



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

NANO-OSCILADORES POR TRANSFERENCIA DE SPIN, UN MODELO QUE VA  
MÁS ALLÁ DE LA APROXIMACIÓN MACRO-SPIN

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTORA EN CIENCIAS, MENCIÓN FÍSICA

DANIELA FRANCIS MANCILLA ALMONACID

PROFESOR GUÍA:  
RODRIGO ARIAS FEDERICI

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
DORA ALTBIR DRULLINSKY  
MIGUEL KIWI TICHAUER  
ÁLVARO NÚÑEZ VÁSQUEZ

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por Becas CONICYT 2012 folio núm.  
21120160, CEDENNA y FONDECYT 1130192.

SANTIAGO DE CHILE  
2016



RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR  
AL TÍTULO DE DOCTORA EN CIENCIAS, MENCIÓN FÍSICA  
POR: DANIELA FRANCIS MANCILLA ALMONACID  
FECHA: 2016  
PROF. GUÍA: SR. RODRIGO ARIAS FEDERICI

## NANO-OSCILADORES POR TRANSFERENCIA DE SPIN, UN MODELO QUE VA MÁS ALLÁ DE LA APROXIMACIÓN MACRO-SPIN

El objetivo general de este trabajo es estudiar la dinámica de la magnetización, tanto en el régimen lineal como no lineal, de la capa ferromagnética libre de una estructura nanopilar, cuando se inyecta una corriente polarizada en spin. Para ello, se desarrolla un modelo que utiliza un método alternativo a las simulaciones micromagnéticas usuales, siguiendo un formalismo Hamiltoniano estándar. La capa libre corresponde a un disco de un material ferromagnético suave (específicamente permalloy), de sección circular, y se aplica un campo magnético paralelo al plano que determina una magnetización de equilibrio cuasi-uniforme en su misma dirección. Si la corriente continua supera un cierto umbral, se excitan las ondas de spin y es posible observar auto-oscilaciones de la magnetización. En particular, se estudia la estabilidad de la auto-oscilación del modo que es excitado a la menor corriente crítica, considerando dos versiones del modelo: una que incluye los efectos del borde del disco, y otra que no. Además, se estudia la dinámica lineal de las ondas de spin bajo corrientes alternas.

Esta tesis se organiza de la siguiente manera. En la introducción se exponen de manera resumida la motivación, los objetivos y la metodología a utilizar. El capítulo 1, que corresponde al marco teórico, introduce los conceptos básicos para comprender el problema en cuestión. En el capítulo 2 se presenta en detalle el modelo, basado en un formalismo Hamiltoniano, el cual se utiliza para estudiar la dinámica de la magnetización. En el capítulo 3 se estudia la estabilidad de la auto-oscilación del modo con corriente crítica más baja, que corresponde al modo uniforme o macro-spin. Se considera que la capa libre es muy delgada, lo cual permite aproximar el campo demagnetizante al de un plano infinito, y se determina la corriente continua crítica por sobre la cual es posible observar la auto-oscilación del modo uniforme. Luego, se determinan los modos normales de oscilación de la magnetización no uniformes y se estudia la interacción entre la auto-oscilación del modo uniforme con los modos no uniformes. Se determina cuándo comienza el crecimiento exponencial de los modos no uniformes, lo cual permite conocer el rango del espacio de parámetros donde sólo existe la oscilación del modo macro-spin de manera aislada. En el capítulo 4 se introducen los efectos que tienen los bordes del disco, considerando el campo demagnetizante completo. Primero se determina la magnetización de equilibrio que ya no es uniforme. Luego se estudian los modos normales de oscilación de un disco ferromagnético con un campo aplicado en el plano, determinándose sus formas y frecuencias. En el capítulo 5 se estudia la excitación de las ondas de spin del capítulo anterior, mediante la inyección de una corriente continua, y se determina la corriente crítica necesaria para observar auto-oscilaciones de la magnetización. Luego, se determina la región del espacio de parámetros en la cual es posible observar un sólo modo auto-oscilando. En el capítulo 6, se considera que la corriente continua es menor a la corriente crítica y se le agrega una componente alterna. Se estudia la excitación de modos normales bajo este forzamiento: se consideran los efectos del campo de Oersted y la componente perpendicular del torque por transferencia de spin, y se estudian resonancias directas y paramétricas. Finalmente se presenta una sección de conclusiones.





# Tabla de Contenido

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
Antecedentes . . . . .	1
Objetivos . . . . .	2
Objetivo general . . . . .	2
Objetivos específicos . . . . .	2
Metodología . . . . .	3
Organización de la tesis . . . . .	4
Excitación mediante una corriente continua . . . . .	4
Excitación mediante una corriente alterna . . . . .	5
<b>1. Marco teórico</b>	<b>6</b>
1.1. Origen del Magnetismo . . . . .	6
1.1.1. Momento magnético orbital . . . . .	6
1.1.2. Momento magnético de spin . . . . .	7
1.2. Materiales ferromagnéticos . . . . .	8
1.3. Micromagnetismo . . . . .	9
1.3.1. Energía de Zeeman . . . . .	9
1.3.2. Energía demagnetizante . . . . .	10
1.3.3. Energía de intercambio . . . . .	11
1.3.4. Energía de anisotropía magnetocristalina . . . . .	13
1.3.5. Ecuaciones de Brown . . . . .	14
1.4. Dinámica de la magnetización: ecuación de Landau-Lifshitz-Slonczewski (LLS) . . . . .	17
1.4.1. Precesión . . . . .	17
1.4.2. Disipación . . . . .	17
1.4.3. Torque por transferencia de spin . . . . .	19
1.4.4. Ecuación de Landau-Lifshitz-Slonczewski (LLS) . . . . .	21
1.5. Nanopilares . . . . .	23
1.6. Configuración con corriente polarizada y campo aplicado en el plano . . . . .	27
<b>2. Formalismo Hamiltoniano</b>	<b>29</b>
2.1. Sistema en estudio y transformación de coordenadas . . . . .	29
2.2. Ecuaciones para las variables $a$ y $a^*$ . . . . .	31
2.2.1. Primer término . . . . .	31
2.2.2. Segundo término . . . . .	32
2.3. Expresiones para la energía . . . . .	34
2.3.1. Campo aplicado . . . . .	34

2.3.2.	Campo de intercambio . . . . .	34
2.3.3.	Campo demagnetizante . . . . .	35
2.3.4.	Campo de anisotropía . . . . .	39
2.3.5.	Campo de Oersted . . . . .	39
2.4.	Expansión en funciones de Bessel . . . . .	41
<b>3.</b>	<b>Disco ferromagnético en aproximación de plano infinito</b>	<b>43</b>
3.1.	Aproximación macro-spin . . . . .	43
3.1.1.	Estudio del macro-spin a orden lineal . . . . .	44
3.1.2.	Estudio del macro-spin a orden no lineal . . . . .	45
3.2.	Ondas de spin . . . . .	51
3.3.	Interacción de la auto-oscilación uniforme con los modos no uniformes . . . . .	55
3.4.	Aplicaciones del modelo en aproximación de plano infinito . . . . .	57
3.4.1.	Inestabilidades, examinando resultados teóricos: . . . . .	57
3.4.2.	Inestabilidades, comparación con simulaciones numéricas . . . . .	59
3.4.3.	Dependencia de las inestabilidades con el tamaño . . . . .	60
<b>4.</b>	<b>Ondas de spin de un disco ferromagnético con un campo aplicado en el plano</b>	<b>62</b>
4.1.	Magnetización de equilibrio no uniforme . . . . .	62
4.1.1.	Configuración de equilibrio variando el campo aplicado . . . . .	64
4.1.2.	Configuración de equilibrio variando el radio del disco . . . . .	64
4.1.3.	Configuración de equilibrio incluyendo el efecto del campo de Oersted . . . . .	65
4.2.	Estudio lineal: ondas de spin . . . . .	66
4.2.1.	Resultados numéricos: formas y frecuencias de las ondas de spin . . . . .	69
4.3.	Conexión con el límite de plano infinito . . . . .	72
<b>5.</b>	<b>Excitación de las ondas de spin mediante una corriente continua</b>	<b>76</b>
5.1.	Estudio lineal . . . . .	76
5.2.	Estudio no lineal . . . . .	78
5.2.1.	Inestabilidad de una auto-oscilación . . . . .	79
<b>6.</b>	<b>Excitación de las ondas de spin mediante una corriente alterna</b>	<b>82</b>
6.1.	Excitación mediante una corriente alterna: aproximación macro-spin . . . . .	82
6.2.	Análisis lineal: efecto del campo de Oersted y de la componente perpendicular del torque por transferencia de spin . . . . .	85
6.2.1.	Resonancia ferromagnética (FMR) . . . . .	87
6.2.2.	Resonancia paramétrica (PR) . . . . .	88
	<b>Conclusiones</b>	<b>90</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>93</b>
<b>A.</b>	<b>Funciones de Bessel y ortogonalidad</b>	<b>100</b>
<b>B.</b>	<b>Expresiones de la energía en función de las variables <math>a_{mj}</math></b>	<b>101</b>
	Campo aplicado . . . . .	101
	Campo de intercambio . . . . .	101

Campo demagnetizante . . . . .	102
Integrales numéricas . . . . .	103
Relación entre los $\sigma_{lj}$ y los $a_{mj}$ . . . . .	104
Campo de Oersted . . . . .	104
Torque por transferencia de spin . . . . .	106
<b>C. Definiciones para las ecuaciones asociadas a la interacción entre el modo uniforme y el modo de oscilación <math>m_j</math></b>	<b>107</b>
Ecuación lineal de la variable $a_{mj}$ . . . . .	107
Cambio de variables de $a_{mj}$ a $b_{mj}$ . . . . .	108
Aproximación de términos resonantes . . . . .	108
<b>D. Instabilities of spin torque driven auto-oscillations of a ferromagnetic disk magnetized in plane</b>	<b>110</b>



# Introducción

## Antecedentes

En 1996 Slonczewski [1] y Berger [2] propusieron, de manera independiente y simultánea, la existencia del torque por transferencia de spin (STT), un fenómeno en el cual se transfiere momentum angular desde una corriente eléctrica polarizada en spin a un material ferromagnético. De esta manera resulta posible manipular la magnetización de un material mediante la inyección de una corriente eléctrica. No obstante, debido a que las densidades de corrientes necesarias son del orden de  $10^7$ - $10^8 A/cm^2$ , el fenómeno sólo es observable a escala nanométrica.

El torque por transferencia de spin puede excitar dos tipos, cualitativamente diferentes, de comportamientos magnéticos, la inversión desde una orientación magnética de equilibrio estática a otra [3, 4, 5, 6], o un estado de cuasi-equilibrio dinámico en el cual la magnetización precesa (nano-osciladores) [7, 8, 9]. Ambos tipos de comportamientos tienen aplicaciones potenciales en la tecnología de almacenamiento magnético y espintrónica, como por ejemplo, memorias magnéticas de acceso aleatorio (MRAM) [10, 11] y osciladores de alta frecuencia sintonizables [12, 13].

Luego de la confirmación experimental de estas predicciones en estructuras formadas por multicapas magnéticas [4, 14], se inició un periodo muy activo de investigación sobre el tema [15, 16, 17, 18]. Uno de los sistemas donde ha sido posible observar las excitaciones de la magnetización inducidas por una corriente polarizada en spin es en un nanopilar formado por dos capas ferromagnéticas separadas por un espaciador metálico no magnético, cuya función es desacoplar ambas capas ferromagnéticas. Una de las capas ferromagnéticas es la llamada capa fija, diseñada de manera que su magnetización se mantiene en una configuración de equilibrio estática. Cuando se inyecta una corriente en el dispositivo, ésta se polariza cuando atraviesa la capa fija. A continuación, la corriente polarizada en spin pasa a través del espaciador metálico y, finalmente, la corriente atraviesa la denominada capa libre, fabricada de un material ferromagnético blando, cuyos momentos magnéticos experimentan una transferencia de momentum angular desde la corriente.

Para estudiar la dinámica de la magnetización en la capa libre, se utiliza la ecuación de Landau-Lifshitz [19] más los términos que consideren el torque que ejerce la corriente sobre ella [20, 21]. A esta ecuación se denomina ecuación de Landau-Lifshitz-Slonczewski (LLS), la

cual, normalizada, puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = -\vec{m} \times (\vec{h}_{eff} + \vec{h}_{stt}) - \alpha\vec{m} \times [\vec{m} \times (\vec{h}_{eff} + \vec{h}_{stt})],$$

donde  $\vec{m} = \vec{M}/M_s$  es la magnetización normalizada, y  $M_s$  es la magnetización de saturación,  $\vec{h}_{eff} = \vec{H}_{eff}/4\pi M_s$  y  $\vec{h}_{stt} = \vec{H}_{stt}/4\pi M_s$  son los campos normalizados, correspondientes al campo efectivo ( $\vec{H}_{eff}$ ) y el campo asociado al torque por transferencia de spin ( $\vec{H}_{stt}$ ), respectivamente. El campo efectivo está asociado a los campos: de Zeeman, de intercambio, demagnetizante y de anisotropía.

Debido a la naturaleza no lineal de la ecuación de LLS, las soluciones analíticas sólo pueden ser derivadas en algunos casos muy especiales. Por esta razón el método más utilizado para estudiar la dinámica de la magnetización es resolver la ecuación de LLS numéricamente. Ésto principalmente utilizando la aproximación de macro-spin [22, 23, 24, 25] y mediante simulaciones micromagnéticas [26, 27, 28]. La aproximación de macro-spin ha tenido éxito en la explicación de muchos resultados experimentales [29, 30, 31], pero ha demostrado ser limitada para explicar varios aspectos como los efectos no lineales, la dependencia de la frecuencia y amplitud de oscilación de la magnetización con la corriente, el efecto que tiene el campo de Oersted (campo magnético producido por la corriente que atraviesa en el nanopilar), emisión de ondas de spin, efectos termales, etc.

## Objetivos

### Objetivo general

El objetivo general de este trabajo es estudiar la dinámica de la magnetización de una capa libre delgada y de sección circular, sobre la cual se aplica un campo externo en el plano de la capa y se inyecta una corriente polarizada en spin. El estudio se realiza tanto en el régimen lineal como en el no lineal, suponiendo que la magnetización no es uniforme a lo largo del plano de la capa. Se estudian los efectos de estas no uniformidades sobre la precesión de la magnetización, utilizando un método alternativo a las simulaciones micromagnéticas usuales.

### Objetivos específicos

- Estudiar resonancias ferromagnéticas (FMR) en la capa libre, en los regímenes lineales y no lineales, con un campo aplicado paralelo al plano del disco.
- Estudiar la dinámica de la magnetización al agregar una componente de corriente alterna a la corriente polarizada en spin.
- Estudiar temas que no han sido bien desarrollados previamente, como el papel del campo de Oersted.

# Metodología

Dependiendo de las dimensiones de la capa libre, cuya geometría en este caso es un disco circular delgado, se tiene que la configuración de la magnetización que minimiza la energía puede ser un vórtice, un estado casi saturado en el plano o un estado casi saturado fuera del plano [32, 33]. La dimensión más utilizada en este trabajo corresponde a  $R = 50\text{nm.}$  y  $L = 5\text{nm.}$ , donde  $R$  representa el radio y  $L$  el espesor del disco. Con estas dimensiones el estado de equilibrio corresponde a una magnetización casi saturada en el plano.

Para estudiar la dinámica de la magnetización de la capa libre se utiliza la teoría de ondas de spin no lineal, siguiendo un formalismo Hamiltoniano estándar [21, 34, 35, 36, 37]. Para ello el primer paso consiste en introducir la variable compleja  $a(\vec{\rho}, t)$  que representa perturbaciones al estado de equilibrio, a través de una transformación de Holstein-Primakoff:

$$\left. \begin{aligned} m_x &= 1 - aa^* \\ m_y &= (a - a^*)\sqrt{2 - aa^*}/2i \\ m_z &= (a + a^*)\sqrt{2 - aa^*}/2 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow a = \frac{m_z + im_y}{\sqrt{1 + m_x}} .$$

Con el objetivo de describir la dinámica en variables adecuadas a la geometría de la capa, se introduce el siguiente cambio de variables desde el campo  $a(\vec{\rho}, t)$  a las amplitudes  $a_{mj}(t)$ , lo que permite separar la parte espacial de la temporal:

$$a(\vec{\rho}, t) = \sum_{mj} N_{mj} a_{mj}(t) J_m(\kappa_{mj}\rho) e^{im\phi} ,$$

con  $\rho$  y  $\phi$  coordenadas polares con base en el centro del disco. El vector  $\vec{\rho}$  corresponde a un vector en el plano, y dado que se ha considerado un disco muy delgado (del orden de la longitud de intercambio), los spines están alineados, es decir, la magnetización se considera uniforme en el espesor del disco y, por consiguiente, no depende de  $z$  (las funciones  $J_m(\kappa_{mj}\rho) e^{im\phi}$  representan una base en 2D y  $J_m$  son las funciones de Bessel).

El modelo trata de ser mínimo en el sentido de la introducción de pocas variables para describir la dinámica, y también con la idea de que la interpretación de estas variables entregue una buena comprensión de la evolución de la dinámica. A su vez, las funciones base no tienen grandes variaciones espaciales, ya que la expansión previa se corta a una extensión finita. Al reducir la expansión incluyendo vectores de la base con una variación espacial más suave, se espera obtener una descripción razonable de la dinámica de la magnetización de la capa suave, que va más allá de la aproximación macro-spin, que es un caso especial de la expansión.

El método para analizar la dinámica de la capa libre consiste entonces en sustituir la representación de la magnetización en la ecuación de movimiento de LLS, la cual se convierte en una ecuación de evolución temporal no lineal para las nuevas variables  $a_{mj}(t)$ . Este sistema no lineal de ecuaciones se resuelve por métodos numéricos estándar.

# Organización de la tesis

Los problemas estudiados en la tesis son dos. En el primero se aplica una corriente continua polarizada en spin a la capa libre de la estructura nanopilar. Inicialmente se aproxima el campo demagnetizante por aquel de un plano infinito, y luego, se considera el efecto de los bordes de la capa libre, al tener en cuenta el campo demagnetizante sin aproximaciones. El segundo problema corresponde a estudiar el efecto de aplicar una corriente alterna al sistema.

## Excitación mediante una corriente continua

### Aproximación de plano infinito

Para estudiar la dinámica de la magnetización, se considera que el disco circular ferromagnético suave es muy delgado, por lo que el campo demagnetizante se aproxima por el límite de plano infinito. Se analiza la estabilidad de la auto-oscilación periódica del modo uniforme, inducida mediante el torque por transferencia de spin. Se estudian los umbrales de inestabilidad para los modos no uniformes, en término de los parámetros que son relevantes para la dinámica de la magnetización del problema: la densidad de corriente, el campo magnético aplicado y el radio del disco. El modelo considera una descripción de la dinámica en términos de las amplitudes de las excitaciones, a raíz de un formalismo Hamiltoniano estándar. Una de las ventajas de este modelo es que se puede realizar un análisis teórico de la dinámica de la magnetización y los umbrales de inestabilidad, lo que conduce a una mejor comprensión de cuándo y cómo la solución macro-spin se vuelve inestable. Por otro lado, al realizar estudios numéricos de la dinámica, se corroboran los resultados teóricos del modelo. Se han realizado estudios similares cuando el campo magnético aplicado es perpendicular al plano del disco [38, 39].

### Campo demagnetizante completo

Para entender mejor los efectos de tamaño finito de un disco ferromagnético de dimensiones nanométricas, se consideran los efectos que tienen los bordes del disco, considerando el campo demagnetizante completo del disco, mejorando así el modelo teórico antes estudiado. Se determina la magnetización de equilibrio no uniforme y los modos normales de oscilación lineales (ondas de spin) en torno a esta configuración de equilibrio, las cuales concuerdan con simulaciones micromagnéticas [40, 41] y resultados experimentales [42] previos. Con este modelo se observa que el modo uniforme se convierte en un modo cuasi-uniforme, el cual todavía tiene la frecuencia más baja, pero existe un modo de borde con una frecuencia muy cercana. Cuando se aplica una corriente continua polarizada en spin, el modo de borde es el primero que comienza a auto-oscilar, por lo tanto, se estudia el rango de densidades de corriente en las que éste auto-oscila de manera aislada.



## Excitación mediante una corriente alterna

Si se aplica una corriente continua menor a la necesaria para inducir auto-oscilaciones de la magnetización y se agrega una componente alterna, es posible excitar las ondas de spin. Se discute el rol que cumplen el campo de Oersted y la componente perpendicular del torque por transferencia de spin cuando la resonancia es directa y paramétrica. En la resonancia directa se tiene que la frecuencia de la corriente alterna es cercana a la frecuencia del modo que se quiere excitar, mientras que en la resonancia paramétrica se tiene que la frecuencia de la corriente alterna es cercana al doble de la frecuencia del modo que se quiere excitar.

# Capítulo 1

## Marco teórico

En el presente capítulo se exponen los conceptos necesarios para comprender el objeto de estudio en esta tesis. Se comienza por discutir lo que es el magnetismo y luego se exponen las propiedades características de los materiales ferromagnéticos. A continuación se introduce la Teoría del Micromagnetismo, luego se discuten cada uno de los términos de la ecuación que describe la dinámica de la magnetización, para finalmente mostrar la estructura en estudio, los nanopilares, y los principales resultados obtenidos en estudios previos a este trabajo.

### 1.1. Origen del Magnetismo

El magnetismo es un fenómeno físico que se manifiesta, principalmente, mediante la atracción o repulsión entre materiales. Las fuentes que dan origen a estas fuerzas son dos: las cargas eléctricas en movimiento (corriente) y los momentos magnéticos asociados a una de las propiedades intrínsecas de las partículas, el spin. A escala atómica, ambas fuentes tienen su origen en la mecánica cuántica, y pueden ser comprendidas de manera clásica como dos tipos de movimiento de los electrones en los átomos: por un lado, el movimiento de los electrones en órbita alrededor del núcleo, y por el otro, el giro de los electrones en torno a su propio eje. Ambos tipos de movimiento tienen asociado un momento magnético, llamados momento magnético orbital ( $\vec{\mu}_L$ ) y momento magnético de spin o intrínseco ( $\vec{\mu}_S$ ), los cuales se representan en la figura 1.1. El momento magnético total ( $\vec{\mu}_J$ ) es la suma de los dos anteriores:  $\vec{\mu}_J = \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_S$ .

#### 1.1.1. Momento magnético orbital

Si se tiene una espira cerrada de área  $A$  por la cual circula una corriente  $I$ , el momento magnético,  $\vec{\mu}$ , asociado a ella es  $\vec{\mu} = (IA/c)\hat{n}$ , con  $c$  la velocidad de la luz y  $\hat{n}$  la dirección normal al área, de acuerdo con la regla de la mano derecha, tomando en cuenta la dirección de la corriente. Sea un átomo donde un electrón de carga  $-e$  se mueve en torno al núcleo, en una órbita circular de radio  $R$ , con velocidad  $v$ . La magnitud de la corriente eléctrica,  $I$ , asociada

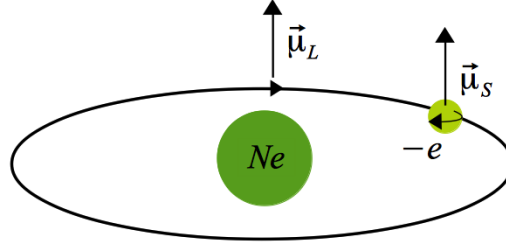


Figura 1.1: Representación de los momentos magnéticos orbital y de spin asociados al movimiento de un electrón. Se tiene un átomo formado por un electrón de carga  $-e$  que gira en torno al núcleo de carga  $Ne$ .

al movimiento es  $I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi R}$ , donde  $T$  es el periodo de la órbita. El área encerrada por la trayectoria es  $A = \pi R^2$ , por lo que el momento magnético orbital es  $\vec{\mu}_L = \frac{evR}{2c} \hat{n}$ . Por otro lado, si la masa del electrón es  $m_e$ , el momento angular orbital,  $\vec{L}$ , es  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = -m_e v R \hat{n}$ . De modo que se puede relacionar el momento magnético con el momento angular de la siguiente manera,  $\vec{\mu}_L = \frac{-e}{2m_e c} \vec{L}$ .

Si bien el análisis anterior es realizado en un marco clásico, el resultado también es válido en un marco cuántico. Sin embargo, en este último caso el momento angular no puede tomar un valor arbitrario, sino que su valor absoluto toma sólo ciertos valores discretos,  $|\vec{\mu}_L| = \frac{eh}{2m_e c} \sqrt{l(l+1)}$ , donde  $|\vec{L}| = \hbar \sqrt{l(l+1)}$  y  $l$  es un número entero ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ). A la unidad de momento magnético se le llama magnetón de Bohr,  $\mu_B = e\hbar/2m_e c \approx 9,27 \cdot 10^{-21} \text{ erg/G}$ .

En la mayoría de los materiales de interés, los fenómenos magnéticos son dominados por la contribución de los momentos magnéticos asociados al spin, lo que se analiza a continuación.

### 1.1.2. Momento magnético de spin

De manera análoga a lo discutido en la sección anterior, se hace posible relacionar el momento magnético de spin con el momento angular de spin,  $\vec{S}$ , el cual es intrínseco de cada partícula. Sin embargo, las mediciones experimentales realizadas sugieren que el resultado debe ser multiplicado por un factor 2. De esta manera, la relación es de la forma  $\vec{\mu}_S = -g \frac{e}{2mc} \vec{S}$ , con  $g \approx 2$ . Ocupando una regla de cuantización análoga a la utilizada para  $\vec{\mu}_L$ , se tiene que  $|\vec{\mu}_S| = g \frac{eh}{2m_e c} \sqrt{s(s+1)}$ , donde  $|\vec{S}| = \hbar \sqrt{s(s+1)}$  y  $s = n/2$  con  $n$  un número entero ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

Así como el electrón tiene asociado un momento magnético, el núcleo atómico también lo tiene. Sin embargo es miles de veces menor (inversamente proporcional a su masa), por lo que se puede despreciar.

## 1.2. Materiales ferromagnéticos

La materia está formada por átomos, y cada uno de ellos tiene asociado un momento magnético. Según cómo sea la configuración de éstos, es posible distinguir distintos comportamientos magnéticos, los cuales principalmente son los siguientes: diamagnetismo, paramagnetismo y ferromagnetismo.

Los materiales ferromagnéticos son aquellos que tienen sus momentos magnéticos alineados localmente, de modo que, aún en ausencia de un campo magnético externo, el material presenta un momento magnético neto no nulo, es decir, se encuentra magnetizado. La magnetización,  $\vec{M}$ , (momento magnético por unidad de volumen) se relaciona con los momentos magnéticos de los electrones del material a través de la siguiente relación:

$$\vec{M} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} \vec{\mu}_i, \quad (1.1)$$

donde  $\Delta V$  es un pequeño volumen en torno a la coordenada  $\vec{r}$  y la suma de momentos magnéticos corresponde a todos aquellos que se encuentran al interior del volumen  $\Delta V$ .

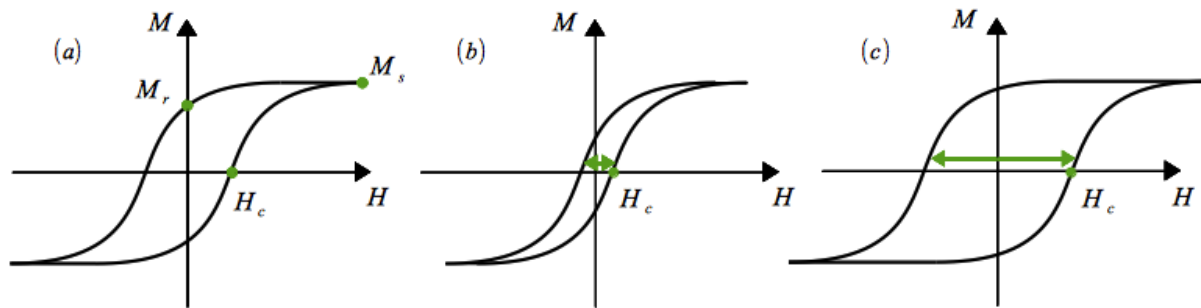


Figura 1.2: (a) Ciclo de histéresis de un material ferromagnético. (b) Ciclo de histéresis para un material blando. (c) Ciclo de histéresis para un material duro.

La magnetización de un material puede ser manipulada mediante campos magnéticos externos. Para conocer la respuesta de un material frente a estímulos externos se debe medir la susceptibilidad magnética definida como  $\chi_M = \partial \vec{M} / \partial \vec{H}$ . Los materiales ferromagnéticos presentan un comportamiento que puede ser representado mediante un ciclo de histéresis, el cual se muestra en la figura 1.2(a). Si se aplica un campo magnético muy intenso, el material ferromagnético se satura y presenta una magnetización de saturación  $M_s$ . Si se reduce el campo hasta llegar a cero, persiste una magnetización remanente,  $M_r$ . Si se continúa disminuyendo el campo externo, existe un campo aplicado tal que la magnetización del material es cero, el cual se denomina campo coercitivo,  $H_c$ . Si se aplica un campo magnético muy intenso en la dirección opuesta a la inicial, el material ferromagnético se vuelve a saturar. Los materiales ferromagnéticos se pueden clasificar en materiales blandos, si  $H_c$  es pequeño, y duros, si  $H_c$  es grande, los que se representan en las figuras 1.2(b) y 1.2(c), respectivamente. El ciclo de histéresis desaparece cuando la temperatura del material excede la llamada temperatura de Curie,  $T_C$ .

## 1.3. Micromagnetismo

Existen distintos modelos que se pueden utilizar para estudiar la magnetización de los materiales, los cuales se pueden clasificar de acuerdo a la escala de longitud característica del problema en cuestión. En la siguiente tabla se muestra un resumen [43]:

Modelo	Dimensiones características
Teoría atómica	<1nm
Micromagnetismo	10-1000 nm
Teoría de dominios	1-100 $\mu m$
Análisis de texturas magnéticas	>0.1 mm
Curva de Histéresis	siempre aplicable

Tabla 1.1: Modelos para estudiar la descripción de la magnetización clasificados según las dimensiones del material.

El Micromagnetismo es una teoría semi-clásica, la cual considera un campo vectorial  $\vec{M}(\vec{r})$  continuo para describir la distribución discreta de momentos magnéticos a través de la ecuación (1.1). Para que esto sea válido, es necesario que los momentos adyacentes,  $\vec{\mu}_i$  y  $\vec{\mu}_{i+1}$ , sean casi paralelos y no se presenten cambios bruscos, es decir,  $|(\vec{\mu}_i - \vec{\mu}_{i+1})/\vec{\mu}_i| \approx 0$ .

El Micromagnetismo permite conocer el equilibrio estático de la magnetización, para lo cual es necesario minimizar la energía libre magnética, la cual está compuesta principalmente por cuatro términos:

- Energía de Zeeman, debido a que la magnetización interactúa con los campos magnéticos externos aplicados.
- Energía de intercambio, debido a que los momentos magnéticos cercanos quieren ser paralelos entre ellos cuando el material es ferromagnético, lo cual tiene un origen cuántico de acuerdo a la simetría de las funciones de onda y el Principio de Exclusión de Pauli.
- Energía demagnetizante, debido que la misma magnetización crea un campo.
- Energía de anisotropía, que se debe a la existencia de direcciones preferentes de la magnetización con respecto a distintos orígenes.

### 1.3.1. Energía de Zeeman

Cuando una masa  $m$  se encuentra inmersa en un campo gravitacional adquiere una energía potencial gravitacional. De manera análoga, un momento magnético adquiere energía, llamada de Zeeman, que se origina a partir de los campos magnéticos externos  $\vec{H}_{ext}$ . Un momento magnético  $\vec{\mu}_i$  tenderá a alinearse con el campo magnético para minimizar su energía  $\mathcal{E}_i$ , la cual es de la forma

$$\mathcal{E}_i = -\vec{\mu}_i \cdot \vec{H}_{ext} . \quad (1.2)$$

La energía total de Zeeman, corresponderá a la suma de cada una de las energías de los distintos momentos magnéticos que se encuentren en un volumen  $V$ . En un elemento de volumen  $dV$  se tiene una cantidad  $d\mathcal{E}$  de energía

$$d\mathcal{E}_Z = - \left( \frac{1}{dV} \sum_{i \in dV} \vec{\mu}_i \right) \cdot \vec{H}_{ext} dV , \quad (1.3)$$

donde el primer término entre paréntesis corresponde a la magnetización. Si esta expresión se integra en todo el volumen, se obtiene la energía de Zeeman total,

$$\mathcal{E}_Z = - \int_V \vec{M}(\vec{r}) \cdot \vec{H}_{ext} dV . \quad (1.4)$$

El campo magnético continuo más intenso que ha sido generado en un laboratorio es del orden de los  $4 \cdot 10^5 G = 40T$ .

### 1.3.2. Energía demagnetizante

La energía demagnetizante (también llamada dipolar o magnetostática) surge debido a la interacción de un momento magnético con el campo generado por los otros momentos magnéticos que componen un material. Si un momento magnético  $\vec{\mu}_j$  genera un campo magnético  $\vec{H}^j$ , la energía asociada al momento magnético  $i$  será

$$\mathcal{E}_i = -\vec{\mu}_i(\vec{r}_i) \cdot \sum_{j \neq i} \vec{H}^j(\vec{r}_i) . \quad (1.5)$$

La energía demagnetizante  $d\mathcal{E}_D$  en un volumen  $dV$  será

$$d\mathcal{E}_D = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{dV} \sum_{i \in dV} \vec{\mu}_i(\vec{r}_i) \right) \cdot \sum_{j \neq i} \vec{H}^j(\vec{r}_i) dV , \quad (1.6)$$

donde se ha agregado un factor  $1/2$  para no sumar dos veces la misma contribución, pues  $\vec{\mu}_i(\vec{r}_i) \cdot \vec{H}^j(\vec{r}_i) = \vec{\mu}_j(\vec{r}_j) \cdot \vec{H}^i(\vec{r}_j)$ . La energía demagnetizante total,  $\mathcal{E}_D$ , se obtiene integrando la expresión anterior en todo el volumen y denominando al campo demagnetizante  $\vec{H}_D(\vec{r}) = \sum_{j \neq i} \vec{H}^j(\vec{r}_i)$ , de forma que

$$\mathcal{E}_D = -\frac{1}{2} \int \vec{M}(\vec{r}) \cdot \vec{H}_D(\vec{r}) dV . \quad (1.7)$$

A continuación se calcula el campo magnético demagnetizante. El potencial escalar en el punto  $\vec{r}$  de un dipolo magnético que está ubicado en  $\vec{r}_j$  es

$$\Phi_j(\vec{r}) = -\vec{\mu}_j(\vec{r}_j) \cdot \vec{\nabla}_r \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \right) . \quad (1.8)$$

Luego, el potencial  $d\Phi$  correspondiente a la suma de los potenciales asociados a los dipolos magnéticos ubicados dentro de un volumen  $dV$  será

$$d\Phi(\vec{r}) = - \left( \frac{1}{dV} \sum_{j \in dV} \vec{\mu}_j(\vec{r}_j) \right) \cdot \vec{\nabla}_r \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \right) dV = \left( \frac{1}{dV} \sum_{j \in dV} \vec{\mu}_j(\vec{r}_j) \right) \cdot \vec{\nabla}_{r_j} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \right) dV . \quad (1.9)$$

En el paso anterior se usó que  $\vec{\nabla}_r \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \right) = -\vec{\nabla}_{r_j} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \right)$ . Si se integra en todo el volumen se obtiene

$$\Phi(\vec{r}) = \int \vec{M}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{r'} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' . \quad (1.10)$$

Usando que  $\vec{M}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{r'} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \vec{\nabla}_{r'} \cdot \left( \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} [\vec{\nabla}_{r'} \cdot \vec{M}(\vec{r}')]$ , la integral anterior se separa en dos,

$$\Phi(\vec{r}) = \int \left[ \vec{\nabla}' \cdot \left( \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV' , \quad (1.11)$$

donde  $\vec{\nabla}' = \vec{\nabla}_{r'}$ . Ocupando el teorema de la divergencia en el primer término, éste se transforma en una integral de superficie:

$$\Phi(\vec{r}) = \int \frac{\vec{M}(\vec{r}') \cdot \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' - \int \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \int \frac{\sigma_M}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' - \int \frac{\rho_M}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' , \quad (1.12)$$

donde  $\sigma_M = (\hat{n} \cdot \vec{M})$  representa las cargas magnéticas efectivas en la superficie del material y  $\rho_M = \nabla' \cdot \vec{M}(\vec{r}')$  representa las cargas magnéticas volumétricas efectivas que provienen de las no uniformidades de la magnetización.

Finalmente, mediante la relación  $\vec{H}_D(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$ , se puede calcular el campo demagnetizante  $\vec{H}_D$ . Así, la energía demagnetizante es el resultado de las interacciones de largo alcance que existen entre los momentos magnéticos.

### 1.3.3. Energía de intercambio

La energía de intercambio tiene su origen en fenómenos cuánticos y no tiene analogía clásica. La energía asociada al momento magnético  $i$ ,  $\mathcal{E}_E^i$ , debida a la interacción con sus spines vecinos es descrita por

$$\mathcal{E}_E^i = -2 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} J_{i,j} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j = -2 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} J_{i,j} S^2 \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j . \quad (1.13)$$

La expresión  $j \in \mathcal{N}_i$  denota a los vecinos  $j$  más cercanos a  $i$ . La configuración que minimiza la energía depende del signo del parámetro  $J_{i,j}$ , la cual, si  $J_{i,j} < 0$  favorecerá una configuración antiparalela (antiferromagnetismo) o si  $J_{i,j} > 0$  favorecerá una configuración paralela

(ferromagnetismo). Si se asume que la constante de intercambio es isotrópica, se tiene que  $J_{i,j} = J$ .

La energía total de intercambio del material,  $\mathcal{E}_E$ , se obtiene sumando sobre todos los spines  $i$ . Esta expresión se debe dividir por dos para no sumar dos veces la misma contribución, con lo que se obtiene que

$$\mathcal{E}_E = \frac{1}{2} \left( -2JS^2 \sum_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j \right) = -JS^2 \sum_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j . \quad (1.14)$$

Considerando los spines  $\vec{s}_i$  y  $\vec{s}_j$  como clásicos, y asumiendo que el ángulo entre ellos es pequeño ( $\phi_{ij} \ll 1$ ), se tiene que

$$\mathcal{E}_E = -JS^2 \sum_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \cos \phi_{ij} \approx -JS^2 \sum_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left( 1 - \frac{\phi_{ij}^2}{2} \right) , \quad (1.15)$$

donde se usó la expansión en Taylor para la función coseno hasta orden dos.

Se puede también considerar que  $\phi_{ij} \approx |\vec{m}_i - \vec{m}_j|$ . Además se usa  $\vec{m}_i = \vec{m}(\vec{r}_i)$  y  $\vec{m}_j = \vec{m}(\vec{r}_i + \Delta\vec{r}_j)$  (debido a que  $j$  es el vecino de  $i$ ); y la expansión en Taylor en torno a  $\vec{r}_i$  hasta primer orden de

$$\vec{m}(\vec{r}_i + \Delta\vec{r}_j) \approx \vec{m}(\vec{r}_i) + \sum_{l=1}^3 \Delta r_{jl} \frac{\partial}{\partial r_l} \vec{m}(\vec{r}_i) . \quad (1.16)$$

Si ésto se reemplaza en la expresión de la energía (1.15) y sin tomar en cuenta el término constante, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_E &= JS^2 \sum_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{|\vec{m}_i - \vec{m}_j|^2}{2} \\ &= \frac{JS^2}{2} \sum_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{k=1}^3 \Delta r_{jl} \frac{\partial}{\partial r_l} m_k(\vec{r}_i) \Delta r_{jm} \frac{\partial}{\partial r_m} m_k(\vec{r}_i) . \end{aligned} \quad (1.17)$$

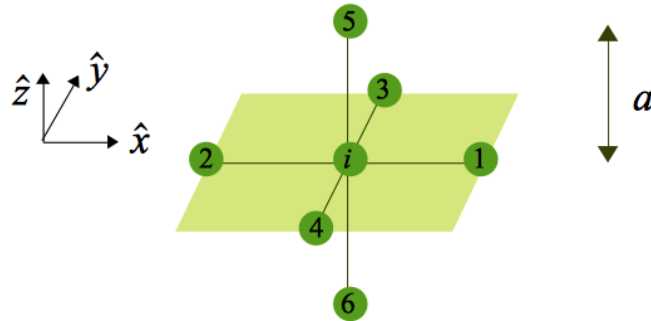


Figura 1.3: Representación de una red cúbica simple en la cual el átomo  $i$  tiene 6 vecinos cercanos. La constante de red es  $a$  y el sistema de ejes coordenados es el que se muestra.



En una red cúbica simple un átomo tiene 6 vecinos cercanos, como se muestra en la figura 1.3. Considerando los vecinos en el eje  $\hat{x}$ , es decir, 1 y 2, se tiene que  $m = l = \hat{x}$  en ambos casos. Al hacer lo mismo con los ejes  $\hat{y}$  y  $\hat{z}$  y al considerar que la constante de red es  $a$ , es decir,  $\Delta r_{jl} = a$ , se tiene que

$$\mathcal{E}_E = JS^2 a^2 \sum_i \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial m_k}{\partial r_l}(\vec{r}_i) \frac{\partial m_k}{\partial r_l}(\vec{r}_i) = JS^2 a^2 \sum_i [\vec{\nabla} \vec{m}(\vec{r}_i)]^2 . \quad (1.18)$$

Para transformar la sumatoria en integral, se tiene que  $\sum_i \rightarrow \frac{1}{a^3} \int dV$ , y

$$\mathcal{E}_E = \frac{JS^2}{a} \int [\vec{\nabla} \vec{m}(\vec{r})]^2 dV = A \int [(\vec{\nabla} m_x)^2 + (\vec{\nabla} m_y)^2 + (\vec{\nabla} m_z)^2] dV , \quad (1.19)$$

donde  $A$  se define como la constante de intercambio, la cual, para una red cúbica simple es  $A = JS^2/a$ . Se puede realizar un cálculo análogo para otros tipos de redes cristalinas, obteniendo que para una red cúbica centrada en el cuerpo  $A_{bcc} = 2JS^2/a$  y para una red cúbica centrada en las caras  $A_{fcc} = 4JS^2/a$ . La constante de intercambio puede ser medida experimentalmente y se puede relacionar con la longitud de intercambio  $l_E = \sqrt{A/2\pi M_s^2}$ , la que entrega una estimación de la dimensión en que la energía de intercambio es dominante y, por ende, se espera que la magnetización sea espacialmente uniforme. Para el permalloy, se tiene que la constante de intercambio es  $A = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{erg/cm}$  y la magnetización de saturación es  $M_s = 8 \cdot 10^5 \text{A/m}$ , datos con los que se calcula su longitud de intercambio,  $l_E \approx 5,7 \text{nm}$ .

Así la energía de intercambio es el resultado de las interacciones de corto alcance que existen entre los momentos magnéticos.

### 1.3.4. Energía de anisotropía magnetocristalina

La estructura atómica de un cristal puede inducir direcciones preferenciales para la magnetización. Cuando los momentos magnéticos se dirigen a lo largo de ciertos ejes, los llamados ejes fáciles, la energía se minimiza. Por el contrario, si la magnetización se dirige a lo largo de otras direcciones, o ejes difíciles, la energía se maximiza. Sea  $\hat{n}_V$  un eje fácil, en este caso la energía asociada a este fenómeno se puede escribir como

$$\mathcal{E}_A^V = \int f_{an}(\vec{m}) dV = -K_V \int (\vec{m} \cdot \hat{n}_V)^2 dV , \quad (1.20)$$

donde  $f_{an}$  representa una expresión general para la densidad de energía de anisotropía y  $K_V$  es la constante de anisotropía cristalina de volumen.

La energía asociada a la expresión anterior corresponde a una anisotropía de tipo volumétrica. Los tipos de anisotropías pueden ser de varias clases, tales como: de superficie, de volumen, de interfaz, etc. Si se considera que existe una anisotropía en la superficie del material, la energía se puede escribir como

$$\mathcal{E}_A^S = -K_S \int (\vec{m} \cdot \hat{n}_S)^2 dS , \quad (1.21)$$

donde  $K_S$  es la constante de anisotropía cristalina de superficie,  $\hat{n}_S$  es a dirección normal a la superficie del material y la integral  $dS$  se realiza en cada una de las superficies del material.

### 1.3.5. Ecuaciones de Brown

Las ecuaciones de Brown permiten encontrar la configuración de equilibrio de la magnetización dentro de un cuerpo. En equilibrio estático, la configuración de la magnetización es tal que minimiza la energía libre total,  $\mathcal{E}_T$ , la cual se compone por todos los términos discutidos en la sección anterior,

$$\mathcal{E}_T = \mathcal{E}_Z + \mathcal{E}_D + \mathcal{E}_E + \mathcal{E}_A . \quad (1.22)$$

Para encontrar el mínimo de la energía libre, se debe imponer que la variación de la energía total sea cero ( $\delta\mathcal{E}_T = 0$ ), donde  $\delta\mathcal{E}_T = \mathcal{E}_T(\vec{M} + \delta\vec{M}) - \mathcal{E}_T(\vec{M})$ . A continuación se calculan las variaciones de cada término de la energía por separado.

#### Zeeman

A partir de la ecuación (1.4), se tiene que la variación de la energía de Zeeman es simplemente

$$\delta\mathcal{E}_Z = \mathcal{E}_Z(\vec{M} + \delta\vec{M}) - \mathcal{E}_Z(\vec{M}) = - \int_V \vec{H}_{ext} \cdot \delta\vec{M} dV . \quad (1.23)$$

#### Demagnetizante

Para determinar la variación de la energía demagnetizante, correspondiente a la ecuación (1.7), es necesario aplicar el principio de superposición, el cual establece que el campo magnético producido por un conjunto de magnetizaciones es igual a la suma vectorial de todos los campos individuales generados por cada una de las magnetizaciones, es decir,  $\vec{H}_D(\vec{M}_1 + \vec{M}_2) = \vec{H}_D(\vec{M}_1) + \vec{H}_D(\vec{M}_2)$ :

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E}_D &= \mathcal{E}_D(\vec{M} + \delta\vec{M}) - \mathcal{E}_D(\vec{M}) , \\ &= -\frac{1}{2} \int_V \vec{H}_D(\vec{M} + \delta\vec{M}) \cdot (\vec{M} + \delta\vec{M}) dV + \frac{1}{2} \int_V \vec{H}_D(\vec{M}) \cdot \vec{M} dV , \\ &= -\frac{1}{2} \int_V [\vec{H}_D(\vec{M}) + \vec{H}_D(\delta\vec{M})] \cdot (\vec{M} + \delta\vec{M}) dV + \frac{1}{2} \int_V \vec{H}_D(\vec{M}) \cdot \vec{M} dV , \\ &\approx -\frac{1}{2} \int_V [\vec{H}_D(\vec{M}) \cdot \delta\vec{M} + \vec{H}_D(\delta\vec{M}) \cdot \vec{M}] dV , \text{ (a primer orden en } \delta\vec{M} \text{)} , \\ &= - \int_V \vec{H}_D(\vec{M}) \cdot \delta\vec{M} dV , \end{aligned} \quad (1.24)$$

donde en el último paso se usó el teorema de reciprocidad, el cual establece que

$$\int_{V_1} \vec{M}_1 \cdot \vec{H}_D(\vec{M}_2) dV = \int_{V_2} \vec{M}_2 \cdot \vec{H}_D(\vec{M}_1) dV . \quad (1.25)$$

## Intercambio

Para calcular la variación de la energía de intercambio se utiliza la ecuación (1.19), a partir de la cual se obtiene de manera directa

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{E}_E &= \mathcal{E}_E(\vec{M} + \delta\vec{M}) - \mathcal{E}_E(\vec{M}) , \\ &= 2A \int \left[ \vec{\nabla}m_x \cdot \vec{\nabla}\delta m_x + \vec{\nabla}m_y \cdot \vec{\nabla}\delta m_y + \vec{\nabla}m_z \cdot \vec{\nabla}\delta m_z \right] dV .\end{aligned}\quad (1.26)$$

Al usar que  $\vec{\nabla}m_i \cdot \vec{\nabla}\delta m_i = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}m_i \delta m_i) - \delta m_i \nabla^2 m_i$  (para  $i = \{x, y, z\}$ ), junto con el teorema de la divergencia, se obtiene

$$\delta\mathcal{E}_E = 2A \oint \frac{\partial \vec{m}}{\partial n} \cdot \delta \vec{m} dS - 2A \int \nabla^2 \vec{m} \cdot \delta \vec{m} dV , \quad (1.27)$$

donde  $n$  es la dirección normal a la superficie  $dS$ .

## Anisotropía

A partir de la ecuación (1.20) se tiene que una expresión general para la variación de la energía de anisotropía es

$$\delta\mathcal{E}_{an} = \mathcal{E}_{an}(\vec{M} + \delta\vec{M}) - \mathcal{E}_{an}(\vec{M}) = \int f_{an}(\vec{M} + \delta\vec{M}) dV - \int f_{an}(\vec{M}) dV . \quad (1.28)$$

Si se utiliza una expansión en Taylor en torno a  $\vec{m}$ , a primer orden  $f_{an}(\vec{M} + \delta\vec{M}) \approx f_{an}(\vec{M}) + \frac{\partial f_{an}}{\partial \vec{M}} \cdot \delta\vec{M}$ . Con ello se obtienen las siguientes expresiones, dependiendo de si la anisotropía es de volumen o de superficie, respectivamente,

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{E}_{an}^V &= \int \frac{\partial f_{an}^V}{\partial \vec{M}} \cdot \delta\vec{M} dV , \quad \text{y} \\ \delta\mathcal{E}_{an}^S &= \int \frac{\partial f_{an}^S}{\partial \vec{M}} \cdot \delta\vec{M} dS .\end{aligned}\quad (1.29)$$

## Obtención de ecuaciones

En resumen, la variación de la energía  $\delta\mathcal{E}_T = \delta\mathcal{E}_Z + \delta\mathcal{E}_D + \delta\mathcal{E}_E + \delta\mathcal{E}_A$ , considerando todos los términos calculados, está dada por

$$\delta\mathcal{E}_T = - \int_V \left( \vec{H}_{ext} + \vec{H}_D(\vec{M}) + \frac{2A}{M_s} \nabla^2 \vec{m} - \frac{\partial f_{an}^V}{\partial \vec{M}} \right) \cdot \delta\vec{M} dV + \oint \left( \frac{2A}{M_s} \frac{\partial \vec{m}}{\partial n} + \frac{\partial f_{an}^S}{\partial \vec{M}} \right) \cdot \delta\vec{M} dS . \quad (1.30)$$

Como la magnitud de la magnetización se mantiene constante ( $|\vec{M}|^2 = M_s^2$ ), se tiene que  $|\vec{M} + \delta\vec{M}|^2 \approx \vec{M}^2 + 2\vec{M} \cdot \delta\vec{M} = M_s^2$ , donde sólo se considera el primer orden en  $\delta\vec{M}$ .

Considerando lo anterior se debe cumplir que  $\vec{M} \cdot \delta \vec{M} = 0$ , lo cual se satisface si  $\delta \vec{M} = \vec{M} \times \delta \vec{\theta}$ . Usando que  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ , se obtienen las dos ecuaciones de Brown [44], a partir de la expresión (1.30), considerando las integrales de volumen y de superficie por separado,

$$\vec{M} \times \vec{H}_{eff} = 0, \quad \text{en el volumen,} \quad (1.31a)$$

$$\vec{M} \times \left( 2A \frac{\partial \vec{m}}{\partial n} + \frac{\partial f_{an}^S}{\partial \vec{m}} \right) = 0, \quad \text{en la superficie del material,} \quad (1.31b)$$

donde se ha definido el campo efectivo,  $\vec{H}_{eff}$ , como

$$\vec{H}_{eff} = \vec{H}_{ext} + \vec{H}_D(\vec{M}) + \frac{2A}{M_s} \nabla^2 \vec{m} - \frac{\partial f_{an}^V}{\partial \vec{m}}. \quad (1.32)$$

La primera ecuación de Brown establece que el torque que ejerce el campo efectivo  $\vec{H}_{eff}$  sobre la magnetización de equilibrio debe ser cero. Lo anterior debe estar sujeto a la segunda ecuación de Brown, que corresponde a una condición de borde. Si se realiza el producto cruz de  $\vec{M}$  con esta última condición se obtiene que

$$\begin{aligned} \vec{m} \times \left[ \vec{m} \times \left( 2A \frac{\partial \vec{m}}{\partial n} + \frac{\partial f_{an}^S}{\partial \vec{m}} \right) \right] &= 0, \\ \vec{m} \left[ \vec{m} \cdot \left( 2A \frac{\partial \vec{m}}{\partial n} + \frac{\partial f_{an}^S}{\partial \vec{m}} \right) \right] - \left( 2A \frac{\partial \vec{m}}{\partial n} + \frac{\partial f_{an}^S}{\partial \vec{m}} \right) &= 0, \\ \vec{m} \left[ \vec{m} \cdot \left( \frac{\partial f_{an}^S}{\partial \vec{m}} \right) \right] - \left( 2A \frac{\partial \vec{m}}{\partial n} + \frac{\partial f_{an}^S}{\partial \vec{m}} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Si existe anisotropía superficial uniaxial, se puede escribir  $f_{an}^S = -K_S(\vec{m} \cdot \hat{n}_S)^2$ , por lo que se tiene que

$$A \frac{\partial \vec{m}}{\partial n} = K_S(\vec{m} \cdot \hat{n}_S)[\hat{n}_S - \vec{m}(\vec{m} \cdot \hat{n}_S)]. \quad (1.34)$$

Si la anisotropía superficial es despreciable,  $K_S \approx 0$ , se obtiene la llamada condición de borde libre,

$$\frac{\partial \vec{m}}{\partial n} = 0. \quad (1.35)$$

Si la anisotropía no se puede despreciar, la condición es difícil de implementar numéricamente.

## 1.4. Dinámica de la magnetización: ecuación de Landau-Lifshitz-Slonczewski (LLS)

En la sección anterior se discutió el equilibrio estático de la magnetización. En ésta se discuten los principales términos que constituyen la ecuación que describe la dinámica de la magnetización, los cuales corresponden a precesión, disipación y torque por transferencia de spin.

### 1.4.1. Precesión

Al realizar un estudio clásico se tiene que, cuando un momento magnético,  $\vec{\mu}$ , se encuentra en presencia de un campo magnético,  $\vec{H}$ , experimenta un torque ( $\vec{\tau}$ ) de la forma  $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{H}$ . Este torque se relaciona con la variación de momento angular  $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$ .

Como se discutió al comienzo del presente capítulo, el momento magnético se puede relacionar con el momento angular a través del factor giromagnético  $\vec{\mu} = \gamma\vec{L}$ , donde  $\gamma = gq/2mc$ . Para un electrón,  $\gamma_e = -ge/2m_e c \approx -1,76 \cdot 10^7 \text{ Hz/Oe}$  (con  $g = 2$ ).

En resumen, se tiene que para un momento magnético

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \gamma(\vec{\mu} \times \vec{H}) = -|\gamma|(\vec{\mu} \times \vec{H}), \quad (1.36)$$

donde el signo (-) de la expresión anterior es válido para electrones. Sumando sobre todos los momentos magnéticos de la muestra, la ecuación anterior es equivalente a

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = -|\gamma|(\vec{m} \times \vec{H}_{eff}), \quad (1.37)$$

donde  $\vec{m} = \vec{M}/M_s$  es la magnetización normalizada y se ha considerado que el campo actuando sobre ella es el campo efectivo proveniente de todos los términos discutidos en la sección anterior.

### 1.4.2. Disipación

#### Disipación de Landau-Lifshitz

En 1935 Landau y Lifshitz propusieron un término que describiría el movimiento amortiguado de la magnetización en un material ferromagnético [19]. Este término fue elegido basándose en razones fenomenológicas,

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = -|\gamma_{LL}|\vec{m} \times \vec{H}_{eff} + \alpha|\gamma_{LL}|[\vec{H}_{eff} - \vec{m}(\vec{m} \cdot \vec{H}_{eff})]. \quad (1.38)$$

El factor giromagnético  $\gamma$  se ha denominado como  $\gamma_{LL}$  y  $\alpha$  es una constante que se determina de manera fenomenológica. El primer término dentro de los corchetes proviene de considerar

que el proceso de disipación debe dejar a la magnetización paralela al campo efectivo. Luego, a partir de la condición de que la magnitud del módulo de la magnetización debe permanecer constante, es necesario agregar segundo término dentro de los corchetes. Se tiene que, ocupando la regla del producto punto  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$  y que  $|\vec{m}|^2 = 1$ , lo anterior es equivalente a:

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = -|\gamma_{LL}|[\vec{m} \times \vec{H}_{eff} + \alpha\vec{m} \times (\dot{\vec{m}} \times \vec{H}_{eff})]. \quad (1.39)$$

## Disipación de Gilbert

En 1955, Gilbert propuso una ecuación que es válida en el régimen donde la disipación es grande [45]. La deducción fue realizada usando el formalismo de Lagrange, como se muestra a continuación,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{M}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{M}} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\vec{M}}} = 0, \quad (1.40)$$

donde  $\mathcal{L}$  es el Lagrangeano, el cual contiene el potencial de las fuerzas conservativas y  $\mathcal{F}$  es el funcional disipativo de Rayleigh, el cual representa las fuerzas que no provienen de un potencial.

El Lagrangeano es la suma de las energías cinética y potencial  $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$ , y la energía potencial satisface

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{\vec{M}}} = 0, \quad (1.41a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \vec{M}} = -\vec{H}_{eff}. \quad (1.41b)$$

Además, el funcional de Rayleigh  $\mathcal{F}$  puede ser escrito como

$$\mathcal{F} = \frac{\eta}{2M_s} \int \dot{\vec{M}} \cdot \dot{\vec{M}} dV. \quad (1.42)$$

Reemplazando lo dicho anteriormente en la ecuación (1.40) se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\vec{M}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \vec{M}} = \vec{H}_{eff} - \eta \dot{\vec{m}}. \quad (1.43)$$

A partir de esta última expresión se infiere que debe ser agregado el término  $-\eta \dot{\vec{m}}$  en la ecuación de precesión,

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = -|\gamma_G| \vec{m} \times \left( \vec{H}_{eff} - \eta \frac{d\vec{m}}{dt} \right) = -|\gamma_G| \vec{m} \times \vec{H}_{eff} + \alpha \vec{m} \times \frac{d\vec{m}}{dt}, \quad (1.44)$$

donde se ha usado que  $\gamma_G$  es el factor giromagnético y  $\alpha \equiv |\gamma_G| \eta$ .

## Equivalencia entre la disipación de Landau-Lifshitz y la de Gilbert

Ambas expresiones para la disipación, la de Landau-Lifshitz y la de Gilbert, son matemáticamente equivalentes. Al realizar el producto cruz entre  $\vec{m}$  y la ecuación de Gilbert (1.44) se obtiene que

$$\vec{m} \times \frac{d\vec{m}}{dt} = -|\gamma_G| \vec{m} \times (\vec{m} \times \vec{H}_{eff}) + \alpha \vec{m} \times \left( \vec{m} \times \frac{d\vec{m}}{dt} \right). \quad (1.45)$$

Ocupando la regla del producto cruz  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$  y que  $\vec{M} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = 0$ :

$$\vec{m} \times \frac{d\vec{m}}{dt} = -|\gamma_G| \vec{m} \times (\vec{m} \times \vec{H}_{eff}) - \alpha \frac{d\vec{m}}{dt}. \quad (1.46)$$

Sustituyendo lo anterior en la parte derecha de la ecuación (1.44),

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{m}}{dt} &= -|\gamma_G| \vec{m} \times \vec{H}_{eff} - |\gamma_G| \alpha \vec{m} \times (\vec{m} \times \vec{H}_{eff}) - \alpha^2 \frac{d\vec{m}}{dt}, \\ &= -\frac{|\gamma_G|}{1 + \alpha^2} \vec{m} \times \vec{H}_{eff} - \frac{|\gamma_G| \alpha}{1 + \alpha^2} \vec{m} \times (\vec{m} \times \vec{H}_{eff}). \end{aligned} \quad (1.47)$$

Se observa que la ecuación (1.47) es equivalente a la ecuación (1.39), si  $\gamma_{LL} = \frac{\gamma_G}{1 + \alpha^2}$ . Se tiene que si  $\alpha \ll 1$ , ambos modelos coinciden. Sin embargo, si  $\alpha \gg 1$ , se espera que la magnetización tenga una dinámica rápida de relajación, lo cual no sucede para el modelo de Landau-Lifshitz, pues  $\gamma_{LL} \rightarrow 0$ .

### 1.4.3. Torque por transferencia de spin

En 1996, de manera independiente, Slonczewski [1] y Berger [2] propusieron el fenómeno llamado torque por transferencia de spin, el cual consiste en una transferencia de momentum angular desde una corriente polarizada en spin a un material ferromagnético.

Siguiendo la idea simple de Ralph y Stiles [46] se tiene que, por conservación de momentum angular, el torque por transferencia de spin,  $\vec{\tau}_{stt}$ , actuando sobre un cierto volumen de un material, puede ser calculado integrando la divergencia de la densidad de corriente de spin,  $\mathbf{Q}$ :

$$\vec{\tau}_{stt} = - \int dV \vec{\nabla} \cdot \mathbf{Q}, \quad (1.48)$$

donde a cantidad  $\mathbf{Q}$  es un tensor, cuyas direcciones dependen de la dirección de desplazamiento y del spin de la corriente.

Como se muestra en la figura 1.4, si se considera la dirección espacial  $\hat{x}$ , se tiene que el flujo neto de densidad de corriente de spin a través de la superficie que separa al espaciador y el material 2 es

$$\vec{\tau}_{stt} = A \hat{x} \cdot (\mathbf{Q}_{in} + \mathbf{Q}_{ref} - \mathbf{Q}_{trans}), \quad (1.49)$$

donde  $\mathbf{Q}_{in}$  es la densidad de corriente de spin incidente en el material 2,  $\mathbf{Q}_{ref}$  es la densidad de corriente de spin reflejada y  $\mathbf{Q}_{trans}$  es la densidad de corriente de spin transmitida. Sean los materiales ferromagnéticos tales que sus magnetizaciones son no colineales y forman un ángulo  $\theta$ . Se considera que el primero de ellos, el material 1, tiene su magnetización en la dirección  $\hat{p}$  y actúa como un polarizador de spin de la corriente que fluye hacia el material 2, de modo que  $(\hat{x} \cdot \mathbf{Q}_{in})$  se orienta en la dirección  $\hat{p} = \sin(\theta)\hat{x} + \cos(\theta)\hat{z}$ . Luego, se considera que el material 2 actúa como un filtro perfecto, es decir, sólo transmite corriente de spin en la dirección de su magnetización  $\vec{m} = \hat{z}$ .

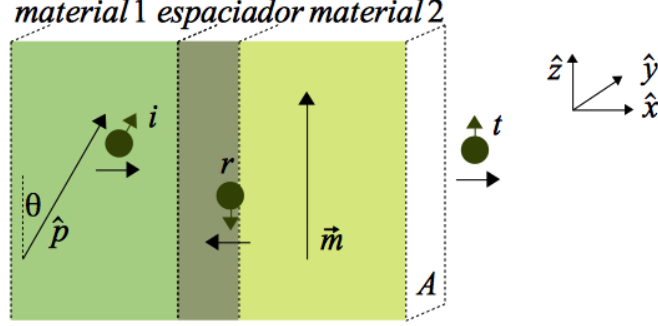


Figura 1.4: Transferencia de momentum angular desde una corriente polarizada en spin, debido al material 1, a los momentos magnéticos del material 2.

Si  $t$  es el coeficiente de transmisión se tiene que  $t_{\uparrow} = 1$  y  $t_{\downarrow} = 0$ . Si  $r$  es el coeficiente de reflexión, se tiene que  $r_{\uparrow} = 0$  y  $r_{\downarrow} = 1$ , con lo cual se obtiene que:

$$\mathbf{Q}_{in} \propto \sin(\theta)\hat{x} + \cos(\theta)\hat{z}, \quad (1.50a)$$

$$\mathbf{Q}_{trans} \propto \cos^2(\theta/2)\hat{z}, \quad (1.50b)$$

$$\mathbf{Q}_{ref} \propto \sin^2(\theta/2)\hat{z}. \quad (1.50c)$$

Con las expresiones anteriores es posible calcular la cantidad de interés

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{in} + \mathbf{Q}_{ref} - \mathbf{Q}_{trans} &\propto \sin(\theta)\hat{x}, \\ &= \vec{m} \times (\vec{m} \times \hat{p}). \end{aligned} \quad (1.51)$$

Finalmente, al escribir la constante de proporcionalidad como  $|\gamma|\tilde{\beta}J$ , se puede concluir que

$$\vec{\tau}_{stt} = |\gamma|\tilde{\beta}J\vec{m} \times (\vec{m} \times \hat{p}). \quad (1.52)$$

El parámetro de proporcionalidad  $\tilde{\beta}$  está dado por  $\tilde{\beta} = \frac{\hbar}{2M_s e L} g(\theta, P)$ , donde  $g(\theta, P)$  es la eficiencia de polarización de spin, parámetro que depende del ángulo  $\theta$  y del factor de polarización de la corriente  $P$ ,  $\hbar$  es la constante de Planck dividida por  $2\pi$ ,  $J$  es la densidad de corriente que atraviesa el nanopilar,  $M_s$  es la magnetización de saturación,  $e$  es magnitud de la carga del electrón y  $L$  el grosor del material. Los datos antes mencionados ( $M_s$  y  $L$ ) corresponden al material 2, sobre el cual actúa el torque por transferencia de spin.

Este torque resultante debe ser incluido en la ecuación que describe la dinámica de la magnetización. Se encuentra en el plano definido por  $\vec{m}$  y  $\hat{p}$  y, dependiendo del signo de la corriente aplicada, puede reforzar la disipación o actuar como una anti-disipación. De esta



forma, el torque por transferencia de spin es útil para la estabilización de la magnetización en su posición de equilibrio, o, por el contrario, para desestabilizarla y llevarla a otra situación de equilibrio, la cual puede ser dinámica (auto-oscilaciones) o estática (inversión de la magnetización).

En 1996 Slonczewski determinó una expresión para el factor  $g$  considerando que el sistema es simétrico, es decir, que el material 1 es igual al material 2, y que el espaciador entre los dos materiales es un conductor, con lo cual se tiene que

$$g(\theta, P) = \left[ -4 + (3 + \cos \theta) \frac{(1 + P)^3}{4P^{3/2}} \right]^{-1}. \quad (1.53)$$

Al considerar que el nanopilar es asimétrico, se tiene que, el caso más general puede ser escrito de la siguiente forma [47],

$$g(\theta, P) = \frac{q_+}{B_0 + B_1 \cos \theta} + \frac{q_-}{B_0 - B_1 \cos \theta}, \quad (1.54)$$

donde  $q_-$  y  $q_+$  son funciones de  $P$ . Si el sistema es simétrico se cumple que  $q_- = 0$ , obteniéndose la expresión (1.53). Por simplicidad, en esta tesis se considera que el parámetro  $g$  es constante, al evaluarlo en  $\theta = 0$ , por tratarse de capas ferromagnéticas con magnetizaciones paralelas.

En el año 2002 [48], Zhang *et al.* estudiaron la interacción entre la magnetización y la acumulación de spin de los electrones de conducción en la capa libre de una estructura multicapa. Se encontró que, adicionalmente al torque por transferencia de spin antes discutido y denominado torque en el plano, existe una nueva contribución llamada torque por transferencia de spin fuera del plano, que tiene la forma

$$\vec{\tau}_\perp = |\gamma| \tilde{\beta}_\perp J (\vec{m} \times \hat{p}). \quad (1.55)$$

Este nuevo torque tiene su dirección fuera del plano definido por  $\vec{m}$  y  $\hat{p}$  y simula la acción de un campo, lo que significa que puede modificar la energía. Este torque es prácticamente cero cuando el espaciador entre las capas ferromagnéticas es un metal, por lo que no se considera en la mayor parte de esta tesis.

#### 1.4.4. Ecuación de Landau-Lifshitz-Slonczewski (LLS)

En resumen, incluyendo los tres términos antes discutidos en la ecuación que describe la dinámica de la magnetización, la variación de la magnetización debido a una corriente polarizada en spin está dada por

$$\dot{\vec{m}} = -|\gamma| \vec{m} \times \vec{H}_{eff} + \alpha \vec{m} \times \dot{\vec{m}} + |\gamma| \tilde{\beta} J \vec{m} \times (\vec{m} \times \hat{p}), \quad (1.56)$$

donde  $\hat{p}$  es la dirección de la magnetización de la capa fija y, por ende, la dirección de la polarización de los spines de la corriente. En la figura 1.5 se muestra geoméricamente el efecto de cada uno de los términos discutidos.

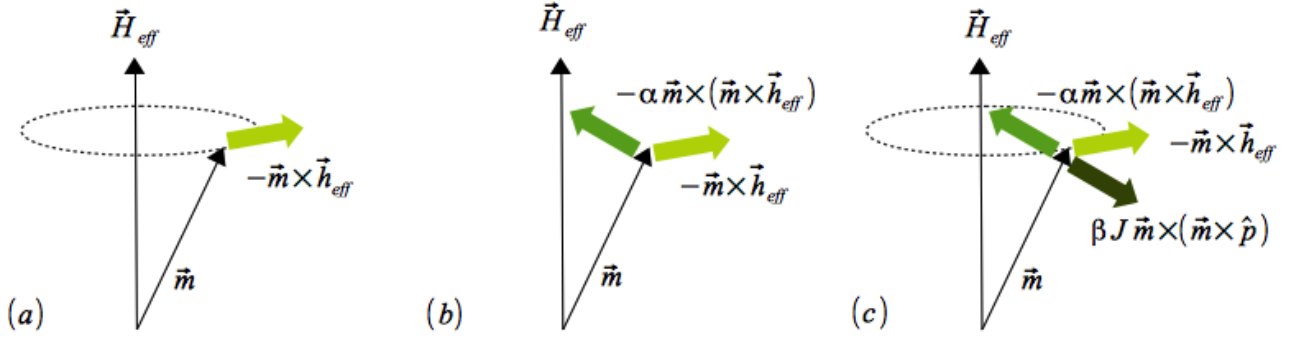


Figura 1.5: Representación del efecto de cada uno de los términos de la ecuación de LLS en la dinámica de la magnetización. (a) Precesión. (b) Precesión y disipación. (c) Precesión, disipación y torque por transferencia de spin, donde la corriente es tal que este último actúa como un término de anti-disipación ( $J > 0$ ).

Para transformar la ecuación anterior en una análoga con disipación de la forma Landau-Lifshitz, se realizan pasos similares a los realizados en la sección 1.4.2. Al realizar el producto cruz entre la ecuación anterior y  $\vec{m}$  se obtiene

$$\vec{m} \times \frac{d\vec{m}}{dt} = -|\gamma|\vec{m} \times \{\vec{m} \times [\vec{H}_{eff} - \tilde{\beta}J(\vec{m} \times \hat{p})]\} - \alpha \frac{d\vec{m}}{dt}. \quad (1.57)$$

Se define  $\vec{H}_t = \vec{H}_{eff} - \vec{H}_{stt} = \vec{H}_{eff} - \tilde{\beta}J(\vec{m} \times \hat{p})$ , y se reemplaza (1.57) en (1.56), con lo que se obtiene:

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = -\frac{|\gamma|}{1+\alpha^2} \left[ \vec{m} \times \vec{H}_t + \alpha \vec{m} \times (\vec{m} \times \vec{H}_t) \right]. \quad (1.58)$$

Esta ecuación puede ser normalizada, quedando, finalmente como

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = -\vec{m} \times \vec{h}_t - \alpha \vec{m} \times (\vec{m} \times \vec{h}_t). \quad (1.59)$$

En la ecuación anterior se utilizan las cantidades adimensionales  $t \rightarrow \frac{4\pi M_s |\gamma|}{1+\alpha^2} t$  y  $\vec{h}_t = \vec{H}_t / 4\pi M_s = \vec{h}_{eff} - \beta J(\vec{m} \times \hat{p})$ , donde se ha definido  $\beta = \tilde{\beta} / 4\pi M_s = \frac{2\pi \hbar g}{(4\pi M_s)^2 eL}$ . Para el caso de una capa de permalloy, con un espesor de  $5nm.$ , y considerando una eficiencia de polarización  $g = 0,17$  ( $P \approx 0,46$ ), se tiene que  $\beta \approx \frac{1}{0,72 \cdot 10^{10} A/cm^2}$ . La ecuación (1.59) satisface  $\vec{m} \cdot \frac{d\vec{m}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d|\vec{m}|^2}{dt} = 0$ . Es decir, la magnitud de la magnetización se conserva.

## 1.5. Nanopilares

El fenómeno de torque por transferencia de spin ha sido estudiado en, principalmente, dos geometrías: los nano-contactos y los nano-pilares, los que se muestran en la figura 1.6. En un nano-contacto la corriente se inyecta por una pequeña zona a capas extendidas.

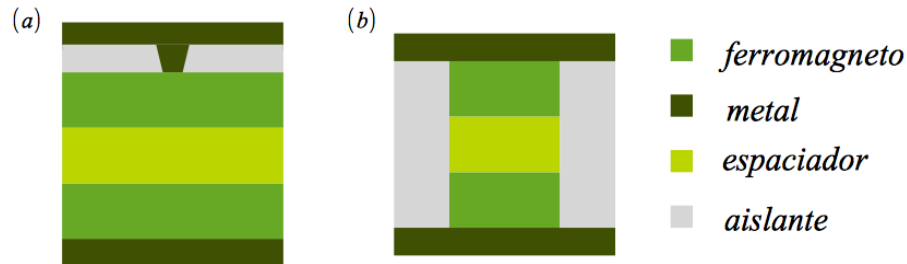


Figura 1.6: Estructuras donde se estudia el fenómeno de torque por transferencia de spin. (a) Nano-contacto. (b) Nano-pilar.

Los nanopilares de nuestro interés son dispositivos compuestos por dos capas ferromagnéticas (por ejemplo de permalloy), las cuales se encuentran separadas por un espaciador no magnético. Dependiendo de la naturaleza del espaciador estas estructuras son denominadas de dos formas. Si el espaciador es un aislante, se denominan uniones túnel magnéticas (MTJ), y si el espaciador es un metal, se denominan válvulas de spin. Los dispositivos estudiados en esta tesis corresponden a nanopilares con espaciador metálico no magnético, específicamente cobre (*Cu*).

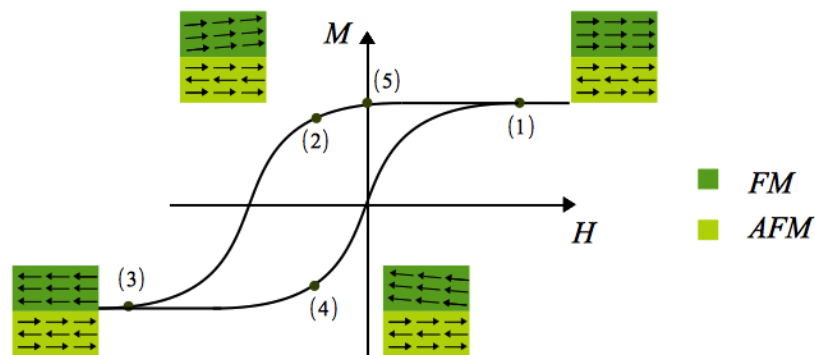


Figura 1.7: Representación del fenómeno de exchange bias. Se muestra el ciclo de histéresis del material ferromagnético. Los puntos (1) y (3) representan estados en los cuales el ferromagneto se encuentra saturado. Los puntos (2) y (4) representan estados donde el campo externo ha desviado la magnetización del estado saturado. El punto (5) representa un estado saturado del ferromagneto para un campo externo nulo.

Para fijar la magnetización de una de las capas, la llamada capa fija o dura, se pueden seguir dos caminos. Esta capa puede ser mucho más gruesa que la otra capa ferromagnética o bien se hace uso del fenómeno conocido como exchange bias [49], el que consiste en poner en contacto la capa ferromagnética con una capa antiferromagnética (AFM). Este último

fenómeno se representa en la figura 1.7, donde el material anti-ferromagnético traslada el ciclo de histéresis del material ferromagnético, de modo que es posible tener un material ferromagnético saturado en ausencia de campos magnéticos aplicados.

El rol del espaciador metálico es desacoplar la interacción que existe entre ambas capas ferromagnéticas, éste debe satisfacer tres condiciones. La primera es que debe ser lo suficientemente grueso para poder despreciar la interacción dipolar entre las capas magnéticas. La segunda corresponde a que la corriente que atraviesa el nanopilar no debe perder totalmente su polarización de spin, es decir, no puede ser muy grueso. La tercera condición es que debe ser posible despreciar la interacción de intercambio indirecta llamada Ruderman-Kittel-Kasuya-Yosida o RKKY [50, 51]. Esta última (RKKY), tiene un comportamiento oscilatorio y decae con la distancia, tal que la forma general para el acoplamiento entre las capas es  $J_{RKKY}(x) \sim \cos x/x^3$ , como se muestra en la figura 1.8.

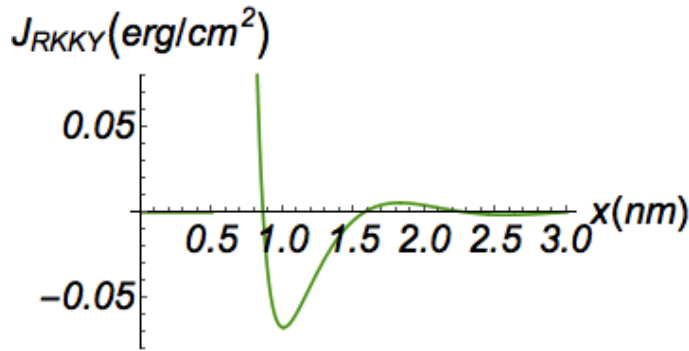


Figura 1.8: Variación de la energía de acoplamiento RKKY, en función de la distancia entre ambas capas. Se observa que esta interacción es oscilatoria y decae con la distancia. La energía graficada corresponde a la de una tricapa Co/Au(111)/Co según [52].

La otra capa ferromagnética, la llamada capa libre o suave, tiene la propiedad de que su magnetización es libre de moverse en respuesta al paso de corriente a través de la estructura. Cuando se inyecta una corriente que atraviesa el nanopilar, el spin de ésta se polariza al atravesar la capa fija. Luego, la corriente polarizada pasa a través del espaciador, manteniendo su polarización, para finalmente atravesar la capa libre, cuya magnetización experimenta un torque por transferencia de spin, siendo posible manipular la dinámica de la magnetización mediante la inyección de corriente continua. En la figura 1.9 se representan cada una de las capas mencionadas anteriormente, junto con una representación del fenómeno de torque por transferencia de spin.

La manipulación de la magnetización de la capa libre mediante corriente polarizada en spin es efectiva para grandes densidades de corrientes, del orden de los  $10^7$ - $10^8 A/cm^2$ . Si una densidad de corriente de  $10^8 A/cm^2$  atraviesa un nanopilar circular de diámetro  $100nm$ . la corriente es  $I \approx 8mA$ . Mientras más pequeño es el dispositivo, menor es la corriente necesaria para manipular la magnetización.

Considerando estas grandes densidades de corriente, se han realizado algunos estudios donde se estima el aumento de temperatura debido al calentamiento por efecto Joule [53, 54, 55]. Uno de ellos [56] propone un modelo simple, donde la potencia disipada ( $P$ ) en el nanopilar es  $P = I^2 R = J^2 A d / \sigma$  donde  $J$  es la densidad de corriente,  $A$  es el área transversal

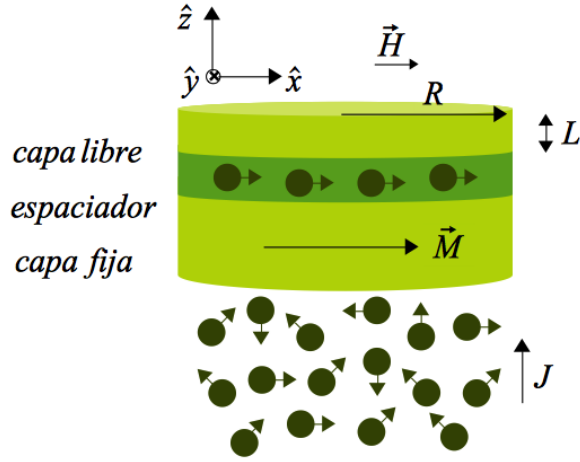


Figura 1.9: Nanopilar formado por dos capas ferromagnéticas, la capa libre y la capa fija, separadas por un espaciador metálico no magnético. La capa libre es un disco de radio  $R$  y espesor  $L$  a la cual se le aplica un campo externo en el plano. Se inyecta una densidad de corriente,  $J$ , cuyos spines se polarizan cuando atraviesan la capa fija y luego interactúan con los momentos magnéticos de la capa libre.

del nanopilar,  $I/A = J$ , la resistencia es  $R = L/A\sigma$ , con  $L$  es su espesor y  $\sigma$  su conductividad eléctrica. Lo anterior, más la ecuación de calor estacionaria en el tiempo que corresponde a  $\nabla^2 T = -P/\kappa$ , con  $\kappa$  la conductividad térmica, junto con algunas otras aproximaciones, hacen posible deducir que la variación de temperatura debida a la corriente es

$$\Delta T \propto \sqrt{A} J^2 L / 2\pi\sigma\kappa. \quad (1.60)$$

Esta expresión analítica ha sido evaluada para algunos materiales considerando una densidad de corriente  $J = 10^8 A/cm^2$ , encontrándose que el aumento de temperatura es del orden de unos cuantos grados Kelvin. Al realizar la comparación con resultados obtenidos experimentalmente se encuentra que concuerdan.

El torque por transferencia de spin puede excitar dos tipos cualitativamente diferentes de comportamientos magnéticos, la inversión desde una orientación magnética estática de equilibrio a otra [3, 4, 5] o un estado de cuasi-equilibrio dinámico en el cual la magnetización precesa (nano-osciladores) [7, 8, 9]. La oscilación de la magnetización se puede traducir en una variación de resistencia o voltaje, gracias al efecto de magneto resistencia gigante (GMR) [57, 58], a través de la siguiente expresión simplificada:

$$R(\theta) = \frac{R_{AP} + R_P}{2} - \frac{R_{AP} - R_P}{2} \cos \theta. \quad (1.61)$$

donde  $\theta$  se define como el ángulo formado entre la magnetización de la capa fija y la magnetización de la capa libre. Si las magnetizaciones son anti-paralelas ( $\theta = \pi$ ) se tiene que  $R(\pi) = R_{AP}$ , como se muestra en la figura 1.10(a). Si ambas magnetizaciones son paralelas ( $\theta = 0$ ) se tiene que  $R(0) = R_P$ , como se esquematiza en la figura 1.10(b). En la figura 1.10(c), se grafica la resistencia en función del ángulo  $\theta$  (ecuación (1.61)).

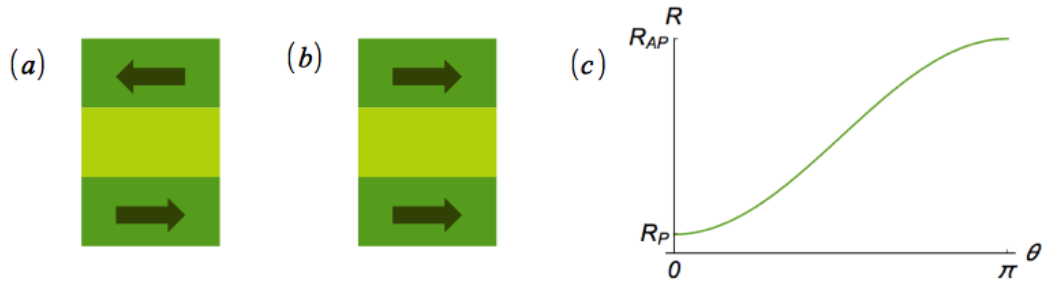


Figura 1.10: La resistencia depende de las direcciones relativas entre las magnetizaciones. (a) Estado anti-paralelo cuya resistencia es máxima ( $R = R_{AP}$ ). (b) Estado paralelo cuya resistencia es mínima ( $R = R_P$ ). (c) Variación de la resistencia en función del ángulo formado entre la magnetización de la capa fija y la magnetización de la capa libre.

Si  $\hat{p} = \hat{x}$ , se tiene que

$$\cos \theta = \hat{p} \cdot \vec{m} = m_x \Rightarrow R(m_x) = \frac{R_{AP} + R_P}{2} - \frac{R_{AP} - R_P}{2} m_x, \quad (1.62)$$

obteniéndose la resistencia en función de la componente  $m_x$  de la magnetización de la capa libre.

## 1.6. Configuración con corriente polarizada y campo aplicado en el plano

Debido a la naturaleza no lineal de la ecuación de LLS, ésta sólo puede ser resuelta de manera analítica en casos muy específicos. Por ello el método más utilizado para estudiar la dinámica de la magnetización es resolver la ecuación de LLS numéricamente. Una de las aproximaciones más utilizadas, la cual es fácil de implementar numéricamente, es la llamada aproximación macro-spin, que consiste en asumir que la magnetización en toda la muestra es uniforme, modelándose el sistema (cada capa) como un sólo momento magnético macroscópico. Para considerar las no uniformidades de la magnetización generalmente se realizan simulaciones micromagnéticas. En éstas, el material en estudio se divide en pequeñas celdas, donde cada lado de la celda unitaria debe tener una longitud del orden de la longitud de intercambio, considerando que cada una de ellas presenta una magnetización uniforme y la variación entre celdas vecinas es suave.

El fenómeno de torque por transferencia de spin ha sido muy estudiado en la configuración donde, tanto la dirección de polarización del spin de la corriente aplicada como la dirección del campo externo uniforme aplicado, son paralelas al plano de la capa libre (figura 1.9). Al respecto es posible encontrar numerosos trabajos experimentales, numéricos y teóricos al respecto.

En el año 2003 [7] se realizó un estudio experimental y numérico considerando la aproximación de macro-spin. En él se obtuvo el diagrama de fases de un nanopilar con magnetización en el plano, el cual, a grandes rasgos, se representa en la figura 1.11(a). En él es posible distinguir, principalmente cuatro estados distintos; dinámica de auto-oscilación en el plano (IP), la que consiste en una auto-oscilación de la magnetización con amplitud pequeña, la cual aumenta con el aumento de la corriente aplicada y cuyo eje de giro se encuentra aproximadamente en el plano de la capa libre; dinámica de auto-oscilación fuera del plano (OP), que corresponde a una auto-oscilación de la magnetización cuya amplitud es grande y decrece con el aumento de la corriente aplicada, cuyo eje de giro está fuera del plano; solución estática paralela (P), donde la magnetización tiene la misma dirección que el campo externo aplicado; y solución estática antiparalela (AP), donde la magnetización es antiparalela a la dirección del campo externo aplicado. Cada uno de los cuatro estados posibles se representan en la figura 1.11(b). En esta figura se observa que, bajo cierta corriente aplicada, sólo es posible observar el estado P. A medida que se aumenta la corriente por sobre cierto umbral, es posible comenzar a observar el estado IP. Al seguir aumentando la corriente se observa el llamado estado OP, y si se sigue aumentando la corriente aplicada, finalmente se obtiene el estado AP. Existe una zona donde existe biestabilidad y es posible observar el estado P o AP.

Experimentalmente se observa una zona que fue denominada W, la cual no es posible explicar mediante la aproximación de macro-spin. Se ha intentado explicar mediante simulaciones micromagnéticas [26, 27, 28], y se ha concluido que en esa zona la dinámica de la magnetización no es coherente, lo que es causado por las inhomogeneidades de los campos locales.

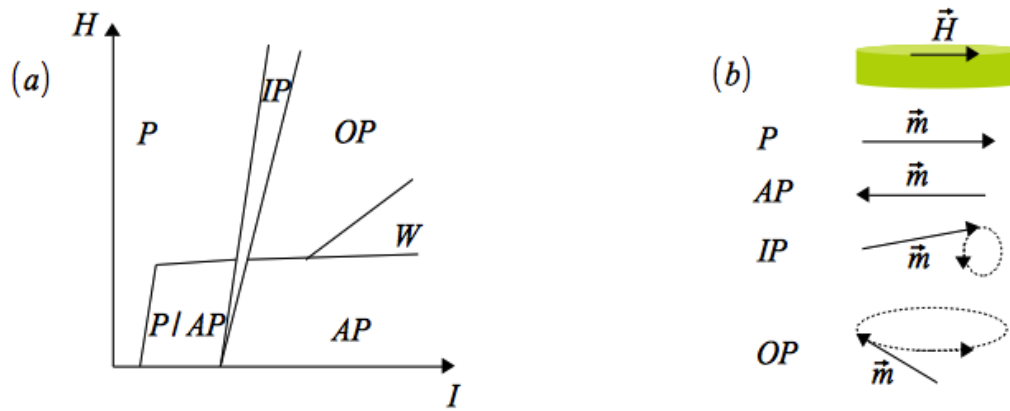


Figura 1.11: (a) Diagrama de fases que muestra los estados de la magnetización en función de las magnitudes de la corriente aplicada y el campo aplicado. (b) Representación de la magnetización correspondiente a cada uno de los estados posibles.

Si bien tanto la aproximación demacro-spin como las simulaciones micromagnéticas han tenido éxito en la explicación de diversos resultados experimentales, también ha sido imposible explicar algunos aspectos, como por ejemplo los efectos no lineales y la dependencia de la frecuencia de oscilación en la corriente. Ésto hace necesario estudiar los efectos de las no uniformidades de la magnetización utilizando un método alternativo a las simulaciones micromagnéticas usuales.



# Capítulo 2

## Formalismo Hamiltoniano

En este capítulo se presenta el formalismo a utilizar para estudiar la dinámica de la magnetización en esta tesis. En primer lugar se describe el sistema y geometría en estudio, éste es la capa libre de una estructura nanopilar, junto con la transformación de variables que es conveniente realizar para obtener una mejor descripción y resultados analíticos. Luego, a partir de la ecuación que describe la dinámica de la magnetización se determinan las ecuaciones que describen la evolución temporal para las nuevas variables introducidas, además de las expresiones para los distintos términos que componen la energía. Finalmente, las nuevas variables que son funciones del espacio y del tiempo se proyectan en una base, la que es ortogonal en la geometría en cuestión, permitiendo separar ambas dependencias.

### 2.1. Sistema en estudio y transformación de coordenadas

El sistema en estudio es una capa libre de un nanopilar, de geometría circular y delgada, éste es, un disco ferromagnético de sección transversal circular fabricado de permalloy ( $Ni_{80}Fe_{20}$ ). En ella nos interesa estudiar la dinámica de la magnetización inducida por la inyección de una corriente polarizada en spin.

Para un nano-disco, la configuración de la magnetización de mínima energía depende de la relación de aspecto  $\xi = L/R$ , donde  $L$  y  $R$  representan el espesor y el radio del disco, respectivamente. Se han realizado diversos trabajos numéricos [59, 60], teóricos [61, 62, 63] y experimentales [64], en los cuales se ha determinado que estas estructuras muestran tres estados fundamentales: un estado casi saturado en el plano (IP), un estado casi saturado fuera del plano (OP) y un estado vórtice (V). En las figuras 2.1(a)-(b)-(c), se muestran estos estados y en la figura 2.1(d) se muestra un esquema del diagrama de fases de un nano-disco.

En el desarrollo de esta tesis se considera que el disco posee las siguientes dimensiones: un espesor menor al largo de intercambio ( $L < l_E$ ), lo que permite asumir que la magnetización a lo largo de su eje es constante ( $L = 5\text{nm.}$ ), y un radio que varía entre 50nm. y 150nm. Considerando estos parámetros geométricos, el estado de mínima energía corresponde al estado casi saturado en el plano, incluso en ausencia de campo magnético aplicado.

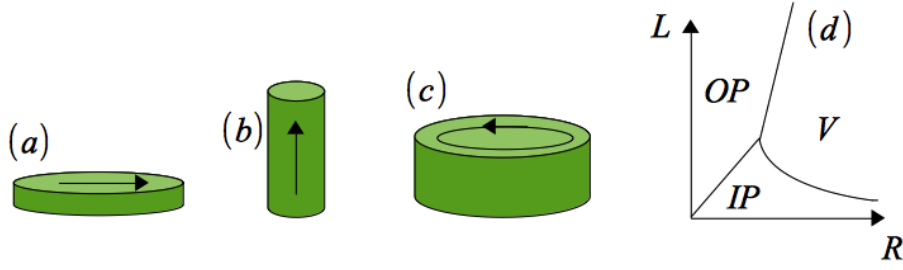


Figura 2.1: (a) Estado saturado en el plano (IP). (b) Estado saturado fuera del plano (OP). (c) Estado tipo vórtice. (d) Diagrama de fases correspondiente al estado de la magnetización de mínima energía de un disco, en función del radio y el espesor del disco.

Para estudiar la dinámica de la magnetización de la capa libre mediante el formalismo Hamiltoniano [36, 21, 37], es necesario utilizar la ecuación de Landau-Lifshitz-Slonczewski (LLS),

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = -\vec{m} \times (\vec{h}_{eff} + \vec{h}_{stt}) - \alpha \vec{m} \times [\vec{m} \times (\vec{h}_{eff} + \vec{h}_{stt})], \quad (2.1)$$

la que está normalizada según lo discutido en el capítulo anterior (ec. (1.59)).

Como la ecuación de LLS satisface la condición de que la magnitud de la magnetización se debe conservar ( $|\vec{m}^2| = 1$ ), las tres componentes de la magnetización no son independientes entre sí, por lo que son necesarias sólo dos de ellas para describir la dinámica. Por esta razón, y porque la magnetización de equilibrio,  $\vec{m}^{eq}$ , es casi saturada en el plano (específicamente en el eje  $\hat{x}$ , donde  $\vec{m}^{eq} \approx m_x \hat{x}$ ), es conveniente introducir la variable compleja  $a(\vec{\rho}, t)$  para describir la dinámica de la magnetización mediante la transformación clásica de Holstein-Primakoff

$$\left. \begin{aligned} m_x &= 1 - aa^* \\ m_y &= \frac{a-a^*}{2i} \sqrt{2 - aa^*} \\ m_z &= \frac{a+a^*}{2} \sqrt{2 - aa^*} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow a = \frac{im_y + m_z}{\sqrt{1 + m_x}}, \quad (2.2)$$

donde  $a$  y  $a^*$  son los análogos clásicos de los operadores de creación y aniquilación en Mecánica Cuántica, respectivamente, y representan una perturbación al estado de equilibrio inicial.

Es directo, a través de la regla de la cadena, expresar la ecuación para la evolución temporal de la variable compleja  $a$  en función de la magnetización:  $da/dt = \partial a / \partial \vec{m} \cdot \dot{\vec{m}}$ . De este modo es posible convertir la ecuación de LLS, para las dos componentes independientes de la magnetización, en una ecuación para la variable compleja  $a$  (la ecuación de movimiento para  $a^*$  se obtiene al tomar el complejo conjugado de la ecuación de movimiento para  $a$ ).

## 2.2. Ecuaciones para las variables $a$ y $a^*$

En relación a la obtención de la ecuación de movimiento para las nuevas variables  $a$  y  $a^*$ , es necesario usar la siguiente identidad

$$\frac{\partial \vec{m}}{\partial a^*} = i \left( \frac{\partial a}{\partial \vec{m}} \times \vec{m} \right). \quad (2.3)$$

Asimismo la energía total normalizada es

$$\mathcal{U} \equiv \frac{\mathcal{E}}{4\pi M_s} = \frac{1}{4\pi M_s} \int \mathcal{W} dV, \quad (2.4)$$

donde  $\mathcal{W}$  es la densidad de energía magnética. Además se utilizan la siguientes propiedades:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}), \quad (2.5a)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}). \quad (2.5b)$$

El cálculo se realiza dividiendo la ecuación de LLS en dos:

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = \underbrace{-\vec{m} \times (\vec{h}_{eff} + \vec{h}_{stt})}_{\text{primer término}} \underbrace{-\alpha \vec{m} \times [\vec{m} \times (\vec{h}_{eff} + \vec{h}_{stt})]}_{\text{segundo término}}, \quad (2.6)$$

donde se tiene que

$$\vec{h}_{eff} = -\frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \vec{m}}, \quad (2.7a)$$

$$\vec{h}_{stt} = -\beta J (\vec{m} \times \hat{p}). \quad (2.7b)$$

### 2.2.1. Primer término

A continuación se muestra paso a paso la obtención de la primera parte de la ecuación,

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\partial a}{\partial \vec{m}} \cdot \left[ \vec{m} \times (\vec{h}_{eff} + \vec{h}_{stt}) \right], && \text{por (2.6)}, \\ &= -(\vec{h}_{eff} + \vec{h}_{stt}) \cdot \left( \frac{\partial a}{\partial \vec{m}} \times \vec{m} \right), && \text{por (2.5a)}, \\ &= i(\vec{h}_{eff} + \vec{h}_{stt}) \cdot \frac{\partial \vec{m}}{\partial a^*}, && \text{por (2.3)}, \\ &= -i \left( \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \vec{m}} \cdot \frac{\partial \vec{m}}{\partial a^*} \right) - i\beta J (\vec{m} \times \hat{p}) \cdot \frac{\partial \vec{m}}{\partial a^*}, && \text{por (2.7a) y (2.7b)}, \\ &= -i \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta a^*} - i\beta J \hat{p} \cdot \left( \frac{\partial \vec{m}}{\partial a^*} \times \vec{m} \right), && \text{por la regla de la cadena y (2.5a)}. \end{aligned}$$

Es así que, la parte conservativa corresponde a una ecuación Hamiltoniana. En el desarrollo de esta tesis se considera que la polarización de la capa fija está en el plano del nano-disco, específicamente se escoge  $\hat{p} = \hat{x}$ , de donde se infiere que

$$\frac{da}{dt} = -i \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta a^*} + \beta J \left( a - \frac{a^2 a^*}{2} \right). \quad (2.8)$$

Dicho lo anterior, es posible definir la energía potencial compleja  $\mathcal{U}^t = \mathcal{U}^{eff} + i\mathcal{U}^{stt}$ , donde:

$$\mathcal{U}^{stt} = \beta J \int aa^* (1 - aa^*/4) dV . \quad (2.9)$$

Al utilizar esta expresión se concluye que

$$\frac{da}{dt} = -i \frac{\delta \mathcal{U}^t}{\delta a^*} . \quad (2.10)$$

### 2.2.2. Segundo término

A partir de los cálculos realizados para el primer término, el segundo término satisface

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= i\alpha [\vec{m} \times (\vec{h}_{eff} + \vec{h}_{stt})] \cdot \frac{\partial \vec{m}}{\partial a^*} , && \text{por los cálculos anteriores ,} \\ &= i\alpha \left( \frac{\partial \vec{m}}{\partial a^*} \times \vec{m} \right) \cdot (\vec{h}_{eff} + \vec{h}_{stt}) , && \text{por (2.5a) ,} \\ &= -i\alpha \left[ \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \vec{m}} + \beta J (\vec{m} \times \hat{p}) \right] \cdot \left( \frac{\partial \vec{m}}{\partial a^*} \times \vec{m} \right) , && \text{por (2.7a) y (2.7b) ,} \\ &= -i\alpha \left[ \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \vec{m}} \cdot \left( \frac{\partial \vec{m}}{\partial a^*} \times \vec{m} \right) - \beta J \hat{p} \cdot \frac{\partial \vec{m}}{\partial a^*} \right] , && \text{por (2.5b) ,} \\ &= -i\alpha \left[ \left( \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta a^*} \frac{\partial a^*}{\partial \vec{m}} + \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta a} \frac{\partial a}{\partial \vec{m}} \right) \cdot \left( \frac{\partial \vec{m}}{\partial a^*} \times \vec{m} \right) - \beta J \hat{p} \cdot \frac{\partial \vec{m}}{\partial a^*} \right] , && \text{por } \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \vec{m}} = \left( \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta a} \frac{\partial a}{\partial \vec{m}} + \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta a^*} \frac{\partial a^*}{\partial \vec{m}} \right) . \end{aligned}$$

Es necesario calcular las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial \vec{m}} \cdot \left( \frac{\partial \vec{m}}{\partial a^*} \times \vec{m} \right) &= ia^2 \frac{(4 - aa^*)}{(8 - 4aa^*)} , \\ \frac{\partial a^*}{\partial \vec{m}} \cdot \left( \frac{\partial \vec{m}}{\partial a^*} \times \vec{m} \right) &= i \frac{(-8 + 4aa^* - a^2 a^{*2})}{4(2 - aa^*)} . \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta lo anterior se obtiene como resultado que

$$\frac{da}{dt} = \alpha \left[ \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta a^*} \frac{(8 - 4aa^* + a^2 a^{*2})}{(4aa^* - 8)} + \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta a} a^2 \frac{(aa^* - 4)}{(4aa^* - 8)} - i\beta J a \right] , \quad (2.11)$$

lo cual, utilizando la definición para la energía compleja  $\mathcal{U}^t$ , es equivalente a escribir

$$\frac{da}{dt} = i\alpha \left[ -i \frac{\delta \mathcal{U}^t}{\delta a^*} \frac{(8 - 4aa^* + a^2 a^{*2})}{(4aa^* - 8)} - i \frac{\delta \mathcal{U}^t}{\delta a} a^2 \frac{(aa^* - 4)}{(4aa^* - 8)} \right] . \quad (2.12)$$

En resumen, la ecuación de LLS se convierte en la siguiente ecuación para la variable  $a$ ,

$$i \frac{da}{dt} = \frac{\delta \mathcal{U}^t}{\delta a^*} + i\alpha \left[ \frac{\delta \mathcal{U}^t}{\delta a^*} \frac{(8 - 4aa^* + a^2 a^{*2})}{(4aa^* - 8)} + \frac{\delta \mathcal{U}^t}{\delta a} a^2 \frac{(aa^* - 4)}{(4aa^* - 8)} \right] , \quad (2.13)$$

la cual, de manera resumida, puede ser escrita también como una ecuación de Hamilton perturbada para la variable  $a$ ,

$$i\dot{a} = \frac{\delta\mathcal{U}^{eff}}{\delta a^*} + \mathcal{F}, \quad (2.14)$$

donde la primera parte de la expresión está asociada a la parte conservativa del problema y se tiene que  $\mathcal{U}^{eff} = \mathcal{U}$  es real; y la segunda parte, correspondiente a  $\mathcal{F}$ , representa la perturbación al sistema mediante la disipación y el torque por transferencia de spin.

## 2.3. Expresiones para la energía

Si se considera que la perturbación al estado completamente saturado es pequeña, se puede aproximar  $\sqrt{2 - aa^*} \approx \sqrt{2} \left(1 - \frac{aa^*}{4}\right)$ . Por consiguiente, es posible escribir la energía de la siguiente forma,  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 + \mathcal{U}^1 + \mathcal{U}^2 + \dots$ , donde el superíndice indica el orden en la variable  $a$ . Se tiene que  $\mathcal{U}^0$  no afecta a la dinámica y  $\mathcal{U}^1$  es cero. Por ello la expansión comienza en el segundo orden y se puede escribir  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^2 + \mathcal{U}^{int}$ , donde toda la información acerca de la interacción entre los distintos modos de oscilación se encuentra en  $\mathcal{U}^{int} = \mathcal{U}^3 + \mathcal{U}^4 + \dots$ . Como cada término en la expansión es obtenido en función de un parámetro pequeño, cada término subsiguiente es menor que el anterior, por lo que la dinámica del sistema estará determinado por los primeros términos de la expansión, siendo suficiente, en general, sólo tomar en cuenta  $\mathcal{U}^3$  y  $\mathcal{U}^4$ . De esta forma la ecuación para la variable  $a$  es una ecuación no lineal, la cual a orden tres es de la forma:

$$i \frac{da}{dt} \approx (1 - i\alpha) \frac{\delta \mathcal{U}^t}{\delta a^*} + i\alpha \frac{a^2 \delta \mathcal{U}^t}{2 \delta a}, \quad (2.15)$$

donde en el primer término la energía se considera hasta orden cuatro, y en el segundo hasta orden dos. Además se tiene que  $\mathcal{U}^{eff} = \mathcal{U}_Z + \mathcal{U}_E + \mathcal{U}_D$ , donde cada uno de los términos corresponde a las energías asociadas a los campos: de Zeeman (campo aplicado más campo de Oersted), de intercambio y demagnetizante, respectivamente. A continuación se expresan cada uno de los términos de la energía en función de la variable  $a$ .

### 2.3.1. Campo aplicado

Se aplica un campo constante en el plano del disco, específicamente se escoge el eje  $\hat{x}$  y se considera el campo normalizado dado por  $h_x = H_x/4\pi M_s$ . La densidad de energía está dada por la expresión

$$\mathcal{W}_X = -\vec{H}_{ext} \cdot \vec{M} = -H_x M_x = -H_x M_s (1 - aa^*). \quad (2.16)$$

Para obtener la energía total se integra en el volumen del disco. El término constante de la expresión anterior no afecta la dinámica, por lo que no se considera.

$$\mathcal{U}_X = \frac{1}{4\pi M_s^2} \int \mathcal{W}_X dV = h_x \int aa^* dV. \quad (2.17)$$

### 2.3.2. Campo de intercambio

La densidad de energía del campo de intercambio, en coordenadas cartesianas, está dada por

$$\mathcal{W}_E = A \left[ (\vec{\nabla} m_x)^2 + (\vec{\nabla} m_y)^2 + (\vec{\nabla} m_z)^2 \right]. \quad (2.18)$$

Se definen las siguientes cantidades,

$$m^+ = \frac{m_z + im_y}{\sqrt{2}} = a\sqrt{1 - aa^*/2}, \quad (2.19a)$$

$$m^- = \frac{m_z - im_y}{\sqrt{2}} = a^*\sqrt{1 - aa^*/2}. \quad (2.19b)$$

Ésto permite escribir

$$\mathcal{W}_E = A \left[ (\vec{\nabla} m_x)^2 + 2(\vec{\nabla} m^+) \cdot (\vec{\nabla} m^-) \right]. \quad (2.20)$$

Mediante cálculos directos, la expresión anterior se transforma en

$$\mathcal{W}_E = A \left\{ 2\vec{\nabla} a^* \cdot \vec{\nabla} a + \frac{1}{2} \left[ a^2(\vec{\nabla} a^*)^2 + a^{*2}(\vec{\nabla} a)^2 \right] + \frac{aa^*}{4(2 - aa^*)} \left[ \vec{\nabla}(aa^*) \right]^2 \right\}, \quad (2.21)$$

lo cual, aproximado hasta orden cuatro en las variables  $a$  se reescribe como

$$\mathcal{W}_E \approx A \left[ 2\vec{\nabla} a^* \cdot \vec{\nabla} a + \frac{1}{2}a^2(\vec{\nabla} a^*)^2 + \frac{1}{2}a^{*2}(\vec{\nabla} a)^2 \right]. \quad (2.22)$$

Para obtener la energía total se integra en el volumen:

$$\mathcal{U}_E = \frac{1}{4\pi M_s^2} \int \mathcal{W}_E dV \approx h_E \int \left[ \vec{\nabla} a^* \cdot \vec{\nabla} a + \frac{1}{4}a^2(\vec{\nabla} a^*)^2 + \frac{1}{4}a^{*2}(\vec{\nabla} a)^2 \right] R^2 dV, \quad (2.23)$$

donde se define  $h_E \equiv 2A/4\pi M_s^2 R^2 = (l_E/R)^2$ , donde  $l_E = \sqrt{D/4\pi M_s}$  es la longitud de intercambio, con  $D = 2A/M_s$ . Al considerar  $l_E \approx 5,7\text{nm}$ . para el permalloy y un radio de  $R = 50\text{nm}$ ., se tiene que  $h_E \approx 0,013$ .

### 2.3.3. Campo demagnetizante

El campo demagnetizante se puede calcular desde las cargas magnéticas que existen en la muestra, las cuales se obtienen a partir de su magnetización. El procedimiento consiste en calcular el potencial  $\Phi(\vec{x})$  generado por estas cargas, y luego usar la relación  $\vec{H}_D = -\vec{\nabla}\Phi$ .

La expresión para el potencial es

$$\Phi(\vec{x}) = \int dS' \frac{\hat{n}' \cdot \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \int dV' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (2.24)$$

Para realizar los cálculos se usa que, en términos de las coordenadas cilíndricas  $(\rho, \phi, z)$ , la función de Green puede ser escrita como

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi - \phi')} \int_0^{\infty} dk J_m(k\rho) J_m(k\rho') e^{-k|z - z'|}. \quad (2.25)$$

Luego el cálculo se divide en dos partes, la primera corresponde a las densidades de carga superficiales en las tapas del disco, y la segunda está relacionada con las densidades de carga superficiales en el manto del disco y las volumétricas.

## Campo demagnetizante debido a las cargas superficiales en las tapas del disco

Sean las densidades de cargas magnéticas superficiales  $\sigma_+$  en la tapa del disco ubicada en  $z = L$  y  $\sigma_-$  en la tapa en  $z = 0$ . Se tiene que el vector normal a la superficie en la tapa de arriba es  $\hat{z}$  y en la tapa de abajo  $-\hat{z}$ . De ésto resulta que las cargas magnéticas superficiales en las tapas del disco son  $\sigma_+ = M_z(\rho', \phi', L)$  y  $\sigma_- = -M_z(\rho', \phi', 0)$ . Además, como se asume que la magnetización no depende de  $z$  (debido a que el espesor del disco es del orden del largo de intercambio), se tiene que  $M_z(\rho', \phi', L) = M_z(\rho', \phi', 0) = M_z(\rho', \phi')$ .

$$\Phi(\vec{x}) = \int dS' \frac{M_z(\rho', \phi')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \Big|_{z'=L} - \int dS' \frac{M_z(\rho', \phi')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \Big|_{z'=0} . \quad (2.26)$$

Para ambas tapas se tiene que  $dS' = \rho' d\phi' d\rho'$ , donde  $\rho'$  va entre 0 y  $R$  y  $\phi'$  va entre 0 y  $2\pi$ . Al reemplazar la función de Green en las coordenadas cilíndricas se obtiene que el potencial en el interior del disco está dado por

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\phi} \int_0^{\infty} dk \left[ \int \rho' d\phi' d\rho' M_z(\rho', \phi') J_m(k\rho') e^{-im\phi'} \right] J_m(k\rho) (e^{-k(L-z)} - e^{-kz}) . \quad (2.27)$$

A continuación se calcula el campo demagnetizante promediado en  $z$ , pues se asume que no existe dependencia en esta variable ( $\langle \vec{H}_D \rangle = -\frac{1}{L} \int_{z=0}^{z=L} dz \vec{\nabla} \Phi$ ). Escribiendo ésto según cada componente del campo resulta

$$\langle H_D \rangle^x = \langle H_D \rangle^y = 0 , \quad (2.28a)$$

$$\langle H_D \rangle^z = -\frac{2}{L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} dk J_m(k\rho) (1 - e^{-kL}) \int dS' J_m(k\rho') M_z(\rho', \phi') e^{-im\phi'} \right] e^{im\phi} . \quad (2.28b)$$

Con estas expresiones se puede calcular la energía magnetostática,  $\mathcal{U}_D^z$ , debido a la componente  $M_z$  de la magnetización,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_D^z &= -\frac{1}{4\pi M_s^2} \frac{1}{2} \int \langle H_D \rangle^z M_z dV , \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} dk (1 - e^{-kL}) \int dS' J_m(k\rho') m_z(\rho', \phi') e^{-im\phi'} \int dS J_m(k\rho) m_z(\rho, \phi) e^{im\phi} \right] . \end{aligned} \quad (2.29)$$

Sin embargo es posible obtener una expresión más compacta. Para ello se suma y resta  $kL$  dentro del primer paréntesis de la expresión anterior. Luego se define la cantidad  $f(kL) \equiv (kL + e^{-kL} - 1)$  y se ocupan las siguientes relaciones,

$$\int_0^{\infty} dk k J_m(k\rho') J_m(k\rho) = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho') , \quad (2.30a)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi - \phi')} = 2\pi \delta(\phi - \phi') . \quad (2.30b)$$



Finalmente se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_D^z &= \frac{1}{2} \int m_z(\rho, \phi)^2 dV \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} dk f(kL) \int dS' J_m(k\rho') m_z(\rho', \phi') e^{-im\phi'} \int dS J_m(k\rho) m_z(\rho, \phi) e^{im\phi} \right]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Si se toma el límite de disco muy delgado, es decir,  $L \rightarrow 0$ , se tiene que  $f(kL) \rightarrow 0$ . De esta manera, es posible despreciar el segundo término de la expresión anterior, con lo que queda  $\mathcal{U}_D^z \rightarrow \frac{1}{2} \int m_z(\rho, \phi)^2 dV$ , llamado también límite de plano infinito.

### Campo demagnetizante debido a las cargas superficiales en el manto del cilindro y volumétricas

Para calcular el potencial debido a la densidad de carga superficial en el manto del disco, se considera que éste consiste en un conjunto de anillos, cada uno de los cuales tiene una densidad de carga lineal  $\lambda$  y genera un potencial  $d\Phi$  dado por

$$d\Phi(\vec{x}) = \int dl' \frac{\lambda(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = R \int d\phi' \frac{\lambda(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (2.32)$$

A continuación es necesario reemplazar la función de Green en coordenadas cilíndricas, y usar que el vector normal en el manto es  $\hat{n} = \hat{\rho}$ , de modo que  $\lambda = dz'(\vec{M} \cdot \hat{\rho}) = dz' M_\rho(R, \phi')$ . Luego, se integra el conjunto de anillos, desde  $z' = 0$  a  $z' = L$ , y se obtiene el potencial generado por todos ellos, el cual se escribe como

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}) &= R \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk \left[ \int d\phi' M_\rho(R, \phi') e^{-im\phi'} \right] J_m(kR) J_m(k\rho) e^{im\phi} \int_0^L dz' e^{-k|z-z'|}, \\ &= \int_0^{\infty} dk \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ \int R d\phi' M_\rho(R, \phi') e^{-im\phi'} \right] J_m(kR) \frac{(2 - e^{-kz} - e^{k(z-L)})}{k} J_m(k\rho) e^{im\phi}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Sólo falta calcular el potencial debido a la densidad de carga magnética volumétrica que proviene de la no uniformidad de la magnetización,

$$\Phi(\vec{x}) = - \int dV' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = - \int dz' \int d\rho' d\phi' \rho' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (2.34)$$

Reemplazando la función de Green en coordenadas cilíndricas e integrando en  $z'$ ,

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}) &= - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk \left[ \int d\rho' d\phi' \rho' \vec{\nabla}' \cdot \vec{M}(\vec{x}') J_m(k\rho') e^{-im\phi'} \right] J_m(k\rho) e^{im\phi} \int_0^L dz' e^{-k|z-z'|}, \\ &= - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ \int d\rho' d\phi' \rho' \vec{\nabla}' \cdot \vec{M}(\vec{x}') J_m(k\rho') e^{-im\phi'} \right] \frac{(2 - e^{-kz} - e^{k(z-L)})}{k} J_m(k\rho) e^{im\phi}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

A partir del teorema de la divergencia, se obtiene la siguiente relación

$$\begin{aligned}
& \int dS' [\vec{\nabla}' \cdot \vec{M}(\vec{x}')] J_m(k\rho') e^{-im\phi'} \\
&= \int dS' \vec{\nabla}' \cdot [\vec{M}(\vec{x}') J_m(k\rho') e^{-im\phi'}] - \int dS' \vec{\nabla}' [J_m(k\rho') e^{-im\phi'}] \cdot \vec{M}(\vec{x}') , \\
&= \int R d\phi' M_\rho(R, \phi') J_m(kR) e^{-im\phi'} - \int dS' \vec{\nabla}' [J_m(k\rho') e^{-im\phi'}] \cdot \vec{M}(\vec{x}') .
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Para obtener el potencial asociado tanto a las cargas magnéticas en el manto como a las volumétricas, se suman las ecuaciones (2.33) y (2.35). Luego, mediante el teorema de la divergencia (2.36), se obtiene como resultado que el potencial es

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk \left[ \int dS' \vec{\nabla}' (J_m(k\rho') e^{-im\phi'}) \cdot \vec{M}(\rho', \phi') \right] \frac{(2 - e^{-kz} - e^{k(z-L)})}{k} J_m(k\rho) e^{im\phi} . \tag{2.37}$$

Este potencial promediado en el eje del cilindro, es decir, en  $z$  se escribe como

$$\langle \Phi(\vec{x}) \rangle = \frac{2}{L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk \frac{kL + e^{-kL} - 1}{k^2} \left[ \int dS' \vec{\nabla}' (J_m(k\rho') e^{-im\phi'}) \cdot \vec{M}(\rho', \phi') \right] J_m(k\rho) e^{im\phi} . \tag{2.38}$$

Usando que  $\langle H_D \rangle = -\vec{\nabla} \langle \Phi(\vec{x}) \rangle$ , el campo promedio en el plano,  $\langle H_D \rangle^\perp$ , debido a las componentes de la magnetización  $M_x$  y  $M_y$  puede escribirse

$$\langle H_D \rangle^\perp = -\frac{2}{L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk \frac{f(kL)}{k^2} \left[ \int dS' \vec{\nabla}' (J_m(k\rho') e^{-im\phi'}) \cdot \vec{M}(\rho', \phi') \right] \vec{\nabla} (J_m(k\rho) e^{im\phi}) . \tag{2.39}$$

Finalmente, la energía magnetostática debida al campo demagnetizante en el plano del disco,  $\mathcal{U}_D^\perp$ , es

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_D^\perp &= \frac{1}{4\pi M_s^2} \int \mathcal{W}_D dV = -\frac{1}{4\pi M_s^2} \frac{1}{2} \int \langle H_D \rangle^\perp \cdot \vec{M} dV , \\
&= \frac{1}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk \frac{f(kL)}{k^2} \left[ \int dS' \vec{\nabla}' (J_m(k\rho') e^{-im\phi'}) \cdot \vec{m}(\rho', \phi') \right] \left[ \int dS \vec{\nabla} (J_m(k\rho) e^{im\phi}) \cdot \vec{m}(\rho, \phi) \right] .
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Si se toma el límite de disco muy delgado, es decir,  $L \rightarrow 0$ , la expresión para  $\langle H_D \rangle^\perp$  tiende a cero.

## Campo demagnetizante considerando magnetización uniforme

Si se considera que la magnetización en el disco es uniforme, las expresiones anteriores se simplifican de manera significativa,

$$\mathcal{U}_D = V/2 [m_\perp^2 N(L/R) + m_z^2 [1 - 2N(L/R)]] , \tag{2.41}$$

donde  $V = \pi R^2 L$  es el volumen del disco,  $m_{\perp}^2 = m_x^2 + m_y^2$  y el factor demagnetizante corresponde a  $N(L/R) \equiv \frac{1}{L/R} \int_0^{\infty} dk \frac{(kL/R + e^{-kL/R} - 1)}{k^2} J_0'(k)^2$ . Al considerar el límite de plano infinito se tiene que  $N(L/R) \rightarrow 0$ , de modo que el campo demagnetizante está dado por

$$\langle H_D \rangle^x = \langle H_D \rangle^y = 0 , \quad (2.42a)$$

$$\langle H_D \rangle^z = -4\pi M_z(\rho, \phi) , \quad (2.42b)$$

y la energía es simplemente

$$\mathcal{U}_D = \frac{1}{2} \int m_z(\rho, \phi)^2 dV = \frac{1}{8} \int (a + a^*)^2 (2 - aa^*) dV . \quad (2.43)$$

### 2.3.4. Campo de anisotropía

Al considerar anisotropía de tipo volumétrica y con un eje fácil  $\hat{n}$  se tiene

$$\mathcal{U}_A = -\frac{K_n}{4\pi M_s} \int (\vec{m} \cdot \hat{n})^2 dV . \quad (2.44)$$

Es directo obtener la contribución en cualquiera de los tres ejes cartesianos, donde  $K_i$  corresponde a la constante de anisotropía asociada al eje  $i$ ,

$$\mathcal{U}_A^x = -\frac{K_x}{4\pi M_s} \int m_x^2 dV = -\frac{K_x}{4\pi M_s} \int (1 - aa^*)^2 dV , \quad (2.45a)$$

$$\mathcal{U}_A^y = -\frac{K_y}{4\pi M_s} \int m_y^2 dV = \frac{K_y}{4\pi M_s} \int \frac{(a - a^*)^2}{4} (2 - aa^*) dV , \quad (2.45b)$$

$$\mathcal{U}_A^z = -\frac{K_z}{4\pi M_s} \int m_z^2 dV = -\frac{K_z}{4\pi M_s} \int \frac{(a + a^*)^2}{4} (2 - aa^*) dV . \quad (2.45c)$$

Las expresiones obtenidas se muestran por completitud del problema. Sin embargo, en esta tesis se desprecia la anisotropía al trabajar con un material suave como el permalloy.

### 2.3.5. Campo de Oersted

El campo de Oersted, a veces llamado de Ampere, se genera a partir de la corriente que circula por el sistema, y se calcula usando la ley de Ampere

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int \vec{J} \cdot d\vec{S} . \quad (2.46)$$

Se asume que la corriente de magnitud  $J$  que pasa a través del disco es uniforme, el campo se puede calcular mediante el uso de la simetría del problema. Ésto es,

$$\vec{H}_O = \frac{2\pi J \rho}{c} \hat{\phi} . \quad (2.47)$$

Este campo, actúa como un campo externo, de modo que la densidad de energía se escribe  $\mathcal{W}_O = -\vec{H}_O \cdot \vec{M} = -\frac{2\pi J\rho}{c} M_\phi$ . Se tiene que  $m_\phi = -m_x \sin \phi + m_y \cos \phi \approx -(1 - aa^*) \sin \phi + \frac{a-a^*}{\sqrt{2i}} (1 - \frac{aa^*}{4}) \cos \phi$ , y usando que  $h_O = |\vec{H}_O|/4\pi M_s = \frac{JR}{2M_s c}$ , se concluye que

$$\mathcal{U}_O = \frac{1}{4\pi M_s^2} \int \mathcal{W}_O dV \approx h_O \int \left[ (1 - aa^*) \sin \phi + \frac{a^* - a}{\sqrt{2i}} (1 - \frac{aa^*}{4}) \cos \phi \right] \frac{\rho}{R} dV. \quad (2.48)$$

Si se inyecta una densidad de corriente  $J = 10^8 A/cm^2$ , se tiene que  $h_O \approx 0,03$ .

## 2.4. Expansión en funciones de Bessel

Para describir la dinámica en variables apropiadas a la geometría del disco, se introduce un cambio de variables desde el campo  $a(\vec{\rho}, t)$  a las amplitudes  $a_{mj}(t)$ , las cuales corresponden a coeficientes de una expansión en serie de funciones de Bessel de la siguiente forma,

$$a(\vec{\rho}, t) = N_{00}a_{00}(t) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} N_{mj}a_{mj}(t)J_m(\chi_{mj}\rho/R)e^{im\phi}, \quad (2.49)$$

con  $\rho$  y  $\phi$  coordenadas polares relacionadas con el centro del disco y  $J_m$  las funciones de Bessel. Esta expresión permite separar la parte uniforme, que no depende del espacio, y la no uniforme.

Las constantes  $\chi_{mj}$  son discretas debido a que se debe satisfacer la condición de borde (ec. (1.34)) discutida en el capítulo 1,

$$A \frac{\partial \vec{m}}{\partial n} = K_S(\vec{m} \cdot \hat{n}_S)[\hat{n}_S - \vec{m}(\vec{m} \cdot \hat{n}_S)]. \quad (2.50)$$

De esta expresión se pueden extraer tres comportamientos principales:

- Si el intercambio es mucho más relevante que la anisotropía ( $A \gg K_S$ ), se tiene que al considerar el límite  $K_S/A \rightarrow 0$ , se debe satisfacer  $\frac{\partial \vec{m}}{\partial \rho} = 0$  en el manto del disco ( $\rho = R$ ). Ésto es equivalente a imponer  $J'_m(\chi_{mj}) = 0$ .
- Si la anisotropía es mucho más grande que el intercambio ( $K_S \gg A$ ), en el límite  $A/K_S \rightarrow 0$ , se debe satisfacer la siguiente condición:  $\vec{m} \cdot \hat{n}_S = 0$ , la cual depende de la dirección de anisotropía  $\hat{n}_S$ .
- Si anisotropía y el intercambio son del mismo orden de magnitud ( $K_S \sim A$ ), se tiene que satisfacer la condición completa, y la solución es difícil de implementar numéricamente.

Considerando que la capa libre es fabricada de permalloy, el cual es un material suave, se puede simplificar el análisis aplicando la condición  $J'_m(\chi_{mj}) = 0$  [65]. En la tabla se muestran los valores más bajos para las raíces  $\chi_{mj}$  de  $J'_m$ :

<b>m</b>	<b>j</b>	$\chi_{mj}$
0	0	0
1	1	1.84
2	1	3.05
0	1	3.83
3	1	4.20
4	1	5.32

Tabla 2.1: Valores para las raíces  $\chi_{mj}$  ordenados de manera creciente.

Por otro lado, los coeficientes  $N_{mj}$  representan constantes de normalización, las cuales se obtienen a partir de exigir que la transformación sea canónica, ésto es

$$\frac{\delta a}{\delta a_{mj}} = \frac{\delta a^*_{mj}}{\delta a^*}. \quad (2.51)$$

De esta forma se obtiene

$$N_{00} = 1/\sqrt{V} , \quad (2.52a)$$

$$N_{mj} = 1/\sqrt{-J_m(\chi_{mj})J_m''(\chi_{mj})V} , \quad (2.52b)$$

donde  $V = \pi R^2 L$  corresponde al volumen de la capa libre.

Las funciones de Bessel con completas, en el sentido matemático, y ortonormales, permitiendo describir una magnetización arbitraria en el plano en función de ellas. Estas funciones satisfacen la siguiente relación de ortogonalidad (apéndice A),

$$\int dV J_m(\chi_{mj}\rho/R) J_{m'}(\chi_{m'j'}\rho/R) e^{i(m+m')\phi} = (-1)^m \delta_{-m'}^m \delta_{j'}^j / N_{mj}^2 . \quad (2.53)$$

Usando lo comentado anteriormente, es posible escribir ecuaciones que describan la evolución temporal de las variables  $a_{mj}(t)$ , hasta orden tres, es decir,

$$i \frac{da_{mj}}{dt} = \int dV N_{mj} J_m(\chi_{mj}\rho/R) e^{-im\phi} \left[ (1 - i\alpha) \frac{\delta \mathcal{U}^t}{\delta a^*} + i\alpha \frac{a^2}{2} \frac{\delta \mathcal{U}^t}{\delta a} \right] . \quad (2.54)$$

A orden lineal, esta ecuación queda como

$$i \frac{da_{mj}}{dt} = (1 - i\alpha) \frac{\partial \mathcal{U}^t}{\partial a_{mj}^*} . \quad (2.55)$$

Ésto muestra que sin disipación ni torque por transferencia de spin, se conserva la forma canónica de las ecuaciones de movimiento en las variables  $a_{mj}(t)$ .

Las expresiones finales asociadas a los distintos campos magnéticos son mostrados en el apéndice B. En resumen, se tiene que

$$\mathcal{U}^t = \mathcal{U}^{eff} + i\mathcal{U}^{stt} , \quad (2.56)$$

$$\mathcal{U}^{eff} = \mathcal{U}_Z + \mathcal{U}_E + \mathcal{U}_D , \quad (2.57)$$

con  $\mathcal{U}_Z$  dado por las expresiones correspondientes al campo aplicado (B) y al campo de Oersted (B),  $\mathcal{U}_E$  de acuerdo a (B),  $\mathcal{U}_D$  dado por las expresiones discutidas en la sección (B) y  $\mathcal{U}^{stt}$  de acuerdo a (B).

# Capítulo 3

## Disco ferromagnético en aproximación de plano infinito

En este capítulo se considera que la capa libre de la estructura nanopilar es muy delgada, es decir,  $L/R \ll 0$ , lo cual sugiere aproximar el campo demagnetizante por su principal contribución  $\vec{H}_D = -4\pi M_z \hat{z}$ . En este caso la configuración de equilibrio es uniforme y el modo de oscilación más bajo es uniforme o un macro-spin. Se realiza un estudio lineal y no lineal de la dinámica de la magnetización. Los principales resultados obtenidos son la determinación de la corriente crítica por sobre la cual es posible observar auto-oscilaciones del modo uniforme, y la obtención de expresiones analíticas para la amplitud y frecuencia de oscilación de la auto-oscilación del macro-spin a orden no lineal, en función de la densidad de corriente aplicada. Luego, se estudian los modos normales de oscilación de la magnetización (ondas de spin) de un disco: sus formas y frecuencias de oscilación. Finalmente, se estudia la interacción entre la auto-oscilación del modo uniforme con perturbaciones no uniformes coconsiderando que el macro-spin tiene una alta amplitud, i.e. está en el régimen no lineal. Se determina cuándo comienza el crecimiento exponencial de los modos no uniformes (análisis lineal), lo cual permite conocer el rango del espacio de parámetros donde sólo existe la oscilación del modo macro-spin de manera aislada.

### 3.1. Aproximación macro-spin

La aproximación macro-spin consiste en asumir que la magnetización de la capa libre es espacialmente uniforme, y se estudia su evolución temporal. Al no existir no uniformidades en la magnetización, el campo de intercambio es nulo, por lo que el campo efectivo se compone del campo aplicado más el campo demagnetizante aproximado, es decir,  $\vec{h}_{eff} = h_x \hat{x} - m_z \hat{z}$ .

### 3.1.1. Estudio del macro-spin a orden lineal

La energía libre compleja  $\mathcal{U}^t = \mathcal{U}^{eff} + i\mathcal{U}^{stt}$  que describe la dinámica en ausencia de disipación, incluye el efecto del campo externo aplicado (Ec. (2.17)), del campo demagnetizante aproximado (Ec. (2.43)) y del torque por transferencia de spin (Ec. (2.9)). A orden cuadrático,  $\mathcal{U}^t$  describe la dinámica lineal y está dado por

$$\mathcal{U}^t = h_x a a^* + (a + a^*)^2/4 + i\beta J a a^* . \quad (3.1)$$

La ecuación para el macro-spin ( $a = N_{00} a_{00}$ ,  $N_{00} = \sqrt{V}$ ) a orden lineal, considerando disipación y torque por transferencia de spin, es

$$\begin{aligned} i \frac{da_{00}}{dt} &= (1 - i\alpha)[(h_x + 1/2)a_{00} + a_{00}^*/2 + i\beta J a_{00}] , \\ &= A_{00} a_{00} + B_{00} a_{00}^* , \end{aligned} \quad (3.2)$$

con  $A_{00} = (1 - i\alpha)[(h_x + 1/2) + i\beta J]$  y  $B_{00} = (1 - i\alpha)/2$ . Si lo anterior se escribe matricialmente, se tiene que

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{00}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{00} & B_{00} \\ -B_{00}^* & -A_{00}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{00}^* \end{pmatrix} . \quad (3.3)$$

Para resolver la ecuación anterior se realiza el siguiente cambio de variables de Bogoliubov [35, 66]

$$\begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{00}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{00} & -\mu_{00} \\ -\mu_{00}^* & \lambda_{00}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ b^* \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} \lambda_{00} \\ -\mu_{00}^* \end{pmatrix} + b^* \begin{pmatrix} -\mu_{00} \\ \lambda_{00}^* \end{pmatrix} , \quad (3.4)$$

con  $\lambda_{00}$  y  $\mu_{00}$  constantes complejas en general. De este modo, la ecuación matricial para las nuevas variables  $b$  y  $b^*$  es

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} b \\ b^* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_{00} & -\mu_{00} \\ -\mu_{00}^* & \lambda_{00}^* \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_{00} & B_{00} \\ -B_{00}^* & -A_{00}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{00} & -\mu_{00} \\ -\mu_{00}^* & \lambda_{00}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ b^* \end{pmatrix} , \\ &= \frac{1}{|\lambda_{00}|^2 - |\mu_{00}|^2} \begin{pmatrix} \lambda_{00}^* & \mu_{00} \\ \mu_{00}^* & \lambda_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{00} & B_{00} \\ -B_{00}^* & -A_{00}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{00} & -\mu_{00} \\ -\mu_{00}^* & \lambda_{00}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ b^* \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (3.5)$$

Con el objetivo de que las nuevas variables  $b$  y  $b^*$  diagonalicen el problema, se buscan los valores y vectores propios de la matriz asociada a la ecuación (3.3)

$$\begin{pmatrix} A_{00} - (\omega_{00} + i\gamma_{00}) & B_{00} \\ -B_{00}^* & -A_{00}^* - (\omega_{00} + i\gamma_{00}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 , \quad (3.6)$$

cuya solución se encuentra al imponer que el determinante de la matriz sea cero:

$$\omega_{00} = \pm \sqrt{[\text{Re}(A_{00})]^2 - |B_{00}|^2} = \pm \sqrt{(h_x + 1/2 + \alpha\beta J)^2 - (1 + \alpha^2)/4} , \quad (3.7a)$$

$$\gamma_{00} = \text{Im}(A_{00}) = \beta J - \alpha(h_x + 1/2) . \quad (3.7b)$$



Se tiene que  $\omega_{00}$  es la frecuencia angular de oscilación normalizada. Si la frecuencia angular es  $\Omega$ , se tiene que  $\omega_{00} = \Omega/4\pi M_s |\gamma|$ , y la frecuencia de oscilación,  $f$ , es  $f = \Omega/2\pi$ .

Para encontrar el auto-estado asociado al auto-valor con signo positivo de la ecuación (3.7a) (en adelante se considera  $\omega_{00}$  positivo), se denotan  $u = \lambda_{00}$  y  $v = -\mu_{00}^*$ , y se impone la normalización  $|\lambda_{00}|^2 - |\mu_{00}|^2 = 1$ . La solución al sistema de ecuaciones es

$$\lambda_{00} = \sqrt{\frac{\text{Re}(A_{00}) + \omega_{00}}{2\omega_{00}}}, \quad (3.8a)$$

$$\mu_{00} = \sqrt{\frac{\text{Re}(A_{00}) - \omega_{00}}{2\omega_{00}}} \sqrt{\frac{B_{00}}{B_{00}^*}}, \quad (3.8b)$$

donde se toma  $\lambda_{00}$  como real.

De esta manera, la ecuación de movimiento para las variables  $\{b, b^*\}$  se transforma en

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} b \\ b^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{00} + i\gamma_{00} & 0 \\ 0 & -\omega_{00} + i\gamma_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ b^* \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

cuya solución se encuentra de manera directa,  $b(t) = b_0 e^{-i\omega_{00}t + \gamma_{00}t}$ . Finalmente se tiene que la solución para la variable inicial  $a$  es

$$a_{00} = \sqrt{\frac{h_x + 1/2 + \alpha\beta J + \omega_{00}}{2\omega_{00}}} b_0 e^{-i\omega_{00}t + \gamma_{00}t} - \sqrt{\frac{h_x + 1/2 + \alpha\beta J - \omega_{00}}{2\omega_{00}}} \sqrt{\frac{1 - i\alpha}{1 + i\alpha}} b_0^* e^{i\omega_{00}t + \gamma_{00}t}. \quad (3.10)$$

Con el objetivo de simplificar los resultados obtenidos, se desprecian los términos de orden  $\alpha\beta J \sim \alpha^2 \ll 1$  en la expresión para la auto-frecuencia y los términos proporcionales a  $\alpha \ll 1$  asociados al auto-estado, de forma que

$$\omega_{00} \approx \sqrt{h_x(h_x + 1)}, \quad (3.11a)$$

$$\gamma_{00} = \beta J - \alpha(h_x + 1/2), \quad (3.11b)$$

$$a_{00} \approx \sqrt{\frac{h_x + 1/2 + \omega_{00}}{2\omega_{00}}} b_0 e^{-i\omega_{00}t + \gamma_{00}t} - \sqrt{\frac{h_x + 1/2 - \omega_{00}}{2\omega_{00}}} b_0^* e^{i\omega_{00}t + \gamma_{00}t}. \quad (3.11c)$$

Es posible concluir que si  $\gamma_{00} > 0$ , la variable  $b$  comienza a crecer exponencialmente y se observan auto-oscilaciones de la magnetización [67, 68]. De este modo se define la densidad de corriente crítica correspondiente a la condición  $\gamma_{00} = 0 \Rightarrow J_c = \alpha(h_x + 1/2)/\beta$ .

En la figura 3.1(a) se muestra la densidad de corriente de inestabilidad lineal (corriente crítica) en función del campo aplicado. En la figura 3.1(b) se muestra la auto-frecuencia de oscilación del macro-spin en función del campo aplicado.

### 3.1.2. Estudio del macro-spin a orden no lineal

A partir del análisis lineal, se concluye que el modo macro-spin presenta un régimen de auto-oscilación si la densidad de corriente supera a aquella asociada con el valor crítico  $J_c$ . Al

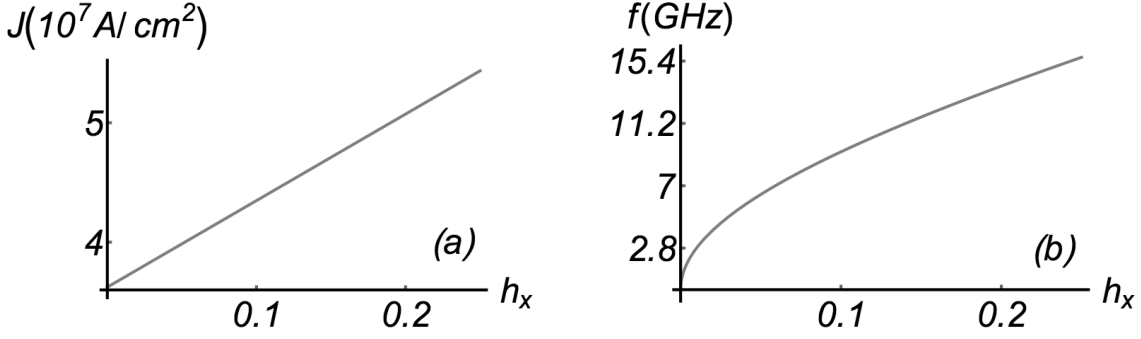


Figura 3.1: (a) Densidad de corriente crítica,  $J_c = (h_x + 1/2)/\beta$ , necesaria para que el modo uniforme (macro-spin) comience a auto-oscilar, en función del campo aplicado. (b) Frecuencia angular de oscilación del macro-spin, en ausencia de corriente aplicada, en función del campo aplicado, i.e.  $f = |\gamma|2M_s\sqrt{h_x(h_x + 1)} = \omega_{00}/2\pi$ .

aplicar una densidad de corriente por sobre esa cantidad, se tiene que la variable  $b$  comienza a crecer exponencialmente, hasta cuando se logra una compensación entre la disipación y el torque por transferencia de spin a orden no lineal. Es decir, estas dos contribuciones determinan la amplitud de la auto-oscilación de la magnetización. El macro-spin se transforma en una solución periódica de una ecuación de movimiento no lineal, la cual ha sido estudiada por algunos autores [69, 70].

Se considera la energía compleja a orden no lineal,

$$\mathcal{U}^t = h_x a a^* + (a + a^*)^2 (2 - a a^*) / 8 + i \beta J a a^* (1 - a a^* / 4), \quad (3.12)$$

con la cual, a partir de la Ec. (2.13), se obtiene la siguiente ecuación de evolución para el macro-spin:

$$\begin{aligned} i \frac{da_{00}}{dt} = & (1 - i\alpha) [(h_x + 1/2)a_{00} + a_{00}^*/2 + i\beta J a_{00}] \\ & - a_{00}(a_{00}^2 + 4|a_{00}|^2 + 3a_{00}^{*2})V/8 - \alpha\beta J |a_{00}|^2 a_{00} V (1 - |a_{00}|^2 V/4) \\ & + i\alpha a_{00} [h_x |a_{00}|^2/2 + (3 - |a_{00}|^2 V)(a_{00} + a_{00}^*)^2/8] V - i\beta J a_{00} |a_{00}|^2 V/2, \end{aligned} \quad (3.13)$$

la cual es una ecuación no lineal de orden cinco que permite conocer la evolución temporal del modo macro-spin de manera exacta.

En ausencia de disipación y torque por transferencia de spin, las soluciones estáticas son tres,

$$a_{00} = \pm \sqrt{1 + h_x} \quad \Rightarrow \quad (m_x, m_y, m_z) = (-h_x, 0, \pm(1 - h_x^2)), \quad (3.14a)$$

$$a_{00} = \pm i \sqrt{2 - 2h_x} \pm \sqrt{2h_x} \quad \Rightarrow \quad (m_x, m_y, m_z) = (-1, 0, 0), \quad (3.14b)$$

$$a_{00} = 0 \quad \Rightarrow \quad (m_x, m_y, m_z) = (1, 0, 0). \quad (3.14c)$$

En esta tesis se estudiará sólo la dinámica en torno a la solución (3.14c), i.e. alrededor de la magnetización saturada en el eje  $x$ .

Para resolver la Ec. (3.13) se realiza el cambio de variables que se introdujo en la sección previa, i.e.  $a_{00} = \lambda_{00}b - \mu_{00}b^*$  en la Ec. (3.13). De allí se obtiene la siguiente ecuación para la variable  $b$ , con las aproximaciones  $\lambda_{00} \approx \sqrt{(h_x + 1/2 + \omega_{00})/2\omega_{00}}$  y  $\mu_{00} \approx$

$\sqrt{(h_x + 1/2 - \omega_{00})/2\omega_{00}}$ :

$$\begin{aligned} i\dot{b} = & (\omega_{00} + i\gamma_{00})b \\ & + C_1 b^3 + C_2 b^2 b^* + C_3 b b^{*2} + C_4 b^{*3} \\ & + D_1 b^5 + D_2 b^4 b^* + D_3 b^3 b^{*2} + D_4 b^2 b^{*3} + D_5 b b^{*4} + D_6 b^{*5}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

con  $C_i$  y  $D_j$  funciones del campo y densidad de corriente aplicados. Una primera solución aproximada de la ecuación anterior consiste en considerar sólo los términos resonantes de la ecuación y en buscar una solución del tipo auto-oscilatoria, de la forma

$$b = b_0 e^{-i\omega t}. \quad (3.16)$$

La ecuación de movimiento para  $b_0$ , al definir  $\tilde{A}_{00} = h_x + 1/2$  y  $\tilde{B}_{00} = 1/2$ , está dada por

$$\omega b_0 + i\dot{b}_0 = (\omega_{00} - 2\tilde{A}_{00}A_2|b_0|^2)b_0 - i\alpha\tilde{A}_{00}(1 - A_1|b_0|^2 + A_2|b_0|^4)b_0 + i\beta J(1 - A_3|b_0|^2)b_0, \quad (3.17)$$

con  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  funciones del campo aplicado, y todas positivas, como se detallan a continuación

$$A_1 = \frac{(\tilde{A}_{00} + 3\tilde{B}_{00})(\tilde{A}_{00} - \tilde{B}_{00})}{2\tilde{A}_{00}\omega_{00}}, \quad (3.18a)$$

$$A_2 = \frac{\tilde{B}_{00}}{\tilde{A}_{00}} \frac{(2\tilde{A}_{00} - \tilde{B}_{00})(\tilde{A}_{00} - \tilde{B}_{00})}{4\omega_{00}^2}, \quad (3.18b)$$

$$A_3 = \frac{\tilde{A}_{00}}{2\omega_{00}}. \quad (3.18c)$$

Al imponer que  $b_0$  sea constante y que la parte imaginaria de la ecuación (3.17) sea nula, para que no exista ni crecimiento ni decrecimiento exponencial de la solución, se obtiene:

$$|b_0|^2 = \frac{1}{2A_2/A_3} [(A_1/A_3 - J/J_c) \pm \sqrt{(A_1/A_3 - J/J_c)^2 - 4A_2(1 - J/J_c)/A_3^2}], \quad (3.19)$$

$$\omega = (\omega_{00} - 2\tilde{A}_{00}A_2|b_0|^2), \quad (3.20)$$

con la densidad de corriente crítica  $J_c = \alpha\tilde{A}_{00}/\beta$ . De esta manera se encuentra una solución aproximada que corresponde a una auto-oscilación del modo uniforme, cuya frecuencia disminuye con respecto a su valor lineal  $\omega_{00}$  en forma no lineal a medida que la amplitud del modo aumenta.

## Análisis de las soluciones

La solución no lineal de las ecuaciones (3.16-3.20) existe en un cierto rango del espacio de parámetros  $(J, h_x)$ , el cual se obtiene al imponer dos restricciones:

i) La magnitud de las componentes de la magnetización  $(m_x, m_y, m_z)$  deben permanecer dentro del rango con sentido físico (magnitud menor a uno),

ii)  $|b_0|^2$  debe ser real y mayor que cero.

Al estudiar la primera restricción, específicamente para la componente de la magnetización en el eje  $\hat{x}$ , es decir  $m_x < 1$ , se obtiene que  $m_x(t) = 1 - |a|^2 \geq -1 \Rightarrow |b_0|^2 \leq 2\omega_{00}/[h_x + \sin^2(\omega_{00}t)]$ , para todo  $t$ . De ésto se concluye que  $|b_0|^2 \leq 2\omega_{00}/(h_x + 1)$ , y se obtiene un límite superior para  $|b_0|^2$  que depende de la magnitud del campo aplicado. Lo anterior se traduce en que existe una densidad de corriente máxima  $J_c^{(1)}(h_x)$  para cada campo aplicado  $h_x$ .

Para analizar la segunda restricción, se debe notar que si la expresión que está dentro de la raíz en (3.19) es menor a cero, es decir, si  $(A_1/A_3 - J/J_c)^2 - 4A_2(1 - J/J_c)/A_3^2 < 0$ , la solución para la amplitud es imaginaria, y por lo tanto no existe. De esta forma la solución no es válida si  $J_d(h_x) < J < J_u(h_x)$ , con  $J_d(h_x) < J_u(h_x) \leq J_c(h_x)$ ,

$$J_{u,d} = (J_c/A_3) \left[ A_1 - 2A_2/A_3 \pm 2\sqrt{(1 - A_1/A_3)A_2 + (A_2/A_3)^2} \right]. \quad (3.21)$$

que son las soluciones de  $(A_1/A_3 - J/J_c)^2 - 4A_2(1 - J/J_c)/A_3^2 = 0$ .

Cuando  $J = J_c$ , se obtiene que la magnitud de la amplitud tiene dos posibles soluciones (Ec. (3.19)):

$$\begin{aligned} |b_0|^2 &= 0, \\ |b_0|^2 &= \frac{1}{A_2/A_3}(A_1/A_3 - 1), \end{aligned}$$

esta segunda solución es válida si  $A_1/A_3 > 0$ , es decir, si  $h_x > 1/4$ . De esta forma, se define  $h_x^{(1)} = 1/4$  ( $H_x^{(1)} = 2,500\text{Oe}$  para el permalloy) que corresponde a  $A_1/A_3 = 1$  (notar que  $A_1/A_3 = h_x(h_x + 2)/(h_x + 1/2)^2$ , es decir, para  $h_x < 1/4 \rightarrow A_1/A_3 < 1$ , y para  $h_x > 1/4 \rightarrow A_1/A_3 > 1$ ).

Cuando  $J = 0$ , la magnitud de la amplitud tiene como solución (Ec. (3.19)):

$$|b_0|^2 = \frac{1}{2A_2} [A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - 4A_2}],$$

la cual existe si  $A_1^2 - 4A_2 > 0$ . De esta forma, se define  $h_x^{(2)} \simeq 0,42$  ( $H_x^{(2)} \approx 4,200\text{Oe}$  para el permalloy) que satisface  $(h_x^{(2)})^3 + h_x^{(2)} - 1/2 = 0$  (lo cual corresponde a la condición  $A_1^2 - 4A_2 = 0$ ).

A continuación se presentan las distintas soluciones que se obtienen para un campo fijo  $h_x$ , en las distintas regiones antes discutidas, considerando la densidad de corriente aplicada  $J$  como variable

- $h_x < h_x^{(1)}$ . Para densidades de corrientes menores a  $J_c$ , ésto es,  $J_u < J < J_c$ , no hay soluciones que satisfagan la condición i). También se tiene que  $J_d < 0$ , lo cual significa que no existen soluciones entre  $0 \leq J < J_u$ . La solución de equilibrio estática  $m_x = 1$  es estable para  $0 < J < J_c$ . Para  $J > J_c$ , el estado  $m_x = 1$  se vuelve inestable, y se observa un nuevo estado dinámico estable (ciclo límite), el cual corresponde a la solución (3.16-3.20). Su amplitud de oscilación crece y su frecuencia disminuye con el incremento de la densidad de corriente aplicada (hay un límite superior para la densidad de corriente  $J_c^{(1)}$  antes mencionada). La figura 3.2(a) representa este caso.

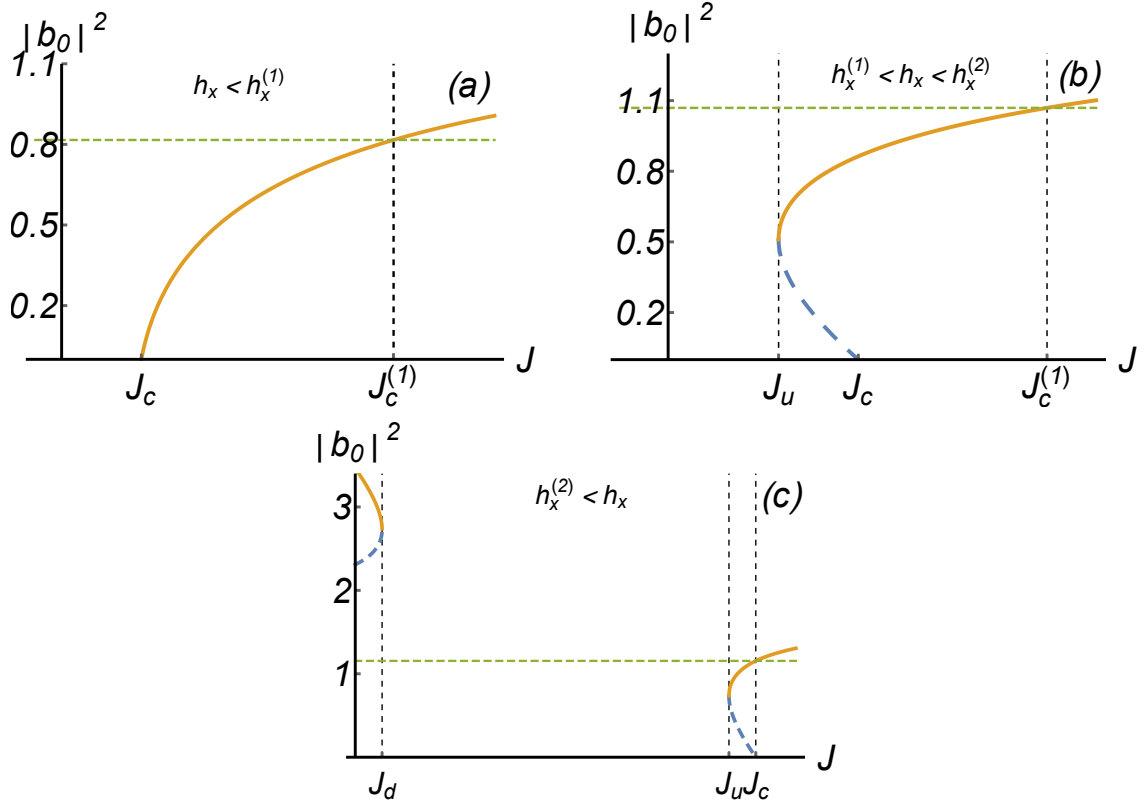


Figura 3.2: Amplitud de oscilación del modo macro-spin como función de la densidad de corriente aplicada ( $J$ ) de la ecuación (3.19), para distintos rangos de campos aplicados. (a)  $h_x < h_x^{(1)} = 0,25$ . El gráfico corresponde a un campo aplicado de  $h_x = 0,2$ . (b)  $h_x^{(1)} < h_x < h_x^{(2)} = 0,42$ . El gráfico corresponde a un campo aplicado  $h_x = 0,4$ . En la región  $J_u < J < J_c$  las dos ramas de la solución ( $\pm$ ) de la ecuación (3.19) son mostradas. (c)  $h_x > h_x^{(2)}$ . El gráfico corresponde a un campo aplicado  $h_x = 0,5$ . La línea horizontal representa la máxima amplitud que puede tener la oscilación del macro-spin, lo cual significa que las soluciones cercanas a  $J = 0$  no tienen sentido físico.

- $h_x^{(1)} < h_x < h_x^{(2)}$ . En la región  $J_u < J < J_c$  hay dos soluciones posibles para el macro-spin correspondiente a los signos ( $\pm$ ) de la ecuación (3.19). Más adelante se muestra que la solución ( $-$ ) es inestable. En este caso, nuevamente  $J_d < 0$ , por lo que no hay soluciones para  $0 < J < J_u$ . En el rango  $J > J_c$  existe sólo una solución para el macro-spin, proveniente del signo ( $+$ ). Es importante notar que para  $J = J_c$ , la amplitud  $|b_0^0|$  es finita. Para  $J < J_c$ , el equilibrio estático  $m_x = 1$  es estable, y se vuelve inestable para  $J > J_c$ . La figura 3.2(b) ilustra este caso.
- $h_x > h_x^{(2)}$ . Existe una región con  $0 < J < J_d$  donde hay una solución real y positiva para el macro-spin, pero no es físicamente aceptable, pues su amplitud de oscilación está por encima del límite superior ya discutido ( $|\vec{m}|^2 < 1$ ), como se puede ver en la figura 3.2(c). Para los otros rangos de densidades de corriente, el análisis es el mismo que para el rango  $h_x^{(1)} < h_x < h_x^{(2)}$  ya discutido.

En resumen, los tres rangos del campo aplicado anteriormente discutidos se pueden resumir finalmente en dos:  $h_x < h_x^{(1)} = 0,25$  y  $h_x > h_x^{(1)} = 0,25$ . De acuerdo a las figuras 3.2(a) y 3.2(b)

es posible notar que se tienen distintos tipos de bifurcaciones de Hopf, cuando  $h_x < 0,25$  se tiene una bifurcación supercrítica y para  $h_x > 0,25$  se observa una bifurcación subcrítica.

En la figura 3.3 se muestra una comparación entre la solución aproximada para el macro-spin obtenida de las ecuaciones (3.16-3.20) y una simulación numérica de las ecuaciones exactas, para dos diferentes campos aplicados  $h_x$ . El acuerdo entre ambos métodos es mejor cuando el campo aplicado es menor.

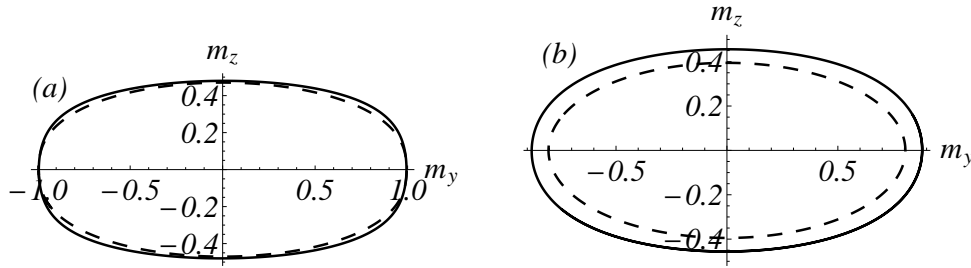


Figura 3.3: Comparación entre simulaciones numéricas en coordenadas esféricas para el macro-spin (línea continua) y la solución aproximada asociada a las ecuaciones (3.16-3.20) (línea punteada). Se muestra una proyección de la magnetización en el plano  $yz$  para un periodo de oscilación, con (a)  $h_x = 0,15$  y  $J = 1,1J_c$ , (b)  $h_x = 0,25$  y  $J = 1,005J_c$ .

## 3.2. Ondas de spin

Para obtener las ecuaciones de los modos normales de oscilación, u ondas lineales de spin, se tiene la siguiente expresión de la energía a orden cuadrático en las amplitudes  $a_{mj}(t)$  de la expansión de  $a(\vec{\rho}, t)$  en la base de la Ec. (2.49):

$$\mathcal{U}^{eff(2)} = \sum_{mj} \left[ (h_x + h_E^{mj}) |a_{mj}|^2 + \frac{1}{4} |(a_{mj} + (-1)^m a_{-mj}^*)|^2 \right], \quad (3.22)$$

donde ahora existe un término asociado al campo de intercambio  $h_E^{mj} \equiv (\chi_{mj} l_E / R)^2$ . Considerando disipación y torque por transferencia de spin, se obtiene la siguiente ecuación para la variable  $a_{mj}$ :

$$i\dot{a}_{mj} = A_{mj} a_{mj} + (-1)^m B_{mj} a_{-mj}^*, \quad (3.23)$$

con  $A_{mj} = (1 - i\alpha)(h_x + h_E^{mj} + 1/2 + i\beta J)$  y  $B_{mj} = (1 - i\alpha)/2$ . Lo anterior acopla las variables  $a_{mj}$  y  $a_{-mj}^*$ , lo cual puede ser escrito matricialmente, de la forma

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a_{mj} \\ a_{-mj}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{mj} & (-1)^m B_{mj} \\ -(-1)^m B_{mj}^* & -A_{mj}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{mj} \\ a_{-mj}^* \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Las ecuaciones para las variables  $a_{mj}^*$  y  $a_{-mj}$  se obtienen a partir del complejo conjugado de las expresiones anteriores. De manera análoga a lo realizado en el estudio para el macro-spin, se realiza el siguiente cambio de variables de Bogoliubov

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{mj} \\ a_{-mj}^* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_{mj} & -(-1)^m \mu_{mj} \\ -(-1)^m \mu_{mj}^* & \lambda_{mj}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{mj}^{(1)} \\ b_{mj}^{(2)} \end{pmatrix}, \\ &= b_{mj}^{(1)} \begin{pmatrix} \lambda_{mj} \\ -(-1)^m \mu_{mj}^* \end{pmatrix} + b_{mj}^{(2)} \begin{pmatrix} -(-1)^m \mu_{mj} \\ \lambda_{mj}^* \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

con  $\lambda_{mj}$  y  $\mu_{mj}$  constantes complejas. Con el objetivo de que las nuevas variables  $b_{mj}^{(1)}$  y  $b_{mj}^{(2)}$  diagonalicen el problema, se buscan los valores y vectores propios de la matriz de la ecuación (3.24),

$$\begin{pmatrix} A_{mj} - (\omega_{mj} + i\gamma_{mj}) & (-1)^m B_{mj} \\ -(-1)^m B_{mj}^* & -A_{mj}^* - (\omega_{mj} + i\gamma_{mj}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0. \quad (3.26)$$

Cuya solución se encuentra al imponer que el determinante de la matriz sea cero. De manera análoga a lo realizado en la sección anterior, se obtiene directamente,

$$\omega_{mj} = \pm \sqrt{[Re(A_{mj})]^2 - |B_{mj}|^2} = \pm \sqrt{(h_x + h_E^{mj} + 1/2 + \alpha\beta J)^2 - (1 + \alpha^2)/4}, \quad (3.27a)$$

$$\gamma_{mj} = Im(A_{mj}) = \beta J - \alpha(h_x + h_E^{mj} + 1/2). \quad (3.27b)$$

El autoestado asociado a  $\omega_{mj} = \sqrt{(h_x + h_E^{mj} + 1/2 + \alpha\beta J)^2 - (1 + \alpha^2)/4}$  en la Ec. (3.26), corresponde a  $u = \lambda_{mj}$  y  $v = -(-1)^m \mu_{mj}^*$  de acuerdo a la Ec. (3.25). Al imponer la normalización  $|\lambda_{mj}|^2 - |\mu_{mj}|^2 = 1$ , se encuentra que la solución al autoestado corresponde a

$$\lambda_{mj} = \sqrt{\frac{\text{Re}(A_{mj}) + \omega_{mj}}{2\omega_{mj}}}, \quad \mu_{mj} = \sqrt{\frac{\text{Re}(A_{mj}) - \omega_{mj}}{2\omega_{mj}}} \sqrt{\frac{B_{mj}}{B_{mj}^*}}. \quad (3.28a)$$

De esta manera, la ecuación de movimiento para las variables  $\{b_{mj}^{(1)}, b_{mj}^{(2)}\}$  se transforma en

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} b_{mj}^{(1)} \\ b_{mj}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{mj} + i\gamma_{mj} & 0 \\ 0 & -\omega_{mj} + i\gamma_{mj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{mj}^{(1)} \\ b_{mj}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

cuya solución, de manera directa es

$$\begin{aligned} b_{mj}^{(1)} &= b_{mj}^{0(1)} e^{-i\omega_{mj}t + \gamma_{mj}t}, \\ b_{mj}^{(2)} &= b_{mj}^{0(2)} e^{i\omega_{mj}t + \gamma_{mj}t}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Se tiene que  $\gamma_{mj}$  determina el crecimiento o decrecimiento de las soluciones. A partir de la ecuación (3.27b), se observa que el torque por transferencia de spin puede actuar como un término de anti-disipación, lo cual permite obtener auto-oscilaciones del modo  $(m, j)$ , cuando éste compensa a la disipación. Ésto ocurre cuando  $\gamma_{mj} = 0 \Rightarrow J_c^{mj} = \alpha(h_x + h_E^{mj} + 1/2)/\beta$ . La corriente crítica mínima corresponde al modo macro-spin o modo uniforme.

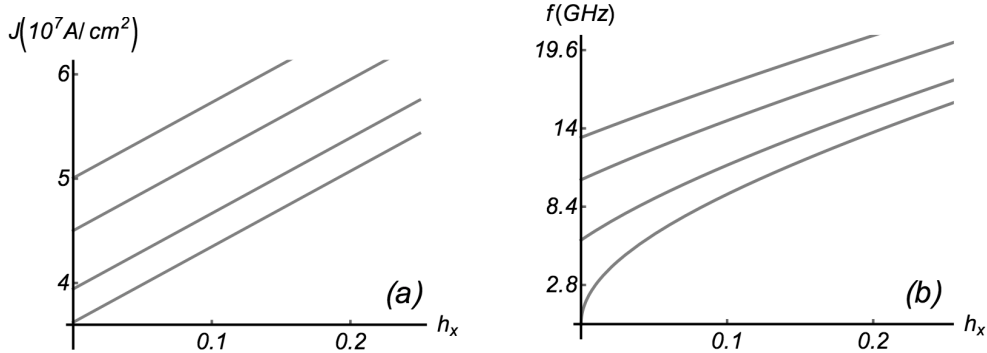


Figura 3.4: (a) Corrientes críticas para los primeros cuatro modos lineales de oscilación de la magnetización correspondiente a un disco de Permalloy de radio  $R = 50\text{nm}$ . y longitud de intercambio  $l_E = 5,7\text{nm}$ .(b) Frecuencias angulares en función del campo magnético para los primeros cuatro modos lineales del disco ferromagnético anterior. Para un campo aplicado dado, la frecuencia crece con más oscilaciones radiales y angulares.

En la figura 3.4(a) se muestra un gráfico con las densidades de corrientes crítica, en función del campo aplicado, para los primeros cuatro modos del disco de permalloy. En la figura 3.4(b) se muestra un gráfico con las frecuencias en función del campo aplicado para los primeros cuatro modos. Se tiene que  $\omega_{mj} = \omega_{-mj}$  son las auto-frecuencias normalizadas de los modos normales del disco. La frecuencia aumenta con el número de oscilaciones radiales y angulares, las que crecen con los índices  $j$  y  $m$ , como consecuencia de la interacción de intercambio.

La forma correspondiente a los modos se determina a partir de la ecuación (3.25), considerando las aproximaciones  $\lambda_{mj} \approx \sqrt{(\tilde{A}_{mj} + \omega_{mj})/2\omega_{mj}}$  y  $\mu_{mj} \approx \sqrt{(\tilde{A}_{mj} - \omega_{mj})/2\omega_{mj}}$  (con  $\tilde{A}_{mj} = h_x + 1/2 + h_E^{mj}$ ). Además se tiene que  $m_y = \text{Im}(a)/\sqrt{2}$  y  $m_z = \text{Re}(a)/\sqrt{2}$ .



Si se considera que sólo existe el modo (1), y considerando  $b_{mj}^{0(1)}$  real, se obtiene:

$$\begin{aligned} m_z &= b_{mj}^{0(1)} \sqrt{2} N_{mj} J_m(\kappa_{mj} \rho) (\lambda_{mj} + \mu_{mj}) \cos(m\phi - \omega_{mj} t) , \\ m_y &= b_{mj}^{0(1)} \sqrt{2} N_{mj} J_m(\kappa_{mj} \rho) (\lambda_{mj} - \mu_{mj}) \sin(m\phi - \omega_{mj} t) . \end{aligned} \quad (3.31)$$

Si sólo existe el modo (2), y con  $b_{mj}^{0(2)}$  real, se obtiene:

$$\begin{aligned} m_z &= b_{mj}^{0(2)} \sqrt{2} N_{mj} J_m(\kappa_{mj} \rho) (\lambda_{mj} + \mu_{mj}) \cos(m\phi + \omega_{mj} t) , \\ m_y &= b_{mj}^{0(2)} \sqrt{2} N_{mj} J_m(\kappa_{mj} \rho) (\mu_{mj} - \lambda_{mj}) \sin(m\phi + \omega_{mj} t) . \end{aligned} \quad (3.32)$$

Éstos son modos estacionarios en la dirección radial, pero en la dirección angular se propagan en el sentido anti-horario de rotación o en sentido horario, respectivamente.

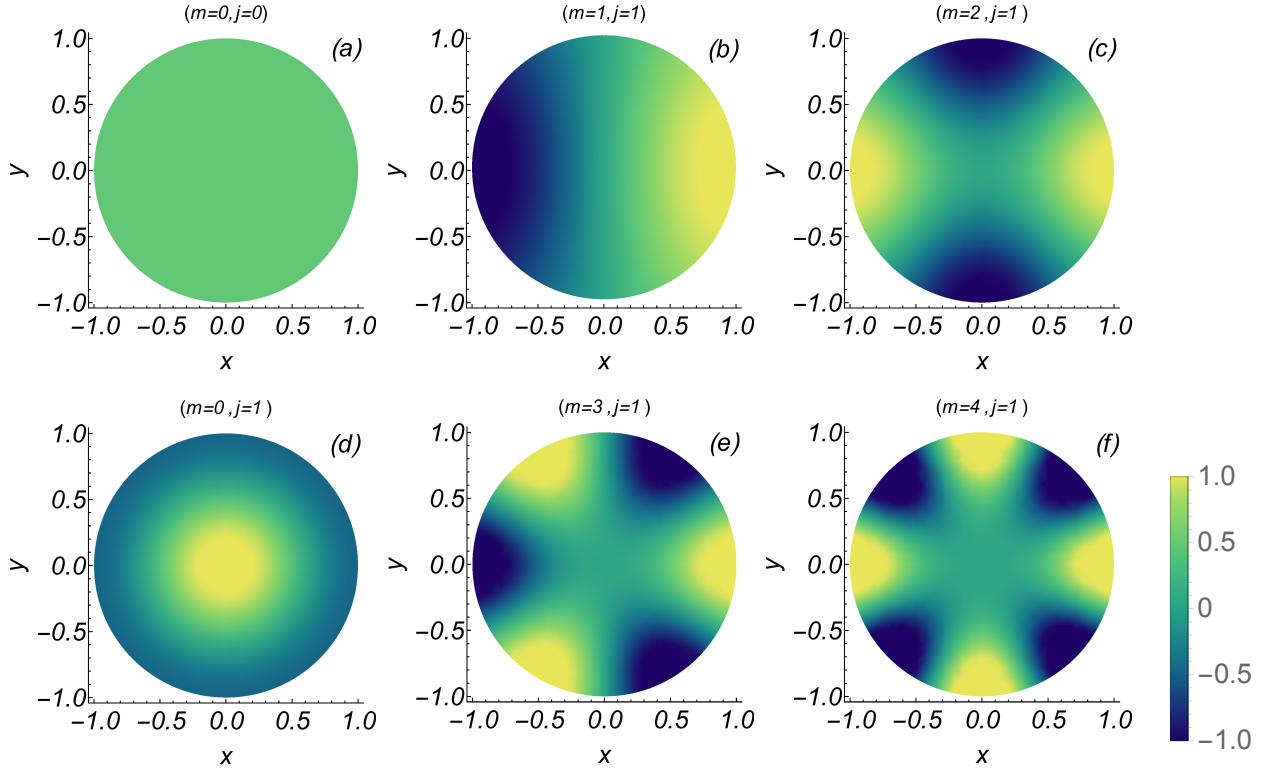


Figura 3.5: Forma espacial de los modos normales de oscilación cuando  $h_x = 0,1$ , correspondiente a la cantidad  $m_z$ . Los modos están ordenados en orden ascendente considerando su frecuencia de oscilación. El color está asociado con la amplitud de la magnetización de acuerdo a la barra de colores. Aquellos modos con  $m \neq 0$  son degenerados, se tiene que uno de ellos gira en sentido horario y el otro anti-horario.

En la figura 3.5 se muestra la forma de los modos cuando  $h_x = 0,1$ , al graficar la componente  $m_z$  de la magnetización, para el disco de permalloy. Los modos con  $m \neq 0$  corresponden

a modos degenerados. El modo  $(m = 0, j = 0)$ , de la figura 3.5(a), corresponde al modo uniforme, el cual tiene una frecuencia de oscilación de  $f = 9,28\text{GHz}$ . El modo  $(m = 1, j = 1)$ , de la figura 3.5(b), corresponde al primer modo degenerado. Uno de ellos rota en sentido anti-horario mientras que el otro lo hace en sentido horario. Ambos tienen una frecuencia de oscilación de  $f = 10,9\text{GHz}$ . El modo  $(m = 2, j = 1)$ , que se muestra en la figura 3.5(c), corresponde al segundo modo degenerado, con una frecuencia de oscilación de  $f = 13,43\text{GHz}$ . El modo  $(m = 0, j = 1)$ , que se observa en la figura 3.5(d), corresponde a un modo no degenerado con frecuencia de oscilación de  $f = 15,52\text{GHz}$ . El modo  $(m = 3, j = 1)$ , que se expone en la figura 3.5(e), corresponde al tercer modo degenerado, con una frecuencia de oscilación de  $f = 16,63\text{GHz}$ . El modo  $(m = 4, j = 1)$ , ilustrado en la figura 3.5(f), corresponde al cuarto modo degenerado, con una frecuencia de oscilación de  $f = 20,37\text{GHz}$ .

### 3.3. Interacción de la auto-oscilación uniforme con los modos no uniformes

La estabilidad lineal de los modos no uniformes depende del crecimiento de la auto-oscilación del modo uniforme. En esta sección se determina la amplitud del macro-spin y densidad de corriente tal que un cierto modo no uniforme  $(m, j)^{(1,2)}$  comienza a crecer exponencialmente. Se han realizado estudios similares cuando el campo magnético externo es perpendicular al plano del disco [38, 39].

El análisis es válido en cualquiera de las soluciones del macro-spin discutidas anteriormente. En primera instancia se realiza un estudio analítico, el cual posteriormente se contrasta con resultados numéricos.

Sea  $a^{\text{ao}}$  la solución de auto-oscilación del modo macro-spin,

$$a_{00} = a^{\text{ao}} = \lambda_{00} b_0 e^{-i\omega t} - \mu_{00} b_0^* e^{i\omega t} . \quad (3.33)$$

Si se considera una perturbación lineal en torno a ella,

$$a_{00} = a^{\text{ao}} + \delta a_{00} , \quad (3.34a)$$

$$a_{mj} = \delta a_{mj} . \quad (3.34b)$$

Entonces, realizando una expansión en torno a  $a^{\text{ao}}$ , se obtiene la siguiente ecuación a orden lineal, que describe la dinámica para la variable  $\delta a_{mj}$ ,

$$i \frac{d\delta a_{mj}}{dt} \approx \left[ \frac{\partial}{\partial a_{mj}} \left( (1 - i\alpha) \frac{\partial \mathcal{U}^t}{\partial a_{mj}^*} \right) \right] \Big|_{a^{\text{ao}}} \delta a_{mj} + \left[ \frac{\partial}{\partial a_{-mj}^*} \left( (1 - i\alpha) \frac{\partial \mathcal{U}^t}{\partial a_{-mj}^*} \right) \right] \Big|_{a^{\text{ao}}} \delta a_{-mj}^* , \quad (3.35)$$

donde, debido a la estructura de la energía,  $\mathcal{U}^t$ , sólo los términos  $\delta a_{mj}$  y  $\delta a_{-mj}^*$  existen en el lado derecho de la ecuación. La ecuación previa toma la forma

$$i\delta\dot{a}_{mj} = [Re(A_{mj}) + C_{mj}(a^{\text{ao}})]\delta a_{mj} + [Re(B_{mj}) + D_{mj}(a^{\text{ao}})](-1)^m \delta a_{-mj}^* \\ + i[Im(A_{mj}) + E_{mj}(a^{\text{ao}})]\delta a_{mj} + i[Im(B_{mj}) + F_{mj}(a^{\text{ao}})](-1)^m \delta a_{-mj}^* , \quad (3.36)$$

con los coeficientes  $A_{mj} - F_{mj}$  dados en el Apéndice C. Se realiza el siguiente cambio de variables aproximado

$$\begin{pmatrix} a_{mj} \\ a_{-mj}^* \end{pmatrix} \approx b_{mj}^{(1)} \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_{mj} \\ -(-1)^m \tilde{\mu}_{mj} \end{pmatrix} + b_{mj}^{(2)} \begin{pmatrix} -(-1)^m \tilde{\mu}_{mj} \\ \tilde{\lambda}_{mj}^* \end{pmatrix} , \quad (3.37)$$

con  $\tilde{\lambda}_{mj} = \sqrt{(\tilde{A}_{mj} + \omega_{mj})/2\omega_{mj}}$  y  $\tilde{\mu}_{mj} = \sqrt{(\tilde{A}_{mj} - \omega_{mj})/2\omega_{mj}}$ , donde  $\tilde{A}_{mj} = h_x + 1/2 + h_E^{mj}$  y  $\tilde{B}_{mj} = 1/2$ . Además, se considera el cambio variables aproximado para la solución macro-spin a partir de las ecuaciones (3.11a-3.11c), y entonces se obtiene a partir de la ecuación (3.36) (junto con la ecuación análoga para la variable  $\delta a_{-mj}^*$ ) la siguiente ecuación que acopla las variables  $b_{mj}^{(1)}$  y  $b_{mj}^{(2)}$ ,

$$i\dot{b}_{mj}^{(1)} \approx [\omega_{mj} b_{mj}^{(1)} - i(\alpha \tilde{A}_{mj} - \beta J) b_{mj}^{(1)} - i\alpha \tilde{B}_{mj} (-1)^m b_{mj}^{(2)}] \\ + [G_{mj}(a^{\text{ao}}) + iH_{mj}(a^{\text{ao}})] b_{mj}^{(1)} + [I_{mj}(a^{\text{ao}}) + iJ_{mj}(a^{\text{ao}})] (-1)^m b_{mj}^{(2)} , \quad (3.38)$$

con una ecuación análoga para  $\dot{b}_{mj}^{(2)}$ . El primer término entre corchetes proviene del caso en que no existe interacción con el macro-spin, ya analizado al estudiar los modos lineales. La segunda línea incluye la interacción con el modo macro-spin a través de los términos no lineales dependientes de su amplitud. Las funciones  $G_{mj}$ ,  $H_{mj}$ ,  $I_{mj}$  y  $J_{mj}$  son evaluadas en  $a^{ao}$  dada por la ecuación (3.33), y se encuentran detalladas en el Apéndice C.

Ahora, en base a la solución de la ecuación lineal (3.30), se realiza el siguiente cambio de variables,

$$b_{mj}^{(1)} = b_{mj}^{0(1)}(t)e^{-i\omega_{mj}t}e^{-(\alpha\tilde{A}_{mj}-\beta J)t}, \quad (3.39)$$

obteniendo la siguiente ecuación para  $b_{mj}^{0(1)}$ ,

$$\begin{aligned} i\dot{b}_{mj}^{0(1)} = & -i\alpha\tilde{B}_{mj}(-1)^m b_{mj}^{0(2)} e^{2i\omega_{mj}t} \\ & + [G_{mj}(a^{ao}) + iH_{mj}(a^{ao})]b_{mj}^{0(1)} + [I_{mj}(a^{ao}) + iJ_{mj}(a^{ao})](-1)^m b_{mj}^{0(2)} e^{2i\omega_{mj}t}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Existe una ecuación similar para  $\dot{b}_{mj}^{0(2)}$ . Se busca una solución tal que  $b_{mj}^{0(1)}$  y  $b_{mj}^{0(2)}$  varíen lentamente en el tiempo, por lo tanto, es posible despreciar los términos de la ecuación (3.40) que tengan coeficientes que varíen rápidamente [71, 72]. Ésto es, por ejemplo, términos como  $e^{2i\omega t}$  o  $e^{-2i\omega t}$ . Siguiendo esa idea, se utilizan los términos constantes de  $G_{mj}(a^{ao})$  y  $H_{mj}(a^{ao})$ , y los términos proporcionales a  $e^{-2i\omega t}$  en  $I_{mj}(a^{ao})$  y  $J_{mj}(a^{ao})$ , y se obtiene la siguiente ecuación aproximada para  $b_{mj}^{0(1)}$ ,  $b_{mj}^{0(2)}$ ,

$$i\dot{b}_{mj}^{0(1)} = (G'_{mj} + iH'_{mj})|b_0|^2 b_{mj}^{0(1)} + (I'_{mj} + iJ'_{mj})b_0^2 (-1)^m b_{mj}^{0(2)} e^{2i(\omega_{mj}-\omega)t}, \quad (3.41)$$

con las expresiones para  $G'_{mj} - J'_{mj}$  dadas en el Apéndice C. Existe una ecuación similar para  $\dot{b}_{mj}^{0(2)}$ . La solución al sistema de ecuaciones para  $b_{mj}^{0(1)}$ ,  $b_{mj}^{0(2)}$  es

$$\begin{aligned} b_{mj}^{0(1)} &= u_{mj}^0 e^{i(\omega_{mj}-\omega)t} e^{\Gamma_{mj}t}, \\ b_{mj}^{0(2)} &= v_{mj}^0 e^{-i(\omega_{mj}-\omega)t} e^{\Gamma_{mj}t}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

con

$$\Gamma_{mj} = \pm \sqrt{(|I'_{mj}|^2 + |J'_{mj}|^2)|b_0|^4 - (\omega_{mj} - \omega + G'_{mj}|b_0|^2)^2 + H'_{mj}|b_0|^2}. \quad (3.43)$$

Debido a que se buscan inestabilidades del sistema, se considera el signo (+) de la solución anterior, y la solución para el modo  $b_{mj}^{(1)}$  adopta finalmente la forma (ecs. (3.39) y (3.42)):

$$\begin{aligned} b_{mj}^{(1)}(t) &= u_{mj}^0 e^{i(\omega_{mj}-\omega)t} e^{\Gamma_{mj}t} e^{-i\omega_{mj}t} e^{-(\alpha\tilde{A}_{mj}-\beta J)t}, \\ &= u_{mj}^0 e^{-i\omega t} e^{\Gamma_{mj}t - (\alpha\tilde{A}_{mj}-\beta J)t}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

es decir, oscilará a la misma frecuencia angular  $\omega$  que el modo macro-spin y tendrá un crecimiento exponencial si  $\Gamma_{mj} > \alpha\tilde{A}_{mj} - \beta J$ , equivalente a:

$$\sqrt{(|I'_{mj}|^2 + |J'_{mj}|^2)|b_0|^4 - (\omega_{mj} - \omega + G'_{mj}|b_0|^2)^2} > \alpha\tilde{A}_{mj} - \beta J - H'_{mj}|b_0|^2, \quad (3.45)$$

condición que se analiza en la siguiente sección.

### 3.4. Aplicaciones del modelo en aproximación de plano infinito

En esta sección se muestra la aplicación del modelo teórico y algunos resultados numéricos. Para todos los cálculos que siguen se consideran los parámetros usuales de permalloy,  $4\pi M_s = 10^4$  Oe,  $l_E = 5,7\text{nm.}$ ,  $\varepsilon = 0,17$  y  $\alpha = 0,01$ .

#### 3.4.1. Inestabilidades, examinando resultados teóricos:

La expresión de la ecuación (3.45), que permite establecer el crecimiento exponencial de los modos no uniformes, depende de la densidad de corriente y del campo magnético aplicado al sistema. Entonces, para un campo magnético aplicado dado, al resolver la igualdad de la ecuación (3.45) es posible encontrar un límite para la densidad de corriente continua, llamada  $J_t^{(mj)}$ , a la cual el modo no uniforme  $(m, j)$  se desestabiliza.

La figura 3.6(a) muestra  $J_t$  para los primeros modos no uniformes que se vuelven inestables. En la figura 3.6(b) se grafica la amplitud que el modo macro-spin tiene en el punto en el que los primeros tres modos de magnetización no uniforme comienzan a crecer exponencialmente en este análisis lineal. Es importante notar que se grafican varios de estos modos no uniformes debido a que existe evidencia que en algunos sistemas [73, 74, 75, 76] pueden estabilizarse mediante los términos no lineales y coexistir con el modo no uniforme.

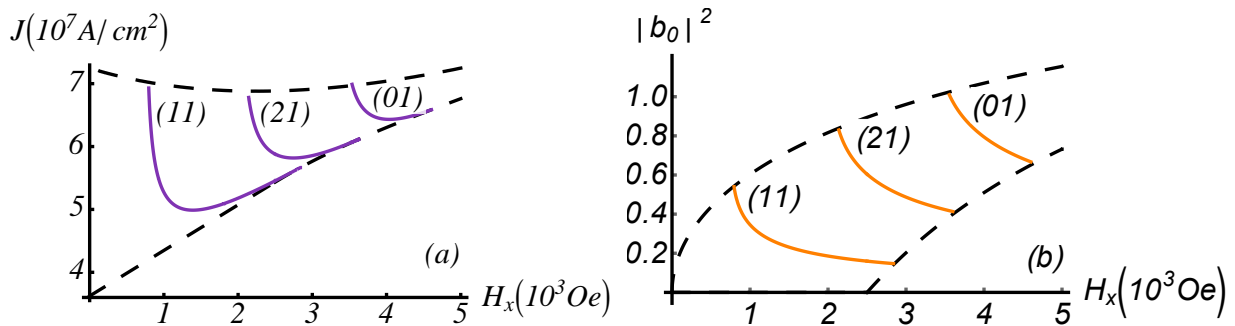


Figura 3.6: (a) Gráfico de la densidad de corriente a la cual los modos no uniformes comienzan a crecer. Las tres curvas corresponden a los primeros tres modos que crecen exponencialmente [(11), (21), y (01)]. La línea segmentada inferior corresponde a la densidad de corriente a la cual el modo uniforme comienza a auto-oscilar y la línea segmentada superior corresponde a  $J_c^{(1)}$ . (b) Gráfico de la amplitud alcanzada por el macro-spin cuando comienza el crecimiento de las no uniformidades de la magnetización (los primeros tres modos no uniformes). La línea segmentada inferior corresponde a la amplitud mínima de la oscilación y la línea segmentada superior se asocia con la máxima amplitud posible.

A partir de la ecuación (3.45) también es posible analizar la estabilidad de las distintas soluciones o ramas encontradas para el macro-spin (ecuaciones (3.16-3.20)) frente a perturbaciones no uniformes. Evaluando la ecuación (3.45) para  $(m, j) = (0, 0)$ , se obtiene

$$|J'_{00}||b_0|^2 > \alpha \tilde{A}_{00} - \beta J - H'_{00}|b_0|^2, \quad (3.46)$$

lo cual entrega la siguiente condición de inestabilidad,

$$|b_0|^2 < \sqrt{\frac{1 - J/J_c}{A_2}}, \quad (3.47)$$

i.e. la solución es inestable si la amplitud es menor al límite de la ecuación anterior o, por el contrario, es estable si la amplitud es mayor.

Como se discutió en la sección 3.1.1, para  $h_x > 1/4$  hay dos posibles soluciones para el macro-spin (3.16). En la figura 3.7, se grafica la amplitud crítica de la ecuación (3.47) y se muestra que la rama inferior (–) es inestable a perturbaciones uniformes, mientras que la rama superior (+) es estable. Para  $h_x < 1/4$  la única rama para  $J > J_c$  es estable frente a perturbaciones uniformes.

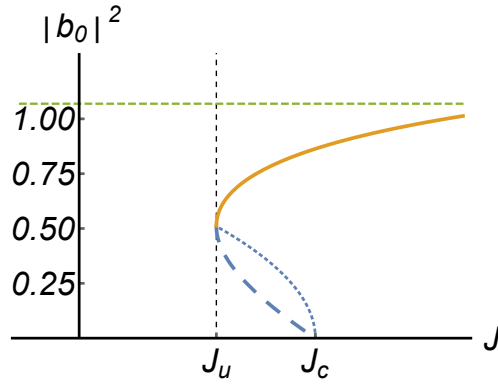


Figura 3.7: Gráfico de las ramas ( $\pm$ ) que son soluciones de la ecuación (3.19) ((+) corresponde a la línea continua, y (–) a la línea segmentada). La línea punteada es la cota de inestabilidad de la ecuación (3.47).

Para  $h_x > 1/4$ , la rama superior (+) que es estable, presenta una brecha en la amplitud respecto al equilibrio uniforme estático. Así, en la figura 3.6(b), que muestra las amplitudes en la inestabilidad de los modos no uniformes, se ve una curva inferior segmentada para los valores permitidos de  $|b_0|^2$  que se relaciona con esta brecha. La curva segmentada superior está asociada con el límite superior mencionado en la sección 3.1.1.

De la figura 3.6(a) se infiere que para  $h_x > 1/4$ , el aplicar una densidad de corriente levemente superior a la cual el modo uniforme comienza a auto-oscilar, conduce a que los modos no uniformes se vuelvan inestables, lo cual está asociado a un aumento significativo de la amplitud de oscilación (figura 3.6(b)). También, para campos mayores a  $h_x \simeq 0,28$ , el primer modo no uniforme es siempre inestable. El comentario anterior, más la alta sensibilidad a los cambios en la densidad de corriente de la figura 3.6(a), muestran que es necesario definir un límite práctico para el estudio de la estabilidad de la auto-oscilación uniforme, el cual es aproximadamente  $h_x = 1/4$ , o  $H_x = \pi M_s$ .

También la figura 3.7 muestra la coexistencia de dos soluciones estables (bi-estabilidad), la solución estática y la solución periódica (+), cuando la densidad de corriente está en el intervalo  $J_u < J < J_c$ , lo cual ocurre para  $h_x > 1/4$ . A primer orden en  $|b_0|^2$  la diferencia de energía (promediada en el tiempo) entre la solución macro-spin de la rama superior y la

solución estática uniforme es

$$\begin{aligned}\langle \delta \mathcal{E} \rangle &= 4\pi M_s^2 V \frac{1}{T} \int_0^T [h_x a a^* + (a + a^*)^2/4] dt \\ &= 4\pi M_s^2 V \omega_{00} |b_0|^2.\end{aligned}\tag{3.48}$$

Para el disco de permalloy, con  $R = 50\text{nm.}$  y  $L = 5\text{nm.}$ , se tiene que  $4\pi M_s^2 V \sim 3 \cdot 10^{-16} J$ . Por otro lado, a temperatura ambiente (300 K), la energía térmica es  $k_B T \sim 4,1 \cdot 10^{-21} J$ . Lo cual significa que para un campo un poco superior a  $h_x = 1/4$ , la diferencia de energía magnética es varios órdenes de magnitud superior a la energía térmica, por lo que el salto entre un estado y otro, debido a agitación térmica, no se observa.

### 3.4.2. Inestabilidades, comparación con simulaciones numéricas

En el análisis teórico previo de la sección 3.3 se han realizado algunas aproximaciones, éstos son,

- la aproximación en la energía de intercambio y
- la exclusión de los términos no resonantes.

El objetivo de esta sección es comparar los resultados teóricos aproximados con simulaciones numéricas que abordan el crecimiento de los modos no uniformes sin utilizar aproximaciones en las ecuaciones subyacentes.

Para realizar el estudio numérico se utiliza un sistema de tres ecuaciones acopladas,

- la ecuación (3.13) que describe la dinámica exacta del macro-spin (no acoplado),
- la ecuación linealizada (3.36) para la variable  $\delta a_{mj}$  cuando el modo macro-spin tiene una amplitud determinada a partir de la ecuación anterior, y
- una ecuación análoga para la variable  $a_{-mj}^*$  que se deriva de la ecuación (3.36).

Con el fin de encontrar la inestabilidad, al realizar la simulación numérica, se resuelve la ecuación para el macro-spin (3.13) en función de un aumento lento de la densidad de corriente continua  $J = J(t)$ . De esta manera la solución periódica estacionaria cambia adiabáticamente. Asimismo se desprecia la influencia de los otros modos no uniformes en el macro-spin. Al mismo tiempo, con esta solución para el macro-spin, se resuelve numéricamente las ecuaciones anteriormente mencionadas para las variables  $\delta a_{mj}$  y  $\delta a_{-mj}^*$ . En el momento  $t = \tau$  en el que se evidencia un crecimiento exponencial de la amplitud de los modos no uniformes, se establece  $J(\tau)$  como la densidad de corriente límite que marca la inestabilidad del macro-spin.

La figura 3.8(a) muestra una comparación entre la predicción teórica de la densidad de corriente límite para el crecimiento del primer modo no uniforme, en comparación con el límite análogo obtenido numéricamente. Se observa un comportamiento similar mientras que el límite numérico es más bajo.

La figura 3.8(b) muestra una comparación entre la predicción teórica para la amplitud de oscilación del macro-spin evaluada en la densidad de corriente límite, para el crecimiento del

primer modo no uniforme, comparado con la amplitud análoga obtenida numéricamente, la cual se obtiene realizando un promedio temporal en un período de oscilación. La amplitud numérica límite es más baja que la teórica.

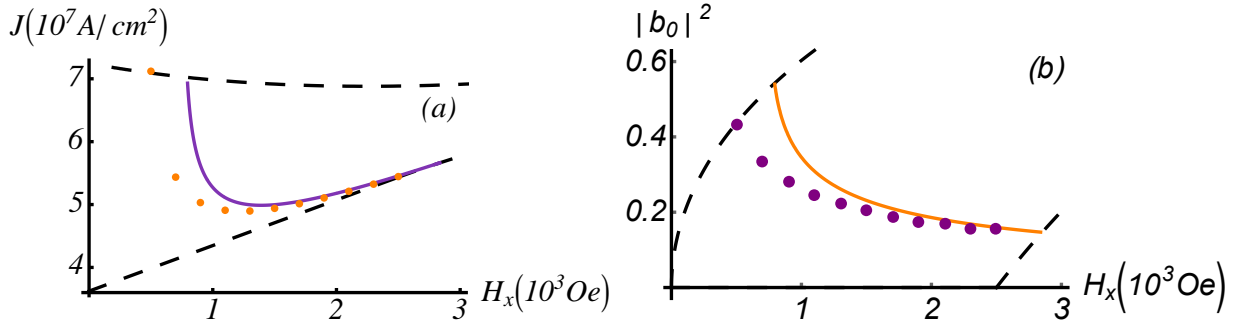


Figura 3.8: (a) Comparación de las densidades de corriente de umbrales teórica y numérica para el crecimiento del primer modo no uniforme: los puntos corresponden a datos numéricos, y la curva continua a la predicción teórica de la ecuación (3.45). (b) Comparación de la amplitud teórica y numérica de oscilación para el crecimiento del primer modo no uniforme. Las curvas segmentadas tienen el mismo significado que aquellas en las figuras 3.6(a) y 3.6 (b).

### 3.4.3. Dependencia de las inestabilidades con el tamaño

En esta sección se estudia la dependencia de la inestabilidad en función del radio del disco para el primer modo no uniforme ( $m = j = 1$ ), donde se mantiene el espesor del disco constante  $L = 5 \text{ nm}$ . En particular se consideran radios  $R = 50 \text{ nm}$ ,  $60 \text{ nm}$  y  $70 \text{ nm}$ . Los resultados son graficados en las figuras 3.9(a) y 3.9(b).

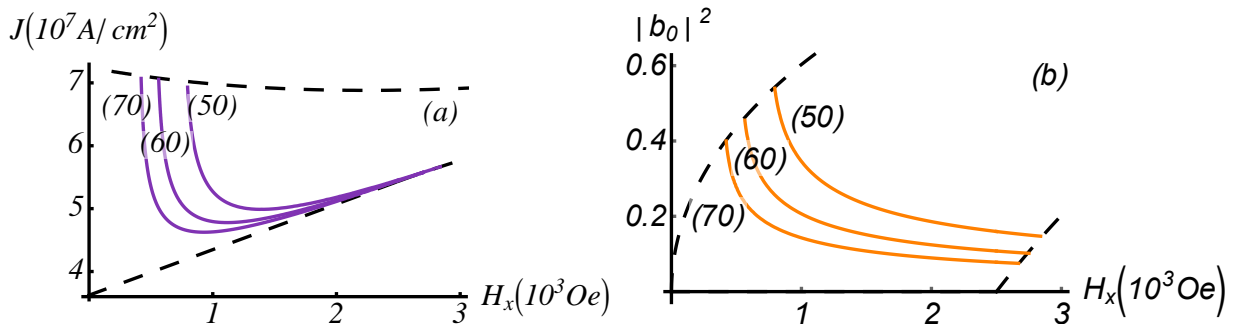


Figura 3.9: Las curvas continuas representan, para distintos radios:  $R = 50 \text{ nm}$ ,  $60 \text{ nm}$  y  $70 \text{ nm}$ : (a) la densidad de corriente límite que debe ser aplicada con el fin de comenzar a observar no uniformidades de la magnetización en la capa libre y (b) la amplitud de oscilación límite que es alcanzada por el macro-spin cuando las no uniformidades comienzan a crecer en la capa libre. Todas las curvas corresponden al crecimiento asociado al primer modo no uniforme ( $m = j = 1$ ). Las curvas segmentados tienen el mismo significado que las curvas equivalentes de las figuras 3.6 (a) y 3.6 (b).



En la figura 3.9(a) es posible observar que mientras más pequeño es el radio, mayor es el límite de la densidad de corriente continua necesaria para desestabilizar el primer modo no uniforme. Mientras que en la figura 3.9(b) se observa que mientras más pequeño es el radio, más grande es la amplitud de oscilación del modo uniforme que es alcanzada cuando el modo no uniforme aparece. La línea segmentada de las figuras 3.9(a) y 3.9(b) tienen el mismo significado que aquellas curvas equivalentes de las figuras 3.6(a) y 3.6(b).

La dependencia de la inestabilidad del macro-spin con el tamaño del disco, más específicamente con el radio, proviene del campo de intercambio. Como se puede ver en la ecuación (3.22), la energía asociada al campo de intercambio es  $\mathcal{U}_E = \sum_{m_j} (\chi_{m_j} l_E / R)^2 |a_{m_j}|^2$ , lo que significa que mientras más pequeño es el radio, mayor es la energía de los modos no uniformes en relación con el uniforme, es decir, este último es más estable cuando el radio es menor. Lo anterior es consistente con la idea de que las configuraciones de magnetización uniforme se estabilizan en muestras de tamaños más pequeños, debido a que el campo de intercambio domina por sobre la el campo demagnetizante.

# Capítulo 4

## Ondas de spin de un disco ferromagnético con un campo aplicado en el plano

La dinámica de la magnetización del disco cambia si uno va más allá del modelo aproximado considerado previamente, en el cual el campo demagnetizante se aproximó como  $\vec{H}_D = -4\pi M_z \hat{z}$ , que es el límite de plano infinito. En este capítulo se considera el efecto del campo demagnetizante completo, el que introduce efectos importantes de los bordes. El campo demagnetizante tiene contribuciones de cargas magnéticas superficiales, así como también de cargas magnéticas volumétricas. Estos nuevos términos del campo demagnetizante son proporcionales al espesor  $L$  del disco, que en este modelo se considera pequeño. Para determinar las ondas de spin en el disco se determina primero la magnetización de equilibrio, la cual es no uniforme. Luego se estudian las ondas de spin con un campo aplicado en el plano: sus formas y frecuencias. Finalmente se realiza una conexión con el límite de plano infinito, siguiendo la evolución de los modos a medida que se introducen los nuevos términos.

### 4.1. Magnetización de equilibrio no uniforme

Si se considera el campo demagnetizante en su forma completa, la magnetización de equilibrio ya no corresponde a un estado completamente alineado con la dirección del campo aplicado (eje  $\hat{x}$ ), sino que presenta pequeñas desviaciones con respecto al estado completamente saturado, las cuales quedan determinadas por la competencia energética de los distintos campos involucrados; campo externo, campo demagnetizante y campo de intercambio. De esta manera es necesario escribir  $a_{mj} = a_{mj}^{eq} + \tilde{a}_{mj}$ , donde las constantes  $a_{mj}^{eq}$  representan la magnetización de equilibrio, las cuales son no nulas, y las variables  $\tilde{a}_{mj}$  representan la componente dinámica de la magnetización.

Con el objetivo de calcular la configuración de equilibrio, es decir, las constantes  $a_{mj}^{eq}$ , se debe resolver

$$\left. \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial a_{mj}^*} \right|_{eq} = 0, \quad (4.1)$$

con  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{eff}$  según la Ec. (2.57).

Para encontrar la solución a este sistema de ecuaciones no lineales se utiliza el método de Newton [79, 80], también conocido como método de Newton-Raphson o de Newton-Fourier, el cual es un algoritmo iterativo que permite encontrar ceros de funciones y que se describe a continuación. Debido a que el estado de mínima energía consiste en una magnetización casi saturada en el plano, se usa  $a_{mj}^0 = 0$  como estimación inicial del equilibrio. Si se realiza una expansión de Taylor a primer orden en torno a  $a_{mj}^0$ , se tiene

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial a_{mj}^*} \right|_{(a_{mj}^1, a_{mj}^{1*})} &\approx \left. \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial a_{mj}^*} \right|_{(a_{mj}^0, a_{mj}^{0*})} \\ &+ \left. \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial a_{m'j'}^* \partial a_{mj}^*} \right|_{(a_{mj}^0, a_{mj}^{0*})} (a_{m'j'}^{1*} - a_{m'j'}^{0*}) + \left. \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial a_{m'j'} \partial a_{mj}^*} \right|_{(a_{mj}^0, a_{mj}^{0*})} (a_{m'j'}^1 - a_{mj}^0). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Para obtener la primera corrección, es decir los  $a_{mj}^1$ , es necesario igualar a cero la expresión anterior,

$$\begin{pmatrix} a_{m'j'}^1 \\ a_{m'j'}^{1*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{m'j'}^0 \\ a_{m'j'}^{0*} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial a_{m'j'} \partial a_{mj}^*} & \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial a_{m'j'}^* \partial a_{mj}^*} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial a_{m'j'} \partial a_{mj}} & \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial a_{m'j'}^* \partial a_{mj}} \end{pmatrix} \Bigg|_{(a_{mj}^0, a_{mj}^{0*})}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial a_{mj}^*} \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial a_{mj}} \end{pmatrix} \Bigg|_{(a_{mj}^0, a_{mj}^{0*})}. \quad (4.3)$$

De manera análoga a lo realizado anteriormente, es posible encontrar la corrección  $i$ -ésima, es decir, los  $a_{mj}^i$ :

$$\begin{pmatrix} a_{m'j'}^i \\ a_{m'j'}^{i*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{m'j'}^{i-1} \\ a_{m'j'}^{i-1*} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial a_{m'j'} \partial a_{mj}^*} & \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial a_{m'j'}^* \partial a_{mj}^*} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial a_{m'j'} \partial a_{mj}} & \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial a_{m'j'}^* \partial a_{mj}} \end{pmatrix} \Bigg|_{(a_{mj}^{i-1}, a_{mj}^{i-1*})}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial a_{mj}^*} \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial a_{mj}} \end{pmatrix} \Bigg|_{(a_{mj}^{i-1}, a_{mj}^{i-1*})}. \quad (4.4)$$

El hecho de evaluar la matriz de la expresión anterior en un punto distinto en cada iteración, es computacionalmente costoso. Debido a esto, la expresión (4.4) se puede aproximar por lo siguiente

$$\begin{pmatrix} a_{m'j'}^i \\ a_{m'j'}^{i*} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} a_{m'j'}^{i-1} \\ a_{m'j'}^{i-1*} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial a_{m'j'} \partial a_{mj}^*} & \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial a_{m'j'}^* \partial a_{mj}^*} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial a_{m'j'} \partial a_{mj}} & \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial a_{m'j'}^* \partial a_{mj}} \end{pmatrix} \Bigg|_{(a_{mj}^0, a_{mj}^{0*})}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial a_{mj}^*} \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial a_{mj}} \end{pmatrix} \Bigg|_{(a_{mj}^{i-1}, a_{mj}^{i-1*})}, \quad (4.5)$$

donde sólo el vector de la derecha se evalúa en la solución encontrada en el paso anterior ( $a_{mj}^{i-1}$ ) y la matriz se evalúa en la solución propuesta en el paso inicial ( $a_{mj}^0$ ).

Se debe repetir el proceso anterior hasta que las correcciones  $i$  tiendan a la corrección  $i-1$ , es decir,  $|a_{m'j'}^i - a_{m'j'}^{i-1}| = 0$ . De igual manera se puede definir un valor de tolerancia lo suficientemente pequeño ( $\varepsilon$ ), tal que si la condición  $|a_{m'j'}^i - a_{m'j'}^{i-1}| < \varepsilon$  se satisface, se termina la iteración. Finalmente la magnetización de equilibrio estará determinada por  $a_{mj}^{eq} = a_{mj}^i$ .

### 4.1.1. Configuración de equilibrio variando el campo aplicado

A continuación, en la figura 4.1 se describe el comportamiento de la magnetización de equilibrio al variar el campo aplicado. En ellas se observa que, a medida que se aumenta la intensidad del campo aplicado, la magnetización presenta cada vez menos desviaciones con respecto al estado completamente saturado.

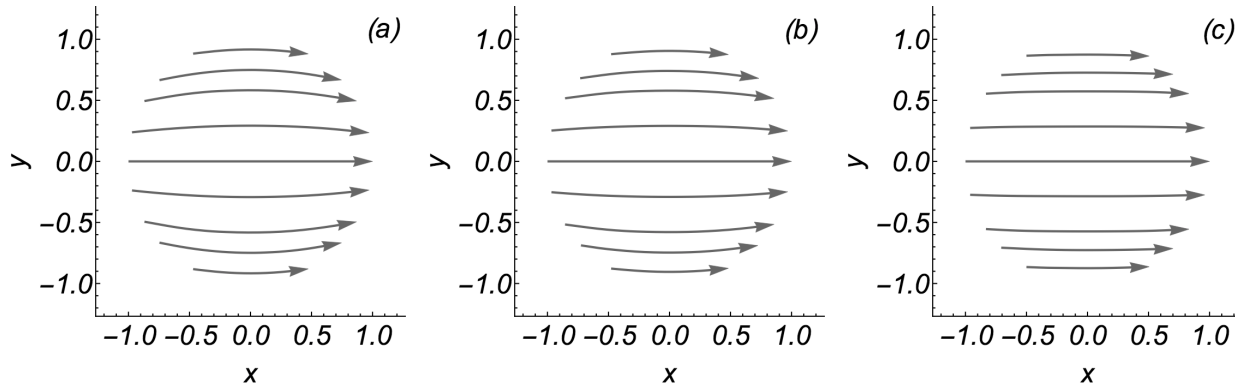


Figura 4.1: Las figuras representan la magnetización de equilibrio de un disco para distintos campos externos aplicados: (a)  $h_x = 0,1$ , (b)  $h_x = 0,2$  y (c)  $h_x = 1$ . En todos los casos se considera que el radio es  $R = 50\text{nm}$ . y no se aplica una corriente externa.

### 4.1.2. Configuración de equilibrio variando el radio del disco

Mientras menor es el radio del disco, menor es el término demagnetizante, por lo que domina el intercambio, generando una magnetización más uniforme. Si se aumenta el radio, el campo demagnetizante comienza a dominar por sobre el de intercambio y se nota una mayor curvatura de la magnetización en los bordes del disco.

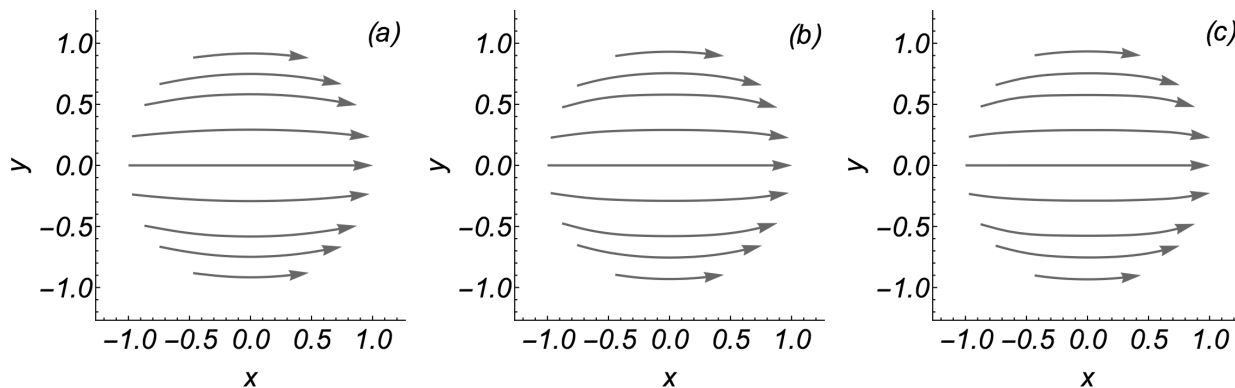


Figura 4.2: Las figuras representan la magnetización de equilibrio de un disco para distintas dimensiones del radio: (a)  $R = 50\text{nm}$ ., (b)  $R = 100\text{nm}$ . y (c)  $R = 150\text{nm}$ . En todos los casos se considera que el campo aplicado es  $h_x = 0,2$  y no se aplica una corriente externa.

### 4.1.3. Configuración de equilibrio incluyendo el efecto del campo de Oersted

El campo de Oersted generado por la inyección de corriente, está orientado en la dirección  $\hat{\phi}$  (anti-horario si el disco es visto desde arriba) y tiene una mayor intensidad en los bordes de la capa libre. De esta manera, en algunas zonas aumenta la curvatura de la magnetización en los bordes, mientras que en otras zonas disminuye la curvatura, tal como se puede observar en la figura 4.3.

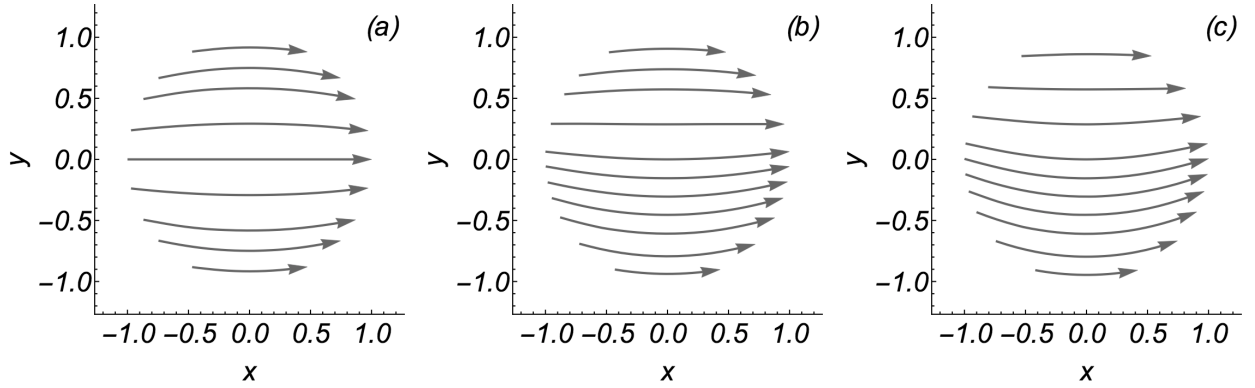


Figura 4.3: Las figuras representan la magnetización de equilibrio de un disco para distintas densidades de corriente aplicadas: (a)  $J = 0$ , (b)  $J = 5 \cdot 10^7 A/cm^2$  y (c)  $J = 10^8 A/cm^2$ . En todos los casos se considera que el campo aplicado es  $h_x = 0,1$  y radio  $R = 50nm$ .

Los resultados indican entonces que:

- En ausencia del campo de Oersted, se tiene que  $a_{mj}^{eq}$  es real y que  $a_{mj}^{eq} = 0$ , si  $m$  es impar y  $a_{mj}^{eq} \neq 0$ , si  $m$  es par. Se satisface que  $a_{-mj}^{eq} = -(-1)^m a_{mj}^{eq}$ , por lo que  $m_z = 0$ , y así la magnetización de equilibrio es en el plano del disco. Además  $m_y \propto \sin m\phi$ , como  $m$  es par, se tiene que  $m_y \propto \sin m(\phi + \pi) = \sin m\phi$ .
- En presencia del campo de Oersted, se tiene que  $a_{mj}^{eq}$  es real, si  $m$  es par y  $a_{mj}^{eq}$  es imaginario, si  $m$  es impar. Se satisface que para  $m$  par,  $a_{-mj}^{eq} = -(-1)^m a_{mj}^{eq}$ , y para  $m$  impar,  $a_{-mj}^{eq} = (-1)^m a_{mj}^{eq}$ , por lo que  $m_z = 0$ , y así la magnetización de equilibrio es en el plano del disco. Se tiene que una parte de la magnetización es  $m_y \propto \sin m\phi$ , mientras que también se tiene que  $m_y \propto \cos m\phi$ . Para  $m$  impar, se tiene que  $m_y \propto \cos m(\phi + \pi) = -\cos m\phi$ , por lo que se pierde la simetría  $\phi \rightarrow \phi + \pi$  que se tiene en ausencia del campo de Oersted, lo cual se aprecia en la figura 4.3.

## 4.2. Estudio lineal: ondas de spin

Algunos trabajos previos han calculado el campo demagnetizante con algunas aproximaciones, mientras que otros han utilizado métodos variacionales con el objetivo de determinar las ondas de spin de cilindros delgados a escala nanométrica [81, 82, 83, 84, 85].

En este trabajo, para estudiar la dinámica de la magnetización a orden lineal, es decir, las ondas de spin, es necesario escribir la ecuación de movimiento para la componente dinámica de la magnetización  $\tilde{a}_{mj}$ . La ecuación de movimiento a orden lineal se obtiene realizando una expansión de Taylor en torno al equilibrio a primer orden,

$$\begin{aligned} i \frac{d\tilde{a}_{mj}}{dt'} &\approx \left. \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial a_{mj}^*} \right|_{eq} + \sum_{m'j'} \left. \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial a_{m'j'} \partial a_{mj}^*} \right|_{eq} \tilde{a}_{m'j'} + \sum_{m'j'} \left. \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial a_{m'j'}^* \partial a_{mj}^*} \right|_{eq} \tilde{a}_{m'j'}^*, \\ &= \sum_{m'j'} (A_{mj}^{m'j'} \tilde{a}_{m'j'} + B_{mj}^{m'j'} \tilde{a}_{m'j'}^*), \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde  $A_{mj}^{m'j'} = \partial^2 \mathcal{U} / \partial a_{m'j'} \partial a_{mj}^* |_{eq}$  y  $B_{mj}^{m'j'} = \partial^2 \mathcal{U} / \partial a_{m'j'}^* \partial a_{mj}^* |_{eq}$ . También es posible utilizar matrices, con lo que se puede escribir la siguiente ecuación para la variable  $\tilde{a}_{mj}$  y su conjugada:

$$i \frac{d}{dt'} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{mj} \\ \tilde{a}_{mj}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{mj}^{m'j'} & B_{mj}^{m'j'} \\ -B_{mj}^{m'j'*} & -A_{mj}^{m'j'*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{m'j'} \\ \tilde{a}_{m'j'}^* \end{pmatrix} = \mathbf{M}_1 \begin{pmatrix} \tilde{a}_{m'j'} \\ \tilde{a}_{m'j'}^* \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Si la matriz  $\mathbf{M}_1$  es diagonalizable es posible descomponerla de la forma  $\mathbf{M}_1 = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1} \Rightarrow \mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{M}_1 \mathbf{P}$ . Las matrices  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{D}$  se construyen a partir de los autovectores y autovalores de la matriz  $\mathbf{M}_1$ , respectivamente, tal que la matriz  $\mathbf{D}$  sea diagonal.

A continuación, con el objetivo de diagonalizar el problema, es necesario realizar el siguiente cambio de variables del tipo Bogoliubov:

$$\tilde{a}_{mj} = \sum_n (\lambda_{mj}^n b_n - \mu_{mj}^n b_n^*), \quad (4.8)$$

En forma equivalente, usando matrices

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{mj} \\ \tilde{a}_{mj}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{mj}^{n'} & -\mu_{mj}^{n'} \\ -\mu_{mj}^{n'*} & \lambda_{mj}^{n'*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{n'} \\ b_{n'}^* \end{pmatrix} = \mathbf{M}_2 \begin{pmatrix} b_{n'} \\ b_{n'}^* \end{pmatrix} = b_{n'} \begin{pmatrix} \lambda_{mj}^{n'} \\ -\mu_{mj}^{n'*} \end{pmatrix} + b_{n'}^* \begin{pmatrix} -\mu_{mj}^{n'} \\ \lambda_{mj}^{n'*} \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

donde hay implícita una suma sobre  $n'$ .

La ecuación para las nuevas variables  $b_n$  y  $b_n^*$  es

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} b_n \\ b_n^* \end{pmatrix} = \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \begin{pmatrix} b_{n'} \\ b_{n'}^* \end{pmatrix} = \mathbf{D} \begin{pmatrix} b_{n'} \\ b_{n'}^* \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

donde en el paso anterior se toma  $\mathbf{M}_2 = \mathbf{P}$ , con el objetivo de que las nuevas variables representen las ondas de spin, también llamados, modos normales de oscilación. Los términos

diagonales de la matriz  $\mathbf{D}$  son las auto-frecuencias de oscilación,  $\omega_n$ , de los diferentes modos. Así, a orden lineal se tiene que las variables  $b_n$  tienen como solución  $b_n = b_n^0 e^{-i\omega_n t}$ , las que representan osciladores independientes.

Por otra parte, si se desea que la transformación sea canónica, se debe cumplir que  $i\dot{b}^n/dt' = \partial\mathcal{U}/\partial b^{n*}$ . A partir de la ecuación (4.9), se tiene que

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} b_n \\ b_n^* \end{pmatrix} = \mathbf{M}_2^{-1} i\frac{d}{dt'}\begin{pmatrix} a_{mj} \\ a_{mj}^* \end{pmatrix} = \mathbf{M}_2^{-1}\begin{pmatrix} \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial a_{mj}^*} \\ -\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial a_{mj}} \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Al usar la regla de la cadena, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial b^n} = \sum_{m'j'} \left[ \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial a_{m'j'}} \frac{\partial a_{m'j'}}{\partial b^n} + \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial a_{m'j'}^*} \frac{\partial a_{m'j'}^*}{\partial b^n} \right], \quad (4.12)$$

lo cual, escrito en forma matricial corresponde a

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial b_n^*} \\ -\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial b_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_{mj}^*}{\partial b_n^*} & -\frac{\partial a_{mj}}{\partial b_n^*} \\ -\frac{\partial a_{mj}^*}{\partial b_n} & \frac{\partial a_{mj}}{\partial b_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial a_{mj}^*} \\ -\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial a_{mj}} \end{pmatrix} = \mathbf{M}_3 \begin{pmatrix} \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial a_{mj}^*} \\ -\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial a_{mj}} \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Si lo anterior se reemplaza en la Ec. (4.11), se obtiene

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} b_n \\ b_n^* \end{pmatrix} = \mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{M}_3^{-1}\begin{pmatrix} \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial a_{mj}^*} \\ -\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial a_{mj}} \end{pmatrix} = (\mathbf{M}_3\mathbf{M}_2)^{-1}\begin{pmatrix} \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial a_{mj}^*} \\ -\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial a_{mj}} \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Si requerimos que la transformación sea canónica, es necesario que  $(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_2)$  sea la matriz identidad. Las expresiones para cada una de las matrices,  $\mathbf{M}_2$  y  $\mathbf{M}_3$ , son

$$\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_{mj}^n & -\mu_{mj}^n \\ -\mu_{mj}^{n*} & \lambda_{mj}^{n*} \end{pmatrix}, \quad (4.15a)$$

$$\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} \lambda_n^{mj*} & \mu_n^{mj} \\ \mu_n^{mj*} & \lambda_n^{mj} \end{pmatrix}, \quad (4.15b)$$

donde los super-índices están relacionados con las columnas de la matriz y los sub-índices están relacionados con las filas de la matriz. Usando estas expresiones, se debe satisfacer que

$$\sum_{mj} (\lambda_{mj}^{n*} \lambda_{n'}^{mj} - \mu_{mj}^n \mu_{n'}^{mj*}) = \delta_{n'}^n, \quad (4.16a)$$

$$\sum_{mj} (-\lambda_{mj}^{n*} \mu_{n'}^{mj} + \mu_{mj}^n \lambda_{n'}^{mj*}) = 0. \quad (4.16b)$$

De esta manera se tiene que  $(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_2) = \mathbf{I}$ , por lo que también se satisface  $(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_2)^T = \mathbf{M}_2^T \mathbf{M}_3^T = \mathbf{I}$ , lo que se traduce en

$$\sum_n (\lambda_n^{mj} \lambda_{m'j'}^{n*} - \mu_n^{mj*} \mu_{m'j'}^n) = \delta_{m'}^m \delta_{j'}^j, \quad (4.17a)$$

$$\sum_n (\lambda_n^{mj} \mu_{m'j'}^{n*} - \mu_n^{mj*} \lambda_{m'j'}^n) = 0. \quad (4.17b)$$

En resumen, para que la transformación de variables sea canónica, basta imponer que se cumpla una de las dos condiciones anteriormente encontradas: la condición (4.16) o la condición (4.17).

Una vez determinadas las constantes  $\lambda_{mj}^n$  y  $\mu_{mj}^n$ , estas se deben utilizar para determinar la forma correspondiente a cada modo. Para ello se procede de la siguiente manera. Para un modo dado  $n$  asociado a las variables  $b_n$  y  $b_n^*$  no nulas se utiliza la ecuación (4.8), la que determina la relación entre la variable  $\tilde{a}_{mj}$  y  $b_n$ , como sigue:  $\tilde{a}_{mj} = b_n^0(\lambda_{mj}^n e^{-i\omega_n t} - \mu_{mj}^n e^{i\omega_n t})$ . En el paso anterior se considera que la constante  $b_n^0$  es real, lo cual se puede hacer, pues esta cantidad, al representar la condición inicial en  $t = 0$ , es arbitraria. Finalmente, a partir de la relación entre  $a(\vec{x}, t)$  y su descomposición en las variables  $a_{mj}$ , se puede determinar  $a(\vec{x}, t)$ , asociado al modo  $n$ .

Al resolver el problema de valores propios de la ecuación (4.10), se encuentra numéricamente que los modos satisfacen una de las dos siguientes relaciones,

- $\lambda_{-mj}^n = (-1)^m \lambda_{mj}^n$  y  $\mu_{-mj}^n = (-1)^m \mu_{mj}^n$ ,
- $\lambda_{-mj}^n = -(-1)^m \lambda_{mj}^n$  y  $\mu_{-mj}^n = -(-1)^m \mu_{mj}^n$ .

En el primer caso, se encuentra que las componentes dinámicas de la magnetización, correspondientes a  $m_z = \sqrt{2}\text{Re}(a)$  y  $m_y = \sqrt{2}\text{Im}(a)$  son

$$m_z = \sqrt{2}b_n^0 \sum_j N_{0j}(\lambda_{0j}^n - \mu_{0j}^n) J_0(\kappa_{0j}\rho) \cos(\omega_n t) + 2\sqrt{2}b_n^0 \sum_{m>0j} N_{mj} J_m(\kappa_{mj}\rho) (\lambda_{mj}^n - \mu_{mj}^n) \cos m\phi \cos(\omega_n t), \quad (4.18a)$$

$$m_y = -\sqrt{2}b_n^0 \sum_j N_{0j}(\lambda_{0j}^n + \mu_{0j}^n) J_0(\kappa_{0j}\rho) \sin(\omega_n t) - 2\sqrt{2}b_n^0 \sum_{m>0j} N_{mj} J_m(\kappa_{mj}\rho) (\lambda_{mj}^n + \mu_{mj}^n) \cos m\phi \sin(\omega_n t), \quad (4.18b)$$

es decir, estos modos son estacionarios y tienen una simetría de reflexión con respecto al eje  $\hat{x}$  (simetría con respecto a  $\phi \rightarrow -\phi$ ). Además se tiene que si  $m$  es par (o impar), el modo es simétrico (o anti-simétrico) con respecto a  $\phi \rightarrow \pi - \phi$ , lo cual corresponde a una simetría de reflexión con respecto al eje  $\hat{y}$ .

En el segundo caso se encuentra

$$m_z = 2\sqrt{2}b_n^0 \sum_{m>0j} N_{mj} J_m(\kappa_{mj}\rho) (\lambda_{mj}^n + \mu_{mj}^n) \sin m\phi \sin(\omega_n t), \quad (4.19a)$$

$$m_y = 2\sqrt{2}b_n^0 \sum_{m>0j} N_{mj} J_m(\kappa_{mj}\rho) (\lambda_{mj}^n - \mu_{mj}^n) \sin m\phi \cos(\omega_n t), \quad (4.19b)$$

es decir, estos modos son estacionarios y anti-simétricos respecto a reflexiones con respecto al eje  $\hat{x}$  (anti-simetría con respecto a  $\phi \rightarrow -\phi$ ). Además, se tiene que si  $m$  es par (impar), el modo es anti-simétrico (simétrico) con respecto a  $\phi \rightarrow \pi - \phi$ , lo cual corresponde a una



simetría de reflexión con respecto al eje  $\hat{y}$ . Lo discutido anteriormente se puede observar de manera resumida en la siguiente tabla

	$\cos m\phi$	$\sin m\phi$
m par	simétrico $\hat{x}$ y simétrico $\hat{y}$	anti-simétrico $\hat{x}$ y anti-simétrico $\hat{y}$
m impar	simétrico $\hat{x}$ y anti-simétrico $\hat{y}$	anti-simétrico $\hat{x}$ y simétrico $\hat{y}$

Tabla 4.1: Clasificación de las simetrías de los modos, dependiendo de si es proporcional a  $\cos m\phi$  o  $\sin m\phi$  y de si  $m$  es par o impar.

Al tener en cuenta el campo desmagnetizante completo, que incluye el efecto de los bordes, los modos ya no giran en sentido horario o anti-horario como en la versión más simple del modelo analizado en el capítulo anterior, sino que son modos estacionarios con simetrías con respecto a los ejes  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$ . Esto es, son combinaciones lineales de modos que giran en ambas direcciones. Esto puede ser atribuido a las cargas magnéticas introducidas por la magnetización casi saturada a lo largo del eje  $\hat{x}$ , de modo que las ecuaciones diferenciales para los modos dependen del espacio y reflejan que los ejes  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  son ejes de simetría.

#### 4.2.1. Resultados numéricos: formas y frecuencias de las ondas de spin

Al resolver numéricamente lo discutido en la sección anterior, se obtienen los modos normales de oscilación de un disco, los cuales se grafican en la figura 4.4, donde se muestra la forma espacial de los modos asociada a la componente dinámica  $m_z$  para un campo aplicado de  $h_x = 0,1$  y cuando el radio del disco es  $R = 50\text{nm}$ . Los modos están ordenados de manera ascendente según su frecuencia (crece  $n$ ). Los colores representan la magnitud de la cantidad  $m_z$ , la cual, al ser arbitraria, se escoge de tal modo que su rango esté entre  $[-1, 1]$ . Ésto se asocia con la barra de colores.

Las ondas de spin pueden ser clasificadas de acuerdo a los nodos que presente la magnetización como sigue:

- El modo fundamental (F) no presenta líneas nodales.
- Los modos del tipo Backward (m-BA) están caracterizados por  $m$  líneas nodales perpendiculares a la magnetización.
- Los modos del tipo Damon-Eshbach (n-DE) están caracterizados por  $n$  líneas nodales paralelas a la magnetización de equilibrio.
- Los modos mixtos poseen líneas nodales de ambos tipos (m-BA x n-DE).

Basados en la clasificación recién introducida, y relacionándola con la notación  $(m, n)$ , se puede caracterizar cada uno de los modos graficados en la figura 4.4:

- El modo con  $n = 1$  tiene una frecuencia  $f = 7,98\text{GHz}$ . Numéricamente se encuentra que es proporcional a  $\cos m\phi$ , con  $m$  par, por lo que es simétrico con respecto al eje  $\hat{x}$  e

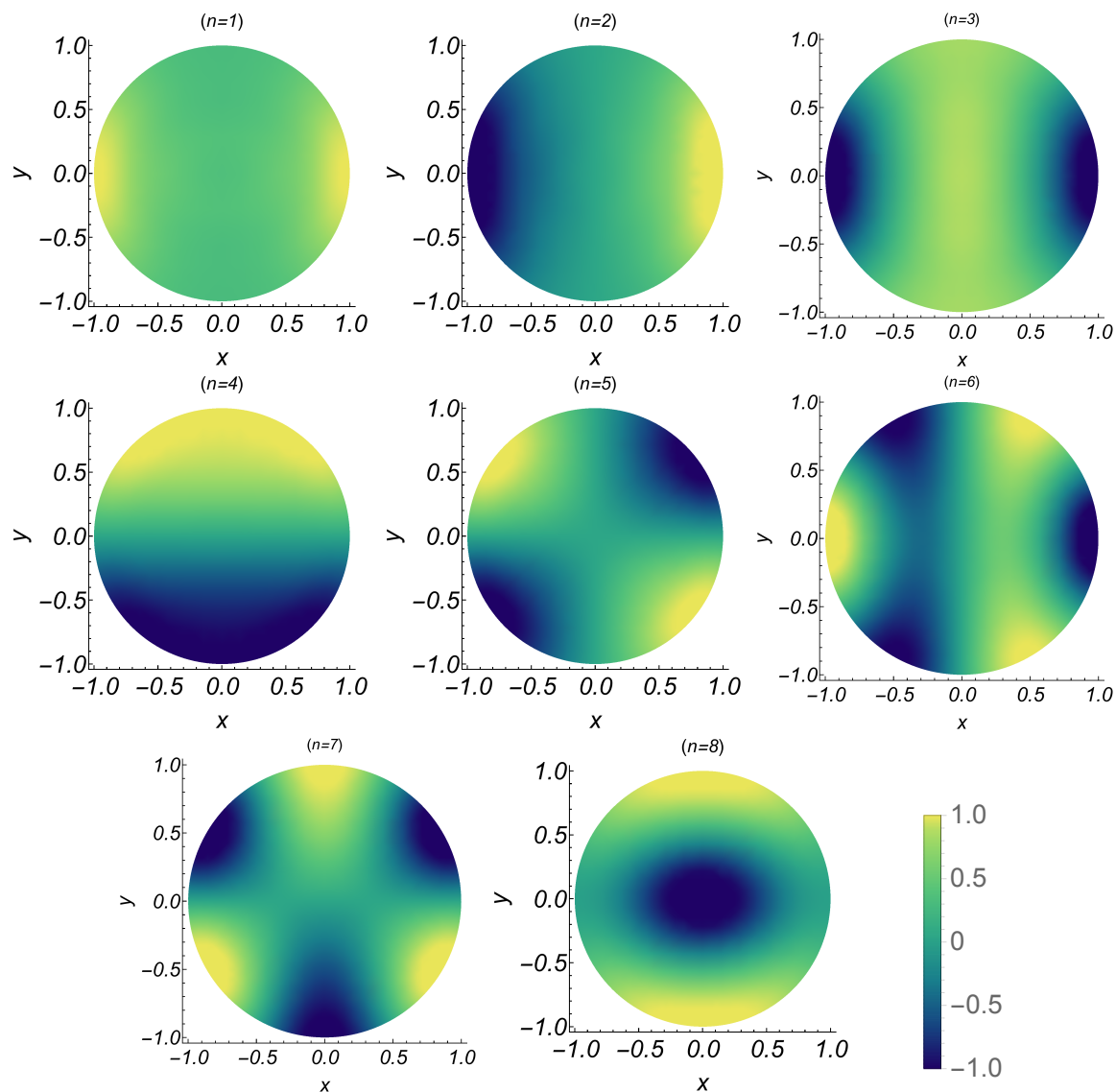


Figura 4.4: Formas de los modos, asociados a la componente  $m_z = \sqrt{2}Re(\tilde{a})$ , para un campo aplicado de  $h_x = 0,1$  y con  $R = 50\text{nm}$ . El número  $n$  indica el número del modo, los cuales se ordenan en orden ascendente según su frecuencia de oscilación.

$\hat{y}$ . Debido a que no presenta líneas nodales, puede ser denominado el modo fundamental o modo  $(0, 0)$ .

- El modo con  $n = 2$  tiene una frecuencia  $f = 8,38\text{GHz}$ , frecuencia muy similar a la del modo  $n = 1$ . Numéricamente se encuentra que es proporcional a  $\cos m\phi$ , con  $m$  impar, por lo que es simétrico con respecto al eje  $\hat{x}$  y anti-simétrico con respecto al eje  $\hat{y}$ . Este modo, al tener una línea nodal perpendicular a la magnetización puede ser llamado 1-BA o  $(1, 0)$  y corresponde a un modo de borde.
- El modo con  $n = 3$  tiene una frecuencia  $f = 12,35\text{GHz}$ . Numéricamente se encuentra que es proporcional a  $\cos m\phi$ , con  $m$  par, por lo que es simétrico con respecto al eje  $\hat{x}$  y eje  $\hat{y}$ . Este modo tiene dos líneas nodales perpendiculares a la magnetización por lo que puede ser llamado 2-BA o  $(2, 0)$ .
- El modo con  $n = 4$  tiene una frecuencia  $f = 12,96\text{GHz}$ . Es proporcional a  $\sin m\phi$ , con

$m$  par, por lo que es simétrico con respecto al eje  $\hat{y}$  y anti-simétrico con respecto al eje  $\hat{x}$ . Este modo, tiene una línea nodal paralela a la magnetización por lo que puede ser llamado 1-DE o  $(0, 1)$ .

De manera similar se puede realizar una clasificación análoga de todos los modos graficados en la figura 4.4. Por otra parte, en la figura 4.5 se muestra la dependencia de la frecuencia para los distintos modos en función del campo aplicado, y se observa un crecimiento monótono para todos los modos. Es importante mencionar que los resultados obtenidos coinciden muy bien con las simulaciones micromagnéticas realizadas en [40, 41], tanto en las frecuencias obtenidas como en la forma espacial de los modos, cuyas principales diferencias pueden ser atribuidas a valores ligeramente distintos en la magnetización de saturación y la constante de intercambio.

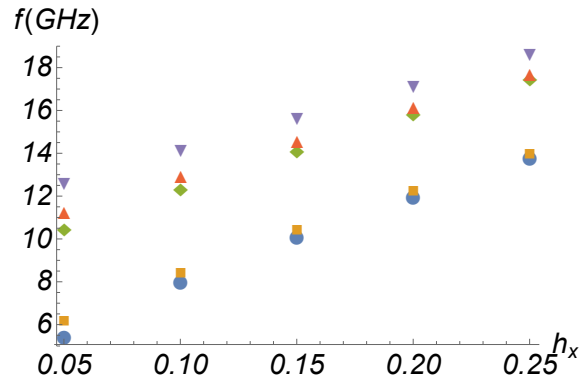


Figura 4.5: Variación de las auto-frecuencias de los modos más bajos en función del campo aplicado. Los círculos corresponden al modo  $n = 1$ . Los cuadrados corresponden al modo  $n = 2$ . Los rombos corresponden al modo  $n = 3$ . Los triángulos corresponden al modo  $n = 4$ . Los triángulos invertidos corresponden al modo  $n = 5$ .

### 4.3. Conexión con el límite de plano infinito

En el capítulo anterior se analizaron los modos normales de oscilación de la magnetización cuando el campo demagnetizante es de la forma simple  $\vec{H}_D = -4\pi M_z(\rho, \phi)\hat{z}$ . Para analizar cómo se modifican estos modos junto con sus auto-frecuencias al incluir el campo demagnetizante en su forma completa, se escribe el campo demagnetizante de la siguiente forma,

$$\vec{H}_D = -4\pi M_z(\rho, \phi)\hat{z} + \varepsilon[h_D^z(M_z)\hat{z} + \vec{h}_D^\perp(M_\perp)] , \quad (4.20)$$

donde el parámetro de control  $\varepsilon$  es cero si el campo demagnetizante es aproximado, y es igual a uno si el campo demagnetizante es considerado en su forma completa para un disco. Se tiene que  $h_D^z$  es el campo demagnetizante asociado a las cargas magnéticas superficiales en las tapas del cilindro, y  $\vec{h}_D^\perp$  corresponde al campo demagnetizante asociado a las cargas magnéticas superficiales en el manto del cilindro más las cargas volumétricas debido a las no uniformidades de la magnetización. El aumento efectivo del parámetro  $\varepsilon$  puede ser interpretado como aumentar artificialmente el espesor del disco, lo cual permite seguir la evolución de los modos lineales desde la aproximación en la cual el disco corresponde a un plano infinito, a aquella donde las dimensiones transversales son finitas y el espesor es pequeño, pero finito.

En la figura 4.6(a) se muestra la evolución de las auto-frecuencias de los primeros modos del disco a medida que el parámetro de control  $\varepsilon$  aumenta, para un campo aplicado de  $h_x = 0,1$ .

- Los puntos azules corresponden a la evolución de la frecuencia del modo original  $(m, j) = (0, 0)$ , que representa el modo macro-spin cuando  $\varepsilon = 0$ . Este modo disminuye su frecuencia desde 9,28GHz a 7,98GHz, a medida que se incrementa el campo demagnetizante asociado a los bordes.
- Los puntos naranjos/rojos representan los modos inicialmente degenerados  $(m, j)^{(1,2)} = (1, 1)^{(1,2)}$  de frecuencia 10,98GHz. Ellos se mezclan y sus frecuencias se separan con el incremento del espesor efectivo del disco. Uno de ellos disminuye su frecuencia hasta 8,38GHz, mientras que el otro aumenta su frecuencia hasta 12,96GHz. Cuando  $\varepsilon = 0$ , los modos están asociados a valores no nulos de las variables  $a_{11}$ ,  $a_{-11}^*$  y sus complejos conjugados. Cuando  $\varepsilon = 1$ , esas mismas variables son las que tienen mayor magnitud.
- Los puntos verdes corresponden a la evolución de las frecuencias de los modos degenerados  $(m, j)^{(1,2)} = (2, 1)^{(1,2)}$  de frecuencia 13,45GHz. Éstos modos se mezclan, uno de ellos disminuye su frecuencia hasta 12,35GHz y el otro la aumenta hasta 14,14GHz. Cuando  $\varepsilon = 0$ , los modos están asociados a valores no nulos de las variables  $a_{21}$ ,  $a_{-21}^*$  y sus complejos conjugados. Cuando  $\varepsilon = 1$  se tiene que esas mismas variables son las que tienen mayor magnitud.

La figura 4.6(b) muestra la dependencia de las auto-frecuencias de los primeros modos en función del campo aplicado. Estas se incrementan monótonamente con él. Las curvas continuas corresponden a los modos considerando  $\varepsilon = 0$ , y los puntos corresponden a los modos más bajos con  $\varepsilon = 1$ , cuyos colores se relacionan con la figura previa.

Para entender cómo evoluciona la forma espacial de los modos, en las figuras siguientes se grafica la cantidad  $m_z = \sqrt{2}\text{Re}(\tilde{a})$ , correspondiente a la parte dinámica de la magnetización.

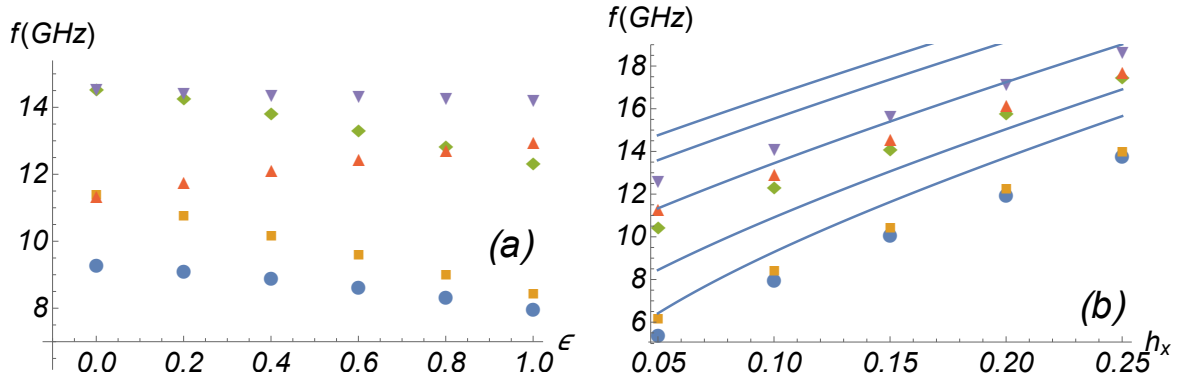


Figura 4.6: (a) Variación de las auto-frecuencias de los modos más bajos debido al cambio del parámetro de control  $\varepsilon$ , para  $h_x = 0,1$ . (b) Variación de las auto-frecuencias de los modos con menor frecuencia en función del campo aplicado: las líneas continuas corresponden a las frecuencias cuando  $\varepsilon = 0$  y los puntos corresponden al caso  $\varepsilon = 1$ . Los círculos corresponden al modo  $n = 1$ . Los cuadrados corresponden al modo  $n = 2$ . Los rombos corresponden al modo  $n = 3$ . Los triángulos corresponden al modo  $n = 4$ . Los triángulos invertidos corresponden al modo  $n = 5$ .

El gráfico se realiza en un tiempo arbitrario, se asume que  $b_n$  es una cantidad real y que  $m_z$  está dentro del rango  $[-1, 1]$ . Esto pues como la amplitud de los modos lineales es arbitraria, se puede escoger un valor para la amplitud que satisfaga lo anterior. Se considera un campo aplicado de  $h_x = 0,1$ .

En la figura 4.7 se muestra la conexión que existe entre el modo uniforme y el modo  $n = 1$ . En figura de la izquierda, 4.7(a), se muestra el modo macro-spin, cuya notación es  $(m = 0, j = 0)$  y corresponde a  $\varepsilon = 0$ . El modo uniforme se curva en los bordes del disco, en  $x = \pm 1$  alcanza su mayor amplitud, mientras mantiene un valor casi uniforme en su interior pues la variable  $a_{00}$  es la dominante. En figura de la derecha, 4.7(b), se muestra el nuevo modo asociado a  $\varepsilon = 1$ . El modo  $n = 1$  es simétrico con respecto a los ejes  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$ , y no presenta nodos, por lo que puede ser llamado fundamental.

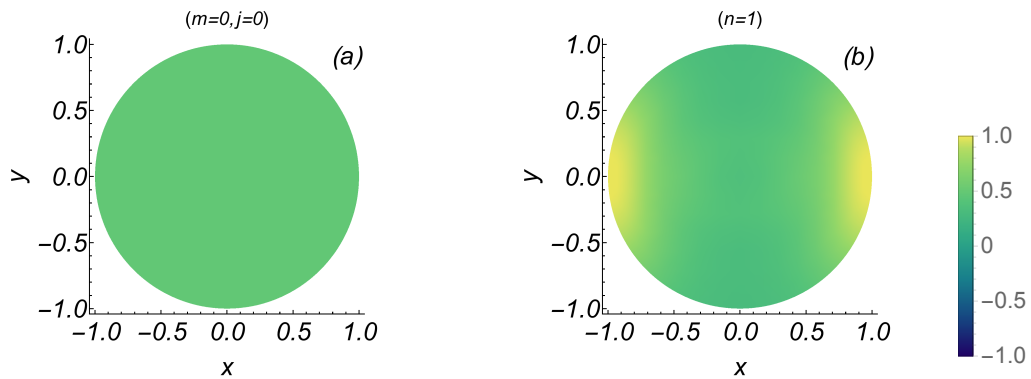


Figura 4.7: Conexión entre el modo uniforme y el modo  $n = 1$ , llamado también fundamental.

En la figura 4.8 se muestra la conexión existente entre los modos degenerados que rotan, asociados a la notación  $(m = 1, j = 1)^{(1,2)}$ , con los modos  $n = 2$  y  $n = 4$ . En la figura de la izquierda, 4.8(a), se muestra el modo degenerado cuando  $\varepsilon = 0$ , asociado a la notación

$(m = 1, j = 1)$ , en el que uno rota en sentido horario y el otro en antihorario. En la figura 4.8(b) se muestra, para  $\varepsilon = 1$ , el modo de menor frecuencia, el cual presenta una línea nodal perpendicular a la magnetización en el plano. En la figura 4.8(c) se muestra el modo de mayor frecuencia, el cual presenta una línea nodal paralela a la magnetización. Cuando  $\varepsilon = 1$ , los modos  $n = 2$  y  $n = 4$ , tienen como amplitudes mayores las correspondientes a las variables  $a_{11}$  y  $a_{-11}$ .

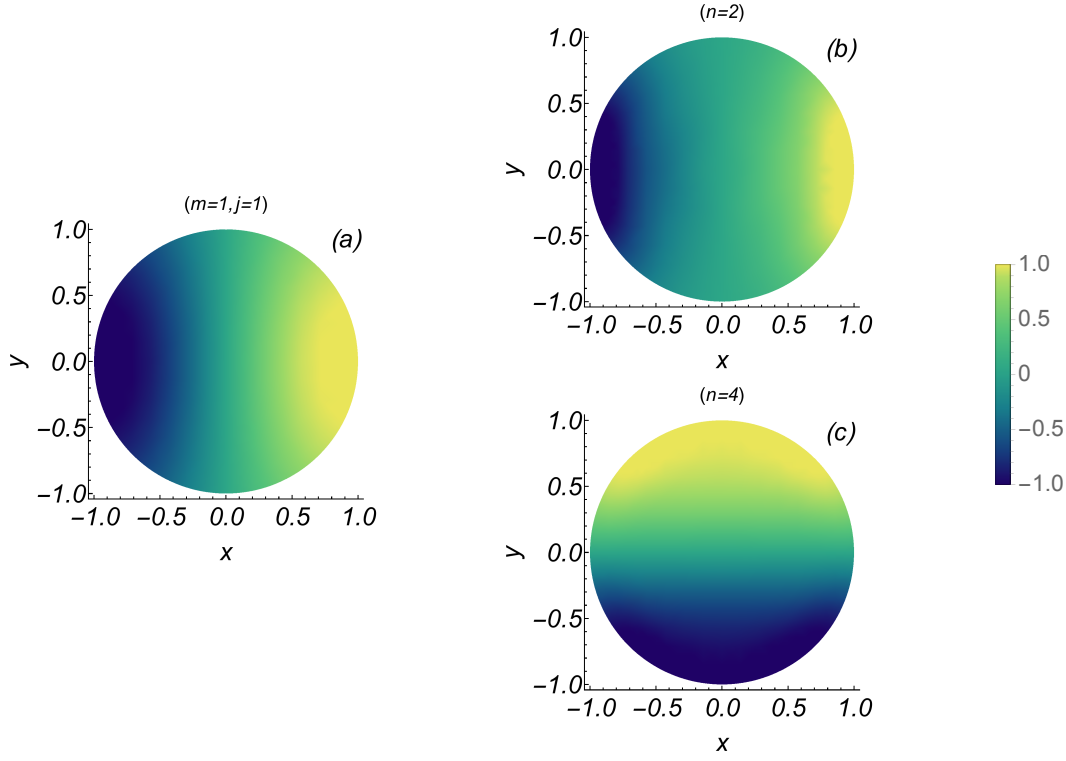


Figura 4.8: Conexión entre los modos degenerados  $(m = 1, j = 1)^{(1,2)}$  con los modos  $n = 2$  y  $n = 4$ .

En la figura 4.9 se muestra la conexión existente entre los modos degenerados que rotan, asociados a la notación  $(m = 2, j = 1)^{(1,2)}$  con los modos  $n = 3$  y  $n = 5$ . En la figura 4.9(a) se muestra el modo degenerado. Uno de ellos rota en sentido horario y el otro en sentido antihorario. Estos modos se separan en dos de distintas frecuencias, los cuales corresponden, principalmente, a una combinación de ambos modos degenerados. En la figura 4.9(b) se muestra el de menor frecuencia, el cual presenta dos líneas nodales perpendiculares a la magnetización. En la figura 4.9(c) se muestra el de mayor frecuencia, el cual tiene una línea nodal paralela y otra perpendicular a la magnetización. Cuando  $\varepsilon = 1$ , los modos  $n = 3$  y  $n = 5$ , tienen que las amplitudes mayores corresponden a las variables  $a_{21}$  y  $a_{-21}$ .

En la figura 4.10 se muestra la conexión existente entre el modo con notación  $(m = 0, j = 2)$  con el modo  $n = 8$ . En la figura 4.10(a) se muestra el modo dado por  $\varepsilon = 0$ . Este modo evoluciona y se convierte en el modo de la figura 4.10(b) cuando  $\varepsilon = 1$ , el cual presenta una mayor frecuencia y presenta dos líneas nodales paralelas a la magnetización. La amplitud mayor corresponde a la variable  $a_{20}$ .

En general cuando  $\varepsilon \rightarrow 1$ , hay una mayor localización de los modos en los bordes, en la

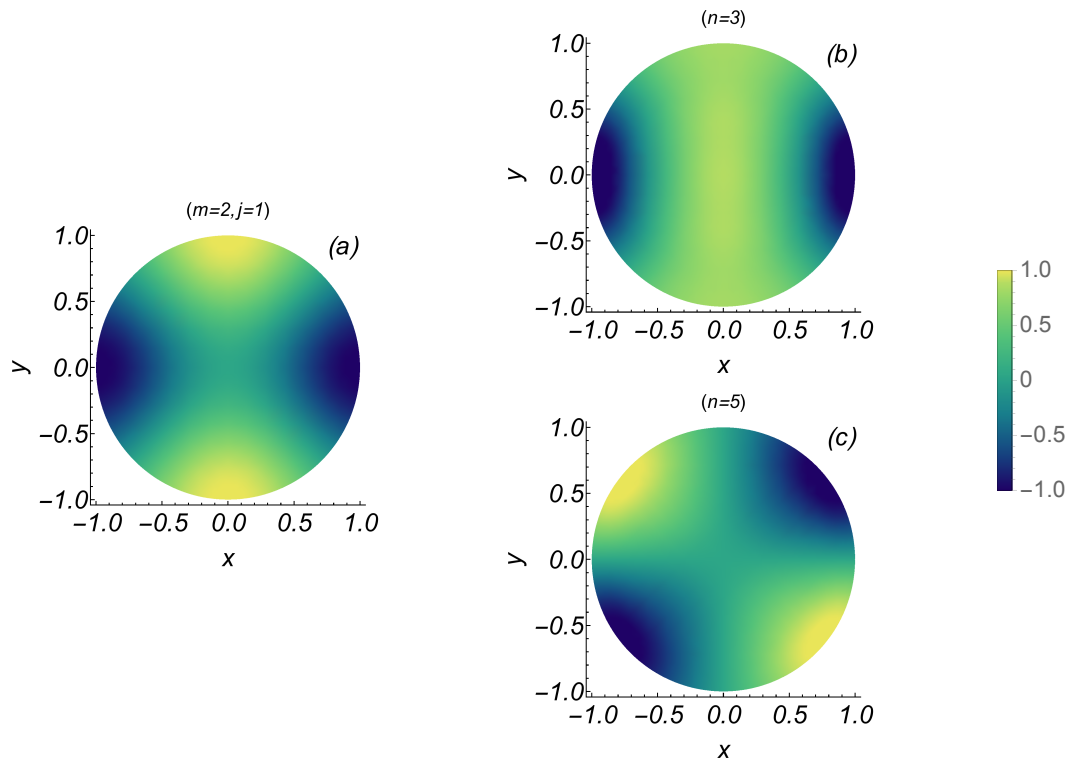


Figura 4.9: Conexión entre los modos degenerados  $(m = 2, j = 1)^{(1,2)}$  con los modos  $n = 3$  y  $n = 5$ .

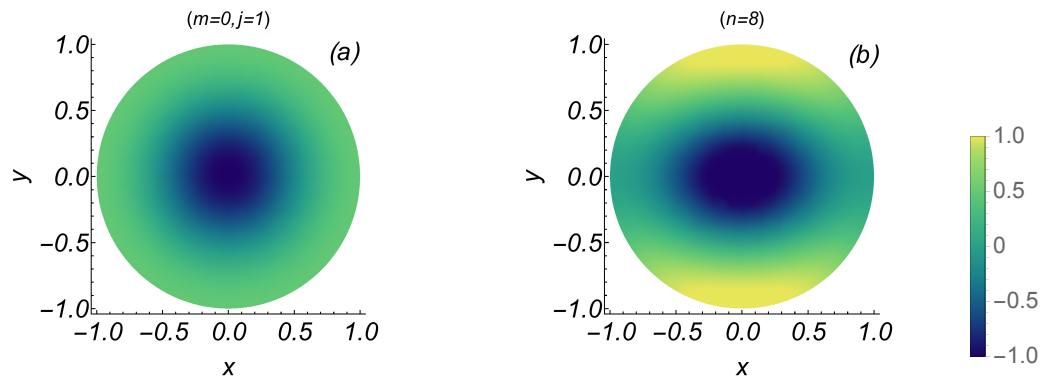


Figura 4.10: Conexión entre el modo  $(m = 0, j = 2)$  con el modo  $n = 8$ .

región donde  $y \simeq 0$ , sector en que las cargas magnéticas son más considerables.

# Capítulo 5

## Excitación de las ondas de spin mediante una corriente continua

En este capítulo se estudia la excitación de las ondas de spin analizadas en el capítulo anterior para un disco ferromagnético finito, mediante la inyección de una corriente polarizada en spin. Para nuestros cálculos se considera que la corriente es continua y se realiza un estudio lineal, donde se determina la densidad de corriente crítica necesaria para inducir auto-oscilaciones de la magnetización. Luego se realiza un estudio no lineal para determinar el rango en el espacio de parámetros donde existe la auto-oscilación de un sólo modo de manera aislada.

### 5.1. Estudio lineal

Al inyectar una corriente continua polarizada en spin en la capa libre, se tiene que ésta puede actuar como un término de anti-disipación, de modo que si sobrepasa cierto umbral puede inducir auto-oscilaciones de la magnetización.

Para estudiar el efecto de aplicar una densidad de corriente continua, a orden lineal, se escribe la ecuación de evolución temporal para la variable  $\tilde{a}_{mj}$ , incluyendo los términos asociados al torque por transferencia de spin y disipación,

$$i\dot{\tilde{a}}_{mj} \approx (1 - i\alpha) \sum_{m'j'} (A_{mj}^{m'j'} \tilde{a}_{m'j'} + B_{mj}^{m'j'} \tilde{a}_{m'j'}^* + i\beta J \tilde{a}_{mj}) , \quad (5.1)$$

donde  $A_{mj}^{m'j'} = \partial^2 \mathcal{U}^{eff} / \partial a_{m'j'} \partial a_{mj}^* |_{eq}$  y  $B_{mj}^{m'j'} = \partial^2 \mathcal{U}^{eff} / \partial a_{m'j'}^* \partial a_{mj}^* |_{eq}$ , con  $\mathcal{U}^{eff}$  dado por la ecuación (2.57). Análogamente usando matrices,



$$\begin{aligned}
i \frac{d}{dt'} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{mj} \\ \tilde{a}_{mj}^* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (1 - i\alpha)(A_{mj}^{m'j'} + i\beta J) & (1 - i\alpha)B_{mj}^{m'j'} \\ -(1 + i\alpha)B_{mj}^{m'j'^*} & -(1 + i\alpha)(A_{mj}^{m'j'^*} - i\beta J) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{m'j'} \\ \tilde{a}_{m'j'}^* \end{pmatrix}, \\
&\approx \begin{pmatrix} A_{mj}^{m'j'} & B_{mj}^{m'j'} \\ -B_{mj}^{m'j'^*} & -A_{mj}^{m'j'^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{m'j'} \\ \tilde{a}_{m'j'}^* \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \beta J - \alpha A_{mj}^{m'j'} & -\alpha B_{mj}^{m'j'} \\ -\alpha B_{mj}^{m'j'^*} & \beta J - \alpha A_{mj}^{m'j'^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{m'j'} \\ \tilde{a}_{m'j'}^* \end{pmatrix}, \\
&= \mathbf{M}_c \begin{pmatrix} \tilde{a}_{m'j'} \\ \tilde{a}_{m'j'}^* \end{pmatrix} + i\mathbf{M}_d \begin{pmatrix} \tilde{a}_{m'j'} \\ \tilde{a}_{m'j'}^* \end{pmatrix}, \tag{5.2}
\end{aligned}$$

donde la matriz  $\mathbf{M}_c$  representa la parte conservativa del problema y la matriz  $\mathbf{M}_d$  la parte disipativa y antidisipativa. Se realiza el cambio de variables propuesto en el capítulo anterior,

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{m'j'} \\ \tilde{a}_{m'j'}^* \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} b_n \\ b_n^* \end{pmatrix}, \tag{5.3}$$

tal que la parte conservativa del problema se diagonalice (se tiene que  $\mathbf{P} = \mathbf{M}_2$  según la Ec. (4.9)). A partir de la ecuación (5.2) se obtiene la siguiente ecuación que describe la dinámica de la variable  $b_n$ ,

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} b_n \\ b_n^* \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{M}_c \mathbf{P} \begin{pmatrix} b_{n'} \\ b_{n'}^* \end{pmatrix} + i\mathbf{P}^{-1} \mathbf{M}_d \mathbf{P} \begin{pmatrix} b_{n'} \\ b_{n'}^* \end{pmatrix} = \mathbf{D} \begin{pmatrix} b_{n'} \\ b_{n'}^* \end{pmatrix} + i\mathbf{M}_\gamma \begin{pmatrix} b_{n'} \\ b_{n'}^* \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Al considerar sólo los términos diagonales de la matriz  $\mathbf{M}_\gamma$ , y denominándolos  $\gamma_n$ , se encuentra la siguiente solución aproximada:  $b_n \simeq b_n^0 e^{(-i\omega_n + \gamma_n)t}$ . Para un determinado campo magnético aplicado se puede encontrar una densidad de corriente crítica tal que  $\gamma_n = 0$ . De esta manera se encuentra que el modo  $n$  presenta un comportamiento auto-oscilatorio si la corriente aplicada sobrepasa la crítica.

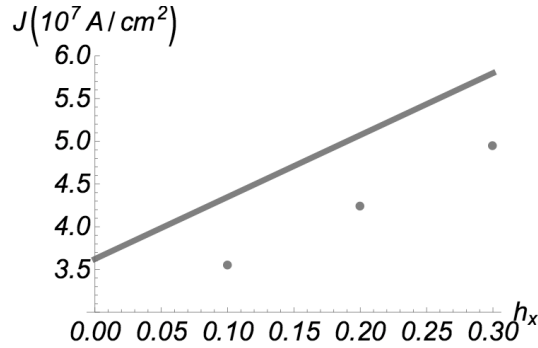


Figura 5.1: Los puntos corresponden a la densidad de corriente crítica para el modo  $n = 2$  que es el de corriente crítica más baja como función del campo aplicado cuando se considera el campo demagnetizante completo. La línea continua corresponde a la densidad de corriente crítica para el modo macro-spin cuando se considera el límite de plano infinito.

En la figura 5.1 los puntos ilustran la densidad de corriente crítica para el segundo modo ( $n = 2$ ), la cual se calcula para algunos campos aplicados. Este modo es el que tiene la densidad de corriente crítica más baja. Además, se muestra mediante una línea continua, una comparación con la densidad de corriente crítica para el modo macro-spin en el caso del modelo simplificado, dada por  $J = \alpha(h_x + 1/2)/\beta$ . Por consiguiente, es posible observar auto-oscilaciones cuando la densidad de corriente es menor a la predicha por el modelo que considera que la magnetización es uniforme.

## 5.2. Estudio no lineal

Los modos etiquetados con las amplitudes  $b_1$  y  $b_2$  tienen las frecuencias de oscilación más bajas, las cuales son bastante similares: 7,98 GHz y 8,38 GHz, respectivamente. De la misma forma, ambos modos tienen una corriente crítica similar,  $J_1^{crit} \sim J_2^{crit}$ . A pesar de que el modo  $b_1$ , denominado también cuasi uniforme, es el que tiene la menor frecuencia, se tiene que el modo  $b_2$ , el cual corresponde a un modo de borde, es el que tiene la menor densidad de corriente crítica, es decir, la corriente crítica no depende de manera directa solamente de la frecuencia. De esta manera se tiene que el modo  $b_2$  es aquel que primero comienza a auto-oscilar a medida que se incrementa la densidad de corriente.

Para estudiar el rango de corriente en el que el modo  $b_2$  auto-oscila de manera aislada, es decir, para determinar su estabilidad lineal con respecto al crecimiento de los otros modos, se procede de la siguiente manera. Se aplica una densidad de corriente  $J > J_2^{crit}$  tal que el modo  $b_2$  comienza a auto-oscilar. Al considerar que los otros modos tienen amplitudes muy pequeñas, se estudia la ecuación del modo  $b_2$  a orden no lineal para determinar su crecimiento en función de la corriente aplicada.

La ecuación dinámica para un modo arbitrario  $b_n$ , a orden no lineal, se obtiene a partir de la ecuación no lineal para las variables  $\tilde{a}_{mj}$ , a través de la siguiente expresión

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} b_n \\ b_n^* \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1} i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{mj} \\ \tilde{a}_{mj}^* \end{pmatrix} \approx \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} (1 - i\alpha) \partial \mathcal{U}^t / \partial \tilde{a}_{mj}^* \\ -(1 + i\alpha) \partial \mathcal{U}^{t*} / \partial \tilde{a}_{mj} \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

donde luego es necesario reemplazar las variables  $\tilde{a}_{mj}$  en función de las variables  $b_n$ .

Al considerar que el modo  $b_n$  domina la dinámica previa, y manteniendo sólo los términos resonantes hasta orden tres, sin interacción entre los modos, se obtiene la siguiente ecuación aproximada para la evolución temporal de la variable  $b_n$

$$i \frac{db_n}{dt} \approx C_n^1 b_n + C_n^2 |b_n|^2 b_n. \quad (5.6)$$

Al buscar una solución auto-oscilatoria para la ecuación previa, se tiene que para el modo  $b_2$  es de la forma  $b_2 = b_2^0 e^{-i\omega_2 t}$ , con una frecuencia  $\omega_2$  real. Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones que se debe satisfacer

$$\omega_2 = \text{Re}(C_2^1 + C_2^2 |b_2^0|^2), \quad (5.7a)$$

$$\text{Im}(C_2^1 + C_2^2 |b_2^0|^2) = 0. \quad (5.7b)$$

A partir de la segunda expresión se obtiene una expresión para la amplitud de oscilación  $|b_2^0|$  en función de la densidad de corriente y el campo magnético aplicado. A partir de la primera expresión se encuentra una expresión para la frecuencia  $\omega_2$  que depende de la amplitud de oscilación  $|b_2^0|$ .

En la figura 5.2 se muestra una comparación entre nuestra predicción teórica para la amplitud, en función de la densidad de corriente, y el resultado numérico para ella. Ambas concuerdan razonablemente para un cierto rango de la densidad de corriente aplicada. A medida que ésta se hace mayor, menor es el acuerdo. En la solución numérica se aumenta

adiabáticamente la corriente aplicada. La nube azul de puntos observada en la solución numérica es debido a que no sólo los términos resonantes son incluidos en la ecuación (5.6), sino que también son incluidos los términos no resonantes. Considerando lo anterior, la solución general para esta variable es de la forma  $b_2 = b_2^0 e^{-i\omega_2 t} + b_2^1 e^{-2i\omega_2 t} + b_2^2 e^{-3i\omega_2 t} + \dots$ . Cuando su amplitud es graficada, se conserva una parte oscilatoria, la cual explica la nube azul de puntos.

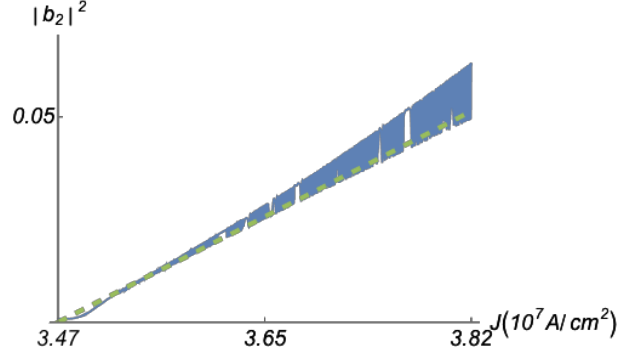


Figura 5.2: Comparación entre la predicción teórica (línea discontinua verde) y el resultado numérico (línea azul) para la amplitud de oscilación del modo  $b_2$ , considerando un campo magnético aplicado  $h_x = 0,1$ .

En el modelo utilizado se tiene que la amplitud calculada a partir de la expresión (5.7b) no puede tener un valor arbitrario, debido a que se debe satisfacer  $m_x > -1$ . La magnetización en  $\hat{x}$  es  $m_x = 1 - aa^*$ . Si esta cantidad se promedia espacialmente en el disco, se obtiene

$$\langle m_x \rangle = \frac{1}{V} \int m_x dV = (1 - \sum_{mj} a_{mj} a_{mj}^*) = [1 - \sum_{mj} (a_{mj}^{eq} + \tilde{a}_{mj}) (a_{mj}^{eq*} + \tilde{a}_{mj}^*)] . \quad (5.8)$$

Se tiene que  $\tilde{a}_{mj} = \sum_n (\lambda_{mj}^n b_n^0 e^{-i\omega_n t} - \mu_{mj}^n b_n^{0*} e^{i\omega_n t})$ . Si ahora, la cantidad  $m_x$  se promedia en un periodo de oscilación:

$$\langle m_x \rangle = 1 - \sum_{mj} \sum_n [ |a_{mj}^{eq}|^2 + (|\lambda_{mj}^n|^2 + |\mu_{mj}^n|^2) |b_n^0|^2 ] . \quad (5.9)$$

Si sólo existe un modo  $n$ , se obtiene una cota superior para su amplitud dada por

$$|b_n^0|^2 < \frac{2 - \sum_{mj} |a_{mj}^{eq}|^2}{\sum_{mj} (|\lambda_{mj}^n|^2 + |\mu_{mj}^n|^2)} . \quad (5.10)$$

### 5.2.1. Inestabilidad de una auto-oscilación

Como se discutió en la sección previa, el modo asociado a  $b_2$  presenta una solución auto-oscilatoria si la densidad de corriente aplicada es superior a la crítica. Para estudiar teóricamente la estabilidad de esta solución, se asumen perturbaciones de la siguiente forma

$$b_2 = b_2^0 e^{-i\omega_2 t} + \delta b_2 , \quad (5.11a)$$

$$b_j = \delta b_j . \quad (5.11b)$$

Se tiene que la ecuación para la variable  $\tilde{a}_{mj}$ , en torno a esta solución, a orden lineal es:

$$i\dot{\tilde{a}}_{mj} \approx \sum_{m'j'} (\tilde{A}_{mj}^{m'j'} \tilde{a}_{m'j'} + \tilde{B}_{mj}^{m'j'} \tilde{a}_{m'j'}^*), \quad (5.12)$$

donde  $\tilde{A}_{mj}^{m'j'} = (1-i\alpha)\partial^2\mathcal{U}^t/\partial a_{m'j'}\partial a_{mj}^*|_{eq+ao}$  y  $\tilde{B}_{mj}^{m'j'} = (1-i\alpha)\partial^2\mathcal{U}^t/\partial a_{m'j'}^*\partial a_{mj}|_{eq+ao}$ . En esta expresión se ha realizado una expansión de Taylor en torno al estado formado por equilibrio más la solución auto-oscilatoria. Análogamente, usando matrices, se tiene:

$$i\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{mj} \\ \tilde{a}_{mj}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{mj}^{m'j'} & \tilde{B}_{mj}^{m'j'} \\ -\tilde{B}_{mj}^{m'j'*} & -\tilde{A}_{mj}^{m'j'*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{m'j'} \\ \tilde{a}_{m'j'}^* \end{pmatrix} = \mathbf{M}_i \begin{pmatrix} \tilde{a}_{m'j'} \\ \tilde{a}_{m'j'}^* \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

donde la matriz  $\mathbf{M}_i$  incluye la interacción entre modos. Se realiza el cambio de variables propuesto en la sección anterior (Ec. 5.3), de tal forma que la ecuación para el modo  $j$  a orden lineal, considerando que el modo  $b_2$  está auto-oscilando, se puede representar de manera general mediante la siguiente expresión

$$i\frac{d\delta b_j}{dt} = C_1\delta b_j + C_2\delta b_j^* + C_3(b_2)\delta b_j + C_4(b_2)\delta b_j^*, \quad (5.14)$$

En dicha expresión se ha utilizado  $\begin{pmatrix} b_n \\ b_n^* \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}_i\mathbf{P} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{m'j'} \\ \tilde{a}_{m'j'}^* \end{pmatrix}$ . En (5.14) la información sobre la interacción entre el modo 2 y el  $j$  se representa por  $C_3$  y  $C_4$ . A continuación, se buscan soluciones de la forma  $\delta b_j = b_j^0 e^{-i\omega_j t} e^{\gamma_j t}$ . Cuando se reemplaza en la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned} [(\omega_j + i\gamma_j)b_j^0 + ib_j^0] &= [C_1 + C_3(b_2)]b_j^0 + [C_2 + C_4(b_2)]b_j^{0*} e^{2i\omega_j t} \\ &\approx [C_1 + C_3(b_2)]b_j^0 + C_4(b_2)b_j^{0*} e^{2i\omega_j t}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

donde se han considerado solamente los términos resonantes, es decir, se eliminan los términos proporcionales a  $C_2$ . El modo 2 es tal que  $\tilde{a}_{mj} \neq 0$  para  $m$  impar. Si se estudia la estabilidad del modo  $j$  tal que  $\tilde{a}_{mj} \neq 0$  para el caso  $m$  par, se tiene que  $C_3(b_2)$  y  $C_4(b_2)$  sólo presentan términos cuadráticos en  $b_2$ . El enunciado previo es válido para  $j = 1$ , el caso particular que se estudiará.

Se considera  $C_3(b_2)$  constante y  $C_4(b_2)$  proporcional a  $e^{-2i\omega_2 t}$ , lo cual es corresponde a considerar sólo los términos resonantes. De esta forma, se escribe  $b_j^0 = u_j^0 e^{i(\omega_j - \omega_2)t} \Rightarrow \delta b_j = u_j^0 e^{-i\omega_2 t} e^{\gamma_j t}$ , donde  $\gamma_j$  debe satisfacer

$$\gamma_j = \sqrt{|C_4|^2 - [\omega_j - \text{Re}(C_1 + C_3)]^2} + \text{Im}(C_1 + C_3). \quad (5.16)$$

La figura 5.3 muestra una comparación entre la densidad de corriente de inestabilidad, para el modo  $j = 1$ , obtenida de manera teórica a partir de la expresión anterior y aquella obtenida numéricamente. El análisis es realizado para un campo magnético aplicado dado y la corriente se aumenta hasta identificar que se cumpla la condición  $\gamma_j = 0$  (correspondiente a la corriente crítica), lo que significa que el modo se vuelve inestable y comienza a crecer exponencialmente. El acuerdo entre los resultados numéricos y teórico es bueno, debido a

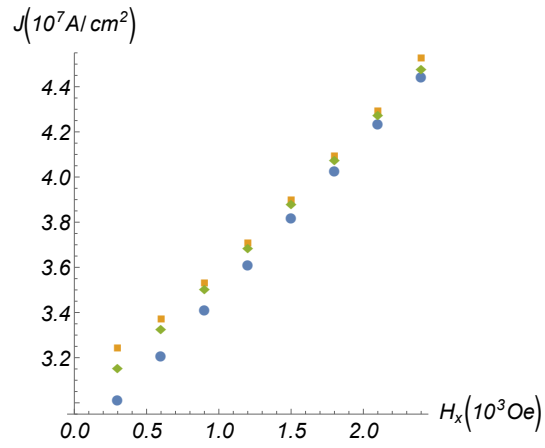


Figura 5.3: Los círculos azules representan la densidad de corriente crítica para la auto-oscilación del modo  $b_2$ , en función del campo magnético aplicado. Los cuadrados naranjos y los diamantes verdes representan las densidades de corrientes de inestabilidad para el modo  $b_2$  obtenidas de manera numérica y teórica, respectivamente, con respecto al crecimiento del modo  $j = 1$  asociado a  $b_1$  (este modo es el cuasi-uniforme, de frecuencia parecida a la del modo  $j = 2$  ( $b_2$ )).

que el modo  $b_2$  sólo alcanza amplitudes de oscilación pequeñas antes de que el modo  $j = 1$  comience a crecer.

Desde el punto de vista práctico se pronostica que rápidamente quedarían auto-oscilando los modos  $j = 1$  y  $j = 2$  y existiría una competencia no lineal entre ambos, cuyo estudio no forma parte de esta tesis.

# Capítulo 6

## Excitación de las ondas de spin mediante una corriente alterna

En este capítulo se estudia la excitación de las ondas de spin de un disco ferromagnético mediante la inyección de una corriente polarizada en spin con una componente alterna. Se considera una corriente continua de magnitud menor a la necesaria para inducir auto-oscilaciones de la magnetización y se le agrega una componente alterna de frecuencia variable. Se estudia a orden lineal los efectos de incluir el campo de Oersted producido por las corrientes y el considerar la componente perpendicular del torque por transferencia de spin.

### 6.1. Excitación mediante una corriente alterna: aproximación macro-spin

En esta sección se estudia el efecto que tiene el aplicar una corriente alterna al sistema en el contexto de un modelo simplificado, el macro-spin. Para ello se considera que también existe una corriente continua aplicada, la cual es menor a la corriente necesaria para inducir auto-oscilaciones de la magnetización. De esta forma se tiene que  $J(t) = J_{dc} + J_{ac} \cos(\Omega t)$ .

Nuestro objetivo principal es determinar la densidad de corriente alterna necesaria para observar auto-oscilaciones, considerando que la frecuencia de oscilación del sistema es igual o la mitad que la frecuencia de la corriente alterna. En primer lugar se puede realizar un estudio del modo macro-spin, donde se considera que el campo demagnetizante es aproximado por el de un plano infinito. A partir de los cálculos realizados en el capítulo 3 se tiene que la ecuación para el modo macro-spin a orden lineal, considerando disipación y torque por transferencia de spin, está dado por

$$\begin{aligned} i \frac{da}{dt} &= (1 - i\alpha)[(h_x + 1/2)a + a^*/2 + i\beta J_{dc}a] + i(1 - i\alpha)\beta J_{ac} \cos(\Omega t)a, \\ &= Aa + Ba^* + i(1 - i\alpha)\beta J_{ac} \cos(\Omega t)a, \end{aligned} \tag{6.1}$$

con  $A = (1 - i\alpha)[(h_x + 1/2) + i\beta J_{dc}]$ ,  $B = (1 - i\alpha)/2$ , y la componente alterna de la corriente

se ha escrito explícitamente por separado. Al realizar el cambio de variables utilizado para diagonalizar el problema sin corriente alterna (ver sección 3.1.1), se tiene que la ecuación para la variable  $b$  es

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} b \\ b^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega + i\gamma & 0 \\ 0 & -\omega + i\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ b^* \end{pmatrix} + i\beta J_{ac} \cos(\Omega t) \begin{pmatrix} 1 - i\alpha \text{Re}(A)/\omega & i\alpha B^*/\omega \\ -i\alpha B/\omega & 1 + i\alpha \text{Re}(A)/\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ b^* \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

donde  $\omega \approx \sqrt{h_x(h_x + 1)}$  y  $\gamma = \beta J_{dc} - \alpha(h_x + 1/2)$ . Buscamos una solución para (6.2) del tipo  $b = b_0 e^{-i(\Omega/2)t + \Gamma t}$  y se consideran sólo los términos resonantes ( $\Omega/2 \approx \omega$ )

$$\begin{pmatrix} (\Omega/2 - \omega) + i(\Gamma - \gamma) & \alpha\beta J_{ac} B^*/(2\omega) \\ -\alpha\beta J_{ac} B/(2\omega) & -(\Omega/2 - \omega) + i(\Gamma - \gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_0^* \end{pmatrix} = 0, \quad (6.3)$$

cuya ecuación se satisface si el determinante de la matriz es nulo, lo cual equivale a la condición

$$[\alpha\beta J_{ac}/(2\omega)]^2 |B|^2 = (\Gamma - \gamma)^2 + (\Omega/2 - \omega)^2. \quad (6.4)$$

La solución encontrada,  $b = b_0 e^{-i(\Omega/2)t + \Gamma t}$ , es inestable si  $\Gamma = 0$ , lo cual entrega la corriente crítica de inestabilidad,

$$J_{ac}^C = \frac{2\omega}{\alpha\beta} \sqrt{\frac{\gamma^2 + (\Omega/2 - \omega)^2}{|B|^2}}. \quad (6.5)$$

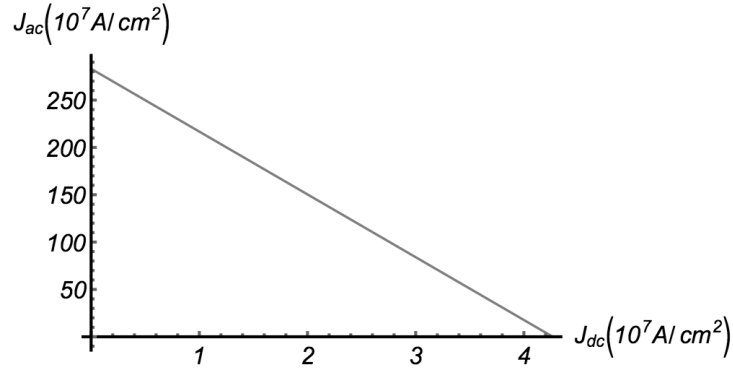


Figura 6.1: Densidad de corriente alterna crítica, necesaria para inducir auto-oscilaciones del modo macro-spin, en función de la densidad de corriente continua aplicada.

En la figura 6.1 se muestra la densidad de corriente alterna crítica necesaria para inducir auto-oscilaciones del modo macro-spin, al considerar que la frecuencia de la corriente alterna es el doble que la frecuencia de oscilación del modo uniforme, es decir,  $\Omega = 2\omega$  (resonancia paramétrica) y considerando un campo externo aplicado de  $h_x = 0,1$ . En ella se observa que las densidades de corriente crítica alterna son muy grandes comparadas con las densidades de corriente crítica continua.

Si se considera que el torque por transferencia de spin tiene una componente fuera del plano (Ec. (1.55)), entonces, la energía asociada al torque por transferencia de spin se modifica a

$$\mathcal{U}^{stt} = \beta_{\parallel} J \int aa^*(1 - aa^*/4)dV + i\beta_{\perp} J \int aa^* dV , \quad (6.6)$$

y así, la ecuación para el macro-spin queda escrita como

$$\begin{aligned} i \frac{da}{dt} &= (1 - i\alpha)[(h_x + 1/2 - \beta_{\perp} J_{dc} + i\beta_{\parallel} J_{dc})a + a^*/2] + [i(1 - i\alpha)\beta_{\parallel} a - (1 - i\alpha)\beta_{\perp} a] J_{ac} \cos(\Omega t) , \\ &= Aa + Ba^* + i(1 - i\alpha)\beta_{\parallel} J_{ac} \cos(\Omega t)a - (1 - i\alpha)\beta_{\perp} J_{ac} \cos(\Omega t)a , \end{aligned} \quad (6.7)$$

con  $A = (1 - i\alpha)[(h_x + 1/2 - \beta_{\perp} J_{dc}) + i\beta_{\parallel} J_{dc}]$ ,  $B = (1 - i\alpha)/2$  y la componente alterna de la corriente se ha escrito explícitamente por separado. Realizando el mismo procedimiento anterior, al considerar sólo los términos resonantes, se obtiene

$$\begin{pmatrix} (\Omega/2 - \omega) + i(\Gamma - \gamma) & (\alpha\beta_{\parallel} - \beta_{\perp})J_{ac}B^*/(2\omega) \\ -(\alpha\beta_{\parallel} - \beta_{\perp})J_{ac}B/(2\omega) & -(\Omega/2 - \omega) + i(\Gamma - \gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_0^* \end{pmatrix} = 0 , \quad (6.8)$$

cuya ecuación se satisface si el determinante de la matriz es nulo, lo cual equivale a la condición

$$[(\alpha\beta_{\parallel} - \beta_{\perp})J_{ac}/(2\omega)]^2 |B|^2 = (\Gamma - \gamma)^2 + (\Omega/2 - \omega)^2 . \quad (6.9)$$

La solución encontrada,  $b = b_0 e^{-i\Omega t + \Gamma t}$ , es inestable si  $\Gamma = 0$ , lo cual entrega la corriente crítica de inestabilidad

$$J_{ac}^C = \frac{2\omega}{|\alpha\beta_{\parallel} - \beta_{\perp}|} \sqrt{\frac{\gamma^2 + (\Omega/2 - \omega)^2}{|B|^2}} . \quad (6.10)$$

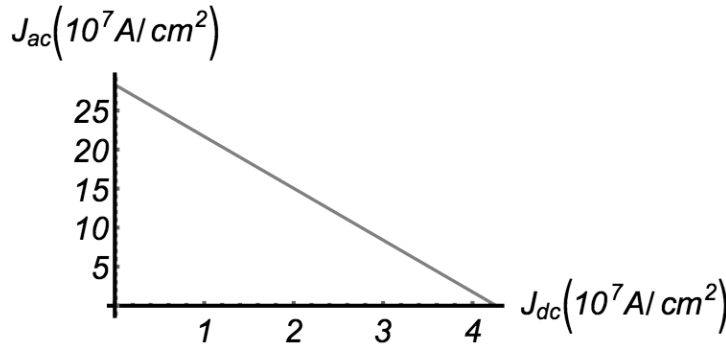


Figura 6.2: Densidad de corriente alterna crítica, necesaria para inducir auto-oscilaciones del modo macro-spin, en función de la densidad de corriente continua aplicada.

Si  $\beta_{\perp} = 0,1\beta_{\parallel}$  se tiene que

$$J_{ac}^C \approx \frac{2\omega}{\beta_{\perp}} \sqrt{\frac{\gamma^2 + (\Omega/2 - \omega)^2}{|B|^2}} , \quad (6.11)$$

lo cual reduce 10 veces la cantidad necesaria antes encontrada (ecuación (6.5)), como se muestra en la figura 6.2.



## 6.2. Análisis lineal: efecto del campo de Oersted y de la componente perpendicular del torque por transferencia de spin

Luego de haber realizado un estudio lineal para el modo macro-spin, se estudia la excitación de los modos normales de oscilación por corriente alterna estudiados en el capítulo 4, considerando el modelo no simplificado del disco, es decir, se incluye el campo demagnetizante completo del disco. Se aplica una corriente continua menor a la necesaria para generar auto-oscilaciones de la magnetización y se incluye una componente alterna, de esta manera, se tiene que  $J(t) = J_{dc} + J_{ac} \cos(\Omega t)$ . La componente alterna agrega términos al campo de Oersted y al torque por transferencia de spin. Se definen las siguientes cantidades

$$\mathcal{U}_{dc}^t = \mathcal{U}_X + \mathcal{U}_E + \mathcal{U}_D + \mathcal{U}_O^{dc}(J_{dc}) + i\mathcal{U}_{stt}^{dc}(J_{dc}), \quad (6.12a)$$

$$\mathcal{U}_{ac}^t = \mathcal{U}_O^{ac}(J_{ac}) + i\mathcal{U}_{stt}^{ac}(J_{ac}), \quad (6.12b)$$

donde  $\mathcal{U}_{dc}^t$  es la energía asociada a los campos aplicado (B), de intercambio (B), demagnetizante (B), de Oersted (B) y torque por transferencia de spin (B) al considerar sólo la corriente continua; y  $\mathcal{U}_{ac}^t$  es la energía asociada a los campos de Oersted y torque por transferencia de spin al considerar sólo la corriente alterna.

En primer lugar se debe determinar la configuración de equilibrio de la magnetización considerando  $\mathcal{U}_{dc}^t$ , de modo que se debe satisfacer  $\partial\mathcal{U}_{dc}^t/\partial a_{mj}^*|_{eq} = 0$ . Esto se resuelve mediante el procedimiento discutido en el capítulo 4. Entonces, se determina el cambio de variables tal que se diagonalice el problema, cuando sólo se considera  $\mathcal{U}_{dc}^t$ . Esto es, se tiene que la ecuación de movimiento considerando  $\mathcal{U}_{dc}^t$ , que incluye disipación y torque por transferencia de spin, a orden lineal para la variable  $\tilde{a}_{mj}$  es

$$\begin{aligned} i\frac{d\tilde{a}_{mj}}{dt'} &\approx (1 - i\alpha) \left[ \frac{\partial\mathcal{U}_{dc}^t}{\partial a_{mj}^*} \Big|_{eq} + \sum_{m'j'} \frac{\partial^2\mathcal{U}_{dc}^t}{\partial a_{m'j'} \partial a_{mj}^*} \Big|_{eq} \tilde{a}_{m'j'} + \sum_{m'j'} \frac{\partial^2\mathcal{U}_{dc}^t}{\partial a_{m'j'}^* \partial a_{mj}^*} \Big|_{eq} \tilde{a}_{m'j'}^* \right], \\ &= \sum_{m'j'} (A_{mj}^{m'j'} \tilde{a}_{m'j'} + B_{mj}^{m'j'} \tilde{a}_{m'j'}^*), \end{aligned} \quad (6.13)$$

donde  $A_{mj}^{m'j'} = (1 - i\alpha)\partial^2\mathcal{U}_{dc}^t/\partial a_{m'j'} \partial a_{mj}^*|_{eq}$  y  $B_{mj}^{m'j'} = (1 - i\alpha)\partial^2\mathcal{U}_{dc}^t/\partial a_{m'j'}^* \partial a_{mj}^*|_{eq}$ . Análogamente usando matrices, se escribe la ecuación para la variable  $\tilde{a}_{mj}$  y su conjugada como:

$$i\frac{d}{dt'} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{mj} \\ \tilde{a}_{mj}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{mj}^{m'j'} & B_{mj}^{m'j'} \\ -B_{mj}^{m'j'*} & -A_{mj}^{m'j'*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{m'j'} \\ \tilde{a}_{m'j'}^* \end{pmatrix} = \mathbf{M}_1 \begin{pmatrix} \tilde{a}_{m'j'} \\ \tilde{a}_{m'j'}^* \end{pmatrix}. \quad (6.14)$$

Se diagonaliza la matriz anterior y se utiliza  $\mathbf{M}_1 = \mathbf{PDP}^{-1}$ , donde ahora los autovalores del problema asociados a los términos diagonales de la matriz diagonal  $\mathbf{D}$  son complejos. Luego se realiza el siguiente cambio de variables,

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{mj} \\ \tilde{a}_{mj}^* \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} b_n \\ b_n^* \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} b_n \\ b_n^* \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{mj} \\ \tilde{a}_{mj}^* \end{pmatrix}, \quad (6.15)$$

con lo que finalmente se obtiene, a partir de la Ec. (6.14), la siguiente ecuación para la variable  $b$ ,

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} b_n \\ b_n^* \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{M}_1 \mathbf{P} \begin{pmatrix} b_n \\ b_n^* \end{pmatrix} = \mathbf{D} \begin{pmatrix} b_n \\ b_n^* \end{pmatrix}, \quad (6.16)$$

donde los términos diagonales de la matriz  $\mathbf{D}$  corresponden a la frecuencia y disipación del sistema asociados al modo  $n$ , es decir, son de la forma  $\omega_n + i\gamma_n$  y  $-\omega_n + i\gamma_n$ .

Al agregar una componente alterna a la corriente aplicada, se tiene que la ecuación lineal para la variable  $\tilde{a}_{mj}$  es de la forma:

$$\begin{aligned} i \frac{d\tilde{a}_{mj}}{dt'} &\approx (1 - i\alpha) \left[ \frac{\partial \mathcal{U}_{ac}^t}{\partial a_{mj}^*} \Big|_{eq} + \sum_{m'j'} \frac{\partial^2 (\mathcal{U}_{dc}^t + \mathcal{U}_{ac}^t)}{\partial a_{m'j'} \partial a_{mj}^*} \Big|_{eq} \tilde{a}_{m'j'} + \sum_{m'j'} \frac{\partial^2 (\mathcal{U}_{dc}^t + \mathcal{U}_{ac}^t)}{\partial a_{m'j'}^* \partial a_{mj}^*} \Big|_{eq} \tilde{a}_{m'j'}^* \right], \\ &= \sum_{m'j'} (A_{mj}^{m'j'} \tilde{a}_{m'j'} + B_{mj}^{m'j'} \tilde{a}_{m'j'}^*) + J_{ac} \cos(\Omega t) \left[ \sum_{m'j'} (C_{mj}^{m'j'} \tilde{a}_{m'j'} + D_{mj}^{m'j'} \tilde{a}_{m'j'}^*) + E_{mj} \right], \end{aligned} \quad (6.17)$$

donde  $A_{mj}^{m'j'} = (1 - i\alpha) \partial^2 \mathcal{U}_{dc}^t / \partial a_{m'j'} \partial a_{mj}^* |_{eq}$ ,  $B_{mj}^{m'j'} = (1 - i\alpha) \partial^2 \mathcal{U}_{dc}^t / \partial a_{m'j'}^* \partial a_{mj}^* |_{eq}$ ,  $C_{mj}^{m'j'} = (1 - i\alpha) \partial^2 \mathcal{U}_{ac}^t / \partial a_{m'j'} \partial a_{mj}^* |_{eq} / J_{ac} \cos(\Omega t)$ ,  $D_{mj}^{m'j'} = (1 - i\alpha) \partial^2 \mathcal{U}_{ac}^t / \partial a_{m'j'}^* \partial a_{mj}^* |_{eq} / J_{ac} \cos(\Omega t)$  y  $E_{mj} = (1 - i\alpha) \partial \mathcal{U}_{ac}^t / \partial a_{mj}^* |_{eq} / J_{ac} \cos(\Omega t)$ . Al utilizar matrices, se escribe la ecuación para la variable  $\tilde{a}_{mj}$  y su conjugada

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{mj} \\ \tilde{a}_{mj}^* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{mj}^{m'j'} & B_{mj}^{m'j'} \\ -B_{mj}^{m'j'*} & -A_{mj}^{m'j'*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{m'j'} \\ \tilde{a}_{m'j'}^* \end{pmatrix} \\ &+ \left[ \begin{pmatrix} C_{mj}^{m'j'} & D_{mj}^{m'j'} \\ -D_{mj}^{m'j'*} & -C_{mj}^{m'j'*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{m'j'} \\ \tilde{a}_{m'j'}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{mj} \\ -E_{mj}^* \end{pmatrix} \right] J_{ac} \cos(\Omega t), \\ &= \mathbf{M}_1 \begin{pmatrix} \tilde{a}_{m'j'} \\ \tilde{a}_{m'j'}^* \end{pmatrix} + \left[ \mathbf{M}_2 \begin{pmatrix} \tilde{a}_{m'j'} \\ \tilde{a}_{m'j'}^* \end{pmatrix} + \mathbf{V}_1 \right] J_{ac} \cos(\Omega t), \end{aligned} \quad (6.18)$$

donde la matriz  $\mathbf{M}_1$  está asociada a aquella con los términos  $A_{mj}^{m'j'}$  y  $B_{mj}^{m'j'}$ , la matriz  $\mathbf{M}_2$  está asociada a aquella con los términos  $C_{mj}^{m'j'}$  y  $D_{mj}^{m'j'}$  y el vector  $\mathbf{V}_1$  con los términos  $E_{mj}$ . Se realiza el mismo cambio de variables utilizado en ausencia de corriente alterna (Ec. (6.15)), con el que se obtiene la siguiente ecuación lineal para las variable  $b_n$  y sus conjugadas,

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} b_n \\ b_n^* \end{pmatrix} = \mathbf{D} \begin{pmatrix} b_n \\ b_n^* \end{pmatrix} + \left[ \mathbf{M}_3 \begin{pmatrix} b_n \\ b_n^* \end{pmatrix} + \mathbf{V}_2 \right] J_{ac} \cos(\Omega t), \quad (6.19)$$

donde  $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{M}_1 \mathbf{P}$ ,  $\mathbf{M}_3 = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{M}_2 \mathbf{P}$  y  $\mathbf{V}_2 = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{V}_1$ . A partir de la ecuación anterior es posible estudiar un sólo modo  $n$ , lo que puede ser representado de manera general con la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} b_n \\ b_n^* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \omega_n + i\gamma_n & 0 \\ 0 & -\omega_n + i\gamma_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n \\ b_n^* \end{pmatrix} \\ &+ \left[ \begin{pmatrix} C_n & D_n \\ -D_n^* & -C_n^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n \\ b_n^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_n \\ -E_n^* \end{pmatrix} \right] J_{ac} \cos(\Omega t). \end{aligned} \quad (6.20)$$

Dependiendo de la frecuencia  $\Omega$  se pueden obtener distintos tipos de excitación de las ondas de spin.

### 6.2.1. Resonancia ferromagnética (FMR)

Si se considera que la frecuencia  $\Omega \sim \omega_n$ , se espera que la respuesta a la excitación mediante corriente alterna, sea a la misma frecuencia  $\Omega$ , es decir, se busca una solución del tipo  $b_n = c_1 e^{(-i\omega_n + \gamma_n)t} + c_2 e^{-i\Omega t}$ , donde el primer término decae y sólo el segundo término permanece en el tiempo, obteniéndose un oscilador forzado (se excluyen los términos no resonantes),

$$\begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & -\Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ c_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_n + i\gamma_n & 0 \\ 0 & -\omega_n + i\gamma_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ c_2^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_n \\ -E_n^* \end{pmatrix} J_{ac}/2. \quad (6.21)$$

La ecuación para la amplitud  $c_2$  es

$$\Omega c_2 = (\omega_n + i\gamma_n)c_2 + E_n J_{ac}/2 \Rightarrow |c_2| = \frac{|E_n| J_{ac}/2}{\sqrt{(\Omega - \omega_n)^2 + \gamma_n^2}}. \quad (6.22)$$

De lo anterior se concluye que no existe una densidad de corriente crítica necesaria para que se observen precesiones en la magnetización. Sea cual sea ésta, el modo  $n$  se excita si  $E_n \neq 0$ . Sin embargo, la amplitud de oscilación depende de qué tan cercana es la frecuencia de la corriente alterna a la frecuencia natural de oscilación del modo  $n$ , siendo máxima si  $\Omega = \omega_n$ . Además, depende de la disipación  $\gamma_n$ , la cual depende a su vez de la corriente continua aplicada  $J_{dc}$ . Mientras más cercana sea a la corriente continua crítica necesaria para inducir auto-oscilaciones de la magnetización, mayor será la amplitud recién calculada, pues si  $J_{dc} = J_{dc}^C$ , se tiene que  $\gamma_n = 0$ .

Al realizar un estudio numérico y observar las diferencias entre considerar o no el campo de Oersted se tienen las siguientes conclusiones

- Sin campo de Oersted, se observa que el primer modo excitado corresponde a  $n = 5$  (debido a que  $E_n = 0$  para  $n = \{1, 2, 3, 4\}$ ), el cual es un modo anti-simétrico con respecto a los ejes  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$ .
- Con campo de Oersted, se observa que el primer modo excitado es  $n = 2$ , el cual corresponde a un modo simétrico con respecto al eje  $\hat{x}$  y anti-simétrico con respecto al eje  $\hat{y}$ . Luego se excitan los modos  $n = 5$  y  $n = 6$ , los cuales también son anti-simétricos con respecto al eje  $\hat{y}$ . Sin embargo, el primero es anti-simétrico con respecto al eje  $\hat{x}$  y el segundo simétrico con respecto a este mismo eje. De la misma manera se observa que los modos que experimentan un mayor forzamiento son aquellos simétricos con respecto al eje  $\hat{x}$ .

Se puede concluir que las diferencias entre considerar o no el campo de Oersted son significativas. A continuación se estudia numéricamente, a orden lineal, la excitación del modo  $n = 2$  cuando se considera el campo de Oersted. En la figura 6.3 se grafica su amplitud de oscilación en función de la magnitud de la densidad de corriente alterna aplicada  $J_{ac}$ . Las líneas azules corresponden a considerar  $\Omega = \omega_n$  y las naranjas a  $\Omega = 1,01\omega_n$ . En la figura 6.3(a) se considera una densidad de corriente continua  $J_{dc} = 2 \cdot 10^7 A/cm^2$ . En la figura 6.3(b) se considera una densidad de corriente continua  $J_{dc} = 3 \cdot 10^7 A/cm^2$ . En ambos casos se observa que el variar ligeramente la frecuencia de la corriente alterna, modifica de manera significativa

la amplitud de la oscilación de la magnetización. Asimismo, al aplicar una corriente continua más cercana a la corriente crítica, la amplitud de la oscilación aumenta, pues la disipación  $\gamma_n$  disminuye.

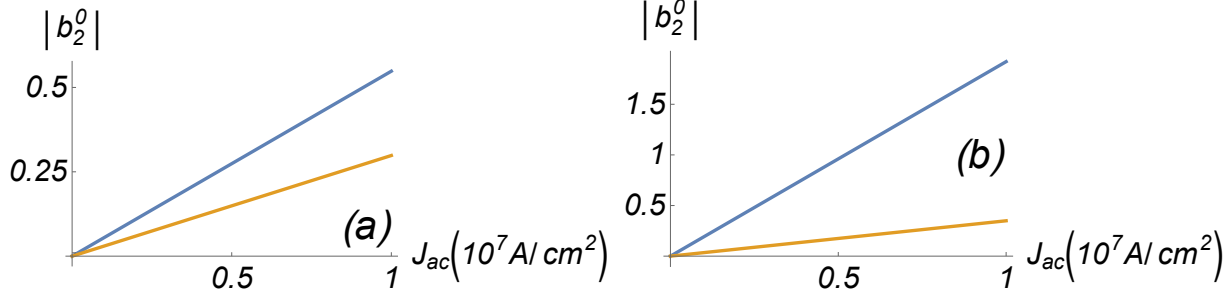


Figura 6.3: Amplitud de oscilación del modo  $n = 2$  en función de la magnitud de la densidad de corriente alterna aplicada  $J_{ac}$ . Las líneas azules corresponden a considerar  $\Omega = \omega_n$  y las naranjas  $\Omega = 1,01\omega_n$ . En la figura (a) se considera una densidad de corriente continua  $J_{dc} = 2 \cdot 10^7 A/cm^2$ . En la figura (b) se considera una densidad de corriente continua  $J_{dc} = 3 \cdot 10^7 A/cm^2$ .

### 6.2.2. Resonancia paramétrica (PR)

Si se considera que la frecuencia de la corriente alterna es  $\Omega \sim 2\omega_n$ , se espera que la respuesta de la magnetización a esta excitación sea a la mitad de la frecuencia  $\Omega$ . A la fecha se han realizado diversos trabajos previos sobre este tipo de excitación [86]-[91]. En nuestro caso se busca una solución del tipo  $b_n = c_3 e^{-i(\Omega/2)t + \Gamma t}$ , la que corresponde a una resonancia paramétrica. Considerando sólo los términos resonantes en la Ec. (6.20), se obtiene

$$\begin{pmatrix} (\Omega/2 - \omega_n) + i(\Gamma - \gamma_n) & D_n J_{ac}/2 \\ -D_n^* J_{ac}/2 & -(\Omega/2 - \omega_n) + i(\Gamma - \gamma_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3 \\ c_3^* \end{pmatrix} = 0. \quad (6.23)$$

La solución a la ecuación anterior se encuentra al imponer que el determinante de la matriz sea nulo, es decir,

$$(\Gamma - \gamma_n) = \sqrt{J_{ac}^2 |D_n|^2 / 4 - (\Omega/2 - \omega_n)^2}. \quad (6.24)$$

Para que el modo  $b_n$  comience a crecer exponencialmente, se debe cumplir que  $\Gamma > 0$ . Esto nos entrega la corriente crítica de inestabilidad bajo la condición  $\Gamma = 0$ ,

$$J_{ac}^C = 2\sqrt{\gamma_n^2 + (\Omega/2 - \omega_n)^2} / |D_n|. \quad (6.25)$$

En la figura 6.4 se grafica la corriente crítica a partir de la Ec. (6.25) para dos modos distintos,  $n = 1$  y  $n = 2$ , en función de la frecuencia de la corriente alterna. Se observa que en ambos casos las densidades de corrientes necesarias para observar auto-oscilaciones de la magnetización son enormes. En este desarrollo se ha considerado el campo de Oersted. Sin embargo, el hecho de incorporarlo o no, no modifica los resultados de manera significativa.

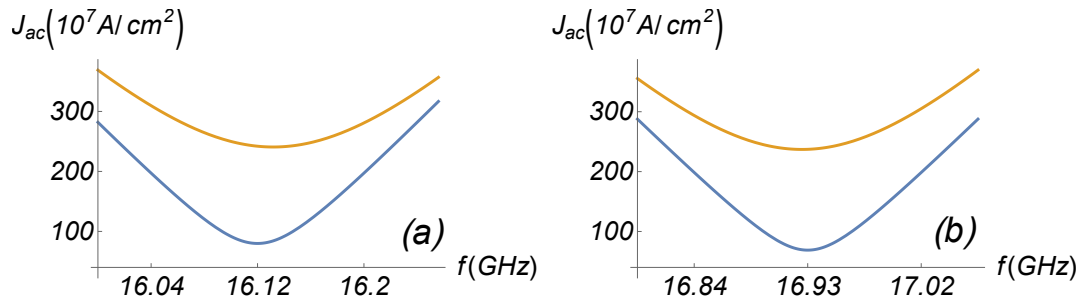


Figura 6.4: Corriente alterna crítica en función de la frecuencia de la corriente alterna aplicada ( $f = \Omega/(2\pi)$ ). Las figuras (a) y (b) corresponden a los modos  $n = 1$  y  $n = 2$ , respectivamente. Las líneas naranjas corresponden a una densidad de corriente continua  $J_{dc} = 2 \cdot 10^7 A/cm^2$ . Las líneas azules corresponden a una densidad de corriente continua  $J_{dc} = 3 \cdot 10^7 A/cm^2$ .

Al considerar la componente fuera del plano del torque por transferencia de spin (Ec. (1.55)) se encuentra que, la corriente alterna crítica disminuye de manera análoga a lo que encontrado en el estudio del modo macro-spin. En la figura 6.5 se observan las corrientes críticas para el modo  $n = 1$  para las mismas densidades de corriente continua utilizadas en la figura 6.4(a). Si se comparan ambas, se tiene que la densidad de corriente crítica disminuye a aproximadamente una décima parte al considerar que  $\beta_{\perp} = 0,1\beta_{\parallel}$ .

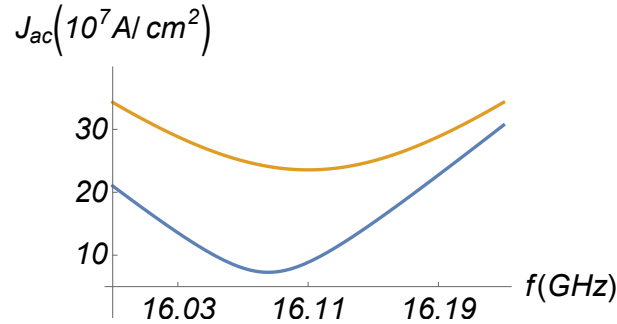


Figura 6.5: Corriente alterna crítica en función de la frecuencia de la corriente alterna aplicada para el modo  $n = 1$  ( $f = \Omega/(2\pi)$ ). Las líneas naranja y azul corresponden densidades de corriente continua  $J_{dc} = 2 \cdot 10^7 A/cm^2$  y  $J_{dc} = 3 \cdot 10^7 A/cm^2$ , respectivamente.

Luego, en el segundo caso, es decir, cuando  $J_{dc} = 3 \cdot 10^7 A/cm^2$ , se ve que la densidad de corriente  $J_{ac}$  para que comiencen las auto-oscilaciones es del mismo orden de magnitud que la corriente continua.

# Conclusiones

En esta tesis se ha desarrollado un modelo para estudiar la dinámica de la magnetización de un disco muy delgado, con un campo magnético aplicado y magnetización de equilibrio en el plano. Este modelo corresponde a un método alternativo a las simulaciones micromagnéticas usuales. Nuestro estudio de la dinámica se realiza considerando una base apropiada a la geometría, lo que nos entrega las amplitudes de los modos normales de oscilación, permitiéndonos entender mejor la dinámica de la magnetización, especialmente en los importantes fenómenos de resonancia.

En una versión simplificada del modelo, donde el campo demagnetizante en el disco es aproximado por su límite de capa muy delgada o plano infinito, este modelo reproduce la dinámica del modo uniforme (macro-spin) estudiado en diversos trabajos y entrega los modos lineales no uniformes del sistema. Teniendo en cuenta los términos asociados a la disipación y al torque por transferencia de spin se tiene que, si la densidad de corriente sobrepasa una densidad de corriente crítica dada, el sistema exhibe una solución auto-oscilatoria uniforme periódica, que corresponde a un ciclo límite periódico. Básicamente en la auto-oscilación la disipación de energía se contrarresta con la energía inyectada por el torque por transferencia de spin y permite una solución oscilatoria estable. Es posible estudiar la dinámica aislada del modo uniforme de manera exacta, incluso cuando su precesión, fuera del equilibrio estático, es de gran amplitud, es decir, incluyendo todos los términos no lineales. Se obtuvo una forma analítica aproximada para esta solución de auto-oscilación periódica no lineal del macro-spin, cuando sólo se consideran las contribuciones relacionadas a los términos resonantes.

Uno de los objetivos de este trabajo fue determinar la estabilidad lineal de la ya mencionada solución auto-oscilatoria del modo uniforme. Mediante el uso de algunas aproximaciones, se determinaron analíticamente los umbrales de la densidad de corriente, en los que los modos no uniformes del sistema se vuelven inestables, es decir, se determinó el punto en el que la aproximación macro-spin necesita ser ampliada con el fin de describir la dinámica del sistema. Los modos no uniformes con frecuencias más bajas son los primeros que se vuelven inestables al ir aumentando la corriente dc.

La descripción anterior de la dinámica del macro-spin y el estudio de su estabilidad es válida para campos magnéticos aplicados en el plano que no superen la magnitud  $\pi M_s$ . Para campos aplicados superiores a esa cantidad, la situación se vuelve más compleja. Para densidades de corriente ligeramente inferiores a la densidad crítica existe una solución macro-spin periódica estable que coexiste con la solución de equilibrio estática uniforme, que también es estable. Existe una brecha en la energía magnética que separa estas dos soluciones, la cual

fácilmente supera a la energía de excitación térmica. Se encuentra esta convivencia a través de los resultados analíticos y también si se realiza una simulación numérica exacta de la dinámica del modo uniforme, la cual muestra que si se realiza una perturbación significativa al equilibrio estático, la magnetización converge a la solución correspondiente al ciclo límite. El análisis de la estabilidad de esta rama superior con respecto al crecimiento de los modos no uniformes es análogo al realizado cuando los campos son más bajos, y también se encuentra que el umbral inferior de inestabilidad se produce para los primeros modos no uniformes. Asimismo, desde un punto de vista práctico, una vez que el campo aplicado excede la cantidad  $\pi M_s$ , el macro-spin se vuelve inestable cuando la densidad de corriente es ligeramente superior a la densidad de corriente necesaria para la existencia de las soluciones periódicas del macro-spin.

Un aspecto de interés de este modelo simplificado fue determinar la dependencia de la estabilidad de la solución periódica macro-spin con el radio del disco. Nuestros resultados muestran que para radios inferiores existe una mayor estabilidad del modo uniforme, lo cual se relaciona de manera directa con la interacción de intercambio que penaliza energéticamente las variaciones espaciales.

Con el fin de comprender mejor la dinámica de la magnetización de un disco nanométrico, se estudió una versión ampliada del modelo anteriormente propuesto. Para ello se utilizó la expresión completa del campo demagnetizante en el disco. En este caso la configuración de la magnetización de equilibrio ya no es uniforme, y los modos lineales dinámicos también se modifican presentando una mayor localización cerca de los bordes del disco. Se realizó un estudio para un radio del disco de 50nm. En particular se encontró que hay dos modos con frecuencias similares en el extremo inferior de frecuencias: el modo con frecuencia más baja es un modo cuasi-uniforme, y el que le sigue, un modo con carácter de borde. El modo de borde tiene la densidad de corriente crítica más baja para entrar en un régimen auto-oscilatorio. Nuestro estudio nos permite obtener cuándo este modo aislado se vuelve inestable debido al crecimiento exponencial del modo cuasi-uniforme de frecuencia similar. El modelo mejorado reproduce bien los modos dinámicos lineales de la magnetización al realizar comparaciones con resultados obtenidos mediante simulaciones micromagnéticas previas. La inclusión del campo demagnetizante completo muestra el efecto del tamaño finito del disco, el cual influye claramente en la dinámica de la magnetización. Por ejemplo, se observa que los modos de borde pueden ocupar gran parte del volumen del disco para radios pequeños.

De esta forma vemos que estos modelos permiten comprender las soluciones auto-oscilatorias que existen, de manera aislada, para aquellos modos que tienen la corriente crítica más baja, cuando el disco es delgado y magnetizado en el plano. Así también permiten determinar las corrientes en las que estas soluciones auto-oscilatorias se vuelven inestables, es decir, cuando comienza el crecimiento de otros modos. De esta forma los modelos proporcionan una comprensión básica de las soluciones auto-oscilatorias a bajas corrientes.

Por otro lado se estudió la dinámica de la magnetización al aplicar una densidad de corriente continua inferior a la necesaria para observar auto-oscilaciones de la magnetización y agregar una componente alterna. En la aproximación de plano infinito, específicamente al estudiar el modo uniforme, se tiene que sólo es posible excitarlo de manera paramétrica, es decir, la frecuencia de la corriente debe ser cercana al doble de la frecuencia del modo macro-spin. Se encuentra que la densidad de corriente crítica necesaria para excitar auto-oscilaciones

en forma paramétrica es enorme, lo cual no es práctico desde el punto de vista experimental. Al considerar que el torque por transferencia de spin tiene una componente perpendicular al plano, y suponiendo que es del orden del 10% dicha componente, se tiene que la corriente crítica alterna disminuye a una décima parte de la antes encontrada.

Al considerar el campo demagnetizante completo se observa que ahora es posible excitar los modos normales de oscilación de la magnetización tanto de manera paramétrica como directa, es decir, la frecuencia de la corriente alterna puede ser cercana al doble o a la misma del modo que se quiere excitar, respectivamente. En el caso de resonancia directa es posible observar que el rol del campo de Oersted es significativo. Si se incluye dicho campo, es posible excitar modos que en su ausencia sería imposible. El primer modo excitado es el correspondiente a  $n = 2$ . Debido a su anti-simetría con respecto al eje  $y$  se produce un acoplamiento con el campo de Oersted. En el caso de resonancia paramétrica, las densidades de corrientes críticas son enormes, la consideración o no del campo de Oersted no juega un rol importante, pues en ambos casos la corriente crítica alterna es prácticamente la misma. Si se incluye la componente perpendicular del torque por transferencia de spin, se tiene que el efecto es el mismo que se observa cuando se estudia el modo macro-spin, disminuyendo la corriente crítica alterna a una décima parte de la corriente crítica obtenida en ausencia de este efecto, y se puede llegar a que en algunos casos la corriente crítica alterna sea en magnitud similar a la corriente crítica continua.

En resumen, el campo de Oersted juega un rol importante en la excitación de manera directa, y la componente perpendicular del torque por transferencia de spin tiene un papel preponderante en la excitación paramétrica de los modos lineales de oscilación del disco.

El trabajo realizado en esta tesis puede impulsar un estudio que permita comprender los efectos no lineales más complejos cuando se estudie la dinámica de muestras ferromagnéticas nanométricas. En el pasado, este tipo de estudios ya se han hecho en materiales ferromagnéticos en el bulto o en películas delgadas. El enfoque del modelo podría ser extendido a otras geometrías, por ejemplo, a cables ferromagnéticos de sección transversal rectangular, nano-muestras de geometría rectangular, o también, geometrías elípticas delgadas. Asimismo, podría ser generalizado a muestras de otras formas donde la configuración de la magnetización es no uniforme, pero casi saturada.



# Bibliografía

- [1] J. C. Slonczewski, Current-driven excitation of magnetic multilayers, *J. Magn. Magn. Mater.* **159**, L1 (1996).
- [2] L. Berger, Emission of spin waves by a magnetic multilayer traversed by a current, *Phys. Rev. B* **54**, 9353 (1996).
- [3] F. J. Albert, J. A. Katine, R. A. Buhrman, and D. C. Ralph, Spin-polarized current switching of a Co thin film nanomagnet, *Appl. Phys. Lett.* **77**, 3809 (2000).
- [4] E. B. Myers, D. C. Ralph, J. A. Katine, R. N. Louie, and R. A. Buhrman, Current-Induced Switching of Domains in Magnetic Multilayer Devices, *Science* **285**, 867 (1999).
- [5] J. A. Katine, F. J. Albert, R. A. Buhrman, E. B. Myers, and D. C. Ralph, Current-Driven Magnetization Reversal and Spin-Wave Excitations in Co/Cu/Co Pillars, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3149 (2000).
- [6] J. Grollier, V. Cros, A. Hamzic, J. M. George, H. Jaffres, A. Fert, G. Faini, J. Ben Youssef and H. Legall, Spin-polarized current induced switching in Co/Cu/Co pillars, *Appl. Phys. Lett.* **78**, 3663 (2001).
- [7] S. I. Kiselev, J. C. Sankey, I. N. Krivorotov, N. C. Emley, R. J. Scheolkopf, R. A. Buhrman, and D. C. Ralph, Microwave oscillations of a nanomagnet driven by a spin-polarized current, *Nature* **425**, 380 (2003).
- [8] W. H. Rippard, M. R. Pufall, S. Kaka, S. E. Russek, and T. J. Silva, Direct-Current Induced Dynamics in Co<sub>90</sub>Fe<sub>10</sub>/Ni<sub>80</sub>Fe<sub>20</sub> Point Contacts, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 027201 (2004).
- [9] I. N. Krivorotov, N. C. Emley, J. C. Sankey, S. I. Kiselev, D. C. Ralph, and R. A. Buhrman, Time-Domain Measurements of Nanomagnet Dynamics Driven by Spin-Transfer Torques, *Science* **307**, 228 (2005).
- [10] T. Kawahara, K. Ito, R. Takemura, and H. Ohno, Spin-transfer torque RAM technology: Review and prospect, *Microelectronics Reliability* **52**, 613 (2012).
- [11] E. Chen, D. Apalkov, Z. Diao, A. Driskill-Smith, D. Druist, D. Lottis, V. Nikitin, X. Tang, S. Watts, S. Wang, S. A. Wolf, A. W. Ghosh, J.W. Lu, S. J. Poon, M. Stan, W. H. Butler, S. Gupta, C. K. A. Mewes, T. Mewes, P.B. Visscher, *Advances and Future*

- Prospects of Spin-Transfer Torque Random Access Memory, *IEEE Trans. Magn.* **46**, 1873 (2010).
- [12] J. A. Katine and E. E. Fullerton, Device implications of spin-transfer torques, *J. Magn. Magn. Mater.* **320**, 1217 (2008).
- [13] M. R. Pufall, W. H. Rippard, S. Kaka, T. J. Silva, and S. E. Russek, Frequency modulation of spin-transfer oscillators, *Appl. Phys. Lett.* **86**, 082506 (2005).
- [14] M. Tsoi, A. G. M. Jansen, J. Bass, W. C. Chiang, M. Seck, V. Tsoi, and P. Wyder, Excitation of a Magnetic Multilayer by an Electric Current, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 493 (1998).
- [15] M. D. Stiles and A. Zangwill, Anatomy of spin-transfer torque, *Phys. Rev. B* **66**, 014407 (2002).
- [16] D. Houssameddine, U. Ebels, B. Delaet, B. Rodmacq, I. Firastrau, F. Ponthenier, M. Brunet, C. Thirion, J.-P. Michel, L. Prejbeanu-Buda, M.-C. Cyrille, O. Redon, B. Dieny, Spin-torque oscillator using a perpendicular polarizer and a planar free layer, *Nature Materials* **6**, 447 (2007).
- [17] I. N. Krivorotov, D. V. Berkov, N. L. Gorn, N. C. Emley, J. C. Sankey, D. C. Ralph, and R. A. Buhrman, Large-amplitude coherent spin waves excited by spin-polarized current in nanoscale spin valves, *Phys. Rev. B* **76**, 024418 (2007).
- [18] I. Firastrau, D. Gusakova, D. Houssameddine, U. Ebels, M.-C. Cyrille, B. Delaet, B. Dieny, O. Redon, J.-Ch. Toussaint, and L. D. Buda-Prejbeanu, Modeling of the perpendicular polarizer-planar free layer spin torque oscillator: Micromagnetic simulations, *Phys. Rev. B* **78**, 024437 (2008).
- [19] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies, *Ukr. J. Phys.* **53**, 14 (2008).
- [20] J. C. Slonczewski, Currents and torques in metallic magnetic multilayers, *J. Magn. Magn. Mater.* **247**, 324 (2002).
- [21] S. M. Rezende, F. M. de Aguiar and A. Azevedo, Spin-Wave Theory for the Dynamics Induced by Direct Currents in Magnetic Multilayers, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 037202 (2005).
- [22] J. Z. Sun, Spin-current interaction with a monodomain magnetic body: A model study, *Phys. Rev. B* **62**, 570 (2000).
- [23] Jiang Xiao, A. Zangwill, and M. D. Stiles, Macrospin models of spin transfer dynamics, *Phys. Rev. B* **72**, 014446 (2005).
- [24] U. Ebels, D. Houssameddine, I. Firastrau, D. Gusakova, C. Thirion, B. Dieny, and L. D. Buda-Prejbeanu, Macrospin description of the perpendicular polarizer-planar free-layer spin-torque oscillator, *Phys. Rev. B* **78**, 024436 (2008).

- [25] Z. Li and S. Zhang, Magnetization dynamics with a spin-transfer torque, *Phys. Rev. B* **68**, 024404 (2003).
- [26] D. V. Berkov and J. Miltat, Spin-torque driven magnetization dynamics: Micromagnetic modeling, *J. Magn. Magn. Mater.* **320**, 1238 (2008).
- [27] K. J. Lee, A. Deac, O. Redon, J-P. Nozieres, and B. Dieny, Excitations of incoherent spin-waves due to spin-transfer torque, *Nature Materials* **3**, 877 (2004).
- [28] D. V. Berkov and N. L. Gorn, Magnetization precession due to a spin-polarized current in a thin nanoelement: Numerical simulation study, *Phys. Rev. B* **72**, 094401 (2005).
- [29] M. D. Stiles and J. Miltat, *Spin Transfer Torque and Dynamics, in Spin Dynamics in Confined Magnetic Structures III*, edited by B. Hillebrands and A. Thiaville (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2006), Sec. 4.
- [30] S. I. Kiselev, J. C. Sankey, I. N. Krivorotov, N. C. Emley, M. Rinkoski, C. Perez, R. A. Buhrman, and D. C. Ralph, Current-Induced Nanomagnet Dynamics for Magnetic Fields Perpendicular to the Sample Plane, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 036601 (2004).
- [31] R. H. Koch, J. A. Katine, and J. Z. Sun, Time-Resolved Reversal of Spin-Transfer Switching in a Nanomagnet, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 088302 (2004).
- [32] W. Scholza, K.Yu. Guslienkob, V. Novosadc, D. Suessa, T. Schrefla, R.W. Chantrellb, J. Fidler, Transition from single-domain to vortex state in soft magnetic cylindrical nanodots, *J. Magn. Magn. Mater.* **266**, 155 (2008).
- [33] S.-H. Chung, R. D. McMichael, D. T. Pierce, and J. Unguris, Phase diagram of magnetic nanodisks measured by scanning electron microscopy with polarization analysis, *Phys. Rev. B* **81**, 024410 (2010).
- [34] E. Schlomann and J. J. Green, Ferromagnetic resonance at high power levels, *Phys. Rev. Lett.* **3**, 129 (1959).
- [35] V. S. L'vov, *Wave Turbulence Under Parametric Excitation* (Springer-Verlag, Berlin, 1994).
- [36] P. Krivosik and C. E. Patton, Hamiltonian formulation of nonlinear spin-wave dynamics: Theory and applications, *Phys. Rev. B* **82**, 184428 (2010).
- [37] A. N. Slavin and P. Kabos, Approximate Theory of Microwave Generation in a Current-Driven Magnetic Nanocontact Magnetized in an Arbitrary Direction, *IEEE Trans. Magn.* **41**, 1264 (2005).
- [38] G. Bertotti, R. Bonin, M. d'Aquino, C. Serpico, and I.D. Mayergoyz, Spin-Wave Instabilities in Spin-Transfer-Driven Magnetization Dynamics, *IEEE Magn. Lett.* **1**, 3000104 (2010).
- [39] R. Bonin, M. d'Aquino, G. Bertotti, C. Serpico, and I. D. Mayergoyz, Stability of magne-

- tization oscillations driven by spin-polarized currents, *J. Appl. Phys.* **109**, 07C902 (2011).
- [40] M. Pauselli and G. Carlotti, Spin wave eigenmodes excited by spin transfer torque in circular nanopillars: influence of lateral size and Oersted field studied by micromagnetic simulations, *J. Phys D: Appl. Phys.* **48**, 415001 (2015).
- [41] G. Carlotti, G. Gubbiotti, M. Madami, S. Tacchi, F. Hartmann, M. Emmerling, M. Kamp, L. Worschech, From micro to nano-magnetic dots: evolution of the eigenmodes spectrum on reducing the lateral size, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **47**, 265001 (2014).
- [42] G. Carlotti, G. Gubbiotti, M. Madami, S. Tacchi and R. L. Stamps, Exchange-dominated eigenmodes in sub-100nm permalloy dots: A micromagnetic study at finite temperature, *J. Appl. Phys.* **115**, 17D119 (2014).
- [43] A. Hubert and R. Schäfer, *Magnetic Domains The Analysis of Magnetic Microstructures* (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1998).
- [44] W. F. Jr Brown, *Micromagnetics* (New York: Wiley, 1963).
- [45] T. L. Gilbert, A phenomenological theory of damping in ferromagnetic materials, *IEEE Trans. Mag.* **40**, 3443 (2004).
- [46] D. C. Ralph and M. D. Stiles, Spin transfer torques, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* **320**, 1190 (2008).
- [47] Jiang Xiao, A. Zangwill, and M. D. Stiles, Macrospin models of spin transfer dynamics, *Phys. Rev. B* **72**, 014446 (2005).
- [48] S. Zhang, P. M. Levy, and A. Fert, Mechanisms of Spin-Polarized Current-Driven Magnetization Switching, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 236601 (2002).
- [49] Miguel Kiwi, Exchange Bias Theory, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, **234**, 584 (2001).
- [50] Robin F.C. Farrow, Bernard Dieny, Markus Donath, Albert Fert, B.D. Hermsmeier, *Magnetism and Structure in Systems of Reduced Dimension* (Springer, New York, 1993).
- [51] D. L. Mills and J. A. C. Bland, *Nanomagnetism: Ultrathin Films, Multilayers and Nanostructures* (Elsevier, Amsterdam, 2006), Chap. 3.
- [52] V. Grolier, D. Renard, B. Bartenlian, P. Beauvillain, C. Chappert, C. Dupas, J. Ferré, M. Galtier, E. Kolb, M. Mulloy, J. P. Renard, and P. Veillet, Unambiguous evidence of oscillatory magnetic coupling between Co layers in ultrahigh vacuum grown Co/Au(111)/Co trilayers, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3023 (1993).
- [53] Seung-Seok Ha, Kyung-Jin Lee, Chun-Yeol You, Effect of the resistance-area product on the temperature increase of nanopillar for spin torque magnetic memory, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* **10** 659 (2010).

- [54] Seung-Seok Ha and Chun-Yeol You, Tendency of temperature on nano-pillar for spin transfer torque memory, *Phys. Stat. Sol. (a)* **204**, 3962 (2007).
- [55] Chun-Yeol You, Seung-Ho Song and Hyungsuk Kim, Temperature dependences of the spin transfer torque and tunneling magneto-resistance in magnetic metallic and tunneling junctions, *Appl. Phys. Lett.* **99**, 092504 (2011).
- [56] Chun-Yeol You, Seung-Seok Ha, Hyun-Woo Lee, Analytic expression of the temperature increment in a spin transfer torque, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* **321**, 3589 (2009).
- [57] M. N. Baibich, J. M. Broto, A. Fert, F. Nguyen Van Dau, F. Petroff, P. Etienne, G. Creuzet, A. Friederich, and J. Chazelas, Giant Magnetoresistance of (001)Fe/(001)Cr Magnetic Superlattices, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2472 (1988).
- [58] G. Binasch, P. Grünberg, F. Saurenbach, and W. Zinn, Enhanced magnetoresistance in layered magnetic structures with antiferromagnetic interlayer exchange, *Phys. Rev. B* **39**, 4828(R) (1989).
- [59] W. Scholza, K. Yu. Guslienkob, V. Novosadc, D. Suessa, T. Schrefla, R.W. Chantrellb, J. Fidler, Transition from single-domain to vortex state in soft magnetic cylindrical nanodots, *J. Magn. Magn. Mater.* **266**, 155 (2008).
- [60] Jonathan Kin Ha, Riccardo Hertel, and J. Kirschner, Micromagnetic study of magnetic configurations in submicron permalloy disks, *Phys. Rev. B* **67**, 224432 (2003).
- [61] J. d'Albuquerque e Castro, D. Altbir, J. C. Retamal, and P. Vargas, Scaling Approach to the Magnetic Phase Diagram of Nanosized Systems, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 237202 (2002).
- [62] P.-O. Jubert and R. Allenspach, Analytical approach to the single-domain-to-vortex transition in small magnetic disks, *Phys. Rev. B* **70**, 144402 (2004).
- [63] K. L. Metlov and K. Yu. Guslienko, Stability of magnetic vortex in soft magnetic nano-sized circular cylinder, *J. Magn. Magn. Mater.* **242-245**, 1015 (2002).
- [64] S.-H. Chung, R. D. McMichael, D. T. Pierce, and J. Unguris, Phase diagram of magnetic nanodisks measured by scanning electron microscopy with polarization analysis, *Phys. Rev. B* **81**, 024410 (2010).
- [65] W. S. Ament and G. T. Rado, Electromagnetic Effects of Spin Wave Resonance in Ferromagnetic Metals, *Phys. Rev.* **97**, 1558 (1955).
- [66] T. Holstein and H. Primakoff, Field Dependence of the Intrinsic Domain Magnetization of a Ferromagnet, *Phys. Rev.* **58**, 1098 (1940).
- [67] A. N. Slavin and V. S. Tiberkevich, Current-induced bistability and dynamic range of microwave generation in magnetic nanostructures, *Phys. Rev. B* **72**, 094428 (2005).
- [68] Q. Mistral, J. V. Kim, T. Devolder, P. Crozat, C. Chappert, J. A. Katine, M. J. Carey,

- and K. Ito, Current-driven microwave oscillations in current perpendicular-to-plane spin-valve nanopillars, *Appl. Phys. Lett.* **88**, 192507 (2006).
- [69] J. V. Kim, V. Tiberkevich, and A. N. Slavin, Generation Linewidth of an Auto-Oscillator with a Nonlinear Frequency Shift: Spin-Torque Nano-Oscillator, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 017207 (2008).
- [70] A. Slavin and V. Tiberkevich, Nonlinear Auto-Oscillator Theory of Microwave Generation by Spin-Polarized Current, *IEEE Trans. Magn.* **45**, 1875 (2009).
- [71] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser, *Proc. IEEE* **51**, 89 (1963).
- [72] E. K. Irish, J. Gea-Banacloche, I. Martin, and K. C. Schwab, Dynamics of a two-level system strongly coupled to a high-frequency quantum oscillator, *Phys. Rev. B* **72**, 195410 (2005).
- [73] Z. Zeng, K. H. Cheung, H. W. Jiang, I. N. Krivorotov, J. A. Katine, V. Tiberkevich, and A. Slavin, Evolution of spin-wave modes in magnetic tunnel junction nanopillars, *Phys. Rev. B* **82**, 100410 (2010).
- [74] E. Iacocca, O. Heinonen, P. K. Muduli, and J. Åkerman, Generation linewidth of mode-hopping spin torque oscillators, *Phys. Rev. B* **89**, 054402 (2014).
- [75] P. K. Muduli, O. G. Heinonen, and J. Åkerman, Decoherence and Mode Hopping in a Magnetic Tunnel Junction Based Spin Torque Oscillator, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 207203 (2012).
- [76] O. G. Heinonen, P. K. Muduli, E. Iacocca, and J. Åkerman, Decoherence, Mode Hopping, and Mode Coupling in Spin Torque Oscillators, *IEEE Trans. Magn.*, **49**, 4398 (2013).
- [77] H. J. Suhl, The theory of ferromagnetic resonance at high signal powers, *Phys. Chem. Solids* **1**, 209 (1957).
- [78] A. Slavin and V. Tiberkevich, Excitation of spin waves by spin-polarized current in magnetic nano-structures, *IEEE Trans. Magn.* **44**, 1916 (2008).
- [79] D. T. DiPerna and T. K. Stanton, Sound scattering by cylinders of noncircular cross section: A conformal mapping approach, *J. Acoust. Soc. Am.* **96**, 3064 (1994).
- [80] G. Strang, *Introduction to Applied Mathematics* (Wellesley-Cambridge, Wellesley, 1986), Chap. 5, pp. 373-380.
- [81] K. Yu. Guslienko and A. N. Slavin, Spin-waves in cylindrical magnetic dot arrays with in-plane magnetization, *J. Appl. Phys.* **87**, 6337 (2000).
- [82] L. Giovannini, F. Montoncello, F. Nizzoli, G. Gubbiotti, G. Carlotti, T. Okuno, T. Shinjo, and M. Grimsditch, Spin excitations of nanometric cylindrical dots in vortex and saturated magnetic states, *Phys. Rev. B* **70**, 172404 (2004).

- [83] G. Consolo, L. Giovannini and R. Zivieri, Excitation of magnetic normal modes by spin-torque: a Lagrangian approach, *J. Appl. Phys.* **111**, 07C916 (2012).
- [84] R. Zivieri and R. L. Stamps, Theory of spin wave modes in tangentially magnetized thin cylindrical dots: A variational approach, *Phys. Rev. B* **73**, 144422 (2006).
- [85] R. Zivieri, G. Santoro, and A. Franchini, Localized spin modes in ferromagnetic cylindrical dots with in-plane magnetization, *J. Phys.: Condens. Matter* **19**, 305012 (2007).
- [86] C. Wang, H. Seinige and M. Tsoi, Current-driven parametric resonance in magnetic multilayers, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **46**, 285001 (2013).
- [87] E. R. J. Edwards, H. Ulrichs, V. E. Demidov, S. O. Demokritov, and S. Urazhdin, Parametric excitation of magnetization oscillations controlled by pure spin current, *Phys. Rev. B* **86**, 134420 (2012).
- [88] Feng Guo, L. M. Belova, and R. D. McMichael, Parametric pumping of precession modes in ferromagnetic nanodisks, *Phys. Rev. B* **89**, 104422 (2014).
- [89] P. Durrenfeld, E. Iacocca, J. Akerman and P. K. Muduli, Parametric excitation in a magnetic tunnel junction-based spin torque oscillator, *Appl. Phys. Lett.* **104**, 052410 (2014).
- [90] A. O. León and M. G. Clerc, Spin-transfer-driven nano-oscillators are equivalent to parametric resonators, *Phys. Rev. B* **91**, 014411 (2015).
- [91] M. G. Clerc, S. Coulibaly, D. Laroze, A. O. León, and A. S. Núñez, Alternating spin-polarized current induces parametric resonance in spin valves, *Phys. Rev. B* **91**, 224426 (2015).

# Apéndice A

## Funciones de Bessel y ortogonalidad

Las funciones de Bessel satisfacen la siguiente relación

$$\frac{d}{d\rho} \left[ \rho \frac{d}{d\rho} J_m(k\rho) \right] + \left( k^2 \rho - \frac{m^2}{\rho} \right) J_m(k\rho) = 0 . \quad (\text{A.1})$$

Si lo anterior se multiplica por la cantidad  $J_m(k'\rho)$  y luego se integra en  $\rho$  se obtiene

$$\int_0^R d\rho \left[ J_m(k'\rho) \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} J_m(k\rho) \right) + \left( k^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) \rho J_m(k'\rho) J_m(k\rho) \right] = 0 , \quad (\text{A.2})$$

$$\rho J_m(k'\rho) \frac{d}{d\rho} J_m(k\rho) \Big|_{\rho=0}^{\rho=R} - \int_0^R \left[ \frac{d}{d\rho} J_m(k\rho) \frac{d}{d\rho} J_m(k'\rho) - \left( k'^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) J_m(k'\rho) J_m(k\rho) \right] \rho d\rho = 0 , \quad (\text{A.3})$$

donde se integró por partes. Al intercambiar  $k$  por  $k'$  en (A.3) y vice-versa, se obtiene

$$\rho J_m(k\rho) \frac{d}{d\rho} J_m(k'\rho) \Big|_{\rho=0}^{\rho=R} - \int_0^R \left[ \frac{d}{d\rho} J_m(k'\rho) \frac{d}{d\rho} J_m(k\rho) - \left( k'^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) J_m(k\rho) J_m(k'\rho) \right] \rho d\rho = 0 . \quad (\text{A.4})$$

Al restar ambas expresiones, es decir, (A.3)-(A.4), se encuentra

$$\int_0^R J_m(k'\rho) J_m(k\rho) \rho d\rho = R \frac{[k' J_m(kR) J'_m(k'R) - k J_m(k'R) J'_m(kR)]}{(k^2 - k'^2)} . \quad (\text{A.5})$$

Si  $k'R = \chi_{mj}$  tal que  $J'_m(\chi_{mj}) = 0$ , se obtiene

$$\int_0^R d\rho \rho J_m(\chi_{mj}\rho/R) J_m(k\rho) = -R \frac{(k J_m(\chi_{mj}) J'_m(kR))}{(k^2 - \kappa_{mj}^2)} . \quad (\text{A.6})$$

Si además  $kR = \chi_{mj'}$  tal que  $J'_m(\chi_{mj'}) = 0$ , se obtienen las siguientes relaciones de ortogonalidad

$$\int_0^R d\rho \rho J_m(\chi_{mj}\rho/R) J_m(\chi_{mj'}\rho/R) = -\frac{R^2}{2} J_m(\chi_{mj}) J''_m(\chi_{mj'}) \delta_{j'}^j , \quad (\text{A.7})$$

$$\int dV J_m(\chi_{mj}\rho/R) e^{im\phi} J_{m'}(\chi_{m'j'}\rho/R) e^{-im'\phi} = -V J_m(\chi_{mj}) J''_{m'}(\chi_{m'j'}) \delta_{j'}^j \delta_{m'}^m , \quad (\text{A.8})$$

donde, en la última expresión,  $dV$  se relaciona con el volumen de un disco.



# Apéndice B

## Expresiones de la energía en función de las variables $a_{mj}$

### Campo aplicado

La energía asociada al campo aplicado corresponde a una expresión de orden dos, para la cual, sólo es necesario utilizar la relación de ortogonalidad antes discutida

$$\mathcal{U}_X = h_x \int aa^* dV = h_x \sum_{mj} a_{mj} a_{mj}^* . \quad (\text{B.1})$$

### Campo de intercambio

La energía asociada al campo de intercambio, aproximada hasta orden cuatro, corresponde a una expresión de orden dos y otra de orden cuatro,

$$\mathcal{U}_E \approx h_E \int \left[ \vec{\nabla} a \cdot \vec{\nabla} a^* + \frac{1}{4} a^2 (\vec{\nabla} a^*)^2 + \frac{1}{4} a^{*2} (\vec{\nabla} a)^2 \right] R^2 dV . \quad (\text{B.2})$$

Al analizar primero el término de orden dos se obtiene

$$\mathcal{U}_E^2 = h_E \int \vec{\nabla} a \cdot \vec{\nabla} a^* R^2 dV = -h_E \int a^* (\nabla^2 a) R^2 dV , \quad (\text{B.3})$$

donde la expresión anterior se integró por partes y se utilizó que  $\int \vec{\nabla} a \cdot d\vec{S} = 0$  en los bordes, correspondiente a  $\rho = R$ . A continuación, se utiliza que  $\nabla^2 [J_m(k\rho)e^{im\phi}] = -k^2 J_m(k\rho)e^{im\phi}$ , con lo cual se obtiene

$$\mathcal{U}_E^2 = h_E \sum_{mj} \chi_{mj}^2 a_{mj} a_{mj}^* . \quad (\text{B.4})$$

Ahora, se analiza el término de orden cuatro, y se encuentra lo siguiente

$$\mathcal{U}_E^4 = \frac{\hbar_E}{4} \int [(\vec{\nabla}a)^2 a^{*2} + c.c.] R^2 dV, \quad (\text{B.5})$$

para lo cual se utilizan las siguientes relaciones:

$$L_{\pm} = \frac{\partial}{\partial x} \pm i \frac{\partial}{\partial y} \Rightarrow \vec{\nabla}a \cdot \vec{\nabla}a = L_+ a L_- a, \quad (\text{B.6})$$

$$L_{\pm} = e^{\pm i\phi} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \pm i \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \Rightarrow L_{\pm} (J_m(k\rho) e^{im\phi}) = \mp k J_{m\pm 1}(k\rho) e^{i(m\pm 1)\phi}. \quad (\text{B.7})$$

Es posible obtener

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_E^4 = & -\frac{\hbar_E}{4} (a_{m_1 j_1} a_{m_2 j_2} a_{m_3 j_3}^* a_{m_4 j_4}^* + a_{m_1 j_1}^* a_{m_2 j_2}^* a_{m_3 j_3} a_{m_4 j_4}) N_{m_1 j_1} N_{m_2 j_2} N_{m_3 j_3} N_{m_4 j_4} \chi_{m_1 j_1} \chi_{m_2 j_2} \\ & \int dV J_{m_1+1}(\chi_{m_1 j_1} \rho/R) J_{m_2-1}(\chi_{m_2 j_2} \rho/R) J_{m_3}(\chi_{m_3 j_3} \rho/R) J_{m_4}(\chi_{m_4 j_4} \rho/R) e^{i(m_1+1)\phi} e^{i(m_2-1)\phi} e^{-im_3\phi} e^{-im_4\phi}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Se integra en  $\phi$  y en  $z$ , y se realiza el cambio de variables  $x \rightarrow \rho/R$ , con lo cual queda

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_E^4 = & -V \frac{\hbar_E}{2} (a_{m_1 j_1} a_{m_2 j_2} a_{m_3 j_3}^* a_{m_4 j_4}^* + a_{m_1 j_1}^* a_{m_2 j_2}^* a_{m_3 j_3} a_{m_4 j_4}) \chi_{m_1 j_1} \chi_{m_2 j_2} \\ & N_{m_1 j_1} N_{m_2 j_2} N_{m_3 j_3} N_{m_4 j_4} \delta_{m_3+m_4}^{m_1+m_2} \int dx x J_{m_1+1}(\chi_{m_1 j_1} x) J_{m_2-1}(\chi_{m_2 j_2} x) J_{m_3}(\chi_{m_3 j_3} x) J_{m_4}(\chi_{m_4 j_4} x). \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Si se define la siguiente integral

$$\begin{aligned} i_{m_1 j_1 m_2 j_2 m_3 j_3 m_4 j_4}^E \equiv & \chi_{m_1 j_1} \chi_{m_2 j_2} N_{m_1 j_1} N_{m_2 j_2} N_{m_3 j_3} N_{m_4 j_4} \\ & \int_0^1 dx x J_{m_1+1}(\chi_{m_1 j_1} x) J_{m_2-1}(\chi_{m_2 j_2} x) J_{m_3}(\chi_{m_3 j_3} x) J_{m_4}(\chi_{m_4 j_4} x), \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

es posible obtener

$$\mathcal{U}_E^4 = -V \frac{\hbar_E}{2} (a_{m_1 j_1} a_{m_2 j_2} a_{m_3 j_3}^* a_{m_4 j_4}^* + a_{m_1 j_1}^* a_{m_2 j_2}^* a_{m_3 j_3} a_{m_4 j_4}) \delta_{m_3+m_4}^{m_1+m_2} i_{m_1 j_1 m_2 j_2 m_3 j_3 m_4 j_4}^E. \quad (\text{B.11})$$

## Campo demagnetizante

A partir del capítulo 2, se encontraron dos expresiones para la energía demagnetizante, las cuales son

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_D^z = & \frac{1}{2} \int m_z(\rho, \phi)^2 dV \\ & - \frac{1}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} dk f(kL) \int dS' J_m(k\rho') m_z(\rho', \phi') e^{-im\phi'} \int dS J_m(k\rho) m_z(\rho, \phi) e^{im\phi} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

$$\mathcal{U}_D^{\perp} = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk \frac{f(kL)}{k^2} \left[ \int dV' \vec{\nabla} (J_m(k\rho') e^{-im\phi'}) \cdot \vec{m}(\rho', \phi') \right] \left[ \int dV \vec{\nabla} (J_m(k\rho) e^{im\phi}) \cdot \vec{m}(\rho, \phi) \right], \quad (\text{B.13})$$

con la cantidad  $f(kL) \equiv (kL + e^{-kL} - 1)$ . Se escriben las componentes de la magnetización de la siguiente manera:

$$M_z = M_s \sum_{lj} \sigma_{lj} N_{lj} J_l(\kappa_{lj} \rho) e^{il\phi}, \quad M_{\pm} = M_s \sum_{lj} \sigma_{lj}^{\pm} N_{lj} J_l(\kappa_{lj} \rho) e^{il\phi}, \quad (\text{B.14})$$

donde  $M_{\pm} \equiv M_x \pm iM_y$ . Con estas expresiones es posible obtener:

$$\mathcal{U}_D^z = \frac{1}{2} \sum_{l_1 j_1 j_2} (-1)^{l_1} \sigma_{l_1 j_1}^z \sigma_{-l_1 j_2}^z (\delta_{j_2}^{j_1} - 2V I_{(l_1, j_1, j_2, h/R)}^1), \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_D^{\perp} = -\frac{V}{4} \sum_{l_1 j_1 j_2} (-1)^{l_1} & \left( \sigma_{l_1 j_1}^- \sigma_{(-l_1-2)j_2}^- I_{(l_1, j_1, j_2, h/R)}^2 + \sigma_{l_1 j_1}^+ \sigma_{(-l_1+2)j_2}^+ I_{(l_1, j_1, j_2, h/R)}^3 \right. \\ & \left. - 2\sigma_{l_1 j_1}^+ \sigma_{(-l_1)j_2}^- I_{(l_1, j_1, j_2, h/R)}^1 \right), \quad (\text{B.16}) \end{aligned}$$

donde  $I_{(l_1, j_1, j_2, h/R)}^1$ ,  $I_{(l_1, j_1, j_2, h/R)}^2$  y  $I_{(l_1, j_1, j_2, h/R)}^3$  representan integrales que son calculadas numéricamente y los coeficientes  $\sigma_{lj}^z$ ,  $\sigma_{lj}^+$  y  $\sigma_{lj}^-$  son funciones de las variables  $a_{mj}$ .

## Integrales numéricas

Las integrales que deben ser calculadas numéricamente son definidas de la siguiente manera

$$I_{(l_1, j_1, j_2, L/R)}^1 = N_{l_1 j_1} N_{l_1 j_2} J_{l_1}(\chi_{l_1 j_1}) J_{l_1}(\chi_{l_1 j_2}) \int_0^{\infty} dk \frac{f(kL/R) k^2 J_{l_1}'(k)^2}{(L/R)(k^2 - \chi_{l_1 j_1}^2)(k^2 - \chi_{l_1 j_2}^2)}, \quad (\text{B.17a})$$

$$I_{(l_1, j_1, j_2, L/R)}^2 = N_{l_1 j_1} N_{(l_1+2)j_2} J_{l_1}(\chi_{l_1 j_1}) J_{l_1+2}(\chi_{(l_1+2)j_2}) \int_0^{\infty} dk \frac{f(kL/R) k^2 J_{l_1}'(k) J_{l_1+2}'(k)}{(L/R)(k^2 - \chi_{l_1 j_1}^2)(k^2 - \chi_{(l_1+2)j_2}^2)}, \quad (\text{B.17b})$$

$$I_{(l_1, j_1, j_2, L/R)}^3 = N_{l_1 j_1} N_{(l_1-2)j_2} J_{l_1}(\chi_{l_1 j_1}) J_{l_1-2}(\chi_{(l_1-2)j_2}) \int_0^{\infty} dk \frac{f(kL/R) k^2 J_{l_1}'(k) J_{l_1-2}'(k)}{(L/R)(k^2 - \chi_{l_1 j_1}^2)(k^2 - \chi_{(l_1-2)j_2}^2)}, \quad (\text{B.17c})$$

con la cantidad  $f(kL/R) \equiv (kL/R + e^{-kL/R} - 1)$ .

## Relación entre los $\sigma_{lj}$ y los $a_{mj}$

Los  $\sigma_{lj}$  son funciones de  $a_{mj}$ , por lo que pueden ser expandidos en series de potencias de los  $a'_{mj}$ s de la siguiente manera

$$\sigma_{lj}^{z(0)} = 0 = \sigma_{lj}^{z(2)} = \sigma_{lj}^{z(4)}, \quad (\text{B.18a})$$

$$\sigma_{lj}^{z(1)} = (a_{lj} + (-1)^l a_{-lj}^*) / \sqrt{2}, \quad (\text{B.18b})$$

$$\sigma_{lj}^{z(3)} = -\frac{V}{2\sqrt{2}} \sum_{m_1 j_1 m_2 j_2 m_3 j_3} (a_{m_1 j_1} + (-1)^{m_1} a_{-m_1 j_1}^*) a_{m_2 j_2} a_{m_3 j_3}^* \text{id}_{(ljm_1 j_1 m_2 j_2 m_3 j_3)}^4 \delta_{m_3}^{m_1 + m_2 - l}, \quad (\text{B.18c})$$

$$\sigma_{00}^{z(0)} = \sigma_{00}^{+(0)} = \sigma_{00}^{-(0)} = \sqrt{V}, \quad (\text{B.18d})$$

$$\sigma_{lj}^{+(1)} = -\sigma_{lj}^{-(1)} = (a_{lj} - (-1)^l a_{-lj}^*) / \sqrt{2}, \quad (\text{B.18e})$$

$$\sigma_{lj}^{+(2)} = \sigma_{lj}^{-(2)} = -2 \sum_{m_1 j_1 m_2 j_2} a_{m_1 j_1} a_{m_2 j_2}^* \delta_{m_2}^{m_1 - l} \text{id}_{(ljm_1 j_1 m_2 j_2)}^3, \quad (\text{B.18f})$$

$$\sigma_{lj}^{+(3)} = -\sigma_{lj}^{-(3)} = \sigma_{lj}^{z(3)}, \quad (\text{B.18g})$$

$$\sigma_{lj}^{+(4)} = \sigma_{lj}^{-(4)} = 0 \quad (\text{B.18h})$$

donde el súper índice indica el orden de la aproximación, y se tiene que,  $\text{id}_{(ljm_1 j_1 m_2 j_2)}^3$  y  $\text{id}_{(ljm_1 j_1 m_2 j_2)}^4$  son integrales definidas como se muestra a continuación

$$\text{id}_{(ljm_1 j_1 m_2 j_2)}^3 = N_{lj} N_{m_1 j_1} N_{m_2 j_2} \int_0^1 J_l(\chi_j^l x) J_{m_1}(\chi_{j_1}^{m_1} x) J_{m_2}(\chi_{j_2}^{m_2} x) x dx, \quad (\text{B.19a})$$

$$\text{id}_{(ljm_1 j_1 m_2 j_2 m_3 j_3)}^4 = N_{lj} N_{m_1 j_1} N_{m_2 j_2} N_{m_3 j_3} \int_0^1 J_l(\chi_j^l x) J_{m_1}(\chi_{j_1}^{m_1} x) J_{m_2}(\chi_{j_2}^{m_2} x) J_{m_3}(\chi_{j_3}^{m_3} x) x dx \quad (\text{B.19b})$$

## Campo de Oersted

La expresión de la energía asociada al campo de Oersted, aproximada hasta orden tres (el próximo término corresponde al orden cinco) es

$$\mathcal{U}_O \approx h_O \int \left[ (1 - aa^*) \sin \phi + \frac{a^* - a}{\sqrt{2i}} \left( 1 - \frac{aa^*}{4} \right) \cos \phi \right] \frac{\rho}{R} dV. \quad (\text{B.20})$$

El término constante no influye en la dinámica del problema, por lo que no se analiza. El término asociado al primer orden, puede ser escrito como

$$\mathcal{U}_O^1 = -\frac{h_O}{i2\sqrt{2}} \left[ \int (a - a^*) e^{i\phi} \rho / R dV - c.c \right]. \quad (\text{B.21})$$

Al utilizar que  $a - a^* = (a_{mj} - (-1)^m a_{-mj}^*) N_{mj} J_m(\kappa_{mj} \rho) e^{im\phi}$ , al integrar en  $z$  y  $\phi$ , y al realizar el cambio de variables  $x \rightarrow \rho/R$ , se obtiene

$$\mathcal{U}_O^1 = V \frac{h_O}{i\sqrt{2}} (a_{-1j} + a_{1j}^* - c.c) N_{1j} \int_0^1 J_1(\chi_{1j} x) x^2 dx. \quad (\text{B.22})$$

Se tiene la siguiente propiedad  $(\frac{d}{dz})^m [z^\nu J_\nu(z)] = z^{\nu-m} J_{\nu-m}(z)$ . Para el caso especial donde  $m = 1$  y  $\nu = 2$  se obtiene  $\frac{d}{dz}[z^2 J_2(z)] = z^2 J_1(z)$ .

$$\mathcal{U}_O^1 = -iV \frac{h_O}{\sqrt{2}} (a_{-1j} + a_{1j}^* - c.c) \frac{N_{1j} J_2(\chi_{1j})}{\chi_{1j}} . \quad (\text{B.23})$$

El término a orden dos se puede escribir de la siguiente manera

$$\mathcal{U}_O^2 = -\frac{h_O}{2i} \left( \int aa^* e^{i\phi} \rho / RdV - c.c \right) , \quad (\text{B.24})$$

$$\mathcal{U}_O^2 = -\frac{h_O}{2i} (a_{m_1 j_1} a_{m_2 j_2}^* - c.c) N_{m_1 j_1} N_{m_2 j_2} \int J_{m_1}(\chi_{m_1 j_1} \rho / R) J_{m_2}(\chi_{m_2 j_2} \rho / R) e^{im_1 \phi} e^{-im_2 \phi} e^{i\phi} \rho / RdV . \quad (\text{B.25})$$

Al integrar en  $z$  y  $\phi$ , y al realizar el cambio de variables  $x \rightarrow \rho / R$ , se obtiene

$$\mathcal{U}_O^2 = iV h_O (a_{m_1 j_1} a_{m_2 j_2}^* - c.c) \delta_{m_2}^{m_1+1} N_{m_1 j_1} N_{m_2 j_2} \int_0^1 J_{m_1}(\chi_{m_1 j_1} x) J_{m_2}(\chi_{m_2 j_2} x) x^2 dx . \quad (\text{B.26})$$

Se define la cantidad

$$i_{m_1 j_1 m_2 j_2}^O \equiv N_{m_1 j_1} N_{m_2 j_2} \int_0^1 J_{m_1}(\chi_{m_1 j_1} x) J_{m_2}(\chi_{m_2 j_2} x) x^2 dx . \quad (\text{B.27})$$

Con lo que, finalmente, se obtiene

$$\mathcal{U}_O^2 = iV h_O (a_{m_1 j_1} a_{m_2 j_2}^* - c.c) \delta_{m_2}^{m_1+1} i_{m_1 j_1 m_2 j_2}^O . \quad (\text{B.28})$$

La expresión relacionada con el orden tres es

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_O^3 &= i \frac{h_O}{8\sqrt{2}} \int [(a^* - a)aa^* e^{i\phi} - c.c] \rho / RdV , \\ \mathcal{U}_O^3 &= i \frac{h_O}{8\sqrt{2}} N_{m_1 j_1} N_{m_2 j_2} N_{m_3 j_3} [((-1)^{m_1} a_{-m_1 j_1}^* - a_{m_1 j_1}) a_{m_2 j_2} a_{m_3 j_3}^* - c.c] \\ &\int e^{im_1 \phi} e^{im_2 \phi} e^{-im_3 \phi} e^{i\phi} J_{m_1}(\chi_{m_1 j_1} \rho / R) J_{m_2}(\chi_{m_2 j_2} \rho / R) J_{m_3}(\chi_{m_3 j_3} \rho / R) \rho / RdV . \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Al integrar en  $z$  y  $\phi$ , y al realizar el cambio de variables  $x \rightarrow \rho / R$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_O^3 &= iV \frac{h_O}{4\sqrt{2}} [((-1)^{m_1} a_{-m_1 j_1}^* - a_{m_1 j_1}) a_{m_2 j_2} a_{m_3 j_3}^* - c.c] \\ &\delta_{m_3-1}^{m_1+m_2} \int_0^1 N_{m_1 j_1} N_{m_2 j_2} N_{m_3 j_3} J_{m_1}(\chi_{m_1 j_1} x) J_{m_2}(\chi_{m_2 j_2} x) J_{m_3}(\chi_{m_3 j_3} x) x^2 dx . \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Se define

$$i_{m_1 j_1 m_2 j_2 m_3 j_3}^O \equiv N_{m_1 j_1} N_{m_2 j_2} N_{m_3 j_3} \int_0^1 J_{m_1}(\chi_{m_1 j_1} x R) J_{m_2}(\chi_{m_2 j_2} x R) J_{m_3}(\chi_{m_3 j_3} x R) x^2 dx . \quad (\text{B.31})$$

Con lo cual se puede escribir

$$\mathcal{U}_O^3 = iV \frac{h_O}{4\sqrt{2}} [((-1)^{m_1} a_{-m_1 j_1}^* - a_{m_1 j_1}) a_{m_2 j_2} a_{m_3 j_3}^* - c.c] \delta_{m_3-1}^{m_1+m_2} i_{m_1 j_1 m_2 j_2 m_3 j_3}^O . \quad (\text{B.32})$$

## Torque por transferencia de spin

La expresión asociada al torque por transferencia de spin es

$$\mathcal{U}^{stt} = \beta J \int aa^*(1 - aa^*/4)dV . \quad (\text{B.33})$$

Es directo que la expresión a orden dos se transforma en

$$\mathcal{U}_{stt}^2 = \beta J \sum_{mj} a_{mj} a_{mj}^* . \quad (\text{B.34})$$

Mientras que la expresión a orden cuatro corresponde a

$$\mathcal{U}_{stt}^4 = -\frac{\beta J V}{2} a_{m_1 j_1} a_{m_2 j_2}^* a_{m_3 j_3} a_{m_4 j_4}^* i_{d(m_1 j_1 m_2 j_2 m_3 j_3 m_4 j_4)}^4 \delta_{m_2 + m_4}^{m_1 + m_3} . \quad (\text{B.35})$$

# Apéndice C

## Definiciones para las ecuaciones asociadas a la interacción entre el modo uniforme y el modo de oscilación $mj$

### Ecuación lineal de la variable $a_{mj}$

Las siguientes expresiones están asociadas con la interacción entre la gran amplitud del modo uniforme y el modo de oscilación  $mj$ :

$$\tilde{A}_{mj} = (h_x + 1/2 + h_E^{mj}) , \quad (\text{C.1a})$$

$$\tilde{B}_{mj} = 1/2 , \quad (\text{C.1b})$$

$$C_{mj} = h_E^{mj} \frac{|a_{00}|^4}{4(2 - |a_{00}|^2)} - \left( \frac{3}{8} a_{00}^2 + |a_{00}|^2 + \frac{3}{8} a_{00}^{*2} \right) , \quad (\text{C.1c})$$

$$D_{mj} = h_E^{mj} \frac{|a_{00}|^2 a_{00}^2}{4(2 - |a_{00}|^2)} + \frac{1}{2} (h_E^{mj} - 1) a_{00}^2 - \frac{3}{4} |a_{00}|^2 , \quad (\text{C.1d})$$

$$E_{mj} = \frac{3\alpha}{8} [3a_{00}^2 + (4 + \frac{8}{3} h_x) |a_{00}|^2 + a_{00}^{*2} - \frac{2}{3} (2a_{00}^2 + 3|a_{00}|^2 + a_{00}^{*2}) |a_{00}|^2] - \beta J |a_{00}|^2 , \quad (\text{C.1e})$$

$$F_{mj} = \frac{3\alpha}{4} [(1 + \frac{2}{3} h_x) a_{00}^2 + |a_{00}|^2 - \frac{1}{6} (a_{00}^2 + 4|a_{00}|^2 + 3a_{00}^{*2}) a_{00}^2] - \frac{\beta J}{2} a_{00}^2 . \quad (\text{C.1f})$$

Para el análisis teórico, se aproximan los términos asociados a la interacción de intercambio de la siguiente forma

$$C_{mj} \approx \frac{h_E^{mj}}{8} |a_{00}|^4 - \left( \frac{3}{8} a_{00}^2 + |a_{00}|^2 + \frac{3}{8} a_{00}^{*2} \right) , \quad (\text{C.2a})$$

$$D_{mj} \approx \frac{h_E^{mj}}{8} |a_{00}|^2 a_{00}^2 + \frac{1}{2} (h_E^{mj} - 1) a_{00}^2 - \frac{3}{4} |a_{00}|^2 . \quad (\text{C.2b})$$

## Cambio de variables de $a_{mj}$ a $b_{mj}$

Al realizar el cambio de variables desde  $a_{mj}$  a  $b_{mj}$ , es conveniente definir las siguientes cantidades:

$$G_{mj} = \frac{\tilde{A}_{mj}(C_{mj} + C_{mj}^*)}{2\omega_{mj}} - \frac{\tilde{B}_{mj}(D_{mj} + D_{mj}^*)}{2\omega_{mj}} + \frac{C_{mj} - C_{mj}^*}{2}, \quad (\text{C.3a})$$

$$H_{mj} = \frac{\tilde{A}_{mj}(E_{mj} - E_{mj}^*)}{2\omega_{mj}} - \frac{\tilde{B}_{mj}(F_{mj} - F_{mj}^*)}{2\omega_{mj}} + \frac{E_{mj} + E_{mj}^*}{2}, \quad (\text{C.3b})$$

$$I_{mj} = \frac{\tilde{A}_{mj}(D_{mj} + D_{mj}^*)}{2\omega_{mj}} - \frac{\tilde{B}_{mj}(C_{mj} + C_{mj}^*)}{2\omega_{mj}} + \frac{D_{mj} - D_{mj}^*}{2}, \quad (\text{C.3c})$$

$$J_{mj} = \frac{\tilde{A}_{mj}(F_{mj} - F_{mj}^*)}{2\omega_{mj}} - \frac{\tilde{B}_{mj}(E_{mj} - E_{mj}^*)}{2\omega_{mj}} + \frac{F_{mj} + F_{mj}^*}{2}. \quad (\text{C.3d})$$

## Aproximación de términos resonantes

Al buscar una solución para  $b_{mj}^{(1)}$  que varíe lentamente en el tiempo, se pueden despreciar algunas contribuciones de los términos  $G_{mj}$ ,  $H_{mj}$ ,  $I_{mj}$  y  $J_{mj}$ . Se definen las cantidades  $G'_{mj}$ ,  $H'_{mj}$ ,  $I'_{mj}$  y  $J'_{mj}$  como resultado de este proceso.

$$G'_{mj} = \frac{1}{2\omega_{mj}} \left[ \tilde{A}_{mj}(C'_{mj} + C'^*_{mj}) - \tilde{B}_{mj}(D'_{mj} + D'^*_{mj}) \right], \quad (\text{C.4a})$$

$$H'_{mj} = \frac{E'_{mj} + E'^*_{mj}}{2}, \quad (\text{C.4b})$$

$$I'_{mj} = \frac{\tilde{A}_{mj}(d_{mj} + d^*_{mj})}{2\omega_{mj}} - \frac{\tilde{B}_{mj}(c_{mj} + c^*_{mj})}{2\omega_{mj}} + \frac{1}{2}(d_{mj} - d^*_{mj}), \quad (\text{C.4c})$$

$$J'_{mj} = \frac{\tilde{A}_{mj}(f_{mj} - f^*_{mj})}{2\omega_{mj}} - \frac{\tilde{B}_{mj}(e_{mj} - e^*_{mj})}{2\omega_{mj}} + \frac{1}{2}(f_{mj} + f^*_{mj}). \quad (\text{C.4d})$$

Los términos  $G'_{mj}$  y  $H'_{mj}$  corresponden a los términos que no dependen del tiempo en  $G_{mj}$  y  $H_{mj}$ , los cuales son

$$C'_{mj} + C'^*_{mj} \approx \left( \frac{3\tilde{B}_{00} - 4\tilde{A}_{00}}{2\omega_{00}} \right) + h_E^{mj} \left( \frac{2\tilde{A}_{00}^2 + \tilde{B}_{00}^2}{8\omega_{00}^2} \right) |b_0|^2, \quad (\text{C.5a})$$

$$D'_{mj} + D'^*_{mj} \approx (1 - h_E^{mj}) \left( \frac{\tilde{B}_{00}}{\omega_{00}} \right) - \frac{3\tilde{A}_{00}}{2\omega_{00}} - 3h_E^{mj} \frac{\tilde{A}_{00}\tilde{B}_{00}}{8\omega_{00}^2} |b_0|^2, \quad (\text{C.5b})$$

$$E'_{mj} + E'^*_{mj} = \alpha \left[ 2 \frac{(3\tilde{B}_{00} + \tilde{A}_{00})(\tilde{A}_{00} - \tilde{B}_{00})}{\omega_{00}} - 3 \frac{(2\tilde{A}_{00} - \tilde{B}_{00})(\tilde{A}_{00} - \tilde{B}_{00})}{4\omega_{00}^2} |b_0|^2 \right] - 2\beta J \frac{\tilde{A}_{00}}{\omega_{00}}. \quad (\text{C.5c})$$



Los términos  $I'_{mj}$  y  $J'_{mj}$  corresponden a los términos proporcionales a  $e^{-2i\omega t}$  en  $I_{mj}$  y  $J_{mj}$ , los cuales son

$$c_{mj} + c_{mj}^* \approx -h_E^{mj} \frac{\tilde{A}_{00}\tilde{B}_{00}}{4\omega_{00}^2} |b_0|^2 - \left( \frac{3\tilde{A}_{00} - 4\tilde{B}_{00}}{4\omega_{00}} \right), \quad (\text{C.6a})$$

$$d_{mj} + d_{mj}^* \approx h_E^{mj} \frac{\tilde{A}_{00}^2 + \tilde{B}_{00}^2}{8\omega_{00}^2} |b_0|^2 + \frac{1}{2}(h_E^{mj} - 1) \frac{\tilde{A}_{00}}{\omega_{00}} + \frac{3\tilde{B}_{00}}{4\omega_{00}}, \quad (\text{C.6b})$$

$$d_{mj} - d_{mj}^* \approx h_E^{mj} \frac{\tilde{A}_{00}}{8\omega_{00}} |b_0|^2 + \frac{1}{2}(h_E^{mj} - 1), \quad (\text{C.6c})$$

$$e_{mj} - e_{mj}^* = \alpha \left( \frac{3}{4} - \frac{\tilde{A}_{00}}{4\omega_{00}} |b_0|^2 \right), \quad (\text{C.6d})$$

$$f_{mj} + f_{mj}^* = \alpha \left[ \frac{(\tilde{A}_{00} + 3\tilde{B}_{00})(\tilde{A}_{00} - \tilde{B}_{00})}{2\omega_{00}} - \frac{(\tilde{A}_{00} - \tilde{B}_{00})^2}{2\omega_{00}^2} |b_0|^2 \right] - \frac{\beta J}{2} \frac{\tilde{A}_{00}}{\omega_{00}}, \quad (\text{C.6e})$$

$$f_{mj} - f_{mj}^* = \alpha \left( \frac{\tilde{A}_{00} + 2\tilde{B}_{00}}{2} + \frac{\tilde{B}_{00} - 2\tilde{A}_{00}}{4\omega_{00}} |b_0|^2 \right) - \frac{\beta J}{2}. \quad (\text{C.6f})$$

## Apéndice D

# Instabilities of spin torque driven auto-oscillations of a ferromagnetic disk magnetized in plane

El presente apéndice presenta el estudio de la estabilidad de las auto-oscilaciones de la magnetización que son inducidas por el fenómeno de torque por transferencia de spin.

### **Detalles de la publicación:**

Título: Instabilities of spin torque driven auto-oscillations of a ferromagnetic disk magnetized in plane.

Autores: D. Mancilla-Almonacid and R. E. Arias.

Autor para correspondencia: R. E. Arias.

Publicado en: Physical Review B.

DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.93.224416>

**Instabilities of spin torque driven auto-oscillations of a ferromagnetic disk magnetized in plane**

D. Mancilla-Almonacid and R. E. Arias

*Departamento de Física, CEDENNA, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, Casilla 487-3, Santiago, Chile*

(Received 5 August 2015; revised manuscript received 19 May 2016; published 16 June 2016)

The stability of the magnetization auto-oscillations of the ferromagnetic free layer of a cylindrical nanopillar structure is studied theoretically using a classical Hamiltonian formalism for weakly interacting nonlinear waves, in a weakly dissipative system. The free layer corresponds to a very thin circular disk, made of a soft ferromagnetic material like Permalloy, and it is magnetized in plane by an externally applied magnetic field. There is a dc electric current that traverses the structure, becomes spin polarized by a fixed layer, and excites the modes of the free layer through the transfer of spin angular momentum. If this current exceeds a critical value, it is possible to generate a large amplitude periodic auto-oscillation of a dynamic mode of the magnetization. We separate our theoretical study into two parts. First, we consider an approximate expression for the demagnetizing field in the disk, i.e.,  $\vec{H}_D = -4\pi M_z \hat{z}$  or a very thin film approximation, and secondly we consider the effect of the full demagnetizing field, where one sees important effects due to the edges of the disk. In both cases, as the applied current density is increased, we determine the modes that will first auto-oscillate and when these become unstable to the growth of other modes, i.e., their ranges of “isolated” auto-oscillation.

DOI: [10.1103/PhysRevB.93.224416](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.93.224416)**I. INTRODUCTION**

In 1996, Slonczewski [1] and Berger [2] simultaneously discovered the spin transfer torque (STT), a phenomenon in which angular momentum is transferred from a spin polarized current to a ferromagnetic material. This phenomenon is observable at a nanometric scale due to the amounts of current necessary and its effect on the magnetization. Geometries where STT has been observed are nanopillars, magnetic multilayers with point contacts and nanoscale magnetic tunnel junctions. Two qualitatively different types of magnetization dynamics have been studied in relation with STT: induced switching of the magnetization from one equilibrium state to another [3–5], and nano-oscillators [6–8] that evidence auto-oscillations due to a possible antidamping effect of the spin torque. Both types of magnetization dynamics have potential technological applications, like nonvolatile magnetic random access memory (MRAM) [9,10] and tunable high-frequency oscillators [11,12], respectively.

Nanopillars in a basic configuration consist of two ferromagnetic layers separated by a metallic spacer. One of the ferromagnetic layers is called the fixed layer, engineered so that the magnetization remains at an equilibrium configuration and that will spin polarize a current that runs through the device. Then the emergent spin polarized current goes through the metallic spacer that uncouples both ferromagnets, and finally through the so-called free layer made of a soft ferromagnet, influencing its magnetization dynamics via transference of angular momentum.

In this study, we are interested in the magnetization dynamics of the free layer, in particular when it acts as a nano-oscillator. Many works [13–16] have used the macrospin approximation to study the free layer dynamics, i.e., they study the nonlinear dynamics of the uniform magnetization mode, assuming that the magnetization dynamics does not develop nonuniform features. These macrospin studies have had successful in explaining some features of experimental results [17–19], but there are other features that require consideration of nonuniform deviations [20–22]. In particular,

for nano-oscillators excited into auto-oscillations by spin torque, the amplitudes of oscillation may be large, attaining a point where they become unstable to the growth of nonuniform modes.

In this study, we first analyze the stability of a uniform periodic auto-oscillation, when the free layer is a thin circular disk magnetized in plane with the aid of a uniform magnetic field applied in plane in a particular direction, using a model for the dynamics of a very thin soft ferromagnetic circular disk disregarding edge effects (the demagnetizing field is approximated by its very thin film limit), and we study the thresholds of instability of nonuniform modes in terms of the parameters of the problem: mainly the current density, applied magnetic field and radius of the disk. The values of these parameters are quite relevant for the magnetization dynamics. The model considers a description of the dynamics in terms of amplitudes of excitations, following a standard Hamiltonian formalism [23–27]. An advantage of the model is that a theoretical analysis of the magnetization dynamics and the thresholds can be done, leading to a better understanding of when and how the macrospin solution becomes unstable. By doing separate numerical checks of the dynamics, we corroborate the theoretical results of the model. Similar studies have been done when the applied magnetic field is perpendicular to the plane of the disk [28,29].

Secondly, we improve the theoretical model by considering the full demagnetizing field within the very thin disk approximation. This allows to better understand the finite size effects of a ferromagnetic disk of nanometric dimensions. We determine the nonuniform equilibrium magnetization under an in plane applied magnetic field, and the linear dynamic modes on top of this configuration, that do agree with previous micromagnetic simulations [30,31]. Within this improved model the previous uniform mode becomes quasiuniform, it still has the lowest frequency, but at small radii, there is a mode of edge character with a frequency very close to the latter one. Indeed, this edge mode has a lower critical current than the quasiuniform mode, thus we studied the range of current densities under which it auto-oscillates in isolation,

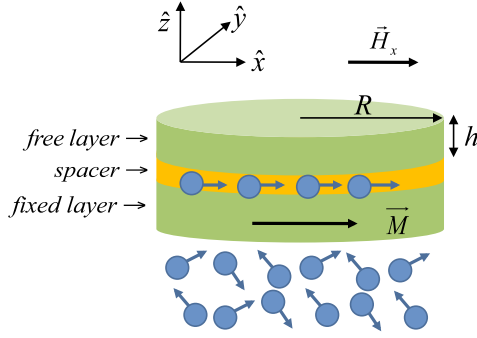


FIG. 1. Representation of a nanopillar and the torque by spin transfer. The electrons are polarized in the fixed layer, go through the spacer, and then produce a torque on the magnetization of the free layer.

and the current under which it becomes unstable to the growth of the quasiuniform mode.

The manuscript is organized as follows. In Sec. II, the model of magnetization dynamics with simplified demagnetizing field is presented; in Sec. III, we develop theoretical results on instability that follow from the simple version of the model; Sec. IV shows applications and numerical results of the simple model; Sec. V shows results for the model with an exact demagnetizing field. Finally, in Sec. VI, we conclude.

## II. MODEL, SIMPLER VERSION

The device under study is a nanopillar of circular cross section. In particular, we study the magnetization dynamics of its free layer, which is a thin ferromagnetic disk magnetized in plane. We consider that a spin polarized current runs through the disk, perpendicular to its plane (CPP geometry). The nanopillar is formed by two ferromagnetic layers separated by a metallic spacer. There is a “fixed” ferromagnetic layer with magnetization in the  $\hat{x}$  direction (see the geometry in Fig. 1) that serves as spin polarizer for the current that traverses the device. Due to the presence of the spacer, which has to have a certain width, we neglect the Ruderman-Kittel-Kasuya-Yosida (RKKY) interaction between both ferromagnetic layers [32].

We consider that there is a uniform external magnetic field applied in the plane of the free layer ( $H_x$ ), in direction  $\hat{x}$ . First, we will approximate the dipolar field by its main term in an infinite very thin ferromagnetic film, i.e.,  $\vec{H}_D = -4\pi M_z \hat{z}$ , assuming that we are dealing with very thin disks (neglected terms are of order  $h/R$ ). Indeed, we assume that the magnetization is uniform over the thickness of the film, i.e.,  $\vec{M} = \vec{M}(\vec{\rho})$  with  $\vec{\rho} \equiv x\hat{x} + y\hat{y}$ , and in particular we do calculations for free layers of Permalloy (exchange length of 5.7 nm) of thickness  $h = 5$  nm and radius  $R = 50$  nm. Considering the effect of the Zeeman, dipolar and exchange interactions, and the previous approximations, the equilibrium configuration corresponds to a uniform magnetization in the direction of the applied field. The free energy that we consider takes the form  $\mathcal{H} = \int \mathcal{W} dV$ , with  $\mathcal{W}$  the free energy density:

$$\mathcal{W} = -H_x M_x + 2\pi M_z^2 + A \sum_{\alpha=\{x,y,z\}} (\nabla m_\alpha)^2. \quad (1)$$

$A$  is the exchange constant of the free layer material,  $M_s$  the saturation magnetization, and  $\vec{m} \equiv \vec{M}/M_s$  a scaled magnetization with norm one ( $\vec{m}^2 = 1$ ). We have neglected an anisotropy energy density since we have a soft ferromagnet in mind, like Permalloy. Thus the effective field associated with this free energy takes the form:  $\vec{H}_{\text{eff}} = -\delta\mathcal{H}/\delta\vec{M} = H_x \hat{x} - 4\pi M_z \hat{z} + A \nabla^2 \vec{m}$ . In order to study, the magnetization dynamics of the free layer, we use the Landau-Lifshitz equation (LL). In addition to the torques associated with the previously mentioned terms (Zeeman, dipolar, exchange), we consider the spin transfer torque associated to the spin polarized current in the form proposed by Slonczewski [33] (in a simple form), and a damping torque in its Landau-Lifshitz phenomenological form [34]. A scaled LLS equation then takes the form:

$$\frac{d\vec{m}}{dt'} = \underbrace{-\vec{m} \times \vec{h}_{\text{eff}}}_{\text{precession}} - \underbrace{\alpha \vec{m} \times (\vec{m} \times \vec{h}_{\text{eff}})}_{\text{dissipation}} + \underbrace{\beta J \vec{m} \times (\vec{m} \times \hat{m}_{\text{fix}})}_{\text{spin transfer torque}}. \quad (2)$$

Nondimensional quantities have been introduced:  $t' = |\gamma|4\pi M_s t$  ( $|\gamma|$  is the absolute value of the gyromagnetic ratio),  $\vec{h}_{\text{eff}} = \vec{H}_{\text{eff}}/4\pi M_s$ , and  $\alpha$  is the phenomenological damping constant. Also,  $\beta = 2\pi \hbar \epsilon / (4\pi M_s)^2 e h$  [26] ( $\epsilon$  is the polarization factor between 0 and 1,  $e$  is the electron charge, and  $h$  the thickness of the free layer, that in the following, we consider fixed),  $J$  is the current density, and  $\hat{m}_{\text{fix}} = \hat{x}$  is the direction of spin polarization of the current. We also introduce nondimensional frequencies  $\omega$ , through  $\omega = \Omega/|\gamma|4\pi M_s$ , with  $\Omega$  in rad/s.

The previous LLS equation maintains dynamically the restriction  $\vec{m}^2 = 1$ . Also, since the equilibrium magnetization in this model is  $\vec{m} = \hat{x}$ , it is convenient to introduce two complex variables  $a(\vec{\rho}, t)$  and  $a^*(\vec{\rho}, t)$  that do describe the magnetization dynamics via a classical Holstein-Primakoff transformation [35,36].  $a$  and  $a^*$  represent a dynamic perturbation of the equilibrium, and they are the classical analogs of the spin wave annihilation and creation operators of quantum mechanics. The transformation of variables corresponds to

$$\left. \begin{aligned} m_x &= 1 - aa^* \\ m_y &= (a - a^*)\sqrt{2 - aa^*}/2i \\ m_z &= (a + a^*)\sqrt{2 - aa^*}/2 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow a = \frac{m_z + im_y}{\sqrt{1 + m_x}}. \quad (3)$$

The temporal evolution of the variable  $a$  satisfies by the chain rule  $i\dot{a} = i da/dt' = i(\partial a/\partial \vec{m}) \cdot \dot{\vec{m}}$ , and similarly for  $a^*$ . Thus, due to this simple dependence on  $\vec{m}$ , the dynamics of the complex variables  $a$  and  $a^*$  can be obtained through the LLS equation (2) as

$$i\dot{a} = \frac{\delta\mathcal{U}}{\delta a^*} + \mathcal{F}, \quad (4a)$$

$$i\dot{a}^* = -\frac{\delta\mathcal{U}}{\delta a} - \mathcal{F}^*. \quad (4b)$$

The first term associated with the normalized free energy  $\mathcal{U} \equiv \mathcal{H}/4\pi M_s^2$  corresponds to the conservative precession dynamics in the effective field, and the second term associated with  $\mathcal{F}$  corresponds to the dynamics associated with the

Slonczewski spin transfer torque and the Landau-Lifschitz damping. Thus Eqs. (4a) and (4b) have a Hamilton's form (conservative precessional terms) plus nonconservative terms. The different contributing terms can be separated as  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_Z + \mathcal{U}_D + \mathcal{U}_{\text{ex}}$  and  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\text{dis}} + \mathcal{F}_{\text{stt}}$ , with

$$\mathcal{U}_Z = -h_x \int (1 - aa^*) dV, \quad (5a)$$

$$\mathcal{U}_D = \frac{1}{4} \int (a + a^*)^2 \left(1 - \frac{aa^*}{2}\right) dV, \quad (5b)$$

$$\mathcal{U}_{\text{ex}} = l_{\text{ex}}^2 \int \left\{ \vec{\nabla} a \cdot \vec{\nabla} a^* + \frac{1}{4} \left[ a^2 (\vec{\nabla} a^*)^2 + a^{*2} (\vec{\nabla} a)^2 \right] + \frac{aa^*}{8(2 - aa^*)} [\vec{\nabla}(aa^*)]^2 \right\} dV, \quad (5c)$$

with  $h_x \equiv H_x/4\pi M_s$ , and  $l_{\text{ex}} \equiv \sqrt{A/2\pi M_s^2}$  the exchange length. And

$$\mathcal{F}_{\text{dis}} = i\alpha \left[ \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta a^*} \left( \frac{8 - 4|a|^2 + |a|^4}{4|a|^2 - 8} \right) + \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta a} a^2 \left( \frac{|a|^2 - 4}{4|a|^2 - 8} \right) \right], \quad (6a)$$

$$\mathcal{F}_{\text{stt}} = i\beta J a \left(1 - \frac{aa^*}{2}\right). \quad (6b)$$

Furthermore, in order to describe the dynamics in variables suitable to the geometry of the thin disk, we introduce a change of variables from the fields  $a(\vec{\rho}, t'), a^*(\vec{\rho}, t')$  to the variables  $a_{mj}(t'), a_{mj}^*(t')$ , which are the coefficients of a Bessel functions series expansion, as follows:

$$a(\vec{\rho}, t') = N_{00} a_{00}(t') + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} N_{mj} a_{mj}(t') J_m(\kappa_{mj} \rho) e^{im\phi}, \quad (7)$$

with  $\rho$  and  $\phi$  polar coordinates related to the center of the disk. We also assume that the boundary conditions on the edges of the disk correspond to free spins [37], meaning null normal derivatives of the magnetization on the surfaces of the sample, i.e., in this case, the radial derivatives of the magnetization are null at  $\rho = R$ , with  $R$  the radius of the disk. The latter is satisfied if the  $\kappa_{mj}$  are such that  $J'_m(\kappa_{mj} R) = 0$ , meaning that  $\kappa_{mj} = \chi_{mj}/R$ , with  $\chi_{mj}$  the  $j^{\text{th}}$  zero of  $J'_m(x)$ . This series is complete in the mathematical sense, and orthonormal:

$$\int dV J_m(\kappa_{mj} \rho) J_{m'}(\kappa_{m'j'} \rho) e^{i(m+m')\phi} = (-1)^m \delta_{-m'}^m \delta_{j'}^j / N_{mj}^2, \quad (8)$$

$$a_{mj}(t') = N_{mj} \int dV a(\vec{\rho}, t) J_m(\chi_{mj} \rho / R) e^{-im\phi}. \quad (9)$$

The normalization coefficients take the following form:

$$N_{00} = 1/\sqrt{V}, \quad (10a)$$

$$N_{mj} = 1/\sqrt{-J_m(\chi_{mj}) J_m''(\chi_{mj}) V}. \quad (10b)$$

These coefficients were chosen in this way so that the transformation from  $a, a^*$  to the  $a_{mj}, a_{mj}^*$  were canonical

(considering only the conservative part of the equations). Thus the equations of motion in the new variables take the canonical form with extra terms associated with dissipation and the spin torque term:

$$i\dot{a}_{mj} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial a_{mj}^*} + \mathcal{F}_{mj}, \quad (11a)$$

$$i\dot{a}_{mj}^* = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial a_{mj}} - (\mathcal{F}_{mj})^*, \quad (11b)$$

$$\text{with } \mathcal{F}_{mj} = N_{mj} \int dV \mathcal{F} J_m(\chi_{mj} \rho / R) e^{-im\phi}.$$

### III. THEORETICAL RESULTS, SIMPLER MODEL

#### A. Spin wave modes of the equilibrium configuration

The equations of motion satisfied by the linear spin wave modes of the uniform equilibrium configuration correspond to Eqs. (11a) and (11b) excluding the damping and spin torque terms, and follow from the energy  $\mathcal{U}$  approximated to quadratic order in the coefficients  $a_{mj}$ . Indeed, to this order  $\mathcal{U} \simeq \mathcal{U}^{(2)}$ , with

$$\mathcal{U}^{(2)} = \sum_{mj} \left[ (h_x + h_{\text{ex}}^{mj}) |a_{mj}|^2 + \frac{1}{4} |(a_{mj} + (-1)^m a_{-mj}^*)|^2 \right], \quad (12)$$

with  $h_{\text{ex}}^{mj} \equiv (\chi_{mj} l_{\text{ex}} / R)^2$ . From Eqs. (11a), (11b), and (12), one obtains

$$i \begin{pmatrix} \dot{a}_{mj} \\ \dot{a}_{-mj}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{mj} & (-1)^m B_{mj} \\ -(-1)^m B_{mj} & -A_{mj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{mj} \\ a_{-mj}^* \end{pmatrix} \equiv \mathbf{M} \begin{pmatrix} a_{mj} \\ a_{-mj}^* \end{pmatrix}, \quad (13)$$

with  $A_{mj} \equiv h_x + h_{\text{ex}}^{mj} + 1/2$  and  $B_{mj} = 1/2$ . It means that to this order the variables  $a_{mj}$  and  $a_{-mj}^*$  correspond to two coupled harmonic oscillators. Through the following Bogoliubov transformation [24,38], this problem may be diagonalized:

$$\begin{pmatrix} a_{mj} \\ a_{-mj}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{mj} & (-1)^m v_{mj} \\ (-1)^m v_{mj} & \rho_{mj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{mj}^{(1)} \\ b_{mj}^{(2)} \end{pmatrix} \equiv \mathbf{N} \begin{pmatrix} b_{mj}^{(1)} \\ b_{mj}^{(2)} \end{pmatrix} = b_{mj}^{(1)} \begin{pmatrix} \rho_{mj} \\ (-1)^m v_{mj} \end{pmatrix} + b_{mj}^{(2)} \begin{pmatrix} (-1)^m v_{mj} \\ \rho_{mj} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

i.e.,

$$\mathbf{N}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{N} = \begin{pmatrix} \omega_{mj} & 0 \\ 0 & -\omega_{mj} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

with

$$\rho_{mj} = \sqrt{\frac{A_{mj} + \omega_{mj}}{2\omega_{mj}}}, \quad v_{mj} = \sqrt{\frac{A_{mj} - \omega_{mj}}{2\omega_{mj}}}, \quad (16)$$

$$\omega_{mj} = \sqrt{A_{mj}^2 - B_{mj}^2} = \sqrt{(h_x + h_{\text{ex}}^{mj})(h_x + h_{\text{ex}}^{mj} + 1)}. \quad (17)$$

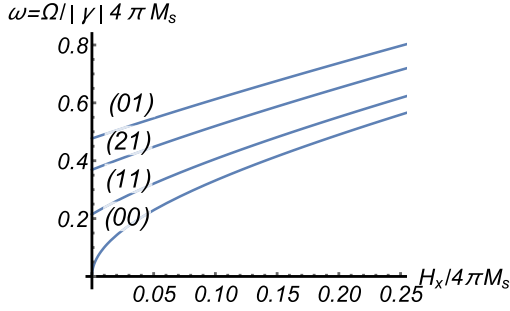


FIG. 2. Frequencies as a function of applied magnetic field for the first four linear modes of the ferromagnetic disk. For a given applied field, the frequency grows for modes with more angular and radial oscillations. Here,  $\omega$  has no dimensions and  $\Omega$  has dimensions of rad/s.

There is an analogous transformation to Eq. (14) for the complex conjugates of those variables, i.e., for  $a_{mj}^*$ ,  $a_{-mj}$ ,  $b_{mj}^{(1)*}$ , and  $b_{mj}^{(2)*}$ . This is a canonical transformation, and the equations of motion in the new variables are

$$i\dot{b}_{mj}^{(1)} = \partial\mathcal{U}/\partial b_{mj}^{(1)*} = \omega_{mj}b_{mj}^{(1)}, \quad (18a)$$

$$i\dot{b}_{mj}^{(2)} = \partial\mathcal{U}/\partial b_{mj}^{(2)*} = -\omega_{mj}b_{mj}^{(2)}, \quad (18b)$$

which have as solutions

$$b_{mj}^{(1)}(t) = b_{mj}^{(1)0} \exp(-i\omega_{mj}t'), \quad b_{mj}^{(2)}(t) = b_{mj}^{(2)0} \exp(i\omega_{mj}t'), \quad (19)$$

with  $\omega_{mj}$  the normalized frequencies of the normal modes of the disk [Eq. (17),  $\omega_{mj} = \Omega_{mj}/|\gamma|4\pi M_s$ ]. The frequencies increase with the number of radial and angular oscillations of the modes that grow with the indices  $j$  and  $m$ , as a consequence of the exchange interaction. In Fig. 2, we show a graph of the frequencies as a function of the applied field for the first four modes.

The corresponding shape of the modes follows via Eqs. (7) and (14), noticing that  $a_{mj}^*$  and  $a_{-mj}$  follow as complex conjugates of the expressions in Eq. (14). If one considers that only the mode (1) exists, and taking  $b_{mj}^{(1)}$  as real, one gets

$$\begin{aligned} m_z &= b_{mj}^{(1)} \sqrt{2} N_{mj} J_m(\kappa_{mj} \rho) (\rho_{mj} + \nu_{mj}) \cos(m\phi - \omega_{mj}t'), \\ m_y &= b_{mj}^{(1)} \sqrt{2} N_{mj} J_m(\kappa_{mj} \rho) (\rho_{mj} - \nu_{mj}) \sin(m\phi - \omega_{mj}t'). \end{aligned} \quad (20)$$

And if only the mode (2) exists, and with  $b_{mj}^{(2)}$  real:

$$\begin{aligned} m_z &= b_{mj}^{(2)} \sqrt{2} N_{mj} J_m(\kappa_{mj} \rho) (\rho_{mj} + \nu_{mj}) \cos(m\phi + \omega_{mj}t'), \\ m_y &= b_{mj}^{(2)} \sqrt{2} N_{mj} J_m(\kappa_{mj} \rho) (\nu_{mj} - \rho_{mj}) \sin(m\phi + \omega_{mj}t'). \end{aligned} \quad (21)$$

Thus these are modes stationary in the radial direction, but that do rotate anticlockwise or clockwise with respect to the angular direction.

If one considers dissipation and the effect of the spin transfer torque, the linear equations (13) lead to

$$i\dot{a}_{mj} = (1 - i\alpha)(A_{mj}a_{mj} + B_{mj}(-1)^m a_{-mj}^*) + i\beta J a_{mj}, \quad (22)$$

and to a similar equation for  $i\dot{a}_{-mj}^*$ . The equation corresponding Eq. (18a) in the variables  $b_{mj}^{(1,2)}$  is given by this latter equation with the addition of a term  $\mathcal{F}_{mj}^b = \rho_{mj}\mathcal{F}_{mj} - \nu_{mj}(-1)^m \mathcal{F}_{-mj}^*$  in the right-hand side (and a similar equation for  $b_{mj}^{(2)}$ ). The solution to these equations is

$$\begin{aligned} b_{mj}^{(1)}(t') &\simeq e^{-(\alpha A_{mj} - \beta J)t'} \left( c_{mj}^0 e^{-i\omega_{mj}t'} + i d_{mj}^0 \frac{\alpha B_{mj}}{2\omega_{mj}} e^{i\omega_{mj}t'} \right), \\ b_{mj}^{(2)}(t') &\simeq e^{-(\alpha A_{mj} - \beta J)t'} \left( d_{mj}^0 e^{i\omega_{mj}t'} - i c_{mj}^0 \frac{\alpha B_{mj}}{2\omega_{mj}} e^{-i\omega_{mj}t'} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Considering low dissipation, i.e.,  $\alpha \ll 1$ , we may approximate

$$\begin{aligned} b_{mj}^{(1)}(t') &\simeq c_{mj}^0 e^{-i\omega_{mj}t'} e^{-(\alpha A_{mj} - \beta J)t'}, \\ b_{mj}^{(2)}(t') &\simeq d_{mj}^0 e^{i\omega_{mj}t'} e^{-(\alpha A_{mj} - \beta J)t'}. \end{aligned} \quad (24)$$

Thus one observes that the spin torque term may act as antidamping, and it leads to auto-oscillations of the mode  $(m, j)$  when it compensates the damping at a critical current density  $J_{mj}^{\text{crit}} = \alpha A_{mj}/\beta$ . The lowest critical current density corresponds to the macrospin or uniform mode, with  $J_{00}^{\text{crit}} = \alpha A_{00}/\beta = \alpha(h_x + 1/2)/\beta$ . These auto-oscillations of the system can be observed in a range of the applied magnetic field [39,40].

## B. Study of the macrospin mode to nonlinear order

As seen in the previous linear analysis of the modes, the macrospin mode enters into an auto-oscillatory regime if the current density exceeds the critical value  $J_{00}^{\text{crit}} = \alpha(h_x + 1/2)/\beta$ , i.e., it exists as an undamped periodic solution. As the current density increases the amplitude of oscillation of the macrospin increases and it will be limited by nonlinear terms. Indeed, the macrospin becomes a periodic nonlinear solution to the equations of motion, which has been studied by several authors [41–45]. In this section, we will present the macrospin solution within the framework of our model. It satisfies the following exact equation [it follows from Eqs. (4a)–(6b)]:

$$\begin{aligned} i \frac{da_{00}}{dt'} &= (1 - i\alpha)[(h_x + 1/2)a_{00} + a_{00}^*/2] + i\beta J a_{00} \\ &\quad - a_{00}(a_{00}^2 + 4|a_{00}|^2 + 3a_{00}^{*2})/8 \\ &\quad + i\alpha a_{00}[h_x|a_{00}|^2/2 + (3 - |a_{00}|^2)(a_{00} + a_{00}^*)^2/8] \\ &\quad - i\beta J a_{00}|a_{00}|^2/2. \end{aligned} \quad (25)$$

In the absence of damping and spin torque, a static solution to this equation is  $a_{00}^{\text{eq}} = 0$ , i.e.,  $m_x = 1$ . We will study the macrospin solution that starts close to  $a_{00}^{\text{eq}} = 0$  and that grows to nonlinear order and becomes auto-oscillatory in the presence of damping and STT. In order to do so, we introduce the following linear change of variables,  $a_{00} = \rho_{00}b_{00} - \nu_{00}b_{00}^*$ , with  $\rho_{00} = \sqrt{(A_{00} + \omega_{00})/2\omega_{00}}$ ,  $\nu_{00} = \sqrt{(A_{00} - \omega_{00})/2\omega_{00}}$ ,  $A_{00} = h_x + 1/2$ ,  $B_{00} = 1/2$ , and  $\omega_{00} = \sqrt{h_x(h_x + 1)}$ . Neglecting



nonresonant terms [this approximation is called rotating wave approximation (RWA)] [46,47], the equation of motion of motion for  $b_{00}$  becomes

$$i\dot{b}_{00} = (\omega_{00} - 2A_{00}A_2|b_{00}|^2)b_{00} - i\alpha A_{00}(1 - A_1|b_{00}|^2 + A_2|b_{00}|^4)b_{00} + i\beta J(1 - A_3|b_{00}|^2)b_{00}, \quad (26)$$

with  $A_1$ ,  $A_2$ , and  $A_3$  functions of the applied field (all positive):

$$A_1 = \frac{(A_{00} + 3B_{00})(A_{00} - B_{00})}{2A_{00}\omega_{00}}, \quad (27a)$$

$$A_2 = \frac{B_{00}(2A_{00} - B_{00})(A_{00} - B_{00})}{A_{00}4\omega_{00}^2}, \quad (27b)$$

$$A_3 = \frac{A_{00}}{2\omega_{00}}. \quad (27c)$$

These previous expressions have been obtained in previous works, like for example Ref. [42], but the nonlinear correction to order 5 in the dissipation is new.

We search for a nonlinear periodic auto-oscillatory solution of Eq. (26), of the form

$$b_{00} = b_{00}^0 e^{-i\omega t'}, \quad (28)$$

with  $b_{00}^0$  a constant, and we obtain

$$|b_{00}^0|^2 = \frac{1}{2A_2/A_3} [(A_1/A_3 - J/J_c) \pm \sqrt{(A_1/A_3 - J/J_c)^2 - 4A_2(1 - J/J_c)/A_3^2}], \quad (29)$$

$$\omega = (\omega_{00} - 2A_{00}A_2|b_{00}^0|^2), \quad (30)$$

with  $J_c = \alpha A_{00}/\beta$  the critical current density. Thus we found an approximate uniform auto-oscillation solution whose frequency diminishes with its amplitude from its linear value  $\omega_{00}$ .

The nonlinear solution of Eqs. (28)–(30) exists in a certain range of the parameter space  $(J, h_x)$ . The range of existence of this solution is associated with imposing (i) that  $|b_{00}^0|^2$  is real and greater than zero and (ii) that the magnitude of the components of  $\vec{m}$  remain in the physical range (in magnitude lower than one). Indeed imposing  $m_x(t) = 1 - |a|^2 \geq -1$  one gets  $|b_{00}^0|^2 \leq 2\omega_{00}/(h_x + \sin^2(\omega_{00}t'))$  for all  $t'$ , which leads to  $|b_{00}^0|^2 \leq 2\omega_{00}/(h_x + 1)$ , i.e., an upper bound for  $|b_{00}^0|^2$ : we will see that this leads to a maximum current density  $J_c^{(1)}(h_x)$  for each applied field  $h_x$ .

The analysis of the previous two conditions leads to different allowed solutions depending on the value of the applied field  $h_x$ . We will present the different possibilities of solutions fixing the value of  $h_x$  at particular ranges and considering the current density to be variable. The ranges of  $h_x$  are associated with two special values,  $h_x^{(1)} = 1/4$  and  $h_x^{(2)}$  which is a solution to the equation  $(h_x^{(2)})^3 + h_x^{(2)} - 1/2 = 0$ . About the origin of these special  $h_x$  field values. (i) If one studies the magnitude of the oscillatory solutions at  $J = J_c$ , two solutions are obtained  $|b_{00}^0|^2 = 0$  and  $|b_{00}^0|^2 = (A_1/A_3 - 1)(A_3/A_2)$ . The second solution is valid for  $A_1/A_3 > 0$ , i.e., if  $h_x > 1/4$ ,

thus one defines  $h_x^{(1)} = 1/4$ , which corresponds to  $A_1/A_3 = 1$  ( $H_x^{(1)} = 2500$  Oe for Permalloy). Notice that  $A_1/A_3 = h_x(h_x + 2)/(h_x + 1/2)^2$ : for  $h_x < 1/4 \rightarrow A_1/A_3 < 1$ , and for  $h_x > 1/4 \rightarrow A_1/A_3 > 1$ .

(ii) If one studies the magnitude of the oscillatory solutions at  $J = 0$ , one obtains as solution  $|b_{00}^0|^2 = [A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - 4A_2}]/(2A_2)$ , that exists if  $A_1^2 - 4A_2 > 0$ . The condition  $A_1^2 - 4A_2 = 0$  leads to the condition  $(h_x^{(2)})^3 + h_x^{(2)} - 1/2 = 0$  and to  $h_x^{(2)} \simeq 0.42$  ( $H_x^{(2)} \approx 4200$  Oe for Permalloy).

Notice that the square root in Eq. (29) is imaginary if  $J_d(h_x) < J < J_u(h_x)$ , with  $J_d(h_x) < J_u(h_x) \leq J_c(h_x)$ :

$$J_{u,d} = (J_c/A_3) \times [A_1 - 2A_2/A_3 \pm 2\sqrt{(1 - A_1/A_3)A_2 + (A_2/A_3)^2}]. \quad (31)$$

The ranges of the applied field  $h_x$  associated to the existence or not of macrospin solutions of the type of Eq. (28) are (1)  $h_x < h_x^{(1)}$ . For current densities below  $J_c$  in the range  $J_u < J < J_c$ , there are no solutions that satisfy condition (i). Also  $J_d < J_c$ , meaning that there are no solutions between  $0 \leq J < J_u$ . The static equilibrium state  $m_x = 1$  is stable for  $0 < J < J_c$ . For  $J > J_c$ , the state  $m_x = 1$  becomes unstable, and the macrospin solution (28)–(30) is a stable periodic dynamic solution (a limit cycle), with its oscillation amplitude growing and its frequency diminishing with an increasing applied current density (there is the limiting upper current density  $J_c^{(1)}$  already mentioned). Figure 3(a) reflects this case.

(2)  $h_x^{(1)} < h_x < h_x^{(2)}$ . In the region  $J_u < J < J_c$ , there are two branches of solutions of the macro spin type (28) corresponding to the  $\pm$  signs of Eq. (29) (we will show that the  $(-)$  branch is unstable). Here, again  $J_d < 0$ , so there are no solutions for  $0 < J < J_u$ . For  $J > J_c$ , there is only one macrospin solution branch  $(+)$ , and notice that at  $J = J_c$ , the amplitude  $|b_{00}^0|$  is already finite. For  $J < J_c$ , the uniform equilibrium state  $m_x = 1$  is stable, and becomes unstable for  $J > J_c$ . Figure 3(b) reflects this case.

(3)  $h_x > h_x^{(2)}$ . There is a region with  $0 < J < J_d$  where there is a real and positive macrospin solution for  $|b_{00}^0|^2$ , but it is nonphysical since its amplitude of oscillation goes over the upper bound mentioned in (ii), as can be seen in Fig. 3(c). For other current densities, the analysis is the same as for  $h_x^{(1)} < h_x < h_x^{(2)}$  (the value of  $h_x^{(2)}$  is associated with  $J_d = 0$ ).

In Figs. 3(a)–3(c), we note that when varying the control parameter  $h_x$  different types of Hopf bifurcations are seen: when  $h_x < 1/4$  the bifurcation is supercritical, and when  $h_x > 1/4$  the bifurcation is subcritical [48].

In Fig. 4, we show a comparison between the approximate macrospin solution of Eqs. (28)–(30) and a simulation of the exact macrospin equations written in spherical coordinates, for two different applied fields  $h_x$ : the agreement is better for the lower  $h_x$  case.

### C. Interaction of the uniform auto-oscillation with the nonuniform modes

The auto-oscillation of the macrospin starts over a critical dc current, a problem of interest is to determine its stability with respect to the growth of nonuniform magnetization features.

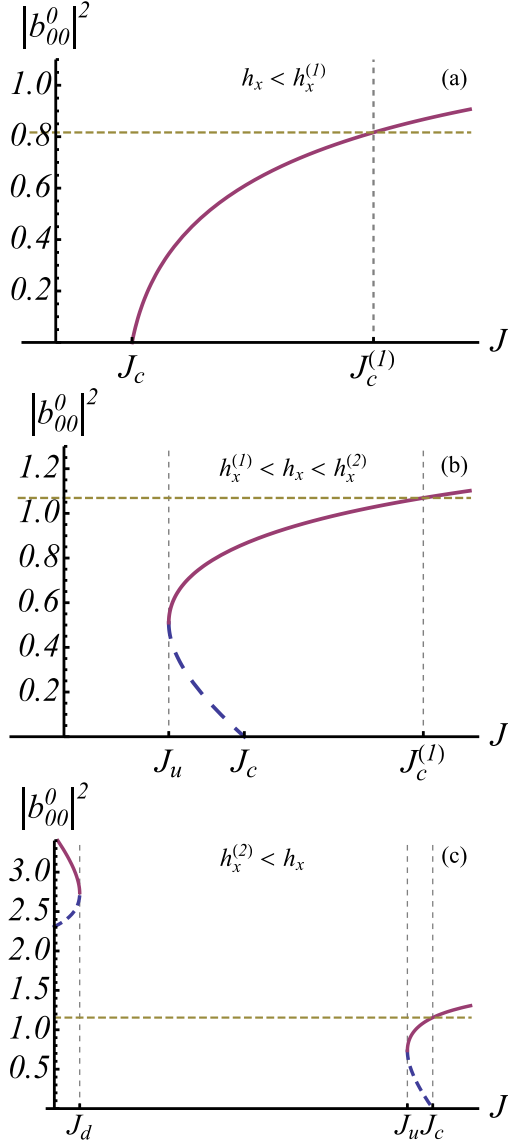


FIG. 3. Amplitude of oscillation of the macrospin mode as a function of the current density from Eq. (29), for different ranges of applied field. (a)  $h_x < 1/4$ . The graph corresponds to an applied field  $h_x = 0.2$ . (b)  $h_x^{(1)} < h_x < h_x^{(2)}$ . The graph corresponds to an applied field  $h_x = 0.4$ . In the region  $J_u < J < J_c$ , the branch solutions  $\pm$  of Eq. (29) are seen. (c)  $h_x > h_x^{(2)}$ . The graph corresponds to an applied field  $h_x = 0.5$ . The horizontal line represents the maximum amplitude that can have the macrospin oscillation, meaning that the solutions close to  $J = 0$  are nonphysical.

We do an analytic study of the stability of this uniform auto-oscillation allowing it to attain large amplitudes and studying the onset of exponential growth of nonuniform modes as the dc current density is increased within the range of existence of the auto-oscillation (the following analysis is valid for all the branches of macrospin solutions already discussed). The previously obtained macrospin periodic solution of Eqs. (28)–(30) is

$$a^{\text{ao}} = \rho_{00} b_{00}^0 e^{-i\omega t'} - \nu_{00} b_{00}^{0*} e^{i\omega t'}. \quad (32)$$

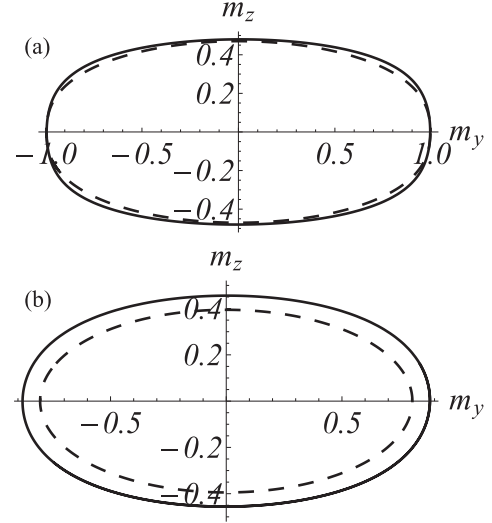


FIG. 4. Comparison between a simulation in spherical coordinates of the macrospin (solid line) and the approximate solution of Eqs. (28)–(30) (dashed line). A projection of the magnetization in the  $yz$  plane is shown for a period of oscillation, with (a)  $h_x = 0.15$  and  $J = 1.1J_c$ , (b)  $h_x = 0.25$  and  $J = 1.005J_c$ .

Thus we consider a linear perturbation of it:

$$a_{00} = a^{\text{ao}} + \delta a_{00}, \quad (33a)$$

$$a_{mj} = \delta a_{mj}. \quad (33b)$$

Thus, doing an expansion about  $a^{\text{ao}}$  in Eq. (11a) one gets, the following linear dynamic equation for  $\delta \dot{a}_{mj}$  in terms of  $\delta a_{mj}$  and  $\delta a_{-mj}^*$ :

$$i \frac{d\delta a_{mj}}{dt'} \approx \left[ \frac{\partial}{\partial a_{mj}} \left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial a_{mj}^*} + \mathcal{F}_{mj} \right) \right]_{a^{\text{ao}}} \delta a_{mj} + \left[ \frac{\partial}{\partial a_{-mj}^*} \left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial a_{mj}^*} + \mathcal{F}_{mj} \right) \right]_{a^{\text{ao}}} \delta a_{-mj}^*, \quad (34)$$

(given the structure of  $\mathcal{U}$  only the terms  $\delta a_{mj}$  and  $\delta a_{-mj}^*$  exist on the right-hand side). The previous equation takes the form:

$$i \delta \dot{a}_{mj} = (A_{mj} + C_{mj}(a^{\text{ao}})) \delta a_{mj} + [B_{mj} + D_{mj}(a^{\text{ao}})] (-1)^m \delta a_{-mj}^* + i[\beta J - \alpha A_{mj} + E_{mj}(a^{\text{ao}})] \delta a_{mj} + i[-\alpha B_{mj} + F_{mj}(a^{\text{ao}})] (-1)^m \delta a_{-mj}^*, \quad (35)$$

with the coefficients  $A_{mj} - F_{mj}$  given in the Appendix A 1. Doing the change of variables of Eqs. (14)–(17), one obtains from Eq. (35) (and from the analogous form for  $\delta \dot{a}_{-mj}^*$ ) the following equation for  $\dot{b}_{mj}^{(1)}$ , that couples  $b_{mj}^{(1)}$  and  $b_{mj}^{(2)}$ :

$$i \dot{b}_{mj}^{(1)} = [\omega_{mj} b_{mj}^{(1)} - i(\alpha A_{mj} - \beta J) b_{mj}^{(1)} - i\alpha B_{mj} (-1)^m b_{mj}^{(2)}] + [G_{mj}(a^{\text{ao}}) + i H_{mj}(a^{\text{ao}})] b_{mj}^{(1)} + [I_{mj}(a^{\text{ao}}) + i J_{mj}(a^{\text{ao}})] (-1)^m b_{mj}^{(2)}, \quad (36)$$

with an analogous equation for  $\dot{b}_{mj}^{(2)}$ . The first term in brackets corresponds to the part without interaction with the macrospin



(already analysed for the linear modes), and the second part includes the interaction with the macrospin via nonlinear terms dependent on its amplitude. The functions  $G_{mj}$ ,  $H_{mj}$ ,  $I_{mj}$ , and  $J_{mj}$  are evaluated at  $a^{ao}$  of Eq. (32), and are detailed in Appendix A 2.

Now, based on the linear solution of Eq. (24), the following change of variables is done:

$$b_{mj}^{(1)}(t') = b_{mj}^{0(1)}(t') e^{-i\omega_{mj}t'} e^{-(\alpha A_{mj} - \beta J)t'}, \quad (37)$$

and similarly for  $b_{mj}^{(2)}(t')$ . Then  $\dot{b}_{mj}^{0(1)}(t')$  satisfies the equation

$$\begin{aligned} i\dot{b}_{mj}^{0(1)} = & [G_{mj}(a^{ao}) + iH_{mj}(a^{ao})]b_{mj}^{0(1)} \\ & + [I_{mj}(a^{ao}) + iJ_{mj}(a^{ao})](-1)^m b_{mj}^{0(2)} e^{2i\omega_{mj}t'} \\ & - i\alpha B_{mj}(-1)^m b_{mj}^{0(2)} e^{2i\omega_{mj}t'}, \end{aligned} \quad (38)$$

and there is a similar equation for  $\dot{b}_{mj}^{0(2)}(t')$ . We search for a solution in which  $b_{mj}^{0(1)}(t')$ ,  $b_{mj}^{0(2)}(t')$  vary slowly in time, thus we can neglect terms of Eq. (38) that have coefficients that vary rapidly [46,47] (terms like  $e^{2i\omega t'}$  or  $e^{-2i\omega t'}$  for example). Following this idea, we use the constant terms of  $G_{mj}(a^{ao})$  and  $H_{mj}(a^{ao})$ , and the terms proportional to  $e^{-2i\omega t'}$  in  $I_{mj}(a^{ao})$  and  $J_{mj}(a^{ao})$ , and we obtain the following approximate equation for  $b_{mj}^{0(1)}$ ,  $b_{mj}^{0(2)}$ :

$$\begin{aligned} i\dot{b}_{mj}^{0(1)} = & (G'_{mj} + iH'_{mj})|b_{00}^0|^2 b_{mj}^{0(1)} \\ & + (I'_{mj} + iJ'_{mj})b_{00}^0{}^2 (-1)^m b_{mj}^{0(2)} e^{2i(\omega_{mj} - \omega)t'}, \end{aligned} \quad (39)$$

with the expressions for  $G'_{mj} - J'_{mj}$  given in Appendix A 3 (there is a similar equation for  $b_{mj}^{0(2)}$ ).

The solution to the system of equations for  $b_{mj}^{0(1)}$ ,  $b_{mj}^{0(2)}$  is

$$b_{mj}^{0(1)} = u_{mj}^0 e^{i(\omega_{mj} - \omega)t'} e^{\gamma_{mj}t'}, \quad (40)$$

with

$$\begin{aligned} \gamma_{mj} = & \pm \sqrt{(|I'_{mj}|^2 + |J'_{mj}|^2)|b_{00}^0|^4 - (\omega_{mj} - \omega + G'_{mj}|b_{00}^0|^2)^2} \\ & + H'_{mj}|b_{00}^0|^2. \end{aligned} \quad (41)$$

Since we are looking for instabilities, we take the (+) sign in the previous solution, and the solution for the mode  $b_{mj}^{(1)}$  takes the form

$$\begin{aligned} b_{mj}^{(1)}(t') = & u_{mj}^0 e^{i(\omega_{mj} - \omega)t'} e^{\gamma_{mj}t'} e^{-i\omega_{mj}t'} e^{-(\alpha A_{mj} - \beta J)t'}, \\ = & u_{mj}^0 e^{-i\omega t'} e^{\gamma_{mj}t' - (\alpha A_{mj} - \beta J)t'}, \end{aligned} \quad (42)$$

i.e., it oscillates with the same frequency  $\omega$  as the macrospin. Then, the mode  $b_{mj}^{(1)}$  will have an exponential growth if  $\gamma_{mj} > \alpha A_{mj} - \beta J$ , or

$$\begin{aligned} \sqrt{(I'_{mj}{}^2 + J'_{mj}{}^2)|b_{00}^0|^4 - (\omega_{mj} - \omega + G'_{mj}|b_{00}^0|^2)^2} \\ > \alpha A_{mj} - \beta J - H'_{mj}|b_{00}^0|^2, \end{aligned} \quad (43)$$

a condition that will be analyzed in the following.

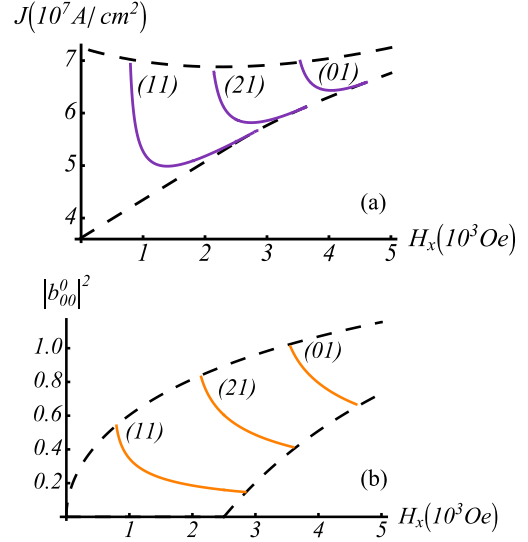


FIG. 5. (a) Graph of the threshold current density at which nonuniformities of the magnetization start growing. The three curves correspond to the first three modes to grow exponentially [(11), (21), and (01)]. The lower segmented line corresponds to the current at which the uniform mode starts auto-oscillation and the upper segmented line corresponds to  $J_c^{(1)}$ . (b) Graph of the threshold amplitude attained by the macrospin when the nonuniformities of the magnetization start (first three nonuniform modes). The lower segmented line corresponds to the minimum amplitude of oscillation and the upper segmented line is associated with the maximum amplitude possible.

#### IV. APPLICATIONS OF THE SIMPLER MODEL, NUMERICAL RESULTS

In the following, we will show applications of the theoretical model and present some numerical results. For all the plots that follow we will consider that the free layer is made of Permalloy, with the following associated parameters:  $4\pi M_s = 10^4$  Oe,  $l_{ex} = 5.7$  nm,  $\epsilon = 0.17$ , and  $\alpha = 0.01$ .

##### A. Instabilities, examining theoretical results

The expression of Eq. (43) that establishes possible linear exponential growth of nonuniform modes depends on the current and magnetic field applied to the system. Thus, for a given applied magnetic field, by solving the equality on Eq. (43) a threshold dc current  $J_t^{(mj)}$  can be found at which the nonuniform mode ( $m, j$ ) destabilizes. Figure 5(a) shows  $J_t$  for the three first nonuniform modes that go unstable. In Fig. 5(b), we graph the amplitude that the macrospin has at the point where the first three nonuniform magnetization modes grow exponentially in this linear analysis. Notice that we graph three nonuniform modes since there is evidence in some systems [49–52] that these modes may stabilize via nonlinear terms and coexist with an adjusted uniform mode.

Also, with Eq. (43) one can establish if the different branches of the macrospin solutions that were found [Eqs. (28)–(30)] are stable or not with respect to uniform perturbations. This can be done evaluating Eq. (43) for

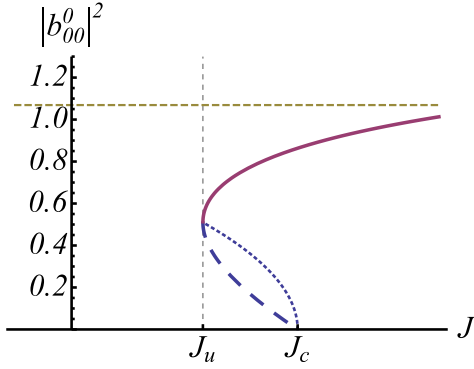


FIG. 6. Plot of the  $(\pm)$  branch solutions of Eq. (29) for the amplitude squared of the macrospin periodic solutions of Eq. (28) [(+), corresponds to the continuous line, and (-) to the segmented line]. The dotted line is the instability line of Eq. (45).

$(m, j) = (0, 0)$ , and it simplifies to

$$|J'_{00}| |b_{00}^0|^2 > \alpha A_{00} - \beta J - H'_{00} |b_{00}^0|^2, \quad (44)$$

which gives an instability condition as follows:

$$|b_{00}^0|^2 < \sqrt{\frac{1 - J/J_c}{A_2}}. \quad (45)$$

As discussed in Sec. III B for  $h_x > 1/4$  there are two branches of macrospin solutions of the type of Eq. (28). In Fig. 6, the latter limit curve of Eq. (45) is plotted and shows that the lower (-) branch is unstable to uniform perturbations, while the upper one (+) is stable. For  $h_x < 1/4$ , the only branch for  $J > J_c$  is stable to uniform perturbations.

It is to be noted that since for  $h_x > 1/4$  the (+) branch is stable and occurs at a gap in amplitude with respect to the equilibrium uniform state: thus in Fig. 5(b), that plots the amplitudes at instability of the nonuniform modes, one sees a lower segmented curve for the allowed values of  $|b_{00}^0|^2$ . The upper segmented curve is associated with the upper bound mentioned in Sec. III B. From Fig. 5(a) one infers that for  $h_x > 1/4$  a very small change of current density leads to the nonuniform modes becoming unstable, and this is occurring with an associated significant increase in amplitude of oscillation [Fig. 5(b)]. Also, for fields higher than  $h_x \simeq 0.28$  the first nonuniform mode is always unstable. The previous comment plus the high sensitivity to changes in current density of Fig. 5(a) show that a practical limiting applied field for stability of the uniform auto-oscillation is approximately  $h_x = 1/4$ , or  $H_x = \pi M_s$ .

Also, Fig. 6 shows the coexistence of two stable solutions [the static equilibrium and the (+) branch] when the current lies in the interval  $J_u < J < J_c$ , this occurs for  $h_x > 1/4$ . To first order in  $|b_{00}^0|^2$ , the difference in energy (averaged over time) between the macrospin solution of the upper branch and the static uniform solution is  $4\pi M_s^2 V \omega |b_{00}^0|^2$ : this means that for a field slightly over  $h_x = 1/4$ , and for a disk of a radius of 50 nm., this difference in energy may be much greater than the thermal energy  $k_B T$ , with  $T$  an ambient temperature. Thus, for currents below the critical current  $J_c$ , there is range of fields over  $h_x = 1/4$  where there is bistability in the system between

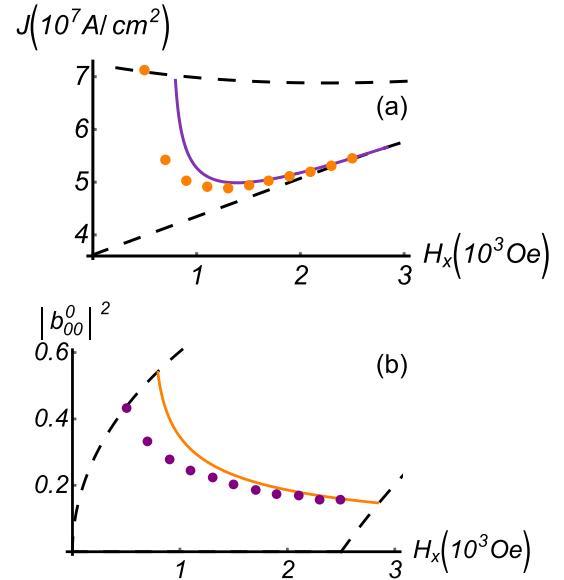


FIG. 7. (a) Comparison of the theoretical and numerical threshold current densities for the growth of the first nonuniform mode: points are numerical data, and the curve the theoretical prediction of Eq. (43). (b) Comparison of the theoretical and numerical threshold oscillation amplitude for the growth of the first nonuniform mode. The segmented curves have the same significance as those equivalent curves of Figs. 5(a) and 5(b).

a periodic macrospin solution and the uniform static solution (only for fields very close to  $h_x = 1/4$ , one would see thermal switching between these two states).

### B. Instabilities, comparison with numerical simulations

The previous theoretical analysis of Sec. III C on the instability of the macrospin due to growth of nonuniform modes made use of some approximations like approximating the exchange energy and the exclusion of nonresonant terms. The objective of this section is to compare those approximate theoretical results with numerical simulations that address the growth of these nonuniform modes without using approximations of the underlying equations. Thus a system of three coupled equations is studied numerically: one is Eq. (25) that describes the exact dynamics of the macrospin (if uncoupled), the others are the linearized equation (35) for  $\delta \dot{a}_{mj}$  when the macrospin amplitude  $a_{00} = a^{ao}$  has attained a large value, and a similar one for  $\delta \dot{a}_{-mj}^*$  that follows from Eq. (35).

In order to find a numerical instability, we proceed by solving the macrospin equation (25) as a function of a slowly increasing dc current density  $J = J(t')$  (in this way we are in an adiabatically changing stationary periodic solution, and we are also neglecting the influence of other modes on the macrospin), and then with this macrospin solution we numerically solve the mentioned equations for  $\delta a_{mj}$  and  $\delta a_{-mj}^*$ . At the moment  $t' = \tau$  in which we evidence an unstable growth of the nonuniform modes amplitudes, we establish as  $J(\tau)$  the threshold current density for instability of the macrospin.

The following Fig. 7(a) shows a comparison between the theoretical prediction for the current density threshold for the growth of the first nonuniform mode versus the analogous

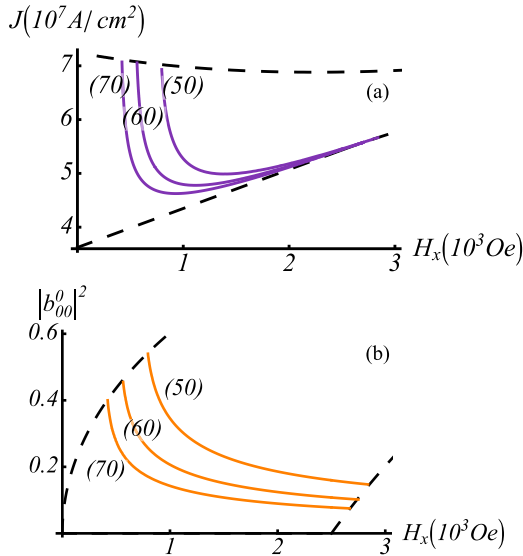


FIG. 8. The solid curves represent, for different radii:  $R = \{50 \text{ nm}, 60 \text{ nm}, 70 \text{ nm}\}$ : (a) the threshold current density that must be applied in order to start observing nonuniformities of the magnetization in the free layer and (b) the threshold oscillation amplitude that are attained by the macrospin when nonuniformities of the magnetization start in the free layer. All the curves correspond to the growth of the first nonuniform mode ( $m = j = 1$ ). The segmented curves have the same significance as those equivalent curves of Figs. 5(a) and 5(b).

threshold obtained numerically: we see a similar behavior between the numerical (in principle exact) and theoretical (approximate) thresholds, with the numerical threshold being lower. Figure 7(b) shows a comparison between the theoretical prediction for the amplitude of oscillation threshold for the growth of the first nonuniform mode, versus the analogous threshold obtained numerically.

### C. Instabilities, dependence with size

In this section we study the dependence of the instability of the first nonuniform mode ( $m = j = 1$ ) on the radius of the disk, by maintaining its thickness constant at  $h = 5 \text{ nm}$ . In particular, the radii considered are  $R = \{50 \text{ nm}, 60 \text{ nm}, 70 \text{ nm}\}$ , and we use parameters for Permalloy. The results are presented in Figs. 8(a) and 8(b). In Fig. 8(a), it is seen that the smaller the radius of the disk, the larger is the threshold dc current density needed to de-stabilize the first nonuniform mode. While in Fig. 8(b) it is seen that the smaller the radius of the disk, the bigger the amplitude of oscillation of the uniform mode that is reached when the nonuniformities appear [the limiting segmented curves of Figs. 8(a) and 8(b) have the same significance as those equivalent curves of Figs. 5(a) and 5(b)].

The dependence of the instability of the macrospin on the disk's size, or more specifically its radius, in this model comes through the exchange field. As can be seen from Eq. (12),  $\mathcal{U}_{\text{ex}} \propto (l_{\text{ex}}/R)^2 |a_{mj}|^2$ , meaning that smaller radii effectively increase the energy of non-uniform modes relative to the uniform one, meaning the latter is more stable at smaller radii. This is consistent with the idea that uniform magnetization configurations are stabilized in samples of smaller sizes.

## V. A DISK WITH EDGE EFFECTS, EXACT DEMAGNETIZING FIELD

The disk dynamics changes if one goes beyond the previous model in which the demagnetizing field was approximated by its main term  $-4\pi M_z \hat{z}$ , or the very flat thin film limit. In the following, we will consider the effect of the full demagnetizing field, which introduces important edge effects: the smaller the radius the more relevant these become. Notice that the full demagnetizing field has contributions from surface charges as well as volume charges. These new terms of the demagnetizing field are proportional to the thickness  $h$  of the film, which in this model is considered small. In the Appendix, we detail the calculation of the different terms that contribute to the averaged demagnetizing field over the thickness of the disk. The calculation proceeds by determining the magnetostatic potential via its integral representation in terms of surface and volume charges, with the appropriate Green's function written in terms of an integral representation that involves Bessel functions, Eq. (B2). We do not explicitly separate static and dynamic components of the magnetization in the calculations of demagnetizing fields presented in the Appendix.

In Ref. [53], the demagnetizing fields of uniform magnetization configurations in nonellipsoidal samples were calculated. Previous studies have calculated demagnetizing fields in ferromagnetic very thin circular dots magnetized in plane, with the aim to determine the spin wave modes of these dots. We mention Ref. [54] where demagnetizing fields have been calculated in an equivalent way through use of volume integral representations: tensorial Green's functions are used averaged over the thickness of the dot, and the fields are calculated within a basis that diagonalizes the exchange operator (it is a similar basis to the one used in this work, i.e., written in terms of Bessel functions); dynamic and static contributions of the dipolar fields are separated, the equilibrium magnetization is considered uniform and the eigenvalue problem for the frequencies in their basis is simplified by neglecting nondiagonal terms. Also Refs. [55,56] present an approximate variational method to determine the modes of very thin circular ferromagnetic dots: they calculate demagnetizing fields via the same tensorial Green's functions averaged over the thickness of the dot, and indeed use the integral representation of the basic kernel in terms of Bessel functions, i.e., Eq. (B2); they approximate the equilibrium configuration as uniform, use approximate forms of the dynamic demagnetizing fields, introduce a model for dipolar pinning, and they do variational calculations within restricted trial sets.

### A. Equilibrium configuration

With the demagnetizing field in its full form the equilibrium magnetization is no longer fully aligned as  $\vec{m} = \hat{x}$ . In order to calculate the equilibrium configuration, i.e.,  $a_{mj}^{\text{eq}}$ , we need to impose

$$\left. \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial a_{mj}^*} \right|_{\text{eq}} = 0 \quad (46)$$

with  $\mathcal{U}$  now including the full demagnetizing energy  $\mathcal{U}_D$ , which is given in Eqs. (B5)–(B13) of the Appendix. The previous system of nonlinear equations, Eqs. (46), was solved using an

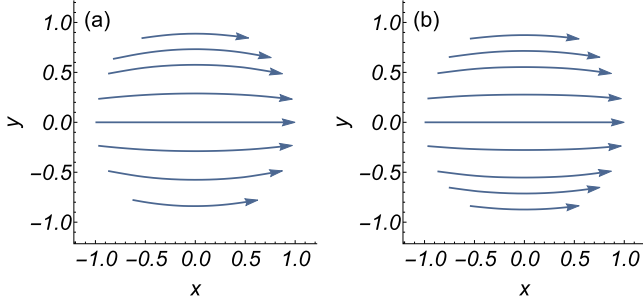


FIG. 9. Magnetization orientation in minimum energy configurations of the disk: (a)  $h_x = 0.1$  and (b)  $0.2$ . In both cases, the magnetization is in plane, i.e.,  $m_z = 0$ .

iterative method, that is, an extension of the Newton-Raphson method [57,58]. Initially, one solves for the linear corrections of the equilibrium, and then this solution is used as a first seed of an iterative process that converges to the nonlinear solution. We find that the  $a_{mj}^{\text{eq}}$  are real, that  $a_{mj}^{\text{eq}} = 0$  if  $m$  is odd, and that  $a_{mj}^{\text{eq}} \neq 0$  if  $m$  is even. Also,  $a_{-mj}^{\text{eq}} = -(-1)^m a_{mj}^{\text{eq}}$ , leading to  $m_z = 0$ .

In Fig. 9, two equilibrium configurations are shown for two different applied fields. They correspond to an almost aligned magnetization configuration with some curvature that mimics a bit the circular geometry of the disk: it occurs in order to minimize magnetic surface charges on the edges of the disk, and consequently the full energy of the system.

Notice that depending on the dimensions of the free layer, it is known that the minimum energy configuration may be either a vortex state or an almost saturated state in the plane or out of the plane [59,60]. The dimensions used in this work, i.e.,  $R = 50$  nm and  $h = 5$  nm only allow an equilibrium magnetization almost saturated in the plane.

### B. Linear dynamics

The linear magnetization dynamics in thin circular disks has been studied in cases where the magnetization equilibrium configuration corresponds to a vortex [61–64], or in a case of almost saturation in plane [65]. There is a large difference between the spatial profiles of the modes corresponding to the previous two cases of equilibrium configurations with vortices or quasaturated states. The basis of Eq. (7) that we use to describe the dynamics of the magnetization would describe better the case of a vortex equilibrium configuration when both the geometry and the magnetization state have circular symmetry, but in our case of magnetization almost saturated in plane in the direction of the applied magnetic field this basis is still practical since it assures satisfying the boundary conditions in the circular geometry although the magnetization state breaks the circular symmetry.

In order to study the linear dynamics in the case of full consideration of the demagnetizing field, the dynamic equations without dissipation (11a) are approximated to linear order by writing  $a_{mj} = a_{mj}^{\text{eq}} + \tilde{a}_{mj}$ :

$$i\dot{\tilde{a}}_{mj} = \sum_{m'j'} (A_{mj}^{m'j'} \tilde{a}_{m'j'} + B_{mj}^{m'j'} \tilde{a}_{m'j'}^*), \quad (47)$$

where  $A_{mj}^{m'j'} = \partial^2 \mathcal{U} / \partial a_{m'j'} \partial a_{mj}^*$  and  $B_{mj}^{m'j'} = \partial^2 \mathcal{U} / \partial a_{m'j'}^* \partial a_{mj}^*$ . Or using matrices, schematically:

$$i \frac{d}{dt'} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{mj} \\ \tilde{a}_{mj}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{mj}^{m'j'} & B_{mj}^{m'j'} \\ -B_{mj}^{m'j'*} & -A_{mj}^{m'j'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{m'j'} \\ \tilde{a}_{m'j'}^* \end{pmatrix} = \mathbf{M}_1 \begin{pmatrix} \tilde{a}_{m'j'} \\ \tilde{a}_{m'j'}^* \end{pmatrix}. \quad (48)$$

The matrix  $\mathbf{M}_1$  is diagonalizable through the following Bogoliubov type transformation:

$$\tilde{a}_{mj} = \sum_n (\lambda_{mj}^n b_n - \mu_{mj}^n b_n^*), \quad (49)$$

or using matrices (compact notation):

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{mj} \\ \tilde{a}_{mj}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{mj}^{n'} & -\mu_{mj}^{n'} \\ -\mu_{mj}^{n'*} & \lambda_{mj}^{n'*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{n'} \\ b_{n'}^* \end{pmatrix} = \mathbf{M}_2 \begin{pmatrix} b_{n'} \\ b_{n'}^* \end{pmatrix} = \sum_{n'} \left\{ b_{n'} \begin{pmatrix} \lambda_{mj}^{n'} \\ -\mu_{mj}^{n'*} \end{pmatrix} + b_{n'}^* \begin{pmatrix} -\mu_{mj}^{n'} \\ \lambda_{mj}^{n'*} \end{pmatrix} \right\}. \quad (50)$$

The equation for the new variables  $b_n, b_n^*$  becomes

$$i \frac{d}{dt'} \begin{pmatrix} b_n \\ b_n^* \end{pmatrix} = \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \begin{pmatrix} b_{n'} \\ b_{n'}^* \end{pmatrix} = \mathbf{D} \begin{pmatrix} b_{n'} \\ b_{n'}^* \end{pmatrix}, \quad (51)$$

where  $\mathbf{D} = \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2$  is a diagonal matrix. Also, in order for the transformation (50) to be canonical, the following needs to be satisfied:

$$\sum_{mj} (\lambda_{mj}^n \lambda_{mj}^{n'} - \mu_{mj}^n \mu_{mj}^{n'*}) = \delta_n^n, \quad (52a)$$

$$\sum_{mj} (\lambda_{mj}^n \mu_{mj}^{n'} - \mu_{mj}^n \lambda_{mj}^{n'*}) = 0. \quad (52b)$$

The diagonal terms of the matrix  $\mathbf{D}$  are the eigenfrequencies of oscillation,  $\omega_n$ , of the different modes, i.e., in this linear approximation  $b_n = b_n^0 e^{-i\omega_n t'}$  are independent oscillators.

In order to analyze how the frequencies of the modes are modified as one considers the effect of the full demagnetizing field, we write this field as (averaged over the thickness of the disk):

$$\vec{H}_D = -4\pi M_z(\rho, \phi) \hat{z} + \epsilon [h_D^z(M_z) \hat{z} + \vec{h}_D^\perp(M_\perp)]. \quad (53)$$

A control parameter  $\epsilon$  has been introduced that is equal to zero when the demagnetizing field is approximated by its very thin film limit, and it is equal to one when the full demagnetizing field is considered. Recourse to this control parameter allows to follow the evolution of the linear modes of the disk from the analytical form found in the very thin film limit approximation [Eqs. (14)–(18b)] to their more complex form as the finite transverse dimensions and small but finite thickness of the film is considered: effectively increasing this control parameter is equivalent to artificially increasing the thickness of the disk.

In Fig. 10(a), we show the evolution of the frequencies of the first modes of the disk as the control parameter  $\epsilon$  increases, for an applied magnetic field  $h_x = 0.1$ . The lower blue points



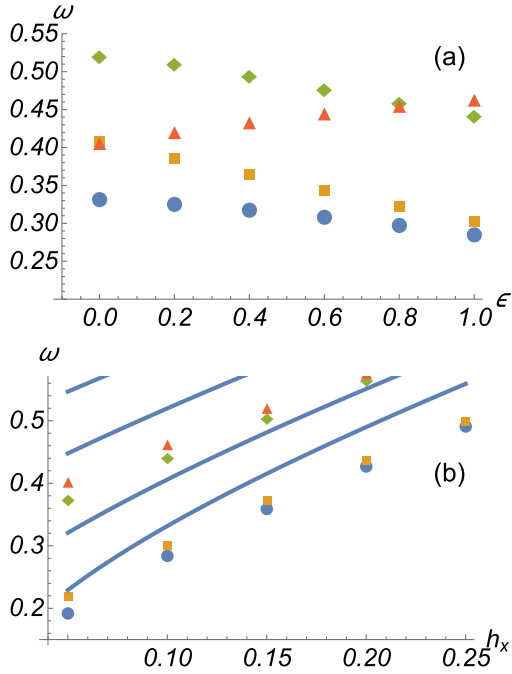


FIG. 10. (a) Variation of the frequencies of the lowest modes with changing control parameter  $\epsilon$ , for  $h_x = 0.1$ . Blue circular points represent the evolution of the mode  $(m = 0, j = 0)$ , that corresponds to mode  $n = 1$  in (b). The orange squares and red triangles represent the evolution of modes  $(m = 1, j = 1)^{(1,2)}$ , that become modes  $n = 2$  and  $n = 4$  respectively in (b). The green rhombi represent the evolution of one of the modes  $(m = 2, j = 1)^{(1,2)}$ , which becomes mode  $n = 3$  in (b). (b) Variation of the frequencies of the lowest modes with changing applied magnetic field: lines correspond to frequencies at  $\epsilon = 0$ , shown in Fig. 2, points to the case  $\epsilon = 1$ , with corresponding colors to adjacent figure (a).

correspond to the evolution of the frequency of the original mode  $(m, j) = (0, 0)$ , which represents the macrospin at  $\epsilon = 0$ : it diminishes its frequency with increasing strength of the “extra” demagnetizing field. The orange/red points represent the initially degenerate  $(m, j)^{(1,2)} = (1, 1)^{(1,2)}$  modes: they mix and the frequencies do separate and increase/decrease with an increasing effective thickness of the disk (these modes at  $\epsilon = 0$  correspond to nonzero values of  $a_{11}$ ,  $a_{-11}^*$  and their complex conjugates). The green points correspond to the evolution of the frequencies of a mode that corresponds to a mixture of  $(m, j)^{(1,2)} = (2, 1)^{(1,2)}$  modes at  $\epsilon = 0$ , its frequency diminishes with full consideration of demagnetizing effects. Also, Fig. 10(b) shows the dependence of the frequencies of the first modes on the applied magnetic field: they increase monotonically with it (full curves correspond to  $\epsilon = 0$  modes, and points to the lowest modes at  $\epsilon = 1$ , with corresponding colors to the previous figure).

In the following Fig. 11, we plot the shapes of different linear modes of the thin disk. For a given mode  $(n)$ , with associated nonnull  $b_n$  and  $b_n^*$ , from Eq. (49) one determines the associated  $\tilde{a}_{mj}$ , i.e., as  $\tilde{a}_{mj} = b_n^0(\lambda_{mj}^n - \mu_{mj}^n)$  if one chooses  $b_n = b_n^0$  real (this amounts to choosing an origin of time). Then, from Eq. (7), one may determine  $a(\vec{x}, t)$  associated to mode  $(n)$ . Furthermore, in solving the eigenvalue problem

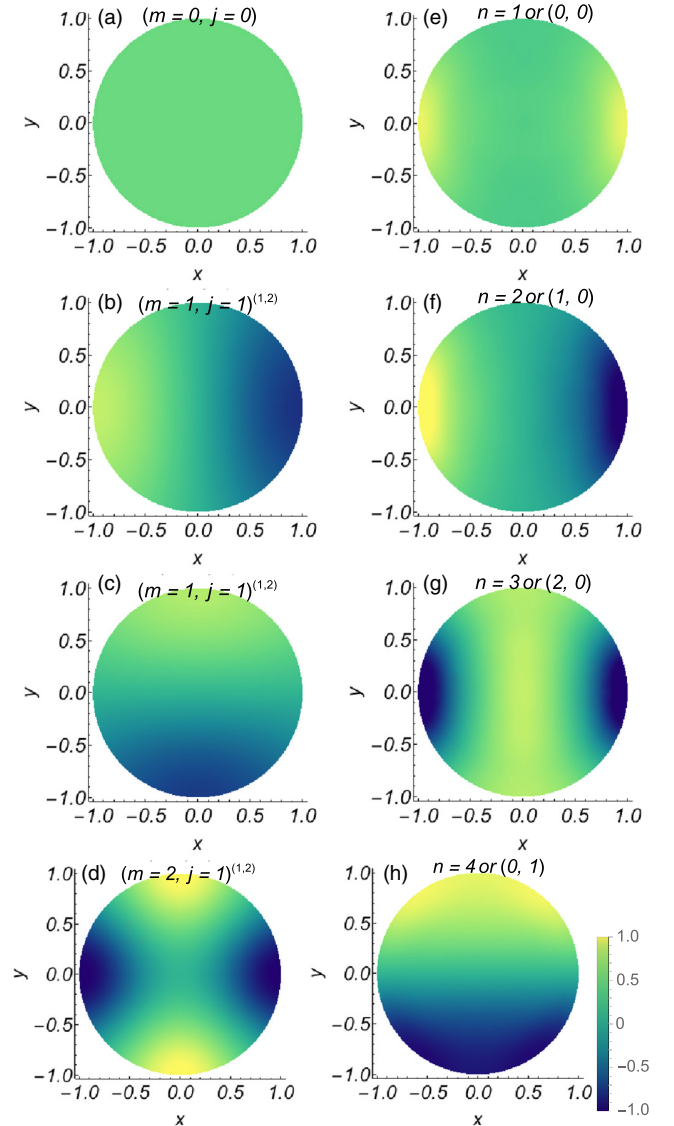


FIG. 11. Graphic representation of the first four lowest modes in the disk, with an applied magnetic field of  $h_x = 0.1$ . The colors represent the values of the  $m_z$  component of the dynamic magnetization of each mode. The figures to the left represent the lowest modes at  $\epsilon = 0$  and those to the right those for  $\epsilon = 1$ : they are ordered from lower to higher frequencies (labels for the modes in the  $\epsilon = 0$  and  $\epsilon = 1$  cases are explained in the text).

involved in Eq. (51), we numerically found that there are modes with  $\lambda_{-mj}^n = (-1)^m \lambda_{mj}^n$  and  $\mu_{-mj}^n = (-1)^m \mu_{mj}^n$ , or  $\lambda_{-mj}^n = -(-1)^m \lambda_{mj}^n$  and  $\mu_{-mj}^n = -(-1)^m \mu_{mj}^n$ . In the first case, we find

$$\begin{aligned}
 m_z &= \sqrt{2} \text{Re}(a) \\
 &= \sqrt{2} b_n^0 \sum_j N_{0j} (\lambda_{0j}^n - \mu_{0j}^n) J_0(\kappa_{0j} \rho) \cos(\omega_n t) \\
 &+ 2\sqrt{2} b_n^0 \sum_{m>0j} N_{mj} J_m(\kappa_{mj} \rho) (\lambda_{mj}^n - \mu_{mj}^n) \\
 &\times \cos m\phi \cos(\omega_n t),
 \end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned}
m_y &= \sqrt{2}\text{Im}(a) \\
&= -\sqrt{2}b_n^0 \sum_j N_{0j}(\lambda_{0j}^n + \mu_{0j}^n) J_0(\kappa_{0j}\rho) \sin(\omega_n t) \\
&\quad - 2\sqrt{2}b_n^0 \sum_{m>0j} N_{mj} J_m(\kappa_{mj}\rho) (\lambda_{mj}^n + \mu_{mj}^n) \cos m\phi \sin(\omega_n t),
\end{aligned} \tag{55}$$

i.e., these are stationary modes that have reflection symmetry with respect to the  $x$  axis (symmetry with respect to  $\phi \rightarrow -\phi$ ). And in the second case, we find

$$\begin{aligned}
m_z &= \sqrt{2}\text{Re}(a) \\
&= 2\sqrt{2}b_n^0 \sum_{m>0j} N_{mj} J_m(\kappa_{mj}\rho) (\lambda_{mj}^n + \mu_{mj}^n) \sin m\phi \sin(\omega_n t),
\end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned}
m_y &= \sqrt{2}\text{Im}(a) \\
&= 2\sqrt{2}b_n^0 \sum_{m>0j} N_{mj} J_m(\kappa_{mj}\rho) (\lambda_{mj}^n - \mu_{mj}^n) \sin m\phi \cos(\omega_n t),
\end{aligned} \tag{57}$$

i.e., these modes are stationary antisymmetric with respect to reflections with respect to the  $x$  axis (antisymmetry with respect to  $\phi \rightarrow -\phi$ ).

Also, it is to be noted that the modes separate into those that have  $m$  even and  $m$  odd (the second condition only arises if  $\lambda_{0j}^n = 0$  and  $\mu_{0j}^n = 0$ ), and this leads to antisymmetric or symmetric modes with respect to reflections with respect to the  $y$  axis, which depends on them being proportional to  $\cos(m\phi)$  or to  $\sin(m\phi)$ .

Thus we get the result that taking into account the full demagnetizing field, the modes no longer circulate as in the simpler version of the model, but instead they are stationary modes with definite symmetries with respect to the  $x$  and  $y$  axis, and this will be seen in the following figures. This may be attributed to the magnetic charges introduced by aligning the magnetization along the  $x$  axis, then the differential equations for the modes are space dependent and reflect that the  $x$  and  $y$  axis are symmetry axes.

In Fig. 11, we have plotted over the disk the quantity  $\text{Re}(\tilde{a}) = m_z/\sqrt{2}$  (at  $t = 0$  and assuming  $b_n$  to be real), thus it is basically the  $m_z$  of the dynamic magnetization, and it is assumed to be in the range  $[-1, 1]$  (this is arbitrary since these are linear modes). The applied magnetic field is taken as  $h_x = 0.1$ . The left column of Fig. 11 shows the shape of the four lowest frequency modes in the limit  $\epsilon \rightarrow 0$  (notice that particular linear combinations of the modes of the simpler model that rotate in different directions give rise to these modes). The first corresponds to the macrospin mode [Fig. 11(a)], which shows a uniform value as expected, it corresponds to the mode  $(m, j) = (0, 0)$  in the notation introduced in the simpler model. Figures 11(b) and 11(c) are associated to linear combinations of the degenerate modes  $(m, j)^{(1,2)} = (1, 1)^{(1,2)}$ , and Fig. 11(d) corresponds to a linear combinations of the modes  $(m, j) = (2, 1)$ . The right column of Fig. 11 shows the four modes with lowest frequencies when  $\epsilon = 1$ , occurring at 7.98 GHz, 8.38 GHz, 12.35 GHz,

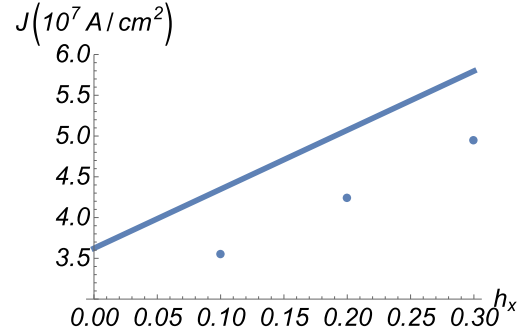


FIG. 12. The points correspond to the critical current densities of the lowest mode as a function of the applied magnetic field for  $\epsilon = 1$ , or full demagnetizing field. The continuous line corresponds to the macrospin critical current density at  $\epsilon = 0$ , or the very thin disk limit.

and 12.96 GHz, respectively. In general, as  $\epsilon \rightarrow 1$ , there is more localization of the modes at the edges in the regions where  $y \simeq 0$ , where the magnetic charges are stronger. In the case of the macrospin mode, it gets curved close to the edges attaining higher amplitude there while maintaining an almost uniform value in the interior (the variable  $a_{00}$  is dominant). Figure 11(f) has as dominant variables  $a_{11}$  and  $a_{-1,1}$ . And Figs. 11(g) and 11(h) have as dominant variables  $a_{21}$ ,  $a_{-2,1}$  and  $a_{11}$ ,  $a_{-1,1}$ , respectively.

The previous modes may be named through the classification used for modes in rectangular dots, that depends on nodal lines. The first, Fig. 11(e), may be named (0,0) or fundamental (mode with no nodes); the second, Fig. 11(f), as (1,0) or 1-backward mode (a mode with one nodal plane perpendicular to the in-plane magnetization); the third, Fig. 11(g), as (2,0) or 2-backward mode (a mode with two nodal plane perpendicular to the in-plane magnetization); and the fourth, Fig. 11(h), as (0,1) or 1-Damon-Eshbach mode (a mode with one nodal plane parallel to the in-plane magnetization).

It is important to note that our results for  $\epsilon = 1$  coincide very well with those of micromagnetic simulations done in Ref. [30], both in the values of the frequencies of the modes as well as in their shapes (there are small differences that may be attributed to slightly different values for the saturation magnetization and the exchange constant).

Next, we study the effect of an applied current to linear order, considering the associated spin transfer torque and dissipation:

$$i\dot{\tilde{a}}_{mj} \approx (1 - i\alpha) \sum_{m'j'} (A_{mj}^{m'j'} \tilde{a}_{m'j'} + B_{mj}^{m'j'} \tilde{a}_{m'j'}^*) + i\beta J \tilde{a}_{mj}. \tag{58}$$

In terms of the  $b_n$  variables of Eq. (50), these previous equations read

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} b_n \\ b_n^* \end{pmatrix} = \mathbf{D} \begin{pmatrix} b_{n'} \\ b_{n'}^* \end{pmatrix} + i\mathbf{M}_3 \begin{pmatrix} b_{n'} \\ b_{n'}^* \end{pmatrix}. \tag{59}$$

We approximate the induced nonoscillatory behavior of modes  $n$  considering the diagonal terms of matrix  $\mathbf{M}_3$ , i.e.,  $b_n \simeq b_n^0 e^{-i\omega_n + \gamma_n} t$ . For each applied magnetic field, a critical current density may be found such that  $\gamma_n = 0$ . In Fig. 12, the critical current density for the second mode is shown (this mode has

the lowest critical current), and a comparison is made with the critical current density of the macrospin, i.e.,  $J = \alpha(h_x + 1/2)/\beta$  for the macrospin. Thus precessions may be observed at current densities that are lower than that predicted for the uniform macrospin model. In Ref. [66], normal modes are excited via spin transfer torque: they show that the first excited mode corresponds to the lowest frequency, but in our case it happens for the mode of the second lowest frequency, this may occur since we use a lower applied field than them.

### C. Mode with lowest critical current, its excitation and instability

The modes we labeled as 1,2 ( $b_1, b_2$ ) have the lowest frequencies, and these are quite similar, with  $b_1$  the quasiuniform mode and the one with lowest frequency. Also their critical currents are similar,  $J_1^{\text{crit}} \sim J_2^{\text{crit}}$ . However, the mode  $b_2$  has the lowest critical current (the critical current density not only depends directly on the frequency), it will auto-oscillate first as one increases the current density.

We will study the range of applied currents in which the mode  $b_2$  auto-oscillates, and determine its linear stability range with respect to other modes becoming unstable: we will compare theoretical predictions with numerical results.

If we apply a current density  $J > J_2^{\text{crit}}$ , the mode  $b_2$  starts to auto-oscillate, we write an equation for its nonlinear growth assuming the other modes have very low amplitudes. The dynamic equations for the modes  $b_n, b_n^*$  are

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} b_n \\ b_n^* \end{pmatrix} = \mathbf{M}_2^{-1} i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{mj} \\ \tilde{a}_{mj}^* \end{pmatrix}. \quad (60)$$

Considering that only mode  $b_n$  dominates the previous dynamics, and that one only keeps resonant terms up to order 3 without interaction between modes, one obtains the following approximate equation for the time evolution of  $b_n$ :

$$i \frac{db_n}{dt'} = C_n^1 b_n + C_n^2 |b_n|^2 b_n. \quad (61)$$

We look for an auto-oscillatory solution to the previous equation for mode  $b_2$ , i.e.,  $b_2 = b_2^0 e^{-i\omega_2 t'}$ , with a real frequency  $\omega_2$ . Imposing this, one obtains that

$$\omega_2 = \text{Re}(C_2^1 + C_2^2 |b_2^0|^2), \quad (62a)$$

$$\text{Im}(C_2^1 + C_2^2 |b_2^0|^2) = 0. \quad (62b)$$

Thus one obtains an expression for the frequency of auto-oscillation  $\omega_2$  that depends on the amplitude of oscillation  $|b_2^0|$  and an expression for this latter amplitude as a function of the applied current density and applied magnetic field. In Fig. 13, we show a comparison between this previous theoretical prediction for this amplitude of auto-oscillation versus numerical results for it, they reasonably agree (in the numerical solution one changes adiabatically the applied current). The cloud of blue points that is observed in the numerical solution is explained since in the latter solution for  $b_2$  not only the resonant terms shown in Eq. (61) are included, but the nonresonant terms also. In this way, the general solution for this variable is of the form:  $b_2 = b_2^0 e^{-i\omega_2 t'} + b_2^1 e^{-2i\omega_2 t'} + b_2^2 e^{-3i\omega_2 t'} + \dots$ . When its magnitude is plotted, an oscillatory part follows, that explains the blue cloud of points.

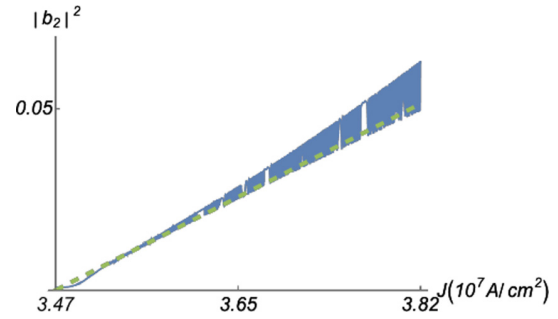


FIG. 13. Comparison between the theoretical prediction (dashed green line) and numerical result (blue) for the amplitude of auto-oscillation of mode  $b_2$ , considering an applied magnetic field  $h_x = 0.1$ .

Now we study theoretically the linear stability of the previous auto-oscillatory solution for the mode  $b_2$ . Thus we assume a solution with linear perturbations as follows:

$$b_2 = b_2^0 e^{-i\omega_2 t'} + \delta b_2, \quad (63a)$$

$$b_j = \delta b_j. \quad (63b)$$

The form that takes the equation for mode  $j$ , considering that mode  $b_2$  is auto-oscillating, is the following:

$$i \frac{d\delta b_j}{dt'} = C_1 \delta b_j + C_2 \delta b_j^* + C_3(b_2) \delta b_j + C_4(b_2) \delta b_j^*. \quad (64)$$

We search for solutions of the form  $\delta b_j = b_j^0 e^{-i\omega_j t'} e^{\gamma_j t}$ , and when replaced in the previous equation, we obtain

$$\begin{aligned} & [(\omega_j + i\gamma_j) b_j^0 + i b_j^0] \\ & = [C_1 + C_3(b_2)] b_j^0 + [C_2 + C_4(b_2)] b_j^{0*} e^{2i\omega_j t} \\ & \approx [C_1 + C_3(b_2)] b_j^0 + C_4(b_2) b_j^{0*} e^{2i\omega_j t}, \end{aligned} \quad (65)$$

where we have considered only resonant terms, i.e., we eliminated a term proportional to  $C_2$ . Mode 2 is such that  $\tilde{a}_{mj} \neq 0$  for  $m$  odd. If we study the stability of mode  $j$  such that  $\tilde{a}_{mj} \neq 0$  for the case  $m$  even, we will have that  $C_3(b_2)$  and  $C_4(b_2)$  only will have quadratic terms in  $b_2$ . The previous statements are valid for  $j = 1$ , the particular case that we will study.

We consider  $C_3(b_2)$  constant and  $C_4(b_2)$  proportional to  $e^{-2i\omega_2 t}$ . In this way, we write  $b_j^0 = u_j^0 e^{i(\omega_j - \omega_2)t} \Rightarrow \delta b_j = u_j^0 e^{-i\omega_2 t} e^{\gamma_j t}$ , where  $\gamma_j$  should be

$$\gamma_j = \sqrt{|C_4|^2 - [\omega_j - \text{Re}(C_1 + C_3)]^2 + \text{Im}(C_1 + C_3)}. \quad (66)$$

Figure 14 shows a comparison between the instability current found theoretically from the previous expression and that found numerically, for mode  $j = 1$ . The analysis is done for a given applied magnetic field and the applied current is varied: the instability current is identified when  $\gamma_j = 0$ , i.e., when mode  $j$  becomes unstable starting an exponential growth. The agreement between theoretical and numerical

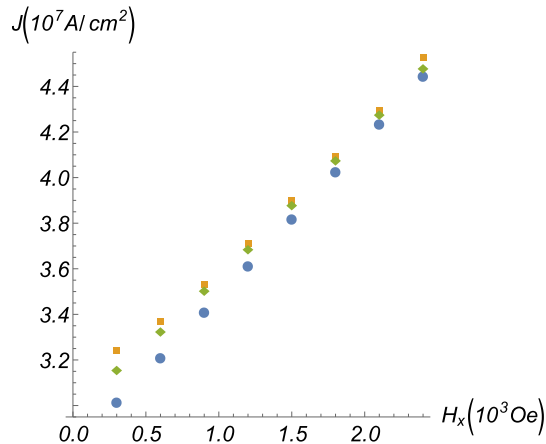


FIG. 14. The circular blue points represent the critical current densities when the mode  $b_2$  starts to auto-oscillate, as a function of applied magnetic field. The square orange and diamond green points represent the instability current densities of the previous auto-oscillatory mode obtained numerically and theoretically, respectively.

results is good, since mode  $b_2$  only attains small amplitudes of oscillation before mode 1 starts to grow.

## VI. CONCLUSIONS AND REMARKS

A model for the dynamics of the magnetization of a very thin disk magnetized in plane was developed that under a simplified version (demagnetizing field approximated by its very thin film limit) captures the dynamics of a uniform mode and reproduces the linear nonuniform modes of the system. The idea was to model the dynamics of a free ferromagnetic layer of a nanopillar structure, using a simplified version of the dipolar field that neglects terms proportional to the film thickness. Within this simple version of the model one can also study exactly the dynamics of the uniform mode, or macrospin, when its precession out of equilibrium occurs at large angles, i.e., including all nonlinear terms. Considering a spin transfer torque term and dissipation, at a given critical current density the system develops a periodic macrospin solution, which is an auto-oscillatory limit cycle solution. We obtained an approximate analytic form for this uniform nonlinear periodic solution by neglecting nonresonant terms.

One goal of this work was to determine the linear stability of this mentioned periodic macrospin solution. Using some approximations, we determined analytically the thresholds in current (at a fixed applied magnetic field) at which nonuniform modes of the system become unstable, i.e., points at which the macrospin approximation has to be extended in order to describe the dynamics of the system. The nonuniform modes with lower frequencies are those which become unstable first.

All the previous summarized description of the macrospin dynamics and its stability is valid for applied magnetic fields in plane that do not exceed  $\pi M_s$  in magnitude. For higher applied fields, the picture is a bit more complex: for current densities somewhat below the critical density there is a stable periodic macrospin solution that coexists with the stable static

equilibrium uniform solution. There is a gap in energy that separates these two solutions that can easily overcome a thermal excitation energy. We found this coexistence via our analytic results, but an exact numerical simulation of the uniform mode dynamics also shows convergence to this limit cycle solution if one does a significant perturbation of the static equilibrium. The analysis of stability of this higher branch with respect to the growth of nonuniform modes is analogous to the case of lower fields, and one also finds that the lower threshold for instability occurs for the first nonuniform modes. Also, from a practical point of view once the applied field exceeds  $\pi M_s$ , the macrospin becomes unstable at a current that is slightly over the thresholds currents for existence of the periodic macrospin solutions.

One aspect of interest of this simplified model was to determine the dependence of the stability of the periodic macrospin solution on the radius of the disk: we found that lower radii correspond to higher stability, something understood in relation to the role of the exchange interaction.

In order to better capture the magnetization dynamics of a real nanometric disk we studied an improved version of the model: we used the full expression of the demagnetizing field. When this is done, the equilibrium magnetization configuration is no longer uniform, and the dynamic linear modes are also modified developing in general features close to the edges of the disk. We did a study of a 50-nm radius disk with this improved model. In particular, there are two modes with similar frequencies at the lower end, the lowest is a quasiuniform mode and the other a mode of edge character. The latter edge mode has the lowest critical current for entering into an auto-oscillatory regime: we studied when this isolated auto-oscillation becomes unstable due to the exponential growth of the quasiuniform mode. In conclusion, this improved model showed us that one can study the full effect of the demagnetizing field within the framework of this model, allowing to determine the different nonlinear terms that contribute to the demagnetizing energy. The improved model reproduces well the linear dynamic magnetization modes, with the added characteristic of understanding their shape and symmetry properties. The inclusion of the full demagnetizing field effectively shows the effect of the finite size of the disk introducing edge effects that clearly influence the magnetization dynamics of small radii disks.

Thus this models allow to understand the isolated auto-oscillations with lowest critical currents of the magnetization of thin film disks magnetized in plane, as well as the currents under which these auto-oscillations become unstable to the growth of other non-uniformly magnetized modes. Thus the models provide a basic understanding of auto-oscillations at low currents.

This work may stimulate further work in the topic of understanding higher nonlinear effects in the dynamics of nanoferrromagnetic samples, as it was studied in the past in a ferromagnetic bulk or thin films. Our treatment of the magnetization dynamics based on the dynamics of the amplitudes of the magnetic modes allows to better understand the magnetization dynamics as compared to a micromagnetic approach, specially in order to appreciate the very important role of resonant phenomena.



As far as extending this approach to other geometries, this approach can be used in ferromagnetic wires of rectangular cross sections, or nanosamples of rectangular geometry. It is also plausible to extend it to thin dots with elliptical base. Furthermore, this approach can be generalized to samples of other shapes with nonuniform magnetization configurations, where it may be used if one has calculated numerically the modes (at this moment it is practical for equilibrium magnetization configurations close to uniform ones).

## ACKNOWLEDGMENTS

The authors thank A. Núñez for the critical reading of the manuscript. R.E.A. thanks Project Fondecyt 1130192 and Financiamiento Basal para Centros Científicos y Tecnológicos de Excelencia, Project CEDENNA FB0807 (Chile). D.M-A. thanks A.O. León for fruitful discussions and acknowledges financial support from CONICYT Beca Doctorado Nacional 2012, Contract No. 21120160.

## APPENDIX A: DEFINITIONS FOR EQUATIONS

### 1. Definitions for Eq. (35)

The following expressions are associated with the interaction between the large amplitude uniform mode of oscillation and the modes  $m_j$ :

$$A_{mj} = (h_x + 1/2 + h_{\text{ex}}^{mj}), \quad (\text{A1a})$$

$$B_{mj} = 1/2, \quad (\text{A1b})$$

$$C_{mj} = h_{\text{ex}}^{mj} \frac{|a_{00}|^4}{4(2 - |a_{00}|^2)} - \left( \frac{3}{8} a_{00}^2 + |a_{00}|^2 + \frac{3}{8} a_{00}^{*2} \right), \quad (\text{A1c})$$

$$D_{mj} = h_{\text{ex}}^{mj} \frac{|a_{00}|^2 a_{00}^2}{4(2 - |a_{00}|^2)} + \frac{1}{2} (h_{\text{ex}}^{mj} - 1) a_{00}^2 - \frac{3}{4} |a_{00}|^2, \quad (\text{A1d})$$

$$E_{mj} = \frac{3\alpha}{8} \left[ 3a_{00}^2 + \left( 4 + \frac{8}{3} h_x \right) |a_{00}|^2 + a_{00}^{*2} - \frac{2}{3} (2a_{00}^2 + 3|a_{00}|^2 + a_{00}^{*2}) |a_{00}|^2 \right] - \beta J |a_{00}|^2, \quad (\text{A1e})$$

$$F_{mj} = \frac{3\alpha}{4} \left[ \left( 1 + \frac{2}{3} h_x \right) a_{00}^2 + |a_{00}|^2 - \frac{1}{6} (a_{00}^2 + 4|a_{00}|^2 + 3a_{00}^{*2}) a_{00}^2 \right] - \frac{\beta J}{2} a_{00}^2. \quad (\text{A1f})$$

For the theoretical analysis, we approximate the terms associated with the exchange interaction as

$$C_{mj} \approx \frac{h_{\text{ex}}^{mj}}{8} |a_{00}|^4 - \left( \frac{3}{8} a_{00}^2 + |a_{00}|^2 + \frac{3}{8} a_{00}^{*2} \right), \quad (\text{A2a})$$

$$D_{mj} \approx \frac{h_{\text{ex}}^{mj}}{8} |a_{00}|^2 a_{00}^2 + \frac{1}{2} (h_{\text{ex}}^{mj} - 1) a_{00}^2 - \frac{3}{4} |a_{00}|^2. \quad (\text{A2b})$$

### 2. Definitions for Eq. (36)

In doing the change of variables from the  $a_{mj}$  to the  $b_{mj}$ , it is convenient to define the following quantities:

$$G_{mj} = \frac{A_{mj}(C_{mj} + C_{mj}^*)}{2\omega_{mj}} - \frac{B_{mj}(D_{mj} + D_{mj}^*)}{2\omega_{mj}} + \frac{C_{mj} - C_{mj}^*}{2}, \quad (\text{A3a})$$

$$H_{mj} = \frac{A_{mj}(E_{mj} - E_{mj}^*)}{2\omega_{mj}} - \frac{B_{mj}(F_{mj} - F_{mj}^*)}{2\omega_{mj}} + \frac{E_{mj} + E_{mj}^*}{2}, \quad (\text{A3b})$$

$$I_{mj} = \frac{A_{mj}(D_{mj} + D_{mj}^*)}{2\omega_{mj}} - \frac{B_{mj}(C_{mj} + C_{mj}^*)}{2\omega_{mj}} + \frac{D_{mj} - D_{mj}^*}{2}, \quad (\text{A3c})$$

$$J_{mj} = \frac{A_{mj}(F_{mj} - F_{mj}^*)}{2\omega_{mj}} - \frac{B_{mj}(E_{mj} - E_{mj}^*)}{2\omega_{mj}} + \frac{F_{mj} + F_{mj}^*}{2}. \quad (\text{A3d})$$

### 3. Definitions for Eq. (39)

In searching for a solution to the  $b_{mj}^0$  that varies slowly in time, we may neglect some contributions to the terms  $G_{mj}$ ,  $H_{mj}$ ,  $I_{mj}$  and  $J_{mj}$ . We define  $G'_{mj}$ ,  $H'_{mj}$ ,  $I'_{mj}$ , and  $J'_{mj}$  as a result of this process:

$$G'_{mj} = \frac{1}{2\omega_{mj}} [A_{mj}(C'_{mj} + C'^*_{mj}) - B_{mj}(D'_{mj} + D'^*_{mj})], \quad (\text{A4a})$$

$$H'_{mj} = \frac{E'_{mj} + E'^{*}_{mj}}{2}. \quad (\text{A4b})$$

The terms  $G'_{mj}$  and  $H'_{mj}$  correspond to the terms that do not depend on time in  $G_{mj}$  and  $H_{mj}$ , with

$$C'_{mj} + C'^{*}_{mj} \approx \left( \frac{3B_{00} - 4A_{00}}{2\omega_{00}} \right) + h_{\text{ex}}^{mj} \left( \frac{2A_{00}^2 + B_{00}^2}{8\omega_{00}^2} \right) |b_{00}|^2, \quad (\text{A5a})$$

$$D'_{mj} + D'^{*}_{mj} \approx (1 - h_{\text{ex}}^{mj}) \left( \frac{B_{00}}{\omega_{00}} \right) - \frac{3A_{00}}{2\omega_{00}} - 3h_{\text{ex}}^{mj} \frac{A_{00}B_{00}}{8\omega_{00}^2} |b_{00}|^2, \quad (\text{A5b})$$

$$E'_{mj} + E'^{*}_{mj} = \alpha \left[ 2 \frac{(3B_{00} + A_{00})(A_{00} - B_{00})}{\omega_{00}} - 3 \frac{(2A_{00} - B_{00})(A_{00} - B_{00})}{4\omega_{00}^2} |b_{00}|^2 \right] - 2\beta J \frac{A_{00}}{\omega_{00}}, \quad (\text{A5c})$$

$$I'_{mj} = \frac{A_{mj}(d_{mj} + d_{mj}^*)}{2\omega_{mj}} - \frac{B_{mj}(c_{mj} + c_{mj}^*)}{2\omega_{mj}} + \frac{1}{2}(d_{mj} - d_{mj}^*), \quad (\text{A6a})$$

$$J'_{mj} = \frac{A_{mj}(f_{mj} - f_{mj}^*)}{2\omega_{mj}} - \frac{B_{mj}(e_{mj} - e_{mj}^*)}{2\omega_{mj}} + \frac{1}{2}(f_{mj} + f_{mj}^*). \quad (\text{A6b})$$

The terms  $I'_{mj}$  and  $J'_{mj}$  correspond to the terms proportional to  $e^{-2i\omega t'}$  in  $I_{mj}$  and  $J_{mj}$  with

$$c_{mj} + c_{mj}^* \approx -h_{\text{ex}}^{mj} \frac{A_{00}B_{00}}{4\omega_{00}^2} |b_{00}|^2 - \left( \frac{3A_{00} - 4B_{00}}{4\omega_{00}} \right), \quad (\text{A7a})$$

$$d_{mj} + d_{mj}^* \approx h_{\text{ex}}^{mj} \frac{A_{00}^2 + B_{00}^2}{8\omega_{00}^2} |b_{00}|^2 + \frac{1}{2}(h_{\text{ex}}^{mj} - 1) \frac{A_{00}}{\omega_{00}} + \frac{3B_{00}}{4\omega_{00}}, \quad (\text{A7b})$$

$$d_{mj} - d_{mj}^* \approx h_{\text{ex}}^{mj} \frac{A_{00}}{8\omega_{00}} |b_{00}|^2 + \frac{1}{2}(h_{\text{ex}}^{mj} - 1), \quad (\text{A7c})$$

$$e_{mj} - e_{mj}^* = \alpha \left( \frac{3}{4} - \frac{A_{00}}{4\omega_{00}} |b_{00}|^2 \right), \quad (\text{A7d})$$

$$f_{mj} + f_{mj}^* = \alpha \left[ \frac{(A_{00} + 3B_{00})(A - B_{00})}{2\omega_{00}} - \frac{(A_{00} - B_{00})^2}{2\omega_{00}^2} |b_{00}|^2 \right] - \frac{\beta J}{2} \frac{A_{00}}{\omega_{00}}, \quad (\text{A7e})$$

$$f_{mj} - f_{mj}^* = \alpha \left( \frac{A_{00} + 2B_{00}}{2} + \frac{B_{00} - 2A_{00}}{4\omega_{00}} |b_{00}|^2 \right) - \frac{\beta J}{2}. \quad (\text{A7f})$$

## APPENDIX B: DEMAGNETIZING FIELD AND DEMAGNETIZING ENERGY

To determine the demagnetizing field of our thin disk (the magnetization is assumed uniform over the thickness of the disk) we first calculate the magnetostatic potential ( $\vec{H}_D = -\vec{\nabla}\phi$ ), which has contributions from surface and volume effective magnetic charges:

$$\Phi(\vec{x}) = \int dS' \frac{\hat{n} \cdot \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \int dV' \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (\text{B1})$$

$\sigma_M = (\hat{n} \cdot \vec{M})$  represents the surface magnetic charge density, with contributions from the top and bottom surfaces of the disk and from its mantle; and  $\rho_M = -(\nabla \cdot \vec{M})$  the volumetric magnetic charge density, with contributions from the interior of the disk.

In order to calculate these potentials, we use the following representation of the Green's function in terms of cylindrical coordinates:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi - \phi')} \int_0^{\infty} dk J_m(k\rho) J_m(k\rho') e^{-k|z - z'|}. \quad (\text{B2})$$

The demagnetizing field averaged over the thickness of the disk can be separated into two parts. (a) Its component in the perpendicular direction to the plane  $z$ , with contribution only from surface charges in the top and bottom surfaces:

$$H_{\text{dem}}^z = -4\pi M_z(\rho, \phi) + \frac{2M_s}{h} \int_0^{\infty} dk f(kh) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ \int dS' J_m(k\rho') m_z(\rho', \phi') e^{-im\phi'} \right] J_m(k\rho) e^{im\phi}, \quad (\text{B3})$$

with  $f(u) \equiv \exp(-u) - 1 + u$ .

(b) Its in plane components, with contributions from mantle surface charges as well as volume charges:

$$\vec{H}_{\text{dem}}^{\perp} = -\frac{2M_s}{h} \int_0^{\infty} dk \frac{f(kh)}{k^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ \int dS' \vec{\nabla} (J_m(k\rho') e^{-im\phi'}) \cdot \vec{m}(\rho', \phi') \right] \vec{\nabla} (J_m(k\rho) e^{im\phi}). \quad (\text{B4})$$

Furthermore, the demagnetizing energy is calculated in the following form:

$$\mathcal{U} = -\frac{1}{8\pi M_s^2} \int [H_{\text{dem}}^z \hat{z} + \vec{H}_{\text{dem}}^{\perp}] \cdot \vec{M} dV. \quad (\text{B5})$$

We write the magnetization components in the following way ( $M_{\pm} \equiv M_x \pm i M_y$ ):

$$\begin{aligned} M_z &= M_s \sum_{lj} \sigma_{lj} N_{lj} J_l(\kappa_{lj} \rho) e^{il\phi}, \\ M_{\pm} &= M_s \sum_{lj} \sigma_{lj}^{\pm} N_{lj} J_l(\kappa_{lj} \rho) e^{il\phi}. \end{aligned} \quad (\text{B6})$$

Using equations (B3)–(B6), one obtains the demagnetizing energy as follows,  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^z + \mathcal{U}^{\perp}$ , with

$$\mathcal{U}^z = \frac{1}{2} \sum_{l_1 j_1 j_2} (-1)^{l_1} \sigma_{l_1 j_1}^z \sigma_{-l_1 j_2}^z (\delta_{j_2}^{j_1} - 2V I_{(l_1, j_1, j_2, h/R)}^1), \quad (\text{B7})$$

$$\mathcal{U}^{\perp} = -\frac{V}{4} \sum_{l_1 j_1 j_2} (-1)^{l_1} (\sigma_{l_1 j_1}^- \sigma_{(-l_1-2)j_2}^- I_{(l_1, j_1, j_2, h/R)}^2 + \sigma_{l_1 j_1}^+ \sigma_{(-l_1+2)j_2}^+ I_{(l_1, j_1, j_2, h/R)}^3 - 2\sigma_{l_1 j_1}^+ \sigma_{(-l_1)j_2}^- I_{(l_1, j_1, j_2, h/R)}^1), \quad (\text{B8})$$

where the  $\sigma_{lj}^z$ ,  $\sigma_{lj}^+$ , and  $\sigma_{lj}^-$  are functions of the variables  $a_{mj}$  [see Eqs. (3) and (7)], with details of these expressions in Sec. B 1; and the  $I_{(l_1, j_1, j_2, h/R)}^1$ ,  $I_{(l_1, j_1, j_2, h/R)}^2$ ,  $I_{(l_1, j_1, j_2, h/R)}^3$  represent integrals that are calculated numerically, with details in Sec. B 2. In the limit  $h/R \rightarrow 0$ , the previous integrals tend to zero, and then the demagnetizing energy takes the value valid for an infinite very thin film:

$$\mathcal{U} \rightarrow \frac{1}{2} \sum_{l_1 j_1} (-1)^{l_1} \sigma_{l_1 j_1}^z \sigma_{-l_1 j_1}^z = \frac{1}{2} \int m_z(\rho, \phi)^2 dV. \quad (\text{B9})$$

### 1. Relation between the $\sigma'_{lj}$ s and the $a'_{mj}$ s

The  $\sigma'_{lj}$ s [defined through Eq. (B6)] are functions of the  $a'_{mj}$ s [defined through Eqs. (3) and (7)]. These may be expanded in power series of the  $a'_{mj}$ s as follows (superindices indicate the order of approximation):

$$\sigma_{lj}^{z(0)} = 0 = \sigma_{lj}^{z(2)} = \sigma_{lj}^{z(4)}, \quad (\text{B10a})$$

$$\sigma_{lj}^{z(1)} = (a_{lj} + (-1)^l a_{-lj}^*) / \sqrt{2}, \quad (\text{B10b})$$

$$\sigma_{lj}^{z(3)} = -\frac{V}{2\sqrt{2}} \sum_{m_1 j_1 m_2 j_2 m_3 j_3} (a_{m_1 j_1} + (-1)^{m_1} a_{-m_1 j_1}^*) a_{m_2 j_2} a_{m_3 j_3}^* i_{lj m_1 j_1 m_2 j_2 m_3 j_3}^4 \delta_{m_3}^{m_1+m_2-l}, \quad (\text{B10c})$$

$$\sigma_{00}^{z(0)} = \sigma_{00}^{+(0)} = \sigma_{00}^{-(0)} = \sqrt{V}, \quad (\text{B10d})$$

$$\sigma_{lj}^{+(1)} = -\sigma_{lj}^{-(1)} = (a_{lj} - (-1)^l a_{-lj}^*) / \sqrt{2}, \quad (\text{B10e})$$

$$\sigma_{lj}^{+(2)} = \sigma_{lj}^{-(2)} = -2 \sum_{m_1 j_1 m_2 j_2} a_{m_1 j_1} a_{m_2 j_2}^* \delta_{m_2}^{m_1-l} i_{d(lj m_1 j_1 m_2 j_2)}^3, \quad (\text{B10f})$$

$$\sigma_{lj}^{+(3)} = -\sigma_{lj}^{-(3)} = \sigma_{lj}^{z(3)}, \quad (\text{B10g})$$

$$\sigma_{lj}^{+(4)} = \sigma_{lj}^{-(4)} = 0 \quad (\text{B10h})$$

with  $i_{d(lj m_1 j_1 m_2 j_2)}^3$  and  $i_{d(lj m_1 j_1 m_2 j_2)}^4$  integrals defined in Sec. B 2.

## 2. Integrals calculated numerically

$$I_{(l_1, j_1, j_2, h/R)}^1 = N_{l_1 j_1} N_{l_1 j_2} J_{l_1}(\chi_{j_1}^{l_1}) J_{l_1}(\chi_{j_2}^{l_1}) \int_0^\infty dk \frac{f(kh/R) k^2 J_{l_1}'(k)^2}{(h/R)(k^2 - (\chi_{j_1}^{l_1})^2)(k^2 - (\chi_{j_2}^{l_1})^2)}, \quad (\text{B11a})$$

$$I_{(l_1, j_1, j_2, h/R)}^2 = N_{l_1 j_1} N_{(l_1+2)j_2} J_{l_1}(\chi_{j_1}^{l_1}) J_{l_1+2}(\chi_{j_2}^{l_1+2}) \int_0^\infty dk \frac{f(kh/R) k^2 J_{l_1}'(k) J_{l_1+2}'(k)}{(h/R)(k^2 - (\chi_{j_1}^{l_1})^2)(k^2 - (\chi_{j_2}^{l_1+2})^2)}, \quad (\text{B11b})$$

$$I_{(l_1, j_1, j_2, h/R)}^3 = N_{l_1 j_1} N_{(l_1-2)j_2} J_{l_1}(\chi_{j_1}^{l_1}) J_{l_1-2}(\chi_{j_2}^{l_1-2}) \int_0^\infty dk \frac{f(kh/R) k^2 J_{l_1}'(k) J_{l_1-2}'(k)}{(h/R)(k^2 - (\chi_{j_1}^{l_1})^2)(k^2 - (\chi_{j_2}^{l_1-2})^2)}, \quad (\text{B11c})$$

$$i_{d(lj m_1 j_1 m_2 j_2)}^3 = N_{lj} N_{m_1 j_1} N_{m_2 j_2} \int_0^1 J_l(\chi_j^l x) J_{m_1}(\chi_{j_1}^{m_1} x) J_{m_2}(\chi_{j_2}^{m_2} x) x dx, \quad (\text{B12})$$

$$i_{d(lj m_1 j_1 m_2 j_2 m_3 j_3)}^4 = N_{lj} N_{m_1 j_1} N_{m_2 j_2} N_{m_3 j_3} \int_0^1 J_l(\chi_j^l x) J_{m_1}(\chi_{j_1}^{m_1} x) J_{m_2}(\chi_{j_2}^{m_2} x) J_{m_3}(\chi_{j_3}^{m_3} x) x dx. \quad (\text{B13})$$

- 
- [1] J. C. Slonczewski, Current-driven excitation of magnetic multilayers, *J. Magn. Magn. Mater.* **159**, L1 (1996).
- [2] L. Berger, Emission of spin waves by a magnetic multilayer traversed by a current, *Phys. Rev. B* **54**, 9353 (1996).
- [3] F. J. Albert, J. A. Katine, R. A. Buhrman, and D. C. Ralph, Spin-polarized current switching of a Co thin film nanomagnet, *Appl. Phys. Lett.* **77**, 3809 (2000).
- [4] E. B. Myers, D. C. Ralph, J. A. Katine, R. N. Louie, and R. A. Buhrman, Current-induced switching of domains in magnetic multilayer devices, *Science* **285**, 867 (1999).
- [5] J. A. Katine, F. J. Albert, R. A. Buhrman, E. B. Myers, and D. C. Ralph, Current-Driven Magnetization Reversal and Spin-Wave Excitations in Co /Cu /Co Pillars, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3149 (2000).
- [6] S. I. Kiselev, J. C. Sankey, I. N. Krivorotov, N. C. Emley, R. J. Scheolkopf, R. A. Buhrman, and D. C. Ralph, Microwave oscillations of a nanomagnet driven by a spin-polarized current, *Nature (London)* **425**, 380 (2003).
- [7] W. H. Rippard, M. R. Pufall, S. Kaka, S. E. Russek, and T. J. Silva, Direct-Current Induced Dynamics in Co90Fe10/Ni80Fe20 Point Contacts, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 027201 (2004).
- [8] I. N. Krivorotov, N. C. Emley, J. C. Sankey, S. I. Kiselev, D. C. Ralph, and R. A. Buhrman, Time-domain measurements of nanomagnet dynamics driven by spin-transfer torques, *Science* **307**, 228 (2005).
- [9] T. Kawahara, K. Ito, R. Takemura, and H. Ohno, Spin-transfer torque RAM technology: Review and prospect, *Microelectron. Reliab.* **52**, 613 (2012).
- [10] E. Chen, D. Apalkov, Z. Diao, A. Driskill-Smith, D. Druist, D. Lottis, V. Nikitin, X. Tang, S. Watts, S. Wang, S. A. Wolf, A. W. Ghosh, J. W. Lu, S. J. Poon, M. Stan, W. H. Butler, S. Gupta, C. K. A. Mewes, T. Mewes, and P. B. Visscher, Advances and future prospects of spin-transfer torque random access memory, *IEEE Trans. Magn.* **46**, 1873 (2010).
- [11] J. A. Katine and E. E. Fullerton, Device implications of spin-transfer torques, *J. Magn. Magn. Mater.* **320**, 1217 (2008).
- [12] M. R. Pufall, W. H. Rippard, S. Kaka, T. J. Silva, and S. E. Russek, Frequency modulation of spin-transfer oscillators, *Appl. Phys. Lett.* **86**, 082506 (2005).
- [13] J. Z. Sun, Spin-current interaction with a monodomain magnetic body: A model study, *Phys. Rev. B* **62**, 570 (2000).
- [14] Jiang Xiao, A. Zangwill, and M. D. Stiles, Macrospin models of spin transfer dynamics, *Phys. Rev. B* **72**, 014446 (2005).
- [15] U. Ebels, D. Houssameddine, I. Firastrau, D. Gusakova, C. Thirion, B. Dieny, and L. D. Buda-Prejbeanu, Macrospin description of the perpendicular polarizer-planar free-layer spin-torque oscillator, *Phys. Rev. B* **78**, 024436 (2008).
- [16] Z. Li and S. Zhang, Magnetization dynamics with a spin-transfer torque, *Phys. Rev. B* **68**, 024404 (2003).
- [17] M. D. Stiles and J. Miltat, *Spin Transfer Torque and Dynamics, in Spin Dynamics in Confined Magnetic Structures III*, edited by B. Hillebrands and A. Thiaville (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2006), Sec. 4.
- [18] S. I. Kiselev, J. C. Sankey, I. N. Krivorotov, N. C. Emley, M. Rinkoski, C. Perez, R. A. Buhrman, and D. C. Ralph, Current-Induced Nanomagnet Dynamics for Magnetic Fields Perpendicular to the Sample Plane, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 036601 (2004).
- [19] R. H. Koch, J. A. Katine, and J. Z. Sun, Time-Resolved Reversal of Spin-Transfer Switching in a Nanomagnet, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 088302 (2004).
- [20] D. V. Berkov and J. Miltat, Spin-torque driven magnetization dynamics: Micromagnetic modeling, *J. Magn. Magn. Mater.* **320**, 1238 (2008).
- [21] K. J. Lee, A. Deac, O. Redon, J-P. Nozieres, and B. Dieny, Excitations of incoherent spin-waves due to spin-transfer torque, *Nat. Mater.* **3**, 877 (2004).
- [22] D. V. Berkov and N. L. Gorn, Magnetization precession due to a spin-polarized current in a thin nanoelement: Numerical simulation study, *Phys. Rev. B* **72**, 094401 (2005).
- [23] E. Schlomann and J. J. Green, Ferromagnetic Resonance at High Power Levels, *Phys. Rev. Lett.* **3**, 129 (1959).
- [24] V. S. L'vov, *Wave Turbulence Under Parametric Excitation* (Springer-Verlag, Berlin, 1994).

- [25] P. Krivosik and C. E. Patton, Hamiltonian formulation of nonlinear spin-wave dynamics: Theory and applications, *Phys. Rev. B* **82**, 184428 (2010).
- [26] S. M. Rezende, F. M. de Aguiar, and A. Azevedo, Spin-Wave Theory for the Dynamics Induced by Direct Currents in Magnetic Multilayers, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 037202 (2005).
- [27] A. N. Slavin and P. Kabos, Approximate theory of microwave generation in a current-driven magnetic nanocontact magnetized in an arbitrary direction, *IEEE Trans. Magn.* **41**, 1264 (2005).
- [28] G. Bertotti, R. Bonin, M. d'Aquino, C. Serpico, and I. D. Mayergoyz, Spin-wave instabilities in spin-transfer-driven magnetization dynamics, *IEEE Magn. Lett.* **1**, 3000104 (2010).
- [29] R. Bonin, M. d'Aquino, G. Bertotti, C. Serpico, and I. D. Mayergoyz, Stability of magnetization oscillations driven by spin-polarized currents, *J. Appl. Phys.* **109**, 07C902 (2011).
- [30] M. Pauselli and G. Carlotti, Spin wave eigenmodes excited by spin transfer torque in circular nanopillars: influence of lateral size and Oersted field studied by micromagnetic simulations, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **48**, 415001 (2015).
- [31] G. Carlotti, G. Gubbiotti, M. Madami, S. Tacchi, F. Hartmann, M. Emmerling, M. Kamp, and L. Worschech, From micro to nano-magnetic dots: evolution of the eigenmodes spectrum on reducing the lateral size, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **47**, 265001 (2014).
- [32] D. L. Mills and J. A. C. Bland, *Nanomagnetism: Ultrathin Films, Multilayers and Nanostructures* (Elsevier, Amsterdam, 2006), Chap. 3.
- [33] J. C. Slonczewski, Currents and torques in metallic magnetic multilayers, *J. Magn. Magn. Mater.* **247**, 324 (2002).
- [34] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies, *Phys. Z. Sowjetunion* **8**, 153 (1935) [*Ukr. J. Phys.* **53**, 14 (2008)].
- [35] H. J. Suhl, The theory of ferromagnetic resonance at high signal powers, *Phys. Chem. Solids* **1**, 209 (1957).
- [36] T. Holstein and H. Primakoff, Field dependence of the intrinsic domain magnetization of a ferromagnet, *Phys. Rev.* **58**, 1098 (1940).
- [37] W. S. Ament and G. T. Rado, Electromagnetic effects of spin wave resonance in ferromagnetic metals, *Phys. Rev.* **97**, 1558 (1955).
- [38] A. Slavin and V. Tiberkevich, Excitation of spin waves by spin-polarized current in magnetic nano-structures, *IEEE Trans. Magn.* **44**, 1916 (2008).
- [39] A. N. Slavin and V. S. Tiberkevich, Current-induced bistability and dynamic range of microwave generation in magnetic nanostructures, *Phys. Rev. B* **72**, 094428 (2005).
- [40] Q. Mistral, J. V. Kim, T. Devolder, P. Crozat, C. Chappert, J. A. Katine, M. J. Carey, and K. Ito, Current-driven microwave oscillations in current perpendicular-to-plane spin-valve nanopillars, *Appl. Phys. Lett.* **88**, 192507 (2006).
- [41] J. V. Kim, V. Tiberkevich, and A. N. Slavin, Generation Linewidth of an Auto-Oscillator with a Nonlinear Frequency Shift: Spin-Torque Nano-Oscillator, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 017207 (2008).
- [42] A. Slavin and V. Tiberkevich, Nonlinear auto-oscillator theory of microwave generation by spin-polarized current, *IEEE Trans. Magn.* **45**, 1875 (2009).
- [43] A. O. León and M. G. Clerc, Spin-transfer-driven nano-oscillators are equivalent to parametric resonators, *Phys. Rev. B* **91**, 014411 (2015).
- [44] M. G. Clerc, S. Coulibaly, D. Laroze, A. O. León, and A. S. Núñez, Alternating spin-polarized current induces parametric resonance in spin valves, *Phys. Rev. B* **91**, 224426 (2015).
- [45] I. D. Mayergoyz, G. Bertotti, and C. Serpico, *Nonlinear Magnetization Dynamics in Nanosystems* (Elsevier, Oxford, 2009).
- [46] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, *Proc. IEEE* **51**, 89 (1963).
- [47] E. K. Irish, J. Gea-Banacloche, I. Martin, and K. C. Schwab, Dynamics of a two-level system strongly coupled to a high-frequency quantum oscillator, *Phys. Rev. B* **72**, 195410 (2005).
- [48] Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering* (Perseus Books Group, Massachusetts, 2000).
- [49] Z. Zeng, K. H. Cheung, H. W. Jiang, I. N. Krivorotov, J. A. Katine, V. Tiberkevich, and A. Slavin, Evolution of spin-wave modes in magnetic tunnel junction nanopillars, *Phys. Rev. B* **82**, 100410 (2010).
- [50] E. Iacocca, O. Heinonen, P. K. Muduli, and J. Åkerman, Generation linewidth of mode-hopping spin torque oscillators, *Phys. Rev. B* **89**, 054402 (2014).
- [51] P. K. Muduli, O. G. Heinonen, and J. Åkerman, Decoherence and Mode Hopping in a Magnetic Tunnel Junction Based Spin Torque Oscillator, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 207203 (2012).
- [52] O. G. Heinonen, P. K. Muduli, E. Iacocca, and J. Åkerman, Decoherence, mode hopping, and mode coupling in spin torque oscillators, *IEEE Trans. Magn.* **49**, 4398 (2013).
- [53] R. I. Joseph and E. Schlomann, Demagnetizing Field in Nonellipsoidal Bodies, *J. Appl. Phys.* **36**, 1579 (1965).
- [54] K. Yu. Guslienko and A. N. Slavin, Spin-waves in cylindrical magnetic dot arrays with in-plane magnetization, *J. Appl. Phys.* **87**, 6337 (2000).
- [55] R. Zivieri and R. L. Stamps, Theory of spin wave modes in tangentially magnetized thin cylindrical dots: A variational approach, *Phys. Rev. B* **73**, 144422 (2006).
- [56] R. Zivieri, G. Santoro, and A. Franchini, Localized spin modes in ferromagnetic cylindrical dots with in-plane magnetization, *J. Phys.: Condens. Matter* **19**, 305012 (2007).
- [57] G. Strang, *Introduction to Applied Mathematics* (Wellesley-Cambridge, Wellesley, 1986), Chap. 5, pp. 373-380.
- [58] D. T. DiPerna and T. K. Stanton, Sound scattering by cylinders of noncircular cross section: A conformal mapping approach, *J. Acoust. Soc. Am.* **96**, 3064 (1994).
- [59] W. Scholza, K. Yu. Guslienkob, V. Novosad, D. Suessa, T. Schrefla, R. W. Chantrell, and J. Fidler, Transition from single-domain to vortex state in soft magnetic cylindrical nanodots, *J. Magn. Magn. Mater.* **266**, 155 (2008).
- [60] S.-H. Chung, R. D. McMichael, D. T. Pierce, and J. Unguris, Phase diagram of magnetic nanodisks measured by scanning electron microscopy with polarization analysis, *Phys. Rev. B* **81**, 024410 (2010).
- [61] B. A. Ivanov and C. E. Zaspel, Magnonmodes for thin circular vortex state magnetic dots, *Appl. Phys. Lett.* **81**, 1261 (2002).
- [62] B. A. Ivanov, H. J. Schnitzer, F. G. Mertens, and G. M. Wysin, Magnon modes and magnon-vortex scattering in

- two-dimensional easy-plane ferromagnets, *Phys. Rev. B* **58**, 8464 (1998).
- [63] C. E. Zaspel, B. A. Ivanov, J. P. Park, and P. A. Crowell, Excitations in vortex-state Permalloy dots, *Phys. Rev. B* **72**, 024427 (2005).
- [64] M. Buess, T. P. J. Knowles, R. Höllinger, T. Haug, U. Krey, D. Weiss, D. Pescia, M. R. Scheinfein, and C. H. Back, Excitations with negative dispersion in a spin vortex, *Phys. Rev. B* **71**, 104415 (2005).
- [65] L. Giovannini, F. Montoncello, F. Nizzoli, G. Gubbiotti, G. Carlotti, T. Okuno, T. Shinjo, and M. Grimsditch, Spin excitations of nanometric cylindrical dots in vortex and saturated magnetic states, *Phys. Rev. B* **70**, 172404 (2004).
- [66] G. Consolo, L. Giovannini, and R. Zivieri, Excitation of magnetic normal modes by spin-torque: a Lagrangian approach, *J. Appl. Phys.* **111**, 07C916 (2012).