Universidad de Chile
Facultad de Economía y Negocios
Departamento de Administración

Seminario de Titulo

Semestre primavera 2006

Teoría del Valor Extremo:
Aplicación de la teoría al Índice NASDAQ
Periodos: 28/Octubre/1996 a 26/Octubre/2006

Profesor Guía: Rafael Romero M.
Alumnos: Felipe Claro E.
Sebastián Contador A.
Cristóbal Quiroga P.

Resumen

La medida de riesgo mas popular es Value at Risk (VaR), la cual ha sido criticada fuertemente en el ultimo tiempo por no ser una medida real, debido a que supone normalidad en los retornos. Dado este problema nosotros desarrollamos Extreme Value Theory, para el calculo de VaR y Expected Shortfall (medida de riesgo para eventos extremos), en Matrix Laboratory (Matlab), específicamente para el índice Nasdaq, dándonos dos escenarios de distribución de los retornos, uno de normalidad y otro de DGP (distribución general de pareto). Aquí se aplican los procedimientos planteados en el trabajo realizado por Manfred Gilli y Evis Këllezi, para el calculo de VaR y ES. De lo cual mostramos que el cálculo de VaR asumiendo normalidad en la distribución de los retornos subestima la pérdida potencial para un activo financiero con respecto al VaR obtenido bajo una DGP.

Introducción

El presente trabajo aplica una nueva teoría acerca de la medición de riesgo, que se refiere al modelamiento de valores extremos. Hasta hoy, la medida de riesgo mas popular es el VaR (Value at Risk), teoría que revolucionó el mercado financiero, pero que tiene algunas fallas importantes que nos hacen pensar que su calculo no es exacto, lo que puede llevar a grandes pérdidas en el mercado financiero.

La gran crítica a VaR es que supone normalidad en la distribución de los retornos de los activos, situación que empíricamente ha sido refutada. En el mundo financiero existen dos tipos de agentes, aquellos que creen en la normalidad para todo tipo de distribuciones, y aquellos que no creen en la normalidad[1].

Aquellos agentes que suponen normalidad son aquellos que creen que todas las cosas que pasan en el mundo son normales, por lo tanto siguen la distribución de probabilidad Normal.

Por el contrario los que no creen en la normalidad creen que cada fenómeno tiene su propia distribución, y que suponer una distribución normal para todos los fenómenos, si bien tiene a favor la simpleza de su cálculo, no entrega resultados acertados sino aproximaciones que pueden sobreestimar o subestimar ganancias o pérdidas para los inversionistas.

Por otra parte, durante la historia han existido diversos eventos extremos. Nos referimos a ellos como episodios de la historia en que se han producido pérdidas extremas en el mercado financiero. Ejemplos de eventos extremos existen por montones, entre ellos destacamos las crisis financieras del año 1929, Long Term Capital Management, los ataques terroristas del 11 de Septiembre del 2001 y diversos huracanes que han azotado las costas de Estados Unidos, entre otros.

Con la información anterior, se nos plantea una duda, como poder calcular las pérdidas máximas posibles en cierto periodo de tiempo, con un nivel de confianza dado y

[1] Analizado en el trabajo "Implementación del Value at Risk Condicional" de Dr. Rafael Romero M y Dr. Sigifredo Leangle S

aplicando la distribución de retornos que corresponda. Además de una teoría que sea capaz de cuantificar las perdidas máximas ante eventos extremos.

Ante esta pregunta nos damos cuenta de la existencia de Extreme Value Theory (EVT), teoría que estudia la inquietud planteada en el párrafo anterior y que será desarrollada en profundidad en este trabajo.

El EVT tiene sentido de ser calculado cuando la distribución de retorno tiene colas gruesas, es decir, que hay más eventos extremos que en la distribución normal.

El activo elegido para el análisis es el índice NASDAQ, que es una bolsa de valores electrónica y automatizada cuya oficina principal está en Nueva York. El NASDAQ Stock Market fue fundado en la década de los setenta y lista a más de 7.000 acciones de pequeña y mediana capitalización. Se caracteriza por comprender las empresas de alta tecnología en electrónica, informática, telecomunicaciones, biotecnología, etc.[2]

En el trabajo explicaremos las distintas maneras para calcular el VaR y la forma que utilizamos para calcular y aplicar EVT. Tanto el VaR como el EVT serán calculadas para la cola izquierda y derecha de la distribución de los retornos del índice. Lo anterior debido a que los eventos extremos por el lado izquierdo implican pérdidas para aquel agente que tiene una posición larga en el índice. Mientras que los eventos de la cola derecha implican pérdidas para aquel que tiene una posición corta en el activo en cuestión.

[2] Wikipedia

Explicación y cálculo del VaR (Value at Risk)

Como primer acercamiento al concepto de VaR, podemos decir que éste es "la máxima pérdida esperada en un periodo de tiempo y con un nivel de confianza dados, en condiciones normales de mercado"[3]

Una definición mas formal que encontramos del VaR es la de Sharpe (1995)[4], que dice, dada una cartera P, un periodo temporal T y un nivel de probabilidad Q, se estima un nivel de pérdidas L*, tal que existe una probabilidad Q de que las pérdidas efectivas L, sean iguales o menores que L* durante el periodo T. A éste nivel de perdidas se le denomina el Valor en Riesgo de una cartera (VaR)[5]. Formalmente:

$$\text{Prob}\,[L^* \geq L] = Q$$

Desde un punto de vista de gestión, el VaR es la cantidad de capital que la empresa debe asignar (explícita o implícitamente) como seguro frente a posibles contingencias desfavorables.

Para la estimación del VaR hay dos temas que son claves para su cálculo, tanto para posiciones lineales como no lineales. Estas son la validez de la hipótesis de normalidad para el valor o rendimiento de un activo o una cartera (que incluye el estudio del tema de las colas gruesas como el tema de la volatilidad variable con tendencia a agruparse a lo largo del tiempo –volatility clustering-) y la hipótesis de no linealidad de los activos para los cuales se quiere estimar el VaR.

Las medidas como VaR son utilizadas en diversos campos, como por ejemplo, para medir el grado de exposición al riesgo de una operación de una unidad de negocio o de varios agregados, y para comparar el riesgo de éstas, para cargar a cada posición el coste

[3] Definición de Phillipe Jorion, ver Jorion 2000
[4] Definición citada en el libro "La Gestión de Riesgo Financiero y Crédito" de Juan Ignacio Peña.
[5] La empresa XXX tuvo beneficios diarios de US$ 7,6 MM. Sin embargo, el 5% de los días se observaron pérdidas de US$ 11, 4 MM o superiores. Por tanto, podríamos decir que, si la distribución de pérdidas y ganancias se establece en el tiempo, la máxima pérdida que podríamos esperar en 19 de cada 20 días es de US$ 11,4 MM. Esta pérdida máxima esperada es el VaR para el nivel de confianza (95%) elegido. Usando la formula expuesta: P[-US$ 11,4 MM ≥ L] =0,95

de capital adecuado a su valor de mercado y a su riesgo, protege a la empresa de los costes de insolvencia, entre otros.

El VaR es una teoría creada para la administración de los riesgos financieros de una empresa. Los riesgos financieros son aquellos que provienen de posibles pérdidas en el mercado financiero, por ejemplo variaciones en los tipos de cambio, cambios en las tasas de interés, entre otros. Todos esos riesgos, que son los que trata de administrar la teoría del VaR pueden subdividirse en:

- Riesgo de mercado: movimientos en los niveles o volatilidad en los precios de mercado.
- Riesgo de crédito: posibilidad de que la contraparte se niegue o no pueda cumplir con los compromisos de pagos que adquirió en el pasado.
- Riesgo de liquidez: este riesgo puede dividirse en dos, por una parte que sea difícil liquidar los activo al precio correspondiente (puede ser debido al tamaño de la posición por ejemplo), por lo que haya que disminuir su precio para deshacerse del activo. Por otro lado el hecho de tener que liquidar tempranamente una posición para así poder cumplir con las obligaciones de pago.
- Riesgo operacional: viene dado por posibles errores técnicos o humanos.
- Riesgo Legal: eventualidad de que un contrato no se pueda hacer cumplir legalmente.

Antes de introducirnos de lleno en lo que se refiere a la teoría del valor extremo, y las aplicaciones que éste tiene para el cálculo del VaR, vamos a comparar brevemente las ventajas y desventajas de las tres metodologías clásicas para la estimación del VaR:

1. **Método analítico de la matriz de varianzas-covarianzas:** Este método se basa en la hipótesis de la distribución conjunta normal de los rendimientos de la cartera, y en la hipótesis de la relación lineal (a lo más cuadrática) entre los factores de riesgo del mercado y el valor de la empresa.
   Ventajas: La estimación de VaR a través de éste método es simple y rápida, lo que lo hace atractivo cuando se trabaja en tiempo real.

Desventajas: Sobreestima el VaR para niveles bajos de confianza, y lo subestima para niveles altos de confianza (inconveniente derivado de la suposición de normalidad en los retornos de la cartera y no capturar el fenómeno de las colas gruesas). Otra desventaja es que la hipótesis de linealidad condiciona a este método a ser aplicable a carteras lineales, en un mundo donde los activos no lineales toman cada día mas fuerza. Por último, incluso ampliando la aproximación del valor de la cartera a una cuadrática, no se logra una buena precisión en la estimación del VaR de carteras no lineales. Teniendo en cuenta que la aplicación complica el cálculo de VaR, disminuyendo de esa forma una de las ventajas más claras que tiene el método.

2. **Método de simulación Histórica:** Es un método aplicable tanto a carteras lineales como no lineales, debido a que es un método no paramétrico, que no depende de ninguna de las hipótesis sobre distribuciones de probabilidad subyacente y, por lo tanto, permite capturar el fenómeno de las colas gruesas al mismo tiempo que elimina la necesidad de estimar y trabajar con volatilidades y correlaciones, evitando en gran medida el riesgo de modelización.
   Ventajas: Las ventajas fueron mencionadas en su definición, y hace que este método sea preferible al de matriz varianza-covarianza, especialmente cuando se trata del cálculo del VaR para carteras de instrumentos no lineales.
   Desventajas: La principal desventaja del método de simulación histórica viene dada por las características de los datos utilizados, que supone que ningún evento que no haya ocurrido en el pasado podrá ocurrir en el futuro.

3. **Método de simulación de Monte Carlo:** Es un método de valoración global, tanto paramétrico como no paramétrico. Eliminando la necesidad de establecer aproximaciones que introducen imprecisión en los cálculos. Este método es aplicable tanto a posiciones lineales como no lineales. En el caso del modelo no paramétrico, al no estar sujeto a ninguna distribución de probabilidad subyacente, evita mayormente el riesgo de modelización y

permite capturar el fenómeno de las colas gruesas, eliminando al mismo tiempo, la necesidad de trabajar con volatilidades y correlaciones.

La simulación de Monte Carlo ofrece una descripción más realista del riesgo ya que la distribución de las variaciones en los precios refleja un abanico completo de todas las realizaciones y sus posibilidades.

Ventajas: Las ventajas fueron mencionadas anteriormente, y ubican a este método de simulación por sobre los otros dos métodos analizados anteriormente.

Desventajas: La mayor desventaja de este método es su lentitud, pero este inconveniente se va solucionando rápidamente a través del tiempo debido al desarrollo informático que se esta teniendo.

Limitaciones del Value at Risk:

Principalmente las limitaciones del VaR vienen dadas por:

1. *Asumir normalidad y homocedasticidad en los mercados:* La suposición de normalidad es inadecuada para la medición de riesgo en las colas de la distribución. En un mercado heterocedástico, la varianza no es un múltiplo del horizonte temporal y, por ejemplo, la varianza semanal no tiene relación con la varianza diaria.
2. *Riesgo de liquidez:* El VaR no tiene en cuenta que el riego de liquidez puede ser el mayor riesgo en algunos mercados. En algunos instrumentos que son nuevos o ilíquidos, y que no están muy anidados al mercado los costes liquidez son casi indistinguibles de los riesgos de mercado, por lo que la venta de un paquete grande de éstos activos, sobre todo si es una venta forzada, podría alterar fuertemente los precios de mercado de éstos.
3. *Cambio de parámetros en momentos de tensión:* Tanto la diversificación, como la correlación entre activos falla en los momentos de tensión. La evidencia empírica lo muestra en épocas de crisis, como son por ejemplo la crisis de la bolsa en 1987, la de tipos de cambio en 1992, bonos en 1994, entre otras, en donde las correlaciones desaparecen y la diversificación se ve afectada por éste hecho.
4. *Problema sobre el cálculo de la volatilidad:* La volatilidad no es observable, por lo que siempre se hace necesario estimarla. Para esta estimación no existe un acuerdo

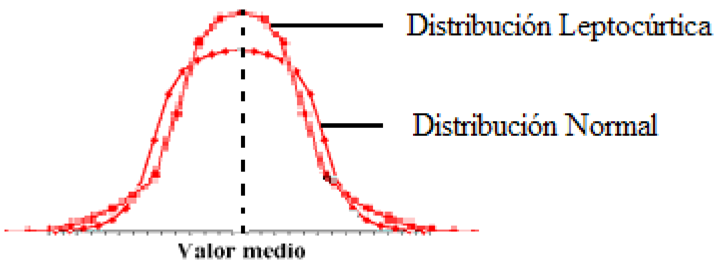
sobre que método es mejor, e incluso si es mejor o no utilizar estimaciones implícitas.

5. *Instrumentos no lineales:* Los derivados presentan una no linealidad que dificulta el cálculo del VaR. No existe ningún tipo de convención que establezca de que forma se debe calcular el VaR en carteras con estas posiciones.

Problemas de las colas gruesas en el cálculo del VaR:

Hasta el momento hemos mencionado en diversas ocasiones el problema de las colas gruesas, pero aún en este trabajo no hemos explicado que son, ni por que constituyen un problema al referirnos a un cálculo certero del VaR.

El hecho de que las distribuciones de los rendimientos financieros presenten colas gruesas significa que los movimientos extremos de precios ocurren con más frecuencia de la que implica una distribución normal. Lo anterior se explica en el siguiente diagrama, en donde nos movemos de una curva de distribución normal a una de distribución leptocúrtica (que significa que se le añade masa tanto a las colas como al centro, y se le quita masa de probabilidad a las zonas intermedias de la distribución), lo que significa un aumento de probabilidad de ocurrencia tanto de movimientos muy grandes (colas), como movimientos pequeños (centro).



Dado que el VaR se centra en el estudio de los casos extremos (las colas), es evidente entonces, que el hecho de que existan las colas gruesas complica el estudio y el cálculo del VaR.

En el mundo teórico de las distribuciones normales, un movimiento equivalente a diez desviaciones estándar ocurre solamente una vez en un millón, en los mercados financieros reales sabemos que no es así, por lo que hay que estudiar cual puede ser la frecuencia con que estos ocurran.[6]

Extreme Value Theory

Lo anterior ha llevado a que se propongan otras distribuciones, las cuales deben tener como cualidad el poseer colas mas anchas que la distribución normal. Ejemplos de lo anterior son la distribución estable de Pareto, la distribución *t-student*, la normal mixta, la distribución de errores generalizados, entre otras. Lo anterior ha permitido modelar de mejor forma los retornos de activos financieros, y obtener, de esa forma, mejores estimaciones del VaR.

Existen incluso quienes, actualmente, proponen distribuciones no para describir el comportamiento de todos los retornos, sino únicamente de los rendimientos extremos, es decir, basarse en la teoría del valor extremo (Extreme Value Theory).

Antes de entrar en la Teoría del Valor Extremo (EVT), debemos recordar que el VaR se definía como la pérdida bajo situaciones normales de mercado, y que por lo tanto los acontecimientos extremos (crisis de 1987, 1992, 1994, 1998, etc.) deben ser analizados mediante instrumentos nuevos, entre los cuales destacamos EVT, que tiene como fin calcular las pérdidas posibles bajo situaciones extremas de mercado.

Algunos párrafos atrás mencionamos ciertas distribuciones que suplantan a la normal para el cálculo del VaR (Pareto, Normal mixtas, t-student, etc.), pero los aportes mas recientes son los que se basan en la Teoría del Valor Extremo, y vienen dados por la *Distribución Generalizada de los Valor Extremos*.

- **Distribución Generalizada de los Valores Extremos:**

Si lo que se busca es poder modelar las colas de las distribuciones de rendimientos para tener en cuenta la posibilidad de la existencia de colas gruesas, lo mas directo es

[6] Existe evidencia de que es así en Chew (1994), página 64, donde movimientos de tres desviaciones estándar se registraron una mayor cantidad de veces que las que determina la distribución normal (0,3% de veces)

acudir a la EVT, según la cual, la forma precisa de la distribución de las colas de los rendimientos es perfectamente conocida y modelizable, y lo que es muy importante, independiente de la distribución de probabilidad de los rendimientos. Por lo que, según esta teoría, una única ley de probabilidad describe el comportamiento de las colas de casi todas las distribuciones de probabilidad.

El Teorema del Valor Extremo[7] nos proporciona la forma de dicha ley de probabilidad. Se pueden obtener tres tipos posibles de distribuciones límite de los rendimientos extremos (a los que denominaremos Rx)[8]:

- Distribución Gumbel (tipo I)

$$\Lambda(x) = e^{-e^{-x}}, x \in \Re$$

- Distribución Fréchet (tipo II)

$$\Phi_{\alpha}(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ e^{-x^{-\alpha}}, x \succ 0 \end{cases} \qquad \alpha \succ 0$$

- Distribución Weibull (tipo III)

$$\Psi_{\alpha}(x) = \begin{cases} e^{-(-x)^{-\alpha}}, x \leq 0 \\ 1, x \succ 0 \end{cases} \qquad \alpha \succ 0$$

[7] Fisher-Tippett 1928
[8] Estas distribuciones son de densidad.

En el año 1995, Jenkinson propone la formula general que engloba a las tres distribuciones anteriores, creando la Distribución Generalizada de los Valores Extremos:

$$H_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} e^{-(1+\varepsilon X)^{-1/\varepsilon}} & si\varepsilon \neq 0 \\ e^{-e^{-x}} & si\varepsilon = 0 \end{cases}$$

Con x tal que $1+\varepsilon x \succ 0$.

$$\text{Si} \begin{cases} \varepsilon = \alpha^{-1} & \text{Obtenemos la función de distribución Frechet.} \\ \varepsilon = -\alpha^{-1} & \text{Obtenemos la función de distribución Weibull.} \\ \varepsilon = 0 & \text{Obtenemos la función de distribución Gumbel.} \end{cases}$$

Estos resultados muestran la generalidad de la Teoría del Valor Extremo, en donde todas las distribuciones de probabilidad mencionadas poseen la misma distribución de sus colas, con la única diferencia del valor que toma el índice de colas.

¿Por que estudiar la Teoría del Valor Extremo?

En los últimos 25 años, ha habido un creciente número de eventos extremos en el sector financiero como en el mercado de los seguros, incluyendo quiebras de mercados y desastres naturales que han dejado como efecto pérdidas extremas en algunas compañías. Ejemplos de empresas y/o desastres tenemos muchos, entre los cuales destacamos Long-Term capital Management (LTCM), el ataque terrorista del 11 de Septiembre de 2001, diversos huracanes, guerras en medio oriente, entre otros. Los métodos estadísticos tradicionales que se focalizan en el centro de la distribución de pérdidas, tienden a subestimar la probabilidad de ocurrencia de ciertos eventos extremos. La Teoría del Valor Extremo es una metodología estadística que sirve muy bien para valorar, modelar y administrar aquellos eventos extremos.

El noventa por ciento de los eventos causan el diez por ciento de las pérdidas, y el resto del diez por ciento de los eventos causa el noventa por ciento de las pérdidas. *(Una variación de la regla del noventa por ciento utilizada en el marketing)*

Mas seguido de lo que uno esperaría, eventos financieros extremos o catastróficos que eran considerados muy poco probables, ocurren. Lo anterior es extraño, pero los eventos extremos, usualmente, no pueden ser manejados usando las técnicas comunes de análisis de riesgos.

Si la probabilidad de exposición a un evento catastrófico extremo es mayor que cero, por ejemplo 0,1 por ciento, entonces este evento puede llegar a ocurrir, por lo que se hace necesario ocupar técnicas estadísticas modernas, que incluyan los riesgos extremos en sus análisis, y así poder, de una manera mas segura, controlar y administrar los riesgos de los portafolios que se administran.

Expected Shortfall

Constituye una medida de riesgo, la cual estima la pérdida por sobre el VaR, formalmente sería:

$$ES_P = E(X / X \succ VAR_P)$$

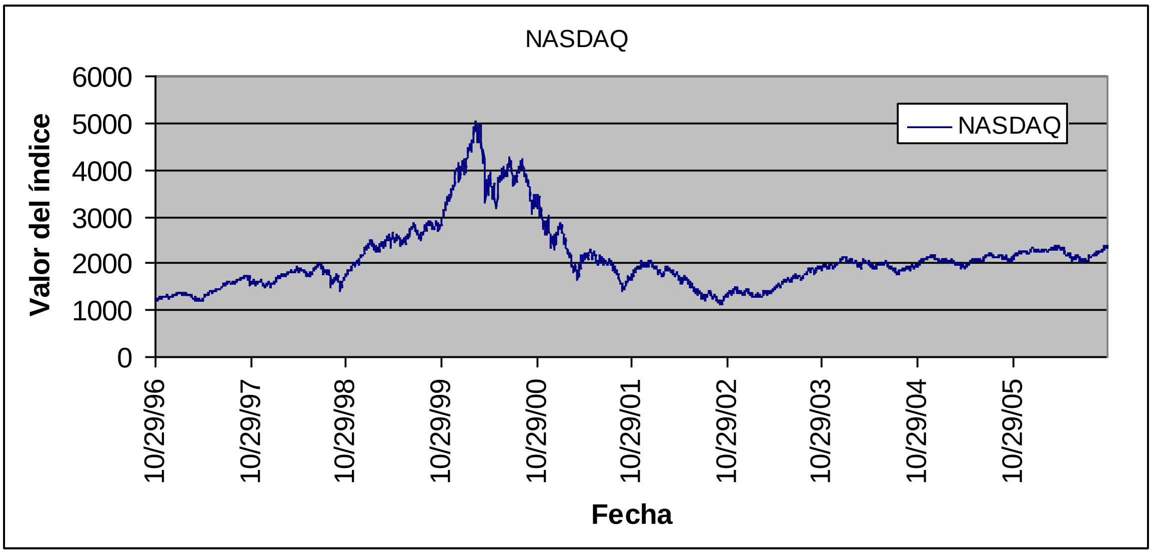
La interpretación del ES sería el promedio de las pérdidas en las situaciones en que las pérdidas exceden el VaR.

Aplicación de la Teoría del Valor Extremo al índice de precios accionarios NASDAQ:

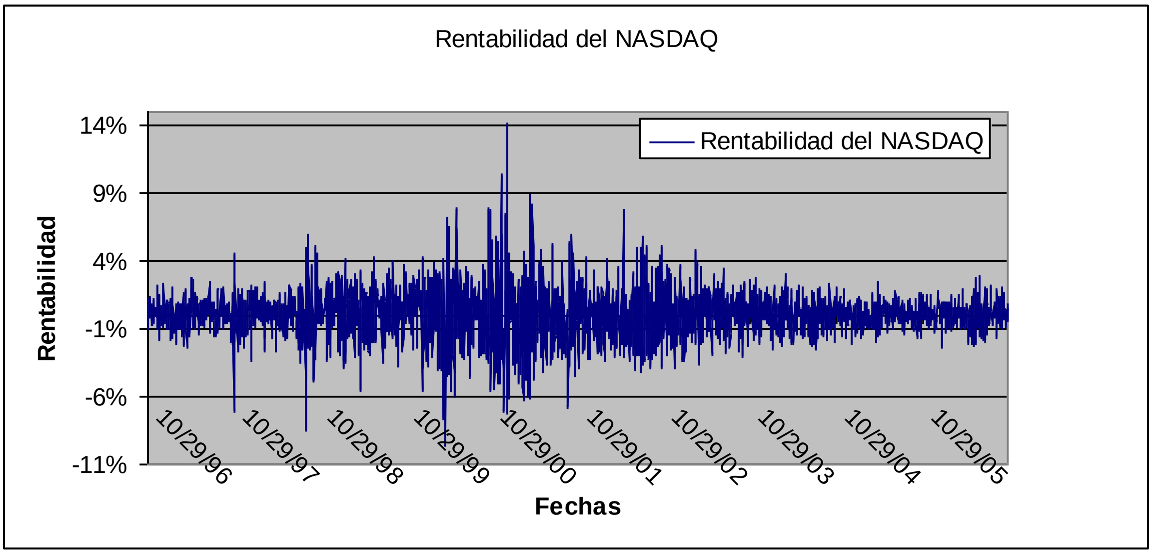
En esta parte del trabajo calcularemos y compararemos las dos formas que anteriormente mencionamos para el cálculo del VaR, estas son suponiendo normalidad en la distribución de los retornos, y suponiendo que se distribuyen de una forma distinta, para la cual ocuparemos la función de Distribución General de Pareto, además del Expected Shortfall calculado para el índice.

Los datos usados para los cálculos en ambos casos fueron los retornos diarios de índice NASDAQ entre el 28 de Octubre de 1996 hasta el 26 de Octubre de 2006, lo que corresponde a una muestra de 2.517 datos diarios.

En los siguientes gráficos podemos observar la evolución de los precios del índice en cuestión, así como la evolución de las rentabilidades de éste.

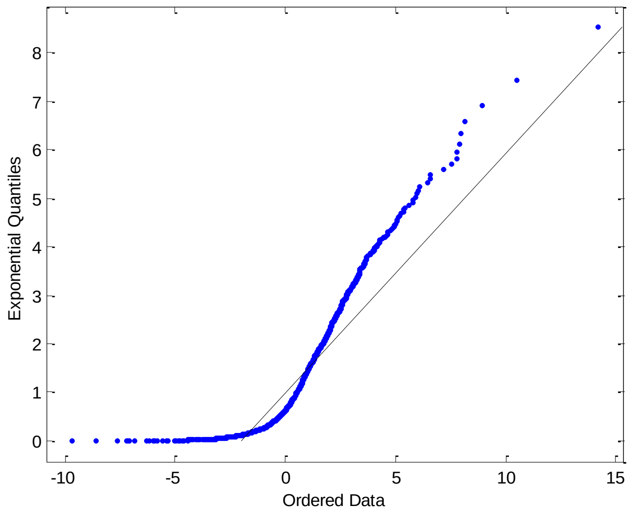


En este gráfico observamos la evolución de los precios del índice NASDAQ, como se puede observar, hay una caída fuerte entre los años 1999 y 2000, donde el índice vuelve a los valores que tenía el año 1996.

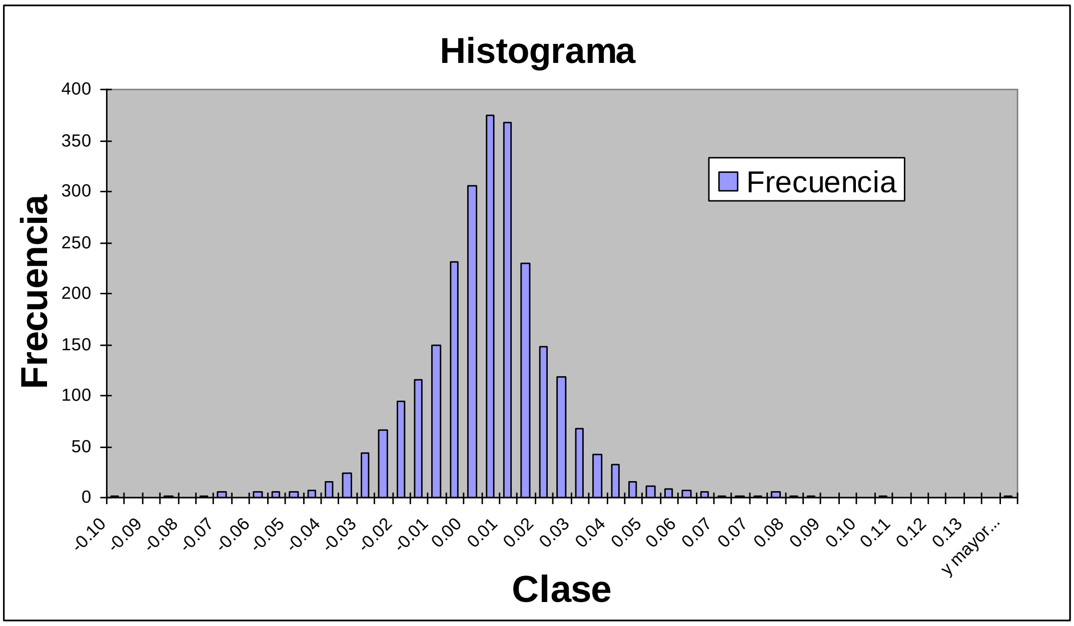


En este grafico observamos las rentabilidades diarias del índice entre Octubre de 1996 y Octubre de 2006.

A continuación observaremos un gráfico, de la rentabilidad del índice NASDAQ con respecto a la distribución exponencial, incluyendo el 100% de las observaciones. Cabe destacar que si la curva es cóncava con respecto a la línea recta, indica que la distribución tiene colas gruesas, por el contrario, si es convexa con respecto a la línea recta, entonces estamos hablando de una distribución con colas delgadas.



Como se puede observar en la figura, el comportamiento, en un comienzo, es convexo con respecto a la línea recta, pero luego (y en la mayor parte de la curva) su comportamiento es de concavidad con respecto a la línea, lo que nos permite decir que la variable en estudio, tiene colas gruesas en su distribución.



En la figura anterior observamos el histograma con las frecuencias de las variaciones diarias del índice, como se puede observar, existen observaciones extremas, las que, en conjunto con el gráfico anterior nos llevar a afirmar la existencia de colas gruesas en la distribución de retornos del NASDAQ.

En esta etapa del trabajo, conociendo el comportamiento de la distribución de las rentabilidades del NASDAQ, daremos paso al cálculo del VaR por medio de dos métodos. Los métodos elegidos son el de Matriz Varianza-Covarianza (Distribución Normal de los retornos), y Extrem Value Theory (Distribución General de Pareto en los retorno).

- **Distribución normal de los retornos:**

El cálculo del VaR asumiendo normalidad en la distribución de los retornos fue calculado en Microsoft Excel al 99% de confianza.

Como fue mencionado anteriormente, el calculo del VaR fue hecho tanto para la cola izquierda (posición larga en el activo), como para la como para la cola derecha (posición corta en el activo)

- *Primer Caso "Posición larga en el activo"*

En primera instancia calculamos las rentabilidades diarias, para así obtener la volatilidad (varianza) y la media, de lo cual obtuvimos los siguientes valores:

Media	0,0004
Volatilidad	0,0182

Luego construimos un intervalo de confianza al 99%, de la siguiente forma:

$$\bar{X} - Z_{99\%} * \sigma \qquad \text{, donde } \left\{ \begin{array}{l} \bar{X} \rightarrow rentabilidad.promedio \\ Z_{99\%} \rightarrow valor.normal = 2.3263 \\ \sigma \rightarrow volatilidad \end{array} \right.$$

De lo cual obtuvimos un VaR al 99% de -4,202% , lo cual significa que con un 99% de confianza la máxima perdida esperada para mañana en el NASDAQ es un 4,202%, o sea que el valor del índice caiga de un 2379,1 a 2279[9] puntos, bajo situaciones normales de mercado.

- *Segundo Caso "Posición corta en el activo"*

La metodología utilizada es idéntica a la anterior, la única diferencia es que hay que multiplicar por menos uno las rentabilidades para así calcular la cola izquierda.

Los valores obtenidos fueron los siguientes:

Media	-0,00043
Volatilidad	0,02

[9] El ultimo dato de la serie es 2379,1 correspondiente al 26 de Octubre de 2006, por lo tanto los VaR calculados son para el 27 de Octubre de 2006

Luego aplicamos el mismo intervalo de confianza anterior, el cual nos arrojo un VaR al 99% de 4,288%, lo cual significa que con un 99% de confianza el NASDAQ aumentara a lo más un 4,288% o sea de 2379,1 a 2481,12 puntos, bajo situaciones normales de mercado.

Hay que tener en cuenta que cuando el inversionista se encuentra en una posición corta un aumento en el valor del activo representa una pérdida para el.

Resumen de resultados

Posición	VaR (99%)	Valor Índice Hoy	Valor Índice Mañana	Volatilidad	Media
Largo	-4,202%	2379,1	2279,13	0,01825	0,00043
Corto	4,288%	2379,1	2481,12	0,01825	-0,00043

Valor del índice hoy corresponde al ultimo dato de la serie (25 octubre 2006), y el valor del índice mañana (26 octubre 2006) corresponde a la peor situación esperada bajo situaciones normales de mercado con un 99% de confianza

- **Distribución General de Pareto en los retornos:**

Antes de explicar en detalle el desarrollo de éste método, queremos mencionar que tanto los cálculos como la mayoría de los gráficos fueron obtenidos a través del software MATLAB 7.0, usando los comandos creados por Manfred Gilli y Elvis Këllezi.[10]

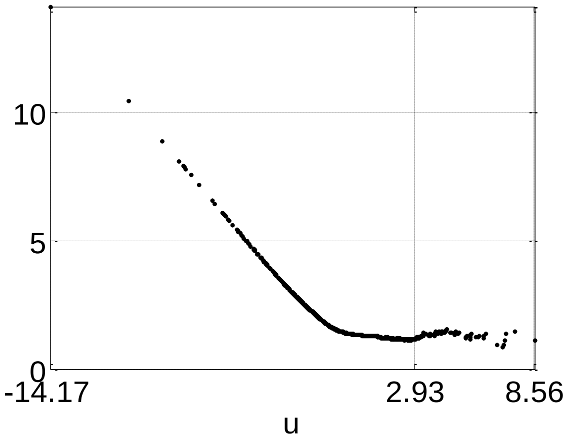
El método que aquí aplicaremos consta de los siguientes pasos: elegir un umbral "u", ajustar la Distribución General de Pareto a los puntos que exceden el umbral y luego calcular puntos e intervalos para el VaR y para el ES (expected shortfall).

La selección de umbral "u" no es trivial debido a que no existen métodos o consensos que determinen una forma universal para su cálculo. Este umbral debe captar los eventos extremos, lo cual nos lleva a elegir un número alto, por otro lado, este número no puede ser muy alto, debido a que mientras más alto, menos datos estarán sobre el umbral, lo que se transformara en que menos observaciones usaremos para estimar parámetros.

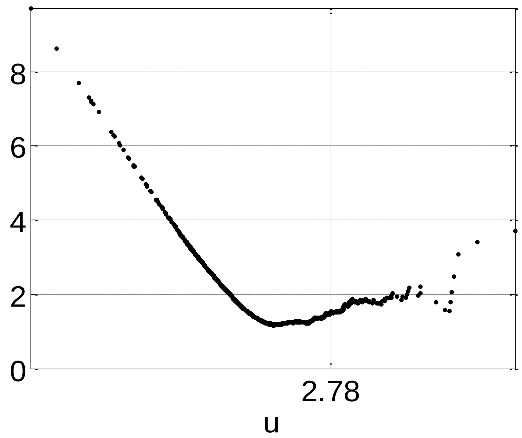
Dado que no existe un criterio aprobado mejor que el resto, cada analista elige aquel que desee. En el caso de éste análisis, el método utilizado es aquel que deja el 5% de las observaciones como observaciones extremas.

Los siguientes gráficos muestran los excesos de la media[11] para los datos del índice NASDAQ. En este caso, "u" debe ser 2.93% para el caso de la cola izquierda, dejando 125 observaciones por sobre este umbral. Para el caso de la cola derecha, "u" debe ser 2.783%, dejando 125 observaciones por sobre el umbral (lo que corresponde al 5% de la muestra.

[10] An application of Extreme Value Theory for Measuring Financial Risk.
[11] Funcion de exceso sobre la media, se encuentra planteada en el Anexo 1.



El grafico anterior corresponde a la cola izquierda



El grafico anterior corresponde a la cola derecha

Estimación de Máxima Verosimilitud:

Con los resultados anteriores nosotros suponemos que las observaciones sobre el umbral, es decir, las observaciones de la cola, se distribuyen conforme a la distribución General de Pareto (GPD). Existen diferentes métodos para estimar los parámetros de la distribución GPD, ahora explicaremos el Método de Máxima Verosimilitud (ML).

Par una muestra y = {y1,..., yn} la función log-likelihood L (ε, σ/y) para la GPD es el logaritmo de la función de densidad de las n observaciones.

$$L(\varepsilon, \sigma / y) = \begin{cases} -n \log \sigma - (\frac{1}{\varepsilon} + 1) \sum_{i=1}^{n} \log(1 + \frac{\varepsilon}{\sigma} y_i) & \text{Si, } \varepsilon \neq 0 \\ \\ -n \log \sigma - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{n} y_i & \text{Si, } \varepsilon = 0 \end{cases}$$

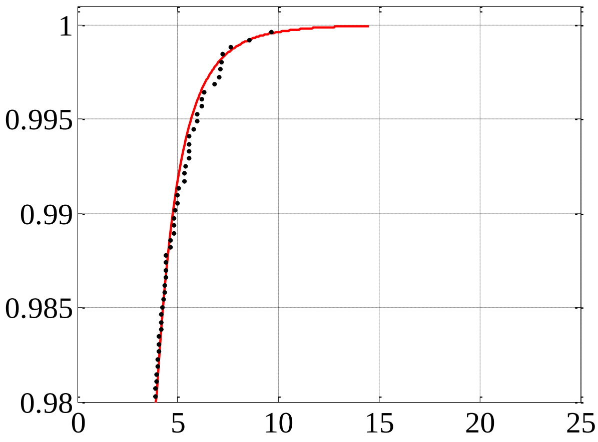
Luego calculamos los valores de ε y σ que maximizan la función para la muestra definida como las observaciones que exceden el umbral. De lo anterior obtenemos que ε= 0.142 y σ= 1.000 para la cola izquierda (0.151 y 1.268 respectivamente para la cola derecha). Luego con los parámetros estimados nos encontramos preparados para el cálculo del VaR y de ES, con las siguientes formulas[12]:

$$VaR_p = u + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\varepsilon}}((\frac{n}{N_u} p)^{-\hat{\varepsilon}} - 1$$

$$\hat{ES} = \hat{VaR}_p + \frac{\hat{\sigma} + \hat{\varepsilon}(\hat{VaR}_p - u)}{1 - \hat{\varepsilon}} = \frac{\hat{VaR}_p}{1 - \hat{\varepsilon}} + \frac{\hat{\sigma} - \hat{\varepsilon} u}{1 - \hat{\varepsilon}}$$

[12] Demostración en Anexo 1

La siguiente figura muestra como la GPD se ajusta los excedentes por sobre el umbral.



Con ambos parámetros estimados, podemos calcular tanto el VaR como el ES con una probabilidad dada. Para una probabilidad de 0.01, el VaR estimado es de 4.731% y el ES estimado es de 6.195% para el caso de la cola Izquierda. Para la cola Derecha, el VaR es de 5.082%, mientras que el ES es de 6.985%.

Luego de haber calculado los valores estimados para VaR y ES, calculamos los intervalos de confianza de éstos.

Estimación de los intervalos:

Consideramos intervalos de confianza individuales y conjuntos, basados en la función log-likelihood. Estos intervalos de confianza para el VaR pueden ser obtenidos usando una versión reparametrizada de la GPD, definiendo esta última en función de ε y VaR_p:

$$G_{\varepsilon,VaR_p}(y) = \begin{cases} 1-\left(1+\dfrac{\left(\frac{n}{N_u}p\right)^{-\varepsilon}-1}{VaR_p-u}y\right)^{-1/\varepsilon} & ,\ \varepsilon \neq 0 \\ 1-\dfrac{n}{N_u}p*\exp\left(\dfrac{y}{VaR_p-u}\right) & ,\ \varepsilon = 0 \end{cases}$$

La función de probabilidad de densidad correspondiente sería:

$$g_{\varepsilon,VaR_p}(y) = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{n}{N_u}p\right)^{-\varepsilon}-1}{\varepsilon(VaR_p-u)}\left(1+\dfrac{\left(\frac{n}{N_u}p\right)^{-\varepsilon}-1}{VaR_p-u}y\right)^{\frac{-1}{\varepsilon}-1} & ,\ \varepsilon \neq 0 \\ -\dfrac{\frac{n}{N_u}p\ *\exp\frac{y}{VaR_p-u}}{(VaR_p-u)} & ,\ \varepsilon = 0 \end{cases}$$

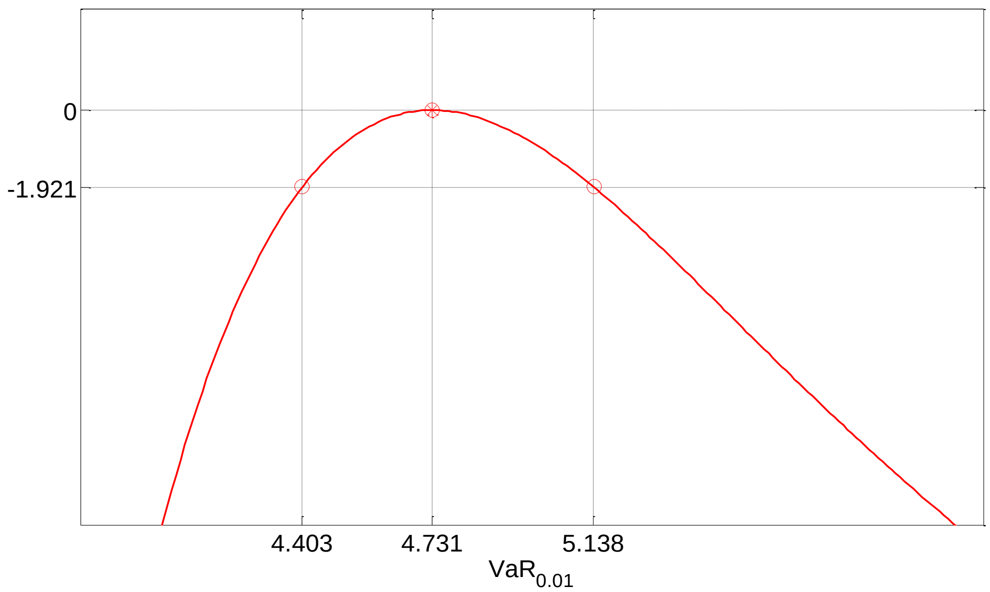
Asimismo, usando la siguiente reparametrización para ε ≠ 0, tenemos:

$$G_{\varepsilon,ES_p}(y) = 1-\left(1+\frac{\varepsilon+\left(\frac{n}{N_u}p\right)^{-\varepsilon}-1}{(ES_p-u)(1-\varepsilon)}y\right)^{-1/\varepsilon} \quad , \varepsilon \neq 0$$

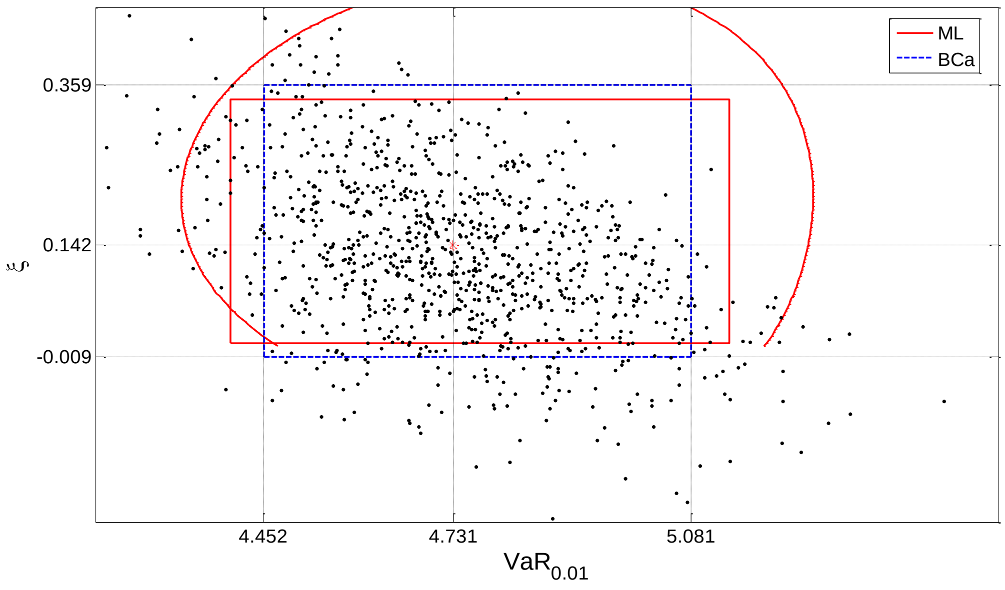
$$g_{\varepsilon,ES_p}(y) = \frac{\varepsilon+\left(\frac{n}{N_u}p\right)^{-\varepsilon}-1}{\varepsilon(ES_p-u)(1-\varepsilon)}\left(1+\frac{\varepsilon+\left(\frac{n}{N_u}p\right)^{-\varepsilon}-1}{(ES_p-u)(1-\varepsilon)}y\right)^{\frac{-1}{\varepsilon}-1} \quad , \varepsilon \neq 0$$

Los cuales son los intervalos de confianza para el ES_p.

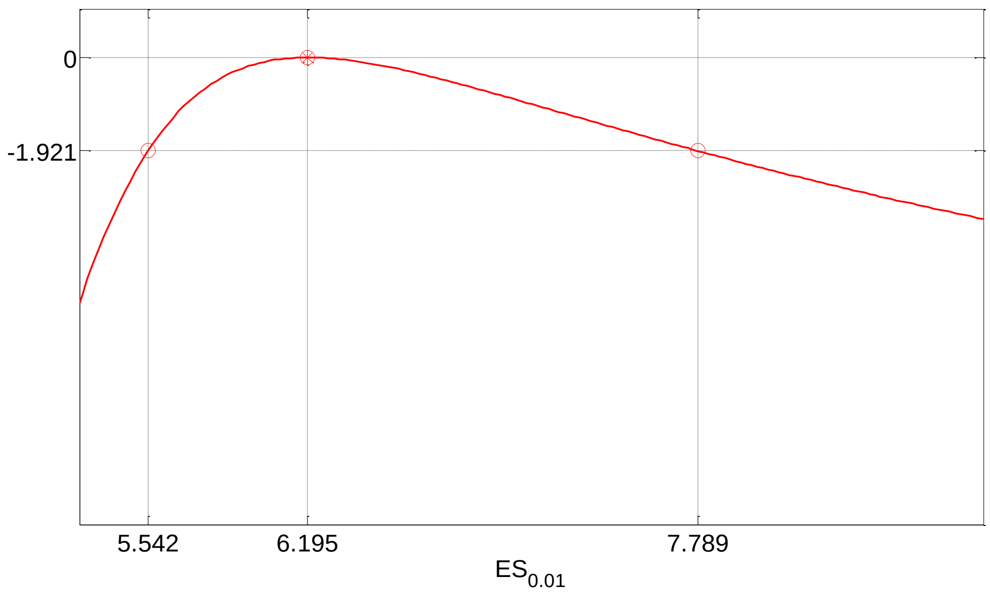
Las siguientes figuras muestran las regiones de confiabilidad para la cola izquierda obtenidas a través del proceso anteriormente descrito. Estas estimaciones están hechas sobre el VaR y ES a través de la función reparametrizada.



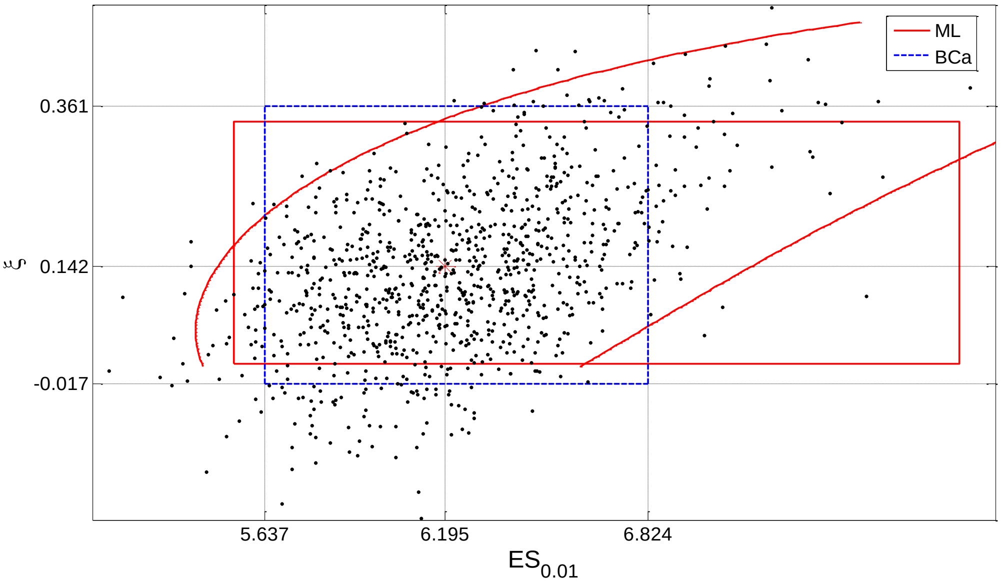
La figura anterior nos muestra el perfil de la función log-likelihood y los intervalos de confianza para el VaR al 0.01



Esta figura nos muestra los intervalos de confianza individuales y conjuntos al 95% para las estimaciones de ε para el VaR al 0.01. Los puntos representan 1000 estimaciones hechas por el método Booststrap (BCa) para el NASDAQ.



Esta figura nos muestra el perfil de la función log-likelihood y los intervalos de confianza para el ES al 0.01



Esta figura nos muestra los intervalos de confianza individuales y conjuntos al 95% para las estimaciones de ε para el ES al 0.01. Los puntos representan 1000 estimaciones hechas por el método Booststrap para el NASDAQ.

Como se observa en los gráficos anteriores, de los 1000 puntos estimados por booststrapping, aproximadamente el 95% se encuentra dentro del intervalo conjunto, no así de los intervalos individuales.

En el siguiente cuadro se muestran los resultados obtenidos para las estimaciones de ε, σ, VaR y ES a través de ambos métodos:

Para la cola izquierda:

	LIMITE INFERIOR			**LIMITE SUPERIOR**	
	Bca[13]	**ML**[14]	**Estimación**	**ML**	**Bca**
Ε	-0.016	0.010	0.142	0.339	0.338
Σ	0.757	0.823	1.000	1.226	1.293
VaR	4.452	4.403	4.731	5.138	5.081
ES	5.637	5.542	6.195	7.789	6.824

[13] Bootstraping.
[14] Máxima Verosimilitud.

Los resultados de la tabla anterior muestran que, con una probabilidad de 0.01, las pérdidas de mañana, con una posición larga, serán mayores de 4.731%, y que la correspondiente pérdida esperada, que es el promedio de las pérdidas en las situaciones en cuando se excede el 4.731%, es 6.195%.

Para la cola derecha:

	LIMITE INFERIOR			LIMITE SUPERIOR	
	Bca	**ML**	**Estimación**	**ML**	**Bca**
E	.002	0.024	0.151	0.342	0.341
Σ	1.005	1.041	1.268	1.555	1.584
VaR	4.741	4.667	5.082	5.607	5.516
ES	6.215	6.144	6.985	8.887	7.998

En este caso, los resultados de la tabla anterior muestran que, con una probabilidad de 0.01, las pérdidas de mañana, con una posición corta en el índice, serán mayores de 5.082%, y que la correspondiente pérdida esperada, que es el promedio de las pérdidas en las situaciones en cuando se excede el 5.082%, es 6.985%.

Es importante destacar que el limite superior del intervalo de confianza para ε es tal que el momento de primer orden es finito (1/0.34 = 2.94 >1). Lo anterior garantiza que la estimación del ES, que es un primer momento condicional, existe para ambas colas.

Conclusión

Dado los resultados obtenidos anteriormente, encontramos dos aportes de la EVT, el primero es el cálculo del VaR cuando la serie de los retornos no se distribuye normal y hay presencia de colas gruesas, el segundo es la estimación de "Extreme Shortfall" .Las cuales serán analizadas a continuación.

EVT como un aporte para el calculo del VaR

Hemos obtenido el VaR al 99% de confianza para el NASDAQ bajo dos escenarios, el primero de ellos asumiendo normalidad en los retornos y el segundo asumiendo no normalidad, en el cual nos basamos en la Teoría del Valor Extremo y específicamente en la Distribución General de Pareto.

El cálculo del VaR asumiendo normalidad en los retornos es válido cuando la serie sigue una distribución normal y no presenta colas gruesas, de no ser así estaríamos subestimando el VaR, lo cual se ve reflejado en los resultados de nuestro trabajo.

	Escenario Normal	Escenario no Normal
VaR (99%)largo	-4,202%	-4,731%
VaR (99%)corto	4,228%	5,200%

Asumiendo normalidad obtenemos un VaR de un 4.202%, cuando en realidad es un 4,731%, o sea estamos subestimando la pérdida máxima en un 0.529%, lo cual puede tener consecuencias devastadoras al no estar cubiertos de manera correcta.

Por lo cual la Teoría del Valor Extremo, es aplicable para cualquier escenario, sin embargo esta puede ser mas compleja en su cálculo, debido a esto es preferible testear la distribución para notar la existencia de colas gruesas, de ser así hay que utilizar EVT, de lo contrario, ajustamos la serie a una distribución normal.

Una de la utilidades del cálculo del ES, es analizar que tanta volatilidad tiene un activo ante cambios extremos en el mercado, como por ejemplo el NASDAQ tiene un ES de 6.195, lo cual nos señala que ante cambios extremos las perdidas promedio esperada será de un 6.195%.

Por otra parte el ES se puede utilizar para hacer un análisis comparativo entre dos activos o portafolios, por ejemplo podemos encontrar que un portafolio A tiene un VaR mayor pero un ES menor que el portafolio B, lo cual nos señala que la volatilidad del portafolio A es mayor en situaciones normales de mercado, pero en situaciones extremas el portafolio B tiene una mayor volatilidad.

Dado el planteamiento anterior, calculamos el VaR y ES, para Coca-Cola y Mc Donalds, entre el 26 octubre 1996 al 28 octubre de 2006, de lo cual obtuvimos los siguientes resultados:

	VaR	ES
Coca-Cola (KO)	4,259	6,552
Mc Donalds (MCD)	4,609	6,454

Estos resultados, nos dicen que Coca-Cola tiene una menor volatilidad que Mc.Donalds bajo situaciones normales de mercado, por lo cual un inversionista debería estar mas seguro con una acción de Coca-Cola ante fluctuaciones nórmales de mercado, pero por el contrario un inversionista debería estar mas seguro con una acción de Mc.Donalds, bajo movimientos extremos de Mercado.

Esta información adicional es de mucha relevancia a la hora de tomar la decisión de donde invertir, pero mas que eso es conocer la máxima perdida esperada bajo distintas situaciones del mercado.

Otra utilidad del ES es su aplicación para coberturas, sin embargo esta no se utiliza en la realidad para cubrirse ya que no es lógico estar cubierto todos los días del año para eventos que suceden una vez por año o menos.

Anexo 1

Demostración

La función de distribución Fu, es llamada función de distribución condicional de los excesos, y se define como.

$$F_u(y) = \frac{F(u+y) - F(u)}{1 - F(u)} = \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)}$$

Asumiendo una DGP (Distribución General de Pareto) para la distribución de la cola, podemos encontrar expresiones analíticas para VaR y ES, definidas por los parámetros de DGP.

Despejando F(X),

$$F(x) = (1 - F(u))F_u(y) + F(u)$$

y remplazando Fu por DGP y F(u) por la estimación de (n-Nu)/n, donde n es el numero total de observaciones y Nu es el numero de observaciones por sobre el umbral u, de lo cual obtenemos.

$$\hat{F}(x) = \frac{N_u}{n}(1 - (1 + \frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{\sigma}}(x-u))^{-1/\hat{\varepsilon}} + (1 - \frac{N_u}{n})$$

Simplificando

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{N_u}{n}(1 + \frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{\sigma}}(x-u))^{-1/\hat{\varepsilon}},$$

Invirtiendo, para una probabilidad dada p, obtenemos
Recordemos que VaRp=(1/F)(1-P)

$$\hat{VaR}_p = u + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\varepsilon}}((\frac{n}{N_u}p)^{-\hat{\varepsilon}} - 1)$$

Por definición ES,

$$\hat{ES}_p = \hat{VaR}_p + E(x - \hat{VaR}_p / x > \hat{VaR}_p)$$

Donde el segundo termino de la derecha es el valor esperado de los excedentes por sobre el umbral VaRp. Es conocido que la función de exceso sobre la media para DGP con parámetro ε<1 es

$$e(z) = E(x - z / x > z) = \frac{\sigma + \varepsilon z}{1 - \varepsilon}$$

Esta función nos señala el promedio de los excedentes sobre el umbral z

Dada la definición de ES, y utilizando la expresión anterior, para un z=VaRp-u y x representando el exceso y sobre u, obtenemos,

$$\hat{ES}_P = \hat{VaR}_p + \frac{\hat{\sigma} + \hat{\varepsilon}(\hat{VaR}_p - u)}{1 - \hat{\varepsilon}} = \frac{\hat{VaR}_p}{1 - \hat{\varepsilon}} + \frac{\hat{\sigma} - \hat{\varepsilon} u}{1 - \hat{\varepsilon}}$$

Bibliografía

- Rafael Romero, Sigifredo Laengle; 2005; Implementación del Value at Risk Condicional.
- Ramazan Gençay, Faruk Selçuk, Abdurrahman Ulugülyağci; April 2001; EVIM: A Software Package for Extreme Value Analysis in MATLAB. Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics.
- John W. Dalle Molle; August 2005; Modeling Catastrophic Loss Events Using Extreme Value Theory – Fundamental Results and Applications in Finance and Insurance.
- Manfred Gilli, Evis Këllezi; 2006; An Application of Extreme Value Theory for Measuring Financial Risk; Computational Economics, Volumen 27, issue 2-3.
- Ramazan Gençay, Faruk Selçuk; 2004; Extreme Value Theory and Value at Risk: Relative Performance in emerging markets; International Journal of Forecasting.
- María Coronado, PhD; Octubre 2000; Extreme Value Theory (EVT) for Risk Managers: Pitfalls and Opportunities in the use of EVT in Measuring VaR.
- Jorion, Philippe; 2000; “Risk Management Lessons From Long-Term Capital Management”; Journal of European Financial Management, Vol. 6.
- Juan Ignacio Peña; La Gestión de Riesgos Financieros de Mercado y Crédito; Pearson Educación.
- Murria R. Spiegel; 1991; Estadística, Segunda Edición; McGraw – Hill.
- Viviana Fernández; Extreme Value Theory: Value al Risk and Return Dependence Around the World.
- Martin Odening and Jan Hinrichs; Using Extreme Value Theory to Estimate Value-at-Risk.
- C.Brooks, A. D. Clare, J. W. Dalle Molle and Persand; December 2003; Comparison of Extreme Value Theory approaches for determinig Value at Risk.

- Alexander J. McNeil; May 1999; Extreme Value Theory for Risk Managers.
- Philip Hua and Paul Wilmontt; Vale-at-Risk and Market Crashes.
- Alexander J. McNeil and Rüdiger Frey; June 1999; Estimating the Tail of Loss Severity Distribution using Extreme Value Theory.
- Danielsson, Jon, and Casper de Vries; 1997; “Value at Risk and Extreme Returns”; Discussion Paper No. 273, pp. 1-33 (London : School of Economics and Political Science).
- Koedijk,Kees , Ronald Huisman, and Rachel Pownall; 1998; “VaR-x : fat tails in financial risk management”; The Journal of Risk 1, pp. 47-63.
- Hull, Jhon, and Alan White; 1998; “Value at Risk When Daily Changes in Market Variables are Not Normally Distributed ”; Journal of Derivatives, Vol.5, No.3 (Spring), pp. 9-19.