



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE MINAS

PLANIFICACIÓN ADAPTATIVA UTILIZANDO SIMULACIÓN GEOESTADÍSTICA  
ANTITÉTICA

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN MINERÍA  
MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL DE MINAS

GONZALO IGNACIO NELIS SUAZO

PROFESOR GUÍA:  
NELSON MORALES VARELA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
JULIÁN ORTIZ CABRERA  
FELIPE ÁLVAREZ DAZIANO  
ALEJANDRO CÁCERES SAAVEDRA

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por CONICYT y AMTC

SANTIAGO DE CHILE  
2016

**RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR  
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL DE MINAS Y AL GRADO  
DE MAGÍSTER EN MINERÍA  
POR: GONZALO IGNACIO NELIS SUAZO  
FECHA: MARZO 2016  
PROF. GUÍA: NELSON MORALES VARELA**

## **PLANIFICACIÓN ADAPTATIVA UTILIZANDO SIMULACIÓN GEOESTADÍSTICA ANTITÉTICA**

La planificación minera ha evolucionado a través del tiempo para entregar soluciones a problemas de minería cada vez más complejos, que involucran cada vez más variables y a horizontes temporales mayores. En las últimas décadas, el foco ha sido la incorporación de la incertidumbre en el proceso de planificación, para hacer frente a las variables y parámetros inciertos involucrados en estos problemas a raíz de los tres tipos clásicos de incertidumbre encontrados en minería: la incertidumbre de mercado, operacional y la geológica.

Con respecto a la incertidumbre geológica, es necesario considerar que la planificación de largo plazo se realiza en base a modelos con información limitada del yacimiento, pero posteriormente, a medida que avanza la explotación de este, la información aumenta producto del muestreo de los pozos de tronadura. Esta información es incorporada en el corto plazo con el fin de corregir las decisiones consideradas anteriormente. Sin embargo, la antelación con la que llega esta información entrega poca flexibilidad para modificar decisiones más complejas como el cambio de secuencia minera. Dado este escenario, en esta tesis se buscó medir el efecto de tener esta información de manera prematura en el agendamiento minero de corto plazo en minería a cielo abierto, y verificar si es rentable adelantar la campaña de muestreo para poder tomar mejores decisiones. Para esto, se utilizó un modelo de agendamiento con programación estocástica en dos etapas.

En el caso de estudio propuesto, se verifica que para un horizonte de 5 meses en un solo banco, el obtener la información de manera prematura no impacta significativamente en el valor del agendamiento, ni en los indicadores de material procesado ni en la ley media del plan. Esto ocurre pues las decisiones de secuencia tienen poca relevancia en el valor del agendamiento dado el corto horizonte temporal estudiado. Por otro lado, la posibilidad de reasignar los destinos una vez conocida la información del pozo de tronadura mostró ser un factor clave en el valor del plan, independientemente de la secuencia considerada.

El uso de la programación estocástica implica la incorporación de diversos escenarios de modelos de bloques dentro del problema de optimización, lo cual repercute fuertemente en los tiempos de ejecución computacional. Por otro lado, es necesario utilizar suficientes escenarios para obtener un resultado confiable considerando la variabilidad del depósito. Por este motivo, se implementó un algoritmo que genera simulaciones antitéticas, para generar escenarios con correlación negativa y utilizar un menor número de éstos para representar la variabilidad del depósito. Las pruebas mostraron que este tipo de simulaciones aceleran la convergencia del problema de agendamiento estocástico, obteniendo resultados más precisos con un número menor de escenarios, comparados a los algoritmos tradicionales de simulación.

**ABSTRACT OF THE THESIS TO OBTAIN  
THE GRADE OF MINING ENGINEER  
AND MASTER IN MINING ENGINEERING  
BY: GONZALO IGNACIO NELIS SUAZO  
DATE: MARCH 2016  
THESIS ADVISOR: NELSON MORALES VARELA**

## **ADAPTIVE MINE PLANNING USING ANTITHETIC GEOESTATITICAL SIMULATION**

Mine planning has evolved over time in order to deliver solutions to increasingly complex problems, incorporating more variables and larger time horizons. Over the last decades, the aim has been the incorporation of uncertainty in the mine planning process, to address the variables and parameters from the three classical sources of uncertainty: market, operational and geological.

In regards to geological uncertainty, it is necessary to consider that the long-term mine planning is performed based on models with limited information of the orebody, but afterwards, as the deposit extraction progresses, the total information increases thanks to the sampling of the production blastholes. This information is incorporated in the short-term mine planning process aiming to correct the decisions made beforehand. However, the timing of this information gives no flexibility to change more complex decisions in mine planning, for instance, the mining sequence. Given this scenario, this thesis aims to evaluate the effect of having this information in advance in the short-term mine planning process for open-pit mines, and to evaluate the profitability of doing the blasthole sampling sooner. For this, a two-stage stochastic programming model was used.

In the study case proposed in this thesis (a bench in a 5 months planning horizon), having this information earlier showed no considerable effect on the final profit obtained, neither on the processed ore or the mean grade. Given the short horizon considered, the mining sequence has little impact on the final profit. On the other hand, the possibility to reassign the destination of each block once the blasthole information is received showed to be a key factor on the final profit, independently of the mining sequence considered.

The use of stochastic programming involves the incorporation of several block model scenarios in the optimization process, generating a big impact in the computational execution times. On the other hand, it is necessary to use a number of scenarios large enough to obtain a reliable result. For this reason, an antithetic geostatistical simulation algorithm was implemented, in order to generate negatively correlated scenarios and using a fewer number of simulations to represent the deposit variability. The tests performed in this work showed the strong effect of using this kind of simulations on the convergence of the stochastic mine planning problem, achieving a better result with fewer scenarios, compared to the traditional simulation algorithms.

*A Juan Pablo y Emilia... Para ustedes, todo.*

# Agradecimientos

A mi familia, por todo.

A mi madre y a mi padre por dar sustento a un hogar que logró tener tres hijos con título universitario. Por su esfuerzo y sacrificio. Por su comprensión y cariño.

A mis hermanos y mi cuñado, por mostrarme que con mucho esfuerzo, se puede. Por ser tremendos ejemplos.

A los jugosos, por desordenar un poco nuestras vidas. Por todo el cariño gratis.

A mis amigos, PGS y Pardo, por haber estado siempre ahí, y por lo que vendrá.

A mi profesor guía, Nelson, por la confianza, por las oportunidades, y por ser más que un buen docente, un buen amigo.

A los profesores de mi comisión, por todos sus comentarios y por haber hecho de este un mejor trabajo.

A la gente de Delphos, por hacer que levantarme en la mañana para trabajar sea un gusto, siempre.

A mis amigos de la U, por los seis años de apoyo y trasnoches, que parece que de algo sirvieron.

A Belén, por la comprensión y el cariño incondicional.

A todos ustedes, por hacerme mejor persona.

Muchas gracias.

Powered@NLHPC: Esta investigación fue parcialmente apoyada por la infraestructura de supercómputo del NLHPC (ECM-02).

Este trabajo fue financiado gracias a Becas de Magíster Conicyt y al Advanced Mining Technology Center (Proyecto Basal FB0809)

# Tabla de contenido

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Descripción del problema . . . . .	2
1.2. Objetivos . . . . .	4
1.2.1. Objetivo general . . . . .	4
1.2.2. Objetivos específicos . . . . .	4
1.3. Alcances . . . . .	4
1.4. Estructura de la Tesis . . . . .	4
<b>2. Antecedentes</b>	<b>6</b>
2.1. Planificación minera . . . . .	6
2.1.1. Planificación tradicional en minería a cielo abierto . . . . .	7
2.1.2. Investigación de operaciones en planificación minera a cielo abierto . . . . .	11
2.1.3. Planificación bajo incertidumbre . . . . .	15
2.1.4. Programación estocástica . . . . .	19
2.2. Simulación geoestadística . . . . .	25
2.2.1. Generación de simulaciones . . . . .	27
2.2.2. Análisis de convergencia . . . . .	30
2.2.3. Técnicas de reducción de varianza . . . . .	32
2.2.4. Simulaciones antitéticas . . . . .	37
<b>3. Descripción del modelo de agendamiento de bloques</b>	<b>41</b>
3.1. Modelo determinista . . . . .	41
3.1.1. Función objetivo . . . . .	41
3.1.2. Restricciones . . . . .	42
3.2. Modelo estocástico . . . . .	45
3.2.1. Función objetivo . . . . .	45
3.2.2. Restricciones . . . . .	45
3.2.3. Formulación eficiente . . . . .	47
3.2.4. Reasignación de destinos . . . . .	49
<b>4. Metodología</b>	<b>50</b>
<b>5. Análisis y resultados</b>	<b>53</b>
5.1. Implementación de simulaciones antitéticas . . . . .	53
5.1.1. Simulaciones no condicionales . . . . .	53
5.1.2. Simulaciones condicionales . . . . .	59
5.1.3. Soporte de bloques . . . . .	63

5.2. Agendamiento estocástico . . . . .	65
5.2.1. Caso de estudio . . . . .	65
5.2.2. Resultados . . . . .	67
5.3. Análisis de convergencia . . . . .	71
5.3.1. Tamaño de muestra $N=2$ . . . . .	72
5.3.2. Tamaño de muestra $N=10$ . . . . .	73
5.3.3. Tamaño de muestra $N=20$ . . . . .	74
<b>6. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>76</b>
6.1. Planificación Adaptativa . . . . .	76
6.2. Simulaciones antitéticas . . . . .	77
6.3. Análisis de convergencia . . . . .	78
6.4. Trabajo futuro . . . . .	79
<b>Bibliografía</b>	<b>81</b>
<b>Anexo A. Geoestadística</b>	<b>85</b>
A.1. Estadísticas básicas . . . . .	85
A.2. Generación de simulaciones . . . . .	87
A.2.1. Histograma de datos transformados . . . . .	87
A.2.2. Nubes de correlación diferida . . . . .	87
A.2.3. Analisis Variográfico . . . . .	90
A.3. Validación de variogramas . . . . .	92
<b>Anexo B. Planificación adaptativa</b>	<b>95</b>
B.1. Histogramas de valor para distintos $T^*$ . . . . .	95
B.1.1. Sin reasignación de destinos . . . . .	95
B.1.2. Con reasignación de destinos . . . . .	99

# Índice de tablas

5.1. Coeficiente de correlación para las distintas tuplas de simulaciones antitéticas	54
5.2. Coeficiente de correlación para los vectores de números aleatorios para distintas tuplas de simulaciones antitéticas . . . . .	57
5.3. Coeficiente de correlación para 9 simulaciones, correlacionadas negativamente en tríos. . . . .	58
5.4. Coeficiente de correlación para 9 simulaciones antitéticas . . . . .	59
5.5. Estadísticas básicas de datos de sondeos del yacimiento 1 . . . . .	60
5.6. Coeficiente de correlación para 9 simulaciones antitéticas correlacionadas en tríos con datos condicionantes . . . . .	63
5.7. Coeficiente de correlación para 9 simulaciones antitéticas con datos condicionantes . . . . .	63
5.8. Estadísticas básicas de datos de sondeos del yacimiento 2 . . . . .	65
5.9. Estadísticas básicas de la fase-banco utilizada en el agendamiento estocástico	66
5.10. Parámetros económicos del agendamiento minero . . . . .	66
5.11. Valor del agendamiento minero para distintos niveles de información . . . . .	68
5.12. Valores promedios de los agendamientos para distintos niveles de información	68
5.13. Estadísticas para bloques de estéril enviados a planta para distintos niveles de información . . . . .	69
5.14. Valor del agendamiento minero con reasignación de destinos para distintos niveles de información . . . . .	70
5.15. Valores promedios de los agendamientos con reasignación de destino para distintos niveles de información . . . . .	70
5.16. Valor del agendamiento minero con tasa de descuento $r=10\%$ para distintos niveles de información . . . . .	71
5.17. Desviación estándar para distintos tamaños de muestra según el tipo de simulación utilizada . . . . .	75



# Índice de ilustraciones

2.1. Secuencias de <i>Best Case</i> y <i>Worst Case</i> . . . . .	9
2.2. Determinación gráfica de la anamorfosis gaussiana . . . . .	27
3.1. Restricciones de acceso en un banco . . . . .	44
5.1. Par de simulaciones antitéticas no condicionales ( $\alpha = -1$ ) . . . . .	54
5.2. Trío de simulaciones antitéticas no condicionales ( $\alpha = -0.5$ ) . . . . .	55
5.3. Cuatro simulaciones antitéticas no condicionales ( $\alpha = -0.33$ ) . . . . .	56
5.4. Comparación entre correlación promedio y correlación teórica para distintas simulaciones antitéticas . . . . .	58
5.5. Comparación entre simulaciones convencionales y antitéticas con datos condicionantes . . . . .	61
5.6. Comparación entre correlación promedio de simulaciones antitéticas con simulaciones convencionales a soporte puntual . . . . .	62
5.7. Comparación entre correlación promedio de simulaciones antitéticas con simulaciones convencionales a soporte de bloques . . . . .	64
5.8. Cambio de soporte para una simulación antitética . . . . .	64
5.9. Ley de cobre promedio en la Fase-banco a utilizar para el agendamiento estocástico . . . . .	66
5.10. Sondajes en la fase-banco utilizada para el agendamiento estocástico . . . . .	67
5.11. Análisis de convergencia del valor del agendamiento estocástico para tamaño de la muestra $N=2$ . . . . .	73
5.12. Análisis de convergencia del valor del agendamiento estocástico para tamaño de la muestra $N=10$ . . . . .	74
5.13. Análisis de convergencia del valor del agendamiento estocástico para tamaño de la muestra $N=20$ . . . . .	75
A.1. Histograma de datos originales para ley de cobre - yacimiento 1. . . . .	85
A.2. Histograma de datos originales para ley de cobre - yacimiento 2. . . . .	85
A.3. Locmap para yacimiento 1 . . . . .	86
A.4. Locmap para yacimiento 2 . . . . .	86
A.5. Histograma de datos transformados para ley de cobre - yacimiento 1. . . . .	87
A.6. Histograma de datos transformados para ley de cobre - yacimiento 2. . . . .	87
A.7. Nubes de correlación diferida para distintos vectores de separación $h$ - Yacimiento 1. . . . .	88
A.8. Nubes de correlación diferida para distintos vectores de separación $h$ - yacimiento 2. . . . .	89

A.9. Mapas variográficos para yacimiento 1 . . . . .	90
A.10. Mapas variográficos para yacimiento 2 . . . . .	90
A.11. Variograma modelado - yacimiento 1 . . . . .	91
A.12. Variograma modelado - yacimiento 2 . . . . .	91
A.13. Validación de variograma - Simulaciones convencionales . . . . .	92
A.14. Validación de variograma - Simulaciones antitéticas con $n=2$ . . . . .	93
A.15. Validación de variograma - Simulaciones antitéticas con $n=5$ . . . . .	93
A.16. Validación de variograma - Simulaciones antitéticas con $n=10$ . . . . .	94
B.1. Distribución de valores para el agendamiento estocástico con información perfecta sobre las 50 simulaciones consideradas. . . . .	95
B.2. Distribución de valores para el agendamiento estocástico con $T^*=1$ sobre las 50 simulaciones consideradas. . . . .	96
B.3. Distribución de valores para el agendamiento estocástico con $T^*=2$ sobre las 50 simulaciones consideradas. . . . .	96
B.4. Distribución de valores para el agendamiento estocástico con $T^*=3$ sobre las 50 simulaciones consideradas. . . . .	97
B.5. Distribución de valores para el agendamiento estocástico con $T^*=4$ sobre las 50 simulaciones consideradas. . . . .	97
B.6. Distribución de valores para el agendamiento de valor esperado sobre las 50 simulaciones consideradas. . . . .	98
B.7. Distribución de valores para el agendamiento estocástico con información perfecta y reasignación de destino sobre las 50 simulaciones consideradas. . . . .	99
B.8. Distribución de valores para el agendamiento estocástico con $T^*=1$ y reasignación de destino sobre las 50 simulaciones consideradas. . . . .	100
B.9. Distribución de valores para el agendamiento estocástico con $T^*=2$ y reasignación de destino sobre las 50 simulaciones consideradas. . . . .	100
B.10. Distribución de valores para el agendamiento estocástico con $T^*=3$ y reasignación de destino sobre las 50 simulaciones consideradas. . . . .	101
B.11. Distribución de valores para el agendamiento estocástico con $T^*=4$ y reasignación de destino sobre las 50 simulaciones consideradas. . . . .	101
B.12. Distribución de valores para el agendamiento de valor esperado y reasignación de destino sobre las 50 simulaciones consideradas. . . . .	102

# Capítulo 1

## Introducción

La industria minera es una de las actividades económicas con mayor impacto en Chile y en el mundo. Representa aproximadamente el 12% del producto interno bruto del país y ha recibido la mayor inversión extranjera en los últimos 10 años, con 18 mil millones de dólares acumulados hasta el año 2014. Además, de acuerdo a datos de Cochilco (2014), Chile es uno de los mayores productores de cobre en el mundo, representando un 31.1% de la producción mundial de cobre de mina con 5.75 millones de toneladas de cobre fino en el año 2014.

La magnitud de esta industria exige la permanente mejora de sus prácticas y procesos a lo largo de toda su cadena de valor, lo que a su vez involucra la incorporación de nuevas tecnologías y métodos que ayuden a mantener un alto estándar en toda la operación. A su vez, por la magnitud de las inversiones involucradas, es necesario que el negocio sea robusto frente a variaciones del mercado y de las estimaciones iniciales del proyecto minero.

Dado este escenario, la planificación minera se ha encargado de agregar valor al proyecto incorporando información de distintas fuentes, con el fin de tomar las mejores decisiones posibles en pos de cumplir los objetivos estratégicos de la compañía.

En este proceso de toma de decisiones, la planificación se basa en datos que no necesariamente se condicen con la realidad, ya sea por falta de información disponible o por la incapacidad de predecir el comportamiento de otros agentes en el mercado. Es así como ha sido necesario considerar diversas estimaciones dentro del proceso de planificación, que condicionan la promesa de valor del proyecto y que pueden generar grandes variaciones en los retornos esperados por los inversionistas y un bajo grado de cumplimiento del plan minero. Por este motivo, la investigación en la última década apunta a incorporar esta incertidumbre dentro del proceso de planificación, para generar planes que sean robustos frente a las posibles variaciones de los parámetros considerados, o que tengan la flexibilidad suficiente para modificar las decisiones frente a los distintos escenarios posibles. Diversas técnicas han sido empleadas para lograr este fin, entre las que se pueden nombrar la aplicación de opciones reales, optimización aversa al riesgo, optimización robusta y simulaciones de elementos discretos.

Ocupar estas distintas técnicas ha requerido la caracterización de los elementos inciertos

dentro de la planificación, entre los cuales podemos mencionar los 3 tipos de incertidumbre clásicas dentro del negocio minero: la incertidumbre operacional, que tiene relación con la incapacidad de predecir los rendimientos de los equipos con exactitud; la incertidumbre de mercado, que tiene relación con la incapacidad de predecir el comportamiento de los agentes que integran el mercado mundial, y que en conjunto definen los precios de los commodities y los costos de los insumos requeridos para la operación minera; finalmente, se tiene la incertidumbre geológica, que dice relación con la falta de información del yacimiento explotado, y por ende, la posibilidad de obtener estimaciones erradas de las características geometalúrgicas del depósito.

La incertidumbre geológica ha sido abordada por la geoestadística mediante las simulaciones condicionales, definidas como distintos escenarios posibles para un yacimiento, basado en la información que se tiene mediante sondajes y muestreo. La incorporación de estos distintos escenarios permite verificar cómo se comporta el plan minero frente a variaciones de la ley del mineral, el contenido de contaminantes, el tipo de mineralización, etc. Por su parte, la incertidumbre de mercado ha sido abordada por modelos económicos y financieros que describen posibles comportamientos de los parámetros económicos que influyen en el valor y las decisiones del proyecto. Finalmente, la incertidumbre operacional puede ser descrita mediante modelos de fallas, distribuciones de parámetros y simulación de elementos discretos.

Uno de los desafíos de la planificación minera actualmente radica en encontrar metodologías eficientes que incorporen el concepto de incertidumbre y permitan generar una promesa de valor confiable y robusta.

## 1.1. Descripción del problema

La incertidumbre geológica posee una característica particular: Nace producto de una falta de **información**. Si se tuviera completa información acerca de los procesos geológicos que formaron el depósito, se tendría un conocimiento mayor de sus características geometalúrgicas de interés. O bien, si se llevara a cabo un muestreo exhaustivo en todas las zonas de éste, su descripción sería considerablemente más precisa. De esta forma, un aumento de la información geológica podría disminuir considerablemente la incertidumbre que se enfrenta en la planificación.

Este efecto de la información tiene especial relevancia cuando se considera que a medida que la extracción del yacimiento avanza, el conocimiento acerca del depósito aumenta por el muestreo de los pozos de tronadura. Naturalmente, esta información permite modificar las decisiones que se tomaron en un inicio en pos de maximizar el valor de la operación minera. Sin embargo, esta información se adquiere con muy poca anticipación, lo que dificulta el cambio de decisiones que involucran un horizonte temporal mayor, como la secuencia de extracción de polígonos, o el movimiento de los equipos de carguío a otra frente. En el caso de que la campaña de perforación y muestreo se adelante y se obtenga esta nueva información con mayor antelación, es posible que esto permita cambiar este tipo de decisiones, y por ende, generar un mejor plan minero, modificando los destinos de las diferentes unidades mineras y saturando las capacidades de los equipos de mejor manera.

Para evaluar este efecto es posible utilizar técnicas de optimización. Esta rama de la matemática ha sido utilizada ampliamente en los problemas de planificación minera, entre los cuales se puede mencionar:

- Definición de pit final
- Definición de fases
- Definición del plan de producción
- Agendamiento geominerometalúrgico de bloques
- Definición de envolvente en minería subterránea masiva/selectiva
- Agendamiento de labores de preparación minera

Para el caso de la incertidumbre geológica y el efecto de la información, se puede utilizar una herramienta llamada programación estocástica, que permite incorporar parámetros inciertos dentro del proceso de optimización. Además, permite separar el problema según la cantidad de información disponible en cada periodo para construir un plan de producción acorde. Se basa principalmente en considerar la optimización como un proceso de dos etapas: la primera, donde existe información limitada, y la segunda, donde la nueva información disponible permite ya sea, modificar las decisiones de la primera etapa, o tomar acciones correctivas para mitigar los efectos no deseados de ellas. La aplicación para este caso es directa: La primera etapa se define como el agendamiento de los bloques sin información de los pozos de tronadura, y la segunda etapa es el agendamiento de los bloques restantes cuando la información de los pozos ya está disponible. De esta forma, es posible evaluar el efecto de esta información en el plan minero.

El uso de la programación estocástica requiere caracterizar la incertidumbre de la ley del metal de interés, lo cual se logra mediante el uso de las simulaciones condicionales. La incorporación de estas simulaciones en el problema de optimización genera un aumento notable en el tamaño de los problemas a resolver, los cuales, incluso para casos determinísticos (es decir, con un solo escenario de modelo de bloques) presentan altos tiempos de cómputo. De acuerdo a de Freitas, Dimitrakopoulos y Lamghari (2015), el uso de simulaciones ha sido una labor compleja desde el punto de vista de la eficiencia computacional, y ha limitado los tipos de problemas que pueden ser abordados mediante esta técnica.

Una alternativa para abordar la complejidad computacional ha sido la reducción del número de escenarios considerados con el fin de lograr que estos problemas puedan ser resueltos en tiempos razonables. Sin embargo, esto conlleva una potencial pérdida de la representatividad de la variabilidad real del yacimiento, lo que puede inducir errores en los resultados y en las conclusiones derivadas de ellos. Dado esto, es necesario utilizar técnicas que permitan reducir los escenarios sin sacrificar la calidad de la información y de la solución obtenida.

La estadística provee este tipo de técnicas, denominadas *técnicas de reducción de varianza*. Para este caso en particular, se usará una técnica basada en generar escenarios lo más distintos posibles entre sí, con el fin de evitar la redundancia entre ellos y muestrear, con menos realizaciones, la variabilidad real del depósito. Esta técnica se denomina *simulaciones antitéticas* y se basa en la correlación negativa de los números aleatorios involucrados en el cálculo de cada simulación. Se espera que utilizando esta técnica se puedan reducir los tiempos de cómputo sin sacrificar la calidad de la solución obtenida.

## 1.2. Objetivos

### 1.2.1. Objetivo general

Generar planes mineros bajo incertidumbre geológica, que incluyan adaptación al incorporar nueva información, y evaluar el impacto de esta información en el valor del plan y en sus indicadores principales.

### 1.2.2. Objetivos específicos

- Implementar un algoritmo que genere simulaciones antitéticas.
- Estudiar las propiedades de las simulaciones antitéticas (correlación y reproducción de variograma) tanto con datos condicionantes como sin ellos, y a diferentes soportes.
- Generar un modelo de programación estocástica adaptativa del problema de agendamiento minero.
- Evaluar el efecto que tiene la información en la construcción del plan, tanto en secuencia como en definición de destinos.
- Evaluar la convergencia del problema de agendamiento minero estocástico utilizando simulaciones convencionales y simulaciones antitéticas, y verificar si éstas últimas presentan ventajas prácticas para este tipo de problemas.

## 1.3. Alcances

- Se contempla solo planificación de minería a cielo abierto.
- El horizonte de planificación considerado será de corto plazo.
- Se considerará como fuente de incertidumbre solo la ley del elemento de interés. Otros parámetros sujetos a incertidumbre se considerarán fijos.
- No se contempla la operativización de cada plan generado, ni tampoco restricciones geometalúrgicas en la elaboración del plan.
- Se asumirá que cada bloque dentro del modelo será muestreado en el pozo de tronadura, y no se considerará el error de muestreo dentro del modelo. Se asumirá que la ley del pozo de tronadura es representativa de la ley del bloque, y que éste es el máximo nivel de información al que se puede acceder al realizar el plan de corto plazo.
- No se contempla la implementación de posibles mejores al algoritmo de simulaciones antitéticas disponible en la literatura.

## 1.4. Estructura de la Tesis

La estructura de esta tesis es la siguiente: En el Capítulo 2 se presenta el uso tradicional de la planificación minera y el estado del arte de la planificación bajo incertidumbre, para

luego introducir las bases teóricas de la programación estocástica. Al final de esta sección se presentan los algoritmos de simulación geoestadística actuales, y las técnicas de reducción de varianza más comunes, junto con una implementación esquemática de las simulaciones antitéticas.

En el Capítulo 3 se presenta el modelo determinístico de agendamiento minero, para luego mostrar su contraparte estocástica en dos etapas con dos formulaciones distintas.

En el Capítulo 4 se presenta la metodología utilizada para obtener los resultados analizados en el capítulo posterior.

En el Capítulo 5 se presenta la implementación de las simulaciones antitéticas y los resultados del modelo de planificación estocástica en dos etapas, para luego realizar el análisis de convergencia pertinente según el tipo de simulación empleada en la resolución del modelo de optimización.

Finalmente, en el Capítulo 6 se presentan las conclusiones de este trabajo y las posibles extensiones para trabajos futuros.

# Capítulo 2

## Antecedentes

En este capítulo se presenta el estado actual de la planificación minera, el uso de las herramientas de investigación de operaciones que asisten al planificador y cómo se ha abordado el problema de la incertidumbre geológica dentro del proceso de planificación. Por otro lado, se presentan las bases teóricas del uso de la simulación geoestadística y algunas de las implementaciones principales para obtenerlas. Finalmente, se presentan las técnicas de reducción de varianza y se muestra el algoritmo de simulaciones antitéticas que será implementado en esta tesis.

### 2.1. Planificación minera

La planificación minera, según T. B. Johnson (1968), es el área de la Ingeniería de Minas encargada de determinar la mejor estrategia productiva, en función de los objetivos del dueño del negocio y sujeto a las restricciones impuestas por las condiciones físicas y geológicas del yacimiento, y por el sistema operativo de la mina. Para cumplir este fin, la planificación minera da respuesta a tópicos críticos del negocio minero. De acuerdo a Lerchs y Grossmann (1965), los más relevantes son:

1. Diseño óptimo de la mina
2. Secuenciamiento y plan de producción
3. Definición de sistema de transporte
4. Instalación de plantas de procesamiento
5. Definición de mercados

Todos los elementos de la planificación minera están relacionados entre sí, por lo que la consideración individual de cada uno de ellos no genera el mejor plan productivo posible. Sin embargo, incorporar todos los elementos simultáneamente genera un problema extremadamente complejo de resolver. Dado esto, la planificación minera se realiza en etapas secuenciales que se retroalimentan entre sí, y que definen el plan minero con distintos niveles de información y agregación.



Estas etapas, según el horizonte de planificación que abarcan y su grado de información, pueden clasificarse en:

1. **Planificación de largo plazo:** En esta etapa se define la envolvente económica del yacimiento, el método de explotación a utilizar, las inversiones de capital requeridas y se concluye con un plan de producción de largo plazo que define las reservas mineras disponibles. El nivel de información del negocio es bajo y se basa en proyecciones generales de ley del mineral y condiciones del mercado.
2. **Planificación de mediano plazo:** Esta etapa se encarga de alinear los objetivos del plan de largo plazo con la extracción de corto plazo con el fin de lograr las metas productivas en la operación. Además, sirve como etapa de retroalimentación para el plan de largo plazo en base a la información obtenida en la operación.
3. **Planificación de corto plazo:** El objetivo principal es cumplir con las metas de producción definidas por el plan de largo y mediano plazo en base a los recursos operacionales disponibles. El nivel de detalle del plan es alto al igual que el nivel de información disponible. La información obtenida en esta etapa es utilizada por el mediano plazo para ajustar las metas productivas.

A continuación se presentarán las etapas de planificación utilizadas usualmente en la industria minera, para luego revisar el uso de investigación de operaciones en el problema de planificación y los últimos avances en la incorporación de incertidumbre al proceso de planificación.

### 2.1.1. Planificación tradicional en minería a cielo abierto

#### Generación de pits anidados

La planificación tradicional recibe como input las condiciones geológicas del yacimiento a través de un modelo de bloques. Este se define como una discretización del yacimiento en estudio en unidades llamadas bloques, los cuales presentan una ubicación espacial y una lista de posibles atributos, entre los cuales podemos encontrar densidad, ley del elemento de interés, contenido de contaminantes, unidad geológica y geomecánica, etc. Además, las características geotécnicas del yacimiento se resumen en un ángulo de talud máximo permitido, el cual asegura la estabilidad de la pared del pit. Este parámetro puede ser único para todo el yacimiento, o bien depender de orientaciones espaciales o de cada bloque.

Por otra parte, se recibe una estimación de los costos de extracción y procesamiento para cada bloque, junto con parámetros económicos asociados a la comercialización de la especie de interés. Con estos parámetros económicos, es posible calcular un valor económico para cada bloque del modelo de acuerdo a la ecuación (2.1).

$$V_{bloque} = T_{bloque}[-(C_{mina} + C_{planta}) + L_{bloque} \cdot Rec \cdot (P \cdot RF - C_{RyV})] \quad (2.1)$$

Donde:

$V_{bloque}$	=	Beneficio económico obtenido al extraer, procesar y comercializar el bloque.
$T_{bloque}$	=	Tonelaje del bloque.
$C_{mina}$	=	Costo de extracción del bloque (Arranque, carguío y transporte).
$C_{planta}$	=	Costo de procesamiento del bloque
$L_{bloque}$	=	Contenido del elemento de interés del bloque (ley).
$Rec$	=	Recuperación metalúrgica del elemento de interés.
$P$	=	Precio de venta del elemento de interés.
$RF$	=	Factor multiplicador del precio.
$C_{RyV}$	=	Costo de refinación y venta del elemento de interés.

Cabe destacar que en caso de que haya más de un elemento con valor económico, el valor del bloque puede ser ajustado para considerarlo. Lo mismo ocurre en caso de que haya más de una planta de procesamiento posible, lo cual modifica dicho costo y la recuperación metalúrgica obtenida. Además, es posible considerar que no es necesario procesar el bloque una vez extraído, enviándolo al botadero, con lo cual no se incurre en los costos de procesamiento en caso de que el contenido de interés no sea mayor a la ley de corte marginal, definida en la ecuación (2.2):

$$L_{marginal} = \frac{C_{planta}}{(P - C_{RyV}) \cdot Rec \cdot RF} \quad (2.2)$$

Finalmente, el valor del bloque se fija como el mayor valor entre todas las alternativas de destino posibles (distintas rutas de procesamiento o botadero).

Por otra parte, el ángulo de talud se traduce en una serie de precedencias verticales entre los bloques del modelo con lo cual se asegura que el ángulo del pit generado respete las condiciones geotécnicas impuestas.

Con este conjunto de precedencias y el valor de cada bloque, se calcula el pit óptimo en base al algoritmo de Lerchs y Grossmann (1965).

En base a la ecuación (2.1) es posible modificar el  $RF$ , para obtener una serie de pits anidados: A menor valor de  $RF$ , más pequeño será el valor de cada bloque, y por ende, de menor tamaño será el pit resultante. De esta forma se obtiene una colección de pits que inducen una posible secuencia de extracción: Los pits obtenidos con menor  $RF$  contienen los bloques con mayor valor, y por ende, debieran ser extraídos en el inicio de la explotación. Este resultado se utiliza como input para el siguiente proceso.

## Determinación de pit final y selección de fases

A partir de la colección de pits anidados, se debe definir el límite de la explotación del pit. Para esto, se fijan ritmos de extracción y ritmos de procesamiento, junto con una tasa de descuento, y se definen dos tipos de secuencias ficticias que representan el mejor y el peor caso posible: El mejor caso (*Best Case*) representa una secuencia de extracción *pit a pit*, en donde se obtiene el beneficio del mineral al inicio de la secuencia, mientras que el peor caso

representa una secuencia de extracción *banco a banco*, en donde se extrae una gran cantidad de estéril al inicio de la operación, lo que disminuye el valor del proyecto. En la Fig. 2.1 se pueden comparar gráficamente ambas secuencias. Cabe destacar que pese a que el *Best Case* es el mejor en términos económicos, la explotación pit a pit no es viable por no ofrecer espacios suficientes para el desarrollo de las operaciones unitarias.

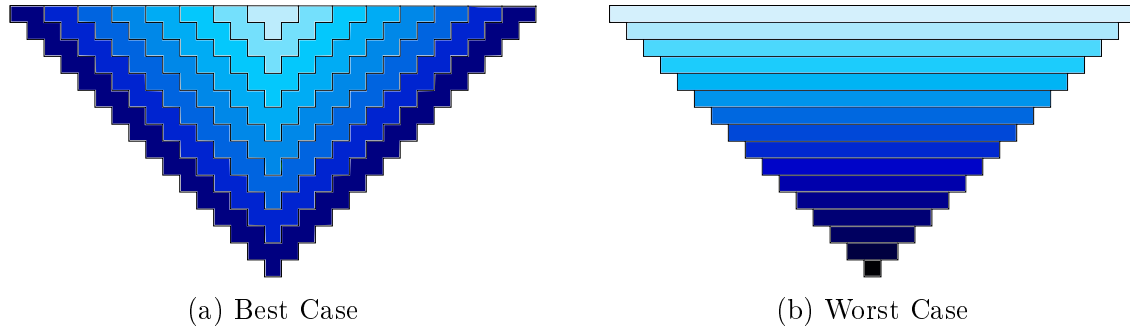


Figura 2.1: Secuencias de referencias para la elección de pit final. Las tonalidades representan el orden de extracción de las distintas secciones del pit, desde el tono más claro al inicio de la secuencia hasta el tono más oscuro al final. *Fuente: Elaboración propia.*

Con estas secuencias como referencia, se determina el pit final entre los pits anidados en función de los objetivos estratégicos de la compañía: Mayor cantidad de reservas, mayor VAN final, menor riesgo (medido como diferencia entre valor del *Best* y el *Worst case*, lo que entrega una idea de la variabilidad del valor que se puede obtener según las distintas estrategias de extracción posibles), etc.

Posteriormente, se definen las fases de explotación, las cuales se definen como un conjunto de pits anidados que cumplen satisfactoriamente con restricciones tanto operacionales como económicas, y que serán utilizadas como base para el diseño minero. La geometría de estas fases debe ser acorde a los equipos que se desean utilizar (en base a los ritmos de producción definidos) y la secuencia de extracción debe cumplir con restricciones espaciales como número de bancos máximos extraídos por año, máximo y mínimo desfase entre bancos de fases contiguas, etc. En base a estas condiciones, se construye el plan de producción y luego se compara entre distintos grupos de fases para determinar el mejor plan de producción en términos de VAN, producción de mineral y movimiento mina total, fluctuaciones de movimiento entre periodos, etc. Estas son las fases que se utilizan en el siguiente proceso.

## Diseño minero

Luego de seleccionar las fases, se procede con el diseño minero final. En esta etapa se define la ubicación de las rampas y caminos de la mina, teniendo en consideración las características de la operación futura. Según Hustrulid, Kuchta y Martin (2013b), el proceso de diseño puede resumirse en 4 etapas principales:

1. Decisión preliminar de parámetros de diseño y operación:
  - Las tasas máximas de extracción tanto de mineral como de estéril requeridas en cada fase

- El tamaño y tipo de los equipos a utilizar. Esto determina el ancho de la rampa, su inclinación, el ancho mínimo de operación en cada banco, y los radios de giro permitidos.
  - Definición de ángulos de operación, inter-rampa y pit final apropiados.
2. Dadas las restricciones del paso 1, se procede al diseño de las fases incluyendo las rampas de operación. Es necesario asegurar que cada banco posea un acceso, y que la transición entre las distintas fases sea factible dadas las rampas de acceso propuestas.
  3. Una vez completado el diseño de las fases, se realiza la cubicación de cada fase-banco con los tonelajes de mineral, estéril, la ley del elemento de interés, el contenido de contaminantes y sus características geológicas, para obtener un inventario de reservas.
  4. Finalmente, se realiza un plan de producción con las fases-banco definidas anteriormente, sujeto a restricciones operacionales de desfase máximo y mínimo entre fases, sinking rate, accesibilidad, y tasas de producción de mineral y movimiento de estéril por año, el cual se resume en el plan de producción de largo plazo de la mina. En caso de no obtener un plan de producción satisfactorio (en términos de saturación de capacidades mina y planta, secuencia de apertura de fases, fases activas por periodo, etc.) se modifican los diseño de fases y se reitera el proceso.

## **Planificación de corto plazo**

El plan de corto plazo se realiza en base a las fases-banco definidas en la planificación de largo plazo y el estado de avance actual de la mina. Además, se consideran los accesos disponibles a cada sector de la mina y los rendimientos reales de los equipos para el periodo de planificación actual. En el corto plazo, además, el objetivo es el cumplimiento de los tonelajes de mineral y estéril definidos por el largo plazo, la saturación de la planta de procesamiento, y el cumplimiento de las condiciones geometalúrgicas requeridas por los distintos procesos aguas abajo. Estas restricciones deben cumplirse en periodos considerablemente más acotados que los utilizados en el plan de largo plazo, por lo cual el cumplimiento de todas ellas se hace altamente complejo.

Este procedimiento se realiza bajo una metodología de ensayo y error, en el que el planificador de corto plazo define volúmenes de extracción para cada periodo a partir del estado de avance actual de la mina y los equipos de producción disponibles. Luego, ocurre el agendamiento manual de las unidades mineras, que son agrupadas por características geológicas y metalúrgicas, las cuales son enviadas a diferentes destinos en base a una política de leyes de corte definida previamente. Además, el planificador debe considerar las reglas de mezcla de variables geometalúrgicas (contenido de arcillas, ley de contaminantes, etc.), la ley de alimentación óptima dada por cada proceso, los tonelajes de saturación de cada planta, y el manejo de material estéril que asegure la producción en los periodos siguientes. También se deben considerar los stocks de largo y corto plazo disponibles, que ayudan a cumplir las restricciones del corto plazo y le dan una mayor flexibilidad a la operación, con la desventaja de incluir un costo de remanejo el cual puede ser considerable según las decisiones del planificador en cada periodo. Como se verá en la Sec. 2.1.2, se han estudiado diferentes técnicas de investigación de operaciones para asistir al planificador en su labor en el corto plazo, con distintos enfoques.

Por otra parte, la información del modelo de bloques es actualizada con la nueva información disponible dada por pozos de tronadura y mapeos geológicos. El muestreo de los pozos de tronadura permite corregir la estimación previamente realizada en base a los sondeos iniciales, y reagendar los destinos previamente definidos. Cabe destacar que la obtención de los nuevos datos se realiza simultáneamente con la explotación minera y con el avance de las operaciones de perforación, por lo cual esta información difícilmente se utiliza para cambiar las secuencias de extracción dentro de una fase-banco, pues estas decisiones requieren el cambio de la ubicación de equipos de carguío que se deben realizar considerando horizontes de planificación mayores. Sin embargo, es posible modificar, en el mismo periodo, los destinos de las unidades mineras pues aquello solo involucra un cambio en la ruta de transporte que es considerablemente más flexible que los cambios en la secuencia de extracción.

Dado el escenario anterior, es posible considerar que la reasignación del destino de los bloques puede ser realizado durante el mismo periodo de la extracción, y el cambio de la secuencia de minado debe realizarse *al menos* un periodo antes. Esto genera que para tener la capacidad de cambiar la secuencia de extracción, es necesario que la información de los pozos de tronadura llegue con una antelación mayor a un periodo, lo cual involucra una planificación anticipada de las labores de perforación de cada fase-banco y del muestreo de los pozos de tronadura. Esto no involucra mayor dificultad si se realiza sólo en una fase-banco, pero generaría problemas si se desea, por ejemplo, muestrear de manera efectiva bancos inferiores al que está siendo explotado, pues esto requeriría modificar el protocolo de perforación y toma de muestras con el objetivo de identificar las distintas secciones del pozo sucesivamente. Por lo tanto, el uso de un solo banco será considerada una restricción operacional para el problema que se aborda en esta tesis.

### **2.1.2. Investigación de operaciones en planificación minera a cielo abierto**

La investigación de operaciones aplicada a minería ha sido utilizada ampliamente en las últimas décadas, principalmente en el desarrollo y explotación de faenas tanto subterráneas como de cielo abierto. La aplicación de esta ciencia a planificación minera es directa: La labor del planificador se sustenta en decidir qué extraer, cuándo hacerlo, dónde procesarlo, y qué equipamiento utilizar para ello de la forma más eficiente posible, mientras que la investigación de operaciones, según INFORMS (2015), es la disciplina que estudia la aplicación de métodos analíticos y matemáticos avanzados para asistir en la toma de mejores decisiones. Dado que en general los problemas de decisiones asociados a minería son altamente complejos, diversos modelos de investigación de operaciones han sido aplicados en distintas etapas del proceso por separado. A continuación se revisarán diferentes problemas en los que se ha aplicado investigación de operaciones a cielo abierto. Para mayor detalle, Newman y col. (2010) proveen un completa revisión de las técnicas de investigación de operaciones en minería.

## Planificación estratégica y pit final

La planificación estratégica se basa principalmente en determinar el contorno del pit que otorga el mayor beneficio económico. Dentro de este problema, uno de los principales algoritmos es el del cono flotante, en el cual se considera un bloque del modelo como referencia, para luego proyectar un cono sobre él que contiene todos los bloques que deben ser extraídos antes que el bloque de referencia. Si el valor de este cono es positivo (entendido como la suma del valor de todos los bloques dentro de él), se considera que es rentable extraer dicho bloque, por lo cual se considera todo el cono dentro de los límites del pit final. El método visita todos los bloques del modelo de bloques para poder determinar el contorno final. Las principales desventajas de este método consisten en que el resultado obtenido depende del camino en que se visite cada bloque del modelo, y que además no considera que la sobrecarga compartida de bloques puede generar que dos o más bloques no generen un cono positivo si se visitan separadamente, pero la unión de dichos conos puede ser rentable. El detalle de esta técnica puede ser visto en Hustrulid, Kuchta y Martin (2013a).

El trabajo de Lerchs y Grossmann (1965) es el primer algoritmo exacto y computacionalmente eficiente que se conoce para el cálculo óptimo del pit final. La base del problema se puede escribir como un problema de optimización lineal: Sea  $b \in B$  el conjunto de bloques,  $(i, j) \in \mathcal{P}$  el conjunto de precedencias geométricas entre ellos, y  $v_b$  el beneficio de extraer el bloque  $b$ . La variable de decisión  $x_b$  es 1 si el bloque  $b$  es extraído y 0 en caso contrario. De esta forma, el problema puede ser planteado como la expresión (2.3).

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \sum_{b \in B} x_b v_b & (2.3) \\ \text{s.a.} \quad & x_i \leq x_j & \forall (i, j) \in \mathcal{P} \\ & x_b \in \{0, 1\} & \forall b \in B \end{aligned}$$

De acuerdo a Newman y col. (2010), el problema anterior tiene la ventaja de poseer estructura totalmente unimodular (toda submatriz cuadrada es entera y tiene determinante  $-1$  o  $1$ ), por lo cual la solución a la relajación lineal del problema es entera. Lersch y Grossmann resuelven este problema explotando la estructura en redes que este posee. Este algoritmo ha sido implementado en softwares comerciales dada su eficiencia y la precisión de su solución. Diversos autores (Hochbaum (2008); Underwood y Tolwinski (1998)) han planteado mejoras a esta metodología, basándose en que el problema de pit final puede ser resuelto en base a un algoritmo de máximo flujo en redes.

## Secuenciamiento de bloques

El problema del secuenciamiento de bloques se diferencia del problema de pit final en que no solo determina qué bloques extraer, sino cuándo hacerlo, agregando la componente temporal al problema. Esto además permite agregar restricciones de recursos operacionales, como capacidad de producción y procesamiento del material por periodo. Finalmente, se puede incluir una tasa de descuento en el beneficio de cada bloque según su periodo de extracción, con el fin de evaluar de manera más precisa el valor del proyecto según la metodología del

valor presente neto. La formulación estándar de este problema, según Newman y col. (2010), se muestra en el programa lineal (2.4).

$$\begin{aligned}
& \text{máx} && \sum_{b \in B} \sum_{t \in T} v_{bt} x_{bt} && (2.4) \\
& \text{s.a.} && C^- \leq \sum_{b \in B} c_b x_{bt} \leq C^+ && \forall t \in T \\
& && x_{it} \leq \sum_{p=1}^t x_{jp} && \forall (i, j) \in \mathcal{P}, t \in T \\
& && \sum_{t \in T} x_{bt} \leq 1 && \forall b \in B \\
& && x_{bt} \in \{0, 1\} && \forall b \in B, t \in T
\end{aligned}$$

Donde:

- $B$  = Conjunto de bloques.
- $T$  = Conjunto de periodos.
- $v_{bt}$  = Beneficio económico obtenido al extraer el bloque  $b$  en el periodo  $t$ .
- $c_b$  = Recurso consumido al extraer el bloque  $b$ .
- $C^+$  = Límite superior del recurso  $C$  por periodo.
- $C^-$  = Límite inferior del recurso  $C$  por periodo.
- $\mathcal{P}$  = Conjunto de pares ordenados  $(i, j)$  de precedencias entre los bloques.
- $x_{bt}$  = Variable de decisión: 1 si extraigo el bloque  $b$  en el periodo  $t$ , 0 si no.

El problema de planificación de largo plazo en minas reales involucra gran cantidad de bloques y periodos, por lo cual el problema (2.4) puede llegar a ser muy difícil de resolver. Por este motivo, se han buscado soluciones alternativas ya sea simplificando el problema original, utilizando heurísticas para su resolución o una combinación de ambas.

La agregación de bloques en estratos es una manera ampliamente estudiada para reducir el tamaño del problema y poder resolverlo de manera eficiente. Diversos trabajos han abordado esta alternativa, entre los que podemos destacar el trabajo de Busnach, Mehrez y Sinuany-Stern (1985), que maximiza el VAN del secuenciamiento en una mina de fosfatos imponiendo restricciones sobre el tipo de extracción (superficial o profunda), y es resuelto mediante heurísticas.

Otra alternativa ha sido el agendamiento de bloques pero relajando la naturaleza binaria de las variables de decisión. Entre ellos podemos mencionar a Tan y Ramani (1992) quienes generan un plan de producción sujeto a restricciones de capacidad definiendo el movimiento total de mineral y estéril, pero no una secuencia de bloques asociada. De forma similar, Fytas, Hadjigeorgiou y Collins (1993) generan un plan de producción de largo plazo dado un pit final inicial, sujeto a restricciones de capacidad, utilizando programación lineal asumiendo extracción parcial de bloques.

La suposición de extracción parcial de bloques es problemática pues no captura de buena

forma las precedencias geométricas entre ellos. Sin embargo, las variables binarias aumentan notoriamente la complejidad del problema, por lo cual otro método estudiado ha sido aprovechar su estructura. En este ámbito podemos destacar el trabajo de Dagdelen y T. Johnson (1986), quienes maximizan el VAN del agendamiento de bloques sujeto a restricciones de capacidad, y utilizan un algoritmo exacto de resolución mediante la relajación lagrangeana del problema original: las restricciones de capacidad son dualizadas con multiplicadores de lagrange en la función objetivo, y se aprovecha la estructura de flujo en redes del problema modificado para resolverlo. Akaike y Dagdelen (1999) se basa en este desarrollo y propone un algoritmo iterativo que modifica los valores de los multiplicadores de lagrange hasta cumplir las restricciones de capacidad originales. Otros autores que han utilizado esta metodología son Kawahata y Dagdelen (2013), que agrega leyes de corte variables según el destino de los bloques y plantea un algoritmo que resuelve subproblemas utilizando la relajación lagrangeana para acotar la región factible del problema de agendamiento original.

Otra vía para la resolución del problema ha sido la determinación secuencial del pit final, para luego agendar los bloques pertenecientes a dicho pit. Pese a que estas metodologías no encuentran una solución exacta al problema original, son ampliamente aceptadas pues la metodología tradicional de planificación a largo plazo se inicia con la determinación de pit final y luego el agendamiento dentro de éste (ver Sec. 2.1.1). La programación dinámica es una herramienta popular para estos problemas pues permite crear soluciones parciales dentro del proceso de optimización. En esta línea tenemos el trabajo de Sevim y Lei (1998), que describe cómo los límites del pit final, la ley de corte, la secuencia minera y la tasa de producción interactúan entre sí, y proponen un algoritmo de resolución en base a heurísticas y programación dinámica para obtener la secuencia minera, el plan de producción, los límites de pit final y el tiempo de vida de la mina simultáneamente. Wang y Sun (2001) resuelven un problema similar, definiendo 5 aspectos claves que controlan el VAN de un proyecto minero: ley de corte, tasas de producción, secuencia minera, pit final y vida de la mina (LOM). En base a esto proponen un algoritmo dinámico para optimizar estos 5 parámetros simultáneamente.

El uso de heurísticas para obtener soluciones a problemas de mayor tamaño también ha sido estudiada. Denby y Schofield (1994) definen el agendamiento como una combinación del pit final y un agendamiento de la extracción. Para obtener el mejor agendamiento de estas posibles combinaciones recurren a un algoritmo genético. Zhang (2006) también utiliza un algoritmo genético, pero utilizando la agregación de bloques a priori para reducir el tamaño del problema con búsqueda topológica. Jélvez y col. (2016) resuelven el problema de agendamiento en base a heurísticas de agregación y desagregación de bloques y al uso de heurísticas de ventanas de tiempo, lo que permite resolver problemas de millones de bloques y restricciones.

Caccetta e Hill (2003) proveen un enfoque exacto para el problema de agendamiento cambiando su formulación: introducen la variable " $by$ ",  $y_{bt}$ , que se define como 1 si el bloque  $b$  ha sido minado en algún periodo *entre* 1 y  $t$ , a diferencia de la formulación " $at$ ",  $x_{bt}$ , mostrada en el problema (2.4), que se define como 1 si el bloque fue extraído *en* el periodo  $t$ . Luego, utilizan una técnica de branch-and-cut para su resolución en base a búsquedas en amplitud y en profundidad, para obtener una variedad de posibles agendamientos.

La agregación de bloques combinadas con técnicas de resolución exactas también han



sido estudiadas. Los autores buscan la combinación de bloques con propiedades similares para reducir el tamaño del problema, para luego utilizar técnicas exactas de resolución. Boland, Dumitrescu, Froyland y Gleixner (2009) utilizan esta estrategia de resolución, con variables enteras para controlar las precedencias entre agregados, y variables lineales para el procesamiento. Bienstock y Zuckerberg (2010) extienden este trabajo desarrollando un algoritmo propio para resolver la relajación lineal del problema, el cual es notablemente eficiente.

Vargas (2011) plantea una metodología de agregación basada en características geometalúrgicas de los bloques para el problema de agendamiento del corto plazo, utilizando una heurística de ventanas para resolver el problema agregado. En esta misma línea de planificación orientada al corto plazo está el trabajo de Morales (2009), que agenda la producción de corto plazo sujeto a restricciones geometalúrgicas, utilizando un parámetro de radio de avance previamente definido para acotar la cantidad de variables en cada periodo. Finalmente, el trabajo de Madariaga (2013) agenda la producción de corto plazo, sujeto a condiciones de acceso de cada banco, y con un modelo que permite múltiples procesos posibles para cada bloque, sujeto a distintas valorizaciones y condiciones geometalúrgicas.

### 2.1.3. Planificación bajo incertidumbre

Tanto los métodos mencionados anteriormente (Sec. 2.1.2), como la metodología tradicional de planificación de cielo abierto (Sec. 2.1.1) consideran que todos los parámetros utilizados son conocidos, y por lo tanto, el plan de producción que generen será determinístico. Sin embargo, las condiciones del mundo real están lejos de ser fijas, y en prácticamente todas las etapas de planificación existe un grado de incertidumbre en los parámetros considerados. Según la fuente de la incertidumbre, podemos clasificarla en 3 áreas:

**Mercado:** Tiene relación con las condiciones económicas del mercado mundial, donde muchos actores influyen de manera directa e indirecta en los precios de los metales, en los costos de los insumos para la operación, en las tasas de cambio, etc.

**Operacional:** Tiene relación con las condiciones de los equipos en la operación, los cuales presentan fallas y fluctuaciones de rendimiento que son difíciles de predecir y merman la capacidad productiva de la mina.

**Geológica:** Tiene relación con la información limitada que se posee del yacimiento minero dado que el muestreo de éste no es exhaustivo, y de la variabilidad intrínseca del depósito. Para su caracterización completa se recurre a estimaciones e interpretaciones de las distintas variables en estudio.

Al desconocer la naturaleza variable de estos parámetros, existen problemas para cumplir con la promesa de valor que se realiza al inicio de la operación. De esta forma, se han buscado alternativas que logren capturar el comportamiento estocástico antes mencionado, para generar planes mineros más confiables y robustos.

En lo sucesivo nos concentramos en la incertidumbre de carácter geológico y en como la

planificación minera ha abordado este tema. La forma en que se caracteriza esta incertidumbre mediante herramientas de la geoestadística será abordada en la Sec. 2.2.

El efecto que tiene la incertidumbre en los proyectos mineros es ampliamente conocido, sin embargo las aplicaciones en planificación minera que abordan esta temáticas son relativamente recientes. En Dimitrakopoulos, Farrelly y Godoy (2002) se muestra el impacto que tiene la incertidumbre geológica en los indicadores económicos de los proyectos mineros, y se muestra que las estimaciones convencionales por kriging entregan un escenario económico muy difícil de lograr. Para esto, se realiza el proceso tradicional de optimización visto en la Sec. 2.1.1 hasta la generación del plan de producción pre-diseño minero con el modelo de bloques obtenido mediante kriging y con 50 simulaciones condicionales. De esta forma se obtienen una distribución de indicadores económicos y operacionales del proyecto: VAN, tonelaje de alimentación a los distintos procesos, etc. Los resultados para el yacimiento estudiado muestran que el 95 % de las simulaciones generan un VAN menor al VAN obtenido por kriging, lo cual indica un claro sesgo en la promesa de valor generada por la metodología tradicional. Se señala que la integración de la incertidumbre geológica en el proceso de planificación es clave para cuantificar el riesgo y agregar valor a la operación.

En Dimitrakopoulos y Ramazan (2004), se propone un modelo de optimización lineal que incorpora la incertidumbre geológica como un factor de descuento por riesgo, asignando a cada bloque una probabilidad de que tenga la ley deseada, calculada en base a simulaciones condicionales del yacimiento. En base a esta probabilidad, se le asigna un costo de penalización incremental por no cumplir las metas de producción en los distintos periodos de agendamiento. De esta forma se obtiene un modelo que privilegia la extracción de bloques con alta probabilidad de estar en el rango deseado en los primeros periodos, y bloques con baja probabilidad en periodos posteriores, lo cual conlleva un plan de producción con bajo riesgo al inicio, donde el impacto en el VAN es mayor, y alto riesgo al final de la operación. Además incorpora penalizaciones relacionadas con la geometría de la extracción para obtener secuencias operacionalmente viables. Esto último se logra castigando la función objetivo si bloques adyacentes no son extraídos en el mismo periodo, incorporando un incentivo para que el resultado contenga geometrías más regulares.

Por otro lado, en Godoy y Dimitrakopoulos (2004) se propone un algoritmo que optimiza la extracción de estéril mientras maneja el riesgo de no cumplir las metas de producción, en base a la definición de dominio de solución estable, que es la zona donde se pueden encontrar los planes de producción derivados de todas las combinaciones de mineral y estéril que puede producir un cuerpo mineralizado en base a las distintas simulaciones condicionales obtenidas. El algoritmo utiliza un modelo de programación lineal para encontrar las tasas de extracción óptimas de mineral y estéril, para luego calcular distintos planes de producción para cada simulación condicional, y finalmente encontrar un único plan que minimiza las desviaciones entre las tasas óptimas definidas y las tasas reales en cada escenario considerado mediante el uso de una heurística de recocido simulado (*simulated annealing*). Los resultados muestran la obtención de un plan con menor riesgo de no cumplir las metas de producción, con la obtención de un VAN 28 % más alto con respecto a la metodología tradicional de planificación.

Otra alternativa ha sido el uso de la metodología tradicional de planificación, pero consi-

derando el potencial del diseño minero asociado a diferentes escenarios de leyes. En Dimitrakopoulos, Martinez y Ramazan (2007), se propone una metodología para seleccionar el mejor diseño minero (definido como las fases seleccionadas a partir de los pits anidados) según su potencial de mejora y su riesgo comparado a un retorno aceptable mínimo. En él, se genera un diseño minero óptimo para cada simulación condicional y se define el mínimo retorno aceptable. Luego, se contrasta el valor obtenido por cada diseño aplicado sobre cada simulación condicional. Si el diseño obtenido genera un VAN mayor al retorno aceptable mínimo, se contabiliza este valor como un potencial de mejora. Si el valor es menor, se contabiliza como un riesgo. De esta forma, cada diseño tiene asociado un valor de potencial mejora y un riesgo, con lo cual el planificador puede elegir según los objetivos de largo plazo de la empresa. La ventaja de esta metodología es que no modifica de gran forma la metodología tradicional de planificación, pues solo entrega una forma de evaluar los diseños mineros bajo incertidumbre geológica.

La integración de restricciones de probabilidad definidas en base a la distribución de leyes de los bloques también ha sido estudiada. En Golamnejad, Osanloo y Karimi (2006), se estudian las restricciones de probabilidad asociadas al blending cuando la ley de los bloques es incierta. Además, se estudia el valor perdido por la clasificación errónea del destino de los bloques. Muestran que el cambio de la restricción de probabilidad estocástica a una formulación determinística según un número de realizaciones de la ley de cobre en base a simulaciones condicionales genera restricciones de carácter no lineal. Además, proponen la penalización de la función objetivo en base a la varianza del VAN obtenido por los distintos escenarios geológicos. Al ser una formulación no lineal, solo se propone su resolución mediante heurísticas, y no se aplica a un caso de estudio.

En Ramazan y Dimitrakopoulos (2007) se introduce la primera formulación de programación entera estocástica (SIP, por *Stochastic Integer Programming*. Para más información revisar la Sec. 2.1.4) aplicada en minería directamente, pues considera los distintos escenarios de leyes dentro del proceso de optimización. Su función objetivo consta de dos partes: La maximización del VAN obtenido por el plan de producción sobre el promedio de los valores de los bloques de cada simulación, y una segunda parte que penaliza el valor de la función objetivo al desviarse de las metas de producción del plan (tanto en mineral como en ley) aplicado a cada uno de los escenarios. Además, ocupa el concepto de factor de descuento por riesgo introducido en Dimitrakopoulos y Ramazan (2004) para controlar la extracción en los primeros periodos en zonas con probabilidad muy elevada de no poseer la ley esperada. La formulación es aplicada a un set de datos hipotéticos bidimensional, mostrando que efectivamente reduce el riesgo de no cumplir las metas productivas, y que el riesgo considerado en el plan puede ser modificado según los costos de desviaciones fijados en la función objetivo. En Dimitrakopoulos y Ramazan (2008), este modelo es probado en dos depósitos reales de tamaño pequeño; un depósito de oro con aproximadamente 20,000 bloques, en donde se reporta que la formulación SIP entrega un valor de VAN esperado un 10 % mayor al de la solución considerando un solo escenario del modelo de bloques y un depósito de cobre de aproximadamente 15,000 bloques, en donde esta formulación entrega un 25 % de VAN adicional.

El diseño de fases bajo incertidumbre geológica también ha sido objeto de estudio. En Albor Consuegra y Dimitrakopoulos (2010) se presenta un algoritmo para elegir el mejor

conjunto de pits anidados que generan fases de producción teniendo en consideración la incertidumbre geológica y la maximización del VAN esperado. Se propone inicialmente obtener pits anidados mediante la metodología tradicional, para luego obtener todas las posibles agrupaciones de pits anidados para obtener un número de fases predefinido. Luego, se evalúan estas posibles agrupaciones en función de algún parámetro económico u operacional, para elegir la mejor agrupación posible. Este proceso, naturalmente, se puede repetir para distintos números objetivo de fases, para encontrar el mejor diseño global. El algoritmo propuesto genera el plan de producción basado en la formulación SIP presentada en Ramazan y Dimitrakopoulos (2007) para integrar la incertidumbre geológica, y según el valor del plan obtenido, y sus cumplimientos de mineral y estéril bajo distintos escenarios geológicos, determina el mejor número de fases, y la mejor agrupación de pits.

Los últimos avances en esta línea de investigación basada en el modelo SIP propuesto en Ramazan y Dimitrakopoulos (2007) radican en la aplicación de éste a complejos mineros con variadas líneas de procesamiento y diversos elementos de interés bajo incertidumbre. En esta área, podemos mencionar el trabajo Benndorf y Dimitrakopoulos (2013), donde se muestra la aplicación del modelo SIP a depósitos de mena de hierro, con variados elementos de interés ( $SiO_2$ ,  $Al_2O_3$  etc.) que determinan la calidad del mineral procesado. Dado este motivo, las restricciones de desviación de las metas de producción no solo aplican al mineral y a la ley de  $Fe$ , sino también al contenido de las demás especies de interés de la mena considerada, para lo cual se ocupó la técnica de co-simulación que permite simular más de una variable en cada punto de la grilla considerado. Además, se utilizó el concepto de factor de descuento por riesgo introducido en Dimitrakopoulos y Ramazan (2004) y una penalización de la función objetivo basada en la geometría de la extracción, similar a la utilizada en dicho trabajo.

Otra área de investigación ha sido la planificación robusta o aversa al riesgo, la cual se caracteriza por inducir medidas de riesgo que buscan resguardarse de los peores casos posibles dada la incertidumbre geológica, o generar un pit o un plan que minimiza el riesgo de tener pérdidas. En éste ámbito tenemos el trabajo de Espinoza y col. (2013), en donde se considera el problema de pit final extendido, donde deben tomarse decisiones tanto de qué material extraer como de qué material procesar con variables independientes. Se considera la incertidumbre geológica como simulaciones condicionales y se estudia el efecto de minimizar medidas de riesgo como el *Conditional Value-at-Risk* (CVaR) y una combinación del valor esperado y el CVaR. Además, se estudia el efecto de considerar un esquema de decisión en dos etapas (ver Sec. 2.1.4) donde la decisión de primera etapa es la extracción del material, y luego se puede tomar la decisión de qué material procesar en cada escenario, bajo el precepto de que cuando la extracción ocurre se obtienen mejores estimaciones de la ley real del bloque en base a mediciones de pozos de tronadura. Sus resultados muestran que la minimización de estas medidas de riesgo ofrecen una manera efectiva de evitar grandes pérdidas de valor dada la incertidumbre geológica, y que el esquema de dos etapas permite evaluar de mejor forma el valor real del pit final.

Finalmente, se tienen los trabajos que utilizan esquemas de programación estocástica de múltiples etapas, buscando maximizar el valor del agendamiento. En este ámbito se tiene el trabajo de Boland, Dumitrescu y Froyland (2008), donde se propone un modelo de secuenciamiento minero en el cual las decisiones se van adaptando según las decisiones de extracción que ocurren en el proceso de optimización, pues la nueva información adquirida depende de

las decisiones tomadas (lo cual es llamado *incertidumbre endógena*). Para simplificar el problema, consideran los bloques en agregados, y cada agregado puede ser extraído en fracciones en distintos periodos. Además, consideran que para diferenciar entre escenarios, el valor de la ley entre ellos debe ser lo "suficientemente distinto", pues el error de muestreo no permite distinguir entre valores muy cercanos de manera fidedigna. Con estas suposiciones, construyen un modelo que se adapta tanto a las decisiones de extracción como de procesamiento en un agendamiento de largo plazo.

#### 2.1.4. Programación estocástica

La toma de decisiones en investigación de operaciones raramente se hace con datos completos. Típicamente se asumen conocidos ciertos parámetros que en la vida real son inciertos o incompletos, y que serán conocidos sólo en un futuro donde las decisiones ya deben haber sido tomadas anteriormente. En ese sentido, es relevante el uso de herramientas que permitan asistir en el proceso de toma de decisiones considerando que nuestro conocimiento del fenómeno en estudio es limitado en el presente, con el fin de encontrar soluciones factibles en cualquier escenario o que permitan incorporar posibles acciones futuras que permitan corregir nuestras decisiones iniciales.

De acuerdo a King y Wallace (2012), la programación estocástica es la rama de la matemática y la investigación de operaciones que estudia como incorporar la incertidumbre en la toma de decisiones. Se basa en las teorías de probabilidad, estadística y optimización para ofrecer bases teóricas y métodos de resolución de problemas estocásticos simples y complejos. Además, entrega modelos que pueden involucran distintos niveles de información en distintas etapas de decisión producto de la incertidumbre del fenómeno estudiado.

Más concretamente, según Shapiro y Philpott (2007), la programación estocástica es útil para encontrar soluciones a problemas donde existe incertidumbre, pero de alguna forma se puede conocer la distribución de probabilidad del parámetro incierto (mediante el uso de datos históricos, por ejemplo) o simular su comportamiento. De esta forma se diferencia de la optimización robusta, en donde también existe incertidumbre en algún parámetro, pero se conoce solo un conjunto de posibles valores de él, y típicamente se optimiza para el peor caso posible de este conjunto. El hecho de conocer la distribución de probabilidad del parámetro estocástico permite buscar un resultado que sea factible para todo el rango de valores posibles (o para un porcentaje de ellos, como veremos más adelante) y a su vez, maximizar la esperanza de una función que dependa de las variables de decisión del problema y de las distribuciones de probabilidad de los parámetros bajo incertidumbre.

A continuación se verán los problemas típicos asociados a programación estocástica.

#### Problemas en dos etapas

Este tipo de problemas se basan en que existen casos donde se debe tomar una decisión en cierto instante de tiempo en donde existe información incompleta acerca de alguna variable

del fenómeno estudiado y por ende, la decisión puede no ser óptima en todos los casos. Seguida a este etapa, existe una segunda fase en donde la información aumenta y es posible tomar acciones con el objetivo de mitigar el posible error cometido en la primera etapa. Por ejemplo, podemos mencionar el problema de un vendedor que desea saber cuánto producir frente a una demanda desconocida. En primera instancia, el vendedor puede decidir una cantidad a producir antes de saber la demanda, y luego, cuando conoce cual es la demanda real, puede tomar acciones para cumplir con dicha demanda, como ordenar una cantidad extra, o costear el stock de la producción excedente.

Uno de los aspectos claves de la optimización en dos etapas es el concepto de información. Es posible separar ambas etapas mediante la llegada de información relevante para el proceso de optimización. Cuando llega esa información, la variable bajo incertidumbre deja de ser incierta, y por lo tanto pueden tomarse decisiones que dependan del valor real de dicha variable.

Para formalizar estas ideas, veremos la definición de este tipo de problemas.

**Definición 2.1** *Problema lineal en dos etapas*

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c^T x + \mathbb{E}[Q(y, \xi)] \\ \text{s.a.} \quad & Ax \leq b \\ & x \in \mathbb{R}_+^n \end{aligned}$$

Donde  $Q(y, \xi)$  es la solución óptima para el problema de segunda etapa:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & q^T y \\ \text{s.a.} \quad & Tx + Wy \leq h \\ & y \in \mathbb{R}_+^n \end{aligned}$$

En la definición anterior, el parámetro  $\xi$  representa el conjunto de datos del problema de segunda etapa ( $T, W, q, h$ ) los cuales son inciertos. La esperanza considerada en el problema de primera etapa se realiza sobre la distribución de probabilidad de  $\xi$ , es decir, sobre el rango de valores que pueden tomar los datos estocásticos. Las matriz  $A$  es la matriz de restricciones del problema completo, mientras que las matrices  $T$  y  $W$  son las matrices de restricciones del problema de segunda etapa para los vectores  $x$  e  $y$  que contienen las variables de decisión.

En otras palabras, en este problema se toma una decisión antes de obtener la información completa, dada por la variable  $x$  que es *independiente* de la distribución de probabilidad de  $\xi$ , para luego, buscar la minimización de la esperanza del problema de segunda etapa donde la información de los distintos valores que pueden tomar los parámetros estocásticos es conocida, junto con su probabilidad. La variable de esta segunda etapa se llama *recurso*. Las restricciones de las matrices  $T$  y  $W$  ligan las decisiones de primera y segunda etapa.

## Problemas de múltiples etapas

En la sección anterior se vieron los problemas en dos etapas, en donde la definición de cada etapa estaba dada por la llegada de información que revelaba los parámetros inciertos.

Si esta información es revelada paulatinamente en un intervalo de tiempo mayor, se tiene que esta estructura en dos etapas se generaliza a etapas múltiples, como se ve en el siguiente esquema:

$$\text{decisión}(x_1) \rightarrow \text{observación}(\xi_2) \rightarrow \text{decisión}(x_2) \rightarrow \dots \rightarrow \text{observación}(\xi_T) \rightarrow \text{decisión}(x_T)$$

En este caso, la decisión en la etapa  $i$  también cuenta con toda la información que concierne a las etapas hasta  $i - 1$ , pero no puede saber lo que sucederá en las etapas posteriores. Es relevante también el uso no solo de un vector de parámetros inciertos  $\xi$ , sino de una secuencia estocástica de vectores  $\xi_{[T]} = \{\xi_2, \dots, \xi_T\}$ , junto con la respectiva secuencia de vectores de variables de decisión,  $x_{[T]} = \{x_1, \dots, x_T\}$ . Formalizando este problema, tenemos la siguiente definición.

**Definición 2.2** *Problema lineal de múltiples etapas*

$$\min_{\substack{A_1 x_1 = b_1 \\ x_1 \geq 0}} c_1^T x_1 + \mathbb{E} \left[ \min_{\substack{B_2 x_1 + A_2 x_2 = b_2 \\ x_2 \geq 0}} c_2^T x_2 + \mathbb{E} \left[ \dots + \mathbb{E} \left[ \min_{\substack{B_T x_{T-1} + A_T x_T = b_T \\ x_T \geq 0}} c_T^T x_T \right] \right] \right]$$

La estructura anidada de este problema deriva del hecho de que en cada etapa  $t \in T$  se conoce la información de todas las etapas anteriores, y por ende, pueden influir en la decisión de la etapa considerada. Las matrices  $B_t$  y  $A_t$ , junto con los vectores  $b_t$  y  $c_t$  son los parámetros estocásticos que se van revelando en las etapas respectivas. Es decir, la observación  $\xi_t$  tiene como elementos dichas matrices y vectores. Explícitamente:

$$\begin{aligned} & \text{decisión } x_1 \\ & \text{observación } \xi_2 := \{A_2, B_2, c_2, b_2\} \\ & \text{decisión } x_2 \\ & \quad \vdots \\ & \text{observación } \xi_T := \{A_T, B_T, c_T, b_T\} \\ & \text{decisión } x_T \end{aligned}$$

Es importante recalcar que en cada etapa  $t$ , la matriz  $B_t$  de restricciones considera solo las decisiones de la etapa  $t - 1$  dadas por la variable  $x_{t-1}$ . Esta condición no necesariamente se cumple, pues es posible que la decisión de la etapa  $t$  pueda depender de toda la historia de decisiones anteriores. Esta suposición se realizó con el fin de simplificar esta definición. También se consideró implícitamente que la observación  $\xi_t$  no depende de la historia de observaciones anteriores. Es decir, la distribución de probabilidad de  $\xi_t$  es independiente de las observaciones  $\xi_{[t-1]} = \{\xi_1 \dots \xi_{t-1}\}$ . A su vez, tanto en este problema multi-etapa como en el problema de dos etapas visto en la sección anterior, se asumió que las decisiones consideradas en cierta etapa no modifican la distribución de probabilidad del parámetro incierto en las etapas posteriores (es decir,  $\xi_t$  es independiente de  $x_{t-1}$ ), lo cual indica que no existe un aprendizaje del fenómeno estudiado a medida que avanza la toma de decisiones. Esta independencia no siempre es cierta: En minería, en particular, la decisión de qué sectores

extraer implica un aumento de la información de los sectores cercanos gracias al muestreo de los pozos de tronadura. Sin embargo, el modelamiento de este tipo de comportamiento no es sencillo, y su resolución tampoco lo es, por lo cual se ha optado por utilizar estas simplificaciones para abordar este tipo de problemas en esta tesis. Para una información completa de problemas multi-etapa se recomienda revisar Ruszczyński y Shapiro (2009).

Hasta ahora han sido revisadas las distintas técnicas de programación estocástica junto con sus definiciones teóricas. Lo que comparten en común estas técnicas es el uso de la distribución de probabilidad de los parámetros inciertos del modelo, por lo cual, para plantear estos modelos, es necesario poseer esta distribución o al menos poder estimarla de alguna forma. Esta estimación muchas veces no es fácil de realizar por la ausencia de datos. Y aún cuando se posee dicha distribución, el cálculo de la esperanza de alguna función exige la integración sobre toda la distribución, lo cual impone dificultades para la resolución numérica de dichos problemas. Más aún, cuando la decisión involucra múltiples parámetros inciertos, la integración debe realizarse en varias dimensiones simultáneamente, imponiendo aún mayores dificultades para la resolución de casos reales. En minería, por ejemplo, existen técnicas para calcular la distribución de probabilidad de la ley de un bloque en función de los datos conocidos y simultáneamente a otras locaciones del espacio. Sin embargo, de acuerdo a Emery (2012a), este cálculo no es sencillo cuando se desean considerar muchas locaciones a la vez pues involucra la integración sobre varios dominios. De esta forma, tanto la estimación como el uso de la distribución de probabilidad en los problemas de programación estocástica presenta variadas dificultades prácticas que hacen poco atractivo su uso para ciertas aplicaciones. Con el objetivo de hacer más manejable este tipo de problemas, y poder aplicarlo a casos prácticos, se presentará una forma de discretización de los problemas antes vistos.

### Sample Average Approximation (SAA)

Consideremos el siguiente problema estocástico:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \hat{f}(x) := \mathbb{E}[F(x, \xi)] \\ \text{s.a.} \quad & Ax \leq b \\ & x \in \mathbb{R}_+^n \end{aligned} \tag{2.5}$$

Como se comentó anteriormente, el cálculo de dicha esperanza en el segundo término de la función objetivo presenta variados problemas prácticos. Muchas veces la distribución de probabilidad no presenta una forma cerrada, por lo que la resolución analítica de dicha esperanza no es posible. Por esta razón, es necesario buscar una alternativa a este cálculo que permita encontrar solución a dichos problemas.

Se considera que se posee una **muestra** de tamaño  $N$  del vector incierto:  $\xi^1, \dots, \xi^N$ . Esta muestra puede ser obtenida mediante  $N$  observaciones históricas del fenómeno estocástico en estudio, o mediante técnicas de muestreo de Monte Carlo. Para cualquier  $x$ , es posible estimar el valor de la esperanza  $\mathbb{E}[F(x, \xi)]$  por el promedio de los valores de  $F(x, \xi^i)$  con



$i \in N$ . De esta forma, se puede escribir el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \hat{f}_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(x, \xi^i) \\ \text{s.a.} \quad & Ax \leq b \\ & x \in \mathbb{R}_+^n \end{aligned} \tag{2.6}$$

El problema (2.6) es una **aproximación** del problema (2.5) llamada *Sample Average Approximation*. Este problema es equivalente a considerar que la distribución de probabilidad original es discreta con  $N$  valores posibles, llamados *escenarios*, cada uno con probabilidad  $\frac{1}{N}$ . Sin embargo, se le llama aproximación pues en realidad la distribución de probabilidad puede generar un número mayor de escenarios posibles, ya sea porque es una variable continua sobre el dominio, o porque el número de escenarios originales, pese a ser un conjunto discreto, es extremadamente grande, por lo cual se ocupa la aproximación para poder resolver el problema en tiempos razonables según el modelo considerado.

El problema (2.6) es una función de la muestra considerada (los vectores  $\xi^1, \dots, \xi^N$ ). Como esta muestra puede ser tomada aleatoriamente, el problema es considerado aleatorio también. Para una realización particular de la muestra, el problema (2.6) es un problema estocástico con una distribución de probabilidad discreta y finita. Una suposición importante de este muestreo radica en considerar que cada uno de los vectores  $\xi^i$  posee la misma distribución marginal que el vector de los datos originales  $\xi$ . Si además de esto, se cumple que cada vector  $\xi^N$  es independiente de los demás vectores de la muestra, se puede decir que la muestra es independiente e idénticamente distribuida (*iid*).

Si la condición de *iid* se cumple, por la Ley de los Grandes Números tenemos que  $\hat{f}_N(x) \rightarrow \hat{f}(x)$  cuando  $N \rightarrow \infty$  con probabilidad 1. Además, se tiene que  $\mathbb{E}[\hat{f}_N(x)] = \hat{f}(x)$ , es decir,  $\hat{f}_N(x)$  es un estimador insesgado de  $\hat{f}(x)$ . De aquí se puede demostrar, bajo condiciones adicionales, que el valor óptimo del problema aproximado (2.6) converge al valor óptimo del problema original (2.5) cuando el tamaño de la muestra es suficientemente grande. La demostración de este resultado y un estudio teórico de esta convergencia puede ser visto en Shapiro (2009).

En la Sec. 2.2 se estudiará cómo generar esta muestra a partir de métodos geoestadísticos para problemas asociados a la minería. Además se estudiará la convergencia práctica del problema aproximado al problema real bajo técnicas de Monte Carlo, técnicas de reducción de varianza y generación de simulaciones antitéticas.

Ahora se sabe que el problema de cálculo de esperanza puede transformarse, bajo ciertas condiciones, al cálculo de un promedio de distintos escenarios en una distribución discreta. Con esto, debemos redefinir el concepto de etapas e información visto en la Sec. 2.1.4 para adaptarse a esta nueva formulación. Esto será visto en la siguiente sección.

## Restricciones de no-anticipatividad

Se tiene el problema estocástico siguiente visto en la sección anterior:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \mathbb{E}[F(x, \xi)] \\ \text{s.a.} \quad & Ax \leq b \\ & x \in \mathbb{R}_+^n \end{aligned} \tag{2.7}$$

Si se considera que la distribución de probabilidad de  $\xi$  se compone de  $k$  escenarios, cada uno con probabilidad  $p_k$ , el cálculo de la esperanza puede escribirse como sigue:

$$\text{mín}_x \sum_{k=1}^K p_k F(x, \xi^k) \tag{2.8}$$

Esta formulación es similar a la aproximación (2.6). Sin embargo, es posible agregar una relajación extra al problema, imponiendo que por cada escenario  $k$  exista una variable de decisión  $x_k$ :

$$\text{mín}_{x_1, \dots, x_K} \sum_{k=1}^K p_k F(x_k, \xi^k) \tag{2.9}$$

Que la variable de decisión dependa de  $k$  indica que es posible separar el problema original en  $k$  problemas separados. Si se considera el problema en dos etapas visto en la Sección 2.1.4, esta relajación llevaría a resolver  $k$  problemas:

$$\text{mín}_{x_k \geq 0, y_k \geq 0} c_k^T x_k + q_k^T y_k \tag{2.10}$$

Sin embargo, esta relajación no nos es útil para resolver problemas en dos etapas, pues la variable de primera etapa,  $x$ , depende de  $k$ . Es decir, la decisión depende del escenario considerado, lo cual es contrario a la decisión de primera etapa donde la información que revela el escenario es desconocida aún. Para que este problema vuelva a tener la estructura anterior, se pueden imponer las restricciones de **no-anticipatividad**:

$$x_1 = \dots = x_K \quad k \in K \tag{2.11}$$

Este tipo de restricciones es fundamental en los problemas de dos y múltiples etapas. El principio que las define se puede resumir como "*Solo puedo tomar decisiones que dependen del escenario en el que me encuentro, cuando la información acerca de este escenario ya ha*

*sido revelada*". Esto supone que en el momento en que se revela la información en alguna de las etapas, se conoce el valor de la variable aleatoria y por ende es posible distinguir entre escenarios, y por lo tanto, se pueden tomar decisiones que dependan de él. Dado que en la primera etapa la información aún no se revela, es imposible distinguir entre escenarios por lo cual la decisión debe ser única, independiente del escenario, lo cual se logra con las restricciones de no-anticipatividad, que fuerzan a que la decisión sea la misma para todos los escenarios hasta que el valor del fenómeno incierto es observado.

## 2.2. Simulación geoestadística

En esta sección se estudiarán conceptos básicos de geoestadística y el marco teórico que sustenta el uso de la simulación geoestadística. Los conceptos han sido extraídos mayoritariamente desde Emery (2012b) y Emery (2012c), el cual puede ser consultado para mayor información.

La geoestadística se define como el estudio de fenómenos regionalizados, esto es, que se extienden en el espacio con una cierta continuidad. Típicamente el objetivo es estudiar una variable regionalizada para determinar su comportamiento en el espacio y poder estimar su valor en sitios donde no se posee información acerca de ella. En minería, el estimador utilizado por excelencia es el kriging, el cual es el estimador lineal insesgado que minimiza la varianza del error. Con los datos de sondajes in-situ, se realiza un análisis estadístico y geológico del depósito, con el fin de definir las unidades de estimación. En estas unidades se realiza un análisis variográfico independiente para obtener el variograma de los datos, el cual es considerado una medida fiable de la correlación espacial de los datos. Finalmente, se realiza la etapa de kriging para obtener una estimación de los recursos del yacimiento en estudio.

A pesar de que, por construcción, kriging es el mejor estimador lineal insesgado, la varianza de kriging no refleja de forma adecuada la incertidumbre asociada a la estimación. El principal defecto de este estimador es que su varianza no depende de los valores de los datos: depende solo de su configuración geométrica y de la estructura espacial de la variable regionalizada en estudio. Es así como sectores donde los datos toman valores cercanos entre ellos pueden que no presenten una varianza diferente comparada con zonas donde los datos son más erráticos, siempre y cuando presenten la misma configuración geométrica. De esta forma, este estadístico no refleja el llamado *efecto proporcional*, el cual se ve cuando las zonas de valores altos de la variable muestran más variabilidad que las zonas de valores bajos.

Dado esto, si necesitamos cuantificar alguna medida de riesgo o incertidumbre del yacimiento, es necesario buscar métodos alternativos al kriging. A continuación se presentan algunos de estos métodos, los cuales se basan mayoritariamente en intentar estimar no solo un valor de la variable en los sitios sin información, sino su distribución de probabilidad, las cuales pueden ser usadas para tratar problemas de riesgo e incertidumbre como los vistos en la Sec. 2.1.4.

La primera aproximación para obtener una distribución de probabilidad sobre el valor de

la variable aleatoria en sitios sin información es el uso de una medida global de incertidumbre: la función de distribución *a priori*,  $F(z) = P(Z(x) < z)$ , donde  $Z(x)$  es el valor de la variable en el sitio  $x$  y  $z$  es un umbral para el cual se calcula la probabilidad. Esta medida puede ser aproximada por el histograma de los datos. Sin embargo, al ser una medida global, no considera que los datos cercanos a los sitios no muestreados debieran influir en la distribución de probabilidad de ese sitio. Es decir, si existen datos con alto valor en un sector, es esperable que sea más probable encontrar valores altos que bajos en dicho sector, lo cual no es capturado por la distribución *a priori*.

Para incorporar lo anterior, se puede buscar la distribución de probabilidad de los sitios sin dato, *condicional* a los datos reales en los sitios muestreados. Formalmente:

$$F(x; z|(n)) = P(Z(x) < z | Z(x_1), \dots, Z(x_n))$$

Los valores condicionantes  $n$  pueden pertenecer a una vecindad del sitio que se está estudiando, con lo que se obtiene una medida de la incertidumbre condicionada localmente. Para obtener esta distribución existen variados métodos, como el kriging multigaussiano, de indicadores, de probabilidad, etc. La complejidad y el nivel de generalidad varían entre ellos, pero todos suponen el cálculo de la distribución de probabilidad de un sitio a la vez y en soporte puntual.

Sin embargo, el problema de real interés en minería supone el cálculo de las distribuciones de probabilidad *conjuntas* en varios sitios a la vez: Dado que los valores de las variables están relacionados espacialmente, la distribución conjunta considerando dos sitios no es el producto de las distribuciones marginales de dichos sitios. Mas aún, los métodos mencionados anteriormente calculan probabilidades en soportes puntuales, mientras que en planificación minera es de interés el estudio sobre unidades de mayor volumen (bloques), y, dado lo anterior, no es posible caracterizar la probabilidad de un bloque de superar cierto valor por el producto de las probabilidades de los puntos dentro del bloque. Existen algunos métodos para realizar el cambio de soporte de manera consistente, pero suponen un paso adicional y la elección de un modelo que puede no ajustarse al comportamiento real de la variable. Finalmente, en el caso de que se busque calcular directamente la probabilidad conjunta, se tiene que su determinación analítica es bastante compleja. Por estos motivos, es preferible utilizar métodos numéricos para evaluar la variabilidad conjunta de todo el dominio estudiado.

A estos métodos se les llama **Simulaciones**, y su objetivo es construir *realizaciones* de la función aleatoria estudiada, que mantengan la variabilidad real del fenómeno. Cada una de estas realizaciones es un posible resultado de la función aleatoria subyacente, y por lo tanto, puede utilizarse como un *escenario* posible del modelo de bloques para planificación minera, esto es, un posible valor dentro de todos los valores que puede tomar la ley del elemento de interés. De esta forma, es posible realizar variados análisis útiles en minería: Probabilidad de que un bloque supere determinada ley de corte, generación de planes mineros robustos que respondan de buena forma a varios escenarios, cuantificación del riesgo de determinado plan, intervalos de confianza de las leyes de un bloque, etc. Nos centraremos, por lo tanto, en la forma de generar estos escenarios para luego utilizarlos en el problema de planificación minera bajo incertidumbre.

## 2.2.1. Generación de simulaciones

### Anamorfosis gaussiana

Con el fin de crear distintas realizaciones de la función aleatoria, esta debe ser caracterizada espacialmente. Para esto, se deben definir sus distribuciones de probabilidad univariable, bivariable, trivariable y multivariable en general, a partir de los datos reales. Típicamente, estas distribuciones se resumen en el cálculo de sus momentos estadísticos de distinto orden. Para obtener una simulación que respete la variabilidad real del fenómeno, es necesario definir sus momentos de orden superior y no solo su media y su función de covarianza. Esto supone una dificultad considerable con un set de datos limitado, pues la estimación de estos parámetros no es sencilla.

Esta dificultad no está presente en el caso de distribución multigaussiana (aquella donde cualquier combinación lineal de variables es una variable aleatoria gaussiana) pues ella queda totalmente definida por sus dos primeros momentos estadísticos: media y covarianza. Por dicho motivo, se hace atractivo buscar una forma de aplicar dicha propiedad a distribuciones más generales. Esto se logra mediante una **anamorfosis gaussiana**: Se transforma la variable original en una variable con distribución marginal gaussiana estándar. Esta transformación es marginal, por lo que asegura solamente un comportamiento gaussiano univariable y no multigaussiano, por lo cual es necesario comprobar que las distribuciones multivariables también se comportan como una gaussiana estándar. En la práctica, sin embargo, se comprueba solamente el carácter bi-gaussiano y se asume que se cumple para distribuciones multivariable. La anamorfosis generalmente se realiza a partir del histograma de los datos desagrupados, asignando a cada valor de la variable el valor gaussiano correspondiente que posee la misma frecuencia acumulada, como se aprecia en la Fig. 2.2

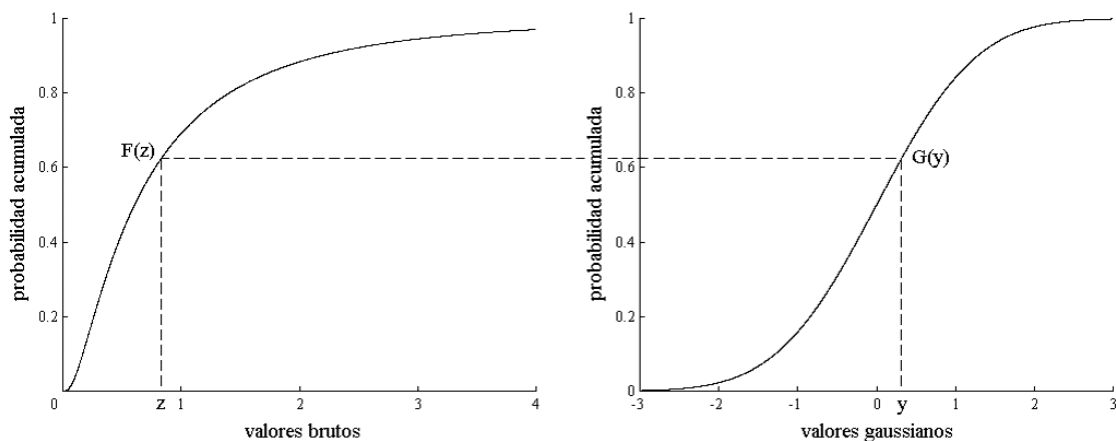


Figura 2.2: Determinación gráfica de la anamorfosis gaussiana a partir de la función distribución acumulada. *Fuente: Emery (2012c).*

Luego de la anamorfosis, se trabaja directamente con la variable multigaussiana, lo cual permite utilizar variados algoritmos de simulación que generan múltiples escenarios posibles a partir de la función de covarianza de los datos. En la práctica, para obtener la función de covarianza de los datos, se utiliza su variograma experimental, definido como el valor de la

ecuación (2.12), para distintas distancias de separación  $h$ , con  $N(h)$  el conjunto de todos los pares que se encuentran separados a dicha distancia. Este variograma experimental luego es modelado para obtener una función continua y que pueda ser utilizada en los algoritmos de simulación.

$$\gamma(h) = \frac{1}{2|N(h)|} \sum_{(i,j) \in N(h)} [Z(x_i) - Z(x_j)]^2 \quad (2.12)$$

Luego de generar los escenarios, es posible volver a los valores originales utilizando el mismo método de la anamorfosis, tomando como referencia el histograma original de los datos.

A continuación se revisarán los algoritmos más utilizados para generar simulaciones en geoestadística.

## Algoritmos de simulación

### Bandas rotantes

El método de las bandas rotantes se basa en la descomposición del problema de varias dimensiones a un problema de una sola dimensión. Se discretiza el espacio en varias rectas regularmente repartidas en diferentes direcciones, para posteriormente simular sobre cada una de estas rectas unidimensionales y proyectar la simulación al espacio completo. Posteriormente, se promedia la proyección de todas las rectas unidimensionales en cada punto a simular para obtener el valor simulado final. Este método presenta variadas ventajas computacionales al ser paralelizable y se obtiene una función analítica para la variable aleatoria, lo que permite simular en cualquier sitio deseado. Por otra parte, la reproducción de la función de covarianza depende del número de rectas a utilizar, tendiendo a una reproducción exacta cuando el número de rectas tiende a infinito.

### Descomposición matricial

Para la descomposición matricial, consideremos la matriz de covarianzas entre los  $N$  sitios a simular  $x_1, \dots, x_N$ :

$$\Sigma = [C(x_i - x_j)]_{i,j} \quad (i, j) \in N \times N$$

Esta covarianza puede ser descompuesta mediante una Descomposición de Cholesky como sigue:

$$\Sigma = AA^T$$

Para obtener una realización que cumpla con dicha covarianza, se plantea  $Y = AX$  donde  $X$  es un vector con  $N$  variables independientes, cada una distribuida como una gaussiana con media 0 y varianza 1, mientras  $Y$  es el vector con los valores de la variable simulada en los  $N$  sitios. Finalmente, para generar otras realizaciones basta con generar distintos vectores  $X$ . Este método presenta la ventaja de ser muy rápido una vez obtenida la matriz  $A$ , pues se posee una expresión analítica para los sitios a simular que

consta de una multiplicación de matrices. Además, reproduce exactamente la función de covarianza pedida. Sin embargo, la obtención de la matriz  $A$  de la descomposición de Cholesky no es sencilla cuando el número de sitios a simular es elevado.

### Método espectral continuo

Este método se basa en el **Teorema de Bochner** cuyo resultado prueba que toda función de covarianza continua en  $\mathbb{R}^N$  es la transformada de Fourier de una medida  $\chi$  positiva integrable. A partir de esta transformación, se puede definir una función aleatoria estacionaria, de media cero y con la función de covarianza pedida. Si se suman varias realizaciones, se obtiene además una variable multigaussiana. Estos métodos son poco intuitivos, pero rápidos y paralelizables. Por otro lado, al igual que en el método de las bandas rotantes, la reproducción de la función de covarianza depende del número de realizaciones consideradas.

### Simulación gaussiana secuencial

La simulación gaussiana secuencial se basa en generar una grilla de nodos a simular para luego recorrerlos y simular valores secuencialmente en cada nodo. Cada nodo representa una locación única en el espacio tridimensional. El algoritmo procede como sigue:

1. **Definición de grilla a simular:** Se definen los nodos en el espacio que se desean simular.
2. **Camino aleatorio:** Se genera un orden aleatorio de estos nodos, y según este orden se simulan secuencialmente. Luego, para cada nodo:
  - (a) **Kriging simple:** Se realiza un kriging simple con media 0, utilizando todos los sitios simulados previamente. En caso de existir datos condicionantes, se utilizan también dichos datos para obtener el valor del kriging.
  - (b) **Número aleatorio:** Simular una variable gaussiana estándar por Monte Carlo,  $U_i$ .
  - (c) **Simular valor:** Asignar el valor simulado a partir de la siguiente ecuación:

$$Y(x_i) = Y^{KS}(x_i) + \sigma^{KS}(x_i) \times U_i$$

Donde  $Y(x_i)$  es el valor simulado en el nodo  $i$ ,  $Y^{KS}(x_i)$  es el valor del kriging simple en el nodo  $i$  y  $\sigma^{KS}(x_i)$  es la varianza de kriging simple en ese nodo.

El algoritmo presentado sufre el inconveniente de que el sistema de kriging simple cada vez es más grande, pues utiliza como datos todos los nodos previamente simulados. Para evitar este problema en grillas muy grandes, se utiliza una *vecindad móvil*, es decir, se realiza el kriging con un número limitado de datos que se ubican dentro de cierta distancia al sitio a simular. Para generar distintas realizaciones, se genera un nuevo camino aleatorio, con el fin de evitar artefactos, junto con nuevos números aleatorios en cada nodo a simular.

### Condicionamiento

Para aplicaciones en minería, es necesario que los algoritmos de simulaciones generen escenarios *condicionales*, es decir, que además de respetar la función de covarianza pedida,

respeten el valor de los sitios con datos. Algunos de los algoritmos propuestos pueden generar simulaciones condicionales directamente, como el método gaussiano secuencial y la descomposición matricial. Sin embargo, existe otro grupo que no lo hacen, por lo cual es necesario incorporar una etapa adicional de kriging para obtener una simulación condicional a los sitios con datos.

### 2.2.2. Análisis de convergencia

Se han revisado distintos métodos para generar simulaciones, los cuales pueden ser utilizados para el problema de la planificación minera bajo incertidumbre. La pregunta que ahora es pertinente es: ¿Cuál es el número óptimo de simulaciones que debo utilizar para representar el dominio en estudio? Por una parte, tenemos que los problemas de optimización matemática son, generalmente, bastante intensivos en recursos computacionales, por lo cual es necesario utilizar la menor cantidad de escenarios posibles para asegurar obtener un resultado en tiempo razonable, dado que el tamaño del problema crece con el número de escenarios (ver Sec. 2.1.4). Por otra parte, ocupar un número muy bajo de escenarios no asegura el obtener un resultado representativo del fenómeno estudiado, por lo cual los resultados pueden no ser confiables. Dado esto, se hace necesario intentar formalizar estas nociones y buscar formas de minimizar el número de escenarios a utilizar manteniendo la representatividad de la variabilidad del fenómeno estudiado.

### Simulación de Monte Carlo

Se define una *Simulación de Monte Carlo* como el uso de un muestreo aleatorio de cierta distribución, con el fin de estudiar o caracterizar la respuesta de algún sistema en estudio, típicamente no lineal. Por ejemplo, el lanzamiento de una moneda puede ser considerado como una variable aleatoria (desde ahora, v.a.) que puede tomar dos valores, cara o cruz. Para estimar la respuesta de este sistema, es posible realizar una simulación de Monte Carlo:

1. Se genera un número aleatorio entre 0 y 1 distribuido uniformemente.
2. Se comprueba si este número es menor o mayor a 0.5, asignando un posible resultado a cada caso. Esto constituye una realización de la variable aleatoria.
3. Se repite el procedimiento hasta tener una muestra de posibles realizaciones.

Con esta muestra es posible calcular estadísticas del fenómeno estudiado (el lanzamiento de la moneda) considerando cada realización como una muestra del proceso aleatorio. Naturalmente, este procedimiento puede ser realizado para sistemas más complejos que el ejemplo aquí presentado. Por ejemplo, el método gaussiano secuencial visto en la Sec. 2.2.1 utiliza una variable aleatoria que se distribuye como una gaussiana estándar. La generación de un número aleatorio con el fin de simular el valor de cada nodo corresponde a una Simulación de Monte Carlo. El hecho de poder realizar este experimento múltiples veces con diferentes valores del número aleatorio permite estudiar la variabilidad del sistema estudiado. En este caso, además, los algoritmos de simulación permiten preservar la función de covarianza del fenómeno y los valores condicionantes. De esta forma, es posible interpretar cada simulación



condicional como una posible simulación de Monte Carlo del modelo de bloques.

La interpretación de las simulaciones de Monte Carlo como un muestreo de una variable aleatoria permite utilizar formalismos estadísticos para el cálculo de ciertos momentos relevantes para el fenómeno estudiado: Sea  $X$  una variable aleatoria con esperanza  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$  finita. A partir de una simulación de Monte Carlo de dicha variable, es posible obtener un valor posible de esta v.a. Si se repite este proceso  $N$  veces, se obtiene una serie  $X_i$  con  $i = 1, \dots, N$  de valores posibles de la v.a. La media de esta muestra es un estimador insesgado de la esperanza  $\mu$  de la v.a., y converge al valor real a medida que el tamaño de la muestra aumenta. Si las muestras son independientes e idénticamente distribuidas, cada una tiene la misma probabilidad de ocurrencia, con lo cual se puede calcular su media como sigue:

$$\hat{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \quad \text{Var} [\hat{X}_N] = \frac{\sigma^2}{N} \quad (2.13)$$

Además, la varianza de este estimador sirve como medida de la precisión de la estimación, y depende de la varianza de la v.a.,  $\sigma^2$  y del tamaño de la muestra considerada,  $N$ .

Esta definición puede ser extendida al caso cuando se requiere evaluar una *respuesta* de la variable aleatoria muestreada mediante un modelo. En cualquier modelo que se quiera evaluar, la incertidumbre en los parámetros de entrada genera incertidumbre en los resultados, por lo cual es necesario cuantificar de alguna forma dicha incertidumbre. Con este fin, se pueden utilizar las simulaciones de Monte Carlo y las definiciones antes vistas: Se desea evaluar un modelo que depende de la v.a.  $X$ , y se denota como  $g(X)$ . Si se obtiene una muestra por Monte Carlo de la v.a., es posible aplicar el modelo  $g(X)$  a esta realización de la función aleatoria para obtener un posible resultado del modelo. Típicamente, se busca calcular algún estadístico de este modelo,  $\theta = \mathbb{E}[g(X)]$ . En este caso, el muestreo por Monte Carlo permite generar  $N$  resultados posibles del modelo y aproximar el valor del estadístico mediante un estimador insesgado de  $\theta$ . Definimos entonces el estimador *crudo* de Monte Carlo como sigue:

**Definición 2.3** *Dado una serie de  $N$  muestras aleatorias  $X_i$  de una v.a.  $X$ , el estimador crudo de Monte Carlo se define como:*

$$\hat{\theta}_{MC} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(X_i) \quad \text{Var}[\hat{\theta}_{MC}] = \frac{\sigma_h^2}{N} \quad (2.14)$$

Donde  $\hat{\theta}_{MC}$  es el valor de la aproximación mediante Monte Carlo,  $\text{Var}[\hat{\theta}_{MC}]$  es la varianza de esta estimación, y  $\sigma_h^2$ , la varianza de  $g(X)$ .

El estimador crudo de Monte Carlo tiene como ventaja el ser bastante simple y directo de aplicar. Sin embargo, mejorar la precisión de la estimación puede resultar complejo. Como se desprende de las ecuaciones (2.14) y (2.13), la varianza de esta estimación depende de la varianza de la v.a. y del tamaño de la muestra considerada. Dado que la varianza de la v.a. es intrínseca al fenómeno estudiado, la única forma de reducir la varianza de la estimación, y por ende, mejorar la precisión, es aumentando el tamaño de la muestra  $N$ . Sin embargo, en la práctica esta condición puede resultar prohibitiva para modelos físicos con altos tiempos

de resolución, pues el valor de la varianza disminuye geoméricamente con el tamaño de la muestra. Por ejemplo, si obtengo un valor de varianza de estimación de 0.1 con 100 muestras, es necesario utilizar 1000 muestras para obtener una varianza de estimación de 0.01. Por este motivo, se hace necesario buscar métodos alternativos para reducir la varianza sin tener que aumentar de manera drástica el tamaño de la muestra utilizada. Una alternativa estudiada ha sido la de definir escenarios *representativos* a partir de un grupo mayor de simulaciones, basándose en alguna medida de similitud entre ellos. Por ejemplo, Armstrong y col. (2013) buscan reducir el número de escenarios en un problema de minería a partir de la cantidad de metal contenido en cada escenario para distintas leyes de corte. A partir de este indicador, se reduce el número de escenarios al considerar representantes de distintos intervalos, para luego resolver el problema requerido utilizando solo las simulaciones representantes.

Otra alternativa son las llamadas técnicas de reducción de varianza, y se basan en el precepto de que el evento que genera los escenarios no necesariamente debe ser totalmente aleatorio para obtener resultados representativos, y que, más aún, existe cierto grado de control que se puede ejercer para obtener estos escenarios sin afectar el insesgo de las aproximaciones por Monte Carlo, y a la vez disminuyendo la varianza de la estimación. A continuación se revisarán algunas de estas técnicas para mejorar la estimación de las simulaciones de Monte Carlo.

### 2.2.3. Técnicas de reducción de varianza

En esta sección se enumeran las técnicas de reducción de varianza más relevantes. Para una información más detallada, consultar Cheng (1986), James (1985), Haugh (2004) y Kleijnen, Ridder y Rubinstein (2010).

#### Variables de control

El método de las variables de control se basa en utilizar la información adicional que se posee acerca del fenómeno estudiado. En particular, la existencia de variables que estén relacionadas entre sí.

Supongamos que se desea calcular la temperatura media,  $\theta$  de una ciudad del mundo. Para tal motivo, se tiene una muestra de la temperatura  $T_i$  de  $N$  días. Si la muestra fue escogida uniformemente, es posible estimar la temperatura media mediante:

$$\hat{\theta}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_i$$

Naturalmente,  $\mathbb{E}[\hat{\theta}_N] = \theta$ , es decir,  $\hat{\theta}_N$  es un estimador insesgado de  $\theta$ . Más aún, es el estimador *crudo* de Monte Carlo visto anteriormente.

Adicionalmente, se posee información adicional de una segunda variable: la cantidad de lluvia caída en cada día,  $R_i$ . En particular, se conoce su esperanza,  $\mathbb{E}[R]$ . Al tener información de una segunda variable, se puede verificar si existe correlación entre ellas: Por ejemplo, la

cantidad de lluvia caída aumenta en los días donde la temperatura es menor. Si la cantidad de lluvia caída se relaciona con la temperatura, es posible mejorar el estimador crudo agregando dicha información. En este caso, se plantea el siguiente estimador de  $\theta$ :

$$\hat{\theta}_c = \hat{\theta}_N + c(\hat{R}_N - \mathbb{E}[R])$$

Donde  $\hat{\theta}_N$  es el estimador crudo de Monte Carlo para la temperatura,  $\hat{R}_N$  es el estimador crudo para la cantidad de lluvia caída, y el parámetro  $c$  es una constante real. Es fácil comprobar que  $\hat{\theta}_c$  es un estimador insesgado de  $\theta$ , pues  $\mathbb{E}[\hat{\theta}_c] = \theta$ . La varianza de este estimador se calcula como sigue:

$$\text{Var}[\hat{\theta}_c] = \text{Var}[\hat{\theta}_N] + c^2\text{Var}[\hat{R}_N] + 2c\text{Cov}[\hat{\theta}_N, \hat{R}_N]$$

Dado que para cualquier valor de  $c$  el estimador sigue siendo insesgado, es posible elegirlo con el objetivo de minimizar su varianza. Derivando con respecto a  $c$  e igualando a cero, se obtiene que el mínimo valor de  $c$  se obtiene con:

$$c^* = -\frac{\text{Cov}[\hat{\theta}_N, \hat{R}_N]}{\text{Var}[\hat{R}_N]}$$

Luego, reemplazando  $c^*$  en  $\text{Var}[\hat{\theta}_c]$  se obtiene:

$$\text{Var}[\hat{\theta}_c] = \text{Var}[\hat{\theta}_N] - \frac{\text{Cov}[\hat{\theta}_N, \hat{R}_N]^2}{\text{Var}[\hat{R}_N]}$$

De la ecuación anterior se desprende que para que el estimador  $\hat{\theta}_c$  tenga menor varianza que  $\hat{\theta}_N$  basta que  $\text{Cov}[\hat{\theta}_N, \hat{R}_N] \neq 0$ , es decir, que exista alguna relación entre ambas variables. En este ejemplo, existe una relación inversa entre la cantidad de lluvia caída ( $R_i$ ) y la temperatura ( $\mathcal{T}_i$ ). De esta forma, la lluvia caída es una *variable de control* sobre la temperatura: Si el agua caída calculada por  $\hat{R}_N$  para una muestra de  $N$  valores es mayor a su esperanza, quiere decir que la muestra está sobre representando los días lluviosos. Dado que los días lluviosos tienden a coincidir con los días fríos, la muestra sub representará los días calurosos, y por ende mi estimador  $\hat{\theta}_N$  será menor que la esperanza  $\theta$ . Finalmente, con la correlación negativa entre ambos, es posible ver que el estimador  $\hat{\theta}_c$  corrige la estimación cruda de Monte Carlo inicial gracias a la variable de control, mejorando su precisión.

Este algoritmo es útil cuando es sencillo generar simulaciones de ambas variables a la vez. Generalmente la esperanza de la variable de control, así como su varianza y covarianza no son conocidos, por lo cual es necesario estimarlos de antemano mediante una serie de simulaciones piloto. Una vez obtenidos estos valores, se puede plantear el estimador con la variable de control para generar una estimación más precisa. Este método también puede ser extendido para considerar más de una variable de control simultáneamente, lo cual permite mejorar aún más la precisión de la estimación.

## Condicionamiento

El condicionamiento se basa en la **Ley de la Esperanza Total** y la **Ley de la Varianza Total**, que se muestran a continuación:

**Definición 2.4** Sean  $X$  e  $Y$  dos variables aleatorias arbitrarias. La ley de la esperanza total dice que:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] \quad (2.15)$$

Por su parte, la ley de la varianza total dice que:

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[\text{Var}[X|Y]] + \text{Var}[\mathbb{E}[X|Y]] \quad (2.16)$$

Si se desea estimar  $\theta = \mathbb{E}[X]$ , y adicionalmente es posible obtener una muestra de  $N$  posibles valores de  $Y$ , se puede plantear el siguiente estimador:

$$\hat{\theta}_{cond} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{E}[X|Y = y_j]$$

Por la ecuación (2.15) este estimador es insesgado, y por la ecuación (2.16) es posible determinar la varianza de  $\hat{\theta}_{cond}$ :

$$\text{Var}[\hat{\theta}_{cond}] = \frac{\text{Var}[X]}{N} - \frac{\mathbb{E}[\text{Var}[X|Y]]}{N} = \text{Var}[\hat{\theta}_{MC}] - \frac{\mathbb{E}[\text{Var}[X|Y]]}{N}$$

De la última ecuación se desprende que la varianza de este estimador siempre será menor que la varianza del estimador *crudo* de Monte Carlo.

Esta técnica es útil cuando se puede obtener de forma sencilla una muestra de la variable  $Y$  mediante simulaciones, y además es posible calcular la esperanza condicional  $\mathbb{E}[X|Y = y]$  para los distintos valores de la muestra de  $Y$ . Es importante recalcar que esta técnica no simula directamente la variable  $X$ , por lo cual también puede ser útil cuando estas simulaciones son muy costosas computacionalmente, por lo cual simular una variable alternativa es más eficiente.

## Muestreo estratificado

La noción de esta técnica proviene de que es posible obtener una muestra más representativa de la variable aleatoria si se dividen los valores posibles de la v.a. en estratos, y luego se muestrea por Monte Carlo dentro de cada uno de dichos estratos, asegurando que cada zona tenga una cierta cantidad de muestras. Formalmente: Se desea estimar un estadístico de una función de una variable aleatoria  $x$ ,  $\theta = \mathbb{E}[h(X)]$ . Además, se considera que existe otra variable  $Z$ , finita, que puede tomar valores discretos  $Z_1, \dots, Z_m$ , y que se conoce la probabilidad de cada uno de estos valores, es decir,  $p_i = P(Z = z_i)$  es conocida. Finalmente, supongamos que es posible muestrear la distribución condicional de  $X$  dado cada uno de los valores de  $Z$ . Los valores de  $Z$  son los llamados *estratos*, por lo cual la distribución condicional de  $X$  dado

algún valor de  $Z$  implica muestrear por Monte Carlo solo dentro de ese estrato. Por la ley de la esperanza total tenemos que:

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[h(X)|Z]] = \mathbb{E}[h(X)] = \sum_{i=1}^m p_i \mathbb{E}[h(X)|Z = z_i]$$

Por lo cual podemos plantear el siguiente estimador insesgado de  $\theta$ :

$$\hat{\theta}_{str} = \sum_{i=1}^m p_i \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} h(X_{ij})$$

Donde  $N_i$  es el número de muestras de la v.a. en el estrato  $i$ , y  $X_{ij}$  se interpreta como la  $j$ -ésima muestra del  $i$ -ésimo estrato, generada a partir de la distribución condicional de  $X$  dado  $Z = z_i$ .

Para determinar su varianza, se define  $\sigma_i^2 = \text{Var}[h(X)|Z = z_i]$ , es decir, una medida de la varianza de la función dado que se muestreó la v.a.  $X$  en el estrato  $i$ . Con esta definición, se puede ver que:

$$\text{Var}[\hat{\theta}_{str}] = \sum_{i=1}^m \frac{p_i^2 \sigma_i^2}{N_i}$$

Si se selecciona el tamaño del estrato proporcional a su probabilidad de ocurrencia, tenemos que  $N_i = p_i N$ , con  $N$  el tamaño total de la muestra. De esta forma, reemplazando este valor en la varianza del estimador:

$$\text{Var}[\hat{\theta}_{str}] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m p_i \sigma_i^2 = \frac{1}{N} \mathbb{E}[\text{Var}[h(X)|Z]]$$

De la Ley de la Varianza Total podemos descomponer la última varianza como sigue:

$$\text{Var}[\hat{\theta}_{str}] = \frac{\text{Var}[h(X)]}{N} - \frac{\text{Var}[\mathbb{E}[h(X)|Z]]}{N} = \text{Var}[\hat{\theta}_{MC}] - \frac{\text{Var}[\mathbb{E}[h(X)|Z]]}{N}$$

De la ecuación anterior se muestra que el muestreo estratificado tiene una varianza menor que el estimador *crudo* de Monte Carlo.

Es posible aplicar este algoritmo en el método gaussiano secuencial: Cada nodo a simular utiliza un número aleatorio distribuido uniformemente entre 0 y 1, para luego encontrar el número gaussiano estándar correspondiente. El intervalo uniforme  $[0, 1]$  puede dividirse en estratos que dependan del número de simulaciones a realizar, para que luego el nodo  $j$  de la simulación  $i$  obtenga su número aleatorio del  $i$ -ésimo estrato del intervalo  $[0, 1]$ . Luego, el mismo nodo  $j$  de la simulación  $i + 1$  puede obtener su número aleatorio del estrato  $i + 1$ . De esta forma, se asegura que cada nodo dentro de la simulación obtenga un estrato distinto, y por ende, se genere una muestra más representativa de la variable estudiada.

## Números aleatorios comunes

Esta técnica de reducción de varianza es útil cuando se desean comparar simulaciones de dos o más sistemas diferentes. Como ejemplo, se considera que se tienen dos alternativas posibles para un sistema de manejo de colas en un banco, denotados por  $m$  y  $n$ . Si  $X^m$  y  $X^n$  denotan el tiempo de espera de cada sistema, es relevante comparar cuál es la diferencia esperada entre ambos. Es decir, se desea estimar:

$$\theta = \mathbb{E}[X^m] - \mathbb{E}[X^n]$$

La forma más intuitiva de estimar este parámetro, es simular los sistemas  $m$  y  $n$  *independientemente*, obtener el estimador crudo de Monte Carlo de cada uno,  $\hat{\theta}^m$  y  $\hat{\theta}^n$ , para luego plantear el estimador final  $\hat{\theta} = \hat{\theta}^m - \hat{\theta}^n$ . La varianza de este estimador es la siguiente:

$$\text{Var}[\hat{\theta}] = \text{Var}[\hat{\theta}^m] + \text{Var}[\hat{\theta}^n]$$

Sin embargo, si se pudiera generar una dependencia entre ambos sistemas simulados, la varianza sería la siguiente:

$$\text{Var}[\hat{\theta}] = \text{Var}[\hat{\theta}^m] + \text{Var}[\hat{\theta}^n] - 2\text{Cov}[\hat{\theta}^m, \hat{\theta}^n]$$

Por lo tanto, para lograr una reducción de varianza se deben correlacionar positivamente ambos sistemas. Como los métodos de Monte Carlo utilizan una serie de números aleatorios para generar las simulaciones, es posible utilizar los mismos números para generar cada escenario de ambos sistemas, con lo cual es esperable que ambos sistemas estén correlacionados positivamente. Esta es la base de esta técnica de reducción de varianza. En el ejemplo de la cola del banco, la respuesta del sistema depende de la llegada de los clientes al banco, por lo cual una aplicación de esta técnica involucraría que cada llegada del cliente sea modelada con el mismo número aleatorio en ambos sistemas: De esa forma, se prueban ambos modelos en igualdad de condiciones.

Si ambos sistemas tienen distribuciones de probabilidad diferentes, este método aún es aplicable si la generación de números aleatorios se hace de la manera típica, generando un número aleatorio uniforme en el intervalo  $[0, 1]$  para luego calcular la inversa de la función distribución acumulada: basta con usar los mismos números aleatorios uniformes, lo cual podría generar la correlación positiva buscada. Es necesario recalcar que este método no garantiza la reducción de varianza automáticamente. Es necesario comprobar que el uso de los mismos números aleatorios genera una correlación positiva en los sistemas estudiados. De no ser así, el método podría incluso aumentar la varianza (si la correlación es negativa).

En geoestadística, este método puede ser usado para comparar el efecto que tiene el uso de diferentes parámetros y estructuras para la función de covarianza en la simulación gaussiana secuencial: Cada nodo recibe el mismo número aleatorio, pero el sistema cambia al usar diferentes funciones de covarianza. De esta forma se puede cuantificar con un menor número de simulaciones el efecto que tienen dichos parámetros en alguna respuesta que se desee evaluar.

## Variables antitéticas

Esta técnica es similar a la anterior, pues ambas se basan en modificar la generación de números aleatorios que dan origen a la simulación de Monte Carlo. Se considera como ejemplo que se desea estimar  $\theta = \mathbb{E}[h(X)]$  como es usual, y que se han generado dos muestras a partir de Monte Carlo,  $h(X_1) = Y_1$  y  $h(X_2) = Y_2$ . Un estimador insesgado con estas dos muestras sería:

$$\hat{\theta} = \frac{Y_1 + Y_2}{2} \quad \text{Var}[\hat{\theta}] = \frac{\text{Var}[Y_1] + \text{Var}[Y_2] + 2\text{Cov}[Y_1, Y_2]}{4}$$

Notar que si ambas muestras son independientes, la covarianza es 0 y el estimador es equivalente al estimador *crudo* de Monte Carlo con  $N = 2$ . Sin embargo, si existiera una forma de *correlacionar negativamente* ambas muestras, la covarianza sería negativa y se obtendría una reducción de la varianza.

Para lograr esto, el caso más simple, es que la variable aleatoria se distribuya como una uniforme en el intervalo  $[0, 1]$ , es decir,  $X \sim U(0, 1)$ . Luego, si el vector de números aleatorios con el cual se genera la respuesta  $Y_1$  es  $U_1$ , basta con tomar  $U_2 = 1 - U_1$ , que también se distribuye como  $U(0, 1)$ : Es decir, un número aleatorio bajo en la muestra 1 tiene asociado un número alto en la muestra 2. Si la función  $h(X)$  preserva esta relación (es decir, valores altos del número aleatorio generan valores altos de  $h(X)$ ) tendremos que las muestras  $Y_1$  e  $Y_2$  tendrán correlación negativa. Dado esto, su covarianza es negativa y se obtiene una reducción de la varianza.

En el caso de que la variable aleatoria no tenga una distribución  $U(0, 1)$ , este método se puede aplicar de manera similar al de los números aleatorios comunes para cualquier distribución  $X$ : Se genera el vector  $U_1$ , se calcula el vector  $U_2 = 1 - U_1$  y luego para obtener los números distribuidos como una variable aleatoria cualquiera se utiliza el método de calcular la inversa de la distribución acumulada para el valor aleatorio uniforme. Como la distribución acumulada es monótona, valores pequeños de  $U$  generan valores pequeños de  $X$  mediante este método, con lo cual se obtiene el comportamiento deseado.

### 2.2.4. Simulaciones antitéticas

El método de las variables antitéticas puede ser utilizado en geoestadística para generar escenarios completos correlacionados negativamente. Más aún, puede ser extendido para generar  $n$  simulaciones anti-correlacionadas entre sí, con cualquier  $n$  arbitrario. En esta sección se detallará cómo implementar la generación de estos escenarios, para su posterior uso en los problemas de planificación minera, a partir de la metodología propuesta por Guthke y Bárdossy (2012).

Para generar un escenario con el método gaussiano secuencial detallado en la Sec. 2.2.1, se necesitan simular  $M$  nodos, y para cada nodo se necesita generar un número aleatorio  $U(0, 1)$ , para luego, con el método de la distribución acumulada inversa, generar un número

gaussiano estándar. A pesar de que cada número aleatorio se genera secuencialmente, el método no pierde generalidad si para cada realización  $i$  se genera un vector  $U_i$  de  $M$  números aleatorios al iniciar cada simulación, donde se utiliza la componente  $j$  de dicho vector para simular el nodo  $j$  de la simulación.

Luego, para generar un par de vectores anti correlacionados, basta con generar  $U_2 = 1 - U_1$ . Sin embargo, es necesario considerar el problema de la *sincronía* entre escenarios. No basta con que los vectores  $U$  tengan correlación negativa: Los nodos simulados deben tener correlación negativa. Esto último es relevante, pues el algoritmo original del método gaussiano secuencial genera un camino aleatorio para cada realización, que es el orden en que se visita cada nodo para simular. Si el camino aleatorio cambia, el nodo  $j$  de la primera simulación no será el mismo que en la segunda simulación, por lo que se estará correlacionando nodos diferentes, lo cual no generaría el comportamiento deseado. Por este motivo, es necesario que el nuevo algoritmo genere un camino aleatorio *para cada par* de simulaciones antitéticas.

La extensión de este método para correlacionar  $n - tuplas$  de simulaciones se basa en la construcción de la matriz de correlación de estas  $n$  simulaciones. La matriz de correlación de  $n$  elementos se define como  $R_n = (r_{i,j})$  donde  $r_{i,j}$  es el coeficiente de correlación entre el elemento  $i$  con el elemento  $j$ . Naturalmente, esta matriz es simétrica ( $r_{i,j} = r_{j,i}$ ) y con 1 en la diagonal ( $r_{i,i} = 1$ )

Para el caso de 2 simulaciones antitéticas, el coeficiente de correlación entre los vectores  $U_1$  y  $U_2 = 1 - U_1$  es  $-1$ . Luego, su matriz de correlación sería:

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego, para generar  $n - tuplas$  de vectores  $U$  con correlación negativa, es necesario que su matriz de correlación sea como sigue:

$$R_n = (r_{i,j}) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \cdots & \alpha \\ \alpha & 1 & \cdots & \alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \alpha & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Con  $\alpha$  un valor negativo. Se tiene además que toda matriz de correlación válida debe ser *semidefinida positiva*, esto es, los determinantes de todas sus matrices menores principales son mayores o iguales a cero. Esta condición implica que se cumpla lo siguiente:

$$0 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{i,j} \leq n^2$$

Dado esta condición, la menor correlación posible entre las  $n - tuplas$  es:

$$\alpha = -\frac{1}{n-1} \quad (2.18)$$



Notar que para  $n = 2$ , según la ecuación (2.18) la mínima correlación posible es  $-1$ . Ahora bien, para construir  $n$  vectores con  $M$  nodos correlacionados negativamente, se procede como sigue:

1. Se calcula el valor de  $\alpha$  según la ecuación (2.18) y se construye la matriz de correlación  $R_n$  según la ecuación (2.17).
2. Se busca una matriz  $B$  tal que  $BB^T = R_n$
3. Para cada nodo a simular  $i \in M$ :
  - (a) Se genera una tupla de  $n$  números aleatorios gaussianos estándar  $g_n^i$
  - (b) Se calcula el vector  $y_n^i = Bg_n^i$ . El vector  $y_n^i$  es un vector de  $n$  elementos gaussianos estándar cuya matriz de correlación es  $R_n$ .
4. Finalmente, se construye la matriz  $RN = (y_i^n)^T$ , cuyas filas son los vectores  $y_i^n$  traspuestos, lo cual genera una matriz de  $M$  filas y  $n$  columnas, donde cada fila tiene como matriz de correlación  $R_n$ , y por ende, las  $n$  columnas tienen como matriz de correlación  $R_n$ .

En un paso adicional, es posible realizar una transformación marginal para obtener  $n$  vectores que se distribuyan como  $U(0, 1)$ , para luego obtener cualquier distribución deseada. Sin embargo, en el caso de la simulación gaussiana secuencial, solo es necesario obtener números que se distribuyan como una gaussiana estándar.

Ahora bien, del algoritmo anterior, el paso crítico es el segundo, en donde se debe encontrar una matriz  $B$  tal que  $BB^T = R_n$ . Siendo  $R_n$  una matriz *semidefinida positiva*, es posible demostrar que la matriz  $B$  existe, sin embargo su cálculo no es trivial y no existe un algoritmo que sea aplicable para todas las matrices. En el caso de matrices *definidas positivas*, es posible realizar una **descomposición de Cholesky**, la cual es bastante sencilla y existen variadas implementaciones computacionales eficientes para ella. Dado esto, es posible transformar la matriz  $R_n$  en una matriz *definida positiva* al agregar un valor  $\varepsilon$  en su diagonal, y luego calcular la descomposición de Cholesky para obtener la matriz  $B^*B^{*T} = R_n^*$ . Cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  la matriz  $B^* \rightarrow B$ . En la práctica, se utilizará el menor valor de  $\varepsilon$  posible que permita utilizar la descomposición de Cholesky para obtener la matriz  $B^*$ .

Con esto, es posible obtener  $n$  vectores gaussianos correlacionados negativamente. El paso siguiente es modificar el algoritmo gaussiano secuencial para poder obtener escenarios completos con correlación negativa. Utilizando los procedimientos descritos hasta ahora, es posible generar el siguiente algoritmo para generar simulaciones antitéticas.

Suponiendo que se desean simular  $S$  realizaciones, con  $M$  nodos cada una y con  $n - \text{tuplas}$  de escenarios correlacionados negativamente, el algoritmo es como sigue:

1. Para cada  $n - \text{tupla}$  de escenarios con correlación negativa:
  - (a) Generar un camino aleatorio
  - (b) Generar la matriz  $RN$  descrita anteriormente
  - (c) Por cada escenario  $s$  de esta  $n - \text{tupla}$ :
    - i. Visitar cada nodo a simular siguiendo el camino aleatorio generado previamente.

- ii. Para cada nodo  $i$  del escenario  $s$ , calcular su valor por kriging simple y su desviación estándar y plantear:

$$Y(x_i) = Y^{KS}(x_i) + \sigma^{KS}(x_i) \times RN(i, s)$$

2. Repetir 1 mientras queden escenarios por simular.

Las principales diferencias con el algoritmo original de la simulación gaussiana secuencial radican en que los escenarios se agrupan en  $n - \text{tuplas}$ , y para cada una de estas  $n - \text{tuplas}$  se calcula la matriz de números aleatorios **antes** de empezar las simulaciones y se ocupa exactamente el mismo camino aleatorio para cada una de ellas, con el fin de evitar problemas de sincronía antes vistos. Este es el algoritmo utilizado en el desarrollo de esta tesis.

# Capítulo 3

## Descripción del modelo de agendamiento de bloques

En esta capítulo se muestra la formulación del modelo de optimización de agendamiento de bloques, tanto en su versión determinista como en su versión estocástica. La presentación de la versión determinista tiene por objetivo fijar los conceptos que sustentan este modelo, tales como variables de decisión, función objetivo y tipos de restricciones. Con estas definiciones, el modelo de agendamiento estocástico en dos etapas se muestra como una extensión del modelo determinista, lo que facilita su comprensión.

### 3.1. Modelo determinista

El modelo determinista se busca maximizar el valor descontado obtenido de la extracción de los bloques en un horizonte de planificación dado, sujeto a restricciones geométricas y de capacidad mina y procesamiento. El modelo no considera incertidumbre en ninguno de sus parámetros, en particular, no considera la incertidumbre de la geología, por lo cual el valor de cada uno de los bloques es único en base a una ley fija. A continuación se verá la formulación matemática tanto de la función objetivo como de las restricciones para este modelo.

#### 3.1.1. Función objetivo

Formalmente, se tiene un conjunto  $B$  de bloques, un conjunto  $D$  de destinos posibles a los que enviar cada bloque  $b \in B$  y un conjunto de periodos del agendamiento  $T$ , con lo cual para cada bloque se tendrá la variable de decisión  $x_{bdt}$  que es igual a 1 si el bloque  $b$  es extraído en el periodo  $t$  y enviado al destino  $d$ , y 0 en caso contrario.

Por la extracción de cada bloque, se perciben costos e ingresos que dependen del destino elegido para él y de su ley, por lo cual se define que cada bloque  $b \in B$  tiene un beneficio  $v_{bd}$ , que como sus índices indican, depende del bloque ( $b$ ) y de su potencial destino ( $d$ ).

Típicamente, este beneficio se resume en la ecuación (2.1) modificada para considerar distintos destinos posibles. A partir de dicha ecuación es posible escribir la ecuación (3.1), en donde el subíndice  $d$  denota el destino al cual se envía el bloque.

$$v_{bd} = T_{bloque}[-(C_{mina} + C_{planta,d}) + L_{bloque} \cdot Rec_d \cdot (P \cdot RF - C_{RyV,d})] \quad (3.1)$$

Por otra parte, se considera que existe un costo de oportunidad asociado a extraer cada bloque en un periodo de tiempo determinado, pues su beneficio es percibido después para el dueño del negocio. Esto generalmente se captura en una tasa de descuento aplicada al beneficio bajo la metodología del VAN, por lo cual, se definirá una tasa  $r$  que penalizará el valor del bloque en la función objetivo.

Con esto, la función a maximizar será:

$$F = \sum_{b \in B} \sum_{t \in T} \sum_{d \in D} \frac{1}{(1+r)^t} v_{bd} x_{bdt} \quad (3.2)$$

### 3.1.2. Restricciones

En esta sección se detallarán cada una de las restricciones consideradas en el problema de agendamiento minero junto con su formulación matemática de acuerdo a la variable de decisión definida en la sección anterior.

#### Capacidad Mina

La extracción del mineral in situ tiene una serie de operaciones unitarias asociadas, sustentadas por una flota de equipos de la mina. Esto impone que por cada horizonte temporal, exista una capacidad limitada de extracción, dado por los rendimientos de estos equipos, lo cual se representa típicamente en un valor de toneladas/periodo máximas que se pueden extraer. Dada esta condición, el agendamiento debe respetar esta restricción operacional, por lo cual se impondrá que el tonelaje total de los bloques extraídos en cada periodo sea menor a un valor máximo por periodo. En el modelo matemático, la restricción es la siguiente:

$$\sum_{b \in B} \sum_{d \in D} \text{Ton}_b x_{bdt} \leq \text{Cap}_{\text{“mina”}} \quad \forall t \in T \quad (3.3)$$

Es importante recalcar que esta restricción se aplica para cada periodo de agendamiento ( $\forall t \in T$ ), y que la suma de los tonelajes se realiza sobre todos los bloques y todos los destinos posibles del agendamiento.

## Capacidad de Procesamiento

Cada destino de procesamiento presenta equipos e insumos asociados, los cuales determinan un tonelaje máximo que se puede procesar en ellos. Por ejemplo, el procesamiento de sulfuros ocupa las instalaciones de chancado y molienda, junto con la planta de flotación, por lo cual se tiene una capacidad limitada de tratamiento, que típicamente también se mide en toneladas/periodo. Dada esta condición, es necesario que cada destino posible de agendamiento tenga una capacidad máxima de tratamiento, lo cual se limita por la siguiente restricción:

$$\sum_{b \in B} \text{Ton}_b x_{bdt} \leq \text{Cap}_d \quad \forall t \in T, \forall d \in D. \quad (3.4)$$

Notar que esta restricción es similar a la propuesta en la ecuación (3.3). Sin embargo, se necesario recalcar que esta restricción se realiza para cada destino ( $\forall d \in D$ ), por lo cual solo los bloques enviados a dicho destino suman para la restricción; y que cada destino posee una capacidad máxima diferente ( $\text{Cap}_d$ ), que depende de su propio equipamiento.

Es necesario notar que no todos los destinos poseen capacidad máxima: Por ejemplo, el botadero de material se asume que posee capacidad infinita de recibir bloques en cada periodo, por lo cual  $\text{Cap}_{\text{botadero}} = \infty$ .

## Precedencias geométricas

La seguridad de la operación minera requiere que las paredes del pit sean estables, lo cual depende fuertemente del ángulo de inclinación de esta estructura. Para asegurar que el agendamiento cumpla con esta condición básica, se utilizan precedencias entre los bloques que fuerzan a que cada bloque extraído lo haga respetando el ángulo del talud. Formalmente, esto se hace generando pares ordenados entre los bloques, que determinan qué bloque debe ser extraído primero. Generalizando esta idea a todos los bloques, es posible generar un conjunto  $\mathcal{P}$  de precedencias, donde están todos los pares ordenados de bloques de forma  $(a, b)$  que indican que el bloque  $a$  puede ser extraído solo si el bloque  $b$  fue extraído antes. Formalmente, la restricción se genera como:

$$\sum_{d \in D} x_{adt} \leq \sum_{p=1}^t \sum_{d \in D} x_{bdp} \quad \forall t \in T, \forall (a, b) \in \mathcal{P} \quad (3.5)$$

Notar que esta restricción impone que si se desea extraer el bloque  $a$  en el periodo  $t$ , se debe verificar si el bloque  $b$  fue extraído en el periodo  $t$  o en cualquier otro periodo anterior a  $t$ , lo cual se impone con la sumatoria del lado derecho desde  $p = 1$  hasta  $t$ . Notar además, que se suma sobre los destinos también, pues el bloque puede ser enviado a cualquier destino y seguir cumpliendo la restricción, siempre y cuando haya sido extraído en el mismo periodo o en uno anterior.

Otro tipo de restricción geométrica dice relación con los accesos que se posee dentro de cada banco. Como se vio en la Sec. 2.1.1, el diseño de la mina fija la ubicación de las rampas, lo cual condiciona el acceso a cada banco de explotación. De esta forma, es necesario que el agendamiento de corto plazo capture esta restricción geométrica, para lo cual se utilizará una estructura de arcos sobre cada banco que obligue a que cada bloque tenga un camino de extracción desde la rampa de acceso. La Fig. 3.1 muestra un ejemplo de estas restricciones.

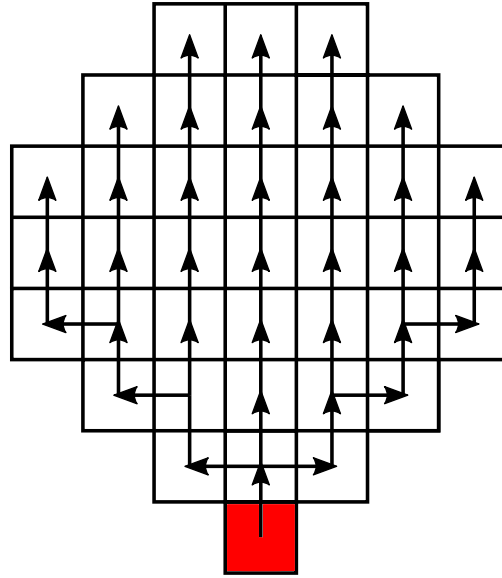


Figura 3.1: Vista en planta de un banco dentro del pit con restricciones de acceso. El bloque de color rojo representa la ubicación de la rampa, y las flechas indican las precedencias entre ellos. *Fuente: Elaboración propia.*

### Restricciones de unicidad

Naturalmente, cada bloque puede ser extraído una sola vez en todo el agendamiento, y puede ser enviado a solo un destino. Para esto, se impone la siguiente restricción:

$$\sum_{d \in D} \sum_{t \in T} x_{bdt} \leq 1 \quad \forall b \in B \quad (3.6)$$

Para el caso de agendar bancos que son parte de un diseño minero fijo, es necesario imponer que todos los bloques sean extraídos, pues se asume que la extracción debe seguir en los bancos inferiores y para tal efecto es necesario extraer todo el material del banco superior. Para lograr esta condición, se impone que la desigualdad anterior sea una igualdad estricta, es decir, todo bloque debe ser extraído en algún periodo.

## 3.2. Modelo estocástico

El modelo estocástico propuesto para evaluar el valor de la información tiene una estructura de programación estocástica en dos etapas utilizando la aproximación SAA (ver Sec. 2.1.4) dada la dificultad de resolver el problema real. La estructura base del problema es similar a la del problema determinista, con diferencias que se remarcarán en cada sección.

### 3.2.1. Función objetivo

El primer cambio con respecto al modelo determinista es que el valor de las leyes de cada bloque es incierto, por lo que se tienen  $S$  realizaciones de la ley para cada uno. De esta forma, el valor de cada bloque dependerá del escenario de leyes  $s \in S$  que se considere. Por lo tanto, el beneficio del bloque  $b$ , enviado al destino  $d$  en el escenario  $s$  será  $v_{bds}$ .

La variable de decisión también dependerá del escenario considerado, por lo cual su nueva definición será  $x_{bdts}$  es igual a 1 si el bloque  $b$  es enviado al destino  $d$  durante el periodo  $t$  en el escenario  $s$ , y 0 en caso contrario. La función objetivo a maximizar será el valor esperado del valor descontado del agendamiento, es decir, el valor promedio del VAN en cada escenario. Formalmente:

$$F = \frac{1}{|S|} \sum_{s \in S} \sum_{b \in B} \sum_{t \in T} \sum_{d \in D} \frac{1}{(1+r)^t} v_{bds} x_{bdts} \quad (3.7)$$

### 3.2.2. Restricciones

Las restricciones del problema determinista (Sec. 3.1.2) no dependen del valor de la ley del bloque, por lo cual su estructura básica no se ve modificada por la nueva formulación. El único cambio relevante es el de exigir que las restricciones se cumplan para cada escenario  $s \in S$ . Bajo esta premisa, las nuevas restricciones se muestran a continuación:

#### Capacidad Mina

$$\sum_{b \in B} \sum_{d \in D} \text{Ton}_b x_{bdts} \leq \text{Cap}^{\text{“mina”}} \quad \forall t \in T, \forall s \in S \quad (3.8)$$

#### Capacidad de Procesamiento

$$\sum_{b \in B} \text{Ton}_b x_{bdts} \leq \text{Cap}_d \quad \forall t \in T, \forall d \in D, \forall s \in S \quad (3.9)$$

#### Precedencias geométricas

$$\sum_{d \in D} x_{adts} \leq \sum_{p=1}^t \sum_{d \in D} x_{bdps} \quad \forall t \in T, \forall (a, b) \in \mathcal{P}, \forall s \in S \quad (3.10)$$

## Unicidad

$$\sum_{d \in D} \sum_{t \in T} x_{bdts} \leq 1 \quad \forall b \in B, \forall s \in S \quad (3.11)$$

## Restricciones de no-anticipatividad

La estructura del problema estocástico hasta ahora permite separar su resolución en  $S$  problemas independientes, pues no existe ninguna restricción que ligue las decisiones entre los distintos escenarios de leyes. Esto es equivalente a asumir que al inicio de la explotación se posee información perfecta acerca de la ley del mineral, lo cual es contrario a lo que sucede en la explotación: En un comienzo, se inicia la operación con un cierto nivel de información, dado por la estimación de los bloques gracias a los sondeos de exploración y de bancos anteriores. A medida que las labores de perforación van avanzando en el banco, los pozos de tronadura son muestreados para obtener una mejor estimación de la ley de cada bloque. Esto lleva a que se puedan tomar mejores decisiones comparadas al plan de largo plazo que se realizó en base a una estimación del modelo de bloques a partir de campañas de sondeos con un nivel de detalle menor. Es decir, se revela nueva información a medida que la explotación avanza.

Para capturar este comportamiento, se introducen las restricciones de no-anticipatividad, que fijan las decisiones de primera etapa, en donde esta nueva información aún no ha llegado. Se define un periodo  $T^*$ , que representa el periodo donde la nueva información llega, de esta forma, se tiene la división entre las dos etapas:

**Primera Etapa:** La única información disponible es la del modelo de bloques estimado, por lo cual cada escenario  $s$  debe seguir exactamente el mismo plan de producción basado en la ley promedio del bloque. En el modelo, esto se captura haciendo que todas las variables de decisión de primera etapa sean iguales.

**Segunda Etapa:** Luego del tiempo  $T^*$ , se tiene nueva información basada en los pozos de tronadura del banco, por lo cual cada bloque tendrá su propia ley la cual permite modificar las decisiones tomadas anteriormente. Esto significa que cada escenario puede tomar una decisión propia, pues bajo la nueva información la ley ya no es una variable incierta. En el modelo, esto significa que cada escenario puede tomar decisiones independiente de lo que sucede en el resto.

Para lograr este comportamiento, el modelo estocástico consta de las siguientes restricciones de no anticipatividad:

$$x_{bdts} = x_{bdts+1} \quad \forall t \leq T^*, \forall d \in D, \forall b \in B, \forall s = 0, \dots, |S| - 1 \quad (3.12)$$



Estas restricciones indican que para todo par de escenario y su escenario siguiente, ( $\forall s = 0, \dots, S - 1$ ), las variables de decisión deben ser exactamente iguales ( $\forall b \in B, \forall d \in D$ ) para todos los periodos anteriores a  $T^*$ , lo cual radica en que los bloques tendrán el mismo destino en todos los escenarios si son extraídos antes del periodo donde la nueva información llega.

Notar que hasta ahora el periodo  $T^*$  no está definido. Si se considera que el periodo  $T^* = 0$ , significa que en el inicio de la operación se tiene toda la información de cada bloque, lo que equivale a que toda la campaña de perforación y muestreo ya ha finalizado. Este caso será llamado *Información Perfecta*, pues en él las decisiones son las mejores posibles. Por otro lado, si se considera que  $T^* = T$ , significa que la información acerca de la campaña de perforación y muestreo llega cuando la operación ya finalizó, y por ende, ya se encuentran todas las decisiones tomadas. Esto equivale a que la segunda etapa de decisión no exista y el problema estocástico se transforma en el modelo determinista visto en la Sec. 3.1. Finalmente, un valor de  $T^*$  intermedio significa que en cierto periodo del agendamiento, la campaña de muestreo termina y la nueva información se hace disponible desde ese periodo en adelante. Modificando el valor de  $T^*$  es posible estudiar cuál es el efecto de la información en términos del valor del agendamiento final.

### 3.2.3. Formulación eficiente

La formulación presentada anteriormente posee problemas en su eficiencia de resolución, dado la gran cantidad de restricciones de no-anticipatividad necesarias para generar la estructura de dos etapas requerida. Dado esto, es preferible reformular las variables de decisión del problema para que estas restricciones no sean necesarias: Si estas restricciones fuerzan a que todas las variables de primera etapa sean iguales, es posible implementar una formulación que sencillamente omita que existen diferentes escenarios antes del tiempo  $T^*$ . Para esto, se definen dos variables de decisión distintas:

- $y_{bdt}$ : Variable de decisión de primera etapa, que **no** depende del escenario  $s$ .
- $x_{bdts}$ : Variable de decisión de segunda etapa, que depende del escenario  $s$ .

Para hacer notar que ambas formulaciones son equivalentes, veamos que la función objetivo del problema estocástico se puede separar en dos componentes: antes y después del periodo de llegada de información,  $T^*$ , como se aprecia en la ecuación (3.13).

$$F = \frac{1}{|S|} \sum_{s \in S} \sum_{b \in B} \sum_{d \in D} \left[ \sum_{t=1}^{T^*} \frac{1}{(1+r)^t} x_{bdts} v_{bds} + \sum_{t=T^*+1}^T \frac{1}{(1+r)^t} x_{bdts} v_{bds} \right] \quad (3.13)$$

Por las restricciones de no-anticipatividad de la ecuación (3.12), se tiene que todos los escenarios antes del tiempo  $T^*$  tienen la misma variable de decisión, es decir, son independientes de  $s$ , lo que permite reemplazar esta variable por  $y_{bdt}$ . Haciendo este reemplazo, se llega a la siguiente función objetivo:

$$F = \sum_{b \in B} \sum_{d \in D} \sum_{t=1}^{T^*} \frac{1}{(1+r)^t} y_{bdt} \frac{1}{|S|} \sum_{s \in S} v_{bds} + \sum_{s \in S} \sum_{b \in B} \sum_{d \in D} \sum_{t=T^*+1}^T \frac{1}{(1+r)^t} x_{bdts} v_{bds} \quad (3.14)$$

De la última ecuación se desprende un resultado lógico: Al no existir dependencia de los escenarios en la primera etapa, la decisión debe realizarse considerando el valor **promedio** de los bloques sobre todos los escenarios,  $\frac{1}{|S|} \sum_{s \in S} v_{bds}$ . Para simplificar la notación, este valor será llamado  $\bar{v}_{bd}$ .

Con este cambio de variable, las restricciones de no-anticipatividad no son necesarias. Para el resto de las restricciones, basta con realizar la separación entre periodos anteriores y posteriores a  $T^*$  y hacer el cambio de variable respectivo. La formulación final queda como sigue:

### Función objetivo

$$F = \sum_{b \in B} \sum_{d \in D} \sum_{t=1}^{T^*} \frac{1}{(1+r)^t} y_{bdt} \bar{v}_{bd} + \sum_{s \in S} \sum_{b \in B} \sum_{d \in D} \sum_{t=T^*+1}^T \frac{1}{(1+r)^t} x_{bdts} v_{bds} \quad (3.15)$$

### Restricciones de capacidad mina

$$\sum_{b \in B} \sum_{d \in D} \text{Ton}_b y_{bdt} \leq \text{Cap}^{\text{“mina”}} \quad \forall t = \{1, \dots, T^*\} \quad (3.16)$$

$$\sum_{b \in B} \sum_{d \in D} \text{Ton}_b x_{bdts} \leq \text{Cap}^{\text{“mina”}} \quad \forall t = \{T^* + 1, \dots, T\}, \forall s \in S \quad (3.17)$$

### Restricciones de capacidad de procesamiento

$$\sum_{b \in B} \text{Ton}_b y_{bdt} \leq \text{Cap}_d \quad \forall t = \{1, \dots, T^*\}, \forall d \in D \quad (3.18)$$

$$\sum_{b \in B} \text{Ton}_b x_{bdts} \leq \text{Cap}_d \quad \forall t = \{T^* + 1, \dots, T\}, \forall d \in D, \forall s \in S \quad (3.19)$$

### Restricciones de Precedencia

$$\sum_{d \in D} x_{adts} \leq \sum_{p=1}^{T^*} \sum_{d \in D} y_{bdp} + \sum_{p=T^*+1}^t \sum_{d \in D} x_{bdps} \quad \forall t = \{T^* + 1, \dots, T\}, \forall (a, b) \in \mathcal{P}, \forall s \in S \quad (3.20)$$

$$\sum_{d \in D} y_{adt} \leq \sum_{p=1}^t \sum_{d \in D} y_{bdp} \quad \forall t = \{1, \dots, T^*\}, \forall (a, b) \in \mathcal{P} \quad (3.21)$$

## Restricciones de unicidad

$$\sum_{d \in D} \sum_{t=1}^{T^*} y_{bdt} + \sum_{d \in D} \sum_{t=T^*+1}^T x_{bdts} = 1 \quad \forall s \in S, \forall b \in B \quad (3.22)$$

### 3.2.4. Reasignación de destinos

En la operación minera las decisiones de asignar destino a los bloques son bastante flexibles, y pueden ser modificadas en el corto plazo. Las decisiones de la secuencia de extracción, por su parte, son menos flexibles pues requieren la reasignación de equipos de carguío y el cambio de las secuencias de perforación y tronadura. El modelo propuesto hasta ahora no considera esta diferencia entre secuencia y asignación de destino, pues ambas dependen de la misma variable de decisión.

Por otra parte, hasta ahora se ha considerado que la información llega *desde* el periodo  $T^*$  en adelante, y que dicha información, al llegar con suficiente anticipación, permite modificar tanto la secuencia como los destinos. Sin embargo, para obtener un modelo más realista, es posible incorporar que, dado que la información de los pozos de tronadura se muestrea *antes* de agendar los destinos en cada periodo, existe la flexibilidad de poder modificar los destinos definidos en el plan de corto plazo en cada escenario a pesar de tener una secuencia fija.

Para lograr esto, se considerará cada uno de los periodos antes del tiempo  $T^*$  y se permitirá la reasignación de destinos en cada escenario. Esto se logra resolviendo un problema de agendamiento pequeño, donde los bloques a extraer en cada periodo están fijos, y se deciden sus destinos sujeto a restricciones de capacidad. Esto simula el comportamiento de la mina: El plan de mediano plazo se hace en base a estimaciones con baja información, y dentro de cada periodo se permite el cambio de destino de los bloques según su ley verdadera, muestreada del pozo de tronadura, lo cual permite diferenciar entre los escenarios posibles. El problema de asignación de destinos resuelto en cada uno de los periodos antes del tiempo  $T^*$  y para cada simulación se muestra en la ecuación (3.23). Naturalmente, esta reasignación de destinos no aplica para los periodos donde la información ha sido revelada, pues en ellos el agendador elige el mejor destino para cada simulación.

$$\max \quad \sum_{b \in B} v_{bd} x_{bd} \quad (3.23)$$

$$\text{s. a.} \quad \sum_{b \in B} \text{Ton}_b x_{bd} \leq \text{Cap}_{\text{“mina”}} \quad (3.24)$$

$$\sum_{b \in B} \text{Ton}_b x_{b\text{“Planta”}} \leq \text{Cap}_{\text{“Planta”}} \quad (3.25)$$

$$\sum_{d \in D} x_{bd} = 1 \quad \forall b \in B \quad (3.26)$$

$$x_{bd} \in \{0, 1\} \quad \forall b \in B, d \in D \quad (3.27)$$

# Capítulo 4

## Metodología

En esta sección se presenta la metodología utilizada en esta tesis con el fin de obtener los resultados mostrados en el Capítulo 5.

1. En primer lugar, se implementará el algoritmo de simulaciones antitéticas descrito en la Sec. 2.2.4 tomando como base el código de SGSIM disponible en la librería de código abierto GSLIB programada en Fortran.
2. Con el fin de detectar posibles anomalías dentro de la implementación y verificar el comportamiento del algoritmo propuesto para generar las simulaciones, se realizarán simulaciones antitéticas a soporte puntual sin datos condicionantes para estudiar el efecto bruto que tiene la correlación negativa de los números aleatorios en el resultado final de la simulación gaussiana secuencial. Este estudio es relevante pues existe un proceso de kriging en el algoritmo de simulación gaussiana secuencial que genera los valores de los nodos, por lo cual el solo hecho de correlacionar los números aleatorios no asegura que esta correlación se mantenga intacta en el resultado.
3. Para este estudio, se comprobará visualmente la correlación negativa esperada de los escenarios y se verificará la correlación empírica de cada simulación en base al coeficiente de correlación de Pearson, comparando este valor con el obtenido en base a simulaciones convencionales y con la correlación teórica impuesta en el algoritmo utilizado. Además, se verificará que el algoritmo propuesto para correlacionar negativamente los números aleatorios genere el coeficiente de correlación deseado y no induzca perturbaciones en el resultado, a pesar de la aproximación utilizada con el fin de que la matriz sea definida positiva, la cual fue detallada en la Sec. 2.2.4.
4. Posterior a este análisis, se realizarán simulaciones antitéticas a soporte puntual con datos condicionantes, para estudiar el efecto que tienen los datos sobre la correlación negativa impuesta. Nuevamente, se verificará la correlación visualmente y en base al coeficiente de correlación de Pearson, comparando estos valores con los obtenidos en base a simulaciones condicionales convencionales.
5. Para finalizar el análisis, se cambiará el soporte de las simulaciones puntuales a soporte de bloques acordes a la selectividad de la operación. Para obtener los escenarios a soporte de bloques, se utilizó una grilla fina de nodos para simular puntualmente, y luego se promedió el valor de los nodos dentro de cada bloque para obtener la simulación final

con el soporte deseado. Se estudiará el efecto de esta operación en la correlación obtenida anteriormente, y como se compara visual y cuantitativamente con las simulaciones convencionales rebloqueadas.

6. Con las simulaciones antitéticas implementadas, se generarán escenarios para ser utilizados en el problema de agendamiento estocástico descrito en la Sec. 3.2.3. En base a este modelo, se obtendrán los valores del agendamiento estocástico variando el parámetro  $T^*$  (el cual marca el periodo hasta el cual todos los agendamientos deben ser exactamente iguales). El primer resultado relevante es considerando que  $T^* = T$ , es decir, el plan considerando solo el promedio de las realizaciones, el cual será llamado **plan de valor esperado**, y es equivalente al obtenido mediante métodos deterministas. Este será el valor del plan contra el cual se contrastará el valor de la información a partir de los otros planes mineros. Posteriormente se obtendrá el valor del plan donde  $T^* = 0$ , es decir, donde se tiene toda la información completa al inicio de la extracción, el cual es llamado **plan con información perfecta**. Para este caso, cada simulación tiene su propio agendamiento, obteniendo el valor máximo al cual se puede aspirar conociendo de antemano todo el yacimiento. Finalmente, se calculará el agendamiento para todos los casos intermedios: Una primera fase donde las decisiones de secuencia y destinos son las mismas para todas las simulaciones, y una segunda fase donde cada simulación tiene su propio agendamiento, por lo cual también se obtienen 50 agendamientos diferentes. Cada agendamiento será definido en base a su periodo  $T^*$ .
7. Además del valor de los planes, también se compararán otros parámetros del plan de producción como producción de finos y ley de alimentación a planta promedio, y tonelaje de mineral y estéril, con el fin de entender el motivo de las diferencias entre los distintos niveles de información. A su vez, con el mismo objetivo, se estudiará la política de envío a planta para cada uno de los agendamientos en base a la ley de corte marginal de envío a planta.
8. Posteriormente, se estudiará el cambio del agendamiento en base a una reasignación de destinos *durante* el mismo periodo de la llegada de información del pozo de tronadura, que fue detallado en la Sec. 3.2.4, con el fin de verificar el impacto de la información en la secuencia de explotación.
9. Finalmente, se realiza el análisis de convergencia de la aproximación SAA del problema de agendamiento según lo visto en la Sec. 2.1.4. Para realizar este análisis, se utilizará la técnica de *resampling*, que consiste en generar diversos conjuntos de muestras de tamaño  $\mathbf{N}$  y estudiar las estadísticas del conjunto de resultados. Es esperable que si el tamaño de la muestra,  $\mathbf{N}$ , es suficiente para que el problema aproximado converja al real, entonces cualquier otra muestra del mismo tamaño debe entregar un resultado similar. De esta forma es posible comparar las desviaciones de estos resultados (mínimo, máximo, desviación estándar) para verificar la velocidad de convergencia de los distintos tamaños de la muestra. Además, se puede estudiar cómo afecta a esta convergencia la naturaleza de las simulaciones generadas, ya sean estas convencionales o antitéticas. De forma más específica, el estudio se realizará como sigue:
  - (a) Para un tipo de simulación (convencional o antitética) se genera una muestra de  $\mathbf{M}$  escenarios de leyes geológicas.
  - (b) De la muestra  $\mathbf{M}$ , se extraen sucesivamente distintas submuestras de tamaño  $\mathbf{N}$ , donde  $\mathbf{M} \gg \mathbf{N}$ . En el caso de las simulaciones antitéticas, se extraen  $n$ -tuplas de muestras según la correlación generada hasta completar el tamaño  $\mathbf{N}$  pedido.

- (c) Para cada una de estas  $N$  submuestras, se genera una instancia del problema de agendamiento estocástico descrito en la sección 3.2.3 y se resuelve.
- (d) Con el resultado de todas las submuestras se realiza un análisis estadístico del valor obtenido para el problema de agendamiento estocástico.

# Capítulo 5

## Análisis y resultados

### 5.1. Implementación de simulaciones antitéticas

#### 5.1.1. Simulaciones no condicionales

En esta sección se muestran los resultados de la implementación de las simulaciones antitéticas sin datos condicionantes, con el fin de estudiar el efecto de la correlación de los números aleatorios sin otros factores que modifiquen el resultado.

La simulación fue realizada en una grilla regular de  $250 \times 250 \times 10$ , con una separación de 1m entre nodos, y en todas las imágenes se aprecia una vista en planta en  $z = 5$ . Para generar las simulaciones se escogió el modelo variográfico que se muestra en la ecuación (5.1), con un *efecto pepa* de 0.1 y una estructura esférica isótropa de 100 metros de alcance, cuya contribución a la meseta es de 0.9 para lograr la meseta global de 1.0.

$$\gamma(h) = 0.1 + 0.9\text{esf}_{(100,100,100)}(h) \quad (5.1)$$

En la Fig. 5.1 se puede apreciar dos simulaciones antitéticas correlacionadas con un valor de  $\alpha = -1$ . Es posible distinguir claramente como opera la correlación negativa entre ellas: los sectores con valores simulados altos en una, tiene valores simulados bajos en la otra, mientras que los valores intermedios se mantienen idénticos en ambas. Notar también que las estructuras a gran escala son idénticas en ambos casos, pues obedecen al mismo modelo variográfico esférico, y al mismo camino aleatorio, en virtud del algoritmo utilizado. El hecho de que en las simulaciones no condicionales los únicos valores utilizados para el kriging en cada nodo son los nodos previamente simulados, permite que la correlación negativa se propague en todos los sitios a simular.

En la Fig. 5.2 se presenta un trío de simulaciones correlacionadas negativamente, con un valor de  $\alpha = -0.5$ . Se puede observar que la correlación negativa no es tan evidente como en el caso de  $\alpha = -1$ , pero aún se distinguen sectores donde esto ocurre: Por ejemplo, el

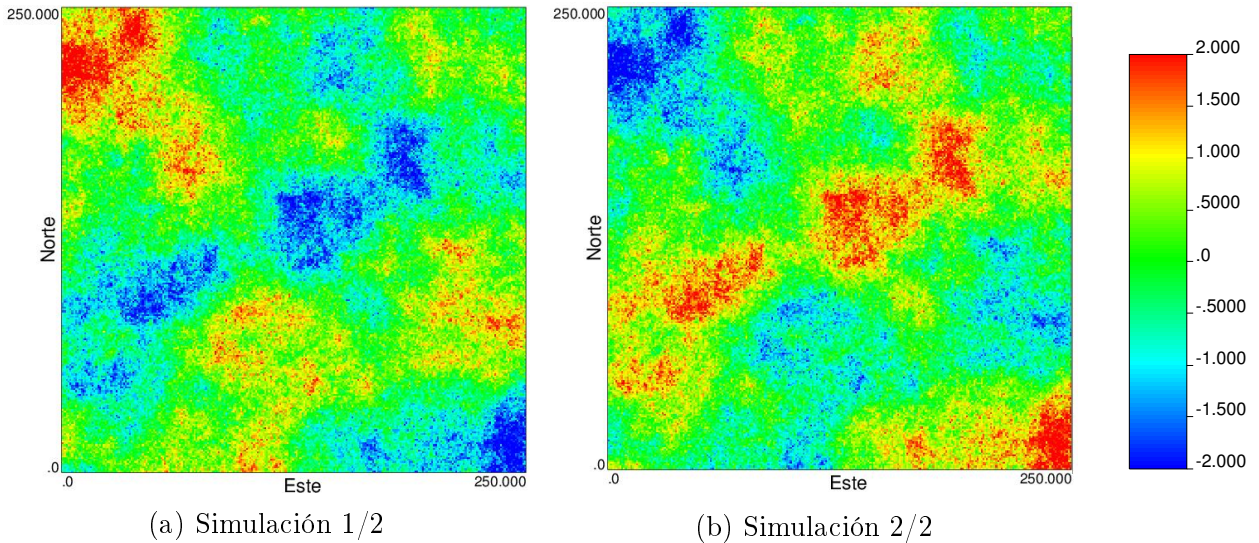


Figura 5.1: Par de simulaciones antitéticas no condicionales ( $\alpha = -1$ )

sector central de la Fig. 5.2a y 5.2b presentan una estructura con valores opuestos, mientras que el mismo sector de la Fig. 5.2c presenta valores cercanos a 0. También se aprecia un comportamiento similar en la esquina inferior izquierda de la Fig. 5.2a y la Fig. 5.2c, donde se ve una pequeña estructura con valores opuestos en ambas. Este fenómeno se repite en la esquina superior derecha de la Fig 5.2a y la Fig. 5.2c.

Finalmente, la correlación visual es notoriamente más débil en la Fig. 5.3, donde se presentan los escenarios simulados con  $\alpha = -0.33$ . Esto obedece a que el coeficiente de correlación impuesto es menor que en los casos anteriores, por lo cual se hace más complejo buscar correlaciones claras entre ellos tomando en cuenta que los cuatro escenarios están correlacionados simultáneamente. De todas formas, se encuentra una zona con correlación negativa clara entre la Fig. 5.3c y la Fig. 5.3d, en la esquina superior izquierda. Sin embargo, los otros dos escenarios no presentan la misma estructura en esa zona. Para comprobar la correlación entre los escenarios generados se utiliza la matriz de correlación entre ellas, lo cual se muestra en las Tabla 5.1.

Tabla 5.1: Coeficiente de correlación para las distintas tuplas de simulaciones antitéticas

	1	2
1	1	1
2	-0.999	1

(a) n=2

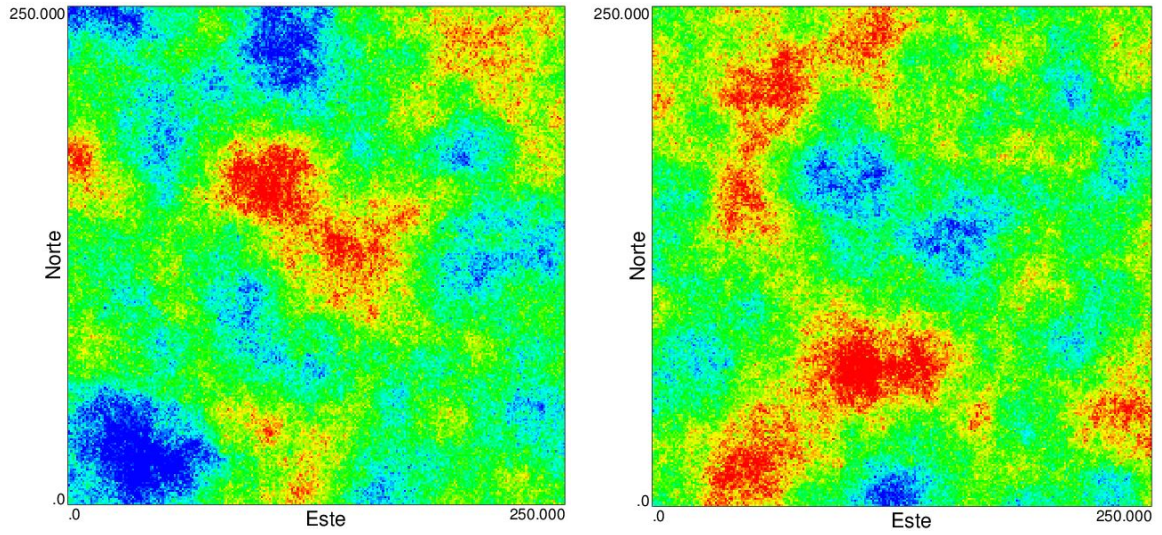
	1	2	3
1	1		
2	-0.592	1	
3	-0.516	-0.385	1

(b) n=3

	1	2	3	4
1	1			
2	-0.272	1		
3	-0.386	-0.215	1	
4	-0.233	-0.418	-0.468	1

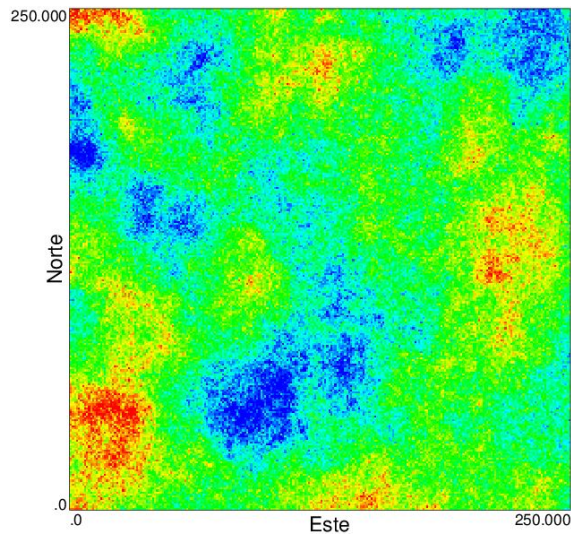
(c) n=4





(a) Simulación 1/3

(b) Simulación 2/3



(c) Simulación 3/3

Figura 5.2: Trío de simulaciones antitéticas no condicionales ( $\alpha = -0.5$ ). La leyenda se encuentra en la Fig. 5.1

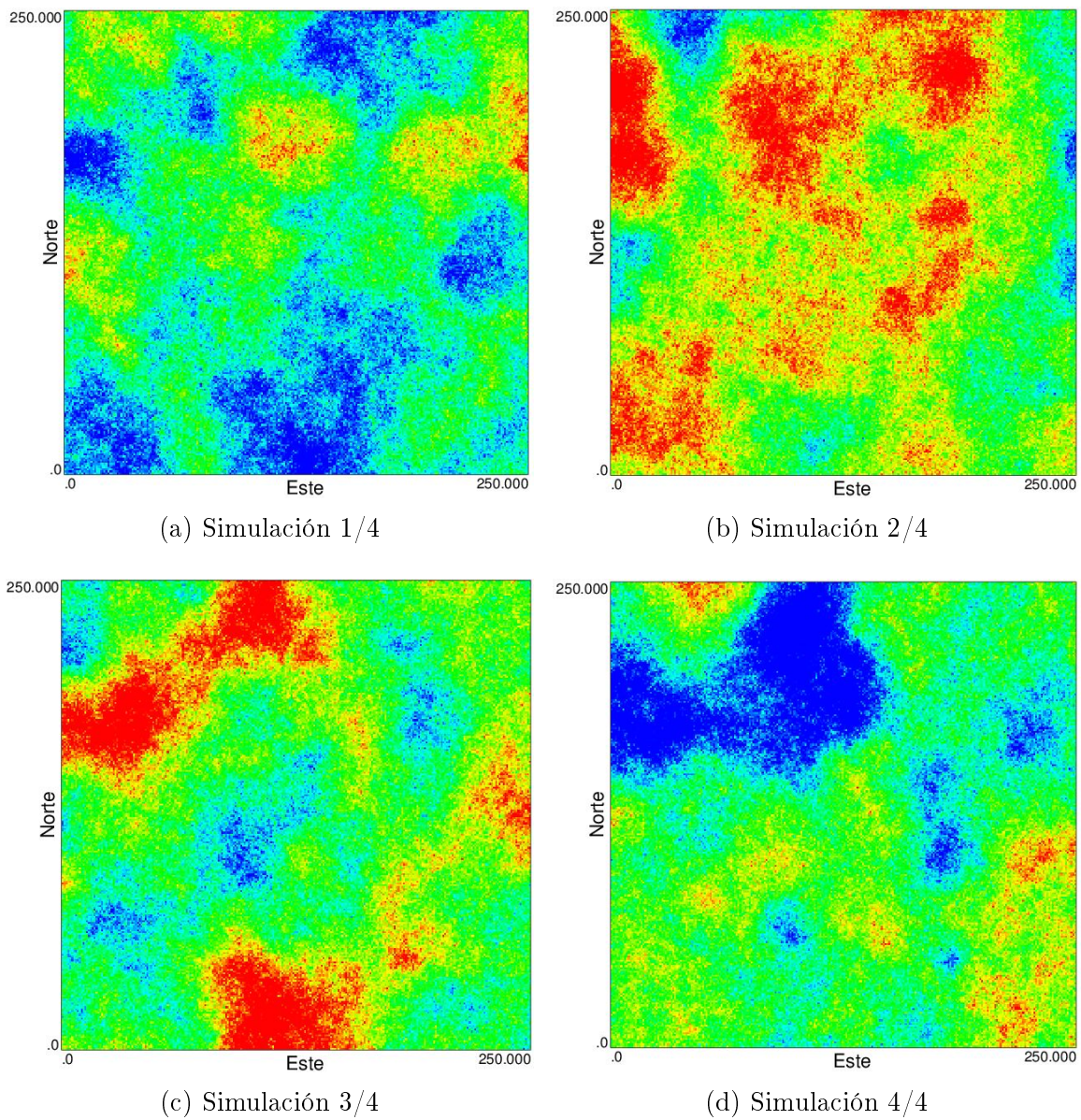


Figura 5.3: Cuatro simulaciones antitéticas no condicionales ( $\alpha = -0.33$ ). La leyenda se encuentra en la Fig. 5.1

Se aprecia que los coeficientes de correlación no son iguales para todos los pares dentro de cada tabla. Para cada uno de los casos, existen pares donde la correlación es mayor a la esperada, mientras otros pares poseen una correlación menor a la esperada. Sin embargo, si se calcula el coeficiente de correlación promedio para cada n-tupla, se obtienen valores bastante cercanos al valor del coeficiente  $\alpha$  respectivo. Por ejemplo, la correlación promedio para  $n = 3$  es  $-0.493$  mientras que el valor de  $\alpha_{n=3} = -0.5$  considerando la ecuación (2.18). Una posible explicación para este comportamiento es que los vectores de números aleatorios correlacionados negativamente (mediante el algoritmo detallado en 2.2.4) tengan correlaciones diferentes entre ellos. Para comprobarlo, en la Tabla 5.2 se muestra la matriz de correlación de los números aleatorios generados por el algoritmo propuesto.

Tabla 5.2: Coeficiente de correlación para los vectores de números aleatorios para distintas tuplas de simulaciones antitéticas

	1	2	3
1	1		
2	-0.497	1	
3	-0.501	-0.502	1

(a) n=3

	1	2	3	4
1	1			
2	-0.333	1		
3	-0.333	-0.332	1	
4	-0.334	-0.334	-0.333	1

(b) n=4

Se comprueba que los coeficientes de correlación de los vectores de números aleatorios presentan una correlación mucho más cercana a la teórica para cada caso, con diferencias mínimas, que en la práctica difícilmente pueden ser las responsables de las diferencias mayores vistas en los escenarios simulados finales.

El otro procedimiento que influye en la generación de la simulación es el proceso de kriging dentro de cada nodo simulado. Es más probable que este proceso sea el responsable de desviar la correlación de los números aleatorios: El camino aleatorio determinará el orden de simulación de cada nodo de la grilla, por lo cual en algunos sectores primero serán simulados nodos con un número aleatorio mayor. Luego, los otros nodos del mismo sector serán simulados y tomarán como dato condicionante los nodos previamente simulados, lo cual modificará el valor del número aleatorio en dicho nodo, y por ende, modificará la correlación inicial, aumentándola o disminuyéndola dependiendo de cada sector. Dado que existe más de un escenario, el aumento de correlación entre un par de ellos conlleva necesariamente a una disminución de la correlación en los demás, en virtud de que la ecuación (2.18) nos entrega la mínima correlación simultánea que pueden tener  $n$  simulaciones. Naturalmente, al depender este comportamiento del camino aleatorio generado, dependerá de la semilla utilizada para la simulación. De todas formas, en promedio la correlación sigue siendo la esperada, lo cual se puede verificar en la Fig. 5.4, donde se muestra la correlación promedio entre distintos grupos de simulaciones antitéticas, comparadas con el valor del coeficiente de correlación de simulaciones convencionales.

El primer valor relevante es la correlación entre simulaciones convencionales, que es muy cercano a 0, lo que se produce porque no existen datos condicionantes en todas las simulaciones. Naturalmente, existen pares de escenarios con correlación ligeramente mayor o menor a cero, pero dentro de un grupo grande el valor promedio es prácticamente cero. Como se verá más adelante, este comportamiento cambia cuando existen datos condicionantes.

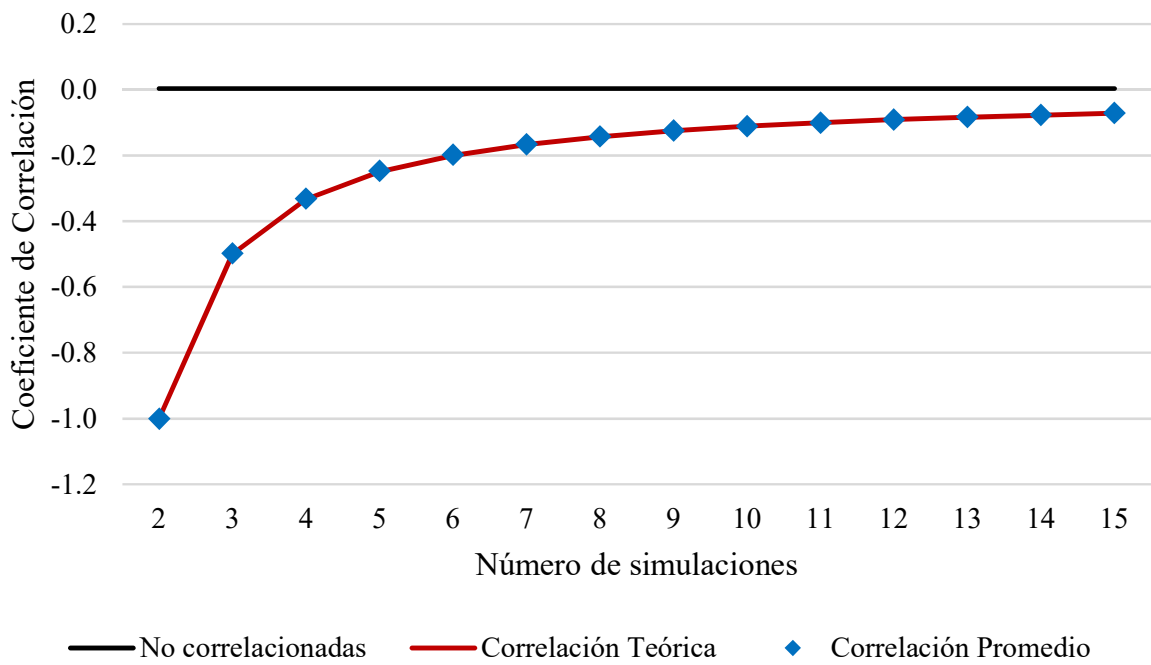


Figura 5.4: Comparación entre correlación promedio y correlación teórica para distintas simulaciones antitéticas

Por otro lado, se ve que el valor promedio del coeficiente de correlación se acerca asintóticamente a cero, y que, además, la correlación teórica dada por el coeficiente  $\alpha$  se ajusta de manera bastante precisa a los resultados. Por el comportamiento geométrico de esta función, se ve que la correlación disminuye rápidamente a medida que aumenta el número de simulaciones, lo que en primera instancia disminuiría la efectividad de esta técnica para correlacionar un número grande de escenarios. Una alternativa posible es correlacionar subconjuntos de estos escenarios: Por ejemplo, de 9 simulaciones, generar tríos y correlacionar negativamente cada uno de ellos, generando subconjuntos con correlación negativa. Esto, sin embargo, puede no ser efectivo pues no se controla la correlación entre escenarios de distintos tríos. Para estudiar este comportamiento, se muestran las matrices de correlación para 9 simulaciones en dos casos: agrupadas en tríos antitéticos y sin agrupamiento.

Tabla 5.3: Coeficiente de correlación para 9 simulaciones, correlacionadas negativamente en tríos.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1								
2	<b>-0.59</b>	1							
3	<b>-0.52</b>	<b>-0.38</b>	1						
4	0.24	0.00	-0.27	1					
5	-0.11	0.05	0.08	<b>-0.52</b>	1				
6	-0.15	-0.04	0.22	<b>-0.61</b>	<b>-0.37</b>	1			
7	-0.01	0.02	-0.01	0.21	-0.21	-0.03	1		
8	0.06	-0.11	0.05	-0.05	0.12	-0.05	<b>-0.66</b>	1	
9	-0.06	0.12	-0.05	-0.19	0.11	0.10	<b>-0.42</b>	<b>-0.40</b>	1

Tabla 5.4: Coeficiente de correlación para 9 simulaciones antitéticas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1								
2	-0.10	1							
3	-0.18	-0.04	1						
4	-0.20	0.03	-0.19	1					
5	-0.27	-0.02	0.05	-0.11	1				
6	0.04	-0.29	-0.11	-0.16	-0.01	1			
7	-0.28	-0.15	-0.22	0.08	-0.13	-0.26	1		
8	-0.03	-0.14	-0.20	-0.28	-0.32	-0.04	0.05	1	
9	0.03	-0.20	-0.17	-0.18	-0.04	-0.17	-0.10	-0.19	1

Para realizar este análisis se generaron 3 tríos de simulaciones antitéticas, y luego se calculó el coeficiente de correlación entre todos los elementos de los diferentes tríos. Como se aprecia en la Tabla 5.3, la correlación entre simulaciones de un mismo trío (destacadas en negro) es considerablemente menor a la correlación entre elementos de tríos diferentes. Más aún, de los 36 coeficientes mostrados en la Tabla (sin contar la diagonal de 1 entre elementos iguales), 13 son mayores a cero, lo que muestra que el no controlar la correlación entre elementos de diferentes tríos genera este efecto no deseado. Por su parte, la generación de 9 simulaciones antitéticas convencionales genera una matriz de correlación en donde sus elementos son bastante similares entre sí, donde solo 6 son mayores a 0. Sin embargo, la correlación entre pares es mucho menor que en los tríos del caso anterior.

Un resultado interesante es que a pesar de las diferencias entre ambos resultados, mantienen un elemento en común: la correlación promedio es igual en ambos casos:  $-0.124$ , y notoriamente similar a la correlación teórica de  $-0.125$  para 9 simulaciones. Esto lleva a concluir que ambos métodos pueden ser efectivos dependiendo del tipo de respuesta buscada: Si la respuesta es sensible a grandes diferencias de los escenarios generados, correlacionar menos escenarios, pero con un mayor coeficiente de correlación, sería buena opción. Por otra parte, si la respuesta es gradual, correlacionar más escenarios a la vez sería mejor opción para muestrear de mejor manera todas las alternativas y obtener todo el rango de respuestas posibles.

### 5.1.2. Simulaciones condicionales

En esta sección se estudia el efecto del condicionamiento en el resultado de las simulaciones antitéticas. Para esto, se utiliza una base de datos de sondeos de un yacimiento de cobre de alta ley, con las características descritas en la Tabla 5.5.

Con esta base de datos, se utilizó el procedimiento descrito en 2.2.1 para transformar los datos a valores gaussianos y poder aplicar el algoritmo de simulaciones antitéticas. Se simuló a un soporte de  $2.5 \times 2.5 \times 6$  en una grilla regular de  $160 \times 240 \times 22$  nodos, que abarcan aproximadamente toda la extensión de los sondeos originales ( $400\text{m} \times 600\text{m} \times 130\text{m}$ ). El modelo variográfico utilizado se presenta en la ecuación (5.2).

Tabla 5.5: Estadísticas básicas de datos de sondeos del yacimiento 1

Número de datos	2376	
Promedio	1.054	%
Mínimo	0.120	%
Máximo	7.240	%
Desviación estándar	0.644	%

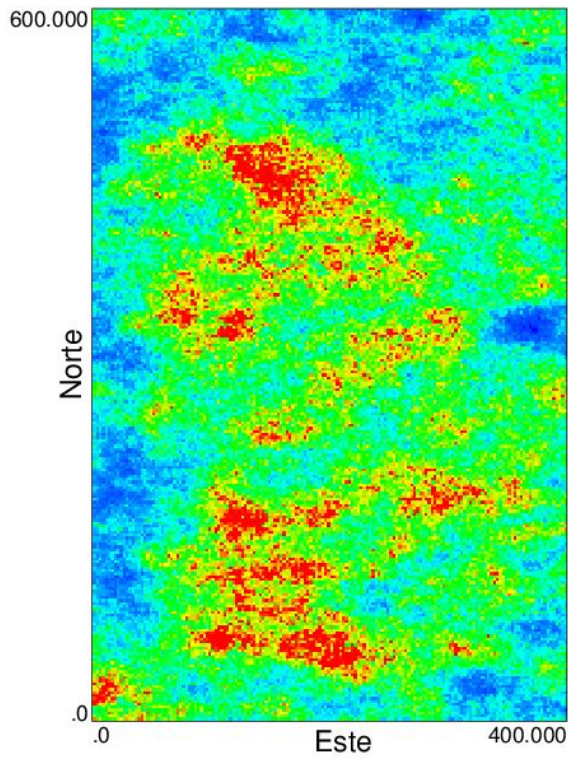
$$\begin{aligned} \gamma(h) = & 0.1 + 0.21\text{esf}_{(20,50,70)}(h) + 0.33\text{esf}_{(90,130,120)}(h) + 0.11\text{esf}_{(120,50,\text{inf})}(h) \\ & + 0.25\text{esf}_{(\text{inf},130,\text{inf})}(h) \end{aligned} \quad (5.2)$$

El detalle de la generación de estas simulaciones, junto con el análisis variográfico respectivo puede encontrarse en el anexo A.1

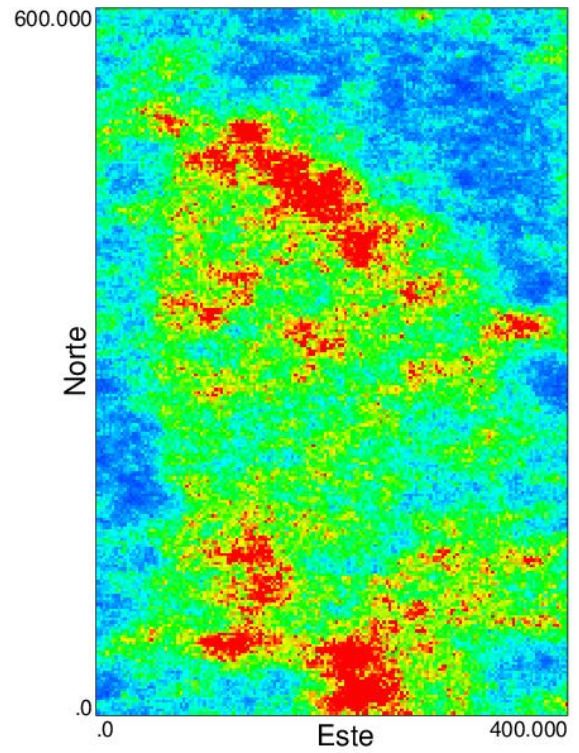
Se generó un par de simulaciones antitéticas condicionales a estos datos con  $\alpha = -1$ , y se obtuvo el resultado que se muestra en la Fig. 5.5. Como forma de comparación, se presentan además dos simulaciones convencionales del mismo yacimiento. Como se puede apreciar comparando ambos escenarios, el efecto del condicionamiento es bastante notorio en las simulaciones, donde la región central de la imagen presenta una estructura bastante similar en todos los casos. Este es un resultado esperado dado que los datos condicionantes están presentes en un principio de ambas simulaciones, por lo cual el valor de los nodos dentro de su vecindad se verá afectado en todos los escenarios. La mayoría de los datos condicionantes se encuentran en la franja central de la imagen, por lo cual el condicionamiento es más fuerte en ese sector. A medida que los nodos a simular se alejan de los datos condicionantes, su peso en el kriging disminuye mientras que la influencia de los números aleatorios correlacionados aumenta, por lo cual los escenarios presentan valores que difieren en mayor medida. Esto ocurre, por ejemplo, en la esquina superior derecha de ambas imágenes, donde los valores en ambos escenarios difieren bastante. Además, se aprecia que en la Fig. 5.5b existen mayor cantidad de nodos simulados con alta ley, comparado con la Fig. 5.5a. Para el caso de las Fig. 5.5c y 5.5d la distribución de altas leyes es más homogénea.

El cálculo del coeficiente de correlación entrega más información acerca del efecto de los datos condicionantes. Para las simulaciones convencionales es 0.561, mientras que para las antitéticas es 0.183. Ambos valores sufren un aumento considerable comparado con las simulaciones no condicionales vistas en la sección 5.1.1. Sin embargo, se puede apreciar que aún existe una diferencia notable entre la correlación de ambos algoritmos. Un análisis más detallado se puede ver en la Fig 5.6.

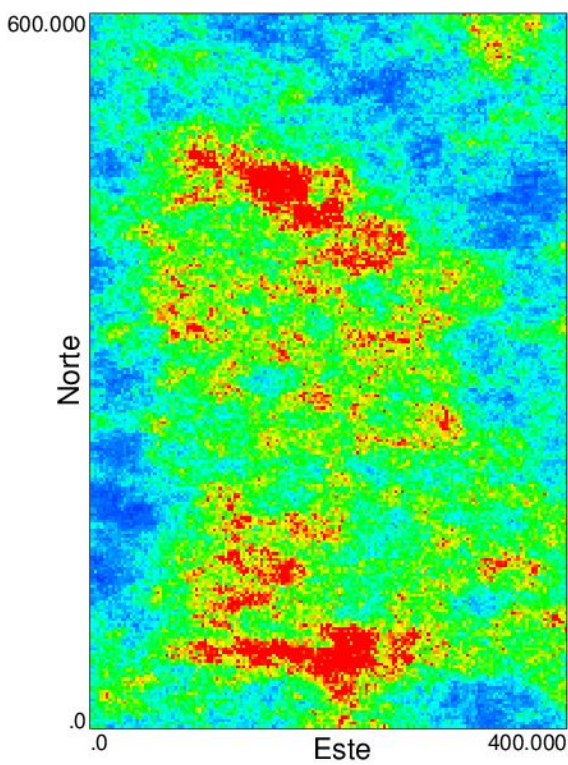
Se aprecia que el comportamiento es bastante similar al caso de simulaciones no condicionales: la correlación entre simulaciones antitéticas se va acercando asintóticamente a la correlación de las simulaciones convencionales. El efecto del condicionamiento radica principalmente en que la correlación sube transversalmente en todos los casos, pero las simulaciones antitéticas siguen presentando una correlación menor a las simulaciones convencionales. De aquí radica el hecho de que esta técnica pierde efectividad cuando la cantidad de información disponible es muy grande (por ejemplo, en simulaciones con datos de pozo de tronadura en



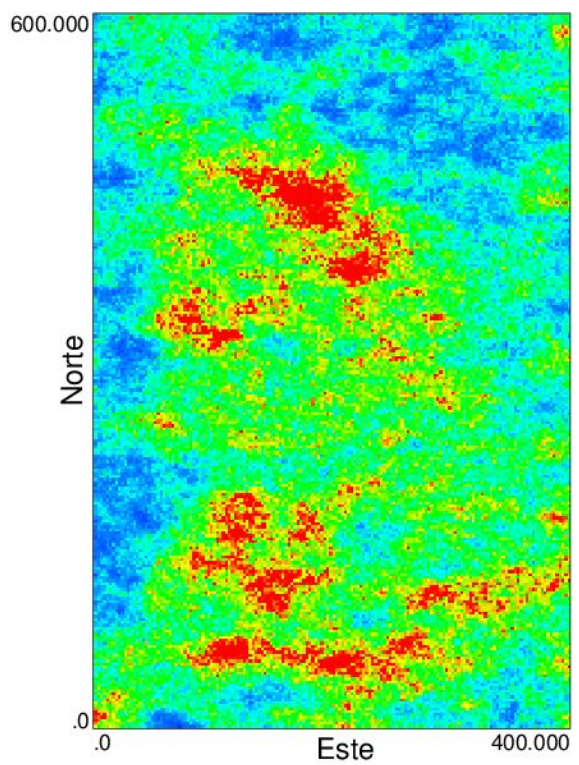
(a) Simulación antitética 1/2



(b) Simulación antitética 2/2



(c) Simulación convencional 1/2



(d) Simulación convencional 2/2

Figura 5.5: Comparación entre simulaciones convencionales y antitéticas para los mismos datos condicionantes. La leyenda se encuentra en la Fig. 5.8

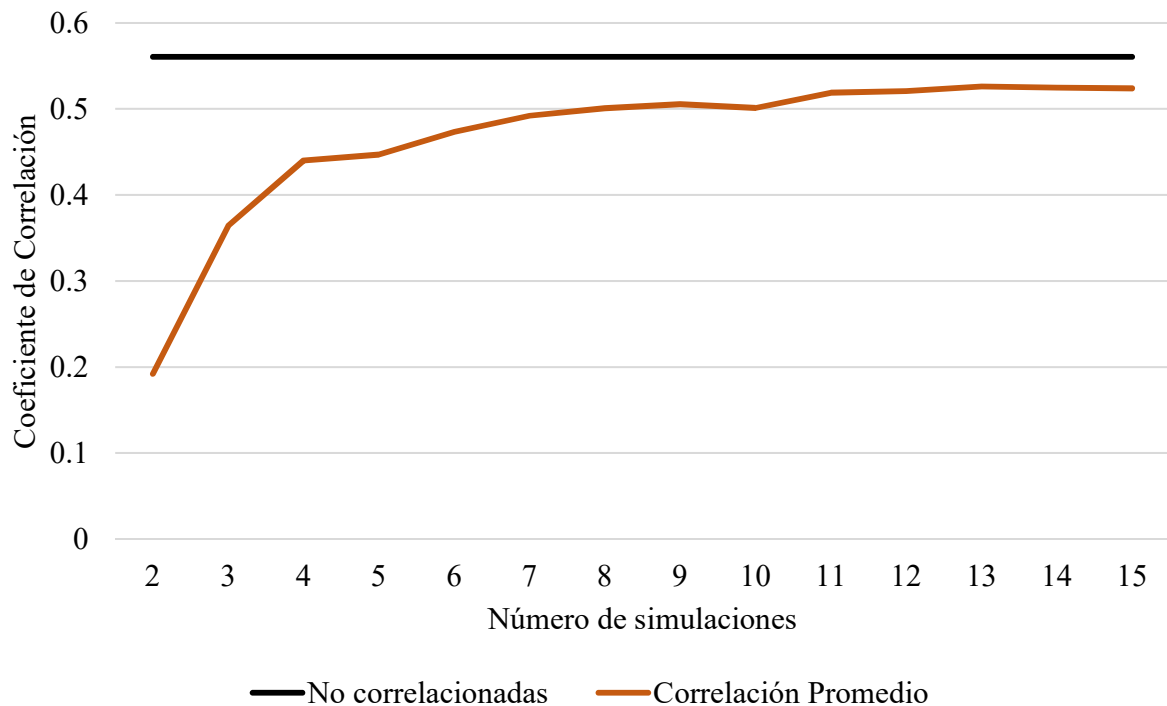


Figura 5.6: Comparación entre correlación promedio de simulaciones antitéticas con simulaciones convencionales a soporte puntual

mallada densa). El algoritmo seguirá correlacionando los números aleatorios, pero su efecto en la simulación final disminuye notablemente con una alta densidad de datos condicionantes.

Para simulaciones sin datos condicionantes, se verificó que el utilizar grupos de simulaciones antitéticas dentro de un número mayor de escenarios generaba una correlación promedio similar al caso de correlacionar todos los escenarios a la vez. Se analizará si este comportamiento se mantiene bajo la existencia de datos condicionantes. Se realizó el mismo estudio: 9 simulaciones en total, correlacionadas en tríos y simultáneamente. El resultado se puede ver en las Tablas 5.3 y 5.4.

Para el caso de las simulaciones correlacionadas en tríos, se puede ver que dentro del trío la correlación es más baja que fuera de él. Entre simulaciones de tríos diferentes, sin embargo, la correlación es notoriamente mayor. De hecho, los valores son bastante cercanos al obtenido en simulaciones convencionales: 0.56. Por su parte, la correlación simultánea de los 9 escenarios resulta en una correlación bastante homogénea, y que se ubica por debajo de las simulaciones convencionales y por sobre la correlación en tríos. Sin embargo, el promedio en ambos casos es 0.50, repitiendo el comportamiento visto en la sección anterior, pero con una correlación transversalmente mayor. Es necesario considerar, además, que en caso de que el número total de simulaciones no sea múltiplo del número de elementos en cada trío, este comportamiento no es válido.



Tabla 5.6: Coeficiente de correlación para 9 simulaciones antitéticas correlacionadas en tríos con datos condicionantes

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1.00								
2	<b>0.37</b>	1.00							
3	<b>0.36</b>	<b>0.37</b>	1.00						
4	0.55	0.56	0.56	1.00					
5	0.55	0.55	0.55	<b>0.35</b>	1.00				
6	0.55	0.56	0.56	<b>0.37</b>	<b>0.34</b>	1.00			
7	0.55	0.55	0.56	0.56	0.54	0.55	1.00		
8	0.54	0.55	0.55	0.55	0.52	0.54	<b>0.35</b>	1.00	
9	0.55	0.56	0.57	0.54	0.56	0.56	<b>0.34</b>	<b>0.35</b>	1.00

Tabla 5.7: Coeficiente de correlación para 9 simulaciones antitéticas con datos condicionantes

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1.00								
2	0.52	1.00							
3	0.51	0.52	1.00						
4	0.52	0.50	0.51	1.00					
5	0.50	0.50	0.50	0.51	1.00				
6	0.53	0.53	0.53	0.53	0.51	1.00			
7	0.50	0.51	0.48	0.49	0.49	0.51	1.00		
8	0.51	0.52	0.50	0.50	0.49	0.51	0.51	1.00	
9	0.50	0.50	0.49	0.49	0.50	0.51	0.47	0.48	1.00

### 5.1.3. Soporte de bloques

Para este análisis, se utilizaron las simulaciones de la sección anterior, las cuales se realizaron en una grilla de  $2.5\text{m} \times 2.5\text{m} \times 6\text{m}$ . El soporte final de planificación se consideró como  $10\text{m} \times 10\text{m} \times 12\text{m}$ , por lo cual existen 32 nodos dentro de cada bloque, lo cual es suficiente para obtener un resultado confiable. El resultado del cambio de soporte se muestra en la Fig. 5.8.

Como es esperable, el rebloqueo tiende a homogeneizar zonas de datos erráticos y a disminuir la variabilidad general del escenario. Además, los valores extremos se suavizan luego de un cambio de soporte, lo que puede afectar la correlación negativa de los escenarios. Para comprobar esto, se rebloquearon los escenarios generados en la sección anterior y se calculó su coeficiente de correlación, el cual puede verse en la Fig. 5.7.

Se aprecia que el comportamiento es prácticamente idéntico al obtenido con la grilla densa, pero el coeficiente de correlación sube considerablemente en todos los casos, incluido el de las simulaciones convencionales. Nuevamente, la correlación de las simulaciones antitéticas se acerca asintóticamente a la correlación de las simulaciones convencionales a medida que aumenta el número de escenarios considerados. El aumento del coeficiente de correlación es consistente con el hecho de que el promedio suaviza los valores extremos, y por ende, genera

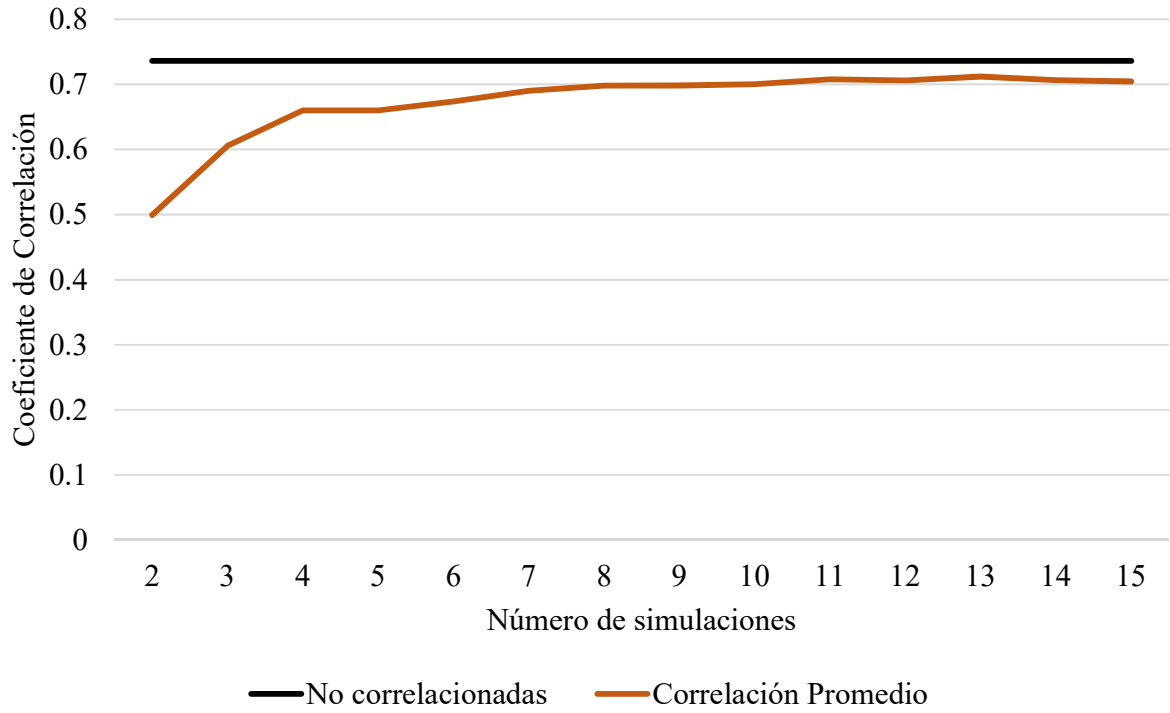


Figura 5.7: Comparación entre correlación promedio de simulaciones antitéticas con simulaciones convencionales a soporte de bloques

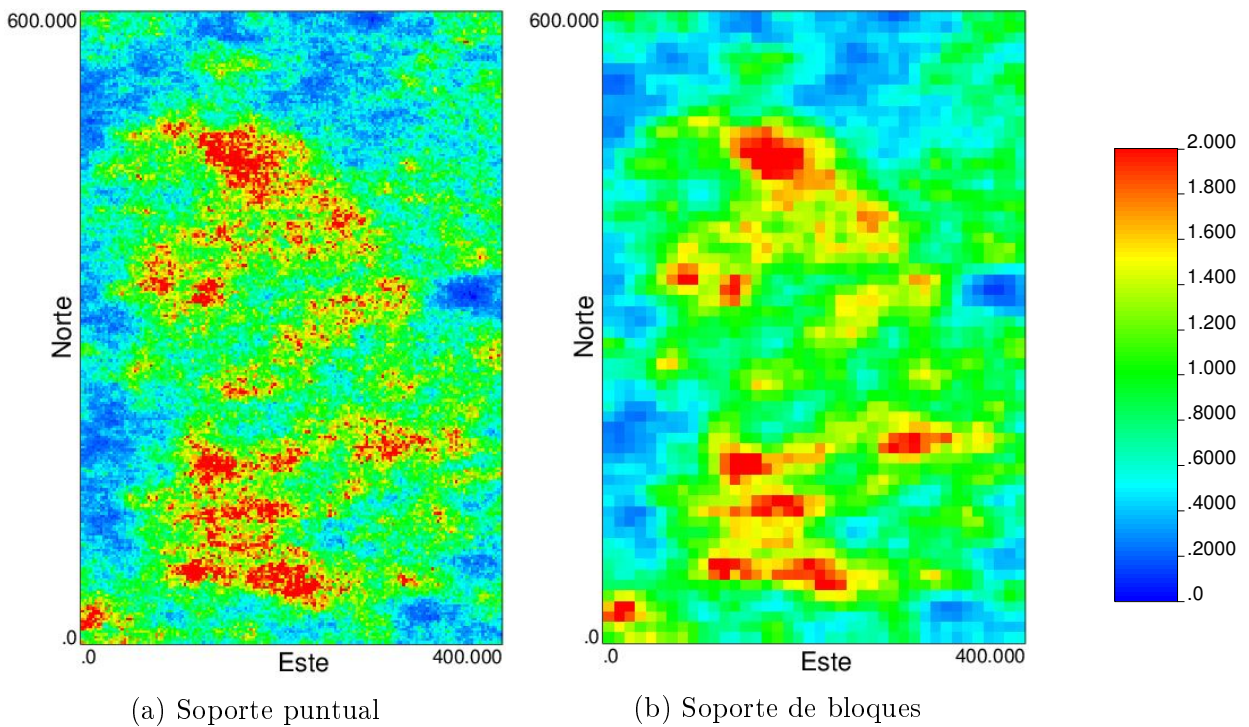


Figura 5.8: Cambio de soporte para una simulación antitética

que los escenarios sean más similares entre sí, disminuyendo el efecto de la correlación de los números aleatorios. En la sección 5.3 se estudiará si el uso de las simulaciones antitéticas genera efectivamente una disminución de la varianza para el problema de agendamiento estocástico que se verá en la siguiente sección.

## 5.2. Agendamiento estocástico

### 5.2.1. Caso de estudio

Para esta sección se utilizó un set de datos de sondajes de un yacimiento de cobre de baja ley, en una grilla pseudoregular de  $50\text{m} \times 100\text{m}$ , en una extensión aproximada de  $2\text{km} \times 2.8\text{km} \times 0.4\text{km}$ . Las estadísticas básicas para la ley de cobre se muestran en la Tabla 5.8

Tabla 5.8: Estadísticas básicas de datos de sondajes del yacimiento 2

Número de datos	15,622	
Ley promedio	0.283	%
Ley mínima	0.009	%
Ley máxima	2.740	%
Desviación estándar	0.168	%

Con estos datos, se utilizó el procedimiento descrito en la sección 2.2.1 para transformar los datos a dominio gaussiano, y se aplicó el algoritmo de simulaciones antitéticas propuesto en la sección 2.2.4 para obtener los escenarios. El tamaño de los bloques para la planificación se consideró en  $12.5\text{m} \times 12.5\text{m} \times 15\text{m}$ , y para su cálculo se consideró una grilla fina de  $3.125\text{m} \times 3.125\text{m} \times 7.5\text{m}$ , para un total de 32 nodos por bloque.

Dada la extensión de la malla de sondajes, cada simulación requeriría 27 millones de nodos aproximadamente. Sin embargo, como el modelo de planificación presentado en la sección 3.2 está pensado para el corto plazo, la simulación del modelo de bloques completo se hizo innecesaria. Por este motivo, el dominio fue reducido a una extensión de  $1.6\text{ km} \times 2.4\text{ km} \times 60\text{m}$ , que es donde se encuentran la mayoría de los datos de sondajes, generando escenarios de aproximadamente 3 millones de nodos, que luego fueron rebloqueados para obtener los modelos de bloques finales con 98,304 bloques. De la cota central de este modelo de bloques, se extrajo los bloques correspondientes a una fase-banco, con un diseño real correspondiente al fondo de una fase, con el fin de emular la geometría de un banco real. Este será el modelo de bloques a utilizar para el modelo de agendamiento estocástico. Sus estadísticas pueden ser vistas en la Tabla 5.9, las que fueron calculadas sobre un promedio de 50 realizaciones. Una imagen del banco a utilizar puede ser vista en la Fig. 5.9.

El coeficiente de correlación de las simulaciones convencionales para este sector del yacimiento es de 0.17, mientras que para 10 simulaciones antitéticas es 0.09 y para un par es de  $-0.50$  el cual es notablemente más bajo que el encontrado en el yacimiento 1. Esto se explica por la baja densidad de sondajes de este sector, donde la malla es aproximadamente de  $100\text{m}$

Tabla 5.9: Estadísticas básicas de la fase-banco utilizada en el agendamiento estocástico

Número de bloques	1,547	
Ley promedio	0.328	%
Ley mínima	0.189	%
Ley máxima	0.479	%
Desviación estándar	0.044	%

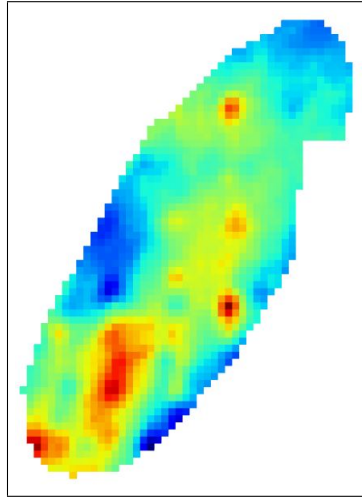


Figura 5.9: Ley de cobre promedio en la Fase-banco a utilizar para el agendamiento estocástico

$\times 50\text{m}$ , la que se puede ver en la Fig. 5.10. Como referencia, en el yacimiento 1 la malla de sondajes era de aproximadamente  $25\text{m} \times 25\text{m}$ , lo que explica la notable diferencia entre la correlación de ambas. Sin embargo, se considera que este tipo de espaciamiento es normal para la estimación de recursos, por lo cual es relevante para notar el efecto de la información en la planificación minera.

Para valorizar los bloques del modelo, se utilizó la ecuación (2.1), con los parámetros económicos descritos en la Tabla 5.10. Se consideró, además, que dentro de la misma fase-banco, los costos de extracción se pueden considerar como una constante, pues las distancias de transporte no varían considerablemente.

Tabla 5.10: Parámetros económicos del agendamiento minero

Precio del Cu	2.5	US\$/ton
Recuperación	85	%
Costo mina	1.5	US\$/ton
Costo de procesamiento	10	US\$/ton
Costo de refinación y venta	0.3	US\$/lbCu
Tasa de descuento (anual)	10	%

Con respecto a los parámetros mineros, se consideró, en primer lugar, una densidad de 2.64 toneladas por metro cúbico. Dadas las dimensiones de los bloques ( $12.5 \times 12.5 \times 15 \text{ m}^3$ ), se tiene que cada bloque presenta 6187.5 toneladas, para un total de aproximadamente

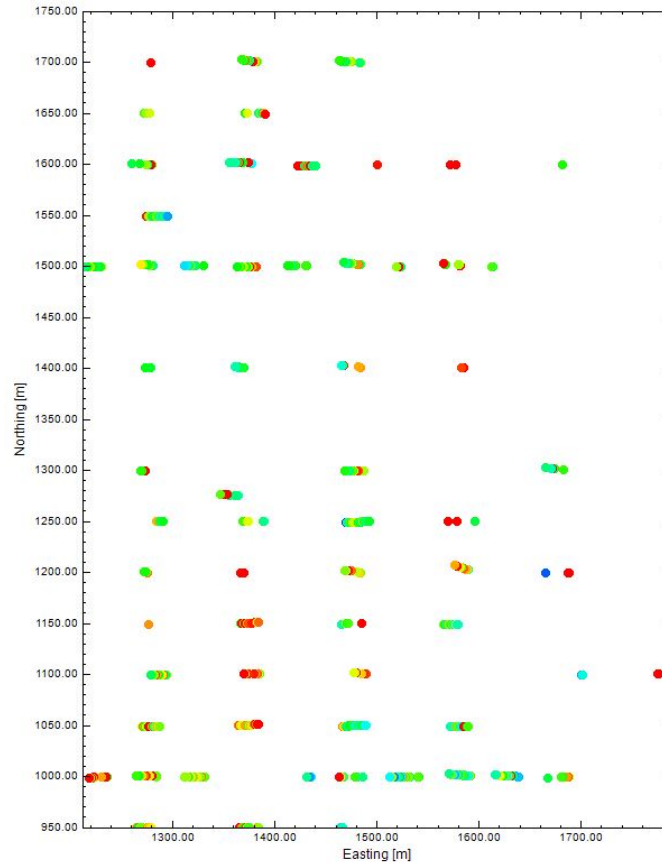


Figura 5.10: Sondajes en la fase-banco utilizada para el agendamiento estocástico

9.57 millones de toneladas en la fase-banco. El horizonte de planificación es mensual, por lo cual las capacidades por periodo serán 2.1 millones de toneladas para la mina y 1.2 millones de toneladas para la planta. Dado el tonelaje disponible en la fase-banco, se espera que su explotación dure 5 meses, por lo cual se agendará a 5 periodos. A su vez, la tasa de descuento debe ser transformada a tasa mensual, lo que equivale a una tasa de 0.8 % por mes.

Dado que se agendará solo una fase-banco, no existen precedencias verticales asociadas al ángulo de talud. Para intentar mantener una coherencia en la extracción, se introducen precedencias horizontales entre los bloques desde el sector de la rampa. Cabe destacar que estas precedencias solo aseguran que exista un camino posible desde la rampa a cada bloque, pero no necesariamente ese camino será totalmente operativo, por lo cual estos resultados no constituyen, en ningún caso, un agendamiento definitivo.

## 5.2.2. Resultados

Para el caso de estudio descrito en la sección anterior, los resultados del valor descontado neto del agendamiento para cada  $T^*$  se muestran en la Tabla 5.11. El valor de la información está calculado como el aumento del valor del agendamiento con respecto al plan de valor esperado.

Tabla 5.11: Valor del agendamiento minero para distintos niveles de información

Caso	Valor [US\$]	Coefficiente de variación	Valor de la Información
Valor Esperado ( $T^* = 5$ )	9,445,581	45.60 %	-
$T^* = 4$	15,471,228	30.92 %	64 %
$T^* = 3$	17,271,498	27.09 %	83 %
$T^* = 2$	18,747,022	24.91 %	98 %
$T^* = 1$	19,819,500	23.24 %	110 %
Información Perfecta ( $T^* = 0$ )	20,179,507	22.75 %	114 %

Como se puede apreciar, existe un aumento considerable del valor del agendamiento a medida que el nivel de información para la planificación aumenta, llegando a ser más del doble cuando se posee toda la información de la fase-banco al inicio del agendamiento. Información más detallada de los planes mineros puede ser vista en la Tabla 5.12. Se muestran los valores promedio sobre los 50 planes generados.

Tabla 5.12: Valores promedios de los agendamientos para distintos niveles de información

Caso	Finos [kTon]	Ley media [%]	Mineral [MTon]	Estéril [MTon]
Valor Esperado	20.30	0.340	5.97	3.60
$T^* = 4$	21.80	0.365	5.97	3.60
$T^* = 3$	22.25	0.373	5.97	3.60
$T^* = 2$	22.61	0.378	5.97	3.60
$T^* = 1$	22.86	0.383	5.97	3.60
Información Perfecta	22.94	0.384	5.97	3.60

A medida que la información llega antes, existe una mayor producción de finos en la planta y la ley media del mineral aumenta. Los tonelajes de envío a planta y estéril se mantienen constantes, y son consistentes con las capacidades de mina y procesamiento definidas para el caso de estudio. Es relevante destacar que el aumento de finos y ley media existe, pero no es considerable, con diferencias menores al 15 % entre los finos promedios enviados en el plan con información perfecta con respecto al plan de valor esperado. Esta diferencia no refleja la notable diferencia en valor entre los planes generados, por lo cual la diferencia entre ellos se produce por otro fenómeno: La mala clasificación de destino de los bloques, cuyos resultados se muestran en la siguiente sección.

### Agendamiento con reasignación de destino

En la Tabla 5.13 se muestran la cantidad de bloques enviados a botadero que están bajo la ley de corte marginal, definida en la ecuación (2.2). La ley marginal representa la ley mínima que debe tener un bloque para que su procesamiento genere un beneficio positivo, una vez que ya se extrajo desde el pit. El envío de un bloque a planta con una ley menor a la ley marginal representa una pérdida de valor para el agendamiento, comparado con enviar el

mismo bloque a botadero. Para los parámetros económicos definidos en este caso de estudio, la ley de corte marginal es 0.24 %.

Tabla 5.13: Estadísticas para bloques de estéril enviados a planta para distintos niveles de información

Caso	Bloques mal clasificados Promedio	Tonelaje [kTon]	Ley promedio [%]	Número de bloques Peor Caso
Valor Esperado	152	940.5	0.207	228
$T^* = 4$	64	396.0	0.216	125
$T^* = 3$	42	259.9	0.215	100
$T^* = 2$	27	167.1	0.214	67
$T^* = 1$	12	74.3	0.212	40
Info. Perfecta	0	-	-	

Se verifica que en los agendamientos con bajo nivel de información, la clasificación errada de los bloques es un factor preponderante en el agendamiento. En el caso de valor esperado, se tiene que en promedio, el 10 % de los bloques del modelo son bloques de material estéril enviados a procesamiento, generando una pérdida considerable de valor. Esto ocurre pues la decisión en los periodos donde no se puede diferenciar los escenarios (antes del periodo  $T^*$ ) se toma en base al valor promedio de los bloques, el cual puede estar sobre la ley de corte marginal aunque existan escenarios donde su ley es menor. En algunos escenarios este efecto es considerable: Cuando el plan se realiza solo considerando valores promedios (caso de Valor Esperado), este plan aplicado en uno de los escenarios del modelo de bloques envía 228 bloques de estéril a planta (3 millones de toneladas aproximadamente), lo que equivale a la mitad de la capacidad de procesamiento de la planta. Naturalmente, el valor del agendamiento baja considerablemente, pues estos bloques generan pérdidas de valor, y a su vez, impiden que otros bloques de mejor ley sean procesados. Como era esperable, al tener información perfecta de cada escenario, el agendador no envía ningún bloque con ley menor a la ley de corte marginal a planta, lo que explica su buen valor.

Para cuantificar el impacto de la reasignación de destinos, se calculó el valor promedio de los planes mineros para cada nivel de información luego de utilizar el modelo de reasignación detallado en la Sec. 3.2.4. Los resultados se muestran en la Tabla 5.14. El valor de la información se mide, nuevamente, con respecto al caso de Valor Esperado con reasignación de destinos.

Como muestra la Tabla, el cambio de valor es considerable en todos los escenarios con respecto al agendamiento sin reasignación de destino. Sin embargo, las diferencias entre los distintos niveles de información no son significativas, dado que pueden deberse a que el gap de optimización utilizado para el agendamiento original fue de un 1 %. Esto lleva a concluir que el secuenciamiento de los bloques dentro de una fase banco no se beneficia con adelantar la campaña de muestreo para obtener mayor información. Por su parte, la asignación de destinos tiene un impacto considerable en el agendamiento, y se beneficia fuertemente de poseer la información al inicio de cada periodo, por lo cual no es necesario adelantar las campañas de muestreo para agendar de mejor forma los bloques en una fase-banco. Las estadísticas del movimiento de la mina promedio para los distintos niveles de información pueden verse en

Tabla 5.14: Valor del agendamiento minero con reasignación de destinos para distintos niveles de información

Caso	Valor original [US\$]	Valor reasignación [US\$]	Coefficiente de variación	Valor de la Información
Valor Esperado	9,445,581	19,866,992	23.14 %	-
$T^* = 4$	15,471,228	19,890,578	23.09 %	0.12 %
$T^* = 3$	17,271,498	19,865,745	23.06 %	-0.01 %
$T^* = 2$	18,747,022	19,884,591	23.05 %	0.09 %
$T^* = 1$	19,819,500	19,956,650	23.00 %	0.45 %
Información Perfecta	20,179,507	20,204,458	22.74 %	1.7 %

la Tabla 5.15.

Tabla 5.15: Valores promedios de los agendamientos con reasignación de destino para distintos niveles de información

Caso	Finos [kTon]	Ley media [%]	Mineral [MTon]	Estéril [MTon]
Valor Esperado	22.86	0.384	5.958	3.613
$T^* = 4$	22.84	0.384	5.945	3.623
$T^* = 3$	22.79	0.384	5.931	3.641
$T^* = 2$	22.61	0.385	5.911	3.661
$T^* = 1$	22.74	0.385	5.911	3.661
Información Perfecta	22.72	0.385	5.902	3.670

Los valores promedio de cada plan son bastante similares para el movimiento mina y el mineral procesado, con diferencias menores al 1 % en todos los casos. A diferencia de los planes generados sin reasignación de destino, en promedio no se satura la capacidad de procesamiento de la planta. Las diferencias, sin embargo, no son significativas, pues corresponden a cerca de 11 bloques menos de mineral asignado a planta, lo que equivale a cerca de un 1 % de la capacidad máxima del agendamiento. Este fenómeno se explica porque, a diferencia de los planes sin reasignación, los bloques de material estéril enviados a planta son cero, para todos los niveles de información. En caso de imponer la restricción de saturación de la planta, es esperable que el valor de los planes baje, pero de manera marginal. La posibilidad de cambiar los destinos en el mismo periodo otorga la flexibilidad suficiente para que el agendador mejore de manera considerable sus decisiones y obtenga un valor del plan mucho mayor.

### Agendamiento con tasa de descuento mayor

Con el objetivo de verificar si el agendamiento se beneficia con mayor información previa, se buscó modificar el caso de estudio. Dado que en todos los agendamientos se impone la condición de extraer todos los bloques, las diferencias entre ellos se originan por dos factores: la secuencia de extracción y su destino. El efecto de la secuencia se relaciona con una diferencia en beneficio en la extracción del bloque dada la tasa de descuento utilizada, que representa el



costo de oportunidad del agendamiento. Como se vio anteriormente, el efecto de la secuencia es despreciable en el valor, lo cual puede deberse a que la tasa de descuento es bastante baja en un agendamiento en el corto plazo. Para comprobar esta hipótesis, se modificó la tasa de descuento a utilizar y se fijó en 10 %. Los resultados del agendamiento con la tasa modificada se muestran en la Tabla 5.16.

Tabla 5.16: Valor del agendamiento minero con tasa de descuento  $r=10\%$  para distintos niveles de información

Caso	Valor Original [US\$]	Valor Reagendado [US\$]	Valor de la Información
Valor Esperado	7,877,012	15,648,723	-
$T^* = 4$	12,384,201	15,893,446	1.6 %
$T^* = 3$	13,778,216	16,004,644	2.3 %
$T^* = 2$	15,157,641	16,248,515	3.8 %
$T^* = 1$	16,501,143	16,664,247	6.5 %
Información Perfecta	17,104,910	17,111,900	9.4 %

La metodología de reasignación fue la misma que en el caso anterior. Como se muestra en este caso, los valores en general son menores por la tasa de descuento aplicada. Sin embargo, a diferencia del caso anterior, los valores con reasignación de destino sí tienen diferencias significativas según el nivel de información. Esto ocurre pues un mayor nivel de información permite cambiar la secuencia para extraer los mejores bloques en periodos tempranos en cada escenario. Luego, al permitir la reasignación de destino, las diferencias entre los agendamientos disminuyen, pero se mantiene una tendencia de que, a mayor información, se pueden tomar mejores decisiones.

Es importante mencionar las limitaciones de este análisis: La tasa de descuento utilizada corresponde típicamente a periodos anuales. En ese sentido, si se desea aplicar esta metodología en el largo plazo, la llegada de la información con años de antelación con el nivel de precisión aquí considerado es poco realista dadas las condiciones y técnicas de operación utilizadas actualmente. En ese sentido, pese a que existe un aumento en el valor de la secuencia, las consideraciones técnicas para llevar a cabo este tipo de metodología se vuelven altamente complejas al utilizar horizontes de planificación mayores.

### 5.3. Análisis de convergencia

Como se presentó en la sección 2.1.4, el problema resuelto es una aproximación del problema real mediante una muestra de la variable aleatoria, que en este caso es la ley de cada bloque. Es necesario entonces analizar la convergencia de esta aproximación, y el efecto que tiene el utilizar simulaciones antitéticas como técnica de reducción de varianza para el problema de agendamiento minero estocástico.

Para este análisis, se estudió la convergencia para 3 tamaños de muestra ( $\mathbf{N}$ ): 2, 10 y 20 simulaciones. Estas muestras fueron generadas a partir de 3 tipos de simulaciones: conven-

cionales, antitéticas con  $n=2$  y antitéticas con  $n=10$ . Para cada tamaño de muestra y para cada tipo de simulación, se generaron 30 instancias del problema de agendamiento estocástico, para completar un total de 270 instancias diferentes. Estas muestras fueron escogidas al azar entre una población,  $\mathbf{M}$ , de 700 simulaciones de cada tipo. Cabe mencionar que para las simulaciones antitéticas, estos 700 escenarios se agrupan según su correlación en  $n$ -tuplas. De esta forma, para la anticorrelación con  $n=2$ , existen 350 tuplas para escoger, y para la correlación con  $n=10$  existen 70 tuplas disponibles. En el caso en que el tamaño de la muestra requerido es menor que el de la  $n$ -tupla (por ejemplo, cuando el tamaño de la muestra es 2 y la tupla es de tamaño 10), se escogen al azar los escenarios a utilizar dentro de alguna de las tuplas disponibles. Finalmente, para cada tamaño de muestra a utilizar se procura no repetir el mismo escenario en instancias diferentes.

Dado que el problema de agendamiento estocástico cambia según el periodo escogido para la llegada de la información ( $T^*$ ), se analizó la convergencia de la instancia generada para  $T^* = 2$ . De esta forma, se espera que el muestreo sea representativo tanto para el valor promedio del bloque (decisión de primera etapa) como para el valor del bloque agendado (decisión de segunda etapa).

Cabe destacar que todos los resultados fueron obtenidos en un clúster de cómputo que consta de un procesador con 20 núcleos y 48 Gb de memoria RAM.

### 5.3.1. Tamaño de muestra $N=2$

El primer resultado se obtiene para el tamaño de muestra  $N=2$  y se muestra en la Fig. 5.11.

Como se aprecia en la Fig. 5.11, el valor promedio para todos los tipos de simulaciones es bastante similar. Sin embargo, se ve que para el caso de 2 simulaciones antitéticas, la diferencia entre el valor máximo y el mínimo de las 30 instancias es considerablemente menor que para el resto de los casos. Además, se aprecia que la desviación estándar es aproximadamente la mitad que para las simulaciones convencionales. Para el caso de las simulaciones antitéticas con  $n=10$ , se aprecia que la convergencia es ligeramente mejor que las convencionales, pero considerablemente peor que para los antitéticas con  $n=2$ . Esto se explica pues el coeficiente de correlación utilizado para  $n=10$  es mucho más bajo que el de  $n=2$ , por lo cual la correlación de estas dos simulaciones es similar a la correlación de las simulaciones convencionales.

Pese a que se aprecia que la convergencia es mejor para las simulaciones antitéticas, los resultados aún muestran una gran desviación de los datos: La diferencia entre el máximo y el mínimo, para las simulaciones antitéticas con  $n=2$ , es de aproximadamente un 31 %. Para los demás casos, es aún peor: 41 % y 56 % respectivamente. Estos resultados indican que la muestra es muy pequeña independiente del tipo de simulación empleado.

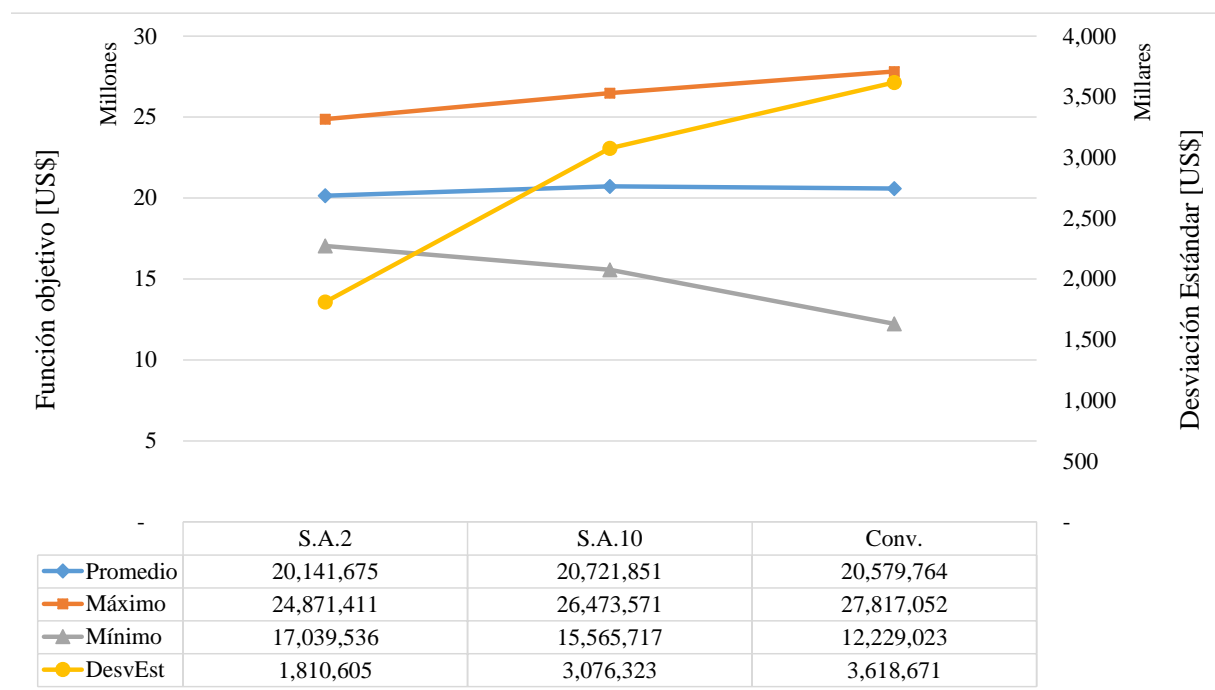


Figura 5.11: Análisis de convergencia del valor del agendamiento estocástico para tamaño de la muestra  $N=2$ .

### 5.3.2. Tamaño de muestra $N=10$

Para una muestra de mayor tamaño,  $N=10$ , los resultados se muestran en la Fig. 5.12. El valor promedio en los 3 casos sigue siendo bastante similar, aunque ligeramente menor que para el tamaño de muestra anterior, lo cual se explica porque el valor promedio converge al valor real a medida que aumenta el tamaño de la muestra, y que en este proceso el comportamiento puede ser errático. En este caso, sin embargo, las diferencias son menores al 10 %, por lo cual se puede inferir que el óptimo está en una vecindad de estos valores.

Con respecto a la convergencia se aprecia que para todos los casos, esta mejora considerablemente con respecto al caso anterior. Para este tamaño de muestra, se tiene que el mejor resultado se obtiene al considerar las simulaciones antitéticas con  $n=10$ , en donde la desviación estándar se reduce considerablemente con respecto al tamaño de muestra anterior, y es menor a la mitad de la desviación estándar para las simulaciones convencionales. La diferencia de valor máximo y mínimo se reduce considerablemente también, siendo 16 % para el caso de S.A.10, 22 % para S.A.2 y 39 % para simulaciones convencionales.

También es posible analizar el comportamiento que se vio en la sección 5.1, acerca de obtener una muestra de tamaño  $N$  con distintos tipos de simulaciones antitéticas. En esa sección se observó que la correlación promedio entre todos los escenarios de la muestra era bastante similar, y ahora se aprecia que la convergencia entre ambos tipos de simulaciones también lo es, siendo ligeramente superior el resultado obtenido para  $n=10$  en este caso, pero ambos son considerablemente mejores a los obtenidos por las simulaciones convencionales.

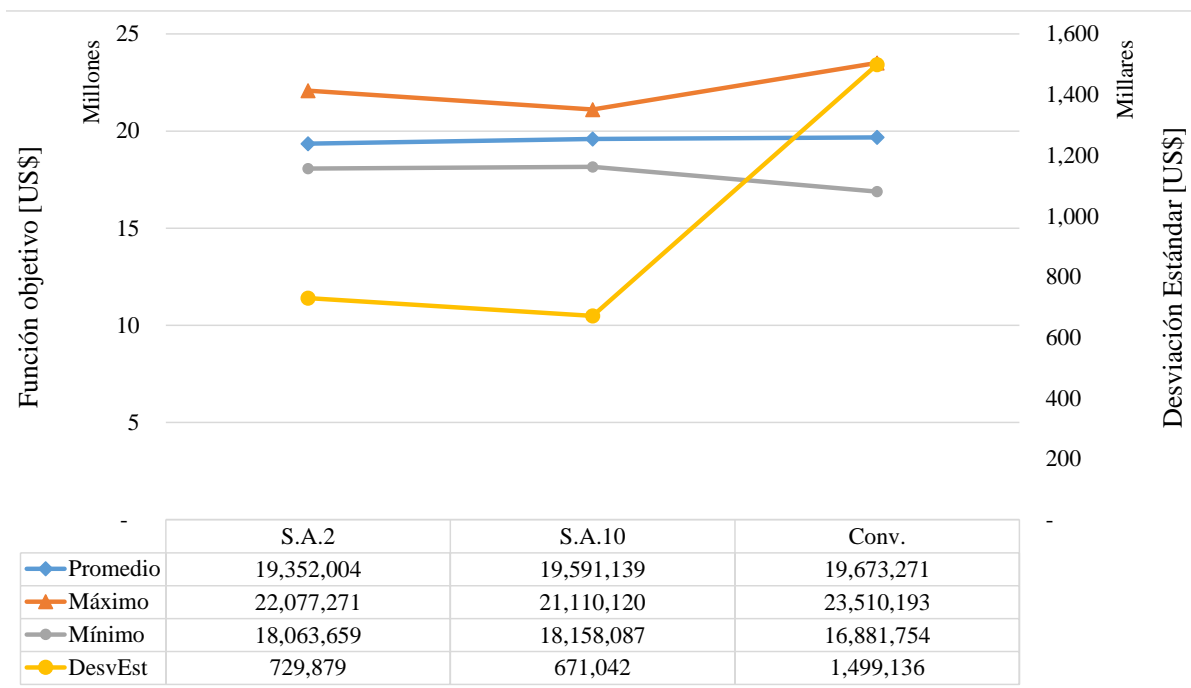


Figura 5.12: Análisis de convergencia del valor del agendamiento estocástico para tamaño de la muestra  $N=10$ .

### 5.3.3. Tamaño de muestra $N=20$

Finalmente se presentan los resultados para  $N=20$  en la Fig. 5.13. Se aprecia que el comportamiento es notoriamente similar al obtenido para el tamaño de la muestra  $N=10$ , pero con mejores resultados de convergencia en todos los casos. El valor promedio nuevamente es similar para los 3 tipos de simulaciones, y similares también a los promedios del caso anterior. Los mejores resultados de convergencia se obtienen nuevamente para las simulaciones correlacionadas con  $n=10$ , seguidos por los de simulaciones correlacionadas con  $n=2$ . Las simulaciones convencionales nuevamente presentan peores resultados, donde su desviación estándar nuevamente es mayor al doble de los demás casos. La amplitud entre el valor máximo y mínimo obtenido nuevamente disminuye, llegando a 10 % para las simulaciones antitéticas con  $n=10$ , 12 % para las correlacionadas a pares, y 21 % para las convencionales.

Es importante destacar que para todos los tipos de simulaciones, la reducción de la desviación estándar desde la muestra de  $N=10$  a la muestra de  $N=20$  fue menor que la disminución desde la muestra de  $N=2$  a  $N=10$ , a pesar de que se agregó una mayor cantidad de escenarios a la instancia. Esto se explica por el comportamiento geométrico que tiene la reducción de varianza en función del tamaño de la muestra, por lo cual para alcanzar una disminución considerable de la varianza obtenida, se debe agregar una cantidad mucho mayor de escenarios.

Ahora bien, si comparamos los resultados para distintos tamaños de la muestra se puede verificar el impacto que tiene el uso de las simulaciones antitéticas. La Tabla 5.17 muestra un resumen de la desviación estándar para los distintos tamaños de muestra utilizados y según

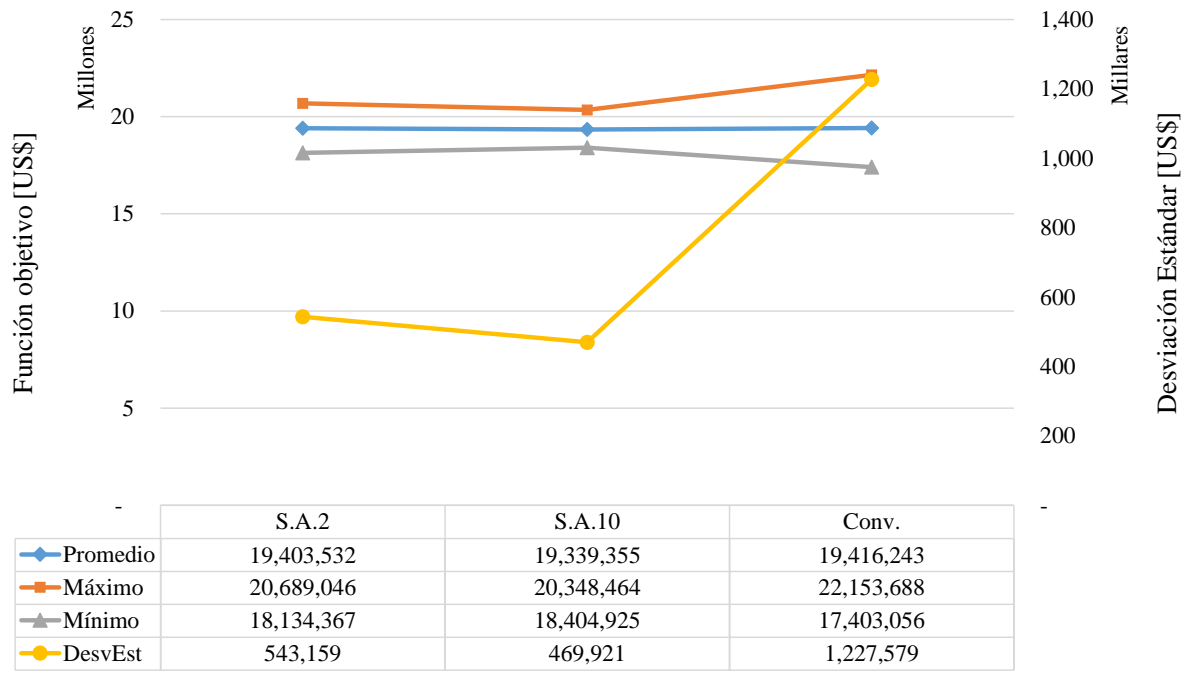


Figura 5.13: Análisis de convergencia del valor del agendamiento estocástico para tamaño de la muestra  $N=20$ .

el algoritmo de simulación empleado.

Tabla 5.17: Desviación estándar para distintos tamaños de muestra según el tipo de simulación utilizada

Tamaño de Muestra	S.A.2	S.A.10	Convencional
$N=2$	1,810,605	3,076,323	3,618,671
$N=10$	729,879	671,042	1,499,136
$N=20$	543,159	469,921	1,227,579

Dado que el valor del promedio es bastante similar entre los distintos casos de tamaño de muestra y de tipo de simulación, la comparación de su desviación estándar es una medida coherente sobre la convergencia de cada aproximación. En ese sentido, se tiene que con una muestra de 10 simulaciones antitéticas se obtiene una desviación estándar de 671,042 US\$, mientras que utilizando 20 simulaciones convencionales, se obtiene casi el doble: 1,227,579. Es decir, se logra mejorar considerablemente la precisión incluso utilizando un menor número de escenarios. Esto tiene notables implicancias en los tiempos de cómputo del problema de agendamiento estocástico, los cuales dependen fuertemente del tamaño de la instancia a resolver. Por ejemplo, en este caso, el tiempo de resolución promedio para las instancias de 20 escenarios es de 26 minutos. Por su parte, las instancias de 10 escenarios demoran en promedio 9 minutos, mientras que las de 2 escenarios solo 55 segundos. En base a estos resultados, se puede obtener una mejor precisión del valor del problema aproximado en menos de la mitad del tiempo de cálculo.

# Capítulo 6

## Conclusiones y trabajo futuro

En esta sección se presentan las principales conclusiones obtenidas en este trabajo para cada una de sus secciones, y las posibles extensiones que se pueden desarrollar a partir de los resultados aquí obtenidos.

### 6.1. Planificación Adaptativa

Acerca del modelo de planificación estocástica propuesto, se concluye lo siguiente:

- Se generó una metodología que permite evaluar la adquisición de información y su efecto en el plan y en su valor bajo incertidumbre de leyes. Las limitaciones de esta técnica recaen en la capacidad de obtener la información en terreno: Mientras adelantar la campaña de perforación y muestrear los pozos en un banco abierto no representa una complejidad mayor en la operación, obtener información de un banco inferior no es trivial. Una forma de obtener datos de mejor calidad de más de un banco a la vez sería modificar el protocolo de perforación y utilizar sondajes de diamantina, o de aire reverso en más de un banco. Sin embargo, esto conllevaría un aumento de los costos o un cambio en la metodología de operación que no fue considerado en este trabajo.
- En el caso de estudio propuesto se observa que en primera instancia, el efecto de la información es considerable en el valor del agendamiento (hasta un 114 % más de valor cuando se tiene información perfecta). Sin embargo, un análisis más detallado revela que este efecto se desvanece cuando se considera la posibilidad de reasignar el destino de los bloques. Como esto no requiere tener la información con mucha antelación, se aprecia que adelantar el muestreo de la ley de mineral es poco relevante en el mismo banco. Esto se explica por el bajo costo de oportunidad que tiene el cambiar los bloques de un periodo a otro debido a la tasa de descuento. El único efecto que podría cambiar este resultado sería la obtención de planes mineros que no saturaran las capacidades de mina o planta, lo cual es perjudicial para la operación. Sin embargo, este comportamiento no fue apreciado en el caso de estudio propuesto.
- Es importante destacar el gran impacto que tiene la reasignación de destinos en el

agendamiento de corto plazo. Si consideramos el caso valor esperado como el caso base de un agendamiento donde no existe reasignación, se ve que el impacto en este caso de estudio, en términos de valor, es del 100 %, considerando el muestreo de cada bloque dentro del banco. Este aumento considerable viene dado por la naturaleza del caso de estudio: una zona donde existe una baja densidad de sondajes y de una ley cercana a la ley de corte, por lo cual la variabilidad geológica impacta fuertemente en la asignación de destinos y, por ende, en el valor del agendamiento, lo cual justifica con creces el uso del muestro en el pozo de tronadura. Es natural esperar que en sectores con mayor densidad de sondajes y que estén lejos de la ley de corte, esta diferencia no sea tan radical, pues el destino de los bloques no variaría entre distintos escenarios de leyes.

- Por otro lado, un aumento de la tasa de descuento aumenta el impacto de la información en el valor del plan. Esto indica que cuando el costo de oportunidad es mayor, el valor de la información se vuelve más relevante, por lo cual es esperable que si se aplica esta metodología a un caso de estudio que involucre más de un banco, se podrían diferenciar mayores en términos de valor. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, la obtención de estos datos de manera suficientemente confiable no es sencilla e involucraría un cambio en la operación de la faena, lo cual debería ser agregado en la evaluación del valor de la información.
- Una ventaja de la metodología propuesta es la flexibilidad para incorporar diferentes funciones objetivo, como maximizar los finos de cobre o minimizar el costo de extracción, dependiendo del horizonte considerado. A su vez, es posible incorporar otras restricciones al problema de agendamiento, como el contenido de contaminantes o la ley de envío a planta. Además, los escenarios pueden incorporar más variables, como las características geológicas de cada bloque, para generar un agendamiento geometalúrgico, por ejemplo. En general, cualquier característica que pueda ser conocida con mayor precisión al muestrear el pozo de tronadura puede adecuarse al método propuesto y por ende, evaluar la importancia de la información de diferentes variables.

## 6.2. Simulaciones antitéticas

Las simulaciones antitéticas fueron implementadas y se encontraron los siguientes resultados:

- Para simulaciones no condicionales, la correlación negativa de los números aleatorios se traspa de forma evidente a los escenarios simulados finales. Existen algunas desviaciones entre los escenarios de cada tupla debido al camino aleatorio del algoritmo, pero la correlación promedio entre ellos coincide con la correlación teórica impuesta a los números aleatorios.
- El efecto de este tipo de simulaciones disminuye en la presencia de datos condicionantes. El coeficiente de correlación de este tipo de simulaciones sigue siendo menor que el de las simulaciones convencionales, pero los datos condicionantes imponen un valor de correlación base, sobre el cual se encuentran las simulaciones antitéticas. Este valor base depende del número de datos condicionantes utilizados. Más aún, es posible verificar que el valor del coeficiente de correlación de los escenarios se vuelve menor a medida

que los nodos a simular se alejan de los datos condicionantes, mientras que cerca de estos su efecto es mayor y la correlación aumenta. Tomando esto en consideración, es esperable que el modelo variográfico y el radio de búsqueda modifiquen el resultado de este tipo de simulaciones, otorgándole más o menos peso a los datos condicionantes.

- El comportamiento del coeficiente de correlación de las simulaciones antitéticas a medida que aumenta el número de correlación es geométrico, en base a la correlación mínima posible entre un número determinado de simulaciones. Esto genera que el coeficiente de correlación aumente rápidamente a medida que el número de escenarios considerados aumenta, lo cual se aprecia tanto en las simulaciones no condicionales como en las que presentan datos condicionantes. A su vez, se aprecia que la correlación de las simulaciones antitéticas se acerca asintóticamente a la correlación de las simulaciones convencionales en todos los casos. De esta forma, correlacionar negativamente un número muy grande de escenarios podría generar un resultado muy similar a no correlacionarlos en absoluto.
- El cambio de soporte es una operación que promedia valores de diferentes nodos y tiende los datos hacia la media, lo cual afecta la correlación de las simulaciones antitéticas. Se aprecia que soportes mayores aumentan el coeficiente de correlación transversalmente, manteniendo el comportamiento asintótico pero acercándose a un coeficiente de correlación mayor, lo cual indica que esta técnica puede no ser adecuada cuando el cambio de soporte es considerable.

### 6.3. Análisis de convergencia

Con respecto al uso de las simulaciones antitéticas en el problema de agendamiento estocástico, se obtuvieron las siguientes conclusiones:

- Para el caso de estudio propuesto, se obtuvo que las simulaciones antitéticas tienen un efecto considerable en la convergencia del valor del agendamiento. Si se considera el hecho de que el problema aproximado depende de la muestra, este resultado se produce debido a que el imponer una correlación negativa en los distintos escenarios genera que se represente la variabilidad real del dominio utilizando una muestra de menor tamaño. En comparación, se obtiene que el uso de 10 simulaciones antitéticas otorga una mejor convergencia que usar 20 simulaciones convencionales en base al valor de la desviación estándar de los resultados para diferentes muestras. Más aún, el resultado obtenido con 2 simulaciones antitéticas es comparable al obtenido utilizando 10 simulaciones convencionales.
- El resultado anterior es relevante si se considera el tiempo de cálculo de las diferentes instancias: El tiempo de cómputo para las instancias de 20 escenarios es aproximadamente 2.5 veces mayor que el tiempo para las instancias de 10 escenarios. Por su parte, las instancias de 10 escenarios demoran aproximadamente 10 veces más que las instancias de solo 2 escenarios. En base a esto, se obtiene que el uso de estas simulaciones presentan notables mejoras para la capacidad de resolución computacional de este tipo de problemas, lo cual permitiría correr instancias más grandes con menores tiempos de cálculo.



- Es relevante mencionar que los resultados dependen del caso de estudio. El banco aquí utilizado presentaba pocos datos condicionantes, lo cual permite generar escenarios con un coeficiente de correlación muy bajo incluso después del cambio de soporte. Un caso de estudio con mayor densidad de datos podría entregar una menor diferencia entre las simulaciones antitéticas y las simulaciones convencionales.
- Es posible ver que incluso para el mejor resultado de convergencia de simulaciones antitéticas, existe un 10% de diferencia entre el valor máximo y mínimo del agendamiento, lo cual indica que el número de escenarios sigue siendo insuficiente para obtener un resultado completamente robusto. Esto empeora si se consideran las simulaciones convencionales, en donde en el mejor resultado de convergencia existe un 22% de diferencia entre el valor máximo y mínimo, lo que implica que el número de escenarios está lejos de ser representativo para el caso de estudio propuesto. Esto nuevamente puede deberse a la baja densidad de datos del sector estudiado, pues existe una mayor variabilidad que requiere ser muestreada con una mayor cantidad de escenarios. Es esperable que estos resultados de convergencia mejoren transversalmente al considerar un sector con una mayor cantidad de sondajes.

## 6.4. Trabajo futuro

A partir de este trabajo, se podrían realizar las siguientes extensiones:

- El algoritmo de simulaciones antitéticas presenta una ventaja no utilizada en este trabajo: Dentro de cada tupla, el camino aleatorio es exactamente el mismo, por lo cual al momento de simular un nodo, la vecindad de sitios simulados y de datos condicionantes tiene la misma configuración geométrica. Esto genera que el cálculo de los ponderadores de kriging entregue el mismo resultado para el mismo nodo en cada uno de los escenarios de la tupla antitética. Por esto, es posible calcular los ponderadores sólo en el primer escenario de la tupla, y luego aplicarlos directamente en los escenarios siguientes. Esto generaría una disminución considerable en el tiempo de cálculo de los escenarios, lo que podría ahorrar aún más tiempo en las distintas aplicaciones de este algoritmo.
- Los resultados obtenidos para el caso de estudio indican que 20 escenarios no son suficientes para capturar la variabilidad real del banco estudiado. Actualmente se pueden encontrar variadas publicaciones en donde se utiliza este número de escenarios en distintos problemas de planificación bajo incertidumbre de leyes, pero sin un análisis de convergencia que sustente la elección de este número. Es pertinente realizar este análisis para verificar en términos generales cuantos escenarios son necesarios en los distintos tipos de problemas de planificación minera, o qué factores influyen en la convergencia de estos.
- Para verificar la utilidad de las simulaciones antitéticas, es necesario aplicarlas en una mayor cantidad de casos de estudio y en distintos problemas de planificación, con el fin de verificar si el comportamiento visto en este trabajo se puede extender a otro tipo de problemas.
- Como se vio en los antecedentes, existen variadas técnicas de reducción de varianza que han sido utilizadas en diferentes problemas de simulación, las cuales podrían ser

implementadas para problemas relacionados con geoestadística y planificación minera.

- Es posible extender el problema de agendamiento estocástico propuesto para que incorpore otros tipos de restricciones que tienen un alto impacto en el corto plazo, como el contenido de contaminantes, arcillas, la mineralurgia y la ley promedio de envío a planta. Es posible que estos factores se beneficien de mayor manera con nueva información del modelo de bloques, lo cual se puede evaluar con el modelo propuesto. Este trabajo es interesante pues si se agregan restricciones de mezcla, el tener información de manera prematura podría marcar la diferencia entre tener agendamientos factibles, u obtener una secuencia que no permite cumplir todas las restricciones, pues estas son notablemente más difíciles de cumplir que solo las capacidades máximas de mina y planta en el agendamiento considerado en esta tesis. Por otra parte, en este caso no se operativizó el plan minero, por lo cual una posible extensión a este trabajo sería buscar secuencias operativas definiendo polígonos de extracción, y ver cómo estas definiciones se modifican a raíz de la nueva información de los pozos de tronadura.

# Bibliografía

- Akaike, A. y Dagdelen, K. (1999). «A strategic production scheduling method for an open pit mine». En: *Proceedings of the 28th International Symposium on the Applications of Computers and Operations Research in the Mineral Industry (APCOM)*, págs. 729-738.
- Albor Consuegra, F.R. y Dimitrakopoulos, R. (2010). «Algorithmic approach to pushback design based on stochastic programming: method, application and comparisons». En: *Transactions of the Institution of Mining and Metallurgy, Section A: Mining Technology* 119.2, págs. 88-101.
- Armstrong, M y col. (2013). «Scenario Reduction Applied to Geostatistical Simulations». En: *Mathematical Geosciences* 45 (2), págs. 165-182.
- Benndorf, J. y Dimitrakopoulos, R. (2013). «Stochastic Long-Term Production Scheduling of Iron Ore Deposits: Integrating Joint Multi-Element Geological Uncertainty». En: *Journal of Mining Science* 49.1, págs. 68-81.
- Bienstock, D. y Zuckerberg, M. (2010). «Solving LP relaxations of largescale precedence constrained problems». En: *Proceedings of the 14th International Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization (IPCO). Lecture Notes in Computer Science*. Vol. 6080, págs. 1-14.
- Boland, N., Dumitrescu, I. y Froyland, G. (2008). *A Multistage Stochastic Programming Approach to Open Pit Mine Production Scheduling with Uncertain Geology*. Optimization Online.
- Boland, N., Dumitrescu, I., Froyland, G. y Gleixner, A. (2009). «LP-based disaggregation approaches to solving the open pit mining production scheduling problem with block processing selectivity». En: *Computers & Operations Research* 36, págs. 1064-1089.
- Busnach, E., Mehrez, A. y Sinuany-Stern, Z. (1985). «A Production Problem in Phosphate Mining». En: *The Journal of the Operational Research Society* 36.4.
- Caccetta, L. e Hill, S.P. (2003). «An Application of Branch and Cut to Open Pit Mine Scheduling». En: *Journal of Global Optimization* 27, págs. 349-365.
- Cheng, R. (1986). «Variance Reduction Methods». En: *Proceedings of the 1986 Winter Simulation Conference*.
- Cochilco (2014). *Anuario de Estadísticas del Cobre y Otros Minerales 1995-2014*.
- Dagdelen, K. y Johnson, T. (1986). «Optimum Open-Pit mine production scheduling by Lagrangian relaxation». En: *Proceedings of the 19th International Symposium on the Applications of Computers and Operations Research in the Mineral Industry (APCOM)*. SME, págs. 127-141.
- de Freitas, M., Dimitrakopoulos, R. y Lamghari, A. (2015). «Solving a large SIP model for production scheduling at a gold mine with multiple processing streams and uncertain

- geology». En: *Transactions of the Institutions of Mining and Metallurgy. Section A: Mining Technology* 124, págs. 24-33.
- Denby, B. y Schofield, D. (1994). «Open-pit design and scheduling by use of genetic algorithms». En: *Transactions of the Institution of Mining and Metallurgy, Section A: Mining Technology* 103, A21-A26.
- Dimitrakopoulos, R., Farrelly, C. T. y Godoy, M. (2002). «Moving forward from traditional optimization: grade uncertainty and risk effects in open-pit design». En: *Transactions of The Institution of Mining and Metallurgy, Section A: Mining Technology* 111, págs. 82-88.
- Dimitrakopoulos, R., Martinez, L. y Ramazan, S. (2007). «A maximum upside / minimum downside approach to the traditional optimization of open pit mine design». En: *Journal of Mining Science* 43.1, págs. 73-82.
- Dimitrakopoulos, R. y Ramazan, S. (2004). «Uncertainty-based production scheduling in open pit mining». En: *SME Transactions* 316, págs. 106-112.
- Dimitrakopoulos, R. y Ramazan, S. (2008). «Stochastic integer programming for optimising long term production schedules of open pit mines: methods, application and value of stochastic solutions». En: *Transactions of the Institution of Mining and Metallurgy. Section A: Mining Technology* 117.4, págs. 155-160.
- Emery, X. (2012a). *Incertidumbre Espacial*. Apuntes de curso: "Simulación Geoestadística". Facultad de ciencias físicas y matemáticas. Universidad de Chile.
- Emery, X. (2012b). «Modelamiento de la incertidumbre local». En: *Simulación Estocástica y Geoestadística No Lineal*. Cap. 1.
- Emery, X. (2012c). «Simulaciones». En: *Simulación Estocástica y Geoestadística No Lineal*. Cap. 2.
- Espinoza, D. y col. (2013). «Risk averse approaches in open-pit production planning under ore grade uncertainty: a ultimate pit study». En: *Proceedings of the 36th International Symposium on the Applications of Computers and Operations Research in the Mineral Industry (APCOM)*, págs. 492-501.
- Fytas, K., Hadjigeorgiou, J. y Collins, J.L. (1993). «Production scheduling optimization in open pit mines». En: *International Journal of Surface Mining, Reclamation and Environment* 7 (1).
- Godoy, M. y Dimitrakopoulos, R. (2004). «Managing risk and waste mining in long-term production scheduling of open-pit mines». En: 316, págs. 43-50.
- Golamnejad, J., Osanloo, M. y Karimi, B. (2006). «A chance-constrained programming approach for open pit long-term production scheduling in stochastic environments». En: *The Journal of The South African Institute of Mining and Metallurgy* 106, págs. 105-114.
- Guthke, P. y Bárdossy, A. (2012). «Reducing the number of MC runs with antithetic and common random fields». En: *Advances in Water Resources* 43, págs. 1-13.
- Haugh, M. (2004). *Variance Reduction Methods I-II*. Apuntes de curso: "Monte Carlo Simulation". New York: Columbia University.
- Hochbaum, D. S. (2008). «The Pseudoflow Algorithm: A New Algorithm for the Maximum-Flow Problem». En: *Operations Research, INFORMS* 56.4, págs. 992-1009.
- Hustrulid, W., Kuchta, M. y Martin, R. (2013a). «Pit Limits». En: *Open pit Mine Planning and Design*. 3rd. Vol. 1. CRC Press/Balkena. Cap. 5, págs. 441-450.
- Hustrulid, W., Kuchta, M. y Martin, R. (2013b). «Production Planning». En: *Open pit Mine Planning and Design*. 3rd. Vol. 1. CRC Press/Balkena. Cap. 6, págs. 628-631.

- INFORMS (2015). *What is Operations Research?* The Institute for Operations Research y the Management Sciences. URL: <https://www.informs.org/About-INFORMS/What-is-Operations-Research> (visitado 17-03-2016).
- James, B.A.P. (1985). «Variance Reduction Techniques». En: *The Journal of the Operational Research Society* 36.6, págs. 525-530.
- Jélvez, E. y col. (2016). «Aggregation heuristic for the open-pit block scheduling problem». En: *European Journal of Operational Research* 249, págs. 1169-1177.
- Johnson, T. B. (1968). «Optimum open-pit mining production scheduling». PhD. thesis. Berkeley: University of California.
- Kawahata, K. y Dagdelen, K. (2013). «An optimization algorithm for large scale mine production scheduling problems through lagrangian relaxation». En: *Proceedings of the 36th International Symposium on the Applications of Computers and Operations Research in the Mineral Industry (APCOM)*, págs. 548-560.
- King, A. y Wallace, S. (2012). *Modeling with Stochastic Programming*. Ed. por Springer.
- Kleijnen, J., Ridder, A. y Rubinstein, R. (2010). «Variance Reduction Techniques in Monte Carlo Methods». En: *CentER Discussion Paper Series* 2010-117. DOI: <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1715474>.
- Lerchs, Helmut y Grossmann, Ingo F. (1965). «Optimum Design of Open-Pit Mines». En: *Transactions, C.I.M.* LXVIII, págs. 17-24.
- Madariaga, E. (2013). «Modelo de planificación minera de corto plazo a través de la incorporación de múltiples procesos». Tesis de Magíster. Facultad de ciencias físicas y matemáticas. Universidad de Chile.
- Morales, C. (2009). «Metodología de corto plazo integrando restricciones geometalúrgicas». Tesis de Magíster. Facultad de ciencias físicas y matemáticas, Universidad de Chile.
- Newman, Alexandra M. y col. (2010). «A Review of Operations Research in Mine Planning». En: *Interfaces* 40.3. Ed. por INFORMS, págs. 222-245.
- Ramazan, S. y Dimitrakopoulos, R. (2007). «Stochastic Optimisation of Long-Term Production Scheduling for Open Pit Mines With a New Integer Programming Formulation». En: *The Australasian Institute of Mining and Metallurgy, Spectrum Series* 14, págs. 359-365.
- Ruszczynski, A. y Shapiro, A. (2009). «Multistage Problems». En: *Lectures on Stochastic Programming. Modeling and Theory*. Ed. por Siam, págs. 63-84.
- Sevim, H. y Lei, D. (1998). «The problem of production planning in open pit mines». En: *Information Systems and Operations Research* 36.
- Shapiro, A. (2009). «Statistical Inference». En: *Lectures on Stochastic Programming. Modeling and Theory*. Ed. por Siam, págs. 155-209.
- Shapiro, A. y Philpott, A. (2007). *A Tutorial on Stochastic Programming*. Ver. Preprint. URL: [http://www2.isye.gatech.edu/people/faculty/Alex\\_Shapiro/TutorialSP.pdf](http://www2.isye.gatech.edu/people/faculty/Alex_Shapiro/TutorialSP.pdf) (visitado 17-03-2016).
- Tan, S. y Ramani, R. (1992). «Optimization Models For Scheduling Ore And Waste Production In Open Pit Mines». En: *Proceedings of the 23rd International Symposium on the Applications of Computers and Operations Research in the Mineral Industry (APCOM)*. SME, págs. 781-791.
- Underwood, R. y Tolwinski, B. (1998). «A mathematical programming viewpoint for solving the ultimate pit problem». En: *European Journal of Operations Research* 107.1.
- Vargas, M. (2011). «Modelo de planificación minera de corto y mediano plazo incorporando restricciones operacionales y de mezcla». Tesis de Magíster. Facultad de ciencias físicas y matemáticas, Universidad de Chile.

- Wang, Q. y Sun, H. (2001). «A theorem on open pit planning optimization and its application». En: *Proceedings of the 29th International Symposium on the Applications of Computers and Operations Research in the Mineral Industry (APCOM)*, págs. 295-298.
- Zhang, M. (2006). «Combining genetic algorithms and topological sort to optimize open-pit mine plans». En: *Proc. 15th Internat. Sympos. Mine Planning Equipment Selection (MPES)*, págs. 1234-1239.

# Anexo A

## Geoestadística

### A.1. Estadísticas básicas

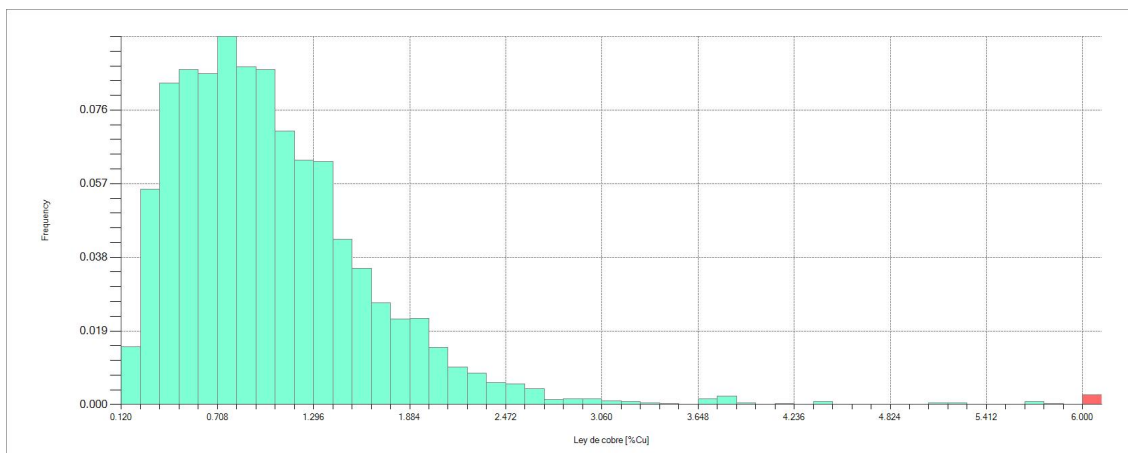


Figura A.1: Histograma de datos originales para ley de cobre - yacimiento 1.

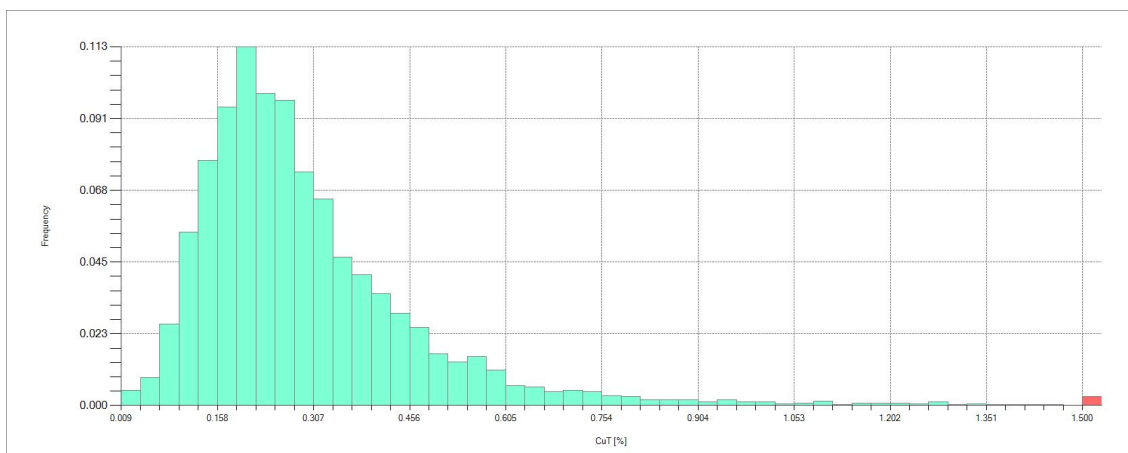


Figura A.2: Histograma de datos originales para ley de cobre - yacimiento 2.

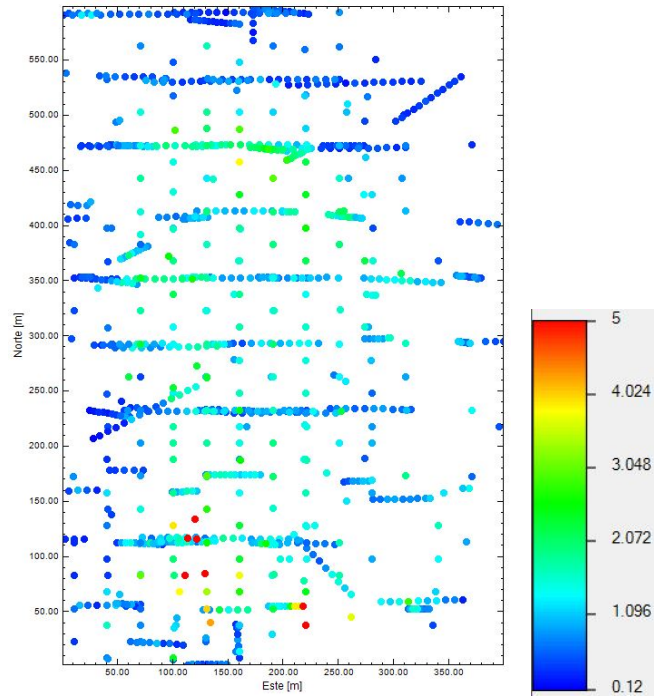


Figura A.3: Locmap para yacimiento 1

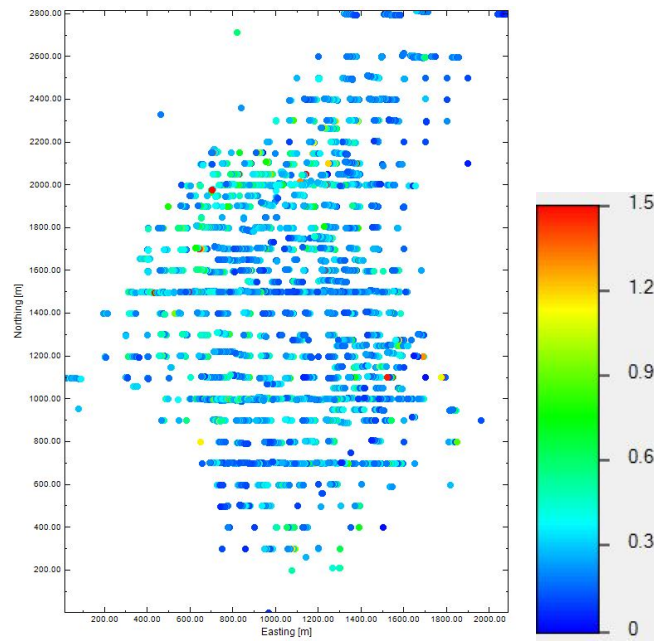


Figura A.4: Locmap para yacimiento 2



## A.2. Generación de simulaciones

### A.2.1. Histograma de datos transformados

Después de transformar los datos al dominio gaussiano, se verifica que su histograma sea similar al de la distribución gaussiana teórica. Esto sirve como prueba para la hipótesis multigaussiana, donde se comprueba que la distribución univariable de los datos se comporta como tal.

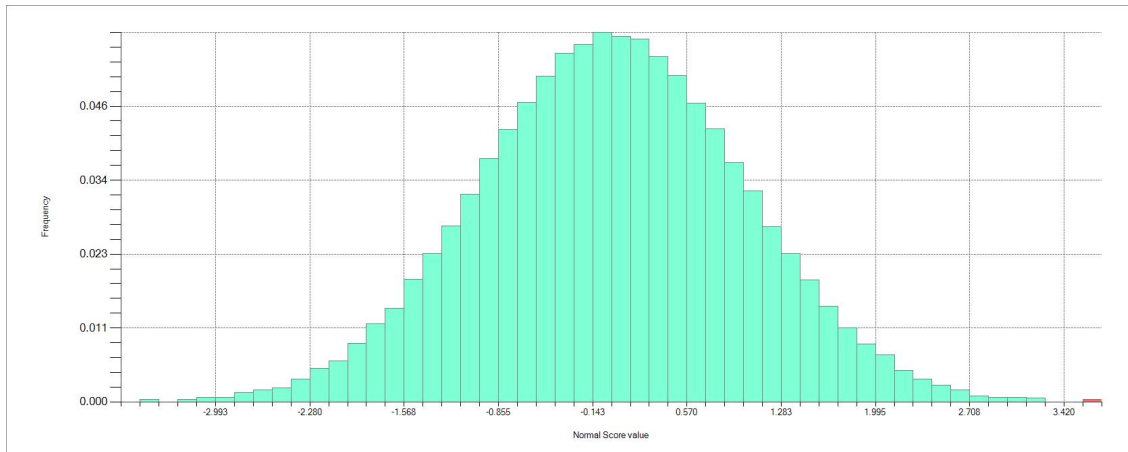


Figura A.5: Histograma de datos transformados para ley de cobre - yacimiento 1.

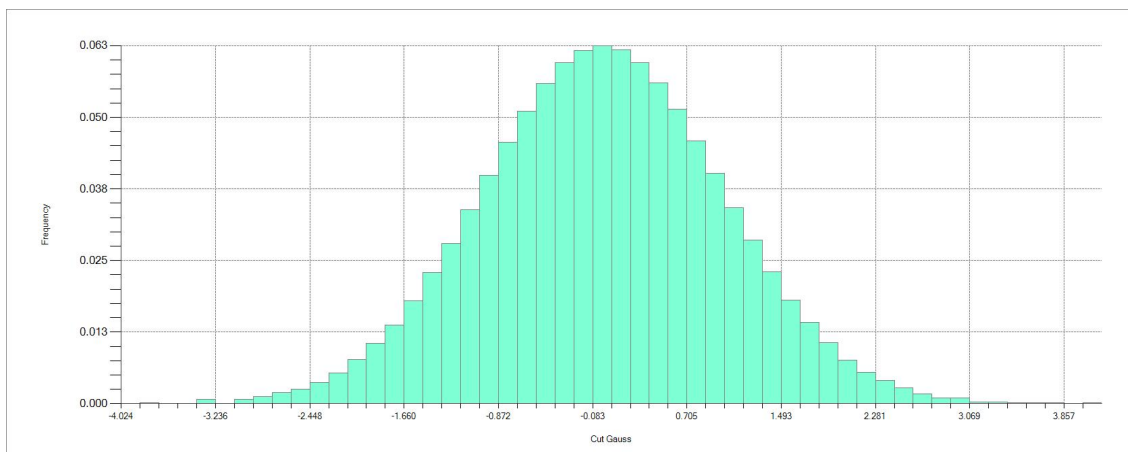


Figura A.6: Histograma de datos transformados para ley de cobre - yacimiento 2.

### A.2.2. Nubes de correlación diferida

La nube de correlación diferida se utiliza para probar la hipótesis de bi-gaussianidad. Se calcula la nube de correlación diferida para distintos vectores de separación  $h$ . A medida que el vector de separación se hace más grande, se esperan ver elipses concéntricas en estas nubes, pues este es el comportamiento que se verifica en las variables bigaussianas.

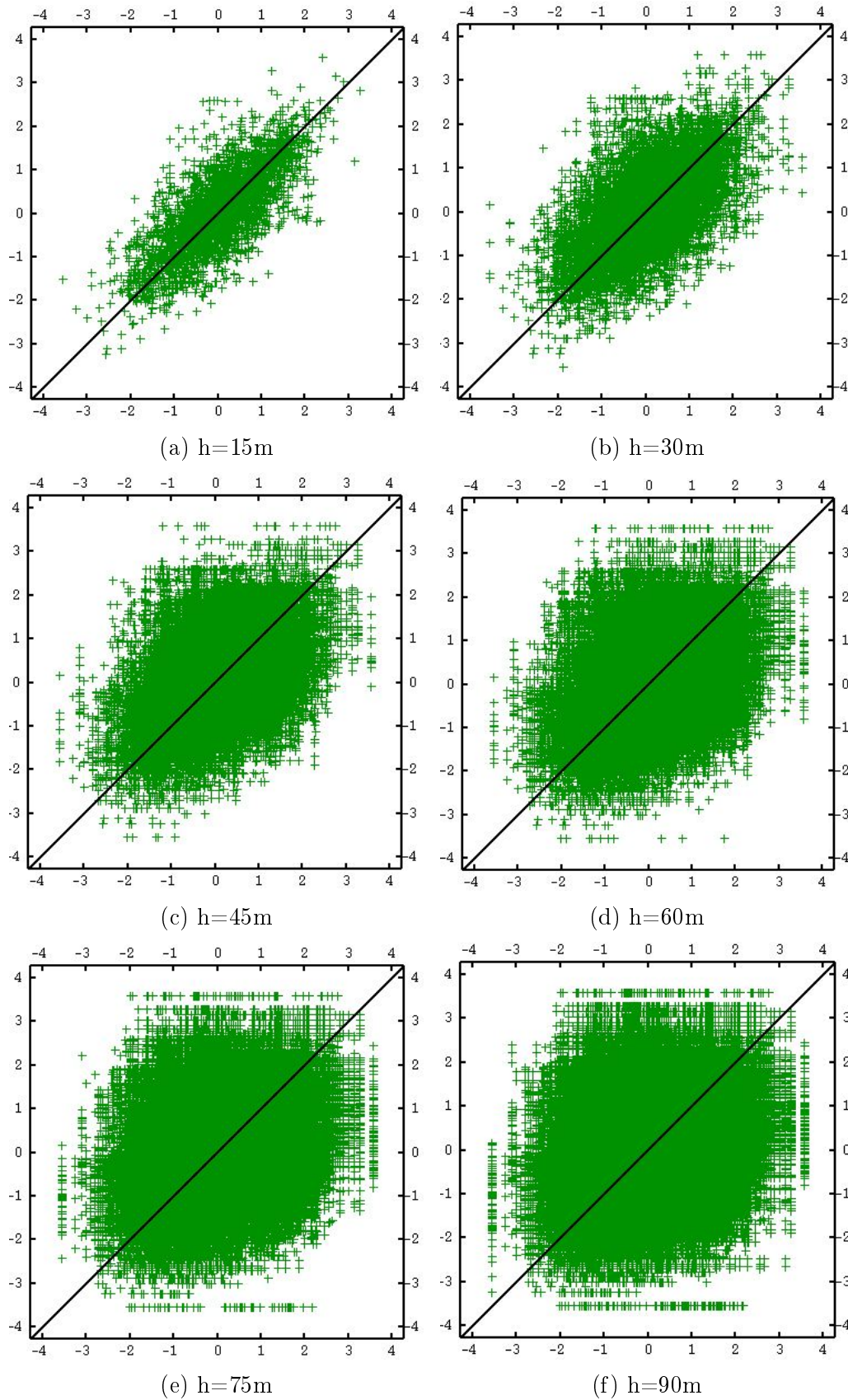


Figura A.7: Nubes de correlación diferida para distintos vectores de separación  $h$  - Yacimiento 1.

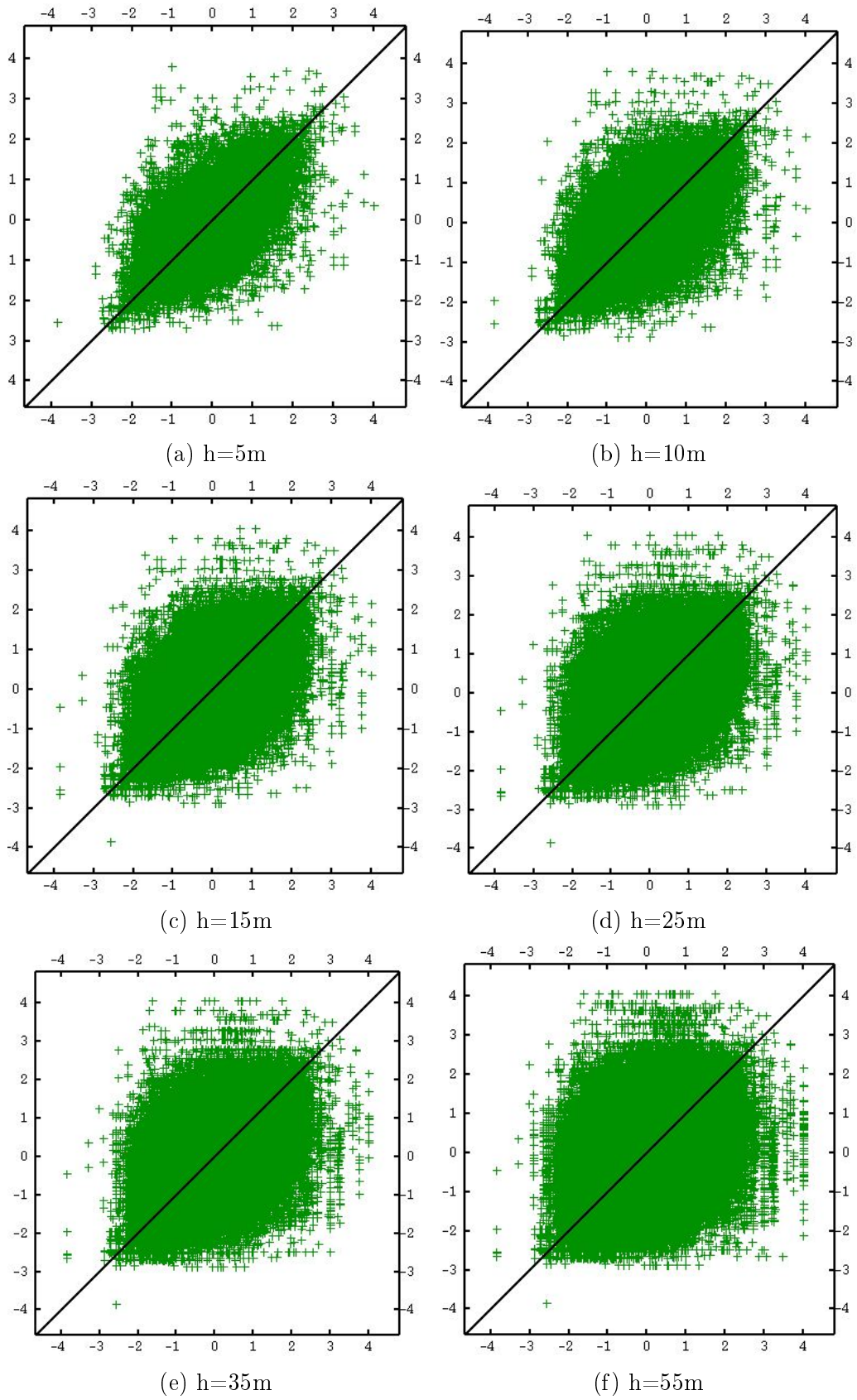


Figura A.8: Nubes de correlación diferida para distintos vectores de separación  $h$  - yacimiento 2.

### A.2.3. Analisis Variográfico

#### Mapas Variográficos

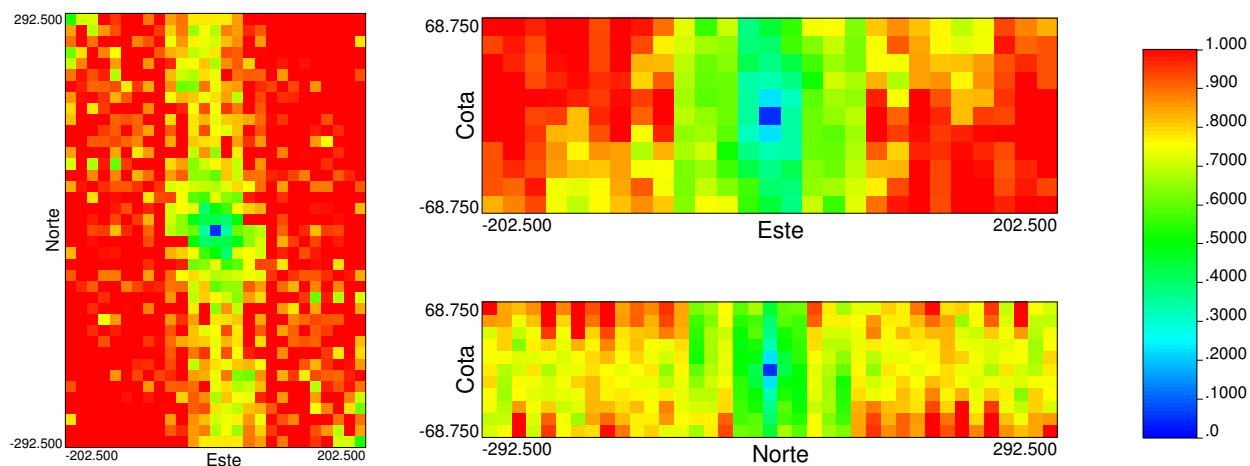


Figura A.9: Mapas variográficos para yacimiento 1

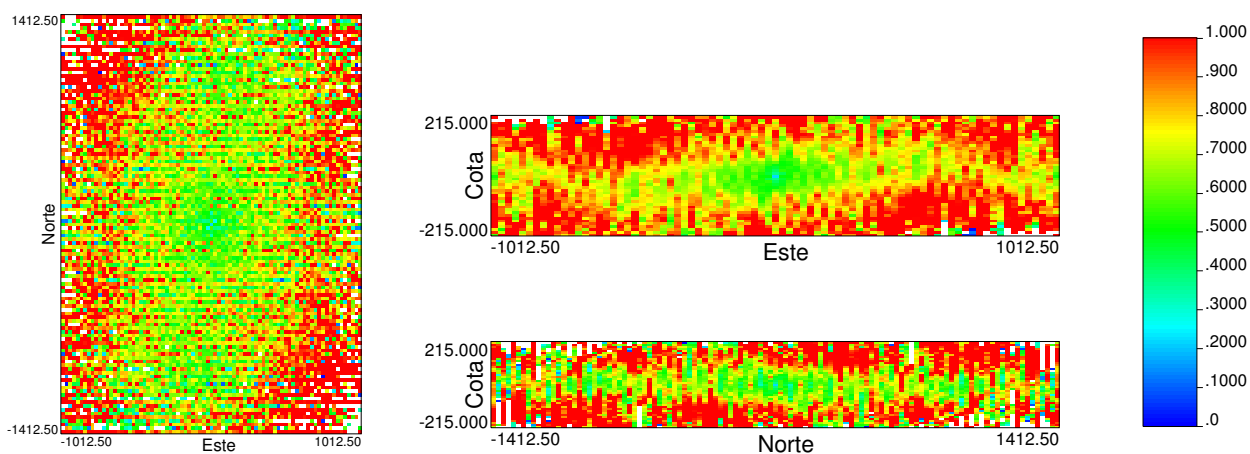


Figura A.10: Mapas variográficos para yacimiento 2

#### Variogramas experimentales y Modelamiento

En base a los mapas variográficos, el modelamiento se realizó en las direcciones principales de anisotropía, que para el yacimiento 1 corresponden a las direcciones Norte, Este y vertical, mientras que para el yacimiento 2 corresponden a N20E, N110E y vertical.

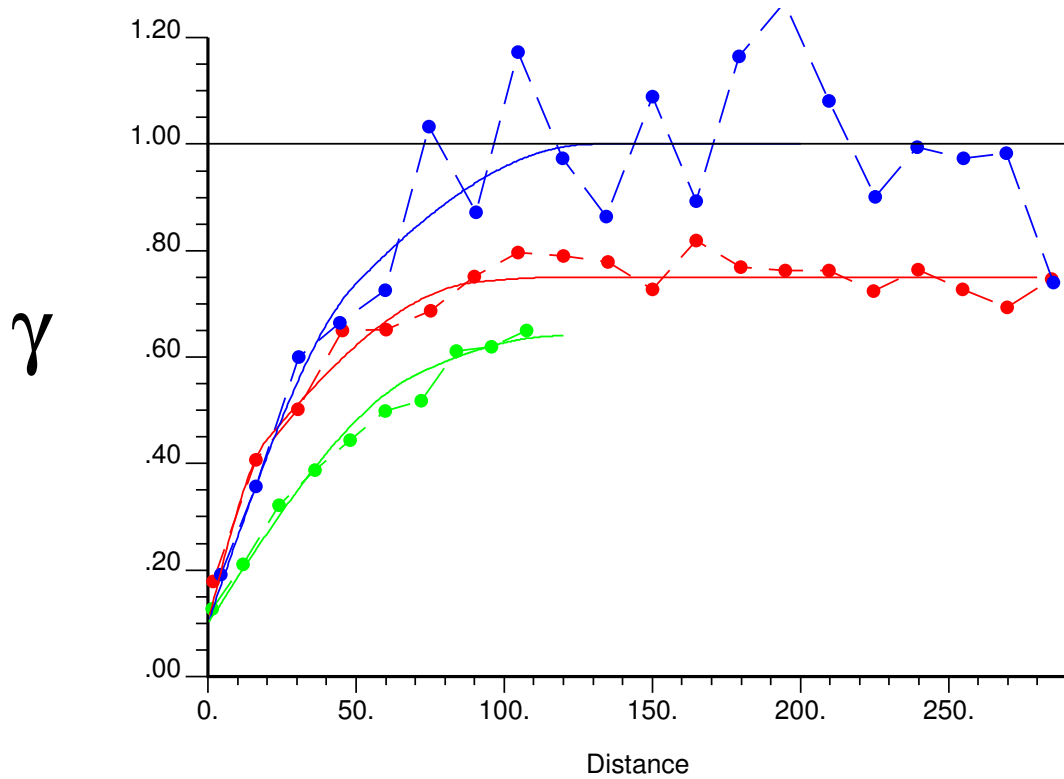


Figura A.11: Variograma modelado - yacimiento 1

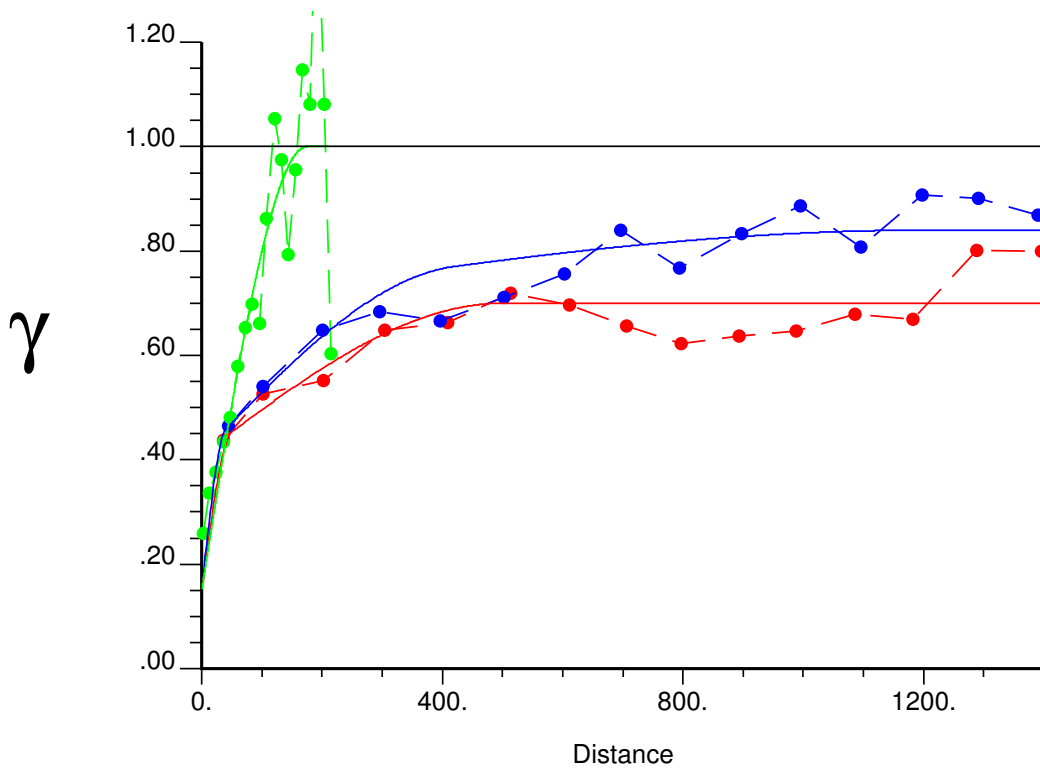


Figura A.12: Variograma modelado - yacimiento 2

### A.3. Validación de variogramas

Se realizó la validación del variograma experimental no condicional en una grilla de  $100 \times 100 \times 100$  con una separación de 1m entre nodos. El modelo variográfico para esta validación se muestra en la ecuación (A.1).

$$\gamma(h) = 1.0esf_{(30,30,30)}(h) \quad (A.1)$$

Se realizaron 100 simulaciones convencionales, y 100 simulaciones tanto para  $n=2$  como para  $n=5$  y  $n=10$ . Posteriormente, se calculo el variograma experimental de cada una de estas realizaciones, además de su promedio, y el resultado puede apreciarse en las Figs. A.13 a A.16, donde las líneas discontinuas representan el variograma experimental de cada realización, la línea roja representa el variograma modelado, y la línea azul muestra el promedio de las realizaciones. En general se aprecia que las simulaciones antitéticas tienen más dispersión, y su promedio se ajusta mejor a la meseta, mientras que las convencionales tienen menos dispersión y su promedio se ajusta mejor antes de la meseta.

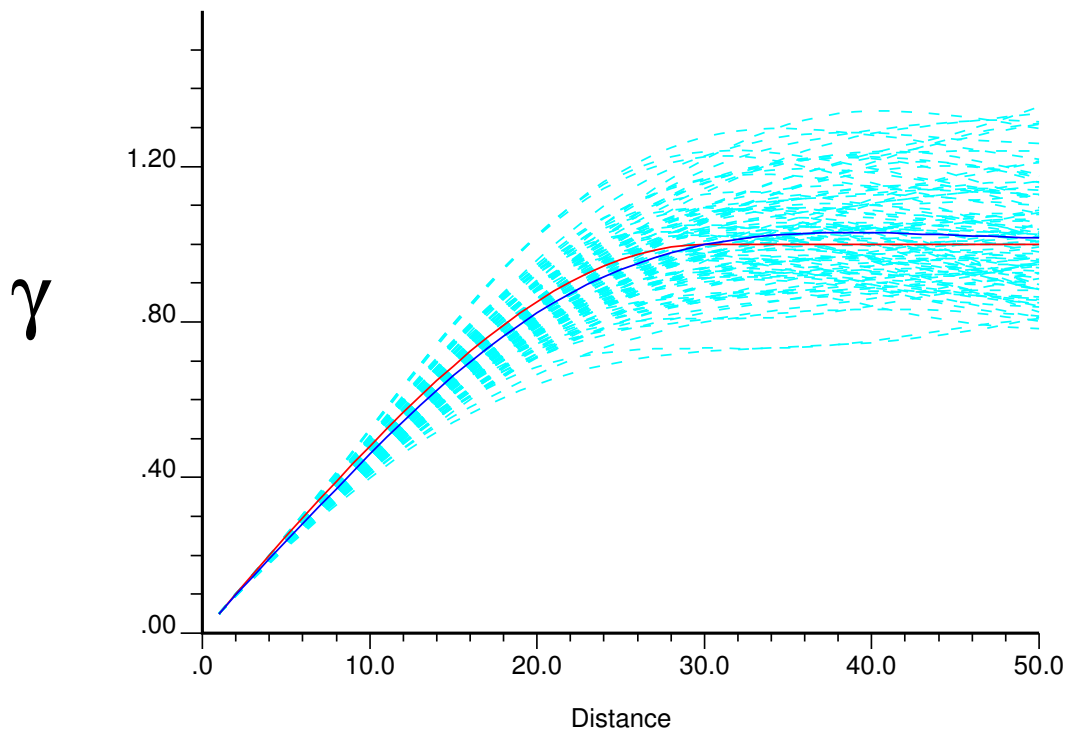


Figura A.13: Validación de variograma - Simulaciones convencionales

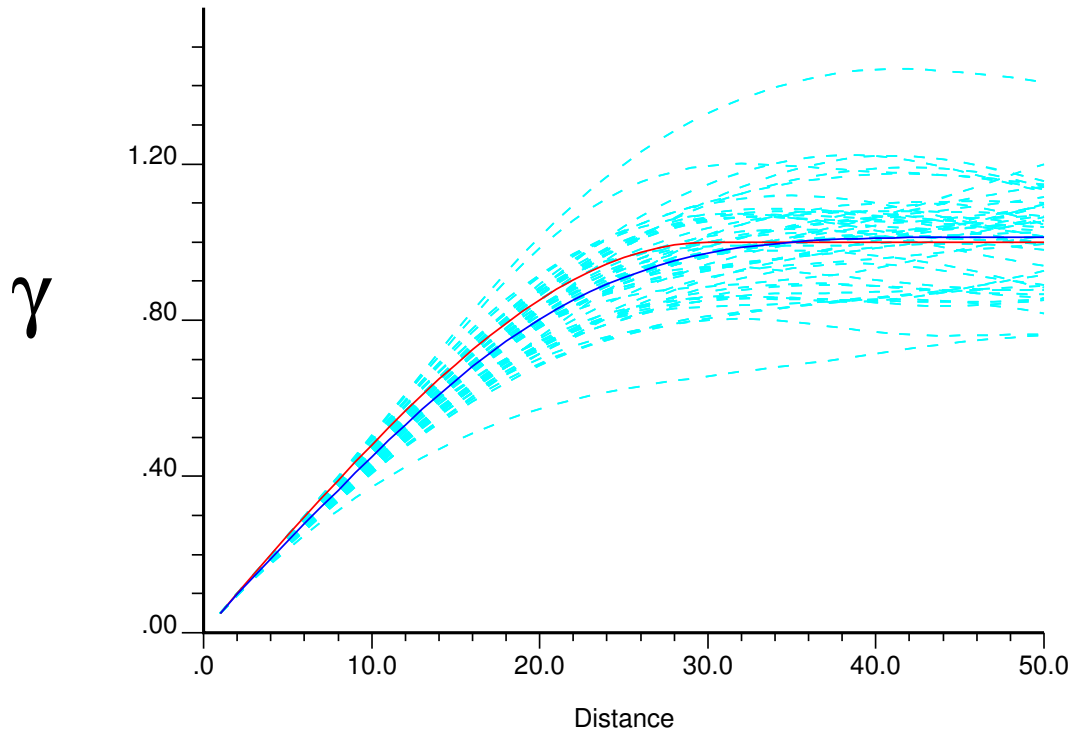


Figura A.14: Validación de variograma - Simulaciones antitéticas con n=2

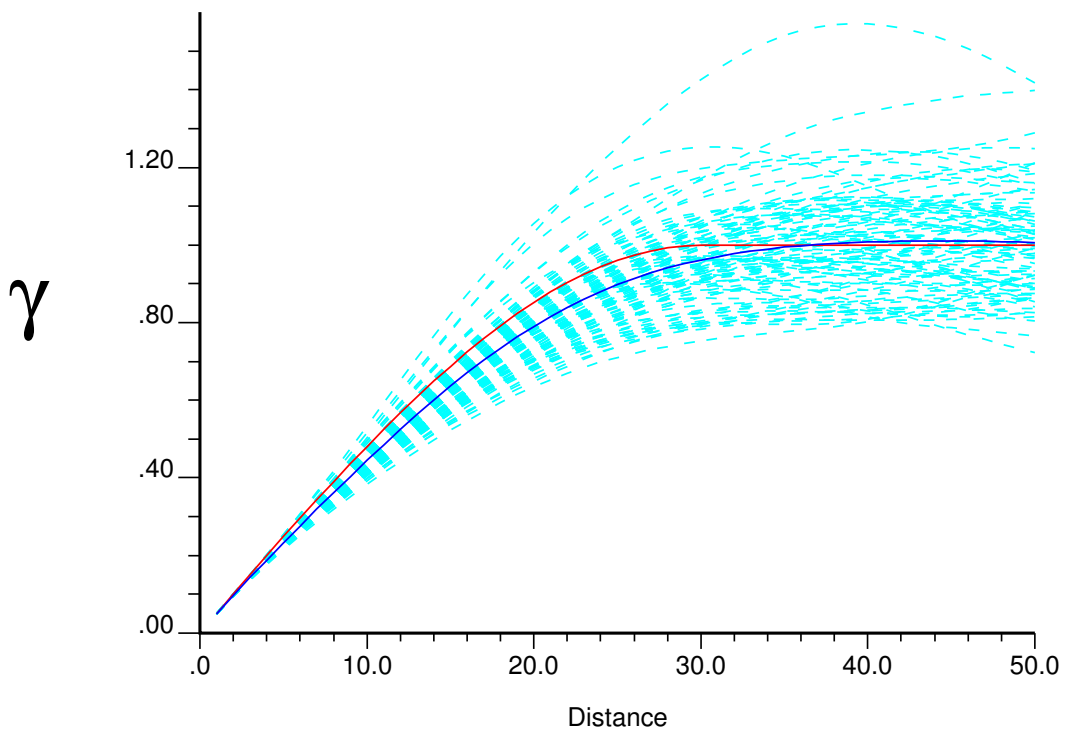


Figura A.15: Validación de variograma - Simulaciones antitéticas con n=5

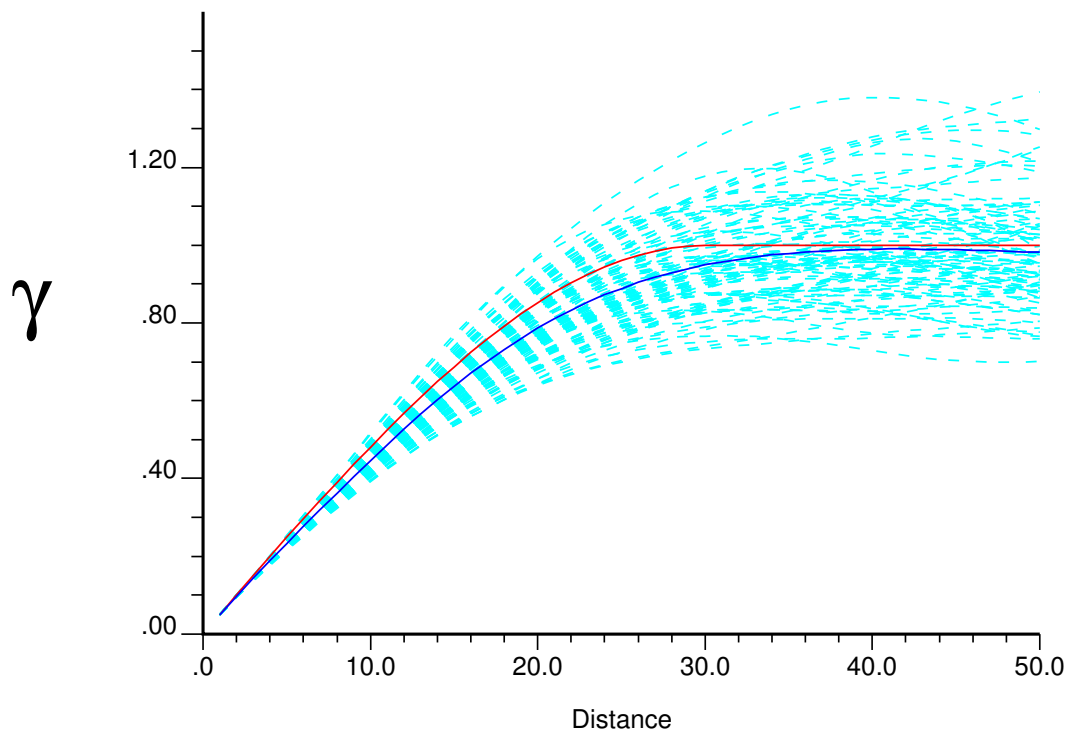


Figura A.16: Validación de variograma - Simulaciones antitéticas con  $n=10$



# Anexo B

## Planificación adaptativa

### B.1. Histogramas de valor para distintos $T^*$

#### B.1.1. Sin reasignación de destinos

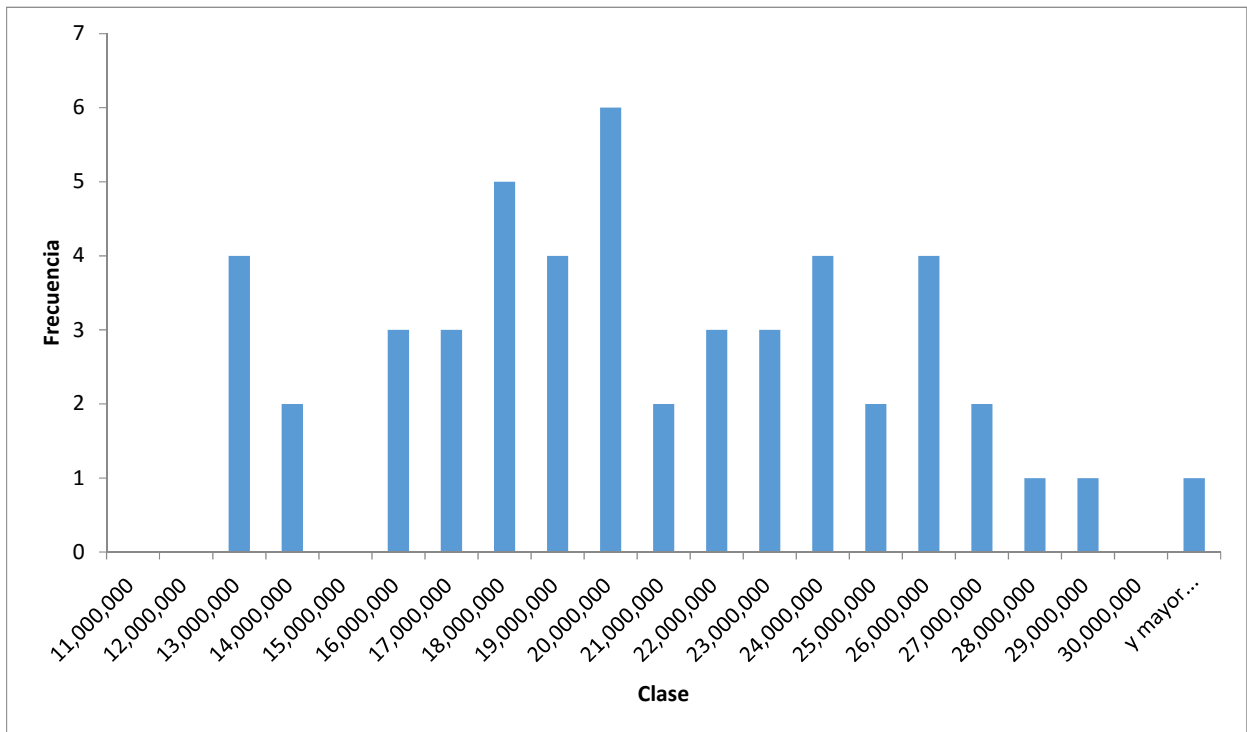


Figura B.1: Distribución de valores para el agendamiento estocástico con información perfecta sobre las 50 simulaciones consideradas.

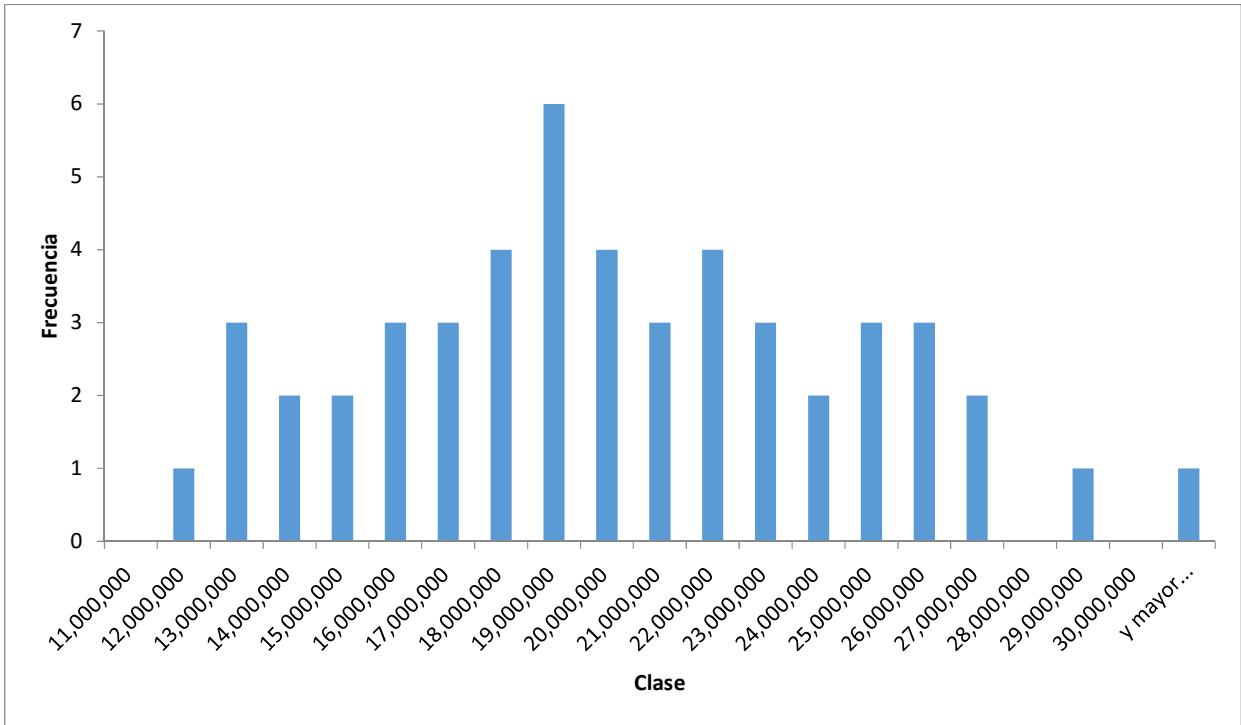


Figura B.2: Distribución de valores para el agendamiento estocástico con  $T^*=1$  sobre las 50 simulaciones consideradas.

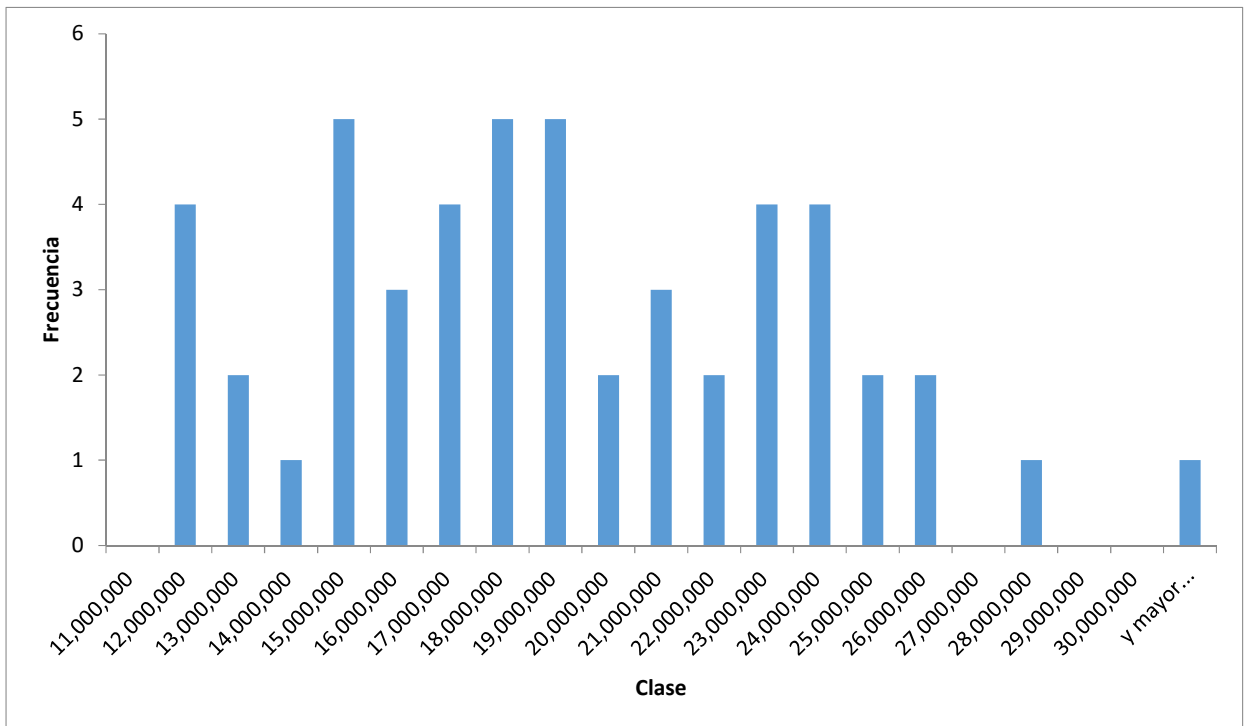


Figura B.3: Distribución de valores para el agendamiento estocástico con  $T^*=2$  sobre las 50 simulaciones consideradas.

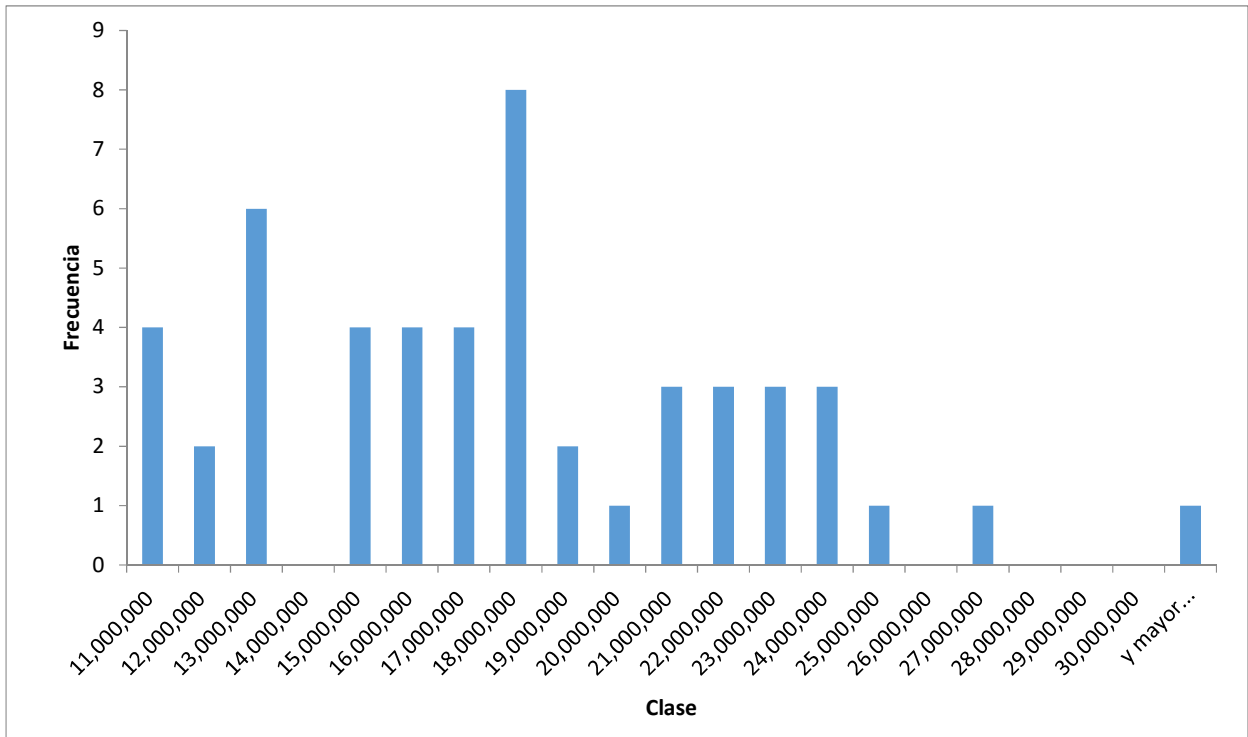


Figura B.4: Distribución de valores para el agendamiento estocástico con  $T^*=3$  sobre las 50 simulaciones consideradas.

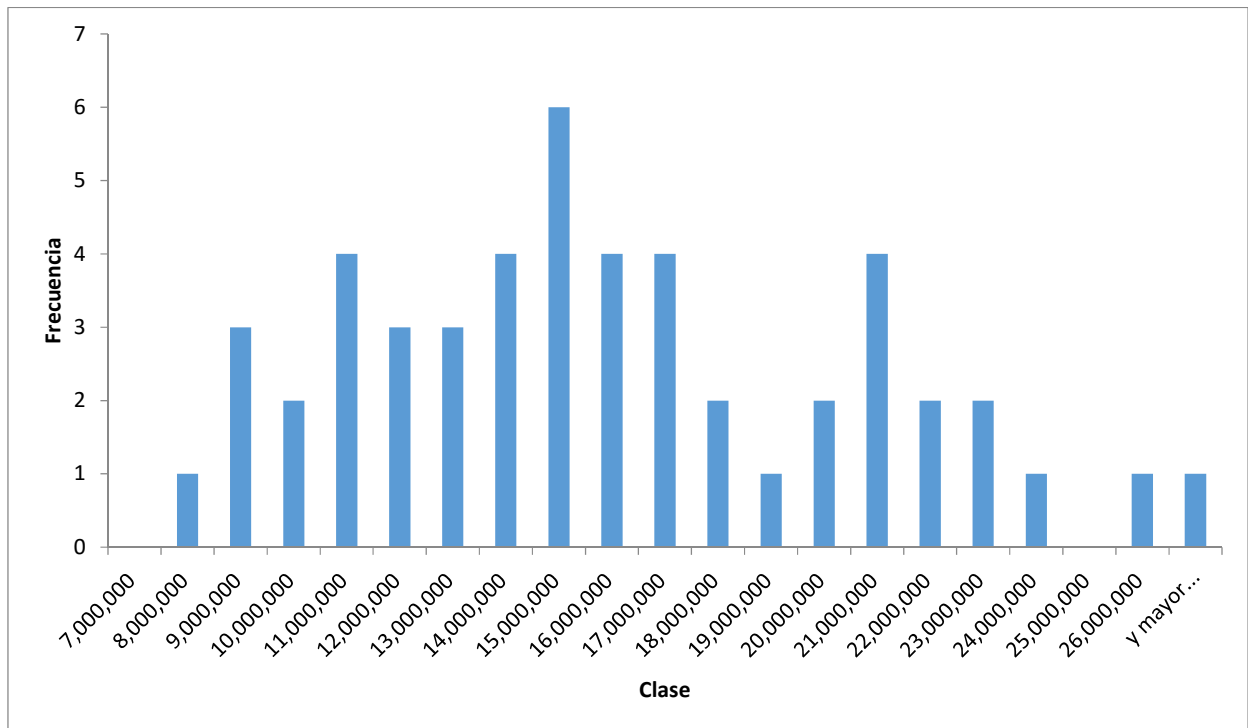


Figura B.5: Distribución de valores para el agendamiento estocástico con  $T^*=4$  sobre las 50 simulaciones consideradas.

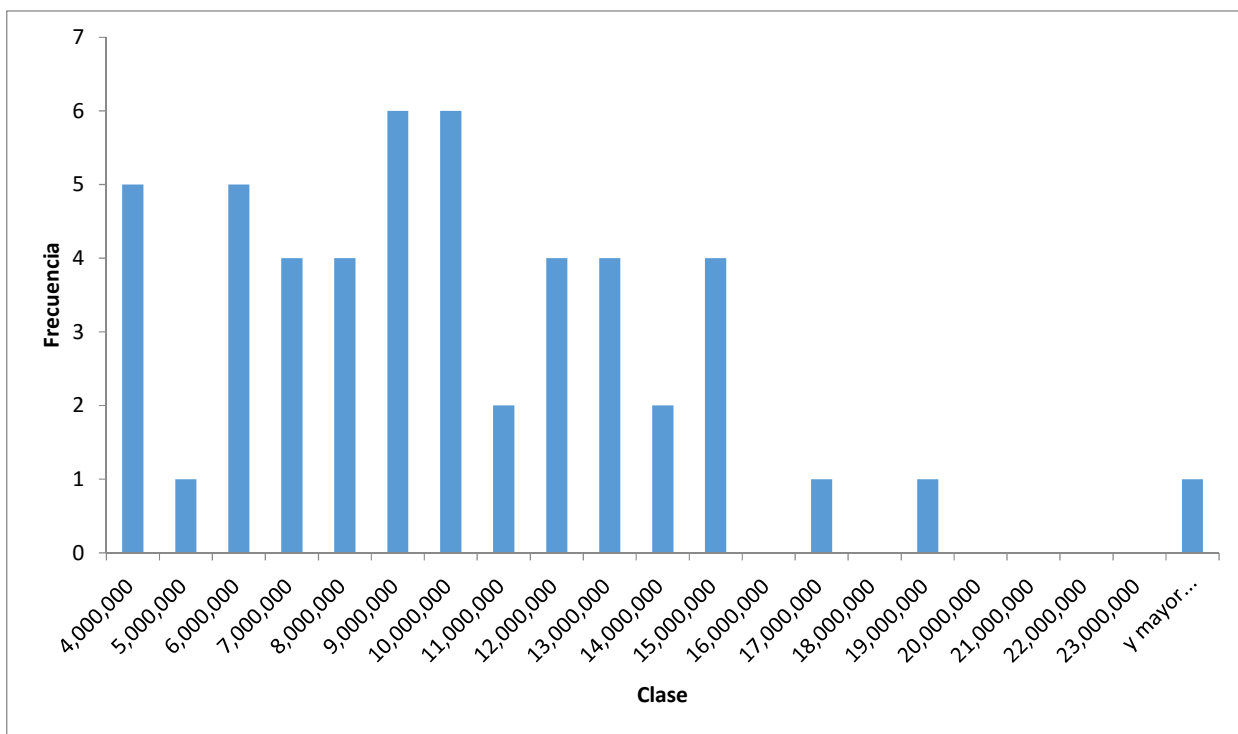


Figura B.6: Distribución de valores para el agendamiento de valor esperado sobre las 50 simulaciones consideradas.

### B.1.2. Con reasignación de destinos

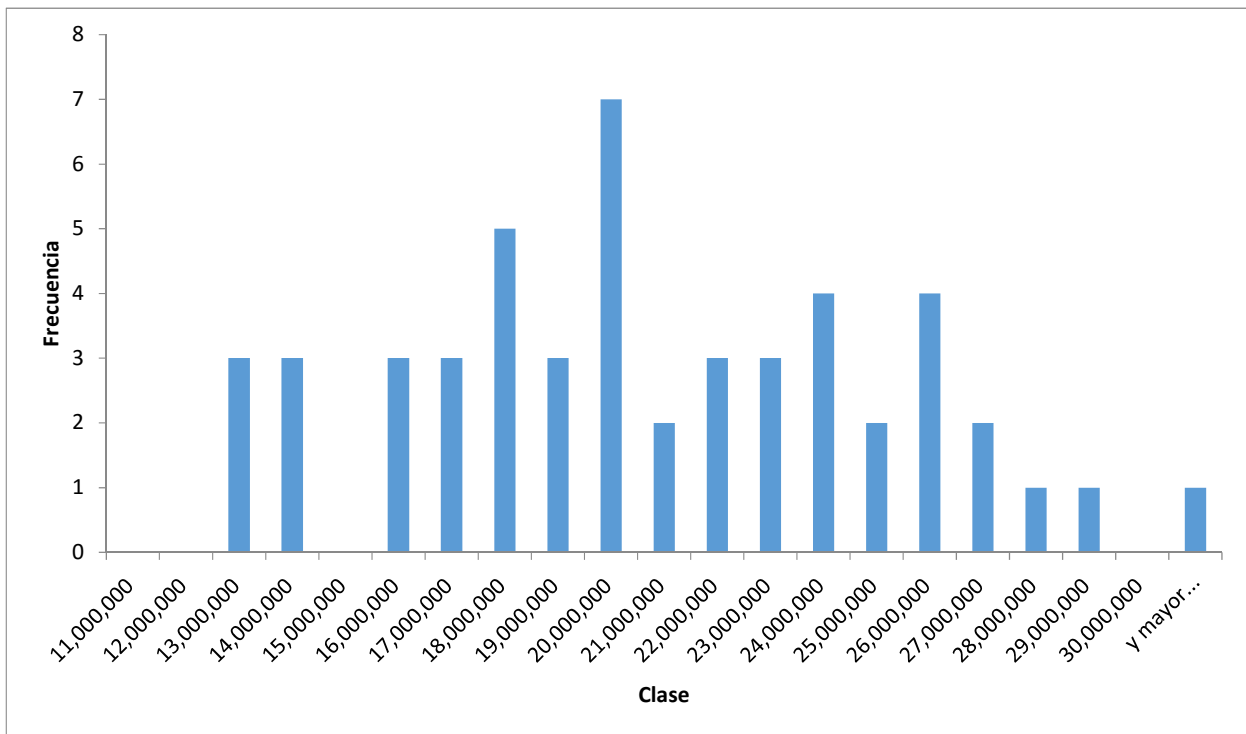


Figura B.7: Distribución de valores para el agendamiento estocástico con información perfecta y reasignación de destino sobre las 50 simulaciones consideradas.

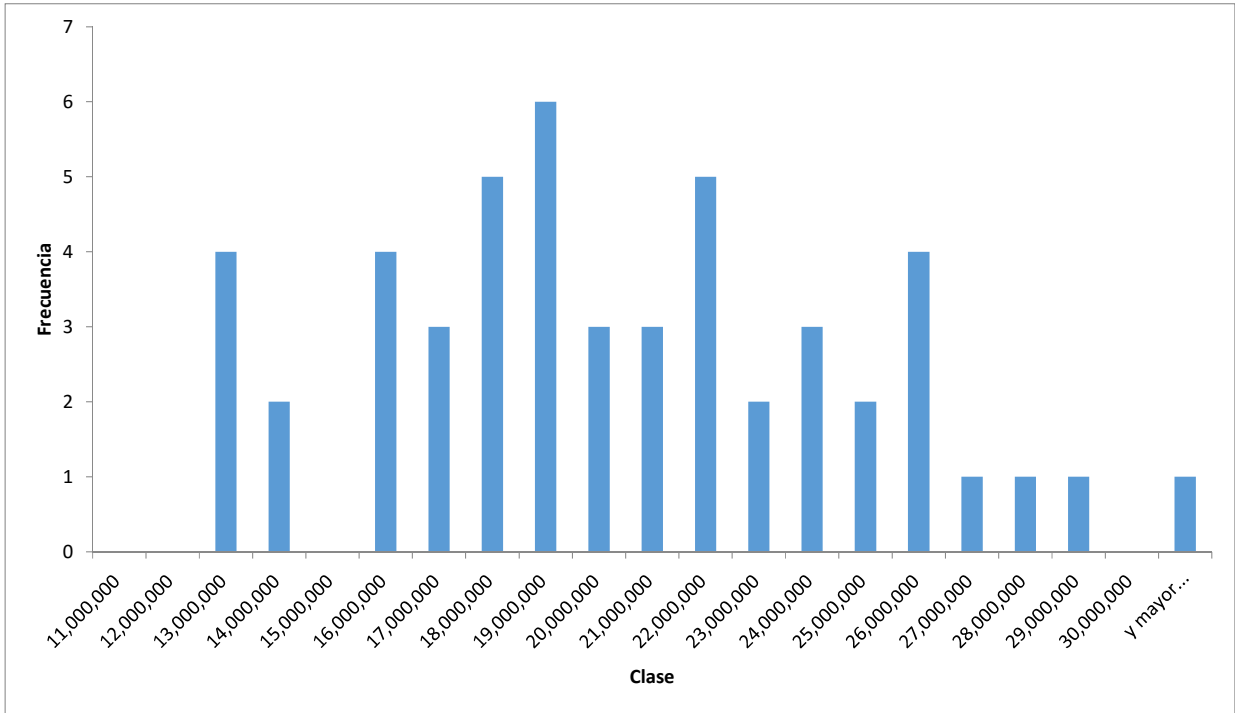


Figura B.8: Distribución de valores para el agendamiento estocástico con  $T^*=1$  y reasignación de destino sobre las 50 simulaciones consideradas.

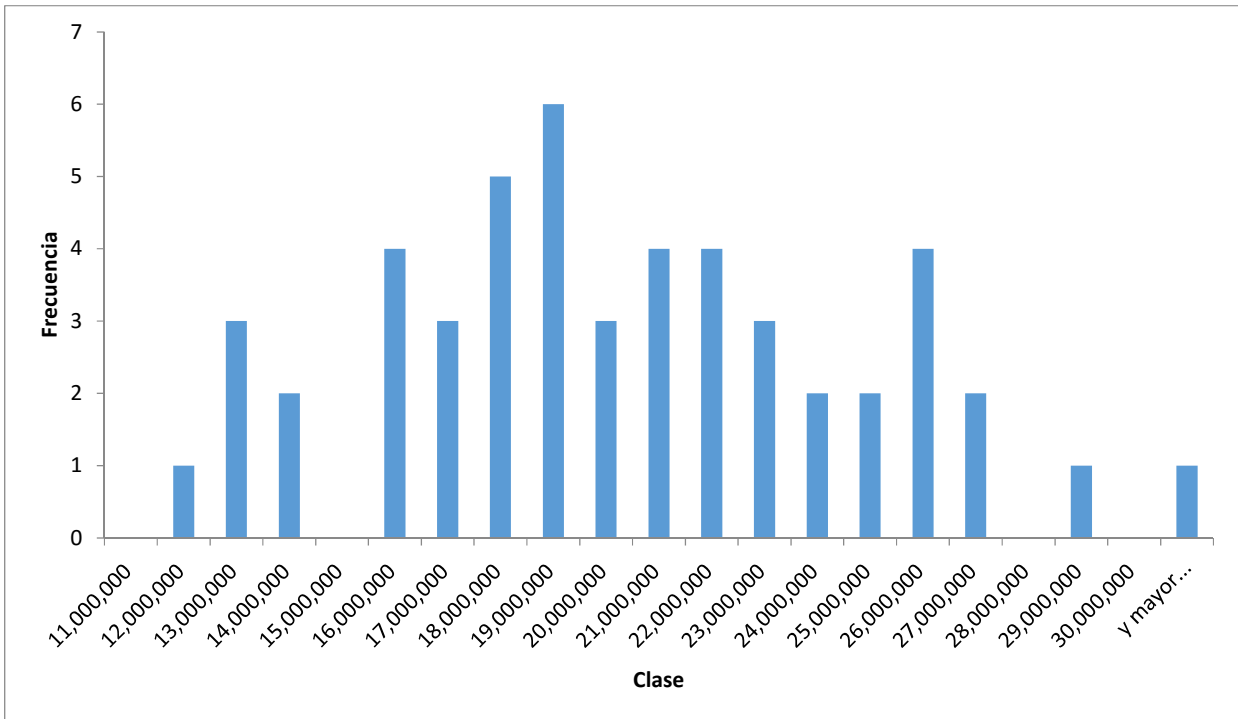


Figura B.9: Distribución de valores para el agendamiento estocástico con  $T^*=2$  y reasignación de destino sobre las 50 simulaciones consideradas.

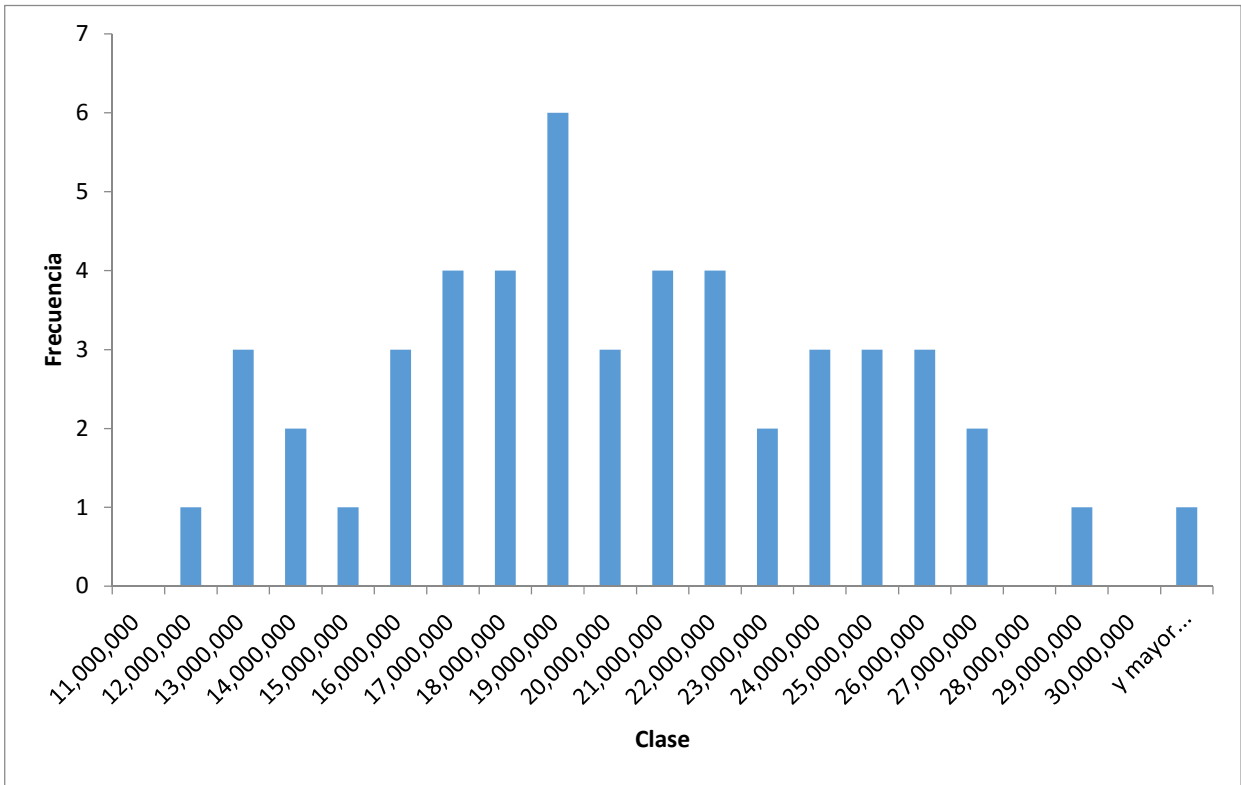


Figura B.10: Distribución de valores para el agendamiento estocástico con  $T^*=3$  y reasignación de destino sobre las 50 simulaciones consideradas.

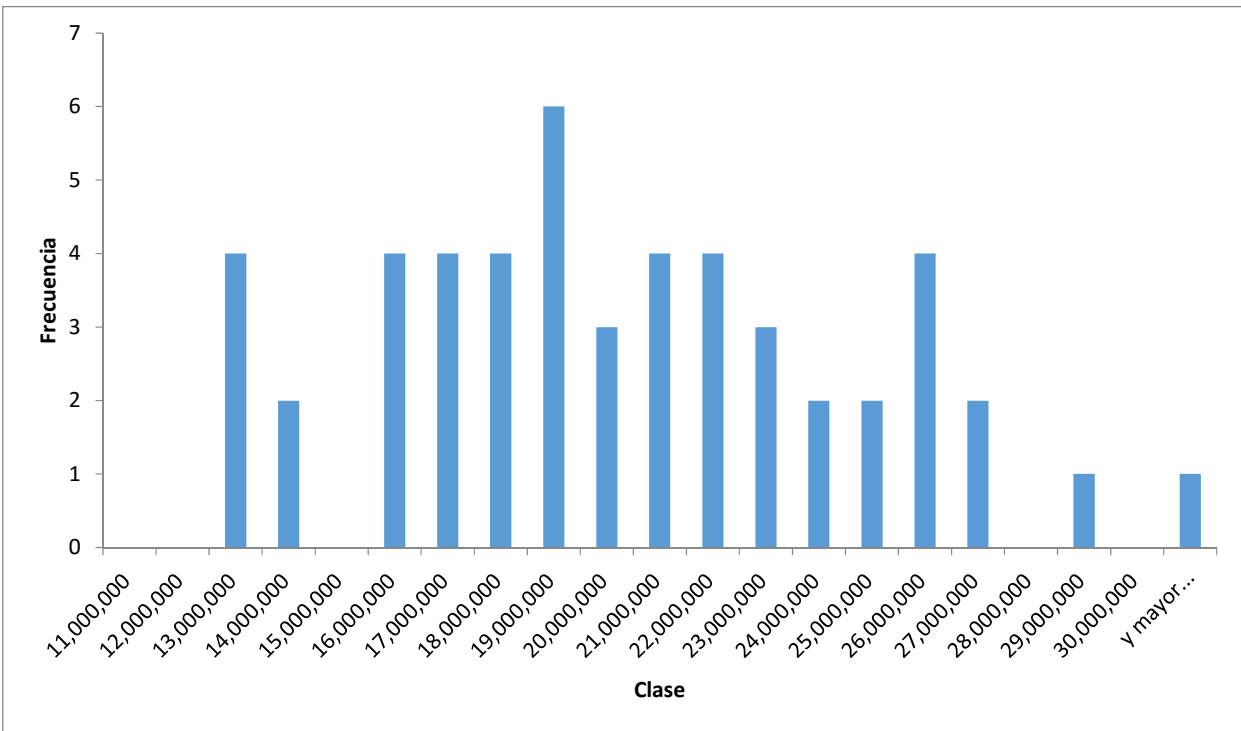


Figura B.11: Distribución de valores para el agendamiento estocástico con  $T^*=4$  y reasignación de destino sobre las 50 simulaciones consideradas.

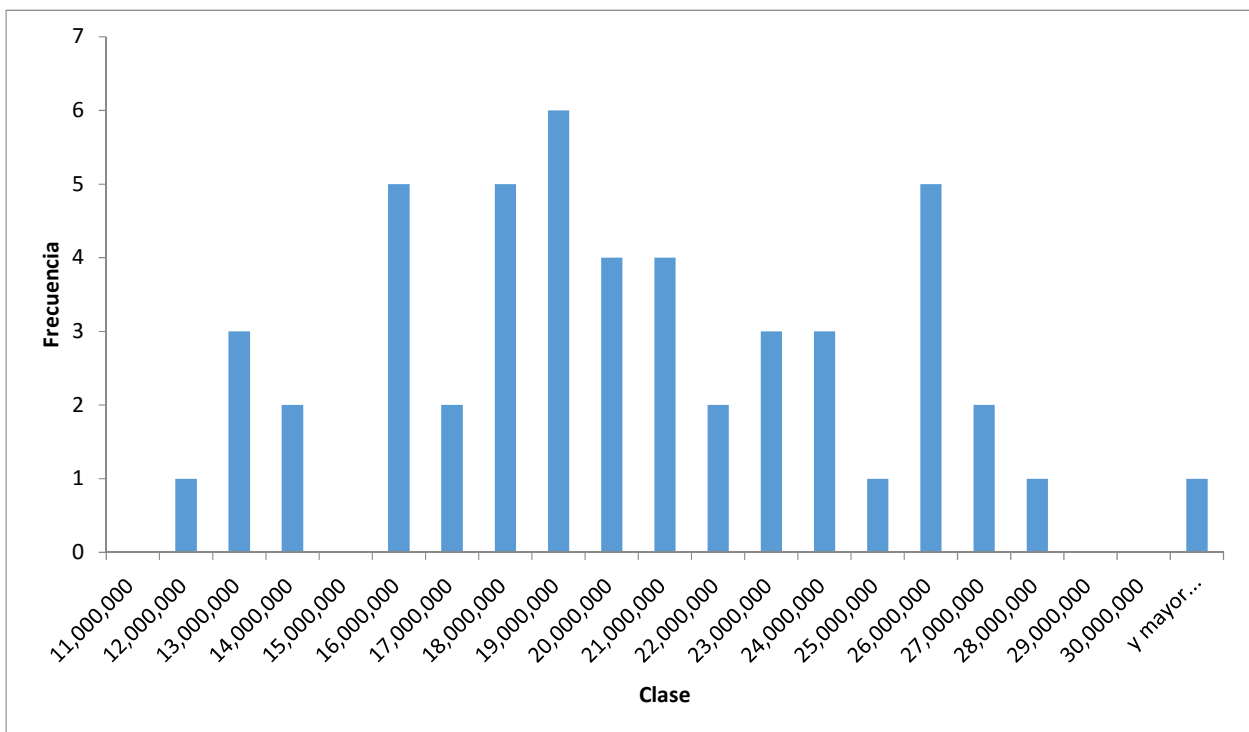


Figura B.12: Distribución de valores para el agendamiento de valor esperado y reasignación de destino sobre las 50 simulaciones consideradas.