



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

ESTUDIO DE LOS ESPACIOS LIPSCHITZ-LIBRES Y UNA CARACTERIZACIÓN
PARA EL CASO FINITO-DIMENSIONAL

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

GONZALO PATRICIO FLORES GARCÍA

PROFESOR GUÍA:
ARIS DANIILIDIS

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JOAQUÍN FONTBONA TORRES
ANTONÍN PROCHÁZKA

SANTIAGO DE CHILE
2016

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR AL
TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO Y AL
GRADO DE MAGISTER EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS
POR: GONZALO PATRICIO FLORES GARCÍA
FECHA: AGOSTO 2016
PROF. GUÍA: SR. ARIS DANIILIDIS

ESTUDIO DE LOS ESPACIOS LIPSCHITZ-LIBRES Y UNA CARACTERIZACIÓN PARA EL CASO FINITO-DIMENSIONAL

En el presente trabajo se muestran algunos resultados obtenidos recientemente en ciertos espacios de Banach, los llamados espacios Lipschitz-libres. Junto con las definiciones básicas y resultados que principalmente se encuentran en [14] y [16], se añaden resultados presentes en diversos artículos y trabajos publicados. Así mismo, se incluye una introducción a los conceptos de integración de funciones vector-valuadas, más precisamente, la noción de Bochner-integrabilidad, la cual resulta ser un punto clave en el desarrollo del resultado principal.

Se muestra dentro de estos resultados una identificación que puede ser hallada, por ejemplo, en [12] para el espacio Lipschitz-libre $\mathcal{F}(\mathbb{R})$. En virtud de esto, se propone una generalización para el caso finito-dimensional, con el fin de entregar una nueva herramienta para el estudio de los espacios Lipschitz-libres en el caso mencionado. En el transcurso de la identificación de este espacio, se hace uso de herramientas clásicas de espacios de Banach y de teoría de la medida. Además, se define el espacio de funciones esencialmente Lipschitz, así como un subespacio de éste que refleja la estructura de las funciones Lipschitz nulas en 0.

Haciendo uso del espacio obtenido, se propone una vía de estudio para los espacios $\mathcal{F}(\ell^p)$, para $1 \leq p < +\infty$, usando para ello la densidad de c_{00} en ℓ^p y la estructura de los espacios que identifican a $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.

Se incluye por completitud además en el anexo una demostración de un resultado clásico asociado a las funciones Lipschitz definidas y a valores en espacios de dimensión finita, el Teorema de Rademacher. Éste último es la pieza clave en la identificación de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ y así mismo se proponen posibles generalizaciones en la identificación de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ para espacios de dimensión infinita en los cuales existan resultados similares a dicho teorema.

A mi familia y amigos

Agradecimientos

El presente trabajo es resultado de un largo proceso. En éste proceso estuvieron presentes muchas personas, las cuales fueron pieza clave en diversas etapas de mi vida.

En primer lugar, agradecer a mi familia. A mis padres Gloria García y Juan Flores quienes hicieron incluso más de lo que tenían a su alcance para llevar esto a buen puerto. A mi hermano Ariel Flores, quien siempre ha sido a pesar de su corta edad una voz crítica hacia mis actos, lo cual permitió no quedarme estancado en el camino. A mis abuelos Alicia Venegas y Luis García (Q.E.P.D.), con los cuales viví los primeros años de mi educación básica y me mostraron el camino del estudio, el cual decidí seguir gracias a su motivación. A mis tíos y primos, de los cuales tengo grandes recuerdos de niñez, y especialmente a mi tía Berta García (Q.E.P.D.), quien siempre preguntó como iba en mis estudios universitarios y lamentablemente no está ahora con nosotros en este momento.

Agradecer también a mis amigos de la enseñanza media. Grandes historias y momentos quedaron plasmados en mis recuerdos, los cuales no serán fácilmente olvidados. Su compañía y apoyo han sido hasta ahora fundamentales, y espero que lo sigan siendo en esta nueva etapa que comienza. También deseo mencionar a mis compañeros y amigos de la Escuela de Ingeniería, con los cuales pasamos muchos momentos ya sea sufriendo en los estudios o compartiendo momentos de distensión. En particular, mencionar aquí a David Salas, Gianfranco Liberona, Joaquín Espina, Karen Águila y Violchen Sepúlveda, con quienes pasamos horas incontables en la cafetería. En gran parte fue gracias a ellos y su bullying que todo esto fue posible.

Quisiera también agradecer a los miembros de la comisión. Agradecer a mi profesor guía Aris Daniilidis por la confianza depositada en mí durante el desarrollo de este trabajo, así como las facilidades y ayudas otorgadas. También al profesor Antonín Procházka, gracias a quien decidí finalmente realizar este trabajo en el tema mostrado, y con la esperanza de continuar trabajando en el mismo. Agradecer de la misma forma al profesor Rafael Correa, con quien tuve mis primeros acercamientos al área del Análisis Funcional, es cual forma un pilar fundamental en el desarrollo de este trabajo.

Finalmente, agradecer a la cerveza, fiel compañera durante mis años de universidad.

Tabla de Contenido

1. Introducción	1
1.1. Conceptos básicos	1
1.2. Notación	2
1.3. Estructura del trabajo	3
2. Definiciones y resultados previos	4
2.1. Espacios Lipschitz-libres	4
2.2. Espacios Lipschitz-libres de espacios de Banach	7
2.2.1. Propiedad de levantamiento	7
2.2.2. Propiedades de aproximación	10
2.3. Espacios de Lebesgue-Bochner	12
3. Estudio del espacio $\mathcal{F}(\mathbb{R})$	17
4. Identificación de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$	22
4.1. Identificación de $Lip_0(\mathbb{R}^n)$	23
4.2. Identificación de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$	30
4.2.1. $L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ está en la imagen de T^*	31
5. Estudio del espacio $\mathcal{F}(\ell^p)$	38
Conclusión	40
Bibliografía	42
Apéndices	44
A. Teorema de Rademacher	45
B. $Lip_0(M)$ es un espacio dual	50

Capítulo 1

Introducción

En el presente trabajo, se desarrollan las ideas presentes en [14], [16] y [12] en relación a los espacios Lipschitz-libres (o espacios de Arens-Eells, como aparece en [12]).

1.1. Conceptos básicos

Sea (M, d) un espacio métrico con un punto especial denotado por 0 . Denótese por $Lip_0(M)$ el espacio vectorial de las funciones Lipschitz $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(0) = 0$, dotado la norma

$$\|f\|_L = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)}$$

Se verifica directamente que el operador anterior es efectivamente una norma. Más aún, el espacio normado así definido resulta ser un espacio de Banach.

La bola unitaria definida por esta norma resulta ser compacta para la topología de la convergencia puntual en M , con lo que es posible definir un espacio primal canónico. Más precisamente, considérese $\delta : M \rightarrow Lip_0(M)^*$ definida por

$$\langle \delta(x), f \rangle = f(x)$$

para $x \in M$ y $f \in Lip_0(M)$. Se define así el espacio Lipschitz-libre sobre M como

$$\mathcal{F}(M) := \overline{\text{span}}\{\delta(x) : x \in M\}$$

En otro sentido, puede considerarse $\mathcal{F}(M)$ como un espacio de medidas Borelianas. Más precisamente, como la completación del conjunto de medidas de Borel sobre M con soporte finito bajo la norma

$$\|\mu\|_{\mathcal{F}} = \sup_{\|f\|_L \leq 1} \int f d\mu$$

Nótese que la principal interpretación de esta teoría apunta a reducir problemas asociados a operadores Lipschitz sobre M a problemas lineales sobre $\mathcal{F}(M)$. De esta forma, se busca aplicar la teoría lineal para la resolución de problemas no lineales.

En el caso en que el espacio subyacente sea un espacio de Banach, la principal pregunta de estudio en torno a estos espacios apunta a si dos espacios de Banach Lipschitz-homeomorfos son linealmente isomorfos. Se sabe que esto no es cierto en el caso general, pero sigue siendo un problema abierto en el caso de espacios separables.

1.2. Notación

En esta sección se describe la principal notación de este trabajo. Aquella que no esté presente en lo que sigue, es detallada al momento de su utilización.

- Para un espacio de Banach X , $\|\cdot\|$ denota de manera genérica su norma. Así mismo, X^* denota su espacio dual, el cual (salvo se mencione lo contrario) es dotado de la norma dual $\|\cdot\|_*$ definida por

$$\|x^*\|_* = \sup_{\|x\|=1} \langle x^*, x \rangle.$$

- Para $p \in [1, \infty)$ y $T \subseteq \mathbb{R}^n$, $L^p(T)$ denota el espacio de funciones Lebesgue-medibles definidas sobre T a valores reales de potencia p integrable. De igual manera, $L^\infty(T)$ denota el espacio de funciones Lebesgue-medibles definidas sobre T a valores reales esencialmente acotadas. Más detalles sobre estos espacios pueden encontrarse en el Capítulo 2.
- Para $p \in [1, \infty)$, $\|\cdot\|_p$ denota las siguientes normas, dependiendo del espacio subyacente:

- Para \mathbb{R}^n :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}.$$

- Para ℓ^p :

$$\|y\|_p = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} |y_k|^p \right)^{1/p}.$$

- Para $L^p(\Omega, \Sigma, \mu; X)$ (ver más detalles en el Capítulo 2):

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} \|f\|^p d\mu \right)^{1/p}$$

Además, en el caso $p = \infty$:

- Para \mathbb{R}^n :

$$\|x\|_\infty = \max_{k=1, \dots, n} |x_k|.$$

- Para ℓ^∞ :

$$\|y\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |y_k|.$$

– Para $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu; X)$ (ver más detalles en el Capítulo 2):

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_\Omega \|f\|.$$

- $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ denota la sigma álgebra Boreliana de \mathbb{R}^n , mientras que $\lambda^{(n)}$ denota la medida n -dimensional de Lebesgue sobre \mathbb{R}^n .
- Para (M, d) un espacio métrico y $\delta > 0$,
 - $B(x, \delta) = \{y \in X \mid d(y, x) < \delta\}$.
 - $\overline{B}(x, \delta) = \{y \in X \mid d(y, x) \leq \delta\}$.
 - $\partial B(x, \delta) = \overline{B}(x, \delta) \setminus B(x, \delta)$.

Para el caso $M = \mathbb{R}^n$, $B_2(x, \delta)$ denota el mismo conjunto pero con la distancia natural dada por la norma $\|\cdot\|_2$ (independientemente de la norma usada en \mathbb{R}^n).

- Para dos espacios de Banach X e Y , se denota $X \simeq Y$ cuando estos espacios son linealmente isomorfos, mientras que se denota $X \equiv Y$ cuando además son isométricos.

1.3. Estructura del trabajo

A continuación se describen los contenidos de este trabajo. En el Capítulo 2 se reúnen los resultados conocidos y bases de la teoría de espacios Lipschitz-libres. El principal resultado en este sentido es en torno a la propiedad de levantamiento y las propiedades de aproximación. Además se presentan algunos resultados para el caso separable. En el Capítulo 3 se realiza un estudio en detalle del espacio $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, el cual se sabe que es isométrico e isomorfo a $L^1(\mathbb{R})$. En el Capítulo 4 se trata el espacio $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ para $n > 1$, obteniéndose una familia de espacios isomorfos e isométricos para cada $n \in \mathbb{N}$. Cabe notar que en este caso, la demostración es válida de igual manera en el caso $n = 1$, por lo que es netamente una generalización del resultado enunciado en el Capítulo 3. Finalmente, el Capítulo 5 consta de algunas ideas para la identificación de los espacios $\mathcal{F}(\ell^p)$ para $p \in [1, \infty)$.

Capítulo 2

Definiciones y resultados previos

2.1. Espacios Lipschitz-libres

Sea (M, d) un espacio métrico con un punto especial denotado por 0 (hablamos en este caso de un espacio métrico punteado). Denótese por $Lip_0(M)$ el espacio vectorial de las funciones Lipschitz $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(0) = 0$, dotado la norma

$$\|f\|_L = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)}$$

Se sabe que el espacio normado así definido resulta ser un espacio de Banach. Considérese además la función $\delta_M : M \rightarrow Lip_0(M)^*$ dada por

$$\langle \delta_M(x), f \rangle = f(x), x \in M, f \in Lip_0(M).$$

En lo que sigue, salvo que exista ambigüedad, se omite el subíndice indicando el espacio métrico asociado.

Definición 2.1 *El espacio Lipschitz-libre sobre M , denotado por $\mathcal{F}(M)$ es el subespacio de $Lip_0(M)^*$ dado por*

$$\mathcal{F}(M) := \overline{\text{span}}\{\delta(x) \mid x \in M\}$$

Tómese en cuenta el carácter de densidad de un espacio métrico, definido como la menor cardinalidad de un subespacio denso, es decir

$$\kappa(M) = \inf\{|D| : D \text{ subespacio denso de } M\}.$$

Nótese que el carácter de densidad de $\mathcal{F}(M)$ es igual al de M , para todo espacio métrico infinito. En particular, $\mathcal{F}(M)$ es separable si y sólo si M lo es. Por otra parte

Lema 2.2 *El operador $\delta : M \rightarrow \mathcal{F}(M)$ es Lipschitz y define una isometría. En el caso en que M sea un espacio de Banach, δ es nunca Gateaux diferenciable.*

Bajo estas definiciones, considérese el operador $J : \mathcal{F}(M)^* \rightarrow Lip_0(M)$ dado por

$$J\varphi(x) = \langle \varphi, \delta(x) \rangle,$$

para $x \in M$. Nótese que gracias a que δ define una isometría, este operador está bien definido.

Proposición 2.3 *J define una isometría lineal entre $Lip_0(M)$ y $\mathcal{F}(M)^*$, es decir, se verifica que $Lip_0(M) \equiv \mathcal{F}(M)^*$.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que J es lineal. Nótese que para $\varphi \in \mathcal{F}(M)^*$ se verifica que

$$\|J\varphi\|_L = \sup_{x,y \in M, x \neq y} \frac{\langle \varphi, \delta(y) - \delta(x) \rangle}{d(x,y)} \leq \|\varphi\|.$$

Además,

$$\begin{aligned} \|\varphi\| &= \sup_{\mu \neq 0} \frac{\langle \varphi, \mu \rangle}{\|\mu\|} \stackrel{(*)}{=} \sup \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \langle \varphi, \delta(x_i) \rangle}{\|\sum_{i=1}^n \lambda_i \delta(x_i)\|} = \sup \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i J\varphi(x_i)}{\|\sum_{i=1}^n \lambda_i \delta(x_i)\|} = \sup \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \langle \delta(x_i), J\varphi \rangle}{\|\sum_{i=1}^n \lambda_i \delta(x_i)\|} \\ &= \sup_{\|\mu\|=1} \langle \mu, J\varphi \rangle \leq \|J\varphi\|_L, \end{aligned}$$

donde $(*)$ se tiene gracias a la densidad de $\{\delta(x) \mid x \in M\}$ en $\mathcal{F}(M)$, y por lo tanto J define una isometría. Por otra parte, para $f \in Lip_0(M)$, considérese $\varphi_f \in \mathcal{F}(M)^*$ el único elemento tal que

$$\langle \varphi_f, \delta(x) \rangle = f(x),$$

para todo $x \in M$. Nótese que

$$J\varphi_f(x) = \langle \varphi_f, \delta(x) \rangle = f(x).$$

Luego, J es sobreyectivo. Queda así probado que J define una isometría lineal. \square

Si bien se entrega la identificación explícita entre estos espacios, lo que permite concluir que $Lip_0(M)$ es un espacio dual, existe una demostración alternativa de que esto último es cierto. Puede probarse que la bola unitaria de $Lip_0(M)$ es compacta para la topología de la convergencia puntual. Recordando que esta topología es localmente convexa, se deduce que $Lip_0(M)$ es un espacio dual (para más detalles, ver el Apéndice B).

En lo que sigue, y considerando lo anterior, se verá a $Lip_0(M)$ como el espacio dual de $\mathcal{F}(M)$. En virtud de esta dualidad y considerando la topología débil- $*$ asociada, se tiene que, sobre los conjuntos acotados de $Lip_0(M)$, esta última coincide con la topología de la convergencia puntual.

Siguiendo estrictamente la definición de los espacios Lipschitz-libres, estos últimos son naturalmente funcionales lineales continuos definidos sobre los espacios de funciones Lipschitzianas. Ahora bien, en ocasiones es útil considerar una interpretación equivalente de estos espacios, la cual se detalla a continuación.

Para (M, d) un espacio métrico punteado, considérese $\mathcal{B}(M) \subseteq \mathcal{P}(M)$ la σ -álgebra de los Borelianos de M , es decir, la σ -álgebra engendrada por los abiertos de M . Nótese que en este

caso, los funcionales de evaluación $\delta_x = \delta(x)$ pueden ser considerados como medidas, en el sentido que

$$\delta_x(A) = \mathbf{1}_A(x),$$

para todo $A \in \mathcal{B}(M)$. En virtud de esto, $\text{span}\{\delta(x) \mid x \in M\}$ es un espacio vectorial de medidas finitas con signo y soporte finito. Notando que si $\mu = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta(x_i)$ es un elemento cualquiera de este espacio se verifica que

$$\langle \mu, f \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) = \int_M f d\mu,$$

entonces, dotando a este espacio de medidas con la norma

$$\|\mu\|_{\mathcal{F}} = \sup_{\|f\|_L \leq 1} \int_M f d\mu$$

es posible ahora identificar $\mathcal{F}(M)$ como la completación del espacio mencionado con respecto a esta norma. Para el estudio de los espacios Lipschitz-libres, esta descripción permite identificar ciertos miembros del espacio como se muestra a continuación. Sea μ una medida Boreliana con signo finita soportada en un compacto K de M . Luego, definiendo $\tilde{\mu}$ mediante la siguiente integral de Bochner (ver la sección 2.3)

$$\tilde{\mu} = \int_K \delta(x) d\mu(x),$$

se tiene que $\tilde{\mu}$ representa a μ en $\mathcal{F}(M)$.

El estudio de estos espacios se encuentra en el marco de la clasificación no lineal de espacios de Banach, y más particularmente, en la clasificación Lipschitziana. En cuanto a esto, se tiene el siguiente

Lema 2.4 *Sean M y N dos espacios metricos punteados y $F : M \rightarrow N$ una función Lipschitz tal que $F(0_M) = 0_N$. Entonces, existe una única aplicación lineal $\hat{F} : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(N)$ tal que*

- $\|F\|_L = \|\hat{F}\|$.
- $\delta_N \circ F = \hat{F} \circ \delta_M$. Dicho de otra forma, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{F} & N \\ \downarrow \delta_M & & \downarrow \delta_N \\ \mathcal{F}(M) & \xrightarrow{\hat{F}} & \mathcal{F}(N) \end{array}$$

Una conclusión directa de lo anterior es que si dos espacios de Banach X e Y son Lipschitz-equivalentes (es decir, existe una función $f : X \rightarrow Y$ bi-Lipschitz), entonces los espacios Lipschitz-libres asociados son isomorfos. Además, en el caso que N sea un subespacio de M , el Lema 2.4 permite considerar $\mathcal{F}(N)$ como un subespacio vectorial de $\mathcal{F}(M)$. Para esto último basta considerar F como el operador identidad de M en N , con lo que \hat{F} resulta ser una inyección lineal isométrica.

En general, el Lema 2.4 entrega una forma de linealizar problemas, pasando estos a ser problemas en los espacios Lipschitz-libres asociados. La dificultad de esto último es que la estructura de los espacios Lipschitz-libres aún es en gran medida desconocida. Como ejemplo, se sabe que $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ es isomorfo e isométrico a $L^1(\mathbb{R})$ (ver [12] y el Capítulo 3 de este trabajo), pero, como fue probado por Naor y Schechtman en [17], $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ no es isomorfo a ningún subespacio de L^1 . Por otra parte, en el caso separable, aun se encuentra abierto el problema de si la Lipschitz-equivalencia entre dos espacios de Banach X e Y (es decir, la existencia de una función $F : X \rightarrow Y$ bi-Lipschitz) implica la existencia de un isomorfismo entre ellos.

2.2. Espacios Lipschitz-libres de espacios de Banach

Considérese ahora el caso en que $M = X$ es un espacio de Banach. En este caso es posible definir el baricentro para el conjunto de las medidas Borelianas con soporte finito.

Definición 2.5 *Sea μ una medida Boreliana sobre X con soporte finito. Se define su **baricentro** $\beta(\mu) \in X$ como*

$$\beta(\mu) = \int_X x d\mu$$

Nótese que de esta definición, se desprende directamente que para $x^* \in X^*$

$$|\langle \beta(\mu), x^* \rangle| \leq \|x^*\| \|\mu\|_{\mathcal{F}}$$

por lo que es posible extender lo anterior a un operador lineal continuo $\beta : \mathcal{F}(X) \rightarrow X$. Considerando esto último se tiene el siguiente

Lema 2.6 *Sea X un espacio de Banach. Luego, $\beta : \mathcal{F}(X) \rightarrow X$ es un cuociente lineal y es una inversa por la izquierda de δ .*

Reuniendo los Lemas 2.4 y 2.6 se obtiene directamente el siguiente

Lema 2.7 *Sea $L : X \rightarrow Y$ un operador Lipschitz entre los espacios de Banach X e Y tal que $L(0) = 0$. Luego, existe un único operador lineal $\bar{L} : \mathcal{F}(X) \rightarrow Y$ tal que $\bar{L} \circ \delta_X = L$, y $\|\bar{L}\| = \|L\|_L$.*

2.2.1. Propiedad de levantamiento

Siguiendo en el contexto de los espacios de Banach, considérese la siguiente definición

Definición 2.8 *Se dice que $0 \rightarrow Z \xrightarrow{R} Y \xrightarrow{S} X \rightarrow 0$ es una **secuencia exacta corta** si existen dos operadores lineales $R : Z \rightarrow Y$ y $S : Y \rightarrow X$ tales que*

- $Im(R) = Ker(S)$.
- $Ker(R) = 0$.

- $Im(S) = X$.

Se dice además que la secuencia es **separada** si existe un operador lineal continuo (llamado **sección**) $V : X \rightarrow Y$ tal que $SV = Id_X$, o de manera equivalente, si existe un operador $W : Y \rightarrow Z$ tal que $WR = Id_Z$. Por último, se dice que la secuencia es **Lipschitz-separada** si reemplazamos la condición de linealidad de V (o W) por Lipschitzianidad, además de que los operadores se anulen en 0.

En virtud de lo anterior, y siendo $Z_X = \beta^{-1}(0)$, el Lema 2.6 afirma que la secuencia exacta corta

$$0 \rightarrow Z_X \rightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\beta} X \rightarrow 0$$

es Lipschitz-separada, donde δ es un levantamiento isométrico para β .

La siguiente proposición (la cual puede encontrarse en [10]) apunta a la relación entre secuencias Lipschitz-separadas y secuencias separadas.

Proposición 2.9 *Si la secuencia exacta corta*

$$0 \rightarrow Z \xrightarrow{R} Y \xrightarrow{S} X \rightarrow 0$$

es Lipschitz-separada, entonces la secuencia dual

$$0 \rightarrow X^* \xrightarrow{S^*} Y^* \xrightarrow{R^*} Z^* \rightarrow 0$$

es separada. Más aún, en el caso isométrico, si R es una isometría lineal, S es un cociente lineal y existe una sección Lipschitz $L : X \rightarrow Y$, entonces existe una isometría lineal $V : Y^ \rightarrow X^*$ tal que $VS^* = Id_{X^*}$.*

Puede verse fácilmente que la Proposición 2.9 implica que si una secuencia exacta corta es Lipschitz-separada, entonces su secuencia bidual es separada. En particular, si los espacios involucrados son reflexivos se concluye que la Lipschitz-separación y la separación son equivalentes. De la misma forma, en cualquier caso se concluye que una Lipschitz-separación implica que X es isomorfo a un subespacio de Y^{**} .

Dentro del estudio de la relación entre la Lipschitz-separación y la separación de secuencias, considérese la siguiente definición.

Definición 2.10 *Se dice que un espacio de Banach X tiene la **propiedad de levantamiento (isométrico)** si existe un operador lineal continuo (de norma 1) $T : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$ tal que $\beta T = Id_X$.*

En virtud de esta definición, se tiene el siguiente resultado

Proposición 2.11 *Sea X un espacio de Banach. Luego, X tiene la propiedad de levantamiento si y sólo si toda secuencia exacta corta*

$$0 \rightarrow Z \rightarrow Y \rightarrow X \rightarrow 0$$

Lipschitz-separada es también separada.

La demostración del resultado anterior se basa en que toda secuencia exacta corta Lipschitz-separada es un pushout de la secuencia exacta corta

$$0 \rightarrow Z_X \rightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\beta} X \rightarrow 0$$

y en el Lema 2.7 aplicado a la sección L dado por la Lipschitz-separación de la secuencia. Siguiendo esta misma línea, es posible además obtener una versión isométrica de la Proposición 2.11

Proposición 2.12 *Supóngase que X es un espacio de Banach con la propiedad de levantamiento isométrico. Supóngase además que Y es un espacio de Banach y $Q : Y \rightarrow X$ es un operador cociente. Luego, si existe una isometría (no necesariamente lineal) $L : X \rightarrow Y$ tal que $QL = Id_X$, entonces existe una isometría lineal $V : X \rightarrow Y$ tal que $QV = Id_X$.*

Se muestra ahora un primer ejemplo de espacios de Banach con la propiedad de levantamiento, el cual es una consecuencia del análisis de los diagramas mostrados.

Lema 2.13 *Sea X un espacio de Banach cualquiera. Luego, el espacio libre $\mathcal{F}(X)$ tiene la propiedad de levantamiento.*

De la misma manera, se obtiene el siguiente lema

Lema 2.14 *Si X tiene la propiedad de levantamiento e Y es un subespacio de X sobre el cual existe una proyección lineal continua π , entonces Y tiene la propiedad de levantamiento. Si X tiene la propiedad de levantamiento isométrico y $\|\pi\| = 1$, entonces Y tiene la propiedad de levantamiento isométrico.*

Con todas las herramientas y definiciones ya enunciadas, se enuncian ahora los dos resultados principales en torno a la propiedad de levantamiento.

Teorema 2.15 *Sea X un espacio de Banach. Luego, $\mathcal{F}(X)$ es Lipschitz-equivalente al espacio $\mathcal{G}(X) = Z_X \oplus X$. Más aún, estos dos espacios son isomorfos si y sólo si X tiene la propiedad de levantamiento.*

Observación La demostración del teorema anterior se basa en la definición del operador $L : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X)$ dado por

$$L\mu := (\mu - \delta_X \beta_X \mu, \beta_X \mu)$$

en el caso general. Esto puede ser entendido como que los elementos del espacio $\mathcal{F}(X)$ pueden ser naturalmente descompuestos en su baricentro y un elemento de $\mathcal{F}(X)$ con baricentro nulo. La presencia del operador Lipschitz δ_X en esta definición provoca que naturalmente esta equivalencia sea Lipschitziana. Bajo este argumento, la segunda parte del teorema es clara reemplazando δ_X por un levantamiento lineal T para el operador β .

Teorema 2.16 *Supóngase que X es un espacio de Banach. Luego, X tiene la propiedad de levantamiento isométrico si y sólo si para todo espacio de Banach Y tal que existe una isometría (no necesariamente lineal) $L : X \rightarrow Y$ con $L(0) = 0$ y $Y = \overline{\text{span}}(L(X))$, entonces Y contiene un subespacio contractivamente complementado linealmente isométrico a X .*

2.2.2. Propiedades de aproximación

En esta sección se muestran algunos resultados básicos sobre las propiedades de aproximación para los espacios Lipschitz-libres. Para ello, se enuncian las definiciones básicas y se enuncian resultados en torno a la conexión entre los espacios Lipschitz-libres y los espacios subyacentes en cuanto a estas propiedades

Definición 2.17 *Se dice que un espacio de Banach X tiene*

- *la **propiedad de aproximación (AP)** si para todo $\varepsilon > 0$ y todo $K \subseteq X$ compacto, existe un operador lineal de rango finito $T : X \rightarrow X$ tal que $\|Tx - x\| \leq \varepsilon$, para todo $x \in K$.*
- *la **λ -propiedad de aproximación acotada (λ -BAP)** con $\lambda \in [1, +\infty)$ si tiene la AP y además para todo $\varepsilon > 0$ y $K \subseteq X$ compacto, el operador T puede ser escogido de forma que $\|T\| \leq \lambda$. En general, se dice que X tiene la **propiedad de aproximación acotada (BAP)** si tiene la λ -BAP para algún $\lambda \in [1, +\infty)$.*
- *la **propiedad de aproximación métrica (MAP)** si tiene la 1-BAP.*

Observación Salvo en la definición de la AP, la condición de conjuntos compactos puede ser reemplazada por conjuntos finitos.

En relación a los espacios Lipschitz-libres, se cuenta con el siguiente resultado, cuya demostración puede verse en [14].

Proposición 2.18 *Sea E un espacio de Banach finito-dimensional. Luego, $\mathcal{F}(E)$ tiene la propiedad de aproximación métrica.*

No es difícil notar que todo espacio de Banach finito-dimensional E tiene la MAP. En efecto, basta con considerar $T = \text{Id}_E$, el cual verifica $\|T\| = 1$ y $\|Tx - x\| = 0 \leq \varepsilon$, para todo $x \in E$. Es válido entonces preguntarse sobre la relación entre las propiedades de aproximación entre un espacio de Banach X y su espacio Lipschitz-libre $\mathcal{F}(X)$. A continuación se enuncia el resultado que entrega una clara relación entre ellas. Por completitud, considérese la siguiente definición

Definición 2.19 *Sea X un espacio de Banach y $\lambda \geq 1$. Se dice que X tiene la **Lipschitz- λ -propiedad de aproximación acotada (λ -LBAP)** si para todo $K \subseteq X$ compacto y $\varepsilon > 0$, existe una función Lipschitz $F : X \rightarrow X$ de rango finito-dimensional (es decir, $F(X)$ está contenido en un subespacio finito-dimensional de X) tal que $\|F\|_L \leq \lambda$ y $\|F(x) - x\| \leq \varepsilon$ para todo $x \in K$.*

Observación No es difícil ver que puede asumirse que $F(0) = 0$.

Teorema 2.20 *Sea X un espacio de Banach cualquiera. Luego, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) *X tiene la λ -BAP.*

(ii) $\mathcal{F}(X)$ tiene la λ -BAP.

(iii) X tiene la λ -LBAP.

El teorema anterior muestra la estrecha relación entre los espacios X y $\mathcal{F}(X)$ con respecto a tener la propiedad de aproximación acotada. Ahora bien, en este mismo sentido, aún restan incógnitas. Para ello, considérese la siguiente definición

Definición 2.21 *Un espacio de Banach X tiene*

- una **base de Schauder** si existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X tal que para todo $x \in X$ existe una única sucesión de reales $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{k=1}^n a_k x_k \right\| = 0,$$

o equivalentemente, si existe una sucesión de proyecciones $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tales que

- (i) $S_0 = 0$,
 - (ii) $S_n S_m = S_{\min\{n,m\}}$,
 - (iii) $\dim(S_n - S_{n-1})(X) = 1$ y
 - (iv) $\|S_n - Id_X\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
- una **descomposición finito-dimensional (FDD)** si existe una sucesión $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subespacios de X de dimensión finita tal que para todo $x \in X$, existe una única sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, con $x_n \in E_n$, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{k=1}^n x_k \right\| = 0,$$

o equivalentemente, si existe una sucesión de proyecciones $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tales que

- (i) $S_0 = 0$,
- (ii) $S_n S_m = S_{\min\{n,m\}}$,
- (iii) $0 < \dim(S_n - S_{n-1})(X) < \infty$ y
- (iv) $\|S_n - Id_X\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

En ambos casos, se define la **constante de descomposición** $K = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n\|$. Si $K = 1$, se dice que la descomposición es **monótona**.

Proposición 2.22 *Sea X un espacio de Banach. Luego, cada una de las siguientes afirmaciones implica la siguiente:*

- (i) X tiene una base de Schauder.
- (ii) X tiene una FDD.
- (iii) X tiene la BAP.
- (iv) X tiene la AP.

Más aún, todas las recíprocas son falsas.

En virtud del Teorema 2.20 y la Proposición 2.22, la pregunta que surge naturalmente es si existe un resultado similar al Teorema 2.20 en el caso de la existencia de una FDD o una base de Schauder. Estas preguntas continúan abiertas, sin embargo existen respuestas parciales en casos particulares, como se muestra a continuación.

En [9], Lancien y Pernecká muestran que los espacios $\mathcal{F}(\ell_n^1)$ (es decir, el espacio Lipschitz-libre sobre \mathbb{R}^n dotado de la norma $\|\cdot\|_1$) y $\mathcal{F}(\ell^1)$ tienen una FDD monótona. Una generalización de este resultado es el obtenido por Hájek y Pernecká en [8], donde muestran que los espacios $\mathcal{F}(\ell_n^1)$ y $\mathcal{F}(\ell^1)$ tienen una base de Schauder. Además, en [6], Pernecká y Smith muestran que para ciertos subconjuntos $M \subseteq \mathbb{R}^n$, el espacio Lipschitz-libre $\mathcal{F}(M)$ tiene la MAP con respecto a cualquier norma en \mathbb{R}^n , y en particular, esto es cierto cuando M es un convexo compacto finito-dimensional.

Para finalizar la presente sección, se enuncian en detalle los resultados mencionados

Teorema 2.23 (Lancien-Pernecká, [9]) *Los espacios Lipschitz-libres $\mathcal{F}(\ell^1)$ y $\mathcal{F}(\ell_n^1)$ admiten descomposiciones finito-dimensionales monótonas.*

Teorema 2.24 (Hájek-Pernecká, [8]) *Sea X un producto numerable de intervalos cerrados de \mathbb{R} (eventualmente no acotados o degenerados) con extremos en $\mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}$, considerado como un subespacio métrico de ℓ^1 equipado con la métrica heredada. Entonces el espacio Lipschitz-libre $\mathcal{F}(X)$ tiene una base de Schauder. En particular, los espacios Lipschitz-libres $\mathcal{F}(\ell^1)$ y $\mathcal{F}(\ell_n^1)$ tienen una base de Schauder.*

Teorema 2.25 (Pernecká-Smith, [6]) *Sea $n \geq 1$ y considérese \mathbb{R}^n dotado de cualquier norma $\|\cdot\|$. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ un compacto con la propiedad de que dado $\xi > 0$, existe un conjunto $\hat{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ y una función Lipschitz $\Psi : \hat{M} \rightarrow M$ tales que $M \subseteq \text{int}(\hat{M})$, $\text{Lip}(\Psi) \leq 1 + \xi$ y $\|x - \Psi(x)\| \leq \xi$ para todo $x \in \hat{M}$. Entonces, el espacio Lipschitz-libre $\mathcal{F}(M)$ tiene la MAP.*

2.3. Espacios de Lebesgue-Bochner

En lo que sigue, se muestran las principales definiciones y resultados en torno a los espacios de Lebesgue-Bochner, una generalización de los clásicos espacios de Lebesgue L^p . La construcción de estos espacios es en esencia la misma que para los espacios de Lebesgue y se muestra como aparece en [11]. En este sentido, considérense las siguientes definiciones

Definición 2.26 *Sean X un espacio de Banach y (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. Una función $f : \Omega \rightarrow X$ se dice **simple** si existen $x_1, \dots, x_n \in X$ y $E_1, \dots, E_n \in \Sigma$ tales que*

$$f = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{1}_{E_k}.$$

*Una función $f : \Omega \rightarrow X$ se dice **μ -medible** si existe una sucesión de funciones simples*

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0, \mu\text{-ctp en } x$$

Bajo esta definición, es directo notar que los resultados de estabilidad de la clase de funciones medibles bajo sumas finitas, ponderación por escalar y límites puntuales ctp son válidos como en el caso en que $X = \mathbb{R}$. Dado lo anterior, el siguiente paso en la construcción es la definición de la clase de funciones integrables.

Definición 2.27 Una función μ -medible $f : \Omega \rightarrow X$ se dice **Bochner-integrable** si existe una sucesión de funciones simples $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|f_n - f\| d\mu = 0.$$

En este caso, $\int_E f d\mu$ está definida para cada $E \in \Sigma$ mediante

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu,$$

donde $\int_E f_n d\mu$ se define de la manera obvia.

Una útil caracterización de las funciones Bochner-integrables es la dada por el siguiente

Teorema 2.28 Una función μ -medible $f : \Omega \rightarrow X$ es Bochner-integrable si y sólo si la función $\|f\| : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable.

En Teoría de la Medida, uno de los principales resultados es el Teorema de Convergencia Dominada. Este resultado sigue siendo cierto en el caso de funciones a valores vectoriales.

Teorema 2.29 (Teorema de Convergencia Dominada) Sean (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones Bochner-integrables X -valuadas definidas sobre Ω . Si $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ en μ -medida, es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{\omega \in \Omega : \|f_n - f\| \geq \varepsilon\}) = 0, \forall \varepsilon > 0,$$

y si existe una función real-valuada g definida sobre Ω Lebesgue-integrable con $\|f_n\| \leq g$ μ -ctp, entonces f es Bochner-integrable y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu, \forall E \in \Sigma.$$

Más aún,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|f - f_n\| d\mu = 0$$

Como puede verse de lo anterior, en esencia la teoría de integrabilidad no difiere mucho entre los casos de funciones X -valuadas y funciones real-valuadas. En base a eso, considérese la siguiente definición

Definición 2.30 Sea $p \in [1, \infty)$. Se define el espacio $L^p(\Omega, \Sigma, \mu, X)$ dado por todas las (clases de equivalencia de) funciones μ -Bochner-integrables $f : \Omega \rightarrow X$ tales que

$$\|f\|_p := \left(\int_{\Omega} \|f\|_X^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Dicho espacio resulta ser un espacio de Banach al ser dotado de la norma definida por el funcional $\|\cdot\|_p$ definido arriba. Por otra parte, $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu, X)$ denota el espacio dado por todas las (clases de equivalencia de) funciones μ -medibles esencialmente acotadas, es decir, tales que

$$\|f\|_\infty := \text{ess sup } \|f\|_X < \infty.$$

Dicho espacio dotado de la norma dada por el funcional anterior resulta ser un espacio de Banach.

Finalmente, se destacan algunos resultados clásicos de los espacios de Lebesgue, los cuales siguen siendo ciertos en el caso de los espacios de Lebesgue-Bochner

Proposición 2.31 Sean X un espacio de Banach y Ω un abierto de \mathbb{R}^n . Luego, si μ es la medida de Lebesgue, $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^p(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu; X)$, entonces existe una sucesión $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones en $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega; X)$ tales que $\|\varphi_n - f\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Para el siguiente resultado, es necesario recordar las siguientes definiciones

Definición 2.32 Sea (Ω, Σ) un espacio medible. Se dice que $\mu : \Sigma \rightarrow X$ es una **medida vector-valuada** si

- $\mu(\emptyset) = 0$, y
- $\mu \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k)$, para toda familia $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de elementos de Σ disjuntos a pares.

Definición 2.33 Sea X un espacio de Banach. Para $\mu : \Sigma \rightarrow X$ una medida vector-valuada, se define su **variación** como la función $|\mu| : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ dada por

$$|\mu|(A) := \sup_{\pi} \sum_{B \in \pi} \|\mu(B)\|,$$

donde el supremo es tomado sobre todas las particiones finitas medibles π de A . Si además se verifica que $|\mu|(\Omega) < +\infty$, se dice que μ es de **variación acotada**.

Definición 2.34 Sean X un espacio de Banach, (Ω, Σ) un espacio medible, $\mu : \Sigma \rightarrow X$ una medida vector-valuada y $\nu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ una medida. Se dice que μ es **absolutamente continua con respecto a ν** (denotado por $\mu \ll \nu$) si se verifica que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall A \in \Sigma) \nu(A) < \delta \implies \|\mu(A)\| < \varepsilon.$$

Definición 2.35 Se dice que un espacio de Banach X tiene la **Propiedad de Radon-Nikodym** si para todo espacio de medida σ -finito y completo (Ω, Σ, μ) se verifica que para

toda medida vector-valuada $\nu : \Sigma \rightarrow X$ con variación acotada absolutamente continua con respecto a μ , existe una función $f \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu; X)$ tal que

$$\nu(A) = \int_A f d\mu, \forall A \in \Sigma.$$

Teorema 2.36 Sea X un espacio de Banach tal que X^* tiene la Propiedad de Radon-Nikodym, entonces $(L^p(\Omega, \Sigma, \mu; X))^* \equiv L^q(\Omega, \Sigma, \mu; X^*)$, donde $p \in [1, \infty)$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Ahora se enuncia el resultado que será fundamental en este trabajo

Proposición 2.37 (Dunford-Pettis) Sea Y un espacio de Banach y supóngase que $X := Y^*$ es separable. Entonces, X tiene la Propiedad de Radon-Nikodym.

Corolario 2.38 Todo espacio reflexivo tiene la propiedad de Radon-Nikodym. En particular, \mathbb{R}^n dotado de cualquier norma tiene la Propiedad de Radon-Nikodym.

Ya con todos los conceptos necesarios en cuanto a los espacios de Lebesgue-Bochner, se concluye esta sección con resultados de Teoría de la Medida que conciernen a las funciones llamadas absolutamente continuas.

Definición 2.39 Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se dice **absolutamente continua** si para toda familia finita de intervalos disjuntos a pares $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^k$ y todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{n=1}^k (b_n - a_n) < \delta \implies \sum_{n=1}^k |f(b_n) - f(a_n)| < \varepsilon.$$

Este concepto de continuidad será fundamental en el desarrollo del presente trabajo. Antes de enunciar el lema que será usado durante el desarrollo, y por completitud, considérese la siguiente

Proposición 2.40 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Luego, cada una de las siguientes afirmaciones implica la siguiente:

- (i) f es de clase \mathcal{C}^1 con derivada acotada.
- (ii) f es Lipschitz.
- (iii) f es absolutamente continua.
- (iv) f es uniformemente continua.
- (v) f es continua.

La demostración de la proposición anterior es elemental. Finalmente, el siguiente teorema entrega una relación concreta entre las funciones absolutamente continuas y su grado de diferenciabilidad.

Teorema 2.41 (Teorema Fundamental del Cálculo) *Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Luego, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *f es absolutamente continua.*

(ii) *f es derivable ctp, su derivada f' es Lebesgue-integrable y para todo $x \in [a, b]$*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt.$$

(iii) *Existe una función g Lebesgue-integrable en $[a, b]$ tal que, para todo $x \in [a, b]$*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt.$$

Las implicaciones (ii) \Rightarrow (iii) y (iii) \Rightarrow (i) son directas. Para (i) \Rightarrow (ii) puede verse, por ejemplo, [13].

La importancia de las afirmaciones anteriores radica en que las funciones Lipschitz, las cuales son de vital importancia en este estudio, resultan ser absolutamente continuas. Mediante el Teorema de Rademacher (ver el Apéndice A) se tiene directamente que una función Lipschitz $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ resulta ser derivable ctp, pero el teorema anterior dice además que es posible recuperar f a partir de su derivada. Un primer uso de este hecho puede verse en el Capítulo 3 del presente trabajo. En el Capítulo 4 se adaptan estas ideas al caso finito-dimensional, con dimensión mayor a 1.

Capítulo 3

Estudio del espacio $\mathcal{F}(\mathbb{R})$

Como se menciona anteriormente, el espacio $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ ha sido estudiado a fondo, existiendo para éste una caracterización. En esta sección se muestra que dicho espacio se identifica con $L^1(\mathbb{R})$. Con este fin, se enuncian resultados clásicos para las funciones Lipschitz, los cuales forman la base de los argumentos de las demostraciones posteriores.

En lo que sigue, y siguiendo la notación de 2.30, los espacios $L^1(\mathbb{R})$ y $L^\infty(\mathbb{R})$ denotan a los espacios $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), dx; \mathbb{R})$ y $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), dx; \mathbb{R})$, respectivamente, donde dx denota la medida de Lebesgue. Es directo notar que la definición dada de Bochner-integrabilidad (2.28) coincide trivialmente con la clásica definición de Lebesgue-integrabilidad. Un resultado clásico en torno a dichos espacios es que se tiene la identificación $(L^1(\mathbb{R}))^* \equiv L^\infty(\mathbb{R})$.

Proposición 3.1 *Los espacios $Lip_0(\mathbb{R})$ y $L^\infty(\mathbb{R})$ son linealmente isométricos, es decir se verifica que $Lip_0(\mathbb{R}) \equiv L^\infty(\mathbb{R})$.*

DEMOSTRACIÓN. Considérese el operador lineal $T : L^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow Lip_0(\mathbb{R})$ definido por

$$Tg(x) = \int_0^x g(t)dt \left(= \int_{\mathbb{R}} g(t)\mathbf{1}_{[0,x]}(t)dt \right)$$

para $x \in \mathbb{R}$. Es claro que las integrales que definen a Tg están bien definidas, gracias a que $g \in L^\infty(\mathbb{R})$. Además, es directo verificar que éste operador es lineal. Se verifica también que para $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, $Tg \in Lip_0(\mathbb{R})$. En efecto, sean $x, y \in \mathbb{R}$. Luego

$$|Tg(y) - Tg(x)| = \left| \int_0^y g(t)dt - \int_0^x g(t)dt \right| = \left| \int_x^y g(t)dt \right| \leq \|g\|_\infty |y - x|$$

de donde se deduce que $\|Tg\|_L \leq \|g\|_\infty$. Por último, es claro que $Tg(0) = 0$.

Para la sobreyectividad de este operador, considérese $f \in Lip_0(\mathbb{R})$. En virtud del Teorema de Rademacher (ver A.2), f' está bien definida ctp. Además, $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$. En efecto, para $x \in \mathbb{R}$ punto de diferenciabilidad de f , se tiene que

$$|f'(x)| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq \|f\|_L$$

de lo que se deduce que $\|f'\|_\infty \leq \|f\|_L$. Ahora, nótese que $T(f') = f$, ya que para $x \in \mathbb{R}$

$$T(f')(x) = \int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0) = f(x)$$

esto último en virtud del Teorema 2.41, ya que $f \in Lip_0(\mathbb{R})$ resulta ser absolutamente continua.

Para la inyectividad, basta ver que si $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ verifica que $Tg = 0$, entonces para todo $x, y \in \mathbb{R}$

$$\int_x^y g(t)dt = Tg(y) - Tg(x) = 0$$

y por lo tanto, $g = 0$ ctp.

En virtud de la biyectividad de T y notando que para $f \in Lip_0(\mathbb{R})$ se tiene que $T^{-1}f = f'$, se desprende que $\|T^{-1}f\|_\infty \leq \|f\|_L$, de donde se deduce que $\|Tg\|_L \geq \|g\|_\infty$ para $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ y por lo tanto T define un isometría lineal entre los espacios $Lip_0(\mathbb{R})$ y $L^\infty(\mathbb{R})$. \square

El próximo paso consiste en buscar una identificación para el espacio $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ a partir del operador T obtenido en la demostración anterior. Para ello, considérese T^* el operador adjunto de T . Es sabido que gracias a las propiedades de T , T^* define un isomorfismo isométrico entre los espacios $Lip_0(\mathbb{R})^*$ y $(L^\infty(\mathbb{R}))^*$. Sea entonces $S : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \rightarrow (L^\infty(\mathbb{R}))^*$ definido como $S = T^*|_{\mathcal{F}(\mathbb{R})}$. Es claro que este operador verifica $\|S\mu\|_* = \|\mu\|_{\mathcal{F}}$, donde $\|\cdot\|_*$ denota la norma de $(L^\infty(\mathbb{R}))^*$. Así, es claro que el subespacio Y de $(L^\infty(\mathbb{R}))^*$ dado por $Y = S(\mathcal{F}(\mathbb{R}))$ verifica $\mathcal{F}(\mathbb{R}) \equiv Y$.

Con esto en consideración, el objetivo es identificar la imagen del operador S . Para ello, es necesario el siguiente lema:

Lema 3.2 *Sea $\mu \in \text{span}\{\delta(x) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. Luego, existen $k \in \mathbb{N}$, $y_1, \dots, y_{k+1}, \eta_1, \dots, \eta_k \in \mathbb{R}$ tales que*

- $(\forall i \in \{1, \dots, k\}) y_i < y_{i+1}, y$
- $\mu = \sum_{i=1}^k \eta_i (\delta(y_{i+1}) - \delta(y_i)).$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mu \in \text{span}\{\delta(x) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. Luego, existen $k \in \mathbb{N}$ y reales no nulos $x_1, \dots, x_k, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ tales que

$$\mu = \sum_{i=1}^k \lambda_i \delta(x_i).$$

Sin pérdida de generalidad, asúmase que $x_1 < x_2 < \dots < x_k$. Considérese en principio el caso en que $x_1 > 0$. Defínase $y_1 = 0$ y para $i = 1, \dots, k$

$$y_{i+1} = x_i, \eta_i = \sum_{j=i}^k \lambda_j.$$

Con esto, se verifica que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \eta_i(\delta(y_{i+1}) - \delta(y_i)) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=i}^k \lambda_j(\delta(y_{i+1}) - \delta(y_i)) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^j \lambda_j(\delta(y_{i+1}) - \delta(y_i)) \\ &= \sum_{j=1}^k \lambda_j(\delta(y_{j+1}) - \delta(y_1)) = \sum_{j=1}^k \lambda_j \delta(x_j) = \mu, \end{aligned}$$

con lo que se concluye en este caso. En el caso en que $x_k < 0$, se define $y_{k+1} = 0$ y para $i = 1, \dots, k$

$$y_i = x_i, \eta_i = -\sum_{j=1}^i \lambda_j,$$

de manera que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \eta_i(\delta(y_{i+1}) - \delta(y_i)) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^i -\lambda_j(\delta(y_{i+1}) - \delta(y_i)) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=j}^k \lambda_j(\delta(y_{i+1}) - \delta(y_i)) \\ &= \sum_{j=1}^k -\lambda_j(\delta(y_{k+1}) - \delta(y_j)) = \sum_{j=1}^k \lambda_j \delta(x_j) = \mu, \end{aligned}$$

con lo que se concluye también en este caso. Finalmente, en el caso general, sea $\tilde{k} < k$ tal que $x_{\tilde{k}} < 0$ y $x_{\tilde{k}+1} > 0$. Así, se tiene la siguiente descomposición

$$\mu = \sum_{i=1}^k \lambda_i \delta(x_i) = \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \lambda_i \delta(x_i) + \sum_{i=\tilde{k}+1}^k \lambda_i \delta(x_i) = \mu_- + \mu_+,$$

y en virtud de los casos anteriores, se concluye. \square

Usando este lema, se muestra que $S(\mathcal{F}(\mathbb{R})) \equiv L^1(\mathbb{R})$ en la siguiente

Proposición 3.3 *Los espacios $S(\mathcal{F}(\mathbb{R}))$ y $L^1(\mathbb{R})$ son linealmente isométricos, es decir, se verifica que $S(\mathcal{F}(\mathbb{R})) \equiv L^1(\mathbb{R})$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $x, y \in \mathbb{R}$, $g \in L^\infty(\mathbb{R})$. Nótese que

$$\langle S(\delta(y) - \delta(x)), g \rangle = \langle \delta(y) - \delta(x), Tg \rangle = \int_x^y g(t) dt = \int g(t) \cdot \mathbf{1}_{[x,y]}(t) dt = \langle \mathbf{1}_{[x,y]}, g \rangle.$$

En vista de esto, sea $F := S(\text{span}\{\delta(x) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}) \rightarrow L^1(\mathbb{R})$ el operador lineal tal que

$$FS(\delta(y) - \delta(x)) = \mathbf{1}_{[x,y]}.$$

Para concluir, basta con ver que la imagen de $S(\text{span}\{\delta(x) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\})$ a través de F es densa en $L^1(\mathbb{R})$ y que la norma en $S(\text{span}\{\delta(x) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\})$ es igual a la norma en dicha imagen.

Sean $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$ y f_ε una función simple tal que $\|f - f_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$. Sin pérdida de generalidad, se asume que f_ε es de la forma

$$f_\varepsilon = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{1}_{[x_i, x_{i+1}]},$$

para ciertos $x_1, \dots, x_{k+1} \in \mathbb{R}$, con $x_i < x_{i+1}$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$.

Sean $\mu = \sum_{i=1}^k \lambda_i (\delta(x_{i+1}) - \delta(x_i))$ y $\varphi = S\mu \in S(\text{span}\{\delta(x) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\})$. Es claro así que

$$F\varphi = \sum_{i=1}^k \lambda_i FS(\delta(x_{i+1}) - \delta(x_i)) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{1}_{[x_i, x_{i+1}]} = f_\varepsilon,$$

de donde se concluye que $\|f - F\varphi\|_1 < \varepsilon$, es decir, se tiene la densidad mencionada. Finalmente, sean μ y φ como antes. Se tiene que para $g \in L^\infty(\mathbb{R})$

$$\langle \varphi, g \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{1}_{[x_i, x_{i+1}]}, g \right\rangle = \langle F\varphi, g \rangle.$$

Luego

$$\|\varphi\|_* = \sup_{\|g\|_\infty=1} \langle \varphi, g \rangle = \max_{\|g\|_\infty=1} \langle F\varphi, g \rangle = \|F\varphi\|_1,$$

Esto último gracias a que $L^\infty(\mathbb{R})$ se identifica con el dual de $L^1(\mathbb{R})$. Se concluye así que es posible extender el operador F a $S(\mathcal{F}(\mathbb{R}))$ con valores en $L^1(\mathbb{R})$ gracias a que

$$\overline{S(\text{span}\{\delta(x) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\})} = S(\overline{\text{span}\{\delta(x) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}}) = S(\mathcal{F}(\mathbb{R})).$$

Por lo tanto, se concluye que $\mathcal{F}(\mathbb{R}) \equiv L^1(\mathbb{R})$. □

Si bien esta demostración otorga el resultado buscado, existe otra alternativa, en la que se utiliza el hecho de que $(L^1(\mathbb{R}))^* \equiv L^\infty(\mathbb{R})$. Se entrega esta por completitud.

DEMOSTRACIÓN. Se verifica que el operador $T : L^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow Lip_0(\mathbb{R})$ es w^*-w^* -continuo. En efecto, sea $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $L^\infty(\mathbb{R})$ w^* -convergente a $g \in L^\infty$. Luego, para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\langle \delta(x), Tg_n \rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0, x]}(t) g_n(t) dt = \langle g_n, \mathbf{1}_{[0, x]} \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle g, \mathbf{1}_{[0, x]} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0, x]}(t) g(t) dt = \langle \delta(x), Tg \rangle.$$

En virtud de la densidad de $\text{span}\{\delta(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ en $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, se concluye que para todo $\mu \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ se tiene que

$$\langle \mu, Tg_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle \mu, Tg \rangle,$$

es decir, T es w^*-w^* -continuo. Luego, existe $S : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \rightarrow L^1(\mathbb{R})$ tal que $S^* = T$. Es claro así que S define una isometría lineal entre $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $L^1(\mathbb{R})$. □

Cabe destacar que la demostración anterior es de hecho más general. Se enuncia este hecho en el siguiente

Corolario 3.4 *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. Luego, los espacios $\mathcal{F}(I)$ y $L^1(I)$ son linealmente isomorfos isométricos, es decir $\mathcal{F}(I) \cong L^1(I)$.*

DEMOSTRACIÓN. Basta notar que los argumentos de las demostraciones anteriores son locales (i.e., no radican en la naturaleza no acotada de \mathbb{R}), y siguen siendo igualmente válidos en presencia de convexidad. Como los convexos en \mathbb{R} son los intervalos, teniendo el cuidado de usar como base de integración en el operador T al punto base en el cual se anulan las funciones de $Lip_0(I)$, se concluye. \square

Capítulo 4

Identificación de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$

En este capítulo se muestra, para cada $n \in \mathbb{N}$, un subespacio denso de un espacio isomorfo e isométrico a $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Como se muestra en el capítulo anterior, el problema de identificar $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ está resuelto, y en este caso se cumple que $\mathcal{F}(\mathbb{R}) \equiv L^1(\mathbb{R})$. En lo que sigue, se utiliza la línea de la demostración del caso $n = 1$ para describir $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ en el caso $n > 1$. Para ello, se desarrollará el trabajo, en analogía al caso $n = 1$, sobre el espacio $L^\infty(\mathbb{R}^n; (\mathbb{R}^n)^*)$. En adelante, $L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ y $L^\infty(\mathbb{R}^n; (\mathbb{R}^n)^*)$ denotan los espacios $L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda^{(n)}; \mathbb{R}^n)$ y $L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda^{(n)}; (\mathbb{R}^n)^*)$, respectivamente, donde $\lambda^{(n)}$ denota la medida de Lebesgue n -dimensional. Es importante aquí recalcar que la norma utilizada en $L^\infty(\mathbb{R}^n; (\mathbb{R}^n)^*)$ es la asociada a la norma dual $\|\cdot\|_*$ de la norma utilizada en \mathbb{R}^n .

Lamentablemente, una generalización del caso $n = 1$ no radica sólo en cambiar los procedimientos a éste espacio. Para comprender esto, es necesario recordar el rol de $L^\infty(\mathbb{R})$ en el caso unidimensional. En virtud de la Proposición 3.1, se interpretan los elementos de $L^\infty(\mathbb{R})$ como derivadas de funciones Lipschitz. Los puntos clave en este sentido son que

1. Notando que g es de hecho una clase de equivalencia (con respecto a la igualdad en casi todo punto), los argumentos de la demostración son válidos independiente del representante de la clase escogido. Esto último ya que las integrales que definen a T son siempre sobre conjuntos de medida completa.
2. La naturaleza unidimensional de \mathbb{R} permite estudiar fácilmente los valores de las diferencias $Tg(x) - Tg(y)$, para $x, y \in \mathbb{R}$.

Vemos ahora que estos puntos clave no se tienen en el caso en que $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n; (\mathbb{R}^n)^*)$. Para ello, y siguiendo la idea del caso unidimensional, considérese la función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \int_0^1 \langle g(tx), x \rangle dt$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno usual en \mathbb{R}^n . Nótese que en el caso unidimensional, mediante un cambio de variables se obtiene exactamente la definición del operador T . Ahora bien, en dimensiones superiores, lo ideal sería considerar g como el gradiente de una función Lipschitz, el cual está bien definido ctp en virtud del Teorema de Rademacher (ver A.2).

Vemos que de hecho esto no es posible para toda g , comparando con los puntos clave mencionados anteriormente

1. Las funciones $g_1 = 0$ y $g_2 = e_1 \mathbf{1}_{\mathbb{R}e_1}$, con e_1 el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n , pertenecen a la misma clase de equivalencia. Pero las funciones definidas por ellas son $f_1 = 0$ y $f_2(t) = t \mathbf{1}_{\mathbb{R}e_1}$. De hecho, f_2 falla incluso en la continuidad. Es importante mencionar además que en general podrían existir direcciones en \mathbb{R}^n tales que la función $\langle g(tx), x \rangle$ no sea ni siquiera integrable en $[0, 1]$.
2. Las diferencias de la forma

$$\int_0^1 \langle g(ty), y \rangle dt - \int_0^1 \langle g(tx), x \rangle dt = \int_0^1 \langle g(ty), y \rangle - \langle g(tx), x \rangle dt$$

no permiten en general obtener una expresión sencilla de cálculo, esto principalmente por la presencia de más de una dirección en las integrales. Esto afecta directamente el método para verificar la condición de Lipschitz para las funciones así definidas.

4.1. Identificación de $Lip_0(\mathbb{R}^n)$

En vista de lo mencionado anteriormente, y considerando que de todas formas los gradientes de funciones Lipschitz pertenecen al espacio $L^\infty(\mathbb{R}^n; (\mathbb{R}^n)^*)$, se propone hallar un subespacio vectorial X que sea linealmente isométrico a $Lip_0(\mathbb{R}^n)$, es decir $X \equiv Lip_0(\mathbb{R}^n)$. Para ello, es necesario considerar algunas propiedades básicas del espacio $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n; (\mathbb{R}^n)^*)$ de las funciones esencialmente acotadas.

Proposición 4.1 Sean $g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n; (\mathbb{R}^n)^*)$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Se define el conjunto

$$B := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|g(x + t(y - x))\|_* \leq \|g\|_\infty \text{ ctp en } [0, 1]\}.$$

Entonces, B tiene medida completa.

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad, puede asumirse que $x = 0$. Considérese entonces en lo que sigue el conjunto $B = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|g(ty)\|_* \leq \|g\|_\infty \text{ ctp en } t \in [0, 1]\}$. Supóngase que B no tiene medida completa, es decir, $\lambda^{(n)}(B^c) > 0$. Luego, existen $z \in \mathbb{R}^n$ y $\delta > 0$ tales que $\lambda^{(n)}(B^c \cap B(z, \delta)) > 0$. Considérese el conjunto $C = \text{conv}(\{0\} \cup B(z, \delta))$. Es claro que este conjunto tiene medida positiva. Nótese que

$$\int_{C \cap B^c} \|g\|_* \mathbf{1}_{\{\|g\|_* > \|g\|_\infty\}} d\lambda^{(n)} = \int_S \int_0^{r(v)} \|g(tv)\|_* \mathbf{1}_{\{\|g(\cdot v)\|_* > \|g\|_\infty\}}(t) dt dv$$

donde $S = \{v \in \partial B_2(0, 1) \mid (\exists x \in C \cap B^c) v = \frac{x}{\|x\|_2}\}$, dv es la medida de superficie sobre $\partial B_2(0, 1)$ y $r(v) = \sup\{r > 0 \mid rv \in C \cap B^c\}$. Sea entonces $v \in S$ y $x \in C \cap B^c$ cualquier punto tal que $v = \frac{x}{\|x\|_2}$. Luego

$$\int_0^{r(v)} \|g(tv)\|_* \mathbf{1}_{\{\|g(\cdot v)\|_* > \|g\|_\infty\}}(t) dt > \|g\|_\infty \int_0^{r(v)} \mathbf{1}_{\{\|g(\cdot v)\|_* > \|g\|_\infty\}}(t) dt \geq 0,$$

donde la desigualdad estricta se tiene ya que $\int_0^{r(v)} \mathbf{1}_{\{\|g(\cdot v)\|_* > \|g\|_\infty\}}(t) dt > 0$. En efecto

$$\begin{aligned} \int_0^{r(v)} \mathbf{1}_{\{\|g(\cdot v)\|_* > \|g\|_\infty\}}(t) dt &= \int_0^{r(v)} \mathbf{1}_{\{\|g(\cdot x/\|x\|_2)\|_* > \|g\|_\infty\}} \left(\frac{t}{\|x\|_2} \right) dt \\ &= \|x\|_2 \int_0^{r(v)/\|x\|_2} \mathbf{1}_{\{\|g(\cdot x)\|_* > \|g\|_\infty\}}(t) dt \end{aligned}$$

Nótese ahora que como $x \in C \cap B^c$ y $x = \|x\|_2 v$, entonces $r(v) \geq \|x\|_2$. Así

$$\int_0^{r(v)/\|x\|_2} \mathbf{1}_{\{\|g(\cdot x)\|_* > \|g\|_\infty\}}(t) dt \geq \int_0^1 \mathbf{1}_{\{\|g(\cdot x)\|_* > \|g\|_\infty\}}(t) dt > 0,$$

donde esto último es consecuencia directa de la elección de x . Se concluye así que para todo $v \in S$

$$\int_0^{r(v)} \|g(tv)\|_* \mathbf{1}_{\{\|g(\cdot v)\|_* > \|g\|_\infty\}}(t) dt > 0.$$

Nótese ahora que $dv(S) > 0$, ya que en caso contrario

$$0 < \lambda^{(n)}(B^c \cap B(z, \delta)) \leq \lambda^{(n)}(B^c \cap C) = 0,$$

donde esta última igualdad es válida si $dv(S) = 0$. Se concluye así que

$$0 < \int_{C \cap B^c} \|g\|_* \mathbf{1}_{\{\|g\|_* > \|g\|_\infty\}} d\lambda^{(n)} \leq \int_C \|g\|_* \mathbf{1}_{\{\|g\|_* > \|g\|_\infty\}} d\lambda^{(n)},$$

lo cual es imposible, ya que $\lambda^{(n)}(C) > 0$ y $\|g\|_* \leq \|g\|_\infty$ ctp. \square

De lo anterior, se obtienen directamente los siguientes corolarios.

Corolario 4.2 Sean $g = 0$ ctp y $x \in \mathbb{R}^n$. Considérese el conjunto

$$A := \{y \in \mathbb{R}^n \mid g(x + t(y - x)) = 0 \text{ ctp en } [0, 1]\}.$$

Entonces, A tiene medida completa.

DEMOSTRACIÓN. Basta con aplicar la Proposición 4.1 a la función g y notar que $\|g\|_\infty = 0$. \square

Corolario 4.3 Sean $g, h \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, con $g = h$ ctp, y $x \in \mathbb{R}^n$. Considérese el conjunto

$$A := \{y \in \mathbb{R}^n \mid g(x + t(y - x)) = h(x + t(y - x)) \text{ ctp en } t \in [0, 1]\}.$$

Entonces, A tiene medida completa.

DEMOSTRACIÓN. Basta con aplicar el Corolario 4.2 a la función $g - h$, la cual es nula ctp. \square

Definición 4.4 Para $g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n; (\mathbb{R}^n)^*)$ se define $f_g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f_g(x) := \int_0^1 \langle g(tx), x \rangle dt,$$

cuando la integral esté bien definida. En caso contrario, $f_g(x)$ se define simplemente como 0.

Observación Nótese que gracias a la Proposición 4.1, la integral anterior está bien definida para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$. En efecto, para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que, $\|g(tx)\|_* \leq \|g\|_\infty$, para casi todo $t \in [0, 1]$. Luego,

$$\left| \int_0^1 \langle g(tx), x \rangle dt \right| \leq \int_0^1 |\langle g(tx), x \rangle| dt \leq \|g\|_\infty \|x\|$$

Proposición 4.5 Sean $g, h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ tales que $g = h$ ctp. Entonces $f_g = f_h$ ctp.

DEMOSTRACIÓN. Nótese que en virtud del Corolario 4.3 y la observación anterior, el operador $g \mapsto f_g$ verifica que $f_{g+h} = f_g + f_h$ ctp para todo $g, h \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n; (\mathbb{R}^n)^*)$. Además, $f_{\lambda g} = \lambda f_g$ para todo $g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n; (\mathbb{R}^n)^*)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Luego, basta con considerar $h = 0$ y probar que $f_g = 0$ ctp (esto ya que $f_0 = 0$ en todas partes). En virtud del Corolario 4.2, el conjunto $A = \{y \in \mathbb{R}^n \mid g(tx) = 0 \text{ ctp en } [0, 1]\}$ tiene medida completa. Es claro así que $f_g(x) = 0$, para todo $x \in A$ y por lo tanto $f_g = 0$ ctp. \square

Una propiedad esencial de las funciones Lipschitz definidas sobre \mathbb{R}^n es que sus derivadas direccionales cumplen una condición tipo Poincaré. Más precisamente, para $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función Lipschitz se verifica que, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\int_0^1 f'(ty; y) dt - \int_0^1 f'(tx; x) dt = \int_0^1 f'(x + t(y - x); y - x) dt,$$

esto gracias al Teorema 2.41. En otras palabras, si $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ es el triángulo de vértices $\{0, x, y\}$, entonces

$$\oint_{\Delta} f'(\vec{r}; \vec{t}) d\vec{r} = 0,$$

donde \vec{t} denota el vector tangente a Δ en \vec{r} . En vista de lo anterior, considérese la siguiente definición:

Definición 4.6 Se dice que $g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n; (\mathbb{R}^n)^*)$ es **Lipschitz-compatible** si verifica que para casi todo $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$f_g(y) - f_g(x) = \int_0^1 \langle g(x + t(y - x)), y - x \rangle dt$$

Proposición 4.7 Si g es Lipschitz-compatible y $h = g$ ctp, entonces h es Lipschitz-compatible.

DEMOSTRACIÓN. Sean g Lipschitz-compatible y $h = g$ ctp. Considérense los siguientes conjuntos

- $A_x = \{y \in \mathbb{R}^n \mid g(x + t(y - x)) = h(x + t(y - x)) \text{ ctp en } t \in [0, 1]\}$.
- $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_g(y) - f_g(x) = \int_0^1 \langle g(x + t(y - x)), y - x \rangle dt, \text{ para casi todo } y \in \mathbb{R}^n\}$.
- $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_g(x) = f_h(x)\}$.
- $E_x = \{y \in \mathbb{R}^n \mid f_g(y) - f_g(x) = \int_0^1 \langle g(x + t(y - x)), y - x \rangle dt\}$.

Gracias al Corolario 4.3 y la Proposición 4.5 los conjuntos A_x , para todo $x \in \mathbb{R}^n$, y D tienen medida completa. Además, gracias a que g es Lipschitz-compatible, C y E_x (para todo $x \in C$) también tienen medida completa. Sean entonces $x \in C \cap D$ e $y \in A_x \cap D \cap E_x$. Con esto,

$$\begin{aligned} f_h(y) - f_h(x) &= f_g(y) - f_g(x) = \int_0^1 \langle g(x + t(y-x)), y-x \rangle dt \\ &= \int_0^1 \langle h(x + t(y-x)), y-x \rangle dt. \end{aligned}$$

Notando que los conjuntos $C \cap D$ y $A_x \cap D \cap E_x$ son ambos de medida completa, se concluye. \square

Definición 4.8 Se define el espacio de las funciones **esencialmente Lipschitz** como

$$\mathcal{Lip}(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid \mathcal{L}(f) < +\infty\},$$

donde la **constante esencial de Lipschitz** se define como

$$\mathcal{L}(f) = \operatorname{ess\,sup}_{x \neq y} \frac{|f(y) - f(x)|}{\|y - x\|}.$$

Se dirá además que $f \in \mathcal{Lip}_0(\mathbb{R}^n)$ si $f \in \mathcal{Lip}(\mathbb{R}^n)$ y existe $K \geq \mathcal{L}(f)$ tal que $|f(x)| \leq K\|x\|$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Proposición 4.9 Sea g Lipschitz-compatible. Entonces, $f_g \in \mathcal{Lip}_0(\mathbb{R}^n)$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $f_g(y) - f_g(x) = \int_0^1 \langle g(x + t(y-x)), y-x \rangle dt$. Luego

$$\begin{aligned} |f_g(y) - f_g(x)| &= \left| \int_0^1 \langle g(x + t(y-x)), y-x \rangle dt \right| \leq \int_0^1 |\langle g(x + t(y-x)), y-x \rangle| dt \\ &\leq \int_0^1 \|g(x + t(y-x))\|_* \|y-x\| dt \end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{|f_g(y) - f_g(x)|}{\|y-x\|} \leq \int_0^1 \|g(x + t(y-x))\|_* dt.$$

Si además y verifica que $\|g(x + t(y-x))\|_* \leq \|g\|_\infty$ ctp en $[0, 1]$, entonces se concluye que

$$\frac{|f_g(y) - f_g(x)|}{\|y-x\|} \leq \|g\|_\infty.$$

Notando así que para todo $x \in \mathbb{R}^n$, el conjunto de los $y \in \mathbb{R}^n$ que verifican esto último es de medida completa, se concluye que $\mathcal{L}(f_g) \leq \|g\|_\infty < +\infty$.

Ahora bien, para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$f_g(x) = \int_0^1 \langle g(tx), x \rangle dt.$$

Además, para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ se verifica que $\|g(tx)\|_* \leq \|g\|_\infty$ ctp en $[0, 1]$. Así, para $x \in \mathbb{R}^n$ verificando ambas condiciones se tiene que

$$|f_g(x)| \leq \left| \int_0^1 \langle g(tx), x \rangle dt \right| \leq \int_0^1 \|g(tx)\|_* \|x\| dt \leq \|g\|_\infty \|x\|.$$

Tomando $K = \|g\|_\infty \geq \mathcal{L}(f_g)$, se concluye. \square

Nótese que con las definiciones del espacio $\mathcal{L}ip_0(\mathbb{R}^n)$ y de la condición de Lipschitz-compatibilidad sobre $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n; (\mathbb{R}^n)^*)$ es posible evadir los problemas presentados al comienzo de este capítulo, gracias a los resultados mostrados. Más aún, gracias a esto mismo, es posible hablar de ahora en adelante simplemente del espacio $L^\infty(\mathbb{R}^n; (\mathbb{R}^n)^*)$, ya que como ya fue probado, la condición de Lipschitz-compatibilidad es una propiedad inherente a las clases de equivalencia bajo la igualdad ctp.

En este sentido, la pregunta natural es sobre la relación entre los espacios $\mathcal{L}ip_0(\mathbb{R}^n)$ y $Lip_0(\mathbb{R}^n)$, la cual es respondida en lo que sigue.

Proposición 4.10 $\mathcal{L}(\cdot)$ define una seminorma en $\mathcal{L}ip(\mathbb{R}^n)$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración es directa, y es análoga (por ejemplo) a la de que

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |g(x)|$$

define una seminorma en $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$. \square

Proposición 4.11 Sea $f \in \mathcal{L}ip_0(\mathbb{R}^n)$. Luego, si $\mathcal{L}(f) = 0$, entonces $f = 0$ ctp.

DEMOSTRACIÓN. Basta notar que si $\mathcal{L}(f) = 0$, entonces

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{\|y - x\|} = 0$$

para casi todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. En particular, $f(x) = f(y)$ para casi todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Así, f es constante ctp. Supongamos entonces que $|f| = c > 0$ ctp. Sean $K > 0$ tal que $|f(x)| \leq K\|x\|$ y $\delta = \frac{c}{K}$, para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$. Luego, para casi todo $x \in B(0, \delta)$

$$|f(x)| \leq K\|x\| < \frac{Kc}{K} = c,$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto $f = 0$ ctp. \square

Observación Gracias a la definición de $\mathcal{L}(\cdot)$, la conversa es trivialmente cierta. Dicho de otra forma, si $f = 0$ ctp, entonces $\mathcal{L}(f) = 0$. Gracias a esto y a la desigualdad triangular, se verifica que $f_1 = f_2$ ctp, entonces $\mathcal{L}(f_1) = \mathcal{L}(f_2)$.

En virtud de lo anterior, es natural considerar el espacio vectorial normado Y dado por

$$Y := \mathcal{L}ip_0(\mathbb{R}^n) / \sim,$$

donde \sim denota la relación de equivalencia definida por la igualdad en casi todos los puntos, dotado de la norma $\|[f]\|_{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(f)$. Considerando esto, se tiene el siguiente

Lema 4.12 *Los espacios Y (definido arriba) y $Lip_0(\mathbb{R}^n)$ son linealmente isométricos, es decir $Y \equiv Lip_0(\mathbb{R}^n)$.*

DEMOSTRACIÓN. Para esto, nótese que para cada $[f] \in Y$ existe una única función $\tilde{f} \in Lip_0(\mathbb{R}^n)$ tal que $\tilde{f} \in [f]$. En efecto, sean $[f] \in Y$ y C un conjunto de medida completa tal que

$$|f(y) - f(x)| \leq \|[f]\|_{\mathcal{L}} \|y - x\|, \forall x, y \in C.$$

De esto se desprende que f es Lipschitz en C , que resulta ser un denso en \mathbb{R}^n . En virtud de esta densidad, existe una única extensión \tilde{f} de f tal que $\|\tilde{f}\|_L = \|[f]\|_{\mathcal{L}}$. Más aún, $\tilde{f}(0) = 0$, ya que para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ se verifica

$$|\tilde{f}(x)| \leq K\|x\|,$$

para alguna constante $K \geq \|[f]\|_{\mathcal{L}}$. En virtud de la continuidad de \tilde{f} , se concluye que $\tilde{f}(0) = 0$.

Resta entonces ver que si $f_1 = f_2$ ctp, entonces necesariamente se debe verificar que $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$. Si esto no fuese cierto, entonces existirían $x \in \mathbb{R}^n$ y $\delta > 0$ tales que $|\tilde{f}_1 - \tilde{f}_2| > 0$ en $B(x, \delta)$. De esto se desprende que $|f_1 - f_2| > 0$ ctp en $B(x, \delta)$, lo que contradice el hecho de que $f_1 = f_2$ ctp.

Notando por último que $Lip_0(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{L}ip_0(\mathbb{R}^n)$, es claro ahora que el operador $[f] \mapsto \tilde{f}$ define una isometría lineal entre los espacios Y y $Lip_0(\mathbb{R}^n)$. \square

Es importante recalcar que esto último termina de resolver uno de los problemas enunciados en el comienzo de este capítulo. Más precisamente, aquel en torno a que en algunos casos podían obtenerse incluso funciones discontinuas. De hecho en el ejemplo dado ahí, la función escogida en $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n; (\mathbb{R}^n)^*)$ verifica la condición de Lipschitz-compatibilidad. Pasando al cociente mostrado más arriba, esta dificultad es completamente superada.

Se muestran ahora dos lemas, los cuales permiten encontrar una forma compatible con los resultados anteriores de recuperar $f \in Lip_0(\mathbb{R}^n)$ a partir de su gradiente ∇f .

Lema 4.13 *Sea $f \in Lip_0(\mathbb{R}^n)$ y denótese por D_f el conjunto de puntos de diferenciabilidad de f . Considérese la función $g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n; (\mathbb{R}^n)^*)$ dada por*

$$g(x) := \begin{cases} \nabla f(x) & , \quad x \in D_f \\ f'(x; x) \cdot \frac{u_x}{\|x\|} & , \quad x \notin D_f \wedge x \neq 0 \wedge f'(x; x) \text{ existe} \\ 0 & , \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

donde $u_x \in \mathbb{R}^n$ es tal que $\|u_x\|_* = 1$ y $\langle u_x, x \rangle = \|x\|$. Luego, $f_g = f$.

DEMOSTRACIÓN. Nótese primero que la existencia de los vectores $u_x \in \mathbb{R}^n$ mencionados arriba es una consecuencia directa del Teorema de Hahn-Banach. Ahora, para $x \in \mathbb{R}^n$ y $t \in [0, 1]$ se tiene que si $tx \in D_f$

$$\|g(tx)\|_* = \|\nabla f(tx)\|_* \leq \|f\|_L$$

y si $tx \notin D_f \wedge tx \neq 0 \wedge f'(tx; x)$ existe

$$\|g(tx)\|_* = \left\| f'(tx; tx) \cdot \frac{u_{tx}}{\|tx\|} \right\|_* = |f'(tx; x)| \frac{\|u_{tx}\|_*}{\|x\|} \leq \|f\|_L.$$

Nótese que en esto último se han usado dos hechos fácilmente verificables. El primero es que para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$ se tiene que $u_{tx} = u_x$, mientras que el segundo es que la existencia de las derivadas direccionales $f'(tx; tx)$ y $f'(tx; x)$ son equivalentes (más aún, $f'(tx; tx) = tf'(tx; x)$). Como en el caso restante de la definición se tiene que $g(tx) = 0$, se concluye que $\|g(tx)\|_* \leq \|f\|_L$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $t \in [0, 1]$. En particular, se tiene que

$$f_g(x) = \int_0^1 \langle g(tx), x \rangle dt,$$

ya que las integrales están bien definidas.

Usando la definición de g , nótese que en los dos primeros casos se verifica

$$\begin{aligned} \langle g(tx), x \rangle &= \langle \nabla f(tx), x \rangle = f'(tx; x) \\ \langle g(tx), x \rangle &= \frac{f'(tx; x)}{\|x\|} \langle u_x, x \rangle = f'(tx; x). \end{aligned}$$

Considérese ahora para $x \in \mathbb{R}^n$ la función definida para $t \in [0, 1]$ dada por $\varphi(t) = f(tx)$. Esta función resulta ser Lipschitz, y en consecuencia derivable ctp y absolutamente continua. Luego, se verifica

$$\varphi'(t) = f'(tx; x)$$

y

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t) dt.$$

En vista de esto, es claro que $\langle g(tx), x \rangle = f'(tx; x)$ para casi todo $t \in [0, 1]$. Así

$$f(x) - f(0) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t) dt = \int_0^1 f'(tx; x) dt = \int_0^1 \langle g(tx), x \rangle dt = f_g(x),$$

que es lo que se busca probar. \square

Lema 4.14 Sean $f \in Lip_0(\mathbb{R}^n)$, D_f el conjunto de sus puntos de diferenciabilidad y $x \in \mathbb{R}^n$. Luego, el conjunto $B := \{y \in \mathbb{R}^n \mid x + t(y - x) \in D_f \text{ ctp en } t \in [0, 1]\}$ tiene medida completa.

DEMOSTRACIÓN. La demostración es análoga a la de la Proposición 4.1. \square

Estando ahora enunciados todos los resultados requeridos, se muestra el resultado principal de la presente sección, es decir, se define un espacio isomorfo e isométrico a $Lip_0(\mathbb{R}^n)$

Definición 4.15 Se define el espacio X como el subespacio vectorial de $L^\infty(\mathbb{R}^n; (\mathbb{R}^n)^*)$ dado por las clases de equivalencia Lipschitz-compatibles.

Teorema 4.16 Los espacios X y $Lip_0(\mathbb{R}^n)$ son linealmente isométricos, es decir, se verifica que $X \cong Lip_0(\mathbb{R}^n)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $T : X \rightarrow Lip_0(\mathbb{R}^n)$ el operador definido como $Tg := \tilde{f}_g$. Es claro que gracias a los resultados anteriores, este operador está bien definido (es decir, no depende del representante de la clase de equivalencia) y es además lineal continuo, ya que se tiene que $\|Tg\|_L \leq \|g\|_\infty$. Considérese ahora el operador $R : Lip_0(\mathbb{R}^n) \rightarrow X$ dado por $Rf = \nabla f$ (donde se asume que $\nabla f(x) = 0$ en los puntos de no diferenciabilidad de f). Nótese que gracias a la Proposición 4.14, el operador R está bien definido (es decir, ∇f es Lipschitz-compatible). Además $TR = Id_{Lip_0(\mathbb{R}^n)}$. En efecto, para $f \in Lip_0(\mathbb{R}^n)$ se verifica

$$TRf = T\nabla f = T\bar{g} = f_{\bar{g}} = f,$$

donde \bar{g} es la función definida en el Lema 4.13, la cual es claramente igual a ∇f ctp. Se concluye así que T es sobreyectivo. Ahora bien, como fue enunciado anteriormente, si $Tg = 0$ entonces necesariamente $g = 0$. Así, T es inyectivo, y por lo tanto es una biyección. Más aún, como

$$\|Rf\|_\infty = \|\nabla f\|_\infty \leq \|f\|_L,$$

se concluye que $\|Tg\|_L = \|g\|_\infty$, para todo $g \in X$. Por lo tanto T define una isometría entre X y $Lip_0(\mathbb{R}^n)$. \square

Cabe destacar que la demostración anterior, al igual que en el caso unidimensional, es válida en un contexto más general. Se enuncia este hecho en el siguiente corolario.

Corolario 4.17 *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo tal que $\bar{C} = \overline{\text{int}(C)}$. Luego, los espacios $Lip_0(C)$ y $X \subseteq L^\infty(C; (\mathbb{R}^n)^*)$ son linealmente isométricos, es decir $Lip_0(C) \cong X$.*

El argumento para justificar esto último es exactamente el mismo al mostrado al término del Capítulo 3.

4.2. Identificación de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$

A partir del resultado previo, es posible ir un poco más allá y estudiar el comportamiento sobre los espacios primales de los ya enunciados

Corolario 4.18 *El espacio $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ es linealmente isométrico a un subespacio de X^* .*

DEMOSTRACIÓN. Considérese $T^* : (Lip_0(\mathbb{R}^n))^* \rightarrow X^*$ el operador adjunto de T . Como T es un isomorfismo isométrico, T^* también lo es. Es claro así que la restricción de T^* a $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, el cual sabemos es un subespacio de $(Lip_0(\mathbb{R}^n))^*$, resulta ser una isometría, y en consecuencia un operador inyectivo. Considerando esto es directo verificar que $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ es linealmente isométrico al espacio $T^*(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)) \subseteq X^*$. \square

De todo lo anterior, se tiene un acercamiento al espacio buscado. En virtud de la expresión del operador T , es posible hacer un estudio detallado del comportamiento del operador T^* sobre $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Siguiendo esta línea, considerérese primero el siguiente lema

Lema 4.19 Sea $\mu \in \text{span}(\{\delta(x) : x \in \mathbb{R}^n\})$. Luego, existen $m \in \mathbb{N}$, $\eta_1, \dots, \eta_m \in \mathbb{R}$ y $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$\mu = \sum_{k=1}^m \eta_k (\delta(x_k) - \delta(x_{k-1}))$$

donde $x_0 = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mu \in \text{span}(\{\delta(x) : x \in \mathbb{R}^n\})$. Por definición, existen $m \in \mathbb{N}$, reales $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ y $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$\mu = \sum_{k=1}^m \lambda_k \delta(x_k)$$

Nótese que para $m = 1$, el resultado es directo, ya que $\delta(0) = 0$. Supóngase que el resultado es cierto para algún $m \in \mathbb{N}$. Para $m + 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k \delta(x_k) = \lambda_1 \delta(x_1) + \sum_{k=2}^{m+1} \lambda_k \delta(x_k) = \lambda_1 \delta(x_1) + \eta_2 \delta(x_2) + \sum_{k=3}^{m+1} \eta_k (\delta(x_k) - \delta(x_{k-1})) \\ &= (\lambda_1 + \eta_2) (\delta(x_1) - \delta(0)) + \eta_2 (\delta(x_2) - \delta(x_1)) + \sum_{k=3}^{m+1} \eta_k (\delta(x_k) - \delta(x_{k-1})) \end{aligned}$$

Y así, definiendo $\eta_1 = \lambda_1 + \eta_2$, se concluye el resultado. \square

Sean ahora $\mu \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ y $g \in X$, la cual podemos asumir de la forma mostrada en el Lema 4.13 para alguna función $f \in Lip_0(\mathbb{R}^n)$ gracias al Teorema 4.16. Se tiene así que

$$\langle T^* \mu, g \rangle = \langle \mu, Tg \rangle = \langle \mu, \int_0^1 \langle g(tz), z \rangle dt \rangle$$

En particular, para $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $x \neq y$ y tomando $\mu = \delta(y) - \delta(x)$, se cumple

$$\langle T^* (\delta(y) - \delta(x)), g \rangle = \langle \delta(y) - \delta(x), \int_0^1 \langle g(tz), z \rangle dt \rangle$$

Recordando que $g \in X$, se tiene finalmente que

$$\begin{aligned} \langle T^* (\delta(y) - \delta(x)), g \rangle &= \int_0^1 \langle g(x + t(y-x)), y-x \rangle dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \langle g(x + t(y-x)), \mathbf{1}_{[x,y]}(x + t(y-x))(y-x) \rangle dt. \end{aligned}$$

4.2.1. $L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ está en la imagen de T^*

Nótese que de lo anterior, se deduce que para $g \in X$ y $x \in \mathbb{R}^n$ se verifica que

$$\langle T^* \delta(x), g \rangle = \int_0^1 \langle g(tx), x \rangle dt = \int_{\mathbb{R}} \langle g(tx), \mathbf{1}_{[0,x]}(tx)x \rangle dt.$$

En primera aproximación, una pregunta natural en analogía al caso $n = 1$ es cual es la relación entre los espacios $L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Para responder a esta interrogante, es primero necesario recordar algunos resultados clásicos de espacios de Banach.

Proposición 4.20 *Sea Y un espacio de Banach y X un subespacio cerrado de Y . Luego, $X^* \equiv Y^*/X^\perp$, donde el aniquilador de X se define como*

$$X^\perp := \{y^* \in Y^* : y^*|_X = 0\}.$$

Definición 4.21 *Sea X un espacio de Banach. Un subespacio Z de X^* se dice*

- **total** si para cada $x \in X \setminus \{0\}$ existe $x^* \in Z$ tal que $\langle x^*, x \rangle \neq 0$.
- **c -normante** (para algún $c > 0$) si para todo $x \in X$ se tiene que

$$\sup_{\|x^*\|_* = 1, x^* \in Z} |\langle x^*, x \rangle| \geq c\|x\|.$$

Observación Es claro que todo subespacio c -normante es total. Además, es claro que la norma definida por el supremo restringido al espacio Z es equivalente a la norma del espacio X cuando Z es c -normante.

Recuérdese que anteriormente se definió el subespacio $X \subseteq L^\infty(\mathbb{R}^n; (\mathbb{R}^n)^*)$ de los elementos Lipschitz-compatibles. Gracias a que este subespacio es isométrico a $Lip_0(\mathbb{R}^n)$, se tiene además que $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ es isométrico a un subespacio de su dual X^* . En lo que sigue, se considera lo anterior y se postula la siguiente conjetura

Conjetura 4.22 *El subespacio X de los elementos de $L^\infty(\mathbb{R}^n; (\mathbb{R}^n)^*)$ Lipschitz-compatibles es 1-normante.*

Observación La conjetura anterior es cierta trivialmente en el caso $n = 1$, ya que en ese caso $X = L^\infty(\mathbb{R})$. En lo que sigue, los resultados dependientes de esta conjetura están debidamente señalados con (*).

En el desarrollo de este trabajo no se obtiene una solución completa a la conjetura anterior. Sin embargo, como se ve a continuación, se cuenta con una respuesta parcial. Para ello, es necesario contar con los siguientes lemas

Lema 4.23 *Sea $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ no negativa. Luego, existe una sucesión $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ de funciones no negativas tal que $\langle g_m, f \rangle \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \|f\|_1$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $P = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}}$ el soporte de f . Para $m \in \mathbb{N}$, sea $g_m : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ tal que

- $g_m(P) = \{1\}$ y $g_m(P_{1/m}^c) = \{0\}$, donde $P_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^n : d(y, P) < \varepsilon\}$, y
- $g_m \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$.

Se verifica que para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $g_m(x) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \mathbf{1}_P(x)$. En efecto, para $x \in P$ la convergencia es clara. Si $x \notin P$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq N$ se tiene que $x \notin P_{1/m}$, y así,

$g_m(x) = 0$. Ahora bien, nótese que $|g_m f| = g_m f \leq f$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Luego, en virtud del Teorema de Convergencia Dominada, se concluye que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_m f d\lambda^{(n)} \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_P f d\lambda^{(n)} = \int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda^{(n)} = \|f\|_1.$$

□

Lema 4.24 Sean $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. Entonces la función $g := (g_k)_{k=1}^n$ es Lipschitz-compatible.

DEMOSTRACIÓN. En virtud de la Proposición 4.16, basta con probar que la función $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \int_0^1 \langle g(tx), x \rangle dt = \sum_{k=1}^n \int_0^1 x_k g_k(tx) dt$$

es Lipschitz. Sean entonces $k \in \{1, \dots, n\}$ y $t \in [0, 1]$ fijos. Se define la función $\varphi_{k,t} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\varphi_{k,t}(x) = x_k g_k(tx).$$

Se verifica que $\varphi_{k,t}$ es de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, con

$$\nabla \varphi_{k,t}(x) = g_k(tx) e_k + tx_k \nabla g_k(tx).$$

Además, $\nabla \varphi_{k,t} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es acotada, ya que

$$\|\nabla \varphi_{k,t}(x)\|_2 \leq 1 + \|tx\|_2 \|\nabla g_k(tx)\|_2.$$

Pero como $g_k \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, existen $R_k, M_k > 0$ tal que si $\|tx\|_2 > R_k$, entonces $\nabla g_k(tx) = 0$ y $\|\nabla g_k(z)\|_2 \leq M_k$, para todo $z \in \overline{B}(0, R_k)$. Se concluye así que $\|\nabla \varphi_{k,t}(x)\|_2 \leq 1 + R_k M_k$.

Así, en virtud del Teorema de los Incrementos Finitos, se tiene que

$$|h(y) - h(x)| \leq \sum_{k=1}^n \int_0^1 |\varphi_{k,t}(y) - \varphi_{k,t}(x)| dt \leq \sum_{k=1}^n \int_0^1 t(1 + R_k M_k) \|y - x\|_2 \leq C \|y - x\|,$$

para alguna constante $C > 0$. Así, g es Lipschitz-compatible. □

Lema 4.25 El operador $\|\cdot\| : L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\|f\| = \sup_{g \in X, \|g\|_\infty \leq 1} \langle g, f \rangle$$

define una norma en $L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$.

DEMOSTRACIÓN. Es claro que $\|\cdot\|$ es no negativo y finito, ya que $\|f\| \leq \|f\|_1$. Además, es directo verificar que $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$ y que $\|f_1 + f_2\| \leq \|f_1\| + \|f_2\|$. Resta ver que si $f \neq 0$, entonces existe $g \in X$ tal que $\langle g, f \rangle \neq 0$. Si $f \neq 0$, entonces existen $k \in \{1, \dots, n\}$, $y \in \mathbb{R}^n$ y $\delta > 0$ tales que

$$\int_{\overline{B}(y, \delta)} f_k d\lambda^{(n)} \neq 0.$$

Supóngase que para todo $g \in X$ se tiene que $\langle g, f \rangle = 0$. Siguiendo la demostración del Lema 4.23, existe una sucesión $(g_{m,k})_{m \in \mathbb{N}}$ de funciones de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_{m,k} f_k d\lambda^{(n)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{\overline{B}(y,\delta)} f_k d\lambda^{(n)}.$$

En virtud del Lema 4.24, las funciones $x \mapsto g_{m,k}(x)e_k$ son Lipschitz-compatibles para todo $m \in \mathbb{N}$. Luego

$$0 = \langle g_{m,k} e_k, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} g_{m,k} f_k d\lambda^{(n)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{\overline{B}(y,\delta)} f d\lambda^{(n)} \neq 0,$$

lo que es una contradicción. Luego, existe $g \in X$ tal que $\langle g, f \rangle \neq 0$, y por lo tanto $\|f\| > 0$. Se concluye así que $\|\cdot\|$ define una norma en $L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. \square

Observación Notando que $\|f\| \leq \|f\|_1$ y que $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ es $\|\cdot\|_1$ -denso en $L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, se concluye que también es $\|\cdot\|$ -denso en $L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$.

Con las herramientas anteriores, es posible ahora otorgar una respuesta parcial para la Conjetura 4.22

Proposición 4.26 *Si \mathbb{R}^n es dotado de la norma $\|\cdot\|_1$, el subespacio X de los elementos de $L^\infty(\mathbb{R}^n; (\mathbb{R}^n)^*)$ Lipschitz-compatibles es 1-normante.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ y sean $f^+, f^- \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ sus partes positiva y negativa, respectivamente (es decir, las funciones a valores en \mathbb{R}^n dadas por las partes positivas y negativas de cada componente f_k). Notando que $\|f\|_1 = \sum_{k=1}^n \|f_k\|_1$, en virtud de los Lemas 4.23 y 4.24 existen $(g_m^+)_{m \in \mathbb{N}}, (g_m^-)_{m \in \mathbb{N}}$ sucesiones en X tales que

$$\langle g_m^+, f^+ \rangle \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \|f^+\|_1 \quad \text{y} \quad \langle g_m^-, f^- \rangle \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \|f^-\|_1$$

Sea entonces $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ la sucesión en X definida por $g_m := g_m^+ - g_m^-$. Con esto, se tiene que

$$\langle g_m, f \rangle = \langle g_m^+ - g_m^-, f^+ - f^- \rangle = \langle g_m^+, f^+ \rangle - \langle g_m^+, f^- \rangle - \langle g_m^-, f^+ \rangle + \langle g_m^-, f^- \rangle.$$

Nótese que $\langle g_m^+, f^- \rangle \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$. En efecto

$$\langle g_m^+, f^- \rangle = \sum_{k=1}^n \int_{\{f_k < 0\}} g_{m,k}^+ f_k^- d\lambda^{(n)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{\{f_k < 0\} \cap \overline{\{f_k > 0\}}} f_k^- d\lambda^{(n)} = 0,$$

donde la convergencia se tiene por el Teorema de Convergencia Dominada, gracias a la construcción de las funciones $g_{m,k}^+$, y a que $\{f_k < 0\} \cap \overline{\{f_k > 0\}} = \emptyset$. Análogamente se muestra que $\langle g_m^-, f^+ \rangle \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$, con lo que se concluye que

$$\langle g_m, f \rangle \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \|f^+\|_1 + \|f^-\|_1 = \|f\|_1.$$

Así, se tiene que para toda $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$

$$\|f\| \geq \|f\|_1.$$

Finalmente, gracias a la densidad de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ para ambas normas, se concluye que X es 1-normante. \square

Corolario 4.27 *El subespacio X de los elementos de $L^\infty(\mathbb{R}^n; (\mathbb{R}^n)^*)$ Lipschitz-compatibles es c -normante, para algún $c > 0$. Si la norma de \mathbb{R}^n es una ponderación positiva de la norma $\|\cdot\|_1$, entonces $c = 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $0 < a \leq b$ tales que $a\|x\| \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. A fin de evitar confusiones, $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ denotan las normas de $L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ y $L^\infty(\mathbb{R}^n; (\mathbb{R}^n)^*)$ cuando \mathbb{R}^n está dotado de la norma $\|\cdot\|$, mientras que $\|\cdot\|_{1,1}$ y $\|\cdot\|_{\infty,1}$ denotan las normas de $L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ y $L^\infty(\mathbb{R}^n; (\mathbb{R}^n)^*)$ cuando \mathbb{R}^n está dotado de la norma $\|\cdot\|_1$. Así, para $f \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ se que

$$\frac{a}{b}\|f\|_1 \leq \frac{1}{b}\|f\|_{1,1} = \sup_{g \in X \setminus \{0\}} \frac{\langle g, f \rangle}{b\|g\|_{\infty,1}}.$$

Pero como $a\|x\| \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|$, se tiene en particular que $b\|x\|_\infty \geq \|x\|_*$. Luego

$$\sup_{g \in X \setminus \{0\}} \frac{\langle g, f \rangle}{b\|g\|_{\infty,1}} \leq \sup_{g \in X \setminus \{0\}} \frac{\langle g, f \rangle}{\|g\|_\infty} = \sup_{g \in X, \|g\|_\infty \leq 1} \langle g, f \rangle.$$

Por lo tanto, X es c -normante para $c = \frac{a}{b} \in (0, 1]$. □

Considérese el operador de evaluación $J : L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \rightarrow (L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n))^{**} \equiv (L^\infty(\mathbb{R}^n; (\mathbb{R}^n)^*))^*$ (donde la equivalencia última es gracias a que \mathbb{R}^n es reflexivo, y por lo tanto tiene la Propiedad de Radon-Nikodym). En lo que sigue, asúmase cierta la Conjetura 4.22.

Proposición 4.28 (*) *$L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ es isométrico a un subespacio de X^* , donde X es el subespacio de $L^\infty(\mathbb{R}^n; (\mathbb{R}^n)^*)$ de las clases Lipschitz-compatibles.*

DEMOSTRACIÓN. En virtud de la Proposición 4.20, se tiene que $X^* \equiv (L^\infty(\mathbb{R}^n; (\mathbb{R}^n)^*))^*/X^\perp$. Sea $Q : (L^\infty(\mathbb{R}^n; (\mathbb{R}^n)^*))^* \rightarrow X^*$ el operador cuociente (donde X^* es visto como el cuociente anterior). Nótese que $QJ : L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \rightarrow X^*$ es inyectivo. Para ello basta con probar que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ y $Jf \in X^\perp$, entonces $f = 0$. Sea entonces $f \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ tal que $Jf \in X^\perp$. Luego, para todo $g \in X$

$$\langle Jf, g \rangle = 0.$$

Como X es 1-normante, en particular es total, con lo que se deduce que $Jf = 0$, y por lo tanto $f = 0$. Así, el operador QJ define una biyección entre $L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ y su imagen $QJ(L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n))$. Finalmente, nótese que para $f \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$

$$\|QJf\| = \sup_{g \in X, \|g\|_\infty \leq 1} \langle Jf, g \rangle = \sup_{g \in X, \|g\|_\infty \leq 1} \langle g, f \rangle = \|f\|_1,$$

donde esta última igualdad se tiene gracias a que X es 1-normante. Por lo tanto QJ define una isometría entre $L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ y su imagen $QJ(L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n))$. □

Observación Si bien la demostración anterior radica en asumir la Conjetura 4.22, esto no es completamente restrictivo. Para ello, nótese que sólo en la última igualdad fue utilizada esta conjetura, ya que el hecho de que el subespacio X sea total es consecuencia de que es c -normante.

Considerando la proposición anterior, es posible enunciar el siguiente resultado, el cual sí está probado en su totalidad.

Proposición 4.29 $L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ es isomorfo a un subespacio de X^* , donde X es el subespacio de $L^\infty(\mathbb{R}^n; (\mathbb{R}^n)^*)$ de las clases Lipschitz-compatibles. Si además \mathbb{R}^n es dotado de alguna ponderación positiva de la norma $\|\cdot\|_1$, entonces estos espacios son isométricos.

DEMOSTRACIÓN. La última parte del resultado queda probada gracias al Corolario 4.27 y la Proposición 4.28. En el caso general, sólo es necesario probar que QJ define un isomorfismo entre $L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ y su imagen $QJ(L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n))$. Para ello, nótese que para $f \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ se verifica que

$$\|QJf\| = \sup_{g \in X, \|g\|_\infty \leq 1} \langle Jf, g \rangle = \sup_{g \in X, \|g\|_\infty \leq 1} \langle g, f \rangle \geq c\|f\|_1.$$

Además, es claro que $\|QJf\| \leq \|f\|_1$, con lo que se concluye. \square

Para concluir esta sección, se hace uso de los resultados anteriores. Considérese el conjunto $A := \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$, donde $b_i > a_i$ para todo $i = 1, \dots, n$, y un vector $v \in \mathbb{R}^n$ cualquiera. Bajo estas condiciones, se verifica lo siguiente.

Proposición 4.30 Existe $\mu \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ tal que $T^*\mu = QJ(\mathbf{1}_A v)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in Lip_0(\mathbb{R}^n)$. Nótese que

$$\langle \nabla f, \mathbf{1}_A v \rangle = \int_A \langle \nabla f(x), v \rangle dx.$$

Defínase $H = \langle v \rangle^\perp$ y considérense los siguientes conjuntos:

$$S = \{y \in H \mid (\exists t \in \mathbb{R}) y + tv \in A\}$$

y

$$I_y = \{t \in \mathbb{R} \mid y + tv \in A\},$$

definido para $y \in H$. En otras palabras, S es la proyección ortogonal de A sobre H , y por lo tanto resulta ser un conjunto compacto. Además, es claro que los I_y son intervalos cerrados y acotados, en virtud de la convexidad y compacidad de A . Sean además las funciones $a, b : S \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$a(y) := \min I_y$$

y

$$b(y) := \max I_y.$$

Se verifica directamente que ambas funciones resultan ser continuas. En virtud del Teorema de Fubini, y recordando que siempre es posible alterar la función ∇f en conjuntos de medida nula, se verifica que

$$\langle \nabla f, \mathbf{1}_A v \rangle = \int_A \langle \nabla f(x), v \rangle dx = \int_S \int_{a(y)}^{b(y)} f'(y + tv; v) dt dy$$

$$= \int_S f(y + b(y)v) - f(y + a(y)v) dy = \int_S \langle \delta(y + b(y)v) - \delta(y + a(y)v), f \rangle dy.$$

Nótese ahora que la función $\Phi : S \rightarrow \mathcal{F}$ dada por $\Phi(y) = \delta(y + b(y)v) - \delta(y + a(y)v)$ es medible, en virtud de su continuidad. Más aún, es claro que

$$\int_S \|\Phi(y)\| dy = \int_S (b(y) - a(y)) \|v\| dy = \|v\| \lambda^{(n)}(A) = \|\mathbf{1}_A v\|_1 < +\infty.$$

Se concluye así gracias al Teorema 2.28 que Φ es Bochner-integrable. Sea entonces $\mu \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ su integral sobre S . Luego

$$\int_S \langle \delta(y + b(y)v) - \delta(y + a(y)v), f \rangle dy = \langle \mu, f \rangle = \langle T^* \mu, \nabla f \rangle.$$

Se deduce de esta manera que

$$\langle QJ(\mathbf{1}_A v), \nabla f \rangle = \langle J(\mathbf{1}_A v), \nabla f \rangle = \langle \nabla f, \mathbf{1}_A v \rangle = \langle T^* \mu, \nabla f \rangle.$$

En particular, se tiene que $\langle QJ(\mathbf{1}_A v) - T^* \mu, g \rangle = 0$, para todo $g \in X$. De esta manera, se obtiene que $T^* \mu - QJ(\mathbf{1}_A v) = 0$. \square

Observación Es importante recalcar que existe un ligero abuso de notación en la proposición anterior, ya que $T^* \mu \in X^*$ y $QJ(\mathbf{1}_A v) \in (L^\infty(\mathbb{R}^n; (\mathbb{R}^n)^*))^*/X^\perp$. Esto se justifica gracias a que estos dos espacios son isométricos.

Una consecuencia directa de lo anterior es que $L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ es isomorfo a un subespacio de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Para ello, basta con aproximar mediante funciones simples y concluir gracias a la continuidad de T^* . Si además se asume la Conjetura 4.22, se concluye así mismo que $L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ se identifica con un subespacio de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. En particular, esto es cierto si \mathbb{R}^n es dotado de una ponderación positiva de la norma $\|\cdot\|_1$.

Capítulo 5

Estudio del espacio $\mathcal{F}(\ell^p)$

En ésta última sección, se utilizan los resultados anteriores para obtener una descripción del espacio $\mathcal{F}(\ell^p)$. Por completitud, se enuncian las definiciones para este efecto.

Definición 5.1 Para $p \in [1, \infty)$, se define el espacio ℓ^p como

$$\ell^p := \left\{ (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{k \in \mathbb{N}} |x_k|^p < +\infty \right\},$$

el cual dotado de la norma

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

resulta ser un espacio de Banach.

De la misma manera, considérese además

Definición 5.2 Para $p \in [1, \infty)$ y $n \geq 1$, se define el espacio ℓ_n^p como

$$\ell_n^p := \left\{ (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x_k = 0, \forall k > n \right\},$$

el cual dotado de la norma anterior resulta ser un subespacio cerrado de ℓ^p .

Una consecuencia directa es la siguiente

Proposición 5.3 Para $p \in [1, \infty)$ y $n \geq 1$, los espacios ℓ_n^p y \mathbb{R}^n son isomorfos. Si además \mathbb{R}^n es dotado de la norma

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

entonces dichos espacios son isométricos.

Para lo que sigue, se requiere además el siguiente operador

Definición 5.4 Se define el operador de proyección $\pi_n : \ell^p \rightarrow \ell_n^p$ como

$$\pi_n(x)_k = \begin{cases} x_k & , \quad k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

Nótese que gracias a la definición 5.3, para cada $p \in [1, \infty)$ se verifica que $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \equiv \mathcal{F}(\ell_n^p)$ cuando \mathbb{R}^n es dotado de la norma $\|\cdot\|_p$. Considerando lo anterior, se enuncia el principal resultado de la presente sección

Proposición 5.5 Para todo $p \in [1, \infty)$, cuando \mathbb{R}^n está dotado de la norma $\|\cdot\|_p$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica

$$\mathcal{F}(\ell^p) \equiv \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)}$$

Observación Es importante notar que lo anterior tiene sentido solamente si existe un espacio de Banach X tal que existen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ subespacios de X con la propiedad que

- $X_n \subseteq X_{n+1}$ y
- $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \equiv X_n$.

Al referirse a la existencia de X , se habla de algún espacio de Banach clásico para realizar la identificación, ya que de hecho $\mathcal{F}(\ell^p)$ (sea lo que sea) verifica lo anterior.

DEMOSTRACIÓN. En virtud del Lema 2.4, es claro que $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ puede ser considerado como un subespacio vectorial de $\mathcal{F}(\ell^p)$. Más aún, nuevamente gracias al Lema 2.4, también puede verse que dichos subespacios puede ser tomados encajonados. Finalmente, notando que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \ell_n^p = c_{00},$$

y éste último espacio es denso en ℓ^p , se concluye que

$$\mathcal{F}(\ell^p) \equiv \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)}.$$

□

En el Capítulo 4 se muestra una forma genérica de identificar los espacios $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, o al menos los subespacios densos de estos. Lo importante es que en virtud de la estructura en el aumento de dimensiones de estos espacios, se propone a futuro estudiar un espacio de Banach que siga la misma línea, en el cual sea posible alojar los espacios $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ y así hacer uso del resultado anterior.

Conclusión

En el desarrollo del presente trabajo, puede verse que si bien la definición de los espacios Lipschitz-libres es en esencia simple, la complejidad del objeto contruido suele ser alta. Un motivo directo de esto es que el intento de traspasar la estructura Lipschitziana de un espacio métrico dado a un espacio de Banach se traduce inevitablemente en una estructura compleja de éste último.

Como una forma de comprender esto, basta con restringirse al caso de que el espacio métrico subyacente es un espacio de Banach. En este caso el dual de dicho espacio es propiamente un subespacio vectorial de las funciones Lipschitzianas nulas en el origen. Al pasar al espacio Lipschitz libre, puede verse que ahora las funciones lineales continuas de $\mathcal{F}(X)$ contienen (mediante una identificación) al dual de X . Es justamente este hecho el que hace que la estructura de estos espacios vectoriales sean tan complejas, ya que de cierto modo codifican la Lipschitzianidad del espacio.

En cuanto al resultado principal del presente trabajo, se ve como la identificación del espacio Lipschitz-libre asociado a \mathbb{R} puede realizarse usando sólo herramientas básicas de la Teoría de la Medida, llegando a un espacio de Banach clásico, con propiedades conocidas y bastante estudiadas. Sin embargo, solamente al agregar una dimensión a este espacio y trabajar en \mathbb{R}^2 se ve como aumenta la complejidad del espacio Lipschitz-libre. Si bien el cambio de las normas en \mathbb{R}^n no modifica el espacio Lipschitz-libre (en el sentido de que se obtienen espacios isomorfos), se producen los cambios esperados en la métrica de éste último. Es teniendo esto en consideración que se decide desarrollar el Capítulo 4 en la mayor generalidad posible.

En principio, fueron realizados algunos estudios usando solamente la norma euclidiana, la cual permite utilizar sin problemas los resultados de los espacios de Hilbert. Sin embargo, al ir avanzando se hace claro que esto no influye de mayor manera, por lo que es posible simplemente asumir una norma cualquiera, y que esta información dada por la norma es llevada internamente por las normas de todos los espacios asociados (las cuales son todas equivalentes, ya que lo son en \mathbb{R}^n).

Si bien con la descripción mostrada no se obtiene explícitamente un espacio isométrico a $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, ésta permite al menos entender en cierto sentido la estructura de un subespacio denso, aquel dado por combinaciones lineales de los funcionales de evaluación (es decir, las medidas de Dirac). Más concretamente, entender los funcionales de evaluación como medidas tipo Lebesgue sobre conjuntos específicos de medida nula en \mathbb{R}^n . Además, bajo el supuesto de la conjetura 4.22 puede verse un espacio de Banach clásico, $L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, como un subespacio

de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.

En el breve estudio en torno a los espacios Lipschitz-libres de los espacios ℓ^p puede encontrarse una primera aplicación de los resultados obtenidos. Si bien lo mostrado ahí es una conclusión básica y que no entrega ningún resultado explícito, esto sí puede ser posible en el caso de obtener una identificación completa de los espacios ℓ_n^p .

Finalmente, los resultados aquí obtenidos permiten entender un poco más la estructura de estos espacios, y bajo condiciones específicas puede ser replicada. A modo de ejemplo, considérese un espacio de Banach X con la siguiente propiedad

$$(\exists \lambda \text{ medida Boreliana sobre } X)(\forall f \in Lip(X)) \text{ } Df \text{ existe } \mu\text{-ctp.}$$

Es fácil ver que en dichos espacios los procedimientos aquí mostrados pueden ser replicados. Sin embargo, la primera etapa a seguir es utilizar la descripción aquí mostrada para

- estudiar temas como la existencia de bases de Schauder, descomposiciones finito-dimensionales y propiedades de aproximación en términos de ésta,
- hallar un espacio isométrico a $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ y
- caracterizar los subconjuntos de \mathbb{R}^n donde esta descripción (o una adaptación de ésta) es válida.

En cualquier caso, la investigación siguiendo dicha línea puede entregar una mayor comprensión de estos espacios en el caso de que el espacio subyacente sea un espacio de Banach.

Bibliografía

- [1] J. Dixmier. Sur un théorème de Banach. *Duke Mathematical Journal*, 15:1057–1071, 1948.
- [2] K. Ng. On a theorem of Dixmier. *Mathematica Scandinavica*, 29:279–280, 1971.
- [3] R. B. Holmes. *Geometric Functional Analysis and its Applications (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 1975.
- [4] M. Cúth, M. Doucha y P. Wojtaszczyk. On the structure of Lipschitz-free spaces. *ArXiv e-prints*, 2015.
- [5] A. Dalet. *Étude des espaces Lipschitz-libres*. Tesis para optar al grado de Docteur de Mathématiques, Besançon, Université de Franche-Comté, École Doctorale Carnot-Pasteur, 2015.
- [6] E. Pernecká y R. J. Smith. The metric approximation property and Lipschitz-free spaces over subsets of \mathbb{R}^N . *Studia Mathematica*, 199:29–44, 2015.
- [7] M. I. Ostrovskii. Total subspaces in dual Banach spaces which are not norming over any infinite-dimensional subspace. *Studia Mathematica*, 105(1):37–49, 1993.
- [8] P. Hájek y E. Pernecká. On Schauder bases in Lipschitz-free spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 416:629–646, 2014.
- [9] G. Lancien y E. Pernecká. Approximation properties and Schauder decompositions in Lipschitz-free spaces. *Journal of Functional Analysis*, 264:2323–2334, 2013.
- [10] J. Lindenstrauss. On nonlinear projections in Banach spaces. *Michigan Mathematical Journal*, 11(3):263–287, 1964.
- [11] J. Diestel y J. J. Uhl. *Vector Measures*. Mathematical Surveys and Monographs 15. American Mathematical Society, 1977.
- [12] N. Weaver. *Lipschitz Algebras*. World Scientific Publishing Company, 1999.
- [13] J. San Martín. *Teoría de la Medida - Apuntes del curso*. Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Chile, 2011.

- [14] G. Godefroy y N. J. Kalton. Lipschitz-free Banach spaces. *Studia Mathematica*, 159(1):121–141, 2003.
- [15] A. Nekvinda y L. Zajíček. A simple proof of the Rademacher Theorem. *Časopis pro pěstování matematiky*, 113(4):337–341, 1988.
- [16] N. J. Kalton. Spaces of Lipschitz and Hölder functions and their applications. *Collectanea Mathematica*, 55(2):171–217, 2004.
- [17] A. Naor y G. Schechtman. Planar earthmover not in L^1 . *SIAM Journal on Computing*, 37(1):804–826, 2007.
- [18] P. Kaufmann. Products of Lipschitz-free spaces and applications. *ArXiv e-prints*, 2014.

Apéndice

Apéndice A

Teorema de Rademacher

En este apéndice se muestra una demostración del Teorema de Rademacher, el cual forma parte fundamental en los resultados obtenidos en este trabajo. La demostración aquí entregada es la que puede hallarse en [15], en la cual es necesario de todas formas probar primero el teorema en el caso unidimensional.

Teorema A.1 (Rademacher unidimensional) *Sea $m \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}$ un abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función Lipschitz. Luego, f es derivable ctp en U .*

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad puede suponerse que U es un intervalo acotado de la forma (a, b) . Además, considérese $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la única función Lipschitz que extiende a f . Nótese que g resulta ser absolutamente continua. En efecto, sean $\varepsilon > 0$ y $\{(a_k, b_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ una familia cualquiera de intervalos disjuntos contenidos en $[a, b]$. Como g es Lipschitz, siendo $K > 0$ su constante de Lipschitz se tiene que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \|g(b_k) - g(a_k)\| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} K(b_k - a_k) = K \sum_{k \in \mathbb{N}} (b_k - a_k).$$

Así, considerando $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$, se verifica que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (b_k - a_k) < \delta \implies \sum_{k \in \mathbb{N}} \|g(b_k) - g(a_k)\| < \varepsilon.$$

Pero es sabido (ver, por ejemplo, [13]) que si g es absolutamente continua, entonces es derivable ctp, de donde se concluye. \square

Además del resultado anterior, es necesario considerar los siguientes hechos para las funciones Lipschitz

- (i) Si \mathcal{F} es una familia de funciones K -Lipschitz definidas sobre $M \subseteq \mathbb{R}^n$ y

$$s(x) := \sup_{f \in \mathcal{F}} f(x)$$

es finita en M , entonces s es K -Lipschitz en M .

(ii) Si $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones K -Lipschitz definidas sobre $M \subseteq \mathbb{R}^n$ y

$$f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \in \mathbb{R}$$

para todo $x \in M$, entonces f es K -Lipschitz en M .

(iii) Si f es K -Lipschitz en \mathbb{R}^n , $a \in \mathbb{R}^n$, $c, t \in \mathbb{R}$ y $t \neq 0$, entonces las funciones

- $x \mapsto f(x) + c$,
- $x \mapsto f(a + x)$ y
- $x \mapsto \frac{f(tx)}{t}$

son K -Lipschitz en \mathbb{R}^n .

(iv) Sean $M \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto y f_τ , para cada $\tau > 0$, funciones K -Lipschitz sobre M tales que

$$f_{\tau_1}(x) \leq f_{\tau_2}(x), \text{ para } \tau_1 \leq \tau_2, x \in M.$$

Si $g(x) := \lim_{\tau \rightarrow 0^+} f_\tau(x) \in \mathbb{R}$, entonces g es K -Lipschitz sobre M , y la convergencia es uniforme.

Finalmente, para $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x, v \in \mathbb{R}^n$, se definen las derivadas direccionales y direccionales de Dini como

$$\begin{aligned} f'(x; v) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} \\ \overline{f'}(x; v) &= \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} \\ \underline{f'}(x; v) &= \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}. \end{aligned}$$

Con los conceptos anteriores se tienen las herramientas para probar el siguiente

Teorema A.2 (Rademacher) Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función Lipschitz. Luego, f es Fréchet-diferenciable ctp en U .

Para demostrar esto, es útil notar que sin perder generalidad es posible asumir que $m = 1$, ya que la Fréchet-diferenciabilidad de f en x es equivalente a la Fréchet-diferenciabilidad de cada una de sus m funciones coordenada $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ en x . Además, la demostración está dividida en las siguientes proposiciones

Proposición A.3 Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función Lipschitz Gâteaux-diferenciable en $x \in U$. Luego, f es Fréchet-diferenciable en x .

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in U$ un punto de Gâteaux-diferenciabilidad de f K -Lipschitz. Para $\tau > 0$, sean

$$\overline{g}_\tau^x(v) = \overline{g}_\tau(v) = \sup_{t \in [-\tau, \tau] \setminus \{0\}} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

$$\underline{g}_\tau^x(v) = \underline{g}_\tau(v) = \inf_{t \in [-\tau, \tau] \setminus \{0\}} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

Para cada $t \in [-\tau, \tau] \setminus \{0\}$, la función $v \mapsto \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$ es K -Lipschitz gracias a (iii).

Como $\left| \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} \right| \leq K\|v\|$, en virtud de (i), las funciones definidas más arriba son K -Lipschitz en \mathbb{R}^n .

Para $0 < \tau < \sigma$ se verifica

$$\underline{g}_\sigma(v) \leq \underline{g}_\tau(v) \leq \frac{f(x + \tau v) - f(x)}{\tau} \leq \bar{g}_\tau(v) \leq \bar{g}_\sigma.$$

Además, gracias a (iv), los límites

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \bar{g}_\tau(v) = \bar{f}'(x; v), \quad \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \underline{g}_\tau(v) = \underline{f}'(x; v)$$

son uniformes en la esfera unitaria de \mathbb{R}^n . Como x es un punto de Gâteaux-diferenciabilidad de f , se tiene que $\bar{f}'(x; v) = \underline{f}'(x; v) = f'(x; v)$, y esto junto a las desigualdades anteriores permite concluir que el límite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

es uniforme en la esfera unitaria de \mathbb{R}^n , de donde se concluye finalmente que f es Fréchet-diferenciable en x . \square

Antes de pasar a la siguiente proposición, es necesario considerar el siguiente

Lema A.4 Sean $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau > 0$ y $v \in \mathbb{R}^n$. Luego, las funciones

$$x \mapsto \bar{g}_\tau^x(v), \quad x \mapsto \underline{g}_\tau^x(v), \quad x \mapsto \bar{f}'(x; v), \quad x \mapsto \underline{f}'(x; v)$$

son Lebesgue-medibles en U

DEMOSTRACIÓN. Basta notar que

$$\bar{g}_\tau^x(v) = \sup_{t \in [-\tau, \tau] \setminus \{0\}} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} = \sup_{t \in \mathbb{Q} \cap [-\tau, \tau] \setminus \{0\}} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}.$$

Así, como para cada t la función $x \mapsto \frac{f(x+tv)-f(x)}{t}$ es continua, se concluye que $x \mapsto \bar{g}_\tau^x(v)$ es medible. Además, como $\bar{f}'(x; v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{g}_{\frac{1}{n}}^x(v)$, se deduce que $x \mapsto \bar{f}'(x; v)$ es también medible. Los otros dos casos son análogos. \square

Proposición A.5 Toda función Lipschitz $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es Gâteaux-diferenciable ctp.

DEMOSTRACIÓN. Denótese por G el conjunto de los puntos $x \in \mathbb{R}^n$ en los cuales f no es Gâteaux-diferenciable, por A_v el conjunto de los puntos $x \in \mathbb{R}^n$ en los cuales $f'(x; v)$ no existe y sea

$$A := \bigcup_{v \in \mathbb{R}^n} A_v.$$

Nótese que si C es un subconjunto denso en \mathbb{R}^n , se verifica que

$$A = \bigcup_{v \in C} A_v.$$

En efecto, es claro que este último conjunto está trivialmente contenido en A . Supóngase que x no pertenece a ésta unión numerable. Luego, $\overline{f'}(x; v) = \underline{f'}(x; v)$, para todo $v \in C$. Notando que estas funciones son K -Lipschitz en C y recordando que C es denso en \mathbb{R}^n , se concluye que $\overline{f'}(x; v) = \underline{f'}(x; v)$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$, es decir, $x \notin A$.

Nótese que $A_v = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \overline{f'}(x; v) \neq \underline{f'}(x; v)\}$. Luego, A_v es medible para todo $v \in \mathbb{R}^n$. En virtud de A.1, se tiene que para cada $L_{y,v} := \{y + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ el conjunto $A_v \cap L_{y,v}$ tiene medida de Lebesgue unidimensional 0. Luego, en virtud del Teorema de Fubini, se concluye que A_v tiene medida nula en \mathbb{R}^n , y por lo tanto, lo mismo es cierto para A . Notando que $A \subseteq G$, sólo resta probar que $G \setminus A$ tiene medida nula.

Sea $x \in G \setminus A$. Luego, la función $v \mapsto f'(x; v)$ está bien definida en \mathbb{R}^n , pero no es lineal. Notando que por definición es trivialmente homogénea, deben existir $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$f'(x; v_1) + f'(x; v_2) - f'(x; v_1 + v_2) \neq 0.$$

En virtud de la continuidad de la función $v \mapsto f'(x; v)$, es posible encontrar $w_1, w_2 \in C$ tales que

$$f'(x; w_1) + f'(x; w_2) - f'(x; w_1 + w_2) \neq 0.$$

Para $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ y $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, considérense los siguientes conjuntos

$$U(v_1, v_2, r_1, r_2) := \{x \notin A \mid f'(x; v_1) > r_1, f'(x; v_2) > r_2, f'(x; v_1 + v_2) < r_1 + r_2\},$$

$$V(v_1, v_2, r_1, r_2) := \{x \notin A \mid f'(x; v_1) < r_1, f'(x; v_2) < r_2, f'(x; v_1 + v_2) > r_1 + r_2\}.$$

En virtud de lo mencionado en el comienzo de éste parrafo, es fácil ver que

$$G \setminus A \subseteq \bigcup_{v_1, v_2 \in C, r_1, r_2 \in \mathbb{Q}} U(v_1, v_2, r_1, r_2) \cup V(v_1, v_2, r_1, r_2),$$

y por lo tanto, basta con probar que $U(v_1, v_2, r_1, r_2)$ tiene medida nula para v_1, v_2, r_1, r_2 fijos (para $V(v_1, v_2, r_1, r_2)$ se concluye de manera análoga). Por simplicidad, este conjunto es denotado por U .

Para $m \in \mathbb{N}$, considérense los conjuntos

$$U_m := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \underline{g}_{\frac{1}{m}}^x(v_1) > r_1, \underline{g}_{\frac{1}{m}}^x(v_2) > r_2, \overline{g}_{\frac{1}{m}}^x(v_1 + v_2) < r_1 + r_2\}.$$

Es directo notar que $U \subseteq \bigcup_{m \in \mathbb{N}} U_m$. Sean entonces $m \in \mathbb{N}$ fijo. En virtud del Lema A.4, el conjunto U_m es medible, y por lo tanto gracias al Teorema de Fubini, basta con ver que la medida unidimensional de Lebesgue del conjunto $T := U_m \cap L_{y, v_1 + v_2}$ es 0 para cualquier $y \in \mathbb{R}^n$. Para esto, se muestra que T es numerable. En efecto, supóngase que existen $x \neq y \in T$ tales que $\|x - y\| < \frac{\|v_1 + v_2\|}{m}$. Luego, sin perder generalidad, puede suponerse que existe $0 < t < \frac{1}{m}$ tal que $y = x + t(v_1 + v_2)$. Como $x \in U_m$, se tiene que

- $\frac{f(x+tv_1)-f(x)}{t} > \underline{g}_{\frac{1}{m}}^x(v_1) > r_1,$
- $\frac{f(y)-f(x)}{t} < \bar{g}_{\frac{1}{m}}^x(v_1 + v_2) < r_1 + r_2.$

Por otra parte, como $y \in U_m$, también se tiene que

- $-\frac{f(x+tv_1)-f(y)}{t} = \frac{f(y-tv_2)-f(y)}{-t} > \underline{g}_{\frac{1}{m}}^x(v_2) > r_2.$

Luego, se obtienen las siguientes desigualdades

- $f(x + tv_1) - f(x) > tr_1,$
- $f(y) - f(x) < tr_1 + tr_2,$
- $f(y) - f(x + tv_1) > tr_2,$

que son claramente contradictorias. Así, se concluye que T es finito para cada $m \in \mathbb{N}$. Luego, U es a lo más numerable, de lo que se concluye que $G \setminus A$ también lo es, y por lo tanto, tiene medida nula. \square

Considerando las Proposiciones A.3 y A.5 es directo probar el Teorema A.2, lo cual era nuestro objetivo en este apéndice.

Apéndice B

$Lip_0(M)$ es un espacio dual

En este apéndice se presenta una demostración de un resultado obtenido por Dixmier y Ng, y su aplicación al espacio $Lip_0(M)$. Esta demostración es la que puede hallarse en [2], y se incluye por completitud. En [1], Dixmier prueba el siguiente resultado

Teorema B.1 (Dixmier) *Sea X un espacio de Banach y sea B_X su bola unitaria cerrada. Supóngase que existe un subespacio total V de X^* tal que B_X es $\sigma(X, V)$ -compacto. Luego, X es un espacio de Banach dual.*

En [2], Ng muestra una variante del teorema anterior, el cual resulta finalmente como corolario de esta variante.

Teorema B.2 (Dixmier-Ng) *Sea X un espacio vectorial normado y B_X su bola unitaria cerrada. Supóngase que existe una topología separada localmente convexa τ para X tal que B_X es τ -compacta. Luego, X es un espacio de Banach dual.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $(X, \tau)^*$ y $(X, \|\cdot\|)^*$ los espacios duales de X con respecto a τ y $\|\cdot\|$, respectivamente. Considérese el espacio vectorial V de los funcionales lineales τ -continuos en B_X . Luego, $(X, \tau)^* \subseteq V \subseteq (X, \|\cdot\|)^*$. En efecto, la primera inclusión es directa, ya que los funcionales lineales τ -continuos en X son en particular τ -continuos en B_X . Para la otra inclusión, sea $f \in V$. Como B_X es τ -compacto y f es τ -continua en B_X , entonces la imagen $f(B_X)$ es un compacto en \mathbb{R} , y en particular es acotado, con lo que f resulta ser $\|\cdot\|$ -continua. Notando finalmente que la convergencia en $(X, \|\cdot\|)^*$ implica la convergencia uniforme en B_X , se concluye que V es un subespacio cerrado de $(X, \|\cdot\|)^*$, y por lo tanto es un espacio de Banach.

Para cada $x \in X$, defínase $\varphi(x) \in V^*$ como $(\varphi(x))(v) = v(x)$. Es claro que φ es lineal continua, con $\|\varphi\| \leq 1$. Además, como los elementos de V son τ -continuos en B_X , la restricción de φ a B_X es continua con respecto a la τ -topología traza y a la topología débil-* $\sigma(V^*, V)$. Como B_X es τ -compacto, se sigue que $\varphi(B_X)$ es $\sigma(V^*, V)$ -compacto. Además, este conjunto es convexo. Luego, en virtud del Teorema Bipolar

$$\varphi(B_X)^{\circ\circ} = \varphi(B_X),$$

con respecto a la dualidad (V^*, V) . Nótese que

$$\varphi(B_X)^\circ = \{v \in V \mid (\varphi(x))(v) \leq 1, \forall x \in B_X\} = \{v \in V \mid v(x) \leq 1, \forall x \in B_X\} = B_V.$$

Así, se concluye que

$$\varphi(B_X) = \varphi(B_X)^{\circ\circ} = B_V^\circ = B_{V^*}.$$

De esto último se desprende que φ es de hecho una isometría y es sobreyectiva. Así, se obtiene finalmente que $X \equiv V^*$. \square

Es fácil ver que efectivamente el Teorema B.1 es una consecuencia directa del Teorema B.2. Para finalizar esta sección, se aplican los resultados anteriores al espacio $Lip_0(M)$.

Proposición B.3 *$Lip_0(M)$ es un espacio dual.*

DEMOSTRACIÓN. Es sabido que la topología de la convergencia puntual en M es separada y localmente convexa. Resta ver que entonces que $B_{Lip_0(M)}$ es compacta para dicha topología. Para ello, nótese que si $\|f\|_L \leq 1$, entonces $|f(x)| \leq d(0, x)$ para todo $x \in M$. Esto muestra que

$$B_{Lip_0(M)} \subseteq \prod_{x \in M} [-d(0, x), d(0, x)].$$

En virtud del Teorema de Tychonoff, este último conjunto es compacto para la topología de la convergencia puntual. Luego, basta con probar que $B_{Lip_0(M)}$ es cerrado para la topología de la convergencia puntual. Sean entonces $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una red convergente de elementos de $B_{Lip_0(M)}$, y sea f su límite. Luego, para $x, y \in M$

$$|f(y) - f(x)| = \lim_{\lambda} |f_\lambda(y) - f_\lambda(x)| \leq d(y, x),$$

ya que $\|f_\lambda\|_L \leq 1$, para todo $\lambda \in \Lambda$. Se concluye así que $B_{Lip_0(M)}$ es compacta para la topología de la convergencia puntual, y en virtud del Teorema B.2, $Lip_0(M)$ es un espacio dual. \square