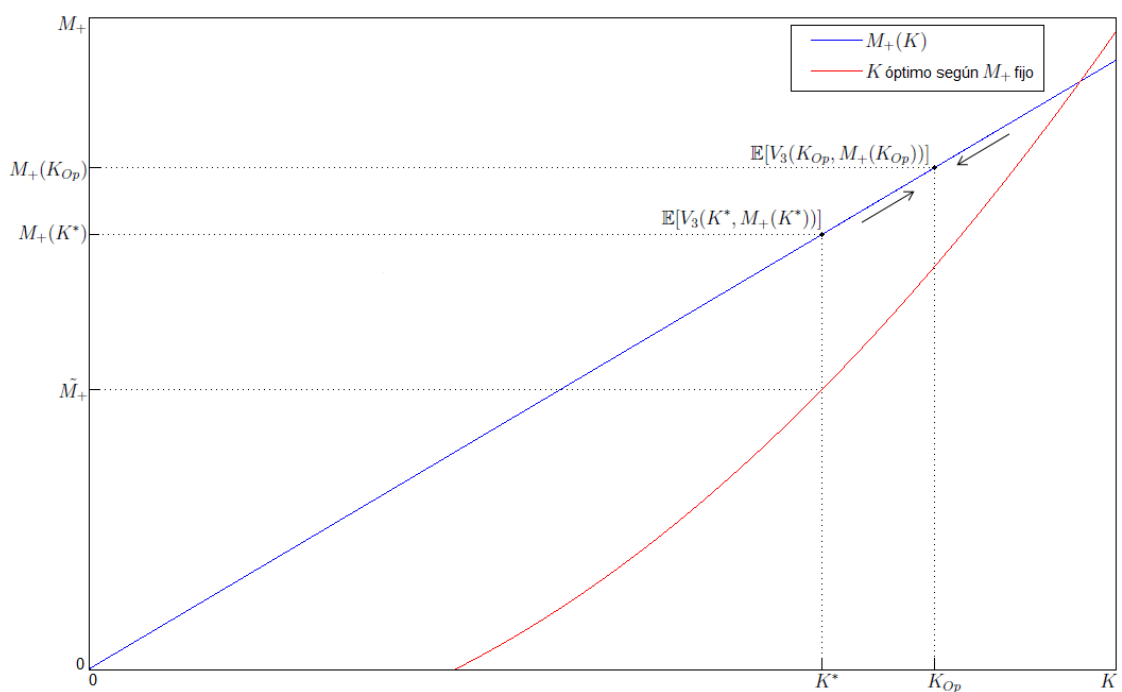


Figura 5.4: Caso $K_{Op} > K^*$

Los casos corresponden a si K_{Op} es mayor o menor a K^* . Se observa, que según los resultados del capítulo anterior, lo que debe ocurrir es que $K_{Op} < K^*$, ya que K_{Op} corresponde al óptimo del modelo 4 K_4 y K^* corresponde al óptimo del modelo 3 K_3 , y como se demostró, se tiene que $K_4 < K_3$.

Pero en ambos casos se tiene que $\mathbb{E}[V_3(K_{Op}, M_+(K_{Op}))] > \mathbb{E}[V_3(K^*, M_+(K^*))]$ por definición de K_{Op} .

Cabe notar, que para $M_+(K_{Op})$, existe un K con el cuál se logra una mayor utilidad, como se muestra en la Figura (5.5).

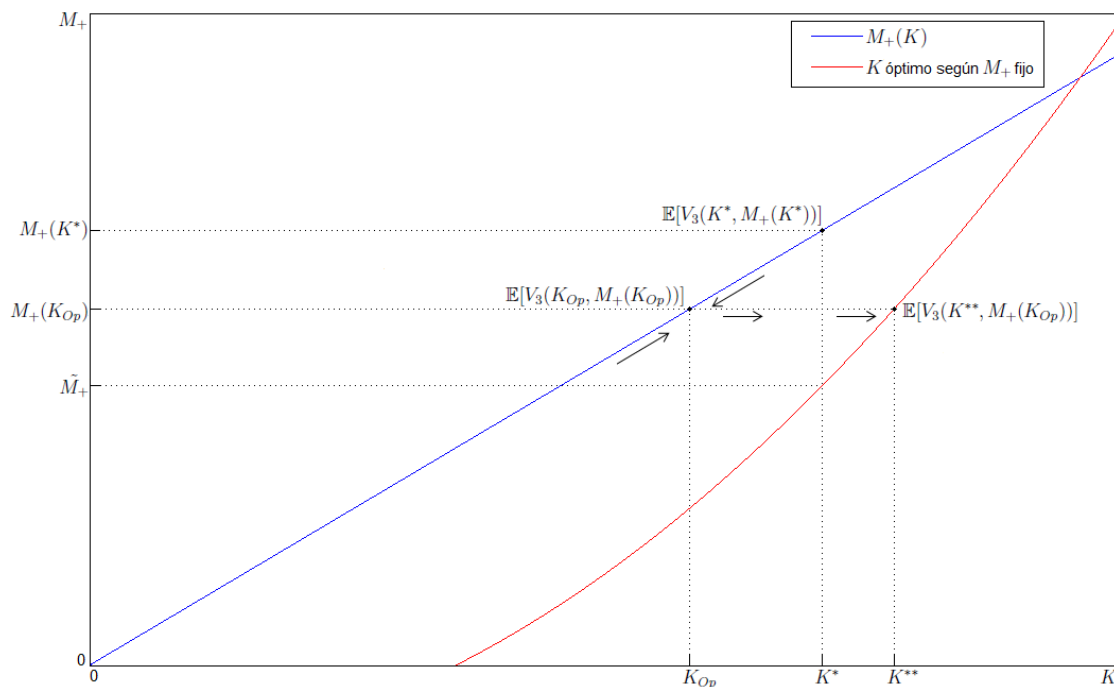


Figura 5.5: Caso utilidad esperada mayor a óptimo probable

$\mathbb{E}[V_3(K^{**}, M_+(K_{Op}))] > \mathbb{E}[V_3(K_{Op}, M_+(K_{Op}))]$. Pero, este caso no ocurre en la realidad, ya que no considera la relación que existe entre M_+ y K , si no que es una solución matemática donde se asegura una mayor utilidad esperada que la anterior.

5.3. Análisis de los Límites Económicos

En este punto, se analiza el caso en que la utilidad esperada comienza a ser negativa según la relación que existe entre M_0 y K , es decir, el proyecto ya deja de ser un negocio rentable. Se recuerda la función utilidad:

$$\mathbb{E}(V_4(K, M_0)) = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N(\tau)} \tilde{U}_i(M_0^*, K^*, M_+(K^*)) \right] - \tilde{C}(K^*) - \tilde{C}_3(M_0^*, K^*)$$

$$\mathbb{E}(V_4(K, M_0)) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}[N(\tau) = j] \cdot \frac{1 - \Omega^{j-1}}{1 - \Omega} \right) \cdot \left[\frac{U_a}{\alpha + \nu} + \frac{\nu(1 - F_M(M_0))}{\alpha + \nu} \cdot \frac{1 - e^{-\alpha t_r}}{\alpha} U_b \right. \\ \left. - \frac{\nu}{\alpha + \nu} \cdot \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{[M > M_0]} \cdot C_2(M - M_0) \right] \right] - \tilde{C}(K^*) - \tilde{C}_3(M_0, K)$$

Se supone al igual que anteriormente, relaciones lineales, por lo tanto, se tiene que: $M_+(K) := \gamma \cdot K$.

Se analiza como varía la Utilidad esperada según el parámetro γ :

$$\frac{\partial \mathbb{E}(V_4)}{\partial \gamma} = \frac{\partial \mathbb{E}(V_4)}{\partial M_+} \cdot \frac{\partial M_+}{\partial \gamma} \quad (5.2)$$

Como se demostró en (4.10), el primer término es negativo, por lo tanto:

$$\frac{\partial \mathbb{E}(V_4)}{\partial \gamma} = \underbrace{\frac{\partial \mathbb{E}(V_4)}{\partial M_+}}_{<0} \cdot K < 0$$

Es decir, la Utilidad esperada es decreciente respecto del parámetro físico que relaciona M_+ con K .

Suponiendo, por ejemplo, el costo $C_2(M - M_0)$ lineal, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[C_2((M - M_0)^+)] &= \mathbb{E}[B \cdot ((M - M_0)^+)] \\
\mathbb{E}[C_2((M - M_0)^+)] &= (1 - F_M(M_0)) \cdot \mathbb{E}[B \cdot (M - M_0) | M > M_0] \\
&\quad + F_M(M_0) \cdot \underbrace{\mathbb{E}[B \cdot (M - M_0) | M < M_0]}_{=0} \\
&= (1 - F_M(M_0)) \cdot \mathbb{E}[B \cdot (M - M_0) | M > M_0] \\
&= \int_{M_0}^{M_+} B \cdot (M - M_0) \cdot f_M(M_+, M) \, dM \\
&= B \cdot \int_{M_0}^{M_+} M \cdot f_M(M_+, M) \, dM - B \cdot M_0 \cdot \int_{M_0}^{M_+} f_M(M_+, M) \, dM \\
&= B \cdot \int_{M_0}^{M_+} M \cdot f_M(M_+, M) \, dM - B \cdot M_0 \cdot (1 - F_M(M_0))
\end{aligned}$$

Se desarrolla la integral del primer término:

$$\begin{aligned}
\int_{M_0}^{M_+} M \cdot f_M(M_+, M) \, dM &= \int_{M_0}^{M_+} M \cdot \frac{\beta M^{-\beta-1}}{M_-^{-\beta} - M_+^{-\beta}} \, dM \\
&= \int_{M_0}^{M_+} \frac{\beta M^{-\beta}}{M_-^{-\beta} - M_+^{-\beta}} \, dM \\
&= \frac{\beta}{-\beta + 1} \frac{M_+^{-\beta+1} - M_0^{-\beta+1}}{M_-^{-\beta} - M_+^{-\beta}}
\end{aligned}$$

Volviendo a la expresión anterior, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[C_2((M - M_0)^+)] &= B \cdot \int_{M_0}^{M_+} M \cdot f_M(M_+, M) \, dM - B \cdot M_0 \cdot (1 - F_M(M_0)) \\
&= B \cdot \frac{\beta}{-\beta + 1} \frac{M_+^{-\beta+1} - M_0^{-\beta+1}}{M_-^{-\beta} - M_+^{-\beta}} - B \cdot M_0 \cdot \left(1 - \frac{M_-^{-\beta} - M^{-\beta}}{M_-^{-\beta} - M_+^{-\beta}} \right) \\
&= B \cdot \frac{\beta}{-\beta + 1} \frac{M_+^{-\beta+1} - M_0^{-\beta+1}}{M_-^{-\beta} - M_+^{-\beta}} - B \cdot M_0 \cdot \frac{M_-^{-\beta} - M_+^{-\beta}}{M_-^{-\beta} - M_+^{-\beta}} \\
&= B \cdot \frac{\beta}{-\beta + 1} \frac{(\gamma \cdot K)^{-\beta+1} - M_0^{-\beta+1}}{M_-^{-\beta} - (\gamma \cdot K)^{-\beta}} - B \cdot M_0 \cdot \frac{M_-^{-\beta} - (\gamma \cdot K)^{-\beta}}{M_-^{-\beta} - (\gamma \cdot K)^{-\beta}}
\end{aligned}$$

Luego, se tiene el siguiente límite:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \mathbb{E}[C_2((M - M_0)^+)] = \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 < \beta < 1 \\ B \cdot \frac{\beta}{-\beta + 1} \frac{-M_0^{-\beta+1}}{M_-^{-\beta}} - B \cdot M_0 \cdot \frac{M^{-\beta}}{M_-^{-\beta}} & \text{si } 1 < \beta \end{cases}$$

Luego, se supone que $\beta \in (0, 1)$, lo cual tiene sentido con lo esperado físicamente, ya que si el parámetro γ aumenta, hará que M_+ crezca indefinidamente y por ende, el costo de reparación también. A partir de esto, es claro que la esperanza de la utilidad decrecerá indefinidamente, y entonces el negocio no debería ser rentable siempre.

Esto quiere decir, que existen casos determinados por la relación entre M_+ y K que la Utilidad es siempre negativa, y por lo tanto no existe Negocio de explotar la Mina.

El ejemplo del gráfico muestra como sería la función $M_+(K)$ que define tal umbral:

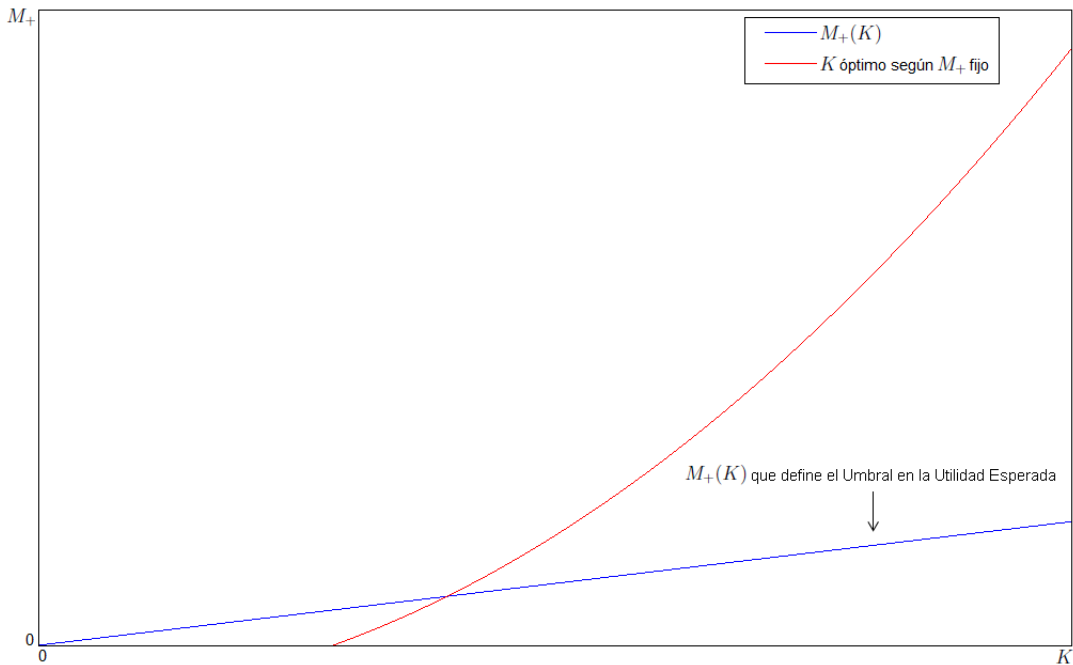


Figura 5.6: $M_+(K)$ que define Umbral

En el siguiente capítulo, se analizan casos de estos límites.

Capítulo 6

Ejemplos Numéricos

Para la realización de los Ejemplos Numéricos, se consideran los siguientes escenarios determinados por los valores de sus parámetros:

- Capacidad total del Yacimiento: $\Gamma = 2 \cdot 10^8 [Ton]$
- Horizonte de tiempo: $\tau = 20$ años
- Parámetro de la Distribución Exponencial que representa el tiempo que transcurre entre un sismo y otro: $\nu = 45$
- Precio del Cobre: $p = 317.31 \left[\frac{US\text{¢}}{lib} \right]$
- Ley de Cobre a extraer: $\lambda = 1 \%$
- Tasa de Recuperación: $r = 90 \%$
- Tasa de Valor Futuro: $\alpha = 8 \%$
- Tiempo que dura la reparación en caso que el sismo produzca daño: $t_r = 9$ meses
- Capacidad que se pierde en caso de sismo: $\xi = 8 \cdot 10^3 [Ton]$

La distribución de Pareto queda definida por la siguiente función de distribución:

$$F_M(M) = \frac{M_-^{-\beta} - M^{-\beta}}{M_-^{-\beta} - M_+^{-\beta}}$$

Luego, sus parámetros son:

- $M_- = 10^{7.5}$
- $M_+ = 10^{14}$
- $\beta = 0.8$

En el caso de las funciones, se consideran las siguientes:

- Costo unitario de construir una Mina con capacidad K : $C(K) = 20 \cdot K \left[\frac{US\$}{Ton} \right]$
- Costo de producir T Toneladas: $C_1(T) = 33 \cdot K \left[\frac{US\$}{Ton} \right]$
- Costo de reparación si ocurre sismo de momento sísmico M : $C_2(M) = \frac{3}{10^{7.5}} \cdot M[US\$]$
- Costo de construir una resistencia para sismos de momento sísmico M_0 en una mina con capacidad K : $C_3(M_0, K) = \left(4 + \frac{8}{3 \cdot 10^{13.5}} \cdot M_0 \right) \cdot K \left[\frac{US\$}{Ton} \right]$
- Parámetro M_+ dependiendo de la capacidad de la mina K : $M_+(K) = 10^{14} \cdot \frac{K}{30000} \left[\frac{1}{Ton} \right]$

Para el caso de la demanda del mineral en un período t , se considera una variable aleatoria Z que sigue una distribución Normal truncada de media $\mu = 4.9 \cdot 10^4 [Ton]$ y desviación estándar $\sigma = \mu/3$. En el siguiente punto se explica el porque de esta modelación:

6.1. Demanda como una Variable Aleatoria Normal Truncada

Para poder estimar la demanda del mineral en un período t se debe considerar que la mina se encuentra segmentada por bloques los cuales se les hará llamar x_i . En el caso en que se enmarca este trabajo, Codelco El Teniente, se cuenta con aproximadamente 320 de estos bloques diarios, los cuales van siendo abiertos y otros cerrados. Diariamente, es posible extraer de cada bloque a lo más 20 baldadas (una baldada corresponde a 6 toneladas). Según la experiencia, se tiene que a medida que pasa el tiempo, es más probable extraer más baldadas (ver Figura 6.1 y 6.2).

Por lo tanto, al considerar z como la suma de todos los bloques, $z = \sum_i x_i$, se tiene que su distribución de probabilidades vendrá dada por la convolución de la distribución de probabilidades de cada x_i , es decir,

$$F_z = *F_{x_i}$$

Luego, por el Teorema Central del Límite, F_z tendrá la forma de una Normal truncada, ya que las variables x_i , son discretas. Por ende, F_z será de la siguiente forma:

donde N , es el número de baldadas en total máximas a poder sacar en un día.

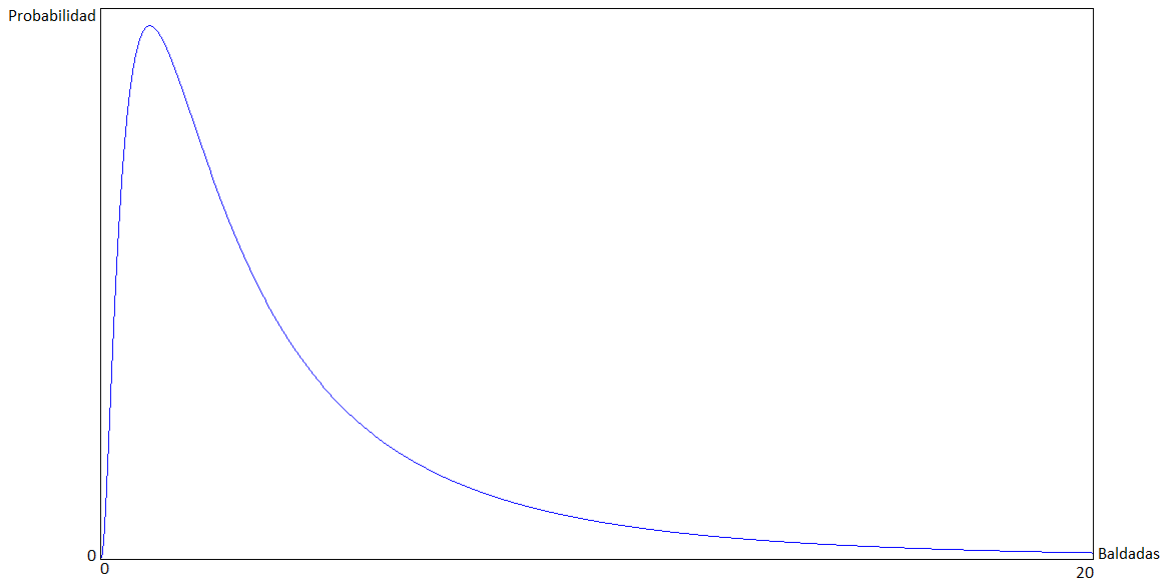


Figura 6.1: Probabilidad según cantidad de baldadas a extraer al comienzo de habilitar un bloque

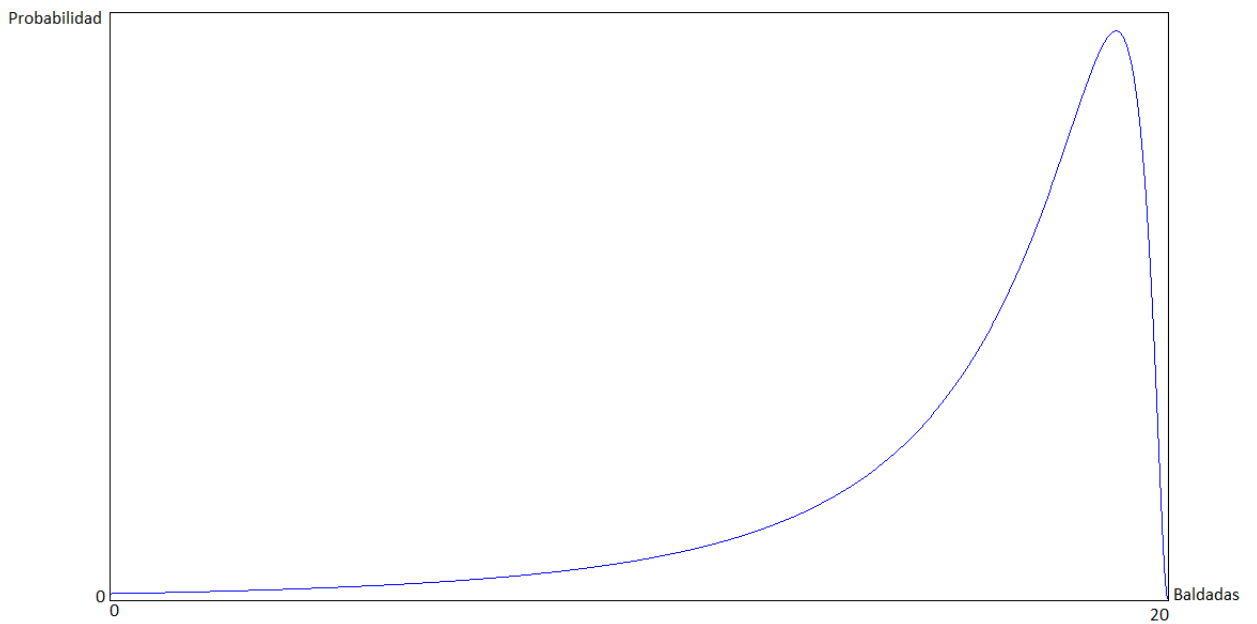


Figura 6.2: Probabilidad según cantidad de baldadas a extraer al finalizar un bloque

6.2. Resultados

Los ejemplos fueron corridos en *python*, donde se programaron los 4 modelos descritos en el capítulo 4. La optimización fue realizada ocupando la librería *optimize* del paquete *scipy*.

El modelo 1 es el más simple de resolver debido a carecer de incertidumbre en sus

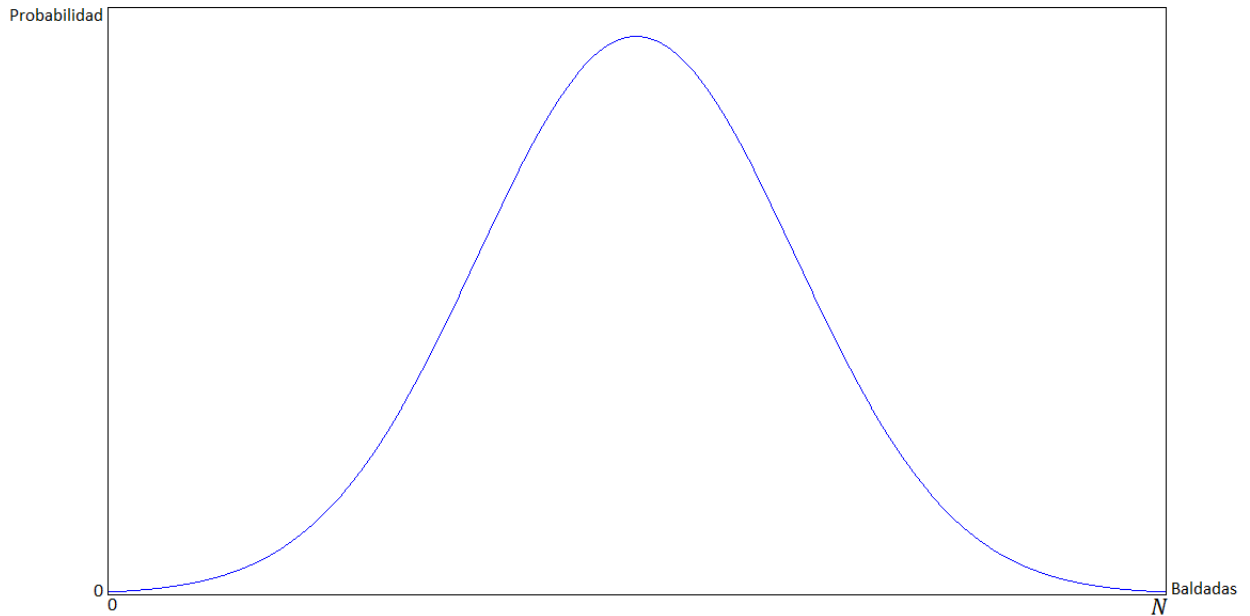


Figura 6.3: Distribución de Probabilidades para F_z

parámetros. La función objetivo resulta ser una función lineal, por ende, el óptimo se obtendría con $K = +\infty$, para poder comparar los casos, se da una cota superior a K que represente la demanda z (que en este caso es determinista), y así evitar la solución $+\infty$:

$$\begin{aligned} \max_K \quad & \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha} p\lambda r \cdot K - \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha} C(K) - C_1(K) \\ \text{sujeto a} \quad & K \leq z = 7.5 \cdot 10^4 \end{aligned}$$

Es decir, en el modelo 1 se tiene que: $K_1 = 7.5 \cdot 10^4 [Ton]$.

Para los modelos 2, 3 y 4, que si consideran incertidumbre, se obtienen capacidad menores a K_1 como lo esperado teóricamente.

En la siguiente tabla, se muestran los resultados de los distintos modelos según los parámetros definidos anteriormente:

Modelo N°	K Óptimo [Ton]	M_0 Óptimo	Producción T [Ton]	Utilidad Esperada [US\$]
1	$7.5 \cdot 10^4$	-	$7.5 \cdot 10^4$	$1.737 \cdot 10^7$
2	$7.271 \cdot 10^4$	-	$4.867 \cdot 10^4$	$1.677 \cdot 10^7$
3	$7.134 \cdot 10^4$	$10^{12.70}$	$4.858 \cdot 10^4$	$1.651 \cdot 10^7$
4	$7.120 \cdot 10^4$	$10^{12.78}$	$4.845 \cdot 10^4$	$1.640 \cdot 10^7$

El siguiente gráfico, muestra las respectivas funciones de la utilidad esperada, en la cual se observan la relación de las capacidades óptimas según el caso:

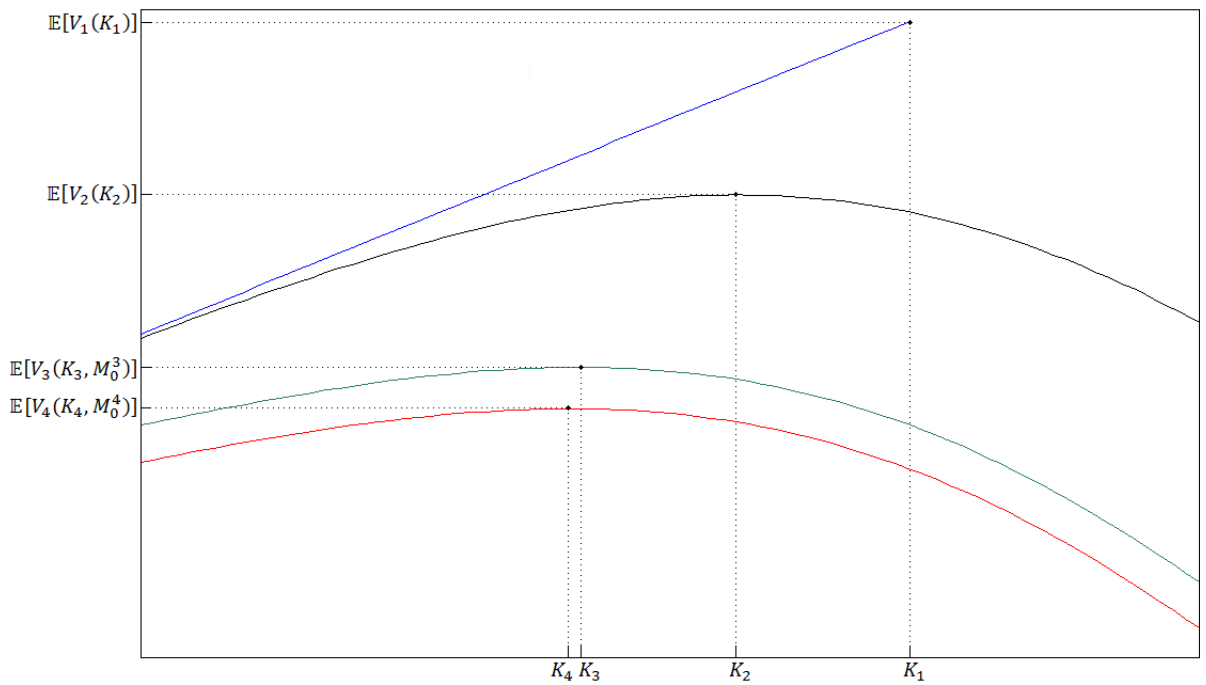


Figura 6.4: Capacidades Óptimas según los Modelos

6.2.1. Relación U_{Di} y U_{Re}

Se observa que el caso U_{Di} no ocurre nunca, debido a que en este caso se supone que el parámetro M_+ es independiente de la capacidad, lo cual no ocurre en la realidad, pero si al momento de diseñar se considera un parámetro fijo \tilde{M}_+ (por que no se conoce la relación), eso es lo que ocurriría. En este análisis, se busca estudiar la diferencia de lo que se espera obtener al considerar \tilde{M}_+ fijo y lo que en verdad ocurriría.

Se analiza la siguiente diferencia:

$$\mathbb{E}[V_3(K^*, \tilde{M}_+)] - \mathbb{E}[V_3(K^*, M_+(K^*))] =: A$$

notemos que K^* corresponde al óptimo del caso 3. Luego, los términos quedan:

$$\mathbb{E}[V_3(K^*, \tilde{M}_+)] = 1.651 \cdot 10^7 [US\$]$$

$$\mathbb{E}[V_3(K^*, M_+(K^*))] = 1.634 \cdot 10^7 [US\$]$$

Es decir, $A > 0$, lo cual concuerda con lo esperado teóricamente ya que $\tilde{M}_+ = 10^{14} < M_+(K^*) = 10^{14.37}$

6.2.2. Relación U_{Re} y U_{Op}

En el punto anterior se analizó la diferencia de lo que se espera obtener al diseñar con un parámetro fijo M_+ y lo que en verdad ocurre. En esta caso, se analiza lo que se podría llegar a obtener si al momento de diseñar se conociera la correcta relación entre el parámetro M_+ y la capacidad a construir comparado con lo que se obtiene al no conocer tal relación.

Se analiza la siguiente diferencia:

$$\mathbb{E}[V_4(K_{Op}, M_+(K_{Op}))] - \mathbb{E}[V_3(K^*, M_+(K^*))] =: B$$

donde, el primer término corresponde al caso del modelo 4, por lo tanto se tiene que:

$$\mathbb{E}[V_4(K_{Op}, M_+(K_{Op}))] = 1.640 \cdot 10^7 [US\$]$$

$$\mathbb{E}[V_3(K^*, M_+(K^*))] = 1.634 \cdot 10^7 [US\$]$$

Es decir, $B > 0$, lo cual concuerda con lo esperado teóricamente ya que el modelo 4, considera la relación óptima entre M_+ y K al considerar la dependencia real que existe entre estas variables.

6.2.3. Límite Económico

En el modelo 4 existe una relación entre la capacidad de la mina K y el parámetro superior de la distribución de Pareto M_+ dada por la siguiente función:

$$M_+(K) = \gamma \cdot K$$

en los ejemplos anteriores, se considera $\gamma = \frac{10^{14}}{30000}$. Según se analizó en el final del capítulo 5, existe un límite en este parámetro γ , a partir del cual el negocio deja de ser rentable. En esta parte, se realiza un barrido de tal parámetro, obteniendo así, el valor para dicho límite:

Valor de γ	K Óptimo [Ton]	M_0 Óptimo	Utilidad Esperada [US \$]
$10^{20} \cdot 30000^{-1}$	$7.012 \cdot 10^4$	$10^{12.82}$	$1.638 \cdot 10^7$
$10^{25} \cdot 30000^{-1}$	$6.932 \cdot 10^4$	$10^{12.88}$	$1.633 \cdot 10^7$
$10^{30} \cdot 30000^{-1}$	$6.824 \cdot 10^4$	$10^{12.91}$	$1.570 \cdot 10^7$
$10^{35} \cdot 30000^{-1}$	$6.798 \cdot 10^4$	$10^{12.92}$	$9.372 \cdot 10^6$
$10^{36.8} \cdot 30000^{-1}$	$6.780 \cdot 10^4$	$10^{12.93}$	$2.978 \cdot 10^5$
$10^{36.9} \cdot 30000^{-1}$	$6.772 \cdot 10^4$	$10^{12.93}$	$-4.611 \cdot 10^5$

Es decir, se observa que con la siguiente función, el negocio no es rentable, ya que su máximo, es negativo:

$$M_+(K) = \frac{10^{36.9}}{30000} \cdot K$$

El siguiente grafico, muestra el comportamiento del modelo con este parámetro, donde se observa que todas las utilidades esperadas según la capacidad son negativas:

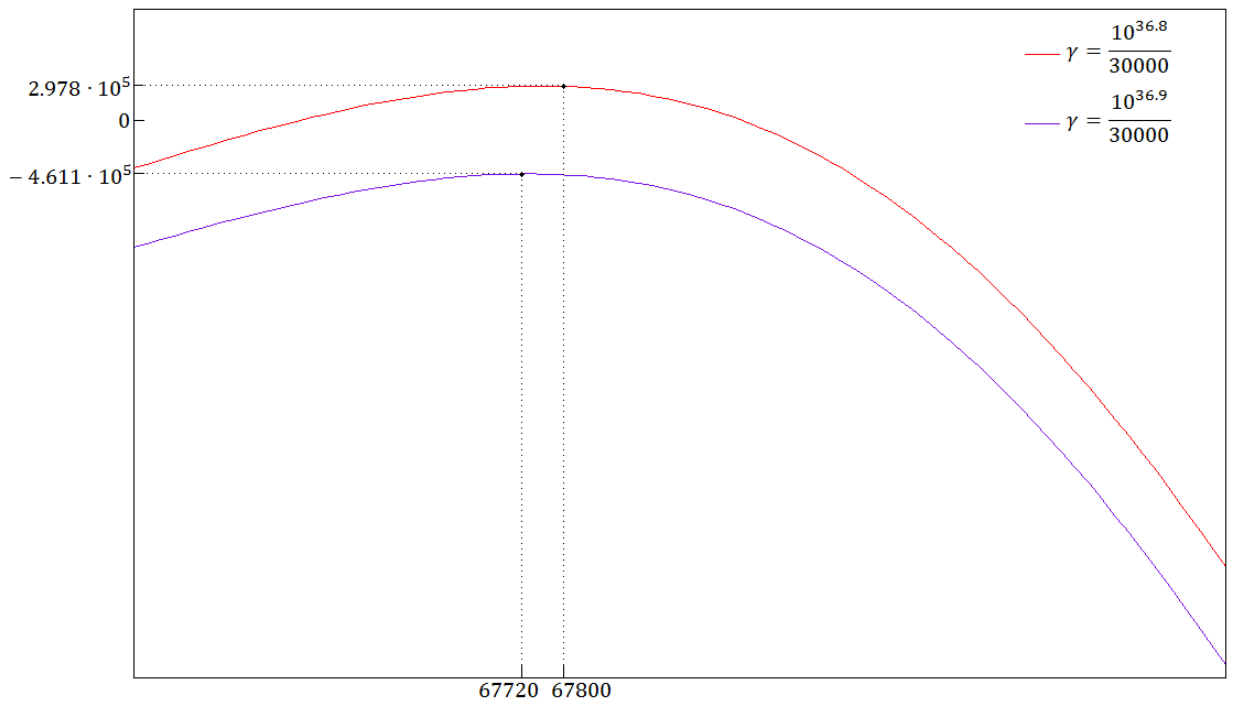


Figura 6.5: Límite Económico según parámetro γ

Capítulo 7

Conclusiones

A partir del desarrollo de este trabajo, se observa que con la información existente al día de hoy es posible tener mejores estimaciones que permitan modelar y así producir mejores controles sobre la sismicidad inducida por la minería, obteniendo probabilidades de ocurrencia lo que permite prevenir posibles estallidos de roca y accidentes que puedan desencadenar en graves lesiones o muertes en los trabajadores.

Como primer acercamiento en considerar la sismicidad en la planificación, se generaron 4 modelos, los cuales son:

- Caso Determinista
- Incertidumbre en la demanda
- Incertidumbre en la demanda y sismicidad
- Incertidumbre en la demanda y sismicidad con dependencia en la Distribución de Pareto

Se concluye que a partir de estos 4 casos, a medida que aumenta la incertidumbre en las diferentes componentes de los modelos, la tasa óptima de producción va disminuyendo, con la consecuente disminución de la capacidad de producción, lo que concuerda con lo esperado en base a la experiencia. Por supuesto, la utilidad esperada también va disminuyendo, ya que al haber incertidumbre, el negocio se vuelve más incierto y por ende las ganancias esperadas también. Sin embargo, se concluye que el mejor escenario es considerar la incertidumbre inducida por la sismicidad, es decir, como ocurre en la realidad, ya que la tasa óptima asociada a este modelo entrega en esperanza una mayor utilidad que considerar la tasa óptima asociada al modelo determinista.

El último caso, relaciona la Distribución de Pareto con la sismicidad, esta dependencia se ve reflejada en el parámetro M_+ de la Distribución de Pareto, que representa el valor máximo posible del momento sísmico de un sismo a ocurrir, es decir, modificar la tasa de producción afecta el valor de este parámetro. El problema de considerar la dependencia entre el parámetro M_+ de la distribución de Pareto y

la capacidad a construir de la Mina se vuelve relevante al momento de estimar las ganancias del negocio, por ello es recomendable tratar de generar una relación lo más realista posible o sobreestimar razonablemente la dependencia, para así al momento de observar los resultados reales estos sean mejores o iguales a los obtenidos en el proceso de evaluación.

Una de las conclusiones generales de este trabajo, es la importancia de considerar la sismicidad en la planificación debido a las diferencias críticas que se observan en los resultados de los modelos con y sin incertidumbre, con la consecuencia de mejorar las condiciones de seguridad para los trabajadores.

Con respecto al trabajo futuro, que se deduce del trabajo de esta Tesis, se considera que los puntos relevantes a tratar son:

- Agregar mayor incertidumbre en los modelos
- Funciones de costo de producción, de beneficio, de reparación entre otras, más reales
- Construir modelos dinámicos que permitan incorporar el efecto del tiempo en el modelo
- Mejorar la captura de datos para una buena estimación de los parámetros a considerar, por ejemplo, incorporando medidores de sismicidad en sectores relevantes

Los puntos anteriores son algunos pasos a seguir en mejorar y robustecer la problemática planteada en esta Tesis, con el fin de obtener modelos más reales y robustos en la planificación con sismicidad.

Bibliografía

- [1] Inmaculada B. Aban, M. Meerschaert, and A. Panorska. Parameter estimation for the truncated pareto distribution. *American Statistical Association*, 2006.
- [2] Keiiti Aki and Paul G. Richards. *Quantitative Seismology*. University Science Books, 2002.
- [3] O. Araneda, S. Gaete, F. de la Huerta, and L. Zenteno. Optimal long term planning at el teniente mine. *Copper*, 2003.
- [4] M. Armstrong, A. Galli, and R. Razanatsimba. Multi-stage stochastic optimisation for managing major production incidents. *APCOM SYMPOSIUM*, 2011.
- [5] Luis Carvallo. Desarrollo de un modelo escolástico de planificación minera utilizando escenarios probabilísticos del precio del cobre. *Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de Chile*, 2009.
- [6] R. Dunlop and S. Gaete. *Sismicidad Inducida y Estallidos de Roca en Mina El Teniente*. Codelco - Chile, División El Teniente.
- [7] S. Gaete and P. Vergara. *Evaluación de Riesgo en Planes Mineros y Sección de la Cobertura en Capacidad Óptima Económica*. Codelco - Chile, División El Teniente.
- [8] Geoffrey Grimmett and David Stirzaker. *Probability and Random Processes*. Oxford University Press, 2001.
- [9] Ortiz J. *Apuntes de Curso de Explotación de Minas*. Departamento de Ingeniería de Minas, Universidad de Chile.
- [10] Denis Sauré. Enfoque de opciones reales para la optimización de los planes mineros de largo plazo. *Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de Chile*, 2003.
- [11] Ximena Schultz. Agregación de un modelo de planificación minera utilizando análisis de cluster a priori. *Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de Chile*, 2007.