



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

ESTUDIO DEL DECAIMIENTO T₂ DE IMÁGENES DE RESONANCIA MAGNÉTICA
Y CORRECCIÓN DEL ARTEFACTO DE VOLÚMENES PARCIALES

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

HUGO PATRICIO CARRILLO LINCOPI

PROFESOR GUÍA:
CARLOS CONCA ROSENDE

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
RAÚL GORMAZ ARANCIBIA
HERNÁN JARA

SANTIAGO DE CHILE
2016

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: HUGO PATRICIO CARRILLO LINCOPI
FECHA: 12/04/2016
PROF. GUÍA: SR. CARLOS CONCA ROSENDE

ESTUDIO DEL DECAIMIENTO T_2 DE IMÁGENES DE RESONANCIA MAGNÉTICA Y CORRECCIÓN DEL ARTEFACTO DE VOLÚMENES PARCIALES

El presente trabajo muestra un estudio desde los fundamentos de resonancia magnética, hasta el desarrollo de un problema que puede presentar aplicaciones en estudios en medicina.

Se expone el proceso físico de resonancia magnética y la producción de imágenes en un lenguaje que pueda ser entendido para lectores que tengan una formación matemática. Luego se presenta el problema matemático y el modelo de imágenes que se considera, seguido de un desarrollo de la obtención de la solución a este problema, mostrando el camino que se puede seguir recorriendo en esa misma línea.

El problema abordado trata de la reconstrucción del parámetro T_2 de resonancia magnética, llamado decaimiento transversal o spin-spin. T_2 puede ser entendido como una función que idealmente es constante por pedazos, donde cada valor es característico de un tejido. Es decir, T_2 es una herramienta para distinguir los tejidos presentes en el cuerpo que se estudia.

Físicamente, T_2 caracteriza puntualmente un decaimiento exponencial de una cantidad llamada *densidad de spin*. Sin embargo, en imágenes de resonancia magnética, las imágenes son caracterizadas en pixeles. Hoy en día, la técnica de imágenes de resonancia magnética goza de tener una gran resolución respecto a otros métodos de imágenes médicas, sin embargo, el hecho de que la representación sea finita hace que siempre haya limitaciones. Una de aquellas limitaciones es que dentro de un pixel puede no haber un decaimiento exponencial, debido a que el pixel está representando un lugar en el espacio donde hay más de un tejido, o también se arrastra un fenómeno llamado *de Gibbs*, el cual consiste en la contaminación del valor físico que debería tener un pixel, debida a los pixeles cercanos. Estos son efectos de un muestreo finito, el cual es realista, donde además se debe considerar el hecho de que se produce un ruido aleatorio sobre las mediciones.

En este trabajo se muestra cómo se puede reconstruir el parámetro T_2 mediante modelos de decaimiento de una y dos exponenciales, y cómo el realizar interpolaciones sobre las imágenes ayuda a reconstruir la geometría de los objetos que se están muestreando. Específicamente, se desarrollan algoritmos que interpolan (y ajustan) en el espacio de la imagen o bien extrapolan en el espacio de Fourier, usando splines bicúbicas regularizantes, o bien un rellenado con ceros en el espacio de Fourier, seguido de una reconstrucción de valores de T_2 que provienen de ajuste de una o dos exponenciales, usando regresiones lineales y el *método de Prony*, seguido de un criterio de binarización para decidir qué tejido asignarle a los pixeles refinados.

Agradecimientos

Este trabajo significa el término de una etapa importante: el de mi carrera de pregrado. Visto desde mi familia, soy el cuarto y último hijo de mis padres, y el último en titularse, por lo cual agradezco a mis padres por el esfuerzo que han hecho para que mis hermanos y yo pudiéramos tener la oportunidad de estudiar.

También agradezco a los profesores que ayudaron a mi formación en todos estos años, empezando por mi escuela básica D-749 República del Brasil, donde recuerdo con cariño a mis profesoras Nancy Manzur y Miriam Aravales. También agradecer a los profesores de mi liceo A-0 Instituto Nacional José Miguel Carrera, principalmente a los profesores de matemática Jorge Hurtado, Juan Carlos Costa y Orlando Ceballos. Cada uno de ellos me fue motivando en el camino de las matemáticas.

Agradezco además a los profesores Carlos Conca y Raúl Gormaz por la oportunidad de trabajar con ellos, tanto en el ramo de Cálculo Avanzado y Aplicaciones, como en mi trabajo de título. Ambos son grandes profesores. Agradezco en particular al profesor Gormaz por su disposición, ayuda y buena onda durante este tiempo. Gracias también al profesor Hernán Jara por brindar su ayuda a la distancia.

Además de la ayuda académica y de formación, me parece primordial agradecer a la gente que me ha dado su apoyo en este tiempo. Reitero mis agradecimientos a mis padres, Hugo y Rosa, pues me han apoyado, entregado valores, consejos y cariño desde pequeño; siempre han sido y serán un pilar fundamental en mi vida. Gracias también a mis hermanos Andrea, Carlos y Rosa, pues he crecido con el ejemplo y compañía de ellos. Gracias por todo, querida familia, les quiero un montón.

Agradezco también a mi amada polola, Valentina. Ella ha sido mi cable a tierra, ha sabido escucharme y calmarme en mis momentos de estrés. No hay día en que no logre sacarme una sonrisa. Gracias por todo eso, por tu cariño y amor en cada gesto y palabra.

Por último, no dejo de agradecer el apoyo de la gente de la universidad que he ido conociendo durante mis años en Beauchef, tanto compañeros de carrera, como alumnos que tuve cuando fui profesor auxiliar, y amigos en general que me han brindado su apoyo. Especial mención para Eduardo, Camila y Waldo por toda la buena onda durante la especialidad.

Tabla de Contenido

Introducción	1
0.1. Imágenes médicas	1
0.2. Acerca de los problemas inversos en imágenes	4
0.3. Parámetros en MRI	5
0.4. Objetivos y esquema de este trabajo	6
1. Fenómeno de resonancia magnética	7
1.1. Tratamiento clásico	7
1.1.1. Movimiento de $\vec{\mu}$ en un campo magnético constante $\vec{B} = B_0\hat{z}$	8
1.1.2. Movimiento de $\vec{\mu}$ en el campo $\vec{B} = B_0\hat{z} + 2B_1 \cos(\omega t)\hat{x}$	9
1.1.3. “Flip angle”	14
1.2. Visión desde la mecánica cuántica	15
1.3. Ecuaciones de Bloch	16
1.3.1. Interacción spin-lattice y relajación longitudinal	17
1.3.2. Interacción spin-spin y decaimiento transversal	18
1.3.3. Ecuación de Bloch y resumen del fenómeno	20
2. Desde la ecuación de Bloch hasta la formación de imágenes	21
2.1. Ecuación de la señal y k-espacio	21
2.1.1. Una expresión para el flujo magnético a través de una bobina, debido a una magnetización \vec{M}	21
2.1.2. Expresión de la señal debido a la magnetización que precesa	23
2.1.3. Demodulación y filtración de la señal	25
2.1.4. Señal mediante la densidad de spin	27
2.1.5. Comenzando a recuperar la densidad de spin: definición de k-espacio	27
2.2. Paso a la transformada de Fourier discreta	29
2.2.1. La distribución de muestreo	29
2.2.2. Muestreo infinito	31
2.2.3. Muestreo finito	34
2.2.4. Resultado del muestreo	36
2.3. Proceso de muestreo	36
2.3.1. Localización espacial de las señales MR	36
2.3.2. Secuencias de pulso	38
2.4. Ruido en MRI	42
2.4.1. Distribución de Gauss y de Rice	43
2.4.2. Gauss y Rice en MRI	43

2.4.3.	Estimación del ruido a partir de imágenes adquiridas	44
3.	Herramientas de procesamiento de imágenes	45
3.1.	Introducción: procesamiento de imágenes	45
3.2.	Modelos variacionales en el espacio $BV(\Omega)$	46
3.2.1.	Intuición del modelo: estimación de máximo a priori (MAP)	46
3.2.2.	Espacio de funciones de variación acotada	46
3.2.3.	El espacio $BV(\Omega)$ en el modelo variacional	47
3.2.4.	Modelo variacional: caso gaussiano	48
3.2.5.	Modelo variacional: caso Riciano	49
3.3.	Extrapolación en el k -espacio	49
3.4.	Splines de ajuste	50
3.4.1.	En dimensión $d = 1$	50
3.4.2.	Splines de ajuste bicúbicas	51
4.	Problema abordado en el trabajo	52
4.1.	Modelo de imágenes a considerar	52
4.2.	Presentación del problema	55
4.3.	Reseña del trabajo anterior respecto al problema	55
5.	Desarrollo del problema	57
5.1.	Estimación de T_2 : modelo simple.	57
5.1.1.	Estimación 1: el algoritmo elemental	57
5.1.2.	Estimación 2: Ecos con ruido considerable	58
5.2.	Problema de Volúmenes parciales	59
5.3.	Caso 1: Material A con fondo negro.	59
5.3.1.	Obtención del valor de T_2 en cada pixel.	59
5.3.2.	Propuesta de recuperación de la geometría de los objetos muestreados.	61
5.3.3.	Algoritmo de obtención de valor de T_2 y geometría.	62
5.4.	Caso 2: Tejidos A y B con densidad de spin distinta de cero en cada eco.	64
5.4.1.	Interpolación y regularización	64
5.4.2.	Obtención de los valores de T_2 de A y B	64
5.4.3.	Propuesta de recuperación de la geometría de los objetos muestreados.	66
5.5.	Experimentos: Fantoma artificial	67
5.5.1.	Descripción del fantoma	67
5.5.2.	Zona de interés 1: Material A con fondo negro	69
5.5.3.	Zona de interés 2: material B con fondo de material A	73
	Conclusión	76
	Bibliografía	77
	Apéndices	
A.	Algunos conceptos matemáticos de mecánica clásica y cuántica	82
A.1.	Rotación de un sistema de coordenadas	82
A.2.	Algunos conceptos básicos de mecánica cuántica	84
A.2.1.	Espacio de estados	84

A.2.2. Operador Hamiltoniano	85
A.2.3. Observables	85
A.2.4. Conmutador	86
A.2.5. Operadores canónicamente conjugados	87
A.2.6. Dinámica del sistema cuántico	87
A.2.7. Matrices de operadores	88
A.2.8. Momento angular	88
A.2.9. Spin	89
B. Resultados adicionales: comparación entre órdenes de interpolación o extrapolación.	91
B.1. Caso 1 tejido	91
B.2. Caso 2 tejidos	94

Introducción

0.1. Imágenes médicas

En el último siglo se comenzaron a desarrollar las ciencias de las imágenes, las cuales han sido una gran herramienta en el desarrollo de la ciencia y tecnología. En particular, en medicina, podemos mencionar a las imágenes de ultrasonido, tomografía de emisión de positrones (PET), tomografía computarizada, resonancia magnética, entre otras técnicas de imágenes que han sido una herramienta de diagnóstico y tratamiento en las últimas décadas.

Se presenta a continuación una breve reseña sobre algunos métodos de imágenes médicas.

Imágenes de ultrasonido

Las distintas respuestas de varios tejidos y estructuras a pulsos de ultrasonido, son el fundamento de las imágenes de ultrasonido. Medir los intervalos de tiempo entre la emisión y recepción de pulsos, así como también sus intensidades, son los datos para inferir información fisiológica y luego mostrarla a través de computadores.

Además, las imágenes de ultrasonido pueden ser usadas para estudiar órganos en movimiento en tiempo real, por ejemplo, válvulas y vasos sanguíneos, mediante cambios de frecuencias (efecto Doppler).

Tomografía (axial) computarizada (CT)

En 1895, los rayos X fueron descubiertos por el físico alemán Wilhelm Röntgen, lo cual le valió el premio Nobel de física en 1901. Desde entonces los rayos X se han transformado en una de las señales de sondeo más útiles en imágenes médicas y diagnóstico. Las longitudes de onda de los rayos X están en la escala de los nanómetros (10^{-9}) o picómetros (10^{-12}), lo cual es suficientemente energético para penetrar la mayoría de los materiales, incluyendo tejidos biológicos.

Distintos tejidos y órganos en el cuerpo humano pueden absorber rayos X a tasas diferentes: las estructuras más densas, como los huesos, absorben más rayos X que otros tejidos más suaves. Así, las imágenes por rayos X se producen con una película expuesta directamente a los rayos X penetrados, y los diferentes patrones de intensidades sobre la película diferencian

a los distintos órganos y estructuras.

La tomografía computarizada (axial), mejora el método convencional de imágenes por rayos X, con un diseño de hardware más delicado y también un software para reconstruir las imágenes finales.

El principio básico viene dado por la transformada de Radon: dado un objeto (en el plano) cuyo coeficiente de atenuación lineal con respecto a rayos X en el punto x es $f(x)$. La sección transversal a ser mapeada es escaneada por haces delgados de rayos X. Esta sección se denota por L , y la transformada de Radon de f es

$$g(L) = \int_L f(x) dx$$

donde $g(L)$ es el dato que se recibe.

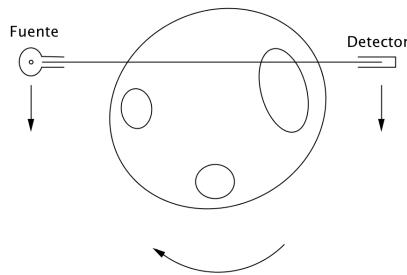


Figura 1: Representación de muestreo mediante la técnica de tomografía computarizada.

Desde la mitad de la década de 1970, el escaneo CT ha presentado muchas aplicaciones en imágenes médicas y diagnóstico, gracias a su rapidez y la comodidad para el paciente, y su capacidad de realizar imágenes de tejidos suaves, huesos, vasos sanguíneos, etc.

Imágenes de resonancia magnética (MRI)

En MRI, las mediciones son tomadas bajo altos campos magnéticos en conjunto con ondas de radiofrecuencia. Cuando se aplica un campo magnético externo, las partículas con spin distinto de 0, como los protones, pueden absorber energía que luego es emitida produciendo ondas de radio. La señal detectada resulta de la diferencia entre la energía absorbida y la emitida.

La teoría de imágenes de resonancia magnética (MRI) se construyó bajo la teoría física de resonancia magnética nuclear, descubierta y desarrollada por los físicos estadounidenses Felix Bloch (1905-1983) y Edward Purcell (1912-1997), quienes recibieron el Premio Nobel de Física en 1952.

El método de imágenes por resonancia magnética fue inventado por Paul C. Lauterbur (1929-2007) en 1971, y luego publicó su teoría en 1973, año en el cual además publicó la primera imagen de resonancia magnética. A finales de la década de 1970, Peter Mansfield (1933-) desarrolló la técnica de imágenes eco-planares, lo que mejoró considerablemente el

tiempo de adquisición de imágenes. En 2003, Paul Lauterbur y Sir Peter Mansfield fueron galardonados con el Premio Nobel de Medicina por sus descubrimientos que iniciaron el uso de resonancia magnética para visualizar diferentes estructuras que llevaron a un entendimiento revolucionario en las funciones del cerebro y los trabajos del cuerpo humano.

Por otro lado, a mediados de la década de 1970, Richard Ernst (1933-) desarrollo técnicas de espectroscopía en resonancia magnética en 2 dimensiones. Richard Ernst fue galardonado por sus contribuciones al desarrollo de técnicas de resonancia magnética de alta resolución, con el Premio Nobel de Química en 1991.

En 1980 Edelstein y su equipo de trabajo mostraron por primera vez imágenes completas del cuerpo humano con la técnica de MRI. En los comienzos de los años 90, MRI comenzó a ser usada para propósitos de imágenes funcionales. Esta nueva aplicación permite el estudio de varias regiones del cerebro humano.

Además de su habilidad para imágenes funcionales, MRI también es más adecuada para tejidos blandos que la tomografía de rayos X. La mayor ventaja de MRI es su carácter no invasivo y, a diferencia de los rayos X, no tiene riesgos de radiación.

Básicamente, las imágenes de resonancia magnética se producen en un *resonador* como lo muestra la figura.

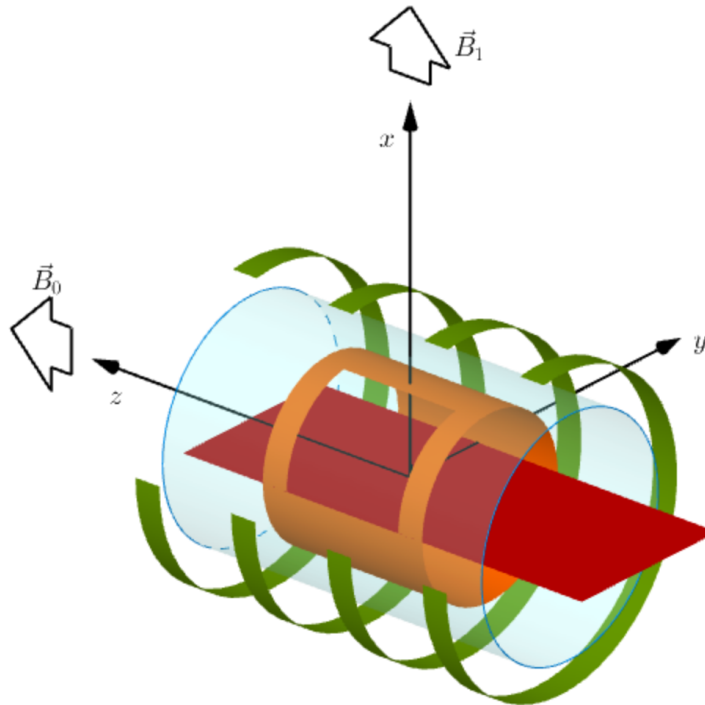


Figura 2: Representación de un resonador magnético, y el sistema de coordenadas respecto a éste. El campo magnético \vec{B}_0 es generado por el magneto representado como las bobinas de color verde. En la bobina representada en celeste, se generan campos gradientes que son primordiales para la localización espacial del objeto a ser muestreado. El campo \vec{B}_1 es generado por la bobina representada en naranja. Se representa en color rojo el espacio donde el paciente descansa para someterse al muestreo.

Se aplica un campo magnético \vec{B}_0 que tiene la característica de ser fuerte y homogéneo. Luego, se aplica por un breve tiempo un *pulso de radiofrecuencia*, que consiste en un campo magnético \vec{B}_1 oscilante y muy pequeño en comparación a \vec{B}_0 , en este proceso se produce una resonancia en el vector de momento magnético, donde principalmente las moléculas de hidrógeno (sus protones) reaccionan a través de sus spins. Esto genera señales que son captadas para producir la imagen.

Los principios básicos de las imágenes de resonancia magnética serán discutidos más adelante en este trabajo, con más detalle.

0.2. Acerca de los problemas inversos en imágenes

Llamamos a dos problemas *inversos* uno del otro si la formulación de cada uno involucra toda o parte de la solución del otro. A menudo, por razones históricas, uno de los dos problemas ha sido estudiado extensivamente por algún tiempo, mientras que el otro nunca ha sido estudiado, o bien no está comprendido del todo. En tales casos, el primero se llama *problema directo*, mientras que el último es el *problema inverso*.

En física, el problema directo es aquel que viene de leyes fundamentales, como la ley de conservación de energía, por ejemplo. El problema inverso es, a partir de las leyes físicas, determinar parámetros de las ecuaciones de la física a estudiar.

Otro punto de vista es: calcular las consecuencias de causas dadas es un problema directo. Por otro lado, el problema inverso está asociado con recuperar las causas de consecuencias conocidas.

Un problema es bien puesto si su solución es única y existe para cualquier conjunto de datos. Además, se necesita que la solución tenga una dependencia continua con los datos. Un problema es mal puesto (*ill-posed*) si no tiene dependencia continua de los datos. Siempre será importante identificar entre estos 2 tipos de problemas, debido a que en la realidad, las mediciones pueden tener pequeñas variaciones, y por lo tanto, necesitamos que una solución a partir de datos aproximados se parezca en algún sentido a una solución a partir de otra colección de datos aproximados, del mismo fenómeno.

La interpretación de una imagen es el problema inverso de la adquisición de una imagen (o un conjunto de imágenes). Un médico que trata de descifrar los patrones de la imagen de un paciente no necesita saber cómo funciona la física de MRI. Pero el conocimiento del proceso de adquisición de imágenes puede ser de ayuda para el desarrollo de mejores métodos de procesamiento.

Sin embargo, lo que se busca no es tan sólo una interpretación cualitativa, sino que se buscan parámetros cuantitativos, de modo de poder responder preguntas más fuertes sobre el modelo y la identificación de los tejidos.

0.3. Parámetros en MRI

Los parámetros fundamentales de MRI que son frecuentemente cuantificados son: densidad de protones, difusión, relajación T_1 , relajación T_2 y T_2^* , y transferencia de magnetización. En este trabajo fundamentalmente trabajaremos con la densidad de protones (o densidad de spin) y con el tiempo T_2 , los cuales definiremos matemáticamente a medida que la teoría se vaya desarrollando.

Algunos de estos parámetros no dependen de la aplicación de un campo magnético, sino que están presentes sin la necesidad de ejecutar el experimento de resonancia magnética. Estos parámetros son, por ejemplo, la difusión y la densidad de protones.

Por otro lado, hay parámetros que dependen del experimento, es decir, para ser medidos se necesita una interacción entre un campo magnético inducido y los tejidos a ser medidos, como es el caso del decaimiento T_1 , T_2 , T_2^* y la transferencia de magnetización.

Como aplicación del estudio de T_1 , se puede mencionar, por ejemplo que su medición ha mostrado un potencial para ayudar a diferenciar metástasis colorrectal del hígado normal y mejorar la detección de la lesión. El tiempo T_1 de tumores del hígado se incrementa con el crecimiento del tumor.

Aplicaciones¹ de la medición y estudio de T_2 :

- Cuantificación de hierro en el cuerpo, en particular en el hígado y en el bazo.
- Imágenes de adenocarcinoma pancreático, diferenciando lesiones hepatocelulares malignas y benignas.
- Cambios temporales de T_2^* han sido usados para producir contrastes de nivel de oxígeno en la sangre, y así también en distintos tejidos.
- En tumores, el tiempo T_2 se ve aumentado respecto al tejido sano.
- Se pueden identificar calcificaciones, debido a una baja de T_2 respecto a los valores normales en un tejido.
- Además, un valor bajo de T_2 puede identificar fluidos ricos en proteínas.

Mostramos a continuación algunos valores de T_2 .

¹Se recomienda [10], [39] para una lectura más acabada sobre las aplicaciones.

Tejido	T_1 (ms)	T_2 (ms)
Materia gris	950	100
Materia blanca	600	80
Músculos	900	50
Fluido cerebroespinal	4500	2200
Grasa	250	160
Sangre	1200	100-200

Tabla 1: Valores representativos (aproximados) de los parámetros T_1 y T_2 en milisegundos, para las componentes de hidrógeno de diferentes tejidos del cuerpo humano, para un campo magnético $B_0 = 1,5T$ y a $37^\circ C$ de temperatura. Para la sangre, el valor más alto corresponde a sangre de las arterias y el valor más bajo corresponde a sangre de las venas.

0.4. Objetivos y esquema de este trabajo

En este trabajo se abordará el problema de cómo recuperar dos aspectos sobre T_2 visto como una función del espacio: los valores en cada pixel y la geometría en tejidos que, debido a su tamaño o a su ubicación respecto a un pixel, no logran ser muestreados correctamente en imágenes de resonancia magnética. Es decir, como T_2 es un parámetro que distingue a cada tejido, se espera recuperar una función aproximadamente constante por pedazos, donde se pueda distinguir la forma correcta de cada tejido.

Siempre hay una solución para este tipo de problemas, la cual consiste en realizar un muestreo más caro y que ocupe mayor tiempo, sin embargo, como se trata de un método usado en pacientes y que tiene un costo en dinero, las investigaciones apuntan a poder rescatar la mayor información posible con los recursos “escasos” que se presentan.

Para abordar este problema, seguiremos los siguientes pasos:

1. Conocer el modelo físico y matemático de la resonancia magnética y la formación de imágenes (Capítulos 1 y 2).
2. Conocer conceptos básicos de procesamiento de imágenes (Capítulo 3).
3. Teniendo los conceptos anteriores, plantear matemáticamente el problema y mostrar los pasos para la obtención de la solución (Capítulos 4 y 5).

Capítulo 1

Fenómeno de resonancia magnética

El objetivo de este capítulo es describir el fenómeno de resonancia magnética, la física involucrada, la deducción y solución de la ecuación de Bloch, la cual será la base para comprender la formación de las imágenes en el capítulo siguiente.

Para describir el fenómeno de resonancia magnética, es necesario conocer el comportamiento del spin de un sistema de partículas (como protones) en presencia de un campo magnético. El spin es una especie de momento angular intrínseco de una partícula (ver apéndice A.2.9).

1.1. Tratamiento clásico

Consideraremos las funciones $\vec{\mu}, \vec{J}, \vec{S}, \vec{B} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dependientes de t , las cuales iremos caracterizando durante este capítulo.

Supongamos un protón, visto como un pequeño magneto esférico que posee un momento magnético $\vec{\mu}$ y un momento angular \vec{J} . Se tiene la siguiente relación:

$$\vec{\mu} = \gamma \vec{J} \tag{1.1}$$

donde γ es un escalar denominado *tasa giromagnética*.

El comportamiento clásico del momento angular \vec{J} en un campo magnético \vec{B} está dado por la ley física

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{\mu} \times \vec{B} \tag{1.2}$$

es decir, el torque ($\vec{\mu} \times \vec{B}$) es igual a la tasa de cambio (en el tiempo) del momento angular \vec{J}

Si tomamos como momento angular al spin \vec{S} , es decir, $\vec{J} = \vec{S}$, entonces se tiene que $\vec{\mu} = \gamma \vec{S}$ y luego

$$\boxed{\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \vec{\mu} \times \gamma \vec{B}} \tag{1.3}$$

La ecuación (1.3) es la primera ecuación importante en este estudio, pues es el objeto de estudio de las siguientes secciones. Veremos algunos casos particulares y cómo se resuelve para estos casos.

Primero, estableceremos un lema que será de utilidad.

Lema 1.1 Para $\vec{\mu} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ que satisface (1.3), se tiene que $\|\vec{\mu}\| = \text{constante}$.

DEMOSTRACIÓN. Si a la ecuación (1.3) le aplicamos producto punto a ambos lados con $\vec{\mu}$, y usamos que, dada la definición del producto cruz, $\vec{\mu} \perp (\vec{\mu} \times \gamma \vec{B})$, se tiene que

$$\vec{\mu} \cdot \frac{d\vec{\mu}}{dt} = \vec{\mu} \cdot (\vec{\mu} \times \gamma \vec{B}) = 0$$

pero $\frac{d\|\vec{\mu}\|^2}{dt} = 2\vec{\mu} \cdot \frac{d\vec{\mu}}{dt}$, lo cual nos permite concluir que $\|\vec{\mu}\| = \text{constante}$. □

1.1.1. Movimiento de $\vec{\mu}$ en un campo magnético constante $\vec{B} = B_0 \hat{z}$

Al aplicar un campo magnético constante \vec{B}_0 , el spin de un protón se mueve según una trayectoria que llamamos *precesión*. Se muestra un esquema en la siguiente figura. El spin es un vector paralelo al vector que representa al *momento magnético*.

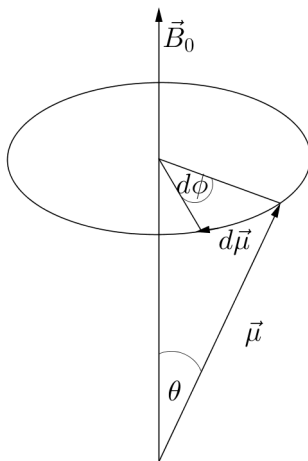


Figura 1.1: Precesión del momento magnético en presencia de \vec{B}_0 . Veremos que la frecuencia (con signo) de la precesión es $\omega_0 = -\gamma B_0$. El signo indica el sentido de la precesión.

Comenzaremos con una afirmación más general, que nos permitirá concluir lo que esperamos como corolario.

Teorema 1.2 Sea $\vec{\mu} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ que satisface la ecuación (1.3). Entonces $\vec{\mu}$ es constante en un sistema que rota con velocidad angular $\vec{\Omega} = -\gamma \vec{B}$. Es decir, $\vec{\mu}$ precesa alrededor del eje dado por \vec{B} con frecuencia angular (con signo) $\Omega = -\gamma B$, donde $B = \|\vec{B}\|$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un sistema de coordenadas que gira a velocidad angular $\vec{\Omega}$, que luego determinaremos según conveniencia. La ecuación (1.3) junto con el Teorema A.6 implican que

$$\frac{\delta \vec{\mu}}{\delta t} = \vec{\mu} \times \gamma \left(\vec{B} + \frac{1}{\gamma} \vec{\Omega} \right) \quad (1.4)$$

donde $\frac{\delta}{\delta t}$ es la derivada con respecto al sistema giratorio (como en el teorema A.6).

Definamos

$$\vec{B}_{eff} = \vec{B} + \frac{1}{\gamma} \vec{\Omega}.$$

Podemos resolver fácilmente la ecuación diferencial

$$\frac{\delta \vec{\mu}}{\delta t} = \vec{\mu} \times \gamma \vec{B}_{eff}, \quad (1.5)$$

si $\frac{\delta \vec{\mu}}{\delta t}$ es la derivada de $\vec{\mu}$ en un sistema giratorio con velocidad angular $\vec{\Omega} = -\gamma \vec{B}$, pues se tendrá que

$$\frac{\delta \vec{\mu}}{\delta t} = 0. \quad (1.6)$$

Es decir, $\vec{\mu}$ es constante en el sistema giratorio, lo cual implica que $\vec{\mu}$ hace precesión alrededor del eje \vec{B} con frecuencia angular $\Omega = -\gamma B$. \square

Corolario 1.3 *Si en (1.3) se tiene que $\vec{B} = B_0 \hat{z}$, entonces $\vec{\mu}$ es constante en el sistema de coordenadas que rota con velocidad angular $\vec{\omega}_0 = -\gamma B_0 \hat{z}$, es decir, \vec{B} precesará alrededor del eje z , con frecuencia angular (con signo) $\omega = -\gamma B_0$. Esta frecuencia es conocida como frecuencia de Larmor.*

1.1.2. Movimiento de $\vec{\mu}$ en el campo $\vec{B} = B_0 \hat{z} + 2B_1 \cos(\omega t) \hat{x}$

Partiremos con un teorema análogo al Teorema 1.2, el cual nos dará una solución a una ecuación de la forma (1.3), pero esta vez en un sistema giratorio. El objetivo de esta sección es lograr establecer que, bajo ciertas condiciones, añadir el campo $\vec{B} = 2B_1 \cos(\omega t) \hat{x}$ se puede aproximar por añadir un campo rotatorio.

Consideremos un sistema de coordenadas rotatorio, que llamaremos “sistema del laboratorio”, el cual se mueve con una velocidad angular $\vec{\Omega}_{lab}$. Este sistema será provisto de los vectores unitarios

$$\begin{aligned} \hat{u}_1(t) &= \cos(\Omega t) \hat{x} + \sin(\Omega t) \hat{y} \\ \hat{u}_2(t) &= \hat{z} \times \hat{u}_1 \\ \hat{u}_3 &= \hat{z} \end{aligned}$$

Denotaremos por $D_{lab} \vec{F}$ a la derivada de $\vec{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ expresada en términos de este sistema (como en el Teorema A.6).

Teorema 1.4 *Consideremos la ecuación*

$$D_{lab}\vec{\mu} = \vec{\mu} \times \gamma\vec{B}_{eff} \quad (1.7)$$

Entonces, relativo al sistema del laboratorio, $\vec{\mu}$ precesa alrededor de \vec{B}_{eff} con frecuencia angular (con signo) $-\gamma||\vec{B}_{eff}||$.

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que

$$\frac{\delta\vec{\mu}}{\delta t} = \gamma\vec{\mu} \times \vec{B}_{eff} \quad (1.8)$$

Consideremos un sistema de coordenadas rotatorio, que llamaremos “ficticio”, el cual se mueve con velocidad angular $\vec{\Omega}_{fict}$ arbitraria (que luego escogeremos por conveniencia) y la derivada de $\vec{\mu}$ en ese sistema se denotará por $D_{fict}\vec{\mu}$. Además, notemos que la velocidad angular del sistema ficticio, relativo al sistema del laboratorio, es $\vec{\Omega}_{rel} = \vec{\Omega}_{fict} - \vec{\Omega}_{lab}$. Se tienen las siguientes ecuaciones, debido al Teorema A.6:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\mu}}{dt} &= D_{lab}\vec{\mu} + \vec{\Omega}_{lab} \times \vec{\mu} \\ \frac{d\vec{\mu}}{dt} &= D_{fict}\vec{\mu} + \vec{\Omega}_{fict} \times \vec{\mu}, \end{aligned}$$

las cuales implican que

$$D_{lab}\vec{\mu} = D_{fict}\vec{\mu} + \vec{\Omega}_{rel} \times \vec{\mu}.$$

Si consideramos ahora la ecuación (1.7), se tiene que

$$\vec{\mu} \times \gamma\vec{B}_{eff} = D_{fict}\vec{\mu} + \vec{\Omega}_{rel} \times \vec{\mu},$$

lo cual finalmente implica que

$$D_{fict}\vec{\mu} = \vec{\mu} \times \gamma\left(\vec{B}_{eff} + \frac{1}{\gamma}\vec{\Omega}_{rel}\right).$$

Como $\vec{\Omega}_{fict}$ es arbitrario, $\vec{\Omega}_{rel}$ también lo es, luego podemos escogerlo de modo que el lado derecho de esta ecuación diferencial sea 0. Así, escogemos $\vec{\Omega}_{rel} = -\gamma\vec{B}_{eff}$, y se tiene entonces la siguiente ecuación diferencial:

$$D_{fict}\vec{\mu} = 0,$$

la cual tiene por solución a $\vec{\mu}$ constante en el sistema ficticio. Es decir, $\vec{\mu}$ se mueve con velocidad angular $\vec{\Omega}_{fict} = -\gamma\vec{B}_{eff} + \vec{\Omega}_{lab}$. Esto significa que, relativo al sistema del laboratorio, $\vec{\mu}$ precesa con velocidad angular $-\gamma\vec{B}_{eff}$. \square

Corolario 1.5 *Supongamos que el sistema del laboratorio rota con velocidad angular*

$$\vec{\Omega}_{lab} = \Omega\hat{z}.$$

Entonces, si $\vec{B} = B_0\hat{z} + B_1\hat{u}_1(t)$, donde $\hat{u}_1 = \cos(\Omega t)\hat{x} + \sin(\Omega t)\hat{y}$, se tiene que, relativo al sistema del laboratorio, $\vec{\mu}$ precesa alrededor de

$$\vec{B}_{eff} = \left(B_0 + \frac{\Omega}{\gamma}\right)\hat{z} + B_1\hat{u}_1$$

con frecuencia angular

$$\omega_{eff} := -\gamma \|\vec{B}_{eff}\| = -sgn(\gamma)((\omega_0 + \Omega)^2 + \omega_1^2)^{1/2},$$

donde $\omega_0 = -\gamma B_0$, $\omega_1 = -\gamma B_1$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el sistema del laboratorio con velocidad angular $\vec{\Omega} = \Omega \hat{z}$, y consideremos el campo $\vec{B} = B_0 \hat{z} + B_1 \hat{u}_1$. Debido a las ecuación (1.3) y Teorema A.6, se tiene que

$$D_{lab} \vec{\mu} = \vec{\mu} \times \gamma \left(\left(B_0 + \frac{\Omega}{\gamma} \right) \hat{z} + B_1 \hat{u}_1 \right). \quad (1.9)$$

Definimos

$$\vec{B}_{eff} = \left(B_0 + \frac{\Omega}{\gamma} \right) \hat{k} + B_1 \hat{u}_1,$$

y así la ecuación es

$$D_{lab} \vec{\mu} = \vec{\mu} \times \gamma \vec{B}_{eff} \quad (1.10)$$

Luego, por el Teorema 1.4, relativo al sistema del laboratorio, $\vec{\mu}$ precesa alrededor de \vec{B}_{eff} con frecuencia angular

$$\omega_{eff} := -\gamma \|\vec{B}_{eff}\| = -sgn(\gamma) |\gamma| \left(\left(B_0 + \frac{\Omega}{\gamma} \right)^2 + B_1^2 \right)^{1/2} = -sgn(\gamma) ((\omega_0 + \Omega)^2 + \omega_1^2)^{1/2},$$

donde $\omega_0 = -\gamma B_0$, $\omega_1 = -\gamma B_1$. □

Lema 1.6 *El ángulo entre \vec{B} y \vec{B}_0 es tal que*

$$\tan \theta = \frac{B_1}{B_0 + \frac{\Omega}{\gamma}} = \frac{\omega_1}{\omega_0 - \Omega} \quad (1.11)$$

$$\sin(\theta) = \frac{\omega_1}{\omega_{eff}}, \quad \cos(\theta) = \frac{\omega_0 - \Omega}{\omega_{eff}} \quad (1.12)$$

La afirmación anterior es comprendida fácilmente mediante la siguiente figura.

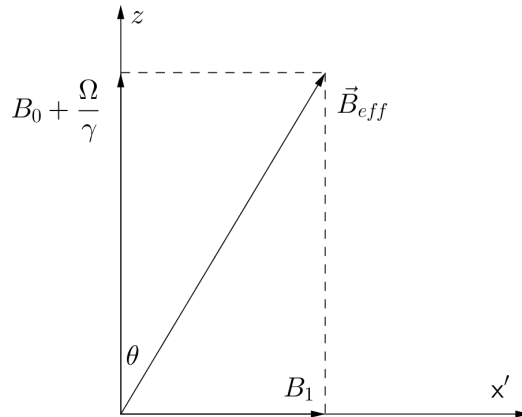


Figura 1.2: Esquema de los campos magnéticos en el plano $x'z$.

Lema 1.7 Sea α el ángulo entre $\vec{\mu}$ y \hat{z} , entonces

$$\cos(\alpha) = -\cos(\omega_{eff}t) \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 - 2 \sin^2(\theta) \sin^2\left(\frac{1}{2}\omega_{eff}t\right) \quad (1.13)$$

DEMOSTRACIÓN. Si en $t = 0$ $\vec{\mu}$ está alineado con \vec{B}_0 , podemos definir los vectores unitarios $\{\hat{U}_1, \hat{U}_2, \hat{U}_3\}$ por

$$\hat{U}_3 = \frac{\vec{H}_{eff}}{\|\vec{H}_{eff}\|} = \sin(\theta)\hat{u}_1 + \cos(\theta)\hat{z} \quad (1.14)$$

$$\hat{U}_2 = \hat{u}_2 \quad (1.15)$$

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_2 \times \hat{U}_3 = \cos(\theta)\hat{u}_1 - \sin(\theta)\hat{z} \quad (1.16)$$

Se observa (ver figura siguiente) que $\vec{\mu}$ puede ser escrito como¹

$$\vec{\mu}(t) = \rho \cos(\omega_{eff}t)\hat{U}_1 + \rho \sin(\omega_{eff}t)\hat{U}_2 + z\hat{U}_3,$$

donde

$$\rho = \sqrt{\langle \vec{\mu}, \hat{U}_1 \rangle^2 + \langle \vec{\mu}, \hat{U}_2 \rangle^2}, \quad z = \langle \vec{\mu}, \hat{U}_3 \rangle.$$

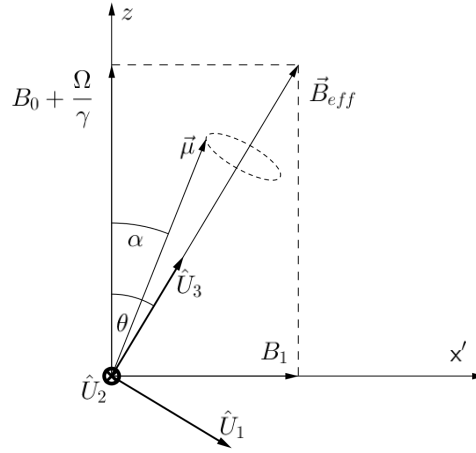


Figura 1.3: Esquema de los vectores definidos.

Dada la definición $a \cdot b = |a||b| \cos(\alpha)$, se tiene que

$$\hat{k} \cdot \vec{\mu} = \sqrt{\rho^2 + z^2} \cos(\alpha). \quad (1.17)$$

Por otro lado, realizando el cálculo del producto punto se tiene que

$$\hat{k} \cdot \vec{\mu} = \hat{k} \cdot (\rho \cos(\omega_{eff}t)\hat{U}_1 + \rho \sin(\omega_{eff}t)\hat{U}_2 + z\hat{U}_3) = -\rho \cos(\omega_{eff}t) \sin(\theta) + z \cos(\theta) \quad (1.18)$$

Juntando las ecuaciones (1.17) y (1.18), se puede despejar $\cos(\alpha)$ como

$$\cos(\alpha) = -\cos(\omega_{eff}t) \sin(\theta) \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \cos(\theta), \quad (1.19)$$

¹La idea es emular lo que hacen las coordenadas cilíndricas en el sistema $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$, pero esta vez, es sobre el sistema $\{\hat{U}_1, \hat{U}_2, \hat{U}_3\}$.

pero, notemos que

$$\sin(\theta) = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}, \quad \cos(\theta) = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}},$$

y así se tiene que

$$\cos(\alpha) = -\cos(\omega_{eff}t) \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 - 2 \sin^2(\theta) \sin^2\left(\frac{1}{2}\omega_{eff}t\right). \quad (1.20)$$

□

Lema 1.8 Sea $\omega > 0$, de modo que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\omega = \gamma B_0 + \varepsilon \gamma B_1$.

1. Si $\Omega = +\omega$, entonces $|\theta| \leq \frac{B_1}{B_0}$.
2. Si $\Omega = -\omega$, entonces $\sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$.

Lema 1.9 Si consideramos el campo $\vec{B} = B_0\hat{z} + B_1\hat{u}(-t)$, entonces la solución a la ecuación

$$\frac{d\vec{\mu}^{(1)}}{dt} = \vec{\mu}^{(1)} \times \gamma\vec{B}$$

se aproxima a la solución de la ecuación

$$\frac{d\vec{\mu}^{(2)}}{dt} = \vec{\mu}^{(2)} \times \gamma B_0\hat{z}$$

En el sentido que, si para ambas ecuaciones, $\vec{\mu}^{(j)}(0) = \vec{\mu}_0$, entonces,

$$\|\vec{\mu}^{(1)}(t) - \vec{\mu}^{(2)}(t)\| \leq \frac{\|\vec{\mu}_0\|^2 B_1}{B_0} \quad \forall t > 0 \quad (1.21)$$

Así, en el proceso de laboratorio, someter a un spin a un campo $B_0\hat{z} + \vec{B}_L$ es aproximadamente lo mismo que someter al spin a un campo estático $B_0\hat{z}$, cuando $B_1 \ll B_0$. De esta forma, se tiene el siguiente:

Teorema 1.10 Definamos

$$\vec{B}_R = B_1\hat{u}_1(t), \quad \vec{B}_L = B_1\hat{u}_1(-t)$$

de modo que

$$\vec{B}_R + \vec{B}_L = 2B_1 \cos(\omega t)\hat{x}.$$

Entonces, la solución de la ecuación

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \vec{\mu} \times \gamma(B_0\hat{z} + \vec{B}_R + \vec{B}_L) \quad (1.22)$$

se puede aproximar por la solución de la ecuación

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \vec{\mu} \times \gamma(B_0\hat{z} + \vec{B}_R)$$

Observación Así, hemos establecido que la solución a la ecuación (1.3) con $\vec{B} = B_0\hat{z} + 2B_1 \cos(\omega t)$, como se plantea en el proceso del laboratorio, se aproxima (en el sentido de la ecuación (1.21)) lo suficientemente bien a un vector que precesa en un sistema que rota con velocidad angular $\omega\hat{z}$, cuando ω se aproxima a la *frecuencia de Larmor* $\omega_0 = -\gamma B_0$ y además $B_1 \ll B_0$ (ambas condiciones juntas se conocen como *resonancia magnética*).

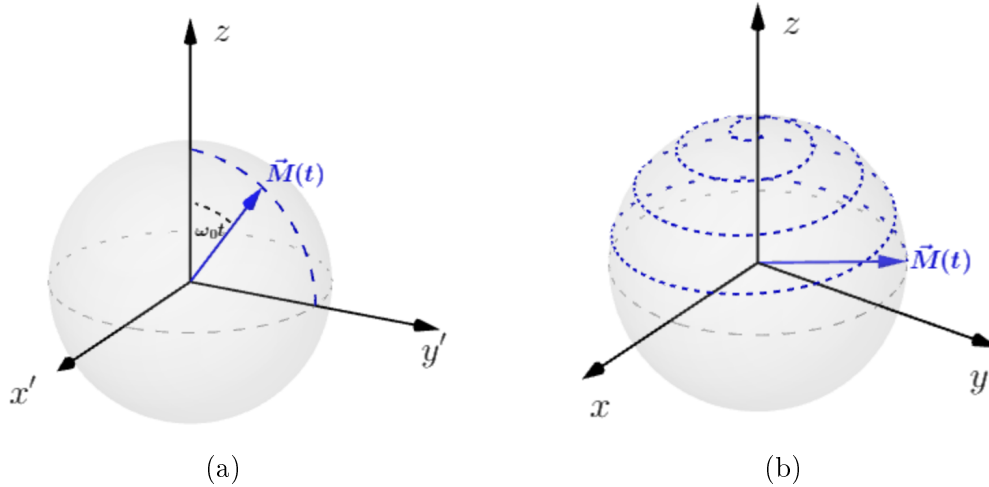


Figura 1.4: Movimiento de $\vec{M}(t)$ en el sistema giratorio (a) y en el sistema fijo (b).

1.1.3. “Flip angle”

Notar que en resonancia, es decir, cuando $\Omega = -\gamma B_0$, se tiene que al aplicar el pulso rf el eje de precesión es \hat{u}_1 . Como la precesión tiene frecuencia angular de ω_1 , se tiene la situación descrita por la figura anterior.

El pulso rf tiene una duración controlada τ_{rf} . En ese tiempo, el vector de magnetización forma un ángulo $\omega_1\tau_{rf}$ con \vec{H}_0 . Tal ángulo $\omega_1\tau_{rf}$ donde se detenga el pulso rf determina el nombre del pulso. Típicamente se usa un pulso $\pi/2$.

Una vez que se apaga el pulso rf, el movimiento del spin es distinto a lo descrito por las ecuaciones mostradas hasta el momento.

Las ecuaciones clásicas predicen (por el Corolario 1.3) que $\vec{\mu}$ se mantendrá precesando con ángulo $\omega_1\tau_{rf}$, a menos que aparezca alguna nueva perturbación o interacción.

Antes de mostrar el comportamiento correcto, es importante recordar que el fenómeno de resonancia magnética está situado en la mecánica cuántica, por lo cual en la siguiente sección veremos por qué es importante haber hecho este tratamiento clásico.

1.2. Visión desde la mecánica cuántica

Es importante mencionar que no es posible conocer el comportamiento de un protón individual, y que al tratarse un fenómeno cuántico, se debe hacer un estudio mediante la mecánica cuántica. Lo que se hará en esta sección es estudiar el comportamiento promedio de una muestra suficientemente grande de protones, y el objetivo es relacionar este estudio con las ecuaciones obtenidas del tratamiento clásico.

Inicialmente, los protones de la muestra tienen spins aleatorios con la misma probabilidad, es decir, hay protones con spin $+1/2$ y protones con spin $-1/2$. Como el momento magnético es paralelo al spin, entonces no es correcto hablar de estados intermedios entre $1/2$ y $-1/2$.

Debido a esto, para un protón sólo hay 2 niveles de energía posibles, los cuales están dados por el Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = -\mu \cdot \vec{B},$$

y si tomamos $\vec{B} = B_0 \hat{z}$, se tiene que

$$\mathcal{H} = -\gamma \hbar B_0 I_z,$$

donde I_z es la componente z del spin, adimensional. Por lo tanto, los 2 valores que puede tomar la energía son

$$\frac{\gamma \hbar B_0}{2}, \quad -\frac{\gamma \hbar B_0}{2},$$

donde el estado de mayor energía es con el spin $1/2$.

La variación de energía es, por lo tanto, $\Delta E = \gamma \hbar B_0$, y por otro lado, para conservar la energía, debe haber una interacción dependiente del tiempo con frecuencia angular ω , de modo que $\hbar \omega = \Delta E$. Así es como se establece que $\omega = \gamma B_0$, la frecuencia de Larmor ya mencionada. Vemos así que esta frecuencia también se justifica en mecánica cuántica.

Veremos ahora que las ecuaciones de valor esperado del momento magnético sometido a un campo magnético son las mismas ecuaciones que en el modelo clásico. Para ello, tomaremos el caso simple de campo magnético $\vec{B} = B_0 \hat{z}$. El caso general se puede estudiar de manera análoga.

Proposición 1.11 *Un spin con momento magnético $\hat{\mu}$ sometido a un campo magnético $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ satisface la siguiente ecuación*

$$\frac{d\langle \mu \rangle}{dt} = \langle \mu \rangle \times \gamma \vec{B} \tag{1.23}$$

DEMOSTRACIÓN. Para el momento angular \hat{J} del protón, se tiene que

$$\hat{\mu} = \gamma \hat{J}$$

Sea $\hat{I} = \frac{1}{\hbar}\hat{J}$. Luego, reconociendo que el hamiltoniano es $\mathcal{H} = -\gamma\hbar B_0\hat{I}_z$, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{dI_x}{dt} &= \frac{i}{\hbar}\{\mathcal{H}, \hat{I}_x\} && \text{Por Teorema A.11} \\ &= -\gamma B_0 i\{\hat{I}_z, \hat{I}_x\} && \text{Por la definición del Hamiltoniano} \\ &= \gamma B_0 \hat{I}_y && \text{Por las relaciones de conmutación}\end{aligned}$$

Análogamente se deduce que

$$\frac{dI_y}{dt} = \frac{i}{\hbar}\{\mathcal{H}, \hat{I}_y\} = -\gamma B_0 i\{\hat{I}_z, \hat{I}_y\} = -\gamma B_0 \hat{I}_x$$

y además,

$$\frac{d\hat{I}_z}{dt} = \frac{i}{\hbar}\{\mathcal{H}, \hat{I}_z\} = -\gamma B_0 i\{\hat{I}_z, \hat{I}_z\} = 0$$

Así, hemos mostrado que $\frac{d\hat{I}}{dt} = \hat{I} \times \gamma\vec{B}$, donde $\hat{I} = \hat{I}_x\hat{x} + \hat{I}_y\hat{y} + \hat{I}_z\hat{z}$.

Finalmente, como $\hat{\mu} = \gamma\hbar\hat{I}$, se tiene que

$$\frac{d\langle\mu\rangle}{dt} = \langle\mu\rangle \times \gamma\vec{B}$$

□

Observación Para varios spins, suponiendo que no hay interacción entre ellos, se tiene (1.23) para $\mu = \sum_k \mu_k$, donde μ_k es el momento angular de cada spin.

Así, para imágenes de un cuerpo macroscópico, basta con estudiar el momento magnético local por unidad de volumen $\vec{M}(\vec{r}, t)$. Este vector es conocido también como *magnetización*, y su definición es

$$\vec{M} = \frac{1}{Vol(\Omega)} \sum_{j \text{ protón en } \Omega} \vec{\mu}_j,$$

donde Ω es una región del espacio.

1.3. Ecuaciones de Bloch

La respuesta de un protón aislado en un campo magnético externo ha sido modelada por las ecuaciones clásicas del movimiento del momento magnético. Sin embargo, las interacciones del spin del protón con sus átomos vecinos lleva a modificaciones importantes en tal comportamiento. Los campos magnéticos locales cambian la frecuencia de precesión, y los protones pueden intercambiar la energía de spines con los alrededores.

Para esta sección, usaremos la siguiente notación

$$M_{||} = M_z, \quad \vec{M}_{\perp} = M_x\hat{x} + M_y\hat{y}$$

1.3.1. Interacción spin-lattice y relajación longitudinal

Supongamos una muestra de N protones en reposo y sujetos al campo magnético constante $B_0\hat{z}$, sin otros campos externos. Cada protón puede estar en uno de dos estados: $1/2$ o $-1/2$. El estado de menor energía corresponde a $m = +1/2$, donde el momento magnético y el campo son paralelos. Ninguno de los protones puede cambiar de estado sin fuerzas adicionales.

Usaremos las siguientes notaciones:

- N_+ : número de protones con spin $+1/2$.
- N_- : número de protones con spin $-1/2$.
- $W_{(+)\rightarrow(-)}$: Probabilidad por segundo de inducir la transición de un spin desde un estado $+1/2$ a un estado $-1/2$.
- $W_{(-)\rightarrow(+)}$: Probabilidad por segundo de inducir la transición de un spin desde un estado $-1/2$ a un estado $+1/2$.

Se puede escribir la siguiente ecuación diferencial para el cambio de población N_+ :

$$\frac{dN_+}{dt} = N_-W_{(-)\rightarrow(+)} - N_+W_{(+)\rightarrow(-)} \quad (1.24)$$

Gracias a la teoría de perturbaciones en mecánica cuántica ², se tiene que

$$W_{(-)\rightarrow(+)} = W_{(+)\rightarrow(-)} =: W.$$

Si usamos esta última ecuación y definimos $n := N_+ - N_-$, la ecuación (1.24) se puede reescribir como

$$\frac{dn}{dt} = -2Wn, \quad (1.25)$$

cuya solución es

$$n(t) = n(0)e^{-2Wt}. \quad (1.26)$$

Es importante observar que la diferencia n entre el número de spins con distintos estados converge a 0 cuando $t \rightarrow \infty$.

El proceso de magnetización de una muestra no magnetizada requiere un número neto de transiciones desde el estado de energía más alto al más bajo. En el proceso, debe haber otro sistema aceptando energía. Así, hay un flujo de calor que continúa hasta que la población relativa, N_-/N_+ , se relacione con la temperatura T del reservorio al cual la energía es dada, mediante

$$\frac{N_-^0}{N_+^0} = e^{-\frac{\Delta E}{kT}} = e^{-\frac{\gamma\hbar B_0}{kT}}. \quad (1.27)$$

donde N_+^0, N_-^0 son las poblaciones de equilibrio.

Se postula, por tanto, que existe un mecanismo para inducir transiciones entre N_+ y N_- , el cual se manifiesta debido al acoplamiento de spins de algún otro sistema. Se define

²Ver por ejemplo, el capítulo VI de [24].

- W_{\uparrow} : probabilidad por segundo de que tal acoplamiento induzca una transición de spins que suba en energía ($+1/2 \rightarrow -1/2$).
- W_{\downarrow} : probabilidad por segundo de que tal acoplamiento induzca una transición de spins que baje en energía ($-1/2 \rightarrow +1/2$).

Se tiene la ecuación

$$\frac{dN_+}{dt} = N_- W_{\downarrow} - N_+ W_{\uparrow},$$

que se puede reescribir como

$$\frac{dn}{dt} = N(W_{\downarrow} - W_{\uparrow}) - n(W_{\downarrow} + W_{\uparrow}),$$

y definiendo

$$\frac{1}{T_1} = W_{\downarrow} + W_{\uparrow}, \quad n_0 = N \left(\frac{W_{\downarrow} - W_{\uparrow}}{W_{\downarrow} + W_{\uparrow}} \right),$$

podemos escribir

$$\frac{dn}{dt} = \frac{n_0 - n}{T_1}.$$

Vemos que n_0 representa la diferencia de población en equilibrio térmico, y T_1 es un tiempo característico asociado con la aproximación al equilibrio térmico, conocido como *tiempo de relajación spin-lattice*.

Por último, como $M_z = \frac{\gamma \hbar n}{2}$, se establece la ecuación

$$\frac{dM_z}{dt} = \frac{M_0 - M_z}{T_1},$$

donde M_0 es la magnetización de equilibrio térmico.

1.3.2. Interacción spin-spin y decaimiento transversal

Los spins experimentan campos locales, los cuales son combinaciones entre el campo aplicado y los campos de sus vecinos. Como las variaciones en los campos locales llevan a distintas frecuencias de precesión, los spins individuales tienden a abrirse como abanico en el tiempo (ver figura siguiente), reduciendo su vector de magnetización neto. El abanico es usualmente referido como *desfase*.

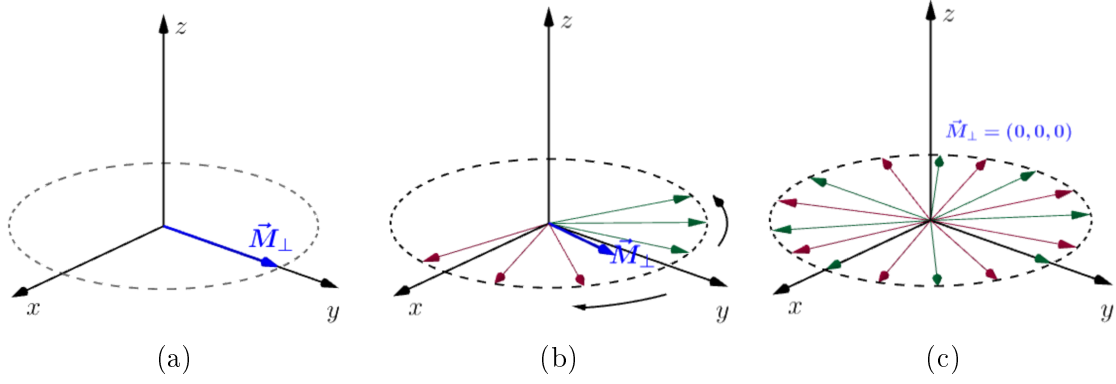


Figura 1.5: Esquema del comportamiento en el tiempo de la componente transversal de la magnetización.

La magnetización transversal total es la suma de vectores (o complejos) de todas las componentes transversales individuales.

La caracterización de la tasa total de reducción de magnetización transversal produce otro parámetro experimental, el tiempo de relajación spin-spin T_2 . Siguiendo el ejemplo de la relajación longitudinal, se tiene la ecuación

$$D_{lab}\vec{M}_\perp = -\frac{1}{T_2}\vec{M}_\perp, \quad (1.28)$$

cuya solución es

$$\vec{M}_\perp(t) = \vec{M}_\perp(0)e^{-\frac{t}{T_2}}. \quad (1.29)$$

Notar que en el sistema fijo, la ecuación (1.28) puede ser escrita como

$$\frac{d\vec{M}_\perp}{dt} = \gamma\vec{M}_\perp \times \vec{B}_{ext} - \frac{1}{T_2}\vec{M}_\perp \quad (1.30)$$

Se definen, respectivamente, las tasas de relajación spin-lattice y spin-spin como

$$R_1 := 1/T_1 \quad R_2 := 1/T_2.$$

Debido a que las interacciones spin-spin incluyen el efecto colectivo de desfase, donde no hay pérdida de energía, y además el mismo acoplamiento spin-lattice da lugar a efectos de crecimiento T_1 , la tasa de relajación spin-spin es más grande que la tasa de relajación spin-lattice.

Luego, $R_2 > R_1$, es decir,

$$T_2 < T_1$$

En la práctica, hay un desfase adicional de la magnetización introducida por inhomogeneidades de campos magnéticos externos. Esta reducción en un valor inicial de \vec{M}_\perp puede ser

caracterizada a veces por un tiempo de decaimiento diferente, T_2' . La tasa de relajación total, definida como R_2^* , es la suma de tasas de relajación internas y externas ($R_2' := 1/T_2'$)

$$R_2^* := R_2 + R_2',$$

y así se puede definir $T_2^* := 1/R_2^*$, teniéndose la relación

$$\frac{1}{T_2^*} = \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_2'}.$$

1.3.3. Ecuación de Bloch y resumen del fenómeno

De las dos secciones anteriores se obtiene una ecuación que resume el fenómeno de resonancia magnética, tanto con la presencia de campos magnéticos externos, como por los efectos de relajación longitudinal y transversal. Tal ecuación es la **Ecuación de Bloch**:

$$\boxed{\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma\vec{M} \times \vec{B}_{ext} + \frac{1}{T_1}(M_0 - M_z)\hat{z} - \frac{1}{T_2}\vec{M}_\perp} \quad (1.31)$$

Esta ecuación será usada como el modelo matemático en el cual se basa este trabajo. Además, esta ecuación típicamente tiene como objeto de problemas inversos a M_0, T_1, T_2 . En este trabajo nos concentraremos en T_2 .

Los pulsos rf en la mayoría de las mediciones de resonancia magnética son diseñados para tener una duración corta τ_{rf} , y, consistentemente con el gran ancho de banda, los valores típicos para ω_1 son mucho más grandes que las tasas $\frac{1}{T_1}$ y $\frac{1}{T_2}$.

Cuando se aplica el pulso rf para tiempos suficientemente cortos, los términos de relajación pueden ser ignorados relativo a los términos de frecuencia. Así, para esta situación basta con usar la ecuación (1.22) mediante el Teorema 1.10.

Cuando se termina de aplicar el pulso rf, las ecuaciones de Bloch son aquellas que sólo consideran el campo $\vec{H}_0 = H_0\hat{z}$, es decir,

$$\begin{aligned} M_x(\vec{r}, t) &= e^{-t/T_2(\vec{r})}(M_x(\vec{r}, 0) \cos(\omega_0 t) + M_y(\vec{r}, 0) \sin(\omega_0 t)) \\ M_y(\vec{r}, t) &= e^{-t/T_2(\vec{r})}(M_y(\vec{r}, 0) \cos(\omega_0 t) - M_x(\vec{r}, 0) \sin(\omega_0 t)) \\ M_z(\vec{r}, t) &= M_z(\vec{r}, 0)e^{-t/T_1(\vec{r})} + M_0(\vec{r})(1 - e^{-t/T_1(\vec{r})}) \end{aligned}$$

En resumen,

- Cuando un paciente entra en un resonador magnético, el momento magnético de los protones de las moléculas de hidrógeno se someten primero a la ecuación (1.3) con $\vec{B} = B_0\hat{z}$
- Luego, cuando se aplica el pulso rf, el momento magnético se comporta según la ecuación (1.3) con $\vec{B} = B_0\hat{z} + 2B_1 \cos(\omega_1 t)$.
- Finalmente, cuando termina el pulso rf, los efectos de relajación se deben considerar en el fenómeno, es decir, la magnetización satisface la ecuación (1.31) con $\vec{B}_{ext} = B_0\hat{z}$.

Capítulo 2

Desde la ecuación de Bloch hasta la formación de imágenes

El objetivo de este capítulo es retomar el estudio del capítulo anterior desde el momento en que se acaba el pulso rf, y el mecanismo de captura de la información que puede brindar la magnetización. Luego, veremos cómo la repetición del pulso rf, para campos magnéticos apropiados, puede llevarnos a la obtención de una imagen del cuerpo en estudio.

2.1. Ecuación de la señal y k-espacio

2.1.1. Una expresión para el flujo magnético a través de una bobina, debido a una magnetización \vec{M}

El flujo magnético Φ (debido al campo magnético \vec{B}) que atraviesa un conductor de sección transversal \mathcal{S} se define por

$$\Phi = \int_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

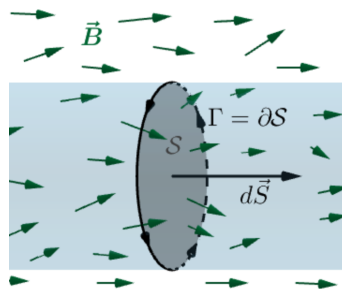


Figura 2.1: Conductor de sección transversal \mathcal{S} en un campo magnético \vec{B} .

La ley de Ampère nos permite tener una densidad de corriente \vec{J} debido a una magneti-

zación \vec{M} :

$$\vec{J}_M(\vec{r}, t) := \nabla \times \vec{M}(\vec{r}, t) \quad (2.1)$$

Recordar además que esta densidad de corriente induce un campo magnético mediante el potencial vectorial

$$\vec{A}(\vec{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{\|\vec{r}' - \vec{r}''\|} dV'$$

donde \mathcal{V} es un volumen donde hay densidad magnetización y ésta es 0 sobre $\partial\mathcal{V}$.

Se tiene la siguiente relación

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{\mathcal{S}} (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} \stackrel{\text{Teo. Stokes}}{=} \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \left(\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r}' - \vec{r}''\|} dV' \right) \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

donde $\Gamma = \partial\mathcal{S}$.

Por otro lado (con notación de Einstein para la suma sobre índices repetidos)

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r}' - \vec{r}''\|} dV' &= \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\|\vec{r}' - \vec{r}''\|} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial M_j}{\partial x'_i} \hat{e}_k dV' \\ &= \varepsilon_{ijk} \left(\int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\|\vec{r}' - \vec{r}''\|} \frac{\partial M_j}{\partial x'_i} dV' \right) \hat{e}_k \\ &= \varepsilon_{ijk} \left(- \int_{\mathcal{V}} M_j \frac{\partial}{\partial x'_i} \left(\frac{1}{\|\vec{r}' - \vec{r}''\|} \right) dV' + \int_{\partial\mathcal{V}} \frac{M_j}{\|\vec{r}' - \vec{r}''\|} \nu^i dS' \right) \hat{e}_k \\ &= - \int_{\mathcal{V}} \nabla' \left(\frac{1}{\|\vec{r}' - \vec{r}''\|} \right) \times \vec{M} dV' \end{aligned}$$

donde, en la penúltima línea, hemos integrado por partes (Teorema de Gauss), y ν_i es la componente i -ésima del vector normal unitario exterior de la superficie. Notar que la integral sobre $\partial\mathcal{V}$ es 0, pues la magnetización \vec{M} en el borde de la muestra es 0.

Así, retornamos al cálculo anterior:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \left(\int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r}' - \vec{r}''\|} dV' \right) \cdot d\vec{l} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \left(- \int_{\mathcal{V}} \nabla' \left(\frac{1}{\|\vec{r}' - \vec{r}''\|} \right) \times \vec{M} dV' \right) \cdot d\vec{l} \\ &= - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \left[\oint_{\Gamma} \left(\nabla' \left(\frac{1}{\|\vec{r}' - \vec{r}''\|} \right) \times \vec{M} \right) \cdot d\vec{l} \right] dV' \end{aligned}$$

Pero la integral de línea que queda en el último paso, se puede expresar de una forma más conveniente, luego de unos cálculos:

$$\begin{aligned}
\oint_{\Gamma} \left(\nabla' \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) \times \vec{M} \right) \cdot d\vec{l} &= \int_a^b \left(\nabla' \left(\frac{1}{\|\vec{r}(\xi) - \vec{r}'\|} \right) \times \vec{M} \right) \cdot \frac{d\vec{r}}{d\xi} d\xi \\
&= \int_a^b \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x'_i} \left(\frac{1}{\|\vec{r}(\xi) - \vec{r}'\|} \right) M_j \frac{dr_k}{d\xi} d\xi \\
&= \varepsilon_{ijk} M_j(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial x'_i} \int_a^b \frac{1}{\|\vec{r}(\xi) - \vec{r}'\|} \frac{dr_k}{d\xi} d\xi \\
&= \left(-\varepsilon_{ikj} \frac{\partial}{\partial x'_i} \int_a^b \frac{1}{\|\vec{r}(\xi) - \vec{r}'\|} \frac{dr_k}{d\xi} d\xi \right) M_j(\vec{r}') \\
&= \left(\nabla' \times \oint_{\Gamma} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\vec{l} \right) \cdot \vec{M}(\vec{r}')
\end{aligned}$$

Por otro lado, el potencial vectorial $\vec{A}(\vec{r}')$ puede escribirse en función de la corriente I que circula a través de la bobina (la cual se considera como constante):

$$\vec{A}(\vec{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{I}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\vec{l}$$

Luego,

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\vec{l} = \frac{4\pi}{I\mu_0} \vec{A}(\vec{r}')$$

y así,

$$\nabla' \times \oint_{\Gamma} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\vec{l} = \frac{4\pi}{I\mu_0} \nabla' \times \vec{A}(\vec{r}') = \frac{4\pi}{\mu_0} \frac{\vec{B}(\vec{r}')}{I}$$

Definimos el campo magnético por unidad de corriente producido por la bobina, en el punto \vec{r}' , por:

$$\vec{B}^{rec}(\vec{r}') = \frac{\vec{B}(\vec{r}')}{I}$$

De esta forma, se obtiene la expresión para el flujo:

$$\Phi(t) = \int_{\mathcal{V}} \vec{B}^{rec}(\vec{r}) \cdot \vec{M}(\vec{r}, t) dV \quad (2.2)$$

2.1.2. Expresión de la señal debido a la magnetización que precesa

Experimentalmente, se sabe que

$$signal = C \cdot emf$$

donde C es una constante que depende del montaje experimental, y emf es la fuerza electromotriz inducida en una bobina receptora, definida por:

$$emf = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

La ley de inducción de Faraday (una ley de Maxwell) nos dice que

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \left(\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right)$$

lo cual puede ser escrito como

$$emf = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Luego, la señal queda expresada por

$$signal = -C \frac{d\Phi}{dt}$$

Debido a los cálculos hechos en la sección anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{signal}{C} &= -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \vec{\mathcal{B}}^{rec}(\vec{r}) \cdot \vec{M}(\vec{r}, t) dV \\ &= -\int_{\mathcal{V}} \vec{\mathcal{B}}_j^{rec}(\vec{r}) \frac{\partial M_j}{\partial t}(\vec{r}, t) dV \end{aligned}$$

Aquí, $\vec{M}(\vec{r}, t)$ es la solución de la ecuación de Bloch dada en el Capítulo 1

$$\begin{aligned} M_x(\vec{r}, t) &= e^{-t/T_2(\vec{r})} (M_x(\vec{r}, 0) \cos(\omega_0 t) + M_y(\vec{r}, 0) \sin(\omega_0 t)) \\ M_y(\vec{r}, t) &= e^{-t/T_2(\vec{r})} (M_y(\vec{r}, 0) \cos(\omega_0 t) - M_x(\vec{r}, 0) \sin(\omega_0 t)) \\ M_z(\vec{r}, t) &= M_z(\vec{r}, 0) e^{-t/T_1(\vec{r})} + M_0(\vec{r}) (1 - e^{-t/T_1(\vec{r})}) \end{aligned}$$

Calculamos las derivadas de cada componente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial t} &= e^{-\frac{t}{T_2(\vec{r})}} \left(\frac{-1}{T_2(\vec{r})} (M_x(\vec{r}, 0) \cos(\omega_0 t) + M_y(\vec{r}, 0) \sin(\omega_0 t)) + \omega_0 (-M_x(\vec{r}, 0) \sin(\omega_0 t) + M_y(\vec{r}, 0) \cos(\omega_0 t)) \right) \\ \frac{\partial M_y}{\partial t} &= -e^{-\frac{t}{T_2(\vec{r})}} \left(\frac{1}{T_2(\vec{r})} (M_y(\vec{r}, 0) \cos(\omega_0 t) - M_x(\vec{r}, 0) \sin(\omega_0 t)) + \omega_0 (M_y(\vec{r}, 0) \sin(\omega_0 t) + M_x(\vec{r}, 0) \cos(\omega_0 t)) \right) \\ \frac{\partial M_z}{\partial t} &= \frac{e^{-\frac{t}{T_1(\vec{r})}}}{T_1(\vec{r})} (M_0 - M_z(\vec{r}, 0)) \end{aligned}$$

Pero, en condiciones del experimento, la frecuencia de Larmor ω_0 es cuatro órdenes de magnitud más grande que $1/T_1$ y $1/T_2$, por lo cual podemos despreciar los términos que contienen como factor a $1/T_1$ y $1/T_2$. Luego, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{signal}{C} &= \omega_0 \int_{\mathcal{V}} e^{-\frac{t}{T_2(\vec{r})}} \left[\mathcal{B}_x^{rec}(\vec{r}) (M_x(\vec{r}, 0) \sin(\omega_0 t) - M_y(\vec{r}, 0) \cos(\omega_0 t)) + \mathcal{B}_y^{rec} (M_y(\vec{r}, 0) \sin(\omega_0 t) \right. \\ &\quad \left. + M_x(\vec{r}, 0) \cos(\omega_0 t)) \right] dV \end{aligned}$$

Resulta útil considerar un punto de vista desde los números complejos. Como sólo han quedado las componentes transversales de la magnetización, definimos

$$M_{xy}(\vec{r}, t) = M_x(\vec{r}, t) + iM_y(\vec{r}, t)$$

Es claro que

$$M_{xy}(\vec{r}, t) = M_{xy}(\vec{r}, 0)e^{-i\omega_0 t - \frac{t}{T_2(\vec{r})}} = |M_{xy}(\vec{r}, t)|e^{i\phi(\vec{r}, t)} \quad (2.3)$$

donde $\phi(\vec{r}, t) = -\omega_0 t + \phi_0(\vec{r})$, y $\phi_0(\vec{r}) = \text{arg}(M_{xy}(\vec{r}, 0))$.

Notemos que

$$\begin{aligned} \text{Re}(iM_{xy}(\vec{r}, 0)e^{-i\omega_0 t}) &= M_x(\vec{r}, 0) \sin(\omega_0 t) - M_y(\vec{r}, 0) \cos(\omega_0 t) \\ \text{Im}(iM_{xy}(\vec{r}, 0)e^{-i\omega_0 t}) &= M_x(\vec{r}, 0) \cos(\omega_0 t) + M_y(\vec{r}, 0) \sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

Además, definamos $\mathcal{B}_{xy}(\vec{r}) = \mathcal{B}_x^{\text{rec}}(\vec{r}) + i\mathcal{B}_y^{\text{rec}}(\vec{r}) = |\mathcal{B}_{xy}(\vec{r})|e^{i\theta_{\mathcal{B}}(\vec{r})}$.

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\text{signal}}{C} &= \omega_0 \int_{\mathcal{V}} e^{\frac{-t}{T_2(\vec{r})}} \left[\mathcal{B}_x^{\text{rec}}(\vec{r}) \text{Re}(iM_{xy}(\vec{r}, 0)e^{-i\omega_0 t}) + \mathcal{B}_y^{\text{rec}}(\vec{r}) \text{Im}(iM_{xy}(\vec{r}, 0)e^{-i\omega_0 t}) \right] dV \\ &= \omega_0 \int_{\mathcal{V}} e^{\frac{-t}{T_2(\vec{r})}} |M_{xy}(\vec{r}, 0)| |\mathcal{B}_{xy}(\vec{r})| \left[\cos(\theta_{\mathcal{B}}(\vec{r})) \sin(\omega_0 t - \phi_0(\vec{r})) + \sin(\theta_{\mathcal{B}}(\vec{r})) \cos(\omega_0 t - \phi_0(\vec{r})) \right] dV \\ &= \omega_0 \int_{\mathcal{V}} e^{\frac{-t}{T_2(\vec{r})}} |M_{xy}(\vec{r}, 0)| |\mathcal{B}_{xy}(\vec{r})| \sin(\theta_{\mathcal{B}}(\vec{r}) + \omega_0 t - \phi_0(\vec{r})) dV \end{aligned}$$

2.1.3. Demodulación y filtración de la señal

El proceso de demodulación corresponde a la multiplicación de la señal por una función seno o coseno con una frecuencia cercana a ω_0 .

Sea ΔV un volumen pequeño, donde $M_{xy}, \mathcal{B}_{xy}, T_2$ se puedan considerar independientes de \vec{r} . Luego, la señal Δsignal producida por este pequeño volumen será

$$\Delta \text{signal} = C\omega_0 e^{\frac{-t}{T_2}} |M_{xy}| |\mathcal{B}_{xy}| \sin(\theta_{\mathcal{B}} + \omega_0 t - \phi_0) \Delta V \quad (2.4)$$

Consideremos una frecuencia *de referencia* $\Omega = \omega_0 + \delta\omega$, donde $\delta\omega$ es una frecuencia *de compensación* de la frecuencia de Larmor ω_0 .

El proceso de demodulación se realiza en 2 canales: real e imaginario.

En el canal real, se tiene que

$$\begin{aligned} \text{señal demodulada} &= C \cdot (\text{señal de referencia}) \cdot (\text{fem inducida}) \\ &= C \cdot \sin((\omega_0 + \delta\omega)t) \cdot \omega_0 e^{\frac{-t}{T_2}} |M_{xy}| |\mathcal{B}_{xy}| \sin(\theta_{\mathcal{B}} + \omega_0 t - \phi_0) \Delta V \\ &= \tilde{C} \sin((\omega_0 + \delta\omega)t) \sin(\theta_{\mathcal{B}} + \omega_0 t - \phi_0) \\ &= \frac{\tilde{C}}{2} \left[\cos(\delta\omega t - \theta_{\mathcal{B}} + \phi_0) - \cos((2\omega_0 + \delta\omega)t + \theta_{\mathcal{B}} - \phi_0) \right] \end{aligned}$$

donde $\tilde{C} = C e^{\frac{-t}{T_2}} |M_{xy}| |\mathcal{B}_{xy}| \Delta V$.

Finalmente, en este canal, se filtran las frecuencias bajas, lo que es conocido como *filtro pasa-bajo*. Es decir, dejamos de considerar el segundo coseno de la última expresión. Así,

$$(\text{señal demodulada y filtrada}) = \frac{\tilde{C}}{2} \text{Re}(e^{i\delta\omega t - i(\theta_B - \phi_0)}).$$

Para el canal imaginario, el proceso es análogo, salvo que la demodulación consiste en multiplicar por $-\cos((\omega_0 + \delta\omega)t)$:

$$(\text{señal demodulada y filtrada}) = \frac{\tilde{C}}{2} \text{Im}(e^{i\delta\omega t - i(\theta_B - \phi_0)}).$$

Llamemos s_{re} a la señal demodulada y filtrada del canal real y s_{im} a la señal demodulada y filtrada del canal imaginario. Con estas dos señales, podemos definir la señal compleja por

$$s(t) = s_{re}(t) + is_{im}(t).$$

Luego, la ecuación (2.4) se expresa como

$$\Delta s(t) = C\omega_0 e^{-t/T_2} |M_{xy}| |\mathcal{B}_{xy}| e^{i[(\Omega - \omega_0)t + \phi_0 - \theta_B]} \Delta V.$$

Más generalmente, podemos pasar este esquema a una integral:

$$s(t) = C\omega_0 \int_{\mathcal{V}} e^{\frac{-t}{T_2(\vec{r})}} |M_{xy}(\vec{r}, 0)| |\mathcal{B}_{xy}(\vec{r})| e^{i[(\Omega - \omega_0)t + \phi_0(\vec{r}) - \theta_B(\vec{r})]} dV. \quad (2.5)$$

Si $\Omega = \omega_0$, obtenemos

$$s(t) = C\omega_0 \int_{\mathcal{V}} M_{xy}(\vec{r}, t) \overline{\mathcal{B}_{xy}(\vec{r})} dV.$$

2.1.4. Señal mediante la densidad de spin

En la ecuación (2.5), puede ocurrir que la frecuencia de precesión no sea la misma para todo el espacio ni para todo instante. Entonces reemplazamos $\omega_0 t$ por $\omega = \omega(\vec{r}, t)$, y definimos la fase acumulada por $\phi(\vec{r}, t) = -\omega(\vec{r}, t) + \phi_0(\vec{r})$.

Además, podemos considerar \mathcal{B}_{xy} uniforme en el espacio, luego quitamos su dependencia sobre \vec{r} y el sistema de referencia puede ser elegido tal que $\phi_0 = \theta_{\mathcal{B}} = 0$. Tenemos entonces que

$$s(t) = C\omega_0 \int_{\mathcal{V}} |M_{xy}(\vec{r}, t)| |\mathcal{B}_{xy}| e^{i(\Omega t + \phi(\vec{r}, t))} dV.$$

Definimos la densidad de spin ρ por

$$\rho(\vec{r}, t) = C\omega_0 |\mathcal{B}_{xy}| |M_{xy}(\vec{r}, t)|,$$

de tal manera que la señal se expresa como

$$s(t) = \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}, t) e^{i(\Omega t + \phi(\vec{r}, t))} dV \quad (2.6)$$

Notar que debido a (2.3) se tiene que

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, 0) e^{-\frac{t}{T_2(\vec{r})}}. \quad (2.7)$$

2.1.5. Comenzando a recuperar la densidad de spin: definición de k-espacio

Como el dato que recibimos es la señal (2.6), necesitamos algún mecanismo, ya sea matemático, del experimento, o ambos, para poder recuperar el dato que nos importa: el mapeo de $\rho(x, y, z, t)$, el cual nos permitirá obtener una imagen del cuerpo en estudio. Más aún, para los fines de este trabajo, obteniendo ρ , ya resultará sencillo obtener el mapeo de T_2 .

El mecanismo para esto es aplicar *campos gradientes*, es decir, al campo \vec{B}_0 descrito en el capítulo 1, añadimos los campos

$$B_{x_j}(\vec{r}, t) = x_j G_{x_j}(t)$$

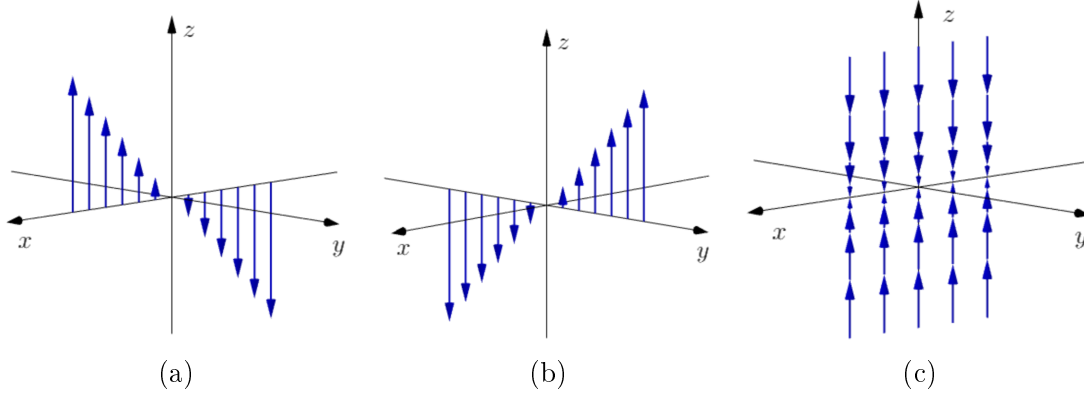


Figura 2.2: Representación de los campos gradientes según x, y, z , en (a), (b) y (c), respectivamente.

Así, la fase acumulada será

$$\phi(\vec{r}, t) = -\omega(\vec{r}, t) = -\omega_0 t - \gamma \int_0^t \vec{r} \cdot G(t') dt'.$$

Si se toma $\Omega = \omega_0$, y definimos \vec{k} por

$$k_j = \frac{\gamma}{2\pi} \int_0^t G_{x_j}(t') dt',$$

entonces (2.6) implica que

$$s(\vec{k}, t) = \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}, t) e^{-2\pi i \vec{k} \cdot \vec{r}} dV,$$

y como $\rho(\cdot, t) = 0$ fuera de \mathcal{V} , para todo $t \geq 0$, finalmente podemos escribir

$$\boxed{s(\vec{k}, t) = \mathcal{F}[\rho](\vec{k}, t)} \quad (2.8)$$

donde \mathcal{F} denota a la transformada de Fourier en las variables espaciales. Luego, por el Teorema de inversión de la transformada de Fourier, la densidad de spin puede ser calculada mediante

$$\rho(\vec{r}, t) = \mathcal{F}^{-1}[s](\vec{r}, t). \quad (2.9)$$

El espacio de la imagen será aquel donde está definido (x, y, z) . El k -espacio (o espacio de los datos, o espacio de Fourier), será aquel espacio donde está definido (k_x, k_y, k_z) .

La ecuación (2.9) nos dice que para calcular la densidad de spin, es necesario tener un *buen cubrimiento* del k -espacio: al menos cubrir el soporte de $s(\cdot, t)$. Pero es claro que en un experimento hecho en tiempo finito, donde además hay efectos de relajación, no es posible tener la señal para todo el dominio (o bien el soporte) de s .

Entonces es necesario encontrar el conjunto de puntos apropiado en el k -espacio, de modo que podamos aproximarnos adecuadamente a la transformada de Fourier continua.

2.2. Paso a la transformada de Fourier discreta

En esta sección, consideraremos funciones y distribuciones (funciones generalizadas) en \mathbb{R} .

Como ya se mencionó antes, no es posible en la vida real obtener $s(\vec{k}, t)$ para todo el k -espacio. Entonces, la señal en el k -espacio se entiende como una suma de pulsos (o deltas de Dirac).

2.2.1. La distribución de muestreo

Antes de definir la expresión para la señal correspondiente al muestreo, definiremos una distribución que será útil para desarrollar las propiedades de la señal muestreada.

Definición 2.1 *Se define la distribución de muestreo por:*

$$u(k) = \Delta k \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(k - p\Delta k),$$

donde Δk es una constante, que pronto determinaremos.

La idea de esta distribución es que su producto con la señal continua es 0, salvo en los puntos donde los datos son muestreados.

Lema 2.2

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi na} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(a - m)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea φ una función test en \mathbb{R} , con soporte en $K := [-M, M]$.

Para cada $j = -M, \dots, M$, definimos el intervalo $U_j =]j - \varepsilon, j + \varepsilon[$, donde $0 < \varepsilon < 1$. Entonces $\{U_j\}_{j=-M, \dots, M}$ es un cubrimiento abierto de K .

Sea $\{\psi_j\}_{j=-M, \dots, M}$ una partición de la unidad asociada al cubrimiento $\{U_j\}_{j=-M, \dots, M}$. Es decir, $\psi_{-M}, \dots, \psi_M \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tales que

1. $0 \leq \psi_j \leq 1$
2. $\psi_j(x) = 0$ para $x \notin U_j$
3. $\sum_{j=-M}^M \psi_j(x) = 1$ para $x \in K$.

Se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n x}, \varphi(x) \right\rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{n=-N}^N e^{2\pi i n x}, \varphi(x) \right\rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{n=-N}^N e^{2\pi i n x}, \sum_{m=-M}^M \underbrace{\varphi(x) \psi_m(x)}_{=: \tilde{\varphi}_m(x)} \right\rangle \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-M}^M \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n x} \tilde{\varphi}_m(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-M}^M \int_{m-\varepsilon}^{m+\varepsilon} e^{2\pi i n x} \tilde{\varphi}_m(x) dx \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=-M}^M \int_{m-\varepsilon}^{m+\varepsilon} \underbrace{\sum_{n=-N}^N e^{2\pi i n x}}_{\frac{\sin(\pi x(2N-1))}{\sin(\pi x)}} \tilde{\varphi}_m(x) dx \\
&\stackrel{x=y+m}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=-M}^M \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\sin(\pi(y+m)(2N+1))}{\sin(\pi(y+m))} \tilde{\varphi}_m(y+m) dy
\end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variables $u = (2N+1)\pi y$, y se tiene que

$$\begin{aligned}
&\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=-M}^M \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\sin(\pi(y+m)(2N+1))}{\sin(\pi(y+m))} \tilde{\varphi}_m(y+m) dy \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=-M}^M \int_{-(2N+1)\pi\varepsilon}^{(2N+1)\pi\varepsilon} \frac{\sin(\pi(\frac{u}{(2N+1)\pi} + m)(2N+1))}{(2N+1)\pi \sin(\pi(\frac{u}{(2N+1)\pi} + m))} \tilde{\varphi}_m\left(\frac{u}{(2N+1)\pi} + m\right) du \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=-M}^M \int_{-(2N+1)\pi\varepsilon}^{(2N+1)\pi\varepsilon} \frac{\sin(u)}{(2N+1)\pi \sin(\frac{u}{(2N+1)})} \tilde{\varphi}_m\left(\frac{u}{(2N+1)\pi} + m\right) du \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{m=-M}^M \tilde{\varphi}_m(m) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(u)}{u} du}_{\pi} = \sum_{m=-M}^M \underbrace{\tilde{\varphi}_m(m)}_{\varphi(m)\psi_m(m)} = \sum_{m=-M}^M \varphi(m)
\end{aligned}$$

donde la última igualdad es debido a que $\psi_m(m) = 1$, ya que las otras funciones de la partición de la unidad son 0 en m .

Finalmente,

$$\sum_{m=-M}^M \varphi(m) = \left\langle \sum_{m=-M}^M \delta(x-m), \varphi(x) \right\rangle$$

y como $\varphi(m) = 0$ para todo $|m| > M$, se concluye que

$$\left\langle \sum_{m=-M}^M \delta(x-m), \varphi(x) \right\rangle = \left\langle \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x-m), \varphi(x) \right\rangle$$

y así se concluye el lema. □

Es importante saber cómo es la transformada de Fourier de la distribución de muestreo.

Proposición 2.3

$$\mathcal{F}[u](x) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta\left(x - \frac{q}{\Delta k}\right)$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[u], \varphi \rangle &= \left\langle \Delta k \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(k - p\Delta k), \mathcal{F}[\varphi] \right\rangle \\ &= \Delta k \sum_{p=-\infty}^{\infty} \langle \delta(k - p\Delta k), \mathcal{F}[\varphi](k) \rangle \\ &= \Delta k \sum_{p=-\infty}^{\infty} \langle e^{-i2\pi p\Delta k(\cdot)}, \varphi(\cdot) \rangle \\ &= \Delta k \left\langle \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi p\Delta k(\cdot)}, \varphi(\cdot) \right\rangle \end{aligned}$$

y se concluye por el lema. □

2.2.2. Muestreo infinito

Definición 2.4 Definimos la distribución s_{∞} de la señal correspondiente al muestreo infinito por:

$$s_{\infty}(k) := s(k)u(k) = \Delta k \sum_{p=-\infty}^{\infty} s(p\Delta k)\delta(k - p\Delta k)$$

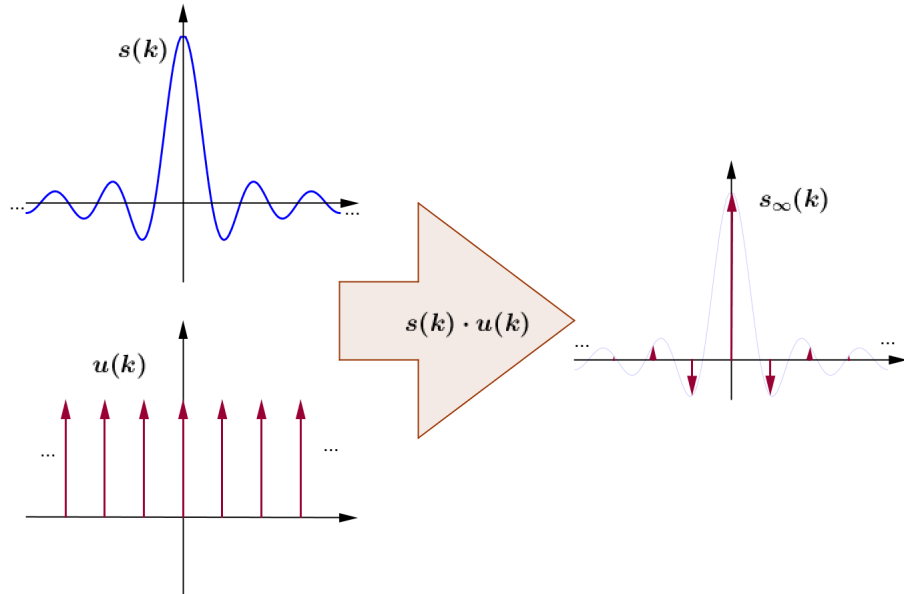


Figura 2.3: Efecto de la distribución de muestreo sobre la señal continua. Se obtiene la señal en un conjunto discreto de puntos.

Definimos además la imagen reconstruida ρ_∞ para el muestreo infinito por

$$\hat{\rho}_\infty(x) = \mathcal{F}^{-1}[s_\infty](x)$$

Proposición 2.5 *La imagen reconstruida para el muestreo infinito es*

$$\hat{\rho}_\infty(x) = \Delta k \sum_{p=-\infty}^{\infty} s(p\Delta k) e^{2\pi i p \Delta k x}$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} \langle \hat{\rho}_\infty, \varphi \rangle &= \langle \mathcal{F}^{-1}[s_\infty], \varphi \rangle \\ &= \langle s_\infty, \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \rangle \\ &= \left\langle \Delta k \sum_{p=-\infty}^{\infty} s(p\Delta k) \delta(k - p\Delta k), \mathcal{F}^{-1}[\varphi](k) \right\rangle \\ &= \Delta k \sum_{p=-\infty}^{\infty} s(p\Delta k) \mathcal{F}^{-1}[\varphi](p\Delta k) \\ &= \Delta k \sum_{p=-\infty}^{\infty} s(p\Delta k) \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{i2\pi p \Delta k x} dx \\ &= \left\langle \Delta k \sum_{p=-\infty}^{\infty} s(p\Delta k) e^{i2\pi p \Delta k x}, \varphi \right\rangle \end{aligned}$$

□

Observación Notar que la proposición anterior implica que

$$\hat{\rho}_\infty(x) = \hat{\rho}_\infty\left(x + \frac{1}{\Delta k}\right)$$

es decir, la función $\hat{\rho}_\infty$ es $\frac{1}{\Delta k}$ -periódica.

Veremos ahora cuál es la relación entre la imagen reconstruida y la densidad de spin.

Proposición 2.6

$$\hat{\rho}_\infty(x) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \rho\left(x - \frac{q}{\Delta k}\right)$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_\infty(x) &= \mathcal{F}^{-1}[s_\infty](x) \\
&= \mathcal{F}[s_\infty](-x) \\
&= \mathcal{F}[s(k)u(k)](-x) \\
&= (\mathcal{F}[s] * \mathcal{F}[u])(-x) \\
&= \left(\rho(x) * \sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta\left(x - \frac{q}{\Delta k}\right) \right)(-x) \\
&= \left(\rho(x) * \sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta\left(-x - \frac{q}{\Delta k}\right) \right)(-x) \\
&= \sum_{q=-\infty}^{\infty} \rho\left(x - \frac{q}{\Delta k}\right)
\end{aligned}$$

□

De la proposición anterior, queda claro que $\hat{\rho}_\infty(x) = \rho(x)$ sólo en un cierto intervalo, pues $\hat{\rho}_\infty$ es una función periódica y ρ no necesariamente lo es.

Criterio de muestreo de Nyquist.

Sea L el largo del intervalo donde la imagen $\hat{\rho}_\infty$ se repite. Es claro que $L = \frac{1}{\Delta k}$. Para reconstruir la imagen, sólo se usa una de estas copias.

Se define el campo de visión (FOV, por su sigla en inglés de *Field of View*), como

$$FOV \equiv L \equiv \frac{1}{\Delta k},$$

donde el espaciado uniforme es de modo que $\Delta k = \frac{1}{L}$.

A estas alturas ya es posible encontrarse con un problema: puede que las copias idénticas se superpongan, lo cual hace que $\hat{\rho}_\infty$ sea muy distinto a ρ . Este fenómeno es conocido como *aliasing*.

Cuando $\rho(x)$ se anula fuera de un intervalo finito I , las series de Fourier periódicas producen un conjunto infinito de copias exactas de la densidad de spin, además el período asociado con las copias es más grande que tal intervalo I . Teniendo esto en cuenta, se enuncia el siguiente criterio de muestreo:

Criterio de Muestreo de Nyquist: Sea A el tamaño del objeto a observar. Se debe tener que

$$\frac{1}{\Delta k} = L > A$$

2.2.3. Muestreo finito

Definimos la función rectangular (o pulso unitario) por

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si } |x| > \frac{1}{2} \\ 1 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

En este caso, consideramos la distribución de muestreo finito

$$u_m(k) = u(k) \cdot \text{rect}\left(\frac{k + \frac{\Delta k}{2}}{W}\right)$$

donde $N = 2n$ es el número de puntos de muestreo y $W = 2n\Delta k$.

Se tiene el siguiente lema:

Lema 2.7

$$u_m(k) = \Delta k \sum_{p=-n}^{n-1} \delta(k - p\Delta k)$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} \langle u_m(k), \varphi(k) \rangle &= \left\langle u(k) \text{rect}\left(\frac{k + \frac{\Delta k}{2}}{W}\right), \varphi(k) \right\rangle \\ &= \left\langle u(k), \varphi(k) \text{rect}\left(\frac{k + \frac{\Delta k}{2}}{W}\right) \right\rangle \\ &= \Delta k \sum_{p=-\infty}^{\infty} \varphi(p\Delta k) \text{rect}\left(\frac{k + \frac{\Delta k}{2}}{W}\right) \\ &= \Delta k \sum_{p=-n}^{n-1} \varphi(p\Delta k) \\ &= \left\langle \Delta k \sum_{p=-n}^{n-1} \delta(k - p\Delta k), \varphi(k) \right\rangle \end{aligned}$$

□

Además, definimos la señal s_m de muestreo finito por

$$s_m(k) = s(k) \cdot u_m(k)$$

Como consecuencia del lema, se tiene fácilmente el siguiente resultado:

Proposición 2.8

$$s_m(k) = \Delta k \sum_{p=-n}^{n-1} s(p\Delta k) \delta(k - p\Delta k)$$

La definición de s_m es la señal que se puede muestrear en un experimento realista (es decir, finitas muestras). Para esta señal, definimos la densidad de spin reconstruida $\hat{\rho}_m$ como

$$\hat{\rho}_m(x) = \mathcal{F}^{-1}[s_m](x)$$

La siguiente proposición nos entrega una expresión explícita para la densidad de spin reconstruida a partir de las mediciones de señal.

Proposición 2.9

$$\hat{\rho}_m(x) := \mathcal{F}^{-1}[s_m(k)](x) = \Delta k \sum_{p=-n}^{n-1} s(p\Delta k) e^{i2\pi p\Delta k x} \quad (2.10)$$

Observación Notar que al igual que en el caso anterior,

$$\hat{\rho}_m(x) = \hat{\rho}_m\left(x + \frac{1}{\Delta k}\right).$$

Observación La señal $s_m(k)$ puede ser escrita en función de $\hat{\rho}_m(x)$ gracias al teorema de inversión de la transformada de Fourier. Es decir,

$$s_m(k) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{\rho}_m](k).$$

Por otro lado, definiendo la distribución $U(x) = \Delta x \sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta(x - q\Delta x)$, podemos hacer el mismo análisis para una densidad de spin reconstruida continua $\hat{\rho}$, de modo que

$$\hat{\rho}_m(x) = \hat{\rho}(x) U(x) \text{rect}\left(\frac{x + \frac{\Delta x}{2}}{L}\right) = \Delta x \sum_{q=-n}^{n-1} \hat{\rho}(q\Delta x) \delta(x - q\Delta x),$$

donde $\Delta x = \frac{L}{2n}$.

Luego, la señal que se obtiene es

$$s_m(k) = \Delta x \sum_{q=-n}^{n-1} \hat{\rho}_m(q\Delta x) e^{-2\pi i k q \Delta x} \quad (2.11)$$

Luego, $\hat{\rho}(q\Delta x)$ y $s_m(p\Delta k)$, para $p, q = -n, \dots, n-1$, están relacionados mediante la transformada de Fourier discreta.

2.2.4. Resultado del muestreo

Notar que

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho}_m(x) &= \mathcal{F}^{-1}[s_m(k)](x) = \mathcal{F}^{-1}\left[s(k)u_m(k)\text{rect}\left(\frac{k + \frac{\Delta k}{2}}{W}\right)\right](x) \\
 &= \mathcal{F}^{-1}[s(k)u(k)](x) * \mathcal{F}^{-1}\left[\text{rect}\left(\frac{k + \frac{\Delta k}{2}}{W}\right)\right](x) \\
 &= \left[\sum_{q=-\infty}^{\infty} \rho\left(x - \frac{q}{\Delta k}\right)\right] * W \text{sinc}(\pi W x) e^{-i\pi x \Delta k}
 \end{aligned}$$

donde en la última línea usamos el Teorema de convolución, la Proposición 2.6 y la transformada de Fourier de la función *rect*.

El primer término de la convolución del lado derecho, vimos que corresponde a infinitas copias de un intervalo de ρ . Vemos entonces que en un muestreo finito, como la función *sinc* no es una delta de Dirac (el único elemento neutro para la convolución), necesariamente no estamos recuperando la imagen con exactitud. El efecto de la función *sinc* es suavizar la imagen, pero sin embargo el resultado es una aproximación a la densidad de spin. A este fenómeno de suavización, en análisis de imágenes, se le llama *blurring*.

Observación Quedarse sólo con una copia, es equivalente a tomar $\hat{\rho}_m(x)$ como

$$\hat{\rho}_m(x) = \rho(x) * W \text{sinc}(\pi W x) e^{-i\pi x \Delta k} \quad (2.12)$$

2.3. Proceso de muestreo

2.3.1. Localización espacial de las señales MR

En esta sección retomamos los campos gradientes que logran definir a la señal como la transformada de Fourier de la densidad de spin (ecuación 2.8). Veremos que los campos gradientes, además de definir matemáticamente el k -espacio, son los responsables de la localización espacial de las señales de resonancia magnética, puesto que sin ellos, toda la muestra experimenta la excitación debido al pulso rf.

Nos concentraremos en la formación de imágenes en 2D.

Selección de la tajada

Es el método por el cual la excitación de rf (y así también la señal) está limitada a una tajada escogida de la muestra. Esto se logra aplicando el pulso rf simultáneamente con un gradiente perpendicular a la tajada deseada.

Por ejemplo, si se quiere una tajada (o *slice*) paralela al plano xy , se usa el campo gradiente

zG_z , así la frecuencia de Larmor depende de z :

$$\omega(z) = \gamma(B_0 + zG_z)$$

Luego seleccionamos el slice dado por $z = z_0$, y el pulso rf se hace con frecuencia $\omega_1 = \omega(z_0)$.

Además hay que tomar en cuenta que en la realidad en pulso rf no es precisamente una función de saltos, sino que está formado de modo que contiene una pequeña propagación de frecuencias cerca de la frecuencia $\omega(z_0)$. El intervalo de frecuencias cercanas a $\omega(z_0)$ donde se produce señal apreciable tiene un largo que denotaremos como $\Delta\omega$, el cual está relacionado con la forma y duración del pulso.

Luego, el ancho de la tajada es

$$\Delta z = \frac{\Delta\omega}{\gamma G_z}$$

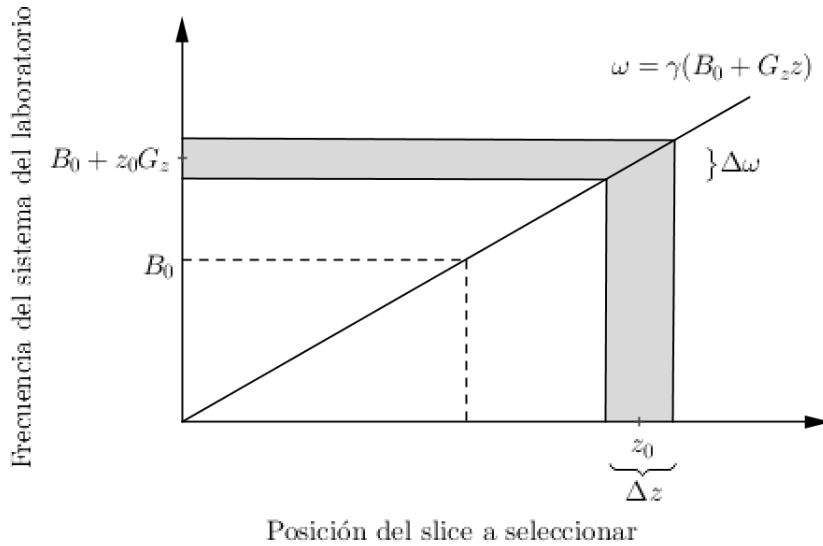


Figura 2.4: Esquema de la relación entre la frecuencia de resonancia en presencia de un campo gradiente en z , y la selección de la tajada.

Codificación de frecuencias y de fase

Codificación de frecuencias hace referencia a la componente k_x del k -espacio, si el slice elegido es paralelo al plano xy . Mediante este método la excitación de rf (sumado a la selección de slice) queda limitada a una línea (con un cierto ancho) en el slice escogido con anterioridad. Análogamente a la selección de slice, la codificación de frecuencias consiste en aplicar un campo gradiente $xG_x(t)$ por un tiempo Δt_x . Se tiene que

$$\Delta k_x = \frac{\gamma}{2\pi} \int_0^{\Delta t_x} G_x(t) dt$$

Recordar que Δk_x debe respetar el criterio de muestreo de Nyquist.

La codificación de fase es análoga a la codificación de frecuencias, pero es en la componente k_y del k -espacio. El resultado de realizar una selección de slice y luego realizar distintas codificaciones de frecuencias y de fase, permite obtener la señal en las componentes k_x y k_y apropiadas para poder obtener la antitransformada de Fourier discreta sobre las muestras de la señal, y entonces se puede obtener una imagen de densidad de spin del slice.

Las formas de realizar estos recorridos por el k -espacio dependen de la secuencia de pulsos que se aplique.

2.3.2. Secuencias de pulso

Una secuencia de pulsos es una combinación ordenada de pulsos rf y gradientes diseñada para adquirir datos para la imagen.

Los datos para crear una imagen de resonancia magnética son obtenidos en una serie de pasos:

1. Primero, el tejido a magnetizar es excitado usando un pulso rf en presencia de un gradiente de selección de slice.
2. Además, se necesita codificar la fase y la frecuencia, las cuales localizan espacialmente a los protones en las otras 2 dimensiones.
3. Luego de que los datos son recolectados, el proceso se repite por una serie de pasos de codificación de fase.

Los parámetros de la secuencia de MRI se eligen de modo que se ajuste lo mejor posible a la aplicación clínica. Podemos mencionar como 3 tipos de secuencias principales a:

1. Gradiente-eco
2. Spin-eco
3. Inversión-recuperación

Debido a que este trabajo trata sobre el tiempo T_2 , nos concentraremos en las secuencias que favorezcan el mapeo de este parámetro.¹

En este momento debemos introducir cierta notación:

- TE : tiempo de eco, es el tiempo entre el pulso rf y la adquisición de la señal.
- TR : tiempo de repetición, es la cantidad de tiempo que hay entre cada pulso rf.

Secuencias spin-eco

Es la secuencia de ecos más usada. Los tiempos de la secuencia de pulsos pueden ser ajustados para poder hacer imágenes de T_1 , densidad de spin (o densidad de protones), y T_2 .

¹Para ver más detalles sobre estos tipos de secuencias, ver por ejemplo, [25].

Secuencias de eco duales y multiecho pueden ser usadas para obtener densidad de protones y T_2 simultáneamente.

Sólo nos concentraremos en las imágenes de T_2 .

El decaimiento T_2 que experimenta un tejido depende de varios factores. Cada tejido tiene un valor de T_2 inherente, pero factores externos (como inhomogeneidades de campo magnético) pueden incrementar el tiempo T_2 . Este efecto adicional es capturado por T_2^* . Las secuencias de pulsos spin-eco reorientadores ayudan a mitigar estas influencias sobre el tiempo de relajación T_2 , tratando de mantener la imagen medida en T_2 en vez de T_2^* .

Pasos de la secuencia spin-eco:

1. Se aplica un pulso rf de 90° , que produce excitación al slice seleccionado.
2. Luego, se produce el desfase descrito en el capítulo 1 (Sección 1.3.2), lo cual en términos de señal se traduce en una oscilación que va disminuyendo su amplitud, que llamamos *decaimiento de inducción libre* (FID: free induction decay), ver la Figura 2.8. Los máximos de este decaimiento tienen una tasa T_2^* , debida a inhomogeneidades de campo magnético.

Se muestra a continuación (Figura 2.5) una representación del desfase. Inicialmente todos los spins están alineados (lo cual se suele llamar *en fase*). Luego los spins se comienzan a desfasear (también se dice *se pierde coherencia*), abriéndose como abanico. Se distingue un grupo de spins que se desfasea más rápido que el otro, y esto es debido a sentido de la precesión. Así, el módulo de la magnetización transversal decae.

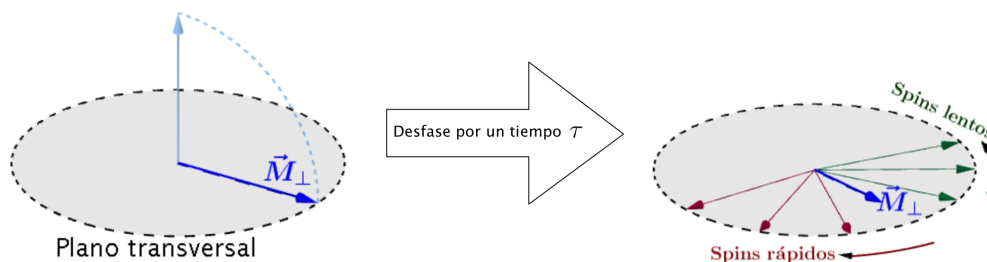


Figura 2.5: Representación de la etapa de desfase en el plano transversal.

3. Luego de un tiempo τ posterior al pulso de 90° , se aplica un pulso rf de 180° , el cual produce que los spins cambien de posición en el plano transversal, de modo que los spins “rápidos” pasan al lugar de los “lentos”, y viceversa.

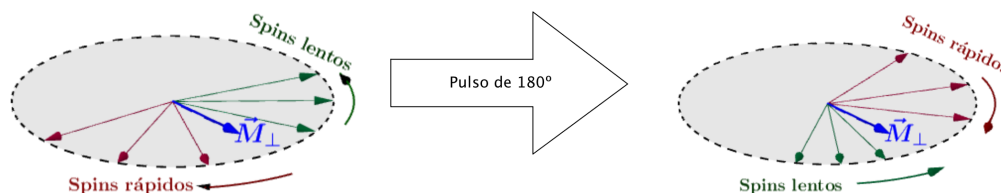


Figura 2.6: Representación del efecto del pulso de 180° .

4. Los spins continúan precesando, pero el pulso de 180° causa que los 2 grupos de spins tiendan a acercarse nuevamente. Luego de un tiempo τ posterior al pulso de 180° , los spins vuelven a alinearse, produciéndose un *eco de spin*. En ese instante se recolecta la señal. Dependiendo el número de ecos que se quiera adquirir, se volverá a aplicar un pulso de 180° en un tiempo τ luego del eco, las veces que se desee.

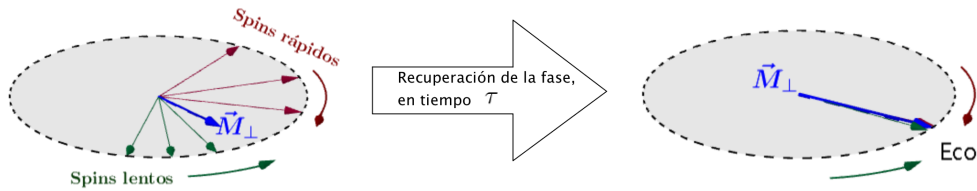


Figura 2.7: Representación de la formación del eco, el cual resulta en la medición de los datos.

Lo que sucede con la señal durante el experimento, se muestra en la siguiente figura:

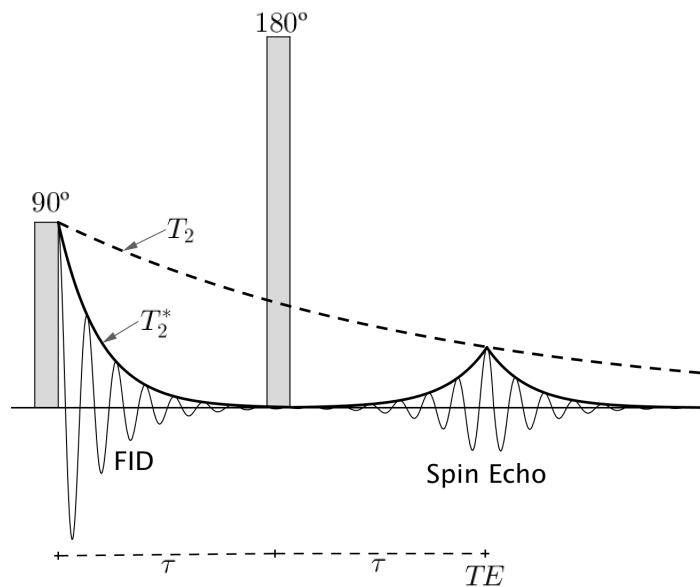


Figura 2.8: Caracterización de los tiempos T_2^* y T_2 durante el experimento.

Para la localización espacial, se aplica el gradiente de selección de slice G_{ss} , el cual es fijo en imágenes 2D. Luego, para cada gradiente de codificación de frecuencia G_{fe} , se aplica un gradiente de codificación de fase, repitiendo el experimento cada cierto tiempo

$$TR = (\text{número de ecos}) \times TE.$$

Esto se resume en el siguiente diagrama, que resulta ser clásico en el análisis de secuencias de pulsos en MRI:

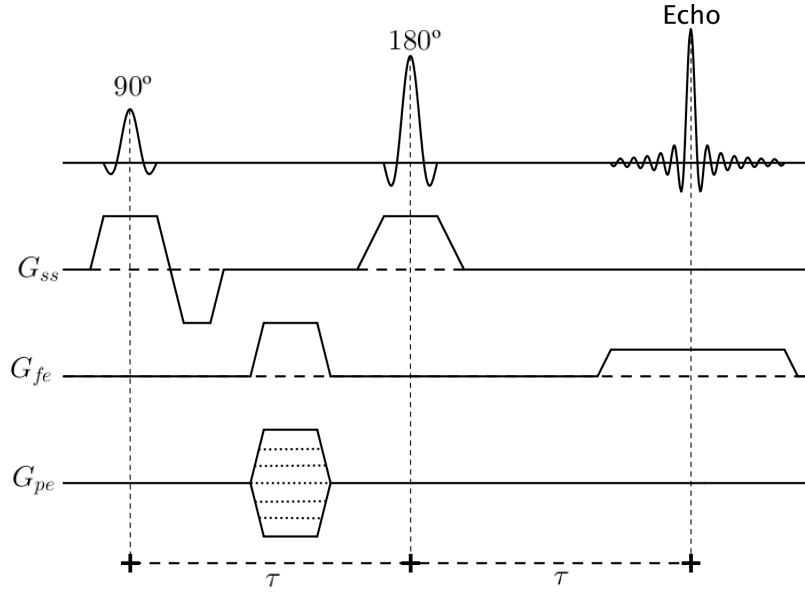


Figura 2.9: Esquema de la secuencia spin-eco, mostrando la aplicación de los campos gradientes.

Observación Este esquema es una *trayectoria en el k -espacio*, que está en el slice z_0 escogido, y recorre el plano $k_x - k_y$.

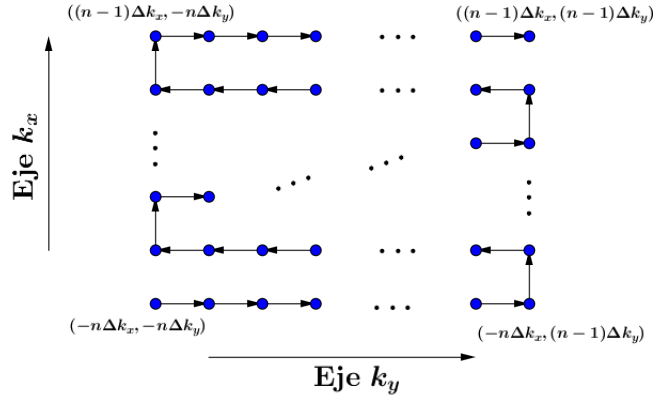


Figura 2.10: Esquema de un recorrido por el k -espacio en 2 dimensiones, para un slice dado.

De esta forma, se produce una imagen de densidad de spin reconstruida sobre el slice z_0 , de modo que la señal varía sólo en k_x, k_y :

$$\begin{aligned}
 s(k_x, k_y) &= \iint_{\mathbb{R}^2} \int_{z_0 - \frac{\Delta z}{2}}^{z_0 + \frac{\Delta z}{2}} \rho(x, y, z) e^{-2\pi i(x, y, z) \cdot (k_x, k_y, k_{z_0})} dz dy dx \\
 &= \iint_{\mathbb{R}^2} \left[\int_{z_0 - \frac{\Delta z}{2}}^{z_0 + \frac{\Delta z}{2}} \rho(x, y, z) e^{-2\pi i z k_{z_0}} dz \right] e^{-2\pi i(x, y) \cdot (k_x, k_y)} dy dx
 \end{aligned}$$

Podemos aproximar

$$\int_{z_0 - \frac{\Delta z}{2}}^{z_0 + \frac{\Delta z}{2}} \rho(x, y, z) dz \approx \Delta z \rho(x, y, z_0) e^{-2\pi i z_0 k_z}$$

este término se puede demodular y podemos eliminar el término Δz , y así la señal (que seguiremos denotando por $s(k_x, k_y)$) queda

$$s(k_x, k_y) = \iint_{\mathbb{R}^2} \rho(x, y, z_0) e^{-2\pi i (x, y) \cdot (k_x, k_y)} dy dx$$

y así finalmente se obtiene

$$s(k_x, k_y) = \iint_{\mathbb{R}^2} \rho(x, y, z_0) e^{-2\pi i (x, y) \cdot (k_x, k_y)} dy dx \quad (2.13)$$

Con el análisis de la sección 2.2 para la función $\Delta z \rho(x, y, z_0)$, se concluye que para el slice centrado en z_0 ,

$$\hat{\rho}(x, y) = \Delta k_x \Delta k_y \sum_{p=-n}^{n-1} \sum_{q=-n}^{n-1} s(p \Delta k_x, q \Delta k_y) e^{2\pi i (px \Delta k_x + qy \Delta k_y)} \quad (2.14)$$

donde $\hat{\rho}(x, y)$ corresponde a la densidad de spin reconstruida en (x, y, z_0) .

Observación Si el TE se extiende a una gran cantidad de tiempo, sólo los tejidos con una relajación T_2 de grandes valores retendrá señal. En general, en las imágenes de T_2 , la grasa se mostrará medianamente brillante, y el fluido será brillante. Por otro lado, materiales sólidos no alcanzan a ser muestreados mediante esta secuencia de ecos, para tiempos de eco y repetición largos.

2.4. Ruido en MRI

En el proceso de obtención de la señal producida por el decaimiento de la magnetización, se producen señales en las bobinas receptoras. Vimos que finalmente esta señal es la transformada de Fourier de la densidad de spin.

Denotaremos por $\hat{\rho}(x)$ a la imagen reconstruida, y por $\rho(x)$ a la densidad de spin.

Usamos el término *artefacto* para referirnos a alguna diferencia entre $\hat{\rho}$ y ρ . Los artefactos pueden ser el resultado de errores en la adquisición de los datos o el procesamiento de la señal.

Por ejemplo, aunque ρ toma valores reales, $\hat{\rho}$ no necesariamente también. El ejemplo más simple es que ocurra un pequeño cambio de fase, el cual puede modificar la señal.

Comúnmente, para tomar la imagen, se considera $|\rho(x)|$.

Además, como todo proceso de medición, hay presencia de *ruido*, debido al comportamiento de los átomos en el conductor de las bobinas receptoras, o también debido al paciente que está siendo examinado mediante MRI.

Este ruido (blanco) lo tomaremos como gaussiano en el canal real e imaginario, siendo independiente para cada canal.

Tales señales real e imaginaria entonces son sometidas a una transformada de Fourier, y luego se aplica módulo. Es así como a la imagen de densidad de spin, es decir, la imagen que recibe el paciente, posee ruido. Tal ruido ha sido caracterizado por Rice [35].

2.4.1. Distribución de Gauss y de Rice

La densidad de probabilidad en el caso gaussiano se define por

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

La densidad de probabilidad de Rice se define por

$$p(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + A^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{xA}{\sigma^2}\right)$$

donde A es la intensidad real de la imagen, e I_0 es la función de Bessel modificada de orden 0.

La relación entre las 2 variables se da por el siguiente teorema:

Teorema 2.10 *Si $X \sim \mathcal{N}(A \cos(\theta), \sigma^2)$ e $Y \sim \mathcal{N}(A \sin(\theta), \sigma^2)$ son variables aleatorias independientes para todo $\theta \in \mathbb{R}$, entonces $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ tiene distribución $R \sim \text{Rician}(A, \sigma)$*

2.4.2. Gauss y Rice en MRI

La señal medida (en cada canal) es la suma entre la señal ideal y el ruido (blanco):

$$s_m(k) = s(k) + \varepsilon(k),$$

donde ε es una variable aleatoria $\mathcal{N}(0, \sigma_m^2)$.

La imagen que se genera a partir de esta señal, viene dada por

$$\hat{\rho}_M = IDFT(s_m) = IDFT(s) + IDFT(\varepsilon) = \hat{\rho} + DFT(\varepsilon),$$

donde DFT e $IDFT$ denotan a la transformada de Fourier discreta y a su inversa, respectivamente. La última expresión nos dice que en el muestreo, queda la imagen que sufre de *blurring*, más la antitransformada de Fourier discreta del ruido ε .

Sea $\eta = IDFT(\varepsilon)$. Se tiene que

$$\begin{aligned}\langle \eta \rangle &= 0 \\ Var(\eta) &= \frac{\sigma_m^2}{N}\end{aligned}$$

Por último, como la antitransformada de Fourier discreta no necesariamente nos da un valor real, ya que rescatamos lo que queda de cada canal, se toma módulo. Así, el ruido pasa a ser

$$\sqrt{s_{m,real}^2 + s_{m,imag}^2} \sim Rice\left(0, \frac{\sigma_m}{\sqrt{N}}\right).$$

2.4.3. Estimación del ruido a partir de imágenes adquiridas

En este caso, se define la razón señal ruido como

$$SNR = \frac{A}{\sigma}$$

El momento m -ésimo para la variable riciana es:

$$\mathbb{E}[R^m] = \int_0^\infty \frac{r^{m+1}}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2 + A^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{Ar}{\sigma^2}\right) dr,$$

donde el caso de interés es con $m = 2$ (ver [41]):

$$\mathbb{E}[R^2] = 2\sigma^2 + A^2.$$

Usualmente, para estimar la varianza se toma $A = 0$, pues el ruido blanco tiene media nula, y así

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}\mathbb{E}[R^2].$$

En la práctica, lo que se hace es tomar una muestra suficientemente grande de pixeles que se supone deberían ser 0 (por ejemplo, la zona que alcanza a ser muestreadas pero que está fuera del cuerpo a estudiar). Luego, cada pixel se eleva al cuadrado, y se obtiene el promedio del cuadrado de cada pixel. Es decir, se obtiene la varianza a partir de

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2}\langle R^2 \rangle.$$

Por último, para recuperar las características del ruido de la señal, basta aplicar lo visto en la sección anterior.

Capítulo 3

Herramientas de procesamiento de imágenes

3.1. Introducción: procesamiento de imágenes

El procesamiento de imágenes es una herramienta básica usada para reconstruir la geometría, patrones o dinámica del mundo 3-D, a partir de imágenes 2-D.

El procesamiento de imágenes puede ser considerado como un sistema input-output

$$Q_0 \longrightarrow \boxed{\text{Procesador de imagen } \mathcal{T}} \longrightarrow Q$$

Aquí \mathcal{T} denota un procesador de imagen típico, como *denoising*, *deblurring*, segmentación, compresión o *inpainting*. Q_0 puede representar una imagen medida (o una secuencia de imágenes), y el output $Q = (q_1, q_2, \dots)$ contiene las características que se busca estudiar.

En la siguiente tabla se muestran los ejemplos de \mathcal{T}, Q_0, Q que son de nuestro interés.

\mathcal{T}	Q_0	Q
<i>denoising+deblurring</i>	$f = Ku + n$	u limpio y nítido
<i>inpainting</i>	$f _{\Omega \setminus D}$	$u _{\Omega}$ la imagen entera

En la tabla, los símbolos representan:

1. f : la imagen medida.
2. K : representa el operador de *blurring*.
3. n : ruido aditivo.
4. Ω : el dominio entero de la imagen.
5. D : subconjunto de Ω donde la información de la imagen está perdida o es inaccesible.

Notamos entonces que es necesario tener un modelamiento o representación de la imagen: en particular nos interesa la representación mediante algún espacio de funciones. Además necesitamos modelar el procesador de imágenes.

Modelos de ajuste

Un modelo simple, pero poderoso en varias aplicaciones, es blurring seguido de ruido, y luego restricción espacial:

$$u_0|_D = (Ku + n)_D$$

donde $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

El problema asociado es:

$$\text{Dado } u_0|_D, \text{ reconstruir } u \text{ de la mejor manera posible.} \quad (3.1)$$

Los problemas de restauración de imágenes son usualmente *ill posed* y se necesita así añadir más hipótesis al modelo para lograr una solución en algún sentido. Nos basaremos en un modelo de *máximo a priori*, que nos llevará a un problema de minimización de funcionales de energía.

3.2. Modelos variacionales en el espacio $BV(\Omega)$

3.2.1. Intuición del modelo: estimación de máximo a priori (MAP)

Usaremos un enfoque de máximo a posteriori (MAP), es decir, buscamos

$$\max_u P(u|f) = \frac{P(f|u)P(u)}{P(f)} \quad (3.2)$$

donde $P(u|f)$ es la probabilidad de obtener u , dada la imagen observada f . Es decir, se busca la imagen más probable, dada su observación incompleta y posiblemente distorsionada. Mediante la aplicación de logaritmo, es fácil deducir que encontrar el máximo en (3.2) es equivalente a encontrar la solución de

$$\min_u \left\{ -\log(P(u)) - \log(P(f|u)) \right\}$$

Por otro lado, la fórmula de Gibbs en mecánica estadística nos dice que

$$E[\cdot] = -\alpha kT \log(P(\cdot))$$

donde E es la energía del sistema, $\alpha > 0$ es una constante de proporcionalidad, k es la constante de Boltzmann y T es la temperatura.

Así es como nuestro enfoque se dirige hacia los funcionales de energía.

3.2.2. Espacio de funciones de variación acotada

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto conexo ($n \geq 2$) de frontera regular.

Definición 3.1 Se define el espacio de funciones de variación acotada como:

$$BV(\Omega) = \{u \in L^1(\Omega) \mid J(u) < \infty\}$$

donde

$$J(u) := \sup \left\{ \int_{\Omega} u(x) \operatorname{div} \xi(x) \mid \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n), \|\xi\|_{\infty} \leq 1 \right\}$$

Teorema 3.2 El espacio $BV(\Omega)$ dotado de la norma

$$\|u\|_{BV(\Omega)} = \|u\|_{L^1} + J(u)$$

es un espacio de Banach.

Teorema 3.3 La derivada en el sentido de distribuciones de $u \in BV(\Omega)$ es una medida de Radon acotada, que se denota por $J(u) = \int_{\Omega} |Du|$, y es la variación total de u .

Proposición 3.4 Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n con frontera Lipschitz.

1. Para toda función $u \in BV(\Omega)$, la medida de Radon Du puede ser descompuesta en $Du = \nabla u dx + D^s u$, donde $\nabla u dx$ es la parte absolutamente continua de Du con respecto a la medida de Lebesgue y $D^s u$ es la parte singular.
2. El mapeo $u \mapsto J(u)$ es semicontinua inferior de $BV(\Omega)$ a \mathbb{R}^+ para la topología $L^1(\Omega)$.
3. $BV \subseteq L^2(\Omega)$ con inmersión continua, si $n = 2$.
4. $BV(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$ con inmersión continua, para todo $p \in [1, 2[$, si $n = 2$.

Se tiene el siguiente resultado de densidad

Teorema 3.5 El espacio $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ es denso en $BV(\Omega)$ en el siguiente sentido: $\forall u \in BV(\Omega)$, existe una sucesión $(u_n)_{n \geq 0}$ en $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{L^1} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = J(u).$$

3.2.3. El espacio $BV(\Omega)$ en el modelo variacional

Las imágenes u se modelan como elementos del espacio $BV(\Omega)$, donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) es un abierto acotado que define el dominio de la imagen. Este espacio se ajusta de buena forma a las imágenes debido a que modela adecuadamente una de las características visuales más importantes: los bordes.

Tomaremos $f \in L^{\infty}(\Omega)$.

En la estimación de máximo a priori, $-\log(P(u))$ actúa como un regularizador sobre a qué se asemeja u . Se suele tomar

$$-\log(P(u)) = \int_{\Omega} |Du|$$

Consideramos el problema de optimización

$$\min_{u \in BV} J(u) + \lambda H(u, f)$$

donde:

1. $J(u)$ es el funcional convexo no negativo de variación total y regularización:

$$J(u) = \int_{\Omega} |Du|$$

donde $\int_{\Omega} |Du|$ es la variación total de u , con Du el gradiente generalizado (una medida de Radon vectorial acotada).

Notar que si $u \in W^{1,1}(\Omega)$, entonces se tiene que $\int_{\Omega} |Du| = \int_{\Omega} |\nabla u| dx$.

2. λ es un parámetro de escalamiento de ajuste del modelo.
3. $H(u, f)$ es un funcional de ajuste.

3.2.4. Modelo variacional: caso gaussiano

La densidad de probabilidad en el caso gaussiano se define por

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

luego, aplicado a $\eta = u - f$ vista como variable gaussiana con media 0 y desviación estándar σ , se tiene

$$\log(p(f|u)) = -\log(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{((u-f) - \mu)^2}{2\sigma^2}$$

de donde basta tomar

$$H(u, f) = \frac{1}{2\sigma^2} \int_{\Omega} ((u-f) - \mu)^2 dx = \frac{1}{2\sigma^2} \int_{\Omega} (u-f)^2 dx = \frac{1}{2\sigma^2} \|u-f\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Así, el problema a resolver es

$$\min_{u \in BV(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} |Du| + \frac{\lambda}{2\sigma^2} \|u-f\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} \quad (3.3)$$

Este problema de minimización se trata en algunos artículos (por ejemplo, [4]), donde se estudia la existencia y unicidad de soluciones, además de exponer métodos numéricos para encontrar la solución.

3.2.5. Modelo variacional: caso Riciano

La densidad de probabilidad de Rice se define por

$$p(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + A^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{xA}{\sigma^2}\right)$$

donde A es la intensidad real de la imagen.

Luego,

$$\log(p(u|f)) = \log\left(\frac{f}{\sigma^2}\right) - \frac{u^2 + f^2}{2\sigma^2} + \log\left(I_0\left(\frac{uf}{\sigma^2}\right)\right)$$

y así se define el funcional

$$H(u, f) = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{u^2 + f^2}{2\sigma^2}\right) - \log\left(I_0\left(\frac{uf}{\sigma^2}\right)\right) - \log\left(\frac{f}{\sigma^2}\right) \right] dx$$

Por último, como buscamos una solución u , y el término $\log\left(\frac{f}{\sigma^2}\right)$ no depende de u , tomamos

$$H(u, f) = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{u^2 + f^2}{2\sigma^2}\right) - \log\left(I_0\left(\frac{uf}{\sigma^2}\right)\right) \right] dx$$

Así, se busca la solución al problema

$$\inf_{u \in BV(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} |Du| + \lambda \int_{\Omega} \left[\left(\frac{u^2 + f^2}{2\sigma^2}\right) - \log\left(I_0\left(\frac{uf}{\sigma^2}\right)\right) \right] dx \right\} \quad (3.4)$$

Este problema de minimización es tratado en artículos como [18] y [26], donde se estudia la existencia y unicidad de soluciones, además de proponer métodos numéricos para encontrar la solución.

3.3. Extrapolación en el k -espacio

Una forma de interpolar en las imágenes de resonancia magnética, es mediante la extrapolación en el k -espacio. Vimos que el muestreo de frecuencias para la señal es finito, y esto produce artefactos. Más aún, si el muestreo es infinito, estos artefactos desaparecen. Matemáticamente, el muestreo infinito produce una suma infinita convergente, lo cual nos dice que a medida que vamos considerando las altas frecuencias, se producen sumandos más pequeños. En la imagen esto tiene un efecto de atenuación del fenómeno de Gibbs, y al mismo tiempo los detalles más finos de la imágenes empiezan a ser reconocibles por el ojo humano.

Una extrapolación en el k -espacio bastante conocida es aquella donde se asume como 0 a los valores de la señal correspondientes a las altas frecuencias. Esta extrapolación es razonable cuando la densidad de spin tiene un ancho de banda esencialmente limitado.

Estableceremos el resultado de exactitud de la imagen reconstruida, cuando la señal tiene un ancho de banda limitado.

Teorema 3.6 (Shannon) Sea $u \in L^2(\mathbb{R})$ una función de banda limitada a $[-\Omega, \Omega]$, es decir, este conjunto es el soporte de la transformada de Fourier de u . Entonces u se puede representar por

$$u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) \text{sinc}(\Omega x - \pi n) \quad (3.5)$$

Observación En el teorema anterior, se ha usado la función *sinc*, la cual se define para cada $x \in \mathbb{R}$ por:

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

3.4. Splines de ajuste

3.4.1. En dimensión $d = 1$.

Veremos este tema, por simplicidad, aplicado en \mathbb{R} .

Una spline de orden k es una función polinomial por trozos de grado k , que es continua y que tiene derivadas continuas de órdenes $1, 2, \dots, k - 1$ en sus puntos de unión.

Formalmente, una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una spline de orden k con puntos de unión $t_1 < \dots < t_m$ si

- f es un polinomio de grado k en cada uno de los intervalos $[a, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_m, b]$, y
- $f^{(j)}$ es continua en t_1, \dots, t_m , para cada $j = 0, \dots, k - 1$.

Cuando $k = 3$, la spline se dice *cúbica*.

Un modelo general de regresión de spline regularizante asume que

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_j, \quad i = 1, \dots, n$$

donde y_i son observaciones de la función f evaluada en puntos x_i , y ε_i son errores de media nula, independientes, con una varianza común σ^2 .

Se define $R_\lambda : H^2([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$R_\lambda(s) = \int_a^b |s''(x)|^2 dx + \lambda \sum_{i=0}^n |s(x_i) - y_i|^2$$

y el problema (de ajuste e interpolación) es

$$\min_{H^2([a, b])} R_\lambda(s), \quad (3.6)$$

donde $H^2([a, b])$ es el espacio de Sobolev

$$H^2([a, b]) = \left\{ u \in L^2([a, b]); \frac{\partial^m u}{\partial x^m} \in L^2([a, b]) \forall 0 \leq m \leq 2 \right\},$$

donde las derivadas son en el sentido de distribuciones (ver [16]).

Debido a la gran complejidad del problema (3.6), se define el siguiente problema equivalente:

$$\min_{z \in \mathbb{R}^{n+1}} \left\{ \min_{s \in H^2([a,b]), s(x_i)=z_i} \int_a^b (s''(x))^2 dx + \lambda \sum_{i=0}^n (s(x_i) - y_i)^2 \right\}.$$

3.4.2. Splines de ajuste bicúbicas

Splines en dimensión 2

Sea U un espacio de funciones, todas definidas en algún conjunto X en los reales, y sea V un espacio de funciones definidas en algún conjunto Y en \mathbb{R} . Para cada $u, v \in U \times V$ se define su producto tensorial por

$$(u \otimes v)(x, y) := u(x)v(y), \quad (x, y) \in X \times Y$$

Más aun, el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de funciones sobre $X \times Y$ de la forma $u \otimes v$ para algún $u \in U$ y algún $v \in V$ se llama el producto tensorial de U con V y se denota por $U \otimes V$.

$$U \otimes V := \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i (u_i \otimes v_i); \alpha_i \in \mathbb{R}, u_i \in U, v_i \in V, i = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N} \right\}$$

y $U \otimes V$ es un espacio vectorial.

Una spline w en 2 dimensiones es un producto tensorial entre dos splines unidimensionales u y v .

Una función $w \in H^2([a, b]) \times H^2([c, d])$ se dice spline *bicúbica* cuando es el producto tensorial de 2 splines cúbicas $u \in H^2([a, b])$, $v \in H^2([c, d])$.

Problema de minimización asociado

El ajuste e interpolación se realiza encontrando la solución al siguiente problema de minimización (análogo al caso unidimensional):

$$\min_{s \in H^2([a,b]) \times H^2([c,d])} \left\{ \iint_{[a,b] \times [c,d]} \left(\frac{\partial^4 s}{\partial x^2 \partial y^2}(x, y) \right)^2 dx dy + \lambda \sum_{i,j} (s(x_i, y_j) - f_{ij})^2 \right\}$$

Este problema es tratado en textos como [37] y [11]. Más aún, MATLAB tiene una rutina (`csaps`) incorporada para calcular splines de ajuste bicúbicas.

Capítulo 4

Problema abordado en el trabajo

4.1. Modelo de imágenes a considerar

Dado un cuerpo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ a estudiar, se realiza una secuencia spin-eco para obtener imágenes de resonancia magnética en 2 dimensiones, de un slice dado de grosor Δz centrado en z_0 .

De aquí en adelante entenderemos a las funciones que tenían dependencia de z sin explicitar esta componente en el argumento, y en cambio explicitaremos la dependencia de los tiempos de eco $\{t_j\}_{j=1, \dots, N_t}$ definidos por:

$$t_j = TE \cdot j, \quad t_{N_t} = TE \cdot N_t = TR.$$

La secuencia de ecos permite obtener una secuencia de imágenes de densidad de spin reconstruida $\hat{\rho}(x, y, t_j)$ para cada tiempo de eco t_j .

Una imagen (en 2D) de resonancia magnética en el tiempo de eco t_j es una representación de la función $\hat{\rho}(x, y, t_j)$ en un conjunto de puntos

$$(x_l, y_m) = (l\Delta x, m\Delta y), \quad l = -n_x, \dots, n_x - 1, \quad m = -n_y, \dots, n_y - 1,$$

donde

$$\Delta x = \frac{L_x}{N_x}, \quad \Delta y = \frac{L_y}{N_y},$$

donde, además, $N_x = 2n_x$ es el número de puntos representados en el eje x , y $N_y = 2n_y$ es el número de puntos representados en el eje y .

Cuando hablemos del pixel (l, m) , nos referiremos al rectángulo

$$\Omega_{lm} = \left[\left(l - \frac{1}{2} \right) \Delta x, \left(l + \frac{1}{2} \right) \Delta x \right] \times \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \Delta y, \left(m + \frac{1}{2} \right) \Delta y \right]$$

Las ecuaciones (2.13) y (2.14) implican que

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(x, y, t_j) &= \Delta k_x \Delta k_y \sum_{p=-n_x}^{n_x-1} \sum_{q=-n_y}^{n_y-1} \left(\iint_{\mathbb{R}^2} \rho(x', y', t_j) e^{-2\pi i(x', y') \cdot (p\Delta k_x, q\Delta k_y)} dx' dy' \right) e^{2\pi i(px\Delta k_x + qy\Delta k_y)} \\ &= \Delta k_x \Delta k_y \sum_{p=-n_x}^{n_x-1} \sum_{q=-n_y}^{n_y-1} \iint_{\mathbb{R}^2} \rho(x', y', t_j) e^{-2\pi i(x', y') \cdot (k_x, k_y)} e^{2\pi i(px\Delta k_x + qy\Delta k_y)} dx' dy'\end{aligned}$$

Seguindo el criterio de muestreo de Nyquist, tomamos

$$\Delta k_x = \frac{1}{L_x} = \frac{1}{N_x \Delta x}, \quad \Delta k_y = \frac{1}{L_y} = \frac{1}{N_y \Delta y},$$

y se tiene que

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(x, y, t_j) &= \frac{1}{N_x \Delta x} \frac{1}{N_y \Delta y} \sum_{p=-n_x}^{n_x-1} \sum_{q=-n_y}^{n_y-1} \iint_{\mathbb{R}^2} \rho(x', y', t_j) e^{-2\pi i p \frac{x-x'}{N_x \Delta x}} e^{-2\pi i q \frac{y-y'}{N_y \Delta y}} dx' dy' \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \rho(x', y', t_j) \left(\frac{1}{N_x \Delta x} \sum_{p=-n_x}^{n_x-1} e^{-2\pi i p \frac{x-x'}{N_x \Delta x}} \right) \left(\frac{1}{N_y \Delta y} \sum_{q=-n_y}^{n_y-1} e^{-2\pi i q \frac{y-y'}{N_y \Delta y}} \right) dx' dy' .\end{aligned}$$

Definimos la función

$$Q_x(x) = \frac{1}{N_x \Delta x} \sum_{p=-n_x}^{n_x-1} e^{-2\pi i p \frac{x}{N_x \Delta x}} .$$

Luego de un desarrollo de esta suma geométrica, se obtiene que

$$Q_x(x) = \frac{1}{N_x \Delta x} \frac{\sin\left(\pi \frac{x}{\Delta x}\right)}{\sin\left(\pi \frac{x}{N_x \Delta x}\right)}$$

Por otro lado, se define $Q_y(y)$ de forma análoga, de modo que

$$\hat{\rho}(x, y, t_j) = \iint_{\mathbb{R}^2} \rho(x', y', t_j) Q_x(x - x') Q_y(y - y') dx' dy'$$

Consideraremos el caso en que $N_x = N_y =: N$ y $\Delta x = \Delta y$. Así, a las funciones Q_x y Q_y las llamamos simplemente Q . Entonces, para el pixel (l, m) ,

$$\boxed{\hat{\rho}(x_l, y_m, t_j) = \iint_{\mathbb{R}^2} \rho(x', y', t_j) Q(x_l - x') Q(y_m - y') dx' dy'} \quad (4.1)$$

Observación La función Q forma parte de la *función de sensibilidad de voxel* (ver [32]), la cual estudia la contribución de toda la muestra sobre el pixel (en nuestro caso hablamos de pixel en vez de voxel, pues estamos tratando imágenes en 2 dimensiones).

Modelo de un pixel donde influyen 2 materiales.

Analizando el efecto de la función Q en la integral de la ecuación (4.1), y bajo una suposición de que en una vecindad del pixel (a determinar), veremos que la densidad de spin reconstruida de un pixel se puede aproximar por la suma ponderada de la densidad de spin de los 2 materiales.

Para ello, hacemos un breve análisis de la función Q . En primer lugar, su integral sobre una vecindad de 0 es cercana a 1, convergiendo a 1 a medida que la vecindad aumenta su área.

Notemos, además (ver siguiente figura), que en el intervalo mencionado, la mayor contribución a la integral está dada por los valores cercanos a 0.

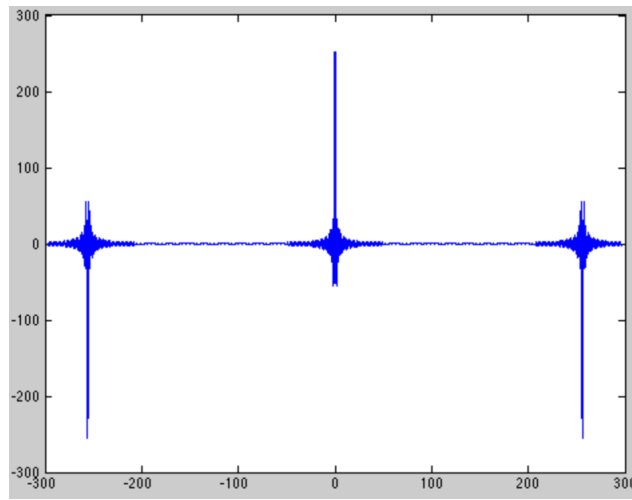


Figura 4.1: Función $Q(x)$ para $\Delta x = 1$, $N_x = 256$. El eje de las abscisas indica el valor de x , y el eje de las ordenadas indica los valores de $Q(x)$.

Esto motiva la siguiente aproximación:

Sean V_A, V_B las regiones donde se encuentra el tejido A y el tejido B , respectivamente. Si suponemos que en una vecindad V_{lm} de un pixel (l, m) donde

$$\iint_{V_{lm}} Q(x_l - x')Q(y_m - y')dx'dy' \approx 1$$

sólo hay 2 tejidos presentes, se tendrá que

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(x_l, y_m, t_j) &\approx \iint_{V_{lm}} \rho(x', y', t_j)Q(x_l - x')Q(y_m - y')dx'dy' \\ &= \iint_{V_{lm} \cap V_A} \rho_A(t_j)Q(x_l - x')Q(y_m - y')dx'dy' \\ &\quad + \iint_{V_{lm} \cap V_B} \rho_B(t_j)Q(x_l - x')Q(y_m - y')dx'dy'. \end{aligned}$$

Denotando

$$\alpha_{lm} = \iint_{V_{lm} \cap V_A} \rho_A(t_j) Q(x_l - x') Q(y_m - y') dx' dy',$$

es claro que

$$\iint_{V_{lm} \cap V_B} \rho_B(t_j) Q(x_l - x') Q(y_m - y') dx' dy' = 1 - \alpha_{lm}.$$

Así, finalmente la aproximación es

$$\boxed{\hat{\rho}(x_l, y_m, t_j) \approx \alpha_{lm} \rho_A(t_j) + (1 - \alpha_{lm}) \rho_B(t_j)} \quad (4.2)$$

4.2. Presentación del problema

Por la sección 2.4, se tiene que esta secuencia de imágenes viene con un ruido aditivo gaussiano asociado η . Como este ruido puede ser negativo, tomamos módulo a $\hat{\rho} + \eta$, de donde obtenemos la ecuación de la imagen para nuestro modelo:

$$\boxed{\hat{\rho}_M(x_l, y_m, t_j) = |\hat{\rho}(x_l, y_m, t_j) + \eta|} \quad (4.3)$$

El problema puede plantearse de la siguiente forma:

Dada una colección de imágenes de resonancia magnética siguiendo una secuencia spin-eco,

$$\{\hat{\rho}_M(x_l, y_m, t_j)\}_{l,m=-n,\dots,n-1},$$

obtenidas en cada tiempo de eco t_j , queremos obtener la mejor aproximación de $T_2(x, y)$, donde T_2 es el tiempo de decaimiento de la magnetización transversal.

Para ello estudiaremos la ecuación (4.2) en zonas de interés, en 2 casos:

1. Cuando $\rho_A \neq 0$ y $\rho_B = 0$ en todo tiempo de eco.
2. Cuando ρ_A y ρ_B son distintos de 0 en todo tiempo de eco.

La idea a desarrollar pretende mejorar los siguientes aspectos:

1. Poder estimar los valores de T_{2A} y T_{2B} .
2. Estimar la geometría de los objetos muestreados.

4.3. Reseña del trabajo anterior respecto al problema

Desde un enfoque puramente matemático, encontramos el problema de ajuste de sumas de exponenciales desde el punto de vista de ecuaciones diferenciales ordinarias (ver por ejemplo, [31], [33], [12], [15], [27]). Sin embargo, al tener al menos 2 términos a sumar en la exponencial,

el ajuste depende de las raíces de un polinomio de grado al menos 2. Esto trae consigo el problema de tener posiblemente raíces no reales, lo cual implica que los valores de T_2 obtenidos del ajuste no son reales.

Por otro lado, también hay métodos de segmentación de tejidos y estudio de los artefactos de volúmenes parciales: en [19] se estudia el efecto de volúmenes parciales con un enfoque estadístico, fijando la atención en los píxeles que son poco probables, dada una muestra de población; en [40] se plantea un modelo de clasificación de tejidos, usando conocimiento de los volúmenes parciales más probables en el cerebro, es decir, usando la información de los tejidos que, se sabe, pueden ser vecinos.

Además, en [2], se hace un estudio más específico, sobre estimaciones de T_2 con un modelo multiexponencial, en el cerebro de algunos pacientes que tienen esclerosis múltiple, mostrando que el modelo *bixponencial* discrimina mejor el tejido sano del enfermo que el modelo *monoexponencial*. Las estimaciones de T_2 usadas en ese artículo vienen del *método de Prony*, el cual será presentado en el Capítulo 5.

Capítulo 5

Desarrollo del problema

5.1. Estimación de T2: modelo simple.

5.1.1. Estimación 1: el algoritmo elemental

Típicamente, un modelo sencillo es suponer que la densidad de spin en el punto (x_l, y_m) está bien aproximada por la densidad de spin reconstruida en el pixel (l, m) , por lo cual se cumple la ecuación

$$\hat{\rho}(x_l, y_m, t_j) = \rho(x_l, y_m, 0)e^{-\frac{t_j}{T_2(x_l, y_m)}} \quad (5.1)$$

donde $0 = t_0, t_1, \dots, t_{N_e}$ son los tiempos de eco, donde N_e es el número de ecos muestreados. En esta fórmula, los datos medidos son $\rho(\vec{x}, t_j)$, y conocemos los tiempos t_j , para $j = 1, \dots, N_e$.

Para simplificar la notación, para referirnos a un pixel simplemente denotaremos \vec{x} en vez de (x_l, y_m) .

Luego basta con despejar

$$T_2(\vec{x}) = \frac{t_j}{\ln\left(\frac{\rho(\vec{x}, 0)}{\rho(\vec{x}, t_j)}\right)}$$

para cualquier tiempo de eco t_j .

Sin embargo, al haber presencia de ruido, la fórmula anterior puede arrojar un resultado distinto para cada par de tiempos de eco sucesivos. Entonces T_2 se puede estimar mediante el ajuste lineal sobre t_j que viene de (5.1):

$$\ln(\rho(\vec{x}, t_j)) = -\frac{1}{T_2(\vec{x})}t_j + \ln(\rho(\vec{x}, 0)) \quad (5.2)$$

Es decir, como sólo medimos $\rho(\vec{x}, t_j)$ y t_j , hacemos un ajuste lineal

$$\rho(\vec{x}, t_j) \approx at_j + b \quad (5.3)$$

y así obtenemos una estimación para T_2 :

$$T_2 \approx -\frac{1}{a}$$

Observación Diremos que $T_2(\vec{x}) = 0$ cuando el pixel \vec{x} corresponda a un tejido cuyo decaimiento de magnetización transversal sea lo suficientemente rápido como para no ser lo suficientemente detectada en los tiempos de eco.

Observación Si consideramos que los datos están sometidos a ruido, la densidad de spin inicial puede ser medida como distinta de 0. Esto se arregla imponiendo un nivel de ruido nl , de modo que

$$T_2(\vec{x}) \approx \begin{cases} -\frac{1}{a} & \text{si } \rho(\vec{x}, 0) \geq nl \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Observación Si en el ajuste lineal $T_2(\vec{x}) \in]-\infty, 0[\cup]R, +\infty[$, donde $R > 0$ es el máximo T_2 aceptable (debido a datos experimentales); impondremos $T_2(\vec{x}) = 0$.

5.1.2. Estimación 2: Ecos con ruido considerable

No hemos considerado el hecho de que el número de ecos puede ser mayor al necesario, en el sentido que los últimos ecos tendrán datos que pueden estar fuertemente contaminados por el ruido, debido al decaimiento de la densidad de spin. Por ello, para el modelo simple, proponemos lo expuesto a continuación.

Para cada \vec{x} , definimos la función *número de tiempos* $N_t(\vec{x})$, como

$$N_t(\vec{x}) = \text{mín} \left\{ j \in \{0, 1, \dots, N_e\} \mid \rho(\vec{x}, t_j) \leq nl \right\}$$

Así, definimos la estimación 2 como una modificación de la estimación 1, que simplemente viene de hacer, en cada pixel, el ajuste lineal lineal (5.3) a partir de las mediciones en tiempos de eco t_j , donde

$$j \in E_{eff}(\vec{x}) = \{1, 2, \dots, N_t(\vec{x})\}$$

Así, el ajuste lineal se denota $L(E_{eff}(\vec{x}))$ y está definido por

$$L(E_{eff}(\vec{x}), t_j) := a(E_{eff}(\vec{x})) \cdot t_j + b(E_{eff}(\vec{x}))$$

y T_2 se estima mediante

$$T_2(\vec{x}) \approx \begin{cases} -\frac{1}{a(E_{eff}(\vec{x}))} & \text{si } \rho(\vec{x}, 0) \geq nl \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

5.2. Problema de Volúmenes parciales

Como problema de motivación, consideremos la siguiente pregunta:

¿Cuál es el mejor mapa de T_2 para la figura siguiente?

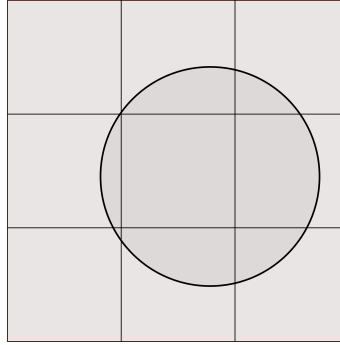


Figura 5.1: Esquema de un objeto en 9 pixeles. Notar que hay pixeles donde está parcialmente contenido.

Estudiaremos este problema para 2 situaciones:

1. $\rho_A(t_j) \neq 0$, $\rho_B(t_j) = 0$ para todo tiempo de eco t_j . Es decir, cuando el volumen parcial es de un tejido A que presenta densidad de spin y decaimiento de ésta en el proceso de muestreo de resonancia magnética, y un tejido B que presenta un decaimiento suficientemente rápido como para no ser muestreado (a estos materiales se les asigna un tiempo T_2 igual a 0). Al material B en este caso, le llamaremos *fondo negro*.
2. Cuando los volúmenes parciales están repartidos entre un material A y B , ambos presentando densidad de spin y decaimiento que puede ser muestreado. Es decir, cuando $\rho_A(t_j), \rho_B(t_j) \neq 0$.

5.3. Caso 1: Material A con fondo negro.

5.3.1. Obtención del valor de T_2 en cada pixel.

Proposición 5.1 *Si en un pixel, la porción de material A tiene un tiempo T_2 igual a T_{2A} , y el resto del pixel es un fondo negro, entonces el pixel mostrará un tiempo T_2 igual a T_{2A} .*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que el material A ocupa un volumen α del pixel, y el fondo ocupa un volumen β , como lo muestra la siguiente figura.

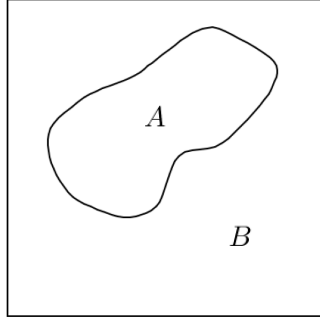


Figura 5.2: Esquema de un pixel con volumen parcial entre un tejido A y B .

La densidad de spin reconstruida para el pixel está dada por

$$\hat{\rho}(t_j) = \alpha\rho_A(t_j) + (1 - \alpha)\rho_B(t_j)$$

donde t_j son los tiempos de eco, ρ_A y ρ_B son las densidades de spin de cada porción del pixel. Sabemos que $\rho_B = 0$ para todo tiempo de eco, y así se tiene que

$$\rho(t_j) = \alpha\hat{\rho}_A(t_j)$$

Considerando el modelo monoexponencial, se tiene que

$$\rho_A(t_j) = \rho_{A,0}e^{-\frac{t_j}{T2_A}}$$

donde $\rho_{A,0}$ es la densidad de spin inicial. Se tiene entonces

$$\hat{\rho}(t_j) = \alpha\rho_{A,0}e^{-\frac{t_j}{T2_A}}$$

Esto último nos dice que para el pixel, su correspondiente tiempo $T2$ es $T2_A$.

□

Esta demostración tiene como consecuencia que, si en la figura 5.1 el canal consiste en un material A con fondo negro, el mapa de $T2$ para esos 9 pixeles correspondería a

$$\begin{bmatrix} 0 & T2_A & T2_A \\ T2_A & T2_A & T2_A \\ T2_A & T2_A & T2_A \end{bmatrix}$$

Esto nos indica que el mejor mapa de $T2$ para la resolución dada posee un valor correcto, pero no rescata la geometría del material A . Así, como ya está recuperado el valor correcto de $T2$, falta recuperar la geometría en algún sentido.

La geometría del material A sólo se puede recuperar si usamos más pixeles para representar el tejido, es decir, si logramos encontrar un procesamiento de la imagen que logre interpolar apropiadamente los valores de densidad de spin.

5.3.2. Propuesta de recuperación de la geometría de los objetos muestreados.

La geometría se recupera en 2 pasos principales

1. Interpolación y regularización.
2. Binarización.

Interpolación y regularización

Se propone realizar un ajuste spline bicúbico regularizante; o bien una extrapolación de rellenado con ceros, en el espacio de Fourier.

Binarización en cada eco

Como resultado del ajuste e interpolación, se produce un nuevo set de imágenes que tienen mayor cantidad de píxeles que las imágenes obtenidas en el muestreo de resonancia magnética.

En cada nueva imagen, por efecto de la regularidad de la interpolación, hay una tendencia a concentrar los valores altos alrededor de los píxeles que tienen altos valores. Esto produce que, alejándonos de tales píxeles, los valores son más pequeños.

Así, un píxel con un valor dado en una imagen de baja resolución se descompone en píxeles de mayor valor (cerca de los píxeles que originalmente tenían valores altos), y en píxeles de menor valor (alejados de los píxeles que originalmente tenían valores altos). Como los valores pequeños en baja resolución provienen de un volumen parcial, entonces esta descomposición se aprovecha para asignar a los píxeles que quedaron en niveles altos la condición de ya no ser un píxel de volumen parcial, sino como píxel de material A . Por otro lado, los píxeles que quedaron en niveles bajos se asignan como *fondo negro*.

Matemáticamente, para cada matriz $(\rho_{ij}(t_k))_{ij}$ con t_k los tiempos de eco, se define la matriz $(a_{ij}(t_k))_{ij}$ de la siguiente forma

- Se calcula un máximo $\bar{\rho}_k$ de la matriz $(\hat{\rho}_{ij}(t_k))_{ij}$.
- Dado un nivel $0 < L_1 < 1$, para cada entrada $\hat{\rho}_{ij}(t_k)$
 - Si $\hat{\rho}_{ij}(t_k) > L_1 \cdot \bar{\rho}_k$, entonces $a_{ij}(t_k) = 1$
 - Si no, $a_{ij}(t_k) = 0$

Finalmente, se construye una imagen que deja con el valor 1 a los píxeles (i, j) que obtuvieron el valor 1 (en el paso anterior) para un mínimo número (dado) de tiempos de eco, y deja con valor 0 al resto de píxeles.

Matemáticamente, a partir de las matrices $(a_{ij}(t_k))_{ij}$, se define la matriz $(b_{ij})_{ij}$ de la siguiente forma

- Definir un nivel $0 < L_2 < 1$.
- Para cada par (i, j) ,
 - Si $\frac{1}{(\text{Número de ecos})} \sum_{t_k} a_{ij}(t_k) > L_2$, entonces $b_{ij} = 1$.
 - Si no, entonces $b_{ij} = 0$.

El resultado es una matriz que, se propone, recupera la geometría de la zona de interés con volúmenes parciales en las imágenes de baja resolución.

5.3.3. Algoritmo de obtención de valor de T_2 y geometría.

En resumen, los pasos importantes para la recuperación de T2 son los siguientes:

1. Realizar ajuste, interpolación y binarización a las imágenes de densidad de spin.
2. Aplicar el modelo simple de estimación de T_2 presentado en la sección 5.1.2 para las imágenes de densidad de spin interpoladas.
3. Finalmente, se hace una multiplicación puntual entre las matrices de los 2 pasos anteriores. De esta forma se consigue un mapa de T2 que, además, recupera la geometría de los objetos que han sufrido de bajo muestreo.

Se muestra un esquema de algoritmo, mostrando el resultado parcial en cada paso (para más detalles, ir a la sección *Experimentos*).

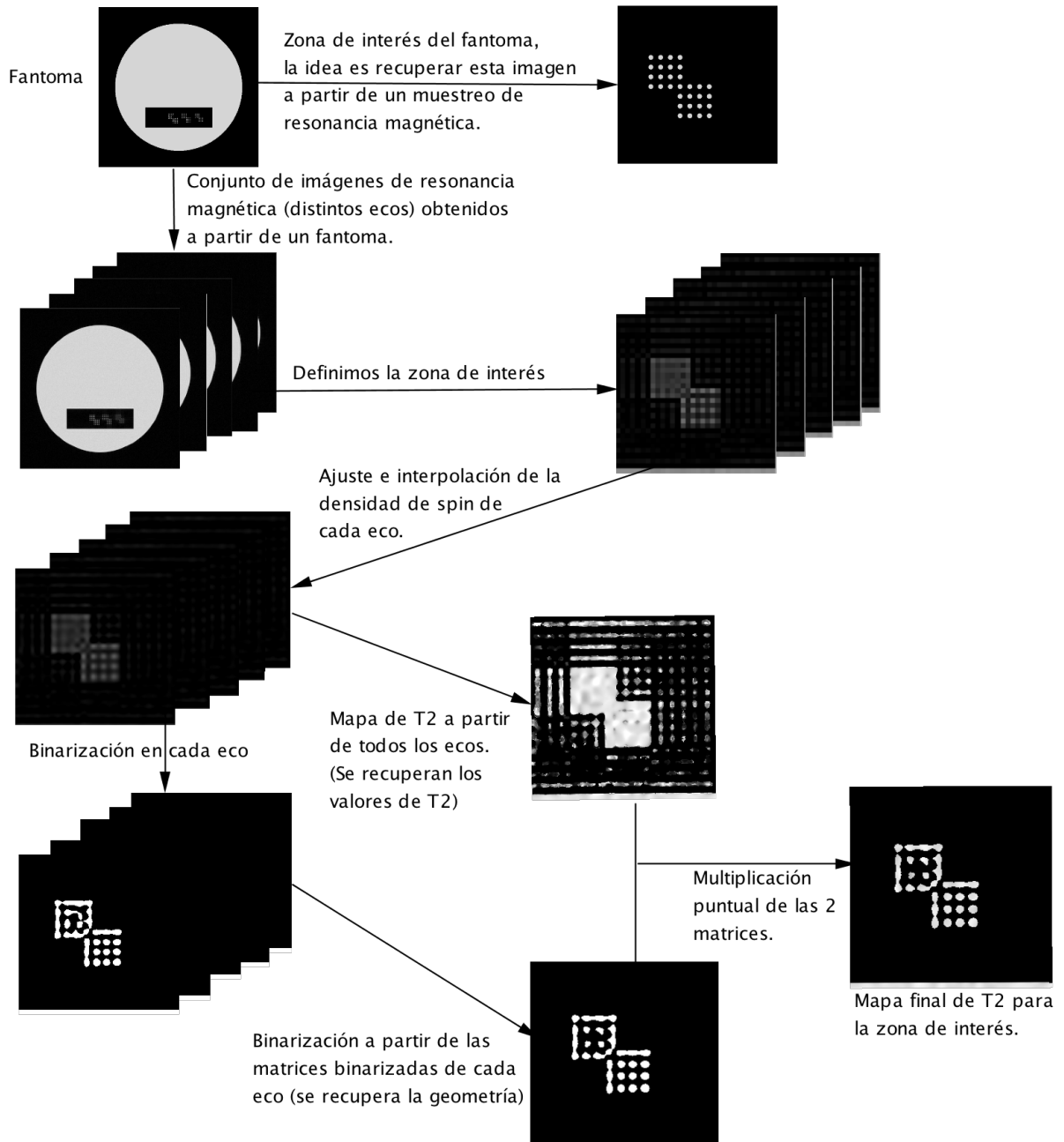


Figura 5.3: Esquema del algoritmo de recuperación de valor y geometría.

5.4. Caso 2: Tejidos A y B con densidad de spin distinta de cero en cada eco.

Al igual que antes, consideramos la densidad de spin reconstruida para un pixel, dada por la ecuación

$$\hat{\rho}(t_j) = \alpha\rho_A(t_j) + (1 - \alpha)\rho_B(t_j)$$

tomando en este caso $\rho_A(t_j), \rho_B(t_j) \neq 0$ para todo tiempo de eco.

Además, consideramos el modelo exponencial de decaimiento de densidad de spin, es decir,

$$\rho_A(t_j) = \rho_{A,0}e^{-\frac{t_j}{T_{2A}}}, \quad \rho_B(t_j) = \rho_{B,0}e^{-\frac{t_j}{T_{2B}}}$$

donde $\rho_{A,0}, \rho_{B,0}$ son las densidades de spin iniciales de A y B , respectivamente, y T_{2A}, T_{2B} son los tiempos T_2 respectivos.

Luego, se tiene que

$$\hat{\rho}(t_j) = \alpha\rho_A e^{-\frac{t_j}{T_{2A}}} + (1 - \alpha)\rho_B e^{-\frac{t_j}{T_{2B}}} \quad (5.4)$$

Así, el mapa de T_2 de baja resolución en este caso no nos entrega un valor que tenga un sentido físico. La solución en este caso entonces consiste en rescatar los valores de T_2 de A y B y situarlos en una reconstrucción de la geometría de los volúmenes parciales.

5.4.1. Interpolación y regularización

Se propone realizar un ajuste spline bicúbico regularizante; o bien una extrapolación de rellenado con ceros, en el espacio de Fourier, según ha sido explicado en el Capítulo 3.

5.4.2. Obtención de los valores de T_2 de A y B .

El problema de ajuste para la ecuación 5.4 es más complicado que en el caso de sólo tener una exponencial, puesto que los parámetros a descubrir son: $\alpha\rho_A, T_{2A}, (1 - \alpha)\rho_B, T_{2B}$.

Sea y la función definida por

$$y(t) = \alpha\rho_A e^{-\frac{t}{T_{2A}}} + (1 - \alpha)\rho_B e^{-\frac{t}{T_{2B}}} \quad (5.5)$$

y sea el conjunto de mediciones denotado por $\rho_m(t_j)$, donde t_j son los tiempos donde se producen los ecos.

Buscaremos una aproximación de los parámetros $\alpha\rho_A, (1 - \alpha)\rho_B, T_{2A}, T_{2B}$ a partir de las mediciones $\rho_m(t_j)$.

Sean

$$\begin{aligned} u &= e^{-\frac{\Delta t}{T_{2A}}} + e^{-\frac{\Delta t}{T_{2B}}}, \\ v &= -e^{-\frac{\Delta t}{T_{2A}}} e^{-\frac{\Delta t}{T_{2B}}}. \end{aligned}$$

Se puede verificar que

$$y(t + 2\Delta t) - uy(t + \Delta t) - vf(t) = 0,$$

lo cual implica que

$$y(t_{j+2}) - uy(t_{j+1}) - vy(t_j) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, N_t - 2. \quad (5.6)$$

Definiendo

$$A = \begin{bmatrix} y(t_2) & y(t_1) \\ y(t_3) & y(t_2) \\ \vdots & \vdots \\ y(t_{N_t-2}) & y(t_{N_t-3}) \\ y(t_{N_t-1}) & y(t_{N_t-2}) \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} y(t_3) \\ y(t_4) \\ \vdots \\ y(t_{N_t-1}) \\ y(t_{N_t}) \end{bmatrix},$$

la ecuación (5.6) se puede escribir como

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = b \quad (5.7)$$

Notar que en la ecuación (5.7), basta con ocupar las dos primeras filas de A y b . Sin embargo, en caso de haber ruido presente, en la ecuación (5.7) no hay igualdad, sino que se convierte en

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \varepsilon = b$$

donde $\varepsilon \in \mathbb{R}^{N_t-2}$ es el vector del ruido asociado al experimento. Así, el problema se convierte en buscar u, v que realicen el siguiente mínimo:

$$\min_{(u,v)} \left\| A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - b \right\|_2^2.$$

En este problema, sí importan todas las filas de A y b . Así, el problema de 2 exponenciales se reduce a un ajuste bilineal, el cual tiene como solución

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T b.$$

Sean

$$\alpha = e^{-\frac{\Delta t}{T_{2A}}}, \quad \beta = e^{-\frac{\Delta t}{T_{2B}}}.$$

Notar que

$$u = \alpha + \beta, \quad v = -\alpha\beta.$$

Podemos despejar α y β a partir de u y v , mediante la solución a la siguiente ecuación de segundo grado:

$$(x^2 - ux - v) = 0,$$

pues $x^2 - ux - v = (x - \alpha)(x - \beta)$.

Así, determinamos T_2 de la siguiente forma:

$$T_{2A} = -\frac{\Delta t}{\ln(\alpha)}, \quad T_{2B} = -\frac{\Delta t}{\ln(\beta)}$$

5.4.3. Propuesta de recuperación de la geometría de los objetos muestreados.

Aún no hemos recuperado $\alpha\rho_A, (\alpha - 1)\rho_B$. Sin embargo, se recupera de manera análoga a la obtención de T_{2A} y T_{2B} . Consideramos la ecuación

$$\hat{\rho}(t_j) = \alpha\rho_A e^{-\frac{t_j}{T_{2A}}} + (1 - \alpha)\rho_B e^{-\frac{t_j}{T_{2B}}}. \quad (5.8)$$

Definiendo

$$A = \begin{bmatrix} e^{-\frac{t_1}{T_{2A}}} & e^{-\frac{t_1}{T_{2B}}} \\ e^{-\frac{t_2}{T_{2A}}} & e^{-\frac{t_2}{T_{2B}}} \\ \vdots & \vdots \\ e^{-\frac{t_{N_t-1}}{T_{2A}}} & e^{-\frac{t_{N_t-1}}{T_{2B}}} \\ e^{-\frac{t_{N_t}}{T_{2A}}} & e^{-\frac{t_{N_t}}{T_{2B}}} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \hat{\rho}(t_1) \\ \hat{\rho}(t_2) \\ \vdots \\ \hat{\rho}(t_{N_t-1}) \\ \hat{\rho}(t_{N_t}) \end{bmatrix},$$

la ecuación (5.8) se puede escribir matricialmente como

$$Ax + \varepsilon = b,$$

de donde se obtiene el problema de minimización

$$\min_x \|Ax - b\|_2^2.$$

Resolviéndolo, se obtiene inmediatamente lo buscado, pues $x_1 = \alpha\rho_A, x_2 = (1 - \alpha)\rho_B$.

Luego, la geometría se recupera realizando la siguiente binarización: si $\alpha\rho_A > (1 - \alpha)\rho_B$, al pixel en cuestión se le asigna T_{2A} . Si no, al pixel se le asigna T_{2B} .

Algoritmo de obtención de valor de T_2 y geometría.

En resumen, los pasos importantes para la recuperación de T_2 son los siguientes:

1. Realizar ajuste e interpolación en el espacio de la imagen (o bien rellenado con ceros en el espacio de Fourier) en cada imagen correspondiente a algún tiempo de eco.

2. Realizar el proceso de obtención de T_{2A} y T_{2B} .
3. Realizar el proceso de binarización descrito. De esta forma se consigue un mapa de T_2 que recupera la geometría de los objetos que han sufrido de bajo muestreo.

Modelo mixto

Una variante al método de obtención de T_2 mediante una o dos exponenciales, es hacer una comparación entre ambos modelos, y para cada pixel, elegir aquel modelo que se ajuste de mejor manera al pixel en cuestión, es decir, el modelo que tenga menor error cuadrático.

5.5. Experimentos: Fantoma artificial

5.5.1. Descripción del fantoma

Se ha diseñado un fantoma que recoge algunos elementos importantes para el estudio.

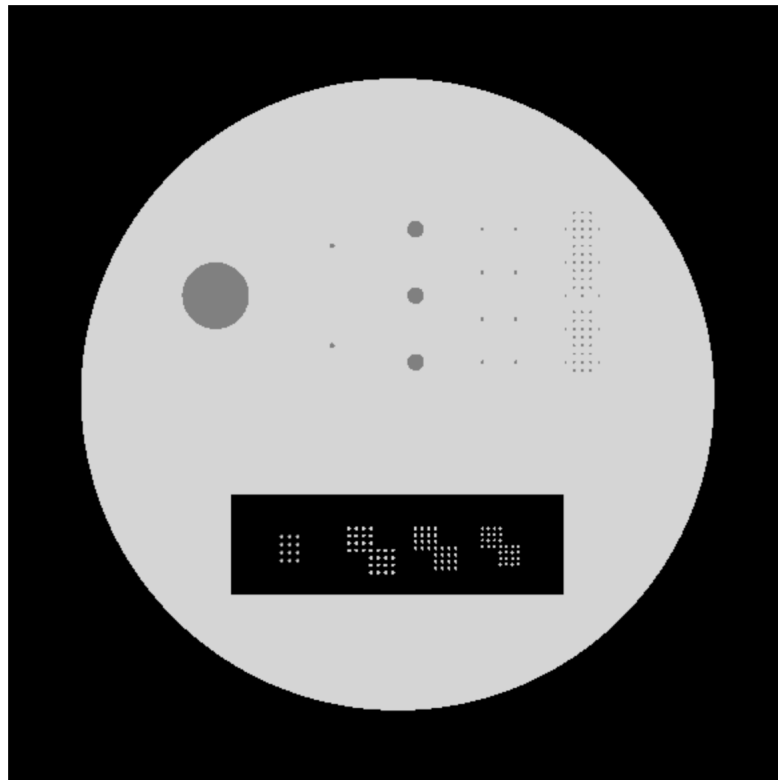


Figura 5.4: Fantoma sin ruido en alta resolución

Se representan 2 materiales que poseen propiedades magnéticas, y un fondo negro. Geométricamente, los elementos importantes son:

1. Una zona de canales de un material A , con un fondo negro.
2. Una zona de canales de un material A con un fondo de material B .

En las siguientes secciones analizaremos las zonas mencionadas, mostrando las técnicas usadas para recuperar la geometría original del fantoma diseñado.

Por otro lado, hacer un submuestreo muestra cómo es que la imagen no se consigue con precisión:

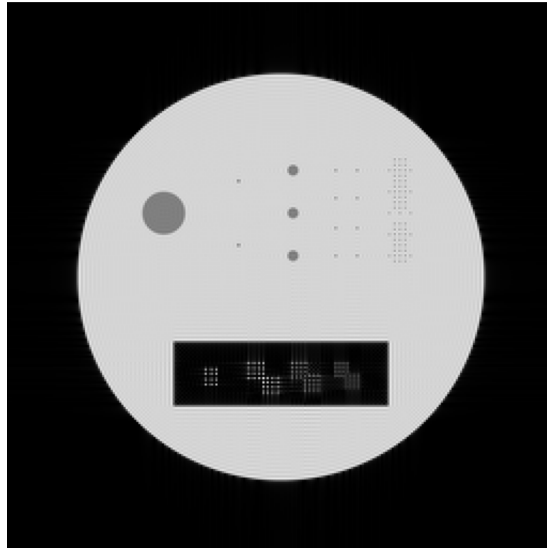


Figura 5.5: Fantoma sometido a un muestreo de $2^8 \times 2^8$ píxeles, sin presencia de ruido gaussiano.

El fantoma muestreado se produce de la siguiente forma:

1. Se ha programado el fantoma de alta resolución. Es una secuencia de 32 imágenes (una por cada eco) de $2^{13} \times 2^{13}$ píxeles.
2. Se aplica transformada de Fourier discreta a cada imagen.
3. A la transformada de Fourier discreta, se le consideran sólo las frecuencias bajas. En nuestro caso, el rectángulo central de $2^8 \times 2^8$ píxeles en por cada eco. Esto simula el muestreo finito.
4. A esta secuencia de imágenes de $2^8 \times 2^8$, se le aplica antitransformada de Fourier discreta. Esto simula la densidad de spin reconstruida bajo un muestreo finito.
5. Si agregamos ruido, éste es gaussiano sobre cada pixel. Es importante destacar que las imágenes de densidad de spin reconstruida resultan ser complejas, es decir, cada pixel tiene una parte real y una parte imaginaria. Entonces, para la parte real de cada imagen, se aplica en cada pixel un ruido aditivo aleatorio de distribución normal de media nula y desviación estándar σ . Se hace lo mismo para la parte imaginaria. También es importante destacar que para la parte real e imaginaria, y para cada eco, el ruido aplicado corresponde a un lanzamiento aleatorio distinto del ruido, pero el ruido sigue siendo con la misma distribución.

6. Finalmente, para que las imágenes correspondan a números reales, se aplica módulo a cada pixel. Resultando así la simulación el conjunto de imágenes de resonancia magnética que se usualmente entrega el resonador magnético.

5.5.2. Zona de interés 1: Material A con fondo negro

De la figura 5.4, extraemos la siguiente zona de interés:

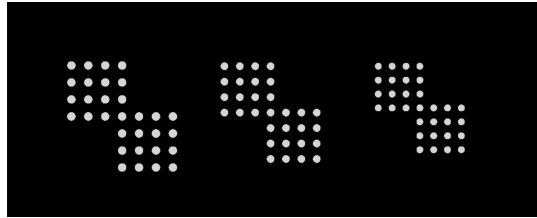


Figura 5.6: Fantoma sin ruido en alta resolución. Hay 3 bloques de canales, cuyos diámetros son, de izquierda a derecha: 1.1 mm, 1.0 mm, 0.9 mm.

Se estudia un muestreo que produce imágenes de 256×256 pixeles, lo cual significa que el lado de un pixel (que es un cuadrado) es de 1mm. El muestreo nos entrega la siguiente imagen para esta zona de interés

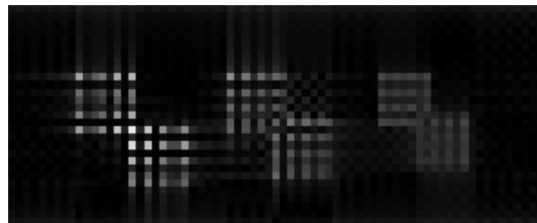


Figura 5.7: Fantoma muestreado (sin ruido).

Notemos que según lo explicado en el proceso de binarización, el bloque de canales a la derecha podría perder precisión. Para solucionar este posible problema (que de hecho en los experimentos se hace presente), es mejor seleccionar por separado cada bloque de canales, que llamaremos, de izquierda a derecha, bloque de canales 1, 2 y 3, respectivamente.

Además, el ajuste e interpolación bicúbica, y la extrapolación que mostramos en esta sección, se han realizado de modo que cada pixel de la imagen muestreada se divide en $2^3 \times 2^3$ pixeles; a esta interpolación o extrapolación, le llamaremos *de factor 3*.

Bloque 1 de canales: caso sin ruido

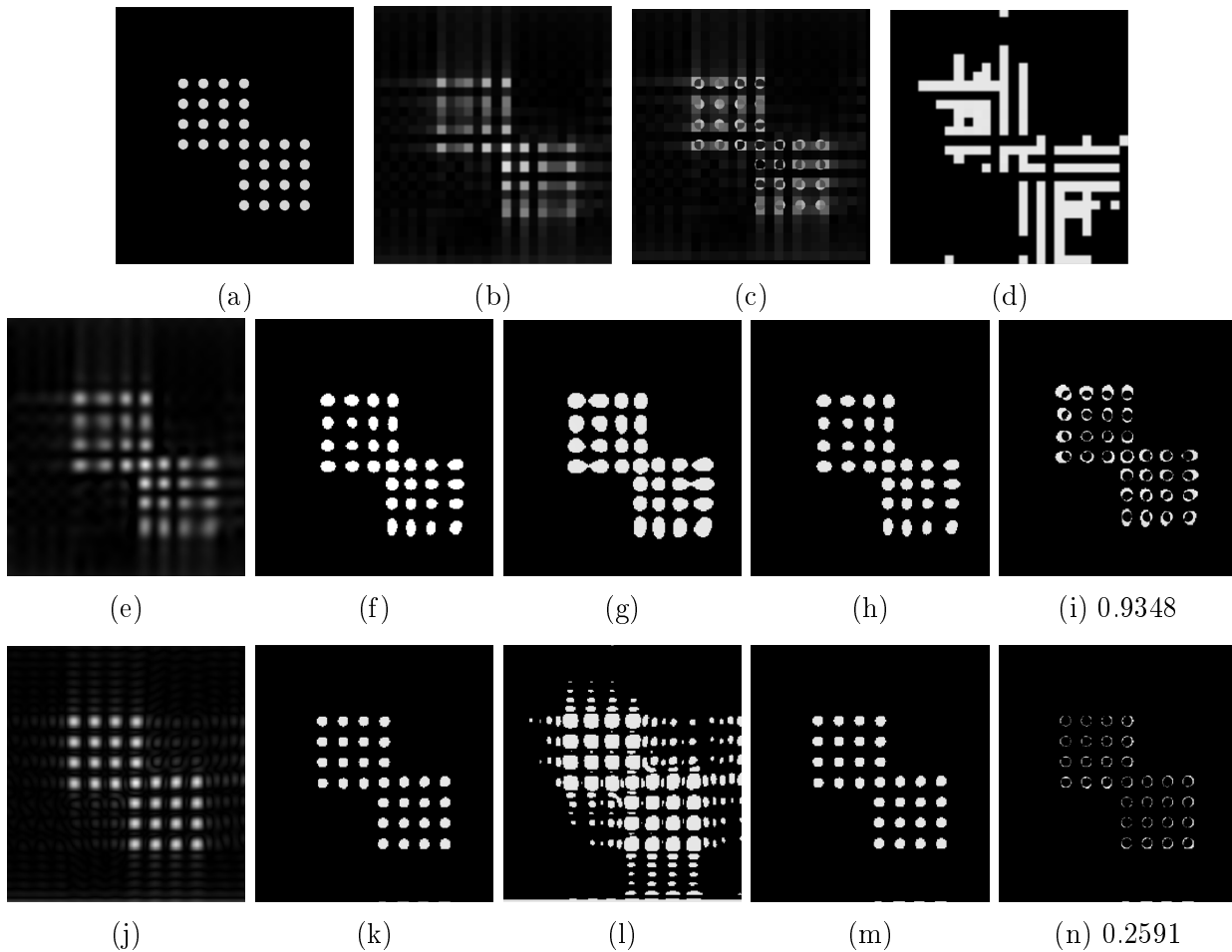


Figura 5.8: Bloque 1 de canales. Se muestra en (a) la zona en alta resolución; en (b), el muestreo; en (c), el módulo de la diferencia de entre la imagen de alta resolución y la imagen muestreada. Estas tres primeras imágenes corresponden a la densidad de spin en el primer eco, y su escala de grises está reescalada en $[0, 255]$, desde el intervalo $[0, 600]$. Se muestra además en (d) el mapa de T_2 de baja resolución, donde la escala de grises ha sido reescalada desde $[0, 150]$. En adelante, las imágenes de densidad de spin estarán reescaladas desde $[0, 600]$ y las imágenes de T_2 desde $[0, 150]$. La segunda fila muestra el proceso de reconstrucción usando interpolación en el espacio de la imagen: (e) es la interpolación bicúbica, (f) es la binarización, (g) es el mapa de T_2 obtenido a partir de las imágenes interpoladas, (h) es la imagen final de T_2 , (i) representa el módulo de la diferencia entre la reconstrucción de T_2 y la imagen ideal. La tercera columna es análoga a la segunda, salvo que en vez de interpolación, se hizo una extrapolación en el espacio de Fourier.

Casos con ruido.

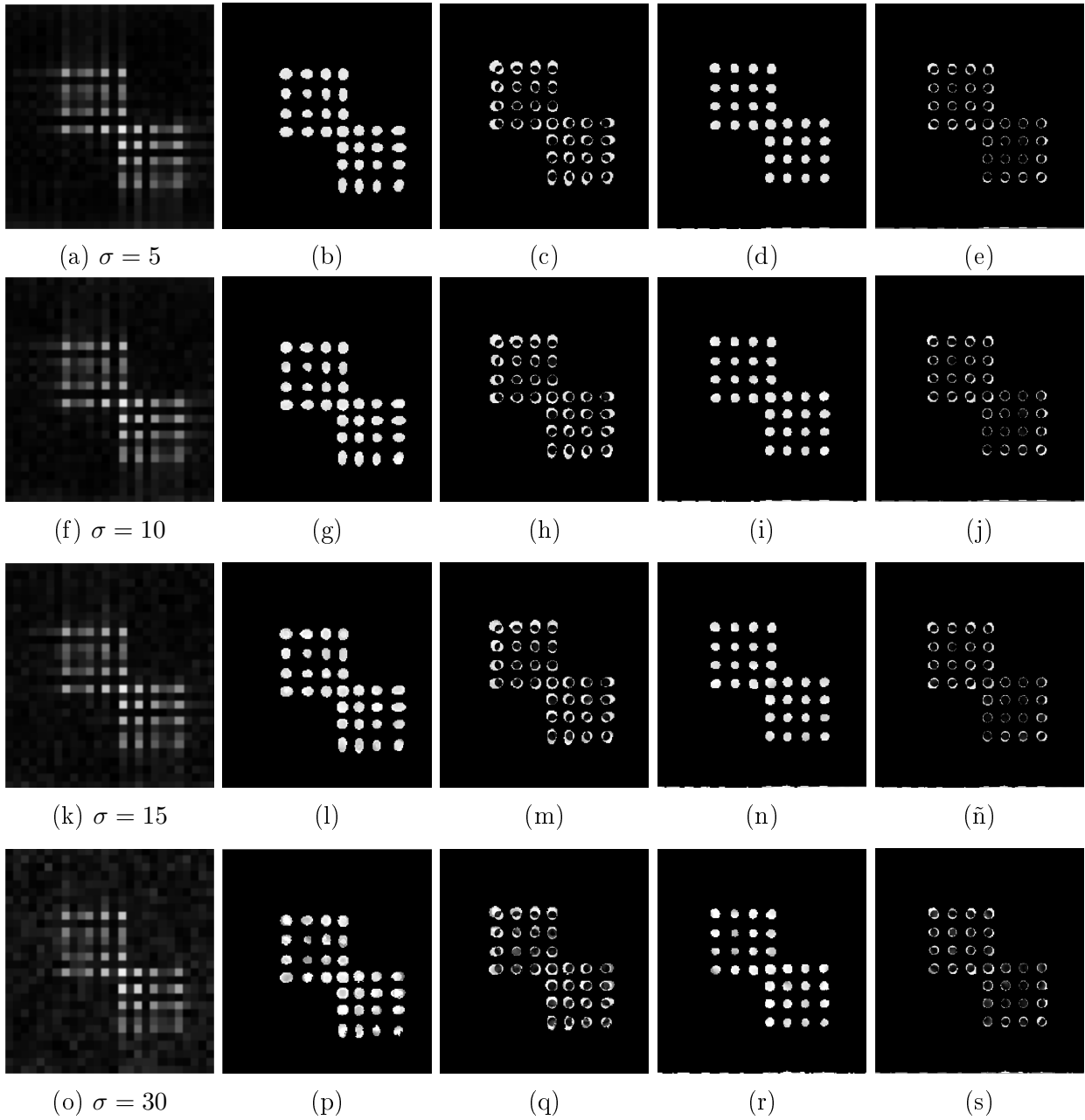


Figura 5.9: Representación de la reconstrucción del mapa de T_2 para distintos niveles de ruido. (a) muestra el módulo de la densidad de spin (primer eco) reconstruida, (b) muestra el mapa de T_2 reconstruido a partir de las splines bicúbicas, (c) muestra el módulo de la diferencia entre T_2 reconstruido y el T_2 ideal. Además, (d) muestra el mapa de T_2 reconstruido a partir de la extrapolación en el espacio de Fourier, (e) muestra el módulo de la diferencia entre T_2 reconstruido en este caso, y T_2 ideal. Cada fila es análoga a la primera, sin embargo es para distintos niveles de ruido, los cuales se muestran en la primera imagen de cada fila.

Mostramos a continuación una tabla resumen de los resultados de 50 realizaciones de ruido.

Zona	σ	Interpolación					Extrapolación				
		$\langle T_{2A} \rangle$	%CF	σ_A	err_{int}	err_{ext}	$\langle T_{2A} \rangle$	%CF	σ_A	err_{int}	err_{ext}
1	0	134.998	-	0.181	0.284	0.636	135.000	-	0.179	0.224	0.396
	5	135.244	100	4.297	0.283	0.609	134.879	100	3.012	0.228	0.392
	10	135.287	100	9.132	0.283	0.621	134.644	100	6.178	0.229	0.388
	15	134.909	100	13.9926	0.283	0.632	134.019	100	9.253	0.236	0.382
	30	132.042	100	27.510	0.303	0.633	133.332	100	18.816	0.269	0.358
2	0	135.060	-	0.206	0.234	1.081	135.098	-	0.226	0.305	0.787
	5	130.157	100	20.906	0.259	0.941	134.169	100	8.312	0.323	0.766
	10	121.498	48	31.358	0.295	0.851	131.814	100	16.564	0.339	0.745
	15	113.564	0	37.857	0.335	0.769	127.997	100	23.573	0.374	0.704
	30	92.456	0	46.252	0.462	0.586	112.713	0	37.329	0.401	0.558
3	0	134.979	-	0.101	0.553	1.085	134.989	-	0.128	0.588	1.272
	5	124.628	90	28.833	0.631	0.986	126.441	100	26.641	0.643	1.115
	10	106.427	0	39.394	0.714	0.831	115.180	2	35.506	0.717	0.942
	15	90.069	0	42.748	0.767	0.697	107.332	0	40.139	0.782	0.832
	30	60.7955	0	41.304	0.847	0.446	94.607	0	45.286	0.908	0.623

Tabla 5.1: Tabla resumen de resultados de los experimentos de recuperación de T_2 para 1 material, para distintos niveles de ruido (de desviación estándar σ), y luego de haber hecho interpolación spline bicúbica o extrapolación de rellenado con ceros en el espacio de Fourier.

A continuación se indica el significado de cada una de las columnas de la tabla anterior:

- $\langle T_{2A} \rangle$ corresponde al promedio de T_2 reconstruido del tejido A en la muestra.
- %CF corresponde al porcentaje de casos (de los 50 experimentos) donde el promedio de T_2 reconstruido tiene un error menor al 10 % del valor original, es decir, cuando $|\langle T_{2A} \rangle - 135| < 13,5$. Notar que sin ruido este indicador no tiene sentido, pues no hay aleatoriedad en el experimento.
- σ_A corresponde a la desviación estándar de T_2 reconstruido del tejido A en la muestra.
- err_{int} corresponde al error cuadrático entre la reconstrucción de T_2 y el mapa ideal de T_2 (es decir, el original del fantoma), sólo en los pixeles donde idealmente hay tejido A . Este error va dividido por la norma del mapa ideal de T_2 en los pixeles donde idealmente hay tejido A .
- err_{ext} corresponde al error cuadrático entre la reconstrucción de T_2 y el mapa ideal de T_2 (es decir, el original del fantoma), sólo en los pixeles donde idealmente no hay tejido A . Este error va dividido por la norma del mapa ideal de T_2 en los pixeles donde idealmente no hay tejido A .

De los resultados que se muestran, se deduce que, en general, realizar extrapolación en el espacio de Fourier nos entrega mejores resultados, en el sentido que se ajustan mejor y el ruido daña menos los resultados.

5.5.3. Zona de interés 2: material B con fondo de material A .

Nuestra zona de interés es la que se muestra en la siguiente figura:

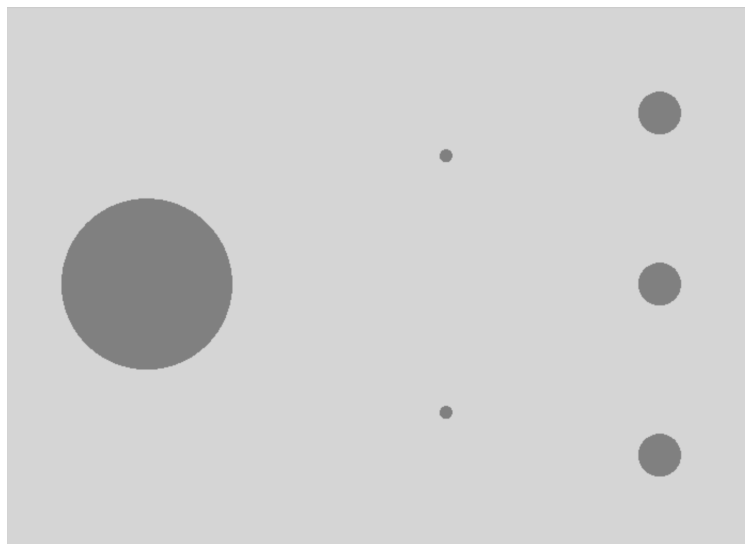


Figura 5.10: Zona de interés en alta resolución.

El muestreo sin ruido produce la siguiente imagen (de densidad de spin en primer eco)

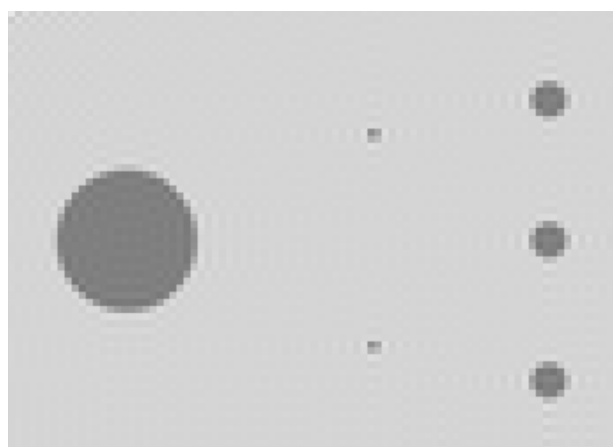


Figura 5.11: Densidad de spin (primer eco) con un muestreo de $2^8 \times 2^8$ pixeles (sólo se muestra la zona de interés).

Se realiza una interpolación bicúbica de factor 3. Luego de eso, se realizan los mapas de T_2 con el modelo de 1 exponencial, 2 exponenciales, y mixto.



Figura 5.12: T_2 que resulta de la spline bicúbica y el modelo de una exponencial.

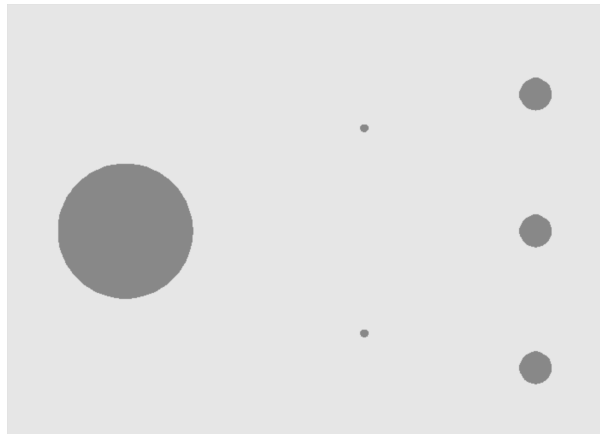


Figura 5.13: T_2 que resulta de la spline bicúbica y el modelo de 2 exponenciales.

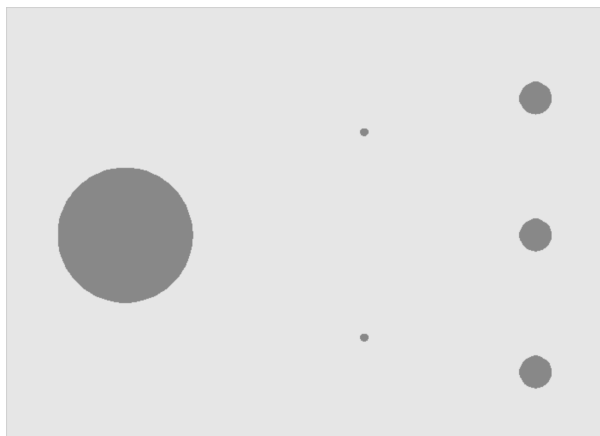


Figura 5.14: T_2 que resulta de la spline bicúbica y el modelo mixto.

Se puede observar que el modelo de 1 exponencial sigue teniendo los defectos de la imagen de baja resolución: se observa el fenómeno de Gibbs, y la imagen está suavizada. Por otro lado, se puede observar que no hay diferencias apreciables (visualmente) entre el mapa de T_2

obtenido mediante el modelo de 2 exponenciales y el modelo mixto. Además, se observa que estos 2 métodos logran reconstruir de buena manera el mapa de T_2 original del fantoma que ha sido construido.

Por otro lado, realizando una extrapolación en el espacio de Fourier de factor 3, se tienen las siguientes imágenes de reconstrucción de T_2 :



Figura 5.15: T_2 que resulta del rellenado con ceros y el modelo de una exponencial.

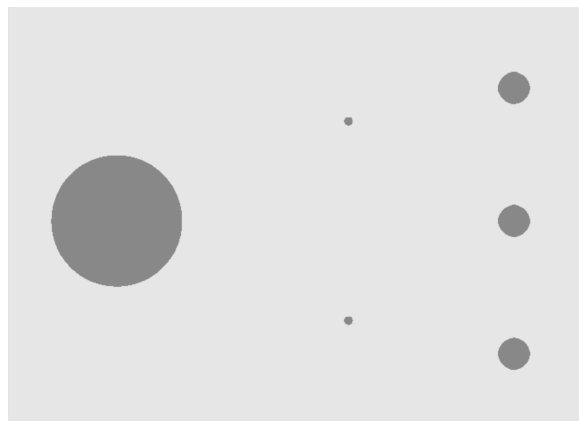


Figura 5.16: T_2 que resulta del rellenado con ceros y el modelo de dos exponenciales.

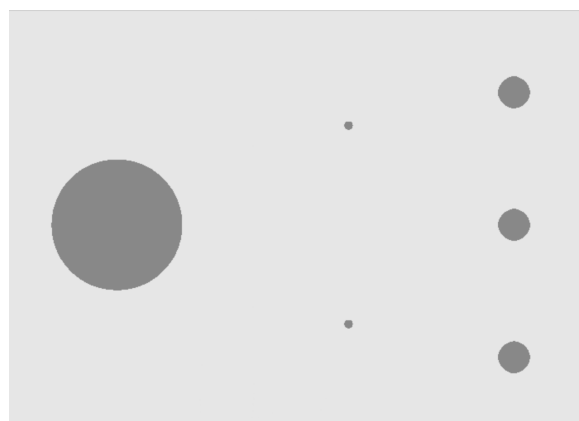


Figura 5.17: T_2 que resulta del rellenado con ceros y el modelo mixto.

Finalmente, mostramos un resumen de resultados para los tres modelos en el caso de dos tejidos. Se presentan sin presencia de ruido (más adelante se mencionará el caso con ruido).

		Tejido				Total	
		A		B		Interp	Extrap
		Interp	Extrap	Interp	Extrap		
Monoexp	$\langle T_2 \rangle$	134.8947	134.9073	81.9039	81.6066	-	-
	σ_{T_2}	1.5042	1.4528	8.0418	7.9083	-	-
	err	0.0240	0.0274	0.0555	0.1468	0.0231	0.0267
Biexp	$\langle T_2 \rangle$	135.0154	135.0154	80.0111	80.0138	-	-
	σ_{T_2}	0.0011	0.0081	0.0046	0.0117	-	-
	err	0.0239	0.0038	0.0485	0.0526	0.0232	0.0075
Mixto	$\langle T_2 \rangle$	135.0154	135.0154	80.0111	80.0138	-	-
	σ_{T_2}	0.0011	0.0069	0.0046	0.0082	-	-
	err	0.0239	0.0056	0.0485	0.0403	0.0232	0.0004

Tabla 5.2: Tabla resumen de resultados. $\langle T_2 \rangle$ se refiere al promedio de T_2 para un tejido en particular. σ_{T_2} corresponde a la desviación estándar del T_2 reconstruido, para un tejido en particular. err corresponde a la norma de la diferencia entre la imagen reconstruida y la ideal, dividido por la norma de la imagen ideal.

En la tabla se observa que el modelo de una exponencial es menos preciso que los modelos de dos exponenciales y mixto. Además, se ve que el modelo mixto es muy parecido al modelo de 2 exponenciales, lo cual nos indica que en la mayoría de los pixeles, el modelo de 2 exponenciales se ajusta mejor a las observaciones.

En cuanto al ruido, el método resulta ser insuficiente para la obtención de valores de T_2 que se ajusten mejor que el modelo de una exponencial, cuando se aplica un nivel de ruido realista de un experimento. El problema yace en el hecho que el modelo puede interpretar el ruido como oscilaciones, y en la ecuación de segundo grado que se vió en el desarrollo del método, pueden aparecer raíces complejas, las cuales nos llevan a tiempos T_2 complejos, situación que no se ajusta con el hecho que T_2 siempre es real no negativo.

Conclusión

Se ha visto que las interpolaciones ayudan a reconstruir la geometría de los tejidos del fantoma, tanto para el caso de un material, como para el caso de dos materiales.

En cuanto al caso de un material, se ve que es posible reconstruir la geometría de los círculos que tienen diámetro más grande que la medida del lado de un pixel, para los niveles de ruido presentados. Si el diámetro es igual a la medida del lado de un pixel, también es posible reconstruir la geometría, pero el error aumenta, y el valor de $T2$ se pierde a medida que el ruido es más grande. Si el diámetro es menor que el lado de un pixel, aunque no haya ruido, no se recupera del todo la geometría del objeto, y el ruido es mucho más dañino para la reconstrucción. Las razones son claras debido a las ecuaciones presentadas en el trabajo: cuando un objeto es más pequeño dentro de un pixel, tiene menores valores de densidad de spin, lo cual es más propenso a ser contaminado y confundido con ruido en el método de reconstrucción.

En cuanto al caso de dos materiales, se logra una reconstrucción satisfactoria de la geometría, con las mismas limitantes en cuanto a los tamaños de los objetos que en el caso de un material. Sin embargo, el método de obtención de valores de $T2$ para el modelo de 2 exponenciales es un problema que requerirá futuros desarrollos, debido a que el método presentado aún no es satisfactorio para niveles de ruido realistas de un experimento. Una de las ideas a seguir, y que se espera tenga resultados favorables, es poder filtrar, para cada pixel, la sucesión de densidades de spin en cada eco, de modo que tal función de densidad de spin filtrada en el tiempo, preserve las características de una suma de exponenciales reales negativas: ser una función estrictamente decreciente y convexa.

Además, es importante mencionar que el problema tratado en este trabajo tiene muchas extensiones. En primer lugar, tratar de mejor forma el ruido, como ya se ha mencionado. Otras extensiones posibles son estudiar el caso en que hay difusión, es decir, un intercambio molecular cerca de los bordes de cada tejido. También se puede estudiar en el caso con objetos en movimiento siendo muestreados, como es el caso de sangre circulando en vasos sanguíneos. Así, el problema se va comprendiendo y desarrollando de manera cada vez más precisa al ir complejizando la fenomenología. Sin embargo, es importante tener una dificultad superada para ir al paso siguiente.

Bibliografía

- [1] A. Abragam. *The Principles of Nuclear Magnetism*. International Series of Monographs **32**. Oxford University Press, 1961.
- [2] J. P. Armspach, D. Gounot, L. Rumbach, and J. Chambron. In vivo determination of multiexponential T2 relaxation in the brain of patients with multiple sclerosis. *Magnetic Resonance Imaging*, 9(1):107–113, 1991.
- [3] V. I. Arnol'd. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics **60**. Springer Science & Business Media, 2013.
- [4] M. Bergounioux. Second order variational models for image texture analysis. *Advances in Imaging and Electron Physics*, 181:35–124, 2014.
- [5] F. Bloch. Nuclear induction. *Physical Review*, 70(7-8):460, 1946.
- [6] E. O. Brigham and C. Yuen. The fast Fourier transform. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 8(2):146–146, 1978.
- [7] R. W. Brown, Y.-C. N. Cheng, E. M. Haacke, M. R. Thompson, and R. Venkatesan. *Magnetic Resonance Imaging: Physical Principles and Sequence Design*. John Wiley & Sons, 2014.
- [8] A. Carpio, O. Dorn, M. Moscoso, F. Natterer, G. C. Papanicolaou, M. L. Rapun, A. Teta, and L. L. Bonilla. *Inverse Problems and Imaging: Lectures Given at the CIME Summer School Held in Martina Franca, Italy, September 15-21, 2002*. Springer, 2009.
- [9] T. F. Chan and J. J. Shen. *Image Processing and Analysis: Variational, PDE, Wavelet, and Stochastic Methods*. SIAM, 2005.
- [10] K. J. Chang and H. Jara. Applications of quantitative T1, T2, and proton density to diagnosis. *Applied Radiology*, 34, 2005.
- [11] C. De Boor. *A Practical Guide to Splines*. Applied Mathematical Sciences **27**. Springer-Verlag New York, 1978.
- [12] J. E. Diamessis. Least-square-exponential approximation. *Electronics Letters*, 8(18):454–455, 1972.

- [13] R. L. Dixon and K. E. Ekstrand. The physics of proton NMR. *Medical Physics*, 9(6):807–818, 1982.
- [14] C. L. Epstein. *Introduction to the Mathematics of Medical Imaging*. SIAM, 2008.
- [15] J. W. Evans, W. B. Gragg, and R. J. LeVeque. On least squares exponential sum approximation with positive coefficients. *Mathematics of Computation*, 34(149):203–211, 1980.
- [16] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics **19**. American Mathematical Society, 1998.
- [17] T. C. Farrar and E. D. Becker. *Pulse and Fourier Transform NMR: Introduction to Theory and Methods*. Elsevier, 2012.
- [18] P. Getreuer, M. Tong, and L. A. Vese. A variational model for the restoration of MR images corrupted by blur and Rician noise. In *Advances in Visual Computing*, pages 686–698. Springer, 2011.
- [19] M. A. González, A. P. Zisserman, and M. Brady. Estimation of the partial volume effect in MRI. *Medical Image Analysis*, 6(4):389–405, 2002.
- [20] S. J. Gustafson and I. M. Sigal. *Mathematical Concepts of Quantum Mechanics*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [21] E. L. Hahn. Spin echoes. *Physical Review*, 80(4):580, 1950.
- [22] W. S. Hinshaw and A. H. Lent. An introduction to NMR imaging: From the Bloch equation to the imaging equation. *Proceedings of the IEEE*, 71(3):338–350, 1983.
- [23] H. Jara, B. C. Yu, S. D. Caruthers, E. R. Melhem, and E. K. Yucel. Voxel sensitivity function description of flow-induced signal loss in MR imaging: Implications for black-blood MR angiography with turbo spin-echo sequences. *Magnetic Resonance in Medicine*, 41(3):575–590, 1999.
- [24] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Quantum Mechanics (Non-Relativistic Theory)*. Course of Theoretical Physics **3**. Pergamon, 1991.
- [25] L. Landini, V. Positano, and M. Santarelli. *Advanced Image Processing in Magnetic Resonance Imaging*. CRC press, 2005.
- [26] A. Martin, J.-F. Garamendi, and E. Schiavi. MRI TV-Rician denoising. In *Biomedical Engineering Systems and Technologies*, pages 255–268. Springer, 2012.
- [27] C. Martin, J. Miller, and K. Pearce. Numerical solution of positive sum exponential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 34(2):89–93, 1989.
- [28] A. Mertins. *Signal Analysis: Wavelets, Filter Banks, Time-Frequency Transforms and Applications*. Wiley, 1999.

- [29] F. Natterer. *The Mathematics of Computerized Tomography*. Classic in Applied Mathematics 32. SIAM, 1986.
- [30] F. Natterer and F. Wübbeling. *Mathematical Methods in Image Reconstruction*. SIAM, 2001.
- [31] M. R. Osborne and G. K. Smyth. A modified Prony algorithm for exponential function fitting. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 16(1):119–138, 1995.
- [32] D. L. Parker, Y. P. Du, and W. L. Davis. The voxel sensitivity function in Fourier transform imaging: applications to magnetic resonance angiography. *Magnetic Resonance in Medicine*, 33(2):156–162, 1995.
- [33] V. Pereyra and G. Scherer. *Exponential Data Fitting and its Applications*. Bentham Science Publishers, 2010.
- [34] E. M. Purcell, H. C. Torrey, and R. V. Pound. Resonance absorption by nuclear magnetic moments in a solid. *Physical Review*, 69(1-2):37, 1946.
- [35] S. O. Rice. Mathematical analysis of random noise. *The Bell System Technical Journal*, 24(1):46–156, 1945.
- [36] H. H. Schild. *MRI Made Easy (...Well Almost)*. Berlex Laboratories, 1992.
- [37] L. Schumaker. *Spline Functions: Basic Theory*. Cambridge University Press, 2007.
- [38] I. R. Shafarevich and A. Remizov. *Linear Algebra and Geometry*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [39] B. Shah, S. W. Anderson, J. Scalera, H. Jara, and J. A. Soto. Quantitative MR imaging: physical principles and sequence design in abdominal imaging. *Radiographics*, 31(3):867–880, 2011.
- [40] D. W. Shattuck, S. R. Sandor-Leahy, K. A. Schaper, D. A. Rottenberg, and R. M. Leahy. Magnetic resonance image tissue classification using a partial volume model. *NeuroImage*, 13(5):856–876, 2001.
- [41] J. Sijbers, A. J. Den Dekker, J. Van Audekerke, M. Verhoye, and D. Van Dyck. Estimation of the noise in magnitude MR images. *Magnetic Resonance Imaging*, 16(1):87–90, 1998.
- [42] C. P. Slichter. *Principles of Magnetic Resonance*. Springer Series in Solid-State Sciences 1. Springer Science & Business Media, 2013.
- [43] M. Welvaert and Y. Rosseel. On the definition of signal-to-noise ratio and contrast-to-noise ratio for fMRI data. *Plos One*, 8(11):e77089, 2013.

Apéndices

Apéndice A

Algunos conceptos matemáticos de mecánica clásica y cuántica

A.1. Rotación de un sistema de coordenadas

Consideremos los espacios E y F dados por $E = F = \mathbb{R}^3$.

Definición A.1 *Un movimiento de F relativo a E es un mapeo que depende suavemente de t :*

$$D_t : E \rightarrow F$$

*que preserva la métrica y la orientación.*¹

Definición A.2 *Un movimiento D_t se llama rotación si mapea el origen de E al origen de F , es decir, si D_t es un operador lineal para cada t .*

Es decir, $D_t = D(t)$ es una matriz de 3×3 .

Proposición A.3 *Una rotación $D_t : E \rightarrow F$ es representada por una matriz B_t ortogonal (es decir, $B_t^{-1} = B_t^\top$) tal que $\det(B_t) = 1$ (a las matrices que satisfagan esto, les llamaremos matrices de rotación).*

Sea B_t una familia en t de matrices de rotación que representan a la rotación D_t . Dado $Q(t) \in E$, definimos $q(t) \in F$ mediante

$$q(t) = B_t Q(t), \quad \forall t$$

Si derivamos esta expresión con respecto a t , tenemos

$$\dot{q} = \dot{B}Q + B\dot{Q}$$

donde \dot{B} denota a la derivada con respecto a t de B_t visto como función de t , es decir, $B(t)$.

¹Para un entendimiento formal, se puede consultar el capítulo 7 de [38].

Consideremos primero el caso en que $\dot{Q} = 0$, es decir, nuestro punto está en reposo en E y hay rotación del espacio E , es decir, $\dot{B} \neq 0$. En este caso, el movimiento de q se denomina *rotación transferida*.

Teorema A.4 *Para todo instante t , existe un vector $\omega(t) \in F$ tal que la velocidad transferida se expresa por la fórmula*

$$\dot{q} = \omega \times q \quad \forall q \in F \quad (\text{A.1})$$

El vector ω se llama velocidad angular instantánea, y está definido de manera única por la ecuación A.1.

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que

$$\dot{q} = \dot{B}Q \Rightarrow \dot{q} = \dot{B}B^{-1}q = Aq \quad (\text{A.2})$$

donde definimos $A = \dot{B}B^{-1} : E \rightarrow E$, operador lineal sobre E . La conclusión viene directamente del siguiente lema. \square

Lema A.5 *La matriz $\dot{B}(t)B^\top(t)$ es antisimétrica $\forall t \geq 0$. Más aún,*

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \quad \dot{B}(t)B^\top(t)\vec{x} = (a, b, c) \times \vec{x}$$

donde a, b, c se definen por

$$\dot{B}(t)B^\top(t) = \begin{bmatrix} 0 & -c(t) & b(t) \\ c(t) & 0 & -a(t) \\ -b(t) & a(t) & 0 \end{bmatrix}$$

DEMOSTRACIÓN. Como $B(t)$ es una matriz de rotación, se tiene que $B^{-1}(t) = B^\top(t)$, luego $B(t)B^\top(t) = I$. Derivando respecto a t se tiene que $\dot{B}(t)B^\top(t) + B(t)(B^\top)'(t) = 0$ y luego $\dot{B}(t)B^\top(t) = -(\dot{B}(t)B^\top(t))^\top$, es decir, $\dot{B}(t)B^\top(t)$ es una matriz antisimétrica, lo cual implica que $\dot{B}(t)B^\top(t)$ tiene la forma

$$\dot{B}(t)B^\top(t) = \begin{bmatrix} 0 & -c(t) & b(t) \\ c(t) & 0 & -a(t) \\ -b(t) & a(t) & 0 \end{bmatrix}$$

\square

Observación Supongamos ahora que $\dot{Q} \neq 0$, es decir, el punto se mueve en E . De la ecuación A.2, se obtiene que

$$\dot{q} = \omega \times q + B\dot{Q}$$

Ahora podemos enunciar el teorema que será usado en el capítulo 1.

Teorema A.6 *Sea $\vec{M} : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ continua en $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ y derivable en \mathbb{R}_+ . Consideremos un sistema de referencia S' con origen en $(0, 0, 0)$ que rota con velocidad angular $\vec{\Omega}$,*

y tiene por sistema de coordenadas ortogonales a $\{\hat{u}_1(t), \hat{u}_2(t), \hat{u}_3(t)\}$, tal que $\hat{u}_i(0) = \hat{e}_i$, y además \vec{M} puede ser escrito como

$$\vec{M} = M_{u_1} \hat{u}_1 + M_{u_2} \hat{u}_2 + M_{u_3} \hat{u}_3. \quad (\text{A.3})$$

Sea

$$\frac{\delta \vec{M}}{\delta t} = \frac{dM_{u_1}}{dt} \hat{u}_1 + \frac{dM_{u_2}}{dt} \hat{u}_2 + \frac{dM_{u_3}}{dt} \hat{u}_3$$

entonces:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{\delta \vec{M}}{\delta t} + \vec{\Omega} \times \vec{M} \quad (\text{A.4})$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración es inmediata de la observación anterior, identificando

$$\hat{u}_i = B_t \hat{e}_i, \quad \omega = \vec{\Omega}, \quad B_t \dot{Q} = \frac{\delta \vec{M}}{\delta t}$$

donde B_t son las matrices de rotación que logran que el movimiento de rotación del sistema S' sea con velocidad angular $\vec{\Omega}$.

□

A.2. Algunos conceptos básicos de mecánica cuántica

Esta sección tiene como objetivo presentar muy brevemente los principios básicos de mecánica cuántica, para poder comprender la sección 1.2. Por el carácter breve que se le da, omitiremos las demostraciones de las proposiciones y teoremas presentados.

Esta sección está basada, preferentemente, en los textos [20] y [24], de donde se sugiere buscar las demostraciones que sean de interés del lector.

Para describir un fenómeno en mecánica cuántica, es necesario conocer los siguientes objetos, que iremos describiendo en las siguientes secciones: un espacio de estados, un operador Hamiltoniano, observables, conmutadores, operadores canónicamente conjugados, y finalmente la dinámica del sistema cuántico.

A.2.1. Espacio de estados

En mecánica cuántica, el estado de un sistema es descrito por una función $\Psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ que llamaremos función de ondas.

La función de ondas debe satisfacer las siguientes propiedades:

1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ una región del espacio. $\int_{\Omega} |\Psi(x, t)|^2 dx$ es la probabilidad de que una partícula esté en tal región en tiempo t . Así, se debe tener la siguiente condición:

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1 \quad \forall t$$

2. Ψ satisface algún tipo de ecuación de ondas (se especificará más adelante).

La primera propiedad nos dice además que para todo t ,

$$\Psi(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}) = \left\{ f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{\mathbb{R}^3} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

A este conocido espacio, lo llamaremos *espacio de estados*.

Aprovechamos de recordar el producto interno que, sabemos, hace que $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ sea un espacio de Hilbert:

$$\langle \psi, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\psi(x)} \phi(x) dx$$

A.2.2. Operador Hamiltoniano

El Hamiltoniano es un operador $\mathcal{H} : L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$ que representará a la energía del sistema en estudio.

\mathcal{H} es un operador hermítico, es decir,

$$\langle \mathcal{H}\psi, \phi \rangle = \langle \psi, \mathcal{H}\phi \rangle$$

para todo ϕ, ψ en $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Además, para una función en el espacio de estados Ψ , se satisface la ecuación de ondas:

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathcal{H}\Psi} \quad (\text{A.5})$$

Esta ecuación usando el hamiltoniano

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(x, y, z) \quad (\text{A.6})$$

es conocida como la Ecuación de Schrödinger.

A.2.3. Observables

En mecánica cuántica, un observable es un operador hermítico $\hat{f} : L^2 \rightarrow L^2$ que representa a una cantidad física, la cual denotamos por f .

Los valores que puede tomar la cantidad física f son los *valores propios* del operador \hat{f} , los cuales denotaremos por f_n . Tales valores propios sólo se pueden tomar en *estados propios*, los cuales están representados por *funciones propias*, que denotaremos por Ψ_n . Es decir, se cumple la relación

$$\hat{f}\Psi_n = f_n \Psi_n \quad n \in \mathbb{N}$$

Por el teorema espectral, cualquier estado se puede representar por

$$\Psi = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \Psi_n$$

donde $a_n = \langle \Psi_n, \Psi \rangle$ y $(\Psi_n)_{\{n \in \mathbb{N}\}}$ es un sistema ortonormal completo de L^2 .

Y como Ψ tiene norma igual a 1, se tiene que $\sum_n |a_n|^2 = 1$. Así, $|a_n|^2$ se interpreta como la probabilidad de que la cantidad f tome el valor f_n con función de onda Ψ .

Definición A.7 Se define el valor medio de f por: $\langle f \rangle = \sum_n f_n |a_n|^2$.

Notar que dada la interpretación de $|a_n|^2$, $\langle f \rangle$ corresponde a la esperanza de f .

Proposición A.8

$$\langle f \rangle = \langle \Psi, \hat{f} \Psi \rangle$$

Observación Las funciones propias Ψ_n corresponden a los estados en los cuales la cantidad f tiene valores definidos, estos valores corresponden a cada f_n respectivamente. Así, dos cantidades f y g tienen valores definidos simultáneamente si $\exists \Psi_n, f_n, g_n$ tal que $\hat{f} = f_n \Psi_n$, $\hat{g} = g_n \Psi_n$.

Definición A.9 Sean f y g dos cantidades físicas.

1. Si f y g pueden tomar valores definidos simultáneamente, se define su suma por

$$(\hat{f} + \hat{g}) \Psi_n = (f_n + g_n) \Psi_n$$

2. Si no pueden tomar valores definidos simultáneamente, se define su suma por

$$\langle f + g \rangle = \langle f \rangle + \langle g \rangle$$

Definición A.10 Sean f, g cantidades que pueden medirse simultáneamente. El producto de f y g tiene como operador $\hat{f}\hat{g}$, que se define como aquel que tiene como valores propios a $f_n g_n$.

Observación En el caso anterior, $\hat{f}\hat{g} = \hat{g}\hat{f}$.

Observación Si f y g no pueden tomar valores definidos simultáneamente, $\hat{f}\hat{g}$ no es hermitico, luego, no representa una cantidad física (y el producto no conmuta).

A.2.4. Conmutador

Definición A.11 Para f y g dos cantidades físicas, se define el conmutador de f y g por:

$$\{ \hat{f}, \hat{g} \} = \hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f}$$

Proposición A.12 $\{ \hat{f}\hat{g}, \hat{h} \} = \{ \hat{f}, \hat{h} \} \hat{g} + \hat{f} \{ \hat{g}, \hat{h} \}$.

A.2.5. Operadores canónicamente conjugados

Definición A.13 Se define el operador $\hat{p} : L^2 \rightarrow (L^2)^3$ llamado momentum de una partícula por

$$\hat{p} = -i\hbar\nabla$$

Se denota por \hat{p}_{x_j} a la coordenada j -ésima del operador momentum.

Observación \hat{p}_{x_j} es un operador hermítico, y así \hat{p}_{x_j} se corresponde a una cantidad física, la cual es llamada componente j -ésima del momentum y se denota por p_j . Así, \hat{p} se corresponde a la cantidad física llamada momentum, la cual se denota \mathbf{p} .

Proposición A.14 Relaciones de conmutación:

$$\hat{p}_x\hat{p}_y - \hat{p}_y\hat{p}_x = 0, \quad \hat{p}_x\hat{p}_z - \hat{p}_z\hat{p}_x = 0, \quad \hat{p}_y\hat{p}_z - \hat{p}_z\hat{p}_y = 0 \quad (\text{A.7})$$

Proposición A.15 Se tiene la siguiente relación de incertidumbre:

$$\hat{p}_j x_k - x_k \hat{p}_j = -i\hbar\delta_{jk} \quad (j, k = 1, 2, 3) \quad (\text{A.8})$$

Esto se interpreta como que una coordenada del momentum no puede ser observada al mismo tiempo que la misma coordenada para la posición.

Definimos la dispersión de una cantidad f como

$$(\Delta f)^2 = \langle (f - \langle f \rangle)^2 \rangle$$

Teorema A.16 (*Principio de incertidumbre de Heisenberg*)

$$\Delta x_j \Delta p_j \geq \frac{\hbar}{2} \quad (\text{A.9})$$

A.2.6. Dinámica del sistema cuántico

En general una cantidad que en un instante tiene un valor definido, no tiene valores definidos en instantes posteriores. Así, la idea de una derivada de la cantidad no puede ser vista como en mecánica clásica. Se define \dot{f} como la derivada de la cantidad f mediante su valor medio:

$$\frac{df}{dt} := \frac{d\langle f \rangle}{dt} \quad (\text{A.10})$$

Debido a la ecuación de ondas, resulta sencillo demostrar lo siguiente:

Proposición A.17

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} \{\mathcal{H}, \hat{f}\} \quad (\text{A.11})$$

Definición A.18 Se dice que una cantidad f se conserva si conmuta con el Hamiltoniano y no depende explícitamente del tiempo.

Observación El momentum se conserva, es decir, el operador \hat{p} conmuta con el Hamiltoniano de un sistema cerrado.

A.2.7. Matrices de operadores

Sean (Ψ_n) las funciones propias de la energía ², donde (E_n) son sus valores propios asociados. Se define la matriz de la cantidad f por

$$f_{nm}(t) = \langle \Psi_n, \hat{f}\Psi_m \rangle = \int \overline{\Psi_n} \hat{f} \Psi_m dq$$

$f_{nm}(t)$ se llama elemento de la matriz correspondiente a la transición del estado n al m . ³

Se tiene que

$$f_{nm}(t) = f_{nm} e^{i\omega_{nm}t} \quad (\text{A.12})$$

donde

$$\begin{cases} \omega_{nm} := \frac{(E_n - E_m)}{\hbar} \\ f_{nm} := \int \overline{\psi_n} \hat{f} \psi_m dq \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

A.2.8. Momento angular

Definición A.19 Se define el operador momento angular de una partícula como

$$\hat{l} = \mathbf{r} \times \hat{p}$$

Proposición A.20 Se tienen las siguientes relaciones:

$$\hat{l}_x = y\hat{p}_z - z\hat{p}_y, \quad \hat{l}_y = z\hat{p}_x - x\hat{p}_z, \quad \hat{l}_z = x\hat{p}_y - y\hat{p}_x \quad (\text{A.14})$$

Además se tienen las siguientes relaciones de conmutación:

$$\{\hat{l}_j, x_k\} = i\varepsilon_{jkl}x_l \quad (\text{A.15})$$

Proposición A.21

$$\{\hat{l}_j, \hat{p}_k\} = i\varepsilon_{jkl}\hat{p}_l$$

Proposición A.22

$$\{\hat{l}_j, \hat{l}_k\} = i\varepsilon_{jkl}\hat{l}_l$$

²Suponiendo espectro discreto.

³En distintos textos se tienen diferentes notaciones: $f_{nm}(t) = f_m^n(t) = (n|f|m) = \langle \Psi_n | f | \Psi_m \rangle$.

Definición A.23 Para un sistema de partículas, su momento angular se define como

$$\hat{L} = \sum_a \mathbf{r}_a \times \hat{p}_a = \sum_a \hat{l}_a$$

donde el índice a denota a cada partícula del sistema. Notar que se heredan las propiedades mencionadas.

Se define el operador $\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$

Prop: $\{\hat{L}^2, \hat{L}_{x_j}\} = 0 \quad \forall j$

Prop: Los valores propios de L_z son $L_z = M, \quad M \in \mathbb{Z}$.

Proposición A.24 Se tiene que

$$-\sqrt{L^2} \leq L_z \leq \sqrt{L^2}$$

Así, los valores posibles de L_z son acotados. Denotemos por L al mayor entero posible para $|L_z|$.

Proposición A.25

$$L^2 = L(L+1) \tag{A.16}$$

y así tenemos una fórmula que determina los valores propios requeridos para el cuadrado del momento angular.

Así, para un valor de L , la componente $L_z = M$ del momento angular toma $2L+1$ valores: $M = L, L-1, \dots, -L$. Así, el nivel de energía correspondiente al momentum angular L tiene $2L+1$ valores de degeneración.

Proposición A.26 Los elementos de las matrices para el momento angular son

$$(L_x)_{M,M-1} = (L_x)_{M-1,M} = \frac{1}{2} \sqrt{(L+M)(L-M+1)} \tag{A.17}$$

$$(L_y)_{M,M-1} = -(L_y)_{M-1,M} = \frac{-i}{2} \sqrt{(L+M)(L-M+1)} \tag{A.18}$$

A.2.9. Spin

Definiciones y propiedades básicas

Es el momento angular intrínseco de una partícula. El spin de una partícula (medida en unidades de \hbar) se denota s .

Proposición A.27 se tienen las siguientes relaciones de conmutación:

$$\{\hat{s}_y, \hat{s}_z\} = i\hat{s}_x, \quad \{\hat{s}_z, \hat{s}_x\} = -i\hat{s}_y, \quad \{\hat{s}_x, \hat{s}_y\} = i\hat{s}_z \tag{A.19}$$

Una secuencia de valores propios s_z está acotada superior e inferiormente por $\pm s$. Además, $s \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, a diferencia de L_z , que sólo toma valores enteros.

También se cumple que $\mathbf{s}^2 = s(s+1)$.

Experimentalmente se ha determinado que los electrones, protones y neutrones tienen spin $s = \frac{1}{2}$.

Para una partícula, hay un momento angular orbital \mathbf{l} y el spin \mathbf{s} . se define el momento angular total de la partícula por

$$\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s} \quad (\text{A.20})$$

donde la suma es como sigue: para l y s dados, el momento angular total puede tomar los valores

$$l + s, l + s - 1, \dots, |l - s|$$

Matrices

Para el spin, se siguen cumpliendo las relaciones A.17, A.18 que se escriben de la siguiente forma: Dado s , se tiene que $\sigma \in \{s, s-1, \dots, -s\}$ y además:

$$(s_x)_{\sigma, \sigma-1} = (s_x)_{\sigma-1, \sigma} = \frac{1}{2} \sqrt{(s+\sigma)(s-\sigma+1)} \quad (\text{A.21})$$

$$(s_y)_{\sigma, \sigma-1} = -(s_y)_{\sigma-1, \sigma} = \frac{-i}{2} \sqrt{(s+\sigma)(s-\sigma+1)} \quad (\text{A.22})$$

$$(s_z)_{\sigma, \sigma} = \sigma \quad (\text{A.23})$$

y así, para $s = \frac{1}{2}$ (como en protones y electrones) se tiene que $\sigma = \pm \frac{1}{2}$, y además:

$$(s_x) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (s_y) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad (s_z) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

Efecto de un campo magnético sobre un spin

El spin interactúa directamente con el campo magnético. Para una partícula con spin, se debe atribuir un momento magnético intrínseco. Este momento se define por

$$\hat{\mu} = \mu \frac{\hat{\mathbf{s}}}{s} \quad (\text{A.25})$$

donde μ es una constante característica de la partícula.

Así, el Hamiltoniano que sólo considera al spin y a un campo magnético \vec{B} , debe definirse como

$$\mathcal{H} = -\hat{\mu} \cdot \vec{B}$$

Apéndice B

Resultados adicionales: comparación entre órdenes de interpolación o extrapolación.

En este apéndice se pretende mostrar resultados adicionales que pueden ser de complemento a lo mostrado en el Capítulo 5.

B.1. Caso 1 tejido

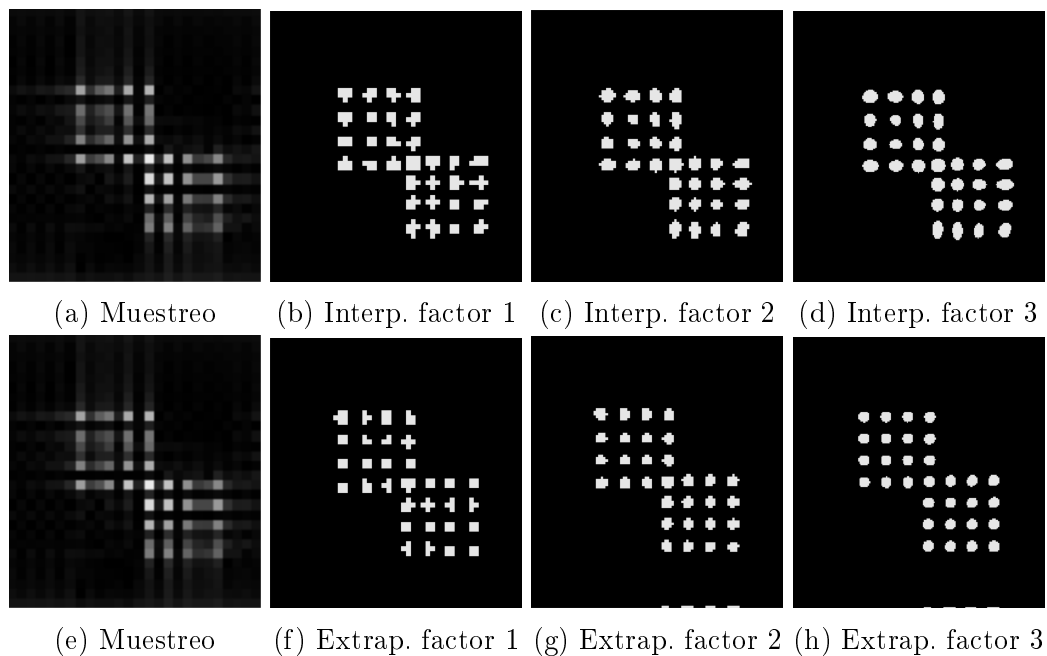


Figura B.1: Experimento para la zona 1.

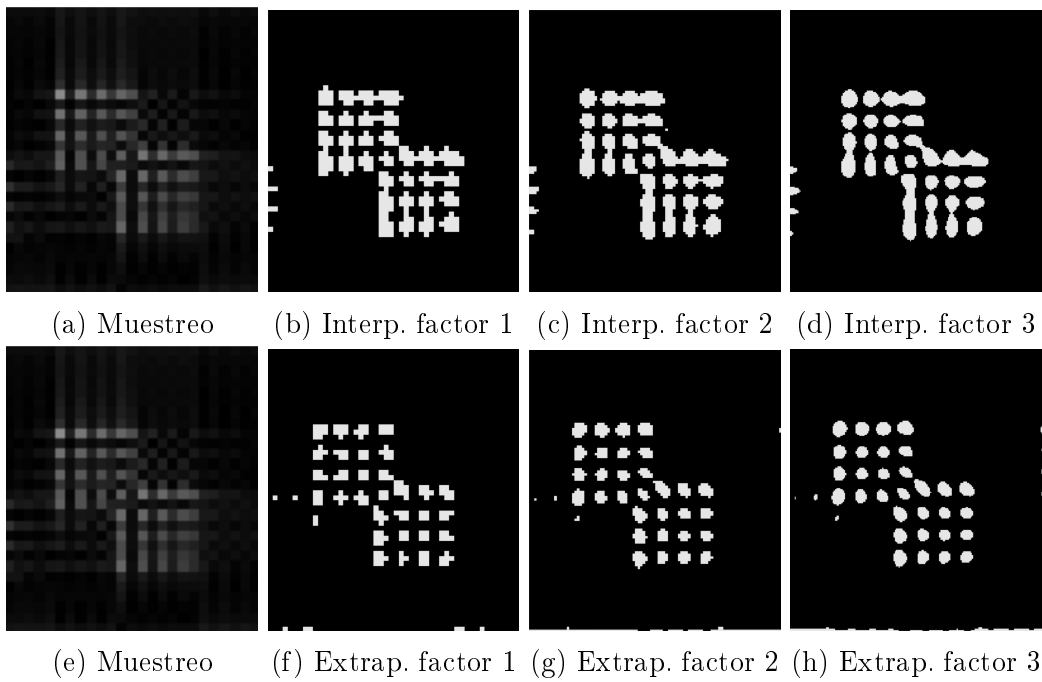


Figura B.2: Experimento para la zona 2.

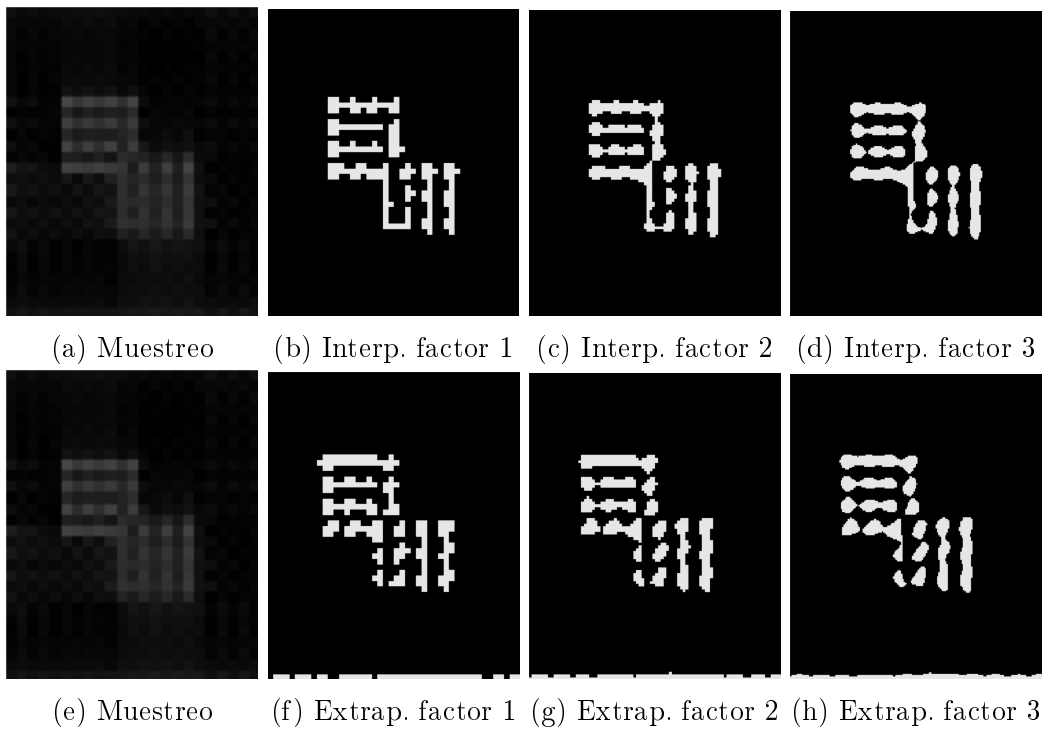


Figura B.3: Experimento para la zona 3.

Zona	σ	$\langle T_{2A} \rangle$	%CF	σ_A	err_{int}	err_{ext}
1	0	134.974	-	0.003	0.016	0.018
	5	134.980	100	2.577	0.802	0.882
	10	134.006	100	5.328	0.801	0.877
	15	133.947	100	8.332	0.799	0.872
	30	127.196	100	18.294	0.809	0.829
2	0	135.090	-	0.004	0.008	0.016
	5	131.325	100	8.483	0.397	0.826
	10	134.047	100	16.978	0.401	0.816
	15	125.544	100	25.311	0.418	0.788
	30	110.594	2	38.693	0.505	0.651
3	0	134.967	-	0.002	0.013	0.025
	5	124.159	82	27.073	0.699	1.133
	10	107.789	2	37.527	0.754	0.984
	15	86.491	0	42.679	0.795	0.848
	30	61.700	0	40.903	0.886	0.546

Tabla B.1: Resumen de resultados para el muestreo.

Zona	σ	Interpolación					Extrapolación				
		$\langle T_{2A} \rangle$	%CF	σ_A	err_{int}	err_{ext}	$\langle T_{2A} \rangle$	%CF	σ_A	err_{int}	err_{ext}
1	0	135.003	-	0.003	0.009	0.016	135.001	-	0.003	0.010	0.012
	5	135.268	100	4.477	0.445	0.790	135.191	100	2.950	0.508	0.584
	10	134.499	100	9.127	0.429	0.808	134.547	100	6.097	0.498	0.591
	15	135.075	100	13.877	0.418	0.824	133.272	100	9.189	0.490	0.596
	30	130.500	100	28.143	0.414	0.845	136.790	100	19.213	0.490	0.603
2	0	135.088	-	0.006	0.005	0.020	135.098	-	0.005	0.007	0.016
	5	130.440	100	21.167	0.257	0.964	133.985	100	10.139	0.379	0.753
	10	115.221	50	31.023	0.295	0.872	127.658	100	19.118	0.394	0.722
	15	116.735	0	37.930	0.340	0.792	125.093	98	26.157	0.418	0.682
	30	91.213	0	45.948	0.462	0.640	109.081	0	38.451	0.523	0.551
3	0	134.999	-	0.003	0.005	0.046	134.993	-	0.003	0.012	0.025
	5	121.726	70	29.897	0.602	0.857	122.607	60	30.299	0.651	1.099
	10	106.618	0	39.473	0.673	0.710	103.010	0	40.327	0.708	0.882
	15	80.498	0	42.255	0.730	0.605	85.798	0	42.816	0.760	0.742
	30	61.470	0	40.418	0.809	0.425	68.717	0	41.992	0.853	0.498

Tabla B.2: Resumen de resultados para interpolación y extrapolación de factor 1.

Zona	σ	Interpolación					Extrapolación				
		$\langle T_{2A} \rangle$	%CF	σ_A	err_{int}	err_{ext}	$\langle T_{2A} \rangle$	%CF	σ_A	err_{int}	err_{ext}
1	0	134.998	-	0.003	0.007	0.013	135.000	-	0.003	0.006	0.009
	5	135.511	100	4.343	0.336	0.664	134.923	100	3.008	0.319	0.443
	10	136.053	100	8.915	0.331	0.675	135.274	100	5.956	0.316	0.441
	15	135.517	100	13.907	0.326	0.686	134.321	100	9.138	0.318	0.441
	30	129.180	100	27.338	0.342	0.678	131.761	100	18.421	0.340	0.419
2	0	135.060	-	0.004	0.005	0.022	135.101	-	0.005	0.006	0.015
	5	130.179	100	21.358	0.239	0.926	134.343	100	8.710	0.302	0.733
	10	121.674	46	31.741	0.263	0.824	132.880	100	17.084	0.321	0.707
	15	116.310	0	38.001	0.303	0.749	130.380	100	23.982	0.349	0.668
	30	93.268	0	46.293	0.426	0.577	112.733	0	38.668	0.469	0.511
3	0	135.000	-	0.003	0.005	0.045	134.986	-	0.003	0.012	0.025
	5	114.574	74	29.463	0.600	0.946	116.197	84	29.052	0.620	1.117
	10	96.778	0	38.998	0.685	0.794	105.376	0	38.602	0.671	0.946
	15	90.013	0	42.769	0.742	0.664	95.664	0	43.297	0.738	0.822
	30	63.381	0	40.648	0.835	0.442	80.038	0	45.720	0.872	0.594

Tabla B.3: Resumen de resultados para interpolación y extrapolación de factor 2.

B.2. Caso 2 tejidos

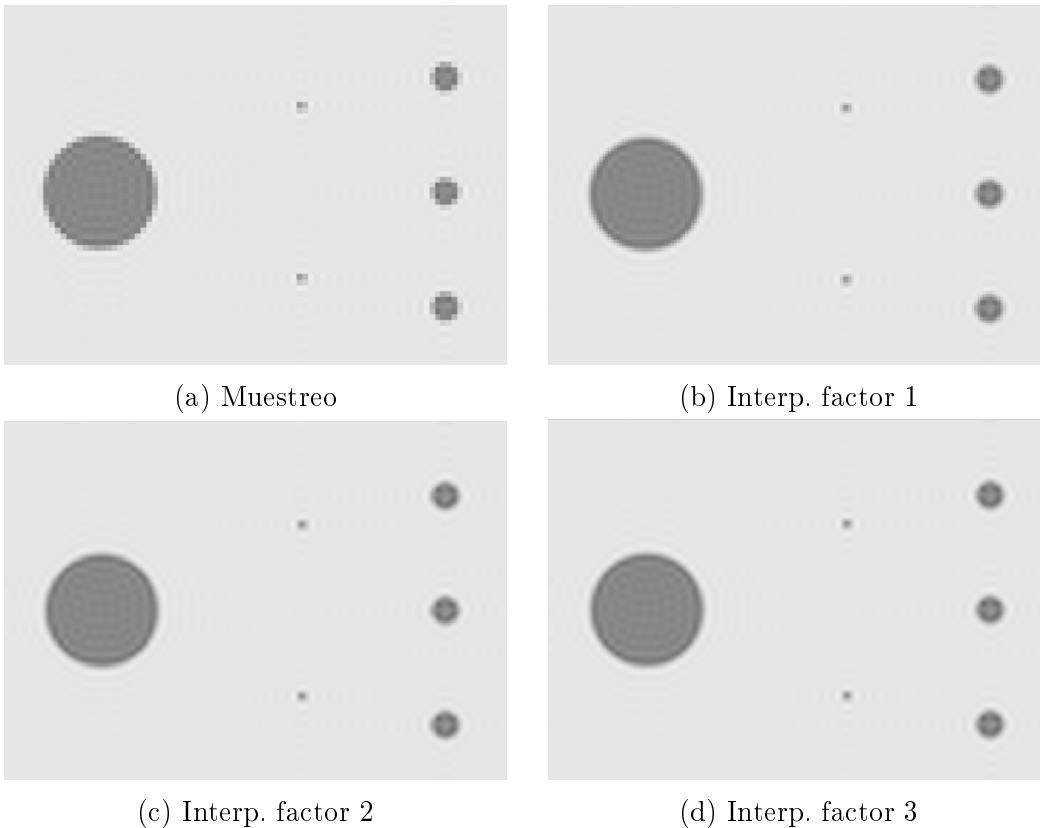


Figura B.4: Experimento para la zona de 2 tejidos: interpolación y modelo monoexponencial.

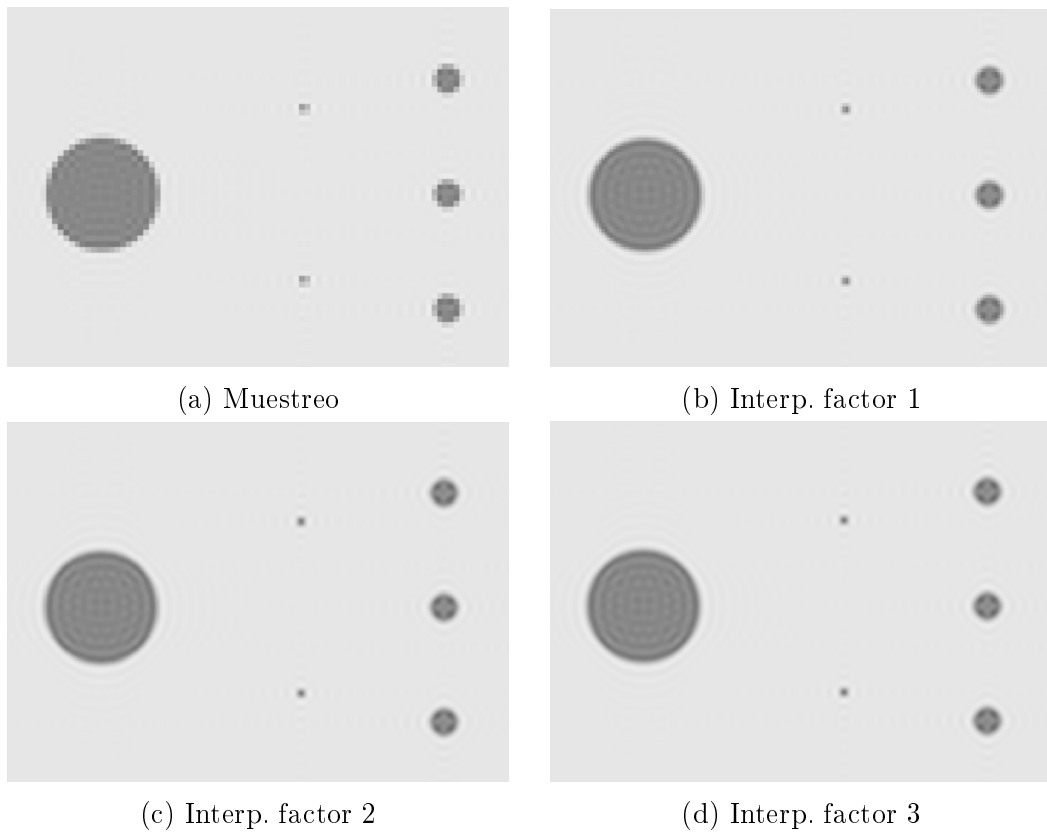


Figura B.5: Experimento para la zona de 2 tejidos: extrapolación y modelo monoexponencial.

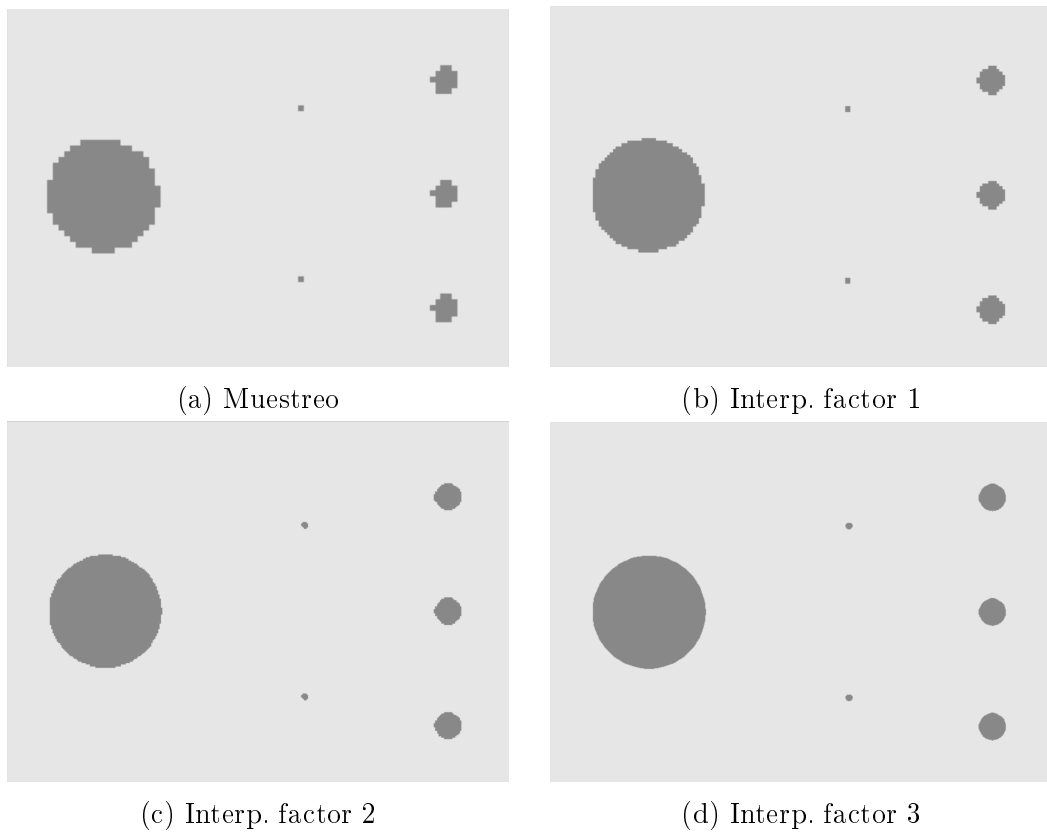


Figura B.6: Experimento para la zona de 2 tejidos: interpolación y modelo biexponencial.

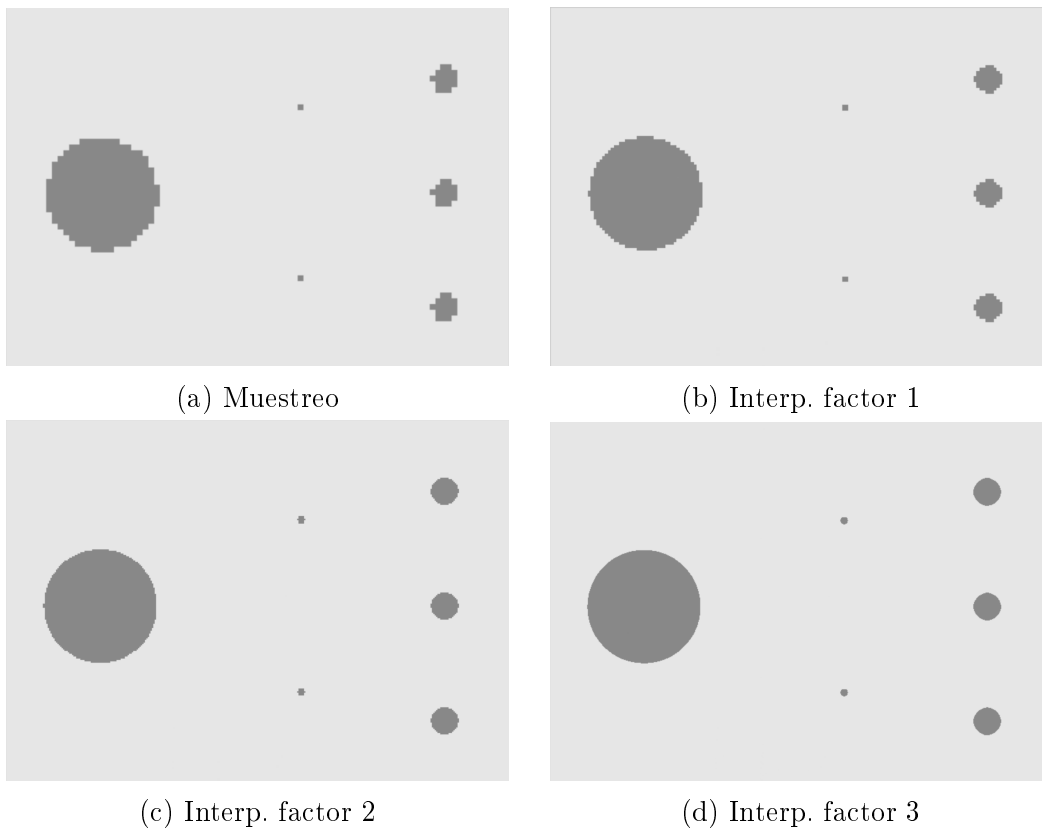


Figura B.7: Experimento para la zona de 2 tejidos: extrapolación y modelo biexponencial.

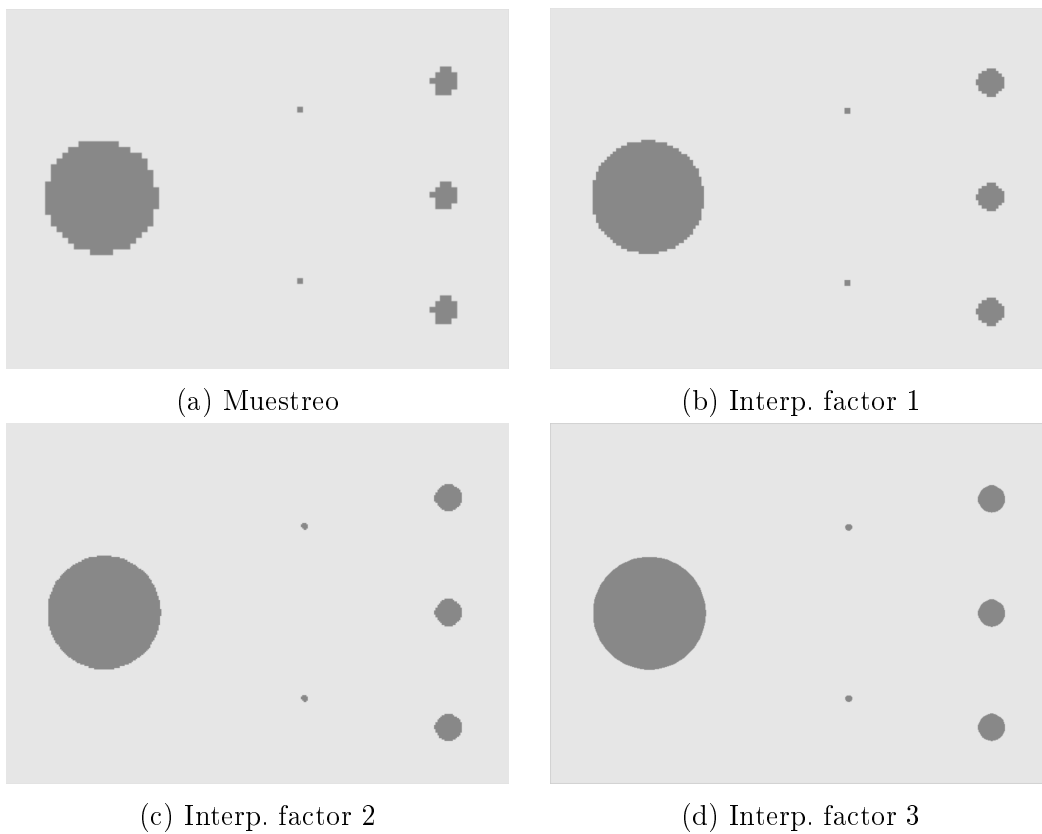


Figura B.8: Experimento para la zona de 2 tejidos: interpolación y modelo mixto.

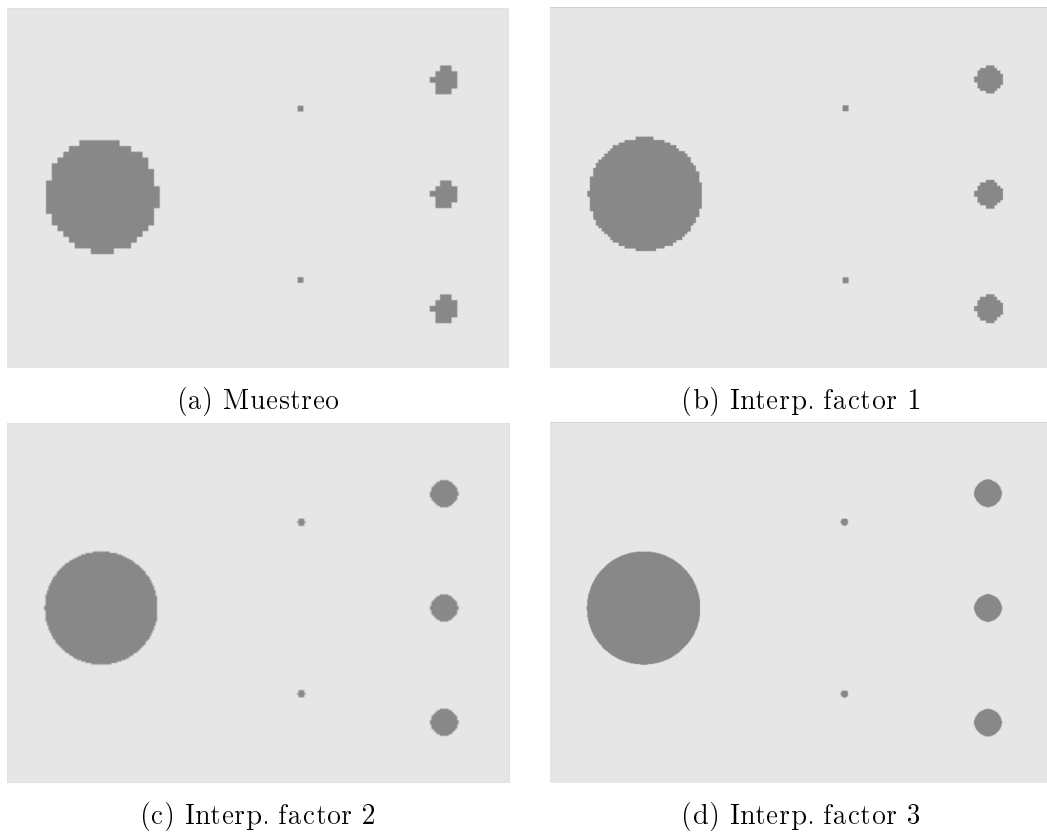


Figura B.9: Experimento para la zona de 2 tejidos: extrapolación y modelo mixto.