SPINOR CLASS FIELDS FOR GENERALIZED EICHLER ORDERS

LUIS ARENAS-CARMONA

Abstract. Calcularemos el cuerpo de clases espinorial para el género de cualquier orden que puede ser escrito como la intersección de dos órdenes maximales, en un álgebra central simple de dimensión arbitraria. En el caso de algebras de cuaterniones este resultado era ya conocido.

Sea $k = K_\wp$ un cuerpo local y sea $\mathfrak{A} = \mathbb{M}_f(B)$ una k-ACS (algebra central simple), donde B es un algebra de division. El espacio de vectores columna B^f es un $\mathbb{M}_f(B)$-módulo izquierdo y un B-módulo derecho. Cada orden maximal en $\mathfrak{A}$ tiene la forma $\mathfrak{D}_\Lambda = \{a \in \mathfrak{A} | a\Lambda \subseteq \Lambda\}$, para algún reticulado Λ en el espacio columna B^f con la propiedad $\Lambda\mathcal{O}_B = \Lambda$, donde $\mathcal{O}_B$ denota el único orden maximal en el álgebra B. Tales reticulados se llaman $\mathcal{O}_B$-reticulados. Con estas notaciones, $\mathfrak{D}_\Lambda = \mathfrak{D}_M$ si y sólo si $M = \Lambda\lambda$ para algún elemento λ en B^*.

Sean Λ y M dos $\mathcal{O}_B$-reticulados en B^f y sea π un parámetro uniformizante de B. Según la teoría de factores invariantes, existe una B-base $\{e_1, \ldots, e_f\}$ de B^f, en la cual dichos reticulados se escriben como:

$$\Lambda = e_1\mathcal{O}_B + e_2\mathcal{O}_B + \cdots + e_f\mathcal{O}_B,$$
$$M = \pi^{r_1}e_1\mathcal{O}_B + \pi^{r_2}e_2\mathcal{O}_B + \cdots + \pi^{r_f}e_f\mathcal{O}_B,$$

donde $r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_f$. Los enteros $r_1, \cdots, r_f$ son los exponentes invariantes del par (Λ, M). La clase $\rho_\wp(\mathfrak{D}_\Lambda, \mathfrak{D}_M) = \overline{r_1 + \cdots + r_f} \in \mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$ se denomina distancia total entre los órdenes $\mathfrak{D}_\Lambda$ y $\mathfrak{D}_M$. El vector $(r_1, r_2, \ldots, r_f) \in \mathbb{Z}^n$ se llama la distancia-tipo de Λ a M y su imagen en el grupo cociente $\mathbb{Z}^n/\langle(1, 1, \ldots, 1)\rangle$ es un invariante (bajo conjugación) del par $(\mathfrak{D}_\Lambda, \mathfrak{D}_M)$.

Un orden de Eichler generalizado (OEG) es la intersección $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_\Lambda \cap \mathfrak{D}_M$ de dos órdenes maximales. Tal OEG se dice simétrico si su distancia-tipo satisface

$$(r_2 - r_1, r_3 - r_2, \ldots, r_f - r_{f-1}) = (r_f - r_{f-1}, r_{f-1} - r_{f-2}, \ldots, r_2 - r_1).$$

El principal resultado probado aquí es el siguiente:

Theorem 1. *El cuerpo de clases espinorial para un OEG global $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2$ en una ACS $\mathfrak{A}$ es la mayor subextensión Σ, del cuerpo de clases espinorial Σ_0 de ordenes maximales, cuyos grados de inercia locales $f_\wp(\Sigma/K)$ dividen a la distancia total $\rho_\wp(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2)$ localmente en cada lugar $\wp$ en el cual $\mathfrak{D}_\wp$ es simétrico.*

Partially supported by Fondecyt, No 1120565, e-mail: learenass@yahoo.com.

Un corolario importante de este resultado es el siguiente:

Corollary 1. *Le extensión Σ_0/Σ tiene exponente 2. En particular, el cuerpo de clases espinorial para un OEG en un ACS $\mathfrak{A}$ de dimensión impar coincide siempre con el cuerpo Σ_0, de modo que el número de clases de conjugación en cada uno de tales géneros es el mismo.*

References

[1] P. Abramenko and K. S. Brown, *Buildings*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 248, Springer, New York, 2008.

[2] L. Arenas-Carmona, *Applications of spinor class fields: embeddings of orders and quaternionic lattices*, Ann. Inst. Fourier **53** (2003), 2021–2038.

[3] L. Arenas-Carmona. *Representation fields for commutative orders*, Ann. Inst. Fourier **62** (2012), 807-819.

[4] L. Arenas-Carmona. *Representation fields for cyclic orders*, Acta Arith. **156** (2012), 143-156.

[5] L. Arenas-Carmona, *Eichler orders, trees, and spinor genera*, to appear in Int. J. Number Th. arXiv:1111.1473v1 [math.NT]

[6] W.K. Chan and F. Xu, *On representations of spinor genera*, Compositio Math. **140.2** (2004), 287-300.

[7] C. Chevalley, *L'arithmétique sur les algèbres de matrices*, Herman, Paris, 1936.

[8] T. Chinburg and E. Friedman, *An embedding theorem for quaternion algebras*, J. London Math. Soc. **60.2** (1999), 33-44.

[9] T. Chinburg and E. Friedman, *Hilbert symbols, class groups and quaternion algebras*, J. Théor. Nombres Bordeaux **12** (2000), 367-377.

[10] X. Guo and H. Qin, *An embedding theorem for Eichler orders*, J. Number Theory **107** (2004), 207-214.

[11] B. Linowitz, *Selectivity in quaternion algebras*, J. Number Theory **132** (2012), 1425-1437.

[12] C. Maclachlan, *Optimal embeddings in quaternion algebras*, J. Number Theory **128** (2008), 2852-2860.

[13] M.-F. Vigneras, *Arithmétique des algèbres de Quaternions*, Springer Verlag, Berlin, 1980.