UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

CARACTERIZACIÓN DEL DELTA-CONJUNTO NORMAL A CONJUNTOS DE SUBNIVEL DE FUNCIONES CONVEXAS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

ANTON KRISTOFFER SVENSSON GRAAN

PROFESOR GUÍA:
ABDERRAHIM HANTOUTE

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
FELIPE ÁLVAREZ DAZIANO
RAFAEL CORREA FONTECILLA

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por proyecto Fondecyt 1151003.

SANTIAGO DE CHILE
2015

Resumen

Sea X un evtlc y Φ una función convexa, semicontinua inferior y propia en X. Dados $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\delta \geq 0$, se prueba que para $\overline{x} \in S_\lambda := [\Phi \leq \lambda]$ se cumple la fórmula

$$N^\delta_{S_\lambda}(\overline{x}) = \sigma^* - \limsup_{\substack{\mu(\varepsilon - \Phi(\overline{x}) + \lambda) \to \delta \\ \mu \geq 0}} \mu \partial_\varepsilon \Phi(\overline{x}), \tag{$\star$}$$

sin necesidad de condiciones de calificación. En espacios de Banach, se recupera una fórmula para el cono normal que involucran el subdiferencial de Fenchel exacto, pero en puntos cercanos a $\overline{x}$. En el caso que el punto $\overline{x}$ satisfaga la condición de calificación de Slater, se extiende la validez de fórmulas conocidas en espacios de Banach a los evtlc. Se analiza el caso del cono normal a una intersección finita de conjuntos de subnivel. Se estudia qué es el lado derecho de $(\star)$ en el caso que $\overline{x} \notin S_\lambda$ y $S_\lambda \neq \phi$, y el caso $S_\lambda = \phi$, para $\delta = 0$. Por polaridad se muestra una caracterización del cono tangente a S_λ, cuando $\lambda = \Phi(\overline{x})$. Se ve una condición necesaria y suficiente de optimalidad para un problema de optimización convexa. Por último, por medio de $(\star)$, se muestra la semicontinuidad exterior de un operador, y se utiliza este hecho para probar una propiedad asintótica de un sistema dinámico de segundo orden que involucra al operador.

Dedicado a mi madre

Tabla de Contenido

Introducción

Esta memoria se encuentra dentro de la rama matemática del Análisis Convexo, más precisamente en el marco de establecer reglas de cálculo para funciones convexas, definidas en espacios vectoriales topológicos localmente convexos. Las reglas o fórmulas conocidas, expresan los subdiferenciales y conjugadas de Fenchel de funciones complejas, a partir de funciones más simples, o bien relacionan distintos objetos entre si. Por ejemplo, el subdiferencial de la suma de dos funciones convexas se puede expresar como la suma de los subdiferenciales de ambas funciones; el subdiferencial del máximo de dos funciones convexas puede expresarse como la envoltura convexa de los subdiferenciales de cada función individual, y la composición de una función convexa con una operador lineal afín se puede expresar en términos del subdiferencial de la función y del adjunto del operador. Las reglas requieren ciertas propiedades básicas sobre las funciones y sobre los espacios, y en algunos casos son válidas en sólo algunos puntos del dominio de la función en cuestión: puntos que cumplen condiciones de calificación.

En esta ocasión se estudia cómo se relaciona el cono normal o de manera más general, el conjunto δ-normal a los subniveles de una función convexa, semicontinua inferiormente y propia, con sus ε-subdiferenciales. La relación es válida de manera global sobre el dominio sin depender de ninguna condición de calificación. La fórmula es

$$N^{\delta}_{[\Phi\le\lambda]}(\overline{x}) = \sigma^* - \limsup_{\substack{\mu(\varepsilon-\Phi(\overline{x})+\lambda)\to\delta \\ \mu\ge 0}} \mu\partial_{\varepsilon}\Phi(\overline{x}), \tag{1}$$

siempre que $\Phi(\overline{x}) \le \lambda$. En la literatura se puede encontrar relaciones más simples para el cono normal a $[\Phi \le \lambda]$, esto es $\delta = 0$ en (1), pero que requieren de condiciones de calificación como la de Slater o restricciones sobre el espacio. Un resultado reciente similar a (1) debido a L. Thibault y A. Cabot, que se puede encontrar en [13] y que tampoco depende de una condición de calificación es

$$N_{[\Phi\le\lambda]}(\overline{x}) = \sigma^* - \limsup_{\substack{x\to\overline{x} \\ \mu(\Phi(x)-\lambda)\to 0 \\ \mu\langle\cdot,x-\overline{x}\rangle\to 0 \\ \mu\ge 0}} \mu\partial\Phi(x) \tag{2}$$

para $\Phi(\overline{x}) \le \lambda$, válida para cualquier función propia, semicontinua inferior y convexa, definida en un espacio de Banach. Una limitación de la anterior es que no hay posibilidad de extenderla a los evtlc sin imponer alguna restricción adicional sobre las funciones Φ, pues existe un ejemplo dado por A. Bronsted y R. T. Rockafellar de una función convexa, semicontinua inferior y propia, cuyo subdiferencial exacto $\partial\Phi$ es vacío en todo el dominio de Φ (ver [10]).

Por otro lado en (1) se necesita conocer $\partial_\varepsilon \Phi$ sólo en el punto $\overline{x}$, mientras que en (2) se necesita conocer $\partial \Phi$ en toda una vecindad de $\overline{x}$.

Como ya fue dicho, antes de esto se conocían relaciones entre el cono normal a conjuntos de subnivel de una función convexa y su subdiferencial, pero que requerían de condiciones de calificación como la condición de Slater, que dice que el coeficiente de corte λ del conjunto de subnivel es mayor estricto que el ínfimo de la función. Por ejemplo, en [18, Teorema 10.3] se demuestra que si $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es convexa y sci, y $\overline{x}$ es un punto que cumple la condición de Slater, entonces el cono normal a $S := [\Phi \leq \Phi(\overline{x})]$ satisface

$$N_S(\overline{x}) = \mathbb{R}_+ \partial \Phi(\overline{x}) \cup N_{dom\Phi}(\overline{x}). \tag{3}$$

Si se añade que $\partial \Phi(\overline{x}) \neq \phi$, entonces se puede simplificar la fórmula a

$$N_S(\overline{x}) = \overline{\mathbb{R}_+ \partial \Phi(\overline{x})}^{\sigma^*}, \tag{4}$$

donde se usa el hecho de que $N_{dom\Phi}(\overline{x})$ es el cono de recesión del subdiferencial $\partial \Phi(\overline{x})$. La fórmula (4) se puede encontrar en [17, Teorema 23.7] pero con una demostración distinta. También (3) se puede simplificar aun más si se sabe que Φ es continua, pues en ese caso $N_{dom\Phi}(\overline{x}) = \{0\}$ con lo cual se obtiene

$$N_S(\overline{x}) = \mathbb{R}_+ \partial \Phi(\overline{x}). \tag{5}$$

La demostración de (5) en el caso continuo se puede hallar en [3, Prposicion 9.6.1] y en [5, Lema V.6], pero en mayor generalidad: para X espacio vectorial normado (evn). Por supuesto, si Φ es además de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^N$ se recupera el resultado clásico en el caso convexo, el cual dice que el gradiente $\nabla \Phi(\overline{x})$ es ortogonal al conjunto de nivel $[\Phi = \Phi(\overline{x})]$, siempre que $\overline{x}$ no sea un punto mínimo de Φ.

De regreso al resultado reciente (2) de Thibault y Cabot, cabe mencionar que éste generaliza a los otros en el caso que Slater se cumpla, salvo por la fórmula (5) para Φ continua y convexa, definida en un evn que no sea completo. Por otro lado, la demostración de (5) se basa en una fórmula secuencial para la composición, la cual provienen a su vez del Teorema de Bronsted-Rockafellar aplicado a relaciones con los ε-subdiferenciales. De esta manera, resulta natural pensar en dar una fórmula para el cono normal a conjuntos de subnivel de una función que lo relacione con los ε-subdiferenciales de dicha función.

El primero de los objetivos de esta memoria es dar una fórmula para el conjunto δ-normal a los subniveles de una función Φ definida en un evltc que no dependa de ninguna condición de calificación sobre el punto $\overline{x} \in dom(\Phi)$, para $\delta \geq 0$. Como caso particular, para $\delta = 0$ se obtiene una fórmula para el cono normal a los subniveles de Φ, y como corolario tanto la fórmula reciente (2), como las anteriores (3), (4) y (5). Se considera el caso del cono normal a una intersección finita de conjuntos de subnivel $[g_j \leq g_j(\overline{x})]$ con $(g_j)_{j=1}^k$ convexas y semicontinuas inferiormente, la cual se puede ver como el conjunto de subnivel del máximo de las g_j. Se analiza también el caso $\overline{x} \notin S_\lambda \neq \phi$, y el caso $S_\lambda = \phi$, preguntando qué es el lado izquierdo de (1). Con la fórmula propuesta (1) se muestra cómo se ven las condiciones de optimalidad para un problema de optimización convexa. Además, vía la relación polar entre el cono normal y el cono tangente, se muestra una caracterización para el cono tangente al subnivel de una función convexa semicontinua inferior en términos de las ε-derivadas direccionales de la función. Esto corresponderá al capítulo primero.

En el segundo capítulo se muestra algunas aplicaciones de las representaciones del cono normal en el análisis asintótico de ciertos sistemas dinámicos continuos orientadas a la optimización. Se estudia sistemas de primer y de segundo orden: generalizaciones del método del gradiente y generalizaciones del método Bola Pesada con Fricción (Heavy Ball with Friction), los cuales involucran el cono normal a conjuntos de subnivel. En particular, para la generalización del sistema Bola Pesada con Fricción, que es de la forma

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + N_{[\Phi\leq\Phi(x)]}(x) \ni 0, \tag{6}$$

se prueba que si una trayectoria $x(t)$ de (6) converge a un punto mínimo $\overline{x}$, entonces esta solución es estacionaria, bajo una condición geométrica sobre el conjunto de mínimos de Φ en $\overline{x}$. En contraste con el sistema de segundo orden, para el sistema de primer orden

$$\dot{x} + N_{[\Phi\leq\Phi(x)]}(x) \ni 0, \tag{7}$$

siempre hay convergencia débil para trayectorias estacionarias como no estacionarias, donde se supone solamente una hipótesis muy razonable: que la trayectoria sea de decrecimiento para Φ. Esta última hipótesis se prueba que es válida en ciertos casos y se conjetura que lo es en general.

0.1. Preliminares

En esta sección se recuerda algunas definiciones del análisis convexo, algunas notaciones que se usan y algunos resultados conocidos. Se sigue bastante de cerca el libro de C. Zălinesku [**?**]. A menos que se diga lo contrario, se considera un evtlc X y su dual topológico X^* con su topología débil*. Se considera X y X^* como un par en dualidad y se anota $\langle x^*, x\rangle := x^*(x)$ para cada $(x, x^*) \in X \times X^*$. Dados dos conjuntos A y B en X, la suma de Minkowski está definida como el conjunto $A + B := \{x + y \in X \mid x \in A, y \in B\}$. El producto de Minkowski es el conjunto $AB := \{xy \in X \mid x \in A, y \in B\}$ siempre que tenga sentido la multiplicación de elementos de A con elementos de B, por ejemplo $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset X$. Cuando alguno de los conjuntos en la suma o en el producto sea un singleton, por ejemplo, si $A = \{a\}$ se anota $a + B$ en vez de $\{a\} + B$, y aB en vez de $\{a\}B$. Dados dos puntos $x, y \in X$, el intervalo entre x e y es el conjunto $[x, y] := x + [0, 1](y - x)$, es decir,

$$[x, y] = \{\alpha x + (1 - \alpha)y \in X \mid \alpha \in [0, 1]\}.$$

Un conjunto $A \subset X$ se dice *espacio afín*, si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in A$ se tiene $\alpha x + (1-\alpha)y \in A$. El espacio afín generado por un conjunto $C \subset X$ se denota

$$aff(C) := \bigcap_{\substack{C\subset A \\ A \text{ espacio afín}}} A.$$

Un conjunto $C \subset X$ se dice *convexo*, si para todo $x, y \in C$ y $\alpha \in (0, 1)$, el punto $\alpha x + (1-\alpha)y$ está en C. Otra manera de decir lo mismo, es que para todo $x, y \in C$, el intervalo $[x, y]$ está contenido en C. Se denota por $conv(A)$ a la envoltura convexa de A, esto es,

$$conv(A) := \bigcap_{\substack{A \subset C \\ C \text{ convexo}}} C,$$

el cual es un conjunto convexo. Se denota por τ–$cl(A)$ (o $\overline{A}^{\tau}$), o simplemente $cl(A)$ (o $\overline{A}$) cuando se subentienda la topología τ, a la clausura de A en la topología τ, y se usa la notación τ–$\overline{conv}(A) := \tau$–$cl(conv(A))$, o sólo $\overline{conv}(A)$ cuando se subentienda la topología τ. Un *cono* es un conjunto C no vacío tal que $\mathbb{R}_+ C \subset C$, o dicho de otro modo, si $0 \in C$ y para todo $\mu \in \mathbb{R}_+$, $x \in C$ se tiene $\mu x \in X$. Si A es no vacío, el *cono dual* de A es

$$A^* := \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, y \rangle \leq 0, \ \forall y \in A\}, \tag{8}$$

que es en verdad un cono, y el *conjunto polar* de A es

$$A^\circ := \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, y \rangle \leq 1, \ \forall y \in A\}, \tag{9}$$

el cual es cono si A lo es.

Teorema 0.1 *(Hahn Banach) Sea X un evtlc y $A, B \subset X$ dos conjuntos convexos, no vacíos y disjuntos. Si A es cerrado y B es compacto, entonces existe $x^* \in X^*$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\langle x^*, a \rangle \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \langle x^*, b \rangle, \quad \forall a \in A, b \in B. \tag{10}$$

En otras palabras $\sup \langle x^*, A \rangle < \inf \langle x^*, B \rangle$.

Un caso en que se usará el resultado anterior es cuando se quiere separar un cono convexo cerrado de un punto que no está en él.

Corolario 0.2 *Sea X un evtlc, $A \subset X$ un cono convexo cerrado y $b \notin A$. Entonces $\exists x^* \in X^*$ tal que*

$$\langle x^*, a \rangle \leq 0 < \langle x^*, b \rangle, \quad \forall a \in A. \tag{11}$$

Demostración. Aplicado el teorema anterior para $B = \{b\}$, que es compacto y disjunto con A, se sabe que existe $x^* \in X^*$ y

$$\langle x^*, a \rangle \leq \alpha < \langle x^*, b \rangle, \quad \forall a \in A.$$

Como $0 \in A$, luego $0 < \langle x^*, b \rangle$. Por otro lado, dado $a \in A$ y cualquier $\lambda > 0$, $\lambda a \in A$, de modo que $\langle x^*, \lambda a \rangle < \langle x^*, b \rangle$. Si se divide por $\lambda > 0$ y se toma límite $\lambda \to +\infty$, se tiene que $\langle x^*, a \rangle \leq 0$. $\square$

A continuación se recuerda el Teorema del Bipolar, consecuencia de la separación de Hahn-Banach.

Teorema 0.3 *(Bipolar) Sea X un evtlc y $C \subset X$ no vacío. Entonces*

$$C^{**} = cl\left(\mathbb{R}_+ conv(C)\right), \tag{12}$$
$$C^{\circ\circ} = \overline{conv}(C \cup \{0\}). \tag{13}$$

En particular, $C^{**} = C$, si y sólo si, C es cono convexo cerrado, y $C^{\circ\circ} = C$, si y sólo si, C es conjunto convexo cerrado que contiene al 0.

Sea C un subconjunto de un espacio vectorial X. El interior relativo de C con respecto a un subconjunto no vacío Y de X, denotado como $ri_Y(C)$, es el interior de C en la toplogía restringida a Y. En particular, si X es un espacio normado, entonces

$$ri_Y(C) = \{x \in X \mid \exists \delta > 0, B(x,\delta) \cap Y \subset C\}.$$

Si el conjunto Y no se especifica, el interior relativo de C se toma con respecto a $Y = aff(C)$, y se anota simplemente $ri(C)$. Es conocido que si X es un evt de dimensión finita, y $C \subset X$ es un conjunto convexo y no vacío, entonces el interior relativo $ri(C)$ es no vacío (ver [21]).

Una función $\Phi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es *propia* si el conjunto $dom(\Phi) := \{x \in X \mid \Phi(x) < \infty\}$ llamado *dominio efectivo* es no vacío; Φ es *convexa*, si $\forall x, y \in dom(\Phi)$ y $\lambda \in (0,1)$ se tiene

$$\Phi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\Phi(x) + (1-\lambda)\Phi(y).$$

La función Φ es *semicontinua inferiormente* (sci) si $\forall x \in X$, $\Phi(x) \leq \liminf_{y \to x} \Phi(y)$. Se anota $\Gamma_0(X)$ como el conjunto de todas las funciones $\Phi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ que son sci, convexas y propias.

Dada $\Phi \in \Gamma_0(X)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se denota por $[\Phi \leq \lambda]$ al conjunto de subnivel λ de Φ, esto es, los puntos $x \in dom(\Phi)$ tales que $\Phi(x) \leq \lambda$. En el caso que $\lambda := \inf \Phi > -\infty$, se escribe $argmin(\Phi) := [\Phi \leq \inf \Phi]$ el cual consiste en el conjunto de mínimos de Φ.

Proposición 0.4 *Sea $\Phi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa y $x \in dom(\Phi)$. Entonces para cada $v \in X$ la función,*

$$t \mapsto \frac{\Phi(x+tv) - \Phi(x)}{t}$$

es creciente en $(0, +\infty)$.

Demostración. Sean $s < t \in (0, +\infty)$ y se toma $\alpha = \frac{s}{t} \in (0,1)$. La desigualdad de convexidad para Φ dice que

$$\Phi(\alpha(x+tv) + (1-\alpha)x) \leq \alpha\Phi(x+tv) + (1-\alpha)\Phi(x),$$

lo cual en términos de s y t es

$$\Phi(x+sv) \leq \frac{s}{t}\Phi(x+tv) + (1-\frac{s}{t})\Phi(x).$$

Si se divide ambos lados por s y se reordena, se obtiene

$$\frac{\Phi(x+sv) - \Phi(x)}{s} \leq \frac{\Phi(x+tv) - \Phi(x)}{t},$$

es decir, Φ es creciente. $\square$

Para $\varepsilon \in \mathbb{R}$ y $\Phi \in \Gamma_0(X)$, el *ε-subdiferencial* (subdiferencial aproximado) de Φ en $x \in dom(\Phi)$ es el conjunto

$$\partial_\varepsilon \Phi(x) := \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, y - x\rangle \leq \Phi(y) - \Phi(x) + \varepsilon, \, \forall y \in X\}$$

y $\partial_\varepsilon \Phi(x) = \phi$ si $x \notin dom(\Phi)$. Si $\varepsilon < 0$, el ε-subdiferencial resulta obviamente vacío por lo cual siempre se toma $\varepsilon \geq 0$. Si $\varepsilon = 0$, se escribe $\partial\Phi(x)$ en vez de $\partial_0\Phi(x)$ y se llama el *subdiferencial* (o subdiferencial exacto) de Φ en x. La ventaja de considerar el ε-subdiferencial con $\varepsilon > 0$, es que asegura que no sea vacío en $dom(\Phi)$: $\partial_\varepsilon \Phi(\overline{x}) \neq \phi$ para todo $\overline{x} \in dom(\Phi)$ (ver por ejemplo [15]). Para $0 \neq v \in X$ y $\varepsilon \geq 0$, la *ε-derivada direccional* en x en la dirección v es

$$\Phi'_\varepsilon(x, v) := \inf_{t>0} \frac{\Phi(x + tv) - \Phi(x) + \varepsilon}{t}.$$

De nuevo, si $\varepsilon = 0$, se llama simplemente la *derivada direccional* de Φ en x en la direccion v y se denota por $\Phi'(x, v)$. Existe una conexión entre las dos últimas nociones que se puede encontrar en [21, Teorema 2.4.11], y se enuncia a continuación.

Teorema 0.5 *Sea X evtlc, $\Phi \in \Gamma_0(X)$, $x \in dom(\Phi)$ y $0 \neq v \in X$. Entonces para $\varepsilon > 0$ se tiene*

$$\Phi'_\varepsilon(x, v) = \sup \langle \partial_\varepsilon \Phi(x), v\rangle . \tag{14}$$

Algunas reglas de cálculo que se usarán, las cuales se pueden ver en [21] se resumen en la siguiente proposición.

Proposición 0.6 *Sea X un evtlc y sean $\Phi_1, \Phi_2 \in \Gamma_0(X)$. Si $x \in dom(\Phi_1) \cap dom(\Phi_2)$ y $\varepsilon \geq 0$, entonces*

$$\partial_\varepsilon(\Phi_1 + \Phi_2) = \bigcap_{\eta>0} \sigma^* - cl \left(\bigcup_{\substack{\varepsilon+\eta=\varepsilon_1+\varepsilon_2 \\ \varepsilon_j \geq 0}} (\partial_{\varepsilon_1}\Phi_1(\overline{x}) + \partial_{\varepsilon_2}\Phi_2(\overline{x})) \right), \tag{15}$$

$$\partial(\Phi_1 + \Phi_2)(\overline{x}) = \bigcap_{\eta>0} \sigma^* - cl(\partial_\eta \Phi_1(\overline{x}) + \partial_\eta \Phi_2(\overline{x})). \tag{16}$$

Sean $\Phi_1, ..., \Phi_k \in \Gamma_0(X)$ y $\Phi(x) = \max \{\Phi_j(x) \mid j = 1, ..., k\}$, para $x \in dom(\Phi)$ y $\varepsilon \geq 0$. Entonces

$$\partial_\varepsilon \Phi(x) = \bigcup_{(\lambda_1,...,\lambda_k)\in\Delta_k} \left\{ \partial_\eta(\lambda_1\Phi_1 + ... + \lambda_k\Phi_k)(x) \;\middle|\; \eta := \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \Phi_j(x) - \Phi(x) + \varepsilon \right\}. \tag{17}$$

Dado un conjunto $S \subset X$ la indicatriz de S es la función dada por

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 0 & , \text{si } x \in S \\ +\infty & , \text{si } x \notin S \end{cases}$$

la cual es convexa si y sólo si S es convexo. Para $x \in X$ y $\delta \geq 0$, el *conjunto δ-normal* a S en x es $N_S^\delta(x) := \partial_\delta \chi_S(x)$, con lo cual

$$N_S^\delta(x) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, y - x\rangle \leq \delta, \; \forall y \in S\}$$

si $x \in S$, o bien, $N_S^\delta(x) = \phi$ si $x \notin S$. Para $\delta = 0$ se anota $N_S(x) := N_S^0(x)$, se llama el *cono normal* a S en x, y así

$$N_S(x) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, y - x\rangle \leq 0,\ \forall y \in S\}$$

Si $x \in S$, el cono normal a S en x cumple

$$N_S(x) = (S - x)^* \tag{18}$$

De manera similar para $\delta > 0$, si $x \in S$, el conjunto δ-normal a S en x cumple

$$N_S^\delta(x) = \delta(S - x)^\circ \tag{19}$$

Es importante en las relaciones (18), (19) que x esté en S, pues para $x \notin S$ los lados izquierdos son vacíos, mientras que si $S \neq \phi$ el lado derecho puede ser un conjunto más complejo. Se analizará estos casos en la sección 1.6.

Ahora se verá una convergencia de conjuntos, más precisamente convergencia de multifunciones, llamada convergencia de *Painlevé-Kuratowski*, y algunas de sus propiedades. Para esta parte el lector es referido al libro de G. Beer [6]. Si Z es un espacio con una topología τ y $z \in Z$, se anotará $\mathcal{N}_{Z,\tau}(z)$ como el conjunto de τ-vecindades de z en Z, omitiendo la topología cuando ésta se subentienda.

Definición 0.7 *Sean X y Z espacios topológicos con τ la topología de Z y $T \subset X$. Al conjunto T, en este contexto, se llamará conjunto de índices, y a Z será denominado el espacio. Para una multifunción $M : T \rightrightarrows Z$ y para $\overline{x} \in cl(T)$ se escribe $\tau - \limsup_{x \to \overline{x}, x \in T} M(x)$ el conjunto*

$$\{z \in Z \mid \forall W \in \mathcal{N}_{Z,\tau}(z), \forall V \in \mathcal{N}_X(\overline{x}) :\ \exists x \in T \cap V, M(x) \cap W \neq \phi\}.$$

También se definió el $\tau - \liminf_{x \to \overline{x}, x \in T} M(x)$ como el conjunto

$$\{z \in Z \mid \forall W \in \mathcal{N}_{Z,\tau}(z), \exists V \in \mathcal{N}_X(\overline{x}) :\ \forall x \in T \cap V, M(x) \cap W \neq \phi\}.$$

En el caso que el $\liminf$ y el $\limsup$ coincidan, entonces tal conjunto se llama simplemente el límite, y se denota por $\tau - \lim_{x \to \overline{x}, x \in T} M(x)$.

En general, el límite superior secuencial esta definido como el conjunto $\tau - \limsup^{seq}_{x \to \overline{x}, x \in T} M(x)$ de puntos $z \in Z$ que son límite de sequencias (z_n) tal que $z_n \in M(x_n)$, para todo n, y $x_n \in T$ converge a $\overline{x} \in X$. También el límite inferior secuencial es el conjunto denotado por $\tau - \limsup^{seq}_{x \to \overline{x}, x \in T} M(x)$ que consiste en los puntos $z \in Z$ tal que para cualquier secuencia x_n convergente a $\overline{x}$, z es límite de una secuencia z_n tal que para n suficientemente grande $z_n \in M(x_n)$. Con esta definicion se tiene siempre que

$$\tau - \limsup^{seq}_{x \to \overline{x}, x \in T} M(x) \subset \tau - \limsup_{x \to \overline{x}, x \in T} M(x)$$

y

$$\tau - \liminf_{x\to\overline{x}, x\in T}{}^{seq} M(x) \subset \tau - \liminf_{x\to\overline{x}, x\in T} M(x),$$

y si Y y Z son 1-numerables, entonces ambos son iguales.

Cuando sea obvia cual topología se considera en Z para el $\limsup$ tan sólo se anota

$$\limsup_{x\to\overline{x}, x\in T} M(x) \qquad \text{y} \qquad \limsup_{x\to\overline{x}, x\in T}{}^{seq} M(x)$$

para el $\limsup$ y para el $\limsup$ secuencial respectivamente. De manera análoga para el $\liminf$ y para el $\lim$.

Observación En adelante siempre se supondrá que la topología de X es 1-numerable e incluso metrizable.

Proposición 0.8 *Sea $M : T \rightrightarrows Z$ una multifunción, τ la topología en Z y $\overline{x} \in X$. Entonces se tienen las siguientes propiedades:*

1. *Los límites inferior y superior satisfacen*

$$\liminf_{x\to\overline{x}, x\in T} M(x) \subset \limsup_{x\to\overline{x}, x\in T} M(x),$$

y ambos son τ-cerrados.

2. *Si M entrega conjuntos convexos (ie si $M(x)$ es convexo para todo $x \in T$), entonces $\liminf_{x\to\overline{x}, x\in T} M(x)$ es también convexo. Por tanto si existe $\lim_{x\to\overline{x}, x\in T} M(x)$, entonces es convexo.*
3. *Si M entrega conos (ie $M(x)$ es un cono para todo $x \in T$), entonces los límites inferior y superior son conos.*
4. *El límite superior $\tau - \limsup_{x\to\overline{x}, x\in T} M(x)$ es igual al conjunto de los $z \in Z$ que son τ-límites de alguna red (z_α) con $z_\alpha \in M(x_\alpha)$ y $x_\alpha \in T$ tal que $x_\alpha \to \overline{x}$. Si los conjuntos X y Z son 1-numerables entonces las redes se pueden tomar como sucesiones.*
5. *El límite inferior $\tau - \liminf_{x\to\overline{x}, x\in T} M(x)$ es igual al conjunto de los $z \in Z$ tal que toda red x_α convergente a $\overline{x}$ posee una subred x_{α_i} y existen $z_i \in M(x_{\alpha_i})$ τ-convergente a z. Si los conjuntos X y Z son 1-numerables entonces las redes se pueden tomar como sucesiones.*

Se sabe que en un espacio vectorial topológico (Z, τ) la clausura de un conjunto $C \subset Z$ satisface $\tau - cl(C) = \bigcap_{U\in\mathcal{N}_\tau(0)} C + U$. Se presenta aquí un resultado más general para el $\limsup$ en el cual tomando una multifunción constante igual a C, el resultado anterior sigue.

Proposición 0.9 *Sea (Z, τ) un espacio vectorial topológico y $M : T \rightrightarrows Z$ una multifunción. Entonces para $\overline{x} \in X$*

$$\bigcap_{U\in\mathcal{N}_{Z,\tau}(0)} \tau - \limsup_{x\to\overline{x}, x\in T} (M(x) + U) \subset \tau - \limsup_{x\to\overline{x}, x\in T} M(x), \tag{20}$$

y

$$\bigcap_{U\in\mathcal{N}_{Z,\tau}(0)} \tau - \liminf_{x\to\overline{x}, x\in T} (M(x) + U) \subset \tau - \liminf_{x\to\overline{x}, x\in T} M(x). \tag{21}$$

Demostración. Sea z en el lado izquierdo de (20). Sea $W \in \mathcal{N}_{Z,\tau}(z)$ y $V \in \mathcal{N}_X(\overline{x})$ de manera que $W_z := W - z \in \mathcal{N}_{Z,\tau}(0)$. Se toma $U \in \mathcal{N}_{Z,\tau}(0)$ simétrico tal que $U + U \subset W_z$. Se tiene

$$z \in \tau - \limsup_{x \to \overline{x}, x \in T} (M(x) + U).$$

Luego existe $x \in T \cap V$ tal que $(M(x) + U) \cap (U + z) \neq \phi$, como $U + z \in \mathcal{N}_{Z,\tau}(z)$. Pero entonces $M(x) \cap (U + U + z) \neq \phi$ y asi $M(x) \cap (W_z + z) = M(x) \cap W \neq \phi$. Por tanto $z \in \tau - \limsup_{x \to \overline{x}, x \in T} M(x)$.

La inclusión (21) se prueba de mandera análoga. □

Se tiene la siguiente relación entre la operación de polar y dual con los límites inferior y superior.

Proposición 0.10 *Sea $(Z, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, $(Z^*, \|\cdot\|_*)$ su dual topológico. Dada una multifunción $M : T \subset X \rightrightarrows Z$, entonces se cumple para la operación polar*

$$\tau^* - \limsup_{x \to \overline{x}, x \in T} M(x)^\circ \subset \left(\tau - \liminf_{x \to \overline{x}, x \in T} M(x) \right)^\circ \tag{22}$$

y

$$\tau^* - \liminf_{x \to \overline{x}, x \in T} M(x)^\circ \subset \left(\tau - \limsup_{x \to \overline{x}, x \in T} M(x) \right)^\circ, \tag{23}$$

y para la operación dual

$$\tau^* - \limsup_{x \to \overline{x}, x \in T} M(x)^* \subset \left(\tau - \liminf_{x \to \overline{x}, x \in T} M(x) \right)^* \tag{24}$$

y

$$\tau^* - \liminf_{x \to \overline{x}, x \in T} M(x)^* \subset \left(\tau - \limsup_{x \to \overline{x}, x \in T} M(x) \right)^*. \tag{25}$$

donde en todas las inclusiones para las topologías τ y τ^* se tiene cuatro casos diferentes y los dos últimos son consecuencia de cada uno de los dos primeros por si solos; éstos son:

(a) $\tau = \sigma_{seq}$ la convergencia débil secuencial en Z y $\tau^* = \tau_{\|\cdot\|_*}$ la topología de la norma en Z^*

(b) $\tau = \tau_{\|\cdot\|}$ la topología de la norma en Z y $\tau^* = \sigma^*_{seq}$ la convergencia débil secuencial en Z^**

(c) $\tau = \tau_{\|\cdot\|}$ la topología de la norma en Z y $\tau^* = \sigma_{seq}$ la convergencia débil secuencial en Z^*

(d) $\tau = \tau_{\|\cdot\|}$ la topología de la norma en Z y $\tau^* = \tau_{\|\cdot\|_*}$ la topología de la norma en Z^*

Demostración. En los 4 casos para las topologías (o convergencias) τ y τ^* de los $\limsup$ y $\liminf$ se puede usar la definición vía sucesiones.

Se toma z en el lado derecho de (22), esto es que $z = \lim z_n$, para ciertos $z_n \in (M(x_n))^\circ$ con (x_n) una sucesión convergente a $\overline{x}$. Para cada $y \in \liminf_{x \to \overline{x}, x \in T} M(x)$, $y_n \in M(x_n)$

para n suficientemente grande, con $y_n \to y$. Entonces se tiene $\langle z_n, y_n\rangle \leq 1$ para todo n suficientemente grande, con lo cual tomando límite se llega a $\langle z, y\rangle \leq 1$, pues dadas las topologías de la hipótesis $\langle z_n, y_n\rangle \to \langle z, y\rangle$ cuando $n \to +\infty$. Por lo tanto z está en el lado izquierdo de (22).

De manera análoga se prueban las inclusiones (23), (24) y (25). □

Observación Otra manera de expresar la proposición anterior en el caso de las topologías débiles es a través de los límites secuenciales $\liminf^{seq}$ y $\limsup^{seq}$. Por ejemplo, en el caso *(a)* la inclusión (22) se puede expresar como

$$\sigma^* - \limsup_{x\to\overline{x}, x\in T}{}^{seq} M(x)^\circ \subset \left(\tau_{\|\cdot\|} - \liminf_{x\to\overline{x}, x\in T} M(x)\right)^\circ .$$

Observación Para la operación dual, las inclusiones (24) y (25), pueden ser estrictas en casos muy sencillos. Por ejemplo, para índices naturales $T = \mathbb{N}$, $\overline{x} = +\infty$ y $M(x) = [0, \frac{1}{x}]$ se cumple $\lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\in\mathbb{N}}} M(x) = \{0\}$, con lo cual

$$\left(\liminf_{\substack{x\to+\infty \\ x\in\mathbb{N}}} M(x)\right)^* = \left(\limsup_{\substack{x\to+\infty \\ x\in\mathbb{N}}} M(x)\right)^* = \mathbb{R},$$

es decir, el lado derecho de (24) y (25) es $\mathbb{R}$. De otra parte $M(x)^* = \mathbb{R}_-$ para todo $x \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\limsup_{\substack{x\to+\infty \\ x\in\mathbb{N}}} M(x)^* = \liminf_{\substack{x\to+\infty \\ x\in\mathbb{N}}} M(x)^* = \mathbb{R}_-,$$

esto es, que el lado izquierdo en ambos es $\mathbb{R}_-$.

Una pregunta que se deja abierta es si se puede asegurar la igualdad en (23). La inclusión (22) en cambio no puede ser igualdad, en general, porque en su lado izquierdo el conjunto no es necesariamente convexo, aun cuando la multifunción M entregue conjuntos convexos ($M(x)$ convexo para todo $x \in X$). Pero si se convexifica el lado izquierdo de (22), queda abierta la pregunta de si se cumple

$$\tau - \overline{conv}\left(\tau - \limsup_{x\to\overline{x}, x\in T} (M(x))^\circ\right) \subset \left(\tau^* - \liminf_{x\to\overline{x}, x\in T} M(x)\right)^\circ .$$

Se puede ver la necesidad de convexificar el lado izquierdo en el ejemplo siguiente.

Ejemplo Se considera en $Z = \mathbb{R}^2$, $T = \mathbb{N}$ y la multifunción $M(x) = A$ si x es par, o $M(x) = B$ si x es impar, con $A = \mathbb{R}_+ \times \{0\}$ y $B = \{0\} \times \mathbb{R}_+$ que son conjuntos convexos cerrados. Entonces se tiene

$$\limsup_{x\to\overline{x}, x\in T} (M(x))^\circ = A^\circ \cup B^\circ = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0 \vee y \leq 0\right\},$$

y

$$\left(\liminf_{x\to\overline{x}, x\in T} M(x)\right)^\circ = (A \cap B)^\circ = \{0\}^\circ = \mathbb{R}^2,$$

que no son iguales.

Proposición 0.11 *Dado un espacio topológico (Z,τ), para una multifunción $M : T\times S \rightrightarrows Z$ siempre se cumple*

$$\tau - \limsup_{x\to\overline{x},x\in T}\left(\tau - \limsup_{y\to\overline{y},y\in S} M(x,y)\right) \subset \tau - \limsup_{\substack{(x,y)\to(\overline{x},\overline{y})\\(x,y)\in T\times S}} M(x,y). \tag{26}$$

Demostración. Se toma z en el lado izquierdo de (26). Por definición esto es que $\forall W \in \mathcal{N}_Z(z), V\in\mathcal{N}_X(\overline{x})$,

$$\exists x\in V\cap T:\ \underbrace{W\cap\tau - \limsup_{y\to\overline{y},y\in S} M(x,y)\neq\phi}_{(*)},$$

donde $(*)$ se dice que existe $z_x\in W$ tal que $z_x\in\tau - \limsup_{y\to\overline{y},y\in S} M(x,y)$. Como $W\in\mathcal{N}_Z(z_x)$ luego de nuevo por la definición del $\limsup$ se tiene que $\forall U\in\mathcal{N}_Y(\overline{y})$,

$$\exists y\in U\cap S:\ W\cap M(x,y)\neq\phi.$$

Dado que la topología de $X\times Y$ es la generada por las vecindades de la forma $V\times U$, queda claro que z cumple con la definición de estar en $\tau - \limsup_{\substack{(x,y)\to(\overline{x},\overline{y})\\(x,y)\in T\times S}} M(x,y)$. □

Observación La inclusión contraria es falsa, como muestra el ejemplo $M(x,y)=[0,\frac{y}{x}]$ con $S=T=(0,+\infty)$, $\overline{x}=\overline{y}=0$, donde

$$\limsup_{y\to\overline{y},y\in S} M(x,y)=\{0\},$$

con lo cual el lado izquierdo de (26) es igual a $\{0\}$, mientras que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(\overline{x},\overline{y})\\(x,y)\in T\times S}} M(x,y)=[0,+\infty).$$

Por otro lado, para los límites inferiores no se cumple una relación similar. Por ejemplo se considera la multifunción definida por $M(x,y)=\{x\cdot(-1)^y\}$ con $x\in T:=(0,\infty)$ e $y\in S:=\mathbb{N}$. Dado un x fijo, el límite inferior cuando $y\to\infty$ es vacío, y por tanto el conjunto

$$\liminf_{x\to\overline{x},x\in T}\left(\liminf_{y\to\overline{y},y\in S} M(x,y)\right)$$

es vacío, mientras que el límite inferior cuando simultáneamente $x\to 0$ e $y\to\infty$ consiste en el 0, es decir, $\liminf_{\substack{(x,y)\to(\overline{x},\overline{y})\\(x,y)\in T\times S}} M(x,y)=\{0\}$.

La otra inclusión tampoco se tiene en general. Si se considera $M(x,y)=[0,\frac{y}{x}]$ con $x,y\in\mathbb{R}$, entonces

$$\liminf_{y\to\infty} M(x,y)=\mathbb{R}_+,$$

y así

$$\liminf_{x\to\infty}\left(\liminf_{y\to\infty} M(x,y)\right)=\mathbb{R}_+.$$

Pero si se toma el límite inferior simultáneo, se obtiene

$$\liminf_{x\to\infty,y\to\infty} M(x,y)=\{0\}.$$

Proposición 0.12 *Dado un espacio topológico (Z,τ), para una multifunción $M : T\times S \rightrightarrows Z$ siempre se cumple*

$$\tau - \limsup_{x\to\overline{x},x\in T} \left(\tau - \limsup_{y\to x,y\in T} M(y)\right) = \tau - \limsup_{y\to\overline{x},y\in T} M(y), \tag{27}$$

y

$$\tau - \liminf_{x\to\overline{x},x\in T} \left(\tau - \liminf_{y\to x,y\in T} M(y)\right) \subset \tau - \liminf_{y\to\overline{x},y\in T} M(y). \tag{28}$$

Demostración. Sea z en el lado izquierdo de (27). Entonces para todo $W \in \mathcal{N}_Z(z), V \in \mathcal{N}_X(\overline{x})$,

$$\exists x \in V\cap T : W \cap \tau - \limsup_{y\to x,y\in T} M(y) \neq \phi,$$

por lo cual existe $z_x \in W$ tal que $z_x \in \tau - \limsup_{y\to x,y\in T} M(y)$. Pero como $W \in \mathcal{N}_Z(z_x)$ y $V \in \mathcal{N}_X(x)$, luego existe

$$y_x \in V\cap T : \quad W \cap M(y_x) \neq \phi.$$

Es decir, se cumple que $z \in \tau - \limsup_{y\to\overline{x},y\in T} M(y)$. La inclusión hacia la izquierda es directa tomando $y = x$, por lo cual la igualdad (27) queda probada.

Ahora sea z en el lado izquierdo de (28). Entonces para todo $W \in \mathcal{N}_Z(z)$, existe $V \in \mathcal{N}_X(\overline{x})$ con

$$\forall x \in V : W \cap \tau - \liminf_{y\to x,y\in T} M(y) \neq \phi.$$

O sea para cada $x \in V$ existe un $z_x \in W$ tal que $z_x \in \tau - \liminf_{y\to x,y\in T} M(y)$. Como $W \in \mathcal{N}_Z(z_x)$ luego existe $U_x \in \mathcal{N}_X(x)$ tal que

$$\forall x' \in U_x : \quad W \cap M(x') \neq \phi.$$

En particular para $x' = x$ se tiene $W \cap M(x) \neq \phi$, y esto para cada $x \in V$. Por lo tanto z está en el lado derecho de (28). $\square$

Ejemplo Se considera la multifunción M dada por $M(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $M(x) = -x$ si $x \notin \mathbb{Q}$, para $x \in T = (0,\infty)$. Así dado $x \in T$, $\liminf_{y\to x,y\in T} M(y) = \phi$. Por tanto si $\overline{x} = 0 \notin T$,

$$\liminf_{x\to\overline{x},x\in T} \left(\liminf_{y\to x,y\in T} M(y)\right) = \phi.$$

Pero si se toma el límite inferior hacia $\overline{x} = 0$ directamente, se obtiene

$$\liminf_{y\to\overline{x},y\in T} M(y) = \lim_{y\to\overline{x},y\in T} M(y) = \{0\}.$$

Capítulo 1

Fórmula del δ-normal a los subniveles de funciones convexas

Se considera un espacio vectorial topológico localmente convexo (evtlc) X y una función $\Phi \in \Gamma_0(X)$, donde $\Gamma_0(X)$ es el conjunto de funciones a valores en la recta real extendida que son convexas, propias y semicontinuas inferiormente. Se dará en este capítulo una caracterización del conjunto δ-normal a los conjuntos de subnivel $S_\lambda := [\Phi \leq \lambda]$ con $\delta \geq 0$, por medio de los subdiferenciales aproximados de Φ, vale decir,

$$N_{S_\lambda}^\delta(\overline{x}) = \sigma^* - \limsup_{\substack{\mu(\lambda - \Phi(\overline{x}) + \varepsilon) \to \delta \\ \mu \geq 0}} \mu \partial_\varepsilon \Phi(\overline{x}), \tag{1.1}$$

para cualquier punto $\overline{x} \in S_\lambda$.

Una de las inclusiones de (1.1) es directa y se presenta a continuación.

Proposición 1.1 *Sea X un evtlc y $\Phi \in \Gamma_0(X)$. Sea $\delta \geq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\overline{x} \in S_\lambda := [\Phi \leq \lambda]$. Entonces*

$$N_{S_\lambda}^\delta(\overline{x}) \supset \sigma^* - \limsup_{\substack{\mu(\lambda - \Phi(\overline{x}) + \varepsilon) \to \delta \\ \mu \geq 0}} \mu \partial_\varepsilon \Phi(\overline{x}).$$

Demostración. Sea x^* un elemento en el conjunto de la derecha de modo que existen redes $(x_\alpha^*) \subset X^*$, $(\mu_\alpha) \subset \mathbb{R}_+$ y $(\varepsilon_\alpha) \subset \mathbb{R}$ con $x_\alpha^* \in \partial_{\varepsilon_\alpha}\Phi(\overline{x})$ tales que $x^* = \sigma^* - \lim \mu_\alpha x_\alpha^*$ y $\mu_\alpha(\lambda - \Phi(\overline{x}) + \varepsilon_\alpha) \to \delta$. Para $y \in S_\lambda$ se tiene

$$\langle x_\alpha^*, y - \overline{x} \rangle \leq \Phi(y) - \Phi(\overline{x}) + \varepsilon_\alpha \leq \lambda - \Phi(\overline{x}) + \varepsilon_\alpha.$$

Si se multiplica por $\mu_\alpha \geq 0$, luego

$$\langle \mu_\alpha x_\alpha^*, y - \overline{x} \rangle \leq \mu_\alpha(\lambda - \Phi(\overline{x}) + \varepsilon_\alpha),$$

y tomando límite en ambos lados da

$$\langle x^*, y - \overline{x} \rangle \leq \delta, \quad \forall y \in S_\lambda.$$

Por lo tanto $x^* \in N_{S_\lambda}(\overline{x})$. $\square$

Para la otra inclusión, de la cual trata gran parte de este capítulo, es decir, para la inclusión

$$N^\delta_{S_\lambda}(\overline{x}) \subset \tau^* - \limsup_{\substack{\mu(\lambda - \Phi(\overline{x}) + \varepsilon) \to \delta \\ \mu \geq 0}} \mu \partial_\varepsilon \Phi(\overline{x}), \tag{1.2}$$

con $\tau^* = \sigma^*$ en general, será importante notar la diferencia entre el caso en que S_λ es el conjunto de mínimos de Φ, y el caso contrario, condición llamada de *Slater*, esto es, $(\overline{x}, \lambda) \in X \times \mathbb{R}$ con $\Phi(\overline{x}) \leq \lambda$ tal que se cumple:

$$\exists x_0 \in dom(\Phi) \text{ con } \Phi(x_0) < \lambda. \tag{1.3}$$

De hecho, en este caso se obtiene una fórmula más simple que sugiere buscar también una simplificación en el caso en que no se cumple (1.3).

1.1. Caso de Slater

En esta sección se probará la fórmula (1.1) en el caso en que $(\overline{x}, \lambda)$ cumple la condición de Slater (1.3) en un evtlc, utilizando como herramienta principal una fórmula para el ε-subdiferencial del máximo de dos funciones. De hecho, se prueba una fórmula más simple, pero que sólo resulta ser válida en el caso de Slater.

Proposición 1.2 *Sea X un evtlc y $\Phi \in \Gamma_0(X)$. Sean $\lambda \in \mathbb{R}$, $\delta \geq 0$, $S_\lambda := [\Phi \leq \lambda]$ y $\overline{x} \in S_\lambda$, tales que se tiene la condición de Slater* (1.3).

Entonces

$$N^\delta_{S_\lambda}(\overline{x}) = \bigcup_{\mu \geq 0} \partial_{\delta + \mu(\Phi(\overline{x}) - \lambda)} (\mu \Phi)(\overline{x}). \tag{1.4}$$

Demostración. Para la inclusión hacia la izquierda, se toma $\xi \in \partial_{\delta + \mu(\Phi(\overline{x}) - \lambda)}(\mu\Phi)(\overline{x})$ con $\mu \geq 0$, esto es,

$$\begin{aligned} \langle \xi, y - \overline{x} \rangle &\leq \mu\Phi(y) - \mu\Phi(\overline{x}) + (\delta + \mu(\Phi(\overline{x}) - \lambda)) \\ &= \mu(\Phi(y) - \lambda) + \delta. \end{aligned}$$

Es claro que $\langle \xi, y - \overline{x} \rangle \leq \delta$ para todo $y \in S_\lambda$, por lo que $\xi \in N^\delta_{S_\lambda}(\overline{x})$.

Ahora para la inclusión hacia la derecha, sea $\xi \in N^\delta_{S_\lambda}(\overline{x})$. Se tiene que $\forall y \in X$,

$$\Phi(y) - \lambda > 0 \ \vee \ \langle \xi, y - \overline{x} \rangle - \delta \leq 0.$$

La función $\varphi(\cdot) := \text{máx}\{\Phi(\cdot) - \lambda, \delta - \langle \xi, \cdot - \overline{x} \rangle\} \in \Gamma_0(X)$, es no negativa y $\varphi(\overline{x}) = \delta$, por lo cual $\overline{x}$ es un δ-mínimo de φ. En otras palabras

$$0 \in \partial_\delta \varphi(\overline{x}). \tag{1.5}$$

Por la fórmula del ε-subdiferencial para el máximo de dos funciones (17), se cumple que

$$\partial_\delta \varphi(\overline{x}) = \bigcup_{\substack{\alpha\in[0,1],\eta\in[0,\delta]\\ \eta\leq\alpha\delta+(1-\alpha)(\Phi(\overline{x})-\lambda)}} \partial_\eta((1-\alpha)(\Phi-\lambda)+\alpha(\delta-\xi+\langle\xi,\overline{x}\rangle))(\overline{x}).$$

Pero

$$\begin{aligned}\partial_\eta((1-\alpha)(\Phi-\lambda)+\alpha(\delta-\xi+\langle\xi,\overline{x}\rangle))(\overline{x}) &= \partial_\eta((1-\alpha)\Phi-\alpha\xi)(\overline{x})\\ &= \partial_\eta(1-\alpha)\Phi(\overline{x})-\alpha\xi.\end{aligned}$$

Entonces por (1.5), existe $\alpha \in [0,1]$ y

$$0 \leq \eta \leq \alpha\delta + (1-\alpha)(\Phi(\overline{x})-\lambda) \tag{1.6}$$

tal que

$$0 \in \partial_\eta(1-\alpha)\Phi(\overline{x}) - \alpha\xi,$$

o equivalentemente,

$$\alpha\xi \in \partial_\eta(1-\alpha)\Phi(\overline{x}). \tag{1.7}$$

Se observa que si $\alpha = 1$, entonces $\xi \in N^\eta_{dom\Phi}(\overline{x})$. En cambio, el coeficiente α no puede ser igual a 0. De otro modo, $\eta = 0$ y $\Phi(\overline{x}) = \lambda$ por (1.6), y (1.7) implicaría que $\overline{x}$ es un mínimo de Φ contradiciendo (1.3). Luego despejando η en (1.7), se obtiene

$$\xi \in \frac{1}{\alpha}\partial_\eta(1-\alpha)\Phi(\overline{x}) \subset \partial_{\frac{\eta}{\alpha}}\frac{1-\alpha}{\alpha}\Phi(\overline{x}).$$

De (1.6) se deduce que $\frac{\eta}{\alpha} \leq \delta + \mu(\Phi(\overline{x})-\lambda)$ con $\mu = \frac{1-\alpha}{\alpha} \in \mathbb{R}_+$, por lo que se puede concluir que $\xi \in \partial_{\delta+\mu(\Phi(\overline{x})-\lambda)}\left(\mu\Phi\right)(\overline{x})$, y termina la demostración. □

En el caso $\delta = 0$ se obtiene las fórmulas (3), (4) y (5), pero válidas en un evtlc, como muestra el siguiente corolario.

Corolario 1.3 *Si $\lambda = \Phi(\overline{x})$, se tiene*

$$N_{S_\lambda}(\overline{x}) = \mathbb{R}_+\partial\Phi(\overline{x}) \cup N_{dom\Phi}(\overline{x}). \tag{1.8}$$

Si $\lambda > \Phi(\overline{x})$, entonces

$$N_{S_\lambda}(\overline{x}) = N_{dom\Phi}(\overline{x}).$$

Demostración. Para $\delta = 0$, (1.4) se escribe como

$$N_{S_\lambda}(\overline{x}) = \bigcup_{\mu\geq 0}\partial_{\mu(\Phi(\overline{x})-\lambda)}\left(\mu\Phi\right)(\overline{x}).$$

Si $\mu = 0$, entonces $\mu\Phi = \chi_{dom\Phi}$, con lo cual $\partial(\mu\Phi)(\overline{x}) = N_{dom\Phi}(\overline{x})$. Pero si $\mu > 0$ entonces

$$\partial_{\mu(\Phi(\overline{x})-\lambda)}\left(\mu\Phi\right)(\overline{x}) = \mu\partial_{\Phi(\overline{x})-\lambda}\Phi(\overline{x}).$$

Así se puede escribir

$$N_{S_\lambda}(\overline{x}) = \mathbb{R}_+\partial_{\Phi(\overline{x})-\lambda}\Phi(\overline{x}) \cup N_{dom\Phi}(\overline{x}),$$

y si $\lambda > \Phi(\overline{x})$, el primer conjunto de la unión en el lado derecho es vacío, por consistir en un subdiferencial aproximado con error negativo. □

Es fácil encontrar ejemplos donde no se cumple (1.4), y en particular (1.8) para puntos que no satisfacen la condición (1.3). Se verá algunos de estos ejemplos al principio de la próxima sección. Sin embargo, nuestra fórmula (1.1) sí es válida, tanto en el caso de Slater, como en el caso contrario.

Antes de probar la inclusión (1.2) de nuestra fórmula, se verá una proposición que no depende de la condición (1.3), pero se incluye en esta sección, porque se hace uso de ella aquí.

Proposición 1.4 *Sea X un espacio vectorial topológico, y $\Phi \in \Gamma_0(X)$, con $\overline{x} \in dom(\Phi)$, $\delta \geq 0$. Entonces*

$$N^{\delta}_{dom\Phi}(\overline{x}) = \tau^* - \limsup_{\substack{\mu\to 0, \mu\varepsilon\to\delta \\ \mu\geq 0}} \mu\partial_{\varepsilon}\Phi(\overline{x}). \tag{1.9}$$

Además si $\delta = 0$, también se tiene

$$N_{dom\Phi}(\overline{x}) = \tau^* - \limsup_{\substack{\mu\to 0, \varepsilon\to 0 \\ \mu\geq 0}} \mu\partial_{\varepsilon}\Phi(\overline{x}), \tag{1.10}$$

donde la topología τ^* es la topología de la norma $\tau_{\|\cdot\|_*}$ si X es Banach, o la topología débil σ^* en el caso general.

Demostración. Las inclusiones hacia la izquierda son directas y muy similares a la demostración de la Proposición 1.1. Para las inclusiones hacia la derecha se toma $\xi \in N^{\delta}_{dom\Phi}(\overline{x})$.

Se supone primero que X es un espacio de Banach y sea $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$, $y^*_n \in \partial_{\varepsilon_n}\Phi(\overline{x}) \neq \phi$. Se toma $\mu_n := n^{-1} \to 0$ si es que $(y^*_n)_n$ es acotada, o en otro caso $\mu_n := (|y^*_n|n)^{-1} \to 0$. Se considera $\xi_n := \xi + \mu_n y^*_n$, que claramente cumple $\xi_n \to \xi$ fuertemente. Luego

$$\xi_n \in \mu_n \partial_{\mu_n^{-1}\delta+\varepsilon_n}\Phi(\overline{x}).$$

Con lo anterior, si se anota $\varepsilon'_n := \mu_n^{-1}\delta + \varepsilon_n$, entonces $\mu_n\varepsilon'_n \to \delta$, $\xi = \lim_n \xi_n$ y $\xi_n \in \mu_n\partial_{\varepsilon'_n}\Phi(\overline{x})$, esto es,

$$\xi \in \tau_{\|\cdot\|_*} - \limsup_{\substack{\mu\to 0, \mu\varepsilon\to\delta \\ \mu\geq 0}} \mu\partial_{\varepsilon}\Phi(\overline{x}),$$

y si $\delta = 0$, también ξ esta en el lado izquierdo de (1.10), pues en ese caso $\varepsilon'_n \to 0$.

Ahora para el caso general se considera $W \in \mathcal{N}_{X^*,\sigma^*}(\xi)$. Sin perdida de generalidad

$$W = \{y^* \in X^* \mid \langle y^* - \xi, y_i\rangle < \alpha, \ \forall i = 1, ..., k\},$$

para ciertos puntos $(y_i)_{i=1}^k \subset X$ y $\alpha > 0$. Se toma $\varepsilon > 0$ pequeño, sea $y^*_0 \in \partial_{\varepsilon}\Phi(\overline{x}) \neq \phi$ y $\mu > 0$ pequeño tal que

$$\mu \max_{1\leq i\leq k} \langle y^*_0, y_i\rangle < \alpha,$$

con lo cual $\mu y^*_0 + \xi \in W$. Dado que $\mu^{-1}\xi \in N^{\mu^{-1}\delta}_{dom\Phi}(\overline{x})$ luego

$$\mu y^*_0 + x^* = \mu\left(y^*_0 + \mu^{-1}\xi\right) \in \mu(\partial_{\varepsilon}\Phi(\overline{x}) + N^{\mu^{-1}\delta}_{dom\Phi}(\overline{x})) = \mu\partial_{\mu^{-1}\delta+\varepsilon}\Phi(\overline{x}).$$

Ahora tomando $\varepsilon' := \mu^{-1}\delta + \varepsilon$ se ve que $\mu\varepsilon'$ es cercano a δ para μ y ε pequeños, y que $W \cap \mu\partial_{\varepsilon'}\Phi(\overline{x}) \neq \phi$ para cualquier vecindad W de ξ. Por lo tanto,

$$\xi \in \sigma^* - \limsup_{\substack{\mu\to 0, \mu\varepsilon\to\delta \\ \mu\geq 0}} \mu\partial_\varepsilon\Phi(\overline{x}),$$

y en el caso $\delta = 0$ se puede también agregar que ε sea pequeño de modo que ξ esté en el lado izquierdo de (1.10). $\square$

Con la Proposición 1.4, se puede ahora mostrar la inclusión hacia la izquierda de la fórmula (1.1).

Proposición 1.5 *Sea X un evtlc, y $\Phi \in \Gamma_0(X)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, $\delta \geq 0$, $\overline{x} \in S_\lambda := [\Phi \leq \lambda]$, tal que se cumple la condición de* (1.3). *Entonces*

$$N^\delta_{S_\lambda}(\overline{x}) = \tau^* - \limsup_{\substack{\mu(\lambda-\Phi(\overline{x})+\varepsilon)\to\delta \\ \mu\geq 0}} \mu\partial_\varepsilon\Phi(\overline{x}), \tag{1.11}$$

y en el caso $\delta = 0$, también

$$N_{S_\lambda}(\overline{x}) = \tau^* - \limsup_{\substack{\mu(\lambda-\Phi(\overline{x})+\varepsilon)\to 0, \varepsilon\to 0 \\ \mu\geq 0}} \mu\partial_\varepsilon\Phi(\overline{x}), \tag{1.12}$$

donde la topología τ^* es la topología de la norma $\tau_{\|\cdot\|_*}$ si X es Banach, o la topología débil σ^* en el caso general.

Demostración. Las inclusiones hacia la izquierda han sido ya probadas o son directas. Por tanto basta con probar que

$$N^\delta_{S_\lambda}(\overline{x}) \subset \tau^* - \limsup_{\substack{\mu(\lambda-\Phi(\overline{x})+\varepsilon)\to\delta \\ \mu\geq 0}} \mu\partial_\varepsilon\Phi(\overline{x}),$$

y en el caso $\delta = 0$ que

$$N_{S_\lambda}(\overline{x}) \subset \tau^* - \limsup_{\substack{\mu(\lambda-\Phi(\overline{x})+\varepsilon)\to 0, \varepsilon\to 0 \\ \mu\geq 0}} \mu\partial_\varepsilon\Phi(\overline{x}).$$

Sea $x^* \in N^\delta_{S_\lambda}(\overline{x})$. Por (1.4), existe $\mu \geq 0$ tal que $x^* \in \partial_{\delta+\mu(\Phi(\overline{x})-\lambda)}(\mu\Phi)(\overline{x})$. Si $\mu > 0$ entonces $x^* \in \mu\partial_{\frac{\delta}{\mu}+\Phi(\overline{x})-\lambda}\Phi(\overline{x})$, y tomando $\varepsilon := \frac{\delta}{\mu} + \Phi(\overline{x}) - \lambda$ es claro que $x^* \in \partial_\varepsilon\Phi(\overline{x})$ con $\mu(\lambda - \Phi(\overline{x}) + \varepsilon) = \delta$. Por otro parte, si $\mu = 0$, entonces

$$x^* \in N^\delta_{dom\Phi}(\overline{x}),$$

y la última observación nos permite concluir que

$$x^* \in \tau^* - \limsup_{\substack{\mu\varepsilon\to\delta, \mu\to 0 \\ \mu\geq 0}} \mu\partial_\varepsilon\Phi(\overline{x}) \subset \tau^* - \limsup_{\substack{\mu(\lambda-\Phi(\overline{x})+\varepsilon)\to\delta \\ \mu\geq 0}} \mu\partial_\varepsilon\Phi(\overline{x}),$$

y en el caso $\delta = 0$ se obtiene

$$x^* \in \tau^* - \limsup_{\substack{\varepsilon\to 0, \mu\to 0\\ \mu\geq 0}} \mu\partial_\varepsilon\Phi(\overline{x}) \subset \tau^* - \limsup_{\substack{\mu(\lambda-\Phi(\overline{x})+\varepsilon)\to 0, \varepsilon\to 0\\ \mu\geq 0}} \mu\partial_\varepsilon\Phi(\overline{x}).$$

□

En las dos próximas secciones se verá que la fórmula (1.1) también es válida primero en $\mathbb{R}^N$ y luego en un evtlc X, cuando la condición de (1.3) no se cumple, esto es, que no existe $x_0 \in dom(\Phi)$ tal que $\Phi(x_0) < \lambda$, y $\Phi(\overline{x}) \leq \lambda$. Pero entonces $\Phi(\overline{x}) = \lambda$ y $\overline{x}$ es un punto mínimo de Φ. Dicho de otro manera, el caso que se considera es

$$\overline{x} \in S := [\Phi \leq \Phi(\overline{x})] = argmin(\Phi). \tag{1.13}$$

1.2. Fórmula en $\mathbb{R}^N$

En esta sección al escribir los $\limsup$ no se especificará la topología τ^*, puesto que en dimensión finita la topología de interés es sólo la de la norma. Se quiere probar la igualdad (1.1) que bajo (1.13) es

$$N_S^\delta(\overline{x}) = \limsup_{\substack{\mu\varepsilon\to\delta\\ \mu\geq 0}} \mu\partial_\varepsilon\Phi(\overline{x}), \tag{1.14}$$

y se pone especial atención a la inclusión hacia la derecha, pues la inclusión hacia la izquierda ya se tiene cubierto de manera trivial por la Proposición 1.1.

Se presentan a continuación algunos ejemplos que muestran por qué la fórmula (1.4) no es válida bajo (1.13).

Ejemplo Sea $(H, \|\cdot\|)$ un espacio de Hilbert, $\Phi : X \to \mathbb{R}$ dada por $\Phi(x) = \|x\|^2$, $\overline{x} = 0 \in H$ y $\lambda = 0 \in \mathbb{R}$. Claramente $0 \in S := argmin(\Phi)$ y de hecho $S = \{0\}$, por lo cual

$$N_S(\overline{x}) = H^*.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\bigcup_{\mu\geq 0} \partial_{\delta+\mu(\Phi(\overline{x})-\lambda)}(\mu\Phi)(\overline{x}) &= \bigcup_{\mu\geq 0} \partial(\mu\Phi)(0)\\ &= \bigcup_{\mu\geq 0} \mu\left\{\nabla\Phi(0)\right\}\\ &= \{0\}.\end{aligned}$$

Se ve que no se cumple la igualdad (1.4).

De hecho, es fácil darse cuenta que para cualquier función Φ convexa diferenciable con un único mínimo $\overline{x}$ (por ejemplo Φ estrictamente convexa) se obtiene el mismo resultado, pues por regla de Fermat $\partial\Phi(\overline{x}) = \{\nabla\Phi(\overline{x})\} = \{0\}$.

El hecho de que haya un único mínimo no es el punto clave, como se verá en el siguiente ejemplo.

Ejemplo Sea $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ según $\Phi(x) = 0$ para $x < 0$ y $\Phi(x) = x^2$ para $x \geq 0$. Al igual que en el ejemplo anterior para $\overline{x} = 0$, $\lambda = 0$ y $\delta = 0$ se tiene

$$\bigcup_{\mu \geq 0} \partial_{\delta + \mu(\Phi(\overline{x}) - \lambda)}(\mu\Phi)(\overline{x}) = \{0\}\,, \tag{1.15}$$

mientras que $S := argmin(\Phi) = \mathbb{R}_-$, de modo que $N_S(\overline{x}) = \mathbb{R}_+$, y así los distintos lados de (1.4) no coinciden.

Ahora se considera un caso con $\delta > 0$ en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dada por

$$\Phi(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2}{x_2} & \text{si } x_1, x_2 > 0 \\ 0 & \text{si } x_1 \leq 0, x_2 \geq 0 \\ +\infty & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Es fácil notar que Φ es convexa, sci, propia y además positivamente homogénea. El conjunto de mínimos de Φ es $S = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$. Como para todo $\mu \geq 0$ $(\mu\Phi)$ es positivamente homogenea, luego $\partial_\delta(\mu\Phi)(0,0) = \partial(\mu\Phi)(0,0)$ y en particular $N_S^\delta(0,0) = N_S(0,0)$. Por tanto, $N_S^\delta(0,0) = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$. En cambio,

$$\bigcup_{\mu \geq 0} \partial_\delta(\mu\Phi)(0,0) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x \geq 0, y < 0) \vee (x,y) = (0,0)\right\},$$

conjunto que ni siquiera es cerrado.

Con los ejemplo anteriores queda claro que la fórmula (1.4) no es válida para puntos mínimos, pero se verá en lo que sigue que nuestra propuesta fórmula (1.1) sí lo es. Se dará para comenzar, dos lemas simples que permitirán obtener la fórmula propuesta en una dimensión.

Lema 1.6 *Sea $r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ una función y $\delta \geq 0$. Las siguientes son equivalentes.*

1. $\forall \mu_n \geq 0,\ \varepsilon_n \geq 0, \mu_n\varepsilon_n \to \delta \quad \Rightarrow \quad \limsup \mu_n r(\varepsilon_n) \leq \delta.$
2. *Si $\delta = 0$, $\exists M > 0$ tal que*
$$r(\varepsilon) \leq M\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$
Si $\delta > 0$
$$r(\varepsilon) \leq \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Demostración. La implicación *2* $\Rightarrow$ *1* es directa, pues basta multiplicar las desigualdades por μ, y tomar límite. También la implicación *1* $\Rightarrow$ *2*, cuando $\delta > 0$ sigue fácilmente tomando sucesiones constantes ($\varepsilon_n = \varepsilon$ y $\mu_n = \delta\varepsilon^{-1}$). Así que se supone que *2* es falsa para $\delta = 0$, y se prueba que *1* también es falsa. Entonces $\forall n \in \mathbb{N}$, existe ε_n con $r(\varepsilon_n) > n\varepsilon_n$ y $\varepsilon_n \to 0$. Pero para $\mu_n = (n\varepsilon_n)^{-1} \geq 0$ se tiene

$$\mu_n\varepsilon_n = \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{but} \quad \mu_n r(\varepsilon_n) \geq 1.$$

Esto contradice *1* y el lema queda demostrado. $\square$

Lema 1.7 *Sea* $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *y* $\overline{x} \in argmin(\Phi)$. *Para cada* $\varepsilon_0 > 0$ *y* $M > 0$, *las siguientes son equivalentes.*

1. $\Phi(\overline{x} + tv) = \Phi(\overline{x})$, $\forall t \in [0, M^{-1}]$.

2. $\Phi'_\varepsilon(\overline{x}, v) \leq M\varepsilon$, $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Demostración. Por simplicidad se supondrá sin pérdida de generalidad que $\overline{x} = 0$ y $\Phi(0) = 0$.

Primero se supone que *1* es verdad, de modo que

$$\Phi'_\varepsilon(0, v) = \inf_{t>0} \frac{\Phi(tv) + \varepsilon}{t} \leq \frac{\Phi(M^{-1}v) + \varepsilon}{M^{-1}} \leq M\varepsilon,$$

y la implicación *1* $\Rightarrow$ *2* queda probada.

Ahora se supone que *2* es verdad. Tomando $\varepsilon = \frac{1}{n}$, por la definición de $\Phi'_\varepsilon(0, v)$ se obtiene una secuencia $(t_n)_n$ tal que

$$\frac{\Phi(t_n v) + \frac{1}{n}}{t_n} \leq \frac{M}{n} + \frac{1}{n^2},$$

porque $\inf_{t>0} \frac{\Phi(tv)+\frac{1}{n}}{t} = \Phi'_{\frac{1}{n}}(0, v) < \frac{M}{n} + \frac{1}{n^2}$. Si t_n es no acotada

$$\limsup_n \frac{\Phi(t_n v)}{t_n} \leq 0.$$

Dado que Φ es convexa el cuociente $\frac{\Phi(tv)}{t} = \frac{\Phi(tv)-\Phi(0)}{t-0}$ es creciente, y esto implica

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\Phi(tv)}{t} = \sup_{t\in(0,\infty)} \frac{\Phi(tv)}{t} \leq 0.$$

Entonces $\Phi(tv) \leq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$.

Por otra parte si t_n es acotada y t_0 es uno de sus puntos de acumulación, luego

$$\Phi(t_n v) \leq \Phi(t_n v) + \frac{1}{n} \leq t_n \left(\frac{M}{n} + \frac{1}{n^2}\right), \tag{1.16}$$

y así uno obtiene $\Phi(t_0 v) \leq \liminf \Phi(t_n v) \leq 0$, gracias a la semicontinuidad inferior de Φ. De (1.16) se nota que

$$\frac{1}{n} \leq t_n \left(\frac{M}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{n}{Mn+1} \leq t_n,$$

implicando $t_0 \geq \frac{1}{M}$ y entonces, $\forall t \in [0, \frac{1}{M}]$, $\Phi(tv) \leq 0$ gracias a la convexidad de Φ. Finalmente se ha obtenido *1*. $\square$

Juntando los dos lemas se obtiene la validez de la siguiente proposición.

Proposición 1.8 *Sea* $\Phi \in \Gamma_0(\mathbb{R}^N)$, $\overline{x} \in S := argmin(\Phi)$. *Las siguientes son equivalentes.*

1. $\xi \notin N_S^\delta(\overline{x})$.

2. $\exists v \in X, \langle \xi, v\rangle > \delta$,

$$\limsup_{\substack{\mu\varepsilon\to\delta\\ \mu\geq 0}} \mu \left\langle \partial_\varepsilon \Phi(\overline{x}), v\right\rangle \subset (-\infty, \delta].$$

Demostración. Sea $\xi \notin N_S^\delta(\overline{x})$. Entonces existe $v \in X$ tal que $\overline{x}+v \in S$ con $\langle \xi, v\rangle > \delta$. Se tiene $\Phi(\overline{x}+v) \leq \Phi(\overline{x})$, por lo que si se toma $\mu_n \geq 0, \varepsilon_n \geq 0$ tal que $\mu_n\varepsilon_n \to \delta$ y $x_n^* \in \partial_{\varepsilon_n}\Phi(\overline{x})$ se tiene

$$\mu_n \left\langle x_n^*, v\right\rangle \leq \mu_n(\Phi(\overline{x}+v) - \Phi(\overline{x}) + \varepsilon_n) \leq \mu_n\varepsilon_n \to \delta. \tag{1.17}$$

Viendo las sucesiones de la izquierda en (1.17) se deduce

$$\limsup_{\substack{\mu\varepsilon\to\delta\\ \mu\geq 0}} \mu \left\langle \partial_\varepsilon \Phi(\overline{x}), v\right\rangle \subset (-\infty, \delta].$$

Por tanto, queda probado *1* $\Rightarrow$ *2*.

Para la dirección *2* $\Rightarrow$ *1* se supone que $v \in X$ tal que $\langle \xi, v\rangle > \delta$ y

$$\limsup_{\substack{\mu\varepsilon\to\delta\\ \mu\geq 0}} \mu \left\langle \partial_\varepsilon \Phi(\overline{x}), v\right\rangle \subset (-\infty, \delta].$$

Entonces para cada $\mu_n \geq 0, \varepsilon_n \geq 0$, $\mu_n\varepsilon_n \to \delta$ y $x_n^* \in \partial_{\varepsilon_n}\Phi(\overline{x})$,

$$\limsup_n \mu_n \left\langle x_n^*, v\right\rangle \leq \delta.$$

Ahora el Teorema 0.5 nos asegura que $\Phi'_{\varepsilon_n}(\overline{x}, v) = \sup\langle \partial_{\varepsilon_n}\Phi(\overline{x}), v\rangle$, y así

$$\limsup_n \mu_n \Phi'_{\varepsilon_n}(\overline{x}, v) \leq \delta.$$

Entonces $\forall \mu_n \geq 0, \varepsilon_n \geq 0$,

$$\mu_n\varepsilon_n \to \delta \Rightarrow \limsup_n \mu_n \Phi'_{\varepsilon_n}(\overline{x}, v) \leq \delta.$$

Por el Lema 1.6, existe $M > 0$ ($M = 1$ si $\delta > 0$) tal que

$$\Phi'_\varepsilon(\overline{x}, v) \leq M\varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0,$$

y por el Lema 1.7 sigue que $\Phi(\overline{x}+tv) \leq \Phi(\overline{x})$, para $t \in (0, \frac{1}{M}]$. En particular para $\tilde{v} := \frac{v}{M}$ se tiene $\tilde{v} \in S$ y $\langle \xi, \tilde{v}\rangle > \delta$, mostrando que $\xi \notin N_S^\delta(\overline{x})$.

□

Observación En verdad la proposición anterior nos dice que

$$\left\langle N_S^\delta(\overline{x}), v\right\rangle = \limsup_{\substack{\mu\varepsilon\to\delta\\ \mu\geq 0}} \mu \left\langle \partial_\varepsilon \Phi(\overline{x}), v\right\rangle, \quad \forall v \in X. \tag{1.18}$$

La igualdad (1.18) es similar a nuestra fórmula (1.1), y en el caso unidimensional se puede ver que son equivalentes, pues

$$\limsup_{\substack{\mu\varepsilon\to\delta\\ \mu\geq 0}} \mu \langle \partial_\varepsilon \Phi(\overline{x}), v\rangle = \left\langle \limsup_{\substack{\mu\varepsilon\to\delta\\ \mu\geq 0}} \mu \partial_\varepsilon \Phi(\overline{x}), v \right\rangle,$$

tomando $v = 1 \in \mathbb{R}$.

Por tanto, hasta aquí ya está la validez de la fórmula (1.1) en una dimensión.

De aquí en adelante se usa la notación

$$L_\delta := \limsup_{\substack{\mu\varepsilon\to\delta\\ \mu\geq 0}} \mu \partial_\varepsilon \Phi(\overline{x}), \tag{1.19}$$

para $\delta \geq 0$, por lo cual lo que se busca probar es $N_S^\delta(\overline{x}) = L_\delta$. Para continuar con la demostración de la inclusión (1.2) en el caso N-dimensional se usará el Teorema de separación de Hahn-Banach, para lo cual se requiere probar la convexidad y clausura de los conjuntos L_δ para $\delta \geq 0$. Si bien la convexidad y la clausura de los L_δ es cierta en espacios más generales, aquí se plantea sólo en $\mathbb{R}^N$.

Proposición 1.9 *Sea $\Phi \in \Gamma_0(\mathbb{R}^N)$, con $\overline{x} \in argmin(\Phi)$. Entonces L_δ es un conjunto convexo cerrado y L_0 es un cono convexo cerrado. Además, se tiene la igualdad*

$$L_\delta = \limsup_{\substack{\mu\varepsilon\to\delta\\ \mu\to\infty,\varepsilon\to 0}} \mu \partial_\varepsilon \Phi(\overline{x}). \tag{1.20}$$

Demostración. La inclusión hacia la izquierda es directa. Para la inclusión inversa se toma $x^* = \lim \mu_n x_n^*$, con $x_n^* \in \partial_{\varepsilon_n}\Phi(\overline{x})$, $\mu_n, \varepsilon_n \geq 0$ y $\mu_n\varepsilon_n \to 0$. Si μ_n no es acotada basta tomar una subsucesión μ_{k_n} convergente a $+\infty$. Se sigue que $\varepsilon_{k_n} \to 0$ y se tiene $x^* = \lim \mu_{k_n} x_{k_n}^*$. Pero si μ_n es acotada, esto es,

$$\exists M > 0, \quad \mu_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

entonces se define $r_n := n^{-1}\mu_n M^{-1} \to 0$ que cumple $r_n \leq 1$ y se toma $\tilde{\varepsilon}_n := \varepsilon_n r_n \leq \varepsilon_n$, $x_n^* r_n \in \partial_{\tilde{\varepsilon}_n}\Phi(\overline{x})$. De hecho, dado que $\partial_{\tilde{\varepsilon}_n}\Phi(\overline{x})$ es convexo, contiene a 0 y $\mu_n\varepsilon_n \to \delta$, luego tambien

$$\tilde{x}_n^* := (\mu_n\varepsilon_n)x_n^* r_n \in \partial_{\tilde{\varepsilon}_n}\Phi(\overline{x}).$$

Tomando $\tilde{\mu}_n := nM(\mu_n\varepsilon_n)^{-1} \to +\infty$, se tiene que

$$\mu_n x_n^* = \tilde{\mu}_n \tilde{x}_n^* \quad \text{y luego} \quad x^* = \lim \tilde{\mu}_n \tilde{x}_n^*.$$

Ha sido probado (1.20).

Ahora se ve la convexidad de L_δ. Se toma $x^*, y^* \in L_\delta$, gracias a (1.20), esto es,

$$x^* = \lim \mu_n x_n^* \quad \mu_n \to \infty, \varepsilon_n \to 0, \mu_n\varepsilon_n \to \delta, x_n^* \in \partial_{\varepsilon_n}\Phi(\overline{x}), \tag{1.21}$$

$$y^* = \lim \nu_n y_n^* \quad \nu_n \to \infty, \eta_n \to 0, \nu_n\eta_n \to \delta, y_n^* \in \partial_{\eta_n}\Phi(\overline{x}). \tag{1.22}$$

Se mostrará que puede tomarse las mismas sucesiones $\varepsilon_n = \eta_n$ y $\mu_n = \nu_n$. Para ello se define $\tilde{\varepsilon}_n := \min\{\varepsilon_n, \eta_n\}$, $\tilde{\mu}_n := \mu_n \frac{\varepsilon_n}{\tilde{\varepsilon}_n}$, $\tilde{\nu}_n := \nu_n \frac{\eta_n}{\tilde{\varepsilon}_n}$, $\tilde{x}_n^* := x_n^* \frac{\tilde{\varepsilon}_n}{\varepsilon_n}$ y $\tilde{y}_n^* := y_n^* \frac{\tilde{\varepsilon}_n}{\eta_n}$. Es obvio que $\tilde{\mu}_n, \tilde{\nu}_n \to \infty$, $\tilde{\varepsilon}_n \to 0$ y $\tilde{\mu}_n \tilde{\varepsilon}_n \to \delta$, $\tilde{\nu}_n \tilde{\varepsilon}_n \to \delta$. Dado que $x_n^* \in \partial_{\varepsilon_n} \Phi(\overline{x})$ y $\frac{\tilde{\varepsilon}_n}{\varepsilon_n} \leq 1$, luego $\tilde{x}_n^* \in \partial_{\tilde{\varepsilon}_n} \Phi(\overline{x})$. Análogamente, como $y_n^* \in \partial_{\eta_n} \Phi(\overline{x})$ y $\frac{\tilde{\varepsilon}_n}{\eta_n} \leq 1$ también se obtiene $\tilde{y}_n^* \in \partial_{\tilde{\varepsilon}_n} \Phi(\overline{x})$. Ahora $\tilde{\mu}_n \tilde{x}_n^* = \mu_n x_n^* \to x^*, \tilde{\nu}_n \tilde{y}_n^* = \nu_n y_n^* \to y^*$. Sin pérdida de generalidad se supone que $\tilde{\mu}_n \leq \tilde{\nu}_n$ pasando a una subsucesión si es necesario. De nuevo, $\partial_{\tilde{\varepsilon}_n} \Phi(\overline{x})$ es convexo con 0 adentro, así

$$\tilde{\tilde{x}}_n^* = \tilde{x}_n^* \frac{\tilde{\mu}_n}{\tilde{\nu}_n} \in \partial_{\tilde{\varepsilon}_n} \Phi(\overline{x}),$$

de modo que $\tilde{\nu}_n \tilde{\tilde{x}}_n^* = \tilde{\mu}_n \tilde{x}_n^* \to x^*$. Hasta aquí se ha probado que se puede suponer en (1.21) y en (1.22) que $\mu_n = \nu_n$ y $\varepsilon_n = \eta_n$.

Por lo anterior, para $\alpha \in [0,1]$ se tiene

$$\alpha x^* + (1-\alpha) y^* = \lim \mu_n \left(\alpha x_n^* + (1-\alpha) y_n^* \right) \in \limsup_{\substack{\mu\varepsilon \to 0 \\ \mu \to \infty, \varepsilon \to \delta}} \mu \partial_\varepsilon \Phi(\overline{x}),$$

porque $\partial_\varepsilon \Phi(\overline{x})$ es convexo. Por lo tanto L_δ es un conjunto convexo cerrado (como propiedad del lím sup) que contiene al 0. En el caso $\delta = 0$, se tiene también que L_0 es un cono, pues las condiciones sobre μ se mantienen al ponderar μ por un escalar positivo. $\square$

Observación La restricción $\mu \to \infty$ no se puede agragar dentro del límite cuando se cumple la condición de (1.3), porque puede resultar vacío. Por ejemplo, $\Phi(x) = x$ satisface $\partial_\varepsilon \Phi(0) = 1$ para cada $\varepsilon > 0$, por lo que si μ va a $+\infty$ luego $\mu \partial_\varepsilon \Phi(0)$ escapa al horizonte.

Teorema 1.10 *Sea $\Phi :\in \Gamma_0(X)$, con X un evt de dimensión finita, $\overline{x} \in S := argmin(\Phi)$ y $\delta \geq 0$. Entonces*

$$N_S^\delta(\overline{x}) = \limsup_{\substack{\mu\varepsilon \to \delta \\ \mu \geq 0}} \mu \partial_\varepsilon \Phi(\overline{x}).$$

Demostración. La inclusión $\supset$ fue probada en la Proposición 1.1. Se prueba aquí la inclusión opuesta, es decir,

$$N_S^\delta(\overline{x}) \subset \limsup_{\substack{\mu\varepsilon \to \delta \\ \mu \geq 0}} \mu \partial_\varepsilon \Phi(\overline{x}).$$

Se recuerda que se usa la notación (1.19):

$$L_\delta = \limsup_{\substack{\mu\varepsilon \to \delta \\ \mu \geq 0}} \mu \partial_\varepsilon \Phi(\overline{x}).$$

Se supone que la inclusión $N_S^\delta(\overline{x}) \subset L_\delta$ no se cumple. Entonces existe $\xi \in N_S^\delta(\overline{x}) \backslash L_\delta$ y por el Teorema de Hahn-Banach, existe $\tilde{v} \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle \xi, \tilde{v} \rangle > \alpha \geq \langle x^*, \tilde{v} \rangle, \quad \forall x^* \in L_\delta, \tag{1.23}$$

porque L_δ es un conjunto convexo cerrado, como se vió en la Proposición 1.20. Se puede suponer $\alpha = \delta$, dado que $0 \in L_\delta$, $\alpha \geq 0$ y así $\langle \xi, \tilde{v} \rangle > 0$, reescalando $\tilde{v}$. Se define

$$M_\delta = \{v \in X \mid \delta \geq \langle x^*, v \rangle, \quad \forall x^* \in L_\delta\}.$$

Se ve que M_δ es no vacío, pues $\tilde{v} \in M_\delta$, y además es un conjunto convexo cerrado. Como está en un espacio de dimensión finita, $ri(M_\delta)$ es no vacío. Luego, $M_\delta = cl(ri(M_\delta))$, y se puede encontrar $\overline{v} \in ri(M_\delta)$ suficientemente cerca de $\tilde{v}$, de manera que $\langle \xi, \overline{v} \rangle > \delta$.

Se quiere probar la siguiente aseveración

$$\limsup_{\substack{\mu\varepsilon \to \delta \\ \mu \geq 0}} \mu \langle \partial_\varepsilon \Phi(\overline{x}), \overline{v} \rangle \subset (-\infty, \delta]. \tag{1.24}$$

Con la Proposición 1.8 nos daría la contradicción $\xi \notin N_S^\delta(\overline{x})$.

Por tanto, se supone que no se tiene (1.24), con lo cual existe $\mu_n, \varepsilon_n \geq 0, x_{n,1}^* \in \partial_{\varepsilon_n} \Phi(\overline{x})$ tal que $\mu_n \varepsilon_n \to \delta$ y $\mu_n \langle x_{n,1}^*, \overline{v} \rangle \to l > \delta$.

Inductivamente para $i \geq 1$ teniendo escogida la sucesión $(x_{n,i}^*)_n$ satisfaciendo

$$\lim \mu_n \left\langle x_{n,i}^*, \overline{v} \right\rangle = l, \tag{1.25}$$

se verá cómo escoger una sucesión $(x_{n,i+1}^*)_n$ satisfaciendo el mismo límite (1.25) o parar con una contradicción.

Si $\mu_n x_{n,i}^*$ tiene un punto de acumulación x_i^*, luego $x_i^* \in L_\delta$ y $\langle x_i^*, \overline{v} \rangle = l > \delta$ contradiciendo el hecho que $\overline{v} \in M_\delta$. En otro caso $\mu_n |x_{n,i}^*| \to \infty$ y se considera x_i^* un punto de acumulación de la sucesión $\frac{x_{n,i}^*}{|x_{n,i}^*|}$. Como $|x_{n,i}^*|^{-1} > 0$ y

$$\varepsilon_n |x_{n,i}^*|^{-1} = (\varepsilon_n \mu_n) \left(\frac{1}{\mu_n |x_{n,i}^*|} \right) \to 0,$$

luego $x_i^* \in L_0$.

Se observa que

$$\langle x_i^*, \overline{v} \rangle = \lim \left\langle \frac{x_{n,i}^*}{|x_{n,i}^*|}, \overline{v} \right\rangle = \underbrace{\left(\lim \frac{1}{\mu_n |x_{n,i}^*|} \right)}_{=0} \underbrace{\left(\lim \left\langle \mu_n x_{n,i}^*, \overline{v} \right\rangle \right)}_{=l} = 0. \tag{1.26}$$

Dado que $\overline{v} \in ri(M_\delta)$ existe $r > 0$ tal que

$$\left\langle s x^{i*}, v \right\rangle \leq \delta, \quad \forall v \in B(\overline{v}, r) \cap aff(M_\delta), \tag{1.27}$$

para cada $s > 0$, porque $s x_i^* \in L_0 \subset L_\delta$. Dividiendo (1.27) por $s \to \infty$ se obtiene la misma desigualdad pero con cero al lado derecho. Y esto puede extenderse a todo el espacio afín

$$\langle x_i^*, v \rangle \leq 0, \quad \forall v \in aff(M_\delta),\ s > 0. \tag{1.28}$$

Si $v \in M_\delta$, luego $2\overline{v} - v \in aff(M_\delta)$ y tomando en cuenta (1.26) se llega a que (1.28) se tiene como una igualdad. En particular, se obtiene

$$\langle -x_i^*, v \rangle \leq 0, \quad \forall v \in M_\delta, \tag{1.29}$$

lo que implica $-x_i^* \in M_\delta^*$, y también $-sx_i^* \in M_\delta^*$ para cada $s > 0$, porque M_δ^* es un cono. En el caso $\delta = 0$, se tiene $M_0^* = L_0^{**} = L_0$, por el fórmula (12) del bidual, y si $\delta > 0$ se tiene $M_\delta^* = \delta M_\delta^* = (\delta^{-1} M_\delta)^* \subset (\delta^{-1} M_\delta)^\circ = L_\delta^{\circ\circ} = L_\delta$, por la fórmula (13) del bipolar. En ambos casos se concluye que toda la línea $\mathbb{R}x_i^*$ está contenida en L_δ. Dado que $-x_i^* n\mu_n |x_{n,i}^*| \in L_\delta$, existe $\nu_n \geq 0, \eta_n \geq 0, y_{n,i}^* \in \partial_{\eta_n} \Phi(\overline{x})$ con

$$\nu_n \eta_n \to \delta, \quad \left| \nu_n y_{n,i}^* + x_i^* n \mu_n |x_{n,i}^*| \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Haciendo algo similar a lo hecho en la demostración de la Proposición 1.20, se ve que se puede suponer que $\nu_n = \mu_n$ y $\eta_n = \varepsilon_n$. Luego

$$\left| \mu_n y_{n,i}^* + x_i^* n \mu_n |x_{n,i}^*| \right| \leq \frac{1}{n}. \tag{1.30}$$

Como $x_{n,i}^*$ y $y_{n,i}^*$ quedan en distintos lados del hiperplano $(\mathbb{R}x_i^*)^*$, sea $x_{n,i+1}^*$ el único elemento en la intersección $[x_{n,i}^*, y_{n,i}^*] \cap (\mathbb{R}x_i^*)^*$. Dado que $\partial_{\varepsilon_n} \Phi(\overline{x})$ es convexo, $x_{n,i+1}^* = \alpha_{n,i} x_{n,i}^* + (1 - \alpha_{n,i}) y_{n,i}^* \in \partial_{\varepsilon_n} \Phi(\overline{x})$ para cierto $\alpha_{n,i} \in [0,1]$. Pero

$$\begin{aligned}
\left| \mu_n \left\langle y_{n,i}^*, \overline{v} \right\rangle \right| &\leq \left| \left\langle \mu_n y_{n,i}^* + x^* n \mu_n |x_{n,i}^*|, \overline{v} \right\rangle \right| + \left| \left\langle x_i^* n \mu_n |x_{n,i}^*|, \overline{v} \right\rangle \right| \\
&\leq \frac{|\overline{v}|}{n} + n\mu_n |x_{n,i}^*| \underbrace{|\langle x_i^*, \overline{v} \rangle|}_{=0},
\end{aligned}$$

implica que $\mu_n \langle y_{n,i}^*, \overline{v} \rangle \to 0$.

Se mostrará que el límite de la sucesión $\alpha_{n,i}$ es 1. Como $x_{n,i+1}^*$ está en el ortogonal de $\mathbb{R}x_i^*$, luego

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle x_{n,i}^*, x_{n,i+1}^* \right\rangle \\
&= \left\langle x_{n,i}^*, \alpha_{n,i} x_{n,i}^* + (1 - \alpha_{n,i}) y_{n,i}^* \right\rangle \\
&= \alpha_{n,i} |x_{n,i}^*|^2 + (1 - \alpha_{n,i}) \left\langle x_{n,i}^*, y_{n,i}^* \right\rangle,
\end{aligned}$$

de modo que

$$\alpha_{n,i} = \frac{\left\langle x_{n,i}^*, y_{n,i}^* \right\rangle}{\left\langle x_{n,i}^*, y_{n,i}^* \right\rangle - |x_{n,i}^*|^2}. \tag{1.31}$$

Por la desigualdad de Cauchy Shwartz y (1.30), se llega a que

$$\frac{\left\langle x_{n,i}^*, y_{n,i}^* \right\rangle}{|x_{n,i}^*|^2} = \underbrace{\frac{\left\langle x_{n,i}^*, y_{n,i}^* + x_i^* n |x_{n,i}^*| \right\rangle}{|x_{n,i}^*|^2}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{\left\langle x_{n,i}^*, x_i^* n |x_{n,i}^*| \right\rangle}{|x_{n,i}^*|^2}}_{\to +\infty},$$

porque $\mu_n|x_{n,i}^*| \to +\infty$ y $\frac{x_{n,i}^*}{|x_{n,i}^*|} \to x_i^*$ con $|x_i^*| = 1$. Luego con (1.31) se obtiene que $\alpha_{n,i} \to 1$. Se concluye entonces que

$$\mu_n\langle x_{n,i+1}^*, \overline{v}\rangle = \alpha_{n,i}\mu_n\langle x_{n,i}^*, \overline{v}\rangle + (1-\alpha_{n,i})\mu_n\langle y_{n,i}^*, \overline{v}\rangle \to l > \delta,$$

tal como se quería al comenzar el paso inductivo en (1.25).

Ahora se probará que para cada $i \geq j \geq 1$, $\langle x_{i+1}^*, x_j^*\rangle = 0$, por inducción en i. Ya se sabe que $\langle x_{i+1}^*, x_i^*\rangle = 0$, por lo que basta considerar $j < i$. Entonces

$$|\langle x_{n,i+1}^*, x_j^*\rangle| \leq \alpha_{n,i}|\langle x_{n,i}^*, x_j^*\rangle| + (1-\alpha_{n,i})|\langle y_{n,i}^*, x_j^*\rangle|.$$

Repitiendo esto se obtiene

$$\left|\left\langle x_{n,i+1}^*, x_j^*\right\rangle\right| \leq \left(\prod_{k=j+1}^{i} \alpha_{n,k}\right) \underbrace{\left|\left\langle x_{n,j+1}^*, x_j^*\right\rangle\right|}_{=0} \tag{1.32}$$

$$+ \sum_{k=j+1}^{i} \left(\prod_{l=k+1}^{i} \alpha_{n,l}\right)(1-\alpha_{n,k})\left|\left\langle y_{n,k}^*, x_j^*\right\rangle\right|, \tag{1.33}$$

pero $\alpha_{n,k} \to 1$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por (1.30) y la desigualdad de Cauchy Schwartz,

$$\left|\left\langle \frac{y_{n,k}^*}{|x_{n,i+1}^*|}, x_j^*\right\rangle\right| = \frac{1}{|x_{n,i+1}^*|}\left|\left\langle y_{n,k}^* + x_k^* n|x_{n,k}^*|, x_j^*\right\rangle\right| \leq \frac{|x_j^*|}{n\mu_n|x_{n,i+1}^*|} \to 0,$$

Por lo tanto, dividiendo (1.33) por $|x_{n,i+1}^*|$ y tomando límite en $n \to \infty$, se obtiene

$$\begin{aligned}|\langle x_{i+1}^*, x_j^*\rangle| &= \lim_n \frac{1}{|x_{n,i+1}^*|}\left|\left\langle x_{n,i+1}^*, x_j^*\right\rangle\right| \\ &\leq \sum_{k=j+1}^{i} \lim_n (1-\alpha_{n,i}) \lim_n \frac{1}{|x_{n,i+1}^*|}|\langle y_{n,k}^*, x_j^*\rangle| \\ &= 0.\end{aligned}$$

Finalmente, si el algoritmo termina se halla una contradicción con (1.23). En otro caso, se tiene una sucesión infinita de vectores ortogonales lo que contradice la finitud del espacio. □

Para finalizar la sección, se puede juntar el Teorema 1.10 con lo obtenido en la sección anterior para el caso de (1.3), resumiéndose en el siguiente teorema.

Teorema 1.11 *Sea X un evt de dimensión finita, $\Phi :\in \Gamma_0(X)$, $\overline{x} \in S_\lambda := [\Phi \leq \lambda]$ para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\delta \geq 0$. Entonces*

$$N_{S_\lambda}^\delta(\overline{x}) = \limsup_{\substack{\mu(\varepsilon - \Phi(\overline{x}) + \lambda) \to \delta \\ \mu \geq 0}} \mu\partial_\varepsilon\Phi(\overline{x}).$$

1.3. Fórmula en un evtlc

Se vió en la parte anterior que (1.1) se cumple en dimensión finita, en cuyo caso para el $\limsup$ se considera la única topología de evt que es Hausdorff, la topología producto en $\mathbb{R}^N$, la cual conincide con la topología de cualquier norma. Aquí se verá cómo extender la fórmula hasta los X que sean evtlc, pero siendo importante cuál es la topología que se considera en el $\limsup$. Como es de esperarse, la topología débil* σ^* será utilizado en el caso más general.

Primero se mostrará cómo extender la fórmula (1.1) a funciones definidas en un evtlc tal que su dominio efectivo esté contenido en un espacio de dimensión finita. La siguiente proposición muestra la inclusión no trivial (1.2) para la condición (1.13).

Proposición 1.12 *Sea $\Phi \in \Gamma_0(X)$ con X evtlc. Se supone que $dom(\Phi) \subset F$ con F un sev de dimensión finita de X, $\overline{x} \in S := argmin(\Phi)$ y $\delta \geq 0$. Entonces es válida la inclusión*

$$N_S^\delta(\overline{x}) \subset \tau^* - \limsup_{\substack{\mu\varepsilon \to \delta \\ \mu \geq 0}} \mu \partial_\varepsilon \Phi(\overline{x}), \tag{1.34}$$

donde τ^* corresponde a la topología de la norma $\tau_{\|\cdot\|_*}$ si X es Banach, o bien a la topología débil σ^* en general.*

Demostración. Sea $x^* \in N_S^{\delta,X}(\overline{x})$. El segundo superíndice está para especificar dónde las formas lineales están definidas. Luego la restricción $x^*|_F \in N_S^{\delta,F}(\overline{x})$, el conjunto $\delta-$normal al conjunto de subnivel S para la función restringida $\Phi|_F$.

Por el Teorema 1.11 se puede encontrar sucesiones $y_n^* \in \partial_{\varepsilon_n} \Phi|_F(\overline{x})$, $\mu_n \varepsilon_n \to \delta$ tal que $x^* = \lim \mu_n y_n^*$, y se puede suponer que $\mu_n > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Dado que F es de dimensión finita, tiene un suplementario topológico E (ver [9] capítulo 2, pag 38), esto es, $X = F \oplus E$ y E cerrado. Luego se puede extender y_n^* a un $x_n^* \in X^*$ de la siguiente manera. Para $x \in X$ se considera su descomposición $x = y + z$ con $y \in F$ y $z \in E$, y se define

$$\langle x_n^*, x \rangle := \langle y_n^*, y \rangle + \frac{1}{\mu_n} \langle x^*, z \rangle .$$

Luego, $x_n^* \in \partial_{\varepsilon_n} \Phi(\overline{x})$ y $\mu_n x_n^* \to x^*$ fuertemente si X es Banach, o $\mu_n x_n^* \rightharpoonup x^*$ en la topología σ^*. En otras palabras,

$$x^* \in \tau^* - \limsup_{\substack{\mu\varepsilon \to \delta \\ \mu \geq 0}} \mu \partial_\varepsilon \Phi(\overline{x}),$$

donde τ^* corresponde a la topología de la norma $\tau_{\|\cdot\|_*}$ si X es Banach, o bien la topología débil* σ^* en general. $\square$

Se puede quitar la restricción del dominio pero perdiendo la topología fuerte en el caso de Banach en el $\limsup$. En el siguiente teorema se muestra cómo, y se resume lo obtenido hasta aquí otorgando la validez de nuestra fórmula (1.1).

Teorema 1.13 *Sea X un evtlc y $\Phi \in \Gamma_0(X)$, $\overline{x} \in S := argmin(\Phi)$. Entonces*

$$N_S^\delta(\overline{x}) = \sigma^* - \limsup_{\substack{\mu\varepsilon \to \delta \\ \mu \geq 0}} \mu \partial_\varepsilon \Phi(\overline{x}).$$

Demostración. La inclusión hacia la izquierda fue probada en la Proposición 1.1. Se probará aquí la inclusión opuesta, es decir,

$$N_S^\delta(\overline{x}) \subset \sigma^* - \limsup_{\substack{\mu\varepsilon \to \delta \\ \mu \geq 0}} \mu \partial_\varepsilon \Phi(\overline{x}).$$

Sea F un subespacio vectorial de dimensión finita de X que contenga a $\overline{x}$ y se considera la función

$$\Phi_F := \Phi + \chi_F.$$

Luego $dom(\Phi_F) \subset dom(\chi_F) = F$. Por la Proposición 1.12 tenemos la validez de la fórmula

$$N_{S\cap F}(\overline{x}) = \limsup_{\substack{\mu\varepsilon \to \delta \\ \mu \geq 0}} \mu \partial_\varepsilon \Phi_F(\overline{x}).$$

Se tiene, $[\Phi_F \leq \Phi_F(\overline{x})] = [\Phi \leq \Phi(\overline{x})] \cap F = S \cap F$. Entonces

$$\begin{aligned} N_S^\delta(\overline{x}) &\subset N_{S\cap F}^\delta(\overline{x}) \\ &= \limsup_{\substack{\mu\varepsilon \to \delta \\ \mu \geq 0}} \mu \partial_\varepsilon (\Phi + \chi_F)(\overline{x}) \\ &\subset \limsup_{\substack{\mu\varepsilon \to \delta \\ \mu \geq 0}} (\mu \partial_\varepsilon \Phi(\overline{x}) + F^*). \end{aligned}$$

Por la definición de la topología débil*, para cada $U \in \mathcal{N}_\sigma(0)$ existe un espacio de dimensión finita F tal que $F^* \subset U$, con lo cual

$$N_S^\delta(\overline{x}) \subset \bigcap_{U \in \mathcal{N}_\sigma(0)} \limsup_{\substack{\mu\varepsilon \to \delta \\ \mu \geq 0}} (\mu \partial_\varepsilon \Phi(\overline{x}) + U).$$

Luego, usando la Proposición 20, se ve que $x^* \in \sigma^* - \limsup_{\substack{\mu\varepsilon \to \delta \\ \mu \geq 0}} \mu \partial_\varepsilon \Phi(\overline{x})$. □

Teorema 1.14 *Sea X un espacio de Banach reflexivo, $\Phi \in \Gamma_0(X)$, $\overline{x} \in S := argmin(\Phi)$ y $\delta \geq 0$. Luego*

$$N_S^\delta(\overline{x}) = \tau_{\|\cdot\|_*} - \limsup_{\substack{\mu\varepsilon \to \delta \\ \mu \geq 0}} \mu \partial_\varepsilon \Phi(\overline{x})$$

Demostración. La inclusión $\supset$ fue probada en la Proposición 1.1. Se prueba aquí la inclusión $\subset$. Gracias al Teorema 1.13, basta probar que

$$\sigma^* - \limsup_{\substack{\mu\varepsilon\to\delta\\ \mu\geq 0}} \mu\partial_\varepsilon\Phi(\overline{x}) \subset \tau_{\|\cdot\|_*} - \limsup_{\substack{\mu\varepsilon\to\delta\\ \mu\geq 0}} \mu\partial_\varepsilon\Phi(\overline{x}). \tag{1.35}$$

Sea x^* un punto en el lado izquierdo de (1.35), es decir, el σ^*-límite de una red $\mu_\alpha x^*_\alpha$ con $x_\alpha \in \partial_{\varepsilon_\alpha}\Phi(\overline{x})$ y $\mu_\alpha\varepsilon_\alpha \to \delta$. Se fija $\eta > 0$ y se considera $\mathcal{A}$ el conjunto de los α tal que $\mu_\alpha\varepsilon_\alpha \leq \delta + \eta$. Luego $x^* \in \sigma^* - cl(conv(\{\mu_\alpha x^*_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}))$, pero entonces también $x^* \in \|\cdot\|_* - cl(conv(\{\mu_\alpha x^*_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}))$, porque ambas cerraduras coinciden cuando el conjunto es convexo, pues el espacio es reflexivo. Entonces existe $x^*_\eta = \sum_{i=1}^{n_\eta} \lambda_i^\eta \mu_{\alpha_i} x^*_{\alpha_i}$ tal que $\|x^* - x^*_\eta\| \leq \eta$. Se puede escribir

$$x^*_\eta = \max_j \mu_{\alpha_j} \sum_{i=1}^{n_\eta} \lambda_i^\eta \left(\frac{\mu_{\alpha_i}}{\max_j \mu_{\alpha_j}} x^*_{\alpha_i}\right)$$

$$\left(\frac{\mu_{\alpha_i}}{\max_j \mu_{\alpha_j}}\right) x^*_{\alpha_i} \in \partial_{\frac{\varepsilon_{\alpha_i}\mu_{\alpha_i}}{\max_j \mu_{\alpha_j}}}\Phi(\overline{x}) \subset \partial_{\frac{\max_k \varepsilon_{\alpha_k}\mu_{\alpha_k}}{\max_j \mu_{\alpha_j}}}\Phi(\overline{x}).$$

Se nota que para tener esto se usa que $\overline{x} \in argmin(\Phi)$.

Entonces $x^*_\eta \in \max_j \mu_{\alpha_j}\partial_{\frac{\max_k \varepsilon_{\alpha_k}\mu_{\alpha_k}}{\max_j \mu_{\alpha_j}}}\Phi(\overline{x})$ Tomando $\mu'_\eta := \max_j \mu_{\alpha_j}$ y $\varepsilon'_\eta := \frac{\max_k \varepsilon_{\alpha_k}\mu_{\alpha_k}}{\max_j \mu_{\alpha_j}}$, se escribe $x^*_\eta \in \mu'_\eta\partial_{\varepsilon'_\eta}\Phi(\overline{x})$, y se tiene $\mu'_\eta\varepsilon'_\eta = \max_k \mu_{\alpha_k}\varepsilon_{\alpha_k} \leq \delta + \eta$. Tomando alguna subred convergente de $\mu'_\eta\varepsilon'_\eta$ se llega finalmente a que

$$x^* \in \tau_{\|\cdot\|_*} - \limsup_{\substack{\mu\varepsilon\to\delta\\ \mu\geq 0}} \mu\partial_\varepsilon\Phi(\overline{x}),$$

donde la última igualdad viene por la sencilla razón que el ε-subdiferencial es creciente en ε. □

Teorema 1.15 *Sea X un evtlc y $\Phi \in \Gamma_0(X)$. Para $\delta \geq 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se considera $\overline{x} \in S_\lambda := [\Phi \leq \lambda]$. Entonces*

$$N^\delta_{S_\lambda}(\overline{x}) = \sigma^* - \limsup_{\substack{\mu(\lambda-\Phi(\overline{x})+\varepsilon)\to\delta\\ \mu\geq 0}} \mu\partial_\varepsilon\Phi(\overline{x}).$$

Si además X es un espacio de Banach reflexivo, entonces

$$N^\delta_{S_\lambda}(\overline{x}) = \tau_{\|\cdot\|_*} - \limsup_{\substack{\mu(\lambda-\Phi(\overline{x})+\varepsilon)\to\delta\\ \mu\geq 0}} \mu\partial_\varepsilon\Phi(\overline{x}).$$

Demostración. Juntar la Proposición 1.5 con los Teoremas 1.13 y 1.14. □

Se puede obtener fórmulas clásicas para el cono normal a conjuntos de subnivel a partir del teorema anterior.

Corolario 1.16 *Sea $\Phi \in \Gamma_0(X)$, $\overline{x} \in dom(\Phi)$, $S = [\Phi \leq \Phi(\overline{x})]$ con X un evtlc y $\delta \geq 0$. Entonces* *(i) En general*

$$N_S^\delta(\overline{x}) = \bigcup_{\mu\geq 0} \partial_\delta(\mu\Phi)(\overline{x}) \,\cup\, \sigma^* - \limsup_{\substack{\mu\varepsilon\to\delta\\ \mu\to\infty}} \mu\partial_\varepsilon\Phi(\overline{x}). \tag{1.36}$$

En el caso $\delta = 0$ se tiene

$$N_S(\overline{x}) = \mathbb{R}_+\partial\Phi(\overline{x}) \,\cup\, N_{dom\Phi}(\overline{x}) \,\cup\, \sigma^* - \limsup_{\substack{\mu\varepsilon\to 0\\ \mu\to\infty}} \mu\partial_\varepsilon\Phi(\overline{x}). \tag{1.37}$$

Por otro lado si $\delta > 0$ luego

$$N_S^\delta(\overline{x}) = \sigma^* - cl\left(\bigcup_{\mu\geq 0} \partial_\delta(\mu\Phi)(\overline{x})\right). \tag{1.38}$$

(ii) En general, si se cumple la condición de Slater,

$$N_S^\delta(\overline{x}) = \bigcup_{\mu\geq 0} \partial_\delta(\mu\Phi)(\overline{x}). \tag{1.39}$$

Demostración. Primero se prueba (1.36). La inclusión hacia la izquierda es obvia, por lo que basta probar

$$N_S^\delta(\overline{x}) \subset \bigcup_{\mu\geq 0} \partial_\delta(\mu\Phi)(\overline{x}) \,\cup\, \sigma^* - \limsup_{\substack{\mu\varepsilon\to\delta\\ \mu\to\infty}} \mu\partial_\varepsilon\Phi(\overline{x}).$$

Sea $x^* \in N_S(\overline{x})$. Por nuestra fórmula (1.1), demostrada en el Teorema 1.15, se tiene que x^* es límite de una red $(\mu_i x_i^*)_i$ con $\mu_i \geq 0$, $\mu_i\varepsilon_i \to \delta$ y $x_i^* \in \partial_{\varepsilon_i}\Phi(\overline{x})$. Se puede suponer sin pérdida de generalidad que μ_i es convergente en $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. Hay dos casos. Primero, si $\mu_i \to \mu \in \mathbb{R}$, multiplicando la desigualdad del subdiferenial por μ_i se obtiene

$$\langle \mu_i x_i^*, y - \overline{x}\rangle \leq (\mu_i\Phi)(y) - (\mu_i\Phi)(\overline{x}) + \mu_i\varepsilon_i,$$

y tomando límite en i se ve que $\langle x^*, y - \overline{x}\rangle \leq (\mu\Phi)(y) - (\mu\Phi)(\overline{x}) + \delta$ para cada $y \in X$, de manera que $x^* \in \partial_\delta(\mu\Phi)(\overline{x})$. El segundo caso corresponde a $\mu_i \to +\infty$, que obviamente implica $x^* \in \sigma^* - \limsup_{\substack{\mu\varepsilon\to\delta\\ \mu\to\infty}} \mu\partial_\varepsilon\Phi(\overline{x})$.

Para el caso $\delta = 0$ simplemente se nota que

$$\bigcup_{\mu\geq 0} \partial(\mu\Phi)(\overline{x}) = \mathbb{R}_+\partial\Phi(\overline{x}) \,\cup\, N_{dom\Phi}(\overline{x}).$$

Y para el caso $\delta > 0$ basta probar que

$$\sigma^* - \limsup_{\substack{\mu\varepsilon\to\delta\\ \mu\to\infty}} \mu\partial_\varepsilon\Phi(\overline{x}) \subset \sigma^* - cl\left(\bigcup_{\mu\geq 0} \partial_\delta\mu\Phi(\overline{x})\right). \tag{1.40}$$

Se toma entonces x^* en el lado izquierdo de (1.40), esto es $x^* = \sigma^* - \lim \mu_i x_i^*$, $x_i^* \in \partial_{\varepsilon_i}\Phi(\overline{x})$, $\mu_i\varepsilon_i \to \delta$ y $\mu_i \to +\infty$. Se puede suponer que $\varepsilon_i > 0$, por lo que definiendo $\mu_i' := \frac{\delta}{\varepsilon_i}$ y $y_i^* := \frac{\delta}{\varepsilon_i} x_i^* \in \partial_\delta(\mu_i'\Phi)(\overline{x})$, se tiene que

$$\sigma^* - \lim y_i^* = \sigma^* - \lim \mu_i x_i^* \cdot \lim \frac{\delta}{\mu_i\varepsilon_i} = x^*.$$

Por lo tanto,

$$x^* \in \sigma^* - cl\left(\bigcup_{\mu\geq 0} \partial_\delta(\mu\Phi)(\overline{x})\right).$$

Se prueba (1.39). Por (1.36) es suficiente probar que $\sigma^* - \limsup_{\substack{\mu\varepsilon\to\delta \\ \mu\to\infty}} \mu\partial_\varepsilon\Phi(\overline{x})$ es vacío. Para llegar a una contradicción se toma $x^* = \lim \mu_i x_i^*$, $\mu_i\varepsilon_i \to \delta$ y $\mu_i \to +\infty$. Entonces $\varepsilon_i \to 0$ y $\lim x_i^* \to 0$. Así, $0 \in \limsup_{\varepsilon\to 0} \partial_\varepsilon\Phi(\overline{x}) = \bigcap_{\varepsilon\geq 0} \partial_\varepsilon\Phi(\overline{x}) = \partial\Phi(\overline{x})$, implicando que $\overline{x}$ es un punto mínimo, una contradicción. Se ha probado (ii). □

Para terminar esta sección, se verá una última fórmula que combina el control del error del punto x con el $\varepsilon > 0$ del ε-subdiferencial.

Proposición 1.17 *Sea X un evtlc, $\Phi \in \Gamma_0(X)$ y $S := [\Phi \leq \Phi(\overline{x})]$ con $\overline{x} \in dom(\Phi)$. Entonces se tiene*

$$N_S(\overline{x}) = \sigma^* - \limsup_{\substack{x\to\overline{x} \\ \mu\varepsilon\to 0 \\ \mu\langle\cdot, x-\overline{x}\rangle\to 0 \\ \mu\geq 0}} \mu\partial_\varepsilon\Phi(x). \tag{1.41}$$

Demostración. Por un lado, gracias a (1.1) y tomando $x = \overline{x}$ se ve que la inclusión hacia la derecha es directa. Para la otra direción, se toma ξ límite débil* de una red $(\mu_i x_i^*)_i$ con $(x_i)_i$ convergente a $\overline{x}$, $\mu_i \geq 0, \mu_i\varepsilon_i \to \delta$ y $x_i^* \in \partial_{\varepsilon_i}\Phi(x_i)$ tal que $\mu_i \langle x_i^*, x_i - \overline{x}\rangle \to 0$. Usando la desigualdad del ε_i-subdiferencial se ve que

$$\begin{aligned}\langle \mu_i x_i^*, y - \overline{x}\rangle &\leq \mu_i(\Phi(y) - \Phi(x_i)) + \mu_i \langle x_i^*, x_i - \overline{x}\rangle + \mu_i\varepsilon_i \\ &\leq \underbrace{\mu_i(\Phi(\overline{x}) - \Phi(x_i)) + \mu_i \langle x_i^*, x_i - \overline{x}\rangle + \mu_i\varepsilon_i}_{(\star)},\end{aligned}$$

para todo $y \in S$. Es claro que el segundo y el tercer término de $(\star)$ van a 0, pero además por el Lema 1.18 también el primer término va a 0. Por lo tanto, en el límite se tiene

$$\langle \xi, y - \overline{x}\rangle \leq 0, \quad \forall y \in S,$$

lo que nos dice que $\xi \in N_S(\overline{x})$, concluyendo la demostración. □

Lema 1.18 *Se supone que $(\mu_i x_i^*)_i$ es una red débil* convergente, con $\mu_i \geq 0$ y $x_i^* \in \partial_{\varepsilon_i}\Phi(x_i)$ tal que $x_i \to \overline{x}$, $\mu_i\varepsilon_i \to 0$ y $\langle \mu_i x_i^*, x_i - \overline{x}\rangle \to 0$. Entones se cumple*

$$\lim_i \mu_i(\Phi(x_i) - \Phi(\overline{x})) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean las redes como en la hipótesis. La desigualdad del ε_i-subdiferencial para x_i^*, multiplicada por $\mu_i \geq 0$ nos da

$$\mu_i(\Phi(x_i) - \Phi(\overline{x})) \leq \langle \mu_i x_i^*, x_i - \overline{x}\rangle + \mu_i \varepsilon_i.$$

El lado derecho converge a 0 por hipótesis, por lo que si se toma límite superior en ambos lados se obtiene $\limsup_i \mu_i(\Phi(x_i) - \Phi(\overline{x})) \leq 0$.

Para concluir se verá que también $\liminf_i \mu_i(\Phi(x_i) - \Phi(\overline{x})) \geq 0$. Se puede suponer que μ_i es convergente en $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, pues este conjunto es compacto. Primero si μ_i converge en $\mathbb{R}_+$ entonces es sin pérdida de generalidad acotada superiormente por un $M > 0$. Entonces por la semicontinuidad inferior de Φ se tiene

$$\begin{aligned}\liminf_i \mu_i(\Phi(x_i) - \Phi(\overline{x})) &\geq -M(\liminf_i \Phi(x_i) - \Phi(\overline{x}))_- \\ &\geq 0,\end{aligned}$$

donde $(r)_- = \max(-r, 0)$.

Segundo, si μ_i converge a ∞, entonces necesariamente $x_i^* = \mu_i^{-1}(\mu_i x_i^*) \rightharpoonup^* 0$ y $\varepsilon_i \to 0$. Así se tiene

$$\underbrace{\langle x_i^*, y - \overline{x}\rangle}_{\to 0} + \mu_i{}^{-1} \langle \mu_i x_i^*, \overline{x} - x_i\rangle \leq \Phi(y) - \Phi(x_i) + \varepsilon_i.$$

En el límite como $x_i \to \overline{x}$ y Φ es sci, se tiene $0 \leq \Phi(y) - \Phi(\overline{x})$, es decir, $\overline{x}$ es un mínimo para Φ. Pero en este caso es directo que $\liminf_i \mu_i(\Phi(\overline{x}) - \Phi(x_i)) \geq 0$ terminando la demostración. □

1.4. Consecuencias en espacios de Banach

Para partir, se recuerda una versión del Teorema de Brøndsted-Rockafellar que será de utilidad para obtener, como es habitual, a partir de una fórmula con ε-subdiferenciales (1.1), una con subdiferenciales exactos (2).

Proposición 1.19 *(Una versión del Teorema de Brøndsted-Rockafellar [19]) Sea $\Phi \in \Gamma_0(X)$ con X un espacio de Banach, $\lambda, \varepsilon > 0$ y $x^* \in \partial_\varepsilon \Phi(\overline{x})$, $\overline{x} \in dom(\Phi)$. Entonces existe $(x_\varepsilon, x_\varepsilon^*) \in \partial\Phi$ tal que*

$$\|x_\varepsilon - \overline{x}\| \leq \lambda, \quad \|x_\varepsilon^* - x^*\|_* \leq \frac{\varepsilon}{\lambda},$$

y

$$|\Phi(x_\varepsilon) - \langle x_\varepsilon^*, x_\varepsilon - \overline{x}\rangle - \Phi(\overline{x})| \leq 2\varepsilon.$$

Corolario 1.20 *Sea $\Phi \in \Gamma_0(X)$, $\overline{x} \in dom(\Phi)$ y $S = [\Phi \leq \Phi(\overline{x})]$ con X un espacio Banach. Entonces*

$$N_S(\overline{x}) = \tau^* - \limsup_{\substack{x \to \overline{x} \\ \mu(\Phi(x) - \Phi(\overline{x}) - \langle \cdot, x - \overline{x}\rangle) \to 0 \\ \mu \geq 0}} \mu \partial\Phi(x), \tag{1.42}$$

donde τ^* es σ^* la topología débil en X^*. Si X es reflexivo la igualdad se tiene para la topología de la norma $\tau^* = \tau_{\|\cdot\|_*}$, y además se tiene*

$$N_S(\overline{x}) = \tau_{\|\cdot\|_*} - \limsup_{x\to\overline{x}} \mathbb{R}_+\partial\Phi(x). \tag{1.43}$$

Demostración. La inclusión $\supset$ es directa y es muy similar a la Proposición 1.1. Para la inclusión $\subset$ se toma $x^* \in N_S(\overline{x})$. Por el Teorema 1.15 se tiene

$$x^* \in \tau^* - \limsup_{\substack{\mu\varepsilon\to 0,\varepsilon\to 0\\ \mu\geq 0}} \mu\partial_\varepsilon\Phi(\overline{x}), \tag{1.44}$$

con τ^* la topología de la norma $\tau_{\|\cdot\|_*}$ si X es Banach reflexivo, o bien la topología débil* σ^* en el caso general. Se toma $W \in \mathcal{N}_{X^*,\tau^*}(x^*)$. Se sabe por (1.44) que existe $\mu, \varepsilon \geq 0$ y $x_0^* \in \partial_\varepsilon\Phi(\overline{x})$ con ε y $\mu\varepsilon$ arbitrariamente pequeño y $\mu x_0^* \in W$. Por la Proposición 1.19 con $\lambda := \sqrt{\mu\varepsilon}$ se encuentra un $x_\varepsilon \in X$ y $x_\varepsilon^* \in \partial\Phi(\overline{x}_\varepsilon)$ tal que

$$\|x_\varepsilon - \overline{x}\| \leq \sqrt{\mu\varepsilon}, \quad \|\mu x_\varepsilon^* - \mu x_0^*\|_* \leq \sqrt{\mu\varepsilon}, \tag{1.45}$$

y

$$\mu|\Phi(x_\varepsilon) - \langle x_\varepsilon^*, x_\varepsilon - \overline{x}\rangle - \Phi(\overline{x})| \leq 2\mu\varepsilon.$$

Por la segunda desigualdad en (1.45), dado que W es abierto en la topologia $\tau_{\|\cdot\|_*}$ y $\sqrt{\mu\varepsilon} \to 0$, se tiene que $\mu x_\varepsilon^* \in W$. Así por definición se tiene que

$$x^* \in \tau^* - \limsup_{\substack{x\to\overline{x}\\ \mu(\Phi(x)-\Phi(\overline{x})+\langle\cdot,x-\overline{x}\rangle)\to 0\\ \mu\geq 0}} \mu\partial\Phi(x).$$

Así, (1.42) queda probado en ambos casos: Banach con la topología σ^* y reflexivo con la toplogía $\tau_{\|\cdot\|_*}$.

Para probar (1.43) se verá que si X es reflexivo entonces

$$\tau_{\|\cdot\|_*} - \limsup_{\substack{x\to\overline{x}\\ \mu(\Phi(x)-\Phi(\overline{x})-\langle\cdot,x-\overline{x}\rangle)\to 0\\ \mu\geq 0}} \mu\partial\Phi(x) \subset \tau_{\|\cdot\|_*} - \limsup_{x\to\overline{x}} \mathbb{R}_+\partial\Phi(x),$$

siendo la otra inclusión directa, pues se piden menos condiciones sobre las sucesiones en cuestión. Sea $\xi = \lim \mu_n x_n^*$, $\mu_n \geq 0$ y $x_n^* \in \partial\Phi(x_n)$, $x_n \to \overline{x}$. Entonces $\langle \mu_n x_n^*, x_n\rangle \to \langle \xi, \overline{x}\rangle$ con lo cual $\langle \mu_n x_n^*, x_n - \overline{x}\rangle \to 0$. Pero además, por el Lema 1.18 también $\mu_n(\Phi(x_n) - \Phi(\overline{x})) \to 0$, es decir, se verifican todas las condiciones para las sucesiones de modo que ξ está en $\tau_{\|\cdot\|_*} - \limsup_{x\to\overline{x}} \mathbb{R}_+\partial\Phi(x)$. □

Observación Las expresiones del cono normal en el Corolario anterior son escencialmente un límite superior y no un límite. El límite inferior asociado a este puede ser más pequeño y en muchos casos se reduce tan sólo a $\{0\}$. Por ejemplo, para $\Phi(x) = |x|$ el límite superior de $\mu\partial\Phi(x)$ es igual al cono normal a $[\Phi \leq 0] = \{0\}$, y es todo $\mathbb{R}$, mientras que el límite inferior es $\{0\}$. En efecto, dada $\mu_n \geq 0$ y una sucesión positiva $(x_n)_n$ convergente a 0, $\mu_n\partial\Phi(x_n) \subset \mathbb{R}_+$ y para $(-x_n)_n$ que es negativa y convergente a 0 se tiene $\mu_n\partial\Phi(-x_n) \subset \mathbb{R}_-$, por lo cual el límite inferior esta contenido en $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$.

Observación En el caso en que X sea un espacio de Banach, $\lambda = \Phi(\overline{x})$ y $\delta = 0$ en verdad nuestra fórmula (1.1) y la del Corolario (1.20) son equivalentes. Una de las implicancias fue probada en el Corolario (1.20) y la otra se prueba a continuación.

Demostración. Se probará que la fórmula propuesta (1.1) es válida en el caso $\delta = 0$, $\lambda = \Phi(\overline{x})$. Obviamente se enfoca en la inclusión (1.2), que para las condiciones de esta observación resulta ser

$$N_S(\overline{x}) \subset \sigma^* - \limsup_{\substack{\mu\varepsilon \to 0 \\ \mu \geq 0}} \mu \partial_\varepsilon \Phi(\overline{x}).$$

Sea $x^* \in N_S(\overline{x})$. Por el Corolario (1.20), se tiene que $x^* = \tau^* - \lim \mu_n x_n^*$, con $x_n^* \in \partial\Phi(x_n)$, $x_n \to \overline{x}$ y $\mu_n(\Phi(x_n) - \Phi(\overline{x})) \to 0$. Se observa que $x_n^* \in \partial\Phi(x_n)$ es equivalente a

$$\langle x_n^*, y - \overline{x}\rangle \leq \Phi(y) - \Phi(\overline{x}) + (\Phi(\overline{x}) - \Phi(x_n) + \langle x_n^*, x_n - \overline{x}\rangle),$$

de modo que $x_n^* \in \partial_{\varepsilon_n}\Phi(\overline{x})$, donde $\varepsilon_n := \Phi(\overline{x}) - \Phi(x_n) + \langle x_n^*, x_n - \overline{x}\rangle \geq 0$. Se nota que $\mu_n\varepsilon_n \to 0$ y así

$$x^* \in \tau^* - \limsup_{\substack{\mu\varepsilon \to 0 \\ \mu \geq 0}} \mu \partial_\varepsilon \Phi(\overline{x}). \tag{1.46}$$

□

1.5. El cono normal a la intersección de una cantidad finita de conjuntos de subnivel

Se considera funciones $\Phi_1, ..., \Phi_k \in \Gamma_0(X)$ con X evtlc y para $\overline{x} \in \bigcap_{j=1}^k dom(\Phi_j)$ y los conjuntos de subnivel $S^j := [\Phi_j \leq \Phi_j(\overline{x})]$, para $j = 1, ..., k$. Se nota que

$$\bigcap_{j=1}^k S^j = [\Phi \leq \Phi(\overline{x})],$$

con $\Phi := \max_{j=1}^k \Phi_j - \Phi_j(\overline{x})$. Luego el conjunto δ-normal a S es

$$N^\delta_{\bigcap_{j=1}^k S^j}(\overline{x}) = \sigma^* - \limsup_{\substack{\mu\varepsilon \to \delta \\ \mu \geq 0}} \mu \partial_\varepsilon \Phi(\overline{x}).$$

Por supuesto, si se usa alguna fórmula para los ε-subdiferenciales del máximo de una cantidad finita de funciones, entonces se puede expresar el conjunto δ-normal $N_S^\delta(\overline{x})$, en función de los ε-subdiferenciales de las funciones $(\Phi_j)_{j=1}^k$. Esto se hará en la próxima proposición.

Proposición 1.21 *Sean $\Phi_1, ..., \Phi_k \in \Gamma_0(X)$ con X evtlc. Se considera $S = \bigcap_{j=1}^k [\Phi_j \leq \Phi_j(\overline{x})]$ con $\overline{x} \in \bigcap_{j=1}^k dom(\Phi_j)$ y $\delta \geq 0$. Entonces*

$$N_S^{\delta}(\overline{x}) = \sigma^* - \limsup_{\substack{\sum_j \mu_j \varepsilon_j \to \delta \\ \mu_j, \varepsilon_j > 0 \\ \forall j=1,...,k}} \sum_{j=1}^{k} \mu_j \partial_{\varepsilon_j} \Phi_j(\overline{x})$$

Demostración. Primero se prueba la inclusión

$$N_S^{\delta}(\overline{x}) \supset \sigma^* - \limsup_{\substack{\sum_j \mu_j \varepsilon_j \to \delta \\ \mu_j, \varepsilon_j > 0 \\ \forall j=1,...,k}} \sum_{j=1}^{k} \mu_j \partial_{\varepsilon_j} \Phi_j(\overline{x}).$$

Se toma x^* en el conjunto del lado derecho. Esto es,

$$x^* = \sigma^* - \lim_i \sum_{j=1}^{k} \mu_{j,i} x_{j,i}^*, \qquad \sum_{j=1}^{k} \mu_{j,i} \varepsilon_{j,i} \to_i \delta, \quad \forall j = 1, ..., k$$

con $x_{j,i}^* \in \partial_{\varepsilon_{j,i}} \Phi_j(\overline{x})$ y $\mu_{j,i}, \varepsilon_{j,i} > 0, \forall j = 1, ..., k$. Entonces para todo j se tiene

$$\left\langle x_{j,i}^*, y - \overline{x} \right\rangle \leq \Phi_j(y) - \Phi_j(\overline{x}) + \varepsilon_{j,i}, \quad \forall y \in X$$

Si se toma $y \in S$, se multiplica cada desigualdad por $\mu_{j,i}$ y se suma sobre j se obtiene

$$\left\langle \sum_{j=1}^{k} \mu_{j,i} x_{j,i}^*, y - \overline{x} \right\rangle \leq \sum_{j=1}^{k} \mu_{j,i} \varepsilon_{j,i}$$

Por tanto, si se toma límite en i se llega a que

$$\langle x^*, y - \overline{x} \rangle \leq \delta, \quad \forall y \in S$$

lo cual significa que $x^* \in N_S^{\delta}(\overline{x})$.

Ahora se considera $x^* \in N_S^{\delta}(\overline{x})$ para la inclusión hacia la derecha. Por las observaciones de más arriba, para $\Phi = \max_{j=1}^{k} \Phi_j - \Phi_j(\overline{x})$ se sabe que existen $x_i^* \in \partial_{\varepsilon_i} \Phi(\overline{x})$ con $\mu_i \varepsilon_i \to \delta$ y $x^* = \lim \mu_i x_i^*$. Por (17) se tiene que existen $\lambda_{1,i}, ..., \lambda_{k,i} \geq 0$ tales que $\lambda_{1,i} + ... + \lambda_{k,i} = 1$ y

$$x_i^* \in \partial_{\varepsilon_i} (\lambda_{1,i} \Phi_1 + ... + \lambda_{k,i} \Phi_k)(\overline{x}).$$

Y usando (15), se tiene que existen $\varepsilon_{1,i}, ..., \varepsilon_{k,i} > 0$ tales que $\varepsilon_{1,i} + ... + \varepsilon_{k,i} > \varepsilon_i$, pero que aún $\mu_i \sum \varepsilon_{j,i} \to \delta$ (se supone sin pérdida de generalidad que para cada j el límite de $\mu_i \varepsilon_{j,i}$ en i existe) y

$$x_i^* \in cl(\partial_{\varepsilon_{1,i}} \lambda_{1,i} \Phi_1(\overline{x}) + ... + \partial_{\varepsilon_{k,i}} \lambda_{k,i} \Phi_k(\overline{x}))$$

Como lo que nos interesa es el límite de la red se puede suponer que x_i^* esta en el conjunto sin la clusura. Dado que para cada i, $\lambda_{1,i} + ... + \lambda_{k,i} = 1$, se puede suponer sin pérdida de generalidad que existe $r \in \{0, ..., k\}$ tal que si $j = 1, ..., r$, $\lambda_{j,i} > 0, \forall i$, y si $j = r + 1, ..., k$, $(\lambda_{j,i}) = 0, \forall i$. Entonces

$$x_i^* \in \lambda_{1,i} \partial_{\frac{\varepsilon_{1,i}}{\lambda_{1,i}}} \Phi_1(\overline{x}) + ... + \lambda_{r,i} \partial_{\frac{\varepsilon_{r,i}}{\lambda_{r,i}}} \Phi_r(\overline{x}) + N_{dom \Phi_{r+1}}^{\varepsilon_{r+1,i}}(\overline{x}) + ... + N_{dom \Phi_k}^{\varepsilon_{k,i}}(\overline{x})$$

Así para $j = 1, ..., r$, se puede definir $\mu_{j,i} := \mu_i \lambda_{j,i}$ y $\varepsilon'_{j,i} = \frac{\varepsilon_{j,i}}{\lambda_{j,i}}$, mientras que para $j = r+1, ..., k$, usando la Proposición 1.10 se puede escoger $\mu'_{j,i}$ y $\varepsilon'_{j,i}$ tales que $\mu'_{j,i}\varepsilon'_{j,i} \approx \varepsilon_{j,i}$ en el sentido que

$$\lim_i \mu_i \mu'_{j,i}\varepsilon'_{j,i} = \lim_i \mu_i \varepsilon_{j,i},$$

y que

$$\tilde{x}_i^* \in \lambda_{1,i}\partial_{\frac{\varepsilon_{1,i}}{\lambda_{1,i}}}\Phi_1(\overline{x}) + ... + \lambda_{r,i}\partial_{\frac{\varepsilon_{r,i}}{\lambda_{r,i}}}\Phi_r(\overline{x}) + \mu'_{r+1,i}\partial_{\varepsilon'_{r+1,i}}\Phi_{r+1}(\overline{x}) + ... + \mu'_{k,i}\partial_{\varepsilon'_{k,i}}\Phi_k(\overline{x}),$$

para cierto $\tilde{x}_i^*$ que cumple $\lim_i \mu_i \tilde{x}_i^* = \lim_i \mu_i x_i^* = x^*$. Si se pone $\mu_{j,i} = \mu_i \mu'_{j,i}$ se tiene que

$$\mu_i \tilde{x}_i^* \in \mu_{1,i}\partial_{\varepsilon'_{1,i}}\Phi_1(\overline{x}) + ... + \mu_{k,i}\partial_{\varepsilon'_{k,i}}\Phi_k(\overline{x}),$$

y $\sum_j \mu_{j,i}\varepsilon'_{j,i} \to \delta$ con lo que se puede afirmar que

$$x^* \in \sigma^* - \limsup_{\substack{\sum_j \mu_j \varepsilon_j \to \delta \\ \mu_j, \varepsilon_j > 0 \\ \forall j = 1,...,k}} \sum_{j=1}^{k} \mu_j \partial_{\varepsilon_j}\Phi_j(\overline{x}).$$

$\square$

1.6. Extensiones de la fórmula

Hasta aquí se ha estado enfocado en dar una fórmula para $N_{S_\lambda}(\overline{x})$ bajo la hipótesis $\overline{x} \in S_\lambda$ (equivalentemente $\Phi(\overline{x}) \leq \lambda$). Por supuesto esta hipótesis tiene sentido, pues para $\overline{x} \notin S_\lambda$, el conjunto $N_{S_\lambda}(\overline{x})$ es simplemente vacío (a veces se define como $\{0\}$ para que éste sea un cono) siendo tal fórmula innecesaria. Se recuerda la relación (18), esto es,

$$N_{S_\lambda}(\overline{x}) = (S_\lambda - \overline{x})^*,$$

válida sólo si $\overline{x} \in S_\lambda$. El lado derecho, en general no es trivial cuando $S_\lambda \neq \phi$. De la relación (18) entra la pregunta sobre una representación de $(S_\lambda - \overline{x})^*$ cuando $\lambda < \Phi(\overline{x})$ y $S_\lambda \neq \phi$ vía los ε-subdiferenciales de Φ en $\overline{x}$. De eso trata la primera proposición de esta sección.

Proposición 1.22 *Sea $\Phi \in \Gamma_0(X)$ con X un evtlc, sea $\overline{x} \in dom(\Phi)$ y $\lambda < \Phi(\overline{x})$. Si $S_\lambda := [\Phi \leq \lambda] \neq \phi$ luego se tiene*

$$(S_\lambda - \overline{x})^* = \sigma^* - \limsup_{\substack{\mu(\lambda - \Phi(\overline{x}) + \varepsilon) \to 0 \\ \mu \geq 0}} \mu\partial_\varepsilon \Phi(\overline{x}) = \overline{\mathbb{R}_+ \partial_{\Phi(\overline{x}) - \lambda}\Phi(\overline{x})}^{\sigma^*}.$$

Demostración. Primero se nota que las inclusiones hacia la izquierda son directas. La inclusión

$$\sigma^* - \limsup_{\substack{\mu(\lambda - \Phi(\overline{x}) + \varepsilon) \to 0 \\ \mu \geq 0}} \mu\partial_\varepsilon \Phi(\overline{x}) \supset \overline{\mathbb{R}_+ \partial_{\Phi(\overline{x}) - \lambda}\Phi(\overline{x})}^{\sigma^*},$$

sigue de tomar $\varepsilon = \Phi(\overline{x}) - \lambda > 0$, y la inclusión

$$(S_\lambda - \overline{x})^* \supset \sigma^* - \limsup_{\substack{\mu(\lambda - \Phi(\overline{x}) + \varepsilon) \to 0 \\ \mu \geq 0}} \mu \partial_\varepsilon \Phi(\overline{x}),$$

es casi la misma que la de la Proposición 1.1. Por lo cual, si se prueba

$$(S_\lambda - \overline{x})^* \subset \overline{\mathbb{R}_+ \partial_{\Phi(\overline{x}) - \lambda} \Phi(\overline{x})}^{\sigma^*}, \tag{1.47}$$

por sandwich se concluiría.

Se probará (1.47) por contradicción. Se supone que existe $\xi \in (S_\lambda - \overline{x})^* \backslash \overline{\mathbb{R}_+ \partial_{\Phi(\overline{x}) - \lambda} \Phi(\overline{x})}^{\sigma^*}$. Entonces por Hahn-Banach (Corolario 0.2), existe $v \in X$ tal que

$$\langle \xi, v \rangle > 0 \geq \langle x^*, v \rangle, \quad \forall x^* \in \partial_{\Phi(\overline{x}) - \lambda} \Phi(\overline{x}). \tag{1.48}$$

Así gracias al Teorema 0.5, se tiene $\Phi'_{\Phi(\overline{x}) - \lambda}(\overline{x}, v) \leq 0$. Esto es,

$$\inf_{t > 0} \frac{\Phi(\overline{x} + tv) - \Phi(\overline{x}) + \Phi(\overline{x}) - \lambda}{t} \leq 0. \tag{1.49}$$

Se toma una sucesión minimizante t_n en (1.49). Si t_n tiene un punto de acumulación $\overline{t}$, entonces

$$\lim \Phi(\overline{x} + t_n v) - \lambda \leq 0,$$

y por la semicontinuidad inferior de Φ

$$\Phi(\overline{x} + \overline{t} v) \leq \liminf_n \Phi(\overline{x} + t_n v) \leq \lambda.$$

Se nota que $\overline{t}$ no puede ser igual a cero, porque $\lambda < \Phi(\overline{x})$. Entonces $\overline{x} + \overline{t} v \in [\Phi \leq \lambda]$ y se obtiene

$$\left\langle \xi, \overline{t} v \right\rangle = \left\langle \xi, (\overline{x} + \overline{t} v) - \overline{x} \right\rangle \leq 0$$

Pero entonces $\langle \xi, v \rangle \leq 0$, porque $\overline{t} > 0$, contradiciendo (1.48).

Por lo tanto, se puede suponer que la sucesión minimizante t_n es no acotada, más aun que converge a $+\infty$. Entonces

$$\limsup_n \frac{\Phi(\overline{x} + t_n v) - \Phi(\overline{x}) + \lambda}{t_n} \leq 0,$$

$$\limsup_n \frac{\Phi(\overline{x} + t_n v) - \Phi(\overline{x})}{t_n} \leq 0.$$

Dado que Φ es convexa, el cuociente $t^{-1}(\Phi(\overline{x} + tv) - \Phi(\overline{x}))$ es creciente en t, y se puede afirmar que

$$\frac{\Phi(\overline{x} + tv) - \Phi(\overline{x})}{t} \leq 0, \quad \forall t > 0.$$

Luego $\Phi(\overline{x}+tv) \leq \Phi(\overline{x})$, para todo $t \geq 0$. Se toma $x_0 \in S_\lambda \neq \phi$. Se puede probar usando la convexidad de Φ que se cumple una condicion similar:

$$\Phi(x_0+tv) \leq \Phi(x_0), \quad \forall t \geq 0. \tag{1.50}$$

Se fija $t>0$ y se considera el punto x_0+tv y una aproximacion $x_n := x_0+tv+n^{-1}(\overline{x}-x_0)$. Se nota que

$$x_n = x_0(1-n^{-1}) + n^{-1}(ntv+\overline{x}),$$

y así por convexidad

$$\begin{aligned}\Phi(x_n) &\leq \Phi(x_0)\left(1-n^{-1}\right) + n^{-1}\Phi(ntv+\overline{x}) \\ &\leq \Phi(x_0)\left(1-n^{-1}\right) + n^{-1}\Phi(\overline{x}).\end{aligned}$$

Tomando $\liminf$, como Φ es semicontinua inferior y $x_n \to x_0+tv$ se llega a que

$$\Phi(x_0+tv) \leq \liminf_n \Phi(x_n) \leq \Phi(x_0),$$

es decir, se cumple (1.50).

Como $\lambda \geq \Phi(x_0) \geq \Phi(x_0+tv)$, luego $x_0+tv \in S_\lambda$ para todo $t>0$. Recordando que $\xi \in N_{S_\lambda}(\overline{x})$, se tiene

$$\begin{aligned}\langle \xi, x_0+tv-\overline{x}\rangle &\leq 0, \\ \langle \xi, v\rangle &\leq \frac{1}{t}\langle \xi, \overline{x}-x_0\rangle, \quad \forall t>0. \end{aligned}\tag{1.51}$$

De nuevo se obtiene una contradicción con (1.48), pues tomando límite $t \to +\infty$ en (1.51) se obtiene $\langle \xi, v\rangle \leq 0$. $\square$

Hasta aquí, se tiene que el cono polar de $S_\lambda - \overline{x}$ si $S_\lambda \neq \phi$ cumple

$$(S_\lambda - \overline{x})^* = \sigma^* - \limsup_{\substack{\mu(\lambda-\Phi(\overline{x})+\varepsilon)\to 0 \\ \mu\geq 0}} \mu\partial_\varepsilon\Phi(\overline{x}). \tag{1.52}$$

Cabe ahora preguntarse lo que el lado derecho es cuando $S_\lambda = \phi$. De esto trata la siguiente proposición.

Proposición 1.23 *Sea X un evtlc y $\Phi \in \Gamma_0(X)$, sea $\overline{x} \in dom(\Phi)$ y $\lambda < \Phi(\overline{x})$. Si $[\Phi \leq \lambda] = \phi$ entonces se tiene*

$$N_{\overline{x}+[\Phi\leq\Phi(\overline{x})]_\infty}(\overline{x}) = \sigma^* - \limsup_{\substack{\mu(\lambda-\Phi(\overline{x})+\varepsilon)\to 0 \\ \mu\geq 0}} \mu\partial_\varepsilon\Phi(\overline{x}) = \overline{\mathbb{R}_+\partial_{\varepsilon'}\Phi(\overline{x})}^{\sigma^*}. \tag{1.53}$$

para todo $\varepsilon' \geq \Phi(\overline{x}) - \lambda$.

Demostración. Primero se probará que para $\varepsilon' \geq \Phi(\overline{x}) - \lambda$

$$\overline{\mathbb{R}_+\partial_{\varepsilon'}\Phi(\overline{x})}^{\sigma^*} = N_{\overline{x}+[\Phi\leq\Phi(\overline{x})]_\infty}(\overline{x}). \tag{1.54}$$

Por un lado, si $\xi \in \partial_{\varepsilon'}\Phi(\overline{x})$ y $v \in [\Phi \leq \Phi(\overline{x})]_\infty$, esto es, $v \in X$ tal que $\Phi(\overline{x}+tv) \leq \Phi(\overline{x})$ para todo $t \geq 0$, entonces la desigualdad del subdiferencial nos da que

$$\langle \xi, tv\rangle = \langle \xi, \overline{x}+tv-\overline{x}\rangle \leq \Phi(\overline{x}+tv) - \Phi(\overline{x}) + \varepsilon' \leq \varepsilon', \tag{1.55}$$

para todo $t > 0$, y así se ve que $\langle \xi, v\rangle \leq 0$. De igual manera $\langle \xi, \overline{x}+v-\overline{x}\rangle \leq 0$, y esto para cualquier $v \in [\Phi \leq \Phi(\overline{x})]_\infty$, por lo cual se puede decir que $\xi \in N_{\overline{x}+[\Phi\leq\Phi(\overline{x})]_\infty}(\overline{x})$. Por lo tanto, $\partial_{\varepsilon'}\Phi(\overline{x}) \subset N_{\overline{x}+[\Phi\leq\Phi(\overline{x})]_\infty}(\overline{x})$, y como el conjunto del lado izquierdo es un cono cerrado se ha probado que

$$\overline{\mathbb{R}_+\partial_{\varepsilon'}\Phi(\overline{x})}^{\sigma^*} \subset N_{\overline{x}+[\Phi\leq\Phi(\overline{x})]_\infty}(\overline{x}).$$

Para la otra dirección se toma v en $(\partial_{\varepsilon'}\Phi(\overline{x}))^*$. Ahora, como $\varepsilon' \geq \Phi(\overline{x}) - \lambda$, entonces $[\Phi \leq \Phi(\overline{x}) - \varepsilon'] \subset [\Phi \leq \lambda] = \phi$, con lo que

$$0 \leq \inf_{t>0} \frac{\Phi(\overline{x}+tv) - \Phi(\overline{x}) + \varepsilon'}{t} = \Phi'_{\varepsilon'}(\overline{x}; v) = \sup_{x^*\in\partial_{\varepsilon'}\Phi(\overline{x})} \langle v, x^*\rangle \leq 0, \tag{1.56}$$

donde la última desigualdad es porque $v \in (\partial_{\varepsilon'}\Phi(\overline{x}))^*$. Sea $(t_n)_n$ una sucesión positiva que realiza el ínfimo de (1.56). Se va a probar que $t_n \to \infty$. Si no fuera así, el término $\Phi(\overline{x} + t_n v) - \Phi(\overline{x}) + \varepsilon'$ iría a 0 cuando n va a $+\infty$ y si $\overline{t}$ es uno de los puntos de acumulación de t_n, entonces

$$\Phi(\overline{x}+\overline{t}v) - \Phi(\overline{x}) + \varepsilon' \leq \liminf_n \Phi(\overline{x}+t_n v) - \Phi(\overline{x}) + \varepsilon' \leq 0$$

produciendo la contradicción $\overline{x}+\overline{t}v \in [\Phi \leq \lambda] = \phi$. Ahora, tomando en cuenta la convexidad de Φ y que $t_n \to \infty$, se deduce de (1.56) que

$$\begin{aligned}
\sup_{t>0} \frac{\Phi(\overline{x}+tv) - \Phi(\overline{x})}{t} &= \lim_n \frac{\Phi(\overline{x}+t_n v) - \Phi(\overline{x})}{t_n} \\
&= \lim_n \frac{\Phi(\overline{x}+t_n v) - \Phi(\overline{x}) + \varepsilon'}{t_n} \\
&= \inf_{t>0} \frac{\Phi(\overline{x}+tv) - \Phi(\overline{x}) + \varepsilon'}{t} = 0.
\end{aligned}$$

Así $\overline{x}+tv \in [\Phi \leq \Phi(\overline{x})]$ para todo $t > 0$, y $v \in [\Phi \leq \Phi(\overline{x})]_\infty = \left(N_{\overline{x}+[\Phi\leq\Phi(\overline{x})]_\infty}(\overline{x})\right)^*$. Se tiene entonces que $(\partial_{\varepsilon'}\Phi(\overline{x}))^* \subset \left(N_{\overline{x}+[\Phi\leq\Phi(\overline{x})]_\infty}(\overline{x})\right)^*$, y por dualidad se obtiene

$$N_{\overline{x}+[\Phi\leq\Phi(\overline{x})]_\infty}(\overline{x}) \subset (\partial_{\varepsilon'}\Phi(\overline{x}))^{**} = \overline{\mathbb{R}_+\partial_{\varepsilon'}\Phi(\overline{x})}^{\sigma^*},$$

que es la inclusión que se quería.

Para terminar basta notar que

$$\overline{\mathbb{R}_+\partial_{\Phi(\overline{x})-\lambda}\Phi(\overline{x})}^{\sigma^*} \subset \sigma^* - \limsup_{\substack{\mu(\lambda-\Phi(\overline{x})+\varepsilon)\to 0\\ \mu\geq 0}} \mu\partial_\varepsilon\Phi(\overline{x}) \subset \overline{\mathbb{R}_+\partial_{\varepsilon'}\Phi(\overline{x})}^{\sigma^*},$$

y que los conjuntos de los extremos son iguales. □

Observación Es importante notar que la hipótesis $[\Phi \leq \lambda] = \phi$ es necesaria en la proposición anterior. Se considera en $\mathbb{R}$ el ejemplo $\Phi(x) = |x|$, $\overline{x} = 1$ y $\lambda = 0$. Entonces se tiene $[\Phi \leq \Phi(\overline{x})]$ acotado, con lo cual $[\Phi \leq \Phi(\overline{x})]_\infty = \{0\}$, y así $N_{\overline{x}+[\Phi\leq\Phi(\overline{x})]_\infty}(\overline{x}) = \mathbb{R}$. Por otro lado, $\partial_{\Phi(\overline{x})-\lambda}\Phi(\overline{x}) = [0,1]$, con lo cual $\mathbb{R}_+\partial_{\Phi(\overline{x})-\lambda}\Phi(\overline{x}) = \mathbb{R}_+$ y los extremos de (1.53) no son iguales.

1.7. Aplicación a la Optimización

Sea (X, τ) un evtlc y se considera el problema de optimización convexa

$$(\mathcal{P}_0) \quad \min_C f,$$

con $f \in \Gamma_0(X)$. Equivalentemente se puede considerar el problema

$$(\mathcal{P}_1) \quad \min_X f + \chi_C.$$

Una condición necesaria y suficiente para que $\overline{x}$ sea una solución de $(\mathcal{P}_1)$ (o equivalentemente de $(\mathcal{P}_0)$), es que $0 \in \partial(f + \chi_C)(\overline{x})$. De esto se ve que es importante poder descomponer el subdiferencial de la suma de dos funciones. El Teorema de Moreau-Rockafellar nos permite descomponerlo del modo siguiente

$$\partial(f + \chi_C)(\overline{x}) = \partial f(\overline{x}) + \partial \chi_C(\overline{x}) = \partial f(\overline{x}) + N_C(\overline{x})$$

siempre que o bien $int(C) \cap dom(f) \neq \phi$, o bien que exista un $x_0 \in dom(f) \cap C$ tal que la función f sea continua en x_0. En tal caso es importante conocer cómo es el cono normal $N_C(\overline{x})$. Pero si se prescinde de tales hipótesis, se puede usar la fórmula (16) obteniendo

$$\begin{aligned}
\partial(f + \chi_C)(\overline{x}) &= \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma^* - cl\left(\partial_\varepsilon f(\overline{x}) + \partial_\varepsilon \chi_C(\overline{x})\right) \\
&= \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma^* - cl\left(\partial_\varepsilon f(\overline{x}) + N_C^\varepsilon(\overline{x})\right),
\end{aligned}$$

en cuyo caso sería bueno conocer cómo es el conjunto ε-normal a C.

Se supone ahora que C es de la forma $[\Phi \leq \lambda]$ para una función $\Phi \in \Gamma_0(X)$ y que $\overline{x} \in C$, es decir, $\Phi(\overline{x}) \leq \lambda$. Entonces para $\varepsilon > 0$, se sabe que

$$N_{[\Phi \leq \lambda]}^\varepsilon(\overline{x}) = \sigma^* - cl\left(\bigcup_{\mu \geq 0} \partial_{\varepsilon + \mu(\Phi(\overline{x}) - \lambda)}(\mu\Phi)(\overline{x})\right).$$

Pero en un evt para todo par de conjuntos A, B se tiene $cl(A + cl(B)) = cl(A + B)$, luego juntando todo lo anterior se obtiene

$$\partial(f + \chi_C)(\overline{x}) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma^* - cl\left(\partial_\varepsilon f(\overline{x}) + \bigcup_{\mu \geq 0} \partial_{\varepsilon + \mu(\Phi(\overline{x}) - \lambda)}(\mu\Phi)(\overline{x})\right),$$

y se ha probado la siguiente proposición.

Proposición 1.24 *Una condición necesaria y suficiente para que $\overline{x} \in X$ sea una solución de $(\mathcal{P}_0)$ es: $\forall \varepsilon > 0$, $W \in \mathcal{N}(0)$, existe $\mu \geq 0$ tal que*

$$0 \in \partial_\varepsilon f(\overline{x}) + \partial_{\varepsilon + \mu(\Phi(\overline{x}) - \lambda)}(\mu\Phi)(\overline{x}) + W$$

1.8. Cono tangente a conjuntos de subnivel

Se considera en un espacio de Banach X un conjunto no vacío S que sea convexo y cerrado. Para $\overline{x} \in S$ el cono tangente a S en $\overline{x}$ está definido por

$$T_S(\overline{x}) = cl\,(\mathbb{R}_+(S - \overline{x}))$$

Es conocido que el cono tangente y el cono normal son conos duales o polares, esto es, $T_S(\overline{x})^* = T_S(\overline{x})^\circ = N_S(\overline{x})$ y también $N_S(\overline{x})^* = N_S(\overline{x})^\circ = T_S(\overline{x})$. Esto nos sugiere usar la fórmula (1.1) para obtener una expresión de $T_S(\overline{x})$ en el caso que S sea el conjunto de subnivel para una función $\Phi \in \Gamma_0(X)$ en un punto $\overline{x} \in dom(\Phi)$, es decir $S = [\Phi \leq \Phi(\overline{x})]$. Entonces gracias a la relación (23) se tiene

$$\begin{aligned} T_S(\overline{x}) &= (N_S(\overline{x}))^\circ \\ &= \left(\sigma^* - \limsup_{\substack{\mu\varepsilon\to 0\\ \mu\geq 0}} \mu\partial_\varepsilon\Phi(\overline{x})\right)^\circ \\ &\supset \tau_{\|\cdot\|} - \liminf_{\substack{\mu\varepsilon\to 0\\ \mu\geq 0}} (\mu\partial_\varepsilon\Phi(\overline{x}))^\circ . \end{aligned}$$

Ahora por el Teorema 0.5, el polar de $\mu\partial_\varepsilon\Phi(\overline{x})$, si $\varepsilon > 0$ es igual al conjunto de subnivel $[\mu\Phi'_\varepsilon(\overline{x};\cdot) \leq 1]$, por lo cual se llega a que

$$T_S(\overline{x}) \supset \tau_{\|\cdot\|} - \liminf_{\substack{\mu\varepsilon\to 0\\ \mu\geq 0}} [\mu\Phi'_\varepsilon(\overline{x};\cdot) \leq 1]. \tag{1.57}$$

Esta inclusión no es trivial y para probarla se usó en efecto la inclusión no trivial

$$N_S(\overline{x}) \subset \limsup_{\substack{\mu\varepsilon\to 0\\ \mu\geq 0}} \mu\partial_\varepsilon\Phi(\overline{x}).$$

En cambio, la inclusión

$$T_S(\overline{x}) \subset \tau_{\|\cdot\|} - \liminf_{\substack{\mu\varepsilon\to 0\\ \mu\geq 0}} [\mu\Phi'_\varepsilon(\overline{x};\cdot) \leq 1], \tag{1.58}$$

se puede probar directamente. Para probarla se considera $v \in T_S(\overline{x})$, es decir, $v = \lim v_n$ con $v_n = \lambda_n(u_n - \overline{x})$, $\lambda_n > 0$ y $u_n \in S$. Dado $\varepsilon \geq 0$

$$\Phi'_\varepsilon(\overline{x}; v_n) \leq \frac{\Phi(\overline{x} + tv_n) - \Phi(\overline{x}) + \varepsilon}{t}, \quad \forall t > 0,$$

de modo que para $t = \lambda_n^{-1}$, nos da $\Phi'_\varepsilon(\overline{x}; v_n) \leq \lambda_n(\Phi(u_n) - \Phi(\overline{x}) + \varepsilon) \leq \lambda_n\varepsilon$, pues u_n pertenece al subnivel S de Φ. Si se multiplica lo anterior por $\mu \geq 0$, se tiene

$$\mu\Phi'_\varepsilon(\overline{x}, v_n) \leq \lambda_n(\mu\varepsilon).$$

Por lo tanto, para cualquier par de sucesiones $\mu_k, \varepsilon_k \geq 0$ tal que $\mu_k \varepsilon_k \to 0$, existe k_n grande tal que

$$\mu_{k_n} \Phi'_{\varepsilon_{k_n}}(\overline{x}, v_n) \leq \lambda_n(\mu_{k_n} \varepsilon_{k_n}) \geq 1$$

Esto es que v_n pertenece al conjunto de subnivel $[\mu_{k_n} \Phi'_{\varepsilon_{k_n}}(\overline{x}, v_n) \leq 1]$. La secuencia (k_n) se puede escoger creciente por lo que v está en el $\liminf$ del lado derecho de (1.58).

Con todo lo anterior se ha probado el siguiente teorema.

Teorema 1.25 *Sea $\Phi \in \Gamma_0(X)$ con X un espacio de Banach. Para $\overline{x} \in dom(\Phi)$ se considera el conjunto de subnivel $S = [\Phi \leq \Phi(\overline{x})]$. Entonces*

$$T_S(\overline{x}) = \tau_{\|\cdot\|} - \liminf_{\substack{\mu\varepsilon \to 0 \\ \mu \geq 0}} [\mu \Phi'_\varepsilon(\overline{x}; \cdot) \leq 1].$$

Capítulo 2

Aplicaciones a ciertos sistemas dinámicos

En este capítulo se estudia el comportamiento asintótico de algunos sistemas dinámicos de primer y segundo orden en $X = \mathbb{R}^N$ (en algunos casos en un espacio de Hilbert $X = H$): el sistema del gradiente y algunas generalizaciones, y algunas variantes del sistema Heavy Ball with Friction, todo en el marco de funciones convexas semicontinuas inferiormente. Las generalizaciones mencionadas involucran el operador asociado a un función $\Phi \in \Gamma_0(X)$ que para cada punto $x \in dom(\Phi)$ entrega el cono normal al subnivel $[\Phi \leq \Phi(x)]$ en el punto x. En la primera sección se verá que este operador es un operador semicontinuo exterior.

2.1. Semicontinuidad exterior de un operador

Es conocido que dado un conjunto convexo cerrado y no vacío S en un espacio de Banach reflexivo X el operador N_S que a un punto x asocia el cono normal $N_S(x)$ es semicontinuo exteriormente, esto es, para cada $\overline{x} \in S$

$$\tau_{\|\cdot\|_*} - \limsup_{x \to \overline{x}} N_S(x) \subset N_S(\overline{x}).$$

Se puede probar que para una función convexa, semicontinua inferior y propia Φ, el operador $N_{[\Phi \leq \Phi(\cdot)]}(\cdot)$ es semicontinuo exteriormente, es decir, para cada $\overline{x} \in dom(\Phi)$

$$\tau_{\|\cdot\|_*} - \limsup_{x \to \overline{x}} N_{[\Phi \leq \Phi(x)]}(x) \subset N_{[\Phi \leq \Phi(\overline{x})]}(\overline{x}). \tag{2.1}$$

El primer resultado puede deducirse fácilmente del segundo tomando la función indicatriz de S, $\Phi \equiv \chi_S$.

Teorema 2.1 *Sea X un espacio de Banach reflexivo y una función $\Phi \in \Gamma_0(X)$. El operador $N_{[\Phi \leq \Phi(\cdot)]}(\cdot)$ es semicontinuuo exteriormente, vale decir, la inclusión (2.1) se cumple para todo $\overline{x} \in dom(\Phi)$.*

Demostración. Por la fórmula encontrada en el capítulo anterior para un punto $x \in dom(\Phi)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\tau_{\|\cdot\|_*} - \limsup_{x \to \overline{x}} N_{[\Phi \leq \Phi(x)]}(x) &= \tau_{\|\cdot\|_*} - \limsup_{x \to \overline{x}} \left(\tau_{\|\cdot\|_*} - \limsup_{\substack{\mu\varepsilon \to 0 \\ \mu \geq 0}} \mu \partial_\varepsilon \Phi(x) \right) \\
&\subset \tau_{\|\cdot\|_*} - \limsup_{\substack{x \to \overline{x} \\ \mu\varepsilon \to 0 \\ \mu \geq 0}} \mu \partial_\varepsilon \Phi(x) \\
&= N_{[\Phi \leq \Phi(\overline{x})]}(\overline{x}).
\end{aligned}$$

La primera igualdad viene de usar la fórmula (1.1) en cada punto x. La inclusión siguiente es una propiedad propia de los lím sup y está probada en la sección de preliminares, Proposición 26, y la última igualdad es lo que dice la Proposición 1.17. □

Observación Si bien se hace uso de la formula con ε-subdiferenciales se podría haber hecho una demostración similar con la fórmula (2) de [13], pero usando la inclusión siguiente

$$\tau_{\|\cdot\|_*} - \limsup_{x \to \overline{x}} \left(\tau_{\|\cdot\|_*} - \limsup_{y \to x} \mathbb{R}_+ \partial \Phi(y) \right) \subset \tau_{\|\cdot\|_*} - \limsup_{y \to \overline{x}} \mathbb{R}_+ \partial \Phi(y).$$

El operador $N_{[\Phi \leq \Phi(\cdot)]}(\cdot)$ en general no es un operador monótono, a diferencia de $N_S(\cdot)$ que es el subdiferencial de la indicatriz $\chi_S(\cdot)$.

2.2. Sistema de primer orden

El sistema del gradiente es

$$-\dot{x} = \nabla \Phi(x), \quad \text{en } (0, +\infty), \tag{2.2}$$

con $x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^N)$ y Φ una función de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$, cuya directa generalización al caso que Φ no sea diferenciable pero convexa, es el sistema de los subgradientes

$$-\dot{x} \in \partial \Phi(x), \quad \text{en } (0, +\infty), \tag{2.3}$$

para $\Phi \in \Gamma_0(\mathbb{R}^N)$, admitiendo soluciones $x \in AC(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^N)$. Por otro lado, se puede generalizar el sistema aún más al sistema

$$-\dot{x} \in N_{[\Phi \leq \Phi(x)]}(x), \quad \text{en } (0, +\infty), \tag{2.4}$$

notando el simple hecho de que $\partial \Phi(x) \subset N_{[\Phi \leq \Phi(x)]}(x)$ para todo $x \in dom(\Phi)$.

Este último sistema es un caso particular de lo que J.J. Moreau llamó un *Proceso de Barrido* (*Sweeping Process*, ver [16]), los cuales son de la forma $-\dot{x} \in N_{C(x,t)}(x)$, con $C(x,t)$ en general un conjunto convexo. En éste caso, $C(x,t) = C(x) = [\Phi \leq \Phi(x)]$ sólo depende de x, de modo que siempre las trayectorias constantes son solución del sistema. Pero para (2.4) se tiene por solución también las de (2.3). Con respecto a la existencia de soluciones para (2.3) en espacios de Hilbert se da como referencia [8].

2.2.1. Decrecimiento de $\Phi(x(t))$

En una dimensión no es difícil ver que los valores de la trayectoria del sistema (2.4) decrecen, esto es, $t \mapsto \Phi(x(t))$ es decreciente.

Proposición 2.2 *Sea $\Phi \in \Gamma_0(\mathbb{R})$ convexa semicontinua inferior y propia, y $x(\cdot)$ una solución absolutamente continua de (2.4). Entonces $\Phi(x(t))$ es decreciente.*

DEMOSTRACIÓN. Sea t_0 tal que $x(t_0) \in dom(\Phi)$ no es un mínimo de Φ. Entonces existe x_1 tal que $\Phi(x_1) < \Phi(x(t_0))$. Primero si $x(t_0) < x_1$, por convexidad se tiene que Φ es estrictamente decreciente en un entorno de $x(t_0)$ de la forma $(-\infty, x(t_0) + \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$. Por lo anterior, para y en el intervalo $(-\infty, x(t_0) + \varepsilon)$ se tiene $[\Phi \leq \Phi(y)] - y \subset \mathbb{R}_+$, y más aun

$$\mathbb{R}_+([\Phi \leq \Phi(y)] - y) = \mathbb{R}_+.$$

Tomando el cono dual

$$N_{[\Phi \leq \Phi(y)]}(y) = \mathbb{R}_-.$$

Por la inclusión (2.4) y la continuidad de $x(t)$, se tiene que $\dot{x}(t) \in -\mathbb{R}_- = \mathbb{R}_+$ para todo t en una vecindad I de t_0, esto es, $x(t)$ es creciente en I. Por lo tanto, la composición $\Phi(x(t))$ es decreciente en I.

Segundo, si $x(t_0) > x_1$m entonces $x(t_0)$ está en una zona de crecimiento de Φ, mientras que la inclusión (2.4) nos entrega que $x(t)$ es decreciente en un entorno de t_0, de manera que la composición $\Phi(x(t))$ es decreciente en t.

Se ha probado que $\Phi(x(t))$ es decreciente en el conjunto abierto $\{t > 0 \mid \Phi(x(t)) > \text{ínf}\, \Phi\}$, lo cual implica que en verdad es decreciente en todo $\mathbb{R}_+$. □

Para dimensiones superiores se deja abierta la pregunta de si $t \mapsto \Phi(x(t))$ es decreciente para x solución de (2.4) con la sospecha de que sí lo es. En particular, si se añade ciertas condiciones sobre Φ y x se puede de hecho probar que esto es cierto.

Proposición 2.3 *Sea Φ convexa continua en $\mathbb{R}^N$ y x una solución diferenciable de (2.4). Entonces $t \mapsto \Phi(x(t))$ es decreciente.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x(\cdot)$ una solución diferenciable del sistema (2.4) con Φ continua. Si $x(t)$ no es un mínimo de Φ, entonces $N_{[\Phi \leq \Phi(x(t))]}(x(t)) = \mathbb{R}_+ \partial\Phi(x(t))$, y luego existe $\gamma(t) \geq 0$ tal que $-\dot{x}(t) \in \gamma(t)\partial\Phi(x(t))$. Se anotará $f(t) = \Phi(x(t))$. Si $\gamma(t) = 0$, entonces $\dot{x}(t) = 0$. En este caso, como Φ es localmente Lipchitz se tiene que

$$\begin{aligned}\limsup_{s \to t} \left| \frac{\Phi(x(s)) - \Phi(x(t))}{s - t} \right| &\leq \lim_{s \to t} \frac{L\|x(s) - x(t)\|}{|s - t|} \\ &= \dot{x}(t) = 0.\end{aligned}$$

Esto implica que $f'(t) = 0$. Por otro lado, si $\gamma(t) > 0$ entonces

$$-\gamma(t)^{-1} \langle \dot{x}(t), y - x(t) \rangle \leq \Phi(y) - \Phi(x(t), \quad \forall y \in dom(\Phi),$$

y tomando $y = x(s)$ con $s < t$ se obtiene

$$-\gamma(t)^{-1}\left\langle \dot{x}(t), \frac{x(s)-x(t)}{s-t}\right\rangle \geq \frac{f(s)-f(t)}{s-t}.$$

Como el cuociente $\frac{x(s)-x(t)}{s-t}$ converge a $\dot{x}(t)$ cuando $s \to t^-$, luego se tiene

$$0 \geq \limsup_{s\to t^-} \frac{f(s)-f(t)}{s-t} =: D_-f(t),$$

donde $D_-f(t)$ se llama la derivada de Dini superior por la izquierda. En ambos casos se tiene $D_-f(t) \leq 0$. Como f es continua, luego gracias al Lema 2.4 siguiente se concluye que f es decreciente, ie $t \mapsto \Phi(x(t))$ decrece. $\square$

Lema 2.4 *Sea $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ una función continua tal que la derivada de Dini inferior por la izquierda de f cumple*

$$D_-f(t) := \limsup_{s\to t^-} \frac{f(s)-f(t)}{s-t} \leq 0, \quad \forall t > 0,$$

entonces f es decreciente en $\mathbb{R}_+$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y se considera la función g dada por $g(t) = f(t) - \varepsilon t$. Por la hipótesis, se tiene que g cumple

$$D_-g(t) := \limsup_{s\to t^-} \frac{g(s)-g(t)}{s-t} \leq -\varepsilon < -\frac{1}{2}\varepsilon, \tag{2.5}$$

para todo $t > 0$. Por la definición del $\limsup$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $s \in (t-\delta, t)$

$$\frac{g(s)-g(t)}{s-t} < -\frac{1}{2}\varepsilon, \tag{2.6}$$

y así, $g(t) < g(s)$ para todo $s \in (t-\delta, t)$. Es decir, todo tiempo $t > 0$, es un mínimo local hacia el pasado. Por el Lema 2.5 se concluye que g es decreciente, ie $t \to f(t) - \varepsilon t$ es decreciente para cualquier $\varepsilon > 0$. Tomando $\varepsilon \to 0$ se ve que f es decreciente, terminando así la proposición. $\square$

Lema 2.5 *Sea I un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{R}$ scs tal que para todo $t \in I$, t sea un mínimo local hacia el pasado (es decir, que existe $\delta > 0$ tal que $f(s) \geq f(t)$ para todo $s \in (t-\delta, t] \cap I$). Entonces f es decreciente en I.*

Demostración. Se puede suponer primero que I es cerrado, pues la definición de decrecimiento es por pares de puntos que encierran un intervalo cerrado. En este caso se puede suponer que f está definida en $\mathbb{R}$ extendiéndola como constante hacia ambos lados si es necesario, lo cual mantiene las hipótesis válidas.

Sean $t_0 < t_1$ y se supone para llegar a una contradicción que $f(t_0) < f(t_1)$. Se define el conjunto

$$J := \{s \in \mathbb{R} \mid s \leq t_1 \;\wedge\; f([s, t_1]) \subset [f(t_1), +\infty)\}.$$

Se puede ver que $t_1 \in J$, y que J es un intervalo por tanto no vacío. Por la semicontinuidad de f resulta que J es un intervalo cerrado (en particular cerrado por la izquierda). Además se tiene que $t_0 \notin J$. Como $t_0 < t_1$ luego t_0 es cota inferior de J y así J posee un elemento mínimo. Sea $t = \min J$, por la hipótesis t es un mínimo local hacia el pasado, i.e. existe $\delta > 0$ tal que $\forall s \in (t-\delta, t)$ cumple

$$f(s) \geq f(t) \geq f(t_1).$$

Se ve que $t_\delta := t - \frac{\delta}{2} \in J$, pero $t_\delta < t = \min J$ una contradicción, lo que concluye el lema. $\square$

Observación Sea una solución absolutamente continua x de (2.4) tal que $t \mapsto \Phi(x(t))$ es decreciente. Entonces $\Phi(x(t))$ es estrictamente decreciente en todo intervalo donde $\dot{x}(t)$ no se anule. Dicho de otro modo, si $\Phi(x(t))$ es constante en un intervalo, entonces también $x(t)$ lo es.

Demostración. Se supone que $\Phi(x(a)) = \Phi(x(b))$ con $a < b$. Entonces por el decrecimiento, $\Phi(x(t)) = \Phi(x(a))$ para todo $t \in [a, b]$. Entonces para todo $s \neq t \in (a, b)$, $x(s) \in [\Phi \leq \Phi(x(t))]$, por lo cual

$$\langle -\dot{x}(t), x(s) - x(t) \rangle \leq 0$$

Si se divide por $s - t$ cuando $s < t$ y se toma límite inferior,

$$-|\dot{x}(t)|^2 = \left\langle -\dot{x}(t), \liminf_{s \to t^-} \frac{x(s) - x(t)}{s - t} \right\rangle \geq 0, \quad ctp \text{ en } (a, b),$$

pues x es derivable *ctp*. Similarmente dividiendo por $s > t$ y tomando límite superior se tiene

$$-|\dot{x}(t)|^2 = \left\langle -\dot{x}(t), \limsup_{s \to t^-} \frac{x(s) - x(t)}{s - t} \right\rangle \leq 0, \quad ctp \text{ en } (a, b).$$

Por lo tanto $\dot{x}(t) = 0$ para todo $t \in (a, b)$ *ctp*, e integrando se obtiene que $x(t)$ es constante en $[a, b]$. $\square$

Observación En cuanto al sistema (2.3) en un espacio de Hilbert se sabe que de hecho $t \mapsto \Phi(x(t))$ es decreciente (ver [8, Teorema 3.5]).

2.2.2. Convergencia de la trayectoria

En esta sección se supondrá que se tiene una trayectoria x solución del sistema (2.4) tal que $t \mapsto \Phi(x(t))$ es decreciente (por ejemplo cuando x es solución de (2.3)). Se verá que entonces x es convergente débilmente, gracias al lema de Opial, el cual se recuerda a continuación.

Lema 2.6 *(Opial) Sea H un espacio de Hilbert, sea $x : \mathbb{R}_+ \to H$ una trayectoria y se denota por W el ω-límite débil de x. Si existe $\phi \neq S \subset H$ tal que*

$$\forall z \in S, \quad \lim_{t \to \infty} |x(t) - z| \text{ existe},$$

entonces $W \neq \phi$. Si además $W \subset S$, luego $x(t)$ converge débilmente a un punto $\overline{x} \in S$ cuando $t \to \infty$.

Proposición 2.7 *Sea x una solución absolutamente continua de (2.4) con $\Phi \in \Gamma_0(H)$ una función tal que $argmin(\Phi) \neq \phi$, con $t \mapsto \Phi(x(t))$ decreciente, y sea $S := [\Phi \leq \lambda]$ con $\lambda := \lim_{t\to\infty} \Phi(x(t))$. Entonces $x(t)$ converge débilmente a cierto $\overline{x} \in S$.*

Demostración. Sea $z \in S$ y se considera la función $h(t) = \frac{1}{2}|z - x(t)|^2$. La derivada de h es

$$h'(t) = \langle -\dot{x}(t), z - x(t)\rangle \leq 0,$$

pues $\Phi(z) \leq \Phi(x(t))$ para todo $t > 0$. Así h es decreciente, y por tanto, también la función $t \mapsto |z - x(t)|$ es decreciente. Como $|z - x(t)| \geq 0$, luego el límite $\lim_{t\to\infty} |z - x(t)|$ también existe. El conjunto S es no vacío, pues $S \supset argmin(\Phi) \neq \phi$. Además, como Φ es convexa y sci luego es sci débil y se tiene que todo ω-límite débil de $x(t)$ está en S. En virtud del lema de Opial, existe $\overline{x} \in S$ tal que $x(t) \rightharpoonup \overline{x}$ débilmente cuando $t \to \infty$. □

2.3. Sistema de segundo orden

El primer sistema de segundo orden que se considera es

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \nabla\Phi(x) = 0, \tag{2.7}$$

para Φ convexa de clase $\mathcal{C}^1(H)$, que cuando $\gamma(\cdot)$ es una constante se llama *Bola Pesada con Fricción*. El segundo sistema es

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \partial\Phi(x) \ni 0, \tag{2.8}$$

para $\Phi : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexa, sci y propia con $H = \mathbb{R}^N$, llamado *Bola Pesada con Fricción Generalizada*. Por último, el sistema

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + N_{[\Phi\leq\Phi(x)]}(x) \ni 0, \tag{2.9}$$

generaliza al anterior, pues $\partial\Phi(x) \subset N_{[\Phi\leq\Phi(x)]}(x)$ para todo $x \in dom(\Phi)$.

Observación Estos sistemas no son de descenso, es decir, una trayectoria definida por alguno de ellos no es necesariamente decreciente. En general la pregunta de la convergencia de las trayectorias es mucho más difícil que en los sistemas vistos de primer orden. Para el caso $\gamma(\cdot) \equiv \gamma_0 > 0$, se sabe que si $argmin(\Phi) \neq \phi$ y Φ es convexa, entonces toda solución de (2.7) converge débilmente a un punto mínimo (ver [1, Teorema 2.1]).

Teorema 2.8 *Sea Φ de clase $\mathcal{C}^1(H)$ convexa y acotada inferiormente. Sea $x \in \mathcal{C}^2([0, +\infty); H)$ solución de (2.7). Entonces $\dot{x} \in L^2([0, \infty))$, $\dot{x}(t) \to 0$ y*

$$\lim_{t\to+\infty} \Phi(x(t)) = \inf \Phi$$

Más aún, si $argmin(\Phi) \neq \phi$, entonces existe $\hat{x} \in argmin(\Phi)$ tal que $x(t) \to \hat{x}$ debilmente en H cuando $t \to \infty$.

Demostración. Ver [1]. □

Las nociones de decaimiento que se estudian para γ cuando ésta depende del tiempo son

(a) $\int\limits_0^{+\infty} \gamma(t)dt = +\infty,$

(b) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\int_0^t \gamma(s)ds}dt < +\infty,$

las cuales nos dicen que $\gamma(t)$ no va demasiado rápido a 0, cuando t va a $+\infty$. Por supuesto, $\gamma(t) \equiv \gamma_0 > 0$ satisface ambas condiciones, mientras que $\gamma(t) \equiv 0$ no satisface ninguna de ellas. En general, como $\gamma \geq 0$ luego $\int_0^t \gamma(s)ds$ es creciente y así $e^{-\int_0^t \gamma(s)ds}dt$ es decreciente. Por tanto la condición (b) implica que $e^{-\int_0^t \gamma(s)ds} \to 0$, lo que a su vez implica que $\int_0^t \gamma(s)ds \to +\infty$; es decir (b) implica (a). Por otro lado las condiciones no son equivalentes como muestra el siguiente ejemplo. Sea $\gamma(t) = \frac{1}{1+t}$. Entonces

$$\int_0^t \gamma(s)ds = \ln(1+t) \longrightarrow +\infty.$$

O sea γ cumple (a). Ahora bien

$$\int_0^{+\infty} e^{-\int_0^t \gamma(s)ds}dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t}dt = +\infty.$$

Es decir, γ no cumple (b).

Ejemplo En el caso particular $\Phi \equiv 0$, la ecuación es

$$\ddot{x}(t) + \gamma(t)\dot{x}(t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{2.10}$$

Si se multiplica (2.10) por $e^{\int_0^t \gamma(s)ds}$ y se integra en $[0,t]$, se obtiene

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(0)e^{-\int_0^t \gamma(s)ds}.$$

Volviendo a integrar en $[0,t]$ se llega a que

$$x(t) = x(0) + \dot{x}(0)\int_0^t e^{-\int_0^s \gamma u du}ds,$$

solución que en el caso $\dot{x}(0) \neq 0$, converge cuando $t \to \infty$ ssi se cumple la condición (b).

Observación Se tiene por un lado que para asegurar la convergencia de las soluciones de (2.7), es necesaria la condición (b), mientras que para asegurar la no-convergencia, es necesario que se cumpla lo contrario a (b), esto es,

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\int_0^t \gamma(s)ds}dt = +\infty.$$

Son necesarias tales condiciones en el sentido genérico de que haya convergencia para cualquier Φ y cualquier condición inicial.

Se considera la condición geométrica sobre $S := argmin(\Phi)$ y $\overline{x} \in S$ llamada *Strict Obtuseness Condition*, la que es como sigue

$$-N_S(\overline{x}) \subset int(T_S(\overline{x})) \cup \{0\}\,. \tag{2.11}$$

La condición anterior se satisface para todo punto $\overline{x} \in int(S)$, pues en ese caso $-N_S(\overline{x}) = \{0\}$ y $T_S(\overline{x}) = H$. También para todo punto $\overline{x}$ tal que el borde de S sea suave, porque así $N_S(\overline{x}) \in \mathbb{R}_+\xi$ para cierto $\xi \neq 0$, y por dualidad es fácil ver que se cumple (2.11), de hecho $B(\xi, \|\xi\|) \subset T_S(\overline{x})$. En una dimensión la única manera en que (2.11) no se cumpla es que $S := argmin(\Phi) = \{\overline{x}\}$, de modo que $-N_S(\overline{x}) = \mathbb{R}$ y $T_S(\overline{x}) = \{0\}$. En cambio, en dimensiones superiores la condición puede fallar por la geometría del conjunto S, por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$ cualquier polígono convexo S que tenga en uno de sus vértices $\overline{x}$ un ángulo interno estrictamente menor que $\pi/2$ no cumple (2.11).

Recientemente se probó que si una solución $x \in W^{2,1}_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^N)$ del sistema (2.8) converge a un punto $\overline{x} \in S := argmin(\Phi)$ que satifaga la condición (2.11), entonces x tiene que ser estacionaria, en el sentido de que debe ser constante a partir de cierto tiempo en adelante. Se prueba el mismo resultado, pero para el sistema más general (2.9) siguiendo la misma línea de demostración. Antes de enunciar el teorema se establece dos resultados que se usará.

Lema 2.9 *Sea $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa, sci y propia tal que $S := argmin(\Phi) \neq \phi$, y $\overline{x} \in S$. Si existe un cono abierto K_0 tal que $N_S(\overline{x}) \subset K_0 \cup \{0\}$, entonces existe una vecindad V de $\overline{x}$ tal que $N_{[\Phi \leq \Phi(x)]}(x) \subset K_0 \cup \{0\}$, para todo $x \in V$.*

Demostración. Se supone para llegar a una contradicción que existen (x_n) convergente a $\overline{x}$ y $x_n^* \in N_{[\Phi \leq \Phi(x_n)]}(x_n)$ tal que $x_n^* \notin K_0 \cup \{0\}$. Como los conjuntos son estables para la multiplicación por escalares y $x_n^* \neq 0$, se puede suponer sin pérdida de generalidad que los x_n^* son de norma 1, más aún que $x_n^* \to x^*$ para cierto x^* de norma 1. Por la semicontinuidad exterior de $N_{[\Phi \leq \Phi(\cdot)]}(\cdot)$ se tiene que $x^* \in N_{[\Phi \leq \Phi(\overline{x})]}(\overline{x})$, de modo que $x^* \in K_0$, pues $x^* \neq 0$. Por tanto, K_0 es una vecindad de x^*, pero $x_n^* \neq K_0$ para todo n, una contradicción con $x_n^* \to x^*$. $\square$

Proposición 2.10 *Sea $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa, sci y propia tal que $S := argmin(\Phi) \neq \phi$. Sea $\overline{x} \in S$ que satisface* (2.11).

Luego existe $\lambda > 0$ junto a un cono convexo cerrado K que es puntudo y una vecindad V de $\overline{x}$ tal que

$$K \cap \mathbb{B} \subset \lambda(int(S) - \overline{x}) \cup \{0\} \quad y \quad -N_{[\Phi \leq \Phi(x)]}(x) \subset int(K) \cup \{0\}\,, \tag{2.12}$$

para todo $x \in V$.

Demostración. Si $\overline{x} \in int(S)$, entonces $N_S(\overline{x}) = \{0\}$ con lo cual basta tomar $K = \{0\}$. Por ello se supondrá de aquí en adelante que $\overline{x} \in fr(S)$. Se define K como

$$K = \left\{x \in \mathbb{R}^N \mid d(x, -N_S(\overline{x})) \leq d(x, \mathbb{R}^N \backslash T_S(\overline{x}))\right\}.$$

Se prueba que K es un cono convexo cerrado y puntudo, y que satisface

$$K \subset int(T_S(\overline{x})) \cup \{0\}\,, \tag{2.13}$$

$$-\, N_S(\overline{x}) \subset int(K) \cup \{0\}\,. \tag{2.14}$$

La inclusión (2.13) nos permite concluir la existencia de un $\lambda > 0$ tal que $K \subset \lambda(int(T_S(\overline{x})) - \overline{x}) \cup \{0\}$, y (2.14) nos entrega junto con el Lema (2.9) para $K_0 = -int(K)$, la existencia de una vecindad V de $\overline{x}$ tal que $-N_{[\Phi \le \Phi(x)]} \subset int(K) \cup \{0\}$ para todo $x \in V$.

□

Ahora sí se enuncia el resultado principal de este capítulo, concerniente al sistema (2.9) que por comodidad se recuerda aquí

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + N_{[\Phi \le \Phi(x)]}(x) \ni 0$$

Teorema 2.11 *Sea $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función convexa, y $\overline{x} \in S := argmin(\Phi)$ tal que cumple la condicion (2.11). Sea $\gamma \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ una función tal que $\int_0^\infty e^{-\int_0^s \gamma(u)du} ds = +\infty$. Sea una solución $x \in W^{2,1}_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^N)$ que satisface la inclusión (2.9) ctp en $[0, +\infty)$. Si la trayectoria $x(\cdot)$ converge hacia $\overline{x}$, luego es estacionaria.*

Demostración. Como $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \overline{x}$, gracias a el Teorema 2.10, existe un cono convexo cerrado K que es puntudo, junto con una constante $\lambda > 0$ y un instante $t_0 \ge 0$ tales que

$$K + \frac{1}{\lambda}\mathbb{B} \subset (int(S) - \overline{x}) \cup \{0\}\,, \qquad -N_{[\Phi \le \Phi(x(t))]} \subset K, \quad \forall t \ge t_0. \tag{2.15}$$

Se fija $v \in K^*$. Por la inclusión (2.9) se tiene que $\ddot{x}(t) + \gamma(t)\dot{x}(t) \in K$ con lo cual

$$\langle \ddot{x}(t) + \gamma(t)\dot{x}(t), v\rangle \le 0, \quad \forall t \ge t_0 \quad ctp. \tag{2.16}$$

Si se define la función auxiliar $p(t) = \langle x(t), v\rangle$, la desigualdad anterior se ve como $\ddot{p}(t) + \gamma(t)\dot{p}(t) \le 0, \quad \forall t \ge t_0$, *ctp*. Se probará ahora que $\dot{p}(t) \ge 0$ para todo $t \ge t_0$. Se supone por contradicción que existe un instante $t_1 \ge t_0$ tal que $\dot{p}(t_1) < 0$. Si se multiplica (2.9) por $e^{\int_0^t \gamma(s)ds}$, y se integra dos veces, se lega a que

$$p(t) \le p(t_1) + \dot{p}(t_1) \int_0^t e^{-\int_0^s \gamma(u)du} ds$$

donde el lado derecho va a $-\infty$ cuando $t \to +\infty$ y así $p(t) \to -\infty$, contradiciendo el hecho que $x(t)$ es acotada. Por lo tanto

$$\langle x(t) - \overline{x}, v\rangle \le 0, \quad \forall t \ge t_0,$$

esto es $x(t) - \overline{x} \in K^{**} = K$, y así por la primera parte de (2.15) se concluye $x(t) \in int(S) \cup \{\overline{x}\}$.

Lo que queda de la demostración se hace en dos casos:

(a) Para todo $t \geq t_1$, $x(t) \in int(S)$.

(b) Existe $t_2 \geq t_1$ tal que $x(t_2) = \overline{x}$.

Caso (a): Se tiene que $N_{[\Phi \leq \Phi(x(t))]}(x(t)) = N_S(x(t)) = \{0\}$ con lo cual (2.9) se convierte en la ecuación

$$\ddot{x}(t) + \gamma(t)\dot{x}(t) = 0, \quad t \geq t_1.$$

Se verá que $\dot{x}(t) = 0,\ \forall t \geq t_1$. Para llegar a una contradicción, se supone que existe $t_1^* \geq t_1$ tal que $\dot{x}(t_1^*) \neq 0$. La solución en $[t_1^*, t]$ es la función

$$x(t) = x(t_1^*) + \dot{x}(t_1^*) \int_{t_1^*}^{t} e^{-\int_0^s \gamma(u)du} ds,$$

que no converge, pues $\int_0^\infty e^{-\int_0^s \gamma(u)du} ds = +\infty$ y $\dot{x}(t_1) \neq 0$, lo cual no puede ocurrir porque $x(\cdot)$ es acotada. Se tiene entonces que $\dot{x} = 0$, por lo cual $x(t) = \overline{x}, ctp$.

Caso (b): Dado que $x(t_2) = \overline{x}$ la integración de (2.16) en $[t_2, t]$ entrega que $\langle x(t) - \overline{x}, v\rangle \geq 0$ para cada $t \geq t_2$ y para cada $v \in K^*$. De esta forma $x(t) - \overline{x} \in -K^{**} = -K$, pero como K es puntudo

$$x(t) - \overline{x} \in K \cap (-K) = \{0\},$$

esto es $x(t) = \overline{x}$, para todo $t \geq t_2$.

En cada caso se llega a que $x(\cdot)$ es constante en el tiempo, es decir, solución estacionaria.

$\square$

Conclusión

Por medio del presente informe que da cuenta de la investigación realizada como memoria, se obtuvo los siguientes resultados.

1. Se obtuvo una representación del conjunto δ-normal a los subniveles de una función convexa y semicontinua inferior, en función de los ε-subdiferenciales de la función.
2. Se obtuvo una representación del cono normal a conjuntos de subnivel de una función convexa y semicontinua inferior en espacios vectoriales topológicos localmente convexos (evtlc), por medio de los ε-subdiferenciales. Se mostró que ésta extiende los resultados ya conocidos en espacios de Banach. En particular, para puntos que satisfacen la condición de calificación de Slater, la representación del cono normal es de la misma forma que la obtenida anteriormente (ver Corolario 1.3).
3. Se mostró una condición de optimalidad necesaria y suficiente de optimalidad para un problema de optimización convexa en un evtlc.
4. Se dió una caracterización del cono tangente al subnivel de una función convexa y semicontinua inferior Φ, por medio de las ε-derivadas direccionales de Φ.
5. Se probó, usando las representaciones del cono normal a los subniveles de una función Φ en $\Gamma_0(X)$, la semicontinuidad exterior del operador que a un punto $x \in X$ le asocia el cono normal al subnivel $[\Phi \leq \Phi(x)]$ en x.
6. Se extendió el resultado de convergencia de trayectorias obtenido por L. Thibault y A. Cabot [13, Teorema 7.6] para un sistema más general que el considerado por ellos, uno que involucra el cono normal a los subniveles del potencial Φ.

Además se resume a continuación algunas preguntas que se dejaron abiertas en la investigación.

Preguntas abiertas

1. Con relación a los límites superiores e inferiores de multifunciones y a la operación de polar, se deja abierta la pregunta de si la relación (23) se tiene como igualdad, es decir, si para una multifunción $M : T \subset X \rightrightarrows Z$ se cumple

$$\tau^* - \liminf_{T \ni x \to \overline{x}} M(x)^\circ = \left(\tau - \limsup_{T \ni x \to \overline{x}} M(x)\right)^\circ$$

para ciertas topologías τ y τ^* en Z y Z^* repectivamente. De igual manera se pregunta si se tiene

$$\overline{conv}\left(\tau^* - \limsup_{T\ni x\to\overline{x}} M(x)^\circ\right) = \left(\tau - \liminf_{T\ni x\to\overline{x}} M(x)\right)^\circ$$

2. En relación con la inclusión (2.4) en $\mathbb{R}^N$ para $\Phi \in \Gamma_0(\mathbb{R}^N)$:

$$-\dot{x}(t) \in N_{[\Phi\leq\Phi(x(t))]}(x(t)), \quad t > 0$$

se pregunta si la función $t \mapsto \Phi(x(t))$ es decreciente. ¿Y en un espacio de Hilbert?

3. Se propone tratar de construir un ejemplo de una solución no estacionaria del sistema (2.8) en el caso que γ satisface $\int_0^\infty e^{-\int_0^t \gamma(s)ds}dt = \infty$, que converja a un punto $\overline{x}$ que satisfaga la condición de obtusidad no estricta

$$-N_S(\overline{x}) \subset T_S(\overline{s}) \tag{OC}$$

Lo anterior para poder entender si es necesaria la estricta obtusidad en el Teorema 2.11.

4. Se propone dar una caracterzación del cono normal a los subniveles de una función Φ convexa y semicontinua inferior, en términos de los subdiferenciales de funciones Φ_n que aproximen a Φ en algún sentido variacional.
5. El principio variacional de Ekeland y el Teorema de Brøndsted Rockafellar son válidos en espacios de Banach y no en general en los evtlc. ¿Se podrá extender la fórmula (2) a espacios mas generales X, bajo ciertas hipótesis sobre la función Φ (por ejemplo, Φ convexa y epipuntada)?
6. La relación

$$N_{[\Phi\leq\Phi(\overline{x})]}(\overline{x}) = \mathbb{R}_+\partial\Phi(\overline{x}) \cup N_{dom\Phi}(\overline{x})$$

o de manera más general para $\delta \geq 0$

$$N^\delta_{[\Phi\leq\Phi(\overline{x})]}(\overline{x}) = \bigcup_{\mu\geq 0} \partial_\delta(\mu\Phi)(\overline{x})$$

se vió que es válida en el caso que $\overline{x}$ sea un punto de Slater. ¿Será válida para una clase más grande de puntos, por ejemplo, puntos donde la función tiene una cota de error?

7. Se propone también extender la fórmula (1.1) a una clase más grande de funciones, relajando el tipo de subdiferencial utilizado.

Bibliografía

[1] F. Alvarez. On the minimizing property of a second order dissipative system in hilbert spaces. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38(4):1102–1119, 2000.

[2] H. Attouch and F. Alvarez. The heavy ball with friction dynamical system for convex constrained minimization problems. pages 25–35, 2000.

[3] H. Attouch, G. Buttazzo, and G. Michaille. *Variational analysis in Sobolev and BV spaces: applications to PDEs and optimization*, volume 17. Siam, 2014.

[4] H. Attouch, A. Cabot, and P. Redont. The dynamics of elastic shocks via epigraphical regularization of a differential inclusion. barrier and penalty approximations. *Adv. Mth. Sci. Appl.*, 12:273–306, 2002.

[5] D. Azé. *Eléments d'analyse convexe et variationnelle.* Ellipses, Paris, 1997.

[6] G. Beer. *Topologies on closed and closed convex sets*, volume 268. Springer Science & Business Media, 1993.

[7] J. Borwein. A note on ε-subgradients and maximal monotonicity. *Pacific Journal of Mathematics*, 103(2):307–314, 1982.

[8] H. Brezis. Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de hilbert. number 5 in north holland math. *Studies. North-Holland, Amsterdam*, 1973.

[9] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Springer Science & Business Media, 2010.

[10] A. Brøndsted and R.T. Rockafellar. On the subdifferentiability of convex functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, pages 605–611, 1965.

[11] A. Cabot, H. Engler, and S. Gadat. On the long time behavior of second order differential equations with asymptotically small dissipation. *Transactions of the American Mathematical Society*, 361(11):5983–6017, 2009.

[12] A. Cabot and L. Paoli. Asymptotics for some vibro-impact problems with a linear dissipation term. *J. Math Pures Appl.*, 87(3):291–323, 2007.

[13] A. Cabot and L. Thibault. Sequential formulae for the normal cone to sublevel sets. *Transactions of the American Mathematical Society*, 366(12):6591–6628, 2014.

[14] F.H. Clarke. *Optimization and nonsmooth analysis*, volume 5. Siam, 1990.

[15] J.-B. Hiriart-Urruty and R.R. Phelps. Subdifferential calculus using ε-subdifferentials. *Journal of Functional Analysis*, 118(1):154–166, 1993.

[16] J.J. Moreau. Evolution problem associated with a moving convex set in a hilbert space. *Journal of differential equations*, 26(3):347–374, 1977.

[17] R.T. Rockafellar. *Convex analysis*. Princeton university press, 2015.

[18] R.T. Rockafellar and R. J.B. Wets. *Variational analysis*, volume 317. Springer Science & Business Media, 2009.

[19] L. Thibault. Sequential convex subdifferential calculus and sequential lagrange multipliers. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 35(4):1434–1444, 1997.

[20] M. Volle. Subdifferential of the upper envelope of convex-functions. *COMPTES RENDUS DE L ACADEMIE DES SCIENCES SERIE I-MATHEMATIQUE*, 317(9):845–849, 1993.

[21] C. Zălinescu. *Convex analysis in general vector spaces*. World Scientific, 2002.