

Tabla de Contenido

Introducción	1
1. Preliminares	5
1.1. Notas de teoría de grupos	5
1.1.1. Construcciones de grupos	5
1.1.2. Geometría en grupos: grafos de Cayley	14
1.1.3. Grupos virtualmente- \mathbb{Z}	20
1.2. Conceptos básicos de dinámica simbólica	24
1.2.1. Dinámica simbólica en grupos generales	24
1.2.2. Entropía	30
2. Subdinámica proyectiva de SFTs en grupos abelianos	32
2.1. Antecedentes: Subdinámica proyectiva en \mathbb{Z}^d	32
2.2. Subdinámica proyectiva para grupos virtualmente- \mathbb{Z} abelianos: soficidad . . .	43
2.3. Realización de \mathbb{Z} -sóficos como subdinámica proyectiva de $(\mathbb{Z} \times F)$ -SFTs . . .	49
2.3.1. El caso de entropía positiva	49
2.3.2. El caso de entropía nula: condiciones necesarias y suficientes	58
3. Entropía y subdinámica proyectiva	68
3.1. Mezcla topológica y entropía proyectiva	68
3.2. Grafos e irreducibilidad	72
3.3. Subdinámica proyectiva de tipo finito	81
4. Subdinámica proyectiva en grupos virtualmente-\mathbb{Z} no abelianos	89
4.1. Grupos con un sublattice normal	89
4.1.1. El grupo diedral infinito, D_∞	90
4.1.2. Notas sobre normalidad en grupos virtualmente- \mathbb{Z}	97
4.1.3. Soficidad y realización en el caso general $\mathbb{Z} \trianglelefteq G$	99
4.2. Grupos con un sublattice maximal no normal	104
4.3. Posibles generalizaciones	110
Conclusión	112
Bibliografía	116
Índice alfabético	117

Índice de Ilustraciones

1.	Trayectoria (respecto al eje horizontal) de una pelota de tenis de mesa. La codificación correspondiente es la secuencia infinita $0010011\dots$, en que un 0 representa que la pelota se halla en la mitad izquierda de la mesa, y un 1 corresponde a la mitad derecha.	1
1.1.	Grafo de Cayley del grupo \mathbb{Z}_5 con generador $S = \{1, 2\}$	16
1.2.	Un fragmento del grafo de Cayley del grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, con un camino de longitud mínima entre $(-1, 2)$ y $(3, -1)$	18
1.3.	Efecto de remover una bola en \mathbb{Z} y $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. El primer grupo se separa en dos componentes conexas, mientras que el segundo no.	19
1.4.	El grafo de Schreier $\mathfrak{S}(S_3 : \langle h \rangle, \{g, h\})$, en que $g = (1\ 2\ 3)$ y $h = (1\ 2)$	20
2.1.	Grafo etiquetado \mathcal{G} que describe al \mathbb{Z} -sófico S_{sunny}	38
2.2.	Grafo etiquetado que describe a un \mathbb{Z} -sófico S . Obsérvese que entre los dos 1 siempre hay una cantidad par de ceros.	40
2.3.	Codificación de una transición desde un ciclo $C_{j,2}$ a $C_{j,3}$	41
2.4.	Asimetría entre filas introducida mediante el magma $(M, *)$. El punto $q \in S$ codifica la secuencia de vértices; las secciones de color son fragmentos de s que no son concatenaciones de palabras de W	53
2.5.	Reconocimiento del rol de cada fila mediante reglas locales.	54
2.6.	Grafo \mathcal{G}_j asociado a la familia de subshifts $S_j = \mathbf{X}_{\mathcal{G}_j}$	60
3.1.	Producto tensorial de los ciclos dirigidos C_2 y C_3	73
3.2.	Producto tensorial de dos copias del ciclo dirigido C_3 . Obsérvese la existencia de $\text{per}(C_3) = 3$ componentes conexas.	76
4.1.	Grafo de Cayley izquierdo para D_∞ , con $S = \{a, ab\}$	90
4.2.	Dibujo alternativo de $\Gamma(D_\infty, \{a, ab\})$ en que ambas filas poseen la misma dirección.	91
4.3.	Representación del grafo de Cayley de una extensión \mathbb{Z} -por- F . Las aristas de colores representan elementos g_1, g_2, g_3 de $\{0\} \times F$; obsérvese que seguir un camino con etiqueta $g_1 g_2 g_3$ es siempre equivalente a una traslación horizontal en 5 unidades.	101
4.4.	El grafo de Schreier $\mathfrak{S}((\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}) : (\{0\} \times \mathbb{Z}), \{(1, 0), (0, 1)\})$. Obsérvese cómo las aristas indican el desplazamiento de cada fila al aplicar $\mathbf{X}_{(1,0)}$ y $\mathbf{X}_{(0,1)}$. . .	107

Índice de notaciones

Notación	Descripción
$A \cup B$	Unión de dos conjuntos disjuntos
$H \leq G, H \trianglelefteq G$	Subgrupo (resp., subgrupo normal)
$X \cong Y$	Isomorfismo, conjugación
$f : X \hookrightarrow Y$	Mapeo inyectivo, monomorfismo
$f : X \twoheadrightarrow Y$	Mapeo epiyectivo, epimorfismo, código factor
$\langle T \rangle, \llbracket T \rrbracket$	Subgrupo (resp., subgrupo normal) generado por el conjunto T
$\text{rank}(G)$	Menor cardinal de un $T \subseteq G$ tal que $G = \langle T \rangle$
$G \amalg H$	Producto libre de dos grupos
	Unión de grafos disjuntos
$G \amalg_F H$	Producto amalgamado de dos grupos
$\mathbb{F}(T)$	Grupo libre generado por el conjunto T
D_∞	Grupo diedral infinito, $\mathbb{Z}_2 \amalg \mathbb{Z}_2$
$G \rtimes_\varphi H$	Producto semidirecto de grupos con acción $\varphi : H \times G \rightarrow G$
$\ker(f)$	Núcleo de $f: \{x : f(x) = 0\}$
$f[X]$	Imagen del conjunto X bajo f
$f^{-1}[X]$	Preimagen del conjunto X bajo f
$\text{im}(f)$	Imagen del dominio de f
$\langle T \mid R \rangle$	Grupo generado por T con relatores R
HK	$\{hk : h \in H, k \in K\}$
$i(e), t(e)$	Vértice inicial (resp., final) de la arista e
$V(G), E(G)$	Conjunto de vértices (resp., aristas) de G
$ G , \ G\ $	Cantidad de vértices (resp., aristas) de G
$\Gamma(G, T)$	Grafo de Cayley de G c.r. a T
$\mathfrak{S}(G : H, T)$	Grafo de Schreier de $H \leq G$ c.r. a T
$\vec{d}_G(v, w)$	Largo del camino más corto desde v hacia w
d_T	Métrica de palabras inducida por $\Gamma(G, T)$
$\text{Hom}(G, H)$	Conjunto de morfismos $G \rightarrow H$
$\text{Aut}(G)$	Conjunto de isomorfismos $G \rightarrow G$
\mathbb{Z}_k	Grupo cíclico de orden k , $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$
\mathbb{Z}^k	$\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$, k veces
$\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$	Base (en general, canónica) de \mathbb{Z}^k
\mathcal{A}^*	Palabras sobre el alfabeto \mathcal{A}
σ, σ_g	Acción de shift sobre \mathcal{A}^G
$\text{sop}(P)$	Soporte de P
$P \sqsubseteq x$	El punto x contiene una traslación del patrón P
gP	Traslación del patrón P por $g \in G$

$[P]$	$\{x \in \mathcal{A}^G : x _{\text{sop}(P)} = P\}$
${}_g[P]$	$[g^{-1}P]$
$\mathcal{L}_C(X)$	Patrones P en X con $\text{sop}(P) = C$
$\mathcal{L}(X)$	Lenguaje del shift, unión de todos los $\mathcal{L}_C(X)$
$X_{\mathcal{F}}$	Subshift con conjunto de patrones prohibidos \mathcal{F}
X_G	Subshift de arcos asociado al grafo G
$X_{\mathcal{G}}$	Subshift sófico dado por el grafo etiquetado $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L})$
Φ_{∞}	Código de ventana deslizante dado por $\Phi : \mathcal{L}_C(X) \rightarrow \mathcal{A}$
$\text{Orb}(x)$	Órbita de un punto
$\text{stab}(x)$	Estabilizador de un punto
$\text{Per}_H(x), \text{Per}_H^0(x)$	Puntos tales que $H \leq \text{stab}(x)$ (resp., $H = \text{stab}(x)$)
$\text{Per}(x)$	Conjunto de puntos fuertemente periódicos
$h_{\text{top}}(X)$	Entropía
$P_L(X)$	Subdinámica proyectiva de X sobre L
$X \times Y$	Producto de subshifts
$\mathcal{G} \times \mathcal{H}$	Producto tensorial de grafos etiquetados