



**UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA DE MINAS**

**MODELAMIENTO GEOESTADÍSTICO DE LA INCERTIDUMBRE  
EN LEYES Y TIPOS DE ROCA EN UN YACIMIENTO FERRÍFERO**

**TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN MINERÍA**

**NADIA MACARENA MERY GUERRERO**

**PROFESOR GUÍA  
XAVIER EMERY**

**MIEMBROS DE COMISIÓN  
ALEJANDRO CÁCERES SAAVEDRA  
NELSON MORALES VARELA  
EDUARDO MORENO ARAYA**

**SANTIAGO DE CHILE  
2016**

## RESUMEN

Cuantificar la incertidumbre geológica en un depósito mineral permite tomar decisiones informadas en etapas mineras posteriores, lo que además permite incorporar la variabilidad real del fenómeno natural que se busca determinar.

El presente trabajo aborda el problema de la cuantificación multivariable de leyes y tipos de roca existentes en un yacimiento ferrífero, donde las variables de interés corresponden a las leyes de cinco elementos (hierro, sílice, manganeso, fósforo, aluminio), la pérdida de fuego, la fracción granulométrica del material superior a 6.3 [mm] y los tipos de rocas. La información proviene de una malla de sondajes pseudo-regular con dimensiones de 50x50 [m] a 100x100 [m]. La cuantificación de los recursos se realiza mediante un modelo multigaussiano para la determinación de leyes, pérdida de fuego y granulometría, y un modelo plurigaussiano para la determinación de tipos de roca.

La metodología de trabajo considera una primera etapa donde se generan distintos escenarios geológicos mediante simulación plurigaussiana de los tipos de roca, para luego efectuar la cosimulación de leyes en los dominios simulados, mediante simulación multigaussiana. En este último punto se utilizan dos modelos de cosimulación, uno que considera las variables originales y otro que se plantea con variables transformadas.

Esta metodología es distintiva por tres razones. La primera es la definición de unidades geológicas propias a cada variable de interés, la segunda es la interpretación de correlación cruzada entre todas las variables a simular, incluso cuando se definen en unidades geológicas que no se encuentran en contacto, y la tercera corresponde a la generación de un modelo de cosimulación capaz de reproducir la relación estequiométrica existente entre las variables de interés. La primera característica permite generar un conjunto de unidades geológicas que, en determinados casos, podrán ser iguales, disjuntas o traslapadas, dando paso a contactos diferentes a través de la misma frontera, según cual sea la variable considerada. La segunda particularidad permite capturar información geológica, incluso cuando las variables se definen en unidades diferentes, permitiendo que el modelo de incertidumbre capture información adicional.

La simulación de los tipos de roca permitió generar veinte escenarios que reproducen la continuidad espacial, contactos, proporciones locales y la información de los sondajes condicionantes, en realizaciones que presentaron baja variabilidad, produciendo así una pequeña incertidumbre en dicho atributo.

La cosimulación de leyes se efectuó de forma análoga en los dos modelos planteados, obteniendo veinte realizaciones del yacimiento de interés. Estas realizaciones permitieron determinar la distribución de las leyes medias y correlaciones de cada una de las variables. A través de los resultados obtenidos, es posible apreciar la relación directa que existe entre la generación de leyes simuladas y los tipos de roca a las cuales se asocian.

Finalmente, se concluye que la cosimulación de las variables de interés responde de forma adecuada en términos estadísticos, de continuidad y de reproducción de las distribuciones, generando múltiples escenarios posibles de la realidad del yacimiento estudiado. La metodología propuesta se presenta como alternativa en la determinación de tipos de rocas y leyes en un yacimiento polimetálico, incorporando la información de las variables continuas y también su relación con las variables categóricas.

## ABSTRACT

To quantify the geological uncertainty in an ore deposit allows to take informed decisions in following mining stages, as well as incorporating the real variability of the wanted natural phenomenon.

This work addresses the multivariable laws quantification problem and the types of existing rocks in a ferriferous deposit, where the variables of interest correspond to the five elements grades (iron, silica, manganese, phosphorus, aluminum), heat loss, the granulometric fraction of the upper material at 6.3 [mm], and the types of rocks. The information comes from a 50x50 [m] to 100x100 [m] pseudo-regular drilling mesh. The quantification of resources is carried out through a multi-Gaussian model to determine grades, heat loss and granulometry, and a pluri-Gaussian model to define the types of rocks.

The methodology considers a first phase where different geological stages are generated by means of a pluri-Gaussian simulation of the types of rocks, in order to execute the co-simulation of grades on the simulated domains, by a multi-Gaussian simulation. In this last point, two co-simulation models are employed; one which takes into account the original variable, and other that considers transformed variables.

This methodology is distinctive for three reasons. The first one is the definition of geological units to each variable of interest; the second reason is the interpretation of a mixed co-rrrelation between every variable to simulate, even when they are defined in geological units that are not in touch; and the third one corresponds to the creation of a co-simulation model able to reproduce the existing stoichiometric relation among the variables of interest. The first feature agrees to produce a group of geological units which, in determined cases, could be identical, disjointed or overlapped, giving way to different contacts through the same border, according to what the considered variable is. The second characteristic allows to capture geological information, even when the variables are defined in different units, permitting the model uncertainty to obtain additional information.

The simulation of the types of rocks granted the creation of twenty stages that reproduce the spatial continuity, contacts, local proportions and the information of determining drilling, in realizations that presented low variability, generating that way a minor uncertainty in the specified attribute.

The co-simulation of grades was analogically executed in the two considered models, obtaining twenty realizations from the deposit of interest. These realizations permitted to determine the distribution of the average grades and the co-rrrelations of each of the variables. Using the recovered results, it is feasible to value the direct relation that exists between the creation of simulated grades and the types of rocks associated to them.

Finally, it is concluded that the cosimulation of the variables of interest appropriately responds in statistical, continued terms, and in the reproduction of the distributions, generating multiple possible stages of the studied deposit's reality. The proposed methodology serves as an alternative in the determination of the types of rocks and grades of a polymetallic deposit, incorporating the information of the constant variables and also their relation with the categorical variables.

## AGRADECIMIENTOS

*A los principales responsables de estar hoy terminando este trabajo y cerrar un ciclo muy importante de mi vida universitaria... Gracias familia, pololo y amigos.*

*Gracias mamá, papá, hermanos, tíos y sobrinos por estar siempre allí... por acompañarme en mis primeros pasos, apoyar mis caídas, entender mis miedos y creer incondicionalmente en mí. Por tu compañía y cuidados gracias mamá; por tu sabiduría gracias papá; por tus enseñanzas, tu ejemplo y compañía gracias Andrés; por tu fuerza y sabiduría gracias Ariel; por sus sonrisas, inocencia y ternura gracias Matías, Fernando y Rafaela; por su apoyo constante gracias padrinos; por tu compañía incondicional y tus garritas gracias Antonia; por cuidarme y guiarme desde donde estás gracias abuela Bena.*

*Si hay alguien a quien debo agradecer este trabajo es a mi compañero de aventuras...Diego. Has sido amigo, pololo, guía, compañero, pero también has sido crítico, porque uno puede ser todo a la vez, porque nada te limita. Porque eres quien me dice lo que hago bien y también lo que hago mal, porque gracias a ti soy más segura. Gracias por entender mis decisiones y alentarme a hacer lo que me hace feliz, porque no siempre lo que queremos es lo más fácil, porque en toda decisión siempre hay riesgos, pero sé que tu estarás allí, siempre estás allí. Porque me escuchas, porque me sientes, porque me entiendes... porque eres tú, simplemente tú. Sigue acompañándome en este viaje, sigue dándome fuerza, sigue haciéndome tan feliz.*

*A mis amigos, esas personas con quienes he compartido momentos de alegría y muchas experiencias inolvidables...Stefy, Napo, Carlos, Monis, Llama, Sobi, Ian, Tomi, Robi y Lucho por todos los años de amistad que hemos compartido. A los Roomies de Calama, quienes han sido una compañía fundamental y han permitido que mi experiencia laboral sea mucho más fácil de llevar.*

*A todas las personas que conocí en el Departamento de Ingeniería de Minas de la Universidad, a esas personas que hasta hoy me dicen que vuelva, y me demuestran un cariño increíble. A los compañeros con quienes compartí parte fundamental de mi educación, gracias Javi, Sibila, Luis, Loco Carlos, Nachín, Jano, Mati, Erika y muchos más.*

*A las personas que conocí en mi primera etapa laboral, a aquellos que con una sonrisa, una palabra de ánimo o un simple gesto hacen que cada día sea diferente. Gracias Guada, Jacque, Pietro, Wilson, Roger y muchos más.*

*En todo viaje hay guardianes que guían nuestros pasos, personas que con su ejemplo se convierten en modelos a seguir... gracias profesor Xavier por su confianza, por creer en mi mucho más de lo que yo creo en mí. A usted le debo esas ganas de querer saber cada día un poco más.*

*Finalmente, a Conicyt a través de los proyectos CONICYT / FONDECYT / REGULAR / N°1130085 y CONICYT PIA Anillo ACT 1407, a Compañía Minera VALE a través del proyecto 'Geostatistical cosimulation of grades and rock types for iron resource evaluation', al Advanced Mining Technology Center (AMTC) de la Universidad de Chile y al Departamento de Ingeniería de Minas de la Universidad de Chile.*

# TABLA DE CONTENIDO

## CAPÍTULO 1

1.1.	Motivación del trabajo .....	1
1.2.	Objetivos .....	2
1.3.	Alcances del estudio.....	2
1.4.	Innovación y aporte al estado del arte.....	3

## CAPÍTULO 2: ANTECEDENTES

2.1.	Antecedentes generales sobre geoestadística .....	4
2.2.	Estimación de variables regionalizadas .....	4
2.2.1	Estudio Exploratorio .....	4
2.2.2	Estudio variográfico .....	5
2.2.2.1	Variograma.....	5
2.2.2.2	Covarianza.....	6
2.2.3	Métodos de estimación espacial.....	7
2.2.3.1	Métodos de estimación multivariable: Cokriging .....	8
2.2.3.1.1	Cokriging simple.....	8
2.2.3.1.2	Cokriging ordinario.....	9
2.2.3.1.3	Principales propiedades del cokriging.....	9
2.3.	Simulación de variables regionalizadas .....	10
2.3.1	Modelo multigaussiano .....	10
2.3.1.1	Algoritmos de simulación .....	11
2.3.1.1.1	Método de Bandas Rotantes.....	12
2.3.1.1.1.1	Caso univariable.....	12
2.3.1.1.1.2	Caso multivariable .....	12
2.3.1.1.2	Condicionamiento de las realizaciones .....	13
2.3.1.2	Implementación del algoritmo de simulación .....	13
2.3.1.3	Validación de las simulaciones .....	14
2.3.2	Simulación de variables categóricas .....	14
2.3.2.1	Simulación Gaussiana truncada .....	15
2.3.2.1.1	Principio y formulación.....	15
2.3.2.1.2	Algoritmo de simulación.....	16

2.3.2.1.2.1 Muestreador de Gibbs .....	17
2.3.2.2 Simulación plurigaussiana .....	17
2.3.2.2.1 Principio y formulación.....	17
2.3.2.2.2 Algoritmo de simulación.....	19
2.3.2.2.3 Ejemplos de aplicación .....	19

## **CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA**

3.1. Cosimulación de leyes considerando un modelo probabilístico de tipos de roca .....	20
3.1.1 Estudio exploratorio y preparación de datos disponibles.....	21
3.1.2 Definición de unidades geológicas y análisis de contacto .....	21
3.1.3 Simulación plurigaussiana de tipos de roca .....	21
3.1.4 Simulación de leyes considerando cada una de las realizaciones del modelo geológico.....	22
3.1.5 Procesamiento y análisis de resultados .....	23
3.2. Cosimulación de leyes considerando un modelo probabilístico de tipos de roca y reproducción de relaciones estequiométricas .....	23
3.2.1 Estudio exploratorio y preparación de datos disponibles.....	23
3.3. Comparación de metodologías de cosimulación de leyes .....	23

## **CAPÍTULO 4: CASO DE ESTUDIO: YACIMIENTO DE FIERRO**

4.1. Geología del depósito de fierro .....	24
4.1.1 Geología regional.....	24
4.1.1.1 Itabiritas .....	25
4.1.1.2 Itabiritas .....	25
4.1.1.3 Minerales de fierro .....	25
4.1.2 Geología local .....	26
4.2. Estudio exploratorio de sondajes de exploración.....	27
4.2.1 Base de datos.....	27
4.2.2 Distribución espacial de sondajes de exploración.....	28
4.2.3 Chequeo de relación estequiométrica.....	30
4.2.4 Estadísticas básicas: variables categóricas.....	30
4.2.4 Estadísticas básicas: variables continuas.....	32
4.2.4.1 Fierro.....	34
4.2.4.2 Sílice.....	36
4.2.4.3 Fósforo .....	38

4.2.4.4 Aluminio .....	40
4.2.4.5 Manganeso .....	42
4.2.4.6 Pérdida de fuego.....	44
4.2.4.7 Granulometría G1.....	46
4.3. Modelo de bloques interpretado.....	48

## **CAPÍTULO 5: MODELAMIENTO Y SIMULACIÓN DE TIPOS DE ROCAS**

5.1. Definición de regla de truncación .....	52
5.1.1 Primera función aleatoria Gaussiana: división del mineral.....	53
5.1.2 Segunda función aleatoria Gaussiana: división por granulometría .....	54
5.1.3 Tercera función aleatoria Gaussiana: división por fierro .....	55
5.1.4 Cuarta función aleatoria Gaussiana: división por aluminio .....	56
5.1.5 Quinta función aleatoria Gaussiana: división por manganeso .....	57
5.1.6 Sexta función aleatoria Gaussiana: división por pérdida de fuego .....	58
5.2. Variografía de funciones aleatorias Gaussianas.....	59
5.3. Umbrales de truncación.....	61
5.4. Simulación Plurigaussiana de tipos de rocas .....	61
5.5. Procesamiento de las realizaciones .....	62
5.5.1 Procesamiento a nivel global .....	62
5.5.2 Procesamiento a nivel local.....	64

## **CAPÍTULO 6: MODELAMIENTO Y COSIMULACIÓN DE LEYES**

### **MODELO N°1: COSIMULACIÓN DE VARIABLES ORIGINALES ..... 68**

6.1. Definición de unidades geológicas.....	68
6.1.1 Fierro.....	69
6.1.2 Sílice.....	71
6.1.3 Fósforo .....	74
6.1.4 Aluminio .....	76
6.1.5 Manganeso .....	78
6.1.6 Pérdida de fuego.....	80
6.1.7 Granulometría G1.....	82
6.1.8 Resumen.....	83

6.2.	Desagrupamiento.....	84
6.3.	Anamorfosis Gaussiana.....	85
6.3.1	Estadísticas de variables Gaussianas.....	86
6.3.2	Estudio de bigaussianidad.....	87
6.3.2.1	Nubes de correlación diferida .....	87
6.4.	Variografía .....	88
6.4.1	Covarianza experimental.....	88
6.4.2	Ajuste de covarianzas.....	89
6.5.	Cosimulación de leyes.....	91
6.5.1	Definición del sector a simular .....	91
6.5.2	Parámetros de la cosimulación.....	91
6.5.3	Visualización de realizaciones .....	91
<b>MODELO N°2: COSIMULACIÓN DE VARIABLES TRANSFORMADAS.....</b>		<b>95</b>
6.6.	Definición de variables transformadas.....	95
6.7.	Definición de unidades geológicas.....	97
6.8.	Desagrupamiento.....	98
6.9.	Anamorfosis Gaussiana.....	98
6.9.1	Estadísticas de variables Gaussianas.....	99
6.9.2	Estudio de bigaussianidad .....	100
6.10.	Variografía .....	100
6.10.1	Covarianza experimental.....	100
6.10.2	Ajuste de covarianzas.....	100
6.11.	Cosimulación de leyes.....	102
6.11.1	Definición del sector a simular .....	102
6.11.2	Parámetros de la cosimulación.....	102
6.11.3	Obtención de variables originales .....	102
6.11.4	Visualización de realizaciones .....	103
 <b>CAPÍTULO 7: PROCESAMIENTO DE LAS REALIZACIONES, COMPARACIÓN DE MODELOS DE COSIMULACIÓN</b>		
7.1.	Distribución y estadísticas de leyes medias simuladas .....	107
7.1.1	Incertidumbre global .....	107
7.1.2	Incertidumbre por unidad geológica .....	108

7.2.	Distribución y estadísticas en términos de varianza .....	110
7.3.	Distribución de la correlación entre variables.....	110
7.4.	Comparación de diagramas de dispersión.....	112
7.5.	Inventario de recursos: fierro .....	113
7.6.	Reproducción de la relación estequiométrica .....	114

## **CAPÍTULO 8: VALIDACIÓN DE LOS MODELOS DE COSIMULACIÓN**

8.1.1	Reproducción de estadísticas .....	116
8.1.2	Estadísticas de los errores de simulación .....	117
8.1.3	Capacidad de predicción .....	118
8.1.4	Cuantificación de la incertidumbre .....	121

## **CAPÍTULO 9: CONCLUSIONES**

9.1.	Preámbulo .....	124
9.2.	Aspectos distintivos de la metodología de trabajo.....	124
9.3	Implementación de los modelos de cosimulación propuestos .....	125
9.4	Resultados obtenidos con los modelos de simulación propuestos: aplicación en yacimiento ferrífero.....	125
9.5	Validación del modelo de cosimulación propuesto .....	127
9.6	Utilidad de los modelos de simulación de tipos de roca y leyes.....	127
9.7	Conclusiones finales.....	127
9.8	Recomendaciones y enfoques futuros .....	128

<b>BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>129</b>
--------------------------	------------

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

La correcta cuantificación de los recursos en un depósito mineral es determinante en los procesos mineros posteriores. En particular, impacta la planificación y la envolvente económica que determinan en gran medida el éxito de un proyecto minero. Para que lo anterior se realice de forma adecuada, es necesario considerar la mayor cantidad de factores que puedan afectar la determinación de los recursos de un yacimiento.

En la industria minera hay que hacer frente a distintas fuentes de variabilidad, como el mercado (precio y parámetros económicos), la geología y la operación. En particular, el desconocimiento geológico se genera por la reducida información disponible y las múltiples interpretaciones que son posibles generar de un mismo fenómeno natural. En este sentido, son dos las principales fuentes geológicas de variación, por un lado están las variables continuas (leyes de minerales, contaminantes, densidad de la roca, entre otras) y por otro las variables categóricas, asociadas principalmente a tipos de rocas y unidades geológicas.

La determinación de las variables geológicas antes descritas, suele realizarse con técnicas de estimación o modelos interpretados que no permiten reflejar la variabilidad geológica real. Por ejemplo, la estimación de leyes se realiza comúnmente con técnicas como kriging o cokriging, las cuales interpolan el valor en un sitio no muestreado entregando una estimación insesgada y con mínima varianza del error. Sin embargo se sabe que estas técnicas tienen ciertas limitaciones, siendo una de éstas el suavizamiento que generan en las variables estimadas. Para hacer frente a esta problemática se utilizan simulaciones que permiten generar diversos escenarios equiprobables de las variables de interés, capturando la variabilidad espacial e incertidumbre que mediante los métodos de estimación no son consideradas. Por otra parte, la incertidumbre geológica asociada a los litotipos de un yacimiento es comúnmente ignorada, debido a que se basa en modelos determinísticos e interpretados. Estos modelos están condicionados a la limitada información disponible, y usualmente son de carácter subjetivo, debido a que varían de forma significativa según quién los interpreta.

Otra característica que determina a los yacimientos actuales, es la elevada cantidad de variables de interés, las que generalmente, guardan relación entre sí. Es por este motivo que el enfoque multivariable es cada vez más aplicado en la industria minera, ya que si se consideran las relaciones existentes entre las variables se agrega información determinante al momento de la cuantificación de recursos. Una de las relaciones relevantes en la estimación de recursos, es la existente entre las unidades geológicas y la distribución espacial de las leyes, lo que se produce porque los procesos de formación de ambos no son independientes.

### 1.1. MOTIVACIÓN DEL TRABAJO

Existen diversas metodologías para la determinación de los principales atributos de interés de un depósito mineral. Cada una de ellas tiene limitaciones, características particulares y un rango de aplicación, lo que genera diversos modelos de incertidumbre.

La industria minera, generalmente emplea modelos basados en estimaciones univariadas. Estas metodologías no son del todo adecuadas, ya que generan una única respuesta ante fenómenos complejos. Como alternativa se presentan las simulaciones, que permiten cuantificar la incertidumbre y generar escenarios que reproducen la variabilidad de cada variable.

Para la determinación de leyes, el modelo multigaussiano ha sido empleado en diversos depósitos minerales con resultados satisfactorios. Por otra parte, la interpretación geológica actualmente se caracteriza por un único escenario del fenómeno, lo que no logra su reproducción de forma integral. Es por esto que, en las últimas décadas, la incertidumbre geológica de los tipos de rocas y dominios geológicos, se ha caracterizado mediante simulaciones Gaussiana truncada y Plurigaussiana, entre otras.

Por todo lo anterior, existe un especial interés en la integración de la información disponible de las campañas de sondajes, para generar modelos homologables con la realidad. Esto es lo que motiva la realización de la siguiente investigación, es decir, la generación de diversos escenarios de leyes de un yacimiento, donde se integre la información de las distintas variables, además de su relación con las unidades geológicas mediante diversos escenarios del modelo litológico.

## **1.2. OBJETIVOS**

El objetivo principal de la presente tesis es cuantificar la incertidumbre en las variables de interés de un yacimiento ferrífero, mediante simulación conjunta de leyes de elementos principales (hierro, sílice, fósforo, aluminio, manganeso, pérdida de fuego y granulometría) y simulación de los diferentes litotipos.

Para cumplir con este objetivo, se proponen los siguientes objetivos específicos claves en la investigación.

1. Determinar las unidades geológicas relevantes para cada variable de interés y realizar su simulación
2. Simular las leyes de los elementos de interés en las unidades simuladas.
3. Reproducir las relaciones existentes entre las variables de interés.
4. Validar la capacidad de predicción y medición de la incertidumbre de las simulaciones.

## **1.3. ALCANCES DEL ESTUDIO**

El trabajo de título permitirá caracterizar la incertidumbre en leyes y tipos de rocas en un yacimiento ferrífero. Para esto se dispone de una base de datos con sondajes de exploración de un yacimiento de Brasil, la cual posee información de leyes y tipos de roca. También se cuenta con un modelo de rocas interpretado, el cual servirá de *input* para generar los diferentes escenarios del modelo de rocas probabilístico.

Otro aspecto que será considerado en el estudio es la relación estequiométrica existente entre las leyes de las variables continuas, la que se representa por la siguiente expresión:

$$1.4297 \cdot Fe + Si + Al + 2.2913 \cdot P + 1.2912 \cdot Mn + LOI = 100\%$$

donde los términos de la ecuación corresponden al contenido porcentual de cada uno de los elementos, siendo *Fe* fierro, *Si* sílice, *Al* aluminio, *P* fósforo, *Mn* manganeso y *LOI* pérdida de fuego.

La expresión anterior se considera válida en el rango de valores contenido entre 95 y 105 %.

Es importante indicar que aspectos como aditividad de las leyes y no-estacionaridad de los modelos no serán considerados en el estudio.

#### **1.4. INNOVACIÓN Y APORTE AL ESTADO DEL ARTE**

Respecto a la metodología tradicional este trabajo incorpora tres variantes significativas. La primera de ellas corresponde a la definición de las unidades geológicas, la segunda hace referencia a la existencia de correlación cruzada entre todas las variables simuladas, y la tercera se refiere al uso de variables transformadas para reproducir relaciones complejas entre las variables de interés.

1. Usualmente los dominios geológicos de simulación se definen al dividir el cuerpo mineral en unidades donde las propiedades son homogéneas en términos estadísticos, espaciales y geológicos, siendo iguales estos dominios para todas las variables de interés. Además esta definición posee un carácter subjetivo debido a que varía de acuerdo a quien la realiza, estando sesgada a la experiencia e información disponible del modelo geológico. En el presente estudio, la definición de los dominios geológicos varía de acuerdo a la variable de interés, pudiendo existir unidades iguales, disjuntas o traslapadas al comparar las diferentes variables. La principal implicancia de esta forma de definición de dominios geológicos es que la ley de una variable puede ser continua a través de un límite geológico y a la vez ese mismo límite puede ser discontinuo para la ley de otra variable. Este punto es relevante también, ya que en casos multivariantes los dominios geológicos no tienen por qué ser iguales para todas las variables, ya que pueden existir relaciones entre la aparición de determinados tipos de roca y las leyes de los elementos de interés.
2. A pesar de definir unidades de estimación disjuntas para ciertas variables, se supondrá la existencia de correlación cruzada entre ellas, y entre todas las variables. Este caso particular de modelamiento se asocia a un muestreo heterotópico, para lo que se requiere emplear una herramienta capaz de capturar la correlación existente entre dos variables no muestreadas en los mismos puntos del espacio. Como solución se utiliza la covarianza cruzada, en vez del variograma tradicional. La implicancia directa de esta particularidad, está en el hecho de que una frontera geológica ‘dura’ no descarta la influencia de los datos existentes a ambos lados de la frontera, permitiendo incorporar información clave a la simulación de las variables de interés.
3. Con el objetivo de generar valores simulados capaces de reproducir diversas relaciones existentes entre las variables de interés, se plantea un modelo de cosimulación de variables transformadas. Este modelo deberá tener consideraciones particulares, ya que según cómo se definan las variables transformadas aspectos como la aditividad pueden ser relevantes.

# CAPÍTULO 2

## ANTECEDENTES

### 2.1. ANTECEDENTES GENERALES SOBRE GEOESTADÍSTICA

La geoestadística [4] es una rama de la estadística aplicada al estudio de variables regionalizadas, es decir, atributos que se distribuyen en el espacio y presentan cierta continuidad espacial, aunque varían irregularmente a escala local. Ejemplos de variables regionalizadas son la ley de los elementos del yacimiento, el tipo de roca, concentración de contaminantes, densidad de roca, entre otros. Los principales atributos que definen una variable regionalizada son su naturaleza, el dominio que abarca y el soporte sobre el cual fue medida.

En el caso multivariable se habla de coregionalización para indicar a un conjunto de variables regionalizadas.

Para comprender el estudio de una variable regionalizada  $z(x)$ , donde  $x$  denota la posición espacial, es vital entender que ésta se interpreta como una realización de un conjunto de variables aleatorias  $Z(x)$ , las que a su vez están determinadas por su distribución de probabilidad. El conjunto de variables aleatorias en el espacio se denomina función aleatoria y se representa por la siguiente expresión:

$$Z = \{Z(x), x \in \text{Dominio}\}$$

Las funciones aleatorias quedan generalmente definidas por el cálculo de sus momentos y la presunción de hipótesis como la estacionaridad, es decir, considera que las distribuciones de probabilidad son invariantes por traslación en el espacio. Existen distintos grados de estacionaridad (estricta, de segundo orden, intrínseca, local), en función de qué momentos se consideran invariantes y a qué escala se supone válida la hipótesis.

### 2.2. ESTIMACIÓN DE VARIABLES REGIONALIZADAS

Existen diversos aspectos que se deben considerar al efectuar una predicción o estimación espacial. A continuación se describen los principales.

#### 2.2.1 Estudio Exploratorio

El objetivo primordial es conocer la distribución de la variable regionalizada en estudio, definir zonas de interés, aplicar desagrupamiento en caso de muestreos irregulares, detectar errores, incoherencias o información duplicada en la base de datos, junto con la caracterización de los estadísticos uni y multivariados.

Las herramientas que se emplean en esta etapa consideran, entre otras [6] [33]:

1. Mapas de ubicación espacial de los datos

2. Estadísticas descriptivas de las variables de interés
3. Histogramas para determinar las distribuciones experimentales
4. Gráficos de probabilidad y QQ plot para la comparación de distribuciones
5. Nubes de correlación para visualizar variables en función de otras y determinar así su relación
6. Otras herramientas como: matriz de correlación, nubes de correlación diferidas, etcétera.

### 2.2.2 Estudio variográfico

Se busca caracterizar la dependencia espacial de las variables aleatorias en función de la correlación existente entre ellas. Para esto se cuenta con los momentos de segundo orden: variograma y covarianza [4].

#### 2.2.2.1 Variograma

El variograma es una de las herramientas más utilizadas en el estudio variográfico, tanto en su versión directa (univariable) como cruzada (multivariable), ya que corresponde a una medida de cómo se desestructura una variable regionalizada en el espacio. A continuación se presenta la función del variograma experimental en su versión directa.

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2|N(h)|} \sum_{N(h)} [z(x_\alpha) - z(x_\alpha + h)]^2 \quad (2.1)$$

donde la variable regionalizada es  $z(x)$ ,  $N(h)$  corresponde al número de pares de datos disponibles para una separación dada por un vector  $h$ , siendo  $\{(x_\alpha, x_\alpha + h), \alpha = 1, \dots, N(h)\}$  las posiciones de estos pares de datos. En el caso multivariable se define el variograma cruzado entre dos variables regionalizadas  $z_i$  y  $z_j$  como:

$$\widehat{\gamma}_{ij}(h) = \frac{1}{2|N_{ij}(h)|} \sum_{N_{ij}(h)} [z_i(x_\alpha) - z_i(x_\alpha + h)][z_j(x_\alpha) - z_j(x_\alpha + h)] \quad (2.2)$$

donde  $N_{ij}(h)$  es el número de pares de datos que se consideran para calcular el estimador, los que se encuentran separados entre sí por un vector  $h$ . Cabe notar que la ecuación (2.2) requiere que ambas variables  $z_i$  y  $z_j$  estén medidas en las mismas posiciones del espacio para poder ser calculada.

Las expresiones anteriores representan la función obtenida de forma experimental, la cual debe ser modelada porque considera solamente determinadas distancias y orientaciones para el vector  $h$ .

Los principales modelos consideran la definición de un efecto pepita, que tiene que ver con la discontinuidad en el origen, además de modelos teóricos como los esféricos, exponenciales, Gaussianos, entre otros.

La siguiente figura muestra los principales modelos elementales antes indicados.

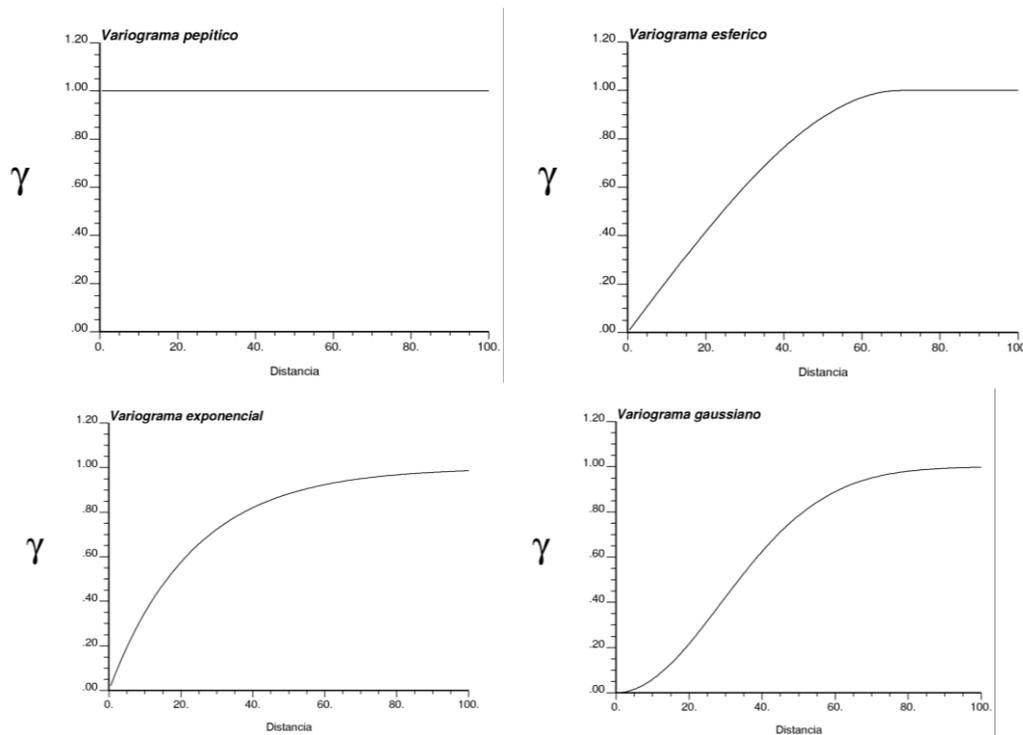


Figura 2.1: Modelos elementales para construcción de variograma modelado

Para el caso multivariable el proceso de modelamiento debe considerar todos los variogramas experimentales directos y cruzados. Este proceso se plasma usualmente en un modelo lineal de coregionalización, es decir, un conjunto de estructuras básicas asociadas a matrices donde la diagonal corresponde a las mesetas asociadas a los variogramas directos y el resto corresponde a las de los variogramas cruzados [21] [33].

La ecuación general del modelo para  $N$  variables en forma matricial se define como sigue.

$$\Gamma(h) = \sum_{s=1}^S B_s g_s(h) \quad (2.3)$$

donde  $\Gamma(h)$  es la matriz de variogramas directos y cruzados para un determinado vector  $h$ ,  $B_s = [b_{ij}^s]$  (con  $i, j = 1, \dots, N$ ) se define como una matriz de coregionalización (simétrica y de tipo semi-definida positiva) y  $g_s(h)$  es un modelo básico de variograma elegido entre los típicamente usados (exponencial, esférico, Gaussiano, etc).

### 2.2.2.2 Covarianza

La función covarianza permite medir el grado de similitud entre dos variables regionalizadas  $z_i$  y  $z_j$  medidas en  $x_\alpha$  y  $x_{\alpha+h}$  respectivamente. La función experimental queda representada mediante la siguiente expresión:

$$\widehat{C}_{ij}(h) = \frac{1}{|N_{ij}(h)|} \sum_{N_{ij}(h)} [z_i(x_\alpha) - m_i][z_j(x_{\alpha+h}) - m_j] \quad (2.4)$$

donde  $N_{ij}(h)$  es análogo al presentado en el punto anterior y  $m_i, m_j$  representan las medias de las variables  $z_i$  y  $z_j$ , respectivamente. A diferencia del variograma cruzado, la covarianza cruzada  $\widehat{C}_{ij}$  se puede calcular incluso cuando las variables  $z_i$  y  $z_j$  no están muestreadas en las mismas posiciones espaciales.

En función de las hipótesis de estacionaridad y, por lo tanto, la forma de cálculo utilizada para estimar  $m_i$  y  $m_j$  se tienen distintos tipos de covarianza. Si se considera que la media de la variable corresponde a la media de todos los valores disponibles, se trata de la función de covarianza tradicional. Si se considera que la media depende solo de los pares de datos ubicados a una distancia  $h$  se trata de la función de covarianza no ergódica. Si se considera que las medias de ambas variables tienen un valor igual a cero se trata de la covarianza no centrada.

Bajo hipótesis de estacionaridad de segundo orden y paridad, la covarianza cruzada se relaciona con el variograma cruzado mediante la siguiente expresión.

$$\gamma_{ij}(h) = C_{ij}(0) - C_{ij}(h)$$

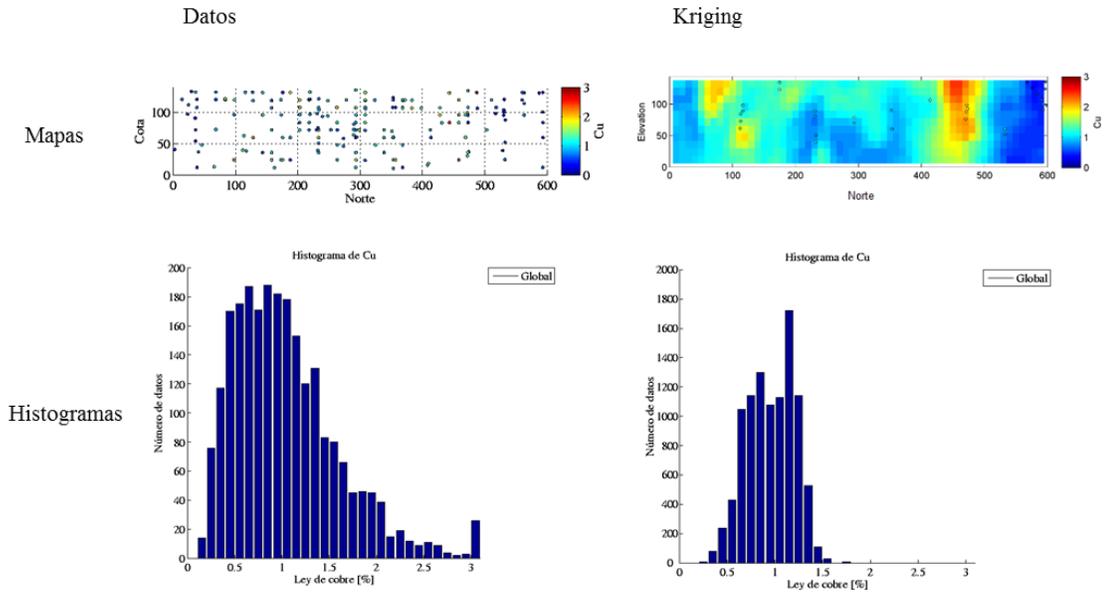
Al igual que el variograma, la función covarianza considera los mismos parámetros para su modelamiento.

### 2.2.3 Métodos de estimación espacial

La estimación tiene por objetivo interpolar el valor de una variable regionalizada en un sitio del espacio donde no se cuenta con información disponible. Esta estimación puede ser realizada a soporte puntual o de bloque, según se requiera.

Existen diversos métodos empleados para estimar como el inverso de la distancia, el vecino más cercano y el kriging, siendo esta última la técnica aplicada por excelencia, debido a que corresponde al mejor estimador lineal insesgado. Kriging considera la distancia de los datos al sitio a estimar, la redundancia de información y la continuidad espacial de la variable, lo que permite entender su alta aplicabilidad [4].

Las principales desventajas en la aplicación de este método incluyen el suavizamiento que produce en los valores estimados. El suavizamiento produce sesgos al aplicar funciones no lineales a los resultados de la estimación, lo cual permite identificar las limitaciones del método y buscar alternativas en las simulaciones.



**Figura 2.2:** A la izquierda el mapa e histograma de la variable original y a la derecha el mapa e histograma de los datos estimados mediante kriging simple. Se observa en estos últimos el suavizamiento que produce el método de estimación.

### 2.2.3.1 Métodos de estimación multivariable: Cokriging

El cokriging [33] corresponde a una técnica de estimación que permite interpolar el valor de cierta variable considerando los datos de variables secundarias, las que usualmente presentan correlación con la variable a estimar.

#### 2.2.3.1.1 Cokriging simple

Corresponde a la extensión multivariable del kriging para casos donde las medias de las diferentes variables son conocidas. La ecuación que describe dicha formulación es la siguiente.

$$Z^*(x_0) = a + \sum_{\alpha=1}^n \Lambda_{\alpha}^T Z(x_{\alpha}) \quad (2.5)$$

donde  $N$  es el número de variables,  $a$  es un vector de  $N \times 1$  (ver **Ecuación 2.6**),  $\{\Lambda_{\alpha}, \alpha = 1, \dots, n\}$  son matrices de  $N \times N$  (ponderadores de cokriging),  $m$  es un vector de  $N \times 1$  con los valores de las medias,  $\{x_{\alpha}, \alpha = 1, \dots, n\}$  son las posiciones con datos ( $Z(x_{\alpha})$  es el vector con las variables en el punto con datos  $x_{\alpha}$ ) y  $Z^*(x_0)$  es el vector con las estimaciones de las variables en la posición  $x_0$ . Se tiene:

$$a = m - \sum_{\alpha=1}^n \Lambda_{\alpha}^T m \quad (2.6)$$

Los ponderadores  $\Lambda_{\alpha}$  se determinan por medio del sistema de ecuaciones que se presenta a continuación.

$$\begin{pmatrix} C(x_1 - x_1) & \dots & C(x_1 - x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C(x_n - x_1) & \dots & C(x_n - x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \vdots \\ \Lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(x_1 - x_0) \\ \vdots \\ C(x_n - x_0) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

donde  $C(x_\alpha - x_\beta)$  es una matriz de  $N \times N$  cuyo término genérico  $C_{i,j}(x_\alpha - x_\beta)$  corresponde a la covarianza cruzada de las variables  $i, j$  entre los puntos  $x_\alpha$  y  $x_\beta$ .

En el caso de datos faltantes, se remueven las filas y columnas asociadas a los índices de aquellos datos en el sistema matricial anterior.

Esta aplicación se considera adecuada cuando se conoce completamente la media de todas las variables en el espacio. Para los casos contrarios asumir que la media es conocida es una hipótesis fuerte que limita el resultado de la estimación.

### 2.2.3.1.2 Cokriging ordinario

Se plantea de forma análoga al caso anterior, sólo que debido al desconocimiento en la media de las variables a estimar, se agrega una restricción, la que se traduce en que la suma de los ponderadores de la variable a estimar sea igual a uno, mientras que los de las variables secundarias suman cero.

La expresión que permite el cálculo de los valores estimados es la siguiente.

$$Z^*(x_0) = \sum_{\alpha=1}^n \Lambda_\alpha^T Z(x_\alpha) \quad (2.8)$$

con las mismas notaciones empleadas en la sección anterior.

Las matrices de ponderadores  $\Lambda_\alpha$  y multiplicadores de Lagrange ( $M$ ) se determinan por medio del sistema de ecuaciones que se presenta a continuación.

$$\begin{pmatrix} \Gamma(x_1 - x_1) & \dots & \Gamma(x_1 - x_n) & I \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Gamma(x_n - x_1) & \dots & \Gamma(x_n - x_n) & I \\ I & \dots & I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \vdots \\ \Lambda_n \\ -M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma(x_1 - x_0) \\ \vdots \\ \Gamma(x_n - x_0) \\ I \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

donde  $\Gamma(x_\alpha - x_\beta)$  es una matriz de  $N \times N$ , cuyo término genérico es  $\gamma_{i,j}(x_\alpha - x_\beta)$ , que corresponde al variograma cruzado de las variables  $i, j$  entre los puntos  $x_\alpha$  y  $x_\beta$ , y  $M$  es una matriz de  $N \times N$  (multiplicadores de Lagrange),  $0$  corresponde a una matriz de  $N \times N$  ceros, e  $I$  es la matriz identidad de tamaño  $N \times N$ .

### 2.2.3.1.3 Principales propiedades del cokriging

La aplicación de cokriging posee las siguientes propiedades:

1. Interpolación exacta, es decir se restituye el valor de un dato en un sitio con dato medido.

2. Aditividad, lo que significa que el valor estimado en un bloque es el promedio de los valores puntuales estimados dentro de éste.
3. Suavizamiento, lo que se refleja en que las estimaciones son menos variables que los datos originales.

Una de las principales ventajas que presenta su aplicación respecto al método univariable (kriging), es el hecho de tener mejores resultados en casos donde el muestreo es heterotópico, cuando las variables auxiliares superan en proporción a la variable a estimar. Otra característica del cokriging es que permite incorporar las relaciones existentes entre las variables de interés, lo que genera una ventaja en caso de que exista correlación entre ellas y no sean linealmente dependientes.

### 2.3. SIMULACIÓN DE VARIABLES REGIONALIZADAS

Las simulaciones permiten cuantificar la incertidumbre asociada al desconocimiento de los valores reales de una variable regionalizada, a través de la construcción de diversos escenarios equiprobables de dicha variable. Según se consideren o no los datos originales al momento de simular se hablará de simulación condicional o no condicional.

La principal ventaja de las simulaciones frente a las estimaciones es que además de entregar valores en sitios no muestreados, permite medir la incertidumbre debida al desconocimiento del fenómeno que se modela, así como realizar análisis de sensibilidad y riesgo frente a escenarios base, pesimistas y optimistas [6].

Al igual que en el caso de las estimaciones, la simulación puede ser realizada considerando múltiples variables, en cuyo caso se denomina cosimulación.

El modelo de simulación empleado depende en gran medida del tipo de variable a simular, diferenciando los casos continuos (leyes, densidad, solubilidad, etc.), categóricos (tipo de roca) u objetos (fracturas y fallas). De acuerdo a lo expuesto por Chilés and Delfiner [4] los principales modelos empleados según el tipo de variable se resumen en la siguiente ilustración.

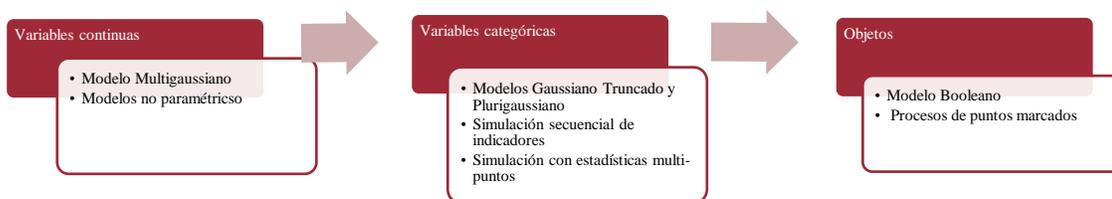


Figura 2.3: Modelos típicamente empleados según el tipo de variable a simular

#### 2.3.1 Modelo multigaussiano

Es uno de los modelos más utilizados para la simulación de leyes de elementos de interés [4] [6] [21].

Este modelo exige que la distribución espacial de la función aleatoria (que denotaremos como  $Y$ ) sea Gaussiana, es decir, que cualquier combinación lineal de sus componentes sea Gaussiana, o equivalentemente que su densidad de probabilidad sea multigaussiana, como se indica en la siguiente expresión.

$$g(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n * \sqrt{\det(C)}} * \exp\left\{-\frac{1}{2}y^t C^{-1}y\right\} \quad (2.10)$$

donde  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  son sitios del espacio,  $y = (y_1, \dots, y_n)^t$  y  $C_{i,j} = cov\{Y(\mathbf{x}_i), Y(\mathbf{x}_j)\}$ .

Lo anterior se traduce en una hipótesis fuerte de trabajo, ya que no es usual encontrar variables que cumplan con esta restricción, por lo que se hace necesaria la implementación de una transformación, denominada anamorfosis.

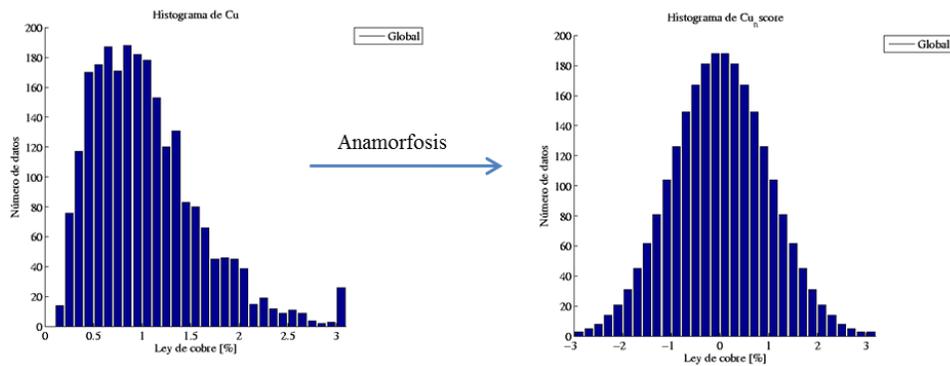


Figura 2.4: Aplicación de función anamorfosis y su efecto sobre la distribución de los valores

Si se aplica la transformación por anamorfosis resulta crucial chequear que se cumpla la distribución multigaussiana. En la práctica es suficiente verificar el carácter bigaussiano con los diferentes tests existentes [2]. Uno de estos test es el examen de:

- *Nubes de correlación diferida*: consiste en graficar los pares de datos Gaussianos separados a cierta distancia. En estas nubes se espera que el comportamiento sea elíptico a distancias menores, circular a distancias grandes y diagonales a distancias cercanas a cero.

### 2.3.1.1 Algoritmos de simulación

Existe una serie de algoritmos que permiten simular funciones aleatorias multigaussianas. Dentro de estos es posible distinguir los que condicionan de forma directa (método secuencial y de descomposición matricial) y los que no lo hacen y requieren una etapa adicional de condicionamiento (método espectral, bandas rotantes, entre otros) [4] [6] [23].

A continuación se describirá el algoritmo de simulación que reviste principal interés en el desarrollo del presente trabajo de tesis.

### 2.3.1.1.1 Método de Bandas Rotantes

Este método permite reducir el problema de la simulación en un espacio de varias dimensiones a un problema unidimensional, generando una ganancia al permitir utilizar algoritmos de simulación limitados a espacios unidimensionales o lentos frente a dimensiones mayores [10] [11] [23].

#### 2.3.1.1.1.1 Caso univariable

Básicamente consiste en simular la variable de interés a lo largo de rectas que discretizan el espacio, para posteriormente esparcir estas rectas al espacio total y considerar la simulación como la suma de ellas mediante la siguiente expresión.

$$Y(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N Y_i^{(1)}(\langle x|u_i \rangle) \quad (2.11)$$

donde  $\{u_i: i = 1, \dots, N\}$  son vectores indicando direcciones del espacio,  $\{Y_i^{(1)}: i = 1, \dots, N\}$  son las simulaciones unidimensionales independientes y  $\langle x|u_i \rangle$  representa el producto escalar usual, es decir, la proyección del sitio  $x$  en la recta orientada en  $u_i$ .

La elección de las direcciones debe considerar su distribución al azar (uniforme) o bien equidistribuida, considerando varios centenares o miles de direcciones.

Dentro de sus principales ventajas se encuentra la rapidez del método y que además se reproduce la covarianza (variograma) de forma exacta. Su principal debilidad radica en el hecho de no condicionar de forma directa las simulaciones y que la función aleatoria simulada no es exactamente multigaussiana, lo que se resuelve mediante la elección del número y la forma de distribución de las direcciones.

#### 2.3.1.1.1.2 Caso multivariable

El formulismo de este proceso se resume en las siguientes ecuaciones [10].

Se considera un conjunto de funciones aleatorias Gaussianas cuya estructura de correlación corresponde a un modelo lineal de coregionalización, tal como el de la sección 2.2.2.1. Si este modelo consta de  $S$  estructuras básicas, entonces las funciones aleatorias se pueden descomponer como sigue:

$$Y(x) = \sum_{s=1}^S Y_s(x) \quad (2.12)$$

donde  $Y_1, \dots, Y_s$  son vectores aleatorios Gaussianos independientes, con  $B_1 g_1, \dots, B_s g_s$  sus variogramas directos y cruzados. A su vez cada matriz de coregionalización es posible descomponerla según la siguiente expresión.

$$B_s = Q_s \Delta_s Q_s^T = A_s A_s^T \quad (2.13)$$

donde  $Q_s$  corresponde a la matriz de vectores propios y  $\Delta_s$  es la matriz diagonal de valores propios. Se tiene entonces:

$$Y(x) = \sum_{s=1}^S A_s W_s(x) \quad (2.14)$$

donde  $W_s$  es un vector Gaussiano con componentes independientes, cada uno de variograma  $g_s$ .

En simples palabras la simulación se reduce a la de funciones aleatorias escalares (componentes de los vectores aleatorios independientes  $W_s$ ), cuyos variogramas corresponden a las estructuras anidadas básicas utilizadas en el modelo lineal de coregionalización.

Una alternativa propuesta recientemente, consiste en simular las funciones aleatorias con una sumatoria ponderada de funciones coseno cuyas frecuencias y fases son elegidas aleatoriamente (método espectral/bandas rotantes) [Emery *et al* 2015].

### 2.3.1.1.2 Condicionamiento de las realizaciones

Con el objetivo de restituir los valores originales en las simulaciones se debe aplicar una etapa posterior de condicionamiento al método de bandas rotantes [4] [10] [21]. Este consiste básicamente en la aplicación de una etapa de kriging (cokriging en el caso multivariables), lo que se realiza con el método de sustitución de los residuos, donde el valor simulado queda representado por la siguiente expresión.

$$Y_{SC}(x) = Y^{KS}(x) + [Y_s(x) - Y_s^{KS}(x)] \quad (2.15)$$

donde  $Y^{KS}(x)$  es el kriging (cokriging) simple de la variable a simular a partir de los datos condicionantes,  $Y_s(x)$  es una simulación no condicional en el sitio  $x$  y  $Y_s^{KS}(x)$  es el kriging (cokriging) simple de la simulación no condicional a partir de los valores de dicha simulación en los sitios con datos.

En la práctica basta con la realización de un solo kriging (cokriging) para condicionar todas las realizaciones de un sitio determinado, ya que los ponderadores no varían para cada realización. Además el proceso es paralelizable, ya que sólo se consideran los valores en los sitios con datos originales. Es posible aplicar las modalidades simple y ordinario, según se suponga la media conocida o no.

### 2.3.1.2 Implementación del algoritmo de simulación

La puesta en marcha y aplicación del algoritmo bandas rotantes requiere de la realización de los siguientes pasos.

1. Anamorfosis de los datos originales.
2. Variografía sobre los datos transformados.
3. Simulación no condicional.
4. Condicionamiento de las simulaciones.
5. Transformación de los valores simulados a su distribución original.

## 6. Procesamiento de las realizaciones.

Si se trata del caso multivariable, sólo se producen sutiles diferencias respecto al procedimiento anterior. En primer lugar se realiza la anamorfosis para cada una de las variables de interés, luego se realiza la variografía tanto directa como cruzada, la cosimulación no condicional y el condicionamiento mediante el método de sustitución de residuos. En el punto anterior la única salvedad es el uso de cokriging en vez de kriging para el condicionamiento de las simulaciones. Los siguientes pasos son análogos en relación al caso univariable.

### 2.3.1.3 Validación de las simulaciones

Según Leuangtong *et al.* [26], un modelo simulado debe reproducir:

1. Los valores en los sitios muestreados
2. La distribución de los atributos de interés:
  - a. Forma del histograma
  - b. Rango de valores simulados
  - c. Resumen de estadísticas: medias, mediana y varianza
  - d. QQ plot
3. La continuidad espacial de las variables: variogramas directos y cruzados.

Estas propiedades se pueden verificar experimentalmente sobre un conjunto de realizaciones, permitiendo validar o, al contrario, rechazar las realizaciones construidas.

Adicionalmente, la técnica de validación cruzada permite validar las simulaciones realizadas sobre un conjunto de datos (en algunos casos la totalidad de estos) y analizar la capacidad de predicción del modelo empleado, en términos de precisión y exactitud [18].

Consiste en simular sucesivamente cada dato considerando para esto solo los datos restantes.

Este método busca generar una simulación concordante con los datos de origen, lo que se ratifica mediante diferencias con media cercana a cero y nubes de dispersión entre valores originales y simulados cuya regresión tiende a la diagonal.

Es importante destacar que errores en la validación no indican un modelo deficiente, sino que pueden existir parámetros mal empleados para su realización, los cuales deben ser verificados.

### 2.3.2 Simulación de variables categóricas

El modelamiento de atributos categóricos puede efectuarse mediante modelos de interpretación manual y métodos numéricos, los cuales se basan en estimaciones determinísticas que no son capaces de reproducir la variabilidad real del fenómeno geológico [35]. Como alternativa a esta situación se plantea el uso de simulaciones que permitan generar modelos de incertidumbre de los atributos geológicos.

La simulación de variables categóricas busca caracterizar la distribución espacial de diferentes dominios geológicos, como lo son los dominios mineralógicos o litofacies en depósitos minerales,

debido al impacto que estos tienen sobre los atributos petrofísicos (leyes de mineral, porosidad, entre otros) [8] [9] [12].

Dentro de los métodos que permiten simular este tipo de variables destacan dos grupos, el primero de ellos está constituido por la simulación secuencial de indicadores y el segundo por la simulación Gaussiana truncada [16] [20] [22] [27]. El primero de ellos genera diversos indicadores según el número de variables que se desea simular, sin embargo el modelo generado carece de reproducción geológica, ya que ignora restricciones importantes en esta materia. Por otra parte, el modelo Gaussiano truncado se basa en la truncación múltiple de una función aleatoria Gaussiana, teniendo como principal problema la necesidad de que los tipos de rocas están ubicados de forma estratificada en el depósito mineral. Como alternativa a esta limitación se planteó el modelo plurigaussiano, el que considera la truncación de diversas funciones aleatorias Gaussianas, permitiendo reproducir la naturaleza del fenómeno geológico que se busca modelar [24] [25].

A continuación se explican los principales antecedentes que permiten entender la simulación de variables categóricas mediante los modelos Gaussiano truncado y plurigaussiano, debido a que este último se aplicará en la investigación y el primero permite entender la base de su formulación.

### 2.3.2.1 Simulación Gaussiana truncada

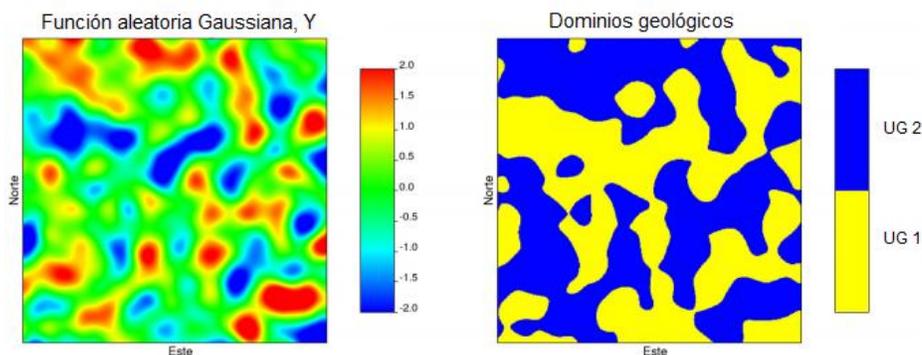
#### 2.3.2.1.1 Principio y formulación

El modelo Gaussiano truncado permite generar simulaciones de variables categóricas mediante la truncación de una función aleatoria Gaussiana, donde el número de categorías y sus proporciones tienen directa relación con el número de umbrales y valores de estos [16] [22] [27].

La función aleatoria Gaussiana  $\{Y(x), x \in \mathbb{R}^n\}$  permitirá codificar la pertenencia a una determinada unidad geológica mediante un umbral de corte  $y$ . La siguiente expresión indica dicha codificación en un caso sencillo de dos unidades:

$$Y(x) < y \Leftrightarrow \text{Unidad geológica A}$$

$$Y(x) \geq y \Leftrightarrow \text{Unidad geológica B}$$



**Figura 2.5:** Esquema de simulación Gaussiana truncada. A la izquierda la función aleatoria Gaussiana simulada y a la derecha los dominios geológicos correspondientes

La determinación del umbral  $y$  depende de la proporción espacial correspondiente a cada unidad geológica. Por lo tanto, un valor de  $y$  igual a cero significa que ambas unidades tienen el mismo volumen espacial. Si alguna unidad predomina en cantidad sobre otra, entonces el valor se modificará en función de dicha distribución espacial.

Un aspecto interesante que presenta este modelo de simulación, es la relación existente entre las funciones de covarianza de la función aleatoria Gaussiana y del indicador de la unidad  $A$  o  $B$ . En la práctica basta con determinar el variograma de indicador  $\gamma_I(h)$  con los datos de los sitios de muestreo y mediante la siguiente relación determinar el variograma  $\gamma(h)$  de la función aleatoria Gaussiana.

$$\gamma_I(h) = G(y)[1 - G(y)] - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\arcsen[1-\gamma(h)]} \exp\left(\frac{y^2}{1 + \sen\theta}\right) d\theta \quad (2.16)$$

donde  $\gamma_I(h)$  corresponde al variograma de la variable indicador,  $\gamma(h)$  es el variograma de la función Gaussiana,  $G(y)$  es la función de distribución Gaussiana asociada al umbral  $y$ .

La expresión anterior resulta compleja de desarrollar y, por lo tanto, se suele considerar la siguiente integración numérica.

$$\gamma_I(h) = G(y)[1 - G(y)] - g(y)^2 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p} H_{p-1}^2(y) [1 - \gamma(h)]^p \quad (2.17)$$

donde  $H_p$  corresponde al polinomio de Hermite normalizado de grado  $p$ .

### 2.3.2.1.2 Algoritmo de simulación

El algoritmo genérico empleado en la simulación de variables categóricas se resume en las siguientes etapas [1] [23]:

1. Simulación de la variable Gaussiana  $Y(x)$  en los sitios con datos categóricos.
2. Simulación de  $Y(x)$  en los sitios donde se busca obtener la variable categórica, condicional a las realizaciones obtenidas en el punto 1.
3. Truncar la variable  $Y(x)$  simulada, obteniendo la variable categórica (indicador) buscada.

La primera etapa es difícil de enfrentar con algoritmos de simulación usuales, por lo tanto se deben aplicar algoritmos iterativos, como el muestreador de Gibbs. La siguiente etapa puede ser desarrollada con cualquier algoritmo de simulación multigaussiana y la obtención final de la variable categórica se logra aplicando los umbrales de truncación correspondientes a la función aleatoria Gaussiana.

### 2.3.2.1.2.1 Muestreador de Gibbs

Dentro de los métodos iterativos de simulación de estados aleatorios destacan las cadenas de Markov. Su principio de simulación es construir sucesiones de estados aleatorios que distribuyan hacia la distribución esperada cuando la sucesión tiende a infinito.

Dentro de este método de simulación, destacan dos algoritmos: Metropolis y el muestreador de Gibbs [15].

El muestreador de Gibbs tiene como principio fundamental la simulación de un vector aleatorio mediante un proceso de inicialización y sucesivas iteraciones [1]. Este proceso permitirá construir un único valor Gaussiano que cumpla con las relaciones existentes entre los variogramas de la variable indicador y la función aleatoria Gaussiana.

El procedimiento de este algoritmo se resume a continuación. En este caso particular se considera la simulación de dos unidades geológicas genéricas A y B.

1. En la inicialización, para cada sitio con dato  $x_\alpha$ , se genera un valor de  $Y(x_\alpha)$  que respeta las condiciones impuestas por la unidad presente en este sitio, es decir:

$$\begin{aligned} Y(x_\alpha) < y, & \text{ si la unidad A está presente en } x_\alpha \\ Y(x_\alpha) \geq y, & \text{ si la unidad B está presente en } x_\alpha \end{aligned}$$

2. En cada iteración se debe proceder como sigue:
  - a. Seleccionar un sitio con dato  $x_\alpha$
  - b. Calcular la distribución de  $Y(x_\alpha)$  condicional a los otros datos  $\{Y(x_\beta), \text{ con } \beta \neq \alpha\}$ . Se trata de una distribución Gaussiana, cuya media coincide con el kriging simple de  $Y(x_\alpha)$  y cuya varianza coincide con la varianza de kriging simple
  - c. Simular una variable  $Y_\alpha$  según la distribución anterior
  - d. Si  $Y_\alpha$  es compatible con la unidad presente en  $x_\alpha$  (es decir,  $Y_\alpha < y$  si la unidad A está presente en  $x_\alpha$ , o  $Y_\alpha \geq y$  si la unidad B está presente en  $x_\alpha$ ), se actualiza el valor de  $Y(x_\alpha)$ , reemplazándolo por  $Y_\alpha$ .

### 2.3.2.2 Simulación plurigaussiana

Debido a las limitaciones de la simulación Gaussiana truncada frente a escenarios no regulares (estratos) o con un número elevado de dominios geológicos, es necesario considerar un modelo capaz de reproducir el fenómeno geológico bajo esas condiciones. El método de las plurigaussianas permite hacer frente a estas dificultades, mediante la truncación múltiple de diversas funciones aleatorias Gaussianas [24] [25].

#### 2.3.2.2.1 Principio y formulación

Su idea central es obtener simulaciones de categóricas mediante la truncación conjunta de dos o más funciones aleatorias Gaussianas usualmente independientes. La cantidad de funciones

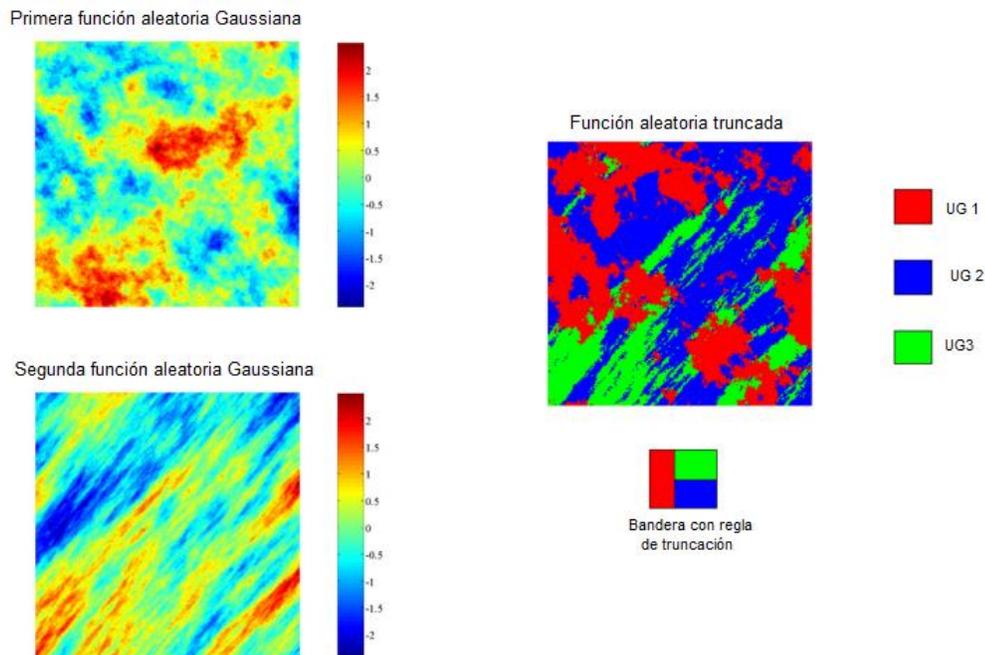
aleatorias Gaussianas permite generar modelos homologables con la realidad del fenómeno que se estudia, debido a las relaciones complejas y contactos entre las diferentes unidades geológicas.

Por lo tanto, la definición de cada función aleatoria  $Y_i(x)$  podrá considerar uno o más umbrales, como lo indica la siguiente expresión.

$$l_j < Y_i(x) \leq u_i \Leftrightarrow \text{Unidad geológica } i$$

donde  $l_j$  y  $u_i$  corresponden a los umbrales de truncación inferior y superior, respectivamente, los que definen la unidad geológica de pertenencia.

Un caso particular de simulación plurigaussiana corresponde a la **Figura 2.6**, donde se muestran dos funciones aleatorias Gaussianas junto a su respectiva regla de truncación.



**Figura 2.6:** Ejemplo de simulación plurigaussiana. A la izquierda las funciones aleatorias Gaussianas simuladas y a la derecha los dominios geológicos junto a la regla de truncación.

En la figura anterior se observa que la  $UG_1$  está superpuesta a las otras unidades, lo que permite definir una regla de truncación como sigue:

$$\begin{cases} Y_1(x) \leq y_1 \Leftrightarrow \text{Unidad geológica } 1 \\ Y_1(x) \geq y_1 \text{ e } Y_2(x) < y_2 \Leftrightarrow \text{Unidad geológica } 2 \\ Y_1(x) \geq y_1 \text{ e } Y_2(x) \geq y_2 \Leftrightarrow \text{Unidad geológica } 3 \end{cases}$$

Lo anterior, permitirá caracterizar los tipos de roca y generar un amplio rango de modelos categóricos.

### **2.3.2.2 Algoritmo de simulación**

Las principales etapas en el modelamiento y simulación condicional mediante el método de las plurigaussianas se indica a continuación.

1. Inferir los parámetros del modelo a partir de los datos categóricos (tipos de bandera, umbrales y variogramas de las funciones aleatorias Gaussianas).
2. Simular las funciones aleatorias Gaussianas en los sitios de muestreo, condicional a los datos categóricos codificados (muestreador de Gibbs).
3. Simular las funciones aleatorias Gaussianas en el resto del espacio de interés, condicionadas a los valores obtenidos en punto anterior (esto puede ser efectuado mediante cualquier algoritmo de simulación multigaussiana).
4. Aplicar la regla de truncación para obtener las unidades geológicas simuladas.

### **2.3.2.3 Ejemplos de aplicación**

En las últimas décadas, diversos autores han utilizado la simulación plurigaussiana en la generación de modelos de incertidumbre geológicos. Dentro de estos destacan diversos depósitos minerales como: yacimientos emplazados en granitos (Skvortsova *et al.* 2002), epitermales de oro (Yunsel & Ersoy 2011), pórfidos cupríferos (Carrasco *et al.* 2007; Emery & González 2007; Talebi *et al.* 2014), yacimientos emplazados en rocas carbonatadas (Yunsel & Ersoy 2013), lateritas (Rondon 2009), kimberlitas (Deraisme & Field 2006) y depósitos de uranio tipo roll-front (Fontaine & Beucher 2006).

# CAPÍTULO 3

## METODOLOGÍA

El trabajo de investigación consiste en generar un modelo de incertidumbre de las leyes de los principales elementos de interés en un yacimiento ferrífero. Para esto se propone un modelo de cosimulación que incorpora la variabilidad de las unidades geológicas mediante distintos escenarios de los tipos de roca.

El enfoque utilizado es de tipo jerárquico, es decir, se asume que el modelo de rocas es un *input* necesario para la posterior cosimulación de leyes.

Las principales particularidades en el proceso de cosimulación de leyes propuesto: la definición de dominios geológicos para cada una de las variables a simular, y el supuesto de que la correlación entre las variables existe incluso cuando los dominios geológicos no traslapan. Otro aspecto específico del modelo de cosimulación es la reproducción de una relación estequiométrica existente entre las distintas variables. Para esto se propondrá un segundo modelo de cosimulación basado en variables transformadas, pero siguiendo la misma estructura del modelo antes señalado.

El enfoque propuesto en ambos casos, permitirá generar escenarios de leyes en el yacimiento en estudio, para poder cuantificar su variabilidad. La cuantificación de tipos de roca en forma probabilística permite incorporar la distribución de dichos atributos en el espacio, junto a su relación en la formación de las distintas unidades geológicas.

A continuación se detallan los pasos necesarios para la aplicación de cada modelo de cosimulación propuesto.

### **3.1. COSIMULACIÓN DE LEYES CONSIDERANDO UN MODELO PROBABILÍSTICO DE TIPOS DE ROCA**

Este enfoque supone la simulación de forma independiente tanto de las variables continuas y categóricas existentes en el depósito mineral. En una primera instancia se generan diversos escenarios de las unidades geológicas y luego dentro de cada una de ellas se realiza la cosimulación de leyes.

Este procedimiento permite caracterizar la variabilidad tanto de las leyes como de los tipos de roca, mediante la combinación de diversos escenarios posibles. Sin embargo, no se capturan todas las relaciones existentes entre ambos atributos, ya que esta metodología se reduce a la pertenencia en una unidad geológica de cada ley a simular.

Las principales etapas se explican y resumen a continuación. En ellas se especifica el carácter jerárquico del modelo empleado.

### **3.1.1 Estudio exploratorio y preparación de datos disponibles**

Se analizará la información de los sondajes de exploración del yacimiento de hierro, estudiando sus estadísticos uni y multivariados. Como se busca reproducir la relación estequiométrica existente entre las variables se analiza si estas variables cumplen con los límites aceptables. Si existen datos que no la cumplen deben ser eliminados de la base de datos. Luego se efectuará el desagrupamiento de las variables de interés, con el objetivo de corregir eventuales muestreos no regulares. Finalmente, para complementar este estudio se desplegarán los mapas de ubicación, histogramas, matriz de correlación y otros análisis sobre las variables de interés.

### **3.1.2 Definición de unidades geológicas y análisis de contacto**

El yacimiento en estudio comprende una gran cantidad de variables continuas y categóricas, en especial existen diversos tipos de roca con características particulares. Debido a esto es crucial determinar los dominios sobre los cuales serán simuladas las leyes de las variables de interés. Como innovación principal del trabajo de tesis se definirán unidades geológicas propias para cada una de las variables. Estas unidades geológicas se definen mediante la asociación de distintos tipos de roca que comparten atributos estadísticos y geológicos. Debido a lo anterior, se trabajará con variables que pueden tener unidades geológicas iguales, completamente disjuntas o bien traslapadas. Esto último puede ser posible si las unidades geológicas de dos leyes distintas comparten al menos un tipo de roca.

Una vez definidas las unidades geológicas de cada variable de interés, es vital determinar si sus límites son duros o blandos, ya que esto influye en los parámetros de la simulación. Para este propósito, se analizarán los contactos con el uso de gráficos de media al cruzar las fronteras geológicas y gráficos de correlación entre las combinaciones posibles de las unidades geológicas. Es importante destacar que, independiente del tipo de límite definido, se considerará la correlación cruzada entre todas las variables de interés.

### **3.1.3 Simulación plurigaussiana de tipos de roca**

Se construirán diversos escenarios o realizaciones del modelo geológico con el objetivo de cuantificar su incertidumbre. Sus principales etapas son las siguientes.

- i) Definición de parámetros principales: reglas de truncación, umbrales y variogramas de las funciones aleatorias Gaussianas.**

En primera instancia, se definirán las reglas de truncación de acuerdo a los tipos de roca existentes en los datos de exploración y su relación con las variables de interés. Este proceso será multicapa, debido a la existencia de diversas variables y su morfología, generando una determinada cantidad de funciones aleatorias Gaussianas. Luego se determinarán las proporciones asociadas a los distintos tipos de roca de acuerdo a la información disponible. Y finalmente se realizarán los variogramas experimentales y modelados de las funciones aleatorias Gaussianas determinadas con las reglas de truncación.

**ii) Generación de valores Gaussianos en los sitios de muestreo condicionales a la información de los tipos de roca.**

Con los principales parámetros inferidos se deben asignar valores Gaussianos a los sitios de muestreo, lo que permitirá tener valores condicionales a los tipos de roca existentes (o bien a las variables indicadores que los codifiquen). Para producir esto se utiliza un procedimiento denominado muestreador de Gibbs, el cual consiste en asignar una función Gaussiana a cada punto y luego reemplazar los valores de ésta mediante iteraciones, donde los reemplazos se producen con los valores obtenidos mediante cosimulación de los valores restantes.

**iii) Simulación de funciones aleatorias Gaussianas en el resto del espacio**

El siguiente paso es utilizar los valores obtenidos en el punto anterior y utilizarlos como datos condicionantes para la simulación de las funciones aleatorias Gaussianas en todo el espacio. Esto se realiza mediante simulación enmarcada en el modelo multigaussiano.

**iv) Aplicación de reglas de truncación para definir los tipos de roca simulados**

Una vez simuladas todas las funciones aleatorias en el espacio, se procede a obtener los tipos de roca mediante la truncación de los valores simulados, de acuerdo a los umbrales y reglas establecidas en una primera instancia. Esto permite obtener un modelo de incertidumbre para los tipos de roca.

Como ya fue indicado, se prosigue el modelo con la cosimulación de leyes considerando los escenarios geológicos antes determinados.

### **3.1.4 Simulación de leyes considerando cada una de las realizaciones del modelo geológico**

Este parte consiste en realizar la inferencia y modelamiento de las variables a cosimular, para luego efectuar su cosimulación multigaussiana.

**i) Inferencia y modelamiento**

Para realizar la cosimulación propuesta de leyes es necesario efectuar la transformación de los datos a variables Gaussianas, mediante funciones de anamorfosis. Esto será seguido de la validación de la hipótesis de la distribución bigaussiana de los datos, lo que se realiza con el estudio de nubes de correlación diferida.

Posteriormente, se realizará el modelamiento de las principales variables en estudio mediante modelos de coregionalización que resumen las funciones de covarianzas experimentales directas y cruzadas. El modelamiento será realizado en las direcciones principales de continuidad, si es que existiesen, o en forma omnidireccional en caso contrario.

**ii) Cosimulación de variables continuas**

El modelo propuesto considera la aplicación del algoritmo bandas rotantes, el cual contempla tres pasos principales. El primero de ellos es aplicar el algoritmo no condicional sobre las variables transformadas, el segundo es el condicionamiento de los resultados obtenidos mediante la

aplicación de cokriging y finalmente se transforman los valores simulados a su distribución original.

### **3.1.5 Procesamiento y análisis de resultados**

En primera instancia se validarán las simulaciones efectuadas, para lo que se considerará la distribución de los atributos de interés (forma del histograma, rango de valores simulados y resumen de estadísticas).

También se revisará la efectividad de las cosimulaciones mediante validación cruzada, revisando el retorno de valores consistentes, según los parámetros de las cosimulaciones.

Finalmente, en función de los resultados obtenidos se generará un análisis cuantitativo y cualitativo de la cosimulación de leyes efectuada, con especial énfasis en la generación de diversos escenarios posibles del yacimiento en estudio.

## **3.2. COSIMULACIÓN DE LEYES CONSIDERANDO UN MODELO PROBABILÍSTICO DE TIPOS DE ROCA Y REPRODUCCIÓN DE RELACIONES ESTEQUIOMÉTRICAS**

Este modelo se realiza de forma análoga a lo indicado en el punto 3.1, con la salvedad de lo siguiente:

### **3.2.1 Estudio exploratorio y preparación de datos disponibles**

Para lograr reproducir de forma adecuada la relación estequiométrica se deben generar variables transformadas, cuyos términos sean capaces de reproducir la relación buscada. Las nuevas variables (transformadas) serán calculadas para cada dato de los sondeos, realizando además el estudio exploratorio correspondiente, ya que éstas son las nuevas variables de trabajo.

Los puntos siguientes pasos son análogos a lo expuesto en 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4 y 3.1.5, referidos a las nuevas variables (variables transformadas).

## **3.3. COMPARACIÓN DE METODOLOGÍAS DE COSIMULACIÓN DE LEYES**

Finalmente, se compararán los modelos de cosimulación realizados con énfasis en las diferencias de implementación, resultados, procedimientos y reproducción de relaciones estequiométricas.

# CAPÍTULO 4

## CASO DE ESTUDIO: YACIMIENTO DE FIERRO

Por aspectos de confidencialidad no serán entregados detalles del yacimiento utilizado como caso de estudio; en particular no se indicará su ubicación, nombre ni algunos parámetros claves de éste.

### 4.1. GEOLOGÍA DEL DEPÓSITO DE FIERRO

Debido a que el yacimiento de interés no se presenta de forma aislada es vital comprender la geología del sector en su totalidad. Por este motivo, se expondrán a continuación las características geológicas del sector a nivel regional y a escala local. Los nombres de sectores principales serán reservados.

#### 4.1.1 Geología regional

El complejo del que forma parte el yacimiento en estudio se encuentra localizado en Minas Gerais, Brasil. A escala regional se presentan cinco unidades estratigráficas: Basamento Cristalino, Supergrupo Rio das Velhas, Supergrupo Minas, Intrusivos del Post-Minas y Grupo Itacolomí [7].

El depósito de interés se encuentra alojado en itabiritas del Supergrupo Minas, el cual comprende tres secuencias del Paleoproterozoico, con una antigüedad de 2600 a 2000 millones de años. La unidad basal del Supergrupo Minas es el Grupo Caraça que se encuentra constituida por conglomerados aluviales y piedra arenisca sobre lutitas de aguas poco profundas. El grupo intermedio denominado Formación Cauê corresponde a una extensa región de *BIF*, sigla en inglés de formaciones de hierro bandeado (*Banded Iron Formations*) que corresponden a rocas químicas sedimentarias metalíferas donde el hierro fue depositado, de forma autóctona a partir de concentraciones altas, mediante saturación en cuencas marinas.

Las bandas generadas por este proceso se alternan entre las ricas en hierro y las bandas silíceas de chert o cuarzo, dando lugar a secuencias estratigráficas que alcanzan los cientos y miles de metros de potencia y extensión lateral. Esta formación presenta minerales como hematitas, filitas dolomíticas, calcitas y dolomitas.

La secuencia anterior descansa sobre la formación Gandarela, que se encuentra constituida fundamentalmente por carbonatos, dolomitas e itabiritas dolomíticas/manganesíferas. Las dos formaciones anteriores generan la secuencia química sedimentaria denominada Grupo Itabirita, sobre la cual se encuentran clastos sedimentarios del Grupo Piracicaba, seguidos del Grupo Sabará. Este último se encuentra formado por una secuencia metamórfica de volcanoclastos, turbiditas, *BIF* y conglomerados.

Posteriormente, se produjeron intrusiones cortantes en el Supergrupo Minas que presentan una antigüedad cercana a los 1700 millones de años. Estas intrusiones se caracterizan por presentar granitos, pegmatitas y diques máficos, además de gabros a escala local.

Finalmente una capa supérgena (Canga) se superpone a los minerales de hierro y rocas adyacentes al sector en estudio. La Canga corresponde a una roca rica en hierro formada por diversos fragmentos, minerales de hierro común o itabiritas cementadas por goethita.

El grupo Itabirita es parte significativa de la formación geológica, y por lo tanto, define en gran medida la mineralización, estructuras y minerales de interés presentes en el sector. Dentro de este grupo resulta crucial entender dos componentes: las itabiritas y los minerales de hierro.

#### **4.1.1.2 Itabiritas**

Corresponden a *BIF* oxidadas, metamorfozadas y deformadas, contenidas en depósitos con una distribución discontinua. Debido a la gran cantidad de procesos a los que se ven sometidas resulta complejo determinar sus características primarias, en especial frente a dominios de altos esfuerzos.

Composicionalmente destaca dentro de las itabiritas el cuarzo, el cual se encuentra recristalizado de forma granular. El hierro por su parte se presenta como hematita, magnetita o martita. La itabirita dolomítica consiste en bandas alternadas de carbonatos rojos y hierro oxidado negro, mientras que la itabirita anfibolítica consiste en bandas de diversos tipos de anfibolitas (grunerita, tremolita, cummintonita, antofilita y /o actinolita) y bandas con hierro oxidado.

La hematita es el principal mineral de hierro en el grupo, presentándose como martita, hematita granular y especularita. El cuarzo por su parte corresponde a la principal ganga, seguido de la dolomita y anfibolita. También se presentan en menores cantidades como gangas la clorita, apatita y otros minerales silicatados.

#### **4.1.1.3 Minerales de hierro**

La formación de estos minerales se asocia a un enriquecimiento del *BIF*. Su división se realiza en función del contenido de hierro que presentan, existiendo los de alta ley (porcentaje de hierro superior a 62% y bajo contenido de contaminantes  $SiO_2$ ,  $Al_2O_3$ ,  $CaO$ ,  $MgO$ , entre otros) y los de baja ley que presentan un rango de contenido de hierro que abarca desde el 32% al 62%, junto a diversas cantidades de contaminantes.

La presencia de gangas es similar a la de las itabiritas, es decir, una presencia escasa en los minerales de alta ley consistente en cuarzo, dolomita, clorita y talco, mientras que en los minerales de baja ley se produce un contenido que disminuye proporcionalmente con el enriquecimiento del mineral.

Es posible, dentro de los minerales de hierro, encontrar dos tipos, los duros que corresponden a minerales bandeados, masivos y con brechas secundarias y los suaves que son foliados o libres de estructuras. Los minerales suaves pueden ser explicados por concentraciones residuales de óxidos de hierro debido a lixiviación de contaminantes durante procesos de tipo supérgenos. Por su parte, los minerales duros son el resultado de la sustitución o lixiviación de los minerales presentes en la ganga.

### 4.1.2 Geología local

El yacimiento de hierro en estudio abarca 2000 metros de longitud y 500 metros de ancho, con una geología de alta complejidad. Presenta una dirección de rumbo asociada a la Formación Cauê, la cual fluctúa entre NS y N45E, además de la presencia de fallas transversales. Las direcciones NE y SO, se pliegan dando forma a la geometría del sector.

Las principales unidades geológicas presentes en el sector son itabiritas y minerales de hierro de la Formación Cauê, rocas clásticas metasedimentarias de las Formaciones Moeda y Batatal y principalmente rocas químicas metasedimentarias de la Formación Gandarela. Diques de rocas básicas cortan a las rocas del Supergrupo Minas. Cuencas terciarias compuestas de argilitas ocurren irregularmente a lo largo de la secuencia del sector. Gravas y rocas de itabirita y minerales duros son cementados por arcilla en la base de la cuenca del sector. Una capa dura de espesor cercano a los 20 metros cubre las itabiritas y minerales de hierro en la parte superior de las cimas [7].

Hay dos tipos de minerales de hierro en el complejo, los de alta ley que se denominan hematitas y los de baja ley llamados itabiritas.

Los minerales de hierro de alta ley pueden ser compactos, suaves o intermedios. Los minerales compactos son densos aglomerados de hematita y cristales de martita, mientras que los minerales suaves son friables y corresponden a agregados de hematitas con una considerable cantidad de poros. Las gangas principalmente corresponden a cuarzo, y en menor medida, clorita y sericita, siendo su ocurrencia escasa en ambos tipos de minerales.

Los minerales duros tienen una geometría estratificada con pliegues de pequeña escala. Existen además otros cuerpos lenticulares de hasta 350 metros de largo con espesor variable, los que presentan intercalaciones de mineral suave o itabirita, con una continuidad lateral y vertical.

El mineral se presenta generalmente dividido en bandas alternadas entre las porosas y compactas. La foliación tectónica está poco desarrollada y se presenta principalmente en zonas de cizalle orientadas a la especlarita. La brecha se desarrolla en la parte inferior, en el lado noroeste.

Los principales responsables de la geometría final de los depósitos de hierro se asocian a orogénesis y levantamientos de tierra, siendo el primero responsable de la generación de pliegues y fallas, mientras que el segundo proceso permitió el desarrollo de pliegues y pequeñas fracturas.

La transición de los minerales de hierro de alta ley a los de baja ley se caracteriza por un aumento en la cantidad de cuarzo presente. Los minerales de hierro de baja ley se encuentran dispersos a través de todo el depósito, usualmente gradando a los minerales suaves de alta ley o al conjunto cuarzo itabirita que se encuentra protegido de la intemperie. Estos corresponden a la itabirita friable donde el cuarzo fue lixiviado en gran parte y los óxidos de hierro fueron concentrados. De acuerdo a la cantidad de hematita, goethita y óxidos de manganeso, se pueden clasificar los minerales de baja ley en ricos en itabirita, itabirita, itabirita limonítica o itabirita manganesífera.

La itabirita limonítica se produce cerca de la superficie topográfica debido a que los poros existentes en los minerales suaves y de baja ley son ocupados por goethita. Por su parte, si estos poros son llenados por minerales de manganeso, se produce la itabirita manganesífera.

## 4.2. ESTUDIO EXPLORATORIO DE SONDAJES DE EXPLORACIÓN

La siguiente sección tiene como objetivo principal informar las características primordiales de los sondeos de exploración del depósito de hierro. Para esto se realizará el despliegue de datos y un resumen estadístico, además de relacionar las variables de interés junto con las litologías existentes en el yacimiento.

### 4.2.1 Base de datos

Se dispone de 4465 muestras de sondeos de exploración dispuestos sobre una malla casi regular que varía desde los 50x50 metros a los 100x100 metros.

La campaña de muestreo permite conocer la concentración de las variables de interés a nivel de testigos de sondeos (medida en porcentaje) junto con el tipo de roca mayoritario asociado a dicho testigo. A continuación se describen las principales variables del yacimiento junto a la simbología con que éstas serán denotadas (a lo largo de esta tesis se hará uso de las siglas para referirse a las variables, tanto en imágenes, tablas y texto).

Tabla 4.1: Definición de variables del estudio

Variable	Simbología
Fierro	Fe
Sílice	Si
Fósforo	P
Aluminio	Al
Manganeso	Mn
Pérdida de fuego	Pf
Granulometría	G1

G1 corresponde a la fracción granulométrica de mineral cuyo tamaño de partícula es superior a 6.3 [mm], mientras que pérdida de fuego corresponde al porcentaje en masa perdido por un elemento de interés sometido a una temperatura específica. Este último proceso permite que las sustancias volátiles puedan escapar. En los minerales de hierro la pérdida de fuego permite medir su calidad y en el caso particular de la goethita, sirve para realizar un análisis granuloquímico.

Se estudió la existencia de datos duplicados pero no se encontraron, a pesar de variar la distancia a la cuál serían considerados como tal.

La **Tabla 4.2** presenta los tipos de rocas presente en los datos, junto con su codificación numérica original.

Tabla 4.2: Codificación de tipos de roca

Tipo de Roca	Simbología	Código
Dolomita	DO	1
Laterita	LT	2
Estéril	AT	3
Canga	CG	4
Dolomita filítica	FD	5

Itabirita rica en aluminio	IAL	6
Itabirita rica en manganeso	IMN	7
Itabirita compacta	IC	8
Itabirita friable	IF	9
Hematita friable	HF	10
Hematita compacta	HC	11
Itabirita friable rica en fierro	IFR	12
Hematita rica en aluminio	HAL	13
Filita	FL	14
Itabirita anfibolítica	IA	15
Estéril	GT	16
Intrusivos	IN	17
Estéril	RO	19
Aire	AI	-99

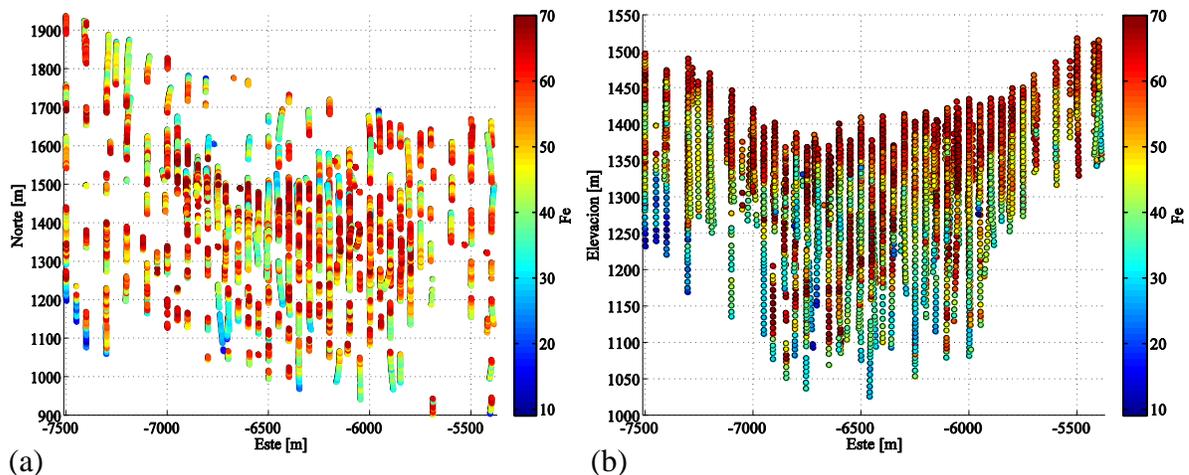
Es posible observar que existen cuatro grupos principales dentro de los litotipos, en primer lugar el conjunto de HC, HF y HAL que corresponden al grupo de las hematitas, IAL, IMN, IC, IF, IFR e IA que representan a las itabiritas, el resto de los tipos de roca que corresponden al estéril o roca sin interés económico, y la canga (CG) que resulta de interés ya que corresponde a una zona enriquecida de fierro con alto potencial económico.

#### 4.2.2 Distribución espacial de sondajes de exploración

Los sondajes se ubican espacialmente entre las siguientes coordenadas.

Coordenada	Mínimo [m]	Máximo [m]
Este	-7501.2	-5386.3
Norte	902.3	1937.5
Cota	1025.6	1517.9

A continuación se despliegan los mapas de ubicación (isométricos, perfiles y secciones) de la variable fierro (principal elemento de interés) y los tipos de roca.



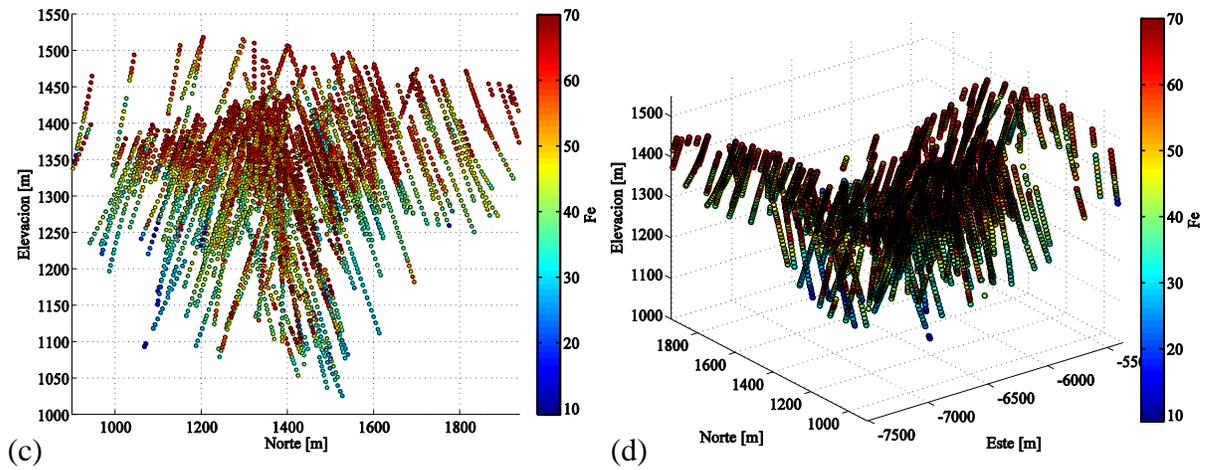


Figura 4.1: Mapas de ubicación hierro. Vista en planta (a), sección norte (b), sección este (c) y vista isométrica (d)

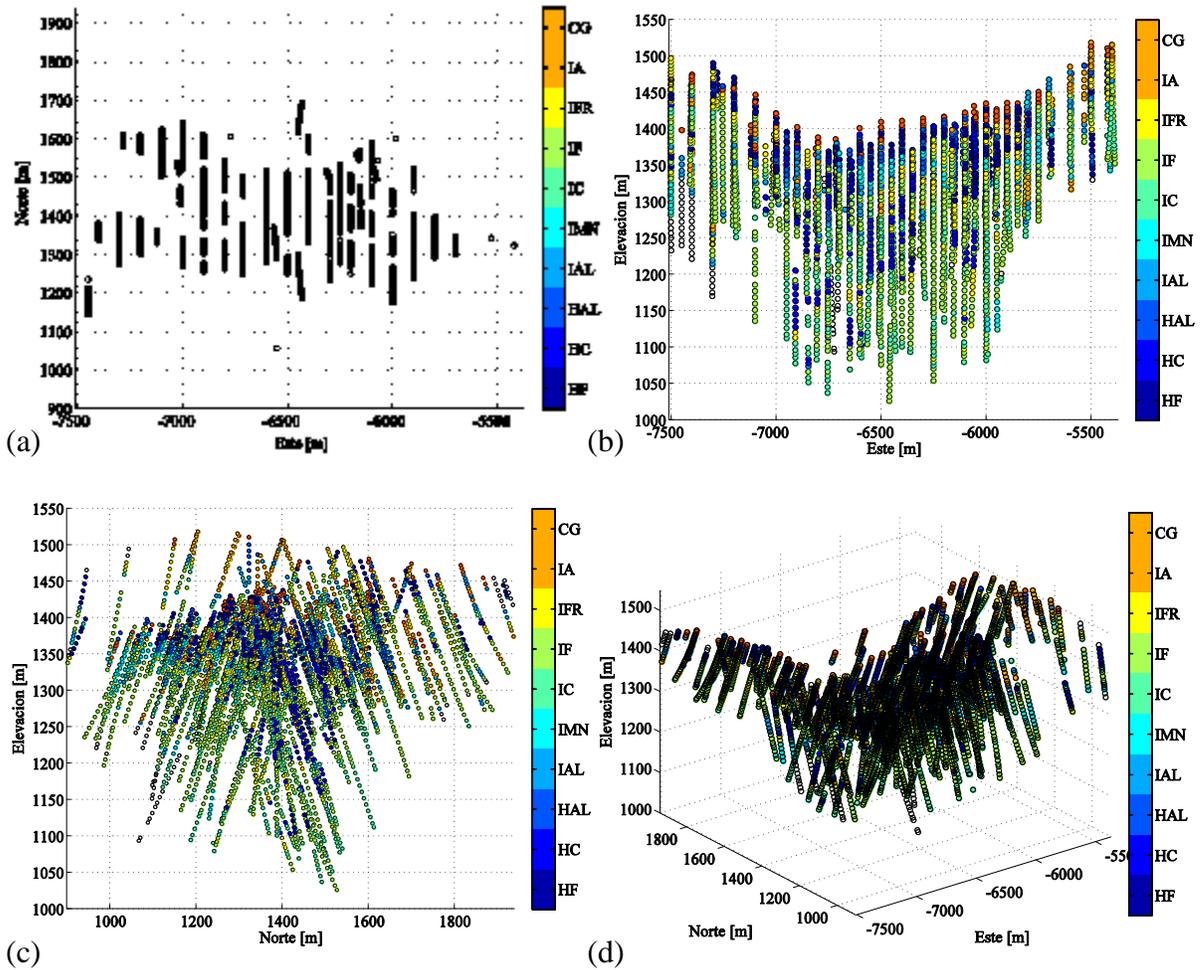


Figura 4.2: Mapas de ubicación tipos de roca. Vista en planta (a), sección norte (b), sección este (c) y vista isométrica (d)

En general, los sondajes son sub verticales con una regularidad tanto en la sección norte como en su vista en planta. El espaciamiento promedio de los sondajes varía de los 50 a 100 [m] en las direcciones este y norte, mientras que su largo va desde los 15 a los 500 [m] aproximadamente.

### 4.2.3 Chequeo de relación estequiométrica

La relación existente entre las diferentes variables de interés queda representada por la expresión:

$$1.4297 \cdot Fe + Si + Al + 2.2913 \cdot P + 1.2912 \cdot Mn + LOI = 100\%$$

donde se espera tener un valor igual a 100%. Sin embargo debido a que los fenómenos naturales son inciertos se acepta un tolerancia de 5% respecto a dicho valor, por lo tanto la relación puede tomar valores entre el 95% y 105%.

Para verificar que los datos de los sondeos cumplan con dicho límite, se realiza un estudio estadístico de la relación estequiométrica, calculada en base a la expresión anteriormente expuesta.

Tabla 4.3: Resumen estadístico de variable relación estequiométrica

Variable	Mínimo [%]	Máximo [%]	Media [%]	Desviación estándar [%]	Cuenta
Relación estequiométrica	85.90	101.42	98.54	1.51	4465

Del análisis de la tabla anterior se deduce la existencia de datos que no cumplen con los límites tolerables para la relación entre las variables. Estos datos serán eliminados de la base de datos generando una nueva base con la que se trabajará desde este punto en adelante. En particular existen 139 datos cuyo valor de la relación es inferior a 95%, mientras que datos superiores al límite no se presentan.

### 4.2.4 Estadísticas básicas: variables categóricas

El porcentaje de ocurrencia de cada tipo de roca dentro de los sondeos se indica en la **Tabla 4.4**, donde es posible apreciar que el tipo de roca predominante es la itabirita friable (IF) con un 29.8% del total de las litologías presentes en los sondeos. Los siguientes tipos de roca con mayor presencia en la base de datos son IFR, IC e HF, de donde es posible concluir que el grupo predominante es el de las itabiritas.

Tabla 4.4: Porcentaje de cada tipo de roca dentro de los datos brutos

Tipo de Roca	Porcentaje del total de datos originales [%]
Dolomita	0
Laterita	0
Estéril	0
Canga	3.4
Dolomita filítica	0
Itabirita rica en aluminio	7.0
Itabirita rica en manganeso	4.6
Itabirita compacta	10.9
Itabirita friable	29.8
Hematita friable	10.2

Hematita compacta	6.9
Itabirita friable rica en fierro	13.4
Hematita rica en aluminio	5.4
Filita	0
Itabirita anfíbolítica	5.4
Estéril	0
Intrusivos	0
Estéril	0
Aire	3.1

Otro aspecto relevante al momento de entender los tipos de roca, es que estos fueron definidos en función del contenido de determinados elementos. En particular las hematitas e itabiritas, que corresponden a litologías con mineralización de interés, se clasifican como lo indica la **Tabla 4.5**.

**Tabla 4.5:** Definición de tipos de roca en función de las variables continuas

Tipo	Tipo de roca	Fe [%]	P [%]	Al [%]	Mn [%]	Pf [%]	G1 [%]	
Hematita	HC	≥62		<2.5	<1	<3.5	≥50	
	HF					<3.5	<50	
	HAL					>0.12	>2.5	≥1
Itabirita	IFR	≥52 < 62	<0.2	<2.5	<1	<3.5	<50	
	IF	≥30 <52					≥5	
	IA	≥30 <62				≥3.5 <5		
	IAL			>2.5				
	IMN					≥1		
	IC			<0.2		<2.5		<3.5

Para conocer cómo se relacionan los tipos de roca entre sí, es importante determinar el contacto que se produce entre ellos, es decir, el porcentaje de veces que una determinada litología está en contacto con el resto de ellas. La **Tabla 4.6** resume el porcentaje de contactos de los tipos de roca de interés.

**Tabla 4.6:** Porcentaje de contacto de cada tipo de roca con el resto de los tipos de roca (Sondajes)

	CG	HAL	HC	HF	IA	IAL	IC	IF	IFR	IMN	Estériles
<b>HAL</b>	10.6	0	11.1	26.0	23.6	11.5	0.0	1.9	10.1	5.3	0.0
<b>HC</b>	2.5	11.6	0.0	33.3	1.5	6.6	11.6	14.6	17.2	1.0	0.0
<b>HF</b>	7.8	15.7	19.1	0.0	2.6	6.7	0.9	7.5	33.3	5.8	0.6
<b>IA</b>	3.7	18.1	1.1	3.3	0.0	37.0	2.6	20.4	9.6	3.7	0.4
<b>IAL</b>	0.9	5.5	3.0	5.3	22.8	0.0	3.4	32.9	18.7	6.4	1.1
<b>IC</b>	0.0	0.0	7.9	1.0	2.4	5.1	0.0	66.1	12.7	4.5	0.3
<b>IF</b>	0.0	0.6	4.4	3.9	8.3	21.7	29.0	0.0	25.7	5.3	1.2
<b>IFR</b>	1.0	4.0	6.5	21.9	5.0	15.6	7.1	32.8	0.0	6.1	0.0
<b>IMN</b>	1.3	7.1	1.3	13.0	6.5	18.2	8.4	22.7	20.8	0.0	0.6

De la tabla anterior se desprende que los principales tipos de roca no se encuentran en contacto con estériles, lo que se debe a que los sondajes se realizan en zonas de interés, por lo que el contenido de ganga es menor. Por ejemplo, la hematita rica en aluminio (HAL) de su total de

datos tiene un 26% de contacto con hematita friable (HF), 23.6% con itabirita anfíbolítica (IA) y porcentajes significativos con canga, hematita compacta (HC), itabirita rica en aluminio (IAL) e itabirita friable rica (IFR).

En general, los tipos de roca del grupo itabirita se encuentran mayoritariamente en contacto con los de su mismo grupo, mientras los del grupo hematita presentan un contacto dividido, aunque sigue predominando el contacto con los tipos de roca itabirita.

En relación a su disposición espacial, los tipos de roca se presentan de forma irregular a lo largo de la extensión de la malla de sondajes. La canga se localiza en la parte superior y dos grupos de las itabiritas (IC e IF) se encuentran en la zona inferior. El resto de los grupos de roca está disperso mayoritariamente en el sector central pero no de forma regular (estratos).

#### 4.2.4 Estadísticas básicas: variables continuas

Para preservar la confidencialidad de los datos, los valores de leyes han sido multiplicados por una constante que no se divulgará. Los datos de sondajes están compositados a un largo de ocho metros. Sus principales estadísticas se resumen en la **Tabla 4.7**.

Tabla 4.7: Resumen estadístico variables continuas

Variable	Mínimo [%]	Máximo [%]	Media [%]	Desviación estándar [%]
Fierro	11.64	69.70	51.67	11.66
Sílice	0.22	77.05	22.27	17.39
Fósforo	0.01	0.50	0.05	0.04
Aluminio	0.10	4.95	1.16	0.93
Manganeso	0.01	32.06	0.28	1.28
Pérdida de fuego	0.06	11.55	2.09	1.77
Granulometría G1	0.12	98.18	33.06	23.65

Debido a que el muestro es homotópico, se tiene igual registro de todas las variables, es decir hay 4465 datos para cada variable.

La correlación existente entre las variables se resume en la siguiente matriz de correlación, donde es importante destacar que ésta corresponde a una medida de la correlación lineal, por lo tanto no necesariamente un valor cercano a cero significa que no existe dependencia entre las variables de estudio.

Tabla 4.8: Matriz de correlación

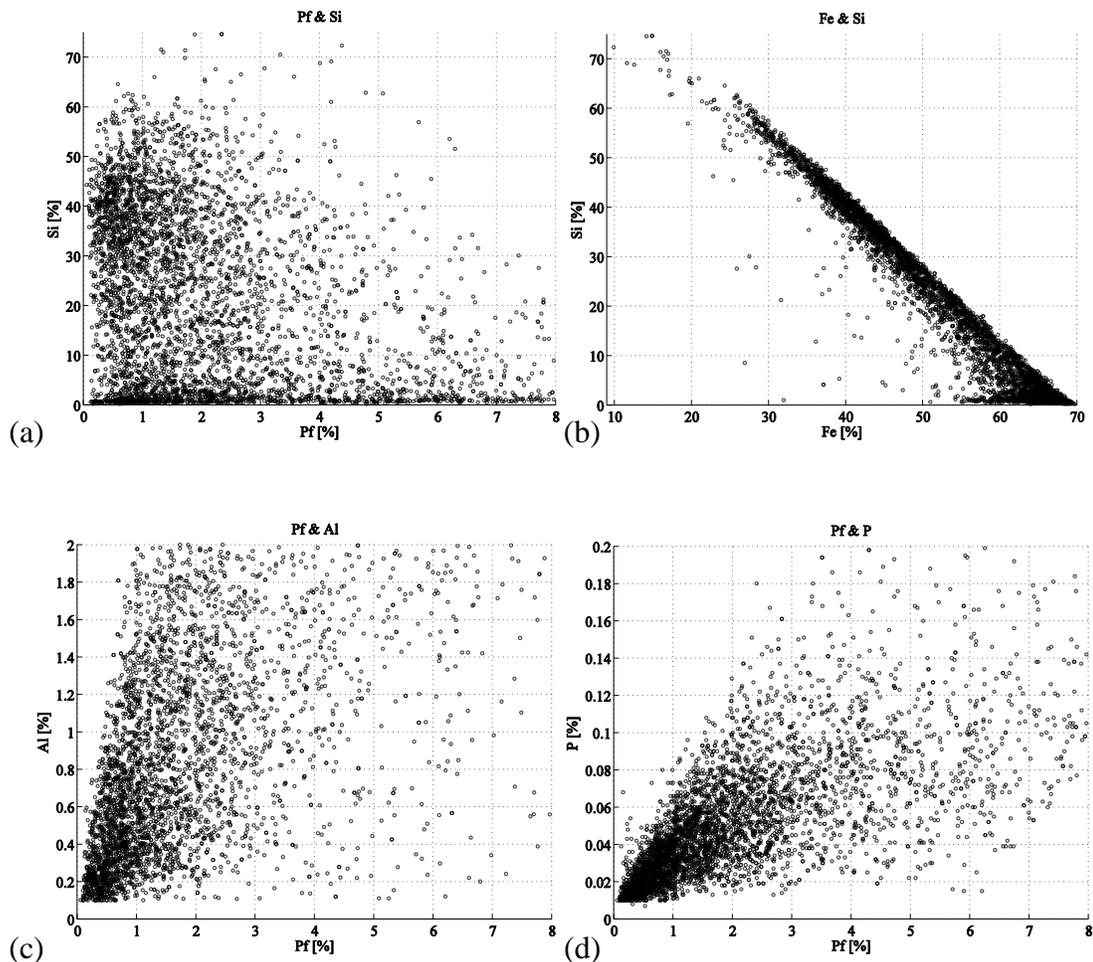
Variable	Fe	Si	P	Al	Mn	Pf	G1
<b>Fe</b>	1	-0.98	0.13	0.23	-0.12	0.19	0.13
<b>Si</b>	-0.98	1	-0.24	-0.35	-0.01	-0.34	-0.10
<b>P</b>	0.13	-0.24	1	0.37	0.15	0.69	0.02
<b>Al</b>	0.23	-0.35	0.37	1	0.15	0.61	-0.26
<b>Mn</b>	-0.12	-0.01	0.15	0.15	1	0.19	-0.08
<b>Pf</b>	0.19	-0.34	0.69	0.61	0.19	1	-0.03
<b>G1</b>	0.13	-0.10	0.02	-0.26	-0.08	-0.03	1

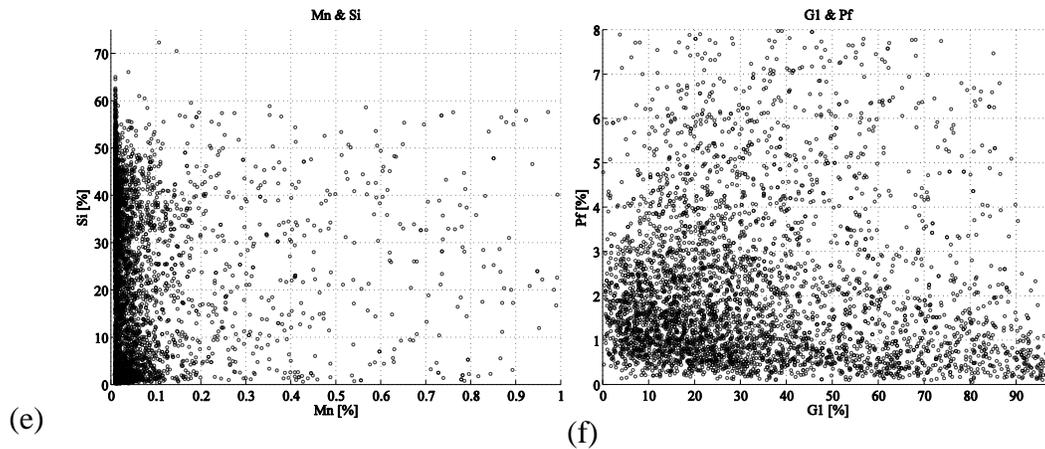
Las correlaciones presentes en la **Tabla 4.8** permiten observar que hierro y sílice son las variables de mayor correlación, estando inversamente relacionadas debido a que la generación de mineralización metálica (hierro) es poco probable en fluidos con alto contenido de  $SiO_2$  (proceso de reemplazo). En particular, en formaciones *BIF* la alternancia entre capas mineralizadas (ricas en hierro) y de estéril (ricas en sílice) explica la existencia de correlación negativa entre ambos elementos. En el caso de sílice se produce un reemplazo debido a fluidos hipógenos y la aparición de hierro se produce por precipitación en presencia de oxígeno o medio oxidante (bacterias).

Resultan interesantes también las correlaciones existentes entre pérdida de fuego con fósforo y aluminio, cuyos coeficientes son 0.69 y 0.61 respectivamente. Estos resultados tienen como implicancia principal el uso de métodos de simulación de tipo conjunta, ya que se aprovechan las relaciones existentes entre las diferentes variables.

Existen variables que presentan una correlación casi nula como es el caso de manganeso con sílice y pérdida de fuego con granulometría G1, lo que significa que no presentan relación lineal.

Para ver si existe otro tipo de relación se despliegan las nubes de dispersión de algunas variables en las siguientes ilustraciones.





**Figura 4.3:** Nubes de dispersión pérdida de fuego-sílice (a), fierro-sílice (b), pérdida de fuego-aluminio (c), pérdida de fuego-fósforo (d), manganeso-sílice (e) y granulometría G1-pérdida de fuego (f)

En la **Figura 4.3** es posible apreciar la correlación lineal negativa existente entre fierro y sílice, no así en los otros casos donde existe mayor dispersión. Las nubes de dispersión desplegadas muestran que las variables en estudio presentan correlaciones que permiten una posterior aplicación de cosimulaciones, ya que estas últimas presentan una ventaja al capturar dichas relaciones.

Para comprender a cabalidad las variables en estudio se realizará un estudio exploratorio para cada una de ellas.

#### 4.2.4.1 Fierro

##### 4.2.4.1.1 Global

En la sección anterior fueron visualizados los mapas de ubicación del fierro (**Figura 4.1**) de donde es posible observar que las mayores leyes se ubican en la zona superficial y disminuyen a medida que aumenta profundidad. El histograma de la variable muestra una distribución bimodal con dos distribuciones que se cortan entre las leyes 51-52%. Respecto a estas poblaciones es posible inferir que corresponden a los tipos de roca predominantes, es decir las hematitas e itabiritas. Además de él es posible desprender que la mayor cantidad de datos presenta leyes altas (**Figura 4.4**). El gráfico de probabilidad lognormal muestra dos poblaciones que se dividen en torno al límite antes indicado.

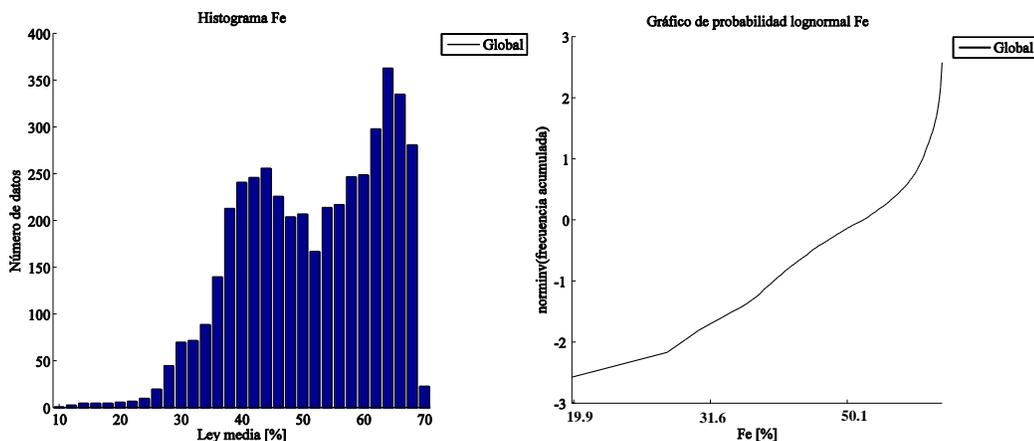


Figura 4.4: A la izquierda histograma hierro; a la derecha gráfico de probabilidad hierro

#### 4.2.4.1.1 Por tipo de roca

Al estudiar las estadísticas por tipo de roca se observa que los grupos con mayores leyes medias de hierro son a su vez aquellos con una menor desviación estándar, y viceversa. La ley media de las hematitas es cercana a un 64%, mientras que las itabiritas no presentan una ley media superior a 62%.

Tabla 4.9: Resumen estadístico hierro por tipo de roca

Tipo de roca	HF	HC	HAL	IAL	IMN	IC	IF	IFR	IA	CG
Media [%]	64.82	66.15	63.97	51.57	49.31	42.66	42.92	56.97	55.44	63.03
Des. Estándar [%]	3.23	4.18	1.60	8.38	8.12	8.76	6.95	4.36	6.73	2.83

A pesar de que existen distintos tipos de rocas, la distribución de las hematitas es similar según el gráfico de probabilidad. Dentro de las itabiritas existen dos con similares distribuciones: la rica en manganeso (IMN) y la rica en aluminio (IAL). Por su parte la itabirita friable rica (IFR) difiere del resto de las itabiritas en su distribución, así como también en el valor mínimo que presenta (el cual es cercano a 50%).

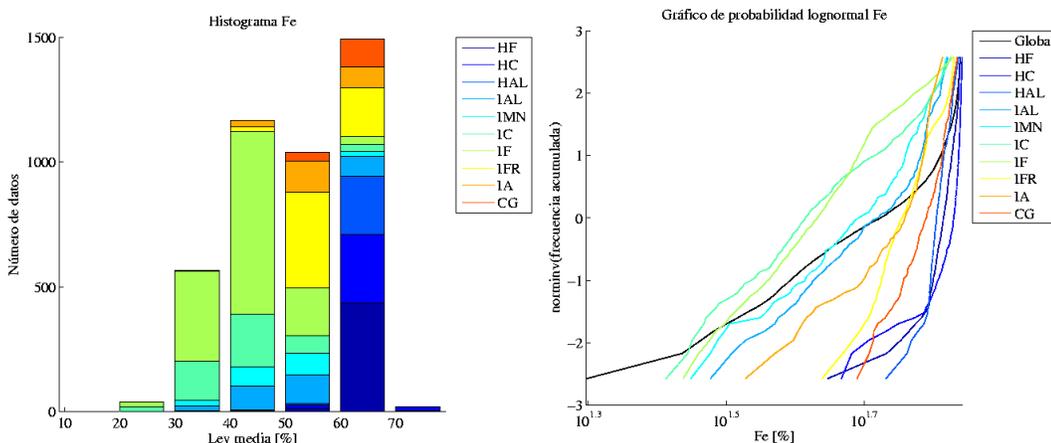
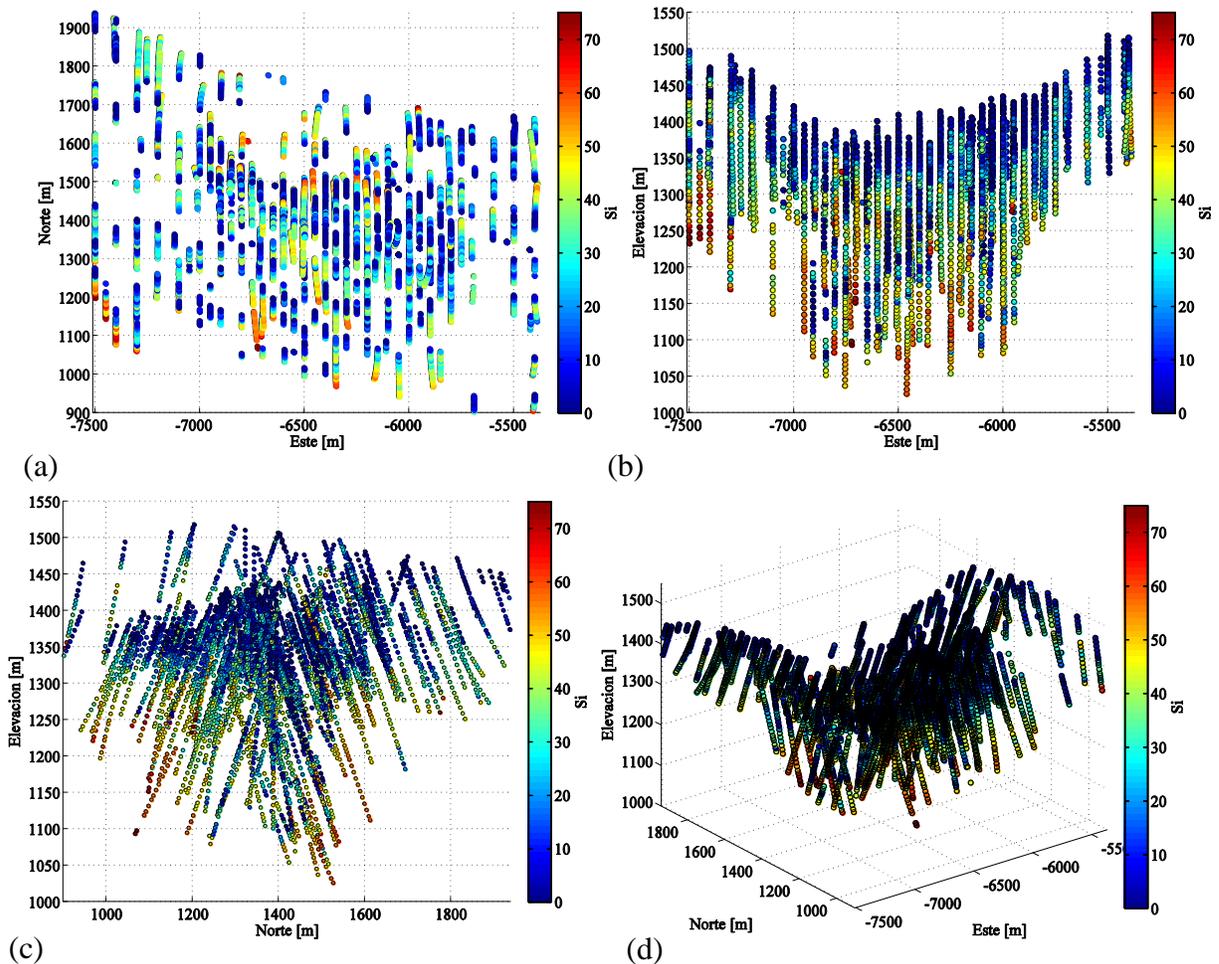


Figura 4.5: A la izquierda histograma hierro por tipo de roca; a la derecha gráfico de probabilidad hierro por tipo de roca

## 4.2.4.2 Sílice

### 4.2.4.2.1 Global

Los mapas de sílice se presentan en la **Figura 4.6**. En estos se observa una distribución de leyes opuesta al caso de hierro, es decir, las leyes bajas se localizan en el sector superficial.



**Figura 4.6:** Mapas de ubicación sílice. Vista en planta (a), sección norte (b), sección este (c) y vista isométrica (d)

El histograma muestra una distribución de tipo multimodal, con una población asociada a las leyes inferiores a 1%, otra en el segmento de 1-40% y finalmente una población con las leyes superiores a 40%. El gráfico de probabilidad (**Figura 4.7**) refleja las distintas poblaciones presentes en los datos. Estas poblaciones están asociadas a las posteriores unidades geológicas definidas en el siguiente capítulo.

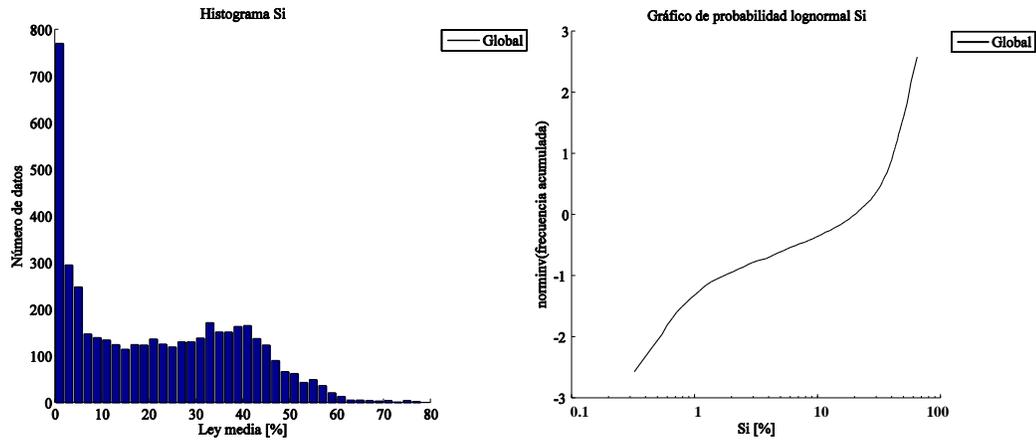


Figura 4.7: A la izquierda histograma sílice; a la derecha gráfico de probabilidad sílice

#### 4.2.4.1.1 Por tipo de roca

Las estadísticas por tipo de roca para la variable sílice se resumen en la **Tabla 4.10**.

Tabla 4.10: Resumen estadístico sílice por tipo de roca

Tipo de roca	HF	HC	HAL	IAL	IMN	IC	IF	IFR	IA	CG
Media [%]	3.96	3.20	1.92	20.10	20.17	37.15	36.20	15.61	11.77	2.22
Des. Estándar [%]	4.23	5.79	1.76	12.53	13.00	12.72	10.27	6.53	10.87	3.56

Los tipos de roca que presentan las mayores leyes medias son las itabiritas compactas y friables, siendo además las más variables. Esta situación es contraria a lo observado en el caso de hierro. Se observan en la **Figura 4.8** distribuciones semejantes en tres casos: IC e IF; HC, HF e HAL y el resto de los tipos de roca.

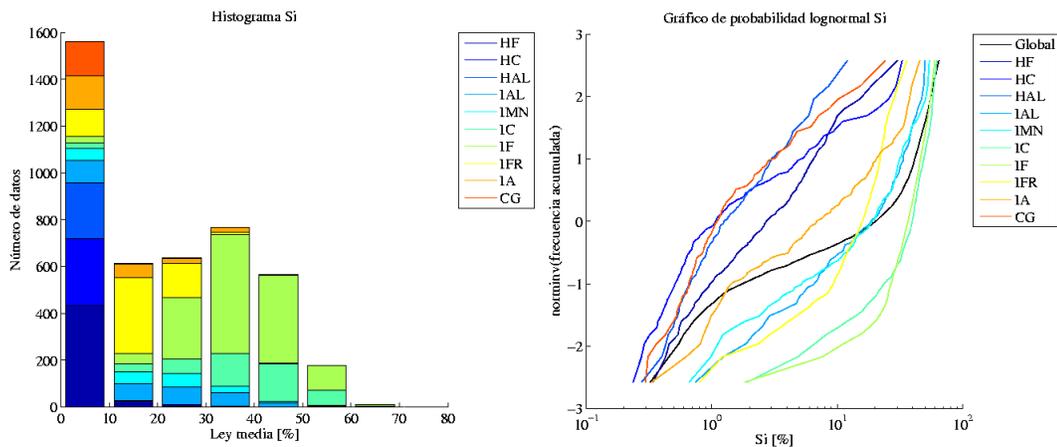


Figura 4.8: A la izquierda histograma sílice por tipo de roca; a la derecha gráfico de probabilidad sílice por tipo de roca

### 4.2.4.3 Fósforo

#### 4.2.4.3.1 Global

Los mapas de ubicación consideran las leyes inferiores a 0.2%, donde no se observa una deriva o tendencia clara, salvo con las leyes cercanas a 0% que en gran medida se ubican en sectores centrales.

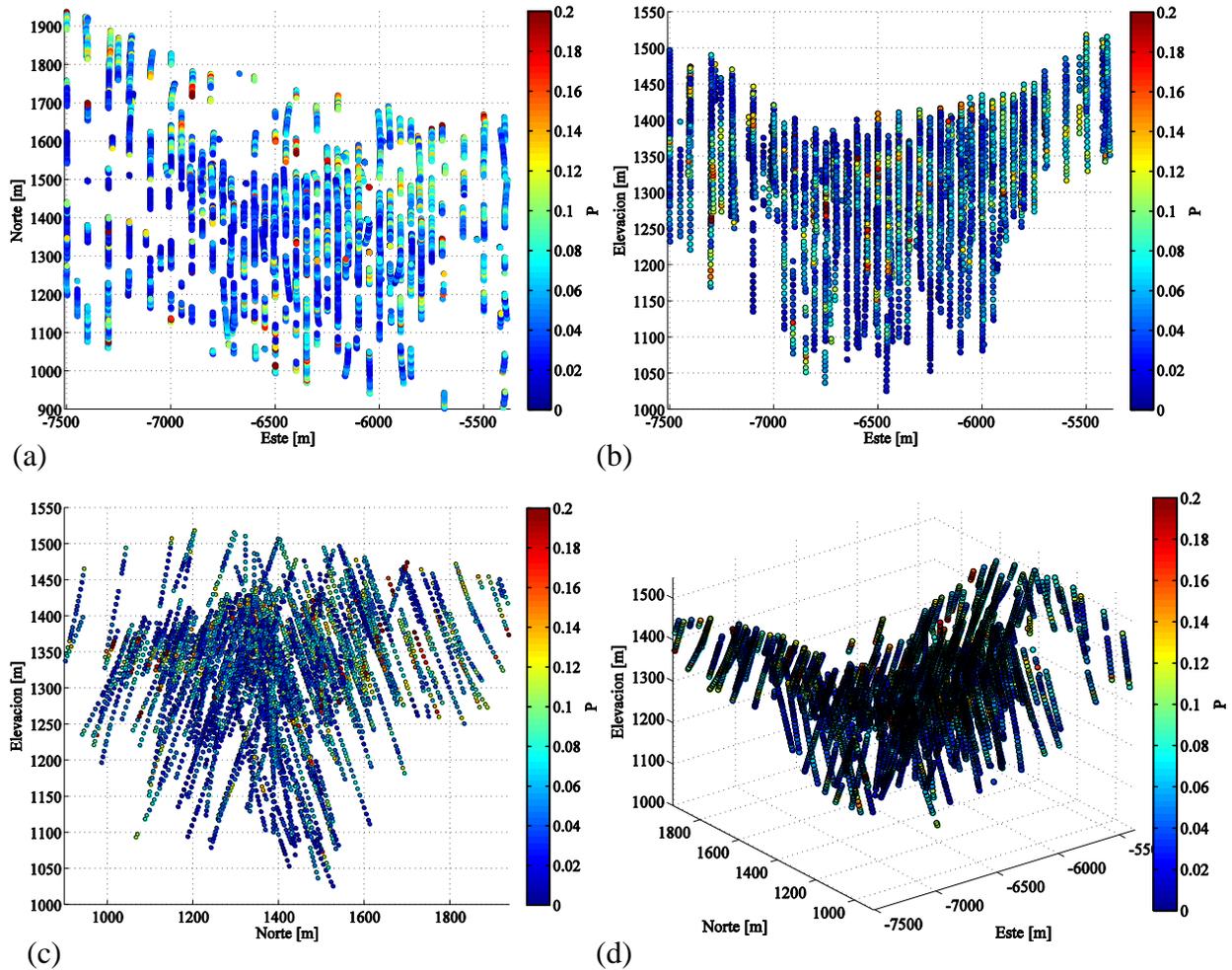


Figura 4.9: Mapas de ubicación fósforo. Vista en planta (a), sección norte (b), sección este (c) y vista isométrica (d)

El histograma de fósforo refleja una distribución asimétrica de tipo lognormal con una mayor concentración de leyes bajas. Esto queda confirmado al ver el gráfico de probabilidad, donde se observa una recta de principio a fin. Estas características se asocian con los tipos de roca, ya que la mayoría de estos presentan leyes bajas, en especial los tipos friables y compactos, que son predominantes.

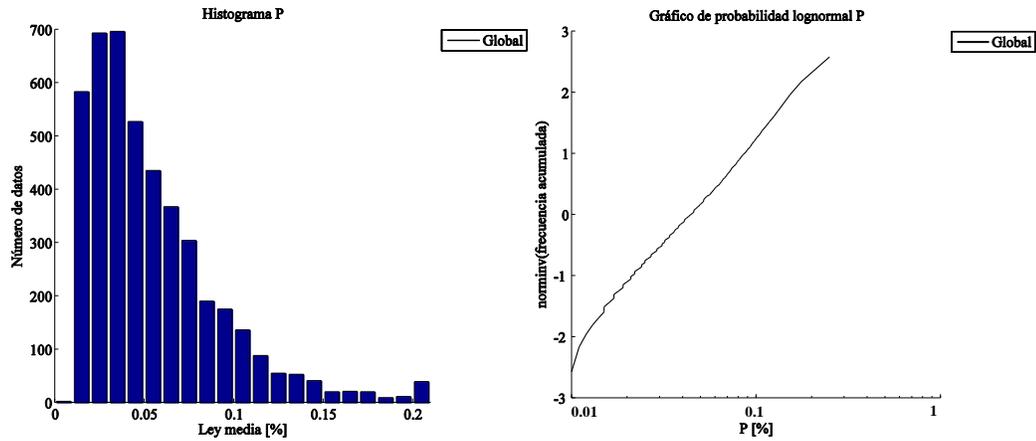


Figura 4.10: A la izquierda histograma fósforo; a la derecha gráfico de probabilidad fósforo

#### 4.2.4.3.2 Por tipo de roca

En el caso de fósforo se observa un efecto proporcional, ya que los tipos de roca con mayores leyes medias son a su vez lo más variables.

Tabla 4.11: Resumen estadístico fósforo por tipo de roca

Tipo de roca	HF	HC	HAL	IAL	IMN	IC	IF	IFR	IA	CG
Media [%]	0.04	0.05	0.07	0.08	0.07	0.04	0.04	0.05	0.10	0.08
Des. Estándar [%]	0.02	0.04	0.04	0.04	0.05	0.03	0.03	0.03	0.05	0.05

Se observan leyes similares para el grupo formado por los tipos de roca compactos y friables, así como el grupo de los tipos de roca ricos en aluminio. Las distribuciones de los tipos de roca son semejantes como se observa en la **Figura 4.11** con diferencias debido a las distintas leyes medias.

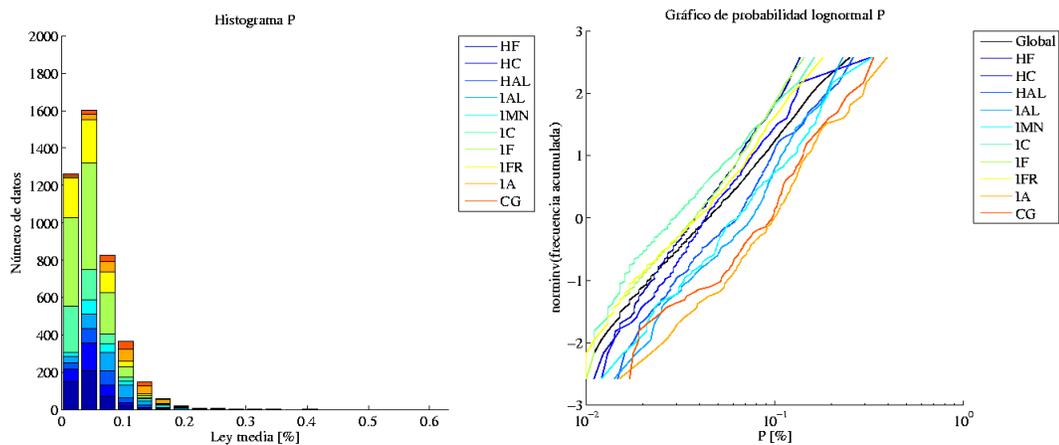


Figura 4.11: A la izquierda histograma fósforo por tipo de roca; a la derecha gráfico de probabilidad fósforo por tipo de roca

#### 4.2.4.4 Aluminio

##### 4.2.4.4.1 Global

Las leyes altas de aluminio se ubican mayoritariamente en el sector superficial del muestreo como lo reflejan las siguientes ilustraciones.

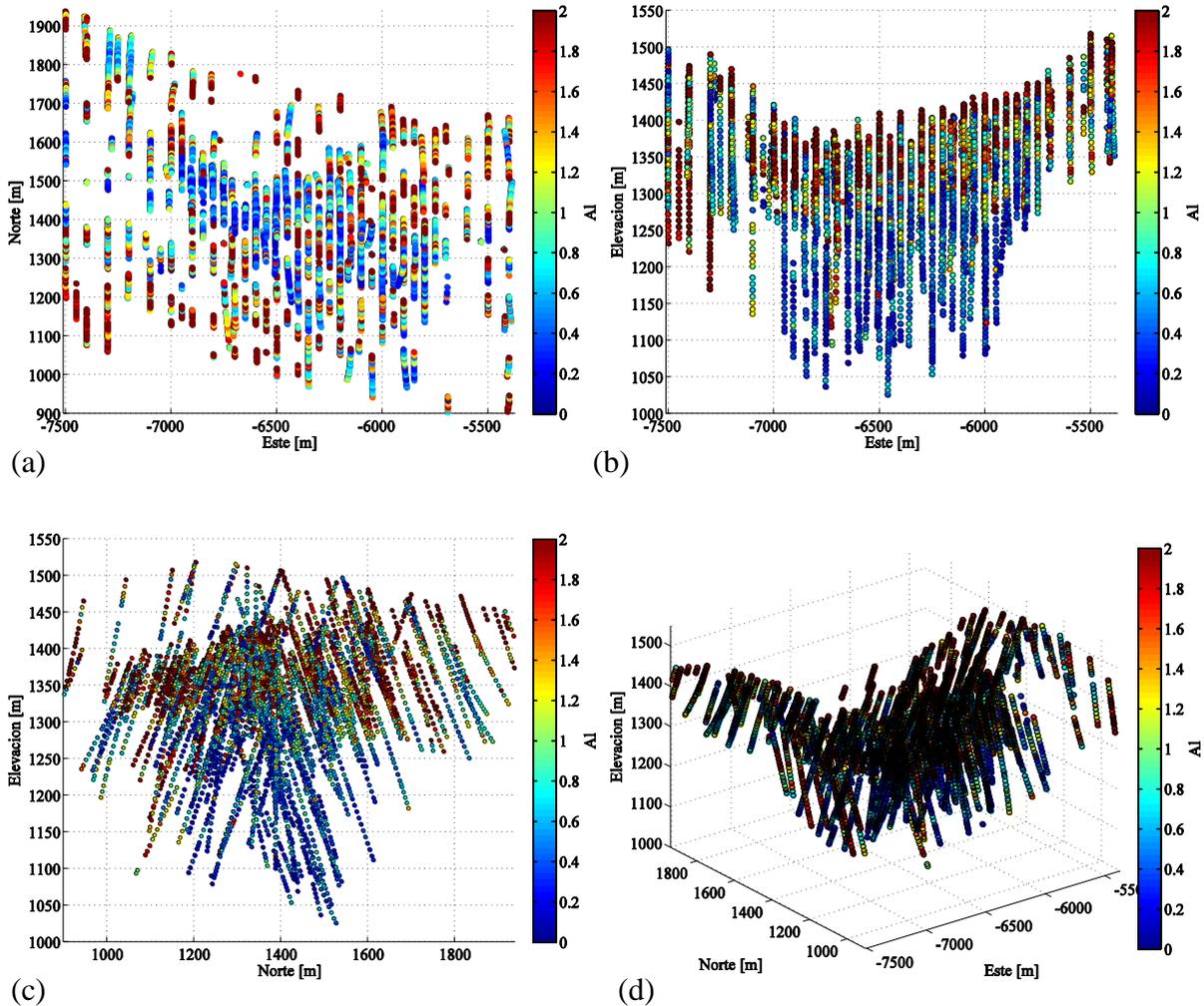


Figura 4.12: Mapas de ubicación aluminio. Vista en planta (a), sección norte (b), sección este (c) y vista isométrica (d)

La distribución de aluminio es de tipo lognormal, lo que se refleja tanto en su histograma como su gráfico de probabilidad. Al igual que en el caso de la variable anterior, la predominancia de leyes bajas se atribuye a los tipos de roca compactos y friables, quienes representan cerca del 60% del total de los tipos de roca.

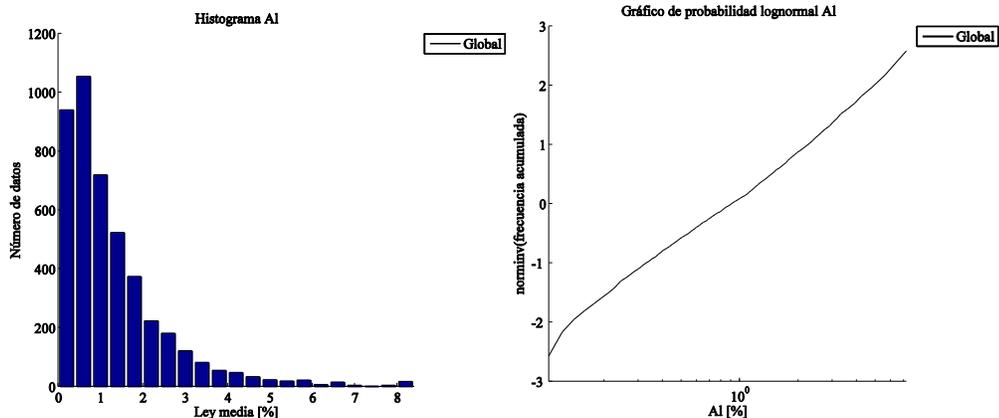


Figura 4.13: A la izquierda histograma aluminio; a la derecha gráfico de probabilidad de aluminio

#### 4.2.4.4.2 Por tipo de roca

Se observa en la **Tabla 4.12** un efecto proporcional, siendo la canga y la hematita e itabirita rica en aluminio los tipos de roca con mayores leyes de aluminio. La gradación de leyes medias no se produce en torno a la subdivisión de hematitas e itabiritas. El grupo de los tipos de rocas friables (IF, IFR y HF) presentan valores máximos en torno al 2.5%, sin embargo en el resto de los tipos de roca esta división no es del todo clara. En el caso de la HAL, IAL e IA se observa una alta presencia de leyes mayores a 2.5%.

Tabla 4.12: Resumen estadístico aluminio por tipo de roca

Tipo de roca	HF	HC	HAL	IAL	IMN	IC	IF	IFR	IA	CG
Media [%]	1.22	0.71	2.11	2.02	1.69	0.45	0.81	1.05	2.04	2.57
Des. Estándar [%]	0.70	0.59	0.99	1.13	1.01	0.41	0.54	0.67	1.15	1.06

La distribución de los tipos de roca es similar, como se observa en su gráfico de probabilidad, existiendo diferencias producto de las leyes medias asociadas a cada tipo de roca.

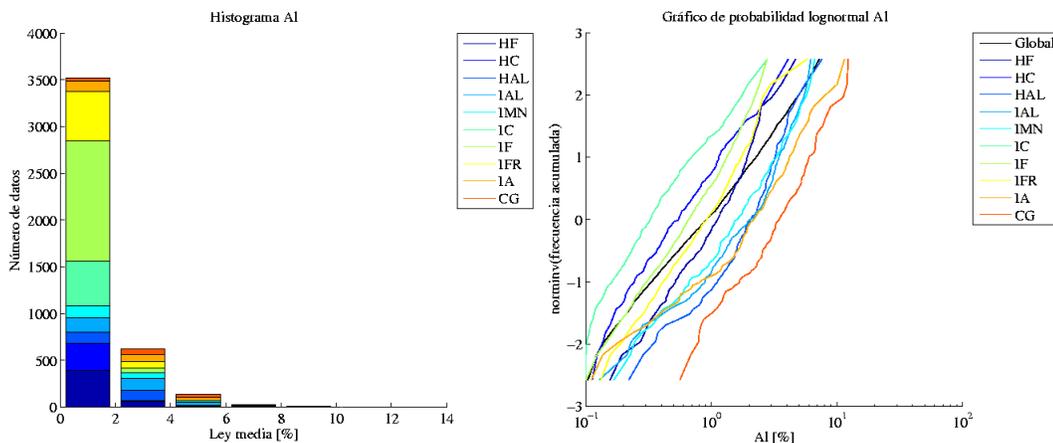


Figura 4.14: A la izquierda histograma aluminio por tipo de roca; a la derecha gráfico de probabilidad aluminio por tipo de roca

## 4.2.4.5 Manganeso

### 4.2.4.5.1 Global

Las leyes altas de este elemento se ubican en su mayoría entre las coordenadas 1000 [m] y 1200 [m] norte, como lo refleja su mapa de ubicación. Esto se asocia a la extensión del tipo de roca itabirita rica en manganeso, el cual posee por definición leyes altas de esta variable.

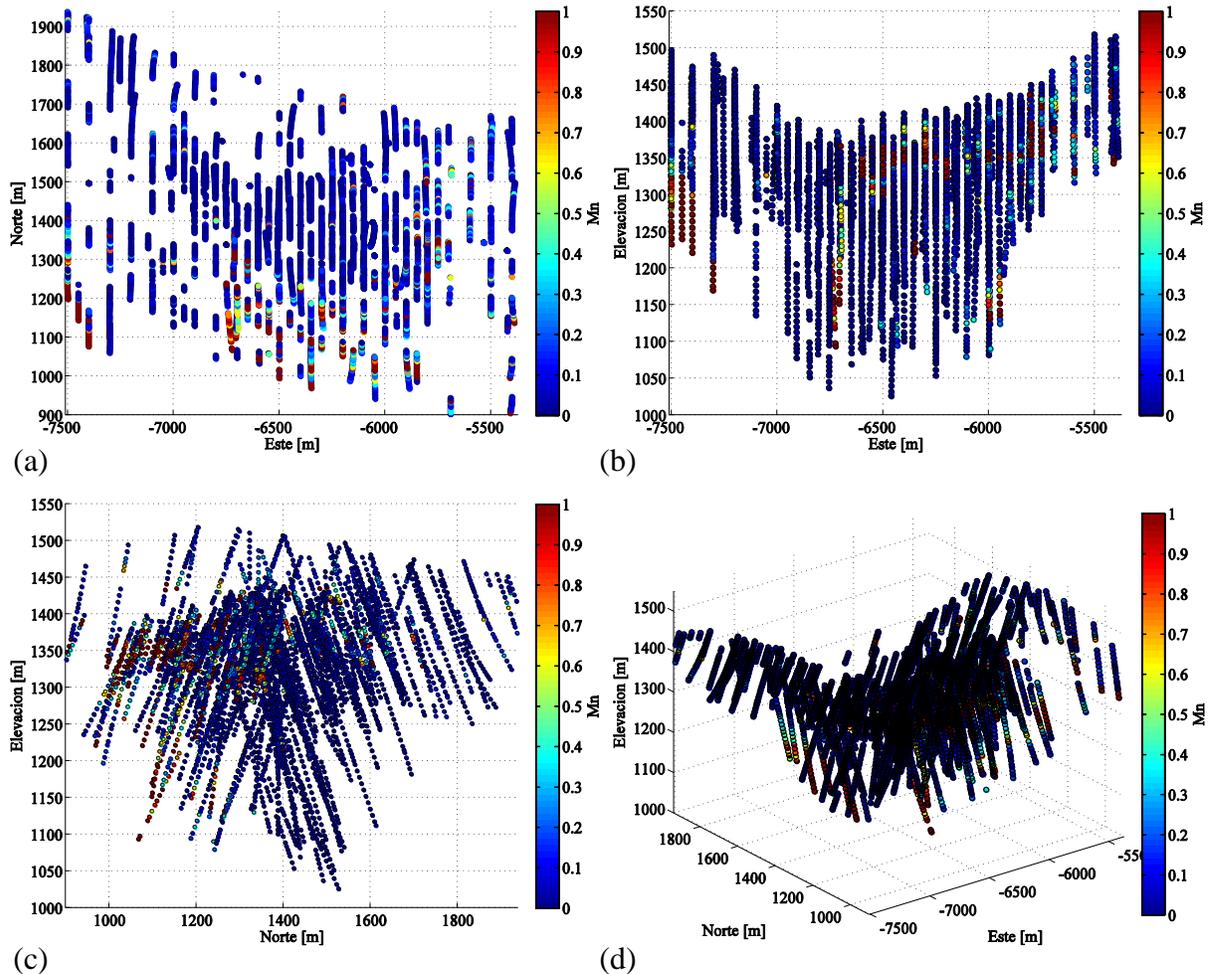


Figura 4.15: Mapas de ubicación manganeso. Vista en planta (a), sección norte (b), sección este (c) y vista isométrica (d)

La distribución de leyes de manganeso es fuertemente asimétrica (Figura 4.16). El gráfico de probabilidad lognormal muestra un conjunto de los datos que queda fuera de los límites de detección. La asimetría reflejada en manganeso se debe a la existencia de un tipo de roca fuertemente diferenciado respecto al resto, el cual es itabirita rica en manganeso, que presenta estadísticas superiores en términos de leyes media.

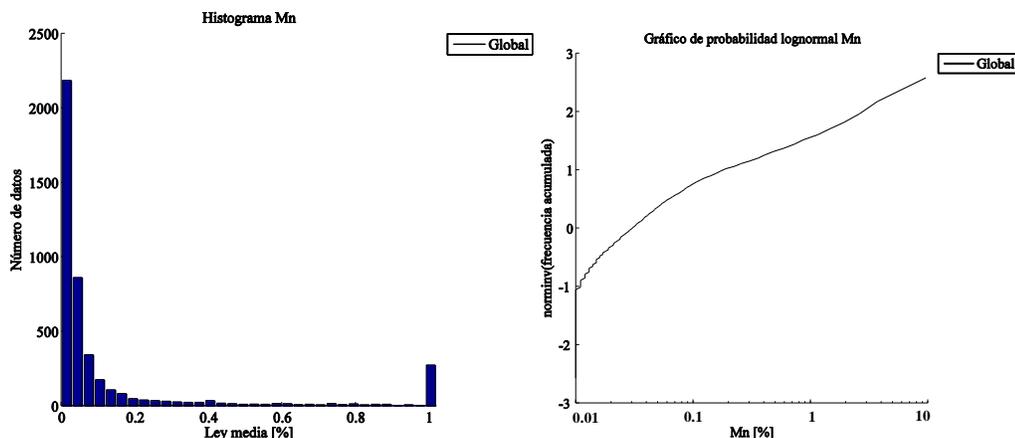


Figura 4.16: A la izquierda histograma manganeso; a la derecha gráfico de probabilidad manganeso

#### 4.2.4.5.2 Por tipo de roca

Como se espera, la itabirita rica en manganeso (IMN) presenta las mayores leyes medias en esta variable. Se observa además, un aumento en las leyes medias y desviación estándar desde los tipos de roca compactos a los friables.

Tabla 4.13: Resumen estadístico manganeso por tipo de roca

Tipo de roca	HF	HC	HAL	IAL	IMN	IC	IF	IFR	IA	CG
Media [%]	0.13	0.04	0.23	0.13	3.24	0.10	0.09	0.09	0.13	0.05
Des. Estándar [%]	1.17	0.17	0.64	0.21	4.16	0.79	0.20	0.22	0.18	0.11

La distribución de los tipos de roca es semejante, como se aprecia en la **Figura 4.17**. En el caso de las itabiritas se puede identificar un límite en torno a la ley 1%, lo que concuerda con la definición de la **Tabla 4.5**.

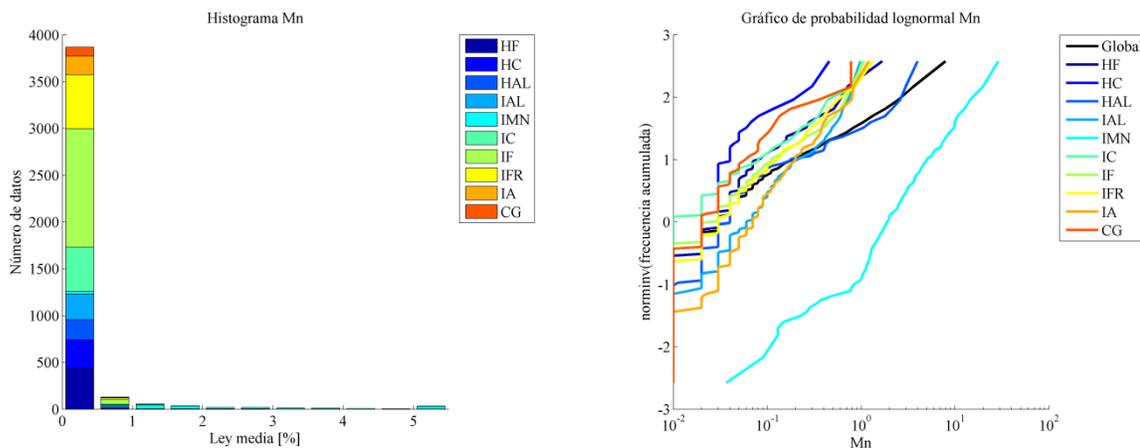


Figura 4.17: A la izquierda histograma manganeso por tipo de roca; a la derecha gráfico de probabilidad manganeso por tipo de roca

#### 4.2.4.6 Pérdida de fuego

##### 4.2.4.6.1 Global

Los mapas de esta variable muestran una alta variabilidad en su ubicación espacial.

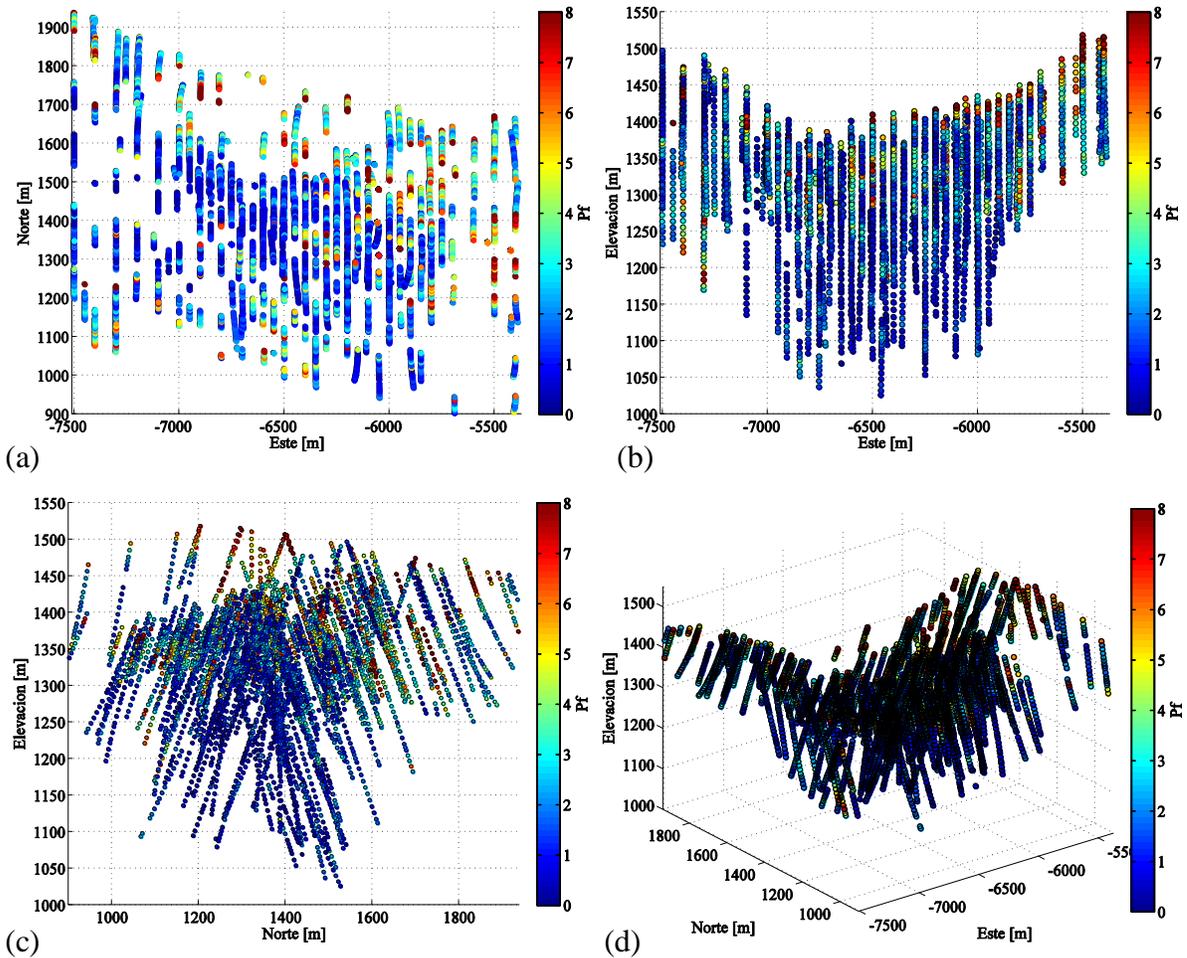


Figura 4.18: Mapas de ubicación pérdida de fuego. Vista en planta (a), sección norte (b), sección este (c) y vista isométrica (d)

La distribución de los datos es de tipo lognormal, como se indica en su histograma y gráfico de probabilidad lognormal. Nuevamente se observa el mismo fenómeno de las variables fósforo y aluminio, donde la presencia de los tipos de roca compactos y friables, permiten entender la alta concentración de leyes bajas en esta variable, ya que su presencia es significativa en el total de los datos disponibles.

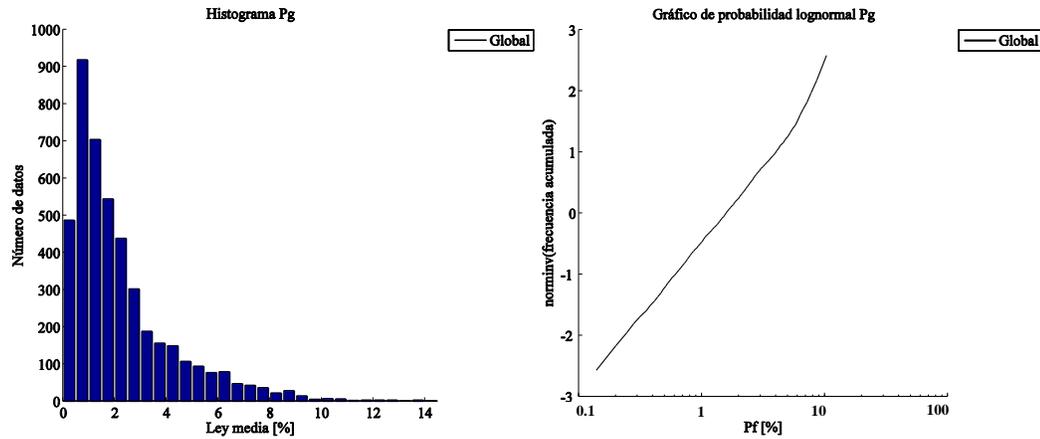


Figura 4.19: A la izquierda histograma pérdida de fuego; a la derecha gráfico de probabilidad pérdida de fuego

#### 4.2.4.6.2 Por tipo de roca

En el caso de pérdida de fuego, se aprecian leyes medias similares para los tipos de roca compactos y friables, a diferencia del resto de los tipos de roca.

Tabla 4.14: Resumen estadístico pérdida de fuego por tipo de roca

Tipo de roca	HF	HC	HAL	IAL	IMN	IC	IF	IFR	IA	CG
Media [%]	1.77	1.26	3.90	3.60	2.82	1.10	1.35	1.52	6.34	4.58
Des. Estándar [%]	1.05	1.01	1.66	1.22	1.68	0.96	0.90	1.00	1.49	2.39

Las distribuciones de HC, HF, IC IF e IFR presentan un valor límite máximo de 3.5% lo que concuerda con la definición de los tipos de roca, sin embargo el límite inferior de 5% no es del todo cierto para IA.

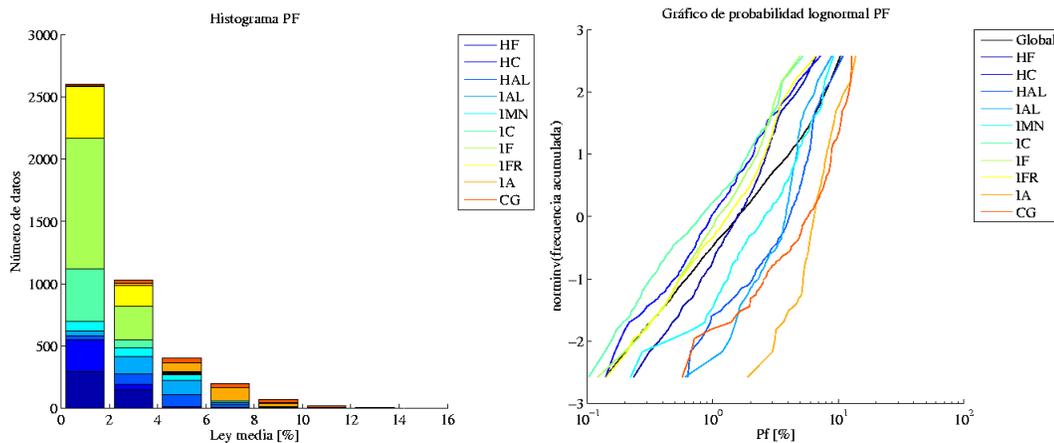


Figura 4.20: A la izquierda histograma pérdida de fuego por tipo de roca; a la derecha gráfico de probabilidad pérdida de fuego por tipo de roca

## 4.2.4.7 Granulometría G1

### 4.2.4.7.1 Global

Esta variable tiene una distribución errática en el espacio, con mayores valores en profundidad.

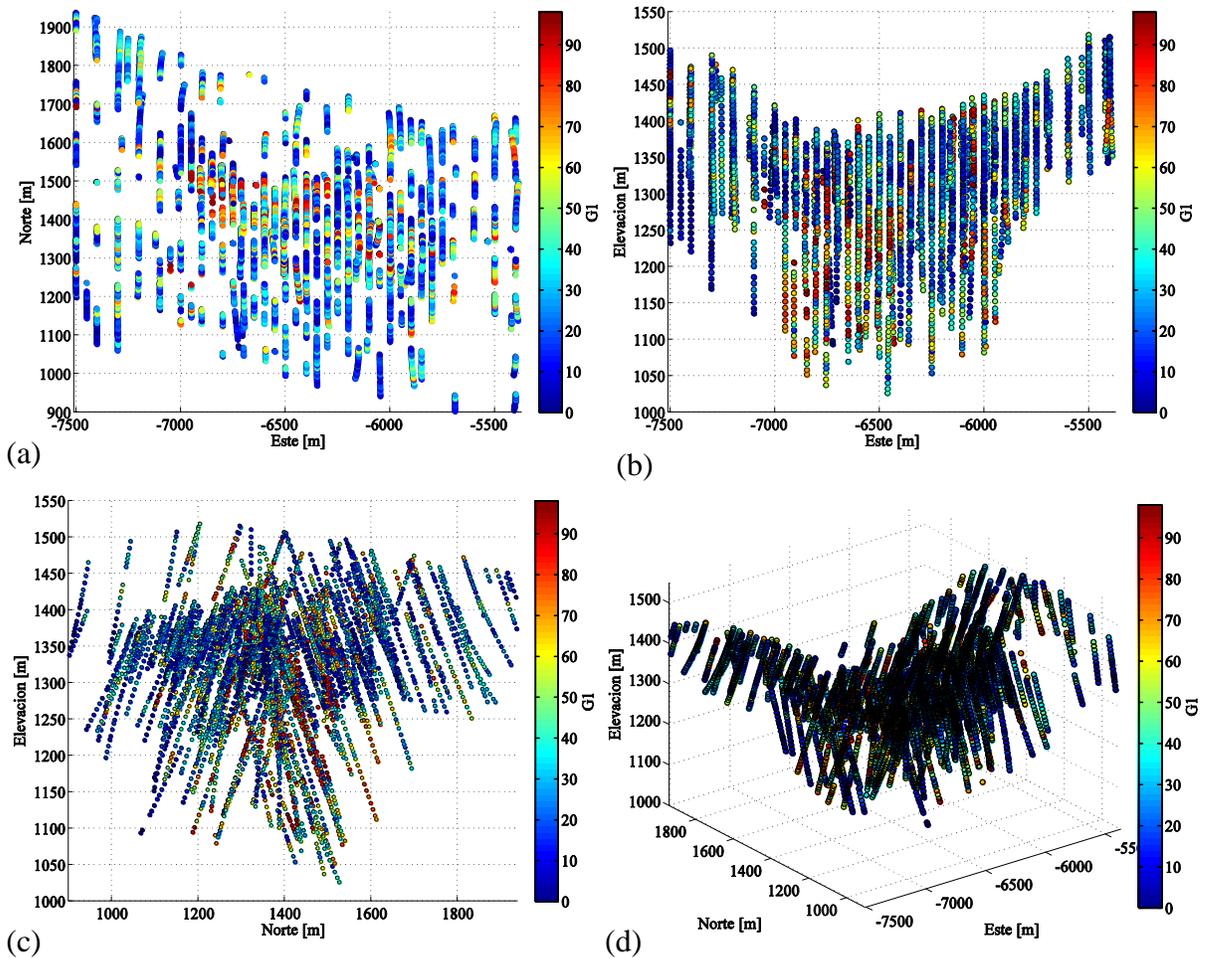


Figura 4.21: Mapas de ubicación granulometría G1. Vista en planta (a), sección norte (b), sección este (c) y vista isométrica (d)

Su distribución es asimétrica, donde su histograma y gráfico de probabilidad indican la posible existencia de dos o más poblaciones. Estas poblaciones están generadas por las diferencias en ley media existentes entre los tipos de roca friables y compactos. Sin embargo para definir de forma adecuada las poblaciones se realizará un estudio detallado en el siguiente capítulo.

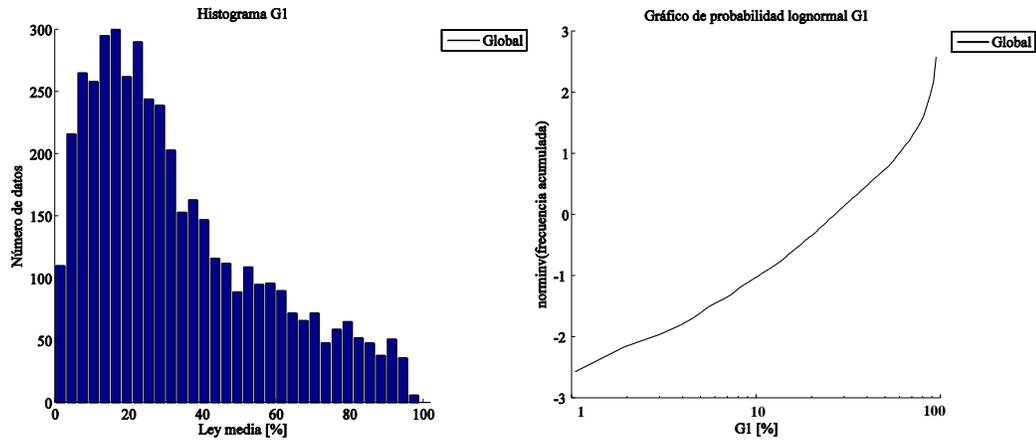


Figura 4.22: A la izquierda histograma granulometría G1; a la derecha gráfico de probabilidad granulometría G1

#### 4.2.4.7.2 Por tipo de roca

Las estadísticas por tipo roca muestran una división clara entre los grupos compactos y friables, cuya división se produce en torno a la ley de 50%. Esta separación es lógica, ya que la granulometría tiene directa relación con la compactación o no del mineral, siendo mayor el valor para rocas o minerales compactos.

Tabla 4.15: Resumen estadístico Granulometría G1 por tipo de roca

Tipo de roca	HF	HC	HAL	IAL	IMN	IC	IF	IFR	IA	CG
Media [%]	23.79	72.24	33.42	24.43	24.96	60.52	24.87	22.35	36.27	46.88
Des. Estándar [%]	17.21	21.93	22.38	17.66	17.32	16.01	15.58	15.67	20.29	18.46

La distribución de los tipos de roca es similar, reflejando una fuerte concentración de valores bajos en los tipos friables y lo contrario en el caso de los compactos.

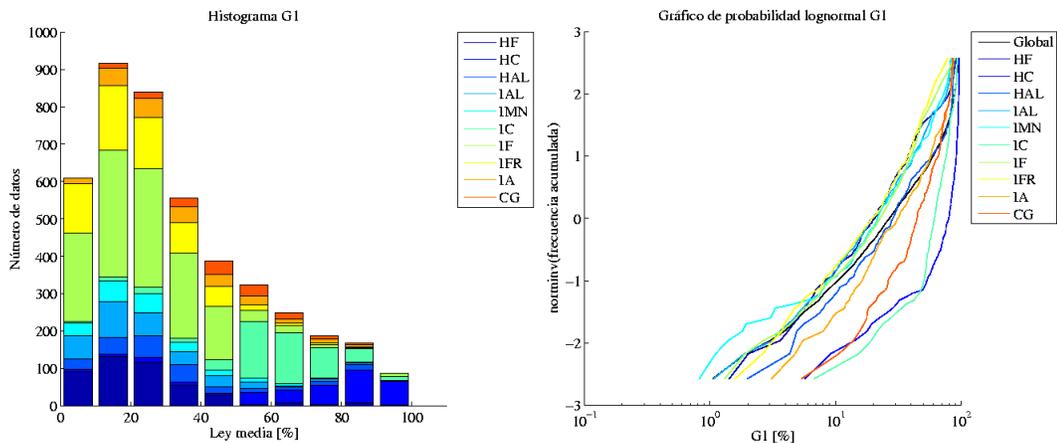


Figura 4.23: A la izquierda histograma G1 por tipo de roca; a la derecha gráfico de probabilidad G1 por tipo de roca

### 4.3. MODELO DE BLOQUES INTERPRETADO

El modelo de rocas del yacimiento corresponde a una interpretación sustentada en un kriging de indicadores, considerando bloques de 10x10x10 metros. Se ubica espacialmente en las siguientes coordenadas.

Coordenada	Mínimo [m]	Máximo [m]
Este	-7490	-5320
Norte	905	1975
Cota	1005	1545

Contiene la siguiente cantidad de nodos.

Coordenada	Número de nodos
Este	219
Norte	108
Cota	55

El porcentaje de cada tipo de roca respecto al total de los datos existentes en el modelo de bloques se presenta en la **Tabla 4.16**. En ella se observa un cambio respecto a los datos con sondajes, ya que el tipo predominante corresponde a IC y no IF, aunque ésta última sigue siendo significativa dentro del total de los datos. Los estériles aparecen en términos porcentuales en el modelo de bloques, lo que no se aprecia en los sondajes debido a que estos últimos se realizan en sectores preferenciales. Las principales diferencias entre los porcentajes de presencia de los tipos de roca a nivel de sondajes y modelo de bloque ocurren con HF que pasó de un 10% a nivel de sondajes a 1% en el modelo de bloques, IC que pasó de 10% a 27% e IF de 30% a 14%. La explicación de estas diferencias es la extensión de ambas bases de datos, junto a la forma de determinación de cada una, ya que en sondajes suelen establecerse los tipos de roca mediante interpretaciones geológicas y químicas, mientras que en el modelo de bloques se aplicó una técnica de simulación.

**Tabla 4.16:** Porcentaje de cada tipo de roca dentro del modelo de bloques

Tipo de Roca	Porcentaje del total del modelo de bloques [%]
Dolomita	7.77
Laterita	0.00
Estéril	2.59
Canga	12.33
Dolomita filítica	0.04
Itabirita rica en aluminio	1.27
Itabirita rica en manganeso	0.48
Itabirita compacta	27.41
Itabirita friable	14.20
Hematita friable	0.96
Hematita compacta	0.66
Itabirita friable rica en fierro	1.56

Hematita rica en aluminio	0.43
Filita	10.52
Itabirita anfíbolítica	0.93
Estéril	9.55
Intrusivos	0.15
Estéril	0.17
Aire	8.97

Al igual como se determinó a nivel de sondajes, se estableció el porcentaje de contacto de los principales tipos de roca en el modelo de bloques interpretado, donde se obtuvieron los siguientes valores.

**Tabla 4.17:** Porcentaje de contacto de cada tipo de roca con el resto de los tipos de roca (Modelo de bloques)

	CG	HAL	HC	HF	IA	IAL	IC	IF	IFR	IMN	Estériles
<b>HAL</b>	13.9	0	9.1	23.5	11.0	7.9	1.6	10.8	13.4	7.9	0.9
<b>HC</b>	5.4	7.1	0	25.4	1.4	2.5	12.9	23.0	16.3	0.6	5.4
<b>HF</b>	13.8	10.5	14.6	0	1.8	5.1	2.3	18.2	25.4	3.6	4.7
<b>IA</b>	17.1	6.9	1.2	2.5	0	29.1	4.0	27.4	5.3	1.0	5.5
<b>IAL</b>	8.8	2.8	1.2	4.1	16.7	0	4.8	45.0	9.4	2.4	4.8
<b>IC</b>	1.2	0.2	2.3	0.7	0.9	1.9	0	65.9	3.5	0.9	22.5
<b>IF</b>	5.3	1.0	2.8	3.9	4.2	12.1	45.1	0	13.6	4.6	7.4
<b>IFR</b>	8.6	3.9	6.1	16.5	2.5	7.6	7.2	41.2	0	4.5	1.9
<b>IMN</b>	8.1	3.9	0.7	7.4	1.5	7.2	6.0	44.3	14.5	0	6.4

Al observar la **Tabla 4.17** se aprecia que los principales tipos de roca se encuentran en contacto con la canga, otros tipos de roca y estéril, lo que difiere de la tabla donde se calculan los porcentajes de contacto a nivel de sondajes, pues en ellos los contactos con estéril eran cercanos a cero. Destacable es el caso de la itabirita compacta que tiene un cuarto de sus datos en contacto con estériles, lo que es evidente al observar la distribución de los tipos de roca en el modelo de bloques.

Los tipos de roca del grupo itabirita se encuentran mayoritariamente en contacto con los de su mismo grupo con porcentajes superiores al 60%. Los del grupo hematita presentan principalmente contactos con los del grupo itabirita en porcentajes que rondan el 52%, mientras que con los de su mismo grupo sólo alcanzan el 30%.

Para visualizar el modelo de rocas interpretado del yacimiento se presenta una vista en planta y dos secciones en las **Figuras 4.24 a 4.26**.

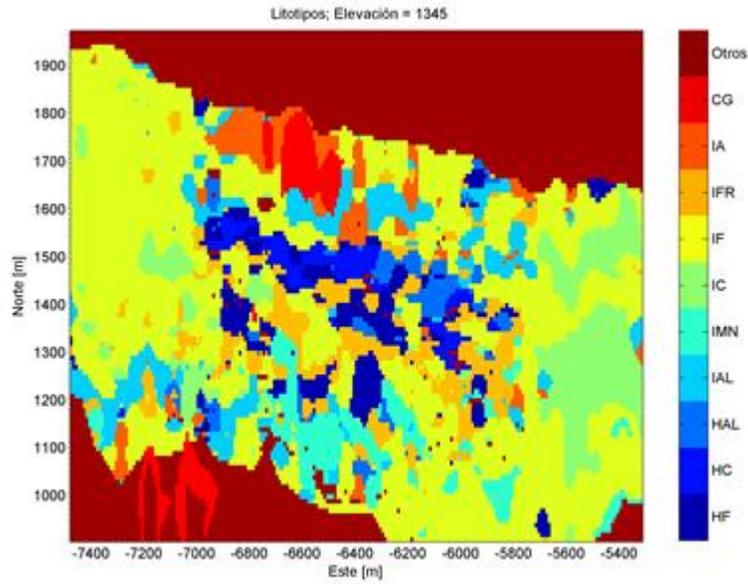


Figura 4.24: Vista en planta elevación 1345 [m], modelo de bloques interpretado

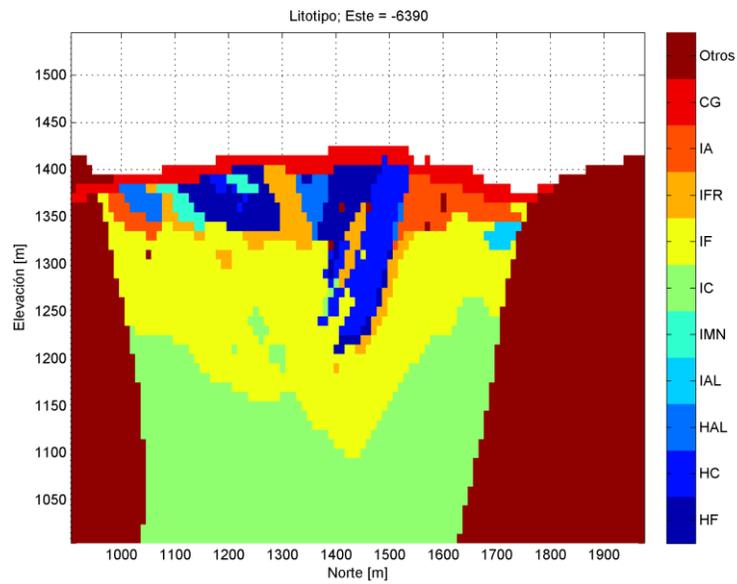


Figura 4.25: Sección este -6390 [m], modelo de bloques interpretado

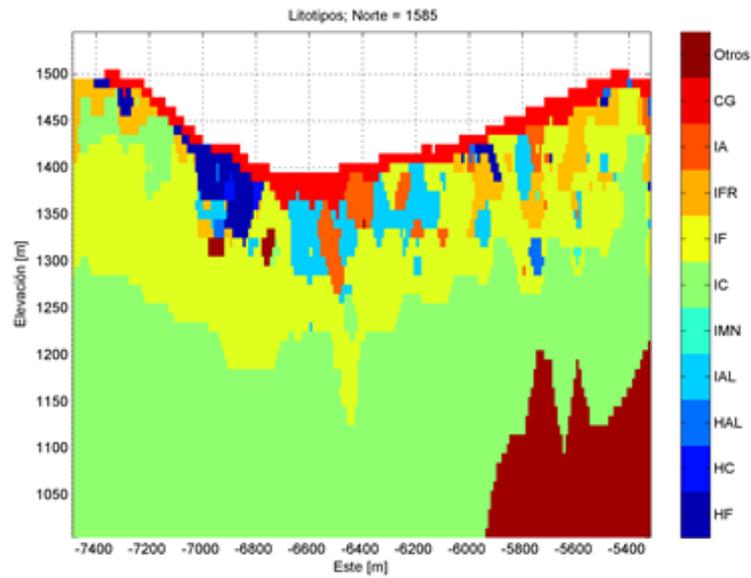


Figura 4.26: Sección norte 1585 [m], modelo de bloques interpretado

El modelo de bloques representa lo complejo del yacimiento en términos litológicos, debido a la existencia de un gran número de tipos de roca. Mayoritariamente se localizan los tipos de roca sin interés económicos en los bordes, mientras que la cancha se localiza en el sector superior. Las itabiritas compacta y friable se presentan en profundidad y generalmente en los bordes, con un alto contacto entre ellas. Las hematitas, se ubican en superficie y mayoritariamente en el centro del depósito mineral.

# CAPÍTULO 5

## MODELAMIENTO Y SIMULACIÓN DE TIPOS DE ROCAS

La simulación de los diez tipos de roca de interés se efectúa mediante simulación plurigaussiana, donde se considera que los estériles son conocidos, por lo tanto no son parte de la simulación. A grandes rasgos, la simulación considera la partición del espacio a simular en sub dominios, mediante la truncación de distintas funciones aleatorias Gaussianas.

A continuación se presentan las principales etapas que permiten la obtención de los modelos geológicos simulados, asociados al yacimiento de interés.

### 5.1. DEFINICIÓN DE REGLA DE TRUNCACIÓN

Para la simulación de los tipos de rocas es necesario definir una regla de truncación, que permita aplicar la simulación plurigaussiana. Como ya se mencionó, la simulación se centra en los tipos de rocas asociados al mineral (hematitas, itabiritas y canga), ya que el estéril no será simulado.

La siguiente figura presenta la regla de truncación definida, la cual considera seis funciones aleatorias Gaussianas independientes, las que posteriormente serán explicadas en detalle.

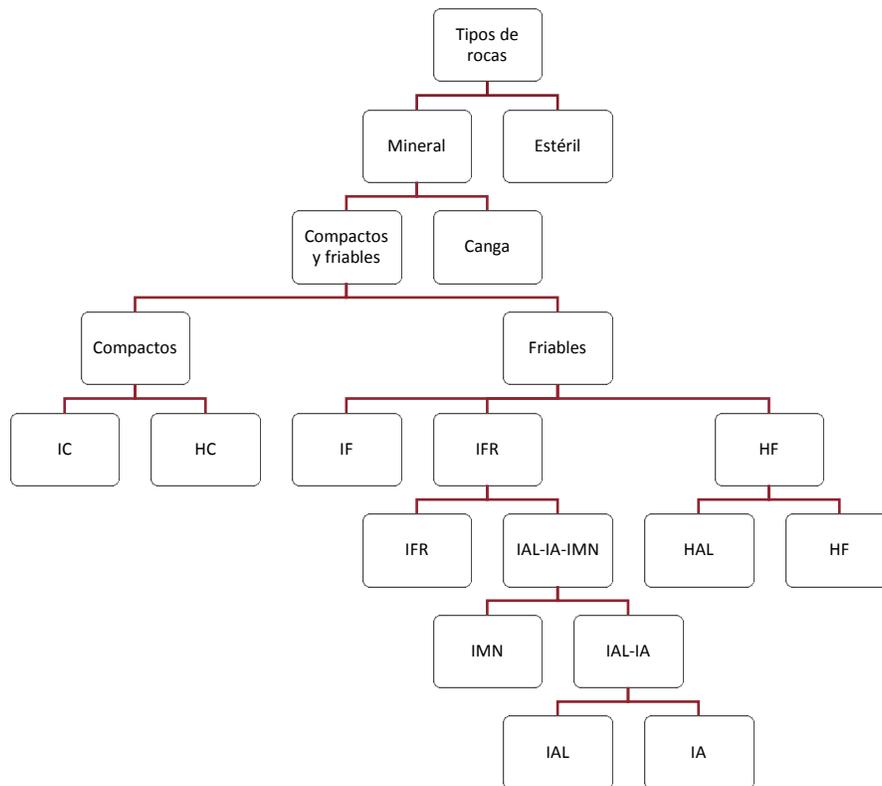


Figura 5.1: Regla de truncación para simulación de tipos de roca en el yacimiento

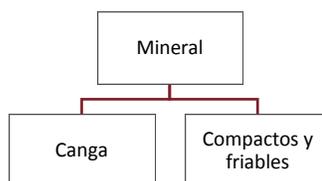
Para efectos prácticos los tipos de roca se codificarán con números consecutivos como se refleja en la siguiente tabla.

**Tabla 5.1:** Codificación de litotipos a simular

<b>Tipo de Roca</b>	<b>Simbología</b>	<b>Código</b>
Hematita Friable	HF	1
Hematita Compacta	HC	2
Hematita rica en aluminio	HAL	3
Itabirita rica en aluminio	IAL	4
Itabirita rica en manganeso	IMN	5
Itabirita compacta	IC	6
Itabirita friable	IF	7
Itabirita friable rica	IFR	8
Itabirita anfibolítica	IA	9
Canga	CG	10

### 5.1.1 Primera función aleatoria Gaussiana: división del mineral

La primera sub división que se debe realizar es entre los distintos tipos de mineral. Debido a su interés económico y naturaleza, la canga es simulada de forma independiente del resto de los otros tipos minerales.



Esta primera división se resume en la siguiente tabla.

**Tabla 5.2:** División entre canga y otros tipos de roca

<b>Tipo de Roca</b>	<b>Simbología</b>	<b>Código</b>
Canga	CG	10
Minerales compactos y friables	HF, H C, HAL, IAL, IMN, IC, IF, IFR, IA	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

La proporción a nivel de sondajes de la canga es igual a 2.31% del total de datos a simular. El esquema visual de la primera función aleatoria Gaussiana se presenta en la **Figura 5.2**.

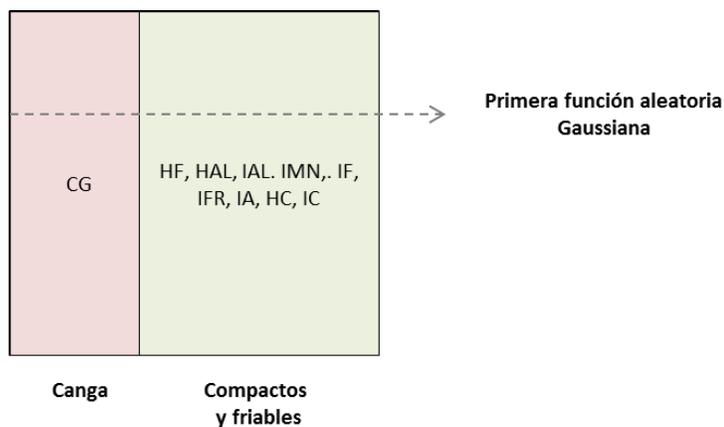


Figura 5.2: Esquema truncación de primera función aleatoria Gaussiana

### 5.1.2 Segunda función aleatoria Gaussiana: división por granulometría

Entre los minerales compactos y friables se produce una división clara debido al valor de granulometría G1 que presenta cada uno. Los compactos están asociados a valores mayores de G1, mientras que los friables presentan valores menores de esta misma variable.

La división considerada se resume en la siguiente tabla.

Tabla 5.3: División entre compactos y friables

Tipo de Roca	Simbología	Código
Compactos	HC, IC	2, 6
Friables	HF, HAL, IAL, IMN, IF, IFR, IA	1, 3, 4, 5, 7, 8, 9

La proporción a nivel de sondajes de los tipos de roca compactos es igual a 19.31% del total de datos compactos y friables. Un esquema visual es presentando en la **Figura 5.3**.

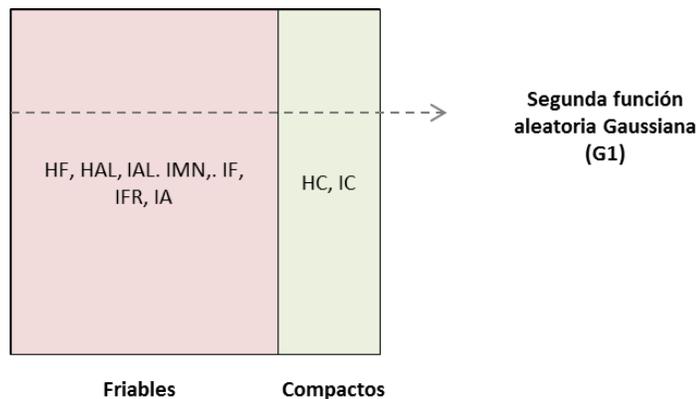
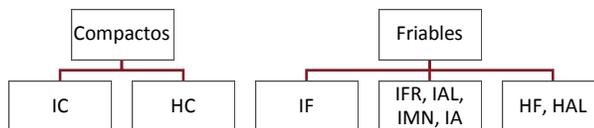


Figura 5.3: Esquema truncación de segunda función aleatoria Gaussiana

### 5.1.3 Tercera función aleatoria Gaussiana: división por fierro

Dentro de los sub grupos compactos y friables, existen notorias diferencias debidas al contenidos de fierro de los tipos de roca. Esta sub división se refleja en el siguiente esquema.



En el caso del grupo de rocas compactas se distinguen la itabirita de la hematita, donde la primera presenta leyes de fierro inferiores a 62%, y la segunda tiene leyes superiores a ese límite. En el caso de las rocas friables, se distinguen dos sub grupos: hematitas e itabiritas, las que a su vez se dividen en dos: las itabiritas con bajo contenido de fierro (IF con leyes inferiores a 52%) y las itabiritas ricas en fierro (IFR, IAL, IMN e IA) con leyes de fierro entre 52% a 62%.

La **Tabla 5.4** resume la siguiente situación.

**Tabla 5.4:** División por contenido de fierro

Tipo de Roca	División	Simbología	Código
Compactos	Compactos ricos en fierro	HC	2
	Compactos pobres en fierro	IC	6
Friables	Hematitas ricas en fierro	HF, HAL	1, 3
	Itabiritas friables ricas	IAL, IMN, IFR, IA	4, 5, 8, 9
	Itabiritas friables pobres	IF	7

De acuerdo a la definición anterior, habrá grupos que tenderán a no encontrarse en contacto. Por ejemplo las hematitas ricas en fierro no tendrán contacto con las itabiritas friables pobres en fierro. Por otro lado, dependiendo de las proporciones, es probable que la itabirita compacta no esté en contacto con las hematitas friables ricas en fierro, lo que hace sentido al considerar que estos grupos se diferencian por su contenido de fierro.

Un esquema visual de la sub división de este grupo se presenta en la siguiente figura.

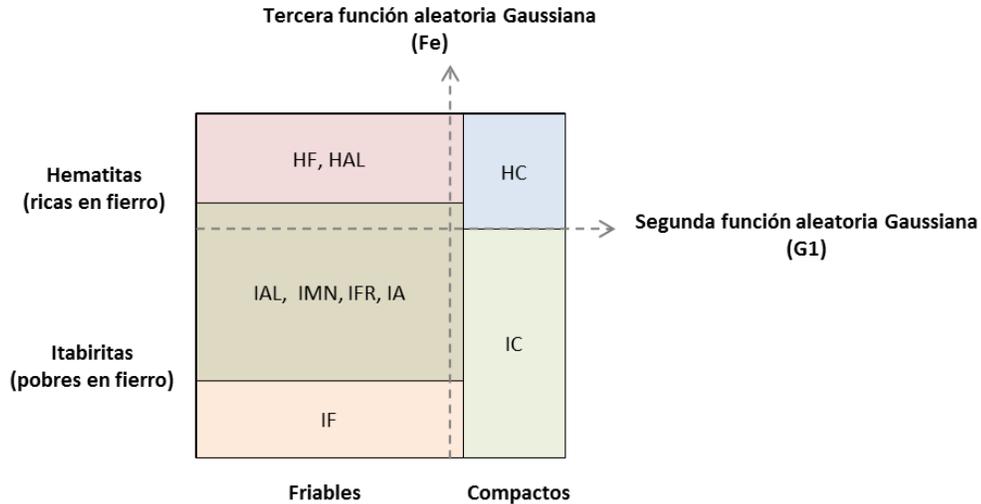
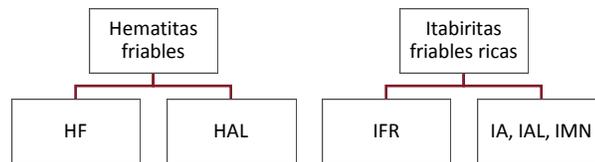


Figura 5.4: Esquema truncación de tercera función aleatoria Gaussiana

#### 5.1.4 Cuarta función aleatoria Gaussiana: división por aluminio

Dentro de los sub grupos definidos en la etapa anterior existen diferencias producto de las leyes de aluminio, en particular dentro de las itabiritas friables ricas y las hematitas ricas en hierro, como se refleja en el siguiente esquema.



La **Tabla 5.5** muestra la sub división realizada.

Tabla 5.5: División por contenido de aluminio

Tipo de Roca	División	Simbología	Código
Hematitas ricas en hierro	Hematita rica en aluminio	HAL	3
	Hematita friable	HF	1
Itabiritas friables ricas	Itabirita friable rica	IFR	8
	Otras itabiritas friables	IAL, IMN, IA	4, 5, 9

La división efectuada separa las hematitas ricas en hierro en dos grupos: las del alto contenido de aluminio (HAL) y las de bajo contenido de aluminio (HF). A su vez, dentro de las itabiritas se produce la misma división, siendo IFR de bajo contenido de aluminio e IAL, IMN e IA ricas en aluminio.

Un esquema visual de la sub división de este grupo se presenta en la siguiente figura.

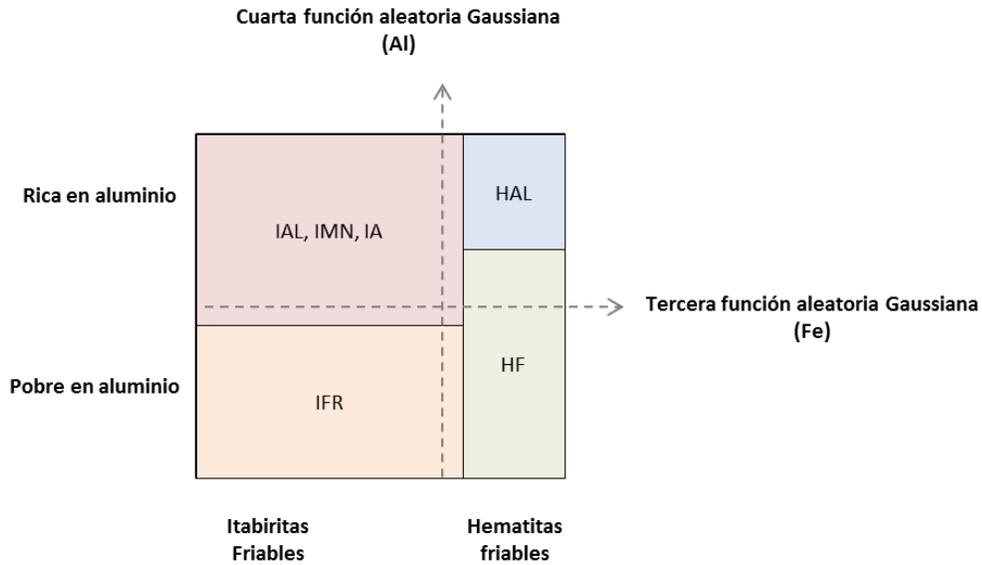
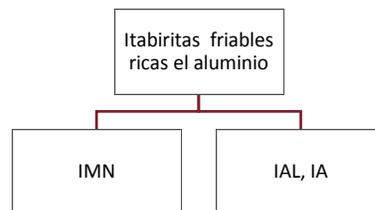


Figura 5.5: Esquema truncación de cuarta función aleatoria Gaussiana

### 5.1.5 Quinta función aleatoria Gaussiana: división por manganeso

Las itabiritas friables ricas en aluminio pueden ser sub divididas considerando la ley de manganeso presente en esos tipos de roca. El siguiente esquema muestra la sub división realizada, donde se observa que los grupos están conformados por: la itabirita rica en manganeso (con leyes superiores a 1%) y las itabiritas pobres en manganeso (IA e IAL) cuyo contenido de manganeso no es superior al 1% de ese elemento.



La **Tabla 5.6** muestra la sub división realizada.

Tabla 5.6: División por contenido de manganeso

Tipo de Roca	División	Simbología	Código
Itabiritas friables ricas en aluminio	Itabirita rica en manganeso	IMN	5
	Itabiritas pobres en manganeso	IAL, IA	4, 9

Un esquema visual de la sub división de este grupo se presenta en la **Figura 5.6**.

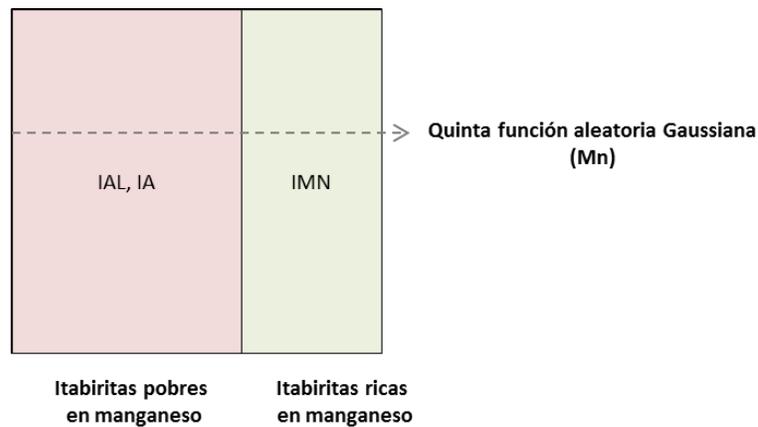
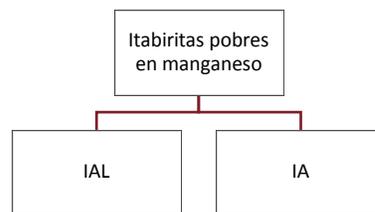


Figura 5.6: Esquema truncación de quinta función aleatoria Gaussiana

### 5.1.6 Sexta función aleatoria Gaussiana: división por pérdida de fuego

Finalmente, las itabiritas pobres en manganeso pueden ser sub divididas de acuerdo al contenido de pérdida de fuego. Por una parte, la itabirita anfibolítica (IA) presenta contenidos de pérdida de fuego superiores a 5%, mientras que la itabirita rica en aluminio (IAL) presenta contenidos inferiores a 5% del elemento antes citado. Esto se refleja en el siguiente esquema.



La **Tabla 5.7** muestra la sub división realizada.

Tabla 5.7: División por contenido de pérdida de fuego

Tipo de Roca	División	Simbología	Código
Itabiritas pobres en manganeso	Itabirita anfibolítica	IA	9
	Itabirita rica en aluminio	IAL	4

Un esquema visual de la sub división de este grupo se presenta en la **Figura 5.7**.

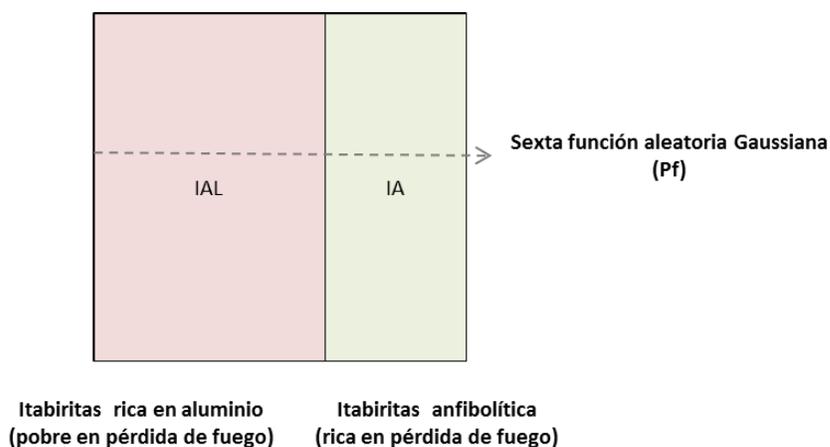


Figura 5.6: Esquema truncación de sexta función aleatoria Gaussiana

## 5.2. VARIOGRAFÍA DE FUNCIONES ALEATORIAS GAUSSIANAS

Una vez definidas las seis funciones aleatorias Gaussianas se procede a calcular los variogramas experimentales para posteriormente realizar su ajuste. A pesar de los datos de tipos de roca codificados en indicadores, se calcula primero los variogramas de indicadores, los que se transforman a variogramas de Gaussianas mediante la **Fórmula 2.16**.

La variografía experimental se realiza en dos direcciones (horizontal y vertical) considerando los siguientes parámetros:

Dirección	Horizontal	Vertical
Azimut [°]	0	0
Tolerancia Azimut [°]	90	90
Dip [°]	0	90
Tolerancia dip [°]	20	20
Paso [m]	50	10
N° pasos	8	15
Tolerancia en paso [m]	25	5

El ajuste variográfico considera diferentes estructuras para cada una de las funciones aleatorias Gaussianas, como se presenta en la siguiente tabla. Las mesetas asignadas a estas estructuras se determinan mediante un algoritmo semi-automático de mínimos cuadrados, con la restricción de que la meseta total sea igual a uno para cada función aleatoria Gaussiana.

Función aleatoria Gaussiana	Estructura	Tipo	Alcance horizontal [m]	Alcance vertical [m]	Meseta
1	#1	Cúbico	100	150	0.271
	#2	Cúbico	1000	150	0.729
2	#1	Cúbico	25	15	0.765
	#2	Cúbico	550	100	0.235
3	#1	Exponencial	110	85	0.761
	#2	Cúbico	700	165	0.239
4	#1	Exponencial	200	200	1.000

5	#1	Esférico	520	520	1.00
6	#1	Cúbico	65	30	0.903
	#2	Cúbico	600	35	0.097

El resultado del ajuste semi-automático se refleja en las siguientes figuras, donde las cruces corresponden a los variogramas experimentales calculados y la línea continua es el resultado del ajuste.

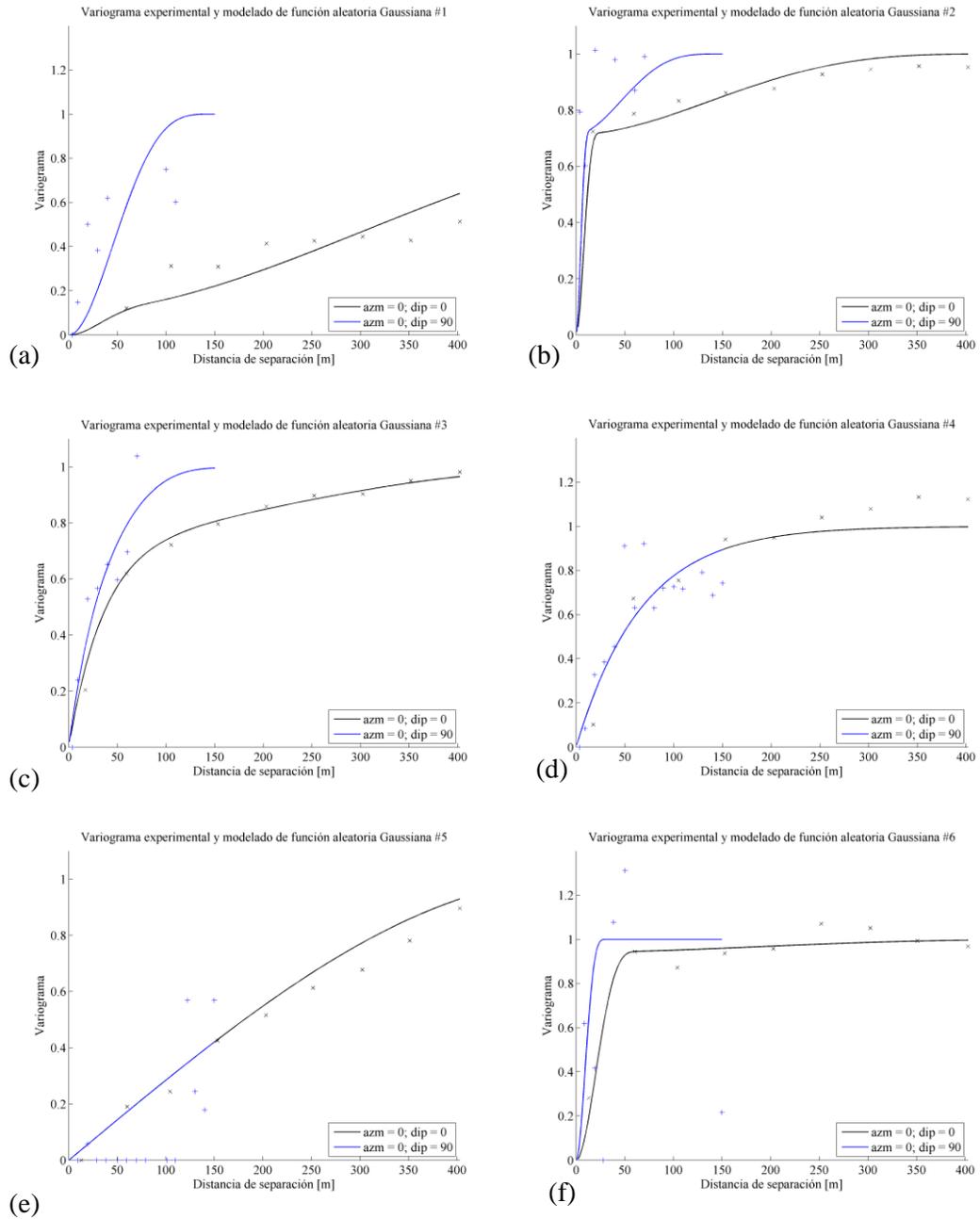


Figura 5.7: Variogramas experimentales y modelados de las seis funciones aleatorias Gaussianas

### 5.3. UMBRALES DE TRUNCACIÓN

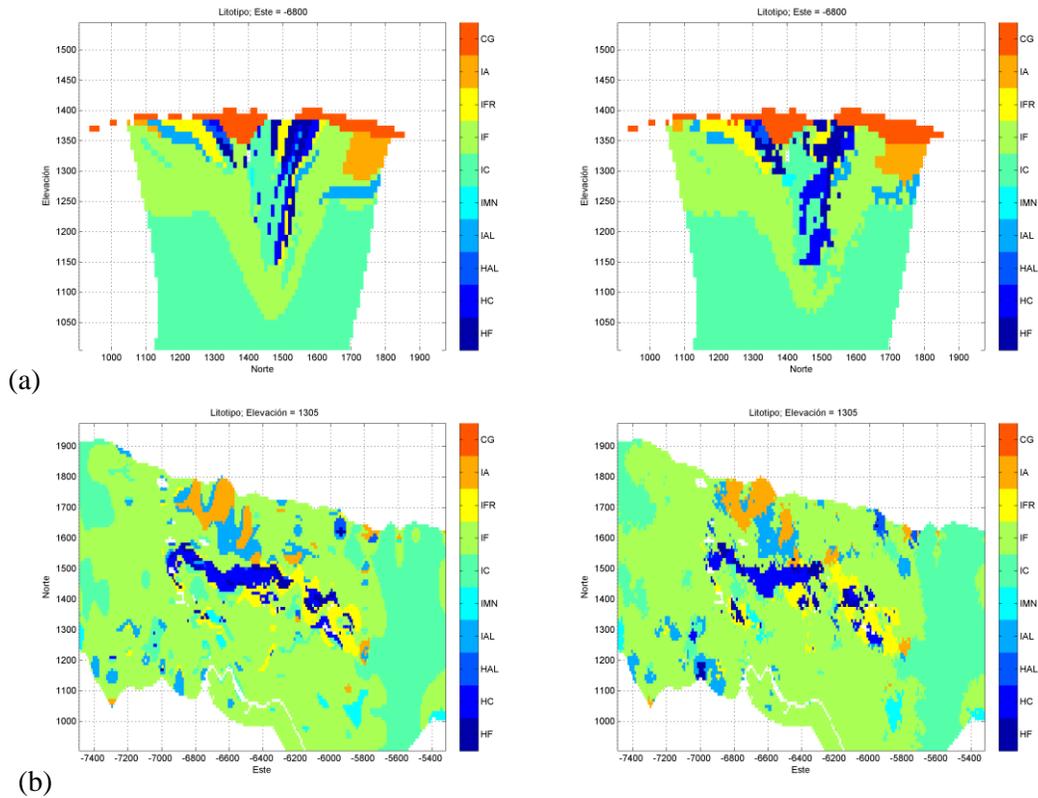
Los umbrales de truncación se definen en función de las proporciones de los tipos de roca. Estas proporciones pueden considerarse a nivel global o local, siendo las primeras poco representativas del fenómeno que se desea modelar.

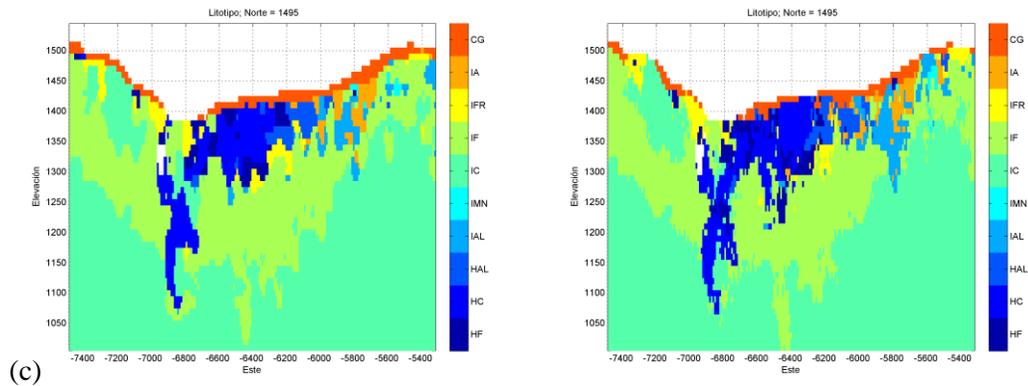
Para reproducir la disposición espacial de los tipos de roca se utilizan proporciones y umbrales locales, los cuales fueron definidos en base al modelo interpretado y a una ventana móvil de tamaño 20 x 20 x 10 [m].

### 5.4. SIMULACIÓN PLURIGAUSIANA DE TIPOS DE ROCAS

La simulación de tipos de roca se efectúa mediante simulación plurigaussiana, condicional a la información de los sondajes de exploración. Esta simulación en una primera instancia realiza la transformación a valores Gaussianos de la información disponible mediante el muestreador de Gibbs, luego realiza la simulación Gaussiana con el algoritmo de bandas rotantes. Posterior a esto realiza el condicionamiento mediante kriging y finalmente se aplican los umbrales de truncación para obtener el tipo de roca en cada una de las veinte realizaciones efectuadas.

A continuación se presentan algunas vistas obtenidas en la realización número diez, las que además son comparadas con la misma vista del modelo de bloques interpretado.





**Figura 5.8:** Visualización del modelo de bloques interpretado a la izquierda y de la realización #10 a la derecha. (a) Perfil Este - 6800 [m], (b) Vista en planta 1305 [m] y (c) Perfil Norte 1465 [m]

Del análisis de la realización anterior, se desprende una alta correspondencia entre el modelo de bloques interpretado y el resultado de la realización, lo que se puede apreciar en todas las vistas y perfiles. La principal salvedad entre ambos modelos, es la mayor variabilidad espacial que presenta la realización, lo que se aprecia al ver los contactos con quiebres más abruptos y zonas interiores más variables. A pesar de esto el algoritmo utilizado es capaz de simular diversos tipos de roca reproduciendo sus relaciones de contacto, proporciones locales y su continuidad espacial.

## 5.5. PROCESAMIENTO DE LAS REALIZACIONES

Para analizar las realizaciones efectuadas se cuenta con diferentes herramientas tanto a nivel local como global.

### 5.5.1 Procesamiento a nivel global

Lo primero que se realiza es el estudio de las proporciones de los tipos de roca en cada una de las realizaciones efectuadas, lo que se resume en la **Figura 5.9**. En ella se puede observar proporciones similares a través de las diferentes realizaciones, lo que implica baja incertidumbre sobre estas proporciones (en términos cuantitativos). Las mayores diferencias que se producen entre realizaciones están asociadas a la itabirita compacta, cuya desviación es de 0.03%.

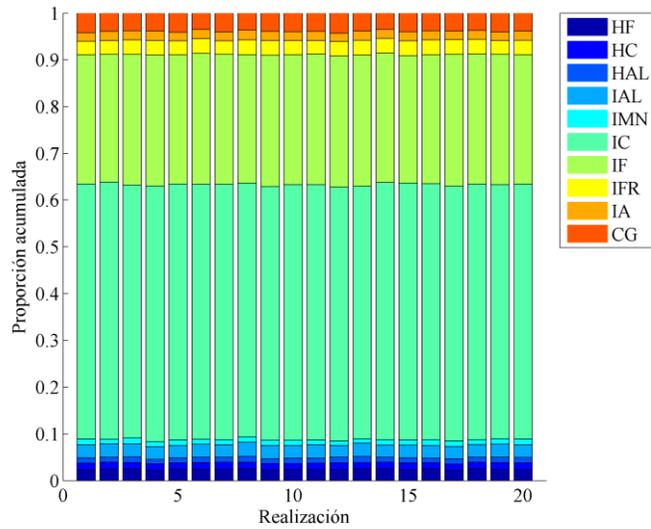
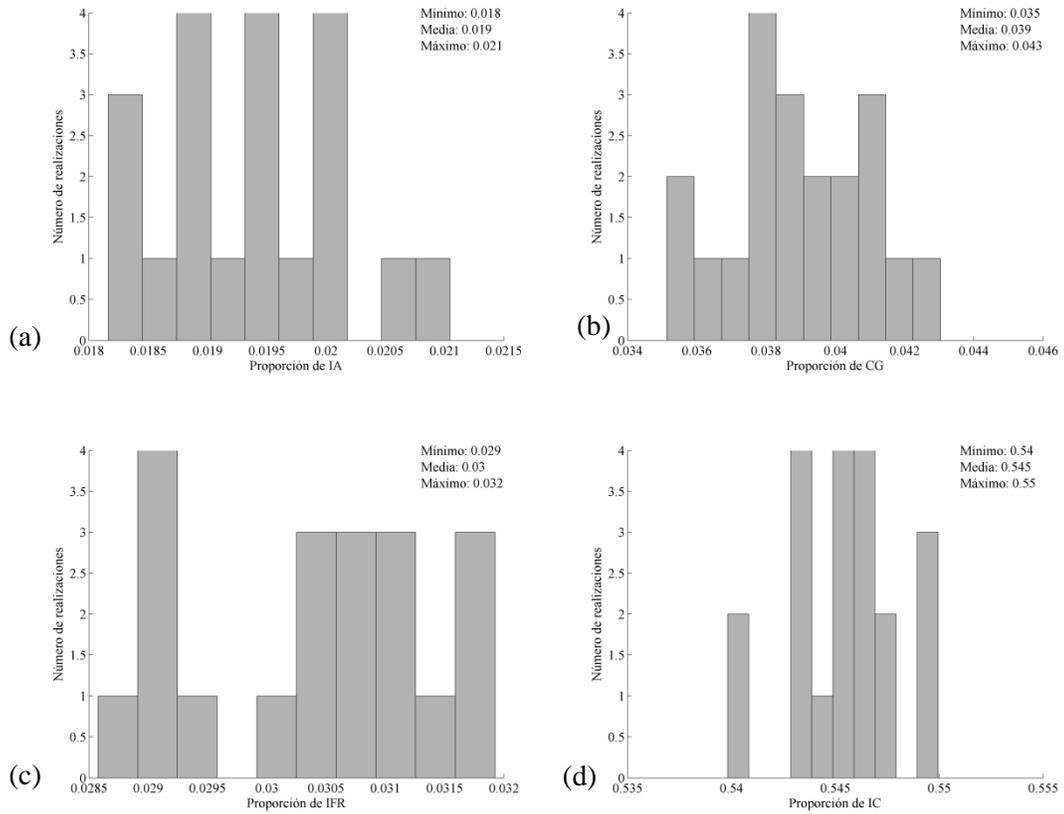
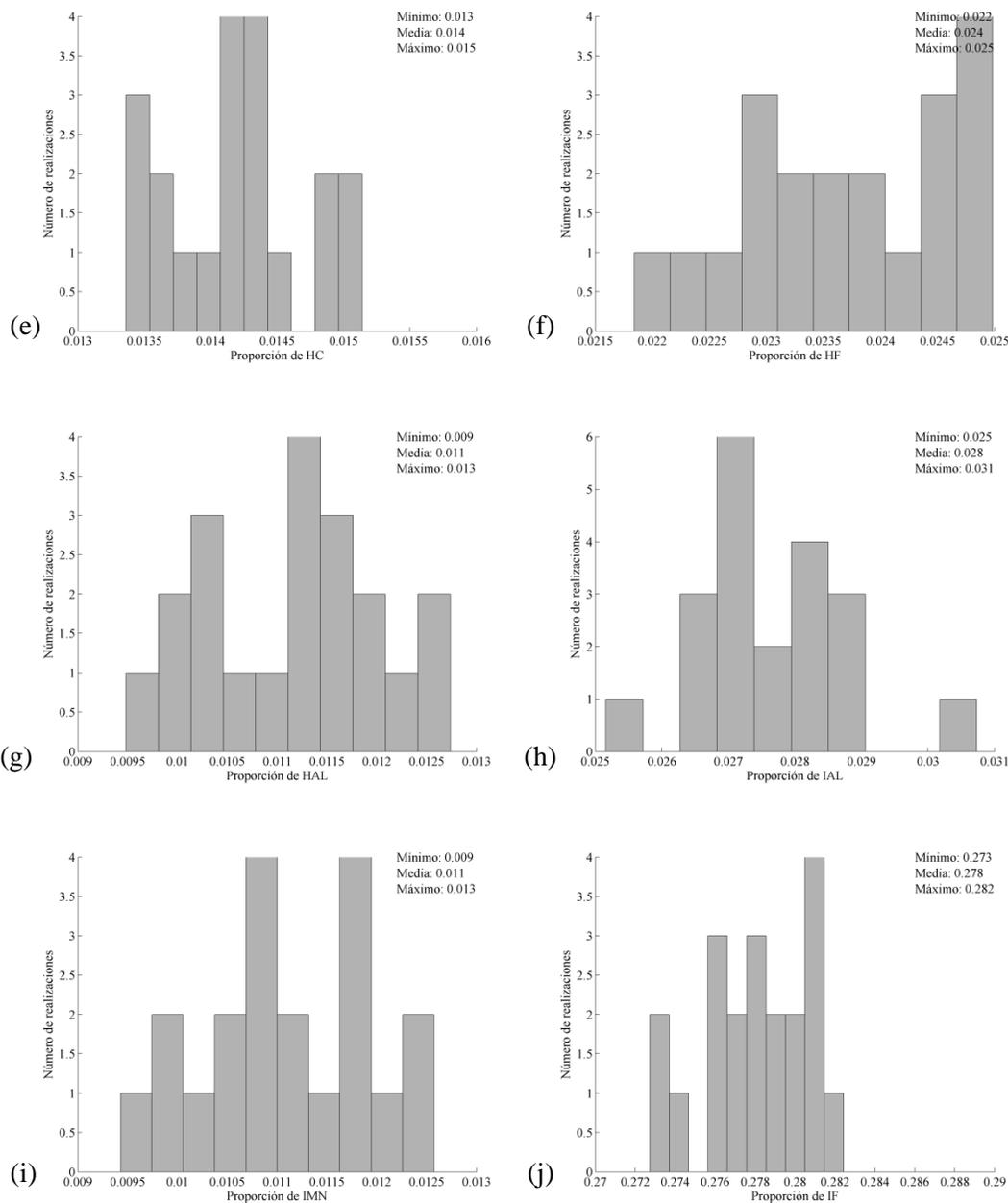


Figura 5.9: Proporción acumulada de tipos de roca por realización

El detalle de la proporción de cada tipo de roca se presenta en los esquemas de la **Figura 5.10**.





**Figura 5.10:** Histograma de número de realizaciones que posee una determinada proporción para cada tipo de roca. (a) itabirita anfíbolítica, (b) canga, (c) itabirita friable rica, (d) itabirita compacta, (e) hematita compacta, (f) hematita friable, (g) Hematita rica en aluminio, (h) itabirita rica en aluminio, (i) itabirita rica en manganeso y (j) itabirita friable

### 5.5.2 Procesamiento a nivel local

A escala local es posible construir el modelo litológico mediante la selección del tipo de roca más probable en cada bloque (**Figura 5.11**), además del cálculo de la probabilidad asociada a cada bloque (**Figura 5.12**).

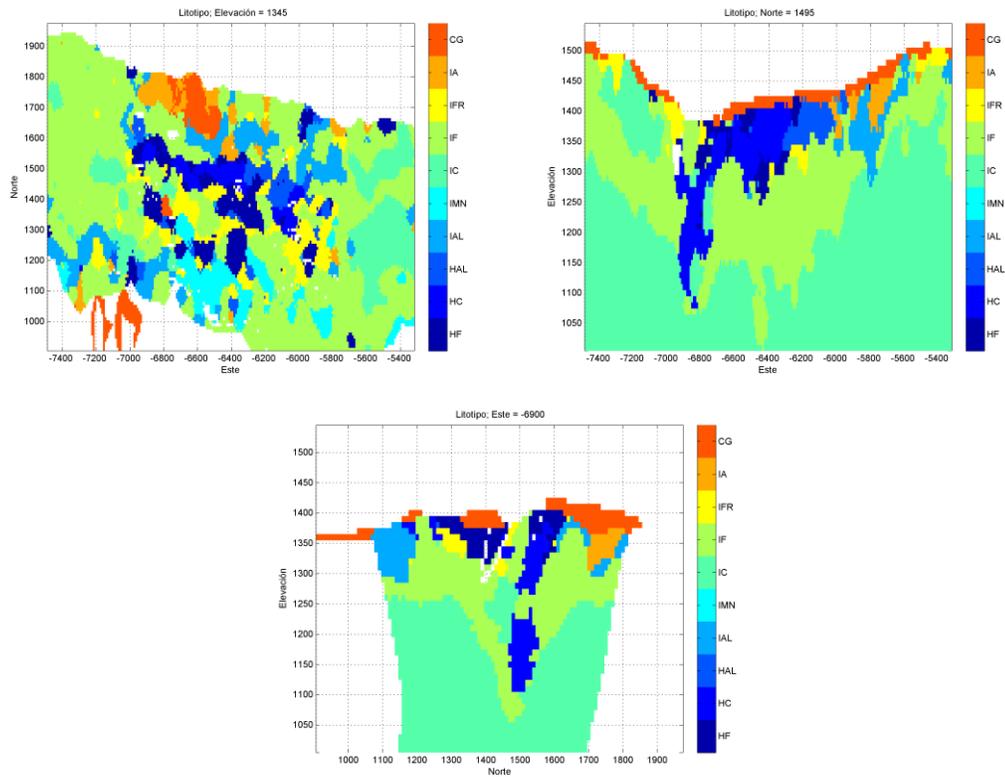


Figura 5.11: Perfiles y secciones del modelo litológico según el tipo de roca más probable

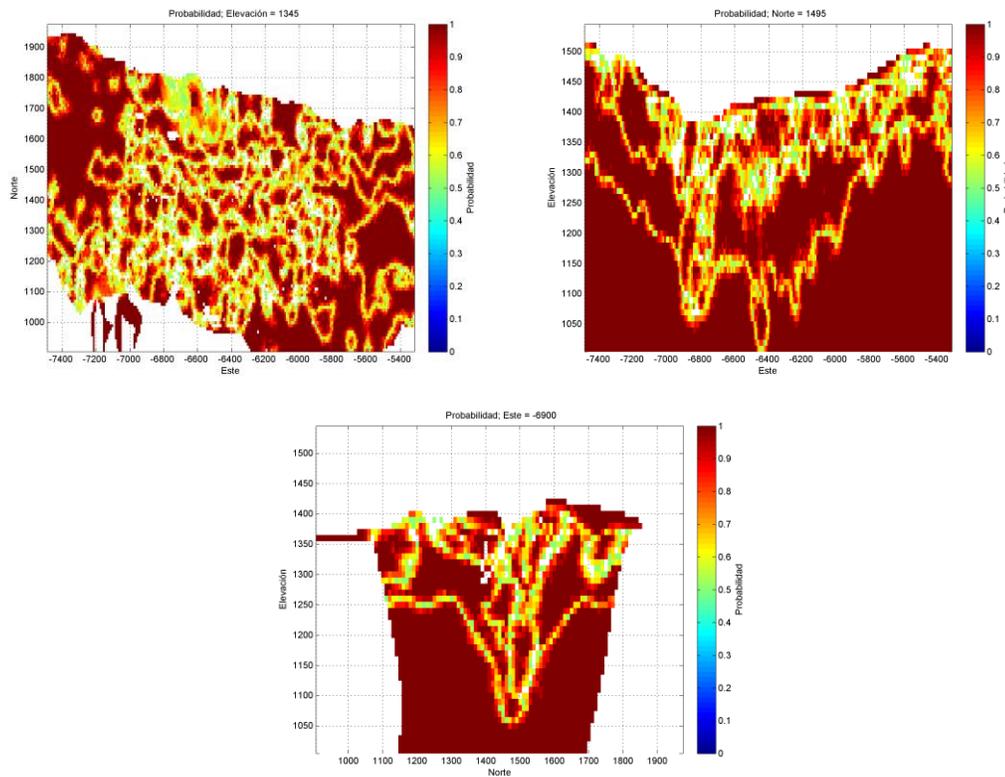
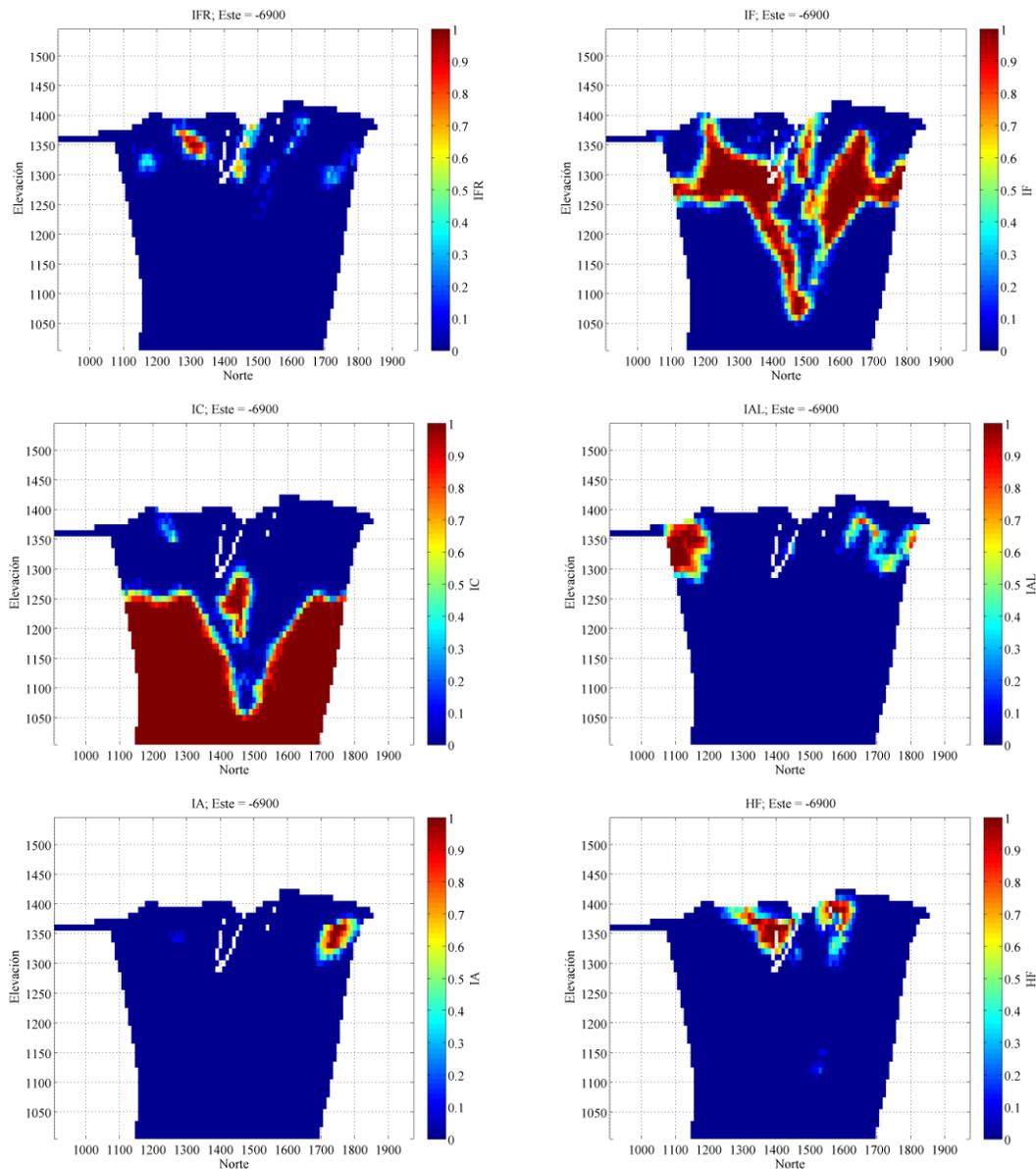


Figura 5.12: Mapas de probabilidad del tipo de roca más probable (perfiles y secciones del modelo litológico).

La **Figura 5.12** muestra que los tipos de roca más probables presentan una alta probabilidad de ocurrencia, en especial en los bordes del modelo litológico. Sin embargo, existe una mayor incertidumbre y riesgo de encontrar un tipo de roca diferente al planteado en los sectores centrales del modelo.

La **Figura 5.13** muestra los mapas de probabilidad de los distintos tipos de roca simulados (perfil este). Se observan zonas fuertemente dominadas por un tipo de roca particular, como ocurre por ejemplo, con la itabirita compacta en profundidad o la canga en superficie.



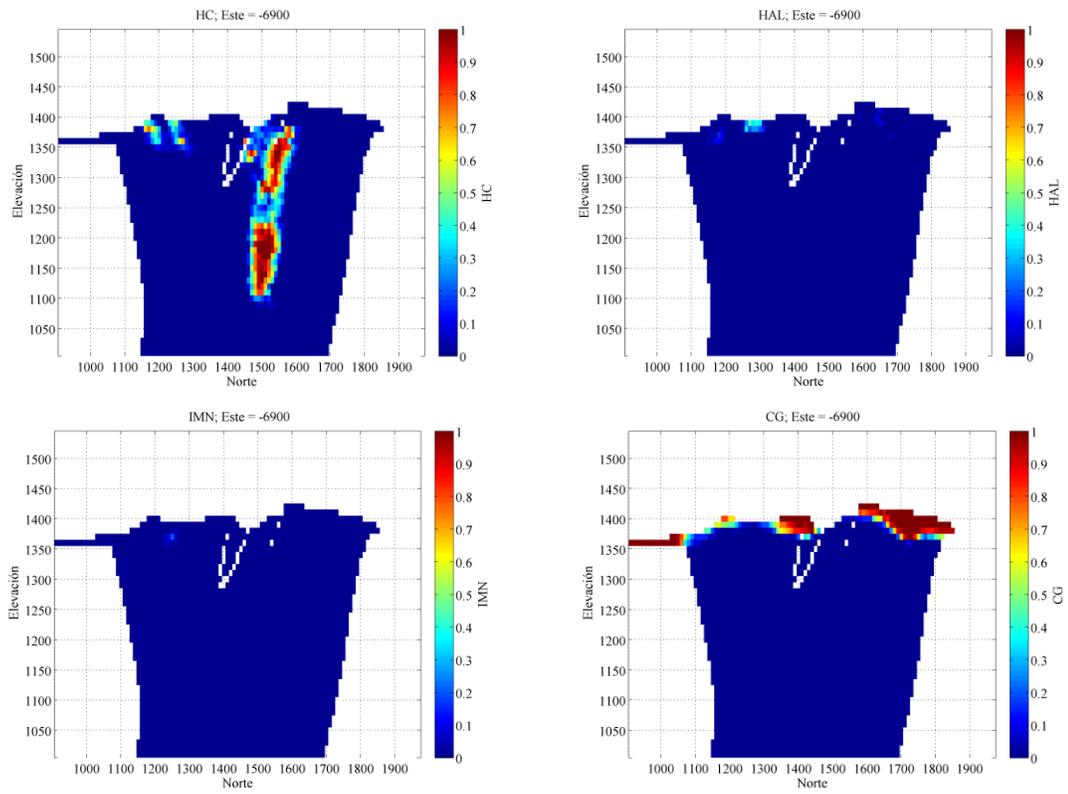


Figura 5.13: Mapas de probabilidad para cada tipo de roca (perfil este)

# CAPÍTULO 6

## MODELAMIENTO Y COSIMULACIÓN DE LEYES

En el siguiente capítulo se realizará la cosimulación de leyes mediante dos modelos: el primero considera una cosimulación de las variables de interés aplicando la metodología del capítulo 3, mientras que el segundo considera la cosimulación de variables transformadas con el objetivo de reproducir la relación estequiométrica existente entre las variables de interés.

La mayoría de los pasos son análogos para los dos modelos de cosimulación. En primera instancia se presentarán los pasos y resultados del modelo de cosimulación de variables originales y en segunda instancia aquel que considera variables transformadas.

## MODELO N°1: COSIMULACIÓN DE VARIABLES ORIGINALES

### 6.1. DEFINICIÓN DE UNIDADES GEOLÓGICAS

Como fue mencionado en capítulos anteriores, una de las innovaciones de este trabajo es la definición de unidades geológicas para cada variable y no para el conjunto total de los datos, como se hace comúnmente. Para determinar las unidades de cada variable se consideraron aspectos estadísticos, geológicos y espaciales, con el objetivo de agrupar tipos de roca que guarden relación en todos los aspectos.

La canga, debido a su importancia económica y su naturaleza supérgena, será considerada por sí sola como una unidad geológica separada. Los estériles y el aire, al ser tipos sin interés económico, no constituirán parte de ningún grupo geológico, siendo simulados con leyes cero y -99, respectivamente. Es por esto que se centra el análisis en los tipos de roca hematita e itabirita.

Dentro de la definición de las unidades geológicas, el análisis de contacto permite realizar el estudio del comportamiento de una variable continua en la frontera de dos unidades [8] [18]. Para esto se cuenta con dos herramientas prácticas, el gráfico de correlación cruzada y el estudio de la ley media versus la distancia desde el contacto. El objetivo de ambos instrumentos estadísticos, es estudiar cómo se comporta la variable en la zona de contacto de dos tipos de roca y también cómo lo hace a medida que aumenta la distancia de separación medida desde dicho contacto. Un contacto suave se refleja con un correlograma que no cae de forma abrupta para distancias pequeñas y con un gráfico de media versus distancia donde la diferencia de las medias a pequeñas separaciones es pequeña o nula. Caso contrario ocurre en los contactos duros, donde los correlogramas pierden correlación a pequeñas distancias, además de presentar una ley media que varía fuertemente al cruzar la frontera entre los tipos de roca.

A continuación se presentan las herramientas utilizadas para determinar las unidades geológicas de cada variable, junto con una tabla que resume dicho resultado.

## 6.1.1 Fierro

Debido a las diferencias geológicas y estadísticas, la primera aproximación consiste en dividir el espacio en dos: hematitas e itabiritas. Por esto se despliegan los diagramas de caja (box plots) y gráficos de probabilidad considerando estas dos unidades.

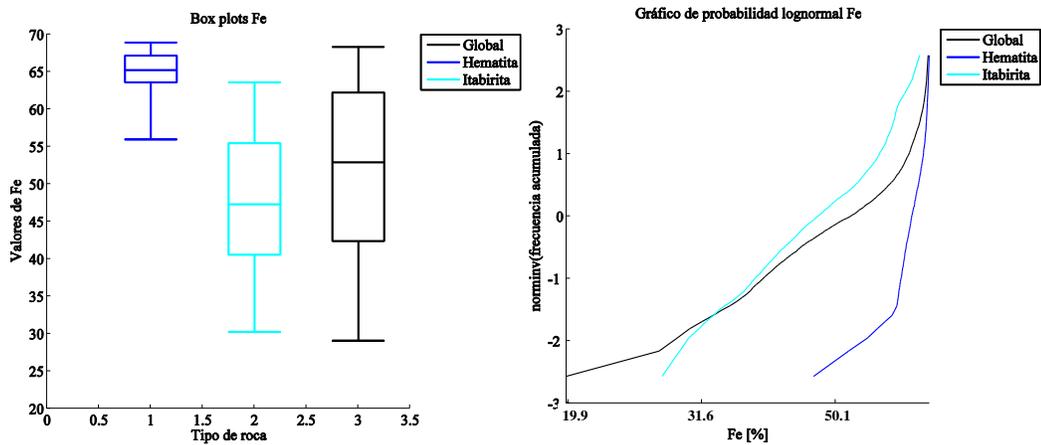


Figura 6.1: Box plots y gráfico de probabilidad lognormal fierro

Se observa que existe una diferencia considerable entre ambos grupos. El box plot permite apreciar estadísticas completamente disímiles, donde las hematitas presentan las mayores leyes de fierro, mientras que el gráfico de probabilidad muestra la existencia de dos poblaciones con distribuciones muy distintas. Por lo tanto, no tiene sentido definir unidades de estimación sin dividir estos dos grupos.

Con esta premisa se realiza un gráfico de media versus desviación estándar que permite entender el comportamiento estadístico de las leyes en cada tipo de roca. Este gráfico muestra la existencia de tres grupos principales, donde las itabiritas se subdividen entre aquellas de bajas leyes y alta desviación y aquellas de leyes intermedias y desviación variable. En general, el gráfico muestra un efecto proporcional inverso de la variable, donde a mayores leyes se presentan menores desviaciones.

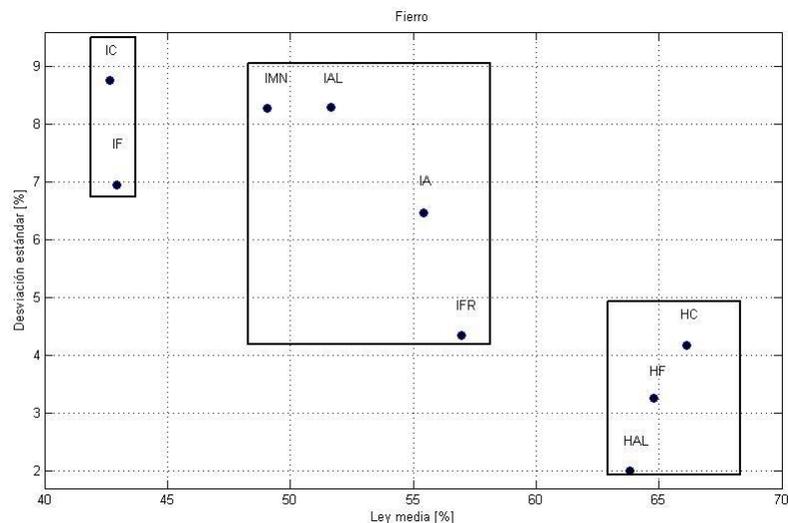


Figura 6.2: Gráfico media vs. desviación estándar de la ley de fierro para cada tipo de roca

Las unidades geológicas definidas se presentan a continuación.

UG	Tipos de roca
1	HC HF HAL
2	IFR IAL IA IMN
3	IC IF

Para las unidades geológicas se presentan los box plots, gráficos de probabilidad e histogramas que permitirán validar o no esta definición. En la **Figura 6.3** se observan diferencias estadísticas y principalmente de distribución entre las tres unidades geológicas, lo que permite definir las como las unidades geológicas finales para la ley de hierro.

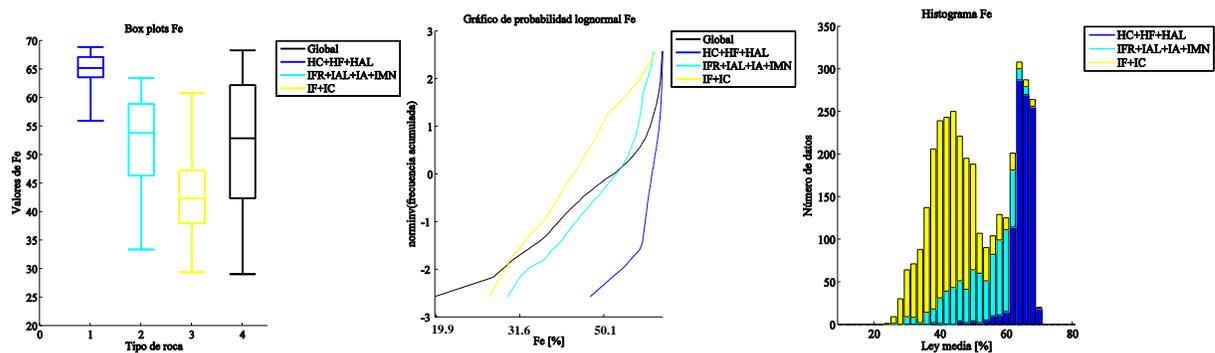
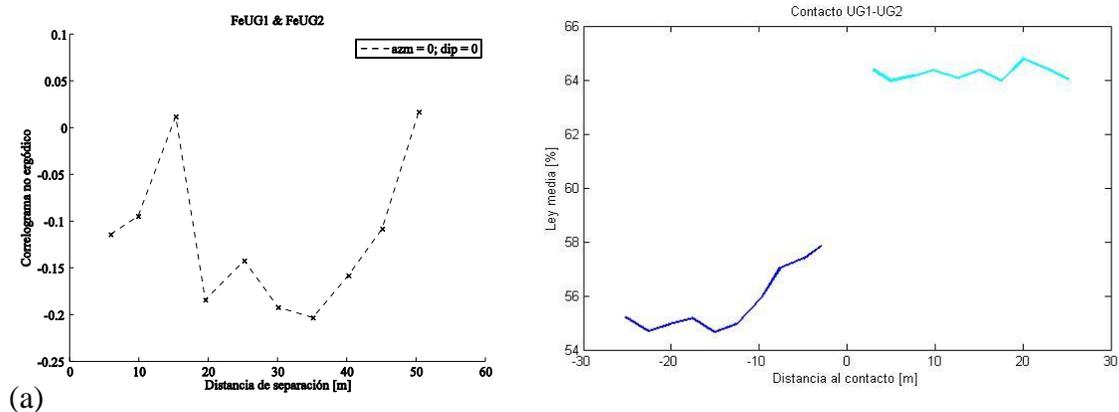
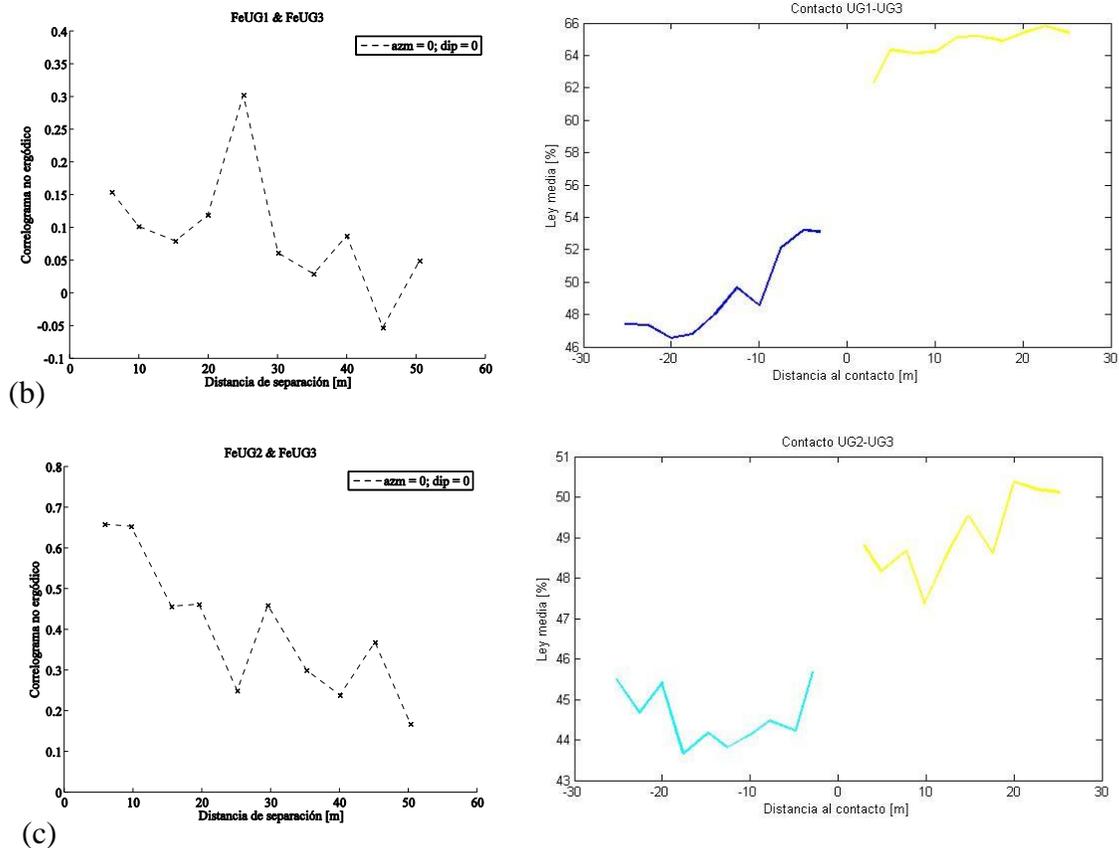


Figura 6.3: Box plots, gráficos de probabilidad e histogramas de ley de hierro

Para estas unidades geológicas se realiza el análisis de contacto mediante el estudio de los correlogramas cruzados y gráficos de media versus distancia respecto al contacto.



(a)



**Figura 6.4:** Correlogramas cruzados y gráficos de ley media vs. distancia al contacto (variable fierro). (a) UG1-UG2, (b) UG1-UG3 y (c) UG2-UG3

El contacto entre las distintas unidades de fierro es principalmente duro, ya que se observan transiciones abruptas en el valor medio al alejarse del contacto. Sin embargo, el gráfico de correlación muestra que la transición entre las UG2 y UG3 es menos abrupta y su variación en términos medios cerca del contacto es solo de 3.1%, así este contacto podría ser de tipo blando, a diferencia de los otros.

### 6.1.2 Sílice

La definición de unidades geológicas en el caso de sílice es análoga a fierro, debido a que además de presentar una correlación negativa alta, estas variables fueron definidas de forma complementaria, donde a mayores leyes de fierro se presentan las menores para sílice y viceversa. De hecho, al analizar el gráfico de media y desviación estándar para los diferentes tipos de roca de sílice, se aprecia un efecto proporcional donde los tipos de roca se configuran de forma contraria a lo visualizado en el caso de fierro (**Figura 6.2**).

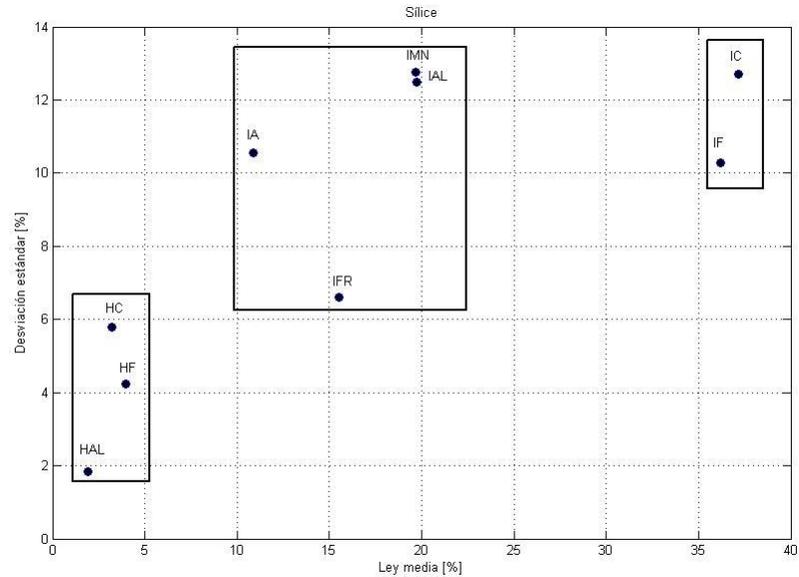


Figura 6.5: Gráfico media vs. desviación estándar de la ley de sílice para cada tipo de roca

En la **Figura 6.5** se distinguen de forma clara las mismas asociaciones que en la variable fierro, donde las hematitas e itabiritas presentan un corte en torno a la ley media de 7%. Dentro de las itabiritas se produce un nuevo corte entre aquellas de mayores leyes (IC y IF) y las de leyes medias. Por lo tanto las unidades geológicas de sílice se resumen en la siguiente tabla.

UG	Tipos de roca
1	HC HF HAL
2	IFR IAL IA IMN
3	IC IF

Para estudiar las estadísticas y distribución de las unidades de estimación de sílice se presentan sus box plots, gráficos de probabilidad e histograma. Se observa un comportamiento similar al de la variable anterior, con diferencias considerables en términos de estadísticos y distribuciones entre las unidades geológicas. Además estas figuras permiten validar la hipótesis del comportamiento inverso entre sílice y fierro, ya que la UG1 es la misma entre ambas variables, sin embargo en el primer caso corresponde a la de menores leyes, mientras que en fierro son las más ricas en dicho metal.

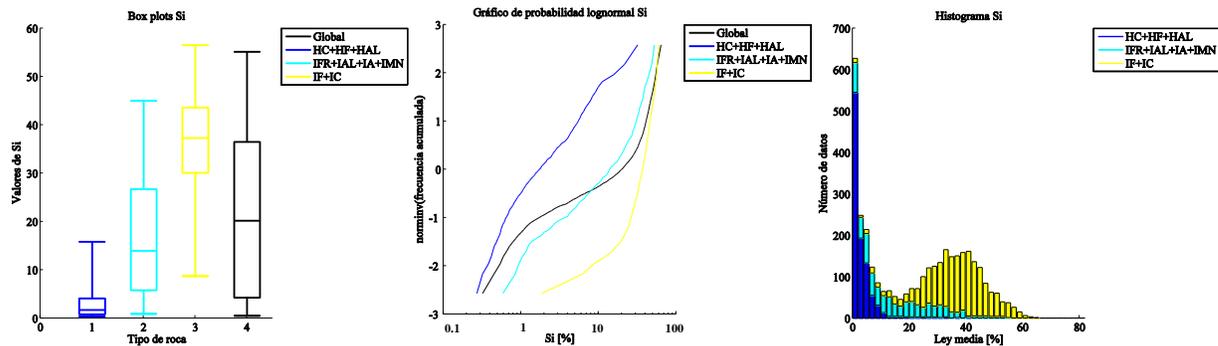


Figura 6.6: Box plots, gráficos de probabilidad e histograma de la ley de sílice

En relación al contacto entre las unidades geológicas se observa que la primera frontera (UG1-UG2) es de tipo dura, tanto por diferencias en la media alrededor del contacto y la pérdida de correlación, que desaparece a 20 [m] de distancia. En el caso de las UG1-UG3 su frontera también es dura en todos los términos posibles. Finalmente las UG2-UG3 presentan diferencias menores en términos de leyes cerca del contacto y su correlación es superior al resto de las fronteras, por lo tanto podría ser una frontera de tipo intermedia.

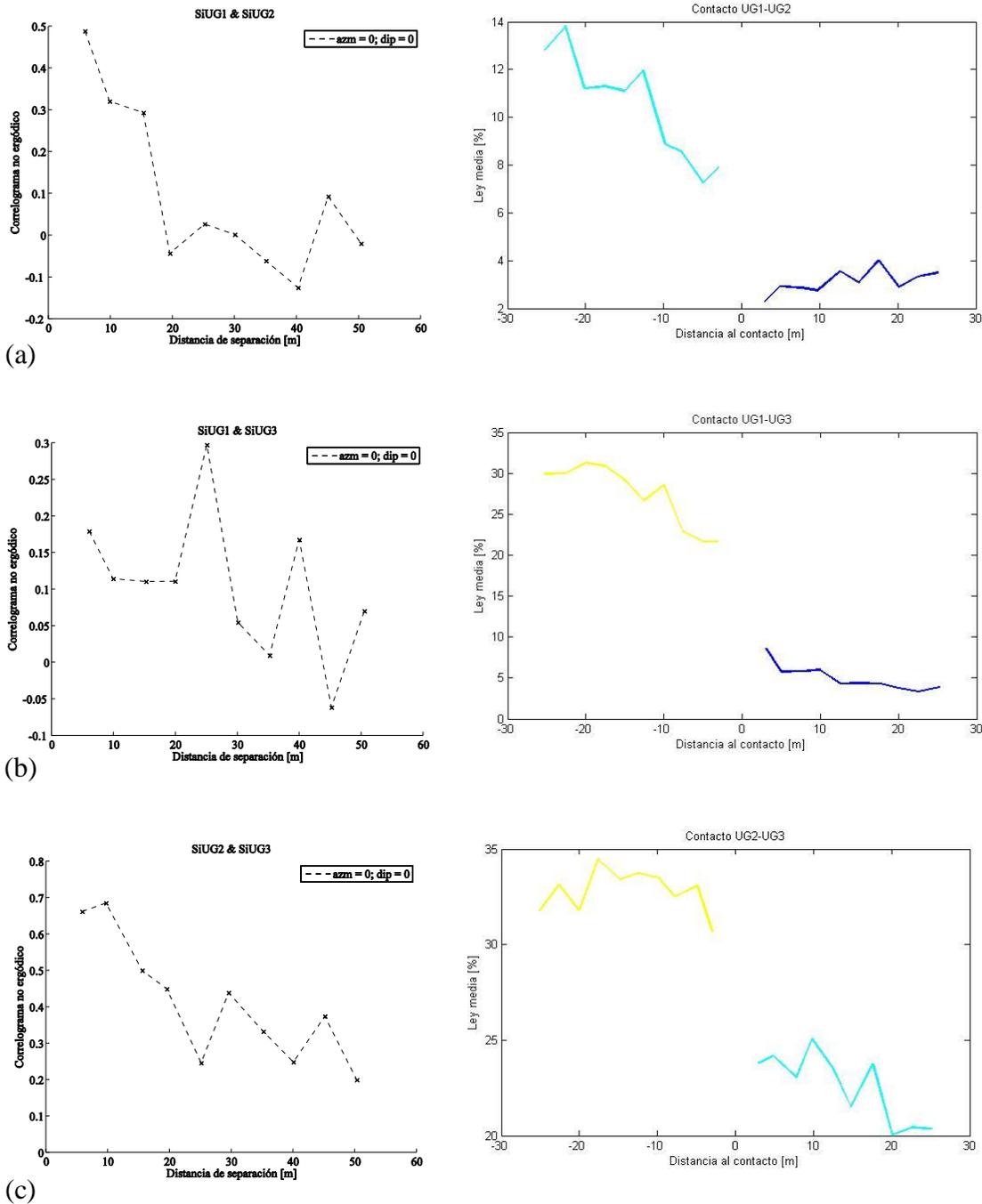
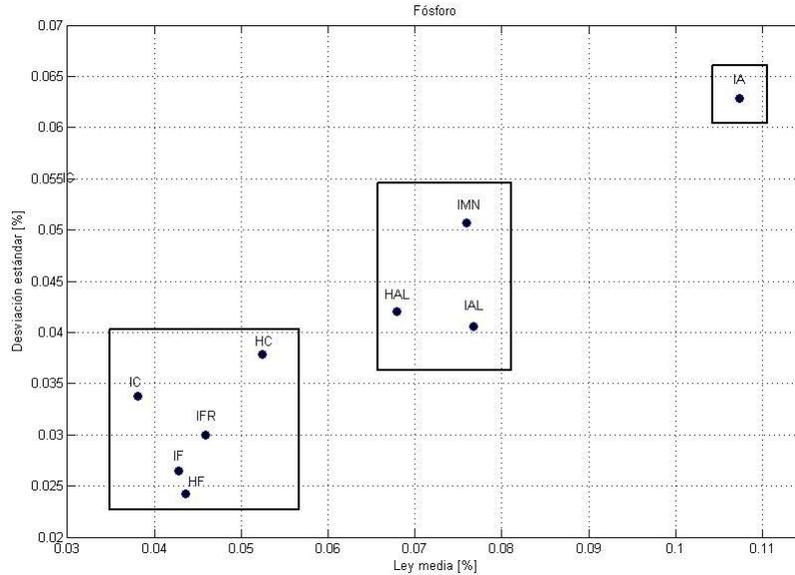


Figura 6.7: Correlogramas cruzados y gráficos de ley media vs. distancia al contacto (variable sílice). (a) UG1-UG2, (b) UG1-UG3 y (c) UG2-UG3

### 6.1.3 Fósforo

Para definir las unidades geológicas de esta variable se utiliza como primera aproximación el gráfico de ley media versus desviación estándar. En la **Figura 6.8** se observa un efecto proporcional, donde las mayores leyes de fósforo tienen asociada una mayor desviación. Además existen tres asociaciones claras, el grupo de los compactos y friables, el conjunto de los aluminosos y manganesíferos y la itabirita anfibolítica, que se ubica en el extremo superior derecho del gráfico.



**Figura 6.8:** Gráfico media vs. desviación estándar de la ley de fósforo para cada tipo de roca

El resumen de las unidades geológicas de fósforo se presenta en la siguiente tabla.

UG	Tipos de roca
1	IA
2	HAL IAL IMN
3	IC IF HC HF IFR

Para verificar las estadísticas y distribuciones de las unidades geológicas anteriores se muestran las siguientes herramientas gráficas. En ellas se observan diferencias evidentes en los rangos de cada unidad, donde la mayor proporción y menores leyes corresponden a la UG3. En relación a la distribución los tres grupos presentan una de tipo lognormal, pero con diferencias en sus medias.

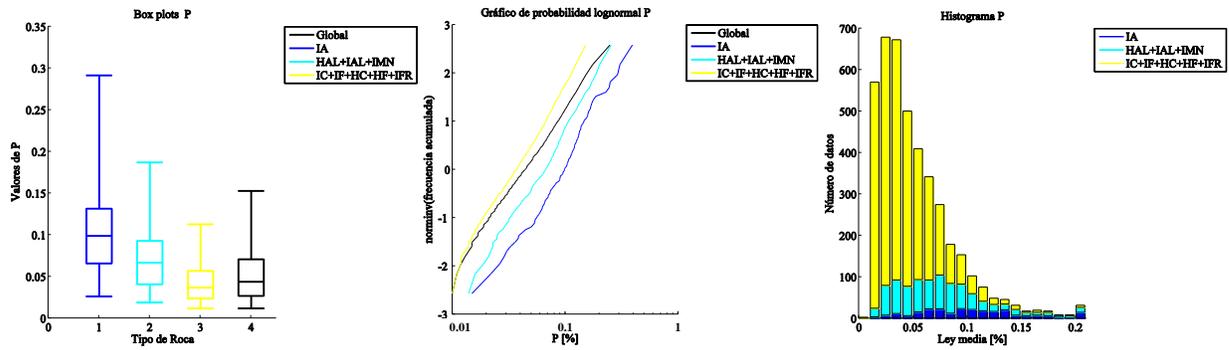
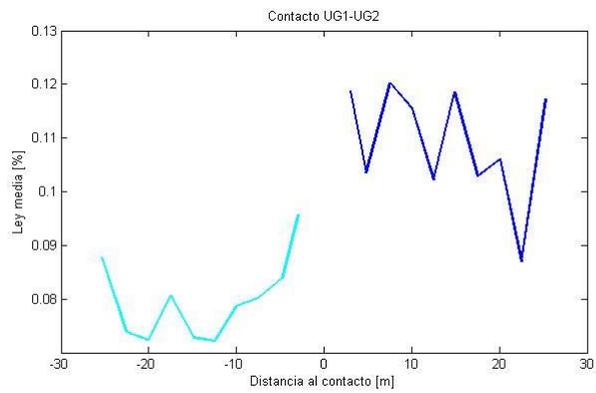
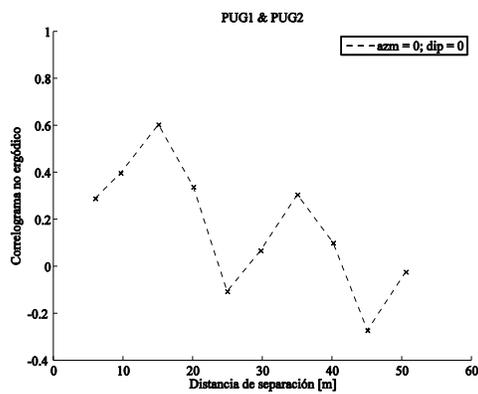
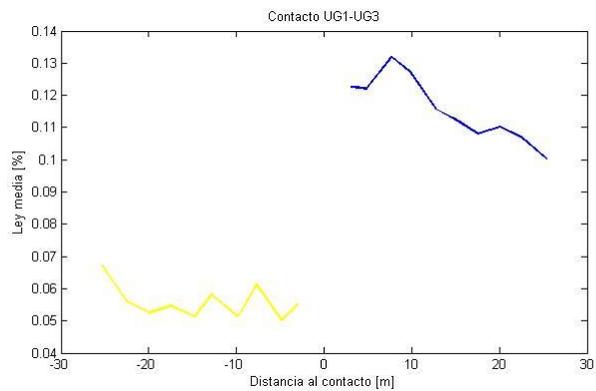
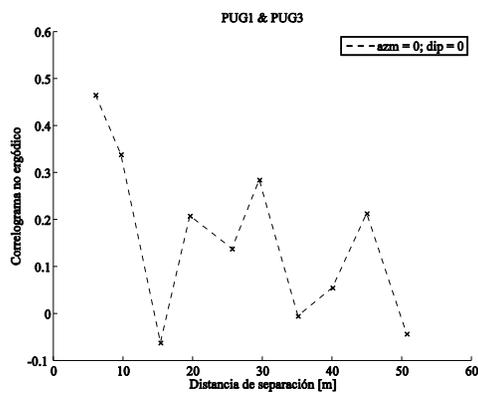


Figura 6.9: Box plots, gráficos de probabilidad e histogramas de la ley de fósforo

Para analizar el contacto en la frontera de las unidades definidas se presentan las siguientes figuras.



(a)



(b)

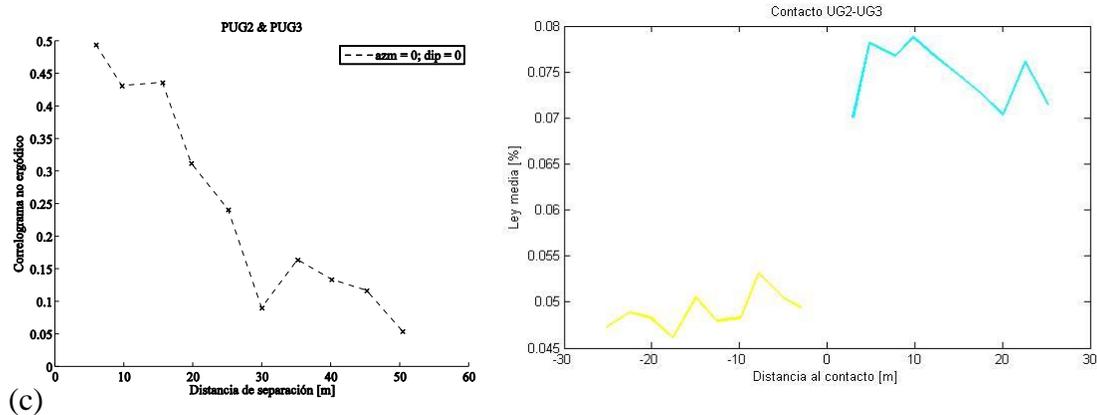


Figura 6.10: Correlogramas cruzados y gráficos de ley media vs. distancia al contacto (variable fósforo). (a) UG1-UG2, (b) UG1-UG3 y (c) UG2-UG3

En las gráficas anteriores se observan contactos duros entre las unidades geológicas, en especial al observar la ley media a través del contacto donde se aprecian transiciones abruptas al cambiar de unidad. Los correlogramas cruzados muestran pérdidas de correlación en los casos (b) y (c), mientras que el caso (a) presenta un aumento en la correlación desde 5 [m] hasta 15 [m] de distancia en torno al contacto.

### 6.1.4 Aluminio

Al igual que con las variables anteriores, se despliega en gráfico de ley media versus desviación estándar que permite diferenciar estadísticamente los tipos de roca.

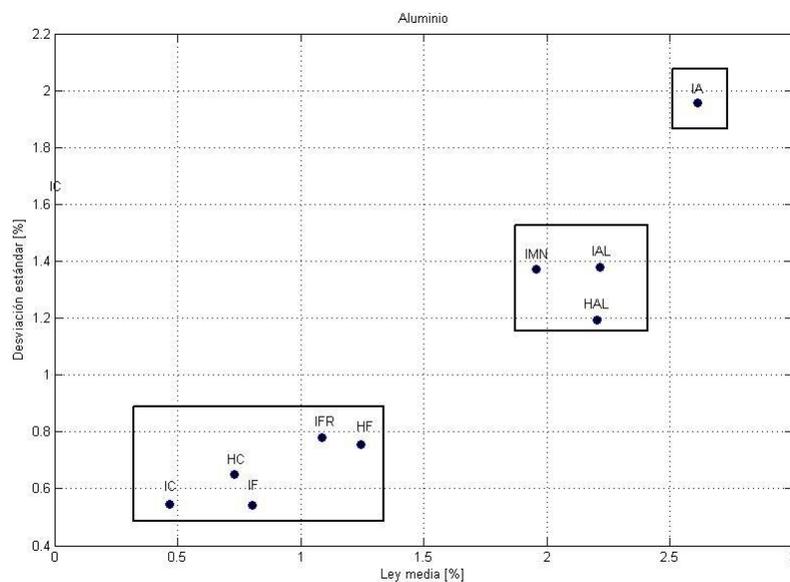


Figura 6.11: Gráfico media vs. desviación estándar de la ley de aluminio para cada tipo de roca

De acuerdo a la **Figura 6.11** se diferencian tres grupos de tipos de roca. El primero corresponde a los compactos y friables con leyes y desviaciones bajas, el segundo está conformado por los tipos aluminosos y manganesíferos con leyes y desviaciones intermedias en relación al rango de valores disponibles, finalmente la itabirita anfibolítica es aquella con mayores estadísticos

ubicándose en el sector superior del gráfico. Es importante notar que esta configuración es idéntica en términos de ubicación al caso de fósforo, lo que significa que sus unidades serán las mismas.

UG	Tipos de roca
1	IA
2	HAL IAL IMN
3	IC IF HC HF IFR

Para analizar el comportamiento de las unidades geológicas establecidas se estudia en primer lugar los box plots, donde se observan las diferencias ya indicadas en la gráfica anterior. El gráfico de probabilidad muestra distribuciones lognormales en los tres grupos, existiendo una fuerte relación de continuidad entre las unidades UG1 y UG2, lo que también se manifiesta en su histograma.

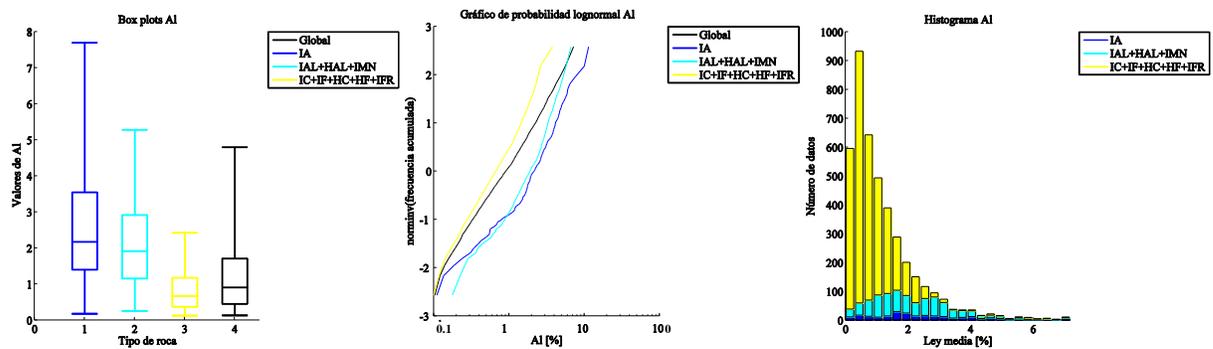
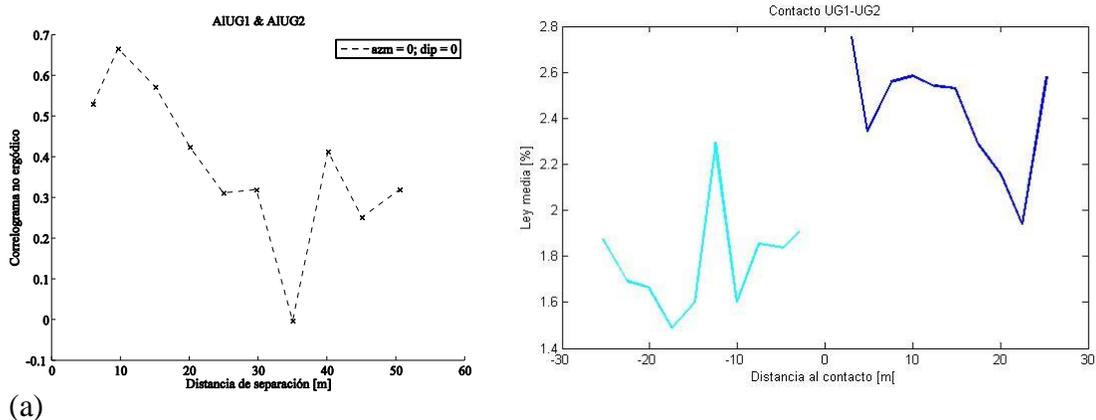


Figura 6.12: Box plots, gráficos de probabilidad e histograma de la ley de aluminio

Como existen diferencias y similitudes entre las unidades de estimación es necesario comprender cómo se comporta su frontera, para esto se presenta la **Figura 6.13**. En el primer caso se observa una transición abrupta en la ley media del aluminio y la correlación se pierde casi de forma completa a los 35 [m] del contacto. La frontera de las UG1 y UG3 es dura, presentando escasa correlación y diferencias drásticas en la ley media. Finalmente el último caso (UG2 y UG3) presenta poca correlación cerca del contacto, pero las leyes medias tienen cierta continuidad, lo que podría definir este contacto como intermedio.



(a)

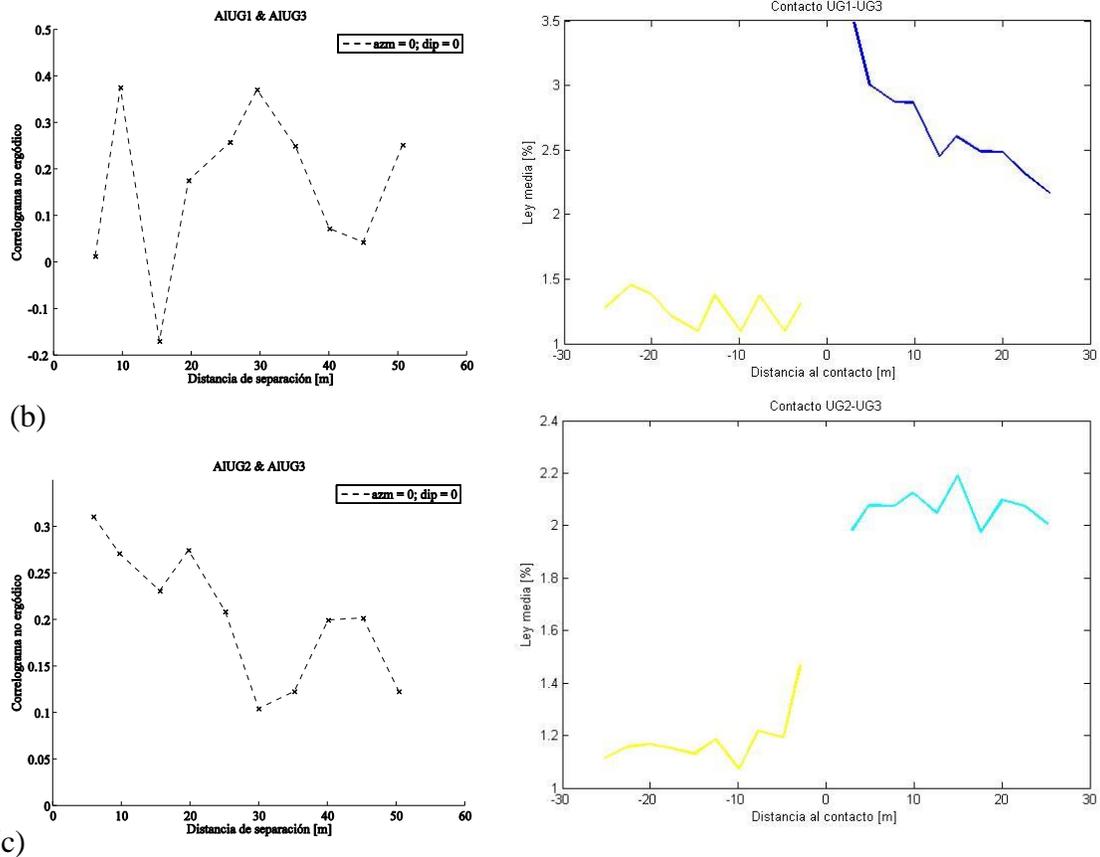


Figura 6.13: Correlogramas cruzados y gráficos de ley media vs. distancia al contacto (variable aluminio). (a) UG1-UG2, (b) UG1-UG3 y (c) UG2-UG3

### 6.1.5 Manganeso

Para visualizar las estadísticas de esta variable en los tipos de roca es necesario presentar el gráfico de media y desviación estándar en escala logarítmica, con el objetivo de poder distinguir con mayor claridad las relaciones existentes entre los tipos de roca. La **Figura 6.14** muestra esta representación, donde se observa una marcada diferencia de itabirita rica en manganeso en comparación al resto de los tipos de rocas. Dentro de estos últimos no se logra una diferenciación clara ya que, si bien hay un corte en la desviación 0.5%, este no se sustenta en términos de definición de los tipos de roca, pues al analizar la **Tabla 4.4** se aprecia que las itabiritas friables, aluminosas y anfibolíticas, junto con las hematitas compactas y friables comparten un atributo común, que con dicho corte no tendría lugar. Por lo tanto, se decide definir para esta variable solamente dos unidades geológicas como se indica a continuación.

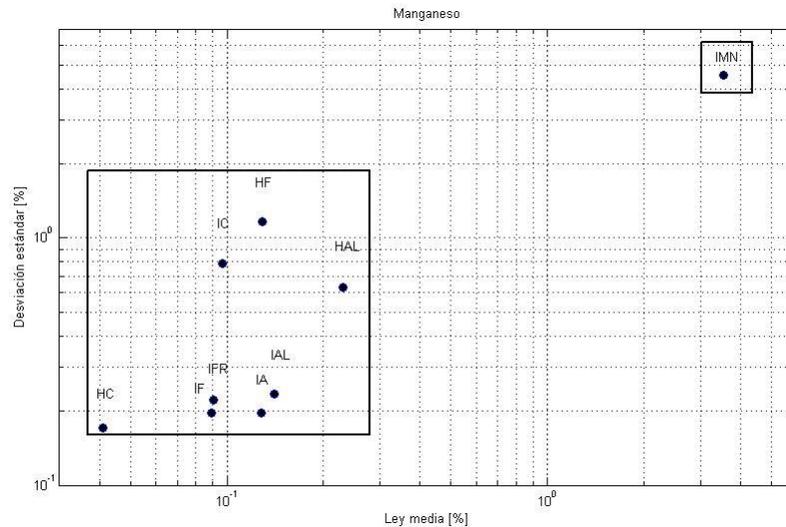


Figura 6.14: Gráfico media vs. desviación estándar de la ley de manganeso para cada tipo de roca

UG	Tipos de roca
1	IMN
2	HAL IAL IMN IC IF HC HF IFR

Las herramientas estadísticas de las unidades generadas se resumen en la **Figura 6.15**. En el box plot se observan diferencias drásticas, donde las unidades no comparten el valor mínimo, máximo, medio ni otro estadístico. Finalmente el histograma refleja lo antes mencionado, donde la mayor parte de los datos se atribuye a la UG2, que concentra gran cantidad de los tipos de roca.

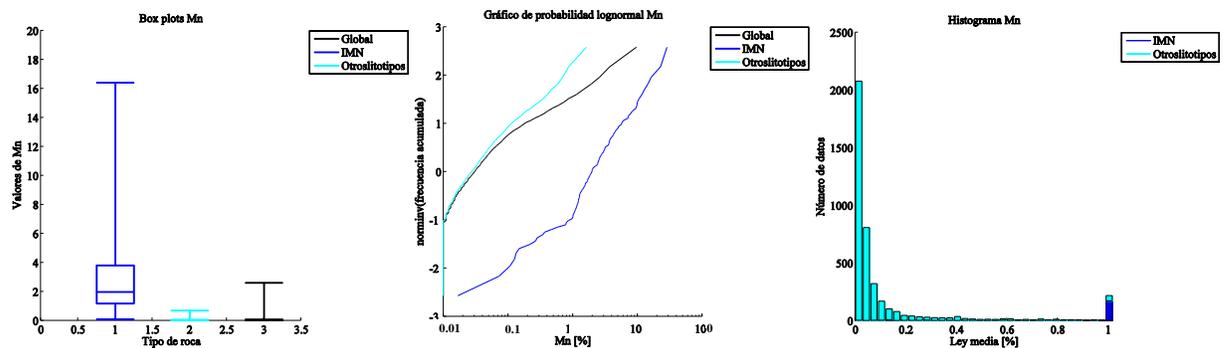


Figura 6.15: Box plots, gráficos de probabilidad e histograma de la ley de manganeso

La frontera definida para ambas unidades geológicas no presenta una transición suave en la ley media del manganeso y su correlación es cercana a cero en la frontera, lo que hace presumir que corresponde a un contacto duro.

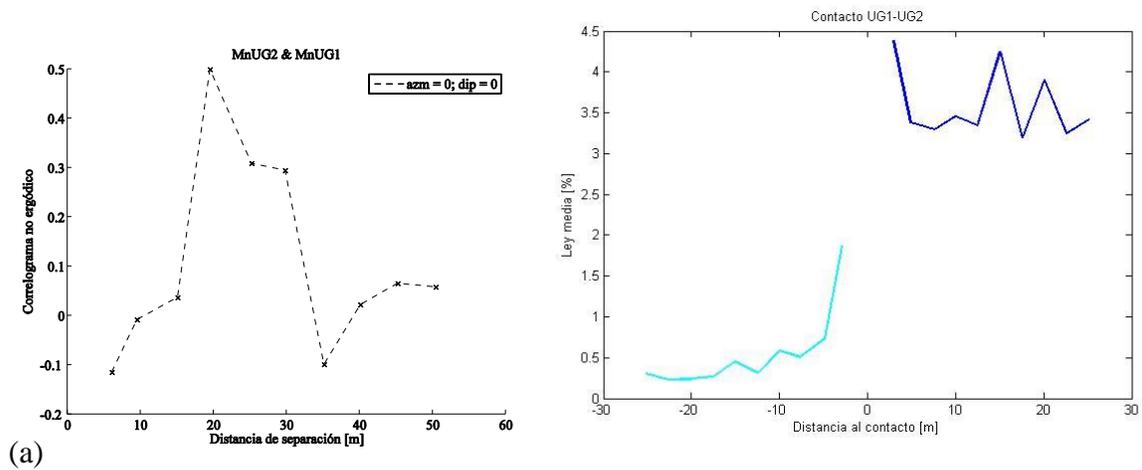


Figura 6.16: Correlograma cruzado y gráfico de ley media vs. distancia al contacto variable manganeso. (a) UG1-UG2

### 6.1.6 Pérdida de fuego

Esta variable presenta tipos de roca que se relacionan estadísticamente con fósforo y aluminio, de hecho la **Figura 6.17** es comparable con las **Figuras 6.8 y 6.11**, con la salvedad de los valores que cambian para cada una de las variables. En las tres se observa un efecto proporcional asociado a los tipos de roca, con tres grupos diferenciados por su ley media y desviación estándar.

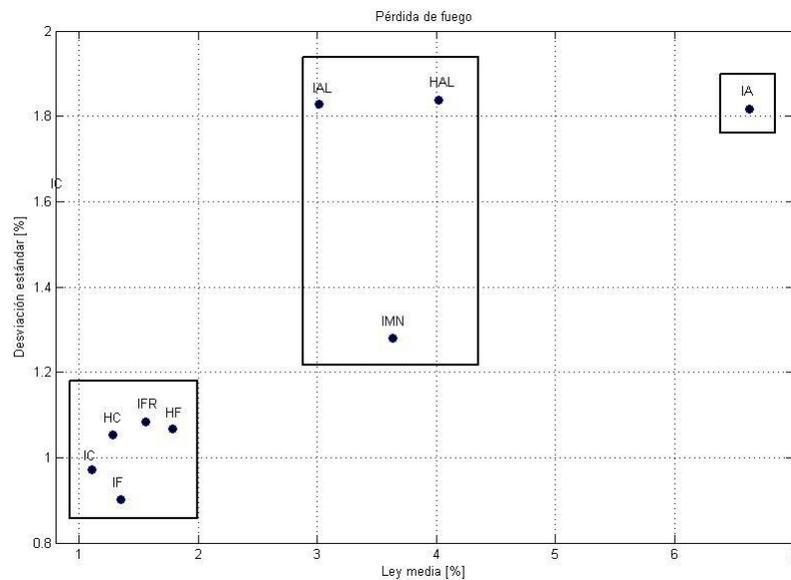
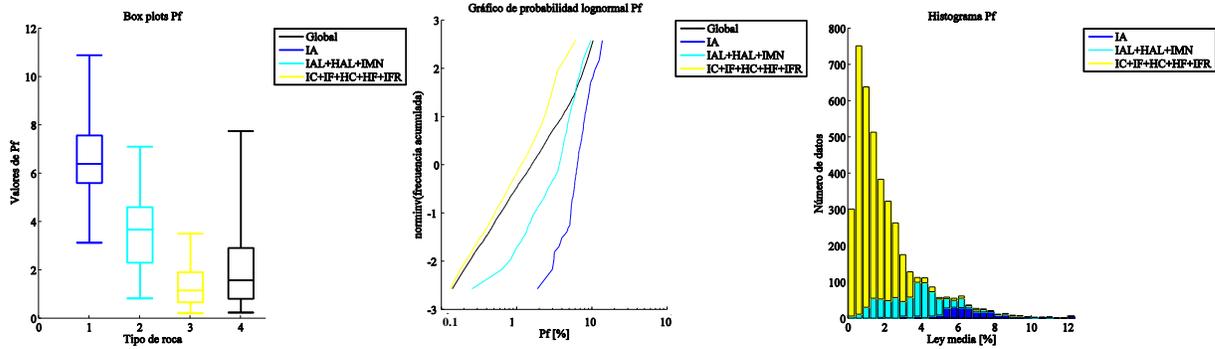


Figura 6.17: Gráfico media vs. desviación estándar de pérdida de fuego para cada tipo de roca

UG	Litotipos
1	IA
2	HAL IAL IMN
3	IC IF HC HF IFR

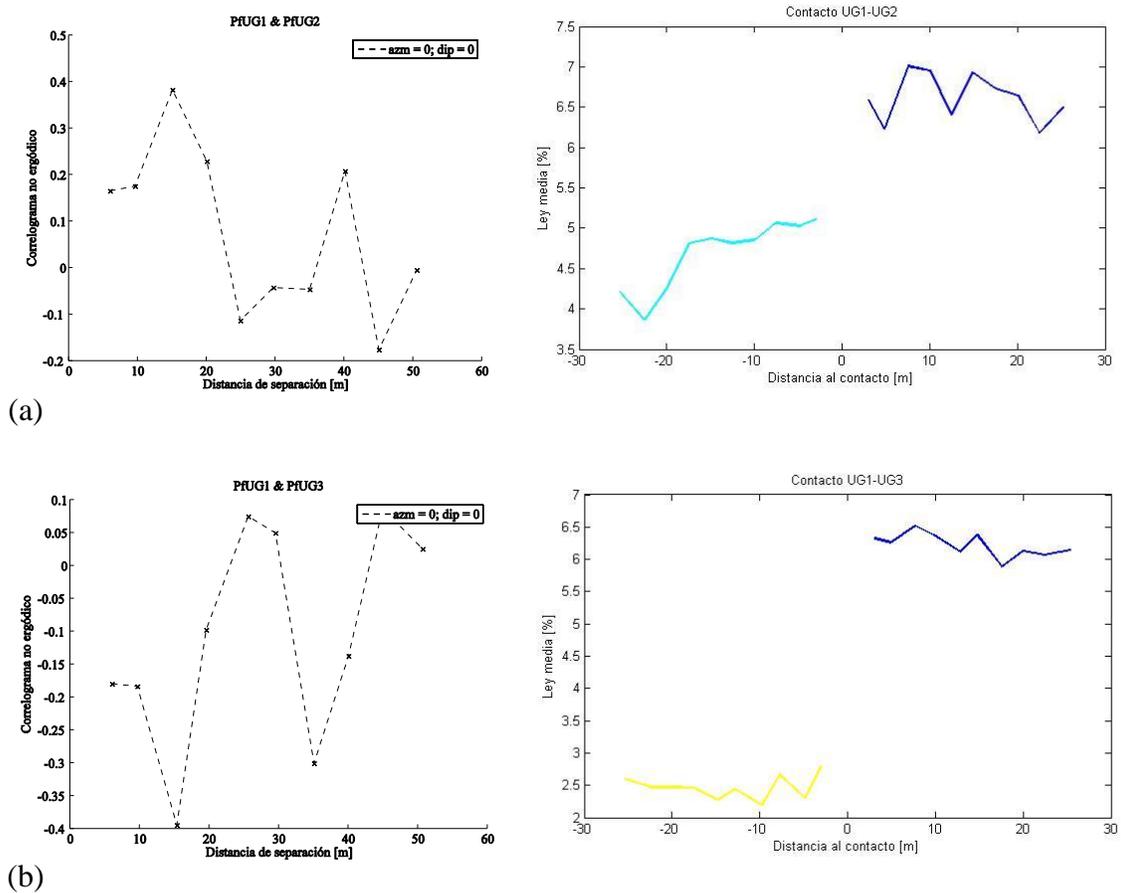
Por lo antes mencionado y de acuerdo a lo visualizado en la **Figura 6.17** se definen las siguientes unidades geológicas para pérdida de fuego.

Los box plots, gráficos de probabilidad e histogramas de las unidades reflejan las diferencias de sus estadísticos y distribuciones.



**Figura 6.18:** Box plots, gráficos de probabilidad e histograma pérdida de fuego

Las fronteras de las unidades geológicas definidas son principalmente duras, con transiciones fuertes en la ley media y correlaciones bajas cerca del contacto o rápida pérdida de éstas a medida que aumenta la distancia a la frontera (**Figura 6.19**).



(a)

(b)

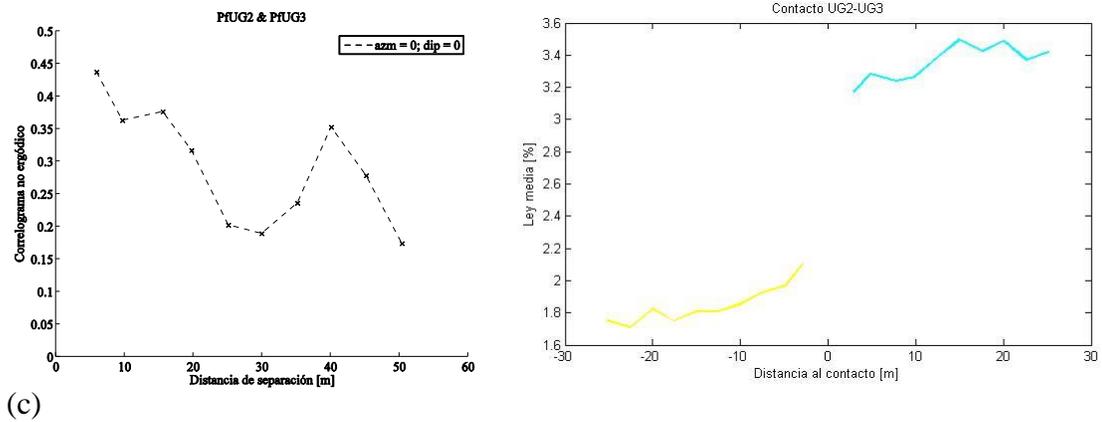


Figura 6.19: Correlogramas cruzados y gráficos de ley media vs. distancia al contacto (variable pérdida de fuego). (a) UG1-UG2, (b) UG1-UG3 y (c) UG2-UG3

### 6.1.7 Granulometría G1

Al igual que en los casos anteriores se despliega el gráfico de ley media y desviación estándar de los distintos tipos de roca de esta variable. En él se observa un corte en torno al valor 50% que subdivide en los grupos compacto y friable, siendo los primeros de mayor ley media. La permeabilidad que poseen los grupos compactos y friables es un criterio marcado para su diferenciación, es por esto que se decide generar dos unidades geológicas como lo indica la Figura 6.20.

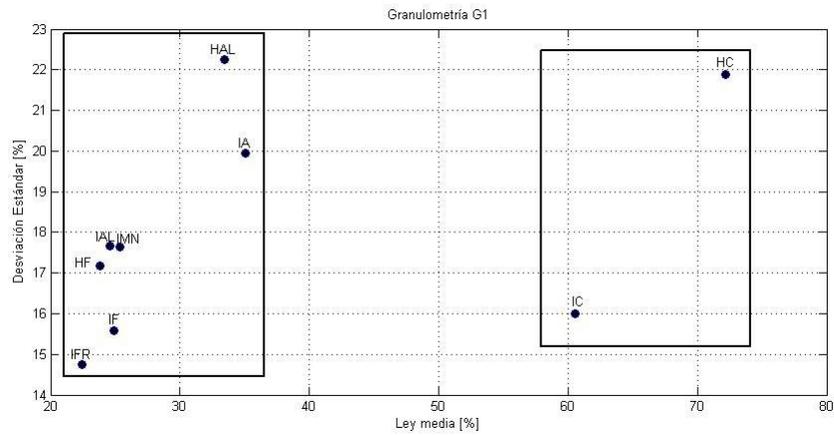


Figura 6.20: Gráfico media vs. desviación estándar de la variable granulometría G1 para cada tipo de roca

UG	Tipos de roca
1	IC HC
2	IF HF IFR IAL HAL IMN IA

Los box plots, gráficos de probabilidad e histogramas de las unidades geológicas reflejan lo analizado en los párrafos anteriores.

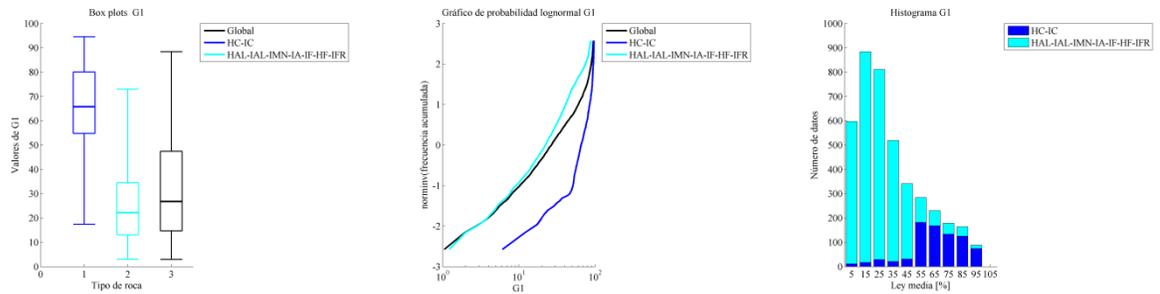


Figura 6.21: Box plots, gráficos de probabilidad e histograma de granulometría G1

El contacto entre las unidades UG1 y UG2 es duro, con un quiebre en la ley media a través de éste, producto de la categorización entre compactos y friables, además presenta una nula correlación a corta escala.

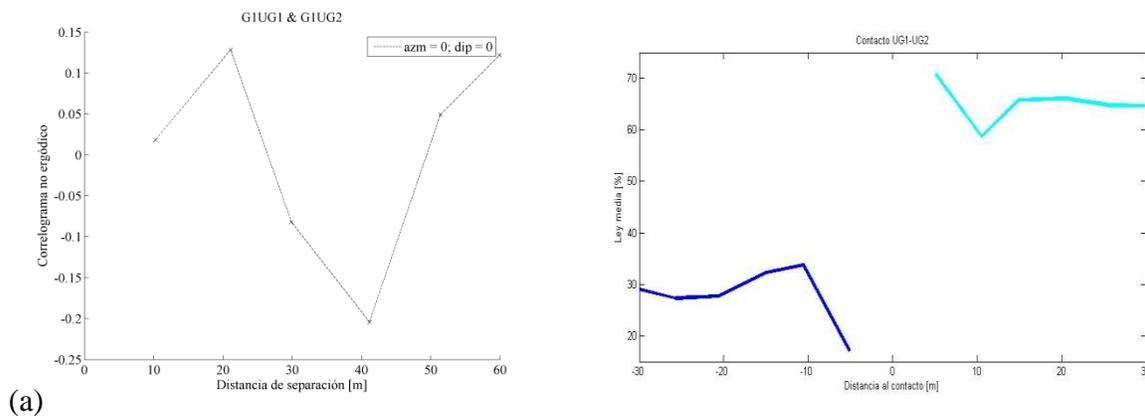


Figura 6.22: Correlograma cruzado y gráfico de ley media vs. distancia al contacto (variable granulometría G1). (a) UG1-UG2

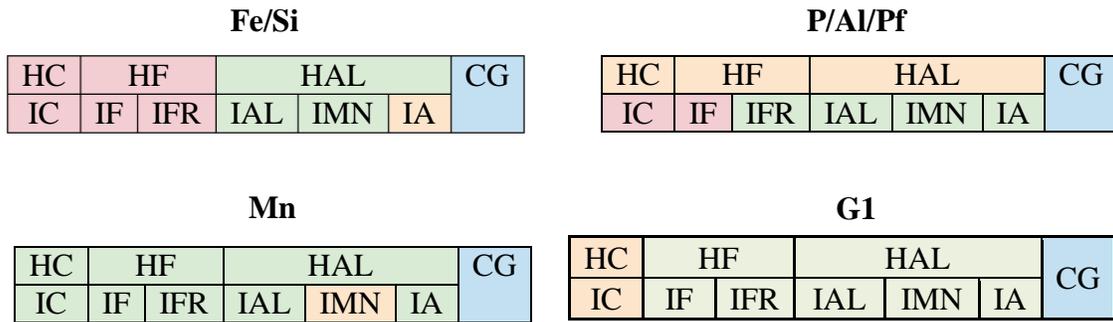
### 6.1.8 Resumen

Como resumen de la definición de unidades geológicas para las siete variables de interés se presenta la **Tabla 6.1**. En ella es posible observar variables que tienen unidades iguales, como es el caso de fierro con sílice, fósforo con aluminio y pérdida de fuego; variables con unidades distintas al resto como granulometría G1 y manganeso, y casos donde ciertos tipos de rocas se traslapan en algunas unidades como ocurre con IA en la UG1 de fósforo y en la UG2 de sílice. La canga, como fue explicado antes, se dejará de forma individual como unidad geológica, ya que corresponde a una formación particular de interés económico.

Tabla 6.1: Resumen de unidades geológicas para cada variable de interés

Variable	UG1	UG2	UG3	UG4
Fierro	HC HF HAL	IFR IAL IA IMN	IF IC	CG
Sílice	HC HF HAL	IFR IAL IA IMN	IF IC	CG
Fósforo	IA	HAL IAL IMN	IC IF HF IFR HC	CG
Aluminio	IA	HAL IAL IMN	IC IF HF IFR HC	CG
Manganeso	IMN	HAL IA IAL IF IFR HF IC HC	CG	-
Pérdida de fuego	IA	HAL IAL IMN	IC IF HF IFR HC	CG
Granulometría G1	IC HC	IF HF IFR IAL HAL IMN IA	CG	-

Para resumir el resultado obtenido en esta sección, se presenta el siguiente esquema visual, que permite entender la asociación de tipos de roca por variable de interés (en la figura se codifican las unidades geológicas con diferentes tonalidades).



Desde este punto en adelante, es posible que se utilice la notación  $UG_i$  con  $i \in \{1,2,3,4\}$  para referirse a las unidades que dependen de la variable que se esté simulando. Al tener tres unidades para manganeso y granulometría y cuatro para todos los otros elementos, se trabajará con un total de veintiséis variables, definidas en unidades que pueden ser las mismas, traslapadas o disjuntas.

## 6.2. DESAGRUPAMIENTO

Debido a que el muestreo no se presenta de forma regular sobre el área en estudio, es preciso realizar un desagrupamiento de los datos, debido a que en caso contrario se puede incorporar un sesgo espacial. El desagrupamiento permite obtener estadísticas representativas de la base de datos, al asignar a cada dato una ponderación en función de su representatividad. Por lo tanto, los datos ubicados en sectores más muestreados deben ser menos influyentes en comparación con el resto de la muestra.

En el caso de estudio, se considerará la aplicación de desagrupamiento global y no por unidad geológica, por un aspecto práctico y por simpleza en aplicación.

Para generar una base de datos desagrupada se utilizará el método de las celdas, el cual consiste en dividir el sector en estudio en celdas de igual tamaño y ponderación. Luego se divide la ponderación de cada celda en función de la cantidad de datos que se encuentran en su interior, asignando así menor ponderación a los datos de las celdas más muestreadas.

Para determinar el tamaño apropiado de celda se considera el espaciamiento que se deduce de la malla de sondajes, que en este caso va entre los 50x50 [m] a 200x200 [m] en el plano horizontal.

De acuerdo a lo anterior se decide utilizar como tamaño de celda 200x200x10 [m], debido a que es representativo de la dirección horizontal (este) donde hay mayor regularidad del muestreo.

Las estadísticas globales de las variables desagrupadas se presentan en la **Tabla 6.2**.

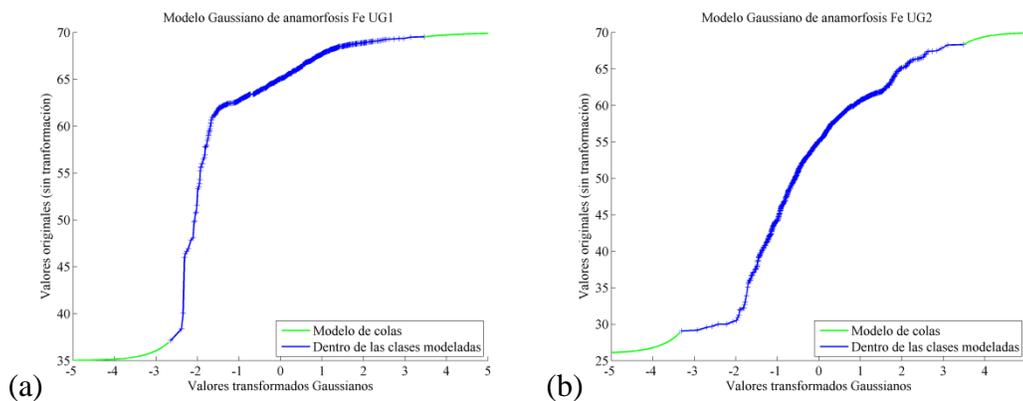
**Tabla 6.2:** Resumen estadístico de variables desagrupadas

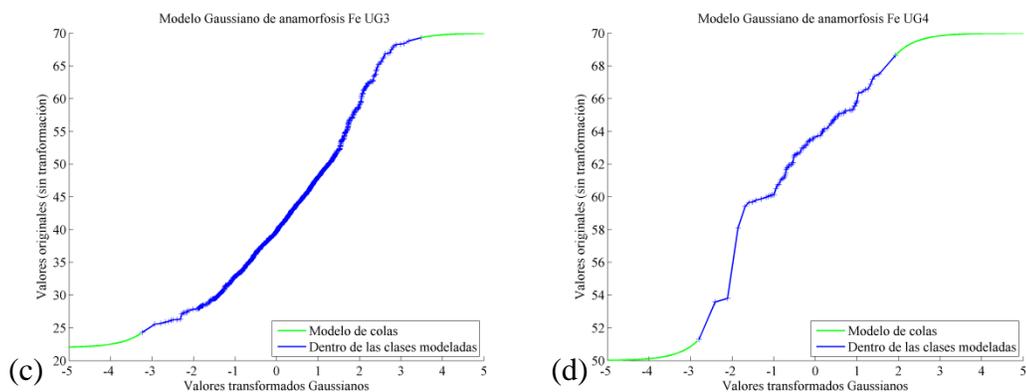
Variable	Mínimo [%]	Máximo [%]	Media [%]	Desviación estándar [%]
Fierro	11.64	69.70	46.95	13.32
Sílice	0.22	77.05	28.84	19.58
Fósforo	0.01	0.50	0.05	0.01
Aluminio	0.10	4.95	1.14	0.92
Manganeso	0.01	32.06	0.44	1.98
Pérdida de fuego	0.06	11.55	2.09	1.79
Granulometría G1	0.12	98.18	32.53	23.29

En comparación con las estadísticas originales no se observan variaciones en las leyes mínimas y máximas, lo que es esperable debido a que el desagrupamiento modifica las frecuencias y no los valores. Se observa un comportamiento diferente en la ley media, donde variables como fierro y granulometría G1 presentan una disminución del promedio, no así el resto de las leyes de interés, esto se debe a la distribución espacial de los datos de cada variable.

### 6.3. ANAMORFOSIS GAUSSIANA

El modelo de simulación multigaussiano requiere que las variables posean distribución Gaussiana, que de acuerdo a lo analizado en la sección estudio exploratorio difiere mucho de este precepto. Debido a lo anterior se requiere realizar un proceso de transformación denominado anamorfosis para cada variable considerando sus respectivas unidades geológicas. A continuación se presentan las transformaciones realizadas a la variable fierro en cada una de sus unidades geológicas.





**Figura 6.23:** Anamorfosis variable fierro. (a) UG1, (b) UG2, (c) UG3 y (d) UG4. Azul: anamorfosis experimental. Verde: extrapolación de colas con funciones exponenciales.

En este caso, el fierro en su primera unidad geológica presenta valores que van desde 35% a 70%, siendo este último valor un límite natural debido al máximo contenido de fierro presente en la hematita pura. Los límites y la forma de las anamorfosis cambian según la unidad geológica considerada.

### 6.3.1 Estadísticas de variables Gaussianas

La **Tabla 6.3** muestra los estadísticos principales de las 26 variables transformadas. Se observa que se obtuvieron variables de media cero y varianza uno, como era esperado.

**Tabla 6.3:** Resumen estadístico de cada variable con sus unidades geológicas post anamorfosis

Variable	Unidad geológicas	Número de datos	Mínimo [%]	Máximo [%]	Media [%]	Desviación estándar [%]
Fierro	UG1	992	-2.65	3.47	0.00	1.00
	UG2	1287	-3.31	3.48	0.00	0.99
	UG3	1817	-3.23	3.48	0.00	0.99
	UG4	97	-2.80	1.93	0.00	0.97
Sílice	UG1	992	-3.43	3.34	0.00	1.00
	UG2	1287	-3.49	3.17	0.00	0.99
	UG3	1817	-3.48	3.23	-0.00	1.00
	UG4	97	-2.88	2.80	0.00	0.99
Fósforo	UG1	206	-2.97	2.89	0.00	0.99
	UG2	719	-3.10	3.12	0.00	1.00
	UG3	3171	-3.42	3.92	0.00	1.00
	UG4	97	-2.57	2.49	0.00	0.98
Aluminio	UG1	206	-2.82	2.74	0.00	0.99
	UG2	719	-2.94	3.22	0.00	1.00
	UG3	3171	-3.13	3.67	0.00	1.00
	UG4	97	-2.49	2.58	0.00	0.98
Manganeso	UG1	189	-2.80	3.03	0.00	0.98
	UG2	3907	-3.58	3.18	0.00	1.00
	UG3	97	-2.58	2.61	0.00	0.99
Pérdida de fuego	UG1	206	-2.45	2.77	0.00	0.99
	UG2	719	-3.50	3.37	0.00	1.00
	UG3	3171	-3.27	3.92	0.00	1.00

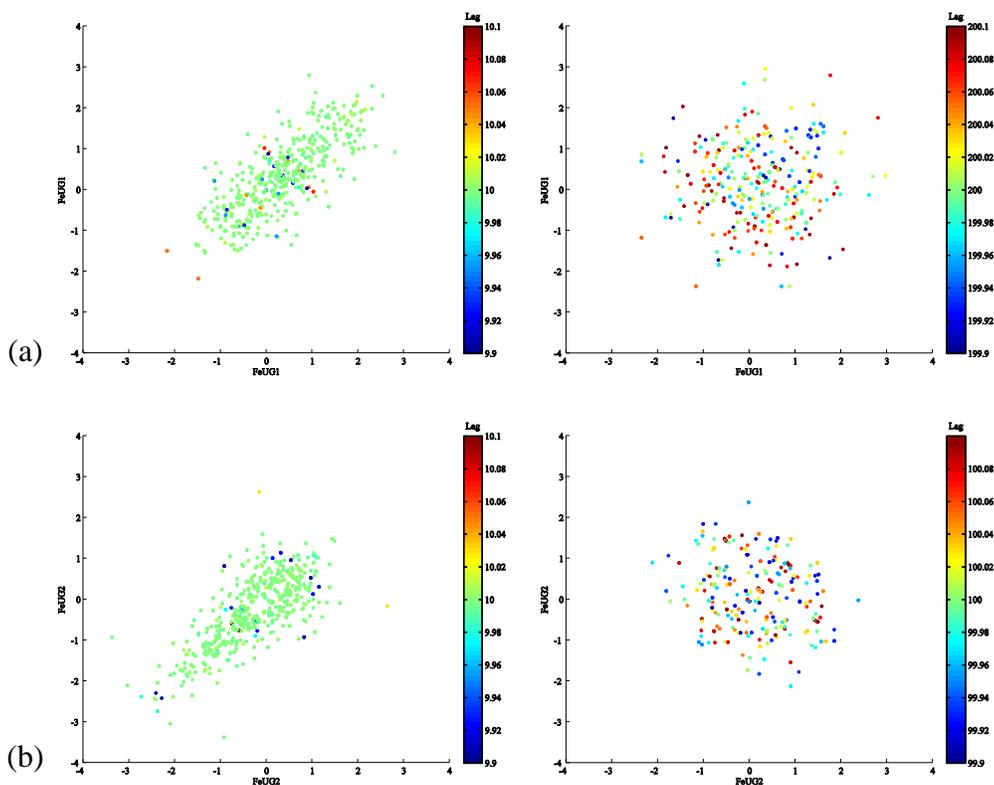
	UG4	97	-2.51	2.76	0.00	0.98
Granulometría G1	UG1	791	-3.51	3.45	0.00	1.00
	UG2	3305	-3.94	3.86	0.00	1.00
	UG3	97	-2.49	2.86	0.00	0.99

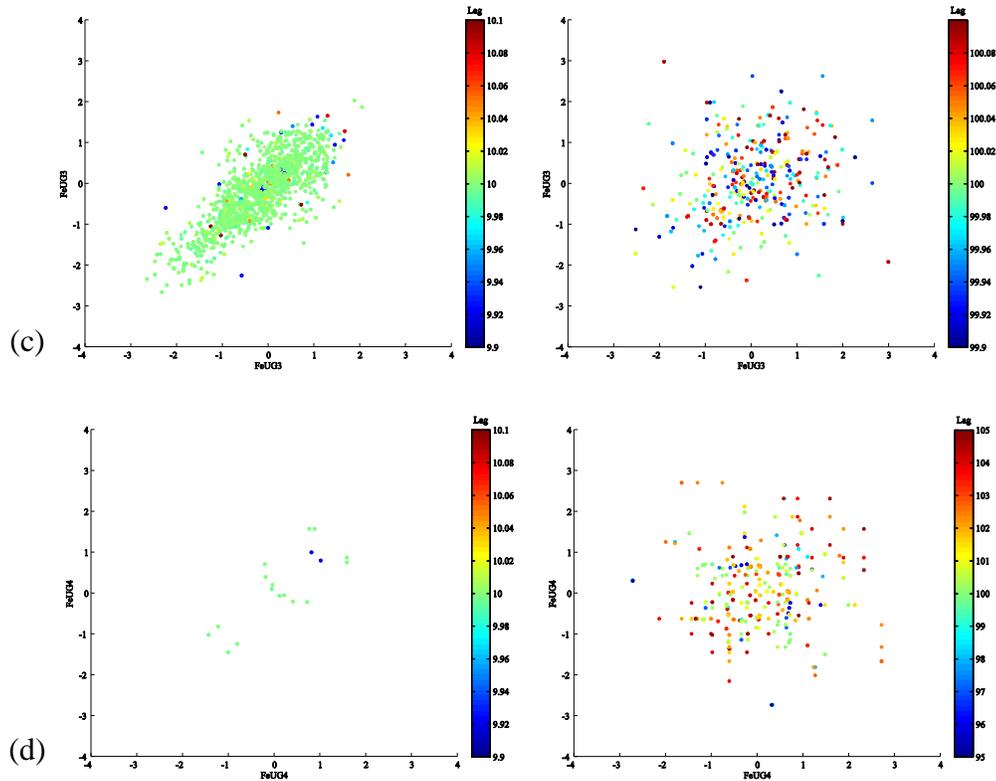
### 6.3.2 Estudio de bigaussianidad

De acuerdo a los puntos anteriores se tiene garantizada la normalidad de las distribuciones marginales. Por lo tanto se debe verificar el cumplimiento de la bigaussianidad de los pares de datos transformados, lo que se efectuará por medio del examen de nubes de correlación diferida.

#### 6.3.2.1 Nubes de correlación diferida

Para verificar el cumplimiento de la distribución bigaussiana sobre los datos transformados se realizaron nubes de correlación diferida omnidireccionales de corta (10 [m]) y de alta separación (100 [m]). A continuación se despliegan los resultados para la variable hierro.





**Figura 6.24:** Nubes de correlación diferida variable hierro según unidad geológica. A la izquierda se presenta la nube de corta separación (10 [m]) y a la derecha la nube de larga separación (100[m]). (a) UG1, (b) UG2, (c) UG3 y (d) UG4. Los colores indican la separación exacta de los datos, los que consideran ciertas tolerancias.

Se observa una tendencia elíptica en las nubes de correlación que consideran una distancia de 10 [m], aunque en menor medida se produce esto en el caso de la UG4 (canga) lo que debe a la menor cantidad de datos que considera esta unidad. Por otra parte, cuando se aumenta la separación para la realización de las nubes se aprecia una forma circular en todas las gráficas. Así entonces se valida esta hipótesis de bigaussianidad debido a que cumple con lo esperado.

A continuación se procede con la realización del estudio variográfico de las variables en estudio.

## 6.4. VARIOGRAFÍA

Los variogramas son herramientas que permiten modelar la continuidad espacial de un determinado conjunto de datos, con la posibilidad de incorporar ésta en la simulación de variables de interés. Debido a que este trabajo consiste en cosimular leyes, se trabajará con covarianzas directas y cruzadas entre las variables que motivan este estudio. Es importante destacar que los variogramas tradicionales no son aplicables en casos de heterotopía, situación que se produce para las variables definidas en unidades geológicas disjuntas.

### 6.4.1 Covarianza experimental

Se calculan las covarianzas en el plano horizontal y en la dirección vertical, utilizando los siguientes parámetros.

Dirección	Horizontal	Vertical
Azimut [°]	0	0
Tolerancia Azimut [°]	90	22.5
Dip [°]	0	90
Tolerancia dip [°]	22.5	99
Paso [m]	22	15
N° pasos	25	12
Tolerancia en paso [m]	11	7.5

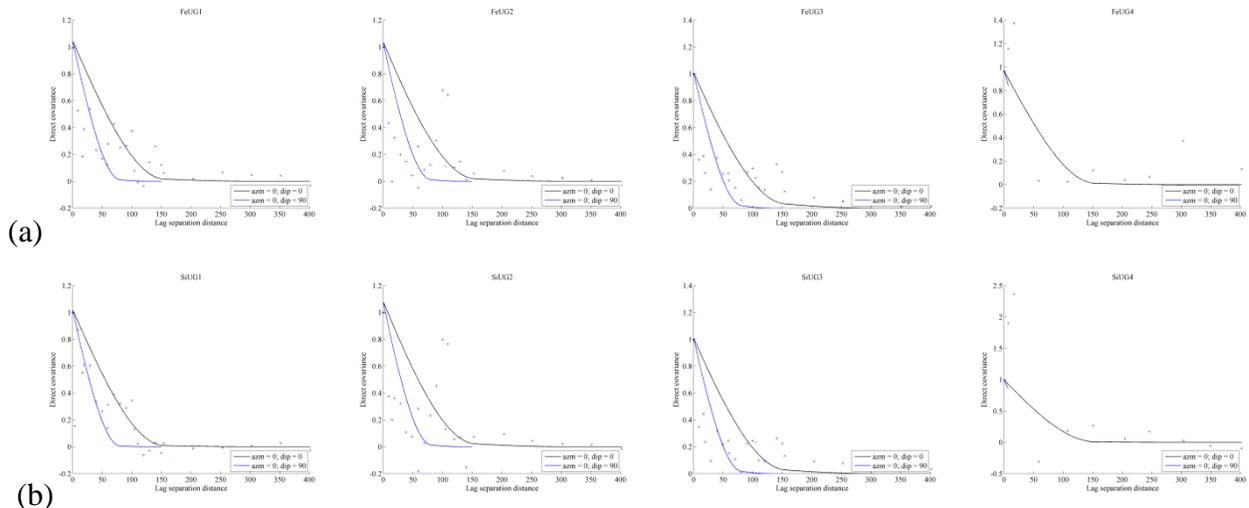
Debido a la cantidad de variables se obtienen 26 gráficas de covarianzas directas y 676 cruzadas.

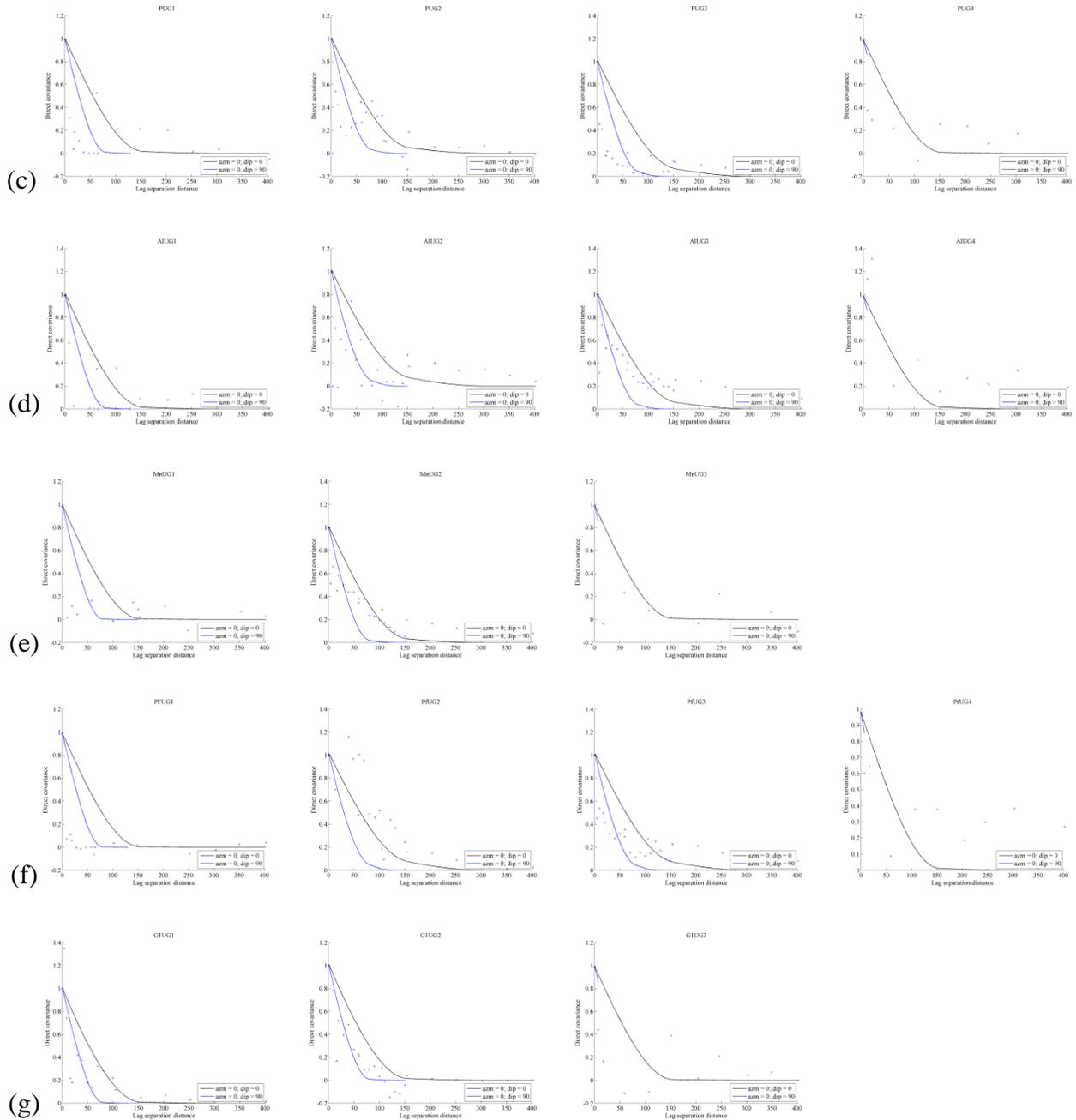
En general, las covarianzas muestran continuidad de las variables dentro de las unidades geológicas. Los alcances son diferentes para cada variable y unidad geológica, con valores entre los 100 y 400 metros.

### 6.4.2 Ajuste de covarianzas

A continuación se presentan las covarianzas directas ajustadas. Para el ajuste se consideró efecto pepita y estructuras exponenciales como se indica en la siguiente tabla. El modelo de coregionalización fue obtenido usando un algoritmo de ajuste semi-automático [7] [10].

Estructura	Tipo	Alcance horizontal [m]	Alcance vertical [m]
#1	Exponencial	200	200
#2	Exponencial	200	100
#3	Exponencial	150	150
#4	Exponencial	100	100
#5	Exponencial	100	50
#6	Exponencial	50	30
#7	Exponencial	20	15





**Figura 6.25:** Covarianzas modeladas directas. (a) fierro, (b) sílice, (c) fósforo, (d) aluminio, (e) manganeso, (f) pérdida de fuego y (g) granulometría G1. Negro: plano horizontal. Azul: vertical.

La **Figura 6.25** muestra las funciones covarianzas directas para las diferentes variables a simular definidas en sus respectivas unidades geológicas. Cada gráfica muestra la función covarianza ajustada horizontal (línea continua de color negro) y vertical (línea continua de color azul), es decir, cada línea representa la pérdida de continuidad de las variables en el espacio.

El modelo resultante no es presentado por las dimensiones que posee, debido a que en total son 26 variables que generan matrices de mesetas de tamaño 26 x 26.

## 6.5. COSIMULACIÓN DE LEYES

A continuación se presenta el procedimiento y parámetros efectuados para la realización de la cosimulación de las leyes de interés. Junto a esto son presentados los principales resultados obtenidos de este proceso.

Es importante destacar que la cosimulación entrega diferentes escenarios posibles de la realidad a partir de la información disponible, por lo tanto permite hacer frente a la incertidumbre propia de los fenómenos geológicos.

### 6.5.1 Definición del sector a simular

Se simula toda la extensión del modelo de bloques interpretado. Los parámetros se describen en la siguiente tabla.

Coordenada	Mínimo [m]	Máximo [m]	Número de nodos
Este	-7490	-5320	219
Norte	905	1975	108
Cota	1005	1545	55

### 6.5.2 Parámetros de la cosimulación

Para efectuar las cosimulaciones se consideró el algoritmo de bandas rotantes. Para esta aplicación se consideró la grilla antes expuesta junto a una discretización de bloques igual a 3x3x2 puntos. La vecindad de aplicación consideró un total de 32 puntos con datos para el condicionamiento, sin división en sectores angulares (cada punto contiene información de 7 variables, obteniendo hasta 224 datos condicionantes).

Se construyeron 20 realizaciones con 500 líneas para la simulación de cada una de las siete estructuras anidadas. Para el condicionamiento de los datos se aplicó cokriging simple, pues la media de las variables Gaussianas es conocida e igual a cero.

Los parámetros de la vecindad de búsqueda se resumen en la siguiente tabla.

	Este	Norte	Cota
Radios máximos [m]	250	250	100
Ángulos para rotación [°]	0	0	0

### 6.5.3 Visualización de realizaciones

Para visualizar el resultado de las simulaciones se presentan diferentes vistas y perfiles donde la primera imagen corresponde al modelo simulado de tipos de roca y las siguientes son las vistas para las siete variables simuladas.

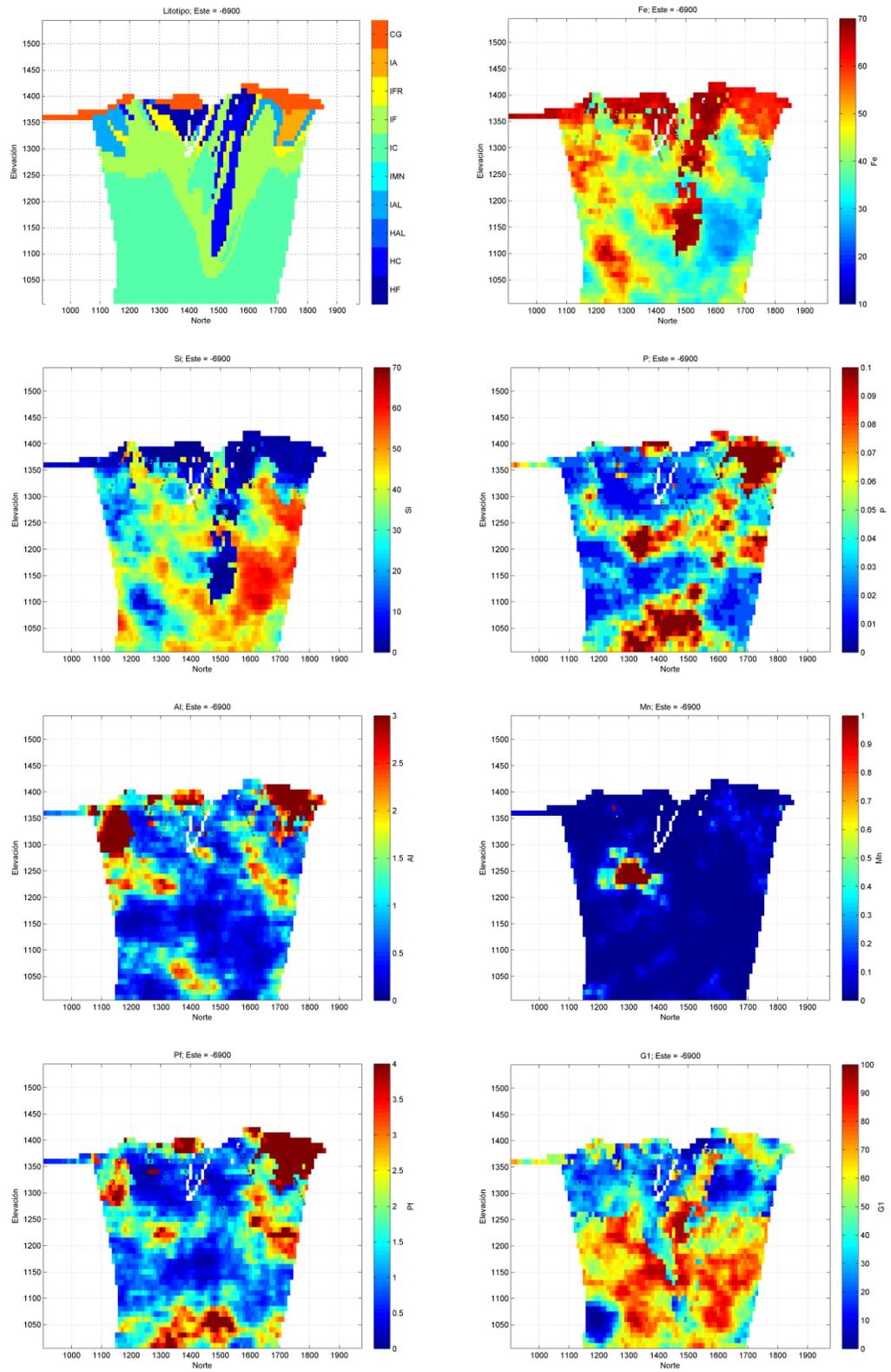


Figura 6.26: Perfil Este -6900 simulación #1

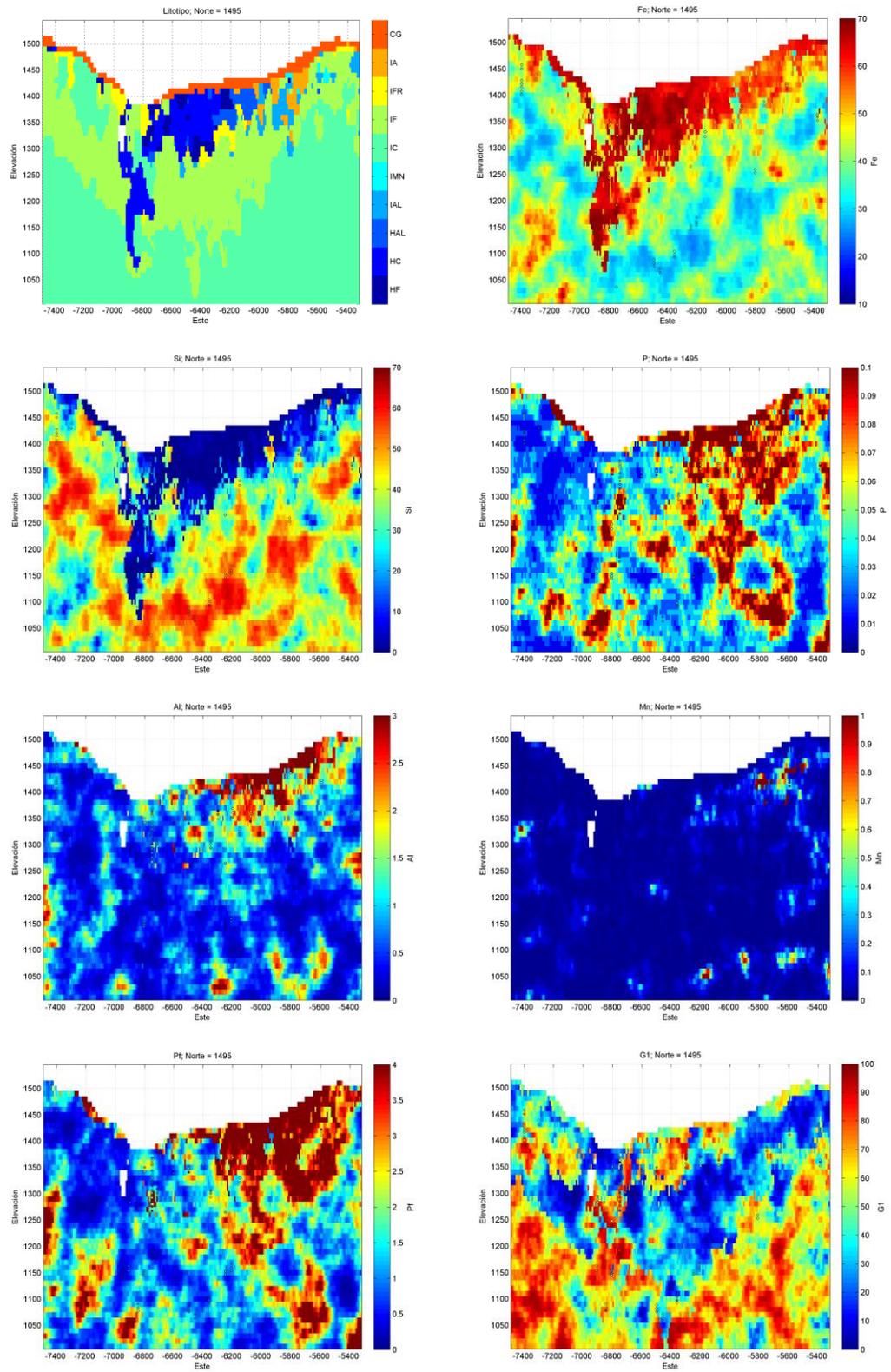


Figura 6.27: Perfil Norte 1495, realización #1

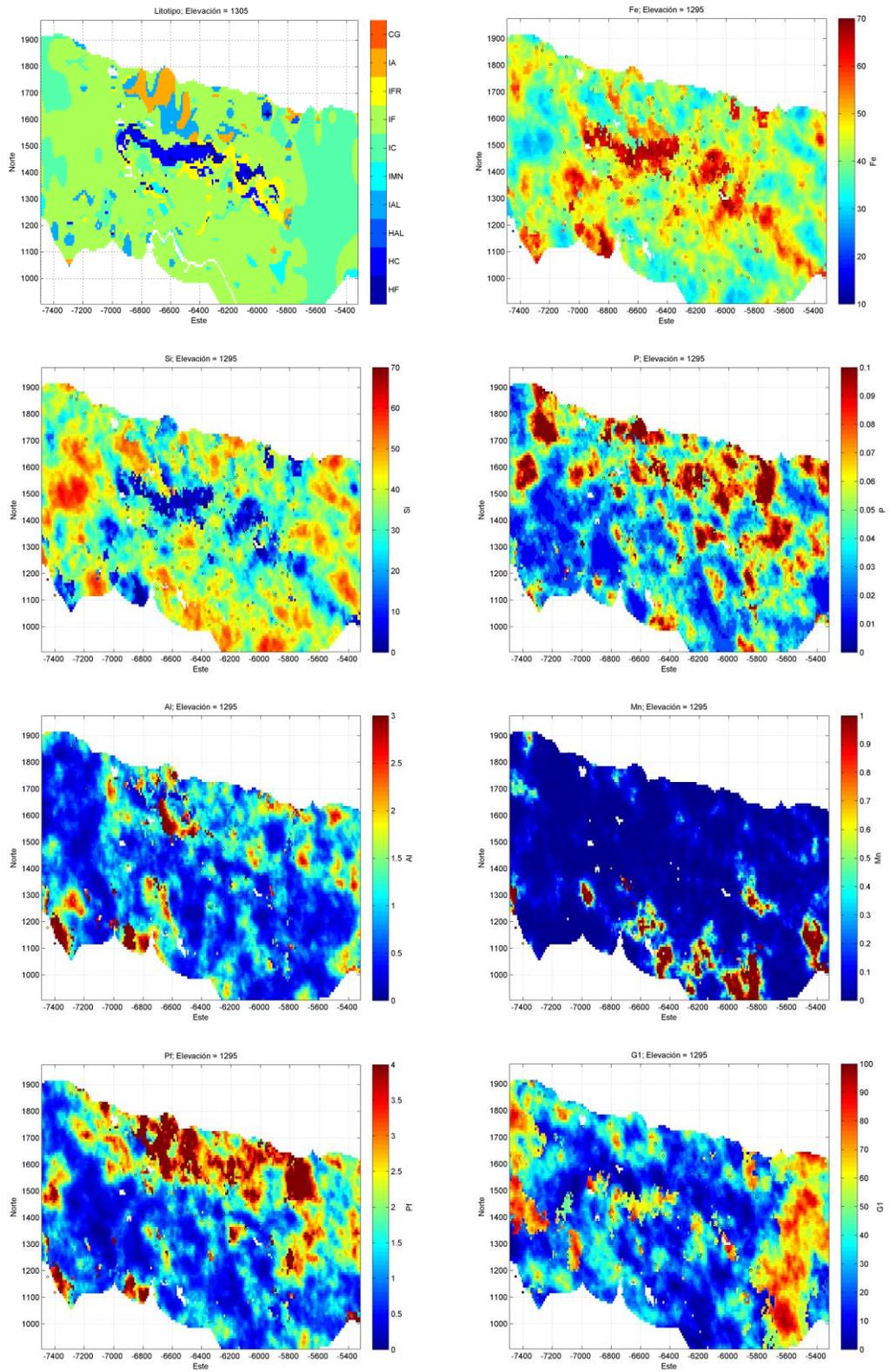


Figura 6.28: Vista en planta cota 1295, realización #1

En primer lugar, las realizaciones anteriores muestran una reproducción directa de los sondajes existentes en los perfiles simulados para todas las variables de interés. Además en todas ellas se presentan con ley igual a cero los bloques de estéril. En el caso particular de fierro, se observa una fuerte correspondencia entre los valores simulados y los tipos de roca del perfil (**Figuras 6.26, 6.27 y 6.28**), ya que las leyes menores se encuentran en las itabiritas (en especial compacta y friable), mientras que las mayores lo hacen en el sector de las hematitas y canga. De forma análoga se interpretan las realizaciones de sílice que corresponden a un complemento de la variable fierro, lo que es entendible debido a la alta correlación negativa existente entre ellas, que se reproduce y captura al realizar la cosimulación. Las realizaciones de fósforo, aluminio y pérdida de fuego muestran comportamientos similares, lo que se sustenta en que sus unidades geológicas son iguales. En ellas se visualiza que las mayores leyes se asocian a las UG1 y UG2 ubicadas en la superficie del yacimiento, mientras que las menores leyes están en el sector central de éste. Manganeso por otra parte, refleja realizaciones donde las leyes superiores se ubican en el costado izquierdo, que es también donde se ubica la itabirita manganesífera, que es una de las unidades geológicas de la variable. El perfil simulado de manganeso muestra una alta presencia de leyes bajas, como ocurría en los sondajes de exploración. El caso final a analizar corresponde a granulometría G1, donde sus realizaciones muestran diferencias considerables entre aquellos bloques correspondientes a tipos de roca friables y compactos.

Lo anterior hace posible concluir que el modelo de cosimulación empleado incorpora la información cruzada de las variables continuas y categóricas en sus realizaciones.

## **MODELO N°2: COSIMULACIÓN DE VARIABLES TRANSFORMADAS**

Para hacer frente a la relación estequiométrica existente entre las variables de interés, se plantea un modelo de cosimulación que considera variables transformadas, cuya definición busca devolver la relación deseada.

Como ya fue mencionado en apartados anteriores, existen muchas analogías entre este modelo y el anteriormente expuesto, por lo que en los siguientes puntos se desarrollarán los tópicos de mayor interés para este modelo.

### **6.6. DEFINICIÓN DE VARIABLES TRANSFORMADAS**

Con el objetivo de reproducir la relación existente entre las diferentes variables se proponen seis variables transformadas asociadas a las siguientes seis de las variables originales: fósforo, manganeso, aluminio, pérdida de fuego, sílice y granulometría G1, las que podrán ser obtenidas una vez simuladas las variables transformadas. Por su parte, la variable fierro se obtendrá en base a la transformación de las variables previamente simuladas.

Las variables transformadas definidas se resumen en la siguiente tabla.

Tabla 6.4: Definición de variables transformadas

Variable transformada	Función de transformación
$z_1$	P
$z_2$	$\frac{1.2912Mn}{100 - 2.2913P}$
$z_3$	$\frac{Al}{100 - 2.2913P - 1.2912Mn}$
$z_4$	$\frac{Pf}{100 - 2.2913P - 1.2912Mn - Al}$
$z_5$	$\frac{Si}{100 - 2.2913P - 1.2912Mn - Al - Pf}$
$z_6$	$G_1$

Se comienza asociando la variable uno a fósforo, debido a que presenta las menores leyes respecto al resto de las variables. Las siguientes variables transformadas también se consideran en base al valor de sus leyes, además de agregar los términos que las acompañan en la expresión que se busca reproducir.

Las estadísticas básicas de las variables transformadas se presentan en la **Tabla 6.5**, y la matriz de correlación en la **Tabla 6.6**.

Tabla 6.5: Estadísticas básicas variables transformadas

Variable	Mínimo [%]	Máximo [%]	Media [%]	Desviación estándar [%]
$z_1$	0.01	0.50	0.05	0.00
$z_2$	0.00	0.42	0.00	0.00
$z_3$	0.00	0.05	0.01	0.00
$z_4$	0.00	0.16	0.02	0.00
$z_5$	0.00	0.81	0.23	0.17
$z_6$	0.12	98.18	33.06	23.64

Tabla 6.6: Matriz de correlación variables transformadas

Variable	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_5$	$z_6$
$z_1$	1	0.14	0.36	0.67	-0.22	0.02
$z_2$	0.14	1	0.20	0.26	0.02	-0.08
$z_3$	0.36	0.20	1	0.60	-0.32	-0.27
$z_4$	0.67	0.26	0.60	1	-0.31	-0.04
$z_5$	-0.22	0.02	-0.32	-0.31	1	-0.11
$z_6$	0.02	-0.08	-0.27	-0.04	-0.11	1

Al analizar las estadísticas básicas se observan medias en su mayoría cercanas a cero, con desviaciones bajas y rangos estrechos. Por su parte, la matriz de correlación muestra importantes relaciones entre las variables transformadas  $z_1, z_4$  y  $z_1, z_3$  con correlaciones igual es a 0.67 y 0.60 respetivamente. Estas relaciones se pueden atribuir a lo semejante que son los valores de las variables transformadas y su directa relación con las variables originales.

## 6.7. DEFINICIÓN DE UNIDADES GEOLÓGICAS

Se procede de forma análoga a lo desarrollado en el primer modelo de cosimulación, es decir, se determinan las unidades geológicas asociadas a cada variable en base a los diagramas de leyes medias versus desviaciones estándar de cada tipo de roca. En este caso al definir las variables transformadas en directa relación con un elemento (variable del numerador), se produce una igualdad entre las unidades de simulación de las variables originales y las variables transformadas.

Como resumen de la definición de unidades geológicas para las seis variables transformadas se cuenta con la **Tabla 6.7**.

**Tabla 6.7:** Resumen de unidades geológicas para cada variable transformada

Variable	UG1	UG2	UG3	UG4
$z_1$	IA	HAL IALIMN	IC IF HF IFR HC	CG
$z_2$	IMN	HAL ÍA IAL IF IFRHFICHC	CG	-
$z_3$	IA	HAL IAL IMN	IC IF HFIFRHC	CG
$z_4$	IA	HAL IAL IMN	IC IF HF IFRHC	CG
$z_5$	HC HF HAL	IFR IAL IA IMN	IF IC	CG
$z_6$	IC HC	IF HF IFR IAL HAL IMN IA	CG	-

Se observa en la tabla anterior igualdad entre las unidades definidas para las variables  $z_1, z_3$  y  $z_4$ , las cuales se asocian con las variables fósforo, aluminio y pérdida de fuego respectivamente. Las otras tres variables transformadas no presentan completa igualdad de sus unidades, sin embargo existen casos de traslape, como ocurre por ejemplo con la canga en las tres variables.

A continuación, se presenta de forma gráfica la distribución de las unidades geológicas por variable.

$z_5$							$z_1/ z_3/ z_4$						
HC	HF	HAL			CG		HC	HF	HAL			CG	
IC	IF	IFR	IAL	IMN	IA		IC	IF	IFR	IAL	IMN	IA	
$z_2$							$z_6$						
HC	HF	HAL			CG		HC	HF	HAL			CG	
IC	IF	IFR	IAL	IMN	IA		IC	IF	IFR	IAL	IMN	IA	

Desde este punto en adelante, es posible que se utilice la notación  $UG_i$  con  $i \in \{1,2,3,4\}$  para referirse a las unidades que dependen de la variable transformada que se esté simulando. Al tener tres unidades para manganeso y granulometría G1 y cuatro para todos los otros elementos, se trabajará con un total de **veintidós variables**, definidas en unidades que pueden ser iguales, traslapadas o disjuntas.

## 6.8. DESAGRUPAMIENTO

Se aplica a las variables transformadas un desagrupamiento considerando una celda de 200x200x10 [m].

Las estadísticas globales de las variables desagrupadas se presentan en la **Tabla 6.8**.

**Tabla 6.8:** Resumen estadístico de variables desagrupadas

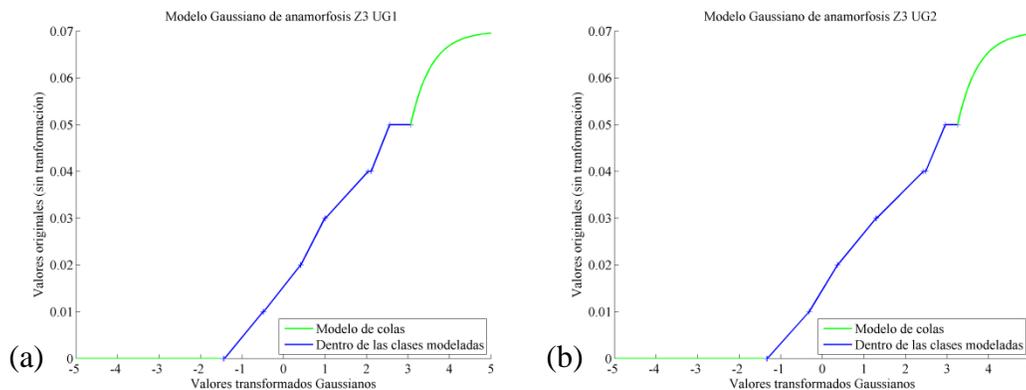
Variable	Mínimo [%]	Máximo [%]	Media [%]	Desviación estándar [%]
$z_1$	0.01	0.50	0.05	0.00
$z_2$	0.00	0.42	0.01	0.00
$z_3$	0.00	0.05	0.01	0.00
$z_4$	0.00	0.16	0.02	0.00
$z_5$	0.00	0.81	0.30	0.20
$z_6$	0.12	98.18	32.53	23.29

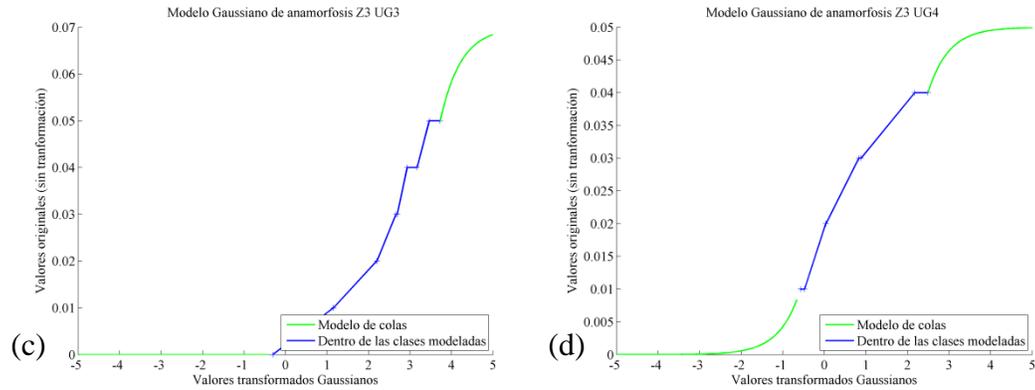
En relación con las estadísticas originales, no se observan fuertes modificaciones de los estadísticos producto del desagrupamiento. Las principales diferencias ocurren con las variables  $z_5$  y  $z_6$ , donde la primera sufre un aumento en su ley media, contrario a  $z_6$  cuya ley media disminuye levemente.

## 6.9. ANAMORFOSIS GAUSSIANA

La aplicación del modelo multigaussiano, requiere distribuciones Gaussianas de las variables a simular. Para esto se aplica una anamorfosis a las variables transformadas considerando las unidades geológicas definidas.

A modo de ejemplo, la siguiente figura muestra las funciones Gaussianas de la variable  $z_3$  en cada una de sus unidades.





**Figura 6.29:** Anamorfosis variable  $z_3$  (a) UG1, (b) UG2, (C) UG3 y (d) UG4. Azul: anamorfosis experimental. Verde: extrapolación de colas.

### 6.9.1 Estadísticas de variables Gaussianas

Las estadísticas resultantes del proceso de anamorfosis se presentan en la **Tabla 6.9**.

**Tabla 6.9:** Resumen estadístico de cada variable transformada con sus unidades geológicas post anamorfosis

Variable	Unidad geológica	Número de datos	Mínimo [%]	Máximo [%]	Media [%]	Desviación estándar [%]
$z_1$	UG1	206	-2.97	2.89	0.00	1.00
	UG2	719	-3.10	3.12	0.00	1.00
	UG3	3171	-3.42	3.92	0.00	1.00
	UG4	97	-2.57	2.49	0.00	0.99
$z_2$	UG1	189	-3.08	3.03	0.00	0.99
	UG2	3907	-3.55	3.18	0.00	1.00
	UG3	97	-2.58	2.61	0.00	0.99
$z_3$	UG1	206	-2.77	3.07	0.00	1.00
	UG2	719	-2.98	3.25	0.00	1.00
	UG3	3171	-3.93	3.93	0.00	1.00
	UG4	97	-2.47	2.49	0.00	0.99
$z_4$	UG1	206	-3.17	2.77	0.00	0.99
	UG2	719	-3.36	3.37	0.00	1.00
	UG3	3171	-3.73	3.13	0.00	1.00
	UG4	97	-2.79	2.49	0.00	0.66
$z_5$	UG1	992	-3.34	3.34	0.00	1.00
	UG2	1287	-3.15	3.17	0.00	1.00
	UG3	1817	-3.85	3.23	0.00	1.00
	UG4	97	-2.36	2.80	0.00	0.99
$z_6$	UG1	791	-3.51	3.45	0.00	1.00
	UG2	3305	-3.94	3.86	0.00	1.00
	UG3	97	-2.49	2.86	0.00	0.99

## 6.9.2 Estudio de bigaussianidad

Se comprueba la bigaussianidad de las variables transformadas mediante nubes de correlación diferidas. En general, se observa una tendencia elíptica para corto alcance (10 [m]) y una forma circular para un alcance mayor (100 [m]).

## 6.10. VARIOGRAFÍA

El estudio variográfico de las variables transformadas se realiza mediante el cálculo de covarianzas directas y cruzadas en las direcciones horizontal y vertical.

### 6.10.1 Covarianza experimental

Se calculan las covarianzas en el plano horizontal y la dirección vertical, utilizando los siguientes parámetros.

<b>Dirección</b>	<b>Horizontal</b>	<b>Vertical</b>
Azimut [°]	0	0
Tolerancia Azimut [°]	90	90
Dip [°]	0	90
Tolerancia dip [°]	20	20
Paso [m]	50	10
N° pasos	8	15
Tolerancia en paso [m]	25	5

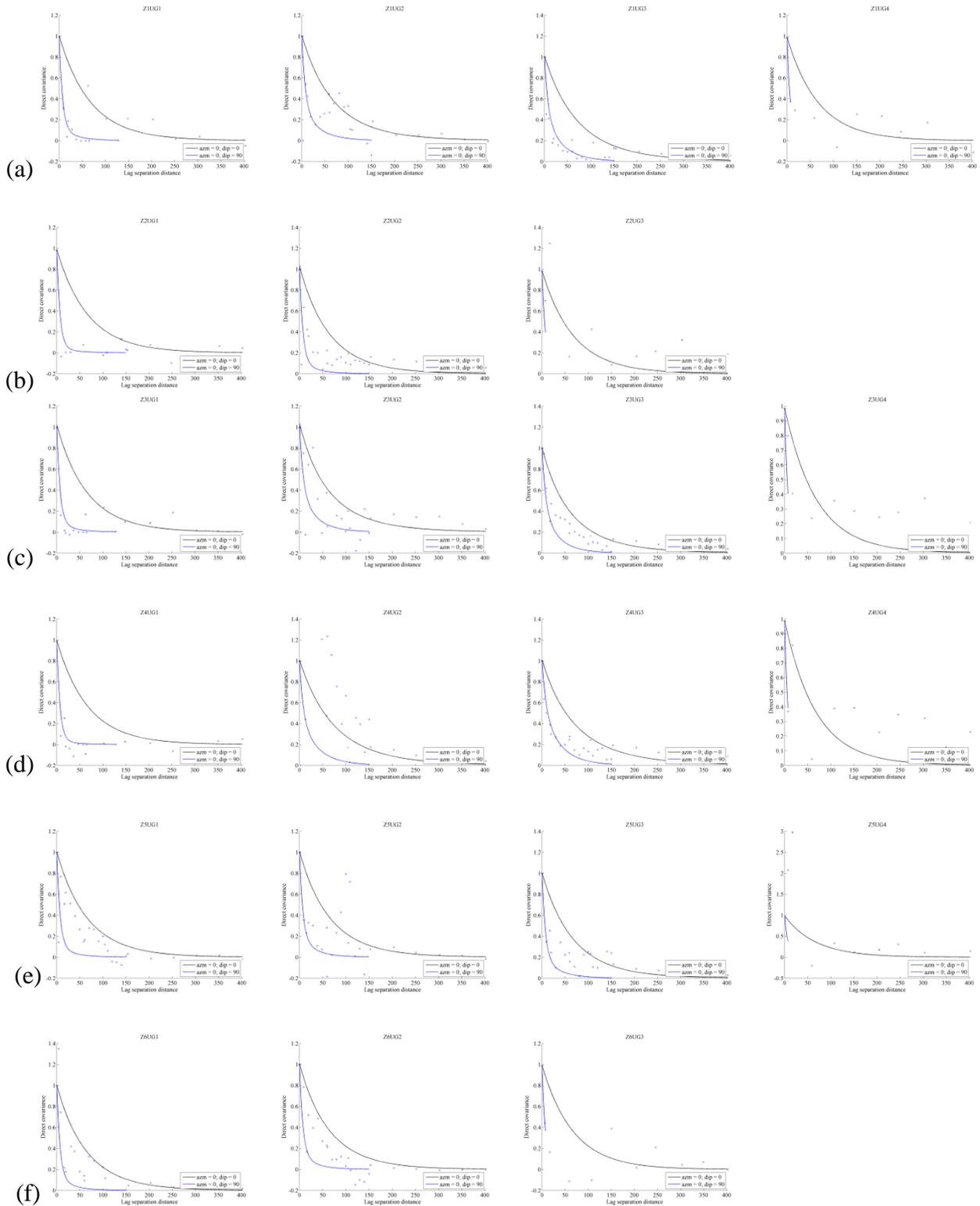
Este proceso permite obtener 484 covarianzas experimentales (directas y cruzadas).

### 6.10.2 Ajuste de covarianzas

Para el ajuste del modelo de coregionalización se utiliza un algoritmo de ajuste semi-automático, considerando las estructuras que se presentan en la siguiente tabla.

<b>Estructura</b>	<b>Tipo</b>	<b>Alcance horizontal [m]</b>	<b>Alcance vertical [m]</b>
#1	Exponencial	70	20
#2	Exponencial	70	50
#3	Exponencial	70	80
#4	Exponencial	130	20
#5	Exponencial	130	50
#6	Exponencial	130	80
#7	Exponencial	200	20
#8	Exponencial	200	50
#9	Exponencial	200	80
#10	Exponencial	350	300

El resultado de este proceso se presenta en los siguientes esquemas de la **Figura 6.30**. Los puntos corresponden a la covarianza experimental, mientras que la línea continua corresponde al ajuste encontrado. En ellas se observan variables continuas y con alcances variables entre 50 a 300 [m].



**Figura 6.30:** Covarianzas modeladas directas. (a)  $z_1$ , (b)  $z_2$ , (c)  $z_3$ , (d)  $z_4$ , (e)  $z_5$ , (f)  $z_6$ . Negro: plano horizontal. Azul: dirección vertical

## 6.11. COSIMULACIÓN DE LEYES

A continuación se presenta el procedimiento y parámetros efectuados para la realización de la cosimulación de las leyes de interés. Junto a esto son presentados los principales resultados obtenidos de este proceso.

### 6.11.1 Definición del sector a simular

Es sector es análogo al utilizado en el modelo N°1, es decir, abarca el modelo de bloques interpretado de forma completa.

### 6.11.2 Parámetros de la cosimulación

Las cosimulaciones son efectuadas mediante el algoritmo de bandas rotantes. Para esto se consideró una discretización puntual (1x1x1), debido a que las variables transformadas no son aditivas (se constituyen como divisiones). La vecindad no considera rotación, ni división por octantes, y busca un total de 32 puntos con datos para el condicionamiento. Se aplicó cokriging simple para el condicionamiento de los valores simulados, el cual es concordante con una variable de media conocida (al ser variables Gaussianas, se presume la media conocida e igual a cero).

Los parámetros direccionales de la vecindad de búsqueda se resumen en la siguiente tabla.

	Este	Norte	Cota
Radios máximos [m]	250	250	100
Ángulos para rotación [°]	0	0	0

Finalmente, con estos parámetros se construyeron 20 realizaciones con 500 líneas para la simulación de cada una de las diez estructuras anidadas y seis variables a cosimular.

### 6.11.3 Obtención de variables originales

Para poder analizar los diferentes escenarios obtenidos, es necesario realizar la transformación inversa que permita obtener a través de las variables transformadas las siete variables originales.

Las ecuaciones utilizadas para este proceso de transformación de vuelta se presentan en la **Tabla 6.10**.

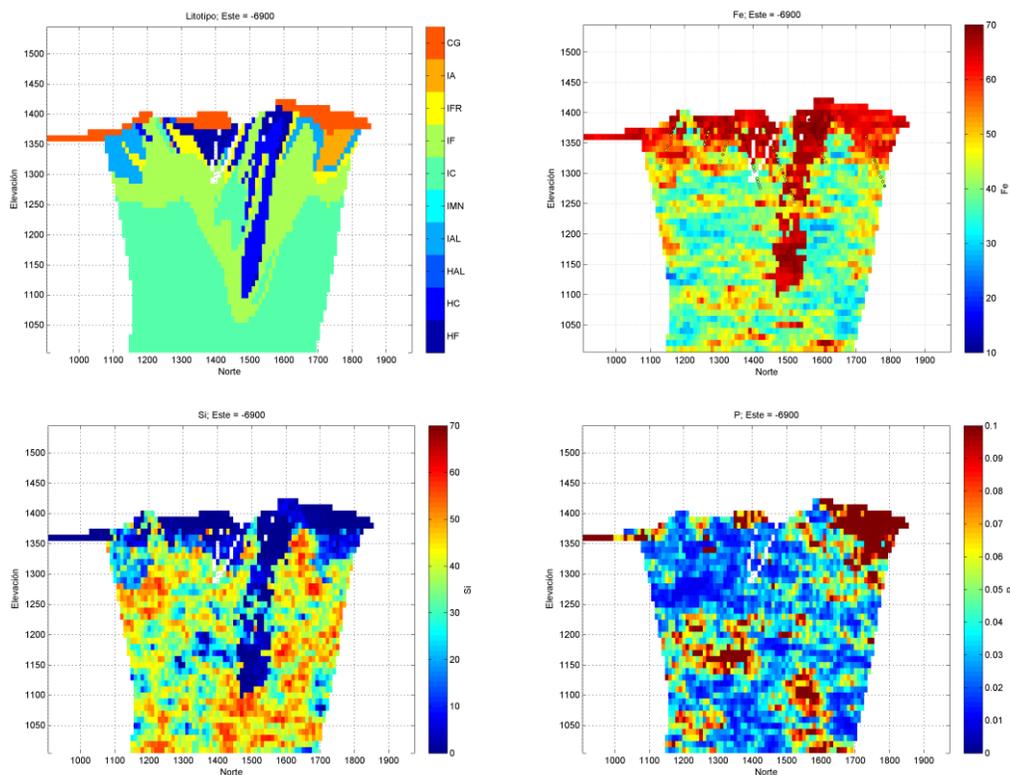
Tabla 6.10: Ecuaciones para generar variables originales a través de las variables transformadas

Variable original	Función de transformación
Fe	$\frac{(100 - 2.2913 \cdot P - 1.2912Mn - Al - Si - Pf)}{1.4297}$
Si	$z_5(100 - 2.2913 \cdot P - 1.2912 \cdot Mn - Al - Pf)$

P	$z_1$
Al	$z_3(100 - 2.2913 \cdot P - 1.2912 \cdot Mn)$
Mn	$\frac{z_2(100 - 2.2913 \cdot P)}{1.2912}$
Pf	$z_4(100 - 2.2913 \cdot P - 1.2912 \cdot Mn - Al)$
G1	$z_6$

### 6.11.4 Visualización de realizaciones

Finalmente, se procede a visualizar el resultado de las simulaciones de las siete variables de interés. En las **Figuras 6.31, 6.32 y 6.33** se presentan diferentes vistas y perfiles, donde la primera imagen corresponde al modelo simulado de tipos de roca y las siguientes son las vistas de las siete variables simuladas.



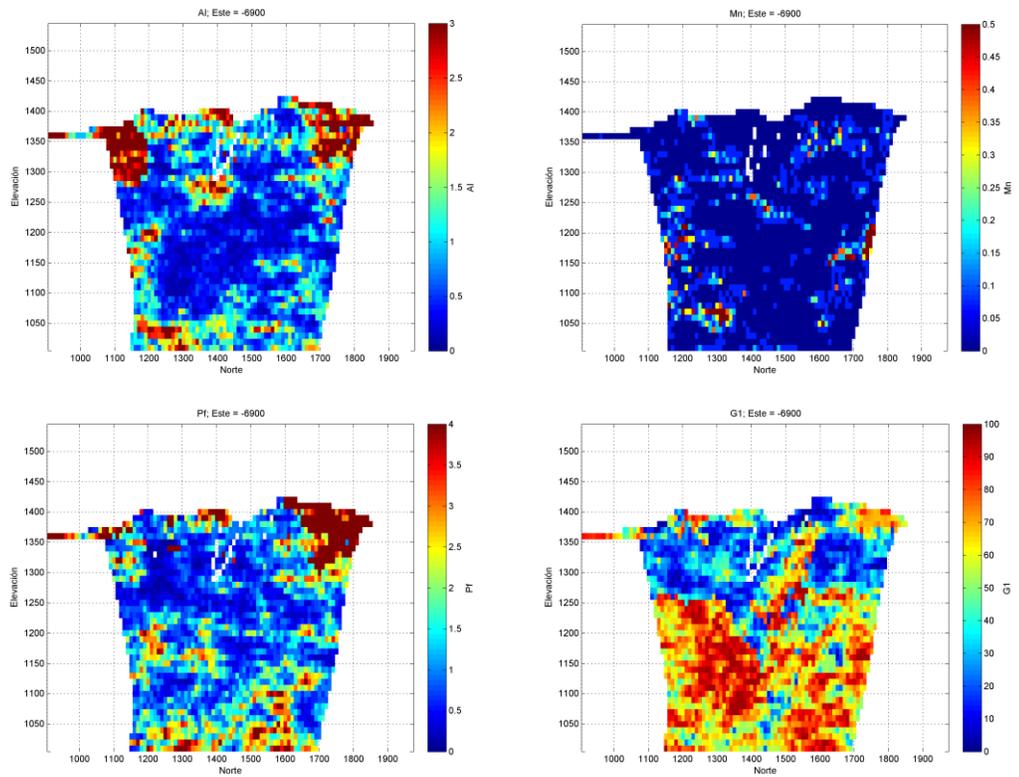
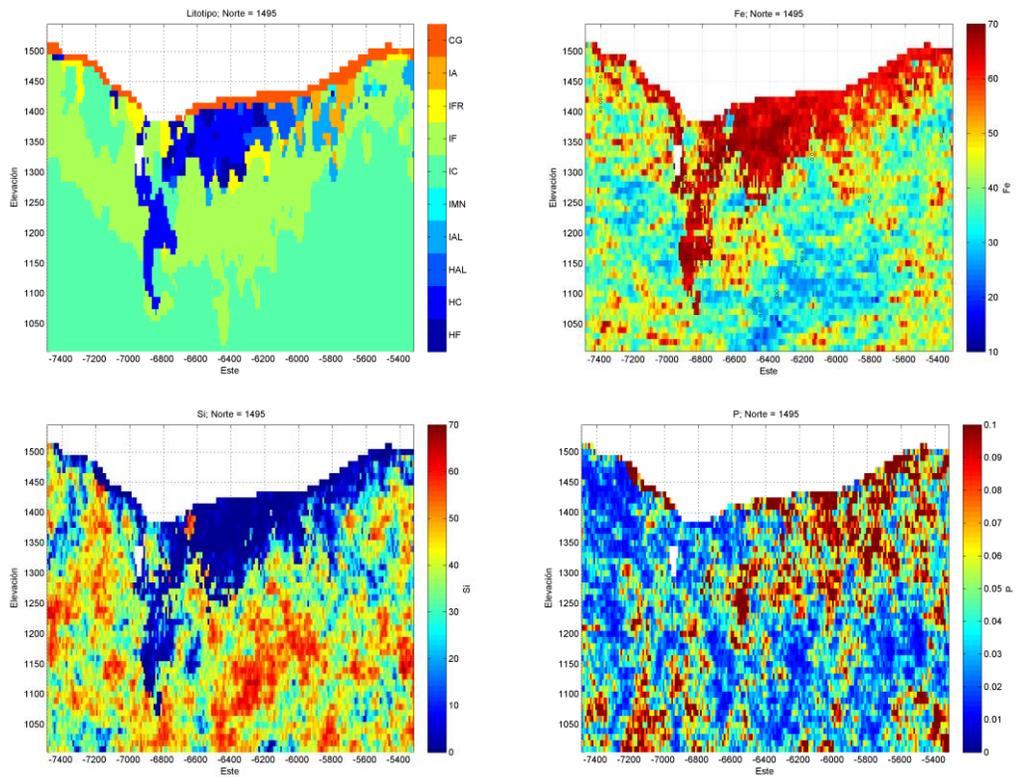


Figura 6.31: Perfil Este -6900 simulación #1



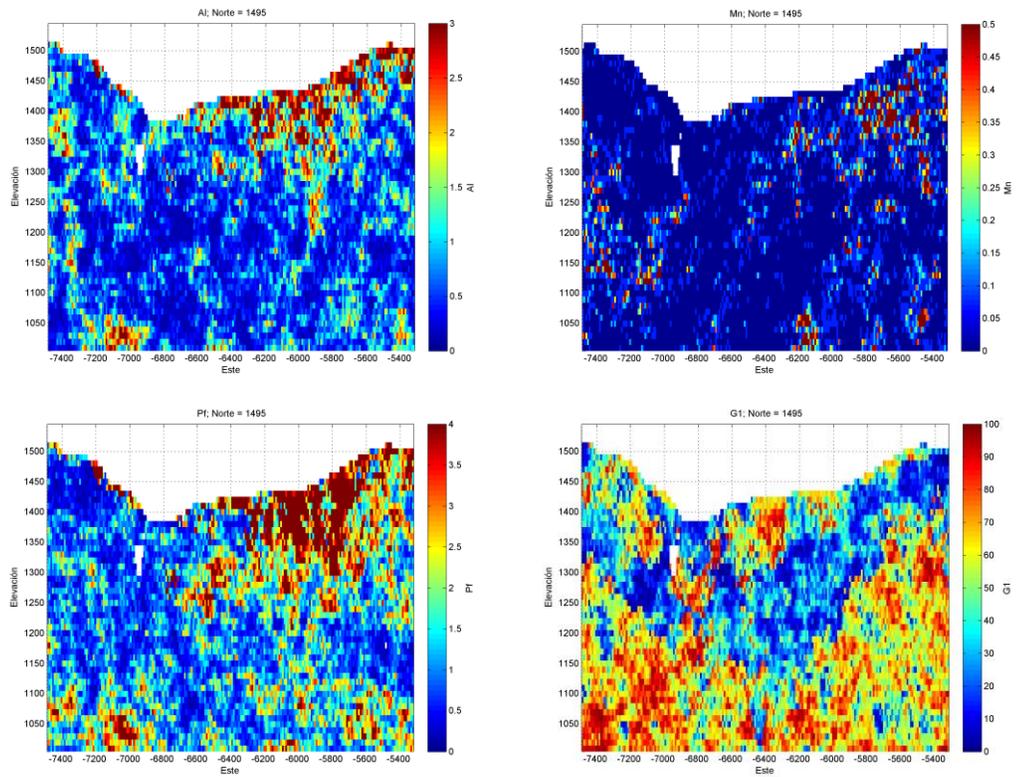
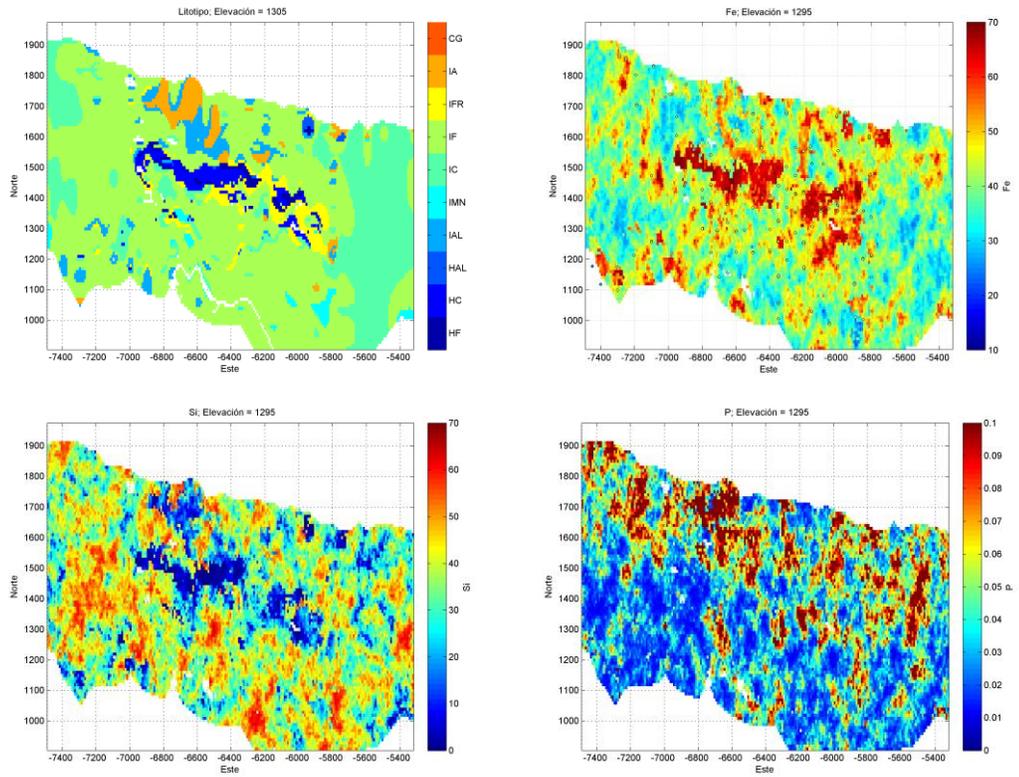


Figura 6.32: Perfil Norte 1495, simulación #1



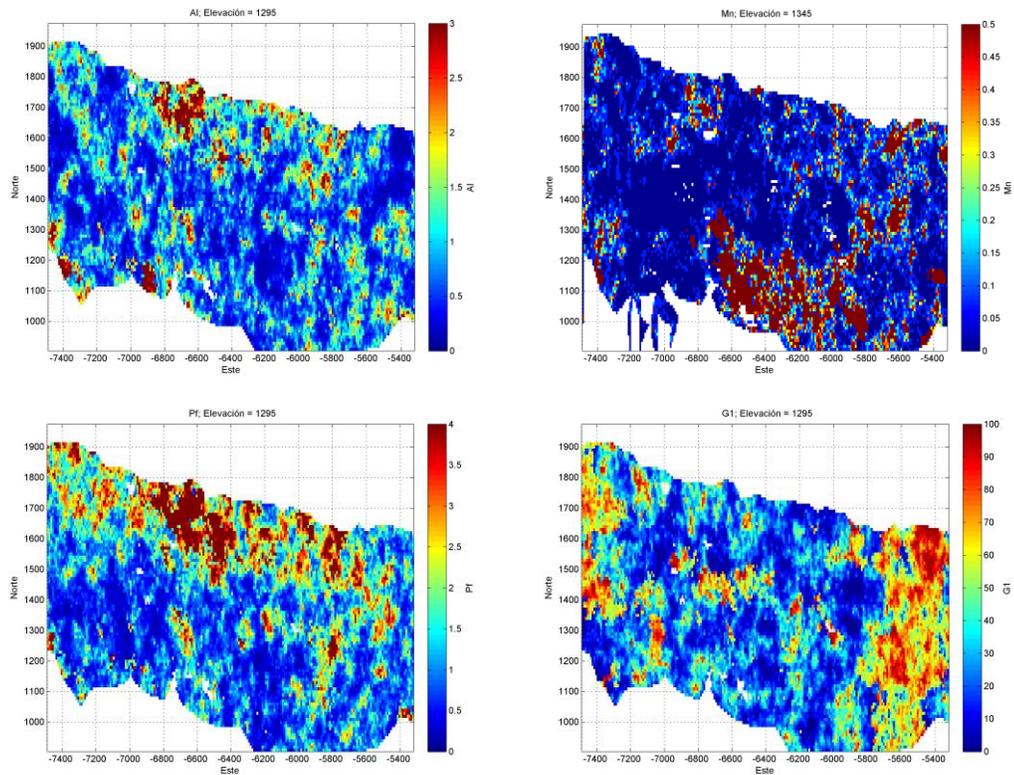


Figura 6.33: Vista en planta, cota 1295 simulación #1

En las vistas anteriores, lo primero que se observa es una alta correspondencia entre los sondajes y las zonas simuladas. En el resto de los casos se observan similitudes respecto a los resultados obtenidos con el modelo N°1, con la salvedad de que el primer modelo considera un soporte de bloques y no puntual, lo que produce un suavizamiento en las realizaciones obtenidas a diferencia del modelo N°2.

Las variables hierro, sílice, fósforo y granulometría presentan una alta correspondencia entre las zonas simuladas y los valores asociados a ellas, lo que concuerda con la definición de tipos de roca en el yacimiento. En particular, en el caso de hierro, se observan vistas donde las leyes bajas se asocian a las itabiritas compactas y friables, mientras que las mayores leyes están en sectores asociados a las hematitas y canga.

# CAPÍTULO 7

## PROCESAMIENTO DE LAS REALIZACIONES: COMPARACIÓN DE MODELOS DE COSIMULACIÓN

De cada modelo de cosimulación de leyes se obtuvieron 20 realizaciones de cada una de las variables de interés, esto permite inferir una serie de características y herramientas con el objetivo de cuantificar la incertidumbre en los recursos del yacimiento.

Dentro de los análisis que son posibles efectuar a las diferentes realizaciones se encuentra el estudio de la distribución de leyes medias, varianzas y correlaciones simuladas, el análisis de nubes de dispersión comparativas entre los datos condicionantes y los valores simulados, el inventario de recursos disponibles a determinadas leyes de corte y el estudio de la reproducción de las relaciones existentes entre las variables de interés.

### 7.1. DISTRIBUCIÓN Y ESTADÍSTICAS DE LEYES MEDIAS SIMULADAS

#### 7.1.1 Incertidumbre global

La **Tabla 7.1** muestra las estadísticas de las leyes medias simuladas en los dos modelos empleados, el primero corresponde al modelo de variables originales y el segundo al de variables transformadas.

**Tabla 7.1:** Resumen estadístico de la ley media global sobre las 20 realizaciones de los modelos N°1 y N°2

Variable	Modelo N°1			Modelo N°2		
	Mínimo [%]	Máximo [%]	Media [%]	Mínimo [%]	Máximo [%]	Media [%]
Fierro	43.7	44.61	44.05	41.31	43.12	42.12
Sílice	33.37	34.57	34.05	32.06	34.73	33.21
Fósforo	0.04	0.05	0.05	0.05	0.06	0.05
Aluminio	0.9	0.98	0.94	0.98	1.15	1.09
Manganeso	0.14	0.23	0.18	0.25	0.43	0.33
Pérdida de fuego	1.67	1.8	1.73	2.03	2.39	2.20
Granulometría	46.93	48.81	47.79	38.7	42.6	41.24

Los valores medios simulados difieren de los valores medios desagrupados de las variables, salvo en el caso de la variable fósforo. Las diferencias se producen debido a diferentes factores que serán analizados para cada una de las variables de interés.

En el caso de fierro, la ley media desagrupada de los sondeos condicionantes es 46.95%, mientras que las realizaciones de ambos modelos presentan medias simuladas inferiores. Lo anterior se entiende al observar que la mayoría de los sondeos con leyes altas de fierro se ubican en zonas de interés económico correspondiente a los litotipos hematita, las que a su vez corresponden aproximadamente a un 21% del total de los sondeos, mientras que esta misma unidad geológica corresponde a una fracción baja (cerca al 10% del total) dentro del modelo simulado.

Por otra parte, las leyes medias simuladas de sílice y granulometría G1 son superiores a la ley media desagrupada de los datos condicionantes, debido a que las altas leyes se asocian al tipo de roca itabirita compacta, el cual tiene una presencia superior (porcentualmente) en el modelo simulado respecto a los sondeos, lo que genera un aumento de la ley media global simulada.

El caso de las variables aluminio, manganeso y pérdida de fuego es diferente según el modelo de simulación que se considere. Sin embargo, los valores medios obtenidos de las simulaciones son similares a las leyes medias desagrupadas de los sondeos, con diferentes no superiores a 0.3%.

### 7.1.2 Incertidumbre por unidad geológica

Las **Tablas 7.2 y 7.3** resumen el intervalo de las leyes simuladas para cada variable y unidad geológica, junto con el valor medio sobre las 20 realizaciones y la ley media de los datos desagrupados, tanto para el modelo de cosimulación N°1 como el N°2. En ellas es posible notar las diferencias que existen en la cantidad de datos a nivel de sondeos y de valores simulados para cada unidad geológica.

**Tabla 7.2:** Resumen estadístico de ley media sobre las 20 realizaciones del modelo de cosimulación N°1 y ley media desagrupada de sondeos por unidades geológicas

Variable	Unidad geológica	Simulación con 20 realizaciones				Sondeos	
		Ley mínima [%]	Ley máxima [%]	Ley media [%]	Número de nodos	Ley media desagrupada [%]	Número de datos
Fierro	UG1	62.92	64.28	63.34	25642	64.63	992
	UG2	54.78	55.82	53.70	56287	53.16	1287
	UG3	38.95	44.00	40.92	518470	40.53	1817
	UG4	58.93	64.53	62.94	25017	63.36	97
Sílice	UG1	3.10	4.58	4.01	25642	3.53	992
	UG2	15.79	18.04	17.43	56287	17.95	1287
	UG3	35.74	40.50	39.15	518470	39.80	1817
	UG4	2.01	2.97	2.27	25017	2.14	97
Fósforo	UG1	0.06	0.14	0.09	12508	0.10	206
	UG2	0.05	0.11	0.07	31271	0.07	719
	UG3	0.03	0.05	0.04	556620	0.04	3171
	UG4	0.06	0.12	0.08	25017	0.09	97
Aluminio	UG1	1.89	2.59	2.01	12508	2.08	206
	UG2	1.82	2.13	1.88	31271	1.94	719
	UG3	0.67	1.00	0.81	556620	0.80	3171
	UG4	2.10	2.95	2.43	25017	2.35	97
Manganeso	UG1	3.09	3.82	3.42	6254	3.43	190
	UG2	0.08	0.20	0.17	594145	0.13	3908
	UG3	0.03	0.16	0.09	25017	0.05	97
Pérdida de fuego	UG1	5.09	7.39	6.27	12508	6.45	206
	UG2	3.00	4.10	3.36	31271	3.30	719
	UG3	1.10	1.61	1.52	556620	1.40	3171
	UG4	3.91	5.18	4.30	25017	4.40	97
Granulometría G1	UG1	56.06	69.82	61.76	6254	63.40	791
	UG2	22.02	30.69	28.61	594145	26.00	3305
	UG3	36.23	51.70	44.44	25017	48.41	97

Las leyes medias desagrupadas de los sondeos se ubican dentro de los rangos simulados en todas las variables de estudio obtenidas mediante el primer modelo de cosimulación. Las principales diferencias se producen entre las leyes medias de los sondeos correspondientes a la última unidad geológica de cada variable, es decir, la canga. Este fenómeno se produce debido a la baja cantidad de datos existentes en esta unidad respecto al total de ellos. De acuerdo a lo anterior, los resultados son satisfactorios, ya que el modelo de cosimulación propuesto reproduce la información de los sondeos, con fluctuaciones no superiores al 2%.

**Tabla 7.3:** Resumen estadístico de ley media sobre las 20 realizaciones del modelo de cosimulación N°2 y ley media desagrupada de sondeos por unidades geológicas

Variable	Unidad geológica	Simulación con 20 realizaciones				Sondeos	
		Ley mínima [%]	Ley máxima [%]	Ley media [%]	Número de nodos	Ley media desagrupada [%]	Número de datos
Fierro	UG1	61.20	65.78	63.92	25642	64.63	992
	UG2	50.02	54.28	53.37	56287	53.16	1287
	UG3	39.24	43.75	40.73	518470	40.53	1817
	UG4	61.03	65.02	62.94	25017	63.36	97
Sílice	UG1	2.98	8.21	4.91	25642	3.53	992
	UG2	15.92	19.04	17.87	56287	17.95	1287
	UG3	36.11	40.18	38.77	518470	39.80	1817
	UG4	1.92	5.39	3.95	25017	2.14	97
Fósforo	UG1	0.07	0.13	0.08	12508	0.10	206
	UG2	0.06	0.11	0.07	31271	0.07	719
	UG3	0.03	0.05	0.04	556620	0.04	3171
	UG4	0.07	0.13	0.08	25017	0.09	97
Aluminio	UG1	1.86	2.46	2.19	12508	2.08	206
	UG2	1.85	2.28	1.93	31271	1.94	719
	UG3	0.69	1.03	0.81	556620	0.80	3171
	UG4	2.17	3.15	2.39	25017	2.35	97
Manganeso	UG1	2.89	3.52	3.03	6254	3.43	190
	UG2	0.07	0.38	0.20	594145	0.13	3908
	UG3	0.02	0.27	0.11	25017	0.05	97
Pérdida de fuego	UG1	5.23	7.17	6.09	12508	6.45	206
	UG2	3.22	3.96	3.50	31271	3.30	719
	UG3	1.25	1.65	1.49	556620	1.40	3171
	UG4	3.67	6.93	4.57	25017	4.40	97
Granulometría G1	UG1	60.94	66.89	61.70	6254	63.40	791
	UG2	23.57	29.27	25.07	594145	26.00	3305
	UG3	42.87	51.98	45.31	25017	48.41	97

En el caso del segundo modelo de cosimulación, se observan resultados concordantes entre la ley media de los sondeos condicionantes y el valor promedio obtenido sobre las 20 realizaciones. Los valores simulados presentan fluctuaciones entre el valor máximo y mínimo iguales a un 6% en los casos más extremos, los que se acentúan en la última unidad geológica de cada variable (canga). En comparación con el primer modelo de cosimulación, los resultados simulados presentan rangos más amplios, lo que puede atribuirse al efecto que produce la transformación de las variables en las correspondientes variables originales y el suavizamiento del modelo N°1. En

promedio, ambos modelos presentan la misma diferencia entre el valor medio simulado y el valor medio de los sondeos desagrupados.

## 7.2. DISTRIBUCIÓN Y ESTADÍSTICAS EN TÉRMINOS DE VARIANZA

La **Tabla 7.4** presenta el resumen de los valores de las varianzas obtenidas en los dos modelos de simulación empleados.

**Tabla 7.4:** Resumen estadístico de la varianza sobre las 20 realizaciones para modelo N°1 y N°2

Variable	Modelo N°1			Modelo N°2		
	Mínimo [%]	Máximo [%]	Media [%]	Mínimo [%]	Máximo [%]	Media [%]
Fierro	98.50	120.90	104.93	106.77	127.24	113.73
Sílice	235.68	285.61	249.45	256.27	287.73	263.92
Fósforo	0.00	0.00	0.00	0.00	0.005	0.002
Aluminio	0.54	0.63	0.59	0.49	0.64	0.57
Manganeso	0.50	1.88	1.05	1.24	3.89	2.45
Pérdida de fuego	1.96	2.51	2.20	2.05	2.75	2.22
Granulometría	565.72	638.38	591.35	571.77	644.04	606.66

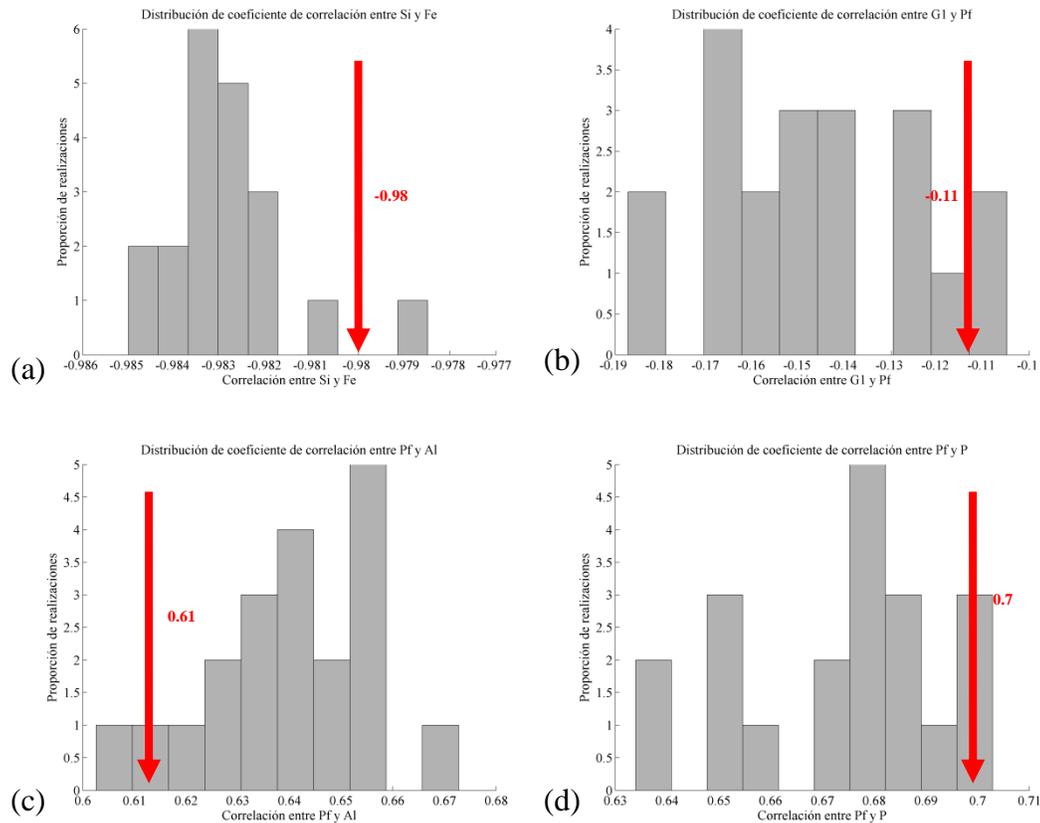
Se observa una alta variabilidad en las varianzas asociadas a cada variable, por ejemplo fierro presenta una varianza promedio de 104 en el modelo N°1 con un rango igual a 22.4. La variable granulometría G1 es la que presenta el rango más amplio de varianzas simuladas con diferencias entre los valores máximos y mínimos iguales a 72.66 y 82.27 para el modelo N°1 y N°2 respectivamente.

En el caso del modelo N°1, la mayoría de las variables (salvo granulometría G1) poseen un valor promedio de varianzas simuladas inferior al valor de los sondeos condicionantes, lo que se explica por la discretización utilizada al cosimular las variables (3x3x2), la que produce un suavizamiento en los valores simulados, estrechando su rango y por ende, disminuyendo su variabilidad.

En el modelo N°2, se observa un fenómeno similar al del modelo de simulación N°1, ya que todas las variables (salvo granulometría G1 y fósforo) presentan promedios de varianzas simuladas inferiores a la varianza de los sondeos, lo que se explica por el efecto de suavizamiento producido por la aplicación de variables transformadas definidas mediante expresiones matemáticas regularizadoras.

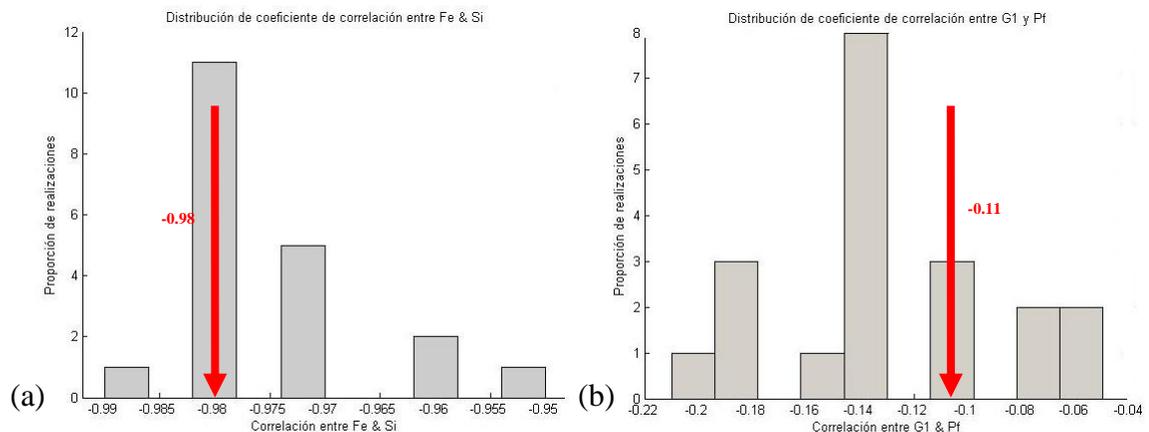
## 7.3. DISTRIBUCIÓN DE LA CORRELACIÓN ENTRE VARIABLES

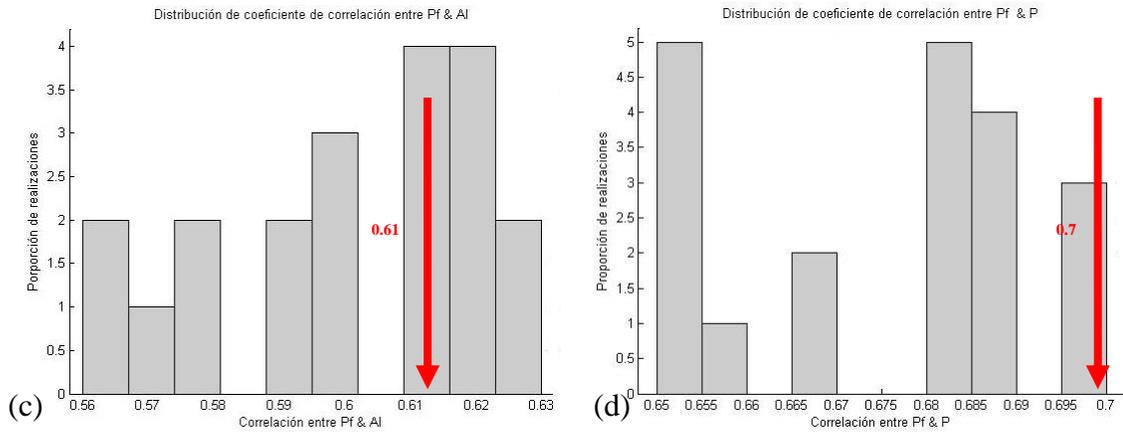
Para ejemplificar cómo se distribuyen los coeficientes de correlación entre las distintas variables, se despliega la **Figura 7.1** correspondiente a los valores simulados mediante el modelo N°1 y la **Figura 7.2** que corresponde a los resultados obtenidos del modelo de simulación N°2.



**Figura 7.1:** Distribución de la correlación entre diferentes variables, modelo N°1. (a) fierro-sílice, (b) granulometría G1-pérdida de fuego, (c) pérdida de fuego-aluminio, (d) pérdida de fuego-fósforo

En el caso del modelo N°1, se observa una alta correspondencia entre las correlaciones obtenidas entre los valores simulados y las correlaciones de los datos originales desagrupados. En particular, las variables fierro y sílice conservan su alta correlación negativa, mientras que pérdida de fuego se correlaciona de forma positiva tanto con aluminio como con la variable fósforo, lo que se puede atribuir también a la definición conjunta de sus unidades geológicas.



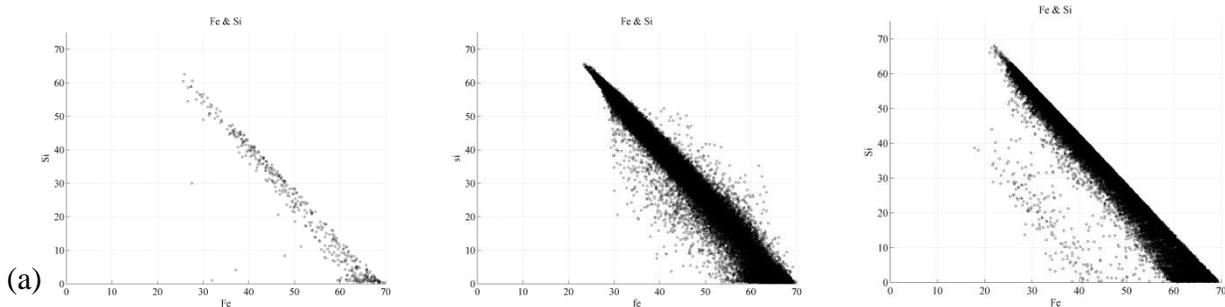


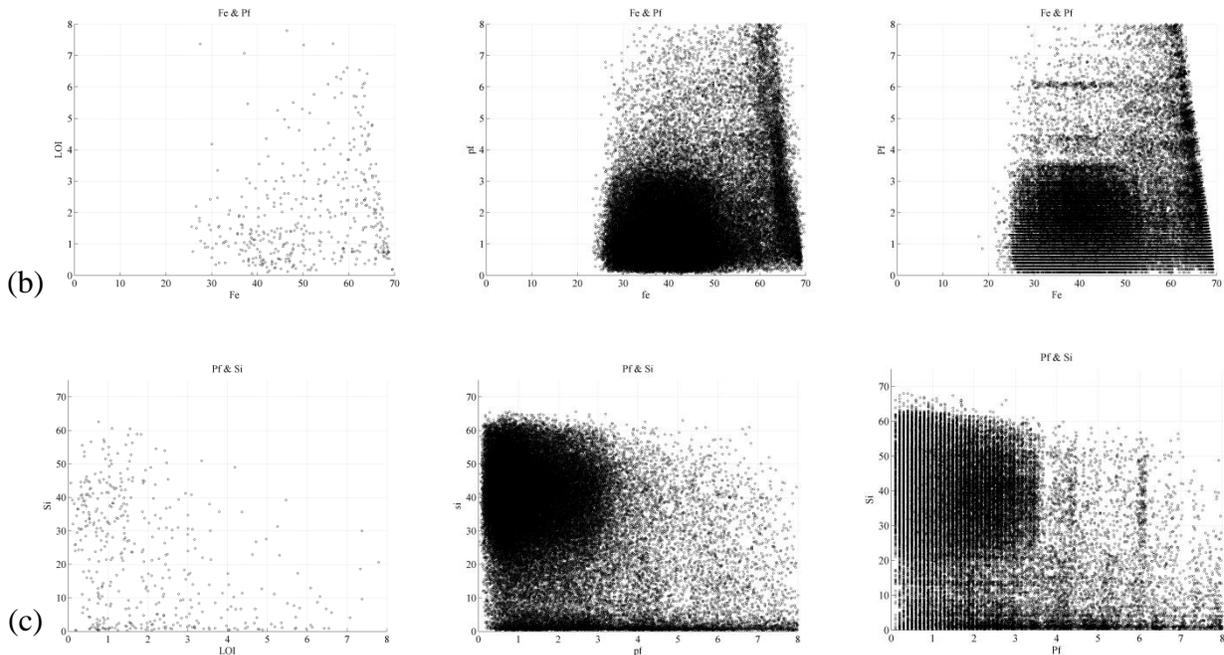
**Figura 7.2:** Distribución de la correlación entre diferentes variables, modelo N°2. (a) fierro-sílice, (b) granulometría G1-pérdida de fuego, (c) pérdida de fuego-aluminio, (d) pérdida de fuego-fósforo

En el caso de las simulaciones efectuadas con el modelo de simulación N°2, se observan coincidencias entre la correlación de los valores simulados y la de los datos condicionantes. En el caso de las variables simuladas fierro y sílice, se observan correlaciones promedio de  $-0.98$  lo que es igual a la correlación originales de los datos. Pérdida de fuego, a su vez, mantiene correlación con las variables aluminio y fósforo, similar a la correlación existente entre los datos originales.

#### 7.4. COMPARACIÓN DE DIAGRAMAS DE DISPERSIÓN

Para estudiar y comparar el comportamiento espacial de los valores condicionantes y simulados, se despliegan a continuación diagramas de dispersión entre determinados pares de variables como lo refleja la **Figura 7.3**. Los diagramas de la figura corresponden a los datos condicionantes, a los valores obtenidos en la primera realización del modelo N°1 y N°2, respectivamente.





**Figura 7.3:** Gráficos de dispersión entre datos condicionantes desagrupados (izquierda), datos simulados con el modelo N°1 (centro) y los datos obtenidos mediante el modelo de cosimulación N°2 (derecha). (a) hierro-sílice, (b) pérdida de fuego-ferro y (c) pérdida de fuego-sílice.

Al analizar la **Figura 7.3** se observa cómo se mantienen (en forma) las relaciones de los datos condicionantes a través de las variables simuladas. En el caso de hierro y sílice se conserva la relación inversa de las leyes en ambos modelos de cosimulación, con la generación de leyes de hierro menores en el caso del modelo de cosimulación que utiliza variables transformadas. Estos resultados se corresponden con los coeficientes de correlación analizados en el apartado anterior.

La relación entre pérdida de fuego y las variables aluminio y sílice se mantiene su forma, en ambos modelos de simulación. En el caso de los valores simulados se observa un notorio aumento en la cantidad de valores bajos para pérdida de fuego, y no así en las otras variables donde la simulación de valores se encuentra distribuida en torno al rango de valores originales. Este fenómeno se asocia a las unidades de estimación, ya que en particular las itabiritas compactas y friables se asocian a leyes bajas en pérdida de fuego, y como su proporción en el modelo cosimulado aumenta, también lo hace la cantidad de dichas leyes.

Como conclusión de este apartado es posible indicar que las relaciones entre las variables se conservan a través del modelo de cosimulación, siendo particularmente importante la interacción entre leyes y tipos de roca en la generación de los distintos valores simulados.

## 7.5. INVENTARIO DE RECURSOS: FIERRO

Con el objetivo de cuantificar los recursos simulados existentes en el yacimiento de estudio, se procede a tabular la ley media y la fracción de tonelaje que se obtiene a una determinada ley de corte del elemento principal, es decir el hierro. Se consideran tres escenarios en este análisis, el primero de ellos refleja el resultado pesimista obtenido en las diferentes realizaciones, el segundo corresponde al escenario optimista y el tercero refleja el promedio obtenido sobre las 20

realizaciones, permitiendo así que la toma de decisiones sobre los recursos que se considerarán en el yacimiento pueda considerar la incertidumbre geológica.

**Tabla 7.5:** Resumen de realizaciones (modelo N°1) sobre tonelaje y ley media a diferentes leyes de corte

<b>Ley de corte fierro</b>	<b>Fracción de tonelaje mínimo</b>	<b>Fracción de tonelaje máximo</b>	<b>Fracción de tonelaje promedio</b>	<b>Ley media mínima [%]</b>	<b>Ley media máxima [%]</b>	<b>Ley media promedio [%]</b>
20%	1.00	1.00	1.00	42.68	46.26	45.13
30%	0.86	0.98	0.97	44.88	47.12	45.68
40%	0.53	0.69	0.63	50.63	52.64	51.14
50%	0.24	0.33	0.28	58.75	60.21	58.99
60%	0.11	0.16	0.14	62.63	65.45	63.77

**Tabla 7.6:** Resumen de realizaciones (modelo N°2) sobre tonelaje y ley media a diferentes leyes de corte

<b>Ley de corte fierro</b>	<b>Fracción de tonelaje mínimo</b>	<b>Fracción de tonelaje máximo</b>	<b>Fracción de tonelaje promedio</b>	<b>Ley media mínima [%]</b>	<b>Ley media máxima [%]</b>	<b>Ley media promedio [%]</b>
20%	1.00	1.00	1.00	40.68	46.26	42.03
30%	0.84	0.97	0.87	43.88	47.12	44.10
40%	0.43	0.69	0.50	49.63	52.64	50.71
50%	0.24	0.33	0.28	56.75	59.21	57.08
60%	0.06	0.10	0.07	61.63	63.45	62.97

La **Tabla 7.5** refleja los recursos obtenidos mediante el primer modelo de cosimulación, mientras que la **Tabla 7.6** representa los recursos que se obtienen con el segundo modelo de cosimulación. En ellas se observa cómo a medida que aumenta la ley de corte de fierro, disminuye la incertidumbre en su ley media recuperable, lo que se asocia con el efecto proporcional inverso de la ley de fierro. Esto es de provecho en el caso estudio, ya que el fierro corresponde al principal elemento de interés, por lo tanto independiente de la ley de corte (superior a 30%) existirá poca fluctuación en el valor medio recuperable, convirtiéndose en un negocio minero de bajo riesgo en términos de su mena principal.

Respecto a los resultados obtenidos, se aprecia una mejor ley media respecto a su ley de corte en el modelo N°1 por sobre el N°2, lo que puede asociarse a la transformación de variables utilizada en el último modelo, así como a la diferencia de soporte volumétrico sobre el cual se realizan las simulaciones (bloques en el modelo N°1, puntos en el modelo N°2).

## **7.6. REPRODUCCIÓN DE LA RELACIÓN ESTEQUIOMÉTRICA**

El último punto de comparación que se considerará entre los dos modelos de cosimulación empleados es su capacidad de reproducir la relación estequiométrica en las variables de interés. Como ha sido mencionado en capítulos anteriores, la generación de un modelo de cosimulación

con variables transformadas (modelo N°2) nace de la necesidad de reproducir de forma integral esta relación de las variables en estudio.

La **Tabla 7.7** muestra la reproducción de la relación estequiométrica en cada modelo. Es posible observar en la tabla cómo el modelo N°2 reproduce en todas sus realizaciones la relación de las variables, mientras que el modelo N°1 solo lo hace en el 96.3% de sus valores simulados. Lo anterior valida el uso de modelos con variables transformadas cuando se quiere reproducir relaciones complejas o relevantes para el desarrollo del modelo de recursos de un yacimiento.

**Tabla 7.7:** Porcentaje de reproducción de relación entre variables según modelo de cosimulación

<b>Modelo de cosimulación</b>	<b>Reproducción de relación estequiométrica de variables [%]</b>
Variables originales (N°1)	96.3
Variables transformadas (N°2)	100

# CAPÍTULO 8

## VALIDACIÓN DE LOS MODELOS DE COSIMULACIÓN

Con el objetivo de determinar la eficiencia de los modelos empleados en la cosimulación, y además verificar los parámetros empleados, se efectuó el proceso de validación cruzada sobre los sondeos de exploración. Este proceso consiste en la cosimulación de cada dato en función de los datos restantes, permitiendo analizar la diferencia que se produce entre los valores simulados y el dato real, lo que se denomina error de la simulación.

Para validar ambos modelos se consideran 100 realizaciones de cada variable.

Un aspecto que es necesario aclarar sobre la validación realizada es el radio de vecindad considerado para la cosimulación. Además de no considerar el mismo dato a cosimular, se excluyen los datos de sondeos ubicados a 15 [m]. Por lo tanto, el volumen considerado en este proceso es el de un elipsoide de cuyo centro se extrae un elipsoide con la misma orientación y razones de anisotropía, pero del radio antes indicado (15 [m]).

Existen diversas pruebas que permiten validar o rechazar un modelo de simulación utilizado. En términos estadísticos se estudia la reproducción de las estadísticas y los errores de la simulación, mientras que de forma visual se chequean nubes de dispersión y gráficos de incertidumbre que. Lo anterior se verifica para los dos modelos de cosimulación efectuados, el de variables originales y el de variables transformadas.

### 8.1.1 Reproducción de estadísticas

La **Tabla 8.1** presenta el resumen estadístico obtenido sobre las 100 simulaciones efectuadas con el modelo de cosimulación N°1, es decir el que se aplica sobre las variables originales. En ella se observa que las realizaciones se acercan a los valores reales, tanto en los mínimos, máximos y medias. La media de fierro simulada excede en solamente 0.3% al valor original.

**Tabla 8.1:** Comparación de estadísticas entre valores reales y simulaciones mediante modelo de cosimulación N°1

Variable	Mínimo real [%]	Mínimo simulado [%]	Máximo real [%]	Máximo simulado [%]	Media real [%]	Promedio sobre las 100 realizaciones [%]
Fierro	11.64	11.65	69.70	69.71	51.67	51.96
Sílice	0.22	0.22	77.05	77.04	22.27	21.81
Fósforo	0.01	0.01	0.50	0.49	0.05	0.05
Aluminio	0.10	0.10	4.95	4.94	1.16	1.14
Manganeso	0.01	0.03	32.06	32.06	0.28	0.28
Pérdida de fuego	0.06	0.06	11.55	11.54	2.09	2.07
Granulometría G1	0.12	0.12	98.18	98.13	33.06	33.39

La **Tabla 8.2** presenta el resumen estadístico obtenido sobre las 100 simulaciones efectuadas con el modelo de cosimulación N°2 (variables transformadas). En la tabla se obtiene validaciones adecuadas ya que se reproducen los estadísticos principales de las variables simuladas.

**Tabla 8.2:** Comparación de estadísticas entre valores reales y simulaciones mediante modelo de cosimulación N°2

<b>Variable</b>	<b>Mínimo real [%]</b>	<b>Mínimo simulado [%]</b>	<b>Máximo real [%]</b>	<b>Máximo simulado [%]</b>	<b>Media real [%]</b>	<b>Promedio sobre las 100 realizaciones [%]</b>
Fierro	11.64	11.66	69.70	69.72	51.67	51.74
Sílice	0.22	0.21	77.05	77.05	22.27	22.01
Fósforo	0.01	0.01	0.50	0.51	0.05	0.05
Aluminio	0.10	0.10	4.95	4.95	1.16	1.15
Manganeso	0.01	0.02	32.06	32.04	0.28	0.31
Pérdida de fuego	0.06	0.05	11.55	11.55	2.09	2.10
Granulometría G1	0.12	0.11	98.18	98.16	33.06	33.25

### 8.1.2 Estadísticas de los errores de simulación

La **Tabla 8.3** presenta las estadísticas de los errores obtenidos sobre las 100 simulaciones efectuadas, tanto con el primer modelo como el segundo.

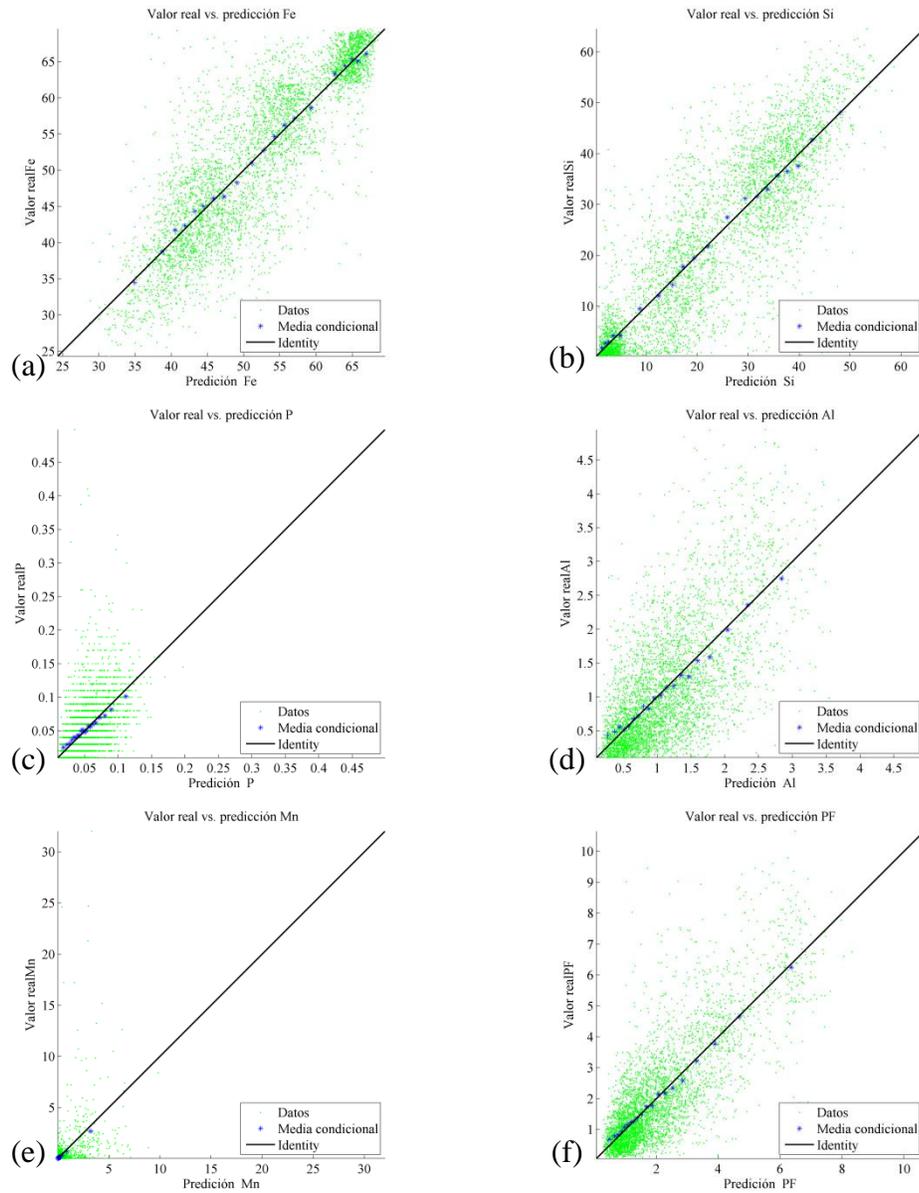
**Tabla 8.3:** Resumen estadístico del error de simulación

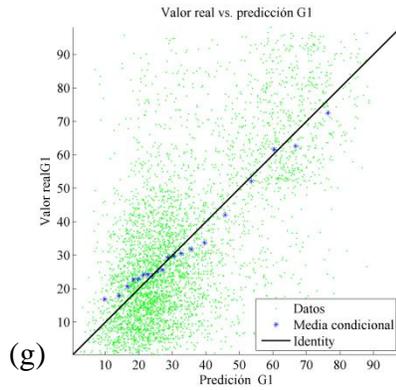
<b>Variable</b>	<b>Modelo 1</b>			<b>Modelo 2</b>		
	<b>Media de errores [%]</b>	<b>Desviación de errores [%]</b>	<b>Coefficiente de correlación entre valores reales y simulados</b>	<b>Media de errores [%]</b>	<b>Desviación de errores [%]</b>	<b>Coefficiente de correlación entre valores reales y simulados</b>
Fierro	-0.05	5.91	0.85	-0.04	7.46	0.79
Sílice	0.1	8.44	0.79	0.09	3.67	0.75
Fósforo	0.01	0.04	0.82	0.02	0.05	0.75
Aluminio	0.02	1.03	0.78	0.02	1.39	0.77
Manganeso	0.1	1.31	0.79	0.09	2.06	0.78
Pérdida de fuego	0.04	1.29	0.78	0.03	1.75	0.76
Granulometría G1	-0.09	18.78	0.83	0.05	15.56	0.74

En la tabla anterior se observan promedios de errores cercanos a cero, lo que permite comprobar que el conjunto de las realizaciones es insesgado para ambos modelos de cosimulación. La varianza es baja en las reproducciones de fósforo, aluminio, manganeso y pérdida de fuego, registrando el mayor valor en granulometría G1. En relación al coeficiente de correlación se registra un valor para cada realización, siendo presentado el valor promedio sobre 100 realizaciones en la tabla anterior, donde se observan valores promedios de 0.83 en el caso del primero modelo de cosimulación y 0.75 en el caso del segundo modelo de cosimulación.

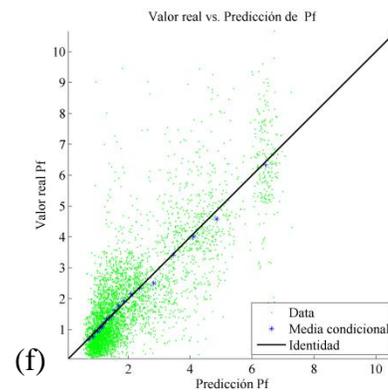
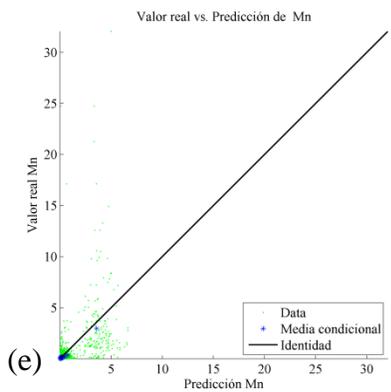
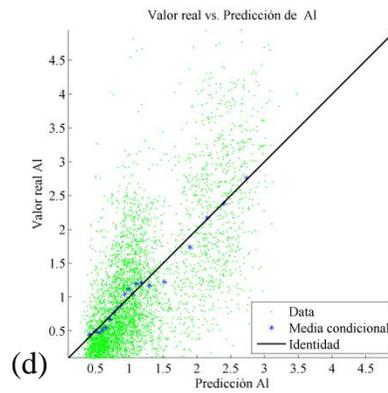
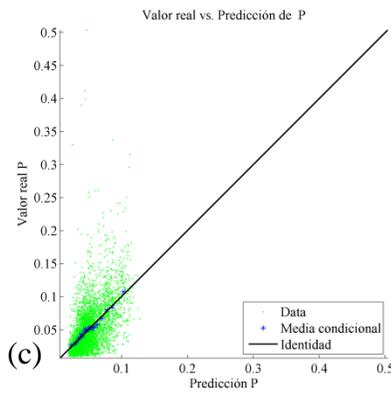
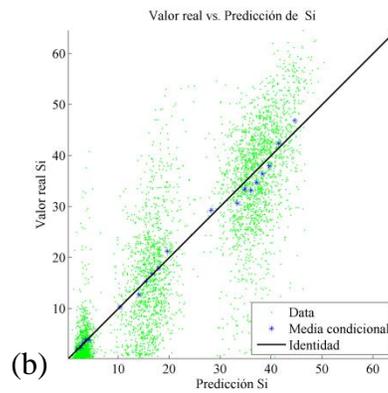
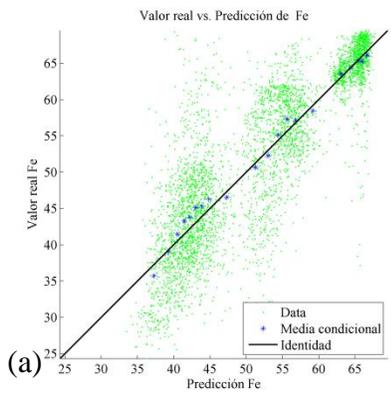
### 8.1.3 Capacidad de predicción

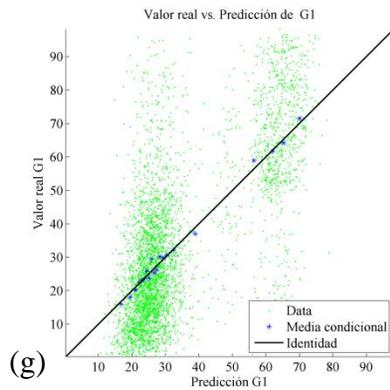
La **Figura 8.1** presenta las nubes de dispersión entre los valores reales y el promedio de las 100 realizaciones, para cada variable de interés simulada con el modelo 1, mientras que la **Figura 8.2** muestra lo mismo pero correspondiente al modelo de cosimulación 2. Esta herramienta permite estudiar si el modelo entrega predicciones sin sesgo ni sesgo condicional.





**Figura 8.1:** Nubes de dispersión de valores simulados promedio sobre 100 realizaciones versus valores reales para cada variable, mediante modelo de cosimulación propuesto N°1. (a) hierro, (b) sílice, (c) fósforo, (d) aluminio, (e) manganeso, (f) pérdida de fuego y (g) granulometría G1





**Figura 8.2:** Nubes de dispersión de valores simulados promedio sobre 100 realizaciones versus valores reales para cada variable, mediante modelo de cosimulación propuesto N°2. (a) fierro, (b) sílice, (c) fósforo, (d) aluminio, (e) manganeso, (f) pérdida de fuego y (g) granulometría G1

En el caso de la validación del modelo de cosimulación N°1, se observan nubes de dispersión donde los puntos se encuentran en torno a la diagonal, con curvas de regresión condicional muy cercanas a dicha diagonal. Por lo tanto, se valida la simulación en términos de su capacidad de predecir los valores reales, sin sesgo ni sesgo condicional [4] [21].

Sin embargo, es necesario destacar la presencia de diferentes poblaciones en cada una de las nubes de dispersión, lo que se observa preferentemente en las variables fierro, sílice, pérdida de fuego y granulometría G1. Esto se potencia en casos donde las unidades de estimación presentan leyes bien diferenciadas, como ocurre en las variables antes indicadas. Por ejemplo, en el caso de fierro se observan dos poblaciones que se encuentran entre las leyes simuladas 50-52%, lo que se condice con lo visualizado a nivel de sondajes en el capítulo 4.2.4.1. Además en las leyes simuladas de mayor valor, se observa otro corte que se asocia con las hematitas. En sílice se observan valores simulados asociados a sus tres unidades principales, con mayor diferenciación entre los subgrupos definidos para las itabiritas. Para pérdida de fuego la nube de dispersión refleja los valores simulados en la unidad IA, que corresponde a aquellos valores de mayor ley. Finalmente, en granulometría G1 se observan dos poblaciones principales de valores simulados, correspondientes a los valores ubicados en los tipos de roca compactos y friables, cuyo corte se produce en torno a valores de granulometría de 50-60%.

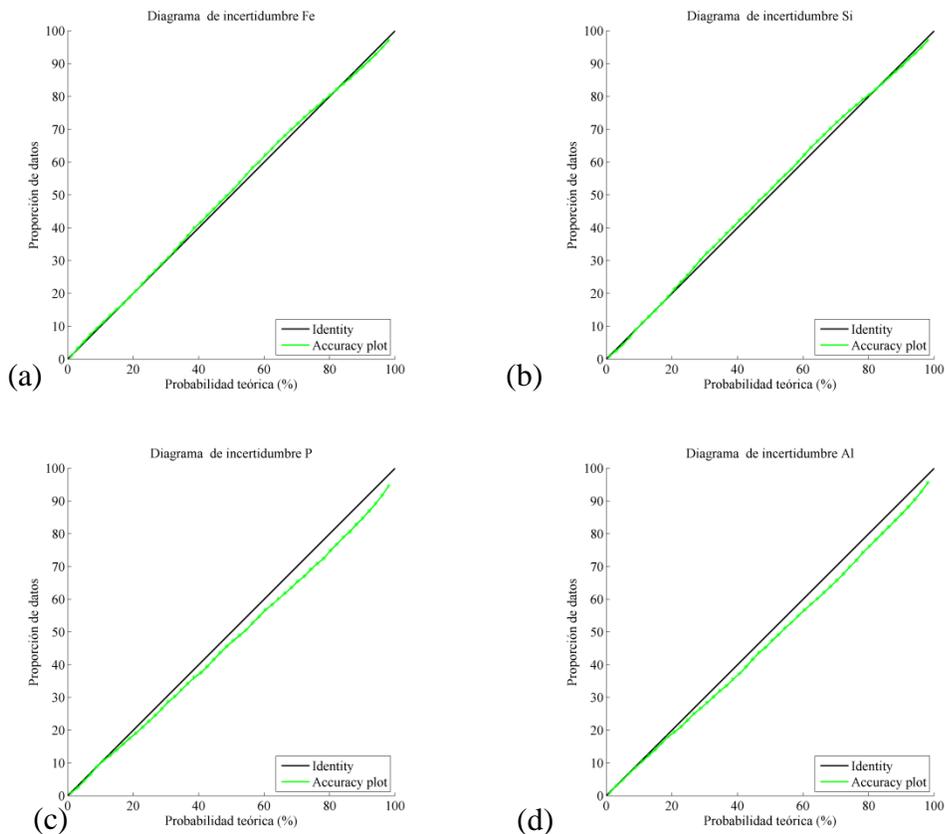
En el caso del segundo modelo de cosimulación, es decir, aquel que plantea la simulación de variables transformadas, se observan nubes de dispersión bien definidas en torno a las unidades geológicas, lo que se produce al considerar una distancia mínima para la validación, lo que induce un suavizamiento en la media de las realizaciones, por lo que dicho valor se acerca a la media de las unidades geológicas asociadas a cada simulación. Esto se potencia en casos donde las unidades de estimación presentan leyes bien diferenciadas. Al igual que en el modelo N°1, se observa que granulometría G1 presenta dos poblaciones principales de valores simulados, correspondientes a los valores ubicados en los litotipos compactos (alta ley) y friables (baja ley), cuyo corte se produce en torno a las leyes 50-60%. En términos del sesgo condicional, se aprecian realizaciones insesgadas con fluctuaciones propias de la variabilidad de la simulación.

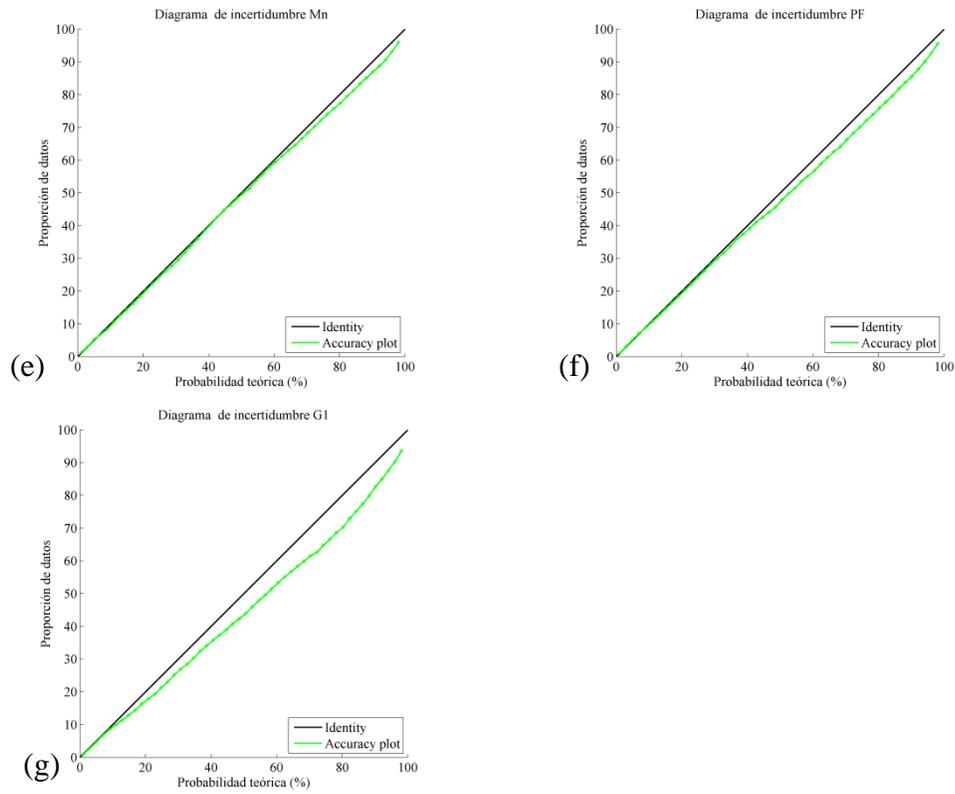
### 8.1.4 Cuantificación de la incertidumbre

Los diagramas de incertidumbre permiten validar las simulaciones en términos de su variabilidad, esto es, si dado un intervalo de probabilidad determinado en base a las simulaciones, la fracción de valores reales pertenecientes a dicho intervalo es igual al valor del intervalo. Por lo tanto, un modelo de simulación será correcto en la medida que los diagramas sean cercanos a la diagonal. La **Figura 8.3** presenta los diagramas de dispersión para las siete variables en estudio del modelo de cosimulación N°1 y la **Figura 8.4** muestra los diagramas para el modelo de variables transformadas (modelo N°2).

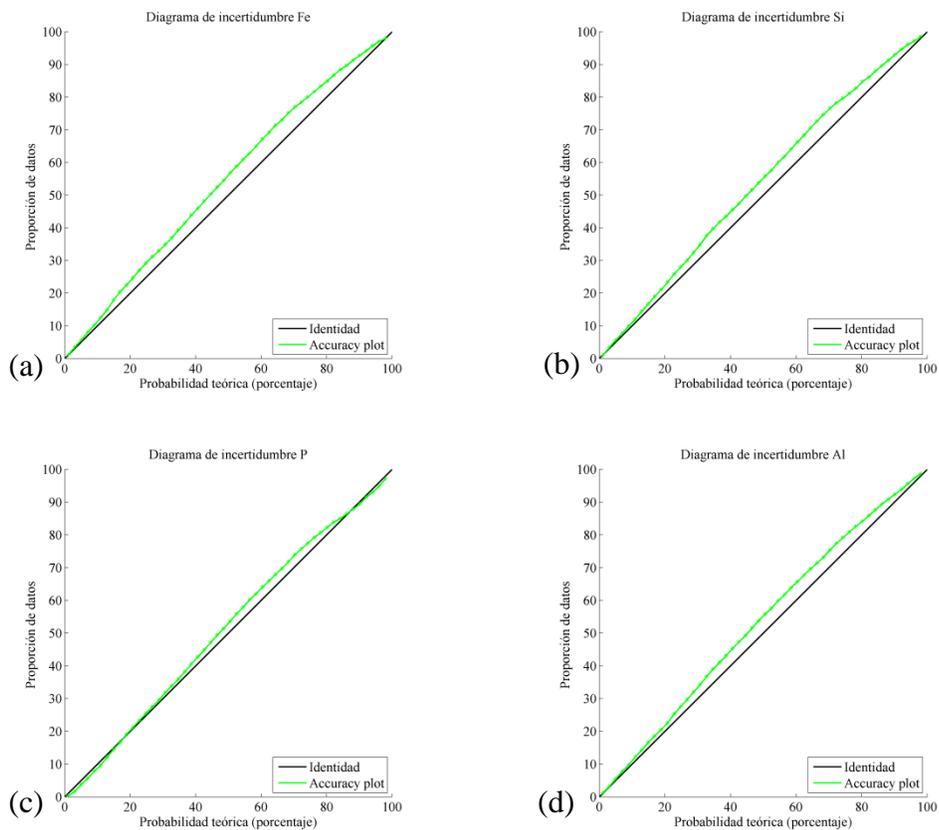
En el caso de la cosimulación de variables originales (modelo N°1) se observan valores simulados que responden a la proporción esperada de cada intervalo, con altas concordancias para las variables hierro, sílice y manganeso. El resto de las variables, si bien presentan valores cercanos a la diagonal, corresponden también a modelos levemente optimistas, debido a que la proporción de valores simulados pertenecientes a un intervalo determinado es inferior al valor teórico esperado, siendo el caso más crítico diferente en 5%. Este efecto puede atribuirse a una alta variabilidad de los valores originales críticos de dichas variables.

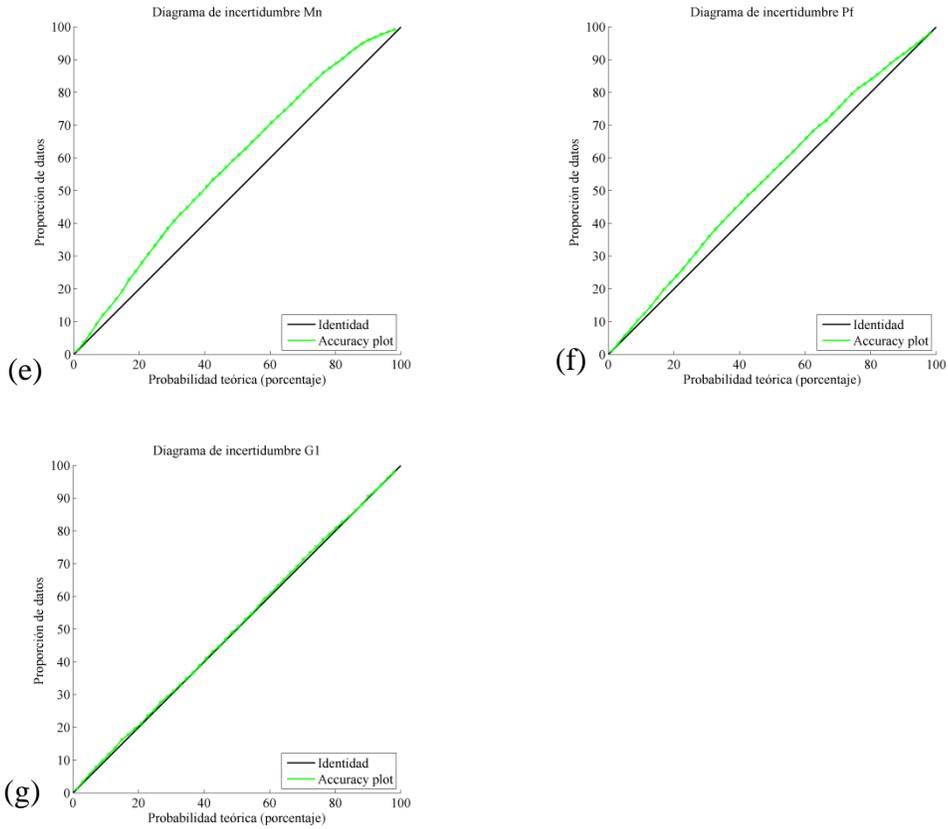
Los diagramas de incertidumbre del modelo de cosimulación de variables transformadas (modelo N°2) muestran en su mayoría valores concordantes con la probabilidad esperada de ellos, aunque levemente conservadores, indicando una leve sobre-estimación de la incertidumbre.





**Figura 8.3:** Diagramas de incertidumbre para cada variable simulada con el modelo N°1. (a) hierro, (b) sílice, (c) fósforo, (d) aluminio, (e) manganeso, (f) pérdida de fuego y (g) granulometría G1





**Figura 8.4:** Diagramas de incertidumbre para cada variable simulada con el modelo N°2. (a) fierro, (b) sílice, (c) fósforo, (d) aluminio, (e) manganeso, (f) pérdida de fuego y (g) granulometría G1

Del análisis de los puntos anteriores es posible determinar que la validación de los modelos de cosimulación es adecuada, ya que retorna los estadísticos asociados a los datos, es adecuado en términos de predicción y cuantificación de incertidumbre, y se condice con las unidades geológicas observadas en los datos de exploración.

# CAPÍTULO 9

## CONCLUSIONES

### 9.1. PREÁMBULO

La incertidumbre presente en los depósitos minerales genera la oportunidad de buscar métodos que permitan realizar una correcta cuantificación de los recursos. Dentro de estos métodos las cosimulaciones permiten además, capturar las relaciones existentes entre variables, junto con ayudar en la toma de decisiones en los procesos aguas abajo de la industria minera.

El estudio efectuado comprende la determinación de los recursos existentes en un yacimiento ferrífero conformado por siete variables de interés y diversos tipos de roca. Para reproducir las relaciones, contactos y proporciones de los tipos de roca se utiliza la simulación plurigaussiana, mientras que las variables continuas son trabajadas con el modelo multigaussiano mediante dos modelos de cosimulación, el primero considera la cosimulación de las siete variables y el segundo considera la cosimulación de variables transformadas, con el objetivo de reproducir las relaciones estequiométricas existentes entre las variables de interés.

La metodología de trabajo es distintiva de las metodologías tradicionales de estimación aplicadas en la industria por cuatro razones fundamentales:

- i) Se utiliza simulación plurigaussiana para reproducir tipos de rocas numerosos, dispersos en el espacio y con múltiples contactos.
- ii) Se plantea un modelo de cosimulación de leyes con variables transformadas para reproducir las relaciones entre las variables de interés.
- iii) En ambos modelos de cosimulación de leyes se definen de unidades geológicas propias a cada variable de interés.
- iv) Se considera la correlación cruzada entre variables, incluso cuando se definen en unidades disjuntas o traslapadas.

A continuación, se entregan detalladamente las principales consecuencias y conclusiones que se desprenden de la tesis realizada.

### 9.2. ASPECTOS DISTINTIVOS DE LA METODOLOGÍA DE TRABAJO

- La simulación de variables continuas resulta compleja cuando existen diversos y varios tipos de roca. Este problema se enfrenta mediante el uso de simulación plurigaussiana, en la cual se definen seis funciones aleatorias Gaussianas, que permiten reproducir los tipos de roca de acuerdo a su contenido de las variables principales. Este tipo de simulación ha sido utilizada en yacimientos de distinto origen, permitiendo este trabajo validar su aplicabilidad en yacimientos ferríferos polimetálicos.
- Debido al tipo de yacimiento, se presenta una relación estequiométrica entre seis de las siete variables de interés. Para reproducir de forma integral dicha relación se plantea un modelo de cosimulación que se aplica sobre variables transformadas. Estas últimas

variables son determinadas en base a las variables originales de interés mediante expresiones algebraicas. Lo anterior permite realizar la transformación de vuelta de los valores simulados, permitiendo así obtener valores simulados de las variables de interés que, por construcción, reproducen la relación estequiométrica.

- Dentro del modelo empleado, la definición de unidades geológicas para la simulación de las variables de interés no responde a la metodología tradicional, ya que se definen unidades para cada una de las variables, presentándose casos donde las unidades son iguales, disjuntas o traslapadas según las variables que se consideran. Esto significa, en términos prácticos, que la ley a través de un mismo límite geológico puede ser continua o discontinua según la variable que se esté analizando. Además, permite considerar la relación existente entre los tipos de roca y las leyes, lo que resulta de interés en el caso de estudio, donde los tipos de roca se definen de acuerdo a rangos de leyes.
- Se considera la existencia de correlación cruzada entre todas las variables, indistintamente del límite geológico existente. Por lo tanto, variables definidas en unidades geológicas disjuntas poseen correlación expresada mediante el cálculo de la covarianza cruzada.

### **9.3 IMPLEMENTACIÓN DE LOS MODELOS DE COSIMULACIÓN PROPUESTOS**

- Tanto la simulación de tipos de roca como de leyes no difieren de forma significativa respecto al modelo tradicional de simulación de variables categóricas y continuas respectivamente, ya que requiere los mismos pasos estructurales.
- Los dos modelos de simulación de variables continuas difieren en menor medida de las metodologías tradicionales por la definición de las unidades geológicas para cada una de las variables, lo que implica la realización de anamorfosis para cada variable en cada una de las unidades definidas. Posterior a esto, se deben realizar variografías para las diferentes combinaciones (en particular, se enfrenta el caso heterotópico mediante el cálculo de covarianzas cruzadas). Las otras etapas son análogas al modelo tradicional de cosimulación, por lo que no se producen diferencias relevantes en la implementación de ambos modelos.
- Los tiempos de aplicación y obtención de resultados son variantes significativas de la metodología aplicada, ya que se utilizó para la simulación de variables continuas el método de bandas rotantes, el cual permitió obtener simulaciones de un modelo de bloques extenso en una cantidad de tiempo reducida (aproximadamente 7 horas para simular 20 realizaciones con 1,200,000 bloques con una discretización de  $3 \times 3 \times 2$ ).

### **9.4 RESULTADOS OBTENIDOS CON LOS MODELOS DE SIMULACIÓN PROPUESTOS: APLICACIÓN EN YACIMIENTO FERRÍFERO**

A continuación, se indican los principales resultados que se desprenden de la aplicación del modelo de simulación de tipos de roca y de los modelos de cosimulación de leyes.

- La simulación de tipos de roca se consiguió mediante la definición de seis funciones aleatorias Gaussianas, donde cada una se asocia al contenido de una variable de interés en cada tipo de roca. De esta aplicación se obtuvieron 20 realizaciones las cuales presentaron

una alta correspondencia con el modelo litológico interpretado, salvo por la mayor variabilidad espacial visualizada, lo que se traduce en contactos y quiebres más abruptos entre los diferentes tipos de roca. Por su parte, el procesamiento de las realizaciones permitió observar proporciones similares de cada tipo de roca a través de las diferentes realizaciones, generando así escenarios con baja incertidumbre en cuanto a la proporción de los tipos de roca. De acuerdo a lo planteado, el modelo utilizado para la simulación de rocas resulta ser de fácil implementación, permite simular numerosos tipos de roca, además de reproducir sus contactos, proporciones locales, continuidad espacial y la información condicionante (sondajes).

- La determinación de unidades geológicas es un proceso que aún sigue siendo relativo en ciertos aspectos, pues varía según quien decida dicha configuración. Es importante para su definición analizar las estadísticas, continuidad espacial y aspectos geológicos de la formación de los tipos de roca del yacimiento estudiado. En esta investigación se establecieron diferentes asociaciones para las variables, donde se obtuvieron tres casos: el primero de ellos corresponde a aquellas variables que comparten completamente las unidades geológicas como: fierro-sílice y fósforo- aluminio-pérdida de fuego; el segundo grupo son las que comparten una unidad geológica, como ocurre en todos los casos con la canga; finalmente, se encuentra el conjunto de aquellas variables que no presentan coincidencias en sus unidades. Este aspecto resulta clave en la cuantificación de recursos de yacimientos polimetálicos, ya que asumir dominios iguales para todas las variables se traduce en simplificaciones o pérdida de información.
- Los contactos existentes entre las diferentes unidades geológicas, para cada una de las variables de interés, mostraron principalmente transiciones intermedias en la frontera. Esto se reflejó en variaciones de correlación y ley media en cada caso de estudio. Por lo anterior, resulta interesante la incorporación de la correlación cruzada entre las leyes a través de los tipos de roca, aun cuando estén definidas en unidades geológicas disjuntas o traslapadas. La herramienta usada para este propósito fue la covarianza cruzada.
- El ajuste variográfico, en general, fue complejo debido a la cantidad de covarianzas cruzadas, lo que genera un modelo lineal de coregionalización de grandes dimensiones. Por otra parte, si se privilegia un ajuste particular, se puede pasar a desmejorar otro. El uso de un algoritmo de ajuste automático de mesetas resultó crucial para superar esta etapa.
- Debido a la implementación del algoritmo de bandas rotantes, la simulación de variables continuas fue realizada en tiempos razonables, permitiendo así enfrentar uno de los grandes problemas de los métodos de simulación. La simulación de 20 realizaciones de las siete variables de interés demoró aproximadamente 8 horas.
- El procesamiento de las realizaciones permitió obtener escenarios para cada una de las variables, junto a las distribuciones de sus leyes medias, varianzas y correlaciones. Lo cual era un resultado esperado al buscar cuantificar la incertidumbre de las variables de interés.
- Un aspecto que es importante destacar como diferencia de los modelos de cosimulación empleados es que el primero puede ser aplicado con una discretización de bloques, no así

el modelo de variables transformadas que, debido a cosimular variables generadas por expresiones algebraicas (divisiones), no responde a la propiedad de aditividad.

- La reproducción de la relación estequiométrica entre las variables de interés resultó ser de un 100% en el modelo N°2, lo que es esperable debido a que se construyó con la finalidad de generar dicha relación. El modelo N°1 solo reproduce el rango aceptable para la relación estequiométrica en el 96.3% de los bloques, lo que puede ser crítico si dicha relación es un factor clave en la planificación y futuro diseño del yacimiento en estudio.

## **9.5 VALIDACIÓN DEL MODELO DE COSIMULACIÓN PROPUESTO**

- En los dos modelos de cosimulación de leyes se obtuvieron resultados de validación similares, correspondientes a errores promedios cercanos a cero, correlación entre los valores reales y el promedio de los simulados igual a 0.83 y 0.75 en los modelos N°1 y N°2 respectivamente. La comparación de las nubes de correlación entre los valores condicionantes y valores simulados muestra reproducciones del comportamiento de las leyes de los elementos de interés, lo que valida su capacidad predictiva.
- Los gráficos de incertidumbre validan la capacidad de los modelos de cosimulación de cuantificar la incertidumbre, debido a que las proporciones reales son iguales a los valores teóricos, para todas las variables.

## **9.6 UTILIDAD DE LOS MODELOS DE SIMULACIÓN DE TIPOS DE ROCA Y LEYES**

- El enfoque planteado permite cosimular leyes en yacimientos con diversos elementos de interés y tipos de rocas, capturando las relaciones entre ambos. Lo anterior puede ser de gran utilidad en depósitos minerales donde las transiciones entre unidades geológicas son poco definidas, o bien, en depósitos donde existen variaciones abruptas en la ley al cambiar de unidad geológica.
- Permite simular variables definidas en unidades geológicas iguales, disjuntas o traslapadas, permitiendo considerar los dominios geológicos para cada una de ellas, capturando por consiguiente, la relación entre ambos tipos de variables.

## **9.7 CONCLUSIONES FINALES**

En relación al objetivo principal planteado durante el desarrollo de la tesis de grado, se logró la simulación de todos los atributos de interés en un yacimiento ferrífero, es decir, las leyes y los tipos de roca. La metodología de trabajo permitió incorporar las relaciones existentes entre las leyes y los tipos de rocas mediante la definición de unidades geológicas diferentes para cada elemento de interés.

La simulación de tipos de roca resultó ser rápida, fácil y efectiva, ya que reprodujo los contactos, la continuidad espacial, las proporciones locales y la información de los sondajes condicionantes, generando así diversos escenarios del modelo de rocas. Lo anterior es crucial debido a que asumir un modelo geológico fijo no permite incorporar la incertidumbre debida a la existencia y generación de unidades geológicas, por lo tanto, solo se tiene una caracterización parcial de la

variabilidad geológica. Además, dicho modelo corresponde a una interpretación que, debido a su forma de obtención, puede ser sesgada respecto a la realidad.

La cosimulación de leyes utilizando el algoritmo de bandas rotantes permitió generar diversas realizaciones, con una alta cantidad de variables y nodos de simulación, en un tiempo reducido.

En definitiva, se concluye que la cosimulación de las variables de interés responde a los alcances planteados y se presenta como alternativa en la determinación de escenarios posibles tanto de tipos de roca como de leyes en un yacimiento polimetálico, agregando no sólo la información de las variables continuas, sino también su relación con las variables categóricas.

## **9.8 RECOMENDACIONES Y ENFOQUES FUTUROS**

A partir de esta investigación, se sugiere dar continuidad al estudio e incorporar aspectos como la deriva en las leyes de interés, pues resulta fundamental ver su influencia en la simulación de éstas.

Además, se plantea la posibilidad de comparar los resultados de la cosimulación efectuada con los de un modelo de simulación conjunta de leyes y tipos de roca.

Se recomienda el uso de la metodología aplicada para la simulación de variables continuas y categóricas en distintos tipos de yacimientos.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] **Armstrong M., Galli A., Beucher H., Le Loc'h G., Renard D., Doligez B., Eschard R., Geffroy F.** (2011) *Plurigaussian Simulations in Geosciences*. Springer, Berlin.
- [2] **Carrasco P., Ibarra F., Rojas R., Le Loc'h G., Seguret S.** (2007) *Application of the truncated Gaussian simulation method to a porphyry copper deposit*. In: Magri E. (ed.) APCOM 2007, 33rd International Symposium on Application of Computers and Operations research in the Mineral Industry, pp 31-39
- [3] **Clark I., Basinger KL., Harper WV.** (1989) *MUCK--a Novel Approach to Cokriging*. In B. E. Buxton (Ed.), Proceedings of the Conference on Geostatistical, Sensitivity, and Uncertainty Methods for Ground-Water Flow and Radionuclide Transport Modeling: Battelle Press, Columbus, pp. 473-493.
- [4] **Chilès JP., Delfiner P.** (2012) *Geostatistics: modeling spatial uncertainty*. Wiley, New York.
- [5] **Deraisme J., Field M.** (2006) *Geostatistical simulations of kimberlite orebodies: application to sampling optimization*. Proceedings of the 6th international mining geology conference, Darwin, NT, Australia, 21-23 Aug 2006, pp 193-203
- [6] **Deutsch CV., Journel AG.** (1998) *GSLIB: Geostatistical software library and user's guide*. Oxford University Press, New York.
- [7] **Dorr II JVN.** (1964) *Supergene iron ores of Minas Gerais, Brazil*: Economic Geology, v. 59, pp. 1203-1240.
- [8] **Dowd PA.** (1994) *Geological controls in the geostatistical simulation of hydrocarbon reservoirs*. Arabian Journal for Science and Engineering 19 (2B), 237-247.
- [9] **Dubrule O.** (1993) *Introducing more geology in stochastic reservoir modelling*. In: Soares, A. (Ed.), Geostatistics Tróia'92. Kluwer Academic, Dordrecht, pp. 351-369.
- [10] **Emery X.** (2010) *Iterative algorithms for fitting a linear model of coregionalization*. Computers & Geosciences 36 (91): 1150-1160.
- [11] **Emery X.** (2008) *A turning bands program for conditional co-simulation of cross-correlated Gaussian random fields*. Computers & Geosciences 34(12):1850-1862.
- [12] **Emery X., González KE.** (2007) *Incorporating the uncertainty in geological boundaries into mineral resources evaluation*. Journal of the Geological Society of India 69 (1): 29-38
- [13] **Emery X., Lantuéjoul C.** (2006): *TBSIM: a computer program for conditional simulation of three-dimensional Gaussian random fields via the turning bands method*. Computers & Geosciences 32 (10), 1615-1628.

- [14] **Fontaine L., Beucher H. (2006)** *Simulation of the Muyumkum uranium roll front deposit by using truncated Plurigaussian method*. In: Proceedings of the 6th international mining geology conference, Darwin, NT Australia, 21-23 Aug 2006.
- [15] **Freulon X., de Fouquet C. (1993)** *Conditioning a Gaussian model with inequalities*. In: Soares, A. (Ed.), *Geostatistics Tróia'92*. Kluwer Academic, Dordrecht, pp. 201–212.
- [16] **Galli A., Beucher A., Le Loc'h G., Doligez B., Heresim Group (1994)** *The pros and cons of the truncated gaussian method*. In M. Armstrong and P. A. Dowd, editors, *Geostatistical Simulations*, pp. 217-233. Kluwer Academic.
- [17] **Glacken IM., Snowden DV. (2001)** *Mineral resource estimation*. In: Edwards AC (ed) *Mineral resource and ore reserve estimation—the AusIMM guide to good practice*. The Australasian Institute of Mining and Metallurgy, Melbourne, pp 189–198.
- [18] **Gotway CA., Rutherford BM., 1994.** *Stochastic simulation for imaging spatial uncertainty: comparison and evaluation of available algorithms*. In: Armstrong, M., Dowd, P.A. (Eds.), *Geostatistical Simulations*. Kluwer Academic, Dordrecht, pp. 1–21.
- [19] **Goulard M., Voltz M. (1992)** *Linear coregionalization model: tools for estimation and choice of cross-variogram matrix*. *Mathematical Geology* 24 (3): 269-286.
- [20] **Journel AG. (1983)** *Nonparametric estimation of spatial distributions*. *Journal of the International Association for Mathematical Geology*, 15(3):445-468.
- [21] **Journel AG., Huijbregts CJ.(1978)** *Mining geostatistics*. Academic Press, London.
- [22] **Journel AG., Isaaks E. (1984)** *Conditional indicator simulation: application to a Saskatchewan uranium deposit*. *Mathematical Geology*, 16(7):685-718.
- [23] **Lantuéjoul C. (2002)** *Geostatistical simulation: models and algorithms*. Springer, Berlin.
- [24] **Le Loc'h G., Beucher H., Galli A., Doligez B. (1994)** *Improvement in the truncated gaussian method: combining several gaussian functions*. In Fourth European Conference on the Mathematics of Oil Recovery.
- [25] **Le Loc'h G., Galli A. (1997)** *Truncated plurigaussian method: theoretical and practical points of view*. In E. Y. Baafi and N. A. Schofield, editors, *Geostatistics Wollongong 96*, 5th International Geostatistical Congress. Kluwer Academic.
- [26] **Leuangthong O., McLennan J., Deutsch CV. (2004)** *Minimum acceptance criteria for geostatistical realizations*. *Nat. Resours. Res.* 13(3), 131-141.
- [27] **Matheron G., Beucher H., de Fouquet C., Galli A., Ravenne C. (1988)** *Simulation conditionnelle à trois faciès dans une falaise de la formation du Brent*. *Sciences de la Terre, Serie informatique geologique*, 28:213-249.

- [28] **Myers DE.** (1991) *Pseudo cross-variograms, positive-definiteness, and cokriging*: Math. Geology, 23, (6): 805-816.
- [29] **Ortiz JM., Emery X.** (2006) *Geostatistical estimation of mineral resources with soft geological boundaries: a comparative study*. J S Afr Inst Min Metall 106(8):577–584.
- [30] **Papritz A., Kunsch HR., Webster R.** (1993) *On the pseudo cross-variogram*: Math. Geology, v. 25, no. 8, pp. 1015-1026.
- [31] **Rondon O.** (2009) *A look at the Plurigaussian simulation for a nickel laterite deposit*. Presented at the 7th International Mining & Geology Conference, Perth, WA.
- [32] **Skvortsova T., Beucher H., Armstrong M., Forkes J., Thwaites A., Turner, R.** (2002) *Simulating the geometry of a granite-hosted uranium orebody*. In: Armstrong, M., Bettini, C., Champigny, N., Galli, A., Remacre, A. (Eds.), Geostatistics Rio 2000. Kluwer Academic, Dordrecht, pp. 85-99.
- [33] **Wackernagel H.** (2003) *Multivariate geostatistics: an introduction with applications*. Springer, Berlin.
- [34] **Wilde BJ., Deutsch CV.** (2012) *Kriging and simulation in presence of stationary domains: developments in boundary modeling*. In: Abrahamsen P, Hauge R, Kolbjørnsen O (eds) Geostatistics Oslo 2012. Springer, Berlin, pp 289–300.
- [35] **Xu C., Dowd P.** (2009) *Conditional Simulation of Grades Controlled by Geological Indicators*. Old and new dimensions in a changing world: Conference Proceedings of the Orebody modelling and strategic mine planning; pp.43-50.
- [36] **Yunsel T., Ersoy A.** (2011) *Geological modeling of gold deposit based on grade domaining using plurigaussian simulation technique*. Natural Resources Research 20(4): 1-19
- [37] **Yunsel T., Ersoy A.** (2013) *Geological modeling of rock type domains in the Balya (Turkey) lead-zinc deposit using plurigaussian simulation*. Central European Journal of Geosciences 5(1): 77-89